Minorations explicites de formes linéaires en deux logarithmes

Nicolas Gouillon

To cite this version:

Nicolas Gouillon. Minorations explicites de formes linéaires en deux logarithmes. Mathématiques [math]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2003. Français. NNT : . tel-00003964

HAL Id: tel-00003964

https://theses.hal.science/tel-00003964

Submitted on 11 Dec 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE
AIX-MARSEILLE II
Faculté des Sciences de Luminy

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement
par

Nicolas GOUILLON

le 4 décembre 2003

Titre

Minorations explicites de formes linéaires en deux logarithmes

Directeur de Thèse : Michel LAURENT

JURY

M. LACHAUD Gilles	
M. LAURENT Michel	
M. LOUBOUTIN Stéphane	
M. MIGNOTTE Maurice	Rapporteur
M. ROLLAND Robert	
M. WALDSCHMIDT Michel	Rapporteur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude envers Michel Laurent. Sa disponibilité durant ces trois années, ses nombreux conseils, en particulier lors de la rédaction, m'ont permis d'aboutir à la présente thèse.

Je suis très honoré que Messieurs Maurice Mignotte et Michel Waldschmidt aient accepté la charge de rapporteur. Je remercie encore Michel Waldschmidt de m'avoir communiqué des remarques utiles et précises pour l'amélioration du texte.

Je souhaite remercier pour leur participation au jury Messieurs Gilles Lachaud, Stéphane Louboutin et Robert Rolland.

Je tiens à saluer l'ensemble des membres de l'IML, que j'ai cotoyés durant ces années, et plus particulièrement mes « compagnons de galère » : Nicolas, Redha, Saadbouh, Julien, Nicolas, Alain, Éric... ainsi que ceux, les chanceux, qui ne le sont plus : Boris, Éric, Sofiane...

Je remercie également mes parents, mon frère, ma soeur, ma belle-soeur et mon beau-frère, ainsi que mes beaux-parents, pour leur soutien moral.

Enfin je remercie ma femme Delphine de m'avoir soutenu pendant mes périodes de doutes, et de m'avoir prodigué des encouragements répétés. J'associe à ces remerciements ma fille Loreline pour toute la joie qu'elle m'apporte.

Table des matières

Introduction

Nous donnons dans cette partie un aperçu historique d'une part de l'évolution des minorations explicites de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques et d'autre part des différentes méthodes pour les obtenir, ceci de manière qualitative mais aussi quantitative. Pour plus de clarté nous rappelons quelques notions de base qui nous seront utiles. (Une grande partie des informations historiques est issue de l'article [32]).

0.1 Rappels et notations

Dans toute cette thèse, la lettre n désignera un nombre entier strictement positif (sauf indication contraire). Pour tous nombres complexes $a_1, \dots, a_n$, on notera $c(a_1, \dots, a_n)$ une fonction des nombres $a_1, \dots, a_n$. On dira qu'un tel nombre est explicitement calculable si l'on peut expliciter une formule pour celui-ci. Notons que dans ce mémoire, nos énoncés seront entièrement explicites.

Soit α un élément de $\mathbb{C}$. On dit que α est un nombre algébrique s'il existe un polynôme $P \neq 0$, à coefficients entiers, tel que $P(\alpha) = 0$. Le degré d'un nombre algébrique, noté $d(\alpha)$ ou d, est défini comme étant le plus petit degré des polynômes, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, s'annulant en α, ce qui peut s'écrire

$$d(\alpha) = \min_{\substack{P \in \mathbb{Z}[X], P \neq 0 \\ P(\alpha)=0}} \{\deg P\}.$$

L'ensemble des nombres algébriques de $\mathbb{C}$ est un sous-corps noté $\overline{\mathbb{Q}}$. Les éléments de $\mathbb{C}$ qui ne sont pas algébriques sont appelés nombres transcendants.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $\beta_0, \dots, \beta_n$, $n \geq 2$ des nombres algébriques. On désignera par forme (ou combinaison) linéaire de logarithmes une expression du type :

$$\Lambda = \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n,$$

où les $\log \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$, désignent des déterminations quelconques du logarithme complexe des nombres α_i. Dans toute la suite le symbole Λ désignera toujours une forme linéaire de logarithmes. On distingue plusieurs cas selon la nature des éléments β_i, $i = 1, \dots, n$. Tout d'abord si $\beta_0 \neq 0$ on dit que la forme linéaire de logarithmes Λ est non homogène. Si $\beta_0 = 0$, Λ est alors dite homogène. Enfin, dans le cas homogène, lorsque tous les nombres β_i, $i = 1, \dots, n$, sont entiers (ou rationnels) on parle de cas rationnel. C'est ce cas qui offre le plus d'applications (dont nous parlerons plus tard). Dans toute la suite nous nous contenterons de donner les résultats dans le cas rationnel et homogène, bien qu'ils soient souvent généralisables aux cas plus généraux. Pour pouvoir donner des résultats quantitatifs assez précis et comparables entre eux, nous avons besoin des quantités suivantes :

$$D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \mathbb{Q}]$$

et A_i, $i = 1, \dots, n$, un nombre réel strictement positif qui doit principalement vérifier $\log A_i \geq h(\alpha_i)$, où h est la hauteur logarithmique usuelle :

Définition 0.1. *Soit α un nombre algébrique de degré d sur $\mathbb{Q}$ et dont le polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$ s'écrit :*

$$a \prod_{i=1}^{d} (X - \alpha^{(i)}),$$

où les racines $\alpha^{(i)}$ sont des nombres complexes. On désignera par

$$h(\alpha) = \frac{1}{d} \left(\log |a| + \sum_{i=1}^{d} \log \max\{1, |\alpha^{(i)}|\} \right),$$

la hauteur logarithmique du nombre algébrique α.

0.2 Historique

Les premières minorations explicites, non triviales, de combinaisons linéaires de logarithmes sont dues à A.O. Gel'fond vers 1934. Elles font suite à la résolution par ce dernier (en même temps que T. Schneider et par une méthode différente), du septième problème de Hilbert concernant la transcendance du nombre α^β, pour un nombre algébrique $\alpha \neq 0, 1$ et un nombre irrationnel β. A.O. Gel'fond avait alors raffiné ses outils pour obtenir des minorations d'expressions de la forme $|\beta \log \alpha_1 - \log \alpha_2|$, quand les trois nombres α_1, α_2 et β sont des nombres algébriques. La seule hypothèse alors utilisée est la non nullité du nombre $\beta \log \alpha_1 - \log \alpha_2$ considéré. Le cas particulier le plus important, offrant le plus d'applications et qui sera considéré ici, est celui où le nombre β est rationnel. Il s'agit alors de minorer une expression de la forme $|b_1 \log \alpha_1 - b_2 \log \alpha_2|$, avec b_1 et b_2 appartenant à $\mathbb{Z}$. Remarquons d'abord que l'inégalité dite de Liouville implique trivialement la minoration

$$|b_1 \log \alpha_1 - b_2 \log \alpha_2| \geq \exp\{-c(\alpha_1, \alpha_2) B\}$$

où $B = \max\{|b_1|, |b_2|\}$, et où

$$c(\alpha_1, \alpha_2) = D(h(\alpha_1) + h(\alpha_2) - \log 2) + \log \max\{|\frac{1}{\alpha_1}|, |\alpha_1|\} + \log \max\{|\frac{1}{\alpha_2}|, |\alpha_2|\}).$$

En effet considérons le polynôme

$$P(X_1, X_2) = X_1^{|b_1|} X_2^{|b_2|} - 1.$$

Si l'on utilise alors l'inégalité de Liouville, fournie par le Lemme 4.4, pour le polynôme P aux points $\tilde{\alpha_1} = \alpha_1^{\epsilon(b_1)}$ et $\tilde{\alpha_2} = \alpha_2^{\epsilon(b_2)}$, où $\epsilon(b_i)$ désigne le signe de b_i, $i = 1, 2$, nous obtenons la minoration :

$$\left|\tilde{\alpha_1}^{|b_1|}\tilde{\alpha_2}^{|b_2|} - 1\right| \geq 2^{-(D-1)} \max\{1, |\tilde{\alpha_1}|^{|b_1|}\} \max\{1, \tilde{\alpha_2}^{|b_2|}\} \exp\{-D(|b_1|h(\tilde{\alpha_1}) + |b_2|h(\tilde{\alpha_2}))\}.$$

Or si

$$\left|\alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_n^{b_n} - 1\right| \leq \frac{1}{2},$$

nous avons l'encadrement

$$\frac{1}{2}|\Lambda| \leq \left|\alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_n^{b_n} - 1\right| \leq 2|\Lambda|.$$

De plus nous avons, pour tout nombre algébrique complexe, $h(\alpha) = h(1/\alpha)$, il s'ensuit que

$$|\Lambda| \geq \exp\{-(D(h(\alpha_1) + h(\alpha_2) - \log 2) + \max\{0, \log|\tilde{\alpha_1}|\} + \max\{0, \log|\tilde{\alpha_2}|\})B\}.$$

En 1949 A.O. Gel'fond obtient une minoration de la forme

$$|b_1 \log \alpha_1 - b_2 \log \alpha_2| \geq \exp\{-c'(\alpha_1, \alpha_2)(\log B)^2\},$$

où $c'(\alpha_1, \alpha_2)$ est un nombre positif explicitement calculable. Il en déduit de remarquables conséquences sur différentes questions diophantiennes, ce qui donne un nouvel intérêt à l'étude des combinaisons linéaires de logarithmes, [6]. Notons que la constante $c'(\alpha_1, \alpha_2)$ a été explicitement déterminée par A. Schinzel en 1967 [25]. On remarque à ce propos qu'il existe une différence de difficulté entre énoncer des résultats comme ci-dessus, avec une constante c explicitable, et expliciter réellement cette constante. On peut étendre la méthode de A.O. Gel'fond de 2 à n logarithmes pour obtenir une minoration du type :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i \log \alpha_i\right| \geq \exp\{-c''(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\log B)^{n^2-n}\}$$

où $B = \max\{|b_1|, \ldots, |b_n|\}$ et où $c''(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un nombre positif effectivement calculable en fonction du nombre n de logarithmes. A la fin des années 60, A. Baker et N.I. Feldman raffinent cette méthode pour obtenir un exposant de 1 au terme $\log B$, [1]. On aboutit alors à la minoration

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i \log \alpha_i\right| \geq \exp\{-c_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\log B\}, \tag{1}$$

où $B = \max\{2, |b_1|, \dots, |b_n|\}$ et où $c_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est explicitement calculable en fonction de n. Pour être plus précis, d'après le Théorème 1 de [2], le nombre $c_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ peut être majoré par

$$c_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (16nD)^{200n} \prod_{i=1}^{n} \log A_i \log \prod_{i=1}^{n-1} \log A_i.$$

Dans les cas $n = 2$, qui est le cas qui nous intéresse, une des meilleures valeurs calculées est $c_1(\alpha_1, \alpha_2) \geq 10^9 D^4 \log(eD) \log A_1 \log A_2$. Pour en terminer avec les minorations issues de la méthode de Baker, il faut citer les récents travaux de E.M. Matveev [14], ainsi que ceux de Y.V. Nesterenko [21]. E.M. Matveev obtient, en 1999, une inégalité de la forme

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i \log \alpha_i\right| \geq \exp\{-c_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\log B\}, \tag{2}$$

où $B = \max\{2, |b_1|, \dots, |b_n|\}$ et où $c_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ peut être majoré par :

$$c_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq C_2(n) D^{2+n} \log(eD) \prod_{i=1}^{n} \log A_i.$$

Ce dernier résultat étant celui du Corollaire 3 de [14]. La plus importante amélioration dans ces travaux, est d'avoir supprimé un facteur n^n intervenant dans la constante $C_1(n)$. Pour le cas qui nous occupe, $n = 2$, la valeur de $C_2(2)$ est de l'ordre de 7.10^8, cette valeur étant obtenue à partir de la formule générale de $C_2(n)$, en substituant la valeur 2 à n. Il est donc probable qu'un travail plus spécifique du cas $n = 2$ engendrerait un meilleur résultat numérique, c'est à dire une constante $C_2(2)$ plus petite. On constate que la minoration (2) est meilleure que la (1), on ne comparera donc les résultats suivants qu'avec la seule minoration (2). Les travaux de Y.V. Nesterenko ne concernent que le cas où les α_j sont rationnels. Il obtient la minoration suivante :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i \log \alpha_i\right| \geq \exp\{-2(2e)^{2n+6}(n+2)^{9/2} \prod_{i=1}^{n} \log A_i \log eB\},$$

où $B = \max\{1, |b_1|, \dots, |b_n|\}$. Ce résultat est celui du Théorème 2.2 de [21]. Notons que comme nous supposons ici les $alpha_i$ rationnels, la valeur de D est 1.

Parallèlement à la méthode de Gel'fond-Baker, il a été possible d'obtenir des minorations explicites de formes linéaires de logarithmes à partir de la méthode de T. Schneider. Ces résultats ont, dans un premier temps, été restreints au seul cas de deux logarithmes, avec des minorations de la forme :

$$|b_1 \log \alpha_1 - b_2 \log \alpha_2| \geq \exp\{-c_3(\alpha_1, \alpha_2)(\log B)^2\}, \tag{3}$$

où $c_3(\alpha_1, \alpha_2)$ peut être majorée par $C_3 D^4 \log A_1 \log A_2$. Une grande contribution à ces travaux est apportée par M. Mignotte et M. Waldschmidt, voir [17], [18] et [19]. De manière qualitative la minoration (3) apparaît a priori comme moins bonne que l'inégalité (2). Cependant la méthode dite de Schneider permet d'obtenir de meilleurs résultats numériques, pour la constante C_3, que ceux obtenus pour la constante $C_2(2)$. En effet bien qu'assez élevée au départ, de l'ordre de 10^{10} [17], elle est rapidement abaissée à 500 [18], grâce notamment à l'utilisation d'un meilleur lemme de zéros découlant des travaux de D.W. Masser [10] et W.D. Brownawell [5]. Nous reviendrons un peu plus loin sur ce que l'on entend par lemme de zéros et sur leur évolution. En raffinant les méthodes, la constante C_3 est encore améliorée pour atteindre 200 [19]. En 1994 M. Laurent, en introduisant des déterminants d'interpolation à la place de systèmes d'équations et de fonctions auxiliaires, contribue à l'amélioration de la constante C_3, qui devient proche de 80, [8]. L'avantage de l'utilisation des déterminants d'interpolation est de regarder le système, étudié originellement par A. Baker (voir 0.3), de manière plus globale et donc de ne pas scinder les conditions, ce qui permet d'obtenir de meilleures estimations. Remarquons que cette nouvelle approche a aussi permis d'améliorer les résultats numériques dans la méthode de Gel'fond-Baker. Enfin, en 1995, Y. Nesterenko établit un lemme de zéros quasi-optimal dans le cadre spécifique d'une forme linéaire en deux logarithmes et de la méthode de Schneider. Ce lemme permet d'obtenir une constante C_3 d'une valeur de 30 environ [9]. En conclusion, la méthode de Schneider, bien qu'a priori moins intéressante, permet d'obtenir des inégalités produisant de meilleures minorations que celles découlant de la méthode de Gel'fond-Baker, lorsque $\log B \leq 2.10^7$ environ si l'on compare avec la minoration (2).

Outre la méthode de Schneider précédente, que l'on dira classique, une autre méthode, que l'on appellera "Schneider avec dérivations", a été développée pour obtenir un exposant de 1 à $\log B$, au lieu du 2 intervenant dans la méthode de Schneider classique. La méthode de Schneider avec dérivation est à la méthode de Schneider classique ce qu'est la méthode de Baker à celle de Gel'fond. Une part importante dans l'élaboration et le développement de cette méthode revient à M. Waldschmidt [29], [30]. Les minorations ainsi obtenues sont de la forme

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i \log \alpha_i\right| \geq \exp\{-c_4(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \log B\}, \tag{4}$$

où $c_4(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un nombre positif qui peut être majoré par :

$$c_4(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq C_4(n) D^{2+n} \max\{\frac{1}{D}, \log D\} \prod_{i=1}^{n} \log A_i.$$

Pour cette méthode, comme cela a été le cas pour la méthode de Schneider classique, l'utilisation des déterminants d'interpolation a apporté une amélioration de la constante $C_4(n)$. Dans le cas particulier de $n = 2$, un des derniers résultats en date est $C_4(2) \geq 8.10^7$ (Corollaire 9.22 de [31]). Remarquons que, les calculs n'étant pas spécifiquement réalisés pour $n = 2$, il est à supposer qu'il serait possible d'améliorer cette valeur. C'est ce qui est fait dans cette thèse où, en raffinant les lemmes techniques utilisés et grâce à un nouveau lemme de zéros, la constante $C_4(2)$ est abaissée à une valeur de l'ordre de 5.10^4. Si l'on compare ces résultats avec ceux découlant de la méthode de Gel'fond-Baker, la minoration (4) est préférable, pour $n = 2$, à l'inégalité (2). Cependant, comparée à la minoration (3), l'inégalité (4) est plus intéressante seulement lorsque $\log B$ est assez grand, à savoir environ $\log B \geq 2000$, en prenant les valeurs 30 pour C_3 et 5.10^4 pour $C_4(2)$.

La différence d'ordre de grandeur, entre C_3 et les autres constantes, s'explique en partie par le fait que l'on rajoute une variable, correspondant à la multiplicité, dans les méthodes de Baker et de Schneider avec dérivation. En d'autres termes, l'étude du cas d'une forme linéaire en deux logarithmes se fait en dimension 2 pour la méthode de Schneider classique et en dimension 3 pour les deux autres méthodes. L'autre raison étant l'utilisation d'un lemme de zéros quasi-optimal dans un cas et pas dans les autres.

Intéressons-nous maintenant aux lemmes de zéros. Sous ce nom de "lemmes de zéros" sont regroupés divers résultats : majoration du nombre de zéros (ou de la multiplicité) de certaines fonctions ou de certains polynômes, non nullité de certains déterminants... Ils apparaissent dans tous les travaux sur la transcendance et notamment la minoration des formes linéaires de logarithmes, que ce soit dans la méthode de Gel'fond-Baker ou celle de Schneider. Il est à noter que leur influence sur les résultats numériques, en particulier les valeurs des constantes, est particulièrement marquée dans les méthodes de Schneider classique ou avec dérivations. Ceci s'explique essentiellement, par le fait que dans la méthode de Schneider on ne sait pas extrapoler, contrairement à celle de Gel'fond-Baker. Il est donc important de raffiner autant que possible les lemmes de zéros qui seront utilisés. Historiquement c'est à partir des années 70 que D.W. Masser étudie les lemmes de zéros de manière systématique. En collaboration avec W.D. Brownawell, il introduit divers types d'arguments exploités plus largement par la suite. En 1980, D.W. Masser obtient, grâce à une méthode d'élimination, un lemme de zéros en plusieurs variables valable aussi bien pour les polynômes que pour les polynômes exponentiels [10], ce qui ouvre la voie à une nouvelle approche de la transcendance en plusieurs variables. Ce lemme a été généralisé aux groupes algébriques par G. Wüstholz [11]. Les derniers raffinements en date sont essentiellement dus à P. Philippon, voir [22] et [23], dont l'énoncé est maintenant utilisé dans de très nombreux travaux. Dans le cas qui nous intéresse, le lemme de zéros, énoncé dans le paragraphe 2.1, améliore les résultats de P. Philippon mais est moins général que ce dernier puisqu'il n'englobe pas le cas des groupes algébriques.

Notons qu'il n'a pas été possible, jusqu'à présent, de généraliser le lemme de zéros de Y. Nesterenko, à une dimension supérieure dans le cadre de la méthode de Schneider classique et à aucune dimension $n \geq 2$ pour celle avec dérivation.

Remarque. Nous nous sommes contentés ici de donner les minorations pour le cas rationnel et homogène mais ces résultats restent valables dans un cadre plus général, avec cependant des modifications sur la définition de $\log B$, qui doit de plus être un majorant de $D \log A_i$, $i = 1, \ldots, n$. L'ordre de grandeur des constantes est quant à lui plus élevé dans le cas général.

0.3 Les différentes méthodes

Après l'aperçu historique, proposé au paragraphe 0.1, nous donnons à présent un schéma succint des différentes méthodes précédemment citées. Nous rappelons la notation

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} b_i \log \alpha_i,$$

où pour tout $i = 1, \ldots, n$ les nombres b_i désignent des entiers et les α_i sont algébriques.

Pour commencer nous donnons la méthode originelle de Baker, avant l'utilisation des déterminants d'interpolation et dans le cas $n = 2$. Elle fait intervenir des systèmes d'équations de la forme

$$\sum_{t=0}^{T} \sum_{r=0}^{R} \sum_{s=0}^{S} p_{t,r,s} \frac{t!}{(t-k_0)!} l^{t-k_0} (rb_2 + sb_1)^{k_1} \alpha_1^{rl} \alpha_2^{sl} = 0, \tag{0.1}$$
$$0 \leq k_0 \leq K, \quad 0 \leq k_1 \leq K \quad 0 \leq l \leq L,$$

avec des coefficients $p_{t,r,s} \in \mathbb{C}$. On interprète alors le membre de gauche de (0.1) en disant que, quand $|\Lambda|$ est petit, il est proche de la dérivée d'ordre (k_0, k_1) de la fonction de 2 variables :

$$\sum_{t=0}^{T} \sum_{r=0}^{R} \sum_{s=0}^{S} p_{t,r,s} z_0^t e^{(rb_2+sb_1)z_1} \tag{0.2}$$

évaluée au point $(l, l \log \alpha_1)$. La première étape est la construction des nombres rationnels $p_{t,r,s}$, non tous nuls, tels que, pour des valeurs des paramètres T, R, S, K et L, les valeurs de toutes les dérivées en tous les points considérés soient petites. On utilise alors un principe d'extrapolation, dû à A. Baker, pour montrer que les équations (0.1) restent vraies pour des valeurs de L plus grandes, avec une légère perte sur T. Un lemme de zéros avec multiplicité montre alors que le système (0.1) n'a pas de solution non triviale $p_{t,r,s}$, sous certaines conditions liant les paramètres T, R, S, K et L. De manière plus précise, l'extrapolation de A. Baker, qui constitue un des points essentiels de la démonstration pour cette méthode et apporte de plus une nouveauté par rapport à celle de A.O. Gel'fond, est d'exploiter le fait que les points de $\mathbb{C}^n$, en lesquels on regarde la dérivation des fonctions ci-dessus, sont tous situés sur une même droite complexe. On peut donc utiliser une formule d'extrapolation, valable pour les fonctions complexes d'une seule variable, la démonstration comportant une récurrence qui permet d'augmenter progressivement le nombre de zéros d'une fonction auxiliaire, préalablement construite à partir des fonctions (0.2). On obtient ainsi un exposant de 1 au terme $\log B$ dans la minoration de $|\Lambda|$. Remarquons cependant que, si l'on effectue brutalement les estimations, on trouve un terme $\log B \log\log B$ là où on attend $\log B$. Pour obtenir le résultat souhaité on utilise des polynômes de Feldman.

Nous ne sommes pas du tout entrés dans les détails techniques de la démonstration, le lecteur pouvant consulter pour cela [1]. En ce qui concerne les récents travaux de E.M. Matveev ou Y.V. Nesterenko sur la méthode de Baker, nous renvoyons aux articles [13], [14] et [21].

Intéressons-nous maintenant aux deux méthodes de Schneider, classique et avec dérivation. On peut dire que, d'une certaine manière, ces deux méthodes sont les duales de celles de Gel'fond et de Baker. En effet, si l'on considère, par exemple, la démonstration du résultat provenant de la méthode avec dérivations et avant l'utilisation des déterminants d'interpolation, elle s'appuie sur des systèmes d'équations similaires à (0.1) mais à une transposition près (Cf [28],[29] et [30]). Avec les déterminants d'interpolation, la dualité entre les méthodes est encore plus simple à exprimer. En effet dans ce cas on considère une matrice rectangulaire de taille $N \times N'$ dans une méthode et sa transposée dans l'autre.

Passons à présent à la description des méthodes et supposons pour la suite de ce paragraphe que $N' \geq N$. Pour la méthode de Schneider classique, dans le cas $n = 2$, on considère une matrice, que l'on notera M, de taille $N \times N'$ dont les coefficients sont

$$(r_j b_2 + s_j b_1)^{k_i} \alpha_1^{l r_j} \alpha_2^{l s_j}, \quad 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq N'$$

où

$$0 \leq s_j \leq S,\ 0 \leq r_j \leq R, \quad 1 \leq j \leq N'$$

$$0 \leq k_i \leq K,\ 0 \leq l_i \leq L, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Dans le cas de la méthode de Schneider avec dérivation on introduit l'opérateur différentiel

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial}{\partial X_0} + Y \frac{\partial}{\partial Y}.$$

On notera φ_i, $i = 1, \ldots, N$, la fonction polynomiale

$$\varphi_i(X_0, X_1, Y) = X_0^{k_{0,i}} X_1^{k_{1,i}} Y^{l_i}.$$

La matrice M considérée dans ce cas sera, toujours pour $n = 2$,

$$\mathfrak{D}^{t_j}\varphi_i(0, r_j b_2 + s_j b_1, \alpha_1^{r_j}\alpha_2^{s_j}) = \binom{t}{k_{0,i}} l^{t-k_{0,i}}(r_j b_2 + s_j b_1)^{k_{1,i}}\alpha_1^{lr_j}\alpha_2^{ls_j}, \quad {\scriptstyle 1\leq i\leq N,\, 1\leq j\leq N'} \tag{0.3}$$

où

$$0 \leq s_j \leq S,\ 0 \leq r_j \leq R,\ 0 \leq t_j \leq T \quad 1 \leq j \leq N'$$
$$k_{0,i}, k_{1,i} \geq 0,\ 0 \leq k_{0,i} + k_{1,i} \leq K,\ 0 \leq l_i \leq L, \quad 1 \leq i \leq N.$$

On constate que les termes apparaissant dans (0.1) sont les mêmes que les expressions (0.3), à un terme $1/k_{0,i}!$ près.

