



HAL
open science

Production de partons en présence des champs classiques dans des collisions ultra-relativistes d'ions lourds

Dennis Dean Dietrich

► **To cite this version:**

Dennis Dean Dietrich. Production de partons en présence des champs classiques dans des collisions ultra-relativistes d'ions lourds. Nuclear Theory [nucl-th]. Université Louis Pasteur - Strasbourg I, 2003. German. NNT: . tel-00003999

HAL Id: tel-00003999

<https://theses.hal.science/tel-00003999>

Submitted on 17 Dec 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Produktion von Partonen in Anwesenheit klassischer Felder in ultrarelativistischen Schwerionenkollisionen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Dennis Dean Dietrich
aus Hanau

Frankfurt (2003)
(D F 1)

vom Fachbereich Physik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität als Dissertation angenommen

Dekan:Prof. Dr. H. Schmidt-Böcking
Gutachter:Prof. Dr. W. Greiner ... und ... Prof. Dr. F. Jundt
Datum der Disputation: 18. September 2003

Meiner Familie



INHALTSVERZEICHNIS

Liste der Abbildungen	8
I. Einleitung	13
II. Klassische Chromodynamik	22
III. Quantenchromodynamik im stabilen Vakuum	26
A. Standardstörungstheorie	31
B. Klassisches Feld und Fermionen im stabilen Vakuum	36
IV. Quantenchromodynamik im instabilen Vakuum	39
A. Klassisches Feld und Fermionen im instabilen Vakuum	39
1. Wahrscheinlichkeiten	40
2. Erwartungswerte	43
B. Bosonische Quantenfluktuationen: Die Hintergrundfeldmethode	49
1. Modifizierte Yang-Mills-Gleichungen	53
V. Perturbative Beschreibung der Produktion von Partonen	55
A. Produktionsrate für Quark-Antiquark-Paare	56
B. Produktionsrate für Paare gluonischer Quantenfluktuationen	60
C. Produktionsraten für ein rein zeitabhängiges Eichfeld	67
D. Ergebnis	72
VI. Exakte Beschreibung der Produktion von Fermion-Antifermion-Paaren	80
A. Herleitung des retardierten Propagators	81
B. Zeitartige Koordinaten	84
1. Ultraviolett Näherung	84
2. Infrarotnäherung	89
3. Abelsche Näherung	90
C. Raumartige Koordinaten	93
D. Lichtartige Koordinaten	94

E. Die allgemeine Resummationsformel	96
F. Fermion-Antifermion-Produktion	99
1. Bornsche Näherung	100
2. Ultraviolett Näherung	100
3. Infrarotnäherung	101
4. Modifizierte Infrarotnäherung	102
5. Abelsche Näherung	103
6. Ergebnis	104
VII. Zusammenfassung	112
Literatur	117
Anhang	122
A. Definitionen	122
1. Die Paulimatrizen	122
2. Die Diracschen Gammamatrizen	122
3. Die Gell-Mann-Matrizen	122
B. Feynmanregeln	123
1. Standardstörungstheorie	123
a. Definitionen	123
b. Vertexfunktionen	123
c. Diagramme	124
2. Hintergrundfeldmethode	127
a. Definitionen	127
b. Vertexfunktionen und Diagramme	128
Résumé	130
Summary	135

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	140
Lehrer	141
Curriculum Vitae	142

Liste der Abbildungen

Abbildung 1 (Seite 20):

Abhängigkeit von der kinematischen Zeit t als Näherung für eine Situation, wie sie im zentralen Bereich eines boost-invarianten Systems vorgefunden wird. Die Hyperbeln geben Linien konstanter Eigenzeit τ an.

Abbildung 2 (Seite 33):

Konturintegration in der komplexen k_0 -Ebene zur Bestimmung der Greensfunktion mit dem richtigen asymptotischen Verhalten.

Abbildung 3 (Seite 38):

Diagramm für den durch die Fermionen und Antifermionen induzierten Strom an den das klassische Feld ankoppelt.

Abbildung 4 (Seite 42):

Diagramm für die Vakuum-zu-Vakuum-Amplitude.

Abbildung 5 (Seite 44):

Integrationskontur für den Schwinger-Keldysch-Formalismus.

Abbildung 6 (Seite 56):

Näherung der exakten Produktionsrate für Fermion-Antifermion-Paare durch den Term niedrigster Ordnung in der klassischen Wirkung.

Abbildung 7 (Seite 60):

Näherung der exakten Produktionsrate für Gluonenpaare durch den Term niedrigster Ordnung in der klassischen Wirkung.

Abbildung 8 (Seite 74):

Produktionsrate in MeV für die Produktion von Gluonenpaaren (durchgezogen) und Quark-Antiquark-Paare (gestrichelt) als Funktion der Zeit.

Abbildung 9 (Seite 75):

Die dimensionslose zeitintegrierte Produktionsrate T für Gluonenpaare (durchgezogen) und Quark-Antiquark-Paare (gestrichelt) als Funktion des transversalen Impulses.

Abbildung 10 (Seite 76):

Die dimensionslose zeitintegrierte Produktionsrate T für Gluonenpaare (durchgezogen) und Quark-Antiquark-Paare (gestrichelt) als Funktion der Rapidität.

Abbildung 11 (Seite 77):

Die dimensionslose zeitintegrierte Produktionsrate T für Gluonenpaare (durchgezogen) und Quark-Antiquark-Paare (gestrichelt) als Funktion des Winkels zur Feldrichtung.

Abbildung 12 (Seite 78):

Verhältnis R der zeitintegrierten Produktionsrate für Gluonenpaare und Quark-Antiquark-Paare als Funktion des transversalen Impulses.

Abbildung 13 (Seite 79):

Verhältnis der zeitintegrierten Produktionsraten für Gluonenpaare und Quark-Antiquark-Paare als Funktion der Abklingzeit des Feldes.

Abbildung 14 (Seite 105):

Exaktes Impulsspektrum der produzierten masselosen Fermion-Antifermion-Paare als Funktion des transversalen Impulses für unterschiedliche Werte des longitudinalen Impulses.

Abbildung 15 (Seite 106):

Impulsspektrum der produzierten masselosen Fermion-Antifermion-Paare als Funktion des transversalen Impulses. Vergleich des exakten Spektrums mit der Bornschen Näherung und der Ultraviolett-näherung.

Abbildung 16 (Seite 107):

Impulsspektrum der produzierten masselosen Fermion-Antifermion-Paare als Funktion des transversalen Impulses. Vergleich des exakten Spektrums mit der Infrarot-näherung und der modifizierten Infrarot-näherung.

Abbildung 17 (Seite 108):

Impulsspektrum der produzierten masselosen Fermion-Antifermion-Paare als Funktion des transversalen Impulses. Vergleich des exakten Spektrums mit der Abelschen Näherung.

Abbildung 18 (Seite 109):

Impulsspektrum der produzierten masselosen Fermion-Antifermion-Paare als Funktion des transversalen Impulses. Vergleich des exakten Spektrums mit der Bornschen Näherung und der Abelschen Näherung.

Abbildung 19 (Seite 110):

Impulsspektrum der produzierten masselosen Fermion-Antifermion-Paare als Funktion des transversalen Impulses. Vergleich des exakten Spektrums mit der Bornschen Näherung und der Abelschen Näherung.

Abbildung 20 (Seite 124):

Feynmandiagramme: Freie Propagatoren.

Abbildung 21 (Seite 125):

Feynmandiagramme: Vertices.

Liste der Abbildungen

Abbildung 22 (Seite 126):

Symmetriefaktoren für Feynmangraphen mit Gluonenschleifen.

Abbildung 23 (Seite 128):

Feynmandiagramm: Kopplung der Fermionen an das Feld.

Abbildung 24 (Seite 129):

Feynmandiagramme: Kopplung der Gluonen an das Feld und entsprechende Geistvertices.

I. EINLEITUNG

Bedenke doch, daß Leute, die nie mündig werden, ihren Vorbildern erstens auf einem Gebiet folgen, worin noch jeder von seinem Vorgänger abgewichen ist, dann aber auch in Fragen, über die das Forschen kein Ende nimmt. Denn sie werden niemals zu lösen sein, wenn wir uns stets mit dem Erforschten zufrieden geben. Dazu kommt noch: Wer in den Spuren eines anderen geht, der findet nichts, er sucht ja nicht einmal. [...] Die vor uns jene Ideen entwickelt haben, sind nicht unsere Herren, sondern unsere Führer. Die Wahrheit steht allen offen. Sie ist noch von keinem in Beschlag genommen. Ein großer Teil von ihr bleibt auch noch künftigen Geschlechtern aufgespart.

SENECA

In der Natur haben die auf den kürzesten Zeit- und höchsten Energieskalen ablaufenden Prozesse im frühen Universum stattgefunden. Heute ist man in der Lage, mit Beschleunigerexperimenten im Labor bis in die nur Bruchteile von Sekunden alte Welt vorzudringen (oder besser „zurückzudringen“). Soweit das Standardmodell noch auf diesen Skalen anwendbar ist, dominiert dort die in ihm enthaltene starke Wechselwirkung. Die Gesetzmäßigkeiten dieser fundamentalen Kraft werden in der nicht-abelschen Quanteneichfeldtheorie der Quantenchromodynamik (QCD) formuliert. Die Eigenschaften dieser Feldtheorie stehen im Einklang mit den Beobachtungen in der Natur. Die Klassifizierung der Hadronen deutete auf einen Aufbau aus Quarks, den fundamentalen fermionischen Freiheitsgraden dieser Theorie, hin [1]. Der zusätzliche Freiheitsgrad der QCD, die Farbe, tritt bei niedrigen Energien niemals

in Erscheinung. Dieses sogenannte „Confinement“ verlangt, daß die gebundenen Zustände, die Hadronen, Farbsingletts sind. Farbneutralität wird für die zugrundeliegende Eichgruppe – $SU(3)$ – gerade für drei Quarks beziehungsweise Antiquarks oder ein Quark und ein Antiquark erreicht. Die so gebildeten Objekte entsprechen den Baryonen respektive Antibaryonen sowie den Mesonen. Weiterhin beschreibt die QCD die asymptotische Freiheit: die Wechselwirkung zwischen den Partonen nimmt mit abnehmenden Längenskalen immer mehr ab [2]. Diese ist notwendig, um zu erklären, warum bei Streuprozessen an Hadronen diese in bestimmten Energiebereichen aussehen wie eine Ansammlung von fast freien punktförmigen Partonen.

Im Zusammenhang mit dem frühen Universum und Beschleunigerexperimenten findet oft die Vokabel „Quark-Gluon-Plasma“ für diejenige Phase der QCD Verwendung, bei der die Partonen als farbige Freiheitsgrade in Erscheinung treten. Das Bild, daß es sich bei den elementaren Freiheitsgraden um die Partonen handelt, mag zu einfach und das thermodynamisches Gleichgewicht suggerierende Wort „Plasma“ irreführend sein. Was auch immer der Name und die tatsächlichen Eigenschaften dieser hochdichten, hochenergetischen QCD-Materie sind, so wird heute viel Energie in das Studium ihrer Produktion und Äquilibration in Situationen gesteckt, wie sie für Beschleunigerexperimente im Relativistic Heavy-Ion Collider (RHIC) am Brookhaven National Laboratory (BNL) und für den Large Hadron Collider (LHC), der sich zur Zeit am CERN im Bau befindet, erwartet werden [3, 4]. Unter der Annahme thermischen Gleichgewichts sagen Rechnungen im Rahmen der Gitter-QCD für hohe Temperaturen die Existenz einer solchen Phase der Materie vorher [5].

Ausgehend von den in der QCD formulierten grundlegenden Prinzipien läßt sich herleiten, daß kleinere Bjorken- x höheren Teilchendichten entsprechen. Bjorken- x steht dabei für den von einem Parton getragenen Teil des Gesamtimpulses des hadronischen Projektils. Kleinere Werte von x werden in hadronischen Kollisionen mit höherer Schwerpunktsenergie erkundet. Mit abnehmenden Werten von x beginnen nichtlineare Effekte bei der Evolution der Verteilungsfunktion der Teilchen eine Rolle zu spielen. Die Beschreibung des linearen Regimes ist einer der größten Erfolge der QCD. Sie wurde in den letzten 30 Jahren mit hoher Genauigkeit getestet. Bisher hat man mit dem HERA-Experiment (Kollision von Elektronen oder Positronen mit Protonen) versucht, in das nichtlineare Regime vorzudringen. Allerdings

stellten sich die Schwerpunktenergien als zu niedrig heraus, um eine eindeutige Identifizierung vornehmen zu können. Schwerionenkollisionen am LHC haben zwei Vorteile: Erstens wird der LHC die höchsten jemals untersuchten Schwerpunktsenergien erreichen und zweitens werden dort im Gegensatz zu HERA (am Deutschen Elektronen Synchrotron, DESY) Schwerionen aufeinander geschossen, was zu einer nuklearen geometrischen Erhöhung der Dichten führt. Aus diesen beiden Gründen liegt die Vermutung nahe, daß man mit dem LHC in der Lage sein wird, das qualitativ neuartige Regime hoher Partonendichten zu erkunden, in dem die nichtlineare Evolution der Partonenverteilungen eine bedeutende Rolle spielt. Darum ist es wichtig, eine theoretische Basis zu schaffen, die es ermöglicht, experimentelle Signale für die nichtlineare Entwicklung zu identifizieren und zu charakterisieren. Mögliche Kandidaten in Form schwerer oder hochenergetischer („harter“) Signaturen sind neben direkten Photonen, Drell-Yan-Dileptonen, offenen Charm- und Beautyquarks sowie schweren Quarkonia, die Jets und Minijets.

Ohne die Beachtung nuklearer Modifikationen sollten in einer zentralen Schwerionenkollision am LHC 30 Jets von mehr als 10 GeV an transversaler Energie und 3×10^{-3} Jets von mehr als 100 GeV an transversaler Energie produziert werden [6]. Diese tragen die Informationen von der frühen Hochdichtephase der Kollision zu den Detektoren.

Um jenen Bereich nichtlinearer Evolution zu verstehen, bieten sich prinzipiell zwei Herangehensweisen an. Ausgehend vom Regime linearer Entwicklung kann man fortfahren, nichtlineare Effekte als Störungen miteinzubeziehen. Ein Start beim zweiten Grenzfall mit maximal saturierten Partonendichten erlaubt zunächst eine klassische Beschreibung. In anderen Worten: Für hinreichend große Besetzungszahlen im gluonischen Sektor ist es möglich, Quantenfluktuationen als Korrekturen anzusehen. Bevor man letztere miteinbezieht, können Phänomene wie klassische Strahlung benutzt werden, um den Inhalt des Feldes an Gluonen zu ermitteln [7, 8] (siehe auch Kapitel II).

Ein klassisches Feld nähert lediglich den hochbesetzten niederenergetischen Teil der Gluonenverteilung gut an. Im schwächer besetzten Hochenergie-Sektor spielen Quanteneffekte eine wichtige Rolle. Auf Grund der Vorhersagen für die Feldstärke des klassischen Eichfeldes in der Größenordnung der inversen Kopplungskonstanten, die extrem hohe anfängliche Energiedichte und die lange Lebensdauer, müssen die Berechnungen alle Ordnungen des

klassischen Hintergrundfeldes abdecken. Somit werden die Jets nicht nur auf eine einfache perturbative Art und Weise durch Vakuumpolarisation produziert, sondern tragen auch Informationen über dieses vermeintlich saturierte Regime zum Beobachter. In dem dargestellten Zusammenhang wären die gluonischen Quantenfluktuationen auch unterhalb einer transversalen Energie von 10 GeV wichtig für die Dynamik des Systems, selbst wenn sie nicht von unmittelbarer Bedeutung als Indikatoren wären. Zieht man die Teilchen oberhalb dieses Schwellenwerts in Betracht, so ist es für eine konsistente Beschreibung unabdingbar, ebenfalls die für niedrigere Energie miteinzubeziehen, da sie eine viel größere Gesamtenergie tragen. Diese ist voraussichtlich auch nicht vernachlässigbar, verglichen mit der im klassischen Feld enthaltenen. Aus diesem Grund beeinflusst die Rückreaktion der Produktion von Quantenteilchen auf das klassische Feld dessen Teilcheninhalt.

Über die rein klassische Behandlung hinaus sind den bosonischen Quantenfluktuationen die Quarks und Antiquarks parametrisch gleichgestellt. Somit muß man sie gleichberechtigt behandeln, wodurch diese Partikel auch als Jets und Minijets auftreten können. Die Anwesenheit sämtlicher Quanten führt zu Modifikationen der klassischen Entwicklungsgleichungen.

Wie bereits erwähnt, besteht, komplementär zur Betrachtungsweise der maximalen Saturierung, diejenige der nicht-linear erweiterten zuvor linearen Entwicklungsgleichungen. Ein Hauptunterschied ist, daß man hier nicht zwischen quantisierten und klassischen Gluonen unterscheidet. Unterschiedliche Ansätze stellen zum Beispiel die Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov- (BFKL) [9] oder die Dokshitser-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi-Gleichung (DGLAP) [10] dar.

Die BFKL-Methode beschreibt eine nukleare Kollision als die Streuung zweier Verteilungen von Farbdipolen aneinander. Ab einer bestimmten Dipoldichte müssen den Gleichungen jedoch Korrekturen wegen Doppelzählungen hinzugefügt werden. Ergänzt man die entsprechenden Terme, die nichtlinear in den Streuwahrscheinlichkeiten der Dipole aneinander sind, ergibt sich die Balitsky-Kovchegov-Gleichung (BK) [11]. Diese Gleichung ist allerdings nur in einem Bereich intermediärer Dichte in Kern-Kern-Stößen relevant: Die hohen Dichten führen zusätzlich zu einer Saturierung der Wellenfunktion.

Das DGLAP-Verfahren benutzt eine Skalenevolutionsgleichung für die Partonenvertei-

lungsfunktion, die auf perturbativer QCD beruht und bei der Korrekturterme, die höherer Ordnung in den Verteilungsfunktionen sind, vernachlässigt werden. Die ersten Modifikationen bestehen in diesem Fall in der Hinzunahme dieser Terme. Dann fehlt allerdings immer noch die Behandlung des Einflusses von Vielteilchenverteilungsfunktionen [12].

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird das beschriebene Regime ausgehend vom Grenzfall maximaler Saturierung beschrieben. Die Betonung liegt hierbei auf der Behandlung der Produktion von Quantenpartikeln durch Vakuumpolarisation in Anwesenheit bosonischer Felder.

Wie bereits erwähnt, ist die Physik in Anwesenheit klassischer bosonischer Felder relevant in Bezug auf ultrarelativistische Schwerionenkollisionen und das frühe Universum [13]. Auf diesen Gebieten werden nicht nur Untersuchungen im Rahmen der QCD [14] sondern auch der Quantenelektrodynamik (QED) ausgeführt. Hier seien als Beispiel Rechnungen zu Coulombkorrekturen bei der Elektron-Positron-Paar-Erzeugung erwähnt [15, 16]. Bei der Quarkphotoproduktion handelt es sich um einen kombinierten Effekt der QCD und der QED.

Ein Szenario, wie man sich die Bildung eines klassischen Hintergrundfeldes vorstellen kann, ist folgendes: Bei ultrarelativistischen Energien in einem Beschleuniger sind die beiden kollidierenden Atomkerne stark Lorentz-kontrahiert. Sobald sie sich gegenseitig durchdringen, bildet sich durch den Austausch niederenergetischer Gluonen ein farbelektrisches Feld [17]. Dies ist eine natürliche Erweiterung des Farbflußschlauch- oder Stringmodells, wie sie häufig bei der Beschreibung von hochenergetischen Proton-Proton-, Elektron-Positron- und Proton-Kern-Kollisionen Anwendung finden [18]. Auch andere Veröffentlichungen [8, 19–22] basieren auf der Hypothese, daß die hochgradig gluonendominierte Situation in Schwerionenkollisionen von Skalen regiert wird, die von der Anwesenheit starker Hintergrundfelder herrühren.

Je größer die Besetzungszahl $\langle c_k^\dagger c_k \rangle$ des bosonischen Sektors eines physikalischen Systems ist, umso besser läßt sich dieses durch ein klassisches Feld beschreiben. Hierbei sind c_k und c_k^\dagger bosonische Feld-Vernichtungs- beziehungsweise -Erzeugungsoperatoren für Teilchen des Impulses k . Sollte die Besetzungszahl deutlich größer als eins sein, kann der Kommutator des Erzeugungs- mit dem Vernichtungsoperator vernachlässigt werden: $[c_k^\dagger, c_k] = 1 \ll \langle c_k^\dagger c_k \rangle$.

Die Feldoperatoren kann man durch komplexe Zahlen ausdrücken, was einer klassischen Beschreibung entspricht.

In einer Schwerionenkollision am RHIC mit einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 130$ GeV ergibt sich eine anfängliche Besetzungszahl der Gluonen im Bereich des mittleren transversalen Impulses $|\vec{k}_T| \approx 1$ GeV von grob 1.5 [23]. Obwohl diese Zahl nicht viel größer als eins ist, stellt das klassische Feld als Erwartungswert des Eichfeldes im Gegensatz zu den überlagerten Quantenfluktuationen immer noch den Hauptbeitrag dar. Die Besetzungszahl für niedrigere transversale Impulse ist noch höher und das klassische Konzept stellt dort eine noch bessere Näherung dar. Für größere transversale Impulse ist die Besetzungszahl kleiner und somit sind an dieser Stelle die Quantenfluktuationen relevanter. Da obiger Wert für die Besetzungszahl im Bereich des mittleren transversalen Impulses immerhin größer ist als eins, ist es zunächst gerechtfertigt, besonders im Hinblick auf die gesamte Dynamik des Systems nur klassische Bosonen miteinzubeziehen. Es ist möglich, Quantenfluktuationen in einem nachfolgenden Schritt hinzuzunehmen.

Die für eine zentrale Schwerionenkollision am LHC (Pb-Pb bei $\sqrt{s} = 5.5$ TeV) erwartete Energiedichte liegt bei $\epsilon \approx 1000$ GeV/fm³ [19–21]. Als Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung ist dort $\alpha_s \approx 0.15$ [21] zu vermuten. Mit der gesamten Energiedichte im Feldsektor ergibt sich eine anfängliche Stärke des Eichfeldes von: $A_{in} \approx \sqrt{g\sqrt{2\epsilon}} \approx 2$ GeV. Für RHIC (Au-Au bei $\sqrt{s} = 200$ GeV) ist die typische Kopplungskonstante im Bereich von $\alpha_s \approx 0.33$ und die anfängliche Energiedichte liegt bei $\epsilon \approx 50$ GeV/fm³, was gemäß den gleichen Überlegungen wie zuvor auf $A_{in} \approx 1$ GeV führt.

Wegen der hohen Feldstärken werden Prozesse mit mehrfachen Kopplungen an das klassische Feld A nicht parametrisch durch Potenzen der Kopplungskonstante g unterdrückt. Unter der Voraussetzung schwacher Kopplung beruhen die wichtigsten Quantenprozesse nur auf solchen Termen der klassischen Wirkung, die von zweiter Ordnung in den Quantenfeldern sind. Dies sind in der QCD die fermionischen und die antifermionischen Felder sowie das Feld der bosonischen Quantenfluktuationen. Die Gesamtheit aller Terme zweiter Ordnung für ein gegebenes Quant stellt die Bewegungsgleichung für dessen Zweipunktgreensfunktion dar. Lösungen dieser Gleichungen mit ausgewählten Randbedingungen ergeben Propagatoren für diese Anregungen. Sie beinhalten bis zur niedrigsten nichtverschwindenden Ordnung

in der Kopplungskonstante g sämtliche Informationen über Zweiteilchenreaktionen in der Anwesenheit klassischer Felder, zu denen die Streuung am Feld und Teilchenproduktion durch Vakuumpolarisation gehören.

Im Mittelpunkt der weiteren Untersuchungen soll das Phänomen der Teilchenproduktion stehen. In der QED beinhaltet dies die Produktion von Elektron-Positron-Paaren. Direkt analog dazu existiert in der QCD die Erzeugung von Quark-Antiquark-Paaren. Dort besteht wegen der Nichtlinearität des Feldtensors bezüglich der Eichfelder auch die Möglichkeit der direkten Produktion gluonischer Quantenfluktuationen. Ausgehend von der Lagrangedichte der QCD ist die Produktion keiner der beiden Arten von Paaren bevorzugt. Ein detaillierter Vergleich ist für jede gegebene Situation notwendig.

Das Konzept eines klassischen Feldes existiert nicht für den sonst dem gluonischen parametrisch gleichgestellten fermionischen Sektor. Dort muß die Besetzungszahl wegen des Pauliprinzips immer kleiner als eins sein. Eine rein störungstheoretische Behandlung könnte lediglich den Bereich großer Impulse und Massen beschreiben. Die Erfassung des Bereichs niedrigerer Energien kann so nie konsistent gelingen.

Alternativ zum störungstheoretischen Ansatz für die Erzeugung von Teilchen existiert die Konstantfeldmethode nach Schwinger [24], welche eine exakte nichtstörungstheoretische Einschleifenbehandlung des Phänomens der Paarerzeugung darstellt. Genannte Methode entspricht auch dem semiklassischen Tunneln über die Massenslücke hinweg [25]. Das Schwingersche Schema basiert allerdings auf der Annahme eines langsam in Raum und Zeit variierenden klassischen Feldes. Sollte sich in der zu untersuchenden Situation das Feld zu schnell ändern, kann die Produktion von Fermionen wiederum nicht hinreichend gut beschrieben werden. Es wird ein Konzept benötigt, das möglichst unabhängig von Energie- und Zeitskalen ist. Diese Eigenschaften sind besonders dann wichtig, wenn im umgekehrten Fall eine Zeitskala für einen Prozeß mit Hilfe einer selbstkonsistenten Rechnung bestimmt werden soll. Verwendet man für eine derartige Rechnung einen Ansatz, der seinerseits bereits auf einer Annahme für die Zeitskala basiert, so wird ihr Resultat wahrscheinlich irreführend sein. Wenn in einer Situation der Effekt der Teilchenproduktion eine wichtige Rolle spielt und für ihre Beschreibung ein perturbatives Verfahren Verwendung findet, so prognostiziert dies höchstwahrscheinlich eine zu schnelle Entwicklung des Systems. Das Gegenteil gilt für den

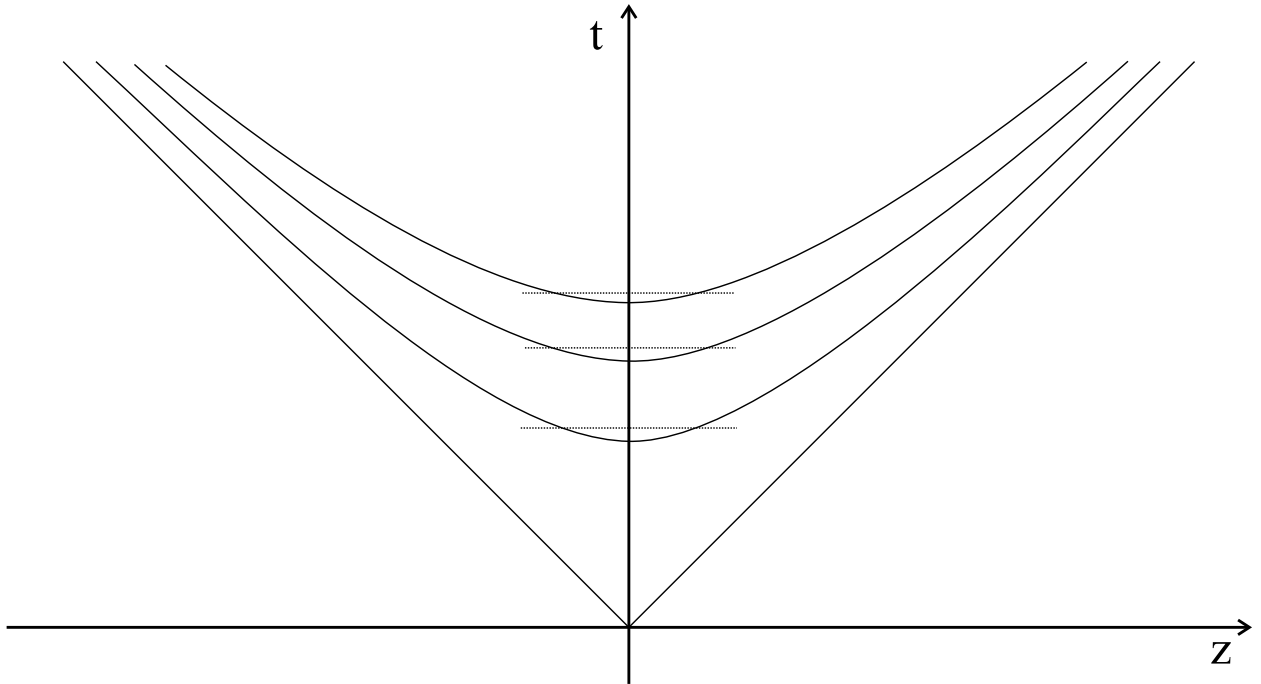


Abbildung 1: Abhängigkeit von der kinematischen Zeit t als Näherung für eine Situation, wie sie im zentralen Bereich eines boost-invarianten Systems vorgefunden wird. Die Hyperbeln geben Linien konstanter Eigenzeit τ an.

Schwingerschen Ansatz. Für eine umfassende Behandlung sind andere Methoden notwendig. Exakte Lösungen für vollständig beliebige Felder sind wünschenswert, aber nur schwer oder gar nicht zu ermitteln und handzuhaben.

Aus diesem Grund gilt es zu überlegen, ob sich Klassen von Feldern finden lassen, in denen die gewünschten Rechnungen gelingen und die trotzdem allgemein genug sind, um physikalisch relevant zu sein. Nach Bjorken [26] wird in einer Schwerionenkollision die Region um die Rapidität null von boost-invarianten Größen beschrieben, also von Größen, die invariant unter Lorentztransformationen entlang der Strahlrichtung sind. Man betrachte nun eine zentrale Kollision gleicher Kerne im Schwerpunktsystem. Für Werte der longitudinalen Koordinate z , die in diesem Bezugssystem betragsmäßig kleiner als die kinematische Zeit t

sind, wird die Abhängigkeit von der Eigenzeit $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$ gut durch eine Abhängigkeit von der kinematischen Zeit t angenähert (betrachte hierzu auch Abbildung 1). Der größte Teil der Energie, die von den kollidierenden Ionen in Form von Feldenergie deponiert wird, findet sich anfänglich um $z = 0$ herum. Der Energietransfer ist nach einer Zeit t_{in} abgeschlossen. Damit läßt sich die Eigenzeitabhängigkeit der Energiedichte für $t > t_{in}$ und $|z| < t_{in}$ gut durch eine Abhängigkeit von der kinematischen Zeit annähern. Vorausgesetzt, daß die gesamte Energie anfänglich in Form eines farbelektrischen Feldes mit der Komponente $E_\eta(\tau)$ (entlang der Hyperbelen in Abbildung 1), vorliegt, so wird dieses in der hier verfolgten Näherung konsistent durch ein Feld $E_z(t)$ erfaßt. In temporaler Eichung ($A_0 = 0$) oder auch in Lorentzeichung ist dieses äquivalent zu einem Eichfeld $A_z(t)$. In Anwesenheit derartiger Felder soll hier das Phänomen der Partonproduktion untersucht werden.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: In Kapitel II wird die Feldtheorie der Chromodynamik eingeführt, ohne diese jedoch zu quantisieren. Abschnitt III beinhaltet die Beschreibung der Pfadintegralquantisierung am Beispiel der QCD. Das Verfahren der Standardstörungstheorie wird hergeleitet und der Spezialfall eines quantisierten fermionischen Feldes in Anwesenheit nur eines klassischen Feldes im stabilen Vakuum diskutiert. In Kapitel IV folgt die Behandlung der QCD im instabilen Vakuum unter vorrangiger Behandlung des gleichen Spezialfalles wie zuvor. Hierbei wird besonders auf den Unterschied zwischen der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten hingewiesen. Daran anschließend folgt die Behandlung von gluonischen Quantenfluktuationen im Rahmen der Hintergrundfeldmethode der Quantenchromodynamik. In Sektion V werden die Produktionsraten in niedrigster Ordnung der klassischen Wirkung sowohl für Quark-Antiquark-Paare als auch für Paare von Gluonen hergeleitet und miteinander verglichen. Das in Kapitel VI vorgestellte Material beinhaltet die Impulsspektren für die Produktion von Fermion-Antifermion-Paaren, exakt zu allen Ordnungen im klassischen Hintergrundfeld. Dort werden auch diverse Näherungsschemata hergeleitet und miteinander verglichen. Die Arbeit schließt in Kapitel VII mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse und einem kurzen Ausblick auf weitere Anwendungs- und Ausbaumöglichkeiten der abgeleiteten Methoden.

II. KLASSISCHE CHROMODYNAMIK

Im Rahmen des Standardmodells werden die elementaren Wechselwirkungen – die schwache und die starke – durch Quanteneichfeldtheorien beschrieben. Hier soll hauptsächlich die auf den höchsten Energie- und kleinsten Zeitskalen dominierende starke Wechselwirkung und ihre Beschreibung in Form der Quantenchromodynamik betrachtet werden.

Eine Feldtheorie wird durch ihre Lagrangedichte \mathcal{L} charakterisiert. Zur Konstruktion der Eichfeldtheorien der Chromodynamik kann man von der freien Lagrangedichte für die zu betrachtenden Fermionen ausgehen [27]. Von frei spricht man hier, da sie noch nicht die Kopplung an andere Felder enthält. Die freie Lagrangedichte für Fermionen mit Spin 1/2 ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}_F^0 = \bar{\psi}(i\gamma \cdot \partial - m)\psi. \quad (2.1)$$

∂_μ ist der Vierervektor der partiellen Ableitungen: $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$. Das Skalarprodukt „ \cdot “ zwischen Vierervektoren, die hier ohne Vektorpfeil dargestellt werden, ist definiert als $a \cdot b = a^\mu b_\mu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu$, mit dem hier verwendeten metrischen Tensor $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. γ_μ ist der Vierervektor der 4×4 -Dirac- oder einfach γ -Matrizen, mit deren Hilfe es möglich ist, eine Basis für die Cliffordalgebra zu konstruieren. Diese Algebra dient der Beschreibung der Lorentzstruktur des fermionischen Teils der Theorie. Für die Antikommutatoren der Matrizen gilt $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Ihre Darstellung beruht auf den Paulimatrizen (siehe Anhang A).

Die γ -Matrizen werden mit den vierkomponentigen Spinoren ψ der Fermionfelder matrixmultipliziert. $\bar{\psi}$ steht für $\psi^\dagger \gamma^0$, \dagger bedeutet hermitesche Adjunktion. Wegen der verschiedenen Flavours von Quarks findet hier eine Summation über die unterschiedlichen Beiträge der gleichen Form aber im allgemeinen mit unterschiedlichen Massen statt.

In Eichtheorien wie der QCD fordert man die Invarianz der Lagrangedichte unter lokalen Eichtransformationen. Diese Transformationen sind unitär $U^{-1} = U^\dagger$. Damit die Darstellung

$$U = \exp\{-iT^a \sigma^a\} \quad (2.2)$$

mit dem Vektor reeller Einträge σ^a dieser Forderung genügt, müssen ihre Generatoren T^a hermitesch sein: $(T^a)^\dagger = T^a$. Wegen des Zusammenhangs (2.2) sagt man auch, daß

deren Algebra den Logarithmus der Eichgruppe darstellt. Bei globalen Symmetrietransformationen hängt der Eichparameter σ nicht von der Raumzeit ab. Ist dies jedoch der Fall, $\sigma = \sigma(x)$, handelt es sich um eine lokale Symmetrie. Quanteneichfeldtheorien bauen auf lokaler Eichinvarianz ihrer Lagrangedichte unter Transformationen einer bestimmten Gruppe auf. Das bedeutet, daß die Theorie nicht davon abhängen darf, wie an einem bestimmten Punkt ein entsprechender Freiheitsgrad beziffert oder benannt wird. Die Observablen dürfen nicht von lokalen Umeichungen abhängen. Für die QED ist die Eichgruppe die unitäre Gruppe $U(1)$, eine Abelsche (kommutative) Symmetriegruppe, deren Generator eine reelle Zahl Q ist. Dort stellt sich die Eichtransformation als $U = \exp\{-iQ\sigma\}$ dar. Die der Isospinsymmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung entsprechenden Transformationen bilden die zweidimensionale spezielle unitäre Gruppe $SU(2)$. Das Wort „speziell“ steht hierbei dafür, daß die Determinante der Eichtransformationen immer gleich eins ist. Dies bedingt über den Zusammenhang $\det U = \exp \text{tr} \ln U$, daß die Generatoren spurfrei sein müssen. Eine übliche Darstellung der Generatoren sind die im Anhang A angegebenen drei Paulimatrizen, multipliziert mit $1/2$. Eine spezielle unitäre Gruppe $SU(N)$ benötigt immer $N^2 - 1$ Generatoren für ihre Darstellung. Für die Farbsymmetrie der QCD wird die Invarianz unter $SU(3)$ -Eichtransformationen gefordert. Bei der $SU(3)$ sowie der $SU(2)$ handelt es sich um nicht-abelsche Gruppen. Die acht Generatoren der $SU(3)$ werden häufig in Form der Gell-Mann-Matrizen λ^a (multipliziert mit $1/2$) gewählt, welche eine dreidimensionale Verallgemeinerung der Paulimatrizen sind (siehe Anhang A).

Für die Spinoren ψ soll die Transformationsvorschrift $\psi \rightarrow \psi' = U\psi$ gelten. Während die freie Lagrangedichte bezüglich einer globalen Eichtransformation noch invariant wäre, da dann die Ableitungen von U verschwinden, ist dies für eine lokale nicht mehr der Fall. Um diesen Mangel zu beheben, muß die partielle Ableitung durch die kovariante ersetzt werden

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu. \quad (2.3)$$

Das sogenannte Eichfeld A folgt dabei der Transformationsvorschrift

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - i(\partial_\mu U)U^{-1}. \quad (2.4)$$

und läßt sich in der Basis der Generatoren zerlegen: $A_\mu = gA_\mu^a T^a$. Bei Abelschen Eichtheorien wie der QED ist der Term $UA_\mu U^{-1}$ gleich A_μ . Mit der kovarianten, anstelle der

partiellen Ableitung, ergibt sich der eichinvariante fermionische Anteil an der Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(i\gamma \cdot \partial + \gamma \cdot A - m)\psi. \quad (2.5)$$

Die gesamte Lagrangedichte muß jetzt durch den kinematischen Teil der Eichfelder ergänzt werden. Dieser läßt sich mit Hilfe des Feldtensors

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -i\mathcal{F}_{\mu\nu} = -ig\tilde{T}^a F_{\mu\nu}^a \quad (2.6)$$

oder explizit

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - i[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \quad (2.7)$$

ausdrücken als

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (2.8)$$

\tilde{T}^a sind die Generatoren in der adjungierten Darstellung. Deren Matrixstruktur definiert sich aus der vollständig antisymmetrischen Strukturkonstante f^{abc} der Algebra der Eichgruppe als $(\tilde{T}^a)_{bc} = -if^{abc}$. Diese ergibt sich implizit aus den Kommutatoren der Generatoren: $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$. Die Lagrangedichte der klassischen, d.h. unquantisierten Eichfeldtheorie beinhaltet den vollen Anteil für die Fermionen (2.5) und denjenigen für die Eichfelder (2.8)

$$\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_A. \quad (2.9)$$

Mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen kann man die klassischen Feldgleichungen aus der klassischen Wirkung $S_C = \int d^4x \mathcal{L}_C$ ableiten:

$$\partial_\mu \frac{\delta S_C}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\delta S_C}{\delta A_\nu} = 0 \quad \text{und} \quad \partial_\mu \frac{\delta S_C}{\delta(\partial_\mu \bar{\psi}_\alpha)} - \frac{\delta S_C}{\delta \bar{\psi}_\alpha} = 0. \quad (2.10)$$

Hieraus resultieren zum einen die Yang-Mills-Gleichungen mit der Stromdichte der Fermionen J_ν als Inhomogenität

$$\partial^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} - i[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}] = J_\nu, \quad (2.11)$$

und zum anderen die Diracgleichung:

$$(i\gamma \cdot \partial + \gamma \cdot A - m)\psi = 0. \tag{2.12}$$

Für eine Abelsche Theorie verschwindet der Kommutator in den Yang-Mills-Gleichungen, und die Maxwellgleichungen bleiben zurück.

Da die Bewegungsgleichung des Eichfeldes (2.11) in nicht-abelschen Theorien nichtlinear ist, sind ebene Wellen, die die asymptotischen Teilchen repräsentieren, keine Eigenfunktionen mehr. Die deswegen vorhandene Dynamik führt zu Phänomenen wie der klassischen Strahlung. Diese wird untersucht, wenn das Feld weit genug abgefallen ist, damit der nichtlineare Term der Bewegungsgleichung unterdrückt ist. Zusätzlich zu den bekannten Problemen des Einteilchenbildes, wie der Zitterbewegung, ist auf diesem Niveau auch keine Paarerzeugung (weder von Fermionen und Antifermionen noch von quantisierten gluonischen Fluktuationen) enthalten. Dabei sind Quanteneffekte besonders wichtig für die Beschreibung von harten Signaturen.

III. QUANTENCHROMODYNAMIK IM STABILEN VAKUUM

Hier soll die Quantisierung mit Hilfe des Pfadintegralformalismus [28] durchgeführt werden. Seine Formulierung erlaubt die direkte Verfolgung des Verbleibs der klassischen Felder und ihrer Symmetrien. Alternativ stünden der kanonische [29] und der stochastische [30] Ansatz zur Verfügung.

Vorerst wird die Quantisierung für den Fall des stabilen Vakuums demonstriert. Für dieses ist das Betragsquadrat des Skalarprodukts der asymptotischen Vakua $|\langle 0_{out}|0_{in}\rangle|^2 = 1$. Somit findet keine Teilchenproduktion statt. Aus diesem Grund können zunächst auch die Indices an den Vacua entfallen.

