



HAL
open science

Méthodes non-perturbatives en théorie quantique des champs. Au-delà du champ moyen, l'approximation de la phase aléatoire.

Hubert Hansen

► **To cite this version:**

Hubert Hansen. Méthodes non-perturbatives en théorie quantique des champs. Au-delà du champ moyen, l'approximation de la phase aléatoire.. Physique mathématique [math-ph]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2002. Français. NNT: . tel-00003814

HAL Id: tel-00003814

<https://theses.hal.science/tel-00003814>

Submitted on 21 Nov 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 148-2002

N° attribué par la bibliothèque : LYCEN - T 2002-52

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD
Institut de Physique Nucléaire de Lyon

Mémoire de thèse
pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université Claude Bernard de Lyon
Spécialité : Physique théorique
au titre de l'École doctorale de Physique et Astrophysique Fondamentale de Rhône-Alpes

présenté et soutenu publiquement le *17 octobre 2002*
par M. Hubert HANSEN

**Méthodes non-perturbatives
en théorie quantique des champs
Au-delà du champ moyen,
l'approximation de la phase aléatoire**

Devant la commission d'examen formée de :

M. Jörg AICHELIN
M^{me} Wanda ALBERICO (rapporteur)
M. Guy CHANFRAY (directeur de thèse)
M. Aldo DEANDREA (président)
M^{me} Cécile MARTIN (rapporteur)
M. Peter SCHUCK

Sommaire

Remerciements	7
Préliminaires	9
Introduction	11
Table des notations	14
1 Outils théoriques d'étude du problème	15
1.1 Comment étudier une théorie quantique des champs?	15
1.1.1 Considérations générales	15
1.1.2 Lien avec le problème à N corps	16
1.2 Les méthodes non-perturbatives	17
1.2.1 Approximation du champ moyen	17
1.2.2 L'approximation de la phase aléatoire	18
1.3 Formalisme de la théorie des champs et du problème à N corps	20
1.3.1 Propriétés d'une algèbre d'opérateurs de créations et de destructions	20
1.3.2 Espace de Fock - Opérateur création et destruction	22
1.4 Formalisme des fonctions de Green en théorie des champs	24
1.4.1 Définition et propriétés	24
1.4.2 Résolution formelle d'un problème - Équation d'évolution	29
1.5 Méthode des variations et critère de Ritz	32
2 Méthodes non-perturbatives	33
2.1 Champ moyen en mécanique quantique	33
2.2 Approximations du champ moyen en théorie des champs	38
2.2.1 Le champ scalaire libre classique et quantique	38
2.2.2 État fondamental gaussien	40
2.2.3 Transformée de Fourier et convention d'écriture	42
2.2.4 Approximation gaussienne	43
2.3 L'approximation de la phase aléatoire	44
2.3.1 Établissement des équations du mouvement	44
2.3.2 Approximation pour l'opérateur d'excitation	45
2.3.3 Équations de Dyson	51
2.4 Différents schémas de RPA	53
2.4.1 RPA standard	54
2.4.2 RPA renormalisée	54

2.4.3	RPA autocohérente	56
2.5	Nombre d'occupation et statut du critère de Ritz en RPA	57
3	Traitement non-perturbatif de la théorie $\lambda\Phi^4$ - Champ moyen	59
3.1	La théorie $\lambda\Phi^4$	59
3.1.1	Hamiltonien et paramètres variationnels	59
3.1.2	Renormalisabilité	62
3.2	Approximation du champ moyen	63
3.2.1	Énergie du fondamental dans le champ moyen	63
3.3	Approximation gaussienne	66
3.3.1	Discussion du résultat obtenu	69
3.3.2	Température finie	73
4	Traitement non-perturbatif de la théorie $\lambda\Phi^4$ - RPA	79
4.1	Choix du schéma variationnel et établissement de l'équation des modes	79
4.1.1	Choix de $\delta\mathbf{Q}$	79
4.1.2	Écriture des équations	80
4.1.3	Discussion des solutions de l'équation des modes RPA	84
4.2	RPA standard et équations de Dyson	86
4.2.1	Équations à notre ordre d'approximation à 2 particules	86
4.3	Résolution des équations	88
4.3.1	Calcul de $\langle H_{int} \rangle$	89
4.3.2	Énergie de corrélation	91
4.3.3	Résultats	93
4.3.4	Conclusion	95
4.4	RPA renormalisée	95
4.4.1	Mise en place du schéma RPA	95
4.4.2	Étude du propagateur	99
4.4.3	Méthodes de calcul du potentiel effectif	100
4.4.4	Équation des modes r-RPA à une particule	110
4.4.5	Le potentiel effectif dans le modèle $\lambda\Phi^4$	114
4.4.6	Source de non-covariance	119
4.4.7	Discussion des résultats	120
4.4.8	Conclusion	124
5	Modèle σ-linéaire	127
5.1	Motivation de l'étude du modèle σ -linéaire	128
5.1.1	Généralités sur la chromodynamique quantique et la matière hadronique	128
5.2	La symétrie chirale	129
5.2.1	Symétries de la QCD	130
5.2.2	Lagrangien chiral	130
5.2.3	Lagrangien effectif	131

5.3	Paramètre d'ordre de la transition chirale	133
5.3.1	Brisure spontanée de symétrie et théorème de Goldstone	133
5.3.2	Restauration de la symétrie chirale	135
5.4	Approximations non-perturbatives	135
5.4.1	Hamiltonien du modèle	136
5.4.2	Mise en place de la r-RPA	136
5.5	Conclusion	138
6	L'oscillateur anharmonique en mécanique quantique	139
6.1	Le modèle de l'oscillateur anharmonique	139
6.2	Approximation de champ moyen	141
6.3	RPA standard	142
6.4	RPA renormalisée	143
6.4.1	Hypothèses	143
6.4.2	Résolution	144
6.5	RPA renormalisée étendue	145
6.5.1	Cas déformé	145
6.5.2	Cas symétrique	145
6.5.3	Discussion générale des résultats	147
6.6	Conclusion	147
	Conclusion	149
A	Expression des fonctions de Green	151
A.1	Résultats pour la théorie $\lambda\Phi^4$	151
A.2	Résultats pour l'oscillateur anharmonique	153

Remerciements

Comme il est impossible d'être exhaustif, je serais assez bref, en espérant avoir montré par d'autres façons que ces quelques lignes, combien mes proches me furent indispensables.

Je remercie très sincèrement le professeur Guy Chanfray qui dirigea cette thèse, ainsi que Peter Schuck (directeur de recherche à l'IPN d'Orsay) qui collabora activement à ce travail. Ils m'ont permis d'enrichir très largement le spectre de mes connaissances, dans des domaines qui semblent aussi lointains que la théorie des champs et la physique de la matière condensée. La liberté de travail que j'ai eu durant ces années m'a également permis de m'intéresser à d'autres domaines, sans rapport avec ma thèse (comme la théorie de l'information quantique) et j'en suis très reconnaissant à mon directeur.

Wanda Alberico (professeur à l'université de Turin) et Cécile Martin (chargée de recherche à l'IPNO) ont eu la patience d'être rapporteurs de ce manuscrit et de participer au jury, et je leur en suis très reconnaissant.

Je remercierais enfin les deux derniers membres de ce jury très international, le professeur Aldo Deandrea, qui a accepté de présider le jury, et le professeur Jörg Aichelin.

L'IPNL offre un cadre de travail très convivial et scientifiquement inspirant, auxquels ont contribué (dans le désordre complet) Aziz, Céline, Dany, Micaela, Aldo, Maurice Kibler, Lucille Chosson, Sylvie, Martial, Aurélien, Thierry, la machine à café, Gérard, Karim, Cécile, Noël, ...

Je ne pourrais pas finir ces remerciements sans penser à tous les étudiants que j'ai côtoyé vers l'ENS de Lyon durant ces années, pour leurs nombreux coups de pouce, J.C. Dubacq, créateur du style de ce manuscrit, Jym le Chamelier fou, Fred et ses interrogations insistantes sur l'agriculture théorique, Neko, sans qui la théorie quantique serait beaucoup moins drôle («Moi je quantifie le tore moins un point dans une tour de Teichmuller!»¹), Bricou et Lionel sans qui l'informatique relèverait de l'égyptologie avant Champollion, Pierre sans qui la moindre tâche administrative ressemblerait à un travail d'Asterix.

Enfin, bien sûr, Bénédicte, Hervé, Jean-Yves, Julien, Assia, Benjamin, Christophe, Glenn, Rémi, Magaly, Tri, Édouard, Sandrine, Philippe, Céline, Émilie, Fabrice, Bertrand, Aurélien, Jérôme, Guillaume, Mathieu, Stan, Vincent, François et tant d'autres, ont assurés (au pluriel !) l'assistance convivialité, cuisine et cinéma durant ces années qu'ils contribuèrent à rendre particulièrement agréable.

Je pense enfin à ma famille et mes amis, du côté de Toulouse et Paris, en particulier, je remercie le professeur Martin, de l'université Paul Sabatier de Toulouse, Nicolas, Mathieu et François.

¹Il a aussi dit « Thèse en septembre, Alfred en décembre » mais ayant soutenu en octobre, cela est moins approprié.

Préliminaires

« Je laisse intentionnellement de côté la plus ou moins grande longueur pratique des opérations ; l'essentiel est que chacune de ces opérations soit exécutable en un temps fini, par une méthode sûre et sans ambiguïté »^a

Émile Borel, *Le calcul des intégrales définies*

^aUn grand merci à JC.

Prolégomènes

Ce travail a été effectué dans le groupe théorie de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon. Il s'insère dans la thématique générale de l'étude de la transition de phase chirale en physique hadronique.

Cet exposé a pour ambition de présenter une nouvelle méthode de calcul en théorie quantique des champs. Cette méthode est non-perturbative, terme qui regroupe, par opposition, toutes les méthodes qui ne consistent pas en un développement en série de perturbations. Précisément, nous appliquerons l'approximation de la phase aléatoire (RPA), une méthode largement utilisée dans le problème à N corps nucléaire. L'équivalence formelle entre problème à N corps et théorie des champs (utilisant le même formalisme de la seconde quantification) nous permet en effet d'adapter la RPA en théorie des champs.

Voulant rendre le texte abordable par des non-spécialistes du problème à N corps, je m'efforcerai de présenter d'une façon claire les notions utilisées, en insistant sur le vocabulaire qui est essentiellement celui du problème à N corps et peut intriguer le lecteur plus familier de la théorie des champs. Ce vocabulaire présente l'intérêt d'être "imagé" et se prête particulièrement bien aux interprétations physiques intuitives. Cependant, il convient de clairement le définir afin de ne pas introduire de confusions.

Souhaitant traiter le problème avec une certaine rigueur (au moins formelle) et afin que le lecteur mathématicien puisse comprendre l'exposé, j'ai essayé de donner des énoncés précis des notions introduites, tentant de me prémunir contre l'habituel écueil du manque de communication entre mathématicien et physicien.

Je m'attacherai à présenter la méthode RPA en théorie quantique des champs en énonçant clairement les difficultés et en introduisant explicitement chaque nouvelle approximation nécessaire à la poursuite des calculs.

Pour finir ces prolégomènes, suivant l'esprit de la citation de Émile Borel, je ne détaillerai pas la totalité des calculs. En particulier, le calcul de la matrice RPA est long mais la méthode est « *sans ambiguïté* » si bien qu'un ordinateur peut la comprendre. Cela m'a conduit à écrire un programme de calcul formel dans le langage CAML qui fût d'une grande aide dans la partie technique de ce travail.



Introduction

À l'origine, l'approximation de la phase aléatoire a été introduite en physique statistique des systèmes hors équilibre. L'élément de base pour comprendre de tels systèmes est la densité macroscopique $\rho(\vec{r}, t)$ (de moyenne ρ) qui décrit l'état du système (soumis à la densité de potentiel intérieur v_{int}). Lorsque l'on étudie les fluctuations autour de l'équilibre (dont on sait l'importance puisque leur mesure permet d'avoir des informations sur la dynamique du système *via* le théorème de fluctuation-dissipation) d'un fluide inhomogène (à N particules), on est amené à considérer le calcul de la fonctionnelle d'énergie libre. L'approximation de la phase aléatoire permet de l'évaluer d'une façon approchée. On définit le facteur de structure (en composante de Fourier) $S(k) = 1/\rho \langle \rho_k \rho_{-k} \rangle$. Cette fonction décrit la structure moyenne du fluide autour d'une particule donnée et permet de voir l'importance des corrélations aux plus ou moins grandes échelles. Elle s'interprète aussi comme une compressibilité généralisée puisqu'elle est proportionnelle, dans la limite des grandes longueurs de corrélations, à la compressibilité thermodynamique définie à l'équilibre. Le théorème de fluctuation-dissipation s'écrit $\langle \rho_k \rangle_{perturbé} = -\rho/(k_B T) V_k S(k)$ (où V est un potentiel perturbant le système initial). $S(k)$ caractérise donc l'amplitude de la réponse (en densité) du système à une perturbation de vecteur d'onde k . D'après Kohn (1967),

$$F[\rho(\vec{r})] = F_\rho[\rho(\vec{r})] + \int d^3r \rho(\vec{r}) V(\vec{r}), \quad (1)$$

où F_ρ est l'énergie libre propre à la densité inhomogène ρ . Une méthode d'approximation pour les faibles inhomogénéités consiste à écrire un développement fonctionnel à l'ordre deux faisant apparaître $|\rho_k|^2$ donc $S(k)$. Pour trouver une valeur approchée de $S(k)$, il existe des développements de cette fonction pour les grandes longueurs d'ondes (donc en $o(k^2)$). L'approximation de la phase aléatoire va au contraire introduire une resommation de la série formelle précédente ne se limitant pas à l'ordre deux. Il s'agit d'une approximation basée sur le fait que les corrélations spatiales de densité suivent linéairement la fonction de structure du système homogène $S_0(k)$. On écrit alors

$$\rho_k \simeq -\frac{\rho}{k_B T} S_0(k) (V(k) + \rho_k v_{int}(k))$$

c'est-à-dire

$$S^{RPA}(k) = \frac{S_0(k)}{1 + \rho S_0(k) \frac{v_{int}}{k_B T}}$$

L'ingrédient de base de cette approximation est donc une approximation sur les corrélations de densité. Elle peut également être introduite dans l'étude du problème à N corps

puisqu'il s'agit d'une approximation sur les corrélations d'un système perturbé par rapport à un système libre. L'idée est d'incorporer des corrélations à deux corps (ou deux particules) dans le calcul par exemple d'une énergie (comme cela se fait dans le développement de la fonctionnelle d'énergie libre), en imposant que leurs corrélations soient celles du système non-perturbé. Par exemple pour un système quantique fermionique, considérons les excitations créées par un opérateur \mathbf{A}^\dagger du type $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{a}_p^\dagger \mathbf{a}_h$. C'est une excitation du type particule-trou (l'indice p signifie "particle" et l'indice h "hole") dans la mer de Fermi (cet exemple introduisant le langage très imagé dont il était précédemment question). L'approximation précédente se traduit par $\langle \mathbf{A}_\alpha \mathbf{A}_\beta^\dagger \rangle = \langle \mathbf{A}_\alpha \mathbf{A}_\beta^\dagger \rangle_0$. Dans le vocabulaire que nous introduirons au chapitre 2, il s'agit en fait de la RPA standard avec excitations à deux particules. La méthode peut être améliorée pour tenir compte de corrélations d'un ordre supérieur (en ajoutant d'autres excitations qui peuvent être d'ordre supérieur, ou de type différent, c'est-à-dire en prenant un opérateur \mathbf{A}^\dagger plus complexe), puis pour calculer les corrélations d'une façon cohérente (RPA autocohérente ou SCRPA).

La théorie des champs peut s'exposer dans un formalisme proche de celui du problème à N corps. Cette équivalence formelle va nous permettre d'adapter la RPA en théorie des champs.

Enfin, nous avons présenté et étudié uniquement des problèmes bosoniques mais le formalisme peut être aisément adapté au cas fermionique (d'ailleurs, il est le plus couramment utilisé pour des problèmes fermioniques, par exemple, dans un modèle nucléaire). Les détails techniques eux, vont être radicalement changés.

Le plan de cet exposé sera donc le suivant.

Tout d'abord, après avoir vu l'intérêt des méthodes non-perturbatives, nous présenterons quelques points du formalisme général de la théorie des champs, puis nous introduirons celui des fonctions de Green (encore appelées fonctions de corrélations ou corrélateurs). Il permet d'exposer formellement le problème de la théorie statistique des champs d'une façon synthétique, en particulier les méthodes non-perturbatives. Nous travaillerons ensuite dans le cadre de la théorie des champs à température nulle mais les extensions à température finie s'en déduisent de façon naturelle grâce au prolongement analytique dans le plan complexe des fonctions de corrélations.

La RPA peut être exprimée en terme de fonctions de Green, lorsque elle est exposée grâce à des équations de Dyson (Dyson Equation Approach ou DEA). Elle sera présentée dans un deuxième chapitre, sous cette forme ainsi que sous sa forme originale en termes d'opérateurs d'excitation (méthode utilisée largement en problème à N corps nucléaire). Il s'agit de l'approche dite des équations du mouvement.

Dans le troisième chapitre, elle sera étendue dans le cadre relativiste pour un champ bosonique. Nous appliquerons ce formalisme sur le modèle le plus simple de théorie des champs scalaires en interaction, le modèle $\lambda\Phi^4$, et calculerons l'équation des modes et l'énergie de corrélation. Préalablement, nous exposerons l'approximation gaussienne de ce modèle, à température nulle et finie.

Nous poursuivrons par l'application de la méthode à un modèle effectif utile en physique hadronique et pour l'étude de la restauration de la symétrie chirale, le modèle σ -linéaire. En écrivant l'équation des modes, nous verrons que le théorème de Goldstone est vérifié, alors qu'il ne l'est pas dans l'approximation gaussienne.

Enfin, afin d'approfondir et de résoudre certains des problèmes rencontrés dans les chapitres précédents, on présentera une nouvelle version de la RPA dans le modèle simple de l'oscillateur anharmonique.

En conclusion, on soulignera les succès et les difficultés rencontrés. On discutera de possibles futures applications tant dans des domaines où il s'agirait d'un prolongement des techniques existantes que pour des problèmes plus fondamentaux.

Cette thèse est l'objet de trois publications régulières,

« A consistent approximation scheme beyond RPA for bosons », D. Davesne, M. Oertel, H. Hansen, nucl-th/0206031, paru dans European Physical Journal, A16 (2003), p.35-42

« Random Phase Approximation and Extensions Applied to a Bosonic Field Theory », H.Hansen, G.Chanfray, D.Davesne, P.Schuck, hep-ph/0201279, paru dans European Physical Journal, A14 (2002), p.397-411

« Some applications of renormalized RPA in bosonic field theories », H.Hansen, G.Chanfray, nucl-th/0305063,

et d'une publication dans des comptes-rendus de conférence,

« Renormalized Random Phase Approximation in Quantum Field Theory », publié dans le compte-rendu de la conférence "Chiral Fluctuations in Hadronic Matter International Workshop", IPN Orsay, Septembre 2001.

Table des notations

Pour ne pas alourdir inutilement l'exposé, nous noterons de la même façon les différentes quantités physiques calculées dans les diverses approximations, du champ moyen à la RPA.

Notations relatives au formalisme de la théorie des champs	
$\mathcal{K}\mathcal{P}$ Spectre (ensemble des valeurs propres) de l'opérateur hamiltonien
\mathcal{F} Espace de Fock abstrait
Paramètre, variable ou nombre quantique	
ε Énergie du mode de champ moyen à une particule
Ω Énergie du mode RPA à une particule
E_0 Énergie de champ moyen
E_{corr} Énergie de corrélation RPA
m Masse du mode de champ moyen
M Masse du mode RPA
\vec{k} ou k ou k_i Paramètre d'impulsion
ω Variable d'énergie ou fonction $\omega(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$
S Variable énergie au carré
Opérateurs	
$\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger$ Opérateur de destruction et de création général
$\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger$ Opérateur de destruction et de création de Bogoliubov
\mathbf{A}_a^\dagger Opérateur d'excitation RPA
\mathbf{B} Élément d'une base d'opérateurs de création et de destruction
\mathbf{Q}^ν Opérateur RPA
Tr Trace
Indices	
a, b, \dots Indice matriciel composite se référant à un opérateur d'excitation de type \mathbf{A}_a
Fonctions	
$\mathfrak{G}_{A,A'}(t, t')$ Fonction de Green pour les opérateurs \mathbf{A} et \mathbf{A}'
$\mathfrak{G}_{\bar{a}\bar{b}}(\omega)$ Abréviation pour les fonctions de Green des opérateurs d'excitation RPA \mathbf{A}_a et \mathbf{A}_b^\dagger
$G(E, p)$ Propagateur
\mathcal{N}_α Densité scalaire
Matrices	
\mathcal{G} Matrice de fonctions de Green
\mathfrak{N} Matrice norme (2.111, p.51)
\mathcal{H} Matrice de double-commutateurs

Outils théoriques d'étude du problème

Ce premier chapitre va présenter le cadre dans lequel se déroule la suite de l'exposé. Nous nous interrogerons sur la théorie quantique des champs, le vocabulaire, les idées intuitives puis le formalisme que nous utiliserons tout au long de ce travail.

Dans un premier temps, nous aurons une approche plus intuitive et physique du problème, en commençant par quelques généralités sur la théorie des champs.

Puis dans une partie plus technique, nous choisirons de décrire la théorie des champs comme une généralisation du problème à N corps. Cette approche nous est utile par la suite pour adapter les techniques usuelles du problème à N corps en théorie des champs. Le vocabulaire spécifique à ce domaine sera également présenté.

Après avoir souligné l'importance des techniques non-perturbatives de calculs, nous présenterons succinctement deux d'entre elles, l'approximation du champ moyen et l'approximation de la phase aléatoire.

Enfin, nous aborderons quelques aspects du formalisme mathématique de la théorie des champs, en particulier celui des fonctions de Green.

1.1 Comment étudier une théorie quantique des champs ?

1.1.1 Considérations générales

On s'entend en général sur la formalisation suivante d'une théorie *physique*. Une théorie ou un modèle physique postule l'existence d'un espace appelé *espace des états*, d'une *mesure* sur cet espace (cela s'entend au sens mathématique comme au sens physique) et d'un *postulat d'évolution* de ces états (ou dynamique de la théorie).

Mais il convient de trouver le bon modèle décrivant un système donné. Si le modèle composé d'un ensemble à un élément, d'une mesure triviale et d'une évolution triviale décrit bien une particule seule dans l'espace en théorie classique, il va cependant être assez inadapté pour décrire un quelconque autre problème !

Une façon d'introduire la théorie quantique des champs est de la considérer comme la généralisation pour un champ classique de la quantification canonique. La quantification

canonique permet de déduire d'un problème de mécanique classique dans un espace de configuration de dimension finie (qui est alors l'espace des états, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par exemple, pour une particule dans un espace à une dimension) une théorie quantique dont l'espace des états est un espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire un espace de fonctions. On ne peut donc plus du tout envisager la même réponse à la question "qu'est ce que résoudre un problème de mécanique" lorsqu'il s'agit d'une théorie quantique ou classique. Pour le modèle classique, on a une description en terme de trajectoire et d'énergie de la particule. Pour le même problème quantique, la trajectoire n'a plus de sens (mais l'état, c'est-à-dire un élément de l'espace de Hilbert, nous renseigne sur la façon dont la particule "occupe l'espace") mais l'énergie reste une donnée fondamentale. Ainsi, l'énergie est au cœur de la physique. La réponse à notre interrogation pourrait donc être, "trouver le spectre d'énergie".

En théorie des champs, la notion d'énergie s'impose d'autant plus que la théorie de la relativité montre l'équivalence de la masse et de l'énergie.

Ainsi, dans cet exposé il sera beaucoup question d'énergie mais aussi de particules, puisque cette équivalence masse-énergie fait que l'on peut voir chaque excitation du champ (qu'on peut considérer comme un paquet d'énergie) comme une particule (on parlera aussi de quasi-particule, c'est une question de convention, ce terme étant réservé à une excitation collective cohérente au sens où elle se comporte comme une particule, c'est-à-dire qu'elle conserve sa "forme", sa masse ou son énergie au cours du temps).

1.1.2 Lien avec le problème à N corps

Dans la méthode de quantification canonique, les états de la théorie quantique des champs sont des fonctionnelles. Il s'agit donc de traiter ce problème d'une façon non-perturbative.

On définit le terme de méthode non-perturbative par opposition à la méthode habituelle de développement en série d'une certaine constante, lorsque elle est suffisamment petite.

Le but est de calculer le spectre du hamiltonien (on parlera également de spectre d'excitation ou tout simplement, excitation), c'est à dire, les valeurs propres, ainsi que les états propres. Nous avons en principe un problème d'équations différentielles fonctionnelles à résoudre, ce qui est en pratique impossible, sauf dans un nombre très réduit de cas.

La méthode dite de seconde quantification éclaire un peu le problème. Dans ce formalisme, la théorie quantique des champs peut être construite en faisant interagir de plus en plus de particules régies par la mécanique quantique. On peut voir cela comme un problème à nombre infini de corps en interaction. C'est pourquoi nous allons faire l'amalgame entre les deux théories qui sont pourtant au départ profondément différentes. Nous ferons en sorte que le télescopage du vocabulaire de ces deux champs n'entraîne aucune ambiguïté en définissant chaque terme employé (concernant le problème à N corps quantique, on pourra consulter [MS59, RS80, FW71]). La relativité apporte un ingrédient supplémentaire au problème (un peu de piment à la recette) en permettant de surcroît la création ou la disparition de particules.

1.2 Les méthodes non-perturbatives

Une première méthode d'approche d'un problème est de se ramener à un cas connu, et d'étudier les déviations relatives à cet état (il peut s'agir d'un développement perturbatif).

Dans une certaine mesure, la méthode non-perturbative dite de champ moyen, appartient à cette catégorie, puisqu'il s'agit de décomposer un problème à N corps, en N problèmes à un corps. En théorie des champs, il s'agira de calculer des quantités sous forme d'éléments de matrice, sur un état déjà connu.

Cette méthode de champ moyen peut aussi être vue comme une méthode variationnelle. Il s'agit d'une autre façon d'aborder le problème général évoqué. On choisit un état paramétré. La variation des paramètres va nous permettre "d'explorer" l'espace des états et les minima de l'énergie nous permettent de savoir si nous sommes proches d'un état physique (vecteur propre du hamiltonien) du système.

La méthode que je vais introduire ici est de ce type. Cependant, il ne s'agira pas d'explorer l'espace des états mais l'espace des opérateurs, afin de trouver d'une façon approximative des opérateurs qui, agissant sur l'état fondamental, nous donnent les états excités.

Une difficulté cruciale apparaît ici, puisque l'état fondamental ou vide est inconnu. De plus, il peut être dégénéré.

On voit immédiatement qu'une étape intermédiaire dans la mise en oeuvre de cette méthode est l'utilisation d'un vide "connu" par exemple, le vide calculé dans une approximation de type champ moyen. La méthode perd cependant son caractère variationnel (voir la discussion sur le critère de Ritz, section 2.5, p.57, qui indique que l'énergie de l'état fondamental calculée dans une méthode variationnelle est toujours surévaluée).

En théorie des champs hadroniques, le développement de méthodes non-perturbatives est essentiel. En effet le développement perturbatif de QCD n'est valable qu'à haute énergie. Ces méthodes sont peu répandues et pèchent par leur manque de systématisme. Par exemple, les développements chiraux ([Hol95, Pic95]), les méthodes semi-analytiques basées sur les propriétés particulières de QCD, les résultats exacts obtenus sur les systèmes intégrables, etc, sont de telles méthodes mais leur champ d'application est très restreint. L'approximation du champ moyen admet une interprétation physique claire et atteint cette ambition de systématisme. La théorie des champs sur réseau et les calculs Monte-Carlo (voir [KFS96]) également mais on peut plutôt la voir comme une technique de calcul "direct" des quantités qui apparaissent en théorie des champs, en "implémentant" des méthodes numériques pour l'analyse fonctionnelle (voir [Han98] et les références citées pour une introduction au sujet). D'autres techniques non-perturbatives procèdent d'une façon plus physique, par exemple la RPA où la démarche est guidée par des notions d'excitations, de corrélations, etc, et où une interprétation en terme de diagrammes est possible.

1.2.1 Approximation du champ moyen

On rencontre très souvent cette méthode, tant en théorie des champs (plutôt vue sous sa forme d'approximation gaussienne) qu'en problème à N corps (aussi appelée, approximation

de Hartree-Fock ou Hartree-Fock-Bogoliubov).

Rappelons que l'esprit d'une méthode d'approximation revient souvent à étudier les déviations autour d'un cas connu. Les déviations peuvent être calculées en supposant que le potentiel qui perturbe le système connu est faible, et on obtient des méthodes dites perturbatives. L'approximation du champ moyen est différente. Prenons un système de N particules interagissant d'une façon complexe. Comme dans le cas du problème à N corps en mécanique newtonienne, le calcul analytique est impossible. Les interactions, les forces peuvent être décrites en terme de potentiel, dans ce cas, un potentiel à N corps. La trajectoire d'une particule dans un potentiel à un corps est très facilement calculable (pas toujours analytiquement, mais au moins, numériquement). L'idée de l'approximation de champ moyen revient à trouver une façon de réécrire le potentiel complexe à N corps qui influence une particule comme un potentiel à un corps (le potentiel moyen ou champ moyen), moyennant l'effet des autres particules. Toute la difficulté de l'approximation revient à trouver ce potentiel.

Il y a des façons systématiques de calculer ce champ moyen. L'approximation gaussienne, par exemple, est utilisable dans le cas où l'on perturbe un oscillateur harmonique. On connaît la forme des états de l'oscillateur harmonique, en particulier, l'état fondamental est gaussien. Le potentiel perturbateur va faire que les états du système perturbé sont des mélanges des états de l'oscillateur harmonique, comme si il y avait des interactions entre ces états. Ce sont ces derniers qui sont les N corps du schéma précédent. Dans l'esprit du champ moyen, on estime que le nouvel état fondamental doit ressembler à celui du fondamental sans interaction et donc on le cherche sous la forme d'une gaussienne (voir la méthode 1, section 2.1, p.34).

Une autre façon de voir les choses est de chercher les paramètres d'un oscillateur harmonique qui reproduirait au mieux l'énergie de l'oscillateur perturbé (voir la méthode 3, section 2.1, p.37).

L'approximation Hartree-Fock-Bogoliubov (voir la méthode 2, section 2.1, p.34), équivalente aux précédentes, met elle en jeu des opérateurs.

L'approximation du champ moyen peut être présentée enfin d'une façon beaucoup plus générale dans le contexte du formalisme des fonctions de Green (ou fonctions de corrélations). Elle consiste à dire que les corrélations à deux particules s'expriment comme des produits de corrélations à une particule (voir la section 1.4, p.24).

1.2.2 L'approximation de la phase aléatoire

L'esprit de la méthode RPA est d'aller au-delà du champ moyen en considérant des interactions, des corrélations entre particules (pour reprendre le vocabulaire du problème à N corps). On peut voir cette méthode comme une approximation de type champ moyen non pas pour les particules elles-mêmes, mais pour le gaz des excitations élémentaires quantiques du système. La base de cette méthode est d'écrire un développement d'un opérateur dit d'excitation qui a la propriété de créer un état excité lorsqu'il est appliqué sur l'état fondamental de la théorie. Les inconnues du problème sont donc, le vecteur de l'espace de Fock qui décrit le vide de la théorie et les coefficients du développement

de l'opérateur d'excitation pour chaque niveau excité. Notons enfin que par rapport aux méthodes directes (théorie de champ sur réseaux), la RPA se prête à une interprétation diagrammatique

L'intérêt initial que nous avons porté à cette méthode est - outre qu'elle soit bien connue en problème à N corps, problème qui nous l'avons vu est fortement relié à la formalisation de la théorie des champs - qu'elle soit systématique. Son application au problème de la transition de phase chirale dans la matière nucléaire est notre objectif à plus long terme. Pour étudier cette transition de phase, seul nous intéresse le calcul de l'énergie de l'état fondamental, ou plus précisément, le potentiel effectif. Le potentiel effectif est cette énergie du fondamental, calculée en fonction du paramètre d'ordre de la transition. Ainsi, nous n'aurons pas à chercher les énergies des états excités (structure de bande), mais le potentiel effectif prendra en compte les corrélations entre états excités et donc, nous aurons besoin des modes propres de la théorie, c'est-à-dire que nous aurons besoin de calculer le propagateur à une particule.

Le formalisme ayant besoin d'être adapté aux problèmes spécifiques de la théorie des champs (qui sont essentiellement le problème de l'existence de représentations de l'espace de Fock non-unitairement équivalentes, la renormalisation et bien sûr le respect de la symétrie du groupe de Poincaré), la première tâche fût d'étudier un modèle simple, scalaire et facilement renormalisable.

Pour saisir intuitivement le problème, considérons l'espace de Fock pour les champs scalaires. On peut construire une base de cet espace grâce au hamiltonien du champ scalaire libre massif. Les états de cette base sont appelés couramment états à N particules. On peut alors voir le vide de la théorie avec interaction (par exemple $\lambda\Phi^4$), comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base précédente. C'est en ce sens que l'on dit généralement que le vide contient des excitations à plusieurs particules (il s'agit des particules définies dans la théorie libre). On parle encore de vide corrélé. En effet, le calcul de l'énergie du vide met en jeu des éléments de matrice entre états à différents nombre de particules de la théorie libre, qu'on interprète comme des corrélations entre états.

On peut voir (peu rigoureusement) la RPA comme un moyen de calculer les coefficients du développement du vide corrélé jusqu'à un certain ordre (selon le nombre de vecteurs de la base de Fock qu'on utilisera, ou encore, selon le nombre d'excitations prises en compte).

Enfin, pour continuer à fixer les idées (et le lecteur égaré pourra se reporter utilement à cette section), précisons un peu la méthode, toujours sans aucun calcul et avec peu de rigueur mathématique mais plus d'intuition physique.

Nous avons donc besoin d'une base de Fock. Au lieu de choisir la base libre, nous pouvons aussi choisir la base de champ moyen. Les déviations par rapport au champ moyen engendrées par des corrélations entre particules peuvent être calculées sur le champ moyen (c'est la RPA dite standard). Cela permet de réutiliser dans la méthode RPA des résultats établis en champ moyen. Cela éclaire la phrase couramment utilisée, la RPA standard consiste à rajouter des corrélations dans l'état fondamental de champ moyen (au sens où le terme prépondérant du vide RPA sera cette fois le vide de champ moyen auquel on ajoutera des vecteurs correspondant aux états excités du champ moyen). On a en quelque sorte un gaz d'excitations élémentaires dont on calcule les propriétés sur le champ moyen

qui les a engendrées.

Au-delà de la RPA standard, le but final est d'établir une méthode autocohérente, c'est-à-dire ne nécessitant pas l'utilisation *a priori* de tel ou tel état de l'espace de Fock. On étudie le gaz d'excitations mais sur un vide qu'elles contribuent à engendrer.

Finissons par une dernière remarque plus technique. Nous ne nous attacherons plus par la suite au problème de l'existence de représentations non-unitairement équivalentes de l'espace de Fock. En RPA standard, la base est fixée, c'est celle des quasi-particules de Hartree-Fock-Bogoliubov. La quantification est alors tout à fait standard (on se donne une algèbre canonique pour les opérateurs de champ). En RPA autocohérente (ne serait ce que partiellement), la base sous-jacente est la base exacte (ou plus exactement la base RPA, approximation à l'ordre considéré du nombre de particules, de la base exacte) et on travaille toujours dans celle-ci.

1.3 Formalisme de la théorie des champs et du problème à \mathbb{N} corps

1.3.1 Propriétés d'une algèbre d'opérateurs de créations et de destructions

Les propriétés que nous allons établir sont au cœur de l'aspect technique de cet exposé. En effet, dans le formalisme de la seconde quantification de la théorie des champs, on introduit naturellement des opérateurs dits de création (\mathbf{a}^\dagger) et de destruction (\mathbf{a}), adjoints l'un de l'autre et vérifiant $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$. Ils peuvent également être introduits dans l'étude de l'oscillateur harmonique qui, on le sait, apparaît très souvent en mécanique puisque le développement des petites oscillations d'un système autour d'un équilibre stable montre que ce système se comporte en première approximation comme un oscillateur harmonique.

Notons que si deux opérateurs hermitiques ($\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$) vérifient une algèbre $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = c$, $c \in \mathbb{C}$ on pourra toujours définir un opérateur \mathbf{a} , combinaison linéaire de \mathbf{A} et \mathbf{B} tel que $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$.

Les résultats démontrés ici se généralisent immédiatement dans le cas où \mathbf{a} possède des nombres quantiques, éventuellement continus. La loi d'algèbre est alors de la forme $[\mathbf{a}_{i,k}, \mathbf{a}_{j,k'}^\dagger] = \delta_{ij}\delta(k - k')$.

Définissons \mathbf{N} , appelé opérateur "nombre de quanta" (ou nombre d'occupation),

$$\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}.$$

\mathbf{N} est hermitique. Ses états propres forment une base de l'espace de Hilbert.

Propriété 1 Valeurs et vecteurs propres de \mathbf{N} .

Les valeurs propres de \mathbf{N} sont des nombres réels positifs. Les vecteurs propres ne sont pas dégénérés.

Donnons les grandes lignes de la démonstration. Notons ν et $|\nu\rangle$ les valeurs propres et les

vecteurs propres de \mathbf{N} . On a

$$[\mathbf{N}, \mathbf{a}] = -\mathbf{a} \quad (1.1)$$

$$[\mathbf{N}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{a}^\dagger \quad (1.2)$$

Ainsi, $\mathbf{a}^\dagger|\nu\rangle$ est un état propre de \mathbf{N} , car on a $\mathbf{N}\mathbf{a}^\dagger|\nu\rangle = (\nu + 1)\mathbf{a}^\dagger|\nu\rangle$. De même pour $\mathbf{N}\mathbf{a}|\nu\rangle = (\nu - 1)\mathbf{a}|\nu\rangle$. Les valeurs propres de \mathbf{N} sont positives ou nulles (il suffit de prendre le module de la relation précédente, or, un module est toujours positif ou nul). On voit que l'action de \mathbf{a} sur $|\nu\rangle$ diminue d'une unité la valeur propre. Par application successive de \mathbf{a} , on montre que si ν n'est pas entier, on aboutit à une incohérence avec le résultat précédent, en créant une valeur propre strictement négative.

Notons la conséquence immédiate.

Conséquence 1 Il existe un état $|0\rangle$ appelé vide vérifiant $\mathbf{a}|0\rangle = 0$.

Reste à montrer la non-dégénérescence des états. C'est un résultat moins immédiat à montrer. Pour cela on a besoin de deux lemmes.

Lemme 1 Si \mathbf{X} et \mathbf{P} , deux opérateurs hermitiques, vérifient $[\mathbf{X}, \mathbf{P}] = i$, alors $\mathbf{S}_\lambda = e^{-i\lambda\mathbf{P}}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) génère des translations.

Pour cela, si on note $|x\rangle$ les états propres de \mathbf{X} , on montre que (formule de Baker-Campbell-Hausdorff) $[\mathbf{S}_\lambda, \mathbf{X}] = \lambda\mathbf{S}_\lambda$ et donc $\mathbf{S}_\lambda\mathbf{X}\mathbf{S}_{-\lambda} = \mathbf{X} + \lambda$. De là, on voit que \mathbf{S} permet de fabriquer une infinité continue d'états propres de \mathbf{X} , de valeurs propres réelles en translatant de λ la valeur propre de $|x\rangle$.

Lemme 2 Action de \mathbf{P} en représentation x

$\Psi(x) \equiv \langle x|\Psi\rangle$ est la représentation x de l'état Ψ . Par suite, on montre grâce au lemme 1 que $\langle x|\mathbf{P}|\Psi\rangle = -i\partial_x\langle x|\Psi\rangle$.

Achevons la démonstration. $\mathbf{X} = 1/\sqrt{2}(\mathbf{a} + i\mathbf{a}^\dagger)$ et $\mathbf{P} = 1/\sqrt{2}(\mathbf{a} - i\mathbf{a}^\dagger)$ vérifient les hypothèses du lemme 1. Par suite on montre que la conséquence 1 devient en représentation x ,

$(x + \partial_x)\Psi_0(x) = 0$ (où $\Psi_0(x) = \langle x|0\rangle$) soit $\Psi_0(x) = c e^{-\frac{x^2}{2}}$ et il n'est donc pas dégénéré. Les autres états se construisent par itération de \mathbf{a}^\dagger sur $|0\rangle$ et ne sont pas dégénérés.

Propriété 2 Calcul de commutateurs.

On montre par récurrence que

$$[\mathbf{a}^n, \mathbf{a}^\dagger] = n\mathbf{a}^{n-1} \quad (1.3)$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger n}] = n\mathbf{a}^{\dagger n-1} \quad (1.4)$$

et par suite

$$[f(\mathbf{a}), \mathbf{a}^\dagger] = \partial_{\mathbf{a}} f(\mathbf{a}) \quad (1.5)$$

$$[\mathbf{a}, f(\mathbf{a}^\dagger)] = \partial_{\mathbf{a}^\dagger} f(\mathbf{a}) \quad (1.6)$$

Ces derniers résultats sont très pratiques car dans la suite nous aurons beaucoup de commutateurs et double-commutateurs à calculer.

1.3.2 Espace de Fock - Opérateur création et destruction

Nous allons maintenant aborder des considérations plus techniques concernant la théorie des champs bosoniques. Au départ d'une théorie quantique pour une particule, on a besoin d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}^{(1)}$. Si on considère deux particules identiques, vérifiant par exemple une statistique de Bose (expérimentalement, on sait que les particules se rangent en deux catégories, les bosons et les fermions, vérifiant respectivement des conditions dites statistiques de Bose ou Fermi), leur espace de Hilbert $\mathcal{H}^{(2)}$ sera le produit tensoriel $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(1)}$. L'état de ces particules se décompose donc en une somme de produits tensoriels d'état de $\mathcal{H}^{(1)}$. Pour respecter la nature bosonique des particules, il faut imposer à ces états d'être symétriques lorsque l'on échange les deux particules. Ainsi, pour être précis, l'espace de Hilbert de ces deux particules devrait être restreint aux états invariants par application de l'opérateur de permutation \mathcal{P} . Pour décrire notre théorie des champs, on définit un espace de Hilbert appelé espace de Fock \mathcal{F} . Il est défini comme la somme directe infinie (on note $\mathcal{H}^{(0)}$ un espace de Hilbert de dimension un décrivant les états à zéro particule)

$$\mathcal{F} = \mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}^{(n)} \dots \quad (1.7)$$

On note $\mathcal{F}^{(+)}$ et $\mathcal{F}^{(-)}$ les espaces de Fock respectivement symétrisé et antisymétrisé décrivant un système bosonique ou fermionique. Pour le problème à N corps, on se place *a priori* dans un sous-espace de \mathcal{F} dont le nombre de particules est fixé. Dans les cas où le nombre de particules n'est pas conservé, l'espace des états sera bien \mathcal{F} en entier. Notons que l'on parle d'espace de Fock, uniquement lorsque l'on peut définir un état, appelé vide, qui doit posséder des propriétés que nous allons voir. Cette façon de faire s'appelle seconde quantification.

On peut définir d'une façon formelle un opérateur $\mathbf{a}^\dagger(k)$ qui agissant sur un état de \mathcal{F} à N particules (donc ayant une décomposition uniquement sur $\mathcal{H}^{(n)}$) va ajouter une particule à l'état et va mettre cette nouvelle particule dans l'état k . Cet opérateur est appelé créateur. De même, on peut définir un opérateur de destruction qui retire des états à un élément de l'espace de Fock. Le commutateur $[\mathbf{a}(k), \mathbf{a}^\dagger(k')]$ est nul si $k \neq k'$ vu la définition donnée (créer un état k' et détruire un état k sont des opérations que l'on peut faire dans n'importe quel ordre). Correctement normalisé, on montre que $[\mathbf{a}(k), \mathbf{a}^\dagger(k)] = \delta(k - k')$ et donc ces opérateurs satisfont aux propriétés du paragraphe précédent.

On peut maintenant préciser le problème. Considérons un hamiltonien \mathbf{H} sur un espace de Fock \mathcal{F} et notons $\mathcal{K}\mathcal{P} \{|\nu_\alpha\rangle\}_{\nu \in \text{valeurs propres de } \mathbf{H}}$ (l'indice α caractérisant une éventuelle dégénérescence). Nous noterons E_ν les énergies associées à ces états : $\mathbf{H}|\nu_\alpha\rangle = E_\nu|\nu_\alpha\rangle$. Supposons enfin qu'il existe un état de plus basse énergie, appelé *vide* et noté $|0\rangle$, non dégénéré par souci de simplicité.

On sait que $\mathcal{K}\mathcal{P}$ constitue une base de \mathcal{F} et donc, tout état $|\omega\rangle$ se décompose selon

$$|\omega\rangle = \sum_{\lambda=(\nu,\alpha)} c_\lambda |\lambda\rangle.$$

Or, pour fabriquer l'état $|\nu, \alpha\rangle$, il suffit de partir de $|0\rangle$ et d'ajouter le bon nombre de particules dans des états bien définis grâce à des opérateurs de créations. On a donc

$$|\lambda\rangle \propto \prod_k \mathbf{a}^\dagger(k)|0\rangle \quad (1.8)$$

(\propto signifie proportionnel). L'opérateur \mathbf{a} est une fonction de k qui représente les nombres quantiques décrivant l'état $|\nu, \alpha\rangle$. Remarquons que si on n'impose pas la condition $\mathbf{a}(k)|0\rangle = 0$ pour tout k , on pourrait créer des états d'énergie inférieure à E_0 . La condition pour que la somme directe 1.7 soit effectivement un espace de Fock est l'existence d'un tel vide. Tout les états de \mathcal{F} peuvent donc être construits selon 1.8.

À partir d'un opérateur \mathbf{O}_H agissant sur $\mathcal{H}^{(1)}$, on peut le généraliser dans le cadre de la seconde quantification pour qu'il agisse sur \mathcal{F} et on le notera \mathbf{O} . L'action de \mathbf{O} sur un état de Fock est simplement l'action de \mathbf{O}_H sur chaque composante tensorielle de cet état.

L'ensemble des opérateurs de création et de destruction constitue une base pour les opérateurs agissant sur \mathcal{F} au sens où,

$$\text{si } \mathbf{O} \in \{\text{opérateurs sur } \mathcal{F}\}, \text{ alors, } \mathbf{O} = \sum_{ij} o_{ij}(\mathbf{a}^\dagger)^i(\mathbf{a})^j. \quad (1.9)$$

(pour faciliter l'écriture, nous n'avons pas explicitement indiqué que \mathbf{a} et \mathbf{a}^\dagger dépendent d'un certain ensemble de nombres quantiques). Pour donner une idée rapide de la démonstration il s'agit de faire agir \mathbf{O} sur un état de \mathcal{F} . On peut le décomposer comme une somme d'opérateur à N corps (agissant uniquement sur N états $|u_i\rangle$ de $\mathcal{H}^{(1)}$). Cette restriction peut s'écrire en termes de projecteurs par exemple pour deux corps, $\mathbf{O}^{(2)} = \sum_{ijkl} g_{ijkl}|u_i\rangle|u_j\rangle\langle u_k|\langle u_l|$. L'action des projecteurs s'exprime alors en fonction des \mathbf{a} et \mathbf{a}^\dagger .

Une autre façon de le voir est de considérer la relation de fermeture de la base $\{|\nu\rangle\}$, $\mathbb{1} = \sum |\nu\rangle\langle\nu|$

$$\mathbf{O} = \sum |\nu\rangle\langle\nu|\mathbf{O}|\mu\rangle\langle\mu| = \sum \langle\mu|\mathbf{O}|\nu\rangle \mathbf{a}^\nu|0\rangle\langle 0|\mathbf{a}^{\dagger\mu} \quad (1.10)$$

Or $|0\rangle\langle 0| = \mathbb{1} - \sum_{\nu \neq 0} |\nu\rangle\langle\nu|$ qui s'écrit également comme une combinaison d'opérateur \mathbf{a} , \mathbf{a}^\dagger et $|0\rangle\langle 0|$. En injectant cette relation dans l'expression précédente, on montre bien 1.9 par itération.

En théorie des champs, on part directement d'un hamiltonien de champ classique. Cet hamiltonien, fonction d'un champ et de son conjugué peut être quantifié directement. Nous verrons explicitement que l'on peut introduire des opérateurs de créations et de destructions, un état fondamental et donc, un espace de Fock. Il est naturel que l'espace de Hilbert de la théorie des champs soit un espace de Fock (décrivant donc une infinité de particules) car quantifier canoniquement le champ revient à considérer que chacun des ses degrés de liberté (dont le nombre est infini) se comporte comme une particule quantique.

Enfin, il faut préciser que dans le cas de fermions, seuls quelques détails techniques changent. Ainsi, les méthodes bosoniques expliquées dans cet exposé peuvent être transposées pour des théories de champs fermioniques (avec un espace de Fock d'état antisymétrisé) Le formalisme reste identique, ce sont les détails techniques de l'application pratique qui vont changer.

1.4 Formalisme des fonctions de Green en théorie des champs

Les outils de base d'une théorie de champs sont un espace de Fock, des vecteurs et des opérateurs sur cet espace, lorsqu'on utilise le formalisme opératoire. Un autre formalisme peut être utilisé. Il s'agit d'un formalisme où les vecteurs deviennent des fonctionnelles (l'équivalent pour les champs de la représentation en terme de fonctions d'ondes pour une théorie quantique, dans le cas où l'on a un espace de Hilbert, $L^2(\mathbb{R})$). Il existe enfin un formalisme mixte, celui des fonctions de Green (qui sont du point de vue technique des distributions).

Le formalisme des fonctions de Green permet un exposé formel synthétique des méthodes non-perturbatives en théorie des champs. Un avantage important est de permettre l'extension à température finie d'une façon naturelle grâce à la continuation analytique dans le plan complexe. Nous exposerons ce formalisme dans le cadre de la théorie statistique des champs. Cette théorie englobe à la fois la théorie quantique des champs (donc implicitement la relativité et la mécanique quantique) et la physique statistique. Il est donc tout à fait intéressant de développer des méthodes génériques qui s'appliqueront immédiatement dans les sous-domaines.

Après un bref rappel sur l'opérateur densité, on verra la définition de ces fonctions de Green, leurs propriétés mathématiques et les propriétés physiques (expression des quantités physiques en terme de propagateurs, lien avec les quasi-particules, pôles et énergie à une particule, etc). On verra ensuite que formellement, résoudre le problème de théorie des champs (c'est à dire le calcul du spectre du hamiltonien) revient à écrire et trouver une solution à une hiérarchie de fonctions de Green d'ordre de plus en plus élevées. Enfin, la résolution pratique de cette hiérarchie nous impose de tronquer ce schéma et de le fermer par le biais d'approximation. En particulier, nous verrons différentes méthodes de champ moyen.

Nous présenterons dans le chapitre suivant la méthode RPA en termes de fonctions de Green (forme DEA ou Dyson Equation Approach). C'est une des méthodes pour tronquer la hiérarchie dont il était question précédemment.

1.4.1 Définition et propriétés

Opérateur densité en théorie statistique des champs

Nous allons commencer par poser le problème dans un cadre très large, celui de la théorie statistique des champs, qui décrit un système physique en terme d'ensemble statistique quantique [MS59, Yuk98, FW71]. On parle encore de théorie des champs à température

finie [LeB96, Kap89]. En théorie statistique des champs, on peut définir des opérateurs de champs (ou opérateurs de destruction, voir paragraphe 1.3 ; remarquons que nous introduisons une notation continue, les sommes discrètes deviennent des intégrales), agissant sur un espace de Fock \mathcal{F} , et obéissant à une certaine statistique (Bose ou Fermi) de la forme

$$\Psi(x_1, t_1). \quad (1.11)$$

vérifiant $[\Psi(x_1, t), \Psi(x_2, t)] = \delta(x_1 - x_2)$. Le système (dont la dynamique est donnée par le hamiltonien $H(t)$) est décrit par l'opérateur densité $\hat{\rho}(t)$ (normalisé selon $\text{Tr} \hat{\rho}(t) = 1$), auto-adjoint, vérifiant l'équation de Liouville quantique

$$i \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [H(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (1.12)$$

La connaissance de $\hat{\rho}$ permet de connaître toutes les propriétés du système car pour une observable locale, on a

$$\langle A \rangle (t) \equiv \text{Tr} \hat{\rho}(t) A \quad (1.13)$$

(la trace étant prise sur $\mathcal{F}^{(+)}$ ou $\mathcal{F}^{(-)}$ selon la statistique). On définit la matrice densité statistique dont les éléments sont

$$\rho_{mn}(x_1 \cdots x_m; y_1 \cdots y_n; t) \equiv \text{Tr} \Psi(x_1) \cdots \Psi(x_m) \hat{\rho}(t) \Psi^\dagger(y_n) \cdots \Psi^\dagger(y_1) \quad (1.14)$$

et comme en général les opérateurs qu'on utilise sont des opérateurs à N corps, pour calculer $\langle A \rangle$, on a besoin de connaître uniquement les matrices densités réduites

$$\rho_n(x_1 \cdots x_n; y_1 \cdots y_n; t) \equiv \rho_{nn}(x_1 \cdots x_n; y_1 \cdots y_n; t). \quad (1.15)$$

On réexprime ces matrices (on note $x^n = (x_1, \cdots, x_n)$),

$$\rho_n(x^n; y^n; t) = \text{Tr} \Psi(x_1) \cdots \Psi(x_n) \hat{\rho}(t) \Psi^\dagger(y_n) \cdots \Psi^\dagger(y_1) \quad (1.16)$$

$$= \text{Tr} \hat{\rho}(t) \Psi^\dagger(y_n) \cdots \Psi^\dagger(y_1) \Psi(x_1) \cdots \Psi(x_n) \quad (1.17)$$

$$\rho_n(x^n; y^n; t) = \langle \Psi^\dagger(y_n) \cdots \Psi^\dagger(y_1) \Psi(x_1) \cdots \Psi(x_n) \rangle \quad (1.18)$$

Par exemple, introduisant l'opérateur densité de particules $n(x) = \Psi^\dagger(x) \Psi(x)$ (ou nombre d'occupation dans une notation discrète), on voit que la densité de particules $\rho(x, t) \equiv \langle n(x) \rangle$ est donnée par

$$\rho(x, t) = \rho_1(x, x, t). \quad (1.19)$$

$\rho(x, t)$ est positif, dû aux propriétés de l'opérateur densité (car ces termes diagonaux s'interprètent comme des probabilités donc sont positifs). La connaissance des densités réduites est donc suffisante pour connaître les moyennes de toutes les observables du système. Par exemple il suffit de connaître ρ_1 pour la densité. Mais on montre que la trace de ρ_n sur une sous-variété m -dimensionnelle de $\mathcal{H}^{(n)}$, explicitement

$$\int \rho_n(x^{n-m}, x^m; y^{n-m}, x^m; t) dx^m \propto \rho_{n-m}. \quad (1.20)$$

Donc pour calculer ρ_1 , il faut prendre la trace de ρ_2 , fonction que l'on peut calculer par la trace de ρ_3 , etc. Le système d'équations sur ρ_i est une hiérarchie infinie qu'on ne peut résoudre sans approximation. Cependant, si on ne souhaite connaître que la densité, il est naturelle d'écrire d'une façon approchée ρ_2 sans s'occuper des autres densités réduites. C'est l'esprit de toutes les méthodes de résolution de ce problème. On cherche à tronquer la hiérarchie à un certain ordre, en fonction des quantités que l'on souhaite calculer. Par exemple, si on veut calculer l'énergie d'un hamiltonien avec interaction quadratique

$$V = \int dx dy \frac{1}{2} V(x, y) \Psi^\dagger(x) \Psi^\dagger(y) \Psi(y) \Psi(x),$$

il faut au moins connaître ρ_2 .

Le formalisme des fonctions de Green permet d'écrire aisément ce genre d'approximation.

Fonctions de Green

Introduisons les notations $f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = f_{1\dots n}$, $dx_1 dt_1 \dots dx_n dt_n = d_{1\dots n}$ et $t_{12} = t_1 - t_2$. De plus, on utilisera \pm et \mp où le signe du haut correspondra à la statistique de Bose et celui du bas, à celle de Fermi.

On définit l'opérateur chronologique T tel qu'il ordonne les opérateurs dans l'ordre chronologique décroissant, en particulier, pour deux opérateurs, on a

$$T\Psi_1\Psi_2^\dagger = \theta(t_{12})\Psi_1\Psi_2^\dagger \pm \theta(-t_{12})\Psi_2^\dagger\Psi_1 \quad (1.21)$$

(θ est la fonction de Heaviside). On définit la fonction de Green causale à une particule ou propagateur \mathfrak{G}

$$\mathfrak{G}_{12} \equiv -i \left\langle T\Psi_1\Psi_2^\dagger \right\rangle \quad (1.22)$$

où les crochets de moyenne $\langle \rangle$ ne sont pas spécifiés ; il peut s'agir d'une moyenne d'ensemble (sur un ensemble statistique défini par une matrice densité), de la valeur moyenne sur un certain état en théorie des champs (ce qui revient à prendre une matrice densité d'un état pur), etc. Elle est dite causale car intuitivement, si $|\varphi\rangle$ est un élément d'un espace de Fock, $\langle\varphi|AB|\varphi\rangle$ signifie que on fait agir B sur $|\varphi\rangle$ puis A sur le résultat obtenu. La définition de \mathfrak{G} assure que quelque soit t_1 et t_2 , on commence par agir sur $|\varphi\rangle$ par le premier opérateur dans l'ordre chronologique, c'est-à-dire qu'on respecte la causalité. Le terme de propagateur vient du fait que \mathfrak{G} "transporte" la propriété décrite par Ψ (c'est-à-dire l'état $\Psi^\dagger|0\rangle$) de 1 à 2. Enfin, elle propage un état à une particule de 1 à 2, d'où le terme de fonction de Green à une particule.