Le lemme de zéros est cette fois-ci utilisé pour garantir la maximalité du rang de la matrice M considérée, sous certaines conditions liant les paramètres K, L, R, S et T. Remarquons que l'on a , pour le cas de la méthode de Schneider avec dérivation et $n = 2$, $N = \frac{(K+1)(K+2)(L+1)}{2}$ et $N' = (R+1)(S+1)(T+1)$. Un lemme de zéros optimal dans ce cas-là serait d'obtenir la maximalité du rang de M sous la seule condition $N = N'$, donc que M soit une matrice carrée. On dira donc que plus les conditions d'un lemme de zéros permettent d'obtenir une matrice M proche d'une matrice carrée, meilleur est ce lemme de zéros. Pour la suite de la démonstration, on considère alors un mineur Δ de la matrice M, qui est non nul et de taille maximale $N \times N$, son existence étant assurée par le lemme de zéros. On minore alors $|\Delta|$, en utilisant une inégalité de Liouville, puis on majore ce même $|\Delta|$ grâce à un lemme de Schwarz. Cette dernière majoration, contrairement à la minoration précédente, dépend du terme $|\Lambda|$. On obtient alors une contradiction dans l'encadrement de $|\Delta|$ pour une valeur de $|\Lambda|$ suffisamment petite. La valeur de $|\Lambda|$ ne peut donc être inférieure à une certaine borne, ce qui nous donne une minoration de $|\Lambda|$. Remarquons que, tout comme dans le cas de la méthode de Baker, une estimation brutale dans la méthode de Schneider avec dérivation, fournit un $\log B \log\log B$ en lieu et place du $\log B$ attendu. Il faut donc ici aussi recourir aux polynômes de Feldman. Pour plus de détails on pourra aller consulter les articles [8] et [9] pour la méthode dite classique et le paragraphe 4 de la présente thèse pour celle avec dérivation.

0.4 Applications

De nombreuses applications des formes linéaires de logarithmes existent qui le plus fréquemment concernent le cas rationnel, à savoir

$$\Lambda = b_1 \log \alpha_1 + \cdots + b_n \log \alpha_n,$$

où les b_i, $i = 1, \ldots, n$, sont entiers. Remarquons cependant que la résolution du nombre de classe 1, a été faite en utilisant le cas plus général, avec des β_i algébriques; $n = 2$ étant suffisant.

Par exemple les travaux de A. Baker ont permis de raffiner, de manière effective, l'inégalité de Liouville ci-dessous.

Théorème 0.2 (Liouville). *Soit α un nombre algébrique de degré d. Alors il existe une constante $C(\alpha) > 0$, explicitement calculable, telle que, pour tout nombre rationnel p/q avec $p/q \neq \alpha$ et $q > 0$, on ait la minoration*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C(\alpha)}{q^d}.$$

Utilisant l'inégalité (1) on démontre :

Lemme 0.3. *Pour tout nombre algébrique α de degré $d \geq 3$, il existe deux constantes positives $c(\alpha)$ et $\eta(\alpha)$, effectivement calculables, telles que, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, avec $p/q \neq \alpha$ et $q > 0$,*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C(\alpha)}{q^{d-\eta(\alpha)}}.$$

Une autre application est la résolution ou l'encadrement de solutions d'équations diophantiennes. Par exemple l'utilisation de formes linéaires en deux et trois logarithmes a permis d'encadrer les solutions de l'équation de Catalan :

$$y^p - x^q = 1,$$

(voir [15]). Remarquons que cette équation a par la suite été résolue grâce à la contribution de P. Mihăilescu [16], [20], [4]. D'autre équations peuvent être résolues à partir des formes linéaires de logarithmes comme par exemple les équations de Thue. Pour avoir un éventail large des diverses applications nous invitons le lecteur à consulter l'ouvrage de T.N. Shorey et R. Tijdeman [26], ainsi que l'article [27].

Descriptif de la thèse

Cette thèse fournit des minorations explicites de formes linéaires en deux logarithmes pour le cas rationnel. Les minorations données, pour une forme linéaire $\Lambda = b_1 \log \alpha_1 - b_2 \log \alpha_2$, sont de la forme :

$$\log |\Lambda| \geq -CD^4 \max\{\frac{1}{D}, \log D, 1\} \log A_1 \log A_2 \log B,$$

où C est une constante positive et où, à quelques contraintes secondaires près, $D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{Q}]/[\mathbb{R}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{R}]$, $\log B = \log \left(\frac{b_1}{\log A_2} + \frac{b_2}{\log A_1} \right)$ et $\log A_1$, $\log A_2$ sont respectivement des majorants des hauteurs logarithmiques de α_1 et α_2, notées $h(\alpha_1)$ et $h(\alpha_2)$. La méthode employée pour aboutir à ces résultats est celle de Schneider avec dérivations, comme cela est le cas dans le chapitre 9 de [31]. Comparés aux résultats issus de cette méthode ou de celle de Baker, les énoncés contenus dans cette thèse améliorent tous les précédents, à une condition mineure sur D près. Ces améliorations proviennent essentiellement de deux points. Premièrement le raffinement de certaines estimations et deuxièmement l'utilisation d'un meilleur lemme de zéros que ceux précédemment utilisés dans ce cadre.

Le plan de la thèse est le suivant.

Première partie. Nous y énonçons notre résultat principal, ainsi que des corollaires donnant explicitement des minorations de formes linéaires en deux logarithmes. Nous effectuons ensuite quelques comparaisons numériques entre ces corollaires et des résultats déjà existant.

Deuxième partie. Cette partie est consacrée au lemme de zéros utilisé lors de la preuve du théorème principal. Nous énonçons celui-ci, puis, après avoir rappelé un certain nombre de notions utiles pour la preuve, nous en donnons une démonstration. Rappelons qu'il s'agit du lemme de zéros de [7] que l'on a légèrement raffiné. Sa démonstration reprend la méthode originelle de D.W. Masser, [10], qui est une construction pas à pas des sous-groupes obstructeurs. Nous y incorporons la notion de bidegrés, comme cela est fait dans [22] ou [23], et obtenons, grâce à une méthode d'élimination, un résultat améliorant celui de [23]. Le gain est essentiellement dû à une étude plus précise des contraintes. Contrairement à [23], qui pour chaque étape énonce la même condition à vérifier, nous différencions les conditions suivant les étapes. La condition principale reste la même mais les autres peuvent être, dans notre cas, considérées comme secondaires, voir négligeables pour certaines.

Troisième partie. Nous y donnons un certain nombre de lemmes techniques qui sont directement liés à la méthode que nous utilisons pour démontrer notre résultat principal. Pour être plus précis ces lemmes se rapportent aux polynômes de Feldman liés aux dérivations. Ces lemmes améliorent ceux énoncés dans [31]. Ces améliorations sont dues à l'adaptation, pour la méthode de Schneider avec dérivation, de certaines astuces contenues dans [9], où était utilisée la méthode de Schneider classique. Plus précisément nous nous plaçons dans toute notre démonstration sur l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[X_0, X_1, Y]$ ce qui entraîne que tous les exposants considérés soient positifs. Ceci n'est pas le cas dans [31], où l'on se place sur l'anneau $\mathbb{C}[X_0, X_1, Y, Y^{-1}]$. Remarquons que le fait de se placer sur $\mathbb{C}[X_0, X_1, Y]$ engendre certaines difficultés dans les démonstrations du lemme de zéros et dans divers lemmes techniques mais en aucun cas, ne fait perdre sur la qualité des estimations.

Quatrième partie. Dans cette partie nous démontrons le théorème principal à proprement parler. Nous donnons préalablement un schéma assez succint de la preuve, puis nous en détaillons chaque étape. C'est, avec la deuxième , la partie la plus importante de la thèse. Nous combinons dans cette partie les approches de [9] et [31] pour ce qui concerne l'encadrement des valeurs absolues des mineurs de la matrice considérée. Nous y faisons une étude fine, notamment dans les majorations de déterminants où l'on s'est efforcé de faire des estimations globales et non pas terme à terme, ce qui permet un certain gain dans les exposants. Par exemple nous remplaçons un exposant K par un exposant $\frac{K}{3}$ dans les Lemmes 4.3 et 4.5, si l'on compare avec [31]. Un autre point important est une étude détaillée pour le choix du paramètre V, intervenant dans le résultat principal, qui permet une nette amélioration des valeurs numériques dans les énoncés des corollaires.

Cinquième partie. Elle est consacrée à la démonstration des corollaires. Pour cela on spécifie les paramètres du théorème principal, puis l'on vérifie les hypothèses de celui-ci pour pouvoir l'appliquer. Lors de ces calculs nous nous sommes efforcés d'analyser très précisément les contraintes numériques reliant les paramètres du Théorème 1.1.

Annexe. Elle contient des lemmes techniques de moindre importance ou déjà existant et n'ayant pas été modifiés.

1 Énoncés des résultats

Dans tout ce chapitre nous nous plaçons dans un cadre archimédien : les nombres algébriques considérés sont toujours vus comme des éléments du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Soient α_1, α_2 deux nombres algébriques complexes non nuls, et soient $\log\alpha_1$ et $\log\alpha_2$ des déterminations quelconques de leurs logarithmes.

On se propose de minorer le module de la forme linéaire

$$\Lambda = b_1\log\alpha_1 - b_2\log\alpha_2,$$

où b_1 et b_2 sont des entiers relatifs non nuls. Posons pour cela

$$D = [\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2):\mathbb{Q}]/[\mathbb{R}(\alpha_1,\alpha_2):\mathbb{R}].$$

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1.1. *Soient K et L des entiers ≥ 1, T_1, T_2, T_3 , R_1, R_2, R_3, S_1, S_2 et S_3 des entiers ≥ 0. Soit E un réel $\geq e$. Posons*

$$N = \frac{(K+1)(K+2)}{2}(L+1), \quad B = \frac{R|b_2| + S|b_1|}{2K}$$

et désignons par g, ω, ω_0 des nombres vérifiant les minorations :

$$g \geq \frac{1}{4} - \frac{N}{12(R+1)(S+1)(T+1)}, \quad \omega \geq 1 - \frac{N}{2(R+1)(S+1)(T+1)},$$

$$\omega_0 \geq \frac{2(R+1)(S+1)(T+1)}{N}.$$

Soient a_1, a_2 des réels > 0 tels que

$$a_i \geq E|\log\alpha_i| - \log|\alpha_i| + 2Dh(\alpha_i), \quad i = 1, 2.$$

On notera

$$R = R_1 + R_2 + R_3,$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Si les nombres R_i, S_i et T_i, ($i = 1, 2, 3$), vérifient les inégalités

$$
\begin{aligned}
& T_1 \geq K, \\
& \mathrm{Card}\{rb_2 + sb_1; 0 \leq r \leq R_1, 0 \leq s \leq S_1\} \geq K + 1, \\
& (T_1 + 1)\mathrm{Card}\{\alpha_1^r \alpha_2^s; 0 \leq r \leq R_1, 0 \leq s \leq S_1\} \geq L + 1, \\
& (T_2 + 1)\mathrm{Card}\{\alpha_1^r \alpha_2^s; 0 \leq r \leq R_2, 0 \leq s \leq S_2\} \geq 2KL + 1, \\
& (T_2 + 1)\mathrm{Card}\{rb_2 + sb_1; 0 \leq r \leq R_2, 0 \leq s \leq S_2\} \geq K^2 + 1, \\
& (T_3 + 1)\mathrm{Card}\{(rb_2 + sb_1, \alpha_1^r \alpha_2^s); 0 \leq r \leq R_3, 0 \leq s \leq S_3\} \geq 3K^2 L + 1.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Si de plus

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{2} \quad > \quad & D\left[\log(\frac{N}{2}) + \frac{K}{3}\log\left(\frac{Rb_2 + Sb_1}{2K}\right) + \frac{1454K}{927} + \frac{K}{3}\log\left(\frac{T}{KL}\right) + 1\right. \\
& \left. +(\omega T + \omega_0)\log\left(\frac{107(K+3)L}{309\omega T}\right) + 2\omega T + \omega_0\right] \\
& +T\log E + \frac{K}{3}\log E + \log 2 + g\frac{L+1}{2}((R+1)a_1 + (S+1)a_2),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

où

$$
V = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{L+1} + \sqrt{1 - \frac{2}{L+1}}\right)(K+2)(L+1)\log E.
$$

Alors nous avons

$$
|\Lambda'| \geq e^{-V}, \quad avec \quad \Lambda' = \Lambda \cdot \max\left\{\frac{LSe^{LS|\Lambda|/(2b_2)}}{2b_2}, \frac{LRe^{LR|\Lambda|/(2b_1)}}{2b_1}\right\}.
$$

Nous donnons maintenant trois corollaires de ce résultat dans le cas où α_1 et α_2 sont multiplicativement indépendants. Pour simplifier leurs énoncés nous posons

$$
b = \frac{b_1}{D\log A_2} + \frac{b_2}{D\log A_1},
$$

où A_1, A_2 désignent des réels > 1 tels que

$$
\log A_i \geq \max\left\{h(\alpha_i), \frac{|\log \alpha_i|}{D}, \frac{1}{D}\right\}, \quad (i = 1, 2).
$$

Corollaire 1.2. *Supposons que α_1 et α_2 soient multiplicativement indépendants. Alors*

$$\log|\Lambda| \geq -9400 \left(3.317 + \frac{1.888}{D} + 0.946 \log D\right) D^4 h \log A_1 \log A_2,$$

avec

$$h = \max\left\{\log b + 3.1, \frac{1000}{D}, 498 + \frac{284}{D} + 142 \log D\right\}.$$

Corollaire 1.3. *Supposons de plus que α_1 et α_2 soient réels et positifs. Alors*

$$\log|\Lambda| \geq -7200 \left(3.409 + \frac{1.705}{D} + 0.946 \log D\right) D^4 h \log A_1 \log A_2,$$

avec

$$h = \max\left\{\log b + 3.1, \frac{1000}{D}, 512 + \frac{256}{D} + 142 \log D\right\}.$$

Corollaire 1.4. *Supposons que les déterminations choisies de $\log \alpha_1$ et $\log \alpha_2$ soient réelles, positives et linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Posons*

$$E = 1 + \min\left\{\frac{D \log A_1}{\log \alpha_1}, \frac{D \log A_2}{\log \alpha_2}\right\} \geq 2,$$

$$\log E^* = \max\left\{\frac{\log E}{D}, \frac{\log E}{D} + 0.946 \log \frac{D}{\log \log E} + 3.965\right\},$$

$$h = \max\left\{\log b + \log(E) - \log\log(E) - 2.27, \frac{265 \log(E)}{D}, 150 \log E^*\right\}.$$

Supposons de plus que $E \leq \min\{A_1^{D/2}, A_2^{D/3}\}$, alors

$$\log|\Lambda| \geq -8550 D^4 h \log A_1 \log A_2 \log(E^*)(\log E)^{-3}.$$

Le choix de la constante 1000 ci-dessus, qui intervient dans la définition de h des corollaires 1.2 et 1.3, est arbitraire et donne naissance aux autres constantes numériques intervenant dans ces corollaires. Il en est de même pour la constante 265 intervenant dans la définition de h dans le Corollaire 1.4. On notera que les constantes multiplicatives sont décroissantes en fonction de b . Asymptotiquement (c'est à dire lorsque b tend vers l'infini) ces constantes multiplicatives sont respectivement de l'ordre de 8800, 6800 et de 8450 pour les corollaires 1.2, 1.3 et 1.4. Nous pouvons directement mettre en parallèle les deux premiers corollaires avec les corollaires 1 et 2 de [9] dont les coefficients sont asymptotiquement de l'ordre de 20 et de 15 respectivement. On constate donc qu'il est plus intéressant d'utiliser les minorations explicitées ci-dessus lorsque :

$$\log b \geq 3500 \max\left\{1, \frac{1}{D}, \log D\right\},$$

la valeur 3500, dépendant de D, étant assez grossière. Le Corollaire 1.4 peut quant à lui être comparé au Corollaire 3 du même article [9], avec cette fois une minoration plus intéressante de notre énoncé lorsque :

$$\log b \geq 3200 \log E^*.$$

Nous pouvons aussi comparer ces résultats aux travaux de E.M. Matveev. Plus précisément le Corollaire 2.3 de [12], pris pour $n = 2$, fournit une minoration de $|\Lambda|$ avec un facteur multiplicatif plus élevé que notre Corollaire 1.2.

2 Un Lemme de zéros

Un point important de la démonstration est l'utilisation d'un lemme de zéros le meilleur possible. En effet un tel lemme permet une amélioration substantielle des résultats comme cela a été fait dans [9]. Cependant il n'existe pas actuellement , pour la méthode utilisée dans cette thèse, de lemme de zéros du type de celui utilisé dans l'article cité ci-dessus.

Nous énonçons ici le lemme de zéros de [7], en raffinant la condition (2) : on remplace dans celle-ci le terme $\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{W\times\{\mu\}}\right)$ par $\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{W\times\{1\}}\right)$. La démonstration reprend la méthode originelle de Masser utilisée dans [10], qui permet d'écrire une condition particulière à chaque étape, contrairement à la méthode utilisée, par exemple par P. Philippon dans [23], où la condition est globale et doit donc recouvrir le pire des cas de toutes les étapes. On remarque cependant que notre Lemme 2.1 est moins général puisqu'il ne recouvre pas les sous-groupes algébriques. Son énoncé est rédigé de façon à être facilement applicable à nos besoins lors de la démonstration du Théorème 1.1.

2.1 Énoncé du lemme de zéros

On se place dans le groupe produit $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$, où $\mathbb{C}^m$ est le groupe additif et $\mathbb{C}^\times$ désigne le groupe multiplicatif des éléments non nuls de $\mathbb{C}$. La loi de groupe dans $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$sera notée additivement par le symbole $+$. Pour tout élément w dans $\mathbb{C}^\times$ et tout $v_0, \ldots, v_{m-1}$ dans $\mathbb{C}$ on notera en abrégé $(\underline{v}, w) = (v_0, \ldots, v_{m-1}, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$. Soit $\mathfrak{D} = \frac{\partial}{\partial X_0} + Y\frac{\partial}{\partial Y}$ la dérivation agissant sur l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[\underline{X}, Y]$. On dira qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[\underline{X}, Y]$ s'annule à un ordre $> T$ sur un ensemble Σ si pour tout t compris entre 0 et T, $\mathfrak{D}^t P$ s'annule sur Σ.

Théorème 2.1. *Soient K, L, m des entiers ≥ 1 ; $T_1, \ldots, T_{m+1}$ des entiers ≥ 0, et $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{m+1}$ des ensembles finis de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$ non vides. Supposons les conditions suivantes réalisées.*
(1) Pour tout $j = 1, \ldots, m$, et tout sous-espace vectoriel W de $\mathbb{C}^m$ de dimension $\leq m-j$, on a

$$\binom{T_j+1}{\varepsilon_j} \mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{W \times \mathbb{C}^\times}\right) > K^j, \quad \text{où } \varepsilon_j = \begin{cases} 1 \text{ si } (1,0,\ldots,0) \notin W \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

(2) Pour tout $j = 1, \ldots, m+1$, et tout sous-espace vectoriel W de $\mathbb{C}^m$ de dimension $\leq m+1-j$, on a

$$(T_j+1)\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{W\times\{1\}}\right) > jK^{j-1}L.$$

Alors tout polynôme $P \in \mathbb{C}[\underline{X}, Y]$, de degré total en $\underline{X}$ inférieur ou égal à K et de degré en Y inférieur ou égal à L, s'annulant sur $\Sigma_1 + \cdots + \Sigma_{m+1}$ à un ordre $> T_1 + \cdots + T_{m+1}$, pour la dérivation $\mathfrak{D}$, est identiquement nul.

2.2 Définitions et lemmes

Pour démontrer le résultat précédent, il est nécessaire de définir certaines notions classiques et de donner quelques lemmes.

Soit V un sous-ensemble algébrique non vide de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$, on notera

$$I(V) = \{Q \in \mathbb{C}[\underline{X}, Y] | Q \equiv 0 \text{ sur V}\}$$

l'idéal des polynômes s'annulant sur V.

On notera H_V, ou H s'il n'y a pas d'ambiguïté, le stabilisateur de V qui est défini comme l'ensemble des points τ, appartenant à $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$, tels que $V_\tau = V$, où $V_\tau = V + \tau$ désigne le translaté de V par τ.

Un cycle effectif de dimension $d \geq 0$ dans $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$ désigne une combinaison linéaire formelle

$$Z = m_1 V_1 + \cdots + m_s V_s$$

à coefficients entiers $m_1, \ldots, m_s \geq 1$ de sous-variétés irréductibles $V_1, \ldots, V_s$ de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$ de même dimension d. Les sous-variétés $V_1, \ldots, V_s$ sont appelées les composantes de Z.

Soient Z et Z' deux cycles dont les composantes s'intersectent proprement deux à deux, on notera $Z.Z'$ le cycle intersection. Rappelons que l'opération d'intersection $Z.Z'$ est bilinéaire en chacune des composantes Z et Z', et que lorsque les variétés irréductibles V et V' de dimension respective d et d', avec d et $d' \geq 1$, s'intersectent proprement

$$V \cdot V' = \sum_W \mu_W W$$

est le cycle effectif de dimension $d + d' - m - 1$, où W décrit l'ensemble des composantes de l'intersection ensembliste $V \cap V'$ et où l'on a noté μ_W la multiplicité d'intersection de V et V' en la composante W.

Soit P un polynôme appartenant à $\mathbb{C}[\underline{X}, Y]$. Pour tout $\tau = (\underline{a}, b)$ appartenant à $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$, on notera $P_\tau =: P(\underline{x} + \underline{a}, by)$ le translaté par τ du polynôme P. Si de plus P n'est pas de la forme cY^k, avec c dans $\mathbb{C}$ et $k \geq 0$, on notera $Z(P)$ le cycle de codimension 1 associé dans $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$ aux zéros de P.

On plongera naturellement $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$ dans $\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Soit alors V une sous-variété non vide de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$ et de codimension r. On définit les bidegrés par :

$$\delta_{r,0}(V) = \mathrm{Card}\left\{\overline{V} \cap (L_r \times \{\xi\})\right\},$$

$$\delta_{r-1,1}(V) = \mathrm{Card}\left\{\overline{V} \cap (L_{r-1} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))\right\},$$

où $\overline{V}$ désigne l'adhérence de V dans $\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, L_r et L_{r-1} sont des variétés linéaires génériques de dimensions respectives r et $r-1$, dans $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, et ξ est le point générique de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. De plus par convention on posera $\delta_{a,b}(V) = 0$ pour tout autre couple d'entiers (a, b).

Pour un cycle $Z = m_1V_1 + \cdots + m_sV_s$ donné, on définit ses bidegrés par linéarité

$$\delta_{a,b}(Z) = \sum_{i=1}^{s} m_i \delta_{a,b}(V_i).$$

Lemme 2.2. *Soit V une sous-variété algébrique irréductible de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$ et soit P un polynôme de $\mathbb{C}[\underline{X}, Y]$ de degré total en $\underline{X}$ majoré par k et de degré en Y majoré par l. On suppose que P n'appartient pas à $I(V)$ et que $V \cap Z(P)$ est non vide. Alors pour tout couple d'entiers (a, b), on a*

$$\delta_{(a,b)}(V.Z(P)) \leq k\delta_{(a-1,b)}(V) + l\delta_{(a,b-1)}(V).$$

Preuve. On notera $\overline{Q}$ le polynôme bihomogénéisé, par rapport à $\underline{X}$ et Y, d'un polynôme Q de $\mathbb{C}[\underline{X}, Y]$. On notera pour tout idéal I de $\mathbb{C}[\underline{X}, Y]$, $\overline{I}$ l'ensemble des polynômes bihomogènes $\overline{P}$, avec P dans I. L'idéal $I(V)$ étant premier et le polynôme P n'appartenant pas à $I(V)$, il s'ensuit que l'idéal $I(\overline{V})$, qui est engendré par $\overline{I(V)}$, est premier et que $\overline{P}$ n'appartient pas à $I(\overline{V})$. Alors d'après le Théorème de Bezout bihomogène, voir par exemple le Lemme 2.11 de [24], on a pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ l'égalité suivante

$$\delta_{(a,b)}(\overline{V} \cdot Z(\overline{P})) = k\delta_{(a-1,b)}(\overline{V}) + l\delta_{(a,b-1)}(\overline{V}).$$

Comme $\overline{P} \notin I(\overline{V})$, les variétés $\overline{V}$ et $Z(\overline{P})$ s'intersectent proprement et nous avons

$$\overline{V} \cdot Z(\overline{P}) = \sum_{\overline{Z}} \mu_{\overline{Z}} \overline{Z},$$

où les $\overline{Z}$ appartiennent à l'intersection ensembliste $\overline{V} \cap Z(\overline{P})$. On a aussi, puisque $P \notin I(V)$,

$$V \cdot Z(P) = \sum_{Z'} \mu_{Z'} Z',$$

où Z' décrit les composantes de l'intersection ensembliste $V \cap Z(P)$.

