



Phénomènes collectifs dans les matériaux granulaires. Ecoulements de surface et réarrangements internes dans des empilements modèles

Daniel Bonamy

► To cite this version:

Daniel Bonamy. Phénomènes collectifs dans les matériaux granulaires. Ecoulements de surface et réarrangements internes dans des empilements modèles. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Paris Sud - Paris XI, 2001. Français. NNT : . tel-00003916

HAL Id: tel-00003916

<https://theses.hal.science/tel-00003916>

Submitted on 5 Dec 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Phénomènes collectifs dans les matériaux granulaires

Ecoulements de surface et réarrangements internes
dans des empilements modèles

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 12 décembre 2001

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Paris XI
(spécialité physique)

par

Daniel Bonamy

devant la commission d'examen

Invité : Jean-Philippe Bouchaud

Examineurs : François Daviaud
Stéphane Douady

Président : Pierre-Gilles de Gennes

Rapporteurs : Pierre Mills
Fahrang Radjai

Directeur de thèse : Dominique Salin

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au sein du Groupe Instabilité & Turbulence au CEA Saclay. Au cours de ces trois années, j'ai pu apprécier le dynamisme, la cordialité et l'humour qui règnent dans ce groupe.

François Daviaud et Louis Laurent m'ont co-encadré tout au long de cette thèse. J'ai pu pleinement apprécier leurs connaissances et leurs expériences. Leur gentillesse et leur enthousiasme m'ont permis de surmonter les nombreuses et inévitables difficultés inhérentes à tout travail de recherche. Je leur dois énormément.

La présence de Jean-Philippe Bouchaud a permis de décupler les idées quant au choix et à l'interprétation théorique de nos observations. Les travaux présentés ici lui doivent beaucoup. J'exprime aussi toute ma gratitude à Marco Bonetti qui n'a jamais hésité à venir partager son expérience avec nous.

Je suis extrêmement reconnaissant à Dominique Salin qui a assuré le rôle de directeur de thèse. Je le remercie en particulier de m'avoir fourni les clés qui m'ont permis de m'intégrer très rapidement à la communauté granulaire.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Pierre-Gilles de Gennes pour le plaisir et l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider mon jury. Pierre Mills et Fahrang Radjai ont accepté d'être les rapporteurs du présent mémoire, et Stéphane Douady a accepté de participer au jury. Je les en remercie. Tous avaient par ailleurs déjà grandement influencé ma vision des granulaires, que ce soit par leurs travaux ou au travers de discussions très enrichissantes.

De nombreuses personnes ont participé à la mise en place des expériences présentées ici. Cécile Gasquet a développé avec la rapidité et l'efficacité qui sont les siennes les programmes d'acquisition et de traitement des images. Patrick Meininger, Vincent Padilla et Michel Juignet ont réalisé avec une précision, un savoir-faire et une inventivité impressionnants la quasi-totalité des pièces mécaniques utilisées dans nos expériences.

J'ai eu le plaisir de travailler avec des stagiaires dynamiques et enthousiastes. Les résultats présentés ici leur doivent énormément. Benoit Faucherand et Michael Planelles ont exploré les écoulements de surface et contribué significativement à leur description à l'aide du formalisme de Saint-Venant. Samuel Bernard-Bernardet a, quant à lui, étudié les micro-réarrangements engendrés par l'ajout d'une surcharge. Le modèle d'automate cellulaire développé à ce propos doit d'ailleurs lui être attribué. Je les remercie tous pour leur engagement.

Au cours de ces trois années, j'ai pu apprécier l'enthousiasme et la gentillesse de la communauté granulaire dans son ensemble, et plus particulièrement des membres du GDR Midi. Je tiens à remercier tous ceux avec qui j'ai pu discuter, notamment Igor Aranson, Eric Bertin, Daniel Bideau, François Chevoir, Philippe Claudin, Sylvain Courrech du Pont, Adrian Daerr, Olivier Dauchot, Bérangère Dubrulle, Jean-Michel Drouffe, Pierre Evesque, Yoël Forterre, Claude Godrèche, Philippe Gondret, Dov Khakhar, Anaël Lemaitre, Thomas Loiseleux, Tom Mullin, Olivier Pouliquen et Jean-Noel Roux.

Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude à Jacques Hammann, chef du Service de Physique de l'Etat Condensé, qui m'a accueilli au sein du laboratoire. Je remercie aussi Raymonde Marciano qui a grandement facilité mes aventures administratives.

Enfin, je voudrais remercier tout particulièrement mes parents, Pierre et Céline, sans oublier ma douce et tendre, Fabienne, qui m'ont soutenu et supporté tout au long de ces trois années. Ils ont par ailleurs largement contribué à la rédaction de ce mémoire en menant une chasse sans merci aux fautes de frappe et d'orthographe qui s'y étaient glissées insidieusement.

Table des matières

Introduction	1
---------------------	----------

Partie I Ecoulements de surface	5
---	----------

1 Contexte et motivation	7
1.1 Stabilité d'un tas de sable	7
1.1.1 Angles de démarrage et de repos	7
1.1.2 Première interprétation : frottement de Coulomb	9
1.1.3 Dilatance et métastabilité	11
1.1.4 Du grain au tas	12
1.1.5 Modélisations proposées	12
1.2 Grains en écoulement	14
1.2.1 Les différentes géométries d'étude	16
1.2.2 Classification des écoulements	18
1.2.3 Eléments de modélisation	21
1.3 Conclusion et Objectifs	25

2	Principe de l'expérience	27
2.1	Sur l'opportunité d'une géométrie tambour tournant	28
2.2	Dispositif expérimental	29
2.2.1	Choix des billes : acier et aluminium	31
2.2.2	Choix des empilements : 2D et quasi-2D	31
2.3	Traitement des images	33
2.3.1	Repérage de la phase en mouvement	33
2.3.2	Passage dans un référentiel curviligne	35
2.3.3	Repérage des billes	36
2.3.4	Mesure des vitesses	39
2.4	Conclusion	40
3	Description continue des écoulements de surface	43
3.1	Cadre théorique : approche Saint-Venant	44
3.2	Profil de vitesse et de compacité	47
3.2.1	Mesure de compacité	47
3.2.2	Mesure du profil de vitesse	48
3.2.3	Influence de la pente locale et de l'épaisseur roulante	49
3.3	Epaisseur en mouvement et pente de l'interface	51
3.3.1	Confirmation de la loi d'échelle sur la vitesse moyenne $\langle v_x \rangle$	52
3.3.2	Mesure expérimentale de la force F	53
3.3.3	Modélisation de la force F	54
3.4	Discussion du modèle obtenu	57
3.5	Sur les différents paramètres du modèle	58
3.5.1	Pente de la surface libre en fonction de la vitesse de rotation : détermination directe des paramètres décrivant la force F	59
3.5.2	Influence du matériau constituant les billes	60
3.5.3	Influence de l'espacement entre les parois	62
3.6	Conclusion	63
4	Du grain à l'écoulement	67
4.1	Implications de la forme des profils de vitesse	68
4.2	Corrélations spatiales du champ de vitesse instantanée	70
4.2.1	Mise en évidence d'agrégats de grains corrélés	70

4.2.2	Etude statistique des agrégats	72
4.3	Etude des fluctuations de compacité	73
4.3.1	Mise en évidence d'agrégats <i>rigides</i>	74
4.3.2	Caractérisation des agrégats rigides	75
4.4	Discussion	76
4.4.1	Sur la non-localité des collisions	76
4.4.2	Interprétation des différences plan incliné/fond meuble	81
4.4.3	Quelques spéculations : transition de "jamming"	82
4.4.4	Description en terme d'écoulement <i>partiellement</i> fluidisé	83
4.5	Conclusion	84
A	Théorie cinétique des écoulements granulaires	87
A.1	Collision entre deux particules	87
A.2	Fonction de distribution et équation de Boltzmann	88
A.3	Dérivation des équations de conservation	89
A.4	Fonction de distribution radiale $g_0(\nu)$	91
A.5	Fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{c}, t)$	91
A.6	Les lois constitutives	92
B	Approche intégrée de Saint Venant	95
B.1	Ecoulement sur un plan incliné	95
B.1.1	Equations de conservation générales	96
B.1.2	Relations de fermeture : les grands anciens	97
B.1.3	Relations de fermeture : la nouvelle vague	98
B.2	Ecoulement de surface	99
B.2.1	Equations de conservation générales	100
B.2.2	Relations de fermeture proposées	101
B.2.3	La variante BCRE	103

1	Contexte et motivation	107
1.1	Voûtes et chaînes de forces	107
1.2	Désordre et fluctuations	108
1.3	Indétermination et isostaticité	110
1.4	Le SAM	113
1.5	Conclusion	115
2	Principe de l'expérience	117
2.1	Sur l'opportunité de mesures électriques	117
2.2	Choix d'un empilement	118
2.3	Dispositif expérimental	119
3	Fluctuation électrique et fragilité	123
3.1	Mise en évidence de réarrangements internes	123
3.1.1	Petites causes grands effets	123
3.1.2	Mise en évidence du caractère intermittent des fluctuations . . .	126
3.2	Origine mécanique des réarrangements	127
3.2.1	Influence de la géométrie de l'empilement	127
3.2.2	Interprétation du comportement électrique	130
3.2.3	Influence de la mise sous contrainte et de l'intensité de la per- turbation	130
3.2.4	Interprétation de la distribution sur les intervalles de temps . .	132
3.3	Influence du confinement 2D	132
3.3.1	Influence de l'inclinaison de la cellule	132
3.3.2	Origine des comportements collectifs	132
3.4	Conclusion	134
4	Contraintes et réarrangements	137
4.1	Sur la statique d'un tas de sable	137
4.1.1	Les différents modèles de répartition des contraintes	138
4.1.2	Fonctions de réponse correspondantes	141
4.1.3	Objectif	143
4.2	Micro-déplacements induits par une surcharge	144
4.2.1	Méthode expérimentale	144

4.2.2	Résultats	147
4.3	Modélisation par un automate	150
4.3.1	Présentation du modèle	150
4.3.2	Résultats	153
4.4	Discussion et perspectives	155
A	Caractérisation des billes et de leur état de surface	159
A.1	Caractéristiques techniques	159
A.2	Déformation de Hertz d'une bille soumise à son propre poids	160
A.3	Rugosité de surface	161
A.4	Longueurs et temps de dilatation typiques	162
B	Résistance de contact entre deux billes d'acier inoxydable	165
B.1	Comportement ohmique d'un contact bille/bille	165
B.2	Distribution de la résistance de contact	166
B.3	Résistance de contact <i>vs.</i> force de contact	167
	Conclusion générale	171
	Liste des publications	175
	Bibliographie	177

Introduction

Qu'entend-on par "matériau granulaire"

Largement répandus dans notre environnement naturel, les matériaux granulaires apparaissent aussi au centre de nombreuses activités économiques : le traitement de la matière en grains mobiliserait 10% des moyens énergétiques mis en œuvre sur la planète [66]. Ils interviennent dans de nombreux domaines industriels, de l'industrie pharmaceutique à la construction en passant par l'industrie agro-alimentaire.

Sable s'écoulant dans un sablier, grains de blés stockés en silo, champs d'icebergs bloquant le détroit de Béring, ces matériaux forment une famille extrêmement vaste dont les échelles de taille s'étendent sur plusieurs ordres de grandeurs. Cependant, malgré leur importante diversité, leurs propriétés mécaniques restent remarquablement semblables.

Le vocable *matériau granulaire* désigne un système composé d'un grand nombre de particules *macroscopiques* au sens où l'agitation thermique $k_B T$ (k_B étant la constante de Boltzmann et T la température ambiante) est négligeable devant les variations d'énergie potentielle $\rho_P g d^4$ (ρ_P et d étant respectivement la densité et la taille typique du grain et g la constante de gravité). Pour des matériaux usuels, cette hypothèse est vraie dès que d est grand devant $1\ \mu\text{m}$.

Suivant la taille d des grains, on adopte différentes dénominations [31]. On parle de *poudres* lorsque d est inférieur à $100\ \mu\text{m}$. L'interaction des grains avec le fluide environnant est alors importante et ne peut être négligée. Lorsque d devient plus grand que $100\ \mu\text{m}$, le comportement du matériau est dominé par les interactions grains/grains. On parle alors de *solides granulaires*. Les physiciens considèrent souvent des matériaux granulaires *secs et non cohésifs*, quand les forces d'attraction entre grains (capillaires ou électrostatiques) sont négligeables. Dans ce dernier cas, les interactions sont répulsives et à courte portée.

Dans ce mémoire, nous ne considérerons que des matériaux granulaires secs et non cohésifs.

Quelques propriétés remarquables

Pour des matériaux granulaires secs et non cohésifs, les mécanismes régissant les interactions entre deux grains sont relativement bien connus. Ces matériaux présentent

pourtant un certain nombre de comportements encore mal compris. Ils se situent souvent à cheval entre solide et liquide : comme un solide, ils peuvent supporter une surface libre inclinée, mais, quand cette inclinaison devient trop forte, ils s'écoulent par avalanches successives. Cet écoulement reste localisé dans une fine couche en surface, la plupart du matériau restant statique. Cette dualité solide/liquide se retrouve aussi dans la répartition des forces dans un tas de sable. Cette répartition est très hétérogène : l'observation de grains photoélastiques [55] mis sous contraintes révèle ainsi l'existence de chaînes de grains - *voûtes* - le long desquelles les forces se propagent préférentiellement. Le réseau formé par ces chaînes permet au matériau de supporter des contraintes de cisaillement sans se déformer, les autres grains se comportant comme un fluide interstitiel [165]. Par ailleurs, le matériau apparaît très sensible à la moindre perturbation extérieure : une variation de température de quelques degrés engendre d'importantes fluctuations dans la transmission d'ondes sonores [120] ou sur la pression exercée sur les parois d'un récipient [26].

Qu'est ce qui rend la physique de tels matériaux si compliquée ? Au premier abord, il s'agit simplement d'une assemblée de grains dont le comportement individuel est connu depuis fort longtemps. Par ailleurs, le nombre élevé de particules devrait permettre l'application des méthodes développées par la physique statistique. Les empilements granulaires diffèrent cependant des états classiques de la matière (solide, liquide, gaz) sur un certain nombre de points. Citons d'abord l'absence complète d'agitation thermique. L'empilement peut se retrouver gelé dans une multitude d'états métastables, ce qui explique notamment la stabilité d'un tas de sable. Citons ensuite les mécanismes de dissipation. Ainsi, les collisions entre grains ne restituent qu'une partie de l'énergie cinétique impliquée initialement. On parle de *collisions inélastiques*. Quand le matériau est dense, la source de dissipation principale devient le *frottement solide* entre grains. Les grains possèdent alors plusieurs voisins et forment un réseau de contacts, ce qui génère une certaine frustration sur la rotation des grains. La friction est ainsi mobilisée en permanence et dissipe de manière efficace l'énergie cinétique des grains. D'une manière générale, cette dissipation augmente considérablement avec le nombre de contacts et de collisions entre grains. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer le rebond d'une bille seule lâchée sur le sol avec celui d'un sac de billes. Un empilement de grains va donc rapidement se figer dès qu'on arrête de le solliciter. Notons enfin que les contacts entre grains suivent des lois fortement non linéaires. Tous les ingrédients nécessaires à des comportements complexes sont donc réunis.

La matière en grains présente par ailleurs la particularité de pouvoir être étudiée expérimentalement à la fois à l'échelle du grain et à l'échelle de l'empilement. Elle représente en ce sens un outil privilégié de la physique statistique pour étudier la transition du micro-monde au macro-monde. C'est dans ce contexte que nous avons réalisé nos expériences dont la caractéristique majeure est de permettre la comparaison des comportements individuels des grains à ceux de l'empilement.

Grille de lecture

Au cours de ce travail, nous nous sommes intéressés à deux propriétés caractéristiques

des matériaux granulaires : leur capacité à *s'écouler en surface* sous certaines conditions et leur particularité de *se réarranger* tout en restant apparemment immobiles lorsqu'on les soumet à une petite perturbation. L'étude est avant tout expérimentale. Nous avons considéré des empilements de billes identiques, métalliques, de taille millimétrique, de façon à pouvoir négliger l'influence du fluide environnant d'une part et les forces de cohésion d'autre part. Notre système d'étude peut donc être vu comme un système modèle de matériaux granulaires secs et non cohésifs.

Le présent mémoire est organisé en deux parties suivies d'une conclusion générale. Dans la première partie, nous étudierons les écoulements de surface. Nous commencerons par rappeler dans le premier chapitre quelques résultats expérimentaux et théoriques sur la stabilité d'un tas et la physique des écoulements. Nous présenterons et justifierons ensuite dans le deuxième chapitre notre dispositif expérimental. Dans le troisième chapitre, nous chercherons à obtenir une description continue des écoulements de surface. Nous verrons que cette description pose un certain nombre de questions sur le comportement collectif des billes. Nous nous placerons dans le quatrième chapitre à une échelle plus microscopique et nous intéresserons aux champs de vitesse et de densité à l'échelle de la bille.

Dans la deuxième partie, nous étudierons les réarrangements internes engendrés par une faible perturbation. Dans le premier chapitre, nous exposerons les observations expérimentales et les interprétations théoriques mettant en avant ces réarrangements. Nous les étudierons à travers des mesures de conductivité électrique. Les raisons de ce choix et le dispositif expérimental seront présentés dans le deuxième chapitre. Les observations expérimentales et leurs implications seront présentées dans le troisième chapitre. Dans le quatrième chapitre de la deuxième partie, nous nous intéresserons aux réarrangements internes engendrés par une perturbation beaucoup plus importante, à savoir l'ajout d'une surcharge localisée en surface. Nous reprendrons pour cela le montage expérimental de la première partie et le modifierons en conséquence. Cette étude nous permettra de discuter les différentes approches proposées pour décrire la répartition des contraintes dans un empilement granulaire.

Première partie

Ecoulements de surface

Chapitre 1

Contexte et motivation

L'une des particularités les plus frappantes des matériaux granulaires est leur comportement intermédiaire entre solide et liquide : ces systèmes peuvent en effet s'écouler comme des liquides, mais aussi se bloquer et résister à des contraintes extérieures. Malgré des enjeux industriels et géophysiques importants, les écoulements granulaires sont encore mal compris. Deux grands problèmes se posent.

Le premier concerne le déclenchement des avalanches. Quels sont les phénomènes physiques qui régissent la stabilité d'un talus ? Comment démarre une avalanche ? Est-ce par nucléation, par glissement superficiel d'une couche d'épaisseur finie ? Quels sont les mécanismes élémentaires responsables de la stabilité d'un tas ? Quelques éléments de réponse ont été apportés ces dernières années. Ils sont présentés dans la section 1.1.

Le second problème concerne l'écoulement lui-même. Le cadre le plus utilisé pour décrire ces écoulements est celui fourni par la mécanique des milieux continus. Il ne permet cependant pas de rendre compte d'un certain nombre d'observations. Comment par exemple expliquer, pour certaines géométries, la localisation des déformations dans des bandes de cisaillement dont la largeur est de l'ordre de quelques diamètres de grains, indépendante de la taille du système ? Ces questions sont abordées dans la section 1.2.

Nous expliquons enfin les raisons qui nous ont poussés à étudier expérimentalement les écoulements de surface.

1.1 Stabilité d'un tas de sable

1.1.1 Angles de démarrage et de repos

Quoi de plus commun qu'un tas de sable ! Il présente pourtant un certain nombre de caractéristiques assez frappantes. Contrairement à un liquide, un matériau granulaire



FIG. 1.1 – Fouilles archéologiques sur le futur emplacement du synchrotron Soleil : les tas de terre extraits forment des cônes remarquablement reproductibles d'angle voisins de 30° .

peut supporter une surface libre inclinée. Pour un matériau sec, et non cohésif, il est cependant impossible d'incliner verticalement ¹ celle-ci : les tas de sable ou de terre ne peuvent pas former de talus possédant une pente plus grande qu'un certain angle critique (cf. figure 1.1) variant de 20° à 40° suivant le matériau et la géométrie du tas.

L'observation attentive de la formation d'un tas montre en fait qu'il n'existe pas *un* mais plutôt *deux* angles critiques. Prenons le cas d'un empilement granulaire de surface libre initialement horizontale et inclinons le progressivement. Dès que l'angle d'inclinaison dépasse un certain angle critique, dit *angle de démarrage* et que nous désignerons par la suite θ_{start} , une avalanche se produit : le matériau s'écoule en surface, ce qui réduit la pente du tas. Cet écoulement s'arrête dès que l'angle d'inclinaison devient inférieur à un autre angle critique, appelé *angle d'arrêt* θ_{stop} . La différence entre ces deux angles, appelée *angle de relaxation* $\delta = \theta_{start} - \theta_{stop}$, varie typiquement de 2° à 5° .

La construction du talus résulte de la succession de tels événements. On conçoit aisément qu'il y ait une certaine indétermination sur la valeur de l'angle de talus si on ne connaît pas *l'histoire* de celui-ci : une avalanche est-elle sur le point de se produire ? Ou au contraire vient-elle de se produire ? Suivant les cas, la valeur de l'angle du tas sera différente, comprise entre θ_{stop} et θ_{start} .

Quelle est la nature de la transition vers l'écoulement de surface ? Les expériences de Daerr et Douady (1999) [53, 51] apportent quelques éléments de réponse. Ceux-ci perturbent un empilement granulaire statique à une inclinaison donnée en ajoutant une

¹Humidifier le sable, *i.e.* autoriser des forces de tension entre grains par l'intermédiaire de forces capillaires, permet d'obtenir des surfaces libres verticales. Cette propriété est bien connue des enfants bâtisseurs de châteaux de sable.

quantité de grains M variable sur la surface. Quand la surface libre fait un angle $\theta \leq \theta_{stop}$ avec l'horizontale, le tas est dynamiquement stable : toute perturbation relaxe très rapidement. Si maintenant θ est compris entre θ_{stop} et θ_{start} , on observe la mise en mouvement d'une couche superficielle quand M est supérieure à un certain seuil $M_s(\theta)$ décroissant avec θ pour s'annuler quand $\theta = \theta_{start}$. Ce type de scénario est la signature d'une *transition sous critique* (voir figure 1.2). Notons cependant que ces expériences ont été effectuées sur une couche de sable peu épaisse versée sur un plan rugueux. Les effets de fond peuvent être très importants ². Ils peuvent tout à fait gouverner la nature de la transition. Par conséquent, on peut difficilement extrapoler au cas de couches épaisses.

Pour un matériau donné dans une géométrie donnée, ces angles fluctuent légèrement autour de leurs valeurs moyennes. La statistique des avalanches a été étudiée dans de nombreuses expériences [71, 94, 87, 145]. La taille et la durée des avalanches suivent une distribution de type gaussienne centrée sur une valeur typique. La détermination expérimentale de ces distributions a permis d'invalider un certain nombre d'interprétations théoriques, notamment celle proposée par Bak *et al.* (1987) [18, 19] qui considéraient le tas de sable comme un paradigme de *système critique auto-organisé*.

La valeur des deux angles θ_{stop} et θ_{start} dépend bien entendu de la nature et de la forme des grains, mais aussi de la méthode de préparation de l'empilement [83, 52], de la présence ou non d'un fluide interstitiel [3, 20, 191], de la présence ou non d'un confinement [83, 80] et, pour des couches statiques peu épaisses, de la rugosité du socle et de l'épaisseur du matériau [53]. Le lien entre ces angles et ces différents paramètres est encore loin d'être clair.

1.1.2 Première interprétation : frottement de Coulomb

La première interprétation de l'existence d'un angle de talus a été donnée par Coulomb (1776) [50]. Celui-ci propose une analogie avec le frottement solide : deux *nappes* granulaires peuvent glisser l'une par rapport à l'autre quand l'intensité de la force tangentielle $T = |\vec{T}|$ exercée par la nappe supérieure sur la nappe inférieure dépasse un certain seuil T_c proportionnel à la force normale $N = |\vec{N}|$ maintenant les deux nappes en contact : $T_c = \mu N$ où μ est le coefficient de friction. Les intensités T et N sont toutes deux proportionnelles au poids δmg de la nappe supérieure où g est la gravité. Leur rapport est donc indépendant de ce poids et vaut : $T/N = \tan \theta$ où θ est l'angle d'inclinaison de la surface libre (cf figure 1.3). L'empilement reste alors statique tant que $T/N \leq \mu$, c'est à dire tant que θ est inférieur à un certain angle Φ appelé *angle de friction interne* du matériau, défini par $\tan \Phi = \mu$.

Pour des solides usuels, on peut généralement distinguer *deux* coefficients de frottement. Les nappes restent statiques tant que T/N reste inférieur au coefficient de friction

²En particulier, la valeur des deux angles θ_{start} et θ_{stop} dépend fortement de l'épaisseur de grains initialement versés.

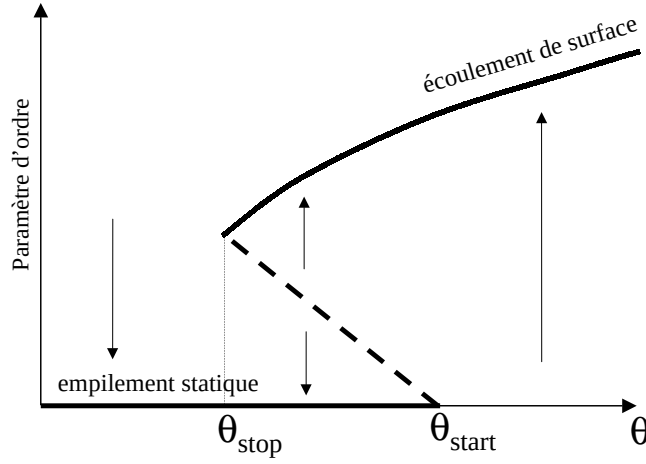


FIG. 1.2 – Mise en mouvement de la couche superficielle, transition sous critique (d’après Daerr [51]) : la branche en mouvement cesse d’exister quand $\theta \leq \theta_{stop}$. La branche statique disparaît quand $\theta \geq \theta_{start}$. Pour $\theta_{stop} \leq \theta \leq \theta_{start}$, on observe tantôt une mise en mouvement, tantôt pas suivant que le point de départ est d’un côté ou de l’autre de la perturbation seuil (en pointillé).

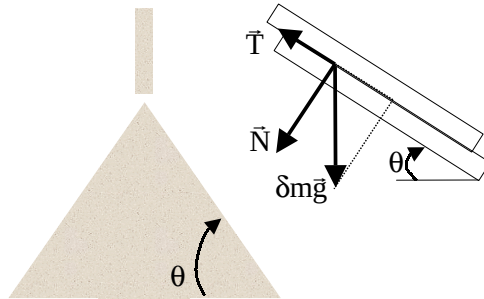


FIG. 1.3 – Angle de talus et friction de Coulomb. Si on découpe la surface du tas en nappes successives et que l’on considère que leur mise en mouvement obéit aux lois de friction solide d’Amontons-Coulomb, l’angle de talus du tas est égal à l’angle de friction interne Φ défini comme $\mu = \tan \Phi$, μ étant le coefficient de friction interne du matériau.

statique $\mu_s = \tan \Phi_s$, i.e. tant que $\theta \leq \Phi_s$. Une fois en mouvement, un corps solide subit une force de frottement dynamique caractérisée par un coefficient de friction dynamique $\mu = \mu_d$ inférieur à μ_s . Le mouvement relatif de deux plaques adjacentes s'arrête donc dès que $T/N = \mu_d = \tan \Phi_d$, c'est à dire dès que $\theta \leq \Phi_d$. On peut donc faire correspondre les deux angles θ_{start} et θ_{stop} aux deux angles de friction solides Φ_s et Φ_d [33].

1.1.3 Dilatance et métastabilité

L'interprétation de Coulomb permet de rendre compte très simplement non seulement d'un angle de talus non nul, mais aussi de la bistabilité d'un tas et de l'existence des deux angles θ_{stop} et θ_{start} . Son interprétation microscopique est cependant loin d'être claire. L'interprétation la plus directe serait d'associer ce coefficient de friction macroscopique au frottement microscopique entre grains. Pourtant un empilement de grains parfaitement lisses - sous réserve que la première couche soit maintenue fixe - peut lui aussi supporter une surface libre inclinée [126]. La friction grain/grain n'est donc pas nécessaire à l'existence d'angles de talus.

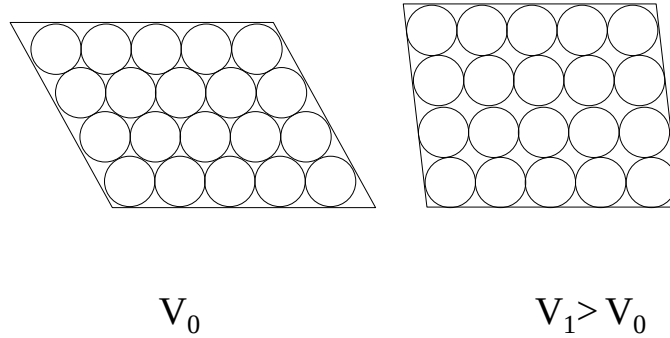


FIG. 1.4 – Principe de dilatance de Reynolds : pour que la couche supérieure puisse se déplacer par rapport à la couche inférieure, elle doit pouvoir passer au dessus des billes de la couche inférieure, ce qui engendre une augmentation du volume

Des grains mis en tas sont *génériquement* dans une situation métastable : ils devraient tous être en contact avec le socle de manière à minimiser leur énergie potentielle. D'où vient cette métastabilité ? Un premier élément vient de la rigidité des grains : chaque grain se retrouve piégé dans un creux formé par ceux constituant la nappe inférieure. Chacun de ces creux représente un puits d'énergie potentielle dans l'espace des configurations dans lequel le système granulaire peut se piéger. Comme les particules sont macroscopiques, l'agitation thermique est négligeable. D'autre part la friction entre les grains et le fait que les chocs soient inélastiques rendent la dissipation d'énergie très efficace. Par conséquent, une fois piégé dans un des états métastables, le système y reste tant qu'on ne lui fournit pas suffisamment d'énergie pour désimbriquer ses grains. L'expérience de Jaeger *et al.* [94]

semble corroborer cette interprétation. Les auteurs montrent en effet que l'angle de repos d'un tas soumis à une vibration décroît lentement au cours du temps.

Les mêmes raisons d'encombrement obligent un empilement fortement compacté à se dilater lorsqu'on le déforme (cf. figure 1.4). Ce principe dit *principe de dilatance*, présenté pour la première fois par Reynolds en 1885 [176], autorise une interprétation microscopique de l'angle de relaxation δ : pour que les grains initialement immobiles puissent bouger lorsqu'ils sont dans l'état métastable, l'empilement doit se dilater. Cette dilatation engendre l'écart δ observé avant que les nappes supérieures se mettent à couler. Intéressons nous maintenant à l'arrêt d'une avalanche. Cette dilatation n'est plus nécessaire puisque les grains sont déjà en mouvement. L'angle d'arrêt correspond donc à $\theta = \theta_{stop}$.

1.1.4 Du grain au tas

Trois ingrédients microscopiques semblent donc nécessaires pour expliquer la mise en tas d'un sable : la gravité, permettant de définir une énergie potentielle, la rigidité des grains, autorisant l'existence de minima locaux dans le paysage en énergie, et la dissipation, permettant de piéger le système granulaire dans ces minima. Sont-ils suffisants ? L'expérience de Quartier *et al.* [164] apporte un élément de réponse : ceux-ci ont étudié le mouvement d'un cylindre unique sur une rangée de cylindres identiques fixes. Suivant l'inclinaison θ de la rangée, trois régimes distincts peuvent être observés :

- quand θ est supérieur à un premier angle critique assimilé à θ_{start} , le cylindre ne peut rester immobile et est continuellement accéléré. Cet angle est purement géométrique et dépend uniquement de la taille et de la forme du piège.
- quand θ est inférieur à un deuxième angle critique, assimilé à θ_{stop} , tout mouvement du cylindre est freiné. La valeur de cet angle résulte de la compétition entre l'énergie potentielle acquise entre deux chocs et l'énergie dissipée à chaque choc, la différence devant être supérieure à l'énergie minimale permettant de sortir d'un piège.
- quand θ est compris entre θ_{stop} et θ_{start} , le cylindre initialement immobile reste sans mouvement. Si maintenant on lui communique une vitesse non nulle, il sera accéléré ou freiné jusqu'à atteindre une vitesse limite constante dépendant de θ .

Cette expérience *modèle*, particulièrement simple, permet de mesurer la vitesse instantanée du cylindre, et par conséquent son accélération, puis la force exercée sur celui-ci. L'existence des deux angles est reliée à trois ingrédients : gravité, dissipation et rigidité. Cela peut laisser penser que la stabilité d'un tas est contrôlée par ces trois mécanismes.

1.1.5 Modélisations proposées

Actuellement, aucune théorie *ab initio* n'arrive à décrire les comportements "avalancheux" dans les matériaux granulaires. Plusieurs modèles, plus ou moins phénoménologiques, ont cependant été proposés.

En 1987, Bak *et al.* [18, 19] ont proposé un modèle d'automate cellulaire pour décrire ces avalanches : Le tas est modélisé comme un réseau discret de colonnes de grains. Les règles d'évolution de l'automate sont les suivantes :

- (i) la différence de hauteurs entre deux colonnes adjacentes ne peut dépasser un certain seuil sans que la colonne la plus haute ne s'écroule.
- (ii) quand la colonne s'écroule, elle déstabilise d'autres grains et les entraîne dans sa chute.

Des grains sont ajoutés aléatoirement sur ces colonnes et on regarde l'évolution du tas. Celui-ci converge vers un état *critique*, où l'ajout d'un seul grain peut déclencher des avalanches arbitrairement grandes, distribuées en loi de puissance. Les auteurs ont baptisé ce comportement de *criticalité auto-organisée*. Cette modélisation ne permet pas de rendre compte de l'existence des deux angles θ_{stop} et θ_{start} . Elle a été invalidée par plusieurs expériences [71, 94] qui ont montré que la statistique sur la taille et la durée des avalanches étaient incompatibles avec les prédictions de ce type de modélisation. Ce concept semble cependant intervenir dans de nombreux phénomènes physiques comme les tremblements de terre [34], les fluctuations boursières [156], voire dans les matériaux granulaires, mais dans ce dernier cas, ce serait plutôt les réarrangements internes [41, 134, 111] qui pourraient être décrits par ce type de concept.

Bouchaud *et al.* (1994) [24, 25] ont par la suite proposé de considérer deux populations de grains, mobiles et statiques, de hauteurs respectives R et H . L'évolution de la hauteur H de la phase statique est décrite par :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\gamma R \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \theta_0 \right) \quad (1.1)$$

où le terme de droite traduit l'abrasion de la phase statique pour $\partial H/\partial x \simeq \theta(x) > \theta_0$ et l'accrétion pour $\partial H/\partial x \simeq \theta(x) < \theta_0$. L'évolution de R est donnée par :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = v \frac{\partial R}{\partial x} + D \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \gamma R \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \theta_0 \right) \quad (1.2)$$

où le premier terme décrit une advection à vitesse v constante des grains et le deuxième terme, terme de diffusion, permet de prendre en compte les fluctuations de vitesse autour de la valeur moyenne v . Ce modèle considère un seul angle critique θ_0 mais permet cependant de rendre compte de l'existence des deux angles distincts θ_{stop} et θ_{start} : un paquet localisé de grains roulant à un point x donné sera amplifié *dans le référentiel se déplaçant à vitesse v avec le front de l'avalanche* si $\theta > \theta_0$. Cet angle est assimilé à θ_{stop} . Cependant, R augmente au point initial x uniquement si l'instabilité croît plus vite qu'elle n'est advectée, c'est à dire quand $\theta > \theta_0 + v^2/4D\gamma$. Cet angle est alors assimilé à θ_{start} .

Dans la vision de Bouchaud *et al.*, l'existence des deux angles est donc la conséquence d'une *transition convective-absolue*, ce qui semble en désaccord avec les observations ex-

périmentales de Daerr et Douady présentées précédemment. Rappelons cependant que ces observations ont été effectuées dans des conditions où les effets de fond peuvent être dominants.

De Gennes (1995) a par la suite proposé une version amendée de ce modèle [57]. Il propose de supprimer le terme de diffusion dans l'équation 1.2 et d'interpréter le démarrage d'une avalanche par un processus de nucléation : lorsque l'empilement est statique, les grains de surface sont piégés dans les rugosités de la couche sous-jacente. Ce piégeage est modélisé par un puits de potentiel $U(\theta)$. Les grains sont par ailleurs soumis à un bruit mécanique, de provenances diverses, caractérisé par une température effective T_{eff} . En conséquence, l'épaisseur de grains roulants R_{nucl} engendrée continuellement par cette nucléation s'écrit :

$$R_{nucl} = \exp\left(-\frac{U(\theta)}{kT_{eff}}\right) \quad (1.3)$$

et un nombre de grains significatif, *i.e.* une avalanche, se met en mouvement dès que $\theta = \theta_m$ où $U(\theta_m) = kT_{eff}$. θ_m est alors assimilé à θ_{start} . Dans cette interprétation, θ_{start} est donc complètement décorrélié de la dynamique des écoulements et ne dépend que de la géométrie des pièges et du bruit ambiant, ce qui est compatible avec les observations de Jaeger *et al.* [94] sur l'influence des vibrations. L'angle d'arrêt θ_{stop} reste, quant à lui, assimilé à θ_0 .

Une dernière description a été récemment proposée par Douady *et al.* (1999) [62]. Ceux ci modélisent la force exercée par la phase statique sur la couche en mouvement comme une force de friction avec un coefficient de friction effectif $\mu_{eff}(R, \theta)$ (R et θ gardent la même signification que dans le modèle de Bouchaud *et al.*) dont la forme permet de rendre compte d'une transition sous critique (cf. figure 1.5). Ce coefficient de friction dynamique a par la suite été intégré à des descriptions de type Saint-Venant des écoulements de surface. Le modèle obtenu permet alors de reproduire qualitativement et quantitativement de nombreuses observations expérimentales [51, 8, 39].

1.2 Grains en écoulement

La stabilité des tas et le déclenchement des avalanches suscitent un certain nombre de questions. La physique des écoulements développés reste également loin d'être parfaitement comprise.

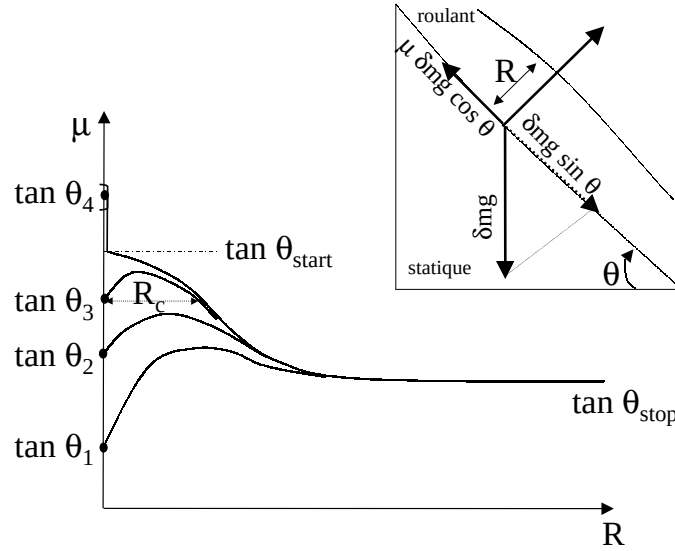


FIG. 1.5 – Coefficient de friction $\mu(R, \theta)$ proposé par Douady *et al.* pour rendre compte de la transition sous critique vers l'écoulement de surface (d'après [62, 51]). R est l'épaisseur de la couche en mouvement et θ l'angle local de la séparatrice statique/roulant. Les quatre courbes correspondent à quatre valeurs fixées de θ . La composante tangentielle de la force exercée δF par le lit statique sur la tranche élémentaire de phase roulante (masse δm) s'écrit : $\delta F = \delta m(g \sin \theta - \mu g \cos \theta)$ où g est la gravité. Le signe de δF est donc donné par $\tan \theta - \mu(R, \theta)$. On part d'un cas où $R = 0$ et on regarde le signe de δF quand R devient non nul. Plusieurs cas se présentent. Si $\tan \theta < \tan \theta_{stop}$ (cas θ_1), pour tout $R > 0$, $\delta F < 0$, le système tend donc à relaxer vers $R = 0$. Il n'y aura pas d'écoulement de surface. Si $\tan \theta_{stop} < \tan \theta < \tan \theta_{start}$, (cas θ_2 et θ_3) pour $R < R_c$, on a $\delta F < 0$ et donc pas d'écoulement. Dans le cas contraire, $\delta F > 0$, la gravité l'emporte et il y a écoulement de surface. La valeur de $R < R_c$ décroît avec θ . Finalement, pour $\tan \theta > \tan \theta_{start}$ (cas θ_4), on a pour tout R $\delta F > 0$, et donc écoulement.

1.2.1 Les différentes géométries d'étude

L'identification des lois de comportement nécessite l'étude d'écoulements simples, idéalement simplement cisailés en régime stationnaire. Pour ce type d'écoulement, dit *viscosimétrique* on est généralement en mesure de déterminer expérimentalement la relation liant contrainte de cisaillement et déformation de cisaillement. On distingue deux types d'écoulements : les écoulements confinés et les écoulements à surface libre.

Écoulements confinés

Dans ce type d'écoulement, on peut généralement supposer que la densité est constante. Celle-ci devient un paramètre de contrôle qu'on peut faire varier. Deux types de géométrie ont été principalement employés.

Les géométries de type Couette sont réalisées avec deux cylindres coaxiaux rugueux (la vitesse relative des grains en contact avec la paroi avec celle-ci est nulle) dont l'un est en rotation par rapport à l'autre (cf. figure 1.6a). Le matériau est cisailé entre les deux parois. Les paramètres de contrôle dans ce type de géométrie sont la densité du matériau et la vitesse de rotation du cylindre en mouvement Ω . Les contraintes normales Σ_{yy} et de cisaillement Σ_{xy} (voir figure 1.6 pour le choix du référentiel) ne dépendent pas de la distance y au cylindre en mouvement. Elles sont parfaitement déterminées si on connaît la densité ρ et le couple M exercé sur le cylindre en mouvement. Plusieurs régimes peuvent être observés :

- quand Ω est grand, *i.e.* quand le taux de cisaillement est grand, et que la densité est relativement faible, la contrainte de cisaillement varie linéairement avec la densité et quadratiquement avec le taux de cisaillement [17, 184, 185].
- pour Ω plus faible et des densités relativement élevées, l'écoulement reste stationnaire, mais la contrainte de cisaillement devient indépendante de Ω [185, 124].

Des expériences récentes, combinant visualisation directe et technique RMN, se sont attachées à mesurer des quantités plus locales comme les profils de vitesse moyenne et les profils de fluctuations de vitesse [91, 208, 58, 124]. Plusieurs observations assez surprenantes sont rapportées (cf. fig. 1.6). L'écoulement est confiné dans une bande de cisaillement relativement étroite, dont l'épaisseur est de l'ordre de quelques diamètres de grains : la vitesse moyenne des grains décroît très rapidement lorsqu'on s'éloigne de la paroi en mouvement. La décroissance est exponentielle en 2D [124, 91] et gaussienne en 3D [58]. Le profil de vitesse moyenne, divisé par la vitesse des grains au niveau de la paroi en mouvement, est indépendant de Ω . L'amplitude des fluctuations de vitesse décroît lorsqu'on s'éloigne de la paroi, mais moins vite que la vitesse moyenne [124]. Par ailleurs, les visualisations d'écoulements de grains photoélastiques ont permis de mettre en évidence d'importantes fluctuations des contraintes [91].

En géométrie capillaire, le matériau s'écoule par gravité entre deux parois rugueuses. Dans cette géométrie, les contraintes normales Σ_{zz} sont indépendantes de la distance x aux parois et les contraintes tangentielles Σ_{xz} varient linéairement avec x (voir figure 1.6). Cette géométrie a été abondamment utilisée pour étudier des régimes d'écoulement dense [190, 180, 147, 162]. En effet, les profils de déformation observés sont caractéristiques d'un écoulement *bouchon* : la vitesse de déformation est constante dans une large région au centre avec des zones fortement cisailées qui ramènent la déformation à zéro au niveau des parois. Ces zones ont une épaisseur typique de quelques diamètres de grains indépendante de la distance séparant les deux parois. De ce fait, elles ne peuvent pas être interprétées par les relations rhéologiques usuelles puisque leur taille dépend uniquement de l'échelle microscopique - la taille du grain - et non pas de l'échelle macroscopique - la taille de la boîte - [162].

Écoulement à surface libre

Contrairement aux deux géométries précédentes, le matériau peut se dilater librement pour s'adapter au cisaillement imposé. La densité ne peut donc plus être contrôlée par l'opérateur.

Les écoulements granulaires sur fonds inclinés ont été très largement étudiés ces dernières années, aussi bien expérimentalement que numériquement. Le plan incliné permet notamment d'étudier la force de friction exercée par le socle. Plusieurs expériences ont été menées dans ce sens par Augenstein et Hogg (1974) [13, 14], Hungr *et al.* (1984) [92], Patton *et al.* (1987) [155], Ahn *et al.* (1991) [1, 2] et plus récemment par Pouliquen (1999) [158]. Les conclusions principales de ces études sont les suivantes :

- lorsque le socle est lisse (rugosité moyenne bien plus petite que la taille typique d'un grain), l'obtention d'écoulements uniformes et homogènes n'est possible que pour une valeur θ_c donnée de l'angle d'inclinaison du plan. Pour $\theta \geq \theta_c$, l'écoulement est uniformément accéléré tandis que pour $\theta \leq \theta_c$, l'écoulement s'arrête. Dans cette configuration, le frottement du matériau sur le socle est correctement décrit par un coefficient de friction indépendant des grandeurs macroscopiques caractérisant l'écoulement [92, 155, 1].
- lorsque le socle est rugueux (rugosité moyenne équivalente à la taille d'un grain), il existe une plage de variation $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ pour laquelle on observe des écoulements stationnaires uniformes [15, 158]. Dans ce régime le frottement du matériau sur le socle est correctement décrit par un coefficient de friction dynamique [158] dépendant à la fois de l'épaisseur de la couche en mouvement et de la vitesse moyenne. Quand $\theta_2 \leq \theta$, on observe à nouveau des écoulements uniformément accélérés correctement décrits par un coefficient de friction indépendant des grandeurs macroscopiques caractérisant l'écoulement [13, 92].

A ces mesures globales, sont généralement associées des mesures plus locales comme les profils de compacité, de vitesse [14], voire de fluctuation de vitesse [1, 2, 15].

Les expériences et simulations numériques d’Azanza et de ses collaborateurs (1997) [15] ont permis en particulier d’étudier l’influence de la nature des billes sur ces écoulements. Ils ont montré que, pour des écoulements de billes peu dissipatives comme des billes d’acier, ces profils sont relativement compatibles avec les prédictions de la théorie cinétique brièvement présentée plus bas dont les grandes lignes sont données dans l’annexe A. Dans les régimes denses obtenus pour des écoulements de billes plus dissipatives (coefficient de restitution e inférieur à 0.6), ces profils s’écartent de ceux prédits par la théorie cinétique et deviennent en particulier indépendants de e .

Les écoulements de surface restent certainement les moins connus. Ils présentent deux phases distinctes : une couche de grains en mouvement, phase *fluide*, qui s’écoule sur un lit de grains immobiles, phase *statique*³. Contrairement au cas d’écoulements sur plan incliné, il n’y a plus qu’un seul paramètre de contrôle, le débit (où l’épaisseur de la couche en mouvement). L’interface statique/fluide va en effet s’adapter et ne peut plus être contrôlée indépendamment. On trouve dans la littérature peu d’expériences s’attachant à dégager la rhéologie de tels écoulements. L’étude la plus complète est sans doute celle réalisée par Rajchenbach et ses collaborateurs (1993) [174, 173, 172, 171] sur les écoulements stationnaires 2D en géométrie tambour tournant. Citons aussi Nagakawa, Yamane et leurs collaborateurs (1993) [146, 216] qui ont étudié les écoulements stationnaires dans des tambours tournants 3D par Imagerie à Résonance Magnétique (IRM) et rapportent des profils de vitesse et compacité qualitativement similaires. Seule une poignée de modèles essaient de décrire des écoulements de surface quelconques [24, 136, 29, 10, 62]. L’approche la plus prometteuse semble être celle proposée par Douady *et al.* (1999) [62]. Elle consiste à appliquer les équations de conservation intégrées de Saint-Venant à la couche en mouvement. Cette approche, présentée dans l’annexe B, sera largement utilisée par la suite.

1.2.2 Classification des écoulements

L’ensemble des expériences précédentes montre qu’il existe plusieurs régimes d’écoulement. On peut, dans un premier temps, classer ces régimes suivant la durée moyenne des contacts :

- lorsque le milieu est dense et faiblement cisailé, la majorité des contacts est maintenue. La quantité de mouvement est principalement transmise par friction d’une bille sur l’autre. On qualifie ces écoulements de *quasi-statiques*. Les lois de comportement sont du type *plastique* [133].

³Les expériences très récentes de Komatsu *et al.* (2001) [110] ont en fait montré que cette phase dite statique ne l’était pas : les grains de cette phase subissent un mouvement lent quelque soit leur profondeur. Ce mouvement de fluage se traduit par une décroissance exponentielle de la vitesse avec la profondeur.

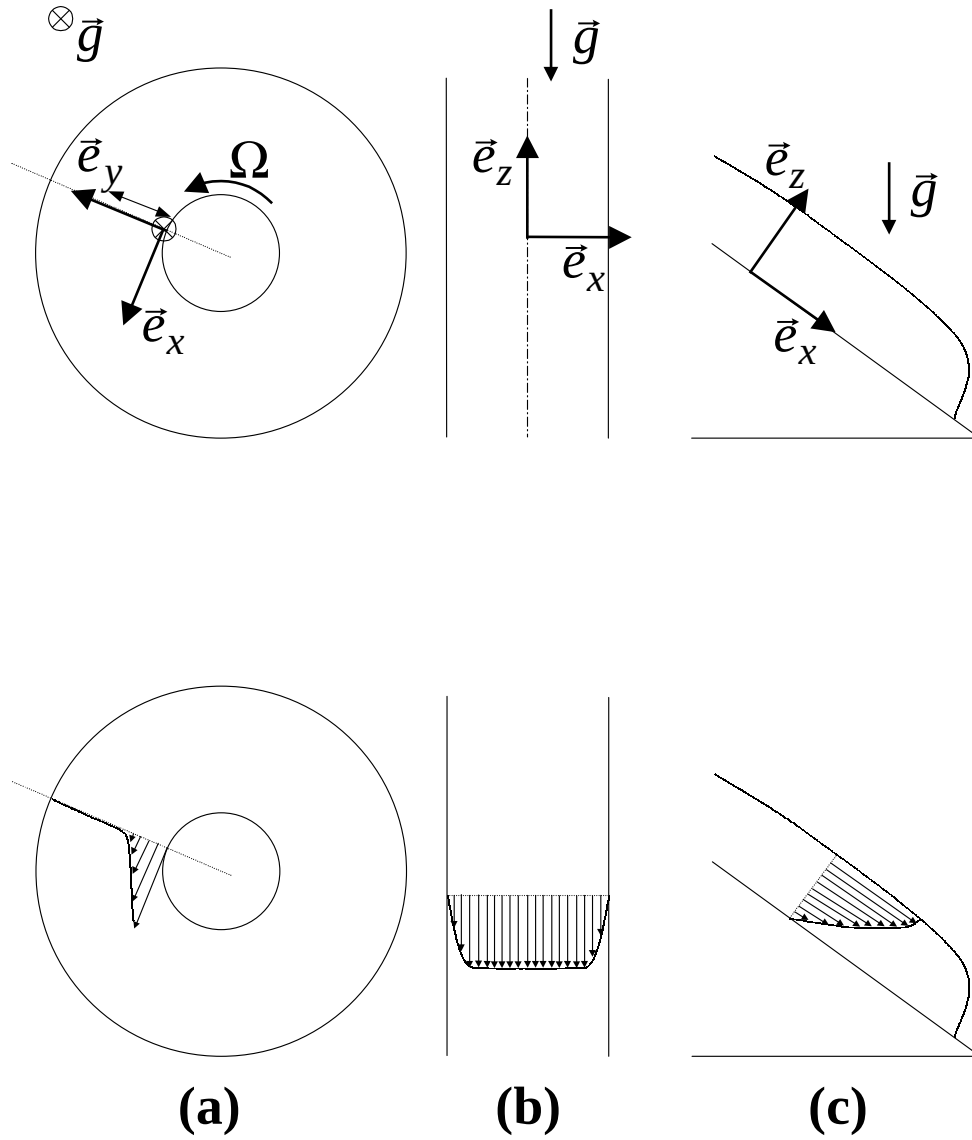


FIG. 1.6 – Principales géométries utilisées pour déterminer la loi de comportement d'un matériau granulaire. (a) : géométrie Couette. (b) : géométrie capillaire (c) : plan incliné. On s'est restreint à des géométries purement 2D pour des raisons de simplicité. En haut, orientation de la gravité et définition des repères dans les différentes configurations. En bas, profils de vitesse observés pour des écoulements denses. (a) : écoulement cisaillé dans une cellule de Couette. Le cisaillement est confiné dans une bande d'épaisseur typique de l'ordre de quelques diamètres de grains. (b) : écoulement en tube capillaire. La vitesse est constante sauf au niveau des parois où le milieu est cisaillé sur quelques couches. (c) : écoulement sur plan incliné. Le cisaillement s'étend sur l'ensemble des grains.

Compacité	Régime	Cadre de description
$0 \longrightarrow 0.2$	Cinétique	Théorie cinétique [98]
$0.3 \longrightarrow 0.5$	Collisionnel	Théorie cinétique [98]
$0.6 \longrightarrow 0.82$	Dense	?
$0.82 \longrightarrow 0.906$	De bloc	Théorie de la Plasticité [133]

TAB. 1.1 – Classement des régimes d’écoulements 2D de billes identiques proposé par Azanza (1997) [15] en fonction de la compacité. La valeur $\nu = 0.82$ est la compacité maximum ν_{RCP}^{2D} obtenu dans un empilement 2D aléatoire et $\nu = 0.906$ est la compacité maximum ν_{max}^{2D} obtenue pour un empilement triangulaire ordonné.

- lorsque le milieu est de densité faible et fortement cisailé, la durée de vie d’un contact est petite devant le temps séparant deux collisions successives. Les lois de comportements sont alors de type *visqueux*. On parle alors d’écoulements *collisionnels*. Ces régimes sont correctement décrits par la théorie cinétique des matériaux granulaires [183, 98]. Cette théorie est présentée et discutée brièvement plus loin dans ce chapitre et détaillée dans l’annexe A.

La majorité des écoulements géophysiques et industriels se situe entre les deux. Il y a coexistence de contacts collisionnels et frictionnels. On les qualifie généralement d’écoulements *denses*. La rhéologie de ces régimes soulève de nombreuses questions. Plusieurs approches extrêmement prometteuses ont été proposées au cours de ces trois dernières années.

Il n’est pas toujours chose aisée de mesurer expérimentalement la durée de vie d’un contact, et par conséquent de déterminer le régime auquel appartient un écoulement donné. Les études d’écoulements purement 2D menées d’abord par Drake (1990) [63, 64], puis par Azanza et ses collaborateurs (1997) [15, 16] ont permis d’affiner cette classification, et de la relier à une observable expérimentale, *la compacité* ν définie comme étant le rapport du volume réellement occupé par les grains sur le volume du matériau. Celle-ci ne peut pas prendre toutes les valeurs entre 0 et 1. La compacité maximale est obtenue en 2D (resp. en 3D) pour un empilement triangulaire (resp. pour un empilement cubique faces centrées) et vaut $\nu_{max}^{2D} = \pi/2\sqrt{3} \simeq 0.906$ (resp. $\nu_{max}^{3D} = \pi/3\sqrt{2} \simeq 0.74$). Si l’arrangement est aléatoire, la compacité maximale est numériquement estimée à $\nu_{RCP}^{2D} \simeq 0.822$ (resp. $\nu_{RCP}^{3D} \simeq 0.635$ en 3D).

Les expériences purement 2D permettent, grâce à une caméra rapide, de mesurer la position et la vitesse de *toutes* les billes impliquées dans l’écoulement. Drake a ainsi pu proposer une première classification microstructurale, qualitative, des écoulements [63]. Cette classification a par la suite été rendue plus quantitative par Azanza [15]. Celui-ci s’intéresse à la fonction de corrélation de paire, notamment l’amplitude des premiers et deuxièmes pics, signatures respectives de l’ordre à courte et à moyenne portée, et classe ces écoulements suivant la compacité (cf. tableau 1.1).

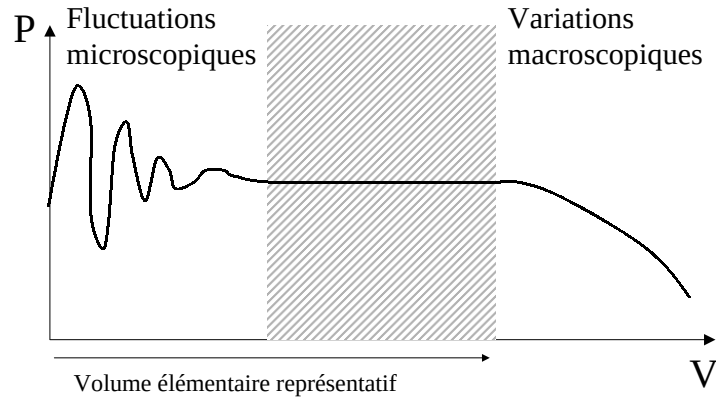


FIG. 1.7 – Définition du volume élémentaire représentatif en mécanique des milieux continus (d’après Guyon *et al.* [85]). L’existence d’un tel volume présuppose une séparation claire des échelles de fluctuations microscopiques et macroscopiques.

1.2.3 Éléments de modélisation

Cadre de description : mécanique des milieux continus

Le cadre le plus utilisé pour décrire les écoulements granulaires est celui fourni par la mécanique des milieux continus. C’est notamment celui utilisé par la mécanique des sols et la géophysique. La dynamique du matériau est décrite à l’aide de grandeurs macroscopiques : densité, vitesse, contraintes... qui sont les moyennes des grandeurs microscopiques correspondantes sur un *volume élémentaire représentatif*. Ce volume doit être grand devant l’échelle des fluctuations microscopiques et petit devant les variations macroscopiques. Son existence présuppose donc une séparation claire de ces deux échelles (cf. figure 1.7). Si cette condition est toujours remplie pour des liquides ou des solides classiques, c’est loin d’être le cas pour des empilements granulaires. Prenons le cas d’un écoulement de surface : la plus petite grandeur macroscopique est l’épaisseur roulante, typiquement de l’ordre de quelques dizaines de diamètres de grains. Définir un volume élémentaire représentatif dans ces conditions peut apparaître assez osé ⁴. L’idée est alors d’augmenter artificiellement le nombre de grains présents dans le volume élémentaire en moyennant sur différentes réalisations d’une même expérience. On peut alors espérer être en mesure de définir des grandeurs macroscopiques moyennes sur un volume élémentaire d’échelle comparable à celle du grain.

⁴D’un point de vue théorique, plusieurs opérateurs permettent de passer du micro-monde au macro-monde. Parmi ceux-ci l’opérateur moyenne d’ensemble est celui qui présente le moins de limitation. Toutefois, il exige la manipulation de fonctions de distribution sur lesquelles on a le plus souvent peu d’information. On ne l’emploie donc que très rarement expérimentalement.

En mécanique des milieux continus, les équations de conservations de masse et de quantité de mouvement fournissent un certain nombre d'équations. Celles-ci forment cependant un système *incomplet* d'équations. Celui-ci contient plus d'inconnues que d'équations. Toute la difficulté est de trouver les équations manquantes qui caractérisent la loi de comportement du matériau. Ces relations se présentent dans le cas le plus général sous la forme d'une fonctionnelle, appelée aussi *loi de comportement* ou *relation rhéologique*, reliant tenseur des contraintes et tenseur des déformations. Souvent, on ramène cette fonctionnelle à une fonction. Cette fonction relie le tenseur des contraintes au tenseur des déformations (dans le cas de solides élastiques) ou à sa dérivée temporelle (dans le cas de fluides visqueux). Cela suppose que la relation entre tenseur des contraintes et tenseur des déformations - voire sa dérivée - est *univoque*. Autrement dit, l'état des contraintes à un instant t donné dans un volume élémentaire situé à un point donné dépend uniquement de ce qui se passe au même instant et au même endroit. Ce type de relation rhéologique ne s'applique donc qu'à un matériau à mémoire évanescence où les effets collectifs sont suffisamment localisés.

Ces deux approximations sont certainement valables pour les écoulements collisionnels : une collision de type sphères dures est par essence locale et les hypothèses de chaos moléculaire ont toutes les chances d'être vérifiées. Il n'en est pas de même pour les écoulements denses. Nous verrons dans la partie II que la distribution des forces est fortement hétérogène, avec des chaînes de forces relativement longues, et d'autre part que cette distribution dépend de la manière dont on construit un empilement. L'existence d'une telle loi de comportement semble de plus en plus remise en question [7, 138, 8]. Nous reviendrons abondamment sur ce point dans le chapitre 4.

