Approximation fractale de courbes et de surfaces

Éric Guérin

18 décembre 2002

eguerin@ligim.univ-lyon1.fr



Laboratoire d'Informatique Graphique, Image et Modélisation Lyon, France



Plan

	Plant 21 and	
	Introduction – problématique	-
P. S.	Approximation	.W.
* (H	Surfaces composées	
		2



Plan (2)

Introduction – problématique

- Problématique(s)
- 🗰 État de l'art

Approximation

Surfaces composées



Problématique

Modélisation d'objets accidentés (rugueux)



Approximation



Problématique – Approche modélisation

Approximation

Modélisation



Problématique – Approche compression

Compression



10011011..

Reconstruction

Écart : distorsion

Taille : débit



État de l'art

Problématique stricte

- Peu de travaux correspondant exactement à notre problématique
- Perturbation d'un modèle lisse [Blanc-Talon 1997]
 - Approximation grossière grâce à une B-Spline
 - Perturbation pour obtenir les caractéristiques accidentées

Élargissement de la problématique

Problème inverse fractal, compression fractale,...

Problème inverse : NP-difficile [Ruhl et Hartenstein 1997]



État de l'art (2)

- Compression fractale
 - ⇒ Algorithme original par Jacquin [Jacquin 1992]
 - De nombreuses améliorations [Saupe et al. 1996, Wohlberg et de Jager 1999, Davoine et Chassery 1994]
- Méthodes ondelettes
 - Service de coefficients d'IFS [Struzik et al. 1995, Berkner 1997]
 - Analyse de l'exposant de Hölder puis reproduction grâce à des IFS généralisés [Véhel et Daoudi 1996, Daoudi et Véhel 1995]
- Optimisation stochastique
 - Algorithmes génétiques pour les IFS mixtes [Lutton et al. 1995]
 - Pour la compression fractale d'images [Vences et Rudomin 1994, Goertzel et al. 1994]
- Formalisme IFS (Iterated Function Systems) souvent utilisé



Plan

Introduction – problématique

Approximation

- Les IFS projetés (rappels) [Zair 1998]
 - ➡ IFS (Iterated Function Systems)
 - ➡ Formes à pôles
 - ➡ IFS projetés
- Méthode d'approximation
- Résultats

Surfaces composées



Introduction – problématique Approximation

Surfaces composées

IFS (Iterated Function Systems)

Formalisme

- Image [Barnsley 1988] et [Hutchinson 1981]
- Utilisé pour décrire des objets fractals
- Fondé sur l'autosimilarité au sens large des formes
- Un objet est décrit par un ensemble de fonctions contractantes dans un espace métrique complet E:

$$\mathbb{T} = \{T_0, \dots, T_N - 1\}$$

 \blacksquare L'attracteur $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ de \mathbb{T} est :

 $\mathcal{A}(\mathbb{T}) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{T}^n K$

où K est un compact quelconque.



IFS (Iterated Function Systems) (2)

Exemple





 $T_0 = H(O, 0.5)$ $T_1 = T(0, 0.5)H(O, 0.5)$ $T_2 = T(0, 1)R(\pi/4)H(O, 0.5)$ $T_3 = T(0, 1)R(-\pi/4)H(O, 0.5)$

 $\mathcal{A}(\mathbb{T}) = T_0 \mathcal{A}(\mathbb{T}) \cup T_1 \mathcal{A}(\mathbb{T}) \cup T_2 \mathcal{A}(\mathbb{T}) \cup T_3 \mathcal{A}(\mathbb{T})$



Formes à pôles

Formalisme

- ➡ Un objet (courbe ou surface) est controlé par un ensemble de *points de* contrôle $P = (p_0, ..., p_n)$
- Des fonctions de mélange ϕ_i sont utilisées pour combiner les points de contrôle
- L'objet paramétrique est alors défini par :

$$F(t) = P\phi(t) = \sum_{i=0...n} \phi_i(t)p_i$$

 \blacksquare avec $\phi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in [0, 1], \sum_{i=0...n} \phi_i(t) = 1$$



IFS projetés

Formalisme

- L'espace métrique *E* est un espace barycentrique
- \blacksquare T_i sont des matrices à colonnes barycentriques
- Un ensemble de points de contrôle $P = (p_0, \ldots, p_n)$ est utilisé pour faire la projection
- \blacksquare Chaque point de $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ est projeté :

 $P\mathcal{A}(\mathbb{T}) = P \lim_{n \to \infty} \mathbb{T}^n K$



IFS projetés (2)

P.