On remarque alors l'inclusion ensembliste

$$\overline{V \cap Z(P)} \subseteq \overline{V} \cap Z(\overline{P}).$$

De plus si Z est une composante de $V.Z(P)$ alors $\overline{Z}$ est une composante de $\overline{V} \cdot Z(\overline{P})$ de même multiplicité. On a donc pour tout couple d'entiers (a, b)

$$\delta_{(a,b)}(V \cdot Z(P)) \leq \delta_{(a,b)}(\overline{V} \cdot Z(\overline{P})) = k\delta_{a-1,b}(V) + l\delta_{a,b-1}(V).$$

$\square$

Le lemme suivant est le Lemme 4 de [11] énoncé sous une forme plus adéquate à l'utilisation que nous allons en faire.

Lemme 2.3. *Soient $P_1, \ldots, P_n$ des éléments de $\mathbb{C}[\underline{X}, Y]$, formant une suite régulière dans $\mathbb{C}[\underline{X}, Y, Y^{-1}]$. Soit $Z = Z(P_1) \cdot \cdots \cdot Z(P_n)$ le cycle intersection. Soient V une composante irréductible de Z et H_V son stabilisateur, et soit Σ un ensemble non vide de points de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$ sur lequel les P_i s'annulent. Supposons que $\mathfrak{D}^t((P_i)_\tau) = (\mathfrak{D}^t(P_i))_\tau$ appartienne à $I(V)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, tout $t = 0, \ldots, T$ et tout τ dans Σ. Alors, si $\mathfrak{D}$ ne laisse pas invariant $I(V)$, la composante V est de multiplicité au moins $T + 1$ dans Z. De plus pour tout couple (a, b) d'entiers on a*

$$\delta_{(a,b)}(Z) \geq (T + 1) \operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma}{H_V}\right) \delta_{(a,b)}(V).$$

Preuve. La démonstration de ce lemme suit le même schéma que celle du lemme 4 de [11]. Remarquons tout d'abord que, puisque V est irréductible, l'idéal $I(V)$ est premier. On notera J l'idéal engendré par les polynômes P_i pour $i = 1, \ldots, n$. Pour $t = 0$ on a $P_i \in I(V)$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. Il s'ensuit donc que $J \subseteq I(V)$ et donc que $I(V)$ est un idéal premier associé à l'idéal J. Notons $\mathcal{I}$ la composante $I(V)$-primaire de J dans la décomposition de Lasker-Noether. Rappelons que $\mathcal{I}$ est uniquement défini car J est une intersection complète. On définira son exposant e comme étant le plus petit entier positif tel que $(I(V))^e \subseteq \mathcal{I}$. Soit P un polynôme appartenant à $I(V)$ tel que $\mathfrak{D}P$ n'appartienne pas à $I(V)$. Si $\mathcal{I}$ est la seule composante primaire de J on pose $Q = 1$. Dans le cas contraire on définit Q comme suit. Pour chaque composante primaire $\mathcal{I}' \neq \mathcal{I}$ de J, dont l'idéal premier associé est noté I', on a I' différent de $I(V)$. De plus, comme l'idéal J est une intersection complète, tous les idéaux premiers, associés à ses composantes primaires, ont le même rang, on a donc $I' \nsubseteq I(V)$. Pour chaque idéal I', il existe donc un polynôme $P_{I'} \in I'$ tel que $P_{I'} \notin I(V)$. Si e' désigne l'exposant de I', (i.e. $I'^{e'} \subseteq \mathcal{I}'$), le polynôme $(P_{I'})^{e'}$ est alors dans $\mathcal{I}'$ mais pas dans $I(V)$. On pose $Q = \prod_{I' \neq I(V)} (P_{I'})^{e'}$. Dans les deux cas le polynôme $P^e Q$ est dans J mais Q n'appartient pas à $I(V)$. En dérivant e fois ce polynôme on obtient

$$\mathfrak{D}^e(P^e Q) = e!(\mathfrak{D}(P))^e Q \qquad \mod (I(V)).$$

En effet si $k < e$ le polynôme P, appartenant à $I(V)$, est facteur de $\mathfrak{D}^k(P^e)$. De plus le polynôme $\mathfrak{D}(P)$ n'appartient pas à $I(V)$, donc $\mathfrak{D}^e(P^e Q)$ n'appartient pas à $I(V)$. Le polynôme $P^e Q$ appartenant à l'idéal J, l'exposant e ne peut être inférieur ou égal à T, donc $e \geq T+1$. Pour finir, d'après le lemme 1 de [5], on sait que la longueur est supérieure ou égale à l'exposant, or dans le cas présent la longueur est égale à la multiplicité. On obtient donc le résultat voulu. $\square$

Lemme 2.4. *Soit V un sous-ensemble algébrique non vide de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$. Supposons que la dérivation $\mathfrak{D}$ laisse invariant l'idéal $I(V)$, alors le stabilisateur de V est de la forme $H_V = W \times \mathbb{C}^\times$, où W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^m$ contenant le point* $(1, 0, \ldots, 0)$.

Preuve. Pour démontrer ce lemme il suffit de montrer que l'idéal $I(V)$ est engendré par des polynômes de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{m-1}]$. Soient $P \in I(V)$ et $(\underline{x}, y) \in V$. On considère la fonction f de la variable complexe z, définie par

$$f(z) = P(x_0 + z, x_1, \ldots, x_{m-1}, ye^z)$$

Pour tout $t \geq 0$, on a la formule

$$f^{(t)}(z) = \mathfrak{D}^t P(x_0 + z, x_1, \ldots, x_{m-1}, ye^z).$$

Par itération, comme l'idéal $I(V)$ est invariant par $\mathfrak{D}$, on a donc $\mathfrak{D}^t P \in I(V)$ pour tout $t \geq 0$. Alors comme $(\underline{x}, y) \in V$, on a $f^{(t)}(z) = \mathfrak{D}^t P(\underline{x}, y) = 0$ pour tout $t \geq 0$. La fonction f est donc identiquement nulle. On sait de plus que les fonctions z et e^z sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$. En écrivant alors $\mathbb{C}[\underline{X}, Y] = \mathbb{C}[X_0, Y][X_1, \ldots, X_{m-1}]$, il s'ensuit que les coefficients $P_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{m-1}]$ des monômes $X_0^\alpha Y^\beta$ dans P s'annulent tous au point $(x_1, \ldots, x_{m-1})$. Ceci étant vrai pour tout point $(\underline{x}, y) \in V$, il s'ensuit que tous les polynômes $P_{\alpha,\beta}$ appartiennent à $I(V)$. Par conséquent on a $H_V = W \times \mathbb{C}^\times$ avec W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^m$ contenant le point $(1, 0, \ldots, 0)$. $\square$

Lemme 2.5. *Soit V une variété non vide de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$, de codimension r.*
Si $H_V = W \times \mathbb{C}^\times$, alors $\delta_{r,0}(V) \geq 1$.
Si $H_V = W \times \mu$, où $\mu \subseteq \mathbb{C}^\times$ est fini, alors $\delta_{r-1,1}(V) \geq \mathrm{Card}\,(\mu)$.

Preuve. Si $H_V = W \times \mathbb{C}^\times$, on a $\overline{V} = \overline{V_1} \times \mathbb{P}^1$ et $\delta_{r,0}(V) = \mathrm{Card}\,(\overline{V_1} \cap L_r)$. Or $\dim(\overline{V_1}) = m - r$, donc $\dim(L_r) + \dim(\overline{V_1}) = m = \dim \mathbb{P}^m$. Il s'ensuit que $\delta_{r,0}(V)$ est égal au degré de la sous-variété projective $\overline{V_1}$. Donc $\delta_{r,0}(V) \geq 1$.

Si $H_V = W \times \mu$, alors $\delta_{r-1,1}(V) = \mathrm{Card}\,(\overline{V} \cap (L_{r-1} \times \mathbb{P}^1)$. Alors, si l'on note $\tilde{V}$ la projection de $\overline{V}$ sur $\mathbb{P}^m$, on a $\dim(\tilde{V}) = \dim(\overline{V})$ et on en déduit $\dim(L_{r-1}) + \dim(\tilde{V}) = m = \dim \mathbb{P}^m$. De plus puisque $H_V = W \times \mu$, pour tout τ appartenant à $\{(0,0)\} \times \{\mu\}$ nous avons $V_\tau = V$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Card}\,(\overline{V} \cap (L_{r-1} \times \mathbb{P}^1)) \geq \mathrm{Card}\,((\tilde{V} \cap L_{r-1}) \times (\mu \cap \mathbb{P}^1)) \geq \mathrm{Card}\,(\mu).$$

On a donc $\delta_{r-1,1}(V) \geq \mathrm{Card}\,(\mu)$.

$\square$

2.3 Démonstration du Théorème 2.1.

Supposons par l'absurde qu'il existe P dans $\mathbb{C}[\underline{X}, Y]$, non identiquement nul, vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On construit par induction une suite $(P_j)_{j=1,\dots,m+1}$ de polynômes, de degré total en $\underline{X}$ majoré par K et de degré en Y majoré par L, tels que pour tout $j = 1, \dots, m+1$

$$P_j \text{ s'annule sur } \Sigma_j + \cdots + \Sigma_{m+1} \text{ à un ordre } > T_j + \cdots + T_{m+1} \quad (*),$$

et tels que le cycle $Z_j = Z(P_1) \cdot \cdots \cdot Z(P_j)$ soit une intersection complète dans $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$. Le Lemme 2.2 implique alors que

$$\delta_{j-1,1}(Z_j) \leq jK^{j-1}L, \quad \text{ et } \quad \delta_{j,0}(Z_j) \leq K^j \quad (**).$$

On choisit $P_1 = P$. D'après l'énoncé il vérifie bien $(*)$, de plus comme $\delta_{0,1}(P_1) = \deg_Y(P_1)$ et $\delta_{1,0}(P_1) = \deg_{\underline{X}}(P_1)$, le cycle $Z_1 = Z(P_1)$ vérifie $(**)$.

On suppose que l'on a obtenu les polynômes $P_1, \dots, P_j$ vérifiant les hypothèses ci-dessus. Construisons donc le polynôme P_{j+1}. Soit V une composante de Z_j. Nous allons montrer qu'il existe t compris entre 0 et T_j, τ appartenant à Σ_j, et l compris entre 1 et j tels que le polynôme $(\mathfrak{D}^t(P_l))_\tau$ ne s'annule pas identiquement sur V. Pour cela on raisonnera par l'absurde. Supposons donc que pour tout $l = 1, \dots, j$, tout t compris entre 0 et T_j, et tout τ appartenant à Σ_j le polynôme $(\mathfrak{D}^t P_l)_\tau$ s'annule sur V. On peut alors appliquer le Lemme 2.3 à V, avec $n = j$, $\Sigma = \Sigma_j$, et $T = T_j$. On distingue alors trois cas.

i) La dérivation $\mathfrak{D}$ laisse invariant $I(V)$. Alors, V étant un sous-ensemble algébrique non vide de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$, on peut appliquer le Lemme 2.4. Le stabilisateur de V est donc de la forme $H_V = W \times \mathbb{C}^\times$ avec W contenant le point $(1, 0, \dots, 0)$. De plus $\delta_{(j,0)}(V) \neq 0$ d'après le Lemme 2.5, et $\delta_{(j,0)}(Z_j) \leq K^j$ d'après $(**)$. On obtient donc l'inégalité suivante qui contredit (1)

$$\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{W \times \mathbb{C}^\times}\right) \leq K^j.$$

ii) La dérivation $\mathfrak{D}$ ne laisse pas invariant $I(V)$ et $H_V = W \times \mathbb{C}^\times$. Alors $\delta_{j,0}(V) \neq 0$ d'après le Lemme 2.5, de plus comme $\delta_{(j,0)}(Z_j) \leq K^j$ d'après $(**)$, on obtient l'inégalité suivante qui contredit (1)

$$\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{H_V}\right)(T_j+1) \leq K^j.$$

iii) La dérivation $\mathfrak{D}$ ne laisse pas invariant $I(V)$ et $H_V = W \times \mu$, où $\mu \subseteq \mathbb{C}^\times$ est fini. Alors $\delta_{j-1,1}(V) \geq \mathrm{Card}\,(\mu)$ d'après le lemme 2.5. De plus comme $\delta_{j-1,1}(Z_j) \leq jK^{j-1}L$ d'après $(**)$, on obtient l'inégalité suivante

$$\mathrm{Card}\,(\mu)\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{H_V}\right)(T_j+1) \leq jK^{j-1}L.$$

De plus

$$\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{W \times \mu}\right) \geq \mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{W \times \{1\}}\right)/\mathrm{Card}\,(\mu),$$

on obtient alors l'inégalité

$$\mathrm{Card}\,(\mu)\frac{\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{W\times\{1\}}\right)}{\mathrm{Card}\,(\mu)} \leq jK^{j-1}L$$

ce qui, en simplifiant par $\mathrm{Card}\,(\mu)$, contredit (2).

Donc il existe l compris entre 1 et j, t compris entre 0 et T_j et τ dans Σ_j tels que V ne soit pas une composante de $Z((\mathfrak{D}^t P_l)_\tau)$. On pose alors

$$P_{j+1} = \sum_{l=1}^{j} \sum_{\substack{0\leq t\leq T_j \\ \tau\in\Sigma_j}} \gamma_{t,\tau}^l (\mathfrak{D}^t P_l)_\tau$$

avec les $\gamma_{t,\tau}^l$ choisis génériquement pour qu'aucune composante de Z_j ne soit une composante de $Z(P_{j+1})$. On pose $Z_{j+1} = Z_j.Z(P_{j+1})$. C'est le cycle associé à une intersection complète d'après le choix de P_{j+1}. Le polynôme P_{j+1} vérifie alors $(*)$ et le Lemme 2.2 montre que les bidegrés du cycle Z_{j+1} satisfont $(**)$. On a donc construit le polynôme P_{j+1} souhaité.

Lorsque $j = m$ le cas où la dérivation $\mathfrak{D}$ laisse invariant l'idéal $I(V)$ n'apparaît pas. En effet, comme $\dim(V) = 1$, si $H_V = W \times \mathbb{C}^\times$ on a $\dim(W) \leq 0$ et il est donc impossible que le point $(1, 0, \ldots, 0)$ appartienne à V.

Pour $j = m+1$ le cycle Z_{m+1} vérifie

$$\delta_{m,1}(Z_{m+1}) \leq (m+1)K^m L.$$

Or comme pour $j = 1, \ldots, m+1$ les polynômes P_j s'annulent sur Σ_{m+1} à un ordre $> T_{m+1}$ le Lemme 2.3 donne l'inégalité

$$(T_{m+1} + 1)\mathrm{Card}\,(\Sigma_{m+1}) \leq \delta_{m,1}(Z_{m+1}).$$

Les deux inégalités combinées fournissent une contradiction à (2). Ceci montre qu'il n'existe aucun polynôme P non identiquement nul vérifiant les conditions de l'énoncé.

3 Polynômes de Feldman

Dans la démonstration du Théorème 1.1 nous allons utiliser une base de $\mathbb{C}[X]$ différente de la base usuelle des monômes. Ce changement de base a pour but d'améliorer les résultats numériques obtenus dans les corollaires. Nous donnons ici la définition ainsi que des majorations, se rapportant à cette nouvelle base, utiles lors de la démonstration du Théorème 1.1. Dans toute cette partie nous reprenons d'assez près le paragraphe $9.2.1$ page 269 de [31], en raffinant certaines estimations rencontrées.

Soient R, S, T, K, L des entiers ≥ 1, et rappelons que

$$N = (L+1)\frac{(K+1)(K+2)}{2}.$$

Pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$ et tout entier $n > 0$ nous définissons la fonction

$$\triangle\ (z;n) = \frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n!},$$

et nous la prolongeons pour $n = 0$ en posant

$$\triangle\ (z;0) = 1.$$

Définition 3.1. *Soit $a \geq 0$ et $b > 0$ deux entiers. Nous définissons le polynôme $\delta_b(z;a) \in \mathbb{Q}[z]$ de degré a par*

$$\delta_b(z;a) = \triangle\ (z;b)^q \triangle\ (z;r),$$

où q et r désignent le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
Pour tout entier $c \geq 0$ nous posons

$$\delta_b(z;a,c) = \left(\frac{d}{dz}\right)^c \delta_b(z;a).$$

Le plus grand intérêt des polynômes $\delta_b(z;a)$ est d'avoir des valeurs entières lorsque $z \in \mathbb{Z}$, ce qui nous permettra d'utiliser une inégalité de Liouville. Pour tout entier $m \geq 1$ on a

$$\delta_b(m;a) = \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix}^q \begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix}.$$

Le lemme suivant est le Lemme 9.8 de [31] avec une majoration de $|\delta_b(l;a,c)|$ plus fine car nous prenons ici $z \in \mathbb{N}$, et non pas $z \in \mathbb{C}$. Ceci est possible car, contrairement à ce qui est fait dans [31], notre paramètre l, qui correspond à t dans [31], est toujours positif.

On note $\nu(b)$ le $ppcm$ des entiers $1, 2, \ldots, b$.

Lemme 3.2. *Soient a, b et c des entiers ≥ 0 avec de plus $b \geq 1$ et $c \leq a$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$ le nombre*

$$\nu(b)^c \frac{1}{c!} \delta_b(l; a, c)$$

est entier et de plus on a la majoration

$$|\delta_b(l; a, c)| \leq c! \binom{a}{c} \frac{\max\{l, b-1\}^{a-c}}{b^a} e^{a+b}.$$

Preuve. Nous reprenons la démonstration du Lemme 9.8 de [31] pour la première assertion du Lemme 3.2. Nous allons montrer que $\nu(b)^c \cdot (1/c!) \delta_b(l; a, c) \in \mathbb{Z}$ en estimant la valuation p-adique de ce nombre. Commençons par regarder le terme $n!$, pour $n \in \mathbb{N}$. Nous avons la formule suivante :

$$v_p(n!) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^m} \right].$$

Cela implique alors

$$v_p(b!^q r!) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(q \left[\frac{b}{p^m} \right] + \left[\frac{r}{p^m} \right] \right).$$

On remarque de plus que si $r < b$, nous pouvons nous restreindre à sommer sur m pour $p^m \leq b$, les autres termes s'annulant. Nous examinons maintenant la valuation p-adique de $\nu(n)$. Celle-ci est donnée par :

$$v_p(\nu(n)) = \left[\frac{\log n}{\log p} \right] = \sum_{p^m \leq n} 1.$$

Considérons à présent un produit $P = m_1 \cdots m_a$ d'entiers rationnels et dénotons par ρ_m, $m \in \mathbb{N}^*$, le nombre de m_i, $(1 \leq i \leq a)$, qui sont multiples de p^m. Alors

$$v_p(P) = \sum_{m \geq 1} \rho_m.$$

Si nous enlevons c nombres de $b_1, ..., b_a$ et si nous notons P' le produit des $a - c$ nombres restants, nous avons

$$v_p(P') \geq \sum_{m \geq 1} \max(\rho_m - c, 0). \tag{3.1}$$

Notons alors $b_1, \ldots, b_a$ les entiers tels que

$$\delta_b(z; a) = \frac{1}{b!^q r!} \prod_{i=1}^{a} (z - b_i).$$

La dérivation $\delta_b(z;a,c)$ de $\delta_b(z;a)$ est alors donnée par la formule

$$\delta_b(z;a,c) = c!\delta_b(z;a) \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_c\leq a} (z-b_{j_1})^{-1}\cdots(z-b_{j_c})^{-1}. \tag{3.2}$$

Nous remarquons ensuite que le produit P défini par

$$P = (l(l-1)\cdots(l-b+1))^q l(l-1)\cdots(l-r+1)$$

n'est rien d'autre que $b!^q r!\delta_b(l;a)$. Nous déduisons alors de (3.1) que

$$v_p\left(\frac{1}{c!}\delta_b(l;a,c)\right) \geq \sum_{m\geq 1} \max\{\rho_m - c, 0\} - v_p(b!^q r!).$$

Comme de plus

$$\delta_b(l;a) = \binom{l}{b}^q \binom{l}{r}$$

et $P = b!^q r!\delta_b(l;a)$, il s'ensuit que

$$\rho_m \geq q\left[\frac{b}{p^m}\right] + \left[\frac{r}{p^m}\right] \quad \text{pour tout} \quad m \geq 1. \tag{3.3}$$

La valuation p-adique de $\nu(b)^c\frac{1}{c!}\delta_b(l;a,c)$ étant donnée par :

$$v_p\left(\nu(b)^c\frac{1}{c!}\delta_b(l;a,c)\right) \geq c\sum_{p^m\leq b} 1 + \sum_{p^m\leq b}\max\{\rho_l - c, 0\} - \sum_{p^m\leq b}\left(q\left[\frac{b}{p^m}\right] + \left[\frac{r}{p^m}\right]\right),$$

la minoration (3.3) de ρ_m implique

$$v_p\left(\nu(b)^c\frac{1}{c!}\delta_b(l;a,c)\right) \geq 0,$$

ce qui prouve que pour tout entier $c \geq 0$

$$\nu(b)^c\frac{1}{c!}\delta_b(l;a,c) \in \mathbb{Z}.$$

Établissons maintenant la majoration de $|\delta_b(l;a,c)|$. Nous partons de l'égalité (3.2) et de la définition 3.1 de $\delta_b(z;a)$ puis nous utilisons l'inégalité

$$\frac{1}{b!^q r!} \leq \frac{1}{b^a}e^{a+b},$$

pour obtenir, pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\delta_b(l;a,c)| &\leq c!\binom{a}{c}\max\{l,b-1\}^{a-c}\frac{1}{b!^q r!} \\ &\leq \frac{a!}{(a-c)!}\cdot\frac{\max\{l,b-1\}^{a-c}}{b^a}\cdot e^{a+b}. \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve du Lemme 3.2. □

Le lemme suivant nous donne une majoration du produit des $|\delta_{T'}(l;t_{k_0,k_1,l},k_0)/k_0!|$, $0 \leq l \leq L$ et $0 \leq k_0+k_1 \leq K$. Cette majoration raffine celle faite dans le Lemme 9.11 de [31]. Nous pouvons procéder ainsi car nous sommes dans le cas spécifique $n=2$ et qu'il est alors plus facile de faire ces estimations que dans le cas général.

Lemme 3.3. *Soient T et T' deux entiers avec $0 < T' < T$. Soit $(t_{k_0,k_1,l})$ une famille de N entiers, indexée par les triplets (k_0,k_1,l) avec $0 \leq k_0+k_1 \leq K$, et $0 \leq l \leq L$, les entiers $t_{k_0,k_1,l}$ étant compris entre 0 et T. Si parmi les $t_{k_0,k_1,l}$ aucun entier n'est répété plus de $(R+1)(S+1)$ fois, nous avons la majoration :*

$$\begin{aligned} \log\left(\prod_{l=0}^{L}\prod_{k_0+k_1\leq K}\left|\frac{1}{k_0!}\delta_{T'}(l;t_{k_0,k_1,l},k_0)\right|\right) &\leq \frac{KN}{3}\log\frac{T}{KL}+\frac{11}{18}KN \\ &\quad +(\omega TN+\omega_0 N)\log\frac{\max\{L,T'-1\}}{T'} \\ &\quad +(\omega T+\omega_0+T')N \end{aligned}$$

Preuve. Nous savons d'après le Lemme 3.2 que

$$\left|\frac{1}{k_0!}\delta_{T'}(l;t_{k_0,k_1,l},k_0)\right| \leq \binom{t_{k_0,k_1,l}}{k_0}\frac{\max\{l,T'-1\}^{t_{k_0,k_1,l}-k_0}}{T'^{t_{k_0,k_1,l}}}e^{t_{k_0,k_1,l}+T'}.$$

Dans la partie de droite de cette inégalité, nous majorons grossièrement $\binom{t_{k_0,k_1,l}}{k_0}$ par $\frac{T^{k_0}}{k_0!}$, $t_{k_0,k_1,l}$ par T et l par L. Nous obtenons alors

$$\left|\frac{1}{k_0!}\delta_{T'}(l;t_{k_0,k_1,l},k_0)\right| \leq \frac{T^{k_0}}{k_0!}\frac{\max\{L,T'-1\}^{t_{k_0,k_1,l}-k_0}}{T'^{t_{k_0,k_1,l}}}e^{t_{k_0,k_1,l}+T'}.$$

Or d'après le Lemme A.1 de l'annexe

$$\prod_{l=0}^{L}\prod_{k_0+k_1\leq K}\frac{1}{k_0!} \leq K^{-\frac{KN}{3}}e^{\frac{11KN}{18}}. \tag{3.4}$$

Nous avons de plus, en minorant $\max\{L, T'-1\}$ par L,

$$\prod_{l=0}^{L} \prod_{k_0+k_1 \leq K} \frac{T^{k_0}}{\max\{L, T'-1\}^{k_0}} \leq \frac{T^{\frac{KN}{3}}}{L^{\frac{KN}{3}}}.. \tag{3.5}$$

Enfin le Lemme A.3 de l'annexe nous fournit la majoration

$$\prod_{l=0}^{L} \prod_{k_0+k_1 \leq K} \frac{\max\{L, T'-1\}^{t_{k_0,k_1,l}}}{T'^{t_{k_0,k_1,l}}} e^{t_{k_0,k_1,l}+T'} \leq \left(\frac{\max\{L, T'-1\}}{T'} \right)^{\omega TN + \omega_0 N} e^{(\omega T + \omega_0 + T')N}. \tag{3.6}$$

Le résultat recherché découle alors immédiatement de (3.4), (3.5) et (3.6).

