



**HAL**  
open science

# Contributions à l'étude des marchés discontinus par le calcul de Malliavin

Youssef El-Khatib

► **To cite this version:**

Youssef El-Khatib. Contributions à l'étude des marchés discontinus par le calcul de Malliavin. Mathématiques [math]. Université de la Rochelle, 2003. Français. NNT : . tel-00003912v2

**HAL Id: tel-00003912**

**<https://theses.hal.science/tel-00003912v2>**

Submitted on 17 Jan 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

Spécialité: Mathématiques  
École Doctorale de La Rochelle

présentée par **Youssef EL-KHATIB**  
pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de LA ROCHELLE

Titre de la thèse:

## CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DES MARCHÉS DISCONTINUS PAR LE CALCUL DE MALLIAVIN

Soutenue le 21 février 2003 devant le jury composé de:

<b>Ying HU</b>	<b>Professeur</b> <b>Université de Rennes I</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Monique JEANBLANC</b>	<b>Professeur</b> <b>Université d'Evry Val d'Essonne</b>	<b>Examineur</b>
<b>Nicolas PRIVAULT</b>	<b>Professeur</b> <b>Université de La Rochelle</b>	<b>Directeur de thèse</b>
<b>Marek RUTKOWSKI</b>	<b>Professeur</b> <b>Warsaw University of Technology</b>	<b>Examineur</b>
<b>Nizar TOUZI</b>	<b>Professeur</b> <b>CREST et Université de Paris I</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Josep VIVES</b>	<b>Professor titular</b> <b>Universitat Autònoma de Barcelona</b>	<b>Rapporteur</b>

## Remerciements

*Je tiens à remercier N. Privault, directeur de la thèse, qui m'a beaucoup appris. Sans son aide, ses idées et son énergie, cette thèse n'aurait pu aboutir. Je le remercie notamment pour sa patience, ses conseils, son écoute et sa disponibilité. Des phrases ne peuvent exprimer qu'un petit peu de ma gratitude envers lui.*

*Durant ces années de thèse, j'ai été accueilli au sein du Laboratoire de Mathématiques de La Rochelle dont j'ai beaucoup apprécié l'ambiance de convivialité. Je tiens à remercier ici tous ses membres, ainsi que tous les membres du département de Mathématiques.*

*Mes remerciements vont aussi à Y. Hu, N. Touzi et à J. Vives qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Je leur exprime toute ma reconnaissance notamment pour le temps qu'ils ont consacré à ce travail.*

*Je suis très honoré de la participation au jury de M. Jeanblanc, ainsi que d'avoir M. Rutkowski comme président de jury.*

*Je remercie aussi E. Bichot, actuellement doctorante en informatique à La Rochelle, pour sa contribution aux graphes de simulations du chapitre 3.*

*J'ai eu le plaisir de séjourner durant quatre mois de ma dernière année de thèse à l'IMPAN de Varsovie, grâce au soutien d'une bourse Marie Curie de la Communauté Européenne. Je tiens à remercier ici tous les membres du Département de Probabilités de l'IMPAN et tout particulièrement L. Stettner.*

*Cette thèse a été financée, via l'EGIDE, par une bourse du Ministère des Affaires Etrangères. Je remercie toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont ainsi contribué à la réalisation de ce travail.*

*Il est difficile ici d'exprimer toute la gratitude que j'ai envers ma grande et ma petite famille qui m'ont pleinement soutenu. Je leur dois infiniment et je leur suis très reconnaissant.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Formule de Clark et décompositions chaotiques</b>	<b>21</b>
2.1	Cas brownien unidimensionnel . . . . .	23
2.1.1	Calcul chaotique . . . . .	23
2.1.2	Interprétation probabiliste . . . . .	25
2.1.3	Intégrale de Skorohod . . . . .	27
2.2	Cas Poisson unidimensionnel . . . . .	28
2.2.1	Interprétation probabiliste de $D^N$ . . . . .	29
2.2.2	Intégrale de Skorohod . . . . .	30
2.3	Calcul chaotique multidimensionnel . . . . .	31
2.3.1	Cas brownien . . . . .	31
2.3.2	Cas Poisson . . . . .	33
2.3.3	Cas mixte brownien-Poisson . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Hedging in complete and incomplete markets driven by normal mar- tingales</b>	<b>37</b>
3.1	Introduction . . . . .	39
3.2	Notation and preliminaries . . . . .	41
3.2.1	Chaotic calculus . . . . .	41
3.2.2	Structure equations . . . . .	41
3.2.3	Change of variable formula . . . . .	44
3.2.4	Girsanov theorem . . . . .	45
3.3	Computations of predictable representations . . . . .	46
3.3.1	Clark formula . . . . .	46
3.3.2	Deterministic structure equation . . . . .	46
3.3.3	Markovian case . . . . .	49
3.4	Computations of hedging strategies . . . . .	50
3.4.1	Market model . . . . .	50
3.4.2	European options and deterministic structure . . . . .	52
3.4.3	Asian options and deterministic structure . . . . .	54
3.4.4	European options and Azéma martingales . . . . .	57

3.4.5	Lookback options . . . . .	58
3.5	Appendix 1: Lookback Options . . . . .	67
3.5.1	Options on extrema . . . . .	67
3.5.2	Partial Lookback option . . . . .	68
3.6	Appendix 2: Implicit volatility graphs . . . . .	69
3.6.1	Poisson case . . . . .	69
3.6.2	Azéma martingales . . . . .	70
3.7	Appendix 3: A stochastic volatility model . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Computations of price sensitivities via the Malliavin calculus on Poisson space</b>	<b>77</b>
4.1	Introduction . . . . .	79
4.2	Malliavin Calculus on Poisson space . . . . .	80
4.3	Integration by parts . . . . .	83
4.4	Market models . . . . .	85
4.5	Numerical simulations . . . . .	89
4.6	Conclusion . . . . .	93
4.7	Appendix 1: delta.c . . . . .	97
4.8	Appendix 2: gamma.c . . . . .	99
4.9	Appendix 3: rho.c . . . . .	101
4.10	Appendix 4: vega.c . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Un modèle à volatilité stochastique dirigé par des processus discontinus</b>	<b>105</b>
5.1	Introduction . . . . .	107
5.2	Préliminaires . . . . .	109
5.2.1	Calcul d'Itô . . . . .	109
5.2.2	Le modèle . . . . .	110
5.2.3	Changement de probabilité . . . . .	111
5.3	Mesure martingale équivalente minimisant l'entropie . . . . .	114
5.4	Couverture par la minimisation de la variance . . . . .	116
5.4.1	Couverture par la formule d'Itô . . . . .	116
5.4.2	Couverture par la formule de Clark-Ocone . . . . .	119

# Chapitre 1

## Introduction



En 1900, dans sa thèse de doctorat [Bach], Louis Bachelier utilise la loi normale pour modéliser le prix d'un actif boursier.

En 1973, Black et Scholes en considérant le mouvement brownien géométrique comme processus décrivant les trajectoires des prix des actifs financiers [BS73], obtiennent une formule donnant explicitement les prix et les stratégies de couverture des options européennes. Les hypothèses considérées dans leur modèle étaient restrictives. Ce qui rend leur modélisation peu réaliste. Un observateur de la bourse constate qu'au cours du temps les prix sautent soudainement, et par conséquent ses trajectoires ne sont pas continues comme celles du mouvement brownien. De plus, les études empiriques montrent que la volatilité est une fonction en "U" de  $K$ . (l'effet *smile*)  
Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse d'une volatilité constante dans le modèle de Black-Scholes.

Pour tenir compte des sauts qui peuvent se produire, des modèles à sauts ont été introduits, en décrivant l'aléa des prix par le processus de Poisson cf. par exemple [Mer76], ou par des processus mixtes brownien Poisson cf. par exemple [Bel99], ou des martingales discontinues, cf. par exemple [DP99].

En ce qui concerne l'effet *smile*, des modèles à volatilité stochastique (dirigés par des mouvements browniens) sont apparus, citons par exemple [HW87], [Re97].

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude de deux types de modèles: modèles à sauts et modèles à volatilité stochastique avec sauts. Nous utilisons le calcul de Malliavin et la formule de Clark-Ocone pour obtenir des stratégies de couverture pour les modèles considérés et pour calculer les *Greeks*<sup>1</sup> pour les options asiatiques dans un marché dirigé par un processus de Poisson.

L'utilisation du calcul de Malliavin dans l'étude des modèles financiers n'est pas récente. On la trouve par exemple dans les travaux de Ocone et Karatzas [KO91] pour le calcul d'un portefeuille optimal, dans Øksendal [Øks96] pour une nouvelle approche de la formule de Black-Scholes, Bermin [Ber98] pour les couvertures des options Lookback, Aase et al. [AOPU00] pour la couverture de marché poissonien, ou encore dans Dritschel et Protter [DP99] pour étudier la couverture d'un modèle dirigé par une martingale d'Azéma.

Elle s'est aussi développée avec Fournié et al., [FLLL01], [FLLLT99] sur le calcul des *Greeks* dans un modèle avec informations browniennes. Nous l'appliquons aux calculs des *Greeks* dans un marché dirigé par un processus de Poisson pour les options asia-

---

<sup>1</sup>Les *Greeks* sont les quantités qui déterminent les sensibilités de prix, comme le *Delta* -dérivée première du prix d'une option par rapport au prix initial de l'actif en jeu- ou le *Gamma* -dérivée seconde-



tiques.

## Chapitre 2: Formule de Clark et décompositions chaotiques

Nous considérons dans la première section du deuxième chapitre des rappels sur le calcul chaotique dans le cas d'un mouvement brownien standard unidimensionnel. On expose notamment la formule de Clark-Ocone, nous abordons la définition de l'intégrale de Skorohod et les formules liant cette intégrale à la dérivée de Malliavin.

La deuxième section est consacrée au cas Poisson. L'interprétation probabiliste de l'opérateur de Malliavin en tant qu'opérateur de différences finies nous montre que celui-ci n'est pas une dérivée. On aborde alors l'opérateur de dérivation sur l'espace de Poisson introduit par Carlen-Pardoux [CP90].

Dans la troisième section on considère le cas du mouvement brownien, du processus de Poisson et de processus mixte brownien-Poisson multidimensionnels. On expose l'intégrale stochastique multiple multidimensionnelle et l'opérateur de Malliavin. On aborde ainsi la formule de Clark, qui sera utilisé dans la dernière partie du chapitre 5.

## Chapitre 3: Couverture dans un marché dirigé par des martingales normales

Le chapitre trois est consacré à l'étude des marchés dirigés par des martingales ayant la propriété de représentation chaotique. Une martingale  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  est dite normale si  $d\langle M, M \rangle_t = dt$ . On considère dans la suite une martingale  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  satisfaisant

$$d\langle M, M \rangle_t = \alpha_t dt. \quad (1.1)$$

On note  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  la filtration engendrée par  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  et on travaille dans un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ . On désigne par  $L_\alpha^2([0, T])^{on}$  l'espace  $L^2([0, T], \alpha_t^2 dt)^{on}$  des fonctions symétriques de carrée  $\alpha_{t_1}^2 \cdots \alpha_{t_n}^2 dt_1 \cdots dt_n$  intégrable. L'intégrale stochastique multiple  $I_n(f_n)$  est définie par

$$I_n(f_n) = n! \int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} f_n(t_1, \dots, t_n) dM_{t_1} \cdots dM_{t_n}, \quad n \geq 1,$$

$f_n \in L_\alpha^2([0, T])^{on}$ , avec

$$E[I_n(f_n)I_m(g_m)] = n!1_{\{n=m\}} \langle f_n, g_m \rangle_{L_\alpha^2([0, T])^{on}}. \quad (1.2)$$

$(M_t)_{t \in [0, T]}$  possède la propriété de représentation chaotique si et seulement si toute variable aléatoire  $F \in L^2(\Omega)$  peut s'écrire  $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ . Soit  $D : \text{Dom}(D) \rightarrow L^2(\Omega \times [0, T], dP \times \alpha_t^2 dt)$  l'opérateur de gradient fermé mais non-borné défini par

$$D_t F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(*, t)), \quad dP \times dt - p.p.$$

où  $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in \text{Dom}(D)$ , i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n n! \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 < \infty.$$

La formule de Clark-Ocone nous permet d'avoir pour toute variable aléatoire  $F \in L^2(\Omega)$  la représentation prévisible

$$F = E[F] + \int_0^T E[D_t F | \mathcal{F}_t] dM_t, \quad (1.3)$$

La propriété de représentation chaotique pour  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  implique que  $([M, M]_t - \int_0^t \alpha_s^2 ds)_{t \in [0, T]}$  est une martingale, donc par (1.1) il existe un processus  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  tel que  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  vérifie l'équation de structure

$$d[M, M]_t = \alpha_t^2 dt + \phi_t dM_t, \quad t \in [0, T], \quad (1.4)$$

cf. [É90]. De plus pour tout processus  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  on a la formule suivante

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t L_s f(X_s) dM_s + \int_0^t U_s f(X_s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (1.5)$$

voir Prop. 3.3. Si de plus  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  est un processus de Markov (pas nécessairement homogène en  $t$ ) alors par unicité de la représentation (1.3) on obtient

$$E[D_t f(X_T) | \mathcal{F}_t] = (L_t(P_{t, T} f))(X_t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.6)$$

où  $(P_{s, t})_{0 \leq s \leq t \leq T}$  est le semi-groupe associé à  $(X_t)_{t \in [0, T]}$ , i.e

$$P_{s, t} f(X_s) = E[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = E[f(X_t) | X_s], \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

avec  $P_{s, t} \circ P_{t, u} = P_{s, u}$ ,  $0 \leq s \leq t \leq u \leq T$ . Pour  $\alpha_t = 1$  et  $\phi_t = 0$ ,  $t \in [0, T]$ , on obtient le mouvement brownien, le processus de Poisson correspond au cas où pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\phi_t$  est une constante non nulle. Le choix de  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  comme fonction déterministe permet à  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  d'être soit un mouvement brownien soit un processus

de Poisson, ceci dépend de l'annulation de  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$ . Voir [JP02] pour le modèle correspondant.

Le choix  $\phi_t = \beta M_t$ ,  $-2 \leq \beta < 0$ , considéré par [DP99], correspond à la martingale d'Azéma et donne un autre marché complet avec sauts.

Considérons un marché composé d'un actif risqué et d'un actif sans risque de prix  $(A_t = e^{\int_0^t r_s ds})_{t \in [0, T]}$  où  $r_s$  désigne le taux d'intérêt. On suppose que le prix de l'actif risqué  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  est donné sous  $P$  par

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t^- dM_t, \quad t \in [0, T], \quad S_0 = x. \quad (1.7)$$

Soient  $\eta_t$  et  $\zeta_t$  les nombres d'unités investies au temps  $t$  dans l'actif risqué et l'actif sans risque respectivement. Alors le processus de la valeur du portefeuille  $(V_t)_{t \in [0, T]}$  est donné par

$$V_t = \zeta_t A_t + \eta_t S_t, \quad t \in [0, T]. \quad (1.8)$$

En supposant que la stratégie  $(\eta_t, \zeta_t)_{t \in [0, T]}$  est auto-finançante, on obtient

$$V_T e^{-\int_0^T r_t dt} = V_0 + \int_0^T \sigma_t \eta_t S_t e^{-\int_0^t r_s ds} dM_t, \quad (1.9)$$

Supposons que nous cherchons la stratégie  $(\zeta_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$  qui atteint au temps  $T$  la valeur  $V_T = F$ . En Comparant (1.9) et (1.3) on obtient

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-\int_0^T r_s ds} E[F], \\ \eta_t &= \sigma_t^{-1} S_t^{-1} E[D_t F \mid \mathcal{F}_t] e^{-\int_t^T r_s ds}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

L'équation (1.10) nous donne des formules explicites pour les stratégies de couverture. Notons  $(S_{t,T}^x)_{t \in [0, T]}$  le prix de l'actif risqué dirigé par  $(M_t)_{t \in [0, T]}$ , qui démarre par  $x$  au temps  $t$ , avec volatilité  $(\sigma_t)_{t \in [0, T]}$ , et soit  $i_t = 1_{\{\phi_t=0\}}$ ,  $j_t = 1 - i_t$ ,  $S_t = S_{0,t}^1$ ,  $t \in [0, T]$ . Alors dans le cas du modèle mixte brownien-Poisson considéré dans [JP02] i.e  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  vérifie l'équation de structure (1.4) avec  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  déterministe en trouvant une interprétation probabiliste de l'opérateur de Malliavin.  $D$  -voir Prop. 3.6- on obtient la stratégie de couverture  $(\eta_t)_{t \in [0, T]}$  d'un call européen et de strike  $K$

$$t \mapsto \frac{e^{-\int_t^T r_s ds}}{\sigma_t S_t} E \left[ i_t \sigma_t S_{t,T}^x 1_{\{S_{t,T}^x \geq K\}} + \frac{j_t}{\phi_t} (\sigma_t \phi_t S_{t,T}^x - (K - S_{t,T}^x)^+) 1_{\{S_{t,T}^x \geq \frac{K}{1+\sigma_t}\}} \right]_{x=S_t}.$$

Cette formule est une généralisation de la formule de Black et Scholes (cas brownien où  $\phi_t = 0$ ,  $t \in [0, T]$ ), et la formule dans [AOPU00], Th. 6.1, dans le cas du Poisson ( $\phi_t = 1$ ,

$t \in [0, T]$ ). La stratégie de couverture d'un call asiatique de payoff  $\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K\right)^+$  dans ce modèle est aussi déterminée par

$$\begin{aligned} \eta_t = & \frac{1}{\sigma_t} e^{-\int_t^T r_s ds} \left[ \tilde{C}(t, Y_t) \sigma_t \right. \\ & \left. + (1 + \sigma_t \phi_t) \left( \frac{j_t}{\phi_t} \left( \tilde{C} \left( t, \frac{Y_t}{1 + \sigma_t \phi_t} \right) - \tilde{C}(t, Y_t) \right) - i_t \sigma_t Y_t \partial_2 \tilde{C}(t, Y_t) \right) \right]. \end{aligned}$$

où

$$S_t \tilde{C}(t, Y_t) = E \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right],$$

et

$$Y_t = \frac{1}{S_t} \left( \frac{1}{T} \int_0^t S_u du - K \right), \quad t \in [0, T].$$

En ce qui concerne le cas du modèle de la martingale d'Azéma de [DP99], i.e.  $d[M, M]_t = dt + \beta M_t dM_t$ ,  $-2 \leq \beta < 0$ , le processus bidimensionnel  $(S_t, M_t)_{t \in [0, T]}$  est Markovien, ce qui permet d'utiliser la formule (1.6) et d'obtenir  $\eta_t$

$$\begin{aligned} t \mapsto & \frac{e^{-\int_t^T r_s ds}}{\beta M_t \sigma_t S_t} E \left[ \sigma_t \beta (y + M_T - M_t) S_{t,T}^x 1_{\left[ \frac{K}{1 + \sigma_t \beta (y + M_T - M_t)}, \infty \right]}(S_{t,T}^x) \right. \\ & \left. + (S_{t,T}^x - K) 1_{\left[ \frac{K}{1 + \sigma_t \beta (y + M_T - M_t)}, K \right]}(S_{t,T}^x) \right]_{x=S_t}^{y=M_t}, \end{aligned}$$

voir Prop. 3.11.

On vérifie dans ce chapitre que la méthode de  $\Delta$ -couverture peut être appliquée aussi aux options Lookback dans le cas d'un modèle avec informations browniennes. En effet, supposons que sous la probabilité risque neutre l'actif risqué est donné par

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad t \in [0, T], \quad S_0 = x. \quad (1.11)$$

Posons  $m_s^t = \inf_{u \in [s, t]} S_u$ ,  $M_s^t = \sup_{u \in [s, t]} S_u$ ,  $0 \leq s \leq t \leq T$ , et soit  $\mathcal{M}_s^t$  tel qu'il prend soit la valeur  $m_s^t$  soit  $M_s^t$ . Notons  $H(S_T, \mathcal{M}_0^T)$  le payoff alors le prix d'une option Lookback  $\text{Look} = (\text{Look}_t)_{t \in [0, T]}$  est

$$\text{Look}_t = e^{-r(T-t)} E[H(S_T, \mathcal{M}_0^T) \mid \mathcal{F}_t], \quad H \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^2).$$

On a

**Proposition 1.1.** *Il existe une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que*

$$f(S_t, \mathcal{M}_0^t, t) = E[H(S_T, \mathcal{M}_0^T) \mid \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T.$$

*et la stratégie de couverture est*

$$\eta_t = e^{-r(T-t)} \partial_1 f(S_t, \mathcal{M}_0^t, t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.12)$$

On calcule la stratégie de couverture pour une option Lookback standard. Dans Appendix 1, on calcule les stratégies de couverture d'autres options Lookback.

Dans Appendix 3 de ce chapitre, on étudie un modèle à volatilité stochastique dirigé par une martingale d'Azéma bidimensionnelle. Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} = (X_t^1, X_t^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$  une martingale bidimensionnelle. On suppose que  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  vérifie le système d'équations de structure suivant

$$\begin{cases} d[X_t^1, X_t^1] = dt + p(X_{t-})dX_t^1, \\ d[X_t^1, X_t^2] = 0, \\ d[X_t^2, X_t^2] = dt + q(X_{t-})dX_t^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (1.13)$$

avec  $p(x, y) = ax + by + c$ ,  $q(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ , et  $X_0 = (0, 0)$ . Ce qui implique par Th. 1, Prop. 1 et Prop. 2 de [AÉ96] que si  $a, \beta \in [-2, 0[$  et  $0 < b\alpha < a\beta$  alors (1.13) admet une solution unique qui a la propriété de représentation chaotique. - On vérifie la formule d'Itô suivante

**Théorème 1.2.** *Soit  $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  une martingale bidimensionnelle telle que*

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t H_s dX_s, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

où  $H = (h^{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  est un processus prévisible. Alors pour  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  on a

$$df(Z_t) = \mathcal{L}^f(t)dt + U_p^f(t)dX_t^1 + U_q^f(t)dX_t^2.$$

avec

$$\begin{aligned} U_p^f(t) &= \frac{1}{p(X_{t-})} (f(Z_{t-}^1 + h_t^{11}p(X_{t-}), Z_{t-}^2 + h_t^{21}p(X_{t-})) - f(Z_{t-}^1, Z_{t-}^2)), \\ U_q^f(t) &= \frac{1}{q(X_{t-})} (f(Z_{t-}^1 + h_t^{12}q(X_{t-}), Z_{t-}^2 + h_t^{22}q(X_{t-})) - f(Z_{t-}^1, Z_{t-}^2)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^f(t) &= \frac{1}{p(X_{t-})} \left( U_p^f(t) - h_t^{11} \frac{\partial f}{\partial x}(Z_{t-}^1, Z_{t-}^2) - h_t^{21} \frac{\partial f}{\partial y}(Z_{t-}^1, Z_{t-}^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{q(X_{t-})} \left( U_q^f(t) - h_t^{12} \frac{\partial f}{\partial x}(Z_{t-}^1, Z_{t-}^2) - h_t^{22} \frac{\partial f}{\partial y}(Z_{t-}^1, Z_{t-}^2) \right). \end{aligned}$$

On considère un actif risqué  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  défini par

$$dS_t = \sigma(X_{t-})S_t dX_t^1, \quad t \in [0, T], \quad S_0 > 0.$$

En utilisant l'existence d'une fonction  $C$  telle que

$$C(S_t, X_t^1, X_t^2, t) = E[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t],$$

et en appliquant la formule d'Itô du théorème précédent sur  $C$ , on trouve une stratégie de couverture pour ce modèle minimisant la variance  $E[((S_T - K)^+ - V_T)^2]$  et est donnée par

$$\tilde{\gamma}_t = \frac{C(S_t + \sigma(X_t^2)p(X_t), X_t^1 + p(X_t), X_t^2, t) - C(S_t, X_t^1, X_t^2, t)}{p(X_t)S_t\sigma(X_t^-)}.$$

## Chapitre 4: Application du calcul de Malliavin aux calculs de sensibilités de prix dans le cas Poisson

Il existe principalement deux approches au calcul de Malliavin pour le cas Poisson. La première utilise un opérateur de différences finies qui n'est pas une dérivée. La deuxième approche consiste à perturber les instants de sauts, on cite par exemple l'opérateur de dérivation introduite dans [CP90]. Pour une fonctionnelle  $F = f(T_1, \dots, T_n)$  du processus de Poisson on a

$$D_t F = - \sum_{k=1}^{k=n} 1_{[0, T_k]}(t) \partial_k f(T_1, \dots, T_n).$$

Par contre son domaine ne contient pas la valeur au temps  $t$  du processus de Poisson  $N_t$ . Mais, les fonctions de la forme  $\int_0^T F(t, N_t) dt$  appartiennent au domaine de  $D$ , ce qui a permis de traiter le cas d'une option asiatique dans un marché poissonien. On calcule dans ce chapitre les *Greeks* pour une option asiatique dont le prix de l'actif risqué est  $S_t^\zeta = F^\zeta(t, N_t)$  et de payoff

$$f \left( \int_0^T S_u^\zeta du \right).$$

Soit  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un processus de Poisson standard. et soit  $H$  l'espace de Cameron-Martin

$$H = \left\{ \int_0^\cdot \dot{w}_t dt : \dot{w} \in L^2(\mathbb{R}_+) \right\}.$$

Notons  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctionnelles de la forme

$$F = f(T_1, \dots, T_n), \quad f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 1,$$

posons

$$\mathcal{U} = \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} F_i u_i, \quad F_1, \dots, F_n \in \mathcal{S}, \quad u_1, \dots, u_n \in H \right\},$$

et soit l'opérateur  $D$  défini par

$$D_w f(T_1, \dots, T_d) = - \sum_{k=1}^{k=d} w_{T_k} \partial_k f(T_1, \dots, T_d).$$

Pour  $u \in \mathcal{U}$  de la forme

$$u = \sum_{i=1}^{i=n} F_i u_i, \quad F_i \in \mathcal{S}, \quad u_i \in H,$$

$D$  est défini par

$$D_u F = \sum_{i=1}^{i=n} F_i D_{u_i} F.$$

On a cf. par exemple [Pr02]

**Proposition 1.3.** *a)  $D$  est fermable et admet un adjoint  $\delta$  tel que*

$$E[D_u F] = E[F \delta(u)], \quad u \in \mathcal{U}, \quad F \in \mathcal{S}.$$

*b) Pour  $F \in \text{Dom}(D)$  et  $u \in \text{Dom}(\delta)$  tels que  $uF \in \text{Dom}(\delta)$  on a*

$$\delta(uF) = F \int_0^T \dot{u}_t d\tilde{N}_t - D_u F.$$

*c) De plus,  $\delta$  coïncide avec l'intégrale stochastique dans le cas Poisson pour les processus adaptés appartenant à  $L^2(\Omega; H)$ :*

$$\delta(u) = \int_0^\infty \dot{u}_t d\tilde{N}_t.$$

Soit  $I$  un interval ouvert de  $\mathbb{R}$ . On vérifie la proposition suivante qui nous permet de calculer les différentes valeurs des *Greeks*.

**Proposition 1.4.** *Soient  $(F^\zeta)_{\zeta \in I}$  et  $(G^\zeta)_{\zeta \in I}$ , deux familles de fonctionnelles aléatoires de  $\text{Dom}(D)$ , continûment différentiable en  $\zeta \in I$ . Soit  $(w_t)_{t \in [0, T]}$  un processus vérifiant*

$$D_w F^\zeta \neq 0, \quad \text{a.s. on } \{\partial_\zeta F^\zeta \neq 0\}, \quad \zeta \in I,$$

*tel que  $w G^\zeta \partial_\zeta F^\zeta / D_w F^\zeta$  est continue en  $\zeta$ , et est dans  $\text{Dom}(\delta)$ . On a*

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} E[G^\zeta f(F^\zeta)] = E \left[ f(F^\zeta) \delta \left( G^\zeta w \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \right) \right] + E[\partial_\zeta G^\zeta f(F^\zeta)],$$

*pour toute fonction  $f$  telle que  $f(F^\zeta) \in L^2(\Omega)$ ,  $\zeta \in I$ .*

## Chapitre 5: Modèle à volatilité stochastique dirigé par des processus discontinus

Le chapitre cinq considère un modèle à volatilité stochastique avec sauts. Soient  $W = (W^{(1)}, W^{(2)})$  un mouvement brownien 2-dimensionnel et  $N = (N^{(1)}, N^{(2)})$  un processus de Poisson 2-dimensionnel à composantes indépendantes d'intensité déterministe  $(\int_0^t \lambda_s^{(1)} ds, \int_0^t \lambda_s^{(2)} ds)$ . On travaille dans un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$ , où  $\mathcal{F}_t$  est la filtration engendrée par  $W$  et  $N$ . On désigne par  $M = (M^{(1)}, M^{(2)})$  le processus de Poisson compensé donné par

$$dM_t^{(i)} = dN_t^{(i)} - \lambda_t^{(i)} dt, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2.$$

L'actif risqué est donné par

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu_t dt + \sigma(t, Y_t) [a_t^{(1)} dW_t^{(1)} + a_t^{(3)} dM_t^{(1)}], \quad t \in [0, T], \\ S_0 &= x > 0, \end{aligned}$$

où  $(Y_t)_{t \in [0, T]}$  est donné par

$$\begin{aligned} dY_t &= \mu_t^Y dt + \sum_{i=1}^2 \sigma_t^{(i)} [a_t^{(i)} dW_t^{(i)} + a_t^{(i+2)} dM_t^{(i)}], \\ Y_0 &= y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

avec pour  $1 \leq i \leq 4$ ,  $a^{(i)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction déterministe. On suppose que

$$\sigma(t, \cdot) \neq 0, \quad \text{et que} \quad 1 + \sigma(t, \cdot) a_t^{(3)} > 0, \quad t \in [0, T].$$

Le marché est incomplet, et il existe une infinité de mesures martingales équivalentes à  $P$ . On cherche alors celle qui minimise l'entropie. Soit  $Q$  une mesure martingale équivalente à  $P$ . Alors il existe (cf. Prop. 5.6) un processus prévisible 4-dimensionnel  $(\beta_t^{(1)}, \beta_t^{(2)}, \beta_t^{(3)}, \beta_t^{(4)})_{t \in [0, T]}$  tel que  $\beta^{(3)}, \beta^{(4)} > -1$  et la densité de Radon-Nikodym de  $Q$  par rapport à  $P$  est donnée par

$$\begin{aligned} \rho_T &= \prod_{i=1}^2 \exp \left( \int_0^T \beta_s^{(i)} dW_s^{(i)} - \frac{1}{2} \int_0^T (\beta_s^{(i)})^2 ds \right) \exp \left( \int_0^T \ln(1 + \beta_s^{(i+2)}) dM_s^{(i)} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \lambda_s^{(i)} [\ln(1 + \beta_s^{(i+2)}) - \beta_s^{(i+2)}] ds \right). \end{aligned}$$

De plus  $\beta^{(1)}$  et  $\beta^{(3)}$  sont liés par la relation

$$\mu_t - r_t + \beta_t^{(1)} a_t^{(1)} \sigma(t, Y_t) + \lambda_t^{(1)} \beta_t^{(3)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) = 0.$$



Désignons par  $I(Q, P)$  l'entropie relative d'une mesure martingale équivalente  $Q$  par rapport à  $P$ , i.e

$$I(Q, P) = E_P \left[ \frac{dQ}{dP} \ln \frac{dQ}{dP} \right].$$

Soit  $\hat{Q}$  la mesure martingale équivalente correspondante au vecteur  $(\hat{\beta}_t^{(1)}, \hat{\beta}_t^{(2)}, \hat{\beta}_t^{(3)}, \hat{\beta}_t^{(4)})_{t \in [0, T]}$  avec

$$\hat{\beta}_t^{(2)} = \hat{\beta}_t^{(4)} = 0, \quad \hat{\beta}_t^{(1)} = \begin{cases} \frac{r_t - \mu_t - \lambda_t^{(1)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) \hat{\beta}_t^{(3)}}{\sigma(t, Y_t) a_t^{(1)}} & \text{si } a^{(1)} \neq 0, \\ 0 & \text{si } a^{(1)} = 0, \end{cases}$$

et  $\hat{\beta}_t^{(3)}$  est l'unique solution de

$$\lambda_t^{(1)} \sigma(t, Y_t) (a_t^{(3)})^2 x + (a_t^{(1)})^2 \sigma(t, Y_t) \left( \frac{x}{1+x} \right) - a_t^{(3)} (r_t - \mu_t) = 0.$$

Alors  $\hat{Q}$  minimise  $I(P, Q)$  sous toutes les mesures martingales équivalentes  $Q$ , voir Prop. 5.9.

Soient les processus  $\hat{W} = (\hat{W}^{(1)}, \hat{W}^{(2)})$  et  $\hat{M} = (\hat{M}^{(1)}, \hat{M}^{(2)})$  où pour  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \hat{W}_t^{(i)} &= W_t^{(i)} - \int_0^t \hat{\beta}_s^{(i)} ds, \quad t \in [0, T], \\ \hat{M}_t^{(i)} &= M_t^{(i)} - \int_0^t \lambda_s^{(i)} \hat{\beta}_s^{(i+2)} ds, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

Par le théorème de Girsanov  $\tilde{W}$  est un  $Q^\beta$ -mouvement brownien 2-dimensionnel et  $\tilde{M}$  est une  $Q^\beta$ -processus de Poisson compensé. Sous  $\hat{Q}$  on minimise la variance

$$E_{\hat{Q}} \left[ ((S_T - K)^+ - \hat{V}_T)^2 \right],$$

pour trouver une stratégie de couverture pour ce modèle ( $\hat{V}_T$  désigne la valeur du portefeuille à l'échéance  $T$ ). Ceci étant par deux méthodes: la première via la formule d'Itô et la deuxième par le calcul de Malliavin. Il existe une fonction

$$\hat{C} : [0, T] \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

qui admet de dérivées partielles d'ordre 2 continues par rapport à  $x$  et  $y$  et de dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à  $t$  telle que

$$\hat{C}(t, x, y) = E_{\hat{Q}} \left[ \left( x + \int_t^T S_s r_s ds + \int_t^T S_s \sigma(s, Y_s) [a_s^{(1)} d\tilde{W}_s^{(1)} + a_s^{(3)} d\tilde{M}_s^{(1)}] - K \right)^+ \right]_{y=Y_t}^{x=S_t}.$$

La stratégie minimisant la variance est donnée par la première méthode par

$$\hat{\eta}_t = \frac{a_t^{(1)}L^{(1)}(t, S_t, Y_t) + \lambda_t^{(1)}(1 + \hat{\beta}_t^{(3)})a_t^{(3)}L^{(3)}(t, S_t, Y_t)}{((a_t^{(1)})^2 + \lambda_t^{(1)}(1 + \hat{\beta}_t^{(3)})(a_t^{(3)})^2)e^{\int_t^T r_s ds}\sigma(t, Y_t)S_t},$$

où

$$\begin{aligned} L^{(1)}(t, x, y) &= xa_t^{(1)}\sigma(t, y)\partial_x\hat{C}(t, x, y) + \sigma_t^{(1)}a_t^{(3)}\partial_y\hat{C}(t, x, y) \\ L^{(3)}(t, x, y) &= \hat{C}\left(t, x, y + \sigma_t^{(1)}a_t^{(3)}\right) + \hat{C}\left(t, x(1 + \sigma(t, y)a_t^{(3)}), y\right) - 2\hat{C}(t, x, y). \end{aligned}$$

Et la deuxième nous donne

$$\hat{\eta}_t = \frac{a_t^{(1)}E_{\hat{Q}}[D_t^{\hat{W}^{(1)}}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] + \lambda_t^{(1)}(1 + \hat{\beta}_t^{(3)})a_t^{(3)}E_{\hat{Q}}[D_t^{\hat{N}^{(1)}}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t]}{((a_t^{(1)})^2 + \lambda_t^{(1)}(1 + \hat{\beta}_t^{(3)})(a_t^{(3)})^2)e^{\int_t^T r_s ds}\sigma(t, Y_t)S_t},$$

où  $D^{\hat{W}^{(1)}}$  et  $D^{\hat{N}^{(1)}}$  désignent les gradients de Malliavin dans les directions de  $\hat{W}^{(1)}$  et  $\hat{N}^{(1)}$  respectivement.



