



**HAL**  
open science

# Description topologique de l'architecture fibreuse et modélisation mécanique du myocarde

Ayman Mourad

► **To cite this version:**

Ayman Mourad. Description topologique de l'architecture fibreuse et modélisation mécanique du myocarde. Mathématiques [math]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2003. Français. NNT : 2003INPG0130 . tel-00004003

**HAL Id: tel-00004003**

**<https://theses.hal.science/tel-00004003>**

Submitted on 17 Dec 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

*N° attribué par la bibliothèque*  
/ / / / / / / / / / / / / / / /

THESE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'INPG**

**Spécialité : Mathématiques Appliquées**

préparée au laboratoire de modélisation et calcul (LMC)  
et le laboratoire sols, solides, structures (3S)

dans le cadre de **l'Ecole Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologie de  
l'Information**

présentée et soutenue publiquement

par

**Ayman MOURAD**

le 9 Décembre 2003

**Titre :**

**Description topologique de l'architecture fibreuse et modélisation  
mécanique du myocarde**

**Directeurs de thèse :**

**Denis CAILLERIE et Annie RAOULT**

**Jury**

Mme Valérie PERRIER  
M. Yvon MADAY  
M. Grégory PANASENKO  
M. Denis CAILLERIE  
Mme Annie RAOULT  
M. Yves USSON

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Directeur de thèse  
Directeur de thèse  
Examinateur



**A mon père, ma mère, mes frères et sœurs,**

**et à ma belle fiancée ...**





# Remerciements

Mes remerciements à M. Denis Caillerie et Mme Annie Raoult qui ont dirigé et soutenu ce travail de recherche, tant pour leurs idées que pour leurs encouragements et conseils avisés tout au long de ces années ainsi que pour le temps qu'ils ont consacré à m'aider à parfaire la rédaction de ce travail.

Je remercie Mme Valérie Perrier, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble. Elle m'a fait l'honneur de présider ce jury.

J'adresse mes remerciements à M. Yvon Maday, Professeur à l'Université Paris VI et à M. Grégory Panasenko, Professeur à l'Université de Saint Etienne pour avoir bien voulu être rapporteurs de la thèse.

Je tiens à remercier M. Yves Usson , Chargé de Recherche au CNRS, qui a accepté d'être membre de ce jury et pour sa collaboration et sa sympathie. J'exprime aussi toute ma reconnaissance à M. Pierre-Simon Jouk qui a toujours été disponible pour des discussions diverses et pour sa gentillesse et son sourire. Qu'ils sachent que je garderai un excellent souvenir de notre collaboration.

Je n'oublierai pas les thésards du LMC, spécialement mes collègues de bureau, sans qui l'ambiance au laboratoire n'aurait pas été la même.

Mes remerciements vont aussi à mes parents, à mes frères et sœurs, à ma fiancée et à tous mes amis, pour leur soutien et leur patience. Je remercie également mon oncle Abbass (Abou Ibrahim) qui est venu des Etats Unis pour assister à ma soutenance.

Que tous ceux que je n'ai pas nommés ne se sentent pas oubliés. Ma gratitude leur est toute acquise.



# Table des matières

<b>Cadre du travail</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>1 Physiologie du cœur humain</b>	<b>7</b>
1.1 Anatomie-Histologie . . . . .	7
1.1.1 Morphologie cardiaque . . . . .	7
1.1.2 Description à l'échelle microscopique . . . . .	8
1.1.3 Orientation des fibres . . . . .	10
1.2 Contraction musculaire . . . . .	11
1.2.1 Précharge et postcharge . . . . .	12
1.2.2 La courbe charge-vitesse . . . . .	12
1.2.3 Les courbes longueur-tension . . . . .	13
1.3 La pompe cardiaque . . . . .	15
1.3.1 Cycle cardiaque . . . . .	15
1.3.2 Courbe pression-volume . . . . .	16
1.4 L'activité électrique . . . . .	19
<b>I Modélisation Géométrique</b>	<b>23</b>
<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>1 Géométrie des courbes et des surfaces</b>	<b>27</b>
1.1 Courbes paramétrées . . . . .	27
1.1.1 Représentation paramétrique . . . . .	27
1.1.2 Longueur d'une courbe - Abscisse curviligne . . . . .	28
1.1.3 Tangente et normale à une courbe . . . . .	29
1.2 Surfaces paramétrées . . . . .	29
1.3 Courbe tracée sur une surface de révolution . . . . .	31
1.4 Géodésiques d'une surface . . . . .	32
1.4.1 Cadre général . . . . .	32
1.4.2 Cas des surfaces de révolution . . . . .	34

1.4.3	Géodésiques périodiques . . . . .	37
1.5	Construction d'un modèle abstrait pour le ventricule gauche . . . . .	44
<b>2</b>	<b>Outils numériques - Application au myocarde</b>	<b>47</b>
2.1	Introduction . . . . .	47
2.2	Données anatomiques . . . . .	48
2.3	Reconstruction numérique des courbes . . . . .	49
2.3.1	Formulation mathématique du problème . . . . .	49
2.3.2	Résolution numérique du problème de Cauchy . . . . .	51
2.3.3	Algorithme de suivi de fibres . . . . .	56
2.4	Conjecture de Streeter sur le ventricule gauche . . . . .	57
2.5	Reconstruction de surfaces . . . . .	61
2.5.1	Principe de l'algorithme . . . . .	61
2.5.2	Calcul de la normale principale et de la binormale . . . . .	62
2.6	Calcul de $\text{div } \tau$ . . . . .	64
	<b>Conclusion</b>	<b>67</b>
<b>II</b>	<b>Modélisation Mécanique</b>	<b>69</b>
	<b>Introduction</b>	<b>71</b>
<b>1</b>	<b>Elasticité non linéaire - Lois de comportement du myocarde</b>	<b>73</b>
1.1	Elasticité non linéaire - Grandes déformations . . . . .	73
1.1.1	Cinématique . . . . .	73
1.1.2	Tenseurs de contraintes - Equations d'équilibre . . . . .	76
1.1.3	Lois de comportement . . . . .	78
1.1.4	Système de coordonnées curvilignes . . . . .	83
1.2	Lois de comportement du myocarde . . . . .	84
1.2.1	Lois de comportement isotropes transverses . . . . .	85
1.2.2	Lois de comportement orthotropes . . . . .	91
1.2.3	Autre . . . . .	94
<b>2</b>	<b>Du micro au macro : Technique d'homogénéisation</b>	<b>97</b>
2.1	Modélisation mécanique du réseau de cardiomyocytes . . . . .	97
2.1.1	Description du treillis . . . . .	99
2.1.2	Géométrie et cinématique du treillis . . . . .	99
2.1.3	Mécanique du treillis . . . . .	100
2.2	Homogénéisation d'un treillis répétitif . . . . .	104
2.2.1	Description d'un treillis répétitif et numérotation . . . . .	105
2.2.2	Développements asymptotiques . . . . .	109

2.2.3	Tenseur de contraintes de Cauchy et équations d'équilibre du milieu continu . . . . .	113
2.2.4	Equations d'autoéquilibre - Loi de comportement macroscopique . . .	117
2.3	Compléments sur la loi de comportement . . . . .	121
2.3.1	Hyperélasticité . . . . .	121
2.3.2	Indifférence matérielle . . . . .	123
2.4	Détermination numérique de la loi de comportement . . . . .	125
2.4.1	La méthode de Newton . . . . .	125
2.4.2	Résolution du problème par la méthode de Newton . . . . .	126
<b>3</b>	<b>Application au myocarde : nouvelle loi de comportement</b>	<b>131</b>
3.1	Cellule de répétitivité . . . . .	131
3.2	Données expérimentales sur des cellules isolées . . . . .	133
3.3	Loi de comportement macroscopique . . . . .	135
3.3.1	Loi en traction compression des cardiomyocytes . . . . .	135
3.3.2	Loi de comportement des moments . . . . .	136
3.3.3	Problème sur la cellule de répétitivité - Loi de comportement macroscopique . . . . .	137
3.3.4	Loi de comportement macroscopique inverse - état neutre . . . . .	138
3.3.5	Configuration de référence . . . . .	139
3.3.6	Energie de déformation élastique . . . . .	140
3.3.7	Incompressibilité . . . . .	141
3.4	Données expérimentales macroscopiques . . . . .	142
3.5	Résultats numériques . . . . .	143
3.6	Interprétation des résultats . . . . .	144
<b>4</b>	<b>Application aux nanotubes de carbone</b>	<b>151</b>
4.1	Description géométrique et mécanique d'un graphène . . . . .	153
4.1.1	Géométrie du graphène et configuration de référence . . . . .	153
4.1.2	Modèle mécanique du graphène . . . . .	154
4.1.3	Description et numérotation des éléments du graphène . . . . .	155
4.1.4	Application de l'homogénéisation au graphène . . . . .	155
4.2	Modélisation en grandes transformations . . . . .	156
4.2.1	Loi de comportement du milieu homogénéisé . . . . .	156
4.2.2	Dépendance de la loi macroscopique vis-à-vis de $L$ . . . . .	158
4.2.3	Etat neutre de la loi de comportement macroscopique . . . . .	159
4.2.4	Configuration de référence . . . . .	159
4.2.5	Energie de déformation . . . . .	160
4.2.6	Calcul numérique . . . . .	160
4.3	Modélisation en petits déplacements . . . . .	162
4.3.1	Linéarisation par rapport aux déplacements . . . . .	164
4.3.2	Equations d'équilibre . . . . .	165
4.3.3	Développements en série de $\varepsilon$ . . . . .	166

---

4.3.4	Autoéquilibre et résolution analytique . . . . .	167
4.3.5	Application numérique . . . . .	170
4.4	Comparaison des modèles en petites et en grandes déformations . . . . .	172
<b>Conclusion</b>		<b>173</b>
<b>Conclusion générale</b>		<b>175</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>176</b>
 <b>III ANNEXES</b>		 <b>185</b>
<b>A Technique de microscopie en lumière polarisée</b>		<b>187</b>
 <b>B Modélisation par des courbes et surfaces B-splines</b>		 <b>189</b>
B.1	Notions de Base . . . . .	189
B.2	Application au myocarde . . . . .	191
B.2.1	Modèles géométriques pour les deux ventricules . . . . .	191
B.2.2	Plus courts chemins sur des surfaces B-splines . . . . .	193

# Cadre du travail

Ce travail de recherche pluridisciplinaire entre dans le cadre du projet Mathématiques pour ADéMo (Acquisition et Décision conduites par le Modèle) de la région Rhône-Alpes et de l'ACI "Modélisation mathématique, mécanique et numérique du myocarde", sous la direction de Denis Caillerie (laboratoire 3S) et Annie Raoult (laboratoire LMC). Il est réalisé en collaboration avec l'équipe RFMQ (Reconnaissance des Formes et Microscopie Quantitative) du laboratoire TIMC et l'unité fonctionnelle Biologie du Développement et Génétique Clinique du CHU de Grenoble (Pierre-Simon Jouk, Yves Usson et Gabrielle Michalowicz) ainsi que l'équipe de géométrie du laboratoire LMC (Luc Biard et Nicolas Szafran).

Le point de départ était la recherche d'une meilleure connaissance de l'architecture fibreuse du myocarde. Plusieurs modèles de la structure myocardique ont été proposés durant les cent dernières années : modèles en rubans, modèles en trois couches... Le modèle le plus complet est celui de Streeter (1979) qui propose une organisation des fibres en géodésiques de surfaces emboîtées.

La première partie de notre travail était consacrée à une vérification partielle de cette conjecture et à reconstruire les fibres et les surfaces sur lesquelles courent les fibres. En effet, nous disposons de données expérimentales sur l'orientation des fibres obtenues par l'équipe RFMQ grâce à une technique de microscopie quantitative en lumière polarisée.

Dans la partie mécanique, nous avons établi une nouvelle loi de comportement macroscopique du myocarde par une technique d'homogénéisation discrète à partir de la description microscopique de l'arrangement des cellules cardiaques et de leur comportement mécanique individuel. Cette loi de comportement prend en compte la structure fibreuse. De plus, nous avons utilisé notre technique d'homogénéisation pour modéliser le comportement mécanique des nanotubes de carbone.

**Mots clés :** myocarde, fibre, géodésique, surface, loi de comportement, élasticité non linéaire, grandes déformations, homogénéisation discrète, treillis quasipériodique, nanotubes de carbone.





# Introduction générale

Chaque année, il naît en France, 6500 à 8000 enfants atteints par une malformation du cœur. La plupart de ces cardiopathies congénitales sont maintenant curables. Cependant, dans 20 % des cas, les solutions thérapeutiques conduisent à des résultats très variables. Presque toutes les formes de cardiopathies altèrent la topographie ventriculaire, et ces changements dans la configuration ventriculaire peuvent produire des dysfonctionnements dans le cycle cardiaque. Le comportement mécanique du myocarde est fortement lié à son architecture fibreuse qu'il est indispensable de prendre en compte dans toute modélisation mécanique ou numérique du cœur. Une description de l'organisation géométrique des fibres myocardiques et une modélisation mécanique du myocarde devraient permettre de mieux en appréhender le fonctionnement et les dysfonctionnements, en particulier, les anomalies de croissance menant à des malformations. De plus, elles pourraient apporter des valeurs prédictives de performance ventriculaire.

Le point de départ est la recherche d'une meilleure connaissance de l'architecture fibreuse du myocarde. Le myocarde est un muscle différent des muscles squelettiques. D'une part, il n'est attaché à aucun os, d'autre part, les fibres n'y sont pas aussi clairement identifiables. Leur disposition très particulière est en effet difficile à obtenir par les techniques classiques de dissection ou de pelage qui consistent à arracher les fibres pour faire apparaître leur organisation. Ces techniques ne sont pas fiables car le geste chirurgical induit la direction a priori inconnue. L'équipe RFMQ avec qui nous collaborons a l'exclusivité d'une technique de microscopie quantitative en lumière polarisée qui fournit l'orientation des fibres de cœurs fœtaux, Jouk et al. [46], Jouk et al. [47].

Plusieurs modèles de la structure myocardique ont été proposés durant les cent dernières années : Krehl [50], Robb et Robb [75], Torrent-Guasp [93], Streeter [85], Chadwick [20], Le Grice et al. [53], Jouk et al. [46] ... Le modèle le plus complet est celui de Streeter [85], qui reprend 88 ans plus tard des observations de Krehl (1891), et qui propose, en 1979, pour les fibres du ventricule gauche une organisation en géodésiques de surfaces toroïdales emboîtées dont il vérifie expérimentalement la validité sur la partie libre équatoriale du ventricule. Notons que l'hypothèse géodésique a été étudiée d'un point de vue théorique par Peskin qui a examiné sa validité sur des modèles simplifiés des lois de comportement. Cette information sur l'organisation géométrique des fibres pourrait permettre d'améliorer nos connaissances sur les propriétés biomécaniques et la propagation de l'activation électrique dans le myocarde.

La première partie de notre travail a été consacrée à une vérification partielle de cette conjecture. En effet, nous disposons de données expérimentales sur l'orientation des fibres obtenues par Jouk et al. [47]. Nous avons pu, au moins sur le ventricule gauche grâce à un critère quantitatif simple sur les géodésiques des surfaces de révolution, vérifier la coïncidence entre nappes de fibres et nappes de géodésiques. De plus, nous avons développé un algorithme de suivi de fibres que nous avons généralisé en un algorithme de reconstruction de surfaces. Un travail en cours de développement est destiné à valider une description similaire pour le ventricule droit.

D'un point de vue mécanique, l'expérimentation est difficile et le processus d'activation rajoute une complexité à la modélisation. Plusieurs lois de comportement du myocarde ont été proposées. Les premiers modèles du myocarde étaient très simples, les études étaient limitées à trouver des solutions analytiques à des problèmes simplifiés où le VG était modélisé par un cylindre ou une sphère et où le muscle cardiaque était supposé avoir un comportement linéaire, élastique, isotrope et homogène (Gould et al. [35], Sandler et Dodge [80], Wong et Rautoharju [100]). Grâce à des nouvelles données physiologiques et observations anatomiques (Chadwick [20], Jouk et al. [46], Jouk et al. [47], Le Grice et al. [52], Le Grice et al. [53], Sanchez-Quintana et al. [79], Streeter et al. [84], Streeter [85]), une nouvelle classe de modélisation est apparue, celle des modèles anisotropes prenant en compte la structure fibreuse et l'hétérogénéité du muscle. Les premiers travaux étaient dans le cadre de l'élasticité linéaire en petites déformations (Chadwick [20], Ohayon et Chadwick [69]). Des modèles non linéaires tenant compte de la structure fibreuse et de l'anisotropie ont été ensuite développés dans le cadre de grandes déformations (voir par exemple Bogen [9], Fung [33], Hunter et al. [43], McCulloch [60], Smaill et Hunter [83]). Parmi les nouvelles lois de comportement du myocarde on peut distinguer deux classes : les lois de comportement isotropes transverses (Cai [16], Humphrey et al. [41], Lin et Yin [57], Taber et Perucchio [90]), et les lois de comportement orthotropes (Nash et Hunter [63], Usyk et al. [97]). La plupart de ces lois de comportement repose sur le postulat que le tenseur de contraintes de Cauchy  $\sigma$  est la somme  $\sigma = -p\mathbf{I} + T\tau \otimes \tau + \sigma_P$  d'un tenseur de contraintes actives  $T\tau \otimes \tau$  où  $\tau$  désigne le vecteur unitaire directeur de la fibre et  $T$  est la tension active, d'un tenseur de contraintes passives  $\sigma_P$ , et d'un terme dû à l'incompressibilité.

Nous proposons de suivre une approche différente et nous envisageons de construire une loi de comportement macroscopique du myocarde à partir de modèles mécaniques microscopiques. Nous désignons par échelle microscopique l'échelle d'une cellule cardiaque. Les cellules cardiaques, ou cardiomyocytes, sont des petites structures cylindriques de 60-100  $\mu\text{m}$  de longueur. Elles sont attachées bout à bout par des anastomoses qui forment des jonctions en Y ou en I et fournissent les fibres myocardiques. Notre modélisation est basée sur la petitesse du rapport de la longueur d'un cardiomyocyte sur la taille du myocarde, et sur l'arrangement répétitif des cardiomyocytes. Une telle procédure appartient au domaine des techniques d'homogénéisation dont une description générale peut être trouvée dans Bensoussan et al. [5], Cioranescu et Saint Jean Paulin [23], Sanchez-Palencia [78]. Cette technique permet de remplacer un modèle discret de l'équilibre du myocarde qui devrait en toute rigueur prendre en compte séparément tous les cardiomyocytes par un modèle de milieu continu. Notons que d'un point de vue expérimental

des données mécaniques sur des cellules isolées sont aujourd'hui disponibles, voir par exemple Zile et al. [111], Zile et al. [112]. Les méthodes d'homogénéisation ont été appliquées à plusieurs problèmes physiques, comme les matériaux composites et les treillis. Plusieurs techniques pour démontrer des résultats de convergence ont été aussi développées. Dans notre étude nous suivons une approche d'homogénéisation discrète développée dans Tollenaere et Caillerie [92], et dans Moreau et Caillerie [61]. Cette approche est bien adaptée aux structures discrètes. Mentionnons que Briane [15] était le premier, à notre connaissance, qui a utilisé les techniques d'homogénéisation pour modéliser le tissu cardiaque. Dans son travail, l'échelle microscopique était celle d'une fibre, et son cadre était l'élasticité linéaire.

Comme notre technique d'homogénéisation consiste à remplacer un treillis discret de barres élastiques par un modèle de milieu continu, on constate que cette méthode peut s'appliquer aux nanotubes de carbone. Ce sont des macro-molécules de carbone aux propriétés physiques remarquables, qui peuvent être vues comme une feuille de graphite enroulée sur elle-même en un cylindre fermé par une demi-sphère à chaque extrémité. Une feuille de graphite est formée d'atomes de carbone liés par des liaisons atomiques de longueur 0.14 nm en un réseau hexagonal.

A cause de leur taille de quelques nanomètres, une mesure directe des propriétés des nanotubes de carbone est extrêmement difficile. Une modélisation mécanique est donc essentielle et dans cette direction, représenter un nanotube de carbone par un modèle de milieu continu apparaît être une approche viable. Nous modélisons le réseau de liaisons de carbone dans les feuilles de graphite par un treillis bidimensionnel périodique de barres élastiques liées entre elles par leurs extrémités atomiques. Les interactions carbone-carbone sont modélisées par des tensions élastiques et la variation angulaire entre deux liaisons partageant la même extrémité est modélisée par des moments. Dans le cas particulier des petits déplacements, nous obtenons la solution analytique ainsi que les expressions du module d'Young et du coefficient de Poisson.



# Chapitre 1

## Physiologie du cœur humain

### 1.1 Anatomie-Histologie

#### 1.1.1 Morphologie cardiaque

Le cœur est un muscle actif formé de deux parties principales, le cœur gauche et le cœur droit, séparées par un mur musculaire, le septum. Chaque partie contient une oreillette et un ventricule. Le ventricule gauche est plus épais que le ventricule droit. Le sang, venant des veines caves supérieure et inférieure, entre dans l'oreillette droite, puis dans le ventricule droit à travers la valve tricuspide, il est ensuite propulsé dans l'artère pulmonaire à travers la valve pulmonaire pour aller s'oxygéner au contact des poumons. Le sang, riche en oxygène, est conduit par les veines pulmonaires jusqu'à l'oreillette gauche. Il passe dans la valve mitrale et atteint ainsi le ventricule gauche. Enfin, le sang est rejeté dans l'aorte à travers la valve aortique pour apporter les nutriments aux cellules des organes du corps. Les valves mitrale et tricuspide sont rattachées à la paroi ventriculaire par des piliers musculaires. Voir Figure 1.1.

La paroi des cavités internes des ventricules est recouverte par un tissu qui s'appelle l'endocarde. La paroi externe est recouverte par une membrane tissulaire, l'épicarde, et finalement le cœur est contenu dans un sac fibreux, le péricarde, permettant au myocarde de résister aux augmentations rapides de taille du muscle cardiaque. Dans le cœur gauche il n'y a pas de muscles entre la valve mitrale et la valve aortique, ces deux valves sont séparées par du tissu conjonctif. Par contre dans le cœur droit, la valve tricuspide et la valve pulmonaire sont séparées par une région musculaire appelée la crête supraventriculaire.

Le ventricule gauche a une forme géométrique relativement simple, proche d'une partie d'ellipsoïde. On considère qu'il a une forme de révolution. Le ventricule droit a une forme géométrique plus compliquée, il ressemble à un tube en U collé au ventricule gauche.

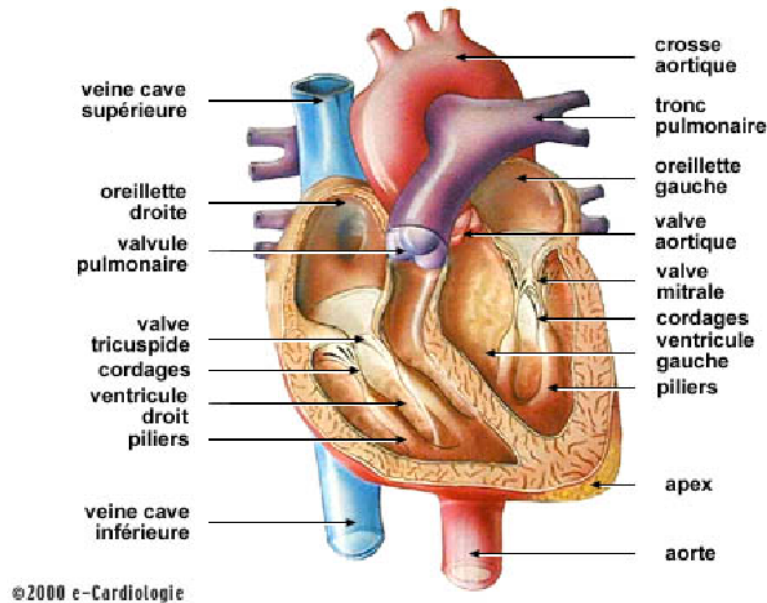


FIG. 1.1 – Dessin du cœur faisant apparaître les quatre cavités, les quatre valves et l'épaisseur.

### 1.1.2 Description à l'échelle microscopique

Les cellules myocardiques, ou cardiomyocytes, sont cylindriques et très petites, 10-20  $\mu\text{m}$  de diamètre et 60-100  $\mu\text{m}$  de longueur. Chaque cardiomyocyte est formé par des unités contractiles, les sarcomères (1,6-2,5  $\mu\text{m}$  de longueur) qui sont les éléments basiques responsables de la contraction cardiaque. La structure d'un sarcomère consiste en un arrangement parallèle de filaments d'actine et de myosine, Figure 1.2. Un sarcomère se décompose en une strie Z, une demi-bande I, une bande A qui contient une zone H, une demi-bande I et une strie Z. La bande A est sombre, biréfringente et composée de filaments minces d'actine et de filaments épais de myosine. La zone H est également sombre, biréfringente et contient de la myosine. La bande I est claire, monoréfringente et contient de l'actine.

Les myofilaments sont capables de produire une force dans la direction parallèle à leur longueur. L'énergie chimique pour la génération de force est contrôlée par la concentration du calcium,  $[\text{Ca}^{2+}]$ . La libération de calcium  $\text{Ca}^{2+}$  est activée par l'excitation électrique des cellules myocardiques. Le calcium agit sur les sarcomères afin de former des "ponts" d'actine et de myosine, et produit le glissement entre ces myofilaments ce qui conduit à la contraction.

Les cardiomyocytes sont attachés bout à bout par des anastomoses qui forment des jonctions en Y ou en I. Localement une direction privilégiée peut être déterminée, la direction de la fibre. De plus, on observe que sur une partie de leur parcours, des fibres voisines restent parallèles et forment une même couche, voir plus loin. Pour les muscles papillaires qui relient les valves à la surface endocardique, la détermination des directions principales des fibres ne pose aucune difficulté, les fibres sont toutes parallèles les unes aux autres. Par contre, les fibres du ventricule

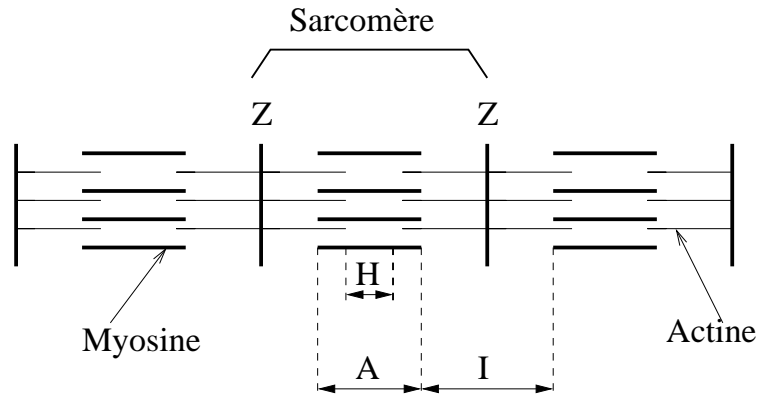


FIG. 1.2 – Structure d'un sarcomère : les segments verticaux en gras sont les stries Z séparant deux sarcomères, les segments horizontaux correspondent aux filaments de myosine en gras et aux filaments d'actine.

gauche suivent des trajectoires qui sont circulaires ou presque circulaires au niveau équatorial du milieu de l'épaisseur et elles deviennent progressivement inclinées lorsque l'on se déplace vers l'épicarde ou l'endocarde avec des orientations opposées, Figure 1.3.

Les fibres myocardiques baignent dans une matrice extracellulaire de collagène et d'élastine qui les protège d'élongations excessives et sert à transférer la force active à travers le tissu, Figure 1.4.

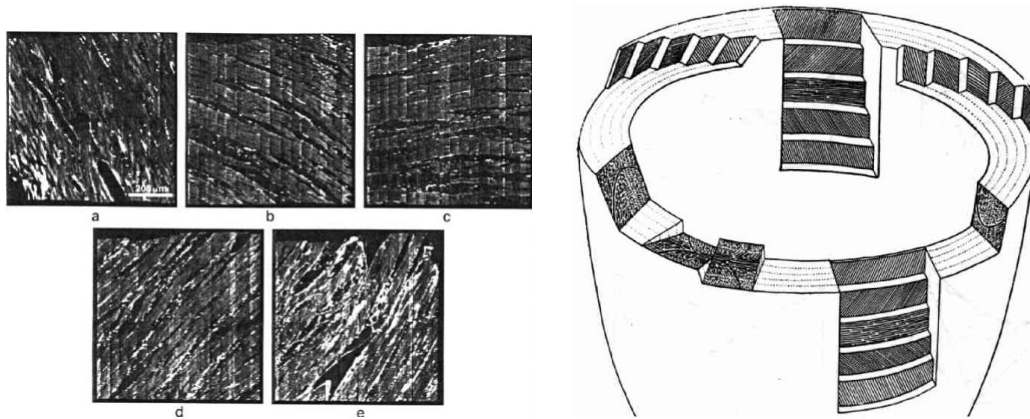


FIG. 1.3 – A gauche, des coupes obtenues au niveau équatoriale de la partie libre du ventricule gauche, de l'épicarde (a) à l'endocarde (e), (Young et al. [104]). A droite, un dessin montrant l'organisation des fibres du ventricule gauche en surfaces emboîtées et leur orientation, (Feneis [31]).



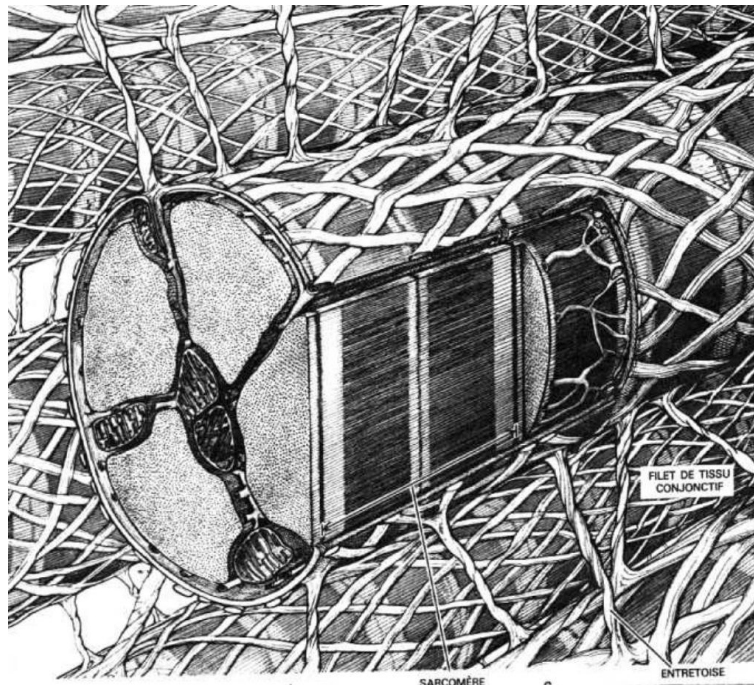


FIG. 1.4 – Un cardiomyocyte entouré et connecté à d’autres cardiomyocytes par des fibres de collagène (Robinson et al. [76]).

### 1.1.3 Orientation des fibres

Plusieurs études ont été consacrées à décrire l’organisation géométrique des fibres myocardiques, Krehl [50], Robb et Robb [75], Torrent-Guasp [93], Feneis [31], Robinson et al. [76], Streeter et al. [84], Streeter [85], Chadwick [20], Le Grice et al. [53], Jouk et al. [46]. Les limitations des modèles basés sur la technique de dissection ont été prouvées récemment.

Krehl (1891) [50] est le premier à avoir observé que les fibres du ventricule gauche forment des spires : une même fibre est sous-épicaudique sur une partie de son parcours et sous-endocardique sur une autre partie. Elle passe de l’épicaudique à l’endocardique par l’apex et de l’endocardique à l’épicaudique au niveau de l’orifice mitro-aortique. L’apex doit être compris comme un point de passage de fibres, mais non comme un orifice biologique. Cette description a été validée et précisée 88 ans plus tard par Streeter (1979) [84] qui a introduit un modèle topologique du ventricule gauche où les fibres courent comme des géodésiques sur un ensemble de surfaces toroïdales emboîtées, c’est-à-dire qu’elles suivent des plus courts chemins. Le modèle de Streeter a été étendu par Sanchez-Quintana et al. [79] qui ont considéré que les fibres étaient rangées en trois couches : superficielle (sous-épicaudique), moyenne, et profonde (sous-endocardique). Les couches superficielle et profonde sont présentes dans les deux ventricules tandis que la couche moyenne est trouvée seulement dans le ventricule gauche et elle est constituée de fibres circulaires. La distinction entre les trois couches était basée sur le changement progressif des directions des fibres.

Les nouvelles mesures obtenues par Le Grice et al. [53] sont cohérentes avec celles de Streeter, mais cette fois-ci une description globale de la microstructure cardiaque est proposée. En effet, leurs études ont montré que croisant l'organisation en couches déjà évoquée, il existe une structure en feuilles, voir Figure 1.5. Ces feuilles ont en moyenne quatre cellules d'épaisseur, les feuilles voisines sont liées les unes aux autres et elles sont entourées par une matrice de collagène. La nature et l'arrangement des branchements varient selon la position dans le muscle cardiaque. L'orientation des feuilles est en général perpendiculaire aux surfaces ventriculaires. Cette structure laminaire fait apparaître des espaces entre les différentes couches et par suite des plans de clivage peuvent être observés.

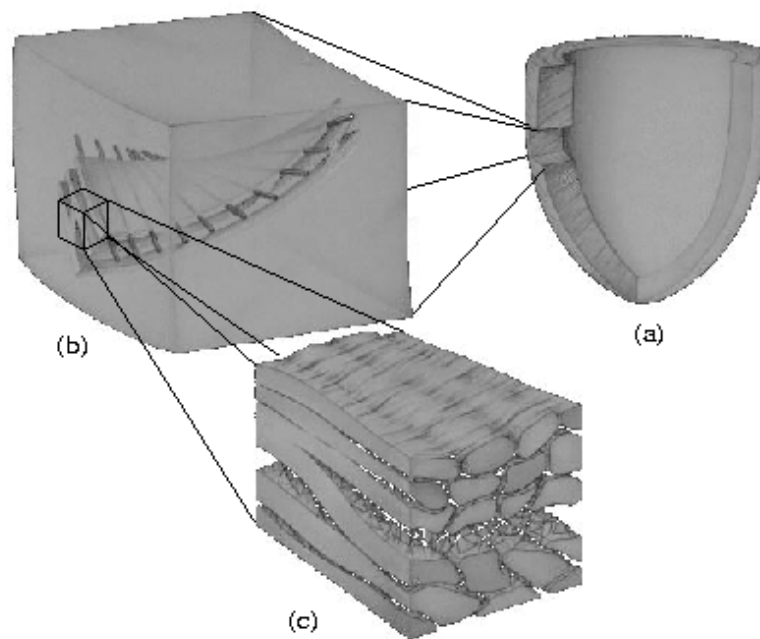


FIG. 1.5 – Modèle de Le Grice et al. [53].

Plus récemment, Jouk et al. [47] ont étendu le modèle de Streeter à l'ensemble du myocarde selon la représentation suivante, Figure 1.6. Ils ont par ailleurs développé une technique sophistiquée de mesure de l'orientation des fibres que nous décrivons en Annexe A.

## 1.2 Contraction musculaire

Les quatre pompes cardiaques (deux oreillettes et deux ventricules) se dilatent et se contractent de façon synchrone quand le cœur bat. La même quantité du sang passe dans chaque ventricule pendant la contraction. Pour plus de détails, voir Katz [48] et Swynghedauw [87].

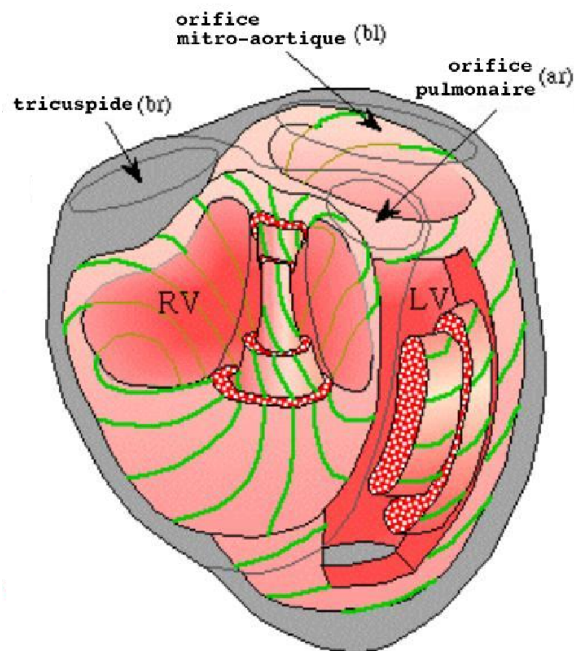


FIG. 1.6 – Modèle de Jouk et al. [47].