D'une façon analogue, on définit les propagateurs à n particules

$$\mathfrak{G}_{1,2,\dots,2n}^{(n)} \equiv (-i)^n \left\langle T\Psi_1 \dots \Psi_n \Psi_{n+1}^\dagger \dots \Psi_{2n}^\dagger \right\rangle. \quad (1.23)$$

La connaissance des fonctions de Green, comme des densités réduites, revient à une connaissance complète du système car il existe une relation entre les deux formalismes.

Par exemple, il est aisé de voir que

$$\rho_1(x_1, x_2, t) = \pm i \lim_{t_i \leftrightarrow t} \mathfrak{G}_{12}. \quad (1.24)$$

(où \hookrightarrow signifie que chaque variable t_i de \mathfrak{G} tend vers t mais avec $t_1 < t_2 < \dots$). Dans la limite $x_1 \rightarrow x_2$ et comme la densité $\rho(x, t) = \rho_1(x, x, t)$ est positive, on a la condition

$$\pm i \lim_{t_2 \rightarrow t_1^+} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \mathfrak{G}_{12} \geq 0. \quad (1.25)$$

D'une façon générale,

$$\rho_n(x_1, \dots, x_{2n}, t) = (\pm)^{(3n-1)\frac{n}{2}} i^n \lim_{t_i \hookrightarrow t} \mathfrak{G}_{1,2,\dots,2n}^{(n)}. \quad (1.26)$$

Les propagateurs sont définis avec un même nombre d'opérateurs de création et destruction. Si le nombre de particules n'est pas conservé, *i.e.* si il existe dans le hamiltonien des opérateurs ne commutant pas avec l'opérateur nombre de particules (système de Bosons dans la phase où il existe un condensat de Bose-Einstein par exemple), les valeurs moyennes du type $\langle \Psi \Psi \Psi^\dagger \rangle$ ne sont pas forcément nulles et définissent des fonctions de Green anormales. Les plus courantes sont

$$\mathfrak{F}_{12} = -i \langle T \Psi_1 \Psi_2 \rangle \quad (1.27)$$

$$\text{et } \mathfrak{F}_{12}^+ = -i \langle T \Psi_2^\dagger \Psi_1^\dagger \rangle. \quad (1.28)$$

Comme on l'a vu, tout opérateur sur l'espace de Fock peut s'écrire en termes d'opérateurs de création et destruction et donc, toutes valeurs moyennes de ces opérateurs en termes de fonctions de Green.

Les plus intéressants sont les opérateurs à une et deux particules (la renormalisation par comptage de puissance limite à l'ordre quadratique les opérateurs dans un hamiltonien de théorie des champs) c'est-à-dire

$$\text{une particule : } A_1(t) = \int \Psi^\dagger(x, t) A_1(x, t) \Psi(x, t) dx, \quad (1.29)$$

$$\text{deux particules : } A_2(t) = \frac{1}{2} \int \Psi^\dagger(x, t) \Psi^\dagger(y, t) A_2(x, y, t) \Psi(y, t) \Psi(x, t) dx dy \quad (1.30)$$

et n particules :

$$A_n(t) = \frac{1}{n!} \int \Psi^\dagger(x_1, t) \cdots \Psi^\dagger(x_n, t) A_n(x^n, t) \Psi(x_n, t) \cdots \Psi(x_1, t) dx^n. \quad (1.31)$$

On a

$$\langle A_1 \rangle (t) = \pm i \int \lim_{(21)} A_1(x_1, t) \mathfrak{G}_{12} dx_1 \quad (1.32)$$

$$\langle A_2 \rangle (t) = -\frac{1}{2} \int \lim_{(4321)} A_2(x_1, x_2, t) \mathfrak{G}_{1234}^{(2)} dx_1 dx_2 \quad (1.33)$$

$$\langle A_n \rangle (t) = -\frac{(\pm i)^n}{n!} \int \lim_{(n \dots 1)} A_n(x^n, t) \mathfrak{G}_{1 \dots n}^{(n)} dx^n \quad (1.34)$$

où $\lim_{(21)} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \lim_{t_i \hookrightarrow t}$, $\lim_{(4321)} = \lim_{x_4 \rightarrow x_1} \lim_{x_3 \rightarrow x_2} \lim_{t_i \hookrightarrow t}$ et la généralisation évidente à n particules.

Représentation spectrale

Nous nous restreignons maintenant au cas où le système est à l'équilibre. La transformation de Fourier des fonctions de Green nous conduit à la représentation spectrale des fonctions de Green ou représentation de Lehmann.

L'avantage de cette représentation est que, entre autres, les singularités de la fonction de Green de premier ordre se produisent pour des valeurs de l'énergie appelées niveaux d'énergie des quasi-particules. Ces pôles sont les excitations élémentaires du système et ont donc un grand intérêt physique.

Les fonctions de corrélations à l'équilibre sont définies par

$$C_+(x_1, x_2, t_{12}) \equiv \langle \Psi_1 \Psi_2^\dagger \rangle \quad (1.35)$$

$$C_-(x_1, x_2, t_{12}) \equiv \langle \Psi_2^\dagger \Psi_1 \rangle. \quad (1.36)$$

Elles dépendent uniquement de $t_1 - t_2 = t_{12}$ car par exemple, en introduisant l'opérateur d'évolution $U_t = e^{-iHt}$ et comme à l'équilibre $[U_t, \hat{\rho}] = 0$,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1 \Psi_2^\dagger \rangle &= \text{Tr } \hat{\rho} \Psi_1 \Psi_2^\dagger \\ &= \text{Tr } \hat{\rho} U_{t_1}^\dagger \Psi(x_1, 0) U_{t_1} U_{t_2}^\dagger \Psi^\dagger(x_2, 0) U_{t_2} \\ &= \text{Tr } \hat{\rho} U_{t_2} U_{t_1}^\dagger \Psi(x_1, 0) U_{t_1} U_{t_2}^\dagger \Psi^\dagger(x_2, 0) \text{ (cyclicité de la trace et } [U_t, \hat{\rho}] = 0) \\ &= \text{Tr } \hat{\rho} U_{t_1 - t_2}^\dagger \Psi(x_1, 0) U_{t_1 - t_2} \Psi^\dagger(x_2, 0) \\ &= \langle \Psi(x_1, t_{12}) \Psi^\dagger(x_2, 0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.37)$$

On a la condition d'équilibre (ou condition de Kubo-Martin-Schwinger)

$$C_-(x_1, x_2, t) = C_+(x_1, x_2, t - i\beta) \quad (1.38)$$

où $\beta = 1/k_B T$. En effet, montrons le rapidement. Sachant que à l'équilibre

$\hat{\rho} = \exp(-\beta H) / \text{Tr } \exp(-\beta H)$, on a $1 / \text{Tr } \exp(-\beta H) = \text{Tr } \hat{\rho} \exp(\beta H)$

$C_-(x_1, x_2, t) = \text{Tr } \Psi \hat{\rho} \Psi^\dagger = \text{Tr } \hat{\rho} \exp(\beta H) \Psi \exp(-\beta H) \Psi^\dagger = \text{Tr } \hat{\rho} \Psi(x_1, t - i\beta) \Psi^\dagger(x_2, 0)$ qui démontre le résultat. On introduit les transformées de Fourier des fonctions de corrélations à l'équilibre

$$K_\pm(x_1, x_2, t) = \int dt C_\pm(x_1, x_2, t) e^{\pm i\omega t} \quad (1.39)$$

La transformée de Fourier de 1.38 implique que

$$K_-(x_1, x_2, \omega) = e^{-\beta\omega} K_+(x_1, x_2, \omega). \quad (1.40)$$

De plus, les relations de commutations de Ψ et Ψ^\dagger impliquent

$$C_+(x_1, x_2, 0) \mp C_-(x_1, x_2, 0) = \delta(x_1 - x_2) \quad (1.41)$$

$$\Leftrightarrow \int K_+(x_1, x_2, \omega) (1 \mp e^{-\beta\omega}) \frac{d\omega}{2\pi} = \delta(x_1 - x_2). \quad (1.42)$$

En exprimant \mathfrak{G} en fonction de C_+ et C_- et utilisant

$$\theta(\pm t) = \pm i \int \frac{e^{-i\omega t}}{\omega \pm i\eta} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (1.43)$$

avec la convention de Feynman, $\eta \equiv \lim_{\eta \rightarrow 0^+}$, on trouve la représentation spectrale de \mathfrak{G}

$$\mathfrak{G}(x_1, x_2, \omega) = - \int \frac{d\omega'}{2\pi} K_+(x_1, x_2, \omega') \left(\frac{1}{\omega' - \omega - i\eta} \mp \frac{e^{-i\beta\omega'}}{\omega' - \omega + i\eta} \right). \quad (1.44)$$

Théorème spectral

Dans le cas particulier de la théorie des champs à température nulle, on a la formule suivante, appelée théorème spectral par la suite

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B}\mathbf{A} \rangle &= \lim_{t' \rightarrow t^+} [\theta(t - t') \langle \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t') \rangle + \theta(t' - t) \langle \mathbf{B}(t')\mathbf{A}(t) \rangle] \\ &= \lim_{t' \rightarrow t^+} i \mathfrak{G}_{AB}(t - t') \\ &= \lim_{t' \rightarrow t^+} i \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \mathfrak{G}_{AB}(\omega) \\ \langle \mathbf{B}\mathbf{A} \rangle &= \int \frac{i d\omega}{2\pi} e^{i\omega\eta_+} \mathfrak{G}_{AB}(\omega), \end{aligned} \quad (1.45)$$

\mathbf{B} et \mathbf{A} étant des opérateurs quelconques.

1.4.2 Résolution formelle d'un problème - Équation d'évolution

Nous revenons maintenant au cas général d'un système hors équilibre. Nous allons voir différentes façons de fermer la hiérarchie de fonctions de Green et d'obtenir un système réduit d'équations en principe soluble par des méthodes itératives.

Équation d'évolution du propagateur à une particule

Considérons le hamiltonien

$$\begin{aligned} H(t) &= \int \Psi^\dagger(x, t) [K(\partial_x) - \mu(x, t)] \Psi(x, t) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \Psi^\dagger(x, t) \Psi^\dagger(y, t) V(x, y, t) \Psi(y, t) \Psi(x, t) dx dy \end{aligned} \quad (1.46)$$

où le potentiel chimique effectif est défini par $\mu(x, t) = \mu - U(x, t)$, μ est le potentiel chimique, U le potentiel extérieur et K l'opérateur d'énergie cinétique. Introduisons également le potentiel d'interaction (ou de Hartree) $\Phi_{12} = \frac{1}{2} [V(x_1, x_2) + V(x_2, x_1)] \delta(t_1 - t_2)$. Fixons par convention l'action de l'opérateur chronologique T sur deux opérateurs aux mêmes temps

$$T\Psi_1\Psi_1^\dagger \equiv \pm\Psi_1^\dagger\Psi_1 \quad \text{et} \quad T\Psi_1^\dagger\Psi_1 \equiv \Psi_1^\dagger\Psi_1 \quad (1.47)$$

(ce qui revient à prendre l'ordre normal). Notons $\mathfrak{D}_1 = i \frac{\partial}{\partial t_1} - K(\partial_{x_1}) + \mu_1$. L'évolution du propagateur à une particule est donnée par

$$\mathfrak{D}_1 \mathfrak{G}_{12} \mp i \int \Phi_{13} \mathfrak{G}_{1332}^{(2)} d_3 = \delta_{12} \quad (1.48)$$

(formule obtenue en dérivant par rapport à t_1 la fonction de Green). Ainsi l'évolution de \mathfrak{G}_{12} fait apparaître $\mathfrak{G}^{(2)}$. On définit implicitement l'énergie propre Σ ou "self-energy" (ou opérateur de masse, quoique ce terme soit plutôt réservé à cette fonction dans l'approximation de Hartree-Fock) par

$$\int \Sigma_{13} \mathfrak{G}_{32} d_3 = \pm \int \Phi_{13} \mathfrak{G}_{1332}^{(2)} d_3. \quad (1.49)$$

et on réécrit 1.47

$$\mathfrak{D}_1 \mathfrak{G}_{12} - \int \Sigma_{13} \mathfrak{G}_{32} d_3 = \delta_{12}. \quad (1.50)$$

On définit

$$\mathfrak{G}_{12}^{-1} \equiv \mathfrak{D}_1 \delta_{12} - \Sigma_{12} \quad (1.51)$$

qui est bien l'inverse de \mathfrak{G}_{12} au sens où on montre avec 1.50

$$\int \mathfrak{G}_{13}^{-1} \mathfrak{G}_{32} d_3 = \delta_{12}. \quad (1.52)$$

On peut alors écrire plus explicitement Σ

$$\Sigma_{12} = \pm i \int \Phi_{12} \mathfrak{G}_{1334}^{(2)} \mathfrak{G}_{42}^{-1} d_{34}. \quad (1.53)$$

En pratique, on construira la solution de l'équation d'évolution de \mathfrak{G} à partir d'une solution déjà connue (dite solution du problème libre). Considérons maintenant un propagateur à une particule, $\mathfrak{G}_{12}^{(lib)}$ pour lequel il existe un inverse $\mathfrak{G}_{12}^{(lib)-1}$ c'est-à-dire

$$\int \mathfrak{G}_{13}^{(lib)-1} \mathfrak{G}_{32}^{(lib)} d_3 = \delta_{12}. \quad (1.54)$$

Cela sera en général le propagateur d'un problème connu, souvent appelé problème libre (d'où la notation *lib*). 1.52 peut être écrite sous la forme d'une équation de Dyson

$$\mathfrak{G}_{12} = \mathfrak{G}_{12}^{(lib)} + \int B_{13} \mathfrak{G}_{32} d_3 \quad (1.55)$$

$$\text{avec } B_{12} = \int \mathfrak{G}_{13}^{(lib)} \left(\mathfrak{G}_{32}^{(lib)-1} - \mathfrak{G}_{32}^{-1} \right) d_3 \quad (1.56)$$

C'est une autre forme de l'équation d'évolution.

On peut spécifier un peu plus le problème en introduisant $\Sigma^{(lib)}$ (opérateur de masse du problème connu). On peut alors écrire le noyau B de l'équation de Dyson uniquement en terme de la self-energy inconnue. On choisit donc

$$\mathfrak{G}_{12}^{(lib)^{-1}} \equiv \mathfrak{D}_1 \delta_{12} - \Sigma_{12}^{(lib)} \quad (1.57)$$

$$\text{soit pour } B, B_{12} = \int \mathfrak{G}_{13}^{(lib)} \left(\Sigma_{32} - \Sigma_{32}^{(lib)} \right) d_3 \quad (1.58)$$

Ce système d'équations ne permet pas encore de calculer le propagateur à une particule puisqu'il est impossible d'éliminer $\mathfrak{G}^{(2)}$. L'évolution de $\mathfrak{G}^{(2)}$ s'écrit en fonction de $\mathfrak{G}^{(3)}$, etc. On a une hiérarchie infinie, comme dans le formalisme des matrices densités réduites.

Approximation de $\mathfrak{G}^{(2)}$

Si on choisit une valeur approchée de $\mathfrak{G}^{(2)}$, on va fermer le système d'équations 1.55. L'approximation de Hartree-Fock consiste à écrire

$$\mathfrak{G}_{1234}^{(2)} \simeq \mathfrak{G}_{1234}^{(2) HF} \equiv \mathfrak{G}_{14} \mathfrak{G}_{23} \pm \mathfrak{G}_{13} \mathfrak{G}_{24} \quad (1.59)$$

La self-energy de Hartree-Fock est alors

$$\Sigma_{12}^{HF} = \pm i \delta_{12} \int \Phi_{13} \mathfrak{G}_{33} d_3 + i \Phi_{12} \mathfrak{G}_{12} \quad (1.60)$$

On définit le potentiel de Hartree

$$V_1^H \equiv \Phi_{12} \rho_2 d_2 \quad (1.61)$$

et Σ_{HF} s'écrit alors sous la forme usuelle

$$\Sigma_{12}^{HF} = V_1^H \delta_{12} + i \Phi_{12} \mathfrak{G}_{12}. \quad (1.62)$$

C'est une approximation de type champ moyen au sens large car les corrélations à deux particules ($\mathfrak{G}^{(2)}$) sont factorisées en corrélations à une particule. Le système d'équations de Dyson est clos et peut être en principe résolu.

Une autre approximation de type champ moyen est l'approximation Hartree-Fock-Bogoliubov qui prend en compte la possibilité d'avoir des corrélations anormales non-nulles

$$\mathfrak{G}_{1234}^{(2) HFB} \equiv \mathfrak{G}_{12} \mathfrak{G}_{23} \pm \mathfrak{G}_{13} \mathfrak{G}_{24} \mp \tilde{\mathfrak{F}}_{12} \tilde{\mathfrak{F}}_{34}^+ \quad (1.63)$$

et

$$\Sigma_{12}^{HFB} = \Sigma_{12}^{HF} - i \int \Phi_{13} \tilde{\mathfrak{F}}_{13} \tilde{\mathfrak{F}}_{34}^+ \mathfrak{G}_{42}^{-1} d_{34}. \quad (1.64)$$

Le système est clos à condition d'écrire les équations du mouvement pour les fonctions de Green anormales.

1.5 Méthode des variations et critère de Ritz

Lorsque l'on veut trouver le spectre d'énergie d'une théorie dont la résolution exacte n'est pas possible, il est très important de pouvoir contrôler le degré de l'approximation, savoir si la méthode converge vers un résultat exact, etc. L'approximation de champ moyen est un exemple de méthode dite variationnelle, ainsi que dans une certaine mesure, la RPA. Nous allons présenter succinctement la méthode et le critère de Ritz qui donne une information sur la cohérence de l'approximation.

Soit un hamiltonien sur un espace de Hilbert \mathcal{H} dont on va supposer le spectre discret et les états propres non-dégénérés. Les énergies sont notées E_0, E_1 , etc, et sont dans l'ordre croissant. Les états propres associés sont $|\varphi_0\rangle, |\varphi_1\rangle$, etc.

Alors on a la propriété suivante :

$$\forall |\Psi\rangle \in \mathcal{H}, \langle H \rangle \equiv \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \geq E_0. \quad (1.65)$$

Pour le prouver, on développe $|\Psi\rangle$ sur la base des $|\varphi_n\rangle$ d'où $\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \sum |c_n|^2 E_n \geq E_0 \sum |c_n|^2$ et $\sum |c_n|^2 = \langle \Psi | \Psi \rangle$. L'égalité est réalisée si et seulement si Ψ est l'état fondamental. Dans le cas d'un spectre dégénéré ou continu, la démonstration se généralise. La méthode des variations consiste à calculer $\langle H \rangle$ pour un ensemble de Ψ et minimiser cette fonctionnelle qui nous donne alors une valeur approchée de E_0 . Le critère de Ritz, $\langle H \rangle \geq E_0$ est très important car il permet de contrôler la qualité de l'approximation.

Le théorème de Ritz généralise ce résultat et énonce que la fonctionnelle $\langle H \rangle = f[\Psi]$ est stationnaire autour des éléments de \mathcal{H} qui sont états propres de H . Les énergies approchées \tilde{E}_i (rangées par ordre croissant) ne vérifient plus exactement le critère $\tilde{E}_i \geq E_i$. Cependant, si on procède par étapes en commençant par l'énergie la plus basse et en travaillant ensuite dans l'espace orthogonal à l'état propre de H pour l'énergie suivante, on a bien $\tilde{E}_i \geq E_i$ mais cela suppose connu cet état. En pratique, on le fait sur l'état approché et le critère est relativement bien satisfait pour un petit nombre d'itérations.

Les ingrédients pour que le critère de Ritz soit vérifié semblent relativement simples. Il suffit de définir un espace d'états $|\Psi\rangle$, dit espace test, de calculer les énergies associées puis prendre le minimum. Cela est parfaitement possible, par essence, dans l'approximation de champ moyen. On verra que dans le cas de la RPA, cette condition est difficile à envisager (voir 2.5, p.57).

Très formellement, on peut dégager deux manières de briser le critère de Ritz. En effet, si on a $\tilde{E}_0 < E_0$ c'est que \tilde{E}_0 ne peut pas se mettre sous la forme $\langle \Psi | H | \Psi \rangle$ (en normalisant $|\Psi\rangle$). Soit on a modifié l'hamiltonien initial et on a en fait calculer la valeur moyenne d'un hamiltonien effectif \tilde{H} , soit on prend une valeur moyenne disymétrique, c'est-à-dire,

$$\tilde{E}_0 = \langle \Psi | \tilde{H} | \Psi \rangle \quad (1.66)$$

$$\text{soit, } \tilde{E}_0 = \langle \tilde{\Psi} | H | \Psi \rangle \quad (1.67)$$

(soit les deux!). Notons enfin que les schémas d'approximation utilisés par la suite garantissent que nous ne sommes pas dans le second cas.

Chapitre 2

Méthodes non-perturbatives

Il s'agit dans ce chapitre de présenter techniquement l'approximation de champ moyen (sous différentes formes dont nous montrerons l'équivalence), puis celle de la phase aléatoire ou **RPA**. Nous allons dégager des méthodes qui ont l'ambition d'être systématiques. Ces méthodes seront détaillées à partir d'exemples concrets : le modèle $\lambda\Phi^4$, l'oscillateur anharmonique et le modèle σ -linéaire. Pour l'instant, nous insisterons essentiellement sur des aspects généraux. Aux chapitres suivants seront donnés les résultats analytiques de l'application de tels points de la méthode au cas concret en question, en gardant à l'esprit la généralité de la méthode et en soulignant bien, si il y a lieu, les conditions particulières, les simplifications éventuelles que peuvent faire apparaître tel ou tel cas particulier.

2.1 Champ moyen en mécanique quantique

L'approximation gaussienne en théorie des champs est une généralisation de l'approximation gaussienne en mécanique quantique dont nous allons faire un bref rappel.

Considérons l'oscillateur harmonique quantique. Son hamiltonien est

$$H_{OH} = \frac{1}{2}\mathbf{P}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\mathbf{X}^2 = \frac{1}{2}(-i\partial_x)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \quad (2.1)$$

$$= \omega\left(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \frac{1}{2}\right) \quad (2.2)$$

avec

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\mathbf{X} + i\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\mathbf{P} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\mathbf{X} - i\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\mathbf{P}. \quad (2.4)$$

On a les relations inverses

$$\mathbf{X} = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{P} = i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}). \quad (2.6)$$

Comme $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$, on a montré que l'état fondamental $|OH\rangle$ est tel que $\mathbf{a}|OH\rangle = 0$ (voir la conséquence 1 du paragraphe 1.3.1, p.20) et donc, si on introduit $\varphi_0^{OH}(x) = \langle x|OH\rangle$ on a

$$(\omega x + \partial_x)\varphi_0^{OH}(x) = 0 \quad (2.7)$$

dont la solution est

$$\varphi_0^{OH}(x) = c e^{-\frac{\omega}{2}x^2}. \quad (2.8)$$

Rendons l'oscillateur anharmonique par un terme de potentiel $V(x)$.

$$H_V = \frac{1}{2}\mathbf{P}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\mathbf{X}^2 + V(\mathbf{X})$$

MÉTHODE 1 : *Approximation gaussienne*

La solution de l'oscillateur harmonique nous indique que l'on peut chercher une solution approchée de l'état fondamental de forme gaussienne,

$$\langle x|G(\alpha, x_0)\rangle = \varphi_0^G(x) = c e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2} \quad (2.9)$$

Les paramètres α et x_0 sont déterminés grâce à la méthode des variations : on cherche les paramètres qui minimisent la fonction d'énergie

$$E_0^G(\alpha, x_0) = \langle G(\alpha, x_0)|H_V|G(\alpha, x_0)\rangle. \quad (2.10)$$

Cette méthode est équivalente à l'approximation de champ moyen.

MÉTHODE 2 : *Approximation de Hartree-Fock-Bogoliubov dite de champ moyen*

Le terme de champ moyen est assez mal choisi dans ce cas là car on ne peut pas parler pour l'oscillateur harmonique d'une particule se déplaçant en première approximation dans le champ moyen créé par d'autres particules comme dans le cadre du problème à N corps. Ici il s'agit plutôt de calculer un vide moyen du système en le considérant comme une déformation du vide libre par le premier état excité (c'est en ce sens que c'est un champ moyen), et donc il s'écrit comme une combinaison linéaire du vide $|OH\rangle$ et du premier état excité.

Ce qu'on entend par champ moyen ici est l'approximation d'Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB). On introduit de nouveaux opérateurs de création et de destruction ($\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger$) grâce

à une transformation de Bogoliubov (qui est canonique, c'est-à-dire qu'elle conserve les relations de commutation) de paramètres u et t (tels que u et t soient réels et $t^2 \neq 1$)

$$\mathbf{b}(u, t) = (1 - t^2)^{-1/2}(\mathbf{a} - t\mathbf{a}^\dagger - u). \quad (2.11)$$

On peut exprimer \mathbf{b} (on omettra les paramètres u et t en se rappelant qu'ils sont pour l'instant quelconque) en fonction de \mathbf{a} . En effet, on sait que $e^{\lambda\mathbf{a}^\dagger}$ génère les translations au sens où

$$e^{\lambda\mathbf{a}^\dagger}\mathbf{a}e^{-\lambda\mathbf{a}^\dagger} = \mathbf{a} - \lambda. \quad (2.12)$$

Montrons ce résultat. D'après les propriétés de \mathbf{a} et \mathbf{a}^\dagger (voir la propriété 2 paragraphe 1.3.1, p.20), on sait que

$$\left[e^{\lambda\mathbf{a}^\dagger}, \mathbf{a} \right] = -\lambda e^{\lambda\mathbf{a}^\dagger} \quad (2.13)$$

On achève de montrer 2.12 en multipliant à droite par $e^{-\lambda\mathbf{a}^\dagger}$. De la même façon,

$$\left[e^{\frac{\lambda}{2}\mathbf{a}^{\dagger 2}}, \mathbf{a} \right] = -\lambda\mathbf{a}^\dagger e^{\frac{\lambda}{2}\mathbf{a}^{\dagger 2}} \quad (2.14)$$

et donc,

$$e^{\frac{\lambda}{2}\mathbf{a}^{\dagger 2}}\mathbf{a}e^{-\frac{\lambda}{2}\mathbf{a}^{\dagger 2}} = \mathbf{a} - \lambda\mathbf{a}^\dagger \quad (2.15)$$

Grâce à ces résultats, il est évident de montrer que

$$e^{u\mathbf{a}^\dagger + \frac{1}{2}t\mathbf{a}^{\dagger 2}}\mathbf{a}e^{-(u\mathbf{a}^\dagger + \frac{1}{2}t\mathbf{a}^{\dagger 2})} = \mathbf{a} - t\mathbf{a}^\dagger - u \quad (2.16)$$

On pose

$$\mathbf{U} = e^{u\mathbf{a}^\dagger + \frac{1}{2}t\mathbf{a}^{\dagger 2}} \quad (2.17)$$

ce qui implique

$$\mathbf{U}^{-1} = e^{-(u\mathbf{a}^\dagger + \frac{1}{2}t\mathbf{a}^{\dagger 2})} \quad (2.18)$$

on a

$$\mathbf{b} = (1 - t^2)^{-1/2}\mathbf{U}\mathbf{a}\mathbf{U}^{-1}. \quad (2.19)$$

Remarquons que cette transformation est bien canonique puisque

$$\left[\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger \right] = \frac{1}{1 - t^2} \left[\mathbf{a} - t\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}^\dagger - t\mathbf{a} \right] = \frac{1}{1 - t^2} \left(\left[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \right] + t^2 \left[\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a} \right] \right) \quad (2.20)$$

$$\boxed{[\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger] = 1.}$$

(2.21)

On définit le vide $|HFB(u, t)\rangle$ par rapport à \mathbf{b} c'est-à-dire qu'il vérifie,

$$\mathbf{b}|HFB\rangle = 0. \quad (2.22)$$

L'expression 2.19 montre que l'état propre de \mathbf{b} dont la valeur propre est nulle est simplement (à une phase près fixée à 1 par convention)

$$|HFB\rangle = \mathbf{U}|OH\rangle \quad (2.23)$$

$$\boxed{|HFB\rangle = e^{u\mathbf{a}^\dagger + \frac{1}{2}t\mathbf{a}^{\dagger 2}}|OH\rangle.}$$

(2.24)

En effet, on a $\mathbf{b}|HFB\rangle = \mathbf{U}\mathbf{a}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}|OH\rangle = 0$. L'approximation de champ moyen consiste enfin à calculer u et t qui minimise la fonction d'énergie $E_0^{HFB} = \langle HFB|H|HFB\rangle$ pour obtenir une approximation de l'énergie et de l'état fondamental. L'action de \mathbf{b} sur $|HFB\rangle$ étant connue, il est plus facile d'exprimer H en fonction de \mathbf{b} puis de calculer cette énergie (voir chapitre 6 pour l'exemple d'un oscillateur perturbé par le potentiel $V(x) = gx^4$). Pour montrer l'équivalence avec l'approximation gaussienne, il suffit de calculer $|HFB\rangle$. Pour cela, on résout l'équation $\mathbf{b}|HFB\rangle = 0$ en représentation $|x\rangle$

$$\mathbf{b}|HFB\rangle = 0 \quad (2.25)$$

$$(\mathbf{a} - t\mathbf{a}^\dagger - u)|HFB\rangle = 0 \quad (2.26)$$

$$\left[\sqrt{\frac{\omega}{2}}\mathbf{X}(1-t) + \frac{i}{\sqrt{2\omega}}\mathbf{P}(1+t) - u \right] |HFB\rangle = 0 \quad (2.27)$$

$$\left[\omega \frac{1-t}{1+t}x + \partial_x - u \frac{\sqrt{2\omega}}{1+t} \right] \varphi_0^{HFB}(x) = 0 \quad (2.28)$$

où on a introduit $\varphi_0^{HFB} = \langle x|HFB\rangle$. Finalement,

$$\varphi_0^{HFB}(x) = c e^{-\left(\frac{\omega}{2} \frac{1-t}{1+t} x^2 - u \frac{\sqrt{2\omega}}{1+t} x\right)} = c' e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2}, \quad (2.29)$$

avec $x_0 = \frac{u}{1-t} \sqrt{\frac{2}{\omega}}$ et $\alpha = \omega \frac{1-t}{1+t}$. Cela achève de montrer que l'approximation HFB consiste bien en une approximation gaussienne, c'est-à-dire utilisant une fonction d'onde variationnelle gaussienne à deux paramètres.

MÉTHODE 3 :

Une dernière méthode d'approximation consiste à introduire deux paramètres variationnels directement dans le hamiltonien. Elle est également équivalente à l'approximation gaussienne. Repartons de le hamiltonien anharmonique H_V . On souhaite connaître d'une façon approchée la déviation induite par V de la valeur moyenne de \mathbf{X} et de l'énergie "nue" ω . Pour cela, on introduit un nouvel opérateur \mathbf{x} et une énergie Ω tels que

$$X = x + s \text{ avec } s = \langle 0|X|0\rangle \text{ où } |0\rangle \text{ est l'état fondamental exact de } H_V. \quad (2.30)$$

Remarquons que cette transformation est canonique car $[\mathbf{x}, \mathbf{P}] = i$ et de plus $\langle 0|x|0\rangle = 0$. On réécrit H_V

$$H_V = H_V(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = H_{OH} + V(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\mathbf{P}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\mathbf{X}^2 + V(\mathbf{X}) \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{P}^2 + \frac{1}{2}\Omega^2\mathbf{x}^2 + V(\mathbf{x} + s) + \frac{1}{2}\omega^2(\mathbf{x} + s)^2 - \frac{1}{2}\Omega^2\mathbf{x}^2 \quad (2.32)$$

$$H_V(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = H_0^{\Omega,s} + V(\mathbf{x} + s) + \frac{1}{2}\omega^2(\mathbf{x} + s)^2 - \frac{1}{2}\Omega^2\mathbf{x}^2 \quad (2.33)$$

avec

$$H_0^{\Omega,s} = \frac{1}{2}\mathbf{P}^2 + \frac{1}{2}\Omega^2\mathbf{x}^2. \quad (2.34)$$

Le hamiltonien $H_0^{\Omega,s}$ est celui d'un oscillateur harmonique qui nous permet d'introduire une base d'opérateur de création et de destruction $(\mathbf{b}^{\Omega,s}, \mathbf{b}^{\dagger\Omega,s})$ avec,

$$\mathbf{b}^{\Omega,s} = \sqrt{\frac{\Omega}{2}}\mathbf{x} + i\frac{1}{\sqrt{2\Omega}}\mathbf{P}, \quad (2.35)$$

ainsi qu'un vide $|OH^{\Omega,s}\rangle$ qui vérifie

$$\mathbf{b}^{\Omega,s}|OH^{\Omega,s}\rangle = 0.$$

L'approximation en question consiste à écrire

$$E_0^{\Omega,s} = \langle OH^{\Omega,s}|H_V|OH^{\Omega,s}\rangle \quad (2.36)$$

puis de minimiser par rapport à Ω et s . L'équivalence avec l'approximation HFB est immédiate. 2.35 avec 2.5, 2.6 et 2.30 nous permettent d'écrire $\mathbf{b}^{\Omega,s}$ en fonction de \mathbf{a} et \mathbf{a}^\dagger (opérateurs de l'oscillateur harmonique), Ω et s .

$$\mathbf{b}^{\Omega,s} = \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger) - s \right) - \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \sqrt{\frac{\omega}{2}}(\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}), \quad (2.37)$$

$$= \frac{\Omega + \omega}{2\sqrt{\omega\Omega}} \mathbf{a} + \frac{\Omega - \omega}{2\sqrt{\omega\Omega}} \mathbf{a}^\dagger - \frac{\Omega}{2\omega} s \quad (2.38)$$

Cette loi de transformation est linéaire, définissant bien une transformation de Bogoliubov. Cette méthode a l'avantage d'être intuitive, les paramètres étant introduits pour des considérations physiques (contrairement à la transformation HFB). Nous verrons pour la théorie $\lambda\Phi^4$ comment fonctionne précisément cette équivalence.

En conclusion, résumons les équivalences que nous avons et la façon de les utiliser. La méthode 3 consiste à introduire des opérateurs de création et de destruction d'un oscillateur déformé (déformation en énergie et valeur moyenne), transformation qui est unitaire vis-à-vis des opérateurs de création et de destruction de l'oscillateur initial et c'est donc exactement une transformation de Bogoliubov. Dans l'approximation HFB, on introduit les opérateurs après transformation de Bogoliubov, on écrit le hamiltonien dans l'ordre normal des b et l'énergie se calcule simplement. On a donc utilisé le théorème de Wick. L'approximation gaussienne procède exactement de la même façon, puisqu'on montrera dans le cas de l'approximation gaussienne en théorie des champs que intégrer l'opérateur hamiltonien sur une fonction gaussienne revient à prendre l'ordre normal des champs. En effet, les fonctions gaussiennes génèrent les termes du théorème de Wick.

Notons que ces résultats se généralisent assez aisément lorsque l'on a un problème avec plus de une dimension ou en problème à N corps. Tant que l'on peut définir des opérateurs de création et de destruction, ces méthodes s'appliqueront immédiatement en considérant les quantités précédemment introduites comme des vecteurs, par exemple, $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots)$.

2.2 Approximations du champ moyen en théorie des champs

Nous allons maintenant présenter l'approximation gaussienne en théorie des champs. L'oscillateur harmonique à une dimension nous a guidé vers cette approximation en mécanique quantique. Il est donc naturel de commencer par examiner une théorie des champs scalaires, sans interaction. Nous perturberons ensuite le lagrangien correspondant. Les généralisations pour des champs vectoriels avec symétrie globale sont relativement immédiates (par exemple pour le modèle σ -linéaire) mais se compliquent lorsque l'on a des symétries locales (ce qui impose aux états de respecter en plus une symétrie de jauge (voir [TVM99, Ste84, Ste87, SAT87, KMV93, LK02, ND01, IMSS96, HIMV00] pour des présentations généralistes de l'approximation gaussienne et des applications aux modèles $\lambda\Phi^4$, σ -linéaire et les théories de jauge).

2.2.1 Le champ scalaire libre classique et quantique

Pour introduire certaines notations, commençons par quelques rappels sur le champ scalaire libre en $1 + d$ dimensions [BS, PS].

Sa densité lagrangienne est la suivante (on note $R = (t, x)$ le quadri-vecteur position ; x

est un vecteur à d dimensions) :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi(R) \partial^\mu \Phi(R) - \frac{\mu_0^2}{2} \Phi^2(R). \quad (2.39)$$

On obtient les équations du mouvement (équations de Klein-Gordon)

$$\partial_\mu \Phi(R) \partial^\mu \Phi(R) + \frac{\mu_0^2}{2} \Phi^2(R) = 0. \quad (2.40)$$

On résout cette équation grâce à une transformée de Fourier définie par

$$P.R = P_\mu R^\mu \quad (P = (p_0, p)) \quad \text{et} \quad \Phi(R) = \int \frac{dP}{(2\pi)^{d+1}} e^{-iP.R} \Phi_P. \quad (2.41)$$

$$2.40 \Leftrightarrow (-P^2 + m^2) \Phi_P = 0 \Leftrightarrow \Phi_P = f(P) \delta(P^2 - \mu_0^2) \quad (f \text{ quelconque}). \quad (2.42)$$

$$\Leftrightarrow \Phi_P = \left(f(p, \sqrt{p^2 + \mu_0^2}) + f(p, -\sqrt{p^2 + \mu_0^2}) \right) \delta(P^2 - \mu_0^2) \quad (2.43)$$

$$\Leftrightarrow \Phi_P = 2\pi \delta(P^2 - \mu_0^2) [\theta(p_0) a(p) + \theta(-p_0) b(p)] \quad (2.44)$$

où on a introduit a et b deux fonctions quelconques de p et $\omega(p) = \sqrt{p^2 + \mu_0^2}$ (la fonction $\omega(p)$ est souvent notée d'une façon abusive p_0). Finalement,

$$\Phi(R) = \int d\tilde{p} \left(a(p) e^{-iP.R} + a^*(p) e^{iP.R} \right) \quad (2.45)$$

$$\text{avec la mesure invariante} \quad d\tilde{p} = \frac{dp}{2\omega(p)(2\pi)^3} \quad (2.46)$$

et en remarquant que $\Phi(R) \in \mathbb{R}$ (on étudie le champ scalaire *réel*) implique $b(-p) = a^*(p)$ (où $*$ est la conjugaison complexe). 2.45 s'inverse pour donner

$$a(p) = i \int dx e^{iP.R} \overleftrightarrow{\partial}_0 \Phi(R) \quad (\text{avec} \quad f \overleftrightarrow{\partial}_0 g \equiv f \partial_t g - (\partial_t f) g). \quad (2.47)$$

Remarquons que malgré un paramètre t dans la définition de a , a n'est pas une fonction du temps. Si ce n'était pas le cas, on aurait une contradiction avec le théorème de Noether, en effet, la charge T_μ (associée aux translations) s'écrit $T_\mu = \int d\tilde{p} P_\mu a^*(p) a(p)$ et doit être conservée.

En formalisme hamiltonien, on introduit le conjugué $\Pi_t = \partial \mathcal{L}_0 / \partial (\partial_0 \Phi(R))$ de la variable hamiltonienne $\Phi_t(x)$ et le hamiltonien est

$$H_0 = \int dx \frac{1}{2} \left(\Pi_t^2(x) + (\nabla \Phi_t)^2(x) + \mu_0^2 \Phi_t^2(x) \right) \quad (2.48)$$

D'après 2.47 on peut aussi introduire une autre paramétrisation hamiltonienne de l'espace des phases en terme de a et a^* dont l'équivalence est assurée par

$$a(p) = i \int dx e^{iP.R} (\Pi_t(x) - ip_0 \Phi_t(x)). \quad (2.49)$$

On a deux algèbres définies par (Π_t, Φ_t) et (a, a^*) avec les lois

$$\{\Phi_t(x), \Pi_t(y)\} = \delta(x - y) \quad (2.50)$$

et

$$\{a(k), a^*(k')\} = -i(2\pi)^d 2k_0 \delta(k - k') \quad (2.51)$$

(les autres crochets de Poisson étant nuls et l'abus de notation $k_0 \equiv \omega(k)$) qui permettent de quantifier canoniquement la théorie de champ sur un espace de Fock. On a donc pour les commutateurs à temps égaux

$$[\Phi(t, x), \Pi(t, x)] = i\delta(x - y) \quad (2.52)$$

ou

$$[\mathbf{a}(k), \mathbf{a}^\dagger(k')] = (2\pi)^d 2k_0 \delta(k - k') \quad (2.53)$$

(en remarquant que $\Phi(R) \in \mathbb{R}$ implique que Φ est hermitique et que $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^\dagger$ est bien l'adjoint de \mathbf{a}), les autres étant nuls. La seconde algèbre permet de fabriquer aisément l'espace de Fock en définissant $|0\rangle$ tel que $\forall k, \mathbf{a}(k)|0\rangle = 0$ (voir la section 1.3.1 pour la preuve de son existence) et les états excités par $|k_1 \cdots k_n\rangle = \sqrt{n!}^{-1} \mathbf{a}^\dagger(k_1) \cdots \mathbf{a}^\dagger(k_n)|0\rangle$ qui décrit un état à n particules d'impulsions k_1, \dots, k_n , complètement symétrique par échange de particules. On a donc un espace de Fock pour des bosons identiques (voir 1.7, p.22 l'expression explicite). On travaille donc préférentiellement dans cet espace de Fock, sachant que les deux représentations des algèbres canoniques (Π, Φ) et $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)$ sont équivalentes car la version quantique de 2.49, *i.e.*

$$\mathbf{a}(p) = i \int dx e^{iP.R} (\Pi(x, t) - ip_0 \Phi(x, t)), \quad (2.54)$$

est une transformation linéaire.

Remarquons que ces résultats se généralisent aisément au cas où Φ est en fait un vecteur. On peut introduire un opérateur Φ appartenant à l'espace de représentation d'un groupe, en assurant que le lagrangien admet ce groupe comme symétrie globale. Il faut alors redéfinir les produits du type $\Phi\Phi$.

2.2.2 État fondamental gaussien

On montre que en représentation fonctionnelle, on peut choisir $\Phi(t, x)$ comme la multiplication par $\Phi(t, x)$ et $\Pi(t, x) \equiv -i \frac{\delta}{\delta \Phi(t, x)}$ (par généralisation du lemme 2, paragraphe

1.3.1, p.20). Notons que désormais, on omet la variable temporelle lorsque l'on écrit ces opérateurs.

Par analogie avec la démarche précédente pour l'oscillateur harmonique quantique, commençons par montrer que l'état fondamental du lagrangien scalaire libre \mathcal{L}_0 est une fonctionnelle d'onde gaussienne.

L'équation qui détermine l'état fondamental $|0\rangle$ est

$$\forall \mathbf{a}(k), \mathbf{a}(k)|0\rangle = 0 \quad (2.55)$$

avec

$$\mathbf{a}(k) = \int dx e^{iK \cdot X} (\Pi - ik_0 \Phi)(t, x) \quad (2.56)$$

On cherche $|0\rangle$ sous la forme

$$|0\rangle \equiv \Psi_0[\Phi] = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2} \int k_0 \Phi^2(x) dx} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{a}(k)|0\rangle = \int dx e^{iK \cdot X} \left(\frac{\delta}{\delta \Phi} + k_0 \Phi \right) \Psi_0[\Phi] \quad (2.58)$$

$$\frac{\delta}{\delta \Phi} \Psi_0[\Phi] = \mathcal{N} \frac{\delta}{\delta \Phi} e^{-\frac{1}{2} \int k_0 \Phi^2(u) du} \quad (2.59)$$

$$= \frac{\delta}{\delta \Phi} \left(-\frac{1}{2} \int k_0 \Phi^2(u) du \right) \Psi_0[\Phi] \quad (2.60)$$

$$= \left(- \int k_0 \Phi(u) \delta_u du \right) \Psi_0[\Phi] \quad (2.61)$$

$$= -k_0 \Phi \Psi_0[\Phi] \quad (2.62)$$

donc on a bien

$$\forall k, \mathbf{a}(k)|0\rangle = 0. \quad (2.63)$$

La fonctionnelle d'onde du champ libre est gaussienne. Ainsi, selon la méthode présentée pour l'oscillateur anharmonique, nous allons chercher sous forme gaussienne la fonctionnelle d'onde de l'état fondamental pour un lagrangien avec un terme de potentiel anharmonique,

$$\mathcal{L}_V = \mathcal{L}_0 - V(\Phi(R)).$$

La fonctionnelle d'onde test gaussienne sera

$$\Psi^G[\varphi] = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2} \int (\Phi(x, t) - s) h(x - y) (\Phi(y, t) - s) dx dy} \quad (2.64)$$

avec $s \in \mathbb{R}$ et $h(x)$ une fonction paire. Remarquons que nous notons Φ la variable fonctionnelle. Comme vu dans l'équation 2.30, p.37, on sera amené dans le cadre de la troisième méthode à introduire un opérateur φ dont la valeur moyenne sur l'état fondamental exact est nul et $s = \langle \Phi \rangle$. Dans ce cadre fonctionnel, on introduit donc la fonction

$$\varphi(x, t) = \Phi(x, t) - s. \quad (2.65)$$

2.2.3 Transformée de Fourier et convention d'écriture

L'action des opérateurs est plus simple si on travaille dans l'espace de Fourier pour les coordonnées spatiales. Notons également que l'on omettra souvent la variable temporelle, pour ne pas alourdir les notations, ce qui ne pose pas de problèmes à partir du moment où l'on travaille avec des hamiltoniens "conservatifs" n'ayant pas de dépendance temporelle explicite. La dépendance temporelle est prise en compte grâce à la représentation de Heisenberg des opérateurs.

Dans cette section, on introduit des notations utiles dans toute la suite, valables tant pour des fonctions que pour des opérateurs de champs (attention, les facteurs des différentes transformées de Fourier sont différents) ainsi que quelques propriétés. φ désigne un champ et π son conjugué. On définit

$$\varphi_k = \int dx e^{-ikx} \varphi(x) \quad (2.66)$$

$$\pi_k = i \int dx e^{-ikx} \pi(x) \quad (2.67)$$

$$\varepsilon_k = \int dx e^{-ikx} h(x) \quad (2.68)$$

avec les formules d'inversion

$$\varphi(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^d} e^{ikx} \varphi_k \quad (2.69)$$

$$\pi(x) = -i \int \frac{dk}{(2\pi)^d} e^{ikx} \pi_k \quad (2.70)$$

$$h(x-y) = \int \frac{dk}{(2\pi)^d} e^{ik(x-y)} \varepsilon_k. \quad (2.71)$$

Notons que si $\varphi(x)$ représente par la suite un opérateur hermitique (ou la fonction $\varphi(x)$ une fonction à valeur réelle), $\varphi_k^\dagger = \varphi_{-k}$ et $\pi_k^\dagger = -\pi_{-k}$. Si $\varphi(x)$ et $\pi(x)$ sont des variables hamiltoniennes conjuguées, le seul commutateur non-nul (ou crochet de Poisson) est $[\varphi_k, \pi_{k'}] = (2\pi)^d \delta(k - k')$.

Introduisons également une autre notation usuelle. On a l'habitude, dans ce genre de calcul de placer le système dans une boîte de volume $V = L^d$. On sait que dans ce cas, on discrétise les vecteurs d'ondes et on a la relation $\sum_k = \int \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d dk$. Les relations

$\int e^{ikx} \frac{dx}{(2\pi)^d} = \delta(k)$ et $\sum_x e^{ikx} = \delta_{k,0}$ nous conduisent à poser les règles de correspondance

$\delta_{k,0} = \frac{(2\pi)^d}{V} \delta(k)$ et $\delta_{x,0} = \frac{V}{(2\pi)^d} \delta(x)$. On peut soit considérer que les expressions sont discrétisées car on est vraiment dans une boîte de volume fini, ou voir cela comme une notation pratique. Notons enfin que on peut prendre $V = 1$ pour ne pas alourdir les

notations (sauf dans l'annexe où sont donnés tous les résultats pour les fonctions de Green, car alors, le paramètre V est utile pour vérifier la cohérence des calculs). Ainsi, on a alors, $[\varphi_k, \pi_{k'}] = \delta_{k,k'}$. On peut remarquer que cette équation semble inhomogène aux dimensions mais c'est parce que l'on a posé $V = 1$. Pour conserver exactement cette relation, on peut introduire une constante $1/\sqrt{V}$ dans les décompositions de Fourier de φ et π .

Prenons par exemple l'opérateur de destruction du champ scalaire, $a(p) = i \int dx e^{ip_0 t} e^{-ip \cdot x} (\Pi(x) - ip_0 \Phi(x))$. En représentation de Heisenberg,

$$\mathbf{a}(p, t) = \int dx e^{-ip \cdot x} (i\Pi(x) + p_0 \Phi(x)) = \mathbf{\Pi}_p + p_0 \mathbf{\Phi}_p. \quad (2.72)$$

On a $[\mathbf{a}(p, t), \mathbf{a}^\dagger(p', t)] = (2\pi)^d 2p_0 \delta(p - p') = 2k_0 \delta_{p,p'}$. On définit maintenant une normalisation plus commode en pratique de \mathbf{a} .

$$\mathbf{a}_p(t) \equiv \frac{\mathbf{a}(p, t)}{\sqrt{2p_0}} = \sqrt{\frac{p_0}{2}} \mathbf{\Phi}_p + \sqrt{\frac{1}{2p_0}} \mathbf{\Pi}_p \quad (2.73)$$

qui vérifie $[\mathbf{a}_p(t), \mathbf{a}_{p'}^\dagger(t)] = \delta_{p,p'}$. Cette forme est appelée l'opérateur de destruction discrétisé.

Il faut signaler que cette notation s'étend trivialement au cas où φ est un vecteur et pourra être appliquée par exemple dans le cas du modèle σ -linéaire, en introduisant un indice vectoriel.

2.2.4 Approximation gaussienne

La fonctionnelle gaussienne (2.64) nous permet de définir l'approximation gaussienne comme étant la minimisation de la fonctionnelle d'énergie $E^{GEP} = \langle \Psi^G | H | \Psi^G \rangle$ (la notation courante GEP signifie "gaussian effective potential").

Cette fonctionnelle est le vide pour des opérateurs \mathbf{b}_k que l'on cherche sous la forme d'une combinaison linéaire des opérateurs Φ et Π d'une façon analogue à la mécanique quantique. On montre que

$$\mathbf{b}_k = \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{2}} \varphi_k + \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_k}} \Pi_k \quad (2.74)$$

avec ε_k défini à l'équation 2.68, convient. Remarquons que c'est bien le champ φ tel que $\Phi = \varphi + s$ qui apparaît.

Inversement,

$$\varphi_{\bar{q}} = \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_{\bar{q}}}} (\mathbf{b}_{\bar{q}} + \mathbf{b}_{-\bar{q}}^\dagger), \quad \Pi_{\bar{q}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\bar{q}}}{2}} (\mathbf{b}_{\bar{q}} - \mathbf{b}_{-\bar{q}}^\dagger). \quad (2.75)$$

Ainsi la transformation entre (Φ, Π) et $(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_k^\dagger)$ est une transformation à deux paramètres (s et ε) et unitaire (pour le montrer il suffit de calculer $[\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$). C'est donc une transformation de Bogoliubov.

On dit que l'on a introduit la base des quasi-particules de Bogoliubov d'énergie ε_q . La quasi-particule est l'état créé par un \mathbf{b}^\dagger agissant sur le vide et le préfixe "quasi" rappelle que par rapport aux particules physiques décrites par le champ Φ elle est en fait une excitation collective du champ.

2.3 L'approximation de la phase aléatoire

Nous allons d'abord présenter formellement le problème.

Dans un premier temps (paragraphe 2.3.1), nous allons établir une équation de Schrödinger non pas pour l'état du système mais pour un opérateur (dit opérateur d'excitation) dont l'application sur l'état fondamental du système nous donne un état excité. Ce sont les équations du mouvement, qui sont exactes.

Ensuite, nous verrons (paragraphe 2.3.2) comment à partir de cette équation exacte, on établit l'approximation de la phase aléatoire ou RPA qui permet de calculer d'une façon approchée l'opérateur d'excitation.

À partir de cette approximation, on construit une approximation non plus dans un formalisme opératoire mais grâce à des fonctions de Green dont l'usage est plus simple en théorie des champs et plus adapté à l'étude des transitions de phase.

Enfin, nous présenterons différentes façons de mettre en œuvre la RPA. En particulier, nous nous attacherons à montrer comment clore mathématiquement et d'une façon cohérente le système d'équations RPA.

2.3.1 Établissement des équations du mouvement

Soit \mathbf{H} un opérateur hamiltonien sur un espace de Fock \mathcal{F} et $\{|\nu\rangle\}$ ses états propres, normalisés. $|0\rangle$ est l'état fondamental de ce hamiltonien.

On peut *a priori* définir un ensemble d'opérateurs $\{Q_\nu^\dagger\}_\nu$ tel que :

$$\begin{aligned} Q_\nu^\dagger|0\rangle &= |\nu\rangle \\ Q_\nu|0\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.76}$$

Cet ensemble existe puisque $Q_\nu^\dagger = |\nu\rangle\langle 0|$ satisfait aux conditions 2.76.

Nous allons maintenant établir une équation différentielle permettant de déterminer Q et E_ν .

Nous cherchons à calculer la quantité :

$$E_\nu = \langle \nu | \mathbf{H} | \nu \rangle$$

Or, partant de l'équation aux valeurs propres $H|\nu\rangle = E_\nu|\nu\rangle$, remplaçant ν par $Q_\nu^\dagger|0\rangle$, on obtient

$$\mathbf{H}Q_\nu^\dagger|0\rangle = E_\nu Q_\nu^\dagger|0\rangle.$$

On souhaite obtenir une équation contenant la différence $E_\nu - E_0$, ainsi, on introduit le commutateur $[H, Q_\nu^\dagger]$ et en faisant agir \mathbf{H} sur le vide, on obtient,

$$[\mathbf{H}, Q_\nu^\dagger]|0\rangle = (E_\nu - E_0)Q_\nu^\dagger|0\rangle, \quad (2.77)$$

ou encore, en multipliant par Q_ν ,

$$Q_\nu [\mathbf{H}, Q_\nu^\dagger]|0\rangle = (E_\nu - E_0)Q_\nu Q_\nu^\dagger|0\rangle. \quad (2.78)$$

$Q_\nu|0\rangle$ étant égal à zéro, on peut introduire dans l'équation précédente un commutateur imbriqué,

$$[Q_\nu, [\mathbf{H}, Q_\nu^\dagger]]|0\rangle = (E_\nu - E_0)[Q_\nu, Q_\nu^\dagger]|0\rangle. \quad (2.79)$$

Finalement, on multiplie par $\langle 0|$, en remarquant que $\langle 0|[Q_\nu, Q_\nu^\dagger]|0\rangle = \langle \nu|\nu\rangle = 1$,

$$\langle 0|[Q_\nu, [\mathbf{H}, Q_\nu^\dagger]]|0\rangle = (E_\nu - E_0) \quad (2.80)$$

(voir [Row68] où ces équations sont introduites pour la première fois). Remarquons ici que le double commutateur $[Q_\nu, [\mathbf{H}, Q_\nu^\dagger]]$ s'interprète comme l'opérateur donnant l'énergie du mode $|\nu\rangle$ par rapport à l'énergie du fondamental. Il est commode d'écrire les équations avec des commutateurs et des doubles commutateurs pour des raisons de symétrie.

Considérons maintenant une variation δQ de l'opérateur Q . On multiplie 2.77 par $\langle 0|\delta Q$, on pose $\Omega_\nu = E_\nu - E_0$ et on obtient (en introduisant les commutateurs de la même façon que précédemment)

$$\langle 0|[\delta Q, [\mathbf{H}, Q_\nu^\dagger]]|0\rangle = \Omega_\nu \langle 0|[\delta Q, Q_\nu^\dagger]|0\rangle. \quad (2.81)$$

Cette équation est appelée équation du mouvement, car elle est l'analogue pour Q de l'équation au valeur propre de H lorsque $\delta Q|0\rangle$ parcourt tout l'espace de Hilbert.

Notons la propriété suivante,

$$\langle 0|[\mathbf{H}, Q_\nu^\dagger]|0\rangle = 0 \quad (2.82)$$

qui nous permettra de fixer des règles de consistance de l'approximation *via* des équations dites de champ moyen généralisé.

2.3.2 Approximation pour l'opérateur d'excitation

À partir de l'équation 2.81, on va déduire une manière approchée de calculer l'opérateur d'excitation. *A priori*, cette méthode est variationnelle, mais on verra dans la section 2.4 que en pratique, les résultats de la RPA ne satisfont pas au critère de Ritz.

L'idée de la méthode est d'écrire un développement de l'opérateur Q_ν puis l'injecter dans les équations du mouvement. C'est donc une méthode variationnelle au sens où l'on va

explorer l'espace de Hilbert à la recherche des minima de l'énergie qui nous donneront des valeurs approchées de cette énergie (le critère de Ritz sera discuté ultérieurement, quand nous aurons dégagé les méthodes permettant de calculer l'énergie de l'état fondamental).