Begonnen wird mit der Quantisierung des kinetischen Terms des Eichfeldes. Die entsprechenden zeitgeordneten n -Punkt-Greensfunktionen lassen sich durch Funktionalableitungen des erzeugenden Funktionals ausdrücken

$$\langle 0|T[\hat{A}(x_1)\dots\hat{A}(x_n)]|0\rangle = \frac{(-i)^n}{Z[0]} \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \right|_{J=0}, \quad (3.1)$$

mit dem Zeitordnungsoperator T . Am Beispiel zweier beliebiger Felder, ergibt sich für ihn folgende Definiton:

$$T\phi_1(t_1)\phi_2(t_2) = \theta(t_1 - t_2)\phi_1(t_1)\phi_2(t_2) + \theta(t_2 - t_1)\phi_2(t_2)\phi_1(t_1). \quad (3.2)$$

Dabei ist $\theta(t)$ die Heaviside-Stufenfunktion. Das erzeugende Funktional aus Gleichung (3.1) läßt sich als Pfadintegral darstellen:

$$Z[J] = \int [dA] \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_A + A \cdot J) \right\}. \quad (3.3)$$

Das Funktionalintegrationsmaß $[dA]$ setzt sich aus Beiträgen der einzelnen Feldkomponenten $[dA] = \prod_{\mu,a} [dA_\mu^a]$ und der Felder an verschiedenen Punkten $[dA_\mu^a] = \prod_x dA_\mu^a(x)$ zusammen. Pfadintegrale können als Mittelungen über alle Feldkonfigurationen, gewichtet mit einem durch die klassische Wirkung $S_A = \int d^4x \mathcal{L}_A$ bestimmten Phasenfaktor, interpretiert werden. Hinzu kommt noch die Quelle $A \cdot J = A_\mu^a J^{a\mu}$, um die Greensfunktionen in Form von Gleichung (3.1) ausdrücken zu können. Ohne diese ist das Funktionalintegral eichinvariant:

$$Z[0] = \int [dA] \exp\{iS_A\}. \quad (3.4)$$

Die gesamte Funktionalintegration $[dA]$ läßt sich in eine Integration über die Eichgruppe $[d\sigma]$ und alle Feldkonfigurationen in der jeweiligen Eichung $[dA[\sigma]]$ aufteilen:

$$Z[0] = \int [d\sigma] \int [dA[\sigma]] \exp\{iS_A[\sigma]\}, \quad (3.5)$$

mit der Parametrisierung der Eichgruppe nach den Gruppenparametern: $[d\sigma] = \prod_a [d\sigma^a]$. Während nun jede Pfadintegration für die Feldkonfigurationen in einer bestimmten Eichung immer dasselbe endliche Ergebnis liefert, divergiert die Integration über die kontinuierliche Gruppe der Eichungen. Auf diese Art manifestiert sich im Pfadintegralformalismus das bekannte Problem bei der Quantisierung einer Eichtheorie. In der kanonischen Quantisierung stellt es sich so dar, daß der zu A_μ^a konjugierte kanonische Impuls Π_μ^a gegeben ist durch $\Pi_\mu^a = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{A}^{a\mu} = -F_{0\mu}^a$. Somit verschwindet er für $\mu = 0$ identisch. Dadurch kann die kanonische Vertauschungsrelation $[A_\mu^a(x), \Pi_\nu^b(y)]_{x_0=y_0} = i\delta_{ab}g_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ nicht erfüllt werden. In beiden Fällen wird dies durch Einführung einer Eichfixierung $G^{ab\mu}A_\mu^b = B^a$ behoben. $G^{ab\mu}$ ist ein auf das Eichfeld wirkender Operator und B^a eine Funktion der Raumzeit. Die Wahl $G^{ab\mu} = \delta^{ab}\partial^\mu$ und $B^a \equiv 0$ entspricht der sogenannten Lorentzeichung. Eine derartige Eichfixierung soll den Unterraum von Feldkonfigurationen $A_\mu^b[\sigma]$ auszeichnen, der die durch diese gegebene Eichbedingung erfüllt: $G^{ab\mu}A_\mu^b[\sigma] = B^a$. Eine solche Vorgehensweise führt wegen der nicht-trivialen Topologie des QCD-Vakuums nicht notwendigerweise zu einer eindeutigen Lösung. Dieser Sachverhalt ist unter dem Namen Gribov-Vieldeutigkeit [31] bekannt, spielt in perturbativen Rechnungen allerdings keine Rolle. Um die Eichfixierung im Fall der Pfadintegralquantisierung geschickt miteinbeziehen zu können, fügt man durch die implizite Definition des Operators $\Delta_G[A]$ die Eichbedingung in Form einer Eins in Gleichung (3.4) ein. Die Eichbedingung wird in der Definition als Argument einer Funktionaldeltadistribution verwendet:

$$1 = \Delta_G[A] \int \prod_a [d\sigma^a] \delta^{(n)}[G^{ab\mu}A_\mu^b[\sigma] - B^a]. \quad (3.6)$$

Das Einsetzen der vorhergehenden in Gleichung (3.4) ergibt:

$$Z[0] = \int [dA] \prod_a [d\sigma^a] \delta^{(n)}[G^{ab\mu} A_\mu^b[\sigma] - B^a] \Delta_G[A] \exp\{iS_A\}. \quad (3.7)$$

Alle im letzten Ausdruck auftretenden Faktoren sind bis auf die Deltadistribution eichinvariant. Deshalb kann man in dieser für das spezielle, durch die Eichbedingung ausgezeichnete Feld $A_\mu^a[\sigma]$ das allgemeine A_μ^a substituieren:

$$Z[0] = \int [dA] \Delta_G[A] \int \prod_a \prod_x \{d\sigma^a(x) \delta(G^{ab\mu} A_\mu^b(x) - B^a(x))\} \exp\{iS_A\}. \quad (3.8)$$

Das Pfadintegral und die Deltadistribution sind hier vollständig ausgeschrieben, um die jeweils zueinander gehörenden Faktoren umsortieren zu können. Der unendliche Faktor $\int \prod_a \prod_x d\sigma^a(x)$ kann nun aus dem obigen Ausdruck herausgezogen werden. Gemäß der Berechnungsvorschrift (3.1) kürzt er sich stets wegen der Normierung mit $Z[0]$ heraus. Daher bietet sich eine modifizierte Definition für das erzeugende Funktional an:

$$Z[0] = \int [dA] \Delta_G[A] \prod_{a,x} \delta(G^{ab\mu} A_\mu^b - B^a) \exp\{iS_A\}. \quad (3.9)$$

Die direkte Auswertung der Definition (3.6) zeigt, daß sich der Operator $\Delta_G[A]$ als Determinante einer Matrix M_G schreiben läßt, mit:

$$M_G^{ab}(x, y) = \frac{\delta G^{ab\mu} A_\mu^b[\sigma(x)]}{\delta \sigma^b(y)}. \quad (3.10)$$

Für die Lorentzeichung ergibt sich beispielsweise die Matrix:

$$M_G^{ab}(x, y) = (\delta^{ab} \square - g f^{abc} \partial^\mu A_\mu^c) \delta^{(4)}(x - y). \quad (3.11)$$

In axialer oder temporaler Eichung ist die entsprechende Determinante unabhängig vom Eichfeld und somit von keiner weiteren Bedeutung.

Mit Hilfe einer auf der Basis von antikommutierenden Zahlen χ und χ^* – sogenannten Grassmann-Zahlen – aufgezogenen Algebra (siehe zum Beispiel [32]), läßt sich diese Determinante als Exponential darstellen:

$$\det M_G = \int [d\xi][d\xi^*] \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \xi^a(x)^* M_G^{ab}(x, y) \xi^b(y) \right\}. \quad (3.12)$$

Damit ergibt sich ein Beitrag zu der klassischen Wirkung:

$$S_{FP} = \int d^4x \mathcal{L}_{FP} = \int d^4x d^4y \xi^a(x)^* M_G^{ab}(x, y) \xi^b(y). \quad (3.13)$$

Für die Lorentzzeichnung findet man zum Beispiel nach einer partiellen Integration:

$$\mathcal{L}_{FP} = -(\partial^\mu \xi^a(x))^* D_\mu^{ab} \xi^b(x). \quad (3.14)$$

Das Feld ξ ist das sogenannte Faddeev-Popov-Geistfeld [33]. Es handelt sich hierbei um Hilfsfelder, die für die Korrektur spurioser Freiheitsgrade im gluonischen Sektor wichtig sind.

In Gleichung (3.9) sind lediglich die Deltadistributionen noch nicht exponentiert. Da die $B^a(x)$ beliebig sind, ist es möglich, um dies zu erreichen, nach Multiplikation mit einer Wichtung

$$\exp \left\{ -\frac{i}{2\alpha} \int d^4x [B^a(x)]^2 \right\} \quad (3.15)$$

über die $B^a(x)$ zu integrieren. Daraus ergibt sich ein weiterer Summand

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} (G^{ab\mu} A_\mu^b)^2 \quad (3.16)$$

im Integral des Exponenten.

Zuletzt sollen noch die Fermionen quantisiert werden. Um dem Pauliprinzip und der damit verbundenen antikommutativen Natur der Feldoperatoren Rechnung zu tragen, benötigt man erneut das Konzept der Grassmannzahlen. Das vollständige erzeugende Funktional ist dann:

$$\begin{aligned} Z[J, \xi, \xi^*, \eta, \bar{\eta}] &= \\ &= \int [dA][d\xi][d\xi^*][d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L} + A \cdot J + \chi^* \cdot \xi + \xi^* \cdot \chi + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi) \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die Lagrangedichte \mathcal{L} stellt sich dar als die Summe aus dem kinematischen Anteil für die Eichfelder \mathcal{L}_A in Gleichung (2.8), dem Eichfixierungsterm \mathcal{L}_{GF} in Gleichung (3.16), dem Faddeev-Popov-Geist-Beitrag \mathcal{L}_{FP} , gegeben in Gleichung (3.13) und der Lagrangedichte für die Fermionen \mathcal{L}_F aus Gleichung (2.5): $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_F$. Die Felder ψ und

η sind Grassmann-wertig. Aus diesem Grund ist auch bei der Benutzung des erzeugenden Funktionals auf zusätzliche Vorzeichen zu achten. Deshalb gilt zum Beispiel für die Zweipunktgreensfunktion:

$$\langle 0 | T[\hat{\psi}_\alpha(x)\bar{\hat{\psi}}_\beta(y)] | 0 \rangle = \frac{(-i)^2}{Z[0, 0, 0]} \frac{\delta^2 Z[J, \eta, \bar{\eta}]}{\delta(+\bar{\eta}_\alpha(x))\delta(-\eta_\beta(y))}. \quad (3.18)$$

A. Standardstörungstheorie

Das erzeugende Funktional (3.17) läßt sich zerlegen in einen freien und einen wechselwirkenden Anteil. Der freie Anteil Z_0 enthält alle Terme zweiter Ordnung in den Feldern. Damit eine vollständige Separierung möglich wird, werden im wechselwirkenden Anteil die Felder durch Funktionalableitungen nach den Strömen ersetzt:

$$Z[J, \xi, \xi^*, \eta, \bar{\eta}] = \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}, \frac{\delta}{i\delta \xi^{a*}}, \frac{\delta}{i\delta(-\xi^a)}, \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{i\delta(-\eta)} \right) \right\} Z_0[J, \xi, \xi^*, \eta, \bar{\eta}]. \quad (3.19)$$

Der freie Anteil faktorisiert weiter in Anteile für das Eichfeld, inklusive dem Beitrag der Eichfixierung Z_0^G , die Fadeev-Popov-Geister Z_0^{FP} und die Fermionen Z_0^F :

$$Z_0[J, \xi, \xi^*, \eta, \bar{\eta}] = Z_0^G[J] Z_0^{FP}[\xi, \xi^*] Z_0^F[\eta, \bar{\eta}] \quad (3.20)$$

mit den erzeugenden Funktionalen für die verschiedenen freien Felder

$$Z_0^A[J] = \int [dA] \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0^G + A \cdot J) \right\} \quad (3.21)$$

$$Z_0^{FP}[\xi, \xi^*] = \int [d\chi][d\chi^*] \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0^{FP} + \chi^* \cdot \xi + \xi^* \cdot \chi) \right\} \quad (3.22)$$

$$Z_0^F[\eta, \bar{\eta}] = \int [d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0^F + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi) \right\} \quad (3.23)$$

und den dazugehörigen Lagrangedichten in der Lorentzzeichnung:

$$\mathcal{L}_0^G = -\frac{1}{2} A_\mu^a K_0^{ab\mu\nu} A_\nu^b \quad (3.24)$$

mit

$$K_0^{ab\mu\nu}(x) = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial A_\mu^a \partial A_\nu^b} \right|_{A=\dots=0} = \delta^{ab} \left[-g^{\mu\nu} \square + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] \quad (3.25)$$

und

$$\mathcal{L}_0^{FP} = -\chi^{a*} K_0^{ab} \chi^b \quad \text{mit} \quad K_0^{ab}(x) = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \chi^{a*} \partial \chi^b} \right|_{\chi^{a*}=\chi^b=\dots=0} = \delta^{ab} \square \quad (3.26)$$

sowie

$$\mathcal{L}_0^F = +\bar{\psi}\Lambda_0\psi \quad \text{mit} \quad \Lambda_0(x) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi} \partial \psi} \Big|_{\psi=\bar{\psi}=A=\dots=0} = +i\gamma \cdot \partial - m. \quad (3.27)$$

Zu den durch Funktionalableitungen definierten Operatoren lassen sich Inverse definieren. Diese sind die freien Propagatoren der Teilchen:

$$K_0^{ac\mu\lambda}(x)g_{\lambda\rho}D_0^{cb\rho\nu}(x-y) = \delta^{ab}g_{\mu\nu} \quad (3.28)$$

$$K_0^{ac}(x)D_0^{cb}(x-y) = \delta^{ab}\delta^{(4)}(x-y) \quad (3.29)$$

$$\Lambda_0(x)G_0(x-y) = \delta^{(4)}(x-y). \quad (3.30)$$

Die Literatur gibt teilweise Integralgleichungen für die Definition der Propagatoren an. In allen hier untersuchten Fällen beinhalten die inversen Propagatoren eine Diracdelta-distribution $\delta^{(4)}(x-y)$, die die Integralgleichungen wieder in die oben angegebene Form bringt. Die Bewegungsgleichungen für die freien Propagatoren lassen sich durch Fouriertransformationen lösen:

$$D_0^{ab\mu\nu}(x) = \delta^{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \quad (3.31)$$

$$D_0^{ab}(x) = \delta^{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-e^{-ik \cdot x}}{k^2 + i\epsilon} \quad (3.32)$$

$$G_0(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot x}}{\gamma \cdot p - m} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \frac{\gamma \cdot p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.33)$$

Mit Hilfe der Größe ϵ , die am Ende der Rechnungen gegen $0+$ geführt wird, werden die Pole des Integranden so in der komplexen k_0 -Ebene verschoben, daß die freien Feynman Propagatoren entstehen (siehe Abbildung 2). Für positive Zeiten werden Lösungen positiver Energie propagiert, für negative Zeiten diejenigen mit negativer. Alternative Lösungen unterscheiden sich durch homogene Lösungen der Bewegungsgleichungen (3.28) bis (3.30).

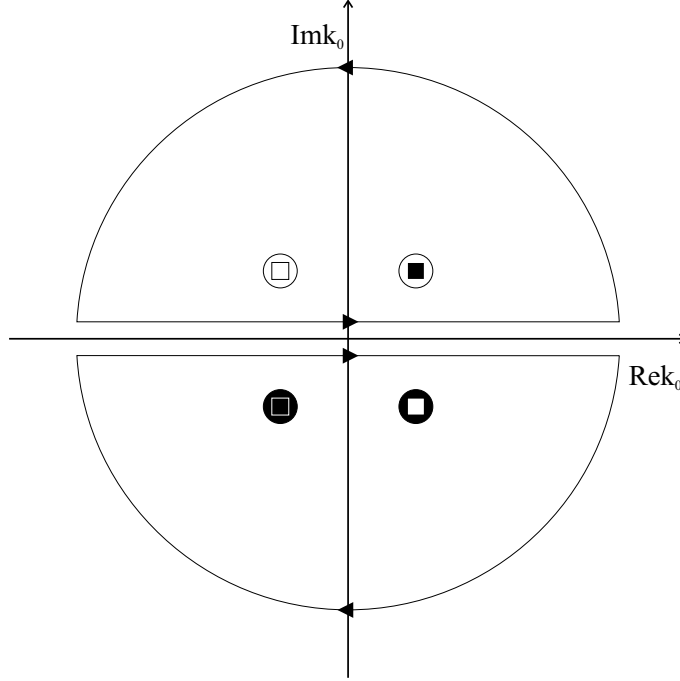


Abbildung 2: Konturintegration in der komplexen k_0 -Ebene zur Bestimmung der Greensfunktion mit dem richtigen asymptotischen Verhalten. Die Kreise zeigen die Positionen an, zu denen die Pole durch die entsprechende ϵ -Präskription für den retardierten (schwarz) und den avancierten Propagator (weiß) verschoben werden. Die Quadrate befinden sich an den entsprechenden Positionen für den Feynman (weiß) und den anti-zeitgeordneten Feynmanpropagator (schwarz). Für den retardierten und avancierten Propagator befinden sich entweder zwei Singularitäten oder gar keine innerhalb einer geschlossenen Kontur. Für den Feynman- und den umgekehrten Feynmanpropagator ist es immer ein einzelner Pol.

Nach einer Verschiebung der Funktionalintegrationsvariablen in (3.21) bis (3.23), die sich durch eine quadratische Ergänzung in den Exponenten ergibt, kann man die Funktionalintegrale ausführen und findet unter Vernachlässigung eines irrelevanten numerischen Faktors, der aus Gaussintegralen hervorgeht:

$$Z_0^G[0] = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J_\mu^a(x) D_0^{ab\mu\nu}(x-y) J_\nu^b(y) \right\}, \quad (3.34)$$

$$Z_0^{FP}[\xi, \xi^*] = \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \xi^{a*}(x) D_0^{ab}(x-y) \xi^b(y) \right\}, \quad (3.35)$$

$$Z_0^F[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) G_0(x-y) \eta(y) \right\}. \quad (3.36)$$

Die Störungstheorie entsteht durch Entwicklung der Exponentialfunktion in Gleichung (3.19) nach Potenzen der Wechselwirkungslagrangedichte:

$$\begin{aligned} Z[J, \xi, \xi^*, \eta, \bar{\eta}] &= \\ &= \left\{ 1 + i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}, \frac{\delta}{i\delta \xi^{a*}}, \frac{\delta}{i\delta(-\xi^a)}, \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{i\delta(-\eta)} \right) + \dots \right\} Z_0[J, \xi, \xi^*, \eta, \bar{\eta}]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

In der Wechselwirkungslagrangedichte \mathcal{L}_{int} sind Terme dritter und vierter Ordnung in den Feldern enthalten. Daher bietet es sich an, diese in ihre elementaren Bestandteile zu zerlegen, um das Werkzeug für eine systematische Behandlung der Störungsreihe zu erhalten. Hieraus resultieren die sogenannten Feynmanregeln für die Wechselwirkungsverices, die durch freie Propagatoren zu komplexeren Diagrammen verbunden werden. Die relevanten Beiträge werden in Anhang B 1 zusammen mit ihren diagrammatischen Darstellung wiedergegeben. In Ortsraumdarstellung ist die Zerlegung in die Vertices weniger praktisch, da dort die Zusammensetzung nicht multiplikativ sondern durch Faltungen erfolgt. In der Theorie enthalten sind die direkte Kopplung von zwei Fermionen mit einem Boson sowie von drei beziehungsweise vier Bosonen untereinander.

Z ist das erzeugende Funktional für alle Greensfunktionen. Es beinhaltet zusammenhängende und nicht-zusammenhängende Beiträge. Ersteres bedeutet, daß jeder Punkt eines Diagramms von jedem anderen aus erreichbar ist. Sollte dies nicht möglich sein, trägt das entsprechende Diagramm nicht zur S-Matrix bei. Aus diesem Grund definiert man ein erzeugendes Funktional W für die zusammenhängenden Greensfunktionen. Es steht mit demjenigen für alle Korrelatoren in Verbindung durch:

$$Z = \exp\{iW\}. \quad (3.38)$$

Diese Definitionsgleichung läßt sich derart verstehen, daß alle möglichen Kombinationen von zusammenhängenden (rechte Seite) die Gesamtheit aller Greensfunktionen (linke Seite) ergeben. In Situationen, in denen der Vakuumserwartungswert der Felder verschwindet, sind die durch beide Funktionale erzeugten Funktionen bis zur Dreipunktgreensfunktion gleich. Anderenfalls unterscheiden sie sich bereits für zwei Punkte.

Bei der störungstheoretischen Behandlung führt man höhere Näherungen für die n -Punktfunktionen iterativ auf niedrigere Näherungen zurück und sortiert schließlich nach einem Entwicklungsparameter, der üblicherweise die Kopplungskonstante g ist. Um Doppelzählungen zu vermeiden, ist ein geeignetes Konstruktionsschema zu schaffen. Versuchte man beispielsweise aus einer beliebigen Menge an zusammenhängenden Greensfunktionen alle weiteren durch Aneinanderhängen der ersteren mit freien Propagatoren zu erreichen, so führte das fast unweigerlich zu Doppelzählungen. Dies verhindert das Konzept der einteilchenirreduziblen Greensfunktionen, welche dadurch gekennzeichnet sind, daß sie nach Entfernen eines einzelnen freien Propagators immer noch eine zusammenhängende Greensfunktion darstellen. Hinzu kommt, daß sie auch keine äußeren freien Propagatoren enthalten. Solche Greensfunktionen werden trunziert oder amputiert genannt. Hängt man Ketten genannter Klasse von Korrelatoren, die auch verästelt sein können, aber keine zusätzlichen Schleifen enthalten dürfen, aneinander, so erhält man alle zusammenhängenden Greensfunktionen, ohne Gefahr zu laufen, eine mehrfach zu konstruieren. Dieses Konstruktionsprinzip erklärt auch den Namen „effektive Wirkung“ für das entsprechende erzeugende Funktional Γ , welches durch eine Legendretransformation von J nach $a = \delta W / \delta J$ aus dem erzeugenden Funktional für die zusammenhängenden Greensfunktionen W hervorgeht. Für den Eichfeldsektor stellt sie sich dar als:

$$\Gamma[a] = W[J[a]] - \int d^4x J \cdot a. \quad (3.39)$$

Für die anderen Felder verlaufen die Transformationen analog.

Im stabilen Vakuum ergibt sich der Vakuumerwartungswert des Eichfeldes A als Extremum der effektiven Wirkung: $\delta\Gamma[a]/\delta a = 0$. Im instabilen ist die Lösung dieser Gleichung im allgemeinen komplex und kann schon aus diesem Grund nicht das klassische Feld repräsentieren.

B. Klassisches Feld und Fermionen im stabilen Vakuum

In Situationen, in denen das Vakuum trotz Kondensats, also bei nicht verschwindendem Vakuumerwartungswert des Eichfeldes, stabil ist, ist es möglich, mit Berechnungen auf Basis des oben angegebenen erzeugenden Funktionals fortzufahren. Das Vektorpotential ist hier nicht quantisiert, wodurch die Eichfixierung und damit auch die Faddeev-Popov-Geist-Terme im erzeugenden Funktional nicht mehr notwendig sind:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int [d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_A + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi) \right\}. \quad (3.40)$$

Im vorliegenden Fall ergibt die Auswertung der Euler-Lagrange-Gleichungen die Yang-Mills-Gleichungen mit dem fermionischen Stromterm $\langle J_\nu \rangle$:

$$\partial^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} - i[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}] = \langle J_\nu \rangle. \quad (3.41)$$

Im Gegensatz zum nichtquantisierten Fall (2.11) handelt es sich hier um seinen Vakuumerwartungswert.

Zur Berechnung des Korrelators auf der rechten Seite könnte die im vorigen Abschnitt angegebene Störungsentwicklung benutzt werden. Alternativ wählt man von vornherein anstelle des freien inversen fermionischen Propagators (3.27) den mit Hintergrundfeld:

$$\Lambda = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi} \partial \psi} \right|_{\psi=\bar{\psi}=\dots=0, \mathbf{A} \neq \mathbf{0}} = +i\gamma \cdot \partial - \gamma \cdot A - m. \quad (3.42)$$

Mit ihm stellt sich die gesamte Lagrangedichte für die Fermionen im klassischen Feld dar als: $\mathcal{L}_F = +\bar{\psi} \Lambda \psi$. Analog zu Gleichung (3.30) befolgt dann der volle Propagator im klassischen Feld die Bewegungsgleichung:

$$\Lambda(x)G(x, y) = \delta^{(4)}(x - y). \quad (3.43)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für die volle Dirac-Greensfunktion im äußeren Feld. Sie ist wegen der Symmetriebrechung durch das klassische Feld nicht mehr translationsinvariant in der Raumzeit und hängt damit nicht mehr nur vom Abstand der Punkte x und y ab. Wegen der Farbstruktur des Feldes (QCD) besitzt der volle Propagator nun im allgemeinen auch keine triviale Farbstruktur mehr. Die Gleichung wird für die oben diskutierten Randbedingungen, die für Greensfunktionen von zeitgeordneten Feldoperatoren (hier im stabilen

Vakuum) notwendig sind, gelöst, was wiederum auf den Feynmanpropagator $G_F(x, y)$ führt. Mit der Lösung von Gleichung (3.43) läßt sich der fermionische Anteil des erzeugenden Funktionals nach Ausführung aller Funktionalintegrationen schreiben als:

$$Z_F[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) G_F(x, y) \eta(y) \right\}. \quad (3.44)$$

Dieses erzeugende Funktional wird hier nicht mehr benötigt, da im vollständig zweitquantisierten Bild, in Ermangelung von bosonischen Quanten, die (fermionischen) Greensfunktionen mit mehr als zwei Punkten keinen Beitrag mehr liefern, da sie nicht zusammenhängend sein können. Man stellt fest, daß die effektive Wirkung dieses Sektors der Theorie bezüglich des vollen fermionischen Propagators verschwindet.

Als einzige relevante Greensfunktion tritt daher der volle fermionische Propagator im Hintergrundfeld $G(x, y)$ auf. Die Wechselwirkung zwischen den Fermionen wird durch das klassische Feld A vermittelt. Der Term für den fermionischen Strom läßt sich bis auf einen weiteren Summanden für den anfänglich vorhandenen externen Strom J_{ext}^ν mit Hilfe des vollen Feynmanpropagators ausdrücken:

$$\langle J_\nu \rangle = g \operatorname{tr} \{ \gamma^\nu G_F(x, x) \}, \quad (3.45)$$

wobei die Spurbildung über die Lorentzstruktur erfolgt. Entsprechend der Darstellung des Feldes muß die Farbstruktur des Propagators in der adjungierten Darstellung gewählt werden. Das doppelte Argument der Greensfunktion bedeutet:

$$G_F(x, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [G_F(x + n\epsilon, x) + G_F(x, x + n\epsilon)]/2 \quad (3.46)$$

mit $n^2 > 0$. Durch die unterschiedlichen Vorzeichen des zeitartigen Abstandes werden die Beiträge der Fermionen und der Antifermionen zum Strom miteinbezogen. Dieser Strom entspricht einer einzelnen Vakuumschleife des vollen Propagators (siehe Abbildung 3). Es handelt sich dabei um die einzige Art von Schleifendiagramm, die im hier vorliegenden Fall auftreten kann. Allerdings wird dabei nur der Beitrag behandelt, der von induzierten Strömen geliefert wird. Sollten bereits zu Anfang (externe) fermionische Ströme vorhanden sein, so ergibt sich ein weiterer additiver Beitrag. Bei allen dementsprechenden Ausdrücken, die noch im weiteren Verlauf dieser Arbeit auftreten, wird hierauf nicht mehr explizit hingewiesen.

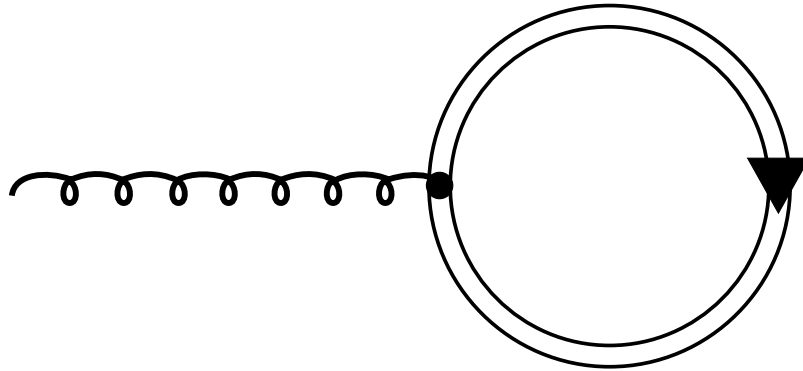


Abbildung 3: Diagramm für den durch die Fermionen und Antifermionen induzierten Strom, an den das klassische Feld ankoppelt.

Im hier vorliegenden Bild werden keine radiativen Korrekturen bedacht, da die Bosonen nicht quantisiert sind. Im Zusammenhang mit dem in der Einleitung diskutierten starken bosonischen Feld, läßt sich dies so interpretieren, daß die bosonischen Quanteneffekte in dieser Näherung nicht bedacht werden, da ihr Einfluß schwächer als der des klassischen Feldes ist.

Als nächstes könnten sich hier die Diskussion der Quantenfluktuationen des gluonischen Feldes anschließen. Um die Modifikationen, die sich beim Übergang zum instabilen Vakuum im fermionischen Fall ergeben, klarer verfolgen zu können, wird diese Diskussion aber auf Kapitel IV B verschoben, in welchem die genannten Fluktuationen im instabilen Vakuum behandelt werden. Die dort erhaltenen Aussagen lassen sich weitgehend auch auf den Fall eines stabilen Vakuums anwenden.

IV. QUANTENCHROMODYNAMIK IM INSTABILEN VAKUUM

A. Klassisches Feld und Fermionen im instabilen Vakuum

Unter Beschränkung auf den fermionischen Sektor soll dargestellt werden, welche Modifikationen sich in Anwesenheit eines instabilen Vakuums ergeben. Derartige Vacua zeichnen sich dadurch aus, daß sich das eingehende und das ausgehende Vakuum voneinander unterscheiden, $|\langle 0_{out}|0_{in}\rangle|^2 < 1$. Nur in solchen Situationen können auch reale Teilchen entstehen. Dieses Skalarprodukt enthält alle zusammenhängenden Diagramme ohne ein- oder auslaufende Teilchen. In der Pfadintegraldarstellung ist es demnach genau gleich dem erzeugenden Funktional ohne äußere Quellen $Z[0\dots]$, mit dem bisher alle Greensfunktionen normiert worden sind. Man hat nun die Wahl, die Vakuumerwartungswerte zwischen dem In- und Out-Vakuum $\langle 0_{out}|\dots|0_{in}\rangle$ oder zwei In-Vakuumszuständen $\langle 0_{in}|\dots|0_{in}\rangle$ zu bilden. Das erste Matrixelement enthält Informationen über Wahrscheinlichkeiten, das zweite über Erwartungswerte.

1. *Wahrscheinlichkeiten*

Die Amplitude für die Produktion genau eines Fermion-Antifermion-Paares läßt sich mit Hilfe von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Felder als Vakuumserwartungswert ausdrücken:

$$M_1(\vec{p}, \vec{q}) = \langle \bar{q}(\vec{p})q(\vec{q}) | 0_{in} \rangle = \langle 0_{out} | d_{out}(\vec{p})b_{out}(\vec{q}) | 0_{in} \rangle. \quad (4.1)$$

Diese Operatoren sind implizit als operatorwertige Fermionenamplituden der Fermionfelder $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$ definiert:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} [b(k)u(k)e^{-ik \cdot x} + d^\dagger(k)v(k)e^{+ik \cdot x}] \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} [b^\dagger(k)\bar{u}(k)e^{+ik \cdot x} + d(k)\bar{v}(k)e^{-ik \cdot x}]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Explizit findet man:

$$b_{out}(\vec{q}) = \int d^3x \bar{u}(\vec{q})\gamma^0 \psi_{out}(t, \vec{x}) e^{iq \cdot x} \quad (4.3)$$

und

$$d_{out}(\vec{p}) = \int d^3x \bar{\psi}_{out}(t, \vec{x})\gamma^0 v(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \quad (4.4)$$

mit Massenschalenvierimpulsen. Eine Reduktionsformel führt die Paarerzeugungsamplitude auf einen Zweipunktfeldkorrelator zurück:

$$\begin{aligned} &\langle 0_{out} | d_{out}(\vec{p})b_{out}(\vec{q}) | 0_{in} \rangle = \\ &= \left[\frac{i}{\sqrt{Z_2}} \right]^2 \int d^4x d^4y e^{iq \cdot x} \bar{u}(\vec{q}) [i\gamma \cdot \overrightarrow{\partial}(x) - m] \langle 0_{out} | T \bar{\psi}(y)\psi(x) | 0_{in} \rangle [i\gamma \cdot \overleftarrow{\partial}(y) + m] v(p) e^{ip \cdot y}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Summationen über die Spinfreiheitsgrade werden hier im allgemeinen nicht explizit notiert. Die Herleitung der Reduktionsformel benötigt neben den Bewegungsgleichungen der asymptotischen Felder die Fourierdarstellungen der Feldoperatoren. Sie ist nur gültig, wenn die Eichfelder für $t \rightarrow \pm\infty$ schnell genug verschwinden. Anderenfalls werden Konstruktionen

wie das sogenannte „adiabatic switching“ benötigt. Teilweise kommt man auch mit Umeichungen zum Ziel, wie zum Beispiel, um den langreichweitigen Teil des Coulombpotentials zu kompensieren. Der Zusammenhang zwischen dem Heisenbergfeld $\psi(x)$ und dem Feld in Wechselwirkungsrepräsentation $\psi_{int}(x)$ ist gegeben durch:

$$\psi(x) = U(t_{int}, x^0)\psi_{int}(x)U(x^0, t_{int}), \quad (4.6)$$

mit dem Zeitpunkt t_{int} , zu dem das Heisenberg- und das Wechselwirkungsbild übereinstimmen, und dem Entwicklungsoperator

$$U(t_2, t_1) = \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}_{int}[\psi_{int}(x)] \right\}, \quad (4.7)$$

der den Wechselwirkungsteil der fermionischen Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{int} = -\bar{\psi}(x)\gamma \cdot A(x)\psi(x) \quad (4.8)$$

beinhaltet; \mathcal{P} steht dabei für Pfadordnung. Die letzten Formeln ermöglichen es, die Zweipunktgreensfunktion umzuschreiben in:

$$\begin{aligned} \langle 0_{out} | T\bar{\psi}(y)\psi(x) | 0_{in} \rangle &= \\ &= \langle 0_{out} | U(-\infty, +\infty) T\bar{\psi}_{in}(y)\psi_{in}(x) \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}_{int}[\psi_{in}(x)] \right\} | 0_{in} \rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Unter Ausnutzung des Zusammenhangs $\langle 0_{out} | U(-\infty, +\infty) = \langle 0_{in} |$ folgt:

$$\langle 0_{out} | T\bar{\psi}(y)\psi(x) | 0_{in} \rangle = \langle 0_{in} | T\bar{\psi}_{in}(y)\psi_{in}(x) \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}_{int}[\psi_{in}(x)] \right\} | 0_{in} \rangle. \quad (4.10)$$

Dieser gesamte Ausdruck basiert nun auf In-Zuständen und In-Operatoren und erschließt sich somit den bereits weiter oben beschriebenen Verfahren.

Um dem nichterhaltenen Vakuum Rechnung zu tragen, muß der Korrelator bezüglich der Vakuum-zu-Vakuum-Amplitude normiert werden. Daraus resultiert ein Ausdruck für den vollen Feynmanpropagator:

$$G_F(x, y) = \frac{\langle 0_{out} | T\bar{\psi}(y)\psi(x) | 0_{in} \rangle}{\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle} = \frac{\langle 0_{in} | T\bar{\psi}_{in}(y)\psi_{in}(x) \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}_{int}[\psi_{in}(x)] \right\} | 0_{in} \rangle}{\langle 0_{in} | U(+\infty, -\infty) | 0_{in} \rangle}. \quad (4.11)$$

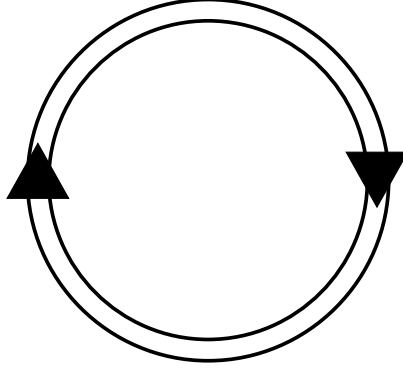


Abbildung 4: Diagramm für die Vakuumbu-akuumbu-Amplitude.

In die Vakuumbu-akuumbu-Amplitude gehen alle Diagramme ohne äußere Quantenlinien ein. Unter Vernachlässigung weitere Strahlungskorrekturen trägt hier nur ein einfacher Loop des fermionischen Propagators bei (siehe Abbildung 4).

Beschreibt man den Propagator im Impulsraum durch:

$$G(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot x} e^{ip \cdot y} G(q, p) \quad (4.12)$$

und entsprechend auch das Eichfeld:

$$A_\mu(k) = \int d^4 x e^{-ik \cdot x} A_\mu(x), \quad (4.13)$$

definiert sich der wechselwirkende Anteil \mathcal{T}_F des Feynmanpropagators – auch Einteilchenstreuoperator genannt – gemäß:

$$G_F(p, q) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q) G_F^0(p) + G_F^0(q) \mathcal{T}_F(q, p) G_F^0(p). \quad (4.14)$$

Für die Wahrscheinlichkeit, genau ein Paar zu erzeugen, findet man [16]:

$$P_1 = |\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle|^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2\omega_q} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} |\bar{u}(\vec{q}) \mathcal{T}_F(q, -p) v(\vec{p})|^2. \quad (4.15)$$

Hierbei werden Schritte ausgeführt, die analog zu denjenigen sind, die von Gleichung (4.31) zum Ausdruck (4.34) führen. Im Rahmen der Rechnungen für die Wahrscheinlichkeiten kann man hier noch immer von dem bisherigen erzeugenden Funktional der Greensfunktionen ausgehen und dieses mit dem vollen fermionischen Propagator umschreiben.

2. Erwartungswerte

Der Erwartungswert für die Anzahl der produzierten Paare $\langle n \rangle$ ist bezüglich der Wahrscheinlichkeiten genau n Paare zu erzeugen P_n definiert als:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}. \quad (4.16)$$

Diese Wahrscheinlichkeiten können mit (4.3) und (4.4) wieder in Erwartungswerte von Felderzeugungs und -vernichtungsoperatoren umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!^2} \int \prod_{i=1}^{n+1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2\omega_p} \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2\omega_q} \times \\ &\times |\langle 0_{out} | d_{out}(\vec{p}_1) b_{out}(\vec{q}_1) \dots d_{out}(\vec{p}_{n+1}) b_{out}(\vec{q}_{n+1}) | 0_{in} \rangle|^2, \end{aligned} \quad (4.17)$$

mit der Massenschalenenergie: $\omega_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$.

Das Ausführen des Betragsquadrates und Herausziehen einer Impulsintegration in Gleichung (4.17) ergibt:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2\omega_q} \langle 0_{in} | b_{out}^\dagger(\vec{q}) \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \int \prod_{i=1}^{n+1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2\omega_p} \int \prod_{j=1}^n \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3 2\omega_q} \times \\ &\times d_{out}^\dagger(\vec{p}_{n+1}) b_{out}^\dagger(\vec{q}_n) d_{out}^\dagger(\vec{p}_n) \dots b_{out}^\dagger(\vec{q}_1) d_{out}^\dagger(\vec{p}_1) | 0_{out} \rangle \times \\ &\times \langle 0_{out} | d_{out}(\vec{p}_1) b_{out}(\vec{q}_1) \dots d_{out}(\vec{p}_n) b_{out}(\vec{q}_n) d_{out}(\vec{p}_{n+1}) \times \\ &\times b_{out}(\vec{q}) | 0_{in} \rangle. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die drei mittleren Zeilen im vorangegangenen Ausdruck sind identisch zum Einheitsoperator des Unterraumes der Zustände mit der zu $b_{out}^\dagger(\vec{q})$ entgegengesetzten Ladung. Also gilt:

$$\langle n \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \langle 0_{in} | b_{out}^\dagger(\vec{k}) b_{out}(\vec{k}) | 0_{in} \rangle. \quad (4.19)$$

Sollte der Anfangszustand das Vakuum sein, reicht es somit aus, die Anzahl der Fermionen im Endzustand zu zählen, um die Zahl der produzierten Paare zu bestimmen. Separierte man an Stelle eines Fermionoperators einen Antifermionenoperator ab, so ergäbe sich das analoge Ergebnis:

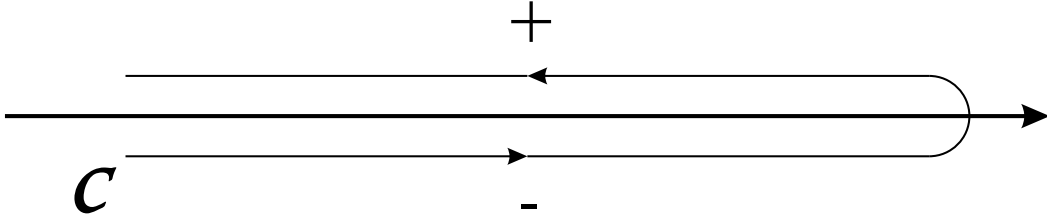


Abbildung 5: Integrationskontur für den Schwinger-Keldysch-Formalismus

$$\langle n \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \langle 0_{in} | d_{out}^\dagger(\vec{k}) d_{out}(\vec{k}) | 0_{in} \rangle. \quad (4.20)$$

Für die hier vorliegenden Korrelatoren existieren ebenfalls Reduktionsformeln. Die hier benötigte lautet:

$$\langle n \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[\frac{i}{\sqrt{\mathcal{Z}_2}} \right]^2 \int d^4 x d^4 y e^{ik \cdot x} \bar{u}(\vec{k}) \left[i\gamma \cdot \vec{\partial}(x) - m \right] \langle 0_{in} | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0_{in} \rangle \left[i\gamma \cdot \overleftarrow{\partial}(y) - m \right] u(\vec{k}) e^{-ik \cdot y}. \quad (4.21)$$

\mathcal{Z}_2 ist der Wellenfunktionsrenormalisierungsfaktor für die Fermionen. Mit der hier verwendeten Lagrangedichte ist dieser Faktor gleich eins.

Der benötigte Korrelator wird im Schwinger-Keldysch-Formalismus als $G_{+-}(x, y)$ bezeichnet [34–36]. Die Vorzeichen geben dabei an, auf welchem Ast der Integrationskontur \mathcal{C} die Zeiten x_0 und y_0 jeweils zu finden sind. Der Integrationsweg verläuft in der komplexen Zeitebene von $-\infty$ nach $+\infty$ unterhalb der reellen Achse („-“-Ast) und anschließend von $+\infty$ nach $-\infty$ oberhalb der reellen Achse („+“-Ast) (siehe Abbildung 5).