### 1.2.1 Précharge et postcharge

Deux concepts très importants interviennent dans le mécanisme du muscle cardiaque, on parle de la précharge et la postcharge. La précharge peut être vue comme un poids étirant le muscle avant qu'il soit stimulé pour se contracter. La postcharge joue le rôle d'un poids accroché au muscle sans influencer son étirement (par exemple, l'on imagine un poids supporté par une table, voir Figure 1.7), et il n'entre en jeu qu'après que le muscle commence à se contracter. Pour le muscle cardiaque, le retour veineux pendant la diastole constitue la précharge parce qu'il dilate les ventricules en état de repos électrique, tandis que le sang sous pression dans les grands vaisseaux (l'aorte et l'artère pulmonaire) représente la postcharge qui n'intervient qu'après que les ventricules développent une pression significative pour la contraction et que les valves aortique et pulmonaire soient ouvertes, ce qui fait donc que la postcharge s'oppose à l'éjection du sang par les ventricules.

### 1.2.2 La courbe charge-vitesse

Après être préétiré à une certaine longueur  $L$  (longueur initiale imposée qui peut être obtenue en accrochant une précharge à un échantillon du muscle à l'état passif), une charge  $P$  jouant le rôle d'une postcharge est accrochée à un échantillon du muscle qui est ensuite stimulé électriquement. L'échantillon se contracte donc avec une certaine vitesse qu'on mesure au début de

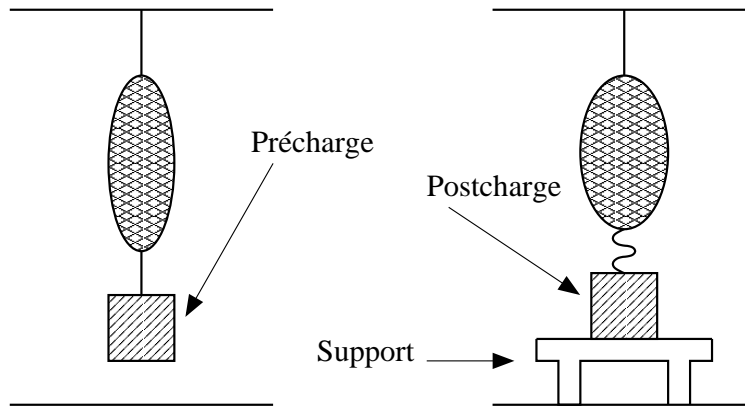


FIG. 1.7 – Différence entre précharge et postcharge. La précharge allonge le muscle au repos, alors que la postcharge est supportée de façon qu'elle n'est pas ressentie par le muscle avant qu'il se contracte (Katz [48]).

la contraction. Plus la postcharge est élevée, plus la vitesse de raccourcissement est lente. A la limite, pour une charge  $P_0$  importante le muscle ne se contractera plus. En revanche la vitesse de raccourcissement sera maximale pour une charge presque nulle. Ceci fait que la courbe charge-vitesse de raccourcissement a une forme hyperbolique, voir Figure 1.8. Hill a pu établir à partir d'expériences l'expression reliant la charge  $P$  et la vitesse de raccourcissement  $v$ , d'où la fameuse équation dite l'équation de Hill [40] :

$$(P + a)(v + b) = (P_0 + a)b, \quad (1.1)$$

où  $a$  est une constante caractéristique du muscle qui définit la quantité de chaleur libérée pour chaque centimètre de raccourcissement,  $b$  est une constante de proportionnalité.

En prenant  $P = 0$  dans l'équation de Hill on obtient  $V_{\max} = \frac{b}{a}P_0$  qui est un paramètre très important, caractéristique d'un muscle donné, car il est indépendant de la charge  $P$ . En effet, pour une autre longueur initiale, c'est-à-dire pour une autre précharge, et en stimulant le muscle électriquement, on retrouve la même valeur  $V_{\max}$ , Katz [48]. Donc, pour un muscle donné, toutes les courbes charge-vitesse pour de longueurs initiales différentes se recoupent au même endroit sur l'axe des vitesses, voir Figure 1.8.

La vitesse  $V_{\max}$  dépend de capacités intrinsèques, génétiquement déterminées du muscle. Elle dépend aussi de la vitesse à laquelle les mouvements intracellulaires du calcium sont effectués. On peut la modifier par des agents inotropes, comme les catécholamines ou la digitaline, qui agissent sur la transition intracellulaire en calcium.

### 1.2.3 Les courbes longueur-tension

Comme toute autre structure élastique, en l'étirant à l'état passif, le muscle développe une tension qu'on appelle tension passive. La courbe longueur-tension passive met en évidence les

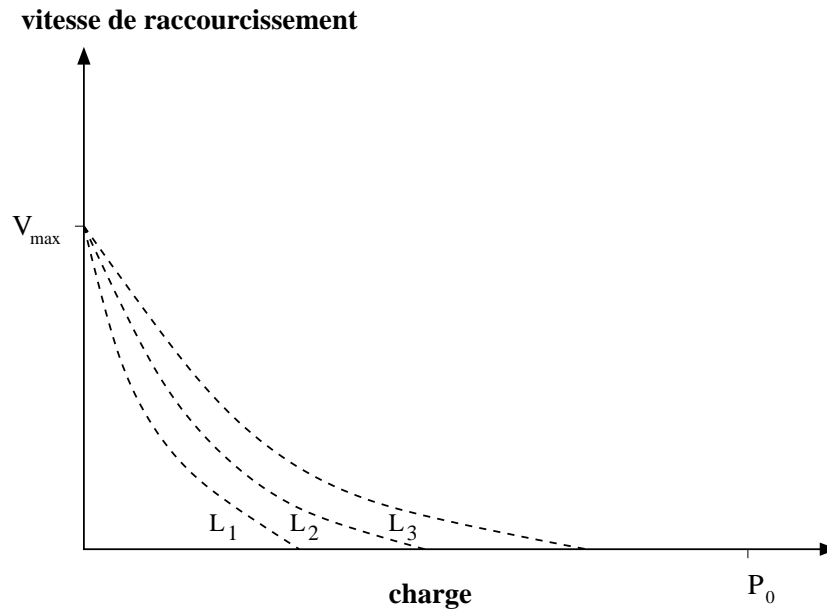


FIG. 1.8 – La courbe charge-vitesse construite pour différentes longueurs initiales obtenues en préétirant la fibre à des longueurs croissantes  $L_1, L_2, L_3$  (Swynghedauw [87]).

propriétés passives du muscle. La différence entre les tissus musculaires et les tissus industriels élastiques réside dans la forme de la courbe longueur-tension. Pour les tissus musculaires la tension croît de façon exponentielle avec la longueur, alors que dans la plupart des modèles élastiques classiques elle est polynomiale, voir Figure 1.9 à gauche. La rigidité tissulaire d'un muscle dépend de sa texture et en tout premier lieu de sa concentration en collagène.

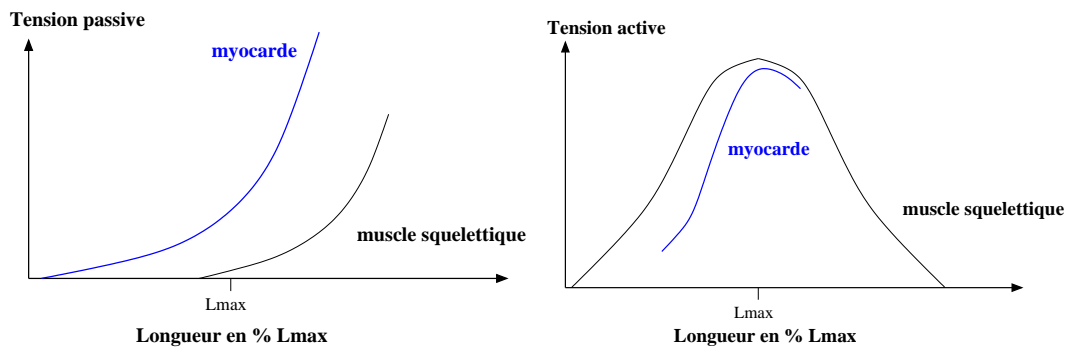


FIG. 1.9 – Les courbes longueur-tension passive à gauche et longueur-tension active à droite pour les muscles squelettique et cardiaque (Swynghedauw [87]).

Pour une longueur initiale obtenue en lui accrochant une certaine précharge, et en le stimulant électriquement, le muscle se contracte et développe une certaine tension dite tension

active. Plus le muscle est étiré avant stimulation, plus la tension développée après stimulation est grande.

Les courbes longueur-tension active obtenues sont dans les cas des muscles squelettique et cardiaque différentes. Dans le cas du muscle squelettique, la courbe longueur-tension active a une forme de cloche, la tension est maximale pour une longueur intermédiaire du muscle, notée  $L_{\max}$ . La relation longueur-tension active du muscle papillaire est particulière et diffère de celle du muscle d'origine squelettique. Elle est en effet beaucoup plus pentue, et sur sa portion ascendante la tension croît beaucoup plus rapidement que ce n'est le cas dans le muscle squelettique. Cette propriété permet au myocarde de se mettre en tension, de développer une tension maximale très rapidement pour des changements relativement mineurs de longueur initiale, voir Figure 1.9 à droite. Une longueur optimale du sarcomère de  $2,2 \mu\text{m}$  environ apparaît quand la force développée est maximale, c'est la position où la superposition des myofilaments est maximale. La relation longueur-tension du sarcomère joue un rôle très important dans la régularisation de la génération de force par le muscle cardiaque. La longueur des sarcomères est déterminée par la précharge qui elle aussi est influencée par le volume du sang retournant pendant la diastole et celui restant dans les ventricules après la systole précédente. Ceci permet à la relation longueur-tension de jouer un rôle majeur en ajustant l'abilité du cœur de compenser les changements du retour veineux et du volume résiduel du sang et d'équilibrer le volume du sang sortant des deux ventricules.

## 1.3 La pompe cardiaque

### 1.3.1 Cycle cardiaque

Pendant le cycle cardiaque on distingue quatre phases principales : remplissage, contraction isovolumique, éjection et relaxation isovolumique. A la fin du remplissage, la télédiastole, les deux ventricules sont remplis de sang, les quatre valves (mitrale, aortique, tricuspide et pulmonaire) sont fermées. A cet instant et après son passage à travers le nœud auriculo-ventriculaire, l'onde électrique arrive aux branches du tissu de conduction dans la partie ventriculaire et la contraction des ventricules se déclenche avec les valves fermées, donc à volume de sang constant, d'où le nom de contraction isovolumique (presque 50 msec dans le cœur adulte). Pendant cette phase la pression dans la cavité ventriculaire gauche (resp. droite) augmente jusqu'à ce qu'elle atteigne la pression de l'aorte (resp. la pression de l'artère pulmonaire), ce qui conduit à l'ouverture de la valve aortique (resp. pulmonaire) et le sang est ainsi propulsé dans l'aorte (resp. l'artère pulmonaire), on parle donc de la phase d'éjection. Les deux valves se ferment environ 300 msec après leur ouverture, on est au maximum d'activation, la télésystole. Comme la pression dans l'artère pulmonaire est plus petite que celle de l'aorte, la valve pulmonaire s'ouvre en fait avant et se ferme après la valve aortique. Ensuite, les quatre valves sont fermées, les ventricules se relâchent, c'est la phase de la relaxation isovolumique qui dure presque 100 msec. Pendant cette phase les ventricules sont encore activés, la pression ventriculaire chute jusqu'à atteindre la pression auriculaire d'où l'ouverture des valves mitrale et tricuspide et donc le remplissage des ventricules. On peut décomposer cette phase en deux parties : un remplis-

sage rapide pendant lequel presque 70% du volume total du sang entrant dans les ventricules prend place dans les cavités et un remplissage lent pendant lequel le reste du sang occupant les oreillettes est propulsé vers les ventricules. Le remplissage rapide est dû à l'aspiration du sang par les ventricules à cause de la différence de pression. Pendant le remplissage lent la partie ventriculaire est dans un état passif. Après le remplissage des ventricules qui dure environ 300 msec, le gradient de pression est renversé, d'où la fermeture des valves mitrale et tricuspide. Cette fermeture ne peut pas être complètement passive car les côtés auriculaires des valves mitrale et tricuspide, contrairement aux valves aortique et pulmonaire, sont couplés électriquement avec les oreillettes. Et ainsi le cycle se répète, voir Figures 1.10 et 1.11.

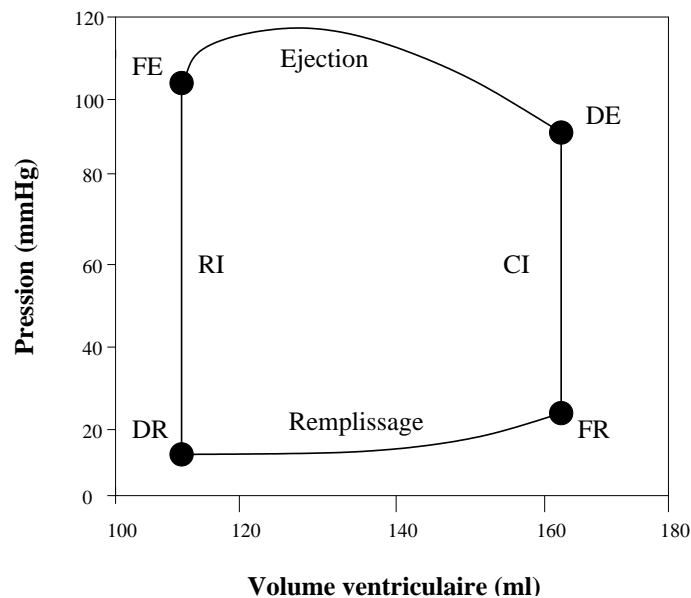


FIG. 1.10 – La courbe pression-volume pendant un cycle cardiaque. Avec les notations suivantes, DR : début du remplissage, FR : fin du remplissage, CI : contraction isovolumique, DE : début de l'éjection, FE : fin de l'éjection, et RI : relaxation isovolumique (Cai [16]).

Pendant la contraction, l'épaisseur du muscle cardiaque augmente de presque 40% de son épaisseur à l'état passif et l'axe longitudinal se raccourcit de presque 20%. La plupart des lois mécaniques proposées dans la littérature pour le myocarde sont considérées incompressibles. La fraction d'éjection est définie comme étant le rapport entre le volume éjecté et le volume télédiastolique. Pour un cœur normal la fraction d'éjection est égale à peu près à 50%.

### 1.3.2 Courbe pression-volume

Les paramètres mécaniques les plus basiques décrivant la performance de la pompe cardiaque sont la pression du sang dans les cavités ventriculaires et son volume. Les relations pression-volume pendant le cycle cardiaque des deux ventricules ont la même forme mais la

pression du ventricule gauche est presque 5 fois plus grande que celle du ventricule droit. Les phases isovolumiques du cycle cardiaque correspondent aux deux segments verticaux de la boucle pression-volume, alors que la partie inférieure représente le remplissage ventriculaire et la partie supérieure représente la phase d'éjection. La différence sur l'axe horizontal entre les deux segments verticaux correspond au volume du sang éjecté.

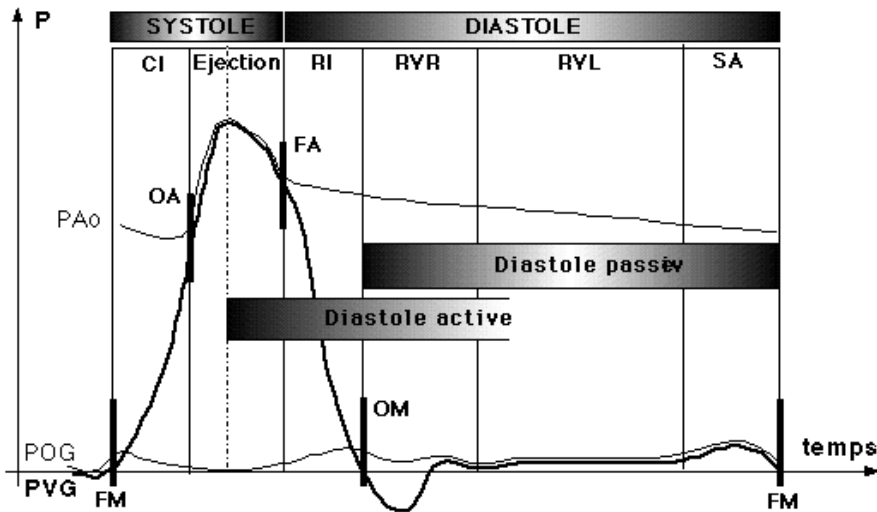


FIG. 1.11 – Les différentes phases du cycle cardiaque. CI : Contraction isovolumique, FAo : Fermeture aortique, FM : Fermeture mitrale, OAo : Ouverture aortique, OM : Ouverture mitrale, PAo : Pression aortique, POG : Pression de l'oreillette gauche, PVG : Pression ventriculaire gauche, RI : Relaxation isovolumique, RV : Remplissage ventriculaire lent, RVR : Remplissage ventriculaire rapide, SA : Systole auriculaire (Denis [27]).

En se basant sur des expériences faites sur un cœur isolé de grenouille, Frank (1895) s'est aperçu que les augmentations du volume télédiastolique et de la pression systolique sont liées. Son expérience consiste à étudier la pression intraventriculaire d'un cœur de grenouille clampé à l'aorte mais dont le remplissage ventriculaire persiste, Denis [27]. Dans des conditions plus proches de la réalité, Starling (1914) a étudié sur le cœur isolé de chien l'influence de la précharge. Il a mis au point la préparation cœur-poumons qui consiste à laisser le circuit pulmonaire intact, et à brancher entre l'origine de l'aorte et la terminaison des veines caves, un circuit systémique artificiel, Denis [27]. Il est possible, en agissant sur le calibre d'une portion du circuit systémique, de faire varier les résistances à l'écoulement du sang ; il est de même possible de faire varier la pression de remplissage du cœur droit, en intercalant à la terminaison du circuit, un réservoir de hauteur réglable ; la pression de remplissage est d'autant plus élevée que le réservoir est placé plus haut par rapport au cœur. Il a remarqué qu'en dehors de toute innervation le cœur va éjecter spontanément autant du sang qu'il en reçoit. Cette relation porte un nom particulier en physiologie cardiaque : c'est la **loi de Starling**. En effet, une augmentation de la pression de remplissage, c'est-à-dire la pression veineuse, conduit à une



augmentation du volume télédiastolique et ainsi à une dilatation de la cavité ventriculaire. Ceci revient à augmenter par étirement la longueur initiale à laquelle le muscle va se contracter et par suite la force de contraction devient plus importante selon la relation longueur-tension décrite précédemment. Le volume qui sera ensuite éjecté à chaque battement augmentera proportionnellement au volume télédiastolique. Les expériences de Starling (et de Frank) ont aussi consisté à faire l'expérience inverse, c'est-à-dire à montrer que le volume télédiastolique augmente en réponse à une élévation de la pression d'éjection ou du volume éjecté. Pour des pressions ou des volumes télédiastoliques élevés, la relation devient inverse, et la pression d'éjection, aussi bien que le volume éjecté diminuent. Dans ces conditions, le myocarde atteint rapidement un état d'instabilité et de défaillance.

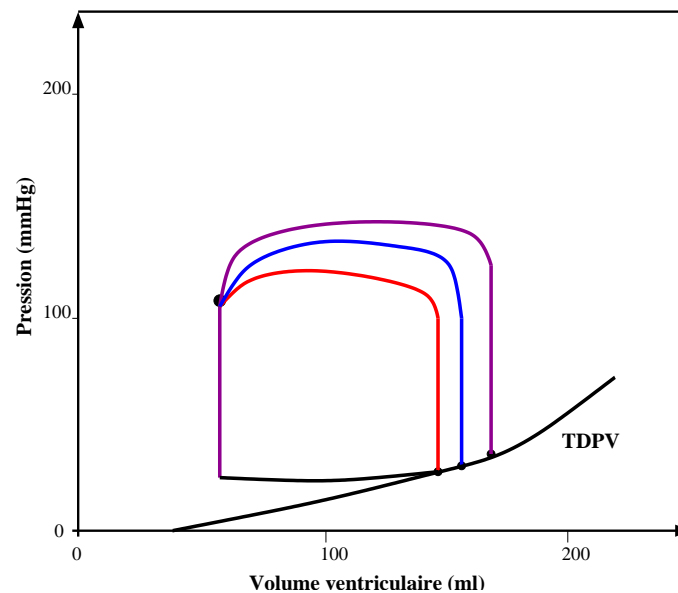


FIG. 1.12 – Plusieurs boucles pression-volume obtenues en variant la précharge tout en maintenant la pression télé-systolique. La courbe TDPV représente la relation pression-volume télédiastolique (Swynghedauw [87]).

Les changements de la pression de remplissage d'un ventricule (précharge) déplacent le point télédiastolique le long d'une courbe appelée la relation pression volume télédiastolique et notée (TDPV), voir Figure 1.12. Cette courbe représente le remplissage passif des chambres qui est déterminé par la forme géométrique du muscle et de son comportement élastique non linéaire. De même, si le postcharge du ventricule gauche augmente, le volume éjecté diminue. Le point télé-systolique varie sur une courbe appelée la relation pression-volume télé-systolique et notée par (TSPV), voir Figure 1.13.

La courbe (TSVP) sert à déterminer le degré d'insuffisance cardiaque en clinique. Elle est analogue à celle de la relation longueur-tension active illustrée dans Figure 1.9 à droite et elle comporte une partie ascendante et une partie descendante. La courbe (TDPV) correspond à la

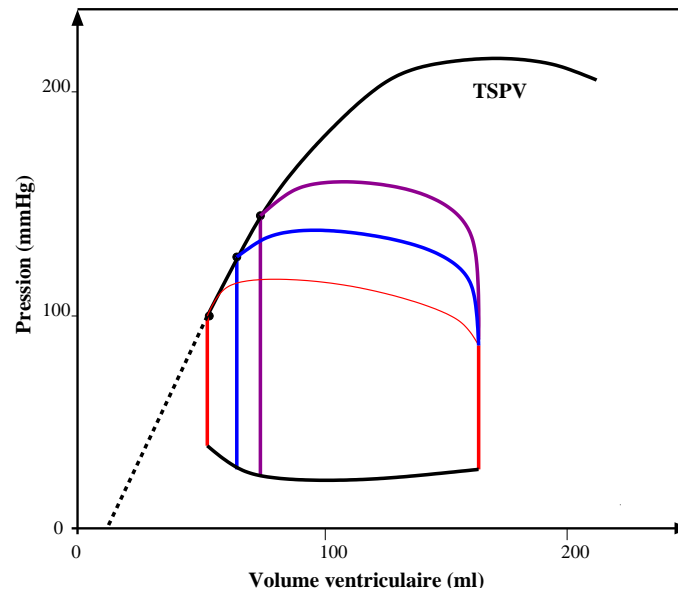


FIG. 1.13 – Plusieurs boucles pression-volume obtenues en variant la postcharge tout en maintenant le volume télédiastolique. La courbe TSPV représente la relation pression-volume téléstolique (Swynghedauw [87]).

courbe tension passive Figure 1.9 à gauche et donne une idée du degré de rigidité du ventricule. Ces deux comparaisons peuvent être expliquées par le fait que l'augmentation du volume cavitaire (télédiastolique ou téléstolique) conduit à l'étirement du muscle, et donc à l'augmentation de la longueur des cardiomyocytes. Et comme le muscle étiré développe une certaine tension qui augmente avec l'étirement sauf dans le cas d'étirements excessifs où la tension active décroît, alors cette tension influe sur la pression ventriculaire (télédiastolique ou systolique) qui augmente quand la tension augmente et diminue quand la tension diminue, donc elle varie de la même façon que la tension en fonction du volume télédiastolique.

## 1.4 L'activité électrique

L'activation électrique du cœur est initiée spontanément et périodiquement au nœud sinusal situé à côté de la jonction entre la veine cave supérieure et l'oreillette droite. Ce nœud consiste en un rassemblement de cellules appelées cellules "pacemaker". Les signaux de dépolarisation, aussi dits les potentiels d'action, sont générés par le nœud sinusal à une fréquence de 60 à 100 par minute. De ce nœud le potentiel d'action se propage d'une cellule à une autre à travers l'oreillette droite et puis l'oreillette gauche avec une vitesse de conduction de  $1 \text{ m.s}^{-1}$  jusqu'à ce qu'il atteigne le nœud auriculo-ventriculaire. Celui-ci est formé de cellules pacemaker similaires à celles du nœud sinusal, mais battant spontanément à une vitesse plus lente, approximativement 40 à 50 battements par minute. Elles sont gouvernées par la propagation venant du nœud sinusal.

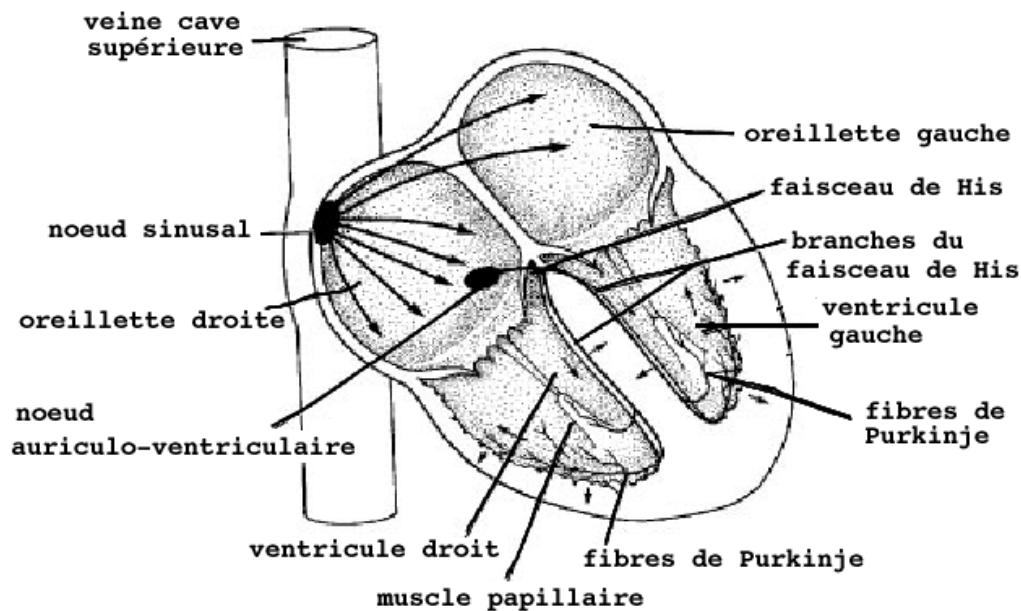


FIG. 1.14 – Système de conduction du cœur (Sands [81]).

La conduction à travers le nœud auriculo-ventriculaire se fait à une fréquence plus lente ( $0,05 \text{ m.s}^{-1}$  environ) laissant le temps aux oreillettes de se contracter et pomper le sang vers les ventricules avant que le potentiel d'action arrive aux ventricules et déclenche leur contraction. Ce nœud est la seule connexion électrique entre les oreillettes et les ventricules. La propagation électrique entre ensuite dans le faisceau de His qui est la partie supérieure du système de conduction ventriculaire et qui descend près du côté droit du septum. Le faisceau se décompose ensuite en deux branches, droite et gauche. La branche droite continue vers le bas du côté droit du septum, tandis que la branche gauche se décompose en deux branches principales dans le côté gauche du septum. Toutes ces branches continuent à se subdiviser en un réseau complexe de fibres appelées les fibres de Purkinje qui se propagent à travers l'endocarde et les régions sous-endocardiques des deux ventricules. C'est dans le faisceau de His et le réseau de Purkinje que la conduction est la plus rapide, elle est approximativement à  $2 \text{ m.s}^{-1}$  ce qui fait que l'endocarde est excité tout entier presque simultanément. Voir Figure 1.14.

Dans la partie ventriculaire, le septum est activé en premier et il pousse vers le ventricule gauche. Les muscles papillaires sont aussi activés tôt et ainsi ils empêchent les valves mitrale et tricuspide de s'ouvrir pendant le systole. L'excitation se propage à l'extérieur à travers le muscle ventriculaire avec une vitesse de  $0,3$  à  $0,4 \text{ m.s}^{-1}$ , et la première partie qui s'excite dans l'épicarde est la portion fine du ventricule droit. Les régions basales sont habituellement activées en dernier.

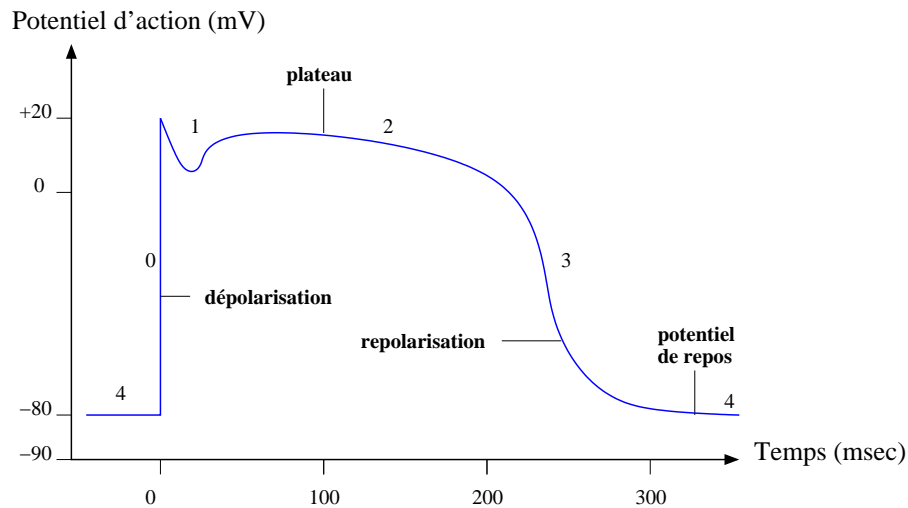


FIG. 1.15 – Potentiel d'action cardiaque (Swynghedauw [87]).

**Principe :** Au repos, la cellule est polarisée et elle a un certain potentiel appelé “potentiel de repos” dont les modifications forment ce qu’on appelle le potentiel d’action qui consiste en une commande électrique transmise par un messenger cellulaire, le calcium. Le potentiel d’action dure un peu plus de 300 msec et comporte cinq phases différentes : La phase 0 est une brutale dépolarisation augmentant la perméabilité de la membrane au sodium  $\text{Na}^+$ . Ensuite, la phase 1, pour une courte durée, est une repolarisation due à la fermeture des canaux de sodium, suivie par la phase 2 qui consiste en un plateau qui est maintenu par un courant entrant de calcium. Cette phase peut durer 100 msec environ et elle apparaît seulement dans les fibres de Purkinje et les cardiomyocytes. Le plateau est responsable de la longue durée du potentiel d’action. La repolarisation, phase 3, est due à de plusieurs courants sortant de potassium et elle remet le potentiel d’action à son état de repos, la phase 4. Voir Figure 1.15.



**Première partie**  
**Modélisation Géométrique**



# Introduction

La première partie de notre travail est consacrée à tester à partir de données anatomiques la conjecture de Streeter selon laquelle les fibres courent comme des géodésiques sur des surfaces emboîtées, et à reconstruire les fibres et les surfaces sur lesquelles elles courent. Nous définissons les fibres comme des courbes tangentes en chaque point à un champ donné de vecteurs et nous cherchons s'il existe des surfaces dont ces fibres seraient des géodésiques.

Dans le premier chapitre, nous présentons une introduction à la géométrie des courbes et des surfaces et nous nous intéressons en particulier à l'étude des géodésiques périodiques des surfaces de révolution. Ensuite, nous construisons un modèle abstrait du ventricule gauche qui consiste en des surfaces toroïdales emboîtées recouvertes par des réseaux de géodésiques périodiques. Ce modèle est utilisé pour valider les algorithmes numériques de reconstruction de courbes et de surfaces.

Pour la modélisation du ventricule droit dont la structure est plus complexe, nous utilisons des outils de conception géométrique assistée par ordinateur, plus précisément, les courbes et surfaces B-splines. Ces modèles sont présentés dans l'annexe B.

Dans le deuxième chapitre, on passe au traitement de données expérimentales. Nous présentons quelques méthodes numériques qui sont utilisées comme algorithmes de suivi de fibres pour en reconstruire les trajectoires. Ensuite, nous vérifions la conjecture de Streeter sur le ventricule gauche en utilisant l'invariance de la quantité de Clairaut le long des géodésiques des surfaces de révolution. Finalement, nous proposons un algorithme de reconstruction de surfaces.





# Chapitre 1

## Géométrie des courbes et des surfaces

Nous présentons dans ce chapitre des notions de base pour la géométrie des courbes et des surfaces, pour plus de détails voir Lelong-Ferrand et Arnaudiès [54], Braemer [12], Do Carmo [29], Berger et Gostiaux [6], Klingenberg [49] et Schwartz [82]. Ensuite, nous obtenons un résultat sur les géodésiques périodiques des surfaces toroïdales.

### 1.1 Courbes paramétrées

#### 1.1.1 Représentation paramétrique

**Définition 1.1** : On appelle courbe paramétrée de  $\mathbb{R}^3$  une application continue  $\phi : t \in I \mapsto \phi(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $I$  étant un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Une courbe paramétrée  $\phi$  est de classe  $C^r$  ( $r$  entier  $\geq 1$ ) si  $\phi$  possède des dérivées successives jusqu'à l'ordre  $r$ , continues dans l'intérieur de  $I$ .

Deux courbes paramétrées  $\phi : I \mapsto \mathbb{R}^3$  et  $\psi : J \mapsto \mathbb{R}^3$  sont dites équivalentes s'il existe une bijection  $\theta : I \mapsto J$  telle que  $\phi = \psi \circ \theta$ . On remarque que deux courbes paramétrées équivalentes ont la même image dans  $\mathbb{R}^3$ , mais la réciproque n'est pas vraie. Considérons par exemple les courbes paramétrées suivantes :  $\phi : t \in [0, 2\pi[ \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$  et  $\psi : t \in [0, 4\pi[ \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$ . Ces deux courbes ont la même image qui est le cercle du plan Oxy, de centre l'origine O et de rayon 1, pourtant ces deux courbes ne sont pas équivalentes.

**Définition 1.2** : Une courbe géométrique de  $\mathbb{R}^3$  est une classe  $\Gamma$  de courbes paramétrées équivalentes.

Une courbe paramétrée  $\phi$  de la classe  $\Gamma$  est dite une représentation paramétrique de  $\Gamma$ . La variable réelle  $t$  qui parcourt l'ensemble  $I$  est dite un paramètre de  $\Gamma$ .

Dans la suite de ce chapitre, on désignera une représentation paramétrique  $\phi$  d'une courbe

$\Gamma$  par le couple  $(\Gamma, \phi)$ .

Si la représentation paramétrique  $\phi$  d'une courbe  $\Gamma$  est injective, on dit que  $(\Gamma, \phi)$  est une *courbe paramétrée simple*. Dans l'hypothèse contraire, un point  $M$  de  $\Gamma$  tel que  $\phi^{-1}(M)$  contienne plus d'un élément est un point multiple de la courbe paramétrée  $(\Gamma, \phi)$  dont la multiplicité est le cardinal de  $\phi^{-1}(M)$ .

**Définition 1.3** : Soit  $(\Gamma, \phi)$  une courbe paramétrée telle que  $\phi$  est définie sur un intervalle fermé  $[a, b]$ . Si  $\phi(a) = \phi(b)$ , on dit que la courbe  $\Gamma$  est fermée. Si, en outre, la courbe paramétrée  $(\Gamma, \phi|_{[a, b[})$  est simple,  $\Gamma$  est appelée une courbe de Jordan.

**Définition 1.4** : Soit  $(\Gamma, \phi)$  une courbe paramétrée telle que l'intervalle de définition de  $\phi$  est  $\mathbb{R}$ . La courbe  $\Gamma$  est dite périodique si  $\phi$  est une fonction périodique.

Soit  $T > 0$  la période de  $\phi$ ,  $\phi|_{[0, T]}$  est une représentation paramétrique de  $\Gamma$  qui est une courbe fermée. Si, de plus,  $(\Gamma, \phi)$  est de classe  $C^r$ , alors :  $\phi(0) = \phi(T), \phi'(0) = \phi'(T), \dots, \phi^{(r)}(0) = \phi^{(r)}(T)$ .

## 1.1.2 Longueur d'une courbe - Abscisse curviligne

**Définition 1.5** : Une courbe paramétrée  $(\Gamma, \phi)$  de classe  $C^1$  est dite régulière si pour tout  $t$  dans l'intérieur de  $I$  on a  $\|\phi'(t)\| \neq 0$ .

Dans la suite on considère des courbes paramétrées régulières au moins de classe  $C^1$ .

**Définition 1.6** : Soit  $(\Gamma, \phi)$  une courbe paramétrée et  $a$  et  $b$  appartenant à  $I$ . On appelle longueur de  $(\Gamma, \phi)$  de  $a$  à  $b$ , l'intégrale  $\int_a^b \|\phi'(t)\| dt$ .

On vérifie directement que si  $\phi : I \mapsto \mathbb{R}^3$  et  $\psi : J \mapsto \mathbb{R}^3$  sont deux représentations paramétriques équivalentes de classe  $C^1$  d'une courbe  $\Gamma$ , alors  $\int_I \|\phi'(t)\| dt = \int_J \|\psi'(t)\| dt$ .

**Définition 1.7** : Si  $(\Gamma, \phi)$  est une courbe paramétrée, on définit l'abscisse curviligne de  $\Gamma$  à partir d'un point  $t_0$  appartenant à  $I$  par :

$$\forall t \in I, \quad s(t) = \int_{t_0}^t \|\phi'(u)\| du.$$

Le point  $\phi(t_0)$  de  $\Gamma$  est l'origine de l'abscisse curviligne  $s$ .