Prédiction des déformations dans un matériau statique : théorie de Mohr-Coulomb

Quand les écoulements sont *quasi-statiques*, les modèles proposés par la mécanique des sols [192, 193] sont les plus couramment utilisés. Les matériaux sont alors décrits comme des matériaux *élasto-plastiques*. Soumis à un jeu de contraintes externes, le matériau se déforme de manière élastique, voire pseudo-élastique ⁵ tant que le critère de Mohr-Coulomb n'est pas vérifié, *i.e.* tant qu'en chaque point du milieu, on a dans n'importe quel repère $(\vec{e}_m, \vec{e}_n)$ orthonormal, $|\Sigma_{nm}| \leq \tan \Phi \Sigma_{nn}$. L'angle Φ est l'angle de friction interne du matériau introduit dans la section 1.1. Dès que cette inégalité n'est plus vérifiée en un point M donné dans un repère $(\vec{e}_{m_0}, \vec{e}_{n_0})$, une ligne de glissement parallèle à $\vec{e}_{m_0}$ apparaît.

La théorie de Mohr-Coulomb permet de rendre compte des déformations - tant que celles-ci restent infinitésimales - dans un matériau granulaire soumis à un jeu de contraintes donné. Elle permet aussi de prévoir les zones de glissement, ainsi que leur direction. Elle ne peut cependant pas rendre compte de la dynamique des grandes déformations.

⁵Le tenseur des contraintes $\vec{\Sigma}$ et le tenseur des déformations $\vec{S}$ sont alors liés par une fonction F dont la forme dépend du modèle précis.

Écoulement dilué : théorie cinétique

Dans les années 80, Savage, Jenkins, Richman et Lun [183, 98, 128] ont développé une théorie cinétique des écoulements granulaires. Par analogie avec les gaz denses de sphères dures, ils définissent une température granulaire d'agitation T . Les grains interagissent par collisions inélastiques de type sphère dure caractérisées par un coefficient de restitution e . La théorie cinétique permet alors aux auteurs de dériver les équations hydrodynamiques *ab initio*, *i.e.* où tous les coefficients de transport s'expriment en fonction des paramètres microscopiques des grains, à savoir leur taille et le coefficient de restitution. Le lecteur intéressé trouvera la présentation résumée de cette théorie dans l'annexe A. Cette théorie prédit un comportement de type *visqueux* des matériaux granulaires. Si on s'intéresse à un écoulement idéal de grains sphériques monodisperses, la dépendance de la viscosité η avec la densité ρ et la température T est connue.

La théorie cinétique donne de bons résultats dans le régime collisionnel, c'est à dire quand l'écoulement est rapide, dilué, et que les grains sont faiblement inélastiques. Elle cesse cependant d'être valable en régime frictionnel, *i.e.* pour des écoulements denses faiblement cisailés. Johnson et Jackson [102], puis Johnson *et al.* [103] ont tenté d'étendre cette théorie à des écoulements denses. L'idée est de définir deux types de contacts : les contacts longs qui sont traités comme des contacts frottants et modélisés par la théorie de Coulomb et les contacts courts considérés comme des collisions et modélisés dans le cadre de la théorie cinétique. Cette modélisation permet par exemple de rendre compte de l'existence d'une plage étendue d'angle d'inclinaison d'un plan incliné dans laquelle les écoulements sont stationnaires. Elle présente cependant l'inconvénient d'être en partie empirique contrairement à la théorie cinétique.

Écoulement dense à surface libre : approche de Saint-Venant

Pour les écoulements denses à surface libre, l'approche intégrée de Saint-Venant semble extrêmement prometteuse : elle consiste à intégrer les équations de conservation sur l'épaisseur de la couche en mouvement. Cette approche permet de s'affranchir de la rhéologie interne de la couche en mouvement en ne considérant que ses effets moyennés sur l'épaisseur de la couche en mouvement. Les relations manquantes sont généralement choisies de manière à rendre compte du phénomène étudié. On obtient alors un jeu *complet* d'équations qui décrit la dynamique du matériau granulaire à travers l'évolution de grandeurs globales.

L'approche intégrée a d'abord été appliquée par Hutter et ses collaborateurs (1989) [182, 84, 212], puis par Pouliquen et Forterre (1999) [158, 159] à la description du mouvement d'une masse de grains le long d'un plan incliné rugueux. Douady *et al.* (1999) [62] l'ont par la suite étendue au cas d'écoulements de surface.

Cette approche, largement utilisée au cours de cette thèse, est présentée beaucoup plus en détail dans l'annexe B. Nous verrons en particulier comment l'application des équations

tions intégrées aux écoulements stationnaires en tambour tournant permet de déterminer expérimentalement les relations manquantes dans le cas d'un écoulement de surface.

Quelques nouvelles approches sur la rhéologie des écoulements denses

Si l'approche intégrée de Saint-Venant donne de bons résultats quant à la description d'écoulements à surface libre (cf. annexe B), elle ne peut être appliquée au cas des écoulements confinés observés en géométrie Couette ou capillaire. Par ailleurs, elle ne rend compte que des comportements globaux, mais ne permet pas d'interpréter des quantités plus locales comme l'allure des profils de vitesse tangentielle dans l'écoulement. Notons aussi que la prise en compte de la rhéologie à travers des relations de fermeture effectives déterminées expérimentalement se fait au détriment d'une compréhension de cette rhéologie. Plusieurs approches très prometteuses ont été proposées ces dernières années.

Plusieurs auteurs, Pouliquen et Gultfraind (1996) [162], Debregeas et Josserand (2000) [59], Lemaitre (2001) [114] et Pouliquen (2001) [161], proposent de considérer les écoulements denses comme des écoulements *quasi-statiques*. Dans leur vision, le mouvement moyen est engendré par des fractures apparaissant de temps à autre. Les probabilités d'apparition sont modélisées en termes de processus activés où les fluctuations de contraintes de cisaillement jouent le rôle de température et la différence entre la contrainte de cisaillement moyenne et le seuil de plasticité est assimilée à la barrière de potentiel à surmonter pour que le système puisse se déformer. Ces approches arrivent à rendre compte de nombreux phénomènes, notamment de la localisation des déformations en géométrie confinée (géométrie Couette et tube capillaire) et des profils de vitesse associés.

Une autre possibilité est de partir de la connaissance des écoulements dilués et d'essayer de les étendre aux cas denses. Savage (1998) [181] et Bocquet *et al.* (2001) [21] proposent notamment de considérer les écoulements denses comme des écoulements visqueux de viscosité présentant une dépendance différente, respectivement avec la température et la densité, de celle prédite par la théorie cinétique. Ils arrivent ainsi à rendre compte des profils observés en géométrie Couette 2D. Mills *et al.* (1999) [138, 139] et Jenkins et Chevoir (2001) [96] proposent quant à eux de dériver la contrainte visqueuse non pas de collisions binaires entre deux grains, mais plutôt, plutôt de collisions impliquant des *colonnes* de grains. Ils arrivent ainsi à retrouver qualitativement les profils de vitesse observés en régime dense sur plan incliné.

Très peu de modèles arrivent, dans leur forme actuelle, à rendre compte de la phénoménologie présentée par les écoulements de surface. Rajchenbach (2000) [171] propose l'interprétation suivante : quand un grain entre en collision avec un grain de la couche sous-jacente, toute son énergie cinétique est absorbée et dissipée par collisions multiples dans l'ensemble de l'empilement. Il arrive ainsi à expliquer les profils de vitesse observés en tambour tournant. Andreotti et Douady (2001) [8] ont formalisé cette approche et y ont inclus un mécanisme de piégeage. Ils arrivent alors à reproduire la phénoménologie des écoulements de surface, à savoir une transition hystérétique entre l'état solide et l'état

liquide et un écoulement localisé en surface.

Le modèle le plus complet proposé actuellement est, à mon avis, celui d'Aranson et Tsimring (2001) [12, 11] qui considèrent les écoulements granulaires denses comme *partiellement* fluidisés. Ce modèle permet de rendre compte de la plupart des comportements observés sur plan incliné. Il reproduit qualitativement les profils de vitesse observés dans les écoulements de surface, et quantitativement ceux observés en géométrie Couette.

1.3 Conclusion et Objectifs

Quel bilan peut-on en tirer ? Deux mécanismes contribuent à la mise en tas d'un matériau granulaire. D'une part, les grains sont rigides : chaque grain se retrouve piégé dans un creux formé par les grains constituant la couche inférieure. Chacun de ces creux représente un puits d'énergie potentielle dans l'espace des configurations dans lequel le système granulaire peut se piéger. D'autre part la friction entre les grains rend la dissipation d'énergie très efficace. Par conséquent, une fois piégé dans un des états métastables, le système y restera.

Le problème du déclenchement des avalanches reste un problème ouvert. Il semble s'agir d'une transition de type sous-critique, sous réserve qu'on soit en mesure d'extrapoler les observations à une couche de sable d'épaisseur infinie. La description du déclenchement des avalanches ne fait pas encore consensus.

La physique des écoulements granulaires est loin d'être parfaitement comprise. Si l'avènement de la théorie cinétique a été une étape importante dans la compréhension des écoulements dilués, les écoulements denses n'ont pas dévoilé tout leur mystère. Ces dernières années ont vu fleurir bon nombre d'études expérimentales et numériques s'attachant à caractériser les écoulements dans des géométries bien contrôlées (géométrie Couette, géométrie capillaire, plan incliné, tambour tournant). Plusieurs tendances se dégagent. L'approche intégrée de Saint-Venant apparaît très prometteuse et rend compte de nombreux comportements présentés par les écoulements à surface libre, qu'il s'agisse d'écoulements sur fond rigide ou d'écoulements de surface. Elle présente cependant l'inconvénient d'une part de ne pouvoir être appliquée aux écoulements confinés, et d'autre part de ne pouvoir décrire que l'évolution de grandeurs globales comme l'épaisseur de la couche en mouvement ou le débit moyen. Par ailleurs, ce type d'approche est purement descriptif et ne permet pas de comprendre les mécanismes microscopiques responsables des comportements continus. Plusieurs modèles extrêmement récents semblent être en mesure de décrire des comportements plus locaux. Cependant, d'une part ils comportent tous un certain nombre de paramètres macroscopiques ajustables, d'autre part, aucun d'entre eux n'arrive à rendre compte de l'ensemble des observations expérimentales.

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier expérimentalement les écoulements de surface. Plusieurs raisons sous-tendent ce choix. D'une part, ce type d'écoulement à

surface libre se prête bien à des descriptions à la Saint-Venant. Nous ne sommes donc pas totalement démunis. D'autre part, ce type d'écoulement, comprenant intrinsèquement deux phases distinctes, apparaît le plus difficile à décrire. La reproduction des résultats expérimentaux obtenus constituera donc un test sévère pour les théories actuelles ou à venir.

Dans un premier temps, nous nous proposons d'obtenir une description continue des écoulements de surface. L'utilisation des équations de Saint Venant semblent appropriées. Plusieurs modèles de ce type ont été proposés pour décrire tel ou tel comportement observé. Les équations manquantes y sont dérivées à partir de considérations théoriques. Nous proposons quant à nous de déterminer directement les relations de fermeture nécessaires à la description des écoulements de surface. Pour cela, nous suivrons la méthodologie adoptée par Pouliquen [158, 159] pour décrire les écoulements denses sur plans inclinés : Nous appliquerons les équations intégrées à une géométrie simple, les écoulements stationnaires obtenus en tambour tournant. Nous serons alors en mesure de déterminer directement, sans préjugé, les relations de fermeture. Le système composé des équations de conservation et complété par ses relations pourra par la suite être appliqué à des écoulements de surface plus compliqués. Notons que, parallèlement à nous, Orpe et Khakhar (2001) [152] ont suivi le même type de méthodologie. Leurs résultats seront comparés aux nôtres.

Dans un deuxième temps, nous essaierons de relier cette description au comportement *microscopique* des grains. Pour cela, nous suivrons les positions et vitesses instantanées des grains impliqués dans l'écoulement de façon à pouvoir mettre en évidence d'éventuels mouvements collectifs. Nous nous intéresserons pour cela aux corrélations spatiales du champ de vitesse instantanée et aux fluctuations de compacité. L'étude expérimentale de ces objets collectifs nous permettra par la suite de discuter les différentes descriptions existantes et de proposer quelques pistes pour une modélisation future.

Chapitre 2

Principe de l'expérience

Nous présentons dans ce chapitre le dispositif expérimental et les raisons qui nous ont poussés à l'adopter. Nous avons vu, à la fin du chapitre précédent, pourquoi nous avons choisi d'étudier les écoulements de surface plutôt que ceux présentés dans d'autres types de géométries. Deux types d'expériences permettent habituellement d'obtenir ce type d'écoulement : les expériences de formation d'un tas et les expériences en tambour tournant. Nous avons opté pour le tambour tournant. Les raisons de ce choix et la description du dispositif expérimental seront exposées successivement dans les sections 2.1 et 2.2.

Tout au long de cette thèse, nous avons essayé de nous placer dans une approche minimaliste : le but de nos expériences est de dégager des comportements génériques et d'en isoler les mécanismes principaux. Nous avons donc cherché à étudier l'empilement présentant le minimum de paramètres tout en gardant les propriétés que nous cherchons à étudier. Nous avons opté pour des empilements monodisperses de billes millimétriques d'acier et d'aluminium. Ce choix sera justifié dans la section 2.2.

Le but de notre expérience est double : il s'agit (*i*) de trouver une description continue des écoulements de surface et (*ii*) d'essayer de relier celle-ci au comportement microscopique des billes. L'expérience doit nous donner accès simultanément aux deux échelles : le grain et l'écoulement. Les méthodes d'acquisition et de traitement des images seront présentées section 2.3. Elles permettent d'une part de mesurer différentes grandeurs macroscopiques comme la hauteur de la couche en écoulement ou la pente locale de l'interface solide/liquide et d'autre part d'étudier les comportements microscopiques des billes

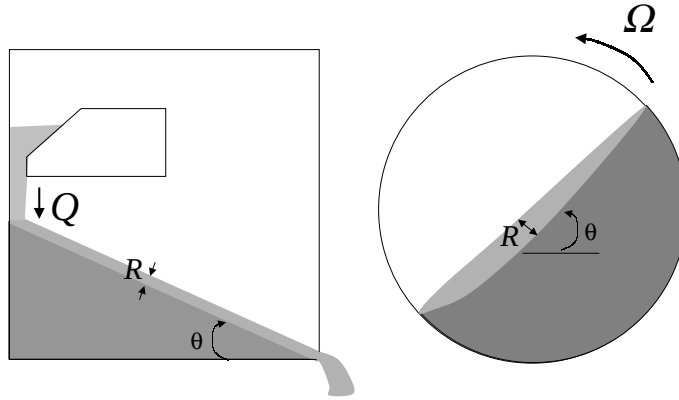


FIG. 2.1 – Deux géométries couramment utilisées pour étudier expérimentalement les écoulements de surface. A gauche : formation d'un tas. Le paramètre de contrôle est alors le débit Q . A droite : tambour tournant. Le paramètre de contrôle est la vitesse de rotation du tambour Ω .

2.1 Sur l'opportunité d'une géométrie tambour tournant

L'étude d'écoulements de surface est possible dans deux types de géométrie distincts : formation d'un tas et tambour tournant (cf. fig 2.1). La première géométrie permet d'obtenir des écoulements homogènes et pleinement développés : l'épaisseur R de la couche en mouvement et la pente θ entre l'interface solide/roulant et l'horizontale sont constants dans l'ensemble de la cellule. Lemieux et Durian (2000) [115] ont pu y mesurer les dynamiques microscopiques des grains et montrer que celles-ci restaient qualitativement les mêmes quand l'écoulement passait du régime intermittent au régime continu. Plus récemment, Komatsu *et al.* (2001) [110] se sont intéressés plus spécifiquement à ce dernier régime et ont mis en évidence un mouvement de *fluage* dans la phase considérée jusqu'alors comme statique. Dans ce type de géométrie, le paramètre de contrôle permettant de faire varier R et θ est le débit. Malheureusement, les plages de variations accessibles pour R et θ sont peu étendues.

L'utilisation d'un tambour tournant permet d'accroître ces plages. Nous avons donc opté pour ce type de géométrie. Il y a malheureusement une contrepartie : les écoulements de surface ne sont plus homogènes. Le tambour doit par conséquent avoir une taille suffisante pour que les échelles de variation de R et θ soient grandes devant la taille des grains. Son diamètre a été choisi 150 fois plus grand que le diamètre des billes. Notons que l'utilisation d'un tambour tournant comme dispositif d'étude des matériaux granulaire est loin d'être nouvelle : ce type de dispositif a beaucoup été utilisé dans le passé

pour étudier la ségrégation [65, 89, 217] et la distribution des avalanches [71, 94, 87, 145]. Le lecteur intéressé trouvera une bonne revue récente sur ce sujet dans le chapitre 7 du livre de Ristow (2000) [178].

Plusieurs équipes se sont par ailleurs intéressées à la variation de l'inclinaison moyenne θ_s de la surface libre avec la vitesse de rotation Ω . Les expériences de Rajchenbach (1990) [170] montrent que θ_s augmente avec Ω en : $\theta_s - \theta_r \propto \Omega^2$ pour les petits $\theta_s - \theta_r$, θ_r étant l'angle de repos. Dury *et al.* (1998) [67] et Yamane *et al.* (1998) [216], en combinant Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) et simulations numériques, ont étudié l'influence des parois latérales sur la courbe $\theta_s(\Omega)$: θ_s est 4 à 5° plus grand près des parois qu'au centre du tambour. L'angle au centre, loin des parois, varie linéairement avec Ω . La longueur typique de décroissance de θ_s avec la distance aux parois dépend du diamètre du cylindre, mais est indépendante du poids des grains.

Rajchenbach (2000) [171] a mesuré les profils de vitesse et de compacité pour des empilements 2D dans le but de déterminer une loi de comportement. Il observe des profils de vitesse linéaires et des compacités variant avec la profondeur. Ces profils sont similaires à ceux mesurés par Nakagawa *et al.* (1993) [146] et Yamane *et al.* (1998) [216] dans des empilements 3D par IRM. Mentionnons enfin les expériences de Orpe et Khakhar (2001) [152], menées parallèlement aux nôtres dans un esprit similaire, à savoir obtenir une description continue des écoulements de surface. Nous reportons au chapitre suivant la discussion de leurs résultats.

2.2 Dispositif expérimental

Une photo et un schéma du dispositif expérimental sont respectivement représentés sur les figures 2.2 et 2.3. Il s'agit principalement d'un tambour tournant de diamètre $D_0 = 45$ cm. Le tambour est constitué d'une plaque de Duralumin et d'un hublot de verre de 2 cm d'épaisseur et de planéité contrôlée (inférieure à $30 \mu\text{m}$). L'écartement ℓ entre les parois peut être modifié en ajoutant des couronnes d'épaisseur variable. L'ajustement est ensuite assuré par des cales de précision. Le serrage de l'ensemble se fait en 36 points uniformément répartis autour du tambour afin de minimiser la flexion des plaques. L'ensemble du bâti repose sur une table en marbre pour amortir d'éventuelles vibrations et assurer la verticalité du tambour. Celle-ci a été contrôlée à l'aide d'un niveau de haute précision (erreur inférieure au milliradian). La rotation du tambour est assurée par un moteur pas à pas couplé à un réducteur 1/100. L'ensemble n'est pas directement en contact avec la table de marbre, mais repose sur une plaque de mousse pour éviter de transmettre des vibrations au tambour. Le moteur entraîne le tambour par l'intermédiaire d'une courroie crantée en caoutchouc.

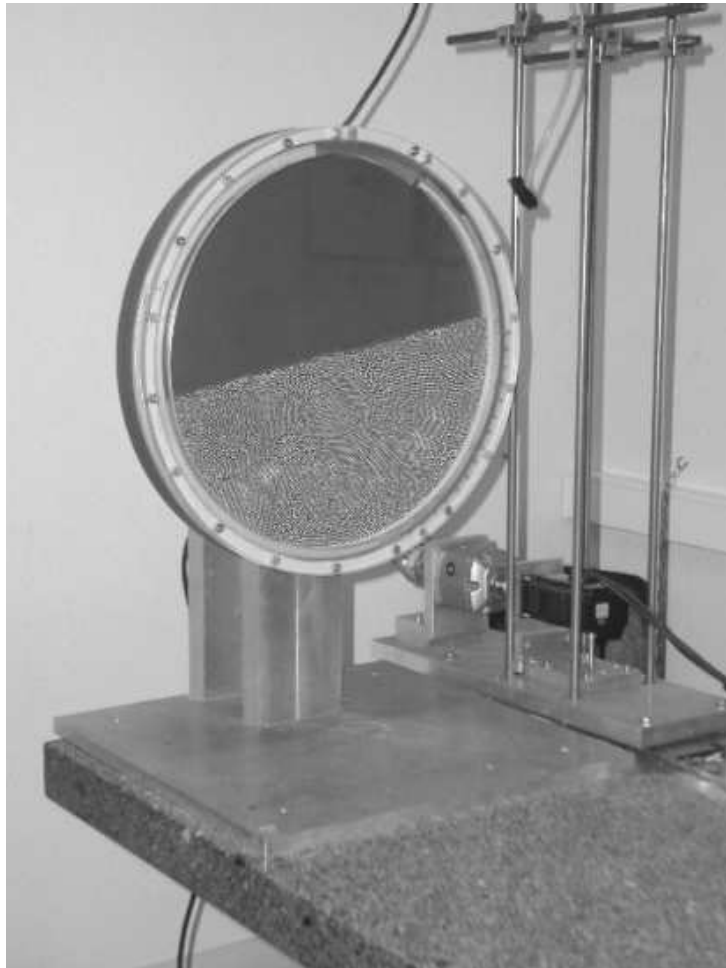


FIG. 2.2 – Photo du dispositif expérimental.

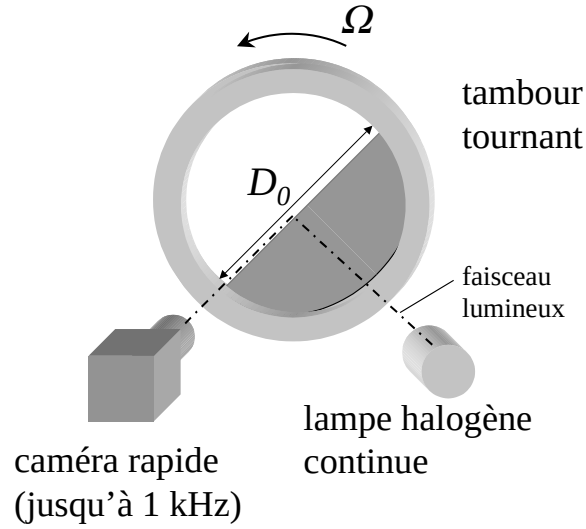


FIG. 2.3 – Schéma du dispositif expérimental.

	Acier	Aluminium
Diamètre d (mm)	3	3
Masse volumique ρ_p (g.cm ⁻³)	7.8	2.7
Coefficient de frottement μ	0.2	0.4
Coefficient de restitution normal e	0.92	0.46

TAB. 2.1 – Caractéristique des billes utilisées.

2.2.1 Choix des billes : acier et aluminium

Le tambour est rempli à moitié de billes métalliques monodisperses de diamètre $d = 3 \pm 0.03$ mm. L'utilisation de billes millimétriques permet d'avoir un bon contrôle sur les propriétés géométriques et mécaniques des billes et de limiter les effets capillaires et électrostatiques [64, 15]. Afin de mieux comprendre l'influence de la dissipation d'énergie au cours des collisions, deux types de billes seront utilisés : des billes d'acier et des billes en aluminium. L'acier est un matériau très élastique qui dissipe peu d'énergie par collision. Le coefficient de restitution des billes correspondantes, mesuré à partir de leur rebond sur un socle en verre, vaut $e = 0.92$ (cf. figure 2.4). L'aluminium possède une limite élastique beaucoup plus faible. Le coefficient de restitution des billes d'aluminium mesuré dans les mêmes conditions vaut : $e = 0.46$.

2.2.2 Choix des empilements : 2D et quasi-2D

Pour le tambour, cinq écartements sont possibles : $\ell = 3.05, 7, 11, 14$, et 22 mm.

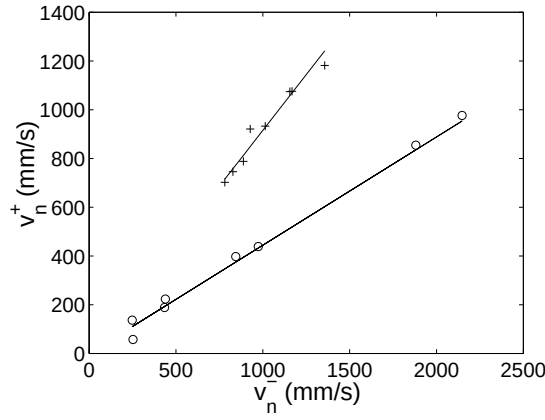


FIG. 2.4 – Mesure du coefficient de restitution e des billes à partir de leur rebond sur une table en verre. On a tracé ici la vitesse normale après le choc v_n^+ en fonction de la vitesse normale avant le choc v_n^- pour des billes d'acier (+) et pour des billes d'aluminium (o). La pente de la droite donne la valeur de e qui vaut respectivement, pour les billes d'acier et d'aluminium, $e = 0.92$ et $e = 0.46$

Quand $\ell = 3.05$ mm, l'empilement obtenu est purement 2D. Dans cette configuration, toutes les billes peuvent être visualisées. Ce type d'empilement présente cependant l'inconvénient d'être cristallin. Cette structure ordonnée peut changer qualitativement la nature des écoulements étudiés. Nous avons donc collé à l'intérieur du tambour des disques métalliques de diamètre 5 mm pour *casser* cette structure cristalline. L'inconvénient majeur est d'autoriser l'acquisition des images uniquement quand ces disques se trouvent dans la partie statique de l'empilement et qu'ils ne perturbent pas l'écoulement. L'influence des parois sur des écoulements purement 2D a été étudié par Azanza et ses collaborateurs (1997) [15, 16]. Ceux-ci ont montré que cette influence pouvait être intégrée en définissant une gravité effective $\vec{g}_{eff}$. L'enregistrement et la comparaison de la chute libre d'une bille à l'intérieur et à l'extérieur du tambour permet d'évaluer la différence entre g et g_{eff} (cf. figure 2.5). La différence entre les deux, de l'ordre de 2% est négligeable dans notre cas.

Quand ℓ vaut 7, 11, 14 ou 22 mm, l'empilement est *quasi-2D* au sens où il présente une structure microscopique 3D - en particulier désordonnée contrairement aux empilements 2D - tout en gardant une géométrie macroscopique 2D. La comparaison d'expériences menées à différents écartements nous renseignera sur l'influence des parois.

La vitesse de rotation Ω du tambour peut varier de 0.001 tr/min à 30 tr/min. Pour Ω inférieur à une valeur critique $\Omega_c \approx 0.1$ tr/min pour un écartement $\ell = 7$ mm, l'inclinaison moyenne de la surface libre $\overline{\theta_s}$ oscille entre l'angle de repos θ_{stop} et l'angle de démarrage spontané θ_{start} . Pour $\Omega \geq \Omega_c$, l'écoulement de surface devient uniforme. On s'intéresse aux régimes obtenus pour Ω variant de 1 tr/min à 8 tr/min. Pour ces régimes, l'épaisseur de la couche en mouvement est bien définie et les effets inertiels sont négligeables : le nombre de Froude Fr , défini comme $Fr = \Omega^2 D_0 / 2g$ où g est la constante de gravité, est toujours plus petit que 0.02.

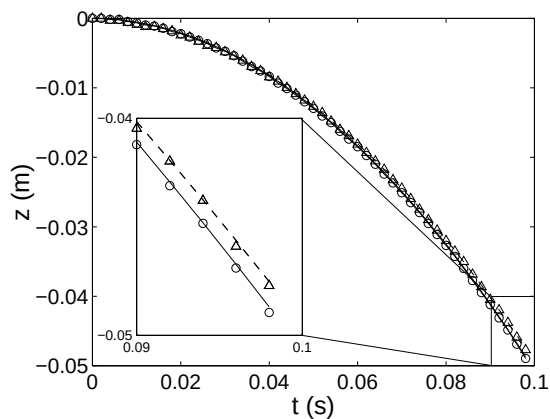


FIG. 2.5 – Chute libre d’une bille d’acier de 3 mm à l’extérieur du tambour (Δ) et dans le tambour ($\circ$) quand $\ell = 3.05$ mm. On a tracé les altitudes successives z en fonction du temps t . Les traits pointillés et pleins correspondent à des ajustements par $z(t) = -\frac{1}{2}g_{eff}t^2 - V_0t$ où g_{eff} et V_0 sont des paramètres ajustables. La gravité effective g_{eff} vaut $9.7 \pm 0.1 \text{ m.s}^{-2}$ et $9.9 \pm 0.1 \text{ m.s}^{-2}$ respectivement à l’intérieur et à l’extérieur du tambour. Le frottement lié aux parois est négligeable.

2.3 Traitement des images

Les billes sont éclairées à l’aide d’une lampe halogène continue. Les séquences d’images peuvent être enregistrées à différentes fréquences d’acquisition f_s allant jusqu’à 1 kHz. Plus f_s est élevée, moins la résolution de l’image est bonne. Cette fréquence est donc choisie différemment suivant les cas.

2.3.1 Repérage de la phase en mouvement

Lorsqu’on cherche à isoler la phase en mouvement afin de mesurer des grandeurs globales comme l’épaisseur R de la couche en mouvement ou l’angle θ entre la séparatrice et l’horizontale, on privilégie la résolution par rapport à la vitesse d’acquisition. La meilleure résolution possible est de 480×400 pixels. Les séquences d’images sont alors acquises à $f_s = 250$ Hz. Afin de garder une précision suffisante sur les profils mesurés, nous avons choisi de visualiser le tambour par moitié, la taille d’un pixel correspond alors à $p = 0.468$ mm.

Un traitement d’image approprié, essentiellement fondé sur la différence d’images successives permet d’isoler la couche en mouvement (cf. figure 2.3.1). Ce traitement est réalisé sous le logiciel Optimas et est constitué des opérations suivantes :

1. On corrige les dérives lumineuses : les images sont divisées en carrés de 16×16 pixels. Sur chacun de ces carrés, on calcule la luminance moyenne du fond, *i.e.* des pixels dont le niveau de gris est inférieur à un certain seuil, et on corrige la luminance de chaque pixel du carré en lui retirant cette moyenne.

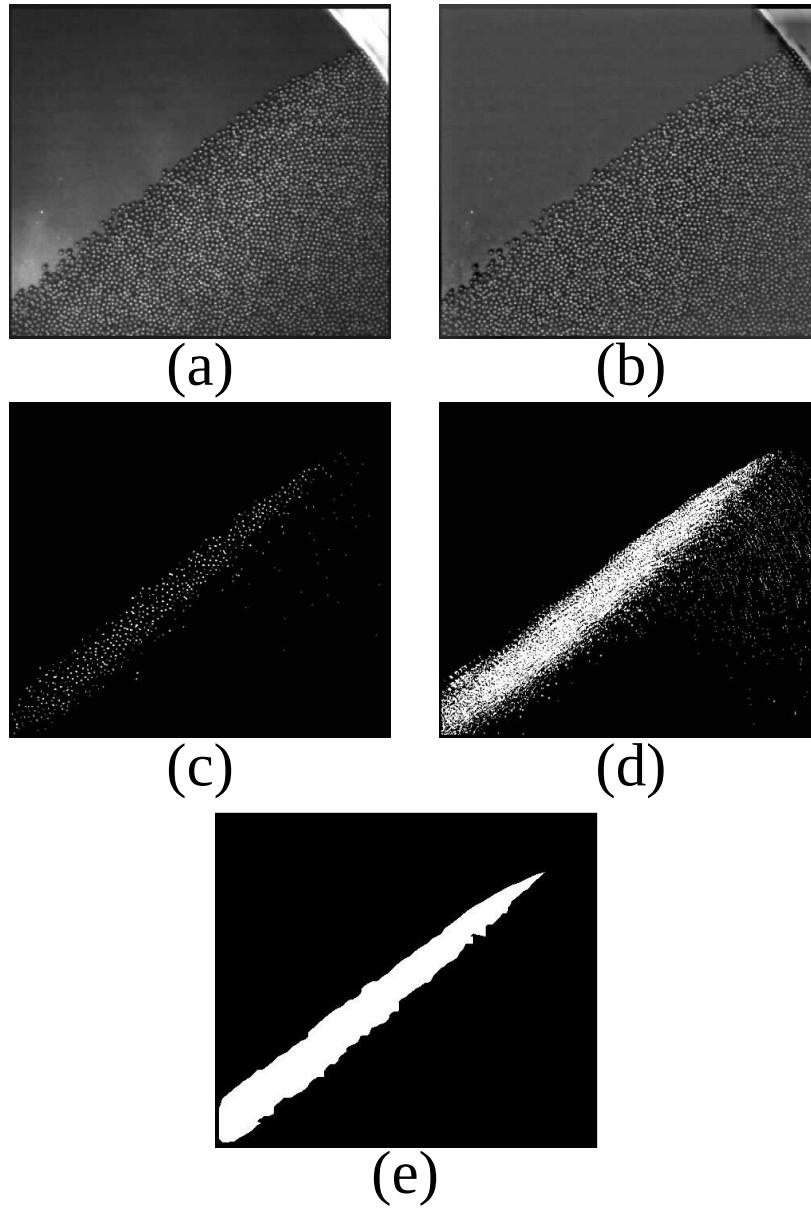


FIG. 2.6 – Traitement des images permettant d'isoler la phase roulante. (a) : l'une des 512 images brutes acquises lors d'une expérience. (b) : La même image obtenue après correction des dérives lumineuses. (c) : image obtenue après soustraction deux à deux et binarisation. (d) : image obtenue après addition sur paquets de 25 images. (e) : image finale après lissage

2. Les images successives sont ensuite soustraites deux à deux. On binarise l'image résultante : les pixels dont le niveau de gris est inférieur à un certain seuil deviennent noirs, les autres deviennent blancs. Les billes se déplaçant à une vitesse supérieure à une certaine vitesse seuil v_s ⁶ apparaissent alors en blanc.
3. On additionne ensuite les images résultantes par paquets de 50, pour moyenner la phase en mouvement dans le temps, sur 20 millisecondes. Sur cet intervalle de temps, toute bille dont la vitesse a dépassé v_c à un instant donné est par conséquent considérée comme appartenant à la couche en mouvement.
4. On lisse l'image résultante : dans un premier temps, le niveau de gris de chaque pixel est remplacé par la moyenne des niveaux de gris des pixels de la grille de taille 5×5 centrée sur le pixel considéré. Dans un deuxième temps, le niveau de gris de chaque pixel est remplacé par la médiane des niveaux de gris des pixels de la grille de taille 7×7 centrée sur le pixel considéré.

L'image obtenue après traitement permet d'isoler la couche en mouvement. On en extrait les profils de l'interface solide/liquide et de la surface libre. On répète 20 fois chaque expérience à un Ω fixé et on moyenne les profils sur ces 20 réalisations. L'écart type sur chaque point est de l'ordre de 1.5 mm. Par conséquent, les précisions sur les profils moyens sont typiquement de 0.3 mm. (cf. figure 2.7).

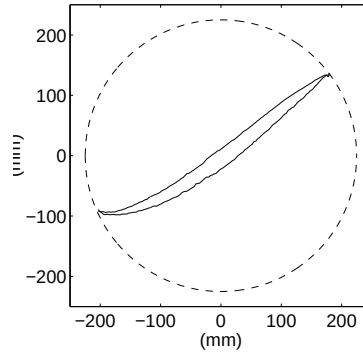


FIG. 2.7 – Profils typiques de l'interface solide/liquide et de la surface libre obtenus pour une vitesse de rotation $\Omega = 3$ tr/min, des billes d'acier et un écartement de 7 mm.

2.3.2 Passage dans un référentiel curviligne

Comme les écoulements de surface sont de faible épaisseur, on peut espérer que la vitesse des grains est essentiellement parallèle à l'interface statique/roulant. Le référentiel le plus adapté à l'étude de nos écoulements est par conséquent le référentiel curviligne $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ où $\vec{e}_x$ (resp. $\vec{e}_z$) est localement tangent (resp. perpendiculaire) à cette interface.

⁶Cette vitesse seuil dépend du choix du seuil de binarisation. Ce dernier a été choisi de façon à ne pas faire apparaître les billes de la phase statique en rotation solide.

L'abscisse curviligne x est définie à partir du point P correspondant à la limite supérieure de la couche roulante (cf. figure 2.8).

Le référentiel expérimental naturel est le référentiel $(\vec{e}_X, \vec{e}_Z)$ centré sur le centre du tambour, où $\vec{e}_Z$ (resp. $\vec{e}_X$) est parallèle (resp. perpendiculaire) au vecteur gravité $\vec{g}$ (cf. figure 2.8). Dans ce référentiel les coordonnées d'un point P_H de l'interface et d'un point P_S de la surface libre s'écrivent respectivement $(X_H, Z_H = H(X_H))$ et $(X, Z_S = S(X_S))$. Les profils mesurés expérimentalement donnent les deux fonctions $H(X)$ et $S(X)$. Toute la difficulté est d'en déduire les profils d'épaisseur de la couche en mouvement $R(x)$ et de pente locale $\theta(x)$.

A partir du profil expérimental $H(X)$, on peut calculer $x(X)$:

$$x(X) = \int_X^{X_P} \sqrt{1 + \frac{dH}{dX}(y)} dy \quad (2.1)$$

L'angle local $\theta(X)$ vaut simplement :

$$\theta(X) = \text{atan} \left(\frac{dH}{dX}(X) \right) \quad (2.2)$$

La procédure permettant de déterminer le profil d'épaisseur de la phase en mouvement $R(x)$ est la suivante (cf. figure 2.8) : pour un x donné, on trouve le point correspondant P_H appartenant à l'interface solide/liquide. Ce point a donc pour coordonnées $(X(x), H(X(x)))$. On cherche ensuite le point P_S de coordonnées $(X_S, S(X_S))$ de la surface libre tel que $\overrightarrow{P_S P_H}$ soit orthogonal à $\vec{e}_x$. Numériquement, il s'agit de minimiser $|(X(x) - X_S) \cos \theta(x) + (H(x) - S(X_S)) \sin \theta(x)|$ suivant X_S . L'épaisseur en mouvement $R(x)$ correspondante est alors définie comme $|P_S P_H|$. Les erreurs résultantes sur chaque point de $R(x)$ sont de l'ordre de 1 mm (cf. figure 2.9).

2.3.3 Repérage des billes

On va dans un deuxième temps chercher à mesurer les grandeurs microscopiques de l'écoulement, à savoir position et vitesse instantanées des billes. Celles-ci vont être calculées à partir des positions successives des billes entre deux images successives. L'utilisation du vocable *instantanée* peut alors être discutée : la vitesse instantanée d'un grain est celle mesurée entre deux collisions successives. La vitesse mesurée expérimentalement est en fait la vitesse du grain moyennée sur l'intervalle temps séparant deux acquisitions successives. On a donc intérêt à choisir la fréquence d'acquisition la plus grande possible.

Les séquences d'images sont par conséquent enregistrées à une fréquence d'acquisition $f_s = 1$ kHz. Le temps d'ouverture a été fixé à 0.1 ms. La taille de la zone visualisée

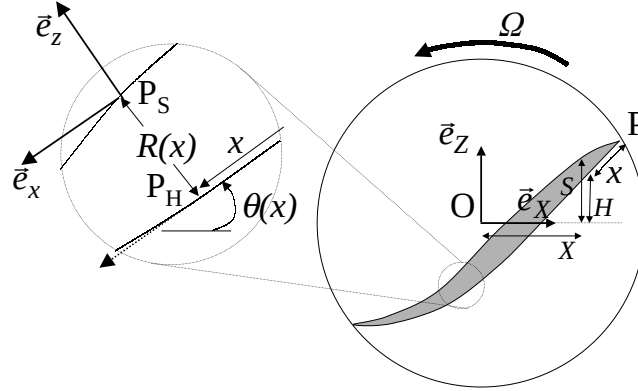


FIG. 2.8 – Ecoulement de surface uniforme dans un tambour tournant à vitesse Ω . Une fine couche d'épaisseur R coule sur un lit statique dont la pente locale avec l'horizontale est notée θ . Le référentiel $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est le référentiel de gravité. Son origine correspond au centre du tambour O . Dans ce référentiel, les profils de la surface libre et de l'interface sont donnés par les fonctions respectives $S(X)$ et $H(X)$. Le référentiel le plus adapté reste cependant le référentiel $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ localement tangent à la séparatrice. L'abscisse curviligne x est définie à partir du point P . L'angle local $\theta(x)$ s'exprime à partir de la dérivée du profil $H(X)$ au point P_H de coordonnées $(X(x), H(x))$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$. L'épaisseur roulante $R(x)$ vaut $|P_H P_S|$ (voir le texte pour les détails).

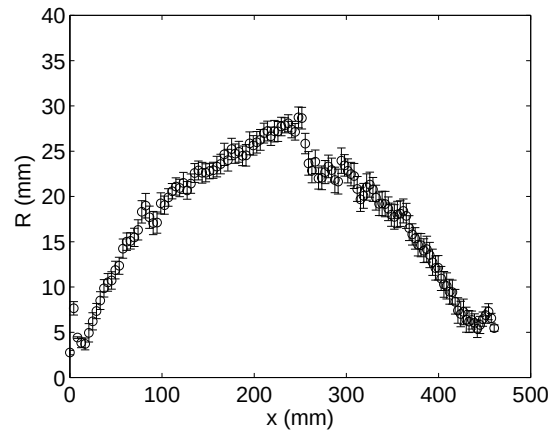


FIG. 2.9 – Profil d'épaisseur de la couche en mouvement $R(x)$ obtenu pour une vitesse de rotation $\Omega = 3$ tr/min, des billes d'acier et un écartement de 7 mm. Les barres d'erreur sont de l'ordre du mm.

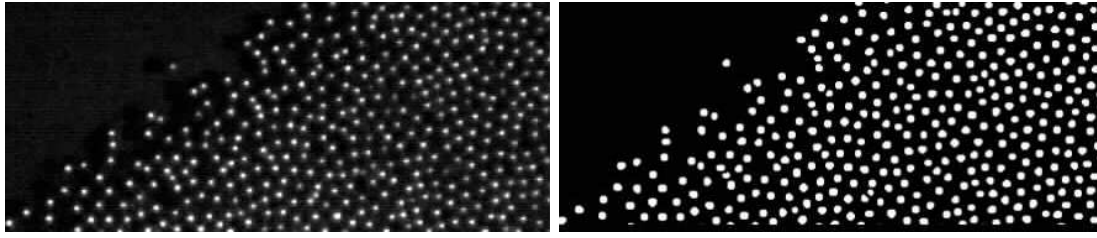


FIG. 2.10 – Traitement des images permettant la détermination des positions des billes. A gauche : image brute. A droite : Image après traitement. Chaque bille est représentée par un disque dont l'aire est la plus grande possible afin d'optimiser la précision sur la détermination de son barycentre (voir le texte pour les détails).

est alors de 480×234 pixels, la taille d'un pixel étant de $p = 0.227$ mm. Le traitement d'images permettant d'extraire la position du barycentre des billes vues à travers le hublot est le suivant (cf figure 2.3.3) :

1. On lisse l'image brute : le niveau de gris de chaque pixel est remplacé par la moyenne des niveaux de gris des pixels de la grille de taille 5×5 centré sur le pixel considéré ⁷.
2. On fait ressortir les contours des billes, *i.e.* les pixels où les gradients de niveau de gris sont importants en convoluant l'image avec un filtre passe haut.
3. On réédite les étapes 1 et 2 de manière à obtenir des billes pleines.
4. On applique un filtre de dilatation pour que l'image d'une bille soit constituée du plus grand nombre possible de pixels
5. On sépare les disques correspondants aux différentes billes.

La position d'une bille est alors définie comme le barycentre du disque correspondant. L'image d'une seule bille est constituée de $N = 23 \pm 3$ pixels, la légère variation étant due à la distance de cette bille au hublot. La précision sur la détermination de ce barycentre est alors de l'ordre de $3 * p / \sqrt{N - 1}$, soit environ $150 \mu\text{m}$, avec un intervalle de confiance de 99%⁸.

Pour évaluer la précision sur la position des billes, nous proposons l'expérience suivante : dans un premier temps, nous déterminons la position des billes à l'aide de la procédure décrite plus haut pour un empilement purement 2D (écartement entre les parois du tambour : 3.05 mm). Pour chaque bille, nous repérons les billes *apparemment* en contact, *i.e.* les billes distantes d'une longueur inférieure à une certaine longueur seuil, arbitrairement choisie égale à 3.5 mm. Or, pour des billes parfaitement rigides et infiniment lisses, on peut montrer que la coordinence de chaque bille est égale à 4. Ce point résulte des propriétés d'isostaticité des empilements. Il est discuté dans le chapitre 1 de la partie II. Par conséquent, pour chaque bille nous gardons, parmi les billes *apparem-*

⁷La zone de visualisation est maintenant suffisamment petite pour négliger les dérives lumineuses : on n'a donc plus besoin de ce premier filtre.

⁸On peut en effet raisonnablement supposer que, pour une position réelle de bille (x^r, z^r) donnée, la mesure de x (ou de z) suit une distribution gaussienne centrée sur x^r (resp. sur z^r) d'écart type $\sigma = p / \sqrt{N - 1}$. Par conséquent, la probabilité que $|x - x^r| \leq 3\sigma$ est de l'ordre de 99%.

ment en contact, les quatre plus proches, et nous regardons la distribution sur la longueur des contacts (cf figure 2.11). Celle-ci est relativement gaussienne, d'écart type 0.09 mm. Si on suppose que les fluctuations statistiques sont dominées par les erreurs de mesure, l'écart type mesuré expérimentalement est compatible avec l'ordre de grandeur proposé ci-dessus.

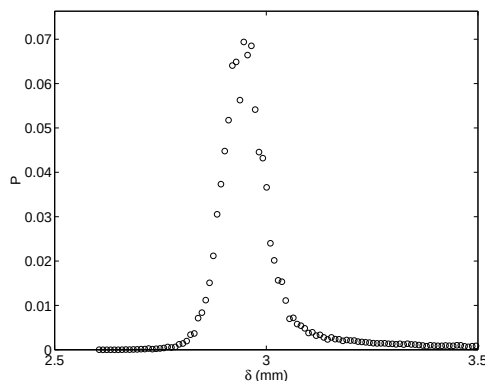


FIG. 2.11 – Distribution de la longueur des contacts. Les données sont expérimentales. Cette longueur suit une distribution à peu près gaussienne centrée sur 2.97 mm et d'écart type 0.09 mm. On rappelle que le diamètre d des billes vaut $d = 3 \pm 0.03$ mm. La longueur moyenne des contacts est légèrement plus faible. L'origine de ce biais est la suivante : Si l'empilement était parfaitement ordonné et les billes parfaitement identiques, chaque bille aurait 6 contacts. En prenant en compte uniquement les 4 contacts les plus petits, on favorise les billes de diamètre inférieur à 3 mm.

2.3.4 Mesure des vitesses

La vitesse d'une bille est évaluée à partir de la position d'une même bille sur deux images successives. Nous adoptons un critère de proximité : considérons une bille à une position donnée sur l'image n . La bille la plus proche de l'image $n + 1$ sera considérée comme la même bille.

Pour des empilements purement 2D, *toutes* les billes peuvent être visualisées. La procédure de suivi des billes est donc exacte tant que la vitesse de celle-ci est inférieure à $f_s d/2 = 1500$ mm/s, ce qui est le cas dans nos expériences ⁹. Dans le cas d'empilement quasi-2D, on a accès uniquement aux billes en contact ou proches du hublot. Une bille visible sur l'image n peut disparaître sur l'image suivante. On garde cependant le critère défini précédemment pour suivre les billes. On calcule ensuite le profil de vitesse moyen sur l'ensemble de la séquence d'images. On verra par la suite (chapitre 3) que les fluctuations de vitesse sont nettement plus faibles, presque d'un ordre de grandeur, que les vitesses moyennes. Dans le cas d'empilement quasi 2D, nous calculons donc pour chaque bille sur chaque image la fluctuation instantanée de vitesse et nous considérons que la

⁹La vitesse peut être légèrement supérieure au niveau de la surface libre pour $\Omega = 8$ tr/min. Cependant, comme la compacité est très faible au niveau de cette surface, on se trompe rarement de billes.

bille n'est plus la même, quand cette fluctuation est supérieure à un certain seuil choisi arbitrairement égal à 0.7 fois la vitesse instantanée de la bille considérée (cf. figure 2.12). On perd ainsi environ 5% des billes d'une image.

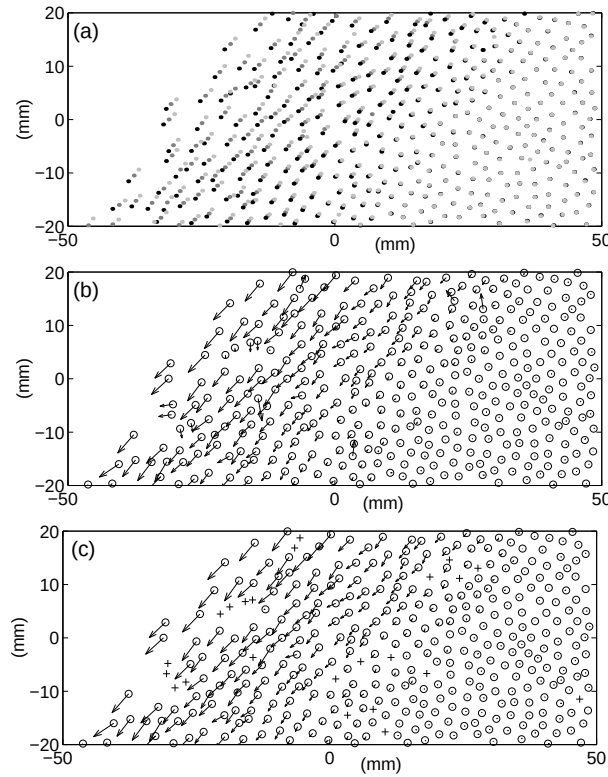


FIG. 2.12 – Procédure de calcul du champ de vitesse. Image (a) : pour chaque bille de l'image n (en gris foncé), on cherche la plus proche sur l'image $n - 1$ (en gris clair), puis sur l'image $n + 1$ (en noir). On suppose qu'il s'agit de la même bille et on calcule la vitesse correspondante (image (b)). On calcule ensuite le profil de vitesse moyen perpendiculairement à l'écoulement. On calcule ensuite pour chaque bille l'écart de vitesse par rapport à ce profil moyen. Toutes les billes avec un tel écart supérieur à 0.7 fois sa vitesse instantanée sont considérées comme perdues (représentées avec des + dans l'image (c)).

2.4 Conclusion

L'expérience et les techniques associées ont été présentées. Pour les écoulements de surface, nous sommes donc capables de mesurer :

- d'une part des grandeurs macroscopiques comme les profils d'épaisseur de la couche en mouvement ou l'inclinaison locale de la séparatrice statique/roulant.
- d'autre part les grandeurs microscopiques à savoir la position et la vitesse instantanée des billes impliquées dans l'écoulement.

Il s'agit maintenant, dans un premier temps, de trouver une description continue des écoulements de surface, puis, dans un deuxième temps, d'étudier les liens et les implications de cette description vis à vis du comportement microscopique des grains.

Chapitre 3

Recherche d'une description continue des écoulements de surface

La modélisation des avalanches et des écoulements de surface a suscité de très nombreux travaux théoriques d'inspirations très diverses. Parmi celles-ci, l'utilisation des équations de conservation intégrées sur l'épaisseur en mouvement nous semble la plus prometteuse.

Ce type d'approche n'est pas nouveau : en hydraulique, dans les écoulements à surface libre en eaux peu profondes, il arrive souvent que seules les vitesses moyennes horizontales, *i.e.* parallèles à la surface libre, soient intéressantes. Cela n'a de sens que dans l'approximation d'écoulements *quasi-horizontaux* où la pente de la surface et du fond est faible devant la profondeur d'eau. On peut alors simplifier le système d'équations décrivant la dynamique du fluide, équations de *Navier-Stokes* pour des régimes laminaires ou équations de *Reynolds* pour des régimes turbulents, en les moyennant selon la verticale. Le système d'équations obtenu, équations de *Saint-Venant*, présente l'avantage de pouvoir être relativement aisé à résoudre par la méthode des *caractéristiques* (voir par exemple [210]), ce qui est loin d'être le cas pour le système d'équations initial. Ce type d'approche a été appliqué avec succès aux écoulements en canal [88], en rivière [116, 113, 82], voire en mer sur des plateaux continentaux [177].

L'utilisation des équations de conservation intégrées au cas des écoulements granulaires denses est beaucoup plus récente. Il s'agit alors, non pas de simplifier les équations qui régissent leur comportement - celles-ci demeurent encore largement inconnues - mais plutôt de fournir un cadre de description dans lequel la rhéologie est implicitement prise en compte. Ce type d'approche a d'abord été appliqué à la description d'écoulements granulaires sur fond rigide [182, 189, 157], puis étendu au cas d'écoulements sur fond meuble [106, 62].

Plusieurs relations de fermeture sont nécessaires pour fermer ces équations et obtenir un modèle complet. Les auteurs précédents ont choisi celles-ci à l'aide de considérations

théoriques de façon à reproduire tel ou tel comportement observé. Nous proposons quant à nous de les déterminer expérimentalement sans préjuger de leur forme. Pour cela, nous appliquerons le formalisme de Saint-Venant à des écoulements simples, les écoulements de surface stationnaires en tambour tournant 3.1. Nous verrons alors comment en déduire les relations de fermeture. Le système complet obtenu pourra par la suite être appliqué à la description de cas plus généraux.

Dans un premier temps (section 3.2), nous établirons les profils de vitesse et de compacité sur une tranche élémentaire représentative. La variation de ces profils avec le paramètre de contrôle, la vitesse de rotation Ω du tambour, nous donnera accès aux deux premières relations de fermeture reliant le débit et le flux de quantité de mouvement à l'épaisseur roulante et à l'angle entre l'interface solide/liquide et l'horizontale. Dans un second temps (section 3.3), nous mesurerons les profils d'épaisseur de la couche en mouvement et les profils d'angle local de la séparatrice solide/liquide. Nous serons alors en mesure de déterminer la dernière relation de fermeture, à savoir la forme de la force exercée sur la couche en mouvement.

Le modèle complet sera ensuite discuté section 3.4. Il sera comparé aux modèles continus d'écoulements de surface déjà proposés.

Nous étudierons enfin dans la section 3.5 les variations des différents paramètres intervenant dans le modèle avec le coefficient de restitution des billes et l'écartement du tambour.

3.1 Cadre théorique : approche Saint-Venant

Considérons la situation générale représentée sur la figure 3.1a. Nous nous limitons à des situations 2D. Le matériau peut être séparé en deux phases : une couche en mouvement d'épaisseur fine qui coule sur un lit statique. On suppose que l'interface entre les deux phases est nette, et que la densité ρ est constante, ce qui sera justifié dans la section 3.2. Pour des couches en mouvement d'épaisseur fine, la vitesse des grains est essentiellement parallèle à l'interface solide/écoulement. Le référentiel le plus naturel est par conséquent le référentiel curviligne $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ où $\vec{e}_x$ (resp. $\vec{e}_z$) est localement tangent (resp. perpendiculaire) à l'interface (voir section 2.2 du chapitre 2). L'origine en z est placée à la surface libre (cf. figure 3.1). Si on suppose la densité ρ constante (ce qui sera discuté dans la section 3.2) et qu'on note $(\vec{v}_x, \vec{v}_z)$ la vitesse au point (x, z) , les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement s'écrivent (cf. annexe B) :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(R \langle v_x \rangle) + v_z|_{z=-R} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(R \langle v_x \rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(R \langle v_x^2 \rangle) + (v_x v_z)|_{z=-R} = \frac{F}{\rho} \quad (3.2)$$

où R est l'épaisseur de la couche en mouvement et F est la composante en x de la force appliquée sur le volume V limité par les deux surfaces $\Sigma(x)$ et $\Sigma(x+dx)$ (cf figure 3.1). Les quantités $(R \langle v_x \rangle)$ et $(R \langle v_x^2 \rangle)$ sont respectivement le débit et le flux de quantité de mouvement projeté sur $\vec{e}_x$ (divisé par ρ) traversant la surface $\Sigma(x)$. Les quantités $v_z|_{z=-R}$ et $(v_x v_z)|_{z=-R}$ représentent, quant à elles, respectivement le débit et le flux de quantité de mouvement projeté sur $\vec{e}_x$ (divisé par ρ) traversant l'interface. On note $\langle A \rangle$ la moyenne de la quantité A sur l'épaisseur de la couche en mouvement :

$$\langle A \rangle = \frac{1}{R} \int_{-R}^0 A dz \quad (3.3)$$

Les expressions de $\langle v_x \rangle$, $\langle v_x^2 \rangle$ et F en fonction des paramètres macroscopiques décrivant l'écoulement sont nécessaires pour fermer le système d'équations (3.1,3.2). La dynamique de l'écoulement est invariante par translation verticale. Les trois relations de fermeture peuvent donc s'écrire $\langle v_x \rangle(R, \theta)$, $\langle v_x^2 \rangle(R, \theta)$ et $F(R, \theta)$ où $\theta(x, t)$ est l'angle entre l'interface et l'horizontale.

Appliquons ces équations aux écoulements stationnaires obtenus dans un tambour tournant (voir figure 3.1b). Les termes dérivés par rapport au temps s'éliminent, et la vitesse $\vec{v}|_{z=-R}$ des grains statiques au niveau du point M de l'interface s'écrit :

$$\vec{v}_{z=-R} = \Omega r \vec{n} \quad (3.4)$$

où Ω est la vitesse de rotation du tambour, r la distance entre M et le centre O du tambour, et $\vec{n}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$. Le système d'équations (3.1,3.2) devient alors :

$$\frac{d}{dx}(R \langle v_x \rangle) = -\Omega(X \cos \theta + H \sin \theta) \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dx}(R \langle v_x^2 \rangle) + \Omega^2(X \cos \theta + H \sin \theta)(X \sin \theta - H \cos \theta)\mathcal{H}(X \cos \theta + H \sin \theta) = \frac{F}{\rho} \quad (3.6)$$

où $\mathcal{H}$ est la fonction d'Heaviside et $(X(x), H(x))$ sont les coordonnées du point M dans le référentiel $(\vec{e}_X, \vec{e}_Z)$ où $\vec{e}_X$ (resp. $\vec{e}_Z$) est normal (resp. parallèle) au vecteur gravité $\vec{g}$, et dont l'origine coïncide avec le centre du tambour (voir aussi la section 2.2 du chapitre 2). Ces deux fonctions sont données par :

$$X(x) = X_P + \int_0^x \cos \theta(y) dy, \quad H(x) = H_P - \int_0^x \sin \theta(y) dy, \quad (3.7)$$

où P correspond à la limite supérieure de la couche en mouvement (voir figure 3.1b).

Le but de ce chapitre est, rappelons le, d'aboutir à un système *complet* d'équations permettant de décrire l'évolution globale de l'écoulement. Mesurons dans un premier temps les profils de vitesse et de compacité sur une tranche élémentaire pour différents Ω . Nous serons alors en mesure de déterminer ainsi les deux premières équations de fermeture, à savoir les fonctions $\langle v_x \rangle (R, \theta)$ et $\langle v_x^2 \rangle (R, \theta)$. Dans un second temps, nous mesurerons globalement les profils $R(x)$ et $\theta(x)$ et nous aurons accès à la dernière relation de fermeture, la fonction $F(R, \theta)$.