Diese Kontur wird eingeführt, um den Zeitentwicklungsoperator U :

$$U(t_2, t_1) = \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{t_1}^{t_2} d^4 x \mathcal{L}_{int}[\psi_{in}(x)] \right\} \quad (4.22)$$

mit der Wechselwirkungslagrangedichte $\mathcal{L}_{int} = i\bar{\psi}(x)\gamma \cdot A(x)\psi(x)$ in der folgenden Formel für den Erwartungswert des zeitgeordneten Produkts der fermionischen Feldoperatoren zwischen Anfangszuständen miteinzubeziehen:

$$\begin{aligned}
 & \langle 0_{in} | T \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0_{in} \rangle = \\
 & = \left\langle 0_{in} \left| U(-\infty, +\infty) T \bar{\psi}_{in}(y) \psi_{in}(x) \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}_{int}[\psi_{in}(x)] \right\} \right| 0_{in} \right\rangle = \\
 & = \left\langle 0_{in} \left| \mathcal{P} \bar{\psi}_{in}(y) \psi_{in}(x) \exp \left\{ i \int_{\mathcal{C}} d^4x \mathcal{L}_{int}[\psi_{in}(x)] \right\} \right| 0_{in} \right\rangle .
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Bei der Berechnung von Erwartungswerten zwischen dem Anfangs- und dem Endvakuum, wie zum Beispiel $\langle 0_{out} | T \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0_{in} \rangle$, ist diese Manipulation wegen der Identität $\langle 0_{out} | U(-\infty, +\infty) = \langle 0_{in} |$ nicht notwendig. Allgemein ist die Wechselwirkungslagrangedichte \mathcal{L}_{int} in dem Ausdruck für den Zeitentwicklungsoperator U in Gleichung (4.22) ein Funktional des fermionischen Feldoperators ψ , an jenem Punkt, an welchem das Heisenberg- und das Wechselwirkungsbild übereinstimmen. Hier wurde dieser auf den anfänglichen Zeitpunkt gelegt, wodurch die Wechselwirkungslagrangedichte ein Funktional von ψ_{in} ist. Die unterschiedlichen Propagatoren, die so behandelt werden können, sind:

$$\begin{aligned}
 G_{++}(x, y) &= + \langle 0_{in} | T \bar{\psi}_{in}(y) \psi_{in}(x) | 0_{in} \rangle \\
 G_{--}(x, y) &= + \langle 0_{in} | T^{-1} \bar{\psi}_{in}(y) \psi_{in}(x) | 0_{in} \rangle \\
 G_{+-}(x, y) &= + \langle 0_{in} | \bar{\psi}_{in}(y) \psi_{in}(x) | 0_{in} \rangle \\
 G_{-+}(x, y) &= - \langle 0_{in} | \psi_{in}(x) \bar{\psi}_{in}(y) | 0_{in} \rangle .
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Der Operator T^{-1} steht für umgekehrte Zeitordnung. Im Falle zweier Felder entspricht dies:

$$T^{-1} \phi_1(t_1) \phi_2(t_2) = \theta(t_2 - t_1) \phi_1(t_1) \phi_2(t_2) + \theta(t_1 - t_2) \phi_2(t_2) \phi_1(t_1), \tag{4.25}$$

(vergleiche dazu Gleichung (3.2)). $G_{+-}(x, y)$ läßt sich auch als Linearkombination des avancierten $G_A(x, y)$, retardierten $G_R(x, y)$ und des Massenschalen-Propagators $G_S(x, y)$ ausdrücken [37–39]:

$$G_{+-}(x, y) = [G_A(x, y) - G_R(x, y) + G_S(x, y)] / 2. \tag{4.26}$$

Allgemein gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & G_A \\ G_R & G_S \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{++} & G_{+-} \\ G_{-+} & G_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Der Massenschalen-Propagator $G_S(q, p)$ kann durch den retardierten $G_R(q, p)$ und den avancierten Propagator $G_A(q, p)$ ausgedrückt werden:

$$G_S(q, p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2) G_R(q, k) G_R^{0-1}(k) (\gamma \cdot k + m) G_A^{0-1}(k) G_A(k, p). \quad (4.28)$$

Aufeinanderfolgendes Einsetzen der Gleichungen (4.26) und (4.28) in den Ausdruck für den Erwartungswert (4.21) ergibt:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2\omega_q} \bar{u}(\vec{q}) \\ &\left[\mathcal{T}_A(q, q) - \mathcal{T}_R(q, q) + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \mathcal{T}_R(q, k) (\gamma \cdot k + m) \mathcal{T}_A(k, q) \right] u(\vec{q}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Die wechselwirkenden Anteile (Einteilchenstreuoperatoren) des avancierten und retardierten Propagators sind analog zu dem des Feynmanpropagators in Gleichung (4.14) definiert. Unter Verwendung der Lippmann-Schwinger-Gleichungen für den retardierten $G_R(q, p)$ und den avancierten Propagator $G_A(q, p)$ kann man zeigen, daß sich deren wechselwirkende Teile durch folgenden Ausdruck unterscheiden:

$$\mathcal{T}_R(q, p) - \mathcal{T}_A(q, p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \text{sgn}(k_0) \mathcal{T}_R(q, k) (\gamma \cdot k + m) \mathcal{T}_A(k, p). \quad (4.30)$$

Setzt man anschließend diese Gleichungen in den letzten Ausdruck für den Erwartungswert ein, ergibt sich:

$$\langle n \rangle = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^2 2\omega_q} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 2\pi \theta(-k_0) \delta(k^2 - m^2) \bar{u}(\vec{q}) \mathcal{T}_R(q, k) (\gamma \cdot k + m) \mathcal{T}_A(k, q) u(\vec{q}). \quad (4.31)$$

Eine Änderung des Vorzeichens des Viererimpulses k , Integration über dessen Energiekomponente k_0 und Ausnutzung der folgenden Relationen:

$$\mathcal{T}_A(-k, q) = -\mathcal{T}_R^*(q, -k) \quad (4.32)$$

und

$$\gamma \cdot k - m = \sum_{\text{Spin}} v(\vec{k}) \bar{v}(\vec{k}), \quad (4.33)$$

führt auf [16]:

$$\langle n \rangle = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2\omega_q} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} |\bar{u}(\vec{q}) \mathcal{T}_R(+q, -p) v(\vec{p})|^2. \quad (4.34)$$

Die implizite Definition des Einteilchenstreuoperators in Gleichung (4.14) führt zu folgendem expliziten Ausdruck für den wechselwirkenden Anteil als Funktional des dazugehörigen Propagators:

$$\mathcal{T}(q, p) = \gamma \cdot A(q - p) + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (\gamma \cdot A(q - k)) G(k, l) (\gamma \cdot A(l - p)). \quad (4.35)$$

Der Term niedrigster Ordnung im Eichfeld A – der erste Summand in der vorangegangenen Gleichung – hängt nicht von der speziellen Wahl des Propagators ab. Somit ist in dieser Näherung (Bornnäherung) der Erwartungswert der Anzahl der produzierten Paare gleich der Wahrscheinlichkeit für die Produktion genau eines Paares. Dabei handelt es sich um eine Näherung, bei der die Eichfeldstärke klein gegenüber dem Impuls der produzierten Partikel sein muß. Dementsprechend ist die Wahrscheinlichkeit für die Produktion mehrerer Paare stark unterdrückt: $\langle n \rangle = \sum_n n P_n \approx 1 \times P_1$.

Das klassische Feld folgt wiederum den Yang-Mills-Gleichungen (3.41) mit einem durch die Fermionen induzierten externen Strom J_ν (siehe Abbildung 3). Dessen Erwartungswert $\langle J_\nu \rangle$ läßt sich hier aus dem kausalen Propagator $G_C(x, y) = G_{++}(x, y)$ berechnen:

$$\langle J^\nu \rangle = g \text{ tr} \{ \gamma^\nu G_C(x, x) \}. \quad (4.36)$$

In der obigen Gleichung wird die Spur nur über die Matrizen der Cliffordalgebra berechnet. Die Definition für das diagonale Raum-Zeit-Matrixelement der Greensfunktion erfolgt analog zu Gleichung (3.46). Strahlungskorrekturen, also weitere Quanteneffekte, werden durch höhere, nicht durch das Auftreten von Faktoren des klassischen Feldes kompensierten Potenzen der Kopplungskonstante unterdrückt.

Im Fall eines instabilen Vakuums ist es nicht praktikabel, den Erwartungswert des Stroms im In-Out-Formalismus auszudrücken. Da er Wahrscheinlichkeiten liefert, müßte man dort

im Prinzip unendlich viele Terme ermitteln, während im In-In-Formalismus ein einziger genügt.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß sich das erzeugende Funktional der für die Berechnung der Erwartungswerte benötigten Greensfunktionen strukturell von dem vorhergegangenen unterscheidet. Es ist nun matrixwertig (über Farb- und Gammamatrizen hinaus) und hängt von zwei Quellen je quantisiertem Feld ab. Dies kann auch mit der Kontur in der Abbildung 2 in Verbindung gebracht werden. Je eine der zwei Quellen pro Feld entspricht jeweils einer Kopplung an den unteren beziehungsweise oberen Ast der Integrationskontur. Die meisten Umformungsschritte laufen analog zu denen ab, die für das bisher beschriebene erzeugende Funktional durchgeführt worden sind. Da es im weiteren Verlauf dieser Arbeit keine Verwendung findet, ist es an dieser Stelle nicht notwendig, seine explizite Form zu diskutieren.

B. Bosonische Quantenfluktuationen: Die Hintergrundfeldmethode

In diesem Kapitel wird ausschließlich der gluonische Teil der Theorie behandelt, da sich in ihm die wesentlichen Änderungen ergeben. Der fermionische Sektor kann am Ende wieder direkt miteinbezogen werden. Die hier vorgestellte Hintergrundfeldmethode hat bereits im stabilen Vakuum ihre Berechtigung. Auch dort treten gluonische Quantenfluktuationen auf, die zwar keine realen Teilchen darstellen, aber dennoch die Dynamik des Systems beeinflussen. Die bosonischen Quantenfluktuationen sind nicht an entsprechender Stelle diskutiert worden, um die Änderungen, die sich im fermionischen Sektor ergeben, klarer verfolgen zu können. Der Inhalt dieses Kapitels läßt sich direkt auf den Fall des stabilen Vakuums anwenden.

Die Hintergrundfeldmethode [40, 41] beruht auf einer Aufspaltung des quantisierten Eichfeldes A in seinen Erwartungswert $\langle A \rangle$ und die superponierten Fluktuationen $Q = A - \langle A \rangle$. Der Erwartungswert – das klassische Feld – soll ab dieser Stelle wiederum mit dem Buchstaben A bezeichnet werden: $A \rightarrow A + Q$. Die Gesamtheit aller Quanteneffekte wird von dem Fluktuationfeld Q getragen. Das klassische Feld transformiert sich unter Eichtransformationen, wie zuvor das gesamte Feld (2.4):

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U A_\mu U^{-1} - i(\partial_\mu U)U^{-1}. \quad (4.37)$$

Damit sich die Summe des klassischen Feldes und der Quantenfluktuationen ebenfalls so transformiert wie zuvor:

$$(A_\mu + Q_\mu) \rightarrow (A'_\mu + Q'_\mu) = U(A_\mu + Q_\mu)U^{-1} - i(\partial_\mu U)U^{-1}, \quad (4.38)$$

müssen sich die Quantenfluktuationen transformieren gemäß:

$$Q_\mu \rightarrow Q'_\mu = U Q_\mu U^{-1}. \quad (4.39)$$

Das Maß der Funktionalintegration $[d(A + Q)]$ reduziert sich auf die Variation des Quantenfeldes $[dQ]$, da der Erwartungswert $A = \langle A \rangle$ des Feldes keine Fluktuationen mehr beinhaltet. Der externe Strom J koppelt nach dem Übergang $A \rightarrow A + Q$ an die Summe der beiden neuen Felder an. Da die Funktionalintegration nur noch über die Fluktuationen Q läuft, kann

die Kopplung der externen Quelle J an das klassische Feld in Form eines Exponentialfaktors aus dem Funktionalintegral herausgezogen werden. Anschließend wird er in eine Redefinition des erzeugenden Funktionals absorbiert, denn dieses wird bei seiner Auswertung ohnehin immer mit $Z[0\dots]$ normiert. Um, wie bereits zuvor beschrieben, den unendlichen Faktor, der bei der Pfadintegralquantisierung auftritt, abseparieren zu können, ist eine Eichung für das Quantenfeld notwendig. Die sogenannte Hintergrundfeldeichung stellt sich dar als die kovariante Divergenz des Quantenfeldes, wobei die kovariante Ableitung hier nur ein Funktional des klassischen Feldes sein soll:

$$G^{ab\mu} = D^{ab\mu}[A]Q_\mu^b = [\partial^\mu \delta^{ab} + g f^{acb} A^{c\mu}]Q_\mu^b. \quad (4.40)$$

Dieser Ausdruck ist eichkovariant unter gleichzeitiger Eichtransformation von A und Q . Er fixiert dennoch eine Eichung für das Feld der Quantenfluktuationen Q , da er nicht kovariant unter alleiniger Transformation von Q ist. Für diese Eichbedingung können anschließend die Schritte, die zuvor von Gleichung (3.4) zum Ausdruck (3.17) geführt haben, wiederholt werden. Hierbei beziehen sich die analogen Überlegungen nur noch auf Eichtransformationen von Q .

Der zum Eichfeldsektor gehörende Teil des erzeugenden Funktionals für die Greensfunktionen (3.17) wird zu:

$$Z[A; J, \xi, \xi^*] = \int [dQ] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_{A+Q} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} + J \cdot Q + \chi \cdot \xi^* + \chi^* \cdot \xi] \right\}. \quad (4.41)$$

Im Funktionalintegralmaß ist lediglich noch das Quantenfeld enthalten und der Strom J koppelt ausschließlich an das Fluktuationfeld an.

Der kinematische Term für das aufgespaltene Eichfeld setzt sich aus dem Feldtensor, der in diesem Fall ein Funktional der Summe der Felder A und Q ist, zusammen:

$$\mathcal{L}_{A+Q} = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu}[A+Q] F_{\mu\nu}^a[A+Q]. \quad (4.42)$$

Diese sind wie zuvor durch den Kommutator der kovarianten Ableitungen definiert:

$$[\mathcal{D}_\mu[A+Q], \mathcal{D}_\nu[A+Q]] = -i \mathcal{F}_{\mu\nu}[A+Q]. \quad (4.43)$$

Es existiert eine Zerlegung des Feldtensors gemäß:

$$F_{\mu\nu}^a[A + Q] = F_{\mu\nu}^a[A] + D_{\mu}^{ab}[A]Q_{\nu}^b - D_{\nu}^{ab}[A]Q_{\mu}^b + gf^{abc}Q_{\mu}^bQ_{\nu}^c. \quad (4.44)$$

Der Beitrag zur Lagrangedichte durch die Eichfixierung ist:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha}(D^{ab\mu}[A]Q_{\mu}^a)^2. \quad (4.45)$$

Schließlich fehlt noch der Beitrag der Faddeev-Popov-Geister zur Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{FP} = -(D_{\mu}^{ab}[A]\chi^{b\dagger})(D^{ac\mu}[A + Q]\chi^c). \quad (4.46)$$

Die Geistfelder folgen der gleichen Eichtransformationsvorschrift wie das Quantenfeld:

$$\chi \rightarrow \chi' = U\chi U^{-1}. \quad (4.47)$$

Nun kann man nachprüfen, daß das erzeugende Funktional der Greensfunktionen $Z[A; J]$ in dieser Eichung invariant ist, unter den gleichzeitig ausgeführten Transformationen (4.37), (4.39), (4.47) und

$$J \rightarrow J' = UJU^{-1}. \quad (4.48)$$

Analog zu Gleichung (3.38) kann das erzeugende Funktional für die zusammenhängenden Greensfunktionen $W[A; J]$ im Hintergrundfeldformalismus konstruiert werden:

$$Z[A; J] = \exp\{iW[A; J]\}. \quad (4.49)$$

Dabei überträgt sich die Invarianz unter den beschriebenen Eichtransformationen. Aus dem erzeugenden Funktional der zusammenhängenden Greensfunktionen folgt das der einteilchenirreduziblen durch eine Legendretransformation von J nach $q = \delta W[A; J]/\delta J$:

$$\Gamma[A; q] = W[A; J[q]] - \int d^4x J \cdot q. \quad (4.50)$$

Es handelt sich um die gleiche Legendretransformation wie in Gleichung (3.39), außer daß diese hier nicht mit dem gesamten Feld $(A + Q)$, sondern lediglich mit dem quantisierten (Q) ausgeführt wird. Die Invarianz des letztgenannten erzeugenden Funktionals gilt ebenfalls für die obigen Transformationen, nur, daß die Transformation von J durch die von q gemäß

$$q \rightarrow q' = UqU^{-1} \quad (4.51)$$

ersetzt werden muß. Daß Gleichung (4.50) die gleiche Theorie beschreibt wie die übliche Darstellung (3.39), wird ersichtlich, wenn man in dem Ausdruck (4.41) für das erzeugende Funktional $Z[A; J]$ das Integrationsmaß wieder in seiner alten Form $[d(A + Q)]$ ausdrückt und bei der Standardmanipulation zum Einbau der Eichfixierung in die klassische Wirkung (3.15) das Maximum der Gaußschen Glocke um $B^a = \partial^\mu A_\mu^a$ verschiebt. Dann gilt:

$$Z[A; J] = Z[J] \times \exp \left\{ -i \int d^4x J \cdot A \right\}. \quad (4.52)$$

Daraus folgt für die erzeugenden Funktionale der zusammenhängenden Greensfunktionen:

$$W[A; J] = W[J] - \int d^4x J \cdot A. \quad (4.53)$$

Damit ergibt sich aus einer sich anschließenden Legendretransformation:

$$\Gamma[A; q] = \Gamma[a - A]. \quad (4.54)$$

Die beiden Variablen a und q unterscheiden sich durch den Erwartungswert des Feldes A : $a = q + A$. Dieser Versatz beruht auf der erwähnten Redefinition des erzeugenden Funktionals durch die Abspaltung des Faktors $\exp\{i \int d^4x J \cdot A\}$. Alle Feynmandiagramme der Theorie lassen sich auf eine beliebige der beiden Varianten der erzeugenden Funktionale der einteilchenirreduziblen Greensfunktionen zurückführen. Es gilt nun, die elementaren Feynmanregeln in der Hintergrundfeldmethode zu bestimmen. Vertices mit nur einer auslaufenden Quantenlinie tragen nicht zu der effektiven Wirkung bei und spielen für den Quantensektor somit keine direkte Rolle. Entsprechende Diagramme gehen in die Wechselwirkung des klassischen Feldes mit induzierten Strömen ein, wie es im nächsten Unterkapitel beschrieben wird. Auch hier verhindert das Konzept der effektiven Wirkung Doppelzählungen. Zusätzlich zu den üblichen Feynmanregeln gibt es im Eichfeldsektor die einfache Kopplung zweier Quanten, die einfache Kopplung dreier Quanten und die zweifache Kopplung zweier Quanten an das klassische Feld. Zusätzlich dazu existieren die entsprechenden Geistbeiträge. Die vollständige Auflistung und die Darstellung in Form von elementaren Diagrammen findet sich in Anhang B 2.

1. *Modifizierte Yang-Mills-Gleichungen*

Die Quantenfluktuationen führen zu Modifikationen der Bewegungsgleichungen des klassischen Feldes. Der Anteil der Lagrangedichte für das Eichfeld in der Hintergrundfeldmethode ist gegenüber dem Fall unquantisierter Bosonen von einem Funktional nur des klassischen Feldes $\mathcal{L}_A[A]$, in eines von der Summe desselben und der Quantenfluktuationen $\mathcal{L}_{A+Q}[A+Q]$ übergegangen. Will man die Bewegungsgleichungen des klassischen Feldes A herleiten, so kann man in den Euler-Lagrange-Gleichungen die Ableitungen nach dem klassischen Feld durch solche nach der Summe $A + Q$ ersetzen. Ihre Anwendung ergibt Yang-Mills-artige Gleichungen in $A + Q$:

$$\langle \partial^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu}[A+Q] - i[\mathcal{A}^\mu + \mathcal{Q}^\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}[A+Q]] \rangle = 0. \quad (4.55)$$

Das Ausmultiplizieren und Sortieren nach den Potenzen der beiden Feldkomponenten reproduziert die Yang-Mills-Gleichungen für das klassische Feld. Hinzu kommen verschiedene Zusatzterme. Die Forderung nach dem verschwindenden Mittelwert des Feldes der bosonischen Quantenfluktuationen Q führt zum Verschwinden aller Terme, die erster Ordnung in Q und beliebiger Ordnung in A sind. Im eingangs erwähnten Fall von durch die Kopplungskonstante unterdrückten Quantenfluktuationen, kann der Term dritter Ordnung in Q – $\langle [\mathcal{Q}^\mu, [\mathcal{Q}_\mu, \mathcal{Q}_\nu]] \rangle$ – für die erste, über den rein klassischen Fall hinausgehende Näherung vernachlässigt werden. Daraufhin bleiben Terme zweiter Ordnung im quantisierten Feld übrig, die keine oder eine Potenz des klassischen Feldes beinhalten. Der rein quantische Term entspricht einem Strom analog zu den zuvor diskutierten fermionischen Strömen. Der Summand, der zusätzlich erster Ordnung im klassischen Feld ist, stellt nicht einfach eine Inhomogenität der Gleichung dar, sondern eine tatsächliche Modifikation der Yang-Mills-Gleichungen. Die Beiträge zweiter Ordnung in den Quantenfeldern hängen nach Mittelung von den Zweipunktgreensfunktionen ab. Es verbleibt somit:

$$\begin{aligned} & \partial^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu}[A] - i[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}[A]] - i\partial^\mu \langle [\mathcal{Q}_\mu, \mathcal{Q}_\nu] \rangle - i \langle [\mathcal{Q}^\mu, (\partial_\mu \mathcal{Q}_\nu) - (\partial_\nu \mathcal{Q}_\mu)] \rangle - \\ & - 2[\mathcal{A}^\mu, \langle [\mathcal{Q}_\mu, \mathcal{Q}_\nu] \rangle] - \langle [\mathcal{Q}_\nu, [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{Q}^\mu]] \rangle - \langle [\mathcal{Q}^\mu, [\mathcal{Q}_\mu, \mathcal{A}_\nu]] \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Die auftretenden Erwartungswerte lassen sich auf die kausale Zweipunktgreensfunktion

$\Delta_{\mu\nu}(x, y)$ der Fluktuationen im klassischen Hintergrundfeld zurückführen. Sie genügt der Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \left(D[\mathcal{A}(x)] \cdot D[\mathcal{A}(x)]g^{\mu\lambda} - 2D^\mu[\mathcal{A}(x)]D^\lambda[\mathcal{A}(x)] - 2\mathcal{F}^{\mu\lambda}[\mathcal{A}(x)] \right) g_{\lambda\kappa} \Delta^{\kappa\nu}(x, y) = \\ = g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - y). \end{aligned} \tag{4.57}$$

Wird die Wechselwirkung mit den Strömen der gluonischen Fluktuationen in Gleichung (4.56) perturbativ behandelt, so ist dies die Stelle, an der die Feynmandiagramme mit nur einer Quantenlinie Verwendung finden. In höheren Ordnungen der Störungstheorie trägt ebenfalls der ternäre Korrelator, der hier vernachlässigt worden ist, zu gleicher Ordnung in der Kopplungskonstante bei wie die Ströme der Fluktuationen. Abschließend kommt als rechte Seite von Gleichung (4.56) noch der Erwartungswert des fermionischen Stromes $\langle J_\nu \rangle$ hinzu.

V. PERTURBATIVE BESCHREIBUNG DER PRODUKTION VON PARTONEN

In diesem und dem nachfolgenden Kapitel werden Rechnungen zur Produktion von Quarks und Antiquarks sowie gluonischer Quantenfluktuationen durch Vakuumpolarisation durchgeführt. Es sind verschiedene Interpretationen für die so ermittelten Ergebnisse möglich.

Zum einen könnte es sich bei dem Feld, bezüglich der Produktion von Teilchen durch Vakuumpolarisation, um ein externes Feld im engeren Sinne handeln, welches ausschließlich durch die Dynamik des übrigen physikalischen Systems bestimmt wird, ohne die Rückreaktion auf das Feld zu berücksichtigen. In diesem Fall wird das so bestimmte Feld benutzt, um zu ermitteln, wieviele Partikel auf Grund seiner Anwesenheit produziert würden. Dieser Ansatz wäre gerechtfertigt, wenn das Phänomen der Teilchenerzeugung in der gegebenen Situation nur eine kleine Störung darstellte. Ob diese Bedingung erfüllt ist, muß in einem konkreten Fall nachträglich überprüft werden.

Zum anderen könnte das Feld bereits die selbstkonsistente Lösung eines Gleichungssystems darstellen. Für diese Form des klassischen Feldes wäre es wissenswert, wieviele Teilchen im Laufe der Entwicklung des physikalischen Systems erzeugt werden. Im vorliegenden Szenario beinhaltet dieses Gleichungssystem die Yang-Mills-Gleichungen, modifiziert durch die Erwartungswerte für die von den Fermionen und Antifermionen beziehungsweise gluonischen Quantenfluktuationen induzierten Ströme. Strahlungskorrekturen höherer Ordnung werden durch höhere Potenzen der Kopplungskonstante, die nicht durch das Auftreten von Faktoren des klassischen Feldes kompensiert werden, unterdrückt.

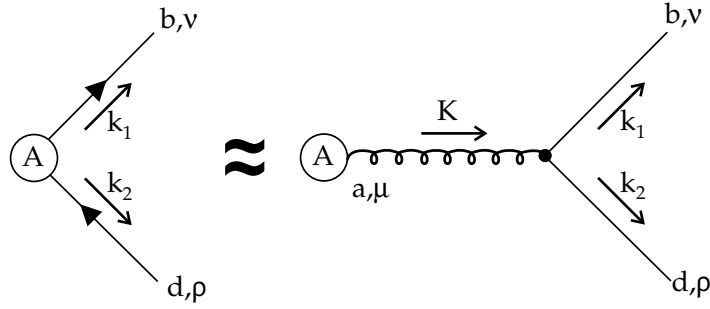


Abbildung 6: Näherung der exakten Produktionsrate für Fermion-Antifermion-Paare durch den Term niedrigster Ordnung in der klassischen Wirkung.

A. Produktionsrate für Quark-Antiquark-Paare

Zunächst wird hier untersucht, welche Ergebnisse zur Produktion von Quark-Antiquark-Paaren und von Paaren gluonischer Quantenfluktuationen sich im Rahmen der gewöhnlichen Störungstheorie ergeben [42]. Dabei soll ausschließlich die niedrigste Ordnung in der klassischen Wirkung betrachtet werden. In dieser Näherung sind der Erwartungswert und die Wahrscheinlichkeit der Produktion von Paaren gleich (siehe Kapitel IV A). Wie zuvor erwähnt, haben diese Rechnungen hauptsächlich für Partonen hoher Energie Bedeutung. Es stellt sich also die Frage, wie sich deren Produktionsraten im allgemeinen verhalten. Von besonderem Interesse ist auch das Verhältnis der Raten für die verschiedenen Teilchenspezies zueinander.

Die Amplitude für den Prozeß niedrigster Ordnung $A \rightarrow q(k_1)\bar{q}(k_2)$ (siehe Abbildung 6), der zur Produktion eines Quark-Antiquark-Paares durch Vakuumpolarisation in Anwesenheit eines klassischen nicht-abelschen Feldes $A^{a\mu}$ beiträgt, ist gegeben durch:

$$M = \langle q(k_1)\bar{q}(k_2) | S^{(1)} | 0 \rangle = \bar{u}^i(k_1) (V_{1A}^F)_{ij\mu}^a A^{a\mu}(K) v^j(k_2) \quad (5.1)$$

mit dem Wechselwirkungsverteck (B9):

$$(V^F)_{ij\mu}^a = ig\gamma_\mu T_{ij}^a. \quad (5.2)$$

Hierbei stehen k_1 und k_2 für den Energieimpulsvektor des auslaufenden Quarks beziehungsweise Antiquarks. $A^{a\mu}(K)$ ist die Fouriertransformierte des Farbfeldes $A^{a\mu}(x)$ mit dem Argument $K = k_1 + k_2$:

$$A_\mu^a(K) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x A_\mu^a(x) e^{+iK \cdot x}. \quad (5.3)$$

\bar{u}^i und v^j stehen für die Diraceinheitsspinoren des auslaufenden Quarks beziehungsweise Antiquarks. Am Ende muß die K -Integration für die Produktion realer Quarks über die richtige kinematische Region durchgeführt werden. Dieser Bereich ist definiert durch $(K)^2 > 4m^2$ und $K^0 > 0$. Diese Einschränkung wird nicht explizit in den Formeln notiert, aber vorausgesetzt.

Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich durch Integration des Absolutquadrats der Amplitude über den Phasenraum der ausgehenden Partikel:

$$W = \sum_{spin} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2k_1^0} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} M M^*. \quad (5.4)$$

Einsetzen der Definition der Amplitude, Ausführen der Spinsumme und der d^4k -Integration ergibt [43]:

$$W_{q\bar{q}}^{(1)} = \frac{g^2}{4\pi^2} \int d^4K \int \frac{d^3\vec{k}_1}{2\omega_1} \frac{d^3\vec{k}_2}{2\omega_2} \delta^{(4)}(K - k_1 - k_2) A_\mu^a(K) A_\nu^a(-K) \times \\ \times \left[k_1^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k_1^\nu - \frac{K^2}{2} g^{\mu\nu} \right], \quad (5.5)$$

wobei $\omega_{1,2}$ definiert ist als $\omega_{1,2} = \sqrt{|\vec{k}_{1,2}|^2 + m^2}$. Unter Benutzung der Fouriertransformierten (5.3) des klassischen Feldes in Gleichung (5.5) findet man:

$$W_{q\bar{q}}^{(1)} = \frac{g^2}{(2\pi)^6} \int d^4K \int \frac{d^3\vec{k}_1}{2\omega_1} \frac{d^3\vec{k}_2}{2\omega_2} \delta^{(4)}(K - k_1 - k_2) \int d^4x_1 d^4x_2 \times \\ \times e^{iK(x_1 - x_2)} A_\mu^a(x_1) A_\nu^a(x_2) \left[k_1^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k_1^\nu - \frac{K^2}{2} g^{\mu\nu} \right]. \quad (5.6)$$

Es ist möglich, aus dem resultierenden Ausdruck (5.6) die differentielle Produktionsrate für die Produktion von $q\bar{q}$ -Paaren zu extrahieren. Die Wahrscheinlichkeit für die Produktion eines Paares $W_{q\bar{q}}^{(1)}$ ist eine reelle Größe, da MM^* reell ist (siehe Gleichung (5.4)). Zur Vereinfachung wird hier immer der im allgemeinen komplexe Integrand im Ausdruck (5.6)

beibehalten. Am Ende wird aber nur der Realteil betrachtet. Dies wird ebenfalls nicht in den Formel notiert.

Beginnend mit Gleichung (5.6) findet man für die Produktionsrate der Quark-Antiquark-Paare:

$$\frac{dW_{q\bar{q}}}{d^4x d^3k} = \frac{g^2}{2(2\pi)^6\omega} A_\mu^a(x) \int d^4x_2 A_\nu^a(x_2) \int \frac{d^3\vec{k}_2}{2\omega_2} \int d^4K \delta^{(4)}(K - k - k_2) \times \\ \times e^{iK \cdot (x-x_2)} \left[k^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k^\nu - \frac{K^2}{2} g^{\mu\nu} \right]. \quad (5.7)$$

Diese Größe wird als Wahrscheinlichkeit für die Produktion eines Quark-Antiquark-Paares pro Phasenraumvolumen $d^3x d^3k$ und Zeitintervall dx_0 interpretiert. Quantenmechanisch, gemäß der Heisenbergschen Unschärferelation, ist dies keine observable Größe. Es ist aber genau die Zutat, die für semiklassische Transportrechnungen basierend auf klassischen Verteilungsfunktionen der Teilchen benötigt wird, um die Produktion von Partikeln in Anwesenheit klassischer Felder miteinzubeziehen. Hiermit verbundene Phänomene wie die periodische Vernichtung und Erzeugung von Teilchen werden noch in dem Spezialfall rein zeitabhängiger Vektorpotentiale diskutiert. Quantentransportrechnungen auf Basis von Wigneroperatoren benötigen die hier aufgeführte Produktionsrate nicht. Weiterhin lassen sich aus ihr aber scharf meßbare Größen wie dW/d^3k oder dW/d^4x durch Ausintegrieren ermitteln. Der erstgenannte Ausdruck wird im weiteren Verlauf der Arbeit ebenfalls für ein rein zeitabhängiges Feld untersucht.

Nach Ausführen der d^4K -Integration in Gleichung (5.7) erhält man:

$$\frac{dW_{q\bar{q}}^{(1)}}{d^4x d^3k} = \frac{g^2}{2(2\pi)^6\omega} A_\mu^a(x) e^{ik \cdot x} \int d^4x_2 A_\nu^a(x_2) e^{-ik \cdot x_2} \int \frac{d^3\vec{k}_2}{2\omega_2} \times \\ \times e^{ik_2 \cdot (x-x_2)} [k^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k^\nu - (m^2 + k \cdot k_2) g^{\mu\nu}]. \quad (5.8)$$

Die Faktoren des Impulses k_2 in Gleichung (5.8) können durch Differentiationen nach $i(x_1 - x_2)$ ersetzt werden:

$$\begin{aligned}
 \frac{dW_{q\bar{q}}^{(1)}}{d^4x d^3k} &= \frac{g^2}{2(2\pi)^6\omega} A_\mu^a(x) e^{ik\cdot x} \int d^4x_2 A_\nu^a(x_2) e^{-ik\cdot x_2} \times \\
 &\times \left[k^\mu \frac{\partial}{i\partial(x-x_2)_\nu} + \frac{\partial}{i\partial(x-x_2)_\mu} k^\nu - \left(m^2 + k \cdot \frac{\partial}{i\partial(x-x_2)} \right) g^{\mu\nu} \right] \times \\
 &\times \int \frac{d^3\vec{k}_2}{2\omega_2} e^{ik_2\cdot(x-x_2)}.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Die $d^3\vec{k}_2$ -Integration liefert: (siehe Kapitel 9 in [44]):

$$\int \frac{d^3\vec{k}_2}{2\omega_2} e^{ik_2\cdot(x_1-x_2)} = 4\pi m \frac{K_1(m\sqrt{-(x_1-x_2)^2})}{\sqrt{-(x_1-x_2)^2}}. \tag{5.10}$$

Hier steht $K_1(z)$ für die modifizierte Besselfunktion der dritten Art und ersten Ordnung. Durch Substitution des Ausdrucks (5.10) in Gleichung (5.9) und Ausführen der Differentiationen (siehe [44]) erhält man das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 \frac{dW_{q\bar{q}}^{(1)}}{d^4x d^3k} &= \frac{g^2 m}{(2\pi)^5\omega} A_\mu^a(x) e^{ik\cdot x} \int d^4x_2 A_\nu^a(x_2) e^{-ik\cdot x_2} \times \\
 &\times \left[i(k^\mu(x-x_2)^\nu + (x-x_2)^\mu k^\nu + k \cdot (x-x_2)g^{\mu\nu}) \times \right. \\
 &\times \left(\frac{K_0(m\sqrt{-(x-x_2)^2}) m\sqrt{-(x-x_2)^2} + 2K_1(m\sqrt{-(x-x_2)^2})}{[\sqrt{-(x-x_2)^2}]^3} \right) - \\
 &\left. - m^2 g^{\mu\nu} \frac{K_1(m\sqrt{-(x-x_2)^2})}{\sqrt{-(x-x_2)^2}} \right].
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Dies ist die Produktionsrate für Quark-Antiquark-Paare in Anwesenheit eines allgemeinen Farbfeldes.

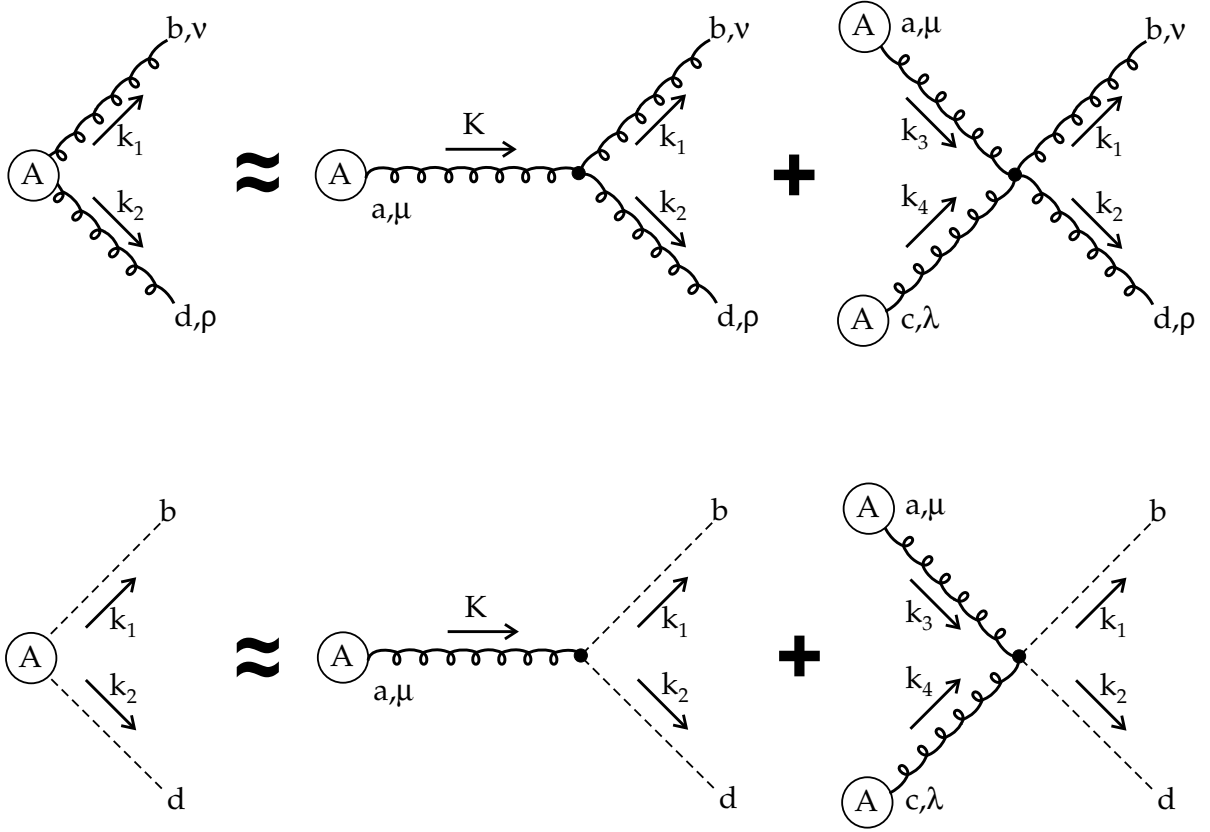


Abbildung 7: Näherung der exakten Produktionsrate für Gluonenpaare durch den Term niedrigster Ordnung in der klassischen Wirkung.