Il est clair que  $s(t)$  est la longueur de  $(\Gamma, \phi)$  de  $t_0$  à  $t$ .

Pour que le paramètre  $t$  coïncide, à une constante additive près, avec la longueur de la courbe entre un point de paramètre  $t_0$  et le point de paramètre  $t$ , il faut et il suffit que, pour tout  $t \in I$ ,  $\|\phi'(t)\| = 1$ . Dans ce cas,  $s = t - t_0$ . On dit alors que l'on a paramétré par l'abscisse curviligne.

Si  $\Gamma$  est une courbe géométrique et  $\phi$  une paramétrisation de  $\Gamma$  par l'abscisse curviligne  $s$  qui appartient à l'intervalle  $(a, b)$ , alors  $\psi$  définie sur  $(-b, -a)$  par  $\psi(u) = \phi(-u)$  est une autre paramétrisation de  $\Gamma$  par l'abscisse curviligne, mais elle est décrite dans la direction opposée de celle de  $\phi$ . On dit que  $(\Gamma, \phi)$  et  $(\Gamma, \psi)$  sont deux courbes paramétrées qui diffèrent par le changement d'orientation. Ici, l'intervalle  $(a, b)$  peut être fermé, ouvert ou bien semi-ouvert.

**Proposition 1.1** : *Toute courbe géométrique  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^3$  admet des paramétrisations par l'abscisse curviligne. Si  $\phi$  en est une, toute autre est de la forme  $s \mapsto \phi(s + a)$  ou  $s \mapsto \phi(-s + a)$ , avec  $a$  réel quelconque.*

**Démonstration.** voir Berger et Gostiaux [6]. □

La proposition suivante découle immédiatement de la définition de la longueur.

**Proposition 1.2** : *Soit  $(\Gamma, \phi)$  une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne. Si  $(\Gamma, \phi)$  est périodique de période  $T > 0$ , alors  $T$  est la longueur de la courbe de 0 à  $T$ .*

### 1.1.3 Tangente et normale à une courbe

Soit  $(\Gamma, \phi)$  une courbe paramétrée de classe  $C^2$ . La tangente à  $\Gamma$  au point  $M = \phi(t)$  est la droite passant par  $M$  et de vecteur directeur  $\phi'(t)$ . Le vecteur unitaire tangent à  $\Gamma$  est donc défini par

$$\tau(t) = \frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|}.$$

Comme  $\tau(t)$  est de norme 1, on a  $\forall t \in I, \tau(t) \cdot \tau'(t) = 0$ .

Par définition, la courbure en  $t$  est donnée par  $k(t) = \|\tau'(t)\|$ , et le rayon de courbure (éventuellement infini) par  $R(t) = k(t)^{-1}$ . En tout point où la courbure est non nulle, on définit la normale principale unitaire  $\mathbf{n}(t)$  et le vecteur binormale  $\mathbf{b}(t)$  par

$$\tau'(t) = -\frac{\mathbf{n}(t)}{R(t)} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}(t) = \tau(t) \wedge \mathbf{n}(t).$$

## 1.2 Surfaces paramétrées

On suppose dans ce qui suit  $\mathbb{R}^3$  rapporté à un repère orthonormé qu'on note Oxyz.

**Définition 1.8** : *une surface paramétrée de  $\mathbb{R}^3$  est une application continue  $\mathbf{S} : (u, v) \in \omega \mapsto \mathbf{S}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\omega$  étant un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^2$ .*

Une surface paramétrée  $\mathbf{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  est dite de classe  $C^r$  lorsqu'elle possède des dérivées partielles successives jusqu'à l'ordre  $r$ , continues dans l'intérieur de  $\omega$ . On pose :

$$\partial_u \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \quad \text{et} \quad \partial_v \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}.$$

Comme dans le cas de courbes paramétrées, deux surfaces paramétrées  $\mathbf{S}_1 : \omega_1 \mapsto \mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{S}_2 : \omega_2 \mapsto \mathbb{R}^3$  sont dites équivalentes s'il existe une bijection  $\theta : \omega_1 \mapsto \omega_2$  telle que  $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2 \circ \theta$ . On remarque aussi que deux surfaces paramétrées équivalentes ont la même image dans  $\mathbb{R}^3$ , mais la réciproque n'est pas vraie.

**Définition 1.9** : Une surface géométrique de  $\mathbb{R}^3$  est une classe  $\Sigma$  de surfaces paramétrées équivalentes.

Une surface paramétrée  $\mathbf{S} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3$  de la classe  $\Sigma$  est dite une représentation paramétrique de  $\Sigma$ . Dans la suite, on désignera une surface géométrique  $\Sigma$  par le couple  $(\Sigma, \mathbf{S})$  où  $\mathbf{S}$  est une représentation paramétrique de  $\Sigma$ .

**Définition 1.10** : Une surface géométrique  $(\Sigma, \mathbf{S})$  de  $\mathbb{R}^3$  est dite surface régulière si la différentielle de  $\mathbf{S}$  en chaque point de  $\omega$  est une application linéaire de rang 2.

**Proposition 1.3** : Une surface géométrique  $(\Sigma, \mathbf{S})$  de  $\mathbb{R}^3$  est régulière si et seulement si pour tout  $(u, v) \in \omega$ , les vecteurs  $\partial_u \mathbf{S}$  et  $\partial_v \mathbf{S}$  sont linéairement indépendants.

Le plan tangent  $\pi_M$  à  $\Sigma$  au point  $M$  est le plan engendré par  $\partial_u \mathbf{S}$  et  $\partial_v \mathbf{S}$ . Le produit vectoriel  $\partial_u \mathbf{S} \wedge \partial_v \mathbf{S}$  est différent de zéro et est normal à  $\pi_M$ , on dit qu'il est normal à  $\Sigma$ . On définit le vecteur normale unitaire  $\mathbf{v}$  par :

$$\mathbf{v} = \frac{\partial_u \mathbf{S} \wedge \partial_v \mathbf{S}}{\|\partial_u \mathbf{S} \wedge \partial_v \mathbf{S}\|}.$$

On constate aisément que  $\pi_M$  et  $\mathbf{v}$  sont indépendants de la paramétrisation.

**Surfaces de révolution** Une surface de révolution  $\Sigma$  d'axe  $Oz$  de classe  $C^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  peut être définie paramétriquement par :

$$\mathbf{S}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad (1.1)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions réelles de classe  $C^2$ . Cette surface est obtenue par rotation autour de l'axe  $Oz$  d'une courbe plane méridienne  $C_0$  dont l'équation dans le plan  $xOz$  est définie paramétriquement par  $v \mapsto (f(v), g(v))$ . On suppose que la courbe  $C_0$  est régulière, i.e.  $\forall v, f'^2(v) + g'^2(v) \neq 0$ , et que la fonction  $f$  ne s'annule pas. Elle garde donc un signe constant, par exemple positif. Le paramètre  $u$  est l'angle de rotation autour de l'axe  $Oz$  et  $f(v)$  est la

distance des points de  $\Sigma$  à l'axe Oz. Les vecteurs tangents aux lignes de courbes en  $u$  et en  $v$  sont respectivement

$$\partial_u \mathbf{S} = (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0), \quad \text{et} \quad \partial_v \mathbf{S} = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v)). \quad (1.2)$$

On remarque dans ce cas que ces deux vecteurs sont orthogonaux. De plus, avec les hypothèses faites sur  $f$  et  $g$ , ces deux vecteurs sont non nuls et sont donc bien linéairement indépendants.

**Surfaces toroïdales** Considérons une courbe méridienne  $C_0$  du plan  $xOz$  périodique de période  $p$  et régulière de représentation paramétrique  $(f(v), g(v))$ . On suppose que tout couple  $(v_1, v_2)$  tel que  $(f(v_1), g(v_1)) = (f(v_2), g(v_2))$  vérifie  $v_2 - v_1 \in p\mathbb{Z}$ , ce qui signifie que la courbe  $C_0$  est simple. Enfin, comme ci-dessus on suppose que  $C_0$  ne rencontre pas l'axe Oz, et que la fonction  $f$  est strictement positive. Nous disons que la surface de révolution engendrée par  $C_0$  est toroïdale.

*Exemple d'une surface toroïdale : Le tore.* Soit  $C_0$  le cercle du plan  $xOz$  de rayon  $r$  et de centre  $(x = R, z = 0)$ , où  $R > r > 0$ . Ce cercle peut être définie par  $f(v) = R + r \cos v$  et  $g(v) = r \sin v$ . La surface engendrée par la rotation de  $C_0$  autour de l'axe Oz est appelée tore.

### 1.3 Courbe tracée sur une surface de révolution

Soit  $\Sigma$  une surface de révolution et soit  $(\Gamma, \phi)$  une courbe paramétrée tracée sur  $\Sigma$ . Cette courbe peut être définie paramétriquement par :

$$t \mapsto \phi(t) = \mathbf{S}(u(t), v(t)).$$

Un simple calcul permet d'obtenir le résultat suivant :

**Lemme 1.1** : *Une paramétrisation  $\phi$  d'une courbe sur une surface de révolution est une paramétrisation par l'abscisse curviligne si et seulement si*

$$(f'^2 + g'^2)v^2 + f^2u^2 = 1. \quad (1.3)$$

Intéressons-nous maintenant aux courbes fermées tracées sur des surfaces toroïdales.

**Lemme 1.2** : *Dans le cas où  $\Sigma$  est une surface toroïdale, si  $\Gamma$  est fermée,  $I = [a, b]$  l'intervalle de définition de  $\phi$ , il existe deux entiers  $k$  et  $k'$  tels que :  $u(b) = u(a) + 2k'\pi$  et  $v(b) = v(a) + kp$ .*

**Démonstration.** Comme  $\Gamma$  est fermée, alors  $\mathbf{S}(u(a), v(a)) = \mathbf{S}(u(b), v(b))$ . De l'équation (1.1) et de l'hypothèse  $f(v) > 0$ , on tire d'abord  $f(v(a)) = f(v(b))$  et  $g(v(a)) = g(v(b))$ , puis  $\cos(u(a)) = \cos(u(b))$  et  $\sin(u(a)) = \sin(u(b))$ . D'après la définition des surfaces toroïdales, il existe donc deux entiers  $k$  et  $k'$  tels que  $u(b) = u(a) + 2k'\pi$  et  $v(b) = v(a) + kp$ .  $\square$

**Proposition 1.4** : Soit  $\Gamma$  une courbe périodique de période  $T > 0$  et de classe  $C^1$  tracée sur une surface toroïdale. Alors il existe deux entiers  $k$  et  $k'$  tels que pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$u(t+T) = u(t) + 2k'\pi, \quad v(t+T) = v(t) + kp. \quad (1.4)$$

**Démonstration.** Le fait que  $\Gamma$  est périodique entraîne qu'elle est fermée sur l'intervalle  $[t, t+T]$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . D'après le lemme précédent, il existe deux entiers  $k(t)$  et  $k'(t)$  tels que  $u(t+T) = u(t) + 2k'(t)\pi$  et  $v(t+T) = v(t) + k(t)p$ . Montrons maintenant que pour tout  $t$ ,

$$\dot{u}(t) = \dot{u}(t+T), \quad \dot{v}(t) = \dot{v}(t+T). \quad (1.5)$$

Comme  $\Gamma$  est périodique de classe  $C^1$ , on a  $\phi'(\lambda) = \phi'(\lambda+T)$ . Or, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  nous avons :  $\phi'(t) = \partial_u \mathbf{S} \dot{u}(t) + \partial_v \mathbf{S} \dot{v}(t)$ . En utilisant les expressions de  $\partial_u \mathbf{S}$  et  $\partial_v \mathbf{S}$  données par l'équation (1.2) nous obtenons

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}(t) f'(v(t)) \cos(u(t)) - \dot{u}(t) f(v(t)) \sin(u(t)) \\ \dot{v}(t) f'(v(t)) \sin(u(t)) + \dot{u}(t) f(v(t)) \cos(u(t)) \\ \dot{v}(t) g'(v(t)) \end{pmatrix}$$

En écrivant  $\phi'(t) = \phi'(t+T)$ , nous distinguons deux cas :

1.  $g'(v(t)) \neq 0$  : dans ce cas on trouve facilement que  $\dot{u}(t) = \dot{u}(t+T)$  et  $\dot{v}(t) = \dot{v}(t+T)$ .
2.  $g'(v(t)) = 0$  : du fait que  $(f'(v), g'(v)) \neq (0, 0)$  pour tout  $v \in \mathbb{R}$ , on déduit que  $f'(v(t)) \neq 0$  et par suite on obtient à nouveau  $\dot{u}(t) = \dot{u}(t+T)$  et  $\dot{v}(t) = \dot{v}(t+T)$ .

En intégrant le système (1.5) on obtient que  $k$  et  $k'$  sont indépendants de  $t$ . □

## 1.4 Géodésiques d'une surface

### 1.4.1 Cadre général

Soit  $(\Sigma, \mathbf{S})$  une surface régulière de  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 1.11** : On appelle géodésique de la surface  $\Sigma$  toute courbe paramétrée  $(\Gamma, \phi)$  de  $\Sigma$  dont en tout point  $M = \phi(t)$  le vecteur  $\phi''(t)$  est orthogonal au plan  $\pi_M$  tangent en  $M$  à la surface.

**Remarque** : Lorsque la normale principale à une géodésique existe, alors elle coïncide avec la normale à la surface.

Donnons maintenant les équations différentielles d'une géodésique.

**Proposition 1.5** : Soit  $(\Gamma, \phi)$  une courbe tracée sur une surface  $\Sigma$ . C'est une géodésique si et seulement si, elle est solution du système d'équations différentielles (1.6).

$$\begin{cases} E\ddot{u} + F\ddot{v} + \partial_u \mathbf{S} \cdot \partial_{uu}^2 \mathbf{S} \dot{u}^2 + 2\partial_u \mathbf{S} \cdot \partial_{uv}^2 \mathbf{S} \dot{u}\dot{v} + \partial_u \mathbf{S} \cdot \partial_{vv}^2 \mathbf{S} \dot{v}^2 = 0, \\ F\ddot{u} + G\ddot{v} + \partial_v \mathbf{S} \cdot \partial_{uu}^2 \mathbf{S} \dot{u}^2 + 2\partial_v \mathbf{S} \cdot \partial_{uv}^2 \mathbf{S} \dot{u}\dot{v} + \partial_v \mathbf{S} \cdot \partial_{vv}^2 \mathbf{S} \dot{v}^2 = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $E(u, v) = \|\partial_u \mathbf{S}\|^2$ ,  $F(u, v) = \partial_u \mathbf{S} \cdot \partial_v \mathbf{S}$  et  $G(u, v) = \|\partial_v \mathbf{S}\|^2$ .

**Démonstration.** Pour traduire le fait que  $\Gamma$  est une géodésique, c'est-à-dire que le vecteur  $\phi''(t)$  est orthogonal au plan  $\pi_M$  tangent en  $M$  à la surface, il suffit d'écrire que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs linéairement indépendants de ce plan ce qui est le cas des deux vecteurs  $\partial_u \mathbf{S}$  et  $\partial_v \mathbf{S}$ .

En écrivant les équations  $\partial_u \mathbf{S} \cdot \phi''(t) = 0$  et  $\partial_v \mathbf{S} \cdot \phi''(t) = 0$  on obtient le système (1.6).  $\square$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_u \mathbf{S} \cdot \partial_{uu}^2 \mathbf{S} & \partial_u \mathbf{S} \cdot \partial_{uv}^2 \mathbf{S} & \partial_u \mathbf{S} \cdot \partial_{vv}^2 \mathbf{S} \\ \partial_v \mathbf{S} \cdot \partial_{uu}^2 \mathbf{S} & \partial_v \mathbf{S} \cdot \partial_{uv}^2 \mathbf{S} & \partial_v \mathbf{S} \cdot \partial_{vv}^2 \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}^2 \\ 2\dot{u}\dot{v} \\ \dot{v}^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (1.7)$$

D'après l'indépendance des vecteurs tangents la matrice qui apparaît devant les dérivées secondes de  $u$  et  $v$  est de rang 2. Une géodésique est donc solution d'un système non linéaire de deux équations différentielles ordinaires du second ordre.

De cette caractérisation des géodésiques, on tire un résultat d'existence local.

**Théorème 1.1 :** *Pour tout point  $M$  de  $\Sigma$ , il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $\tau$  de  $\pi_M$  et de norme 1, il existe une géodésique de  $\Sigma$  de vecteur vitesse initiale égal à  $\tau$  et qui est définie au moins sur l'intervalle  $]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Lorsque  $\tau$  parcourt l'ensemble de ces vecteurs unitaires de  $\pi_M$ , les géodésiques associées  $\Gamma_\tau$  remplissent exactement la boule métrique ouverte  $B(M, \varepsilon)$  formée des points de  $\Sigma$  dont la distance à  $M$  est inférieure à  $\varepsilon$ . En outre, pour tout  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ , la restriction de  $\Gamma_\tau$  à  $[0, \varepsilon']$  est l'unique plus court chemin de  $\Sigma$  qui joint ses extrémités.*

**Démonstration.** voir Berger et Gostiaux [6].  $\square$

Dans le cas des surfaces fermées qui est celui qui nous intéresse dans la suite, on dispose de résultats globaux.

**Proposition 1.6 :** *Soit  $\Sigma$  une surface fermée. Alors, toute géodésique locale peut être prolongée en une géodésique définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier. De plus, deux points de  $\Sigma$  peuvent toujours être joints par au moins une géodésique donnant le minimum de la longueur.*

**Démonstration.** voir Schwartz [82].  $\square$



**Proposition 1.7** : Toute paramétrisation d'une géodésique  $(\Gamma, \phi)$  est proportionnelle à l'abscisse curviligne.

**Démonstration.** Le vecteur  $\phi''(t)$  est orthogonal au plan  $\pi_M$  donc il est orthogonal au vecteur  $\phi'(t)$ , c'est-à-dire que  $\phi'(t) \cdot \phi''(t) = 0$  et par suite  $\|\phi'(t)\| = c$  où  $c$  est une constante. Posons  $s = ct$  et  $\psi(s) = \phi(t)$ . On a  $\|\psi'(s)\| = 1$ , c'est une paramétrisation par l'abscisse curviligne.  $\square$

## 1.4.2 Cas des surfaces de révolution

Soit  $\Sigma$  une surface de révolution définie comme on l'a vu au paragraphe 1.2 par :

$$\mathbf{S}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)),$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions réelles assez régulières (au moins de classe  $C^2$ ).

D'après les équations (1.2) donnant  $\partial_u \mathbf{S}$  et  $\partial_v \mathbf{S}$  pour les surfaces de révolution on a :

$$E(u, v) = f^2(v), \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = f'^2(v) + g'^2(v). \quad (1.8)$$

Soit  $(\Gamma, \phi)$  une courbe paramétrée tracée sur  $\Sigma$ ,

$$t \mapsto \phi(t) = \left( f(v(t)) \cos u(t), f(v(t)) \sin u(t), g(v(t)) \right),$$

où  $u$  et  $v$  sont deux fois différentiables.

**Proposition 1.8** : Les équations d'une géodésique d'une surface de révolution s'écrivent :

$$\begin{cases} f^2 \ddot{u} + 2ff' \dot{u} \dot{v} = 0, \\ (f'^2 + g'^2) \ddot{v} - ff' \dot{u}^2 + (f'f'' + g'g'') \dot{v}^2 = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

**Démonstration.** Le système (1.9) s'obtient facilement à partir du système (1.6).  $\square$

**Corollaire 1.1 Propriété de Clairaut** : Le long d'une géodésique, il existe une constante  $C$  telle que :

$$\forall t, \quad f^2(v(t)) \dot{u}(t) = C. \quad (1.10)$$

**Démonstration.** La première équation du système (1.9) s'écrit  $\frac{d}{dt} (f^2(v(t)) \dot{u}(t)) = 0$ . Il existe donc une constante,  $C$ , telle que pour tout  $t$  on a  $f^2(v(t)) \dot{u}(t) = C$ .  $\square$

Considérons maintenant des paramétrisations  $\phi$  par l'abscisse curviligne. Alors  $C$  définie par (1.10) est appelée constante de Clairaut. Donnons l'interprétation géométrique de la propriété de Clairaut dans ce cas. Soit  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  l'angle que fait la géodésique avec le parallèle qui la coupe en un point donné. On a

$$\cos \theta = \frac{|\partial_u \mathbf{S} \cdot \phi'|}{\|\partial_u \mathbf{S}\|} = |f \dot{u}|.$$

Si  $r$  désigne la distance du point considéré à l'axe de révolution,  $r = f$ , on obtient la relation suivante :

$$r \cos \theta = |C|. \quad (1.11)$$

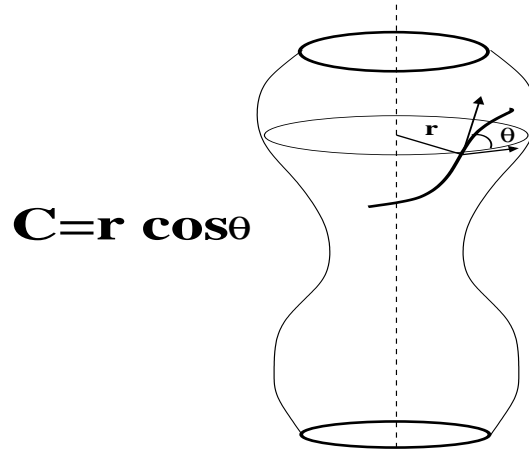


FIG. 1.1 – Géodésique sur une surface de révolution.

D'après l'équation (1.10), la fonction  $\dot{u}$  garde un signe constant qui correspond à l'orientation de la géodésique. Nous choisissons pour l'orientation des géodésiques le sens direct de rotation autour de Oz. Ce choix correspond à prendre  $\dot{u}(s) \geq 0$  et par suite  $C \geq 0$ . Les géodésiques correspondant à  $C = 0$  sont les méridiens, voir la proposition 1.9 ci-dessous. La relation (1.11) devient  $C = r \cos \theta$  et on peut remarquer que  $C \leq \min_s f(v(s))$ .

Donnons maintenant deux cas particuliers.

**Proposition 1.9** : Les méridiens  $\phi(s) = \mathbf{S}(u_0, v(s))$  sont des géodésiques de  $\Sigma$ .

**Démonstration.** La première équation du système (1.9) est trivialement vérifiée. D'autre part l'équation (1.3) devient :  $(f'^2 + g'^2)v^2 = 1$ . Par dérivation par rapport à  $s$  nous obtenons la deuxième équation du système (1.9).  $\square$

**Proposition 1.10** : Un parallèle  $\phi(s) = \mathbf{S}(u(s), v_0)$  est une géodésique si et seulement si  $f'(v_0) = 0$ .

**Démonstration.** Comme  $\dot{v} = 0$ , l'équation (1.3) fournit

$$\forall s, \quad f^2(v(s))\dot{u}^2(s) = 1,$$

ce qui prouve en particulier que

$$\forall s, \quad \dot{u}(s) = \pm \frac{1}{f(v_0)}.$$

D'après sa continuité,  $\dot{u}$  garde en fait une valeur constante, et donc  $\ddot{u} = 0$ . Ainsi, l'équation (1.9)<sub>1</sub> est vérifiée. L'équation (1.9)<sub>2</sub> devient équivalente à  $f'(v_0) = 0$ .  $\square$

**Corollaire 1.2** : Une courbe coïncidant sur un intervalle avec un parallèle correspondant à  $v_0$  est une géodésique si et seulement si  $f'(v_0) = 0$  et si elle coïncide partout avec le parallèle.

**Démonstration.** Il suffit d'utiliser le fait que si deux géodésiques coïncident sur un intervalle elles coïncident partout.  $\square$

La proposition suivante caractérise les géodésiques à l'exception des parallèles.

**Proposition 1.11** : Toute courbe géodésique paramétrée par l'abscisse curviligne vérifie

$$\begin{cases} (f'^2 + g'^2)\dot{v}^2 + f^2\dot{u}^2 = 1, \\ \exists C, \quad f^2(v)\dot{u} = C. \end{cases} \quad (1.12)$$

Réciproquement, toute courbe paramétrée vérifiant (1.12) et ne coïncidant sur aucun intervalle avec un parallèle est une géodésique.

**Démonstration.** Le sens direct est évident.

Réciproquement, supposons que les équations (1.12) sont satisfaites. Alors l'équation (1.9)<sub>1</sub> est trivialement satisfaite. Intéressons-nous à l'équation (1.9)<sub>2</sub>. Par dérivation de l'équation (1.12)<sub>1</sub>, on a

$$f^2\dot{u}\ddot{u} + f f' \dot{u}^2 \dot{v} + (f'^2 + g'^2)\dot{v}\ddot{v} + (f' f'' + g' g'')\dot{v}^3 = 0,$$

que l'on peut écrire aussi

$$(f^2\dot{u} + 2f f' \dot{u}\dot{v})\dot{u} + [(f'^2 + g'^2)\dot{v} - f f' \dot{u}^2 + (f' f'' + g' g'')\dot{v}^2]\dot{v} = 0.$$

Comme on a déjà vu que (1.9)<sub>1</sub> est satisfaite, on a donc

$$[(f'^2 + g'^2)\dot{v} - f f' \dot{u}^2 + (f' f'' + g' g'')\dot{v}^2]\dot{v} = 0.$$

En tout point tel que  $\dot{v}(s) \neq 0$ , l'équation (1.9)<sub>2</sub> est donc satisfaite. Et en un point tel que  $\dot{v}(s) = 0$ , comme par hypothèse  $\dot{v}$  n'est pas identiquement nulle sur aucun sous-intervalle ouvert contenant  $s$ , l'équation (1.9)<sub>2</sub> est aussi satisfaite par continuité.  $\square$

L'intérêt des équations (1.12) par rapport au système (1.9) est qu'elles sont d'ordre 1 et qu'elles permettent de calculer en un point donné et pour une constante de Clairaut donnée la tangente initiale à la géodésique. Voyons maintenant en quoi elles permettent de construire les géodésiques autres que les parallèles. Nous avons déjà vu que la constante de Clairaut vérifie  $0 \leq C \leq \min_s f(v(s))$ , et qu'elle est nulle pour les méridiens. Par ailleurs, la constante de Clairaut d'une géodésique parallèle ou tangente à un parallèle, correspondant à  $v_0$  vaut  $f(v_0)$ .

**Proposition 1.12** : Soit  $M_0 = \mathbf{S}(u_0, v_0)$  un point de la surface de révolution et soit  $C$  vérifiant  $0 < C < f(v_0)$ . Il existe exactement deux géodésiques passant par  $M_0$  ayant  $C$  comme constante

de Clairaut. Elles sont symétriques par rapport au plan méridien passant par  $M_0$ .

**Démonstration.** Puisque  $C < f(v_0)$ , une géodésique passant par  $M_0$  ne peut pas être un parallèle et nous pouvons utiliser la proposition précédente 1.11. Les équations (1.12) prises en  $s_0$  l'abscisse curviligne de  $M_0$  fournissent

$$\dot{u}(s_0) = \frac{C}{f^2(v_0)} \quad \text{et} \quad \dot{v}^2(s_0) = \frac{1 - f^2(v_0)\dot{u}^2(s_0)}{f'^2(v_0) + g'^2(v_0)}.$$

On voit donc que deux directions de départ peuvent être prises et qu'elles sont symétriques par rapport au plan méridien. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème d'existence d'une géodésique.  $\square$

### 1.4.3 Géodésiques périodiques

**Définition 1.12 :** Une géodésique est dite périodique si elle est une courbe périodique.

Dans le cas d'une surface quelconque, l'existence d'une géodésique périodique n'est pas évidente. Pourtant, il y a le résultat suivant sur un cas particulier de surfaces :

**Théorème 1.2 :** Soit  $\Sigma$  une surface complète homéomorphe à un plan, un cylindre ou à une bande de Möbius. Si  $\Sigma$  a une aire finie, alors il existe une infinité de géodésiques périodiques sur  $\Sigma$ .

**Démonstration.** voir Bangert [4].  $\square$

La recherche des géodésiques périodiques sur des surfaces toroïdales est relativement simple. Dans la suite  $\Sigma$  désigne une surface toroïdale et  $(\Gamma, \phi)$  une géodésique périodique de période  $T$  paramétrée par l'abscisse curviligne. On a vu dans la proposition 1.4 qu'il existe deux entiers  $k$  et  $k'$  tels que pour tout  $s$  :

$$\begin{cases} u(s+T) = u(s) + 2k'\pi, \\ v(s+T) = v(s) + kp. \end{cases} \quad (1.13)$$

**Remarque-Définition :** on peut facilement interpréter  $k'$  comme le **nombre (positif ou nul) de tours autour de l'axe de révolution**. En effet, d'après la propriété de Clairaut, équation (1.10),

- ou bien, pour tout  $s$ ,  $\dot{u}(s) = 0$ , i.e., la fonction  $s \mapsto u(s)$  est constante. La géodésique est un méridien : elle n'effectue aucun tour autour de l'axe. Par ailleurs,  $k'$  défini par (1.13) est trivialement nul.
- ou bien, pour tout  $s$ ,  $\dot{u}(s)$  est strictement positif. L'angle polaire est une fonction strictement croissante de  $s$ , on en déduit que  $k' > 0$ . Comme  $u$  est continue, l'angle polaire prend de façon bijective toutes les valeurs comprises entre  $u(0)$  et  $u(T) = u(0) + k'2\pi$  : la géodésique effectue  $k'$  tours autour de l'axe de révolution.

Intéressons-nous maintenant à l'interprétation du nombre  $k$ . Donnons un lemme déduit de la proposition 1.11. Dans la suite nous noterons  $m$  le minimum de la fonction  $f$  sur  $[0, p]$ . C'est aussi son minimum sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $f$  est de classe  $C^1$ , si  $m$  est atteint en  $v_0$ , alors  $f'(v_0) = 0$ . Nous noterons  $m_\phi$  le minimum de  $s \mapsto f(v(s))$  le long d'une géodésique périodique  $(\Gamma, \phi)$ . Autrement dit, ce minimum est pris indifféremment sur  $[0, T]$  ou sur  $\mathbb{R}$ . Si  $m_\phi$  est atteint en  $s_0$ , alors  $f'(v(s_0))\dot{v}(s_0) = 0$ . Pour la compréhension géométrique des résultats qui suivent, il est utile de rappeler que  $f(v)$  désigne la distance à l'axe de révolution de tout point de paramètres  $(u, v)$  de la surface.

**Lemme 1.3** : *S'il existe  $s_0$  tel que  $\dot{v}(s_0) = 0$ , alors  $m_\phi$  est atteint en  $s_0$ , et la constante de Clairaut  $C$  vérifie  $C = f(v(s_0)) = m_\phi$ .*

**Démonstration.** D'après les équations (1.12), en  $s_0$  tel que  $\dot{v}(s_0) = 0$ , on a immédiatement  $f'(v(s_0)) = C$  où  $C$  est la constante de Clairaut associée à la géodésique. On a déjà vu que, d'après son interprétation géométrique,  $C \leq \min_s f(v(s))$ . Ainsi,  $C = f(v(s_0)) = \min_s f(v(s)) = m_\phi$ .  $\square$

**Proposition 1.13 - Définition** : *Si  $k = 0$ , ou bien la géodésique est un parallèle, ou bien il existe un parallèle qu'elle ne rencontre pas. On dit qu'elle n'effectue aucune spire autour de la surface.*

**Démonstration.** Comme  $k = 0$ ,  $v(T) = v(0)$  et il existe  $s_0 \in ]0, T[$  tel que  $\dot{v}(s_0) = 0$ . La géodésique est tangente en  $\phi(s_0)$  au parallèle passant par  $\phi(s_0)$ .

- ou bien,  $f'(v(s_0)) = 0$  et la géodésique coïncide avec ce parallèle.

- ou bien,  $f'(v(s_0)) \neq 0$  et  $m$  ne peut être atteint en  $v(s_0)$ . Cependant, d'après le lemme 1.3,  $m_\phi$  est atteint en  $s_0$ . Ainsi,  $m_\phi > m$ . Autrement dit, la distance à l'axe sur la géodésique reste strictement supérieure à sa valeur minimale sur un méridien ou sur la surface. Il existe donc au moins un parallèle que la géodésique ne rencontre pas.  $\square$

Passons au cas  $k \neq 0$ .

**Proposition 1.14** : *Le nombre  $k$  est non nul si et seulement si la fonction  $s \mapsto v(s)$  est strictement monotone.*

**Démonstration.** - Supposons  $k \neq 0$ . Remarquons tout d'abord que comme la fonction  $s \mapsto v(s)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , elle est surjective sur  $[v(0), v(T)] = [v(0), v(0) + kp]$ . Comme  $k \neq 0$ , on en déduit que la fonction  $s \mapsto f(v(s))$  est surjective de  $\mathbb{R}$  sur  $Im f$ . Ainsi  $m = m_\phi$ .

Supposons  $v$  non strictement monotone. Il existe donc  $s_0$  tel que  $\dot{v}(s_0) = 0$ . D'après le lemme 1.3,  $m_\phi$  est atteint en  $s_0$ . Comme  $m_\phi = m$ ,  $v \mapsto f(v)$  atteint son minimum en  $v(s_0)$  et nécessairement  $f'(v(s_0)) = 0$ . La géodésique coïncide donc avec le parallèle passant par  $\phi(s_0)$ . Il est évident qu'alors  $k = 0$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Par suite  $v$  est strictement monotone.

- Si  $v$  est strictement monotone, par exemple strictement croissante, il est évident que  $v(T) > v(0)$ , donc  $v(0) + kp > v(0)$ , d'où  $k \neq 0$ .  $\square$

**Remarque-Définition :** Si  $k \neq 0$ , la fonction  $s \mapsto v(s)$  étant strictement monotone et continue est bijective de  $[0, T]$  sur  $[v(0), v(T)] = [v(0), v(0) + kp]$ . Sur l'intervalle  $[0, T]$ , elle croise  $k$  fois chaque parallèle. On dit qu'elle effectue  $k$  spires autour de la surface. On peut noter que deux géodésiques symétriques par rapport à un méridien ont des nombres de spires opposés.

Poursuivons l'étude des géodésiques telles que  $k$  est non nul. Définissons  $\varphi : c \in [0, m[ \mapsto \varphi(c) \in \mathbb{R}$  par

$$\varphi(c) = \int_0^p h(c, v) dv, \quad \text{où} \quad h(c, v) = \frac{c}{2\pi} \left( \frac{f'^2(v) + g'^2(v)}{f^2(v)(f^2(v) - c^2)} \right)^{1/2} \quad (1.14)$$

**Théorème 1.3 :** *Si la géodésique  $(\Gamma, \phi)$  est périodique et fait au moins une spire, alors sa constante de Clairaut  $C$  est strictement inférieure à  $m$  et elle est liée au nombre de tours  $k'$  et au nombre de spires  $k$  par la relation*

$$\varphi(C) = \frac{k'}{|k|}. \quad (1.15)$$

**Démonstration.** Comme la géodésique  $(\Gamma, \phi)$  fait au moins une spire, alors elle croise  $k$  fois chaque parallèle et on a  $m = m_\phi$ . Or  $C \leq m_\phi$  donc  $C \leq m$ . Si  $C = m$ , donc  $C = m_\phi$ , alors il existe  $s_0$  tel que  $C = f(v(s_0))$ . D'après les équations (1.12),  $\dot{v}(s_0) = 0$ , par suite la fonction  $v$  n'est pas strictement monotone ce qui est en contradiction avec la proposition 1.14. Par conséquent,  $C < m$ .

D'autre part, d'après les équations (1.12), et comme  $\dot{v}$  garde un signe constant qui est celui de  $k$ , on a, pour tout  $s$ ,

$$\dot{u}(s) = \frac{C}{f^2(v(s))} \quad \text{et} \quad \dot{v}(s) = \text{sgn}(k) \left( \frac{f^2(v(s)) - C^2}{f^2(v(s))(f'^2(v(s)) + g'^2(v(s)))} \right)^{1/2}.$$

Intégrant la première équation entre 0 et  $T$ , et effectuant le changement de variable  $v = v(s)$  qui est possible que parce que  $v$  est strictement monotone, nous obtenons

$$\begin{aligned} 2k'\pi &= C \int_0^T \frac{ds}{f^2(v(s))} = \text{sign}(k) C \int_{v(0)}^{v(T)} \frac{(f'^2(v) + g'^2(v))^{1/2}}{f(v)(f^2(v) - C^2)^{1/2}} dv \\ &= \text{sign}(k) k C \int_0^p \frac{(f'^2(v) + g'^2(v))^{1/2}}{f(v)(f^2(v) - C^2)^{1/2}} dv, \end{aligned} \quad (1.16)$$

d'après la périodicité de  $f$  et  $g$ .

Autrement dit,

$$\varphi(C) = \frac{k'}{\text{sign}(k)k} = \frac{k'}{|k|}. \quad (1.17)$$

□

Donnons maintenant une réciproque au résultat précédent.

**Théorème 1.4** : Si  $C \in [0, m[$  est telle que  $\varphi(C) \in \mathbb{Q}$ , alors les géodésiques ayant  $C$  comme constante de Clairaut sont périodiques.