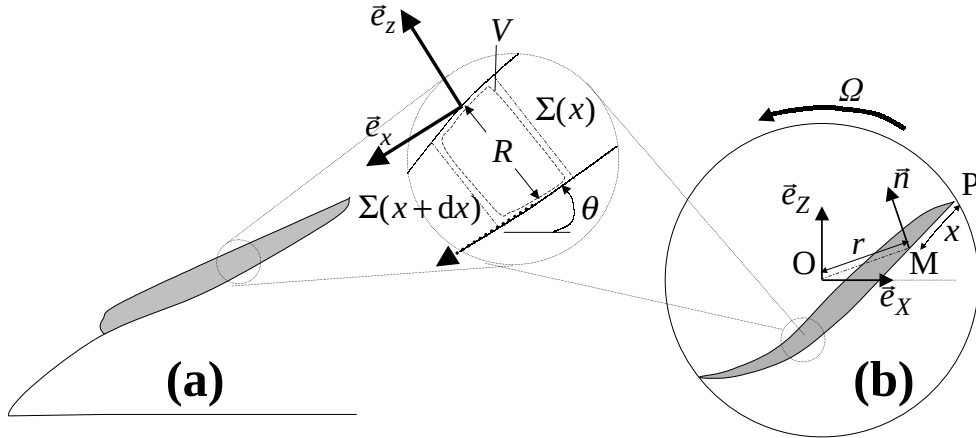


FIG. 3.1 – (a) : écoulement de surface dans un matériau granulaire. Une couche en mouvement d'épaisseur faible coule sur un lit statique. L'écoulement peut être décrit globalement en considérant l'évolution de l'épaisseur R de la couche en mouvement et de l'angle local θ entre la séparatrice fluide/roulant et l'horizontale (voir insert). On se place dans le référentiel $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$, localement tangent à l'interface. Le théorème du transport est appliqué sur le volume limité par les deux surfaces $\Sigma(x)$ et $\Sigma(x+dx)$ perpendiculaires à l'interface d'une part et la surface libre et l'interface d'autre part. (b) : écoulement de surface stationnaire dans un tambour tournant. L'abscisse curviligne x est définie par rapport à l'interface et son origine est fixée au point P limite supérieure. Le référentiel $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est le référentiel de gravité centré sur le centre O du tambour. La vitesse de rotation solide à un point M de l'interface solide/liquide s'écrit $\Omega r \vec{n}$ où r est la distance entre O et M et $\vec{n}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{OM}$.

3.2 Profil de vitesse et de compacité sur une tranche élémentaire

Nous nous intéressons d'abord aux profils de vitesse et de compacité et à leurs variations avec le paramètre de contrôle Ω dans une tranche élémentaire. Des séquences de 200 images sont enregistrées à l'aide de la caméra rapide à une fréquence d'acquisition de 1 kHz. La zone enregistrée est choisie au centre du tambour. Dans cette région, à la fois R , θ et les profils de vitesse tangentielle $\{v_x(z)\}$ et de compacité $\{\nu(z)\}$ sont invariants lorsqu'on déplace légèrement la zone de visualisation parallèlement à $\vec{e}_x$. La zone visualisée peut par conséquent être considérée comme une tranche élémentaire représentative puisque les variations macroscopiques n'y sont pas ressenties. Dans cette zone, R et θ peuvent être modifiés - malheureusement pas de manière indépendante - en faisant varier Ω . Le traitement d'images décrit dans le chapitre 2, section 2.3, permet d'évaluer la position et la vitesse des billes vues à travers le hublot. L'angle θ de l'écoulement est alors calculé à partir de la moyenne de la vitesse instantanée de l'ensemble des billes sur l'ensemble de la séquence. Chaque image est ensuite divisée en bandes parallèles à l'écoulement d'épaisseur égale à un diamètre de bille. Le profil de compacité moyenne et de vitesse moyenne sont ensuite définis à partir de moyennes effectuées respectivement sur la position et la vitesse de toutes les billes de la séquence d'images dont le barycentre est à l'intérieur de la bande concernée

3.2.1 Mesure de compacité

Nous avons mesuré la compacité ν_0 de l'empilement à l'arrêt juste après remplissage du tambour¹⁰. Celle-ci vaut $\nu_0 = 0.57 \pm 0.02$. Cette valeur est compatible avec celle observée par Daerr et Douady (1999) [52] pour le même protocole de remplissage, qui consiste à verser les billes à partir d'un point source sans précautions particulières.

Dans des empilements quasi-2D pour lesquels nous ne sommes pas en mesure de suivre *toutes* les billes, nous ne pouvons pas mesurer directement la compacité. Nous avons donc construit des empilements numériques et évalué la relation entre la compacité réelle et la compacité estimée en prenant en compte uniquement les billes vues à travers le hublot du tambour¹¹. Les profils expérimentaux de compacité peuvent alors être estimés. Les

¹⁰Cette compacité est évaluée simplement à partir du nombre de billes versées et du volume mesuré. Cette méthode n'est applicable qu'à l'arrêt et ne permet bien évidemment pas de suivre l'évolution des profils de compacité en écoulement stationnaire.

¹¹Ces empilements sont simulés en *lâchant* des billes dans une cellule d'écartement similaire à l'expérience : l'altitude d'une bille donnée est minimisée en respectant les deux contraintes suivantes : les billes doivent rester dans la cellule et elles ne doivent pas interpénétrer avec celles déjà présentes. On simule ensuite des empilements de compacité plus faible soit en diminuant le rayon des billes sans changer leur position, soit en retirant aléatoirement des billes. Pour tous ces empilements, on peut ensuite déterminer les billes *visibles* à travers le hublot de la cellule, *i.e.* les billes dont le barycentre n'est pas caché par la présence des autres billes situées plus près du hublot. On évalue ainsi la compacité réelle ν^r et la compacité

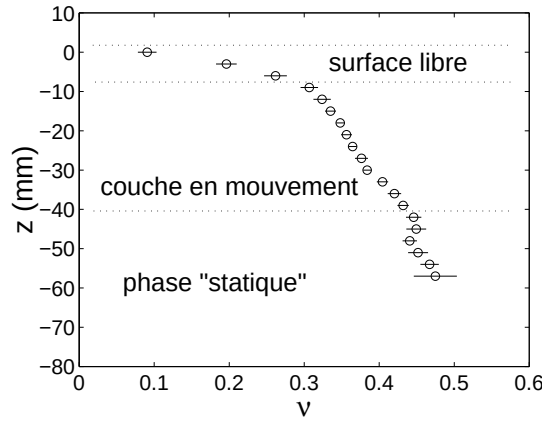


FIG. 3.2 – Profil de compacité au centre du tambour pour une vitesse de rotation $\Omega = 6$ tr/min. L'altitude z est définie perpendiculairement à l'écoulement, l'origine des ordonnées étant prise à la surface libre. Ce profil a été obtenu après avoir effectué une moyenne sur 1000 images. Les barres d'erreur correspondent à un intervalle de confiance de 99%.

incertitudes sont principalement dominées par le traitement statistique des données. Les profils de compacité ont par conséquent été moyennés sur 1000 images afin de limiter l'erreur. Un profil de compacité typique, obtenu pour $\Omega = 6$ tr.min⁻¹ est représenté figure 3.2. La compacité $\nu(z)$, varie peu dans la couche roulante et reste comprise entre 0.3 et 0.4, excepté à la surface libre dans une zone étroite - d'épaisseur environ égale à 3 diamètres de billes indépendante de Ω - où elle tombe rapidement à zéro. A l'échelle macroscopique, l'épaisseur de cette zone peut être négligée.

Nous sommes maintenant en mesure de discuter l'hypothèse d'une densité ρ constante. Rappelons que ρ est simplement proportionnelle à ν : $\rho = \rho_P \nu$ où ρ_P est la masse volumique des billes. Abandonner l'hypothèse d'une densité constante revient à remplacer $\langle v_x \rangle$ et $\langle v_x^2 \rangle$ respectivement par $\langle \rho v_x \rangle / \langle \rho \rangle$ et $\langle \rho v_x^2 \rangle / \langle \rho \rangle$. Comme les variations de v_x sont bien plus importantes que celles de ρ , nous pouvons garder cette hypothèse dans la suite.

3.2.2 Mesure du profil de vitesse

Un profil typique a été représenté figure 3.3. La vitesse $v_x(z)$ varie linéairement avec z dans l'ensemble de la phase roulante excepté dans une zone étroite entre la phase statique et la phase roulante. Une représentation semi-logarithmique de ce profil montre en fait que cette vitesse n'est pas nulle dans la phase statique, mais décroît exponentiellement (cf. figure 3.3) avec une longueur typique de décroissance $\lambda_{fluage} = 7.5$ mm $\simeq 2.5d$ où d

apparente ν^a calculée en prenant uniquement en compte ces billes visibles. D'après nos simulations, ν^r varie linéairement avec ν^a . Pour des billes de 3 mm et un écartement de 7 mm, on a alors : $\nu^r = 1.61\nu^a$. Le ratio ν^r/ν^a est par ailleurs confirmé par les mesures expérimentales directes de ces deux compacités juste après le remplissage du tambour.

est le diamètre des grains, en accord avec les observations de Komatsu *et al.* (2001) [110]. Ces déformations de fluage sont donc localisées à l'interface solide/liquide dans une zone assez étroite pour qu'on puisse négliger son épaisseur dans une description macroscopique.

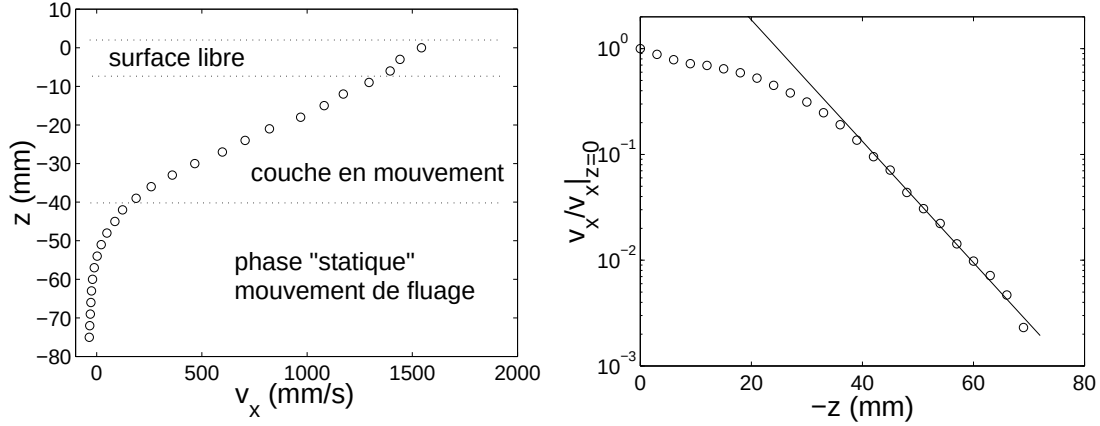


FIG. 3.3 – A gauche : profil de vitesse tangentielle $v_x(z)$ au centre du tambour pour une vitesse de rotation $\Omega = 6$ tr/min. L'altitude z est définie perpendiculairement à l'écoulement, l'origine des ordonnées étant prise à la surface libre. Ce profil a été obtenu après moyenne sur 200 images. La précision sur les différents points est inférieure à leur taille. A droite : $v_x(z)/v_x|_{z=0}$ en fonction de la profondeur $-z$. L'axe des ordonnées est logarithmique. La décroissance exponentielle est la signature de déformations de fluage de la phase statique. La ligne droite correspond à un ajustement exponentiel de longueur caractéristique $\lambda_{fluage} = 7.6 \text{ mm} \simeq 2.5d$ où d est le diamètre des billes.

3.2.3 Influence de la pente locale et de l'épaisseur roulante

Nous avons fait varier la vitesse de rotation du tambour Ω de 1 tr/min à 6 tr/min afin d'étudier les variations des profils de vitesse avec R et θ . Ces profils sont représentés figure 3.4. Ils restent linéaires dans l'ensemble de la phase roulante. Nous les avons ensuite translatés le long de l'axe $\vec{e}_z$ de façon à faire coïncider leurs interfaces statique/liquide. Leur superposition montre que le gradient de vitesse $\dot{\gamma} = \partial_z v_x$ est indépendant de Ω , *i.e.* indépendant à la fois de R et de θ , voire que les deux dépendances se compensent.

Nous avons ensuite mesuré ces profils à cinq endroits différents régulièrement répartis le long de la surface libre pour $\Omega = 6$ tr/min (cf. figure 3.5). Il faut cependant remarquer que, pour ces endroits, les dérivées $\partial_x R$ et $\partial_x \theta$ ne sont plus nulles. On ne peut plus à strictement parler considérer ces régions comme des tranches *élémentaires* au sens de la mécanique des milieux continus. Nous avons diminué la largeur des zones acquises pour minimiser ces dérives. La superposition des profils représentée figure 3.5 montre que le gradient de vitesse ne dépend pas de la position dans le tambour. Il ne dépend donc ni R , ni de θ , ni de $\partial_x R$ ni de $\partial_x \theta$.

Nous pouvons donc écrire :

$$v_x(z) = \dot{\gamma}(z + R) \quad (3.8)$$

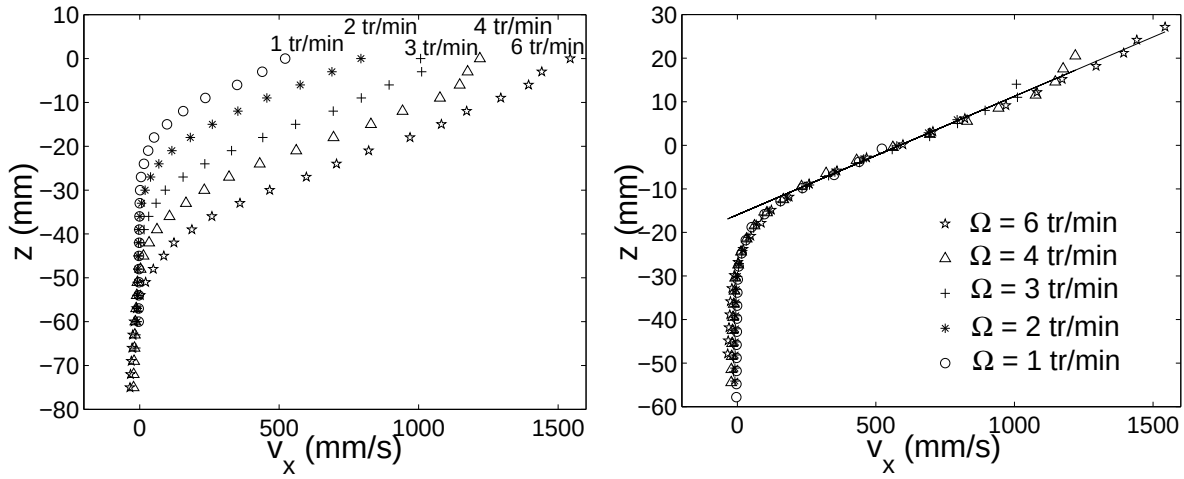


FIG. 3.4 – A gauche : profil de vitesse tangentielle $v_x(z)$ au centre du tambour pour différentes vitesses de rotation Ω , *i.e.* pour différents couples (R, θ) . A droite : on translate les profils suivant $\vec{e}_z$ pour faire coïncider les interfaces. La superposition des profils montrent l'invariance du gradient de vitesse $\dot{\gamma}$.

avec un gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ constant : $\dot{\gamma} = 34 \pm 0.1 \text{ s}^{-1}$ ou $\dot{\gamma} \simeq 0.6\sqrt{g/d}$. Cet ordre de grandeur peut être compris de la manière suivante [171] : quand un grain entre en collision avec un grain de la couche en dessous, toute l'énergie cinétique est absorbée par collisions multiples. L'équilibre entre énergie potentielle acquise et énergie cinétique dissipée après un libre parcours moyen de l'ordre de d amène à une vitesse relative v_l entre deux couches de billes successives égale à $v_l = \sqrt{gd}$. Par conséquent, $\dot{\gamma}$ est de l'ordre de $\sqrt{g/d}$.

Connaissant le profil $\{v_x(z)\}(R, \theta)$, nous en déduisons les deux premières relations de fermeture :

$$\langle v_x \rangle (R, \theta) = \frac{1}{2} \dot{\gamma} R \quad (3.9)$$

$$\langle v_x^2 \rangle (R, \theta) = \frac{1}{3} \dot{\gamma}^2 R^2 \quad (3.10)$$

Cette loi d'échelle est différente de celles observées dans les écoulements granulaires sur un plan rugueux pour des empilements 2D [15] et 3D [158] : dans ces expériences, $\langle v_x \rangle$ semble plutôt varier en $R^{3/2}$ et dépendre de θ ¹². Une loi d'échelle similaire à la nôtre a été cependant rapportée par Rajchenbach *et al.* (1993) [174, 173, 172, 171] pour

¹²Ces lois d'échelles observées sur les plans inclinés sont loin de faire l'unanimité [186, 69]. Elles semblent dépendantes de la nature du fond, de celle des grains, de la hauteur de l'écoulement... Cette extrême variabilité dans les observations renforce justement nos remarques sur l'opportunité de relations rhéologiques locales et univoques

des écoulements 2D en tambour tournant. Cela tend à confirmer l'importance des effets de fond dans la sélection du type de profil et remet en question l'opportunité des relations constitutives utilisées traditionnellement en mécanique des sols reliant contraintes et déformations. Cette remise en cause est discutée plus attentivement au chapitre 4.

Cependant, d'après Rajchenbach *et al.*, $\dot{\gamma}$ varie en $\sqrt{\sin \theta}$, ce qui semble incompatible avec nos observations. Notons cependant que, dans leurs expériences, θ varie de 30° à 50° , ce qui correspond à des variations de $\sqrt{\sin \theta}$ de 0.71 à 0.88. Une géométrie purement 2D, relativement ordonnée, engendre par ailleurs des barres d'erreurs bien plus importantes que dans une géométrie quasi-2D. La différence entre $\dot{\gamma}$ constant et $\dot{\gamma}$ variant en $\sqrt{\sin \theta}$ est par conséquent trop petite pour pouvoir être distinguée dans les expériences de Rajchenbach et les nôtres. Nous maintenons donc notre hypothèse d'un gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ constant, que nous confirmerons dans la section suivante.

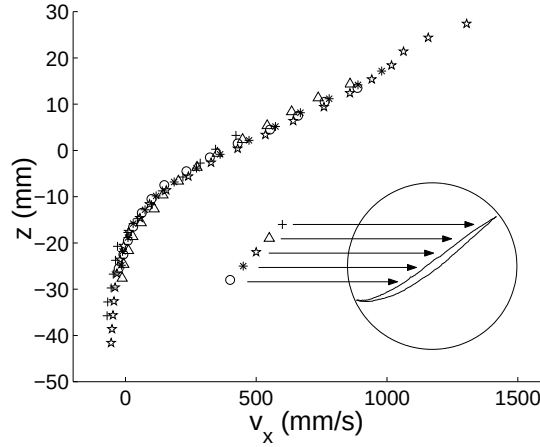


FIG. 3.5 – Profil de vitesse tangentielle $v_x(z)$ à cinq positions différentes pour $\Omega = 6$ tr/min. On translate suivant $\vec{e}_z$ pour faire coïncider les interfaces. La superposition des profils confirme l'invariance du gradient de vitesse $\dot{\gamma}$.

3.3 Echelle macroscopique : mesure des profils d'épaisseur de la couche en mouvement et de la pente locale de l'interface

Contrairement aux deux premières relations de fermeture, nous ne pouvons pas mesurer directement la force F s'appliquant sur les billes visualisées. Nous nous proposons donc de déterminer F indirectement à partir de mesures globales des profils $R(x)$ et $\theta(x)$. Notons par ailleurs que ces mesures nous permettent aussi de calculer la forme de la première relation de fermeture.

La couche en mouvement est repérée à l'aide du traitement d'images décrit dans le

chapitre 2, section 2.2. Nous pouvons en extraire les profils d'interface et de surface libre, donnés respectivement par les fonctions $H(X)$ et $S(X)$ dans le référentiel du laboratoire (cf. figure 3.6). La coordonnée curviligne $x(X)$, l'angle local $\theta(X)$ et l'épaisseur de la couche en mouvement $R(X)$ peuvent ensuite être calculés (cf. section 2.2 chapitre 2).

Sur la partie haute du tambour, il existe toute une plage $\mathcal{L}_\Omega$ d'extension décroissant avec Ω où R varie tandis que θ reste constant : $\theta \simeq \overline{\theta}_\Omega$ (cf. figure 3.6). En se restreignant à cette plage, on peut donc étudier les variations des différentes variables en fonction de R à un angle $\overline{\theta}_\Omega$ fixé, réglable en modifiant Ω .

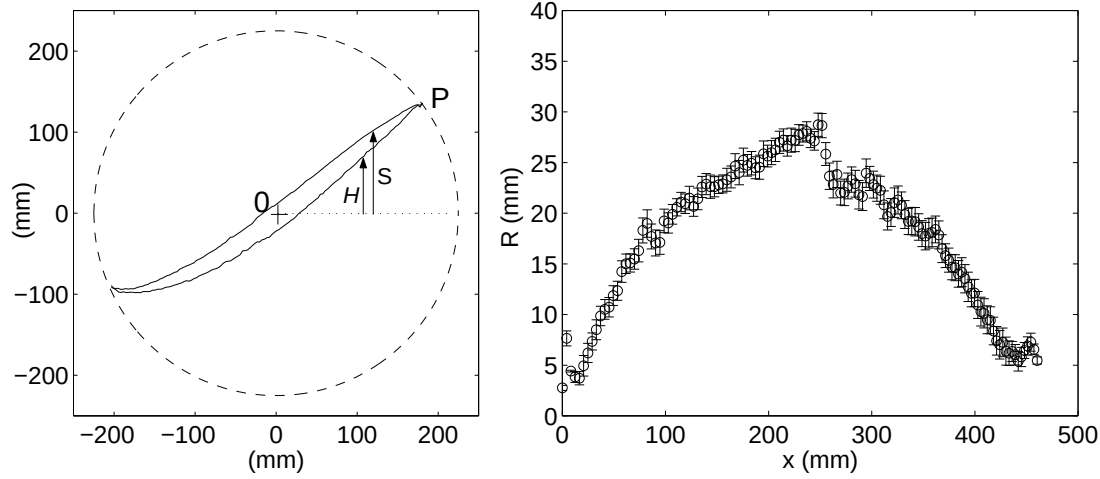


FIG. 3.6 – Profils typiques obtenus pour $\Omega = 3$ tr/min. A gauche : profils de la séparatrice $H(X)$ et de la surface libre $S(X)$ (dans le référentiel du laboratoire). On peut voir une plage importante $\mathcal{L}_\Omega$ dans la partie haute du tambour où la pente locale varie peu. A droite : variation de l'épaisseur roulante $R(x)$, x étant l'abscisse curviligne.

3.3.1 Confirmation de la loi d'échelle sur la vitesse moyenne $\langle v_x \rangle$

On va, dans un premier temps, confirmer la première relation de fermeture (équation 3.9) établie dans la section précédente. A partir des profils expérimentaux $X(x)$, $H(x)$, $\theta(x)$ et $R(x)$, on peut calculer $\langle v_x \rangle(x)$ en intégrant l'équation 3.5. La figure 3.7 montre les variations de $\langle v_x \rangle$ en fonction de $\dot{\gamma}R/2$, $\dot{\gamma}$ fixé à $\dot{\gamma} = 34 \text{ s}^{-1}$ comme suggéré dans la section précédente. Les deux expressions sont égales, ce qui confirme la relation 3.9 au moins vis à vis de la variation suivant R .

Intéressons nous maintenant à la variation du gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ suivant θ . Pour cela, nous devons prendre en compte les profils dans l'ensemble du tambour. Typiquement, pour $\Omega = 6$ tr/min, θ varie de 0° à 48° . La procédure est la suivante : à partir du profil de la séparatrice $H_{exp}(X)$ mesuré expérimentalement, nous pouvons déduire $X(x)$, $H(x)$,

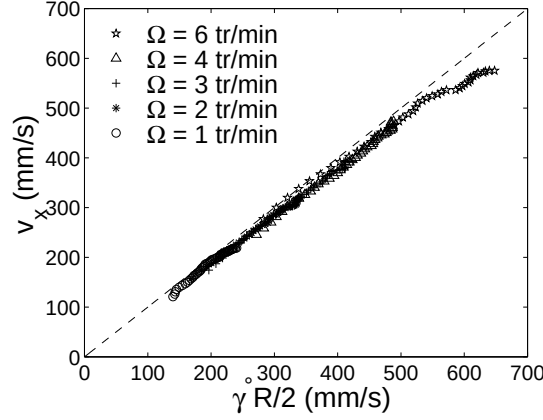


FIG. 3.7 – Vitesse de dérive moyenne $\langle v_x \rangle$ en fonction de $\dot{\gamma} R/2$ sur $\mathcal{L}_\Omega$. On a remplacé la pente locale $\theta(x)$ par sa valeur moyenne $\bar{\theta}_\Omega$.

$\theta(x)$, puis, par intégration de l'équation 3.5, le débit $\{R \langle v_x \rangle\}(x)$. On calcule alors les profils $R_{th}^{(a)}(x)$, $R_{th}^{(b)}(x)$ et $R_{th}^{(c)}(x)$ en supposant respectivement :

- (a) $R \langle v_x \rangle = pR^2$, ce qui correspond à un gradient de vitesse indépendant de θ
- (b) $R \langle v_x \rangle = pR^2 \sqrt{\sin \theta}$, ce qui correspond à un gradient de vitesse en $\sqrt{\sin \theta}$ comme suggéré par Rajchenbach *et al.*
- (c) $R \langle v_x \rangle = pR^2 \sqrt{\cos \theta}$, ce qui correspond à un gradient de vitesse en $\sqrt{\cos \theta}$ comme suggéré par Orpe et Khakhar (2001) [152].

Ces trois profils sont ensuite comparés au profil expérimental $R_{exp}(x)$ (cf. figure 3.8). Le paramètre p est ajusté de façon à minimiser l'écart entre profils théoriques et expérimentaux. Le scénario (a) conduit à de meilleurs ajustements. La valeur de p vaut alors $p \simeq 14 \text{ s}^{-1}$, soit environ 20% plus petite que $\dot{\gamma}/2$. La différence peut s'expliquer de la manière suivante : le gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ a été déterminé à partir des vitesses des seules billes en contact avec le hublot tandis que le calcul de p prend en compte l'ensemble des billes. Nous en discuterons plus loin, section 3.5.

Les différences entre (a) et (c) ne sont pas flagrantes. Les expériences de Orpe et Khakhar, menées pour toutes sortes de matériaux, semblent montrer une faible variation du gradient de vitesse avec θ . Cependant, ces mesures sont indirectes. Nous verrons par la suite qu'elles peuvent aussi s'expliquer par la prise en compte des effets de parois tout en gardant $\dot{\gamma}$ constant.

3.3.2 Mesure expérimentale de la force F

Maintenant que nous nous sommes convaincus de la validité de la première relation de fermeture donnée par l'équation 3.9 (et *à fortiori* de la deuxième donnée par 3.10), nous allons déterminer la dernière. Intéressons-nous à l'équation de conservation de quantité

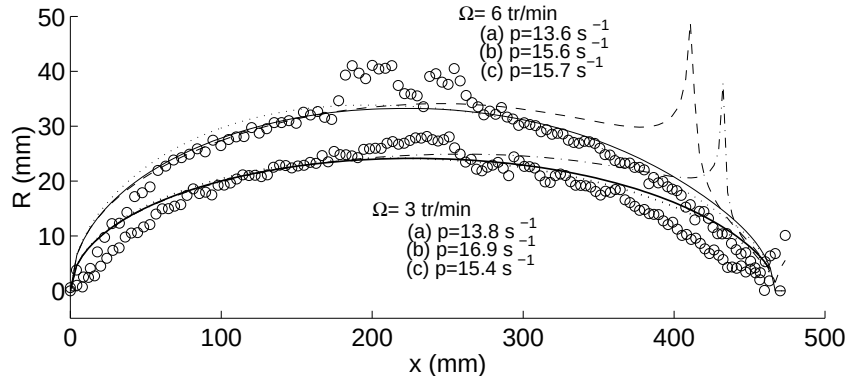


FIG. 3.8 – Vérification de la loi d'échelle sur $\langle v_x \rangle$. Les trois profils $R_{th}^{(a)}(x)$, $R_{th}^{(b)}(x)$ et $R_{th}^{(c)}(x)$ sont calculés à partir du profil expérimental H_{exp} en supposant respectivement (a) $\langle v_x \rangle = pR$ (ligne pleine), (b) $\langle v_x \rangle = pR\sqrt{\sin \theta}$ (mixte) ou (c) $\langle v_x \rangle = pR\sqrt{\cos \theta}$ (pointillé). Ils sont ensuite comparés au profil expérimental $R_{exp}(x)$. Dans tous les cas, p est choisi de manière à minimiser $|R_{th} - R_{exp}|$.

de mouvement : l'évaluation numérique du deuxième terme du membre de gauche de l'équation 3.6 montre qu'il est négligeable devant le premier terme. On peut donc le négliger. A partir de l'équation 3.5, de l'équation 3.6 ainsi simplifiée et des deux relations de fermeture 3.9 et 3.10, on déduit l'expression de la force F :

$$\frac{F}{\rho} = \dot{\gamma} R \Omega \left(H \sin \theta + X \cos \theta \right); \quad (3.11)$$

On peut alors, à partir des profils expérimentaux de X , H , θ et R déterminer F . On se restreint à nouveau à la plage $\mathcal{L}_\Omega$ sur laquelle $\theta \simeq \overline{\theta}_\Omega$. La figure 3.9 montre la variation de $F/\rho\dot{\gamma}R$ avec R pour différents θ . La quantité $F/\rho\dot{\gamma}R$ décroît paraboliquement avec R :

$$\frac{F}{\rho\dot{\gamma}R} = F_1(\theta) - F_2(\theta)R^2 \quad (3.12)$$

3.3.3 Modélisation de la force F

Comment peut-on comprendre cette dépendance ? La construction d'une force F minimale doit inclure :

1. un terme de gravité : $F_G = \rho g R \sin \theta$
2. un terme de pression : $F_P = -\rho k g \frac{dR}{dx} \cos \theta$ [157]. Pour des écoulements de surface, on a R de l'ordre de $10d$. Par conséquent, F_P est d'ordre $10d/L$ par rapport à F_G (L étant l'échelle de variation macroscopique : $L \simeq D_0$). A l'échelle continue, dans le

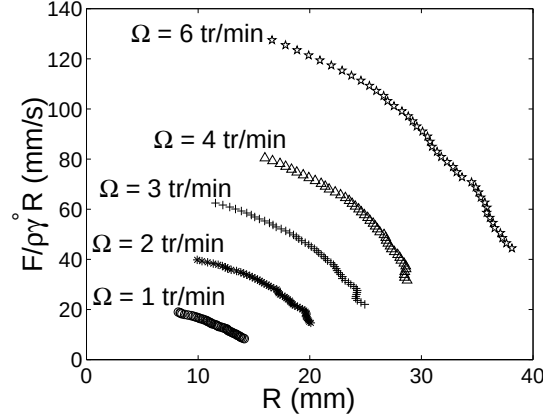


FIG. 3.9 – Variation de la force $F/\rho\dot{\gamma}R$ vs. R pour différents Ω , *i.e.* différents $\overline{\theta_\Omega}$.

cas d'écoulements de surface pleinement développés, cette force peut par conséquent être négligée ¹³.

3. un terme de friction de la phase roulante sur le lit statique : $F_{fr,S} = -\mu\rho gR \cos \theta$. *A priori*, μ dépend de R et θ . Néanmoins, les expériences de Daerr (2000) [51] semblent montrer que μ devient constant dès que R dépasse quelques diamètres de billes. Dans notre cas, nous pouvons donc considérer μ comme constant : $\mu = \tan \Phi$ où Φ est l'angle de friction interne du matériau ¹⁴.
4. un terme de friction sur les parois latérales : $F_{fr,P} = \rho \int_0^R \sigma_{fr,P} dz$ où $\sigma_{fr,P}(z)$ est la contrainte exercée par les parois sur la couche en mouvement comprise entre les ordonnées z et $z + dz$.

Les termes 1 et 3 contrôlent $F_1(\theta)$, mais ne permettent pas de rendre compte de la variation de $F/\rho\dot{\gamma}R$ avec R . Celle-ci est donc entièrement gouvernée par les bords. A partir du F expérimental et de la connaissance de la forme de F_G et $F_{fr,S}$, on peut déduire $F_{fr,P}$ par soustraction. La figure 3.10 représente la variation de $F_{fr,P}$ avec R pour différents $\overline{\theta_\Omega}$. Ce terme $F_{fr,P}$ dépend peu de $\overline{\theta_\Omega}$ et varie en R^3 .

Cette dépendance peut se comprendre à l'aide du raisonnement suivant : la contrainte $\sigma_{fr,P}(z)$ exercée par la paroi sur la couche comprise entre z et $z + dz$ vaut $\sigma_{fr,P}(z') = \nu \delta p$ où ν est la fréquence des collisions bille/paroi et δp la quantité de mouvement (projetée sur $\vec{e}_x$) perdue à chaque collision. Comme ρ est constant, le libre parcours moyen est constant et $\nu \propto \rho v_x(z)$. Chaque collision avec la paroi est inélastique. Par conséquent, on a aussi $\delta p \propto v_x$. On peut donc écrire :

¹³Ce terme devient par contre important dans les situations où R est nulle à certains endroits. Il est par exemple crucial si on cherche à décrire le déclenchement des avalanches et la forme des fronts associés [51, 39].

¹⁴Notons que dans nos expériences, $\Phi \simeq \theta_{start} \simeq \theta_{stop}$, θ_{start} et θ_{stop} désignant respectivement l'angle de démarrage et l'angle d'arrêt d'une avalanche (cf. chapitre 1). La distinction entre ces angles est cruciale pour comprendre les régimes intermittents, mais disparaît quand l'écoulement devient stationnaire.

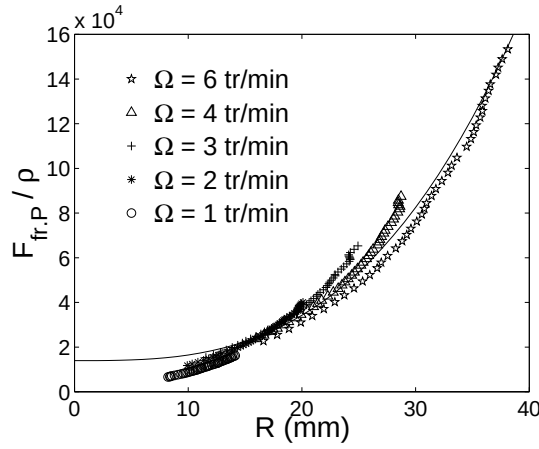


FIG. 3.10 – Force de frottement exercée par les parois latérales. La ligne pleine correspond à un ajustement à partir de l'équation 3.14 (translaté verticalement) : $\eta \simeq 10 \text{ m}^{-1}$.

$$\sigma_{fr.P} = -\eta \rho v_x^2 = -\eta \rho \dot{\gamma}^2 z^2 \quad (3.13)$$

et, après intégration sur la couche en mouvement :

$$F_{fr.P} = -\frac{1}{3} \eta \rho \dot{\gamma}^2 R^3 \quad (3.14)$$

Cette dernière relation permet de reproduire la forme des courbes expérimentales $F_{fr.P}(R)$ obtenues pour les différents $\overline{\theta_\Omega}$. Dans notre expérience, on trouve $\eta \simeq 10 \text{ m}^{-1}$. L'ordre de grandeur de η peut être compris de la manière suivante : la quantité de mouvement perdue par chaque collision est de l'ordre de $(1 - e)$ où e est le coefficient de restitution. Pour nos billes, $e \simeq 0.91$. Le libre parcours moyen est de l'ordre de grandeur du diamètre des billes d . On s'attend donc à avoir $\eta \simeq (1 - e)/d \simeq 10 \text{ m}^{-1}$, ce qui est compatible avec la valeur déterminée expérimentalement.

Finalement, la dernière relation s'écrit :

$$F = \rho g R \sin \theta - \mu \rho g R \cos \theta - \frac{1}{3} \eta \rho \dot{\gamma}^2 R^3 \quad (3.15)$$

où le premier terme du membre de droite correspond au poids de la couche, le deuxième terme correspond à la force de frottement exercée par le lit statique et le troisième terme correspond au frottement exercé par les parois latérales.

3.4 Discussion du modèle obtenu

Les équations de conservation (3.1,3.2) auxquelles on rajoute les relations de fermeture 3.9, 3.10 et 3.15 forment un système complet d'équations. Appliquons ce système à la description des écoulements de surface non homogènes et instationnaires représentés figure 3.1. La vitesse $\vec{v}_{z=-R}$ des grains statiques au niveau de l'interface s'écrit alors :

$$\vec{v}_{z=-R} = \frac{\partial H}{\partial t} \vec{e}_z \quad (3.16)$$

Et le système d'équations (3.1,3.2) complété par les équations 3.9, 3.10 et 3.15 peut maintenant s'écrire :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + V \frac{\partial R}{\partial x} = \Gamma \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\Gamma \quad (3.18)$$

avec :

$$V = 2 \langle v_x \rangle = \dot{\gamma} R \quad (3.19)$$

$$\Gamma = \frac{F}{\rho \dot{\gamma} R} = \frac{g}{\dot{\gamma}} (\sin \theta - \mu \cos \theta) - \frac{1}{3} \eta \dot{\gamma} R^2 \quad (3.20)$$

$$\theta = \text{atan} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad (3.21)$$

Ce système d'équations contient trois paramètres constants : le gradient de vitesse $\dot{\gamma}$, le coefficient de friction μ et le paramètre η caractérisant la friction sur les parois latérales. Ces trois paramètres dépendent des caractéristiques microscopiques des billes comme leur diamètre, leur coefficient de restitution, leur coefficient de friction microscopique ou de l'espacement entre les deux parois latérales. Comparons maintenant le modèle obtenu avec les descriptions continues proposées actuellement et présentées de manière plus détaillées dans la section B.2 de l'annexe B.

Notre modèle est très proche de celui proposé par Douady *et al.* (1999) [62]. Ils supposent en effet un profil de vitesse linéaire avec un gradient constant comme observé dans

notre expérience. Par ailleurs, les variations globales de la force F avec R et θ deviennent similaires à celles que nous avons observées. Les auteurs attribuaient cependant la variations de $F/\rho\dot{\gamma}R$ avec R à une dépendance du coefficient de friction effectif μ avec R plutôt qu'à un effet de paroi comme nous l'avons fait. Daerr (2000) [51] a par la suite proposé une version amendée considérant un coefficient de friction indépendant de R .

Khakhar, Orpe et leurs collaborateurs (2001) [107, 152] ont également proposé un modèle dérivé du cadre de Saint-Venant très proche du nôtre. Ils proposent un profil de vitesse linéaire, mais avec un gradient dépendant de θ . Ils attribuent alors la variation de $F/\rho\dot{\gamma}R$ avec R à une composante collisionnelle de la contrainte exercée par les grains roulants sur le lit statique plutôt qu'à un effet de paroi.

Un autre modèle a été proposé par Bouchaud *et al.* (1994) [24]. Le modèle originel, cherchant à décrire le déclenchement des avalanches, considère des couches en mouvement d'épaisseur fine, avec $R \leq d$. Il ne peut pas être comparé au nôtre. Ce modèle a par la suite été étendu au cas d'écoulements épais par Bouteux *et al.* (1998) [29]. Ces deux modèles supposent une vitesse d'advection V constante. Ils considèrent par ailleurs que θ reste au voisinage de l'angle de repos θ_{stop} et relie le terme de couplage Γ à l'effet des collisions des grains en mouvement sur le lit statique. Pour des écoulements minces [24], tous les grains en mouvement sont supposés être en contact avec le lit statique et avoir la même probabilité d'interagir avec celui-ci : $\Gamma = aR(\theta - \theta_{stop})$ avec a constant. Pour des écoulements épais, seuls les grains des premières couches en mouvement peuvent interagir avec le lit statique. L'influence des autres grains est écrantée par ceux-ci. Les auteurs proposent alors d'écrire $\Gamma = a(\theta - \theta_{stop})$ avec a constant. Cette dernière forme est compatible avec notre modèle si on se restreint à un développement limité au premier ordre en $\theta - \Phi$ ¹⁵. La valeur de la constante a peut alors être déduite (voir aussi [62, 107]) : $a = g \cos \Phi / \dot{\gamma}$. Notons que ces modèles permettent, grâce à leur simplicité, des résolutions analytiques *exactes* [131, 60, 194]. Considérer V constant leur interdit cependant d'être en mesure de rendre compte quantitativement des amplitudes des avalanches [10] ou de la forme des fronts d'avalanches [39].

3.5 Sur les différents paramètres du modèle

Les relations de fermeture font intervenir trois paramètres indépendants de R et θ : le premier paramètre est le gradient de vitesse $\dot{\gamma}$. Les deux autres paramètres, le coefficient de friction statique $\mu = \tan \Phi$ et le paramètre η , caractérisant le frottement des billes sur les parois latérales sont nécessaires à la description de la force F . Ces trois paramètres dépendent à priori du comportement microscopique des grains.

Nous nous proposons dans cette section de voir dans quelle mesure ces trois paramètres dépendent de la nature des grains et de l'écartement des parois. Nous avons donc réalisé

¹⁵Rappelons que dans nos expériences, on a $\theta_{start} = \theta_{stop} = \Phi$.

différentes expériences avec des billes sphériques de même diamètre, mais constituées de matériaux différents : des billes d'acier peu dissipatives et extrêmement lisses et des billes d'aluminium plus dissipatives et plus rugueuses. Dans un deuxième temps, l'écartement ℓ entre les parois latérales a été modifié : il vaut successivement 7, 11, 14 et 22 mm.

Pour ces différentes expériences, le gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ est évalué à partir de la mesure directe des profils de vitesse au centre du tambour. Nous pourrions reprendre la méthode exposée section 3.3 pour déterminer les deux paramètres Φ et η intervenant dans la fonction $F(R, \theta)$. Nous n'avons cependant pas suivi cette voie. La relation liant la pente de la surface libre θ_s au centre du tambour à Ω dépend en effet explicitement de ces deux paramètres (voir plus bas). La détermination expérimentale de la courbe $\theta_s(\Omega)$ fournit alors une méthode nettement plus rapide que celle développée dans la section 3.3 pour évaluer Φ et η .

3.5.1 Pente de la surface libre en fonction de la vitesse de rotation : détermination directe des paramètres décrivant la force F

Une des applications possibles du modèle obtenu est de prédire la variation de la pente de la surface libre θ_s au centre du tambour en fonction de Ω . Au centre du tambour, on a en effet, $d_x R \simeq 0$. Par conséquent, $\theta_s \simeq \theta(x = 0)$. Par ailleurs, la rotation solide $\vec{v}_{z=-R}$ est nulle au centre du tambour. La force F est donc égale à zéro et :

$$\tan \theta_s = \mu + \frac{1}{3} \eta \dot{\gamma}^2 \frac{R_O^2}{\cos \theta_s} \quad (3.22)$$

où R_O est l'épaisseur de la couche en mouvement au centre O du tambour. Celui-ci est à moitié rempli. En supposant que la déformation de la surface libre est petite, on a :

$$X \simeq \left(\frac{D_0}{2} - x \right) \cos \theta \quad (3.23)$$

$$H \simeq \left(\frac{D_0}{2} - x \right) \sin \theta. \quad (3.24)$$

et, par conséquent, l'équation 3.1 devient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \dot{\gamma} R^2 = -\Omega \left(\frac{D_0}{2} - x \right) \quad (3.25)$$

et R_O peut alors être calculé :

$$R_O \simeq \left(\frac{D_0^2}{4\dot{\gamma}} \Omega \right)^{1/2} \quad (3.26)$$

Le débit au centre du tambour est donc proportionnel à Ω et peut ainsi être contrôlé. Des équations 3.22 et 3.26, on déduit :

$$\tan \theta_s = \mu + \frac{\eta a D_0^2}{12} \frac{\Omega}{\cos \theta_s} \quad (3.27)$$

Cette dernière relation est tout à fait en accord avec les mesures expérimentales (cf. figure 3.11). Le coefficient η obtenu par cet ajustement vaut $\eta \simeq 10.7 \text{ m}^{-1}$, ce qui apparaît compatible avec la valeur mesurée dans la section précédente. Connaissant le gradient de vitesse $\dot{\gamma}$, cette courbe permet de déterminer facilement, sans traitement d'images sophistiqué, les deux paramètres μ et η nécessaires à la description de la force F .

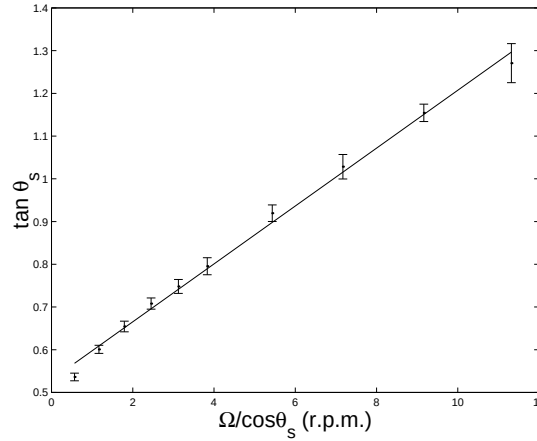


FIG. 3.11 – Variation de la pente de la surface libre en fonction de la vitesse de rotation Ω . La ligne droite correspond à un ajustement suivant l'équation 3.27. Le coefficient de friction vaut alors $\mu \simeq 0.52$, ce qui correspond à un angle de friction interne $\Phi \simeq 27.9^\circ$, et $\eta \simeq 10.7 \text{ m}^{-1}$.

3.5.2 Influence du matériau constituant les billes

La figure 3.12 présente les profils de vitesse mesurés au centre du tambour pour différentes vitesses de rotation Ω . Lorsque les billes d'acier sont remplacées par des billes d'aluminium, les profils de vitesse restent linéaires avec le *même* gradient de vitesse $\dot{\gamma}$. Ce résultat est extrêmement important. Nous y reviendrons plus en détail dans le chapitre 4 : le gradient de vitesse est par conséquent indépendant du matériau constituant les billes, de leur coefficient de restitution e et du coefficient de friction microscopique μ_b .

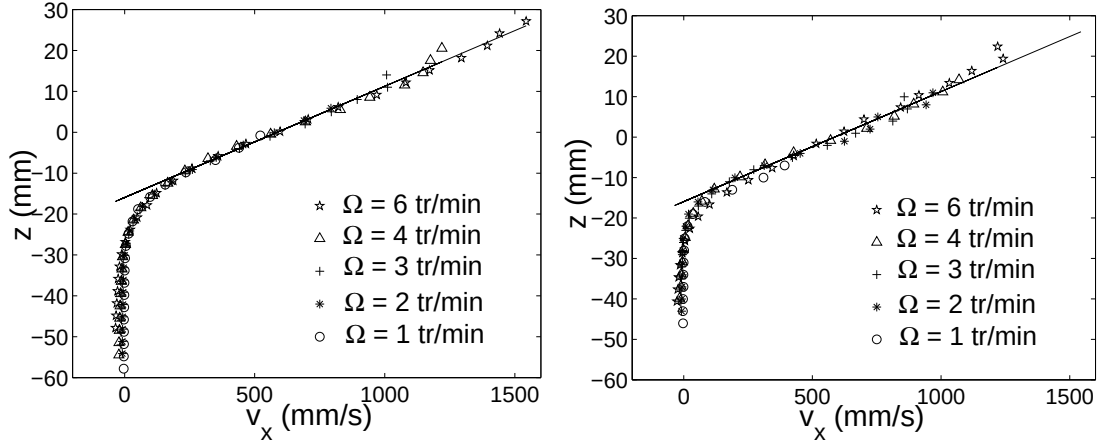


FIG. 3.12 – Influence du matériau constitutif des billes sur le gradient de vitesse. Les différents profils de vitesses correspondent à différents Ω . A gauche, profil pour des écoulements de billes d’acier, à droite, écoulement pour des billes d’aluminium.

Notons que cette indépendance avait déjà été remarquée par Rajchenbach (2000) [171] dans les écoulements stationnaires en tambour tournant à la surface d’un empilement purement 2D. Très récemment, Orpe et Khakhar (2001) [152] ont aussi montré que la forme de la couche en mouvement, où les longueurs sont adimensionnées par le diamètre D_0 du tambour dépend uniquement du nombre de Froude $Fr = \Omega^2 D_0 / 2g$ et pas de la nature des grains. Les simulations numériques d’écoulements sur plan incliné rugueux d’Azanza (1997) [15] semblent aller dans le même sens : dès que le coefficient de restitution devient plus petit qu’une certaine valeur critique égale à 0.7, le profil de vitesse devient indépendant de ce coefficient.

Cette indépendance invalide les approches basées sur la théorie cinétique : celles-ci prédisent une dépendance nette des paramètres de transport, et par conséquent du gradient de vitesse avec $\dot{\gamma}$. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 4.

Les deux paramètres caractérisant la force F , à savoir le coefficient de friction, - ou plutôt l’angle de friction interne Φ de l’empilement -, et le paramètre η sont plus élevés pour des billes d’aluminium que pour des billes d’acier. Ceci n’a rien d’étonnant : on s’attend effectivement à ce que la mise en mouvement d’une couche de billes soit plus difficile et nécessite une inclinaison plus importante quand le coefficient de friction microscopique μ_b des grains augmente. Les chocs bille/paroi dissipent par ailleurs d’autant plus de quantité de mouvement que la collision est dissipative, *i.e.* que le coefficient de restitution e est petit.

Remarquons cependant que le raisonnement simple proposé dans la section 3.3 laisse prévoir que η varie en $(1-e)$. Compte tenu des valeurs de e mesurées, cette variation prédit un η six à sept fois supérieur pour des billes d’aluminium que pour des billes d’acier (cf. tableau 3.1). Or le rapport obtenu expérimentalement est beaucoup plus petit et tourne autour de deux (cf. tableau 3.1). Le raisonnement tenu section 3.3 est trop simpliste et

	Acier	Aluminium
Coefficient de friction microscopique μ_b	0.2	0.4
Coefficient de Restitution normal e	0.92	0.46
Gradient de vitesse $\dot{\gamma}$	35 s^{-1}	35 s^{-1}
Angle interne Φ	27.9°	36.4°
paramètre η	10.7 m^{-1}	20.7 m^{-1}

TAB. 3.1 – Comparaison des paramètres caractérisant les relations de fermeture pour des empilements de billes d’acier et des empilements de billes d’aluminium. L’écartement entre les deux parois latérales du tambour est fixé à 7 mm.

ne permet donc pas de rendre compte de cette variation $\eta(e)$. Une amélioration possible consisterait à introduire un coefficient de restitution *tangentiel* e_t pour traduire la perte de moment cinétique lors d’une collision [75]. Ce coefficient e_t est une fonction croissante de e et μ_b . Or, si e est plus grand pour des billes d’acier que pour des billes d’aluminium, c’est l’inverse pour μ_b . Il apparaît donc difficile de comparer les valeurs de e_t , et par conséquent les valeurs de η , pour les deux types de billes.

3.5.3 Influence de l’espacement entre les parois

Nous nous sommes dans un deuxième temps intéressés à l’influence de l’espacement ℓ entre les parois latérales sur ces trois paramètres. Le gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ *décroît* avec ℓ (cf. tableau 3.2 et figure 3.13a). Cela peut sembler assez paradoxal : plus ℓ est grand, moins la fraction de billes en contact avec les parois est grande, et *a fortiori* moins les effets de frottement sur les parois devraient se faire ressentir. $\dot{\gamma}$ devrait donc croître. En fait, augmenter ℓ a aussi pour effet d’augmenter la densité ¹⁶. Pour $\ell = 7 \text{ mm}$, la compacité mesurée juste après remplissage du tambour est $\nu = 0.57$ alors que pour $\ell = 22 \text{ mm}$, $\nu = 0.60$. Cette augmentation de la densité va vers une augmentation de la dissipation à chaque collision et donc à une diminution de $\dot{\gamma}$.

Ecartement ℓ	7 mm	11 mm	14 mm	22 mm
Gradient de vitesse $\dot{\gamma}$	35 s^{-1}	28 s^{-1}	29 s^{-1}	28 s^{-1}
Angle interne Φ	27.9°	23.1°	21.9°	21.3°
paramètre η	10.7 m^{-1}	8.7 m^{-1}	7.9 m^{-1}	7 m^{-1}

TAB. 3.2 – Influence de l’écartement sur les paramètres caractérisant les relations de fermeture pour des empilements de billes d’acier.

L’angle de friction interne Φ décroît avec ℓ (cf. figure 3.13b). Grasselli et Herrmann (1997) [83] ont étudié précisément l’influence de parois sur la valeurs des angles de repos et de démarrage pour un empilement granulaire. Ils rapportent en particulier une

¹⁶Lorsque ℓ est petit, les billes ne peuvent se placer comme elles le souhaitent les unes par rapport aux autres. Elles se mettent en quinconce, ce qui conduit à un empilement de compacité assez faible.

décroissance exponentielle de ces angles avec ℓ . Nos mesures sont compatibles avec cette décroissance (cf. insert de la figure 3.13b).

Le paramètre η caractérisant le frottement des billes en mouvement sur les parois latérales décroît en loi de puissance $\eta \propto \ell^{-\alpha}$ avec un exposant $\alpha = 0.36$ (cf. figure 3.13c). Cet exposant est contradictoire avec le raisonnement tenu section 3.3 qui laisse supposer que cet effet de paroi ne concerne que les billes entrant en collision avec l'une des parois latérales. On s'attendrait alors à ce que η varie en ℓ^{-1} . La décroissance expérimentale apparaît beaucoup plus lente. Ces observations sont compatibles avec celles de Pouliquen et Forterre [160]. Elles laissent penser qu'une contribution purement collisionnelle est insuffisante pour rendre compte des effets de parois.

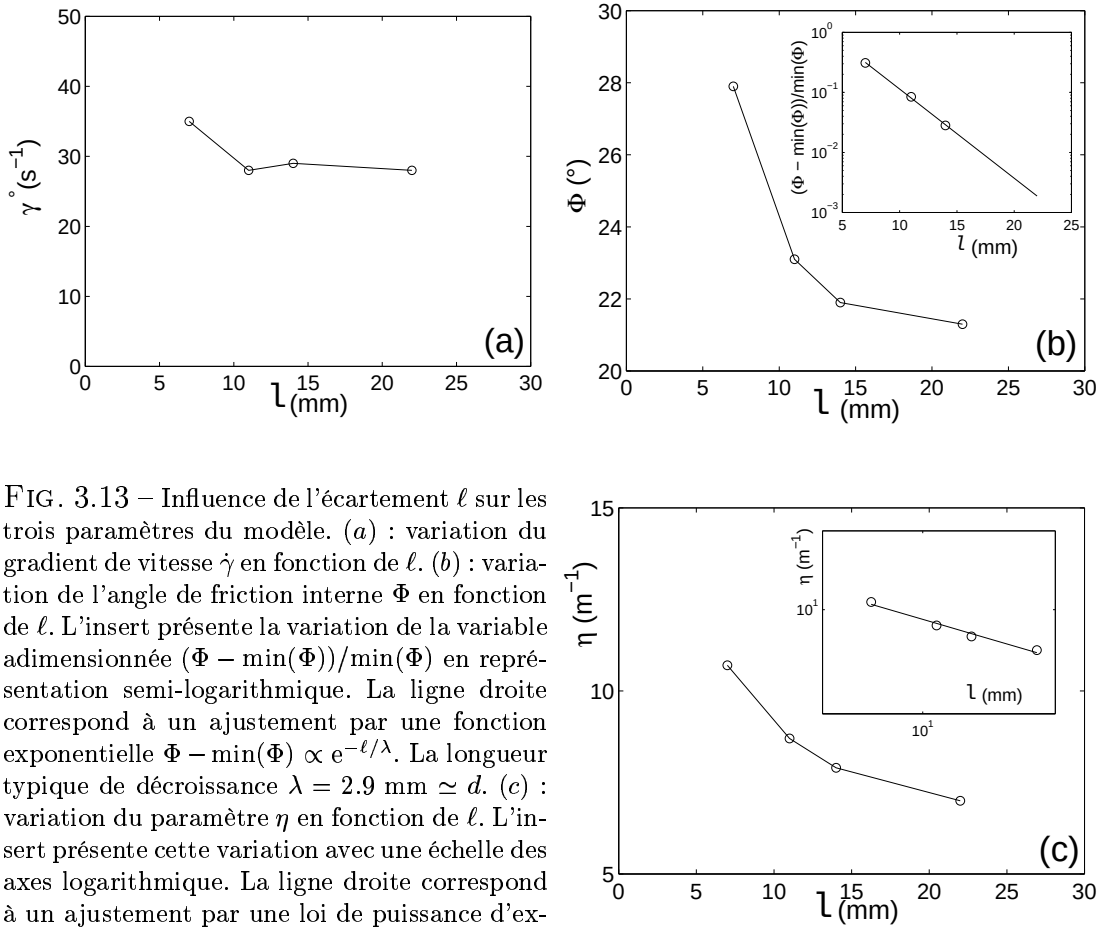


FIG. 3.13 – Influence de l'écartement ℓ sur les trois paramètres du modèle. (a) : variation du gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ en fonction de ℓ . (b) : variation de l'angle de friction interne Φ en fonction de ℓ . L'insert présente la variation de la variable adimensionnée $(\Phi - \min(\Phi))/\min(\Phi)$ en représentation semi-logarithmique. La ligne droite correspond à un ajustement par une fonction exponentielle $\Phi - \min(\Phi) \propto e^{-\ell/\lambda}$. La longueur typique de décroissance $\lambda = 2.9 \text{ mm} \simeq d$. (c) : variation du paramètre η en fonction de ℓ . L'insert présente cette variation avec une échelle des axes logarithmique. La ligne droite correspond à un ajustement par une loi de puissance d'exposant $\alpha = 0.37$.

3.6 Conclusion

Nous cherchions dans ce chapitre une description continue des écoulements de surface. Nous nous sommes placés pour cela dans le cadre des descriptions intégrées à la Saint-

Venant. Ce formalisme consiste à intégrer les équations de conservation sur la couche en mouvement, puis à fermer le système obtenu à l'aide de relations de fermeture judicieusement choisies.

Contrairement aux modèles proposés jusqu'alors [106, 68, 62, 107, 24, 29, 10], nous n'avons pas cherché à dériver ces relations de considérations théoriques. Nous avons plutôt choisi de les déterminer expérimentalement sans présupposer de leur forme. Nous avons appliqué pour cela le formalisme de Saint-Venant aux écoulements stationnaires obtenus en géométrie tambour tournant.

- Nous avons dans un premier temps mesuré les profils de vitesse tangentielle et les profils de compacité sur une tranche infinitésimale perpendiculaire à l'écoulement. Cela nous a permis de justifier, d'une part la possibilité de séparer l'empilement en deux phases, une phase en mouvement et une phase statique, et d'autre part l'hypothèse d'un écoulement incompressible. Dans la phase en mouvement, le profil de vitesse est linéaire avec un gradient constant. Les deux premières relations de fermetures, reliant la vitesse d'advection moyenne et l'énergie cinétique moyenne à l'épaisseur roulante et à la pente locale de l'interface s'en déduisent facilement.
- Nous avons dans un deuxième temps déterminé les profils macroscopiques de l'épaisseur roulante et de la séparatrice. Cela nous a permis de confirmer la forme des deux premières relations de fermeture, puis de trouver la dernière reliant la force s'exerçant sur la couche en mouvement à l'épaisseur roulante et à la pente locale de l'interface. Cette force est correctement décrite comme la somme de trois termes : un terme de gravité, un terme de friction statique et un terme lié au frottement sur les parois latérales.

Nous sommes alors en mesure de proposer un système complet d'équations décrivant les écoulements de surface ¹⁷. Ce modèle contient trois paramètres : le gradient de vitesse, le coefficient de friction interne du matériau et un troisième paramètre caractérisant le frottement de la couche en mouvement sur les parois latérales. Ce modèle a été ensuite comparé aux modèles continus existants. Les différences ont été discutées. Elles mettent en avant le rôle joué par les parois latérales.

Nous avons ensuite étudié les variations des trois paramètres avec la nature des grains et l'écartement entre les parois. Deux résultats paraissent assez surprenants :

- l'effet des parois décroît anormalement lentement avec l'écartement. Ce comportement a déjà été observé par Pouliquen et Forterre [160]. Nous ne sommes pas en mesure, à l'heure actuelle, d'en expliquer les raisons. Notre montage expérimental ne nous permet malheureusement pas d'étudier en détail cet effet : nous sommes en effet limité à des écartements inférieurs à 22 mm, *i.e.* inférieur à dix fois le diamètre d'une bille.
- le profil de vitesse est indépendant de la microstructure des billes, ce qui est incompa-

¹⁷Sous réserve que la couche en mouvement soit relativement épaisse et que l'empilement soit constitué de billes sphériques identiques

tible avec les relation rhéologiques locales de type visqueux généralement proposées pour décrire les écoulements de grains. La forme des profils de vitesse et le fait que le gradient est indépendant de l'épaisseur de la couche en mouvement et de la pente locale de l'interface renforce cette incompatibilité.

Nous nous proposons de discuter le deuxième point dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Interprétation microscopique : du grain à l'écoulement

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il était possible d'obtenir une description continue intégrée des écoulements de surface. Cette approche permet de rendre compte d'un certain nombre de comportements globaux. Elle ne peut cependant pas décrire des observations plus locales comme par exemple les profils de vitesse et de compacité. Par ailleurs, l'interprétation microscopique de cette description est loin d'être claire. L'observation la plus surprenante concerne la forme du profil de vitesse. Celle-ci est en effet incompatible avec une loi de comportement univoque et locale, de type visqueux. Nous en discuterons dans la section 4.1.