L'ensemble des opérateurs sur l'espace de Fock \mathcal{F} admet une base (supposée dénombrable) $\mathcal{B} = \{\mathbf{B}_i\}_{i \in I = \mathbb{N}}$ d'opérateurs (par exemple, l'ensemble des opérateurs de création et de destruction de l'oscillateur harmonique ou du champ scalaire libre constitue une telle base). Notons ici une facilité d'écriture. On dit que la base \mathcal{B} est dénombrable au sens où ses éléments sont de la forme $\mathbf{B}_i \propto (\mathbf{a}^\dagger)^l (\mathbf{a})^m$, l et m sont entiers. Pour les champs scalaires, \mathbf{a} est une fonction de l'impulsion et donc \mathbf{B}_i est une fonction d'un certain nombre d'impulsions. Les premiers éléments de \mathcal{B} sont $\{\mathbb{1}, \mathbf{a}(p), \mathbf{a}^\dagger(p), \mathbf{a}(p)\mathbf{a}(p'), \dots\}$. Explicitement on a $\mathbf{B}_0 = \mathbb{1}$, $\mathbf{B}_1 \equiv \mathbf{B}_1(p) = \mathbf{a}(p)$, $\mathbf{B}_2 \equiv \mathbf{B}_2(p) = \mathbf{a}^\dagger(p)$, $\mathbf{B}_3 \equiv \mathbf{B}_3(p, p') = \mathbf{a}(p)\mathbf{a}(p')$, etc.

On peut donc *a priori* écrire un développement de \mathbf{Q} de la forme suivante :

$$\mathbf{Q}_\nu = \sum_{i \in I} q_{i,\nu} \mathbf{B}_i. \quad (2.83)$$

Cette somme sur l'indice i est une notation formelle commode. Elle signifie que l'on somme sur les différents éléments de la base \mathcal{B} mais également sur les nombres quantiques des opérateurs \mathbf{a} et \mathbf{a}^\dagger . L'indice i est donc un indice composite. Par exemple, pour les champs scalaires, les premiers termes du développement sont

$$\mathbf{Q}_\nu = q_{0,\nu} \mathbf{B}_0 + \int d\tilde{p} (q_{1,\nu}(p) \mathbf{B}_1(p) + q_{2,\nu}(p) \mathbf{B}_2(p)) + \int d\tilde{p} d\tilde{p}' q_{3,\nu}(p, p') \mathbf{B}_3(p, p') \dots \quad (2.84)$$

où on remarque que les coefficients q du développement sont également fonction des impulsions. Une notation plus précise (mais que nous n'utiliserons pas par la suite car elle est plus lourde et la notation simplifiée ne prête pas à confusion) serait

$$\mathbf{Q}_\nu = \sum_{i \in I} \sum_{\{i\}} q_{\{i\},\nu} \mathbf{B}_{\{i\}} \quad (2.85)$$

où $\{i\}$ est l'ensemble des nombres quantiques décrits par l'indice i et où $\sum_{\{i\}}$ peut représenter

des intégrales si certains nombres quantiques sont continus.

Remarquons que en introduisant les vecteurs $\mathfrak{B} = (\mathbf{B}_i)_i$, $\mathfrak{Q} = (\mathbf{Q}_i)_i$ et la matrice $\mathfrak{q} = (q_{i,j})_{i,j}$, on peut écrire

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{q} \mathfrak{B} \quad (2.86)$$

et si l'inverse de \mathfrak{q} existe, on a

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{q}^{-1} \mathfrak{Q}. \quad (2.87)$$

Il y a bien sûr autant de vecteurs $\vec{q}_\nu = (q_{i,\nu})_{i \in I}$ que d'états excités $|\nu\rangle$. Dans le cas où le spectre de H comporte une partie continue, il est possible de généraliser cette écriture mais nous nous restreindrons au cas discret dans cette étude (voir [KSGVG02] pour l'application au cas continu, dans l'étude des résonances géantes). On injecte 2.83 dans les équations du

mouvement 2.81 et on obtient un système d'équations couplées que l'on projette sur chaque variation $\delta q_{i,\nu}$. Cela nous permet d'écrire formellement un système matriciel d'équations

$$\mathcal{H}\vec{q}_\nu = \Omega\mathfrak{N}\vec{q}_\nu, \quad (2.88)$$

où \mathcal{H} est une matrice de doubles commutateurs du type $[\mathbf{B}_i, [H, \mathbf{B}_j^\dagger]]$. En vertu de 2.82, qui implique que

$$\forall i, [H, \mathbf{B}_i] = 0, \quad (2.89)$$

elle est symétrique. 2.89 sont appelées équations de champ moyen généralisées. Ω est une matrice diagonale dont les éléments sont de la forme $E_\nu - E_0 = \Omega_\nu$. \mathfrak{N} est une matrice de commutateurs de la forme $[\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j^\dagger]$, appelée matrice norme.

Le système d'équations

$$(\mathfrak{N}^{-1}\mathcal{H} - \Omega)\vec{q}_\nu = 0, \quad (2.90)$$

permettrait alors de calculer les énergies Ω comme condition d'existence des solutions de ce système (annulation des mineurs de $\mathfrak{N}^{-1}\mathcal{H} - \Omega$). Elles seraient calculées en fonctions des inconnues du problème, c'est-à-dire les éléments de matrice de \mathcal{H} et \mathfrak{N} .

Un schéma d'approximation de ce problème consiste à tronquer le développement de \mathcal{Q}_ν à un certain ordre et le système matriciel serait de dimension finie.

Ce résultat formel appelle trois remarques.

1. La matrice \mathfrak{N} n'est pas forcément inversible. La condition d'inversibilité de \mathfrak{N} impose des restrictions au développement. 2.83
2. Comment calculer les éléments de matrice de \mathcal{H} et \mathfrak{N} . Ces coefficients sont calculables si on connaît le vide exact du hamiltonien. La façon dont est réglé ce deuxième point va donner naissance aux différents schémas RPA (paragraphe 2.4).
3. Notons enfin que l'on cache dans cette dérivation formelle la haute non-linéarité du problème (voir paragraphe suivant sur la RPA autocohérente 2.4.3).

Le point 1 nous conduit à imposer la condition suivante :

Condition 1 (Inversibilité de \mathfrak{N}) La matrice norme \mathfrak{N} doit être inversible, restreignant ainsi le développement de \mathcal{Q} .

Ainsi, la RPA basée sur les équations du mouvement (ou méthode des amplitudes RPA) est la suivante. Partant d'un hamiltonien et d'un ensemble d'opérateurs de création et de destruction (a, a^\dagger), éventuellement comportant plusieurs nombres quantiques (par exemple, en théorie des champs, l'invariance de Poincaré nous indique que ces opérateurs possèdent un indice d'impulsion k , continue; si le système est invariant sous SU(2), il faut rajouter un indice d'isospin supplémentaire, etc), on écrit un développement fini de \mathcal{Q} de la forme

$$\mathcal{Q}_\nu = \sum_a [X_a^\nu \mathbf{A}_a - Y_a^\nu \mathbf{A}_a^\dagger] \quad (2.91)$$

(où a est un indice composite décrivant les différents nombres quantiques dont dépendent les excitations RPA). Les coefficients X et Y sont appelés les amplitudes RPA. L'ensemble $\{A_a\}$ est appelé ensemble d'excitation RPA et ses éléments doivent vérifier la condition 1. Cela revient à imposer la propriété suivante,

$$\forall \mathbf{A} \in \{A_a\}, \mathbf{A}^\dagger \notin \{A_a\}.$$

c'est-à-dire que \mathbf{A}_i doit être non-hermitique. En particulier, l'opérateur nombre de quanta ou nombre d'occupation $\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ ne peut être inclus dans l'ensemble des excitations. Cela est à l'origine d'une difficulté centrale de la méthode RPA, le calcul du (ou des) nombre d'occupation $\langle \mathbf{N} \rangle$. En théorie des champs, un problème identique se pose pour la densité scalaire.

Les excitations RPA nous servent d'opérateurs-tests variationnels, afin d'explorer l'espace de Hilbert à la recherche de la meilleure approximation pour \mathbf{Q} . Par exemple, on peut prendre $\mathbf{A}_a^\dagger = \mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger \dots$ (dans notre cas, en théorie des champs, a représentera un ensemble d'impulsion et l'indice $-a$ signifie que l'on inverse toutes les impulsions représentées par a ; par exemple, soit \vec{k} et \vec{k}' deux impulsions, si $a = (\vec{k}, \vec{k}')$ alors, $-a = (-\vec{k}, -\vec{k}')$). Plus il y a de termes dans l'ensemble $\{\mathbf{A}\}$ plus l'espace de Fock exploré est grand et la méthode précise.

On doit alors écrire le système des équations RPA (différent de 2.88 car il est doublement matriciel, vu la forme particulière 2.91), en tenant compte des équations de champ moyen généralisées 2.89. La résolution du système d'équations permet de calculer les amplitudes RPA X et Y ainsi que les énergies Ω c'est à dire les modes excités du système. On a accès à autant de modes excités qu'il y a d'opérateurs d'excitation. On obtient donc une expression approchée de l'opérateur \mathbf{Q} et bien sûr, les relations 2.76 ne sont plus automatiquement vérifiées. Cependant, les opérateurs \mathbf{Q} et \mathbf{Q}^\dagger vérifiant une algèbre d'opérateurs de création et destruction (relations du type $[\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^\dagger] \in \mathbb{C}$), on peut introduire le vide de ces opérateurs, $|RPA\rangle$ (voir le paragraphe 1.3.1 sur les propriétés de tels opérateurs). $|RPA\rangle$ est l'approximation de l'état fondamental exact $|0\rangle$ et vérifie

$$\forall \nu, \mathbf{Q}_\nu |RPA\rangle = 0. \quad (2.92)$$

Ces dernières équations permettent en principe de calculer $|RPA\rangle$ mais c'est souvent une tâche extrêmement complexe dont on peut se passer. Les états excités approchés se calculent alors comme :

$$|\nu\rangle_{RPA} = \mathbf{Q}_\nu^\dagger |RPA\rangle.$$

Pour obtenir des résultats physiques, il reste à définir un moyen pour calculer des corrélations du type $\langle 0 | \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^\dagger \dots \mathbf{A}_k | 0 \rangle$. Au niveau de l'approximation, il est naturel d'écrire,

$$\langle 0 | \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^\dagger \dots \mathbf{A}_k | 0 \rangle \simeq \langle RPA | \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^\dagger \dots \mathbf{A}_k | RPA \rangle. \quad (2.93)$$

La relation 2.91 peut être inversée pour exprimer les opérateurs \mathbf{A}_a en fonction des $\mathbf{Q}_\nu, \mathbf{Q}_\nu^\dagger$ et des amplitudes X_ν et Y_ν . Ainsi les éléments de matrice du type $\langle RPA | \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^\dagger \dots \mathbf{A}_k | RPA \rangle$

peuvent être calculés en exprimant les \mathbf{A} en fonction des \mathbf{Q} dont l'action sur le vide $|RPA\rangle$ est en principe connue. L'énergie du fondamental approchée $E_{RPA} = \langle RPA|H|RPA\rangle$ est en principe accessible *via* cette méthode. Notons que si l'on veut calculer des éléments de matrice à nombre élevé de corps, nous devons en tenir compte dans le choix de l'ensemble d'excitation RPA qui doit être assez vaste pour pouvoir les générer.

Avant de passer à une autre méthode de la RPA, regardons pour fixer les idées les équations obtenues si l'on pose

$$\mathbf{Q}_\nu = X_a^\nu \mathbf{A}_a - Y_a^\nu \mathbf{A}_{-a}^\dagger \quad (2.94)$$

(on utilise la convention d'Einstein; il y a une sommation implicite sur a). En particulier, cet exemple va nous montrer que en raison de la nature composite de l'indice a , les équations sont matricielles. Faisons varier \mathbf{Q} (on omet à présent l'indice ν)

$$\delta \mathbf{Q} = \delta X_a \mathbf{A}_a - \delta Y_a \mathbf{A}_{-a}^\dagger. \quad (2.95)$$

On injecte dans les équations du mouvement 2.81, en omettant le crochet de valeurs moyennes $\langle 0|\dots|0\rangle$ pour faciliter la lecture

$$\begin{aligned} & \left[\delta X_a \mathbf{A}_a - \delta Y_a \mathbf{A}_{-a}^\dagger, \left[\mathbf{H}, X_b \mathbf{A}_b^\dagger - Y_b \mathbf{A}_{-b} \right] \right] = \\ & \quad \Omega_\nu \left[\delta X_a \mathbf{A}_a - \delta Y_a \mathbf{A}_{-a}^\dagger, X_b \mathbf{A}_b^\dagger - Y_b \mathbf{A}_{-b} \right] \quad (2.96) \\ \Leftrightarrow & \left[\delta X_a \mathbf{A}_a, \left[\mathbf{H}, X_b \mathbf{A}_b^\dagger \right] \right] - \left[\delta X_a \mathbf{A}_a, \left[\mathbf{H}, Y_b \mathbf{A}_{-b} \right] \right] \\ & - \left[\delta Y_a \mathbf{A}_{-a}^\dagger, \left[\mathbf{H}, X_b \mathbf{A}_b^\dagger \right] \right] + \left[\delta Y_a \mathbf{A}_{-a}^\dagger, \left[\mathbf{H}, Y_b \mathbf{A}_{-b} \right] \right] = \\ & \quad \Omega_\nu \left(\left[\delta X_a \mathbf{A}_a, X_b \mathbf{A}_b^\dagger \right] + \left[\delta Y_a \mathbf{A}_{-a}^\dagger, Y_b \mathbf{A}_{-b} \right] \right) \quad (2.97) \end{aligned}$$

On a éliminé les termes $[\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_{-b}]$ et $[\mathbf{A}_{-a}^\dagger, \mathbf{A}_b^\dagger]$. En effet, nous avons ajouté une condition supplémentaire sur l'ensemble des opérateurs d'excitation :

Condition 2 (Commutation mutuelle des opérateurs d'excitation)

$$\forall(a, b), \quad [\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_{-b}] = 0.$$

Bien sûr, cela implique

$$\forall(a, b), \quad [\mathbf{A}_{-a}^\dagger, \mathbf{A}_b^\dagger] = 0.$$

Nous devons donc construire un ensemble d'excitation RPA tel que cette condition soit vérifiée. Une condition plus forte qu'on emploiera en pratique est la suivante :

$$\mathbf{A}^\dagger \text{ est un produit d'opérateurs de création uniquement.} \quad (2.98)$$

Ces équations sont de la forme

$$\delta\vec{X} \cdot \vec{A} = \delta\vec{Y} \cdot \vec{B} \quad (2.99)$$

et pour les résoudre, on réalise indépendamment les variations δX_a et δY_a c'est à dire qu'on va écrire deux équations vectorielles, en annulant pour l'une les variations δY_a et inversement pour l'autre (ce que nous avons appelé plus haut la projection sur les variations de X et Y). L'équation précédente est donc équivalente à

$$\delta\vec{X} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{et} \quad \delta\vec{Y} \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.100)$$

Les variations δX_a étant également indépendantes, on obtient finalement,

$$\vec{A} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{0}. \quad (2.101)$$

Le système d'équations RPA est donc équivalent à

$$X_b \left[\mathbf{A}_a, \left[\mathbf{H}, \mathbf{A}_b^\dagger \right] \right] - Y_b \left[\mathbf{A}_a, \left[\mathbf{H}, \mathbf{A}_{-b} \right] \right] = \Omega_\nu X_b \left[\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_b^\dagger \right] \quad (2.102)$$

$$\text{et} \quad -X_b \left[\mathbf{A}_{-a}^\dagger, \left[\mathbf{H}, \mathbf{A}_b^\dagger \right] \right] + Y_b \left[\mathbf{A}_{-a}^\dagger, \left[\mathbf{H}, \mathbf{A}_{-b} \right] \right] = \Omega_\nu Y_b \left[\mathbf{A}_{-a}^\dagger, \mathbf{A}_{-b} \right]. \quad (2.103)$$

On résume ces équations sous forme matricielle (rappelons qu'il faut voir ces équations comme un système matriciel par bloc),

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{ab} & \mathcal{B}_{ab} \\ \mathcal{B}_{-a-b}^* & \mathcal{A}_{-a-b}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \end{bmatrix} = \Omega_\nu \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{ab} & 0 \\ 0 & -\mathcal{N}_{-a-b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

où on a utilisé les notations (en réintroduisant à nouveaux les valeurs moyennes sur $|0\rangle$)

$$\mathcal{A}_{ab} = \langle 0 | [\mathbf{A}_a, [\mathbf{H}, \mathbf{A}_b^\dagger]] | 0 \rangle \quad (2.105)$$

$$\mathcal{B}_{ab} = -\langle 0 | [\mathbf{A}_a, [\mathbf{H}, \mathbf{A}_{-b}]] | 0 \rangle \quad (2.106)$$

$$\mathcal{N}_{ab} = \langle 0 | [\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_b^\dagger] | 0 \rangle. \quad (2.107)$$

Pour finir, revenons sur la condition supplémentaire 2.98 imposée aux excitations RPA. Si les termes non diagonaux de la matrice norme ne sont pas nuls (ce qui serait le cas si l'on n'impose pas cette condition), on ne peut pas écrire de condition de normalisation des excitations $|\nu\rangle$. Dans cette approche de la RPA (équation du mouvement), cette condition est indispensable et sera toujours remplie. Dans l'approche DEA, cette condition n'a pas à être satisfaite.

2.3.3 Équations de Dyson

À partir des opérateurs d'excitation RPA, précédemment introduits, l'idée est de trouver un ensemble d'équations de Dyson sur des fonctions de Green. L'avantage de ce formalisme mélangeant la description en termes d'opérateurs et en termes de kets est de permettre d'avoir une vision intrinsèquement plus cohérente des équations. Il n'y a pas, comme pour la méthode précédente, multiplicité d'inconnues (énergies Ω , \mathbf{Q} , vide $|RPA\rangle$, amplitudes, etc) à traiter de façon différente. Les fonctions de Green contiennent directement toutes les informations que l'on peut déduire du système. Le formalisme est également beaucoup plus naturel à utiliser en théorie des champs et permet une vision diagrammatique des choses.

Les désavantages existent bien sûr. En particulier, pour la théorie des champs, le système d'équations obtenu est fonctionnel et donc difficile à résoudre. Il ne s'agit plus d'équations non-linéaires mais d'équations fonctionnelles nécessitant des approximations supplémentaires. Cependant, la symétrie par des transformations du groupe de Poincaré va nous aider. En effet, la condition d'invariance (ou conservation de la masse au repos) $m^2 = E^2 - p^2$ (où E est une énergie et p une impulsion) va nous permettre de n'avoir que des équations implicites sur m à résoudre. Ici, les opérateurs tests \mathbf{A}_i ne sont plus employés pour rechercher directement les excitations et les énergies mais pour nous permettre de chercher dans l'espace des fonctions de Green, les fonctions les plus proches des fonctions de Green exactes.

À partir des fonctions de Green, on peut calculer toutes valeurs moyennes sur le vide, en particulier, l'énergie de l'état fondamental.

On utilise pour cela le théorème spectral 1.4.1, p.29 :

$$\langle \mathbf{B}\mathbf{A} \rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{i d\omega}{2\pi} e^{i\omega\eta} \mathfrak{G}_{A,B}(\omega). \quad (2.108)$$

Description de la méthode

Nous allons d'abord voir un énoncé formel de la méthode. On introduit donc les fonctions de Green pour les opérateurs \mathbf{B} du développement formel de \mathbf{Q}^\dagger (équation 2.83) :

$$\mathfrak{G}_{ij}(t - t') = -i \langle 0 | T (\mathbf{B}_i(t) \mathbf{B}_j^\dagger(t')) | 0 \rangle$$

où les opérateurs $\mathbf{B}(t)$ sont les représentations de Heisenberg des opérateurs \mathbf{B} ,

$$\mathbf{B}(t) = e^{iHt} \mathbf{B} e^{-iHt}. \quad (2.109)$$

En dérivant, on obtient une équation de Dyson [SDR97, SS99] (rappelons une dernière fois que nous utilisons en général la convention d'Einstein) :

$$i\partial_t \mathfrak{G}_{ij}(t - t') = \mathfrak{N}_{ij} \delta(t - t') + \mathcal{H}_{ik} \mathfrak{G}_{kj}(t - t') + \langle 0 | T(\mathbf{D}) | 0 \rangle, \quad (2.110)$$

$$\text{avec } \mathfrak{N}_{ij} = \langle 0 | [\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j]^\dagger | 0 \rangle \quad (2.111)$$

$$\text{et } \mathcal{H}_{ij} = \langle 0 | [[\mathbf{B}_i, \mathbf{H}], \mathbf{B}_k^\dagger] | 0 \rangle \mathfrak{N}_{kj}^{-1}. \quad (2.112)$$

Nous allons négliger le terme dynamique $\langle TD \rangle$ afin d'assurer l'équivalence avec le schéma RPA précédent et car il est d'ordre supérieur (il implique des fonctions de Green impliquant un nombre d'opérateurs de plus en plus grand) lorsqu'on écrit en pratique le système d'équations (voir la discussion dans un cas concret section 4.2.1, p.86). C'est de cette façon que l'on tronque la hiérarchie infinie de fonctions de Green (voir section 1.4, p.24).

Passons en transformée de Fourier par rapport à t et notant ω le conjugué, on obtient,

$$\omega \mathfrak{G}_{ij}(\omega) = \mathfrak{N}_{ij} + \mathcal{H}_{ik} \mathfrak{G}_{kj}(\omega). \quad (2.113)$$

Remarquons que contrairement à la méthode précédente, nous sommes déjà dans une approximation car nous avons négligé le terme dynamique. On ne va donc pas écrire de système formellement exact pour les fonctions de Green.

On voit que la condition d'inversibilité 1 doit être dès à présent satisfaite.

Examinons la structure des équations et leurs résolutions formelles. Ce sont des équations "doublement" matricielles (indice i, j parcourant l'ensemble des excitations RPA, indices qui peuvent être eux même composites et également continus) comme nous le verrons explicitement à la fin de cette section.

La résolution formelle du système est possible,

$$\omega \mathfrak{G}_{ij}(\omega) = \mathfrak{N}_{ij} + \mathcal{H}_{ik} \mathfrak{G}_{kj}(\omega) \quad (2.114)$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{H} - \omega \mathbb{1}) \mathfrak{G} = \mathfrak{N} \quad (2.115)$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{G} = (\mathcal{H} - \omega \mathbb{1})^{-1} \mathfrak{N} \quad (2.116)$$

Une condition supplémentaire s'impose pour que l'équivalence soit valide, $\mathcal{H} - \omega \mathbb{1}$ doit être inversible. Pour notre étude, ce sera le cas, dès que \mathfrak{N} l'est. En pratique, ajoutons que les équations de champ moyen généralisées 2.89 nous permettent de symétriser les doubles commutateurs.

Enfin, les inconnues du problème sont les mêmes que pour la méthode précédente, ce sont les coefficients de \mathcal{H} et \mathfrak{N} qui seront déterminés différemment selon le schéma envisagé. Le problème de non-linéarité des équations est également présent.

La résolution de ces équations permet de calculer les fonctions de Green du problème. D'après le théorème spectral, toutes les corrélations du type $\langle 0 | \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^\dagger | 0 \rangle$ sont donc calculables d'une façon approchée

$$\langle 0 | \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^\dagger | 0 \rangle \simeq i \int \frac{dE}{2\pi} \mathfrak{G}_{A_j^\dagger, A_i}(E). \quad (2.117)$$

Notons un point de vocabulaire. En vertu de cette formule, une valeur moyenne $\langle AB \rangle$ se calcule grâce à la fonction de Green $-i \langle T B(t) A(t') \rangle$ qui est une fonction de Green (ou fonction de corrélation) à deux temps donc un propagateur à un corps. Par abus de langage, on dira que $\langle AB \rangle$ est une corrélation à *un* corps. Mais on emploiera également le terme de valeur moyenne à *deux* opérateurs ou à *deux* corps pour désigner $\langle AB \rangle$.

L'énergie du fondamental peut être calculée selon ce principe, pour peu que les fonctions de Green soient d'un ordre suffisamment élevé. Par exemple, si le hamiltonien comporte un

terme en \mathbf{a}^4 , il faut pouvoir calculer une fonction \mathfrak{G}_{aaaa} donc choisir un ensemble d'excitation suffisamment grand. Lorsque cet ensemble n'est pas assez large, une approximation supplémentaire permet de poursuivre le calcul. Par exemple, on factorise (comme on le verra en RPA renormalisée) les valeurs moyennes. Enfin, pour achever le lien avec la méthode précédente, notons que si l'on voulait introduire un vide approché $|RPA\rangle$, il faudrait lui imposer de vérifier

$$\forall(i, j), \langle RPA | \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^\dagger | RPA \rangle = i \int \frac{dE}{2\pi} \mathfrak{G}_{A_j^\dagger, A_i}(E). \quad (2.118)$$

Reprenons l'ensemble d'excitation du paragraphe précédent 2.94 (vérifiant donc les conditions d'inversibilité de la matrice norme). Les équations de Dyson (2.110) peuvent être réécrites dans une forme légèrement différente dans ce cas car on est naturellement amené à introduire quatre types de fonctions de Green,

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{a \bar{b}} &= -i \langle 0 | T (\mathbf{A}_a \mathbf{A}_b^\dagger) | 0 \rangle, \\ \mathfrak{G}_{a -b} &= -i \langle 0 | T (\mathbf{A}_a \mathbf{A}_{-b}) | 0 \rangle, \\ \mathfrak{G}_{-\bar{a} \bar{b}} &= -i \langle 0 | T (\mathbf{A}_{-a}^\dagger \mathbf{A}_b^\dagger) | 0 \rangle, \\ \mathfrak{G}_{-\bar{a} -b} &= -i \langle 0 | T (\mathbf{A}_{-a}^\dagger \mathbf{A}_{-b}) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Nous avons adopté la notation $\mathfrak{G}_{A_{-a}, A_b^\dagger} \equiv \mathfrak{G}_{-\bar{a} \bar{b}}$. Ces quatre types sont nécessaires afin que le système d'équations de Dyson soit clos.

On réécrit les équations 2.113

$$\omega \begin{bmatrix} \mathfrak{G}_{a\bar{b}} & \mathfrak{G}_{a-b} \\ \mathfrak{G}_{-\bar{a}\bar{b}} & \mathfrak{G}_{-\bar{a}-b} \end{bmatrix} = \mathfrak{N}_{ab} + \mathcal{H}_{ac} \begin{bmatrix} \mathfrak{G}_{c\bar{b}} & \mathfrak{G}_{c-b} \\ \mathfrak{G}_{-\bar{c}\bar{b}} & \mathfrak{G}_{-\bar{c}-b} \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ac} &= \begin{bmatrix} \langle 0 | [[\mathbf{A}_a, \mathbf{H}], \mathbf{A}_d^\dagger] | 0 \rangle & -\langle 0 | [[\mathbf{A}_a, \mathbf{H}], \mathbf{A}_{-d}] | 0 \rangle \\ -\langle 0 | [[\mathbf{A}_{-a}^\dagger, \mathbf{H}], \mathbf{A}_d^\dagger] | 0 \rangle & \langle 0 | [[\mathbf{A}_{-a}^\dagger, \mathbf{H}], \mathbf{A}_{-d}] | 0 \rangle \end{bmatrix} \mathfrak{N}_{dc}^{-1} \\ \text{et } \mathfrak{N}_{ad} &= \begin{bmatrix} \langle 0 | [\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_d^\dagger] | 0 \rangle & \langle 0 | [\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_{-d}] | 0 \rangle \\ -\langle 0 | [\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_{-d}] | 0 \rangle & -\langle 0 | [\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_d^\dagger] | 0 \rangle \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ce système nous permet en principe de calculer les fonctions de Green en fonction de valeurs moyennes du type $\langle 0 | a_i a_j^\dagger \cdots a_k | 0 \rangle$. Remarquons que l'introduction de quatre types de fonctions de Green donne une dimension matricielle supplémentaire au système.

2.4 Différents schémas de RPA

Nous avons établi deux systèmes d'équations RPA, l'un pour les amplitudes, l'autre pour les fonctions de Green. Ces systèmes ne sont pas mathématiquement clos car le vide exact $|0\rangle$ du hamiltonien est inconnu. Selon la façon dont on ferme le système, on obtient différentes approximations. On s'attachera dans cette section à montrer que les différents schémas que l'on peut construire sont bien clos. On verra aussi le caractère variationnel ou non des méthodes.

2.4.1 RPA standard

Le grand intérêt de l'approximation de champ moyen, outre la relative simplicité de sa mise en œuvre est qu'elle permet de calculer une valeur approchée du vide du système appelé vide de champ moyen $|V\rangle$. Il est également possible de calculer des opérateurs de créations et de destruction pour ce vide \mathbf{b}_α .

L'idée de la RPA standard (s-RPA ou "quasi-particle RPA") est de calculer les matrices norme et des double-commutateurs sur un vide connu. Plus précisément, il s'agira du vide HFB et on utilisera comme opérateurs d'excitation des produits de ces opérateurs $\mathbf{b}_\alpha^\dagger$. On remplacera dans les équations 2.104 et 2.119 le vide exact $|0\rangle$ par le vide de champ moyen $|HFB\rangle$. Ainsi, les valeurs moyennes qui étaient inconnues sont calculables d'une manière approchée (voir par exemple [HHC99]). Il faut faire attention à un point. Dans la section précédente, un seul vide entrainait en jeu, le vide exact $|0\rangle$. Ici, il faut travailler avec $|HFB\rangle$ dans le calcul des matrices \mathfrak{N} et \mathcal{H} . On écrit alors le système des équations RPA qui est linéaire en X et Y , ce qui nous permet de calculer les énergies Ω_ν des états excités par rapport au fondamental.

Il faut noter ici un problème apparent de cohérence du formalisme. Les équations de champ moyen généralisées, $\langle HFB|[H, A_i]|HFB\rangle = 0$ ne doivent pas être utilisées si l'on voulait calculer directement l'énergie de l'état fondamental grâce à la formule $E_{RPA} = \langle H \rangle$. Cette dernière n'est valable que lorsque le système RPA est fermé de façon autocohérente. Notons que si l'on souhaite calculer l'énergie de l'état fondamental, on peut utiliser dans le cadre de la bosonisation du hamiltonien et sous certaines conditions (voir [RS80], page 308) la formule

$$E_{RPA} \equiv E_{HF} - \frac{1}{2}\text{Tr} A + \frac{1}{2} \sum_{\nu} \Omega_{\nu} \quad (2.120)$$

où A est la matrice RPA (matrice des double-commutateurs).

Enfin, notons que nous verrons que le caractère variationnel de la méthode des amplitudes est perdu. En général, la s-RPA surestime les corrélations ce qui fait que l'énergie du fondamental est inférieure au résultat exact, brisant le critère de Ritz (voir paragraphe 2.5).

2.4.2 RPA renormalisée

L'approximation standard est très contraignante car en remplaçant le vide exact par le vide de champ moyen, on perd dans le calcul de \mathcal{H} et \mathfrak{N} toutes les corrélations présentes dans l'état fondamental.

L'idée de la RPA renormalisée (r-RPA) est de négliger dans le calcul des matrices \mathcal{H} et \mathfrak{N} les valeurs moyennes connectées (comme en RPA standard) mais en conservant les valeurs moyennes à deux corps exactes (et non plus celle calculées dans le champ moyen).

Ainsi, dans la factorisation suivante ¹,

$$\left\langle \prod_{i=1}^{2n} \mathbf{O}_i \right\rangle = \left\langle \prod_{i=1}^{2n} \mathbf{O}_i \right\rangle^c + \sum_{\text{contractions } \sigma} \eta^\sigma \prod_{i=1}^n \langle \mathbf{O}_{\sigma(i)} \mathbf{O}_{\sigma(i+1)} \rangle \quad (2.121)$$

$$\text{et } \left\langle \prod_{i=0}^{2n+1} \mathbf{O}_i \right\rangle = \left\langle \prod_{i=1}^{2n+1} \mathbf{O}_i \right\rangle^c + \sum_{\text{contractions } \sigma} \eta^\sigma \langle \mathbf{O}_{\sigma 0} \rangle \prod_{i=1}^n \langle \mathbf{O}_{\sigma(i)} \mathbf{O}_{\sigma(i+1)} \rangle \quad (2.122)$$

(où \mathbf{O}_i est un opérateur à un corps, $\mathbf{O} = a$ ou a^\dagger et η^σ est la signature de σ), on néglige les corrélations “connectées” c’est à dire, $\langle \dots \rangle^c = 0$. Par exemple, $\langle abcd \rangle = \langle ab \rangle \langle cd \rangle - \langle ac \rangle \langle bd \rangle + \langle ad \rangle \langle bc \rangle$.

En termes de diagramme d’un propagateur à N particules, on ne va retenir que les produits de propagateurs à une particule. Les autres diagrammes (termes connectés de la fonction) vont être négligés.

En pratique, on travaillera non pas avec \mathbf{a} et \mathbf{a}^\dagger mais dans une autre base d’opérateur $(\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger)$ tel que $\langle \mathbf{b} \rangle$ et $\langle \mathbf{b}^\dagger \rangle$ soient toujours nulles (par exemple, on introduit une rotation de Bogoliubov de la base $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger)$). Ainsi les valeurs moyennes dans les double-commutateurs pour un nombre impair de corps seront nulles dans cette approximation.

Pour fermer le système d’équations il reste à calculer le nombre d’occupation c’est-à-dire la valeur moyenne à deux opérateurs $\langle 0 | \mathbf{b} \mathbf{b}^\dagger | 0 \rangle$. Remarquons que nous n’avons pas introduit d’approximation directement sur le vide. Le nombre d’occupation est en principe exact, calculé sur le vrai vide.

Notons enfin que cette méthode brise également le principe variationnel.

Méthode des amplitudes

Pour la méthode des amplitudes, il s’agit d’exprimer les nombres d’occupation en fonction des amplitudes. Par exemple, on peut utiliser le théorème de Thouless (exprimant le vide corrélé $|RPA\rangle$ en fonction du vide sans corrélation de champ moyen), un développement bosonique (au premier ordre comme Catara [CDS94] ou à un ordre supérieur [RBCS02]), etc. Ces méthodes utilisent une bosonisation, c’est à dire, on fait l’approximation que les opérateurs d’excitation vérifient des relations de commutation bosonique $[\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j^\dagger] = \delta_{ij}$. Remarquons que alors, le système d’équations déterminant les amplitudes RPA devient non-linéaire et peut être résolu par itération.

Approche des équations de Dyson

Dans le formalisme des fonctions de Green, il s’agit d’imposer des conditions d’autoco-hérence du système comme

$$\langle 0 | \mathbf{b} \mathbf{b}^\dagger | 0 \rangle \simeq i \int \frac{dE}{2\pi} \mathfrak{G}_{\mathbf{b}^\dagger, \mathbf{b}}(E). \quad (2.123)$$

¹lorsque on ne le précise pas explicitement, les valeurs moyennes seront calculées sur le vide exact $|0\rangle$: $\langle \dots \rangle = \langle 0 | \dots | 0 \rangle$.

Ces conditions s'imposent d'une façon naturelle, mais nous ne pouvons pas procéder ainsi dans le cas du modèle $\lambda\Phi^4$, traité avec des excitations RPA à deux corps. En effet, si on applique brutalement cette formule, il apparaît une incohérence dans les équations (que nous montrerons explicitement dans le cas de l'oscillateur anharmonique, voir 6.4.2, p.144).

Le théorème spectral ci-dessus sera utilisé pour le calcul des valeurs moyennes à trois et quatre corps dans le calcul de l'énergie. Pour les nombres d'occupation (valeurs moyennes à deux corps), on l'utilisera pour fermer le système RPA. On verra qu'on introduit ainsi les corrélations induites par le condensat.

La contribution des nombres d'occupation est prise en compte uniquement dans le champ moyen généralisé, c'est-à-dire le champ moyen pour la base d'opérateurs $(\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger)$ satisfaisant à l'équation de champ moyen généralisé $\langle [H, \mathbf{b}\mathbf{b}] \rangle = 0$.

2.4.3 RPA autocohérente

La RPA autocohérente (SCRPA) a pour but d'incorporer dans le calcul toute les corrélations à l'ordre de l'approximation RPA considérée (voir [DS90] pour une première introduction de la méthode ou [Feu00]).

Pour clore le système d'équations, il s'agit de trouver une façon de calculer les corrélations d'un nombre quelconque de corps.

Pour la méthode des amplitudes, on part de la définition du vide RPA, $\mathbf{Q}_\nu^\dagger |RPA\rangle = 0$ et de l'inversion de l'opérateur RPA (2.87), formellement,

$$\mathbf{Q}_\nu^\dagger = f(\{X_i^\nu, Y_i^\nu, \mathbf{A}_i\}_{\{i\}}) \text{ s'inverse pour donner } \mathbf{A}_i = f^{-1}(\{X_i^\nu, Y_i^\nu, \mathbf{Q}_\nu\}_{\{\nu\}}). \quad (2.124)$$

Or, le hamiltonien se met sous la forme (pour peu que l'ensemble d'excitation RPA soit suffisant)

$$H = H(\{\mathbf{A}_i^\dagger, \mathbf{A}_i\}_{\{i\}}). \quad (2.125)$$

On définit l'énergie approchée RPA,

$$E_{RPA} = \langle RPA | H | RPA \rangle \quad (2.126)$$

qui est calculable puisque l'action de \mathbf{Q} sur le vide est connu et que on peut normaliser \mathbf{Q} et \mathbf{Q}^\dagger tel que $\langle [\mathbf{Q}_\nu, \mathbf{Q}_\mu^\dagger] \rangle = \delta_{\mu\nu}$.

Notons que cette méthode ne brise en principe pas le principe variationnel et satisfait le critère de Ritz.

Pour les équations de Dyson, le théorème spectral permet de fermer d'une façon autocohérente le système.

Bien sûr, ces méthodes sont très complexes à appliquer, tant au plan théorique que numérique ou analytique. Très peu de systèmes ont reçu un traitement SCRPA complet (voir [DRS98, KPD⁺98, DS99, DDS⁺00, PTPK98, BSC⁺01, HMDS02, RBCS02] par exemple, pour des applications de la SCRPA discutant en détail le problème du calcul du nombre d'occupation).

2.5 Nombre d'occupation et statut du critère de Ritz en RPA

Dans le formalisme basé sur les équations du mouvement, nous avons non pas un ensemble de fonction-tests, mais un ensemble d'opérateur-tests. L'esprit de l'approximation est de calculer les opérateurs \mathbf{Q}_ν^\dagger qui créent les états excités approchés $|\tilde{\nu}\rangle$ et donc le critère de Ritz (voir 1.5, p.32) peut *a priori* s'appliquer en considérant comme fonction-tests les $|\tilde{\nu}\rangle$ et l'état fondamental $|RPA\rangle$.

En fait, le problème vient de la façon dont on calcule l'énergie. Considérons par exemple l'énergie de l'état fondamental approché \tilde{E}_0 . Si on peut écrire $\tilde{E}_0 = \langle RPA|H|RPA\rangle$, le critère de Ritz est valable puisque 1.65 est valable quelque soit $|\Psi\rangle$. Mais en pratique, on ne détermine pas $|RPA\rangle$ explicitement.

Examinons ce que l'on fait en pratique pour voir dans quelle mesure ce critère est valable. En RPA standard avec bosonisation, il est possible d'écrire ([RS80], p.308) un hamiltonien bosonisé H_B dont le spectre donne les valeurs approchées du hamiltonien exact H . Si on choisit des excitations fermioniques du type \mathbf{a}^\dagger_{mi} , on peut les remplacer par un boson \mathbf{B}^\dagger_{mi} vérifiant des relations de commutations canoniques et faire un développement bosonique du hamiltonien. Alors,

$$H_B = E_{HF} - \frac{1}{2}\text{Tr}A + \sum_{\nu} \Omega_{\nu}(\mathbf{O}_{\nu}^\dagger \mathbf{O}_{\nu} + \frac{1}{2}) \quad (2.127)$$

où E_{HF} est l'énergie dans l'approximation Hartree-Fock, la matrice A est la matrice des valeurs moyennes sur l'état Hartree-Fock des double-commutateurs RPA et $(\mathbf{O}_{\nu}^\dagger, \mathbf{O}_{\nu})$ vérifie une algèbre d'opérateurs d'oscillateurs harmoniques. L'énergie du fondamental est (on définit la matrice des double-commutateurs \mathbf{DC} par $A = \langle HF|\mathbf{DC}|HF\rangle$)

$$E_{RPA} \equiv E_{HF} - \frac{1}{2}\text{Tr}A + \frac{1}{2} \sum_{\nu>0} \Omega_{\nu} \quad (2.128)$$

$$E_{RPA} = \langle HF|H - \frac{1}{2}\text{Tr}\mathbf{DC} + \frac{1}{2} \sum_{\nu} \Omega_{\nu}|HF\rangle. \quad (2.129)$$

La dernière expression est très formelle mais a l'avantage de montrer dans quel sens on va briser le plus souvent le principe variationnel en RPA. Ce n'est pas le fait d'utiliser la RPA standard (et donc $|HFB\rangle$ comme état propre test) qui pose problème. C'est le fait que les corrélations au-delà du champ moyen ne peuvent être incorporées que en modifiant le hamiltonien pour obtenir un hamiltonien effectif.

Remarquons enfin qu'il est admis que, en général, la RPA standard surévalue fortement la liaison. L'expression formelle précédente montre bien que les corrélations RPA ont tendance à abaisser l'énergie, car le terme $\text{Tr}A - \sum \Omega_{\nu}$ peut être exprimé en fonction du carré des amplitudes RPA Y_{mi}^{ν} (associées aux excitations \mathbf{a}^\dagger_{mi}),

$$E_{RPA} = E_{HF} - \sum_{\nu} \Omega_{\nu} \sum_{mi} |Y_{mi}^{\nu}|^2 \quad (2.130)$$

Dans le cas de la RPA renormalisée, les corrélations connectées étant négligées, il apparaît également un hamiltonien effectif qui brise le critère de Ritz.

Enfin, examinons le cas de la SCRPA. Encore une fois, on ne construit pas explicitement le vide $|RPA\rangle$, mais, au niveau de l'approximation considérée, on aura toujours exactement $Q|RPA\rangle = 0$ ce qui permet de calculer $\langle RPA|H|RPA\rangle$ et de vérifier *a priori* le critère de Ritz. Rappelons notre remarque de la section 2.4.3, « *l'ensemble d'excitation RPA [doit être] suffisant* ». En effet, il est possible que des termes du hamiltonien, par exemple contenant l'opérateur nombre d'occupation, ne soit pas exactement exprimable en fonction des Q et Q^\dagger . Par exemple, comme bb^\dagger est hermitique et ne peut être inclus dans l'ensemble d'excitation RPA, il ne peut être exprimé en fonction des Q, Q^\dagger . Il faut le calculer d'une autre façon (il existe des méthodes de développements approchés sur les excitations RPA). Le critère de Ritz ne peut plus être vérifié car on traite en quelque sorte un hamiltonien effectif.

Ainsi, dans les cas où le nombre d'occupation ne peut pas être inclus dans l'opérateur RPA, on ne peut pas dire que la SCRPA satisfait au critère de Ritz.

Ce problème du calcul du nombre d'occupation est au cœur de la RPA. Il faudra en général trouver une façon de les calculer au-delà de la RPA elle-même. Citons par exemple les méthodes de développement du nombre d'occupation en termes d'excitations RPA [SY71, Yam74, Feu00] ou par un calcul *via* la fonction de Green à une particule [DHS00]. Nous avons utilisé dans ce travail une adaptation de la “charging formula” permettant de fermer le système.

En pratique, la SCRPA donne d'excellents résultats vérifiant le critère de Ritz lorsque l'on peut les comparer avec le résultat exact.

Traitement non-perturbatif de la théorie $\lambda\Phi^4$ - Champ moyen

L'objectif de ce travail est de développer des techniques de calculs en théorie des champs non-perturbative. Pour mettre en place un formalisme systématique pour la théorie des champs, il est naturel de commencer par étudier la théorie non triviale la plus simple, le champ scalaire réel en interaction ou théorie $\lambda\Phi^4$. De plus ce modèle ayant été étudié non-perturbativement (théorie des champs sur réseau [JS95, LW98, MRL99], développement en clusters [HCPT96]) nous pourrons comparer nos résultats.

Après avoir présenté le modèle, nous appliquerons dans ce chapitre l'approximation de champ moyen et son extension à température finie à la théorie $\lambda\Phi^4$ en 1 + 1 dimensions [HCDS02].

3.1 La théorie $\lambda\Phi^4$

Pour le moment, soyons le plus général possible et considérons $\lambda\Phi^4$ en 1+3 dimensions, avec $\lambda > 0$. Sa densité lagrangienne est la suivante (on note X le quadri-vecteur position) :

$$\mathcal{L}_{\lambda\Phi^4}(\Phi(X), \partial^\mu\Phi(X)) = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi(X)\partial^\mu\Phi(X) - \frac{\mu_0^2}{2}\Phi^2(X) - \frac{\lambda}{4}\Phi^4(X). \quad (3.1)$$

3.1.1 Hamiltonien et paramètres variationnels

Tout d'abord, écrivons le hamiltonien de notre théorie, (x, t) étant le vecteur position et le paramètre temporel :

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\Pi_t^2 + (\nabla\Phi_t)^2 + \mu_0^2\Phi_t^2) + \frac{\lambda}{4}\Phi_t^4 \right].$$

Nous remarquons que ce lagrangien est symétrique dans le changement $\Phi \mapsto -\Phi$.

Pour procéder à l'approximation de champ moyen, nous allons introduire des paramètres variationnels. Notons $\langle \rangle$ l'élément de matrice dans l'état fondamental. s est la moyenne dans le vide de Φ et φ est le champ fluctuant :

$$\Phi = \varphi + s, \text{ tel que } s = \langle \Phi \rangle \text{ et } \langle \varphi \rangle = 0. \quad (3.2)$$

Par la suite, quelque soit le vide en jeu, on prendra $\langle\varphi\rangle = 0$. En effet, dans les approximations qui suivront, on aura toujours la possibilité d'écrire la relation $\Phi = \varphi + s$ où s sera le condensat dans l'approximation considérée (bien sûr différent du condensat "exact") vérifiant $s = \langle\Phi\rangle_{\text{approché}}$. On réécrit le hamiltonien, en introduisant la masse variationnelle m , avec $\nabla\Phi = \nabla\varphi$ et en notant également que le moment conjugué Π est le même calculé avec φ ou Φ .

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\Pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2) + \frac{\lambda}{4}\Phi^4 + \frac{\mu_0^2}{2}\Phi^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 \right].$$

Notons

$$H_m = \frac{1}{2} \int d^3x [\Pi^2 + (\nabla\varphi^2) + m^2\varphi^2].$$

Nous reconnaissons le hamiltonien d'un champ libre (voir la section 2.2.1), pour une masse m et donc, nous allons introduire les opérateurs de création et annihilation définis par ce hamiltonien (notés $\mathbf{b}(\vec{p})$ et $\mathbf{b}^\dagger(\vec{p})$ puisque dans le paragraphe 2.1, méthode 3, nous avons vu que ce sont en fait les opérateurs après une transformation de Bogoliubov). Précisons quelques points de notation. Nous avons introduit précédemment l'opérateur \mathbf{b}_k qui vérifie $[\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$ (équation 2.74, p.43). Ici on a $[\mathbf{b}(p), \mathbf{b}^\dagger(p')] = (2\pi)^3 2k_0 \delta(\vec{k} - \vec{k}')$ (d'après l'équation 2.53). La notation \mathbf{b}_p est différente de $\mathbf{b}(p)$. Dans le premier cas, on a normalisé l'opérateur pour avoir une relation de commutation plus simple (techniquement plus pratique). La deuxième écriture fait ressortir le caractère covariant de la théorie. Enfin, par commodité (pour ne pas avoir à écrire les facteurs $e^{ip_0 t}$), on introduit $\mathbf{b}(p, t)$ qui est l'opérateur \mathbf{b} en représentation d'interaction basée sur le hamiltonien H_m car $\mathbf{b}(p, t) = e^{-ip_0 t} \mathbf{b}(p)$. Très rapidement, on omettra la distinction entre $\mathbf{b}(p, t)$ et $\mathbf{b}(p)$ car par exemple, $\mathbf{b}(p, t) \mathbf{b}^\dagger(p, t) = \mathbf{b}(p) \mathbf{b}^\dagger(p)$. On appellera d'une façon imagée quasi-particule de masse m , une excitation créée par l'opérateur \mathbf{b}^\dagger . Décomposons sur cette base le champ φ (on utilise la notation $p_0 = \omega(\vec{p})$) :

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &= \int d\tilde{p} \left[e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \mathbf{b}(\vec{p}) + e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}, t) \right] \\ &= \int d\tilde{p} \left[e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left(\mathbf{b}(\vec{p}, t) + \mathbf{b}^\dagger(-\vec{p}, t) \right) \right] \end{aligned}$$

avec la mesure invariante $d\tilde{p} = \frac{d^3\vec{p}}{2p_0(2\pi)^3}$.

et

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{x}, t) &= \int d\tilde{p} (-i p_0) \left[e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \mathbf{b}(\vec{p}, t) - e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}, t) \right] \\ &= \int d\tilde{p} (-i p_0) \left[e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left(\mathbf{b}(\vec{p}, t) - \mathbf{b}^\dagger(-\vec{p}, t) \right) \right]. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{1}{2} \int d\tilde{p} p_0 \left(\mathbf{b}(\vec{p})\mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{b}(\vec{p}) \right) \\ &= \int d\tilde{p} p_0 \left[\mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{b}(\vec{p}) + \frac{1}{2}[\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})] \right]. \end{aligned}$$

et

$$H = H_m + \int d^3x \left[\frac{1}{2}\mu_0^2 s^2 + \frac{\lambda s^4}{4} + (\mu_0^2 s + \lambda s^3)\varphi + \frac{1}{2}(\mu_0^2 - m^2 + 3\lambda s^2)\varphi^2 + \lambda s\varphi^3 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \right].$$

Notons $\langle \dots \rangle$ l'élément de matrice $\langle 0_m | \dots | 0_m \rangle$, où $|0_m\rangle$ représente le vide des quasi-particules de masse m , c'est-à-dire, $\mathbf{b}(\vec{p})|0_m\rangle = 0$. Dans l'approximation du champ moyen on identifiera le vide vrai et ce vide.

En utilisant le théorème de Wick [BS] et où $: \dots :$ est l'ordre normal pour les \mathbf{b} et $\langle \varphi^2 \rangle_m$ est par définition la moyenne du carré du champ dans le vide des quasi-particules, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= : \varphi^2 : + \langle \varphi^2 \rangle_m \\ \varphi^3 &= : \varphi^3 : + 3\varphi \langle \varphi^2 \rangle_m \\ \varphi^4 &= : \varphi^4 : + 6 \langle \varphi^2 \rangle_m : \varphi^2 : + 3 \langle \varphi^2 \rangle_m^2, \\ \text{avec } \langle \varphi^2 \rangle_m &= \int d\tilde{p} d\tilde{p}' \langle \mathbf{b}(\vec{p})\mathbf{b}^\dagger(-\vec{p}') + \mathbf{b}^\dagger(-\vec{p}')\mathbf{b}(\vec{p}) \rangle_m \\ &= \int d\tilde{p} d\tilde{p}' (2\pi)^3 2 p_0 \delta(\vec{p} - \vec{p}') \\ &= \int d\tilde{p}, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} H &= \int d\tilde{p} p_0 \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{b}(\vec{p}) \\ (E_0) &\left\{ \begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \int d\tilde{p} p_0 [\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})] \\ &+ \int d^3x \left[\frac{1}{2}\mu_0^2 s^2 + \frac{\lambda s^4}{4} + \frac{1}{2}(\mu_0^2 - m^2 + 3\lambda s^2) \langle \varphi^2 \rangle + \frac{3\lambda}{4} \langle \varphi^2 \rangle^2 \right] \end{aligned} \right. \\ (H_1) &+ \int d^3x \left\{ (\mu_0^2 s + \lambda s^3 + 3\lambda s \langle \varphi^2 \rangle_m) \varphi \right. \\ (H_2) &+ \frac{1}{2}(\mu_0^2 - m^2 + 3\lambda s^2 + 3\lambda \langle \varphi^2 \rangle_m) : \varphi^2 : \\ (H_3) &+ \lambda s : \varphi^3 : \\ (H_4) &\left. + \frac{\lambda}{4} : \varphi^4 : \right\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pour étudier la renormalisabilité de la théorie et procéder à l'approximation de champ moyen, étudions le terme constant de cet hamiltonien.

Il est donné par

$$E_0 = \frac{1}{2} \int d\tilde{p} p_0 \left[\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) \right] + \int d^3x \left[\frac{1}{2} \mu_0^2 s^2 + \frac{\lambda s^4}{4} + \frac{1}{2} (\mu_0^2 - m^2 + 3\lambda s^2) \langle \varphi^2 \rangle_m + \frac{3\lambda}{4} \langle \varphi^2 \rangle_m^2 \right] \quad (3.4)$$

$$(3.5)$$

où l'intégrale du commutateur et le terme $\langle \varphi^2 \rangle_m$ divergent.

De plus, notons

$$H_0 = \int d\tilde{p} p_0 \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) \mathbf{b}(\vec{p}) + E_0.$$

Réécrivons le premier terme de E_0 . Grâce à :

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}') \right] &= (2\pi)^3 2p_0 \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \\ (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}') &= \int d^3x e^{i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{x}}, \end{aligned}$$

écrivons

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0 &= \frac{1}{2} \int d\tilde{p} p_0 \left[\mathbf{b}(\vec{p}) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) \right] = \int d^3x \int d\tilde{p} p_0^2 \\ &= \int d^3x \tilde{\mathcal{E}}_0, \\ \text{avec } \tilde{\mathcal{E}}_0 &= \int d\tilde{p} p_0^2. \end{aligned}$$

Passons maintenant en densité d'énergie :

$$\begin{aligned} E_0 &= \int d^3x \mathcal{E}_0, \\ \text{avec } \mathcal{E}_0 &= \tilde{\mathcal{E}}_0 + \frac{1}{2} \mu_0^2 s^2 + \frac{\lambda s^4}{4} + \frac{1}{2} (\mu_0^2 - m^2 + 3\lambda s^2) \langle \varphi^2 \rangle_m + \frac{3\lambda}{4} \langle \varphi^2 \rangle_m^2. \end{aligned}$$

3.1.2 Renormalisabilité

Jusqu'ici nous avons considéré une théorie en 3+1 dimensions. Pour éviter des problèmes techniques dus à la renormalisation, nous allons considérer $\lambda\Phi^4$ en 1+1 dimensions (voir [KL95, KL98] où la renormalisation de la théorie 3+1 est discutée). En effet, l'objet de ce travail est d'établir un schéma RPA en théorie des champs et nous ne voulons pas ajouter de difficultés techniques dues à la renormalisation.

Le seul changement dans \mathcal{E}_0 est que

$$d\tilde{p} = \frac{dp}{2p_0 \cdot 2\pi}.$$

$\lambda\varphi^4$ est alors super-renormalisable. Ainsi, pour que tous les termes soient finis, il suffit de retrancher du hamiltonien une quantité infinie et renormaliser la masse μ_0 .

Pour compenser la divergence dans $\langle\varphi^2\rangle_m$, on introduit une masse renormalisée,

$$\mu^2 = \mu_0^2 + 3\lambda\langle\varphi^2\rangle_\mu.$$

Il faut ensuite soustraire un terme correspondant à l'arbitraire du choix de l'origine des énergies. Nous choisirons cette origine telle que l'énergie pour des particules de masse μ à $s = 0$ soit nulle.

Cela revient à soustraire l'énergie de l'état de vide des particules de masse μ . Tous les termes divergents sont alors éliminés, comme nous le montrerons explicitement équation 3.11, p.65.

3.2 Approximation du champ moyen

Nous allons présenter la première méthode d'approximation qui est une méthode de champ moyen.

Ici, nous aurons deux paramètres variationnels, la valeur moyenne du champ dans l'état fondamental ou condensat et un paramètre de masse.

Nous chercherons ici l'état fondamental et nous calculerons $\langle H \rangle$. $\langle \dots \rangle$ représente l'élément de matrice $\langle 0_m | \dots | 0_m \rangle$ (moyenne relatif au vide des quasi-particules de masse m). L'approximation du champ moyen consiste ainsi à approximer le vrai vide par $|0_m\rangle$.

3.2.1 Énergie du fondamental dans le champ moyen

Reprenons le hamiltonien exact 3.3, p.61. Les crochets de moyenne appliqués aux produits normaux et à φ donne zéro. Appliqués au terme cinétique $\mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{b}(\vec{p})$ on obtient également un résultat nul.

Ainsi $\langle H \rangle = E_0$.

Équation du gap

Appliquons la méthode variationnelle à m , c'est-à-dire, cherchons le paramètre de masse qui minimise l'énergie. En dérivant \mathcal{E}_0 et en annulant cette dérivée, on trouve l'équation

du gap :

$$\begin{aligned}
 m^2 &= \mu_0^2 + 3\lambda (s^2 + \langle \varphi^2 \rangle_m) \\
 \text{soit } m^2 &= \mu^2 + 3\lambda (s^2 + \langle \varphi^2 \rangle_m - \langle \varphi^2 \rangle_\mu), \\
 \text{en notant } \langle \Delta\varphi_\mu^2(m) \rangle &= \langle \varphi^2 \rangle_m - \langle \varphi^2 \rangle_\mu, \\
 \text{on a l'équation du gap : } m^2 &= \mu^2 + 3\lambda (s^2 + \langle \Delta\varphi_\mu^2(m) \rangle). \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Dans ce chapitre, nous considérerons m comme vérifiant toujours l'équation 3.6.