**Démonstration.** Posons  $\varphi(C) = \frac{q'}{q}$  avec  $q$  et  $q' \in \mathbb{N}$  premier entre eux.

Remarquons tout d'abord que  $v(s)$  est strictement monotone, parce que sinon, il existe  $s_0$  tel que  $\dot{v}(s_0) = 0$ . Or, d'après le lemme 1.3 aisément étendu aux géodésiques quelconques, on obtient  $C = f(v(s_0)) = \min_s f(v(s)) \geq m$ , ce qui constitue une contradiction. Nous supposons désormais, pour fixer les idées,  $v(s)$  strictement croissante.

Démontrons que  $v(s)$  n'est pas bornée. Nous distinguons deux cas.

- $u(s)$  n'est pas bornée : alors  $u(s) \rightarrow +\infty$  quand  $s \rightarrow +\infty$ . Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $s_1$  une valeur positive de l'abscisse curviligne, alors il existe  $T_1 > 0$  telle que  $u(s_1 + T_1) = u(s_1) + 2nq'\pi$  donc  $\int_{s_1}^{s_1+T_1} \dot{u}(s) ds = 2nq'\pi$ . En tenant compte des équations (1.12) et en faisant le changement de variables  $v = v(s)$ , nous obtenons

$$\int_{v(s_1)}^{v(s_1+T_1)} h(C, v) dv = nq'.$$

D'autre part, de  $\varphi(C) = \frac{q'}{q}$  nous tirons aussi  $\int_0^p h(C, v) dv = \frac{nq'}{nq}$ . Mais  $h(C, \cdot)$  est de période  $p$ , donc

$$\int_{v(s_1)}^{v(s_1)+nqp} h(C, v) dv = nq \int_0^p h(C, v) dv = nq'.$$

D'où,  $\int_{v(s_1)}^{v(s_1)+nqp} h(C, v) dv = \int_{v(s_1)}^{v(s_1+T_1)} h(C, v) dv$ , par suite,  $\int_{v(s_1+T_1)}^{v(s_1)+nqp} h(C, v) dv = 0$ . Ce résultat n'est vrai que si  $v(s_1 + T_1) = v(s_1) + nqp$ .

Donc, pour  $s_1$  fixée, pour tout entier  $n$ , il existe  $T_1 > 0$  tel que  $v(s_1 + T_1) = v(s_1) + nqp$ . Alors  $v(s)$  n'est pas bornée.

- $u(s)$  est bornée : donc il existe  $u_\infty \in \mathbb{R}$  telle que  $u(s) \rightarrow u_\infty$  quand  $s \rightarrow +\infty$ . Raisonnons par absurde. Supposons qu'il existe  $v_\infty \in \mathbb{R}$  telle que  $v(s) \rightarrow v_\infty$  quand  $s \rightarrow +\infty$ . Donc quand  $s \rightarrow +\infty$ ,  $\mathbf{S}(u(s), v(s))$  converge vers le point  $\mathbf{S}(u_\infty, v_\infty)$ . D'autre part, d'après les équations (1.12) nous obtenons que  $\dot{u}(s) \rightarrow C/f^2(v_\infty)$  quand  $s \rightarrow +\infty$  et que  $\dot{v}(s)$  converge vers une certaine valeur que nous notons  $\dot{v}_\infty$  quand  $s \rightarrow +\infty$ . Par conséquent, le point  $\mathbf{S}(u_\infty, v_\infty)$  est un point limite de la géodésique  $\Gamma$  dont la tangente en ce point est portée par le vecteur

$$\tau_\infty = \begin{pmatrix} \dot{v}_\infty f'(v_\infty) \cos(u_\infty) - \dot{u}_\infty f(v_\infty) \sin(u_\infty) \\ \dot{v}_\infty f'(v_\infty) \sin(u_\infty) + \dot{u}_\infty f(v_\infty) \cos(u_\infty) \\ \dot{v}_\infty g'(v_\infty) \end{pmatrix}$$

Or, il existe une géodésique, qui n'est autre que la suite de  $\Gamma$ , ayant le point  $\mathbf{S}(u_\infty, v_\infty)$  comme origine et  $\tau_\infty$  comme tangente. Par suite le point  $\mathbf{S}(u_\infty, v_\infty)$  n'est pas un point limite de la

géodésique  $\Gamma$  ce qui est absurde.

Finalement,  $v(s)$  n'est pas bornée. Soit  $s_0$  une valeur quelconque de l'abscisse curviligne, il existe donc  $T_0 > 0$  tel que  $v(s_0 + T_0) = v(s_0) + qp$ .

On a :  $\varphi(c) = \frac{q'}{q} c$  c'est-à-dire  $\int_0^p h(C, v) dv = \frac{q'}{q}$ . Mais  $f$  et  $g$  sont périodiques de période  $p$ , alors  $\int_{v(s_0)}^{v(s_0)+qp} h(C, v) dv = q'$ . En faisant le changement de variables  $v = v(s)$ , et en tenant compte des équations (1.12) nous obtenons :  $\int_{s_0}^{s_0+T_0} \dot{u}(s) ds = 2q'\pi$ , donc  $u(s_0 + T_0) = u(s_0) + 2q'\pi$ .

De plus, en utilisant le fait que  $v(s_0 + T_0) = v(s_0) + qp$  les équations (1.12) nous donnent  $\dot{u}(s_0 + T_0) = \dot{u}(s_0)$  et  $\dot{v}(s_0 + T_0) = \dot{v}(s_0)$ . Avec ces résultats nous vérifions facilement que les vecteurs tangents à la géodésique en  $s = s_0$  et en  $s = s_0 + T_0$  sont confondus. Ainsi la géodésique en question est périodique.  $\square$

**Proposition 1.15** : La fonction  $\varphi : c \in [0, m[ \mapsto \varphi(c) \in \mathbb{R}$  est strictement croissante.

**Démonstration.** Il est évident que  $\varphi$  est une fonction continue sur  $]0, m[$  et dérivable sur  $]0, m[$  et l'on a :

$$\varphi'(c) = \int_0^p \frac{\partial h(c, v)}{\partial c} dv, \quad \text{avec} \quad \frac{\partial h(c, v)}{\partial c} = \frac{1}{2\pi} \frac{f^2(v)}{f^2(v) - c^2} \left( \frac{f'^2(v) + g'^2(v)}{f^2(v)(f^2(v) - c^2)} \right)^{1/2}. \quad (1.18)$$

Comme  $\frac{\partial h(c, v)}{\partial c}$  est positive pour tout  $c \in ]0, m[$  alors il en est de même pour  $\varphi'(c)$ . Par suite la fonction  $\varphi$  est strictement croissante.  $\square$

**Proposition 1.16** : Si la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  et dérivable deux fois, alors

$$\lim_{c \rightarrow m} \varphi(c) = +\infty. \quad (1.19)$$

**Démonstration.** Posons  $I(c) = \int_0^p \left( \frac{f'^2(v) + g'^2(v)}{f^2(v)(f^2(v) - c^2)} \right)^{1/2} dv$ .

Comme  $f'$  et  $g'$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ ,  $p$ -périodiques et  $f'^2 + g'^2 \neq 0$ , alors il existe  $\gamma > 0$  tel que  $f'^2 + g'^2 \geq \gamma^2$ . D'autre part  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $p$ -périodique, alors il existe  $M$  tel que  $0 < m \leq f(v) \leq M$  pour tout  $v \in \mathbb{R}$ . On en déduit :

$$\forall c \in [0, m[, \quad I(c) \geq \frac{\gamma}{M} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{f^2(v) - c^2}} dv. \quad (1.20)$$

Étudions maintenant  $J(c) = \int_0^p \frac{1}{\sqrt{f^2(v) - c^2}} dv$ . Il suffit de l'étudier pour  $c_n^2 = m^2 - \frac{1}{n}$ . Nous



avons donc :

$$J(c_n) = \int_0^p \frac{1}{\sqrt{f^2(v) - m^2 + \frac{1}{n}}} dv.$$

Il est clair que la suite  $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{f^2(v) - m^2 + \frac{1}{n}}}$  est croissante en  $n$  (à  $v$  fixé). Donc  $J(c_n)$  est une suite numérique (positive) croissante. On en déduit deux possibilités :

- ou bien  $J(c_n)$  est majorée. Alors  $\psi(v) = \frac{1}{\sqrt{f^2(v) - m^2}}$  est intégrable et  $J(c_n) \rightarrow \int_0^p \frac{1}{\sqrt{f^2(v) - m^2}} dv$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
- ou bien  $J(c_n) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Montrons que le premier cas ne peut pas se produire. Soit  $v_0 \in [0, p]$  tel que  $f$  atteigne son minimum en  $v_0$ , on sait que  $f'(v_0) = 0$ . Comme  $f$  est de classe  $C^1$  et deux fois dérivable, alors :

$$f(v) = f(v_0) + f'(v_0)(v - v_0) + \eta(v), \quad \text{avec } \eta \in C^1 \text{ et } |\eta(v)| \leq k_\eta |v - v_0|^2.$$

Donc  $f^2(v) = m^2 + 2m\eta(v) + \eta^2(v) = m^2 + \tilde{\eta}(v)$ , avec  $0 \leq \tilde{\eta}(v) \leq k_{\tilde{\eta}} |v - v_0|^2$ . Par suite on a :

$$\frac{1}{\sqrt{f^2(v) - m^2}} = \frac{1}{\tilde{\eta}(v)^{1/2}} \geq \frac{1}{k_{\tilde{\eta}}^{1/2} |v - v_0|} \quad \text{qui est non intégrable au voisinage de } v_0.$$

On a donc  $I(c) \rightarrow +\infty$  et  $\varphi(c) \rightarrow +\infty$  quand  $c \rightarrow m$ . □

**Corollaire 1.3** :  $Im \varphi = \varphi([0, m]) = [0, +\infty[$ .

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que  $\varphi$  est continue, croissante,  $\varphi(0) = 0$  et  $\lim_{c \rightarrow m} \varphi(c) = +\infty$ . □

**Proposition 1.17** : Les entiers  $k$  et  $k'$  de l'équation (1.13) sont premiers entre eux.

**Démonstration.** Remarquons tout d'abord que dans l'équation (1.13),  $T$  est la période de la géodésique  $(\Gamma, \phi)$ , et que  $k$  est de même signe que  $\dot{v}$  qu'on suppose positif.

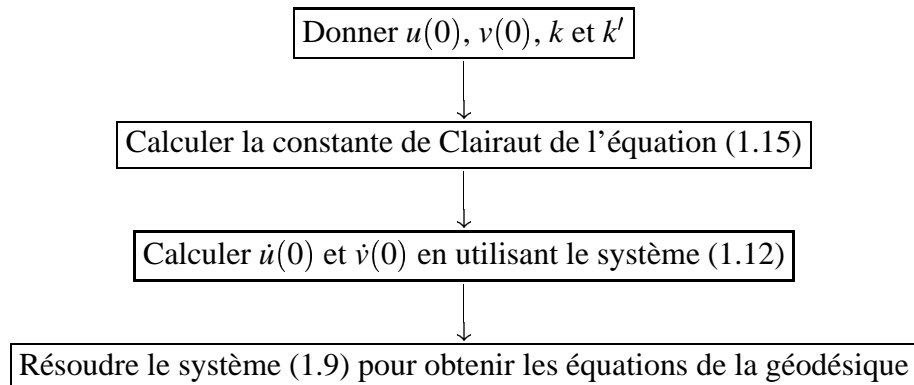
Soient  $q$  et  $q' \in \mathbb{N}$  deux entiers premiers entre eux tels que  $\frac{k'}{k} = \frac{q'}{q}$ . On a donc :  $\varphi(C) = \frac{q'}{q}$ . Ceci entraîne d'après le théorème 1.4 qu'il existe  $T_1 > 0$  tel que :

$$\begin{cases} u(s + T_1) = u(s) + 2q'\pi, \\ v(s + T_1) = v(s) + qp. \end{cases} \quad (1.21)$$

On peut facilement vérifier que  $\phi(s + T_1) = \phi(s)$ , par suite on en déduit qu'il existe un entier  $n$  tel que  $T_1 = nT$ . En utilisant maintenant les équations (1.13) et (1.21), on obtient  $q = nk$  et  $q' = nk'$ . Or  $q$  et  $q'$  sont premiers entre eux, ceci implique que  $n = 1$ , et par conséquent,  $k$  et  $k'$  sont premiers entre eux. □

En résumé, le problème d'existence d'une géodésique périodique faisant au moins une spire sur une surface toroïdale revient donc au problème de trouver une valeur de la constante de Clairaut  $C$  telle que  $\varphi(C) \in \mathbb{Q}$ . Comme  $Im \varphi = [0, +\infty[$ , alors il existe une infinité de valeurs de  $C$  dont les images par  $\varphi$  sont dans  $\mathbb{Q}$ . Par conséquent, sur une surface toroïdale, il existe une infinité de géodésiques périodiques faisant au moins une spire. De plus, le nombre de tours et le nombre de spires ( $\neq 0$ ) que doit faire une géodésique périodique sont premiers entre eux.

### Algorithme



**Validation :** Pour tracer une géodésique périodique il suffit de fixer les valeurs initiales  $u(0)$  et  $v(0)$ , et de choisir le nombre de tours autour de l'axe de révolution et le nombre de spires que doit faire la géodésique. La constante de Clairaut est obtenue par la résolution de l'équation (1.15) ce qui permettra d'obtenir, en utilisant le système (1.12), les valeurs initiales  $\dot{u}(0)$  et  $\dot{v}(0)$ . Par suite, les équations de la géodésique sont obtenues en résolvant le système (1.9). Dans les exemples que nous présentons dans ce chapitre, nous avons résolu le système (1.9) numériquement avec le logiciel MAPLE.

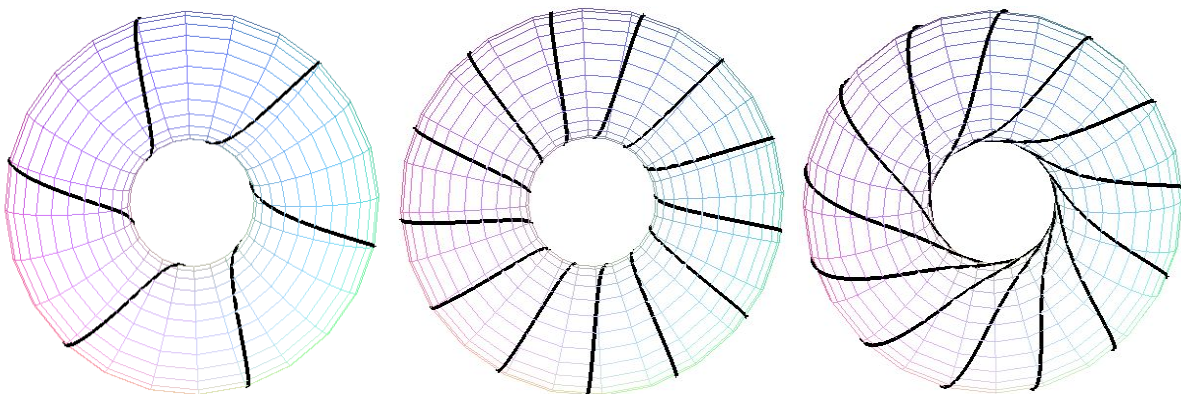


FIG. 1.2 – Des géodésiques périodiques tracées sur un tore. Elles correspondent respectivement à  $(k = 6, k' = 1)$ ,  $(k = 13, k' = 1)$  et  $(k = 13, k' = 5)$ .

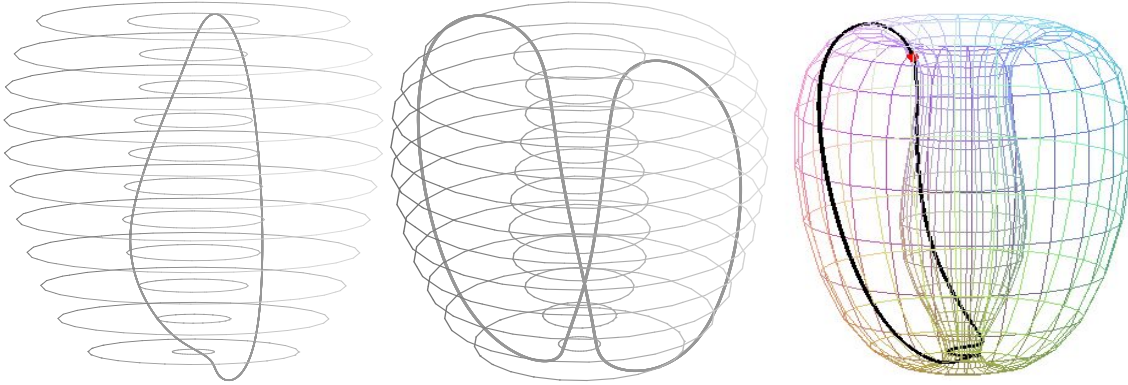


FIG. 1.3 – Des géodésiques périodiques tracées sur une surface toroïdale modélisant la forme géométrique du ventricule gauche. Elles correspondent respectivement à  $(k = 1, k' = 1)$ ,  $(k = 2, k' = 1)$  et  $(k = 1, k' = 2)$ .

## 1.5 Construction d'un modèle abstrait pour le ventricule gauche

Afin de vérifier que les fibres myocardiques sont organisées en surfaces dont elles sont les géodésiques, il est utile de disposer d'un modèle abstrait pour valider les différents algorithmes que nous développons dans le chapitre suivant.

D'après les observations anatomiques, le ventricule gauche pourrait être modélisé par une forme toroïdale. Nous avons donc construit un modèle de révolution formé de surfaces toroïdales emboîtées, voir Figure 1.4. Ces surfaces sont générées par la rotation autour de l'axe de révolution de courbes méridiennes en forme de croissant. La courbe méridienne de la surface la plus externe est une courbe B-spline de classe  $C^2$  polynomiale de degré 3 obtenue avec cinq points de contrôle, voir annexe B. La distance de cette courbe à l'axe de révolution est proche de 0, mais n'est pas égale à 0. Elle est minimale au niveau de l'apex où les fibres peuvent passer de l'épicarde à l'endocarde. Les courbes méridiennes des autres surfaces sont déduites de celle de la surface la plus externe en lui appliquant une homothétie de rapport  $\lambda$ ,  $0 < \lambda \leq 1$  et de centre choisi de façon à ce que les courbes obtenues ne se croisent pas. Donc à chaque valeur de  $\lambda$  correspond une surface qu'on note  $S_\lambda$ .

Nous avons construit sur chacune des surfaces ainsi définies un réseau de géodésiques périodiques qui se déduisent l'une de l'autre par rotation autour de l'axe de révolution. Par conséquent, les géodésiques de chaque réseau ont une même constante de Clairaut. Les géodésiques sont choisies de façon à effectuer un seul tour autour de l'axe de révolution et, une spire pour les surfaces non profondes et deux spires pour les surfaces profondes (c'est-à-dire pour  $\lambda$  petit).

La structure du ventricule droit est assez complexe. Les outils classiques de géométrie ne semblent pas très puissants pour en construire un modèle. La disponibilité de nouvelles ma-

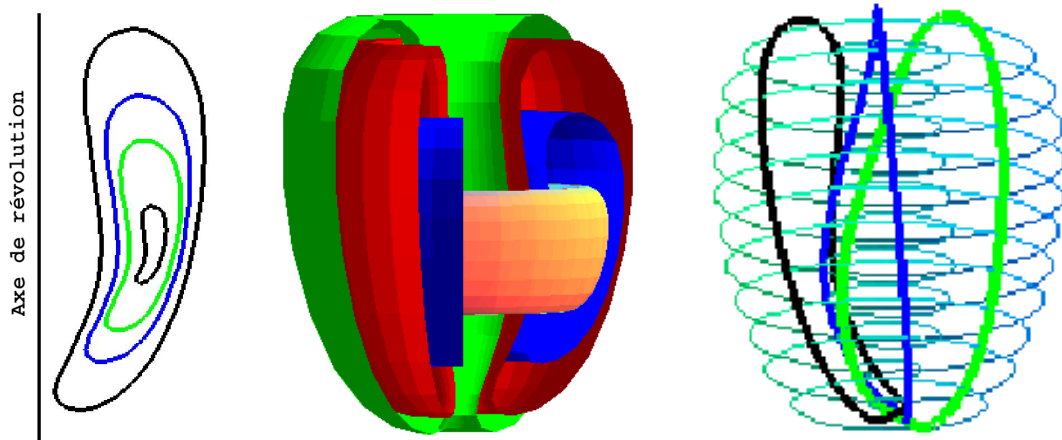


FIG. 1.4 – Le modèle abstrait du ventricule gauche. A gauche, des courbes méridiennes emboîtées qui génèrent des surfaces emboîtées (au centre) en les faisant tourner autour de l'axe de révolution. A droite des géodésiques périodiques qui se déduisent l'une de l'autre par rotation autour de l'axe de révolution.

chines et de nouveaux outils permet la représentation de formes 3D à partir de courbes et de surfaces paramétrées. Nous présentons dans l'annexe B des modèles pour les formes géométriques des deux ventricules à l'aide des surfaces B-splines sur lesquelles nous pouvons tracer des géodésiques en utilisant un algorithme développé par Valérie Pham-Trong [73] pour tracer des plus courts chemins sur ce type de surfaces.



# Chapitre 2

## Outils numériques - Application au myocarde

### 2.1 Introduction

Selon Streeter [85], les fibres myocardiques sont organisées en surfaces toroïdales emboîtées dont elles sont les géodésiques. Partant de données expérimentales, obtenues par la technique de microscopie en lumière polarisée développée par Jouk et al. [47], nous voulons d'un côté reconstruire les fibres et les surfaces sur lesquelles courent les fibres, et d'un autre côté tenter de vérifier la conjecture de Streeter. La technique expérimentale mesure pour un nombre de points se trouvant dans des sections différentes dans le myocarde deux angles à partir desquels l'orientation de la fibre peut être déduite. Autrement dit, le travail expérimental fournit un champ discret tridimensionnel des directions des fibres.

Dans notre travail nous supposons que le ventricule gauche a une structure de révolution. Plus précisément, nous voyons sa surface externe générée par rotation autour d'un axe de révolution d'une courbe méridienne qui a la forme d'un croissant. Ce modèle simplifié nous permet d'utiliser l'invariance de la constante de Clairaut le long des géodésiques des surfaces de révolution. La propriété de Clairaut a d'ailleurs été utilisée par Streeter qui disposait de mesures dans la partie équatoriale libre du ventricule gauche.

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord le cadre mathématique dans lequel se situe notre problème ainsi que quelques méthodes numériques qui sont utilisées dans la suite pour développer des algorithmes de suivi de fibres et de reconstruction de surfaces. Ensuite, nous construisons des modèles abstraits pour les formes géométriques des deux ventricules pour pouvoir valider les différents algorithmes que nous avons développés.

Afin de vérifier la conjecture de Streeter, nous calculons en tout point du ventricule gauche la quantité de Clairaut et nous traçons ses isovaleurs dans des sections horizontales et verticales. De plus, nous utilisons l'algorithme de suivi de fibres pour obtenir une information sur chaque

fibres séparément. Nous remarquons que le long d'une fibre donnée la quantité de Clairaut reste invariante. Enfin, nous utilisons l'algorithme de suivi de fibres pour visualiser les surfaces d'isovaleurs du nombre de Clairaut. Les surfaces obtenues montrent clairement la structure toroïdale du ventricule gauche et la forme hélicoïdale des trajectoires des fibres.

La structure relativement simple du ventricule gauche n'est plus valable pour le ventricule droit, les algorithmes de reconstruction de surfaces s'avèrent sensibles à la précision des données anatomiques, tout cela a limité nos résultats au ventricule gauche uniquement.

## 2.2 Données anatomiques

L'équipe RFMQ du laboratoire TIMC a développé une technique de microscopie en lumière polarisée, pour déterminer l'orientation des fibres dans des cœurs fœtaux. Une description complète du protocole est donnée dans l'annexe A.

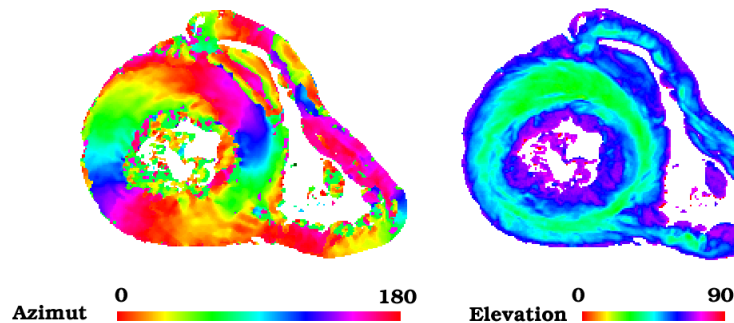


FIG. 2.1 – Cartes angulaires : à gauche, l'angle d'azimut qui varie de 0 à  $\pi$ , et à droite, l'angle d'élévation qui varie de 0 à  $\pi/2$ .

Les résultats sont constitués de cartes angulaires fournies pour des coupes discrétisées en voxels, voir Figure 2.1. Dans chaque voxel une information moyenne est collectée, deux angles sont mesurés, l'angle d'élévation ou latitude  $\theta$  et l'angle d'azimut ou longitude  $\varphi$ . L'angle d'élévation est l'angle que fait la fibre avec le plan de coupe et l'angle d'azimut est l'angle que fait la projection de la fibre sur le plan de coupe avec une direction fixe de ce plan, voir Figure 2.2.

Pour déterminer la position d'un vecteur dans l'espace, l'angle  $\varphi$  varie entre 0 et  $2\pi$ , et l'angle  $\theta$  entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ . Par contre, dans le cas d'une droite, il suffit de connaître  $\varphi$  entre 0 et  $\pi$  et  $\theta$  entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$  pour déterminer sa direction. Par conséquent, une connaissance locale de ces deux angles compris entre 0 et  $\pi$  pour  $\varphi$  et  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$  pour  $\theta$  détermine complètement la direction

$\tau$  de la fibre :

$$\tau = \begin{cases} \tau_x = \cos \theta \cos \varphi \\ \tau_y = \cos \theta \sin \varphi \\ \tau_z = \sin \theta \end{cases} \quad (2.1)$$

La technique utilisée ne permet pas de distinguer entre  $\theta$  et  $-\theta$ . Les valeurs fournies pour  $\theta$  sont donc mesurées dans l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

D'un point de vue mathématique, on peut dire qu'on a un champ de vecteurs discrétisé réparti dans l'épaisseur du muscle cardiaque et les fibres sont considérées comme des courbes tangentes en chaque point à ce champ tridimensionnel.

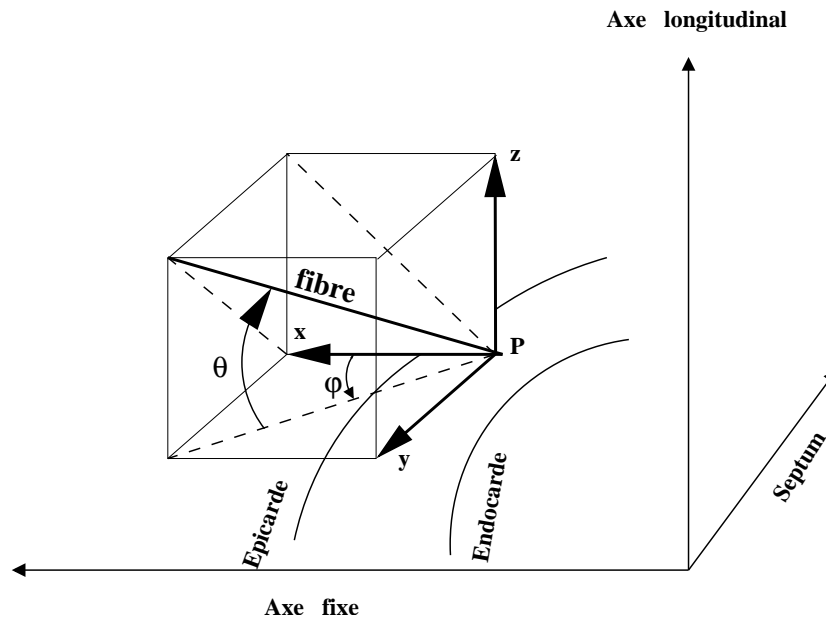


FIG. 2.2 – Représentation schématique des angles d'élévation et d'azimut.

## 2.3 Reconstruction numérique des courbes

Étant donné un champ de vecteurs  $\tau : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ , il s'agit de reconstruire des courbes qui y soient tangentes en tout point. Nous les cherchons sous forme paramétrée  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ . Autrement dit, nous cherchons  $\mathbf{x}$  solution de l'équation différentielle du premier ordre  $\mathbf{x}'(t) = \tau(\mathbf{x}(t))$ .

### 2.3.1 Formulation mathématique du problème

Rappelons ici quelques résultats élémentaires sur les équations différentielles, voir par exemple Cartan [19] et Demailly [26].



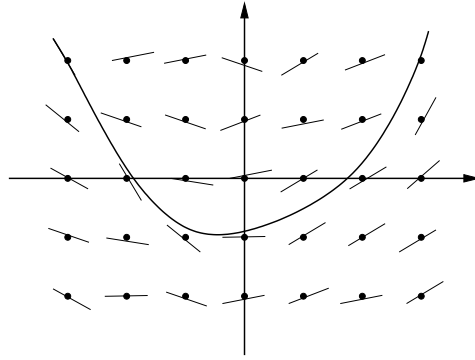


FIG. 2.3 – Un exemple d’une courbe tangente à un champ de vecteurs donné.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application continue. On considère l’équation différentielle

$$\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in U. \quad (2.2)$$

**Définition 2.1** : Une solution de (2.2) sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  est une fonction dérivable  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que :  $\forall t \in I, (t, \mathbf{x}(t)) \in U$ , et  $\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t))$ .

**Définition 2.2 (Problème de Cauchy)** : Étant donné un point  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in U$ , le problème de Cauchy consiste à trouver une solution  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  de (2.2) sur un intervalle  $I$  contenant  $t_0$  dans son intérieur, telle que  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

**Définition 2.3** : Une courbe intégrale de (2.2) est une courbe différentiable  $\Gamma$  qui a pour tangente en chaque point  $M = (t_0, \mathbf{x}_0) \in \Gamma$  la droite  $D_M$  d’équation :

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (t - t_0)f(t_0, \mathbf{x}_0).$$

Dans le cas 1D ( $m = 1$ ),  $f(t_0, \mathbf{x}_0)$  est donc la pente de la tangente à  $\Gamma$  au point  $M$ , et dans le cas général,  $f(t_0, \mathbf{x}_0)$  est le vecteur directeur de la tangente en  $M$  à  $\Gamma$ .

Revenons au problème de départ. On se donne un champ de vecteurs  $\tau$ , on lui associe une équation différentielle autonome  $\mathbf{x}'(t) = \tau(\mathbf{x}(t))$  et on suppose  $\tau$  assez régulier pour que cette équation différentielle admette une solution unique quand une valeur initiale est donnée. Les courbes qui sont tangentes en tout point à ce champ ne sont autres que les courbes intégrales de cette équation différentielle. Trouver ces courbes, c’est donc résoudre un problème de Cauchy. Obtenir une solution exacte (analytique) du problème de Cauchy n’est pas généralement possible même lorsque  $f$  est donnée sous forme analytique et il existe de nombreuses méthodes de résolution numérique par discrétisation. Dans notre cas, le second membre  $\tau$  n’est connu que sous forme d’une carte au départ discrète que nous étendons en une carte continue. Ces méthodes sont donc bien adaptées à notre étude.

Nous rappelons ici quelques méthodes usuelles. Pour l'étude de la stabilité, la consistance, la convergence et l'ordre d'approximation nous renvoyons aux ouvrages d'analyse numérique élémentaire. Citons par exemple Crouzeix et Mignot [25], Dieudonné [28], Demailly [26].

### 2.3.2 Résolution numérique du problème de Cauchy

Notre problème à résoudre s'écrit donc :

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \tau(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Soit  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$  une subdivision de  $[t_0, t_0 + T]$ . Il s'agit de déterminer des valeurs approchées  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  des valeurs  $\mathbf{x}(t_n)$  prises par la solution exacte  $\mathbf{x}$ . Soit  $h_n = t_{n+1} - t_n$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$  le pas à l'étape  $n$ , on le prend en général constant.

On distingue deux types de méthodes : méthodes à un pas et méthodes à plusieurs pas. Une méthode à un pas permet de calculer  $\mathbf{x}_{n+1}$  à partir de la seule valeur antérieure  $\mathbf{x}_n$ . Une méthode à  $r$  pas utilise les  $r$  valeurs antérieures  $\mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{x}_{n-r+1}$  afin de calculer  $\mathbf{x}_{n+1}$ . La partie initialisation d'une méthode à deux pas, c'est-à-dire le calcul de  $\mathbf{x}_1$ , peut s'effectuer en utilisant une méthode à un pas.

**Méthode d'Euler explicite :** C'est une méthode à un pas d'ordre 1.

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h_n \tau(\mathbf{x}_n). \quad (2.4)$$

**Méthode du point milieu :** Elle est d'ordre 2 et à un pas.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{x}_n + \frac{h_n}{2} \tau(\mathbf{x}_n), \\ p_n = \tau(\mathbf{x}_{n+\frac{1}{2}}), \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h_n p_n. \end{cases} \quad (2.5)$$

**Méthode du point milieu modifié :** C'est une méthode à deux pas d'ordre 2. Elle se distingue de la méthode du point milieu par le calcul du point intermédiaire  $\mathbf{x}_{n+\frac{1}{2}}$  où au lieu d'utiliser  $\tau(\mathbf{x}_n)$  dont le calcul est coûteux on utilise  $\tau(\mathbf{x}_{n-\frac{1}{2}})$  qui est déjà calculé au pas précédent.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{x}_n + \frac{h_n}{2} p_{n-1}, \\ p_n = \tau(\mathbf{x}_{n+\frac{1}{2}}), \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h_n p_n. \end{cases} \quad (2.6)$$

Examinons un aspect numérique que nous a semblé intéressant dans le tracé des courbes, en particuliers, dans l'utilisation de nos algorithmes par nos collègues de biologie-médecine. C'est

celui du tracé d'une courbe dans les "deux sens".

Soit  $(\Gamma, \mathbf{x})$  la courbe paramétrée où  $\mathbf{x} : t \in [t_0, t_0 + T] \mapsto \mathbf{x}(t)$  est la solution du problème (2.3). Posons  $\mathbf{x}_T = \mathbf{x}(t_0 + T)$ . Faisons maintenant un changement de paramètres de  $t$  en  $-t$ . Pour  $t \in [-t_0 - T, -t_0]$ , on note  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(-t)$ . Donc  $\tilde{\mathbf{x}}$  et  $\mathbf{x}$  sont deux paramétrisations équivalentes de  $\Gamma$ . De plus  $\tilde{\mathbf{x}}$  est sur  $[-t_0 - T, -t_0]$ , la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}' = -\tau(\tilde{\mathbf{x}}), \\ \tilde{\mathbf{x}}(-t_0 - T) = \mathbf{x}_T. \end{cases} \quad (2.7)$$

Maintenant du point de vue numérique, on se demande si les valeurs approchées  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N$  de  $\mathbf{x}$  obtenues par la résolution numérique de (2.3) avec la condition initiale  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  sont les mêmes que les valeurs approchées de  $\tilde{\mathbf{x}}$  obtenues par la résolution numérique de (2.7) avec la condition initiale  $\tilde{\mathbf{x}}(-t_0 - T) = \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_N$ . Autrement dit, on construit tout d'abord en partant de  $\mathbf{x}_0$  notre suite (finie) de points  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N$ , et ensuite en utilisant la valeur obtenue  $\mathbf{x}_N$  on construit en partant de  $\mathbf{x}_N$  la suite  $\tilde{\mathbf{x}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_N$ . La question est donc, les deux suites de points sont-elles les mêmes ? Si la réponse est négative, on dit que la méthode numérique utilisée n'est pas réversible.

La méthode d'Euler explicite, la méthode du point milieu et la méthode du point milieu modifié ne sont pas réversibles.

**Méthode de Nyström :** C'est une méthode d'ordre 2, à deux pas. Son schéma est le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n-1} + 2h\tau(\mathbf{x}_n), \\ t_{n+1} = t_n + h. \end{cases} \quad (2.8)$$

Montrons que cette méthode est réversible. En effet, soient  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  construites par la méthode de Nyström sur

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \tau(\mathbf{x}(t)), & t_0 \leq t \leq t_0 + T, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Considérons maintenant

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}'(\tilde{t}) = -\tau(\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t})), & -t_0 - T \leq \tilde{t} \leq -t_0, \\ \tilde{\mathbf{x}}(-t_0 - T) = \mathbf{x}_N. \end{cases} \quad (2.10)$$

Posons  $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_N$  et choisissons  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_{N-1}$ . La méthode de Nyström sur le système (2.10) fournit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{x}_N, \quad \tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_{N-1} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{p+1} &= \tilde{\mathbf{x}}_{p-1} + 2h(-\tau(\tilde{\mathbf{x}}_p)), \quad 1 \leq p \leq N-1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Montrons que, pour tout  $0 \leq p \leq N$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_{N-p}$ . C'est vrai pour  $p = 0$  et  $p = 1$  par construction. Supposons que c'est vrai jusqu'à  $p$ . Alors des équations

$$\tilde{\mathbf{x}}_{p+1} = \tilde{\mathbf{x}}_{p-1} - 2h\tau(\tilde{\mathbf{x}}_p),$$

et

$$\mathbf{x}_{N-p+1} = \mathbf{x}_{N-p-1} + 2h\tau(\tilde{\mathbf{x}}_{N-p}),$$

on tire  $\tilde{\mathbf{x}}_{p+1} = \mathbf{x}_{N-p-1}$ . D'où le résultat annoncé.