A dire vrai, plusieurs mécanismes pouvaient laisser présager une telle incompatibilité. D'une part, les collisions entre grains sont inélastiques. la perte d'énergie par collisions multiples tend à agglomérer les billes ¹⁸, ce qui peut engendrer d'importantes fluctuations de densité. D'autre part, la répartition des forces est souvent très inhomogène. Il existe des chaînes de forces, pouvant s'étendre sur une dizaine de grains, le long desquelles les contraintes se propagent préférentiellement.

L'observation d'agglomérats denses et de chaînes de force n'est pas nouvelle. L'instabilité d'agglomération est bien connue et observée couramment dans les gaz granulaires [79, 72] et les chaînes de forces peuvent être visualisées directement dans un empilement de grains photoélastiques, qu'il soit statique [55, 56, 197] ou en écoulement quasi-statique [90]. Ces objets collectifs n'ont en revanche jamais été mis en évidence - et *a fortiori* étudiés - dans le cas d'écoulements de surface. Notre matériau granulaire modèle présente l'avantage d'autoriser une étude expérimentale aux deux échelles, microscopique et macroscopique. Nous nous proposons dans ce chapitre d'observer et d'étudier

¹⁸Le coefficient de restitution effectif d'une bille avec un amas de billes en contact décroît en effet très rapidement avec la taille de l'amas. Cet effet peut s'observer en comparant la chute d'une bille très élastique et la chute d'un sac de billes identiques. La bille isolée rebondit très bien sur le sol tandis que le sac ne rebondit pas.

ces objets à partir des corrélations du champ de vitesse instantanée dans un premier temps (section 4.2) et des fluctuations du champ de compacité dans un deuxième temps (section 4.3).

Nous discuterons ensuite les implications de ces objets sur quelques modèles récents d'écoulements denses. Nous montrerons aussi comment ces objets permettent d'interpréter les différences rhéologiques entre écoulement sur plan incliné et écoulement de surface. Nous proposerons enfin une nouvelle interprétation de la couche en mouvement en terme de phase *partiellement* fluidisée dans un état critique, ce qui permet de comprendre la sélection d'un gradient de vitesse "universel", *i.e.* indépendant à la fois de l'angle moyen de l'écoulement, de l'épaisseur de la couche en mouvement et du coefficient de restitution des collisions bille/bille.

4.1 Implications de la forme des profils de vitesse

Plaçons-nous dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma} \quad (4.2)$$

où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla, $\vec{v}$ le vecteur vitesse, Σ le tenseur des contraintes, ρ la densité et $\vec{g}$ le vecteur gravité. Appliquons ces équations à un écoulement homogène stationnaire dans le référentiel $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ tangent à la surface libre¹⁹ :

$$\begin{aligned} \vec{v}(x, z, t) &= v_x(z) \vec{e}_x \\ \rho(x, z, t) &= \rho(z) \\ \frac{\partial \bullet}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \bullet &= \frac{d \bullet}{dz} \vec{e}_x \end{aligned} \quad (4.3)$$

¹⁹Nous ne pouvons pas parler d'écoulement homogène dans le cas du tambour tournant. Néanmoins nous avons vérifié que, au centre du tambour, les profils de vitesse et de compacité sont invariants par translation infinitésimale suivant $\vec{e}_x$. Nous considérerons par conséquent l'écoulement comme *quasi-homogène* au centre O du tambour au sens où $\partial \bullet / \partial x|_O \simeq 0$.

L'équation 4.1 de conservation de la masse est par conséquent automatiquement vérifiée et la projection de l'équation de conservation de quantité de mouvement donne :

$$\begin{aligned}\frac{d\Sigma_{xz}}{dz} &= -\rho g \sin \theta \\ \frac{d\Sigma_{zz}}{dz} &= \rho g \cos \theta\end{aligned}\tag{4.4}$$

et, si on considère des écoulements à surface libre peu compressibles ($\rho(z) \simeq \bar{\rho}$ constant), que ce soit sur plan incliné ou sur fond meuble, on obtient après intégration :

$$\begin{aligned}\Sigma_{xz} &= -g \sin \theta \int_0^z \rho(y) dy = -\bar{\rho} g z \sin \theta \\ \Sigma_{zz} &= g \cos \theta \int_0^z \rho(y) dy = \bar{\rho} g z \cos \theta\end{aligned}\tag{4.5}$$

Par conséquent, la contrainte de cisaillement et la pression varient linéairement avec la profondeur z . Or pour des fluides usuels, on relie généralement Σ_{xz} au gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ par une relation rhéologique de type visqueuse, univoque et locale. Ces deux faits sont incompatibles avec la forme des profils de vitesse mesurés expérimentalement. Trois raisons peuvent être avancées :

1. Nos mesures expérimentales (cf. figure 3.4), et celles effectuées par Rajchenbach (2000) [171] pour des écoulements purement 2D montrent que $\dot{\gamma}$, est constant dans la couche en mouvement alors que Σ_{xz} varie avec z .
2. Les profils de vitesse observés dans les géométries plans inclinés et écoulements de surface diffèrent, alors que les profils des contraintes donnés par les équations 4.5 sont les mêmes dans les deux cas. Par conséquent, les conditions aux limites d'interface, à savoir si les grains en mouvement roulent sur un lit fixe ou sur un lit composé de grains statiques éventuellement délogeables, semblent avoir une influence *non locale* sur la rhéologie interne de la couche en mouvement.
3. Pour un fluide classique, on s'attendrait à ce que $\dot{\gamma}$, s'annule quand Σ_{xz} s'annule à la surface libre, ce qui n'est clairement pas le cas ici (cf. figure 3.4).

Nous allons dans la suite tenter de mettre en évidence cette non-localité et d'en trouver l'origine physique.

4.2 Etude des corrélations spatiales du champ de vitesse instantanée

4.2.1 Mise en évidence d'agrégats de grains corrélés

Nous nous proposons d'étudier les corrélations spatiales du champ de vitesse instantanée déterminé précédemment. En appelant $\vec{c}(x, z, t)$ la vitesse à l'instant t d'une bille située au point de coordonnées (x, z) dans le référentiel $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ localement tangent à la surface libre ²⁰, on définit la partie fluctuante $\vec{\tilde{c}}$ de cette vitesse comme :

$$\vec{\tilde{c}}(x, z, t) = \vec{c}(x, z, t) - v_x(z)\vec{e}_x \quad (4.6)$$

La norme $\tilde{c}$ de cette fluctuation diminue avec la profondeur z dans la couche en mouvement, ce qui n'est pas le cas pour l'orientation $\vec{\tilde{n}}$ de ces fluctuations définie comme :

$$\vec{\tilde{n}} = \vec{\tilde{c}}/\tilde{c} \quad (4.7)$$

Nous nous sommes par conséquent plutôt intéressés aux champs instantanés de $\vec{\tilde{n}}(x, z, t)$ plutôt qu'aux champs de $\vec{\tilde{c}}$. La figure 4.1c représente un de ces champs et montre l'existence de *paquets* de billes extrêmement corrélées. Cette corrélation peut être quantifiée en regardant la distribution des angles δ entre les orientations $\vec{\tilde{n}}_i$ et $\vec{\tilde{n}}_j$ de deux billes en contact ²¹. Cette distribution, représentée figure 4.1d, montre que deux billes en contact ont tendance à avoir des fluctuations de vitesse orientées dans le même sens.

Pour isoler les agrégats de grains corrélés, nous avons utilisé le critère suivant : deux billes i et j appartiennent au même agrégat si :

1. elles sont en contact

²⁰Rappelons en effet qu'au centre du tambour, on considère l'écoulement comme quasi-homogène. En particulier, la surface libre est parallèle à l'interface. Le référentiel $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ utilisé dans les chapitres précédents et défini comme localement tangent à l'interface avec une origine située sur la surface libre coïncide alors avec un référentiel localement tangent à la surface libre.

²¹Nous avons vu dans le chapitre 2 que la précision sur la détermination expérimentale du barycentre des billes est de l'ordre de $150 \mu\text{m}$. Nous considérerons deux billes en contact quand la distance séparant les barycentres de deux billes est inférieure à 3.3 mm (le diamètre des billes étant, rappelons-le, $d = 3 \text{ mm}$). Ce critère ne pose pas de problème pour des empilements purement 2D. Il n'en est pas de même pour les empilements quasi 2D étudiés ici. En effet, la distance y entre une bille et le hublot est inconnue, et la distance entre la projection des barycentres de deux billes en contact dans le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ peut devenir inférieure à d . Cependant, l'étude de la distribution des distances séparant les billes de leurs plus proches voisins nous a convaincus que la plupart des billes vues par la caméra sont en contact avec le hublot. Nous avons donc conservé ce critère.

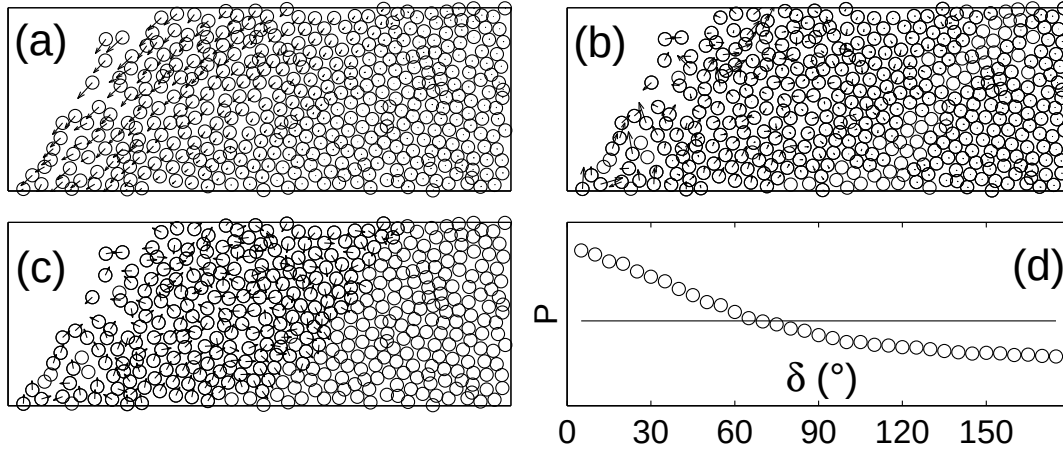


FIG. 4.1 – Procédure d'étude des corrélations spatiales sur les fluctuations de vitesse. (a) : champ de vitesse instantanée typique. On isole la partie fluctuante par rapport au profil de vitesse moyen. (b) : champ de fluctuations de vitesse instantanée ainsi obtenu. L'orientation de ces fluctuations n'étant pas corrélée avec la profondeur dans la couche, nous nous intéressons au champ de ces orientations instantanées représenté en (c). (d) : densité de probabilité $P(\delta)$ de l'angle δ entre les orientations de deux billes en contact. La ligne droite correspond à une distribution uniforme.

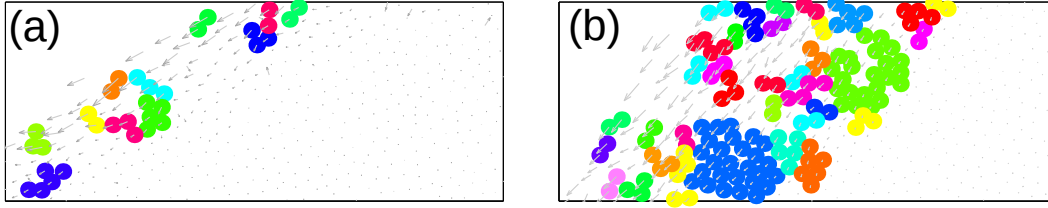


FIG. 4.2 – Images typiques des paquets de billes dont l'orientation des fluctuations de vitesse est corrélée. L'empilement est quasi-2D. (a) : $\Omega = 1$ tr/min (b) : $\Omega = 8$ tr/min. Deux billes appartenant au même paquet sont représentées de la même couleur. On a représenté en gris le champs de vitesse initial.

2. l'angle δ_{ij} entre leurs orientations respectives $\vec{n}_i$ et $\vec{n}_j$ est inférieur à un certain seuil choisi arbitrairement égal à 60° . Cette valeur correspond au point où la distribution $P(\delta)$ croise une distribution de type uniforme (voir figure 4.1d). Nous avons essayé plusieurs seuils compris entre 30° et 90° . Cela ne modifie pas les observations reportées plus bas.

Les agrégats isolés ainsi sont représentés figure 4.2. La taille des plus gros agrégats est comparable à l'épaisseur de la couche en mouvement et augmente avec la vitesse de rotation Ω du tambour. Ces agrégats sont transitoires, leur durée de vie étant de l'ordre de la milliseconde ²².

²²Cette durée de vie est donc comparable au temps séparant deux images successives.

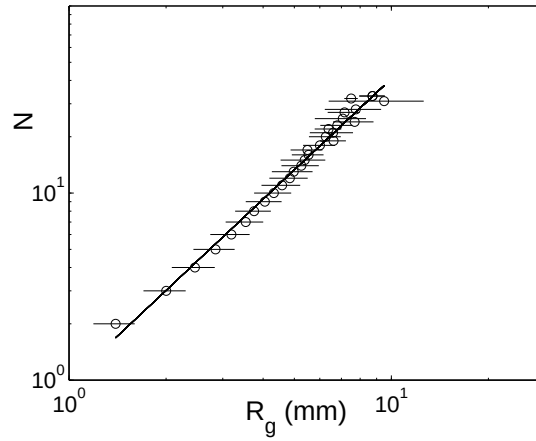


FIG. 4.3 – Dimension fractale des agrégats : taille (en nombre de billes N) d'un agrégat en fonction du rayon de giration moyen. Tous les agrégats obtenus pour différentes vitesses de rotation Ω ont été pris en compte. Les axes sont logarithmiques. Les barres d'erreurs indiquent l'écart type sur les rayons de giration obtenus pour des agrégats de taille N donnée. Le comportement en loi de puissance (ligne droite) est la signature d'une structure fractale de dimension donnée par la pente d_f de la droite : $d_f = 1.6 \pm 0.1$.

4.2.2 Etude statistique des agrégats

Pour caractériser la géométrie de ces agrégats, nous avons calculé leur rayon de giration R_g . Pour un agrégat donné, celui-ci est défini comme :

$$R_g = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i (x_i - x_a)^2 + (z_i - z_a)^2} \quad (4.8)$$

où (x_i, z_i) sont les coordonnées de la bille i appartenant à l'agrégat considéré de taille N (en nombre de billes) et dont la position du barycentre est donnée par (x_a, z_a) avec $x_a = \frac{1}{N} \sum_i x_i$ et $z_a = \frac{1}{N} \sum_i z_i$.

La figure 4.3 représente la variation de la taille N d'un agrégat en fonction de son rayon de giration. Le comportement en loi de puissance est la signature d'une structure fractale de dimension d_f donnée par l'exposant. Celle-ci vaut $d_f = 1.6 \pm 0.1$ ²³.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la distribution du nombre de billes N contenu dans un agrégat (cf. figure 4.4). Celle-ci suit une loi de puissance $P(N) \propto N^{-\alpha}$ avec un exposant $\alpha = 2.9 \pm 0.1$ indépendant de la vitesse de rotation Ω du tambour, *i.e.* indépendant de l'épaisseur R de la couche en mouvement et de l'angle moyen θ de l'écoulement. Cette loi de puissance s'étend de l'échelle microscopique - le diamètre d'une bille - à la plus petite échelle macroscopique - l'épaisseur roulante -. Ce résultat est très important

²³Cette dimension "fractale" est cependant à prendre avec des pincettes. En effet, la taille des agrégats ne s'étend que sur un ordre de grandeur !

car il signifie qu'aucune échelle de longueur typique ne peut être définie pour caractériser les corrélations du champ de vitesse instantanée. Cela remet en cause l'existence d'un volume élémentaire représentatif permettant de définir des grandeurs macroscopiques au sens de la mécanique des milieux continus.

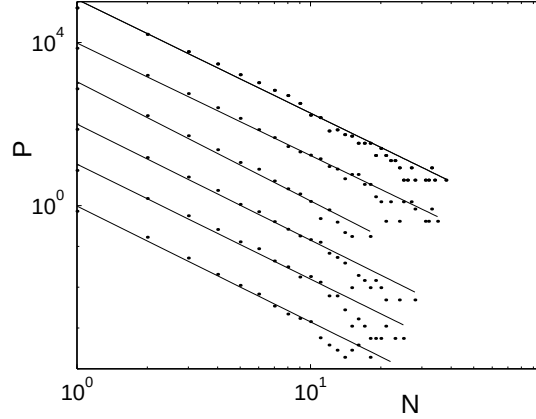


FIG. 4.4 – Densité de probabilité $P(N)$ d'observer un agrégat de taille N en nombre de billes pour différentes vitesses de rotation Ω du tambour, *i.e.* pour différentes valeurs d'épaisseur R de la couche en mouvement et d'inclinaison θ de la phase statique. Les axes sont logarithmiques. Les courbes ont été décalées pour des raisons de clarté. De bas en haut : $\Omega = 1$ tr/min, $\Omega = 2$ tr/min, $\Omega = 3$ tr/min, $\Omega = 4$ tr/min, $\Omega = 6$ tr/min et $\Omega = 8$ tr/min. Pour tous ces Ω , P décroît en loi de puissance (ligne droite) avec le même exposant $\alpha = 2.9 \pm 0.1$.

4.3 Etude des fluctuations de compacité

Afin de déterminer l'origine physique de ces agrégats de billes corrélées, nous nous sommes intéressés aux champs de compacité instantanée. La tessellation de Voronoï permet de définir une compacité locale à l'échelle d'un grain. La procédure est la suivante : à chaque bille, on associe le polygone de Voronoï défini comme le plus petit polygone convexe contenant le barycentre de la bille, dont les côtés sont les médiatrices des segments reliant le barycentre de la bille considérée à ceux des autres billes (cf figure 4.5). La compacité $\nu(x, z, t)$ associée à cette bille est alors définie comme :

$$\nu(x, z, t) = \frac{\pi d^2}{4A_v} \quad (4.9)$$

où d est le diamètre des billes et A_v l'aire du polygone de Voronoï associé à la bille de coordonnées (x, z) à l'instant t .

La détermination du pavage de Voronoï nécessite de connaître la position de *toutes* les billes. Par conséquent, cette méthode ne peut malheureusement pas être utilisée dans

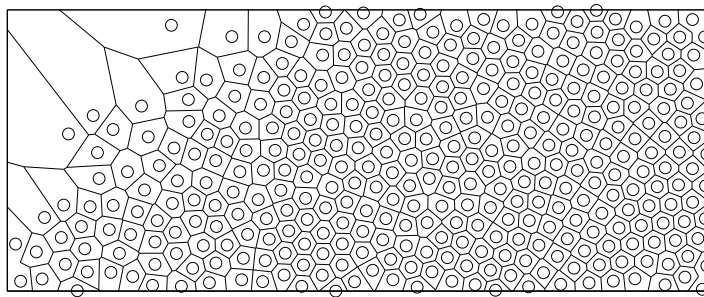


FIG. 4.5 – Tessellation de Voronoï sur une image typique obtenue pour un empilement purement 2D avec $\Omega = 10$ tr/min

le cas des écoulements quasi 2D étudiés jusqu'ici. Nous avons donc fixé l'écartement ℓ de notre tambour à $\ell = 3.05$ mm (cf. section 2.2 du chapitre 2) et nous sommes intéressés à des écoulements purement 2D.

A priori, ceux-ci peuvent présenter des comportements qualitativement différents. La structure de l'empilement est *génériquement* ordonnée, même si nous avons essayé de *cas-ser* au maximum cette structure cristalline en incluant des défauts dans la partie statique. Nous avons cependant vérifié que ce type d'écoulement reproduisait la principale caractéristique qui nous intrigue : un profil de vitesse linéaire, avec un gradient indépendant du coefficient de restitution des collisions et de la vitesse de rotation du cylindre. Ce comportement avait par ailleurs déjà été observé par Rajchenbach et ses collaborateurs (1993) [174, 173, 172, 171]. Nous avons par ailleurs repris l'étude des corrélations spatiales du champ instantané de vitesse présenté dans la section précédente. On observe à nouveau des agrégats "fractals" de billes corrélées, de dimension $d_f^{2D} = 1.9 \pm 0.1$ ²⁴. Comme dans le cas quasi-2D, la taille de ces agrégats est distribuée en loi de puissance d'exposant α^{2D} indépendant de Ω égal à $\alpha^{2D} = 2 \pm 0.1$.

4.3.1 Mise en évidence d'agrégats *rigides*

La figure 4.6 représente un champ de compacité typique, obtenu pour $\Omega = 10$ tr/min. Celle-ci varie peu dans la couche en mouvement et reste, à quelques pour cent près proche de 0.8. Ces fluctuations peuvent cependant modifier de manière importante le comportement des billes. D'après le principe de dilatance de Reynolds, présenté dans le chapitre 1 d'introduction, une assemblée de grains rigides ne peut pas subir de déformation tant que sa compacité ν est plus grande qu'un certain seuil ν_c . Or, pour un empilement 2D de billes monodisperses, ce seuil ν_c se trouve être égal à $\nu_c = \pi/4 \simeq 0.78$ (cf. figure 4.8 ou les expériences de Rajchenbach [171] pour son évaluation expérimentale), soit une valeur

²⁴Ces agrégats sont, par conséquent, moins filandreux et ouverts que dans le cas d'écoulements quasi-2D. Cela se comprend relativement bien : dans le cas quasi-2D, on observe une coupe 2D d'agrégats 3D et on "rate" par conséquent quelques billes qui sont cachées.

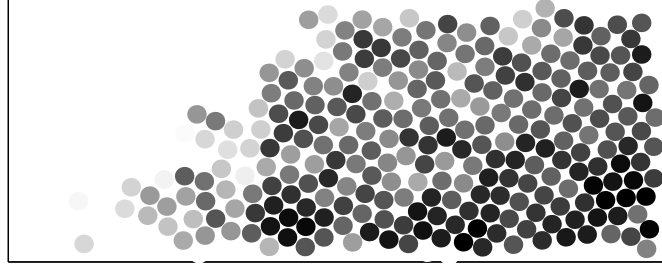


FIG. 4.6 – Champ de compacité instantané obtenu à partir de la tessellation de Voronoï de la figure 4.5. Le niveau de gris d’une bille est proportionnel à sa compacité locale : toutes les billes de compacité ν inférieure à 0.6 sont en blanc, toutes celles de compacité ν supérieure à 0.9 sont en noir.

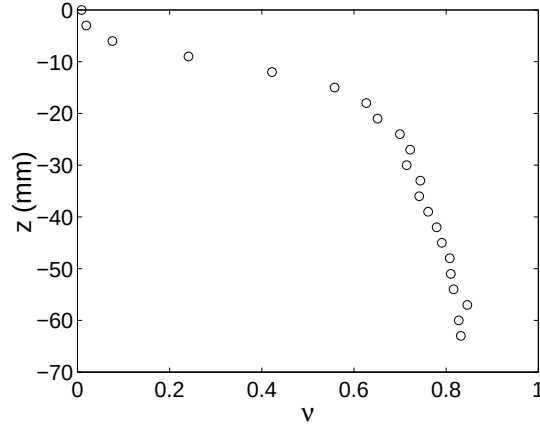


FIG. 4.7 – Profil de compacité moyen $\nu(z)$ au centre du tambour. Celle-ci est à peu près constante dans la couche en mouvement et vaut : $\nu \simeq 0.8$.

très proche de la compacité moyenne mesurée.

Nous avons donc isolé ces agrégats *rigides* de billes en contact ayant une compacité $\nu \geq \nu_c$. Une séquence typique des images ainsi traitées est représentée figure 4.9. Environ 50% des billes de la couche en mouvement appartiennent à l’un de ces agrégats. Comme pour les agrégats définis à partir des corrélations de vitesse, la taille des plus grands est comparable à l’épaisseur de la couche en mouvement.

4.3.2 Caractérisation des agrégats rigides

Comme pour les agrégats de billes corrélées en vitesse, nous avons étudié la statistique et la structure de ces agrégats. La distribution en taille suit à nouveau une loi de puissance $P(N) \propto N^{-\alpha_\nu^{2D}}$ avec un exposant $\alpha_\nu^{2D} \simeq 1.5$ peu dépendant de Ω (cf. figure 4.10). Cet exposant est différent de l’exposant $\alpha^{2D} = 2 \pm 0.1$ obtenu par analyse des orientations des fluctuations de vitesse. On doit cependant mentionner le fait que, s’il y a recouvrement

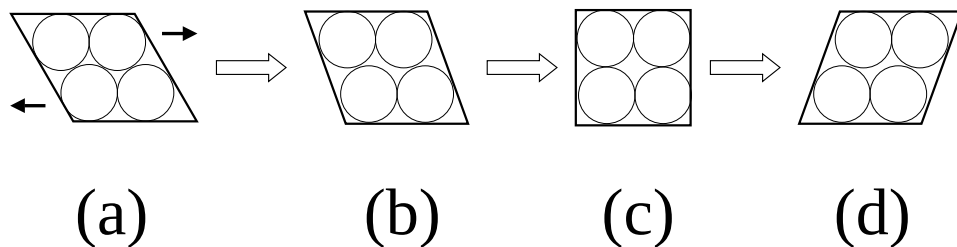


FIG. 4.8 – Principe de dilatance de Reynolds : partons de 4 billes placées dans la configuration (a). Le déplacement relatif de la couche supérieure par rapport à la couche inférieure n'est possible que si on autorise une dilatation du volume V de l'assemblée. Cette configuration passe par l'étape (b) de volume $V_b > V_a$, puis par l'étape (c) de volume $V_c > V_b > V_a$. La configuration (c) a pour compacité $\nu_c = \pi/4$. A partir de là, la dilatation n'est plus nécessaire. La configuration suivante peut par exemple être (d) tel que $V_d < V_c$.

partiel entre les deux types d'agrégats, ils ne sont pas identiques ²⁵.

La dimension fractale de ces agrégats est $d_f^{2D} = 1.7 \pm 0.1$ (cf. figure 4.11). Leur rapport d'aspect moyen, défini comme le rapport des deux axes principaux de leur tenseur d'inertie est proche de 2 et dépend peu de leur taille (cf figure 4.12). Ils s'orientent préférentiellement dans le sens de l'écoulement, avec une anisotropie d'autant plus marquée que la vitesse de rotation, *i.e.* l'épaisseur de la couche en mouvement est faible. Leur temps de vie, défini comme la durée pendant laquelle la taille de l'agrégat reste supérieure à la moitié de leur taille maximale est de l'ordre de $\sqrt{d/g} \simeq 10^{-2}$ s. L'observation attentive des images successives traitées montre que les plus gros agrégats sont émis par la phase statique. De même, ils disparaissent en fusionnant avec la phase statique.

4.4 Discussion

4.4.1 Sur la non-localité des collisions

Plusieurs modèles récents tentent de prendre en compte cette non-localité en postulant l'existence d'interactions non locales entre des grains et des *colonnes* de grains [138, 139, 171, 8]

Mills *et al.* (1999) [138, 139] considèrent la couche en mouvement comme un fluide visqueux dans lequel sont immergées des chaînes 1D solides de grains clairement séparées les unes des autres (cf. figure 4.14a). Dans cette approche, un grain qui entre en collision

²⁵Dans la section précédente, les agrégats ont été définis comme des amas de billes dont les *fluctuations* de billes sont corrélées. Pour définir ces fluctuations, nous avons retiré le profil de vitesse moyen. En conséquence, le profil de vitesse à l'intérieur même d'un amas est plutôt linéaire, *i.e.* différent de celui qui serait donné pour un amas solide en rotation.

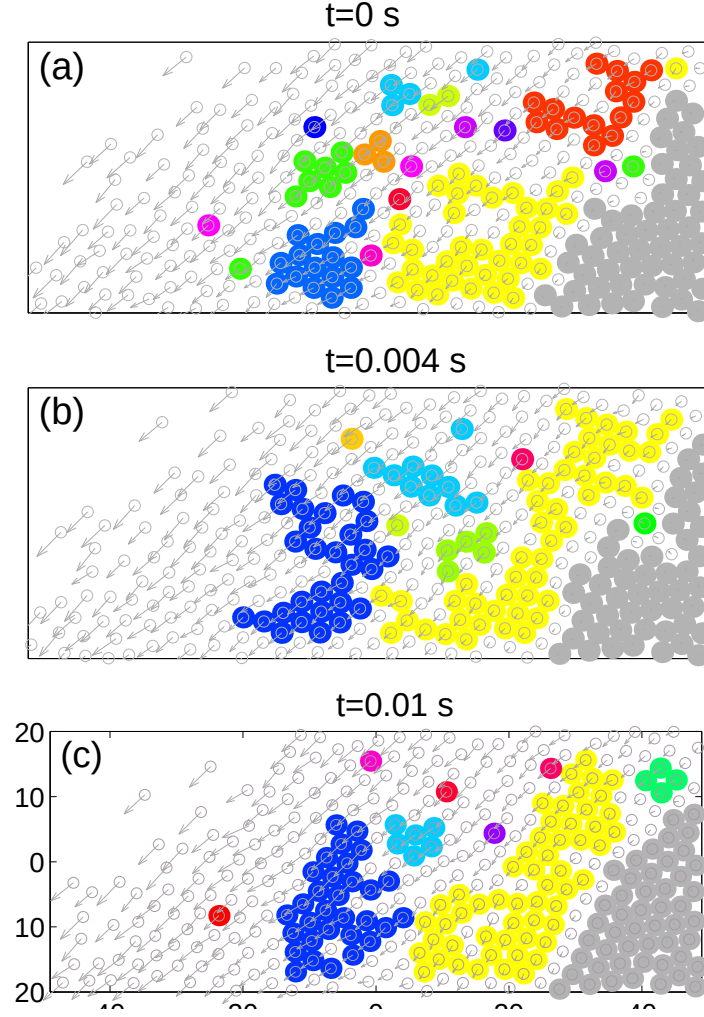


FIG. 4.9 – Séquence typique de champs d'agrégats rigides : deux billes appartenant au même agrégat sont dessinées avec la même couleur. Les billes appartenant à la phase statique, *i.e.* dont la vitesse $c(x, z, t)$ est inférieure à 100 mm/s sont représentées en gris. Les agrégats sont suivis d'une image sur l'autre : deux agrégats sont considérés comme étant les mêmes s'ils gardent plus de 50% de billes en commun.

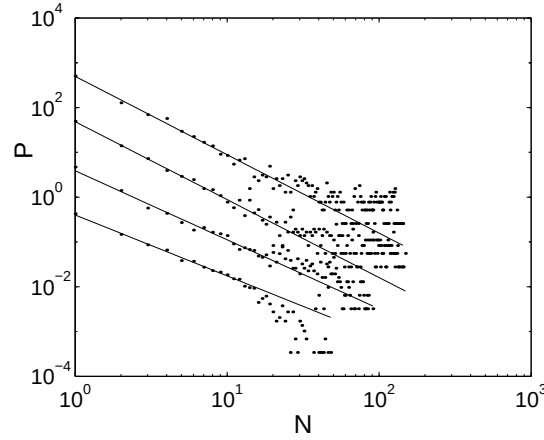


FIG. 4.10 – Densité de probabilité $P(N)$ d'observer un agrégat *rigide* de taille N (en nombre de billes) pour différentes vitesses de rotation Ω du tambour, *i.e.* pour différentes valeurs d'épaisseur R de la couche en mouvement et d'inclinaison θ de la phase statique. L'écoulement est purement 2D. Les axes sont logarithmiques. Les courbes ont été décalées pour des raisons de clarté. De bas en haut : $\Omega = 2$ tr/min, $\Omega = 7$ tr/min, $\Omega = 10$ tr/min et $\Omega = 13$ tr/min. Pour tous ces Ω , P décroît en loi de puissance (ligne droite) avec le même exposant $\alpha = 1.5 \pm 0.1$.

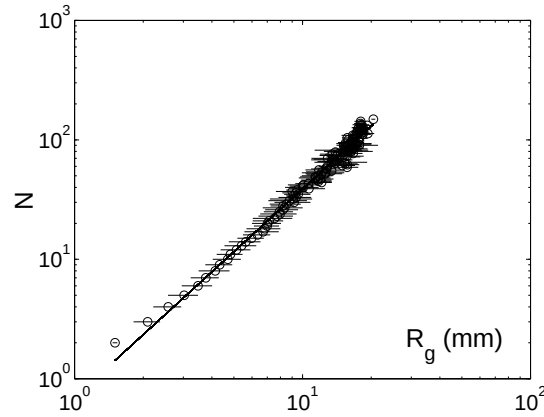


FIG. 4.11 – Dimension fractale des agrégats *rigides* pour un écoulement purement 2D : taille (en nombre de billes N) d'un agrégat en fonction du rayon de giration moyen. Tous les agrégats obtenus pour différentes vitesses de rotation Ω ont été pris en compte. Les axes sont logarithmiques. Les barres d'erreurs indiquent l'écart type sur les rayons de giration obtenus pour des agrégats de taille N donnée. Le comportement en loi de puissance (ligne droite) est la signature d'une structure fractale de dimension donnée par la pente d_f de la droite : $d_f = 1.7 \pm 0.1$.

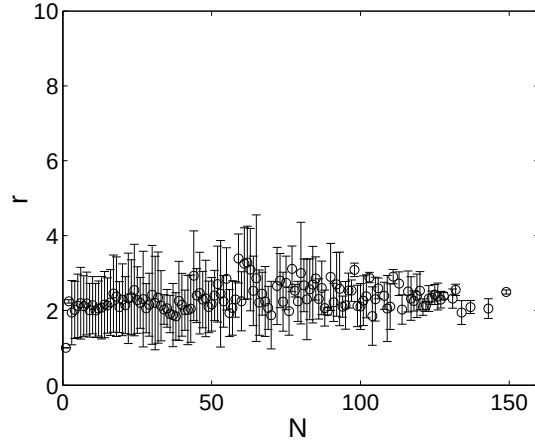


FIG. 4.12 – Rapport d'aspect r en fonction de la taille N (en nombre de billes) des agrégats rigides. Le symbole $\circ$ et les barres d'erreurs indiquent respectivement la moyenne et l'écart type sur r obtenu pour un N donné. Ce rapport d'aspect est indépendant de N et reste proche de 2.

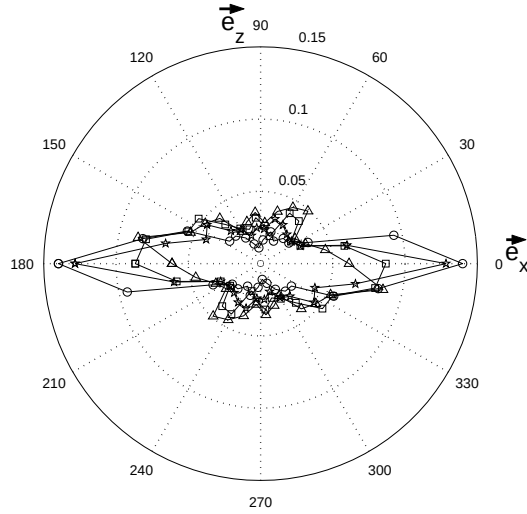


FIG. 4.13 – Densité de probabilité, en représentation polaire, sur l'orientation des agrégats rigides. L'écoulement est purement 2D. les $\circ$, $\star$, $\square$ et $\triangle$ correspondent respectivement à $\Omega = 2, 7, 10$ et 13 tr/min. Les agrégats s'orientent préférentiellement dans le sens des écoulements. L'anisotropie est d'autant plus marquée que Ω est faible.

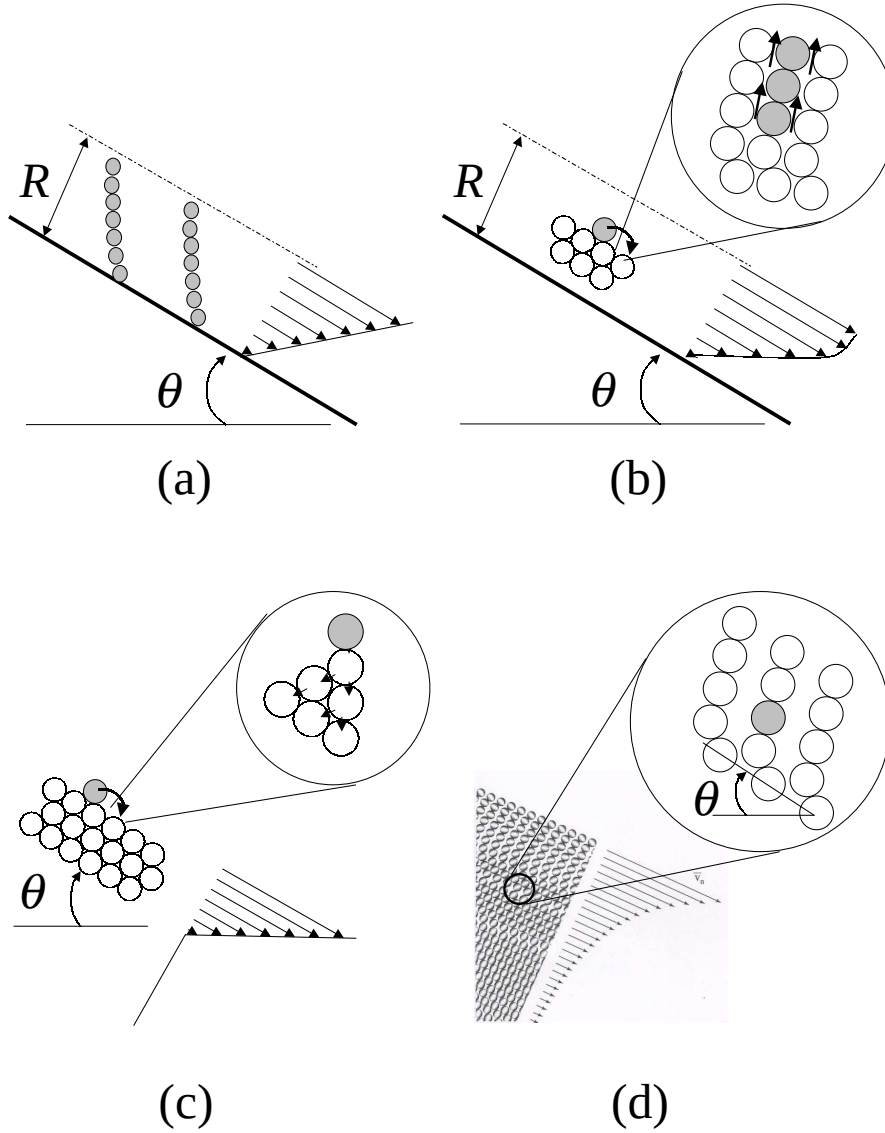


FIG. 4.14 – Modélisation des écoulements granulaires denses à surface libre. En haut : écoulement sur plan incliné. (a) : modèle de Mills *et al.* [138]. Le milieu est décrit comme un fluide visqueux dans lequel baigne un réseau de chaînes de grains 1D solide. (b) : modèle de Jenkins et Chevoir [96]. Le gradient de vitesse est évalué à l'aide d'un bilan sur la quantité de mouvement transmise au cours d'une collision entre un grain et la couche sous-jacente. Cette collision est modélisée en considérant que le grain supporte le poids de l'ensemble de la colonne au dessus, qui tombe par gravité tout en étant freinée par les grains autour. En bas : écoulements de surface. (c) : Modèle de Rajchenbach [171] qui, comme Jenkins et Chevoir, évalue le gradient de vitesse à partir d'un bilan sur la quantité de mouvement transmise au cours d'une collision entre un grain et la couche sous-jacente. Cette collision implique l'ensemble de l'empilement et est par conséquent supposée comme parfaitement inélastique. (d) : Modèle de Andreotti et Douady [9]. Les auteurs décrivent l'empilement comme une assemblée de colonnes parallèles, dans lesquelles les billes sont en roulement sans glissement les unes par rapport aux autres.

avec l'une de ces chaînes transmet de la quantité de mouvement à l'ensemble des grains la constituant. Cette approche permet de retrouver les ordres de grandeur des vitesses observées pour des écoulements denses sur plan incliné quand la séparation entre chaînes tend vers zéro ²⁶. Dans cette limite, Jenkins et Chevoir (2001) [96] proposent plutôt de dériver la contrainte visqueuse à partir du transfert entre un grain et la couche sous-jacente. Ce transfert est évalué en considérant que les chocs ne sont pas binaires, mais impliquent l'ensemble de la colonne supportée par le grain supérieur (cf. figure 4.14b). Ces deux modèles donnent de bons résultats dans le cas d'écoulements denses sur plan incliné, mais ne peuvent être appliqués au cas des écoulements de surface. En particulier, ils ne permettent pas de rendre compte de l'existence d'une phase statique dans ce dernier cas.

Pour des écoulements de surface, Rajchenbach (2000) [171] suggère que, quand un grain de la phase en mouvement entre en collision avec un grain de la couche en dessous, toute son énergie cinétique est absorbée par collisions multiples (cf. figure 4.14c). On retrouve alors un profil de vitesse linéaire avec un gradient indépendant de l'épaisseur de la couche en mouvement. Ce type de description a été par la suite étendu par Andreotti et Douady (2001) [9]. Ceux-ci y incluent par ailleurs un mécanisme permettant de rendre compte du piégeage possible des grains dans les rugosités de la couche sous-jacente (cf. figure 4.14d). Ils arrivent alors à rendre compte de la localisation de l'écoulement en surface, du mouvement de fluage dans la phase statique, et du profil de vitesse linéaire dans la couche en mouvement. Néanmoins, ce modèle ne retrouve pas les bonnes dépendances du gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ avec θ et l'épaisseur R de la couche en mouvement.

Les amas collectifs que nous avons observés ne sont ni des chaînes solides 1D, ni l'ensemble de l'empilement. Il s'agit plutôt d'amas de grains "fractals", plutôt 2D, de tailles très largement distribuées, impliquant 50% des grains de la couche en mouvement. On ne peut pas définir de taille caractéristique, ce qui peut expliquer la sélection d'un gradient de vitesse indépendant à la fois de z , R et θ , *i.e.* indépendant du cisaillement Σ_{xz} . Par ailleurs, la présence d'amas solides très proches de la surface libre empêche la nullité de Σ_{xz} à la surface, contrairement à ce qui se passe dans les fluides usuels.

4.4.2 Interprétation des différences plan incliné/fond meuble

Le phénomène d'agglomération des billes résulte de la compétition de deux phénomènes. D'une part, la perte d'énergie par collisions multiples tend à agglomérer les billes, d'autre part, le cisaillement tend à éroder les amas existants. Dans le cas d'écoulements

²⁶Ce modèle peu aussi être adapté au cas d'écoulements de surface [137]. On considère alors deux phases, une phase liquide dont la rhéologie suit celle proposée pour des écoulements sur plan incliné, et une phase statique, plastique, où la composante de friction compense exactement le terme de gravité dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée sur $\vec{e}_x$. On retrouve alors un profil de vitesse linéaire dans la phase en mouvement, avec un gradient indépendant de l'épaisseur roulante et dépendant peu de la pente locale, et un profil de vitesse exponentiel dans la phase statique.

denses sur plan incliné, ces deux effets amènent à des amas ayant une taille typique donnée, lesquels ont d'ailleurs été observés en géométrie 2D dans l'expérience de Drake (1990) [63]. On comprend alors assez bien pourquoi, quand l'épaisseur de la couche en mouvement augmente, le profil de vitesse ressemble de plus en plus à celui qui serait prédit par des lois rhéologiques locales de type loi de Bagnold [186].

Pour des écoulements de surface, un troisième ingrédient doit être pris en compte : l'observation de la dynamique des agrégats rigides sur les images successives de la séquence révèle en effet que les plus gros agrégats sont en fait émis par la phase statique. Ces agrégats meurent ensuite, soit en se fragmentant en plus petit morceaux, soit en se *recollant* à nouveau à la phase statique. La phase statique se comporte comme un *réservoir* à gros agrégats. Elle émet continuellement des amas très gros qui se divisent par la suite en amas de plus en plus petits. Cette *cascade* ²⁷ des grandes échelles - l'épaisseur de la couche en mouvement - vers les petites échelles - la taille du grain - peut conduire à ces distributions en loi de puissance - c'est par exemple le cas en turbulence - dénuées d'échelles caractéristiques. Dans cette interprétation, la distribution en taille des agrégats, et *a fortiori* le gradient de vitesse, dépend de façon cruciale de la condition aux limites de l'interface.

4.4.3 Quelques spéculations : transition de "jamming"

L'absence d'échelles typiques permettant de caractériser ces amas de grains localement bloqués amène à plusieurs remarques : d'abord elle est incompatible avec les modèles qui supposent que la transition entre une phase solide et une phase liquide s'effectue sur une échelle bien définie. L'existence de ces agrégats solides multi-échelles suggère plutôt que la couche en mouvement est dans un régime *critique*.

Cette transition critique pourrait être une transition continue du type "jamming" proposés par Cates *et al.* (1998) [36] d'une part, et par Liu et Nagel (1998) [117] d'autre part. Ces auteurs définissent en effet une nouvelle classe de matériaux, les matériaux *fragiles*, qui ont la particularité de se comporter tantôt comme des solides, tantôt comme des liquides. Ils sont en effet constitués de particules qui, sous certaines conditions, sont amenés dans un état bloqué. Une fois bloqué, le système se retrouve confiné dans une petite région de l'espace des phases sans possibilité d'en sortir. Il se comporte alors comme un solide. Ce type de transition, encore controversé, s'appliquerait à de nombreux systèmes : trafic routier, mousse, milieu granulaire [36] voire suspension colloïdale au voisinage de la transition vitreuse [211].

Liu et Nagel proposent trois scénarii permettant d'amener le système dans son état bloqué : l'agitation thermique des particules diminue, le matériau est comprimé, ou la densité du matériau augmente. Dans notre cas, ce serait l'augmentation de densité

²⁷Appelée ainsi par analogie avec la cascade d'énergie observée en turbulence développée (voir par exemple [76]).

qui, en vertu du principe de dilataance de Reynolds, amènerait des ensembles de billes à se trouver dans des configurations bloquées.

4.4.4 Description en terme d'écoulement *partiellement* fluidisé

Un modèle très récent, proposé par Aranson et Tsimring (2001) [12, 11] considère la couche en mouvement comme *partiellement fluidisée*. La mise en évidence d'agrégats solides dans la couche en mouvement semble compatible avec ce type d'approche. Comparons nos profils de vitesse à ceux prédits par ce modèle.

Les auteurs supposent le matériau incompressible, mais introduisent un paramètre d'ordre local p traduisant la fraction de phase "solide" dans le volume élémentaire considéré. Les équations hydrodynamiques (4.1,4.2) sont alors couplées avec une troisième équation sur p décrivant la transition solide/liquide. Le système global s'écrit :

$$\rho = \rho_0 = \text{constante} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma} \quad (4.11)$$

$$\Sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \Sigma_{ij}^{MC} (p + (1 - p) \delta_{ij}) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \nabla^2 p + p(1 - p) \left(p - \frac{\phi^2 - \phi_0^2}{\phi_1^2 - \phi_0^2} \right) \quad (4.13)$$

où η est la viscosité - supposée constante - de la phase liquide, Σ_{ij}^{MC} désigne le tenseur des contraintes donné par la théorie de Mohr Coulomb, ϕ est la valeur maximale du rapport $|\Sigma_{mn}^{MC}/\Sigma_{nn}^{MC}|$ cherchée sur l'ensemble des référentiels orthonormaux $(\vec{e}_m, \vec{e}_n)$, et ϕ_0 et ϕ_1 sont deux angles caractérisant la transition de fluidisation du matériau granulaire : quand $\phi > \phi_1$, l'état statique est instable, et quand $\phi < \phi_0$, l'état fluide est instable.

Pour un écoulement de surface stationnaire et homogène, $p(z)$ est donné par [11] :

$$p(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\tanh \left(\frac{z + z_0}{\sqrt{8}} \right) - \tanh \left(\frac{z - z_0}{\sqrt{8}} \right) \right) \quad (4.14)$$

où z_0 représente le point où $p(z_0) = 1/2$, *i.e. grosso modo* l'épaisseur de l'interface. Le profil de vitesse tangentielle $v_x(z)$ s'écrit quant à lui :

$$v_x(z) = -\frac{g \sin \theta}{\eta} \int_{-\infty}^z (1 - p(y)) y \, dy \quad (4.15)$$

Nous avons essayé d'ajuster nos profils en faisant varier le paramètre z_0 pour chaque vitesse de rotation Ω du tambour, et la valeur de la viscosité η pour l'ensemble de nos expériences. Les ajustements ne sont pas très bons (cf. figure 4.15a). Nous proposons de modifier le modèle originel en supposant que la viscosité suit la loi de Bagnold :

$$\eta = \eta_B \frac{dv_x}{dz} \quad (4.16)$$

Le profil de vitesse est alors donné par :

$$v_x(z) = \sqrt{\frac{g \sin \theta}{\eta_B}} \int_{-\infty}^z \sqrt{-(1 - p(y))} y \, dy \quad (4.17)$$

Nous arrivons alors à reproduire qualitativement et quantitativement les profils de vitesse expérimentaux (cf. figure 4.15b). Le coefficient η_B vaut alors $\eta_B = 100 \text{ mm}^2$.

4.5 Conclusion

Dans le chapitre précédent, nous avons été amenés à mesurer les profils de vitesse tangentielle dans la couche en mouvement pour différentes vitesses de rotation. Ceux-ci sont incompatibles avec une relation univoque, locale, qui relierait la contrainte de cisaillement au gradient de vitesse comme pour les fluides visqueux usuels.

Plusieurs mécanismes (instabilité d'agrégation par collisions multiples, effet de voûtes) peuvent engendrer des comportements collectifs dans la couche en mouvement. L'existence de tels ensembles avait d'ailleurs été postulée théoriquement [138, 139, 171, 8, 96], mais, jusqu'à présent, elle n'avait pas été mise en évidence expérimentalement ou numériquement dans les écoulements de surface.

L'étude des corrélations spatiales du champ de vitesse instantanée (ou plutôt de ses fluctuations) nous a permis de mettre en évidence l'existence d'agrégats de grains dont le mouvement est fortement corrélé. La statistique et la structure de ces agrégats ont été caractérisées. Celles-ci sont indépendantes de la vitesse de rotation du tambour, *i.e.*

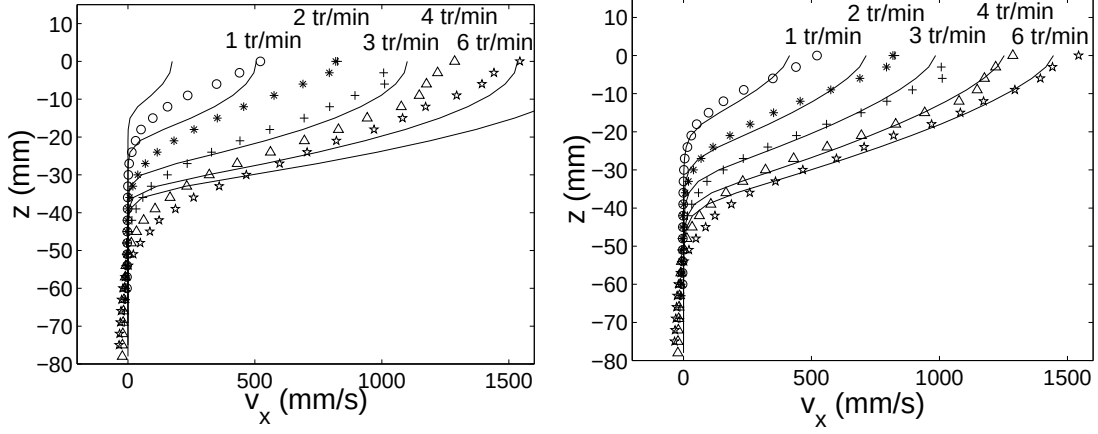


FIG. 4.15 – Comparaison des profils de vitesse mesurés expérimentalement avec ceux prédits par la théorie d'Aranson et Tsimring [12, 11]. On considère soit une viscosité η constante (à gauche), soit une viscosité de Bagnold donnée par l'équation 4.15 (à droite). Les profils sont calculés en intégrant l'équation 4.15 (à gauche) ou l'équation 4.17 (à droite). Les courbes sont ajustées en faisant varier le paramètre z_0 de l'équation 4.14, pour chaque vitesse de rotation Ω du tambour et η (à gauche) ou η_B (à droite) pour l'ensemble de nos profils. L'utilisation d'une viscosité de Bagnold conduit à de bons ajustements. Le paramètre η_B vaut alors $\eta_B = 100 \text{ mm}^2$

de l'angle moyen de l'écoulement et de l'épaisseur de la couche en mouvement. Il s'agit d'objet "fractals", dont les tailles sont très largement distribuées, en loi de puissance, de l'échelle du grain à celle de l'écoulement.

L'origine physique de ces agrégats a ensuite été élucidée en étudiant les fluctuations du champ de compacité dans des écoulements purement 2D. L'étude de ces champs révèle l'existence d'agrégats qui, en vertu du principe de dilatance de Reynolds, sont trop denses pour pouvoir supporter une déformation de cisaillement. Ces agrégats sont à nouveau fractals, de taille largement distribuée en loi de puissance de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique.

Nous avons ensuite discuté divers modèles d'écoulements denses à la lumière de ces objets. Plusieurs de ces modèles [138, 139, 171, 8, 96] proposent de prendre en compte l'existence de chocs non locaux. Lorsqu'ils peuvent être appliqués aux écoulements de surface, ils n'arrivent pas à rendre compte de la sélection d'un gradient de vitesse constant. La raison majeure de cet échec s'explique, selon nous, par le fait que tous ces modèles supposent que les objets collectifs ont une taille typique. Or, dans notre expérience, *il n'existe pas* d'échelle caractéristique pour définir nos agrégats solides.

Selon nous, cette absence d'échelle caractéristique est liée à la présence d'une phase statique sur laquelle les grains en mouvement roulent. Ce lit statique se comporte comme un réservoir à gros agrégats. Ceux-ci sont arrachés par la couche en mouvement, puis, soumis au cisaillement, ils se divisent pour former des agrégats de plus en plus petits. Cette cascade pourrait être à l'origine des distributions observées. Pour des écoulements denses sur plan incliné, cette cascade n'a aucune raison d'être. La distribution des agrégats est

différente, sans doute centrée autour d'une valeur moyenne. On comprend alors pourquoi, malgré le fait que les profils de contrainte soient les mêmes pour des écoulements de surface et des écoulements sur plan incliné, les profils de gradient de vitesse soient très différents.

Enfin, l'existence de ces agrégats solides multi-échelle nous laisse penser que la couche en mouvement est *critique*. La surface de l'empilement serait alors proche d'une transition de type "jamming" [117] : une assemblée de grains trop denses ne peut plus, pour des raisons d'encombrement, se déformer. La proximité de cette transition pourrait expliquer la sélection d'une compacité voisine de la compacité critique à partir de laquelle aucune déformation n'est possible sans dilatation et d'un gradient de vitesse constant dans la couche en mouvement. Aranson et Tsimring (2001) [12] ont récemment proposé une théorie considérant la couche en mouvement comme partiellement fluidisée. Ce modèle, après quelques modifications, rend compte, qualitativement et quantitativement, de la forme des profils de vitesse observés expérimentalement.

Annexe A

Théorie cinétique des écoulements granulaires

Nous proposons dans cette annexe de montrer (au moins dans les grandes lignes) comment l'application de la théorie cinétique permet de passer du micro-monde au macro-monde dans le cas d'écoulements granulaires dilués. Quand le matériau est fortement cisailé, les collisions engendrent certaines fluctuations sur la vitesse des particules. Par analogie avec les gaz, ces fluctuations sont quantifiées par une température, dite *température granulaire*. Cependant, contrairement à un gaz, la dissipation d'énergie au cours des collisions *inélastiques* influence directement la valeur de cette température.

La théorie cinétique est un outil extrêmement puissant permettant de dériver les équations hydrodynamiques du comportement microscopique des billes. Savage et Jeffrey [183] ont les premiers proposé l'analogie matériau granulaire/gaz denses. Il faut cependant attendre 1983 pour que Jenkins et Savage [98] établissent les trois lois de conservation, celle de la masse, celle de la quantité de mouvement et celle de la température. De nombreuses améliorations ont ensuite été proposées, notamment par Lun et ses collaborateurs [130, 128, 129, 127] et Jenkins et Richman [97].

Nous nous limiterons ici au cas d'écoulements de billes identiques, faiblement inélastiques, parfaitement lisses. Le détail des calculs peut être trouvé dans l'article de Jenkins et Richman (1985) [97] ou la thèse d'Azanza (1997) [15].

A.1 Collision entre deux particules

Nous considérons des grains sphériques, identiques, parfaitement lisses, de masse m et de diamètre d . Les collisions sont de type sphère dure avec un coefficient de restitution e . Les vitesses $\vec{c}_1$ et $\vec{c}_2$ de deux particules 1 et 2 juste après une collision sont donc reliées aux vitesses $\vec{c}_1$ et $\vec{c}_2$ juste avant collision par :

$$m\vec{c}'_1 = m\vec{c}_1 - \vec{J}, \quad m\vec{c}'_2 = m\vec{c}_2 + \vec{J} \quad (\text{A.1})$$

où $\vec{J}$ est la percussion exercée par la particule 1 sur la particule 2 :

$$m\vec{J} = \frac{1}{2}(1 + e)(\vec{k} \cdot \vec{c}_{12}) \quad (\text{A.2})$$

où $\vec{k}$ est le vecteur unitaire dirigé du centre de la particule 1 au centre de la particule 2 : $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = d\vec{k}$ et $\vec{c}_{12} = \vec{c}_1 - \vec{c}_2$. La perte d'énergie ΔE engendrée par la collision vaut :

$$\Delta E = \frac{1}{4}(e^2 - 1)(\vec{k} \cdot \vec{c}_{12})^2 \quad (\text{A.3})$$

A.2 Fonction de distribution et équation de Boltzmann

Par analogie avec un gaz, on définit la *fonction de distribution* $f(\vec{r}, \vec{c}, t)$ comme la probabilité d'avoir un grain à une position comprise entre $\vec{r}$ et $\vec{r} + d\vec{r}$ et une vitesse comprise entre $\vec{c}$ et $\vec{c} + d\vec{c}$ à l'instant t . En intégrant f sur $\vec{c}$ on obtient la densité moyenne :

$$\rho(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{c}, t) d\vec{c} \quad (\text{A.4})$$

et plus généralement la moyenne $\langle A \rangle$ de la propriété $A(\vec{c})$ du grain :

$$\langle A \rangle(\vec{r}, t) = \frac{1}{\rho} \int A(\vec{c}) f(\vec{r}, \vec{c}, t) d\vec{c} \quad (\text{A.5})$$

La vitesse moyenne $\vec{v}$ est alors définie par :

$$\vec{v} = \langle \vec{c} \rangle \quad (\text{A.6})$$

et la température granulaire par :

$$T = \frac{1}{2} \langle (\vec{c} - \vec{v})^2 \rangle \quad (\text{A.7})$$

La fonction de distribution f doit vérifier l'équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{c} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \vec{g} \cdot \nabla_{\vec{c}} f + \Delta_{coll} \quad (\text{A.8})$$

Le terme du membre de gauche représente la variation du nombre de grains dans l'élément de volume $dV = d\vec{r}d\vec{v}$ de l'espace des phases. Le premier et le deuxième terme du membre de droite rendent compte des flux de grains sortant de dV respectivement du fait de leur vitesse $\vec{c}$ et de leur accélération imposée par la gravité $\vec{g}$. Le dernier terme traduit l'influence des interactions entre particules. Compte tenu des règles de collision présentées dans la section précédente, Δ_{coll} vaut :

$$\begin{aligned} \Delta_{coll}(\vec{r}_1, \vec{c}_1) = & \int_{\vec{k}} \int_{\vec{c}_{12} \cdot \vec{k} \geq 0} d^2(\vec{c}_{12} \cdot \vec{k}) \{ f^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{c}_1, \vec{r}_1 + d\vec{k}, \vec{c}_2, t) \\ & - f^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{c}_1, \vec{r}_1 - d\vec{k}, \vec{c}_2, t) \} d\vec{k} d\vec{c}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

où les vitesses $\vec{c}_1$ et $\vec{c}_2$ sont reliées à $\vec{c}_1$ et $\vec{c}_2$ par les équations A.1 et A.2. La fonction de distribution d'ordre 2, $f^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{c}_1, \vec{r}_2, \vec{c}_2, t)$, représente la probabilité de trouver le grain 1 à une position (resp. une vitesse) comprise entre $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_1 + d\vec{r}_1$ (resp. entre $\vec{c}_1$ et $\vec{c}_1 + d\vec{c}_1$) et le grain 2 à une position (resp. une vitesse) comprise entre $\vec{r}_2$ et $\vec{r}_2 + d\vec{r}_2$ (resp. entre $\vec{c}_2$ et $\vec{c}_2 + d\vec{c}_2$).