B. Produktionsrate für Paare gluonischer Quantenfluktuationen

Für die Produktion von Gluonenpaaren durch ein Farbfeld in niedrigster Ordnung der klassischen Wirkung S ergibt sich die Vakuumpolarisationsamplitude M aus denjenigen Termen der Wechselwirkungslagrangedichte \mathcal{L}_{int} , die zweiter Ordnung in den Fluktuationen Q sind:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{int}^{(1)} = & -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a[A]gf^{abc}Q^{b\mu}Q^{c\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu Q_\nu^a - \partial_\nu Q_\mu^a)gf^{abc}(A^{b\mu}Q^{c\nu} + Q^{b\mu}A^{c\nu}) - \\
 & -\frac{1}{4}g^2f^{abc}f^{ab'c'}(A_\mu^bQ_\nu^c + Q_\mu^bA_\nu^c)(A^{b'\mu}Q^{c'\nu} + Q^{b'\mu}A^{c'\nu}) - \\
 & -\partial_\lambda Q^{a\lambda}gf^{abc}A_\kappa^bQ^{c\kappa} - \frac{1}{2}g^2f^{abc}f^{ab'c'}A_\lambda^bQ^{c\lambda}A_\kappa^{b'}Q^{c'\kappa}.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ausgehend von diesen Termen kann man die notwendigen Feynmanregeln bestimmen und erhält für die Produktion zweier Gluonen durch die einmalige Kopplung an das Feld (siehe Abbildung 7 oben, erster Summand), gemäß Gleichung (B10) den Vertex:

$$(V_{1A}^{2Q})_{\mu\nu\rho}^{abd} = g f^{abd} [-2g_{\mu\rho} K_\nu - g_{\nu\rho} (k_1 - k_2)_\mu + 2g_{\mu\nu} K_\rho], \quad (5.13)$$

wobei $K = k_1 + k_2$. Wenn zwei Kopplungen mit dem Feld an einem Vertex stattfinden (siehe Abbildung 7 oben, zweiter Summand) erhält man nach Gleichung (B11):

$$\begin{aligned} (V_{2A}^{2Q})_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd} = & -ig^2 [f^{abx} f^{xcd} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}) + \\ & + f^{adx} f^{xbc} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) + \\ & + f^{acx} f^{xbd} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda})]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Die vollständige Amplitude für die Produktion von Gluonenpaaren ist nun die Summe der Einzelbeiträge: $M = M_{1A} + M_{2A}$. Werden die richtigen Wichtungsfaktoren miteinbezogen, so daß die ursprüngliche Lagrangedichte wieder reproduziert wird, findet man für den ersten Term:

$$M_{1A} = \frac{(2\pi)^2}{2} \int d^4 K \delta^{(4)}(K - k_1 - k_2) A^{a\mu}(K) \epsilon^{b\nu}(k_1) \epsilon^{d\rho}(k_2) (V_{1A}^{2Q})_{\mu\nu\rho}^{abd}. \quad (5.15)$$

Die kinematisch erlaubte Region für die Integration umfaßt dabei wie bisher den durch $(K)^2 > 0$ und $K^0 > 0$ charakterisierten Bereich. Der zweite Term ist gegeben durch:

$$M_{2A} = \frac{1}{4} \int d^4 k_3 d^4 k_4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) A^{a\mu}(k_3) A^{c\lambda}(k_4) \epsilon^{b\nu}(k_1) \epsilon^{d\rho}(k_2) (V_{2A}^{2Q})_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}, \quad (5.16)$$

mit den Einschränkungen für den Integrationsbereich: $(k_3 + k_4)^2 > 0$ und $k_3^0 + k_4^0 > 0$. Die Wahrscheinlichkeit für Paarproduktion ergibt sich wiederum durch Anwendung von Gleichung (5.4). Um die physikalische Polarisation der Gluonen zu erhalten, soll hier die folgende Spinsumme benutzt:

$$\sum_{spin} \epsilon^\nu(k_1) \epsilon^{*\nu'}(k_1) = \sum_{spin} \epsilon^\nu(k_2) \epsilon^{*\nu'}(k_2) = -g^{\nu\nu'}, \quad (5.17)$$

und nachfolgend die Wahrscheinlichkeiten für die Prozesse abgezogen werden, die anstelle der Gluonen Geister tragen (siehe die zweite Zeile von Abbildung 7). Vorliegender Fall zeigt,

daß die nicht durch Abzug der Geister korrigierte Wahrscheinlichkeit für die Produktion von Gluonen durch vier additive Terme gegeben ist:

$$W^A = W_{1A,1A} + W_{1A,2A} + W_{2A,1A} + W_{2A,2A}. \quad (5.18)$$

Die Summanden sind definiert gemäß:

$$W_{iA,jA} = \frac{1}{2} \sum_{spin} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_1^0} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} M_{iA} M_{jA}^*, \quad (5.19)$$

mit $i, j \in \{1, 2\}$. Für die Integration über den Phasenraum gibt es noch einen zusätzlichen Faktor von $1/2$, da die Teilchen im Endzustand identisch sind. Die Einführung der Fouriertransformation (6.1) und die Anwendung der Relation $f^{abd} f^{a'bd} = 3\delta^{aa'}$ ergibt für den ersten Term in Gleichung (5.18):

$$W_{1A,1A} = \frac{3g^2}{8(2\pi)^6} \int \frac{d^3 k_1}{k_1^0} \frac{d^3 k_2}{k_2^0} d^4 x d^4 x' e^{i(k_1+k_2)\cdot(x-x')} A^{a\mu}(x) A^{a\mu'}(x') \times \\ \times [2g_{\mu\mu'}(k_1+k_2)^2 - 2(k_1+k_2)_\mu(k_1+k_2)_{\mu'} + (k_1-k_2)_\mu(k_1-k_2)_{\mu'}]. \quad (5.20)$$

Auch hier muß wieder nur der Realteil dieses Ausdrucks betrachtet werden. Wie im Fall der Quark-Antiquark-Paare erhält man den ersten Beitrag zur Gluonpaarproduktionsrate:

$$\frac{dW_{1A,1A}}{d^4 x d^3 k} = \frac{3g^2}{2(2\pi)^5 k^0} \int d^4 x' e^{ik\cdot(x-x')} A^{a\mu}(x) A^{a\mu'}(x') \left[k_\mu k_{\mu'} - 4g_{\mu\mu'} k^\nu i \frac{(x-x')_\nu}{(x-x')^2} + \right. \\ \left. + 3 \left(k_\mu i \frac{(x-x')_{\mu'}}{(x-x')^2} + k_{\mu'} i \frac{(x-x')_\mu}{(x-x')^2} \right) + 2 \frac{g_{\mu\mu'}}{(x-x')^2} - 4 \frac{(x-x')_\mu (x-x')_{\mu'}}{(x-x')^4} \right] \times \\ \times \frac{1}{(x-x')^2}, \quad (5.21)$$

wobei die folgende Relation ausgenutzt worden ist:

$$\int \frac{d^3 k_2}{|\vec{k}_2|} e^{ik_2\cdot(x-x')} = -\frac{8\pi}{(x-x')^2}. \quad (5.22)$$

Nun werden die gleichen Schritte für die verbleibenden Beiträge ausgeführt. Nachdem man die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe von Fouriertransformationen des Eichfeldes A ausgedrückt hat, liefern die beiden gemischten Terme in Gleichung (5.18):

$$W_{1A,2A} = W_{2A,1A} = \\ = \frac{-ig^3}{64(2\pi)^{10}} \int \frac{d^3 k_1}{k_1^0} \frac{d^3 k_2}{k_2^0} d^4 k_3 d^4 k_4 d^4 K d^4 x_3 d^4 x_4 d^4 x \times \\ \times \delta^{(4)}(K - k_3 - k_4) \delta^{(4)}(K - k_1 - k_2) e^{i[k_3\cdot x_3 + k_4\cdot x_4 - K\cdot x]} \times \\ \times A^{a\mu}(x_3) A^{c\lambda}(x_4) A^{a'\mu'}(x) 24 f^{a'ac} K_\lambda g_{\mu\mu'}. \quad (5.23)$$

Daraus folgt für die Produktionsrate:

$$\frac{dW_{2A,1A}}{d^4x d^3k} = \frac{3ig^3}{2(2\pi)^5 k_0} \int d^4x' e^{ik \cdot (x' - x)} A^{c\lambda}(x') (A^a(x') \cdot A^{a'}(x)) f^{a'ac} \left[\frac{k_\lambda}{(x' - x)^2} + 2i \frac{(x' - x)_\lambda}{(x' - x)^4} \right]. \quad (5.24)$$

Für den letzten Term erhält man:

$$\begin{aligned} W_{2A,2A} &= \frac{g^4}{64(2\pi)^{14}} \int \frac{d^3k_1}{k_1^0} \frac{d^3k_2}{k_2^0} d^4k_3 d^4k_4 d^4k'_3 d^4k'_4 d^4x_3 d^4x_4 d^4x'_3 d^4x'_4 e^{i[k_3 \cdot x_3 + k_4 \cdot x_4 - k'_3 \cdot x'_3 - k'_4 \cdot x'_4]} \times \\ &\quad \times \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \delta^{(4)}(k_3 + k_4 - k'_3 - k'_4) A^{a\mu}(x_3) A^{c\lambda}(x_4) A^{a'\mu'}(x'_3) A^{c'\lambda'}(x'_4) \times \\ &\quad \times [2g_{\mu\lambda} g_{\mu'\lambda'} (f^{abx} f^{xcd} + f^{adx} f^{xcb}) (f^{a'bx'} f^{x'c'd} + f^{a'dx'} f^{x'c'b}) + 24g_{\mu\mu'} g_{\lambda\lambda'} f^{acx} f^{a'c'x}]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ausgehend davon ergibt sich die Produktionsrate:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{2A,2A}}{d^4x d^3k} &= \frac{-g^4}{8(2\pi)^5 k_0} \int d^4x' e^{ik \cdot (x - x'_3)} \frac{1}{(x - x'_3)^2} A^{a\mu}(x) A^{c\lambda}(x) A^{a'\mu'}(x'_3) A^{c'\lambda'}(x'_3) \times \\ &\quad \times [g_{\mu\lambda} g_{\mu'\lambda'} (f^{abx} f^{xcd} + f^{adx} f^{xcb}) (f^{a'bx'} f^{x'c'd} + f^{a'dx'} f^{x'c'b}) + 12g_{\mu\mu'} g_{\lambda\lambda'} f^{acx} f^{a'c'x}]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Wie bereits zuvor bemerkt, muß auch der entsprechende Term für die Geister berechnet werden, um die Beiträge durch die unphysikalischen Polarisierungen der Gluonen entfernen zu können. Zu dem Geistmatrixelement tragen in niedrigster Ordnung die beiden Feynmandiagramme in der zweiten Zeile der Abbildung (7) bei. Die dazugehörigen Vertexfunktionen lauten:

$$(V_{1A}^{FP})_\mu^{abd} = +g f^{abd} (k_1 - k_2)_\mu, \quad (5.27)$$

und

$$(V_{2A}^{FP})_{\mu\lambda}^{abcd} = -ig^2 g_{\mu\lambda} (f^{abx} f^{xcd} + f^{adx} f^{xcb}). \quad (5.28)$$

Diese Vertices erhält man aus dem Geistanteil der Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{FP} = -(\partial_\mu \chi^{a\dagger}) f^{abc} A_\mu^b \chi^c - (f^{abc} A_\mu^b [A] \chi^{c\dagger}) \partial_\mu \chi^a - (f^{abc} A_\mu^b \chi^{c\dagger}) f^{ade} A_\mu^d \chi^e. \quad (5.29)$$

Unter Einbeziehung der richtigen Wichtungen erhält man die Amplitude:

$$(M^{FP})^{bd} = (M_{1A}^{FP})^{bd} + (M_{2A}^{FP})^{bd} \quad (5.30)$$

mit

$$(M_{1A}^{FP})^{bd} = \frac{(2\pi)^2}{2} \int d^4 K \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - K) A^{a\mu}(K) (V_{1A}^{FP})_{\mu}^{abd} \quad (5.31)$$

und

$$(M_{2A}^{FP})^{bd} = \frac{1}{4} \int d^4 k_3 d^4 k_4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) A^{a\mu}(k_3) A^{c\lambda}(k_4) (V_{2A}^{FP})_{\mu\lambda}^{abcd}. \quad (5.32)$$

Die Definition für die Wahrscheinlichkeit ist, bis auf einen Faktor $1/2$ für den Phasenraum, identisch zu der im gluonischen Fall:

$$W^{FP} = \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_1^0} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} (M^{FP})^{bd} (M^{FP})^{*bd}. \quad (5.33)$$

Es ergeben sich an dieser Stelle nur zwei Beiträge, da der Mischterm verschwindet:

$$W^{FP} = W_{1A,1A}^{FP} + W_{2A,2A}^{FP}. \quad (5.34)$$

Beginnend mit der Definition der Teilamplituden:

$$W_{jA,jA}^{FP} = \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_1^0} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} (M_{jA}^{FP})^{bd} (M_{jA}^{FP})^{*bd}, \quad (5.35)$$

mit $j \in \{1, 2\}$ kann man die bereits bekannten Schritte ausführen. Für den ersten Summanden in Gleichung (5.34) ergibt sich aus dem Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit

$$W_{1A,1A}^{FP} = \frac{3g^2}{16(2\pi)^2} \int \frac{d^3 k_1}{k_1^0} \frac{d^3 k_2}{k_2^0} d^4 K \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - K) A^{a\mu}(K) A^{*a\mu'}(K) (k_1 - k_2)_{\mu} (k_1 - k_2)_{\mu'} \quad (5.36)$$

der für die Produktionsrate

$$\begin{aligned} \frac{dW_{1A,1A}^{FP}}{d^4 x d^3 k} &= \frac{3g^2}{4(2\pi)^5 k^0} \int d^4 x' e^{ik \cdot (x-x')} A^{a\mu}(x) A^{a\mu'}(x') \times \\ &\times \left[k_{\mu} i \frac{(x-x')_{\mu'}}{(x-x')^2} + k_{\mu'} i \frac{(x-x')_{\mu}}{(x-x')^2} - k_{\mu} k_{\mu'} - 2 \frac{g_{\mu\mu'}}{(x-x')^2} + 4 \frac{(x-x')_{\mu} (x-x')_{\mu'}}{(x-x')^4} \right] \times \\ &\times \frac{1}{(x-x')^2}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Analog erhält man den zweiten Beitrag gemäß seiner Definition in Gleichung (5.35) und findet die Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
 W_{2A,2A}^{FP} &= \frac{g^4}{64(2\pi)^6} g_{\mu\lambda} g_{\mu'\lambda'} (f^{abx} f^{xcd} + f^{adx} f^{xcb}) (f^{a'bx'} f^{x'c'd} + f^{a'dx'} f^{x'c'b}) \times \\
 &\times \int \frac{d^3 k_1}{k_1^0} \frac{d^3 k_2}{k_2^0} d^4 k_3 d^4 k_4 d^4 k'_3 d^4 k'_4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k'_3 - k'_4) \\
 &\times A^{a\mu}(k_3) A^{c\lambda}(k_4) A^{*a'\mu'}(k'_3) A^{*c'\lambda'}(k'_4)
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

sowie die Produktionsrate:

$$\begin{aligned}
 \frac{dW_{2A,2A}^{FP}}{d^4 x d^3 k} &= \frac{-g^4}{16(2\pi)^5 k^0} \int d^4 x'_3 e^{ik \cdot (x-x'_3)} \frac{1}{(x-x'_3)^2} A^{a\mu}(x) A^{c\lambda}(x) A^{a'\mu'}(x'_3) A^{c'\lambda'}(x'_3) \times \\
 &\times g_{\mu\lambda} g_{\mu'\lambda'} (f^{abx} f^{xcd} + f^{adx} f^{x'bc'}) (f^{a'bx'} f^{x'c'd} + f^{a'dx'} f^{x'bc'}).
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Am Ende ergibt sich die gewünschte Rate für die Produktion von Gluonenpaaren aus einem Farbfeld durch Vakuumpolarisation, indem man alle Beiträge wie folgt kombiniert:

$$W_{gg} = W_{1A,1A} - W_{1A,1A}^{FP} + 2W_{2A,1A} + W_{2A,2A} - W_{2A,2A}^{FP}. \tag{5.40}$$

Somit erhält man:

$$\begin{aligned}
 \frac{dW_{gg}}{d^4 x d^3 k} &= \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^5 k^0} \int d^4 x' e^{ik \cdot (x-x')} \frac{1}{(x-x')^2} \left\{ \frac{3}{4} g^2 A^{a\mu}(x) A^{a'\mu'}(x') \left[3k_\mu k_{\mu'} - 8g_{\mu\mu'} k^\nu i \frac{(x-x')_\nu}{(x-x')^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 5 \left(k_\mu i \frac{(x-x')_{\mu'}}{(x-x')^2} + k_{\mu'} i \frac{(x-x')_\mu}{(x-x')^2} \right) + 6 \frac{g_{\mu\mu'}}{(x-x')^2} - 12 \frac{(x-x')_\mu (x-x')_{\mu'}}{(x-x')^4} \right] \right. \\
 &\quad \left. - 3ig^3 A^{a\mu}(x') A^{c\lambda}(x') A^{a'\mu'}(x) f^{a'ac} g_{\mu\mu'} \left[k_\lambda + 2i \frac{(x'-x)_\lambda}{(x'-x)^2} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{16} g^4 A^{a\mu}(x) A^{c\lambda}(x) A^{a'\mu'}(x') A^{c'\lambda'}(x') \right. \\
 &\quad \left. [g_{\mu\lambda} g_{\mu'\lambda'} (f^{abx} f^{xcd} + f^{adx} f^{xcb}) (f^{a'bx'} f^{x'c'd} + f^{a'dx'} f^{x'c'b}) + 24g_{\mu\mu'} g_{\lambda\lambda'} f^{acx} f^{a'c'x'}] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Dies ist die Produktionsrate zur niedrigsten Ordnung in der klassischen Wirkung S , für Gluonenpaare durch Vakuumpolarisation, in Anwesenheit eines Farbfeldes. Es könnte hier

der Eindruck entstehen, daß die Pole in $(x - x')^2$ dazu führen, daß diese Formel kein endliches Ergebnis liefert. Tatsächlich lassen sich alle Singularitäten durch Differentiation unter dem Integral auf einen Pol der Ordnung $(x - x')^2$ zurückführen. Aufgrund der Minkowskimetrik erhält man nach einer Partialbruchzerlegung nur Pole erster Ordnung in $(x_0 - x'_0)$. Das entsprechende Integral ist als Hauptwertintegral zu verstehen und ist damit im allgemeinen – abhängig von der Form des Eichfeldes $A^{a\mu}$ – endlich.

C. Produktionsraten für ein rein zeitabhängiges Eichfeld

Für die in der Einleitung besprochene Situation wird nun das Verhalten der Produktionsrate in einem zeitabhängigen Farbfeld A untersucht. In dessen Anwesenheit reduziert sich Gleichung (5.7) zu:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{q\bar{q}}}{d^4x d^3k} &= \frac{g^2}{2(2\pi)^3\omega} A_\mu^a(t) \int dt_2 A_\nu^a(t_2) \int \frac{d^3\vec{k}_2}{2\omega_2} \int d^4K \delta^{(4)}(K - k - k_2) \delta^{(3)}(\vec{K}) \times \\ &\quad \times e^{iK_0(t-t_2)} \left[k^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k^\nu - \frac{K^2}{2} g^{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Nach Integrationen über d^4K und $d^3\vec{k}_2$ unter Beachtung der Dirac δ -Faktoren findet man:

$$\frac{dW_{q\bar{q}}}{d^4x d^3k} = \frac{g^2}{2(2\pi)^3\omega} \int dt_2 \frac{e^{2i\omega(t-t_2)}}{2\omega} [2\omega^2 \{\vec{A}^a(t) \cdot \vec{A}^a(t_2)\} - 2\{\vec{A}^a(t) \cdot \vec{k}\} \{\vec{A}^a(t_2) \cdot \vec{k}\}]. \quad (5.43)$$

Hier wird Gleichung (5.43) in Form skalarer Produkte von Dreivektoren dargestellt. Die letzte verbleibende Zeitintegration stellt eine Fouriertransformation von t_2 nach $2\omega_1$ dar. Der endgültige Ausdruck für die Produktionsrate in Anwesenheit eines rein zeitabhängigen Farbfeldes ist:

$$\frac{dW_{q\bar{q}}}{d^4x d^3k} = \frac{g^2 \sqrt{2\pi}}{2(2\pi)^3 \omega^2} e^{2i\omega t} [\omega^2 \{\vec{A}^a(t) \cdot \vec{A}^{*a}(2\omega)\} - \{\vec{A}^a(t) \cdot \vec{k}\} \{\vec{A}^{*a}(2\omega) \cdot \vec{k}\}]. \quad (5.44)$$

In direkter Analogie vereinfachen sich die Gleichungen (5.21), (5.24) und (5.26) für die Gluonen sowie (5.37) und (5.39) für die Geister zu:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{1A,1A}}{d^4x d^3k} &= \frac{3g^2 \sqrt{2\pi}}{2(2\pi)^3} e^{2ik_0 t} \left[\left(\vec{A}^a(t) \cdot \frac{\vec{k}}{k_0} \right) \left(\vec{A}^{*a}(2k_0) \cdot \frac{\vec{k}}{k_0} \right) - 2\{\vec{A}^a(t) \cdot \vec{A}^{*a}(2k_0)\} \right], \\ \frac{dW_{2A,1A}}{d^4x d^3k} &= \frac{-3ig^3}{4(2\pi)^3 k_0} \int dt_3 e^{2ik_0(t_3-t)} A^{a\mu}(t_3) A^{c0}(t_3) A^{a'\mu'}(t) f^{a'ac} g_{\mu\mu'}, \\ \frac{dW_{2A,2A}}{d^4x d^3k} &= \frac{g^4}{32(2\pi)^3 k_0^2} \int dt'_3 e^{2ik_0(t-t'_3)} A^{a\mu}(t) A^{c\lambda}(t) A^{a'\mu'}(t'_3) A^{c'\lambda'}(t'_3) \times \\ &\quad \times [g_{\mu\lambda} g_{\mu'\lambda'} (f^{abx} f^{xcd} + f^{adx} f^{xcb}) (f^{a'bx'} f^{x'c'd} + f^{a'dx'} f^{x'c'b}) + 12g_{\mu\mu'} g_{\lambda\lambda'} f^{acx} f^{a'c'x}], \\ \frac{dW_{1A,1A}^{FP}}{d^4x d^3k} &= \frac{3g^2 \sqrt{2\pi}}{4(2\pi)^3} e^{2ik_0 t} \left(\vec{A}^a(t) \cdot \frac{\vec{k}}{k_0} \right) \left(\vec{A}^{*a}(2k_0) \cdot \frac{\vec{k}}{k_0} \right), \\ \frac{dW_{2A,2A}^{FP}}{d^4x d^3k} &= \frac{g^4}{64(2\pi)^3 k_0^2} \int dt'_3 e^{2ik_0(t-t'_3)} A^{a\mu}(t) A^{c\lambda}(t) A^{a'\mu'}(t'_3) A^{c'\lambda'}(t'_3) \times \\ &\quad \times g_{\mu\lambda} g_{\mu'\lambda'} (f^{abx} f^{xcd} + f^{adx} f^{xcb}) (f^{a'bx'} f^{x'c'd} + f^{a'dx'} f^{x'c'b}). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Durch Summieren der Beiträge für die Gluonen- und das Abziehen der Geistbeiträge erhält man:

$$\begin{aligned}
 & \frac{dW_{gg}}{d^4x d^3k} = \\
 & = e^{2ik_0t} \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{3g^2}{4} \left[\left(\vec{A}^a(t) \cdot \frac{\vec{k}}{k_0} \right) \left(\vec{A}^{*a}(2k_0) \cdot \frac{\vec{k}}{k_0} \right) - 4 \{ \vec{A}^a(t) \cdot \vec{A}^{*a}(2k_0) \} \right] + \right. \\
 & + \frac{6ig^3}{4k_0} (A^{a\mu} * A^{c0})^*(2k_0) A^{a'\mu'}(t) f^{a'ac} g_{\mu\mu'} + \\
 & + \frac{g^4}{64k_0^2} A^{a\mu}(t) A^{c\lambda}(t) (A^{a'\mu'} * A^{c'\lambda'})^*(2k_0) \times \\
 & \left. \times [g_{\mu\lambda} g_{\mu'\lambda'} (f^{abx} f^{xcd} + f^{adx} f^{xcb}) (f^{a'bx'} f^{x'c'd} + f^{a'dx'} f^{x'c'b}) + 24g_{\mu\mu'} g_{\lambda\lambda'} f^{acx} f^{a'c'x}] \right\}. \tag{5.46}
 \end{aligned}$$

Der Realteil dieses Ausdrucks ist die allgemeine Rate für die Produktion von Paaren gluonischer Quantenfluktuationen in Anwesenheit eines zeitabhängigen Farbfeldes.

Die Wahl einer speziellen Form des Eichfeldes bietet die Möglichkeit, einen Einblick in die Produktionsraten für Quarks und gluonische Quantenfluktuationen zu erhalten. Das Eichfeld soll hier gegeben sein durch:

$$A^{a3}(t) = A_{in} e^{-|t|/t_0}, \quad t_0 > 0, \quad a = 1, \dots, 8, \tag{5.47}$$

mit allen anderen Komponenten gleich null. Viele andere Formen hätten verwendet werden können. Diese spezielle Wahl ist jedoch getroffen worden, um ein Gefühl für die Produktionsrate zu bekommen und wurde zudem auch noch durch eine numerische Studie beeinflusst [45], welche zeigt, daß der Zerfall des Feldes sich ähnlich verhält. In jedem Fall kann die wirkliche Form nur durch eine selbstkonsistente Rechnung erhalten werden.

Die Fouriertransformierte von Gleichung (5.47) ist gegeben durch:

$$A^{a3}(-2|\vec{k}|) = A_{in} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{t_0}{1 + 4|\vec{k}|^2 t_0^2}. \tag{5.48}$$

Einsetzen der Ausdrücke (5.47) und (5.48) in Gleichung (5.44) und anschließende Summation über den Farbraum ergibt:

$$\frac{dW_{q\bar{q}}}{d^4x d^3k} = 16 \frac{\alpha_S}{(2\pi)^2} A_{in}^2 e^{2i\omega t} e^{-|t|/t_0} \frac{t_0}{1 + 4\omega^2 t_0^2} \frac{m_T^2}{\omega^2}, \quad (5.49)$$

mit der transversalen Masse $m_T^2 = m^2 + k_T^2$ und dem transversalen Impuls k_T . Die Benutzung der Ausdrücke (5.47) und (5.48) auf die gleiche Weise wie zuvor, jedoch in Gleichung (5.46), ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{gg}}{d^4x d^3k} &= \frac{24\alpha_S}{(2\pi)^2} A_{in}^2 e^{2ik_0 t} e^{-|t|/t_0} \frac{t_0}{1 + 4k_0^2 t_0^2} \left(-3 - \frac{k_T^2}{k_0^2} \right) + \\ &+ \frac{36\alpha_S^2}{2\pi} A_{in}^4 e^{2ik_0 t} e^{-2|t|/t_0} \frac{t_0}{1 + k_0^2 t_0^2} \frac{1}{k_0^2}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Der Beitrag des gemischten Terms (5.24) verschwindet für alle Felder der Art $A^{a\mu}(x) = A_{in}^{a\mu} f(x)$. Bei der hier getroffenen Wahl ist der letzte Term in Gleichung (5.26) gleich null.

Zur weiteren Analyse bringt man die Energie k_0 mit der Rapidität y in Verbindung durch:

$$k_0 = k_T \cosh y. \quad (5.51)$$

Falls nicht anders erwähnt, liegen den Rechnungen folgende Parameter zu Grunde: $\alpha_S = 0.15$, $A_{in} = 1.5\text{GeV}$, $k_T = 1.5\text{GeV}$, $y = 0$ und $t_0 = 0.5\text{fm}$ und masselose Quarks. Diese Wahl der Parameter mag nicht unbedingt einer konkreten Kombination bei einer ultrarelativistischen Schwerionenkollision entsprechen und soll nur als Beispiel dienen, um die Eigenschaften der Produktionsrate zu demonstrieren. In Abbildung 8 werden die Raten

$$S = \frac{dW}{d^4x d^3k} \quad (5.52)$$

für Quarks (5.49) und für Gluonen (5.50) als Funktion der Zeit für die oben angegebenen Parameter dargestellt. Der exponentielle Abfall rührt im wesentlichen vom Abfall des Modellfeldes her. Jedes zerfallende Feld überträgt diese Eigenschaft auf die Produktionsrate. Es muß sich dabei aber nicht um einen exponentiellen Zerfall handeln. Das oszillatorische Verhalten wird durch den Imaginärteil des Exponenten erzeugt, der bereits in der allgemeinen Formel vorhanden ist. Hier wechseln sich Phasen der Teilchenerzeugung mit solchen der Teilchenvernichtung periodisch ab. Zusätzlich variiert die Frequenz der Oszillationen linear

mit der Energie der produzierten Teilchen. Dieses Verhalten kann als eine Manifestierung der Heisenbergschen Unschärferelation gesehen werden: Wegen der räumlichen Homogenität des Feldes entspricht der Faktor d^3x nur einem Normierungsvolumen. Damit verbleiben als Variablen die Zeit x_0 und der Dreierimpuls \vec{k} . Diese wären im Prinzip gleichzeitig meßbar, jedoch ist der Dreierimpuls durch die Massenschalenbedingung $k^2 = m^2$ direkt mit der Energie k_0 verbunden. Hierdurch kommt es zu dem beschriebenen Phänomen.

Um einen besseren Überblick über die letztendlich erzeugten Teilchen zu erhalten, wird in den Abbildungen 9 und 10 die über positive Zeiten integrierte Rate

$$T = \frac{dW}{2d^3x d^3k} \quad (5.53)$$

präsentiert. Diese integrierte Rate kann als Maß für die im Netto in einem bestimmten infinitesimalen Volumen des Phasenraums produzierten Paare dienen. Hier ist kein oszillatorisches Verhalten als Funktion des transversalen Impulses zu erkennen. Für die hier getroffenen Wahl der Form des Feldes (5.47) wird T :

$$\frac{dW_{q\bar{q}}}{2d^3x d^3k} = 16 \frac{\alpha_S}{(2\pi)^2} A_{in}^2 \left(\frac{t_0}{1 + 4k_T^2 t_0^2 \cosh^2 y} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2 y} \quad (5.54)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \frac{dW_{gg}}{2d^3x d^3k} = 3 \frac{\alpha_S}{(2\pi)^4} A_{in}^2 \left\{ -16 \left(\frac{t_0}{1 + 4k_T^2 t_0^2 \cosh^2 y} \right)^2 \left[3 + \frac{1}{\cosh^2 y} \right] \right. \\ \left. + 3A_{in}^2 \frac{g^2}{k_T^2 \cosh^2 y} \left(\frac{t_0}{1 + k_T^2 t_0^2 \cosh^2 y} \right)^2 \right\}. \quad (5.55) \end{aligned}$$

Für den hier untersuchten Parametersatz überwiegt die Produktion von Gluonen. Die spezielle Form des Abfalls mit dem transversalen Impuls in Abbildung 9 ergibt sich hauptsächlich aus der Form des Feldes. Lediglich im zweiten Beitrag zur Produktionsrate der Gluonen tritt schon in der allgemeinen Formel ein zusätzlicher Faktor $1/k_0^2$ auf. So hätte die Wahl eines Gaußschen Feldverlaufs mit der Zeit auch zu einem Gaußschen Abfall der Produktionsrate mit dem transversalen Impuls geführt. Da die allgemeinen Formeln hauptsächlich von der k_0 -Komponente des Impulses abhängen, ist der Ursprung des typischen Verhaltens bei sich ändernder Rapidity y auf Grund von Gleichung (5.51) im wesentlichen der gleiche wie der bei sich änderndem transversalem Impuls k_T (siehe Abbildung 10).

Zusätzlich kann man sich noch die Abhängigkeit der Produktionsraten von der Emissionsrichtung betrachten. Dazu führt man den Winkel θ zwischen der Richtung des Feldes und dem Teilchenimpuls ein. Dann gilt: $|\vec{k}_T| = |\vec{k}| |\sin \theta|$. In Abbildung 11 zeigt sich, daß Fermionen überhaupt nicht in Richtung des Feldes oder ihm entgegengesetzt emittiert werden. Die maximale Intensität ist transversal zum Feld. Die gluonischen Fluktuationen werden in allen Impulsrichtungen erzeugt aber ebenfalls nicht isotrop. Im Gegensatz zu den Fermionen, werden sie vorzugsweise parallel oder antiparallel zum Feld ausgesandt. In transversaler Richtung ist die Erzeugungsrate minimal.

Schließlich zeigt Abbildung 12 das Verhältnis der beiden Produktionsraten für Quarks beziehungsweise Gluonen:

$$R = \frac{dW_{q\bar{q}}}{2d^3x d^3k} / \frac{dW_{gg}}{d^3x d^3k}. \quad (5.56)$$

Wie bereits erwähnt, werden für den hier verwendeten Parametersatz weniger Quarks als Gluonen produziert. Zusätzlich kann man beobachten, daß für eine stärkere Kopplung, ein stärkeres anfängliches Feld oder eines, das langsamer zerfällt, die Produktion von Gluonenpaaren gegenüber der Produktion von Quark-Antiquark-Paaren weiter betont wird. Das Gegenteil gilt für eine schwächere Kopplung, ein schwächeres anfängliches Feld oder eines, das schneller abfällt. Im Bereich der denkbaren Parameter, für Zerfallszeiten zwischen 0.1 und 1.0 fm, tritt auch der Fall auf, daß die Anzahl der produzierten Fermion-Antifermion-Paare überwiegt [46].

Im Bereich niedriger Impulse beziehungsweise Energien dominiert die Produktion von Bosonen klar über die der Fermionen. Der Grund hierfür ist der zusätzliche Faktor $1/k_0^2$ im zweiten Term von Gleichung (5.55). Stellt man den Quotienten der produzierten Paare als Funktion der Abklingzeit t_0 für einen höheren transversalen Impuls von $k_T \approx 2\text{GeV}$ dar (siehe Abbildung 13 für $A_{in}=1.5\text{GeV}$ und $\alpha_S=0.15$), so sind alle möglichen Szenarien vertreten. Für die größeren Werte der Zerfallszeit t_0 werden mehr Gluonenpaare als Quark-Antiquark-Paare produziert, bei kleineren Werten wesentlich mehr Quark-Antiquark-Paare als Gluonenpaare. Letztendlich muß hier eine selbstkonsistente Rechnung, die die Zerfallszeit liefert, zwischen den verschiedenen Szenarien unterscheiden.

D. Ergebnis

In diesem Kapitel ist die Produktionsrate für Quark-Antiquark- und Quantengluonen-Paare durch Vakuumpolarisation zur ersten Ordnung der klassischen Wirkung S berechnet worden. Die Produktionsrate von Quark-Antiquark-Paaren aus einem Yang-Mills-Feld heraus ähnelt stark derjenigen für Elektron-Positron-Paare in einem Maxwellfeld der QED. In der Ordnung $S^{(1)}$ besteht die Produktionsrate für die Quantengluonenpaare aus drei Termen, die sich in der Ordnung der Kopplungskonstante unterscheiden.

Um einen Einblick in die Produktionsraten zu erhalten, werden diese für ein rein zeitabhängiges, exponentiell zerfallendes Feld ausgewertet. Schon die allgemeine Formel im Falle eines rein zeitabhängigen Feldes ist wesentlich leichter verständlich als für ein vollständig beliebiges Feld, aber dennoch zu kompliziert, um direkt Schlüsse ziehen zu können. Aus diesem Grund und nicht, um eine realistisch quantitative Vorhersage zu machen, wird hier die Produktionsrate für dieses spezielle Feld angegeben.

Es ist zu beobachten, daß nicht nur Teilchen aus dem Feld produziert, sondern auch Paare vernichtet werden, was zum Feld beiträgt. Diese Tatsache äußert sich auch in periodischen Fluktuationen der Produktionsrate als Funktion der Zeit. Diese Oszillationen werden für höhere Paarenergien immer stärker. Ein solches Verhalten ist allen allgemein zeitabhängigen Formeln gemein, weitgehend unabhängig von der Auswahl des Feldes. Die beschriebene Eigenschaft könnte eine wichtige Rolle in selbstkonsistenten Rechnungen spielen.

Im Rahmen der perturbativen Näherung kann lediglich die Produktion von Partonen mit Impulsen p , die viel größer als die Eichfeldstärke A multipliziert mit der Kopplungskonstante g sind, beschrieben werden. Ist das Feld sehr stark, hat also das Produkt gA einen großen Wert, besitzt die störungstheoretische Rechnung keine Gültigkeit, selbst für den Fall, daß die Kopplung g schwach sein sollte.

Zusätzlich, wenn die Produktion harter Quanten wesentlich beitragen soll, muß gA größer als die zweite nichtperturbative Skala der QCD, Λ_{QCD} sein. Anderenfalls würden hauptsächlich weiche Quanten produziert, die hier nicht richtig erfaßt sind.

Unter Beachtung der genannten Punkte läßt sich der Bereich, in dem der perturbative Ansatz funktionieren sollte, charakterisieren durch: $p > gA > \Lambda_{\text{QCD}}$.

Somit könnte für eine am LHC zu erwartende Situation die störungstheroretische Behandlung für Partonen, deren Impuls größer als 2 GeV ist, möglich sein. Am RHIC rechnet man in etwa mit $gA \approx 1$ GeV. Es ist bemerkenswert, daß diese Zahlen annähernd den Schwellenwerten entsprechen, mit denen man bei der perturbativen Beschreibung von Minijets arbeitet.

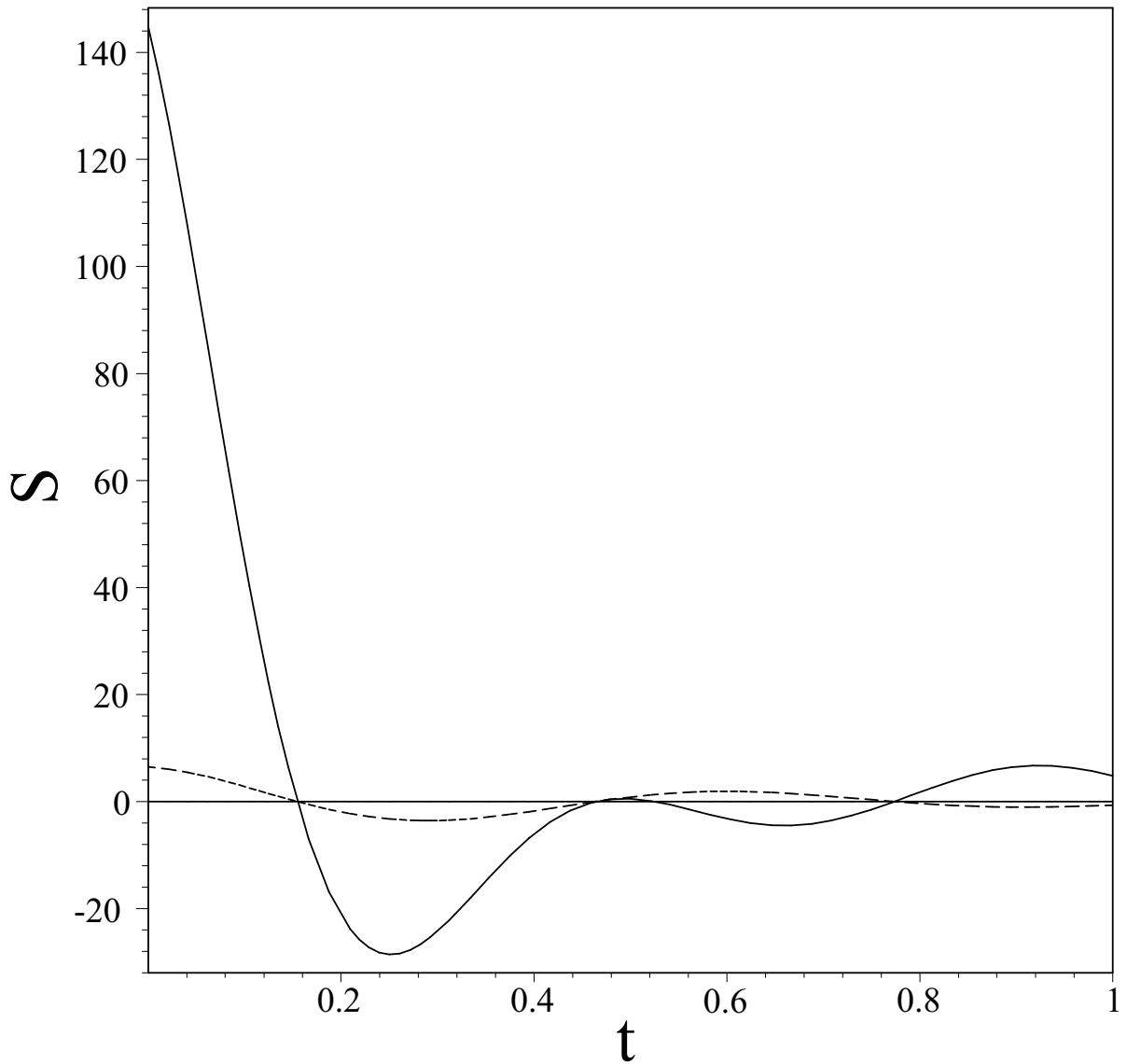


Abbildung 8: Produktionsrate in MeV für die Produktion von Gluonenpaaren (durchgezogen) und Quark-Antiquark-Paare (gestrichelt) als Funktion der Zeit in fm/c bei mittlerer Rapidity $y = 0$ für eine anfängliche Eichfeldstärke $A_{in} = 1.5\text{GeV}$, eine Kopplungskonstante $\alpha_S = 0.15$, einen transversalen Impuls $k_T = 1.5\text{GeV}$ und eine Zerfallszeit von $t_0 = 0.5\text{fm}/c$.

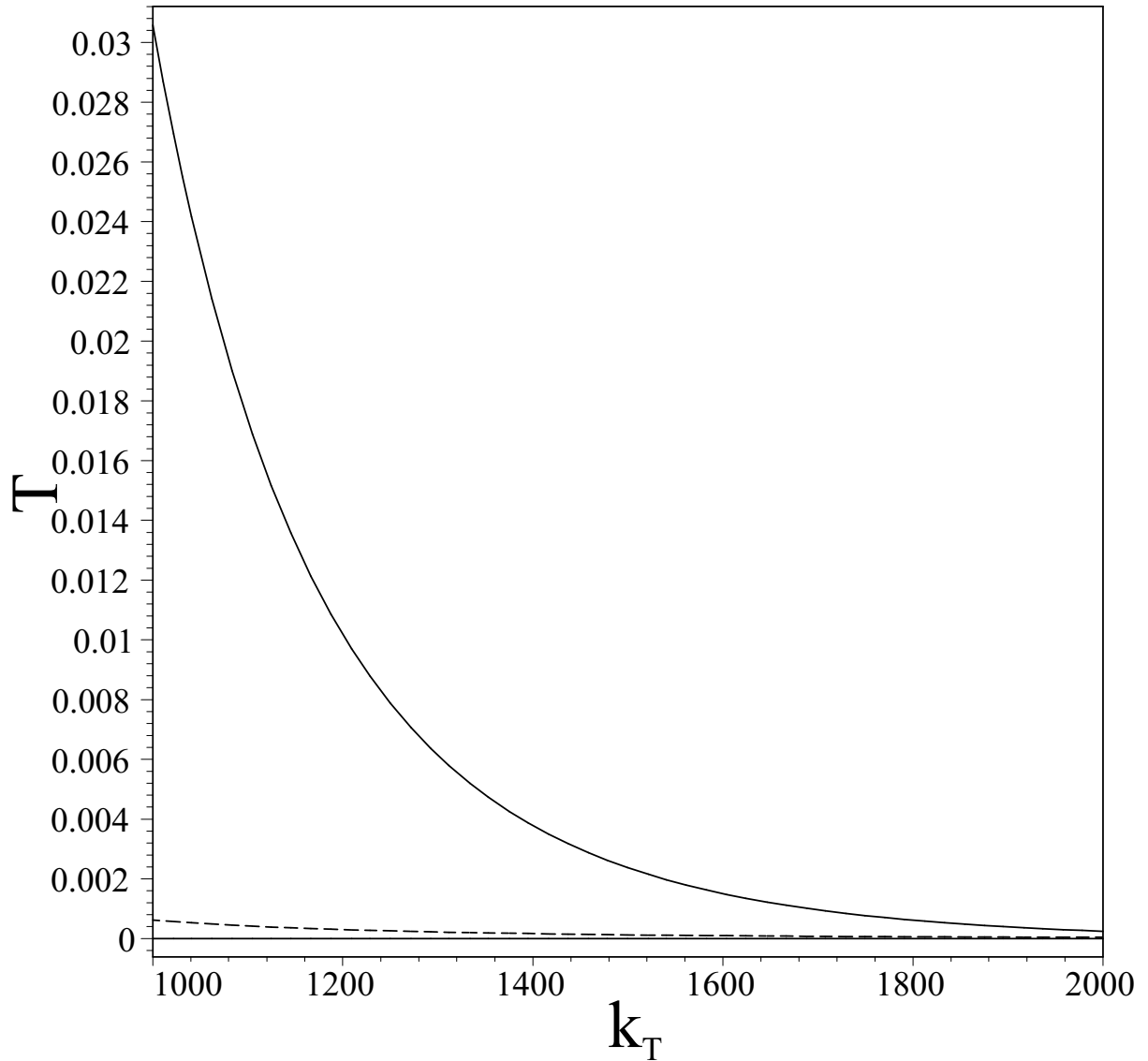


Abbildung 9: Die dimensionslose zeitintegrierte Produktionsrate T für Gluonenpaare (durchgezogen) und Quark-Antiquark-Paare (gestrichelt) als Funktion des transversalen Impulses k_T in MeV bei mittlerer Rapidität $y = 0$ für eine anfängliche Eichfeldstärke $A_{in} = 1.5\text{GeV}$, eine Kopplungskonstante $\alpha_S = 0.15$ und eine Zerfallszeit von $t_0 = 0.5\text{fm}/c$.