### Validation numérique

Les méthodes présentées ci-dessus ont été testées sur plusieurs exemples de champs de vecteurs plans ainsi que volumiques.

**1- Cercle plan :** On considère dans le plan (Oxy) le champ de vecteurs défini par l'équation suivante :

$$\begin{cases} x' = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (2.12)$$

La solution de (2.12) pour la condition initiale  $(x(0) = R_0, y(0) = 0)$  est donnée par  $(x(s) = R_0 \cos(\frac{s}{R_0}), y(s) = R_0 \sin(\frac{s}{R_0}))$ . Sa courbe intégrale est le cercle de centre l'origine et de rayon  $R_0 : x^2 + y^2 = R_0^2$ . Soit  $(x_n, y_n)$  le point obtenu à l'itération  $n$ , on note  $R_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ . L'erreur à cette itération est égale à  $\frac{|R_n - R_0|}{R_0}$  et l'erreur globale est  $\max_n \frac{|R_n - R_0|}{R_0}$ , c'est-à-dire, l'erreur  $L^\infty$  relative.

**2- Courbe plane en forme de croissant :** Cet exemple correspond aux courbes méridiennes emboîtées utilisées dans la modélisation abstraite du ventricule gauche dans la partie 1.5. Dans le plan (Oxz), chacune de ces courbes méridiennes est obtenue à partir de la plus externe entre elles par une homothétie de rapport  $\lambda \in ]0, 1]$  et son équation paramétrique dans ce plan est  $(x_\lambda(s), z_\lambda(s))$ . Si un point  $(x, z)$  est à l'intérieur de la courbe la plus externe, alors il appartient à une courbe qui est complètement définie par une valeur réelle  $\lambda \in ]0, 1]$ , soit  $\Gamma_\lambda$  cette courbe. Le champ de vecteurs en ce point correspond au vecteur unitaire tangent à  $\Gamma_\lambda$ ,  $\tau(x, z) = (\tau_x(x, z), \tau_z(x, z))$ . En terme d'équation différentielle, cet exemple s'écrit :

$$\begin{cases} x' = \tau_x(x, z), \\ z' = \tau_z(x, z). \end{cases} \quad (2.13)$$

La courbe intégrale de (2.13) pour la condition initiale  $(x(0) = x_0, z(0) = z_0)$ , où  $(x_0, z_0) \in \Gamma_{\lambda_0}$ , est la courbe  $\Gamma_{\lambda_0}$ . A l'itération  $n$ , on obtient le point  $(x_n, z_n)$  auquel correspond une valeur  $\lambda_n \in [0, 1]$ . Nous choisissons comme mesure de l'erreur à cette itération la quantité  $\frac{|\lambda_n - \lambda_0|}{\lambda_0}$  et l'erreur globale est  $\max_n \frac{|\lambda_n - \lambda_0|}{\lambda_0}$ .

**3- Géodésiques du modèle abstrait du ventricule gauche :** C'est le modèle construit dans la partie 1.5. Il s'agit d'un ensemble de surfaces toroïdales emboîtées sur lesquelles on a tracé des réseaux de géodésiques périodiques. Chaque point  $(x, y, z)$  du domaine appartient à une surface définie par un nombre réel  $\lambda \in [0, 1]$ , notée  $S_\lambda$ , et il se trouve sur une géodésique périodique dont la constante de Clairaut est notée  $C_\lambda$ . On définit le champ de vecteurs en un point  $(x, y, z)$  du domaine comme étant le vecteur unitaire tangent en ce point à la géodésique passant

par ce point,  $\tau(x, y, z) = (\tau_x(x, y, z), \tau_y(x, y, z), \tau_z(x, y, z))$ . En terme d'équation différentielle, cet exemple s'écrit :

$$\begin{cases} x' = \tau_x(x, y, z), \\ y' = \tau_y(x, y, z), \\ z' = \tau_z(x, y, z). \end{cases} \quad (2.14)$$

Pour une condition initiale  $(x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0)$ , où  $(x_0, y_0, z_0) \in S_{\lambda_0}$ , correspond comme courbe intégrale de (2.14) la géodésique tracée sur  $S_{\lambda_0}$  et qui passe par  $(x_0, y_0, z_0)$ . A l'itération  $n$ , on obtient le point  $(x_n, y_n, z_n)$  à qui correspond une valeur  $\lambda_n \in [0, 1]$ . L'erreur mesurée à cette itération est égale à  $\frac{|\lambda_n - \lambda_0|}{\lambda_0}$  et l'erreur globale est  $\max_n \frac{|\lambda_n - \lambda_0|}{\lambda_0}$ .

**4- Champ de vecteurs sous forme discrétisée :** Pour se rapprocher du cas de données anatomiques, le champ de vecteurs correspondant au modèle du ventricule gauche considéré ci-dessus est alors considéré sous forme discrétisée. Ensuite, nous avons reconstruit un champ de vecteurs défini en tout point du domaine par interpolations trilineaires des valeurs du champ discret aux points voisins du point considéré. Avec ce nouveau champ de vecteurs nous sommes dans le même cas que celui de l'exemple précédent.

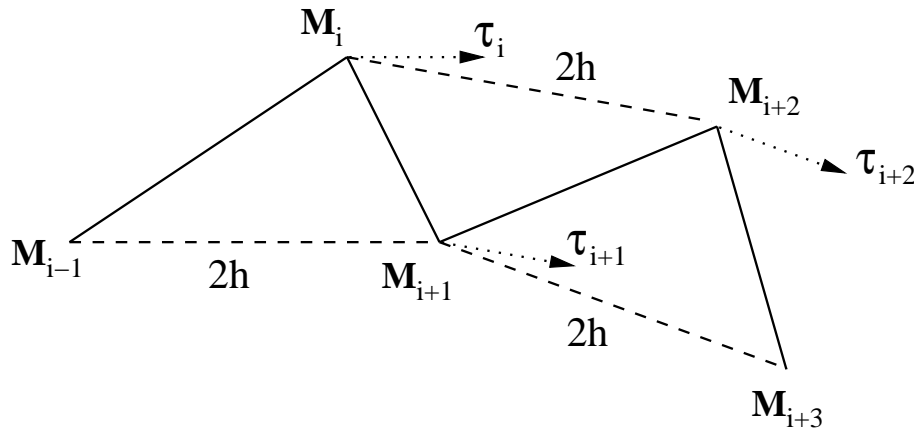


FIG. 2.4 – Cette figure correspond à la méthode de Nystrom. On voit clairement les oscillations dans l'allure du polygone  $M_{i-1}M_iM_{i+1}M_{i+2}M_{i+3}$ .

Donnons maintenant nos conclusions. Bien que nous ayons au départ retenu la méthode de Nyström pour sa réversibilité, nous avons constaté que le tracé de trajectoires présentait des oscillations, voir Figure 2.6. Ce phénomène est expliqué sur la Figure 2.4. Dans le cas du champ de vecteurs discret, la méthode du point milieu est la meilleure en terme de précision, voir Figure 2.5. Pour cela, la méthode du point milieu a été utilisée dans la suite pour la reconstruction de fibres myocardiques.

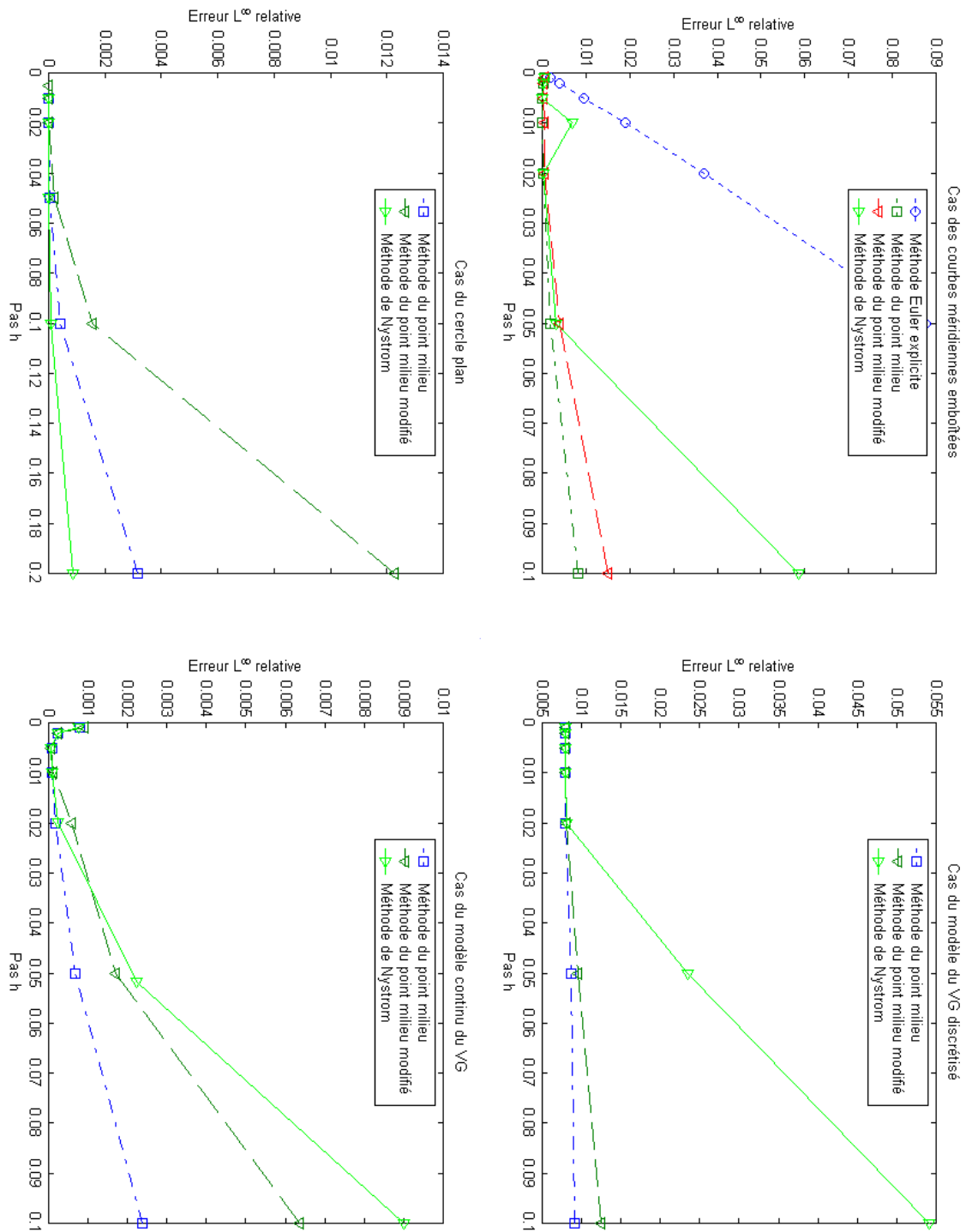


FIG. 2.5 – L'erreur  $L^\infty$  relative est tracée en fonction du pas  $h$ . En haut, à gauche le cas du cercle plan et à droite le cas de courbes méridiennes emboîtées. En bas le modèle du ventricule gauche, à gauche le champ de tangentes défini en tout point du modèle et à droite le champ de tangentes discret.

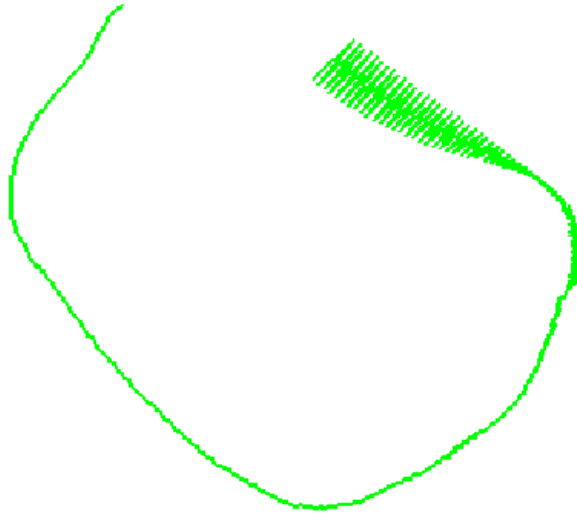


FIG. 2.6 – Une trajectoire d’une fibre obtenue par la méthode de Nyström. On remarque les oscillations que fait cette trajectoire.

### 2.3.3 Algorithme de suivi de fibres

Afin de reconstruire les trajectoires des fibres myocardiques à partir de données anatomiques, nous avons développé des algorithmes basés sur les méthodes numériques présentées dans la partie 2.3.2, permettant à partir de ces données de suivre chaque fibre point par point le long de sa trajectoire.

#### Formulation du problème :

Nous disposons d’un champ discret de vecteurs unitaires tangents aux fibres. Les points où ce champ est défini sont les nœuds d’un maillage tridimensionnel parallélépipédique uniforme. Pour obtenir un champ de vecteurs unitaires défini en un point quelconque  $M$  du muscle, nous interpolons, avec pour coefficients de pondération les coordonnées barycentriques, les directions des fibres aux points voisins  $M_i$  du maillage et puis nous normalisons le vecteur obtenu. La formule d’interpolation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tau^* = (1 - \gamma) \left[ (1 - \beta) \left( (1 - \alpha) \tau_1 + \alpha \tau_2 \right) + \beta \left( (1 - \alpha) \tau_4 + \alpha \tau_3 \right) \right] + \\ \quad \gamma \left[ (1 - \beta) \left( (1 - \alpha) \tau_5 + \alpha \tau_6 \right) + \beta \left( (1 - \alpha) \tau_8 + \alpha \tau_7 \right) \right], \\ \tau = \frac{\tau^*}{\|\tau^*\|}, \end{cases} \quad (2.15)$$

avec  $\tau_i = \tau(M_i)$ ,  $i = 1 \dots 8$  et  $\tau = \tau(M)$ . Les valeurs  $\alpha, \beta$  et  $\gamma \in [0, 1]$  et elles sont les coordonnées barycentriques du point  $M$ , voir Figure 2.7.

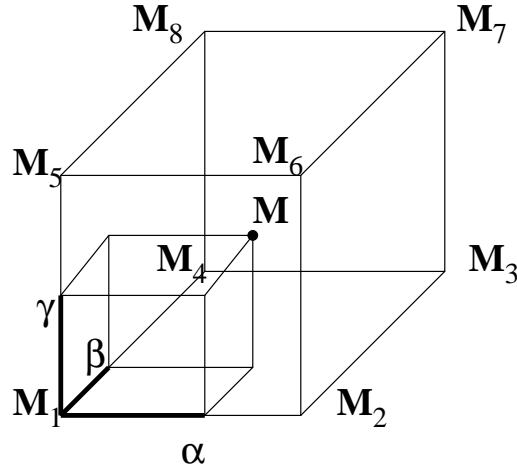


FIG. 2.7 – Les points  $M_i$  sont les sommets du parallépipède du maillage contenant  $M$  et  $\alpha, \beta$  et  $\gamma \in [0, 1]$  sont les coordonnées barycentriques du point  $M$ .

Si on cherche les trajectoires des fibres comme des courbes paramétrées par l'abscisse curviligne, ces courbes sont alors les courbes intégrales de l'équation différentielle (2.16)

$$\mathbf{x}' = \tau(\mathbf{x}). \quad (2.16)$$

Pour résoudre l'équation (2.16), nous avons sélectionné parmi les méthodes numériques présentées dans la section 2.3.2, celle du point milieu. Désignons par  $\tau_i$  le vecteur  $\tau(\mathbf{x}_i)$  et par  $h$  un pas constant. **L'algorithme de suivi de fibres** est donc :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{2}\tau_n, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\tau_{n+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (2.17)$$

## 2.4 Conjecture de Streeter sur le ventricule gauche

En 1979, Streeter, [85] a obtenu des mesures partielles de l'orientation des fibres myocardiques et il a exprimé l'hypothèse que les fibres courent comme des géodésiques sur un ensemble de surfaces emboîtées. Il a vérifié cette hypothèse sur la partie libre équatoriale du ventricule gauche en se servant de la propriété de Clairaut.

Pour pouvoir utiliser les données anatomiques qui nous fournissent en un échantillon de points du muscle les composantes des vecteurs unitaires tangents aux fibres, nous avons exprimé  $r \cos \theta$  en fonction de ces données. En effet, soit  $(x, y, z)$  les trois coordonnées d'un point et  $\tau = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$  le vecteur unitaire tangent à la fibre en ce point. Le vecteur unitaire tangent au parallèle en ce point a pour composantes  $\mathbf{t} = (-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0)$  (où l'axe des  $z$  du repère cartésien considéré est supposé être l'axe de révolution), ce qui fait que :

$$r \cos \theta = r\tau \cdot \mathbf{t} = x\tau_y - y\tau_x. \quad (2.18)$$



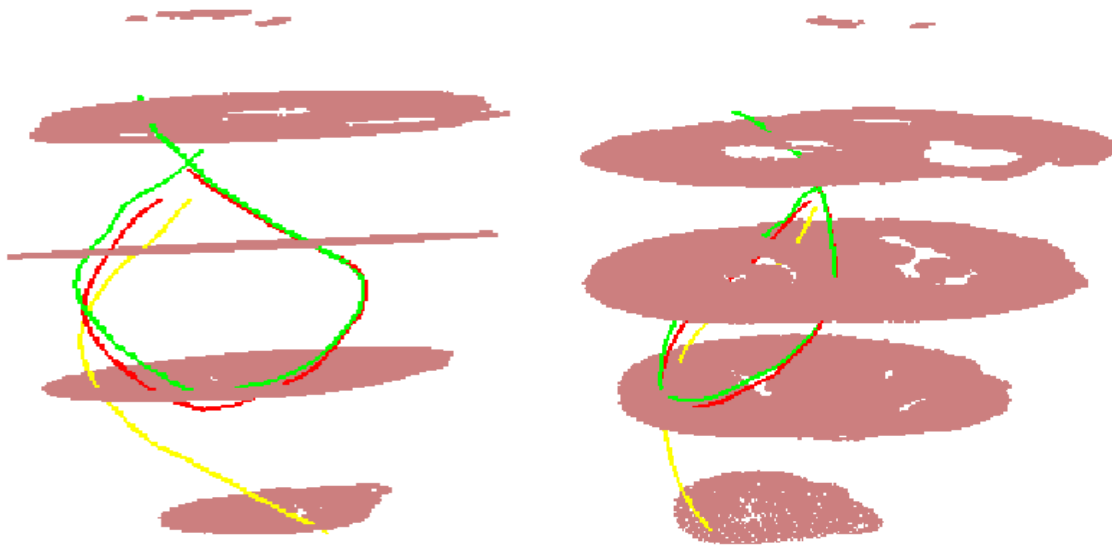


FIG. 2.8 – Des trajectoires obtenues par l’algorithme de suivi de fibres, deux positions différentes du cœur.

Si la conjecture de Streeter est vraie pour le ventricule gauche tout entier, c’est-à-dire que les fibres sont les géodésiques d’un ensemble de surfaces toroïdales emboîtées, alors pour tous les points d’une fibre donnée nous devons trouver la même valeur de la quantité de Clairaut. De plus, si pour une surface donnée les fibres recouvrent toute la surface, et que les fibres sont déduites l’une de l’autre par rotation autour de l’axe de révolution ce qui est une hypothèse naturelle, alors la quantité de Clairaut doit être constante sur la surface.

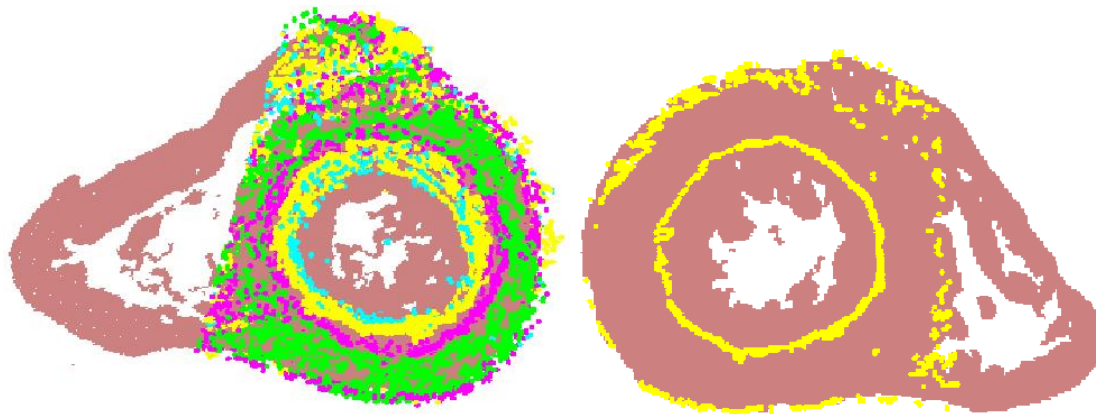


FIG. 2.9 – Isovaleurs de  $C$  obtenus sur des sections coronales. A gauche, chaque couleur correspond à une valeur de  $C$  dont les traces sont des cercles concentriques. A droite, deux cercles qui correspondent à la même valeur de  $C$ .

Notre idée est d'évaluer la quantité de Clairaut  $C$  aux points de l'échantillon de données en utilisant la formule précédente (2.18) et ensuite de tracer les isovaleurs de cette quantité dans des plans de sections coronales (perpendiculaires à l'axe de révolution du ventricule gauche) et dans des plans verticaux passant par l'axe du ventricule gauche, l'un parallèle et l'autre orthogonal au septum, nommés sagittal et transversal respectivement.

Comme c'était prévu, pour des valeurs différentes de  $C$ , les courbes d'isovaleurs dans une section coronale donnée sont des cercles concentriques, voir Figure 2.9. De plus, à une valeur donnée de  $C$  correspondent deux cercles concentriques ce qui "prouve" que les fibres courent sur des surfaces toroïdales en effectuant au moins une spire et qu'elles sont, sur chacune des surfaces, invariantes par rotation autour de l'axe de révolution. En parallèle, en suivant les fibres point par point pour faire apparaître leurs trajectoires, on constate qu'une fibre donnée traverse les cercles d'isovaleurs qui correspondent à une même valeur de  $C$ , ce qui confirme que le long de la fibre la quantité  $C$  est constante, voir Figure 2.10. Les isovaleurs de  $C$  dans des sections verticales sont des courbes méridiennes emboîtées ayant la forme de croissant, voir Figure 2.11. Par conséquent, on peut dire que les fibres se trouvent sur des surfaces emboîtées.

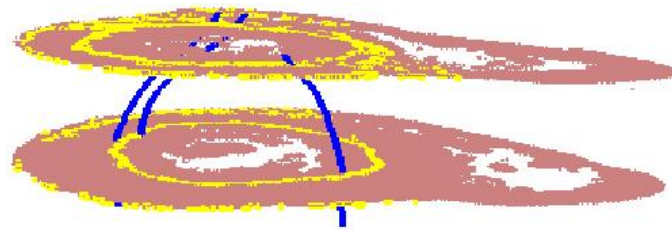


FIG. 2.10 – Des trajectoires obtenues par l'algorithme de suivi de fibres. Elles traversent dans coupes différentes les cercles qui correspondent à la même valeur de  $C$ .

**Reconstruction de nappes de fibres** Nous avons tracé les trajectoires des fibres issues d'un cercle d'isovaleur de la constante de Clairaut  $C$ . Nous avons remarqué que ces trajectoires forment une nappe de fibres qui restent parallèles les unes aux autres. Cette nappe de fibres traverse bien dans les autres sections du cœur les cercles de la même valeur de  $C$  que celle du cercle des points de départ des fibres, voir Figure 2.12. Ces nappes montrent la structure toroïdale du ventricule gauche et la forme hélicoïdale que suit chacune des fibres.

Pour confirmer que les nappes ainsi construites correspondent bien aux surfaces toroïdales emboîtées et que d'autres nappes qui ne correspondent pas à des surfaces emboîtées ne peuvent pas exister, nous avons tracé les trajectoires des fibres issues d'un ensemble de points qui n'ont pas nécessairement la même valeur de  $C$ . Le résultat obtenu montre bien que ces fibres ne restent plus parallèles les unes aux autres. Par exemple dans le cas où les points sont choisis sur un segment de l'épicarde à l'endocarde traversant l'épaisseur du ventricule gauche, les fibres s'enfoncent à des niveaux différents dans le muscle pour finir par s'éloigner, voire diverger, les

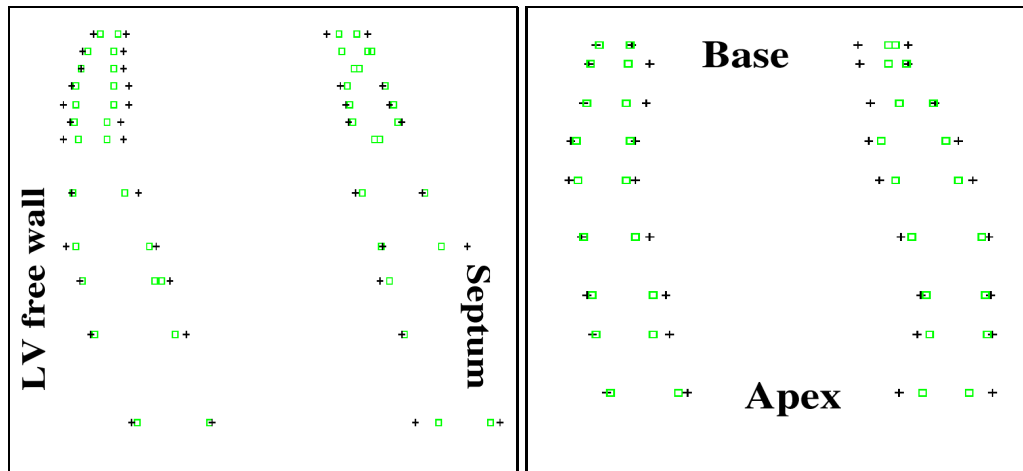


FIG. 2.11 – Traces d'isovaleurs de  $C$  dans des sections longitudinales : parallèle (gauche) et orthogonale (droite) au septum interventriculaire.

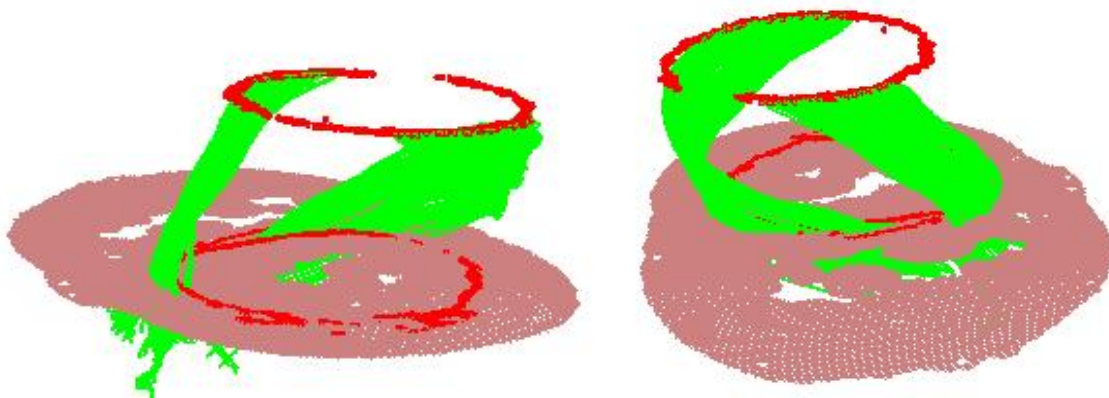


FIG. 2.12 – Deux positions différentes d'une image de nappes de fibres sont issues de points se trouvant sur un cercle d'isovaleurs de  $C$ .

unes des autres, voir Figure 2.13.

L'étude du ventricule droit est plus compliquée parce qu'il ne possède pas une forme géométrique simple et il n'existe pas de quantités telles que la constante de Clairaut qui facilitent la vérification de la conjecture. Pour cela nous sommes obligés de revenir à la définition d'une géodésique : *"c'est une courbe dont la normale principale en tout point coïncide avec la normale à la surface"*. L'idée est de reconstruire les surfaces, si elles existent, sur lesquelles courent les fibres, de déterminer numériquement en tout point d'une fibre la normale principale et vérifier si elle coïncide avec la normale à la surface qui est elle aussi déterminée numériquement.

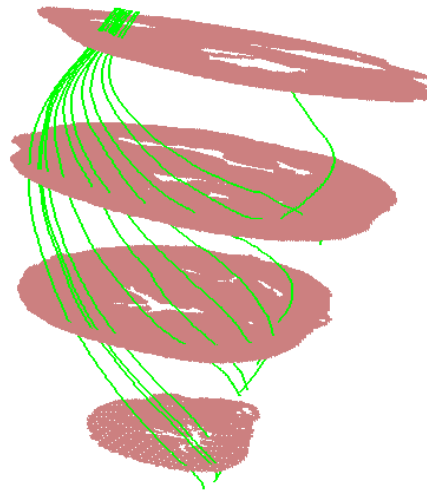


FIG. 2.13 – Des trajectoires de fibres issues de points se trouvant sur un segment de l'épicarde à l'endocarde et n'ayant pas la même valeur de  $C$ .

## 2.5 Reconstruction de surfaces

Il s'agit de construire des surfaces tangentes à un champ de vecteurs tridimensionnel  $\tau$ . Nous n'aborderons pas ici l'étude d'existence de telles surfaces. Ce problème appartient à la théorie des systèmes différentiels complètement intégrables pour lesquels des résultats théoriques existent (par exemple le théorème de Frobenius).

### 2.5.1 Principe de l'algorithme

Dans notre cas, les surfaces que nous cherchons sont des surfaces (nappes) de fibres. Donc nous cherchons des surfaces engendrées par des courbes tangentes au champ  $\tau$ . Ceci nous ramène à développer des algorithmes spécifiques à ce type de problème basés sur l'algorithme de suivi de fibres que nous avons développé dans la section 2.3.2.

Notre idée est la suivante : partant d'un point donné du domaine, il sera appelé point de départ, nous construisons à l'aide de l'algorithme de suivi de fibres la courbe tangente au champ  $\tau$ . Nous pouvons ensuite calculer (numériquement) la normale principale  $\mathbf{n}$  et le vecteur binormale  $\mathbf{b}$  à cette courbe. Ceci veut dire qu'on peut définir un champ de vecteurs binormales défini dans tout le domaine. Ensuite, à partir du point de départ, nous pouvons construire à l'aide de l'algorithme de suivi de fibres la ligne tangente au champ des binormales. Si maintenant nous supposons que cette ligne est une courbe de la surface recherchée, alors la surface sera obtenue en traçant les courbes tangentes à  $\tau$  et s'appuyant sur la ligne tangente au champ des binormales. Des variantes de cette méthode sont possibles, elles consistent à tracer les courbes tangentes à  $\tau$  et s'appuyant sur une ligne d'un champ  $\tau + \mu\mathbf{b}$ , où  $\mu$  est une fonction scalaire.

Construire la surface revient donc à déterminer une ligne de champ des binormales. La question qu'on se pose : comment calculer la binormale ? Pour répondre à cette question, nous avons développé deux méthodes pour déterminer la normale principale  $\mathbf{n}$  et la binormale  $\mathbf{b}$  à une courbe.

### 2.5.2 Calcul de la normale principale et de la binormale

(a) Première méthode : Considérons une courbe  $s \mapsto \phi(s)$  paramétrée par l'abscisse curviligne, et  $s \mapsto \tau(s)$  (resp.  $\mathbf{n}(s)$ ,  $\mathbf{b}(s)$ ) ses tangentes unitaires (resp. normales principales, binormales). On a pour tout  $(s_i, s_{i+1})$

$$\phi(s_{i+1}) - \phi(s_i) = (s_{i+1} - s_i)\tau(s_i) + \frac{(s_{i+1} - s_i)^2}{2}\tau'(s_i) + o((s_{i+1} - s_i)^2)$$

et donc

$$(\phi(s_{i+1}) - \phi(s_i)) \wedge \tau(s_i) = \frac{(s_{i+1} - s_i)^2}{2}\tau'(s_i) \wedge \tau(s_i) + o((s_{i+1} - s_i)^2).$$

Or  $\tau'(s_i) = -\frac{\mathbf{n}(s_i)}{R(s_i)}$ , par suite

$$(\phi(s_{i+1}) - \phi(s_i)) \wedge \tau(s_i) = \frac{(s_{i+1} - s_i)^2}{2} \frac{\mathbf{b}(s_i)}{R(s_i)} + o((s_{i+1} - s_i)^2).$$

Ceci conduit à définir une valeur approchée  $\mathbf{b}_i$  de  $\mathbf{b}(s_i)$  par

$$\mathbf{b}_i = \frac{(\phi(s_{i+1}) - \phi(s_i)) \wedge \tau(s_i)}{\|(\phi(s_{i+1}) - \phi(s_i)) \wedge \tau(s_i)\|}.$$

Pour une courbe obtenue numériquement par l'algorithme de suivi de fibres à partir d'un champ  $\tau$ , et  $M_i, M_{i+1}$  deux points successifs de la courbe, nous posons

$$\mathbf{b}_i = \frac{\overrightarrow{M_i M_{i+1}} \wedge \tau_i}{\|\overrightarrow{M_i M_{i+1}} \wedge \tau_i\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_i = \mathbf{b}_i \wedge \tau_i,$$

où  $\tau_i$ ,  $\mathbf{n}_i$  et  $\mathbf{b}_i$  désignent respectivement le vecteur tangent, la normale principale approchée et la binormale approchée en  $M_i$ . Cette méthode est représentée graphiquement sur la Figure 2.14 (a).

(b) Deuxième méthode : Cette méthode consiste à remplacer entre trois points successifs,  $M_{i-1}$ ,  $M_i$ ,  $M_{i+1}$ , une courbe obtenue numériquement par l'algorithme de suivi de fibres à partir d'un champ  $\tau$ , par une courbe paramétrique polynomiale  $\Gamma$  passant par ces trois points et qui soit tangente en chacun de ces points au champ  $\tau$ . Pour cela nous cherchons l'équation paramétrique de la courbe  $\Gamma$  et ensuite nous calculons sa normale principale  $\mathbf{n}_i$  au point  $M_i$  et sa binormale  $\mathbf{b}_i = \tau_i \wedge \mathbf{n}_i$ . Nous approchons en  $M_i$  la normale principale de la courbe obtenue par l'algorithme de suivi de fibres par  $\mathbf{n}_i$  et sa binormale par  $\mathbf{b}_i$ . Voir Figure 2.14 (b).

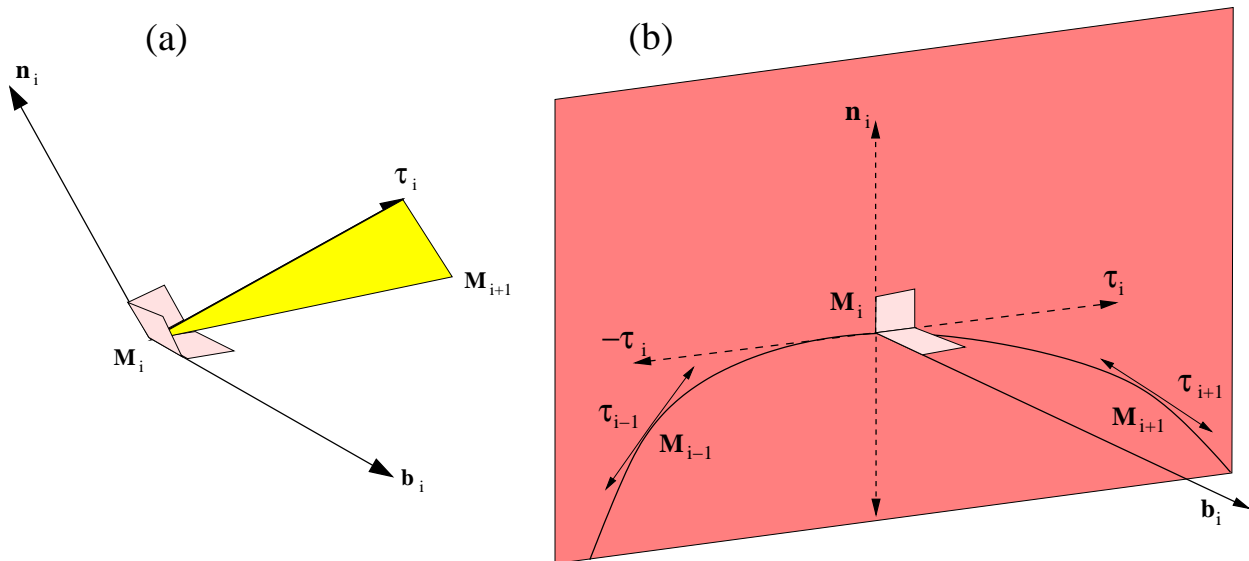


FIG. 2.14 – Les représentations graphiques des méthodes de calcul de la normale principale et la binormale à une courbe.