A.3 Dérivation des équations de conservation

A partir de l'équation A.8, on peut déduire l'équation de transport de la quantité $\langle A \rangle$;

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho A \rangle = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \langle \rho \vec{c} A \rangle - \vec{g} \cdot \langle \vec{\nabla}_{\vec{c}} A \rangle + J(A) \quad (\text{A.10})$$

où $J(A) = \int \Delta_{coll} A d\vec{c}$. A partir des propriétés de symétrie et de réversibilité des collisions, on montre facilement ²⁸ que $J(A)$ peut s'écrire sous la forme :

²⁸Il suffit simplement d'écrire $J(A)$ de quatre manières différentes, d'abord en intervertissant les indices 1 et 2, puis en intervertissant les *primes* de l'après collision et les *non primes* de l'avant collision. Comme les règles de collision sont invariantes sous ces transformations, J reste inchangé. On l'écrit alors comme 1/4 fois la somme des expressions obtenues et on développe $f^{(2)}$ au premier ordre suivant le petit paramètre $d\vec{k}$. On obtient alors l'expression voulue.

$$J(A) = \gamma(A) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\Theta}(A) \quad (\text{A.11})$$

où le premier terme du membre de droite vaut :

$$\begin{aligned} \gamma(A)(\vec{r}_1) = \frac{1}{2} d^2 \int_{\vec{c}_1} \int_{\vec{k}} \int_{\vec{c}_{12} \cdot \vec{k} \geq 0} (\vec{c}_{12} \cdot \vec{k}) f^{(2)}(\vec{r}_1 - d\vec{k}, \vec{c}_1, \vec{r}_1, \vec{c}_2, t) \\ \{A(\vec{c}_1) + A(\vec{c}_2) - A(\vec{c}_1) - A(\vec{c}_2)\} d\vec{c}_2 d\vec{k} d\vec{c}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Ce terme est nul quand la quantité A est une quantité qui se conserve au cours de la collision, ce qui est le cas par exemple pour la quantité de mouvement. Le deuxième terme vaut :

$$\begin{aligned} \Theta(A)(\vec{r}_1) = \frac{1}{2} d^3 \int_{\vec{c}_1} \int_{\vec{k}} \int_{\vec{c}_{12} \cdot \vec{k} \geq 0} \vec{k} (\vec{c}_{12} \cdot \vec{k}) f^{(2)}(\vec{r}_1 - \frac{1}{2}d\vec{k}, \vec{c}_1, \vec{r}_1 + \frac{1}{2}d\vec{k}, \vec{c}_2, t) \\ \{A(\vec{c}_1) - A(\vec{c}_1)\} d\vec{c}_2 d\vec{k} d\vec{c}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Les équations de conservation hydrodynamique sont ensuite obtenues en faisant respectivement $A = 1$, $A = \vec{c}$ et $A = c^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma} \\ \frac{3}{2} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{3}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\Sigma} : \vec{\nabla} \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \gamma \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

où le tenseur des contraintes $\vec{\Sigma}$ (resp. le flux d'énergie $\vec{q}$) est la somme d'une contribution cinétique $\vec{\Sigma}^{cin}$ (resp. $\vec{q}^{cin}$) et d'une contribution collisionnelle $\vec{\Sigma}^{coll}$ (resp. $\vec{q}^{coll}$) dont les expressions valent :

$$\begin{aligned} \vec{\Sigma}^{cin} = \rho \langle \vec{c} \otimes \vec{c} \rangle \quad \vec{\Sigma}^{coll} = \vec{\Theta}(\vec{c}) \quad \gamma = \gamma(\frac{1}{2}mc^2) \\ \vec{q}^{cin} = \frac{1}{2} \rho \langle c^2 \vec{c} \rangle \quad \vec{q}^{coll} = \vec{\Theta}(\frac{1}{2}mc^2) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Ces expressions peuvent donc être calculées grâce aux équations A.12 et A.13 dès qu'on connaît $f^{(2)}$. Par analogie avec les gaz denses, on suppose que les vitesses des particules avant la collision ne sont pas corrélées (hypothèse dite de *chaos moléculaire*). On peut alors écrire $f^{(2)}$ sous la forme :

$$f^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{c}_1, \vec{r}_2, \vec{c}_2, t) = g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \nu) f(\vec{r}_1, \vec{c}_1) f(\vec{r}_2, \vec{c}_2) \quad (\text{A.16})$$

où $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \nu)$ est la fonction de corrélation de paire. Si on suppose le milieu homogène et isotrope, g ne dépend plus que de $r = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|$ et de la compacité ν . Le seul endroit où g intervient est dans l'opérateur Δ_{coll} où r est toujours égal à d (particule en contact). Dans ce cas, $g(d, \nu) = g_0(\nu)$ est appelé *fonction de distribution radiale*. Les différentes relations constitutives présentées dans les équations A.15 peuvent alors être calculées à partir du moment où on connaît $g_0(\nu)$ et $f(\vec{r}, \vec{c}, t)$.

A.4 Fonction de distribution radiale $g_0(\nu)$

La fonction de distribution radiale $g_0(\nu)$ a été déterminée dans la limite ν faible par Verlet et Levesque [209] en 2D :

$$g_0(\nu) = \frac{16 - 7\nu}{16(1 - \nu)^2} \quad (\text{A.17})$$

et par Carnahan et Starling [35] en 3D :

$$g_0(\nu) = \frac{2 - \nu}{2(1 - \nu)^3} \quad (\text{A.18})$$

Ces expressions, valables pour les régimes dilués, présentent l'inconvénient de diverger en $\nu = 1$ et non pour la compacité ν_m . Elles ont par la suite été étendues pour décrire des régimes plus denses. Plusieurs extensions ont été proposées, notamment celle de Lun et Savage [128]

$$g_0(\nu) = \frac{1}{(1 - \frac{\nu}{\nu_m})^{2.5\nu_m}} \quad (\text{A.19})$$

qui présente l'avantage de diverger à la compacité critique ν_m et qui ne présente pas de singularité en $\nu = 0$.

A.5 Fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{c}, t)$

Comment choisir f ? En théorie, il suffit de trouver une solution de l'équation de Boltzmann A.8 où Δ_{coll} s'écrit maintenant en fonction de f et g_0 . Plus facile à dire qu'à

faire ! Quand les collisions sont parfaitement élastiques ($e = 1$), et que les gradients de compacité, vitesse et température, sont nuls, la solution f^0 de cette équation est connue. Il s'agit d'une Maxwellienne :

$$f^0(\vec{r}, \vec{c}, t) = \frac{\rho}{2\pi T} \exp\left(-\frac{c^2}{2T}\right) \quad (\text{A.20})$$

Les premiers auteurs, Savage et Jeffrey [183] et Jenkins et Savage [98] ont simplement supposé que $f = f^0$. Les suivants [130, 97, 129] prennent en compte les écarts à l'équilibre. Ils proposent d'écrire f sous la forme :

$$f = f^0(1 + \Phi) \quad (\text{A.21})$$

où Φ est une fonction test dépendant de la compacité, de la vitesse moyenne, de la température granulaire et de leur gradient dont l'expression a été donnée par Dahler et Theodosopulu [54] :

$$\Phi = \frac{1}{2T}[\vec{P}] : (\vec{c} \otimes \vec{c}) + \frac{2}{5\rho T^2}(q^{\vec{cin}} \cdot \vec{c})\left(\frac{c^2}{2T} - \frac{5}{2}\right) \quad (\text{A.22})$$

où $\vec{P} = \langle \vec{c} \otimes \vec{c} \rangle$. La quantité $[\vec{A}]$ représente la partie déviateur du tenseur $\vec{A}$: $[\vec{A}] = \vec{A} - \frac{1}{3}Tr(\vec{A})\vec{I}$, $Tr(\vec{A})$ étant la trace du tenseur $\vec{A}$ et $\vec{I}$ le tenseur unité. On boucle le système en appliquant l'équation de transport A.10 aux deux moments supérieurs en c , à savoir à A valant respectivement $\frac{1}{2}m(\vec{c} \otimes \vec{c} - c^2\vec{\delta})$ et $\frac{1}{2}mc^2$ (méthode des moments).

A.6 Les lois constitutives

Finalement, connaissant la fonction de distribution f et la fonction de distribution radiale g_0 , on peut déterminer les lois constitutives données par le système d'équation A.15. Le tenseur des contraintes $\vec{\Sigma}$, le flux de chaleur $\vec{q}$ et le taux de dissipation d'énergie γ s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} \vec{\Sigma} = -\left(P(\nu, T) + \eta_v(\nu, T)\vec{\nabla}\vec{v}\right)\vec{I} - 2\eta(\nu, T)[\vec{S}] \\ \vec{q} = -K_T(\nu, T)\vec{\nabla}T + K_\nu(\nu, T)\vec{\nabla}\nu\gamma(\nu, T) = \frac{\rho_2}{d}\left(f_5(\nu)T^{3/2} - f_6(\nu)T\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

où $[\vec{S}]$ est la partie déviatorique du tenseur des déformations $\vec{S}$:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.24})$$

et la pression P , la viscosité en volume η_v , la viscosité dynamique η et la conductivité thermique s'expriment respectivement :

$$\begin{cases} P(\nu, T) = \rho_p f_1(\nu) T \\ \eta_v(\nu, T) = \rho_p df_0(\nu) T^{1/2} \\ \eta(\nu, T) = \rho_p df_2(\nu) T^{1/2} \\ K_T(\nu, T) = \rho_p df_3(\nu) T^{1/2} \\ K_\nu(\nu, T) = \rho_p df_4(\nu) T^{3/2} \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

où les fonctions f valent respectivement [97]

$$\begin{cases} f_0(\nu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} r \nu^2 g_0(\nu) \\ f_1(\nu) = \nu + 2r \nu^2 g_0(\nu) \\ f_2(\nu) = \frac{\sqrt{\pi}}{20-12r} \left[\frac{1}{g_0(\nu)} + r(3r-1)\nu + \frac{r}{\pi} (3\pi r^2 - 2(\pi+6)r + 20) \nu^2 g_0(\nu) \right] \\ f_3(\nu) = \frac{\sqrt{\pi}}{r(17-15r)} \left[\frac{1}{g_0(\nu)} + 3r(2r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2})\nu + r^2 \left(9r^2 - (\frac{27}{4} + \frac{30}{\pi})r + \frac{34}{\pi} \right) \nu^2 g_0(\nu) \right] \\ f_4(\nu) = \frac{3(2r-1)(r-1)\sqrt{\pi}}{2(17-15r)} \left(\frac{1}{\nu g_0(\nu)} + \frac{3r}{2} \frac{d}{d\nu} (\nu^2 g_0(\nu)) \right) \\ f_5(\nu) = \frac{16r(1-r)}{\sqrt{\pi}} \nu^2 g_0(\nu) \\ f_6(\nu) = 3r(1-r) \nu^2 g_0(\nu) \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

où $r = (1+e)/2$.

Les équations de conservation A.14 couplées avec les relations constitutives données par les équations A.23, A.25 et A.26 forment alors un système complet d'équations.

Annexe B

Approche intégrée de Saint Venant

Nous proposons dans cette annexe de présenter et discuter les différents modèles dérivés d'une approche à la Saint-Venant. La section B.1 est consacrée à la modélisation d'une masse de grains en mouvement sur un plan incliné. La section B.2 présente les applications au cas d'écoulements de surface. Historiquement, celles-ci ont d'abord concerné les écoulements stationnaires en tambour tournant. Elles n'ont que très récemment été généralisées à un écoulement de surface quelconque [62]. Citons enfin les modèles de type BCRE qui, à partir de considérations relativement différentes, aboutissent à des modèles relativement similaires. Nous discuterons ce modèle et ses extensions à la fin de la section B.2.

B.1 Ecoulement sur un plan incliné

La première utilisation d'équations intégrées sur l'épaisseur à un écoulement de grains revient sans conteste à Savage et Hutter (1989) [182]. Par analogie avec l'hydraulique, on introduit la notion de *régime graduellement varié* [6] pour caractériser des écoulements pour lesquelles les variations temporelles et spatiales des différentes grandeurs définissant l'écoulement sont lentes. L'approche Saint-Venant ne peut s'appliquer que dans ce dernier cas.

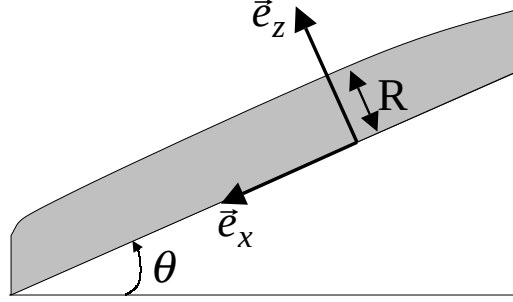


FIG. B.1 – Ecoulement granulaire sur un plan incliné faisant un angle θ avec l’horizontale : cas 2D. Le référentiel le plus naturel est le référentiel $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$, où $\vec{e}_x$ est tangent au plan. La hauteur de l’écoulement est notée $R(x, t)$.

B.1.1 Equations de conservation générales

En supposant que le milieu est incompressible ²⁹, et qu’une description en terme de mécanique des milieux continus est possible, la conservation de la masse donne :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{B.1})$$

et la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma} \quad (\text{B.2})$$

où $\vec{\nabla}$ est l’opérateur nabla, $\vec{v}$ et Σ respectivement le vecteur vitesse et le tenseur des contraintes local, ρ la densité supposée constante et $\vec{g}$ le vecteur gravité. Par la suite, nous nous restreindrons au cas 2D représenté figure B.1 : $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_z \vec{e}_z$ et $\vec{\nabla} A = \frac{\partial A}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{e}_z$. En intégrant ces équations sur l’épaisseur de la couche, on obtient :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(R \langle v_x \rangle) = 0 \quad (\text{B.3})$$

²⁹Cette hypothèse peut sembler assez osée : nous avons vu dans le chapitre 1 toute l’importance de la compacité dans la physique des écoulements. Les expériences 2D d’Azanza (1997) [15] et les simulations numériques 2D de Chevoir *et al.* (2001) [38] et 3D de Silbert (2001) [186] tendent à montrer que la compacité est constante dans des écoulements denses sur plan incliné. Nous la vérifions quant à nous dans le cas d’écoulements de surface au chapitre 3.

$$\frac{\partial}{\partial t}(R < v_x >) + \alpha \frac{\partial}{\partial x}(R < v_x >^2) = g \sin \theta R - \frac{\partial}{\partial x}(R < \Sigma_{xx} >) - \mu(R, < v_x >) g \cos \theta \quad (\text{B.4})$$

où R est l'épaisseur de la couche en mouvement et θ l'angle entre le plan et l'horizontale, et $< A >$ la moyenne d'une quantité A sur l'épaisseur de la couche en mouvement :

$$< A > = \int_{z=0}^{z=R} A \, dz \quad (\text{B.5})$$

Dans l'équation B.4, le second terme du membre de gauche correspond au flux de quantité de mouvement. Le coefficient $\alpha = < v_x^2 > / < v_x >^2$ est relié au profil de vitesse dans la couche en mouvement et vaut 1 pour un écoulement bouchon ($v_x(z) = \text{constante}$) et $4/3$ pour un profil de vitesse linéaire ($v_x(z) = \dot{\gamma}z$ avec $\dot{\gamma} = \text{constante}$). Le premier terme du membre de droite correspond au poids de la couche. Le deuxième terme est un terme de pression lié au gradient de R . Le troisième terme est la contrainte pariétale exercée par le socle sur la couche en mouvement qui s'écrit $\mu \Sigma_{zz}$ où $\mu(R, < v_x >)$ est le coefficient de friction et $\Sigma_{zz} = \rho g R \cos \theta$ la contrainte normale au niveau du plan.

Le détail du passage des équations de conservation locales (B.1,B.2) aux équations de conservation intégrées (B.3,B.4) peut être trouvé dans l'article originel de Savage et Hutter (1989) [182] ou, pour le lecteur francophone, dans l'annexe 9 de la thèse d'Ancey (1997) [6].

Toute la difficulté est de déterminer les expressions de α , Σ_{xx} et μ en fonction de R et $< v_x >$ afin de fermer ce système d'équations. C'est dans la modélisation de ces derniers termes que les approches diffèrent.

B.1.2 Relations de fermeture : les grands anciens

Savage et Hutter (1989) [182] supposent un profil de vitesse bouchon dans la couche en mouvement. Cette hypothèse conduit à :

$$\alpha = 1 \quad (\text{B.6})$$

Dans plusieurs expériences en géométrie Couette [185, 93], le rapport contrainte de cisaillement sur contrainte normale semble dépendre peu de la déformation lorsque celle-ci est faible et que la densité est élevée. Ces observations ont amené Savage et Hutter à considérer le coefficient de friction au niveau du socle comme constant :

$$\mu = \tan \Phi \quad (\text{B.7})$$

où Φ est l'angle interne de friction du matériau (on supposera pour simplifier que la friction grain/socle est la même que la friction grain/grain). Ils supposent par ailleurs que la déformation est quasi-statique, ce qui leur permet d'évaluer Σ_{xx} en supposant que le matériau est partout au seuil de plasticité et vérifie donc partout le critère de Mohr-Coulomb. Cela amène (voir par exemple [31]) $\Sigma_{xx} = K_+ \Sigma_{zz}$, soit :

$$\Sigma_{xx} = K_+ \rho g R \cos \theta : \quad (\text{B.8})$$

où K_+ est le *coefficient de pression actif* du matériau et vaut :

$$K_+ = \frac{1 + \sin^2 \Phi}{1 - \sin^2 \Phi} \quad (\text{B.9})$$

Le modèle obtenu, initialement 2D, rend compte avec succès du mouvement d'une masse granulaire dévalant un plan incliné [182]. Il a ensuite été étendu par Greve *et al.* (1994) [84] puis par Wieland *et al.* (1999) [212] au cas 3D.

B.1.3 Relations de fermeture : la nouvelle vague

On notera toutefois que le choix d'un coefficient de friction μ indépendant de $\langle v_x \rangle$ réduit la plage d'existence d'écoulements homogènes et stationnaires à la seule inclinaison $\theta = \Phi$. Ce dernier point semble vérifié dans le cas de plans lisses [92, 155, 1], mais pas dans le cas de plans rugueux [15, 158]. Plusieurs expériences montrent en effet qu'il existe une plage de variation $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ pour laquelle on observe des écoulements stationnaires uniformes [15, 158]. Les bornes de cette plage dépendent de l'épaisseur R de la couche en mouvement. Sur cette plage, la vitesse moyenne $\langle v_x \rangle$ de l'écoulement varie en [158] :

$$\frac{\langle v_x \rangle}{\sqrt{gR}} = \beta \frac{R}{R_{stop}(\theta)} \quad (\text{B.10})$$

où β est une constante indépendante de l'inclinaison, de la taille des billes ou de la rugosité du socle : $\beta = 0.136$, et $R_{stop}(\theta)$ est l'épaisseur minimale nécessaire pour observer un écoulement homogène uniforme pour une inclinaison θ comprise entre θ_1 et θ_2 du socle. Dans ce régime d'écoulement stationnaire uniforme, l'équation B.4 de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\mu = \tan \theta \quad (\text{B.11})$$

ce qui a amené Pouliquen (1999)[158, 159] à proposer la forme suivante pour $\mu(R, < v_x >)$:

$$\mu(R, < v_x >) = \mu_{stop}(R_{stop}) = \tan(\theta(R_{stop})) \quad (\text{B.12})$$

où $\theta(R_{stop})$ est la fonction inverse de $R_{stop}(\theta)$. Un ajustement de la courbe $R_{stop}(\theta)$ obtenue expérimentalement l'a conduit à choisir une fonction $\mu_{stop}(x)$ de la forme :

$$\mu_{stop}(x) = \tan \theta_1 + (\tan \theta_2 - \tan \theta_1) f(x) \quad (\text{B.13})$$

où f est une fonction décroissante : $f(0) = 1$ et $f(\infty) = 0$. L'article originel [158] proposait une décroissance exponentielle. Cependant une décroissance algébrique du type $f(x) = \frac{1}{1+x}$ semble conduire à de meilleurs ajustements [159]. Finalement, on obtient :

$$\mu(R, < v_x >) = \tan \theta_1 + (\tan \theta_2 - \tan \theta_1) \frac{1}{1 + \frac{\beta R \sqrt{gR}}{< v_x >}} \quad (\text{B.14})$$

Pouliquen garde par ailleurs l'hypothèse d'un profil de vitesse constant : $\alpha = 1$, mais, contrairement à Savage et Hutter, suppose une pression isotrope : $\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz} = \rho g R \cos \theta$. Le modèle complet obtenu permet de rendre compte de la forme des fronts granulaires observés en régime stationnaire et uniforme le long du plan incliné [157] et de l'étalement d'une masse granulaire lâchée sur ce plan [159].

B.2 Ecoulement de surface

L'utilisation d'équations intégrées permet de rendre compte avec succès d'un certain nombre de comportements d'un matériau granulaire s'écoulant sur un plan incliné. Il apparaît donc naturel d'étendre ce type de description aux écoulements de surface. Les premières applications reviennent à Khakhar *et al.* (1997) [106, 105], qui ont étudié les écoulements stationnaires dans un tambour tournant. Plus récemment, Douady *et al.* (1999) [62] ont généralisé ce type de description au cas d'un écoulement de surface non uniforme et non stationnaire.

B.2.1 Equations de conservation générales

Considérons la situation décrite figure B.2. Le milieu est décomposé en deux parties : une épaisseur fine de grains *mobiles* coule sur un lit *statique*. Comme l'épaisseur de la couche en mouvement est petite, la vitesse des grains est essentiellement parallèle à l'interface solide/mobile. Nous choisissons par conséquent le référentiel $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$, localement tangent à cet interface comme référentiel d'étude. On place l'origine de ce référentiel au niveau de la surface libre ³⁰.

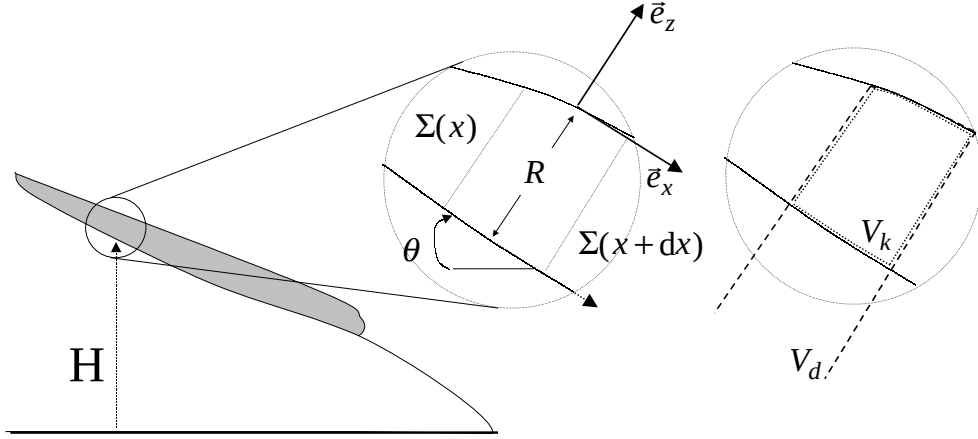


FIG. B.2 – Ecoulement de surface dans un matériau granulaire. Une couche en mouvement d'épaisseur faible coule sur un lit statique. L'écoulement peut être décrit globalement en considérant l'évolution de l'épaisseur R de la couche en mouvement et de l'angle local θ entre la séparatrice fluide/roulant et l'horizontale. On se place dans le référentiel $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$, localement tangent à l'interface. Deux volumes d'intégration sont possibles : le volume V_d compris entre x et $x + dx$, limité par la surface libre et s'enfonçant à une profondeur arbitraire dans la phase statique (en tiret) ou le volume V_k compris entre x et $x + dx$ et limité par la surface libre d'une part et la séparatrice d'autre part (en pointillé).

Dans le cas d'écoulements de surface, l'opportunité d'une description continue à l'échelle locale est loin d'être acquise [171]. Il apparaît préférable d'appliquer le théorème du transport sur un volume d'intégration donné. Douady *et al.* (1999) [62] considèrent le volume matériel V_d compris entre x et $x + dx$ limité par la surface libre d'une part et s'enfonçant arbitrairement loin dans la phase statique. Si ce choix est pertinent quand la phase statique reste immobile dans un référentiel lié à la gravité, il ne se prête pas au cas du tambour tournant. Nous suivons plutôt l'approche de Khakhar *et al.* (1997) [106, 107] et considérons le volume V_k compris entre x et $x + dx$ et limité d'une part par la surface

³⁰Notons que Douady *et al.* considèrent plutôt un référentiel $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ localement tangent à la surface libre. La différence de pente entre la surface libre et l'interface est du deuxième ordre en $\tilde{v}_z/\tilde{v}_x$ où $\tilde{v}_z$ (resp. $\tilde{v}_x$) est la valeur typique de la composante en x (resp. la composante en z) de la vitesse moyenne dans le repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$. Passer d'un référentiel à l'autre revient à ajouter un terme de pression dans notre cas. Notre choix a été guidé par des considérations expérimentales. Quand on se place à l'échelle microscopique, la détermination de la surface libre ou de l'interface n'est pas évidente. On choisira de définir $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ comme tangent à la vitesse moyenne des grains. Cette vitesse moyenne apparaît expérimentalement *plus* parallèle à l'interface qu'à la surface libre, celle-ci apparaissant plus "gazeuse".

libre et d'autre part par l'interface. Si $(\vec{v}_x, \vec{v}_z)$ est la vitesse au point (x, z) , les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement projetée sur l'axe $\vec{e}_x$ moyenné sur l'épaisseur de la couche en mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t}(R < \rho >) + \frac{\partial}{\partial x}(R < \rho v_x >) + (\rho v_z)|_{z=-R} = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(R < \rho v_x >) + \frac{\partial}{\partial x}(R < \rho v_x^2 >) + (\rho v_x v_z)|_{z=-R} = F \quad (\text{B.16})$$

où R est l'épaisseur de la couche en mouvement, ρ la densité et F la force appliquée sur le volume V_k (cf. figure B.2). Les quantités $\{R < \rho v_x >\}$ et $\{R < \rho v_x^2 >\}$ représentent respectivement le débit et le flux de quantité de mouvement projeté sur $\vec{e}_x$ traversant la surface $\Sigma(x)$, tandis que $(\rho v_z)|_{z=-R}$ et $(\rho v_x v_z)|_{z=-R}$ représentent respectivement le débit et le flux de quantité de mouvement projeté sur $\vec{e}_x$ traversant l'interface solide/mobile.

La densité ρ est supposée constante. Les équations B.15 et B.16 deviennent :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(R < v_x >) + v_z|_{z=-R} = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(R < v_x >) + \frac{\partial}{\partial x}(R < v_x^2 >) + (v_x v_z)|_{z=-R} = \frac{F}{\rho} \quad (\text{B.18})$$

Les expressions de $v_z|_{z=-R}$ et de $(v_x v_z)|_{z=-R}$ dépendent explicitement du mouvement de la phase statique par rapport au référentiel du laboratoire. Ces termes s'écrivent $v_z|_{z=-R} = \partial H / \partial t$ et $(v_x v_z)|_{z=-R} = 0$ si on considère la formation d'un tas. Ils s'expriment aussi simplement si on s'intéresse à une géométrie tambour tournant (voir chapitre 3). Seules les expressions de $< v_x > (R, \theta)$, $< v_x^2 > (R, \theta)$ et $F(R, \theta)$ sont par conséquent nécessaires pour fermer ce système d'équations. Elles encodent les propriétés rhéologiques du milieu. C'est sur la forme de ces relations que les différents modèles diffèrent.

B.2.2 Relations de fermeture proposées

L'approche intégrée a d'abord été appliquée aux écoulements stationnaires en tambour tournant.

Les premières études ne considéraient que l'évolution des quantités intégrées au centre du tambour. Rajchenbach (1990) [170] évalue ainsi la variation du débit au centre en

fonction de la vitesse de rotation Ω . Puis, en écrivant les contraintes de cisaillement Σ_{xz} comme la somme d'un terme collisionnel Σ_{xz}^c , suivant la loi de Bagnold : $\Sigma_{xz}^c = \eta \dot{\gamma}^2$ avec η constant, et d'un terme de friction Σ_{xz}^f , suivant la loi de Coulomb : $\Sigma_{xz}^f = \tan \Phi \Sigma_{zz}$, il relie l'angle de la surface libre au débit, *i.e.* à Ω . Zik *et al.* [217] reprennent cette approche en considérant que la contribution collisionnelle est purement visqueuse : $\Sigma_{xz}^c = \eta \dot{\gamma}$ avec η constant.

Khakhar *et al.* (1997) [106] sont les premiers à avoir appliqué ces équations de conservation intégrées à l'ensemble du tambour. Ils considèrent que la surface libre de l'empilement est droite. La valeur de θ en un point donné dépend alors directement de celle de R . Ils sont ramenés à un système d'équations similaires aux équations B.3 et B.4 (avec une courbe $\theta(R)$ fixe) et ne peuvent plus arbitrairement choisir les relations de fermeture $\langle v_x \rangle (R, \theta)$, $\langle v_x^2 \rangle (R, \theta)$. Les équations de fermeture se ramènent alors aux choix d'un profil de vitesse, par l'intermédiaire du choix du coefficient α de l'équation B.17 et de la forme de la force $F(R, \theta)$. Celle-ci est modélisée comme la somme de trois termes :

1. un terme de gravité : $F_P = \rho g R \sin \theta$
2. un terme de friction de la phase roulante sur le lit statique supposé Coulombien : $F_{fr,S} = -\tan \Phi \rho g R \cos \theta$.
3. un terme lié aux collisions de la phase roulante sur le lit statique. L'effet de ces collisions est supposé suivre la loi de Bagnold : $F_{c,S} = -\rho \eta \dot{\gamma}_{z=-R}^2$ où η est une constante.

Plusieurs profils de vitesse ont été essayés. Celui qui reproduit le mieux leurs données expérimentales semble être un profil de vitesse linéaire.

Elperin et Vikhanski (1998) [68] abandonnent l'hypothèse d'une surface libre droite. Les variables R et θ redeviennent indépendantes. Ils supposent la couche en mouvement comme parfaitement fluidisée et adoptent le modèle de Bagnold. Cela conduit à :

$$\langle v_x \rangle \propto R^{3/2} \quad \langle v_x^2 \rangle = \langle v_x \rangle^2 \quad (\text{B.19})$$

La force $F(R, \theta)$ est quant à elle modélisée comme la somme de trois termes :

1. un terme de gravité : $F_P = \rho g R \sin \theta$
2. un terme de friction de la phase roulante sur le lit statique supposé Coulombien : $F_{fr,S} = -\tan \Phi \rho g R \cos \theta$.
3. un terme de pression $F_P = -\rho g \frac{dR}{dx} \cos \theta$

Ils arrivent grâce à leur modèle à rendre compte des formes successives présentées par la surface libre quand on augmente Ω .

Andreotti, Cladé, Daerr et Douady (1999) [62, 51, 39] considèrent un profil de vitesse linéaire avec gradient constant :

$$\langle v_x \rangle \propto R^2 \quad \langle v_x^2 \rangle = \frac{4}{3} \langle v_x \rangle^2 \quad (\text{B.20})$$

Ils proposent par ailleurs une version minimaliste de la force F . Celle-ci est composée du poids de la couche en mouvement et d'un terme de friction sur le lit statique :

$$F(R, \theta) = \rho g R (\sin \theta - \mu(R, \theta) \cos \theta) \quad (\text{B.21})$$

où le coefficient de friction μ n'est pas constant, mais choisi afin de pouvoir rendre compte du déclenchement des avalanches (cf. figure 1.5 du chapitre 1). Les auteurs arrivent ainsi à reproduire la plupart des comportements avalancheux observés sur un plan incliné [52], les lois d'échelles [8], la forme des fronts d'avalanches [39].

Notons que, avec ce type de relation de fermeture, les équations de conservation B.17 et B.18 peuvent être réécrites :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \dot{\gamma} R \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{g \cos \theta}{\dot{\gamma}} (\tan \theta - \mu(R, \theta)) \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{g \cos \theta}{\dot{\gamma}} (\tan \theta - \mu(R, \theta)) \quad (\text{B.23})$$

Cette forme présente l'avantage d'autoriser des comparaisons faciles entre l'approche Saint-Venant et l'approche BCRE présentée dans le prochain paragraphe.

B.2.3 La variante BCRE

Bouchaud *et al.* (1994) [24, 25] ont proposé une autre approche pour décrire les écoulements de surface. L'empilement reste séparé en deux phases : une phase liquide et un lit statique. L'évolution des hauteurs R et H est décrite à l'aide d'un système d'équations phénoménologiques couplées. Ce modèle a par la suite été étendu par Boutreux *et al.* (1998) [29] d'une part, et Aradian *et al.* (1998) [10] d'autre part, au cas des écoulements épais. Dans les deux cas, on considère des variations faibles de l'angle local autour de l'angle de repos θ_{stop} . On peut alors assimiler le référentiel $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ localement tangent à la séparatrice à un référentiel fixe tourné de θ_{stop} par rapport au référentiel de gravité. Avec nos notations, les évolutions de R et H sont décrites par :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + V \frac{\partial R}{\partial x} = D \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \Gamma \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\Gamma \quad (\text{B.25})$$

où V est la vitesse d'advection supposée constante de la couche en mouvement, D un coefficient de diffusion constant intégrant les fluctuations des vitesses et Γ un terme de couplage traduisant la conversion de grains immobiles en grains mobiles et *vice versa*.

Le modèle initial s'intéresse au déclenchement des avalanches et à l'interprétation des deux angles θ_{start} et θ_{stop} . Les auteurs considèrent par conséquent des couches roulantes d'épaisseur fines, $R \leq d$, où tous les grains mobiles sont supposés en contact avec le lit statique et avoir la même probabilité d'interagir avec lui [24, 25] : Γ est alors proportionnel à R et, en développant au premier ordre en $\theta - \theta_{stop}$, on obtient : $\Gamma = aR(\theta - \theta_{stop})$ où a est constant. La forme des équations n'est pas sans rappeler les équations B.22 et B.23 obtenue par Douady *et al.* au terme diffusif près. Ce terme, comme remarqué par De Gennes (1995) [57], est d'ordre d/L , d étant le diamètre du grain et L l'échelle de variation macroscopique, par rapport au terme d'advection et peut être négligé dans la limite hydrodynamique. Il a été par la suite supprimé des versions proposées par Bouteux *et al.* [29] puis Aradian *et al.* [10].

Dans le cas d'écoulements épais, seuls les grains appartenant aux premières couches de la phase roulante peuvent interagir avec le lit statique [29]. L'influence des autres grains est écrantée par ces premières couches. Γ est alors plus naturellement supposé indépendant de R et s'écrit : $\Gamma = a(\theta - \theta_{stop})$ où a est constant. Le système d'équations B.24 et B.25 s'écrit alors :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + V \frac{\partial R}{\partial x} = a(\theta - \theta_{stop}) \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a(\theta - \theta_{stop}) \quad (\text{B.27})$$

Ces équations sont compatibles avec le système d'équations B.22 et B.23 obtenues par Douady *et al.* dans la limite R grand (cf. figure 1.5 du chapitre 1) et $\theta - \theta_{stop} \ll \theta_{stop}$. La valeur de la constante a vaut alors : $a = g \cos \theta_{stop} / \dot{\gamma}$. Dans la limite des écoulements épais, les deux approches aboutissent donc à un système d'équations équivalent.

Grâce à leur simplicité, le modèle BCRE et ses extensions peuvent être résolus analytiquement de manière exacte [131, 60, 61, 194]. Notons cependant que l'hypothèse d'une vitesse constante les empêche de rendre compte quantitativement de la forme des fronts d'avalanches [39] et de l'amplitude des avalanches [10].

Deuxième partie

Effet de voûtes et fragilité

Chapitre 1

Contexte et motivation

1.1 Voûtes et chaînes de forces

Pour un récipient rempli d'eau, la force exercée sur le fond est proportionnelle à la hauteur versée. Si maintenant on remplit le même récipient de sable, on constate que cette force n'augmente plus avec la hauteur, mais *sature* à une certaine valeur limite ! Où donc se trouve la masse manquante ? Celle-ci a en fait été redirigée vers les parois latérales et été encaissée directement par celles-ci. Ce phénomène, décrit pour la première fois par Janssen en 1895 [95], met en évidence le rôle de chaînes de contact privilégiées, *voûtes*, le long desquelles les forces se propagent préférentiellement.

Ces voûtes, responsables du défléchissement d'une partie du poids vers les parois latérales du récipient, peuvent être visualisées directement : en mettant sous contrainte un empilement de cylindres biréfringents entre deux polariseurs croisés, Dantu (1957) [55, 56] a mis en évidence l'existence de chaînes de grains soumis à des contraintes plus importantes (cf. figure 1.1). Notons que ces techniques photoélastiques ont ensuite été largement utilisées pour étudier la statique des matériaux granulaires. Travers *et al.* (1986) [197, 196, 195] ont étudié l'enrichissement du réseau de voûtes avec l'augmentation de la compression du milieu. Plus récemment, Howell *et al.* (1997) [90, 91], ont poursuivi ce type d'expériences en étudiant l'évolution du réseau de voûtes et de ses fluctuations en présence d'un cisaillement (cf. figure 1.2).

L'existence de ces chaînes de forces se retrouve sur la répartition des contraintes. Plusieurs équipes se sont intéressées à la distribution des forces de contact F_c entre grains : Liu *et al.* (1995) [123], puis Mueth *et al.* (1998) [144] ont placé une feuille de papier carbone sur les parois d'un récipient et ont mesuré les traces laissées par un empilement 3D de billes de verre sous contrainte. Le diamètre de ces traces permet de remonter

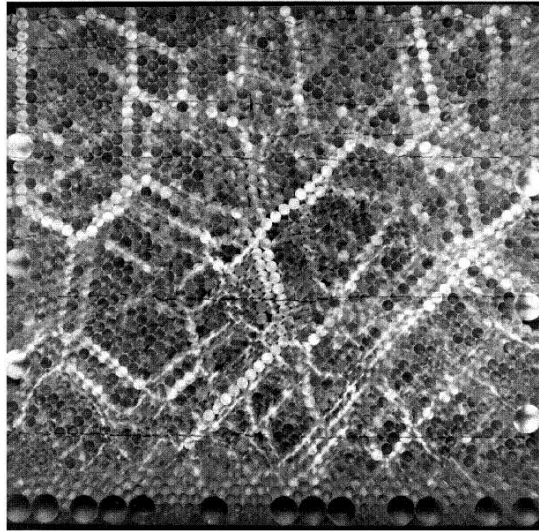


FIG. 1.1 — Mise sous contrainte d'un empilement 2D de cylindres biréfringents (d'après Travers *et al.* [196]). Les cylindres sont d'autant plus lumineux qu'ils sont soumis à une charge importante.

aux forces de contact bille/paroi. Lovoll *et al.* (1999) [125] ont quant à eux utilisé des capteurs piézoélectriques. Ils peuvent alors mesurer des forces grain/paroi nettement plus faibles. Tsoungui *et al.* (1998) [199] ont pour leur part directement mesuré l'aire des contacts grains/grains [199] afin d'avoir accès aux forces de contact dans le matériau. Dans tous les cas, on observe une décroissance exponentielle de la densité de probabilité $P(F_c)$ pour les valeurs F_c typiquement supérieures à la force de contact moyenne $\langle F_c \rangle$ (cf. figure 1.3). Ce type de distribution est la signature d'une répartition très inhomogène, où les fluctuations sont du même ordre de grandeur que la valeur moyenne. Cette distribution a par ailleurs été confirmée par les simulations numériques de Radjai *et al.* (1996) pour des empilements 2D [166, 169, 168] et 3D [167].

1.2 Désordre et fluctuations

Reprenons maintenant notre récipient rempli de sable... et chauffons-le de quelques degrés. La masse apparente exercée sur le fond se met à *fluctuer* énormément, typiquement de 20 à 25% [26, 45, 206]. Cette masse est par ailleurs très dépendante de la méthode de remplissage choisie [104, 204]. D'une manière générale, une petite perturbation semble avoir d'importantes répercussions sur la répartition des contraintes dans un matériau granulaire.

Cette extrême sensibilité a aussi été mis en évidence dans l'expérience proposée par Liu et Nagel (1992) [121, 122, 119, 118] à Chicago. Ceux-ci ont utilisé la transmission sonore comme indicateur des réarrangements du réseau de chaînes de forces. En effet, dans un empilement granulaire, les ondes sonores ne se propagent pas uniformément à

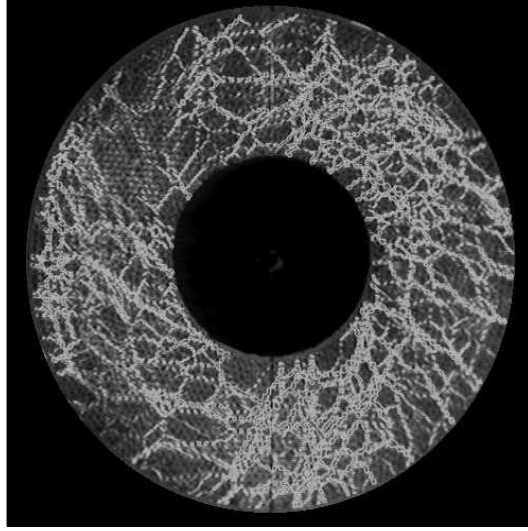


FIG. 1.2 – Billes biréfringentes cisailées dans une cellule de Couette (d'après Howell *et al.* [91]).

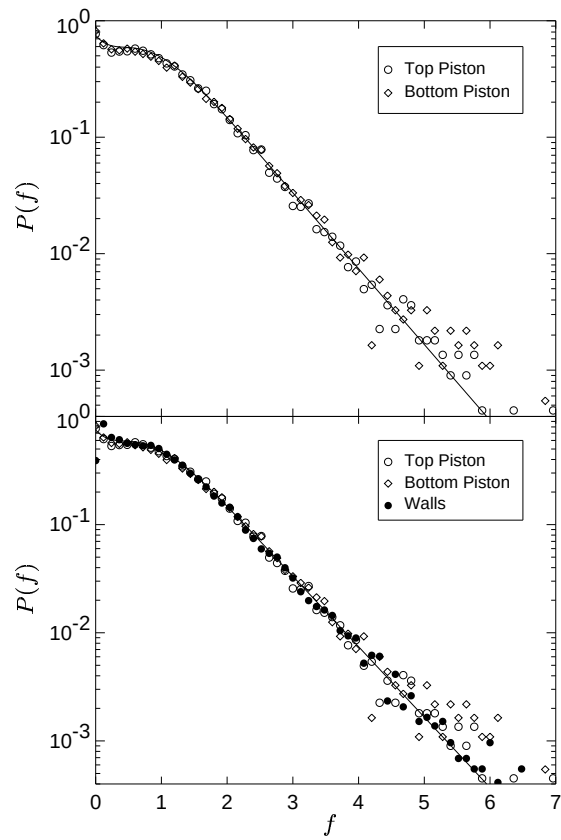


FIG. 1.3 – Distribution des forces de contact (adimensionnées par la force de contact moyenne) entre un grain et la paroi pour un empilement 3D de billes de verre confiné dans un cylindre (d'après Mueth *et al.* [144]). Les forces sont mesurées à partir de la trace laissée sur le papier carbone recouvrant les parois.

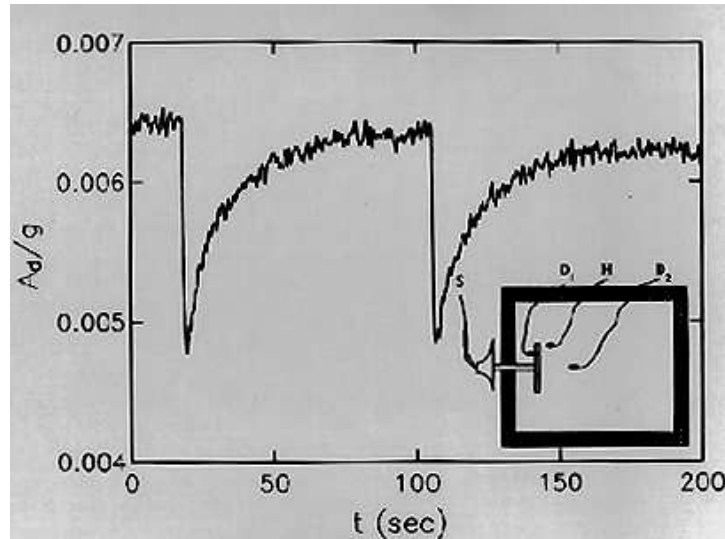


FIG. 1.4 – Effet d'un échauffement local sur la transmission d'une onde ultrasonore (d'après Liu et Nagel [121]). L'évolution temporelle de l'accélération $A_d(t)$ (adimensionnée par la gravité g) est représentée. L'expérience est schématisée dans l'insert. S est la source sonore, D_1 un premier détecteur permettant d'asservir S , et D_2 le détecteur par lequel A_d est enregistré. A $t = 20$ s, puis à $t = 105$ s, l'empilement est thermiquement perturbé en allumant la pièce H , de taille comparable à celle des grains. Celle-ci chauffe alors d'un degré. La dilatation thermique résultante modifie A_d de près de 50%.

travers le milieu. Elles suivent au contraire les voûtes, se fragmentant et se recombinaut au gré des contacts. L'onde effective obtenue après ces diffusions multiples est extrêmement sensible à la position des contacts. Liu et Nagel ont pu alors montrer qu'une perturbation thermique infinitésimale engendre des modifications importantes, de l'ordre de 50%, sur la propagation sonore (cf. figure 1.4).

Citons enfin l'expérience réalisée par Kolb *et al.* (1999)[109] à Jussieu. Ces derniers se sont intéressés au mouvement d'une assemblée de grains poussée très lentement à l'aide d'un piston dans un tube vertical. La force $F(t)$ exercée sur le piston est enregistrée en fonction du temps t . Des régimes de collage/glisement, *stick slip*, irréguliers sont mis en évidence : de temps en temps, les billes se bloquent et $F(t)$ augmente doucement... jusqu'à être en mesure de débloquent l'empilement et de laisser glisser celui-ci jusqu'à une nouvelle situation de blocage.

1.3 Indétermination et isostaticité

Comment comprendre cette extrême sensibilité aux perturbations extérieures ? Plusieurs raisons peuvent être mises en avant. Un premier élément vient de la mobilisation de la friction : lorsque deux solides sont appliqués l'un contre l'autre, une réaction tangentielle, *force de friction*, tendant à s'opposer au mouvement, se développe. Les lois qui décrivent ces forces de friction sont connues depuis fort longtemps (elles ont été d'abord

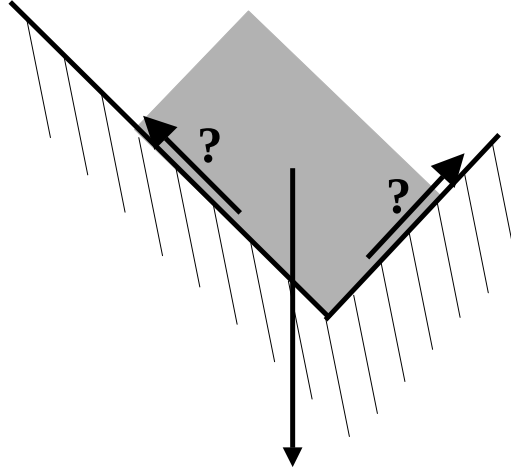


FIG. 1.5 – Indétermination liée à la friction : suivant la manière dont le patin est amené dans l'encoignure, les forces de contacts ne sont pas les mêmes.

proposées par Amontons en 1699 [5]³¹, puis développées par Coulomb en 1776 [50]) : considérons deux solides pressés l'un contre l'autre avec une force N dirigée suivant la normale au plan de contact. La mise en mouvement relative des deux solides nécessite que l'intensité de la force T exercée perpendiculairement à cette normale soit supérieure à une fraction donnée de N . Autrement dit, le solide restera dans une position stable tant que :

$$|T| \leq \mu_s N \quad (1.1)$$

où le coefficient de friction μ_s est une constante du matériau et ne dépend pas de la surface de contact. La difficulté vient du fait que les composantes normales et tangentielles de la force de contact sont reliées par une *inégalité*. Dès qu'un solide est en contact avec plus de deux autres solides, il y a indétermination de l'état d'équilibre si on ne sait pas comment ces trois objets ont été amenés (cf. figure 1.5). Dans un empilement granulaire, l'équilibre des forces est donc indéterminé et dépend de *l'histoire* de la construction du tas.

A cela, se rajoutent des effets liés à la rigidité et la non-cohésion des billes : pour des ensembles de billes parfaitement lisses, rigides et non cohésives, Ouagenouni et Roux (1995) d'une part [153, 154] et Moukarzel (1998) [143] d'autre part ont montré qu'une polydispersité infinitésimale suffisait à rendre l'empilement *isostatique* : le nombre de contact par grain, *coordinnence*, est exactement égal au nombre d'équations d'équilibre, à savoir $2d$ où d est la dimension d'espace. Ces systèmes isostatiques, très instables,

³¹Le premier à avoir mentionné ce frottement solide est en fait Léonard de Vinci à la fin du XV^{ième} siècle.

présentent une grande sensibilité à la moindre perturbation extérieure : le déplacement d'une bille, en rompant ou créant un contact, modifie non seulement sa propre coordinence, mais aussi et surtout celle de ses voisines. Ce déplacement va donc obliger l'ensemble du système à se réarranger de telle sorte que chaque bille retrouve une coordinence égale à $2d$. Ces comportements fragiles ont été mis en évidence dans les simulations numériques de Combe et Roux (2000) [47] : ceux-ci ont montré qu'une augmentation lente et progressive de la charge appliquée à un empilement désordonné de disques parfaitement lisses et rigides déclenchait une série de réarrangements. L'amplitude de ces événements est distribuée en loi de Levy, ce qui empêche tout passage à une limite continue.

Qu'en est-il pour des empilements de grains frottants ? La prise en compte d'une valeur finie de la friction, en autorisant certains écarts à l'isostaticité décrite précédemment, semble stabiliser les états d'équilibre et faire disparaître ces belles propriétés de fragilité (au moins vis à vis de perturbations faibles) [179, 48]. L'extrême inhomogénéité du matériau complique cependant le problème : les simulations numériques de Radjai (1997) ont en effet mis en évidence le caractère bimodal de la propagation des forces dans un matériau granulaire [169, 168]. Le réseau de forces peut être décomposé en deux sous-réseaux complémentaires aux propriétés mécaniques différentes :

- le sous-réseau *fort*, *i.e.* composé des contacts où F_c est supérieur à $\langle F_c \rangle$. Ce réseau supporte l'ensemble du déviateur du tenseur des contraintes. Il est donc responsable du caractère solide de l'empilement, au sens où il lui permet de supporter des contraintes de cisaillement finies sans pour autant se déformer.
- le sous-réseau *faible*, *i.e.* composé des contacts où F_c est inférieur à $\langle F_c \rangle$. Sa contribution au tenseur des contraintes du matériau est un terme de pression moyenne. Cette phase se comporte donc comme un liquide interstitiel.

Si les grains appartenant au sous-réseau faible n'ont aucune raison d'être dans un état isostatique, il n'est pas déraisonnable de penser que ceux appartenant au sous-réseau fort le sont.

L'existence de ces deux sous-réseaux a conduit Bouchaud, Cates, Claudin et Wittmer (1995) à proposer une description de la statique des matériaux granulaires basée sur ces voûtes [23, 27, 213, 214, 215, 40]. L'idée de leur modèle est de fermer le système d'équations donné par l'équilibre des forces par une relation phénoménologique de friction entre les voûtes. Les équations résultantes sont alors de type *hyperboliques*, *i.e.* causales, contrairement aux modélisations de type *élasto-plastiques* utilisées traditionnellement en mécanique des sols. Ce type de modélisation semble être en mesure de rendre compte d'un certain nombre d'observations expérimentales, notamment de l'existence d'un minimum de pression sous un tas de sable construit sous certaines conditions [204, 207], où de la variation non monotone de la masse apparente avec la hauteur de grains dans un silo en présence d'une surcharge [205].

La résolution de ces équations en présence d'un faible désordre [44], *i.e.* en considérant les paramètres du modèle comme des variables aléatoires faiblement dispersées, amène

systématiquement la création de forces négatives, *i.e.* de forces de tension. Celles-ci sont inacceptables puisque le matériau est non cohésif. Les auteurs ont donc été amenés à considérer ces matériaux comme fragiles [36] malgré la présence de friction : soumis à un jeu de contraintes externes donné, ils vont s'auto-organiser pour y résister, mais la moindre perturbation *incompatible* avec ce réseau de forces engendre un réarrangement global de celui-ci.

1.4 Le SAM

Pour expliquer cette fragilité à l'échelle macroscopique, Claudin et Bouchaud (1997) [41, 42] ont proposé un modèle simple, microscopique, de formation de voûte, le *Scalar Arching Model*. Ce modèle s'appuie sur une description par automate cellulaire, le q-model, proposée par Liu, Coppersmith et leurs collaborateurs (1995) [123, 49] : les grains sont placés sur un réseau régulier $(\vec{i}, \vec{j})$ (cf. figure 1.6). Le modèle ne prend en compte qu'une seule composante du tenseur des contraintes, la *charge* $w(i, j)$. Celle-ci est redistribuée aux deux grains du dessous, les fractions transmises respectivement à gauche q_- et à droite q_+ , sont tirées aléatoirement de manière à encoder le désordre inhérent à l'empilement. La conservation de la charge impose : $q_+(i, j) + q_-(i, j) = 1$. Les règles de propagations sont donc :

$$w(i, j) = w_g + q_+(i-1, j-1)w(i-1, j-1) + q_-(i+1, j-1)w(i+1, j-1) \quad (1.2)$$

où w_g désigne le poids d'un grain. La distribution q est choisie uniforme. Ce modèle reproduit une distribution des forces de contact F_c proches de celles observées expérimentalement (cf. figure 1.3), avec notamment une décroissance exponentielle de la densité de probabilité $P(F_c)$.

Ce modèle ne permet cependant pas de rendre compte de l'existence de voûtes, à savoir de corrélations entre forces de contact s'étendant sur plusieurs grains. Claudin et Bouchaud ont proposé d'introduire *une condition locale de glissement* : si le cisaillement au niveau du contact d'un grain (i, j) avec l'un de ces appuis est trop fort, *i.e.* si la différence de charge transmise à ce grain par ses deux voisins du haut dépasse un certain seuil R_c , il y a glissement local et rupture du contact. Toute la charge du grain (i, j) est alors transmise à l'appui restant. La règle de propagation proposée equation 1.2 est alors complétée de la manière suivante :

$$q_+(i, j) = 1 - q_-(i, j) = 0 \quad \text{si} \quad w_- \geq R_c w(i, j) \quad (1.3)$$

$$q_-(i, j) = 1 - q_+(i, j) = 0 \quad \text{si} \quad w_+ \geq R_c w(i, j) \quad (1.4)$$

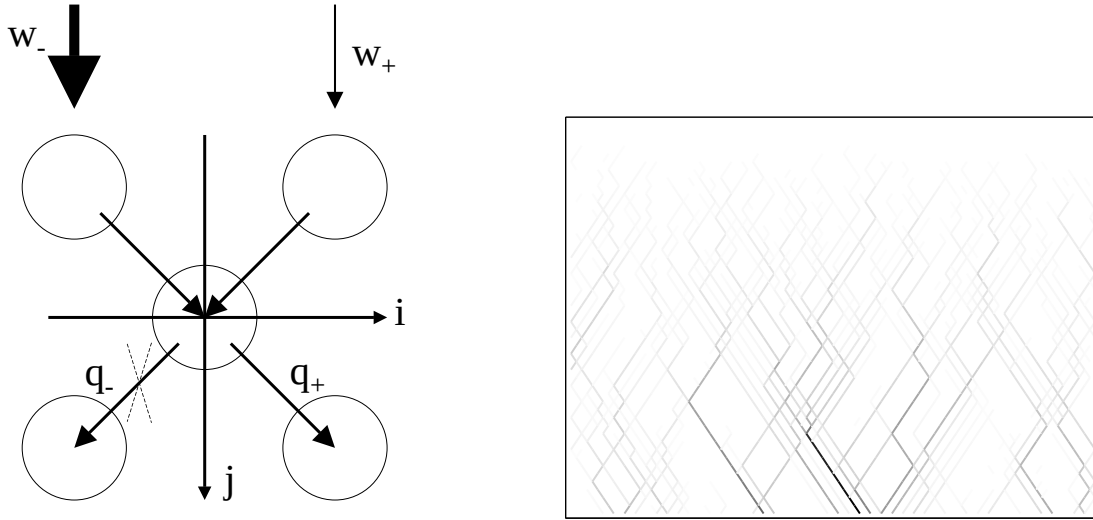


FIG. 1.6 – A gauche : schéma de principe du SAM. La charge du grain (i, n) , est aléatoirement redistribuée (via les facteur de redistribution q_+ et q_-) à ces deux voisins de dessous. Cependant, si la charge reçue par le grain (i, n) du grain haut gauche (respectivement haut droite) est bien supérieure à celle reçue du grain haut droite (respectivement haut gauche), la charge totale est intégralement transmise au grain bas droite (respectivement bas gauche). A droite : une configuration typique du réseau de forces obtenu. Les lignes sont d’autant plus foncées que la force de contact est grande (d’après Claudin [40]).

où $w_{\pm} = q_{\pm}(i \mp 1, j - 1)w(i \mp 1, j - 1)$. Ce modèle permet de rendre compte de l’existence de voûtes (cf. figure 1.6). Il prédit par ailleurs une grande sensibilité à une modification infinitésimale du système : un changement relatif de 10^{-5} sur la valeur de R_c modifie significativement la configuration des voûtes et peut générer des fluctuations allant jusqu’à 25% sur la charge totale supportée par la dernière rangée de grains [26, 41] (cf. figure 1.7). Il permet en particulier de rendre compte des régimes de *stick-slip* observés expérimentalement lorsqu’on pousse un empilement de billes confiné [43].

La distribution $P(w)$ des valeurs locales de la charge w_i au site i prédit par ce modèle suit une loi de puissance en contradiction avec les expériences et les simulations numériques présentées section 1.1 qui montre clairement que la distribution $P(F_c)$ des forces de contact F_c décroît exponentiellement pour $F_c \geq \langle F_c \rangle$. Nicodemi (1998) [149] a montré que cet effet provient du fait que, dans le SAM, les voûtes peuvent être arbitrairement grandes. Il introduit un nouveau paramètre δ qui donne la probabilité qu’un grain ne suive pas les lois de glissement du SAM, ce qui lui permet de contrôler la longueur moyenne des chaînes de force. La distribution $P(w)$ varie alors en loi de puissance pour $w \leq \langle w \rangle$ et en exponentiel $w \geq \langle w \rangle$.

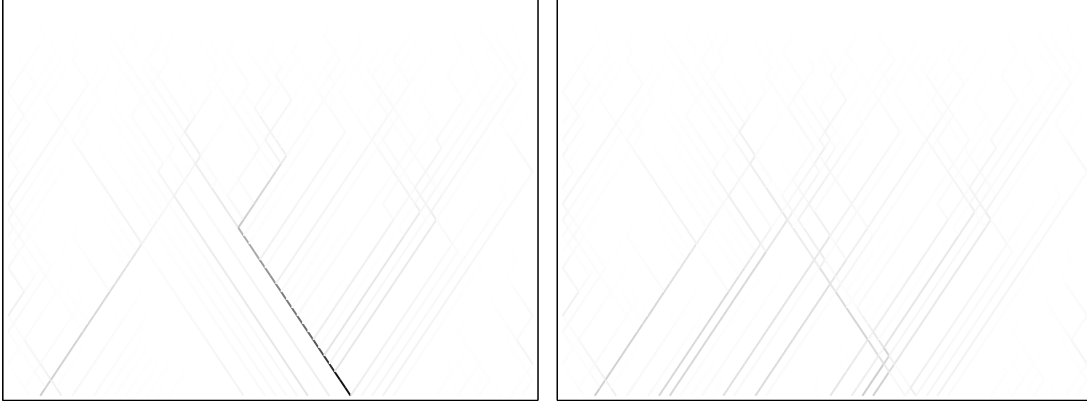


FIG. 1.7 – Deux réalisations données du modèle SAM pour deux seuils R_c très proches l'un de l'autre. A gauche : $R_c = 0.6684$. A droite $R_c = 0.6685$. Cette variation infinitésimale suffit à créer ou détruire des voûtes de longueurs macroscopiques.

1.5 Conclusion

Quel bilan peut-on tirer de ces différents éléments? Plusieurs arguments théoriques suggèrent qu'une assemblée de grains *idéaux*, *i.e.* parfaitement lisses et rigides présentent des comportements fragiles [153, 154, 143]. Ces arguments ne sont plus valides si on prend une valeur finie de la friction.

Cependant, plusieurs expériences mettent en évidence des comportements compatibles avec cette fragilité, par exemple une grande sensibilité aux perturbations extérieures [121, 122, 119, 118, 26, 45, 206]. Cette dernière a été récemment interprétée à l'aide d'un modèle simple de formation de voûtes, le SAM, qui suggère que, même en présence de grains frottants, les matériaux granulaires gardent des propriétés fragiles : soumis à un jeu donné de sollicitations extérieures, ils vont se structurer et former une structure en voûtes. Ce réseau de forces se réarrangera globalement pour une perturbation infinitésimale *incompatible* avec la configuration initiale. Ce type d'approche permet de rendre compte des mouvements de *stick slip* irréguliers observés lorsqu'on pousse des grains dans un tube vertical.