□

4 Démonstration du Théorème 1.1

Remarquons tout d'abord que nous pouvons nous ramener à n'étudier que la forme linéaire définie par
$$\Lambda = b_2 \log \alpha_2 - b_1 \log \alpha_1,$$
où b_1 et b_2 sont des entiers strictement positifs (et non plus des entiers relatifs) et où les valeurs absolues de α_1 et α_2 sont ≥ 1. En effet si $|\alpha_1| \leq 1$ (resp. $|\alpha_2| \leq 1$), il suffit de remplacer α_1 (resp. α_2) par son inverse qui vérifiera évidemment $|1/\alpha_1| \geq 1$ (resp. $|1/\alpha_2| \geq 1$). Supposons donc maintenant sans restriction que $|\alpha_1| \geq 1$ et $|\alpha_2| \geq 1$. Si de plus les entiers b_1 et b_2 sont de même signe, nous pouvons facilement minorer $|\Lambda|$ par :
$$|\Lambda| \geq |b_1| \log |\alpha_1| + |b_2| \log \alpha_2|.$$
On supposera donc sans perte de généralité que $b_1, b_2 \in \mathbb{N}$ et que $|\alpha_1| \geq 1$ et $|\alpha_2| \geq 1$.

Pour démontrer le Théorème 1.1, nous utilisons les déterminants d'interpolation, introduit par M. Laurent dans [8]. Pour cela nous partons de la matrice M, de taille $N \times RST$, dont les coefficients sont les nombres
$$\gamma_{k_0,k_1,l}^{r,s,t} = (rb_2 + sb_1)^{k_1} l^{t-k_0} \binom{t}{k_0} \alpha_1^{rl} \alpha_2^{sl},$$
où (r,s,t), avec $(0 \leq t \leq T,\ 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq s \leq S)$, est l'indice de colonne et (k_0, k_1, l), avec $(k_0 + k_1 \leq K, 0 \leq l \leq L)$, est celui de ligne.

Nous donnons un schéma de la preuve puis nous détaillons chaque étape.

étape 1. Grâce au Lemme de zéros 2.1, nous montrons que la matrice M est de rang maximal.

étape 2. Transformation de la matrice M grâce aux polynômes de Feldman, pour améliorer certaines estimations de hauteur.

étape 3. Nous prenons un mineur non nul de la matrice transformée que nous minorons arithmétiquement grâce à une inégalité de Liouville.

étape 4. Nous majorons analytiquement ce mineur en fonction de $|\Lambda'|$, à l'aide d'un lemme de Schwarz.

étape 5. Pour $|\Lambda'|$ suffisamment petit nous obtenons une contradiction entre d'une part l'encadrement du mineur fourni par la minoration et la majoration obtenues précédemment, et d'autre part l'hypothèse (2) du théorème 1.1.

Autrement dit le but de la démonstration est d'obtenir une contradiction en encadrant le module d'un déterminant non nul. La minoration est indépendante de Λ, tandis que la majoration en dépend. La contradiction intervient lorsque $|\Lambda|$ devient "trop" petit, on obtient alors une valeur, dépendant des différents paramètres, à laquelle $|\Lambda|$ ne peut être inférieure. Notons que les transformations de la matrice M ne sont pas uniquement présentes pour améliorer les valeurs numériques des paramètres mais aussi pour obtenir la minoration de $|\Lambda|$ de la forme voulue (Cf paragraphe 4.2).

4.1 Rang de M

Le Lemme 4.1 ci-dessous nous assure de la maximalité du rang de M.

Lemme 4.1. *Sous l'hypothèse* (1) *du Théorème 1.1, le rang de la matrice* M *est maximal et égal à* N.

Preuve. Pour montrer ce résultat nous allons procéder par l'absurde en supposant le rang de M strictement inférieur à N. On regarde les coefficients de M comme étant les valeurs des monômes $\mathfrak{D}^t\left(\frac{X_0^{k_0}}{k_0!}X_1^{k_1}Y^l\right)$ pris aux points $(0, rb_2 + sb_1, \alpha_1^r\alpha_2^s)$, $(0 \leq r \leq R, 0 \leq s \leq S)$. Plus précisément

$$\gamma_{k_0,k_1,l}^{r,s,t} = \mathfrak{D}^t\left(\frac{X_0^{k_0}}{k_0!}X_1^{k_1}Y^l\right)_{|(0,rb_2+sb_1,\alpha_1^r\alpha_2^s)}. \tag{4.1}$$

La matrice M ayant été supposée de rang $< N$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$, non tous nuls, tels que, si l'on note L_i, $i = 1, \ldots, N$, les lignes de la matrice M, on ait les relations linéaires :

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i L_i = 0.$$

Posons

$$P = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \frac{X_0^{k_{0,i}}}{k_{0,i}!} X_1^{k_{1,i}} Y^{l_i}.$$

D'après (4.1) nous savons alors que $\mathfrak{D}^t P$ s'annule sur l'ensemble $\Sigma_{RS} = \{(0, rb_2+sb_1, \alpha_1^r\alpha_2^s); 0 \leq r \leq R, 0 \leq s \leq S\}$ pour tout $0 \leq t \leq T$. Posons

$$\Sigma_1 = \{(0, rb_2 + sb_1, \alpha_1^r\alpha_2^s); 0 \leq r \leq R_1, 0 \leq s \leq S_1\},$$

$$\Sigma_2 = \{(0, rb_2 + sb_1, \alpha_1^r\alpha_2^s); 0 \leq r \leq R_2, 0 \leq s \leq S_2\},$$

$$\Sigma_3 = \{(0, rb_2 + sb_1, \alpha_1^r\alpha_2^s); 0 \leq r \leq R_3, 0 \leq s \leq S_3\}.$$

On vérifie facilement que $\Sigma_{RS} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$ puisque $R = R_1 + R_2 + R_3$ et $S = S_1 + S_2 + S_3$. Il s'ensuit que le polynôme P s'annule sur $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$ à un ordre $> T = T_1 + T_2 + T_3$ pour la dérivation $\mathfrak{D}$.

Nous voulons maintenant appliquer le Théorème 2.1, dans le cas $m = 2$, pour obtenir une contradiction au fait que P ne soit pas identiquement nul. Pour cela il nous faut vérifier les conditions (1) et (2) de ce théorème mais aussi que le degré total en X de P soit $\leq K$ et celui en Y soit $\leq L$. Ce dernier point est évident puisque par définition $0 \leq k_{0,i} + k_{1,i} \leq K$ et $0 \leq l_i \leq L$ pour tout $i = 1, \ldots, N$, et que

$$\deg_{\underline{X}} P = \max_{1 \leq i \leq N} \{k_{0,i} + k_{1,i}\}, \quad \deg_Y P = \max_{1 \leq i \leq N} \{l_i\}.$$

Il nous reste donc à vérifier que les conditions (1) et (2) du Théorème 2.1 sont impliquées par les hypothèses du Théorème 1.1.

Pour la suite de cette démonstration on notera W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$.

Nous regardons tout d'abord les inégalités provenant de la condition (1). Nous en avons trois, deux pour le cas $j = 1$ et une pour le cas $j = 2$.

Pour $j = 1$, la dimension de W doit être ≤ 1. Nous avons alors deux cas : soit $(1, 0) \notin W$, soit $(1, 0) \in W$. Si $(1, 0) \notin W$ nous devons vérifier que

$$(T_1 + 1)\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_1}{W \times \mathbb{C}^\times}\right) \geq (K + 1). \qquad (a)$$

Comme

$$\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_1}{W \times \mathbb{C}^\times}\right) \geq 1,$$

la condition (a) est donc impliquée par l'inégalité

$$T_1 \geq K$$

qui est la première inégalité de la condition (1) du Théorème 1.1. La condition (a) est donc vérifiée sous les hypothèses du Théorème 1.1.

Si $(1, 0) \in W$, nous avons à vérifier l'inégalité

$$\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_1}{W \times \mathbb{C}^\times}\right) \geq K + 1. \qquad (b)$$

Puisque $\dim W \leq 1$, on a nécessairement $W = \mathbb{C}(1, 0)$. Ainsi

$$\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_1}{\mathbb{C} \times \{0\} \times \mathbb{C}^\times}\right) = \mathrm{Card}\{rb_2 + sb_1; 0 \leq r \leq R_1, 0 \leq s \leq S_1\}.$$

La condition (b) est alors impliquée par la deuxième inégalité de la condition (1) du Théorème 1.1.

Pour $j=2$, nous avons $\dim W \leq 0$ et donc $W=\{0,0\}$. Il suffit alors de vérifier

$$(T_2+1)\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_2}{\{(0,0)\}\times\mathbb{C}^\times}\right) \geq K^2+1. \qquad (c)$$

Or

$$\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_2}{\{(0,0)\}\times\mathbb{C}^\times}\right) = \mathrm{Card}\{rb_2+sb_1; 0\leq r\leq R_2, 0\leq s\leq S_2\},$$

et donc la cinquième inégalité de la condition (1) du Théorème 1.1 implique (c).

Nous regardons maintenant les inégalités découlant de la condition (2) du Théorème 2.1. Il y en a trois, une pour chaque $j=1,2,3$.

Pour $j=1$, il faut vérifier

$$(T_1+1)\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_1}{W\times\{1\}}\right) \geq L+1, \qquad (d)$$

avec $\dim W \leq 2$. Or pour tout sous-espace vectoriel W de $\mathbb{C}^2$ nous avons

$$\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_1}{W\times\{1\}}\right) \geq \mathrm{Card}\{\alpha_1^r\alpha_2^s; 0\leq r\leq R_1, 0\leq s\leq S_1\}.$$

Il est alors clair que la troisième inégalité de la condition (1) du Théorème 1.1 implique (d).

Pour $j=2$, il nous faut vérifier

$$(T_2+1)\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_2}{W\times\{1\}}\right) \geq 2KL+1, \qquad (e)$$

avec $\dim W \leq 1$. Comme pour la condition (a) le minimum de la partie de gauche est atteint lorsque $W=\{0\}\times\mathbb{C}$ d'où

$$\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_2}{W\times\{1\}}\right) \geq \mathrm{Card}\{\alpha_1^r\alpha_2^s; 0\leq r\leq R_2, 0\leq s\leq S_2\},$$

dans ce cas là. La quatrième inégalité de la condition (1) du Théorème 1.1 implique alors l'inégalité (e).

Enfin pour $j=3$, nous avons $\dim W \leq 0$, c'est à dire que $W=\{0,0\}$. Nous devons vérifier cette fois-ci

$$(T_3+1)\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_3}{\{(0,0)\}\times\{1\}}\right) \geq 3K^2L+1. \qquad (f)$$

Or comme

$$\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_3}{\{(0,0)\}\times\{1\}}\right) = \mathrm{Card}\{(rb_2+sb_1,\alpha_1^r\alpha_2^s); 0\leq r\leq R_3, 0\leq s\leq S_3\},$$

la dernière inégalité de la condition (1) du Théorème 1.1 implique (f).

Les conditions (1) et (2) du Théorème 2.1 sont ainsi vérifiées sous les hypothèses du Théorème 1.1. Le Théorème 2.1 nous dit alors que le polynôme P doit être identiquement nul, ce qui contredit le fait que les λ_i, $(i = 1,\ldots,N)$, soient non tous nuls. Le rang de la matrice M doit donc être maximal et égal à N.

□

4.2 Utilisation des polynômes de Feldman

Lors de cette étape nous modifions la matrice M, sans en changer le rang, afin d'avoir une meilleure estimation d'une part, mais afin surtout d'obtenir la minoration de $|\Lambda|$ annoncée dans les Corollaires 1.2, 1.3 et 1.4. En effet sans le changement décrit dans le Lemme 4.2 ci-dessous, nous obtiendrions un terme $\log B\log\log B$ à la place du $\log B$ attendu. Le terme $\log\log B$ provient, si l'on fait une estimation brutale à partir de la matrice M, du facteur l^{t-k_0} issu des dérivations. Pour plus de détails voir le chapitre 9 de [31] (9.2.1.b et 9.2.1.d plus spécifiquement).

Tout d'abord, par des opérations sur les lignes, nous transformons les monômes $(rb_2+sb_1)^{k_1}$ en les polynômes $\triangle\ (rb_2+sb_1,k_1)$. Nous rappelons que l'application $\triangle$ est définie par

$$\triangle\ (z;n) = \frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n!}.$$

Notons que les polynômes $\triangle\ (z;n)$, $n\geq 0$, forment une $\mathbb{Z}$-base de l'anneau des polynômes prenant des valeurs entières sur $\mathbb{N}$. Cette transformation est linéaire suivant les lignes et consiste juste à effectuer un changement de base ne modifiant en rien le rang de la matrice M.

Nous multiplions ensuite chaque ligne par $\nu(T')^{k_{0,i}}$. Cette transformation ne change pas le rang de M et, comme la précédente, s'effectue linéairement par rapport aux lignes. Nous notons alors

$$M' = Q'M,$$

la matrice M' ayant pour coefficients

$$\gamma'^{r,s,t}_{k_0,k_1,l} = \triangle\ (rb_2+sb_1;k_1)\nu(T')^{k_{0,i}}\binom{t}{k_0}l^{t-k_0}\alpha_1^{rl}\alpha_2^{sl}.$$

Le dernier changement consiste à remplacer l^{t-k_0} par la valeur de la dérivée d'un polynôme δ. C'est ce changement qui est vraiment important puisqu'il permet d'obtenir la minoration de $|\Lambda|$ souhaitée. À cet effet remarquons tout d'abord que

$$\binom{t}{k_0} l^{t-k_0} = \frac{1}{k_0!}\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^{k_0} z^t\right)_{z=l}.$$

Nous allons alors substituer le monôme z^t, à l'intérieur de la dérivation, par un polynôme $\delta(z,t)$ de même degré, bien choisi. Pour cela nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 4.2. *Soient $T \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré en X égal à k, et $\{\delta(z;t); 0 \leq t \leq T\}$ une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à T dans $\mathbb{C}[z]$. Soit $Q \in GL_{T+1}(\mathbb{C})$ la matrice de changement de base définie par*

$$(1, z, \dots, z^T)Q = (\delta(z;0), \dots, \delta(z;T)).$$

Définissons de plus

$$\delta(l;t,i) = \left(\left(\frac{d}{dz}\right)^{i} \delta(z;t)\right)_{z=l}.$$

Alors pour tout $l \in \mathbb{N}$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leq t \leq T$, nous avons

$$\frac{\delta(l;t,k)}{k!} = \sum_{\nu=0}^{T} q_{\nu,t}\binom{\nu}{k} l^{\nu-k},$$

où les $q_{\nu,t}$ désignent les coefficients de la matrice Q.

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}$. Il est évident que par définition de Q, nous avons

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k (1, z, \dots, z^T)Q = \left(\frac{d}{dz}\right)^k (\delta(z;0), \dots, \delta(z;T)).$$

Le résultat énoncé est alors immédiat. □

Nous choisirons comme base les polynômes $\delta_{T'}(z;t)$ définis dans le paragraphe 3 par la définition 3.1. Ici T' désigne un paramètre supplémentaire qui sera choisi ultérieurement. Soit $\tilde{M}$ la matrice dont les coefficients sont les nombres

$$\tilde{\gamma}^{r,s,t}_{k_0,k_1,l} =\triangle\ (rb_2 + sb_1; k_1)\nu(T')^{k_0}\frac{\delta_{T'}(l;t,k_0)}{k_0!}\alpha_1^{rl}\alpha_2^{sl}.$$

Le Lemme 4.2 implique alors que pour tout r, s, t, k_0, k_1, l, nous avons :

$$\tilde{\gamma}_{k_0,k_1,l}^{r,s,t} = \triangle\ (rb_2 + sb_1; k_1)\nu(T')^{k_0}\alpha_1^{rl}\alpha_2^{sl}\left(\sum_{\nu=0}^{T} q_{\nu,t}\binom{\nu}{k_0} l^{\nu-k_0}\right).$$

Notons alors $\tilde{Q}$ la matrice diagonale constituée de $(R+1)(S+1)$ blocs de la matrice Q. Il s'ensuit que l'on peut écrire

$$\tilde{M} = M'\tilde{Q},$$

pour un ordre convenable des lignes et des colonnes de $\tilde{M}$. De plus, comme $Q \in GL_{T+1}(\mathbb{C})$, la matrice $\tilde{Q} \in GL_{(R+1)(S+1)(T+1)}(\mathbb{C})$ et donc les matrices M et $\tilde{M}$ ont même rang.

Remarque. La multiplication des lignes par $\nu(T')^{k_{0,i}}$, est utile pour contrôler les dénominateurs de la matrice. Plus précisément, grâce au Lemme 3.2, les coefficients de $\tilde{M}$ sont des monômes en α_1 et α_2 à coefficients entiers.

4.3 Minoration d'un mineur de $\tilde{M}$

Soit Δ un mineur non nul de taille $N \times N$, extrait de la matrice $\tilde{M}$, son existence étant assurée par le Lemme 4.1. Après numérotation des lignes et des colonnes de Δ, on peut écrire

$$\Delta = \det\left(\triangle\ (r_j b_2 + s_j b_1, k_{1,i})\frac{\nu(T')^{k_{0,i}}}{k_{0,i}!}\delta_{T'}(l_i; t_j, k_{0,i})\alpha_1^{r_j l_i}\alpha_2^{s_j l_i}\right)_{1\le i,j\le N}.$$

On minore alors $|\Delta|$ comme suit.

Lemme 4.3. *Posons*

$$g = \frac{1}{4} - \frac{N}{12(R+1)(S+1)(T+1)},$$

$$G_1 = \frac{N(L+1)(R+1)g}{2}, \quad G_2 = \frac{N(L+1)(S+1)g}{2},$$

$$M_1 = \frac{L(r_1 + \cdots + r_N)}{2}, \quad M_2 = \frac{L(s_1 + \cdots + s_N)}{2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\log|\Delta| \quad \ge \quad & -(D-1)\left[\log(N!) + \frac{KN}{3}\log\left(\frac{Rb_2 + Sb_1}{2K}\right) + \frac{22KN}{18} + \frac{KN}{3}\log\left(\frac{T}{KL}\right)\right.\\ & \left. +(\omega T + \omega_0)N\log\left(\frac{\max\{L, T'-1\}}{T'}\right) + \frac{107KNT'}{309} + (\omega T + \omega_0 + T')N\right]\\ & +(M_1 + G_1)\log(|\alpha_1|) + (M_2 + G_2)\log(|\alpha_2|) - 2DG_1 h(\alpha_1) - 2DG_2 h(\alpha_2).\end{aligned}$$

La démonstration de ce lemme est similaire à celle du Lemme 5 de [8] et du Lemme 6 de [9], la différence étant uniquement due à la présence de termes issus de la dérivation $\mathfrak{D}$. Elle repose en partie sur une inégalité de Liouville utilisée sous la forme suivante.

Lemme 4.4 (Liouville). *Soit Q un polynôme appartenant à $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$, de degré en X_1 (resp. X_2) inférieur ou égal à d_1 (resp. d_2). Soient γ_1 et γ_2 deux nombres algébriques tels que $Q(\gamma_1, \gamma_2) \neq 0$. On notera $D = [\mathbb{Q}(\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{Q}]/[\mathbb{R}(\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R}]$. Notons $L(Q)$ la somme des valeurs absolues de ces coefficients. Alors*

$$|Q(\gamma_1, \gamma_2)| \geq L(Q)^{-(D-1)} \max\{1, |\gamma_1|\}^{d_1} \max\{1, |\gamma_2|\}^{d_2} \exp\{-D(d_1 h(\gamma_1) + d_2 h(\gamma_2))\}.$$

Preuve. Notons $D' = [\mathbb{Q}(\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{Q}]$ et v la valeur absolue archimédienne usuelle sur $\mathbb{C}$. Nous écrivons alors la formule du produit pour $Q(\gamma_1, \gamma_2) \neq 0$

$$D_v \log |Q(\gamma_1, \gamma_2)|_v = \sum_{w \neq v} D_w \log |Q(\gamma_1, \gamma_2)|_w,$$

où w parcourt l'ensemble des places de $\mathbb{Q}(\gamma_1, \gamma_2)$ distinctes de v, et où D_w désigne le degré local de $\mathbb{Q}(\gamma_1, \gamma_2)$ en w.

Si w est archimédienne nous majorons

$$\log |Q(\gamma_1, \gamma_2)|_w \leq d_1 \log \max\{1, |\gamma_1|_w\} + d_2 \log \max\{1, |\gamma_2|_w\} + \log L(Q).$$

Si w est ultramétrique nous avons

$$\log |Q(\gamma_1, \gamma_2)|_w \leq d_1 \log \max\{1, |\gamma_1|_w\} + d_2 \log \max\{1, |\gamma_2|_w\}.$$

Observons que, pour $i = 1, 2$,

$$\sum_{w \neq v} D_w d_i \log \max\{1, |\gamma_i|_w\} \quad = \quad D' d_i h(\gamma_i) - D_v d_i \log \max\{1, |\gamma_i|_v\}.$$

En outre la somme des D_w, pour les places w archimédiennes et telles que $w \neq v$, est égale à $D' - D_v$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \log |Q(\gamma_1, \gamma_2)|_v \quad \geq \quad & -\frac{D' - D_v}{D_v} \log L(Q) - \frac{D'}{D_v}(d_1 h(\gamma_1) + d_2 h(\gamma_2)) \\ & + \frac{D_v}{D_v}(d_1 \log \max\{1, |\gamma_1|_v\} + d_2 \log \max\{1, |\gamma_2|_v\}. \end{aligned}$$

Nous concluons en constatant que $D_v = [\mathbb{R}(\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R}]$. $\square$

Preuve du Lemme 4.3. Considérons le polynôme

$$P(X,Y) \;=\; \sum_{\sigma} sg(\sigma)\prod_{i=1}^{N} \triangle\,(b_2 r_{\sigma(i)} + b_1 s_{\sigma(i)}; k_{1,i})\nu(T')^{k_{0,i}} \times \frac{\delta_{T'}(l_i; t_{\sigma(i)}, k_{0,i})}{k_{0,i}!} X^{l_i r_{\sigma(i)}} Y^{l_i s_{\sigma(i)}},$$

où σ décrit le groupe symétrique $\mathfrak{S}_N$ et $sg(\sigma)$ désigne la signature de σ. Il est évident que $\Delta = P(\alpha_1, \alpha_2)$.

Pour tout $\eta \in \mathbb{C}$ on peut écrire :

$$P(z_1, z_2) = \det\left(\frac{(b_2 r_j + b_1 s_j - \eta)^{k_{1,i}}}{k_{1,i}!}\frac{\nu(T')^{k_{0,i}}}{k_{0,i}!}\delta_{T'}(l_i; t_j, k_{0,i}) z_1^{l_i r_j} z_2^{l_i s_j}\right).$$

En effet, pour l_i et $k_{0,i}$ fixés, il suffit de remarquer que

$$\binom{r_j b_2 + s_j b_1}{k_{1,i}} = \frac{(b_2 r_j + b_1 s_j - \eta)^{k_{1,i}}}{k_{1,i}!} + (\text{termes de degré } < k_{1,i}),$$

ce qui entraîne le résultat voulu, par multilinéarité du déterminant sur les lignes.

Choisissons $\eta = (Rb_2 + Sb_1)/2$. Nous majorons dans la $i-$ème ligne du déterminant ci-dessus

$$(b_2 r_j + b_1 s_j - \eta)^{k_{1,i}} \leq \left(\frac{Rb_2 + Sb_1}{2}\right)^{k_{1,i}}, \quad (1 \leq j \leq N).$$

Nous avons de plus

$$\nu(T')^{k_{0,i}} \leq e^{\frac{107 T' k_{0,i}}{103}},$$

cette dernière inégalité provenant de la majoration $\nu(n) \leq \exp(\frac{107n}{103})$ vraie pour tout $n \geq 1$ (voir [33], Lemme 2.3 p. 127). Combinant ces majorations aux Lemmes 3.3 et A.1 de l'annexe nous obtenons la majoration de la longueur de P suivante :

$$L(P) \;\leq\; N!\left(\frac{Rb_2 + Sb_1}{2K}\right)^{\frac{KN}{3}}\left(\frac{T}{KL}\right)^{\frac{KN}{3}}\left(\frac{\max\{L, T'-1\}}{T'}\right)^{(\omega T + \omega_0)N} \times \exp\left[\frac{22KN}{18} + \frac{107KNT'}{309} + (\omega T + \omega_0 + T')N\right]. \tag{4.2}$$

Pour minorer convenablement $|\Delta|$ nous devons d'abord factoriser une grande puissance de X et de Y dans P. Plus précisément le Lemme A.2 de l'annexe nous fournit les estimations

$$M_1 - G_1 \leq \sum_{\nu=1}^{N} l_\nu r_\nu \leq G_1 + M_1,$$

$$M_2 - G_2 \leq \sum_{\nu=1}^{N} l_\nu s_\nu \leq G_2 + M_2.$$

Désignons par V_1 (resp. V_2) la partie entière de $M_1 + G_1$ (resp. $M_2 + G_2$) et par U_1 (resp. U_2) le plus petit entier $\geq M_1 - G_1$ (resp. $M_2 - G_2$). On a alors la formule

$$\Delta = P(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1^{V_1} \alpha_2^{V_2} \tilde{P} \left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2} \right),$$

où $\tilde{P}(X, Y)$ est un polynôme à coefficients entiers, dont la longueur $L(\tilde{P})$ est égale à $L(P)$, et dont les degrés en X et Y sont respectivement majorés par $V_1 - U_1$ et par $V_2 - U_2$.