Ré-interprétons cette équation de façon diagrammatique en introduisant le propagateur libre, celui dans l'approximation de champ moyen et le terme de correction de masse gaussienne (opérateur de masse gaussien) :

propagateur libre :

$$\mathcal{G}_0 = \frac{1}{\omega^2 - \mu^2} = \dots\dots\dots, \tag{3.7}$$

propagateur de champ moyen :

$$\mathcal{G}_{CM} = \frac{1}{\omega^2 - m^2} = \text{—————}, \tag{3.8}$$

$$= \frac{1}{\omega^2 - (\mu^2 + 3\lambda (s^2 + \langle \Delta\varphi_\mu^2(m) \rangle))} \tag{3.9}$$

correction de masse :

$$\Sigma_{CM} = 3\lambda (s^2 + \langle \Delta\varphi_\mu^2(m) \rangle). \tag{3.10}$$

Le terme de correction de masse contient une boucle à une particule dans laquelle "tourne" la masse m (représentée par une boucle) et le terme $3\lambda s^2$ (représenté par un "têtard").

On a donc

$$\mathcal{G}_{CM} = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0 \Sigma_{CM} \mathcal{G}_{CM},$$

c'est-à-dire,



Expression de l'énergie dans l'approximation gaussienne

Calculons explicitement $\langle \Delta\varphi_\mu^2(m) \rangle$ en introduisant une coupure Λ sur les impulsions :

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2 \rangle_m &= \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{m^2 + p^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{m} + \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{2\Lambda}{m} \right) + \frac{1}{8\pi} \frac{m^2}{\Lambda^2} + o(\Lambda^{-2}), \end{aligned}$$

et donc, $\langle \Delta\varphi_\mu^2(m) \rangle = -\frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)$ à l'ordre dominant en Λ .

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \tilde{\mathcal{E}}_0 - \frac{3\lambda}{4} \langle \varphi^2 \rangle_\mu^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \mu^2 s^2 + \frac{\lambda s^4}{4} \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \varphi^2 \rangle_\mu (\mu^2 - m^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \Delta\varphi_\mu^2(m) \rangle \left(\mu^2 - m^2 + 3\lambda s^2 + \frac{3\lambda}{2} \langle \Delta\varphi_\mu^2(m) \rangle^2 \right). \end{aligned}$$

Réécrivons \mathcal{E}_0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \int \frac{dp}{2\pi} \left(\frac{p_0(\mu)}{2} - \frac{3\lambda}{4} \langle \varphi^2 \rangle_\mu \frac{1}{2 p_0(\mu)} \right) \\ &\quad + \frac{p_0(m) - p_0(\mu)}{2} + \frac{\mu^2 - m^2}{2} \frac{1}{2 p_0(\mu)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \mu^2 s^2 + \frac{\lambda s^4}{4} \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \Delta\varphi_\mu^2(m) \rangle \left(\mu^2 - m^2 + 3\lambda s^2 + \frac{3\lambda}{2} \langle \Delta\varphi_\mu^2(m) \rangle^2 \right). \end{aligned}$$

Choisissons maintenant l'origine des énergies à $s = 0$ (où $m = \mu$), c'est-à-dire que l'on soustrait l'énergie du fondamental du vide de masse μ :

$$\mathcal{E}_0(s = 0) = \int \frac{dp}{2\pi} \left(\frac{p_0(\mu)}{2} - \frac{3\lambda}{4} \langle \varphi^2 \rangle_\mu \frac{1}{2 p_0(\mu)} \right). \quad (3.11)$$

Ainsi, avec cette origine, l'énergie ne contient plus de termes divergents. En effet, cal-

culons explicitement le second terme :

$$\begin{aligned} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dp}{2\pi} &= \left(\frac{p_0(m) - p_0(\mu)}{2} + \frac{\mu^2 - m^2}{2} \frac{1}{2 p_0(\mu)} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(m^2 - \mu^2 - m^2 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right) \text{ à l'ordre dominant.} \end{aligned}$$

La densité d'énergie complètement renormalisée, qui est la solution pour le fondamental dans l'approximation de champ moyen, a donc pour expression adimensionnelle :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_f}{\mu^2} &= \frac{1}{\mu^2} (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0(s=0)) \\ &= \frac{s^2}{2} + ps^4 + \frac{1}{8\pi} \left(X - 1 - \ln(X)(1 + 12ps^2) + \frac{3p}{2\pi} (\ln(X))^2 \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

en introduisant les variables sans dimensions $X = \frac{m^2}{\mu^2}$ et $p = \frac{\lambda}{4\mu^2}$.

On appelle aussi cette énergie le potentiel effectif de la théorie à l'approximation gaussienne (GEP) car cette méthode est équivalente à l'approximation gaussienne (voir ci-dessous).

3.3 Approximation gaussienne

Avant d'examiner les résultats numériques de la résolution de l'équation du gap et du calcul de l'énergie de champ moyen, examinons une autre méthode d'approximation variationnelle, l'approximation gaussienne. Nous verrons qu'elle est strictement équivalente à l'approximation précédemment introduite. L'approximation précédente à l'avantage d'introduire des paramètres intuitifs, tandis que cette méthode est générale car écrite dans un formalisme systématique. Ainsi, notre souci de systématisme se voit satisfait grâce à cette méthode en généralisant la méthode précédente. En particulier, l'application aux modèles σ -linéaire sera immédiate, le modèle σ -linéaire se réduisant simplement à une généralisation du modèle $\lambda\Phi^4$ où le champ scalaire φ est remplacé par un champ vectoriel à quatre dimensions avec une symétrie globale $O(4)$ explicitement brisée dans une direction.

Utilisons l'Ansatz variationnel gaussien 2.64, p.41. La fonctionnelle d'énergie de l'état fondamental est ($\mathcal{D}\Phi$ est l'élément différentiel fonctionnel),

$$E^{GEP}[h, s] = \langle \Psi^G | H | \Psi^G \rangle \quad (3.13)$$

$$= \mathcal{N}^2 \int \mathcal{D}\Phi \Psi^G[\Phi] \left\{ \frac{1}{2} \left(-i \frac{\delta}{\delta\Phi(x)} \right)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \Phi(x))^2 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \Phi^2(x) + \frac{\lambda}{4} \Phi^4(x) \right\} \Psi^G(\Phi) \quad (3.14)$$

On va faire le changement de variable $\varphi(x) = \Phi(x) - s$ dans l'intégrale.

Avec la convention d'Einstein étendue aux intégrales, (par exemple $\varphi(y) h(x-y) \equiv$

$\int dy \varphi(y)h(x-y)$, etc), calculons l'action de $\mathbf{\Pi}$ sur Ψ^G ,

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\Psi^G(\Phi) = -\varphi(y)h(x-y)\Psi^G(\Phi) \quad (3.15)$$

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x_1)}\frac{\delta}{\delta\varphi(x_2)}\Psi^G(\Phi) = [\varphi(y)h(x_1-y)\varphi(z)h(x_2-z) - h(x_2-x_1)]\Psi^G(\Phi). \quad (3.16)$$

(rappelons que $h(x-y) = h(y-x)$). L'action de φ ou $\partial\varphi$ est une simple multiplication. On a

$$\begin{aligned} E^{GEP}[h, s] &= \mathcal{N}^2 \int \mathcal{D}\varphi (\Psi^G[\varphi])^2 \\ &\quad \left\{ \frac{1}{2}[h(0) - \varphi(y)h(x-y)\varphi(z)h(x-z)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi(x))^2 + \frac{1}{2}\mu_0^2(\varphi(x) + s)^2 + \frac{\lambda}{4}(\varphi(x) + s)^4 \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Rappelons quelques résultats sur les intégrales fonctionnelles :

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \int \varphi(x)A(x,y)\varphi(y) dx dy} = e^{-\frac{1}{2}\text{Tr} \ln A}, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \int \varphi(x)A(x,y)\varphi(y) dx dy} + \int \varrho(x)\varphi(x) dx \\ &= e^{-\frac{1}{2}\text{Tr} \ln A} e^{\frac{1}{2} \int \varrho(x)A^{-1}(x,y)\varrho(y) dx dy}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

où A^{-1} est l'inverse au sens des convolutions de la distribution A , c'est-à-dire

$$\int A(x,y)A^{-1}(y,z) dy = \delta(x-z).$$

Avec

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta\varrho(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\varrho(x_n)} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \int \varphi(x)A(x,y)\varphi(y) dx dy} + \int \varrho(x)\varphi(x) dx \\ &= \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) e^{-\frac{1}{2} \int \varphi(x)A(x,y)\varphi(y) dx dy} + \int \varrho(x)\varphi(x) dx \end{aligned} \quad (3.20)$$

on déduit, en posant $\varrho = 0$ après les dérivations de la formule précédente, que si n est pair

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) e^{-\frac{1}{2} \int \varphi(x)A(x,y)\varphi(y) dx dy} = e^{-\frac{1}{2}\text{Tr} \ln A} (A^{-1}(x_1, x_2) \cdots A^{-1}(x_{n-1}, x_n) \\ &\quad + (\text{permutations des variables } x_i)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

cette intégrale étant nulle pour n impair. Cette formule est reliée au théorème de Wick. L'intégrale de la fonctionnelle gaussienne $2n$ fois dérivée génère les termes complètement contractés du théorème de Wick pour $2n$ opérateurs, c'est-à-dire la valeur moyenne de ces $2n$ opérateurs, dans le vide des opérateurs qui définissent l'ordre normal. En effet, $A^{-1}(x, y)$ est bien la valeur moyenne de l'opérateur $\varphi(x)\varphi(y)$ si on interprète $e^{-1/2\varphi A\varphi}$ comme une fonctionnelle d'onde.

Les intégrales des produits de φ de la formule 3.17 sont donc calculables. Pour le terme en $(\partial\varphi)^2$, on démontre un résultat similaire en mettant un terme linéaire en ϱ de la forme $(\partial\varrho)\varphi$ au lieu de $\varrho\varphi$ dans la formule 3.19. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\varphi (\partial\varphi)(x_1) \cdots (\partial\varphi)(x_n) e^{-\frac{1}{2} \int \varphi(x) A(x, y) \varphi(y) dx dy} \\ = e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln A} (\partial\partial A^{-1}(x_1, x_2) \cdots \partial\partial A^{-1}(x_{n-1}, x_n) \\ + (\text{permutations des variables } x_i)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Calculant toutes ces intégrales avec $A = 2h$ (car on intègre $(\Psi^G)^2$), $A^{-1} = h^{-1}/2$, en remarquant que $\exp(-\text{Tr} \ln(h)) = \mathcal{N}^{-2}$, en simplifiant le produit de convolution qui apparaît dans le second terme et en remarquant que pour le terme en φ^4 on a 3 permutations, on trouve enfin,

$$\begin{aligned} E^{GEP}[h, s] &= \frac{1}{2}h(0) - \frac{1}{4}h(0) - \frac{1}{2} \left(\partial^2 \frac{1}{2}h^{-1} \right) (0) \\ &+ \frac{1}{2}\mu_0^2 \left(\frac{1}{2}h^{-1}(0) + s^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{3}{4}(h^{-1}(0))^2 + 6s^2 \frac{1}{2}h^{-1}(0) + s^4 \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

(remarquons que l'on écrit $\partial^2 \equiv \partial_x \partial_y$ ce qui signifie que l'on dérive par rapport à x et y la quantité $h(x - y)$ d'où le signe dans l'équation 3.23). Il est commode d'introduire la représentation de Fourier défini équation 2.71, p.42 en remarquant que l'inverse de convolution en transformée de Fourier de h est

$$h^{-1}(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{e^{ikx}}{\varepsilon_k}. \quad (3.24)$$

On obtient

$$\begin{aligned} E^{GEP}[\varepsilon, s] &= \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{\varepsilon_k}{4} + \frac{k^2}{2} \frac{1}{2\varepsilon_k} + \frac{1}{2}\mu_0^2 \left(\frac{1}{2\varepsilon_k} + s^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \left(6s^2 \frac{1}{2\varepsilon_k} + s^4 \right) \right\} \\ &+ \frac{3\lambda}{4} \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{dk'}{(2\pi)^d} \frac{1}{2\varepsilon_k 2\varepsilon'_k} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pour bien voir l'équivalence avec la méthode de la section précédente, réécrivons la formule en remarquant que l'on peut définir la densité scalaire,

$$\langle \Psi^G | \varphi^2 | \Psi^G \rangle \equiv \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon = \frac{h^{-1}(0)}{2} = \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{2\varepsilon_k}. \quad (3.26)$$

L'indice ε est là pour rappeler que l'on prend la valeur moyenne sur le vide gaussien Ψ^G . Posons également $\mathcal{O}_k^2 = k^2 + \mu_0^2 + 3\lambda s^2$. L'équation 3.25 se met sous la forme

$$E^{GEP}[\varepsilon, s] = \frac{1}{2}\mu_0^2 s^2 + \frac{\lambda}{4}s^4 + \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\varepsilon_k}{2} + \frac{\mathcal{O}_k^2}{2\varepsilon_k} \right\} \frac{dk}{(2\pi)^d} + \frac{3\lambda}{4} \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon^2 \quad (3.27)$$

Il ne reste plus qu'à minimiser l'énergie par rapport à la fonction ε_k . On obtient une équation sur la masse des quasi-particules HFB, notée m :

$$m^2 = \varepsilon_k^2 - k^2 = \mu_0^2 + 3\lambda (s^2 + \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon) . \quad (3.28)$$

On voit ainsi qu'il y a bien équivalence avec la formulation précédente où l'on a introduit une masse m grâce à des considérations physiques car on retrouve l'équation du gap. De plus, si on introduit m^2 dans 3.27 on retrouve l'expression 3.4 établie au chapitre précédent pour l'énergie de champ moyen, y compris le terme divergent $\int d\tilde{p} 2p^2$. À partir de ce point, on peut renormaliser la théorie de la même façon que dans la section précédente.

Cette méthode possède le grand avantage de pouvoir être exposée systématiquement, mais l'interprétation physique est plus directe lorsque l'on raisonne en termes de masse et de condensat introduits directement dans le hamiltonien.

3.3.1 Discussion du résultat obtenu

Nous sommes obligés de recourir à une solution numérique. Nous allons résoudre l'équation du gap pour différents paramètres puis injecter dans $\tilde{\mathcal{E}}_f$. On obtient alors le potentiel effectif, c'est-à-dire l'expression de l'énergie de l'état fondamental en fonction de notre paramètre d'ordre, ici le condensat s . Tous les résultats sont présentés avec la normalisation $\mu = 1$.

Mais regardons d'abord l'équation du gap.

Équation du gap

Tout d'abord, réécrivons 3.6 en fonction de variables adimensionnelles :

$$X - 1 - 12ps^2 + \frac{3p}{\pi} \ln(X) = 0. \quad (3.29)$$

On peut exprimer la solution de cette équation en terme de la fonction W de Lambert. Cette fonction est la fonction analytique en zéro et qui satisfait quelque soit x positif,

$$W(x) e^{W(x)} = x. \quad (3.30)$$

Or, 3.29 peut s'écrire,

$$\frac{\pi}{3p} X + \ln(X) = \frac{\pi}{3p} (1 + 12ps^2) \Leftrightarrow \frac{\pi}{3p} X e^{\frac{\pi}{3p} X} = \frac{\pi}{3p} e^{\frac{\pi}{3p} (1 + 12ps^2)}. \quad (3.31)$$

Finalement, on a

$$X = \frac{3p}{\pi} W\left(\frac{\pi}{3p} e^{\frac{\pi}{3p}} e^{4\pi s^2}\right). \quad (3.32)$$

Traçons la solution de cette équation en fonction de s et pour différents paramètres. Le résultat est présenté sur la figure 3.1.

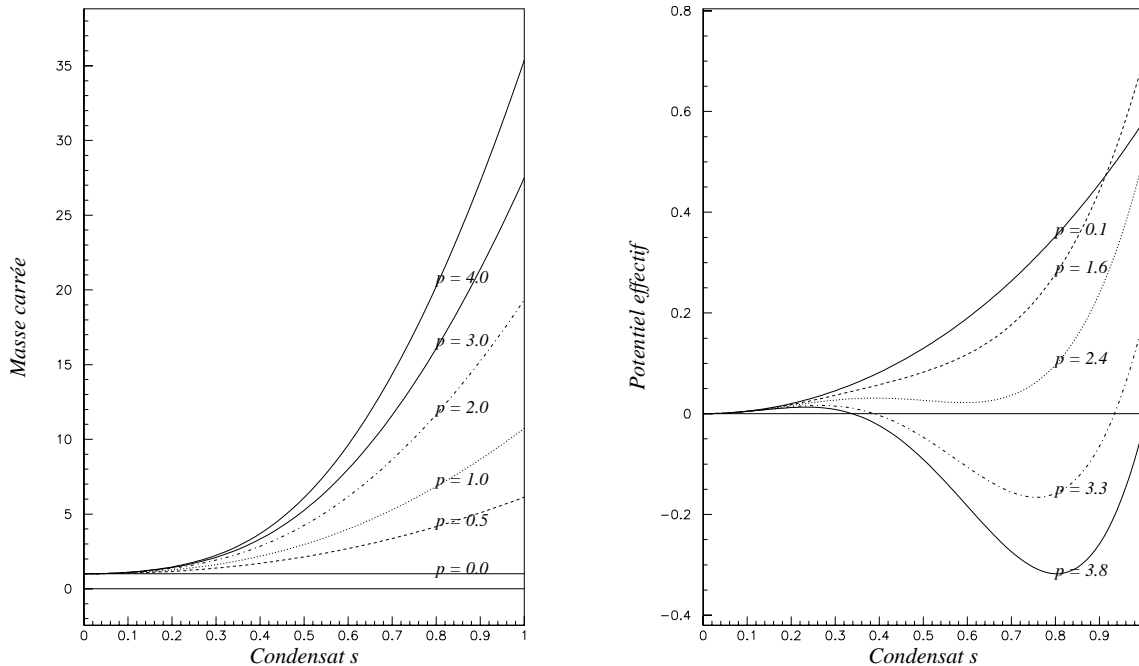


FIG. 3.1 – Solution de l'équation des modes gaussiens $X = \frac{m^2}{\mu^2}$ (à gauche) et Potentiel effectif gaussien (à droite). Les échelles sont proportionnelles à la masse nue renormalisée μ^2 . Les résultats sont donnés en fonction du condensat s et pour différentes valeurs de la constante de couplage p .

Tout d'abord, comme c'est prévisible, toutes les courbes partent de $X = 1$ à $s = 0$, c'est-à-dire, $m = \mu$. C'est une solution triviale de l'équation.

Pour $p = 0$, la solution est également évidente, $X = 1$ et $\tilde{\mathcal{E}}_f = \mu^2 4\pi s^2$.

Potentiel effectif

Les résultats sont présentés sur la figure 3.1, p.70, pour différents paramètres. Il s'agit du potentiel effectif, car nous n'avons pas réalisé la minimisation en fonction de s . En effet, dans l'étude de la transition de phase il est plus aisé de raisonner sur le potentiel effectif qui nous montre comment se produisent les transitions, si il y a plusieurs phases stables, etc.

On remarque trois catégories de courbe :

- La courbe ne présente pas d'extremum (pour $p < 2.26$).
- La courbe possède un minimum local différent de zéro (pour $p \in [2.26, 2.56]$).
- La courbe possède un minimum global différent de zéro (pour $p > 2.56$).

Interprétons ces résultats.

Soit s_0 la valeur du condensat au vrai minimum (minimum global) du potentiel effectif. Quand p augmente, il se produit une transition de phase. Elle est du premier ordre car si on trace s_0 en fonction de p (voir figure 3.2, p.71), la courbe est discontinue. Le paramètre critique est $p_c \simeq 2.56$.

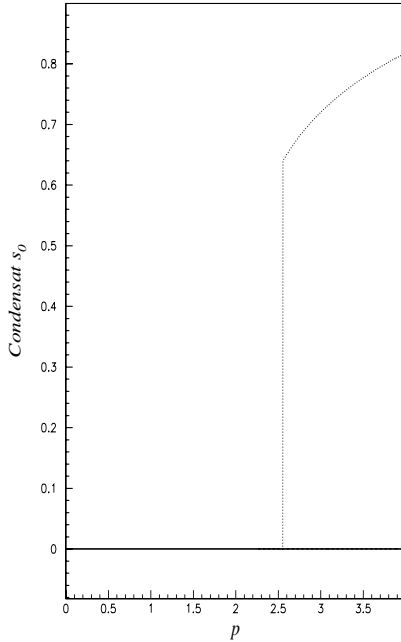


FIG. 3.2 – Condensat au minimum du potentiel effectif gaussien, s_0 , tracé en fonction de p et à température nulle. La transition de phase se produit pour $p_c = 2.56$. s_0 est discontinu, la transition de phase est donc du premier ordre.

Pour être tout à fait complet, nous avons également tracé sur la figure 3.3 (à droite) tout les extrema du potentiel effectif en fonction de p . Cela permet de mieux voir la structure de phase du potentiel effectif. Nous constatons qu'il y a trois branches, une pour $s = 0$ qui est toujours un minimum du potentiel (branche 0) et deux branches qui commencent à $p = p_0 \simeq 2.26$. La branche du bas (branche 1) est toujours un maximum local (phase instable). La branche du haut (2) est un minimum local. Si on trace le potentiel effectif en fonction de p pour s suivant ces trois branches (figure 3.3 à gauche), on constate que le minimum décrit par la branche 2 correspond à une énergie supérieure à l'énergie de la branche 0 entre p_0 et p_c ce qui traduit que le système est dans un état métastable. Ensuite, la branche devient stable et c'est l'énergie pour $s = 0$ qui correspond à une phase

métastable. Enfin, l'énergie de la branche instable est toujours plus grande que les autres. On visualise bien grâce à ces figures que le passage entre la branche 0 et la branche 2 est discontinu pour les s , la transition de phase est donc du premier ordre.

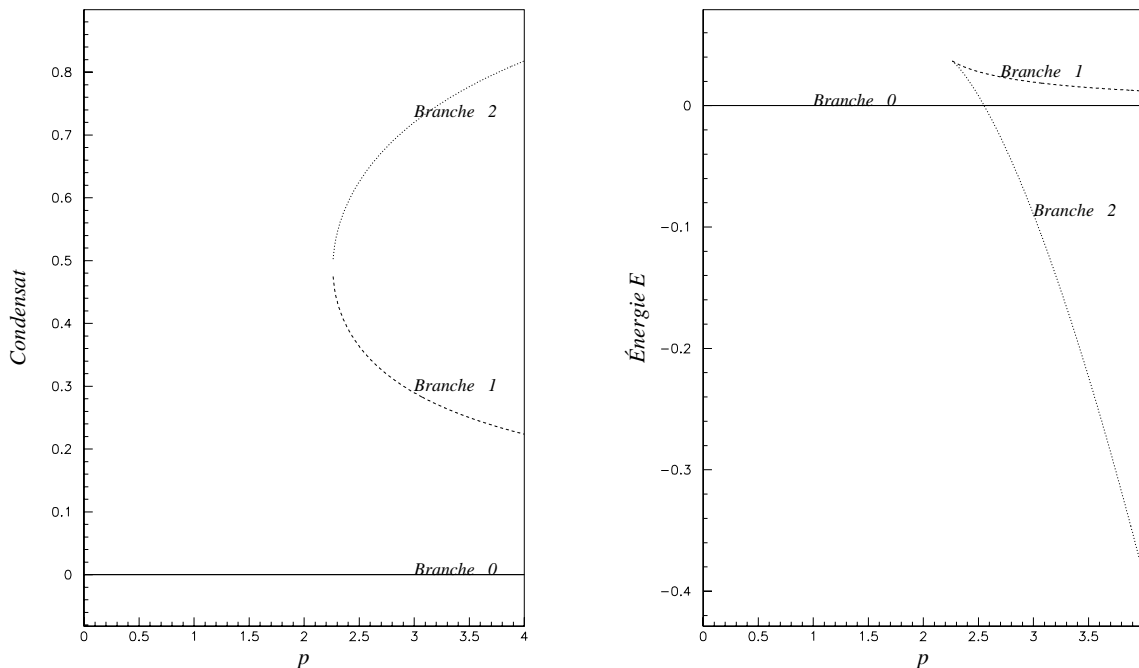


FIG. 3.3 – À droite : Extrema du potentiel effectif, en fonction de p . Les courbes 0 et 1 correspondent à des minima de $\tilde{\mathcal{E}}_f$ et la courbe 2 à un maximum. Deux zones se dégagent, pour $p < p_0 \simeq 2.26$, une seule phase est possible. Pour $p > p_0$, trois phases coexistent, deux phases stables (0 et 1), une des deux étant en fait métastable (voir la discussion dans ce paragraphe) et une instable (2).

À gauche : Énergie du fondamental pour les trois phases. Pour $p = p_c$, la phase 0 stable devient métastable et inversement pour la phase 1. L'existence de la zone de métastabilité (entre p_0 et p_c) nous indique que lors du passage entre 0 et 1, le vrai minimum du potentiel effectif est discontinu ; la transition de phase est du premier ordre.

Nous avons donc une brisure spontanée de la symétrie du lagrangien (voir paragraphe 3.1.1, p.59). Très souvent, quand ce phénomène apparaît, par exemple dans le mécanisme de Higgs, la brisure est explicitement contenue dans le potentiel. Par exemple, on prend $V = -\frac{1}{2}\mu_0^2\Phi^2 + \frac{\lambda}{4}\Phi^4$.

Ici, cette brisure est d'origine dynamique (due aux fluctuations quantiques). Ce sont les termes en $\langle \Delta\varphi_\mu^2(m) \rangle$ qui créent la brisure pour p assez grand.

Nous avons comparé ce résultat à celui de l'article [HCPT96] (qui utilise une méthode différente, le développement en clusters pour les fonctions de Green, tronqué à l'ordre 4).

Les résultats sont très proches et bien sûr identiques dans l'approximation gaussienne où l'ordre de la transition est le même et $p_c = 2.568$.

En conclusion, notons qu'il existe une preuve mathématique de l'impossibilité d'une transition de phase du premier ordre pour Φ^4 en 1 + 1 dimensions [SG73] (il faut considérer Φ^4 comme limite du modèle d'Ising généralisé).

Ainsi, l'approximation gaussienne n'est pas suffisante pour reproduire cette propriété. C'est pourquoi nous allons voir une autre méthode d'approximation.

Mais avant cela, regardons ce qui se passe à température non nulle.

3.3.2 Température finie

Nous allons maintenant considérer cette théorie des champs à température finie. En effet, nous voulons voir si une transition de phase se produit lorsque la température varie.

Calcul du grand potentiel

Pour cela, étudions le grand potentiel Ω dans l'approximation du champ moyen. Notons $\beta = 1/T$ (on prend la constante de Boltzman $k_B = 1$).

$$\begin{aligned}\Omega &= -T \ln(Z) \text{ où } Z \text{ est la fonction de partition,} \\ Z &= \text{Tr } e^{-\beta H}\end{aligned}$$

Nous n'allons pas, pour ce cas simple, exhiber toute la machinerie de l'intégrale fonctionnelle à température finie.

L'approximation du champ moyen consiste simplement à écrire (principe variationnel statistique) :

$$H - : H_m : + : H_m : \simeq \langle\langle H - : H_m : \rangle\rangle_\beta + : H_m : .$$

où $\langle\langle \rangle\rangle_\beta$ représente la moyenne thermique, dans un bain à la température $1/\beta$, de quasi-particules de masse m .

Ainsi

$$\Omega = -T \ln (\text{Tr } e^{-\beta : H_m :}) + \langle\langle H - : H_m : \rangle\rangle_\beta.$$

En utilisant une technique usuelle (on discrétise puis on repasse au continu),

$$\ln (\text{Tr } e^{-\beta : H_m :}) = \ln \left(\prod_q \sum_{n_q=0}^{\infty} e^{-\beta \omega_q n_q} \right)$$

(où $\omega_q = \sqrt{q^2 + m^2}$ et $n_q \in \mathbb{N}$ est le nombre d'occupation, quelconque pour des bosons),

$$\begin{aligned} \ln (\operatorname{Tr} e^{-\beta H_m}) &= \ln \left(\prod_q \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_q}} \right) \\ &= - \sum_q \ln (1 - e^{-\beta \omega_q}) \\ &\equiv -V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln (1 - e^{-\beta p_0(m)}). \end{aligned}$$

Pour l'autre terme $\langle\langle H - : H_m : \rangle\rangle_\beta$, on a juste à remplacer dans l'expression 3.4, p.62 les crochets $\langle \dots \rangle$ par des crochets à température finie $\langle\langle \dots \rangle\rangle_\beta$ (les produits normaux pris entre ces crochets étant toujours nuls et $\langle\langle \varphi \rangle\rangle_\beta$ étant nul par construction).

Le théorème de Wick prenant la même forme, le résultat est formellement identique.

Explicitement, $\langle\varphi^2\rangle_m$ change en :

$$\begin{aligned} \langle\langle \varphi^2 \rangle\rangle_{m\beta} &= \int d\vec{p} d\vec{p}' \langle\langle b(\vec{p})b^\dagger(-\vec{p}') + b^\dagger(-\vec{p}')b(\vec{p}) \rangle\rangle_\beta \\ &= \int d\vec{p} (1 + 2 n(\vec{p})). \end{aligned}$$

Le nombre d'occupation $n(\vec{p})$ est donné par

$$n(\vec{p}) = \frac{1}{e^{\beta \omega_p} - 1}.$$

L'équation du gap reste formellement inchangée avec le remplacement précédent des crochets de moyenne.

Pour régulariser cette théorie, on pose

$$\mu^2 = \mu_0^2 + 3\lambda \langle\varphi^2\rangle_\mu,$$

et on procède à la même manipulation que dans le paragraphe 3.1.2, p.62.

Remarquons que ici, on a utilisé les crochets $\langle \dots \rangle$ car le schéma de renormalisation étant indépendant de la température, la renormalisation faite à température nulle reste totalement inchangée.

On a donc, en passant en densité et utilisant des quantités sans dimensions :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\Omega}}{\mu^2} &= \bar{T} \int \frac{du}{2\pi} \ln \left(1 - e^{-\frac{\omega_X}{\bar{T}}} \right) \\ &+ \frac{s^2}{2} + p s^4 + \frac{1}{8\pi} (X - 1 - X \ln(X)) \\ &+ \frac{1}{2} \langle\langle \Delta \varphi_\mu^2(m) \rangle\rangle_\beta \left(1 - X + 12 p s^2 + 6 p \langle\langle \Delta \varphi_\mu^2(m) \rangle\rangle_\beta \right), \end{aligned}$$

en notant $\bar{T} = \frac{T}{\mu}$,

et $\omega_X = \sqrt{X + u^2}$.

Remarquons bien que ici,

$$\langle\langle \Delta \varphi_\mu^2(m) \rangle\rangle_\beta = \int \frac{dp}{2\pi} \left[\frac{1 + 2 n(\vec{p})}{2 p_0(m)} - \frac{1}{2 p_0(\mu)} \right].$$

Résultats obtenus et commentaires

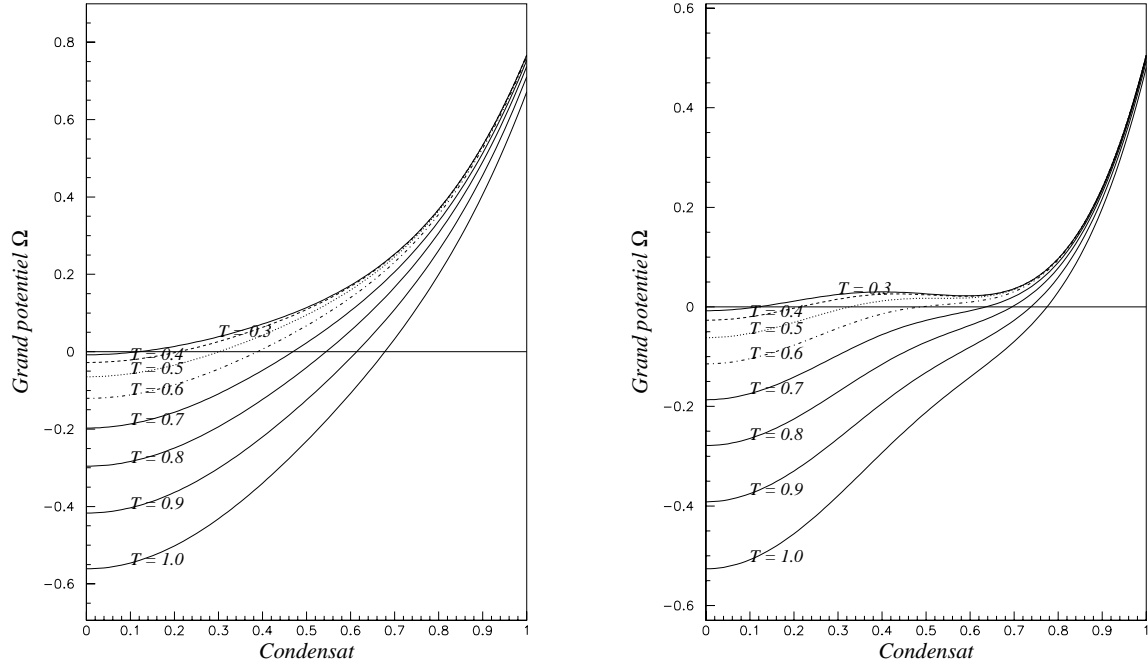


FIG. 3.4 – Grand potentiel pour $p = 1$ (à gauche). Grand potentiel pour $p = 2.4$ (à droite). Les résultats sont donnés en fonction du condensat, pour différentes températures \bar{T} . Pour $p = 1$, la phase stable, qui correspond au minimum du grand potentiel, est symétrique ($s_0 = 0$). Pour $p = 2.4$, la phase stable est symétrique mais il se développe un état métastable déformé ($s \neq 0$) pour les petites températures.

En procédant de la même façon qu'au paragraphe 3.3.1, p.70, nous obtenons le grand potentiel en fonction de la température et de p .

Nous avons tracé, pour les trois valeurs du paramètre $p = (1, 2.4, 3.8)$, correspondant aux trois secteurs dégagés précédemment (paragraphe 3.3.1, p.70), un faisceau de courbes à différentes températures (figure 3.4, p.75, 3.4, p.75 et 3.5, p.76).

Nous constatons que lorsque la température augmente, il y a restauration de la symétrie brisée (s_0 redevient nulle) si elle l'était à \bar{T} nulle. Cet effet est prévisible. En effet, si nous prenons comme analogie la théorie d'un solide magnétique où les spins sont dans un champ

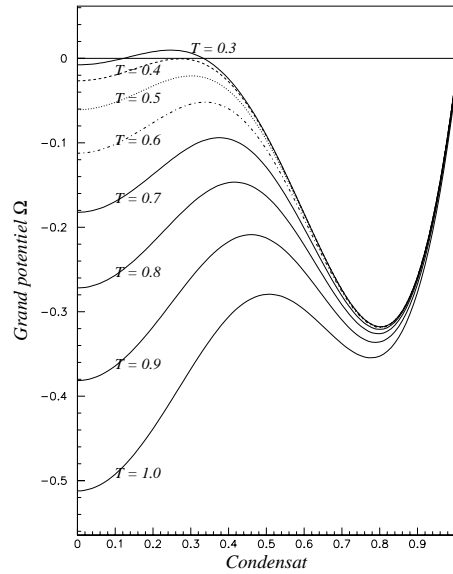


FIG. 3.5 – Grand potentiel pour $p = 3.8$, en fonction du condensat, pour différentes températures. Une phase déformée stable est possible pour les petites températures.

moyen, l'aimantation est non-nulle à température nulle. Si on augmente la température, l'agitation thermique brise cet ordre et l'aimantation s'annule.

Enfin, nous pouvons tracer s_0 en fonction de \bar{T} à p fixé ou inversement (voir figure 3.2, p.71 et 3.6, p.77).

On peut voir qu'il y a restauration de la symétrie (transition de phase du premier ordre) lorsque p diminue à \bar{T} fixé ou lorsque \bar{T} augmente à p fixé.

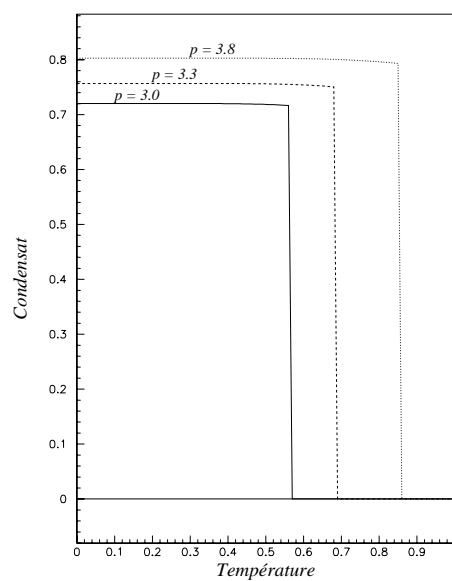


FIG. 3.6 – Minimum global s_0 du grand potentiel en fonction de la température \bar{T} et pour différentes valeurs de la constante de couplage p . Les transitions de phase engendrées par la variation de la température sont du premier ordre.

Traitement non-perturbatif de la théorie $\lambda\Phi^4$ - RPA

Nous appliquons dans ce chapitre les techniques de RPA standard et renormalisée à l'étude de la théorie $\lambda\Phi^4$ en 1+1 dimensions (voir [KL95, KL98] pour une autre approche du problème utilisant une approche RPA basée sur la linéarisation de l'approximation TDHF, en 3+1 dimensions). Nous commencerons par appliquer le formalisme des amplitudes (équations du mouvement pour l'opérateur RPA) en RPA standard. Nous calculerons ainsi l'équation des modes. Ensuite, nous choisirons l'approche des équations de Dyson (toujours en RPA standard) d'une application plus pratique en théorie des champs et nous calculerons le potentiel effectif. Nous soulignerons certaines difficultés dans cette section en reportant leurs discussions en détails à la section suivante. En effet, le but de cette application standard de la RPA dans le formalisme DEA est juste de montrer l'intérêt de la méthode et dégager les difficultés ainsi qu'un moyen de les résoudre. Enfin nous présenterons les résultats dans l'approche renormalisée ou nous détaillerons toutes les difficultés évoquées précédemment.

4.1 Choix du schéma variationnel et établissement de l'équation des modes

4.1.1 Choix de δQ

Choisissons un ansatz particulier, c'est-à-dire, choisissons la partie de l'espace de Hilbert qui va être explorée dans notre approximation (cela revient à considérer une certaine classe de diagrammes lorsqu'on écrit un propagateur).

De plus, utilisons la RPA standard, c'est-à-dire, remplaçons dans le calcul des doubles commutateurs, le vide exact (autocohérent) par celui du champ moyen (vide associé aux \mathbf{b} et \mathbf{b}^\dagger du chapitre précédent).

Pour l'état fondamental du calcul des double commutateurs, limitons nous donc à la RPA normale et prenons $|0\rangle = |0_m\rangle$ où $\mathbf{b}|0_m\rangle = 0$.

Nous allons écrire un développement de \mathcal{Q}_ν de la forme 2.91, p.47. Pour les excitations RPA, on ne considère que des termes à une particule ($\mathbf{A}_{a=1} \equiv \mathbf{A}_\alpha = \mathbf{b}(\vec{p}_\alpha)$) et deux particules

($\mathbf{A}_{a=2} \equiv \mathbf{A}_{\alpha\beta} = \mathbf{b}(\vec{p}_\alpha) \mathbf{b}(\vec{p}_\beta)$) (nous avons expliqué dans la remarque suivant l'équation 2.83, p.46, que a est un indice composite). On n'introduit pas ici de terme de la forme $\mathbf{b}_k \mathbf{b}_{k'}^\dagger$ ($k \neq k'$) afin de simplifier les calculs dans cette première approche de la RPA en théorie des champs. Ainsi, la matrice norme ne comportera pas de termes non-diagonaux (voir la condition 2.98, p.49, et la discussion qui suit), ce qui est indispensable pour le formalisme des amplitudes.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\nu^\dagger &= \int d\tilde{p}_\alpha \left[X(\vec{p}_\alpha) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_\alpha) - Y(-\vec{p}_\alpha) \mathbf{b}(-\vec{p}_\alpha) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int d\tilde{p}_\alpha d\tilde{p}_\beta \left[X(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_\alpha) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_\beta) - Y(-\vec{p}_\alpha, -\vec{p}_\beta) \mathbf{b}(-\vec{p}_\alpha) \mathbf{b}(-\vec{p}_\beta) \right]. \end{aligned}$$

Pour chaque variation du couple de paramètres (X, Y) , on a une équation matricielle du type 2.81, p.45.

Par commodité, on utilisera la notation discrétisée et la convention de sommation d'Einstein. On a alors,

$$\mathbf{Q}_\nu^\dagger = X_\alpha \mathbf{b}_\alpha^\dagger - Y_{-\alpha} \mathbf{b}_{-\alpha} + \frac{1}{2} \left[X_{\alpha\beta} \mathbf{b}_\alpha^\dagger \mathbf{b}_\beta^\dagger - Y_{-\alpha-\beta} \mathbf{b}_{-\alpha} \mathbf{b}_{-\beta} \right]. \quad (4.1)$$

4.1.2 Écriture des équations

Séparons tout d'abord le hamiltonien en deux termes, $H = H_0 + H_{int}$, où $H_{int} = H_1 + H_2 + H_3 + H_4$.

Regardons maintenant le hamiltonien en repartant de l'expression 3.3, p.61.

- Le terme $\langle H_1 \rangle$ est nul $\langle \varphi \rangle = 0$ par construction.
- Le terme H_2 est strictement nul du fait de l'équation du gap.

– Enfin, pour les interactions à trois et quatre corps, on a,

$$\begin{aligned}
 H_3 &= \int d^3x \lambda s : \varphi^3 : \\
 &= \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p}_3 V(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \left[\mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_1) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_2) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_3) + 3 \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_1) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_2) \mathbf{b}(-\vec{p}_3) \right. \\
 &\quad \left. + 3 \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_1) \mathbf{b}(-\vec{p}_2) \mathbf{b}(-\vec{p}_3) + \mathbf{b}(-\vec{p}_1) \mathbf{b}(-\vec{p}_2) \mathbf{b}(-\vec{p}_3) \right] \\
 V(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) &= \lambda s (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \\
 H_4 &= \int d^3x \frac{\lambda}{4} : \varphi^4 : \\
 &= \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p}_3 d\vec{p}_4 \frac{1}{4} V(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4) \times \\
 &\quad \left[\mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_1) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_2) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_3) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_4) + 4 \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_1) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_2) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_3) \mathbf{b}(-\vec{p}_4) \right. \\
 &\quad + 6 \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_1) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_2) \mathbf{b}(-\vec{p}_3) \mathbf{b}(-\vec{p}_4) + 4 \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}_1) \mathbf{b}(-\vec{p}_2) \mathbf{b}(-\vec{p}_3) \mathbf{b}(-\vec{p}_4) \\
 &\quad \left. + \mathbf{b}(-\vec{p}_1) \mathbf{b}(-\vec{p}_2) \mathbf{b}(-\vec{p}_3) \mathbf{b}(-\vec{p}_4) \right] \\
 V(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4) &= \lambda (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4).
 \end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, nous utiliserons les opérateurs discrétisés, avec les notations $\omega_i \equiv \omega(\vec{p}_i)$ (ω est la fonction introduite dans l'étude du champ scalaire libre, $\omega^2(\vec{p}) = p^2 + m^2$),

$$\sum_{p_1, p_2, p_3} \equiv \sum_{123} \text{et } \delta_{p_1+p_2+p_3,0} \equiv \delta_{123},$$

$$\begin{aligned}
 H_3 &= \sum_{123} V_{123} \left[\mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2^\dagger \mathbf{b}_3^\dagger + 3 \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2^\dagger \mathbf{b}_{-3} + 3 \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_{-2} \mathbf{b}_{-3} + \mathbf{b}_{-1} \mathbf{b}_{-2} \mathbf{b}_{-3} \right] \\
 V_{123} &= \frac{\lambda s}{\sqrt{2\omega_1 2\omega_2 2\omega_3}} \delta_{123} \\
 H_4 &= \frac{1}{4} \sum_{1234} V_{1234} \left[\mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2^\dagger \mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{b}_4^\dagger + 4 \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2^\dagger \mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{b}_{-4} + 6 \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2^\dagger \mathbf{b}_{-3} \mathbf{b}_{-4} + 4 \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_{-2} \mathbf{b}_{-3} \mathbf{b}_{-4} + \mathbf{b}_{-1} \mathbf{b}_{-2} \mathbf{b}_{-3} \mathbf{b}_{-4} \right] \\
 V_{1234} &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\omega_1 2\omega_2 2\omega_3 2\omega_4}} \delta_{1234}.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer tous les éléments de matrices apparaissant dans l'équation RPA 2.104, p.50.

Commençons par les termes de type \mathcal{N} (défini équation 2.107, p.50) en rappelant que la RPA standard consiste à calculer ces valeurs moyennes sur le vide HFB, c'est-à-dire le vide des \mathbf{b} :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_{a=1, b=1} = \mathcal{N}_{\alpha\beta} &= \langle \mathbf{b}_\alpha \mathbf{b}_\beta^\dagger \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \\
 \mathcal{N}_{12} = \mathcal{N}_{\alpha, \beta\beta'} &= \langle \alpha | \beta\beta' \rangle = 0 \\
 \mathcal{N}_{21} &= 0 \\
 \mathcal{N}_{22} = \mathcal{N}_{\alpha\alpha', \beta\beta'} &= \langle \alpha\alpha' | \beta\beta' \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha'\beta'} + \delta_{\alpha\beta'} \delta_{\alpha'\beta}.
 \end{aligned}$$

Calculons les termes de la forme \mathcal{A} et \mathcal{B} (équations 2.105 et 2.106, p.50). Notons E_a les valeurs propres de \mathbf{H}_0 . Remarquons que $\mathbf{H}_0 \mathbf{b}_\alpha^\dagger |0\rangle = \omega_\alpha \mathbf{b}_\alpha^\dagger |0\rangle$, $\mathbf{H}_0 \mathbf{b}_\alpha^\dagger \mathbf{b}_\beta^\dagger |0\rangle = (\omega_\alpha + \omega_\beta) \mathbf{b}_\alpha^\dagger \mathbf{b}_\beta^\dagger |0\rangle$, etc. Les E_a sont donc une somme de $\omega(\vec{p})$, par exemple, $E_{a=1} \equiv E_\alpha = \omega(p_\alpha) = \omega_\alpha$, $E_{a=2} \equiv E_{\alpha\beta} = \omega_\alpha + \omega_\beta$, etc.

On réécrit \mathcal{A} et \mathcal{B} en séparant les double-commutateurs “libres” (calculés avec H_0) et en interaction (calculés avec H_{int})

$$\mathcal{A}_{ab} = \mathcal{A}_{ab}^0 + \tilde{\mathcal{A}}_{ab} \quad (4.2)$$

$$\mathcal{B}_{ab} = \mathcal{B}_{ab}^0 + \tilde{\mathcal{B}}_{ab} \quad (4.3)$$

avec

$$\mathcal{A}_{ab}^0 = \langle [\mathbf{A}_a, [H_0, \mathbf{A}_b^\dagger]] \rangle \quad (4.4)$$

$$\mathcal{B}_{ab}^0 = -\langle [\mathbf{A}_a, [H_0, \mathbf{A}_{-b}]] \rangle \quad (4.5)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{ab} = \langle [\mathbf{A}_a, [H_{int}, \mathbf{A}_b^\dagger]] \rangle \quad (4.6)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{ab} = -\langle [\mathbf{A}_a, [H_{int}, \mathbf{A}_{-b}]] \rangle \quad (4.7)$$

Cette décomposition est intéressante car le calcul montre que, dans notre cas,

$$\mathcal{A}_{ab}^0 = E_a \mathcal{N}_{ab} \quad (4.8)$$

$$\mathcal{B}_{ab}^0 = 0. \quad (4.9)$$

La matrice des double-commutateurs \mathcal{H} (voir l'équation 2.104, p.50) pour H_0 va donc être réabsorbée dans la matrice norme.

Examinons les double-commutateurs d'interaction. On montre que l'on peut les réécrire

$$\tilde{\mathcal{A}}_{ab} = \langle \mathbf{A}_a H_{int} \mathbf{A}_b^\dagger \rangle \quad (4.10)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{ab} = \langle \mathbf{A}_a \mathbf{A}_{-b} H_{int} \rangle. \quad (4.11)$$

On obtient enfin après quelques calculs les résultats suivants.

- Les termes de type 1p-1p (une particule-une particule, c'est-à-dire $a = 1$ et $b = 1$) sont nuls.
- Termes 1p-2p : après réduction, on a,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_{\alpha, \beta\beta'} &= \frac{1}{2} V_{123} \langle \mathbf{b}_\alpha \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_{-2} \mathbf{b}_{-3} \mathbf{b}_\beta^\dagger \mathbf{b}_{\beta'}^\dagger \rangle \\ &= V_{\alpha -\beta -\beta'} \\ \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta\beta'} &= V_{\alpha -\beta -\beta'}. \end{aligned}$$

- Termes 2p-2p :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_{\alpha\alpha', \beta\beta'} &= \frac{1}{4} V_{1234} \langle \mathbf{b}_\alpha \mathbf{b}_{\alpha'} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2^\dagger \mathbf{b}_{-3} \mathbf{b}_{-4} \mathbf{b}_\beta^\dagger \mathbf{b}_{\beta'}^\dagger \rangle \\ &= V_{\alpha\alpha' -\beta -\beta'} \\ \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\alpha', \beta\beta'} &= V_{\alpha\alpha' -\beta -\beta'}. \end{aligned}$$

Une fois tous les éléments calculés, écrivons les équations RPA pour les paramètres X_α , Y_α , $X_{\alpha\alpha'}$, $Y_{\alpha\alpha'}$:

$$(A) = \begin{cases} (\Omega_\nu - \omega_\alpha)X_\alpha & = \frac{1}{2}V_{\alpha -\beta -\beta'} (X_{\beta\beta'} + Y_{\beta\beta'}) \\ (\Omega_\nu + \omega_\alpha)Y_\alpha & = -\frac{1}{2}V_{\alpha -\beta -\beta'} (X_{\beta\beta'} + Y_{\beta\beta'}) \end{cases}$$

et

$$(B) = \begin{cases} (\Omega_\nu - \omega_\alpha - \omega'_\alpha)X_{\alpha\alpha'} & = \frac{1}{2}V_{\alpha\alpha' -\beta} (X_\beta + Y_\beta) + \frac{1}{2}V_{\alpha\alpha' -\beta -\beta'} (X_{\beta\beta'} + Y_{\beta\beta'}) \\ (\Omega_\nu + \omega_\alpha + \omega'_\alpha)Y_{\alpha\alpha'} & = -\frac{1}{2}V_{\alpha\alpha' -\beta} (X_\beta + Y_\beta) - \frac{1}{2}V_{\alpha\alpha' -\beta -\beta'} (X_{\beta\beta'} + Y_{\beta\beta'}) \end{cases}.$$

Posant $Z = X + Y$, $\Delta = X - Y$, on obtient

$$(A) = \begin{cases} \Omega_\nu Z_\alpha & = \omega_\alpha \Delta_\alpha \\ \Omega_\nu \Delta_\alpha - \omega_\alpha Z_\alpha & = V_{\alpha -\beta -\beta'} Z_{\beta\beta'} \end{cases}$$

(A) nous donne finalement (rappelons que nous sommes implicitement sur $d\tilde{p}_\beta d\tilde{p}_{\beta'}$)

$$\frac{\Omega_\nu^2 - \omega_\alpha^2}{\omega_\alpha} Z_\alpha = V_{\alpha -\beta -\beta'} Z_{\beta\beta'},$$

De la même façon, on a avec (B)

$$Z_{\alpha\alpha'} = \frac{2(\omega_\alpha + \omega_{\alpha'})}{\Omega_\nu^2 - (\omega_\alpha + \omega_{\alpha'})^2} \left[V_{\alpha\alpha' -\beta} Z_\beta + \frac{1}{2}V_{\alpha\alpha' -\beta -\beta'} Z_{\beta\beta'} \right].$$

En introduisant

$$I(\omega, \vec{p}) = \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\omega_1\omega_2} \frac{1}{\omega^2 - (\omega_1 + \omega_2)^2} \quad (4.12)$$

$$\text{avec } \omega_i^2 = \vec{q}_i^2 + m^2 \text{ où } m \text{ est donnée par l'équation du gap} \quad (4.13)$$

qui se peut se mettre sous la forme explicitement covariante

$$I(\omega^2 - \vec{p}^2) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} \frac{1}{\omega^2 - \vec{p}^2 - 4\omega_p^2} \quad (4.14)$$

et après quelques manipulations (on repasse en 1 + 1 dimensions et en notation continue), on obtient l'équation des modes RPA à une particule :

$$\Omega_\nu^2 = \omega_\alpha^2 + 18 \lambda^2 s^2 \frac{I(\Omega_\nu, \alpha)}{1 - 3\lambda I(\Omega_\nu, \alpha)}$$

$$\text{et } I(\omega, \vec{p}) = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\omega_p} \frac{1}{\omega^2 - \vec{p}^2 - 4\omega_p^2}.$$

Notant

$M^2 = \Omega_v^2 - p^2$, $X_M = M^2/m^2$ et $X = m^2/\mu^2$, on a enfin, sous forme adimensionnelle,

$$X_M = 1 + 2 \left(\frac{12p}{X} \right)^2 s^2 \frac{\tilde{I}(X_M)}{1 - 12 \frac{p}{X} \tilde{I}(X_M)}, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \tilde{I}(X_M) &= \int \frac{du}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{1}{X_M - 4(1+u^2)} \\ &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{X_M(4-X_M)}} \text{Atan} \left(\sqrt{\frac{X_M}{4-X_M}} \right) \text{ pour } X_M < 4. \end{aligned}$$

4.1.3 Discussion des solutions de l'équation des modes RPA

Interprétation de l'équation

On peut réécrire l'équation 4.15 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} M^2 &= m^2 + \Sigma(M^2), \\ \Sigma(M^2) &= 18 \lambda^2 s^2 \frac{I(M^2)}{1 - 3\lambda I(M^2)}. \end{aligned}$$

Le terme $I(\omega, \vec{p})$ correspond en fait à la boucle à 2 particules dans laquelle on fait tourner la masse m .

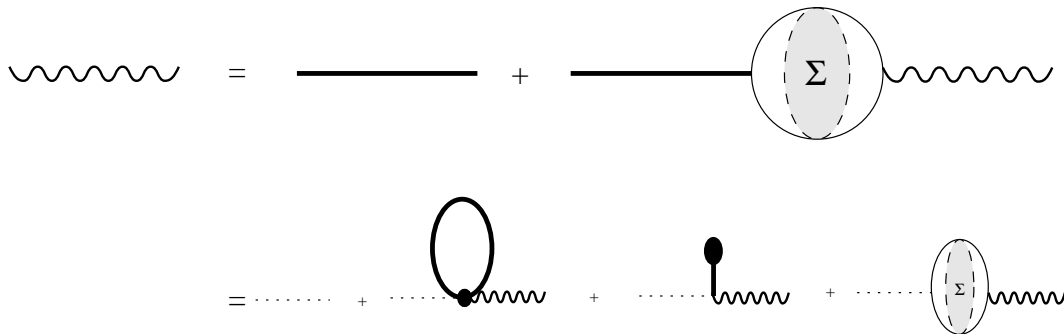
Le terme Σ est le terme de correction de masse (où opérateur de masse RPA) de la fonction de Green à une particule qui n'est autre que :

$$\mathcal{G}_{RPA}(\mathcal{S}) = \frac{1}{\mathcal{S} - m^2 - \Sigma(\mathcal{S})}. \quad (4.16)$$

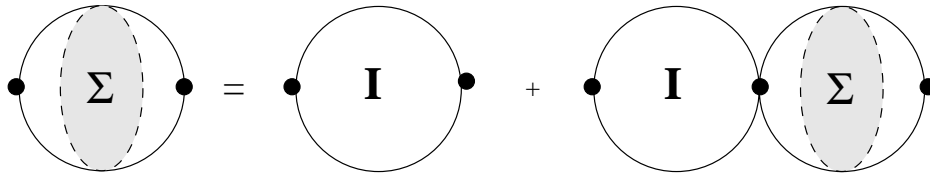
Ainsi, avec les notations introduites en champ moyen à l'équation 3.8, p.64,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{RPA} &= \mathcal{G}_{CM} + \mathcal{G}_{CM} \Sigma \mathcal{G}_{RPA} \\ &= \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0(\Sigma + \Sigma_{CM})\mathcal{G}_{RPA}, \end{aligned}$$

équations qui peuvent être représentées en terme de diagramme comme suit :



avec l'opérateur de masse Σ qui peut s'écrire,



Résolution numérique

On peut résoudre numériquement l'équation 4.15, p.84 pour différentes valeurs de p . On obtient les courbes de la figure 4.1, p.85.

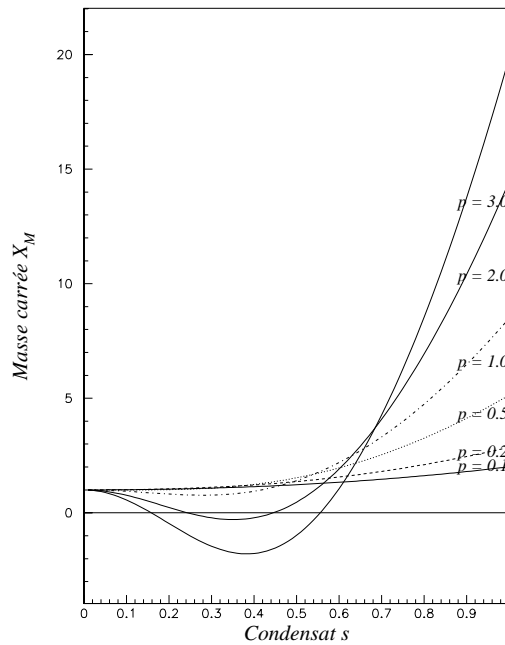


FIG. 4.1 – Tracé de X_M en fonction de s pour différentes valeurs de p . Sa valeur peut devenir négative, dénotant une instabilité du propagateur.