Si l'extrême sensibilité de ces matériaux ne fait pas de doute, son interprétation est encore sujette à caution. S'agit-il de réarrangements collectifs de chaînes de forces comme suggéré par le SAM où plus simplement d'une somme de réarrangements locaux dont l'influence macroscopique serait amplifiée par l'inhomogénéité du matériau. Les expériences actuelles ne permettent pas de trancher.

Dans un premier temps, nous nous proposons de répondre à cette question en étudiant les réarrangements provoqués par une perturbation infinitésimale, une variation de température de quelques degrés. L'expérience sera conçue de manière à pouvoir isoler les réarrangements collectifs des réarrangements locaux.

Dans un deuxième temps, nous étudierons les réarrangements engendrés par une perturbation *finie*, l'ajout d'une petite surcharge localisée à la surface de l'empilement. Nous modifierons pour cela le montage en tambour tournant présenté dans le chapitre 2 de la partie I. Cette étude nous permettra de discuter les différentes approches proposées pour rendre compte de la statique d'un matériau granulaire.

Chapitre 2

Principe de l'expérience

L'objectif de l'expérience est double : il s'agit (*i*) de mettre en évidence l'extrême sensibilité des matériaux granulaires et (*ii*) de déterminer son origine physique. Dans ce court chapitre, nous discuterons dans un premier temps les raisons qui nous ont poussés à utiliser des mesures électriques comme indicateurs des réarrangements de forces de contact. Nous exposerons ensuite les types d'empilement étudiés : ceux-ci doivent toujours être minimaux, *i.e.* pouvoir être décrits à l'aide d'un nombre réduit de paramètres tout en conservant - au moins qualitativement - les propriétés qu'on cherche à étudier. Enfin, nous nous attacherons à décrire le dispositif expérimental et les traitements associés.

2.1 Sur l'opportunité de mesures électriques

L'extrême sensibilité des empilements granulaires aux perturbations extérieures tend à disparaître quand le matériau est constitué de grains mous ou qu'il est soumis à des contraintes importantes [195, 99, 100]. La sonde utilisée doit donc pouvoir s'appliquer à une assemblée de grains rigides faiblement comprimée (idéalement, les grains ne sont soumis qu'à leur propre poids).

Dans ce cas, les techniques usuelles utilisant le papier carbone, la propagation d'onde ultrasonore ou les propriétés de biréfringence des grains, ne permettent pas d'obtenir d'information sur le réseau de forces : toutes ces méthodes requièrent des surfaces de contact grains/grains significatives. Les déformations doivent donc être importantes, ce qui nécessite soit l'utilisation de grains extrêmement mous, soit une mise sous contrainte importante de l'empilement.

Nous nous sommes donc proposés ici d'utiliser le courant électrique pour essayer d'obtenir une information sur la structure de ces chaînes de contact. En effet, pour des billes conductrices, la petitesse des zones de contact provoque un étranglement des lignes de

courant [73]. On peut alors montrer que, sous certaines hypothèses dites hypothèses de Hertz ³², la résistance de constriction R_c au niveau du contact varie avec la force normale F_n comme (cf. annexe B) :

$$R_c = AF_n^{-1/3} \quad (2.1)$$

où A est une constante dépendant de la résistivité du matériau, du degré d'oxydation de la surface... Cette résistance est bien plus importante que celle présentée en volume par les grains. En conséquence, la résistance globale de l'empilement est principalement déterminée par les chaînes de contact.

Notons qu'en pratique, nous ne sommes pas dans le cadre des hypothèses de Hertz : pour une force F_n donnée, R_c peut être vue comme une variable aléatoire dont la valeur moyenne $\langle R_c \rangle$ varie avec F_n comme prédit par l'équation 2.1 (cf. annexe B).

La résistance R_c peut donc difficilement être reliée à l'intensité des forces de contact. On va alors s'intéresser aux fluctuations de la conductance de l'empilement lorsque celui-ci est perturbé thermiquement. Si celles-ci ne permettent pas de quantifier directement l'amplitude du réarrangement du réseau de force, elles devraient cependant permettre de les localiser dans le temps.

L'étude du comportement électrique d'un matériau granulaire n'est à vrai dire pas nouvelle : dès 1890, Branly (1890) [30] décrit l'influence d'une onde électromagnétique sur sa conductance électrique. Plus récemment Vandembroucq *et al.* (1997) [200], en utilisant une caméra infrarouge, ont pu directement observer les chemins électriques créés par le passage d'un courant électrique intense. La mesure de la conductance d'un mélange de grains isolants et conducteurs a permis de mesurer expérimentalement les différents exposants critiques apparaissant au seuil de percolation [46, 198]. Ces mesures ont aussi permis d'étudier l'influence des chaînes de contact sur les propriétés mécaniques du matériau [78, 4, 135, 37]. Mentionnons enfin les expériences de Vandewalle *et al.* (2001) [203, 202] : les auteurs se sont intéressés à la réponse électrique d'un empilement perturbé mécaniquement par une succession de *coups* appliqués à l'aide d'un marteau en bois. Ils ont montré que ces perturbations engendraient d'importantes fluctuations électriques. Ces expériences, menées parallèlement aux nôtres, semblent donc appuyer l'idée de comportements fragiles, au moins vis à vis de perturbations d'amplitudes finies.

2.2 Choix d'un empilement

Nous nous plaçons dans une approche minimaliste : l'empilement étudié est un empilement 2D de billes en acier inoxydable de diamètre $6 \text{ mm} \pm 30 \text{ } \mu\text{m}$ (leurs caractéristiques

³²on considère des sphères infiniment lisses, se déformant de manière entièrement élastique

sont décrites annexe A). L'utilisation de billes millimétriques permet un bon contrôle des propriétés géométriques et mécaniques. Par ailleurs, le nombre de billes peut facilement être modifié, ce qui permet de séparer les effets locaux des effets collectifs.

Les billes sont placées afin de former un empilement triangulaire compact, de taille $L \times H$ (L et H étant adimensionnés par le diamètre des billes), reproductible d'une expérience à l'autre (cf. figure 2.1). Notons que, même si l'empilement apparaît ordonné, la faible polydispersité des billes et l'indétermination sur la force de frottement au niveau des contacts suffit à engendrer du désordre dans le réseau de forces [143]. Ce désordre peut être mis en évidence dans notre expérience par exemple en regardant la répartition des courants au bas de l'empilement (cf. figure 2.2).

Les billes utilisées sont des billes de roulement à billes extrêmement rigides, de module d'Young $E = 200$ Gpa. Les forces de contact, de l'ordre de quelques poids de billes, engendrent des déformations de l'ordre de quelques nanomètres (cf. annexe A) bien inférieures à la polydispersité des billes (de l'ordre de 10 microns). Les conditions nécessaires à la manifestation de comportements fragiles sont donc normalement vérifiées [36]. Notons cependant que ces déformations sont petites devant la rugosité moyenne des surfaces, de l'ordre de 100 nanomètres (cf. annexe A). Dans les gammes de forces étudiées, le contact entre deux billes sera donc assuré par les micro-aspérités de surface. Celles-ci, en bougeant, peuvent générer des fluctuations de conductance sans pour autant invoquer les réarrangements collectifs de chaînes de contact prédits par le SAM. Il faut donc être très prudent quant à l'interprétation physique des fluctuations électriques observées : seule la comparaison du comportement électrique de 2 billes et d'un empilement permettra de séparer les contributions collectives des contributions locales.

2.3 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est présenté figure 2.3 : l'empilement est confiné entre deux plaques de Plexiglas d'épaisseur 2 cm. Celui ci est relié à une pile de 9 V. Une résistance R_1 placée en série assure que le courant traversant un contact entre deux billes est toujours inférieur à 40 mA.

Dans cette gamme de courant, il n'y a pas de microsoudure : chaque contact se comporte de manière réversible comme une résistance Ohmique (cf. annexe B). On enregistre la tension V_0 aux bornes de la pile (erreur digitale : 5 mV) et la tension V_1 aux bornes de la résistance R_2 (erreur digitale : 0.5 mV) à l'aide d'un convertisseur AD 12-bytes. On peut en déduire la conductance électrique g_p de l'empilement :

$$g_p(t) = \frac{V_1(t)}{R_2(V_0(t) - V_1(t)) - R_1 V_1(t)} \quad (2.2)$$

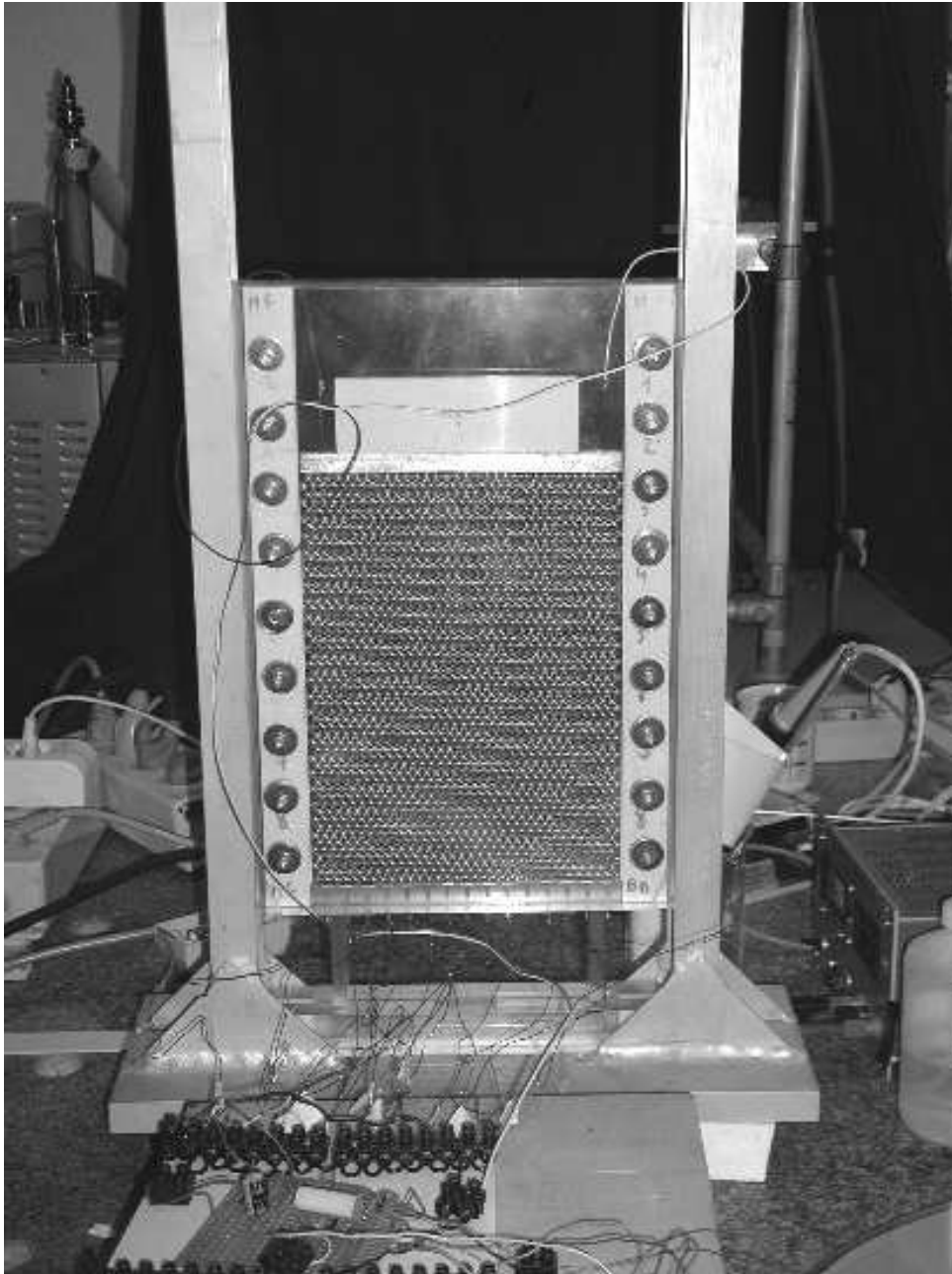


FIG. 2.1 – Photographie de l'expérience

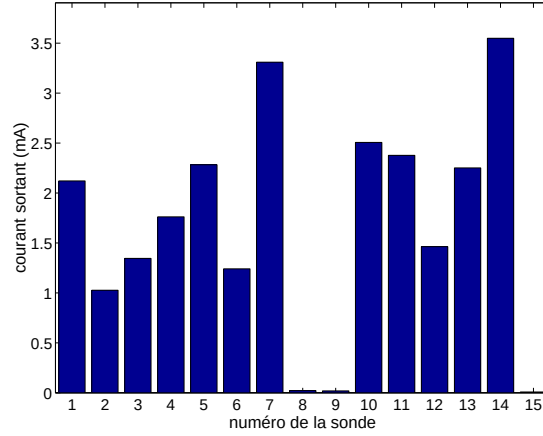


FIG. 2.2 – Répartition des courants à la sortie de l’empilement : le courant injecté par l’électrode du haut est de 25.3 mA. On mesure le courant au bas de l’empilement à l’aide de 16 sondes différentes. La distribution des courants est très hétérogène. Par ailleurs un coup rageur appliqué au support en marbre modifie complètement cette distribution. L’inhomogénéité des courants provient donc bien des hétérogénéités de contact bille/bille et non de l’état de surface des électrodes.

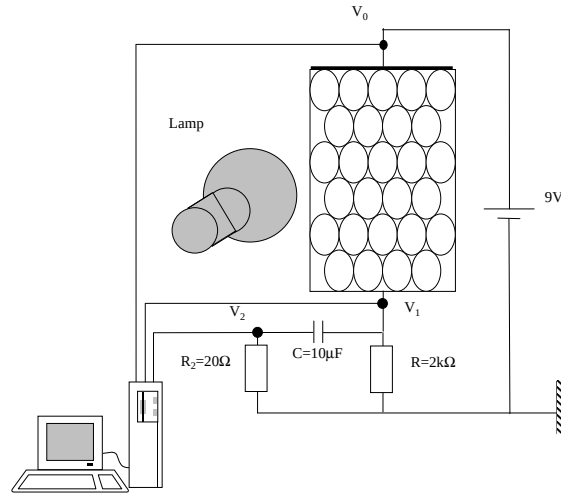


FIG. 2.3 – Schéma électrique du montage. La résistance R_1 permet de limiter le courant passant à travers chaque contact pour éviter les microsoudures. Les tensions V_0 , égales à la f.e.m. de la pile, V_1 , proportionnelle au courant traversant l’empilement et V_2 proportionnelle aux fluctuations de ce courant permettent de remonter à la conductance de l’empilement et à sa fluctuation

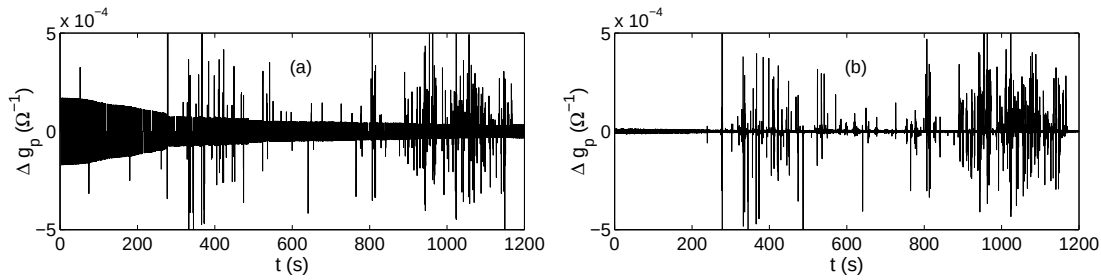


FIG. 2.4 – Signaux typiques de fluctuations de conductance Δg_p : à gauche, Δg_p a été calculée directement en différenciant l'équation 2.2. A droite, Δg_p est évaluée via l'équation 2.3. Le niveau de bruit du système d'acquisition apparaît alors réduit d'un facteur 50.

On mesure ensuite la partie fluctuante V_2 de cette tension filtrée par un filtre RC passe haut de temps caractéristique $\tau = RC = 0.02$ s. Si la fréquence d'acquisition est bien plus élevée que $1/\tau$, on peut alors en déduire les fluctuations de conductance $\Delta g_p(t)$ définies comme la variation de g_p entre deux points d'acquisition successifs :

$$\Delta g_p(t) = \frac{1}{2} \frac{R_2 V_0^l}{(R_2 V_0^l - (R_1 + R_2) V_1^l)^2} (V_2(t+1) - V_2(t-1)) \quad (2.3)$$

où V_0^l et V_1^l sont les valeurs lissées de V_0 et V_1 sur cinquante points successifs. Remplacer V_1 par V_2 dans le calcul de Δg_p permet une réduction significative de l'influence du bruit digital sur Δg_p (cf. figure. 2.4).

Des expériences menées en remplaçant l'empilement par une résistance ohmique de 50Ω ont permis de déterminer le niveau de bruit du système d'acquisition. Celui ci est principalement dominé par les erreurs digitales sur V_2 égales à $10 \mu\text{V}$. Une fluctuation Δg_p sera donc considérée comme significative si la fluctuation V_2 correspondante est supérieure à $50 \mu\text{V}$. On a fait varier la fréquence d'acquisition de 0.05 Hz à 10 kHz. Une fréquence de 500 Hz apparaît suffisante pour discriminer deux pics de fluctuation successifs.

Chapitre 3

Fluctuation électrique et fragilité

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit notre protocole expérimental et explicité les raisons du choix de mesures électriques comme outils d'étude des réarrangements de forces. Ce chapitre montre la validité d'un tel choix. L'extrême sensibilité du matériau est dans un premier temps mise en évidence (section 3.1). Celle-ci apparaît en accord avec les expériences ultrasonores de Liu et Nagel (1992) [121, 122, 119, 118] et les expériences électriques de Vandewalle *et al.* (2001) [203, 202]. La simplicité de l'empilement nous permet par ailleurs de remonter à l'origine mécanique de cette sensibilité. Celle-ci n'est pas liée aux réarrangements de forces prédits par le SAM (cf. chapitre 1) mais simplement à des réarrangements locaux liés à la mobilisation de la friction (section 3.2). Enfin, nous reportons à la fin de ce chapitre, la présence de comportements collectifs liés au confinement 2D de l'empilement (section 3.3).

3.1 Mise en évidence de réarrangements internes

3.1.1 Petites causes grands effets

Le protocole expérimental est le suivant : L'empilement est vibré pendant quelques minutes. Sa conductance augmente jusqu'à atteindre une valeur maximale, reproductible d'une expérience à l'autre, de l'ordre de $0.02 \Omega^{-1}$ pour un empilement ordonné de taille 33×52 où 33 (resp. 52) est la largeur (resp. la hauteur) en nombre de billes. L'acquisition est ensuite lancée sur une période de vingt minutes. On chauffe (resp. refroidit) l'empilement en allumant la lampe une minute après (resp. en éteignant la lampe pour un empilement préparé lampe allumée), la température de la pièce étant réglée à l'aide d'un climatiseur.

Dès que l'empilement est thermiquement perturbé et quelque soit le sens de variation

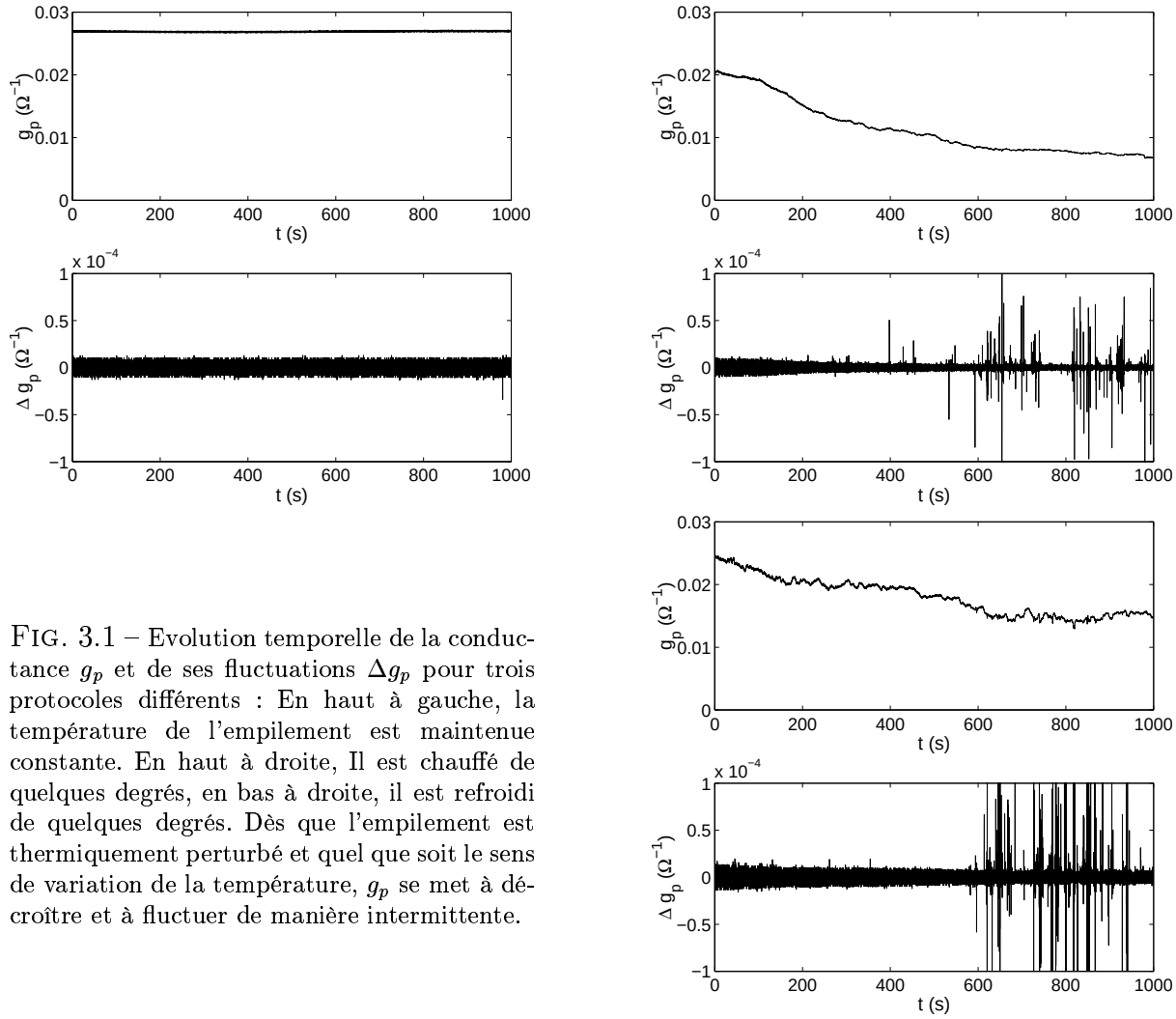


FIG. 3.1 – Evolution temporelle de la conductance g_p et de ses fluctuations Δg_p pour trois protocoles différents : En haut à gauche, la température de l'empilement est maintenue constante. En haut à droite, Il est chauffé de quelques degrés, en bas à droite, il est refroidi de quelques degrés. Dès que l'empilement est thermiquement perturbé et quel que soit le sens de variation de la température, g_p se met à décroître et à fluctuer de manière intermittente.

de la température, sa conductance se met à décroître et à fluctuer de manière intermittente (cf. figure 3.1). Ce comportement ne peut s'expliquer par des effets thermoélectriques, des problèmes de microsoudures où une influence de la température, voire de l'éclairement, sur l'oxydation des surfaces de contact. Pour ces différents scénarii, une augmentation de température devrait avoir l'effet inverse d'une baisse de température, ce qui n'est clairement pas le cas ici. L'origine de ces fluctuations est plus probablement reliée à des réarrangements mécaniques au niveau des contacts.

On a tracé figure 3.2 la densité de probabilité $P(\Delta g_p)$ d'obtenir un pic de fluctuation d'amplitude Δg_p . Cette distribution est symétrique et peut être décrite par une loi de Levy [140] :

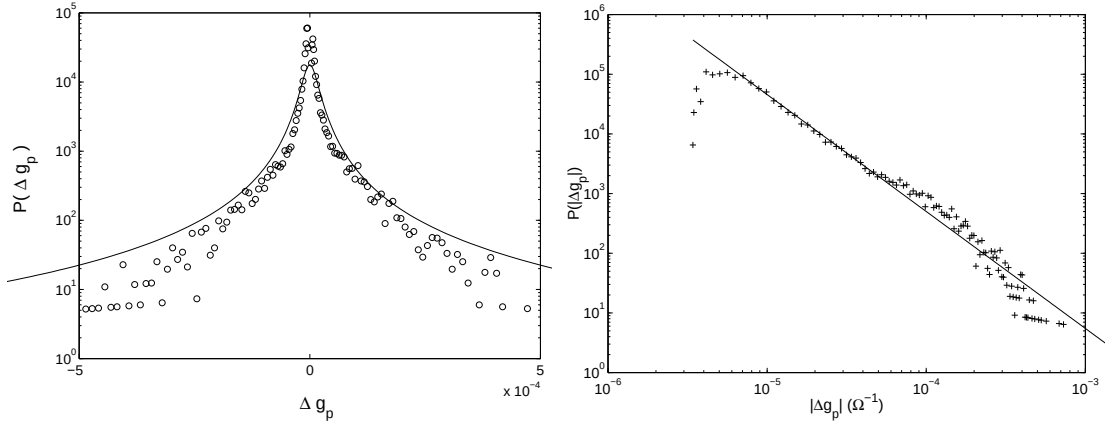


FIG. 3.2 – Distribution des amplitudes des pics de fluctuations Δg_p . A gauche : densité de probabilité $P(\Delta g_p)$ en coordonnées semilogarithmique. La ligne pleine correspond à un ajustement par l'équation 3.1. A droite : densité de probabilité $P(|\Delta g_p|)$ en coordonnées logarithmique montrant la décroissance en loi de puissance. La ligne droite est un ajustement par la loi de puissance décrit equation 3.2. L'exposant α_g vaut $\alpha_g = 1 \pm 0.1$.

$$P(|\Delta g_p|) \propto \int_0^\infty \cos(|\Delta g_p|k) e^{-\gamma k^{\alpha_g}} dk \quad (3.1)$$

avec une queue de distribution en loi de puissance :

$$P(|\Delta g_p|) \propto |\Delta g_p|^{-(1+\alpha_g)} \quad (3.2)$$

Pour un empilement régulier 33×52 , $\alpha_g \simeq 1$. Le pic de distribution est nettement plus étroit que celui d'une Gaussienne tandis que les queues de distribution sont beaucoup plus larges. Ce type de distribution est la signature d'un comportement *intermittent* : les fluctuations sont le plus souvent extrêmement petites mais, de temps en temps, des fluctuations géantes apparaissent.

Notons que les mêmes distributions avec le même exposant ont été observées par Vandewalle *et al.* [203] à Liège pour des empilements désordonnés de billes de plomb fortement perturbés par des coups appliqués à l'aide d'un marteau de bois. Cela suggère que les fluctuations électriques observées dans notre expérience, *i.e.* engendrées par des perturbations thermiques infinitésimales, et dans l'expérience de Liège, *i.e.* engendrées par des perturbations d'amplitude finie, ont la même origine physique.

3.1.2 Mise en évidence du caractère intermittent des fluctuations

Intéressons nous maintenant à l'évolution temporelle de l'apparition de ces fluctuations : la vue agrandie, représentée figure 3.3, montre que ces pics de fluctuations se regroupent par paquets. Cette structure peut être caractérisée par l'analyse statistique des intervalles de temps Δt séparant deux pics de fluctuations successifs (cf. figure 3.3). Deux régimes distincts peuvent être distingués :

- aux temps longs, la fonction de distribution cumulative $F(\Delta t)$ ³³ décroît exponentiellement avec Δt . Ce type de dépendance est caractéristique d'un flux Poissonnien. Cette partie de la distribution décrit les intervalles de temps séparant deux paquets successifs, qui apparaissent donc de manière complètement indépendante.
- aux temps courts, la fonction de distribution suit une loi de puissance :

$$P(\Delta t) \propto \Delta t^{-(1+\alpha_t)} \quad (3.3)$$

où α_t vaut : $\alpha_t \simeq 0.6$. Cette partie de la distribution, signature d'événements extrêmement corrélés, correspond aux pics de fluctuations à l'intérieur d'un même paquet.

Cette intermittence peut donc être comprise de la manière suivante : la variation lente de température déclenche aléatoirement, de manière complètement Markovienne, une perturbation dans l'empilement. Celle-ci correspond au premier pic de fluctuation apparaissant dans un paquet. Elle déclenche ensuite une succession de réarrangements qui se traduisent par les pics de fluctuation électrique suivants à l'intérieur du même paquet.

Une perturbation thermique de quelques degrés apparaît suffisante pour engendrer des fluctuations électriques géantes. A ce stade, ce comportement ressemble fort à celui prédit par le SAM. Le modèle prévoit en effet que la faible dilatation des grains engendre des fluctuations largement distribuées, en loi de puissance, de la masse apparente ΔW_a mesurée à la base du silo. Cette distribution ΔW_a pourrait tout à fait se traduire par la distribution large observée sur Δg_p . Par ailleurs, ce modèle prédit l'existence d'*avalanches statiques*, c'est à dire des réorganisations en cascades des contacts dont la signature électrique pourrait être les paquets observés. Chaque pic correspondrait alors à la création ou la rupture d'un contact.

Il faut cependant garder en mémoire le fait que, dans les gammes de pression choisies, le contact entre deux billes n'est pas lisse, mais assuré par une multitude de microaspérités dont les déplacements relatifs peuvent tout à fait présenter une signature électrique

³³Il est relativement difficile d'obtenir un bon estimateur de la densité de probabilité P dans les queues de distribution. L'estimateur utilisé habituellement est l'histogramme. Il consiste à ranger les réalisations observées dans des boîtes de tailles finies et à compter le nombre de fois où une réalisation tombe dans une boîte. Cet estimateur cesse d'être valable à partir du moment où des boîtes apparaissent vides, *i.e.* dans les queues de distribution. Nous préférons alors estimer la fonction de distribution cumulative $F(R)$ définie comme la probabilité d'observer une réalisation supérieure à une valeur R donnée.

similaire sans pour autant impliquer plusieurs billes. Seule l'étude de l'influence de la géométrie de l'empilement -et du nombre de billes- peut permettre de séparer ces deux effets et voir lequel est dominant.

3.2 Origine mécanique des réarrangements

3.2.1 Influence de la géométrie de l'empilement

Afin de déterminer l'origine mécanique de ces pics de fluctuations, nous avons fait varier la géométrie de l'empilement. Six empilements, décrits tableau 3.1, ont été comparés. Pour toutes ces expériences, $P(|\Delta g_p|)$ décroît en loi de puissance avec un exposant α_g variant légèrement (cf. figure 3.4). Le fait que cette loi de puissance soit qualitativement indépendante de la géométrie de l'empilement et soit toujours présente pour 3 billes suggère qu'elle n'est pas caractéristique des réarrangements du réseau de chaînes de forces comme avancé par Vandewalle *et al.* (2001) [203].

empilement (1)	empilement désordonné de 1690 billes
empilement (2)	empilement triangulaire 33×52
empilement (3)	empilement triangulaire 33×32
empilement (4)	empilement triangulaire 33×16
empilement (5)	empilement triangulaire 33×2
empilement (6)	empilement triangulaire 33×2 de billes isolantes où seules les trois billes du milieu sont conductrices

TAB. 3.1 – Description des empilements étudiés

D'une manière générale, Δg_p n'est certainement pas la meilleure variable d'étude si on souhaite comparer des expériences avec des empilements variables : une fluctuation locale de la conductance au niveau d'un contact proche d'une des deux électrodes aura un impact beaucoup plus important sur la conductance globale qu'une fluctuation au niveau d'un contact situé loin des électrodes. L'analyse statistique des Δt est sans aucun doute un indicateur bien meilleur.

La figure 3.5 présente les densités de probabilité $P(\Delta t)$ sur les intervalles de temps Δt séparant deux pics de fluctuations. La décroissance en loi de puissance et l'exposant α_t ne dépendent pas de la géométrie de l'empilement. Pour 3 billes conductrices (empilement (6)), le comportement en loi de puissance s'étend sur les trois décades de la distribution en temps!

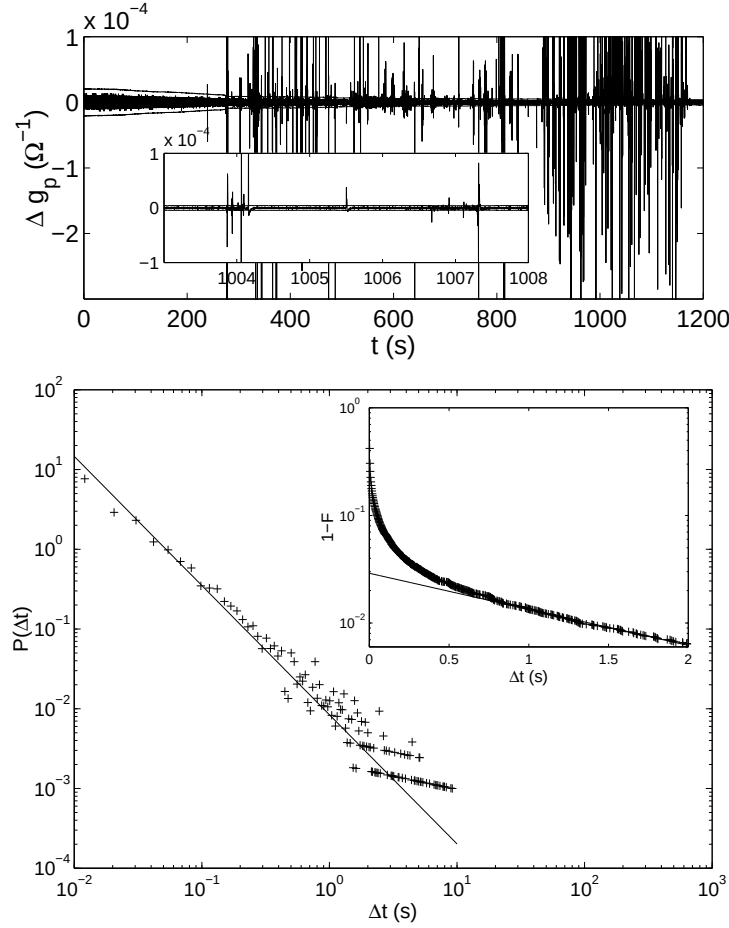


FIG. 3.3 – En haut : évolution temporelle des fluctuations de conductances Δg_p . L’insert montre une vue agrandie sur une échelle de quelques secondes : les pics de fluctuations se regroupent en paquets. En bas : densité de probabilité $P(\Delta t)$ d’obtenir un intervalle de temps séparant deux pics de fluctuations égale à Δt . Les axes sont logarithmiques. La ligne droite est un ajustement par la loi de puissance donnée par l’équation 3.3. L’exposant α_g vaut : $\alpha_g = 0.61$. L’insert montre la fonction de distribution $F(\Delta t)$ (en coordonnées semilogarithmiques), moins bruitée que $P(\Delta t)$ pour les grands Δt . Celle-ci décroît exponentiellement avec Δt .

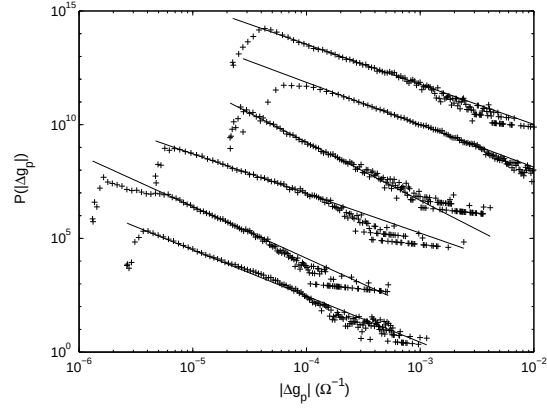


FIG. 3.4 – Distribution des amplitudes des pics de fluctuations Δg_p pour les empilements (1), (2), (3), (4) (5) et (6) de bas en haut. Les courbes ont été décalées pour des raisons de clarté. L'échelle des axes est logarithmique. Les lignes droites sont des ajustements en loi de puissance. Les exposants valent respectivement, de bas en haut, 1.0, 1.1, 0.8, 1.6, 0.9 et 0.8.

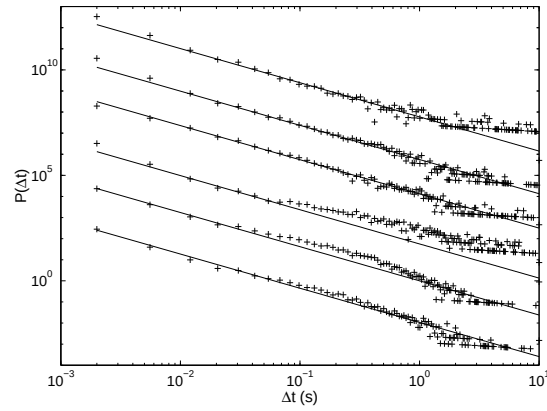


FIG. 3.5 – Distribution des intervalles de temps Δt pour les empilements (1), (2), (3), (4) (5) et (6) de bas en haut. Les courbes ont été décalées pour des raisons de clarté. Les lignes droites sont des ajustements en loi de puissance d'exposant α_t fixé à $\alpha_t = 0.6$ de façon à minimiser l'erreur sur l'ajustement pour l'empilement (6).

3.2.2 Interprétation du comportement électrique

La première idée qui vient à l'esprit est de relier ces fluctuations intermittentes très largement distribuées aux avalanches statiques prédites par le SAM. Les pics de fluctuations correspondraient alors aux différents reports de contraintes. Néanmoins, dans ce cas, la structure en paquets devrait apparaître de moins en moins prononcée quand la hauteur de l'empilement diminue, et devrait disparaître complètement pour trois billes. Le fait que la partie en loi de puissance de $P(\Delta t)$ soit indépendante de la géométrie de l'empilement suggère donc plutôt une origine locale à ces fluctuations. L'observation de la surface des billes à l'aide d'un Microscope à Force Atomique (AFM), nous a permis de mesurer la rugosité moyenne R_a ³⁴ de la surface (cf. annexe A). Nous avons trouvé $R_a = 90$ nm, à comparer aux déformations de l'ordre de 10 nm (cf. annexe A) engendrées par les forces de contact, de l'ordre de quelques 10^{-2} N. Le contact entre deux billes est donc complètement dominé par les micro-aspérités de surface. Nous pouvons donc envisager le scénario suivant : quand l'empilement est vibré, les micro-aspérités de surface s'interpénètrent et maximisent la surface de contact effective. La conductance de l'empilement est alors maximale. Lorsque qu'on allume la lampe, on chauffe l'empilement de quelques degrés. La dilatation thermique des billes entre alors en compétition avec la friction entre billes : les billes restent immobiles jusqu'à ce que l'accumulation des contraintes soit suffisante pour dépiéger les micro-aspérités et permettre aux deux surfaces de glisser l'une par rapport à l'autre. La structure en paquets des pics de fluctuations Δg_p serait alors la signature de la brisure et/ou la création de micro-contacts. Ces avalanches de micro-contact tendent à rendre la surface effective plus faible et donc à diminuer g_p .

Notons cependant que, quand le nombre de billes augmente, $P(\Delta t)$ s'écarte du comportement en loi de puissance. Cet écart est la signature de comportements collectifs puisqu'il n'est observé que pour un nombre important de billes. Il sera interprété dans la prochaine section.

3.2.3 Influence de la mise sous contrainte et de l'intensité de la perturbation

Pour déterminer l'origine de cette loi de puissance, nous avons fait varier la contrainte externe, en ajoutant des surcharges de poids variable sur l'électrode (cf. figure 3.6), et l'intensité de la perturbation thermique, en rapprochant ou en éloignant la lampe (cf. figure 3.7). Si, sur une durée d'acquisition, le nombre d'événements observés diminue quand la mise sous contrainte augmente où quand l'intensité de la perturbation diminue, leur distribution reste identique.

³⁴La rugosité moyenne d'une surface est définie comme l'écart-type sur l'altitude de l'ensemble des points de la surface

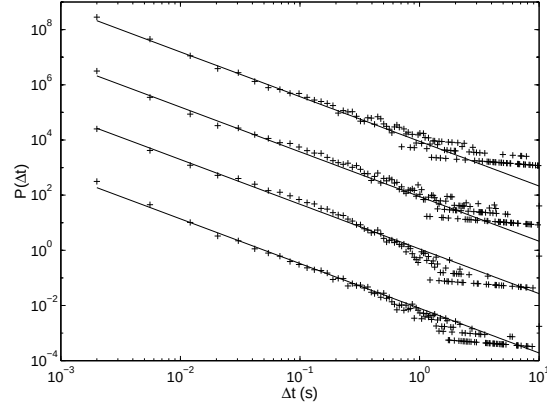


FIG. 3.6 – Distribution des intervalles de temps Δt pour l'empilement (2) et une masse M de l'électrode supérieure variable. De bas en haut, $M = 108$ g, $M = 206$ g, $M = 304$ g et $M = 404$ g. Les courbes ont été décalées pour des raisons de clarté. Les lignes droites sont des ajustements en loi de puissance d'exposant $\alpha_t = 0.6$.

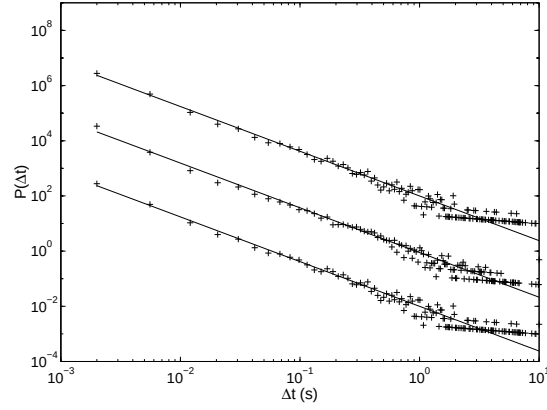


FIG. 3.7 – Distribution des intervalles de temps Δt pour l'empilement (2) et la lampe placée à distance d variable. De bas en haut, $d = 5$ cm, $d = 10$ cm et $d = 20$ cm. Les courbes ont été décalées pour des raisons de clarté. Les lignes droites sont des ajustements en loi de puissance d'exposant $\alpha_t = 0.6$.

3.2.4 Interprétation de la distribution sur les intervalles de temps

Le fait que la contrainte extérieure et l'intensité de la perturbation thermique ne modifient pas $P(\Delta t)$ suggère une interprétation purement géométrique de cette distribution. La visualisation AFM de la surface des billes montre que celle-ci peut être décrite par une surface auto-affine³⁵ d'exposant de rugosité $\zeta = 0.4$ (cf. annexe A). Pour ce type de surface, la distribution des distances $\Delta\ell$ séparant deux microaspérités successives suit une loi de puissance d'exposant $\alpha_\ell = 1 - \zeta$ [74] sur un intervalle $[a_1, a_2]$ où a_1 est l'échelle microscopique en dessous de laquelle la surface apparaît plate et a_2 est la taille typique du contact, de l'ordre du diamètre d'un contact de Hertz (cf annexe A) : $a_2 \simeq 1 \mu\text{m}$. Chauffées de quelques degrés, les billes se dilatent de $1 \mu\text{m}$ sur un temps de conduction $\tau_{cd} \simeq 1 \text{ s}$ (cf. annexe A). La vitesse de déplacement relative V de deux billes en contact est de l'ordre de $V \simeq 1 \mu\text{m/s}$. Si cette vitesse varie peu, le temps séparant deux ouvertures/fermetures de micro-contact successifs est donc distribué en loi de puissance d'exposant $\alpha_t = \alpha_\ell = 1 - \zeta = 0.6$ sur l'intervalle $[a_1/V, a_2/V = 1 \text{ s}]$, ce qui est compatible avec les densités de probabilité observées.

3.3 Influence du confinement 2D

Quand le nombre de billes augmente, $P(\Delta t)$ s'écarte du comportement en loi de puissance à partir d'un certain Δt_c critique, qui décroît avec le nombre de billes (cf. figure 3.5). Cette bosse est la signature d'événements collectifs puisqu'un nombre important de billes est nécessaire à son existence.

3.3.1 Influence de l'inclinaison de la cellule

Pour déterminer l'origine de ce comportement collectif, nous avons fait varier l'angle d'inclinaison θ de la cellule avec l'horizontale. Quand θ décroît, la bosse disparaît (cf. figure 3.9). Elle n'est donc pas la signature des réarrangements de chaînes de forces prédits par le SAM : ceux-ci devraient être d'autant plus nombreux que les billes sont libres de bouger, *i.e* que l'influence de la gravité est faible. Or la bosse tend à disparaître.

3.3.2 Origine des comportements collectifs

L'interprétation suivante, proposée par C. Godrèche et J. M. Drouffe, nous paraît beaucoup plus probable : lorsque les billes sont versées dans la cellule, elles se disposent

³⁵Un objet auto-affine est invariant sous transformation affine $x_i = \lambda_i x_i$ pour i variant de 1 à la dimension de l'espace d . Chaque λ_i est une fonction homogène de l'un d'entre eux λ : $\lambda_i = \lambda^{\zeta_i}$. Si on considère une surface isotropique dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$, le seul exposant non trivial ζ , appelé exposant de rugosité, est celui lié au changement d'échelle dans la direction z : $x \rightarrow \lambda x, y \rightarrow \lambda y, z \rightarrow \lambda^\zeta z$.

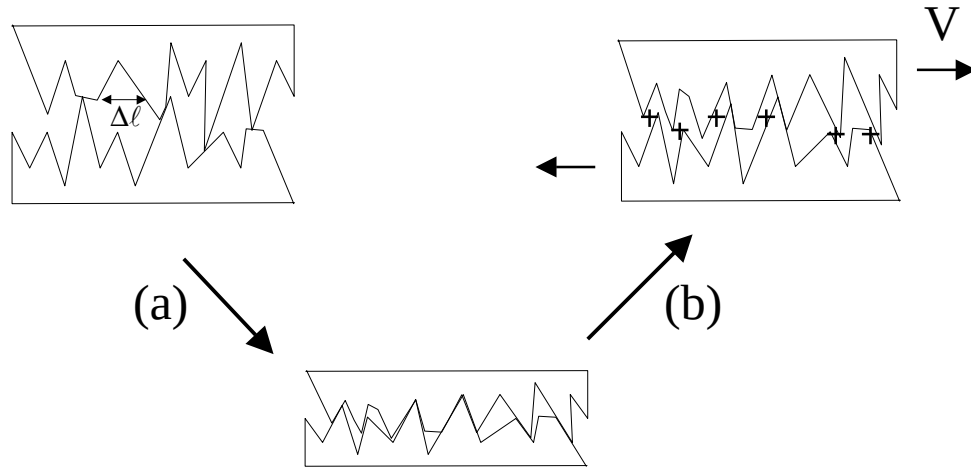


FIG. 3.8 – Comportement du contact pendant l'expérience. On part d'une configuration donnée des microaspérités, obtenue après versement des billes dans la cellule. Quand on vibre le tas (étape *a*), les microaspérités s'imbriquent et maximisent la surface de contact effective, *i.e.* la conductance électrique. Quand maintenant on perturbe thermiquement l'empilement, les billes bougent légèrement les unes par rapport aux autres (étape *b*). Les microaspérités se désimbriquent. La surface de contact effective diminue et la conductance décroît. Les pics de fluctuations correspondent à la création où à la rupture d'un contact. Comme la surface est auto-affine, cela aboutit à une distribution en loi de puissance sur les intervalles de temps séparant deux pics de fluctuations.

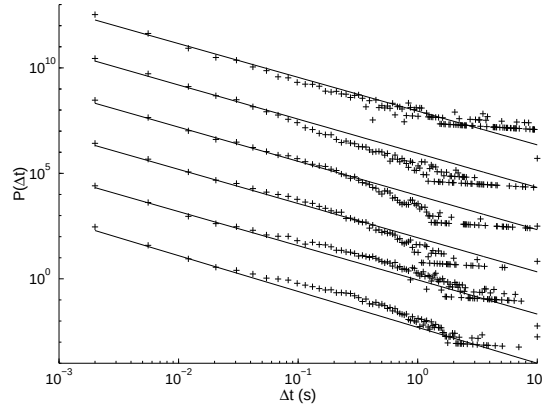


FIG. 3.9 – Distribution des intervalles de temps Δt pour l’empilement (2) et différentes inclinaisons. Les courbes ont été décalées pour des raisons de clarté. De bas en haut : $\theta = 90^\circ$, $\theta = 80^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = 30^\circ$ et enfin $\theta = 90^\circ$ avec l’empilement (6). Pour toutes les distributions, l’exposant α_t a été fixé à $\alpha_t = 0.6$.

en quinconce entre les deux plaques de Plexiglas. Lorsque les billes sont chauffées, de temps en temps, une bille s’appuyant sur une plaque se déplace suffisamment pour aller s’appuyer sur l’autre plaque. Ses voisines vont alors changer elles aussi de points d’appui pour respecter au mieux la mise en quinconce locale. Lorsque on incline la cellule, de plus en plus de billes sont en contact avec une même plaque. L’effet stabilisant de la mise en quinconce est de moins en moins prononcé et la bosse sur la distribution des $P(\Delta t)$, signature électrique de cet effet, disparaît.

3.4 Conclusion

Des mesures électriques nous ont permis de mettre en évidence l’extrême sensibilité d’un empilement granulaire vis à vis de petites perturbations thermiques. Dès que le matériau est chauffé ou refroidi de quelques degrés, sa conductance décroît et se met à fluctuer de manière intermittente.

L’analyse statistique de ces fluctuations nous a permis de caractériser cette intermittence. Celle-ci semble compatible, au moins dans un premier temps, avec les prédictions du SAM : ces paquets de fluctuations pourraient tout à fait être la signature de réarrangements collectifs de chaînes de contact. La comparaison détaillée des distributions pour différentes géométries nous a cependant amenés à rejeter cette hypothèse. Ces fluctuations électriques sont d’origine locales. Nous avons aussi mis en évidence des réarrangements collectifs. Ceux-ci ne sont cependant pas liés à des réarrangements de voûtes, mais simplement au fait que le confinement 2D corrèle les déplacements des billes. Leur position optimale dans une cellule verticale est en quinconce. Toute mouvement d’une bille qui viole cette mise en quinconce oblige ses voisines à se déplacer.

Cette expérience illustre l'importance des aspects tribologiques sur le comportement macroscopique du matériau. Dans notre expérience et peut être dans les expériences de propagation d'ondes sonores de Liu et Nagel (1992) [121, 122, 119, 118], les expériences de mesure de fluctuation de masse apparente effectuées par Vanel *et al.* (1998) [206] ou les expériences électriques de Vandewalle *et al.* (2001) [203], cette sensibilité aux conditions extérieures est d'origine locale. Il serait d'ailleurs très intéressant de refaire ces dernières expériences sur des empilements très simples, contenant seulement quelques grains. A l'heure actuelle, nous pensons que l'extrême sensibilité d'un matériau granulaire provient des réarrangements locaux de la force de frottement au niveau de chaque contact dont la répercussion macroscopique est amplifiée par l'inhomogénéité du matériau qui empêche l'atténuation macroscopique des fluctuations par effet de moyenne.

Nous aimerions dans le futur étudier le comportement électrique de notre empilement quand on le soumet à plusieurs cycles chauffage/refroidissement. Nos premières expériences semblent mettre en évidence des effets de *vieillissement* : les cycles successifs sont de moins en moins efficaces à changer la conductance de l'empilement. Il serait extrêmement intéressant de reprendre les protocoles expérimentaux développés pour caractériser la compaction d'un matériau granulaire (voir par exemple [108, 163, 151, 150]) et d'étudier la dépendance de la résistance électrique - signature de la configuration des frottements entre grains - avec le nombre, l'amplitude et la fréquence des cycles de perturbations.

Chapitre 4

Contraintes et réarrangements

Nous avons étudié dans le chapitre précédent les réarrangements internes dans un matériau granulaire sous perturbation infinitésimale. Nous nous intéressons maintenant aux réarrangements engendrés par une perturbation d'amplitude finie, à savoir l'ajout d'une petite surcharge localisée en surface.

Auparavant, nous avons mis l'accent sur l'aspect temporel des apparitions de ces réarrangements. Dans ce chapitre, nous allons plutôt nous intéresser à la localisation spatiale des réarrangements engendrée par l'ajout de la surcharge en surface. La répartition de ces réarrangements dans l'empilement devrait nous renseigner - au moins qualitativement - sur la répartition des fluctuations de contraintes apparaissant en chaque point en réponse à cette surcharge.

Nous aborderons dans la section 4.1 les différentes approches proposées pour décrire la statique d'un tas de sable. Nous verrons par ailleurs quelles sont leurs prédictions quant à la forme de ces fonctions de réponse en contrainte.

L'expérience proprement dite sera présentée section 4.2. Nous verrons dans un premier temps comment nous pouvons avoir accès aux micro-déplacements engendrés par l'ajout de la surcharge. Nos expériences permettent de mettre en évidence le rôle crucial joué par le caractère plus ou moins ordonné de l'empilement.

Nous avons développé un modèle simple qui permet de rendre compte des différentes observations expérimentales. Il sera présenté section 4.3.

Les travaux présentés ici restent préliminaires.

4.1 Sur la statique d'un tas de sable

La répartition des contraintes dans un matériau granulaire est souvent contre-intuitive. Prenons l'exemple d'un tas de sable. Suivant son mode de construction, la répartition

des pressions à sa base est différente : pour un tas construit en couches horizontales, la pression est maximum sous le sommet. Pour un tas construit à partir d'un entonnoir, par avalanches successives, on observe un minimum de pression sous le tas [204, 207]. Rappelons par ailleurs (cf. chapitre 1) que la distribution des forces de contact est très étalée, avec des fluctuations du même ordre de grandeur que la valeur moyenne.

Toutes ces observations ont donné lieu à d'intenses recherches théoriques. Plusieurs modèles, très différents et s'excluant mutuellement, ont été proposés.

4.1.1 Les différents modèles de répartition des contraintes

La plupart de ces modèles se placent dans le cadre de la mécanique des milieux continus. L'état de l'empilement est caractérisé par un champ continu de contrainte $\vec{\Sigma}$. L'équilibre des forces donne un premier jeu d'équations :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma} = \rho \vec{g} \quad (4.1)$$

où ∇ est l'opérateur nabla, ρ la densité locale et $\vec{g}$ le vecteur gravité. L'équilibre des couples impose quant à lui la symétrie de $\vec{\Sigma}$:

$$\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji} \quad (4.2)$$

Ces deux conditions ne suffisent pas à déterminer l'état du système : dans le cas 2D (resp. 3D), on a 3 inconnues (resp. 6 inconnues), les composantes de $\vec{\Sigma}$, pour 2 (resp. 3) équations. Il manque un certain nombre de relations pour fermer le système d'équations. C'est dans la forme de ces équations manquantes que les modèles diffèrent. On se restreint dans la suite à des géométries 2D et on se place dans le référentiel $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ où le vecteur unitaire $\vec{e}_z$ est parallèle à $\vec{g}$ et de même sens.

Modèle élasto-plastique

Les premiers modèles ont été proposés par les mécaniciens des sols [192, 193]. Ceux-ci concernent des matériaux granulaires consolidés, *i.e.* soumis à des contraintes externes suffisamment fortes pour que le réseau des contacts soit stable et ne se réarrange pas sous faible perturbation extérieure. L'empilement est alors considéré comme un solide *élasto-plastique* : lorsqu'il est soumis à un jeu de contraintes externes en compression, il va se déformer de manière élastique tant qu'en chaque point, le critère de Mohr-Coulomb n'est pas atteint, *i.e.* tant que, dans n'importe quel référentiel orthonormal $(\vec{e}_m, \vec{e}_n)$, on

a $|\Sigma_{nm}| \leq \tan \Phi |\Sigma_{nn}|$ où Φ est l'angle de friction interne du matériau. Dans le référentiel $(\vec{e}_X, \vec{e}_Z)$, cela se traduit par [32, 40] :

$$(\Sigma_{XX} - \Sigma_{ZZ})^2 + 4\Sigma_{XZ}^2 \leq \tan^2 \Phi (\Sigma_{XX} + \Sigma_{ZZ})^2 \quad (4.3)$$

Dans le domaine élastique, on peut définir un champ de déplacement $\vec{u}$. Cela introduit 2 inconnues supplémentaires et l'équation de continuité supplémentaire. Les 3 relations manquantes sont alors données en spécifiant une relation univoque :

$$\vec{\Sigma} = F(\vec{S}) \quad (4.4)$$

où $\vec{S}$ est le tenseur des déformations : $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. Dans ce domaine, le champ de contrainte obéit à des équations de type *elliptique* [112] : on doit spécifier des conditions sur *l'ensemble* des limites du matériau considéré pour calculer le champ de contrainte.

Dans le domaine plastique, on ne peut plus définir de déplacement. On suppose alors que le matériau reste à la limite de la rupture et on transforme l'inégalité 4.3 en égalité. Cette relation associée aux équations d'équilibre 4.1 forme un système complet d'équations. Celui-ci est de type *hyperbolique* [188] : il existe des lignes privilégiées - *caractéristiques* - le long desquelles les contraintes se propagent. Par conséquent, la détermination du champ de contraintes ne nécessite la spécification des conditions que sur une *partie* des limites du matériau.

Si on considère un tas de sable, il existe des zones plastiques et des zones élastiques [32]. En revanche, pour une couche de sable d'épaisseur constante soumise à une surcharge localisée, l'ensemble du matériau se comporte de manière élastique.

Modèle OSL

Si les modèles de type élasto-plastique décrivent bien les matériaux consolidés, leur extension à des empilements faiblement comprimés, composés de grains rigides et non cohésifs, pose un certain nombre de questions. Comment définir un champ de déplacement quand la déformation macroscopique résulte d'une somme de déplacements *irréversibles* des grains les uns par rapport aux autres ? Peut-on alors parler de déformations élastiques ? Comment définir un état de référence à contrainte nulle [40, 70] ?

Ces difficultés ont amené Bouchaud, Cates, Claudin et Wittmer (1995) [23, 27, 213, 214, 215, 40] à fermer les équations d'équilibre 4.1 par une relation phénoménologique entre composantes du tenseur des contraintes dans *l'ensemble* du matériau. Celle-ci s'écrit :

$$\Sigma_{XX} = a\Sigma_{ZZ} + b\Sigma_{XZ} \quad (4.5)$$

Cette équation résulte de la modélisation du matériau en termes de voûtes d'orientation moyenne constante frottant les unes sur les autres avec un angle de friction inférieur à Φ . Les coefficients a et b s'expriment en fonction de cette orientation moyenne et de l'angle de friction entre voûtes. Le lecteur intéressé peut se référer à la thèse de Claudin [40]. Cette relation de fermeture, associée aux équations d'équilibre 4.1, forme un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique : les contraintes se propagent le long de deux caractéristiques dont les orientations dépendent des coefficients a et b . Contrairement aux modèles élasto-plastiques, *l'ensemble* du matériau est décrit à l'aide d'équations hyperboliques quelque soit la configuration, qu'il s'agisse d'un tas de sable ou d'une couche de sable d'épaisseur constante soumis à une surcharge localisée.

q-model

Liu, Coppersmith et leurs collaborateurs (1995) [123, 49] proposent quant à eux un modèle stochastique de transmission des forces. Ce modèle est scalaire : il ne prend en compte que la charge $w = \Sigma_{ZZ}$ à laquelle est soumis un grain. Il est discret : les grains sont placés aux nœuds d'un réseau régulier. A chaque grain, repéré par ses coordonnées (i, j) , on associe deux nombres aléatoires $q_+(i, j)$ et $q_-(i, j)$, compris entre 0 et 1, qui représentent la fraction de la charge $w(i, j)$ transmise respectivement aux deux voisins $(i + 1, j + 1)$ et $(i - 1, j + 1)$ de la couche sous-jacente (cf. figure 4.1). La conservation de la charge impose $q_+(i, j) + q_-(i, j) = 1$ et le tirage aléatoire des $q_{\pm}$ encode le désordre au niveau des contacts. La règle de propagation s'écrit :

$$w(i, j) = w_g + q_+(i - 1, j - 1)w(i - 1, j - 1) + q_-(i + 1, j - 1)w(i + 1, j - 1) \quad (4.6)$$

où w_g est le poids d'un grain.

Quand la distribution des q est uniforme, on peut calculer exactement la densité de probabilité des charges w . Celle-ci possède une queue exponentielle en accord avec les observations expérimentales (cf. chapitre 1). Après passage à la limite continue, puis moyenne d'ensemble, on arrive à une équation aux dérivées partielles continue de type *parabolique* :

$$\frac{\partial w}{\partial Z} = \rho + \frac{d}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \quad (4.7)$$

où ρ est la densité locale et d le diamètre des grains. Comme dans le modèle OSL, la détermination du champ de contrainte ne nécessite la spécification des conditions que sur une *partie* des limites du matériau.