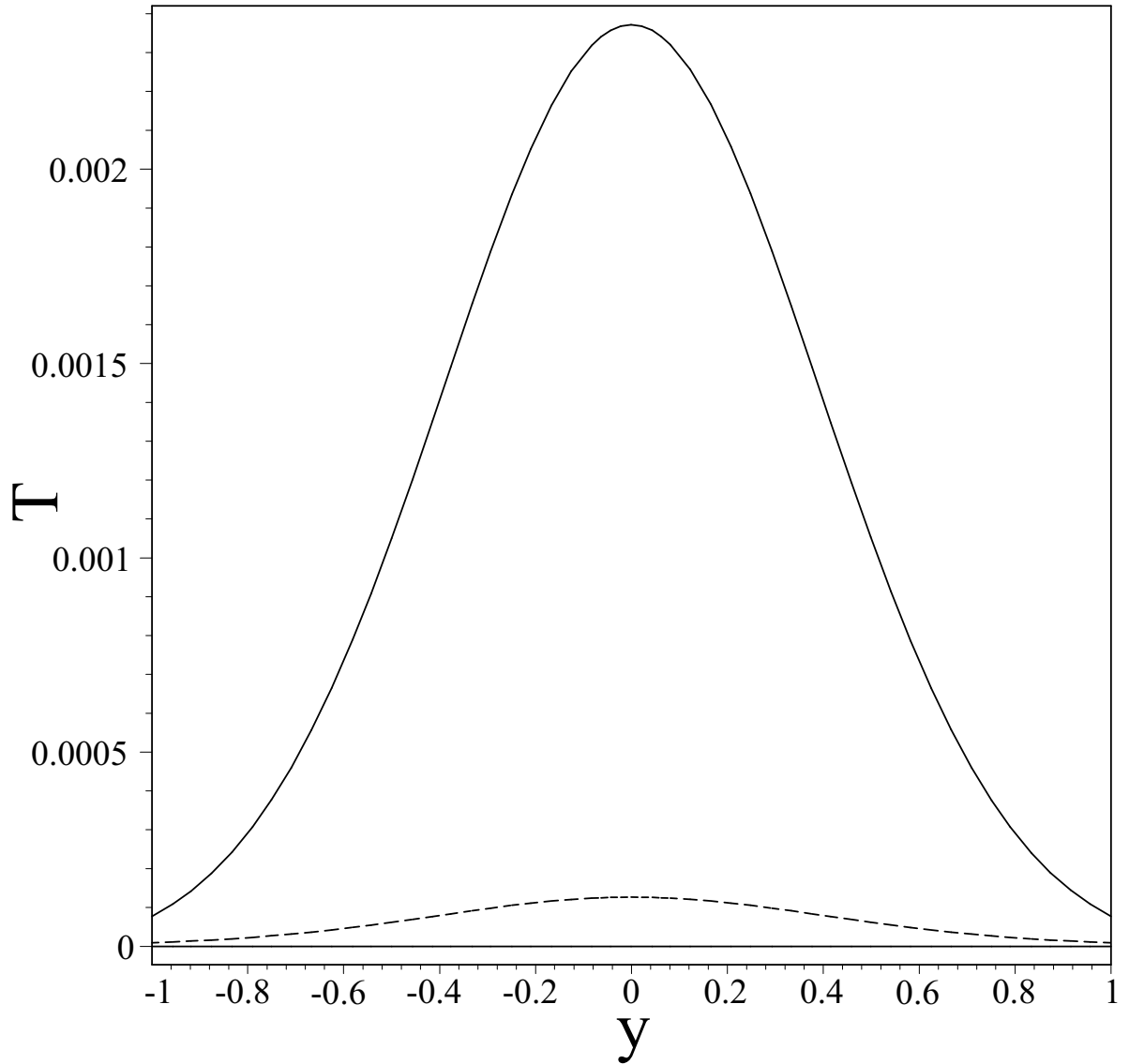


Abbildung 10: Die dimensionslose zeitintegrierte Produktionsrate T für Gluonenpaare (durchgezogen) und Quark-Antiquark-Paare (gestrichelt) als Funktion der Rapidität y für eine anfängliche Eichfeldstärke $A_{in} = 1.5\text{GeV}$, eine Kopplungskonstante $\alpha_S = 0.15$, einen transversalen Impuls $k_T = 1.5\text{GeV}$ und eine Zerfallszeit von $t_0 = 0.5\text{fm}/c$

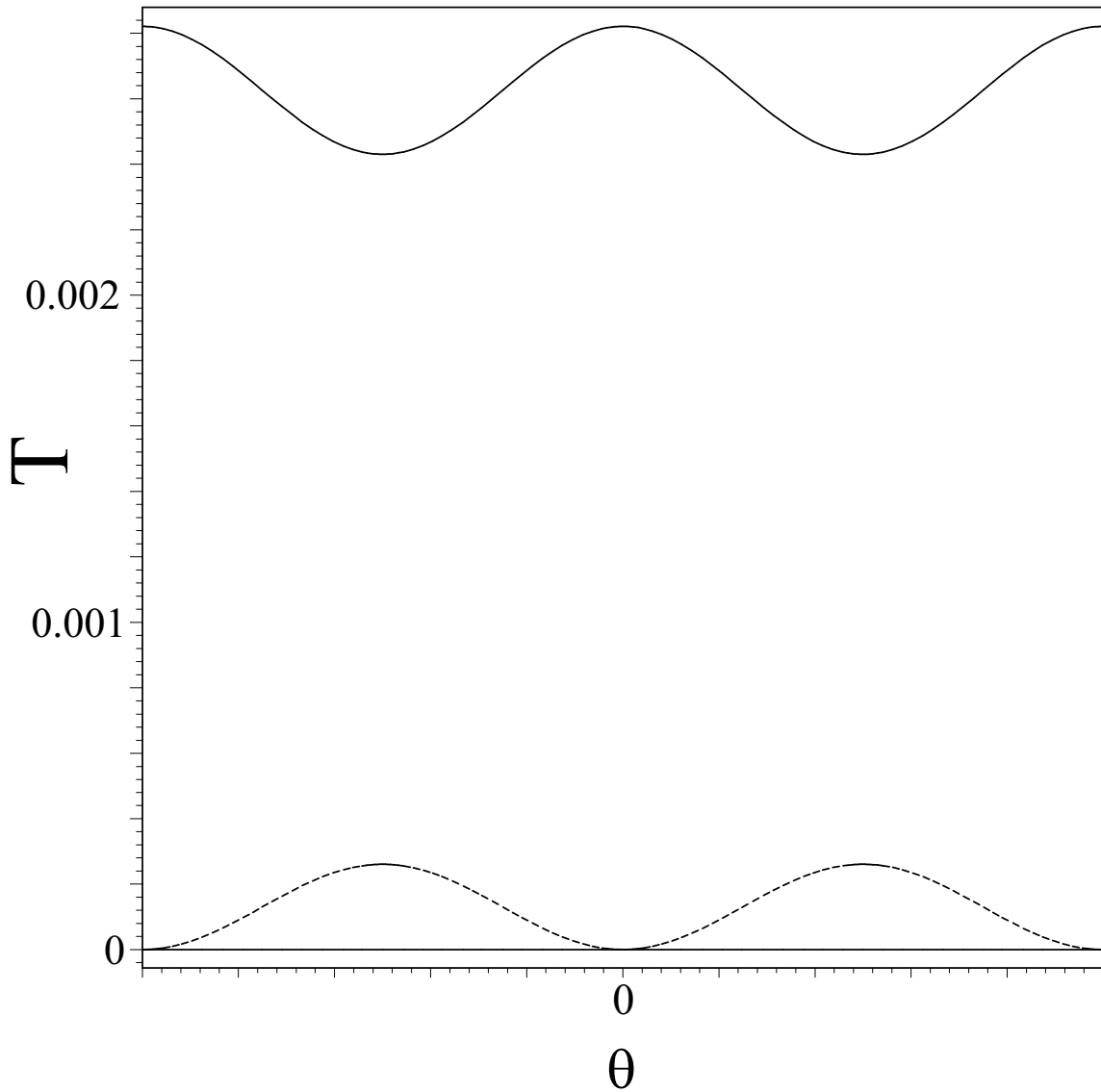


Abbildung 11: Die dimensionslose zeitintegrierte Produktionsrate T für Gluonenpaare (durchgezogen) und Quark-Antiquark-Paare (gestrichelt) als Funktion des Winkels θ zur Feldrichtung für eine anfängliche Eichfeldstärke $A_{in} = 1.5\text{GeV}$, eine Kopplungskonstante $\alpha_S = 0.15$, eine Teilchenenergie $k_0 = 1.5\text{GeV}$ und eine Zerfallszeit von $t_0 = 0.5\text{fm}/c$

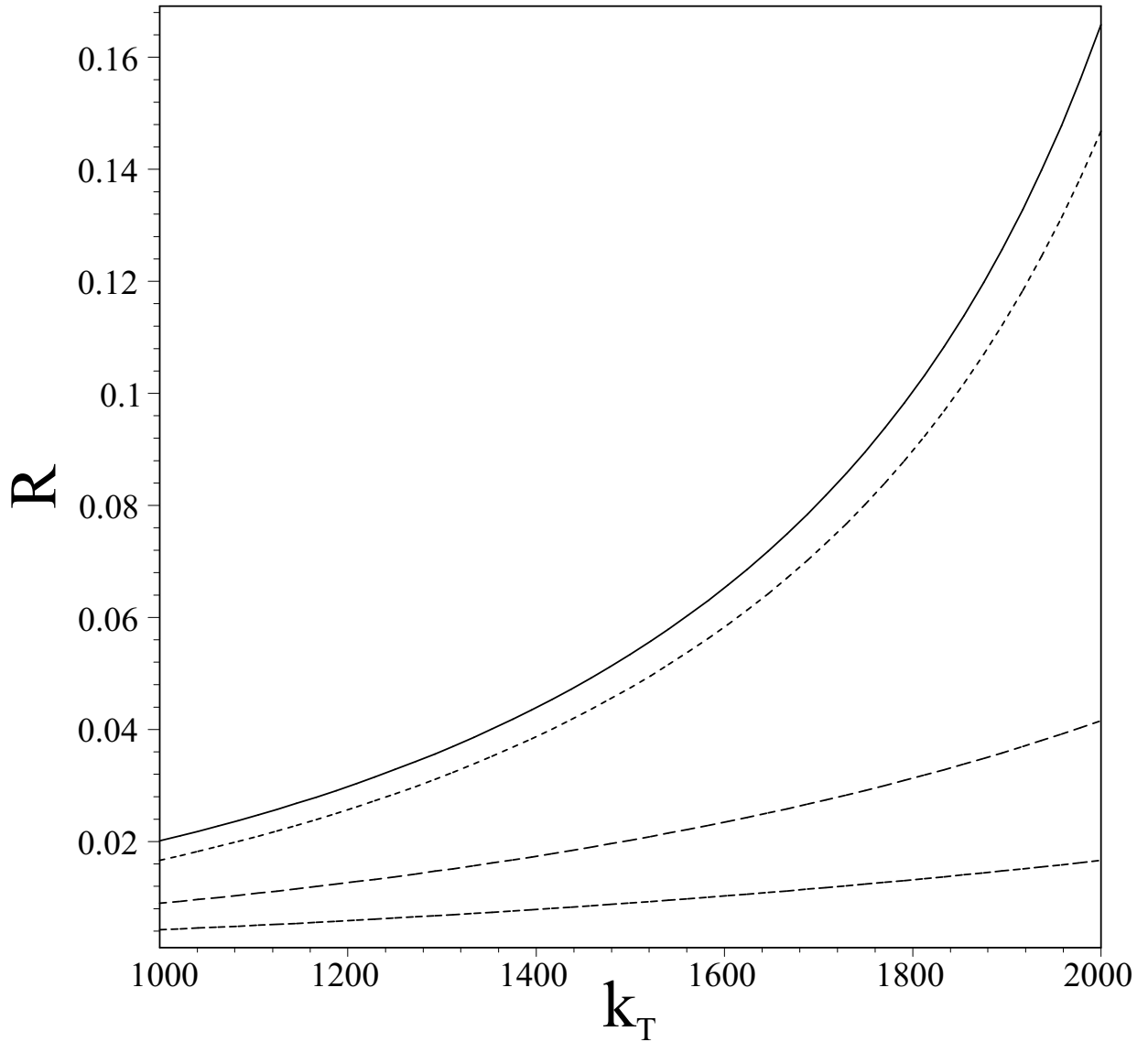


Abbildung 12: Verhältnis R der zeitintegrierten Produktionsrate für Quark-Antiquark-Paare und Gluonenpaare als Funktion des transversalen Impulses k_T in MeV. Von oben nach unten erkennt man zunächst den Graphen für die Standardparameter: Kopplungskonstante $\alpha_S = 0.15$, anfängliche Eichfeldstärke $A_{in} = 1.5\text{GeV}$ und die Zerfallszeit $t_0 = 0.5\text{fm}$. In den nachfolgenden Graphen wird die Kopplungskonstante zu $\alpha_S = 0.3$, die anfängliche Eichfeldstärke nach $A_{in} = 3\text{GeV}$ beziehungsweise die Zerfallszeit auf $t_0 = 1\text{fm}$ verändert.

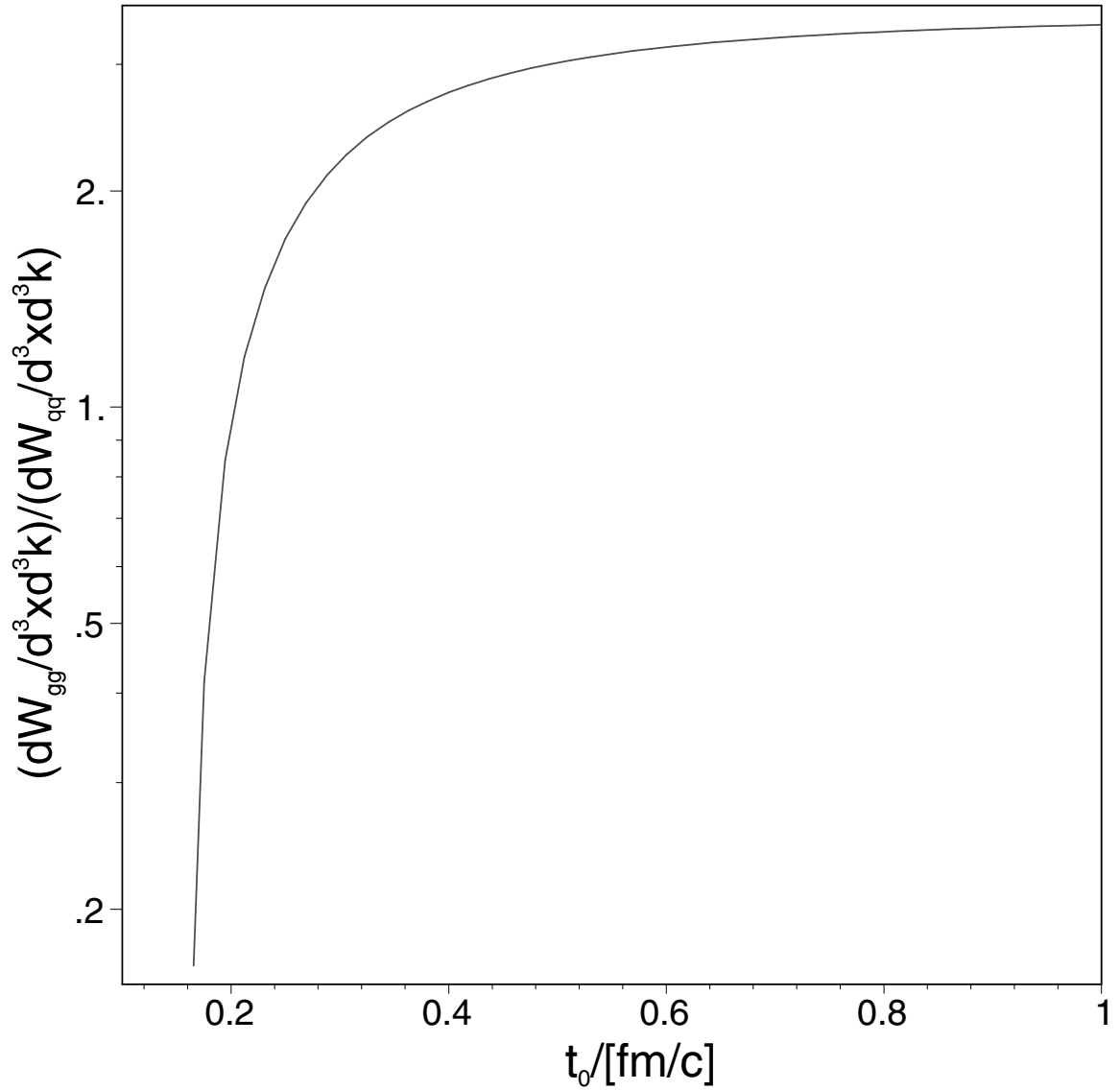


Abbildung 13: Verhältnis der zeitintegrierten Produktionsraten für Gluonenpaare und Quark-Antiquark-Paare jeweils bei mittlerer Rapidität $y = 0$ als Funktion der Abklingzeit des Feldes t_0 in fm/c für eine anfängliche Eichfeldstärke $A_{in}=1.5\text{GeV}$ und eine Kopplungskonstante $\alpha_S=0.15$.

VI. EXAKTE BESCHREIBUNG DER PRODUKTION VON FERMION-ANTIFERMION-PAAREN

Im Fall der Fermionen existiert kein Konzept in Form eines klassischen Feldes, weshalb man für die niederenergetischen Quarks und Antiquarks ein nichtstörungstheoretisches Verfahren benötigt. Die notwendigen Informationen für die Erwartungswerte finden sich im vollen retardierten Propagator. Diesen muß man entweder genau ermitteln oder eine geeignete nicht-störungstheoretische Näherung für ihn herleiten.

Besagte Zweipunktfunktion ergibt sich als exakte Lösung der Bewegungsgleichung (3.43) für die Dirac-Greensfunktionen $G(x, y)$. Alternativ zu dieser Vorgehensweise könnte man zum Beispiel versuchen, alle Terme der Störungsreihe zu resumieren oder einen zu allen Zeitpunkten vollständigen Satz von Wellenfunktionslösungen der Diracgleichung aufzuaddieren.

Hier soll die Diracgleichung gelöst werden. Bei diesem Verfahren könnte das Resultat eine beliebige Greensfunktion sein, die nicht notwendigerweise auch ein Propagator ist. Sollte aus diesem Verfahren ein Propagator resultieren, so bestimmen die aufgeprägten Randbedingungen, ob er einen retardierten, einen Feynmanpropagator oder eine andere singuläre Funktion darstellt.

In bestimmten Situationen sind einige Näherungsverfahren zur Bestimmung des Propagators durch Lösen der Diracgleichung bekannt. Vernachlässigt man das Feld in der Bewegungsgleichung, so wird diese durch die freie Greensfunktion $G^0(x - y)$ erfüllt. Die Störungsreihe basiert auf dem Aufsummieren von Termen bis zu einer endlichen Anzahl von Kopplungen an das externe Feld A zwischen freien Propagatoren. Es handelt sich dabei um die bereits erwähnte perturbative Näherung. Ein weiterer Ansatz ist der statische, bei dem die räumlichen kovarianten Ableitungen in der Bewegungsgleichung vernachlässigt werden. Ein weiteres Schema ist Gegenstand von [47].

In dieser Arbeit wird der Fall untersucht, bei dem sich das Feld im wesentlichen in Richtung einer geradlinigen Koordinate ändert: $A = A(n \cdot x)$. Dabei ist n ein zunächst beliebiger, aber fester Vektor.

A. Herleitung des retardierten Propagators

Zur exakten Beschreibung der Produktion von Fermion-Antifermion-Paaren in Anwesenheit eines klassischen bosonischen Feldes wird gemäß den Gleichungen (4.34) und (4.35) der volle retardierte Propagator benötigt. Hierzu betrachtet man eine homogene Lösung $G_H(x, y)$ der Diracgleichung (3.43). Der Herleitung in [48] folgend kann in einer speziellen Klasse von Feldern, die nur von einer geradlinigen Koordinate $n \cdot x$ abhängen, diese partielle Differentialgleichung dreifach in eine gewöhnliche Differentialgleichung fouriertransformiert werden:

$$\left[i(\gamma \cdot n) \frac{d}{d(n \cdot x)} + \gamma \cdot \kappa + \gamma \cdot A(n \cdot x) - m \right] G_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa) = 0. \quad (6.1)$$

Dabei repräsentiert $\kappa = k - \partial(k \cdot x)/\partial(n \cdot x)$ die in rein zeitabhängigen Feldern erhaltene dreidimensionale Impulskoordinate, die senkrecht auf n steht, und zu welcher hintransformiert wird. Dieser Klasse von Feldern gehören auch die in den zu untersuchenden, rein zeitabhängigen Situationen an. Als weiterer Ansatz soll die Matrixfunktion $G_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa)$ ein Funktional einer weiteren Matrixfunktion $g_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa)$ sein, so daß sich bei Differentiation ein Verhalten ähnlich einer Exponentialfunktion ergibt:

$$\frac{d}{d(n \cdot x)} G_H[g_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa)] = \left(\frac{d}{d(n \cdot x)} g_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa) \right) G_H[g_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa)]. \quad (6.2)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist im allgemeinen keine Exponentialfunktion, da $g_H(x_0, y_0, \vec{k})$ an verschiedenen Punkten wegen seiner Matrixstruktur nicht unbedingt vertauscht. Die Form des Funktionals $G_H[g_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa)]$ muß bestimmt werden, nachdem sein Argument $g_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa)$ ermittelt worden ist. Das Einsetzen der beiden letzten Gleichungen ineinander führt zu einer Faktorisierung:

$$\left[i(\gamma \cdot n) \frac{d}{d(n \cdot x)} g_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa) + \gamma \cdot \kappa + \gamma \cdot A(n \cdot x) - m \right] \times G_H[g_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa)] = 0. \quad (6.3)$$

In dem Fall, daß eine andere als die triviale Lösung für diese Gleichung existiert, ist deren Matrixstruktur umkehrbar. Multiplikation mit der Inversen der Lösung von rechts liefert eine Differentialgleichung für die Argumentfunktion:

$$i(\gamma \cdot n) \frac{d}{d(n \cdot x)} g_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa) + \gamma \cdot \kappa + \gamma \cdot A(n \cdot x) - m = 0. \quad (6.4)$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung kann durch direkte Integration gelöst werden, wobei die Anfangsbedingung $g_H(n \cdot x = n \cdot y, n \cdot y, \kappa) = 0$ verwendet wird:

$$g_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa) = i \frac{\gamma \cdot n}{n^2} \int_{n \cdot y}^{n \cdot x} d(n \cdot \xi) [\gamma \cdot \kappa + \gamma \cdot A(n \cdot \xi) - m]. \quad (6.5)$$

Spätestens hier muß man fordern, daß $n^2 \neq 0$ ist, da sonst die Matrix $\gamma \cdot n$ singularär wäre, denn es ist: $\det\{\gamma \cdot n\} = (n^2)^2$. Für Fälle, bei denen $n^2 = 0$ gilt, ist eine alternative Behandlung notwendig.

Wie zuvor erwähnt, vertauscht die Argumentfunktion g_H im allgemeinen an unterschiedlichen Punkten $n \cdot x$ nicht mit sich selbst. Dies liegt nicht nur an nichtabelschen Ladungen, die in dem Vektorfeld A enthalten sein könnten, sondern auch an der nichtkommutativen Natur der Elemente der Cliffordalgebra. Daher ist die Lösung der Gleichung (6.2) nicht immer eine Exponentialfunktion. Unter Differentiation verhielte sich diese folgendermaßen:

$$\begin{aligned} d \exp\{g\} &= d[1 + g + g^2/2 + \dots] = (dg) + (dg)g/2 + g(dg)/2 + \dots \neq \\ &\neq (dg)[1 + g + \dots] = (dg) \exp\{g\}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

was nicht Gleichung (6.2) entspricht. Ihr genügt ein pfadgeordnetes Exponential:

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} \exp\{g\} &= d \left[1 + g + \int_y^x dg(\xi_1) \int_y^{\xi_1} dg(\xi_2) + \dots \right] = \\ &= (dg) + (dg) \int_y^x dg(\xi_2) + \dots = \\ &= (dg) \left[1 + \int_y^x dg(\xi_2) + \dots \right] = \\ &= (dg)[1 + g + \dots] = (dg)\mathcal{P} \exp\{g\}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Dies geht für ein kommutatives Argument in eine Exponentialfunktion über. Die homogene Lösung der Diracgleichung ist somit gegeben durch:

$$G_H[g_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa)] = \mathcal{P} \exp\{g_H(n \cdot x, n \cdot y, \kappa)\}. \quad (6.8)$$

Eine hinreichende aber nicht notwendige Bedingung für die Existenz dieses Exponentials ist die Beschränktheit der Norm des Integranden. Es sollte hier festgehalten werden, daß

die Invarianz eines Integrals unter gleichzeitiger Vertauschung der Integrationsgrenzen und des Vorzeichens nicht in Gleichung (6.5) benutzt werden kann, da sonst die Pfadordnung umgekehrt würde:

$$\mathcal{P} \exp \left\{ \int_y^x d\xi \right\} = \mathcal{P}^{-1} \exp \left\{ - \int_x^y d\xi \right\} \neq \mathcal{P} \exp \left\{ - \int_x^y d\xi \right\}. \quad (6.9)$$

Hier steht \mathcal{P}^{-1} für umgekehrte Pfadordnung, was nicht die inverse Operation zur Pfadordnung darstellt oder überhaupt darstellen kann, da diese singular ist: $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P} \neq 1$, sondern $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}$.

Wäre in Gleichung (6.5) eine allgemeinere Anfangsbedingung gewählt worden, hätte dem dann zusätzlich auftretenden Summanden $g_H(n \cdot y, n \cdot y, \kappa)$ ein Ordnungsparameter für die Pfadordnung gefehlt. Damit hätte dieser immer nur rechts neben das übrige pfadgeordnete Exponential gestellt werden können. Da hier eine homogene Differentialgleichung untersucht wird, ergäben sich aus dem entsprechenden Faktor $\times \exp\{g_H(n \cdot y, n \cdot y, \kappa)\}$ keine weiteren unabhängigen Lösungen.

Es müssen im folgenden nur die Fälle $n^2 > 0$ und $n^2 < 0$ unterschieden werden, da jedes Feld $A = A(n \cdot x)$ durch eine Lorentztransformation mit jedem anderen $A = A(n' \cdot x)$, für das $\text{sgn}(n^2) = \text{sgn}(n'^2)$ gilt, verbunden ist. Neudefinitionen der funktionellen Abhängigkeit des Vektorpotentials können Vorfaktoren vor den Normalenvektoren absorbieren. Somit genügt es, einen Spezialfall für jede Feldklasse zu untersuchen. Diese sollen hier die Fälle $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ und $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$ sein. In Situationen mit $n^2 = 0$ führen dreidimensionale Drehungen im Ortsraum jeden Normalenvektor in $n^\mu = (1, 0, 0, -1)/\sqrt{2}$ über. Alle Resultate für diese speziellen Richtungsabhängigkeiten gelten gleichermaßen für alle anderen Parameter im betreffenden Bereich.

B. Zeitartige Koordinaten

Für ein rein zeitabhängiges Feld ist, gemäß Gleichung (6.5), die Lösung für das Argument des pfadgeordneten Exponentials gegeben durch:

$$g_H(x_0, y_0, \vec{k}) = i\gamma^0 \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 [\gamma^j k_j + \gamma \cdot A(\xi_0) - m], \quad (6.10)$$

wobei $j \in \{1, 2, 3\}$ ist. Die gesamte homogene Lösung $G_H(x_0, y_0, \vec{k})$ läßt sich konstruieren, indem man Gleichung (6.10) in den Ausdruck (6.8) einsetzt:

$$G_H(x_0, y_0, \vec{k}) = \mathcal{P} \exp \left\{ i\gamma^0 \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 [\gamma^j k_j + \gamma \cdot A(\xi_0) - m] \right\}. \quad (6.11)$$

1. Ultraviolett-näherung

Um mehr über obige Lösung zu erfahren, bietet es sich an, sie für ein verschwindendes Eichfeld $A = 0$ zu betrachten. In diesem Fall kommutiert das Argument $g_H^0(x_0 - y_0, \vec{k})$ an unterschiedlichen Punkten mit sich selbst, wodurch das pfadgeordnete Exponential in eine Exponentialfunktion übergeht. Eine solche mit matrixwertigem Argument kann in Exponentialfunktionen skalaren Arguments, multipliziert mit Matrizen umgewandelt werden:

$$G_H^0(x_0 - y_0, \vec{k}) = \gamma^0 \frac{\gamma^0 \omega + \gamma^j k_j - m}{2\omega} e^{+i\omega(x_0 - y_0)} + \gamma^0 \frac{\gamma^0 \omega - \gamma^j k_j + m}{2\omega} e^{-i\omega(x_0 - y_0)}, \quad (6.12)$$

mit der Massenschalenenergie $\omega = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$. Zu sehen ist das direkt durch die Auswertung der Taylorexponentialreihe. Einen direkteren Zugang liefert jedoch die Zerlegung des Exponenten mit Hilfe der beiden Projektoren

$$\rho_{\pm} = \gamma^0 \frac{\gamma^0 \omega \pm \gamma^j k_j \mp m}{2\omega}. \quad (6.13)$$

Wegen $\rho_{\pm} \rho_{\mp} = 0$ und $(\rho_{\pm})^2 = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ i\gamma^0 [\gamma^j k_j - m](x_0 - y_0) \right\} &= \exp \left\{ i\omega(x_0 - y_0)(\rho_+ - \rho_-) \right\} = \\ &= \rho_+ e^{+i\omega(x_0 - y_0)} + \rho_- e^{-i\omega(x_0 - y_0)}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Die Entwicklung der vollen Lösung nach Potenzen des Eichfeldes A liefert die Standardstörungstheorie. Zuvor muß diese aber derart umgeschrieben werden, daß sie alle Potenzen der Impulse und der Masse mit jedem einzelnen Faktor des Feldes enthält. Das pfadgeordnete Exponential läßt sich als unendliches Produkt von Linearfaktoren ausdrücken:

$$G_H(x_0, y_0, \vec{k}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P} \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + i\gamma^0 \Delta \xi_0^{(n)} [\gamma^j k_j + \gamma \cdot A(\xi_0^{(n)}) - m] \right). \quad (6.15)$$

Das Intervall $[x_0, y_0]$ wird in N disjunkte Teilintervalle mit den Breiten $\Delta \xi_0^{(n)}$, die nicht konstant sein müssen, und mit jeweils einem inneren Punkt $\xi_0^{(n)}$, zerlegt. Dabei gilt $x_0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N < \xi_{N+1} = y_0$ für $x_0 < y_0$ oder $x_0 = \xi_0 > \xi_1 > \dots > \xi_N > \xi_{N+1} = y_0$ für $x_0 > y_0$. \mathcal{P} zeigt an, daß die Faktoren derart in Bezug auf den Index ν geordnet sind, daß der niedrigste Index am weitesten links steht. Der so entstandene Ausdruck kann nach Potenzen des Vektorpotentials A sortiert werden:

$$\begin{aligned} G_H(x_0, y_0, \vec{k}) = & \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^N \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=n_1+1}^{N-1} \dots \sum_{n_l=n_{l-1}+1}^{N-1} \\ & \prod_{L=0}^{n_1-1} \left(1 + i\gamma^0 \Delta \xi_0^{(L)} [\gamma^j k_j - m] \right) \times \left[i\gamma^0 \gamma \cdot A(\xi_0^{(n_1)}) \Delta \xi_0^{(n_1)} \right] \times \\ & \times \prod_{L=n_1+1}^{n_2-1} \left(1 + i\gamma^0 \Delta \xi_0^{(L)} [\gamma^j k_j - m] \right) \times \left[i\gamma^0 \gamma \cdot A(\xi_0^{(n_2)}) \Delta \xi_0^{(n_2)} \right] \times \\ & \times \dots \times \\ & \times \prod_{L=n_{l-1}+1}^{n_l-1} \left(1 + i\gamma^0 \Delta \xi_0^{(L)} [\gamma^j k_j - m] \right) \times \left[i\gamma^0 \gamma \cdot A(\xi_0^{(n_l)}) \Delta \xi_0^{(n_l)} \right] \times \\ & \times \prod_{L=n_l+1}^{N-1} \left(1 + i\gamma^0 \Delta \xi_0^{(L)} [\gamma^j k_j - m] \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Ist der Index l gleich null, kommen keine weiteren Summationen über die n_i vor. Summen oder Produkte werden nicht ausgeführt, sobald der Startindex größer als der Endindex ist. In der nachfolgenden Tabelle wird für $N = 3$ die Umordnung der Terme im Rahmen der Resummation skizziert. Das Zeichen „-“ symbolisiert dabei die infinitesimalen freien Propagatoren und „×“ die Kopplungen an das Feld. Im Fall größerer N , also feinerer Unterteilungen, läßt sich dieses Schema direkt verallgemeinern.

$N = 3$	0	1	2	
$l = 0$	-	-	-	
$l = 1$	×	-	-	$n_1 = 0$
	-	×	-	$n_1 = 1$
	-	-	×	$n_1 = 2$
$l = 2$	×	×	-	$n_1 = 0$ $n_2 = 1$
	×	-	×	$n_1 = 0$ $n_2 = 2$
	-	×	×	$n_1 = 1$ $n_2 = 2$
$l = 3$	×	×	×	$n_1 = 0$ $n_2 = 1$ $n_3 = 2$

Im Grenzfall von $N \rightarrow \infty$ wird in Gleichung (6.16) die äußere Summe über die Potenz l des Eichfeldes A eine unendliche Reihe. Die intermediären Summationen werden zu Integralen über Simplices und die Produkte werden zu pfadgeordneten Exponentialen. Tatsächlich kommutieren deren Argumente aber an jedem Punkt, weshalb die Pfadordnung dort außer Betracht gelassen werden kann. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 G_H(x_0, y_0, \vec{k}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \int_{y_0}^{x_0} d\xi_1 \int_{y_0}^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_{y_0}^{\xi_{l-1}} d\xi_l \\
 &\quad \exp \left\{ i\gamma^0 [\gamma^j k_j - m](x_0 - \xi_1) \right\} \times [i\gamma^0 \gamma \cdot A(\xi_1)] \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ i\gamma^0 [\gamma^j k_j - m](\xi_1 - \xi_2) \right\} \times [i\gamma^0 \gamma \cdot A(\xi_2)] \times \\
 &\quad \times \dots \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ i\gamma^0 [\gamma^j k_j - m](\xi_{l-1} - \xi_l) \right\} \times [i\gamma^0 \gamma \cdot A(\xi_l)] \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ i\gamma^0 [\gamma^j k_j - m](\xi_l - y_0) \right\}. \tag{6.17}
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck stellt eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihendarstellung eines pfadgeordneten Exponentialen dar. Somit ergibt sich:

$$G_H(x_0, y_0, \vec{k}) = G_H^0(x_0 - y_0, \vec{k}) \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 G_H^0(y_0 - \xi_0, \vec{k}) [i\gamma^0 \gamma \cdot A(\xi_0)] G_H^0(\xi_0 - y_0, \vec{k}) \right\}. \tag{6.18}$$

Die hier angeführte Herleitung ist ein Spezialfall einer allgemeineren Identität für diesen

Typ von pfadgeordneten Exponentialen (siehe Kapitel VI E). Die Entwicklung der letzten Formel nach dem Feld A ergibt:

$$\begin{aligned}
 G_H(x_0, y_0, \vec{k}) &= G_H^0(x_0 - y_0, \vec{k}) + \\
 &+ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 G_H^0(x_0 - \xi_0, \vec{k}) [i\gamma^0 \gamma \cdot A(\xi_0)] G_H^0(\xi_0 - y_0, \vec{k}) + \\
 &+ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 \int_{y_0}^{\xi_0} d\eta_0 G_H^0(x_0 - \xi_0, \vec{k}) [i\gamma^0 \gamma \cdot A(\xi_0)] G_H^0(\xi_0 - \eta_0, \vec{k}) \times \\
 &\quad \times [i\gamma^0 \gamma \cdot A(\eta_0)] G_H^0(\eta_0 - y_0, \vec{k}) + \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Bisher wurde lediglich die Lösung $G_H(x_0, y_0, \vec{k})$ der homogenen Diracgleichung in gemischter Darstellung untersucht. Die entsprechende Greensfunktion muß eine Anschlußbedingung mit einer Stufe der „Höhe“ $-i\gamma^0$ an der Stelle $G_G(x_0, y_0, \vec{k})$ erfüllen. Da bereits für das Argument die Randbedingung $g_H(x_0 = y_0, y_0, \vec{k}) = 0$ gefordert wird, gilt bisher für die homogene Lösung $G_H(x_0 = y_0, y_0, \vec{k}) = 1$. Der retardierte Propagator verschwindet für negative Zeitdifferenzen $x_0 - y_0 < 0$. Damit ist die Verbindung zwischen der homogenen Lösung und dem retardierten Propagator gegeben durch:

$$iG_R(x_0, y_0, \vec{k})\gamma^0 = \theta(x_0 - y_0)G_H(x_0, y_0, \vec{k}). \tag{6.20}$$

Wäre an diesem Punkt der Fall einer anderen Koordinate mit $n^2 > 0$ untersucht worden, so wäre die zusätzliche Anforderung $n_0 > 0$ zu beachten, um sicherzustellen, daß wirklich der retardierte Propagator ermittelt wird. Dies kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit immer durch eine Redefinition der funktionalen Form des Vektorpotentials erreicht werden. Alle für die homogene Lösung der Diracgleichung in gemischter Darstellung gefundenen Ergebnisse stehen durch die letzte Gleichung direkt mit dem retardierten Propagator $G_R(x_0, y_0, \vec{k})$ in Verbindung. Der avancierte Propagator kann ebenfalls auf die homogene Lösung $G_H(x_0, y_0, \vec{k})$ der Bewegungsgleichung für die Dirac-Greensfunktion zurückgeführt werden:

$$iG_A(x_0, y_0, \vec{k})\gamma^0 = -\theta(y_0 - x_0)G_H(x_0, y_0, \vec{k}). \tag{6.21}$$

Nach dem Einsetzen der Gleichung (6.19) in den vorangegangenen Ausdruck kann man die Heavisidefunktion zu jeder freien homogenen Lösung hinzumultiplizieren:

$$\begin{aligned}
 iG_R(x_0, y_0, \vec{k})\gamma^0 &= \theta(x_0 - y_0)G_H^0(x_0 - y_0, \vec{k}) + \\
 &+ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 \theta(x_0 - \xi_0)G_H^0(x_0 - \xi_0, \vec{k})[i\gamma^0\gamma \cdot A(\xi_0)] \times \\
 &\quad \times \theta(\xi_0 - y_0)G_H^0(\xi_0 - y_0, \vec{k}) + \\
 &+ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 \int_{y_0}^{\xi_0} d\eta_0 \theta(x_0 - \xi_0)G_H^0(x_0 - \xi_0, \vec{k})[i\gamma^0\gamma \cdot A(\xi_0)] \times \\
 &\quad \times \theta(\xi_0 - \eta_0)G_H^0(\xi_0 - \eta_0, \vec{k})[i\gamma^0\gamma \cdot A(\eta_0)] \times \\
 &\quad \times \theta(\eta_0 - y_0)G_H^0(\eta_0 - y_0, \vec{k}) + \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Dies ist auf Grund der Idempotenz der Stufenfunktion und der Identität $\theta(x_0 - \xi_0)\theta(\xi_0 - y_0) = \theta(x_0 - y_0)$ für $\xi_0 \in [x_0, y_0]$ möglich. Anschließend läßt sich das Resultat, in Übereinstimmung mit Gleichung (6.20), mit Hilfe von freien Greensfunktionen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 iG_R(x_0, y_0, \vec{k}) &= iG_R^0(x_0 - y_0, \vec{k}) + \\
 &+ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 iG_R^0(x_0 - \xi_0, \vec{k})[i\gamma \cdot A(\xi_0)]iG_R^0(\xi_0 - y_0, \vec{k}) + \\
 &+ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 \int_{y_0}^{\xi_0} d\eta_0 iG_R^0(x_0 - \xi_0, \vec{k})[i\gamma \cdot A(\xi_0)]iG_R^0(\xi_0 - \eta_0, \vec{k}) \times \\
 &\quad \times [i\gamma \cdot A(\eta_0)]iG_R^0(\eta_0 - y_0, \vec{k}) + \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

In der Literatur existieren mehrere, leicht unterschiedliche Definitionen für die Propagatoren, was das verschieden häufige Auftreten von imaginären Einheiten i erklärt. Der freie Feynmanpropagator

$$\begin{aligned}
 iG_F^0(x_0 - y_0, \vec{k}) &= \theta(x_0 - y_0) \frac{\gamma^0\omega - \gamma^j k_j + m}{2\omega} e^{-i\omega(x_0 - y_0)} + \\
 &+ \theta(y_0 - x_0) \frac{\gamma^0\omega + \gamma^j k_j - m}{2\omega} e^{+i\omega(x_0 - y_0)}
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

besitzt dagegen zu allen Zeiten eine singuläre Matrixstruktur. Dies wird durch Betrachtung von Abbildung 2 verständlich. Sie skizziert die Konturintegrationen in der komplexen k_0 -Ebene, die ausgeführt werden müssen, um die Beiträge der beiden Pole zu den verschiedenen Propagatoren bei der Fouriertransformation von der Impuls- zur gemischten Darstellung

zu bestimmen. Jeder innerhalb einer Kontur befindliche Pol führt zu einem additiven Beitrag zum freien Propagator, proportional zu einer der Matrizen $\gamma \cdot k \pm m$. Auf der Massenschale, das heißt für $k^2 = m^2$, sind diese singulär. In Abbildung 2 gehören die Kreise zu dem retardierten (schwarz) beziehungsweise avancierten Propagator (weiß). Es fällt auf, daß entweder gar kein Pol oder beide Pole von der Integrationskontur umschlossen werden. Das bedeutet, sollte einer dieser beiden Propagatoren an einem gegebenen Punkt nicht verschwinden, so treten diese zwei singulären Matrizen in einer nichttrivialen Linearkombination auf und erzeugen so ein Objekt mit invertierbarer Matrixstruktur. Dieser Sachverhalt stellt sich jedoch für den Feynman- und den antipfadgeordneten Feynmanpropagator anders dar. Für sie ist jeweils genau ein Pol von einer Kontur umgeben. Somit ist ihre Matrixstruktur niemals umkehrbar. Daher ist es unmöglich, ihn zu logarithmieren und ihn als Exponentialfunktion darzustellen, womit er auch unmöglich als pfadgeordnetes Exponential der Form (6.11) ausgedrückt werden kann. Dem zugrunde liegt die Tatsache, daß der Feynmanpropagator mit gemischten Anfangsbedingungen für Lösungen positiver und negativer Energie definiert ist.

2. Infrarotnäherung

Die zuvor demonstrierte Ultraviolettentwicklung sollte für $A(t) \ll \omega$ gute Näherungen liefern. Dementsprechend müßte für eine Infrarotnäherung $A(t) \gg \omega$ gelten. Diese kann wiederum durch die Anwendung der Resummationsformel aus Kapitel VI E ermittelt werden. Benutzt man sie, um alle Streuprozesse der Fermionen und Antifermionen am Feld für jede Potenz des Impulses und der Masse zusammenzufassen, so findet man:

$$\begin{aligned}
 G_H(x_0, y_0, \vec{k}) &= \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 \gamma^0 \gamma \cdot A(\xi_0) \right\} \times \\
 &\times \mathcal{P} \exp \left[\int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{\xi_0}^{y_0} d\theta_0 \gamma^0 \gamma \cdot A(\theta_0) \right\} \times i\gamma^0 [\gamma^j k_j - m] \times \right. \\
 &\left. \times \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{y_0}^{\xi_0} d\theta_0 \gamma^0 \gamma \cdot A(\theta_0) \right\} \right]. \tag{6.25}
 \end{aligned}$$

Ausgehend von dieser Gleichung könnte man anfangen, das äußere pfadgeordnete Exponential nach Potenzen des Impulsterms zu entwickeln:

$$\begin{aligned}
 G_H(x_0, y_0, \vec{k}) &= \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 \gamma^0 \gamma \cdot A(\xi_0) \right\} + \\
 &+ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{\xi_0}^{y_0} d\theta_0 \gamma^0 \gamma \cdot A(\theta_0) \right\} \{i\gamma^0[\gamma^j k_j - m]\} \times \\
 &\quad \times \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{x_0}^{\xi_0} d\theta_0 \gamma^0 \gamma \cdot A(\theta_0) \right\} + \\
 &+ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 \int_{y_0}^{\xi_0} d\eta_0 \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{\xi_0}^{y_0} d\theta_0 \gamma^0 \gamma \cdot A(\theta_0) \right\} \{i\gamma^0[\gamma^j k_j - m]\} \times \\
 &\quad \times \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{\eta_0}^{\xi_0} d\theta_0 \gamma^0 \gamma \cdot A(\theta_0) \right\} \{i\gamma^0[\gamma^j k_j - m]\} \times \\
 &\quad \times \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{x_0}^{\eta_0} d\theta_0 \gamma^0 \gamma \cdot A(\theta_0) \right\} + \\
 &+ \dots .
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Dies entspricht wegen der Identität $(\gamma^0[\gamma^j k_j - m])^2 = \omega^2$ entspricht einer Entwicklung in Potenzen der Massenschalenenergie ω . Während die Ultraviolett-näherung auf der Untersuchung einer bestimmten Anzahl von Wechselwirkungen des ansonsten frei propagierenden Teilchens mit dem Feld basiert, die als „Beschleunigungen“ bezeichnet werden könnten, entspricht der Infrarotansatz einer Entwicklung in Potenzen der „Trägheit“, da ω gleich der asymptotischen relativistischen Masse ist. In der niedrigsten Ordnung der Infrarotnäherung wird die Propagation eines Teilchens ohne jedwede relativistische Masse einzig und allein durch das Feld bestimmt. Die Terme höherer Ordnung entsprechen Abweichungen aufgrund von nichtverschwindendem ω .