Exemple

 \mathbf{P}_{1}

Déformation d'une courbe grâce aux points de contrôle





IFS projetés (3)

Représentation fonctionnelle

BARNSLEY introduit une fonction d'adressage en indexant les transformations grâce à un ensemble fini $\Sigma = \{0, ..., N-1\}$:

$$\sigma \in \Sigma^{\omega} \mapsto \phi(\sigma) = \lim_{n \to \infty} T_{\sigma_1} \dots T_{\sigma_n} \lambda$$

Sous une certaine condition de raccord, on dispose d'une représentation paramétrique :

$$\Phi(s) = \phi(\sigma) \text{ avec } s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N^i} \sigma_i$$

L'attracteur projeté a aussi une représentation paramétrique :

$$F(s) = P\Phi(s) = P\phi(\sigma) = P \lim_{n \to \infty} T_{\sigma_1} \dots T_{\sigma_n} \lambda$$



IFS projetés (4)

Tabulation de la fonction

- \blacksquare Le développement σ en base N étant :

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p \, 00 \dots$$

Un nombre réduit p d'itérations est suffisant pour le calcul exact

$$F(\frac{i}{N^p}) = PT_{\sigma_1} \dots T_{\sigma_p} e_0$$

en prenant e_0 pour centre de T_0 : $\phi(00...) = e_0$

Calcul exact calcul exact nombre infini d'itérations



IFS projetés (5)

Algorithme de construction (courbe)





IFS projetés (6)

Étape 3

Étape 4

Courbe finale



IFS projetés (7)

Algorithme de construction (surface)



Méthode d'approximation

Famille fractale de fonctions

Paramétrisation du modèle : vecteur de paramètres a

- Coefficients des matrices
- ➡ Coordonnées des points de contrôle

Famille fractale de fonctions $F_{\mathbf{a}}$ issue du couple $(P_{\mathbf{a}}, \mathbb{T}_{\mathbf{a}})$





Méthode d'approximation (2)

Critère d'approximation

- Étant données :
 - ➡ Une courbe ou une surface échantillonnée Q
 - Une fonction d'écart *E*(*F*_a, Q) qui traduit un écart « visuel » entre les données d'entrée et la fonction fractale
- Trouver l'IFS projeté qui minimise la fonction d'écart $\mathcal{E}(F_{\mathbf{a}}, \mathbf{Q})$ en faisant varier les paramètres de l'IFS projeté :

$$\mathbf{a}_{\text{opt}}(\mathbf{Q}) = \operatorname*{argmin}_{\mathbf{a}} \mathcal{E}(F_{\mathbf{a}}, \mathbf{Q})$$

Résolution : algorithme de Levenberg-Marquardt



Méthode d'approximation (3)

Fonction d'écart

- Pour les courbes
 - Reparamétrage linéaire de la ligne brisée
 - Rééchantillonnage uniforme

$$\mathcal{E}(F_{\mathbf{a}}, \mathbf{Q}) = \sum_{i=0,\dots,M''} \left[d(\mathcal{G}_{\mathcal{Q}_{\mathbf{a}}}(\frac{i}{M''}), \mathcal{G}_{Q}(\frac{i}{M''})) \right]$$



Introduction – problématique Approximation Surfaces composées

 $\mathbf{2}$

Résultats

Courbes synthétiques

Une B-spline

Son approximation



Introduction – problématique Approximation

Surfaces composées

Résultats (2)

Une courbe spiralée

Son approximation



Band

Résultats (3)

Courbes réelles



Résultat d'approximation



Résultats (4)





Introduction – problématique Approximation

nation Surfaces composées

Résultats (5)

Fonction d'écart

- Pour les surfaces
 - Les points de contrôle sont des scalaires
 - \Rightarrow Distance L^2 entre grilles de scalaires

$$\mathcal{E}(F_{\mathbf{a}}, \mathbf{Q}) = \sum_{i,j=0,\dots,M} \left(\mathcal{Q}_{\mathbf{a}ij} - Q_{ij}\right)^2$$



Résultats (6)





Introduction – problématique Approximation Su

Surfaces composées

Résultats (7)





Résultats (8)





Image approximée $(232 \text{ paramètres}, \text{PSNR } 26, 6 \, dB)$

Image approximée (316 paramètres, PSNR 28, 1 dB)

30/55

Discussion

Courbes

- Résultats satisfaisants pour l'approximation de courbes
- Courbes synthétiques aussi bien que naturelles
- Surfaces et images
 - Modèle très compact
 - X Reste trop limité aux données de petites tailles
 - X Données dont les caractéristiques varient spatialement ?