Nous appliquons alors le Lemme 4.4 ci-dessus au polynôme $\tilde{P}$. En remarquant de plus que $h(\alpha_1) = h(1/\alpha_1)$ et $h(\alpha_2) = h(1/\alpha_2)$, nous obtenons la minoration

$$\log \left| \tilde{P} \left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2} \right) \right| \geq -(D-1) \log L(\tilde{P}) - D(V_1 - U_1) h \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) - D(V_2 - U_2) h \left(\frac{1}{\alpha_2} \right).$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \log |\Delta| \quad \geq \quad & -(D-1) \log L(P) - D(V_1 - U_1) h(\alpha_1) - D(V_2 - U_2) h(\alpha_2) \\ & + V_1 \log |\alpha_1| + V_2 \log |\alpha_2|. \end{aligned}$$

Les inégalités $D h(\alpha_i) \geq \log |\alpha_i| \geq 0$, montrent que

$$V_i \log |\alpha_i| - D(V_i - U_i) h(\alpha_i) \geq (M_i + G_i) \log |\alpha_i| - 2 D G_i h(\alpha_i),$$

pour $i = 1, 2$. Grâce à la majoration (4.2) de la longueur de P on obtient le Lemme 4.3. □

4.4 Majoration de $|\Delta|$

Donnons à présent une majoration analytique de $|\Delta|$. La méthode pour y arriver s'appuie essentiellement sur un lemme de Schwarz, énoncé ci-dessous, et est similaire à celle utilisée dans la partie 6 de [8], qui traitait des formes linéaires en deux logarithmes mais avec la méthode de Schneider sans dérivation. La majoration de $|\Delta|$ que nous obtenons dépend de $|\Lambda'|$, la petitesse de ce terme constituant un point crucial dans le raisonnement du paragraphe suivant. La démonstration reprend la méthode du Lemme 6 de [8] en y incluant l'utilisation des dérivées. Notons que cette méthode diffère de celle utilisée dans [31], puisque dans celui-ci les polynômes considérés sont dans l'anneau $\mathbb{C}[\underline{X}, Y, Y^{-1}]$ et qu'ici nous nous plaçons dans l'anneau $\mathbb{C}[\underline{X}, Y]$.

Voici la majoration de $|\Delta|$ que nous allons démontrer.

Lemme 4.5. *Soit E un réel $\geq e$. Supposons que $|\Lambda'| \leq e^{-V}$. Rappelons que*

$$V = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{L+1} + \sqrt{1 - \frac{2}{L+1}}\right)(K+2)(L+1)\log E.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\log|\Delta| \quad \leq \quad & M_1 \log|\alpha_1| + M_2 \log|\alpha_2| + N\log 2 - \frac{NV}{2} + TN\log E + \log(N!) \\ & + \frac{KN}{3}\log\left(\frac{Rb_2 + Sb_1}{2K}\right) + \frac{22KN}{18} + \frac{KN}{3}\log E + \frac{KN}{3}\log\left(\frac{T}{KL}\right) \\ & + (\omega T + \omega_0)N\log\left(\frac{\max\{L, T'-1\}}{T'}\right) + \frac{107KNT'}{309} \\ & + (\omega T + \omega_0 + T')N + E(G_1|\log\alpha_1| + G_2|\log\alpha_2|).\end{aligned}$$

Nous énonçons à présent le Lemme de Schwarz utilisé par la suite.

Lemme 4.6 (Schwarz). *Soient T un entier ≥ 0, a et A deux nombres réels satisfaisant $0 \leq a \leq A$ et Ψ une fonction complexe en une variable qui soit analytique sur le disque $|z| \leq A$. Si la fonction Ψ a un zéro à l'origine de multiplicité au moins T, alors*

$$|\Psi|_a \leq \left(\frac{A}{a}\right)^{-T} |\Psi|_A,$$

où $|\Psi|_a = \sup\{|\Psi(z)|; |z| = a\}$, pour tout $0 < a \leq A$.

Preuve du Lemme 4.5. Dans un premier temps nous faisons apparaître le terme Λ' dans l'expression de Δ. Pour cela il suffit d'exprimer $\log\alpha_2$ en fonction de $\log\alpha_1$, b_1, b_2 et Λ. Or sans perte de généralité nous pouvons supposer

$$b_1|\log\alpha_1| \leq b_2|\log\alpha_2|,$$

auquel cas on écrira

$$\log\alpha_2 = \beta\log\alpha_1 + \frac{\Lambda}{b_2}, \tag{4.3}$$

avec $\beta = b_1/b_2$.

Nous modifions maintenant la matrice dont Δ est le déterminant. Pour tout nombre complexe η, nous obtenons par multilinéarité du déterminant sur les lignes, comme cela a été fait au paragraphe précédent, la formule :

$$\Delta = \det\left(\frac{b_2^{k_{1,i}}}{k_{1,i}!}(r_j+s_j\beta-\eta)^{k_{1,i}}\frac{\nu(T')^{k_{0,i}}}{k_{0,i}!}\delta_{T'}(l_i;t_j,k_{0,i})\alpha_1^{l_i r_j}\alpha_2^{l_i s_j}\right).$$

Il convient alors de centrer les exposants l_i autour de leur valeur moyenne $L/2$. Nous écrivons, toujours grâce à la multilinéarité du déterminant,

$$\Delta = \alpha_1^{M_1}\alpha_2^{M_2}\det\left(\frac{b_2^{k_{1,i}}}{k_{1,i}!}(r_j+s_j\beta-\eta)^{k_{1,i}}\frac{\nu(T')^{k_{0,i}}}{k_{0,i}!}\delta_{T'}(l_i;t_j,k_{0,i})\alpha_1^{\lambda_i r_j}\alpha_2^{\lambda_i s_j}\right),$$

où $\lambda_i = l_i - \frac{L}{2}(1\leq i\leq N)$.

Utilisons à présent le Lemme 4.2. Par multilinéarité du déterminant nous obtenons :

$$\Delta = \alpha_1^{M_1}\alpha_2^{M_2}\sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_N)\in\mathbb{N}^N\\ \nu_j\leq T,1\leq j\leq N}}\left(\prod_{j=1}^N q_{\nu_j,t_j}\right)\det\left(\tfrac{b_2^{k_{1,i}}}{k_{1,i}!}(r_j+s_j\beta-\eta)^{k_{1,i}}\nu(T')^{k_{0,i}}\tbinom{\nu_j}{k_{0,i}}l_i^{\nu_j-k_{0,i}}\alpha_1^{\lambda_i r_j}\alpha_2^{\lambda_i s_j}\right).$$

D'après l'égalité (4.3) on décompose alors $\alpha_1^{\lambda_i r_j}\alpha_2^{\lambda_i s_j}$ en la somme de deux termes

$$\alpha_1^{\lambda_i r_j}\alpha_2^{\lambda_i s_j} = \alpha_1^{\lambda_i(r_j+s_j\beta)} + \Lambda'\theta_{i,j}\alpha_1^{\lambda_i(r_j+s_j\beta)}, \tag{4.4}$$

où

$$\theta_{i,j} = \frac{e^{\lambda_i s_j\Lambda/b_2}-1}{\Lambda'}.$$

On remarque que d'après leurs définitions nous avons $|\theta_{i,j}|\leq 1$, pour tout $1\leq i,j\leq N$.

Nous injectons alors (4.4) dans Δ ce qui entraîne, encore par multilinéarité du déterminant, que :

$$\Delta = \alpha_1^{M_1}\alpha_2^{M_2}\sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_N)\in\mathbb{N}^N\\ \nu_j\leq T,1\leq j\leq N}}\prod_{j=1}^N q_{\nu_j,t_j}\sum_{I\subseteq\{1,\dots,N\}}(\Lambda')^{N-|I|}\Delta_{I,\underline{\nu}}, \tag{4.5}$$

où $|I|$ désigne le cardinal de I et

$$\Delta_{I,\underline{\nu}} = \det\begin{pmatrix} c_{i,1} & \dots & c_{i,N} \\ \theta_{i,1}c_{i,1} & \dots & \theta_{i,N}c_{i,N}\end{pmatrix}\begin{matrix}\}\ i\in I\\ \}\ i\notin I\end{matrix}$$

avec

$$c_{i,j} = \frac{b_2^{k_{1,i}}}{k_{1,i}!}(r_j + s_j\beta - \eta)^{k_{1,i}}\nu(T')^{k_{0,i}}\binom{\nu_j}{k_{0,i}} l_i^{\nu_j - k_{0,i}}\alpha_1^{\lambda_i(r_j+s_j\beta-\eta)}.$$

On remarque que, a priori, l'exposant de α_1 devrait être $\lambda_i(r_j + s_j\beta)$, cependant, comme $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 0$, nous pouvons, grâce à la multilinéarité du déterminant, le remplacer par l'exposant $\lambda_i(r_j + s_j\beta - \eta)$.

Nous voulons maintenant appliquer le Lemme de Schwarz 4.6 à une fonction $\Delta_I(z)$ ayant une grande multiplicité à l'origine et telle que

$$\Delta_I(1) = \Delta_I := \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_N)\in\mathbb{N}^N \\ \nu_j \le T, 1\le j\le N}} \prod_{k=1}^N q_{\nu_j,t_j}\Delta_{I,\underline{\nu}}.$$

Définissons alors $\Delta_I(z)$ comme suit :

$$\Delta_I(z) = \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_N)\in\mathbb{N}^N \\ \nu_j \le T, 1\le j\le N}} \prod_{k=1}^N q_{\nu_j,t_j}\Delta_{I,\underline{\nu}}(z),$$

où

$$\Delta_{I,\underline{\nu}}(z) = \det\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu_1}\varphi_i(z\underline{\xi}_1), & \dots & ,\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu_N}\varphi_i(z\underline{\xi}_N) \\ \theta_{i,1}\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu_1}\varphi_i(z\underline{\xi}_1), & \dots & ,\theta_{i,N}\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu_N}\varphi_i(z\underline{\xi}_N) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} \, i\in I \\ \} \, i\notin I \end{array}$$

avec

$$\varphi_i(z_0,z_1) = \frac{b_2^{k_{1,i}}}{k_{1,i}!}z_1^{k_{1,i}}\frac{\nu(T')^{k_{0,i}}}{k_{0,i}!}z_0^{k_{0,i}}e^{z_0 l_i}\alpha_1^{\lambda_i z_1}$$

et

$$\underline{\xi}_j = (\xi_{0,j},\xi_{1,j}) = (0, r_j + s_j\beta - \eta).$$

Nous remarquons qu'avec cette définition $\Delta_I(1) = \Delta_I$, puisque

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu_j}\frac{z_0^{k_{0,i}}}{k_{0,i}!}e^{z_0 l_i}\right)_{z_0=0} = \binom{\nu_j}{k_{0,i}} l_i^{\nu_j-k_{0,i}}.$$

Il apparaît alors que la multiplicité à l'origine de $\Delta_I(z)$ est supérieure au minimum des multiplicités en zéro des fonctions $\Delta_{I,\underline{\nu}}(z)$. Le lemme suivant, comparable au Lemme 9.14 de [31], nous fournit une estimation de la multiplicité en zéro de ces fonctions.

Lemme 4.7. *Pour tout* $I \subseteq \{1,\dots,N\}$ *de cardinalité* $|I|$, *et tout* N*-uplets* $(\nu_1,\dots,\nu_N)$ *la fonction* $\Delta_{I,\underline{\nu}}(z)$ *a un zéro à l'origine de multiplicité*

$$T_I \geq \frac{|I|}{2}\left(\frac{|I|+1}{K+1}-\frac{K}{2}-1\right)-TN.$$

Preuve. Écrivons φ_i sous la forme

$$\varphi_i(z_0,z_1)=p_i(z_0,z_1)e^{l_i(z_0+z_1\log\alpha_1)}e^{-(L/2)z_1},$$

où

$$p_i(z_0,z_1)=\frac{b_2^{k_{1,i}}}{k_{1,i}}\frac{\nu(T')^{k_{0,i}}}{k_{0,i}}z_0^{k_{0,i}}z_1^{k_{1,i}},$$

est un monôme de degré total inférieur ou égal à K puisque $k_{0,i}+k_{1,i}\leq K$. Par multilinéarité du déterminant il est alors évident que nous avons

$$\Delta_{I,\underline{\nu}}(z)=\exp\left(-\frac{Lz}{2}\sum_{j=1}^{N}\xi_{1,j}\right)\tilde{\Delta}_{I,\underline{\nu}}(z),$$

où

$$\tilde{\Delta}_{I,\underline{\nu}}(z)=\det\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu_1}\phi_i(z\underline{\xi}_1) & \dots & \left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu_N}\phi_i(z\underline{\xi}_N)\\ \\ \theta_{i,1}\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu_1}\phi_i(z\underline{\xi}_1) & \dots & \theta_{i,N}\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu_N}\phi_i(z\underline{\xi}_N)\end{pmatrix}\begin{array}{l}\}\ i\in I\\ \\ \}\ i\notin I\end{array}$$

avec

$$\phi_i=p_i(z_0,z_1)e^{l_i(z_0+z_1\log\alpha_1)},\quad i=1,\dots,N.$$

Effectuons à présent le changement de variable

$$Z_0=z_0+z_1\log\alpha_1,$$

afin que la partie exponentielle des ϕ_i, $i=1,\dots,N$, ne dépende plus que d'une seule variable. Ce changement de variable étant une translation, par rapport à la variable z_0, il est évident que, pour toute fonction continue f, nous avons

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z_0}\right)f(Z_0,z_1)_{|(Z_0,z_1)=(\xi_{1,j}\log\alpha_1,\xi_{1,j})}=\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)f(z_0+z_1\log\alpha_1,z_1)_{|(z_0,z_1)=(0,\xi_{1,j})}.$$

La fonction $\tilde{\Delta}_{I,\underline{\nu}}(z)$ s'écrit alors :

$$\tilde{\Delta}_{I,\underline{\nu}}(z) = \det \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial Z_0}\right)^{\nu_1} \tilde{\phi}_i(z\underline{\tilde{\xi}}_1) & \ldots & \left(\frac{\partial}{\partial Z_0}\right)^{\nu_N} \tilde{\phi}_i(z\underline{\tilde{\xi}}_N) \\ \theta_{i,1} \left(\frac{\partial}{\partial Z_0}\right)^{\nu_1} \tilde{\phi}_i(z\underline{\tilde{\xi}}_1) & \ldots & \theta_{i,N} \left(\frac{\partial}{\partial Z_0}\right)^{\nu_N} \tilde{\phi}_i(z\underline{\tilde{\xi}}_N) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} \ i \in I \\ \} \ i \notin I \end{array}$$

où

$$\underline{\tilde{\xi}}_j = ((r_j + s_j\beta)\log\alpha_1, r_j + s_j\beta), \quad j = 1, \ldots, N,$$
$$\tilde{\phi}_i = \tilde{p}_i(Z_0, z_1)e^{l_i Z_0}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

avec un coefficient polynômial de la forme

$$\tilde{p}_i(Z_0, z_1) = \sum_{\kappa=0}^{k_{0,i}} \tilde{p}_{i,\underline{\kappa}} Z_0^{k_{0,i}-\kappa} z_1^{\kappa+k_{1,i}}.$$

On remarque que le degré en z_1 des polynômes $\tilde{p}_i$ est $\leq K$.

Nous développons maintenant en série de Taylor, par rapport à la variable Z_0, les fonctions $\tilde{\phi}_i$. Il vient, pour tout $1 \leq j \leq N$, un développement de la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z_0}\right)^{\nu_j} \tilde{\phi}_i(Z_0, z_1) = \sum_{\kappa_0 \geq 0} \sum_{\kappa_1=0}^{K} \binom{\kappa_0}{\nu_j} \nu_j! d_{i,\kappa_0,\kappa_1} Z_0^{\kappa_0-\nu_j} z_1^{\kappa_1}. \tag{4.7}$$

Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $I = \{1, 2, \ldots, |I|\}$. Utilisons les expressions données par (4.7) et développons $\tilde{\Delta}_{I,\underline{\nu}}(z)$, nous obtenons

$$\tilde{\Delta}_{I,\underline{\nu}}(z) \quad = \sum_{\substack{(\kappa_{0,1},\kappa_{1,1}),\ldots,(\kappa_{0,|I|},\kappa_{1,|I|}) \\ \kappa_{1,i} \leq K, i=1,\ldots,|I|}} \left(\prod_{i=1}^{|I|} z^{\kappa_{0,i}+\kappa_{1,i}-T}\right) \det \Omega_{I,\underline{\kappa}}(z),$$

où les coefficients de $\Omega_{I,\underline{\kappa}}(z)$ sont les fonctions

$$\omega_{i,j}(z) = \begin{cases} \binom{\kappa_{0,i}}{\nu_j}\nu_j! d_{i,\kappa_0,\kappa_1}(\log\alpha_1)^{\kappa_{0,i}-\nu_j} \xi_{1,j}^{\kappa_{0,i}+\kappa_{1,i}-\nu_j} z^{T-\nu_j} & i \in I \\ \theta_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial Z_0}\right)^{\nu_j} \tilde{\phi}_i(z\underline{\tilde{\xi}}_j) & i \notin I. \end{cases}$$

La matrice $\Omega_{I,\underline{\kappa}}(z)$ est donc de rang $< N$, dans le cas où il existe $i, i' \in I$, tels que $i \neq i'$ et $(\kappa_{0,i}, \kappa_{1,i}) = (\kappa_{0,i'}, \kappa_{1,i'})$. Il s'ensuit que la multiplicité en zéro de $\Delta_{I,\underline{\nu}}(z)$ est supérieure ou égale à la valeur minimale des sommes

$$\sum_{\substack{(\kappa_{0,i},\kappa_{1,i}), i \in I \\ \kappa_{1,i} \leq K}} (\kappa_{0,i} + \kappa_{1,i} - T),$$

où tous les couples $(\kappa_{0,i},\kappa_{1,i})$ sont deux à deux distincts. Or, d'après le Lemme A.4 de l'annexe, on a, dans cette situation, la minoration :

$$\sum_{\substack{(\kappa_{0,i},\kappa_{1,i}),i\in I\\ \kappa_{1,i}\leq K}} (\kappa_{0,i}+\kappa_{1,i}) \geq \frac{|I|}{2}\left(\frac{|I|+1}{K+1}-\frac{K}{2}-1\right).$$

De plus nous avons

$$\sum_{\substack{(\kappa_{0,i},\kappa_{1,i}),i\in I\\ \kappa_{1,i}\leq K}} -T = -T|I| \geq -TN.$$

La minoration de T_I énoncée dans le Lemme 4.7 est alors immédiate. □

Appliquons maintenant le Lemme 4.6 à $\Delta_I(z)$, avec les paramètres $a=1$ et $A=E$. Nous obtenons :

$$|\Delta_I|_1 \leq E^{-T_I}|\Delta_I|_E. \tag{4.8}$$

Or nous savons que $|\Delta_I| \leq |\Delta_I|_1$ par définition de $\Delta_I(z)$. Il ne nous reste donc plus qu'à majorer $|\Delta_I|_E$ pour obtenir une majoration de $|\Delta_I|$. Le Lemme suivant nous fournit la majoration souhaitée.

Lemme 4.8. *Pour tout ensemble $I \subseteq \{1,\ldots,N\}$ et tout nombre complexe z tel que $|z|>1$, on a*

$$\begin{aligned} |\Delta_I(z)| \;\leq\; & N!\left(\frac{Rb_2+Sb_1}{2K}\right)^{\frac{KN}{3}}\left(\frac{T}{KL}\right)^{\frac{KN}{3}}\left(\frac{\max\{L,T'-1\}}{T'}\right)^{(\omega T+\omega_0)N} \\ & \times\exp\left[\frac{22KN}{18}+(\omega T+\omega_0+T')N+\frac{107KNT'}{309}\right] \\ & \times|z|^{\frac{KN}{3}}\exp(|z|(G_1|\log\alpha_1|+G_2|\log\alpha_2|)). \end{aligned}$$

Preuve. Nous rappelons que

$$\Delta_I(z) = \det\begin{pmatrix} \sum_{\nu=0}^{T} q_{\nu,t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu}\varphi_i(z\underline{\xi}_1),\ \ldots\ ,\sum_{\nu=0}^{T} q_{\nu,t_N}\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu}\varphi_i(z\underline{\xi}_N) \\ \\ \theta_{i,1}\sum_{\nu=0}^{T} q_{\nu,t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu}\varphi_i(z\underline{\xi}_1),\ \ldots\ ,\theta_{i,N}\sum_{\nu=0}^{T} q_{\nu,t_N}\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu}\varphi_i(z\underline{\xi}_N) \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\ i\in I \\ \\ \}\ i\notin I \end{matrix}$$

où
$$\varphi_i(z_0,z_1)=\frac{b_2^{k_{1,i}}}{k_{1,i}!}z_1^{k_{1,i}}\nu(T')^{k_{0,i}}\frac{z_0^{k_{0,i}}}{k_{0,i}!}e^{z_0 l_i}\alpha_1^{\lambda_i z_1},\quad i=1,\dots,N,$$
et
$$\underline{\xi}_j=(\xi_{0,j},\xi_{1,j})=(0,r_j+s_j\beta-\eta),\quad j=1,\dots,N.$$
On remarque que pour tout $1\le j\le N$ et $i\in I$, nous avons d'après le Lemme 4.2 :
$$\sum_{\nu=0}^{T}q_{\nu,t_j}\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\nu}\varphi_i(z\underline{\xi}_j)=\frac{b_2^{k_{1,i}}}{k_{1,i}!}(z\xi_{1,j})^{k_{1,i}}\nu(T')^{k_{0,i}}\frac{\delta_{T'}(l_i;t_j,k_{0,i})}{k_{0,i}!}\alpha_1^{\lambda_i(z\xi_{1,j})}.$$
Développons alors le déterminant définissant $\Delta_I(z)$. Nous obtenons :
$$\Delta_I(z)=\sum_{\sigma}sg(\sigma)\prod_{i=1}^{N}\alpha_1^{z\sum\lambda_i\xi_{1,\sigma(i)}}\frac{b_2^{k_{1,i}}}{k_{1,i}!}(z\xi_{1,\sigma(i)})^{k_{1,i}}\frac{\nu(T')^{k_{0,i}}}{k_{0,i}!}\delta_{T'}(l_i;t_{\sigma(i)},k_{0,i})\prod_{i\notin I}\theta_{i,\sigma(i)},$$
où σ parcourt l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_N$. Comme de plus $|\theta_{i,j}|\le 1$, pour tout $1\le i,j\le N$, nous avons :
$$|\Delta_I(z)|\ \le\ N!\max_{\sigma}\left|\alpha_1^{z\sum\lambda_i\xi_{1,\sigma(i)}}\frac{b_2^{k_{1,i}}}{k_{1,i}!}(z\xi_{1,\sigma(i)})^{k_{1,i}}\frac{\nu(T')^{k_{0,i}}}{k_{0,i}!}\delta_{T'}(l_i;t_{\sigma(i)},k_{0,i})\right|$$
Nous choisissons à présent le nombre η pour optimiser notre majoration. Nous posons :
$$\eta=\frac{R+S\beta}{2},$$
ce qui nous donne
$$|\xi_{1,j}|\le\frac{R+S\beta}{2},\quad(1\le j\le N).$$
Le Lemme A.1 de l'annexe joint à cette dernière inégalité, implique alors
$$\left|\prod_{i=1}^{N}\frac{b_2^{k_{1,i}}}{k_{1,i}!}(z\xi_{1,\sigma(i)})^{k_{1,i}}\right|\le\left(|z|\frac{Rb_2+Sb_1}{2K}\right)^{\frac{KN}{3}}e^{\frac{11}{18}KN}.\tag{4.10}$$
Le Lemme 3.3 nous fournit quant à lui la majoration
$$\begin{aligned}\left|\prod_{i=1}^{N}\frac{\delta_{T'}(l_i;t_{\sigma(i)},k_{0,i})}{k_{0,i}!}\right|\ &\le\ \left(\frac{T}{KL}\right)^{\frac{KN}{3}}\left(\frac{\max\{L,T'-1\}}{T'}\right)^{(\omega T+\omega_0)N}\\&\quad\times\exp\left[(\omega T+\omega_0+T')N+\tfrac{11}{18}KN\right].\end{aligned}\tag{4.11}$$

Nous avons de plus, en majorant $\nu(T')$ par $\exp \frac{107T'}{103}$:

$$\left|\prod_{i=1}^{N} \nu(T')^{k_{0,i}}\right| \leq \exp\left(\frac{107T'NK}{309}\right). \tag{4.12}$$

Il nous reste enfin à majorer le module du terme exponentiel $\alpha_1^{z\sum \lambda_i \xi_{1,\sigma(i)}}$. Nous remarquons pour cela que

$$\begin{aligned}
\sum \lambda_i \xi_{1,\sigma(i)} &= \sum \lambda_i (r_{\sigma(i)} + \beta s_{\sigma(i)} - \eta) \\
&= \sum \lambda_i (r_{\sigma(i)} + \beta s_{\sigma(i)}) \\
&= \left(\sum \lambda_i r_{\sigma(i)}\right) + \beta \left(\sum \lambda_i s_{\sigma(i)}\right).
\end{aligned}$$

Le Lemme A.2 de l'annexe nous donne alors respectivement les nombres G_1 et G_2, comme majorant de $\left|\sum \lambda_i r_{\sigma(i)}\right|$ et $\left|\sum \lambda_i s_{\sigma(i)}\right|$. Il s'ensuit donc que

$$\left|\sum \lambda_i \xi_{1,j}\right| \leq G_1 + \beta G_2.$$

Or en écrivant l'hypothèse $b_1 |\log \alpha_1| \leq b_2 |\log \alpha_2|$, sous la forme

$$\beta |\log \alpha_1| \leq |\log \alpha_2|,$$

il vient

$$\left|\alpha_1^{\sum \lambda_i \xi_{1,\sigma(i)}}\right| \leq \exp(|z|(G_1 |\log \alpha_1| + G_2 |\log \alpha_2|)). \tag{4.13}$$

La majoration de $|\Delta_I(z)|$ découle alors immédiatement de (4.9) joint à (4.10), (4.11), (4.12), et (4.13).