# Bibliographie

- [AÉ96] S. Attal and M. Émery. Martingales d’Azéma bidimensionnelles. *Astérisque*, 236, pages 9–21, 1996.
- [AOPU00] K. Aase, B. Øksendal, N. Privault, and J. Ubøe. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. *Finance and Stochastics*, 4(4) pages 465–496, 2000.
- [Bach] L. Bachelier. Théorie de la spéculation. Thèse, 1900. *Annales de l’Ecole Normale Supérieure*, 3ème série, Tome XVII, pages 21–86.
- [Bel99] N. Bellamy. Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des processus discontinus. Thèse, Université d’Evry, 1999.
- [Ber98] H. Bermin. Essays on Lookback options: a Malliavin calculus approach. PhD thesis, Lund University, 1998.
- [BS73] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political Economy*, 3, pages 637–654, 1973.
- [CP90] E. Carlen and E. Pardoux. Differential calculus and integration by parts on Poisson space. In S. Albeverio, Ph. Blanchard, and D. Testard, editors, *Stochastics, Algebra and Analysis in Classical and Quantum Dynamics (Marseille, 1988)*, volume 59 of *Math. Appl.*, pages 63–73. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.
- [DP99] M. Dritschel and Ph. Protter. Complete markets with discontinuous security price. *Finance and Stochastics*, 3(2), 1999.
- [É90] M. Émery. On the Azéma martingales. In *Séminaire de Probabilités XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 66–87. Springer Verlag, 1990.
- [FLLLT99] E. Fournié, J.M. Lasry, J. Lebuchoux, P.L. Lions, and N. Touzi. Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. *Finance and Stochastics*, 3(4), pages 391–412, 1999.

- [FLLL01] E. Fournié, J.M. Lasry, J. Lebuchoux, and P.L. Lions. Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance. II. *Finance Stoch.*, 5(2), pages 201–236, 2001.
- [HW87] J. Hull and A. White. The pricing of options with stochastic volatilities *Journal of Finance*, 42, pages 281–300, 1987.
- [JP02] M. Jeanblanc and N. Privault. A complete market model with Poisson and Brownian components. In R. Dalang, M. Dozzi, and F. Russo, editors, *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications (Ascona, 1999)*, volume 52 of *Progress in Probability*, pages 189–204. Birkhäuser, Basel, 2002.
- [KO91] I. Karatzas and D.L. Ocone. A generalized Clark representation formula with application to optimal portfolios. *Stochastics and Stochastics Reports*, 34, pages 187–230, 1991.
- [Mer76] R.C. Merton. Option Pricing when underlying stock returns are Discontinuous. *J. Financial Econ.*, 3, pages 125–144, 1976.
- [Øks96] B. Øksendal. *An introduction to Malliavin calculus with applications to economics*. Working paper no. 3, Institute of Finance and Management Science, Norwegian School of Economics and Business Administration, 1996.
- [Pr02] N. Privault. Distribution-valued gradient and chaotic decompositions of Poisson jump times functionals. *Publicacions Matemàtiques*, 46, pages 27–48, 2002.
- [Re97] E. Renault. Econometric models of option pricing errors dans D. Kreps et K. Wallis (éds.), *Advanced in Economics and Econometrics*, Vol 3, Cambridge University Press, pages 281–300, 1997.

## Chapitre 2

# Formule de Clark et décompositions chaotiques

Nous considérons dans ce chapitre le calcul chaotique dans le cas brownien, Poisson uni et multidimensionnel et le cas mixte brownien-Poisson multidimensionnel. On expose la formule de Clark-Ocone, nous abordons la définition de l'intégrale de Skorohod et des formules liant cette intégrale à l'opérateur de Malliavin.



Ce chapitre présente quelques rappels sur le calcul chaotique et la formule de Clark.

Dans la première section on considère la dérivée de Malliavin et l'intégrale de Skorohod dans le cas d'un mouvement brownien unidimensionnel. On se réfère aux livres [Øks96], [Nu95], et [Ust97].

Le calcul chaotique cas Poisson est traité dans le paragraphe 2.2. On considère l'opérateur de différences finies introduit par [NV90] et son adjoint. On expose l'opérateur de dérivation introduit par [CP90]. On se réfère aussi à [Pr97b] et [Pr02].

Paragraphe 2.3 considère le cas du mouvement brownien, du processus de Poisson et de processus mixte brownien-Poisson multidimensionnels. On définit l'intégrale stochastique multiple multidimensionnelle et l'opérateur de Malliavin en se référant aux articles de [Lø99] et [Pr97a].

## 2.1 Cas brownien unidimensionnel

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$  un espace de Wiener standard filtré par la filtration naturelle du mouvement brownien standard unidimensionnel  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ .  $\Omega = \mathcal{C}_0([0, T])$ , est l'espace des fonctions continues qui s'annulent en  $t = 0$ .

### 2.1.1 Calcul chaotique

Soit  $f$  une fonction symétrique de  $L^2([0, T]^n)$ , i.e  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$  pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . On appelle  $n$ -ième intégrale stochastique itérée d'Itô de la fonction  $f$ , l'intégrale

$$I_n(f) := n! \int_0^T \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) dW_{t_1} \dots dW_{t_n}.$$

$I_0$  désigne l'application identité de  $\mathbb{R}$ , i.e pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $I_0(x) = x$ . Pour  $f \in L^2([0, T]^n)$  et  $g \in L^2([0, T]^m)$ , on a

$$E[I_n(f)I_m(g)] = \begin{cases} n! \langle f, g \rangle_{L^2([0, T]^n)} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $h_n(x)$  le polynôme de Hermite d'ordre  $n$

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{1}{2}x^2}).$$

On a



**Proposition 2.1.** *Pour tout  $f \in L^2([0, T])$  on a*

$$\begin{aligned} I_n(f^{\otimes n}) &:= n! \int_0^T \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n) dW_{t_1} \dots dW_{t_n} \\ &= \|f\|_{L^2([0, T])}^n h_n \left( \frac{\int_0^T f(t) dW_t}{\|f\|_{L^2([0, T])}} \right). \end{aligned}$$

**Théorème 2.2.** *(Représentation chaotique d'Itô-Wiener) Soit  $F$  une variable aléatoire telle que*

$$\|F\|_{L^2(\Omega)}^2 := E[F^2] < \infty,$$

*alors il existe une unique suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions symétriques déterministes  $f_n \in L^2([0, T]^n)$  telle que*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n).$$

*De plus on a*

$$\|F\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|_{L^2([0, T]^n)}^2.$$

**Définition 2.3.** *Soit  $D : \text{Dom}(D) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega \times [0, T])$  l'opérateur qui fait correspondre à toute variable aléatoire  $F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in \text{Dom}(D)$  le processus  $(D_t F)_{t \in [0, T]}$  où*

$$D_t F := \sum_{n=0}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(*, t)), \quad dP \times dt - p.p. \quad (2.1)$$

*avec  $f_n(*, t) := f_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t)$  et où  $\text{Dom}(D)$  désigne le domaine de  $D$ .*

Soit

$$\mathbb{D}_{1,2} := \left\{ F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in L^2(\Omega) : \sum_{n=0}^{\infty} n n! \|f_n\|_{L^2([0, T]^n)}^2 < \infty \right\}.$$

On a

1.  $\text{Dom}(D) = \mathbb{D}_{1,2}$ .
2.  $D$  est un opérateur de dérivation.
3.  $D$  est un opérateur fermé:  
Soient  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{D}_{1,2}$  et  $F \in L^2(\Omega)$ . Si  $F_n \rightarrow F$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $D.F_n$  converge dans  $L^2([0, T] \times \Omega)$ , alors  $F \in \mathbb{D}_{1,2}$  et  $D.F = \lim_{n \rightarrow \infty} D.F_n$ .

Les fonctions  $f_n$  de la décomposition chaotique  $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$  peuvent être identifiées à l'aide de l'opérateur  $D$ . On a pour  $F \in \text{Dom}(D)$

$$f_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} E[D_{t_1} \dots D_{t_n} F], \quad t_1, \dots, t_n \in [0, T].$$

**Exemple 2.4.** Soit  $(u_t)_{0 \leq t \leq T} \in L^\infty(\Omega \times [0, T])$  un processus adapté, on désigne par  $(\xi_t(u))_{0 \leq t \leq T}$  la solution de l'équation

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s u_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

qui est donnée par

$$\xi_t(u) = \exp \left( \int_0^t u_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 ds \right).$$

En utilisant Prop. 2.1 et l'égalité

$$\exp \left( tx - \frac{\lambda t^2}{2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^{n/2}}{n!} h_n \left( \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right),$$

$\xi_t(u)$  peut s'écrire sous la forme

$$\xi_t(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n((u1_{[0,t]})^{\otimes n}),$$

et on a

$$D_s \xi_t(u) = 1_{[0,t]}(s) u_s \xi_t(u), \quad s, t \in [0, T].$$

La formule de Clark est donnée dans la proposition suivante.

**Proposition 2.5.** Soit  $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ , alors on a

$$F = E[F] + \int_0^T E[D_t F | \mathcal{F}_t] dW_t. \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Interprétation probabiliste

On désigne par  $\mathcal{S}$  l'espace vectoriel engendré par les vecteurs exponentiels de la forme  $\xi_T(u)$ ,  $u \in L^\infty([0, T])$  de l'exemple précédent.

Notons que  $\mathcal{S}$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ .

**Proposition 2.6.** Soit  $F \in \mathcal{S}$  et soit  $g \in L^2([0, T])$ . Alors on a

$$\langle DF, g \rangle_{L^2([0, T])} = \frac{d}{d\varepsilon} F \left( \omega(\cdot) + \varepsilon \int_0^\cdot g_s ds \right) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad F \in \mathcal{S}.$$

**Définition 2.7.** Soit  $\mathbb{P}$  l'ensemble des variables aléatoires  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme

$$F(\omega) = f \left( \int_0^T f_1(t) dW_t, \dots, \int_0^T f_n(t) dW_t \right),$$

où  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$  est un polynôme en  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$  et les fonctions  $f_i \in L^2([0, T])$  sont déterministes.

Soit la norme  $\|\cdot\|_{1,2}$  définie par

$$\|F\|_{1,2} := \|F\|_{L^2(\Omega)} + \|D.F\|_{L^2([0,T] \times \Omega)}, \quad F \in L^2(\Omega).$$

Alors  $\mathbb{D}_{1,2}$  coïncide avec le complété de  $\mathbb{P}$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_{1,2}$ . Les propositions suivantes aident dans la pratique à calculer la dérivée  $D_t F$ , pour  $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ .

**Proposition 2.8.** Soit  $F = f \left( \int_0^T f_1(t) dW_t, \dots, \int_0^T f_n(t) dW_t \right) \in \mathbb{P}$ . Alors on a

$$D_t F = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \left( \int_0^T f_1(t) dW_t, \dots, \int_0^T f_n(t) dW_t \right) f_k(t).$$

**Proposition 2.9.** Soit  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  un processus adapté tel que pour tout  $t \in [0, T]$ , on a  $X_t \in \mathbb{D}_{1,2}$ . Alors  $D_t X_s$  est  $\mathcal{F}_s$ -adapté pour tout  $0 \leq t \leq T$ , et

$$D_t X_s = 0, \quad t > s.$$

**Proposition 2.10.** Soit  $F = (F^1, \dots, F^d) \in (\mathbb{D}_{1,2})^d$  et soit  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $\phi$  est lipschitzienne i.e il existe  $K > 0$  tel que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , on a

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq K |x - y|,$$

alors  $\phi(F) \in \mathbb{D}_{1,2}$  et il existe un vecteur aléatoire  $G = (G^1, \dots, G^d)$  borné par  $K$  tel que

$$D(\phi(F^1, \dots, F^d)) = \sum_{i=1}^{i=d} G^i D F^i.$$

En particulier si  $\phi$  est continûment différentiable ou si le vecteur  $F$  est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^d$ , alors on a

$$G^i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(F^1, \dots, F^d).$$

### 2.1.3 Intégrale de Skorohod

Soit  $u = (u_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus stochastique  $((t, \omega)$ -mesurable), tel que  $u_t(\cdot)$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable et  $E[u_t^2] \leq \infty$  et ceci pour tout  $t \in [0, T]$ . Alors en appliquant la représentation chaotique sur  $u_t$ , on obtient

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} n I_n(f_{n,t}(\cdot)) \quad (2.3)$$

où  $f_{n,t}(t_1, \dots, t_n) = f_n(t_1, \dots, t_n, t)$ . La fonction  $f_{n,t}$  est symétrique par rapport aux premières  $n$  variables, sa symétrisation est alors donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) &= \frac{1}{n+1} [f_n(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) + \dots + f_n(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \\ &\dots, t_{n+1}, t_i) + \dots + f_n(t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, t_1)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Définition 2.11.** Soit  $u = (u_t)_{t \in [0, T]}$  un processus stochastique défini comme ci-dessus avec la représentation (2.3). On définit l'intégrale de Skorohod de  $u$  qu'on note  $\delta(u)$  par

$$\delta(u) := \int_0^T u_t \delta W_t := \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n), \quad (2.5)$$

où  $\tilde{f}_n$  est donnée par (2.4).

Soit  $\text{Dom}(\delta)$  le domaine de  $\delta$  i.e  $u$  est dans  $\text{Dom}(\delta)$  si et seulement si la série dans (2.5) converge dans  $L^2(\Omega)$  i.e. quand

$$E[\delta(u)^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|\tilde{f}_{n+1}\|_{L^2([0, T]^{n+1})}^2 < \infty,$$

et dans ce cas on dit que  $u$  est Skorohod-intégrable. L'intégrale de Skorohod peut être définie comme étant l'adjoint de  $D$  comme le montre la proposition suivante

**Proposition 2.12.** Soit  $u = (u_t)_{t \in [0, T]}$  un processus stochastique défini comme ci-dessus et qui a la représentation (2.3), alors  $u \in \text{Dom}(\delta)$  si et seulement si pour tout  $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ , on a

$$E[\langle DF, u \rangle_{L^2([0, T])}] := E \left[ \int_0^T u_t D_t F dt \right] \leq C(u) \|F\|_{1,2},$$

dans ce cas on a

$$E[F \delta(u)] = E[\langle DF, u \rangle_{L^2([0, T])}], \quad \text{pour tout } F \in \mathbb{D}_{1,2}.$$

De la proposition précédente, on peut déduire que pour  $F, G \in \mathbb{D}_{1,2}$  et  $u \in \text{Dom}(\delta)$

$$E[G\langle DF, u \rangle_{L^2([0,T])}] = E[-F\langle DG, u \rangle_{L^2([0,T])} + FG\delta(u)].$$

La proposition suivante nous montre que l'intégrale de Skorohod est une extension de l'intégrale d'Itô.

**Proposition 2.13.** *Soit  $u = (u_t)_{t \in [0,T]}$  un processus stochastique adapté dans  $L^2(\Omega \times [0, T])$ . Alors on a*

$$\delta(u) = \int_0^T u_t dW_t.$$

**Proposition 2.14.** *Soit  $F \in \mathbb{D}_{1,2}$  et  $u \in \text{Dom}(\delta)$  tel que  $uF \in \text{Dom}(\delta)$  alors on a*

$$\delta(uF) = F\delta(u) - \int_0^T u_t D_t F dt$$

**Théorème 2.15.** *Soit  $(u_t)_{t \in [0,T]}$  un processus tel que  $u_t \in \mathbb{D}_{1,2}$  et  $D_t u \in \text{Dom}(\delta)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ , alors  $\delta(u) \in \mathbb{D}_{1,2}$  et*

$$D_t \delta(u) = \delta(D_t u) + u_t, \quad dt\text{-p.p.}$$

## 2.2 Cas Poisson unidimensionnel

Soit  $\Omega$  l'espace des fonctions càdlàg de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  et soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$  un espace de probabilité, filtré par la filtration naturelle d'un processus de Poisson  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  d'intensité  $\lambda_t$  avec temps de saut  $(T_k)_{k \geq 1}$  et  $T_0 = 0$ . Pour une fonction symétrique déterministe  $f$  de  $L^2(\mathbb{R}_+)^n$  l'intégrale stochastique itérée par rapport au processus de Poisson est définie par

$$I_n(f) := n! \int_0^\infty \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) (dN_{t_1} - \lambda_{t_1} dt_1) \dots (dN_{t_n} - \lambda_{t_n} dt_n).$$

La propriété de représentation chaotique sur l'espace de Poisson affirme que pour toute variable aléatoire  $F \in L^2(\Omega)$ , il existe une unique suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions symétriques déterministes  $f_n \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$  telle que

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n).$$

On a

$$\|F\|_{L^2(P)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2.$$

On définit alors l'opérateur de gradient sur l'espace de Poisson  $D^N$ , par

$$D^N F(\omega) := \sum_{n=0}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(*, t)), \quad dP \times dt - p.p.$$

pour tout  $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in \text{Dom}(D^N)$ , i.e  $F \in L^2(\Omega)$  et

$$\sum_{n=0}^{\infty} nn! \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 < \infty.$$

Les fonctions  $f_n$  sont déterminées à l'aide de  $D^N$ , elles sont données par

$$f_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} E[D_{t_1}^N \dots D_{t_n}^N F], \quad t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+.$$

Pour le cas Poisson on a aussi une formule de Clark-Ocone.

**Proposition 2.16.** *Soit  $F \in \text{Dom}(D^N)$ , alors on a*

$$F = E[F] + \int_0^{\infty} E[D_t^N F | \mathcal{F}_t](dN_t - \lambda_t dt). \quad (2.6)$$

### 2.2.1 Interprétation probabiliste de $D^N$

L'opérateur  $D^N$  n'est pas une dérivation. On a

**Proposition 2.17.** *Soient  $F, G \in \text{Dom}(D^N)$  telles que  $FG \in \text{Dom}(D^N)$ , alors*

$$D^N(FG) = FD^N G + GD^N F + D^N F D^N G.$$

La proposition suivante nous donne l'interprétation de  $D^N$  comme un opérateur de différences finies.

**Proposition 2.18.** *Soit  $F = f(T_1, \dots, T_d) \in \text{Dom}(D^N)$ , avec  $f$  une fonction continue. Alors On a*

$$D_t^N F = \sum_{k=1}^{k=d} 1_{]T_{k-1}, T_k[}(t) (f(T_1, \dots, T_{k-1}, t, T_k, \dots, T_d) - f(T_1, \dots, T_d)). \quad (2.7)$$

**Remarque 2.19.** *On peut aussi donner à  $D^N$  l'interprétation suivante*

$$D_t^N F(\omega) = F(\omega + 1_{(t, \infty]}) - F(\omega), \quad F \in \text{Dom}(D^N).$$

Il existe une deuxième approche au calcul chaotique sur l'espace de Poisson. Elle est basée sur un opérateur de dérivation noté  $\tilde{D}$ , introduit par [CP90]. On a pour  $F = f(T_1, \dots, T_d) \in \text{Dom}(\tilde{D})$ ,

$$\tilde{D}_t F := - \sum_{k=1}^{k=d} 1_{[0, T_k]}(t) \partial_k f(T_1, \dots, T_d).$$

La proposition suivante donne une relation entre les opérateurs  $D^N$  et  $\tilde{D}$

**Proposition 2.20.** *Soit  $F \in \text{Dom}(D^N) \cap \text{Dom}(\tilde{D})$  alors on a*

$$E[\tilde{D}_t F] = E[D_t^N F], \quad dt - p.p.$$

## 2.2.2 Intégrale de Skorohod

Comme dans le cas du mouvement brownien, on définit l'intégrale de Skorohod  $\delta^N$  sur l'espace de Poisson, par

$$\delta^N(u) := \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n), \quad u \in \text{Dom}(\delta^N),$$

où  $\tilde{f}_n$  est donnée par (2.4), et

$$\text{Dom}(\delta^N) = \left\{ u_t = \sum_{n=0}^{\infty} n I_n(f_{n,t}(\cdot)) \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+) : E[\delta^N(u)^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|\tilde{f}_{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)^{n+1}}^2 < \infty \right\}.$$

On cite les relations suivantes entre  $D^N$  et  $\delta^N$

$$E \left[ \int_0^{\infty} u_t D_t^N F dt \right] = E[\delta^N(u) F], \quad u \in \text{Dom}(\delta^N), \quad F \in \text{Dom}(D^N),$$

$$D_t^N \delta^N(u) = u_t + \delta^N(D_t^N u), \quad u \in \text{Dom}(\delta^N), \quad D_t^N u \in \text{Dom}(D^N),$$

pour presque tout  $0 \leq t \leq T$ . En ce qui concerne l'opérateur de dérivation  $\tilde{D}$ , il admet un adjoint qu'on note  $\tilde{\delta}$  qui coïncide avec l'intégrale stochastique pour les processus adaptés de  $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ . On a

$$E \left[ \int_0^{\infty} u_t \tilde{D}_t F dt \right] = E[F \tilde{\delta}(u)], \quad F \in \text{Dom}(\tilde{D}), u \in \text{Dom}(\tilde{\delta}).$$

De plus pour  $u \in \text{Dom}(\tilde{\delta})$  et  $F \in \text{Dom}(\tilde{D})$  tel que  $uF \in \text{Dom}(\tilde{\delta})$ , on a

$$\tilde{\delta}(uF) = F \tilde{\delta}(u) - \int_0^{\infty} u_t \tilde{D}_t F dt.$$

## 2.3 Calcul chaotique multidimensionnel

### 2.3.1 Cas brownien

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$  un espace de probabilité filtré par la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard  $d$ -dimensionnel  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  avec  $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)})$ .

**L'espace tensoriel**  $L^2([0, T], \mathbb{R}^d)^{\otimes n}$

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ . L'espace du produit tensoriel d'ordre  $n$  de  $L^2([0, T], \mathbb{R}^d)$  est

$$L^2([0, T], \mathbb{R}^d)^{\otimes n} \simeq L^2([0, T]^n, (\mathbb{R}^d)^{\otimes n}).$$

Pour  $n = 2$ , on a  $(\mathbb{R}^d)^{\otimes 2} \simeq \mathcal{M}_{dd}(\mathbb{R})$  (l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $d$ ), et donc

$$L^2([0, T], \mathbb{R}^d)^{\otimes 2} \simeq L^2([0, T]^2, \mathcal{M}_{dd}(\mathbb{R})).$$

En général, le produit tensoriel  $(\mathbb{R}^d)^{\otimes n}$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^{d^n}$ . Un élément de  $L^2([0, T], \mathbb{R}^d)^{\otimes n}$  est noté  $f = (f^{(i_1, \dots, i_n)})_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d}$ , avec  $f^{(i_1, \dots, i_n)} \in L^2([0, T]^n)$ .

### Calcul chaotique

Soit  $g_n$  une fonction de  $L^2([0, T]^n)$  et  $(e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . On définit la  $n$ -ième intégrale itérée de la fonction  $f_n e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$ , avec  $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d$ , par

$$I_n(g_n e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}) : = n! \int_0^T \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} g_n(t_1, \dots, t_n) dW_{t_1}^{(i_1)} \dots dW_{t_n}^{(i_n)}$$

Pour  $g_n \in L^2([0, T]^n)$  et  $h_m \in L^2([0, T]^m)$ , et pour  $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d$  et  $1 \leq j_1, \dots, j_m \leq d$ , on a

$$E [I_n(g_n e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}) I_m(h_m e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_m})] = \begin{cases} n! \langle g_n, h_m \rangle_{L^2([0, T]^n)} & \text{si } n = m, \text{ et} \\ & i_l = j_l, 1 \leq l \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $f_n = (f_n^{(i_1, \dots, i_n)})_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^d)^{\otimes n}$ , on définit la  $n$ -ième intégrale itérée de la fonction  $f_n$  par

$$\begin{aligned} I_n(f_n) : &= n! \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^d \int_0^T \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f_n^{(i_1, \dots, i_n)}(t_1, \dots, t_n) dW_{t_1}^{(i_1)} \dots dW_{t_n}^{(i_n)} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^d I_n(f_n^{(i_1, \dots, i_n)} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}). \end{aligned}$$



Notons  $\Sigma$  l'ensemble de toutes les permutations de  $\{1, \dots, n\}$ . On a

$$I_n(\tilde{f}_n) = I_n(f_n),$$

où  $\tilde{f}_n$  est la symétrisation de  $f_n$  dans  $L^2([0, T], \mathbb{R}^d)^{\otimes n}$ , i.e pour  $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d$ , on a

$$\tilde{f}_n^{(i_1, \dots, i_n)}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma} f_n^{(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)})}(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}).$$

Pour  $f_n = (f_n^{(i_1, \dots, i_n)})_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^d)^{\otimes n}$  et  $g_m = (g_m^{(j_1, \dots, j_m)})_{1 \leq j_1, \dots, j_m \leq d} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^d)^{\otimes m}$  on a

$$E[I_n(f_n)I_m(g_m)] = \begin{cases} \sum_{i_1, \dots, i_n=1, j_1, \dots, j_m=1}^d n! \langle f_n^{(i_1, \dots, i_n)}, g_m^{(j_1, \dots, j_m)} \rangle_{L^2([0, T]^n)} & \text{si } n = m, \text{ et} \\ 0 & \text{si } i_l = j_l, 1 \leq l \leq n, \\ & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème suivant concerne la représentation chaotique dans le cas multidimensionnel.

**Théorème 2.21.** *Soit  $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ . Alors il existe une unique suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions symétriques déterministes  $f_n = (f_n^{(i_1, \dots, i_n)})_{i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, d\}} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^d)^{\otimes n}$  telle que*

$$F = E[F] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n).$$

De plus on a

$$\|F\|_{L^2(P)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^d n! \|f_n^{(i_1, \dots, i_n)}\|_{L^2([0, T]^n)}^2.$$

**Définition 2.22.** *Soit  $l \in \{1, \dots, d\}$ . On définit l'opérateur  $D^{(l)} : \text{Dom}(D^{(l)}) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega, [0, T])$  qui à toute variable aléatoire  $F \in \text{Dom}(D^{(l)})$  ayant la représentation*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n),$$

*fait correspondre le processus  $(D_t^{(l)} F)_{t \in [0, T]}$  donné par*

$$D_t^{(l)} F := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^d 1_{\{i_h=l\}} I_{n-1}(f_n^{(i_1, \dots, i_n)}(t_1, \dots, t_{l-1}, t, t_{l+1}, \dots, t_n) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{h-1}} \otimes e_{i_{h+1}} \dots \otimes e_{i_n})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n^l(*, t)), \quad dP \times dt - p.p. \quad (2.8)$$

avec

$$f_n^l = (f_n^{(i_1, \dots, i_{n-1}, l)})_{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{n-1}}}_{1 \leq i_1, \dots, i_{n-1} \leq d}.$$

Le domaine de  $D^{(l)}$  est donné par

$$\text{Dom}(D^{(l)}) = \left\{ F = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^d I_n(f_n^{(i_1, \dots, i_n)})_{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}} \in L^2(\Omega) : \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^d \sum_{n=0}^{\infty} n n! \|f_n^{(i_1, \dots, i_n)}\|_{L^2([0, T]^n)}^2 < \infty \right\}.$$

L'opérateur  $D^{(l)}$  est en fait la dérivée de Malliavin dans la direction du brownien unidimensionnel  $W^{(l)}$ . Elle conserve les propriétés de la dérivée  $D$  dans le cas du brownien unidimensionnel décrit dans le premier paragraphe de ce chapitre. Soit  $F = f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}) \in L^2(\Omega)$  où  $(t_1, \dots, t_n) \in [0, T]^n$  et  $f(x^{11}, \dots, x^{d1}, \dots, x^{1n}, \dots, x^{dn}) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{dn})$ . Alors on a pour  $l = 1, \dots, d$ :

$$D_t^{(l)} F = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial f}{\partial x^{lk}}(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}) 1_{[0, t_k]}(t).$$

La formule de Clark-Ocone dans le cas multidimensionnel est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 2.23.** *Soit  $F \in \bigcap_{l=1}^d \text{Dom}(D^{(l)})$ , alors on a*

$$F = E[F] + \sum_{l=1}^d \int_0^T E[D_t^{(l)} F | \mathcal{F}_t] dW_t^{(l)}. \quad (2.9)$$

### 2.3.2 Cas Poisson

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$  un espace de probabilité filtré par la filtration naturelle d'un processus de Poisson  $(N_t)_{0 \leq t \leq T}$ ,  $d$ -dimensionnel avec  $N_t = (N_t^{(1)}, \dots, N_t^{(p)})$  à composantes indépendantes, d'intensité déterministe  $(\int_0^t \lambda_s^{(1)} ds, \dots, \int_0^t \lambda_s^{(d)} ds)$ . L'intégrale stochastique itérée d'une fonction symétrique  $f_n = (f_n^{(i_1, \dots, i_n)})_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^d)^{\text{on}}$  où  $f_n^{(i_1, \dots, i_n)} \in L^2([0, T]^n)$ ,

$I_n(f_n) :=$

$$n! \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^d \int_0^T \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f_n^{(i_1, \dots, i_n)}(t_1, \dots, t_n) (dN_{t_1}^{(i_1)} - \lambda_{t_1}^{(i_1)} dt_1) \dots (dN_{t_n}^{(i_n)} - \lambda_{t_n}^{(i_n)} dt_n).$$

Pour  $F \in L^2(\Omega)$  il existe une unique suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions symétriques déterministes  $f_n = (f_n^{(i_1, \dots, i_n)})_{i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, d\}} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^d)^{\otimes n}$  telle que

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n).$$

On définit l'opérateur  $D^{N^{(l)}}$  comme dans (2.8) et on a la formule de Clark-Ocone pour  $F \in \bigcap_{l=1}^d \text{Dom}(D^{N^{(l)}})$

$$F = E[F] + \sum_{l=1}^d \int_0^{\infty} E[D_t^{N^{(l)}} F \mid \mathcal{F}_t] (dN_t^{(l)} - \lambda_t^{(l)} dt).$$

### 2.3.3 Cas mixte brownien-Poisson

Soient  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  avec  $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)})$  un mouvement brownien  $d$ -dimensionnel et  $(N_t)_{0 \leq t \leq T}$  avec  $N_t = (N_t^{(1)}, \dots, N_t^{(p)})$  un processus de Poisson  $p$ -dimensionnel à composantes indépendantes, d'intensité déterministe  $(\int_0^t \lambda_s^{(1)} ds, \dots, \int_0^t \lambda_s^{(d)} ds)$ . On travaille dans un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$ , où  $\mathcal{F}_t$  est la filtration engendrée par  $W$  et  $N$ . Les deux martingales  $W$  et  $N$  sont supposées indépendantes. On désigne par  $M = (M^{(1)}, \dots, M^{(p)})$  le processus de Poisson compensé donné par

$$dM^{(l)} = dN_t^{(l)} - \lambda_t^{(l)} dt, \quad t \in [0, T], \quad l = 1, p.$$

Posons

$$(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)}, X_t^{(d+1)}, \dots, X_t^{(d+p)}) = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)}, M_t^{(1)}, \dots, M_t^{(p)}).$$

L'intégrale stochastique itérée d'une fonction symétrique  $f_n = (f_n^{(i_1, \dots, i_n)})_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d+p} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^{(d+p)})^{\otimes n}$  où  $f_n^{(i_1, \dots, i_n)} \in L^2([0, T]^n)$ , est

$$I_n(f_n) := n! \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{d+p} \int_0^T \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f_n^{(i_1, \dots, i_n)}(t_1, \dots, t_n) dX_{t_1}^{(i_1)} \dots dX_{t_n}^{(i_n)}.$$

Pour  $F \in L^2(\Omega)$ , il existe une unique suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions symétriques déterministes  $f_n = (f_n^{(i_1, \dots, i_n)})_{i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, d\}} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^{(d+p)})^{\otimes n}$  telle que

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n).$$

Les opérateurs  $D^{X^{(l)}}$  sont définis comme dans (2.8). On a la formule de Clark-Ocone

**Proposition 2.24.** *Soit  $F \in \bigcap_{l=1}^{d+p} \text{Dom}(D^{X^{(l)}})$ . Alors on a*

$$F = E[F] + \sum_{l=1}^d \int_0^T E[D_t^{(l)} F \mid \mathcal{F}_t] dW_t^{(l)} + \sum_{l=1}^p \int_0^T E[D_t^{N^{(l)}} F \mid \mathcal{F}_t] dM_t^{(l)}.$$

# Bibliographie

- [CP90] E. Carlen and E. Pardoux. Differential calculus and integration by parts on Poisson space. In S. Albeverio, Ph. Blanchard, and D. Testard, editors, *Stochastics, Algebra and Analysis in Classical and Quantum Dynamics (Marseille, 1988)*, volume 59 of *Math. Appl.*, pages 63–73. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.
- [KO91] I. Karatzas and D.L. Ocone. A generalized Clark representation formula with application to optimal portfolios. *Stochastics and Stochastics Reports*, 34, pages 187–230, 1991.
- [Lø99] A. Løkka. Martingale representation, chaos expansion and Clark-Ocone formulas. MaPhySto, report 22, 1999.
- [Nu95] D. Nualart. *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer-Verlag, 1995.
- [NV90] D. Nualart and J. Vives. Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space. In J. Azéma, P.A. Meyer, and M. Yor, editors, *Séminaire de Probabilités XXIV*, volume 1426 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 154–165. Springer Verlag, 1990.
- [Øks96] B. Øksendal. *An introduction to Malliavin calculus with applications to economics*. Working paper no. 3, Institute of Finance and Management Science, Norwegian School of Economics and Business Administration, 1996.
- [Pr97a] N. Privault. An extension of stochastic calculus to certain non-Markovian processes. Prépublication de l’université d’Evry, 49, 1997.
- [Pr97b] N. Privault. Calcul chaotique et variationnel et applications. Habilitation à diriger des recherches, Université d’Evry, 1997.
- [Pr02] N. Privault. Distribution-valued gradient and chaotic decompositions of Poisson jump times functionals. *Publicacions Matemàtiques*, 46, pages 27–48, 2002.

- [Ust97] A. Üstünel. *An Introduction to Analysis on Wiener Space*. Lecture Notes in Mathematics, LNM 1610, Springer, 1996.

## Chapitre 3

# Hedging in complete and incomplete markets driven by normal martingales

This paper aims to a unified treatment of hedging in market models driven by martingales with deterministic bracket  $\langle M, M \rangle_t$ , including Brownian motion and the Poisson process as particular cases. Replicating hedging strategies for European, Asian and Lookback options are explicitly computed using either the Clark-Ocone formula or an extension of the Delta-hedging method, depending on which is most appropriate.<sup>1</sup>

**Key words:** Normal martingales, chaos representation property, hedging strategies, exotic options.

---

<sup>1</sup>Avec Nicolas Privault (La Rochelle), à paraître dans *Applicaciones Mathematicae*.



### 3.1 Introduction

The Clark formula [Cla70] allows in principle for the calculation of replicating hedging strategies in complete markets [KO91], however explicit computations are in general difficult to perform via this formula. For markets driven by Brownian motion a proof of the classical Black-Scholes formula via the Clark-Ocone formula can be found in [Øks96], Ch. 5, p. 13. This method has been recently extended to markets driven by a Poisson process in [AOPU00]. Brownian motion and the compensated Poisson process share the important chaos representation property which is capital for market completeness.

In this paper we consider a larger family of martingales  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  satisfying the following two conditions:

- a) the chaotic representation property (in relation with market completeness), i.e. every square-integrable functional, measurable with respect to the filtration generated by  $(M_t)_{t \in [0, T]}$ , can be expanded into a series of multiple stochastic integrals of deterministic functions with respect to  $(M_t)_{t \in [0, T]}$ ,
- b) the condition  $d\langle M, M \rangle_t = \alpha_t^2 dt$ , where  $(\alpha_t)_{t \in [0, T]}$  is a square integrable deterministic function.

Hypothesis (b) implies that  $([M, M]_t - \int_0^t \alpha_s^2 ds)_{t \in [0, T]}$  is a martingale, hence from (a) there exists a process  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  such that  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  satisfies the structure equation

$$d[M, M]_t = \alpha_t^2 dt + \phi_t dM_t, \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

cf. [É90]. This equation can be viewed as a decomposition of  $d[M, M]_t$  by projection on  $dt$  and  $dM_t$ , which yields a closed Itô type change of variable formula, see Prop. 3.3. Brownian motion is obtained for  $\alpha_t = 1$  and  $\phi_t = 0$ ,  $t \in [0, T]$ , and the Poisson process corresponds to non zero constant  $\phi_t$ ,  $t \in [0, T]$ . The choice  $\phi_t = \beta M_t$ ,  $-2 \leq \beta < 0$ , considered in [DP99], corresponds to the Azéma martingale and yields another complete market model with jumps. Choosing  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  to be a deterministic function allows for the driving process to be alternatively Brownian or Poisson, depending on the vanishing of  $\phi_t$ , see [JP02] for the corresponding market model.

The Clark-Ocone formula states the predictable representation of a random variable  $F$  as

$$F = E[F] + \int_0^T E[D_t F \mid \mathcal{F}_t] dM_t,$$

where  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  is the filtration generated by  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  and  $D_t$  is the gradient operator that lowers the degree of multiple stochastic integrals with respect to  $(M_t)_{t \in [0, T]}$ . One of the goals of this paper is to compute the process  $t \mapsto E[D_t F \mid \mathcal{F}_t]$  in several situations. We obtain explicit hedging formulas for European calls in the mixed Brownian-Poisson model of [JP02] and in the Azéma martingale model of [DP99] and



for Asian and Lookback options.