On remarque que pour certaines valeurs de s et quand p est suffisamment grand, la courbe passe sous zéro. Cela dénote une instabilité dans la méthode qui admet alors une solution imaginaire.

Cette instabilité se caractérise par le fait que le propagateur possède des pôles pour $\mathcal{S} < 0$. Cela va poser un problème lorsque nous allons calculer l'énergie de corrélation au chapitre suivant.

Dans un schéma de RPA autocohérent, cela ne serait plus la masse m calculée à l'approximation du champ moyen qui apparaîtrait dans les boucles.

On pourrait maintenant calculer la correction du fondamental (énergie de corrélation) associée à la présence des fluctuations RPA (voir 1.65). Cependant pour des raisons de commodité, on préfère utiliser une autre formulation de la RPA basée sur des équations de Dyson.

4.2 RPA standard et équations de Dyson

Dans le paragraphe précédent, nous avons écrit les équations de la RPA à partir d'un formalisme d'opérateurs. C'était le formalisme dit des équations du mouvement.

Ici nous allons voir une approche consistant à écrire des équations de Dyson sur les fonctions de Green. De cette façon, nous allons pouvoir estimer l'effet des corrélations de l'état fondamental.

4.2.1 Équations à notre ordre d'approximation à 2 particules

Nous avons introduit section 2.3.3, p.51 quatre types de fonctions de Green que nous notons

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{a\bar{b}} &= -i\langle 0|T(\mathbf{A}_a\mathbf{A}_{\bar{b}}^\dagger)|0\rangle, \\ \mathcal{G}_{a-b} &= -i\langle 0|T(\mathbf{A}_a\mathbf{A}_{-b})|0\rangle, \\ \mathcal{G}_{-\bar{a}\bar{b}} &= -i\langle 0|T(\mathbf{A}_{-\bar{a}}^\dagger\mathbf{A}_{\bar{b}}^\dagger)|0\rangle, \\ \mathcal{G}_{-\bar{a}-b} &= -i\langle 0|T(\mathbf{A}_{-\bar{a}}^\dagger\mathbf{A}_{-b})|0\rangle.\end{aligned}$$

Nous nous limitons toujours pour ce problème à un espace à deux particules. Ainsi, les opérateurs mis en jeu seront les suivants : $\mathbf{b}^\dagger, \mathbf{b}^\dagger\mathbf{b}^\dagger$.

On peut justifier à cet ordre la disparition du terme dynamique (voir équation 2.110, p.51). Il s'agit d'un T -produit, irréductible par coupure d'un nombre de lignes correspondant au nombre de particules de l'espace-test considéré (ici, deux). On peut le supprimer à cet ordre d'approximation car il n'intervient que dans le calcul des fonctions d'ordre supérieur. Ceci explique que seul des doubles commutateurs apparaissent dans l'équation.

On procède à la décomposition habituelle du hamiltonien en termes libre et d'interaction. Calculons les différents termes de l'équation, en notant $|a\rangle = \mathbf{b}_a^\dagger|0\rangle$ et où \mathcal{A}, \mathcal{B} et \mathcal{N} sont les mêmes qu'au chapitre précédent. Le terme libre est donné par :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{ab}^0 &= \begin{bmatrix} \Omega_a & 0 \\ 0 & \Omega_a \end{bmatrix} \delta_{ab} \\ \text{et } \mathcal{N}_{ab} &= \begin{bmatrix} \langle a|b\rangle & 0 \\ 0 & -\langle a|b\rangle \end{bmatrix},\end{aligned}$$

tandis que

$$\mathcal{H}_{ab}^{int} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{ab} & \mathcal{B}_{ab} \\ \mathcal{B}_{-a-b}^* & \mathcal{A}_{-a-b}^* \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Ce dernier résultat appelle un commentaire.

Le calcul de \mathcal{H}_{ab}^{int} présente un aspect technique délicat nécessitant d'aller provisoirement au delà de la RPA usuelle. En effet, l'inverse de la matrice \mathfrak{N}_{ab} n'est pas défini à notre ordre d'approximation. Il faut aller plus loin et introduire les nombres d'occupation. Ils sont de la forme $\langle \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} \rangle$ et devraient donc s'annuler en RPA usuelle où le vide est celui de l'approximation gaussienne.

Pour régler notre problème, on incorpore explicitement les nombres d'occupation dans \mathfrak{N}_{ab} et dans les doubles commutateurs, puis on calcule \mathfrak{N}_{ab}^{-1} et \mathcal{H}_{ab}^{int} . En fin de calcul, on peut de nouveau annuler ces nombres et trouver la forme de \mathcal{H}_{ab}^{int} donnée.

Remarquons que le fait que la forme de \mathcal{H}_{ab}^{int} soit la même que précédemment est une conséquence de la consistance du formalisme des équations de Dyson et celui des équations du mouvement [SDR97], les deux types de matrice de double-commutateurs.

Poursuivons le calcul en remarquant que $\tilde{\mathcal{A}}_{ab} = \tilde{\mathcal{B}}_{ab}$ (voir au chapitre précédent la section 4.1.2, p.83).

L'équation 2.119, p.53 devient

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega - \Omega_a & 0 \\ 0 & \omega + \Omega_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{a\bar{b}} & \mathcal{G}_{a-b} \\ \mathcal{G}_{-\bar{a}\bar{b}} & \mathcal{G}_{-\bar{a}-b} \end{bmatrix} &= \langle a|b \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &+ \sum_c \mathcal{A}_{ac} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{c\bar{b}} & \mathcal{G}_{c-b} \\ \mathcal{G}_{-\bar{c}\bar{b}} & \mathcal{G}_{-\bar{c}-b} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Introduisons les fonctions de Green libres (ou non corrélées) :

$\mathcal{G}_a^0 = \frac{1}{\omega - \Omega_a + i\eta}$ et $\bar{\mathcal{G}}_a^0 = -\frac{1}{\omega + \Omega_a - i\eta}$. Le système précédent se réécrit

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{c\bar{b}} &= \mathcal{G}_a^0 \langle a|b \rangle + \sum_c \mathcal{G}_a^0 \mathcal{A}_{ac} (\mathcal{G}_{c\bar{b}} + \mathcal{G}_{-\bar{c}\bar{b}}) \\ \mathcal{G}_{-\bar{c}\bar{b}} &= \sum_c \bar{\mathcal{G}}_a^0 \mathcal{A}_{ac} (\mathcal{G}_{c\bar{b}} + \mathcal{G}_{-\bar{c}\bar{b}}) \\ \mathcal{G}_{c-b} &= \sum_c \mathcal{G}_a^0 \mathcal{A}_{ac} (\mathcal{G}_{c-b} + \mathcal{G}_{-\bar{c}-b}) \\ \mathcal{G}_{-\bar{c}-b} &= \bar{\mathcal{G}}_a^0 \langle a|b \rangle + \sum_c \bar{\mathcal{G}}_a^0 \mathcal{A}_{ac} (\mathcal{G}_{c-b} + \mathcal{G}_{-\bar{c}-b}). \end{aligned}$$

Introduisons la fonction de Green totale

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_{ab} &= -i \langle 0|T \left((\mathbf{A}_a + \mathbf{A}_{-a}^\dagger) (\mathbf{A}_b + \mathbf{A}_{-b}^\dagger)^\dagger \right) |0 \rangle \\ &= \mathcal{G}_{a\bar{b}} + \mathcal{G}_{a-b} + \mathcal{G}_{-\bar{a}\bar{b}} + \mathcal{G}_{-\bar{a}-b} \\ \tilde{\mathcal{G}}_a^0 &= \frac{2\Omega_a}{\omega^2 - \Omega_a^2 + i\eta} \\ \tilde{\mathcal{G}}_{ab}^0 &= \tilde{\mathcal{G}}_a^0 \langle a|b \rangle. \end{aligned}$$

On obtient l'équation générale

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ab} = \tilde{\mathcal{G}}_{ab}^0 + \sum_c \tilde{\mathcal{G}}_a^0 \mathcal{A}_{ac} \tilde{\mathcal{G}}_{cb}.$$

Si on se limite à un et deux opérateurs, cette équation se décompose en

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\alpha'} &= \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha}^0 \delta_{\alpha\alpha'} + \frac{1}{2} \sum_{\beta\beta'} \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha}^0 V_{\alpha-\beta-\beta'} \tilde{\mathcal{G}}_{\beta\beta',\alpha'} \\ \tilde{\mathcal{G}}_{\beta\beta',\alpha'} &= \sum_{\gamma} \tilde{\mathcal{G}}_{\beta\beta'}^0 V_{\beta\beta'-\gamma} \tilde{\mathcal{G}}_{\gamma,\alpha'} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma\gamma'} \tilde{\mathcal{G}}_{\beta\beta'}^0 V_{\beta\beta'-\gamma-\gamma'} \tilde{\mathcal{G}}_{\gamma\gamma',\alpha'} \\ \tilde{\mathcal{G}}_{\beta\beta',\gamma\gamma'} &= \tilde{\mathcal{G}}_{\beta\beta'}^0 \langle \beta\beta' | \gamma\gamma' \rangle + \sum_{\alpha} \tilde{\mathcal{G}}_{\beta\beta'}^0 V_{\beta\beta'-\alpha} \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha,\gamma\gamma'} + \frac{1}{2} \sum_{\delta\delta'} \tilde{\mathcal{G}}_{\beta\beta'}^0 V_{\beta\beta'-\delta\delta'} \tilde{\mathcal{G}}_{\delta\delta',\gamma\gamma'}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ce système d'équations est maintenant complètement fermé.

4.3 Résolution des équations

Tout d'abord, nous allons préciser quelques définitions que nous utiliserons dans cette section. Notons

$$\mathcal{G}_{RPA}(\omega, \vec{p}) = (\omega^2 - \omega_p^2 - \Sigma(\omega, \vec{p}))^{-1} \quad (4.19)$$

$$\Sigma(\omega, \vec{p}) = 18\lambda^2 s^2 \bar{I}(\omega, \vec{p}) \quad (4.20)$$

$$\bar{I}(\omega, \vec{p}) = \frac{I(\omega, \vec{p})}{1 - 3\lambda I(\omega, \vec{p})} \quad (4.21)$$

$$I(\omega, \vec{p}) = \int \frac{dt}{2\pi} \frac{1}{\omega_t} \frac{1}{\omega^2 - \vec{p}^2 - 4\omega_t^2 + i\eta}. \quad (4.22)$$

Après encore quelques manipulations sur le système 4.18, p.88, longues mais habituelles, on obtient :

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\alpha'} = \frac{2\omega_{\alpha}}{\omega^2 - \omega_{\alpha}^2 - \Sigma(\omega, \vec{p}_{\alpha})} \quad (4.23)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\gamma\gamma',\alpha'} = \frac{\tilde{\mathcal{G}}_{\gamma\gamma'}^0 V_{\gamma\gamma' - \alpha'}}{1 - 12 p \mu^2 I(\omega, \vec{p}_{\alpha'})} \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\alpha'} \quad (4.24)$$

On peut pour cette dernière fonction établir le résultat suivant :

$$\sum_{\gamma\gamma'} V_{\gamma\gamma' - \alpha'} \tilde{\mathcal{G}}_{\gamma\gamma',\alpha'} = \frac{1}{3} \int \frac{dp}{2\pi} \frac{\Sigma(\omega^2 - \vec{p}^2)}{\omega^2 - \omega_p^2 - \Sigma(\omega^2 - \vec{p}^2)}. \quad (4.25)$$

Pour $\tilde{\mathcal{G}}_{\beta\beta',\gamma\gamma'}$ on obtient la relation

$$\sum_{\beta\beta'} \sum_{\gamma\gamma'} V_{\beta\beta'-\gamma-\gamma'} (\tilde{\mathcal{G}}_{\beta\beta',\gamma\gamma'} - \bar{\mathcal{G}}_{\beta\beta',\gamma\gamma'}^0) \delta_{\alpha-\beta-\beta'} = \int \frac{dp}{2\pi} \lambda \left\{ \bar{I} 6\lambda I + \bar{I} 6\lambda s \mathcal{G}_{RPA} 6\lambda s \bar{I} \right\} (\omega, \vec{p}_\alpha). \quad (4.26)$$

Une fois sommée sur l'impulsion \vec{p}_α cette expression correspond à la valeur moyenne du hamiltonien d'interaction $H_3 + H_4$, comme on le verra dans le paragraphe suivant. Précisons dès maintenant un point important qui sera discuté en détail par la suite (section 4.4.5, p.114). On n'a retenu ici que les combinaisons de fonctions de Green qui donnent une contribution covariante au potentiel effectif. Les termes non-covariants sont nuls si on combine d'une certaine façon les fonctions de Green et nous choisissons de les négliger pour le moment.

La structure de ce terme peut se comprendre facilement en terme de diagrammes (voir la figure 4.2). Dans ces deux diagrammes, il n'apparaît que le terme réellement relatif à la

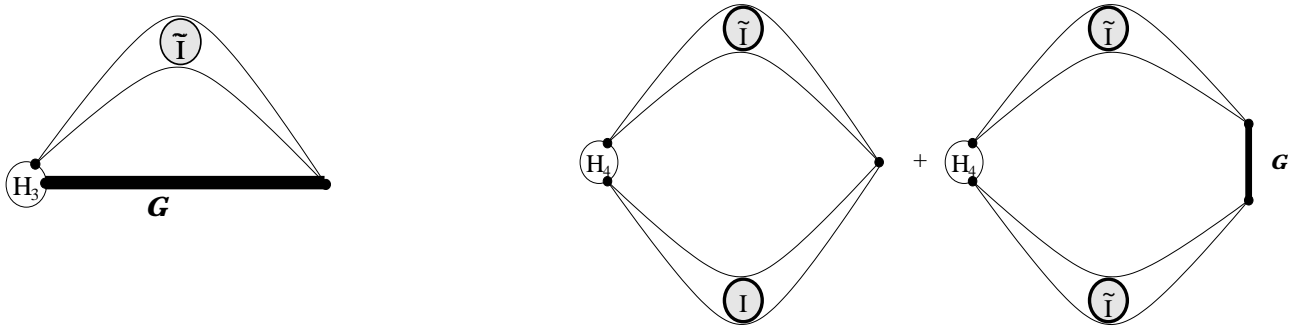


FIG. 4.2 – Diagramme représentant les corrélations à trois et quatre corps.

valeur moyenne de $H_3 + H_4$ car le terme de champ moyen a été supprimé par la soustraction de la fonction de Green libre. Les différents vertex représentent les interactions associées aux corrélations dans le fondamental.

Ces résultats vont nous servir pour le calcul de l'énergie de corrélation.

4.3.1 Calcul de $\langle H_{int} \rangle$

La valeur moyenne du hamiltonien d'interaction est définie par $\langle H_{int} \rangle = \langle : H_3 + H_4 :_b \rangle$ (où la valeur moyenne est prise sur le vide corrélé, c'est-à-dire le vide $|RPA\rangle$ et non plus le vide gaussien). On va l'exprimer en termes de fonctions de Green. En utilisant le théorème

de Wick 3.1.1, p.61, on a

$$\begin{aligned}\langle H_{int} \rangle &= V_{-\alpha -\beta -\delta} \langle : \varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\delta : \rangle + \frac{1}{4} V_{-\alpha -\beta -\delta -\gamma} \langle : \varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\delta \varphi_\gamma : \rangle \\ &= V_{-\alpha -\beta -\delta} (\langle : \varphi_\alpha \varphi_\beta : \varphi_\delta \rangle + 3\delta_{\alpha -\beta} \langle \varphi_\gamma \rangle) \\ &\quad + \frac{1}{4} V_{-\alpha -\beta -\delta -\gamma} (\langle : \varphi_\alpha \varphi_\beta : : \varphi_\delta \varphi_\gamma : \rangle - 2\delta_{\alpha -\beta} \delta_{\delta -\gamma} - 4\delta_{\delta -\gamma} \langle : \varphi_\alpha \varphi_\beta : \rangle).\end{aligned}$$

Les équations 4.25 et 4.26, intégrées sur ω (en vertu du théorème spectral, voir section 1.4.1, p.29) nous donne une partie de l'énergie de corrélation $\langle H_{int} \rangle$. Il s'agit en fait de la contribution covariante du premier et du second terme de l'équation précédente. Les termes résiduels, non-covariants, seront discutés en détails par la suite, en particulier, voir les équations 4.152, p.115 et 4.160, p.116. Pour cette première application simple, nous avons choisi de les ignorer.

La soustraction de la fonction de Green libre va apparaître naturellement du fait que l'on calcule ici une correction, due aux corrélations, par rapport à H_0 .

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\langle H_{int} \rangle &= \int \frac{i d\omega}{2\pi} e^{i\omega\eta_+} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{\alpha\alpha' \beta\beta'} V_{\alpha\alpha' -\beta -\beta'} (\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\alpha', \beta\beta'}(\omega) - \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\alpha', \beta\beta'}^0(\omega)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha\alpha' \beta} V_{\alpha\beta\beta'} \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha, \beta\beta'}(\omega) \right\}\end{aligned}$$

On calcule finalement $\langle H_{int} \rangle$ en injectant les relations sur les fonctions de Green du paragraphe précédent puis en sommant sur ω et en passant en densité d'énergie. On obtient :

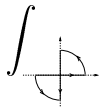
$$\begin{aligned}\langle \mathcal{H}_{int} \rangle &= \int \frac{i d\omega}{2\pi} e^{i\omega\eta_+} \int \frac{dp}{2\pi} \left\{ \frac{\lambda}{4} \left[\bar{I} 6\lambda I + \bar{I} 6\lambda s \mathcal{G}_{RPA} 6\lambda s \bar{I} \right] + 6\lambda^2 s^2 \bar{I} \mathcal{G}_{RPA} \right\} \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{i d\omega}{2\pi} e^{i\omega\eta_+} \int \frac{dp}{2\pi} \left\{ \frac{(6\lambda s)^2 I}{(1-3\lambda I)^2} \left(1 - \frac{3\lambda I}{2} \right) \mathcal{G}_{RPA} + \frac{(3\lambda I)^2}{1-3\lambda I} \right\}.\end{aligned}$$

Cette expression est bien covariante, $I(E, p)$ pouvant se réécrire $I(\sqrt{E^2 - p^2}, 0)$

On va intégrer sur p grâce à la formule,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{id\omega}{2\pi} e^{i\omega\eta_+} f(\omega^2 - p^2) = - \int_0^{+\infty} \frac{d\mathcal{S}}{4\pi} f(-\mathcal{S}) \quad (4.27)$$

Pour le montrer, considérons une rotation de Wick sur ω , c'est-à-dire que nous allons transformer l'intégrale sur \mathbb{R} en intégrale sur $[-i\infty, +i\infty]$. En effet, on peut écrire

$$\int_{\text{contour}} \equiv 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} + \int_{+i\infty}^{-i\infty}$$


car le facteur $e^{i\omega\eta^+}$ nous autorise à utiliser le lemme de Jordan qui assure que l'intégrale sur les quarts de cercle est nulle. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{id\omega}{2\pi} e^{i\omega\eta^+} f(\omega^2 - p^2) &= \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{id\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} f(\omega^2 - p^2) \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi} \frac{dp}{2\pi} f(-z^2 - p^2) \quad (\text{on pose } iz = \omega) \end{aligned}$$

On introduit alors les variables polaires r et θ , avec $r^2 = z^2 + p^2$. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} dz dp = \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^\infty \frac{d(r^2)}{2}$$

En posant $\mathcal{S} = r^2$ et on trouve bien le résultat annoncé.

En effectuant la rotation de Wick on trouve donc

$$\langle \mathcal{H}_{int} \rangle = -\frac{1}{24\pi} \int_0^{+\infty} d\mathcal{S} \left\{ \frac{(3\lambda I^W)^2}{1 + 3\lambda I^W} - \frac{(6\lambda s)^2 I^W}{(1 + 3\lambda I^W)^2} \frac{1 + \frac{3\lambda I^W}{2}}{\mathcal{S} + m^2 - \frac{18\lambda^2 s^2 I^W}{1 + 3\lambda I^W}} \right\}. \quad (4.28)$$

Notons que la quantité $I^W \equiv I^W(\mathcal{S})$ qui apparaît ici est donnée par

$$I^W(\mathcal{S}) \equiv -I(-\mathcal{S}) = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\omega_p} \frac{1}{\mathcal{S} + 4\omega_p^2} \quad (4.29)$$

$$= \frac{1}{m^2} \tilde{I}(\mathcal{S}/m^2) \quad (4.30)$$

$$\text{avec } \tilde{I}(\mathcal{S}) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\sqrt{X_S(4 + X_S)}} \ln \left(\frac{\sqrt{X_S + 4} + \sqrt{X_S}}{2} \right). \quad (4.31)$$

du fait de la rotation de Wick. On omettra l'exposant W par la suite.

4.3.2 Énergie de corrélation

Nous allons utiliser un artifice de calcul en multipliant \mathbf{H}_{int} par un paramètre arbitraire $\rho \in [0, 1]$ (on modifie la constante de couplage). Écrivons :

$$E(\rho) = \langle \Psi(\rho) | \mathbf{H}_0 + \rho \mathbf{H}_{int} | \Psi(\rho) \rangle \quad (4.32)$$

ou $|\Psi(\rho)\rangle$ est l'état fondamental du hamiltonien $H(\rho) \equiv \mathbf{H}_0 + \rho \mathbf{H}_{int}$.

Ainsi $E(0) = E_{GEP}$ (puisque $H_{int} =: H_3 + H_4$, H_0 est bien le hamiltonien dont le spectre est celui du champ moyen). On a

$$\frac{dE}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \langle \Psi(\rho) | \rho \mathbf{H}_{int} | \Psi(\rho) \rangle.$$

que l'on intègre sur ρ :

$$E(\rho = 1) = E_{RPA} = E_{GEP} + \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \langle \Psi(\rho) | \rho \mathbf{H}_{int} | \Psi(\rho) \rangle. \quad (4.33)$$

Nous justifierons plus en détails l'utilisation de la "charging formula" dans la section 4.33, p.92, mais on peut déjà en dire un mot. Le calcul de la densité scalaire (l'équivalent des nombres d'occupation) est impossible en RPA car la formule $\langle \varphi \varphi \rangle = \int i \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\eta^+} \mathfrak{G}_{\varphi, \varphi}$ n'est pas cohérente (ce point sera discuté dans le cas de l'oscillateur anharmonique, 6.4.2, p.144). La *charging formula* écrite avec H_0 le hamiltonien de Hartree-Fock et H_{int} le hamiltonien en ordre normal par rapport aux \mathbf{b} permet de ne faire apparaître à aucun moment la quantité $\int i \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\eta^+} \mathfrak{G}_{\varphi, \varphi}$. La densité scalaire est prise en compte, *via* sa valeur dans le champ moyen, grâce au terme E_{GEP} . En RPA renormalisée, ce sera également le cas mais avec une amélioration, la densité scalaire étant calculée dans le champ moyen généralisé (dont le paramètre de Bogoliubov ε_k vérifie l'équation de champ moyen généralisé 2.89, p.47 pour deux opérateurs).

Le terme $\langle \Psi(\rho) | \rho \mathbf{H}_{int} | \Psi(\rho) \rangle$ est calculé simplement en remplaçant λ par $\rho\lambda$ dans l'expression 4.28. Introduisons l'énergie de corrélation (c'est une densité)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{corr} &= E(\rho = 1) - E_{GEP} \\ &= \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \langle \Psi(\rho) | \rho \mathbf{H}_{int} | \Psi(\rho) \rangle \\ &= -\frac{1}{24\pi} \int_0^\infty d\mathcal{S} \int \frac{d\rho}{\rho} \left\{ \frac{(3\rho\lambda I)^2}{1 + 3\rho\lambda I} - \frac{(6\rho\lambda s)^2 I}{(1 + 3\rho\lambda I)^2} \frac{1 + \frac{3\rho\lambda I}{2}}{\mathcal{S} + m^2 - \frac{18\rho^2\lambda^2 s^2 I}{1 + 3\rho\lambda I}} \right\} \\ &= -\frac{1}{24\pi} \int_0^\infty d\mathcal{S} \int_0^{3\lambda I} \frac{du}{u} \left\{ \frac{u^2}{1 + u} - \frac{4u^2 s^2}{I(1 + u)^2} \frac{1 + \frac{u}{2}}{\mathcal{S} + m^2 - \frac{2u^2 s^2 / I}{1 + u}} \right\} \end{aligned}$$

On remarque que, quand $\rho = 1$, dans le second terme apparaît le propagateur \mathcal{G}_{RPA} (4.16, p.84). Or nous avons vu que pour certaines valeurs de s , il peut être singulier.

Pour continuer le calcul, nous avons choisi de modifier ce terme. Cette approximation consiste en fait à remplacer une partie du diagramme 4.2, p.89. On a négligé la modification du propagateur à une particule c'est-à-dire qu'on a remplacé le propagateur "habillé" par le propagateur du champ moyen.

Explicitement, $\frac{2u^2 s^2 / I}{1 + u} \sim 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{corr} &= -\frac{1}{24\pi} \int_0^\infty d\mathcal{S} \int du \left\{ \frac{u}{1 + u} - \frac{4s^2}{I(\mathcal{S} + m^2)} \frac{u(1 + \frac{u}{2})}{(1 + u)^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{24\pi} \int_0^\infty d\mathcal{S} \left\{ -\ln(1 + 3\lambda I) + 3\lambda I - \frac{2s^2}{I(\mathcal{S} + m^2)} \left(\frac{1}{1 + 3\lambda I} + 3\lambda I \right) \right\} \end{aligned}$$

En mettant notre énergie sous forme adimensionnelle, on obtient :

$$\frac{\mathcal{E}_{corr}}{\mu^2} = -\frac{X}{24\pi} \int_0^\infty d\mathcal{S} \left\{ -\ln \left(1 + \frac{12p}{X} \tilde{I}(\mathcal{S}) \right) + \frac{12p}{X} \tilde{I}(\mathcal{S}) - \frac{2s^2}{\tilde{I}(\mathcal{S})(\mathcal{S}+1)} \left(\frac{1}{1 + \frac{12p}{X} \tilde{I}(\mathcal{S})} + \frac{12p}{X} \tilde{I}(\mathcal{S}) \right) \right\} \quad (4.34)$$

4.3.3 Résultats

Comme précédemment, nous pouvons calculer l'énergie de corrélation 4.34 en fonction de s pour différents paramètres (potentiel effectif de la s-RPA).

Ici, nous remarquons que \mathcal{E}_{corr} est toujours négatif (résultat prévisible d'après la formule 1.65). Ainsi, comme on le désire, l'ajout de ce terme va contribuer à l'obtention d'une transition de phase du second ordre.

Les résultats sont présentés sur la figure 4.3, p.93 (à gauche).

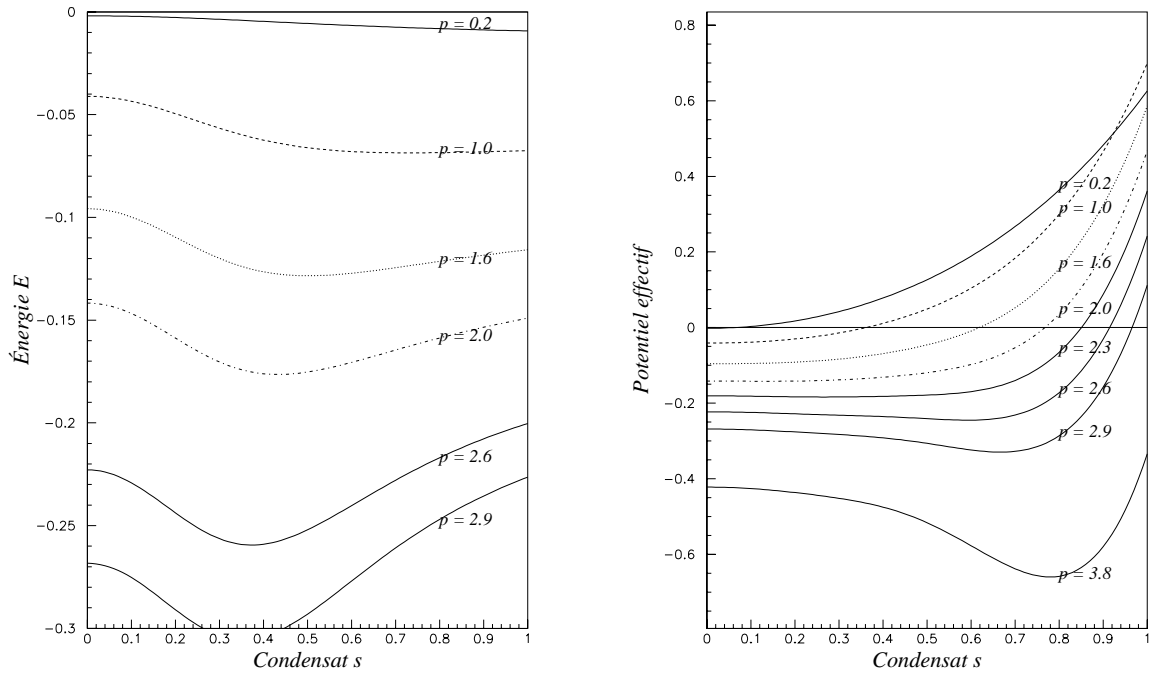


FIG. 4.3 – Énergie de corrélation covariante en fonction de s , pour différentes valeurs de la constante de couplage (à gauche). Potentiel effectif s-RPA covariant total (corrélations s-RPA covariantes additionnées au potentiel effectif gaussien) (à droite).

Additionnons ce résultat avec l'énergie de champ moyen (figure 4.3, p.93, à droite).

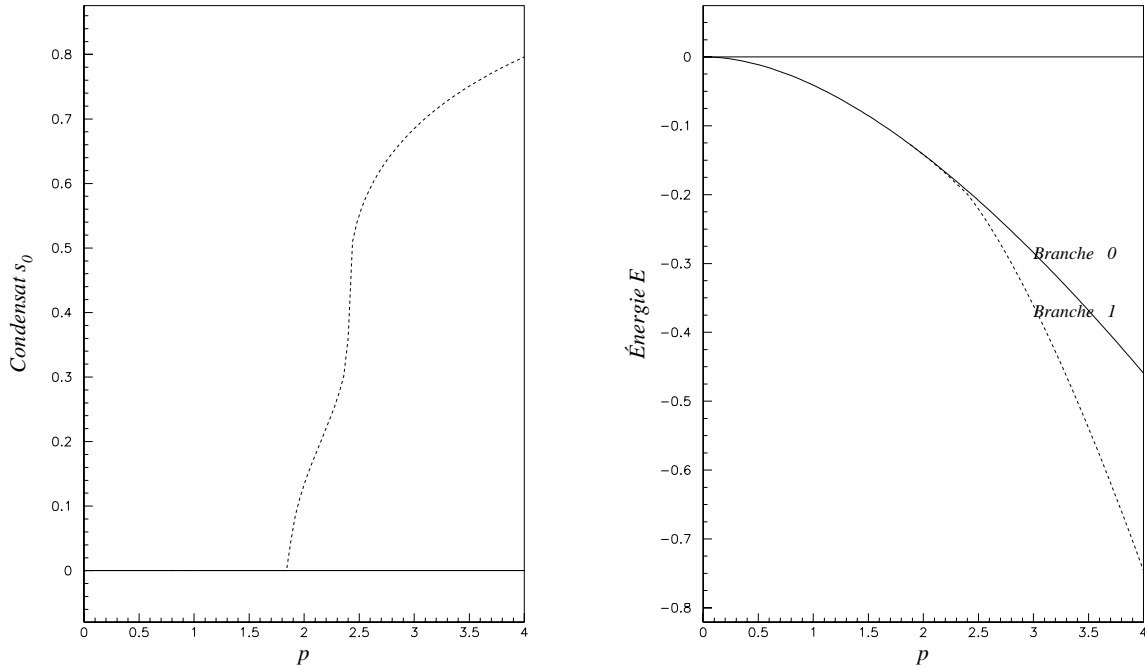


FIG. 4.4 – Minimum du potentiel effectif s-RPA (à gauche) et énergie de l'état fondamental s-RPA (branche 1, à droite). Seuls les termes covariants sont pris en compte. Le minimum du potentiel effectif est continu, la transition de phase est du second ordre. Pour l'énergie du fondamental, la branche 0 représente la valeur du potentiel effectif pour $s = 0$, donné à titre de comparaison avec le cas gaussien (bien sûr, pour $p < p_c$, les deux branches sont confondues).

On constate que la transition est bien du second ordre (pas de phase métastable). Le caractère premier ordre de la transition est bien amoindri par les fluctuations RPA et elles sont ici suffisantes pour nous donner le bon ordre de transition.

La figure 4.4 présente le calcul du condensat au minimum. Il y a une transition continue entre la zone où $s = 0$ et celle où $s \neq 0$. Cela matérialise le caractère second ordre de la transition. On peut voir que le paramètre critique est égal à $p_c \simeq 1.86$. Cette valeur est plus basse que le résultat de champ moyen et on s'éloigne donc du résultat calculé par les réseaux (2.56 dans [LW98]). Enfin, nous avons calculé l'énergie au minimum de s pour les deux branches. Remarquons que la transition étant du second ordre, il n'y a pas de minimum secondaire qui se développe. La branche à $s = 0$ passe de l'état stable à instable à la transition de phase. Il ne coexiste pas plusieurs phases (métastable et stable) comme dans le cas du champ moyen.

Nous sommes en accord avec le résultat théorique qui interdit une transition de premier ordre.

L'instabilité nous oblige à rejeter les termes pour lesquelles l'intégrale n'a plus de sens.

Ainsi, l'espace exploré par les fonctions-tests est diminué.

Pour s'affranchir de l'instabilité, il serait intéressant de considérer la RPA autocohérente.

Enfin, nous avons comparé nos résultats avec le développement en clusters à l'ordre quatre [HCPT96], où la transition trouvée est du second ordre. Nos résultats se rapprochent des valeurs données dans cet article.

4.3.4 Conclusion

Cette application de la RPA donne des résultats encourageants pour l'étude de la transition de phase. Il nous a paru utile d'étendre cette application simple, qui nous a servi à mettre en place le formalisme. Dans la partie suivante, l'ensemble d'opérateurs d'excitations sera plus large, ce qui apportera de nouveaux problèmes. Nous étudierons en plus de la RPA standard une version partiellement autocohérente de l'approximation, la RPA renormalisée. Nous discuterons en détails les problèmes de l'instabilité du propagateur, de la non-covariance et du calcul du nombre d'occupation.

4.4 RPA renormalisée

Nous allons étudier l'approximation renormalisée de la RPA (r-RPA), appliquée à la théorie $\lambda\Phi^4$ [HCDS02, Han01, HC03]. Pour bien fixer les idées, nous allons construire la r-RPA en repartant de l'expression du hamiltonien, écrit en fonction des transformées de Fourier des champs.

Ainsi dans un premier temps, nous introduirons tous les éléments nécessaires à la mise en place de l'approximation, puis nous présenterons l'ensemble d'excitation utilisé, les équations r-RPA et leurs résolutions. Enfin, nous calculerons l'énergie de corrélation et discuterons les résultats obtenus.

4.4.1 Mise en place du schéma RPA

Hamiltonien en décomposition de Fourier

Nous choisissons d'exprimer le hamiltonien 3.1.1 en introduisant le condensat ainsi que la décomposition de Fourier des champs φ et π (pour des raisons de commodité, l'espace est ici discrétisé). On utilisera les notations,

$$\varphi_k = \int \frac{dx}{\sqrt{V}} e^{-ikx} \varphi(x) \quad (4.35)$$

$$\Pi_k = \int \frac{i dx}{\sqrt{V}} e^{-ikx} \pi(x), \quad (4.36)$$

avec $[\varphi_{\vec{q}}, \Pi_{\vec{q}'}^\dagger] = \delta_{\vec{q}, \vec{q}'}$ et l'hermiticité et la réalité de $\varphi(x)$ et $\pi(x)$ se traduisent par

$$\varphi_{\vec{q}}^\dagger = \varphi_{-\vec{q}} \quad \text{et} \quad \Pi_{\vec{q}}^\dagger = -\Pi_{-\vec{q}}. \quad (4.37)$$

On obtient pour le hamiltonien

$$\begin{aligned}
H &= V \left(\frac{1}{2} \mu_0^2 s^2 + \frac{b}{24} s^4 \right) + \sqrt{V} \sum_{\vec{q}} \left(\mu_0 s + \frac{b}{6} s^3 \right) \varphi_{\vec{q}} \delta_{\vec{q},0} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\vec{q}} \left(\Pi_{\vec{q}} \Pi_{\vec{q}}^\dagger + \mathcal{O}_q^2 \varphi_{\vec{q}} \varphi_{\vec{q}}^\dagger \right) + \frac{1}{6} \sum_{123} V_{1,2,3} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \\
&+ \frac{1}{24} \sum_{1234} V_{1,2,3,4} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4
\end{aligned} \tag{4.38}$$

où nous avons introduit les notations $\varphi_i \equiv \varphi_{\vec{q}_i}$ et $b = 6\lambda$ (suivant les conventions utilisées dans [HCDS02]),

$$V_{1,2,3} = \frac{b s}{\sqrt{V}} \delta_{\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3}, \quad V_{1,2,3,4} = \frac{b}{V} \delta_{\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 + \vec{q}_4} \tag{4.39}$$

que nous appellerons les vertex des interactions à trois et quatre corps (respectivement) et enfin

$$\mathcal{O}_q^2 = \vec{q}^2 + \mu_0^2 + \frac{b}{2} s^2 \tag{4.40}$$

est le mode nu à une particule.

$$\tag{4.41}$$

On définit H_3 et H_4 les hamiltoniens d'interaction à trois et quatre corps,

$$H_3 = \frac{1}{6} \sum_{123} V_{1,2,3} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \tag{4.42}$$

$$H_4 = \frac{1}{24} \sum_{1234} V_{1,2,3,4} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \tag{4.43}$$

Nous allons introduire une base d'opérateurs de créations et de destructions quelconque, dépendant d'un paramètre κ (homogène à une énergie),

$$\mathbf{b}_\beta = \sqrt{\frac{\kappa_\beta}{2}} \varphi_\beta + \sqrt{\frac{1}{2\kappa_\beta}} \Pi_\beta \tag{4.44}$$

relation que l'on peut inverser,

$$\varphi_\beta = \sqrt{\frac{1}{2\kappa_\beta}} \left(\mathbf{b}_\beta + \mathbf{b}_{-\beta}^\dagger \right), \quad \Pi_\beta = \sqrt{\frac{\kappa_\beta}{2}} \left(\mathbf{b}_\beta - \mathbf{b}_{-\beta}^\dagger \right). \tag{4.45}$$

On vérifie que l'algèbre $[\mathbf{b}_\beta, \mathbf{b}_{\beta'}^\dagger] = \delta_{\beta, \beta'}$ est satisfaite.

Excitation RPA et champ moyen généralisé

L'ensemble d'excitation est $\left\{ \mathbf{b}_\alpha^\dagger, \mathbf{b}_\beta^\dagger \mathbf{b}_{\beta'}^\dagger, \mathbf{b}_\beta^\dagger \mathbf{b}_{-\beta' \neq -\beta}, \mathbf{b}_\beta \mathbf{b}_{-\beta' \neq -\beta}^\dagger \right\}$ c'est-à-dire seules des excitations à un et deux corps sont prises en compte. Grâce à la condition sur β' pour le dernier élément de l'ensemble, la condition d'inversibilité de la matrice norme est satisfaite.

Intéressons nous aux équations du champ moyen généralisé 2.89, p.47.

1. Pour une excitation à un corps on obtient l'équation dite équation du gap,

$$\langle [\mathbf{b}_\alpha, \mathbf{H}] \rangle = 0 \Rightarrow \mu_0^2 + \lambda s^2 + \frac{3\lambda}{V} \sum_\alpha \langle \varphi_\alpha \varphi_\alpha^\dagger \rangle = 0. \quad (4.46)$$

Elle permet de fixer le paramètre s mais dans notre approche, on calculera le potentiel effectif en fonction de s et c'est la minimisation de ce potentiel qui fixera s .

2. Avec une excitation à deux corps, on obtient une relation non triviale,

$$\langle [\mathbf{b}_\beta \mathbf{b}_{-\beta}, \mathbf{H}] \rangle = 0 \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \Pi_\beta \Pi_\beta^\dagger \rangle - \varepsilon_\beta^2 \langle \varphi_\beta \varphi_\beta^\dagger \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{1,2} \langle \varphi_\beta \varphi_1^\dagger \varphi_2^\dagger \rangle^c V_{1,2,-\beta} \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{1,2,3} \langle \varphi_\beta \varphi_1^\dagger \varphi_2^\dagger \varphi_3^\dagger \rangle^c V_{1,2,3,-\beta} \end{aligned} \quad (4.48)$$

où nous avons introduit le mode de champ moyen généralisé

$$\varepsilon_\beta^2 = \bar{q}_\beta^2 + \mu_0^2 + \frac{b}{2} s^2 + \frac{b}{2} \langle \varphi^2 \rangle \quad (4.49)$$

avec,

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\bar{q}} \langle \varphi_{\bar{q}} \varphi_{\bar{q}}^\dagger \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\bar{q}} \frac{1}{2\kappa_{\bar{q}}} \langle 1 + 2\mathbf{b}_{\bar{q}}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{q}} + \mathbf{b}_{\bar{q}}^\dagger \mathbf{b}_{-\bar{q}}^\dagger + \mathbf{b}_{\bar{q}} \mathbf{b}_{-\bar{q}} \rangle. \quad (4.50)$$

Remarquons qu'il est identique dans la forme au mode de champ moyen gaussien mais il dépend de la densité scalaire *exacte* $\langle \varphi^2 \rangle$. On définit la masse du mode de champ moyen généralisé,

$$m^2 = \varepsilon_{\bar{q}}^2 - q^2. \quad (4.51)$$

(que l'on ne confondra pas avec les quantités définies dans le chapitre 3 ; dans ce chapitre, on se réfère toujours au mode de champ moyen généralisé, sauf spécification explicite).

Cette équation contraint la base quelconque précédemment introduite, au sens où κ doit être solution de cette équation.

En r-RPA, l'équation 4.48 devient

$$\langle \Pi_\beta \Pi_\beta^\dagger \rangle - \varepsilon_\beta^2 \langle \varphi_\beta \varphi_\beta^\dagger \rangle = 0 \quad (4.52)$$

soit,

$$(\kappa_\beta^2 - \varepsilon_\beta^2) \langle 1 + 2\mathbf{b}_\beta^\dagger \mathbf{b}_\beta \rangle = (\kappa_\beta^2 + \varepsilon_\beta^2) \langle \mathbf{b}_\beta^\dagger \mathbf{b}_{-\beta}^\dagger + \mathbf{b}_\beta \mathbf{b}_{-\beta} \rangle . \quad (4.53)$$

Si cette dernière équation est imposée, on montre analytiquement que les calculs des termes des équations RPA ne dépendent pas de κ . Il est donc intéressant de poser $\kappa = \varepsilon$ car cela simplifie notablement les autres calculs et de plus impose la condition

$$\langle \mathbf{b}_\beta^\dagger \mathbf{b}_{-\beta}^\dagger \rangle = \langle \mathbf{b}_\beta \mathbf{b}_{-\beta} \rangle = 0 . \quad (4.54)$$

Remarquons que en SCRPA, cette condition doit être vérifiée car l'inversion de l'opérateur \mathbf{Q} permet d'exprimer ces valeurs moyennes en fonction de \mathbf{Q} et \mathbf{Q}^\dagger dont l'action sur le vide est connue. L'approximation renormalisée vérifie également cette condition de consistance importante.

Comptage des inconnues

Nous n'allons pas imposer tout de suite $\kappa = \varepsilon$ dans ce paragraphe, pour bien identifier les inconnues. Étant données les excitations RPA et l'approximation renormalisée, les inconnues du problème sont les valeurs moyennes du type $\langle \mathbf{b}_\alpha \mathbf{b}_\beta \rangle$ et $\langle \mathbf{b}_\alpha^\dagger \mathbf{b}_\beta \rangle$ ($\langle \mathbf{b}_\alpha \mathbf{b}_\beta \rangle$ est nulle seulement si on impose $\kappa = \varepsilon$). La normalisation des états implique que

$$\langle \mathbf{b}_\alpha \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha \mathbf{b}_\alpha \rangle \delta_{\alpha,-\beta} \quad (4.55)$$

$$\langle \mathbf{b}_\alpha^\dagger \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha^\dagger \mathbf{b}_\alpha \rangle \delta_{\alpha,\beta} . \quad (4.56)$$

L'équation 4.53 nous indique que $\langle \mathbf{b}_\alpha \mathbf{b}_\beta \rangle$ et $\langle \mathbf{b}_\alpha^\dagger \mathbf{b}_\beta \rangle$ ne sont pas en général des variables indépendantes. La densité scalaire étant une variable physiquement intéressante, nous allons la privilégier. On introduit les densités scalaires partielles (où densité en impulsion), définies par

$$\mathcal{N}_\alpha = \langle \varphi_\alpha \varphi_\alpha^\dagger \rangle . \quad (4.57)$$

Ces quantités seront les seules inconnues du problème car les relations 4.45 et $\langle \pi \pi \rangle = \varepsilon \langle \varphi \varphi \rangle$ permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \langle b_\beta b_{-\beta} \rangle &= \frac{\kappa_\beta^2 - \varepsilon_\beta^2}{2\varepsilon_\beta} \mathcal{N}_\beta \\ \langle b_\beta^\dagger b_\beta \rangle &= -\frac{1}{2} + \frac{\kappa_\beta^2 + \varepsilon_\beta^2}{2\varepsilon_\beta} \mathcal{N}_\beta \end{aligned}$$

Équations RPA

Nous avons vu que les équations RPA-DEA s'écrivent

$$E \mathfrak{G}_{a,b}(E) = \mathcal{N}_{a,b} + \sum_{c,d} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{ac} & \mathcal{B}_{ac} \\ \mathcal{B}_{-a-c}^* & \mathcal{A}_{-a-c}^* \end{pmatrix} \mathcal{N}_{c,d}^{-1} \mathfrak{G}_{d,b}(E) \quad (4.58)$$

La grande matrice $\mathfrak{G}_{a,b}$ comportant de nombreux blocs nuls, on préférera les notations suivantes,

$$\begin{aligned} G_{1,1} &= N_{1,1} + B_{1,1}(N^{-1})_{1,1}G_{1,1} + B_{1,2}(N^{-1})_{2,2}G_{2,1} \\ G_{1,2} &= B_{1,2}(N^{-1})_{2,2}G_{2,2} \\ G_{2,2} &= N_{2,2} + B_{2,1}(N^{-1})_{1,1}G_{1,2} + B_{2,2}(N^{-1})_{2,2}G_{2,2}. \end{aligned}$$

où la notation pour les matrices est la suivante

$$M_{1,2} = \begin{matrix} & \bar{\beta}\bar{\beta}' & \bar{\beta} - \beta' & -\beta\bar{\beta}' & -\beta - \beta' \\ \alpha & \left(\mathcal{M}_{\alpha, \bar{\beta}\bar{\beta}'} & \cdots & & \right) \\ -\bar{\alpha} & \left(\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right) & & & \end{matrix}$$

où

$$\mathcal{M}_{\alpha, \bar{\beta}\bar{\beta}'} = \mathcal{M}(\mathbf{b}_\alpha, \mathbf{b}_\beta^\dagger \mathbf{b}_{-\beta'}) \cdots$$

Le lien entre les deux notations est simplement

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} \\ G_{2,1} & G_{2,2} \end{pmatrix}$$

avec $G_{1,2} = {}^t G_{2,1}$ car la matrice des doubles commutateurs est symétrique.

La fastidieuse résolution de ces équations permet de calculer toutes les fonctions de Green en fonction de la seule densité scalaire. Les résultats sont présentés en annexe A.1.

La partie technique de la mise en œuvre de la r-RPA est achevée. Nous allons maintenant passer à l'exploitation des résultats obtenus.

4.4.2 Étude du propagateur

Il s'agit dans cette partie et les suivantes d'étudier le contenu physique des solutions de l'équation r-RPA-DEA. Dans un premier temps, nous allons étudier une fonction de Green particulière, le propagateur à une particule.

Physiquement, ce propagateur

$$\mathfrak{G}_{\varphi_{\vec{p}}, \varphi_{\vec{p}}}(E) = G(E, \vec{p}) \quad (4.59)$$

décrit la création d'un couple particule-antiparticule, sa propagation et sa destruction.

On trouve l'expression (voir l'annexe également)

$$G(E, \vec{P}) = \left(E^2 - \varepsilon_{\vec{P}}^2 - \Sigma(E, \vec{P}) \right)^{-1} \quad (4.60)$$

où on a introduit l'opérateur de masse Σ

$$\Sigma(E, \vec{P}) = \frac{b^2 s^2}{2} \tilde{I}(E, \vec{P}) \quad (4.61)$$

avec

$$\tilde{I}(E, \vec{P}) = \frac{I(E, \vec{P})}{1 - \frac{\hbar}{2}I(E, \vec{P})} \quad (4.62)$$

et où I , la boucle à deux particules est donnée par une expression plus complexe que en RPA standard et non covariante,

$$I(E, \vec{P}) = \int \frac{d\vec{k}_1 d\vec{k}_2}{(2\pi)^d} \delta^{(d)}(\vec{P} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \left[\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_1 \mathcal{N}_1 + \varepsilon_2 \mathcal{N}_2}{E^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + i\eta} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_1 \mathcal{N}_1 - \varepsilon_2 \mathcal{N}_2}{E^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + i\eta} \right]. \quad (4.63)$$

Le propagateur est particulièrement important car ses pôles sont les énergies des quasi-particules du problème ou mode à une particule. De plus, 4.133 va nous permettre de calculer la densité scalaire en fonction de ce mode. Ainsi, pour clore le problème, il suffira de résoudre l'équation des modes r-RPA, c'est-à-dire trouver le pôle de $G(E, p)$. Toutes les fonctions de Green seront alors connues et on pourra calculer les prévisions physiques du modèle.

Cependant, dans le souci de généralité qui est le notre, nous allons continuer l'exposition de la méthode en calculant le potentiel effectif, avant de revenir au résultat concret pour $\lambda\Phi^4$.

4.4.3 Méthodes de calcul du potentiel effectif

Nous allons calculer le potentiel effectif en utilisant la "charging formula". En effet, une inconsistance dans le calcul de la densité scalaire "totale" (l'équivalent du nombre d'occupation) ne nous permet pas d'accéder à la valeur de cette quantité par la méthode du théorème spectral. La densité scalaire est définie par :

$$\langle \varphi^2 \rangle_R = \frac{1}{V} \sum_k \langle \varphi_k \varphi_k^\dagger \rangle = \frac{1}{V} \sum_k \mathcal{N}_k. \quad (4.64)$$

Remarquons que *a priori* nous avons défini la densité scalaire *exacte* c'est-à-dire sur le vrai vide du hamiltonien. En pratique, lorsque nous serons obligé de faire une approximation, ce vide sera le vide déduit de la r-RPA, c'est pourquoi nous utilisons la notation $\langle \rangle_R$.

Le problème posé par son calcul se comprend bien en terme de diagrammes. En effet, cette densité est reliée aux pôles du propagateur $\mathfrak{G}_{\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger}(E)$. Le développement de \mathfrak{G} en diagramme fait apparaître l'opérateur de masse Σ qui s'exprime, entre autres, avec des contributions à trois champs, c'est-à-dire des corrélations à quatre corps qui sont inaccessibles dans notre RPA à deux opérateurs. Nous verrons dans le modèle simple de l'oscillateur anharmonique que une excitation RPA à trois opérateurs permet de calculer le nombre d'occupation d'une façon cohérente. En effet, le diagramme 4.5 peut être généré correctement grâce à ce terme.

La "charging formula" nous permet de résoudre le problème sans passer par le calcul explicite de cette densité, c'est-à-dire de l'opérateur de masse. On extrait les densités

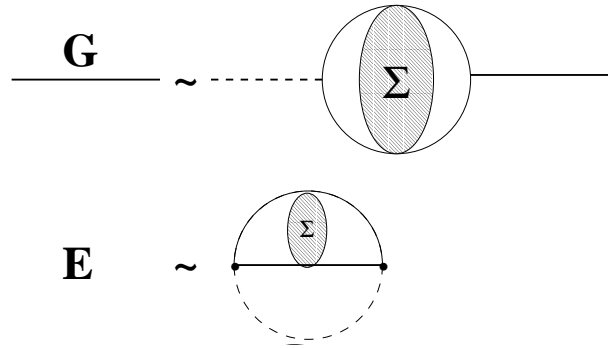


FIG. 4.5 – Propagateur et contribution à trois corps à l’opérateur de masse. Contribution à quatre corps à l’énergie en refermant une ligne.

scalaires des termes d’interaction et on écrit alors le schéma RPA uniquement pour ces interactions modifiées (on pourrait parler de “vraies” interactions, c’est-à-dire mettant en jeu plus de deux corps).

Le calcul de l’énergie *via* la “charging formula” fait apparaître un terme correspondant à l’énergie de champ moyen généralisé c’est-à-dire que dans l’expression 3.27, p.69 on remplace la densité scalaire gaussienne par la densité scalaire exacte. Cette densité scalaire sera évaluée de façon approchée grâce à l’approximation des quasi-particules (voir 4.4.4, p.110). On montrera alors qu’elle ne dépend que de la masse M du mode RPA *via* la masse du mode de champ moyen généralisé m . Ainsi, l’énergie de champ moyen généralisé est simplement l’énergie de champ moyen dans laquelle on remplace la masse du mode gaussien (masse m introduite au chapitre 3) par la masse du mode de champ moyen généralisé m (équation 4.51). La connaissance de M nous permet donc de calculer le potentiel effectif. Cette section s’organise ainsi. Avant toutes choses, nous allons modifier l’écriture des termes H_3 et H_4 afin d’isoler les termes permettant de reconstruire le hamiltonien H_0 de champ moyen généralisé. Il est intéressant de signaler ici comment se met en œuvre la r-RPA. L’approximation renormalisée consiste à écrire toutes les valeurs moyennes comme un produit de corrélations à deux corps, lorsqu’on calcule les matrices \mathcal{N} et \mathcal{H} (matrice norme et matrice des doubles commutateurs, voir équation 2.111, p.51 et 2.112, p.51). On obtient les fonctions de Green puis on peut calculer les valeurs moyennes impliquées dans le calcul de l’énergie du fondamental. Bien sûr, il ne faut plus appliquer ici la règle de factorisation, en particulier, cela reviendrait à annuler le terme $\langle H_3 \rangle$. C’est pourquoi dans les hamiltoniens d’interaction modifiés, il apparaît bien des corrélations à trois et quatre corps.

Dans un second temps, nous appliquerons la “charging formula” à partir du hamiltonien de champ moyen généralisé.

Enfin, on résumera les ingrédients de cette méthode de calcul du potentiel effectif.

Modification du hamiltonien

On constate que les équations RPA font apparaître des termes $\mathcal{O}_1^2 + \frac{b}{2} \langle \varphi^2 \rangle_R$. Or le mode à une particule de champ moyen généralisé est $\varepsilon_1^2 = \mathcal{O}_1^2 + \frac{b}{2} \langle \varphi^2 \rangle_R$. Les doubles commutateurs RPA vont donc systématiquement transformer l'énergie "nue" à une particule \mathcal{O}_k^2 en l'énergie de champ moyen généralisé ε_k^2 . L'idée est de réécrire le hamiltonien afin de le décomposer en un hamiltonien quadratique dont l'énergie à une particule est celle du champ moyen et une partie en interaction. Ainsi, comme nous l'avons fait dans le cas standard, on va appliquer la RPA "au-dessus" du hamiltonien de champ moyen plutôt que "au-dessus" du hamiltonien libre.

Ce hamiltonien aura simplement pour mode à une particule l'énergie de champ moyen 3.12, où m (solution de l'équation du gap 3.6) est remplacée par la masse de champ moyen généralisé (équation 4.51 et 4.49) où $\langle \varphi^2 \rangle$ est maintenant $\langle \varphi^2 \rangle_R$.