□

Revenons à l'égalité (4.8), le Lemme 4.7 joint au Lemme 4.8, avec $|z| \leq E$, permettent d'obtenir la majoration suivante de $\log |\Delta_I|$:

$$\begin{aligned}
\log |\Delta_I| \leq\ & -\left(\frac{|I|}{2}\left(\frac{|I|}{K+1} - \frac{K}{2} - 1\right) - TN\right) \log(E) \\
& \times \log(N!) + \frac{KN}{3} \log \frac{Rb_2 + Sb_1}{2K} + \frac{22}{18} KN + \frac{KN}{3} \log \frac{T}{KL} \\
& + \frac{107T'KN}{309} + (\omega T + \omega_0) N \log \frac{\max\{L, T'-1\}}{T'} + (\omega T + \omega_0 + T')N \\
& + \frac{K}{3} \log E + E(G_1 |\log \alpha_1| + G_2 |\log \alpha_2|).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Nous majorons maintenant $|\Delta|$. À partir de (4.5) et (4.14) nous déduisons

$$|\Delta| \leq \left|\alpha_1^{M_1}\right| \left|\alpha_2^{M_2}\right| 2^N \max_I \left\{|\Lambda'|^{N-|I|}|\Delta_I|_E E^{-T_I}\right\}. \tag{4.15}$$

Or la majoration de $|\Delta_I|_E$ fournie par le Lemme 4.8 , pour $|z| \leq E$, ne dépend pas de I. Il nous suffit donc de majorer $|\Lambda'|^{N-|I|}E^{-T_I}$ indépendamment de I, pour aboutir à la majoration de $|\Delta|$ voulue. Passant au logarithme, nous considérons l'expression :

$$-(N-|I|)V - \left(\frac{|I|}{2}\left(\frac{|I|+1}{K+1} - \frac{K}{2} - 1\right)\right)\log E + TN\log E. \tag{4.16}$$

C'est un polynôme du second degré en la variable $|I|$, dont le maximum sur $\mathbb{R}$ est atteint pour

$$\left(\frac{V}{\log E} + \frac{K+2}{4} - \frac{1}{2(K+1)}\right)(K+1).$$

La valeur maximale vaut alors

$$\frac{V^2(K+1)}{2\log E} + \frac{K(K+3)}{4}V + \frac{K^2(K+3)^2\log E}{32(K+1)} - NV + NT\log E. \tag{4.17}$$

Nous majorons cette valeur par $-NV/2 + NT\log E$, le paramètre V devant alors vérifier l'inéquation quadratique

$$\frac{V^2(K+1)}{2\log E} + \frac{K(K+3)}{4}V + \frac{K^2(K+3)^2\log E}{32(K+1)} \leq \frac{NV}{2}, \qquad (4.18).$$

Il s'ensuit que V doit être compris entre les racines

$$V_1 = \frac{\log E}{8}\left(4\left(\frac{1}{K+1} - \frac{K+2}{2}\right) + 2(K+2)(L+1) - \sqrt{\Theta}\right)$$

et

$$V_2 = \frac{\log E}{8}\left(4\left(\frac{1}{K+1} - \frac{K+2}{2}\right) + 2(K+2)(L+1) + \sqrt{\Theta}\right),$$

où

$$\Theta = 4(K+2)^2(L+1)^2 - 16(K+2)(L+1)\left(\frac{K+2}{2} - \frac{1}{K+1}\right).$$

Utilisant alors deux fois l'inégalité

$$\frac{K+2}{2} - \frac{1}{K+1} < \frac{1}{2(L+1)}(K+2)(L+1),$$

pour obtenir les minorations

$$4\left(\frac{1}{K+1}-\frac{K+2}{2}\right)+2(K+2)(L+1)\geq 2(K+2)(L+1)(1-\frac{1}{L+1})$$

et

$$4(K+2)^2(L+1)^2-16(K+2)(L+1)\left(\frac{K+2}{2}-\frac{1}{K+1}\right)\geq 4(K+1)^2(L+1)^2(1-\frac{2}{L+1}),$$

il est aisé de vérifier que pour

$$V=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{(L+1)}+\sqrt{1-\frac{2}{(L+1)}}\right)(K+2)(L+1)\log E,$$

la condition (4.18) est réalisée. Le Lemme 4.5 découle alors immédiatement de (4.15) joint à (4.14) et (4.17).

□

4.5 Conclusion

Nous montrons dans ce paragraphe que l'on a une contradiction entre les hypothèses du Théorème 1.1, en particulier la condition (2), et l'encadrement de $|\Delta|$ fourni par les Lemmes 4.3 et 4.5. En effet, en combinant la majoration et la minoration de $\log|\Delta|$, on constate tout d'abord que les termes en M_i pour $i=1,2$ se simplifient. Nous majorons ensuite $N!$ par $\left(\frac{N}{2}\right)^N$, ce qui est vrai pour $N\geq 6$, et enfin, puisque $E\geq e$, nous obtenons la majoration du terme $V/2$ suivante :

$$\begin{aligned}\frac{V}{2} \quad\leq\quad & D\left[\log(\frac{N}{2})+\frac{K}{3}\log\left(\frac{Rb_2+Sb_1}{2K}\right)+\frac{22K}{18}+\frac{K}{3}\log\left(\frac{T}{KL}\right)\right.\\ & \left.+\omega T+\omega_0+T'+(\omega T+\omega_0)\log\left(\frac{\max\{L,T'-1\}}{T'}\right)+\frac{107T'K}{309}\right]\\ & +T\log E+\log 2+\frac{K\log E}{3}+\frac{G_1}{N}(2Dh(\alpha_1-\log|\alpha_1|+E|\log\alpha_1|)\\ & +\frac{G_2}{N}(2Dh(\alpha_2-\log|\alpha_2|+E|\log\alpha_2|).\end{aligned}$$

D'après la définition de a_1, a_2, G_1 et G_2 nous avons de plus

$$\frac{G_1}{N}(2Dh(\alpha_1-\log|\alpha_1|+E|\log\alpha_1|)\leq\frac{g(L+1)}{2}(R+1)a_1,$$

$$\frac{G_2}{N}(2Dh(\alpha_2 - \log|\alpha_2| + E|\log\alpha_2|) \leq \frac{g(L+1)}{2}(S+1)a_2,$$

où nous rappelons que $g \geq \frac{1}{4} - \frac{N}{12(T+1)(R+1)(S+1)}$. Il nous reste à choisir la valeur de la variable T'. Nous choisissons T' pour que la partie de droite de l'inégalité ci-dessus soit la plus petite possible. Nous avons deux cas, dépendant de la valeur de $\max\{L, T'-1\}$.

Premièrement si $\max\{L, T'-1\} = T'-1 \neq L$, on choisit T' comme étant le minimum en x de la fonction

$$f(x) = x\left(1 + \frac{107K}{309}\right) + (\omega T + \omega_0)\log\frac{x-1}{x}.$$

Or, comme $T' \geq 1$, le minimum est atteint pour $T' = 1$. Ceci contredit $T' > L+1$. On peut donc supposer que $\max\{L, T'-1\} = L$ et l'on choisit alors T' comme le minimum en x de la fonction suivante

$$f(x) = x\left(1 + \frac{107K}{309}\right) - \omega T\log(x),$$

c'est à dire égal à

$$x_0 = \frac{309\omega T}{(309 + 107K)}.$$

Cependant, comme T' doit être entier, on pose

$$T' = \left[\frac{309\omega T}{(309 + 107K)}\right] + 1.$$

On a alors que $T' \geq \frac{309\omega T}{107(K+3)}$, ce qui induit

$$\log\left(\frac{L}{T'}\right) \leq \log\left(\frac{107(K+3)L}{309\omega T}\right).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\frac{V}{2} \quad \leq \quad & D\left[\log(\frac{N}{2}) + \frac{K}{3}\log\left(\frac{Rb_2 + Sb_1}{2K}\right) + \frac{22}{18}K + \frac{107K}{309} + \frac{K}{3}\log\left(\frac{T}{KL}\right) + 1\right.\\ & \left. +(\omega T + \omega_0)\log\left(\frac{107(K+3)L}{309\omega T}\right) + 2\omega T + \omega_0\right]\\ & +T\log E + \frac{K}{3}\log E + \log 2 + g\frac{L+1}{2}((R+1)a_1 + (S+1)a_2),\end{aligned}$$

ce qui contredit la condition (2). L'hypothèse $|\Lambda'| < e^{-V}$, qui a été faite dans le Lemme 4.5, est donc infirmée. Ceci clot la démonstration du Théorème 1.1.

Remarque. Il est possible de raffiner légèrement les résultats ci-cessus, notamment la valeur de V, en utilisant pour T_I la minoration

$$T_I \geq T|I|.$$

Suivant le même raisonnement que précédemment nous obtenons les mêmes résultats mais avec cette fois le paramètre V compris entre

$$V_1 = \frac{\log E}{8}\left(4\left(\frac{1}{K+1} - \frac{K+2}{2}\right) + 2(K+2)(L+1) - \sqrt{\Theta}\right) - T\log E$$

et

$$V_2 = \frac{\log E}{8}\left(4\left(\frac{1}{K+1} - \frac{K+2}{2}\right) + 2(K+2)(L+1) + \sqrt{\Theta}\right) - T\log E,$$

où

$$\Theta = 4(K+2)^2(L+1)^2 - 16(K+2)(L+1)\left(\frac{K+2}{2} - \frac{1}{K+1}\right).$$

Cependant le gain numérique dans le calcul des constantes dans les corollaires est minime et nous n'utiliserons donc pas dans la suite cet encadrement par souci de clarté.

5 Démonstration des corollaires

Dans cette partie nous supposons que α_1 et α_2 sont multiplicativement indépendants. Notre but est d'établir une minoration de $|\Lambda|$ en spécialisant une partie des paramètres intervenant dans l'énoncé du Théorème 1.1, puis d'obtenir, dans le paragraphe 5.4, les énoncés des corollaires, en estimant numériquement la minoration obtenue aux paragraphes précédents. En outre, cette démonstration se divise en deux cas : premièrement le cas où les $rb_2 + sb_1$ ne sont pas tous distincts et deuxièmement celui où ils le sont tous. C'est le deuxième cas qui constitue la partie significative de la démonstration.

Nous rappelons les notations

$$\log E = \lambda \quad \text{et} \quad N = \frac{(K+2)(K+1)(L+1)}{2}.$$

Dans cette partie on pose de plus

$$g = 0.241 \quad , \quad \omega = 0.946, \quad \omega_0 = 20 \quad \text{et} \quad \gamma = 1.309.$$

On rappelle que g, ω et ω_0 désignent respectivement des majorants de $\frac{1}{4} - \frac{N}{12(R+1)(S+1)(T+1)}$, $1 - \frac{N}{2(R+1)(S+1)(T+1)}$ et $\frac{2(R+1)(S+1)(T+1)}{N}$. Nous vérifierons que ces valeurs numériques majorent ces dernières quantités pour les choix de paramètres que nous allons effectuer.

5.1 Choix des paramètres

Nous spécialisons ici les valeurs des paramètres K, L, R, S et T en fonction des données de l'énoncé du Théorème 1.1, à savoir D, λ, a_1 et a_2, ainsi que des paramètres h et E^* intervenant dans les énoncés des corollaires. Nous introduisons aussi deux nouveaux paramètres c_0 et c_1, intervenant respectivement dans K et L; ces deux paramètres sont a priori libres. Si l'on compare avec [9], le paramètre h joue le même rôle, à savoir en gros un majorant de $\log b$, tandis que $\log E^*$, qui n'existait pas dans [9], découle de l'utilisation des dérivations et peut être vu comme un majorant du terme :

$$\omega \log\left(\frac{107(K+3)L}{309\omega T}\right).$$

Nous posons :

$$K = \left[c_0 a_1 a_2 D \log E^* \lambda^{-3}\right], \tag{5.1}$$

$$L = \left[c_1 D h \lambda^{-1}\right], \tag{5.2}$$

$$R_1 = \left[\sqrt{K+1}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\right], \tag{5.3a}$$

$$R_2 = \left[\max\left\{\frac{2^{1/3}}{(K+1)^{1/3}}, \frac{1}{(L+1)^{1/3}}\right\}(K+1)^{2/3}\frac{(2\gamma D \log E^*)^{1/3}3^{1/3}}{g^{1/3}(a_1a_2)^{1/6}}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\right], \tag{5.3b}$$

$$R_3 = \left[(K+1)^{2/3}\frac{(2\gamma D \log E^*)^{1/3}3^{1/3}}{g^{1/3}(a_1a_2)^{1/6}}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\right], \tag{5.3c}$$

$$S_1 = \left[\sqrt{K+1}\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\right], \tag{5.4a}$$

$$S_2 = \left[\max\left\{\frac{2^{1/3}}{(K+1)^{1/3}}, \frac{1}{(L+1)^{1/3}}\right\}(K+1)^{2/3}\frac{(2\gamma D \log E^*)^{1/3}3^{1/3}}{g^{1/3}(a_1a_2)^{1/6}}\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\right], \tag{5.4b}$$

$$S_3 = \left[(K+1)^{2/3}\frac{(2\gamma D \log E^*)^{1/3}3^{1/3}}{g^{1/3}(a_1a_2)^{1/6}}\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\right], \tag{5.4c}$$

$$T_1 = \max\left\{\left[\frac{L+1}{K+1}\right], K\right\}, \tag{5.5a}$$

$$T_2 = \left[\frac{g^{2/3}(L+1)(a_1a_2)^{1/3}(K+1)^{2/3}}{(2\gamma D \log E^*)^{2/3}}\max\left\{\frac{2^{1/3}}{(K+1)^{1/3}}, \frac{1}{(L+1)^{1/3}}\right\}\right], \tag{5.5b}$$

$$T_3 = \left[\frac{g^{2/3}(L+1)(a_1a_2)^{1/3}3^{1/3}(K+1)^{2/3}}{(2\gamma D \log E^*)^{2/3}}\right]. \tag{5.5c}$$

Par la suite nous aurons besoin d'un certain nombre d'hypothèses sur les paramètres c_0, c_1, λ, a_1, a_2, h et E^* pour obtenir les résultats énoncés dans les corollaires 1.2, 1.3 et 1.4.

Nous rappelons tout d'abord que d'après les hypothèses du Théorème 1.1 nous avons

$$\lambda \geq 1, \tag{5.6}$$

$$a_i \geq E|\log \alpha_i| - \log|\alpha_i| + 2Dh(\alpha_i), \qquad (i = 1,2). \tag{5.7}$$

Nous supposons de plus :

$$a_i \geq 3\lambda, \qquad (i = 1,2), \tag{5.8}$$

$$a_i \geq 3, \qquad (i = 1,2), \tag{5.9}$$

$$D \log E^* \geq \lambda, \tag{5.10}$$

$$\log E^* \geq \frac{\lambda}{D} + 2.101 - \omega \log \lambda + \frac{\omega}{3} \log c_0 + \omega \log D, \tag{5.11}$$

$$h \geq 4, \tag{5.12}$$

$$h \geq \frac{265\lambda}{D}, \tag{5.13}$$

$$h \geq 150 \log E^*, \tag{5.14}$$

$$h \geq \log\left(\frac{b_1}{a_2} + \frac{b_2}{a_1}\right) + \log(\lambda) + \frac{\lambda}{D} + 2.72, \tag{5.15}$$

$$5000 \geq c_0 \geq 300, \tag{5.16}$$

$$c_1 \geq 5.1. \tag{5.17}$$

Des hypothèses (5.8), (5.10), (5.13), (5.16) et (5.17) nous pouvons déduire :

$$K + 1 \geq 2700 \quad \text{et} \quad L + 1 \geq 1350. \tag{5.18}$$

Nous obtenons de plus grâce à (5.11) et (5.16) que

$$\log E^* \geq \frac{\lambda}{D} + 3.898 - \omega \log \lambda + \omega \log D.$$

Or la partie de droite de cette inégalité atteint son minimum pour $\lambda = \omega D$, ce qui entraîne

$$\log E^* \geq 4.84. \tag{5.19}$$

Remarque 1. Les hypothèses significatives sont (5.11) et (5.15).

Remarque 2. On notera que les constantes numériques qui interviennent dans les hypothèses ci-dessus ont été élaborées pour induire les trois corollaires du Théorème 1.1, et pourraient être aisément modifiées en vue d'autres applications. Voir par exemple les modifications faites dans [3] à partir de l'article [9].

Il est aussi utile dans la suite de ce paragraphe de connaître une majoration de R et S, et un encadrement de T. Posons

$$\Gamma = \min\left\{\frac{K+1}{2}, L+1\right\},$$

alors d'après (5.3), (5.4) et (5.5) nous avons :

$$R \leq R_1 + R_2 + R_3 \leq \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \left(\sqrt{K+1} + \frac{(2\gamma D \log E^*)^{1/3}(K+1)^{2/3}}{g^{1/3}(a_1 a_2)^{1/6}} \left(3^{1/3} + \frac{1}{\Gamma^{1/3}} \right) \right). \tag{5.20}$$

De manière identique nous obtenons

$$S \leq \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \left(\sqrt{K+1} + \frac{2^{1/3}\gamma^{1/3}(D \log E^*)^{1/3}(K+1)^{2/3}}{g^{1/3}(a_1 a_2)^{1/6}} \left(3^{1/3} + \frac{1}{\Gamma^{1/3}} \right) \right). \tag{5.21}$$

Enfin nous avons

$$T \leq \max \left\{ \frac{L+1}{K+1}, K \right\} + \frac{g^{2/3}(a_1 a_2)^{1/3}(L+1)(K+1)^{2/3}}{2^{2/3}\gamma^{2/3}(D \log E^*)^{2/3}} \left(3^{1/3} + \frac{1}{\Gamma^{1/3}} \right) \tag{5.22}$$

et

$$T \geq \max \left\{ \frac{L+1}{K+1}, K \right\} + \frac{g^{2/3}(a_1 a_2)^{1/3}(L+1)(K+1)^{2/3}}{2^{2/3}\gamma^{2/3}(D \log E^*)^{2/3}} \left(3^{1/3} + \frac{1}{\Gamma^{1/3}} \right) - 3.$$

Or puisque $K \geq 3$, il s'ensuit que

$$T \geq \frac{g^{2/3}(a_1 a_2)^{1/3}(L+1)(K+1)}{2^{2/3}\gamma^{2/3}(D \log E^*)^{2/3}(K+1)^{1/3}} \left(3^{1/3} + \frac{1}{\Gamma^{1/3}} \right).$$

Majorant au dénominateur $(K+1)^{1/3}$ par $(c_0 a_1 a_2 D \log E^*)^{1/3})(1+1/2699)^{1/3})$, grâce à (5.18), on obtient finalement :

$$T \geq \frac{(L+1)(K+1)\lambda}{D \log E^*} \frac{g^{2/3}\left(3^{1/3} + \frac{1}{\Gamma^{1/3}}\right)}{2^{2/3}\gamma^{2/3}(1+1/2699)^{1/3}}. \tag{5.23}$$

5.2 Minoration de $|\Lambda|$ si les $rb_2 + sb_1$ ne sont pas tous distincts

Nous supposons ici qu'il existe deux entiers r et s, avec

$$0 < |r| \leq R, \qquad 0 < |s| \leq S, \qquad rb_2 + sb_1 = 0.$$

On pourra bien sûr supposer sans restriction que r et s sont premiers entre eux. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} |\Lambda| &= |b_1 \log \alpha_1 - b_2 \log \alpha_2| \\ &= |b_1 \log \alpha_1 + \frac{sb_1}{r} \log \alpha_2| \\ &= \frac{|b_1|}{|r|} |r \log \alpha_1 + s \log \alpha_2|. \end{aligned}$$

Or, d'après l'égalité $rb_2 + sb_1 = 0$, et comme r et s sont premiers entre eux, on a soit $|r| \le b_1$, soit $|s| \le b_2$. Donc, comme r et s jouent des rôles symétriques, on peut supposer $|r| \le b_1$. Il s'ensuit que

$$|\Lambda| \ge |r \log \alpha_1 + s \log \alpha_2|. \tag{5.24}$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité de Liouville, énoncée au Lemme 4.4, que nous appliquons au polynôme

$$Q(X_1, X_2) = X_1^{|r|} X_2^{|s|} - 1,$$

et aux points $\tilde{\alpha_1} = \alpha_1^{signe(r)}$ et $\tilde{\alpha_2} = \alpha_2^{signe(s)}$. De plus, puisque $\Lambda \neq 0$, on a $Q(\tilde{\alpha_1}, \tilde{\alpha_2}) = \exp(\frac{r}{b_1}\Lambda) - 1 \neq 0$. Le lemme nous fournit alors la minoration

$$|Q(\tilde{\alpha_1}, \tilde{\alpha_2})| \ge 2^{-D+1} \exp(-D(|r|h(\alpha_1) + |s|h(\alpha_2))). \tag{5.25}$$

On suppose de plus que $|r \log \alpha_1 + s \log \alpha_2| \le 1/2$ (dans le cas contraire $|\Lambda| \ge 1/2$). On a alors

$$|r \log \alpha_1 + s \log \alpha_2| \ge \frac{1}{2} |Q(\tilde{\alpha_1}, \tilde{\alpha_2})|,$$

ce qui entraîne d'après (5.24) et (5.25)

$$\log |\Lambda| \ge -D \log 2 - RDh(\alpha_1) - SDh(\alpha_2).$$

Or, d'après (5.7), nous avons $a_i \ge 2Dh(\alpha_i)$, $i = 1, 2$. En utilisant les majorations de R et S faites en (5.20) et (5.21), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\log |\Lambda| \;\; &\ge \;\; -D \log 2 - \left(\sqrt{(K+1)} - \frac{2^{1/3}\gamma^{1/3}(K+1)^{2/3}(D \log E^*)^{1/3}}{(a_1 a_2)^{1/6} g^{1/3}} \left(3^{1/3} + \frac{1}{\Gamma^{1/3}} \right) \right) \\
&\quad \times \left(\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \frac{a_2}{2} + \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \frac{a_2}{2} \right) \\
&\ge \;\; -D \log 2 - (K+1) \left(\frac{\lambda}{\sqrt{D \log E^* c_0 \lambda^{-1}}} + \frac{2^{1/3}\gamma^{1/3}\lambda}{c_0^{1/3} g^{1/3}} \left(3^{1/3} + \frac{1}{\Gamma^{1/3}} \right) \right).
\end{aligned}$$

L'hypothèse (5.10) implique alors

$$\log |\Lambda| \ge -(K+1)\lambda \left(\frac{D \log 2}{(K+1)\lambda} + \frac{1}{\sqrt{c_0}} + \frac{2^{1/3}\gamma^{1/3}}{c_0^{1/3} g^{1/3}} \left(3^{1/3} + \frac{1}{\Gamma^{1/3}} \right) \right).$$

Nous avons donc grossièrement, d'après (5.7), (5.16), (5.18) et (5.19), la minoration

$$\log |\Lambda| \ge -(K+1)\lambda. \tag{5.26}$$

5.3 Minoration de $|\Lambda|$ lorsque les $rb_1 + sb_2$ sont tous distincts

Nous supposons pour la suite que les entiers $rb_2 + sb_1$ sont deux à deux distincts, il s'agit du cas essentiel de la démonstration.

5.3.1 Vérification de la condition (1) du Théorème 1.1

Puisque tous les nombres $rb_1 + sb_2$ sont distincts, les conditions provenant de l'hypothèse (1) du Théorème 1.1 s'écrivent alors

$$T_1 \geq K, \tag{5.27a}$$

$$(R_1+1)(S_1+1) \geq \max\left\{K+1, \frac{L+1}{T_1+1}\right\} = K+1, \tag{5.27b}$$

$$(R_2+1)(S_2+1) \geq \max\left\{\frac{K^2+1}{T_2+1}, \frac{2KL+1}{T_2+1}\right\}, \tag{5.27c}$$

$$(R_3+1)(S_3+1) \geq \frac{3K^2L+1}{T_3+1}, \tag{5.27d}$$

Ces inégalités sont clairement vérifiées compte tenu des choix faits pour les différents paramètres. Notons que dans $(5.27b)$ on a $K+1 \geq (T_1+1)(L+1)$ grâce à $(5.7a)$.

5.3.2 Estimations

Nous nous proposons d'estimer numériquement les quantités $1/4 - 1/(12(R+1)(S+1)(T+1))$, $1 - 1/(2(R+1)(S+1)T)$ et $2T(R+1)(S+1)/N$ qui interviennent naturellement dans l'hypothèse (2) du Théorème 1.1.

Lemme 5.1. *Sous la condition* (1) *du Théorème 1.1, nous avons les majorations :*

$$\frac{1}{4} - \frac{N}{12(R+1)(S+1)(T+1)} \leq g = 0.241,$$

$$1 - \frac{N}{2(R+1)(S+1)(T+1)} \leq \omega = 0.946,$$

$$\frac{2(R+1)(S+1)(T+1)}{N} \leq \omega_0 = 20.$$

Preuve. Pour obtenir les majorations précédentes, nous allons majorer le quotient $(R+1)(S+1)(T+1)/N$. Nous commençons par minorer N par $(K+1)^2(L+1)/2$. Puis nous majorons séparément les trois expressions $(R+1)/(K+1)^{2/3}$, $(S+1)/(K+1)^{2/3}$ et $(T+1)/((L+1)(K+1)^{2/3})$ dont les estimations sont simples grâce aux inégalités (5.20) à (5.22).