**Validation** Nous avons validé ces algorithmes sur le modèle abstrait du ventricule gauche présenté dans la section 1.5. Le modèle consiste en un ensemble de surfaces emboîtées sur chacune desquelles court un réseau de courbes géodésiques. Nous savons, d'après la définition d'une géodésique, que la normale à la surface est égale à la normale principale à la géodésique et que le plan tangent à la surface est le plan contenant la tangente à la géodésique et sa binormale. Donc l'hypothèse que la ligne tangente au champ des binormales soit sur la surface est satisfaite. L'initialisation des algorithmes consiste à donner les coordonnées d'un point de départ du domaine étudié, et l'on obtient ensuite un ensemble de courbes du réseau de géodésiques appartenant à la surface sur laquelle se trouve le point de départ. La Figure 2.15 montre trois surfaces obtenues en validant les différentes méthodes de calcul des vecteurs  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{b}$  (dessins de gauche et au centre), ainsi qu'une variante de l'algorithme s'agissant de tracer les courbes tangentes au champ  $\tau$  et s'appuyant sur la ligne du champ  $\tau + \mu\mathbf{b}$  dont la composante en  $z$  (axe de révolution  $Oz$ ) est nulle (dessin de droite).

**Application aux données anatomiques** L'algorithme de reconstruction de surfaces n'a pas fonctionné correctement lors de son application aux données anatomiques. Ceci est dû au problème de la sensibilité de l'algorithme à la précision des données anatomiques. En effet, d'un côté la précision des données anatomiques actuelles n'est pas suffisante pour pouvoir appliquer cet algorithme et d'un autre côté l'algorithme nécessite le calcul de la normale principale et la binormale ce qui nous ramène à approximer la dérivée seconde du vecteur position  $\mathbf{x}$ .

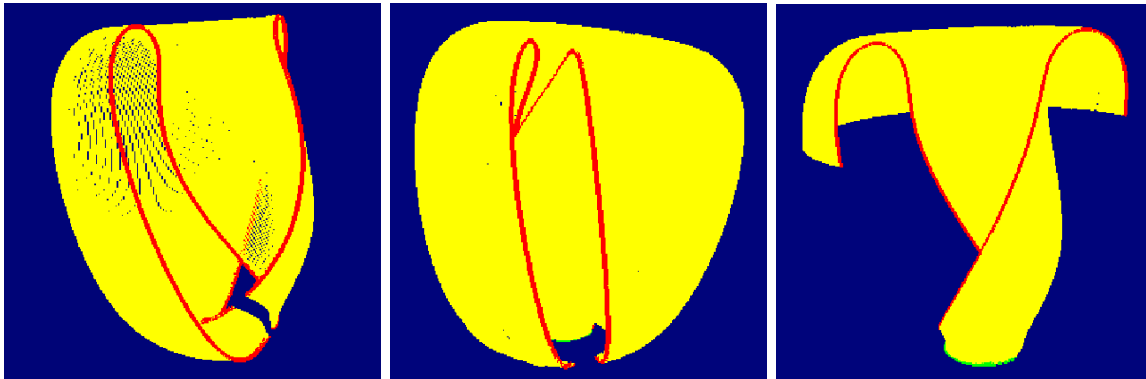


FIG. 2.15 – Des surfaces obtenues en validant les méthodes de reconstruction de surfaces sur un modèle abstrait de révolution du ventricule gauche.

## 2.6 Calcul de $\text{div } \tau$

Peskin [72] introduit la notion de “tubes de fibres”, c’est-à-dire de surfaces tubulaires à l’intérieur desquelles et sur la surface latérale desquelles courent les fibres. De plus, une surface tubulaire est supposée posséder des sections orthogonales aux fibres. Notons que l’existence de tels tubes de fibres pour un champ de vecteurs arbitraire n’est pas assurée, puisqu’elle requiert la condition de Frobenius. Toutefois si l’existence de tels voisinages est vraie en tout point, il est aisé de montrer que si, de plus, les sections orthogonales sont de même aire, alors la divergence du champ de vecteurs  $\tau$  est nulle. Peskin suppose dans la suite de son analyse que  $\text{div } \tau = 0$ .

Il est intéressant d’examiner cette hypothèse à l’aide de données anatomiques.

Utilisant leurs propres données, Geerts et al. ont récemment fait de tels calculs, voir Geerts et al. [34]. Dans leurs résultats, la quantité  $\text{div } \tau$  semble être inférieure à  $0,07 \text{ mm}^{-1}$  à travers le myocarde, sauf dans les sites de fusion entre le ventricule gauche et le ventricule droit et les sites d’insertion des muscles papillaires où sa valeur peut être élevée.

Nous avons souhaité effectuer un nouveau calcul de cette quantité à partir des données anatomiques dont nous disposons. L’expression de la divergence est donnée par l’équation  $\text{div } \tau = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z}$ . Nous avons approximé cette quantité par une méthode de différences finies.

Nous constatons que les valeurs calculées de la divergence du champ d’orientation des fibres, qui devraient être proches de zéro selon Peskin [72], ne sont pas exactement proches de zéro. Par exemple, pour une section au niveau équatorial du myocarde où la divergence est calculée aux sommets d’un maillage carré, nous avons trouvé que seulement 24% de ces valeurs sont plus petites que  $1 \text{ mm}^{-1}$  et que 2,3% plus petites que  $0,1 \text{ mm}^{-1}$ , voir Figure 2.16.

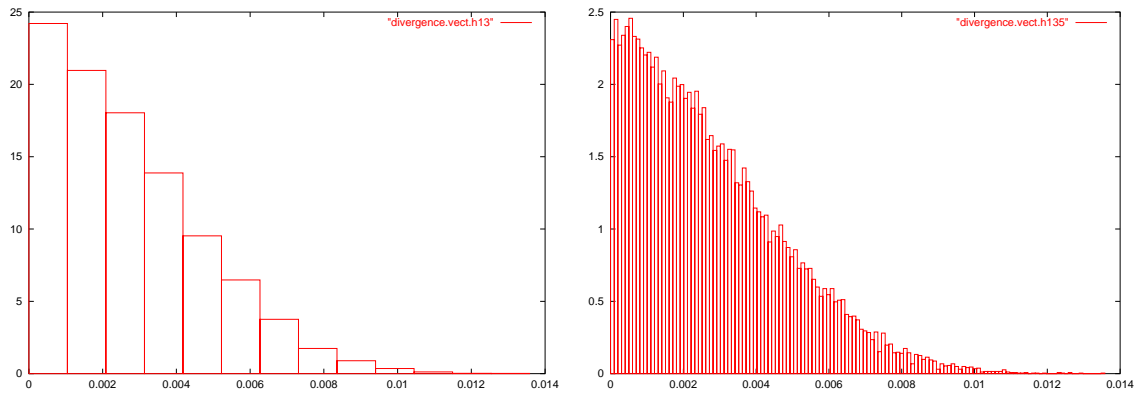


FIG. 2.16 – Histogrammes de la divergence :  $div\tau$  mesurée en  $\mu\text{m}^{-1}$  en abscisse, et le pourcentage du nombre de points dans chaque classe en ordonnée. Ces histogrammes correspondent à une section équatoriale du myocarde : la largeur d'une classe est de  $1\text{ mm}^{-1}$  à gauche et de  $0,1\text{ mm}^{-1}$  à droite.





# Conclusion

Dans un premier temps, nous avons étudié quelques propriétés des courbes tracées sur une surface. Nous nous sommes intéressés en particulier aux géodésiques périodiques des surfaces toroïdales. Dans cette direction, nous avons trouvé une relation qui doit être satisfaite par la constante de Clairaut et les nombres de tours et de spires que doit faire la géodésique périodique. En se basant sur ce résultat, nous avons construit un modèle abstrait pour le ventricule gauche. Ce modèle consiste en des surfaces toroïdales emboîtées recouvertes par des réseaux de géodésiques périodiques.

La géométrie de révolution du ventricule gauche nous a permis d'utiliser l'invariance de la constante de Clairaut le long des géodésiques des surfaces de révolution pour vérifier la conjecture de Streeter sur ce ventricule tout entier. Notons que la quantité de Clairaut est facilement calculable à partir des données anatomiques.

En parallèle, nous avons développé un algorithme de suivi de fibres basé sur des méthodes numériques pour la résolution du problème de Cauchy. En traçant les trajectoires des fibres issues de traces d'isovaleurs de la constante de Clairaut dans des sections horizontales, nous avons remarqué que ces fibres forment des nappes reflétant la structure toroïdale du ventricule gauche. Ensuite, nous avons généralisé l'algorithme de suivi de fibres en un algorithme de reconstruction de surfaces qui a été validé sur le modèle abstrait que nous avons construit pour le ventricule gauche. Lors de son application aux données anatomiques, il apparaît qu'il diverge rapidement, ceci pourrait être dû à la sensibilité de l'algorithme aux données anatomiques qui contiennent des erreurs.



**Deuxième partie**  
**Modélisation Mécanique**



# Introduction

Le premier chapitre de la partie mécanique consiste à présenter les éléments nécessaires pour toute modélisation en mécanique des milieux continus et ensuite nous exposons des lois de comportement du myocarde proposées dans la littérature.

Dans le deuxième chapitre nous développons une technique d'homogénéisation discrète des milieux périodiques. Cette technique consiste à remplacer un modèle discret de treillis de barres élastiques par un modèle de milieu continu en se basant sur la petitesse du rapport de la longueur d'une barre sur la taille du treillis, et sur la répétitivité du treillis. Elle permet d'obtenir à la fois l'équilibre du milieu continu équivalent et sa loi de comportement macroscopique. La loi de comportement s'obtient par l'intermédiaire de la résolution d'un système d'auto-équilibre non linéaire écrit sur une cellule de référence de la structure discrète. Nous démontrons aussi que la loi de comportement du modèle limite est hyperélastique, et objective sous certaines conditions.

Afin d'obtenir une loi de comportement du myocarde, nous présentons dans le troisième chapitre l'application de la technique d'homogénéisation en utilisant de données mécaniques expérimentales obtenues sur des cellules cardiaques isolées. Nous comparons ensuite nos résultats sur la loi macroscopique avec des lois de comportement du myocarde à l'état passif trouvées dans la littérature.

Une autre application de la technique d'homogénéisation est présentée dans le quatrième chapitre. Elle consiste à modéliser un nanotube de carbone par un milieu continu. Nous étudions les deux aspects : grandes et petites déformations.



# Chapitre 1

## Elasticité non linéaire - Lois de comportement du myocarde

Ce chapitre est composé de deux parties.

La première partie contient les bases de la mécanique des milieux continus. Après introduction des outils de description des différents tenseurs pouvant décrire les déformations finies d'un milieu continu, on décrit les efforts intérieurs et extérieurs afin de définir les tenseurs de contraintes et d'obtenir les équations d'équilibre à partir du principe fondamental de la mécanique. La suite est le véritable but de ce chapitre : une introduction sur les lois de comportement. Ces lois de comportement expriment la relation entre les contraintes et les déformations. Après quelques définitions fondamentales (objectivité, homogénéité, parité,...), on établit les équations générales de l'élasticité tridimensionnelle non linéaire des milieux hyperélastiques isotropes et isotropes transverses, compressibles ou non. Ensuite, on donne l'expression du tenseur de contraintes dans un système de coordonnées curvilignes généralisées. Pour plus de détails sur cette partie, on fait référence à (Washizu [98], Truesdell [95], Gurtin [38], Ciarlet [22], Le Tallec [56], Ogden [67]).

Dans la deuxième partie nous présentons des lois de comportement du myocarde proposées dans la littérature.

### 1.1 Elasticité non linéaire - Grandes déformations

#### 1.1.1 Cinématique

Le cadre approprié à la modélisation mécanique de la plupart des organes tels que le myocarde est celui de la mécanique des milieux continus. En raison des caractéristiques mécaniques des organes "mous" et des sollicitations auxquelles ils sont soumis, l'approximation dite "des petites déformations" de la mécanique des milieux continus n'est pas adaptée. Pour modéliser mécaniquement ces organes, il est nécessaire de mettre en œuvre les outils de la mécanique des milieux continus dans leur complète généralité et de se placer dans le cadre dit "des grandes déformations".



L'objet de la mécanique est l'étude de l'évaluation des distances entre des points matériels, pour cela il est indispensable d'identifier ces points. En mécanique des milieux continus, les points matériels occupent des ensembles connexes de l'espace physique, modélisé comme par un espace euclidien de dimension 3, donc pour identifier les points matériels on a besoin d'un système de 3 nombres réels, ce système constitue les variables lagrangiennes du milieu continu. L'espace étant rapporté à un repère, par exemple orthonormé, il est très fréquent d'identifier les points matériels du milieu continu par les coordonnées dans ce repère de leurs positions dans une configuration particulière dite de référence. C'est ce système qui est utilisé dans la présentation qui suit. D'autres systèmes d'identification des points matériels peuvent être utilisés. Pour les besoins de l'étude d'homogénéisation du chapitre 2, la modélisation des milieux continus dans un système de coordonnées curvilignes est présentée au paragraphe 1.1.4.

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, on note  $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$  la configuration de référence du milieu continu,  $\overline{\Omega}$  est l'adhérence de  $\Omega$  ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Gamma$  désigne la frontière de  $\Omega$  supposée suffisamment régulière. Un point matériel  $P$  du milieu continu est donc identifié par les coordonnées  $X^1, X^2, X^3$  de sa position dans cette configuration. On note  $X$  le triplet  $(X^1, X^2, X^3)$  de  $\mathbb{R}^3$ . De façon équivalente le point matériel peut être identifié par le vecteur  $\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i$  où  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  sont les trois vecteurs de base du repère utilisé.

On appelle déformation de la configuration de référence une application  $\varphi : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^3$  suffisamment régulière qui soit injective sur  $\Omega$  et telle que :

$$\det \nabla_X \varphi > 0 \quad \text{sur } \Omega, \quad (1.1)$$

où  $\nabla_X \varphi$  est le gradient par rapport à  $X$  de la déformation  $\varphi$  et il sera noté dans la suite par  $\mathbf{F}$ . L'ensemble  $\varphi(\overline{\Omega})$  est appelé configuration déformée. On suppose que  $\varphi(\overline{\Omega})$  est encore un domaine compact de  $\mathbb{R}^3$  et que :

$$\varphi(\overline{\Omega}) = \overline{\varphi(\Omega)}, \quad \varphi(\partial\Omega) = \partial(\varphi(\Omega)), \quad \text{int } \varphi(\overline{\Omega}) = \varphi(\Omega). \quad (1.2)$$

On désigne dans la suite :

$$\Omega^\varphi = \varphi(\Omega), \quad \Gamma^\varphi = \partial\Omega^\varphi. \quad (1.3)$$

Soit  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  la position dans la configuration déformée du point matériel identifié par  $P$  dans la configuration de référence. Les coordonnées  $x = (x^1, x^2, x^3)$  sont obtenues par l'équation  $x = \varphi(X)$ . Le champ de déplacement associé à la déformation  $\varphi$  est la fonction  $\mathbf{u} : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^3$  définie par :

$$\mathbf{u}(X) = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (1.4)$$

Le gradient de déplacement  $\nabla_X \mathbf{u}$  satisfait la relation suivante :

$$\nabla_X \mathbf{u} = \nabla_X \varphi - \mathbf{Id}, \quad (1.5)$$

avec  $\mathbf{Id}$  le tenseur identité.

Physiquement, le gradient de déformation permet de décrire comment la distance entre deux points matériels voisins  $P$  et  $P'$  change après que le matériau soit déformé. Désignons par  $\mathbf{dX} = dX^i \mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i$  les vecteurs liant  $P$  à  $P'$  avant et après déformation respectivement. Ils sont reliés par les équations suivantes :

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^k} dX^k, \quad \text{donc } \mathbf{dx} = \mathbf{F} \mathbf{dX}. \quad (1.6)$$

Ensuite, la distance entre les points matériels après déformation, c'est-à-dire la longueur d'arc  $ds$  du segment déformé  $\mathbf{dx}$ , peut être mesurée par

$$ds^2 = dx^i dx^i = \mathbf{dx}^T \mathbf{dx} = (\mathbf{F} \mathbf{dX})^T \mathbf{F} \mathbf{dX} = \mathbf{dX}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{dX} = \mathbf{dX}^T \mathbf{C} \mathbf{dX}, \quad (1.7)$$

où  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  est le tenseur de déformation de Cauchy à droite. On définit également le tenseur de déformation de Cauchy à gauche par  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ . Comme l'objet de la mécanique est l'étude de l'évolution des distances entre les points matériels, la notion importante en cinématique des milieux continus est le tenseur  $\mathbf{C}$ .

**Décomposition polaire** Le tenseur gradient de déformation  $\mathbf{F}$  peut être décomposé de façon unique en deux parties : une rotation et une déformation pure. Cette décomposition polaire peut être représentée mathématiquement en considérant le tenseur gradient de déformation comme étant le produit :  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U}$ , où  $\mathbf{R}$  est un tenseur rotation orthogonal et  $\mathbf{U}$  est un tenseur symétrique défini positif dit tenseur de déformation pure à droite. De la même façon on peut écrire  $\mathbf{F}$  sous la forme :  $\mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{R}$  avec  $\mathbf{V}$  est un tenseur symétrique défini positif dit tenseur de déformation pure à gauche.

On a la relation suivante :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{R} \mathbf{U})^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^2. \quad (1.8)$$

Notons que  $\mathbf{C}$  est, comme  $\mathbf{U}$ , un tenseur symétrique défini positif, ce qui fait qu'il a trois valeurs propres strictement positives, on les désigne par  $(\lambda_i^2(\mathbf{C}))_{i=1,2,3}$ .

Une quantité scalaire  $f$  fonction d'un tenseur  $\mathbf{A}$  de  $\mathbb{M}_3$  est dite un invariant de  $\mathbf{A}$  si et seulement si, pour tout  $\mathbf{Q} \in O_3$ , on a  $f(\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T) = f(\mathbf{A})$ .

En 3D le tenseur de déformation  $\mathbf{C}$  possède trois invariants principaux donnés par :

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) &= \text{tr}(\mathbf{C}), \\ I_2(\mathbf{C}) &= \frac{1}{2} \{ (\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \} = \text{tr}(\text{Cof}(\mathbf{C})), \\ I_3(\mathbf{C}) &= \det \mathbf{C} = (\det \mathbf{F})^2 = J^2, \end{aligned} \quad (1.9)$$

où  $\text{tr}$  désigne la trace d'une matrice et  $\text{Cof}(\mathbf{C})$  est la matrice des cofacteurs de  $\mathbf{C}$ ,  $(\text{Cof}(\mathbf{C}))_{ij} = \det \mathbf{A}_{ij}$ , avec  $\mathbf{A}_{ij}$  est la matrice obtenue à partir de  $\mathbf{C}$  en éliminant la  $i$ ème ligne et la  $j$ ème colonne.

On peut aussi exprimer ces invariants en fonction des valeurs propres de  $\mathbf{C}$  :

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2(\mathbf{C}) &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \\ I_3(\mathbf{C}) &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Soit  $ds_0$  la longueur d'arc du segment qui joint deux points matériels  $P$  et  $P'$  dans l'état non déformé. La différence entre les carrés des longueurs d'arc  $ds$  et  $ds_0$  est d'après (1.7) :

$$ds^2 - ds_0^2 = (C_{ij} - \delta_{ij}) dX^i dX^j, \quad (1.11)$$

Le tenseur  $\mathbf{E}$  défini par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{Id}) \quad (1.12)$$

est appelé tenseur des déformations de Green. Si nécessaire, le tenseur  $\mathbf{E}$  peut être exprimé en fonction du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  mesuré par rapport à la configuration de référence  $\Omega$  par :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}). \quad (1.13)$$

Un élément de volume  $dX$  de la configuration de référence se transforme après déformation en un élément de volume  $dx$  de la configuration déformée :

$$dx = (\det \mathbf{F}) dX = J dX. \quad (1.14)$$

De la même façon, soit  $\mathbf{N}$  le vecteur unitaire normal à un élément de surface  $dA$  de la configuration de référence, et  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal au même élément de surface mais considéré à la configuration déformée qu'on note  $da$ . Les quantités  $\mathbf{N}dA$  et  $\mathbf{n}da$  sont reliées par l'équation suivante :

$$\mathbf{n}da = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}dA = (\text{Cof} \mathbf{F}) \mathbf{N}dA. \quad (1.15)$$

### 1.1.2 Tenseurs de contraintes - Equations d'équilibre

En mécanique des milieux continus, un corps solide dans son état actuel (donc déformé) est soumis à trois types de forces :

- forces volumiques :  $\mathbf{f}^\varphi : \Omega^\varphi \mapsto \mathbb{R}^3$ , où  $\mathbf{f}^\varphi$  est une densité de forces de volume par unité de volume de la configuration déformée.
- forces surfaciques :  $\mathbf{g}^\varphi : \Gamma^\varphi \mapsto \mathbb{R}^3$ , où  $\mathbf{g}^\varphi$  est une densité de forces de surface par unité de surface de la configuration déformée définie sur la frontière  $\Gamma^\varphi$ .
- forces de contact :  $\mathbf{t}^\varphi : \overline{\Omega^\varphi} \times S^2 \mapsto \mathbb{R}^3$  où  $\mathbf{t}^\varphi(x, \mathbf{n}) da$  représente la force exercée par une partie  $B \subset \Omega^\varphi$  du solide sur l'autre partie au travers la surface  $\mathbf{n}da$ . L'ensemble  $S^2$  est la sphère unité  $S^2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; \|\mathbf{v}\| = 1\}$  et pour  $x \in \partial B$ ,  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur unitaire normale à  $\partial B$  en  $x$ . Le vecteur  $\mathbf{t}^\varphi$  s'appelle le vecteur de contraintes de Cauchy. Il mesure donc la force par unité de surface déformée agissant sur un élément de surface de la configuration déformée.

A l'équilibre, les vecteurs  $\mathbf{f}^\varphi$ ,  $\mathbf{g}^\varphi$  et  $\mathbf{t}^\varphi$  vérifient le principe fondamental, (voir par exemple Ciarlet [22] et Gurtin [38]), et l'on a le théorème suivant dit le théorème de Cauchy :

**Théorème 1.1** : *Sous l'hypothèse de régularité sur  $\mathbf{f}^\varphi$ ,  $\mathbf{g}^\varphi$  et  $\mathbf{t}^\varphi$ , il existe une fonction  $\sigma : \overline{\Omega^\varphi} \mapsto \mathbb{M}_3$  telle que pour tout  $x \in \overline{\Omega^\varphi}$  et tout  $\mathbf{n} \in S^2$  on a :*

$$\begin{cases} \mathbf{t}^\varphi(x, \mathbf{n}) = \sigma(x)\mathbf{n}, \\ \sigma(x) \text{ est symétrique.} \end{cases} \quad (1.16)$$

De plus on a à l'équilibre :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(x) = \mathbf{f}^\varphi(x), \quad \forall x \in \Omega^\varphi, \\ \sigma(x)\mathbf{n}(x) = \mathbf{g}^\varphi(x), \quad \forall x \in \Gamma^\varphi. \end{cases} \quad (1.17)$$

L'opérateur  $\operatorname{div}$  est la divergence par rapport à la variable eulérienne  $x$ . Les équations du système (1.17) s'appellent les équations d'équilibre du solide dans sa configuration déformée. L'application  $\sigma$  s'appelle le tenseur de contraintes de Cauchy.

La formulation variationnelle associée au système (1.17) s'obtient en le multipliant par un champ de vitesses virtuelles  $\mathbf{v}^\varphi : \overline{\Omega^\varphi} \mapsto \mathbb{R}^3$  et puis en intégrant sur le domaine  $\Omega^\varphi$ . En utilisant la formule de Green on obtient :

$$\int_{\Omega^\varphi} \sigma : \nabla_x \mathbf{v}^\varphi dx = \int_{\Omega^\varphi} \mathbf{f}^\varphi \cdot \mathbf{v}^\varphi dx + \int_{\Gamma^\varphi} \mathbf{g}^\varphi \cdot \mathbf{v}^\varphi da, \quad (1.18)$$

où  $\nabla_x$  est le gradient par rapport à la variable eulérienne  $x$ ,  $\cdot$  et  $:$  désignent les produits scalaires usuels des vecteurs et des tenseurs respectivement. L'équation (1.18) est la formulation faible ou formulation en puissances virtuelles des équations d'équilibre (1.17).

Comme la fonction  $\varphi$  est l'inconnue du problème donc la configuration déformée est elle-même inconnue, on a donc intérêt à exprimer les équations d'équilibre dans la configuration de référence qui est connue. Pour cela, on fait dans l'équation (1.18) le changement de variables  $x = \varphi(X)$  pour obtenir le principe des travaux virtuels dans la configuration de référence :

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla_X \mathbf{v} dX = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dX + \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dA, \quad (1.19)$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(X) &= \sigma(\varphi(X))\mathbf{F}^{-T}(X)(\det \mathbf{F}(X)), \\ \mathbf{f}(X) &= \mathbf{f}^\varphi(\varphi(X))(\det \mathbf{F}(X)), \\ \mathbf{g}(X) &= \mathbf{g}^\varphi(\varphi(X))\frac{da}{dA}, \\ \mathbf{v}(X) &= \mathbf{v}^\varphi(\varphi(X)). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Le tenseur  $\mathbf{T}$  s'appelle le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff. Il représente les forces agissant sur un élément de surface de la configuration déformée mais mesuré par unité

de surface non déformée. Il est souvent utilisé pendant les expériences où la force est mesurée dans l'état déformé mais la surface sur laquelle elle agit est mesurée dans l'état non déformé.

Les équations d'équilibre en terme du premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff s'écrivent :

$$\begin{cases} -\text{Div} \mathbf{T} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{T} \mathbf{N} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.21)$$

L'opérateur Div est la divergence par rapport à la variable lagrangienne  $X$ .

Il est souhaitable d'introduire un tenseur de contraintes symétrique défini sur la configuration de référence. C'est pour cela qu'on définit le second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff par la relation :

$$\mathbf{S}(X) = \mathbf{F}^{-1}(X) \mathbf{T}(X). \quad (1.22)$$

Le tenseur  $\mathbf{S}$  représente les forces mesurées par unité de surface non déformée agissant sur un élément de surface de la configuration non déformée. C'est un tenseur symétrique. Le principe des travaux virtuels dans la configuration de référence s'écrit en termes du tenseur  $\mathbf{S}$  :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{S} : (\mathbf{F}^T \nabla_X \mathbf{v} + \nabla_X \mathbf{v}^T \mathbf{F}) dX = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dX + \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dA. \quad (1.23)$$

On a en résumé les relations suivantes entre les trois tenseurs de contraintes :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{F} \mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \\ \mathbf{S} &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= (\det \mathbf{F})^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^T = (\det \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \end{aligned} \quad (1.24)$$

### 1.1.3 Lois de comportement

Du point de vue mathématique ainsi que du point de vue physique le problème abordé dans les sections précédentes est incomplet. En effet, les équations d'équilibre d'une part ont plus d'inconnues (les contraintes et les déformations) que d'équations reliant ces inconnues et d'autre part elles ne prennent pas en compte les propriétés mécaniques du matériau étudié et elles sont valables pour plusieurs matériaux. Donc il faut compléter ces équations par de nouvelles équations soulignant les propriétés mécaniques du matériau considéré et en même temps reliant les inconnues du problème entre elles. Une telle relation est appelée la relation constitutive ou bien la loi de comportement du matériau. Elle est établie à partir d'expériences. Dans la suite on ne s'intéresse qu'aux matériaux élastiques et on expose les notions comme l'objectivité et les parités dans ce cadre seulement.

**Définition 1.1 (Elasticité) :** *Un matériau est dit élastique si et seulement si en tout point matériel  $P(X)$  le tenseur de contraintes  $\sigma$  est une fonction de  $X$  et du gradient de la déformation  $\mathbf{F}$  mesuré à partir de la configuration de référence,  $\sigma = S(X, \mathbf{F})$ .*

**Définition 1.2 (Homogénéité) :** *Le matériau est dit homogène si sa densité de masse et sa loi de comportement sont indépendantes de la particule  $P(X)$ . Dans ce cas le tenseur de contraintes s'écrit  $\sigma = S(\mathbf{F})$ .*

**Proposition 1.1 (Principe de l'indifférence matérielle) :** *La loi de comportement ne dépend pas du référentiel dans lequel les déformations sont observées. Par conséquent, le tenseur de contraintes de Cauchy vérifie la relation suivante*

$$S(X, \mathbf{QF}) = \mathbf{Q}S(X, \mathbf{F})\mathbf{Q}^T, \quad \forall \mathbf{Q} \in O_3, \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3.$$

**Changement de configuration de référence** Dans la loi de comportement élastique considérée,  $\mathbf{F}$  est le gradient de déformation du milieu par rapport à la configuration de référence, il est donc évident que la forme de la loi de comportement donnée par la fonction  $S$  dépend de la configuration de référence choisie. Pour étudier les propriétés d'isotropie d'un matériau, qui traduisent des invariances par changement de configuration de référence, il est indispensable de déterminer le changement de forme de la loi de comportement dans un changement de configuration de référence.

Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux configurations de référence d'un même matériau et,  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$  leurs gradients de déformation en  $\Omega^\varphi$  respectivement. Désignons par  $S_1$  et  $S_2$  les lois de comportement du matériau par rapport à  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement. Soit  $\mathbf{G}$  le gradient de la transformation de  $\Omega_1$  en  $\Omega_2$ . On a la relation  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2\mathbf{G}$ . Si  $X_1 \in \overline{\Omega}_1$  et  $X_2 \in \overline{\Omega}_2$  sont les coordonnées d'un même point matériel dans les configurations  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  alors, on a  $S_1(X_1, \mathbf{F}_1) = S_2(X_2, \mathbf{F}_2)$ , soit  $S_1(X_1, \mathbf{F}_2\mathbf{G}) = S_2(X_2, \mathbf{F}_2)$ .

**Définition 1.3 (Points matériels isomorphes) :** *Deux points matériels  $P_1$  et  $P_2$  sont isomorphes s'il existe deux configurations de référence  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  telles que  $S_1(X_1, \mathbf{F}) = S_2(X_2, \mathbf{F})$  pour tout  $\mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3$ , où  $S_1$  et  $S_2$  sont les lois de comportement du matériau par rapport à  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement et,  $X_1 \in \overline{\Omega}_1$  et  $X_2 \in \overline{\Omega}_2$  sont les coordonnées de  $P_1$  et  $P_2$  respectivement. Voir Truesdell [95].*

Les propriétés d'isotropie traduisent l'invariance de la loi de comportement dans certains changement de configuration de référence, ce sont des propriétés locales liées à un point matériel. Soit  $P(X)$  un point matériel du matériau, on considère un changement de configuration de référence laissant  $X$  invariant et correspondant localement à une isométrie de matrice  $\mathbf{G} \in O_3$ . La matrice  $\mathbf{G}$  est une symétrie matérielle du matériau en  $X$  si les contraintes  $\sigma$  résultant de la même déformation  $\mathbf{F}$  relative aux deux configurations de référence considérées sont les mêmes. Ce qui compte tenu de la relation de changement de configuration de référence se traduit par

**Définition 1.4 (Symétrie matérielle) :** *Un tenseur  $\mathbf{G} \in O_3$  est une symétrie matérielle en  $X$  si pour tout  $\mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3$  on a*

$$S(X, \mathbf{F}) = S(X, \mathbf{F}\mathbf{G}). \quad (1.25)$$

**Proposition 1.2** *L'ensemble  $\mathcal{G} = \{\mathbf{G} \in O_3, \mathbf{G} \text{ est une symétrie matérielle}\}$  est un sous-groupe de  $O_3$ . Voir Gurtin [38].*

**Définition 1.5 (Orthotropie) :** *Par définition, un matériau est orthotrope lorsqu'il a au moins deux plans de symétrie matérielle orthogonaux, où les propriétés matérielles sont indépendantes des directions dans chaque plan.*

**Définition 1.6 (Isotropie transverse) :** *Une classe spéciale des matériaux orthotropes sont ceux qui ont les mêmes propriétés matérielles dans un plan et différentes propriétés dans la direction normale à ce plan, leurs propriétés sont donc invariantes pour toute rotation locale du corps autour cette direction privilégiée. De tels matériaux sont dits isotropes transverses.*

**Définition 1.7 (Isotropie) :** *Le matériau est dit isotrope lorsque ses propriétés matérielles sont indépendantes de toutes les directions, elles sont invariantes pour toute rotation locale du corps. En particulier, l'équation (1.25) est vérifiée pour toute rotation  $\mathbf{G} \in SO_3$ .*

Une caractéristique très importante des tissus biologiques mous est l'anisotropie dans leurs propriétés mécaniques. Cette caractéristique est associée à la variation de l'orientation des fibres et à l'existence des fibres de collagène qui sont distribuées dans le matériau et induisent certaines propriétés dans des directions privilégiées. Dans le cas du muscle cardiaque il existe une direction privilégiée qui est celle des fibres myocardiques.

**Définition 1.8 (Etat neutre) :** *Nous appellerons état neutre du matériau, s'il existe un tenseur  $\mathbf{F}_N \in \mathbb{M}_+^3$  tel que  $S(X, \mathbf{F}_N) = 0$ .*

**Définition 1.9 (Hyperélasticité) :** *Un matériau élastique est dit hyperélastique s'il existe une fonction réelle  $W = W(X, \mathbf{F})$  définie sur  $\bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3$ , dérivable par rapport à la variable  $\mathbf{F}$  telle que le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff soit la dérivée de  $W$  par rapport à  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}$ . La fonction  $W$  est appelée énergie de déformation, elle est mesurée par unité de volume de la configuration de référence.*

Un matériau hyperélastique a un comportement mécanique réversible, c'est-à-dire que tout cycle de chargement n'engendre aucune dissipation.

Le principe de l'indifférence matérielle en hyperélasticité se traduit par le fait qu'aucune rotation  $\mathbf{Q}$  du référentiel dans lequel les déformations sont observées ne doit affecter la valeur

de l'énergie de déformation  $W$  :

$$W(X, \mathbf{QF}) = W(X, \mathbf{F}), \quad \forall \mathbf{Q} \in SO_3, \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3. \quad (1.26)$$

Par conséquent, et en utilisant la décomposition polaire du gradient de déformation  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ , on peut voir  $W$  comme étant une fonction du tenseur de déformation pure  $\mathbf{U}$ . En effet, pour le choix  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ , l'équation (1.26) donne :  $W(X, \mathbf{F}) = W(X, \mathbf{U})$ . A partir des équations (1.8) et (1.12) on peut écrire  $W$  en fonction du tenseur de déformation de Cauchy à droite  $\mathbf{C}$  ou bien en fonction du tenseur de déformation de Green  $\mathbf{E}$ . On suppose que  $W = W(X, \mathbf{C})$ .

Pour un matériau hyperélastique sans liaisons internes comme l'incompressibilité, le tenseur de contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  est obtenue par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2(\det \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T. \quad (1.27)$$

L'équation d'équilibre en formulation variationnelle (1.23) peut être obtenue en minimisant l'énergie potentielle globale du système :

$$\Psi(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} W(X, \mathbf{C}(\mathbf{v})) dX - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dX - \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dA. \quad (1.28)$$

En effet, si cette fonctionnelle est minimale pour le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  alors  $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{u}) = 0$ .

Or,  $\forall \mathbf{v} : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^3$  on a :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{u})\mathbf{v} = \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} : (\nabla \mathbf{v}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla \mathbf{v}) dX - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dX - \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dA. \quad (1.29)$$

On retrouve donc l'équation d'équilibre (1.23) et la relation  $\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}$ , ainsi que  $\boldsymbol{\sigma} = 2(\det \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T$ .

Dans le cas d'un matériau hyperélastique isotrope, l'énergie de déformation  $W$  satisfait :

$$W(X, \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}) = W(X, \mathbf{C}), \quad \forall \mathbf{Q} \in SO_3. \quad (1.30)$$

**Proposition 1.3** : *L'énergie de déformation  $W$  d'un matériau hyperélastique isotrope est une fonction des trois invariants principaux,  $I_1, I_2$ , et  $I_3$ , définis dans l'équation (1.9) :*

$$W = W(I_1, I_2, I_3). \quad (1.31)$$

L'expression du tenseur de contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  peut être obtenue comme conséquence du théorème de Rivlin-Eriksen. Pour un matériau hyperélastique isotrope compressible, le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  est donné par (Ogden [67]) :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2(\det \mathbf{F})^{-1} \left[ I_3 W_3 \mathbf{Id} + (W_1 + I_1 W_2) \mathbf{B} - W_2 \mathbf{B}^2 \right], \quad \text{avec } W_i = \partial W / \partial I_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.32)$$

Soit  $\boldsymbol{\tau}$  le champ de vecteurs unitaires de la direction privilégiée d'un matériau hyperélastique isotrope transverse à l'état de référence. Un tel matériau peut être caractérisé par une fonction énergie de déformation qui dépend du gradient de déformation et du vecteur  $\boldsymbol{\tau}$  :

$$W = W(\mathbf{C}, \boldsymbol{\tau}). \quad (1.33)$$



**Proposition 1.4** : *L'isotropie transverse fait dépendre la fonction  $W$  des trois invariants principaux définis dans l'équation (1.9),  $I_1, I_2$ , et  $I_3$ , et des invariants mixtes de  $\mathbf{C}$  et de  $\boldsymbol{\tau}$ , appelés improprement invariants additionnels  $I_4$  et  $I_5$  dépendant de  $\boldsymbol{\tau}$  et définis par :*

$$I_4 = \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{C}\boldsymbol{\tau}) \quad \text{et} \quad I_5 = \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{C}^2\boldsymbol{\tau}), \quad (1.34)$$

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur de déformation de Cauchy à droite. Et l'on a :

$$W = W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5). \quad (1.35)$$

Notons que l'invariant mixte  $I_4$  représente l'élongation le long de la direction  $\boldsymbol{\tau}$ .