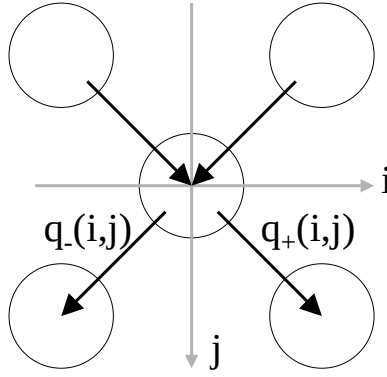


FIG. 4.1 – Schéma du q-model. Les $q_{\pm}$ sont des variables aléatoires comprises entre 0 et 1 telles que $q_+(i, j) + q_-(i, j) = 1$.

4.1.2 Fonctions de réponse correspondantes

Trois types d'approches différentes tentent de rendre compte de la statique d'un empilement granulaire. Ces approches sont très différentes les unes des autres : elles conduisent à des équations de nature différente, hyperboliques, elliptiques ou paraboliques suivant les cas. Par conséquent, ces modèles s'excluent mutuellement.

Comment trancher ? L'idéal serait de mesurer la fonction de réponse en contrainte d'une couche de grains à une surcharge infinitésimale localisée en surface. Suivant le modèle, celle-ci présente des comportements significativement différents.

Prédictions des modèles

Intéressons-nous au profil de pression le long de l'axe horizontal $\vec{e}_X$ (cf. figure 4.2) sous une couche de grains d'épaisseur H soumise à une surcharge infinitésimale en surface :

- **le modèle élastique** prévoit une distribution de pression avec *un seul* pic à la verticale de la surcharge. La largeur à mi-hauteur du pic augmente *linéairement* avec H [112].
- **les modèles OSL** prévoient l'existence de *deux* pics de part et d'autre de la surcharge. La distance entre ces deux pics augmente *linéairement* avec H [112] et leur largeur à mi-hauteur croît *en racine* de H .
- **le q-model** prévoit l'existence *d'un seul* pic dont la largeur à mi-hauteur croît *en racine* de H .

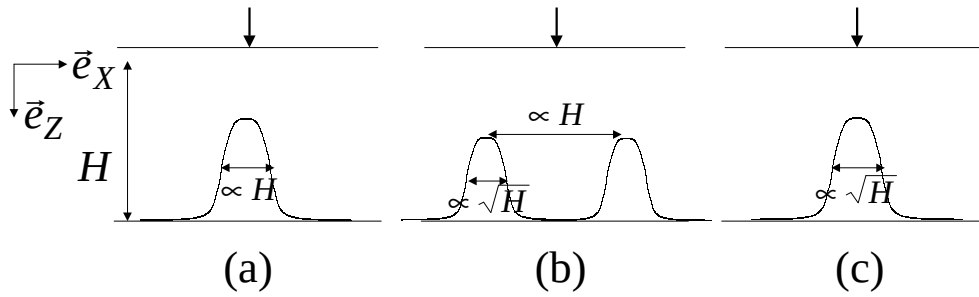


FIG. 4.2 – Fonction de réponse d’une couche de grains soumise à une surcharge infinitésimale localisée en surface. (a) : modèle élasto-plastique. (b) modèle OSL. (c) q-model.

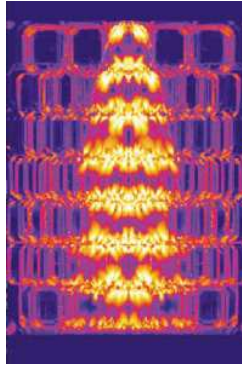


FIG. 4.3 – Superposition de 10 images d’un empilement de briques photoélastiques soumis à une force localisée sur une brique en surface (d’après Da Silva et Rajchenbach (2000) [187]). Les grains comprimés semblent être confinés à l’intérieur d’une parabole représentée par la ligne pointillée.

Constatations expérimentales et numériques

Plusieurs expériences ont été montées très récemment pour tenter de mesurer cette fonction de réponse. La difficulté majeure est de se placer dans un régime réversible tout en étant capable de mesurer la pression avec une précision suffisante à des profondeurs significatives.

Da Silva et Rajchenbach (2000) [187] ont construit un mur 2D de briques photoélastiques. Ils appuient ensuite sur l’une des briques supérieures avec une force de 20 N et regardent le champ de force engendré. La forme cubique des grains empêche ceux-ci de se déplacer les uns par rapport aux autres. En conséquence, les régimes observés sont toujours élastiques et réversibles, même pour une surcharge relativement forte. Les briques les plus comprimées semblent confinées à l’intérieur d’une parabole (cf figure 4.3). Cela tendrait à confirmer les prédictions du q-model.

Reydellet et Clément (2001) [175] ont mesuré la répartition des pressions sous une couche de sable d’épaisseur variable soumise à une surcharge de quelques grammes localisée sur une surface de 1 cm². Dans cette gamme de pression, la réponse est réversible.

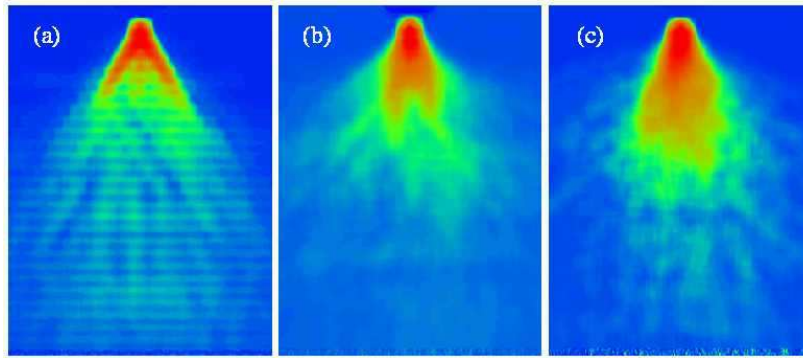


FIG. 4.4 – Réponse d'un empilement de grains photoélastiques soumis à une surcharge (moyennée sur 50 réalisations). (a) : empilement ordonné composé de disques monodisperses. (b) : empilement faiblement désordonné composé de disques de deux tailles différentes. (c) : empilement complètement désordonné composé de pentagones. A faible profondeur, les forces se propagent suivant deux chaînes de grains préférentielles. Celles-ci s'estompent d'autant plus rapidement que le désordre est important (d'après Geng *et al.* (2001) [77]).

Une méthode de détection synchrone leur permet d'obtenir une bonne précision sur les profils de pression mesurés. Cette expérience semble confirmer la théorie élastique : on observe en effet une distribution de pression à un seul pic (sous la surcharge) dont la largeur augmente linéairement avec l'épaisseur de la couche de sable. Notons cependant que le pic est de forme plutôt Gaussienne, *i.e.* plus étroit que la distribution Lorentzienne prévue par la théorie élastique pour un plan semi infini [112].

Geng *et al.* (2001) [77] ont quant à eux étudié des empilements 2D de disques ou de pentagones photoélastiques (cf figure 4.4). Suivant les cas, ils observent des comportements différents : pour des empilements très ordonnés, la fonction de réponse possède deux pics, ce qui est caractéristique d'équations hyperboliques comme celles du modèle OSL. Lorsque le désordre augmente, on observe un seul pic qualitativement en accord avec les prédictions de la théorie élastique.

Suite à cette dernière expérience, Bouchaud *et al.* (2001) [28] ont étudié l'influence d'un désordre important sur les modèles OSL. Ils supposent l'existence de "défauts" dans l'empilement. Lorsqu'une chaîne de force (correspondant à l'une des caractéristiques des équations OSL) rencontre un de ces défauts, elle se divise en deux, les nouvelles orientations étant supposées aléatoires. La fonction de réponse possède alors deux pics lorsque la profondeur H est faible, et un seul lorsque H est grand. La variation de la structure de ce pic avec H est proche de celle prédite par les modèles élastiques.

4.1.3 Objectif

La description des contraintes dans un matériau granulaire est une question loin d'être tranchée : suivant les cas, l'un ou l'autre des trois modèles apparaît le plus pertinent. Le

désordre de l'empilement semble être un paramètre clé, mais son influence n'est pas encore claire.

Les expériences de da Silva et Rajchenbach (2000) [187] et de Reydellet et Clément (2001) [175] ne permettent pas de contrôler le désordre dans l'empilement. Par ailleurs, il n'est pas du tout certain que le mur de briques étudié par da Silva et Rajchenbach puisse être représentatif d'un matériau granulaire. En particulier, il ne permet pas de rendre compte des effets de voûtes.

L'expérience de Geng *et al.* (2001) [77] présente l'inconvénient de considérer des grains extrêmement mous ³⁶. Et les sources majeures de désaccord entre les différentes théories concernent justement la manière de traiter un empilement de grains rigides.

Nous nous proposons dans les sections suivantes d'étudier la fonction de réponse pour un empilement de billes d'acier.

4.2 Mesure des micro-déplacements induits par une surcharge en surface

L'expérience que nous proposons consiste à visualiser directement les micro-déplacements engendrés par l'ajout d'une surcharge de faible masse en surface. On ne cherche pas à mesurer la fonction de réponse en terme de contrainte, mais plutôt en terme de *déplacement*.

4.2.1 Méthode expérimentale

Dispositif

Par souci de commodité, nous avons repris le tambour tournant - maintenant rendu fixe - et le système de visualisation associé permettant d'étudier les écoulements de surface. Le dispositif a été présenté dans le chapitre 2 de la partie I.

Nous utilisons à nouveau les billes d'acier de diamètre $d = 3 \pm 0.03$ mm et de masse $m = 0.11$ g employées dans la partie I. Trois types d'empilement seront étudiés (cf. figure 4.6) :

- **un empilement 2D ordonné** obtenu en fixant l'écartement du tambour à 3.05 mm et en plaçant une pièce en forme de demi hexagone dans la moitié inférieure du tambour (cf. figure 4.5). L'empilement obtenu est ordonné, monocristallin, les billes formant un réseau triangulaire.

³⁶Les matériaux photoélastiques utilisés par Geng *et al.* ont un module d'Young 10000 fois plus petit que celui de billes d'acier ou de verre.

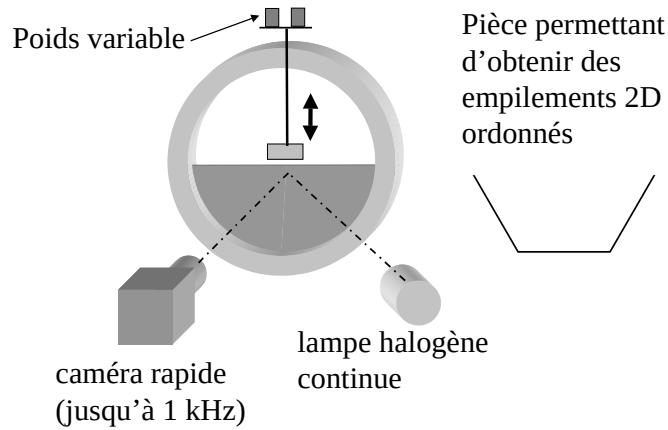


FIG. 4.5 – Dispositif utilisé pour mesurer la fonction de réponse en déplacement.

- **un empilement 2D désordonné** obtenu en retirant le demi hexagone de l'empilement précédent et en ajoutant de manière homogène 100 entretoises de diamètre 5 mm. Celles-ci créent des défauts. Les grains cristallins sont alors nettement plus petits et contiennent typiquement une cinquantaine de billes.
- **un empilement quasi-2D désordonné** obtenu en fixant l'écartement du tambour à 7 mm. On visualise alors la position des billes situées contre la paroi de verre. Cette coupe 2D de l'empilement 3D est complètement désordonnée.

La surcharge localisée est obtenue grâce à une tige munie à son extrémité supérieure d'un plateau sur lequel sont placées des masses variables, et à son extrémité inférieure d'un patin de largeur égale à 1.2 cm permettant de répartir la surcharge sur 5 à 7 billes suivant le type d'empilement (cf. figure 4.5).

Le protocole expérimental est le suivant :

- la tige est placée sur la surface libre de l'empilement. Cela crée une surcharge d'intensité réglable en faisant varier la masse M placée sur le plateau supérieur. On acquiert une première séquence d'images de l'empilement *contraint*
- la tige est ensuite enlevée. On acquiert une deuxième séquence d'images de l'empilement *libre*
- On traite les deux séries d'images de façon à isoler les billes qui ont bougé entre les deux configurations

Chaque expérience est réalisée 10 fois en ne faisant aucun effort pour reposer la tige exactement au même endroit. Les résultats expérimentaux présentés ci-dessous sont moyennés sur ces 10 réalisations.

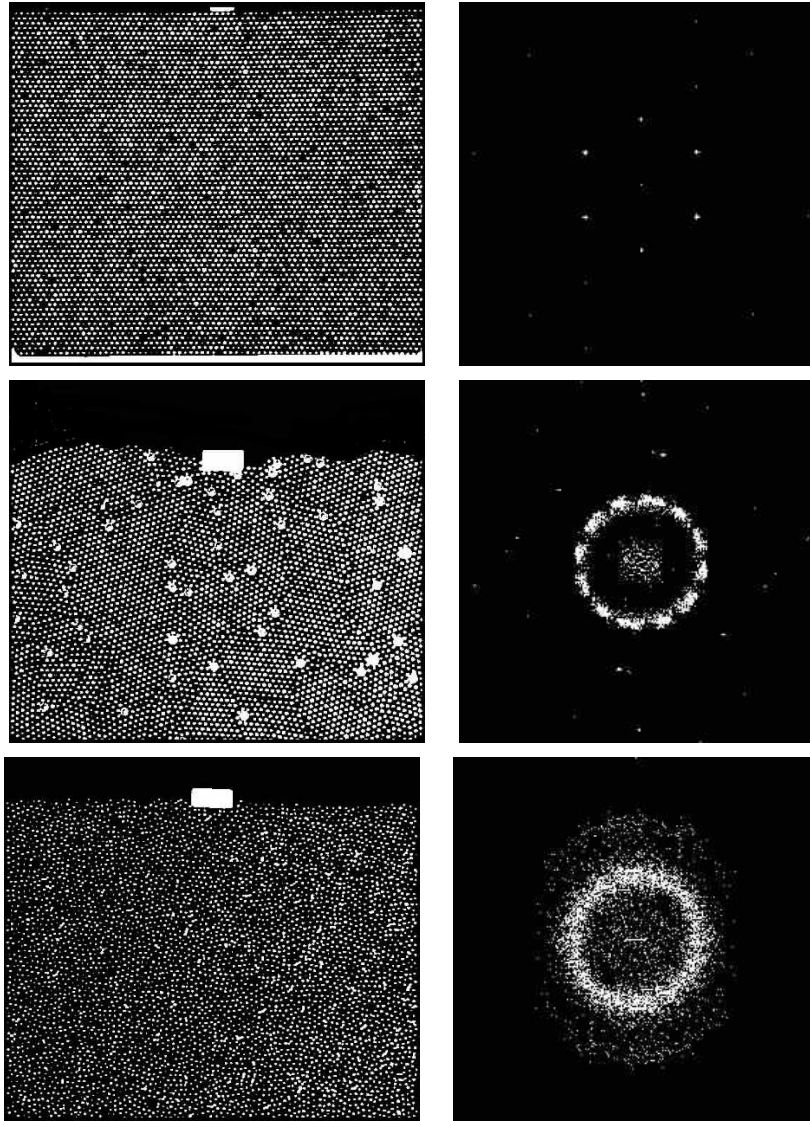


FIG. 4.6 – Différents empilements étudiés. A gauche : image brute des empilements. A droite : transformée de Fourier de ces images. En haut : empilement 2D ordonné. Les six pics de la transformée de Fourier sont la signature de l'empilement triangulaire ordonné. Au milieu : empilement 2D désordonné. Les pics sont moins marqués. En bas, empilement quasi 2D. On ne peut observer voir de pics. La structure est complètement désordonnée

Acquisition et traitement des images

Les billes sont éclairées à l'aide d'une lampe halogène continue. Les séquences d'images sont enregistrées à l'aide de la caméra rapide utilisée pour étudier les écoulements de surface. La fréquence d'acquisition est fixée à 125 Hz. La résolution des images est alors de 480×400 pixels, avec une taille de pixel égale à 0.224 mm. Nous enregistrons alors 100 images de l'empilement contraint (resp. libre), que nous moyennons pour obtenir une image unique. Cette opération de moyenne permet de réduire le bruit lié aux variations d'éclairage ou aux vibrations intrinsèques du tambour et de la caméra.

Les images moyennes de l'empilement contraint et de l'empilement libre sont soustraites l'une de l'autre, puis binarisées. Les billes qui ont bougé lorsqu'on a retiré la surcharge apparaissent en blanc. L'application de ce traitement au mouvement d'une bille unique translatée à l'aide d'une platine micro-contrôle montre que des micro-déplacements supérieurs à $20 \mu\text{m}$ sont repérés sans équivoque³⁷. Cette précision est à comparer à la taille de la *cage* dans laquelle les billes sont confinées et peuvent se mouvoir. Dans l'empilement de compacité maximale, l'empilement boulet de canon, cette taille est donnée par la dispersion sur le diamètre et la sphéricité des billes. Celle-ci est de l'ordre de $30 \mu\text{m}$ ³⁸. Nous devrions par conséquent être en mesure de repérer spatialement les micro-déplacements engendrés par la surcharge, sans pour autant être en mesure de les quantifier.

4.2.2 Résultats

Mise en évidence des réarrangements

La figure 4.7 présente différentes images obtenues pour un empilement 2D ordonné avec des surcharges de poids différents. Le nombre de billes se déplaçant augmente avec la charge. Par ailleurs, celles-ci se trouvent préférentiellement de part et d'autre de la surcharge : on observe un triangle noir, *i.e.* une zone sans micro-réarrangements, à la verticale de celle-ci. Cela laisse suggérer que, dans ce type d'empilement, *l'information* se propage plutôt le long de directions privilégiées. Les billes proches de ces directions ressentent d'avantage la présence de la surcharge que celle, pourtant plus proches, à la verticale de celle-ci.

Influence du caractère plus ou moins ordonné de l'empilement

La figure 4.8 présente les fonctions de réponse dans les trois différents empilements. Quand l'empilement est désordonné, le triangle noir disparaît. La zone sensible à la perturbation prend la forme d'un demi disque : les billes semblent d'autant plus sujettes

³⁷La sensibilité est sans doute bien meilleure, mais nous n'avons pas pu la tester faute de platines micro-contrôle suffisamment précises.

³⁸Données fournies par le constructeur.

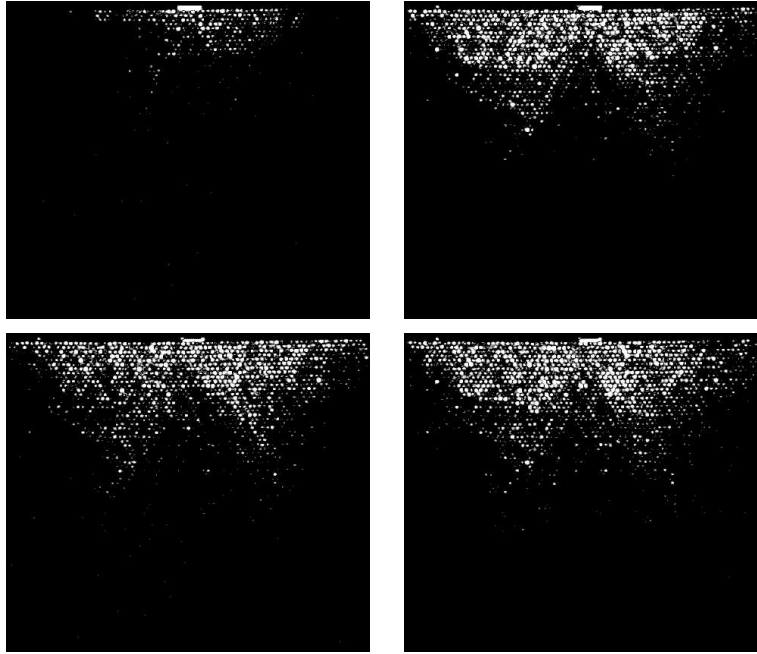


FIG. 4.7 – Localisation des microdéplacements dans un empilement 2D ordonné soumis à une surcharge localisée en surface. Les billes apparaissant en blanc sont celles dont le barycentre s'est déplacé d'une distance supérieure à un seuil donné, typiquement de l'ordre d'une vingtaine de micromètres. Notons cependant que le niveau de gris des billes ne permet pas de quantifier ce déplacement. Le poids de la surcharge varie suivant les images. En haut à gauche : $M = 620m$, en haut à droite : $M = 1120m$, en bas à gauche : $M = 2180m$ et en bas à droite : $M = 2860m$, $m = 0.11\text{ g}$ étant le poids d'une bille.

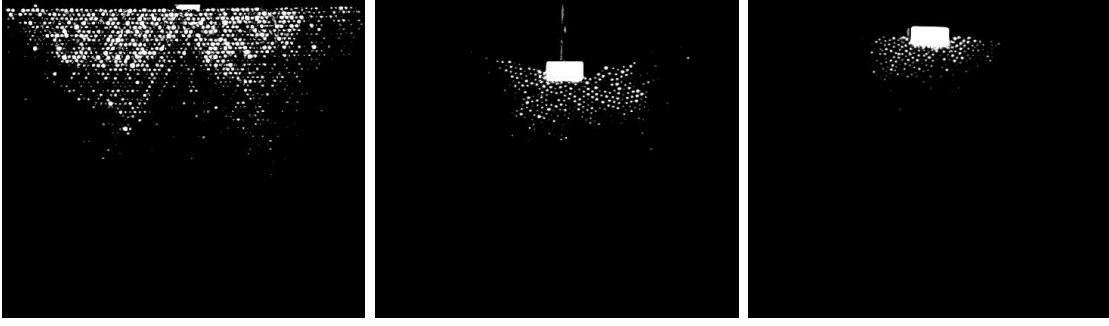


FIG. 4.8 – Réponse en déplacement des différents empilements pour une surcharge de masse $M = 1120$ (adimensionnée par le poids d'une bille). A gauche : empilement 2D ordonné. Au milieu : empilement 2D désordonné. A droite : empilement quasi-2D désordonné.

à réarrangements qu'elles sont proches de la surcharge, sans anisotropie notable. Cette observation est à rapprocher - pour l'instant avec des pincettes - des observations photoélastiques de Geng *et al.*(2001) [77]. D'après leurs observations, le comportement de l'empilement dépend crucialement du degré de désordre de l'empilement. Pour des empilements ordonnés, la fonction de réponse en force correspond à celle prédite par les modèles propagatifs de type OSL. En présence de désordre, les modélisations de type élastique semblent plus appropriées.

Notons enfin que, pour une surcharge d'intensité donnée, l'extension de la zone perturbée est plus faible dans un empilement désordonné que dans un empilement ordonné.

Interprétation

Comment comprendre les motifs observés ? Et comment les relier à la fonction de réponse en force de la couche de billes soumise à la surcharge localisée en surface ? Nous proposons l'interprétation suivante : la surcharge induit une composante de force supplémentaire au niveau des billes. Celle-ci possède une orientation donnée qui peut être dirigée vers le bas ou vers le haut :

- Quand la composante de force supplémentaire est orienté vers le bas, la bille ne peut pas bouger : la condition aux limites en bas est de type déplacement nul. En conséquence, la bille reste bloquée dans sa cage. Son mouvement est dû à l'écrasement élastique des contacts, ce qui engendre des déplacements de l'ordre du nanomètre, imperceptibles par notre méthode de visualisation.
- Quand ce terme est orienté vers le haut, la bille peut bouger sous réserve qu'elle soit capable de soulever la colonne de billes s'appuyant sur elle. Si la projection de cette composante sur l'axe $\vec{e}_Z$ est suffisante pour vaincre la gravité, la bille peut bouger dans la cage formée par ses voisines. Les déplacements sont donc de l'ordre de grandeur de la taille de la cage, typiquement $30\mu\text{m}$, et peuvent être visualisés.

Nous proposons de tester numériquement cette interprétation dans la section suivante.

4.3 Modélisation par un automate

Les expériences ci-dessus présentent l'inconvénient de ne pas laisser accès aux forces. Nous proposons dans cette section de développer une simulation numérique simple permettant de déterminer, pour des empilements plus ou moins ordonnés, la réponse en contrainte à une surcharge localisée en surface. Des algorithmes de type *Dynamique des contacts* [141, 142] permettent de simuler la répartition des forces dans des matériaux granulaires extrêmement réalistes. Ces algorithmes sont cependant assez gourmands en temps de calcul. À l'inverse, plusieurs modèles simples, de type automate cellulaire, s'attachent à décrire qualitativement la répartition des forces dans un empilement [123, 49, 41, 28]. Ces modèles sont malheureusement scalaires. Ils peuvent donc difficilement rendre compte d'effets liés à l'orientation des forces. Nous proposons ici un modèle simple, 2D, de type automate cellulaire, *vectoriel*, de propagation des forces.

4.3.1 Présentation du modèle

Principe

On place les grains sur un réseau régulier triangulaire ordonné. Chacun de ces grains est repéré par ses deux coordonnées (X, Z) (cf. figure 4.9). On applique une surcharge au centre et à la surface de l'empilement. Les surcharges $\mathbf{w}$ engendrées sont caractérisées par trois quantités, la position $P = (X, Z)$ de la bille sur laquelle elle est appliquée, la norme w de la surcharge et l'angle ϕ entre cette surcharge et la verticale (orientée vers le bas).

On applique initialement une force $F = 1$ verticale sur la bille O au centre et à la surface de l'empilement. Cette bille acquiert une charge $\mathbf{w}(t = 0)$ caractérisée par $P = (0, 0)$, $w = F$ et $\phi = 0$. Cette bille O va alors transmettre au temps $t = 0$ cette charge à deux de ses voisines qui la transmettront elles-mêmes au temps $t = 1$ à deux de leurs voisines et ainsi de suite.

De manière plus précise, à un instant t donné, une charge $\mathbf{w}(t) = (P, w, \phi)$ appliquée sur une bille placée en $P = (X, Z)$ et créée au pas de temps précédent, va être transmise aux deux des six billes plus proches voisines de P . (cf. figure 4.9). Cette transmission se fait de la manière suivante :

1. L'orientation ϕ de la charge va déterminer les deux billes 1 et 2 destinataires. On compare pour cela l'orientation des contacts de la bille en P avec les billes en contact. Les billes destinataires $P_1 = (X_1, Z_1)$ et $P_2 = (X_2, Z_2)$ seront celles associées aux

deux contacts d'orientations ψ_1 et ψ_2 les plus proches de ϕ :

$$\begin{array}{lll}
 \text{si } \phi \in [-\pi/6, \pi/6] & \psi_1 = -\pi/6, & \psi_2 = \pi/6 \\
 \text{si } \phi \in [\pi/6, \pi/2] & \psi_1 = \pi/6, & \psi_2 = \pi/2 \\
 \text{si } \phi \in [\pi/2, 5\pi/6] & \psi_1 = \pi/2, & \psi_2 = 5\pi/6 \\
 \text{si } \phi \in [-\pi/2, -\pi/6] & \psi_1 = -\pi/2, & \psi_2 = -\pi/6 \\
 \text{si } \phi \in [-5\pi/6, \pi/2] & \psi_1 = -5\pi/6, & \psi_2 = -\pi/2 \\
 \text{sinon} & \psi_1 = -5\pi/6, & \psi_2 = 5\pi/6
 \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{ll}
 X_1 = X + \sin \psi_1 & Z_1 = Z - \cos \psi_1 \\
 X_2 = X + \sin \psi_2 & Z_2 = Z - \cos \psi_2
 \end{array}$$

, les longueurs X et Z étant adimensionnées par le diamètre d des billes.

2. Pour un empilement ordonné de billes parfaitement lisses et identiques, l'orientation des charges transmises $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ coïnciderait exactement avec ψ_1 et ψ_2 . On tire de façon aléatoire deux angles α et β qui encodent de manière phénoménologique le désordre de l'empilement réel, l'existence d'une force de frottement tangente au contact et la polydispersité des billes. Ces deux angles sont tirés suivant une loi uniforme dans l'intervalle $[-\Theta, \Theta]$. Ce paramètre Θ permet de contrôler le caractère plus ou moins ordonné de l'empilement. Les orientations ϕ_1 et ϕ_2 valent respectivement :

$$\phi_1 = \psi_1 + \alpha \quad \phi_2 = \psi_2 + \beta \tag{4.8}$$

3. Les normes w_1 et w_2 des charges transmises sont imposées par l'équilibre des forces : $w e^{i\phi} = w_1 e^{i\phi_1} + w_2 e^{i\phi_2}$. Elles valent donc respectivement :

$$w_1 = w \frac{\sin(\phi_2 - \phi)}{\sin(\phi_2 - \phi_1)} \quad w_2 = w \frac{\sin(\phi - \phi_1)}{\sin(\phi_2 - \phi_1)} \tag{4.9}$$

Le réseau de forces se construit ainsi au cours du temps de manière *hiérarchique*. Chaque charge possède un ancêtre et deux enfants. La demi largeur L et la hauteur H de l'empilement sont respectivement fixées à $L = 100$ et $H = 100$. Quand une charge atteint l'une des parois ou la surface libre, elle ne se transmet plus. Les bords sont de ce fait considérés comme parfaitement absorbant.

Le nombre de charges se transmettant entre deux pas de temps augmente de manière très rapide au fur et à mesure que le réseau de force se construit. Nous avons donc introduit une charge de coupure $w_c = 5.10^{-4}$: lorsque la norme d'une charge devient plus petite que w_c , celle-ci ne se transmet plus. La simulation s'arrête quand toutes les charges sont inférieures à w_c .

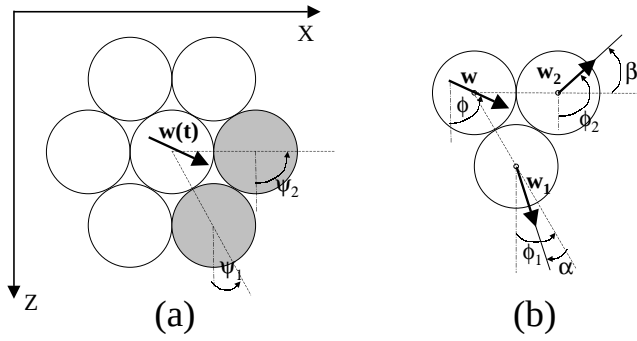


FIG. 4.9 – Règles de propagation de la charge d’une bille à deux de ses voisines. (a) : l’orientation ϕ de la charge $\mathbf{w}$ *parente* détermine les deux voisines P_1 et P_2 . (b) : les orientations ϕ_1 et ϕ_2 des deux charges *filles* obtenues après transmission sont les orientations des contacts auxquelles on rajoute deux nombres aléatoires, respectivement α et β . Les normes w_1 et w_2 sont imposées par l’équilibre des forces locales : $w e^{i\phi} = w_1 e^{i\phi_1} + w_2 e^{i\phi_2}$.

Au cours de la simulation, une bille peut recevoir à l’instant t une charge $w_t e^{i\phi_t}$ alors que, à un instant $t_1 < t$ du passé, elle avait déjà acquis une charge $w_{t_1} e^{i\phi_{t_1}}$. Cette bille transmettra à l’instant $t+1$ uniquement la charge $w_t e^{i\phi_t}$, la charge $w_{t_1} e^{i\phi_{t_1}}$ ayant déjà été transmise par le passé. A la fin de la simulation, la charge finale $w e^{i\phi}$ de cette bille sera la somme de toutes les charges $w_t e^{i\phi_t}$ reçues au cours de la simulation.

Une expérience ayant été menée à son terme, on a pour chaque bille $P = (X, Z)$ une charge donnée par (w, ϕ) . Reste maintenant à savoir si cette bille a bougé ou pas. On attache alors une nouvelle variable δ à chaque bille. Cette variable vaut 1 quand la bille a bougé et 0 dans le cas contraire. Pour déterminer sa valeur, on compare la projection sur l’axe $\vec{e}_Z$ de la charge $w e^{i\phi}$ de la bille $P(X, Z)$ à la pression hydrostatique s’exerçant sur celle-ci. Si on note r le rapport entre la force initiale $F = 1$ et la masse des billes, la variation de δ est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \text{si } w \sin(\phi - \pi/2) &\geq \frac{1}{r} \frac{2}{\sqrt{3}} Z & \delta &= 1 \\ \text{sinon} && \delta &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

le terme $2/\sqrt{3}$ correspondant à la différence de hauteur entre deux rangées de billes successives.

Une expérience numérique est donc le fruit de *deux* étapes :

- Dans un premier temps, on simule la répartition et l’orientation des surcharges engendrées par une force $F = 1$ appliquée sur la bille $P_0(0, 0)$. Un seul paramètre intervient dans ce calcul, l’angle Θ quantifiant le caractère plus ou moins ordonné de l’empilement. Les valeurs de Θ ont été choisies de manière à représenter le mieux possible nos empilements de billes. Quand notre empilement est ordonné, le désordre est principalement dominé par la frottement au niveau des contacts grain/grain. Nous fixons arbitrairement $\Theta = 5^\circ$, ce qui correspond à un coefficient de friction

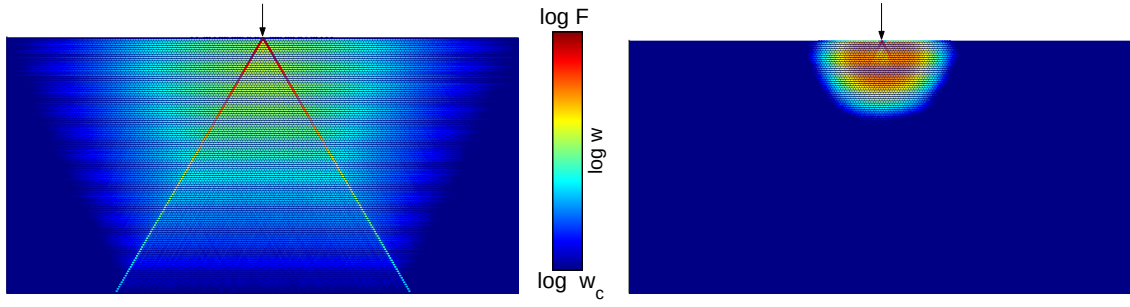


FIG. 4.10 – Répartition moyenne des surcharges engendrées par la force F . Prédiction de notre modèle. On a pris $L = 100$, $H = 100$ et moyenné sur 50 expériences. A gauche : $\Theta = 5^\circ$. Les forces se propagent préférentiellement le long de deux directions privilégiées. A droite : $\Theta = 30^\circ$. Très rapidement, on ne distingue plus qu'une seule bosse sous la surcharge F .

microscopique entre billes $\mu_b = 0.1$. Pour nos empilements quasi-2D, le désordre est maximal. Nous fixons alors $\Theta = 30^\circ$.

- Dans un deuxième temps, on simule les déplacements associés à cette surcharge. On introduit alors un deuxième paramètre, le rapport r entre F et le poids d'un grain. Là encore, nous avons choisi des valeurs de r compatibles avec nos mesures expérimentales. Trois valeurs distinctes ont été essayées : $r = 500, 1000$ et 2000 .

Pour un jeu de paramètres (Θ, r) donné, on moyenne enfin les champs de force et de déplacement obtenus sur 50 expériences numériques différentes.

4.3.2 Résultats

Réponse en force

La figure 4.10 présente les champs de force prédits par le modèle pour un empilement ordonné ($\Theta = 5^\circ$) et un empilement désordonné ($\Theta = 30^\circ$). On reproduit qualitativement les comportements observés expérimentalement par Geng *et al.* (2001) [77] (cf. figure 4.4) et théoriquement par Bouchaud *et al.* (2001) [28] : pour un empilement ordonné, la perturbation se propage le long de deux chaînes de grains privilégiées. Celles-ci forment un angle de 60° entre elles. Pour un empilement désordonné, ces deux chaînes existent à faible profondeur Z , mais s'estompent très rapidement lorsque Z augmente.

Sur la figure 4.11, nous avons représenté la fonction de réponse en pression $G(X, Z) = w(X, Z) \sin(\phi(X, Z) - \pi/2)$ à différentes profondeurs Z . Pour $Z \leq 10$, cette fonction de réponse présente deux pics, ce qui est caractéristique d'un comportement hyperbolique. Pour $Z > 10$, on observe un seul pic. Notons que la largeur de ce pic ne croît pas linéairement avec Z contrairement aux observations expérimentales de Geng *et al.* et aux simulations numériques de Bouchaud *et al.*. Cela provient sans doute du fait que les grains sont fixés sur un réseau hexagonal ordonné. Ce réseau ordonné est contradictoire avec la nature désordonnée de l'empilement qu'on cherche à simuler. Il ne peut donc

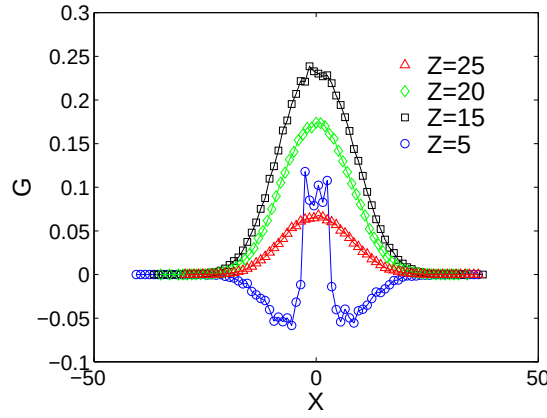


FIG. 4.11 – Réponse en pression $G(X)$ prédite par le modèle pour différentes profondeurs Z . On a pris $L = 100$, $H = 100$, $\Theta = 30^\circ$ et moyenné sur 50 expériences. A faible profondeur, on observe deux pics, ce qui est caractéristique d'un comportement hyperbolique. A forte profondeur, les deux pics fusionnent pour n'en former qu'un.

rendre compte quantitativement de la forme de la fonction $G(X, Z)$.

Réponse en déplacement

La figure 4.12 présente la répartition moyenne des déplacements dans l'empilement, pour un empilement ordonné ($\Theta = 5^\circ$) et pour un empilement désordonné ($\Theta = 30^\circ$). Pour un empilement ordonné, on retrouve un motif en triangle, avec des déplacements localisés de part et d'autre des deux lignes préférentielles de propagation des forces. Lorsque l'empilement est désordonné, ce motif disparaît. On retrouve aussi le fait que l'extension de la zone sujette à déplacement est plus faible lorsque le désordre est important.

Nous avons ensuite étudié l'influence de l'intensité de la perturbation sur l'extension de la zone sujette à déplacement. Nous avons représenté sur la figure 4.13 le champ de déplacement pour r valant successivement 500 1000 et 2000 pour $\Theta = 5^\circ$. Ces valeurs sont compatibles avec les rapports entre la masse M de la surcharge et la masse des billes utilisées au cours des expériences présentées section 4.2. Dans l'expérience, la zone sujette à déplacement s'étend jusqu'à des profondeurs Z valant respectivement $10d$, $30d$ et $35d$ pour $M = 620m$, $M = 1120m$ et $M = 2180m$. Dans la simulation, cette zone s'étend jusqu'à $7d$, $10d$ et $14d$ pour $r = 500$, $r = 1000$ et $r = 2000$. Notons par ailleurs que l'extension latérale de la zone sujette à mouvement est bien plus importante dans la simulation que dans l'expérience. L'accord est uniquement qualitatif.

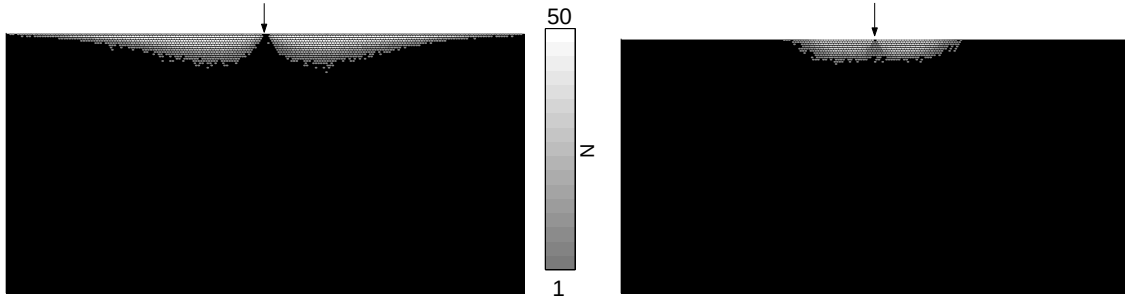


FIG. 4.12 – Répartition moyenne des déplacements dans l'empilement selon le modèle. Influence du désordre. On a pris $L = 100$, $H = 100$, $r = 2000$ et moyenné sur 50 expériences. A gauche : $\Theta = 5^\circ$. A faible désordre, les déplacements sont confinés dans deux triangles de part et d'autre des deux lignes préférentielles de propagation des forces. A droite : $\Theta = 30^\circ$. Le motif disparaît.

4.4 Discussion et perspectives

L'ajout d'une petite surcharge sur la surface d'un empilement engendre des réarrangements à l'intérieur de celui-ci. Les billes se déplacent légèrement, de quelques dizaines de microns. Ces micro-déplacements peuvent être perçus à l'aide d'une caméra.

La structure de la zone sujette à déplacement dépend significativement du caractère plus ou moins ordonné de l'empilement : pour un empilement de billes ordonné, les réarrangements restent confinés dans deux triangles inversés de part et d'autre de la surcharge appliquée. Pour un empilement désordonné, la zone sujette à déplacement prend la forme d'un demi-disque centré sous la perturbation : en moyenne, les billes se déplacent d'autant plus facilement qu'elles sont près de la perturbation.

Pour comprendre - au moins qualitativement - ces observations, nous avons présenté un modèle simple de propagation des forces dans un empilement granulaire. Ce modèle a la particularité d'être vectoriel. Il peut rappeler par certains côtés le modèle de diffusion de voûtes proposé très récemment par Bouchaud *et al.* (2001) [28] à ceci près qu'il ne présuppose pas l'existence de caractéristiques le long desquelles les forces seraient advectionnées. Ce modèle simple permet d'évaluer la probabilité d'une bille à se déplacer sous une perturbation donnée. Quand la surcharge engendrée par celle-ci est orientée vers le haut et suffisante pour vaincre la pression hydrostatique, cette bille peut bouger. Il met en évidence le rôle joué par le désordre sur la réponse en déplacement d'un matériau granulaire soumis à une surcharge localisée en surface : à faible désordre, les billes sujettes à déplacement se trouvent confinées dans deux zones de part et d'autre de la perturbation. A fort désordre, on observe une seule zone sous la perturbation. Ce modèle permet aussi de rendre compte de manière qualitative des observations de Geng *et al.* (2001) [77] sur la fonction de réponse en contrainte.

Les travaux présentés dans ce chapitre restent cependant préliminaires. L'accord quantitatif entre les simulations et les expériences, qu'il s'agisse de l'étude sur les déplacements présentés ici ou de l'étude sur la répartition des forces rapportée par Geng *et al.* (2001) [77],

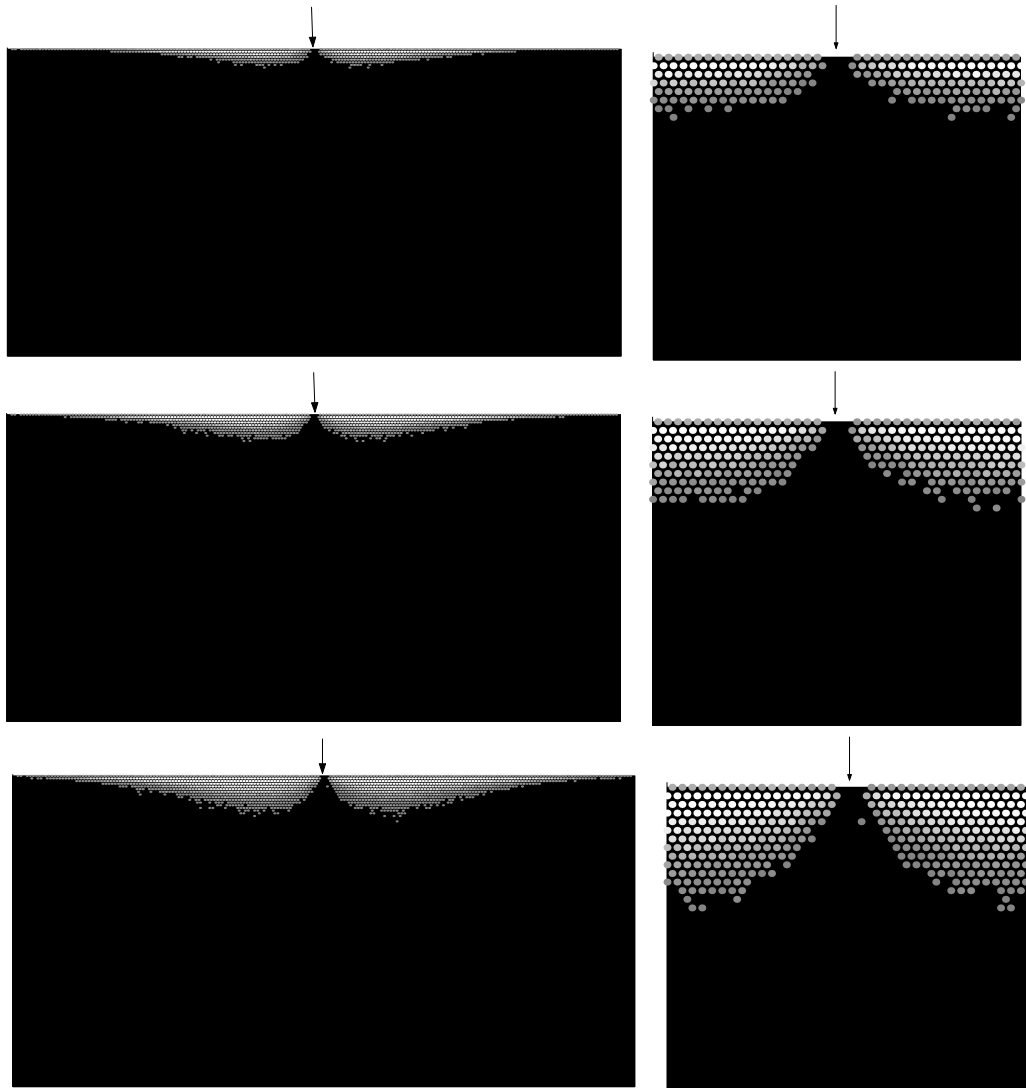


FIG. 4.13 – Répartition moyenne des déplacements dans l'empilement selon le modèle. Influence de l'intensité de la surcharge. On a pris $L = 100$, $H = 100$, $\Theta = 5^\circ$ et moyenné sur 50 expériences. En haut : $r = 500$. Au centre : $r = 1000$. En bas : $r = 2000$. Le niveau de gris d'une bille donnée est proportionnel au nombre de fois N où la bille a bougé au cours des 50 réalisations. A gauche : ensemble de la cellule de taille $L \times H$. A droite, zoom sur une zone de taille 40×30 comparable à la zone visualisée expérimentalement (cf. figure 4.7).

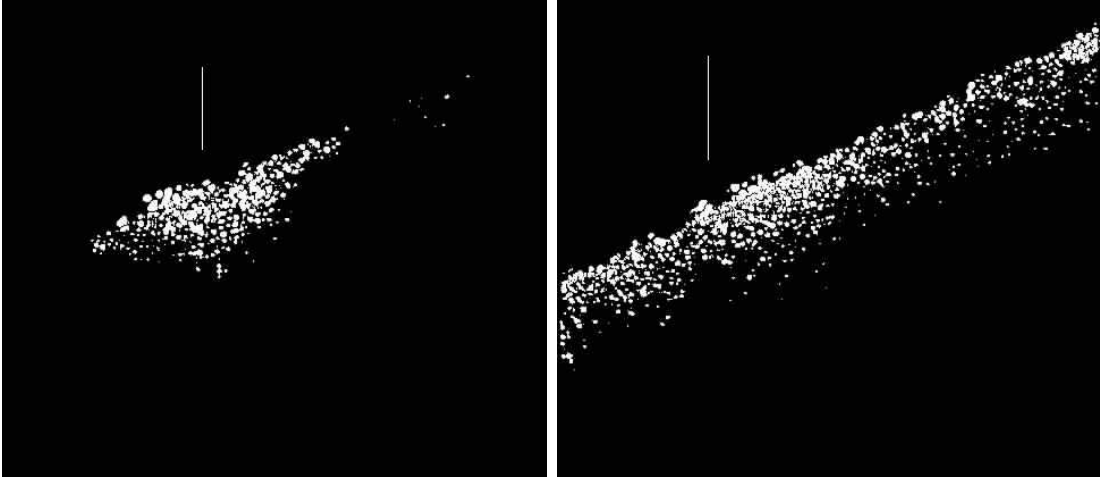


FIG. 4.14 – A gauche : réponse en déplacement dans un empilement quasi-2D incliné à 24.4° . A droite : réponse en déplacement dans un empilement quasi-2D incliné à 25.9° . Les angles de démarrage et d'arrêt valent respectivement $\theta_{stop} = 23.5 \pm 0.6$ et $\theta_{start} = 27.5 \pm 0.7$.

est loin d'être satisfaisant. Une première amélioration du modèle consisterait à ne plus placer les billes sur un réseau hexagonal ordonné lorsqu'on souhaite simuler des empilements désordonnés.

D'un point de vue expérimental, l'extension naturelle de ce travail serait d'étudier les micro-déplacements engendrés par l'ajout d'une surcharge sur une surface libre *inclinée*. En particulier, il serait très intéressant de voir si la zone sujette à déplacement change significativement lorsque l'angle d'inclinaison varie entre θ_{stop} et θ_{start} ³⁹. Il semblerait que ce soit le cas : pour certaines conditions, on retrouve une zone localisée au voisinage de la perturbation alors que, pour d'autres conditions, cette zone forme une bande qui s'étend dans l'ensemble du tambour. Ces réarrangements, tantôt s'estompent, tantôt s'amplifient, donnant naissance à des avalanches. Ils semblent jouer le rôle de *précurseurs*. Ce type d'étude permettrait certainement de mieux comprendre le déclenchement des avalanches et l'origine microscopique des angles de talus.

³⁹Rappelons que θ_{stop} et θ_{start} désignent respectivement l'angle d'arrêt et l'angle de démarrage d'une avalanche

Annexe A

Caractérisation des billes et de leur état de surface

Nous avons regroupé dans cette annexe les principales caractéristiques des billes et les quelques calculs d'ordre de grandeurs auxquels fait référence la partie II du manuscrit.

Rappelons là encore la démarche de nos expériences : il s'agit d'étudier l'empilement le plus simple possible, apte à présenter les comportements qu'on souhaite mettre en évidence, ici les comportements fragiles prédits par le Scalar Arching Model (SAM). Les descriptions *fragiles* des milieux granulaires supposent en effet que la répartition des contraintes est gouvernée par les chaînes de contact et non par la déformation des grains. Idéalement, ceux-ci doivent être infiniment rigides et le moins rugueux possible (afin que, sous faible contrainte, la surface de contact entre 2 billes soit le plus proche des hypothèses de Hertz). Si on ajoute à tout cela un facteur financier, un bon compromis est d'utiliser des billes de roulement à billes dont les tolérances sont excellentes pour des coûts raisonnables.

A.1 Caractéristiques techniques

Les différentes données caractérisant les billes utilisées ont été regroupées dans le tableau A.1. Les billes utilisées sont des billes en acier inoxydable bien calibrées. Elles ont un diamètre de 6 mm avec une tolérance de 10 μm . Leur qualité inoxydable est obtenue par l'intermédiaire de la formation d'un film invisible et adhérent d'oxyde à la surface. Cette couche d'oxyde est bien évidemment isolante, mais est suffisamment fine pour que le courant puisse passer par effet tunnel ou effet thermoélectronique [73]. Nous verrons cependant dans l'annexe suivante que malgré cette couche, le contact se comporte comme une résistance ohmique, avec cependant une valeur de deux ordres de grandeur supérieure à celle évaluée à partir de la résistivité électrique typique de l'acier (cf. tableau A.1).

Diamètre D	6 mm
Masse M	0.85 g
Densité ρ	7.8 g.cm ⁻²
Chaleur spécifique C_p	0.46 J.g ⁻¹ .K ⁻¹
Résistivité électrique ρ_e	80 $\mu\Omega$.cm ⁻²
Conductivité thermique λ	16 W.m ⁻¹ .K ⁻¹
Expansivité thermique linéique α_l	10 μ .m ⁻¹ .K ⁻¹
Module d'Young E	200 GPa
Limite élastique Y	1.3 GPa
Coefficient de Poisson ν	0.3

TAB. A.1 – principales caractéristiques des billes utilisées

A.2 Déformation de Hertz d'une bille soumise à son propre poids

Essayons dans un premier temps d'évaluer les déformations typiques dans nos expériences. Pour des billes infiniment lisses se déformant de manière parfaitement élastique, le champ de déformation peut être calculé analytiquement de façon exacte (calcul de Hertz). Le lecteur intéressé peut par exemple se référer au livre de Landau et Lifchitz [112]. Si deux billes sont mises en contact et pressées l'une contre l'autre avec une force normale F (cf. figure A.1), leur interface aura la forme d'un disque dont le rayon a s'écrit :

$$a = \left(\frac{3}{2} \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{D}{2} F \right)^{1/3} \quad (\text{A.1})$$

où ν est le coefficient de Poisson, D le diamètre de la bille et E le module d'Young. Dans notre expérience, les forces de contact varient typiquement de 10 mN (poids d'une bille) à 1 N. La déformation de Hertz a va donc varier entre 6 et 30 μ m. La déformation δ est quant à elle reliée au rayon de l'interface a par :

$$\delta D = a^2 \quad (\text{A.2})$$

Dans la gamme de forces étudiées, δ est donc compris entre 6 et 150 nm. Notons que ces relations sont valables tant que la réponse du matériau à la contrainte est considérée comme entièrement élastique. La pression moyenne au niveau du contact ne doit donc pas excéder la limite élastique Y du matériau. On peut montrer [101] que la force seuil F_y pour laquelle cette pression moyenne vaut Y est :

$$F_y = 42(1 - \nu^2) \frac{D^2 Y^3}{E^2} \quad (\text{A.3})$$

Pour nos billes, F_y vaut typiquement 15 Newtons. On est donc dans un régime de déformations élastiques. Qu'en est-il de l'hypothèse bille infiniment lisse ?

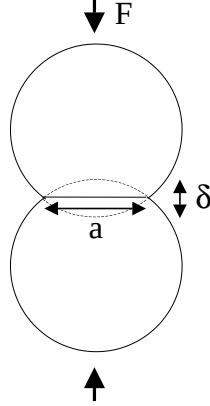


FIG. A.1 – Contact de Hertz entre deux billes

A.3 Rugosité de surface

Pour évaluer la rugosité de nos billes, nous avons visualisé leur surface à l'aide d'un microscope à force atomique (cf. figure A.2). On peut alors calculer la rugosité moyenne R_a définie comme :

$$R_a = \frac{1}{S} \iint_S z(x, y) - \bar{z} \, dx \, dy \quad (\text{A.4})$$

où S est l'aire de la surface visualisée, $z(x, y)$ le profil et $\bar{z}$ sa valeur moyenne sur S . Pour nos billes, R_a vaut : $R_a = 90$ nm. La taille caractéristique des micro-aspérités est par conséquent de l'ordre de grandeur des déformations de Hertz δ . L'hypothèse *bille lisse* n'est donc plus applicable : le contact entre deux billes n'est plus assuré par un disque unique mais par une somme de micro-contacts.

De nombreuses surfaces naturelles semblent présenter des propriétés d'auto-affinité, notamment les reliefs montagneux [148] et les surfaces de fracture [132, 22, 86]. Il semble donc intéressant de voir si notre surface possède de telles propriétés. Plusieurs techniques permettent de vérifier si une surface est auto-affine et d'en évaluer l'exposant de rugosité [74, 81, 86]. Nous avons opté pour la méthode des moyennes mobiles proposée par Vandewalle et Ausloos [201]. La moyenne mobile $\bar{z}_L(x)$ d'un signal $z(x)$ sur une fenêtre de taille L est définie par :

$$\bar{z}_L(x) = \sum_{i=0}^{L-1} z(x+i) \quad (\text{A.5})$$

Pour un signal auto-affine d'exposant de rugosité ζ , la densité ρ des points d'intersection entre deux moyennes mobiles de fenêtres respectives L_1 et $L_2 > L_1$ varie comme :

$$\rho \propto \frac{1}{L_2} [(\Delta L)(1 - \Delta L)]^{\zeta-1} \quad (\text{A.6})$$

où $\Delta L = (L_2 - L_1)/L_2$.

Les images AFM sont enregistrées sous forme de matrices 256×256 . La taille de la fenêtre L_2 est fixée à 128 pixels = 5 μm et ρ est calculé après moyenne sur les lignes (respectivement sur les colonnes) (cf. figure A.3). La loi d'échelle donnée par l'équation A.6 s'applique sur l'ensemble des valeurs de ΔL . La surface des billes peut donc effectivement être considérée comme auto-affine pour tout ΔL , c'est à dire pour toute taille comprise entre 40 nm et 5 μm . L'exposant de rugosité est alors estimé à $\zeta = 0.4 \pm 0.1$.

A.4 Longueurs et temps de dilatation typiques

Des mesures à l'aide d'un thermocouple nous ont permis de mesurer l'échauffement moyen des billes lorsqu'on allume la lampe. Lorsque la lampe est placée respectivement à $d = 5$ cm, $d = 10$ cm et $d = 20$ cm, la température de l'empilement augmente de $\Delta T = 1.3 \pm 0.8$ °, $\Delta T = 4.0 \pm 1.1$ ° et $\Delta T = 6.7 \pm 2.3$ °. Les coefficients d'expansion thermiques α_l^B des billes et α_l^P du Plexiglas valent respectivement $\alpha_l^B = 2.10^{-5}$ K⁻¹ et $\alpha_l^P = 7.10^{-5}$ K⁻¹. On en déduit les longueurs de dilatation λ^B et λ^P typiques :

- pour les billes : $\lambda^B = \alpha_l^B D \Delta T \simeq 0.5$ μm pour $d = 10$ cm
- pour le bâti de Plexiglas de hauteur $H = 40$ cm : $\lambda^P = \alpha_l^P H \Delta T \simeq 100$ μm pour $d = 10$ cm

La dilatation du bâti apparaît dominante par rapport à celle des billes. Cependant, les temps de dilatation sont également très différents. Ce temps peut être assimilé au

A.4. LONGUEURS ET TEMPS DE DILATATION TYPIQUES

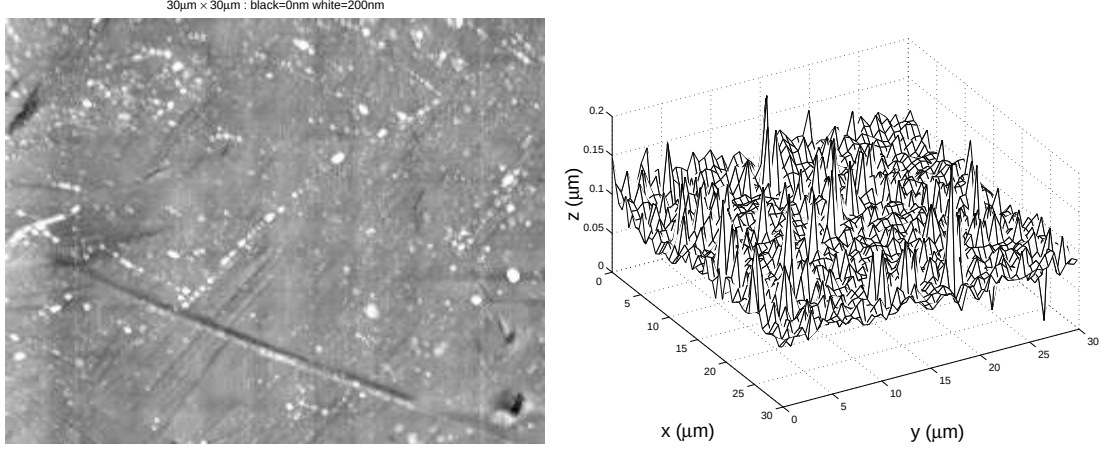


FIG. A.2 – Visualisation AFM à l’aide d’un microscope AFM. La surface regardée a $30 \mu\text{m}$ de côté. On a retranché la courbure moyenne des billes. A gauche est représentée une carte des altitudes, à droite une vue en relief. Ce relief n’est pas sans rappeler les surfaces auto-affines.