Pour cela, on extrait les termes *ad hoc* du hamiltonien d'interaction $H_3 + H_4$ et on écrit

$$H = H_0 + H_{int} \quad (4.65)$$

avec

$$H_0 = V \left(\frac{1}{2} \mu_0^2 s^2 + \frac{b}{24} s^4 \right) + \sum_1 \frac{1}{2} \left(\Pi_1 \Pi_1^\dagger + \mathcal{O}_1^2 \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right) \quad (4.66)$$

$$+ \frac{b}{4} \langle \varphi^2 \rangle_R \sum_1 : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon + V \frac{b}{8} \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon^2 \quad (4.67)$$

où

$$\langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon \equiv \langle V_\varepsilon | \varphi^2 | V_\varepsilon \rangle \quad (|V_\varepsilon\rangle) \text{ est le vide des quasi-particules d'énergie } \varepsilon, \quad (4.68)$$

$$: \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon \equiv \varphi_1 \varphi_1^\dagger - \langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \rangle_\varepsilon \quad \text{est l'ordre normal par rapport à } |V_\varepsilon\rangle. \quad (4.69)$$

Bien sûr,

$$H_{int} = H_3 + H_4 - \frac{b}{4} \langle \varphi^2 \rangle_R \sum_1 : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon - V \frac{b}{8} \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon^2. \quad (4.70)$$

Poursuivons le calcul pour H_0 afin de faire ressortir qu'il s'agit bien du hamiltonien libre pour des particules d'énergie ε c'est-à-dire de masse m

$$\sum_1 \frac{1}{2} \left(\Pi_1 \Pi_1^\dagger + \mathcal{O}_1^2 \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right) + \frac{b}{4} \langle \varphi^2 \rangle_R \sum_1 : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon \quad (4.71)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_1 \left\{ : \Pi_1 \Pi_1^\dagger :_\varepsilon + \langle \Pi_1 \Pi_1^\dagger \rangle_\varepsilon + \mathcal{O}_1^2 \left(: \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon + \langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \rangle_\varepsilon \right) + \frac{b}{2} \langle \varphi^2 \rangle_R : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon \right\} \quad (4.72)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_1 \left\{ \langle \Pi_1 \Pi_1^\dagger \rangle_\varepsilon + \mathcal{O}_1^2 \langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \rangle_\varepsilon + : \Pi_1 \Pi_1^\dagger :_\varepsilon + \varepsilon_1^2 : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon \right\} \quad (4.73)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_1 \langle \Pi_1 \Pi_1^\dagger + \mathcal{O}_1^2 \varphi_1 \varphi_1^\dagger \rangle_\varepsilon + \frac{1}{2} \sum_1 \left\{ : \Pi_1 \Pi_1^\dagger :_\varepsilon + \varepsilon_1^2 : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon \right\}. \quad (4.74)$$

On introduit E_0 ,

$$E_0 = V \left(\frac{1}{2} \mu_0^2 s^2 + \frac{b}{24} s^4 \right) + \frac{1}{2} \sum_1 \left\langle \Pi_1 \Pi_1^\dagger + \mathcal{O}_1^2 \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right\rangle_\varepsilon + V \frac{b}{8} \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon^2. \quad (4.75)$$

E_0 est l'énergie de champ moyen généralisé, formellement identique à son expression 3.12, avec la masse m qui est renormalisée selon

$$m^2 = \mu^2 + \frac{b}{2} s^2 + \frac{b}{2} \left(\langle \varphi^2 \rangle_R - \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{q^2 + \mu^2}} \right). \quad (4.76)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{V} &= \frac{1}{2} \mu_0^2 s^2 + \frac{b}{24} s^4 + \frac{b}{8} \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon^2 \\ &+ \sum_1 \frac{1}{2} \left(\langle \Pi_1 \Pi_1^\dagger \rangle_\varepsilon + \mathcal{O}_1^2 \langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \rangle_\varepsilon \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu_0^2 s^2 + \frac{b}{24} s^4 + \\ &+ \sum_1 \frac{1}{2} \left(\langle \Pi_1 \Pi_1^\dagger \rangle_\varepsilon + \left(\mathcal{O}_1^2 + \frac{b}{4} \langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \rangle_\varepsilon \right) \langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \rangle_\varepsilon \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu_0^2 s^2 + \frac{b}{24} s^4 + \frac{1}{2V} \sum_{\vec{q}} \left(\frac{\varepsilon_q}{2} + \frac{\mathcal{O}_q^2}{2\varepsilon_q} \right) + \frac{b}{8} \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon^2 \\ &= \mu^2 \left[\frac{1}{2} s^2 + p s^4 + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{m^2}{\mu^2} - 1 - \frac{m^2}{\mu^2} \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) - \frac{3p}{16\pi^2} \left(\ln \frac{m^2}{\mu^2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.77)$$

où la dernière expression a été renormalisée en soustrayant l'énergie de vide relative à μ . Remarquons encore que cette expression contient la densité scalaire exacte, qu'il faudra calculer d'une façon autocohérente.

Nous avons finalement pour expression de H_0

$$H_0 = E_0 + \frac{1}{2} \sum_1 \left\{ : \Pi_1 \Pi_1^\dagger :_\varepsilon + \varepsilon_1^2 : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon \right\}. \quad (4.78)$$

Nous avons bien mis en place notre idée initiale, nous avons écrit un hamiltonien quadratique, dont l'état fondamental a pour énergie celle du champ moyen généralisé (c'est-à-dire que la variable m qui apparaît dans le potentiel effectif gaussien ne vérifie plus l'équation du gap mais l'équation du champ moyen généralisé; on dit encore que le mode de champ moyen généralisé "tourne" dans cette énergie). De plus, les termes opératoriels quadratiques sont écrits dans l'ordre normal. Enfin, le mode à une particule, donné par le coefficient se trouvant en facteur de l'opérateur φ^2 est bien ε , le mode de champ moyen. En effet, le propagateur qui est formellement $(\pi^2 + \varepsilon^2 \varphi^2)^{-1}$ s'écrit $\mathfrak{G} = k^2 - \varepsilon^2(k)$.

Nous allons maintenant examiner le terme H_{int} .

$$H_{int} = H_3 + H_4 - \frac{b}{4} \langle \varphi^2 \rangle_R \sum_1 : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon - V \frac{b}{8} \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon^2 \quad (4.79)$$

Appliquons le théorème de Wick à $H_3 + H_4$. Il est défini par rapport aux opérateurs $(\mathbf{b}_{\kappa\alpha}, \mathbf{b}_{\kappa\alpha}^\dagger)$, c'est-à-dire que l'ordre normal sera défini par $: \mathbf{b}_\kappa \mathbf{b}_\kappa^\dagger :_\kappa = \mathbf{b}_\kappa^\dagger \mathbf{b}_\kappa$, tous les autres produits restant inchangés ; la contraction $: \overline{\mathbf{b}_\kappa \mathbf{b}_\kappa^\dagger} :_\varepsilon$ est égale à $\left\langle \mathbf{b}_\kappa \mathbf{b}_\kappa^\dagger \right\rangle_\kappa$.

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 :_\varepsilon + \sum_{\substack{\text{permutations} \\ \text{circulaires } \sigma}} \langle \varphi_{\sigma(1)} \varphi_{\sigma(2)} \rangle_\varepsilon \varphi_{\sigma(3)} \quad (4.80)$$

$$V_{123} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = V_{123} : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 :_\varepsilon + 3 V_{123} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\varepsilon \varphi_3 \quad (4.81)$$

(car V_{123} est proportionnelle à δ_{1+2+3}). Avant de continuer le calcul, notons que dans le vide exact, la valeur moyenne de φ est nulle par construction. Dans ce paragraphe, nous continuerons à traiter ce terme, car nous écrivons des relations exactes. Cependant, dès que des valeurs moyennes de ce terme apparaîtront et ceci, quelque soit le vide en jeu (champ moyen, vide RPA ou exact), nous les négligerons (voir la discussion à ce sujet section 3.1.1, p.60

De même,

$$V_{1234} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 = V_{1234} : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 :_\varepsilon + 6 V_{1234} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\varepsilon : \varphi_3 \varphi_4 :_\varepsilon + 3 V_{1234} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\varepsilon \langle \varphi_3 \varphi_4 \rangle_\varepsilon. \quad (4.82)$$

On a ainsi,

$$\begin{aligned} H_{int} &= : H_3 + H_4 :_\varepsilon + 3 V_{123} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\varepsilon \varphi_3 \\ &+ \frac{b}{24} (6 \delta_{1234} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\varepsilon : \varphi_3 \varphi_4 :_\varepsilon + 3 \delta_{1234} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\varepsilon \langle \varphi_3 \varphi_4 \rangle_\varepsilon) \\ &- \frac{b}{4} \langle \varphi^2 \rangle_R : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon - V \frac{b}{8} \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (4.83)$$

Or,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\varepsilon &= \delta_{1+2} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle \\ &= \delta_{1+2} \langle \varphi_1 \varphi_{-1} \rangle \\ &= \delta_{1+2} \left\langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.84)$$

ainsi,

$$\sum_{1234} \delta_{1234} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\varepsilon : \varphi_3 \varphi_4 :_\varepsilon = \sum_{12} \left\langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right\rangle_\varepsilon : \varphi_2 \varphi_2^\dagger :_\varepsilon \quad (4.85)$$

$$= \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon : \varphi^2 :_\varepsilon \quad (4.86)$$

(où l'on a utilisé le fait que $::_\varepsilon$ est linéaire, donc, $\sum_1 : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon = : \sum_1 \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon = : \varphi^2(x) :_\varepsilon$)

$$\sum_{1234} \delta_{1234} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\varepsilon \langle \varphi_3 \varphi_4 \rangle_\varepsilon = \sum_{12} \left\langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right\rangle_\varepsilon \left\langle \varphi_2 \varphi_2^\dagger \right\rangle_\varepsilon \quad (4.87)$$

$$= \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon^2 \quad (4.88)$$

Finalement,

$$H_{int} = : H_3 + H_4 :_\varepsilon + 3 V_{123} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\varepsilon \varphi_3 \quad (4.89)$$

$$+ \frac{b}{8} \left(2 \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon : \varphi^2 :_\varepsilon + \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon^2 - 2 \langle \varphi^2 \rangle_R : \varphi^2 :_\varepsilon - \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon^2 \right) \quad (4.90)$$

$$H_{int} = : H_3 + H_4 :_\varepsilon + 3 V_{123} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\varepsilon \varphi_3 \quad (4.91)$$

$$+ \frac{b}{4} \left(\langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon - \langle \varphi^2 \rangle_R \right) : \varphi^2 :_\varepsilon. \quad (4.92)$$

Remarquons un dernier avantage de cette transformation : $\langle H \rangle_\varepsilon = E_0$ et $\langle H_{int} \rangle_\varepsilon = 0$. On a convenablement extrait tous les termes contribuant au champ moyen du hamiltonien $H_3 + H_4$. Le hamiltonien H_{int} est donc le vrai terme d'interaction à trois et quatre corps (excepté le terme proportionnel à φ qui ne compte pas dans le calcul de l'énergie puisque sa valeur moyenne sur le vide exact est nulle par définition), duquel on a retiré les termes qui ne sont en fait que quadratique comme $\langle \varphi^2 \rangle \varphi^2$ et qui contribuent au champ moyen.

Les doubles commutateurs de la théorie $\lambda\Phi^4$ nous ont guidés vers cette décomposition particulière. Nous allons maintenant montrer qu'elle peut être déduite d'une façon plus générale. Ainsi, elle pourra être appliquée directement à d'autres modèles, remplissant notre ambition initiale de systématisme.

Notons H_c le terme cinétique et h_0 le terme constant de H ,

$$h_0 = V \left(\frac{1}{2} \mu_0^2 s^2 + \frac{b}{24} s^4 \right) \quad (4.93)$$

$$H_c = h_0 + \sum_1 \frac{1}{2} \left(\Pi_1 \Pi_1^\dagger + \mathcal{O}_1^2 \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right). \quad (4.94)$$

Soit la base quelconque $(\mathbf{b}_{\kappa\alpha}, \mathbf{b}_{\kappa\alpha}^\dagger)$. Nous allons calculer l'ordre normal de H sur cette base,

$$H_c = h_0 + \sum_1 \frac{1}{2} \left(: \Pi_1 \Pi_1^\dagger + \mathcal{O}_1^2 \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\kappa + \left\langle \Pi_1 \Pi_1^\dagger + \mathcal{O}_1^2 \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right\rangle_\kappa \right) \quad (4.95)$$

$$H_3 + H_4 = : H_3 + H_4 :_\varepsilon + 3 V_{123} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\kappa \varphi_3 + \frac{b}{4} \langle \varphi^2 \rangle_\kappa : \varphi^2 :_\kappa + \frac{b}{8} \langle \varphi^2 \rangle_\kappa^2 \quad (4.96)$$

$$H = h_0 + \frac{b}{8} \langle \varphi^2 \rangle_\kappa^2 \quad (4.97)$$

$$+ \sum_1 \frac{1}{2} \left\{ : \Pi_1 \Pi_1^\dagger :_\kappa + \left(\mathcal{O}_1^2 + \frac{b}{2} \langle \varphi^2 \rangle_\kappa \right) : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\kappa \right. \quad (4.98)$$

$$\left. + \left\langle \Pi_1 \Pi_1^\dagger \right\rangle_\kappa + \mathcal{O}_1^2 \left\langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right\rangle_\kappa \right\} \quad (4.99)$$

$$+ : H_3 + H_4 :_\varepsilon + 3 V_{123} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\kappa \varphi_3 \quad (4.100)$$

On introduit ${}^\kappa \tilde{\varepsilon}_1^2 = \mathcal{O}_1^2 + \frac{b}{2} \langle \varphi^2 \rangle_\kappa$

$$H = h_0 + \frac{b}{8} \langle \varphi^2 \rangle_\kappa^2 + \sum_1 \frac{1}{2} \left\{ \left\langle \Pi_1 \Pi_1^\dagger \right\rangle_\kappa + \mathcal{O}_1^2 \left\langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right\rangle_\kappa \right\} \quad (4.101)$$

$$+ \sum_1 \frac{1}{2} \left\{ : \Pi_1 \Pi_1^\dagger :_\kappa + {}^\kappa \tilde{\varepsilon}_1^2 : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon \right\} \quad (4.102)$$

$$+ : H_3 + H_4 :_\varepsilon + 3 V_{123} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\kappa \varphi_3 \quad (4.103)$$

Commentons cette expression, afin d'expliquer la modification du hamiltonien 4.66-4.70. Si $\langle \varphi^2 \rangle_\kappa$ était la densité scalaire exacte $\langle \varphi^2 \rangle_R$, alors ${}^\kappa \tilde{\varepsilon}_1^2$ serait égale à ε_1^2 et H se mettrait sous la forme

$$H = E_0 + \sum_1 \frac{1}{2} \left\{ : \Pi_1 \Pi_1^\dagger :_\kappa + \varepsilon_1^2 : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon \right\} \quad (4.104)$$

$$+ : H_3 + H_4 :_\varepsilon + 3 V_{123} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_\kappa \varphi_3 \quad (4.105)$$

On aurait alors réalisé notre objectif initial qui est de séparer le hamiltonien en un terme dont les énergies sont celles du champ moyen et qui soit dans l'ordre normal par rapport à une base quelconque $(\mathbf{b}_{\kappa\alpha}, \mathbf{b}_{\kappa\alpha}^\dagger)$ (base après une rotation de Bogoliubov quelconque et une translation) et un terme d'interaction également dans l'ordre normal. Les équations de passage entre (H_c, H_{3+4}) et (H_0, H_{int}) seraient alors simplement

$$H_0 = H_c + H_4 - : H_4 : \quad (4.106)$$

$$H_{int} = H_3 + : H_4 : - H_4 \quad (4.107)$$

On aurait pu prendre dans la deuxième formule $: H_3 + H_4 :$ et le terme linéaire en φ aurait été dans le terme H_0 .

Pour atteindre notre objectif, on doit introduire un terme $\frac{b}{4}\langle\varphi^2\rangle_R:\varphi^2:\kappa$ qui va reconstruire l'énergie ε dans la somme sur k_1 . Ainsi, on a

$$H = h_0 + \frac{b}{8}\langle\varphi^2\rangle_\kappa^2 + \frac{b}{4}\langle\varphi^2\rangle_\kappa:\varphi^2:\kappa - \frac{b}{4}\langle\varphi^2\rangle_R:\varphi^2:\kappa \quad (4.108)$$

$$+ \sum_1 \frac{1}{2} \left\{ :\Pi_1\Pi_1^\dagger:\kappa + \left(\mathcal{O}_1^2 + \frac{b}{2}\langle\varphi^2\rangle_R \right) : \varphi_1\varphi_1^\dagger : \kappa \right. \quad (4.109)$$

$$\left. + \left\langle \Pi_1\Pi_1^\dagger \right\rangle_\kappa + \mathcal{O}_1^2 \left\langle \varphi_1\varphi_1^\dagger \right\rangle_\kappa \right\} \quad (4.110)$$

$$+ : H_3 + H_4 :_\varepsilon + 3 V_{123} \langle \varphi_1\varphi_2 \rangle_\kappa \varphi_3 \quad (4.111)$$

$$= E_0 + \sum_1 \frac{1}{2} \left\{ :\Pi_1\Pi_1^\dagger:\kappa + \varepsilon_1^2 : \varphi_1\varphi_1^\dagger : \kappa \right\} \quad (4.112)$$

$$+ \frac{b}{4}\langle\varphi^2\rangle_\kappa:\varphi^2:\kappa - \frac{b}{4}\langle\varphi^2\rangle_R:\varphi^2:\kappa \quad (4.113)$$

$$+ : H_3 + H_4 :_\varepsilon + 3 V_{123} \langle \varphi_1\varphi_2 \rangle_\kappa \varphi_3 \quad (4.114)$$

Donc la transformation du hamiltonien s'écrit en fait

$$H_0 = H_c + H_4 - : H_4 :_\varepsilon + \frac{b}{4}\langle\varphi^2\rangle_R:\varphi^2:\kappa \quad (4.115)$$

$$H_{int} = H_3 + : H_4 :_\varepsilon - H_4 - \frac{b}{4}\langle\varphi^2\rangle_R:\varphi^2:\kappa \quad (4.116)$$

Cette forme n'est pas rendue tout à fait indépendante du modèle initial mais éclaire cependant la façon dont on peut généraliser la méthode à une autre théorie.

Pour résumer l'esprit de la méthode, appliquer l'approximation de champ moyen revient à prendre la base d'opérateurs de création et de destruction du champ scalaire libre, à faire une transformation de Bogoliubov (à deux paramètres, ce qui introduit un mode de champ moyen ε , solution de l'équation du gap), de cette base puis à calculer la valeur moyenne de H sur le vide de cette base. Pour cela, on met le hamiltonien dans l'ordre normal de cette base et on minimise par rapport aux deux paramètres.

Pour construire le champ moyen généralisé, la démarche est identique, sauf que ε vérifie maintenant l'équation de champ moyen généralisé et dépend donc de la densité scalaire exacte.

“Charging formula”

On introduit un hamiltonien auxiliaire,

$$H'(\rho) = H_0 + \rho H_{int} \quad (H'(\rho = 1) = H) \quad (4.117)$$

$$= V \left(\frac{1}{2}\mu_0^2 s^2 + \frac{b}{24} s^4 \right) + \sum_1 \frac{1}{2} \left(\Pi_1 \Pi_1^\dagger + \mathcal{O}_1^2 \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right) + \rho(H_3 + H_4) \\ + (1 - \rho) \left(\frac{b}{4}\langle\varphi^2\rangle_R \sum_1 : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon + V \frac{b}{8} \langle\varphi^2\rangle_\varepsilon^2 \right) \quad (4.118)$$

Afin de dégager dans l'expression précédente les termes constants et les termes opératoriels, réécrivons,

$$\frac{1}{2} \sum_1 \left(\Pi_1 \Pi_1^\dagger + \mathcal{O}_1^2 \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right) + (1 - \rho) \frac{b}{4} \langle \varphi^2 \rangle_R \sum_1 : \varphi_1 \varphi_1^\dagger :_\varepsilon \quad (4.119)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_1 \left\{ \Pi_1 \Pi_1^\dagger + \mathcal{O}_1^2 \varphi_1 \varphi_1^\dagger + (1 - \rho) \frac{b}{2} \langle \varphi^2 \rangle_R \left(\varphi_1 \varphi_1^\dagger - \langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \rangle_\varepsilon \right) \right\}. \quad (4.120)$$

Finalement,

$$H'(\rho) = \frac{1}{2} \sum_1 \left\{ \Pi_1 \Pi_1^\dagger + \left(\mathcal{O}_1^2 + (1 - \rho) \frac{b}{2} \langle \varphi^2 \rangle_R \right) \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right\} + \rho(H_3 + H_4) \quad (4.121)$$

$$+ V \left(\frac{1}{2} \mu_0^2 s^2 + \frac{b}{24} s^4 \right) + (1 - \rho) \frac{b}{4} \left(V \frac{1}{2} \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon^2 - \langle \varphi^2 \rangle_R \sum_1 \langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \rangle_\varepsilon \right). \quad (4.122)$$

Or, $\langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon = \frac{1}{V} \sum_1 \langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \rangle_\varepsilon$, ainsi

$$H'(\rho) = \frac{1}{2} \sum_1 \left\{ \Pi_1 \Pi_1^\dagger + \left(\mathcal{O}_1^2 + (1 - \rho) \frac{b}{2} \langle \varphi^2 \rangle_R \right) \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right\} + \rho(H_3 + H_4) \quad (4.123)$$

$$+ V \left(\frac{1}{2} \mu_0^2 s^2 + \frac{b}{24} s^4 \right) + (1 - \rho) V \frac{b}{4} \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon \left(\frac{1}{2} \langle \varphi \rangle_\varepsilon^2 - \langle \varphi^2 \rangle_R \right). \quad (4.124)$$

Il faut maintenant résoudre le problème RPA pour $H'(\rho)$. Par rapport à la résolution pour H , l'expression précédente, dans laquelle on a écrit en dernière position les termes constants qui ne jouent aucun rôle dans le calcul des commutateurs, nous montre que on a juste à faire les remplacements,

$$\begin{aligned} H &\rightarrow H'(\rho) \\ \mathcal{O}_1^2 &\rightarrow \mathcal{O}_{1\rho}^2 = \mathcal{O}_1^2 + \frac{b}{2} (1 - \rho) \langle \varphi^2 \rangle_R \\ H_3 + H_4 &\rightarrow \rho (H_3 + H_4) \end{aligned} \quad (4.125)$$

et pour le mode de champ moyen,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 \rightarrow \varepsilon_{1\rho}^2 &= \mathcal{O}_{1\rho}^2 + \frac{b}{2} \rho \langle \varphi^2 \rangle_{R\rho} \\ &= \mathcal{O}_1^2 + \frac{b}{2} \left((1 - \rho) \langle \varphi^2 \rangle_R + \rho \langle \varphi^2 \rangle_{R\rho} \right) \\ &= \varepsilon_1^2 + \frac{b}{2} \rho \left(\langle \varphi^2 \rangle_{R\rho} - \langle \varphi^2 \rangle_R \right) \end{aligned} \quad (4.126)$$

(où les indices ρ indiquent dans quel vide, celui du problème H ou du problème $H'(\rho)$, on se trouve).

Ainsi, à partir des solutions du problème H , on obtient celle du problème $H'(\rho)$ en faisant les substitutions,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\rightarrow \varepsilon_{1\rho} \\ b &\rightarrow \rho b \\ \mathcal{N}_1 = \langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \rangle_R &\rightarrow \mathcal{N}_{1\rho} = \langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \rangle_{R\rho} \end{aligned} \quad (4.127)$$

La “charging formula” donne

$$E_{RPA} = E_0 + \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \langle \rho H_{int} \rangle_\rho \quad (4.128)$$

avec

$$\rho H_{int} = \frac{1}{2} \sum_1 \left\{ -\rho \frac{b}{2} \langle \varphi^2 \rangle_R \varphi_1 \varphi_1^\dagger \right\} + \rho(H_3 + H_4) - \rho V \frac{b}{4} \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon \left(\frac{1}{2} \langle \varphi \rangle_\varepsilon^2 - \langle \varphi^2 \rangle_R \right) \quad (4.129)$$

$$= -V \frac{\rho b}{4} \langle \varphi^2 \rangle_R \varphi^2 + \rho(H_3 + H_4) - \rho V \frac{b}{4} \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon \left(\frac{1}{2} \langle \varphi \rangle_\varepsilon^2 - \langle \varphi^2 \rangle_R \right) \quad (4.130)$$

soit finalement,

$$\begin{aligned} \langle \rho H_{int} \rangle_\rho &= \langle \rho H_3 \rangle_\rho + \langle \rho : H_4 :_{\varepsilon_\rho} \rangle_\rho - V \frac{\rho b}{8} (\langle \varphi^2 \rangle_{\varepsilon_\rho} - \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon)^2 \\ &\quad - V \frac{\rho b}{4} (\langle \varphi^2 \rangle_R - \langle \varphi^2 \rangle_{\varepsilon_\rho}) \left(\frac{1}{V} \sum_1 \langle \varphi_1 \varphi_1^\dagger \rangle_\rho - \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon \right). \end{aligned} \quad (4.131)$$

Conclusion

On peut en principe maintenant calculer le potentiel effectif. On résout le problème RPA pour H , c’est-à-dire calculer les fonctions de Green, résoudre l’équation des modes RPA (c’est-à-dire trouver les pôles du propagateur) puis trouver le mode de champ moyen généralisé. On déduit les solutions du problème RPA pour $H'(\rho)$ en utilisant les règles de remplacement énoncées pour les fonctions de Green et les équations des modes. On peut enfin calculer le potentiel grâce à la “charging formula”.

Ainsi, on a exposé une méthode de calcul du potentiel effectif sur l’exemple de $\lambda\Phi^4$, mais elle est applicable dans l’esprit pour un autre problème de théorie des champs.

Notons que en RPA standard, $\langle \varphi^2 \rangle_{R\rho} = \langle \varphi^2 \rangle_R = \langle \varphi^2 \rangle_\varepsilon$ puisque toutes ces valeurs moyennes sont prises sur le même vide, le vide HFB.

Nous allons maintenant voir l’application concrète de la méthode, en commençant par l’équation des modes.

4.4.4 Équation des modes r-RPA à une particule

Comme avant dernière étape de notre étude, nous allons résoudre l'équation des modes RPA qui nous permettra alors d'accéder aux différentes masses du problème et calculer le potentiel effectif.

Le mode RPA à une particule Ω_p est par définition solution de

$$\Omega_p^2 = \varepsilon_p^2 + \Sigma(E = \Omega_p, \vec{p}), \quad (4.132)$$

c'est-à-dire le pôle du propagateur à une particule.

Approximation des quasi-particules

Nous introduisons ici une approximation supplémentaire qui nous permettra de fermer le système d'équations et réduire le problème à la recherche d'une masse, dite masse du mode RPA, reliée à l'opérateur de masse RPA. L'énergie de corrélation sera alors exprimable comme une fonction ne dépendant que de ce paramètre.

On considère dans cette approche que les fonctions de Green à deux corps n'ont qu'un pôle (interprété comme l'énergie du mode à une particule) et que le résidu au pôle est égal à 1.

Le théorème spectral 1.4.1, p.29 implique alors que la densité scalaire est donnée par

$$\mathcal{N}_k = \langle \varphi_k \varphi_k^\dagger \rangle = \frac{1}{2\Omega_k}. \quad (4.133)$$

où $\Omega_k \equiv \sqrt{M^2 + k^2}$ est le mode RPA à une particule, solution de l'équation $\Omega_k^2 = \varepsilon_k^2 + \Sigma(E^2 - k^2 = M^2)$. La détermination de la densité revient simplement à trouver la solution de l'équation $M^2 = m^2 + \Sigma(M^2)$, m étant la masse de champ moyen généralisé. Remarquons que nous avons supposé que Σ , c'est-à-dire $I(E, p)$ est explicitement covariante c'est-à-dire que $I(E, p) = I(E^2 - p^2, 0)$. Ce n'est manifestement pas le cas. Nous allons détailler ce point ci-dessous.

Définition et propriétés de quelques fonctions

Voyons maintenant quelques résultats particulier à la théorie $\lambda\Phi^4$ traitée ici. Introduisons tout d'abord quelques quantités sans dimension utiles dans la suite (X est la variable qui apparaîtra dans certaines intégrales; c'est une quantité quelconque homogène à une

masse au carré),

$$\begin{aligned}
 b^a &= \frac{b}{\mu^2}, & \lambda_{m,\rho} &= \frac{\rho b}{m_\rho^2}, & \lambda_{M,\rho} &= \frac{\rho b}{M_\rho^2}, \\
 x &= \frac{X}{\mu^2}, & y_\rho &= \frac{X}{m_\rho^2}, & z_\rho &= \frac{X}{M_\rho^2}, \\
 x_{m\rho} &= \frac{m_\rho^2}{\mu^2}, & & & z_{m\rho} &= \frac{m_\rho^2}{M_\rho^2}, \\
 x_{M\rho} &= \frac{M_\rho^2}{\mu^2}, & y_{M\rho} &= \frac{M_\rho^2}{m_\rho^2}, & &
 \end{aligned}$$

On a introduit la fonction de boucle généralisée, pour le problème r-RPA équation 4.63, p.100 et on constate que sa forme n'est pas explicitement covariante. En RPA standard, on pourrait poursuivre le calcul grâce à une rotation de Wick qui permet d'intégrer sur E . En effet, la boucle $I(E, p)$ se réduit à la forme simple 4.22, p.88 explicitement covariante. Ce n'est pas possible en r-RPA car alors l'intégrand n'est pas explicitement covariant. Nous allons donc "forcer" la covariance en imposant à I d'être égale à sa valeur dans le centre de masse,

$$\begin{aligned}
 I_\rho(E, \vec{P}) &\equiv I_\rho(E^2 - \vec{P}^2) \\
 &= \int \frac{dt}{2\pi} \frac{2\mathcal{N}_{t\rho}}{E^2 - \vec{P}^2 - 4\varepsilon_{t\rho}^2 + i\eta}.
 \end{aligned} \tag{4.134}$$

On peut alors réaliser la rotation de Wick et appliquer la formule 4.27, p.90.

Introduisons alors la fonction de boucle généralisée, pour la constante de couplage ρb .

$$I^{gal}(X; \varepsilon_\rho, \mathcal{N}_\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} \frac{2\mathcal{N}_\rho(t)}{X - 4\varepsilon_\rho^2(t) + i\eta}; \tag{4.135}$$

où \mathcal{N}_ρ et ε_ρ sont deux fonctions réelles, respectivement, la densité scalaire et l'énergie à une particule dans le champ moyen généralisé, dépendantes de ρ .

D'après l'approximation des quasi-particules, \mathcal{N}_ρ peut se mettre sous la forme,

$$\mathcal{N}_\rho(t) = \frac{1}{2\Omega_\rho(t)},$$

où Ω_ρ est l'énergie à une particule en r-RPA. En fait, on s'apercevra que, selon les énergies qui "tournent" dans la boucle, on obtient les différents schémas RPA (standard ou renormalisée).

D'après l'invariance de Poincaré,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\rho^2(t) &= m_\rho^2 + t^2, \\
 \Omega_\rho^2(t) &= M_\rho^2 + t^2.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{N}_\rho(t) = \frac{1}{2\sqrt{M_\rho^2 + t^2}}.$$

Finalement, notre intégrale de boucle s'écrira

$$I(X, m_\rho^2, M_\rho^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{M_\rho^2 + t^2}} \frac{1}{X - 4(m_\rho^2 + t^2) + i\eta}.$$

Voyons maintenant quelques propriétés de I (remarquons que dans tous les calculs suivants, on notera toujours η un paramètre positif, tendant vers zéro ; par exemple, on notera, $\eta' = \eta/z \equiv \eta$ si z est positif),

– réduction du nombre de variables,

$$\begin{aligned} \forall z > 0, \quad I(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z + t^2}} \frac{1}{x - 4(y + t^2) + i\eta} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z} \sqrt{1 + \frac{t^2}{z}}} \frac{1}{z} \frac{1}{\frac{x - 4y}{z} + 4\frac{t^2}{z} + i\eta} \end{aligned}$$

$$\boxed{I(x, y, z) = \frac{1}{z} B\left(\frac{x - 4y}{z}\right)},$$

en posant,

$$B(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \frac{1}{s - 4t^2 + i\eta},$$

– loi d'échelle,

$$\forall a > 0, \quad I(x/a, y/a, z/a) = \frac{1}{z/a} B\left(\frac{x/a - 4y/a}{z/a}\right) = \frac{a}{z} B\left(\frac{x - 4y}{z}\right),$$

$$\boxed{I(x/a, y/a, z/a) = a I(x, y, z)}.$$

On définit maintenant l'opérateur de masse Σ ,

$$\Sigma(b, s, I) = \frac{b^2 s^2}{2} \frac{I}{1 - \frac{bI}{2}}.$$

Σ a pour dimension celle d'une masse au carré.

Évidemment, la variable I sera en pratique notre intégrale de boucle. Comme elle possède une propriété de loi d'échelle, il est intéressant de calculer

$$\Sigma(x, y, z/a) = \frac{x^2 y^2}{2} \frac{z/a}{1 - \frac{xz/a}{2}} = a \frac{(x/a)^2 y^2}{2} \frac{z}{1 - \frac{(x/a)z}{2}},$$

$$\boxed{\Sigma(x, y, z/a) = a \Sigma(x/a, y, z).}$$

Par exemple, l'opérateur de masse en r-RPA peut se mettre sous forme adimensionnelle,

$$\Sigma^{r-RPA} \equiv \Sigma(\rho b, s, I(X, m_\rho^2, M_\rho^2)) \quad (4.136)$$

$$= \mu^2 \Sigma(\rho b^a, s, I(x, x_{m\rho}, x_{M\rho})) = \mu^2 \Sigma\left(\rho b^a, s, \frac{1}{x_{M\rho}} B\left(\frac{x - 4x_{m\rho}}{x_{M\rho}}\right)\right) \quad (4.137)$$

$$= m_\rho^2 \Sigma(\lambda_{m,\rho}, s, I(y_\rho, 1, y_{M\rho})) = m_\rho^2 \Sigma\left(\lambda_{m,\rho}, s, \frac{1}{y_{M\rho}} B\left(\frac{y_\rho - 4}{y_{M\rho}}\right)\right) \quad (4.138)$$

$$= \mu^2 x_{M\rho} \Sigma\left(\frac{\rho b^a}{x_{M\rho}}, s, B\left(\frac{x - 4x_{m\rho}}{x_{M\rho}}\right)\right) \quad (4.139)$$

$$= \mu^2 x_{M\rho} \Sigma_{\lambda_{M,\rho}}\left(\frac{x - 4x_{m\rho}}{x_{M\rho}}\right) \quad (4.140)$$

$$= \mu^2 x_{M\rho} \Sigma_{\lambda_{M,\rho}}(z_\rho - 4z_{m\rho}), \quad (4.141)$$

en choisissant μ , M ou m comme masse de référence. et avec la notation simplifiée,

$$\Sigma(x, y, B(z)) = \Sigma_x(z).$$

Équation des modes r-RPA

Pour ρ quelconque 4.132, 4.49 et 4.136 impliquent,

$$M_\rho^2 = m_\rho^2 + \Sigma(\rho b, s, I(M_\rho^2, m_\rho^2, M_\rho^2)) \quad (4.142)$$

$$m_\rho^2 = \mu^2 + \frac{bs^2}{2} + \frac{b}{2} (\langle \varphi^2 \rangle_M - \langle \varphi^2 \rangle_\mu) + \frac{\rho b}{2} (\langle \varphi^2 \rangle_{M_\rho} - \langle \varphi^2 \rangle_M). \quad (4.143)$$

Ce système dépend de M c'est à dire de $M(\rho = 1)$ et donc, il faut d'abord calculer M grâce au système d'équations écrit pour $\rho = 1$,

$$M^2 = m^2 + \Sigma(b, s, I(M^2, m^2, M^2)) \quad (4.144)$$

$$m^2 = \mu^2 + \frac{bs^2}{2} + \frac{b}{2} (\langle \varphi^2 \rangle_M - \langle \varphi^2 \rangle_\mu). \quad (4.145)$$

Pour résoudre le système, calculons tout d'abord $\langle \varphi^2 \rangle_M$, en se rappelant que nous devons imposer une coupure sur les impulsions Λ , pour renormaliser la théorie,

$$\langle \varphi^2 \rangle_M = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dt}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{M^2 + t^2}} = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + M^2/\Lambda^2}}{-1 + \sqrt{1 + M^2/\Lambda^2}} \right).$$

Ainsi, à l'ordre dominant en $1/\Lambda^2$,

$$\langle \varphi^2 \rangle_M - \langle \varphi^2 \rangle_\mu = -\frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right).$$

4.145 devient

$$m^2 = \mu^2 + \frac{bs^2}{2} - \frac{b}{8\pi} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right),$$

et 4.143 devient

$$m_\rho^2 = \mu^2 + \frac{bs^2}{2} - \frac{b}{8\pi} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) - \frac{\rho b}{8\pi} \ln\left(\frac{M_\rho^2}{M^2}\right).$$

Réécrivons les équations sur M , en utilisant 4.136 et $z_{\rho|X=M_\rho^2} = 1$

$$\Sigma(\rho b, s, I(M_\rho^2, m_\rho^2, M_\rho^2)) = M_\rho^2 \Sigma_{\lambda_{M,\rho}}(1 - 4z_{m_\rho}).$$

4.142 devient,

$$\begin{aligned} M_\rho^2 &= m_\rho^2 + M_\rho^2 \Sigma_{\lambda_{M,\rho}}(1 - 4z_{m_\rho}) \\ \Leftrightarrow y_{M_\rho} &= 1 + y_{M_\rho} \Sigma_{\lambda_{M,\rho}}\left(1 - \frac{4}{y_{M_\rho}}\right) \end{aligned}$$

et 4.144 devient,

$$\begin{aligned} M^2 &= m^2 + \Sigma(b, s, I(M^2, m^2, M^2)) \\ \Leftrightarrow y_M &= 1 + y_M \Sigma_{\lambda_M}\left(1 - \frac{4}{y_M}\right) \end{aligned}$$

La forme de l'équation précédente est particulièrement intéressante dans la résolution numérique du problème car $y \in [0, 1]$. On peut à partir de là calculer y_M puis y_{M_ρ} , puis M^2 et M_ρ^2 et enfin m^2 .

4.4.5 Le potentiel effectif dans le modèle $\lambda\Phi^4$

Le système d'équations de Dyson convenablement clos permet de calculer les fonctions de Green du problème, jusqu'à quatre corps. Appelons énergie de corrélation la quantité $E_{corr} = \langle H_3 + : H_4 :_\varepsilon \rangle$. Elle est composée de termes uniquement dus aux interactions à trois et quatre corps, puisque l'on a retiré grâce à l'ordre normal les facteurs contribuant au champ moyen qui ne sont donc pas diagrammatiquement des interactions réellement à plus de deux corps (et rappelons une dernière fois le fait que l'on peut écrire H_3 ou $: H_3 :_\varepsilon$ puisque $\langle \varphi \rangle = 0$, comme cela a été discuté au paragraphe 3.1.1).

Expression des valeurs moyennes grâce à des fonctions de Green

Calculons le terme d'interaction (après modification du hamiltonien) à trois corps. Commençons par écrire le hamiltonien à trois corps sous une forme plus pratique par la suite (on utilise le fait que $\varphi_k^\dagger = \varphi_{-k}$, on fait un changement de variable des indices muets puis on utilise le fait que V_{1+2+3} est proportionnelle à δ_{1+2+3}).

$$H_3 = V_{1+2+3} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = V_{1+2+3} \varphi_1^\dagger \varphi_2^\dagger \varphi_3^\dagger = V_{1+2-3} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3^\dagger. \quad (4.146)$$

Nous voulons calculer la valeur $\langle H_3 \rangle$ qui sera utile par la suite. Si on décompose φ_k en termes d'opérateurs \mathbf{b} et \mathbf{b}^\dagger , on voit que cette expression va s'écrire comme une somme de fonctions de Green $G_{\beta\beta',\alpha}^{(i)}$ (avec la notation pour les fonctions de Green à trois corps définie en annexe, voir l'équation A.7, p.152). Par exemple, on peut calculer $\langle \mathbf{b}^\dagger_1 \mathbf{b}_{-2} \mathbf{b}_3 \rangle$ grâce au théorème spectral. On obtient

$$\delta_{1+2-3} \langle \mathbf{b}^\dagger_1 \mathbf{b}_{-2} \mathbf{b}_3 \rangle = \delta_{1+2-3} \lim_{t \rightarrow 0^+} \langle \mathbf{b}^\dagger_1(t) (\mathbf{b}_{-2} \mathbf{b}_3)(0) \rangle = \delta_{1+2-3} \int i \frac{dE}{2\pi} e^{iE\eta^+} \mathfrak{G}_{\mathbf{b}_{-2} \mathbf{b}_3, \mathbf{b}^\dagger_1}(E) \quad (4.147)$$

On aurait pu utiliser une autre décomposition,

$$\delta_{1+2-3} \langle \mathbf{b}^\dagger_1 \mathbf{b}_{-2} \mathbf{b}_3 \rangle = \delta_{1+2-3} \lim_{t \rightarrow 0^+} \langle (\mathbf{b}^\dagger_1 \mathbf{b}_{-2})(t) \mathbf{b}_3(0) \rangle = \delta_{1+2-3} \int i \frac{dE}{2\pi} e^{iE\eta^+} \mathfrak{G}_{\mathbf{b}_3, \mathbf{b}^\dagger_1 \mathbf{b}_{-2}}(E) \quad (4.148)$$

qui est nulle (lorsque l'on force la covariance dans $I^{(2)}$). On voit immédiatement que l'on va être gêné par un problème de consistance (qui n'est pas sans rappeler un problème semblable qui survient en RPA exprimé avec le formalisme des amplitudes; voir section 2.4.1, p.54). Ce problème survient également dans le cas de : H_4 : . Cependant, lorsque l'on calcule les fonctions de Green, on constate qu'il existe une combinaison particulière qui respecte manifestement la covariance (voir en annexe, les équations A.9, p.153 et A.11, p.153), si l'intégrale de boucle I est covariante (problème qui sera évoqué un peu plus tard, section 4.4.6, p.119). Nous prendrons comme règle de toujours fabriquer cette combinaison particulière. Les termes résiduels seront calculés et discutés séparément.

Appliquons cette règle dans le calcul de $\langle H_3 \rangle$. Avec des notations allégées des indices, des valeurs moyennes et des facteurs multiplicatifs, on a $\varphi \propto \mathbf{b} + \mathbf{b}^\dagger_-$ et $\varphi^\dagger \propto \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}_-$ et

$$H_3 \propto (\mathbf{b} + \mathbf{b}^\dagger_-)^2 (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}_-) = \left[\mathbf{b}\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}\mathbf{b}, \mathbf{b}_- + \mathbf{b}\mathbf{b}^\dagger_-, \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}^\dagger_- \mathbf{b}^\dagger_-, \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}^\dagger_- \mathbf{b}^\dagger_-, \mathbf{b}_- \right] + \left(\mathbf{b}^\dagger_- \mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}^\dagger_- \mathbf{b}, \mathbf{b}_- \right) \quad (4.149)$$

L'écriture particulière de H_3 (introduite équation 4.146) s'explique ici. En effet, on voit immédiatement que les six premiers termes, $[\mathbf{b}\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}\mathbf{b}, \mathbf{b}_- + \mathbf{b}\mathbf{b}^\dagger_-, \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}^\dagger_- \mathbf{b}^\dagger_-, \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}^\dagger_- \mathbf{b}^\dagger_-, \mathbf{b}_-]$, correspondent aux fonctions de Green $G_{\beta\beta',-\alpha}^{(i)}$ et $G_{\beta\beta',\bar{\alpha}}^{(i)}$ écrites pour la première forme de l'indice (i) (et l'introduction de virgules dans l'expression 4.149 aide à voir quelle combinaison on a choisie). Par exemple $\mathbf{b}\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}\mathbf{b}, \mathbf{b}_- = \mathbf{b}\mathbf{b}, (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}_-) \equiv G_{\beta\beta',-\alpha}^{(1)} + G_{\beta\beta',\bar{\alpha}}^{(1)}$. Ces six termes reconstruisent la forme covariante donnée en annexe (équation A.9, p.153). On a donc établi le résultat (qui doit être encore intégré, comme on le verra dans le prochain paragraphe, pour obtenir l'énergie de corrélation pour l'interaction à trois corps),

$$\mathfrak{G}^{(3)}(E) \equiv V_{1+2-3} \mathfrak{G}_{\varphi_1 \varphi_2, \varphi_3^\dagger} \quad (4.150)$$

$$= \mathfrak{G}^{(3c)} + \mathfrak{G}^{(3nc)} \quad (4.151)$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} 2\Sigma(E, p) G(E, p) + \mathfrak{G}^{(3nc)} \quad (4.152)$$

où $\mathfrak{G}^{(3nc)}$ correspond aux termes $(\mathbf{b}^\dagger_{-}\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}^\dagger_{-}\mathbf{b}, \mathbf{b}_{-})$ de l'expression 4.149 et les étiquettes (3c) et (3nc) signifient respectivement ‘‘corrélations (à trois corps) covariante et non-covariante’’. On retrouve la forme 4.25, p.88 du schéma s-RPA du chapitre précédent où le problème de non-covariance avait été évoqué.

Examinons plus attentivement le terme $(\mathbf{b}^\dagger_{-}\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}^\dagger_{-}\mathbf{b}, \mathbf{b}_{-})$, défini pour H_3 (équation 4.149). Il existe une façon de l'écrire qui le rend identiquement nul. Par la suite, c'est effectivement ce que nous retiendrons. Dans la présentation des résultats, nous ne tiendrons pas compte de ce terme. On peut également l'écrire, en terme de fonctions de Green,

$$\mathfrak{G}^{(3nc)}(E) = 2 V_{1+2-3} \mathfrak{G}_{\mathbf{b}^\dagger_1 \mathbf{b}^\dagger_2, \mathbf{b}_3} \quad (4.153)$$

Lorsque nous calculerons l'énergie de corrélation, nous montrerons numériquement que ce terme est effectivement négligeable.

Établissons maintenant un résultat équivalent pour $\langle : H_4 : \rangle$. La même discussion que précédemment pourrait être reproduite, puisqu'il existe une combinaison de neuf fonctions de Green à quatre corps explicitement covariante (toujours sous la condition que $I(E, p)$ le soit). Le terme explicitement non-covariant se met sous la forme

$$\mathfrak{G}^{(4nc)}(E) = 4 V_{1+2-3-4} \mathfrak{G}_{\mathbf{b}^\dagger_3 \mathbf{b}^\dagger_4, \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2}. \quad (4.154)$$

Pour le reste des termes, on établit la formule,

$$: H_4 : - (\text{termes non-covariants}) \propto [\dots] - 2 \delta_{1+2} \delta_{3+4} (1 + 2 \mathbf{b}^\dagger_1 \mathbf{b}_1) \quad (4.155)$$

(où $[\dots]$ représente toujours la ‘‘bonne combinaison’’ de termes à quatre opérateurs qui reconstruit le terme explicitement covariant A.11). On a donc, en utilisant A.11

$$\mathfrak{G}^{(4c)}(E) \equiv V_{1+2-3-4} \mathfrak{G}_{\varphi_1 \varphi_2, \varphi_3^\dagger \varphi_4^\dagger} \quad (4.156)$$

$$= \int \frac{d\vec{P}}{(2\pi)^d} \left[2bI(E, p) + I^2(E, \vec{P}) F(E, \vec{P}, \rho) - V_{1+2-3-4} G_{\varphi_1 \varphi_2, \varphi_3^\dagger \varphi_4^\dagger}^0 \right]. \quad (4.157)$$

avec,

$$F(E, \vec{P}, \rho) \equiv F(E^2 - \vec{P}^2, \rho) = \frac{1}{24} \left(\frac{\rho^2 b^2}{1 - \frac{\rho b}{2} I(E, \vec{P})} + \frac{\rho^3 b^3 s^2}{(1 - \frac{\rho b}{2} I(E, \vec{P}))^2} \times \left(E^2 - \vec{P}^2 - m^2 - \frac{\rho^2 b^2 s^2}{2} \frac{I(E, \vec{P})}{1 - \frac{\rho b}{2} I(E, \vec{P})} \right)^{-1} \right). \quad (4.158)$$

G^0 est appelée la fonction de Green sans corrélations et correspond aux termes $2 \delta_{1+2} \delta_{3+4} (1 + 2 \mathbf{b}^\dagger_1 \mathbf{b}_1)$. Sa présence est indispensable car l'intégrale sur p de $I(E, p)$ est divergente. Ce terme compense exactement cette divergence et finalement on obtient,

$$\mathfrak{G}^{(4c)}(E) = V_{1+2-3-4} \mathfrak{G}_{\varphi_1 \varphi_2, \varphi_3^\dagger \varphi_4^\dagger} \quad (4.159)$$

$$= \int \frac{d\vec{P}}{(2\pi)^d} I^2(E, \vec{P}) F(E, \vec{P}, \rho). \quad (4.160)$$

L'interprétation diagrammatique de ce terme et du terme $\mathfrak{G}^{(3e)}$ est donné figure 4.2, p.89.

Énergie de corrélation covariante

Le terme à trois corps est donné par $\langle \rho H_3 \rangle$, intégré sur ρ , en vertu de la "charging formula". En terme de fonctions de Green (du problème $H^1(\rho)$), on obtient directement avec le théorème spectral et en négligeant le terme non-covariant,

$$\langle \rho H_3 \rangle^{(cov)} / V = \frac{1}{V} \sum_{123} V_{1,-2,-3} G_{\varphi_2 \varphi_3, \varphi_1^\dagger}(E) \quad (4.161)$$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{d\vec{P}}{(2\pi)^d} \int \frac{i dE}{(2\pi)} e^{iE\eta^+} 2 \Sigma(E, \vec{P}) G(E, \vec{P}) . \quad (4.162)$$

On note $\frac{E_{corr}^{(3c)}}{V}$ ce terme à trois corps et on trouve,

$$\begin{aligned} \frac{E_{corr}^{(3c)}}{V} &= \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \int \frac{d\vec{P}}{(2\pi)^d} \int \frac{i dE}{(2\pi)} e^{iE\eta^+} \frac{\rho^2 b^2 s^2}{6} \frac{I(E, \vec{P})}{1 - \frac{\rho b}{2} I(E, \vec{P})} \\ &\times \left(E^2 - \vec{P}^2 - m^2 - \frac{\rho^2 b^2 s^2}{2} \frac{I(E, \vec{P})}{1 - \frac{\rho b}{2} I(E, \vec{P})} \right)^{-1} . \end{aligned} \quad (4.163)$$

Nous n'avons pas signalé la dépendance implicite en ρ , mais bien sûr, toutes les fonctions dépendent de ce paramètre. Ainsi, $I(E, \vec{P}) = I_\rho(E, \vec{P})$, dont l'expression est donnée en annexe. La RPA standard s'obtient en remplaçant $I_\rho(E, \vec{P})$ par $I(E, \vec{P})$ donné équation 4.22, p.88.

On obtient pour l'énergie de corrélation à quatre corps "covariante"

$$\frac{E_{corr}^{(4c)}}{V} = \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \int \frac{d\vec{P}}{(2\pi)^d} \int \frac{i dE}{(2\pi)} e^{iE\eta^+} I^2(E, \vec{P}) F(E, \vec{P}, \rho) \quad (4.164)$$

Cette expression est bien covariante en RPA standard mais il faut la forcer en r-RPA. On peut ensuite intégrer sur P grâce à une rotation de Wick.

Contribution non-explicitement covariante

Traitons maintenant le cas des deux termes $\mathfrak{G}^{(3nc)}(E)$ et $\mathfrak{G}^{(4nc)}(E)$ (équations 4.153 et 4.154).

$$\frac{E_{corr}^{(3nc)}}{V} = \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \frac{\rho b s}{6} \sum_{123} \frac{\delta_{1+2-3}}{V^{3/2}} \frac{2}{\sqrt{\prod_{i \in [1,2,3]} 2\varepsilon_i}} \langle \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2^\dagger \mathbf{b}_3 \rangle \quad (4.165)$$

$$= \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \int \frac{i dE}{2\pi} \frac{\rho b s}{6} \mathfrak{G}^{(3nc)}(E) \quad (4.166)$$

$$= \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \int \frac{d\vec{P}}{(2\pi)^d} \int \frac{i dE}{(2\pi)} e^{iE\eta^+} 2 I^{(1)}(E, \vec{P}) \left(\frac{E + \varepsilon_{P,\rho}}{2\varepsilon_{P,\rho}} \right) \frac{G(E, P)}{1 - \frac{\rho b}{2} I(E, P)} \quad (4.167)$$

$$\frac{E_{corr}^{(4nc)}}{V} = \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \frac{\rho b}{24} \sum_{1234} \frac{\delta_{1+2-3-4}}{V} \frac{4}{\sqrt{\prod_{i \in [1,2,3,4]} 2\varepsilon_i}} \langle \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2^\dagger \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_4 \rangle \quad (4.168)$$

$$= \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \int \frac{idE}{2\pi} \frac{\rho b}{24} \mathfrak{G}^{(4nc)}(E) \quad (4.169)$$

$$= \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \int \frac{d\vec{P}}{(2\pi)^d} \int \frac{idE}{(2\pi)} e^{iE\eta^+} I^{(1)2}(E, \vec{P}) F(E, \vec{P}, \rho) \quad (4.170)$$

avec,

$$I^{(1)}(E, \vec{P}) = \int \frac{d\vec{k}_1 d\vec{k}_2}{(2\pi)^d} \frac{\delta^{(d)}(\vec{P} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2)}{2\varepsilon_1 2\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_1 \mathcal{N}_1 + \varepsilon_2 \mathcal{N}_2}{E - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + i\eta}, \quad (4.171)$$

Nous avons des fonctions non-covariantes de E et P *i.e.* on ne peut pas les mettre sous la forme $F(E^2 - P^2)$. Cette non-covariance est d'une nature différente que celle sur I car elle survient dès le calcul des fonctions de Green $\mathfrak{G}_{\varphi\varphi\dots}$ (voir la discussion à ce propos au paragraphe suivant).

On peut quand même réaliser la rotation de Wick, mais on ne peut plus intégrer directement sur le paramètre θ . Reprenant la démonstration de la formule 4.27, p.90, on voit que si $f = f(E, p)$, le changement de variable $(z, p) \rightarrow (\mathcal{S}, \theta)$ nous conduit à écrire une intégrale dont la dépendance en θ n'est plus triviale. On montre alors que

$$\begin{aligned} \frac{E_{corr}^{(3nc)}}{V} &= - \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \frac{\rho^2 b^2 s^2}{3} \int \frac{d\mathcal{S}}{2\pi^2} \\ &\quad \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left(\frac{\mathcal{S} \cos^2 \theta}{4\sqrt{\varepsilon_{t\rho}^2 + \mathcal{S} \sin^2 \theta}} J(\mathcal{S}, \theta) - \frac{1}{4} I(-\mathcal{S}) \right) \frac{G(-\mathcal{S})}{1 - \frac{\rho b}{2} I(-\mathcal{S})} \end{aligned} \quad (4.172)$$

et

$$\frac{E_{corr}^{(4nc)}}{V} = \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} \int_0^\infty \frac{d\mathcal{S}}{2\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\theta \left(\mathcal{S} \cos^2 \theta J^2(\mathcal{S}, \theta) - I^2(-\mathcal{S}) \right) F(-\mathcal{S}) \quad (4.173)$$

avec,

$$J(\mathcal{S}, \theta) = - \int \frac{dt}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon_{t\rho}^2 + \mathcal{S} \sin^2 \theta}} \frac{2\mathcal{N}_{t\rho}}{\mathcal{S} + 4\varepsilon_{t\rho}^2}. \quad (4.174)$$

Il est parlant de comparer cette dernière expression à

$$I(-\mathcal{S}) = - \int \frac{dt}{2\pi} \frac{2\mathcal{N}_{t\rho}}{\mathcal{S} + 4\varepsilon_{t\rho}^2}. \quad (4.175)$$

On voit par comparaison de 4.174 et 4.175 avec 4.172 (ou avec 4.173) que la non-covariance vient du terme

$$\frac{\mathcal{S} \cos^2 \theta}{4\varepsilon_{t\rho}^2 + \mathcal{S} \sin^2 \theta}. \quad (4.176)$$

Si ce terme était égal à 1, les contributions non-covariantes à l'énergie de corrélations seraient nulles.

Notons que les résultats en RPA standard sont obtenus en prenant pour expression de la densité $\mathcal{N}_{t\rho} = \frac{1}{2\varepsilon_{t\rho}}$.

4.4.6 Source de non-covariance

Notons ici qu'il y a deux sources de non-covariance. La première sur I que l'on force (voir la forme obtenue, équation 4.134, p.111). En effet, l'intégrale de boucle est une resommation de diagramme de boucles (ou bulles RPA, comme on le dit parfois). Elle apparaît comme une quantité fondamentale, directement reliée à l'opérateur de masse à deux particules. Il se doit d'être une quantité covariante, sinon on perd la symétrie de Lorentz au niveau des quasi-particules, qui ne sont plus alors des "particules" relativistes. Cela n'aurait pas de sens physiquement.

En corollaire, on remarque que sans cela, l'équation des modes RPA n'est plus une équation implicite sur la quantité M , mais une équation fonctionnelle (dont la solution est la fonction $\varepsilon(P)$ et qui est donc difficilement soluble en pratique.

L'autre source de covariance n'apparaît que dans le calcul de E . Il n'y a donc pas d'observable physique reliée directement à cette non-covariance. L'énergie est une intégrale sur E et p et donc à la fin, la non-covariance n'apparaît plus. C'est pourquoi nous n'avons pas forcé la covariance dans l'énergie de corrélation mais seulement pour I .

On peut essayer de discuter les causes de ce problème. Il apparaît sans doute à cause de l'approximation de factorisation qui coupe les valeurs moyennes connectées d'une façon brutale, sans souci des symétries sous-jacentes. Imaginons que l'on puisse écrire un schéma à trois particules (*ie*, on ajoute **bbb** dans les excitations RPA). Il apparaîtrait comme dans le cas présent de "bonnes" combinaisons de fonctions de Green, c'est-à-dire covariantes. On peut espérer que ces termes supplémentaires viennent ajouter aux fonctions de Green du problème présent les contributions nécessaires pour rendre l'énergie de corrélation covariante.

On peut se poser la question de savoir si le reste des termes issu du schéma à trois corps sera en soit covariant ou non. D'après Aouïssat [Aou], si l'opérateur d'excitation RPA contient les générateurs d'une symétrie, la RPA conservera cette symétrie. Or ici, le courant de Noether associé à la symétrie de Lorentz est un opérateur quartique dans le champ φ . Il n'est donc pas sûr que la covariance soit restaurée à ce niveau.

Il y aurait quand même un intérêt à écrire le schéma à trois particules. Si effectivement on restaure une partie de la covariance, cela nous guiderait vers une façon de fermer le schéma renormalisé d'une manière qui respecte les symétries dès l'approximation à deux particules.

4.4.7 Discussion des résultats

Tout est maintenant en place pour obtenir l'énergie de l'état fondamental en RPA standard et en r-RPA.