More precisely, let  $(S_{t,T}^x)_{t \in [0,T]}$  denote the stock price process driven by  $(M_t)_{t \in [0,T]}$ , starting from  $x$  at time  $t$ , with volatility  $(\sigma_t)_{t \in [0,T]}$ , and let  $i_t = 1_{\{\phi_t=0\}}$ ,  $j_t = 1 - i_t$ ,  $S_t = S_{0,t}^1$ ,  $t \in [0, T]$ . In a model with deterministic structure equation, i.e.  $d[M, M]_t = \alpha_t^2 dt + \phi_t dM_t$  with deterministic  $(\phi_t)_{t \in [0,T]}$ , the replicating hedging strategy of a European call with payoff  $(S_T - K)^+$  is given by

$$t \mapsto \frac{e^{-\int_t^T r_s ds}}{\sigma_t S_t} E \left[ i_t \sigma_t S_{t,T}^x 1_{\{S_{t,T}^x \geq K\}} + \frac{j_t}{\phi_t} (\sigma_t \phi_t S_{t,T}^x - (K - S_{t,T}^x)^+) 1_{\{S_{t,T}^x \geq \frac{K}{1+\sigma_t}\}} \right]_{x=S_t},$$

cf. (3.25) and Prop. 3.8. This formula extends both the classical Black-Scholes hedging formula in the Brownian case ( $\phi_t = 0$ ,  $t \in [0, T]$ ), and the hedging formula of [AOPU00], Th. 6.1, in the Poissonian jump case ( $\phi_t = 1$ ,  $t \in [0, T]$ ). It can be obtained both from the Clark formula and from martingale methods. The above conditional expectation can be also explicitly computed, see. Prop. 3.9. The case of Asian options is treated in Prop. 3.10 in the deterministic structure equation model, and Lookback options are considered in Prop. 3.12 in a market driven by Brownian motion.

In the Azéma martingale model of [DP99], i.e.  $d[M, M]_t = dt + \beta M_t - dM_t$ ,  $-2 \leq \beta < 0$ , we obtain

$$t \mapsto \frac{e^{-\int_t^T r_s ds}}{\beta M_t \sigma_t S_t} E \left[ \sigma_t \beta (y + M_T - M_t) S_{t,T}^x 1_{[\frac{K}{1+\sigma_t \beta (y+M_T-M_t)}, \infty[} (S_{t,T}^x) + (S_{t,T}^x - K) 1_{[\frac{K}{1+\sigma_t \beta (y+M_T-M_t)}, K]} (S_{t,T}^x) \right]_{x=S_t}^{y=M_t},$$

see Prop. 3.11.

We proceed as follows. In Sect. 3.2 we introduce the notation of chaotic calculus, the solutions of structure equations and the Clark-Ocone formula which gives the predictable representation of the random variable  $F$ . We also state the change of variable formula and Girsanov theorem which hold in a particular form for solutions of structure equations. In Sect. 3.3 we describe different methods for the computation of predictable representations for the general class of normal martingales having the chaos representation property. The intrinsic expression of the gradient  $D$  is completely known if  $(\phi_t)_{t \in [0,T]}$  is deterministic, i.e. for the Brownian, Poisson and deterministic structure equation models, (Sect. 3.3.2). In the Markovian case (Sect. 3.3.3) it is possible to combine the Clark-Ocone and Itô formulas to obtain the explicit predictable representation of  $F$ . Sect. 3.4 is devoted to the computation of replicating portfolios. In Sect. 3.4.2 we hedge European calls using the Clark formula, extending the method applied in the Brownian case in [Øks96], Ch. 5, pp. 13-15. In Sects. 3.4.3, 3.4.4 and

3.4.5 we deal with Asian, European and Lookback options, in particular we use the delta hedging approach to recover some results obtained in [Ber98] from the Clark formula.

## 3.2 Notation and preliminaries

### 3.2.1 Chaotic calculus

Let  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  be a martingale on the space  $\Omega$  of càdlàg functions from  $[0, T]$  to  $\mathbb{R}$ , having the chaos representation property. Let  $(\alpha_t)_{t \in [0, T]} \in L^2([0, T])$  be a positive deterministic non vanishing square-integrable function, and assume that  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  has deterministic angle bracket  $d\langle M, M \rangle_t = \alpha_t^2 dt$ . We denote by  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  the filtration generated by  $(M_t)_{t \in [0, T]}$ , and by  $L_\alpha^2([0, T])^{\circ n}$  the space  $L^2([0, T], \alpha_t^2 dt)^{\circ n}$  of  $\alpha_{t_1}^2 \cdots \alpha_{t_n}^2 dt_1 \cdots dt_n$  square-integrable symmetric functions. The multiple stochastic integral  $I_n(f_n)$  is defined as

$$I_n(f_n) = n! \int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} f_n(t_1, \dots, t_n) dM_{t_1} \cdots dM_{t_n}, \quad n \geq 1,$$

$f_n \in L_\alpha^2([0, T])^{\circ n}$ , with

$$E[I_n(f_n)I_m(g_m)] = n!1_{\{n=m\}} \langle f_n, g_m \rangle_{L_\alpha^2([0, T])^{\circ n}}. \quad (3.2)$$

The chaos representation property for  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  states that every  $F \in L^2(\Omega)$  has a decomposition as  $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ . Let  $D : \text{Dom}(D) \rightarrow L^2(\Omega \times [0, T], dP \times \alpha_t^2 dt)$  denote the closable, unbounded gradient operator defined as

$$D_t F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(*, t)), \quad dP \times dt - a.e.,$$

with  $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$  in  $\text{Dom}(D)$ , i.e.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n n! \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 < \infty.$$

### 3.2.2 Structure equations

Let  $L_{ad}^\infty(\Omega \times [0, T])$  be the space of bounded,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapted stochastic processes. We assume that  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  is solution of the structure equation

$$d[M, M]_t = \alpha_t^2 dt + \phi_t dM_t, \quad t \in [0, T], \quad (3.3)$$

where  $\phi_t = \varphi(t, M_{t-})$  is a deterministic function of  $t$  and  $M_t$ . Existence and uniqueness of the solutions are guaranteed when  $\phi_t$  is a deterministic function [É90]. Existence is

proved when  $\phi_t = \varphi(M_{t-})$  and  $\varphi$  is a continuous function [Mey89], and the solution is unique when  $\varphi(x) = \beta x$  with  $\beta \in [-2, 0)$ , cf. [É90]. See also [Pha00], [Tav99] for recent results on structure equations. Let  $i_t = 1_{\{\phi_t=0\}}$  and  $j_t = 1_{\{\phi_t \neq 0\}} = 1 - i_t$ ,  $t \in [0, T]$ . The continuous part of  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  is given by  $dM_t^c = i_t dM_t$  and the eventual jump of  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  at time  $t \in [0, T]$  is given as  $\Delta M_t = \phi_t$ ,  $t \in [0, T]$ , see [É90], p. 77.

- a) If  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  is deterministic, let  $\lambda_t = j_t \alpha_t^2 / \phi_t^2$ ,  $t \in [0, T]$ , then  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  can be represented as

$$dM_t = i_t \alpha_t dB_t + \phi_t (dN_t - \lambda_t dt), \quad t \in [0, T], \quad M_0 = 0, \quad (3.4)$$

where  $(B_t)_{t \in [0, T]}$  is a standard Brownian motion, and  $(N_t)_{t \in [0, T]}$  a Poisson process independent of  $(B_t)_{t \in [0, T]}$ , with intensity  $\nu_t = \int_0^t \lambda_s ds$ ,  $t \in [0, T]$ , cf. Prop. 4 of [É90], and [JP02].

- b) If  $\phi_t = \beta M_t$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , then (3.3) has a unique solution called the Azéma martingale, cf. [É90]. If  $-2 \leq \beta < 0$ , this solution has the chaos representation property and it has been used to model a complete market with jumps in [DP99].

Figure 1 shows a sample path of  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  and the corresponding function  $(i_t)_{t \in [0, T]}$  chosen to be a simple indicator function, with  $S_0 = 4$ ,  $\sigma_t = 1$ ,  $\alpha_t^2 = 50$ ,  $\phi_t = 1.6i_t$ ,  $t \in [0, T]$ .

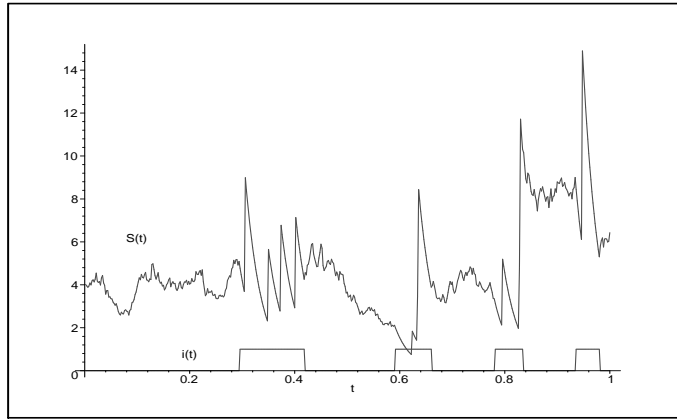


Figure 1 - Sample trajectory of  $(S_t)_{t \in [0, T]}$ <sup>1</sup>

Figure 2 is a simulation of an Azéma martingale with  $\beta \neq -1$ , from a discretization of the structure equation (3.3):

$$\Delta X_t = \frac{\beta X_{t-}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta X_{t-}}{2}\right)^2 + \Delta t},$$

<sup>1</sup>Vertical lines represent jumps.

with probabilities

$$p = \frac{1}{2} \mp \frac{\beta X_{t-}}{\sqrt{\left(\frac{\beta X_{t-}}{2}\right)^2 + \Delta t}}.$$

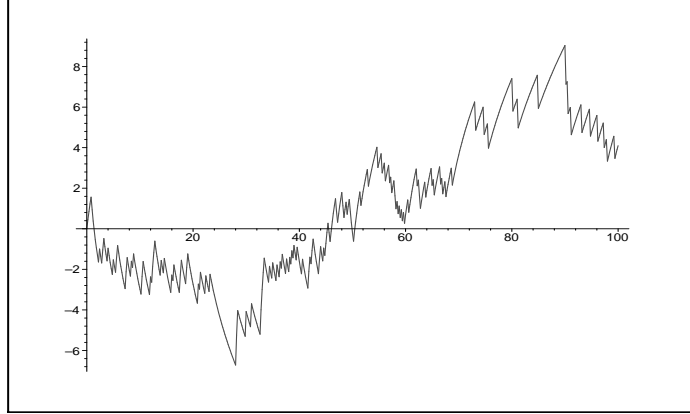


Figure 2 - Sample path of an Azéma martingale

In all cases of interest in this paper we have  $(\phi_t)_{t \in [0, T]} \in L_{ad}^\infty(\Omega \times [0, T])$ , since if  $(\phi_t)_{t \in [0, T]} = (\beta M_t)_{t \in [0, T]}$  then  $\sup_{t \in [0, T]} |M_t| \leq (-2/\beta)^{1/2}$  (see [É90], p. 83). Given  $(u_t)_{t \in [0, T]} \in L_{ad}^\infty(\Omega \times [0, T])$ , we denote by  $(\xi_t(u))_{t \in [0, T]}$  the solution of the equation

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} u_s dM_s, \quad t \in [0, T], \quad (3.5)$$

which can be written as ([Pro90], Th. 36, p. 77):

$$\xi_t(u) = \exp\left(\int_0^t u_s dM_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 \alpha_s^2 ds\right) \prod_{s \in J_M^t} (1 + u_s \phi_s) e^{-u_s \phi_s}, \quad (3.6)$$

where  $J_M^t$  denotes the set of jump times of  $(M_s)_{s \in [0, t]}$ ,  $t \in [0, T]$ , and let  $\xi(u) = \xi_T(u)$ . If  $u \in L^\infty([0, T])$  then  $\xi_t(u)$  can be represented as

$$\xi_t(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n((u1_{[0, t]})^{\otimes n}),$$

and we have  $D_s \xi_t(u) = 1_{[0, t]}(s) u_s \xi_t(u)$ ,  $s, t \in [0, T]$ .

**Definition 3.1.** Let  $\mathcal{S}$  denote the linear space generated by exponential vectors of the form  $\xi(u)$ , where  $u \in L^\infty([0, T])$ .

The space  $\mathcal{S}$  is dense in  $L^2(\Omega)$ , and from the following Lemma  $\mathcal{S}$  is an algebra for the pointwise multiplication of random variables if  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  is deterministic. The following is a version of Yor's formula [Yor76] or Th. 37 of [Pro90], page 79, for martingales with deterministic bracket  $\langle M, M \rangle_t$ .

**Lemma 3.2.** *For any  $u, v \in L^\infty([0, T])$ , we have the relation*

$$\xi(u)\xi(v) = \exp(\langle u, v \rangle_{L_\alpha^2([0, T])})\xi(u + v + \phi uv). \quad (3.7)$$

*Proof.* We have for  $u, v \in L^\infty([0, T])$ :

$$\begin{aligned} d(\xi_t(u)\xi_t(v)) &= u_t \xi_{t-}(u) \xi_{t-}(v) dM_t + v_t \xi_{t-}(v) \xi_{t-}(u) dM_t \\ &\quad + v_t u_t \xi_{t-}(v) \xi_{t-}(u) d[M, M]_t \\ &= u_t \xi_{t-}(u) \xi_{t-}(v) dM_t + v_t \xi_{t-}(v) \xi_{t-}(u) dM_t + v_t u_t \xi_t(v) \xi_t(u) \alpha_t^2 dt \\ &\quad + \phi_t u_t v_t \xi_{t-}(v) \xi_{t-}(u) dM_t \\ &= v_t u_t \xi_t(v) \xi_t(u) \alpha_t^2 dt + \xi_{t-}(v) \xi_{t-}(u) (u_t + v_t + \phi_t u_t v_t) dM_t. \end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned} d(e^{-\int_0^t u_s v_s \alpha_s^2 ds} \xi_t(u) \xi_t(v)) \\ = e^{-\int_0^t u_s v_s \alpha_s^2 ds} \xi_{t-}(v) \xi_{t-}(u) (u_t + v_t + \phi_t u_t v_t) dM_t, \end{aligned}$$

which shows that  $\exp(-\langle u, v \rangle_{L_\alpha^2([0, T])})\xi(u)\xi(v) = \xi(u + v + \phi uv)$ . Relation (3.7) follows then by comparison with (3.5). □

### 3.2.3 Change of variable formula

We recall the following change of variable formula, which follows from Prop. 2 of [É90] after addition of an absolutely continuous drift term.

**Proposition 3.3.** *Let  $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$  be a  $\mathbb{R}^n$ -valued process satisfying*

$$dX_t = R_t dt + K_t dM_t, \quad X_0 > 0,$$

where  $R = (R_t)_{t \in [0, T]}$  and  $K = (K_t)_{t \in [0, T]}$  are two predictable square-integrable  $\mathbb{R}^n$ -valued processes. For any function  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \rightarrow f_t(x)$  in  $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  we have

$$f_t(X_t) = f_0(X_0) + \int_0^t L_s f_s(X_s) dM_s + \int_0^t U_s f_s(X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f_s}{\partial s}(X_s) ds, \quad (3.8)$$

where

$$L_s f_s(X_s) = i_s \langle K_s, \nabla f_s(X_s) \rangle + \frac{j_s}{\phi_s} (f_s(X_{s-} + \phi_s K_{s-}) - f_s(X_{s-})),$$

and

$$\begin{aligned} U_s f_s(X_s) &= R_s \nabla f_s(X_s) \\ &+ \alpha_s^2 \left( \frac{1}{2} i_s \langle \text{Hess} f_s(X_s), K_s \otimes K_s \rangle \right. \\ &\left. + \frac{j_s}{\phi_s^2} (f_s(X_{s^-} + \phi_s K_{s^-}) - f_s(X_{s^-}) - \phi_s \langle K_s, \nabla f_s(X_s) \rangle) \right), \end{aligned}$$

with the convention  $0/0 = 0$ .

### 3.2.4 Girsanov theorem

The Girsanov theorem holds in a particular form when  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  is the solution of a structure equation (3.1). Let  $(\psi_t)_{t \in [0, T]}$  be a bounded predictable process such that  $1 + \phi_t \psi_t > 0$ ,  $t \in [0, T]$ , let  $(l_t)_{t \in [0, T]}$  denote the solution of the equation

$$dl_t = l_{t^-} \psi_t dM_t, \quad t \in [0, T], \quad l_0 = 1,$$

and let  $Q$  be the probability defined by

$$l_t = E \left[ \frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T]. \quad (3.9)$$

**Proposition 3.4.** *Under the probability  $Q$ , the process*

$$Z_t = M_t - \int_0^t \alpha_s^2 \psi_s ds, \quad t \in [0, T], \quad (3.10)$$

*is a local martingale which satisfies the structure equation*

$$d[Z, Z]_t = \alpha_t^2 (1 + \phi_t \psi_t) dt + \phi_t dZ_t, \quad t \in [0, T]. \quad (3.11)$$

*Proof.* From the Girsanov theorem,

$$dZ_t = dM_t - \frac{1}{l_{t^-}} d\langle L, M \rangle_t = dM_t - \alpha_t^2 \psi_t dt$$

is a local martingale under  $Q$ , with  $d\langle L, M \rangle_t = l_{t^-} \alpha_t^2 \psi_t dt$ , and

$$d[Z, Z]_t = d[M, M]_t = \alpha_t^2 dt + \phi_t dM_t = \alpha_t^2 (1 + \phi_t \psi_t) dt + \phi_t dZ_t.$$

□

If  $(\psi_t)_{t \in [0, T]}$  and  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  are deterministic, then  $(Z_t)_{t \in [0, T]}$  has the chaos representation property under  $Q$ , since (3.11) is a deterministic structure equation.

### 3.3 Computations of predictable representations

#### 3.3.1 Clark formula

The Clark-Ocone formula, cf. [Cla70], [KO91] is a consequence of the chaos representation property for  $(M_t)_{t \in [0, T]}$ , and states that any  $F \in \text{Dom}(D) \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$  has a representation

$$F = E[F] + \int_0^T E[D_t F | \mathcal{F}_t] dM_t. \quad (3.12)$$

It can be proved as follows:

$$\begin{aligned} F &= E[F] + \sum_{n=1}^{\infty} n! \int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} f_n(t_1, \dots, t_n) dM_{t_1} \cdots dM_{t_n} \\ &= E[F] + \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^T I_{n-1}(f_n(*, t) 1_{\{*\leq t\}}) dM_t \\ &= E[F] + \int_0^T E[D_t F | \mathcal{F}_t] dM_t. \end{aligned}$$

Although  $D : L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P) \longrightarrow L^2(\Omega \times [0, T], dP \times \alpha_t^2 dt)$  is unbounded, the representation formula (3.12) can be extended to  $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ .

**Proposition 3.5.** *The operator  $F \mapsto E[D_t F | \mathcal{F}_t]$  taking its values in the space of square-integrable adapted processes has a continuous extension from  $\text{Dom}(D)$  to  $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ .*

*Proof.* We use the bound:

$$\begin{aligned} \|E[D_t F | \mathcal{F}_t]\|_{L^2(\Omega \times [0, T])}^2 &= \|E[F] - F\|_{L^2(\Omega)}^2 = \text{var}(F) \\ &\leq \|F\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad F \in \text{Dom}(D). \end{aligned}$$

□

Instead of the adapted projection  $(E[D_t F | \mathcal{F}_t])_{t \in [0, T]}$  one may also use the predictable projection  $(E[D_t F | \mathcal{F}_{t-}])_{t \in [0, T]}$ . Here this leads to the same representation since both processes coincide in  $L^2(\Omega \times [0, T], dP \times \alpha_t^2 dt)$ .

#### 3.3.2 Deterministic structure equation

In this subsection we consider the case where  $(\phi_t)_{t \in [0, T]} \in L^\infty([0, T])$  is a deterministic function. In this case, the probabilistic interpretation of  $D_t$  is known and  $D_t F$  is

explicitly computable. We define the operator  $D^B : \mathcal{S} \rightarrow L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, dP \times \alpha_t^2 dt)$  on  $\mathcal{S}$  as

$$\langle D^B F, u \rangle_{L_\alpha^2([0, T])} = \frac{d}{d\varepsilon} F \left( \omega(\cdot) + \varepsilon \int_0^\cdot i_s u_s ds \right) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad F \in \mathcal{S}.$$

We have for  $F = \xi(u)$  and  $g \in L_\alpha^2([0, T])$ :

$$\begin{aligned} \langle D^B F, g \rangle_{L_\alpha^2([0, T])} &= \frac{d}{d\varepsilon} \exp \left( \varepsilon \int_0^T g_s u_s \alpha_s i_s ds \right) \xi(u) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^T g_s u_s \alpha_s i_s ds \xi(u), \end{aligned}$$

hence  $D_t^B \xi(u) = i_t u_t \xi(u)$ ,  $t \in [0, T]$ , where

$$\xi(u) = \exp \left( \int_0^T u_s dM_s - \frac{1}{2} \int_0^T u_s^2 \alpha_s^2 i_s ds \right) \prod_{s \in J_M^T} (1 + u_s \phi_s) e^{-u_s \phi_s}. \quad (3.13)$$

Note that the definition of  $D^B F$  by duality in  $L_\alpha^2([0, T])$  implies

$$D_t^B \int_0^T u_s \alpha_s dB_s = u_t, \quad t \in [0, T].$$

We define a linear transformation  $T_t^\phi$  of exponential vectors, and more generally of elements of  $\mathcal{S}$ , as

$$T_t^\phi \xi(u) = (1 + u_t \phi_t) \xi(u), \quad u \in L^\infty([0, T]).$$

The transformation  $T_t^\phi$  is well-defined on  $\mathcal{S}$  because  $\xi(u_1), \dots, \xi(u_n)$  are linearly independent if  $u_1, \dots, u_n$  are distinct elements of  $L^2(\mathbb{R}_+)$ . Since we have  $\Delta M_t = 0$ ,  $dt \times dP$ -a.e.,  $T_t^\phi \xi(u)$  coincides  $dt \times dP$ -a.e. with the value at time  $T$  of the solution of the equation

$$Z_s = 1 + \int_0^s Z_{\tau-} u_\tau dM_\tau^t, \quad s \in [0, T], \quad (3.14)$$

where  $(M_s^t)_{s \in [0, T]}$  is defined as

$$M_s^t = M_s + \phi_t 1_{[t, T]}(s), \quad s \in [0, T].$$

In order to see this we check that  $Z_s^t = \xi_s(u)$ ,  $s < t$ ,

$$Z_t^t = (1 + \phi_t u_t) Z_{t-}^t = (1 + \phi_t u_t) \xi_{t-}(u) = (1 + \phi_t u_t) \xi_t(u),$$

(since  $\xi_{t-}(u) = \xi_t(u)$  a.s. for fixed  $t$ ), and for  $s > t$ :

$$Z_s^t = Z_t^t + \int_t^s Z_{\tau-}^t u_\tau dM_\tau$$



$$= (1 + \phi_t u_t) \xi_t(u) + \int_t^s Z_{\tau-}^t u_\tau dM_\tau,$$

hence

$$\frac{Z_s^t}{1 + \phi_t u_t} = \xi_t(u) + \int_t^s \frac{Z_{\tau-}^t}{1 + \phi_t u_t} u_\tau dM_\tau, \quad s > t,$$

which implies from (3.5):

$$\frac{Z_s^t}{1 + \phi_t u_t} = \xi_s(u), \quad s > t,$$

and  $Z_T^t = (1 + \phi_t u_t) \xi(u) = T_t^\phi \xi(u)$ ,  $P$ -a.s.,  $t \in [0, T]$ .

In other terms,  $T_t^\phi F$ ,  $F \in \mathcal{S}$ , can be interpreted as the evaluation of  $F$  on the trajectories of  $(M_s)_{s \in [0, T]}$  perturbed by addition of a jump of height  $\phi_t$  at time  $t$ .

**Proposition 3.6.** *The transformation  $T_t^\phi$  is multiplicative, i.e.*

$$T_t^\phi(FG) = (T_t^\phi F)(T_t^\phi G), \quad F, G \in \mathcal{S}.$$

Moreover we have

$$D_t F = D_t^B F + \frac{\dot{j}_t}{\phi_t} (T_t^\phi F - F), \quad t \in [0, T], \quad F \in \mathcal{S}, \quad (3.15)$$

and

$$D_t(FG) = F D_t G + G D_t F + \phi_t D_t F D_t G, \quad t \in [0, T], \quad F, G \in \mathcal{S}. \quad (3.16)$$

*Proof.* For the multiplicativity we note that

$$\begin{aligned} T_t^\phi(\xi(u)\xi(v)) &= \exp(\langle u, v \rangle_{L_\alpha^2([0, T])}) T_t^\phi \xi(u + v + \phi uv) \\ &= \exp(\langle u, v \rangle_{L_\alpha^2([0, T])}) (1 + \phi_t(u_t + v_t + \phi_t u_t v_t)) \xi(u + v + \phi uv) \\ &= (1 + \phi_t u_t)(1 + \phi_t v_t) \xi(u) \xi(v) \\ &= T_t^\phi \xi(u) T_t^\phi \xi(v). \end{aligned}$$

We have  $D_t^B \xi(u) = i_t u_t \xi(u) = i_t D_t \xi(u)$ , hence

$$\begin{aligned} D_t \xi(u) &= i_t D_t \xi(u) + j_t D_t \xi(u) \\ &= i_t u_t \xi(u) + j_t u_t \xi(u) \\ &= D_t^B \xi(u) + \frac{\dot{j}_t}{\phi_t} (T_t^\phi \xi(u) - \xi(u)) \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Concerning the product rule we have from Lemma 3.2:

$$D_t(\xi(u)\xi(v)) = \exp\left(\int_0^T u_s v_s \alpha_s^2 ds\right) D_t \xi(u + v + \phi uv)$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(\int_0^T u_s v_s \alpha_s^2 ds\right) (u_t + v_t + \phi_t u_t v_t) \xi(u + v + \phi uv) \\
&= (u_t + v_t + \phi_t u_t v_t) \xi(u) \xi(v) \\
&= \xi(u) D_t \xi(v) + \xi(v) D_t \xi(u) + \phi_t D_t \xi(u) D_t \xi(v),
\end{aligned}$$

$u, v \in L^\infty([0, T])$ , see also Relation (6) of [Pri96].

□

If  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  is random the probabilistic interpretation of  $D$  is unknown, however we have the product rule

$$E[D_t(FG) \mid \mathcal{F}_t] = E[FD_tG \mid \mathcal{F}_t] + E[GD_tF \mid \mathcal{F}_t] + \phi_t E[D_tFD_tG \mid \mathcal{F}_t], \quad (3.17)$$

$F, G \in \mathcal{S}$ ,  $t \in [0, T]$ . cf. Prop. 5 of [PSV00].

### 3.3.3 Markovian case

This section presents a representation method which is based on the Itô formula and the Markov property, see also [Pro01] in the continuous case. Let  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  be a  $\mathbb{R}^n$ -valued Markov (not necessarily time homogeneous) process defined on  $\Omega$ , satisfying a change of variable formula of the form

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t L_s f(X_s) dM_s + \int_0^t U_s f(X_s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (3.18)$$

where  $L_s, U_s$  are operators defined on  $\mathcal{C}^2$  functions. We assume that the semi-group  $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t \leq T}$  associated to  $(X_t)_{t \in [0, T]}$ , i.e.

$$P_{s,t} f(X_s) = E[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = E[f(X_t) \mid X_s], \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

acts on  $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^n)$  functions, with  $P_{s,t} \circ P_{t,u} = P_{s,u}$ ,  $0 \leq s \leq t \leq u \leq T$ . Although the probabilistic interpretation of  $D$  is not known when  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  is random, it is still possible to compute the explicit predictable representation of  $f(X_T)$  using the Itô formula and the Markov property.

**Lemma 3.7.** *Let  $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^n)$ . We have*

$$E[D_t f(X_T) \mid \mathcal{F}_t] = (L_t(P_{t,T} f))(X_t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.19)$$

*Proof.* We apply the change of variable formula (3.18) to

$t \mapsto P_{t,T} f(X_t) = E[f(X_T) \mid \mathcal{F}_t]$ , since  $P_{t,T} f$  is  $\mathcal{C}^2$ . Using the fact that the finite variation term vanishes since  $t \mapsto P_{t,T} f(X_t)$  is a martingale, (see e.g. Cor. 1, p. 64 of [Pro90]), we obtain:

$$P_{t,T} f(X_t) = P_{0,T} f(X_0) + \int_0^t (L_s(P_{s,T} f))(X_s) dM_s, \quad t \in [0, T],$$

with  $P_{0,T} f(X_0) = E[f(X_T)]$ . Letting  $t = T$ , we obtain (3.19) by uniqueness of the representation (3.12) applied to  $F = f(X_T)$ .

□

In practice, we will use Prop. 3.5 to extend  $(E[D_t f(X_T) | \mathcal{F}_t])_{t \in [0, T]}$  to a less regular function  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . As an example, if  $\phi_t$  is written as  $\phi_t = \varphi(t, M_t)$ , and  $dS_t = \sigma(t, S_t)dM_t + \mu(t, S_t)dt$ , we can apply Prop. 3.3, with  $(X_t)_{t \in [0, T]} = ((S_t, M_t))_{t \in [0, T]}$  and

$$\begin{aligned} L_t f(S_t, M_t) &= i_t \sigma(t, S_t) \partial_1 f(S_t, M_t) + i_t \partial_2 f(S_t, M_t) \\ &\quad + \frac{j_t}{\varphi(t, M_t)} (f(S_t + \varphi(t, M_t) \sigma(t, S_t), M_t + \varphi(t, M_t)) - f(S_t, M_t)), \end{aligned}$$

since the eventual jump of  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  at time  $t$  is  $\varphi(t, M_t)$ . Here,  $\partial_1$ , resp.  $\partial_2$ , denotes the partial derivative with respect to the first, resp. second, variable. Hence

$$\begin{aligned} E[D_t f(S_T, M_T) | \mathcal{F}_t] &= i_t \sigma(t, S_t) (\partial_1 P_{t, T} f)((S_t, M_t)) + i_t (\partial_2 P_{t, T} f)((S_t, M_t)) \\ &\quad + \frac{j_t}{\varphi(t, M_t)} (P_{t, T} f)((S_t + \varphi(t, M_t) \sigma(t, S_t), M_t + \varphi(t, M_t))) \\ &\quad - \frac{j_t}{\varphi(t, M_t)} (P_{t, T} f)((S_t, M_t)). \end{aligned}$$

If  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  is an Azéma martingale ( $\phi_t = \beta M_t$ ,  $t \in [0, T]$ ), then  $i_t = 0$   $dP \times dt$  a.s.

## 3.4 Computations of hedging strategies

### 3.4.1 Market model

In this subsection we introduce the price process which will be considered in the sequel. Let  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  and  $\sigma : [0, T] \rightarrow ]0, \infty[$  be deterministic bounded functions. Let  $(r_t)_{t \in [0, T]}$  be a deterministic non negative function which models a risk-less asset, and let  $(\psi_t)_{t \in [0, T]}$  be defined as

$$\psi_t = \frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t \alpha_t^2}, \quad t \in [0, T].$$

We assume that  $1 + \phi_t \psi_t > 0$ ,  $t \in [0, T]$ . If  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  is not deterministic this choice is still possible due to the boundedness of  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  or from Th. 2.1-iii) of [DP99]. Let  $Q$  denote the probability defined by  $E \left[ \frac{dQ}{dP} | \mathcal{F}_t \right] = l_t$ ,  $t \in [0, T]$ , where  $dl_t = l_{t-} \psi_t dM_t$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $l_0 = 1$ . From Prop. 3.4,

$$Z_t = M_t - \int_0^t \alpha_s^2 \psi_s ds, \quad t \in [0, T],$$

is a local martingale under  $Q$  with angle bracket  $d\langle Z, Z \rangle_t = \alpha_t^2 (1 + \phi_t \psi_t) dt$ . If  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  is deterministic then  $(Z_t)_{t \in [0, T]}$  is a true martingale under  $Q$ . This also holds if

$$(\phi_t)_{t \in [0, T]} = (\beta M_t)_{t \in [0, T]},$$

from the boundedness of  $(M_t)_{t \in [0, T]}$ . If  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  is deterministic, we may start from the data of  $(\tilde{\alpha}_t)_{t \in [0, T]}$ , take  $d[Z, Z]_t = \tilde{\alpha}_t^2 dt + \phi_t dZ_t$  and define  $(\alpha_t)_{t \in [0, T]}$  by  $\alpha_t^2 = \tilde{\alpha}_t^2 / (1 + \phi_t \psi_t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Let the price  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  of a risky asset satisfy the equation

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t^- dZ_t, \quad t \in [0, T], \quad S_0 = 1. \quad (3.20)$$

We have

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t^- dM_t, \quad t \in [0, T], \quad (3.21)$$

and under  $P$ ,  $(S_t e^{-\int_0^t r_s ds})_{t \in [0, T]}$  is a martingale, i.e. the market is arbitrage free. Let  $\eta_t$  and  $\zeta_t$  denote the number of units invested at time  $t$  in the risky and risk-less assets respectively. Thus the value  $V_t$  of the portfolio at time  $t$  is given by

$$V_t = \zeta_t A_t + \eta_t S_t, \quad t \in [0, T], \quad (3.22)$$

where

$$dA_t = r_t A_t dt, \quad A_0 = 1, \quad t \in [0, T]. \quad (3.23)$$

We assume that the portfolio is self-financing, i.e.

$$dV_t = \zeta_t dA_t + \eta_t dS_t, \quad t \in [0, T],$$

therefore

$$dV_t = r_t V_t dt + \sigma_t \eta_t S_t^- dM_t, \quad t \in [0, T],$$

and

$$V_T e^{-\int_0^T r_t dt} = V_0 + \int_0^T \sigma_t \eta_t S_t^- e^{-\int_0^t r_s ds} dM_t, \quad (3.24)$$

Suppose that we are required to find a portfolio  $(\zeta_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$  which leads to a given value  $V_T = F$ . By the Clark-Ocone formula,

$$F = E[F] + \int_0^T E[D_t F | \mathcal{F}_t] dM_t,$$

and comparing with (3.24) we obtain

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-\int_0^T r_s ds} E[F], \\ \eta_t &= \sigma_t^{-1} S_t^{-1} E[D_t F | \mathcal{F}_t] e^{-\int_t^T r_s ds}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Next we consider different models with explicit computations of hedging strategies.

### 3.4.2 European options and deterministic structure

In this section we hedge European calls using the Clark formula. Let  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  be the martingale described in Sect. 3.2.2-a), with deterministic  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$ , i.e.  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  is alternatively Brownian or Poisson depending on the vanishing of  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$ . We assume that  $1 + \sigma_t \phi_t > 0$ ,  $t \in [0, T]$ . We have

$$S_t = \exp \left( \int_0^t \sigma_s \alpha_s i_s dB_s + \int_0^t \left( r_s - \phi_s \lambda_s \sigma_s - \frac{1}{2} i_s \sigma_s^2 \alpha_s^2 \right) ds \right) \prod_{k=1}^{k=N_t} (1 + \sigma_{T_k} \phi_{T_k}),$$

$0 \leq t \leq T$ , where  $(T_k)_{k \geq 1}$  denotes the jump times of  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . We will denote by  $(S_{t,u}^x)_{u \in [t, T]}$  the process defined as

$$dS_{t,u}^x = r_t S_{t,u}^x du + \sigma_u S_{t,u}^x - dM_u, \quad u \in [t, T], \quad S_{t,t}^x = x.$$

We have

$$\begin{aligned} S_{t,T}^x &= x \exp \left( \int_t^T \sigma_u \alpha_u i_u dB_u + \int_t^T \left( r_u - \phi_u \lambda_u \sigma_u - \frac{1}{2} i_u \sigma_u^2 \alpha_u^2 \right) du \right) \\ &\quad \times \prod_{k=1+N_t}^{k=N_T} (1 + \sigma_{T_k} \phi_{T_k}), \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T$ , with  $S_t = S_{0,t}^x$ ,  $t \in [0, T]$ .