3. Abelsche Näherung

Alle der bisher angeführten Näherungen in Form von Entwicklungen nach Potenzen eines Teils des Exponenten basieren auf Gleichung (6.45). Dies gilt nicht für das abelsche Näherungsschema. Die niedrigste Ordnung $G_H^{A_0}(x_0, y_0, \vec{k})$ im Rahmen dieses Ansatzes erhält man durch Vernachlässigen der Pfadordnung in Gleichung (6.11):

$$G_H^{A_0}(x_0, y_0, \vec{k}) = \exp \left\{ i\gamma^0 \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 [\gamma^j k_j + \gamma \cdot A(\xi_0) - m] \right\}. \tag{6.27}$$

Höhere Ordnungen dieses Schemas werden nicht durch additive Terme gegeben, sondern durch Aufspalten der Exponentialfunktion in Gleichung (6.27) an einer geordneten Menge von Punkten:

$$G_H^{AN}(x_0, y_0, \vec{k}) = \mathcal{P} \prod_{\nu=0}^N \exp \left\{ i\gamma^0 \int_{\xi_{\nu+1}}^{\xi_\nu} d\xi_0 [\gamma^j k_j + \gamma \cdot A(\xi_0) - m] \right\} \quad (6.28)$$

mit $x_0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N < \xi_{N+1} = y_0$ für $x_0 < y_0$ oder $x_0 = \xi_0 > \xi_1 > \dots > \xi_N > \xi_{N+1} = y_0$ für $x_0 > y_0$. \mathcal{P} symbolisiert, daß die Faktoren bezüglich des Index ν geordnet sind, so daß der niedrigste Index am weitesten links steht. Die Auswahl der Zwischenpunkte ξ_ν ist nicht eindeutig. Allerdings wird das Ergebnis im Grenzfall unendlich schmaler Intervalle exakt:

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} G_H^{AN}(x_0, y_0, \vec{k}) = \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\nu=0}^N \exp \left\{ i\gamma^0 \int_{\xi_{\nu+1}}^{\xi_\nu} d\xi_0 [\gamma^j k_j + \gamma \cdot A(\xi_0) - m] \right\} = \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\nu=0}^N \left\{ 1 + i\gamma^0 (\xi_\nu - \xi_{\nu+1}) [\gamma^j k_j + \gamma \cdot A(\xi_0) - m] + \mathcal{O} \left(\frac{(x_0 - y_0)^2}{N^2} \right) \right\} = \\ & = \mathcal{P} \exp \left\{ i\gamma^0 \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 [\gamma^j k_j + \gamma \cdot A(\xi_0) - m] \right\} = \\ & = G_H(x_0, y_0, \vec{k}). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Um den Fehler für eine Intervallbreite von $y_0 - x_0 = 2\Delta$ abzuschätzen, wird das Ergebnis niedrigster Ordnung mit dem der darauffolgenden verglichen. Hierzu halbiert man das Intervall genau:

$$\begin{aligned} \Delta G_H^A & = G_H^{A_0}(0, 2\Delta, \vec{k}) - G_H^{A_1}(0, 2\Delta, \vec{k}) = \\ & = G_H^{A_0}(0, 2\Delta, \vec{k}) - G_H^{A_0}(0, \Delta, \vec{k}) G_H^{A_0}(\Delta, 2\Delta, \vec{k}). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Mit Hilfe der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel:

$$\begin{aligned} \Delta G_H^A & = \exp \{ g_H(0, 2\Delta, \vec{k}) \} - \exp \{ g_H(0, 2\Delta, \vec{k}) + [g_H(0, \Delta, \vec{k}), g_H(\Delta, 2\Delta, \vec{k})] + \mathcal{O}(\Delta^4) \} = \\ & = -[g_H(0, \Delta, \vec{k}), g_H(\Delta, 2\Delta, \vec{k})] + \mathcal{O}(\Delta^4) = \\ & = -[g_H(0, \Delta, \vec{k}), g_H(0, 2\Delta, \vec{k})] + \mathcal{O}(\Delta^4) = \\ & = -[g_H(0, \Delta, \vec{k}), dg_H(0, \Delta, \vec{k})/d\Delta] \Delta + \mathcal{O}(\Delta^4). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Das erste Auftreten des Restterms $\mathcal{O}(\Delta^4)$ resultiert aus einer Taylorentwicklung sekundärer und höherer Kommutatoren. Im nachfolgenden Schritt werden die Exponentialfunktionen bis zur linearen Ordnung entwickelt, daraufhin eine Null in Form des Kommutators von $g_H(0, \Delta, \vec{k})$ mit sich selbst addiert und dessen Linearität ausgenutzt. Letztendlich nähert man sein zweites Argument bis zur linearen Ordnung an der Stelle Δ . Der Kommutator von $g_H(0, \Delta, \vec{k})$ mit sich selbst entfällt hierbei wieder.

Obige Formel sagt aus, daß der Fehler in führender Ordnung der Intervallbreite Δ proportional zum Kommutator des Exponenten g_H und dessen erster Ableitung an einem intermediären Punkt des Intervalls ist. Für einen konstanten Integranden – gleichbedeutend mit einem konstanten Eichfeld –, ist die niedrigste Ordnung exakt. Terme höherer Ordnung werden notwendig, falls der Kommutator $[g_H(0, \Delta, \vec{k}), dg_H(0, \Delta, \vec{k})/\Delta]\Delta$ im Vergleich zu $G_H^{A_0}(0, 2\Delta, \vec{k})$ nicht vernachlässigt werden kann. Dieser Vergleich muß auf einer entsprechend definierten Norm beruhen. Für die Darstellung eines pfadgeordneten Exponentials als Produkt linearer Faktoren (siehe Gleichung (6.15)) liefert die Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned}
 \Delta G_H &= 1 + 2\Delta dg_H(0, \Delta, \vec{k})/d\Delta - \\
 &\quad - [1 + \Delta dg_H(0, \Delta/2, \vec{k})/d(\Delta/2)][1 + \Delta dg_H(0, 3\Delta/2, \vec{k})/d(3\Delta/2)] = \\
 &= 1 + 2g_H(0, \Delta, \vec{k}) - [1 + g_H(0, \Delta/2, \vec{k})][1 + g_H(0, 3\Delta/2, \vec{k})] + \mathcal{O}(\Delta^2) = \\
 &= [2g_H(0, \Delta, \vec{k}) - g_H(0, \Delta/2, \vec{k}) - g_H(0, 3\Delta/2, \vec{k})] - \\
 &\quad - g_H(0, \Delta/2, \vec{k})g_H(0, 3\Delta/2, \vec{k}) + \mathcal{O}(\Delta^2) = \\
 &= -g_H(0, \Delta, \vec{k})^2 + [g_H(0, \Delta, \vec{k}), \dot{g}_H(0, \Delta, \vec{k})]\Delta/2 + \mathcal{O}(\Delta^2). \tag{6.32}
 \end{aligned}$$

Zunächst wird ausgenutzt, daß $dg_H(0, \Delta, \vec{k})/d\Delta$ bis auf Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta^2)$ konstant ist. Nach dem Ausmultiplizieren im nachfolgenden Schritt werden im letzten alle Terme bis zur linearen Ordnung um den Punkt Δ entwickelt und jene, die linear in der Intervallbreite Δ sind, beibehalten. Im Gegensatz zu ΔG_H^A wird ΔG_H für ein konstantes Eichfeld nicht gleich null. In führender Ordnung hängt der Fehler vom Wert des Exponenten g_H ab. Damit wird die Konvergenz nicht nur für sich schnell ändernde Eichfelder unzureichend, sondern bereits für große Werte der Energie und des Feldes. In diesem Fall bedarf es bereits für eine hinreichend gute Näherung des freien Propagators einer großen Zahl von Termen.

C. Raumartige Koordinaten

Das allgemeine Lösungsschema in Anwesenheit eines klassischen Feldes, welches von einer beliebigen geradlinigen Koordinate $n \cdot x$ abhängt und Gleichung (6.8) inklusive dem Argument (6.5) ergibt, führt immer zu einer Greensfunktion, deren Randbedingungen auf einer zu n senkrechten Ebene definiert sind. Propagatoren haben ihre Randbedingungen immer auf Ebenen mit zeitartigen Normalenvektoren $n^2 > 0$. Damit liefert das allgemeine Ergebnis – Gleichungen (6.8) und (6.5) – im Falle eines Feldes, das ausschließlich von der x_3 -Koordinate abhängt ($n^\mu = (0, 0, 0, 1)$), zwar eine Greensfunktion aber keinen Propagator. Mittels des in dieser Arbeit vorgestellten Lösungsverfahrens sieht man dies auch explizit. Die Lösung für das Argument gemäß Gleichung (6.5) ist:

$$g_H(x_3, y_3; k_0, \vec{k}_T) = -i\gamma^3 \int_{y_3}^{x_3} d\xi_3 [\gamma^0 k_0 + \gamma^J k_J + \gamma \cdot A(\xi_3) - m] \quad (6.33)$$

wobei $J \in \{1, 2\}$. Wiederholen der Schritte, die im Fall $n^2 > 0$ zur freien homogenen Lösung der Diracgleichung in Gleichung (6.12) führten, ergibt:

$$\begin{aligned} G_H^0(x_3 - y_3; k_0, \vec{k}_T) &= \gamma^3 \frac{-\gamma^3 \sqrt{(k_0)^2 - m_T^2} + \gamma^0 k_0 + \gamma^J k_J - m}{2\sqrt{(k_0)^2 - m_T^2}} e^{-i\sqrt{(k_0)^2 - m_T^2}(x_3 - y_3)} + \\ &+ \gamma^3 \frac{-\gamma^3 \sqrt{(k_0)^2 - m_T^2} - \gamma^0 k_0 - \gamma^J k_J + m}{2\sqrt{(k_0)^2 - m_T^2}} e^{+i\sqrt{(k_0)^2 - m_T^2}(x_3 - y_3)}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Die transversale Masse m_T ist definiert als: $m_T = \sqrt{|\vec{k}_T|^2 + m^2}$. Dieser Ausdruck (6.34), multipliziert mit einer Heavisidefunktion $\theta(x_3 - y_3)$, um eine Greensfunktion aus der homogenen Lösung zu erzeugen, ist nicht proportional zu dem freien retardierten Propagator in dieser gemischten Darstellung.

D. Lichtartige Koordinaten

Wie bereits erwähnt, kann der hier vorgestellte Weg eine homogene Lösung anzugeben, nicht für lichtartige Vierervektoren n verfolgt werden, da in diesem Falle die Matrix $\gamma \cdot n$ keine Inverse besitzt. Allerdings gibt es für die Abhängigkeit von einer lichtartigen Koordinate eine alternative Lösung für G_H :

In dem Fall des Normalenvektors $n^\mu = (1, 0, 0, -1)/2$, wird Gleichung (6.1) zu:

$$\left[i\gamma_- \frac{d}{dx_-} + \gamma_+ (k_- + A_-(x_-)) - \vec{\gamma}_T \cdot (\vec{k}_T + \vec{A}_T(x_-)) + \gamma_- A_+(x_-) - m \right] G_H(x_-, y_-; k_-, \vec{k}_T) = 0. \quad (6.35)$$

Die Definition der Lichtkegelzerlegung vektorieller Größen erfolgt gemäß $v_\pm = [v_0 \pm v_3]/\sqrt{2}$ und $v_\pm = v^\mp$ mit $v \in \{\gamma, x, k, A(x_-)\}$. Beachtet man, daß $\gamma_+ \gamma_- / 2$ und $\gamma_- \gamma_+ / 2$ zwei Projektionsoperatoren darstellen, die in disjunkte Teilräume der Cliffordalgebra projizieren und die Vollständigkeitsrelation $\gamma_+ \gamma_- + \gamma_- \gamma_+ = 2$ erfüllen, läßt sich die Matrixfunktion $G_H(x_-, y_-; k_-, \vec{k}_T)$ aufteilen in:

$$2G_H(x_-, y_-; k_-, \vec{k}_T) = \gamma_+ G_-(x_-, y_-; k_-, \vec{k}_T) + \gamma_- G_+(x_-, y_-; k_-, \vec{k}_T) \quad (6.36)$$

mit $G_\pm(x_-, y_-; k_-, \vec{k}_T) = \gamma_\pm G_H(x_-, y_-; k_-, \vec{k}_T)$. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden die Argumente der Funktionen unterdrückt. Bis zu seinem Ende ist immer diese spezielle gemischte Darstellung gemeint. Wird diese Zerlegung in Gleichung (6.35) verwendet, so führt dies auf:

$$i \frac{\gamma_- \gamma_+}{2} \frac{d}{dx_-} G_- + \frac{\gamma_+ \gamma_-}{2} (k_- + A_-) G_+ - \{\vec{\gamma}_T \cdot (\vec{k}_T + \vec{A}_T) + m\} G_H + \frac{\gamma_- \gamma_+}{2} A_+ G_- = 0. \quad (6.37)$$

Ausgehend von diesem Ausdruck kann man durch Anwendung der Projektionsoperatoren zwei Gleichungen gewinnen:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dx_-} G_- + A_+ G_- - \frac{1}{2} \{\vec{\gamma}_T \cdot (\vec{k}_T + \vec{A}_T) + m\} \gamma_- G_+ &= 0 \\ (k_- + A_-) G_+ - \frac{1}{2} \{\vec{\gamma}_T \cdot (\vec{k}_T + \vec{A}_T) + m\} \gamma_+ G_- &= 0. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Für weitere Vereinfachungen wird dabei von der Idempotenz der Projekoren $(\gamma_{\pm}\gamma_{\mp}/2)^2 = \gamma_{\pm}\gamma_{\mp}/2$ sowie ihren Projektionseigenschaften $(\gamma_{\pm}\gamma_{\mp}/2)\gamma_{\mp} = 0$ und $(\gamma_{\pm}\gamma_{\mp}/2)\gamma_{\pm} = \gamma_{\pm}$ Gebrauch gemacht. Die zweite, rein algebraische Gleichung kann benutzt werden, um G_+ in der ersten zu ersetzen:

$$i\frac{d}{dx_-}G_- + A_+G_- + \frac{1}{2}[\vec{\gamma}_T \cdot (\vec{k}_T + \vec{A}_T) + m](k_- + A_-)^{-1}[\vec{\gamma}_T \cdot (\vec{k}_T + \vec{A}_T) - m]G_- = 0. \quad (6.39)$$

In der Anwesenheit nicht-abelscher Ladungen muß man die Division durch A_- wegen der Matrixstruktur als Multiplikation mit dem Inversen verstehen. Wird ein Zusammenhang zwischen der Matrixfunktion G_- und einer anderen g_- in direkter Analogie zu (6.2) gefordert, ist die resultierende Differentialgleichung gegeben durch:

$$i\frac{d}{dx_-}g_- = -\frac{1}{2}[\vec{\gamma}_T \cdot (\vec{k}_T + \vec{A}_T) + m](k_- + A_-)^{-1}[\vec{\gamma}_T \cdot (\vec{k}_T + \vec{A}_T) - m] - A_+. \quad (6.40)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt sich durch direkte Integration. Wie bereits zuvor erläutert, ist das Funktional $G_-[g_-]$ im allgemeinen ein pfadgeordnetes Exponential des Arguments g_- . In der vorliegenden Situation genügt bereits die Abwesenheit nichtkommutativer Ladungen, um es in eine einfache Exponentialfunktion umzuwandeln, da das Argument dann keine Elemente der Cliffordalgebra außer dem neutralen der Multiplikation enthält. Die zweite Komponente der homogenen Lösung ist durch die zweite der Gleichungen (6.38) gegeben. Schließlich hat eine homogene Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (6.35) die Form:

$$G_H(x_-, y_-; k_-, \vec{k}_T) = \frac{1}{2} \left(\gamma_+ - \frac{1}{2}\gamma_- \gamma_+ [k_- + A_-]^{-1} \{ \vec{\gamma}_T \cdot [\vec{k}_T + \vec{A}_T] - m \} \right) \times \\ \times \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{y_-}^{x_-} d\xi_- \left(\frac{1}{2} \{ \vec{\gamma}_T \cdot [\vec{k}_T + \vec{A}_T] + m \} [k_- + A_-]^{-1} \{ \vec{\gamma}_T \cdot [\vec{k}_T + \vec{A}_T] - m \} + A_+ \right) \right\} \quad (6.41)$$

Versucht man einen Propagator mit Hilfe dieser homogenen Lösung zu konstruieren, so ergibt sich einer, der retardiert oder avanciert in der lichtartigen Koordinate x_- ist. Alternative Lösungswege finden sich in [49].

E. Die allgemeine Resummationsformel

Dieses Kapitel soll das Zustandekommen der zuvor benutzten, allgemeinen Resummationsformel erläutern. Die Rechnungen zur Produktion von Fermion-Antifermion-Paaren finden im nächsten Kapitel ihre Fortsetzung.

Ein pfadgeordnetes Exponential, dessen Integrand nur von einer einzelnen Variable ξ_0 abhängt, kann allgemein folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 [B(\xi_0) + C(\xi_0)] \right\} &= \sum_{l=0}^{\infty} \int_{y_0}^{x_0} d\xi_1 \int_{y_0}^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_{y_0}^{\xi_{l-1}} d\xi_l \\
 &\quad \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{\xi_1}^{x_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} C(\xi_1) \times \\
 &\quad \times \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{\xi_2}^{\xi_1} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} C(\xi_2) \times \\
 &\quad \times \dots \times \\
 &\quad \times \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{\xi_l}^{\xi_{l-1}} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} C(\xi_l) \times \\
 &\quad \times \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{\xi_l} d\xi_0 B(\xi_0) \right\}. \tag{6.42}
 \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der für die vorliegenden pfadgeordneten Exponentiale gültigen Gruppeneigenschaft

$$\mathcal{P} \exp \left\{ \int_{z_0}^{x_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} \times \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{z_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} = \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\}, \tag{6.43}$$

läßt sich die obige Gleichung umschreiben in:

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 [B(\xi_0) + C(\xi_0)] \right\} = \\
 &= \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{y_0}^{x_0} d\xi_1 \int_{y_0}^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_{y_0}^{\xi_{l-1}} d\xi_l \times \\
 &\quad \times \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{x_0}^{y_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{\xi_1}^{x_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} C(\xi_1) \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{\xi_1} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} \times \\
 &\quad \times \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{x_0}^{y_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{\xi_2}^{x_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} C(\xi_2) \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{\xi_2} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} \times \dots \times \\
 &\quad \times \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{x_0}^{y_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{\xi_l}^{x_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} C(\xi_l) \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{\xi_l} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} \times \mathcal{P} \exp \left[\mathcal{P} \exp \left\{ \int_{x_0}^{y_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \int_{x_0}^{y_0} d\xi_0 \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{\xi_0}^{x_0} dz_0 B(z_0) \right\} C(\xi_0) \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{\xi_0} dz_0 B(z_0) \right\} \right]. \quad (6.44)
 \end{aligned}$$

Benutzt man die genannte Gruppeneigenschaft erneut, so ist die kompakteste Form dieses Ausdrucks gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 [B(\xi_0) + C(\xi_0)] \right\} = \\
 &= \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\} \times \\
 &\times \mathcal{P} \exp \left[\int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{\xi_0}^{y_0} dz_0 B(z_0) \right\} C(\xi_0) \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{\xi_0} dz_0 B(z_0) \right\} \right]. \quad (6.45)
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt allgemeine Resummationen zu, bei denen die dominierende Größe beliebig wählbar ist. Außerdem ist es möglich, die angegebenen Schritte zu wiederholen, um den Ausdruck mehrfach zu resumieren, was beispielsweise nach Aufteilung von $C(\xi_0)$ in einen dominanten Teil und eine Abweichung hilfreich sein könnte.

Obiges Ergebnis läßt sich auch auf einem anderen Weg herleiten. Hierzu schreibe man die fouriertransformierte Diracgleichung in einer generischen Form, wobei hier die Abhängigkeit von \vec{k} im weiteren nicht mehr notiert wird:

$$\left[\frac{d}{dx_0} - B(x_0) - C(x_0) \right] G_H(x_0, y_0) = 0. \quad (6.46)$$

Mit dem Ansatz:

$$G_H(x_0, y_0) = U(x_0, y_0) \hat{G}_H(x_0, y_0) \quad (6.47)$$

und der Produktregel der Differentiation ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{d}{dx_0} U(x_0, y_0) \right) \hat{G}_H(x_0, y_0) + U(x_0, y_0) \frac{d}{dx_0} \hat{G}_H(x_0, y_0) - \\
 &\quad - [B(x_0) + C(x_0)] U(x_0, y_0) \hat{G}_H(x_0, y_0) = 0. \quad (6.48)
 \end{aligned}$$

Mit der Forderung, daß $U(x_0, y_0)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx_0} U(x_0, y_0) - B(x) U(x_0, y_0) = 0 \quad (6.49)$$

erfüllt, reduziert sich der obige Ausdruck zu:

$$U(x_0, y_0) \frac{d}{dx_0} \hat{G}_H(x_0, y_0) - C(x_0) U(x_0, y_0) \hat{G}_H(x_0, y_0) = 0. \quad (6.50)$$

Durch eine Multiplikation mit $U^{-1}(x_0, y_0)$ von links transformiert sich dieser Ausdruck zu:

$$\frac{d}{dx_0} \hat{G}_H(x_0, y_0) - U^{-1}(x_0, y_0) C(x_0) U(x_0, y_0) \hat{G}_H(x_0, y_0) = 0. \quad (6.51)$$

Wie zuvor diskutiert, sind die Lösungen letztgenannter Gleichung und des Ausdrucks (6.49) gegeben durch:

$$\hat{G}(x_0, y_0) = \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 U^{-1}(\xi_0, y_0) C(\xi_0) U(\xi_0, y_0) \right\} \quad (6.52)$$

beziehungsweise

$$U(x_0, y_0) = \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 B(\xi_0) \right\}. \quad (6.53)$$

Die Verwendung der Gruppeneigenschaft (6.43) reproduziert die letzte Zeile von Gleichung (6.44). Die hier aufgeführten Herleitungen kann man für jede Variable $n \cdot x$ wiederholen. Nur im Fall $n^2 = 0$ existiert keine Umschreibung der Diracgleichung in der generischen Form (6.46).

F. Fermion-Antifermion-Produktion

Da nun der retardierte Propagator in einem Feld, das von einer geradlinigen, zeitartigen Koordinate abhängt, bekannt ist, kann man den Erwartungswert für die Anzahl der durch Vakuumpolarisation produzierten Fermion-Antifermion-Paare berechnen. Den zuvor erarbeiteten Resultaten entsprechend hängt das externe Feld von einer geradlinigen zeitartigen Koordinate ab. Die unterschiedlichen Näherungsschemata werden mit der exakten Lösung für ein gegebenes Modellfeld verglichen.

Die durch

$$\mathcal{T}^B(q, p) = \gamma \cdot A(q - p) \quad (6.54)$$

gegebene Bornnäherung des Einteilchenstreuoperators (4.35) – die Näherung zu niedrigster Ordnung im Feld – ist immer im Streuoperator enthalten. Die unterschiedlichen Näherungsschemata führen nur zu Änderungen im verbleibenden nicht-bornschen Summanden in Gleichung (4.35). In Anwesenheit eines rein zeitabhängigen Feldes vereinfacht sich der Einteilchenstreuoperator zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(q, p) &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) \times \\ &\quad \times \left[\gamma \cdot A(q_0 - p_0) + \int dx_0 dy_0 e^{+iq_0 x_0} e^{-ip_0 y_0} \gamma \cdot A(x_0) G(x_0, y_0, \vec{p}) \gamma \cdot A(y_0) \right] = \\ &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) \mathcal{T}(q_0, p_0) = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) \left[\mathcal{T}^B(q_0, p_0) + \mathcal{T}^{NB}(q_0, p_0) \right], \end{aligned} \quad (6.55)$$

mit dem nicht-bornschen Anteil $\mathcal{T}^{NB}(q_0, p_0)$. Die exakte Erhaltung des Dreierimpulses ist hier wegen des Auftretens der Diracdeltafunktion offensichtlich. In rein zeitabhängigen Feldern werden die zu einem Paar gehörenden Partikel immer mit entgegengesetztem Dreierimpuls erzeugt.

Beiträge höherer Ordnung bezüglich Potenzen des Eichfeldes – die sogenannte Ultraviolettentwicklung – ergeben sich durch Ersetzung des vollen Propagators in dem Streuoperator mit Termen aus Gleichung (6.23). In Analogie hierzu führt das Ersetzen des vollen Propagators durch andere Näherungen zu den entsprechenden Näherungen des Einteilchenstreuoperators. Aus diesem wechselwirkenden Teil des retardierten Propagators \mathcal{T}_R berechnet

sich der Erwartungswert der produzierten Paare gemäß Gleichung (4.34). Für diese rein zeitabhängige Situation ergeben sich noch einige Vereinfachungen:

$$\langle n \rangle = \frac{V}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega^2} \left| \bar{u}(\omega, -\vec{k}) \mathcal{T}_R(\omega, -\omega) v(\omega, +\vec{k}) \right|^2, \quad (6.56)$$

unter Benutzung der Relation $[\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})]^2 = V\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})/(2\pi)^3$ mit dem Integrationsvolumen V . Ausführen der Spinsumme führt zu:

$$\frac{4(2\pi)^3}{V} \frac{d\langle n \rangle}{d^3k} = \text{tr} \left\{ \mathcal{T}_R(\omega, -\omega) \frac{\gamma^0\omega + \gamma^j k_j - m}{\omega} \gamma^0 \mathcal{T}_R^\dagger(\omega, -\omega) \gamma^0 \frac{\gamma^0\omega - \gamma^j k_j + m}{\omega} \right\}. \quad (6.57)$$

Um etwas über das Verhalten des differentiellen Erwartungswertes und der verschiedenen Näherungen zu erfahren, ohne dafür zuvor die Yang-Mills-Gleichungen (3.41) lösen zu müssen, wird bei der Auswertung der verschiedenen Formeln eine spezielle Wahl für das Feld getroffen:

$$A_\mu(t) = g_{3\mu} A_{in} e^{-t/t_0} \theta(t). \quad (6.58)$$

Man hätte zahlreiche andere Formen verwenden können. Die hier getroffene Auswahl ist von einer numerischen Studie [45] inspiriert, die einen ähnlichen Zerfall des Feldes ergab. In jedem Fall müßte der korrekte Verlauf des klassischen Feldes im Rahmen einer selbstkonsistenten Rechnung ermittelt werden.

1. Bornsche Näherung

Im folgenden bezeichnet \mathcal{T} immer den retardierten Einteilchenstreuoperator, auch wenn kein Index R angefügt ist. In Bornnäherung (6.54) ist dieser gegeben durch:

$$\mathcal{T}^B(2\omega) = \frac{\gamma^3 A_{in} t_0}{1 + 2it_0\omega}. \quad (6.59)$$

2. Ultraviolett Näherung

Im Rahmen der niedrigsten Ordnung der Ultraviolettentwicklung, wird der volle Propagator durch den freien (Gleichung (6.20) zusammen mit dem Ausdruck (6.12)) approximiert.

Daher nimmt hier der nicht-bornsche Anteil des Einteilchenstreuoperators die folgende Form an:

$$\mathcal{T}^{UV} = -i\gamma^3 \frac{\gamma^0 \omega + \gamma^j k_j - m}{2\omega} \gamma^3 \mathcal{T}_+^{UV} - i\gamma^3 \frac{\gamma^0 \omega - \gamma^j k_j + m}{2\omega} \gamma^3 \mathcal{T}_-^{UV} \quad (6.60)$$

mit

$$\mathcal{T}_\pm^{UV} = A_{in}^2 \int_0^\infty dx_0 \int_0^{x_0} dy_0 e^{i\omega(x_0+y_0)} e^{\pm i\omega(x_0-y_0)} e^{-x_0/t_0} e^{-y_0/t_0} = \frac{(A_{in} t_0)^2 / 2}{[1 - i\omega t_0][1 - i(\omega \pm \omega) t_0]}. \quad (6.61)$$

3. Infrarotnäherung

Für ein allgemeines rein zeitabhängiges Feld ist der generelle Ausdruck für die niedrigste Ordnung der Infrarotnäherung der homogenen Lösung:

$$G_H^{IR}(x_0, y_0, \vec{k}) = \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 \gamma^0 \gamma \cdot A(\xi_0) \right\} \quad (6.62)$$

bei seiner Auswertung nicht wesentlich unkomplizierter zu berechnen als die exakte Lösung. Jedoch kann für ein Feld konstanter Richtung $A_\mu(t) = A_\mu \times f(t)$ die Pfadordnung fallengelassen werden. Für den nicht-bornschen Term des wechselwirkenden Anteils des Propagators findet man in diesem Näherungsschema:

$$\mathcal{T}^{IR} = -i \frac{\gamma^0 - \gamma^3}{2} \mathcal{T}_+^{IR} - i \frac{\gamma^0 + \gamma^3}{2} \mathcal{T}_-^{IR} \quad (6.63)$$

mit:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\pm^{IR} &= A_{in}^2 \int_0^\infty dx_0 \int_0^{x_0} dy_0 e^{i\omega(x_0+y_0)} e^{-x_0/t_0} e^{-y_0/t_0} \exp \left\{ \mp i A_{in} t_0 [e^{-x_0/t_0} - e^{-y_0/t_0}] \right\} = \\ &= (A_{in} t_0)^2 \sum_{\mu=0}^\infty \frac{(\mp i A_{in} t_0)^\mu}{\mu!} \frac{1}{\mu + 1 - i\omega t_0} \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(\pm i A_{in} t_0)^\nu}{\nu!} \frac{1}{\nu + \mu + 2 - 2i\omega t_0}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Hierbei ist die gleichmäßige Konvergenz der Exponentialreihe für beschränkte Exponenten als Voraussetzung für die gliedweise Integration von Bedeutung. Mit der Formel 6.5.29 aus [44] für beschränkte Beträge von $A_{in} t_0$ ergibt sich:

$$\mathcal{T}_{\pm}^{IR} = (A_{in}t_0)^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\mp i A_{in}t_0)^{\mu}}{\mu!} \frac{1}{\mu+1-i\omega t_0} \gamma^*(\mu+2-2i\omega t_0, \mp i A_{in}t_0) \Gamma(\mu+2-2i\omega t_0). \quad (6.65)$$

Anschließend benutzt man Gleichung 6.5.4 aus [44] um die Form

$$\mathcal{T}_{\pm}^{IR} = -(\mp A_{in}t_0)^{2i\omega t_0} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \frac{\gamma(\mu+1-2i\omega t_0, \mp i A_{in}t_0)}{1-i\omega t_0/\mu} \quad (6.66)$$

zu erhalten. Im Fall mehrfacher Ladungen kann A_{in} gemäß $A_{in} = A_{in}^a T^a$ zerlegt werden, wobei die T^a wieder die Generatoren der Algebra der Ladungsgruppe sind. Diese müssen auf Grund der Anforderung der Unitarität hermitesch sein, was folglich auch für jede Linearkombination dieser Generatoren mit reellen Koeffizienten zutrifft. Somit existiert für jede Matrix $A_{in}^a T^a$ mit reellen A_{in}^a eine Diagonalform:

$$A_{in}^a T^a = \sum_{n=1}^N \lambda_n |n\rangle \langle n|. \quad (6.67)$$

Hierbei sind λ_n die Eigenwerte zu den N orthonormalen Eigenvektoren $|n\rangle$. Die Kombinationen $|n\rangle \langle n|$ stellen Projektoren dar. Somit erhält man:

$$\mathcal{T}_{\pm}^{IR} = - \sum_{n=1}^N |n\rangle \langle n| (\mp \lambda_n t_0)^{2i\omega t_0} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \frac{\gamma(\mu+1-2i\omega t_0, \mp i \lambda_n t_0)}{1-i\omega t_0/\mu}. \quad (6.68)$$

4. Modifizierte Infrarotnäherung

Durch seine spezielle Form läßt das gewählte Feld eine Modifikation der Infrarotnäherung zu. Bei dieser wird die Komponente des Impulses, die parallel zum Feld liegt – dies ist hier k_3 –, mit in den Exponenten der Näherung niedrigster Ordnung einbezogen $A_3 \rightarrow A_3 + k_3$:

$$G_H^{IR'}(x_0, y_0, \vec{k}) = \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{y_0}^{x_0} d\xi_0 \gamma^0 \gamma^3 [k_3 + A_3(\xi_0)] \right\}. \quad (6.69)$$

In dieser erweiterten niedrigsten Ordnung der Infrarotnäherung ergibt sich für den Anteil des Einteilchenstreuoperators, der über die Bornnäherung hinausgeht:

$$\mathcal{T}^{IR'} = -i \frac{\gamma^0 - \gamma^3}{2} \mathcal{T}_+^{IR'} - i \frac{\gamma^0 + \gamma^3}{2} \mathcal{T}_-^{IR'} \quad (6.70)$$

mit:

$$\mathcal{T}_{\pm}^{IR'} = A_{in}^2 \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{x_0} dy_0 e^{i(\omega \pm k_3)(x_0 + y_0)} e^{-x_0/t_0} e^{-y_0/t_0} \exp \left\{ \mp i A_{in} t_0 [e^{-x_0/t_0} - e^{-y_0/t_0}] \right\}. \quad (6.71)$$

Wiederholung der obigen Schritte führt zu:

$$\mathcal{T}_{\pm}^{IR'} = - \sum_{n=1}^N |n\rangle \langle n| (\mp \lambda_n t_0)^{2i\omega t_0} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \frac{\gamma(\mu + 1 - 2i\omega t_0, \mp i\lambda_n t_0)}{1 - i(\omega \pm k_3)t_0/\mu}. \quad (6.72)$$

5. Abelsche Näherung

Zu niedrigster Ordnung in der Abelschen Näherung findet man:

$$\mathcal{T}^A = +i\mathcal{T}_+^A + i\mathcal{T}_-^A \quad (6.73)$$

mit

$$\mathcal{T}_{\pm}^A = A_{in}^2 \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{x_0} dy_0 e^{i\omega(x_0 + y_0)} e^{\pm i\Omega(x_0 - y_0)} e^{-x_0/t_0} e^{-y_0/t_0} \frac{\gamma^0 \Omega \pm [\gamma^J k_J - \gamma^3 K_3 + m]}{2\Omega} \quad (6.74)$$

und der verallgemeinerten Energie $\Omega = \sqrt{m_T^2 + K_3^2}$ sowie dem verallgemeinerten Impuls $K_3 = k_3 + A_{in} t_0 (e^{-x_0/t_0} - e^{-y_0/t_0}) / (x_0 - y_0)$.

Eine Zerlegung in Bezug auf mehrere Ladungen ergibt hier:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\pm}^A &= \sum_{n=1}^N |n\rangle \langle n| \lambda_n^2 \times \\ &\times \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{x_0} dy_0 e^{i\omega(x_0 + y_0)} e^{\pm i\Omega_n(x_0 - y_0)} e^{-x_0/t_0} e^{-y_0/t_0} \frac{\gamma^0 \Omega_n \pm [\gamma^J k_J - \gamma^3 (K_3)_n + m]}{2\Omega_n} \end{aligned} \quad (6.75)$$

mit den verallgemeinerten Energien $\Omega_n = \sqrt{m_T^2 + (K_3)_n^2}$ und den verallgemeinerten Impulsen $(K_3)_n = k_3 + \lambda_n t_0 (e^{-x_0/t_0} - e^{-y_0/t_0}) / (x_0 - y_0)$, die zu den jeweiligen Eigenwerten λ_n gehören. Diese Lösung erscheint so, als würde der longitudinale Impuls um das arithmetische Mittel des Eichfeldes über das Intervall $[x_0, y_0]$ verschoben. Damit kann man die Abelsche Näherung als die Propagation der Fermionen mit deren arithmetisch gemittelten

kanonischen Impuls interpretieren. In der Ultraviolett-näherung werden sie immer mit ihrem asymptotischen kinematischen Impuls propagiert. Höhere Ordnungen stellen im abelschen Approximationsschema eine Verfeinerung der Beschreibung, ähnlich einer Fourierreihe, dar: Über jedes Teilstück einer Trajektorie wird das Teilchen mit seinem kanonischen Impuls, der über eben dieses Teilstück gemittelt wird, propagiert. Je feiner die Unterteilung des gesamten Weges wird, umso näher ist der gemittelte kanonische Impuls seinem Wert überall in dem jeweiligen Teilintervall. In der ultravioletten Störungsreihe wird auch in höheren Ordnungen das Fermion immer noch mit seinem kinematischen Impuls propagiert; es interagiert lediglich häufiger mit dem Feld.

6. Ergebnis

In den Infrarot- und erweiterten Infrarotnäherungsschemata ist die Ersetzung des pfadgeordneten Exponentials durch eine Exponentialfunktion nur für spezielle Felder möglich. Im Gegensatz dazu ist dies in der abelschen Näherung gerade der Kern der Näherung.

Die Zerlegung mit Bezug auf die Ladungsprojektoren ist hier auch für den ungenäherten nicht-bornschen Anteil und für den immer vorhandenen Bornschen Anteil des Einteilchenstreuoperators möglich, $\mathcal{T}^B = \sum_{n=1}^N |n\rangle \langle n| \mathcal{T}_n^B$. Somit kann man den gesamten wechselwirkenden Teil bezüglich dieser Projektoren zerlegen: $\mathcal{T} = \sum_{n=1}^N |n\rangle \langle n| [\mathcal{T}_n^B + \mathcal{T}_n^{NB}]$. In dem quadrierten Ausdruck, der in die Berechnung des Erwartungswertes eingeht, mischen die Beiträge zu den einzelnen Projektoren nicht, sondern führen zu einer Summe über die Erwartungswerte für die einzelnen Ladungsunterräume

$$\mathrm{tr}_c \left\{ \sum_{n'=1}^N |n'\rangle \langle n'| \mathcal{T}_{n'} \sum_{n''=1}^N |n''\rangle \langle n''| \mathcal{T}_{n''}^* \right\} = \sum_{n'=1}^N |\mathcal{T}_{n'}|^2 \mathrm{tr}_c \{ |n'\rangle \langle n'| \} = \sum_{n'=1}^N |\mathcal{T}_{n'}|^2,$$

wobei tr_c die Spurbildung über die Generatoren der Ladungsgruppe bezeichnet. Sollten die Eigenvektoren normiert sein, ist die verbleibende Spur gleich eins. Daher reicht es aus, die Beiträge in den einzelnen Näherungsschemata nach Unterräumen getrennt zu untersuchen.

Es ist immer möglich, alle Impulse, Energien und Stärken des Eichfeldes in Einheiten eines Skalenparameters der Dimension Impuls auszudrücken. Alle Längen und Zeiten müssen dann als Vielfaches des inversen Skalenparameters angegeben werden. Ab dieser Stelle wird der zu

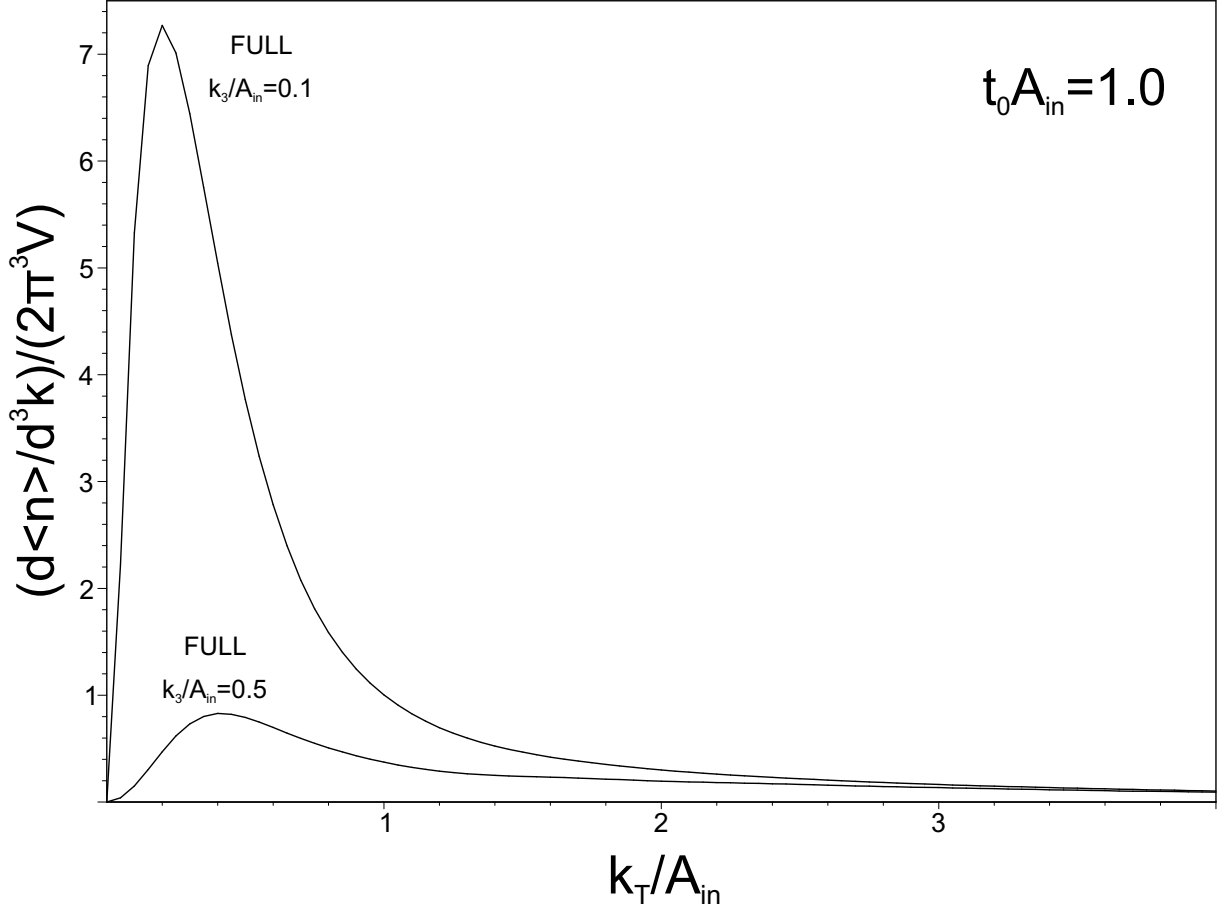


Abbildung 14: Exaktes Impulsspektrum der produzierten masselosen Fermion-Antifermion-Paare als Funktion des transversalen Impulses k_T/A_{in} mit der Zerfallszeit $t_0 A_{in} = 1.0$ für unterschiedliche Werte des longitudinalen Impulses $k_3 = 0.1 A_{in}$ und $k_3 = 0.5 A_{in}$.

dem jeweiligen Unterraum gehörende Eigenwert λ_n als Skalenparameter benutzt und wieder mit A_{in}/g bezeichnet. Die Berechnungen basieren auf der Annahme, daß sämtliche Energie in einem der Unterräume gespeichert ist.

Wie in der Einleitung diskutiert, sind anfängliche Eichfeldstärken zwischen 1GeV (RHIC) und 2GeV (LHC) zu erwarten. Mit Zerfallszeiten im Bereich von 0.1fm/c bis 0.5fm/c führt dies auf $A_{in}t_0$ zwischen 0.5 und 5.0. Es sollen nur masselose Fermionen betrachtet werden.