D'après (5.20) nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{R+1}{(K+1)^{2/3}} &\leq \frac{1}{(K+1)^{2/3}} + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\left(\frac{1}{(K+1)^{1/6}} + \frac{(2\gamma D\log E^*)^{1/3}}{g^{1/3}(a_1a_2)^{1/6}}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})\right) \\
&\leq \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\frac{(2\gamma D\log E^*)^{1/3}}{g^{1/3}(a_1a_2)^{1/6}}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}) \\
&\quad \times\left(1+\frac{(a_1a_2)^{1/6}g^{1/3}}{(2\gamma D\log E^*)^{1/3}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})}\left(\frac{\sqrt{a_1/a_2}}{(K+1)^{2/3}}+\frac{1}{(K+1)^{1/6}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Majorons alors les termes résiduels dans la partie de droite de l'inégalité ci-dessus. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{(a_1a_2)^{1/6}\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}g^{1/3}}{(2\gamma D\log E^*)^{1/3}(K+1)^{2/3}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})} &\leq \frac{a_1^{2/3}g^{1/3}\lambda}{a_1^{2/3}a_2D\log E^*(2\gamma)^{1/3}c_0^{2/3}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})} \\
&\leq \frac{g^{1/3}}{3\cdot 4.84(2\gamma)^{1/3}c_0^{2/3}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})} \\
&\leq \frac{0.0311c_0^{-2/3}}{3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}},
\end{aligned}$$

grâce à (5.8) et (5.19).

De manière similaire nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{(a_1a_2)^{1/6}g^{1/3}}{(2\gamma D\log E^*)^{1/3}(K+1)^{1/6}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})} &\leq \frac{g^{1/3}\lambda^{1/2}}{(2\gamma)^{1/3}c_0^{1/6}(D\log E^*)^{1/2}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})} \\
&\leq \frac{(a_1a_2)^{1/6}g^{1/3}}{(2\gamma D\log E^*)^{1/3}(K+1)^{1/6}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})} \\
&\leq \frac{g^{1/3}}{(2\gamma)^{1/3}c_0^{1/6}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})} \\
&\leq \frac{0.452c_0^{-1/6}}{3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}},
\end{aligned}$$

grâce à (5.10). De ces deux majorations nous déduisons

$$\begin{aligned}\frac{R+1}{(K+1)^{2/3}} &\leq \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\frac{(2\gamma D\log E^*)^{1/3}}{g^{1/3}(a_1a_2)^{1/6}}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}) \\ &\quad\times\left(1+\frac{1}{3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}}\left(\frac{0.452}{c_0^{1/6}}+\frac{0.0311}{c_0^{2/3}}\right)\right). \end{aligned}\tag{5.28}$$

De la même manière par symétrie de R et S, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{S+1}{(K+1)^{2/3}} &\leq \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\frac{(2\gamma D\log E^*)^{1/3}}{g^{1/3}(a_1a_2)^{1/6}}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}) \\ &\quad\times\left(1+\frac{1}{3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}}\left(\frac{0.452}{c_0^{1/6}}+\frac{0.0311}{c_0^{2/3}}\right)\right). \end{aligned}\tag{5.29}$$

Enfin d'après (5.22) nous avons

$$\begin{aligned}\frac{T+1}{(L+1)(K+1)^{2/3}} &\leq \frac{\max\left\{\frac{L+1}{K+1}+1,K+1\right\}}{(L+1)(K+1)^{2/3}}+\frac{g^{2/3}(a_1a_2)^{1/3}}{(2\gamma D\log E^*)^{2/3}}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}) \\ &\leq \frac{g^{2/3}(a_1a_2)^{1/3}}{(2\gamma D\log E^*)^{2/3}}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}) \\ &\quad\times\left(1+\frac{(2\gamma D\log E^*)^{2/3}}{g^{2/3}(a_1a_2)^{1/3}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})}\frac{\max\left\{\frac{L+1}{K+1}+1,K+1\right\}}{(L+1)(K+1)^{2/3}}\right). \end{aligned}$$

Nous majorons maintenant, dans la partie de droite de l'inégalité ci-dessus, l'expression contenant le terme $\max\{K+1,\frac{L+1}{K+1}+1\}$. Nous distinguons deux cas selon la valeur du maximum entre $\frac{L+1}{K+1}+1$ et $K+1$. Lorsque ce maximum est atteint par le terme $\frac{L+1}{K+1}+1$, nous écrivons

$$\begin{aligned}&\frac{(2\gamma D\log E^*)^{2/3}}{g^{2/3}(a_1a_2)^{1/3}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})}\left(\frac{1}{(L+1)(K+1)^{2/3}}+\frac{1}{(K+1)^{5/3}}\right) \\ &\qquad\leq \frac{(2\gamma)^{2/3}\lambda^2}{g^{2/3}a_1a_2(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})c_0^{2/3}}\left(\frac{1}{L+1}+\frac{1}{K+1}\right) \\ &\qquad\leq \frac{7\cdot 10^{-4}}{(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})c_0^{2/3}},\end{aligned}$$

d'après (5.8) et (5.18). Dans l'autre cas, où le maximum est $K+1$, nous obtenons, grâce à (5.14), (5.17) et (5.18), que

$$\begin{aligned}\frac{(2\gamma D\log E^*)^{2/3}}{g^{2/3}(a_1a_2)^{1/3}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})}(K+1) &\leq \frac{(2\gamma)^{2/3}\log E^* c_0^{1/3}(1+\frac{1}{K})^{1/3}}{g^{2/3}c_1h(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})}\\ &\leq \frac{(2\gamma)^{2/3}c_0^{1/3}(1+\frac{1}{2159})^{1/3}}{g^{2/3}5.1\cdot 150(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})}\\ &\leq \frac{6.42\cdot 10^{-3}c_0^{1/3}}{3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}}.\end{aligned}$$

On déduit alors des deux majorations ci-dessus que

$$\frac{T+1}{(L+1)(K+1)^{2/3}} \leq \frac{g^{2/3}(a_1a_2)^{1/3}}{(2\gamma D\log E^*)^{2/3}}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})\left(1+\frac{6.42\cdot 10^{-3}c_0^{1/3}}{3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}}\right). \tag{5.30}$$

Majorons alors $(R+1)(S+1)(T+1)/N$ à partir de (5.28), (5.29) et (5.30). Ceci nous donne la majoration

$$\begin{aligned}\frac{(R+1)(S+1)(T+1)}{N} &\leq 2\left(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}\right)^3\left(1+\frac{\frac{0.452}{c_0^{1/6}}+\frac{0.0311}{c_0^{2/3}}}{3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}}\right)^2\\ &\quad\times\left(1+\frac{6.42\cdot 10^{-3}c_0^{1/3}}{3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}}\right).\end{aligned} \tag{5.31}$$

On vérifie aisément que le membre de droite de (5.31) est une fonction décroissante de $\Gamma \geq 1$, pour des valeurs fixées de c_0 comprises entre 300 et 5000. Minorant alors Γ par 1350 grâce à (5.18), nous obtenons les majorations annoncées dans le Lemme 5.1. □

5.3.3 Étude de la condition (2)

Dans cette partie nous allons montrer que, sous les conditions $(5.6)-(5.17)$ et (5.39) (page 66), la condition (2) du Théorème 1.1 est vérifiée. En premier lieu nous majorons $\log\frac{N}{2} \leq$

$2\log(\frac{K+2}{2})+\log(L+1)$. Il suffit alors de vérifier la condition

$$\begin{aligned}\frac{V}{2} \quad > \quad & \frac{DK}{3}\left(\log B+\frac{1454}{309}+\frac{6}{K}\log\frac{K+2}{2}+\log\frac{T}{KL}+\frac{\lambda}{}D\right) \\ & +DT\left(\frac{\lambda}{D}+2\omega+\omega\log\frac{107(K+3)L}{309\omega T}\right) \\ & +\frac{g(L+1)}{2}((R+1)a_1+(S+1)a_2) \\ & +D\omega_0+D\omega_0\log\frac{107(K+3)L}{309\omega T}+\log 2+D+D\log(L+1),\end{aligned} \tag{2'}$$

où nous avons posé

$$B=\frac{Rb_2+Sb_1}{2K}.$$

Afin de vérifier cette dernière condition, nous majorons préalablement, avec les lemmes suivants, certains groupements de termes contenus dans la partie de droite de cette inégalité.

Lemme 5.2. *Sous les hypothèses* $(5.8)-(5.18)$*, et plus spécifiquement la minoration de* h (5.15)*, nous avons la majoration*

$$\log B+\frac{1454}{309}+\frac{\lambda}{D}+\frac{6}{K}\log\left(\frac{K+2}{2}\right)+\log\left(\frac{T}{KL}\right)\leq h. \tag{5.32}$$

Preuve. Regardons le terme R/K, nous déduisons de (5.1) et (5.20) que

$$\begin{aligned}\frac{R}{K}=\frac{R}{K+1}(1+\frac{1}{K}) \quad & \leq \quad \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}(1+\frac{1}{K})\left(\frac{1}{\sqrt{K+1}}+\frac{(2\gamma D\log E^*)^{1/3}\left(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}\right)}{(K+1)^{1/3}g^{1/3}(a_1a_2)^{1/6}}\right) \\ & \leq \quad \frac{\lambda}{a_1}(1+\frac{1}{K})\left(\frac{1}{\sqrt{c_0D\log E^*\lambda^{-1}}}+\frac{(2\gamma)^{1/3}}{c_0^{1/3}g^{1/3}}\left(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}\right)\right).\end{aligned}$$

Les hypothèses (5.10), (5.16) et (5.18) impliquent alors :

$$\frac{R}{K} \quad \leq \quad 0.566\frac{\lambda}{a_1}.$$

Par symétrie nous obtenons

$$\frac{S}{K}\leq 0.566\frac{\lambda}{a_2}.$$

Il s'ensuit que

$$\log B \leq \log\left(\frac{b_2}{a_1}+\frac{b_1}{a_2}\right)+\log\lambda - 1.26, \tag{5.33}$$

Pour montrer l'inégalité (5.32), nous remarquons tout d'abord, d'après (5.18), que

$$\frac{6}{K}\log\frac{K+2}{2} \leq 0.0161. \tag{5.34}$$

Nous majorons à présent le terme $T/(KL)$. Grâce à (5.22) nous avons la majoration :

$$\frac{T}{KL} \leq (1+\frac{1}{K+1})(1+\frac{1}{L+1})\left(\max\left\{\frac{1}{(K+1)^2},\frac{1}{L+1}\right\}+\frac{g^{2/3}(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})}{(2\gamma)^{2/3}c_0^{1/3}\lambda}\right),$$

ce qui nous donne, en utilisant (5.6), (5.16) et (5.18), la majoration

$$\frac{T}{KL} \leq 0.475. \tag{5.35}$$

L'inégalité (5.32) découle alors facilement de (5.33), (5.34), (5.35) et (5.15).

□

Nous nous proposons à présent de majorer le terme qui est en facteur de DT dans l'inégalité $(2')$; à savoir $\frac{\lambda}{D}+\omega(2+\log(107(K+3)L/(309\omega T)))$.

Lemme 5.3. *Nous avons la majoration*

$$\frac{\lambda}{D}+2\omega+\omega\log\left(\frac{107(K+3)L}{309\omega T}\right) \leq \gamma\log E^*.$$

Preuve. Nous commençons par donner une majoration de $(K+3)L/T$. D'après la minoration (5.23) de T ainsi que (5.16) et (5.18), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{(K+3)L}{T} &\leq \frac{K+3}{K+1}\frac{(K+1)(L+1)}{T}\\
&\leq \frac{K+3}{K+1}\frac{D\log E^*}{\lambda}\frac{(2\gamma)^{2/3}c_0^{1/3}(1+\frac{1}{2159})^{1/3}}{(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}})g^{2/3}}\\
&\leq \frac{D\log E^*}{\lambda}\frac{(K+3)(1+\frac{1}{2159})^{1/3}(2\gamma)^{2/3}c_0^{1/3}}{(K+1)3^{1/3}g^{2/3}}\\
&\leq 3.404c_0^{1/3}\frac{D\log E^*}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Nous déduisons de cette majoration que

$$\frac{\lambda}{D}+2\omega+\omega\log\left(\frac{107(K+3)L}{309\omega T}\right)\leq\frac{\lambda}{D}+2.101+\frac{\omega}{3}\log c_0-\omega\log\lambda+\omega\log D+\omega\log\log E^*$$
$$\leq\left(1+\omega\frac{\log\log E^*}{\log E^*}\right)\log E^*,\tag{5.36}$$

grâce à la minoration (5.11) de $\log E^*$. Cependant nous savons que $\log E^*\geq 4.84$, d'après (5.19). Il s'ensuit que

$$\omega\frac{\log\log E^*}{\log E^*}\leq 0.309.$$

L'inégalité ci-dessus jointe à (5.36) établit alors le résultat du Lemme 5.3. □

Nous poursuivons les regroupements de termes dans $(2')$, et établissons maintenant le résultat suivant.

Lemme 5.4. *Nous avons la majoration*

$$T\left(\lambda+D\omega\left(2+\log\frac{107(K+3)L}{309\omega T}\right)\right)+\frac{g(L+1)}{2}((R+1)a_1+(S+1)a_2)\leq$$
$$\Phi+\gamma D\log E^*\frac{L+1}{K+1}$$

avec

$$\begin{aligned}\Phi &= D\gamma\log E^*K+g(L+1)\sqrt{(K+1)a_1a_2}+\frac{g(L+1)(a_1+a_2)}{2}\\ &\quad+\frac{3g^{2/3}(\gamma a_1a_2D\log E^*)^{1/3}}{2^{2/3}}(L+1)(K+1)^{2/3}\left(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}\right).\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 5.3 nous pouvons nous ramener à majorer l'expression

$$DT\gamma\log E^*+\frac{g(L+1)}{2}((R+1)a_1+(S+1)a_2).$$

Le Lemme 5.4 découle alors des majorations (5.20), (5.21) et (5.22) de R, S et T.

□

Posons maintenant

$$\theta=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{L+1}+\sqrt{1-\frac{2}{L+1}}\right),$$

de telle sorte que

$$\frac{V}{2} = \theta(K+2)(L+1)\lambda.$$

Afin de vérifier $(2')$ il suffit, d'après les Lemmes 5.2 et 5.4, de montrer l'inégalité

$$\theta(K+1)(L+1)\lambda \geq \frac{D(K+1)h}{3} + \Phi + \Omega, \tag{5.37}$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega &= -\theta(L+1)\lambda - \frac{Dh}{3} + D\omega_0\left(1 + \log\frac{107(K+3)L}{309\omega T}\right) \\ &\quad + D\log(L+1) + D\gamma\log E^*\frac{L+1}{K+1} + \log 2 + D. \end{aligned}$$

A cet effet nous allons établir les inégalités

$$\theta(K+1)(L+1)\lambda \geq \frac{DKh}{3} + \Phi \tag{5.38}$$

et $\Omega < 0$
qui impliquent clairement (5.37).

Majorons en premier lieu l'expression Ω. Posons

$$\Omega_1 = -\theta(L+1)\lambda + \log 2 + D + \frac{\gamma(L+1)\lambda}{2700} + D\log(c_1 h) + 8\cdot 10^{-4}D,$$

$$\Omega_2 = -\frac{Dh}{3} + D\omega_0\left(1 + \log\frac{107(K+3)L}{309\omega T}\right) + D\log D.$$

Les majorations $\log(L+1) \leq \log D + \log(c_1 h) + 8\cdot 10^{-4}$ et

$$\frac{D\gamma\log E^*(L+1)}{K+1} \leq \frac{\gamma(L+1)\lambda^3}{c_0 a_1 a_2} \leq \frac{\gamma(L+1)\lambda}{2700},$$

obtenues grâce à (5.1), (5.2), (5.8) et (5.16), impliquent alors $\Omega \leq \Omega_1 + \Omega_2$. Nous majorons à présent Ω_1 et Ω_2. De la minoration $L+1 \geq 1350$, fournie par (5.18), nous déduisons $\theta \geq 0.249$. Comme $0.249 \geq \frac{\gamma}{2700}$, la minoration $L+1 \geq Dc_1 h\lambda^{-1}$, obtenue grâce à (5.2), implique que

$$\Omega_1 \leq ((-0.249 + 5\cdot 10^{-4})c_1 h + \log 2 + 1.0008 + \log(c_1 h))D \leq 0,$$

la denière inégalité étant obtenue grâce aux conditions (5.12) et (5.17).

Majorons à présent l'expression Ω_2. Utilisant les estimations déjà rencontrées dans le Lemme 5.3, on majore

$$\begin{aligned}\Omega_2 &\leq -\frac{Dh}{3} + D\omega_0\left(1 + 0.22 + \frac{\log c_0}{3} + \log\lambda + \log D + \log\log E^*\right) + D\log D \\ &\leq -\frac{Dh}{3} + D(\omega_0+1)\left(1.22 + \frac{\log c_0}{3} + \log\lambda + \log D + \log\log E^*\right).\end{aligned}$$

Or la condition (5.11) implique alors que

$$\log E^* \geq \left(1.22 + \frac{\log c_0}{3} - \log\lambda + \log D\right)\omega,$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}\Omega_2 &\leq -\frac{Dh}{3} + \frac{D(\omega_0+1)}{\omega}(\log E^* + \log\log E^*) \\ &\leq -\frac{Dh}{3} + \frac{D(\omega_0+1)}{\omega}\gamma\log E^* \\ &\leq 0,\end{aligned}$$

la dernière majoration provenant de l'hypothèse (5.14). La condition (5.37) est donc vérifiée si l'inégalité (5.38) l'est. Minorant $L+1 \geq c_1 Dh\lambda^{-1}$, à partir de (5.2), il suffit donc de vérifier la condition

$$\theta - \frac{1}{3c_1} - \frac{\Phi}{(K+1)(L+1)\lambda} \geq 0.$$

Or par définition de Φ, on a

$$\begin{aligned}\frac{\Phi}{(K+1)(L+1)\lambda} &\leq \frac{\gamma\log E^*}{c_1 h} + \frac{g}{\sqrt{c_0 D\log E^*\lambda^{-1}}} + \frac{g\lambda^2}{c_0\min\{a_1,a_2\}D\log E^*} \\ &\quad + \frac{3\gamma^{1/3}g^{2/3}}{2^{2/3}c_0^{1/3}}\left(\frac{1}{(\min\{c_1Dh\lambda^{-1}, c_0a_1a_2D\log E^*\lambda^{-3}/2\})^{1/3}} + 3^{1/3}\right).\end{aligned}$$

Minorant alors dans θ le paramètre c_1 par 5.1, toujours d'après (5.17), nous en déduisons que

(5.38) est vérifiée si

$$\begin{aligned}\frac{1}{3c_1}+\frac{\gamma\log E^*}{hc_1} \quad \leq \quad & \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{5.1Dh\lambda^{-1}}+\sqrt{1-\frac{2}{5.1Dh\lambda^{-1}}}\right)\\ & -\frac{g}{\sqrt{c_0(D\log E^*)\lambda^{-1}}}-\frac{g}{c_0\min\{a_1,a_2\}D\log E^*\lambda^{-2}}\\ & -\frac{3\gamma^{1/3}g^{2/3}}{2^{2/3}c_0^{1/3}}\left(\frac{1}{(\min\{5.1Dh\lambda^{-1},c_0a_1a_2D\log E^*\lambda^{-3}/2\})^{1/3}}+3^{1/3}\right).\end{aligned} \tag{5.39}$$

Nous supposerons donc dans la suite que (5.39) est vérifiée, ce qui assurera que la condition $(2')$ est réalisée.

5.4 Minoration de $|\Lambda|$

Nous venons de montrer que les hypothèses (1) et (2) du Théorème 1.1 étaient vérifiées, la conclusion de ce théorème implique alors la minoration

$$\log|\Lambda'| \geq -2\theta(K+2)(L+1)\lambda. \tag{5.40}$$

Nous voulons maintenant obtenir une minoration de $\log|\Lambda|$, plus précisément nous montrons que

$$\log|\Lambda| \geq -2\theta(1+2.10^{-5})(K+2)(L+1)\lambda. \tag{5.41}$$

Procédons par l'absurde en supposant

$$\log|\Lambda| < -2\theta(1+2.10^{-5})(K+2)(L+1)\lambda. \tag{5.42}$$

Nous allons maintenant majorer $|\Lambda'|$, afin d'obtenir une contradiction. Pour cela montrons tout d'abord

$$\log\max\left\{\frac{LR}{2},\frac{LS}{2}\right\} \leq 2.10^{-5}\theta(K+2)(L+1)\lambda. \tag{5.42}$$

D'après (5.20) nous avons

$$LR \quad \leq \quad \frac{L(K+1)\lambda}{a_2c_0^{1/3}}\left(\frac{1}{c_0^{1/6}}+\frac{2^{1/3}\gamma^{1/3}}{g^{1/3}}\left(3^{1/3}+\frac{1}{\Gamma^{1/3}}\right)\right).$$

Il s'ensuit, en utilisant les inégalités (5.8), (5.16) et (5.18), que

$$LR \leq 0.2(L+1)(K+1)\lambda \leq \theta(K+2)(L+1). \tag{5.44}$$

Or d'après (5.18) nous avons $\theta(K+2)(L+1)\lambda \geq 900000$, ce qui entraîne

$$\log \frac{LR}{2} \leq 2.10^{-5}\theta(L+1)(K+2)\lambda.$$

Par symétrie de R et S nous obtenons la même majoration pour $\log(LS/2)$, ce qui établit (5.43). Il s'ensuit d'abord que

$$\log\max\left\{\frac{LR}{2b_1}, \frac{LS}{2b_2}\right\} \leq 2.10^{-5}\theta(K+2)(L+1)\lambda,$$

puis que

$$\log\max\left\{\frac{LRe^{LR|\Lambda|/(2b_1)}}{2b_1}, \frac{LSe^{LS|\Lambda|/(2b_2)}}{2b_2}\right\} \leq 2.10^{-5}\theta(K+2)(L+1)\lambda.$$

Dans cette dernière majoration nous avons négligé le terme provenant de $\exp(LR\Lambda/(2b_2))$. En effet d'après (5.42) et (5.44), joint au fait que $\theta(K+2)(L+1) \geq 900000$, nous avons

$$\frac{LR\Lambda}{2b_2} \leq 450000e^{-450000}.$$

Nous déduisons alors de (5.42) la majoration

$$\log|\Lambda'| < 2\theta(K+2)(L+1)\lambda,$$

qui contredit la minoration (5.40).

5.5 Obtention des valeurs numériques des corollaires

Nous allons continuer la spécialisation des paramètres pour obtenir les valeurs numériques contenues dans les énoncés des Corollaires 1.2, 1.3 et 1.4. Les constantes qui apparaissent dans ces corollaires proviennent toutes de l'inégalité suivante

$$\log|\Lambda| \geq -\frac{1}{2}(1+\frac{2}{K})(1+\frac{1}{L})(1+2.10^{-5})c_0c_1D^2ha_1a_2\log E^*\lambda^{-3}, \qquad (5.44)$$

obtenue grâce à (5.41), (5.1) et (5.2). Nous remarquons que la minoration de $|\Lambda|$ obtenue en (5.26) est bien meilleure que celle donnée ci-dessus en (5.44), puisque $L \geq 2$. Nous ne considérerons donc, dans les applications numériques, que la minoration (5.44).

Pour obtenir les corollaires 1.2, 1.3 et 1.4 il nous faut maintenant fixer convenablement les paramètres c_0, c_1, E, h, E^* et a_i, $(i=1,2)$, vérifiant les hypothèses (5.7) à (5.17) et la condition (5.39). L'origine des choix que nous allons effectuer est la suivante. On fixe tout d'abord a_1, a_2, h et E^* tout en gardant libres les paramètres c_0, c_1 et E (resp. c_0 et c_1) pour les Corollaires 1.2 et 1.3 (resp. le Corollaire 1.4). Une expérimentation numérique permet ensuite de les déterminer afin d'obtenir les constantes numériques 9400, 7200 et 8550 aussi petites que nous le pouvons en regard de la méthode utilisée.

Pour le Corollaire 1.2, on choisit

$$E = 6.6, \quad c_0 = 317, \quad c_1 = 5.378, \quad a_i = (E+2)D\log A_i, \quad (i=1,2),$$

$$\log E^* = 3.317 + \frac{1.888}{D} + 0.946\log D,$$

$$h = \max\left\{\log b + 3.1, \frac{1000}{D}, 498 + \frac{284}{D} + 142\log D\right\}.$$

Un calcul immédiat montre alors que h vérifie les conditions (5.12), (5.13) et (5.14). L'hypothèse (5.15) est quant à elle aisément vérifiée en remarquant

$$\log\left(\frac{b_2}{a_1} + \frac{b_1}{a_2}\right) = \log b - \log(E+2).$$

De manière immédiate les conditions $(5.8) - (5.11)$ sont réalisées. La condition (5.7) découle quant à elle de la majoration

$$E|\log\alpha_i| - \log|\alpha_i| + 2Dh(\alpha_i) \leq E|\log\alpha_i| + 2Dh(\alpha_i) \leq (E+2)D\log A_i, \quad (i=1,2).$$

Il ne nous reste donc plus qu'à vérifier que (5.39) est réalisée. Pour cela nous remarquons que $a_i \geq 8.6$, $(i=1,2)$, et que $\log E^* \geq 4.84$ d'après (5.19). Majorant alors $\frac{\log E^*}{h} \leq \frac{1}{150}$, grâce à (5.14) et $\frac{1}{Dh} \leq \frac{1}{1000}$, grâce au choix précédent de h, il suffit alors de substituer, dans (5.39), c_0, c_1 et E aux choix numériques ci-dessus.