**Proposition 3.8.** *Assume that  $\phi_t \geq 0$ ,  $t \in [0, T]$ . Then for  $0 \leq t \leq T$  we have*

$$\begin{aligned} E[D_t(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] &= E \left[ i_t \sigma_t S_{t,T}^x 1_{[K, \infty[}(S_{t,T}^x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{j_t}{\phi_t} (\sigma_t \phi_t S_{t,T}^x - (K - S_{t,T}^x)^+) 1_{[\frac{K}{1+\sigma_t \phi_t}, \infty[}(S_{t,T}^x) \right]_{x=S_t}}. \end{aligned}$$

*Proof.* By Prop. 3.6, for any  $F \in \mathcal{S}$  we have

$$D_t F = D_t^B F + \frac{j_t}{\phi_t} (T_t^\phi F - F), \quad t \in [0, T]. \quad (3.26)$$

We have  $T_t^\phi S_T = (1 + \sigma_t \phi_t) S_T$ ,  $t \in [0, T]$ , and the chain rule  $D^B f(F) = f'(F) D^B F$  holds for  $F \in \mathcal{S}$  and  $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$ . Since  $\mathcal{S}$  is an algebra for deterministic  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$ , we may approach  $x \mapsto (x - K)^+$  by polynomials on compact intervals and proceed e.g. as in [Øks96], p. 5-13. By dominated convergence,  $(S_T - K)^+ \in \text{Dom}(D)$  and (3.26) becomes

$$D_t(S_T - K)^+ = i_t \sigma_t S_T 1_{[K, \infty[}(S_T) + \frac{j_t}{\phi_t} ((1 + \sigma_t \phi_t) S_T - K)^+ - (S_T - K)^+,$$

$0 \leq t \leq T$ . The Markov property of  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  implies

$$E [D_t^B (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] = i_t \sigma_t E [S_{t, T}^x 1_{[K, \infty[}((S_{t, T}^x))]_{x=S_t},$$

and

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{J}_t}{\phi_t} E \left[ (T_t^\phi S_T - K)^+ - (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{\dot{J}_t}{\phi_t} E \left[ ((1 + \sigma_t \phi_t) S_{t, T}^x - K)^+ - (S_{t, T}^x - K)^+ \right]_{x=S_t} \\ &= \frac{\dot{J}_t}{\phi_t} E \left[ ((1 + \sigma_t \phi_t) S_{t, T}^x - K) 1_{[\frac{K}{1+\sigma_t \phi_t}, \infty[}(S_{t, T}^x) \right]_{x=S_t} \\ &\quad - \frac{\dot{J}_t}{\phi_t} E \left[ (S_{t, T}^x - K)^+ 1_{[K, \infty[}(S_{t, T}^x) \right]_{x=S_t} \\ &= \frac{\dot{J}_t}{\phi_t} E \left[ \sigma_t \phi_t S_{t, T}^x 1_{[\frac{K}{1+\sigma_t \phi_t}, \infty[}(S_{t, T}^x) + (S_{t, T}^x - K) 1_{[\frac{K}{1+\sigma_t \phi_t}, K]}(S_{t, T}^x) \right]_{x=S_t} \\ &= \frac{\dot{J}_t}{\phi_t} E \left[ \sigma_t \phi_t S_{t, T}^x 1_{[\frac{K}{1+\sigma_t \phi_t}, \infty[}(S_{t, T}^x) - (K - S_{t, T}^x)^+ 1_{[\frac{K}{1+\sigma_t \phi_t}, \infty[}(S_{t, T}^x) \right]_{x=S_t} \\ &= \frac{\dot{J}_t}{\phi_t} E \left[ (\sigma_t \phi_t S_{t, T}^x - (K - S_{t, T}^x)^+) 1_{[\frac{K}{1+\sigma_t \phi_t}, \infty[}(S_{t, T}^x) \right]_{x=S_t}. \end{aligned}$$

□

If  $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$  is not constrained to be positive then

$$\begin{aligned} E[D_t(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] &= i_t \sigma_t E [S_{t, T}^x 1_{[K, \infty[}(S_{t, T}^x)]_{x=S_t} \\ &\quad + \frac{\dot{J}_t}{\phi_t} E \left[ \sigma_t \phi_t S_{t, T}^x 1_{[\frac{K}{1+\sigma_t \phi_t}, \infty[}(S_{t, T}^x) + (S_{t, T}^x - K) 1_{[\frac{K}{1+\sigma_t \phi_t}, K]}(S_{t, T}^x) \right]_{x=S_t}, \end{aligned}$$

with the convention  $1_{[b, a]} = -1_{[a, b]}$ ,  $0 \leq a < b \leq T$ . Prop. 3.8 can also be proved using Lemma 3.7 and the Itô formula (3.8). In the deterministic case, the semi-group  $P_{t, T}$  can be explicitly computed. Let  $\Gamma_{t, T}^\sigma = \int_t^T i_s \alpha_s^2 \sigma_s^2 ds$  denote the variance of  $\int_t^T i_s \alpha_s \sigma_s dB_s$ ,  $t \in [0, T]$ , and let  $\Gamma_{t, T} = \int_t^T \gamma_s ds$ ,  $t \in [0, T]$ , denote the intensity of  $N_T - N_t$  under  $Q$ , where  $\gamma_t = \lambda_t(1 + \phi_t \psi_t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

**Proposition 3.9.** *We have for  $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$*

$$\begin{aligned} P_{t, T} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\Gamma_{t, T}}}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \nu_{t_0} \int_{[t, T]^k} \gamma_{t_1} \cdots \gamma_{t_k} \\ &\quad f \left( x e^{-\frac{\Gamma_{t, T}^\sigma}{2} + (\Gamma_{t, T}^\sigma)^{1/2} t_0 - \int_t^T \phi_s \gamma_s \sigma_s ds} \prod_{i=1}^{i=k} (1 + \sigma_{t_i} \phi_{t_i}) \right) dt_1 \cdots dt_k dt_0, \end{aligned}$$

where  $\nu$  denotes the standard Gaussian density.

*Proof.* We have  $P_{t,T}f(x) = E[f(S_T) | S_t = x] = E[f(S_{t,T}^x)]$ , and

$$P_{t,T}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} E[f(S_{t,T}^x) | N_T - N_t = k] \exp(-\Gamma_{t,T}) \frac{\Gamma_{t,T}^k}{k!}$$

$k \in \mathbb{N}$ . Since  $(N_{\Gamma_{t,s}^{-1}} - N_t)_{s \in [t,T]}$  is a standard Poisson process, conditionally to  $\{N_T - N_t = k\}$ , the  $n$  first jump times  $(T_1, \dots, T_n)$  of  $(N_s)_{s \in [t,T]}$  have the law

$$\frac{k!}{(\Gamma_{t,T})^k} 1_{\{t < t_1 < \dots < t_k < T\}} \gamma_{t_1} \cdots \gamma_{t_k} dt_1 \cdots dt_k,$$

and conditionally to  $\{N_T - N_t = k\}$ , the jump times  $(\Gamma_{t,T_1}, \dots, \Gamma_{t,T_k})$  have a uniform law on  $[0, \Gamma_{t,T}]^k$ . We then use the identity in law between  $S_{t,T}^x$  and

$$x X_{t,T} \exp\left(-\int_t^T \phi_s \lambda_s (1 + \phi_s \psi_s) \sigma_s ds\right) \prod_{k=1+N_t}^{k=N_T} (1 + \sigma_{T_k} \phi_{T_k}),$$

where

$$X_{t,T} = \exp\left(-\Gamma_{t,T}^\sigma/2 + (\Gamma_{t,T}^\sigma)^{1/2} W\right),$$

and  $W$  a standard Gaussian random variable, independent of  $(N_t)_{t \in [0,T]}$ . This identity holds because  $(B_t)_{t \in [0,T]}$  is a standard Brownian motion, independent of  $(N_t)_{t \in [0,T]}$ .  $\square$

See Prop. 8 of [JP02] for a computation of

$$E\left[\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right) (S_T - K)^+\right]$$

in terms of the classical Black-Scholes function

$$\text{BS}(x, T; r, \sigma^2; K) = E[e^{-rT} (xe^{rT - \sigma^2 T/2 + \sigma W_t} - K)^+],$$

where  $W_t$  is a centered Gaussian random variable with variance  $t$ .

### 3.4.3 Asian options and deterministic structure

The price at time  $t$  of such an option is

$$E\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K\right)^+ \mid \mathcal{F}_t\right].$$

The next proposition gives us a replicating hedging strategy for Asian options in the the case of deterministic structure equation model

**Proposition 3.10.** *There exists a measurable function  $\tilde{C}$  on  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  such that  $\tilde{C}(t, \cdot)$  is  $\mathcal{C}^1$  for all  $t \in \mathbb{R}_+$ , and*

$$S_t \tilde{C}(t, Y_t) = E \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Moreover, the replicating portfolio for an Asian option with payoff

$$\left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)^+$$

is given by (3.22) and

$$\begin{aligned} \eta_t = \frac{1}{\sigma_t} e^{-\int_t^T r_s ds} & \left[ \tilde{C}(t, Y_t) \sigma_t \right. \\ & \left. + (1 + \sigma_t \phi_t) \left( \frac{j_t}{\phi_t} \left( \tilde{C} \left( t, \frac{Y_t}{1 + \sigma_t \phi_t} \right) - \tilde{C}(t, Y_t) \right) - i_t \sigma_t Y_t \partial_2 \tilde{C}(t, Y_t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

*Proof.* Following [LL96], p. 91, we define the auxiliary process

$$Y_t = \frac{1}{S_t} \left( \frac{1}{T} \int_0^t S_u du - K \right), \quad t \in [0, T].$$

With this notation, the price of the Asian option at time  $t$  becomes

$$E \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} S_T (Y_T)^+ \mid \mathcal{F}_t \right].$$

For  $0 \leq s \leq t \leq T$ , we have

$$d(S_t Y_t) = \frac{1}{T} d \left( \int_0^t S_u du - K \right) = \frac{S_t}{T} dt,$$

hence

$$\frac{S_t Y_t}{S_s} = Y_s + \frac{1}{T} \int_s^t \frac{S_u}{S_s} du.$$

Let  $H \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$ . We have

$$\begin{aligned} E [H(S_T Y_T) \mid \mathcal{F}_t] &= E \left[ H \left( S_t Y_t + \frac{1}{T} \int_t^T S_u du \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[ H \left( xy + \frac{x}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du \right) \right]_{y=Y_t, x=S_t}. \end{aligned}$$

Let  $C \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$  be defined as

$$C(t, x, y) = E \left[ H \left( xy + \frac{x}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du \right) \right],$$



i.e.

$$C(t, S_t, Y_t) = E [H(S_T Y_T) | \mathcal{F}_t].$$

When  $H(x) = x^+$ , since for any  $t \in [0, T]$ ,  $S_t$  is positive and  $\mathcal{F}_t$ -measurable, and  $S_u/S_t$  is independent of  $\mathcal{F}_t$ ,  $u \geq t$ , we have:

$$\begin{aligned} E [H(S_T Y_T) | \mathcal{F}_t] &= E [S_T (Y_T)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= S_t E \left[ \left( \frac{S_T}{S_t} Y_T \right)^+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= S_t E \left[ \left( Y_t + \frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du \right)^+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= S_t E \left[ \left( y + \frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du \right)^+ \right]_{y=Y_t} \\ &= S_t \tilde{C}(t, Y_t), \end{aligned}$$

with

$$\tilde{C}(t, y) = E \left[ \left( y + \frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du \right)^+ \right].$$

We now proceed as in [Bel99], which deals with the sum of a Brownian motion and a Poisson process. From the expression of  $1/S_t$  we have

$$d \left( \frac{1}{S_t} \right) = \frac{1}{S_t^-} \left[ \left( -r_t + \frac{\alpha_t^2 \sigma_t^2}{1 + \sigma_t \phi_t} \right) dt - \frac{\sigma_t}{1 + \sigma_t \phi_t} dM_t \right],$$

hence by (3.8)

$$dY_t = Y_t \left( -r_t + \frac{\alpha_t^2 \sigma_t^2}{1 + \sigma_t \phi_t} \right) dt + \frac{1}{T} dt - \frac{Y_t \sigma_t}{1 + \sigma_t \phi_t} dM_t.$$

Applying Lemma. 3.7 we get

$$\begin{aligned} E [D_t H(S_T Y_T) | \mathcal{F}_t] &= L_t C(t, S_t, Y_t) \\ &= i_t \left( \sigma_t S_t^- \partial_2 C(t, S_t, Y_t) - \frac{Y_t \sigma_t}{1 + \sigma_t \phi_t} \partial_3 C(t, S_t, Y_t) \right) \\ &\quad + \frac{j_t}{\phi_t} \left( C \left( t, S_t^- + \sigma_t S_t^-, Y_t^- - \frac{Y_t \sigma_t}{1 + \sigma_t \phi_t} \right) - C(t, S_t^-, Y_t^-) \right). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Given a family  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of  $\mathcal{C}_b^2$  functions, such that  $|H_n(x)| \leq x^+$  and  $|H'_n(x)| \leq 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , and converging pointwise to  $x \rightarrow x^+$ , by dominated convergence (3.28) holds for  $C(t, x, y) = x \tilde{C}(t, y)$  and we obtain:

$$E \left[ D_t \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)^+ | \mathcal{F}_t \right]$$

$$\begin{aligned}
&= i_t \tilde{C}(t, Y_t) \sigma_t S_t \\
&\quad + S_t \left( \frac{j_t}{\phi_t} \left( \tilde{C} \left( t, \frac{Y_t}{1 + \sigma_t \phi_t} \right) - \tilde{C}(t, Y_t) \right) - i_t \sigma_t Y_t \partial_2 \tilde{C}(t, Y_t) \right) \\
&\quad + S_t \sigma_t \phi_t \left( \frac{j_t}{\phi_t} \left( \tilde{C} \left( t, \frac{Y_t}{1 + \sigma_t \phi_t} \right) - \tilde{C}(t, Y_t) \right) - i_t \sigma_t Y_t \partial_2 \tilde{C}(t, Y_t) \right).
\end{aligned}$$

□

As a particular case we consider the Brownian motion model, i.e.  $\phi_t = 0$ , for all  $t \in [0, T]$ , so  $i_t = 1$ ,  $j_t = 0$  for all  $t \in [0, T]$ , and we are in the Brownian motion model. In this case we have

$$\begin{aligned}
\eta_t &= e^{-\int_t^T r_s ds} \left( -Y_t \partial_2 \tilde{C}(t, Y_t) + \tilde{C}(t, Y_t) \right) \\
&= e^{-\int_t^T r_s ds} \left( S_t \frac{\partial}{\partial x} \tilde{C} \left( t, \frac{1}{x} \left( \frac{1}{T} \int_0^t S_u du - K \right) \right) \Big|_{x=S_t} + \tilde{C}(t, Y_t) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( x e^{-\int_t^T r_s ds} \tilde{C} \left( t, \frac{1}{x} \left( \frac{1}{T} \int_0^t S_u du - K \right) \right) \right) \Big|_{x=S_t}, \quad t \in [0, T],
\end{aligned}$$

which can be denoted informally as a partial derivative with respect to  $S_t$ .

### 3.4.4 European options and Azéma martingales

Let  $-2 \leq \beta < 0$ , and let  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  be the unique solution of the structure equation

$$d[M, M]_t = dt + \beta M_t - dM_t, \quad t \in [0, T]. \quad (3.29)$$

This process has the chaos representation property, hence the results of Sect. 3.3 apply in this case. This allows to obtain an explicit hedging formula for the model of [DP99]. We use the convention  $1_{[b, a]} = -1_{[a, b]}$ ,  $0 \leq a < b \leq T$ .

**Proposition 3.11.** *We have*

$$\begin{aligned}
&E [D_t(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\
&= \frac{1}{\beta M_t} E \left[ \sigma_t \beta (y + M_T - M_t) S_{t, T}^x 1_{\left[ \frac{K}{1 + \sigma_t \beta (y + M_T - M_t)}, \infty \right]}(S_{t, T}^x) \right. \\
&\quad \left. + (S_{t, T}^x - K) 1_{\left[ \frac{K}{1 + \sigma_t \beta (y + M_T - M_t)}, K \right]}(S_{t, T}^x) \right] \Big|_{x=S_t}^{y=M_t}.
\end{aligned}$$

*Proof.* Let  $(X_t)_{t \in [0, T]} = ((S_t, M_t))_{t \in [0, T]}$ ,  $(R_t)_{t \in [0, T]} = ((r_t S_t, 0))_{t \in [0, T]}$ ,  $(K_t)_{t \in [0, T]} = ((\sigma_t S_t, 1))_{t \in [0, T]}$ , and  $X_0 = (1, 0)$ . By Lemma 3.7, for  $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^2)$  we have

$$E[D_t f(X_T) | \mathcal{F}_t] = (L_t(P_{t, T} f))(X_t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\beta M_t} ((P_{t,T}f)(X_t + \beta M_t K_t) - (P_{t,T}f)(X_t)) \\
&= \frac{1}{\beta M_t} ((P_{t,T}f)((1 + \beta M_t \sigma_t)S_t, (1 + \beta)M_t) - (P_{t,T}f)(S_t, M_t)) \\
&= \frac{1}{\beta M_t} E [f((1 + \sigma_t \beta(y + M_T - M_t))S_{t,T}^x, \\
&\quad (1 + \beta(y + M_T - M_t)))]_{x=S_t}^{y=M_t} \\
&\quad - \frac{1}{\beta M_t} E [f(S_{t,T}^x, y + M_T - M_t)]_{x=S_t}^{y=M_t}.
\end{aligned}$$

In particular if  $f(x, y) = f(x)$  depends only on the first variable we have

$$\begin{aligned}
&E [D_t f(S_T) \mid \mathcal{F}_t] \\
&= \frac{1}{\beta M_t} E [f((1 + \sigma_t \beta(y + M_T - M_t))S_{t,T}^x) - f(S_{t,T}^x)]_{x=S_t}^{y=M_t}.
\end{aligned}$$

Approaching the function  $x \mapsto (x - K)^+$  with a sequence  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of  $\mathcal{C}_b^2$  functions converging pointwise with  $|f_n(x)| \leq (x - K)^+$ , and  $|f'_n(x)| \leq 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , we obtain

$$\begin{aligned}
&E [D_t (S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] \\
&= \frac{1}{\beta M_t} E [((1 + \sigma_t \beta(y + M_T - M_t))S_{t,T}^x - K)^+ - (S_{t,T}^x - K)^+]_{x=S_t}^{y=M_t} \\
&= \frac{1}{\beta M_t} E \left[ ((1 + \sigma_t \beta(y + M_T - M_t))S_{t,T}^x - K) 1_{[\frac{K}{1 + \sigma_t \beta(y + M_T - M_t)}, \infty[}(S_{t,T}^x) \right. \\
&\quad \left. - (S_{t,T}^x - K) 1_{[K, \infty[}(S_{t,T}^x) \right]_{x=S_t}^{y=M_t} \\
&= \frac{1}{\beta M_t} E \left[ \sigma_t \beta(y + M_T - M_t) S_{t,T}^x 1_{[\frac{K}{1 + \sigma_t \beta(y + M_T - M_t)}, \infty[}(S_{t,T}^x) \right. \\
&\quad \left. + (S_{t,T}^x - K) 1_{[\frac{K}{1 + \sigma_t \beta(y + M_T - M_t)}, K]}(S_{t,T}^x) \right]_{x=S_t}^{y=M_t}.
\end{aligned}$$

□

### 3.4.5 Lookback options

Hedging strategies for Lookback options have been computed in [Ber98] using the Clark-Ocone formula. In this section we show that classical martingale methods also apply in this case. We assume that  $(M_t)_{t \in [0, T]} = (B_t)_{t \in [0, T]}$  is a standard Brownian motion, i.e.  $\alpha_t = 1$  and  $\phi_t = 0$  for every  $t \in [0, T]$ , and take  $r_t = r \geq 0$  and  $\sigma_t = \sigma \geq 0$  for every  $t \in [0, T]$ . Under the risk-free probability  $P$  the asset price  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  has the dynamic

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad t \in [0, T],$$

so (3.24) becomes

$$V_T e^{-rT} = V_0 + \int_0^T \sigma \eta_t S_t e^{-rt} dB_t, \quad t \in [0, T].$$

Let  $m_s^t = \inf_{u \in [s, t]} S_u$ ,  $M_s^t = \sup_{u \in [s, t]} S_u$ ,  $0 \leq s \leq t \leq T$ , and let  $\mathcal{M}_s^t$  be either  $m_s^t$  or  $M_s^t$ . In the Lookback option case the payoff  $H(S_T, \mathcal{M}_0^T)$  depends not only on the price of the underlying asset at maturity but also it depends on all prices of the underlying asset over the period which starts from the initial time and ends at maturity, and let  $\text{Look}_t$  be the price of the Lookback option given by

$$\text{Look}_t = e^{-r(T-t)} E[H(S_T, \mathcal{M}_0^T) \mid \mathcal{F}_t], \quad H \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^2), \quad t \in [0, T].$$

**Proposition 3.12.** *There exists a  $\mathcal{C}^1$  function  $f$  such that*

$$f(S_t, \mathcal{M}_0^t, t) = E[H(S_T, \mathcal{M}_0^T) \mid \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T.$$

*The replicating portfolio of a Lookback option with payoff  $H(S_T, \mathcal{M}_0^T)$ , and price  $\text{Look}_t = f(S_t, \mathcal{M}_0^t, t)$  at time  $t$ , is given by (3.22), and*

$$\eta_t = e^{-r(T-t)} \partial_1 f(S_t, \mathcal{M}_0^t, t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.30)$$

*Proof.* It suffices to deal with the case  $\mathcal{M}_s^t = m_s^t$ . The existence of  $f$  follows from the Markov property, more precisely

$$f(x, y, t) = E[H(S_{t,T}^x, y \wedge \mathcal{M}_t^T)].$$

Applying the change of variable formula, for  $t \in [0, T]$ , we have

$$\begin{aligned} df(S_t, \mathcal{M}_0^t, t) &= \left[ \partial_3 f + r S_t \partial_1 f + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \partial_1^2 f \right] (S_t, \mathcal{M}_0^t, t) dt \\ &\quad + \partial_2 f(S_t, \mathcal{M}_0^t, t) d\mathcal{M}_0^t + \sigma S_t \partial_1 f(S_t, \mathcal{M}_0^t, t) dB_t. \end{aligned}$$

Since  $(E[H(S_T, \mathcal{M}_0^T) \mid \mathcal{F}_t])_{t \in [0, T]}$  is a  $P$ -martingale and  $(\mathcal{M}_0^t)_{t \in [0, T]}$  has finite variation (it is in fact a decreasing process), we have:

$$df(S_t, \mathcal{M}_0^t, t) = \sigma S_t \partial_1 f(S_t, \mathcal{M}_0^t, t) dB_t \quad t \in [0, T].$$

Then

$$e^{-rT} F = e^{-rT} E[F] + \int_0^T e^{-rt} \sigma S_t \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mathcal{M}_0^t, t)|_{x=S_t} dB_t \quad t \in [0, T],$$

which shows (3.30). □

It is stated in Bermin [Ber98] that we should have

$$\int_0^t \partial_2 f(S_s, \mathcal{M}_0^s, s) d\mathcal{M}_0^s = 0, \quad (3.31)$$

for the delta hedging method to work. We showed in Prop. 3.12 that the delta hedging approach can be applied without having to verify (3.31), since  $(\mathcal{M}_0^t)_{t \in [0, T]}$  is a monotone process with finite variation.

Relation (3.30) can be written informally as

$$\eta_t = \frac{\partial}{\partial S_t} \text{Look}_t, \quad t \in [0, T].$$

Let

$$d_t^T(y) = \frac{\log \frac{S_t}{y} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \text{and} \quad \mathcal{N}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

A standard Lookback call option is the right to buy the underlying asset at the historically lowest price. In this case the strike is  $m_0^T$  and the payoff is

$$G = S_T - m_0^T.$$

From [DJ98], Prop. 4, p. 271, the price  $\text{Look}_t$  at time  $t$  is given by

$$\begin{aligned} \text{Look}_t &= E_Q[e^{-r(T-t)}(S_T - m_0^T) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= S_t \mathcal{N}(d_t^T(m_0^t)) - e^{-r(T-t)} m_0^t \mathcal{N}\left(d_t^T(m_0^t) - \sigma\sqrt{T-t}\right) \\ &\quad + e^{-r(T-t)} \frac{S_t \sigma^2}{2r} \left[ \left(\frac{S_t}{m_0^t}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \mathcal{N}\left(-d_t^T(m_0^t) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) \right. \\ &\quad \left. - e^{r(T-t)} \mathcal{N}\left(-d_t^T(m_0^t)\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

In the following proposition we recover the result of [Ber98], § 2.6.1, p. 29, using the delta hedging approach instead of the Clark formula, as an application of Prop. 3.12.

**Proposition 3.13.** *The hedging strategy for a standard Lookback call option is given by*

$$\begin{aligned} \eta_t &= \mathcal{N}(d_t^T(m_0^t)) - \frac{\sigma^2}{2r} \mathcal{N}(-d_t^T(m_0^t)) \\ &\quad + e^{-r(T-t)} \left(\frac{S_t}{m_0^t}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \left(\frac{\sigma^2}{2r} - 1\right) \mathcal{N}\left(-d_t^T(m_0^t) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma}\right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

*Proof.* We need to compute the following derivatives:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial S_t} (\mathcal{N}(d_t^T(m_0^t))) \\
&= \frac{\partial}{\partial S_t} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(d_t^T(m_0^t))} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\partial}{\partial S_t} (d_t^T(m_0^t)) \right] \exp \left( -\frac{1}{2} (d_t^T(m_0^t))^2 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\partial}{\partial S_t} \left( \frac{\log \frac{S_t}{m_0^t} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \exp \left( -\frac{1}{2} (d_t^T(m_0^t))^2 \right) \\
&= \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left( -\frac{1}{2} (d_t^T(m_0^t))^2 \right),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial S_t} (\mathcal{N}(d_t^T(m_0^t) - \sigma\sqrt{T-t})) \\
&= \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left( -\frac{1}{2} (d_t^T(m_0^t) - \sigma\sqrt{T-t})^2 \right).
\end{aligned}$$

Similarly we have

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial S_t} \left( \mathcal{N} \left( -d_t^T(m_0^t) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{S_t \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( -d_t^T(m_0^t) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma} \right)^2 \right),
\end{aligned}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial S_t} (\mathcal{N}(-d_t^T(m_0^t))) = -\frac{1}{S_t \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left( -\frac{1}{2} (d_t^T(m_0^t))^2 \right).$$

Finally,

$$\frac{\partial}{\partial S_t} \left( \frac{S_t}{m_0^t} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} = \frac{-2r}{m_0^t \sigma^2} \left( \frac{S_t}{m_0^t} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1}.$$

The above expressions can be combined to compute the derivative of  $\text{Look}_t$  in (3.32), and to obtain:

$$\begin{aligned}
\eta_t &= \mathcal{N}(d_t^T(m_0^t)) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left( -\frac{1}{2} (d_t^T(m_0^t))^2 \right) \\
&\quad - e^{-r(T-t)} m_0^t \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left( -\frac{1}{2} (d_t^T(m_0^t) - \sigma\sqrt{T-t})^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} \left[ \left( \frac{S_t}{m_0^t} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \mathcal{N} \left( -d_t^T(m_0^t) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma} \right) \right. \\
& \quad \left. - e^{r(T-t)} \mathcal{N}(-d_t^T(m_0^t)) \right] \\
& + e^{-r(T-t)} \frac{S_t \sigma^2}{2r} \left[ \frac{-2r}{m_0^t \sigma^2} \left( \frac{S_t}{m_0^t} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \mathcal{N} \left( -d_t^T(m_0^t) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left( \frac{S_t}{m_0^t} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( -d_t^T(m_0^t) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma} \right)^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + e^{r(T-t)} \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left( -\frac{1}{2} (d_t^T(m_0^t))^2 \right) \right] \\
& = \mathcal{N} \left( -d_t^T(m_0^t) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma} \right) \left[ e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} \left( \frac{S_t}{m_0^t} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} + e^{-r(T-t)} \frac{S_t \sigma^2}{2r} \right. \\
& \quad \left. \times \frac{-2r}{m_0^t \sigma^2} \left( \frac{S_t}{m_0^t} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \right] + \mathcal{N}(d_t^T(m_0^t)) \\
& \quad - \mathcal{N}(-d_t^T(m_0^t)) \left[ -e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} \times e^{r(T-t)} \right] \\
& \quad + \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \left\{ \exp \left( -\frac{1}{2} (d_t^T(m_0^t))^2 \right) \left[ 1 + e^{-r(T-t)} \frac{S_t \sigma^2}{2r} \times \frac{e^{r(T-t)}}{S_t} \right] \right. \\
& \quad \left. - e^{-r(T-t)} \left[ \frac{m_0^t}{S_t} \exp \left( -\frac{1}{2} (d_t^T(m_0^t) - \sigma \sqrt{T-t})^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\sigma^2}{2r} \left( \frac{S_t}{m_0^t} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( -d_t^T(m_0^t) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma} \right)^2 \right) \right] \right\} \\
& = e^{-r(T-t)} \left( \frac{S_t}{m_0^t} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \left( \frac{\sigma^2}{2r} - 1 \right) \mathcal{N} \left( -d_t^T(m_0^t) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma} \right) \\
& \quad + \mathcal{N}(d_t^T(m_0^t)) - \frac{\sigma^2}{2r} \mathcal{N}(-d_t^T(m_0^t)) \\
& \quad + \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \left\{ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2r} \right) \exp \left( -\frac{1}{2} d_t^T(m_0^t)^2 \right) \right. \\
& \quad \left. - e^{-r(T-t)} \left[ \frac{m_0^t}{S_t} \exp \left( -\frac{1}{2} (d_t^T(m_0^t) - \sigma \sqrt{T-t})^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\sigma^2}{2r} \left( \frac{S_t}{m_0^t} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( -d_t^T(m_0^t) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma} \right)^2 \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

To obtain (3.33), it is sufficient to show that

$$\begin{aligned}
0 &= \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}d_t^T(m_0^t)^2\right) \\
&\quad - e^{-r(T-t)} \left[\frac{m_0^t}{S_t} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(d_t^T(m_0^t) - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma^2}{2r} \left(\frac{S_t}{m_0^t}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(-d_t^T(m_0^t) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma}\right)^2\right)\right].
\end{aligned}$$

To see this, one can observe that

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{1}{2}\left(d_t^T(y) - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(d_t^T(y)\right)^2 + \sigma^2(T-t) - 2d_t^T(y)\sigma\sqrt{T-t}\right]\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(d_t^T(y)\right)^2\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\sigma^2(T-t) - 2\left(\log\frac{S_t}{y} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)\right]\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left[-2\log\frac{S_t}{y} - 2r(T-t)\right] - \frac{1}{2}\left(d_t^T(y)\right)^2\right) \\
&= e^{r(T-t)}\frac{S_t}{y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(d_t^T(y)\right)^2\right),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{1}{2}\left(-d_t^T(y) + 2r\sqrt{T-t}/\sigma\right)^2\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(d_t^T(y)\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{4r^2}{\sigma^2}(T-t) - \frac{4r}{\sigma}d_t^T(y)\sqrt{T-t}\right]\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(d_t^T(y)\right)^2\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{4r^2}{\sigma^2}(T-t) - \frac{4r}{\sigma^2}\left(\log\frac{S_t}{y} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)\right]\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(d_t^T(y)\right)^2\right) \\
&\quad \times \exp\left(\frac{-2r^2}{\sigma^2}(T-t) + \frac{2r}{\sigma^2}\log\frac{S_t}{y} + \frac{2r^2}{\sigma^2}(T-t) + r(T-t)\right) \\
&= e^{r(T-t)}\left(\frac{S_t}{y}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(d_t^T(y)\right)^2\right).
\end{aligned}$$





# Bibliographie

- [AÉ96] S. Attal and M. Émery. Martingales d’Azéma bidimensionnelles. *Astérisque*, 236, pages 9–21, 1996.
- [AOPU00] K. Aase, B. Øksendal, N. Privault, and J. Ubøe. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. *Finance and Stochastics*, 4(4):465–496, 2000.
- [Bel99] N. Bellamy. Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des processus discontinus. Thèse, Université d’Evry, 1999.
- [Ber98] H. Bermin. Essays on Lookback options: a Malliavin calculus approach. PhD thesis, Lund University, 1998.
- [Cla70] J.M.C. Clark. The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. *Annals of Mathematical Statistics*, 41:1281–1295, 1970.
- [DJ98] R.-A. Dana and M. Jeanblanc. *Marchés financiers en temps continu*. Economica, Paris, 1998.
- [DP99] M. Dritschel and Ph. Protter. Complete markets with discontinuous security price. *Finance and Stochastics*, 3(2), 1999.
- [É90] M. Émery. On the Azéma martingales. In *Séminaire de Probabilités XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 66–87. Springer Verlag, 1990.
- [JP02] M. Jeanblanc and N. Privault. A complete market model with Poisson and Brownian components. In R. Dalang, M. Dozzi, and F. Russo, editors, *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications (Ascona, 1999)*, volume 52 of *Progress in Probability*, pages 189–204. Birkhäuser, Basel, 2002.
- [KO91] I. Karatzas and D.L. Ocone. A generalized Clark representation formula with application to optimal portfolios. *Stochastics and Stochastics Reports*, 34:187–230, 1991.

- [LL96] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman & Hall, London, 1996.
- [Mey89] P.-A. Meyer. Construction de solutions d' "équations de structure". In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 142–145. Springer, Berlin, 1989.
- [Øks96] B. Øksendal. An introduction to Malliavin calculus with applications to economics. Working paper no. 3, Institute of Finance and Management Science, Norwegian School of Economics and Business Administration, 1996.
- [Pha00] A. Phan. Contributions à l'étude des équations de structure markoviennes. Thèse, Université de Strasbourg, 2000.
- [Pri96] N. Privault. On the independence of multiple stochastic integrals with respect to a class of martingales. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323:515–520, 1996.
- [Pro90] Ph. Protter. *Stochastic integration and differential equations. A new approach*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Pro01] Ph. Protter. A partial introduction to financial asset pricing theory. *Stochastic Process. Appl.*, 91(2):169–203, 2001.
- [PSV00] N. Privault, J.L. Solé, and J. Vives. Chaotic Kabanov formula for the Azéma martingales. *Bernoulli*, 6(4):633–651, 2000.
- [Tav99] G. Taviot. Martingales et équations de structure : étude géométrique. Thèse, Université de Strasbourg, 1999.
- [Yor76] M. Yor. Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles. In *Séminaire de Probabilités, X (Seconde partie: Théorie des intégrales stochastiques, Univ. Strasbourg, Strasbourg, année universitaire 1974/1975)*, pages 481–500. Lecture Notes in Math., Vol. 511. Springer, Berlin, 1976.

## 3.5 Appendix 1: Lookback Options

We compute strategies for options on extrema and partial Lookback options using Prop. 3.12.

### 3.5.1 Options on extrema

Options on extrema calls are similar to ordinary calls, except that the price of the underlying security at maturity is replaced by the historically highest price of the underlying security. Then the payoff at maturity is

$$G = (M_0^T - K)^+.$$

The price  $\text{Look}_t$  at time  $t$  (see for example [Ber98]) is given by

$$\begin{aligned} \text{Look}_t &= E_Q[e^{-r(T-t)}(M_0^T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= S_t \mathcal{N}(d_t^T(K)) - e^{-r(T-t)} K \mathcal{N}(d_t^T(K) - \sigma\sqrt{T-t}) \\ &\quad + e^{-r(T-t)} \frac{S_t \sigma^2}{2r} \left[ -\left(\frac{S_t}{K}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \mathcal{N}\left(d_t^T(K) - \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) + e^{r(T-t)} \mathcal{N}(d_t^T(K)) \right]. \end{aligned}$$

if  $S_0 \leq K$ , and by

$$\begin{aligned} \text{Look}_t &= E_Q[e^{-r(T-t)}(M_0^T - K) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} (M_0^t - K) + S_t \mathcal{N}(d_t^T(M_0^t)) - e^{-r(T-t)} M_0^t \mathcal{N}\left(d_t^T(M_0^t) - \sigma\sqrt{T-t}\right) \\ &\quad + e^{-r(T-t)} \frac{S_t \sigma^2}{2r} \left[ -\left(\frac{S_t}{M_0^t}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \mathcal{N}\left(d_t^T(M_0^t) - \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) + e^{r(T-t)} \mathcal{N}(d_t^T(M_0^t)) \right], \end{aligned}$$

otherwise. Therefore by (3.30) and relations (3.34) and (3.34) we have

$$\eta_t = \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) \mathcal{N}(d_t^T(K)) + \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) e^{-r(T-t)} \left(\frac{S_t}{K}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \mathcal{N}\left(d_t^T(K) - \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma}\right),$$

if  $S_0 \leq K$ , and

$$\eta_t = \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) \mathcal{N}(d_t^T(M_0^t)) + \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) e^{-r(T-t)} \left(\frac{S_t}{M_0^t}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \mathcal{N}\left(d_t^T(M_0^t) - \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma}\right),$$

otherwise.