Nécessité de pouvoir combiner plusieurs modèles pour permettre d'adapter localement



Plan



- Algorithmes d'approximation (2 méthodes)
- Résultats



Combinaison d'IFS projetés

Objectifs

- Modélisation d'objets dont les caractéristiques varient spatialement
- Approximation de données de plus grande taille
- Compression

Notre choix

- Structure pour partitionner l'espace : quadtree
- A chaque feuille du quadtree γ correspond un modèle IFS projeté complet $(P^{\gamma}, \mathbb{T}^{\gamma})$



Combinaison d'IFS projetés (2)

Exemple



Exemple de quadtree



Surface associée



Principe de raffinement

Subdivision de la feuille γ en quatre sous-feuilles $\gamma 0$, $\gamma 1$, $\gamma 2$ et $\gamma 3$ Permet une modélisation plus fine et plus adaptative



Méthode 1

Principe

- Basée sur un critère de distorsion maximale relative par bloc d'image
- Principe récursif : tant que la précision voulue n'est pas atteinte, on subdivise



Méthode 1 – résultats





Introduction – problématique Appro

Approximation Surfaces composées

Méthode 1 – résultats (2)

Critère : distorsion maximum 40 dB





Méthode 1 – résultats (3)





Méthode 2

Étapes de l'algorithme

- Exploration récursive de l'image
 - Critère d'arrêt : taille du bloc analysé
 - Plusieurs types de modèles, avec un nombre de paramètres différent
- Quantification adaptative [Lloyd 1982]
- Codage arithmétique
- Optimisation de la représentation
 - ➡ Critère de débit



Analyse des distributions

Scalaires de contrôle



Scalaires de contrôle

- Distributions fortement corrélées
- Modélisation grâce à la somme de gaussiennes généralisées

41/55

Approximation Introduction – problématique Surfaces composées

Distribution

0.8

Analyse des distributions (2)



Modélisation de la distribution des scalaires de contrôle par la somme de quatre gaussiennes généralisées



Introduction – problématique Approximation

Surfaces composées

Analyse des distributions (3)

Matrices de subdivision



Modélisation de la distribution des coefficients de matrices de subdivision par une gaussienne généralisée



Introduction – problématique Approximation

Surfaces composées

Optimisation

- Pour chaque nœud du quadtree, plusieurs représentations possibles Différents types de modèles d'IFS projeté Différentes quantifications
- Possibilité de modéliser grâce aux 4 sous-nœuds
- \blacksquare Grande quantité de représentations possibles avec les caractéristiques (R_i, D_i)
- \blacksquare Optimisation de D_i sous la contrainte $R_i < R_{max}$: multiplicateur de Lagrange λ
 - Fonction de coût lagrangien

$$J(\lambda, R_i, D_i) = D_i + \lambda R_i$$

- Minimisation du coût lagrangien
- Méthode inspirée de [Ramchandran et Vetterli 1993]

44/55

Optimisation (2)



45/55

Optimisation (3)



Optimisation (4)



Optimisation (5)



Fin de l'algorithme quand il n'y a plus de point sur l'enveloppe convexe



Résultats

Image baboon



- Mieux que Jacquin
- Équivalent à EZW dans le très bas débit



Introduction – problématique Approximation

Surfaces composées

Résultats (2)

\blacksquare Compression à 0, 11 bpp (ratio 1:73)



Image originale (513×513)



Avec EZW (21, 5 dB)



Avec notre méthode (21, 4 dB)



Résultats (3)

Image peppers



- Mieux que Jacquin
- Mieux que JPEG pour R < 0, 3 bpp
- Mieux que EZW dans le très bas débit



Introduction – problématique Approximation

Surfaces composées

Résultats (4)



À partir de 0,12 bpp
 EZW devient moins
 performant



Introduction – problématique Approximation

Surfaces composées

Résultats (5)

 \blacksquare Compression à $0,085 \, bpp$ (ratio 1:94)



Image originale (257×257)

Avec EZW (27, 6 dB)

Avec notre méthode (28, 3 dB)



Conclusion

Les IFS projetés

- Modèle flexible et simple
- Méthode générale d'approximation : formulation en régression non-linéaire

Quadtree d'IFS projetés

- Combinaison d'IFS projetés grâce à un quadtree : adaptabilité
- Méthodes d'approximation associées
 - Méthode 1 : critère de distorsion maximale
 - Méthode 2 : chaîne complète de codage
- Résultats débit/distorsion équivalents voire meilleurs que EZW à très bas débit (< 0, 2 bpp)</p>