Les solutions des équations des modes RPA à $\rho \neq 1$ et $\rho = 1$ sont réinjectées dans les expressions des énergies de corrélation et on intègre numériquement. Pour obtenir l'énergie totale, il faut additionner l'énergie de champ moyen généralisé et l'énergie de corrélation. L'énergie de champ moyen généralisé est obtenue en injectant la masse du mode de champ moyen généralisé m dans l'expression 4.77 et sera notée E_0^{CMG} . Les termes quadratiques dans la redéfinition du hamiltonien d'interaction (voir équation 4.131) sont très faibles (autour de 10^{-3}), mais coûteux en temps de calcul. Nous les avons négligés par commodité.

Masse du mode RPA

Les résultats pour le mode r-RPA sont tracés sur la figure 4.6. On voit que l'instabilité de la RPA standard (figure 4.1, p.85) a été éliminée comme nous l'espérons. Ce résultat est très encourageant, les fluctuations RPA (partiellement) autocohérente permettent de faire disparaître l'instabilité de la RPA standard autour de la transition de phase.

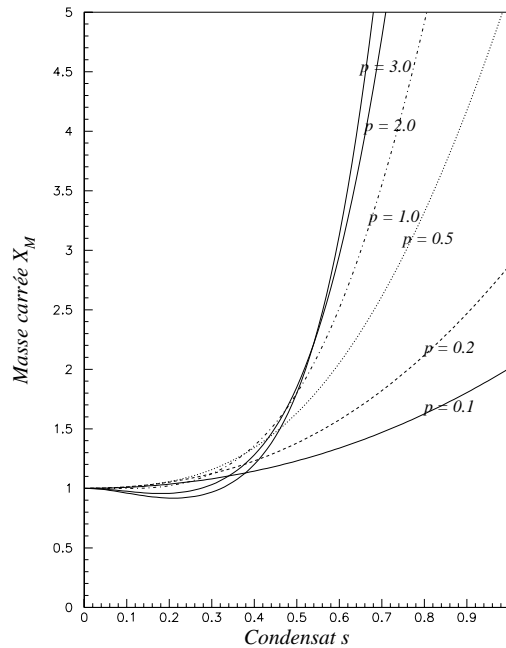


FIG. 4.6 – Mode r-RPA (x_M) pour différentes valeurs de p .

Énergie de corrélation et de l'état fondamental

Corrélation à trois corps, non-covariante. Commençons par le cas de $E^{(3nc)}$ et montrons qu'il est justifié de le négliger. On constate figure 4.7 que tant en s-RPA que en r-RPA,

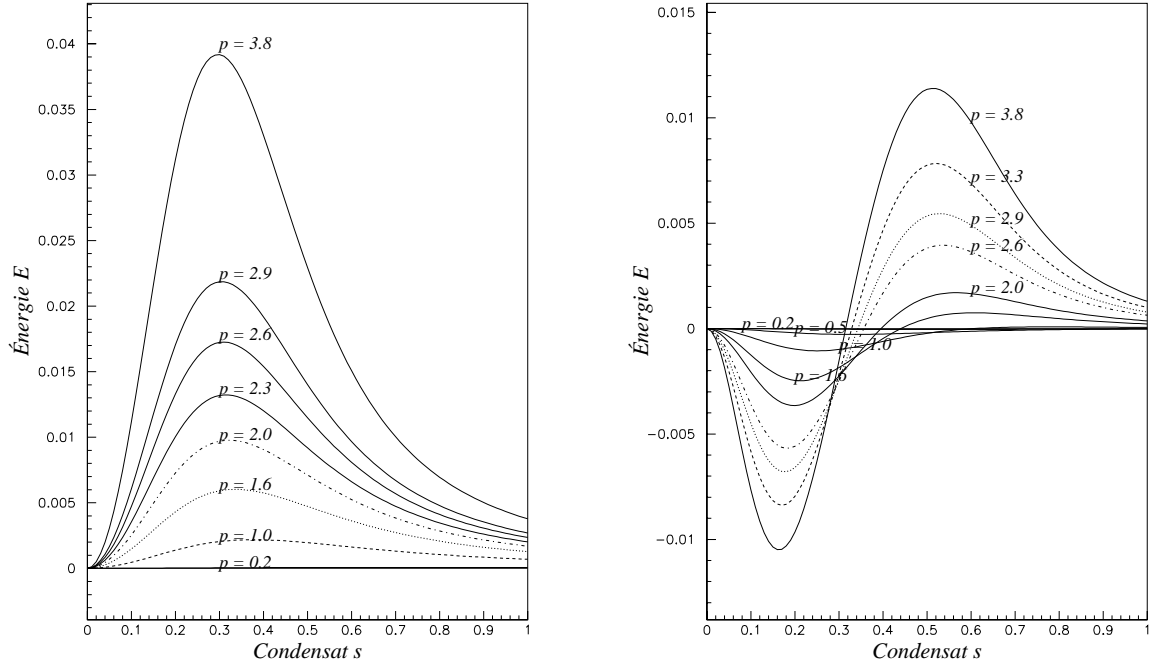


FIG. 4.7 – Énergie de corrélation à trois corps, non-covariante, $E^{(3nc)}$ pour différentes valeurs de p , en RPA standard (à gauche) et en r-RPA (à droite).

ce terme est négligeable (on peut comparer par exemple à l'énergie de corrélation de la figure 4.3, à gauche). En effet, pour $p = 2.9$ en s-RPA et r-RPA, son amplitude au maximum est respectivement de $2 \cdot 10^{-2}$ et $5 \cdot 10^{-3}$, inférieure d'un facteur 10 à 100 à la moyenne de l'énergie de corrélation covariante (environ 0.2 en s-RPA et 0.3 en r-RPA). De plus, il est nul pour $s = 0$ (ce qui est normal, dans la phase symétrique, c'est-à-dire où la symétrie du lagrangien est celle de l'état fondamental, le vertex à trois corps est nul). Comme $E^{(4)}$ est non-nul à $s = 0$, le terme $(3nc)$ est bien négligeable dans la zone des faibles s . En r-RPA, dans la zone de transition de phase (c'est-à-dire s autour de 0.5, ce terme s'annule et change de signe et donc ne joue pas non plus.

Par la suite, nous ne parlerons donc plus de ce terme.

Corrélation à quatre corps, non-covariante Considérons maintenant $E^{(4nc)}$ (figure 4.8). Il est bien négligeable pour $s > 0.5$ (et donc va peut être influencer la transition de phase) mais à $s = 0$, zone où l'énergie de corrélation covariante est plus faible, il faut le

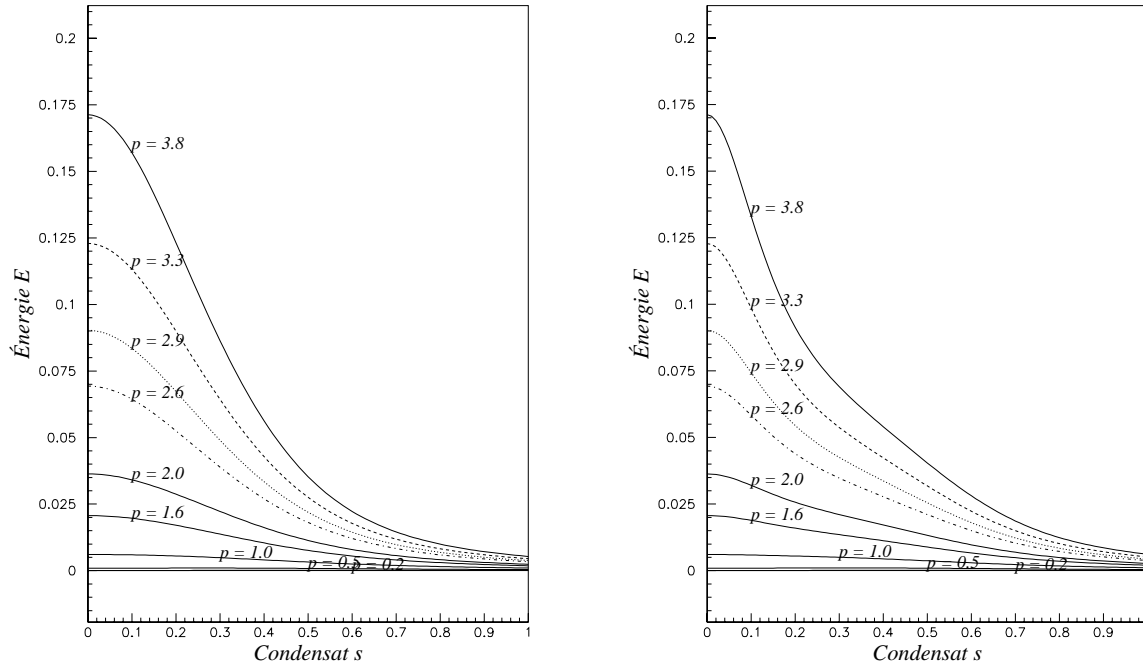


FIG. 4.8 – Énergie de corrélation à quatre corps, non-covariante, $E^{(4nc)}$ pour différentes valeurs de p , en RPA standard (à gauche) et en r-RPA (à droite).

prendre en compte. Nous verrons que cette contribution nous donne un très bon résultat pour l'énergie totale comparativement à la méthode des “clusters”.

Contributions covariantes à l'énergie de corrélation L'énergie de corrélation covariante en r-RPA, $E^{(3c)} + E^{(4c)}$, est montrée figure 4.9 (à gauche). Sa valeur moyenne justifie l'abandon du terme $E^{(3nc)}$ et de la prise en compte du terme $E^{(4nc)}$ par la suite.

Énergie totale Les résultats sont présentés figure 4.10. Nous avons donné deux résultats, l'énergie totale covariante $E_{tot}^{(c)} = E_0^{CMG} + E^{(3c)} + E^{(4c)}$ et l'énergie totale $E_{tot} = E_0^{CMG} + E^{(3c)} + E^{(4c)} + E^{(4nc)}$.

Dans les deux cas, nous avons une transition de phase du premier ordre (en désaccord avec [SG73]) pour $p_c \simeq 2.3$. Cette valeur de p_c se rapproche du résultat calculé sur réseau [JS95, LW98, MRL99] ce qui est cependant encourageant. La transition de phase n'est cependant pas du bon ordre, mais la zone de métastabilité s'est considérablement réduite par rapport au champ moyen (la barrière de potentiel entre la phase stable et métastable est plus faible qu'en champ moyen). Notons également un résultat (que nous n'avons pas représenté sur une courbe car nous ne pouvons pas vraiment le justifier, mais il présente quelque intérêt). Lorsque l'on additionne les corrélations r-RPA (3c, 4c et 4nc) au potentiel effectif de champ moyen (et non pas généralisé), la transition de phase est bien du second

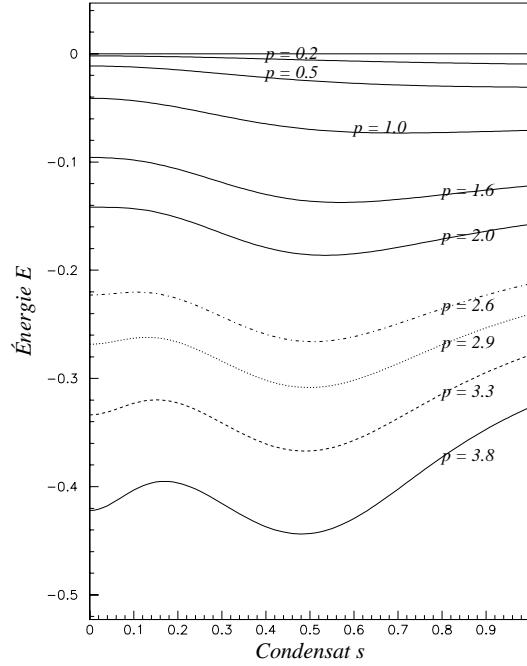


FIG. 4.9 – Contribution covariante $E^{(3c)} + E^{(4c)}$ à l'énergie de corrélations en r-RPA.

ordre. Il y a sans doute quelque chose à en déduire concernant la façon de fermer le système et de prendre en compte la densité scalaire.

On constate également l'importance du terme non-covariant à quatre corps. La barrière de potentiel est plus faible dans le cas où il est pris en compte. En effet, par rapport à la barrière de champ moyen, deux effets peuvent nous redonner une transition de phase de second ordre. Le premier effet favorable est d'abaisser l'énergie de corrélation dans la zone de métastabilité du potentiel effectif (zone où la dérivée du potentiel est négative, soit aux environs de $s = 0.5$). C'est exactement ce que fait $E^{(3c)} + E^{(4c)}$ qui est plus faible dans cette zone qu'à $s = 0$.

Le deuxième effet favorable est d'augmenter l'énergie autour de $s = 0$ pour diminuer la barrière de potentiel. C'est bien l'effet provoqué par $E^{(4c)}$ qui est répulsif.

Ainsi, concernant l'ordre de la transition, ces résultats sont satisfaisants bien que insuffisants pour reproduire le bon comportement critique. Le terme non-covariant joue favorablement pour l'ordre de la transition mais très peu pour la valeur de p_c .

Enfin, on obtient un très bon résultat pour $s = 0$ comparativement à la méthode des clusters. Cette méthode montre que l'énergie décroît quand p augmente. Or pour le champ moyen, l'énergie dans la phase symétrique est toujours nulle. Les termes (3c) et (4c) abaissent bien l'énergie, mais un peu trop (pour $p = 2$, on trouve -0.14 à comparer à -0.11 dans [HCPT96]). Le terme (4nc) corrige ce résultat ($E_{tot}(s = 0) = -0.105$).

4.4.8 Conclusion

En conclusion, les fluctuations r-RPA (fluctuations à deux corps, mais calculées sur le vide RPA autocohérent contrairement à la méthode standard) diminuent le caractère premier ordre de la transition de phase et améliorent la valeur du paramètre critique. De plus l'instabilité de la s-RPA a été corrigée. Ces résultats montrent la validité de notre approche théorique avec cependant un bémol, certains termes du potentiel effectif brisant l'invariance de Poincaré.

Une version totalement autocohérente de la RPA (SCRPA) est difficile à mettre en œuvre, mais il serait intéressant de voir si elle règle le problème de la covariance qui peut provenir de la coupure brutale des termes connectés dans l'approximation renormalisée.

Augmenter l'ensemble des excitations serait également intéressant pour améliorer la précision des résultats et peut être trouver une transition du second ordre.

Dans le chapitre suivant, le dernier chapitre, nous étudierons effectivement un modèle avec excitations à trois opérateurs. Pour simplifier la démarche, nous nous sommes concentrés sur l'oscillateur anharmonique. Les problèmes de consistance dans la fermeture du système d'équations et du calcul du nombre d'occupation sont discutés.

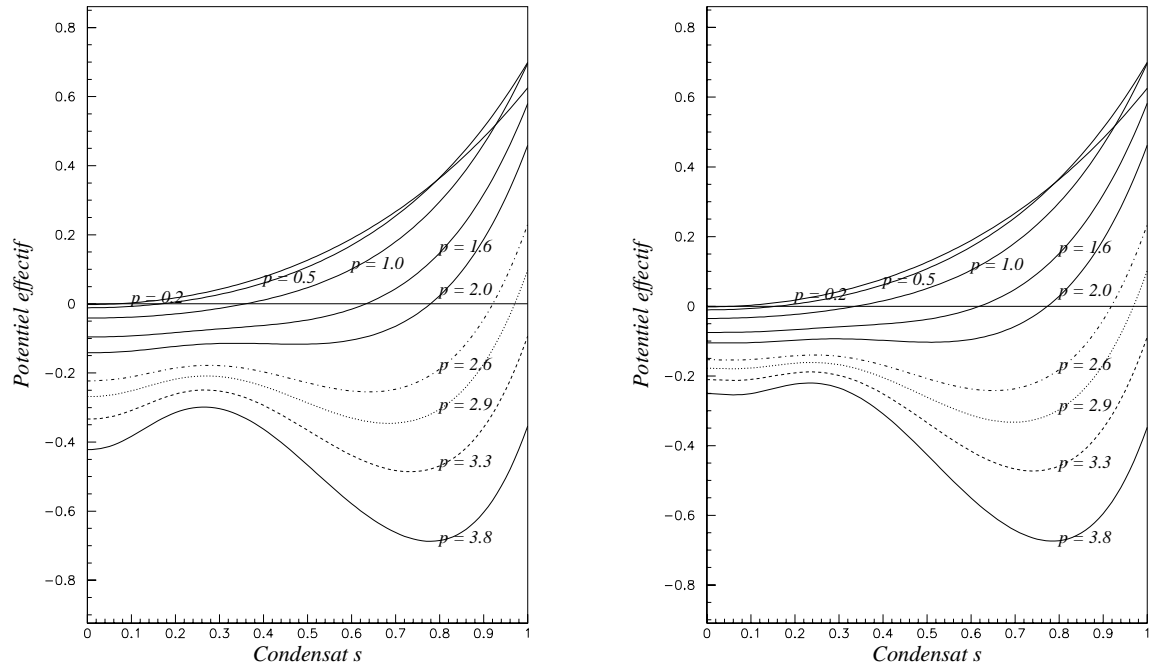


FIG. 4.10 – Potentiel effectif covariant $E_{tot}^{(c)} = E_0^{CMG} + E^{(3c)} + E^{(4c)}$ pour différentes valeurs de p (à gauche). Potentiel effectif avec le terme (4nc), $E_{tot} = E_0^{CMG} + E^{(3c)} + E^{(4c)} + E^{(4nc)}$ pour différentes valeurs de p . (à droite)

Modèle σ -linéaire

Dans ce court chapitre, nous allons voir un premier résultat obtenu par application de la r-RPA dans le modèle σ -linéaire [HC03]. Rappelons la thématique générale de ce travail. Il s'insère dans l'étude de la transition de phase chirale. Le modèle σ -linéaire est un modèle effectif pour étudier cette transition de phase. On peut le voir comme une généralisation du modèle $\lambda\Phi^4$ avec un champ Φ vectoriel (à N dimensions ; on parle également de modèle σ -linéaire $O(N)$). De plus, on ajoute un terme brisant explicitement la symétrie du lagrangien. En effet, ce modèle a pour objet de décrire le comportement effectif de la chromodynamique quantique (QCD) à basse énergie. Le lagrangien de QCD possède en première approximation la symétrie chirale (spontanément brisée). En première approximation seulement car alors, la masse des pions devraient être nulles. En réalité, tel n'est pas le cas (car la masse des quarks u et d est différente de zéro et leur différence est non-nulle) donc la symétrie est explicitement brisée. C'est pourquoi on introduit ce terme brisant explicitement la symétrie dans une direction (c'est-à-dire pour une seule composante du champ vectoriel). On suit en cela la prescription de Nambu-Goldstone. La symétrie chirale est spontanément brisée dans QCD et d'après le théorème de Goldstone, le modèle doit admettre des bosons de masses nulles. Dans l'approximation du champ moyen (voir [ND01, AC97]) la solution de l'équation des modes à une particule n'admet pas de solutions à masse nulle. Ce problème (l'approximation de champ moyen ne respecte pas bien les symétries internes) est connu. La RPA sous différentes formes (équations de Bethe-Salpeter [ND01], forme standard [ACSW96]) ou un développement à grand N [AC97] restaure le théorème de Goldstone.

Nous avons choisi d'étudier ce modèle dans un schéma r-RPA et montrerons que le théorème de Goldstone est satisfait (au sens où l'équation des modes nous montre qu'il existe de tels bosons), malgré la perte de covariance manifeste. Ce résultat est préliminaire (nous n'avons pas calculé l'énergie de corrélation et donc la transition de phase proprement dite, son ordre en particulier) mais se révèle très important. Les corrélations RPA réussissent à générer ce mode de masse nulle (dit aussi mode "mou"). La RPA s'avère être un formalisme adapté à l'étude des problèmes de symétrie brisée.

Ainsi dans ce chapitre, après avoir présenté le modèle en motivant son introduction, nous initierons le schéma RPA puis calculerons l'équation des modes pour les pions (c'est-à-dire le propagateur). Nous montrerons alors que le théorème de Goldstone est satisfait.

5.1 Motivation de l'étude du modèle σ -linéaire

5.1.1 Généralités sur la chromodynamique quantique et la matière hadronique

La chromodynamique quantique (QCD) est une théorie de jauge basée sur le groupe $SU(3)$, introduite pour décrire l'interaction (force forte) entre les quarks, composants fermioniques fondamentaux de la matière. Il existe donc huit bosons, les gluons, (correspondant aux générateurs du groupe $SU(3)$) qui véhiculent la force forte. Dans un langage imagé, les quarks (qui sont dans une représentation irréductible de $SU(3)$ dit triplet de couleurs) sont colorés avec trois couleurs différentes (rouge, vert et bleu, qui servent d'indice aux composantes du multiplet de couleurs) et les antiquarks, des anticouleurs. Les gluons portent une couleur et une anticouleur et interagissent uniquement avec un quark portant cette couleur (ou un antiquark portant cette anticouleur).

Le comportement effectif de QCD à haute énergie est bien connu. On montre par les techniques de renormalisation que la constante de couplage effective est faible et on peut appliquer un développement perturbatif. Cette propriété, dite de liberté asymptotique (les quarks et les gluons interagissent faiblement), permet de considérer le problème comme une théorie des champs en interaction avec des champs libres à l'infini pour laquelle toutes les techniques perturbatives usuelles (développement LSZ sur les états entrant et sortant) sont valables. Pour être complet, il faut préciser que ces champs libres à l'infini ne sont pas observables. Il se produit une hadronisation des quarks ou des gluons qui ont interagi. Ils apparaissent alors sous la forme de jets (ensemble de hadrons de vitesses quasiment parallèles) visibles dans les détecteurs.

À basse énergie, on estime que le potentiel effectif est confinant (on ne forme que des états liés singlets de couleurs), bien que ce problème crucial de la QCD ne soit pas résolu (voir [Han98] pour une introduction au problème du confinement). Les états liés sont nécessairement dans des représentations dites "sans couleur" ou "blanches" de $SU(3)$. On forme soit des baryons (trois quarks ; ce sont des fermions) soit des mésons (combinaisons

quark-antiquark; ce sont des bosons). Baryons et mésons forment la famille des hadrons.

Pour la physique de la matière hadronique, c'est-à-dire à basse énergie ou à basse température, seules les excitations thermiques associées aux particules les plus légères ont une contribution. C'est pourquoi on peut décrire la matière hadronique à densité baryonique nulle comme un gaz de mésons π ou pions (mésons composés des deux quarks les plus légers, u et d) Les autres quarks jouent très peu en première approximation, leurs masses étant importantes, et seront donc négligés ici (des modèles plus développés peuvent prendre en compte le quark étrange s).

Le résidu de la force forte qui lie les nucléons (baryons composés de quarks u et d) est appelé force nucléaire. C'est une force analogue à la force de Van der Waals au sens où, dû à la force forte, deux hadrons peuvent interagir, exactement comme deux atomes, états liés d'un noyau et d'électrons par la force électromagnétique, interagissent. Cette force est, dans le langage introduit par Yukawa, transportée par des bosons qui s'identifient aux pions.

Un des problèmes ouverts en physique hadronique est l'étude de la transition entre la phase confinée (décrite approximativement comme un gaz de pions et de nucléons interagissant par la force forte) et la phase déconfinée. Dans ce nouvel état de la matière nucléaire, les champs de quarks et de gluons sont libres. On appelle cet état le plasma de quarks et de gluons ou QGP (voir [Bla02]).

Le modèle σ -linéaire est introduit car il décrit QCD dans le domaine des énergies intermédiaires (c'est un modèle effectif pour QCD dans ce domaine c'est-à-dire un modèle décrivant bien QCD pour un certain domaine d'énergie; voir la référence [Hol01]). En particulier, on espère qu'il peut décrire la transition de phase vers le QGP.

Ce modèle décrit des champs de pions et un champ appelé σ et peut être introduit d'une façon naturelle en partant des symétries du lagrangien de QCD. Il met donc en œuvre techniquement notre intuition de simplifier l'étude de la matière hadronique en la considérant comme un gaz de pions.

5.2 La symétrie chirale

Nous allons maintenant voir comment introduire le lagrangien effectif du modèle σ -linéaire, grâce à l'étude d'une symétrie particulière du lagrangien de QCD, la symétrie chirale.

La QCD possède une symétrie presque exacte, la symétrie chirale. Cette symétrie doit être spontanément brisée à basse énergie car elle ne se retrouve pas dans le spectre hadronique. Ainsi, il apparaît un mode de masse nulle ou boson de Goldstone que l'on identifie avec le pion. Bien sûr, la masse du pion n'est pas nulle ($m_\pi \simeq 139 \text{ MeV}$), ce qui traduit que cette symétrie n'est pas tout à fait exacte.

On s'attend à ce que à haute énergie ou haute densité, cette symétrie soit restaurée. Des indices de cette restauration sont recherchés dans des expériences de collisions d'ions lourds relativistes. Il n'est pas évident que la transition de phase chirale et la transition vers

le QGP se confondent. Il existe cependant des indices théoriques en faveur de ce scénario. Par exemple, on montre par un calcul sur réseau que le condensat de quarks $\langle \bar{q} q \rangle$ (qui, on le verra, est le paramètre d'ordre de la transition de phase chirale) devient nul lors de la transition vers la phase déconfinée de QCD.

L'intérêt du modèle σ -linéaire est qu'il est un modèle effectif de la transition de phase chirale. En effet, lorsque l'on ne considère que les quarks u et d , ce modèle et QCD tombent dans la même classe d'universalité c'est-à-dire qu'ils ont un comportement critique semblable. Le modèle σ -linéaire est écrit à partir d'un hamiltonien de Ginzburg-Landau respectant les symétries de QCD, c'est-à-dire, en ce qui concerne cette transition de phase, la symétrie chirale.

5.2.1 Symétries de la QCD

Considérons le lagrangien de QCD (voir la référence [Cha98, PS]), uniquement pour les quarks u et d (décrits par les spineurs Ψ_u et Ψ_d , et de masse m_u et m_d), et en omettant la partie concernant les champs de jauge (gluons, pour lesquelles, la symétrie est toujours trivialement réalisée). On a

$$\mathcal{L}_{QCD} = i\bar{\Psi}_u \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_u + i\bar{\Psi}_d \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_d - m_u \bar{\Psi}_u \Psi_u - m_d \bar{\Psi}_d \Psi_d \quad (5.1)$$

$$= i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{m_u + m_d}{2} \bar{\Psi} \Psi - \frac{m_u - m_d}{2} \bar{\Psi} \tau_3 \Psi, \quad (5.2)$$

avec l'introduction de l'isospineur $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_u \\ \Psi_d \end{pmatrix}$, $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ et τ_i sont les matrices de Pauli.

On voit que ce lagrangien est invariant par la symétrie d'isospin (transformation de l'isospineur sous $SU(2)$) si le dernier terme est nul, c'est à dire, $m_u - m_d = 0$. Par la suite, nous considérons que cette symétrie est exacte. Expérimentalement, cela est justifié par le fait que le spectre hadronique à une structure de multiplets d'isospins. On voit également que le lagrangien possède la symétrie axiale,

$$\Psi \rightarrow e^{i\alpha_k \frac{\tau_k}{2} \gamma^5} \Psi, \quad (5.3)$$

à condition que $m_u + m_d = 0$ c'est-à-dire que $m_u = m_d = 0$. Expérimentalement, cette symétrie n'est pas réalisée dans le spectre alors que la brisure explicite, gouvernée par $m_u + m_d$ est du même ordre que la brisure explicite de la symétrie d'isospin. On en déduit que la symétrie axiale doit être spontanément brisée.

5.2.2 Lagrangien chiral

On peut combiner les deux symétries précédentes de la façon suivante. On définit des spineurs dits de chiralité droite et gauche,

$$\Psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \Psi \text{ et } \Psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \Psi. \quad (5.4)$$

En supposant exacte la symétrie d'isospin et en posant $m = m_u + m_d$,

$$\mathcal{L}_{QCD} = i\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + i\bar{\Psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R - m (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L). \quad (5.5)$$

On définit la transformation chirale $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ comme étant une transformation sous $SU(2)$ agissant séparément sur les spineurs droits et gauches. On voit que le lagrangien est invariant par transformation chirale si $m = 0$. La brisure de la symétrie axiale se retrouve dans le terme de masse $m \neq 0$.

Imaginons que cette symétrie chirale soit exactement vérifiée. Si elle se réalisait à la Wigner, c'est-à-dire que le vide possède également cette symétrie, on devrait la retrouver dans le spectre hadronique et donc observer pour chaque hadron un partenaire chiral (de même masse, ou presque puisque de toute façon, cette symétrie n'est pas exacte). Ce n'est pas le cas, par exemple, le partenaire chiral du nucléon est une résonance dont la masse est de $1.5 GeV$, bien supérieure à la masse des nucléons, environ $940 MeV$. Par contre, la symétrie d'isospin est bien réalisée à la Wigner, puisque les deux nucléons (proton et neutron) ont une masse comparable. Ainsi, la symétrie axiale n'est pas réalisée à la Wigner, le vide n'étant pas invariant par une transformation axiale. Il y a une brisure spontanée de la symétrie, impliquant l'existence de bosons de Goldstone de masse nulle. Il s'agit des pions, dont les masses ne sont pas exactement nulles, du fait de la petite brisure explicite de la symétrie chirale, engendrée par la non-nullité des masses des quarks u et d .

On suppose que cette symétrie peut être restaurée (et le vide devient alors invariant chiral) à haute température ou haute densité. Pour étudier cette éventuelle transition de phase chirale, on introduit un lagrangien effectif qui reproduit les propriétés de QCD au voisinage de la transition de phase, le modèle σ -linéaire.

5.2.3 Lagrangien effectif

Nous voulons donc écrire un lagrangien effectif pour étudier la transition de phase chirale dans la matière hadronique. Pour des raisons pédagogiques, il est commode de construire une théorie effective décrivant les nucléons, afin d'introduire les champs chiraux. On va alors chercher à écrire un lagrangien invariant chiral pour décrire les nucléons.

On introduit l'isospineur du proton et du neutron $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix}$ que l'on décompose en partie droite et gauche. On écrit un lagrangien effectif chiral sous la forme d'un terme cinétique et d'un terme de masse. Pour ce dernier, on ne peut pas choisir le terme habituel $\mathcal{L}_M = -M_N (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L)$ car cela briserait d'une façon très importante la symétrie axiale ($M_N \simeq 940 MeV$). On va chercher ce terme de masse sous la forme $\mathcal{L}_M = -g (\bar{\Psi}_L W \Psi_R + \bar{\Psi}_R W \Psi_L)$, où W est une matrice 2×2 assurant l'invariance chirale du terme. On a donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & i\bar{\Psi}_L(x) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L(x) + i\bar{\Psi}_R(x) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R(x) \\ & -g (\bar{\Psi}_L(x) W(x) \Psi_R(x) + \bar{\Psi}_R(x) W(x) \Psi_L(x)). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Soit g_L et g_R deux éléments de $SU(2)$. La transformation chirale $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ s'écrit, pour Ψ_L et Ψ_R ,

$$\Psi_L(x) \rightarrow g_L \Psi_L(x) \text{ et } \Psi_R(x) \rightarrow g_R \Psi_R(x), \quad (5.7)$$

ce qui impose à W la loi de transformation,

$$W(x) \rightarrow g_L W(x) g_R^\dagger \quad (5.8)$$

pour que le lagrangien soit invariant chiral. On choisit une paramétrisation de W en termes de quatre champs réels, σ et $\vec{\pi}$,

$$W(x) = \sigma(x) + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x). \quad (5.9)$$

et on réécrit \mathcal{L}_M ,

$$\mathcal{L}_M = -g \left(\bar{\Psi}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \frac{1 + \gamma_5}{2} \Psi + \bar{\Psi}(\sigma - i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \frac{1 - \gamma_5}{2} \Psi \right) \quad (5.10)$$

$$= -g \left(\bar{\Psi}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \gamma_5) \Psi \right). \quad (5.11)$$

σ est un champ scalaire (de Lorentz), isoscalaire (pour l'isospin) et $\vec{\pi}$ est un champ pseudo-scalaire, isovecteur. Ainsi, $\vec{\pi}$ s'identifie à un champ qui décrit les pions (par construction, ce champ a bien les nombres quantiques du pion). Lorsque l'on construit QCD, on part d'un lagrangien de Dirac, dont les spineurs sont placés dans un multiplet sur lequel agit une symétrie globale $SU(3)$. On jauge ce groupe de symétrie (on le rend local) en imposant au lagrangien de rester invariant, ce qui fait apparaître les champs de jauge $A_\mu^a(x)$ dans l'expression de la dérivée covariante D_A^μ . Pour rendre la théorie physique, il faut donner une dynamique à ces champs de jauge dont la forme nous est imposée par l'invariance sous le groupe de Lorentz et $SU(3)$. On prouve alors que $-\frac{1}{4} \text{Tr}_a F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, avec $F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu$, convient. De la même façon, on introduit maintenant une dynamique pour les champs σ et $\vec{\pi}$, invariante chirale. On introduit de façon similaire un lagrangien cinétique et potentiel pour ces bosons,

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} - V(\sigma, \vec{\pi}). \quad (5.12)$$

Pour le terme de potentiel, on choisit une forme invariante chirale, fabriquée à partir de la combinaison invariante $\text{Tr} W W^\dagger = \sigma^2 + \pi^2$, et renormalisable par comptage de puissance,

$$V(\sigma, \vec{\pi}) = \pm \frac{m^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 - c\sigma, \quad (5.13)$$

où λ est positif (pour raison de stabilité) et le terme $c\sigma$ est introduit pour prendre en compte la petite brisure explicite de la symétrie chirale. La limite $c = 0$ s'appelle la limite chirale (la symétrie chirale est exacte). Nous avons choisi un terme quadratique de la forme, $\pm \frac{m^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2)$ pour tenir compte des deux secteurs du modèle. En effet, si nous prenons $-m^2$, le contenu physique du lagrangien (que nous détaillerons dans la section suivante) nous indique que la symétrie chirale est spontanément brisée au premier ordre

dans les fluctuations quantiques (“à l’arbre”). Il apparaît un condensat (que l’on prend par convention sur le champ σ) non nul, $\langle\sigma\rangle$. Si on prend $+m^2$, la symétrie chirale est satisfaite, on dit que l’on est dans la phase où la symétrie est restaurée et $\langle\sigma\rangle = 0$. Remarquons que si la symétrie du lagrangien n’était pas spontanément brisée dans l’état fondamental, la symétrie se réaliserait à la Wigner et donc, on devrait observer des partenaires chiraux aux hadrons. Des arguments de la théorie du groupe de renormalisation nous indiquent que la constante de couplage mobile effective λ/m^2 dépend de l’échelle d’énergie à laquelle on se place. Pour retrouver les résultats expérimentaux concernant le spectre hadronique, il faut que à basse énergie, cette constante soit négative.

C’est ce lagrangien \mathcal{L}_B que nous appelons le lagrangien σ -linéaire et que nous étudions par la suite.

Le lagrangien du modèle σ -linéaire est donc

$$\mathcal{L}_{\sigma\text{-lin}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi} - \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 + c\sigma \quad (5.14)$$

où m^2 est un paramètre mobile (masse renormalisée), positif ou négatif.

On voit qu’il s’agit bien d’une généralisation vectorielle du modèle $\lambda\Phi^4$ ($\vec{\Phi}$ est maintenant un champ vectoriel placé dans une représentation de $O(4)$) possédant la symétrie $O(4)$ ($\lambda\Phi^4$ possédait la symétrie de permutation $\Phi \rightarrow -\Phi$) pour laquelle on introduit une brisure explicite sur une composante.

Ce lagrangien effectif va nous permettre d’étudier la transition de phase chirale.

5.3 Paramètre d’ordre de la transition chirale

5.3.1 Brisure spontanée de symétrie et théorème de Goldstone

Examinons maintenant le contenu physique du lagrangien 5.12 lorsque l’on choisit un terme quadratique $-\frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2)$. Nous avons une symétrie spontanément brisée. En effet, si on représente le terme de potentiel $V(\sigma, \pi)$ (figure 5.1 où par simplicité, on a choisi de ne pas représenter les trois dimensions de $\vec{\pi}$ pour pouvoir faire une figure en trois dimensions), on constate qu’il a la forme d’un “chapeau mexicain”. Voyons ce qui se passe intuitivement. D’après la forme du potentiel, on sait que deux types de modes (donc de particules) vont être observables. Le premier mode est une oscillation autour d’un des minima du potentiel, par exemple, autour du point A de coordonnées ($s_0 = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$). Il s’agit donc (par convention) d’un mode décrit par le champ σ de valeur moyenne dans le vide (*vev*) non-nulle, notée s_0 . Lorsque l’on quantifie les petites oscillations autour de A , on a un mode massif car en première approximation, ce mode est dans un potentiel quadratique (les oscillations autour de A dans la direction σ “voient” un potentiel quadratique). Le deuxième mode est le mode orthogonal (direction π au point A) au précédent, c’est-à-dire qu’il se déplace dans le cercle chiral (ensemble des minima du potentiel). Le potentiel qu’il subit ne contient pas de termes quadratiques, donc on dit qu’il n’a pas de masse. C’est un boson dit de Goldstone

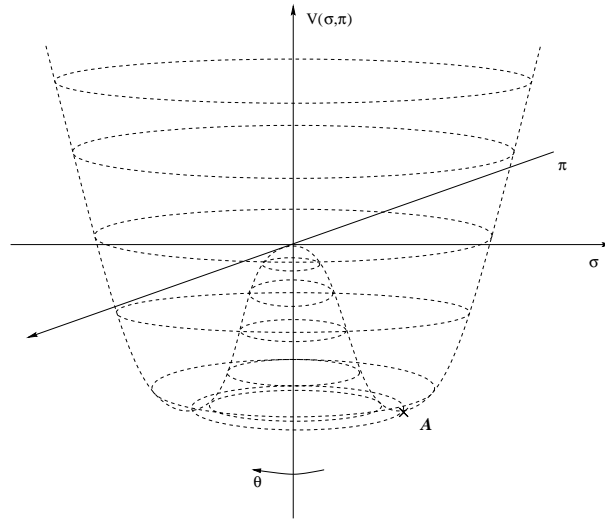


FIG. 5.1 – Potentiel $V(\sigma, \pi)$ dit en “chapeau mexicain” du modèle σ -linéaire . On a choisi par convention de faire un développement autour du point $A = (s_0, 0)$ avec $s_0 = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$, c’est-à-dire de considérer une valeur moyenne dans le vide (vev) du champ σ non-nulle.

ou mode mou. La théorie contient deux types de particules, un boson massif et un boson de masse nulle.

Le théorème de Goldstone formalise ce résultat. Lorsqu’une théorie quantique a un lagrangien possédant une certaine symétrie G et que ce potentiel est spontanément brisé vers un sous-groupe H (c’est-à-dire que le potentiel a un ensemble de minima possédant la symétrie H ; c’est la symétrie résiduelle du vide), alors le nombre de générateurs du quotient G/H est le nombre de bosons de masse nulle dans le spectre physique de la théorie. Dans le cas simplifié où π n’est pas un vecteur, $O(2)$ qui possède deux générateurs est la symétrie du lagrangien. La symétrie est spontanément brisée puisque on a un ensemble de minima qui se trouvent sur le cercle chiral qui possède la symétrie $O(1)$ (un générateur). D’après le théorème de Goldstone, on a un mode de masse nulle, le pion.

Montrons explicitement dans notre cas que le théorème de Goldstone est vérifié à l’arbre. Réécrivons le potentiel du lagrangien 5.14 en introduisant le condensat du champ σ . Introduisons le paramètre $p = \frac{\lambda}{2m^2}$ et la vev s_0 du champ σ . On a $\sigma = \sigma' + s_0$, avec $s_0 = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2p}}$. On a (en omettant dans ce calcul le prime sur le champ σ')

$$\frac{2V(\sigma, \vec{\pi})}{m^2} = -(\sigma + s_0)^2 - \pi^2 + p((\sigma + s_0)^2 + \pi^2)^2 \quad (5.15)$$

$$= -(\sigma + s_0)^2 - \pi^2 + p(\sigma + s_0)^2 + 2p(\sigma + s_0)^2 \pi^2 + p\pi^4 \quad (5.16)$$

$$= (p - 1)(\sigma + s_0)^2 + 2p\sigma^2 \pi^2 + p\pi^4, \quad (5.17)$$

car $2ps_0^2 = 1$. Le contenu de la théorie en termes de particules est lisible directement sur le potentiel. On a un champ σ massif, de masse $\sqrt{p-1}$ (avec un terme $2(p-1)s_0\sigma$ qui

traduit le fait que nous avons fait une translation sur l'axe σ). On a trois champs de pions sans masse, mais autointeragissant par un vertex à quatre champs, $p\pi^4$. Enfin, les deux types de champ interagissent par un vertex à deux champs de pions et deux σ , $2p\sigma^2\pi^2$. Le théorème de Goldstone est bien vérifié.

5.3.2 Restauration de la symétrie chirale

En fonction de la constante de couplage, on s'attend à deux secteurs de la théorie. L'un pour lequel la symétrie est brisée et l'autre pour lequel elle est restaurée. Cette symétrie est brisée lorsque le champ σ a une *vev* non-nulle (on a alors un potentiel effectif en chapeau mexicain). Dans une éventuelle phase où la symétrie est restaurée (le terme quadratique du potentiel est alors de la forme $+\frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2)$), la *vev* de σ doit devenir nulle. Le paramètre d'ordre de la transition de phase chirale est donc le condensat de σ (que l'on identifie au condensat de quarks $\langle \bar{q}q \rangle$). On introduit le condensat $s = \langle \sigma \rangle$ et le champ fluctuant σ' défini par

$$\sigma = \sigma' + s. \quad (5.18)$$

Quand la symétrie est restaurée, le potentiel effectif ne possède plus qu'un seul minimum et tous les modes de la théorie acquièrent alors une masse non-nulle.

5.4 Approximations non-perturbatives

Nous allons donc étudier la transition de phase chirale de QCD *via* l'étude du lagrangien σ -linéaire. On doit donc s'attacher à traiter correctement la symétrie sous-jacente qui est ici une symétrie $O(4)$ ou plus généralement $O(N)$. On sait que les théories de perturbations permettent de respecter ordre par ordre les symétries d'un problème, puisque tous les termes du développement sont explicitement invariants par cette symétrie. Par exemple, pour la théorie $\lambda\Phi^4$, tous les termes seraient explicitement covariants. Dans le cas de la symétrie chirale, il est possible d'écrire un développement en perturbations chirales [Hol99]. Cependant, on a déjà noté que les méthodes perturbatives ne peuvent prétendre décrire correctement une transition de phase, puisque les fluctuations à toutes les échelles deviennent importantes.

Il est donc essentiel de développer une approche non-perturbative de calcul. La plus simple de ces méthodes est l'approximation de champ moyen. Elle permet d'écrire des équations des modes pour les pions et le σ [ND01, AC97]. En première analyse des résultats, il n'y a aucun mode mou (ou mode de masse nulle) dans la limite chirale ($c \rightarrow 0$). Le théorème de Goldstone n'est pas satisfait, l'approximation de champ moyen respectant mal, en général, les symétries internes.

On sait également que l'ajout de fluctuations du type "diagrammes en bulles" ou "bulles RPA" permet de traiter correctement les symétries et les symétries spontanément brisées ([Mar74] cité dans [ACSW96]).

C'est ce qui est fait dans [AC97]. Dans [ND01] ces bulles sont prises en compte grâce à l'utilisation des équations de Bethe-Salpeter. Cela permet de trouver les bosons de Gold-

stone comme pôles du propagateur à deux particules, c'est-à-dire comme des états liés des excitations élémentaires massives solutions des équations des modes du champ moyen.

L'application de la RPA standard (telle que présentée dans cet exposé au chapitre 2, p.33) a été traitée dans [ACSW96] et servira comme point de départ de notre schéma r-RPA.

5.4.1 Hamiltonien du modèle

À partir du lagrangien 5.14, on obtient le hamiltonien suivant,

$$\mathcal{H}(\sigma, \pi) = \int dx \left\{ \frac{1}{2} (\vec{\Pi}_\pi^2 + (\vec{\nabla}\vec{\pi})^2 + (\mu_0^2 + \lambda s^2) \vec{\pi}^2) \right. \quad (5.19)$$

$$\left. + \frac{1}{2} (\Pi_\sigma^2 + (\nabla\sigma)^2 + (\mu_0^2 + 3\lambda s^2) \sigma^2) \right. \quad (5.20)$$

$$\left. + \lambda s \sigma (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 + \sigma (\mu_0^2 s + \lambda s^3 - c) \right. \quad (5.21)$$

$$\left. + \frac{\mu_0^2}{2} s^2 + \frac{\lambda}{4} s^4 - cs \right\} \quad (5.22)$$

où nous considérons à nouveau la petite brisure de la symétrie chirale, c . σ est le champ fluctuant et s le condensat (quantités définies dans l'équation 5.18, en omettant le prime, ce qui ne prête pas à confusion). $\vec{\Pi}_\pi = (\Pi_\pi^i)$ et Π_σ sont les moments conjugués des champs $\vec{\pi} = (\pi^i)$ et σ . On a les règles de commutations à temps égaux, $[\sigma(x), \Pi_\sigma(y)] = i\delta(x-y)$, $[\pi^i(x), \Pi_\sigma^j(y)] = i\delta(x-y)\delta_{i,j}$ et tous les autres commutateurs sont nuls.

Ce hamiltonien se découple en un terme constant, un hamiltonien purement pionique (en notation allégée et en notant H^{cin} le terme cinétique),

$$H_\pi = H_\pi^{cin} + \pi^4, \quad (5.23)$$

un hamiltonien pour le σ uniquement,

$$H_\sigma = H_\sigma^{cin} + \sigma^3 + \sigma^4 \quad (5.24)$$

et enfin un hamiltonien couplant les pions et le σ ,

$$H_{\sigma,\pi} = \sigma\pi^2 + \sigma^2\pi^2. \quad (5.25)$$

5.4.2 Mise en place de la r-RPA

L'étude s-RPA et r-RPA du modèle $\lambda\Phi^4$ nous a montré que, au niveau de l'équation des modes, la r-RPA consiste simplement à modifier l'intégrale de boucle s-RPA 4.12, p.83 pour obtenir la forme 4.63, p.100 ce qui revient simplement à ajouter les densités scalaires en impulsion dans la boucle I . De plus, en s-RPA, m est donné par l'équation du champ moyen et M par l'équation des modes alors que en r-RPA, m est la masse de

champ moyen généralisé, c'est-à-dire que le mode de champ moyen généralisé est couplé à l'équation des modes RPA car il dépend de la densité scalaire exacte et finalement de M dans l'approximation des quasi-particules.

Ainsi, partant des résultats s-RPA donnés dans [ACSW96], nous pouvons déduire l'équation des modes r-RPA pour le pion. Le calcul complet r-RPA que nous avons fait justifie cette approche. Comme pour le modèle $\lambda\Phi^4$, nous n'allons pas donner explicitement la matrice des double-commutateurs RPA et tous les détails techniques du calcul du propagateur à une particule. En effet, la difficulté de la RPA est le calcul de l'énergie qui fait intervenir les densités scalaires et le problème de la renormalisation. Or, nous ne souhaitons présenter qu'un résultat préliminaire concernant le théorème de Goldstone. Pour cela, il faut établir l'équation des modes à une particule pour le pion, c'est-à-dire calculer l'opérateur de masse du pion. Prenant à notre compte la citation de Borel de l'introduction, nous avons donné la méthode et laissons de côté la longueur pratique des opérations.

On introduit tout d'abord des opérateurs de création et de destruction de quasi-particules (quasi-pions \mathbf{b}_π et quasi-sigma \mathbf{b}_σ) exactement de la même façon que pour le modèle $\lambda\Phi^4$ (équation 4.44, p.96),

$$\mathbf{b}_{\pi\beta} = \sqrt{\frac{\kappa_{\pi\beta}}{2}} \pi_\beta + \sqrt{\frac{1}{2\kappa_{\pi\beta}}} \Pi_{\pi\beta} \quad (5.26)$$

et

$$\mathbf{b}_{\sigma\beta} = \sqrt{\frac{\kappa_{\sigma\beta}}{2}} \sigma_\beta + \sqrt{\frac{1}{2\kappa_{\sigma\beta}}} \Pi_{\sigma\beta}. \quad (5.27)$$

Introduisons également les densités scalaires en impulsion,

$$\mathcal{N}_\alpha = \langle \pi_\alpha \pi_\alpha^\dagger \rangle \quad (5.28)$$

et

$$N_\alpha = \langle \sigma_\alpha \sigma_\alpha^\dagger \rangle. \quad (5.29)$$

On applique la r-RPA avec l'opérateur

$$\mathbf{Q}_\nu^\dagger = X_\alpha \mathbf{b}_{\pi,\alpha}^\dagger - Y_{-\alpha} \mathbf{b}_{\pi,-\alpha} + X_{\alpha\beta} \mathbf{b}_{\pi,\alpha}^\dagger \mathbf{b}_{\sigma,\beta}^\dagger - Y_{-\alpha-\beta} \mathbf{b}_{\pi,-\alpha} \mathbf{b}_{\sigma,-\beta} \quad (5.30)$$

c'est-à-dire que nous allons calculer la correction RPA à l'opérateur de masse du pion en champ moyen (notée Σ^π), en prenant en compte des contributions du type "bulle RPA $\pi\sigma$ " (puisque on prend des termes du type quasi-pion - quasi-sigma dans l'opérateur d'excitation).

Les modes de champ moyen généralisé sont, respectivement pour le pion et le sigma,

$$\varepsilon_\alpha^2 = \mu_0^2 + k_\alpha^2 + \lambda(N_\alpha + 5\mathcal{N}_\alpha) + \lambda s^2 \quad (5.31)$$

$$E_\alpha^2 = \mu_0^2 + k_\alpha^2 + 3\lambda(N_\alpha + \mathcal{N}_\alpha) + 3\lambda s^2. \quad (5.32)$$

Pour l'opérateur de masse on a

$$\Sigma_\alpha^\pi(\omega) = 4\lambda^2 s^2 \frac{I_\alpha^{\pi\sigma}(\omega)}{1 - 2\lambda I_\alpha^{\pi\sigma}(\omega)} \quad (5.33)$$

où la boucle $I^{\pi\sigma}$ (bulle $\pi\sigma$) en r-RPA s'écrit,

$$I_\alpha^{\pi\sigma}(\omega) = \sum_{\beta\beta'} 2\delta_{\alpha-\beta-\beta'} \frac{(\mathcal{N}_\beta + N_{\beta'})\omega^2 + (N_{\beta'} - \mathcal{N}_\beta)(E_{\beta'}^2 - \varepsilon_\beta^2)}{[\omega^2 - (\varepsilon_\beta + E_{\beta'})^2][\omega^2 - (\varepsilon_\beta - E_{\beta'})^2]}. \quad (5.34)$$

On peut réécrire cette boucle, sous une forme plus proche de l'expression 4.63, p.100 obtenue pour le modèle $\lambda\Phi^4$:

$$I_\alpha^{\pi\sigma}(\omega) = \sum_{\beta\beta'} \delta_{\alpha-\beta-\beta'} \frac{\varepsilon_\beta + E_{\beta'}}{2\varepsilon_\beta E_{\beta'}} \frac{\mathcal{N}_\beta \varepsilon_\beta + N_{\beta'} E_{\beta'}}{\omega^2 - (\varepsilon_\beta + E_{\beta'})^2} - \frac{\varepsilon_\beta - E_{\beta'}}{2\varepsilon_\beta E_{\beta'}} \frac{\mathcal{N}_\beta \varepsilon_\beta - N_{\beta'} E_{\beta'}}{\omega^2 - (\varepsilon_\beta - E_{\beta'})^2}. \quad (5.35)$$

Enfin, l'inverse du propagateur du pion est donné par

$$G^{-1}(\omega, k_\alpha) = \omega^2 - \varepsilon_\alpha^2(\omega) - \Sigma_\alpha^\pi(\omega). \quad (5.36)$$

Il nous reste à montrer que l'équation des modes $G^{-1}(\omega, k_\alpha) = 0$ admet la solution $\omega = 0$, pour $k_\alpha = 0$ et dans la limite chirale, pour que le théorème de Goldstone soit vérifié (le mode du pion serait bien un mode mou).

Pour montrer ce résultat, on calcule $\Sigma_{k=0}^\pi(\omega)$ et quelques manipulations nous permettent de réécrire,

$$G^{-1}(\omega, k_\alpha) = \omega^2 - [\mu_0^2 + \lambda s^2 + 3\lambda(N_\alpha + 5\mathcal{N}_\alpha)] - (\Sigma_\alpha^\pi(\omega) - \Sigma_\alpha^\pi(\omega = 0)). \quad (5.37)$$

L'équation du gap, qui se réduit à $\frac{\partial E}{\partial s} = 0$, nous permet de voir que le terme entre crochet dans l'équation précédente est simplement $\frac{c}{s}$.

Finalement, on obtient

$$G^{-1}(\omega, k_\alpha) = \omega^2 - \frac{c}{s} - (\Sigma_\alpha^\pi(\omega) - \Sigma_\alpha^\pi(\omega = 0)). \quad (5.38)$$

Ainsi dans la limite chirale ($c = 0$), la solution de l'équation des modes $\omega = 0$ est automatiquement obtenue. Il apparaît donc un mode mou ou mode de masse nulle. C'est le mode du boson de Goldstone de la théorie.

5.5 Conclusion

Soulignons donc pour finir le résultat précédent. Les fluctuations r-RPA sont suffisantes pour générer un mode mou dans le modèle σ -linéaire dans la limite chirale. Le théorème de Goldstone est donc exactement vérifié. La r-RPA semble être un formalisme satisfaisant pour l'étude des symétries d'un problème de théorie des champs. Il serait maintenant intéressant de calculer le potentiel effectif ainsi que le grand potentiel de ce modèle afin de pouvoir étudier la transition de phase elle-même. Ceci fera l'objet d'un travail futur.

L'oscillateur anharmonique en mécanique quantique

Dans ce dernier chapitre reprenant les travaux de [DOH03], nous allons revenir à un simple modèle de mécanique quantique, l'oscillateur anharmonique, afin d'aller au-delà de l'approche RPA renormalisée étudiée précédemment. Ainsi, nous essaierons de résoudre les problèmes rencontrés en théorie des champs dans l'étude du modèle $\lambda\Phi^4$.

L'ingrédient essentiel de cette nouvelle approche est l'introduction dans le calcul de l'état fondamental des corrélations minimales au dessus du champ moyen. Nous verrons que selon la phase étudiée (sphérique ou déformée) les corrélations à introduire seront différentes. Dans la phase déformée, les corrélations à trois corps sont prépondérantes et seront seules prises en compte. Au contraire, dans la phase sphérique, ces dernières corrélations étant nulles, il est nécessaire de prendre en compte les corrélations à quatre corps.

6.1 Le modèle de l'oscillateur anharmonique

Nous choisissons d'étudier un oscillateur anharmonique (voir [DS91] pour une première approche RPA de ce modèle) dont le hamiltonien est le suivant

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2} - \frac{\mu^2 \mathbf{X}^2}{2} + g \mathbf{X}^4,$$

avec $\mu^2 > 0$ et $g > 0$. \mathbf{X} et \mathbf{p} sont les opérateurs de position et d'impulsion sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, vérifiant $[\mathbf{X}, \mathbf{p}] = i$. Remarquons que le potentiel $V(X) = -\frac{\mu^2 X^2}{2} + g X^4$ est pair (symétrique) en X et il possède un maximum en zéro et deux minima symétriques pour $X = \pm \frac{\mu}{\sqrt{2g}}$ (voir figure 6.1). Le hamiltonien est invariant dans l'opération qui consiste à transformer \mathbf{X} en $-\mathbf{X}$ ($\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$). Nous appellerons la différence de potentiel entre $x = 0$ et $x = \frac{\mu}{\sqrt{2g}}$ la barrière de potentiel. La forme du potentiel nous indique que on peut trouver, dans certaines conditions, un fondamental qui correspondra à un des deux minima et ne possédera donc pas la symétrie du hamiltonien (par exemple, en quantifiant les petites oscillations autour d'un des minimima). Nous avons alors une brisure spontanée

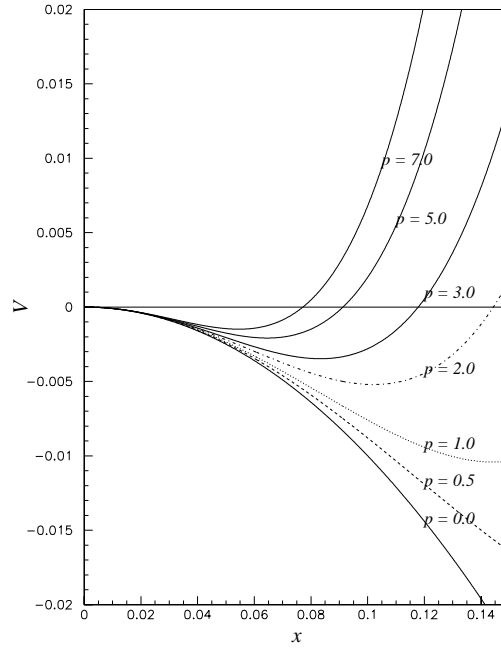


FIG. 6.1 – Potentiel de l'oscillateur anharmonique $V(x) = -x^2 + px^4$ pour différentes valeurs du paramètre $p = g/\mu^2$.

de la symétrie. Nous allons montrer que en fonction de la taille de la barrière de potentiel, cette symétrie pourra être restaurée par les fluctuations quantiques.