### 3.5.2 Partial Lookback option

A partial Lookback call option is the right to buy the underlying asset at some percentage over the historically lowest price. The strike is  $\lambda m_0^T$ , where  $\lambda \geq 1$  and the payoff is

$$G = (S_T - \lambda m_0^T)^+.$$

At time  $t$  the price  $\text{Look}_t$  (cf. [Ber98]) in this case is

$$\begin{aligned} \text{Look}_t &= E_Q[e^{-r(T-t)}(S_T - \lambda m_0^T)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= S_t \mathcal{N}(d_t^T(\lambda m_0^t)) - \lambda m_0^t e^{-r(T-t)} \mathcal{N}\left(d_t^T(\lambda m_0^t) - \sigma\sqrt{T-t}\right) \\ &\quad + \lambda e^{-r(T-t)} S_t \frac{\sigma^2}{2r} \left[ \left(\frac{S_t}{m_0^t}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \mathcal{N}\left(-d_t^T\left(\frac{m_0^t}{\lambda}\right) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) \right. \\ &\quad \left. - \lambda^{\frac{2r}{\sigma^2}} e^{r(T-t)} \mathcal{N}\left(-d_t^T\left(\frac{m_0^t}{\lambda}\right)\right) \right]. \end{aligned}$$

Thus from (3.30) and relations (3.34) and (3.34), we obtain

$$\begin{aligned} \eta_t &= \mathcal{N}(d_t^T(\lambda m_0^T)) - \frac{\sigma^2}{2r} \lambda^{\frac{2r}{\sigma^2}+1} \mathcal{N}\left(-d_t^T\left(\frac{m_0^t}{\lambda}\right)\right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) e^{-r(T-t)} \lambda \left(\frac{S_t}{m_0^T}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \mathcal{N}\left(-d_t^T\left(\frac{m_0^t}{\lambda}\right) + \frac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

## 3.6 Appendix 2: Implicit volatility graphs

### 3.6.1 Poisson case

The following figures are simulated implicit volatility plots for  $\sigma$  as a function of  $K$ , from the classical Black-Scholes function  $BS(x, T; r, \sigma^2; K)$ , in a Poisson jump model.

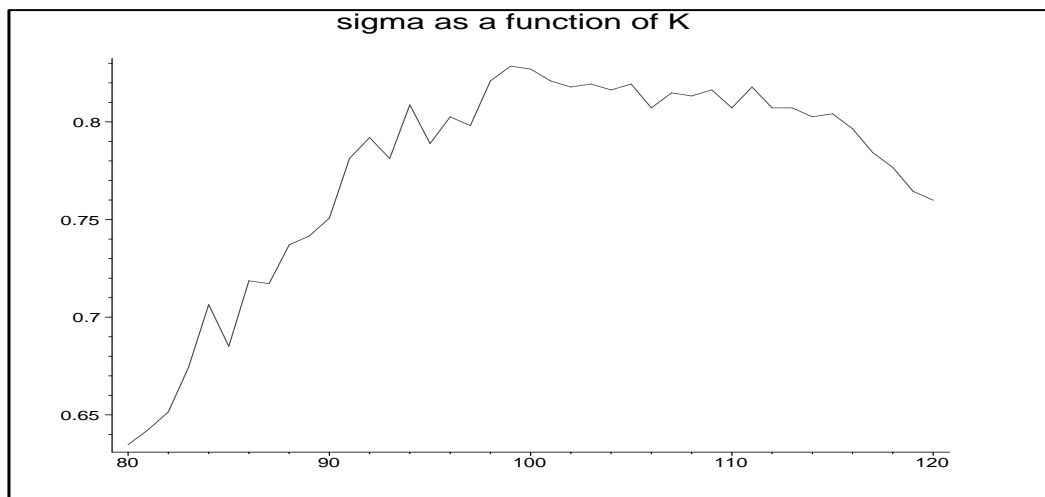


Figure 3 -  $\sigma$  as a function of  $K$  (Poisson case)

The second simulation (Figure 4) uses the same random sample for all values of  $K$ :

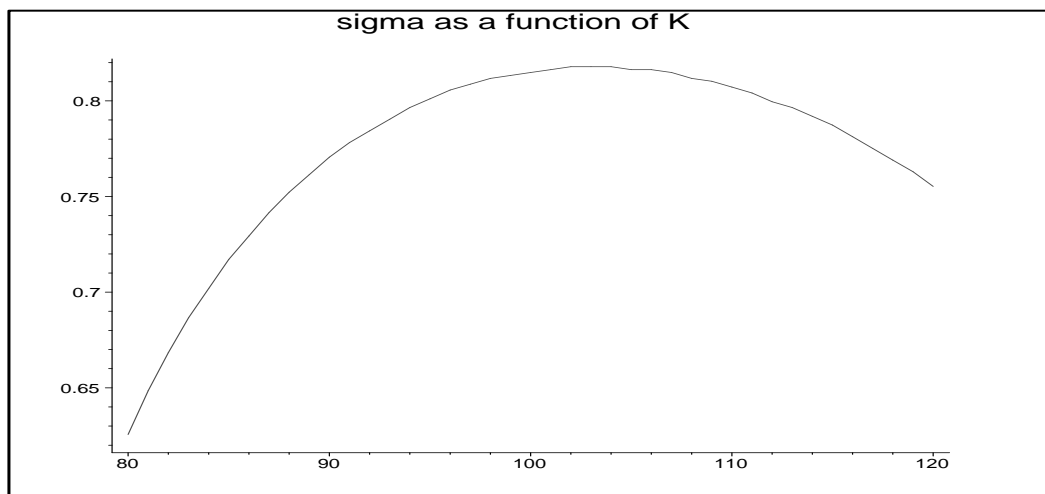


Figure 4 -  $\sigma$  as a function of  $K$  (Poisson case)

### 3.6.2 Azéma martingales

The following curves are obtained respectively for  $\beta = -0.5$ ,  $\beta = -0.8$  and  $\beta = -1$ .

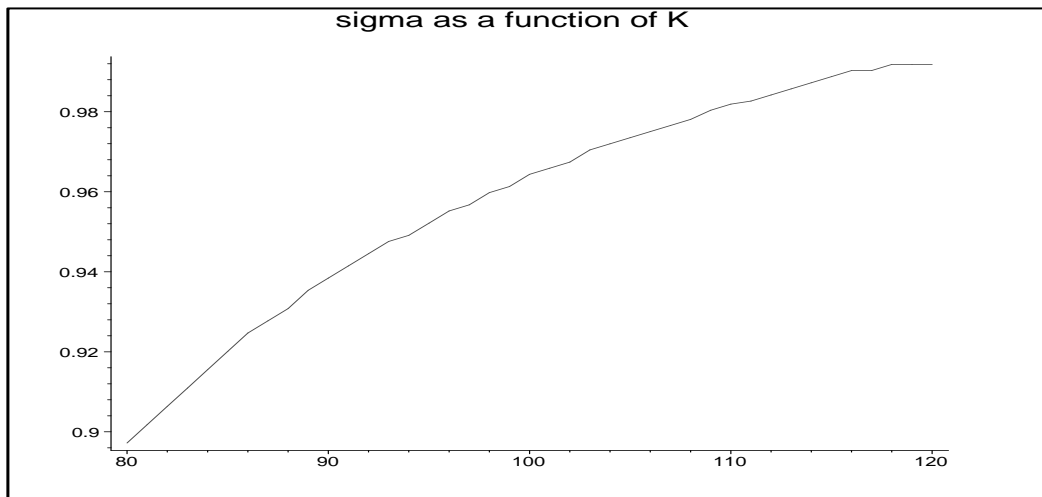


Figure 5 -  $\sigma$  as a function of  $K$  (Azéma martingale with  $\beta = -0.5$ )

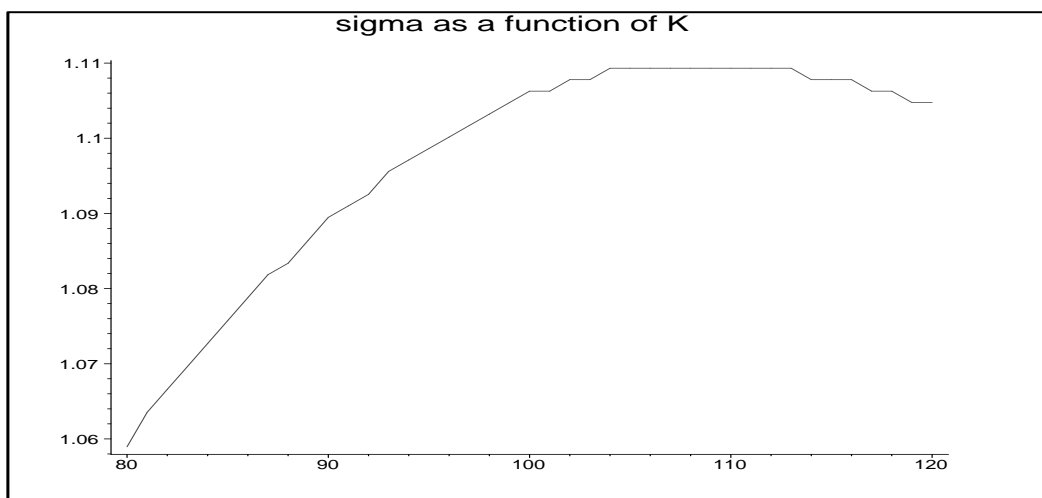


Figure 6 -  $\sigma$  as a function of  $K$  (Azéma martingale with  $\beta = -0.8$ )

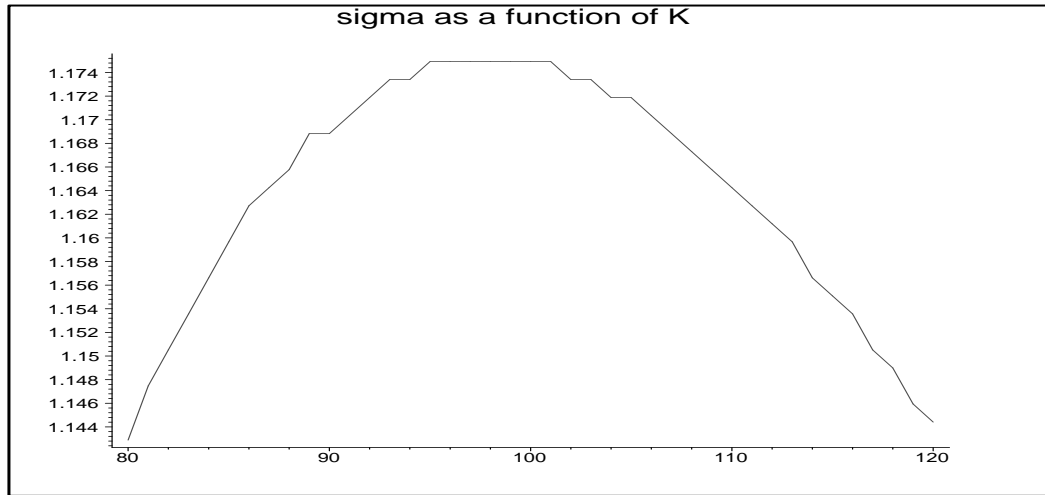


Figure 7 -  $\sigma$  as a function of  $K$  (Azéma martingale with  $\beta = -1$ )



### 3.7 Appendix 3: A stochastic volatility model

Let  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} = (X_t^1, X_t^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$  be a bi-dimensional martingale. We consider the system of structure equations

$$\begin{cases} d[X_t^1, X_t^1] = dt + p(X_{t-})dX_t^1, \\ d[X_t^1, X_t^2] = 0, \\ d[X_t^2, X_t^2] = dt + q(X_{t-})dX_t^2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3.34)$$

with  $p(x, y) = ax + by + c$  and  $q(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ , and  $X_0 = (0, 0)$ . It follows from Th. 1, Prop. 1 and Prop. 2 of [AÉ96] that if  $a, \beta \in [-2, 0[$  and  $0 < b\alpha < a\beta$  that (3.34) has a unique solution which has the chaos representation property.

**Theorem 3.14.** (*Itô formula*) Let  $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  be a bi-dimensional martingale such that

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t H_s dX_s, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

where  $H = (h^{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  is a predictable process. Then for  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  we have

$$df(Z_t) = \mathcal{L}^f(t)dt + U_p^f(t)dX_t^1 + U_q^f(t)dX_t^2.$$

where

$$\begin{aligned} U_p^f(t) &= \frac{1}{p(X_{t-})} (f(Z_{t-}^1 + h_t^{11}p(X_{t-}), Z_{t-}^2 + h_t^{21}p(X_{t-})) - f(Z_{t-}^1, Z_{t-}^2)), \\ U_q^f(t) &= \frac{1}{q(X_{t-})} (f(Z_{t-}^1 + h_t^{12}q(X_{t-}), Z_{t-}^2 + h_t^{22}q(X_{t-})) - f(Z_{t-}^1, Z_{t-}^2)), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^f(t) &= \frac{1}{p(X_{t-})} \left( U_p^f(t) - h_t^{11} \frac{\partial f}{\partial x}(Z_{t-}^1, Z_{t-}^2) - h_t^{21} \frac{\partial f}{\partial y}(Z_{t-}^1, Z_{t-}^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{q(X_{t-})} \left( U_q^f(t) - h_t^{12} \frac{\partial f}{\partial x}(Z_{t-}^1, Z_{t-}^2) - h_t^{22} \frac{\partial f}{\partial y}(Z_{t-}^1, Z_{t-}^2) \right). \end{aligned}$$

*Proof.* We proceed as in [É90] which deals with one-dimensional martingales. The formula holds for  $f$  constant and linear. The identity

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = f(a)(g(b) - g(a)) + g(a)(f(b) - f(a)) + (f(b) - f(a))(g(b) - g(a))$$

shows that

$$U_p^{fg}(t) = f(Z_{t-})U_p^g(t) + g(Z_{t-})U_p^f(t) + p(X_{t-})U_p^f(t)U_p^g(t),$$

and

$$U_q^{fg}(t) = f(Z_{t-})U_q^g(t) + g(Z_{t-})U_q^f(t) + q(X_{t-})U_q^f(t)U_q^g(t).$$

Moreover,

$$\begin{aligned} & \frac{f(b)g(b) - f(a)g(a)}{p^2(X_{t-})} + \frac{f(c)g(c) - f(a)g(a)}{q^2(X_{t-})} \\ &= f(a) \left( \frac{g(b) - g(a)}{p^2(X_{t-})} + \frac{g(c) - g(a)}{q^2(X_{t-})} \right) + g(a) \left( \frac{f(b) - f(a)}{p^2(X_{t-})} + \frac{f(c) - f(a)}{q^2(X_{t-})} \right) \\ & \quad + \frac{(f(b) - f(a))(g(b) - g(a))}{p^2(X_{t-})} + \frac{(f(c) - f(a))(g(c) - g(a))}{q^2(X_{t-})} \end{aligned}$$

implies

$$\mathcal{L}^{fg}(t) = f(Z_{t-})\mathcal{L}^g(t) + g(Z_{t-})\mathcal{L}^f(t) + U_p^f(t)U_p^g(t) + U_q^f(t)U_q^g(t).$$

Hence

$$\begin{aligned} d(f(Z_t)g(Z_t)) &= (f(Z_{t-})\mathcal{L}^g(t) + g(Z_{t-})\mathcal{L}^f(t) + U_p^f(t)U_p^g(t) + U_q^f(t)U_q^g(t)) dt \\ & \quad + (f(Z_{t-})U_p^g(t) + g(Z_{t-})U_p^f(t) + p(X_{t-})U_p^f(t)U_p^g(t)) dX_t^1 \\ & \quad + (f(Z_{t-})U_q^g(t) + g(Z_{t-})U_q^f(t) + q(X_{t-})U_q^f(t)U_q^g(t)) dX_t^2 \\ &= \mathcal{L}^{fg}(t)dt + U_p^{fg}(t)dX_t^1 + U_q^{fg}(t)dX_t^2. \end{aligned}$$

Consequently the formula holds for polynomial  $f$ . The conclusion follows by uniform approximation of  $\mathcal{C}_c^1$  functions with polynomials. □

We consider a risky asset  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  defined by

$$dS_t = \sigma(X_{t-})S_t dX_t^1, \quad t \in [0, T], \quad S_0 > 0.$$

We have from Itô's formula, for any  $f \in C(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} df(S_t, X_t^1, X_t^2, t) &= U_p^f(t)dX_t^1 + U_q^f(t)dX_t^2 \\ & \quad + \mathcal{L}^f(S_t, X_t^1, X_t^2, t)dt + \frac{\partial}{\partial t}f(S_t, X_t^1, X_t^2, t)dt, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (3.35)$$

where

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^f(s, x, y, t) \\ &= \frac{f(s + s\sigma(x, y)p(x, y), x + p(x, y), y, t) - f(s, x, y, t)}{p^2(x, y)} \\ & \quad + \frac{f(s + s\sigma(x, y)q(x, y), x + q(x, y), y, t) - f(s, x, y, t)}{q^2(x, y)} \end{aligned}$$

$$-\frac{s\sigma(x,y)}{p(x,y)}\partial_1 f(s,x,y,t) - \frac{1}{p(x,y)}\partial_2 f(s,x,y,t) - \frac{1}{q(x,y)}\partial_3 f(s,x,y,t).$$

Since  $(S_t)_{t \in [0,T]}$  is a martingale under  $P$ , the market is arbitrage free. But  $P$  is not the only probability under which  $(S_t)_{t \in [0,T]}$  is a martingale. It follows that the market is incomplete. We are looking for a self-financing and adapted strategy that minimizes the distance between the value  $V_T$  of the portfolio at the expiration date  $T$  and the payoff  $(S_T - K)^+$ . Let  $\gamma = (\gamma_t)_{t \in [0,T]}$  be a self-financing and adapted strategy. The value of the portfolio is given by :

$$V_t = V_0 + \int_0^t \gamma_u dS_u = V_0 + \int_0^t \gamma_u \sigma(X_{u-}) S_u dX_u^1.$$

From the Markov property there exists a measurable function  $C$  such that

$$C(S_t, X_t^1, X_t^2, t) = E[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t].$$

By Itô formula (3.35) and the martingale property of the process

$$(E[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t])_{t \in [0,T]},$$

we obtain

$$dC(t, S_t, X_t^1, X_t^2) = U_p^C(t) dX_t^1 + U_q^C(t) dX_t^2, \quad t \in [0, T],$$

where

$$U_p^C(t) = \frac{C(S_{t-} + \sigma_{t-} p(X_{t-}), X_{t-}^1 + p(X_{t-}), X_{t-}^2, t) - C(S_{t-}, X_{t-}^1, X_{t-}^2, t)}{p(X_{t-})},$$

$$U_q^C(t) = \frac{C(S_{t-}, X_{t-}^1, X_{t-}^2 + q(X_{t-}), t) - C(S_{t-}, X_{t-}^1, X_{t-}^2, t)}{q(X_{t-})}.$$

Hence

$$(S_T - K)^+ = E[(S_T - K)^+] + \int_0^T U_p^C(t) dX_t^1 + \int_0^T U_q^C(t) dX_t^2,$$

and  $C$  satisfies

$$\begin{cases} \mathcal{L}^C(s, x, y, t) + \frac{\partial}{\partial t} C(s, x, y, t) = 0, & (s, x, y, t) \in ]0, \infty[ \times \mathbb{R}^2 \times [0, T]. \\ C(S_T, X_T^1, X_T^2, T) = (S_T - K)^+, \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^C(t) &= \frac{1}{p(X_{t-})} U_p^C(t) + \frac{1}{q(X_{t-})} U_q^C(t) \\ &\quad - \frac{\sigma_{t-}}{p(X_{t-})} \partial_1 C(S_{t-}, X_{t-}^1, X_{t-}^2, t) - \frac{1}{p(X_{t-})} \partial_2 C(S_{t-}, X_{t-}^1, X_{t-}^2, t) \\ &\quad - \frac{1}{q(X_{t-})} \partial_3 C(S_{t-}, X_{t-}^1, X_{t-}^2, t). \end{aligned}$$

The following proposition give us the strategy which minimizes  $E[((S_T - K)^+ - V_T)^2]$ .

**Proposition 3.15.** *The strategy  $(\tilde{\gamma}_t)_{t \in [0, T]}$  that minimizes  $E[((S_T - K)^+ - V_T)^2]$  is given at time  $t \in [0, T]$  by*

$$\tilde{\gamma}_t = \frac{C(S_t + \sigma(X_t^2)p(X_t), X_t^1 + p(X_t), X_t^2, t) - C(S_t, X_t^1, X_t^2, t)}{p(X_t)S_t\sigma(X_{t-})}.$$

*Proof.* We have:

$$\begin{aligned} & E[((S_T - K)^+ - V_T)^2] \\ &= E \left[ \left( \int_0^T (U_p^C(t) - \gamma_t S_t \sigma(X_{t-})) dX_t^1 \right)^2 \right] + E \left[ \left( \int_0^T U_q^C(t) dX_t^2 \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \int_0^T (U_p^C(t) - \gamma_t S_t \sigma(X_{t-}))^2 dt \right] + E \left[ \int_0^T (U_q^C(t))^2 dt \right]. \end{aligned}$$

Then the minimum is on  $(\tilde{\gamma}_t)_{t \in [0, T]}$ , where

$$\tilde{\gamma}_t = \frac{U_p^C(t)}{S_t \sigma(X_t)}, \quad t \in [0, T].$$

□



## Chapitre 4

# Computations of price sensitivities via the Malliavin calculus on Poisson space

Using the Malliavin calculus on Poisson space we compute Greeks for Asian options in a market driven by a Poisson process, following a method initiated on the Wiener space in [FLLLT99]. Numerical simulations are presented for the Delta and Gamma of digital and standard Asian options, and confirm the efficiency of this approach compared to classical finite-difference Monte-Carlo approximations of derivatives.<sup>1</sup>

**Key words:** Asian options, Poisson process, Malliavin calculus.

---

<sup>1</sup>Avec Nicolas Privault (La Rochelle).



## 4.1 Introduction

The Malliavin calculus has been recently applied to numerical computations of price sensitivities in continuous financial markets, cf. [FLLL01], [FLLLT99]. In this paper we deal with Asian options in a market driven by a Poisson process and present formulas for the computation of Greeks using a particular version of the Malliavin calculus on Poisson space. In the jump case there exist two main approaches to the Malliavin calculus, relying either on finite difference gradients [I88], [NV90], or on differential operators [Bi83], [CP90]. Finite difference gradients are not appropriate in our context which requires a chain rule of derivation. We choose to use a version of the operator introduced in [CP90], [ET93], because it has the derivation property and its adjoint Poisson stochastic integral, which provides a natural way to make explicit computations. Given an element  $w$  of the Cameron-Martin space  $H$  and a smooth functional  $F = f(T_1, \dots, T_n)$  of the Poisson process, let

$$D_w F = - \sum_{k=1}^{k=n} w_{T_k} \partial_k f(T_1, \dots, T_n),$$

cf. [Pr94]. The interest in the operator  $D$  is that it admits a closable adjoint  $\delta$  which coincides with the compensated Poisson stochastic integral on adapted processes. The  $L^2$  domain of  $D_w$  does not contain the value  $N_T$  at time  $T$  of the Poisson process (cf. [Pr02] for an extension of  $D$  to such functionals), which excludes in particular European claims of the form  $f(N_T)$ . Nevertheless, functionals of the form

$$\int_0^T F(t, N_t) dt \tag{4.1}$$

do belong to the domain of  $D$  provided that  $F(t, k) \in \text{Dom}(D)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , due to the smoothing effect of the integral. In particular it turns out that when  $S_t^\zeta = F^\zeta(t, N_t)$  is the solution of a differential equation driven by a Poisson process and  $\zeta$  is the value of a parameter (initial condition  $x$ , interest rate  $r$ , or volatility  $\sigma$ ),  $D_w$  can be applied to differentiate the value

$$f\left(\int_0^T S_u^\zeta du\right)$$

of an Asian option.

Using an integration by parts formula for the gradient  $D$  we will compute the following Greeks for Asians options in discontinuous markets governed by a Poisson process:

$$\text{Delta} = \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \text{Gamma} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad \text{Rho} = \frac{\partial C}{\partial r}, \quad \text{Vega} = \frac{\partial C}{\partial \sigma},$$

where

$$C(\zeta) = E\left[f\left(\int_0^T S_u^\zeta du\right)\right]$$



i.e.  $C(\zeta)$  is the value of an Asian option with price process  $(S_t^\zeta)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , with respectively  $\zeta = x, r, \sigma$ . When  $f$  is not differentiable, no analytic expression is in general available for such derivatives. We will essentially consider an asset price with dynamic under the neutral risk probability given by

$$dS_t = r_t(N_t)S_t dt + \sigma_t(N_t)S_{t-}(dN_t - dt) = \alpha_t(N_t)S_t dt + \sigma_t(N_t)S_{t-}dN_t, \quad S_0 = x,$$

where  $\alpha_t(k) = r_t(k) - \sigma_t(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , and  $r_t(N_t)$  denotes the interest rate. Although this paper focuses on the Poisson case, an independent diffusion term can be introduced in the driving stochastic differential equation as in the complete market model of [JP02]:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_{t-} dM_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

with

$$dM_t = 1_{\{\phi_t=0\}}dB_t + \frac{\phi_t}{\alpha_t}(dN_t - \lambda_t dt), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad M_0 = 0, \quad (4.2)$$

where  $\mu, \sigma, \phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  are deterministic bounded functions satisfying  $1 + \sigma_t \phi_t > 0$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , and  $\lambda_t = (1 - i_t)\alpha_t^2/\phi_t^2$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . In this way the results of [FLLLT99] on Wiener space can be coupled to the present approach.

Section 4.2 contains preliminaries on the Malliavin calculus on Poisson space and on the differentiability of functionals of the form (4.1). In Section 4.3 we present the integration by parts formula which is the main tool to compute derivatives with respect to  $\zeta$ . Market models and numerical simulations are presented in Sections 4.4 and 4.5, where we consider the Delta of a digital option, i.e.  $f = 1_{[K, \infty[}$ , and the Gamma of a European option. These simulations show that the Malliavin approach applied to Asian options in the case of a market driven by a Poisson process is more efficient than the finite differences method.

## 4.2 Malliavin Calculus on Poisson space

Let  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  be a standard Poisson process on a probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  and let  $\tilde{N}_t = N_t - t$  denote the associated compensated process. Let  $H$  denote the Cameron-Martin space

$$H = \left\{ \int_0^\cdot \dot{w}_t dt : \dot{w} \in L^2(\mathbb{R}_+) \right\}.$$

Let  $\mathcal{S}$  denote the set of smooth functionals of the form

$$F = f(T_1, \dots, T_n), \quad f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 1,$$

and let

$$\mathcal{U} = \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} F_i u_i, \quad F_1, \dots, F_n \in \mathcal{S}, \quad u_1, \dots, u_n \in H \right\}.$$

Let  $D$  denote the gradient operator

$$D_w f(T_1, \dots, T_d) = - \sum_{k=1}^{k=d} w_{T_k} \partial_k f(T_1, \dots, T_d).$$

Given  $u \in \mathcal{U}$  a process of the form

$$u = \sum_{i=1}^{i=n} F_i u_i, \quad F_i \in \mathcal{S}, \quad u_i \in H,$$

we also define

$$D_u F = \sum_{i=1}^{i=n} F_i D_{u_i} F.$$

This definition extends to  $u \in L^2(\Omega, H)$  with the bound

$$|D_u F| \leq K \|\dot{u}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}, \quad a.s.,$$

where  $K$  is a random variable depending on  $F \in \mathcal{S}$ .

The following proposition is well-known, cf. e.g. [CP90], [Pr94], [Pr02].

**Proposition 4.1.** *a) The operator  $D$  is closable and admits an adjoint  $\delta$  such that*

$$E[D_u F] = E[F \delta(u)], \quad u \in \mathcal{U}, \quad F \in \mathcal{S}.$$

*b) We have for  $F \in \text{Dom}(D)$  and  $u \in \text{Dom}(\delta)$  such that  $uF \in \text{Dom}(\delta)$ :*

$$\delta(uF) = F \int_0^T \dot{u}_t d\tilde{N}_t - D_u F.$$

*c) Moreover,  $\delta$  coincides with the compensated Poisson stochastic integral on the adapted processes in  $L^2(\Omega; H)$ :*

$$\delta(u) = \int_0^\infty \dot{u}_t d\tilde{N}_t.$$

The domain of the closed extension of  $D$  is denoted by  $\text{Dom}(D)$ . Given  $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  we define the partial finite difference operator  $\nabla_k$  as

$$\nabla_k F(t, k) = F(t, k) - F(t, k - 1).$$

The following propositions provide derivation rules for the quantities  $\int_0^T F(t, N_t) dt$  and  $\int_0^T F(t, N_t) dN_t$ , which appear in the solutions of stochastic differential equations driven by the Poisson process.

**Proposition 4.2.** Assume that  $F(t, k) \in \text{Dom}(D)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . We have

$$D_w \int_0^T F(t, N_t) dt = \int_0^T w_t \nabla_k F(t, N_t) dN_t + \int_0^T [D_w F](t, N_t) dt.$$

*Proof.* We have

$$\begin{aligned} D_w \int_0^T F(t, N_t) dt &= D_w \sum_{k \geq 0} \int_{T_k \wedge T}^{T_{k+1} \wedge T} F(t, k) dt \\ &= - \sum_{l \geq 1} w_{T_l} 1_{[0, T]}(T_l) (F(T_l, l-1) - F(T_l, l)) + \sum_{k \geq 0} \int_{T_k \wedge T}^{T_{k+1} \wedge T} [D_w F](t, k) dt \\ &= \int_0^T w_t \nabla_k F(t, N_t) dN_t + \int_0^T [D_w F](t, N_t) dt. \end{aligned}$$

□

**Proposition 4.3.** Assume that  $F(t, k) \in \text{Dom}(D)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , and  $F(\cdot, k) \in \mathcal{C}_c^1([0, T])$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Then

$$D_w \int_0^\infty F(t, N_t) dN_t = - \int_0^\infty w_t \partial_1 F(t, N_t) dN_t + \int_0^\infty [D_w F](t, N_t) dN_t,$$

where  $\partial_1 F(t, k)$  denotes the derivative with respect to the first variable.

*Proof.* We have

$$\begin{aligned} D_w \int_0^\infty F(t, N_t) dN_t &= D_w \sum_{k=1}^\infty 1_{[0, T]}(T_k) F(T_k, k) \\ &= D_w \sum_{k=1}^\infty F(T_k, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_w \sum_{k=1}^{k=n} F(T_k, k) \\ &= - \sum_{k=1}^\infty w_{T_k} \partial_1 F(T_k, k) + \sum_{k=1}^\infty [D_w F](T_k, k) \\ &= - \int_0^\infty w_t \partial_1 F(t, N_t) dN_t + \int_0^\infty [D_w F](t, N_t) dN_t. \end{aligned}$$

□

In particular, if  $v(t) = 0$ ,  $t > T$ , then combining Prop. 4.2 and 4.3 we have

$$D_v D_w \int_0^T F(t, N_t) dt = - \int_0^T v_t (\dot{w}_t \nabla_k f(t, N_t) + w_t \partial_1 \nabla_k f(t, N_t)) dN_t$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T v_t [D_w \nabla_k F](t, N_t) dN_t \\
& + \int_0^T v_t \nabla_k [D_w F](t, N_t) dN_t + \int_0^T [D_v D_w \nabla_k F](t, N_t) dt.
\end{aligned}$$

### 4.3 Integration by parts

The following proposition follows from a classical Malliavin calculus argument applied to the derivation operator  $D$ . Let  $I$  be an open interval of  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 4.4.** *Let  $(F^\zeta)_{\zeta \in I}$  and  $(G^\zeta)_{\zeta \in I}$ , be two families of random functionals, continuously differentiable in  $\text{Dom}(D)$  in the parameter  $\zeta \in I$ . Let  $(w_t)_{t \in [0, T]}$  be a process satisfying*

$$D_w F^\zeta \neq 0, \quad \text{a.s. on } \{\partial_\zeta F^\zeta \neq 0\}, \quad \zeta \in I,$$

and such that  $w G^\zeta \partial_\zeta F^\zeta / D_w F^\zeta$  is continuous in  $\zeta$  in  $\text{Dom}(\delta)$ . We have

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} E [G^\zeta f(F^\zeta)] = E \left[ f(F^\zeta) \delta \left( G^\zeta w \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \right) \right] + E [\partial_\zeta G^\zeta f(F^\zeta)], \quad (4.3)$$

for any function  $f$  such that  $f(F^\zeta) \in L^2(\Omega)$ ,  $\zeta \in I$ .

*Proof.* Assuming that  $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ , we have

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \zeta} E [G^\zeta f(F^\zeta)] & = E [G^\zeta f'(F^\zeta) \partial_\zeta F^\zeta] + E [\partial_\zeta G^\zeta f(F^\zeta)] \\
& = E \left[ G^\zeta \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} D_w f(F^\zeta) \right] + E [\partial_\zeta G^\zeta f(F^\zeta)] \\
& = E \left[ f(F^\zeta) \delta \left( w G^\zeta \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \right) \right] + E [\partial_\zeta G^\zeta f(F^\zeta)]
\end{aligned}$$

The extension to square-integrable  $f$  can be obtained using the same argument as in p. 400 of [FLLLT99], using the bound

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} E [G^\zeta f_n(F^\zeta)] - E \left[ f(F^\zeta) \left( \delta \left( G^\zeta w \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \right) + \partial_\zeta G^\zeta \right) \right] \right| \\
& \leq \|f(F^\zeta) - f_n(F^\zeta)\|_{L^2(\Omega)} \left\| \delta \left( G^\zeta w \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \right) + \partial_\zeta G^\zeta \right\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

and an approximating sequence  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of smooth functions. □

### Delta, Rho, Vega

The weight  $\delta \left( w G^\zeta \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \right)$  can be computed using Poisson stochastic integrals:

$$\begin{aligned} \delta \left( w G^\zeta \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \right) &= G^\zeta \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t - D_w \left( G^\zeta \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \right) \\ &= G^\zeta \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \int_0^T \dot{w}_t dN_t - G^\zeta \frac{D_w \partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} + G^\zeta \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{(D_w F^\zeta)^2} D_w D_w F^\zeta - \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} D_w G^\zeta. \end{aligned}$$

In particular, the Delta, Rho and Vega can be computed from

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} E [f(F^\zeta)] = E \left[ f(F^\zeta) \delta \left( w \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \right) \right],$$

with

$$\delta \left( w \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \right) = \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \int_0^T \dot{w}_t dN_t - \frac{D_w \partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} + \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{(D_w F^\zeta)^2} D_w D_w F^\zeta. \quad (4.4)$$

In the linear case if  $F^x = xF$ , then  $\partial_x F^x = F$  and the weight for the Delta is given by

$$\delta \left( w \frac{\partial_x F^x}{D_w F^x} \right) = \frac{1}{x} \left( \frac{F}{D_w F} \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t - 1 + \frac{F}{(D_w F)^2} D_w D_w F \right). \quad (4.5)$$

### Second derivatives

Assume that  $w \in \mathcal{C}_c^2([0, T])$ . Concerning second derivatives we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} E [f(F^\zeta)] &= \frac{\partial}{\partial \zeta} E [f(F^\zeta) \delta(G^\zeta w)] \\ &= E \left[ f(F^\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \delta(G^\zeta w) \right] + E [f(F^\zeta) \delta(\delta(G^\zeta w) G^\zeta w)], \end{aligned} \quad (4.6)$$

with  $G^\zeta = \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta}$  and

$$\begin{aligned} \delta(\delta(G^\zeta w) G^\zeta w) &= G^\zeta \delta(G^\zeta w) \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t - D_w(G^\zeta \delta(G^\zeta w)) \\ &= G^\zeta \delta(G^\zeta w) \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t - \delta(G^\zeta w) D_w G^\zeta - G^\zeta D_w \left( G^\zeta \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t - D_w G^\zeta \right) \\ &= \left( G^\zeta \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t - D_w G^\zeta \right)^2 \\ &\quad - G^\zeta \left( D_w G^\zeta \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t + G^\zeta \int_0^T w_t \ddot{w}_t dN_t - D_w D_w G^\zeta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t + \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{(D_w F^\zeta)^2} D_w D_w F^\zeta - \frac{D_w \partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \left( \left( -\frac{\partial_\zeta F^\zeta}{(D_w F^\zeta)^2} D_w D_w F^\zeta + \frac{D_w \partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \right) \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t + \frac{\partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} \int_0^T w_t \ddot{w}_t dN_t \right. \\
 &\quad \left. - \frac{D_w D_w \partial_\zeta F^\zeta}{D_w F^\zeta} + 2D_w \partial_\zeta F^\zeta \frac{D_w D_w F^\zeta}{(D_w F^\zeta)^2} + \partial_\zeta F^\zeta \frac{D_w D_w D_w F^\zeta}{(D_w F^\zeta)^2} - 2\partial_\zeta F^\zeta \frac{(D_w D_w F^\zeta)^2}{(D_w F^\zeta)^3} \right),
 \end{aligned}$$

where  $\ddot{w}_t$  denotes the second derivative of  $w_t$  with respect to  $t$ .

### Gamma

The weight associated to the Gamma is computed with

$$G^x = \frac{\partial_x F^x}{D_w F^x} = \frac{F}{x D_w F} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial x} G^x = -\frac{1}{x^2} \frac{F}{D_w F},$$

i.e.

$$\text{Gamma} = \frac{-\text{Delta}}{x} + E[f(F^\zeta) \delta(\delta(G^x w) G^x w)], \quad (4.7)$$

with

$$\begin{aligned}
 \delta(\delta(G^x w) G^x w) &= \frac{-\text{Delta}}{x} + \frac{1}{x^2} \left( \frac{F}{D_w F} \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t - 1 + \frac{F}{(D_w F)^2} D_w D_w F \right)^2 \\
 &\quad - \frac{F}{x^2 D_w F} \left( \left( 1 - \frac{F}{(D_w F)^2} D_w D_w F \right) \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t + \frac{F}{D_w F} \int_0^T w_t \ddot{w}_t dN_t \right. \\
 &\quad \left. + F \left( \frac{D_w D_w D_w F}{(D_w F)^2} - 2 \frac{(D_w D_w F)^2}{(D_w F)^3} \right) + \frac{D_w D_w F}{D_w F} \right),
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

with  $w \in \mathcal{C}_c^2([0, T])$ .