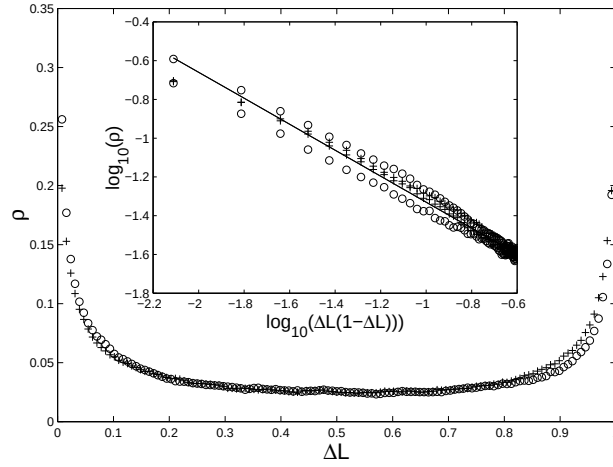


FIG. A.3 – Densité ρ en fonction de la différence relative ΔL (voir le texte pour les détails). L_2 a été fixé à 128. les point o correspondent à une moyenne suivant les lignes de la matrice composant l’image tandis que les $+$ correspondent à une moyenne suivant les colonnes. L’insert représente $\log_{10}\rho$ en fonction de $\log_{10}(\Delta L(1-\Delta L))$. La ligne droite correspond à un ajustement à l’aide de l’équation A.6.

temps typique de conduction : pour une bille de diamètre $D = 6$ mm et de conductivité thermique $\lambda^B = 16 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$, ce temps vaut $\tau_{cd}^B = D^2/\lambda^B \simeq 1$ s. Pour le bâti de Plexiglas d'épaisseur e , ce temps vaut $\tau_{cd}^B = e^2/\lambda^P \simeq 20$ mn. Pour des acquisitions durant une vingtaine de minutes, on peut donc espérer être dominé par la dilatation des billes. Notons par ailleurs que la dilatation du Plexiglas ne contribue qu'à augmenter le nombre des avalanches. Les fluctuations électriques ne reflètent quant à elles que les fluctuations de contact bille/bille voire bille/électrode.

Annexe B

Résistance de contact entre deux billes d'acier inoxydable

Nous présentons dans cet annexe quelques éléments sur le contact électrique et les quelques expériences menées avec deux billes qui nous ont permis de caractériser les relations entre conductance de contact et force de contact.

B.1 Comportement ohmique d'un contact bille/bille

Les billes utilisées sont des billes d'acier inoxydable. Le caractère inoxydable est obtenu en créant un film d'oxyde de chrome de quelques nanomètres d'épaisseur autour de la bille. Nous devons donc nous assurer dans un premier temps que le contact entre deux billes se conduit bien comme une résistance ohmique. Notons que, dans cette expérience, nous suivons en fait l'évolution de trois résistances de contact en série : le contact électrode supérieure/bille, le contact bille/bille et le contact bille/électrode inférieure. La comparaison d'expériences menées avec une bille et deux billes montre que les résistances des contact bille/électrode sont négligeables devant la résistance bille/bille.

Le dispositif expérimental est représenté figure B.1 : deux billes sont placées entre deux électrodes en cuivre dans un cylindre de Plexiglas. Un générateur de courant permet de contrôler le courant I traversant le contact bille/bille. On le fait varier de 0 mA à $I_{max} = 100$ mA et on regarde comment varie la tension U .

Le comportement électrique observé (cf. figure B.2) est non trivial : pour des courants faibles (typiquement inférieurs à $I_{seuil} = 50$ mA), le contact se comporte bien comme une résistance ohmique. Lorsque le courant dépasse I_{seuil} , la tension U devient indépendante de I et fluctue autour d'un plateau. Si maintenant, à partir d'un courant $I > I_{seuil}$, on diminue à nouveau U , le contact se comporte à nouveau comme une résistance ohmique R_2 inférieure à R_1 .

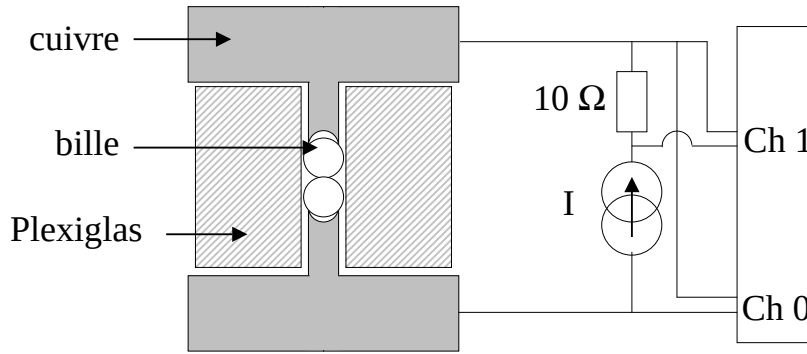


FIG. B.1 – Mesure de la résistance de deux billes

Notons enfin que les résistances R_1 et R_2 , de l'ordre de la dizaine d'Ohms, sont deux ordres de grandeurs au dessus de celles prédites par la théorie de Hertz. Une interprétation possible est la suivante : tant que I est inférieur à I_{max} , le courant passe par effet tunnel à travers la fine couche d'oxyde, ce qui se traduit par un comportement ohmique effectif avec une résistance anormalement élevée (d'où les fameux deux ordres de grandeurs). Quand I atteint I_{seuil} , l'énergie dissipée par effet joule dans les micro-contacts est suffisante pour souder les microaspérités entre elles. La tension ne varie plus avec le courant injecté. Si maintenant I décroît, les micro-soudures irréversibles ont rendu le contact plus conducteur : le contact se comporte à nouveau comme une résistance ohmique de valeur plus faible.

Nous avons donc tout intérêt à limiter le courant traversant chaque contact afin de rester dans le régime A où le contact se conduit de manière réversible comme une résistance ohmique.

B.2 Distribution de la résistance de contact pour une force de contact donnée

Nous nous intéressons maintenant à la distribution statistique de la résistance de contact pour une force de contact donnée. L'électrode supérieure est remplacée par un petit tube en cuivre (cf. figure B.3). On peut alors faire varier la force de contact entre les deux billes en ajoutant quelques billes sur ce tube. On modifie la configuration des microaspérités en donnant une chiquenaude au système. On relève la nouvelle résistance après stabilisation. Pour une force de contact donnée, on mesure 200 réalisations de la résistance de contact. Nous avons fait varier la force de contact de 1 à $4,1 \cdot 10^4$ N.

Une fonction de distribution cumulée $F(R_c)$ typique, obtenue pour un poids de 100 g, équivalent à 30 poids de billes est représentée figure B.4. Dans tous les cas, F est très

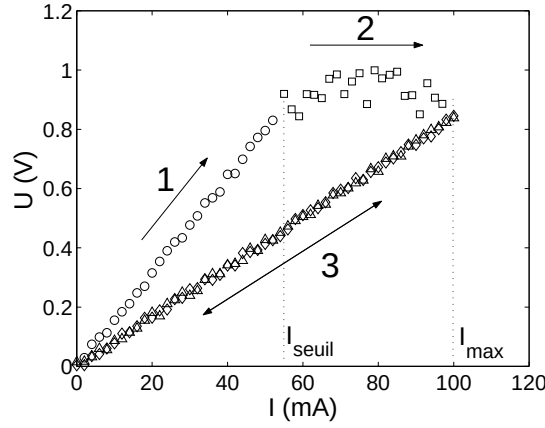


FIG. B.2 – Réponse du contact bille/bille à un cycle en courant : on augmente l'intensité du courant I de 0 à 100 mA, puis on le diminue à nouveau de I_{max} à 0. On peut observer trois régimes : régime 1, la tension U augmente de façon linéaire et réversible avec I . Régime 2, la tension fluctue autour d'un plateau. Régime 3, lorsqu'on diminue à nouveau I , U varie à nouveau de manière réversible et linéaire avec I , mais la résistance ohmique est plus faible.

bien approchée par une loi maxwellienne de moyenne et d'écart type dépendant de la force de contact. Dans nos expériences, l'écart type est de l'ordre de grandeur de la valeur moyenne. Nous ne pouvons donc pas utiliser la résistance de contact pour quantifier les forces de contact, mais uniquement les fluctuations de résistance (ou de conductance) comme indicateur d'une modification de la force de contact.

B.3 Evolution de la résistance de contact moyenne avec la force de contact

La variation de la résistance moyenne $\overline{R_c}$ avec F_c est représentée figure B.5. Celle-ci décroît en $F_c^{1/3}$. On peut comprendre cette variation dans le cadre des approximations de Hertz.

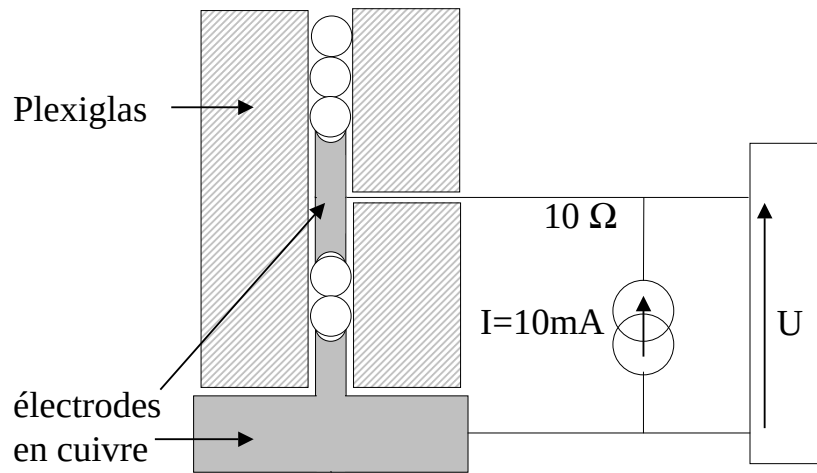


FIG. B.3 – Mesure de la résistance de deux billes. La force de contact est modifiée en faisant varier le nombre de billes s'appuyant sur le petit tube de cuivre.

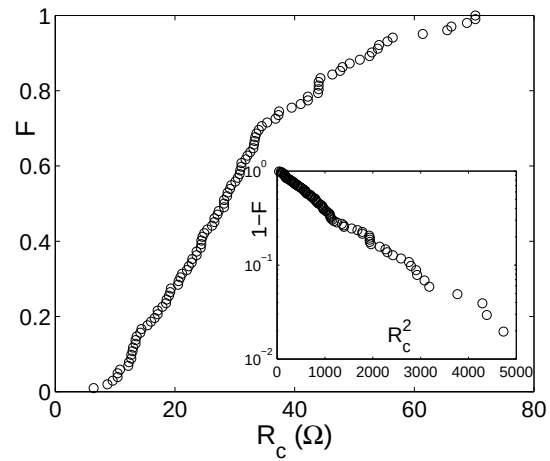


FIG. B.4 – Fonction de distribution cumaltive F de la résistance de contact pour une force de contact F_c donnée. Cette force vaut : $F_c = 80\text{ N}$. L'insert représente la variation de $1 - F$ en fonction de R_c^2 qui permet de vérifier la décroissance Maxwellienne de la distribution.

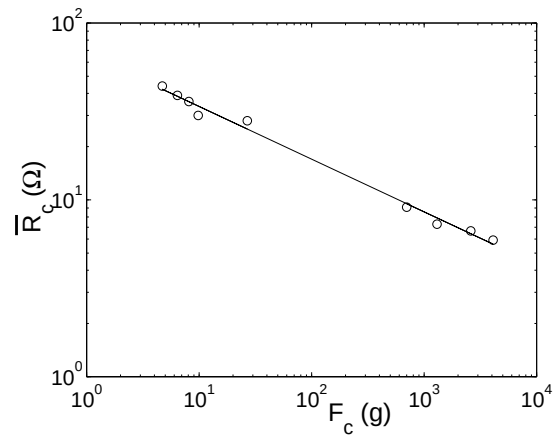


FIG. B.5 – Variation de la résistance moyenne $\overline{R}_c$ en fonction de la force de contact F_c . Les échelles sont logarithmiques. La résistance moyenne de contact décroît en loi de puissance d'exposant 0.3 comme le prédit la loi de Hertz.

Conclusion générale

Les matériaux granulaires représentent un outil privilégié de la physique statistique pour étudier la transition du micro-monde (l'échelle du grain), au macro-monde (l'empilement), au sens où les deux échelles sont accessibles expérimentalement. Nous avons tenté de l'illustrer à travers les deux expériences présentées dans ce mémoire.

Ecoulements de surface

Le but de la première expérience était, d'une part de trouver une description continue des écoulements de surface, et d'autre part d'essayer de relier cette description aux comportements microscopiques des grains. L'approche intégrée de Saint-Venant nous a permis de répondre à la première question. Les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement intégrées sur l'épaisseur en mouvement fournissent un premier jeu d'équations. Ce système est incomplet : il contient plus d'inconnues que d'équations. L'étude expérimentale des écoulements stationnaires observés en tambour tournant nous a permis de déterminer expérimentalement les relations manquantes. Dans un premier temps, nous avons mesuré à l'aide d'une caméra rapide les profils de vitesse tangentielle et de compacité dans la couche en mouvement. Nous avons pu en déduire les deux premières relations de fermeture. Elles relient le débit et le flux de quantité de mouvement à l'épaisseur locale de la couche en mouvement et à l'inclinaison locale de la séparatrice phase statique/phase roulante. Dans un deuxième temps, nous avons mesuré les profils de la surface libre et de l'interface, ce qui nous a permis de déduire la dernière relation de fermeture, à savoir l'expression de la force exercée sur la couche en mouvement en fonction de l'épaisseur locale de celle-ci et de l'inclinaison locale de la séparatrice statique/roulant. Nous avons obtenu ainsi un système complet d'équations décrivant les écoulements de surface.

Les relations de fermeture ont ensuite été discutées. La forme du profil de vitesse est des plus surprenantes. Elle apparaît incompatible avec les relations rhéologiques locales et univoques de type visqueuses généralement proposées pour décrire un matériau "liquide" en mouvement. Pour en comprendre les raisons, nous nous sommes intéressés d'abord aux corrélations spatiales du champ de vitesse instantanée, puis aux fluctuations de compacité. Nous avons ainsi pu mettre en évidence l'existence d'agrégats de grains "rigides" à l'intérieur de la couche en mouvement. En raison des conditions de non-interpénétrabilité

des grains, ces agrégats sont trop denses pour pouvoir se déformer sous cisaillement. La taille de ces agrégats est distribuée en loi de puissance depuis l'échelle microscopique, le diamètre d'un grain, jusqu'à l'échelle macroscopique, l'épaisseur de la couche en mouvement.

Ce dernier résultat est à mon avis le plus important de ce travail de thèse : il implique notamment l'impossibilité de définir une taille typique pour ces agrégats, ce qui interdit les descriptions de type mécanique des milieux continus habituellement proposées. L'absence d'échelle caractéristique suggère la proximité d'une transition dominée par les propriétés d'encombrement des grains. Ces observations sont à rapprocher du concept de transition de "jamming", proposé initialement par Cates *et al.* (1998) [36], puis développé par Liu et Nagel (1998) [117] pour décrire les matériaux dit *fragiles*. Ce type de transition, encore controversé, s'appliquerait à de nombreux systèmes : trafic routier, mousse, voire suspension colloïdale au voisinage de la transition vitreuse. L'existence d'une telle transition, si elle s'avérait vraie, ouvrirait la porte à des analogies prometteuses entre le comportement avalancheux d'un tas et le comportement des autres systèmes *fragiles*.

La mise en évidence d'agrégats rigides multi-échelles est à rapprocher d'un modèle extrêmement récent, proposé par Aranson et Tsimring (2001) [12, 11]. Ce modèle considère les écoulements denses comme des écoulements *partiellement* fluidisés et introduit un paramètre d'ordre local décrivant la fraction de grains se comportant de manière solide dans un volume élémentaire donné. L'évolution de ce dernier est pour l'instant décrite à l'aide d'une équation phénoménologique permettant de rendre compte de la bistabilité d'un tas. L'étude plus approfondie de nos agrégats, dont la densité relative peut être reliée à ce paramètre, devrait permettre de rendre cette équation moins phénoménologique. Il faudrait pour cela étudier ces agrégats à contrainte ou déformation de cisaillement fixée, ce que ne permet pas notre montage actuel. La construction d'un nouveau dispositif permettant d'imposer une déformation constante et contrôlable à un ensemble de grains est actuellement en projet au laboratoire.

Réarrangements internes engendrés par une petite perturbation

Dans la deuxième expérience, nous nous sommes intéressés aux réarrangements internes engendrés par une petite perturbation. Dans un premier temps, nous avons étudié l'influence d'une variation thermique de quelques degrés sur la conductance électrique d'un empilement de billes métalliques. Ces perturbations infinitésimales engendrent des fluctuations électriques géantes. L'étude statistique de ces fluctuations nous a permis d'en déterminer l'origine : elles sont la signature des réorganisations tribologiques locales au niveau de chaque contact. Cela nous laisse penser que l'extrême sensibilité mise en évidence par des mesures ultra-sonores [121, 122, 119, 118], des mesures de masse apparente [26, 206] voire d'autres mesures électriques [203, 202] n'est pas liée au caractère fragile des matériaux granulaires comme cela a pu être proposé, mais peut être simplement interprétée comme la signature macroscopique de réarrangements locaux de la mobilisation de la friction amplifiée par l'extrême hétérogénéité de la répartition des forces de contact.

Nous aimerions par la suite poursuivre cette étude en regardant l'évolution de la conductance électrique d'un empilement lorsqu'on le soumet à *plusieurs* perturbations thermiques successives. Des expériences préliminaires semblent montrer des effets de *vieillissement* : lorsque l'empilement est soumis à plusieurs cycles chauffage/refroidissement, on s'aperçoit que ceux-ci sont de moins en moins efficaces à changer la conductance de l'empilement. Par analogie avec les expériences de compaction usuelles, il serait intéressant d'étudier la dépendance de la résistance électrique - signature de la configuration des frottements entre grains - avec le nombre, l'amplitude et la fréquence des cycles de perturbations thermiques.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié les réarrangements internes engendrés par une petite perturbation d'amplitude finie, l'ajout d'une surcharge en surface. On arrive alors à visualiser les déplacements de billes de quelques microns (à comparer à leur diamètre de 6 mm). La localisation spatiale des réarrangements nous permet de discuter les différents modèles proposés pour rendre compte de la répartition des contraintes dans un matériau granulaire. Les résultats obtenus, encore préliminaires, montrent que le degré de désordre est un paramètre crucial : pour un empilement ordonné, les contraintes se propagent le long de deux directions privilégiées tandis que pour un empilement désordonné, on se rapproche d'un comportement élastique. Un modèle simple nous a permis de rendre compte de l'ensemble des résultats observés. Il serait par la suite intéressant d'étudier les réarrangements engendrés par l'ajout de la surcharge sur un empilement de surface libre *incliné*. Ce type d'expérience, actuellement en cours, devrait apporter un certain nombre de renseignements sur le déclenchement des avalanches.

En conclusion, notons que les concepts de transition de jamming et de matériaux fragiles avaient été initialement introduits pour décrire la statique d'un empilement granulaire. Nous pensions les mettre en évidence en mesurant les fluctuations électriques engendrées par une perturbation infinitésimale. Il est intéressant de remarquer que la manifestation de comportements *fragiles* serait à chercher plutôt dans les écoulements de surface que dans les propriétés statiques des empilements.

Liste des publications

Publications

D. Bonamy, L. Laurent, P. Claudin, J.P. Bouchaud & F. Daviaud , "Electrical conductance of a 2D packing of metallic beads under thermal perturbation", *Europhysics Letter*, **51**, pp. 614-620 (2000)

D. Bonamy, L. Laurent & Daviaud, "Conductance électrique d'un empilement granulaire faiblement perturbé : sur l'origine de la fragilité granulaire", *Récents progrès en génie des procédés*, **15**, pp. 447-452 (2001)

D. Bonamy, F. Daviaud & L. Laurent, "Experimental study of granular surface flows via a fast camera : a continuous description", soumis à *Physics of Fluids*, cond-mat/0109046

D. Bonamy, F. Daviaud, L. Laurent, M. Bonetti & J.P. Bouchaud, "Multi-scale clustering in granular surface flows", soumis à *Physical Review Letter*, cond-mat/0109375

D. Bonamy, S. Bernard-Bernardet, F. Daviaud & L. Laurent, "Rearrangements response of a granular packing to local surface perturbation", en préparation

"Proceedings" de conférences

D. Bonamy, B. Faucherand, F. Daviaud & L. Laurent, "Avalanches dans un empilement granulaire quasi 2D" , dans *Actes des Journées Scientifiques du LCPC : colloque Physique et Mécanique des Matériaux Granulaires, Tome 2* édité par LCPC (Marne la Vallée) , pp.377-382 (2000)

D. Bonamy, L. Laurent & F. Daviaud , "Electrical conductance of a thermally perturbed packing : on the origin of granular fragility" , dans *Powder & Grains 2001* édité par Y. Kishino (A.A. Balkema, Rotterdam) , pp. 144-148 (2001)

LISTE DES PUBLICATIONS

D. Bonamy, B. Faucherand, M. Planelles, F. Daviaud & L. Laurent, "Granular surface flows in a rotating drum : Experiments and continuous description", dans *Powder & Grains 2001* édité par Y. Kishino (A.A. Balkema, Rotterdam) , pp. 463-466 (2001)

Bibliographie

- [1] H. Ahn, C. E. Brennen, and R. H. Sabersky. Measurement of velocity, velocities fluctuation, density and stresses in chute flows of granular materials. *J. Appl. Mech.*, 58 :792–803, 1991.
- [2] H. Ahn, C. E. Brennen, and R. H. Sabersky. Analysis of the fully developed chute flow of granular materials. *J. Appl. Phys.*, 27 :109–119, 1992.
- [3] R. Albert, I. Albert, D. Hornbaker, P. Schiffer, and A. L. Barabasi. Maximum angle of stability in wet and dry spherical granular media. *Phys. Rev. E*, 56(6) :6271–6274, 1997.
- [4] M. Ammi, T. Travers, D. Bideau, A. Gervois, J. C. Messenger, and J. P. Troadec. Uniaxial compression of 2d and 3d packing : electrical conductivity measurement. *J. Phys. France*, 49 :221–226, 1988.
- [5] G. Amontons. De la résistance causée par les machines. *Mémoire de l'Académie Royale*, 12 :257, 1699.
- [6] C. Ancey. *Rhéologie des écoulements granulaires en cisaillement simple : application aux laves torrentielles granulaires*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, Chatenay Malabry, France, 1997.
- [7] C. Ancey, P. Coussot, and P. Evesque. Examination of the possibility of a fluid-mechanics treatment for dense granular flows. *Mech. Cohes. Frict. Mat.*, 1 :385–403, 1996.
- [8] B. Andreotti, A. Daerr, and S. Douady. On scaling laws in granular flows down a rough plane. to appear in *Phys. Fluids*.
- [9] B. Andreotti and S. Douady. Selection of velocity profile and flow depth in granular flows. *Phys. Rev. E*, 63 :031305, 2001.
- [10] A. Aradian, E. Raphael, and P. G. de Gennes. Thick surface flows of granular materials : the effect of velocity profile on the avalanche amplitude. *Phys. Rev. E*, 58 :4692, 1998.
- [11] I. S. Aranson and L. S. Tsimring. Continuum theory of partially fluidized granular flows. submitted to *Phys. Rev. E* : cond-mat/0109358.
- [12] I. S. Aranson and L. S. Tsimring. Continuum description of avalanche in granular media. *Phys. Rev. E*, 64 :020301, 2001.

- [13] D. A. Augenstein and R. Hogg. Friction factor for powder flow. *Powder Tech.*, 10 :43–49, 1974.
- [14] D. A. Augenstein and R. Hogg. An experimental study of the flow of dry powders over inclined surfaces. *Powder Tech.*, 19 :205–215, 1978.
- [15] E. Azanza. *Écoulements granulaires bidimensionnels sur un plan incliné*. PhD thesis, Ecole des Ponts et Chaussées, Marne la Vallée, France, 1997.
- [16] E. Azanza, F. Chevoir, and P. Mourcheront. Experimental study of collisional granular flows down an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, 400 :199–227, 1998.
- [17] R. A. Bagnold. Experiment in a gravity free dispersion of large solid sphere in a newtonian fluid under shear. *Proc. Roy. Acad. London A*, 225 :49–63, 1954.
- [18] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self organized criticality : an explanation of the $1/f$ noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59 :381–384, 1987.
- [19] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self organized criticality. *Phys. Rev. A*, 38 :364–374, 1988.
- [20] A. L. Barabasi, P. Schiffer, and R. Albert. The physics of sand castles : maximum angle of stability in wet and dry granular media. *Physica A*, 266 :366–371, 1999.
- [21] L. Bocquet, W. Losert, D. Schalk, T. C. Lubensky, and J. P. Gollub. Granular shear flow dynamics and forces : Experiment and continuous theory. cond-mat/0012356.
- [22] E. Bouchaud, G. Lapasset, and J. Planes. Fractal dimension of fractured surfaces : a universal value ? *Europhys. Lett.*, 13 :373–79, 1990.
- [23] J. P. Bouchaud, M. E. Cates, and P. Claudin. Stress distribution in granular media and nonlinear wave equation. *J. Phys. France I*, 5 :639–656, 1995.
- [24] J. P. Bouchaud, M. E. Cates, J. R. Prakash, and S. F. Edwards. A model for the dynamics of sandpile surface. *J. Phys. France I*, 4 :1383, 1994.
- [25] J. P. Bouchaud, M. E. Cates, J. R. Prakash, and S. F. Edwards. Hysteresis and metastability in a continuum sandpile model. *Phys. Rev. Lett.*, 74(11) :1982–1985, 1995.
- [26] J. P. Bouchaud and P. Claudin. fluctuations géantes dans les silos à grains. la formations des voûtes redistribue le poids des grains. *Pour la Science*, 234 :23–24, 1997.
- [27] J. P. Bouchaud, P. Claudin, M. E. Cates, and J. P. Wittmer. Models of stress propagation in granular media. In H. J. Herrmann, J.-P. Hovi, and S. Luding, editors, *Physics of Dry Granular Media*, pages 97–121, Dordrecht, 1998. Kluwer Academic Publishers.
- [28] J. P. Bouchaud, P. Claudin, D. Levine, and M. Otto. Force chains splitting in granular materials : A mechanism for large scale pseudo-elastic behaviour. *Eur. Phys. J. E*, 4 :451–457, 2001.
- [29] T. Boutreux, E. Raphael, and P. G. de Gennes. Surface flows of granular materials : a modified picture for thick avalanches. *Phys. Rev. E*, 58 :4692, 1998.

- [30] E. Branly. Variation de conductibilité sous diverses influences électriques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 111 :785, 1890.
- [31] R. L. Brown and J. C. Richards. *Princip of Powder Mechanics*. Pergamon, New York, 1970.
- [32] F. Cantelaube, K. Didwania, and J. D. Goddard. Elastoplastic arching in two dimensional granular heap. In H. J. Herrmann, J.-P. Hovi, and S. Luding, editors, *Physics of Dry Granular Media*, pages 123–128, Dordrecht, 1998. Kluwer Academic Publishers.
- [33] M. Caponeri, S. Douady, S. Fauve, and C. Laroche. Dynamics of avalanches in a rotating cylinder. In E. Guazzelli & L. Oger, editor, *Mobile particulate systems*, pages 331–366, Dordrecht, 1995. Kluwer Academic Publisher.
- [34] J. M. Carlson and J. S. Langer. Properties of earthquakes generated by fault dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 62 :2632–2635, 1989.
- [35] N. F. Carnahan and K. E. Starling. Equation of state for non attractive rigid spheres. *J. Chem. Phys.*, 51 :635–636, 1969.
- [36] M. E. Cates, J. Wittmer, J. P. Bouchaud, and P. Claudin. Jamming, force chains and fragile matter. *Phys. Rev. Lett.*, 81(9) :1841–1844, 1998.
- [37] T. Chelidze and E. Barbakadze. Evolution of conductivity of a granular material during compression. *J. Phys. III France*, 4 :1341–1345, 1994.
- [38] F. Chevoir, M. Prochnow, J. T. Jenkins, and P. Mills. Dense granular flows down an inclined plane. In Y Kishino, editor, *Powder & Grains 2001*, pages 373–376, Amsterdam, 2001. A.A. Balkema.
- [39] P. Cladé, B. Andreotti, and S. Douady. The four avalanche fronts. submitted to *Phys. Rev. Lett.*
- [40] P. Claudin. *La physique du tas de sable : description phénoménologique de la propagation des contraintes dans un matériau granulaire*. PhD thesis, Université Paris XI, Orsay, France, 1999.
- [41] P. Claudin and J. P. Bouchaud. Static avalanches and giant stress fluctuations in silos. *Phys. Rev. Lett.*, 78(2) :231–234, 1997.
- [42] P. Claudin and J. P. Bouchaud. A scalar arching model. In H. J. Herrmann, J.-P. Hovi, and S. Luding, editors, *Physics of Dry Granular Media*, pages 129–133, Dordrecht, 1998. Kluwer Academic Publishers.
- [43] P. Claudin and J. P. Bouchaud. Stick-slip transition in the scalar arching model. *Granular Matter*, 1 :71–74, 1998.
- [44] P. Claudin, J. P. Bouchaud, M. E. Cates, and J. Wittmer. Model of stress fluctuations in granular media. *Phys. Rev. E*, 57 :4441–4457, 1998.
- [45] E. Clement, Y. Serero, J. Lanuza, J. Rajchenbach, and J. Duran. Fluctuating aspects of the pressure in a granular column. In R P Behringer and J T Jenkins, editors, *Powder & Grains 1997*, pages 349–351, Amsterdam, 1997. A.A. Balkema.

- [46] J. P. Clerc, G. Giraud, S. Alexander, and E. Guyon. Conductivity of a mixture of conducting and insulating grains : dimensionality effects. *Phys. Rev. B*, 22(5) :2489–2494, 1980.
- [47] G. Combe and J. N. Roux. Strain versus stress in a model granular material : a devil’s staircase. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :3628–3631, 2000.
- [48] G. Combe and J. N. Roux. Microscopic origins of quasi-static deformation in dense granular assemblies. In Y. Kishino, editor, *Powder & Grains 2001*, pages 293–296, Amsterdam, 2001. Balkema.
- [49] S. N. Coppersmith, C. H. Liu, S. Majumdar, O. Narayan, and T. A. Witten. Model for force fluctuations in beads packs. *Phys. Rev. E*, 53 :4673–4685, 1996.
- [50] C. A. Coulomb. Sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statiques relatifs à l’architectures. *Mémoire de l’Académie Royale des Sciences*, pages 343–382, 1776.
- [51] A. Daerr. *Dynamique des avalanches*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure, Paris, France, 2000.
- [52] A. Daerr and S. Douady. Sensitivity of granular surface flows on preparation. *Europhys. Lett.*, 47 :324–330, 1999.
- [53] A. Daerr and S. Douady. Two types of avalanche behaviour in granular media. *Nature*, 399 :241–243, 1999.
- [54] J. S. Dahler and M. Theodosopulu. The kinetic theory of dense polyatomic fluids. *Adv. Chem. Phys.*, 31 :155–229, 1975.
- [55] P. Dantu. Contribution à l’étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents. In *Proc. Of the 4th International Conf. On Soil Mech. and Foundation Eng.*, volume 1, pages 144–148, London, 1957. Butterworths Scientific Publications.
- [56] P. Dantu. Etude expérimentale d’un milieu pulvérulent. *Ann. Ponts Chauss.*, IV :193–202, 1967.
- [57] P. G. de Gennes. Dynamique superficielle d’un matériau granulaire. *C. R. Acad. Sci. Paris Serie II*, 321 :501, 1995.
- [58] D. M. Mueth G. F. Debregeas, G. S. Karczmart, P. J. Eng, S. R. Nagel, and H. M. Jaeger. Signature of granular microstructure in dense shear flows. *Nature*, 406 :385, 2000.
- [59] G. Debregeas and C. Josserand. A self-similar model for shear flows in dense granular materials. *Europhys.Lett.*, 52 :137–143, 2000.
- [60] S. N. Dorogovstev and J. F. F. Mendes. How sandpiles spill : Sandpiles problems in a thick flow regim. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :2946–2949, 1999.
- [61] S. N. Dorogovstev and J. F. F. Mendes. Evolution of a sandpile in the thick flow regim. *Phys. Rev. E*, 61 :2909–2919, 2000.
- [62] S. Douady, B. Andreotti, and A. Daerr. On granular surface flow equations. *Euro. Phys. J. B*, 11 :131, 1998.

- [63] T. G. Drake. Structural features in granular flows. *J. Geophys. Res.*, 25 :8681–8696, 1990.
- [64] T. G. Drake. Granular flows : physical experiments and their implications for microstructural theories. *J. Fluid Mech.*, 225 :121–152, 1991.
- [65] S. Das Gupta, D. V. Khakhar, and S. K. Bathia. Axial segregation of particles in a horizontal rotating cylinder. *Chem. Eng. Sci.*, 46 :1513, 1991.
- [66] J. Duran. *Sables, Poudres et Grains*. Eyrolles Sciences, 1997.
- [67] C. M. Dury, G. H. Ristow, J. L. Moss, and M. Nakagawa. Boundary effects on the angle of repose in rotating cylinders. *Phys. Rev. E*, 57 :4491–4497, 1998.
- [68] T. Elperin and A. Vikhanski. Granular flow in a rotating cylindrical drum. *Europhys. Lett.*, 42 :619, 1998.
- [69] D. Ertas, G. S. Grest, T. C. Halsey, D. Levine, and L. E. Silbert. Gravity driven dense granular flows. condmat/0005051.
- [70] P. Evesque and P. G. de Gennes. Note sur la statique de silos. *C. R. Acad. Sci. Paris Série IIb*, 326 :761–766, 1998.
- [71] P. Evesque and J. Rajchenbach. Caractérisation d’avalanches de billes dans un cylindre tournant. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 307 :223, 1988.
- [72] E. Falcon, R. Wunenburger, P. Evesque, S. Fauve, C. Chabot, Y. Garrabos, and D. Beysens. Cluster formation in a granular medium fluidized by vibrations in low gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :440–443, 1999.
- [73] L. Fechant. *Le contact électrique*. Hermes, 1996.
- [74] J. Feder. *Fractals*. Plenum Press Collation, 1989.
- [75] S. F. Foester, M. Y. Louge, H. Chang, and K. Allia. Measurements of the collision properties of small spheres. *Phys. Fluids*, 6 :1108–1115, 1994.
- [76] U. Frisch. *Turbulence*. Cambridge University Press, 1996.
- [77] J. F. Geng, D. Howell, E. Longhi, R. P. Behringer, G. Reydellet, L. Vanel, E. Clement, and S. Luding. Footprints in sand : The response of a granular material to local perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :035506, 2001.
- [78] G. Giraud, J. P. Clerc, and E. Guyon. Study by measurement of electrical resistance of the repartition of the pressures in a disordered pile of spheres. *Powder Tech.*, 35(1) :107–111, 1983.
- [79] I. Goldhirsch. Kinetics and dynamics of rapid granular flows. In H Herrmann, J P Hovi, and S Luding, editors, *Physics of Dry Granular Media*, pages 371–400, Dordrecht, 1998. Kluwer Academic Publishers.
- [80] P. Gondret, N. Merakchi, and M. Rabaud. Avalanche sous-marines. In *Colloque Physique et Mécanique des Matériaux Granulaires*, volume 2, pages 401–406, Marne la Vallée, 2000. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
- [81] J. F. Gouyet. *Physique et Structures Fractales*. Masson, 1992.

- [82] W. H. Graf and M. S. Altinakar. *Hydraulique fluviale*. Presse polytechniques et universitaires romandes, 1993.
- [83] Y. Grasselli and H. J. Herrmann. On the angles of dry granular heaps. *Physica A*, 246 :301–312, 1997.
- [84] R. Greve, T. Koch, and K. Hutter. Unconfined flow of granular avalanches along a partly curved surface : I. theory. *Proc. Roy. Soc. London A*, 445 :399–413, 1994.
- [85] E. Guyon, J.-P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique Physique*. Savoirs Actuels, 1991.
- [86] A. Hansen, E. L. Hinrichsen, and S. Roux. Roughness of crack interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :2476–2479, 1991.
- [87] G. A. Held, D. H. Solina, D. T. Keane, W. J. Haag, P. M. Horn, and G. Grinstein. Experimental study of critical mass fluctuations in an evolving sandpile. *Phys. Rev. Lett.*, 665 :1120–1123, 1990.
- [88] F. M. Henderson. *Open channel flow*. Macmillan, 1966.
- [89] K. M. Hill and J. Kakalios. Reversible axial segregation of binary mixtures of granular materials. *Phys. Rev. E*, 49 :R3610–R3613, 1994.
- [90] D. Howell and R. P. Behringer. Fluctuations and dynamics for a two dimensional sheared granular material. In R P Behringer and J T Jenkins, editors, *Powder & Grains 1997*, pages 337–340, Amsterdam, 1997. A.A. Balkema.
- [91] D. Howell, R. P. Behringer, and C. Veje. Stress fluctuations in a 2d granular couette experiment : a continuous transition. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :5241–5244, 1999.
- [92] O. Hungr and R. P. Morgenstern. Experiment in on the flow behaviour of granular material at high velocity in an open channel. *Géotechnique*, 34 :405–413, 1984.
- [93] O. Hungr and R. P. Morgenstern. High velocity shear tests on sand. *Géotechnique*, 34 :415–421, 1984.
- [94] H. M. Jaeger, C. H. Liu, and S. R. Nagel. Relaxation of the angle of repose. *Phys. Rev. Lett.*, 62 :40, 1989.
- [95] H. A. Janssen. Test on grains pressure in silos. *Z. Vereins Deutsch Ing.*, 39 :1045–1049, 1895.
- [96] J. T. Jenkins and F. Chevoir. Dense plane flows of frictional spheres down a bumpy frictional incline. submitted to *Phys. Rev. Lett.*
- [97] J. T. Jenkins and M. W. Richman. Kinetic theory for plane flows of a dense gas of identical rough inelastic circular discs. *Phys. Fluids*, 28 :3485–3494, 1985.
- [98] J. T. Jenkins and S. B. Savage. A theory for the rapid flow of identical smooth inelastic, spherical particle. *J. Fluid Mech.*, 130 :187–202, 1983.
- [99] X. Jia, C. Caroli, and B. Velicky. Ultrasound propagation in externally stressed granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :1863–1866, 1999.
- [100] X. Jia and P. Mills. Sound propagation in dense granular media. In Y Kishino, editor, *Powder & Grains 2001.*, pages 105–116, Amsterdam, 2001. A.A. Balkema.

- [101] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1989.
- [102] P. C. Johnson and R. Jackson. Frictional-collisional constitutive relations for granular materials, with application to plane shearing. *J. Fluid Mech.*, 176 :67–93, 1987.
- [103] P. C. Johnson, P. Nott, and R. Jackson. Frictional-collisional equations of motion for particulate flows and their application to chutes. *J. Fluid Mech.*, 210 :501–535, 1990.
- [104] T. Jotaki and R. Moriyama. On the pressure distribution of bulk materials in the cylindrical vessel - effect of the size of the vessel, the filling method and the filling speed. *J. Soc. Powd. Tech. Japan*, 14 :609–617, 1977.
- [105] D. V. Khakhar, J. J. McCarthy, and J. M. Ottino. Radial segregation of granular mixtures in rotating cylinders. *Phys. Fluids*, 9 :3600–3614, 1997.
- [106] D. V. Khakhar, J. J. McCarthy, T. Shinbrot, and J. M. Ottino. Transverse flows and mixing of granular materials in a rotating cylinder. *Phys. Fluids*, 9 :31–43, 1997.
- [107] D. V. Khakhar, A. V. Orpe, P. Andresén, and J. M. Ottino. Surface flow of granular materials : model and experiments in heap formation. *J. Fluid Mech.*, 9 :195–205, 2001.
- [108] J. B. Knight, C. G. Fandrich, C. L. Lau, and H. M. Jaeger and S. R. Nagel. Density relaxation in a vibrated granular material. *Phys. Rev. E*, 51 :3957–3963, 1995.
- [109] E. Kolb, T. Mazozi, E. Clement, and J. Duran. Force fluctuations in a vertically pushed granular column. *Eur. Phys. J. B*, 8 :483–491, 1999.
- [110] T. S. Komatsu, S. Inagasaki, N. Nakagawa, and S. Nasuno. Creep motion in a granular pile exhibiting steady surface flow. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :1757–1760, 2001.
- [111] S. Krishnamurthy, V. Loreto, H. J. Herrmann, S. S. Manna, and S. Roux. Self-structuring of granular media under internal avalanching. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :304–307, 1999.
- [112] L. Landau and A. Lifshitz. *Théorie de l'élasticité*. Editions Mir, 1967.
- [113] J. C. Lebreton. *Dynamique fluviale*. Eyrolles, 1974.
- [114] A. Lemaitre. The origin of a repose angle : Kinetic rearrangement for granular materials. submitted to *Phys. Rev. Lett.* : cond-mat/0107422.
- [115] P. A. Lemieux and D. J. Durian. From avalanches to fluid flow : A continuous picture of grain dynamics down a heap. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :4273–1764276, 2000.
- [116] M. J. Lightill and G. B. Withman. On kinematic waves, flood movement in long rivers. *Proc. Roy Acad. London ser. A*, 229, 1955.
- [117] A. J. Liu and S. R. Nagel. Jamming is not just cool anymore. *Nature*, 396 :21–22, 1998.
- [118] C. H. Liu. Sound and vibration in granular materials. *J. Phys. Condens. Matter*, 6 :A433–A436, 1994.

- [119] C. H. Liu. Spatial patterns of sound propagation in sand. *Phys. Rev. B*, 50 :782, 1994.
- [120] C. H. Liu and S. R. Nagel. La physique de l'état granulaire. *La Recherche*, 249(23) :1380–1387, 1992.
- [121] C. H. Liu and S. R. Nagel. Sound in sand. *Phys. Rev. Lett.*, 68(15) :2301–2304, 1992.
- [122] C. H. Liu and S. R. Nagel. Sound in a granular material : Disorder and nonlinearity. *Phys. Rev. B*, 48 :15646–15650, 1993.
- [123] C. H. Liu, S. R. Nagel, D. A. Schecter, S. N. Coppersmith, S. Majumdar, O. Narayan, and T. A. Witten. Force fluctuations in bead packs. *Science*, 269 :513–515, 1995.
- [124] W. Losert, L. Bocquet, T. C. Lubensky, and J. P. Gollub. Particle dynamics in sheared granular matter. *Phys. Rev. Lett.*, 85(7) :1428–1431, 2000.
- [125] G. Lovoll, K. J. Maloy, and E. G. Flekkoy. Force measurements on static granular materials. *Phys. Rev. E*, 60(5) :5872–5878, 1999.
- [126] S. Luding. Stress distribution in static two dimensional model granular media in the absence of friction. *Phys. Rev. E*, 55 :4720–4729, 1997.
- [127] C. K. K. Lun. Kinetic theory for granular flow of dense slightly inelastic, shlightly roughspheres. *J. Fluid Mech.*, 233 :539–559, 1991.
- [128] C. K. K. Lun and S. B. Savage. The effect of an impact dependent coefficient of restitution on stresses developed by sheared granular materials. *Acta Mech.*, 63 :15–44, 1986.
- [129] C. K. K. Lun and S. B. Savage. A simple kinetic theory for granular flow of rough inelastic spherical particles. *J. Appl. Mech.*, 54 :47–53, 1987.
- [130] C. K. K. Lun, S. B. Savage, D. J. Jeffrey, and N. Chepurniy. Kinetic theory for granular flow : inelastic particle in couette flow and slightly inelastic particle in a general flow field. *J. Fluid Mech.*, 140 :223–256, 1984.
- [131] L. Mahadevan and Y. Pomeau. Propagating fronts on sandpiles surfaces. *Europhys. Lett.*, 46 :595–601, 1999.
- [132] B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja, and A. J. Paullay. Fractal character of fracture surface of metal. *Nature*, 308 :721–722, 1984.
- [133] G. Mandl and R. Fernandez Luque. Fully developed plastic shear flow of a granular material. *Geotech.*, 20 :277–307, 1970.
- [134] S. S. Manna and D. V. Khakhar. Internal avalanches in granular medium. *Phys. Rev. E*, 58 :R6935–R6938, 1998.
- [135] D. Marion and A. Nur. Percolation of electrical and elastic properties of granular materials at the transition from a suspension to a loose packing. *Physica A*, 157(1) :575–579, 1989.
- [136] A. Mehta, G. C. Baxter, J. M. Luck, and R. J. Needs. The dynamics of sandpiles : The competing roles of grains and clusters. *Physica A*, 224 :48–67, 1996.

- [137] P. Mills. Private communication.
- [138] P. Mills, D. Loggia, and M. Texier. Model for stationary dense granular flow along an inclined wall. *Europhys. Lett.*, 45 :733, 1999.
- [139] P. Mills, M. Texier, and D. Loggia. Influence of roughness and dilatancy for dense granular flow along an inclined wall. *Eur. Phys. J. E*, 1 :5–8, 2000.
- [140] E. W. Montroll and J. T. Bendler. On levy (or stable) distributions and the williams-watts model of dielectric relaxation. *J. Stat. Phys.*, 34 :129–162, 1984.
- [141] J. J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : Application to granular materials. *Euro. J. Mech. A*, 13 :93–114, 1994.
- [142] J. J. Moreau. Contact et frottement en dynamique des systèmes de corps rigides. *Rev. Europ. des Elements Finis*, 9 :9–28, 2000.
- [143] C. F. Moukarzel. Isostatic phase transition and instability in stiff granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 81(8) :1634–1637, 1998.
- [144] D. M. Mueth, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. Force distribution in granular medium. *Phys. Rev. E*, 57(3) :3164–3169, 1998.
- [145] S. R. Nagel. Instabilities in a sandpile. *Rev. Mod. Phys.*, 64 :321–325, 1992.
- [146] M. Nakagawa, S. A. Altobelli, A. Caprihan, E. Fukushima, and E. Jeong. Non-invasive measurements of granular flows by magnetic resonance imaging. *Exp. Fluids*, 16 :54–60, 1993.
- [147] R. Nedderman and C. Laohakul. The thickness of the shear zone of flowing granular materials. *Powder Tech.*, 25 :91, 1980.
- [148] W. I. Newman and D. L. Turcotte. Cascade model for fluvial geomorphology. *Geophys. J. Int.*, 3 :433–439, 1990.
- [149] M. Nicodemi. Force correlation and arch formation in granular assemblies. *Phys. Rev. Lett.*, pages 1340–1343, 1998.
- [150] M. Nicolas, P. Duru, and O. Pouliquen. Compaction of granular material under cyclic shear. *Eur. Phys. J. E*, 3 :309–314, 2000.
- [151] E. R. Nowak, J. B. Knight, E. Ben-Naim, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. Density fluctuations in vibrated granular materials. *Phys. Rev. E*, 57 :1971–1982, 1998.
- [152] A. V. Orpe and D. V. Khakhar. Scaling relations in quasi 2d cylinders. *Phys. Rev E*, 64 :031302, 2001.
- [153] S. Ouagenouni and J. N. Roux. Compaction of well-coordinated lubricated granular pilings. *Europhys. Lett.*, 32 :449–453, 1995.
- [154] S. Ouagenouni and J. N. Roux. Force distribution in frictionless granular packings at rigidity threshold. *Europhys. Lett.*, 39 :117–122, 1997.
- [155] J. S. Patton, C. E. Brennen, and R. H. Sabersky. Shear flows of rapidly flowing granular material. *J Appl. Mech.*, 54 :801–805, 1987.
- [156] A. Ponzi and Y. Aizawa. Evolutionary financial market models. *Physica A*, 287 :507–523, 2000.

- [157] O. Pouliquen. On the shape of granular fronts down rough inclined planes. *Phys. Fluids*, 11(7) :1956–1958, 1999.
- [158] O. Pouliquen. Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Phys. Fluids*, 11(8) :542, 1999.
- [159] O. Pouliquen and Y. Forterre. Friction law for dense granular flows : Application to the motion of a mass down a rough inclined plane. submitted to *J. Fluid Mech.* cond-mat/0108398.
- [160] O. Pouliquen and Y. Forterre. Private communication.
- [161] O. Pouliquen, Y. Forterre, and S. L. Dizes. Slow dense granular flows as a self induced process. to appear in *Advance in Complex systems*.
- [162] O. Pouliquen and R. Gutfraind. Stress fluctuations and shear zones in quasi-static granular flows. *Phys. Rev. E*, 53(1) :552–561, 1996.
- [163] O. Pouliquen, M. Nicolas, and P. D. Weidman. Crystallisation of non-brownian spheres under horizontal shaking. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :3640–3643, 1997.
- [164] L. Quartier, B. Andreotti, S. Douady, and A. Daerr. Dynamics of a grain on a sandpile model. *Phys. Rev. E*, 62(6) :8299–8307, 2000.
- [165] F. Radjai. La double vie du sable. *La Recherche*, 304 :44–46, 1997.
- [166] F. Radjai, M. Jean, J. J. Moreau, and S. Roux. Force distribution in dense two dimensional granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :274–277, 1996.
- [167] F. Radjai, S. Roux, and J. M. Moreau. Contact force in a granular packing. *Chaos*, 9 :544–550, 1999.
- [168] F. Radjai, D. E. Wolf, M. Jean, and J. J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :61–64, 1998.
- [169] F. Radjai, D. E. Wolf, S. Roux, M. Jean, and J. J. Moreau. Force networks in dense granular media. In R P Behringer and J T Jenkins, editors, *Powders & Grains 97*, pages 211–214, Rotterdam, 1997. A.A. Balkema.
- [170] J. Rajchenbach. Flows in powder : From discret avalanches to continuous regimes. *Phys. Rev. Lett.*, 65(18) :2221–2224, 1990.
- [171] J. Rajchenbach. Granular flows. *Adv. Phys.*, 49 :229, 2000.
- [172] J. Rajchenbach and E. Clément. Experiments on bidimensional models of sand : Study of dynamics. In A. J. McKane, editor, *Scale Invariance, Interfaces and Non-Equilibrium Dynamics*, New York, 1995. Plenum.
- [173] J. Rajchenbach, E. Clément, and J. Duran. Experimental study of bidimensional models of sand. *Int. J. of Mod. Phys. B*, 7(9 & 10) :1789–1798, 1993.
- [174] J. Rajchenbach, E. Clément, and J. Duran. Velocity measurements on a bidimensional powder. In C. Thornton, editor, *Powders & Grains 93*, page 333, Rotterdam, July 1993. A.A. Balkema.
- [175] G. Reydellet and E. Clement. Green’s function probe of a static granular piling. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :3308–3311, 2001.

- [176] O. Reynolds. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. *Phyl. Mag. Ser. 5*, 20 :469–481, 1885.
- [177] H. C. Van Rijn. *Principles of Fluids Flow and Surface Waves in Rivers, Estuaries Seas and Oceans*. Aqua Publications, 1994.
- [178] G. Ristow. *Pattern Formation in Granular Materials*. Springer, 2000.
- [179] J. N. Roux. Geometric origin of mechanical properties of granular materials. *Phys. Rev. E*, 61 :6802–6836, 2000.
- [180] S. B. Savage. Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels. *J. Fluid Mech.*, 92 :53, 1973.
- [181] S. B. Savage. Analysis of slow high concentration flows of granular materials. *J. Fluid Mech.*, 377 :1–26, 1998.
- [182] S. B. Savage and K. Hutter. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *J. Fluid Mech.*, 199 :177, 1989.
- [183] S. B. Savage and D. J. Jeffrey. The stress tensor in a granular flow at high shear rates. *J. Fluid Mech.*, 110 :255–272, 1981.
- [184] S. B. Savage and S. McKeow. Shear stresses developed during rapid shear of concentrated suspension of large spherical particles between concentric cylinders. *J. Fluid Mech.*, 127 :453–472, 1983.
- [185] S. B. Savage and M. Sayed. Stresses developed by dry cohesionless granular materials in an annular shear cell. *J. Fluid Mech.*, 142 :391–430, 1984.
- [186] L. E. Silbert, D. Ertas, G. S. Grest, T. C. Halsey, D. Levine, and S. J. Plimpton. Granular flow down an inclined plane : Bagnold scaling and rheology. submitted to *Phys. Rev. E* cond-mat/0105071.
- [187] M. Da Silva and J. Rajchenbach. Stress transmission through a model system of cohesionless elastic grains. *Nature*, 406 :708–711, 2000.
- [188] V. V. Sokolowskii. *Statics of granular materials*. Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [189] T. Takahashi. Debris flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 13 :57, 1991.
- [190] T. Takahashi and H. Yanai. *Powder Tech.*, 7 :205, 1973.
- [191] P. Tegzes, R. Albert, M. Paskvan, A. L. Barabasi, T. Vicsek, and P. Schiffer. Liquid-induced transitions in granular media. *Phys. Rev. E*, 60 :5823–5826, 1999.
- [192] K. Terzaghi. *Mécanique théorique des sols*. Dunod, Paris, 1951.
- [193] K. Terzaghi and R. B. Peck. *Mécanique des sols appliquée*. Dunod, Paris, 1965.
- [194] E. Thorsten, P. Claudin, and J. P. Bouchaud. Exact solutions of a model for granular avalanches. *Europhys. Lett.*, 50 :594–600, 2000.
- [195] T. Travers. *Compression de milieux granulaires modèles. Effet des hétérogénéités*. PhD thesis, Université de Rennes, Rennes, France, 1988.
- [196] T. Travers, M. Ammi, D. Bideau, A. Gervois, J. C. Messenger, and J. P. Troadec. Uniaxial compression of 2d packings of cylinders. effects of weak disorder. *Europhys. Lett.*, 4(3) :329–332, 1987.

- [197] T. Travers, D. Bideau, J. P. Troadec, and J. C. Messenger. Uniaxial compression effect on 2d mixtures of ‘hard’ and ‘soft’ cylinders. *J. Phys. A*, 19 :1033–1038, 1986.
- [198] J. P. Troadec and D. Bideau. Propriétés de transport d’un mélange de sphères conductrices et isolantes : étude des effets de percolation. *J. Phys.*, 42 :113–123, 1981.
- [199] O. Tsoungui, D. Vallet, and J. C. Charmet. Use of contact area trace to study the force distribution inside 2d granular systems. *Granular Matter*, 1 :65–69, 1998.
- [200] D. Vandembroucq, A. C. Boccara, and S. Roux. Breakdown patterns in branly’s coheror. *J. Phys. III*, 7(2) :303–310, 1997.
- [201] N. Vandewalle and M. Ausloos. Crossing of two mobile averages : A method for measuring the roughness exponent. *Phys. Rev. E*, 58(5) :6832–6834, 1998.
- [202] N. Vandewalle and S. Dorbolo. Giant electrical fluctuations in metallic disordered packings. *Eur. Phys. J E*, 5(2) :129–131, 2001.
- [203] N. Vandewalle, C. Lenaerts, and S. Dorbolo. Non-gaussian electrical fluctuations in a quasi 2d packing of metallic beads. *Europhys. Lett.*, 53(2) :197–201, 2001.
- [204] L. Vanel. *Etude expérimentale de l’équilibre mécanique d’un milieu granulaire : exemples du silo et du tas de sable*. PhD thesis, Université Paris XI, Paris, France, 1999.
- [205] L. Vanel, P. Claudin, J. P. Bouchaud, M. E. Cates, E. Clement, and J. P. Wittmer. Stresses in silos : Comparison between theoretical models and new experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :1439–1442, 2000.
- [206] L. Vanel, E. Clement, J. Lanuza, and J. Duran. Pressure fluctuations in a granular column. In H. J. Herrmann, J.-P. Hovi, and S. Luding, editors, *Physics of Dry Granular Media*, pages 249–254, Dordrecht, 1998. Kluwer Academic Publishers.
- [207] L. Vanel, D. Howell, D. Clark, R. P. Behringer, and E. Clement. Memories in sand : Experimental tests of construction history on stress distributions under sandpiles. *Phys. Rev. E*, 60 :R5040–R5043, 1999.
- [208] C. Veje, D. Howell, and R. P. Behringer. Kinematics of a two-dimensional granular couette experiment at the transition to shearing. *Phys. Rev. E*, 59 :739–745, 1999.
- [209] L. Verlet and D. Levesque. Integral equations for classical fluids iii. the hard discs systems. *Molec. Phys.*, 46 :969–980, 1982.
- [210] P. L. Viollet, J. P. Chabard, P. Esposito, and D. Laurence. *Mécanique des Fluides Appliquée*. Presse de l’Ecole National des Ponts et Chaussées, 1998.
- [211] E. R. Weeks, J. C. Crocker, A. C. Levitt, A. Schofield, and D. A. Weitz. Three-dimensional direct imaging of structural relaxation near the colloidal glass transition. *Science*, 287 :627–631, 2000.
- [212] M. Wieland, N. T. Gray, and K. Hutter. Channelized free surface flow of cohesionless granular avalanches in a chute with shallow lateral curvature. *J. Fluid Mech.*, 392 :73–100, 1999.

- [213] J. Wittmer, P. CLaudin, M. E. Cates, and J. P. Bouchaud. An explanation for the central stress minimum in sandpiles. *Nature*, 382 :336–338, 1996.
- [214] J. P. Wittmer, M. E. Cates, and P. CLaudin. Stress propagation and arching in static sandpiles. *J. Phys. France I*, 7 :39–80, 1997.
- [215] J. P. Wittmer, M. E. Cates, P. Claudin, and J. P. Bouchaud. Arching effects in the stress distribution of sandpiles. In R. P. Behringer and J. T. Jenkins, editors, *Powders & Grains 97*, pages 303–306, Rotterdam, 1997. Balkema.
- [216] K. Yamane, M. Nakagawa, S. A. Altobelli, T. Tanaka, and Y. Tsuji. Steady particulate flows in a horizontal rotating cylinder. *Phys. Fluids*, 10 :1419–1427, 1998.
- [217] O. Zik, D. Levine, S. G. Lipson, S. Shtrikman, and J. Stavans. Rotationally induced segregation of granular materials. *Phys. Rev. E*, 49 :R3610–R3613, 1994.

Résumé - Les matériaux granulaires possèdent des propriétés rhéologiques et mécaniques peu communes. Ils peuvent en effet s'écouler comme des liquides mais, sous certaines conditions, se bloquer et résister à des contraintes extérieures sans se déformer. Dans ce mémoire, nous étudions cette dualité solide/liquide à travers deux expériences permettant de faire le lien entre le comportement individuel des grains et celui de l'empilement.

Tout d'abord on considère les écoulements à la surface d'un empilement incliné. Nous dérivons tout d'abord une description continue de leur dynamique à partir des équations de conservation intégrées sur l'épaisseur (approche de Saint-Venant) en étudiant les écoulements stationnaires dans un tambour tournant. Nous nous intéressons ensuite à la rhéologie du matériau et analysons les corrélations spatiales du champ de vitesse et les fluctuations de compacité. Nous montrons l'existence d'une forte concentration d'agrégats de grains trop denses pour pouvoir se déformer. Leur taille est distribuée en loi de puissance, sans échelle caractéristique. Nous discutons les implications de ces observations sur les approches théoriques proposées pour décrire les écoulements denses.

La deuxième partie porte sur les réarrangements internes engendrés par une petite sollicitation extérieure dans un empilement apparemment statique. Une petite dilatation thermique engendre des fluctuations de conductance géantes dans un empilement de grains conducteurs. L'analyse statistique de ces fluctuations nous permet de relier cette sensibilité électrique à des fluctuations tribologiques locales et non à des réorganisations collectives du réseau des contacts comme cela a pu être suggéré par le passé. Nous visualisons dans un deuxième temps les micro-déplacements des grains engendrés par l'ajout d'une petite surcharge en surface. Cela nous permet de discuter la validité des différents modèles décrivant la répartition des contraintes dans un empilement statique.

Mots-clés : matériaux granulaires, écoulements de surface, dilatance, agrégats, effet de voûtes, fluctuations de forces.

Abstract - Granular media exhibit non-intuitive rheological and mechanical properties. They can flow as liquids but, under specific conditions, they can jam and resist to external stress without being sheared. In this thesis, the solid/liquid duality is investigated through two experiments whose main features are to allow to study the relationships between the individual behaviour of beads and the one of the packing.

In the first part, we consider the surface flows in an inclined packing. A continuous description based on depth averaged conservation equations (Saint-Venant approach) is first derived from the study of steady surface flows in a rotating drum. We then focus on the internal rheology of these flows and investigate the spatial correlation of the instantaneous velocity field and the fluctuations of the volume fraction. We demonstrate the existence of rigid clusters of grains embedded in the flows. Their size is power-law distributed from the grain size scale up to the thickness of the flowing layer. The implications of the absence of a characteristic length scale on available theoretical models of dense granular flows are discussed.

The second part of the thesis deals with internal rearrangements in a packing submitted to a small perturbation. A small thermal dilation leads to giant electrical fluctuations in a pile of metallic beads. The statistical analysis of these fluctuations allows us to relate this electrical sensitivity to local tribological fluctuations rather than collective reorganizations of the contacts network as proposed in the past. We then visualize the grains micro-displacements entailed by adding a small overload to the surface. This experiment allows us to discuss the validity of the different approaches proposed to describe stress distribution in static packing.

Keywords : Granular Media, surface flows, dilatancy, cluster, arching effect, forces fluctuations.