La preuve du Corollaire 1.3 est tout à fait similaire. On peut supposer sans restriction que $\log\alpha_1$ et $\log\alpha_2$ sont deux réels > 0. On choisit alors

$$E = 5.5, \quad c_0 = 313, \quad c_1 = 5.386, \quad a_i = (E+1)D\log A_i, \quad (i=1,2),$$

$$\log E^* = 3.409 + \frac{1.705}{D} + 0.946\log D,$$

$$h = \max\left\{\log b + 3.1, \frac{1000}{D}, 512 + \frac{256}{D} + 142\log D\right\}.$$

Nous avons cette fois l'égalité

$$\log\left(\frac{b_2}{a_1}+\frac{b_1}{a_2}\right)=\log b-\log(E+1),$$

qui permet de vérifier (5.15). La condition (5.7) découle cette fois-ci de la majoration

$$E|\log\alpha_i|-\log|\alpha_i|+2Dh(\alpha_i)\leq(E-1)|\log\alpha_i|+2Dh(\alpha_i)\leq(E+1)D\log A_i,\quad(i=1,2)$$

obtenue grâce à la majoration $\log\alpha_i\leq Dh(\alpha_i)\leq D\log A_i$ provenant de la définition de A_i, $(i=1,2)$. Les mêmes arguments que précédemment mènent alors au Corollaire 1.3.

Dans le cadre du Corollaire 1.4, on choisit

$$c_0=368,\quad c_1=5.141,\quad a_i=3D\log A_i,\quad(i=1,2),$$

$$E=1+\min\left\{\frac{D\log A_1}{\log\alpha_1},\frac{D\log A_2}{\log\alpha_2}\right\},$$

$$\log E^*=\max\left\{\frac{\lambda}{D},\ \frac{\lambda}{D}+0.946\log\frac{D}{\log\lambda}+3.965\right\},$$

$$h=\max\left\{\log b+\log\lambda+\frac{\lambda}{D}+1.622,150\log E^*,\frac{500\lambda}{D}\right\}.$$

La minoration $a_i\geq 3\lambda$ se traduit par l'hypothèse $E\leq\min\{A_1^D,A_2^D\}$, tandis que l'on majore plus finement

$$\begin{aligned}(E-1)\log\alpha_i+2Dh(\alpha_i)&=\min\left\{\frac{D\log A_1}{\log\alpha_1},\frac{D\log A_2}{\log\alpha_2}\right\}\log\alpha_i+2Dh(\alpha_i)\\&\leq 3D\log A_i=a_i\end{aligned}$$

pour établir (5.7). On vérifie facilement les conditions (5.12), (5.13), (5.14) et (5.15) par le choix même de h. Pour vérifier la condition (5.39) il suffit, comme dans les deux cas précédents, de minorer $a_i\geq 3\lambda$, $\log E^*\geq 4.84$ grâce à (5.8) et (5.19), et avec le choix de h de majorer $\frac{\log E^*}{h}\leq\frac{1}{150}$ et $\frac{\lambda}{Dh}\leq\frac{1}{1000}$. Substituant c_0 et c_1 par leurs valeurs nous obtenons le résultat souhaité.

Les trois corollaires sont ainsi démontrés.

Remarque 1. Lorque D est fixé, les valeurs choisies pour E, c_0, c_1 ne sont pas nécessairement optimales. Un étude plus fine peut éventuellement améliorer le résultat des corollaires.

Remarque 2. La minoration (5.44) permet de justifier a posteriori le choix de V. En effet V doit être solution de l'inéquation quadratique (4.18). Ainsi V doit être compris entre les valeurs V_1 et V_2 (explicitées page 48), qui sont respectivement de la forme $x_1(K+2)(L+1)\lambda$ et $x_2(K+2)(L+1)\lambda$. Sans perte de généralité on peut donc écrire V sous la forme

$$V = x(K+2)(L+1)\lambda, \quad \text{avec } x_1 \leq x \leq x_2.$$

La condition (5.39) s'écrit alors, pour E, E^*, D, a_1, a_2 et h fixés,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3c_1} + \frac{\gamma \log E^*}{hc_1} \quad &\leq \quad \frac{x}{2} - \frac{g}{\sqrt{c_0(D\log E^*)\lambda^{-1}}} - \frac{g}{c_0 \min\{a_1, a_2\} D \log E^* \lambda^{-2}} \\ &\quad -\frac{3\gamma^{1/3} g^{2/3}}{2^{2/3} c_0^{1/3}} \left(\frac{1}{(\min\{5.1Dh\lambda^{-1}, c_0 a_1 a_2 D \log E^* \lambda^{-3}/2\})^{1/3}} + 3^{1/3} \right) \\ &= \quad \frac{x}{2} - H(c_0). \end{aligned} \tag{5.39'}$$

La minoration de $\log|\Lambda|$ est ici

$$\log|\Lambda| \geq -\theta c_1 c_0 (1 + \frac{2}{K})(1 + \frac{1}{L})(1 + 2 \cdot 10^{-5}) D^2 h a_1 a_2 \log E^* \lambda^{-3}.$$

Pour optimiser cette minoration, en considérant toujours les paramètres E, E^*, D, a_1, a_2 et h fixés, il nous faut minimiser le terme xc_0c_1. Pour cela nous remarquons que la partie de droite de $(5.39')$ doit être positive, puisque x, c_0 et c_1 le sont. Il s'ensuit que plus x est grand plus c_0 peut être choisi petit. Supposons maintenant c_0 fixé, et regardons la fonction

$$f(x) = \left(\frac{1}{3} + \frac{\gamma \log E^*}{h} \right) \frac{x}{x/2 - H}.$$

La fonction f est une homographie en x de déterminant < 0, puisque $H(c_0)$ est toujours positif. Elle atteint donc son minimum sur $[x_1, x_2]$ pour $x = x_2$. Il nous faut donc, pour optimiser les énoncés des corollaires, choisir V le plus proche possible de V_2, et c'est bien ce qui a été fait.

5.6 Appendice numérique.

Cet appendice contient des tables numériques qui complètent les corollaires 1.2, 1.3 et 1.4 du Théorème 1.1.

TABLEAU 1

h_1	600	800	1500	2000	2500	3000
E	6.55	6.55	6.6	6.6	6.6	6.6
c_0	325	320	311	308	306	304
c_1	5.378	5.381	5.387	5.381	5.374	5.368
C_1	9650	9490	9230	9130	9050	9000

Ce premier tableau correspond au Corollaire 1.2. On donne différents choix de la constante h_1 intervenant dans la définition de h :

$$h = \max\left\{\log b + 3.4, \frac{h_1}{D}, \frac{h_1}{4}\log E^*\right\}.$$

Dans tous les cas on a la majoration

$$\log E^* \leq 3.328 + \frac{1.888}{D} + 0.946\log D.$$

Pour les valeurs indiquées dans le tableau 1, la minoration du Corollaire 1.2 s'écrit alors

$$\log|\Lambda| \geq -C_1\left(3.328 + \frac{1.888}{D} + 0.946\log D\right) D^4 h \log A_1 \log A_2.$$

On remarque que pour $h_1 \geq 3000$ nous avons $L+1 \geq \frac{K+1}{2}$ et que nous obtenons alors quasiment la valeur asymptotique de C_1, à savoir 8760. En d'autres termes, si l'on remplace h_1 par une valeur > 3000, la valeur de la constante C_1 ne variera quasiment pas par rapport à celle calculée pour $h_1 = 3000$.

TABLEAU 2

h_2	600	800	1500	1750	2000	2100
E	5.5	5.5	5.55	5.55	5.55	5.55
c_0	321	316	308	306	305	304
c_1	5.383	5.389	5.382	5.389	5.381	5.399
C_2	7380	7270	7080	7030	7000	6990

Ce second tableau correspond au Corollaire 1.3. Comme plus haut on donne différents choix de la constante h_2 qui intervient dans la définition de h :

$$h = \max\left\{\log b + 3.4, \frac{h_2}{D}, \frac{h_2}{4}\log E^*\right\}.$$

Dans tous les cas on peut majorer

$$\log E^* \leq 3.417 + \frac{1.714}{D} + 0.946 \log D.$$

La minoration du Corollaire 1.3 s'écrit alors

$$\log |\Lambda| \geq -C_2 \left(3.417 + \frac{1.714}{D} + 0.946 \log D\right) D^4 h \log A_1 \log A_2.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment pour $h_2 > 2100$ nous obtenons quasiment la valeur asymptotique de C_2, à savoir 6800.

Dans le cadre du Corollaire 1.4, on remarque qu'avec les hypothèses $(5.8) - (5.17)$ nous avons $L + 1 \leq \frac{K+1}{2}$. La valeur de la constante ne varie alors quasiment pas dès que $h \geq \frac{500\lambda}{D}$. Nous ne donnons donc pas de tableau dans ce cas-ci.

Remarque. La différence entre les valeurs asymptotiques et celles données dans les tableaux ci-dessus, découle du fait que si D n'est pas fixé on ne peut utiliser que l'hypothèse (5.14), pour majorer $(\log E^*)/h$. Or pour le calcul de la valeur asymptotique, ce dernier rapport est supposé nul.

Annexe

Lemme A.1. *Soit K un entier ≥ 1. On a la majoration*

$$\log\left(\prod_{\substack{(k_0,k_1)\in\mathbb{N}^2\\ k_0+k_1\leq K}}\frac{1}{k_0!}\right)\leq\left(-\frac{1}{3}K\frac{(K+1)(K+2)}{2}\right)\log(K)+\frac{11}{18}K\frac{(K+1)(K+2)}{2}.$$

Preuve. Pour démontrer ce lemme nous utilisons l'inégalité suivante, provenant de la formule de Stirling :

$$\frac{1}{x!}\leq\frac{1}{x^x e^{-x}}$$

Nous obtenons alors :

$$\log\left(\prod_{k_0+k_1\leq K}\frac{1}{k_0!}\right)\quad\leq\quad\sum_{k_0=1}^{K}(K+1-k_0)\left(-k_0\log(k_0)+k_0\right)$$

Nous allons maintenant majorer séparément chaque terme de la somme de droite, en utilisant une formule d'Euler-MacLaurin sous la forme suivante :

$$\sum_{k_0=1}^{K}f(k_0)=\int_1^K f(x)dx+\frac{f(K)+f(1)}{2}+\frac{f'(K)-f'(1)}{12}+\int_1^K 2f^{(3)}(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{(2\pi n)^3}dx,$$

où f est une fonction de classe C^3. Nous utiliserons de plus la majoration

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{(2\pi n)^3}\right|\leq\frac{1}{2\pi^3}.$$

Nous obtenons alors pour les différents termes les inégalités suivantes.

Premier terme :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k_0=1}^{K} \left(-(K+1)k_0 \log k_0\right) \\
&= \quad -(K+1)\left(\int_1^K x\log(x)dx + \frac{K\log(K)}{2} + \frac{\log(K)+1-1}{12}\right. \\
&\qquad \left. + \int_1^K \left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{(2\pi n)^3}\right)\frac{-1}{x^2}dx\right) \\
&\leq \quad (K+1)\left(-\frac{K\log(K)}{2} - \frac{\log(K)}{12} - \left[\frac{x^2}{\log(x)} - \frac{x^2}{4}\right]_1^K + \frac{2}{\pi^2}\right) \\
&\leq \quad \log K\left(-\frac{K^3}{2} - K^2 - \frac{7K}{12} - \frac{1}{12}\right) + \frac{K^3}{4} + K^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^3}\right) - \frac{K}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^3}.
\end{aligned}
$$

Deuxième terme :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k_0=1}^{K} \left(k_0^2 \log(k_0)\right) \\
&= \quad \int_1^K x^2\log(x)dx + \frac{K^2\log(K)}{2} + \frac{2K\log(K)+K-1}{12} \\
&\qquad + \int_1^K \left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{(2\pi n)^2}\right)\frac{2}{x}dx \\
&\leq \quad \frac{K^2\log(K)}{2} + \frac{2K\log(K)+K-1}{12} + \frac{K^3\log(K)}{3} - \frac{K^3}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2\log(K)}{\pi^3} \\
&\leq \quad \log K\left(\frac{K^3}{3} + \frac{K^2}{2} + \frac{K}{6} + \frac{2}{\pi^3}\right) - \frac{K^3}{9} + \frac{K}{12} + \frac{1}{36}.
\end{aligned}
$$

Troisième terme :

$$
\sum_{k_0=1}^{K}(K+1)k_0 = \frac{(K+1)^2K}{2}
$$

Quatrième terme :

$$
\sum_{k_0=1}^{K}(-k_0^2) = -\frac{K(2K+1)(K+1)}{6} = \frac{-K^3}{3} - \frac{K^2}{2} - \frac{K}{6}.
$$

Nous obtenons alors en utilisant toutes les majorations ci-dessus, et après simplification, la majoration de notre somme de départ

$$\log\left(\prod_{k_0+k_1\le K}\left(\frac{1}{k_0!}\right)^{k_0}\right) \le \log(K)\left(\frac{-K^3}{6}+\frac{-K^2}{2}+\frac{-5K}{12}+\frac{2}{\pi^3}-\frac{1}{12}\right) + \frac{11K^3}{36}+\frac{3K^2}{4}+K\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{\pi^3}\right)-\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi^3}+\frac{1}{36}.$$

On constate alors que

$$\frac{-K^3}{6}+\frac{-K^2}{2}+\frac{-5K}{12}+\frac{2}{\pi^3}-\frac{1}{12}\le -\frac{1}{6}(K^3+3K^2+2K) = -\frac{1}{6}K(K+1)(K+2)$$

et

$$\frac{11K^3}{36}+\frac{3K^2}{4}+K\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{\pi^3}\right)-\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi^3}+\frac{1}{36}\le\frac{11}{36}K(K+1)(K+2)$$

ce qui clot la démonstration de ce lemme.

□

Le résultat suivant est le Lemme 4 de [9] dont l'énoncé a été modifié pour permettre une utilisation directe de celui-ci. En particulier la variable T ne joue aucun rôle dans ce lemme mais est présente par commodité lors de son application.

Lemme A.2. *Soient K, L, R, S, T des entiers ≥ 0. On suppose que $(R+1)(S+1)(T+1)\geq N := (K+1)(K+2)(L+1)/2$. Posons $l_\nu = [(\nu-1)/((K+1)(K+2)/2)]$, $(1\leq\nu\leq N)$. Pour chaque suite d'entiers $(r_1,\ldots,r_N)$ compris entre 0 et R, et telle qu'aucun entier ne soit répété plus de $(S+1)(T+1)$ fois dans la suite, on a l'encadrement*

$$M-G\leq\sum_{\nu=1}^{N} l_\nu r_\nu\leq M+G,$$

où

$$M=\frac{L(r_1+\cdots+r_N)}{2},\quad G=\frac{N(L+1)(R+1)}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{N}{12(R+1)(S+1)(T+1)}\right).$$

Preuve. Voir le Lemme 4 de [9], en remplaçant K par $(K+1)(K+2)/2$, L par $L+1$, R par $R+1$ et S par $(S+1)(T+1)$. □

Lemme A.3. *Soit N un entier ≥ 1 et R, S, T des entiers ≥ 0, vérifiant $(R+1)(S+1)(T+1) \geq N$. Soit $(t_1, \dots, t_N)$ une suite d'entiers, telle qu'aucun entier ne soit répété plus de $(R+1)(S+1)$ fois. Nous avons alors*

$$\sum_{i=1}^{N} t_i \leq NT - \frac{N^2}{2(R+1)(S+1)} + 2T(R+1)(S+1) - \frac{N}{2}.$$

Preuve. Puisque les t_i ne prennent pas plus de $(R+1)(S+1)$ fois la même valeur nous avons

$$\sum_{i=1}^{N} t_i \leq (R+1)(S+1) \sum_{j=0}^{a+1} (T-j),$$

où a est défini comme le quotient dans la division euclidienne de N par $(R+1)(S+1)$. On a de manière évidente $a \leq \frac{N}{(R+1)(S+1)} \leq a+1$ et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} t_i &\leq (R+1)(S+1)\left((a+2)T - \frac{(a+1)(a+2)}{2}\right) \\
&\leq NT + 2(R+1)(S+1)T \\
&\quad - \frac{(R+1)(S+1)}{2}\left(\left(\frac{N}{(R+1)(S+1)}\right)^2 + \frac{N}{(R+1)(S+1)}\right) \\
&\leq NT - \frac{N^2}{2(R+1)(S+1)} + 2T(R+1)(S+1) - \frac{N}{2}.
\end{aligned}$$

□

Le lemme suivant est un cas particulier du Lemme 7.3 de [31].

Lemme A.4. *Soit K un entier ≥ 0, soit une famille de couples $(\kappa_{0,i}, \kappa_{1,i})_{i \in I}$ d'entiers ≥ 0 et deux à deux distincts. Notons $|I|$ le cardinal de I. On a alors la minoration*

$$\sum_{i \in I} (\kappa_{0,i} + \kappa_{1,i}) \geq \frac{|I|}{2}\left(\frac{|I|+1}{K+1} - \frac{K}{2} - 1\right).$$

Preuve. On supposera sans restriction que $|I| \geq \binom{K+2}{2}$, sans quoi le terme de droite de l'inégalité est < 0.

La plus petite valeur pour la somme des $\kappa_{0,i} + \kappa_{1,i}$ est atteinte quand nous prenons successivement, pour chaque entier $a = 0, 1, \dots$, tous les points de l'ensemble

$$\mathfrak{E}_a = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{N}^2 ; x_1 \leq K \text{ et } x_0 + x_1 = a\},$$

et en nous arrêtant quand le nombre total des points atteint $|I|$. Pour $a \geq K$ le nombre de points dans $\mathfrak{E}_a$ est $K+1$ (une fois x_1 choisi il y a exactement une valeur pour x_0). Pour $a < K$ le nombre de points dans $\mathfrak{E}_a$ est $a+1$ (nous oublions juste la condition concernant K), il s'ensuit que le nombre de points que nous avons, en faisant varier a entre 0 et, disons, A (avec $A > K$), est

$$(A-K+1)(K+1)+\sum_{a=0}^{K-1}(a+1)=(A-K+1+\frac{K}{2})(K+1).$$

De plus, si A est tel que la quantité ci-dessus est au plus $|I|$, alors

$$\sum_{i\in I}(\kappa_{0,i}+\kappa_{1,i})\geq\sum_{a=K}^{A}(K+1)a=\frac{1}{2}(K+1)(A-K+1)(A+K).$$

Nous choisissons pour A la plus grande valeur pour laquelle la condition requise

$$(A-K+1+\frac{K}{2})(K+1)\leq|I|$$

est satisfaite, à savoir

$$A=\left[\frac{|I|}{K+1}+K-\frac{K}{2}-1\right].$$

Alors

$$(A-K+\frac{K}{2}+2)(K+1)\geq L+1.$$

Nous utilisons cette dernière inégalité deux fois : d'une part nous en déduisons

$$A-K+1\geq\frac{|I|+1}{K+1}-\frac{K}{2}-1.$$

D'autre part, puisque, pour $K\geq 1$, nous avons

$$2K-\frac{K}{2}-2+\frac{1}{K+1}\geq 0,$$

dont nous déduisons

$$A+K\geq\frac{|I|}{K+1}.$$

Nous avons alors

$$\sum_{i\in I}(\kappa_{0,i}+\kappa_{1,i})\geq\frac{|I|}{2}(A-K+1)\geq\frac{|I|}{2}\left(\frac{|I|+1}{K+1}-\frac{K}{2}-1\right).$$

Ceci complète la preuve du Lemme A.4.

$\square$

Bibliographie

[1] Alan Baker. *Transcendental number theory*. Cambridge University Press, London, 1975.

[2] Alan Baker and David William Masser, editors. *Transcendence theory: advances and applications*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1977.

[3] Yu. Bilu, G. Hanrot, and P. M. Voutier. Existence of primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers. *J. Reine Angew. Math.*, 539:75–122, 2001. With an appendix by M. Mignotte.

[4] Yu.F. Bilu. Catalan's conjecture (after Mihăilescu). *Séminaire Bourbaki* Exposé 909, 55ème année (2002-2003), A paraître.

[5] W. D. Brownawell and D. W. Masser. Multiplicity estimates for analytic functions. II. *Duke Math. J.*, 47(2):273–295, 1980.

[6] A. O. Gel′fond. *Transcendentnye i algebraičeskie čisla*. Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1952.

[7] Nicolas Gouillon. Un lemme de zéros. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(2):167–170, 2002.

[8] Michel Laurent. Linear forms in two logarithms and interpolation determinants. *Acta Arith.*, 66(2):181–199, 1994.

[9] Michel Laurent, Maurice Mignotte, and Yuri Nesterenko. Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation. *J. Number Theory*, 55(2):285–321, 1995.

[10] D. W. Masser. On polynomials and exponential polynomials in several complex variables. *Invent. Math.*, 63(1):81–95, 1981.

[11] D. W. Masser and G. Wüstholz. Zero estimates on group varieties. II. *Invent. Math.*, 80(2):233–267, 1985.

[12] E. M. Matveev. Arithmetic properties of the values of generalized binomials. *Mat. Zametki*, 54(4):76–81, 159, 1993.

[13] E. M. Matveev. An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 62(4):81–136, 1998.

[14] E. M. Matveev. An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers. II. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 64(6):125–180, 2000.

[15] Maurice Mignotte. Arithmetical properties of the exponents of Catalan's equation. In *Proceedings of the 2nd Panhellenic Conference in Algebra and Number Theory (Thessaloniki, 1998)*, volume 42, pages 85–87, 1999.

[16] Maurice Mignotte. Catalan's equation just before 2000. In *Number theory (Turku, 1999)*, pages 247–254. de Gruyter, Berlin, 2001.

[17] Maurice Mignotte and Michel Waldschmidt. Linear forms in two logarithms and Schneider's method. *Math. Ann.*, 231(3):241–267, 1977/78.

[18] Maurice Mignotte and Michel Waldschmidt. Linear forms in two logarithms and Schneider's method. II. *Acta Arith.*, 53(3):251–287, 1989.

[19] Maurice Mignotte and Michel Waldschmidt. Linear forms in two logarithms and Schneider's method. III. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5)*, (suppl.):43–75, 1989.

[20] Preda Mihăilescu. A class number free criterion for Catalan's conjecture. *J. Number Theory*, 99(2):225–231, 2003.

[21] Yu. V Nesterenko. Linear forms in logarithms of rational numbers. In *Diophantine approximation (Cetraro, Italy 2000)* Lecture Notes in Mathematics, 1819:53–106, 2003.

[22] Patrice Philippon. Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Bull. Soc. Math. France*, 114(3):355–383, 1986.

[23] Patrice Philippon. Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Rocky Mountain J. Math.*, 26(3):1069–1088, 1996. Symposium on Diophantine Problems (Boulder, CO, 1994).

[24] Gaël Rémond. élimination multihomogène. In *Introduction to Algebraic Independence Theory* Lecture Notes in Mathematics, 1752:53–81, 2001.

[25] A. Schinzel. On two theorems of Gelfond and some of their applications. *Acta Arith*, 13:177–236, 1967/1968. Corregdum *ibid.*, 16:101, 1969/1970. Abbendum *ibid.*, 56(2):181, 1990.

[26] T. N. Shorey and R. Tijdeman. *Exponential Diophantine equations*, volume 87 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[27] R. Tijdeman. Exponential Diophantine equations 1986–1996. In *Number theory (Eger, 1996)*, pages 523–539. de Gruyter, Berlin, 1998.

[28] Michel Waldschmidt. Fonctions auxiliaires et fonctionnelles analytiques. I, II. *J. Analyse Math.*, 56:231–254, 255–279, 1991.

[29] Michel Waldschmidt. Nouvelles méthodes pour minorer des combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques. *Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2)*, 3(1):129–185, 1991.

[30] Michel Waldschmidt. Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques. *Canad. J. Math.*, 45(1):176–224, 1993.

[31] Michel Waldschmidt. *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups*. Springer-Verlag, 1999.

[32] Michel Waldschmidt. Un demi-siècle de transcendance. In *Development of mathematics 1950–2000*, pages 1121–1186. Birkhäuser, Basel, 2000.

[33] Kun Rui Yu. Linear forms in p-adic logarithms. *Acta Arith.*, 53(2):107–186, 1989.

RÉSUMÉ :
Les minorations de combinaison linéaire, à coefficients entiers, de logarithmes de nombres algébriques constituent un outil important dans la résolution effective de certaines classes d'équations diophantiennes. Le cas particulier de deux logarithmes est à cet égard particulièrement utile. Nous utilisons ici, pour l'obtention de ces minorations, la méthode dite de Schneider avec multiplicité. La démonstration repose sur l'utilisation des déterminants d'interpo-lation et d'un lemme de zéros approprié à ce cadre. Un point important est l'élaboration d'un lemme de zéros, dont la preuve reprend la construction originelle de D.W. Masser, qui se révèle, dans le cadre de la méthode utilisée ici, plus efficace que les résultats généraux précédemment employés. Nous utilisons ensuite une méthode d'encadrement standard, utilisant une inégalité de Liouville et un lemme de Schwarz, pour obtenir une inégalité fondamentale faisant intervenir de nombreux paramètres arbitraires qui permettent une grande flexibilité. Nous déduisons de cette dernière une liste de minorations totalement explicites.

TITLE : Explicit lower bounds for linear forms in two logarithms

ABSTRACT :
The lower bounds for linear combinations with integer coefficients of algebraic number of logarithms are important tools in towards the effective resolution of some diophantine equation classes. On this context the particular case of two logarithms is especially useful. To obtain such lower bounds we use here the so-called Schneider's method with multiplicity. The proof is based on the use of interpolation determinants and on a multiplicity estimate. Our multiplicity estimate, whose proof is reminiscent of the original method due to D.W. Masser, appears, in our case, to be more efficient than the general statements previously employed. We use a standard method to obtain a lower and an upper bound for some non zero determinant that enables us to obtain a fondamental inequality containing many arbitrary parameters. We can deduce from this last inequality a list of lower bounds which are totally explicit for linear forms of logarithms.

Mots clés : Théorie des Nombres, formes linéaires de logarithmes, lemme de zéros.