## 4.4 Market models

In this section we describe two examples of functionals given as solutions of stochastic differential equations, that can be written under the form  $F(t, N_t)$ . We first consider an underlying asset price given under the neutral risk probability by the linear equation

$$dS_t = r_t(N_t) S_t dt + \sigma_t(N_t) S_t (dN_t - dt) = \alpha_t(N_t) S_t dt + \sigma_t(N_t) S_t dN_t, \quad S_0 = x,$$

where  $\alpha_t(k) = r_t(k) - \sigma_t(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , and  $r_t(N_t)$  denotes the interest rate. The coefficients here may depend not only on time but also on the value of  $N_t$ . The next result is an application of Prop. 4.2. A differentiability hypothesis is required on  $\sigma$ .

**Proposition 4.5.** *Assume that  $\sigma \cdot(k) \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+)$  and  $\sigma \cdot(k) > -1$ , for all  $k \in \mathbb{N}$ . We have*

$$\begin{aligned} D_w \int_0^T S_u du &= \int_0^T w_t \sigma_t(N_t) S_{t-} dN_t + \int_0^T S_t \int_0^t w_s \nabla_k \alpha_s(N_s) ds dt \\ &\quad + \int_0^T S_t \int_0^t \frac{\dot{\sigma}_s(N_s)}{1 + \sigma_s(N_s)} dN_s dt. \end{aligned}$$

*Proof.* We have

$$S_t = F(t, N_t),$$

with

$$\begin{aligned} F(t, k) &= x e^{\int_0^t \alpha_s(N_s) ds} \prod_{i=0}^{i=k} (1 + \sigma_{T_i}(i)), \\ \partial_1 F(t, k) &= \alpha_t(N_t) F(t, k), \\ \nabla_k F(t, k) &= \sigma_{T_k}(k) F(t, k-1), \end{aligned} \tag{4.9}$$

and

$$\begin{aligned} D_w F(t, k) &= F(t, k) D_w \int_0^t \alpha_s(N_s) ds + F(t, k) \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\dot{\sigma}_{T_i}(i)}{1 + \sigma_{T_i}(i)} \\ &= F(t, k) \int_0^t w_s \nabla_k \alpha_s(N_s) ds + F(t, k) \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\dot{\sigma}_{T_i}(i)}{1 + \sigma_{T_i}(i)}, \end{aligned}$$

hence

$$[D_w F](t, N_t) = F(t, N_t) \int_0^t w_s \nabla_k \alpha_s(N_s) ds + F(t, N_t) \int_0^t \frac{\dot{\sigma}_s(N_s)}{1 + \sigma_s(N_s)} dN_s.$$

We conclude using Prop. 4.2. □

In the case of constant interest rate and volatility, the price of the underlying asset is given by

$$S_t = x e^{\alpha t} (1 + \sigma)^{N_t} = f(x, t, N_t), \quad t \in [0, T],$$

with  $f(x, t, k) = x e^{\alpha t} (1 + \sigma)^k$ ,  $t \in [0, T]$ . Proposition 4.4 can be applied to

$$F^x = \int_0^T S_t dt = \int_0^T f(x, t, N_t) dt,$$

with

$$D_w \int_0^T S_t dt = \sigma \int_0^T w_t S_{t-} dN_t, \tag{4.10}$$

$$D_w D_w \int_0^T S_t dt = -\sigma \int_0^T w_t (\dot{w}_t + \alpha w_t) S_t - dN_t \quad (4.11)$$

$$D_w D_w D_w \int_0^T S_t dt = \sigma \int_0^T w_t (\dot{w}_t^2 + 3\alpha w_t \dot{w}_t + w_t \ddot{w}_t + \alpha^2 w_t^2) S_t - dN_t. \quad (4.12)$$

if  $w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$  is such that  $w_t = 0$ ,  $t \geq T$ . Under this assumption the Greeks can be computed as follows.

### Delta

The corresponding weight is obtained from (4.5) and (4.10), (4.11):

$$\frac{1}{x\sigma} \left( \frac{\int_0^T S_t dt}{\int_0^T w_t S_t - dN_t} \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t - 1 - \frac{\int_0^T S_t dt}{\left(\int_0^T w_t S_t - dN_t\right)^2} \int_0^T w_t (\dot{w}_t + \alpha w_t) S_t - dN_t \right).$$

Note that unlike in the Brownian case ([FLLL01], [Ben99]), the weight is not a function of  $(S_T, \int_0^T S_u du)$ .

### Gamma

The corresponding weight is given by (4.7) and (4.8), with from (4.10)-(4.12):

$$\delta(\delta(G^x w)G^x w) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^2\sigma^2} \left( \frac{\int_0^T S_t dt}{\int_0^T w_t S_t - dN_t} \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t - 1 - \frac{\int_0^T S_t dt}{\left(\int_0^T w_t S_t - dN_t\right)^2} \int_0^T w_t (\dot{w}_t + \alpha w_t) S_t - dN_t \right)^2 \\ & - \frac{\int_0^T S_t dt}{x^2\sigma \int_0^T w_t S_t - dN_t} \left( 1 + \frac{\int_0^T S_t dt}{\sigma \left(\int_0^T w_t S_t - dN_t\right)^2} \int_0^T w_t (\dot{w}_t + \alpha w_t) S_t - dN_t \right) \int_0^T \dot{w}_t d\tilde{N}_t \\ & + \frac{\left(\int_0^T S_t dt\right)^2}{x^2\sigma^2 \left(\int_0^T w_t S_t - dN_t\right)^2} \int_0^T w_t \ddot{w}_t dN_t \\ & - \frac{\left(\int_0^T S_t dt\right)^2}{x^2\sigma \int_0^T w_t S_t - dN_t} \left( \frac{\int_0^T w_t (\dot{w}_t^2 + 3\alpha w_t \dot{w}_t + w_t \ddot{w}_t + \alpha^2 w_t^2) S_t - dN_t}{\sigma \left(\int_0^T w_t S_t - dN_t\right)^2} \right) \end{aligned}$$



$$-2 \frac{\left( \int_0^T w_t (\dot{w}_t + \alpha w_t) S_{t-} dN_t \right)^2}{\left( \int_0^T w_t S_{t-} dN_t \right)^2} - \int_0^T S_t d_t \frac{\int_0^T w_t (\dot{w}_t + \alpha w_t) S_{t-} dN_t}{\sigma \left( \int_0^T w_t S_{t-} dN_t \right)^2}.$$

### Vega

The Vega of an Asian option with payoff  $f\left(\int_0^T S_u du\right)$  is given by (4.4) and

$$\begin{aligned} \partial_\sigma F^\sigma &= \frac{1}{1+\sigma} \int_0^T N_t S_t dt, \\ D_w \partial_\sigma F^\sigma &= \frac{1}{1+\sigma} \int_0^T w_u S_{u-} (1 + N_u \sigma) dN_u. \end{aligned}$$

with  $D_w F^\sigma$ ,  $D_w D_w F^\sigma$  given by (4.10), (4.11).

### Rho

The Rho of an Asian option with payoff  $f\left(\int_0^T S_u du\right)$  is given by (4.3) and

$$\begin{aligned} \partial_r F^r &= \int_0^T t S_t dt, \\ D_w \partial_r F^r &= \sigma \int_0^T t w_t S_{t-} dN_t, \end{aligned}$$

with  $D_w F^\sigma$ ,  $D_w D_w F^\sigma$  given by (4.10), (4.11).

### Remark

A model with state-dependent coefficients is given by the nonlinear equation

$$dS_t = \alpha_t(S_t)dt + \sigma_t(S_{t-})dN_t, \quad S_0 = x, \quad (4.13)$$

i.e. on  $\{N_t = k\}$ ,

$$S_t = \Phi_{T_k, t}(S_{T_k}),$$

and

$$S_{T_k} = \Phi_{T_{k-1}, T_k}(S_{T_{k-1}})(1 + \sigma_{T_k} \Phi_{T_{k-1}, T_k}(S_{T_{k-1}})),$$

where  $\Phi_{s,t}$  is the flow defined by

$$dx_t = \alpha_t(x_t)dt,$$

i.e.

$$\Phi_{s,t}(x) = x + \int_s^t \alpha_u(x_u)du, \quad x_s = x.$$

Explicit computations are naturally more complex in this model, but still possible.

## 4.5 Numerical simulations

We present simulations for the Delta and the Gamma of Asian options, successively the Delta of a digital option ( $f = 1_{[K, \infty[}$ ):

$$C(x) = e^{-rT} E \left[ 1_{[K, \infty[} \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t^x dt \right) \right],$$

and the Gamma of a standard Asian option ( $f(x) = (x - K)^+$ ):

$$C(x) = e^{-rT} E \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t^x dt - K \right)^+ \right].$$

We consider a simplified model with constant parameters  $\sigma$  and  $r$ . Using (4.10)-(4.12) we obtain

$$\begin{aligned} D_w \int_0^T S_t dt &= x\sigma \sum_{k=1}^{k=N_T} w_{T_k} (1 + \sigma)^{k-1} e^{\alpha T_k} \\ D_w D_w \int_0^T S_t dt &= -x\sigma \sum_{k=1}^{k=N_T} w_{T_k} (1 + \sigma)^{k-1} e^{\alpha T_k} (\dot{w}_{T_k} + \alpha w_{T_k}) \\ D_w D_w D_w \int_0^T S_t dt &= x\sigma \sum_{k=1}^{k=N_T} w_{T_k} (1 + \sigma)^{k-1} e^{\alpha T_k} (\dot{w}_{T_k}^2 + 3\alpha w_{T_k} \dot{w}_{T_k} \\ &\quad + w_{T_k} \ddot{w}_{T_k} + \alpha^2 w_{T_k}^2) \end{aligned}$$

The finite difference method gives Delta as

$$\text{Delta} = \frac{C(x + \epsilon) - C(x - \epsilon)}{2\epsilon}.$$

For the Malliavin approach we take  $w_t = \sin(\pi t/T)$  (so that  $\int_0^T \dot{w}_t dt = 0$ ), and  $T = 500$ ,  $x = 10$ ,  $K = 15000$ ,  $r = 0.009$ ,  $\sigma = 0.01$ , and  $\epsilon = 0.001$ . The next three graphs allow two compare both methods. To make comparison easier, the same simulation has been represented for different sample sizes.

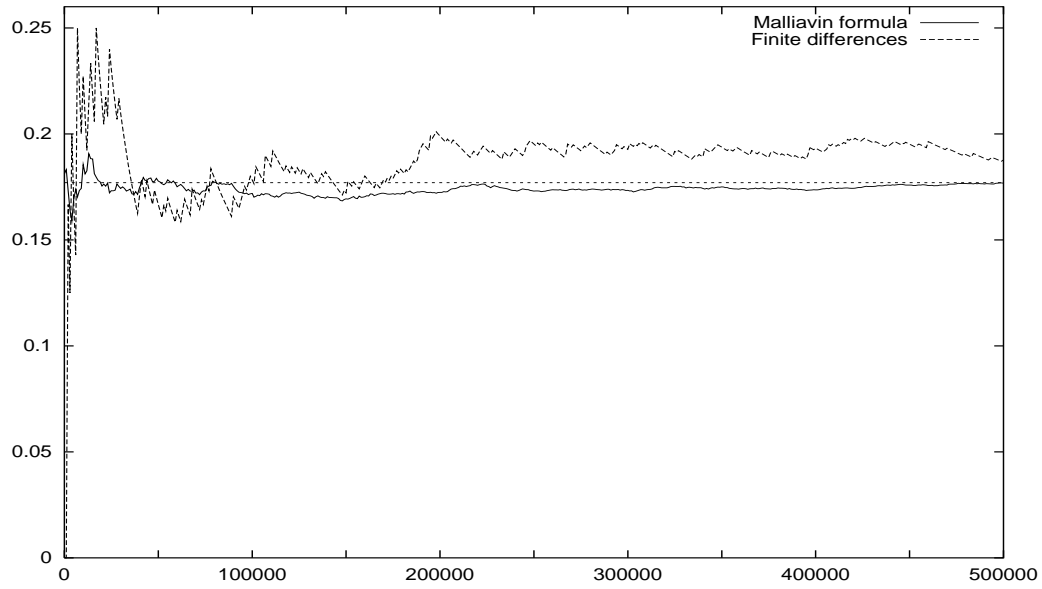
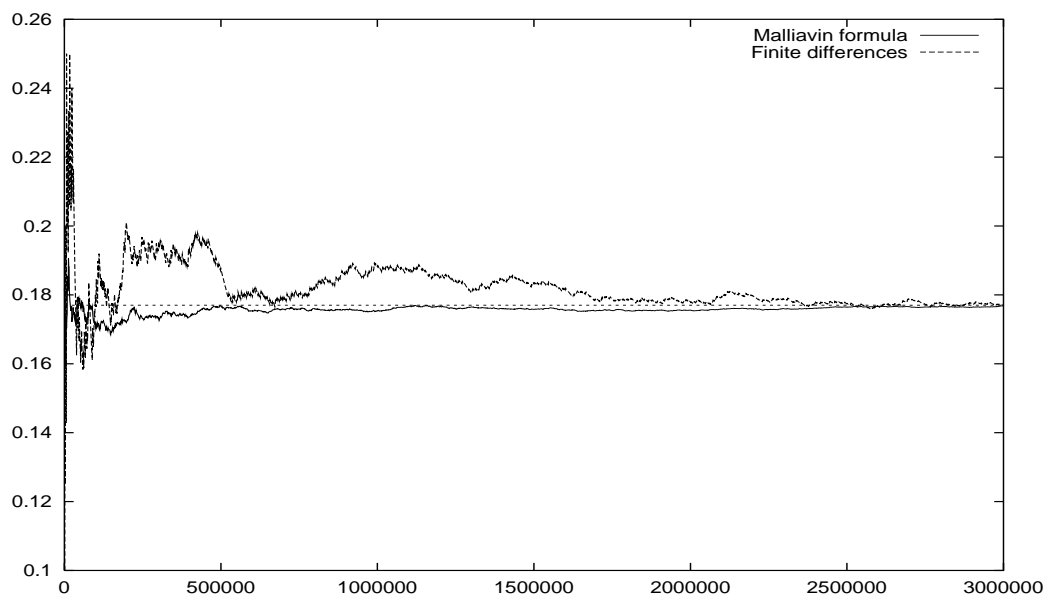


Figure 1 - 500000 simulations for Delta

Figure 2 -  $3 \times 10^6$  simulations for Delta

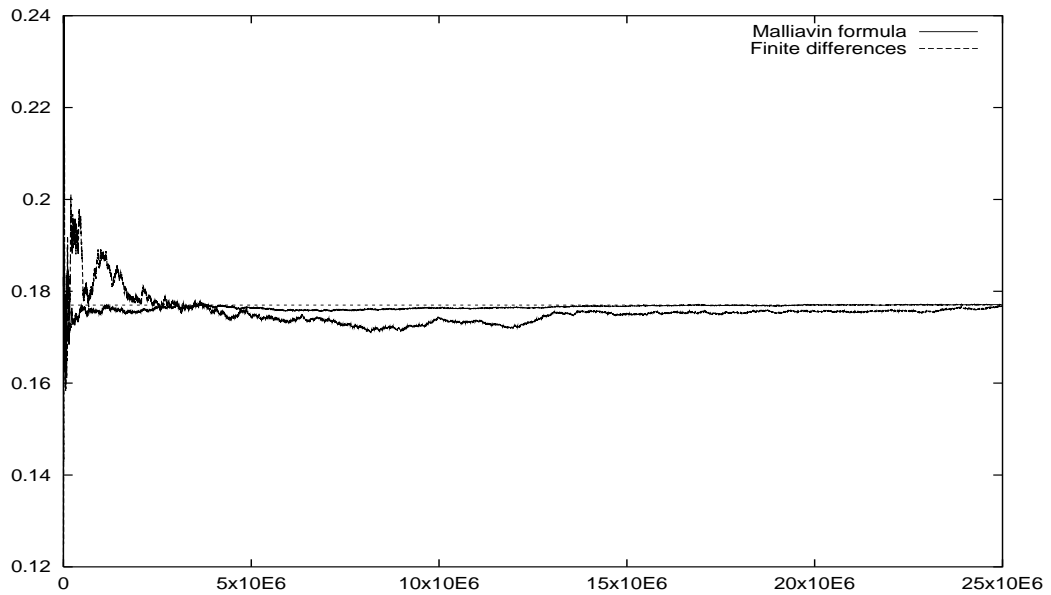


Figure 3 -  $25 \times 10^6$  simulations for Delta

The following is another graph for the Delta, using a different number generator.

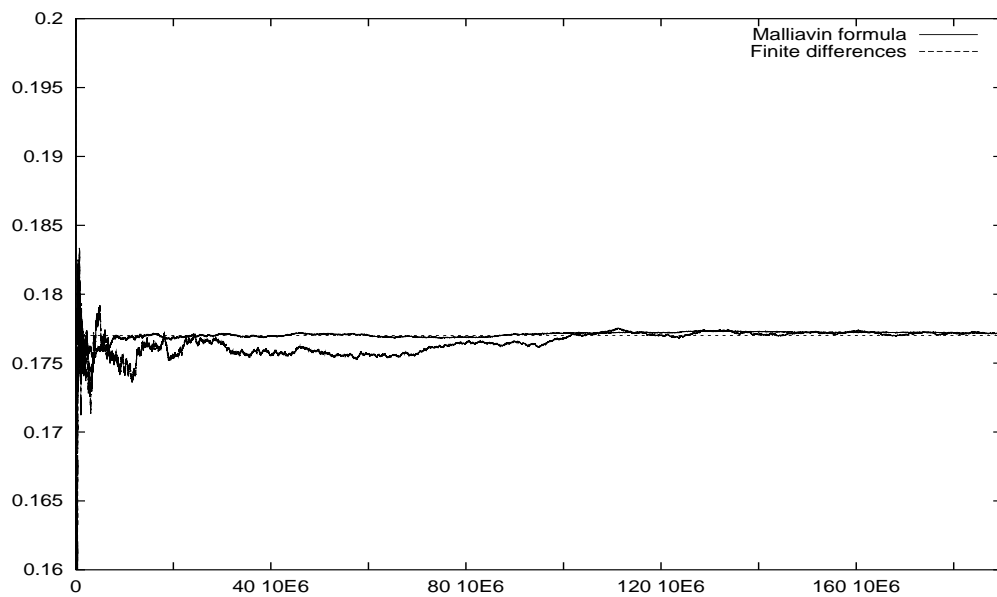


Figure 4 -  $180 \times 10^6$  simulations for Delta

Figure 4 shows the Gamma. The finite differences are computed via

$$\text{Gamma} = \frac{C(x + \epsilon) - 2C(x) + C(x - \epsilon)}{\epsilon^2}.$$

The Malliavin approach is obtained from (4.6). We take  $w_t = \sin(\pi t/T)$ , and the values  $T = 100$ ,  $x = 10$ ,  $K = 30$ ,  $r = 0.009$ ,  $\sigma = 0.01$ , and  $\epsilon = 0.001$ .

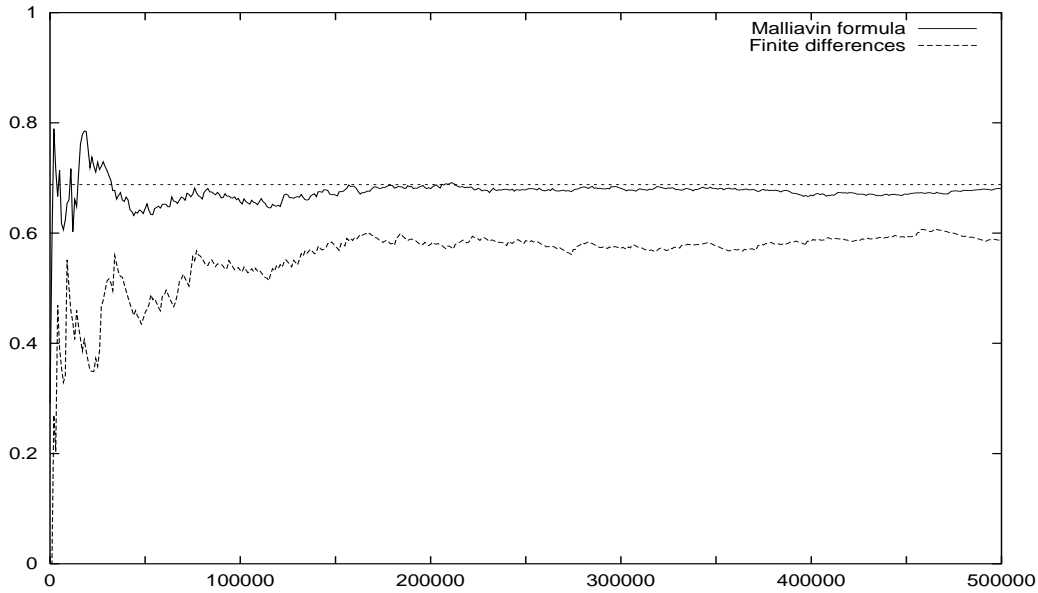


Figure 5 - 500000 simulations for Gamma

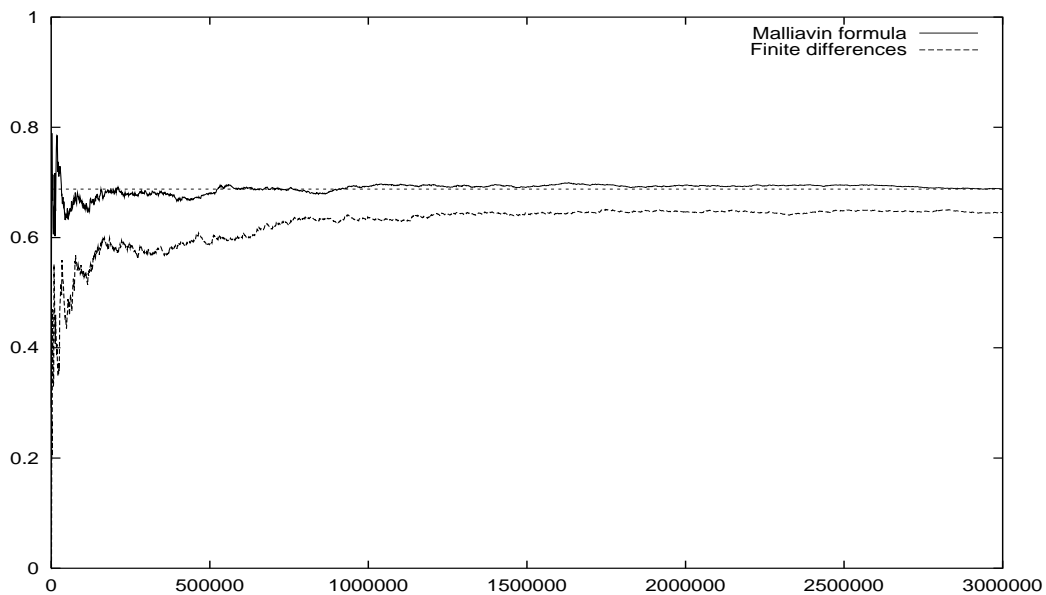


Figure 6 -  $3 \times 10^6$  simulations for Gamma

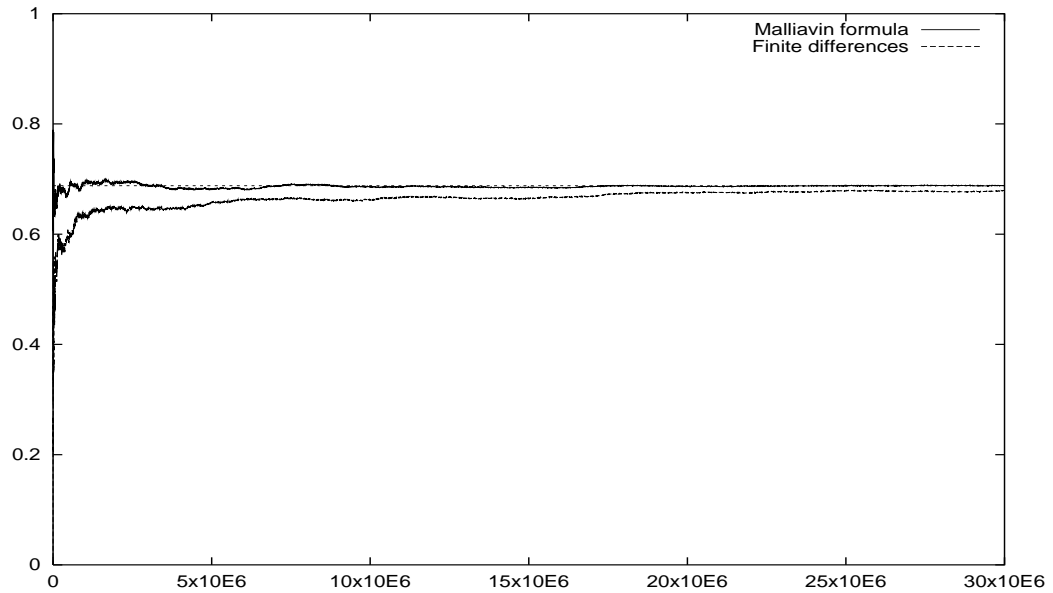


Figure 7 -  $30 \times 10^6$  simulations for Gamma

## 4.6 Conclusion

The simulation graphs show a faster and better convergence of the Greeks obtained from the Malliavin method on Poisson space for Asian options in a market with jumps, compared to the finite difference approximation.



# Bibliographie

- [Ben99] E. Benhamou. An application of Malliavin calculus to Asian and Lookback option Greeks. Preprint, 1999.
- [Bi83] J.M. Bismut. Calcul des variations stochastique et processus de sauts. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheories Verw. Gebiete*, 63:147–235, 1983.
- [CP90] E. Carlen and E. Pardoux. Differential calculus and integration by parts on Poisson space. In S. Albeverio, Ph. Blanchard, and D. Testard, editors, *Stochastics, Algebra and Analysis in Classical and Quantum Dynamics (Marseille, 1988)*, volume 59 of *Math. Appl.*, pages 63–73. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.
- [ET93] R.J. Elliott and A.H. Tsoi. Integration by parts for Poisson processes. *J. Multivariate Anal.*, 44(2), pages 179–190, 1993.
- [FLLLT99] E. Fournié, J.M. Lasry, J. Lebuchoux, P.L. Lions, and N. Touzi. Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. *Finance and Stochastics*, 3(4), pages 391–412, 1999.
- [FLLL01] E. Fournié, J.M. Lasry, J. Lebuchoux, and P.L. Lions. Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance. II. *Finance Stoch.*, 5(2), pages 201–236, 2001.
- [I88] Y. Ito. Generalized Poisson functionals. *Probab. Theory Related Fields*, 77, pages 1–28, 1988.
- [JP02] M. Jeanblanc and N. Privault. A complete market model with Poisson and Brownian components. In R. Dalang, M. Dozzi, and F. Russo, editors, *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications (Ascona, 1999)*, volume 52 of *Progress in Probability*, pages 189–204. Birkhäuser, Basel, 2002.
- [NV90] D. Nualart and J. Vives. Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space. In J. Azéma, P.A. Meyer, and M. Yor, editors,



*Séminaire de Probabilités XXIV*, volume 1426 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 154–165. Springer Verlag, 1990.

- [Pr94] N. Privault. Chaotic and variational calculus in discrete and continuous time for the Poisson process. *Stochastics and Stochastics Reports*, 51, pages 83–109, 1994.
- [Pr02] N. Privault. Distribution-valued gradient and chaotic decompositions of Poisson jump times functionals. *Publicacions Matemàtiques*, 46, pages 27–48, 2002.

## 4.7 Appendix 1: delta.c

```

double expdev(){
    double dum;
    do dum=genrand();
    while (dum == 0.0);
    return -log(dum);
}

double ind(float x){
    if (x>=0) return 1;
    else return 0;
}

main()
{
    file *fE,*fD;
    int N1,k,n,i;
    float t[10000],sk[10000];
    float G,DwG,IntS,DwIntS,DDwIntS,Intw;
    float T,sigma,r,x,Strike,epsilon;
    float EE,DD;

    fE=fopen("E","w");
    fD=fopen("D","w");

    EE=0;DD=0;
    T=500;sigma=0.01;r=0.009;x=10;Strike=15000,epsilon=0.001;N1=200000000;
    for (k = 1; k <= 1000; k++){sk[k]=pow(1+sigma,k);}

    for (n = 1; n <= N1; n++){
        t[0]=0;IntS=0;DwIntS=0;DDwIntS=0;Intw=0;
        t[1]=t[0]+expdev();k=1;

        while (t[k] < T){
            IntS=IntS+sk[k-1]*(exp(r*t[k])-exp(r*t[k-1]))/r;
            DwIntS=DwIntS+sigma*sin(M_PI*t[k]/T)*sk[k-1]*exp(r*t[k]);
            DDwIntS=DDwIntS-sigma*sin(M_PI*t[k]/T)*sk[k-1]*exp(r*t[k])
                *(cos(M_PI*t[k]/T)*M_PI/T+r*sin(M_PI*t[k]/T));
            Intw=Intw+cos(M_PI*t[k]/T)*M_PI/T;
            t[k+1]=t[k]+expdev();
            k=k+1;
        }
        IntS=IntS+sk[k-1]*(exp(r*T)-exp(r*t[k-1]))/r;
        G= IntS/DwIntS/x;DwG=(1-(IntS*DDwIntS/pow(DwIntS,2)))/x;
        if (IntS*x/T-Strike>0){
            EE=EE+G*Intw-DwG;
        }
    }
}

```

```
DD=DD+(ind((x+epsilon)*IntS/T-Strike)
        -ind((x-epsilon)*IntS/T-Strike))/2/epsilon;
if (n%1000==0) {
    fprintf(fE,"%f\n",exp(-r*T)*EE/n);
    fprintf(fD,"%f\n",exp(-r*T)*DD/n);
    printf("n=%i,Delta Malliavin=%f, Delta FD=%f\n",n,
        exp(-r*T)*EE/n,exp(-r*T)*DD/n);
}
}
fclose(fE);
fclose(fD);
}
```

## 4.8 Appendix 2: gamma.c

```
double expdev(){
    double dum;
    do dum=uni();
    while (dum == 0.0);
    return -log(dum);
}

double max(float x){
    if (x>=0) return x;
    else return 0;
}

main()
{
    file *fgamma,*fmgamma;
    int n,N1,k,i;
    float IntS,DwIntS,DDwIntS,DDDwIntS,Intw,Intww;
    float Eg,E,G,DwG,DDwG,R,DwR;
    float t[10000],sk[10000];
    float d,T,sigma,r,x,Strike,epsilon;

    fgamma=fopen("G","w");
    fmgamma=fopen("MG","w");

    T=100;sigma=0.01;r=0.009;x=10;Strike=30,epsilon=0.001;N1=200000000;

    for (i=0;i<10000;i++) {sk[i]=pow(1+sigma,i);}
    E=0;Eg=0;d=0;

    for (n=1;n<N1;n++)
    {
        k=0;t[0]=0;
        while (t[k]<T)
            {k=k+1;t[k]=t[k-1]+expdev();}
```

```

if (k > 1) {
  IntS=0;DwIntS=0;DDwIntS=0;DDDwIntS=0;Intw=0;Intww=0;
  for (i=1;i<k;i++)
  {
    IntS=IntS+(pow(1+sigma,i-1))*(exp(r*t[i])-exp(r*t[i-1])))/r;
    DwIntS=DwIntS+sigma*sin(M_PI*t[i]/T)*sk[i-1]*exp(r*t[i]);
    DDwIntS=DDwIntS-sigma*sin(M_PI*t[i]/T)*sk[i-1]*exp(r*t[i])*
      (cos(M_PI*t[i]/T)*M_PI/T+r*sin(M_PI*t[i]/T));
    DDDwIntS=DDDwIntS+sigma*sin(M_PI*t[i]/T)*sk[i-1]*exp(r*t[i])*
      (pow(cos(M_PI*t[i]/T)*M_PI/T,2)+3*r*sin(M_PI*t[i]/T)*
      cos(M_PI*t[i]/T)*M_PI/T+pow(r*sin(M_PI*t[i]/T),2)
      -pow(sin(M_PI*t[i]/T)*M_PI/T,2));
    Intw=Intw+cos(M_PI*t[i]/T)*M_PI/T;
    Intww=Intww-pow(sin(M_PI*t[i]/T)*M_PI/T,2);
  }
  IntS=IntS+sk[k-1]*(exp(r*T)-exp(r*t[k-1]))/r;
  G=IntS/DwIntS/x;
  DwG=(1-IntS*DDwIntS/pow(DwIntS,2))/x;
  DDwG=-(DDwIntS/DwIntS+IntS*DDDwIntS/pow(DwIntS,2)
    -2*IntS*pow(DDwIntS,2)/pow(DwIntS,3))/x;
  R=G*(G*Intw-DwG);
  DwR=(G*Intw-DwG)*DwG+G*(Intw*DwG-G*Intww-DDwG);
  E=E+exp(-r*T)*max(x*IntS/T-Strike)*(G*Intw-DwG);
  Eg=Eg+exp(-r*T)*max(x*IntS/T-Strike)*(R*Intw-DwR);
  d=d+exp(-r*T)*(max((x+epsilon)*IntS/T-Strike)+max((x-epsilon)*
    IntS/T-Strike)-2*max(x*IntS/T-Strike))/(pow(epsilon,2));

  if (n%1000==0) {
    fprintf(fgamma,"%f\n",d/n);
    fprintf(fmgamma,"%f\n",-E/x/n+Eg/n);
    printf("n=%i,Gamma FD:%f,Gamma Malliavin:%f\n",n,d/n,
      -E/x/n+Eg/n);
  }
}
fclose(fgamma);
fclose(fmgamma);
}

```

## 4.9 Appendix 3: rho.c

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>

#define SIZE 30000;

double max(float x){
    if (x>=0) return x;
    else return 0;
}

main() {

    FILE *frho;
    FILE *fmrho;

    int n, N1, k, i;

    float IntS, DwIntS, DDwIntS, drIntS,
    float DwdrIntS, IntSpe,IntSpe;
    float G, DwG, Intw, dfRho[SIZE], mlRho[SIZE], t[1000];
    float T, sigma, r, x, Strike, epsilon, rh;

    T = 500; sigma = 0.007; r = 0.012; x = 10; Strike = 21000;
    epsilon = 0.02; delt = 0.001; N1 = 30000;

    for (n = 1; n < N1; n++) {
        k = 0;
        t[0] = 0;
        while (t[k] < T) {
            k = k+1;
            t[k]= t[k-1]+expdev();
        }
        if (k > 1){
            IntS = 0;
            for (i = 1; i < k; i++)
                IntS = IntS+pow(1+sigma,i-1)*(exp(r*t[i])-exp(r*t[i-1]))/r;

            DwIntS = 0;
            for (i = 1; i<k; i++)
                DwIntS = DwIntS+sigma*sin(M_PI*t[i]/T)*pow(1+sigma,i-1)
                    *exp(r*t[i]);

            DDwIntS = 0;
            for (i = 1; i<k; i++)
                DDwIntS = DDwIntS-sigma*sin(M_PI*t[i]/T)*pow(1+sigma,i-1)
                    *exp(r*t[i])*(cos(M_PI*t[i]/T)*M_PI/T+r
                    *sin(M_PI*t[i]/T));
```

```

Intw = 0;
for (i = 1; i < k; i++)
Intw = Intw + cos(M_PI*t[i]/T) * M_PI/T;

drIntS = 0;
for (i = 1; i < k; i++)
drIntS = drIntS+pow(1+sigma,i-1)*((t[i]-1/r)*exp(r*t[i])
    -(t[i-1]-1/r)*exp(r*t[i-1]))/r;

DwdrIntS = 0;
for (i = 1; i < k; i++)
DwdrIntS = DwdrIntS+t[i]*sigma*sin(M_PI*t[i]/T)*pow(1+sigma,i-1)
    *exp(r*t[i]);
G = drIntS/DwIntS;
DwG = DwdrIntS/DwIntS-drIntS*DDwIntS/pow(DwIntS,2);
L = exp(-r*T)*max(x*IntS/T-Strike)*(G*Intw-DwG-T);
mlRho[n] = ((n-1)*mlRho[n-1]+L)/n;

IntSpe = 0;
for (i = 1; i < k; i++)
IntSpe = IntSpe+pow((1+sigma),i-1)*(exp((r+epsilon)*t[i])
    -exp((r+epsilon)*t[i-1]))/(r+epsilon);

IntSme = 0;
for (i = 1; i < k; i++)
IntSme = IntSme+pow((1+sigma),i-1)*(exp((r-epsilon)*t[i])
    -exp((r-epsilon)*t[i-1]))/(r-epsilon);

rh = exp(-r*T)*(max(x*IntSpe/T-Strike)-max(x*IntSme/T-Strike));
dfRho[n] = ((n-1)*dfRho[n-1]+rh)/n;
    }
}

frho=fopen("R","w");
fmrho=fopen("MR","w");

for (n = 1; n < N1; n++) {
fprintf(frho,"%f\n",dfRho[n]);
fprintf(fmrho,"%f\n",mlRho[n]);
    }

fclose(frho);
fclose(fmrho);
}

```

## 4.10 Appendix 4: vega.c

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>

#define SIZE 30000;

double max(float x){
    if (x>=0) return x;
    else return 0;
}

main() {

    FILE *fvega;
    FILE *fmvega;

    int n, N1, k, i;
    float IntS, DwIntS, DDwIntS, Intw;
    float dsIntS, DwdsIntS, IntSpe, IntSme;
    float G, DwG, L, m1Vega[SIZE], dfVega[SIZE], t[1000];
    float T, sigma, r, x, Strike, epsilon;

    T = 500; sigma = 0.007; r = 0.012; x = 10; Strike = 21000;
    epsilon = 0.02; delt = 0.001; N1 = 30000;

    for (n = 1; n < N1; n++) {
        k = 0;
        t[0] = 0;
        while (t[k] < T) {
            k = k+1;
            t[k]= t[k-1]+expdev();
        }
        if (k > 1){

            IntS = 0;
            for (i = 1; i < k; i++)
                IntS = IntS+pow(1+sigma,i-1)*(exp(r*t[i])-exp(r*t[i-1]))/r;

            DwIntS = 0;
            for (i = 1; i<k; i++)
                DwIntS = DwIntS+sigma*sin(M_PI*t[i]/T)*pow(1+sigma,i-1)
                    *exp(r*t[i]);
            DDwIntS = 0;
            for (i = 1; i<k; i++)
                DDwIntS = DDwIntS-sigma*sin(M_PI*t[i]/T)*pow(1+sigma,i-1)
                    *exp(r*t[i])*(cos(M_PI*t[i]/T)*M_PI/T+r
                    *sin(M_PI*t[i]/T));
            Intw = 0;

```



```

for (i = 1; i<k; i++)
Intw = Intw + cos(M_PI*t[i]/T) * M_PI/T;

Intw = 0;
for (i = 1; i<k; i++)
Intw = Intw - pow(sin(M_PI*t[i]/T)*M_PI/T,2);

dsIntS = 0;
for (i = 1; i < k; i++)
dsIntS = dsIntS+(i-1)*pow(1+sigma,i-2)*(exp(r*t[i])
-exp(r*t[i-1]))/r;

DwdsIntS = 0;
for (i = 1; i < k; i++)
DwdsIntS = DwdsIntS+(1+i*sigma)*sin(M_PI*t[i]/T)
*pow(1+sigma,i-2)*exp(r*t[i]);

G = dsIntS/DwIntS;
DwG = DwdsIntS/DwIntS-dsIntS*DDwIntS/pow(DwIntS,2);
L = exp(-r*T)*max(x*IntS/T-Strike)*(G*Intw-DwG);

mlVega[n] = ((n-1)*mlVega[n-1]+L)/n;

IntSpe = 0;
for (i = 1; i < k; i++)
IntSpe = IntSpe+pow((1+sigma+epsilon),i-1)*(exp(r* t[i])
-exp(r*t[i-1]))/r;

IntSme = 0;
for (i = 1; i < k; i++)
IntSme = IntSme+pow((1+sigma-epsilon),i-1)*(exp(r*t[i])
-exp(r*t[i-1]))/r;

dfVega[n] = exp(-r*T)*(dfVega[n-1]+max(x*IntSpe/T-Strike)
-max(x*IntSme/T-Strike))/2/epsilon;
}
}
fvega=fopen("V","w");
fmvega=fopen("MV","w");

for (n = 1; n < N1; n++) {
fprintf(fvega,"%f\n",dfVega[n]);
fprintf(fmvega,"%f\n",mlVega[n]);
}

fclose(fvega);
fclose(fmvega);
}

```

## Chapitre 5

# Un modèle à volatilité stochastique dirigé par des processus discontinus

Ce chapitre traite le calcul de la stratégie de couverture dans un modèle à volatilité stochastique dirigé par des processus somme d'un mouvement brownien et d'un processus de Poisson bi-dimensionnels. L'incomplétude résultant de la considération d'une volatilité stochastique entraîne l'existence d'une infinité de mesures martingales équivalentes. On choisit alors la mesure martingale équivalente minimisant l'entropie (ou information de Kullback) (cf. par exemple [FS91] ou [M00a], pour la minimisation de l'entropie dans d'autres modèles). Sous cette dernière on calcule la stratégie minimisant la variance -cf.[S93] pour cette approche dans un cas discret- par deux méthodes : une basée sur la formule d'Itô et l'autre sur le calcul de chaotique.