Die Ausdrücke für die Bornsche (6.59) und die Ultraviolett Näherung (6.60) kann man direkt auswerten. Für die Infrarot (6.63) und die modifizierte Infrarotnäherung (6.70) reichen

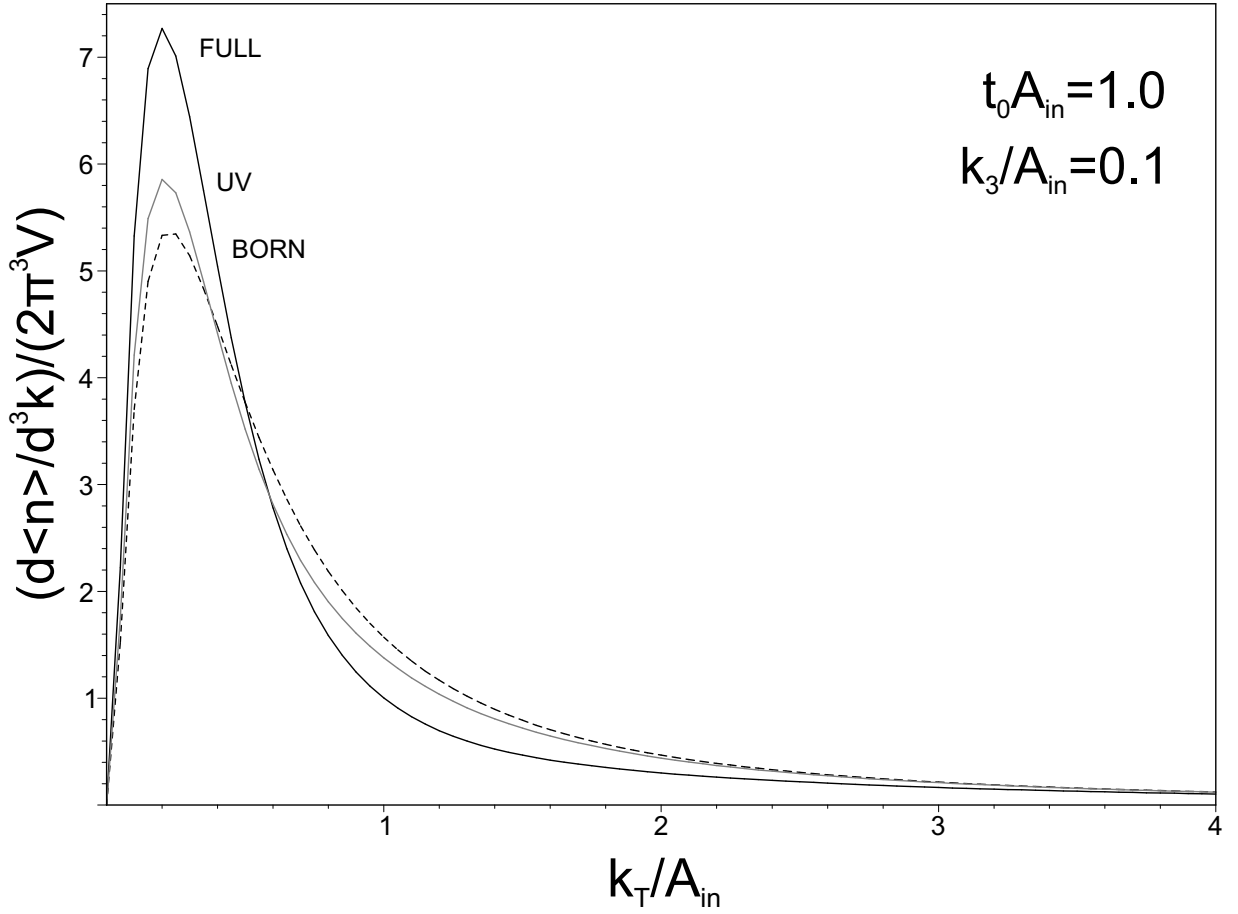


Abbildung 15: Impulsspektrum der produzierten masselosen Fermion-Antifermion-Paare als Funktion des transversalen Impulses k_T/A_{in} mit der Zerfallszeit $t_0 A_{in} = 1.0$ und dem longitudinalen Impuls $k_3 = 0.1 A_{in}$. Vergleich des exakten Spektrums (durchgezogene Linie) mit der Bornschen Näherung (gestrichelte Linie) und der Ultraviolett-näherung (graue Linie).

die ersten Summanden der unendlichen Reihendarstellung aus, um ein genaues Ergebnis zu ermitteln. Die Integrale im Ausdruck (6.73) für die Abelsche Näherung sind numerischen Standardverfahren zugänglich. Um die exakte Lösung zu erlangen, bedarf es der Auswertung von pfadgeordneten Exponentialen und der anschließenden Integration über dieselben. Diese kann wahlweise basierend auf Gleichung (6.15) oder dem Ausdruck (6.28) ausgeführt werden. Im vorliegenden Fall wurden beide Methoden verwendet und die Resultate zur Überprüfung

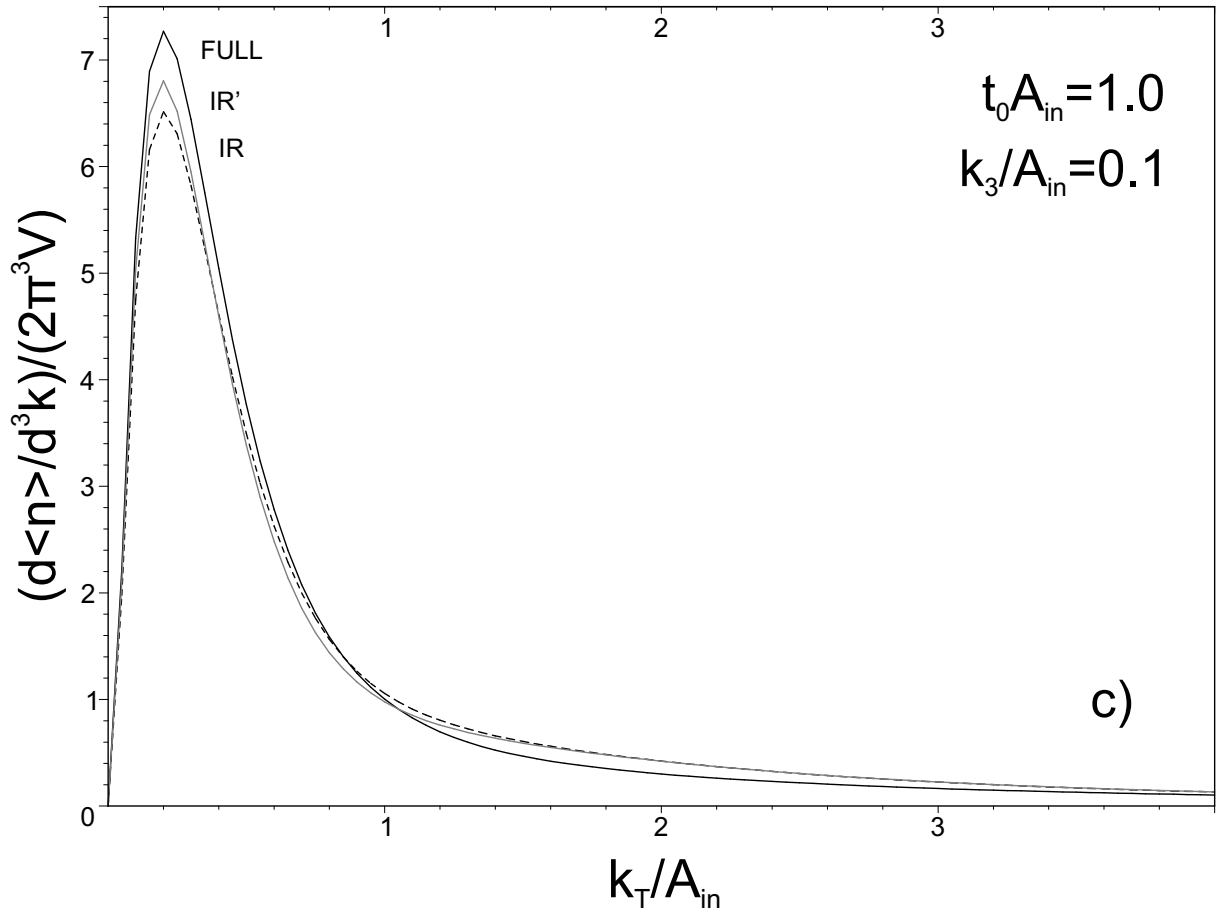


Abbildung 16: Impulsspektrum der produzierten masselosen Fermion-Antifermion-Paare als Funktion des transversalen Impulses k_T/A_{in} mit der Zerfallszeit $t_0 A_{in} = 1.0$ und dem longitudinalen Impuls $k_3 = 0.1 A_{in}$. Vergleich des exakten Spektrums (durchgezogene Linie) mit der Infrarotnäherung (gestrichelte Linie) und der modifizierten Infrarotnäherung (graue Linie).

der wechselseitigen Konsistenz miteinander verglichen.

Die allgemeinen Eigenschaften des differentiellen Erwartungswertes können am besten in den Abbildungen 14 sowie 18 und 19 abgelesen werden. Als Funktion des transversalen Impulses zeigt sich eine unimodale Funktion, die im Bereich niedriger Impulse kulminiert. Für zunehmende Werte des Parameters $A_{in} t_0$ (von Abbildung 18 über 14 zu 19) wird das Maximum als Funktion des transversalen Impulses bei gleichzeitig festgehaltenem longitudi-

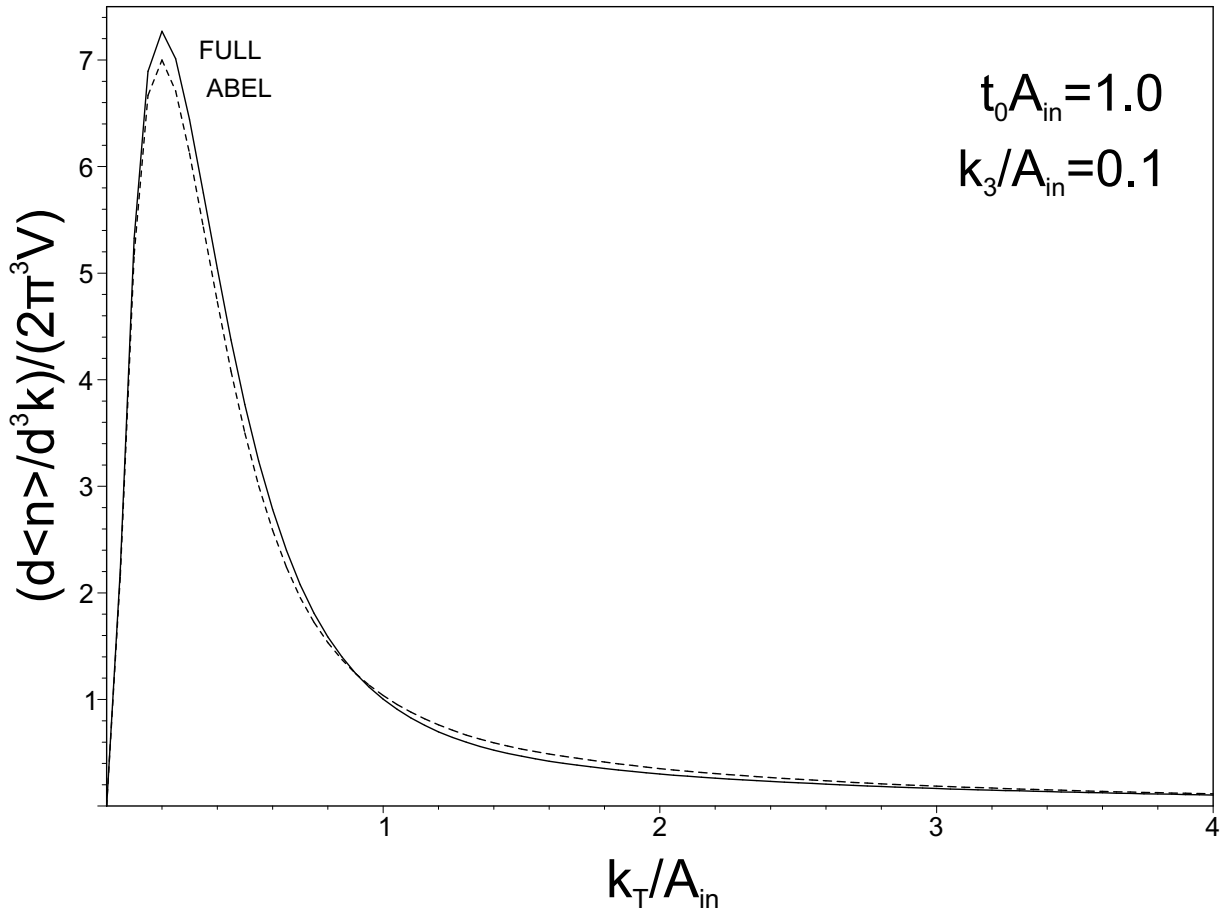


Abbildung 17: Impulsspektrum der produzierten masselosen Fermion-Antifermion-Paare als Funktion des transversalen Impulses k_T/A_{in} mit der Zerfallszeit $t_0 A_{in} = 1.0$ und dem longitudinalen Impuls $k_3 = 0.1 A_{in}$. Vergleich des exakten Spektrums (durchgezogene Linie) mit der Abel-schen Näherung (gestrichelte Linie).

nalem Impuls k_3 immer ausgeprägter. Anders ausgedrückt, nimmt es an Höhe zu und in der Breite ab (man beachte die unterschiedliche Impulsskala in Abbildung 19). Für Felder, die einer zu der hier gewählten ähnlichen funktionalen Form folgen, scheint das Maximum des k_T -Spektrums eine streng monoton fallende Funktion des longitudinalen Impulses k_3 zu sein, was sich in Abbildung 14 abzeichnet. Außerdem werden keine Partikel bei verschwindendem transversalem Impuls produziert.

Ein Vergleich der verschiedenen Näherungen zeigt, daß alle für große Impulse auf die

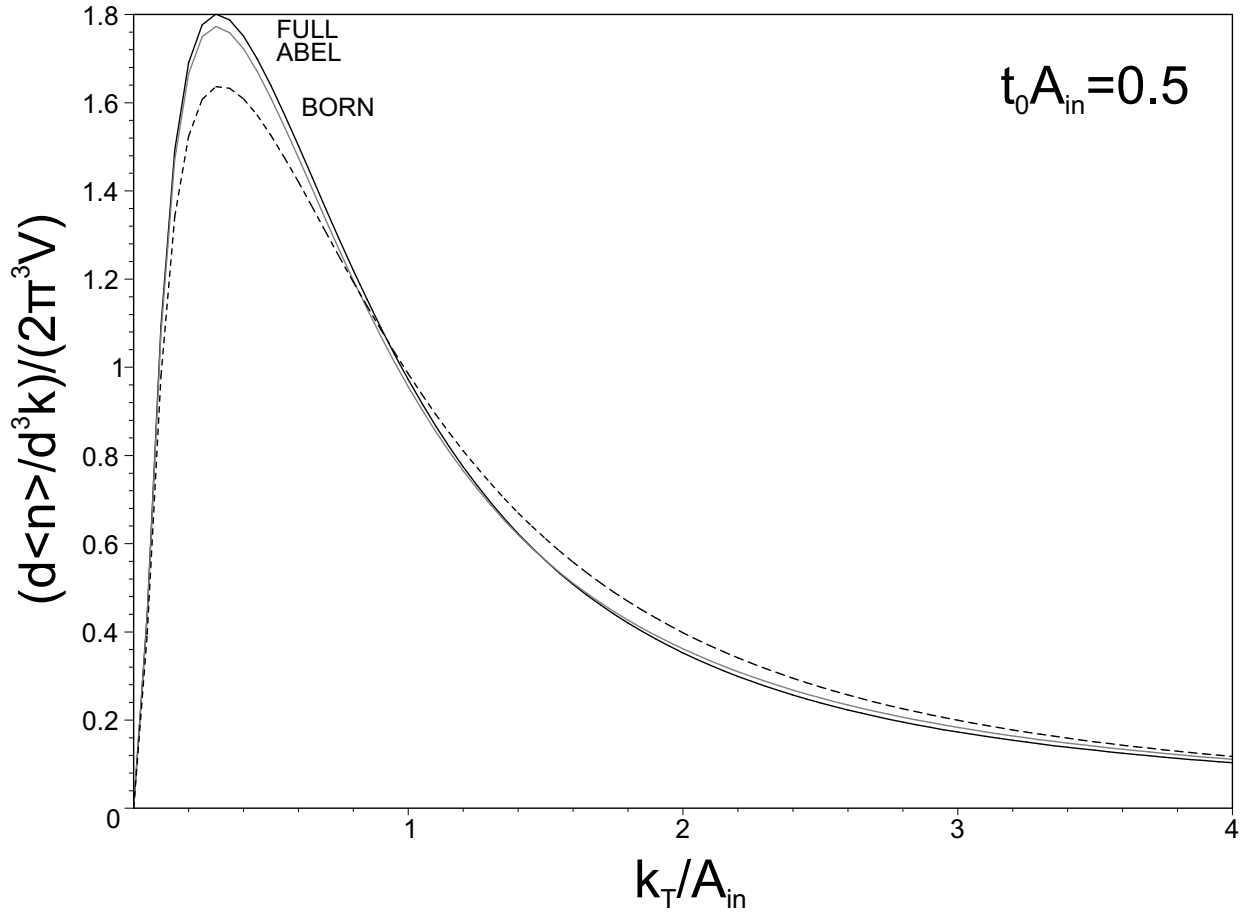


Abbildung 18: Impulsspektrum der produzierten masselosen Fermion-Antifermion-Paare als Funktion des transversalen Impulses k_T/A_{in} mit der Zerfallszeit $t_0 A_{in} = 0.5$ und dem longitudinalen Impuls $k_3 = 0.1 A_{in}$. Vergleich des exakten Spektrums (durchgezogene Linie) mit der Bornschen Näherung (gestrichelte Linie) und der Abelschen Näherung (graue Linie).

Bornnäherung zustreben, was auf der allgemeinen Form des Einteilchenstreuoperators (4.35) beruht. Zusammen mit dieser gehen dann sämtliche Näherungen gegen null. Wie in Abbildung 15 zu sehen, unterschätzt die Bornsche Näherung die exakte Lösung für niedrige Impulse und überschätzt sie für große. Die Ultraviolett Näherung stellt eine Verbesserung gegenüber letzterer dar. Abbildung 16 läßt erkennen, daß die Infrarot- und die erweiterte Infrarotnäherung allgemein noch dichter an dem exakten Ergebnis liegen. Somit sind bei-

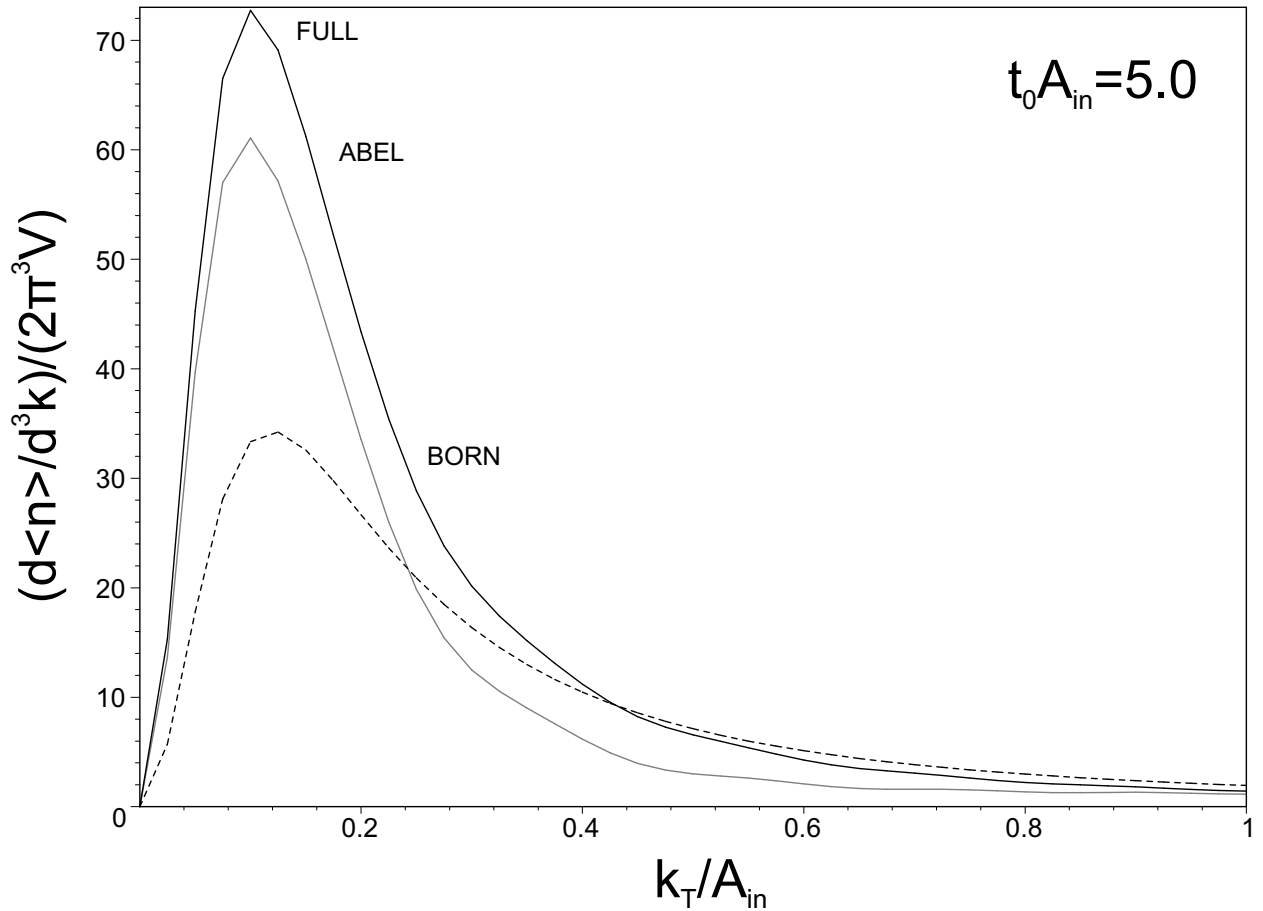


Abbildung 19: Impulsspektrum der produzierten masselosen Fermion-Antifermion-Paare als Funktion des transversalen Impulses k_T/A_{in} mit der Zerfallszeit $t_0 A_{in} = 0.5$ und dem longitudinalen Impuls $k_3 = 0.1 A_{in}$. Vergleich des exakten Spektrums (durchgezogene Linie) mit der Bornschen Näherung (gestrichelte Linie) und der Abelschen Näherung (graue Linie).

de Ansätze für allgemeinere als das hier angenommene Feld nicht wesentlich vorteilhafter bei der Auswertung als der exakte Ausdruck. Die erweiterte Version der Infrarotnäherung kann sogar ihre Bedeutung verlieren, da ein longitudinaler Impuls in Bezug auf das Feld nicht mehr definiert sein muß. Das Abelsche Schema liegt für alle Impulse dem exakten Erwartungswert am nächsten (siehe Abbildung 17). Die größten Abweichungen finden sich für kleine Energien und für große Beträge des Parameters $A_{in} t_0$ (vergleiche hierzu die Abbildun-

gen 17, 18, and 19). Der Grund hierfür ist, daß dort der maximal nicht-abelsche Bereich ist. Während für kleine Zerfallszeiten in Vielfachen der Inversen der anfänglichen Eichfeldstärke A_{int_0} die Bornnäherung annähernd dem exakten Wert entspricht (Abbildung 18), trifft dies für große Werte des besagten Parameters nicht zu (Abbildung 19).

VII. ZUSAMMENFASSUNG

In ultrarelativistischen Schwerionenkollisionen entstehen nach heutigem Verständnis starke Farbfelder von der Größenordnung der inversen Kopplungskonstante. Diese bedingen unter anderem eine Polarisierung des Vakuums, was wiederum zur Produktion von weiteren Partonen führt. Parametrisch gleichberechtigt entstehen hierbei Quarks und Antiquarks sowie gluonische Quantenfluktuationen. Um bestätigen zu können, daß eine solche Vorstellung korrekt ist, müssen auf theoretischer Basis Signaturen identifiziert werden. Es bedarf quantitativen Vorhersagen für die zu erwartenden Partonenverteilungen im Rahmen der zugrundeliegenden Theorie, der Quantenchromodynamik (QCD).

Die notwendigen theoretischen Grundlagen für diese Arbeit werden in den drei auf die Einleitung folgenden Kapiteln vorgestellt. Kapitel II führt in die Chromodynamik als klassische Feldtheorie ein. Abschnitt III dient der Demonstration der Quantisierung der Theorie im Rahmen des Pfadintegralformalismus unter Beschränkung auf ein stabiles Vakuum. Dabei wird der Spezialfall eines unquantisierten bosonischen Feldes aber quantisierter fermionischer und antifermionischer Felder gesondert behandelt. Genannter Fall dient der Überleitung in das Kapitel IV, das sich mit den Änderungen, die sich beim Übergang vom stabilen zum instabilen Vakuum ergeben, beschäftigt. Eine weitere Untersektion enthält die Diskussion der Hintergrundfeldmethode der QCD. Im Rahmen dieser Methode wird das quantisierte gluonische Eichfeld in seinen Erwartungswert – das klassische Feld – und quantische Fluktuationen zerlegt. Diese werden wegen der nicht-linearen Natur der Theorie bei Anwesenheit eines klassischen Feldes, das das Vakuum polarisiert, in niedrigster Ordnung der Kopplungskonstante paarweise produziert.

Kapitel V erläutert die Berechnung der Produktionsraten für Quark-Antiquark-Paare sowie Paare von gluonischen Quantenfluktuationen in Anwesenheit eines beliebig in der Raumzeit variierenden Eichfeldes zur ersten Ordnung in der klassischen Wirkung. Für die Gluonen

findet die Hintergrundfeldmethode der QCD Verwendung. Die Formeln im Zusammenhang mit der Produktion von Quarks und Antiquarks in Anwesenheit eines Yang-Mills-Feldes sind direkt analog zu jenen für Elektronen und Positronen durch ein Maxwellfeld.

Um einen Einblick in das Verhalten der Produktionsraten zu gewinnen, werden diese auf den Fall eines rein zeitabhängigen Vektorpotentials spezialisiert. Im Vergleich zum allgemeinen Ausdruck sind die so erhaltenen Formeln wesentlich kürzer, aber immer noch zu kompliziert, um sie auf den ersten Blick interpretieren zu können. Aus diesem Grund erfolgt ihre Auswertung für ein exponentiell in der Zeit zerfallendes Eichfeld. Die spezielle Wahl des Feldes ist von unabhängigen numerischen Rechnungen inspiriert. Es schließt sich die Diskussion der so erhaltenen Ergebnisse an.

Man beobachtet, daß nicht nur Partonen produziert, sondern auch vernichtet werden und so wieder zum Feld beitragen. Dieses Verhalten äußert sich in periodischen Fluktuationen des Vektorpotentials, die mit zunehmender Teilchenenergie eine höhere Frequenz besitzen. Es ist den allgemeinen zeitabhängigen Ausdrücken inhärent und hängt nicht von der speziellen Wahl des Farbfeldes ab. Als Maß für die im Netto produzierten Teilchen dient die über alle Zeiten integrierte Rate. Im untersuchten Bereich ergibt sich daraus eine streng monoton fallende Funktion des transversalen Impulses, beziehungsweise eine bei der Rapidität $y = 0$ kulminierende. Vergleicht man die relative Häufigkeit der beiden Partikelspezies, so erkennt man, daß sich das Verhältnis zwischen ihnen für hohe anfängliche Eichfeldstärken, große Kopplungskonstanten und langsam abfallende Felder zugunsten der Gluonen verschiebt und umgekehrt. Dabei gibt es Situationen, in denen mehr bosonische Quantenfluktuationen als Fermionen entstehen, aber auch solche, bei denen die Quarks und Antiquarks über die Gluonen dominieren.

Das Fehlen einer klassischen Beschreibung für den niederenergetischen Sektor der Fermionen und Antifermionen macht eine nicht-störungstheoretische Beschreibung desselben notwendig. In Kapitel VI wird eine exakte homogene Lösung der Diracgleichung in einem Eichfeld, das beliebig von einer geradlinigen Koordinate abhängt, vorgestellt. Ein alternativer Weg muß dabei für den Fall einer lichtartigen Variablen beschriftet werden. Für eine

zeitartige Koordinate kann man aus der homogenen Lösung den retardierten oder auch den avancierten Propagator konstruieren. Das analoge Ergebnis in Anwesenheit eines Vektorpotentials, das von einer raumartigen Koordinate abhängt, stellt eine Greensfunktion, aber keinen Propagator dar.

In Situationen mit zeitartigen Variablen beschreibt Kapitel VI verschiedene Näherungen an die exakte Lösung. Diese sind die Ultraviolett- (perturbative), die Infrarot- und die Abelsche Näherung. Zusätzlich liefert eine allgemeine Resummationsformel beliebige weitere Näherungen.

Die unterschiedlichen Resultate für den retardierten Fermionpropagator – das exakte Ergebnis und jeweils die niedrigsten Ordnungen der verschiedenen Näherungsschemata – finden Verwendung bei der Berechnung des Erwartungswerts für die Anzahl der in Anwesenheit eines Feldes durch Vakuumpolarisation produzierten Fermion-Antifermion-Paare. Das hierfür gewählte spezielle Feld erlaubt zusätzlich eine erweiterte Infrarotnäherung, die in den Vergleich miteinbezogen wird. Die resultierenden Ausdrücke werden für ein exponentiell zerfallendes Modellfeld ausgewertet und für Parameter, wie sie typischerweise in ultrarelativistischen Schwerionenkollisionen vorkommen sollten, miteinander verglichen.

In der untersuchten Situation handelt es sich bei dem Impulsspektrum um eine unimodale Funktion des transversalen Impulses, die sonst keine weiteren charakteristischen Strukturen aufweist. Die Qualität der Näherungen nimmt von der Born- über die Ultraviolett-, die Infrarot-, die erweiterte Infrarot- zur Abelschen Näherung hin zu. In allgemeineren Situationen als der hier untersuchten sind der normale und erweiterte Infrarotansatz jedoch nicht wesentlich einfacher auszuwerten als der Ausdruck für das volle Ergebnis.

Der Modellparameter ist $A_{in}t_0$. Er ist das Produkt der anfänglichen Eichfeldstärke A_{in} und der Skala der Zerfallszeit des Feldes. Für ihre kleinsten vermuteten Werte ist die Bornnäherung noch annehmbar. Dies ist für die größten Werte des Parameters nicht mehr der Fall. Dort liegt lediglich die Abelsche Näherung noch in der Umgebung des exakten Ergebnisses. Die maximal mögliche Unabhängigkeit vom Skalenparameter $A_{in}t_0$, ohne dafür die volle Lösung in selbstkonsistenten Rechnungen auswerten zu müssen, ist durch den Abelschen Ansatz gewährleistet.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Rechnungen betreffen Quanteneffekte erster Ordnung in der unkompenzierten Kopplungskonstante. Die über das rein klassische gluonische Feld hinausgehenden Quanteneffekte beinhalten dabei die Produktion von Fermionen und Antifermionen sowie bosonischer Fluktuationen. In höheren, nicht durch Potenzen des klassischen Feldes kompensierten Ordnungen der Kopplungskonstante ergeben sich weitere Terme in den diversen Gleichungen, deren Einfluß im Detail studiert werden könnte. Für die untersuchte Situation sind sie jedoch durch eine weitere Potenz der Kopplungskonstante unterdrückt. Damit wären diese Modifikationen lediglich von Bedeutung, wenn sie zu vorher nicht auftretenden, qualitativ neuartigen Effekten führten.

Das klassische Feld stellt den größten Teil der Gluonen. Die in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen – insbesondere jene in Kapitel VI – beschreiben exakt den dominanten Beitrag zur Produktion von Fermionen und Antifermionen in Anwesenheit zeitabhängiger Felder. Zusätzlich zu den explizit diskutierten Näherungsverfahren liefert die allgemeine Resummationsformel die Basis für die Herleitung beliebiger neuer Approximationen.

In Anbetracht der Tatsache, daß im Lauf der Herleitungen der volle fermionische Propagator in einem beliebigen zeitabhängigen Feld bestimmt wird, handelt es sich bei der Beschreibung der Produktion von Quark-Antiquark-Paaren während einer ultrarelativistischen Schwerionenkollision um eine sehr spezielle Anwendung. Dabei ist jedoch die Produktion alleine im Rahmen der QCD und als kombinierter Effekt dieser Quantenfeldtheorie und der QED (Quarkphotoproduktion) abgedeckt. Auch die Produktion von Elektron-Positron-Paaren im Rahmen der QED alleine ergibt sich als Spezialfall. Für den beschriebenen Korrelator ergeben sich vielfältige weitere Verwendungsmöglichkeiten: Mit den Erörterungen aus Kapitel IIIB wird deutlich, daß im Falle eines unquantisierten zeitabhängigen Eichfeldes hierdurch das gesamte erzeugende Funktional gelöst ist; sowohl im stabilen als auch im instabilen Vakuum. Das ist gleichbedeutend damit, daß alle Observablen des fermionischen Quantensektors in Abhängigkeit vom klassischen gluonischen Feld bekannt sind. Mit diesem vollen Propagator lassen sich ebenfalls Größen wie die Erwartungswerte für die von den

Fermionen induzierten Ströme, die skalaren Quarkkondensate oder Streuprozesse am Feld exakt beschreiben, um nur einige Beispiele zu nennen. Die induzierten Ströme berechnen sich gemäß Gleichung (4.36). Sie zu ermitteln ist der erste Schritt zur Einbeziehung der Rückreaktion der Dynamik der quantisierten Teilchen auf das klassische Feld. Die Werte für die skalaren Quarkkondensate geben ein Maß für die Brechung der chiralen Symmetrien und folgen aus einem zu den induzierten Strömen analogen Ausdruck, jedoch ohne die zusätzliche γ -Matrix in der Spur. Für die Betrachtungen zu Streuprozessen am Feld müssen die Untersuchungen zu auslaufenden Fermionen und Antifermionen auf solche mit ein- und auslaufenden Teilchen ausgedehnt werden, was beispielsweise auf dem Niveau der Einheitsspinore geschehen kann.

- [1] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8** (1964) 214;
G. Zweig, CERN-TH 401 und 412 (1964).
- [2] G. 't Hooft, *Proc. Colloquium on Renormalization of Yang-Mills Fields and Applications to Particle Physics*. Marseilles, 1972 (ed. C. P. Korthals-Altes);
G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B254** (1985) 11;
D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343;
H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- [3] J. Ruppert, G. C. Nayak, D. D. Dietrich, H. Stöcker and W. Greiner, Phys. Lett. B **520** (2001) 233 [arXiv:hep-ph/0109043].
- [4] F. Cooper, E. Mottola and G. C. Nayak, arXiv:hep-ph/0210391;
F. Cooper, C. W. Kao and G. C. Nayak, Phys. Rev. D **66** (2002) 114016 [arXiv:hep-ph/0204042];
arXiv:hep-ph/0207370;
D. V. Vinnik, R. Alkofer, S. M. Schmidt, S. A. Smolyansky, V. V. Skokov and A. V. Prozorkevitch, Few Body Syst. **32** (2002) 23 [arXiv:nucl-th/0202034];
D. F. Litim and C. Manuel, Phys. Rept. **364** (2002) 451 [arXiv:hep-ph/0110104];
C. W. Kao, G. C. Nayak and W. Greiner, Phys. Rev. D **66** (2002) 034017 [arXiv:hep-ph/0102153].
- [5] L. McLerran and B. Svetitsky, Phys. Rev. D **24** (1981) 450;
L. McLerran, Phys. Rev. D **36** (1987) 3291;
R.V. Gavai, in *Quantum Fields on the Computer*, ed. M. Creutz, (World Scientific, 1992), p. 51;
F. Karsch and E. Laermann, Rep. Prog. Phys. **56** (1993) 1347;
M. Oevers, F. Karsch, E. Laermann and P. Schmidt, in Proc. of Lattice '97: Nucl. Phys. Proc. Suppl. **63** (1998) 394.
- [6] U. A. Wiedemann, EPJdirect C, **4**(S1), 20 (2002).
- [7] E. Fermi, Zeit. Physik **29**, 315 (1924);

- E. J. Williams, Proc. Roy. Soc. **A139**, 163 (1933);
- E. J. Williams, Phys. Rev. **45**, 729-730 (1934);
- J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. John Wiley and Sons, New York 1975, Sect. 15.
- [8] L. McLerran and R. Venugopalan, Phys. Rev. **D49**, 2233 (1994);
Phys. Rev. **D 49**, 3352 (1994).
- [9] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP **45** (1977) 199-204;
I. I. Balitsky and L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **28** (1978) 822-829.
- [10] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, Yad. Fiz. **15** (1972) 781-807;
L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **20** (1975) 94-102;
G. Altarelli and G. Parisi, Nucl. Phys. **B126** (1977) 298;
Y. L. Dokshitzer, Sov. Phys. JETP **46** (1977) 641-653.
- [11] I. Balitsky, Nucl. Phys. **B463** (1996) 99;
Yu. Kovchegov, Phys. Rev. **D60** (1999) 034008.
- [12] K. J. Eskola, H. Honkanen, V. J. Kolhinen, Jianwei Qiu, and C. A. Salgado, Nucl. Phys. **B660** (2003) 221-224 [arXiv:hep-ph/0211239].
- [13] see e.g.: J. M. Cornwall, D. Grigoriev and A. Kusenko, Phys. Rev. D **64** (2001) 123518 [arXiv:hep-ph/0106127];
G. F. Giudice, M. Peloso, A. Riotto, and I. Tkachev, JHEP 9908 (1999) 014 [arXiv:hep-ph/9905242].
- [14] *Proceedings of the Conference on Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions (QM2001)*, Nucl. Phys. A **698** (2002).
- [15] B. Segev and J. C. Wells, Phys. Rev. **C 59**, 2753 (1999);
Phys. Rev. **A 57**, 1849 (1998);
A. J. Baltz and L. McLerran, Phys. Rev. **C 58**, 1679 (1998);
U. Eichmann, J. Reinhardt, S. Schramm, and W. Greiner, Phys. Rev. **A 59**, 1223 (1999);
U. Eichmann, J. Reinhardt, and W. Greiner, Phys. Rev. **A 61**, 062710 (2000);
R. N. Lee and A. I. Milstein, Phys. Rev. **A 61**, 032103 (2000).
- [16] A. J. Baltz, F. Gelis, L. D. McLerran, and A. Peshier, Nucl. Phys. A **695** (2001) 395

- [arXiv:nucl-th/0101024].
- [17] F. E. Low, Phys. Rev. **D12** (1975) 163;
 S. Nussinov, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 1286;
 A. Karman, T. Matsui and B. Svetitsky, Phys. Rev. Lett. **56**, 219 (1986);
 K. Kajantie and T. Matsui, Phys. Lett. **B164** (1985) 373;
 G. Gatoff, A. K. Kerman and T. Matsui, Phys. Rev. **D36** (1987) 114;
 A. Bialas, W. Czyz, A. Dyrek and W. Florkowski, Nucl. Phys. **B296** (1988) 611;
 B. Banerjee, R. S. Bhalerao and V. Ravishankar, Phys. Lett. **B224** (1989) 16;
 M. Asakawa and T. Matsui, Phys. Rev. **D43** (1991) 2871;
 K. J. Eskola and M. Gyulassy, Phys. Rev. **C47** (1993) 2329;
 J. M. Eisenberg, Found. Phys. **27** (1997) 1213;
 G. C. Nayak and V. Ravishankar, Phys. Rev. D **55**, 6877 (1997);
 Phys. Rev. C **58**, 356 (1998);
 C. D. Roberts and S. M. Schmidt, Prog. Part. Nucl. Phys. **45** (2000) S1 [arXiv:nucl-th/0005064];
 D. F. Litim and C. Manuel, Phys. Rev. Lett. **82**, 4981 (1999);
 Nucl. Phys. **B562** (1999) 237;
 Phys. Rev. **D61**, 125004, (2000);
 F. Cooper, J. M. Eisenberg, Y. Kluger, E. Mottola and B. Svetitsky, Phys. Rev. **D 48** (1993) 190;
 Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 2427;
 J. M. Eisenberg, Phys. Rev. **D 51** (1995) 1938;
 F. Cooper and E. Mottola, Phys. Rev. **D 36** (1987) 3114;
 Phys. Rev. **D 40** (1989) 456;
 T. S. Biro, H. B. Nielsen and J. Knoll, Nucl. Phys. **B 245** (1984) 449;
 M. Herrmann and J. Knoll, Phys. Lett. **B 234** (1990) 437;
 D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, D. S. Lee and A. Singh, Phys. Rev. **D 51** (1995) 4419;
 H. Gies, Phys. Rev. **D 61** (2000) 085021.

- [18] V. D. Barger and R. J. N. Phillips, *Collider Physics* (Addison-Wesley Publishing Company, 1987);
 B. Andersson, G. Gustafson, G. Ingelman and T. Sjostrand, Phys. Rept. **97** (1983) 31;
 B. Andersson, G. Gustafson and B. Nilsson-Almqvist, Nucl. Phys. **B281** (1987) 289.
- [19] A. Krasnitz and R. Venugopalan, Nucl. Phys. **B557**, 237 (1999) [arXiv:hep-ph/9809433];
 Phys. Rev. Lett. **84**, 4309 (2000) [arXiv:hep-ph/9909203].
- [20] K. J. Eskola, K. Kajantie, P. V. Ruuskanen, and K. Tuominen, Nucl. Phys. **B570** (2000) 379
 [arXiv:hep-ph/9909456].
- [21] G. C. Nayak, A. Dumitru, L. McLerran, and W. Greiner, Nucl. Phys. A **687** 457 [arXiv:hep-ph/0001202].
- [22] A. Kovner, L. McLerran and H. Weigert, Phys. Rev. **D52** (1995) 3809;
 Phys. Rev. **D52** (1995) 6231;
 A. Makhlin, Phys. Rev. C **63** (2001) 044902 [arXiv:hep-ph/0007300];
 A. Makhlin and E. Surdutovich, Phys. Rev. **C58**, 389 (1998);
 R. Jackiw and V. P. Nair, Phys. Rev. **D48**, 4991 (1993);
 D. Bödeker, Phys. Lett. **B426**, 351 (1998).
- [23] A. H. Mueller, arXiv:hep-ph/0208278.
- [24] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [25] A. Casher, H. Neuberger, and S. Nussinov, Phys. Rev. **D20**, 179 (1979).
- [26] J. D. Bjorken, Phys. Rev. **D27** (1983) 140.
- [27] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics* (2nd Ed.), World Scientific Lecture Notes in Physics - Vol.57 (1998).
- [28] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20** (1948) 367.
- [29] W. Heisenberg and W. Pauli, Z. Phys. **56** (1929) 1;
 Z. Phys. **59** (1930).
- [30] G. Parisi and Y. Wu, Sci. Sinica **24** (1981) 483.
- [31] V. N. Gribov, Nucl. Phys. **139** (1978) 1.
- [32] F. A. Berezin *The Method of Second Quantization* (translated from Russian by N. Mugibayashi and A. Jeffrey), Academic Press, 1966.