On définit les opérateurs de création et de destruction,

$$\mathbf{a} = \frac{\mu\mathbf{X} + i\mathbf{p}}{\sqrt{2\mu}}$$

$$\mathbf{a}^\dagger = \frac{\mu\mathbf{X} - i\mathbf{p}}{\sqrt{2\mu}}$$

vérifiant $[\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}] = 1$ (voir 1.3.1 pour un résumé des propriétés de tels opérateurs) et le vide de ces opérateurs est noté $|0_{OA}\rangle$, avec

$$\mathbf{a}|0_{OA}\rangle = 0.$$

On peut inverser les relations précédentes pour obtenir

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger)$$

$$\mathbf{p} = -i\sqrt{\frac{\mu}{2}} (\mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger)$$

ce qui nous permet de réécrire le hamiltonien

$$H = -\frac{\mu}{4} (\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^{\dagger 2}) + \frac{g}{4\mu^2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\dagger})^4.$$

6.2 Approximation de champ moyen

Pour mettre en œuvre la RPA standard, commençons par établir l'approximation de champ moyen.

On définit un nouvel état, le vide de Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB)

$$|HFB\rangle = e^{(ua^{\dagger} + \frac{1}{2}ta^{\dagger 2})}|0\rangle, \quad (6.1)$$

où u et t sont des paramètres variationnels. Il s'agit de l'état fondamental qui nous servira à fabriquer l'approximation de champ moyen. L'opérateur de destruction \mathbf{b} pour ce vide est donné par

$$b = (1 - t^2)^{-1/2}(a - ta^{\dagger} - u),$$

(comme nous l'avions précédemment vu). Cela revient à faire une rotation de Bogoliubov de la base d'opérateur $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger})$, transformation qui est canonique. L'inversion de cette relation nous permet d'exprimer \mathbf{a} en fonction de \mathbf{b} et \mathbf{b}^{\dagger} ,

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} (\mathbf{b} + t\mathbf{b}^{\dagger}) + \frac{u}{1-t} \quad (6.2)$$

Les opérateurs \mathbf{X} et \mathbf{p} dans cette nouvelle base sont donc

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \left[\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} (\mathbf{b} + \mathbf{b}^{\dagger}) + \frac{2u}{1-t} \right] \quad (6.3)$$

$$\mathbf{p} = -i\sqrt{\frac{\mu}{2}} \left[\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} (\mathbf{b} - \mathbf{b}^{\dagger}) \right] \quad (6.4)$$

soit, en introduisant

$$\begin{aligned} \omega &= \mu \frac{1-t}{1+t}, \\ s &= \sqrt{\frac{2}{\mu}} \frac{u}{t-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (b + b^{\dagger}) - s, \\ \mathbf{p} &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (b - b^{\dagger}), \end{aligned} \quad (6.5)$$

L'interprétation des paramètres de la rotation de Bogoliubov est alors simple, s correspond à une translation spatiale et ω à une fréquence. Par la suite, nous utiliserons l'opérateur $\mathbf{x} = \mathbf{X} + s$. Si $s = 0$, on dit qu'on est dans la phase symétrique (le fondamental possède la symétrie de l'hamiltonien) et si $s \neq 0$, la phase est dite déformée (une brisure de la symétrie s'est produite).

Le hamiltonien peut être exprimé dans la nouvelle base,

$$H = -\frac{\omega}{4}(b - b^\dagger)^2 + \frac{-\mu^2 + 12gs^2}{4\omega}(b + b^\dagger)^2 + \frac{s\mu^2 - 4gs^3}{\sqrt{2\omega}}(b + b^\dagger) - \frac{4sg}{\sqrt{8\omega^3}}(b + b^\dagger)^3 + \frac{g}{4\omega^2}(b + b^\dagger)^4 + gs^4 + \frac{\mu^2 s^2}{2}. \quad (6.6)$$

On introduit $E_{HFB} = \langle HFB|H|HFB\rangle$. L'approximation proprement dite consiste à trouver les paramètres s_m et ω_m qui minimisent cette fonction. Ces paramètres réinjectés dans E_{HFB} , b et $|HFB\rangle$ nous donnent respectivement l'énergie de l'état fondamental, la base et le vide de l'approximation de champ moyen ou approximation HFB.

Remarquons enfin que

$$\frac{\partial E_{HFB}}{\partial s} = 0 \iff \langle HFB|[H, b]|HFB\rangle = 0, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial E_{HFB}}{\partial \omega} = 0 \iff \langle HFB|[H, bb]|HFB\rangle = 0. \quad (6.8)$$

Ces conditions sont donc cohérentes avec les équations du champ moyen généralisé de la RPA 2.89, si on prend comme ensemble d'excitations RPA $\{A\} = \{\mathbf{b}, \mathbf{bb}\}$.

6.3 RPA standard

Dans ce chapitre, nous avons choisi de ne pas utiliser la "charging formula". Le calcul de l'énergie se fera toujours par utilisation directe du théorème spectral. On manque certainement de cette façon des contributions non-négligeables, mais notre propos est ici d'appliquer la RPA dans sa forme DEA d'une façon aussi directe que possible. Cela explique en particulier le résultat (énoncé en fin de section).

Nous choisissons comme ensemble d'excitations RPA $\{A\} = \{\mathbf{b}, \mathbf{bb}\}$ et nous calculons les double-commutateurs apparaissant dans les équations RPA 2.119 sur le vide $|HFB\rangle$. Comme précédemment, nous devons introduire les quatre types de fonctions de Green.

On résout alors analytiquement le système 2.119 qui nous donne les fonctions de Green du type $\mathfrak{G}_{A_i^\varepsilon, A_j^{\varepsilon'}}$. À partir de ces dernières et des relations de passage 6.5, on en déduit les fonctions du problème du type \mathfrak{G}_{xx} , etc (en annexe, les fonctions de Green pour la méthode étendue que nous présentons ci-dessous sont données; elles permettent de retrouver les fonctions de Green s-RPA).

Enfin, on calcule les valeurs moyennes dans l'approximation RPA grâce au théorème spectral 1.4.1

$$\langle \mathbf{A} \mathbf{B} \rangle_{sRPA} = i \int \frac{dE}{2\pi} \mathfrak{G}_{B,A}^{sRPA}(E).$$

C'est de cette façon que sont introduites dans l'énergie du fondamental E_0^{s-RPA} l'effet des fluctuations RPA. En plus des valeurs moyennes $\langle x^2 \rangle_{sRPA}$, $\langle p^2 \rangle_{s-RPA}$ et $\langle x^3 \rangle_{sRPA}$, nous devons calculer un terme $\langle x^4 \rangle_{sRPA}$. Or l'ensemble d'excitations choisi est insuffisant pour procéder de cette façon puisque on ne peut pas calculer par exemple $\mathfrak{G}_{b^\dagger,bbb}$. On choisit de factoriser le terme en question :

$$\langle \text{RPA} | x^4 | \text{RPA} \rangle \simeq 3 \langle \text{RPA} | x^2 | \text{RPA} \rangle^2. \quad (6.9)$$

Enfin, notons que dans le cas $s = 0$, le terme $\langle x^3 \rangle_{sRPA}$ est nul. Ainsi, les fonctions de Green sont celles de l'approximation Hartree-Fock (puisque le schéma RPA s'arrête dans ce cas à des fonctions de type $\mathfrak{G}_{b,b^\dagger}$) et donc par exemple,

$$i \int \frac{dE}{2\pi} G_{xx}^{s=0}(E) = \langle \text{HFB} | x^2 | \text{HFB} \rangle. \quad (6.10)$$

Dans ce cas, l'énergie s-RPA coïncide avec celle du champ moyen à cause de la factorisation introduite.

6.4 RPA renormalisée

6.4.1 Hypothèses

La RPA renormalisée (voir section 2.4.2) est une version de la RPA autocohérente au sens où l'on relâche la contrainte imposée au vide dans le calcul des doubles commutateurs. Il ne s'agit plus du vide HFB, mais en principe, du vide exact du hamiltonien H_{X^4} . La méthode est dite renormalisée [CDS94] car nous n'allons incorporer dans le calcul que des valeurs moyennes à deux corps. D'après la méthode décrite au paragraphe 2.4.2 nous allons factoriser les valeurs moyennes d'un nombre pair de corps en produits de valeurs moyennes à deux corps. Précisons dès maintenant que dans le paragraphe suivant, les valeurs moyennes apparaissant dans notre problème avec un nombre impair de corps sont toujours nulles.

Pour écrire le système RPA, on utilise la base Hartree-Fock-Bogoliubov définie précédemment.

L'ensemble d'excitations RPA est $\{A\} = \{\mathbf{b}, \mathbf{bb}\}$.

6.4.2 Résolution

La recherche des paramètres s et ω réalisant la meilleure base nous impose toujours (en posant $E_{r-RPA} = \langle 0|H|0\rangle$)

$$\frac{\partial E_{r-RPA}}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow \langle 0|[H, b]|0\rangle = 0, \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial E_{r-RPA}}{\partial \omega} = 0 \Leftrightarrow \langle 0|[H, bb]|0\rangle = 0. \quad (6.12)$$

c'est à dire que l'on retrouve les équations du champ moyen généralisé 2.89. On peut faire une remarque sur ces deux équations. Elles sont introduites naturellement lorsqu'on établit les équations RPA grâce aux équations du mouvement. Si on rajoute des opérateurs dans l'ensemble d'excitations RPA, les deux premières équations de champ moyen généralisé seront les mêmes. Or elles sont directement reliées à la transformation de Bogoliubov. Elles imposent que la base de Hartree-Fock-Bogoliubov sur laquelle on construit la RPA est la base la plus favorable énergétiquement. La base (b, b^\dagger) n'est plus celle du champ moyen puisque les valeurs s et ω sont différentes. C'est pourquoi on parle de champ moyen généralisé.

On peut maintenant résoudre formellement le système d'équations couplées 2.119 nous donnant les fonctions de Green. En vertu de 2.121 elles dépendent uniquement des valeurs moyennes d'opérateurs à deux corps. De plus, on va imposer que toutes les valeurs moyennes $\langle 0|\dots|0\rangle$ soient réelles. On en déduit que $\langle px\rangle = -i/2$ et $\langle pxx\rangle = 0$. Ces conditions permettent d'assurer que la matrice RPA est symétrique.

Ainsi, $\langle xx\rangle$ et $\langle pp\rangle$ sont les deux seules inconnues du problème. En principe, le théorème spectral 1.4.1 va nous permettre de les déterminer *via* deux équations implicites,

$$\langle \mathbf{x}\mathbf{x}\rangle = i \int \frac{dE}{2\pi} \mathfrak{G}_{xx}(E), \quad \langle \mathbf{p}\mathbf{p}\rangle = i \int \frac{dE}{2\pi} \mathfrak{G}_{pp}(E). \quad (6.13)$$

Il resterait alors à calculer l'énergie de l'état fondamental à partir de ces valeurs.

Cependant, comme dans la théorie $\lambda\Phi^4$, nous avons utilisé l'équation du gap pour ω $\langle pp\rangle = \varepsilon^2 \langle xx\rangle$ (voir en annexe, équation A.2) dans le calcul des double-commutateurs. Par contre, à partir des fonctions de Green, on obtient,

$$\langle pp\rangle = \varepsilon^2 \langle xx\rangle + i \frac{4(12sg)^2 \langle pp\rangle}{\varepsilon^2} \int \frac{dE}{2\pi} \frac{1}{(E^2 - E_1^2)(E^2 - E_2^2)}.$$

Ceci est une source d'inconsistance que nous avons déjà discuté dans le chapitre sur le modèle $\lambda\Phi^4$. Précédemment, nous avons réglé ce problème en utilisant l'équation du gap uniquement dans les double-commutateurs. Le théorème spectral nous a servi pour fermer le système.

On pourrait utiliser la méthode de la "charging formula" vue précédemment mais nous avons développé une version étendue de la RPA renormalisée.

6.5 RPA renormalisée étendue

Par rapport au paragraphe précédent, on va relaxer l'hypothèse de nullité des termes connectés. La stratégie est de prendre en compte uniquement les valeurs moyennes de plus de deux opérateurs non nulles au plus bas ordre.

Dans le calcul de l'énergie de corrélation nous avons des termes proportionnels à la valeur moyenne connectée de trois et quatre opérateurs. Dans la phase déformée ($s \neq 0$), on va donc négliger les valeurs moyennes à quatre corps (du type $\langle ppxx \rangle^c$) par rapport à celle à trois corps *i.e.* $\langle x^3 \rangle$ et $\langle p^2x \rangle$ (les autres étant nulles). Ces dernières sont ce que nous appelons les corrélations minimales au-delà du champ moyen.

Au contraire, dans la phase symétrique ($s = 0$), $\langle xxx \rangle$ et $\langle ppx \rangle$ sont exactement nulles. On va donc être obligé de calculer des valeurs moyennes jusqu'à quatre corps, ce qui va nous obliger à modifier le schéma RPA en augmentant le nombre d'excitation.

6.5.1 Cas déformé

Nous avons donc dans ce cas deux inconnues supplémentaires, $\langle xxx \rangle$ et $\langle ppx \rangle$, qui sont fixées implicitement par l'utilisation du théorème spectral sur les fonctions de Green \mathfrak{G}_{xxx} et \mathfrak{G}_{ppx} . Pour obtenir ces fonctions, l'ensemble d'excitations $\{b, bb\}$ est suffisant. Le problème précédemment rencontré (section 6.4.2) ne se pose plus. Le calcul de l'énergie se fait d'une façon directe, en évaluant grâce aux fonctions de Green, toutes les valeurs moyennes apparaissant dans l'expression de $E_{er-RPA} = \langle H \rangle$. Explicitement, on a

$$E_{er-RPA}^{s \neq 0} = \frac{\langle pp \rangle}{2} + \frac{\mu^2}{2} (\langle xx \rangle + s^2) + g(3\langle xx \rangle^2 + s^4 + 6s^2\langle xx \rangle - 4s\langle xxx \rangle). \quad (6.14)$$

Les valeurs moyennes sont calculées par l'intermédiaire des fonctions de Green données en annexe.

Les résultats obtenus 6.2 montrent que la prise en compte de ces corrélations dans le cas déformé améliore grandement le calcul du champ moyen et de la RPA standard. L'écart maximal entre le calcul exact et ce calcul approché se situe dans la région de la transition de phase ($\mu^2/g \simeq -6, 8$). Il reste cependant faible comparé aux autres méthodes. Les corrélations à trois corps que nous avons prises en compte sont donc importantes pour reproduire le résultat exact. Elles contiennent donc une grande partie des corrélations exactes qui manquent dans le champ moyen.

6.5.2 Cas symétrique

La prescription de prise en compte des corrélations minimales nous impose, les valeurs moyennes à trois corps étant strictement nulles, de prendre en compte dans l'énergie de corrélation le terme $\langle xxx \rangle$. Pour le calculer, nous avons besoin de la fonction \mathfrak{G}_{xxx} qui n'est pas calculable si l'on restreint l'ensemble d'excitations RPA à $\{b, bb\}$. On est donc obligé d'ajouter un opérateur à trois corps, bbb , dans les excitations.

Or pour assurer la stabilité du calcul, on a besoin que les doubles commutateurs soient symétriques. C'était réalisé dans les cas précédents *via* les équations qui imposaient l'obtention de la meilleure base (celle qui assure que l'énergie est minimisée) après une rotation de Bogoliubov. Or il n'y a que deux paramètres à cette rotation donc, il n'y a pas de relation de ce type qui assure la symétrie des doubles commutateurs à trois particules.

Peut être fortuitement, dans la zone sphérique, on vérifie analytiquement qu'une telle relation supplémentaire n'est pas nécessaire, les termes non-symétriques étant nuls.

On calcule donc l'énergie du fondamental :

$$E_0 = \frac{\langle pp \rangle}{2} + \frac{\mu^2}{2} \langle xx \rangle + g \langle xxxx \rangle . \quad (6.15)$$

On trouvera en annexe les fonctions de Green permettant de la calculer.

Là encore, nos résultats sont meilleurs que le calcul de champ moyen ou de RPA standard 6.2. Cependant, l'écart au résultat exact est plus grand autour du point de transition que pour le cas déformé.

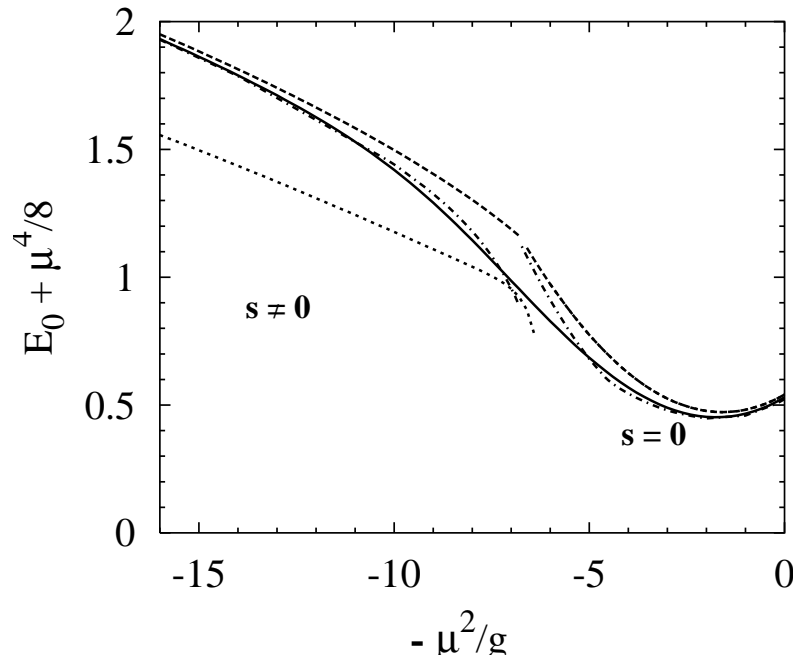


FIG. 6.2 – Énergie du fondamental de l'oscillateur anharmonique dans diverses approximations : en trait plein, valeur exacte ; en tiret, champ moyen ; en pointillé, s-RPA qui coïncide avec le champ moyen dans la zone symétrique ; en tiret-pointillé, r-RPA étendue. La phase symétrique est à droite de la discontinuité des courbes.

6.5.3 Discussion générale des résultats

La figure 6.2 donne l'énergie du fondamental en fonction d'un paramètre adimensionnel, μ^2/g . La résolution de l'équation du gap pour s (6.7) nous indique qu'il existe deux zones, pour l'une, s est nul (phase dite symétrique, car l'état fondamental a la symétrie du hamiltonien $X \rightarrow -X$) et l'autre déformée. On dit également que dans cette phase, une brisure de la symétrie s'est produite au sens où l'état fondamental ne possède plus la symétrie du hamiltonien.

Pour le champ moyen et la RPA standard, la transition de phase se produit pour la même valeur puisque l'équation du gap est la même ($\mu^2/g \simeq 6.8$). La courbe pour le champ moyen (au-dessus, en tiret) est continue mais nous avons introduit une coupure pour matérialiser l'endroit où se produit la transition. Pour la RPA étendue, cette transition se produit très légèrement avant, comme on le voit sur la figure. La courbe (tiret-pointillé) est interrompue car l'énergie est calculée en n'incluant pas les mêmes corrélations dans les deux secteurs.

Tout d'abord, notons que conformément à ce que nous avons noté précédemment, le champ moyen surévalue systématiquement le résultat exact. L'effet des corrélations RPA, que la méthode soit standard, renormalisée ou étendue, est d'abaisser cette énergie.

La RPA standard introduite dans ce chapitre brise d'une façon très importante le critère de Ritz dans la phase déformée. La méthode étendue ne satisfait pas non plus à ce critère mais suit beaucoup mieux les variations de l'énergie exacte.

Loin de la transition de phase, l'accord entre la RPA étendue et le résultat exact est très bon. Proche de la transition, l'accord se dégrade, restant cependant inférieur à 10%. Cela se comprend car à la transition, on sait que les corrélations à tous les ordres deviennent importantes.

Remarquons enfin que la différence entre le calcul exact et notre solution est plus importante, autour de la transition de phase, du côté symétrique. Cela indique que le terme à quatre corps est certes important pour obtenir de bons résultats mais autour du point critique, il n'est pas prépondérant au point de reproduire seul le résultat exact. Il faudrait rajouter des corrélations d'ordre supérieur. Au contraire, dans la phase déformée, le terme à trois corps suffit à reproduire un bon résultat. Cela justifie *a posteriori* notre choix de ne pas calculer toutes les corrélations mais de se restreindre aux corrélations minimales.

6.6 Conclusion

Ces résultats encourageants pour l'oscillateur anharmonique nous indiquent l'importance d'aller au-delà de l'approximation renormalisée. Les corrélations à trois et quatre corps se révèlent importantes dans la zone de transition de phase. Il serait intéressant d'appliquer ce formalisme à la théorie $\lambda\Phi^4$. En particulier, la mise en évidence du fait que dans la phase symétrique on puisse prendre une excitation RPA à quatre opérateurs nous laisse espérer que cela devrait être également possible pour le champ scalaire. Les questions

concernant la perte de la covariance dans le modèle $\lambda\Phi^4$ pourraient alors être étudiées plus précisément. Le fait qu'il n'y ait alors pas besoin d'utiliser la "charging formula" est également intéressant. La densité scalaire en théorie des champs pourrait devenir, dans ce cas, calculable directement.

Conclusion

Il est possible de continuer ces recherches dans plusieurs directions, car plusieurs questions sont restées ouvertes au cours de notre exposé.

L'objectif était de regarder des méthodes non-perturbatives sur des modèles simples dans le but de les appliquer ensuite sur des modèles effectifs réalistes de la physique hadronique, comme les théories chirales ou les théories de jauge.

Nous avons mis en place la RPA standard et renormalisée en théorie des champs, avec des excitations à deux corps. Nous avons montré la validité et l'intérêt de l'approche exposée, rencontrant cependant certains problèmes. Premièrement, le problème du calcul des valeurs moyennes à deux corps (nombre d'occupation ou densité scalaire) a été montré. Nous avons apporté deux améliorations, dans la théorie $\lambda\Phi^4$, il s'agit d'une adaptation de la "charging formula" qui permet de contourner la difficulté avec cependant une perte de clarté et de cohésion du formalisme qu'il serait bon d'analyser en détails, afin d'en dégager une méthode systématique. La deuxième réponse fût une extension du schéma RPA à trois particules dans l'oscillateur anharmonique. Ce dernier point valide le fait qu'il serait intéressant d'augmenter le nombre de particules dans la RPA pour $\lambda\Phi^4$.

L'autre problème rencontré est celui de la perte de covariance en théorie des champs. Nous avons forcé cette covariance, pour obtenir des résultats numériques, technique parfois employée en physique nucléaire relativiste. Cependant il serait plus intéressant de trouver un schéma d'approximation conservant étape par étape la covariance. On peut penser que la covariance est perdue dans l'annulation sans précaution des termes connectés en r-RPA. Deux voies pourraient être suivies. D'abord, tenter de trouver une approximation renormalisée conservant la covariance de la densité scalaire. Si ce schéma se révèle être équivalent dans le calcul du potentiel effectif à notre méthode de forçage, il aura l'avantage de justifier cette approximation supplémentaire d'une façon cohérente. Une autre solution, rejoignant la solution apportée au problème du calcul du nombre d'occupation pour l'oscillateur anharmonique, serait un schéma à trois particules, en vérifiant que toutes les fonctions de corrélations sont bien covariantes.

Pour les perspectives plus générales, on peut citer l'extension des calculs à température finie (grâce à la continuation analytique des fonctions de Green en temps imaginaire) ou l'application à des champs fermioniques.

Dans la thématique de l'équipe théorie de l'IPNL, il faudrait également poursuivre les calculs du modèle σ -linéaire, en particulier, jusqu'à l'énergie de corrélation et le potentiel effectif.

Enfin, l'application à des théories de jauge est envisageable si le problème de la covariance (et d'une façon plus générale du respect des symétries des champs, comme la

symétrie de jauge) est résolu. La liberté de jauge, qui oblige à projeter les états sur la bonne jauge, sera un nouveau problème à aborder.

Annexe A Expression des fonctions de Green

A.1 Résultats pour la théorie $\lambda\Phi^4$

Dans cette annexe, nous donnons les expressions de toutes les fonctions de Green du problème r-RPA. On définit les quantités auxiliaires :

$$\begin{aligned}
 I_{\beta\beta'}^{(1)}(E) &= \frac{1}{2\varepsilon_\beta} \frac{1}{2\varepsilon_{\beta'}} \frac{\varepsilon_\beta \mathcal{N}_\beta + \varepsilon_{\beta'} \mathcal{N}_{\beta'}}{E - \varepsilon_\beta - \varepsilon_{\beta'} + i\eta} \\
 I_{\beta\beta'}^{(2)}(E) &= \frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_{\beta'}}{2\varepsilon_\beta \varepsilon_{\beta'}} \frac{\varepsilon_\beta \mathcal{N}_\beta - \varepsilon_{\beta'} \mathcal{N}_{\beta'}}{E^2 - (\varepsilon_\beta - \varepsilon_{\beta'})^2 + i\eta} \\
 I_{\beta\beta'}^{(3)}(E) &= -\frac{1}{2\varepsilon_\beta} \frac{1}{2\varepsilon_{\beta'}} \frac{\varepsilon_\beta \mathcal{N}_\beta + \varepsilon_{\beta'} \mathcal{N}_{\beta'}}{E + \varepsilon_\beta + \varepsilon_{\beta'} - i\eta} .
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

On introduit également les intégrales de boucles :

$$\begin{aligned}
 I_\alpha^{(i)}(E) &= \frac{1}{V} \sum_{\beta\beta'} \delta_{\alpha-\beta-\beta'} I_{\beta\beta'}^{(i)}(E) \\
 I_\alpha(E) &= I_\alpha^{(1)}(E) + I_\alpha^{(2)}(E) + I_\alpha^{(3)}(E) .
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

En particulier, lorsque α correspond à une impulsion \vec{P} , on obtient les expressions suivantes,

$$\begin{aligned}
 I(E, \vec{P}) &\equiv I_{\alpha=\vec{P}}(E) \\
 &= \int \frac{d\vec{k}_1 d\vec{k}_2}{(2\pi)^d} \delta^{(d)}(\vec{P} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \\
 &\quad \times \left[\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{\varepsilon_1 \mathcal{N}_1 + \varepsilon_2 \mathcal{N}_2}{E^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + i\eta} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{\varepsilon_1 \mathcal{N}_1 - \varepsilon_2 \mathcal{N}_2}{E^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + i\eta} \right] .
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Pour les fonctions de Green à un corps, on a :

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\bar{\alpha}'}(E) &= \delta_{\alpha,\alpha'} \frac{E + \varepsilon_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha(E)}{2\varepsilon_\alpha}}{2\varepsilon_\alpha} G_\alpha(E) \\
G_{-\bar{\alpha}-\alpha'}(E) &= \delta_{\alpha,\alpha'} \frac{-E + \varepsilon_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha(E)}{2\varepsilon_\alpha}}{2\varepsilon_\alpha} G_\alpha(E) \\
G_{-\bar{\alpha}\bar{\alpha}'}(E) &= G_{\alpha-\alpha'}(E) = \delta_{\alpha,\alpha'} \frac{\Sigma_\alpha(E)}{4\varepsilon_\alpha^2} G_\alpha(E),
\end{aligned} \tag{A.4}$$

où le propagateur total est donné par :

$$G_{\varphi_\alpha\varphi_\alpha^\dagger}(E) = \delta_{\alpha,\alpha'} G_\alpha(E) = \delta_{\alpha,\alpha'} (E^2 - \varepsilon_\alpha^2 - \Sigma_\alpha(E))^{-1}. \tag{A.5}$$

L'opérateur de masse est défini par :

$$\Sigma_\alpha(E) = \frac{b^2 s^2}{2} \frac{I_\alpha(E)}{1 - \frac{b}{2} I_\alpha(E)}. \tag{A.6}$$

Pour les fonctions de Green à trois et quatre corps, on introduit les indices i pour distinguer les combinaisons possibles d'opérateurs de création et destruction : 1 = β, β' ($\bar{\beta}, \bar{\beta}'$), 2 = $\beta, -\bar{\beta}'$ ($\bar{\beta}, -\beta'$) (et les autres combinaisons symétriques) et 3 = $-\bar{\beta}, -\bar{\beta}'$ ($-\beta, -\beta'$). Les résultats sont :

$$\begin{aligned}
G_{\beta\beta',\bar{\alpha}}^{(i)}(E) &= G_{\bar{\alpha},\beta\beta'}^{(i)}(E) \\
&= \frac{b s}{\sqrt{V}} \delta_{\alpha-\beta-\beta'} \frac{I_{\beta\beta'}^{(i)}(E)}{1 - \frac{b}{2} I_\alpha(E)} \left(\frac{E + \varepsilon_\alpha}{2\varepsilon_\alpha} \right) G_{\varphi_\alpha\varphi_\alpha^\dagger}(E) \\
G_{\beta\beta',-\alpha}^{(i)}(E) &= G_{-\alpha,\beta\beta'}^{(i)}(E) \\
&= \frac{b s}{\sqrt{V}} \delta_{\alpha-\beta-\beta'} \frac{I_{\beta\beta'}^{(i)}(E)}{1 - \frac{b}{2} I_\alpha(E)} \left(\frac{-E + \varepsilon_\alpha}{2\varepsilon_\alpha} \right) G_{\varphi_\alpha\varphi_\alpha^\dagger}(E)
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
G_{\beta\beta',\gamma\gamma'}^{(ij)}(E) &= I_{\beta\beta'}^{(i)}(E) \delta_{i,j} (\delta_{\beta\gamma} \delta_{\beta'\gamma'} + \delta_{\beta\gamma'} \delta_{\beta'\gamma}) \\
&+ \frac{b}{V} \sum_\alpha \frac{\delta_{\alpha-\beta-\beta'} I_{\beta\beta'}^{(i)}(E) \delta_{\alpha-\gamma-\gamma'} I_{\gamma\gamma'}^{(j)}(E)}{1 - \frac{b}{2} I_\alpha(E)} \\
&+ \frac{b^2 s^2}{V} \sum_\alpha \frac{\delta_{\alpha-\beta-\beta'} I_{\beta\beta'}^{(i)}(E) \delta_{\alpha-\gamma-\gamma'} I_{\gamma\gamma'}^{(j)}(E)}{(1 - \frac{b}{2} I_\alpha(E))^2} G_{\varphi_\alpha\varphi_\alpha^\dagger}(E).
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Pour finir, notons les relations utiles suivantes,

$$\begin{aligned}
G_{\beta\beta',\bar{\alpha}}^{(i)}(E) + G_{\beta\beta',-\alpha}^{(i)}(E) &= \frac{bs}{\sqrt{V}} \delta_{\alpha-\beta-\beta'} \frac{I_{\beta\beta'}^{(i)}(E)}{1 - \frac{b}{2} I_{\alpha}(E)} G_{\varphi_{\alpha}\varphi_{\alpha}^{\dagger}}(E) \\
\sum_{\beta\beta'} \frac{1}{\sqrt{V}} \left(G_{\beta\beta',\bar{\alpha}}^{(i)}(E) + G_{\beta\beta',-\alpha}^{(i)}(E) \right) &= \frac{bs}{\sqrt{V}} \frac{I_{\alpha}^{(i)}(E)}{1 - \frac{b}{2} I_{\alpha}(E)} G_{\varphi_{\alpha}\varphi_{\alpha}^{\dagger}}(E) \\
\sum_{i=1,2,3} \sum_{\beta\beta'} \frac{1}{\sqrt{V}} bs \left(G_{\beta\beta',\bar{\alpha}}^{(i)}(E) + G_{\beta\beta',-\alpha}^{(i)}(E) \right) &= 2 \Sigma_{\alpha}(E) G_{\varphi_{\alpha}\varphi_{\alpha}^{\dagger}}(E) \tag{A.9}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta\beta'\gamma\gamma'} G_{\beta\beta',\gamma\gamma'}^{(ij)}(E) &= 2 \sum_{\gamma\gamma'} I_{\gamma\gamma'}^{(i)}(E) \delta_{i,j} + b \sum_{\alpha} \frac{I_{\alpha}^{(i)}(E) I_{\alpha}^{(j)}(E)}{1 - \frac{b}{2} I_{\alpha}(E)} \\
&+ b^2 s^2 \sum_{\alpha} \frac{I_{\alpha}^{(i)}(E) I_{\alpha}^{(j)}(E)}{\left(1 - \frac{b}{2} I_{\alpha}(E)\right)^2} G_{\varphi_{\alpha}\varphi_{\alpha}^{\dagger}}(E) \tag{A.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j \in 1,2,3} \sum_{\beta\beta'\gamma\gamma'} G_{\beta\beta',\gamma\gamma'}^{(ij)}(E) &= 2 \sum_{\alpha} I_{\alpha}(E) + b \sum_{\alpha} \frac{(I_{\alpha}(E))^2}{1 - \frac{b}{2} I_{\alpha}(E)} \\
&+ b^2 s^2 \sum_{\alpha} \frac{(I_{\alpha}(E))^2}{\left(1 - \frac{b}{2} I_{\alpha}(E)\right)^2} G_{\varphi_{\alpha}\varphi_{\alpha}^{\dagger}}(E) \tag{A.11}
\end{aligned}$$

Comme énoncé dans le corps de la thèse, ces combinaisons particulières sont bien covariantes en RPA standard car on reconstruit la boucle $I(E, p)$ qui l'est ($I(E, p) = I(E^2 - p^2)$). En r-RPA, on force la covariance de I .

A.2 Résultats pour l'oscillateur anharmonique

Nous listons ici les résultats analytiques pour les fonctions de Green du problème. La notation $\langle \dots \rangle$ est générale. Selon l'approche en question dans le texte, elle signifie aussi bien $\langle \text{HF} | \dots | \text{HF} \rangle$ ou $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$. On donne les combinaisons de fonctions correspondant aux opérateurs x et p avec la notation (par exemple),

$$\begin{aligned}
G_{:xxxx:}(E) &\equiv \frac{1}{4\omega^2} G_{:(b+bt)^4:}(E) \\
&= \frac{1}{4\omega^2} (G_{bb,bb}(E) + G_{bt^{\dagger}bt^{\dagger},bt^{\dagger}bt^{\dagger}}(E) + 2G_{bt^{\dagger}bt^{\dagger},bb}(E) \\
&\quad + 4G_{bt^{\dagger},bbb}(E) + 4G_{bt^{\dagger}bt^{\dagger},b}(E) + 4G_{bt^{\dagger}bt^{\dagger},bb}(E)) . \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Phase symétrique

Dans la phase symétrique, *i.e.*, $s = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
G_{xx}(E) &= \frac{(E^2 - \Sigma_{33}) - 9\frac{(\eta-\nu)\sigma^2}{4\alpha_3^2\omega}}{(E^2 - E_1^2)(E^2 - E_2^2)} , \\
G_{pp}(E) &= \frac{\varepsilon^2(E^2 - \Sigma_{33}) - 9\frac{(\eta+\nu)(\lambda-\omega^3\sigma)^2}{4\alpha_3^2\omega^5}}{(E^2 - E_1^2)(E^2 - E_2^2)} , \\
G_{:xxxx:}(E) &= \frac{1}{4\omega^2} \left(-\frac{2(\lambda - 2g\omega + 3\omega^3(\alpha_2 E + \Omega))}{w^3(E^2 - E_{01}E_{02})} + \frac{\tau}{4\alpha_3^2\omega^6(E^2 - E_1^2)(E^2 - E_2^2)} \right) , \\
G_{:pppp:}(E) &= \frac{\omega^2}{4} \left(-\frac{2(\lambda - 2g\omega + 3\omega^3(\alpha_2 E + \Omega))}{w^3(E^2 - E_{01}E_{02})} - \frac{\tau}{4\alpha_3^2\omega^6(E^2 - E_1^2)(E^2 - E_2^2)} \right) , \\
G_{:ppxx:}(E) &= \frac{\alpha_2}{2\omega^3} \frac{E + E_{02}}{E^2 - E_{01}E_{02}} , \tag{A.13}
\end{aligned}$$

où nous avons introduit les abréviations :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 &= \mu^2 + 12g\langle xx \rangle , \\
\alpha_2 &= \frac{\langle pp \rangle + \omega^2\langle xx \rangle}{2\omega} , \\
\alpha_3 &= \frac{9}{2} \langle : p p x x : \rangle - 3 + \frac{9}{4\omega^2} \left(\langle : p p p p : \rangle + 4\langle pp \rangle\omega + 4\omega^3\langle xx \rangle + \omega^4\langle : x x x x : \rangle \right) , \\
\sigma &= \langle pp \rangle - \omega^2\langle xx \rangle , \\
\lambda &= 2g \left(-3\langle pp \rangle(1 - 2\omega\langle xx \rangle) + \omega(-2 - 6\langle : p p x x : \rangle) + 3\omega(5\langle xx \rangle - 2\omega\langle xx \rangle^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\omega\langle : x x x x : \rangle) \right) + \omega(\omega^2 - \varepsilon^2)\sigma , \\
\Sigma_{33} &= \frac{\eta^2 - \nu^2}{\alpha_3^2} , \\
\eta &= \langle [bbb, [H, b^\dagger b^\dagger b^\dagger]] \rangle , \\
\nu &= \langle [bbb, [H, bbb]] \rangle , \\
\Omega &= \frac{1}{\omega^3} \left(\lambda - 4\omega^3(\langle pp \rangle + \varepsilon^2\langle xx \rangle) + 22g\omega \right. \\
&\quad \left. + 16\omega^2g(-6\langle xx \rangle + 3\omega\langle xx \rangle^2 - 2\omega\langle : x x x x : \rangle) \right) , \\
\tau &= 6\alpha_3 \left(9\lambda^2\sigma + \lambda(-27\sigma^2 + 4(\alpha_3 E + \eta + \nu)(E - \omega))\omega^3 \right. \\
&\quad \left. + 2\sigma\omega^5 \left(\omega(-4E(\alpha_3 E + \eta) + 9\sigma^2 + 2(\alpha_3 E + \eta + \nu)\omega) + 2(\alpha_3 E + \eta - \nu)\varepsilon^2 \right) \right) , \\
E_{01,2} &= \frac{\Omega}{\alpha_2} \pm \frac{\lambda - 2g\omega}{\alpha_2\omega^3} . \tag{A.14}
\end{aligned}$$

Les énergies E_1^2 et E_2^2 sont solutions des équations suivantes :

$$E^4 + \frac{E^2}{4\alpha_3\omega^3} (18\sigma(\lambda - \sigma\omega^3) - 4\alpha_3\omega^3(\Sigma_{33} + \varepsilon^2)) + \frac{1}{16\alpha_3^2\omega^6} ((81\sigma^2 + 36\omega(\eta + \nu))(\lambda - \sigma\omega^3)^2 + \varepsilon^2\omega^5(36\sigma^2(\eta - \nu) + 16\alpha_3^2\omega\Sigma_{33})) = 0 \quad (\text{A.15})$$

$\langle xxx \rangle$ et $\langle pp x \rangle$ sont nulles pour raison de parité. $\langle : \mathcal{O} : \rangle$ est la valeur moyenne du produit normal de l'opérateur \mathcal{O} . Si $|\text{HF}\rangle$ est l'état fondamental par rapport à cet ordre normal, ces valeurs moyennes sont nulles et $\langle xx \rangle = 1/(2\omega)$, $\langle pp \rangle = \omega/2$. d'après les équations du gap ou du champ moyen généralisé, Eqs. (6.7,6.8), on obtient les conditions suivantes,

$$\omega^2(\langle pp \rangle - \varepsilon^2\langle xx \rangle) + 3g - 12g\omega\langle xx \rangle(1 - \omega\langle xx \rangle) - 4g\omega^2\langle : xxx : \rangle = 0 \quad (\text{A.16})$$

Cas déformé

Dans la phase déformé, *i.e.* $s \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} G_{xx}(E) &= \frac{E^2 - \frac{\beta\kappa}{\alpha_2^2}}{(E^2 - E_1^2)(E^2 - E_2^2)} = \frac{1}{E^2 - \varepsilon^2 + \frac{9g^2\delta^2(\beta-\kappa)}{\omega^2\alpha_2^2} \frac{1}{E^2 - \frac{\beta\kappa}{16\omega^4\alpha_2^2}}} , \\ G_{pp}(E) &= \varepsilon^2 G_{xx}(E) + \frac{288\delta^2 g^2 \kappa}{\alpha_2^2} \frac{1}{(E^2 - E_1^2)(E^2 - E_2^2)} , \\ G_{:xxx:}(E) &= -\frac{6\delta g (\alpha_2^2 E^2 + 4\omega\kappa + 3E(\kappa + \alpha_2\omega))}{\alpha_2\omega^2(E^2 - E_1^2)(E^2 - E_2^2)} , \\ G_{:ppx:}(E) &= \frac{6\delta g}{\alpha_2(E^2 - E_1^2)(E^2 - E_2^2)} (\alpha_2^2 E^2 - E(\kappa + \alpha_2\omega)) , \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \mu^2 + 12g(s^2 + \langle xx \rangle) \\ \beta &= 4(\langle pp \rangle + \langle xx \rangle(\varepsilon^2 + 12g\langle xx \rangle) - 18gs\langle : xxx : \rangle) \\ \delta &= 2s\langle xx \rangle - \langle : xxx : \rangle \\ \kappa &= 2\left(\langle pp \rangle\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega^2}\right) - 12gs\langle : xxx : \rangle + (\omega^2 + \varepsilon^2)\langle xx \rangle - \frac{24g}{\omega^2}\langle : pp x : \rangle s\right) \\ E_{1,2}^2 &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 + \frac{\beta\kappa}{\alpha_2^2} \pm \sqrt{\left(\varepsilon^2 - \frac{\beta\kappa}{\alpha_2^2}\right)^2 + 8(12g\delta)^2 \frac{\kappa}{\alpha_2^2}}\right) . \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Les deux équations de champ moyen généralisé servent à fixer la valeur de s

$$s^3 + s\left(3\langle xx \rangle + \frac{\mu^2}{4g}\right) - \langle : xxx : \rangle = 0 , \quad (\text{A.19})$$

et la valeur de ω ,

$$\langle pp \rangle = \varepsilon^2 \langle xx \rangle - 12gs \langle : xxx : \rangle . \quad (\text{A.20})$$

Remarquons enfin que $G_{xx}(E)$, donné par l'équation (A.17), peut être interprété comme un propagateur libre avec un terme additionnel, l'opérateur de masse, dépendant de E . Ce genre d'interprétation peut être envisagé pour toutes les expressions.

Bibliographie

- [AC97] AMELINO-CAMELIA (G.), « Thermal effective potential of the $O(N)$ linear sigma model », *Phys. Lett.*, vol. B407, 1997, p. 268–274.
- [ACSW96] AOUISSAT (Z.), CHANFRAY (G.), SCHUCK (P.) et WAMBACH (J.), « A Non-perturbative Treatment of the Pion in the Linear Sigma-Model », *Nucl. Phys.*, vol. A603, 1996, p. 458–470.
- [Aou] AOUISSAT (Z.), « Extended RPA and the Goldstone Theorem in theories of interacting Bose Fields », *non publié*.
- [Bla02] BLAIZOT (J.-P.), « Theory of the quark-gluon plasma », *Lect. Notes Phys.*, vol. 583, 2002, p. 117–160.
- [Bor12] ÉMILE BOREL, « Le calcul des intégrales définies », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, vol. 8, n° 2, 1912, p. 159–210.
- [BS] BOGOLIUBOV (N. N.) et SHIRKOV (D. V.), *Introduction to the theory of quantized fields*. John Wiley & Sons.
- [BSC⁺01] BERTRAND (T.), SCHUCK (P.), CHANFRAY (G.), AOUISSAT (Z.) et DUKELSKY (J.), « Selfconsistent random phase approximation in a schematic field theoretical model », *Phys. Rev.*, vol. C63, 2001, p. 024301.
- [CDS94] CATARA (F.), DINH DANG (N.) et SAMBATARO (M.), « Ground-state correlations beyond RPA », *Nucl. Phys. A*, vol. 579, 1994, p. 1–12.
- [Cha98] CHANFRAY (G.), « Mésons dans la matière hadronique dense et chaude », *Cours de l'École Internationale Joliot-Curie, Maubuisson, France*, 1998.
- [DDS⁺00] DELION (D. S.), DUKELSKY (J.), SCHUCK (P.), DE PASSOS (E. J. V.) et KRMPOTIC (F.), « Proton neutron selfconsistent quasiparticle random phase approximation within the $O(5)$ model », *Phys. Rev.*, vol. C62, 2000, p. 044311.
- [DHS00] DUKELSKY (J.), HIRSCH (J. G.) et SCHUCK (P.), « Occupation numbers in Self Consistent RPA », *Eur. Phys. J.*, vol. A7, 2000, p. 155–165.
- [DOH03] DAVESNE (D.), OERTEL (M.) et HANSEN (H.), « A consistent approximation scheme beyond RPA for bosons », *Eur. Phys. J.*, vol. A16, 2003, p. 35–42.
- [DRS98] DUKELSKY (J.), RÖPKE (G.) et SCHUCK (P.), « Generalized Brückner-Hartree-Fock theory and self-consistent RPA », *Nucl. Phys. A*, vol. 628, 1998.
- [DS90] DUKELSKY (J.) et SCHUCK (P.), « Towards a variational theory for RPA-like correlations and fluctuations », *Nucl. Phys. A*, n° 512, 1990.

- [DS91] DUKELSKY (J.) et SCHUCK (P.), « Variational RPA approximation for the anharmonic oscillator », *Modern Phys. Lett. A*, vol. 6, n° 26, 1991.
- [DS99] DUKELSKY (J.) et SCHUCK (P.), « The Self Consistent RPA in a many level pairing model », *Phys. Lett. B*, vol. 464, 1999.
- [Feu00] FEUCHT (B.), « Description self-consistante des fluctuations quantiques dans un modèle simple », *Rapport de stage de maîtrise de l'Université de Grenoble, sous la direction de P.Schuck (Institut des Sciences Nucléaires de Grenoble), disponible sur <http://www.uni-karlsruhe.de/~ut0o/links/SCRPALipkin.ps.gz>*, 2000.
- [FW71] FETTER (A. L.) et WALECKA (J. D.), *Quantum theory of many-particle systems*. Mc Graw-Hill, 1971.
- [Han98] HANSEN (H.), « Confinement des quarks et géométrie fractale », *rapport de stage de maîtrise de l'ENS de Lyon, sous la direction de Pr. H. Kröger, Université Laval, Québec, non publié, disponible sur lyoinfo.in2p3.fr/theorie/membres/hansen.html.fr*, 1998.
- [Han01] HANSEN (H.), « Renormalized random phase approximation in quantum field theory », *Compte-rendu de la conférence "Chiral Fluctuations in Hadronic Matter International Workshop", IPN Orsay, Septembre 2001*.
- [HC03] HANSEN (H.) et CHANFRAY (G.), « Some applications of renormalized RPA in bosonic field theories », 2003.
- [HCDS02] HANSEN (H.), CHANFRAY (G.), DAVESNE (D.) et SCHUCK (P.), « Random phase approximation and extensions applied to a bosonic field theory », *Eur. Phys. J.*, vol. A14, 2002, p. 397–411.
- [HCPT96] HÄUSER (J. M.), CASSING (W.), PETER (A.) et THOMA (M. H.), « Connected Green function approach to symmetry breaking in Φ_{1+1}^4 -theory », *Z. Phys.*, vol. A353, 1996, p. 301–310.
- [HHC99] HIRSCH (J. G.), HESS (P. O.) et CIVITARESE (O.), « Boson expansion techniques, the Pauli principle, and the quasiparticle random phase approximation phase transition », *Phys. Rev.*, vol. C60, 1999, p. 064303.
- [HIMV00] HEINEMANN (C.), IANCU (E.), MARTIN (C.) et VAUTHERIN (D.), « Variational calculations with improved energy functionals in gauge theories », *Phys. Rev.*, vol. D61, 2000, p. 116008.
- [HMDS02] HIRSCH (J. G.), MARIANO (A.), DUKELSKY (J.) et SCHUCK (P.), « Fully Self-consistent RPA description of the many level pairing model », *Annals Phys.*, vol. 296, 2002, p. 187–213.
- [Hol95] HOLSTEIN (B. R.), « Chiral perturbation theory : a primer », 1995.
- [Hol99] HOLSTEIN (B. R.), « A brief introduction to chiral perturbation theory », 1999.

- [Hol01] HOLSTEIN (B. R.), « Introduction to effective field theory », *Nucl. Phys.*, vol. A689, 2001, p. 135–146.
- [IMSS96] IBANEZ-MEIER (R.), STANCU (I.) et STEVENSON (P. M.), « Gaussian effective potential for the U(1) Higgs model », *Z. Phys.*, vol. C70, 1996, p. 307–320.
- [JS95] JANKE (W.) et SAUER (T.), « Monte Carlo simulation of (1+1)-dimensional Φ^4 quantum field theory », *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, vol. 42, 1995, p. 917–919.
- [Kap89] KAPUSTA (J. I.), *Finite temperature field theory*. Cambridge University Press, 1989.
- [KFS96] KOSZTIN (I.), FABER (B.) et SCHULTEN (K.), « Introduction to the diffusion Monte Carlo method », 1996.
- [KL95] KERMAN (A. K.) et LIN (C. Y.), « Time dependent variational principle for Φ^4 field theory. 1 : RPA approximation and renormalization », *Annals Phys.*, vol. 241, 1995, p. 185–211.
- [KL98] KERMAN (A. K.) et LIN (C.-Y.), « Time-dependent variational principle for Φ^4 field theory. II : RPA approximation and renormalization », *Annals Phys.*, vol. 269, 1998, p. 55–76.
- [KMV93] KERMAN (A. K.), MARTIN (C.) et VAUTHERIN (D.), « The Φ^4 model near the critical point : The Gaussian variational approximation », *Phys. Rev.*, vol. D47, 1993, p. 632–639.
- [KPD⁺98] KRMPOTIC (F.), DE PASSOS (E. J. V.), DELION (D. S.), DUKELSKY (J.) et SCHUCK (P.), « Self consistent random phase approximation within the O(5) model and fermi transitions », 1998.
- [KSGVG02] KHAN (E.), SANDULESCU (N.), GRASSO (M.) et VAN GIAI (N.), « Continuum quasiparticle random phase approximation and the time dependent Hartree-Fock-Bogoliubov approach », *Phys. Rev.*, vol. C66, 2002, p. 024309.
- [LeB96] LEBELLAC (M.), *Thermal field theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [LK02] LU (W.-F.) et KIM (C. K.), « Gaussian effective potential and the Coleman's normal-ordering prescription : The functional integral formalism », *J. Phys.*, vol. A35, 2002, p. 393–400.
- [LW98] LOINAZ (W.) et WILLEY (R. S.), « Monte Carlo simulation calculation of critical coupling constant for continuum Φ^4 (2) », *Phys. Rev.*, vol. D58, 1998, p. 076003.
- [Mar74] MARSHALEK (E. R.), *Nucl. Phys.*, vol. A224, 1974, p. 221.
- [MRL99] MARRERO (P. J.), ROURA (E. A.) et LEE (D.), « A non-perturbative analysis of symmetry breaking in two-dimensional Φ^4 theory using periodic field methods », *Phys. Lett.*, vol. B471, 1999, p. 45.
- [MS59] MARTIN (P. C.) et SCHWINGER (J. S.), « Theory of many particle systems. I », *Phys. Rev.*, vol. 115, 1959, p. 1342–1373.

- [ND01] NAKAMURA (I.) et DMITRASINOVIC (V.), « Linear sigma model in the Gaussian functional approximation », *Prog. Theor. Phys.*, vol. 106, 2001, p. 1195–1212.
- [Pic95] PICH (A.), « Chiral perturbation theory », *Rept. Prog. Phys.*, vol. 58, 1995, p. 563–610.
- [PS] PESKIN (M. E.) et SCHROEDER (D. V.), « An Introduction to Quantum Field Theory ». Reading, USA : Addison-Wesley (1995) 842 pages.
- [PTPK98] DE PASSOS (E. J. V.), DE TOLEDO PIZA (A. F. R.) et KRMPOTIC (F.), « Self Consistent and Renormalized particle-particle RPA in a Schematic Model », *Phys. Rev.*, vol. C58, 1998, p. 1841–1844.
- [RBCS02] RABHI (A.), BENNACEUR (R.), CHANFRAY (G.) et SCHUCK (P.), « Self-consistent Quasi-particle RPA for the Description of Superfluid Fermi Systems », *Physics Review C*, 2002. soumis en août 2002.
- [Row68] ROWE (D. J.), « Equations-of-motion Method and the Extended Shell Model », *Rev. Mod. Phys.*, vol. 40, n° 1, 1968.
- [RS80] RING (P.) et SHUCK (P.), *The nuclear many-body problem*. Springer-Verlag, 1980.
- [SAT87] STEVENSON (P. M.), ALLES (B.) et TARRACH (R.), « O(N) Symmetric lambda Φ^4 Theory : The Gaussian Effective Potential Approach », *Phys. Rev.*, vol. D35, 1987, p. 2407.
- [SDR97] SCHUCK (P.), DUKELSKY (J.) et RÖPKE (G.), « The Dyson equation approach to many body Green's functions », *Lectures given at Hispalensis international summer school, Espana*, 1997.
- [SG73] SIMON (B.) et GRIFFITH (R. G.), *Commun. Math. Phys.*, vol. 33, n° 145, 1973.
- [SS99] SCHÄFER (S.) et SCHUCK (P.), « Dyson Equation Approach to Many-Body Greens Functions and Self-Consistent RPA, First Application to the Hubbard Model », *Phys. Rev.*, vol. B59, 1999, p. 1712–1733.
- [Ste84] STEVENSON (P. M.), « The Gaussian Effective Potential. 1. Quantum Mechanics », *Phys. Rev.*, vol. D30, 1984, p. 1712.
- [Ste87] STEVENSON (P. M.), « Dimensional continuation and the two lambda Φ^4 in four- dimensions theories », *Z. Phys.*, vol. C35, 1987, p. 467.
- [SY71] SCHALOW (G.) et YAMAMURA (M.), « Investigation of ground state correlations in an extended Lipkin-Meshkov-Glick model », *Nucl. Phys.*, vol. A 161, n° 93, 1971.
- [TVM99] TSUE (Y.), VAUTHERIN (D.) et MATSUI (T.), « Mean field theory for collective motion of quantum meson fields », *Prog. Theor. Phys.*, vol. 102, 1999, p. 313–332.
- [Yam74] YAMAMURA (M.), *Prog. Theo. Phys.*, vol. 52, n° 538, 1974.

- [Yuk98] YUKALOV (V. I.), *Statistical Green's Functions*. Queen's University Press, Kingston, Canada, 1998.

Résumé

L'étude de problèmes de physique hadronique dans le cadre de la théorie des champs nécessite l'emploi de méthodes non-perturbatives, les approches perturbatives ne pouvant s'appliquer pour QCD à basse énergie. L'équivalence formelle existant entre la théorie des champs et le problème à N corps nous a conduit à adapter des techniques non-perturbatives usuelles de la théorie du problème à N corps, comme l'approximation de champ moyen (ou approximation gaussienne) et l'approximation de la phase aléatoire (RPA).

En se plaçant au-delà du champ moyen où seules sont prises en compte les corrélations entre une particule et un potentiel "moyen" à un corps, la RPA va permettre de rajouter dans le calcul de l'état fondamental des corrélations entre particules.

Afin de mettre en place le formalisme, on applique la RPA, sous différentes formes (standard, renormalisée, en termes de fonctions de Green), à l'une des plus simples théories des champs en interaction, la théorie scalaire $\lambda\Phi^4$. On montre qu'il se produit une transition de phase due à une brisure dynamique de symétrie dont le paramètre critique se rapproche des résultats obtenus sur réseaux et par la technique des "clusters". Les résultats sont aussi présentés à température finie pour le champ moyen.

On étudie également un modèle effectif réaliste de la transition de phase chirale, le modèle σ -linéaire et on montre que le théorème de Goldstone est restauré, contrairement à l'approximation gaussienne.

Enfin pour éclaircir quelques points de la RPA et aller au-delà des corrélations obtenues dans la forme renormalisée, on considère l'oscillateur anharmonique en mécanique quantique, en introduisant les corrélations minimales au-delà du champ moyen et on montre que les corrélations RPA améliorent grandement le résultat obtenu en champ moyen.

Mots-clés : Théorie des champs à température nulle et finie, Problème à N corps, Approximation de champ moyen, RPA, Modèle $\lambda\Phi^4$ et σ -linéaire, Restauration de symétrie, Transition de phase.

Abstract

Hadronic physics in field theory is a difficult subject and a field of active research. The problem is highly non-perturbative because one cannot use a perturbative development of QCD in the low energy sector. The equivalence between field theory and many-body problem leads us to apply well-known non-perturbative many-body techniques like the mean-field approximation (or Gaussian approximation) and the random phase approximation (RPA).

Beyond the mean-field where the only correlations incorporated in the calculations are those between one particle and a «mean-field» potential, the RPA take into account correlations between particles.

To set up the formalism, we apply different types of RPA (namely standard, renormalized and with the Dyson equations approach) to one of the more simple quantum field theory with interaction, the $\lambda\Phi^4$ scalar theory. We show that a phase transition occurs, due to a dynamical symmetry breaking. The critical parameter is close to other results obtained by lattice calculations or cluster techniques. We compute also finite temperature results in mean-field approximation.

We study also a realistic effective model for the chiral phase transition, the linear- σ model. The Goldstone theorem is restored, to the contrary to the Gaussian approximation.

Finally we go beyond renormalized RPA correlations in the anharmonic oscillator case and show that the first RPA correlations are sufficient to improve greatly the mean-field calculations.

Keywords : Field theory at zero and finite temperature, Many-body problem, Mean-field approximation, RPA, $\lambda\Phi^4$ and linear- σ models, Symmetry restoration, Phase transition.