**Mots clés :** volatilité stochastique, processus discontinus, formule de Clark-Ocone, entropie, mesure martingale équivalente.



## 5.1 Introduction

Les modèles à volatilité stochastique ont été largement étudiés, citons par exemple [HW87], [Mel98] et [BR94]. Ces modèles ont été introduits dans la littérature financière afin de répondre à l'effet smile découlant d'un modèle de type Black-Scholes considérant une volatilité déterministe. Dans [BR94] (ou par exemple [Re97]) on montre que dans de tels modèles, le problème de l'effet smile est résolu, ce qui explique leur popularité. La plupart des travaux sur ce thème considèrent des informations browniennes. Récemment des travaux sur l'estimation des modèles à volatilité stochastique avec diffusion à sauts ont été introduits cf. par exemple [CLS00] ou [CGGT99]. Notons que la considération des modèles à sauts n'est pas récente. La nouveauté est l'étude des modèles à volatilité stochastique avec sauts. Dans ce chapitre on étudie un modèle à volatilité stochastique où l'actif risqué est dominé par des processus somme de browniens et de Poisson. On trouve la mesure martingale équivalente minimisant l'entropie.

Considérons un actif risqué dont la dynamique est décrite par

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= \mu_t dt + \sigma(t, Y_t)[a_t^{(1)} dW_t^{(1)} + a_t^{(3)} dM_t^{(1)}], \quad t \in [0, T], \\ S_0 &= x > 0,\end{aligned}$$

où  $(Y_t)_{t \in [0, T]}$  est donné par

$$\begin{aligned}dY_t &= \mu_t^Y dt + \sum_{i=1}^2 \sigma_t^{(i)} [a_t^{(i)} dW_t^{(i)} + a_t^{(i+2)} dM_t^{(i)}], \\ Y_0 &= y \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

avec  $W = (W^{(1)}, W^{(2)})$  un mouvement brownien 2-dimensionnel,  $M = (M^{(1)}, M^{(2)})$  un processus de Poisson compensé 2-dimensionnel à composantes indépendantes d'intensité déterministe  $(\int_0^t \lambda_s^{(1)} ds, \int_0^t \lambda_s^{(2)} ds)$  et pour  $1 \leq i \leq 4$ ,  $a^{(i)} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction déterministe. On suppose que

$$\sigma(t, \cdot) \neq 0, \quad \text{et que} \quad 1 + \sigma(t, \cdot) a_t^{(3)} > 0, \quad t \in [0, T].$$

Une probabilité  $Q$  équivalente à la probabilité historique  $P$  est déterminée par sa densité de Radon-Nikodym par rapport à  $P$

$$\begin{aligned}\rho_T &= \prod_{i=1}^2 \exp \left( \int_0^T \beta_s^{(i)} dW_s^{(i)} - \frac{1}{2} \int_0^T (\beta_s^{(i)})^2 ds \right) \exp \left( \int_0^T \ln(1 + \beta_s^{(i+2)}) dM_s^{(i)} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \lambda_s^{(i)} [\ln(1 + \beta_s^{(i+2)}) - \beta_s^{(i+2)}] ds \right).\end{aligned}$$

où  $(\beta_t)_{t \in [0, T]}$  est un processus prévisible à valeurs dans  $\mathbb{R}^4$ , tel que  $\beta^{(3)}, \beta^{(4)} > -1$ . Si  $Q$  est une mesure martingale équivalente à  $P$  alors  $\beta^{(1)}$  et  $\beta^{(3)}$  sont liés par la relation

$$\mu_t - r_t + \beta_t^{(1)} a_t^{(1)} \sigma(t, Y_t) + \lambda_t^{(1)} \beta_t^{(3)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) = 0,$$

voir Prop. 5.6. L'équation précédente montre que  $\beta^{(2)}$  et  $\beta^{(4)}$  sont arbitraires. Il existe alors une infinité de mesures martingales équivalentes à  $P$ . Nous déterminons alors celle qui minimise l'entropie. Désignons par  $I(Q, P)$  l'entropie relative de  $Q$  par rapport à  $P$ , soit

$$I(Q, P) = E_P \left[ \frac{dQ}{dP} \ln \frac{dQ}{dP} \right].$$

Prenons  $(\hat{\beta}_t^{(1)}, \hat{\beta}_t^{(2)}, \hat{\beta}_t^{(3)}, \hat{\beta}_t^{(4)})_{t \in [0, T]}$  tel que

$$\hat{\beta}_t^{(2)} = \hat{\beta}_t^{(4)} = 0, \quad \hat{\beta}_t^{(1)} = \begin{cases} \frac{r_t - \mu_t - \lambda_t^{(1)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) \hat{\beta}_t^{(3)}}{\sigma(t, Y_t) a_t^{(1)}} & \text{si } a^{(1)} \neq 0, \\ 0 & \text{si } a^{(1)} = 0, \end{cases}$$

et  $\hat{\beta}_t^{(3)}$  est l'unique solution de

$$\lambda_t^{(1)} \sigma(t, Y_t) (a_t^{(3)})^2 x + (a_t^{(1)})^2 \sigma(t, Y_t) \left( \frac{x}{1+x} \right) - a_t^{(3)} (r_t - \mu_t) = 0,$$

alors la probabilité  $\hat{Q}$  donnée par sa densité de Radon-Nikodym

$$\prod_{i=1}^2 \exp \left( \int_0^T \hat{\beta}_s^{(i)} dW_s^{(i)} - \frac{1}{2} \int_0^T (\hat{\beta}_s^{(i)})^2 ds \right) \exp \left( \int_0^T \ln(1 + \hat{\beta}_s^{(i+2)}) dM_s^{(i)} + \int_0^T \lambda_s^{(i)} \left[ \ln(1 + \hat{\beta}_s^{(i+2)}) - \hat{\beta}_s^{(i+2)} \right] ds \right),$$

est la mesure martingale équivalente minimisant  $I(P, Q)$ , voir Prop. 5.9.

Sous cette mesure, on trouve la stratégie minimisant la variance, en utilisant soit le calcul d'Itô soit le calcul chaotique. On cherche à trouver la stratégie minimisant la variance pour un call européen qui porte sur l'actif  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  d'échéance  $T$  et de strike  $K$ . Le processus de la valeur du portefeuille est  $(\hat{V}_t)_{t \in [0, T]}$ . On obtient par exemple par le calcul chaotique que la stratégie minimisant la variance

$$E_{\hat{Q}} \left[ (S_T - K)^+ - \hat{V}_T \right]^2,$$

est donnée par

$$\hat{\eta}_t = \frac{a_t^{(1)} E[D_t^{\tilde{W}^{(1)}} F | \mathcal{F}_t] + \lambda_t^{(1)} (1 + \hat{\beta}_t^{(3)}) a_t^{(3)} E[D_t^{N^{(1)}} F | \mathcal{F}_t]}{((a_t^{(1)})^2 + \lambda_t^{(1)} (1 + \hat{\beta}_t^{(3)}) (a_t^{(3)})^2) e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) S_t}.$$

Le paragraphe suivant introduit le modèle. Le troisième est consacré à la détermination d'une mesure martingale équivalente minimisant l'entropie. Dans le dernier paragraphe, on traite la couverture par minimisation de la variance par le calcul d'Itô et le calcul de Malliavin.

## 5.2 Préliminaires

### 5.2.1 Calcul d'Itô

Soient  $W = (W^{(1)}, W^{(2)})$  un mouvement brownien 2-dimensionnel et  $N = (N^{(1)}, N^{(2)})$  un processus de Poisson 2-dimensionnel à composantes indépendantes d'intensité déterministe  $(\int_0^t \lambda_s^{(1)} ds, \int_0^t \lambda_s^{(2)} ds)$ . On travaille dans un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$ , où  $\mathcal{F}_t$  est la filtration engendrée par  $W$  et  $N$ . Dans cette situation les deux  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ -martingales  $W$  et  $N$  sont indépendantes (cf. par exemple [IW81]). On désigne par  $M = (M^{(1)}, M^{(2)})$  le processus de Poisson compensé donné par

$$dM_t^{(i)} = dN_t^{(i)} - \lambda_t^{(i)} dt, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2.$$

**Définition 5.1.** Soit  $\Gamma$  l'ensemble des processus  $\mathcal{F}_t$ -prévisibles  $(\gamma_t)_{t \in [0, T]}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^4$ , tels que

$$\sum_{i=1}^2 E_P \left[ \int_0^t (\gamma_s^{(i)})^2 ds \right] + \sum_{i=1}^2 E_P \left[ \int_0^t (\gamma_s^{(i+2)})^2 \lambda_s^i ds \right] < \infty, \quad t \in [0, T]. \quad (5.1)$$

Dans la suite pour toute semi-martingale  $X$ , telle que  $X_0 = 0$ ,  $\mathcal{E}(X)_t$  désigne la solution unique de

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dX_s. \quad (5.2)$$

$\mathcal{E}(X)_t$  est appelée aussi l'exponentielle de Doléans-Dade. On a (voir Th 36. [Pro90])

$$\mathcal{E}(X)_t = \exp \left( X_t - \frac{1}{2} [X_t, X_t]^c \right) \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) \exp(-\Delta X_s). \quad (5.3)$$

**Remarque 5.2.** Notons que pour  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma^{(3)}, \gamma^{(4)} > -1$  on a pour  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\gamma^{(i)} W^{(i)})_t &= \exp \left( \int_0^t \gamma_s^{(i)} dW_s^{(i)} - \frac{1}{2} \int_0^t (\gamma_s^{(i)})^2 ds \right), \\ \mathcal{E}(\gamma^{(i+2)} M^{(i)})_t &= \exp \left( \int_0^t \ln(1 + \gamma_s^{(i+2)}) dM_s^{(i)} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \lambda_s^{(i)} [\ln(1 + \gamma_s^{(i+2)}) - \gamma_s^{(i+2)}] ds \right). \end{aligned}$$

Les deux lemmes suivants font un rappel de la formule d'Itô (cf. par exemple [Pro90] dans un cadre plus général) et du théorème de représentation des martingales (cf. par exemple [J79]).

**Lemme 5.3.** *Soit  $R = (R^1, \dots, R^n)$  un processus adapté  $n$ -dimensionnel, et soit  $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$  tel que*

$$\gamma^k = (\gamma^{(k,1)}, \gamma^{(k,2)}, \gamma^{(k,3)}, \gamma^{(k,4)}) \in \Gamma, \quad 1 \leq k \leq n.$$

*On considère le processus  $X = (X^1, \dots, X^n)$  où pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $X^k$  est donné par*

$$dX_t^k = R_t^k dt + \sum_{i=1}^2 \gamma_t^{(k,i)} dW_t^{(i)} + \sum_{i=1}^2 \gamma_t^{(k,i+2)} dM_t^{(i)}, \quad X_0^k \in \mathbb{R}.$$

*Alors pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ , on a*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_{s-}) + \langle R_s, \nabla f(s, X_s) \rangle \right. \\ &\quad + \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(s, X_{s-}) \gamma_s^{(k,i)} \gamma_s^{(l,i)} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^2 \lambda_s^{(i)} (f(s, (X_{s-}^1, \dots, X_{s-}^k + \gamma_s^{(k,i+2)}, \dots, X_{s-}^n)) - f(s, X_{s-})) \\ &\quad \left. - \gamma_s^{(k,i+2)} \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, X_{s-}) \right] ds + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^2 \int_0^t \gamma_s^{(k,i)} \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, X_s) dW_s^{(i)} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^2 \int_0^t (f(s, (X_{s-}^1, \dots, X_{s-}^k + \gamma_s^{(k,i+2)}, \dots, X_{s-}^n)) - f(s, X_{s-})) dM_s^{(i)}. \end{aligned}$$

**Lemme 5.4.** *Soit  $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$  une  $\mathcal{F}_t$ -martingale. Alors il existe un processus prévisible  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $Z$  admet la représentation*

$$dZ_t = \sum_{i=1}^2 \gamma_t^{(i)} dW_t^{(i)} + \sum_{i=1}^2 \gamma_t^{(i+2)} dM_t^{(i)}, \quad t \in [0, T]. \quad (5.4)$$

## 5.2.2 Le modèle

On suppose que le marché est composé de deux actifs: un risqué, sur lequel porte une option européenne du type Call et un autre actif sans risque. L'échéance est  $T$  et le prix d'exercice est  $K$ . Le prix de l'actif sans risque est donné par

$$dA_t = r_t A_t dt, \quad t \in [0, T],$$

$$A_0 = 1,$$

où  $r_t$  est une fonction déterministe désignant le taux d'intérêt. On suppose que le prix de l'actif risqué a une volatilité stochastique et que sa dynamique vérifie

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu_t dt + \sigma(t, Y_t)[a_t^{(1)} dW_t^{(1)} + a_t^{(3)} dM_t^{(1)}], \quad t \in [0, T], \\ S_0 &= x > 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

où  $(Y_t)_{t \in [0, T]}$  est donné par

$$\begin{aligned} dY_t &= \mu_t^Y dt + \sum_{i=1}^2 \sigma_t^{(i)} [a_t^{(i)} dW_t^{(i)} + a_t^{(i+2)} dM_t^{(i)}], \\ Y_0 &= y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

avec pour  $1 \leq i \leq 4$ ,  $a^{(i)} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction déterministe. On suppose que

$$\sigma(t, \cdot) \neq 0, \quad \text{et que} \quad 1 + \sigma(t, \cdot) a_t^{(3)} > 0, \quad t \in [0, T].$$

On a

$$\begin{aligned} S_t &= x \exp \left( \int_0^t a_s^{(1)} \sigma(s, Y_s) dW_s^{(1)} + \int_0^t (\mu_s - a_s^{(3)} \lambda_s^{(1)} \sigma(s, Y_s) - \frac{1}{2} (a_s^{(1)})^2 \sigma^2(s, Y_s)) ds \right) \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{k=N_t} (1 + a_{T_k^{(1)}}^{(3)} \sigma(T_k^{(1)}, Y_{T_k^{(1)}})), \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T$ , où  $(T_k^{(1)})_{k \geq 1}$  désigne les temps de sauts de  $(N_t^{(1)})_{t \in [0, T]}$ .

### 5.2.3 Changement de probabilité

Soit  $Q$  une probabilité équivalente à  $P$ , d'après le théorème de Radon-Nikodym il existe une variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable que l'on note  $\rho_T = \frac{dQ}{dP}$  et telle que

$$Q(A) = E_P[\rho_T 1_A] \quad A \in \mathcal{P}(\Omega),$$

avec  $\rho_T$  strictement positive  $P$ -p.s (car  $Q$  est équivalente à  $P$ ). De plus

$$E_P[\rho_T] = E_P[\rho_T 1_\Omega] = 1. \quad (5.6)$$

Considérons la martingale  $\rho = (\rho_t)_{t \in [0, T]}$  définie par

$$\rho_t = E_P[\rho_T | \mathcal{F}_t] = E_P \left[ \frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t \right].$$



**Définition 5.5.** Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des mesures martingales  $Q$  équivalentes (M.M.E.) à  $P$  i.e  $Q \in \mathcal{H}$  si et seulement si  $Q \simeq P$  et les prix actualisés sont des  $Q$ -martingales.

**Proposition 5.6.** Soit  $Q \in \mathcal{H}$ . Alors il existe un processus prévisible à valeurs dans  $\mathbb{R}^4$  tel que  $\beta^{(3)}, \beta^{(4)} > -1$  et la densité de Radon-Nikodym de  $Q$  par rapport à  $P$  est donnée par

$$\begin{aligned} \rho_T &= \prod_{i=1}^2 \mathcal{E}(\beta^{(i)} W^{(i)})_T \mathcal{E}(\beta^{(i+2)} M^{(i)})_T \\ &= \prod_{i=1}^2 \exp \left( \int_0^T \beta_s^{(i)} dW_s^{(i)} - \frac{1}{2} \int_0^T (\beta_s^{(i)})^2 ds \right) \exp \left( \int_0^T \ln(1 + \beta_s^{(i+2)}) dM_s^{(i)} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \lambda_s^{(i)} [\ln(1 + \beta_s^{(i+2)}) - \beta_s^{(i+2)}] ds \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

De plus  $\beta^{(1)}$  et  $\beta^{(3)}$  sont liés par la relation

$$\mu_t - r_t + \beta_t^{(1)} a_t^{(1)} \sigma(t, Y_t) + \lambda_t^{(1)} \beta_t^{(3)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) = 0. \quad (5.8)$$

*Preuve.* On suit par exemple [Bel99] pour le cas d'un modèle dirigé par des diffusions mixtes où la volatilité est déterministe. Par le théorème de représentation des martingales Lemme 5.4, il existe un processus prévisible  $(\gamma_t)_{t \in [0, T]} \in \Gamma$  tel que

$$d\rho_t = \sum_{i=1}^2 \gamma_t^{(i)} dW_t^{(i)} + \sum_{i=1}^2 \gamma_t^{(i+2)} dM_t^{(i)}, \quad t \in [0, T]. \quad (5.9)$$

On a  $P(\rho_t > 0, t \in [0, T]) = 1$ , en posant  $\beta := \frac{\gamma}{\rho}$ , on a

$$\frac{d\rho_t}{\rho_t} = \sum_{i=1}^2 \beta_t^{(i)} dW_t^{(i)} + \sum_{i=1}^2 \beta_t^{(i+2)} dM_t^{(i)} = dX_t, \quad t \in [0, T],$$

(5.7) s'obtient par (5.3). D'autre part  $(e^{-\int_0^t r_s ds} S_t)_{t \in [0, T]}$  est une  $Q$ -martingale ce qui est équivalent à dire que  $(e^{-\int_0^t r_s ds} S_t \rho_t)_{t \in [0, T]}$  est une  $P$ -martingale. Par la formule d'intégration par partie [Pro90], on a

$$d(e^{-\int_0^t r_s ds} S_t \rho_t) = \rho_t d(e^{-\int_0^t r_s ds} S_t) + e^{-\int_0^t r_s ds} S_t d\rho_t + d[e^{-\int_0^t r_s ds} S_t, \rho_t],$$

avec

$$\begin{aligned} d[e^{-\int_0^t r_s ds} S_t, \rho_t] &= \beta_t^{(1)} a_t^{(1)} \sigma(t, Y_t) dt + \beta_t^{(3)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) dN_t^{(1)}, \\ &= \left( \beta_t^{(1)} a_t^{(1)} \sigma(t, Y_t) + \lambda_t^{(1)} \beta_t^{(3)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) \right) dt \end{aligned}$$

$$+\beta_t^{(3)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) dM_t^{(1)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} d(e^{-\int_0^t r_s ds} S_t \rho_t) &= \rho_t S_t e^{-\int_0^t r_s ds} \left[ (\mu_t - r_t + \beta_t^{(1)} a_t^{(1)} \sigma(t, Y_t) + \lambda_t^{(1)} \beta_t^{(3)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t)) dt \right. \\ &\quad + (\beta_t^{(1)} + \sigma(t, Y_t) a_t^{(1)}) dW_t^{(1)} + \beta_t^{(2)} dW_t^{(2)} \\ &\quad \left. + \left( \sigma(t, Y_t) a_t^{(3)} + \beta_t^{(3)} (1 + \sigma(t, Y_t) a_t^{(3)}) \right) dM_t^{(1)} + \beta_t^{(4)} dM_t^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

Donc  $Q$  est une mesure martingale équivalente à  $P$  si et seulement si

$$\mu_t - r_t + \beta_t^{(1)} a_t^{(1)} \sigma(t, Y_t) + \lambda_t^{(1)} \beta_t^{(3)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) = 0.$$

□

On remarque qu'il n'existe pas de restriction sur  $\beta^{(2)}$  et  $\beta^{(4)}$ , ce qui signifie que si  $\mathcal{H} \neq \emptyset$ , alors  $\mathcal{H}$  contient une infinité de M.M.E. à  $P$ .

**Définition 5.7.** Soit  $\Gamma^{\mathcal{H}}$  l'ensemble des processus prévisibles  $\beta$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^4$ , tel que la dérivée de Radon-Nikodym  $\rho_T$  donnée par (5.7), définit une M.M.E.  $Q^\beta \in \mathcal{H}$ , i.e

$$\Gamma^{\mathcal{H}} = \{\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \beta^{(3)}, \beta^{(4)}) \text{ prévisible; } \mu_t - r_t + \beta_t^{(1)} a_t^{(1)} \sigma(t, Y_t) + \lambda_t^{(1)} \beta_t^{(3)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) = 0\}.$$

Désormais on note une M.M.E.  $Q$  dans  $\mathcal{H}$  par  $Q^\beta$  où  $\beta \in \Gamma^{\mathcal{H}}$ . Soit  $\beta \in \Gamma^{\mathcal{H}}$  et soient les processus  $\tilde{W} = (\tilde{W}^{(1)}, \tilde{W}^{(2)})$  et  $\tilde{M} = (\tilde{M}^{(1)}, \tilde{M}^{(2)})$  où pour  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_t^{(i)} &= W_t^{(i)} - \int_0^t \beta_s^{(i)} ds, \quad t \in [0, T], \\ \tilde{M}_t^{(i)} &= M_t^{(i)} - \int_0^t \lambda_s^{(i)} \beta_s^{(i+2)} ds, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

Par le théorème de Girsanov (cf. [J79])  $\tilde{W}$  est un  $Q^\beta$ -mouvement brownien 2-dimensionnel et  $\tilde{M}$  est une  $Q^\beta$ -processus de Poisson compensé. La représentation de  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  sous  $Q^\beta$  est

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= r_t dt + \sigma(t, Y_t) [a_t^{(1)} d\tilde{W}_t^{(1)} + a_t^{(3)} d\tilde{M}_t^{(1)}], \quad t \in [0, T], \\ S_0 &= x > 0, \end{aligned} \tag{5.10}$$

et  $(Y_t)_{t \in [0, T]}$  vérifie

$$\begin{aligned} dY_t &= \left( \mu_t^Y + \sum_{i=1}^2 \sigma_t^{(i)} [a_t^{(i)} \beta_t^{(i)} + \lambda_t^{(i)} \beta_t^{(i+2)} a_t^{(i+2)}] \right) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \sigma_t^{(i)} [a_t^{(i)} d\tilde{W}_t^{(i)} + a_t^{(i+2)} d\tilde{M}_t^{(i)}], \\ Y_0 &= y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

### 5.3 Mesure martingale équivalente minimisant l'entropie

Le vecteur  $\left(\frac{\mu_t - r_t}{a_t^{(1)} \sigma(t, Y_t)}, 0, 0, 0\right) \in \Gamma^{\mathcal{H}}$  définit une M.M.E. à  $P$ , donc  $\mathcal{H} \neq \emptyset$ , et  $\mathcal{H}$  contient une infinité de M.M.E. à  $P$ . On choisit celle minimisant l'entropie relative. On désigne par  $I(Q^\beta, P)$  l'entropie relative de  $Q^\beta$  par rapport à  $P$ . Pour  $Q^\beta \in \mathcal{H}$ , on a

$$I(Q^\beta, P) = E_P \left[ \frac{dQ^\beta}{dP} \ln \frac{dQ^\beta}{dP} \right].$$

Notre but est de minimiser  $I(P, Q^\beta)$  sous  $\mathcal{H}$ . On a

$$\begin{aligned} I(P, Q^\beta) &= E_{Q^\beta} \left[ \frac{dP}{dQ^\beta} \ln \frac{dP}{dQ^\beta} \right] \\ &= -E_P \left[ \ln \frac{dQ^\beta}{dP} \right]. \end{aligned}$$

Donc le problème est de trouver  $\hat{\beta}$  qui réalise

$$I(P, Q^{\hat{\beta}}) = \min_{\beta \in \Gamma^{\mathcal{H}}} -E_P \left[ \ln \frac{dQ^\beta}{dP} \right]. \quad (5.12)$$

**Lemme 5.8.** *Le problème de minimisation (5.12) est équivalent à minimiser*

$$\begin{aligned} &(\mu_t - r_t + \lambda_t^{(1)} a_t^{(3)} \beta_t^{(3)} \sigma(t, Y_t))^2 - 2\sigma^2(t, Y_t) (a_t^{(1)})^2 \lambda_t^{(1)} \left[ \ln(1 + \beta_t^{(3)}) - \beta_t^{(3)} \right] \\ &- 2\sigma^2(t, Y_t) (a_t^{(1)})^2 \lambda_t^{(2)} \left[ \ln(1 + \beta_t^{(4)}) - \beta_t^{(4)} \right], \end{aligned}$$

sous tous les vecteurs  $\beta = \left(\frac{\mu_t - r_t + \lambda_t^{(1)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) \beta_t^{(3)}}{\sigma(t, Y_t) a_t^{(1)}}, 0, \beta^{(3)}, \beta^{(4)}\right) \in \Gamma^{\mathcal{H}}$ .

*Preuve.* Soit  $Q^\beta \in \mathcal{H}$ . En utilisant (5.7), on a

$$\begin{aligned} I(P, Q^\beta) &= -E_P \left[ \ln \frac{dQ^\beta}{dP} \right] \\ &= E_P \left[ \int_0^T \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} (\beta_t^{(i)})^2 - \lambda_t^{(i)} \left[ \ln(1 + \beta_t^{(i+2)}) - \beta_t^{(i+2)} \right] dt \right] \\ &= E_P \left[ \int_0^T \frac{G(\beta_t)}{2\sigma^2(t, Y_t) (a_t^{(1)})^2} dt \right], \end{aligned}$$

où  $\beta \in \Gamma^{\mathcal{H}}$ , et  $G$  est la fonction définie par

$$G(\beta_t) = 2\sigma^2(t, Y_t) (a_t^{(1)})^2 \left( \frac{1}{2} (\beta_t^{(1)})^2 + \frac{1}{2} (\beta_t^{(2)})^2 - \lambda_t^{(1)} \left[ \ln(1 + \beta_t^{(3)}) - \beta_t^{(3)} \right] \right)$$

$$-\lambda_t^{(2)} \left[ \ln(1 + \beta_t^{(4)}) - \beta_t^{(4)} \right], \quad t \in [0, T].$$

Pour  $t$  fixé, on a par (5.8)

$$\begin{aligned} G(\beta_t) &= (\mu_t - r_t + \lambda_t^{(1)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) \beta_t^{(3)})^2 + \sigma^2(t, Y_t) (a_t^{(1)})^2 (\beta_t^{(2)})^2 \\ &\quad - 2\sigma^2(t, Y_t) (a_t^{(1)})^2 \lambda_t^{(1)} \left[ \ln(1 + \beta_t^{(3)}) - \beta_t^{(3)} \right] \\ &\quad - 2\sigma^2(t, Y_t) (a_t^{(1)})^2 \lambda_t^{(2)} \left[ \ln(1 + \beta_t^{(4)}) - \beta_t^{(4)} \right], \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Le lemme est déduit du fait que  $\beta_t^{(2)}$  n'apparaît que dans le terme  $\sigma^2(t, Y_t) (a_t^{(1)})^2 (\beta_t^{(2)})^2$  qui est toujours positif, et donc  $\beta_t^{(2)}$  doit être nul.  $\square$

**Proposition 5.9.** Soit  $(\hat{\beta}_t^{(1)}, \hat{\beta}_t^{(2)}, \hat{\beta}_t^{(3)}, \hat{\beta}_t^{(4)})_{t \in [0, T]} \in \Gamma^{\mathcal{H}}$ , avec

$$\hat{\beta}_t^{(2)} = \hat{\beta}_t^{(4)} = 0, \quad \hat{\beta}_t^{(1)} = \begin{cases} \frac{r_t - \mu_t - \lambda_t^{(1)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) \hat{\beta}_t^{(3)}}{\sigma(t, Y_t) a_t^{(1)}} & \text{si } a^{(1)} \neq 0, \\ 0 & \text{si } a^{(1)} = 0, \end{cases}$$

et  $\hat{\beta}_t^{(3)}$  est l'unique solution de

$$\lambda_t^{(1)} \sigma(t, Y_t) (a_t^{(3)})^2 x + (a_t^{(1)})^2 \sigma(t, Y_t) \left( \frac{x}{1+x} \right) - a_t^{(3)} (r_t - \mu_t) = 0, \quad (5.13)$$

alors la probabilité  $\hat{Q}$  donnée par sa densité de Radon-Nikodym

$$\prod_{i=1}^2 \mathcal{E}(\hat{\beta}^{(i)} W^{(i)})_T \mathcal{E}(\hat{\beta}^{(i+2)} M^{(i)})_T,$$

est la M.M.E. minimisant  $I(P, Q)$ .