- [33] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. **25B** (1967) 29.
- [34] J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).
- [35] L. V. Keldysh, Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1964).
- [36] N. P. Landsmann, Ch. G. van Weert, Phys. Rep. **145**, 141 (1987).
- [37] P. Aurenche, T. Becherrawy, Nucl. Phys. **B 379**, 259 (1992).
- [38] M. A. van Eijck, Ch. G. van Weert, Phys. Lett. **B 278**, 305 (1992).
- [39] M. A. van Eijck, R. Kobes, Ch. G. van Weert, Phys. Rev. **D 50**, 4097 (1994).
- [40] B. S. DeWitt, Phys. Rev. **162**, 1195 and 1239 (1967); *in* Dynamic theory of groups and fields (Gordon and Breach, 1965);
G. t'Hooft, Nucl. Phys. **B62**, 444 (1973).
- [41] L. F. Abbott, Nucl. Phys. **B185**, 189 (1981).
- [42] D. D. Dietrich, G. C. Nayak and W. Greiner, Phys. Rev. D **64** (2001) 074006 [arXiv:hep-th/0007139];
arXiv:hep-ph/0009178;
arXiv:hep-ph/0104030.
- [43] C. Itzykson and J. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill Inc., 1980).
- [44] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, Inc, New York, 1972).
- [45] R. S. Bhalerao and G. C. Nayak, Phys. Rev. **C61**, 054907 (2000).
- [46] D. D. Dietrich, G. C. Nayak and W. Greiner, J. Phys. G **28** (2002) 2001 [arXiv:hep-ph/0202144].
- [47] D. Gromes, Eur. Phys. J. C **20** (2001) 523 [arXiv:hep-ph/0103282].
- [48] D. D. Dietrich, arXiv:hep-th/0302229.
- [49] D. M. Volkov, Z. Phys. **94**, 250 (1935);
W. Greiner and J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics* (Springer, 2003, 3rd ed.) p.250.

Anhang A: DEFINITIONEN

1. Die Paulimatrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A1})$$

2. Die Diracschen Gammamatrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} +1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{A2})$$

Hierfür sind die Paulimatrizen in einem dreikomponentigen Vektor zusammengefaßt worden. $\mathbf{1}$ steht für die 2×2 -Einheitsmatrix und $\mathbf{0}$ für die 2×2 -Nullmatrix.

3. Die Gell-Mann-Matrizen

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ +i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & +i & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^3 &= \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

Anhang B: FEYNMANREGELN

1. Standardstörungstheorie

Der Index $|_0$ symbolisiert, daß, nach Berechnung der Ableitungen, alle Felder gleich null gesetzt werden. Die hier aufgeführten Definitionen sind nur bis auf Potenzen der imaginären Einheit angegeben. Die in der Literatur existierenden unterscheiden sich zwischen den diversen Veröffentlichungen. Im Abschnitt B1 b sind die Vertexfunktionen aufgelistet, wie sie im Buch von Itzykson und Zuber [43] (runde Klammern) beziehungsweise im Werk von Muta [27] (eckige Klammern) Verwendung finden. Alle Feynmanregeln sind für die Lorentz-Eichung angegeben. Zusätzlich müssen, falls Schleifen in den Gluonenpropagatoren auftreten, Symmetriefaktoren bedacht werden (siehe Abbildung 22).

a. Definitionen

Fermionvertex:

$$\{V^F\}_{ij\mu}^a = \left. \frac{\partial^3 \mathcal{L}_{int}}{\partial A^{a\mu} \partial \psi_i \partial \psi_j} \right|_0 \quad (\text{B1})$$

Dreigluonvertex:

$$\{V^{3G}\}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{a_1 a_2 a_3} = \left. \frac{\partial^3 \mathcal{L}_{int}}{\partial A^{a_1 \mu_1} \partial A^{a_2 \mu_2} \partial A^{a_3 \mu_3}} \right|_0 \quad (\text{B2})$$

Viergluonvertex:

$$\{V^{4G}\}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{a_1 a_2 a_3 a_4} = \left. \frac{\partial^4 \mathcal{L}_{int}}{\partial A^{a_1 \mu_1} \partial A^{a_2 \mu_2} \partial A^{a_3 \mu_3} \partial A^{a_4 \mu_4}} \right|_0 \quad (\text{B3})$$

Geistvertex:

$$\{V^{FP}\}_{\mu}^{abc} = \left. \frac{\partial^3 \mathcal{L}_{int}}{\partial A^{a\mu} \partial \chi^a \partial \chi^{*c}} \right|_0 \quad (\text{B4})$$

b. Vertexfunktionen

Fermionvertex:

$$(V^F)_{ij\mu}^a = ig\gamma_\mu T_{ij}^a = i[V^F]_{ij\mu}^a \quad (\text{B5})$$

Dreigluonvertex:

$$(V^{3G})_{\mu\nu\lambda}^{abc} = gf^{abc}[g_{\mu\lambda}(p-r)_\nu + g_{\nu\lambda}(r-q)_\mu + g_{\mu\nu}(q-p)_\lambda] = i[V^{3G}]_{\mu\nu\lambda}^{abc} \quad (\text{B6})$$

Viergluonvertex:

$$\begin{aligned} (V^{4G})_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd} = & -ig^2[f^{abx}f^{xcd}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) + \\ & + f^{adx}f^{xbc}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) + \\ & + f^{acx}f^{xbd}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})] = i[V^{4G}]_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd} \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

Geistvertex:

$$(V^{FP})_\mu^{abc} = gf^{abc}p_\mu = i[V^{FP}]_\mu^{abc} \quad (\text{B8})$$

c. Diagramme

An dieser Stelle werden nur die Diagramme für die Propagatoren angegeben. Die Definition und funktionale Form sind in Kapitel B 1 zu finden.

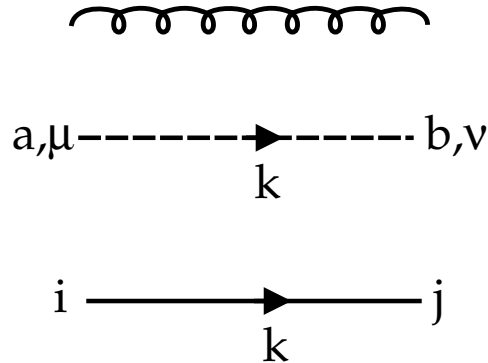


Abbildung 20: Feynmandiagramme: Freie Propagatoren
von oben nach unten:

Gluonpropagator, Ghostpropagator und Fermionpropagator

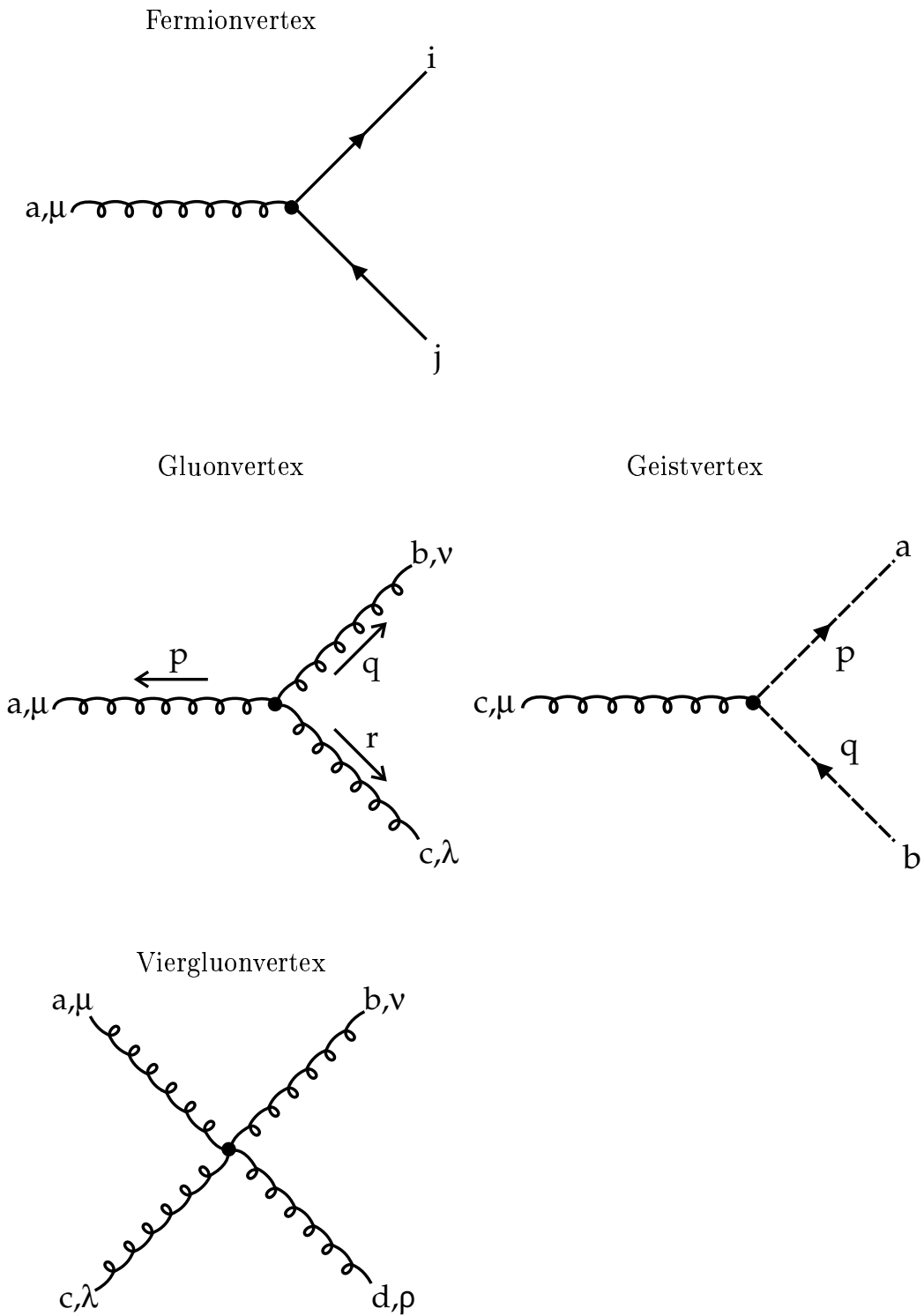


Abbildung 21: Feynmandiagramme: Vertices

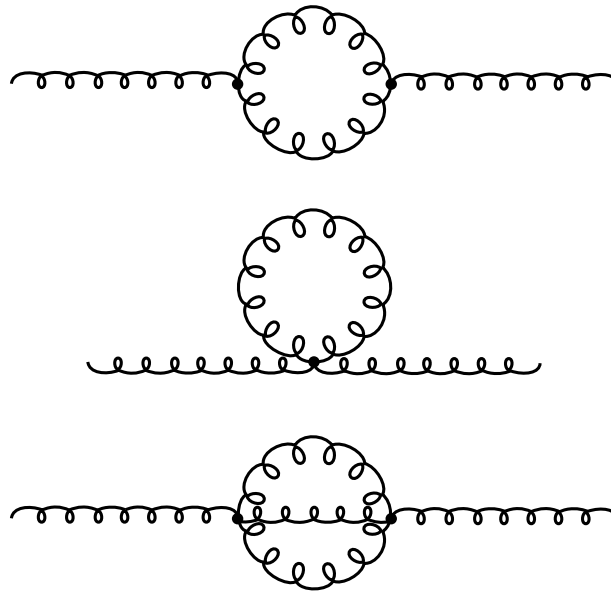


Abbildung 22: Symmetriefaktoren für Feynmangraphen mit Gluonenschleifen; von oben nach unten:
 $1/2!$, $1/2!$ und $1/3!$

2. Hintergrundfeldmethode

Hier werden die Feynmanregeln der Hintergrundfeldmethode der QCD in Hintergrundfeldeichung angegeben. Die Definitionen sind wiederum als generisch zu verstehen. Die im Abschnitt B 2 b aufgeführten Vertexfunktionen entsprechen jenen bei Abbott [41]. Es sind nur die Vertices aufgeführt, die zusätzlich zu denen der Standardstörungstheorie auftreten.

a. Definitionen

Kopplung der Fermionen an das Hintergrundfeld:

$$\{V_{1A}^F\}_{ij\mu}^a = \frac{\partial^3 \mathcal{L}_{int}[A + Q]}{\partial A^{a\mu} \partial \psi_i \partial \bar{\psi}_j} \Big|_0 \quad (\text{B9})$$

Einfache Kopplung zweier Fluktuationen an das Hintergrundfeld:

$$\{V_{1A}^{2Q}\}_{\mu;\nu\lambda}^{a;bc} = \frac{\partial^3 \mathcal{L}_{int}[A + Q]}{\partial A^{a\mu} \partial Q^{b\nu} \partial Q^{c\lambda}} \Big|_0 \quad (\text{B10})$$

Zweifache Kopplung zweier Fluktuationen an das Hintergrundfeld:

$$\{V_{2A}^{2Q}\}_{\mu\lambda;\nu\rho}^{ac;bd} = \frac{\partial^3 \mathcal{L}_{int}[A + Q]}{\partial A^{a\mu} \partial A^{c\lambda} \partial Q^{b\nu} \partial Q^{d\rho}} \Big|_0 \quad (\text{B11})$$

Einfache Kopplung dreier Fluktuationen an das Hintergrundfeld:

$$\{V_{1A}^{3Q}\}_{\mu;\nu\lambda\rho}^{a;bcd} = \frac{\partial^4 \mathcal{L}_{int}[A + Q]}{\partial A^{a\mu} \partial Q^{b\nu} \partial Q^{c\lambda} \partial Q^{d\rho}} \Big|_0 \quad (\text{B12})$$

Einfache Kopplung zweier Geister an das Hintergrundfeld:

$$\{V_{1A}^{FP}\}_{\mu}^{c;ab} = \frac{\partial^3 \mathcal{L}_{int}[A + Q]}{\partial A^{c\mu} \partial \chi^a \partial \chi^{*b}} \Big|_0 \quad (\text{B13})$$

Einfache Kopplung zweier Geister und einer Fluktuation an das Hintergrundfeld:

$$\{V_{1A}^{FP,1Q}\}_{\mu;\nu}^{c;d;ab} = \frac{\partial^4 \mathcal{L}_{int}[A + Q]}{\partial A^{c\mu} \partial Q^{d\nu} \partial \chi^a \partial \chi^{*b}} \Big|_0 \quad (\text{B14})$$

Zweifache Kopplung zweier Geister an das Hintergrundfeld:

$$\{V_{2A}^{FP}\}_{\mu\nu}^{cd;ab} = \frac{\partial^4 \mathcal{L}_{int}[A + Q]}{\partial A^{c\mu} \partial A^{d\nu} \partial \chi^a \partial \chi^{*b}} \Big|_0 \quad (\text{B15})$$

b. Vertexfunktionen und Diagramme

Kopplung der Fermionen an das Hintergrundfeld:

$$(V_{1A}^F)^a_{ij\mu} = (V^F)^a_{ij\mu}, \quad (\text{B16})$$

siehe Gleichung (B5).

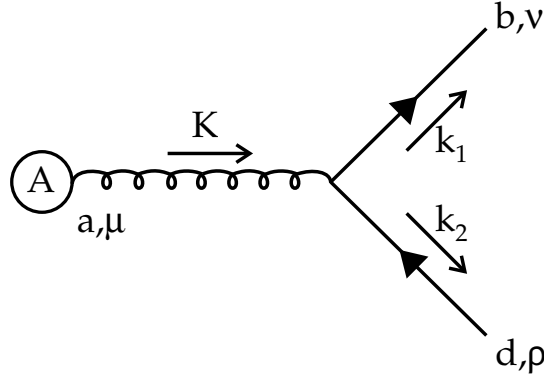


Abbildung 23: Feynmandiagramm: Kopplung der Fermionen an das Feld

Einfache Kopplung zweier Fluktuationen an das Hintergrundfeld:

$$(V_{1A}^{2Q})^a;bc_{\mu;\nu\lambda} = gf^{abc}[g_{\mu\lambda}(p-r-q/\alpha)_\nu + g_{\nu\lambda}(r-q)_\mu + g_{\mu\nu}(q-p+r/\alpha)_\lambda] \quad (\text{B17})$$

Zweifache Kopplung zweier Fluktuationen an das Hintergrundfeld:

$$\begin{aligned} (V_{2A}^{2Q})^ac;bd_{\mu\lambda;\nu\rho} = & -ig^2[f^{abx}f^{xcd}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} + g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}/\alpha) + \\ & + f^{adx}f^{xbc}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}/\alpha) + \\ & + f^{acx}f^{xbd}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})] \end{aligned} \quad (\text{B18})$$

Einfache Kopplung dreier Fluktuationen an das Hintergrundfeld:

$$(V_{1A}^{3Q})^a;bcd_{\mu;\nu\lambda\rho} = (V^{4G})^abcd_{\mu\nu\lambda\rho}, \quad (\text{B19})$$

siehe Gleichung (B7). Einfache Kopplung zweier Geister an das Hintergrundfeld:

$$(V_{1A}^{FP})^c;ab_\mu = -gf^{acb}(p+q)_\mu \quad (\text{B20})$$

Einfache Kopplung zweier Geister und einer Fluktuation an das Hintergrundfeld:

$$(V_{1A}^{FP,1Q})_{\mu;\nu}^{c;d;ab} = -ig^2 f^{acx} f^{xdb} g_{\mu\nu} \quad (\text{B21})$$

Zweifache Kopplung zweier Geister an das Hintergrundfeld:

$$(V_{2A}^{FP})_{\mu\nu}^{cd;ab} = -ig^2 g_{\mu\nu} (f^{acx} f^{xdb} + f^{adx} f^{xcb}) \quad (\text{B22})$$

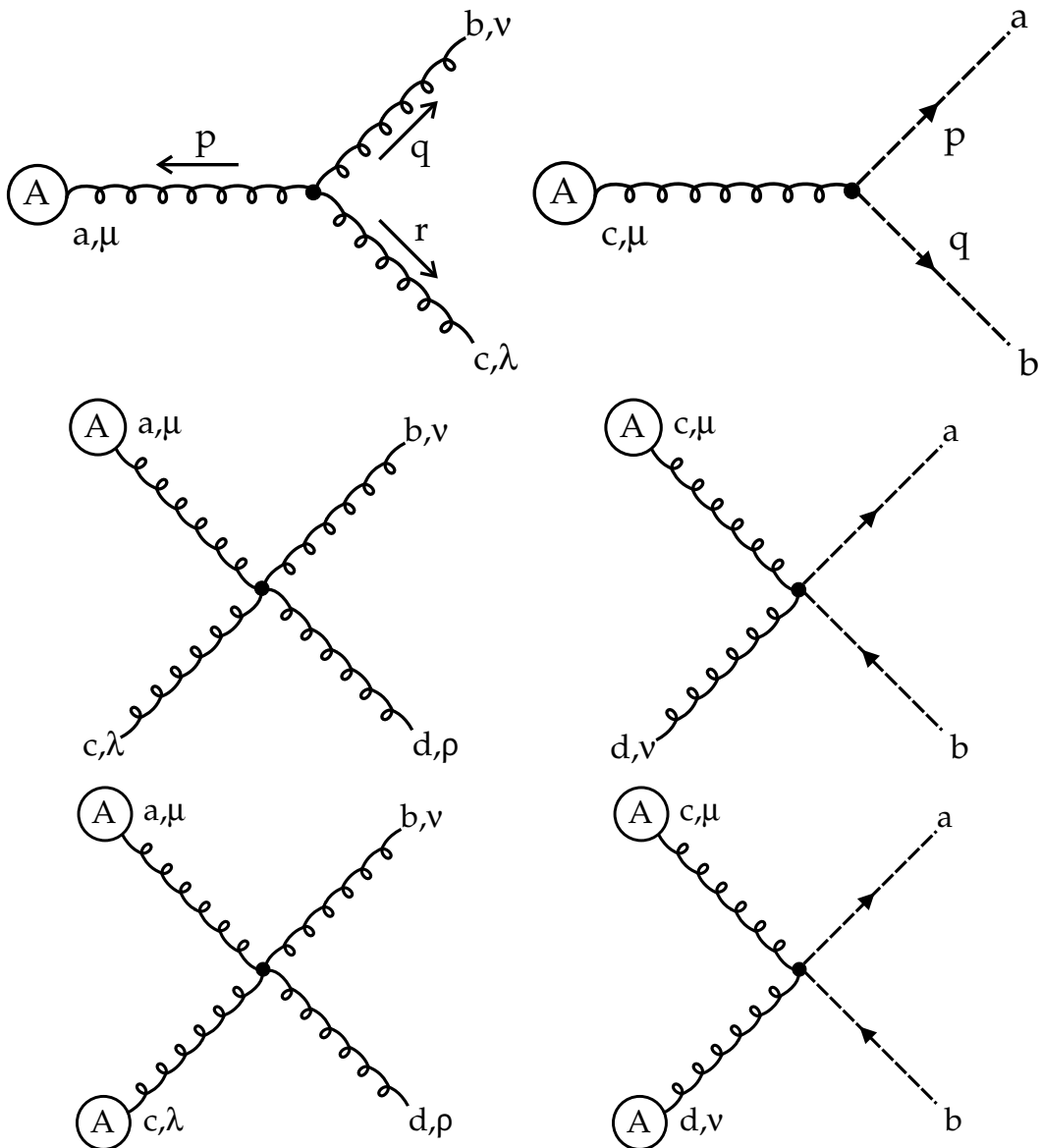


Abbildung 24: Kopplung der Gluonen an das Feld und entsprechende Geistvertices

RÉSUMÉ

Des collisions ultra-relativistes d'ions lourds à la plus haute énergie dans le centre de masse jamais obtenue sont envisagées pour le Large Hadron Collider (LHC) sous construction au CERN à Genève. Dans des collisions hadroniques à une énergie plus élevée on peut explorer des valeurs plus petites du Bjorken-x (la fraction de l'impulsion totale emportée par un parton). Basé sur des principes fondamentaux formulés dans la Chromodynamique Quantique (CDQ), il peut être démontré que des valeurs plus petites du x de Bjorken correspondent à des valeurs plus grandes de la densité des particules. À partir des densités de partons suffisantes, des effets non-linéaires dans l'évolution des distributions de particules commencent à jouer un rôle important. On a déjà essayé d'avancer dans ce régime non-linéaire avec l'expérience HERA au DESY (collisions des électrons ou positrons avec des protons) mais les énergies dans le centre de masse y accessibles permettaient seulement une caractérisation ambiguë. Grâce à des énergies plus élevées et à une augmentation géométrique de la densité pour des collision des noyaux, le LHC présentera la meilleure opportunité pour accéder à cette région. Pour identifier une phase de l'évolution non-linéaire, il y a plusieurs signatures possibles à l'impulsion et/ou masse haute (signatures dures). En plus des photons directs, des dileptons de Drell et Yann, des quarks de charme ou de beauté ouverts et des quarkonia lourds on connaît des jets et minijets. En ignorant des modifications nucléaires, dans une collision centrale au LHC, 30 jets avec plus de 10 GeV d'énergie transversale et 0.003 jets avec plus de 100 GeV d'énergie sont prédits. Ils portent des informations de la phase initiale de la réaction vers les détecteurs.

Pour décrire ce régime d'évolution non-linéaire on peut commencer avec des distributions de partons saturées au maximum. Ça permet une description initialement classique : Les nombres d'occupation dans le secteur gluonique à l'énergie faible sont assez élevés pour décrire les gluons par un champ classique et pour regarder les fluctuations quantiques comme des corrections. Seulement la part de la distribution de gluons à l'énergie basse et avec un nombre d'occupation haut est décrite assez bien par un champ non-quantifié. Ce n'est pas le cas pour les gluons à l'énergie haute, les jets et minijets. Les calculs quantiques concernant les jets doivent être exécutés dans tous les ordres du champs externe parce

que la magnitude du champs de jauge est proportionnelle à l'inverse de la constante de couplage. Les puissances supérieures du produit du champs de jauge avec la constante de couplage ne sont pas supprimées. Comme ça, les jets ne sont pas produits d'une façon banalement perturbative, mais ils contiennent des informations sur la phase saturée. Dans le contexte présent, les fluctuations quantiques des champs des gluons seront importantes pour la dynamique du système aussi avec une énergie inférieure à 10 GeV. Une description consistante doit comprendre les fluctuations avec une énergie au-dessous de 10 GeV parce qu'elles contiennent plus d'énergie totale que les fluctuations avec une énergie au-dessus de cette valeur. Probablement, cette énergie n'est pas négligeable non plus en comparaison avec l'énergie contenue dans le champ classique. À cause de cela l'effet des fluctuations sur la dynamique du secteur classique doit aussi être adressé. Les quarks et antiquarks sont paramétriquement équivalents aux fluctuations gluoniques. Comme ça, les fermions doivent être traités de même façon que les fluctuations bosoniques et on a besoin d'une comparaison détaillée pour connaître leur importance relative. Dans le cas des fermions, il n'existe pas de concept classique, pas même pour des particules à l'impulsion faible.

Ici, la production des quarks, antiquarks et des fluctuations gluoniques est étudiée en présence d'un champ bosonique classique. Pour la description de la production des particules dans des champs externes arbitraires on connaît la méthode perturbative et la méthode de Schwinger. Les calculs perturbatifs sont seulement applicables pour des particules avec une impulsion beaucoup plus grande que le produit de la magnitude du champ de jauge et la constante de couplage. À cause de cela, on ne peut pas traiter les fermions à l'énergie faible avec cette procédé. C'est différent pour les bosons doux, qui sont, en part, contenus dans le champ classique. Donc des calculs non-perturbatifs sont plus importants pour les quarks et antiquarks que pour les gluons. La méthode de Schwinger est une méthode non-perturbative qui est basée sur la supposition que le champ externe est seulement faiblement variable. Si la variabilité du champ est trop forte cette méthode produit des résultats égarants. Pour ces raisons on a besoin des procédés indépendants des échelles d'énergie ou de temps. Dans le premier ordre de la constante de couplage, tous les informations sur les champs quantifiés sont compris dans leurs propagateurs exacts dans le champ externe. Ces propagateurs sont difficile à obtenir dans des situations générales. Pour des collisions ultra-relativistes d'ions

lourds, d'après Bjorken, le champ de jauge dépend seulement du temps propre. Dans la région centrale de la collision, le temps propre peut être approché par le temps cinématique.

Commençons avec une comparaison de la production des couples quarks-antiquarks avec la création des couples de fluctuations gluoniques sur la base d'une analyse perturbative. Cette analyse est valide pour des particules quantisées à l'impulsion haute par comparaison au champ de jauge multiplié par la constante de couplage. Tout d'abord l'expression pour le taux de production des fermions et des fluctuations bosoniques est dérivée en présence des champs entièrement arbitraires dans le premier ordre de l'action classique de la CDQ. Dans le cas des bosons la méthode du champ de fond de la CDQ est utilisée. L'expression pour des champs générales est spécialisée pour des champs qui sont seulement des fonctions du temps cinématique. Pour gagner une meilleure idée des qualités de ces expressions, elles sont évaluées pour un modèle de champ unidirectionnel qui décroît exponentiellement. (Une forme similaire a déjà été trouvée dans des calculs numériques précédents.) Le modèle contient trois paramètres : la magnitude initiale du champ de jauge, la constante de couplage et l'échelle du temps typique de décroissance. Des intervalles pour leurs valeurs peuvent être obtenus par des considérations indépendantes, comme, par exemple à partir des calculs pour la densité initiale de l'énergie. La magnitude initiale du champ de jauge serait de 1 à 2 GeV. La valeur inférieure correspond plus à une collision au Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) of the Brookhaven National Laboratory. Pour la constante de couplage on trouve respectivement 1.4 (LHC) et 2 (RHIC). L'échelle de décroissance serait entre 0.1 fm/c et 1.0 fm/c. Pour des valeurs dans ces intervalles, le taux de production comme fonction du temps pour des impulsions différentes est oscillatoire avec une amplitude décroissante. Les oscillations représentent une caractéristique pour le processus de la production de particules, qui peut être expliquée avec le principe d'incertitude de Heisenberg. Pour obtenir une mesure pour la production net des particules on doit intégrer le taux de production en temps. Après l'intégration une distribution unimodale est obtenue comme fonction des impulsions. On observe que, pour des valeurs différentes des paramètres dans les intervalles il existe des situations dans lesquels la production des couples de fermions et antifermions domine la production des couples de fluctuations bosoniques de même que ceux où il y a plus de fluctuations bosoniques que des fermions et antifermions. Les fluctuations gluoniques sont favorisées en comparaison avec

les quarks et antiquarks pour des magnitudes initiales du champ de jauge ou des constantes de couplage plus grandes et pour une décroissance du champ classique plus lente. À priori, il n'est pas possible de négliger une des espèces. Pour cela, il faut exécuter un calcul auto-consistent qui donnera, par exemple, l'échelle de décroissance.

Un calcul correspondant nécessite au moins une description non-perturbative des fermions et des antifermions à l'énergie basse. Supplémentaire, pour la composition de la spectre d'hadrons, il est très important à connaître la répartition des quarks de flavours différents. Pour obtenir le propagateur nécessaire on doit résoudre l'équation de Dirac dans un champ externe. Dans cette thèse, la solution exacte dans des champs qui varient arbitrairement avec le temps est dérivée. Des solutions en forme des exponentiels en ordre de chemin sont trouvées qui correspondent au propagateur retardé ou avancé respectivement. Elles contiennent les informations sur l'espérance du nombre des couples produits mais pas sur les probabilités de production d'un couple. Dans les cas des calculs perturbatifs de premier ordre, les deux quantités - l'espérance et la probabilité - sont équivalents. Après ça, plusieurs approximations sont dérivées, parce que la solution générale est très compliquée. Il y a des approximations pour le régime ultraviolet (perturbatif), infrarouge et commutatif (abélien). La propagation commutative peut être interprétée comme propagation avec l'impulsion canonique moyenne. Au contraire, dans la méthode perturbative la propagation est décrite toujours avec l'impulsion asymptotique. Là, dans les ordres supérieurs, il est rendu compte seulement de plus d'interactions avec le champ.

Encore une fois, l'expression exacte et les expressions approximatives sont évaluées en présence du modèle de champ pour les mêmes paramètres qu'auparavant. Pour les valeurs les plus petites du champ de jauge initial, de la constante de couplage et de l'échelle de décroissement du champ, l'approximation ultraviolette est encore assez bonne, même si l'approximation infrarouge et l'approximation abélienne sont meilleures. Pour les valeurs les plus grandes des paramètres seulement l'approximation commutative reste proche de la solution exacte. Les différences les plus grandes sont observée pour des impulsions petites. Là, il se trouve le régime le moins abélienne. Si on voulait exécuter des calculs auto-consistants et ne voulait pas utiliser l'expression exacte on pourrait utiliser l'approximation commutative. Tous les résultats obtenus dans ce contexte sont également applicable dans

l'électrodynamique quantique et pour la photoproduction des couples des quarks et antiquarks.

Comme continuation des travaux présentés dans cette thèse on pourrait accomplir des calculs auto-consistants exacts pour la production des couples de fermions et antifermions en présence d'un champ bosonique classique. Par exemple, il serait possible d'extraire l'échelle de décroissance de ces calculs. Un autre pas important est de trouver l'expression exacte pour la production des fluctuations bosoniques. Un calcul auto-consistant suivant donnerait la réponse définitive sur l'importance relative des espèces différentes de particules.

En vue des informations contenues dans le propagateur fermionique qui a été obtenu en cours des calculs présentés dans cette thèse, l'application sur le problème de la production des quarks et des antiquarks dans une collision ultra-relativiste des ions lourds est très spéciale. Les résultats sont aussi valables pour l'électrodynamique quantique et pour des effets combinés comme la photoproduction des quarks et antiquarks. En plus, on avait la possibilité à obtenir les espérances pour les condensats des fermions ou les processus d'accélération dans le champ.

SUMMARY

Ultra-relativistic heavy-ion collisions at the largest centre-of-mass energies ever reached are envisaged for the Large Hadron Collider (LHC), currently under construction at CERN in Geneva. In hadronic collisions at higher energies one can explore smaller values of Bjorken- x (the fraction of the total momentum carried by a parton). Based on the basic principles formulated in the quantum gauge field theory of Quantum Chromodynamics (QCD), it can be shown that smaller values of Bjorken- x correspond to larger parton densities. For sufficiently elevated particle densities non-linear effects start playing an important rôle in the evolution of the parton distribution functions. It has already been tried to access this non-linear regime with the HERA experiment at the Deutsche Elektronen Synchrotron (DESY) (collisions of electrons or positrons with protons) but the centre-of-mass energies did not suffice for an unambiguous characterisation. Due to higher collision energies and geometrical nuclear enhancement of the density in reactions with nuclei, the LHC will present the best opportunity to explore this region. In order to investigate the phase of non-linear evolution, there are several hard probes (probes with large momentum and/or mass) at hand. Apart from direct photons, Drell-Yan-dileptons, open charm or beauty quarks, and heavy quarkonia, there exist jets and minijets. Ignoring nuclear modifications, in a central collision at the LHC, the production of 30 jets per event with more than 10 GeV of transverse energy and 0.003 jets per event with more than 100 GeV have been predicted. They carry the information from the initial phase of the reaction to the detector.

In order to describe this regime of non-linear evolution it is possible to begin with maximally saturated parton distributions. This allows for an initially classical treatment: The occupation number in the low-energy sector of the gluons are sufficiently high in order to describe them by means of a classical field and to consider the fluctuations as corrections. Only the densely occupied soft part of the gluon distribution is described well by means of a non-quantised field. This is not the case for gluons with large momenta like those in jets and minijets. The calculations concerning the jets must be executed taking into account all orders of the classical vector potential because its magnitude is proportional to the inverse of the coupling constant. Therefore, higher powers of the product of the classical field

and the coupling constant are not suppressed. Thus, the jets are not produced in a tritely perturbative manner but contain information about the saturated phase. In the present context, also the quantum fluctuations with an energy below 10 GeV will be important for the evolution of the system. A consistent description of the system's dynamics must take into account the bosonic fluctuations below 10 GeV as well because they contain more total energy than those above this value. It is also possible that their overall energy is even no longer negligible in comparison to that contained in the classical field. For this reason the effect of the quantum fluctuations on the classical field must be addressed, too. The quarks and antiquarks are parametrically equally favoured as the gluonic fluctuations. Hence, the fermions and antifermions must be treated on the same footing as the bosonic quanta and one needs a detailed comparison between the different particle species in order to know their relative importance. For the fermions, a classical concept does not exist even for the particles with small momenta.

Here, the production of quarks, antiquarks, and of gluonic fluctuations is studied in the presence of a classical bosonic field. For the description of the production of particles in an arbitrary external field one knows the perturbative approach and the constant-field method by Schwinger. Perturbative calculations are only justified for particles with a momentum much larger than the product of the magnitude of the gauge field and the coupling constant. Therefore, the soft partons cannot be treated in the framework of this procedure. The consequences originating from this fact are different for fermions and bosons. A portion of the low-energy bosons is contained in the classical field. Thus, non-perturbative calculations are more important for the quarks and antiquarks than for the gluons. Schwinger's method is non-perturbative and is based on the assumption that the external field varies only slowly in space-time. If the variability of the field is too fast, this method yields misleading results. For all these reasons, a procedure is needed that is independent of time or energy scales.

To lowest order in the coupling constant, all information on the quantised fields are contained in their exact propagators in the external field. In general situations these propagators are difficult to obtain. In ultra-relativistic heavy-ion collisions, according to Bjorken, the gauge field only depends on proper time. In the central region of the reaction, where most of the energy is deposited, the proper time can be approximated by the kinematical

time.

First, a comparison of the production of quark-antiquark pairs with the creation of pairs of gluonic quantum fluctuations based on perturbative calculations will be presented here. This analysis is valid for quantum particles with a large momentum compared to the magnitude of the classical vector potential multiplied by the coupling constant. At the beginning, the expressions for the production rate for the two kinds of particles is derived for an arbitrary external field in the first order of the classical action. In the case of the gluonic fluctuations, the background-field method of QCD is applied. From the results found for general fields the one for vector potentials depending only on kinematical time is extracted. In order to get a better understanding of the characteristics of these formulas, they are evaluated for a special uni-directional field which decays exponentially. (A similar form has already been predicted in the framework of independent numerical calculations.) The model contains three parameters: the initial magnitude of the gauge field, the coupling constant, and the time scale on which the field decays. The expected ranges for their values can be obtained from independent considerations like, for example calculations yielding the initial energy density. The initial gauge field strength should have a value between 1 and 2 GeV. The smaller value corresponds more to a situation expected to be found at the Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) at the Brookhaven National Laboratory (BNL). For the coupling constant (g) one finds 1.4 (LHC) and 2 (RHIC) respectively. The decay time scale should be between 0.1 and 1.0 fm/c. For the parameters chosen within these intervalls the following observations can be made: The production rate is oscillatory in time with a decreasing amplitude for later times which is due to the decay of the field. The frequency of the oscillations is faster for higher particle energies. They represent a characteristic quality for the process of particle production which can be traced back to Heisenberg's uncertainty principle. In order to obtain a measure for the net production, the rate is integrated over time. The integration yields a function of the momenta with a single peak in the low-momentum region. Within the range of validity of the perturbative approach, for high energies it is a strictly monotonously decreasing function of the momenta. One observes that for different values of the parameters there exist situations where the production of quark-antiquark pairs dominates over that of pairs of gluonic fluctuations. On the other

hand, situations can be found where there are more bosons created than fermions and antifermions. The bosonic fluctuations are favoured with respect to the fermions for larger values of the initial gauge field strength, the coupling constant, or the decay time scale and vice versa. Therefore, none of the species can be neglected from the beginning. For a reliable answer, self-consistent calculations are needed which yield for example the time scale.

A corresponding calculation necessitates a non-perturbative description of at least the soft fermions. Additionally it is very important for the hadron spectra to know the distribution of the quark flavours. The necessary propagator can be obtained by solving the Dirac equation in an external field. In this thesis the exact expression for fields varying arbitrarily in time is derived. The solutions in the form of path-ordered exponentials correspond to the retarded or the advanced propagator. They contain the information on the expectation value of number of produced pairs but not on the probability for the production of one pair. In the case of lowest-order perturbative calculations, the two numbers – the expectation value and the probability – are equivalent. After the full solution has been obtained, various approximation schemes are proposed for different domains, in order to find out into which the situation under consideration falls. There are approximations in the ultraviolet (perturbative), the infrared, and the Abelian (commutative) regime. The commutative propagation can be interpreted as propagation with the mean canonical momentum. Contrary to that, in the perturbative approach, the propagation is always performed with the asymptotic momentum. There, in higher orders, only more and more interactions with the field are taken into account.

The exact expression and the lowest orders of the different approximation schemes are evaluated in the presence of the model field with the same parameters like before. For the smallest values of the initial gauge field strength, coupling constant, and/or decay scale, the ultraviolet approximation is still acceptably close to the full, even if the infrared and the Abelian approximation are slightly better. For the largest values of the parameters only the commutative approach stays close to the exact value. Here, the largest differences are observed for small momenta. This is the regime which is least Abelian. If one wanted to perform self-consistent calculations without having to deal with the full solution, the commutative would be the method of choice. All the results obtained in this context for

QCD are equally applicable in quantum electrodynamics or in the case of combined effects of both theories together like the photoproduction of quarks and antiquarks.

The calculations presented in this work concern quantum effects of the first order in the uncompensated coupling constant. The phenomena beyond the classical gluonic field comprise the production of fermion-antifermion pairs as well as of pairs of bosonic fluctuations. In higher orders of the coupling constant which are not compensated by powers of the classical vector potential further terms arise in the various equations. Their influence could be studied in detail. However, for the situation under consideration they are suppressed by another power of the coupling constant. Hence, these modifications would be of importance only if they lead to entirely new and qualitatively different effects.

The classical gauge field contains the dominant portion of the gluons. The results in this thesis describe the principal contribution to the production of fermions and antifermions in the presence of time-dependent fields. Additional to the explicitly discussed approximation schemes the general resummation formula provides the means for the derivation of arbitrary approximations. In the course of the derivations the full fermionic propagator has been obtained in a time-dependent field. Thus, the application to the problem of particle production in an ultra-relativistic heavy-ion collision constitutes merely a very special one in view of the information included in this correlator. In the case of a non-quantised time-dependent bosonic field said Greens function solves the generating functional in the stable and in the unstable vacuum. Beyond that, quantities like expectation values for quark condensates or scattering processes off the field could be treated exactly, to name only a few examples.

DANKSAGUNG

An dieser Stelle gebührt vor allem meiner Familie und meinen Freunden Dank für ihre Unterstützung.

Keine Doktorarbeit ohne Doktorvater. Für diese *en co-tutelle* ausgeführte Arbeit gibt es derer drei: J.-P. Coffin, W. Greiner und D. Rischke, denen ich an dieser Stelle für die Übernahme dieses Amtes danken möchte. Auf dem Papier ist F. Jundt zwar nicht mein Doktorvater, hat sich jedoch sehr um das Zustandekommen dieser Promotion *en co-tutelle* bemüht, wofür ich ihm danke. Während der Forschungen, die zu dem vorliegenden Werk geführt haben, diskutierte ich mit verschiedenen Personen. Dank an diejenigen, die sich als die geduldigsten erwiesen oder auf andere Art wesentliche Impulse geliefert haben: A. Döring, S. Hofmann, K. Kajantie, A. Mishra, K. Paech, J. Reinhardt, D. Rischke, J. Ruppert und S. Schramm.

Außerdem waren J. Reinhardt, D. Rischke und J. Ruppert bereit als Lektoren meiner Arbeit tätig zu werden. S. Scherer überprüfte die französische Version der Zusammenfassung und A. Steidl überließ mir die von ihr erstellten Vorlagen für die Feynmandiagramme. Auch ihnen Dank für jegliche Unterstützung.

Finanziert wurde diese Promotion von der Graduiertenförderung des Landes Hessen, der Bosch-Stiftung und der Gesellschaft für Schwerionenforschung, wobei ich M. Knobloch und D. Radulescu für ihre Hilfe danken.

LEHRER

Prof. Dr. Bethge

Prof. Dr. Dreizler

Prof. Dr. Elze

Prof. Dr. Greiner

Prof. Dr. Hänel

Prof. Dr. Herbert

Prof. Dr. Hirst

Prof. Dr. Klein

Prof. Dr. Kulze

Prof. Dr. Lüthi

Prof. Dr. Maruhn

Prof. Dr. Mohler

Prof. Dr. Rauch

Prof. Dr. Rischke

PD Dr. Ritter

Prof. Dr. Schönwiese

Prof. Dr. Schaarschmidt

Prof. Dr. Schmeling

Prof. Dr. Schmidt

Prof. Dr. Ströbele

PD Dr. Wacker

CURRICULUM VITAE

Name: Dietrich, Dennis Dean
Geburtsdatum: 30. Juni 1975
Geburtsort: Hanau am Main, Deutschland

1994 Abitur

Karl-Rehbein-Schule, Hanau am Main, Gesamtnote: 1.0

Aufnahme des Meteorologiestudiums

Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main

1995 Aufnahme des Physikstudiums

Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main

1996 Vordiplom in Meteorologie

Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main

Gesamtnote: sehr gut

1999 Diplom in Physik

Institut für Theoretische Physik

Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main

Betreuer: L. L. Hirst und R. J. Jelitto

Gesamtnote: sehr gut

Aufnahme des Promotionsstudiums in Physik en co-tutelle:

Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main und

Université Louis Pasteur, Strasbourg, France

Betreuer: J.-P. Coffin, W. Greiner und D. H. Rischke