Perspectives

Améliorations à court terme

- Extension aux contours
- Temps de calcul
- Conditions de raccord
- Transmission progressive d'information

Améliorations à plus long terme

- Dictionnaire de fonctions fractales
- Base de fonctions



Distance de Hausdorff



Levenberg-Marquardt

Méthode de gradient améliorée
 Approximation linéaire
 Approximation quadratique



Levenberg-Marquardt (2)



Complexité – quelques éléments

Construction d'un IFS projeté

- Exponentiel par rapport à p
- p est fixé et ne bouge pas en pratique

Approximation

- Courbes
 - Reparamétrisation et rééchantillonnage : linéaire par rapport au nombre de points
 - Calcul des dérivées : linéaire par rapport au nombre de paramètres
 - À chaque itération, calcul de l'inverse d'une matrice avec Gauss-Jordan
 : n³
- Surfaces : idem, mais pas besoin de reparamétrage



Complexité – quelques éléments (2)

En pratique, c'est le calcul des dérivées qui prend le plus de temps, si on augmente le nombre de paramètres du modèle, c'est évidemment l'inversion de matrices qui prendrait le dessus

Combinaison d'IFS projetés

- Chaque approximation : plusieurs parties (voir ci-dessus)
- Puis quantification, codage, optimisation : choses connues



Adressage de Péano





Raccord de carreaux



Localisation de l'influence

Influence globale

Influence locale



Contraintes internes et externes



Références

Michael Barnsley. Fractals everywhere. Academic Press, 1988.

K Berkner. A wavelet-based solution to the inverse problem for fractal interpolation functions. In Tricot Levy Vehel, Lutton, editor, *Fractals in engineering'97*, pages 81–92. Springer Verlag, 1997.

Jacques Blanc-Talon. Controlled Approximation with Recursively Defined Curves. In INRIA, editor, *Fractals in Engineeringi, Arcachon, France*, June 1997.

Khalid Daoudi et Jacques Lévy Véhel. Speech signal modeling based on local regularity analysis. In IASTED/IEEE International Conference on Signal and Image Processing (SIP'95), Las Vegas, November 20-23, 1995.

Franck Davoine et Jean-Marc Chassery. Adaptive Delaunay triangulation for attractor image coding. In *Proceedings of the 12th International Conference on Pattern Recognition*, pages 801–803, Jerusalem, Israel, 1994.

Références (2)

Ben Goertzel, Hiroo Miyamoto, et Yoshimasa Awata. Fractal image compression with the genetic algorithm. *Complexity International*, 1, 1994.

Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana University Journal of Mathematics*, 30:713–747, 1981.

A E Jacquin. Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1:18–30, January 1992.

Stuart L. Lloyd. Least square quantization in pcm. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-28(2), March 1982.

Evelyne Lutton, Jacques Levy-Vehel, Guillaume Cretin, Philippe Glevarec, et Cédric Roll. Mixed IFS : resolution of the inverse problem using genetic programming. Rapport de recherche 2631, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, August 1995. Programme 5.

Kannan Ramchandran et Martin Vetterli. Best wavelet packet bases in rate-

Références (3)

distortion sense. IEEE Transactions on Image Processing, 2(2), April 1993.

Matthias Ruhl et Hannes Hartenstein. Optimal fractal coding is NP-hard. In *Proceedings DCC'97 (IEEE Data Compression Conference)*, pages 261–270, Snowbird, UT, USA, 1997.

D. Saupe, R. Hamzaoui, et H. Hartenstein. Fractal image compression: an introductory overview, 1996.

Z R Struzik, E H Dooijes, et F C A Groen. The solution of the inverse fractal problem with the help of wavelet decomposition. In M M Novak, editor, *Fractals reviews in the natural and applied sciences*, pages 332–343. Chapman and Hall, February 1995.

Lucia Vences et Isaac Rudomin. Fractal compression of single images and image sequences using genetic algorithms. Technical report, 1994.

Jacques Lévy Véhel et Khalid Daoudi. Generalized ifs for signal processing. In *IEEE DSP Workshop, Loen, Norway, September 1-4*, 1996.

Contraintes internes et externes (4)

Brendt Wohlberg et Gerhard de Jager. A review of the fractal image coding literature. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(12):1716–1729, December 1999.

Chems Eddine Zair. *Formes fractales à pôles basées sur une généralisation des IFS*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, June 1998.