*Preuve.* D'après le Lemme 5.8, il suffit de minimiser la fonction  $F : ]-1, \infty[ \times ]-1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $(x, y)$  fait correspondre

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (\mu_t - r_t + \lambda_t^{(1)} a_t^{(3)} \sigma(t, Y_t) x)^2 \\ &\quad - 2\sigma^2(t, Y_t) (a_t^{(1)})^2 \lambda_t^{(1)} [\ln(1+x) - x] \\ &\quad - 2\sigma^2(t, Y_t) (a_t^{(1)})^2 \lambda_t^{(2)} [\ln(1+y) - y], \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

On calcule les valeurs  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  qui annulent les deux dérivées partielles de  $F$ . On vérifie que  $\hat{y} = 0$  et que  $\hat{x}$  est solution de l'équation (5.13) et est unique puisque la fonction

$$x \longrightarrow 2(\lambda_t^{(1)})^2 \sigma^2(t, Y_t) (a_t^{(3)})^2 x + 2(a_t^{(1)})^2 \lambda_t^{(1)} \sigma^2(t, Y_t) \frac{x}{1+x} + 2\lambda_t^{(1)} \sigma(t, Y_t) a_t^{(3)} (\mu_t - r_t),$$

est strictement croissante de  $] - 1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . D'autre part, les dérivées partielles secondes de  $F$  sont

$$\begin{aligned} F''_{x^2} &= 2(\lambda_t^{(1)})^2 \sigma^2(t, Y_t) (a_t^{(3)})^2 + 2(a_t^{(1)})^2 \lambda_t^{(1)} \sigma^2(t, Y_t) \frac{1}{(1+x)^2}, \\ F''_{y^2} &= 2(\lambda_t^{(2)})^2 \sigma^2(t, Y_t) (a_t^{(1)})^2 \frac{1}{(1+y)^2}, \\ F''_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Pour finir, on vérifie que les valeurs des dérivées secondes de  $F$  au point  $(\hat{x}, \hat{y})$  satisfont

$$(F''_{xy}(\hat{x}, \hat{y}))^2 - F''_{x^2}(\hat{x}, \hat{y}) F''_{y^2}(\hat{x}, \hat{y}) < 0 \quad \text{et} \quad F''_{x^2}(\hat{x}, \hat{y}) > 0,$$

donc  $F$  admet un minimum local strict en  $(\hat{x}, \hat{y})$ . Notons que les limites de  $F$  aux bords tendent vers  $+\infty$ , ce qui assure que le minimum est global. □

## 5.4 Couverture par la minimisation de la variance

On travaille avec la M.M.E. minimisant l'entropie  $\hat{Q}$ . Le prix du Call européen est alors donné par

$$E_{\hat{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T].$$

On cherche une stratégie  $\mathcal{F}_t$ -adaptée  $(\hat{\zeta}_t, \hat{\eta}_t)_{t \in [0, T]}$  qui minimise

$$E_{\hat{Q}} \left[ ((S_T - K)^+ - \hat{V}_T)^2 \right]. \quad (5.14)$$

$\hat{\zeta}_t, \hat{\eta}_t$  désignent respectivement le nombre d'actions sans et avec risque détenues en portefeuille. On suppose que la stratégie est autofinancante. La valeur du portefeuille est

$$\hat{V}_t = \hat{\zeta}_t A_t + \hat{\eta}_t S_t.$$

En utilisant la condition d'autofinancement on obtient

$$\hat{V}_T = \hat{V}_0 e^{\int_0^T r_s ds} + \int_0^T e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) \hat{\eta}_t S_t [a_t^{(1)} d\hat{W}_t^{(1)} + a_t^{(3)} d\hat{M}_t^{(1)}]. \quad (5.15)$$

### 5.4.1 Couverture par la formule d'Itô

**Proposition 5.10.** *Considérons un Call européen basé sur un actif risqué de processus de prix  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  donné par (5.5) et un actif sans risque de prix*

$\left(\exp\left(\int_0^t r_s ds\right)\right)_{t \in [0, T]}$ , alors sous la probabilité minimisant l'entropie  $\hat{Q}$  définie par Prop. 5.9, la stratégie minimisant la variance (5.14) est

$$\hat{\eta}_t = \frac{a_t^{(1)} L^{(1)}(t, S_t, Y_t) + \lambda_t^{(1)} (1 + \hat{\beta}_t^{(3)}) a_t^{(3)} L^{(3)}(t, S_t, Y_t)}{\left((a_t^{(1)})^2 + \lambda_t^{(1)} (1 + \hat{\beta}_t^{(3)}) (a_t^{(3)})^2\right) e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) S_t}. \quad (5.16)$$

où

$$\begin{aligned} L^{(1)}(t, x, y) &= x a_t^{(1)} \sigma(t, y) \partial_x \hat{C}(t, x, y) + \sigma_t^{(1)} a_t^{(3)} \partial_y \hat{C}(t, x, y) \\ L^{(2)}(t, x, y) &= \sigma_t^{(2)} a_t^{(4)} \partial_y \hat{C}(t, x, y) \\ L^{(3)}(t, x, y) &= \hat{C}\left(t, x, y + \sigma_t^{(1)} a_t^{(3)}\right) + \hat{C}\left(t, x(1 + \sigma(t, y) a_t^{(3)}), y\right) - 2\hat{C}(t, x, y) \\ L^{(4)}(t, x, y) &= \hat{C}\left(t, x, y + \sigma_t^{(1)} a_t^{(3)}\right) - \hat{C}(t, x, y), \end{aligned}$$

avec  $\hat{C} : [0, T] \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$\hat{C}(t, x, y) = E_{\hat{Q}} \left[ e^{(-\int_t^T r_s ds)} \left( x + \int_t^T S_s r_s ds + \int_t^T S_s \sigma(s, Y_s) [a_s^{(1)} d\tilde{W}_s^{(1)} + a_s^{(3)} d\tilde{M}_s^{(1)}] - K \right) \right]_{y=Y_t}^{x=S_t}.$$

*Preuve.* Soit  $g : [0, T] \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , une fonction qui admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues en  $x$  et  $y$  et d'ordre 1 continue en  $t$ . On a par la propriété de Markov

$$\begin{aligned} & E_{\hat{Q}} \left[ e^{(-\int_t^T r_s ds)} g(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E_{\hat{Q}} \left[ e^{(-\int_t^T r_s ds)} g \left( x + \int_t^T S_s r_s ds + \int_t^T S_s \sigma(s, Y_s) [a_s^{(1)} d\tilde{W}_s^{(1)} + a_s^{(3)} d\tilde{M}_s^{(1)}] \right) \right]_{y=Y_t}^{x=S_t} \\ &= \hat{C}(t, x, y), \end{aligned}$$

où

$$\hat{C} : [0, T] \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

est une fonction qui admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues en  $x$  et  $y$  et d'ordre 1 continue en  $t$ . En appliquant à  $\hat{C}$  la formule d'Itô (Lemme 3.14), on a

$$d\hat{C}(t, S_t, Y_t) = U(t, S_t, Y_t) dt + \sum_{i=1}^2 L^{(i)}(t, S_t, Y_t) d\hat{W}_t^{(i)} + \sum_{i=1}^2 L^{(i+2)}(t, S_t, Y_t) d\hat{M}_t^{(i)},$$

avec pour  $(t, x, y) \in [0, T] \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$

$$U(t, x, y) = \partial_t \hat{C}(t, x, y) + \left( \mu_t^Y + \sum_{i=1}^2 \sigma_t^{(i)} \left[ a_t^{(i)} \hat{\beta}_t^{(i)} + \lambda_t^{(i)} \hat{\beta}_t^{(i)} a_t^{(i+2)} \right] \right) \partial_y \hat{C}(t, x, y)$$

$$\begin{aligned}
& +r_t x \partial_x \hat{C}(t, x, y) + \frac{1}{2} \left[ \left( (\sigma_t^{(1)} a_t^{(1)})^2 + (\sigma_t^{(2)} a_t^{(2)})^2 \right) \partial_{yy} \hat{C}(t, x, y) \right. \\
& \left. + 2(a_t^{(1)})^2 \sigma(t, y) \sigma_t^{(1)} \partial_{xy} \hat{C}(t, x, y) + (x a_t^{(1)} \sigma^2(t, y) \partial_{xx} \hat{C}(t, x, y)) \right] \\
& + \sum_{i=1}^2 \lambda_t^{(i)} \left[ \hat{C} \left( t, x, y + \sigma_t^{(i)} a_t^{(i+2)} \right) - \hat{C}(t, x, y) - \sigma_t^{(i)} a_t^{(i+2)} \partial_y \hat{C}(t, x, y) \right] \\
& + \lambda_t^{(1)} \left[ \hat{C} \left( t, x(1 + \sigma(t, y) a_t^{(3)}), y \right) - \hat{C}(t, x, y) - x \sigma(t, y) a_t^{(3)} \partial_x \hat{C}(t, x, y) \right].
\end{aligned}$$

et les  $L^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq 4$  sont celles de la Prop. 5.10. Par la propriété martingale du processus  $\left( E_{\hat{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} g(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right] \right)_{t \in [0, T]}$ , on a

$$U(t, x, y) = 0, \quad \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},$$

avec la condition terminale

$$\hat{C}(T, S_T, Y_T) = g(S_T).$$

En approchant la fonction  $x \mapsto (x - K)^+$  par une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{C}_b^2$  convergeant simplement et telle que  $|f_n(x)| \leq (x - K)^+$ , et  $|f'_n(x)| \leq 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , on obtient l'existence d'une fonction -qu'on note par abus de langage  $\hat{C}$ - telle que

$$\begin{aligned}
(S_T - K)^+ &= \hat{C}(T, S_T, Y_T) \\
&= E[(S_T - K)^+] + \sum_{i=1}^2 \int_0^T L^{(i)}(t, S_t, Y_t) d\hat{W}_t^{(i)} + \sum_{i=1}^2 \int_0^T L^{(i+2)}(t, S_t, Y_t) d\hat{M}_t^{(i)}.
\end{aligned}$$

Donc par (5.15) et l'équation précédente, on a

$$\begin{aligned}
& E_{\hat{Q}} \left[ (S_T - K)^+ - \hat{V}_T \right]^2 \\
&= E_{\hat{Q}} \left[ \left( \int_0^T \left( L^{(1)}(t, S_t, Y_t) - e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) \hat{\eta}_t S_t a_t^{(1)} \right) d\hat{W}_t^{(1)} \right)^2 \right. \\
&\quad + \left( \int_0^T L^{(2)}(t, S_t, Y_t) d\hat{W}_t^{(2)} \right)^2 + \left( \int_0^T L^{(4)}(t, S_t, Y_t) d\hat{M}_t^{(2)} \right)^2 \\
&\quad \left. + \left( \int_0^T \left( L^{(3)}(t, S_t, Y_t) - e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) \hat{\eta}_t S_t a_t^{(3)} \right) d\hat{M}_t^{(1)} \right)^2 \right] \\
&= E_{\hat{Q}} \left[ \int_0^T f(\hat{\eta}_t) dt \right],
\end{aligned}$$

où

$$f(x) = (L^{(2)}(t, S_t, Y_t))^2 + \lambda_t^{(2)} (1 + \hat{\beta}_t^{(4)}) (L^{(4)}(t, S_t, Y_t))^2$$

$$\begin{aligned}
& + \left( L^{(1)}(t, S_t, Y_t) - e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) x S_t a_t^{(1)} \right)^2 \\
& + \lambda_t^{(1)} (1 + \hat{\beta}_t^{(3)}) \left( L^{(3)}(t, S_t, Y_t) - e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) x S_t a_t^{(3)} \right)^2.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) S_t a_t^{(1)} \left( L^{(1)}(t, S_t, Y_t) - e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) x S_t a_t^{(1)} \right) \\
&\quad - 2\lambda_t^{(1)} (1 + \hat{\beta}_t^{(3)}) e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) S_t a_t^{(3)} \left( L^{(3)}(t, S_t, Y_t) - e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) x S_t a_t^{(3)} \right), \\
f''(x) &= 2 \left( e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) S_t \right)^2 \left( (a_t^{(1)})^2 + (a_t^{(3)})^2 \lambda_t^{(1)} (1 + \hat{\beta}_t^{(3)}) \right). \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Remarquons que par (5.17) la fonction  $f$  est convexe. Le minimum est la solution de  $f'(x) = 0$ . Par suite la stratégie minimisant la variance est donnée par (5.16).  $\square$

## 5.4.2 Couverture par la formule de Clark-Ocone

Le calcul de Malliavin permet d'obtenir une stratégie de couverture en utilisant la formule de Clark-Ocone. Pour  $i = 1, 2$  on désigne par  $D^{\hat{W}^{(i)}}$  le gradient dans la direction  $\hat{W}^{(i)}$  et par  $D^{N^{(i)}}$  le gradient dans la direction  $N^{(i)}$ , on a :

**Proposition 5.11.** (*Formule de Clark-Ocone*)

Soit  $F \in \bigcap_{i=1}^2 (\text{Dom}(D^{\hat{W}^{(i)}}) \cap \text{Dom}(D^{N^{(i)}}))$ . Alors on a

$$F = E_{\hat{Q}}[F] + \sum_{i=1}^2 \int_0^T E_{\hat{Q}}[D_t^{\hat{W}^{(i)}} F \mid \mathcal{F}_t] d\hat{W}_t^{(i)} + \sum_{i=1}^2 \int_0^T E_{\hat{Q}}[D_t^{N^{(i)}} F \mid \mathcal{F}_t] d\hat{M}_t^{(i)}.$$

**Proposition 5.12.** *La stratégie minimisant la variance (5.14) du modèle considéré dans la Prop. 5.10 est*

$$\hat{\eta}_t = \frac{a_t^{(1)} E[D_t^{\hat{W}^{(1)}}(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] + \lambda_t^{(1)} (1 + \hat{\beta}_t^{(3)}) a_t^{(3)} E[D_t^{N^{(1)}}(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t]}{((a_t^{(1)})^2 + \lambda_t^{(1)} (1 + \hat{\beta}_t^{(3)}) (a_t^{(3)})^2) e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) S_t}.$$

*Preuve.* Par la formule de Clark appliquée à  $(S_T - K)^+$  et (5.15) on a

$$\begin{aligned}
E_{\hat{Q}} \left[ (S_T - K)^+ - \hat{V}_T \right]^2 &= \\
& E_{\hat{Q}} \left[ \left( \int_0^T \left( E[D_t^{\hat{W}^{(1)}}(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] - e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) \hat{\eta}_t S_t a_t^{(1)} \right) d\hat{W}_t^{(1)} \right)^2 \right. \\
& \left. + \left( \int_0^T E_{\hat{Q}}[D_t^{\hat{W}^{(2)}}(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] d\hat{W}_t^{(2)} \right)^2 + \left( \int_0^T E_{\hat{Q}}[D_t^{N^{(2)}}(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] d\hat{M}_t^{(2)} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left( \int_0^T \left( E_{\hat{Q}}[D_t^{N^{(2)}}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] - e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) \hat{\eta}_t S_t a_t^{(3)} \right) d\hat{M}^1(t) \right)^2 \Big] \\
& = E_{\hat{Q}} \left[ \int_0^T f(\hat{\eta}_t) dt \right],
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
f(x) & = (E_{\hat{Q}}[D_t^{\hat{W}^{(2)}}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t])^2 + \lambda_t^{(2)}(1 + \hat{\beta}_t^{(4)})(E[D_t^{N^{(2)}}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t])^2 \\
& + \left( E_{\hat{Q}}[D_t^{\hat{W}^{(1)}}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] - e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) x S_t a_t^{(1)} \right)^2 \\
& + \lambda_t^{(1)}(1 + \hat{\beta}_t^{(3)}) \left( E_{\hat{Q}}[D_t^{N^{(1)}}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] - e^{\int_t^T r_s ds} \sigma(t, Y_t) x S_t a_t^{(3)} \right)^2.
\end{aligned}$$

$f$  est convexe, le minimum est la solution de  $f'(x) = 0$ .

□

### Cas brownien

On suppose que  $a_t^{(1)} = a_t^{(2)} = 1$  et que  $a_t^{(3)} = a_t^{(4)} = 0$ . Dans ce cas le processus de prix  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  dépend seulement d'informations browniennes. Sous la M.M.E. minimisant l'entropie  $\hat{Q}$ ,  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est donné par

$$S_t = x \exp \left( \int_0^t \left( r_s - \frac{\sigma^2(s, Y_s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) d\hat{W}_s^{(1)} \right),$$

avec

$$Y_t = y + \int_0^t \left( \mu_s^Y + \sigma_s^{(1)} \frac{r_s - \mu_s}{\sigma(s, Y_s)} \right) ds + \int_0^t \sigma_s^{(1)} d\hat{W}_t^{(1)} + \int_0^t \sigma_s^{(2)} dW_s^{(2)}.$$

**Proposition 5.13.** *on a*

$$\begin{aligned}
D_t^{\hat{W}^{(1)}}(S_T - K)^+ & = 1_{\{S_T > K\}} S_T \left( \sigma(t, Y_t) + \int_t^T \frac{\partial \sigma}{\partial y}(s, Y_s) D_s^{\hat{W}^{(1)}} Y_t d\hat{W}_s^{(1)} \right. \\
& \quad \left. - \int_t^T \sigma(s, Y_s) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(s, Y_s) D_t^{\hat{W}^{(1)}} Y_s ds \right)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

où

$$D_t^{\hat{W}^{(1)}} Y_s = \sigma_t^{(1)} \exp \left( - \int_t^s \sigma_u^{(1)} \frac{r_u - \mu_u}{\sigma^2(u, Y_u)} du \right) \quad s \in [t, T]. \tag{5.19}$$

*Preuve.* Par la propriété de dérivation de  $D_t$  et la Prop. 2.15 on a

$$D_t^{\hat{W}^{(1)}}(S_T - K)^+ =$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} S_T \left( D_t^{\hat{W}^{(1)}} \int_0^T \left( r_s - \frac{\sigma^2(s, Y_s)}{2} \right) ds + D_t^{\hat{W}^{(1)}} \int_0^T \sigma(s, Y_s) d\hat{W}_s^{(1)} \right) \\
&= \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} S_T \left( - \int_t^T D_t^{\hat{W}^{(1)}} \frac{\sigma^2(s, Y_s)}{2} ds + \int_t^T D_t^{\hat{W}^{(1)}} \sigma(s, Y_s) d\hat{W}_s^{(1)} + \sigma(t, Y_t) \right),
\end{aligned}$$

ce qui donne (5.18). Concernant la deuxième dérivée, on a pour  $0 \leq t \leq s \leq T$

$$\begin{aligned}
D_t^{\hat{W}^{(1)}} Y_s &= \int_t^s D_t^{\hat{W}^{(1)}} \left( \mu_u^Y + \sigma_u^{(1)} \frac{r_u - \mu_u}{\sigma(u, Y_u)} \right) du + \sigma_t^{(1)} \\
&= \sigma_t^{(1)} - \int_t^s \sigma_u^{(1)} \frac{r_u - \mu_u}{\sigma^2(u, Y_u)} D_t^{\hat{W}^{(1)}} Y_u du,
\end{aligned}$$

Remarquons qu'alors pour  $t$  fixé dans  $[0, T]$ ,  $(D_t^{\hat{W}^{(1)}} Y_s)_{s \in [t, T]}$  vérifie une équation différentielle dans la solution est (5.19). □

### Cas Poisson

Dans ce cas  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  dépend seulement du processus de Poisson avec  $a_t^{(3)} = a_t^{(4)} = 1$  et  $a_t^{(1)} = a_t^{(2)} = 0$ . Sous  $\hat{Q}$ , la dynamique de  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est alors

$$S_t = x \exp \left( \int_0^t \left( \mu_s + \frac{r_s - \mu_s}{\sigma(s, Y_s)} \ln(1 + \sigma(s, Y_s)) \right) ds + \int_0^t \ln(1 + \sigma(s, Y_s)) d\hat{M}_s^{(1)} \right),$$

pour  $t \in [0, T]$ . Le processus  $(Y_t)_{t \in [0, T]}$  est donné par

$$Y_t = y + \int_0^t \left( \mu_s^Y + \sigma_s^{(1)} \frac{r_s - \mu_s}{\sigma(s, Y_s)} \right) ds + \int_0^t \sigma_s^{(1)} d\hat{M}_t^{(1)} + \int_0^t \sigma_s^{(2)} dM_s^{(2)}.$$

**Proposition 5.14.** *on a*

$$\begin{aligned}
D_t^{\hat{M}^{(1)}} (S_T - K)^+ &= \\
&= -(S_T - K)^+ + \left( \exp \left\{ \int_t^T \left[ \mu_s + \frac{r_s - \mu_s}{\sigma(s, Y_s + \sigma_t^{(1)})} \ln(1 + \sigma(s, Y_s + \sigma_t^{(1)})) \right] ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_t^T \ln(1 + \sigma(s, Y_s + \sigma_t^{(1)})) d\hat{M}_s^{(1)} \right\} \times S_t (1 + \sigma(t, Y_t + \sigma_t^{(1)})) - K \right)^+ \quad (5.20)
\end{aligned}$$

*Preuve.* On a

$$D_t^{\hat{M}^{(1)}} (S_T - K)^+ = (S_T(\omega + \mathbf{1}_{[t, T]}) - K)^+ - (S_T(\omega) - K)^+,$$

avec

$$S_T(\omega + \mathbf{1}_{[t, T]}) = x \exp \left( \int_0^t \left[ \mu_s + \frac{r_s - \mu_s}{\sigma(s, Y_s(\omega + \mathbf{1}_{[t, T]}))} \ln(1 + \sigma(s, Y_s(\omega + \mathbf{1}_{[t, T]}))) \right] ds \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \ln(1 + \sigma(s, Y_s(\omega + 1_{[t,T]}))) d\hat{M}_s^{(1)} \\
& \times \exp \left( \int_t^T \left[ \mu_s + \frac{r_s - \mu_s}{\sigma(s, Y_s(\omega + 1_{[t,T]})} \ln(1 + \sigma(s, Y_s(\omega + 1_{[t,T]}))) \right] ds \right. \\
& \left. + \int_t^T \ln(1 + \sigma(s, Y_s(\omega + 1_{[t,T]}))) d\hat{M}_s^{(1)} \right) \times (1 + \sigma(t, Y_t(\omega + 1_{[t,T]}))),
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
Y_t(\omega + 1_{[t,T]}) &= Y_t + \sigma_t^{(1)}, \quad t \in [0, T], \\
Y_s(\omega + 1_{[t,T]}) &= \begin{cases} Y_s & \text{si } s \in [0, t[, \\ Y_s + \sigma_t^{(1)} & \text{si } s \in [t, T], \end{cases}
\end{aligned}$$

ce qui donne (5.20)

□

# Bibliographie

- [Bel99] N. Bellamy. Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des processus discontinus. Thèse, Université d'Evry, 1999.
- [BJ00] N. Bellamy and M. Jeanblanc. Incompleteness of markets driven by a mixed diffusion. *Finance Stoch.*, 4(2), pages 209–222, 2000.
- [BR94] C. Ball and A. Roma. Stochastic volatility option pricing, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, pages 589–607, 1994.
- [CGGT99] M. Chernov, A. Ronald Gallant, E. Ghysels and G. Tauchen. A New Class of Stochastic Volatility Models with Jumps Theory and Estimation, *Scientific Series*, Cirano, Montréal, 99s-48, December 1999.
- [CLS00] R. Craine, L.A. Lochstoer and K. Syrtveit. Estimation of a Stochastic-Volatility Jump-Diffusion Model, University of California at Berkeley, January 2000.
- [FS91] H. Föllmer and M. Schweizer. Hedging of contingent claims under incomplete information, in *Applied Stochastic Analysis, Stochastics Monographs*, eds. M. H. A.Davis and R. J. Elliott, Gordon and Breach, 5, London/New York, pages 389-414, 1991.
- [HW87] J. Hull and A. White. The pricing of options with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 42, pages 281–300, 1987.
- [IW81] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North Holland, Amesterdam, 1981.
- [J79] J. Jacod. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*. volume 714 of Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, 1979.
- [Mel98] A. Mele. *Dynamiques non linéaires, volatilité et équilibre*. Economica, Paris, 1998.

- [M97] Y. Miyahara. Canonical martingale measures of incomplete assets markets, In S. Watanabe, Yu. V. Prohorov and M. Fukushima and A.N. Shiryaev, editors, *Proceedings of the seventh Japan Russia Symposium*, Probability theory and mathematical statistics, pages 343-352, World Scientific, 1997.
- [M00a] Y. Miyahara. Minimal relative entropy martingale measures of geometric Lévy processes and its applications to option pricing theory, Preprint, to appear in *Asian Pacific Financial Markets*, 2000.
- [M00b] Y. Miyahara. A theorem related to LogLévy processes and its applications to option pricing problems in incomplete markets, Preprint, 2000.
- [Pro90] Ph. Protter. *Stochastic integration and differential equations. A new approach*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Re97] E. Renault. Econometric models of option pricing errors dans D. Kreps et K. Wallis(éd.), *Advanced in Economics and Econometrics*, Vol 3, Cambridge University Press, pages 281–300, 1997.
- [S93] M. Schweizer. Variance-optimal hedging in discrete time. *Mathematics of Operations Research*, 20, pages 1-32, 1993.
- [W98] H. Wieselberg. Modeling market risk in a jump-diffusion setting. A generalized Hofmann-Platen-Schweizer-Model SFB 303, Universität Bonn, discussion paper no. B-424, 1998.

# Bibliographie récapitulative

- [AÉ96] S. Attal and M. Émery. Martingales d’Azéma bidimensionnelles. *Astérisque*, pages 236:9–21, 1996.
- [AOPU00] K. Aase, B. Øksendal, N. Privault, and J. Ubøe. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. *Finance and Stochastics*, 4(4) pages 465–496, 2000.
- [Bach] L. Bachelier. Théorie de la spéculation. Thèse, 1900. *Annales de l’Ecole Normale Supérieure*, 3ème série, Tome XVII, pages 21-86.
- [BJ00] N. Bellamy and M. Jeanblanc. Incompleteness of markets driven by a mixed diffusion. *Finance Stoch.*, 4(2), pages 209–222, 2000.
- [Bel99] N. Bellamy. Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des processus discontinus. Thèse, Université d’Evry, 1999.
- [Ben99] E. Benhamou. An application of Malliavin calculus to Asian and Lookback option Greeks. Preprint, 1999.
- [Ber98] H. Bermin. Essays on Lookback options: a Malliavin calculus approach. PhD thesis, Lund University, 1998.
- [Bi83] J.M. Bismut. Calcul des variations stochastique et processus de sauts. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheories Verw. Gebiete*, 63:147–235, 1983.
- [BR94] C. Ball and A. Roma. Stochastic volatility option pricing, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, pages 589–607, 1994.
- [BS73] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political Economy*, 3, pages 637–654, 1973.
- [CGGT99] M. Chernov, A. Ronald Gallant, E. Ghysels and G. Tauchen. A New Class of Stochastic Volatility Models with Jumps Theory and Estimation, *Scientific Series*, Cirano, Montréal, 99s-48, December 1999.

- [Cla70] J.M.C. Clark. The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. *Annals of Mathematical Statistics*, 41, pages 1281–1295, 1970.
- [CLS00] R. Craine, L.A. Lochstoer and K. Syrtveit. Estimation of a Stochastic-Volatility Jump-Diffusion Model, University of California at Berkeley, January 2000.
- [CP90] E. Carlen and E. Pardoux. Differential calculus and integration by parts on Poisson space. In S. Albeverio, Ph. Blanchard, and D. Testard, editors, *Stochastics, Algebra and Analysis in Classical and Quantum Dynamics (Marseille, 1988)*, volume 59 of *Math. Appl.*, pages 63–73. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.
- [DJ98] R.-A. Dana and M. Jeanblanc. *Marchés financiers en temps continu*. Economica, Paris, 1998.
- [DP99] M. Dritschel and Ph. Protter. Complete markets with discontinuous security price. *Finance and Stochastics*, 3(2), 1999.
- [É90] M. Émery. On the Azéma martingales. In *Séminaire de Probabilités XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 66–87. Springer Verlag, 1990.
- [ET93] R.J. Elliott and A.H. Tsoi. Integration by parts for Poisson processes. *J. Multivariate Anal.*, 44(2), pages 179–190, 1993.
- [FLLLT99] E. Fournié, J.M. Lasry, J. Lebuchoux, P.L. Lions, and N. Touzi. Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. *Finance and Stochastics*, 3(4), pages 391–412, 1999.
- [FLLL01] E. Fournié, J.M. Lasry, J. Lebuchoux, and P.L. Lions. Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance. II. *Finance Stoch.*, 5(2), pages 201–236, 2001.
- [FS91] H. Föllmer and M. Schweizer. Hedging of contingent claims under incomplete information, in *Applied Stochastic Analysis, Stochastics Monographs*, eds. M. H. A.Davis and R. J. Elliott, Gordon and Breach, 5, London/New York, pages 389-414, 1991.
- [HW87] J. Hull and A. White. The pricing of options with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 42, pages 281–300, 1987.
- [I88] Y. Ito. Generalized Poisson functionals. *Probab. Theory Related Fields*, 77, pages 1–28, 1988.

- [IW81] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North Holland, Amsterdam, 1981.
- [J79] J. Jacod. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*. volume 714 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1979.
- [JP02] M. Jeanblanc and N. Privault. A complete market model with Poisson and Brownian components. In R. Dalang, M. Dozzi, and F. Russo, editors, *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications (Ascona, 1999)*, volume 52 of *Progress in Probability*, pages 189–204. Birkhäuser, Basel, 2002.
- [KO91] I. Karatzas and D.L. Ocone. A generalized Clark representation formula with application to optimal portfolios. *Stochastics and Stochastics Reports*, 34, pages 187–230, 1991.
- [LL96] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman & Hall, London, 1996.
- [Lø99] A. Løkka. Martingale representation, chaos expansion and Clark-Ocone formulas. MaPhySto, report 22, 1999.
- [Mel98] A. Mele. *Dynamiques non linéaires, volatilité et équilibre*. Economica, Paris, 1998.
- [Mey89] P.-A. Meyer. Construction de solutions d’ “équations de structure”. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 142–145. Springer, Berlin, 1989.
- [Mer76] R.C. Merton. Option Pricing when underlying stock returns are Discontinuous. *J. Financial Econ.*, 3, pages 125-144, 1976.
- [M97] Y. Miyahara. Canonical martingale measures of incomplete assets markets, In S. Watanabe, Yu. V. Prohorov and M. Fukushima and A.N. Shiryaev, editors, *Proceedings of the seventh Japan Russia Symposium*, Probability theory and mathematical statistics, pages 343-352, World Scientific, 1997.
- [M00a] Y. Miyahara. Minimal relative entropy martingale measures of geometric Lévy processes and its applications to option pricing theory, Preprint, to appear in *Asian Pacific Financial Markets*, 2000.
- [M00b] Y. Miyahara. A theorem related to LogLévy processes and its applications to option pricing problems in incomplete markets, Preprint, 2000.



- [Nu95] D. Nualart. *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer-Verlag, 1995.
- [NV90] D. Nualart and J. Vives. Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space. In J. Azéma, P.A. Meyer, and M. Yor, editors, *Séminaire de Probabilités XXIV*, volume 1426 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 154–165. Springer Verlag, 1990.
- [Øks96] B. Øksendal. *An introduction to Malliavin calculus with applications to economics*. Working paper no. 3, Institute of Finance and Management Science, Norwegian School of Economics and Business Administration, 1996.
- [Pha00] A. Phan. Contributions à l'étude des équations de structure markoviennes. Thèse, Université de Strasbourg, 2000.
- [Pr94] N. Privault. Chaotic and variational calculus in discrete and continuous time for the Poisson process. *Stochastics and Stochastics Reports*, 51, pages 83–109, 1994.
- [Pr96] N. Privault. On the independence of multiple stochastic integrals with respect to a class of martingales. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323, pages 515–520, 1996.
- [Pr97a] N. Privault. An extension of stochastic calculus to certain non-Markovian processes. Prépublication de l'université d'Evry, 49, 1997.
- [Pr97b] N. Privault. Calcul chaotique et variationnel et applications. Habilitation à diriger des recherches, Université d'Evry, 1997.
- [Pr02] N. Privault. Distribution-valued gradient and chaotic decompositions of Poisson jump times functionals. *Publicacions Matemàtiques*, 46, pages 27–48, 2002.
- [Pro90] Ph. Protter. *Stochastic integration and differential equations. A new approach*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Pro01] Ph. Protter. A partial introduction to financial asset pricing theory. *Stochastic Process. Appl.*, 91(2), pages 169–203, 2001.
- [PSV00] N. Privault, J.L. Solé, and J. Vives. Chaotic Kabanov formula for the Azéma martingales. *Bernoulli*, 6(4), pages 633–651, 2000.
- [Re97] E. Renault. Econometric models of option pricing errors dans D. Kreps et K. Wallis (éds.), *Advanced in Economics and Econometrics*, Vol 3, Cambridge University Press, pages 281–300, 1997.

- [S93] M. Schweizer. Variance-optimal hedging in discrete time. *Mathematics of Operations Research*, 20, pages 1-32, 1993.
- [Tav99] G. Taviot. Martingales et équations de structure : étude géométrique. Thèse, Université de Strasbourg, 1999.
- [Ust97] A. Üstünel. *An Introduction to Analysis on Wiener Space*. Lecture Notes in Mathematics, LNM 1610, Springer, 1996.
- [W98] H. Wiesenberg. Modeling market risk in a jump-diffusion setting. A generalized Hofmann-Platen-Schweizer-Model SFB 303, Universität Bonn, discussion paper no. B-424, 1998.
- [Yor76] M. Yor. Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles. In *Séminaire de Probabilités, X (Seconde partie: Théorie des intégrales stochastiques, Univ. Strasbourg, Strasbourg, année universitaire 1974/1975)*, pages 481–500. Lecture Notes in Math., Vol. 511. Springer, Berlin, 1976.



# Index

- équation de structure, 7, 37, 39
  - déterministe, 38
  - martingales d’Azéma, 38
  - martingales d’Azéma
    - bidimensionnelles, 10, 70
- densité de Radon-Nykodim, 13, 105, 106, 109, 111, 113
- entropie relative, 106, 112
- espace
  - de Poisson, 26
  - de Wiener, 21
- fonctions symétriques, 21
  - symétrisation, 25
- formule d’Itô
  - martingales équations de structures, 42
  - martingales d’Azéma
    - bidimensionnelles, 10, 70
  - martingales normales, 7, 47
  - mixte brownien-Poisson
    - multidimensionnel, 108
- formule de Clark-Ocone, 37
  - cas brownien, 23
  - cas brownien multidimensionnel, 31
  - cas Poisson, 27
  - cas Poisson multidimensionnel, 32
  - martingales normales, 7, 38, 44
  - mixte brownien-Poisson
    - bidimensionnel, 117
  - mixte brownien-Poisson
    - multidimensionnel, 32
- Greeks, 77
  - Delta, 82, 85
  - Gamma, 82, 85
  - Rho, 82, 86
  - Vega, 82, 86
- intégrale de Skorohod (ou divergence), 6
  - cas brownien, 21, 25, 26
    - définition, 25
  - cas Poisson, 21
  - cas Poisson (Carlen-Pardoux), 12, 77
    - définition, 28
    - définition sur l’espace de Cameron-Martin, 79
  - cas Poisson avec différences finies
    - définition, 28
- intégrales stochastiques multiples
  - cas brownien
    - définition, 21
  - cas brownien multidimensionnel
    - définition, 29
  - cas mixte brownien-Poisson
    - multidimensionnel, 6
  - cas Poisson
    - définition, 26
  - cas Poisson multidimensionnel
    - définition, 31
  - martingales normales, 6, 37, 38
    - définition, 39
  - mixte brownien-Poisson
    - multidimensionnel
      - définition, 32

- multidimensionnelles, 21
- martingales
  - équations de structure
    - déterministes, 8, 9, 38, 42, 44, 50
    - définition, 40
  - Azéma, 40
  - d’Azéma, 5, 8, 9, 38, 48, 55
    - définition, 40
  - d’Azéma bidimensionnelles, 9, 70
  - normales, 6, 37–39, 43, 48
    - définition, 6
- mesure martingale équivalente
  - minimisant l’entropie, 14, 106, 112, 113
- mesures martingales équivalentes, 13, 106, 110, 111
- opérateur gradient, 6
  - cas brownien, 21–23, 45
    - définition, 22
    - interprétation probabiliste, 23
  - cas brownien multidimensionnel, 15, 31, 117
    - définition, 30
  - cas Poisson
    - définition, 26
  - cas Poisson (Carlen-Pardoux), 6, 11, 21, 28, 77, 79, 81
    - définition, 28
    - définition sur l’espace de Cameron-Martin, 79
  - cas Poisson avec différences finies, 6, 21, 28, 77
    - définition, 27
  - cas Poisson multidimensionnel, 15, 117
    - définition, 32
  - martingales équations de structure
    - déterministes
      - interprétation probabiliste, 46
    - martingales normales, 7, 8, 38
      - définition, 39
    - mixte brownien-Poisson
      - multidimensionnel
        - définition, 32
      - multidimensionnel, 21
  - polynôme de Hermite, 21
  - propriété de représentation chaotique, 6
    - cas brownien, 22, 25
    - cas brownien multidimensionnel, 30
    - cas Poisson, 26
    - martingales d’Azéma
      - bidimensionnelles, 10, 70
    - martingales normales, 6, 7, 37–40, 43, 55
  - stratégie de couverture
    - cas brownien
      - options Lookbacks, 9, 57, 65, 66
    - martingales équations de structure, 48
    - martingales équations de structure
      - déterministes
        - options asiatiques, 9, 52
        - options européennes, 8, 38, 50
      - martingales d’Azéma
        - options européennes, 9, 55
      - martingales normales, 8
    - stratégie de couverture minimisant la variance
      - martingales d’Azéma
        - bidimensionnelles
          - options européennes, 11, 73
      - mixte brownien-Poisson
        - bidimensionnel
          - par le calcul d’Itô, 15, 114
          - par le calcul de Malliavin, 15, 106, 117
  - théorème de Girsanov

- martingales et équations de structures, 43
- mixte brownien-Poisson
  - bidimensionnel, 14, 111
- théorème de représentation des martingales, 108
  
- volatilité stochastique
  - martingales d’Azéma
    - bidimensionnelles, 71
  - mixte brownien-Poisson
    - bidimensionnel, 108

# CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DES MARCHÉS DISCONTINUS PAR LE CALCUL DE MALLIAVIN

## Résumé

La constatation que les prix des actifs boursiers sautent brusquement a conduit à étudier des modèles de marchés avec sauts. Cette thèse va dans cette direction.

On y considère des marchés dirigés par des martingales normales qui ont la propriété de représentation chaotique: les martingales vérifiant une équation de structure déterministe, la martingale d'Azéma, etc. On trouve des stratégies de couverture pour les options européennes, asiatiques et Lookback soit par la formule d'Itô, soit par la formule de Clark-Ocone selon la plus appropriée.

L'application du calcul de Malliavin au calcul des *Greeks* est traitée pour les options asiatiques dans le cas d'un marché dirigé par un processus de Poisson.

On traite aussi de couverture dans un modèle à volatilité stochastique avec sauts où le prix de l'actif risqué est dirigé par un processus somme d'un mouvement brownien et d'un processus de Poisson 2-dimensionnels. Le marché est incomplet et il existe une infinité de mesures martingales équivalentes. On minimise l'entropie pour choisir telle mesure. Sous celle-ci on calcule la stratégie minimisant la variance.

**Mots clés:** Martingales normales, calcul chaotique, formule de Clark-Ocone, options européennes, options asiatiques, options Lookback, couverture, modèle à volatilité stochastique avec sauts, *Greeks*.

# CONTRIBUTIONS TO THE STUDY OF DISCONTINUOUS MARKETS VIA THE MALLIAVIN CALCULUS

## Abstract

We consider markets driven by normal martingales which have the chaotic representation property, e.g.: martingales satisfying a deterministic structure equation, Azéma martingales. Replicating hedging strategies for European, Asian and Lookback options are explicitly computed using either the Clark-Ocone formula or an extension of the Delta-hedging method, depending on which is most appropriate.

Using the Malliavin calculus on Poisson space we compute Greeks for Asian options in a market driven by a Poisson process.

We also consider a stochastic volatility model with jumps where the underlying asset price is driven by process sum of a 2-dimensional Brownian motion and Poisson process. The market is incomplete and there exists an infinity of equivalent martingale measures. We minimize the entropy to choose such a measure, under which we determine the strategy minimizing the variance.

**Key words:** Normal martingales, chaotic calculus, Clark-Ocone formula, European options, Asian options, Lookback options, hedging, stochastic volatility model with jumps, Greeks.

*Mathematics Subject Classification (2000):* 91B24, 91B26, 91B28, 60H07.