Quand le matériau est hyperélastique isotrope transverse et compressible, le tenseur de contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  est exprimé de la façon suivante (Ogden [67]) :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2(\det \mathbf{F})^{-1} \left[ I_3 W_3 \mathbf{Id} + (W_1 + I_1 W_2) \mathbf{B} - W_2 \mathbf{B}^2 + W_4 (\mathbf{F}\boldsymbol{\tau})^T \otimes (\mathbf{F}\boldsymbol{\tau})^T + W_5 ((\mathbf{B}\mathbf{F}\boldsymbol{\tau})^T \otimes (\mathbf{F}\boldsymbol{\tau})^T + (\mathbf{F}\boldsymbol{\tau})^T \otimes (\mathbf{B}\mathbf{F}\boldsymbol{\tau})^T) \right], \quad (1.36)$$

avec  $W_i = \partial W / \partial I_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Pour un matériau isotrope les termes en  $W_4$  et  $W_5$  sont supprimés.

**Définition 1.10 (Incompressibilité)** : *un matériau est incompressible quand son volume ne change pas pendant la déformation. Ceci se traduit par écrire une contrainte cinématique sur le champ de déformation :*

$$J = \det \mathbf{F} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad \text{c'est-à-dire } I_3 = 1. \quad (1.37)$$

Pour un matériau hyperélastique incompressible le tenseur de contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  est donné par (Ogden [67]) :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{Id} + 2\mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T, \quad \det \mathbf{F} = 1. \quad (1.38)$$

où  $p$  est le multiplicateur de lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité, il est appelé "pression hydrostatique".

Si de plus le matériau est isotrope, l'expression équivalente du tenseur de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  s'écrit (Ogden [67]) :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{Id} + 2(\tilde{W}_1 + I_1 \tilde{W}_2) \mathbf{B} - 2\tilde{W}_2 \mathbf{B}^2, \quad \det \mathbf{F} = 1, \quad (1.39)$$

où  $\tilde{W}$  est la fonction énergie de déformation écrite en fonction de  $(I_1, I_2)$  et  $\tilde{W}_i = \partial \tilde{W} / \partial I_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Dans le cas isotrope transverse incompressible, le tenseur de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  se simplifie en (Ogden [67]) :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{Id} + 2(\hat{W}_1 + I_1 \hat{W}_2) \mathbf{B} - 2\hat{W}_2 \mathbf{B}^2 + 2\hat{W}_4 (\mathbf{F}\boldsymbol{\tau})^T \otimes (\mathbf{F}\boldsymbol{\tau})^T + 2\hat{W}_5 ((\mathbf{B}\mathbf{F}\boldsymbol{\tau})^T \otimes (\mathbf{F}\boldsymbol{\tau})^T + (\mathbf{F}\boldsymbol{\tau})^T \otimes (\mathbf{B}\mathbf{F}\boldsymbol{\tau})^T), \quad (1.40)$$

avec  $\det \mathbf{F} = 1$ . La fonction  $\hat{W}$  est l'énergie de déformation écrite en fonction de  $(I_1, I_2, I_4, I_5)$  et  $\hat{W}_i = \partial \hat{W} / \partial I_i$ ,  $i = 1, 2, 4, 5$ .

### 1.1.4 Système de coordonnées curvilignes

Comme on l'a vu dans la section (1.1.1), dans la configuration de référence un point matériel  $P$  est repéré par les coordonnées cartésiennes  $X = (X^1, X^2, X^3) \in \overline{\Omega}$  et son vecteur position dans cette configuration est défini par  $\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i$  où les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  forment les vecteurs unitaires de base du système de coordonnées cartésiennes. De la même façon, dans la configuration déformée, la position du point matériel  $P$  est donnée par les coordonnées cartésiennes  $x = (x^1, x^2, x^3) \in \overline{\Omega^\varphi}$  et le vecteur position de  $P$  est défini par  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ .

Soit  $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) \in \overline{\omega}$  des coordonnées curvilignes généralisées identifiant le point  $P$ . La position  $\mathbf{x}$  du point  $P$  est donnée par une fonction vectorielle  $\mathbf{x} = \psi(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ . Les vecteurs de base covariants  $\mathbf{e}_k^{(\lambda)}$  du système de coordonnées curvilignes sont définis comme étant les dérivées de la fonction  $\psi$  par rapport aux coordonnées  $\lambda^k$  :

$$\mathbf{e}_k^{(\lambda)} = \frac{\partial x^i}{\partial \lambda^k} \mathbf{e}_i, \quad d\mathbf{x} = \mathbf{e}_i^{(\lambda)} d\lambda^i. \quad (1.41)$$

Les vecteurs de base contravariants du système de coordonnées curvilignes  $\mathbf{e}_{(\lambda)}^k$  sont définis par les relations suivantes :

$$\mathbf{e}_{(\lambda)}^i \cdot \mathbf{e}_j^{(\lambda)} = \delta_j^i, \quad (1.42)$$

où  $\delta_j^i$  est le symbole de Kronecker.

Afin d'obtenir l'expression du tenseur de contraintes dans le système de coordonnées curvilignes généralisées, on fait dans l'équation (1.18) du principe des travaux virtuels dans la configuration déformée le changement de variables  $x = x(\lambda)$ .

En effet, soit  $g$  le jacobien de cette transformation,  $dx = g d\lambda$ , et soit  $\mathbf{v}^\varphi : \overline{\Omega^\varphi} \mapsto \mathbb{R}^3$  un champ de vitesses virtuelles. On a :

$$\nabla_x \mathbf{v}^\varphi = \frac{\partial \mathbf{v}^\varphi}{\partial \lambda^i} \otimes \mathbf{e}_i^{(\lambda)}, \quad (1.43)$$

et le premier terme de l'équation (1.18) devient :

$$\int_{\Omega^\varphi} \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \mathbf{v}^\varphi dx = \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : \left( \frac{\partial \mathbf{v}^\varphi}{\partial \lambda^i} \otimes \mathbf{e}_i^{(\lambda)} \right) g d\lambda = \int_{\omega} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_i^{(\lambda)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^\varphi}{\partial \lambda^i} g d\lambda. \quad (1.44)$$

D'où, la définition des vecteurs de contraintes dans le système de coordonnées curvilignes généralisées :

$$\mathbf{S}^i = g \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_i^{(\lambda)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.45)$$

On peut aussi exprimer le tenseur de contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  en fonction des contraintes  $\mathbf{S}^i$  écrites dans le système de coordonnées curvilignes généralisées :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{g} \mathbf{S}^i \otimes \mathbf{e}_i^{(\lambda)}. \quad (1.46)$$

Dans le chapitre 2, nous allons utiliser la formule (1.46) pour définir le tenseur de contraintes de Cauchy en coordonnées cartésiennes usuelles.

## 1.2 Lois de comportement du myocarde

Les premiers modèles du myocarde étaient très simples, les études étaient limitées à trouver des solutions analytiques de problèmes simplifiés où le ventricule gauche est modélisé par des cylindres ou des sphères et le muscle cardiaque est supposé avoir un comportement linéaire, élastique, isotrope et homogène (Sandler et Dodge [80], Wong et al. [100], Gould et al. [35]). Ces modèles n'ont pas pu décrire correctement le processus d'éjection (voir [68]). Grâce à des nouvelles données physiologiques et observations anatomiques (Streeter et al. [84], Streeter [85], Chadwick [20], Robinson [76], Le Grice et al. [52], Le Grice et al. [53], Sanchez-Quintana et al. [79], Jouk et al. [46], Jouk et al. [47]), une nouvelle classe de modélisation est apparue, les modèles anisotropes prenant en compte la structure fibreuse et l'hétérogénéité du muscle. Ces études étaient dans le cadre de l'élasticité linéaire en petites déformations (Chadwick [20], Ohayon et Chadwick [69]). Des modèles non linéaires tenant compte de la structure fibreuse et de l'anisotropie ont été développés dans le cadre de grandes déformations (voir par exemple Ogden [66], McCulloch [60], Bogen [9], Fung [33], Hunter et Smaill [43], Smaill et Hunter [83]). De nouvelles lois de comportement du myocarde prenant en compte l'anisotropie du muscle ont été proposées : des lois de comportement isotropes transverses (Humphrey et al. [41], Lin et Yin [57], Cai [16], Taber et Perucchio [90]), et des lois de comportement orthotropes (Nash et Hunter [63], Usyk et al. [97]).

En résumé, la plupart des lois de comportement les plus récentes proposées dans la littérature sont des lois hyperélastiques incompressibles anisotropes (isotropes transverses ou orthotropes). Ces caractéristiques, élasticité, incompressibilité et anisotropie, semblent en effet essentielles dans le comportement du myocarde. Des effets visqueux ont été signalés mais en général ils ont été négligés. En raison de la présence d'eau dans la plupart des tissus, les muscles en particulier, ceux-ci sont incompressibles et cette caractéristique est un aspect important du comportement. De même, l'organisation spatiale des cardiomyocytes et leur rôle dans la contraction du myocarde entraînent nécessairement une anisotropie marquée du comportement du myocarde. Cette anisotropie étant au minimum une isotropie transverse. On peut remarquer qu'en raison des variations d'un point à l'autre de l'orientation des cardiomyocytes, les directions caractéristiques de l'anisotropie varient également, ce qui fait que la loi de comportement du myocarde n'est pas homogène au sens défini en Définition 1.2.

La contractilité du myocarde est introduite de différentes façons dans les différentes lois de comportement mais on constate le plus souvent que cela revient à considérer une loi dépendant d'un paramètre (scalaire ou éventuellement tensoriel) modifiant le comportement du muscle en fonction de l'activation électrique.

## 1.2.1 Lois de comportement isotropes transverses

### Modèle de Humphrey-Strumpf-Yin

Humphrey et al. ont supposé le myocarde passif hyperélastique, isotrope transverse et incompressible. Ils ont déterminé la loi de comportement du myocarde en termes d'une fonction d'énergie de déformation dont la forme est basée sur la théorie et les expériences de traction biaxiale, voir Humphrey et al. [41] et [42]. Ces seules hypothèses ne sont pas suffisantes pour obtenir une loi de comportement tridimensionnelle. Les auteurs ont choisi de ne faire dépendre le potentiel élastique  $W$  que de  $I_1$  et  $I_4$  en ignorant la dépendance en  $I_2$  et  $I_5$ . Dans ce cas le tenseur de contraintes de Cauchy s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{Id} + 2W_1\mathbf{B} + 2W_4\mathbf{F}\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^T, \quad (1.47)$$

où  $W_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1}$  et  $W_4 = \frac{\partial W}{\partial I_4}$ .

Cette loi de comportement n'est pas homogène en raison de la présence de  $\boldsymbol{\tau}$ .

La dépendance de  $W$  vis-à-vis de  $I_4$  permet aux auteurs de déterminer le potentiel  $W$  à l'aide d'expériences de traction simple et de cisaillement. L'identification des lois de comportement se fait en laboratoire à l'aide d'expériences homogènes, c'est-à-dire où l'on s'efforce de réaliser des essais où les déformations et les contraintes sont homogènes dans l'échantillon.

L'expérience est réalisée de façon à ce que le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff soit de la forme

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

On suppose que le gradient de déformation  $\mathbf{F}$  est constant et de la forme

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

ce qui correspond à la fonction placement

$$x_1 = \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2, \quad x_2 = \lambda_2 X_2 + \mu_2 X_1, \quad x_3 = \lambda_3 X_3, \quad (1.50)$$

où  $X_i$  et  $x_i$  sont les coordonnées d'une particule dans les configurations non déformée et déformée respectivement. Les  $\lambda_i$  correspondent à des élongations simples dans les 3 directions de base et  $\mu_1$  et  $\mu_2$  à des cisaillements dans les directions 1 et 2.

On en déduit

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1/[\lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2]^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2. \quad (1.51)$$

De plus, si la direction 1 est celle des fibres, c'est-à-dire  $\tau = (1, 0, 0)$ , on a

$$I_4 = \lambda_1^2 + \mu_2^2. \quad (1.52)$$

Le muscle étant incompressible, on a  $\det \mathbf{F} = 1$  et d'après (1.24)

$$\sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 T_{11} & \mu_2 T_{11} & 0 \\ \mu_1 T_{22} & \lambda_2 T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

Comme  $\sigma$  est symétrique, il faut que  $\mu_2 T_{11} = \mu_1 T_{22}$  soit satisfaite. La mesure de  $\mathbf{T}$  permet la détermination de  $\sigma$  et par suite l'identification de la loi. En effet, d'après (1.47) on a

$$\sigma_{11} = 2W_1 \xi_1 + 2W_4 \xi_2, \quad \sigma_{22} = 2W_1 \xi_3 + 2W_4 \xi_4, \quad (1.54)$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda_1^2 + \mu_1^2 - \lambda_3^2, \\ \xi_2 &= \lambda_1^2, \\ \xi_3 &= \lambda_2^2 + \mu_2^2 - \lambda_3^2, \\ \xi_4 &= \mu_2^2. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Le système (1.54), dont les inconnues sont les  $W_1$  et  $W_4$ , peut être résolu explicitement pour obtenir :

$$\begin{aligned} W_1 &= (\xi_4 \sigma_{11} - \xi_2 \sigma_{22}) / (\xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3), \\ W_4 &= (\xi_1 \sigma_{22} - \xi_3 \sigma_{11}) / (\xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Notons que les seconds membres des équations du système (1.56) contiennent seulement des quantités qu'on peut déterminer expérimentalement. Ainsi on peut déterminer les fonctions  $W_1$  et  $W_4$  directement à partir de protocoles expérimentaux dans lesquels un invariant est maintenu constant pendant que l'autre varie, et vice-versa ce qui permet d'obtenir la fonction énergie de déformation  $W$ .

Les résultats expérimentaux ont montré que  $W_1$  croît presque linéairement avec  $I_1$ , mais décroît presque linéairement en  $\lambda_f = I_4^{1/2}$ . De plus,  $W_4$  croît non linéairement, mais non exponentiellement, quand  $\lambda_f$  croît et décroît presque linéairement quand  $I_1$  croît. Selon ces observations et en respectant quelques contraintes sur la fonction énergie de déformation  $W$ , Humphrey et al. [41] ont proposé une nouvelle forme polynomiale de  $W$  contenant seulement cinq paramètres :

$$W = c_1(\lambda_f - 1)^2 + c_2(\lambda_f - 1)^3 + c_3(I_1 - 3) + c_4(I_1 - 3)(\lambda_f - 1) + c_5(I_1 - 3)^2. \quad (1.57)$$

On en déduit

$$W_1 = c_3 + c_4(\lambda_f - 1) + 2c_5(I_1 - 3), \quad W_4 = \frac{1}{2\lambda_f} [c_4(I_1 - 3) + 2c_1(\lambda_f - 1) + 3c_2(\lambda_f - 1)^2]. \quad (1.58)$$

Pour obtenir les contraintes il suffit de remplacer  $W_1$  et  $W_4$  dans l'équation (1.47) par leurs expressions données par l'équation (1.58). On remarque que les contraintes s'annulent pour un gradient de déformation égale à l'identité  $\mathbf{F} = \mathbf{Id}$ . Ceci veut dire que la configuration de référence considérée correspond bien à l'état neutre.

### Modèle de Lin et Yin

Une nouvelle étude de Mulieri et al. [62] a montré que le 2,3-butanedione 2-monoxime (2,3 BDM) protège le tissu myocardique de “trauma” mécaniques. Ce résultat a rendu possible l’activation d’échantillons du myocarde pendant de longues durées. En utilisant ce résultat et en appliquant la méthode décrite dans Humphrey et al. [41] pour le tissu à l’état passif, Lin et Yin ont proposé des nouvelles lois de comportement multiaxiales pour le myocarde passif et le myocarde actif, voir Lin et Yin [57]. Dans les deux états passif et actif du myocarde, certaines hypothèses ont été faites, comme l’hyperélasticité, l’incompressibilité et l’isotropie transverse, la direction privilégiée étant la direction prédominante des fibres myocardiques. De plus la fonction énergie de déformation est supposée dépendante des deux invariants de déformation  $I_1$  et  $I_4$ . Les déformations des deux états passif et actif du myocarde sont mesurées par rapport à un même état de référence qui est le myocarde passif au repos. Ils ont noté qu’il y a des contraintes significatives développées dans la direction transverse aux fibres. Ceci montre l’effet important dû aux fibres de collagène qui protègent le muscle d’étirement excessif.

Pour le myocarde passif, ils ont choisi une fonction exponentielle plutôt que polynomiale pour exprimer l’énergie de déformation en termes des invariants  $I_1$  et  $I_4$  :

$$W_{pas} = C_1(e^Q - 1), \quad \text{avec,} \quad Q = C_2(I_1 - 3)^2 + C_3(I_1 - 3)(I_4 - 1) + C_4(I_4 - 1)^2. \quad (1.59)$$

A l’état actif, leurs données ont montré que les réponses des contraintes sont plus linéaires que celles à l’état passif. Ceci suggère que les myocards passif et actif sont deux types différents de matériaux et qu’ils ont des fonctions énergie de déformation différentes décrivant leurs propriétés rhéologiques. Ils ont donc proposé une fonction polynomiale pour l’énergie de déformation du myocarde actif dont l’expression est la suivante :

$$W_{act} = C_0 + C_1(I_1 - 3)(I_4 - 1) + C_2(I_1 - 3)^2 + C_3(I_4 - 1)^2 + C_4(I_1 - 3) + C_5(I_4 - 1). \quad (1.60)$$

Dans les deux expressions de la fonction énergie de déformation, les paramètres rhéologiques  $C_i$  doivent satisfaire certaines conditions. Pour plus de détails voir Lin et Yin [57].

On constate que les contraintes du myocarde passif s’annulent pour un gradient de déformation égale à l’identité  $\mathbf{F} = \mathbf{Id}$  ce qui n’est pas le cas pour le myocarde actif. Lin et Yin reportent cette différence au fait que le muscle se raccourcit quand il est activé et les déformations qui apparaissent pendant l’activation sont mesurées par rapport à l’état passif sans chargement.

### Modèle de Cai

Cai [16] propose un nouveau modèle basé sur les études antérieures de Taber [88] et [89] et de Oddou et Ohayon [64] et c’est une extension en théorie des grandes déformations de la loi de comportement active écrite en élasticité linéaire par Ohayon et Chadwick [69].

Il considère trois états différents du muscle :

- L'état passif, noté  $\Omega_P$ , représente la configuration où le muscle est non activé et où les contraintes internes et le chargement sont nuls. Cet état correspond à l'état neutre du muscle.
- L'état actif sans chargement, noté  $\Omega_A(t)$ , représente une configuration où le muscle est activé, les chargements sont nuls et les contraintes internes peuvent exister.
- L'état actuel avec chargement, noté  $\Omega_C(t)$ , représente une configuration passive ou active du muscle qui est cette fois-ci soumis à des chargements donc il est dans une configuration déformée.

Le comportement du myocarde est supposé isotrope transverse et incompressible. L'activation électrique est représentée en deux parties : une partie est considérée en ajoutant un terme dans l'expression de l'énergie de déformation globale et l'autre partie apparaît directement dans l'expression du tenseur de contraintes de Cauchy.

Il a utilisé le même type de fonctions d'énergie que propose Taber dans [88]. Si  $\mathbf{C}_{PC}$  désigne le tenseur de déformation de Cauchy à droite de l'état  $\Omega_P$  à l'état  $\Omega_C(t)$ , l'énergie de déformation totale,  $W(\mathbf{C}_{PC})$  exprimée par unité de volume du seul état de référence  $\Omega_P$ , est considérée comme étant la somme de trois termes :

$$\begin{aligned}
 W(\mathbf{C}_{PC}) &= W_{\text{pas}}^{\text{mat}} + W_{\text{pas}}^{\text{fib}} + \beta(t)W_{\text{act}}^{\text{fib}}, \\
 \text{avec} \\
 W_{\text{pas}}^{\text{mat}} &= \frac{a}{b} \left( e^{b(I_{1P}-3)} - 1 \right), \\
 W_{\text{pas}}^{\text{fib}} &= \frac{a_f}{b_f} \left[ e^{b_f(\lambda_{fP}^2-1)} - 1 - b_f(\lambda_{fP}^2 - 1) \right], \\
 W_{\text{act}}^{\text{fib}} &= \frac{c_f}{d_f} \left( \lambda_{fP}^2 + \lambda_{fP}^{-2} - 2 \right)^{d_f},
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

où les termes  $W_{\text{pas}}^{\text{mat}}$ ,  $W_{\text{pas}}^{\text{fib}}$  et  $W_{\text{act}}^{\text{fib}}$  sont dûs respectivement à la présence de la matrice de collagène, des composantes passives et des composantes actives des fibres myocardiques. La quantité  $I_{1P}$  est le premier invariant du tenseur de déformation de Cauchy à droite  $\mathbf{C}_{PC}$  ( $I_{1P} = \text{tr} \mathbf{C}_{PC}$ ), et  $\lambda_{fP} = \|\mathbf{F}_{PC}\boldsymbol{\tau}_P\|$  est l'élongation dans la direction des fibres musculaires mesurée par rapport à l'état  $\Omega_P$  où  $\boldsymbol{\tau}_P$  est le vecteur directeur unitaire de la fibre à l'état  $\Omega_P$ . La fonction  $\beta(t)$  modélise l'activation du muscle cardiaque, elle est comprise entre 0 et 1, où  $\beta = 0$  en télédiastole et  $\beta = 1$  en télésystole. Les constantes  $a, b, a_f, b_f, c_f, d_f$  sont les paramètres matériels du myocarde.

L'expression du tenseur de contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}_C$  à un état  $\Omega_C(t)$  du muscle est supposée avoir la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_C = -p_C \mathbf{Id} + 2\mathbf{F}_{PC} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}_{PC}} \mathbf{F}_{PC}^T + \beta(t) T_0 \boldsymbol{\tau}_C \otimes \boldsymbol{\tau}_C, \tag{1.62}$$

où  $\mathbf{F}_{PC}$  est le tenseur gradient de la transformation pour le passage de l'état  $\Omega_P$  à l'état  $\Omega_C(t)$ ,  $p_C$  est un multiplicateur de lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité du myocarde,  $T_0$  est la tension maximale que peut délivrer la fibre à son zéro d'élongation,  $\boldsymbol{\tau}_C$  est le vecteur

directeur unitaire de la fibre à l'état  $\Omega_C(t)$ .

**Proposition 1.5** : Soit  $W_\lambda(t, \lambda)$  une primitive par rapport à  $\lambda$  de la fonction  $\beta(t) \frac{T_0(\lambda)}{\lambda}$ , c'est-à-dire que  $W'_\lambda(t, \lambda) = \beta(t) \frac{T_0(\lambda)}{\lambda}$ . On a l'égalité suivante :

$$2\mathbf{F}_{PC} \frac{\partial W_\lambda}{\partial \mathbf{C}_{PC}} \mathbf{F}_{PC}^T = \beta(t) T_0(\lambda) \boldsymbol{\tau}_C \otimes \boldsymbol{\tau}_C. \quad (1.63)$$

*Démonstration.* Nous savons que  $\lambda_{fP}^2 = \|\mathbf{F}_{PC} \boldsymbol{\tau}_P\|^2 = \boldsymbol{\tau}_P \cdot (\mathbf{C}_{PC} \boldsymbol{\tau}_P)$ , par suite, en dérivant par rapport à  $\mathbf{C}_{PC}$  on obtient

$$2\lambda_{fP} \frac{\partial \lambda_{fP}}{\partial \mathbf{C}_{PC}} = \boldsymbol{\tau}_P \otimes \boldsymbol{\tau}_P,$$

donc

$$\begin{aligned} \beta(t) T_0(\lambda_{fP}) \boldsymbol{\tau}_C \otimes \boldsymbol{\tau}_C &= \beta(t) \frac{T_0(\lambda_{fP})}{\lambda_{fP}^2} \mathbf{F}_{PC} \boldsymbol{\tau}_P \otimes \mathbf{F}_{PC} \boldsymbol{\tau}_P \\ &= \beta(t) \frac{T_0(\lambda_{fP})}{\lambda_{fP}^2} \mathbf{F}_{PC} (\boldsymbol{\tau}_P \otimes \boldsymbol{\tau}_P) \mathbf{F}_{PC}^T \\ &= 2\beta(t) \frac{T_0(\lambda_{fP})}{\lambda_{fP}} \mathbf{F}_{PC} \frac{\partial \lambda_{fP}}{\partial \mathbf{C}_{PC}} \mathbf{F}_{PC}^T \\ &= 2W'_\lambda(t, \lambda_{fP}) \mathbf{F}_{PC} \frac{\partial \lambda_{fP}}{\partial \mathbf{C}_{PC}} \mathbf{F}_{PC}^T \\ &= 2\mathbf{F}_{PC} W'_\lambda(t, \lambda_{fP}) \frac{\partial \lambda_{fP}}{\partial \mathbf{C}_{PC}} \mathbf{F}_{PC}^T \\ &= 2\mathbf{F}_{PC} \frac{\partial W_\lambda}{\partial \mathbf{C}_{PC}}(t, \lambda_{fP}) \mathbf{F}_{PC}^T. \end{aligned} \quad (1.64)$$

□

Par conséquent, si on désigne par  $W_{totale} = W + W_\lambda$  qu'on appelle la fonction énergie totale de déformation, l'expression du tenseur de contraintes de Cauchy (1.62) peut être alors obtenue de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_C = -p_C \mathbf{Id} + 2\mathbf{F}_{PC} \frac{\partial W_{totale}}{\partial \mathbf{C}_{PC}} \mathbf{F}_{PC}^T. \quad (1.65)$$

Cela montre que la loi de comportement développée par Cai est une loi hyperélastique, incompressible, isotrope transverse, dépendant d'un paramètre scalaire  $\beta(t)$  qui permet de modéliser la contraction du myocarde.

### Modèle de Taber et Perucchio

Taber et Perucchio [90] proposent une loi de comportement incluant à la fois les effets de croissance et de la contraction active pour les cœurs d'embryons de poulets. Ces deux effets sont modélisés à partir des changements de la configuration à contraintes nulles. Dans notre



étude, nous présentons leur modèle sans la croissance.

A l'instant  $t = 0$  le muscle est dans un état sans chargement et sans contraintes noté  $\Omega$ . Ensuite, on imagine que  $\Omega$  est découpé en éléments infiniment petits pour obtenir l'état passif sans contraintes  $\Omega_P$ . L'état  $\Omega_P$  est activé pour former l'état actif sans contraintes  $\Omega_{A0}(t)$ . Les éléments de  $\Omega_{A0}(t)$  sont rassemblés pour obtenir la configuration  $\Omega_A(t)$ . Cette procédure conduit à une déformation qui produit des contraintes résiduelles. Finalement des chargements sont appliqués sur  $\Omega_A(t)$  pour obtenir la configuration finale du tissu  $\Omega_C(t)$ .

Soit  $\mathbf{F}_a$  le tenseur gradient de déformation dû à la contraction active, passage de  $\Omega_P$  à  $\Omega_{A0}(t)$ . De plus, on désigne par  $\mathbf{F}_P$  et  $\mathbf{F}_A$  les tenseurs gradients de déformation relatifs aux états passif et actif sans contraintes respectivement, c'est-à-dire le passage de  $\Omega_P$  à  $\Omega_C(t)$  et celui de  $\Omega_{A0}(t)$  à  $\Omega_C(t)$ . Soit aussi  $\mathbf{F}$  le tenseur gradient de déformation de l'état initial  $\Omega$  à l'état final  $\Omega_C(t)$ . On a les relations suivantes :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_P = \mathbf{F}_A \mathbf{F}_a. \quad (1.66)$$

La loi de comportement est exprimée en termes de  $\mathbf{C}_P = \mathbf{F}_P^T \mathbf{F}_P$  et  $\mathbf{C}_A = \mathbf{F}_A^T \mathbf{F}_A$ . La forme générale de la fonction énergie de déformation est supposée composée de deux parties séparées : partie passive  $W_P(\mathbf{C}_P)$  exprimée par unité de volume de l'état de référence  $\Omega_P(t)$  et partie active  $W_A(\mathbf{C}_A)$  exprimée par unité de volume de l'état de référence  $\Omega_{A0}(t)$ . Dans ce cas le tenseur de contraintes de Cauchy s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{Id} + 2J_P^{-1} \mathbf{F}_P \frac{\partial W_P}{\partial \mathbf{C}_P} \mathbf{F}_P^T + 2J_A^{-1} \mathbf{F}_A \frac{\partial W_A}{\partial \mathbf{C}_A} \mathbf{F}_A^T, \quad (1.67)$$

où  $p$  est un multiplicateur de lagrange. Dans le cas incompressible on a :

$$J_P = \det \mathbf{F}_P = 1, \quad \text{et} \quad J_A = \det \mathbf{F}_A = 1,$$

et dans le cas compressible,  $p = 0$ .

Pour les fonctions  $W_P$  et  $W_A$ , Taber propose les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} W_P &= \frac{a}{b} (e^{bQ_P} - 1) + \frac{a_f}{b_f} \left[ e^{b_f(\lambda_{fP}-1)^2} - 1 \right], \\ W_A &= \frac{c(t)}{d(t)} Q_A^{d(t)} + \frac{c_f(t)}{d_f(t)} \left( \lambda_{fA}^{d_f(t)} + \lambda_{fA}^{-d_f(t)} - 2 \right), \end{aligned} \quad (1.68)$$

où  $\lambda_{fP}$  et  $\lambda_{fA}$  sont les rapports d'élongation passive et active, respectivement, dans la direction des fibres. En plus,  $a, b, c, d$  et  $a_f, b_f, c_f, d_f$  sont les paramètres du matériau, et  $Q$  est la fonction suivante :

$$Q = I_1 - 3 + \frac{1 - 2\nu}{\nu} \left[ I_3^{-\nu/(1-2\nu)} - 1 \right], \quad (1.69)$$

avec,  $I_1$  et  $I_3$  sont les invariants du tenseur de déformation de Cauchy à droite correspondant,  $\nu$  est une constante, et  $Q_P = Q(\mathbf{C}_P)$  et  $Q_A = Q(\mathbf{C}_A)$ .

En reprenant le terme de l'équation (1.67) qui correspond à la configuration  $\Omega_{A0}(t)$ , par un changement de configurations de référence, on peut exprimer la loi de comportement à partir d'une seule configuration de référence  $\Omega$ .

En effet, soit  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{F}_a^T \mathbf{C}_A \mathbf{F}_a$  et  $J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{F}_A \mathbf{F}_a) = J_A J_a$ . Soit  $\tilde{W}_A$  l'énergie de déformation active exprimée par unité de volume de l'état de référence  $\Omega$  et écrite en fonction du tenseur  $\mathbf{C}$  :  $\tilde{W}_A(\mathbf{C}) = W_A(\mathbf{C}_A)$ . On peut démontrer facilement que :

$$\frac{\partial W_A}{\partial \mathbf{C}_A} = \mathbf{F}_a \frac{\partial \tilde{W}_A}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}_a^T, \quad (1.70)$$

et l'on a :

$$J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}_A}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T = J_A^{-1} J_a^{-1} \mathbf{F}_A \mathbf{F}_a \left( \mathbf{F}_a^{-1} \frac{\partial W_A}{\partial \mathbf{C}_A} \mathbf{F}_a^{-T} \right) \mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_A^T = J_a^{-1} \left( J_A^{-1} \mathbf{F}_A \frac{\partial W_A}{\partial \mathbf{C}_A} \mathbf{F}_A^T \right). \quad (1.71)$$

Soit  $\hat{W}_A = \hat{W}_A(\mathbf{C}) = J_a W_A(\mathbf{C}_A)$ , on a donc :

$$J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \hat{W}_A}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T = J_A^{-1} \mathbf{F}_A \frac{\partial W_A}{\partial \mathbf{C}_A} \mathbf{F}_A^T. \quad (1.72)$$

Finalement, soit l'énergie totale de déformation  $W_{totale}(\mathbf{C}) = W_P(\mathbf{C}) + \hat{W}_A(\mathbf{C})$  définie à partir d'une seule configuration de référence  $\Omega$ . La loi de comportement (1.67) peut être donc exprimée de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{Id} + 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W_{totale}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T. \quad (1.73)$$

Dans le cas incompressible  $J$  vaut 1, et en compressible  $p = 0$ . On en déduit que la loi de comportement proposée par Taber et Perucchio [90] est une loi hyperélastique, isotrope transverse, dépendant d'un paramètre  $\mathbf{F}_a$  modélisant la contraction active du myocarde.

## 1.2.2 Lois de comportement orthotropes

L'intérêt de l'hypothèse d'isotropie transverse est que dans ce cas la forme fonctionnelle de l'énergie de déformation se déduit directement à partir de données expérimentales. Mais le problème est que plusieurs données expérimentales contredisent cette hypothèse. Par exemple, des études anatomiques montrent que le myocarde est constitué de plusieurs couches, plans de clivage, voir Le Grice et al. [53]. Ces couches sont formées par des fibres myocardiques et elles se connectent entre elles par des fibres de collagène qui sont orthogonales aux plans de ces couches. Ce type de structure correspond à des structures orthotropes. L'orthotropie ne demande pas seulement une formulation plus compliquée que celle de l'isotropie transverse mais en plus des mesures expérimentales des contraintes et des déformations dans la troisième direction pour fournir des données expérimentales suffisantes permettant de déduire une telle loi de comportement. L'architecture laminaire du myocarde a motivé le développement des modèles décrivant la variation du muscle ventriculaire dans les trois directions suivantes : l'axe des fibres, l'axe transverse aux fibres et tangent aux couches contenant les fibres et l'axe orthogonal à ces couches. Ces axes sont appelés les axes matériels du myocarde.

### Modèle de Nash et Hunter

Nash et Hunter [63] proposent une loi de comportement orthotrope basée sur des tests biaxiaux *in vitro* et sur des observations de la microstructure cardiaque. Cette loi est utilisée pour décrire les propriétés contraintes-déformations du tissu myocardique. Les paramètres de la relation constitutive sont estimés en utilisant une combinaison de tests contraintes-déformations biaxiaux sur des échantillons minces du tissu myocardique et de champs de déformations 3D dérivés d'images IRM non-invasives. A l'état passif, le myocarde est supposé hyperélastique ce qui fait que la relation entre les contraintes et les déformations dérive d'un potentiel. La forme fonctionnelle choisie pour l'énergie de déformation du myocarde à l'état passif est la suivante :

$$W_{pas} = k_{ff} \frac{E_{ff}^2}{|a_{ff} - E_{ff}|^{\alpha_{ff}}} + k_{ss} \frac{E_{ss}^2}{|a_{ss} - E_{ss}|^{\alpha_{ss}}} + k_{nn} \frac{E_{nn}^2}{|a_{nn} - E_{nn}|^{\alpha_{nn}}} \\ + k_{fs} \frac{E_{fs}^2}{|a_{fs} - E_{fs}|^{\alpha_{fs}}} + k_{sn} \frac{E_{sn}^2}{|a_{sn} - E_{sn}|^{\alpha_{sn}}} + k_{fn} \frac{E_{fn}^2}{|a_{fn} - E_{fn}|^{\alpha_{fn}}}. \quad (1.74)$$

Par suite, le tenseur de contraintes passives est obtenu par l'équation suivante

$$\sigma_{pas} = -p\mathbf{Id} + \frac{\partial W_{pas}}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T. \quad (1.75)$$

Les six termes qui apparaissent dans l'expression de l'énergie de déformation correspondent aux six composantes indépendantes du tenseur de déformation de Green  $\mathbf{E}$  dans le système des axes matériels du myocarde, c'est-à-dire,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{n}$  désignent, dans la configuration de référence, la direction de la fibre, la tangente à la fibre dans la couche de fibres et la normale à la couche de fibres respectivement. Chaque composante contribue indépendamment dans l'énergie de déformation totale du tissu. La fonction énergie de déformation  $W_{pas}$  est dite avoir une forme "pôle-zero" et c'est une relation empirique. Plusieurs caractéristiques sont implicites dans cette relation. Tout d'abord les comportements le long des axes matériels sont assez différents et le comportement le long d'un axe particulier est presque indépendant du degré d'élongation le long des autres deux axes. En plus les contraintes axiales sont très petites pour des déformations axiales très petites, mais elles deviennent très grandes quand les déformations deviennent proches de certaines valeurs limites appelées "pôles". Les pôles, notés  $a_{ij}$   $i, j \in \{f, s, n\}$ , sont les limites élastiques. Au delà de ces limites, il apparaît des déformations irréparables du tissu dues à une surextension de la matrice de collagène.

D'autre part, ils ont supposé qu'après stimulation les fibres cardiaques génèrent une force active dans la direction de leurs axes longitudinaux uniquement. Donc afin de modéliser le comportement actif du myocarde, un seul terme a été ajouté au tenseur de contraintes passives :

$$\sigma = -p\mathbf{Id} + \frac{\partial W_{pas}}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T + T\mathbf{F}\tau \otimes \mathbf{F}\tau, \quad (1.76)$$

où  $T = T(t, \lambda_f, [\text{Ca}^{2+}]_i)$  est la tension active générée par une fibre à un instant  $t$ ,  $\lambda_f$  désigne le rapport d'extension de la fibre, et  $[\text{Ca}^{2+}]_i$  est la concentration du calcium intracellulaire qui

est considérée pour caractériser le niveau d'activation d'un myocyte. Le vecteur  $\tau$  désigne le vecteur unitaire de la fibre dans l'état passif.

La fonction  $T$  est supposée varier linéairement en fonction de  $\lambda_f$  avec une pente  $\frac{dT}{d\lambda} = 145$  kPa ou une pente adimensionnelle  $\beta = [\frac{1}{T} \frac{dT}{d\lambda}]_{\lambda=1} = 1.45$ . Au repos, la longueur d'un sarcomère est considérée égale à  $1.9 \mu\text{m}$  (ce cas correspond à  $\lambda_f = 1$  sans tension passive), la tension active est  $T_{\text{ref}} = 100$  kPa.

Le tenseur de contraintes de Cauchy donné par l'équation (1.76) peut être obtenu à partir d'une fonction énergie de déformation totale contenant un terme pour l'état passif et un autre terme pour l'état actif.

Dans la suite de ce paragraphe nous allons omettre la dépendance de  $T$  en  $t$  et  $[\text{Ca}^{2+}]_i$ .

**Proposition 1.6** : Soit  $W_\lambda$  une primitive par rapport à  $\lambda$  de la fonction  $\lambda T(\lambda)$ , c'est-à-dire que  $W'_\lambda = \lambda T(\lambda)$ . On a l'égalité suivante :

$$\frac{\partial W_\lambda}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T = T \mathbf{F} \tau \otimes \mathbf{F} \tau. \quad (1.77)$$

**Démonstration.** Tout d'abord on a :  $\frac{\partial W_\lambda}{\partial \mathbf{F}} = W'_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}} = \lambda T(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}}$ . La quantité  $\lambda$  désigne l'élongation de la fibre, c'est-à-dire  $\lambda^2 = I_4 = \tau \cdot (\mathbf{C}\tau) = \|\mathbf{F}\tau\|^2$ . En dérivant par rapport à  $\mathbf{F}$  on obtient :  $2\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F}\tau \otimes \tau$ . Par suite, la dérivé de  $\lambda$  par rapport à  $\mathbf{F}$  est égale à  $\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{F}\tau \otimes \tau$ . D'où l'équation (1.77).  $\square$

Par conséquent, soit  $W_{\text{totale}} = W + W_\lambda$ , c'est la fonction énergie totale de déformation. L'expression du tenseur de contraintes de Cauchy (1.76) peut être alors obtenue de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{Id} + \frac{\partial W_{\text{totale}}}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T. \quad (1.78)$$

Comme pour les modèles précédents, l'équation (1.78) montre que la loi de comportement de Nash et Hunter est aussi une loi hyperélastique, orthotrope, dépendant de deux paramètres  $t$  et  $[\text{Ca}^{2+}]_i$  modélisant la contraction du myocarde.

### Modèle de Usyk-Mazhari-McCulloch

On reprend les notations  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{F}$ , ... du modèle de Nash et Hunter.

Usyk et al. [97] ont étudié les effets de l'orthotropie dans le ventricule gauche des chiens à la fin de la diastole et à la fin de la systole. Ils ont utilisé pour le ventricule gauche à l'état passif

une relation de comportement définie par une fonction énergie de déformation exponentielle  $W$ , correspondant à un comportement non linéaire, orthotrope et presque incompressible :

$$\begin{aligned} W &= C(e^Q - 1) + C_{compr}(J \ln J - J + 1), \\ Q &= b_{ff} E_{ff}^2 + b_{ss} E_{ss}^2 + b_{nn} E_{nn}^2 + \\ &\quad b_{fs}(E_{fs}^2 + E_{sf}^2) + b_{fn}(E_{fn}^2 + E_{nf}^2) + b_{ns}(E_{ns}^2 + E_{sn}^2), \end{aligned} \quad (1.79)$$

où  $E_{ij}$  sont les composantes du tenseur de déformation de Green  $\mathbf{E}$  dans le système d'axes matériels  $(f, s, n)$ . Le terme  $J$  est le déterminant du tenseur gradient de déformation  $\mathbf{F}$  et les constantes matérielles sont les suivantes :  $C = 0,88$  kPa ;  $b_{ff} = 6,0$  ;  $b_{ss} = 7,0$  ;  $b_{nn} = 3,0$  ;  $b_{fs} = 12,0$  ;  $b_{fn} = 3,0$  ;  $b_{ns} = 3,0$  ; et  $C_{compr} = 100,0$  kPa.

La quasi-incompressibilité est obtenue par pénalisation. En effet, le terme  $C_{compr}(J \ln J - J + 1)$  est introduit avec un coefficient  $C_{compr}$  assez grand ce qui oblige la quantité  $J \ln J - J + 1$  à être très petite, voire égale à 0, pour que le produit  $C_{compr}(J \ln J - J + 1)$  soit de même grandeur que le terme  $C(e^Q - 1)$ . Par conséquent, la valeur de  $J$  va être forcée d'être très proche de 1.

La contraction ventriculaire a été modélisée en définissant le tenseur de contraintes de Cauchy  $\sigma$  comme étant la somme du tenseur de contraintes passives  $\sigma^{(p)}$  qui dérive de la fonction énergie de déformation et du tenseur de contraintes actives  $\sigma^{(a)}$  :

$$\sigma = \sigma^{(p)} + \sigma^{(a)}. \quad (1.80)$$

Les composantes  $\sigma_{ij}^{(a)}$  du tenseur de contraintes actives dérivent du tenseur de contraintes diagonal  $\sigma_{active}$  référencé aux coordonnées matérielles  $(X_f, X_s, X_n)$  en utilisant la matrice rotation  $\mathbf{q}$  qui définit la relation entre le système des coordonnées utilisé et le système local de coordonnées matérielles :

$$\sigma^{(a)} = \mathbf{q}^T \sigma_{active} \mathbf{q}. \quad (1.81)$$

Les composantes du tenseur  $\sigma_{active}$  sont des fonctions de la concentration du calcium intracellulaire  $Ca_i(t)$  et des longueurs des sarcomères.

$$Ca_i(t) = Ca_0 + (Ca_{max} - Ca_0) \frac{t}{\tau_{Ca}} e^{1-t/\tau_{Ca}}, \quad (1.82)$$

où  $Ca_0$  désigne la concentration du calcium intracellulaire au repos et  $Ca_{max}$  est la valeur maximale que peut atteindre  $Ca_i(t)$  à l'instant  $t = \tau_{Ca}$ . Ils ont choisi pour les paramètres qui apparaissent dans l'expression de  $Ca_i(t)$  les valeurs suivantes :  $Ca_0 = 0,01 \mu M$ ,  $Ca_{max} = 1 \mu M$  et  $\tau_{Ca} = 60$  ms.

### 1.2.3 Autre

#### Modèle de Bestel-Clément-Sorine

Bestel et al. ont élaboré un modèle du muscle cardiaque, avec pour point de départ la structure microscopique modélisée par A.F. Huxley [44], sous le nom de théorie des filaments glissants, voir Bestel [7] et Bestel et al. [8]. Sous l'influence de la concentration de Calcium, des

“ponts” élastiques se créent entre les filaments d’actine et de myosine, les faisant glisser les uns par rapport aux autres créant ainsi le mouvement. Le modèle du filament glissant de Huxley donne une description statistique de ce phénomène, permettant de passer de l’échelle de ces ponts (quelques dizaines de nanomètres) à celle du sarcomère. Pour passer à l’échelle d’une fibre, ce modèle est intégré dans un modèle de Hill à trois éléments ce qui permet de modéliser les contraction et relaxation isométriques et le comportement du muscle à l’état passif. En effet, les sarcomères sont rassemblés et appelés élément contractile EC qui est modélisé par un “ressort non linéaire commandé”. Ensuite un second ressort ES est placé en série avec EC pour tenir compte du fait que le muscle peut être activé, donc développer une force, sans que sa longueur totale change (contraction isométrique : la longueur de chacun des deux ressorts peut varier tout en maintenant la longueur totale constante). L’élément ES modélise un degré de liberté interne pour la déformation de la fibre. Finalement, un troisième ressort EP est introduit, soit en parallèle de EC (modèle de Hill-Voigt), soit en parallèle du montage série EC-ES (modèle de Hill-Maxwell). Ce ressort EP modélise le fait que le muscle ne peut pas être étiré sans limite (la force de rappel créée par cet élément devient non négligeable à partir d’une certaine longueur). Ces trois éléments EC, ES, et EP sont supposés avoir le même comportement rhéologique : comportement élasto-plastique. Dans la suite, c’est le modèle de Hill-Maxwell qui a été choisi. Dans ce cas la contrainte dans ES est égale à celle dans EC :  $\sigma_c = \sigma_s$ . La contrainte totale est la somme des contraintes dans EC et dans EP :  $\sigma = \sigma_c + \sigma_p$ .

A l’échelle du coeur entier, chaque ventricule est maintenant modélisé par un assemblage EC,

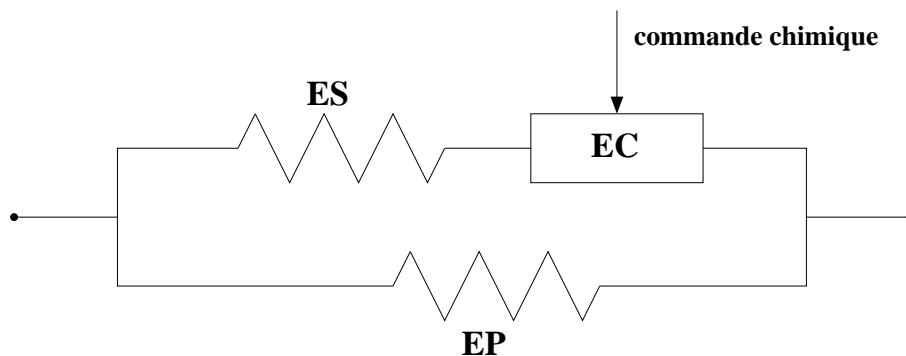


FIG. 1.1 – Modèle de Hill-Maxwell.

ES, EP, la relation contrainte-déformation devenant :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_p + \sigma_c, & \sigma_c = \sigma_s, \\ \varepsilon = \varepsilon_p = \varepsilon_c + \varepsilon_s, \end{cases} \quad (1.83)$$

où  $\sigma_x$  et  $\varepsilon_x$  avec  $x \in \{c, s, p\}$  désignent la contrainte dans l’élément  $x$  et sa déformation respectivement. Si  $l_c$ ,  $l_s$  et  $l$  désignent les longueurs de l’élément contractile EC, l’élément série ES et de la fibre entière respectivement, et  $l_{c0}$ ,  $l_{s0}$  et  $l_0$  leurs longueurs respectives dans l’état de référence, alors  $l_x = l_{x0}(1 + \varepsilon_x)$  pour  $x=c,s$ .

Soit  $K(t)$  la raideur résultante totale dans un sarcomère et  $k_c(t) = K(t) \frac{s_0}{\mathcal{A}_0}$ , où  $s_0$  et  $\mathcal{A}_0$  désignent la longueur et l'aire de la section d'un sarcomère dans l'état de référence.

En exprimant la raideur et la contrainte résultant de l'ensemble des ponts actine-myosine, un modèle différentiel de l'élément contractile est obtenu :

$$\begin{cases} \dot{k}_c = -(|u| + |\dot{\epsilon}_c|)k_c + k_0|u|_+, \\ \dot{\sigma}_c = -(|u| + |\dot{\epsilon}_c|)\sigma_c + k_c\dot{\epsilon}_c + \sigma_0|u|_+. \end{cases} \quad (1.84)$$

La fonction  $u(t)$  est la commande qui contrôle le cycle d'attachement-détachement des ponts actine-myosine ; elle est reliée à l'activité chimique de la myosine, donc à la concentration du calcium. Les grandeurs  $k_0 = \frac{s_0 \bar{k}}{\mathcal{A}_0}$  et  $\sigma_0 = \frac{\bar{\sigma}}{2}$  sont les valeurs limites en contraction de la raideur et la contrainte respectivement,  $\bar{k}$  et  $\bar{\sigma}$  sont la raideur maximale et la contrainte lagrangienne maximale dans un sarcomère respectivement. Dans ce modèle  $k_c$  et  $\sigma_c$  sont les variables d'état et l'entrée est le couple  $(\dot{\epsilon}_c, u)$ . Pour l'instant, la déformation  $\dot{\epsilon}_c$  est supposée connue. Il reste à modéliser les ressorts passifs ES et EP.

L'élément ES est supposé se comporter linéairement avec une raideur  $k_s$  :  $\sigma_s = k_s \epsilon_s$ . Le montage série impose la relation suivante entre les différentes déformations :

$$\epsilon_s = \frac{l_0}{l_{s0}} \epsilon - \frac{l_{c0}}{l_{s0}} \epsilon_c, \quad (1.85)$$

ainsi que l'égalité des contraintes dans EC et dans ES :

$$\sigma_c = k_s \frac{l_0}{l_{s0}} \epsilon - k_s \frac{l_{c0}}{l_{s0}} \epsilon_c. \quad (1.86)$$

Si la longueur totale de la fibre  $l_0 \epsilon$  est connue, on obtient le système final suivant :

$$\begin{cases} \dot{k}_c = -(|u| + |\dot{\epsilon}_c|)k_c + k_0|u|_+, \\ \dot{\sigma}_c = -(|u| + |\dot{\epsilon}_c|)\sigma_c + k_c\dot{\epsilon}_c + \sigma_0|u|_+, \\ l_{s0}\sigma_c + k_s l_{c0}\epsilon_c = k_s l_0 \epsilon. \end{cases} \quad (1.87)$$

Pour le ressort parallèle EP, Bestel et al. se sont référés à la littérature pour en choisir une relation contrainte-déformation de type exponentiel où la contrainte est nulle pour une déformation nulle :

$$\sigma_p = \frac{k_{p1}}{k_{p2}} (e^{k_{p1}\epsilon} - 1). \quad (1.88)$$

# Chapitre 2

## Du micro au macro : Technique d'homogénéisation

Nous avons vu au chapitre 1 que les modélisations mécaniques du myocarde se situent dans le cadre des milieux continus et que les lois de comportement (relations contraintes-déformations) sont déterminées à partir d'expériences macroscopiques qui masquent, par conséquent, l'existence des cardiomyocytes. Une alternative à cette approche macroscopique est de déduire la loi de comportement du myocarde du comportement mécanique des cardiomyocytes et de leur organisation géométrique, c'est-à-dire d'homogénéiser le réseau de cardiomyocytes. Cette démarche d'homogénéisation est développée dans ce chapitre et le suivant.

Le point de départ de l'homogénéisation est la modélisation mécanique du milieu étudié au niveau microscopique, ici le réseau de cardiomyocytes. Nous avons choisi de modéliser le réseau comme un treillis de barres travaillant en traction-compression et interagissant par des couples, le cadre est celui des grandes transformations. La modélisation mécanique correspondante est décrite et justifiée dans la section 2.1. Pour homogénéiser le réseau de cardiomyocytes, nous avons adapté, à la modélisation choisie, la méthode d'homogénéisation discrète développée dans Tollenaere et Caillerie [92]. Le principe de la méthode et son application au réseau de cardiomyocytes sont développés dans la section 2.2. La section 2.3 est consacrée à des compléments sur l'objectivité et le caractère hyperélastique de la loi de comportement macroscopique obtenue par homogénéisation et dans la section 2.4 nous décrivons l'application de la méthode de Newton au problème de treillis permettant de déterminer cette loi.

### 2.1 Modélisation mécanique du réseau de cardiomyocytes

Comme nous l'avons vu au premier chapitre de la thèse, les cardiomyocytes sont des petits batonnets allongés reliés entre eux par les anastomoses. Les quelques essais mécaniques, Brady [10], Zile et al. [111], menés sur des cardiomyocytes isolés ont porté sur leur comportement en traction-compression longitudinale. Le cardiomyocyte est vu alors comme un ressort ou une barre élastique non linéaire dont la loi de comportement reliant la tension à la longueur dépend



de l'activation du cardiomyocyte. Le comportement en traction-compression des cardiomyocytes rend bien compte de l'élasticité du myocarde dans le sens des fibres mais ne peut pas rendre compte de l'élasticité transverse aux fibres. Cette élasticité transverse est due en partie à la matrice extracellulaire, en particulier aux fibres de collagène mais elle résulte aussi des liaisons des cardiomyocytes par des anastomoses non terminales, l'assemblage des cardiomyocytes est un véritable réseau pouvant être assimilé à un grillage, voir Figure 2.1.

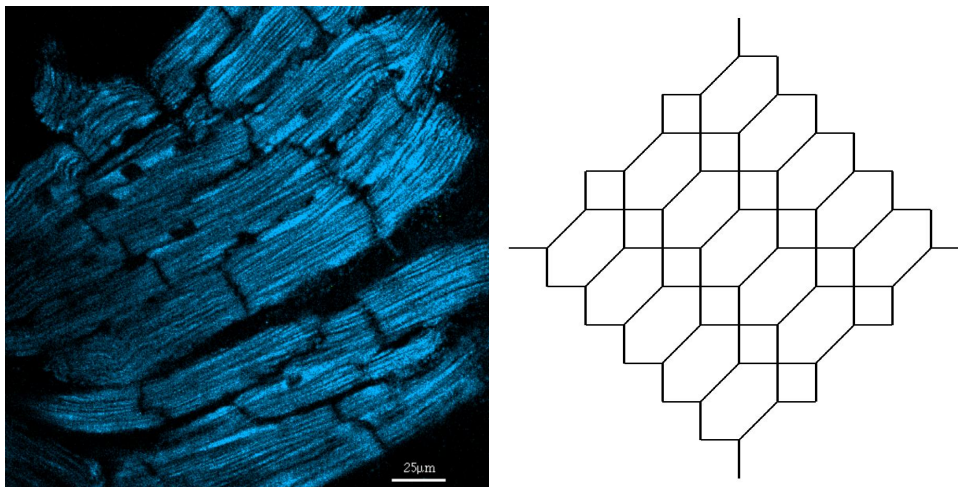


FIG. 2.1 – A gauche, des cardiomyocytes liés par des anastomoses non terminales. A droite, un réseau de barres modélisant un échantillon de cardiomyocytes.

Pour prendre en compte les liaisons par les anastomoses intermédiaires, nous modélisons chaque segment de cardiomyocyte par une barre restant rectiligne dont le comportement en traction-compression est connu. Les barres ne sont liées entre elles qu'à leurs extrémités ce qui fait de leur assemblage un treillis. De plus, des barres adjacentes, c'est-à-dire liées par une extrémité, interagissent par des moments dépendant de l'angle entre les barres. L'image mécanique la plus simple de ces interactions est celle des ressorts spiraux.

La connaissance des positions des nœuds d'une telle structure détermine complètement sa géométrie, elle permet en effet de calculer les longueurs des barres et les angles entre barres. Il serait possible d'envisager une modélisation plus sophistiquée du réseau de cardiomyocytes en assimilant chaque cardiomyocyte à une poutre élastique pouvant travailler, non seulement en traction-compression, mais aussi en flexion et torsion. La mise en œuvre de la méthode d'homogénéisation aurait amené à étendre au cas non linéaire les travaux de Pradel [74]. Nous avons choisi un modèle plus simple car les données expérimentales actuellement disponibles ne permettent pas de caractériser le comportement en flexion et torsion des cardiomyocytes, une modélisation plus complexe nécessitant une telle caractérisation ne se justifie, par conséquent, pas.

### 2.1.1 Description du treillis

On appelle treillis un assemblage de barres (ou de poutres) liées entre elle par leurs extrémités. Les points de liaison des barres (ou des poutres) sont appelés les nœuds du treillis. Dans la suite nous utiliserons le terme barre car la flexion n'intervient pas dans la modélisation des cardiomyocytes.

Appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) à un milieu ou à une structure mécanique revient à l'appliquer à chacune des parties du milieu ou de la structure. Dans le cas du treillis les éléments sont les barres et les nœuds, l'application du PFD au treillis se ramène à son application à chaque élément.

Au préalable, il est nécessaire d'identifier les éléments du treillis, pour cela on numérote les nœuds du treillis par des  $\tilde{n}$  qui peuvent être des entiers ou tout autre système d'indexation, on note  $\tilde{\mathcal{N}}$  l'ensemble des nœuds  $\tilde{n}$  du treillis. De même on numérote les barres par des  $\tilde{b}$  et on note  $\tilde{\mathcal{B}}$  l'ensemble des barres du treillis.

Pour l'écriture des équations du mouvement du treillis, il est utile d'orienter les barres ce qui, dans les deux nœuds auxquels est liée la barre  $\tilde{b}$ , définit un nœud origine noté  $O(\tilde{b})$  et un nœud extrémité noté  $E(\tilde{b})$  où  $O$  et  $E$  sont des fonctions définies de  $\tilde{\mathcal{B}}$  dans  $\tilde{\mathcal{N}}$ . Les ensembles  $O^{-1}(\tilde{n})$  et  $E^{-1}(\tilde{n})$  désignent respectivement l'ensemble des barres dont  $\tilde{n}$  est l'origine et celui dont  $\tilde{n}$  est l'extrémité. L'orientation des barres est arbitraire.

Notre modélisation du réseau de cardiomyocytes fait intervenir des interactions entre les barres par des moments. Les couples de barres en interaction sont notés  $\tilde{c}$  avec  $\tilde{c} \in \tilde{\mathcal{C}}$ . De même, que pour les barres, il est utile d'orienter ces couples, on note  $P(\tilde{c})$  et  $D(\tilde{c})$  les barres du couple  $\tilde{c}$  où  $P$  et  $D$  sont des fonctions de  $\tilde{\mathcal{C}}$  dans  $\tilde{\mathcal{B}}$ ,  $P^{-1}(\tilde{b})$  et  $D^{-1}(\tilde{b})$  désignent, respectivement, l'ensemble des couples de barres en interaction dont  $\tilde{b}$  est la première barre, respectivement la dernière.

### 2.1.2 Géométrie et cinématique du treillis

L'objectif de l'étude mécanique d'un treillis est de déterminer son mouvement dans l'espace, c'est-à-dire l'évolution de sa géométrie au cours du temps. Dans notre modélisation du réseau de cardiomyocytes, les barres sont supposées rester rectilignes, la géométrie du treillis est donc complètement déterminée par la donnée des positions des nœuds. On note  $\mathbf{R}(\tilde{n}, t)$  la position du nœud  $\tilde{n}$  à l'instant  $t$ . La cinématique de la structure, c'est-à-dire l'ensemble des vitesses de ces points matériels, est, par conséquent, déterminée complètement par la donnée des vitesses  $\dot{\mathbf{R}}(\tilde{n}, t) = \frac{d\mathbf{R}(\tilde{n}, t)}{dt}$  des nœuds du treillis.

On note  $\mathbf{B}(\tilde{b})$  le vecteur

$$\mathbf{B}(\tilde{b}) = \mathbf{R}(E(\tilde{b})) - \mathbf{R}(O(\tilde{b})),$$

la longueur de la barre  $l^{\tilde{b}}$  est donc

$$l^{\tilde{b}} = \|\mathbf{B}(\tilde{b})\|.$$

On note  $\mathbf{e}^{\tilde{b}}$  le vecteur unitaire de la barre  $\tilde{b}$  avec la même orientation, on a

$$\mathbf{e}^{\tilde{b}} = \frac{\mathbf{B}(\tilde{b})}{l^{\tilde{b}}}.$$

En dérivant par rapport à  $t$  on a

$$\dot{\mathbf{B}}(\tilde{b}) = \dot{l}^{\tilde{b}} \mathbf{e}^{\tilde{b}} + l^{\tilde{b}} \dot{\mathbf{e}}^{\tilde{b}}.$$

On pose  $\boldsymbol{\omega}^{\tilde{b}} = \mathbf{e}^{\tilde{b}} \wedge \dot{\mathbf{e}}^{\tilde{b}}$ . On a

$$\boldsymbol{\omega}^{\tilde{b}} \wedge \mathbf{e}^{\tilde{b}} = -\mathbf{e}^{\tilde{b}} \wedge (\mathbf{e}^{\tilde{b}} \wedge \dot{\mathbf{e}}^{\tilde{b}}) = \dot{\mathbf{e}}^{\tilde{b}}$$

car comme  $\mathbf{e}^{\tilde{b}}$  est unitaire,  $\mathbf{e}^{\tilde{b}} \cdot \dot{\mathbf{e}}^{\tilde{b}} = 0$ .

On en déduit donc

$$\dot{\mathbf{B}}(\tilde{b}) = \dot{l}^{\tilde{b}} \mathbf{e}^{\tilde{b}} + l^{\tilde{b}} (\boldsymbol{\omega}^{\tilde{b}} \wedge \mathbf{e}^{\tilde{b}})$$

ce qui montre que  $\boldsymbol{\omega}^{\tilde{b}}$  est le vecteur rotation instantannée de la barre  $\tilde{b}$ .

On a d'autre part

$$\dot{\mathbf{B}}(\tilde{b}) = \dot{\mathbf{R}}(E(\tilde{b})) - \dot{\mathbf{R}}(O(\tilde{b}))$$

donc

$$\dot{l}^{\tilde{b}} \mathbf{e}^{\tilde{b}} + l^{\tilde{b}} (\boldsymbol{\omega}^{\tilde{b}} \wedge \mathbf{e}^{\tilde{b}}) = \dot{\mathbf{R}}(E(\tilde{b})) - \dot{\mathbf{R}}(O(\tilde{b})).$$

Par conséquent,

$$\dot{l}^{\tilde{b}} = [\dot{\mathbf{R}}(E(\tilde{b})) - \dot{\mathbf{R}}(O(\tilde{b}))] \cdot \mathbf{e}^{\tilde{b}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega}^{\tilde{b}} = \frac{1}{l^{\tilde{b}}} \mathbf{e}^{\tilde{b}} \wedge [\dot{\mathbf{R}}(E(\tilde{b})) - \dot{\mathbf{R}}(O(\tilde{b}))].$$

### 2.1.3 Mécanique du treillis

#### Efforts intérieurs et efforts extérieurs

Le treillis est un système mécanique qui consiste en des nœuds et des barres. Les nœuds sont des points. Donc ils peuvent être soumis uniquement à des forces. Nous supposons qu'ils interagissent avec les barres auxquelles ils sont liés. Considérons une barre  $\tilde{b}$  avec une extrémité  $\tilde{n}$ . Nous désignons par  $\mathbf{f}^{\tilde{b}/\tilde{n}}$  la force exercée par  $\tilde{b}$  sur  $\tilde{n}$ . Donc, en vertu du principe d'action-réaction, la force  $\mathbf{f}^{\tilde{n}/\tilde{b}} = -\mathbf{f}^{\tilde{b}/\tilde{n}}$  est exercée par le nœud  $\tilde{n}$  sur la barre  $\tilde{b}$ . Quant aux couples de barres  $(\tilde{b}, \tilde{b}')$  ayant une extrémité commune, nous supposons qu'elles interagissent par des moments. Soit  $\mathbf{M}^{\tilde{b}/\tilde{b}'}$  le moment exercé par  $\tilde{b}$  sur  $\tilde{b}'$  à leur extrémité commune, donc le principe d'action-réaction donne  $\mathbf{M}^{\tilde{b}'/\tilde{b}} = -\mathbf{M}^{\tilde{b}/\tilde{b}'}$ .

Nous supposons que les seuls efforts extérieurs agissant sur le treillis sont les forces  $\mathbf{f}^{e/\tilde{n}}$  exercées aux nœuds.

## Equations d'équilibre

Nous limitons notre étude au cadre statique, c'est-à-dire que nous négligeons les termes d'inertie. L'équilibre du treillis résulte de l'équilibre de chaque élément du système mécanique. Considérons tout d'abord l'équilibre des nœuds. Pour tout  $\tilde{n}$ , il s'écrit

$$\sum_{\tilde{b} \in O^{-1}(\tilde{n}) \cup E^{-1}(\tilde{n})} \mathbf{f}^{\tilde{b}/\tilde{n}} + \mathbf{f}^{e/\tilde{n}} = 0. \quad (2.1)$$

L'équilibre de chaque barre  $\tilde{b}$  résulte de l'équilibre des forces et de l'équilibre des moments auxquels elle est soumise. L'équilibre des forces s'écrit

$$\mathbf{f}^{O(\tilde{b})/\tilde{b}} + \mathbf{f}^{E(\tilde{b})/\tilde{b}} = 0. \quad (2.2)$$

Posons, pour chaque barre  $\tilde{b}$ ,  $\mathbf{T}^{\tilde{b}} = \mathbf{f}^{E(\tilde{b})/\tilde{b}}$ , nous remarquons immédiatement que  $\mathbf{f}^{O(\tilde{b})/\tilde{b}} = -\mathbf{T}^{\tilde{b}}$ . Insérant cette relation dans (2.1) et utilisant le principe d'action-réaction des forces, les équations (2.1)-(2.2) se simplifient en

$$\forall \tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}, \quad \sum_{\tilde{b} \in O^{-1}(\tilde{n})} \mathbf{T}^{\tilde{b}} - \sum_{\tilde{b} \in E^{-1}(\tilde{n})} \mathbf{T}^{\tilde{b}} + \mathbf{f}^{e/\tilde{n}} = 0. \quad (2.3)$$

L'équilibre des moments exercés par toutes les barres interagissant avec  $\tilde{b}$  peut être exprimé en tout point de  $\mathbb{R}^3$ . Nous choisissons de l'exprimer en  $O(\tilde{b})$ . Soit, pour chaque  $\tilde{c}$ ,  $\mathbf{M}^{\tilde{c}} = \mathbf{M}^{D(\tilde{c})/P(\tilde{c})}$ , utilisant le principe d'action-réaction des moments, l'équilibre des moments s'écrit

$$\forall \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}, \quad \sum_{\tilde{c} \in P^{-1}(\tilde{b})} \mathbf{M}^{\tilde{c}} - \sum_{\tilde{c} \in D^{-1}(\tilde{b})} \mathbf{M}^{\tilde{c}} + l^{\tilde{b}} \mathbf{e}^{\tilde{b}} \wedge \mathbf{T}^{\tilde{b}} = 0. \quad (2.4)$$

Les équations (2.3)-(2.4) sont la formulation forte des équations d'équilibre. Pour une utilisation facile de la technique d'homogénéisation, il est préférable de les réécrire dans leur formulation faible, appelée aussi formulation des puissances virtuelles. Cette formulation faible est obtenue en multipliant (2.3) par des translations virtuelles  $\mathbf{v}(\tilde{n}) \in \mathbb{R}^3$ , en multipliant (2.4) par des vitesses de rotation virtuelles  $\mathbf{w}(\tilde{b}) \in \mathbb{R}^3$  et en faisant la somme sur  $\tilde{n}$  et  $\tilde{b}$ . Un changement de sommation qui peut être vu comme une intégration par parties discrète conduit au système suivant

$$\forall \mathbf{v}(\cdot) : \tilde{\mathcal{N}} \mapsto \mathbb{R}^3, \quad \sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{T}^{\tilde{b}} \cdot [\mathbf{v}(O(\tilde{b})) - \mathbf{v}(E(\tilde{b}))] + \sum_{\tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}} \mathbf{f}^{e/\tilde{n}} \cdot \mathbf{v}(\tilde{n}) = 0, \quad (2.5)$$

$$\forall \mathbf{w}(\cdot) : \tilde{\mathcal{B}} \mapsto \mathbb{R}^3, \quad \sum_{\tilde{c} \in \tilde{\mathcal{C}}} \mathbf{M}^{\tilde{c}} \cdot [\mathbf{w}(P(\tilde{c})) - \mathbf{w}(D(\tilde{c}))] + \sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}} l^{\tilde{b}} (\mathbf{e}^{\tilde{b}} \wedge \mathbf{T}^{\tilde{b}}) \cdot \mathbf{w}(\tilde{b}) = 0. \quad (2.6)$$

Nous décomposons l'effort  $\mathbf{T}^{\tilde{b}}$  en ses composantes axiale (ou normale) et transversale par rapport à  $\mathbf{e}^{\tilde{b}}$

$$\mathbf{T}^{\tilde{b}} = N^{\tilde{b}} \mathbf{e}^{\tilde{b}} + \mathbf{T}_t^{\tilde{b}}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}_t^{\tilde{b}} \cdot \mathbf{e}^{\tilde{b}} = 0. \quad (2.7)$$

L'addition de (2.5) et (2.6) donne la formulation en puissances virtuelles suivante de l'équilibre du treillis

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}(\cdot) : \tilde{\mathcal{N}} \mapsto \mathbb{R}^3, \quad \forall \mathbf{w}(\cdot) : \tilde{\mathcal{B}} \mapsto \mathbb{R}^3, \\ \sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}} N^{\tilde{b}} \cdot [\mathbf{v}(O(\tilde{b})) - \mathbf{v}(E(\tilde{b}))] + \sum_{\tilde{c} \in \tilde{\mathcal{C}}} \mathbf{M}^{\tilde{c}} \cdot [\mathbf{w}(P(\tilde{c})) - \mathbf{w}(D(\tilde{c}))] \\ + \sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{T}_t^{\tilde{b}} \cdot [\mathbf{v}_t(O(\tilde{b})) - \mathbf{v}_t(E(\tilde{b})) + l^{\tilde{b}}(\mathbf{w}(\tilde{b}) \wedge \mathbf{e}^{\tilde{b}})] + \sum_{\tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}} \mathbf{f}^{e/\tilde{n}} \cdot \mathbf{v}(\tilde{n}) = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{v}_t(O(\tilde{b}))$  et  $\mathbf{v}_t(E(\tilde{b}))$  sont les composantes transverses de  $\mathbf{v}$  sur  $\mathbf{e}^{\tilde{b}}$ . Cette formulation est équivalente aux équations (2.5) et (2.6).

Les vecteurs  $\mathbf{w}(\tilde{b})$  sont les vitesses virtuelles de rotation des barres. On a vu dans la section 2.1.2 que les vitesses réelles de rotation des barres sont liées aux vitesses des nœuds. Si on impose une condition identique aux vitesses virtuelles c'est-à-dire si on pose

$$\mathbf{w}(\tilde{b}) = \frac{1}{l^{\tilde{b}}} \mathbf{e}^{\tilde{b}} \wedge [\mathbf{v}(E(\tilde{b})) - \mathbf{v}(O(\tilde{b}))]. \quad (2.9)$$

On a  $l^{\tilde{b}} \mathbf{w}(\tilde{b}) \wedge \mathbf{e}^{\tilde{b}} = \mathbf{v}(E(\tilde{b})) - \mathbf{v}(O(\tilde{b})) - \left[ [\mathbf{v}(E(\tilde{b})) - \mathbf{v}(O(\tilde{b}))] \cdot \mathbf{e}^{\tilde{b}} \right] \mathbf{e}^{\tilde{b}} = \mathbf{v}_t(E(\tilde{b})) - \mathbf{v}_t(O(\tilde{b}))$ , et la formulation (2.8) devient :  $\forall \mathbf{v}(\cdot) : \tilde{\mathcal{N}} \mapsto \mathbb{R}^3$ ,

$$\sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}} N^{\tilde{b}} \mathbf{e}^{\tilde{b}} \cdot [\mathbf{v}(O(\tilde{b})) - \mathbf{v}(E(\tilde{b}))] + \sum_{\tilde{c} \in \tilde{\mathcal{C}}} \mathbf{M}^{\tilde{c}} \cdot [\mathbf{w}(P(\tilde{c})) - \mathbf{w}(D(\tilde{c}))] + \sum_{\tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}} \mathbf{f}^{e/\tilde{n}} \cdot \mathbf{v}(\tilde{n}) = 0. \quad (2.10)$$

On voit que les composantes transverses  $\mathbf{T}_t^{\tilde{b}}$  ont été éliminées de la formulation en puissances virtuelles. Cela montre que les  $\mathbf{T}_t^{\tilde{b}}$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés à la condition cinématique (2.9).

Les  $\mathbf{T}_t^{\tilde{b}}$  étant des multiplicateurs de Lagrange, ils ne peuvent pas faire l'objet d'une loi de comportement et nous verrons par la suite qu'il est possible de formuler le problème du treillis en les éliminant. Il est cependant possible de déterminer les efforts transverses  $\mathbf{T}_t^{\tilde{b}}$  à partir des moments  $\mathbf{M}^{\tilde{c}}$ , en effet, en multipliant (2.4) vectoriellement par  $\mathbf{e}^{\tilde{b}}$ , il vient

$$\forall \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}, \quad \mathbf{T}_t^{\tilde{b}} = \frac{1}{l^{\tilde{b}}} \left[ \sum_{\tilde{c} \in D^{-1}(\tilde{b})} \mathbf{M}^{\tilde{c}} - \sum_{\tilde{c} \in P^{-1}(\tilde{b})} \mathbf{M}^{\tilde{c}} \right] \wedge \mathbf{e}^{\tilde{b}}. \quad (2.11)$$

### Lois de comportement - Indifférence matérielle

Comme nous l'avons au paragraphe précédent, seuls  $N^{\tilde{b}}$  et  $\mathbf{M}^{\tilde{c}}$  sont l'objet d'une loi de comportement. Nous supposons que la tension axiale de chaque barre  $N^{\tilde{b}}$  ne dépend que de

la position de la barre  $\mathbf{B}^{\tilde{b}}$  et que les moments  $\mathbf{M}^{\tilde{c}}$  entre barres ne dépendent que des vecteurs unitaires des barres en interaction :

$$N^{\tilde{b}} = \bar{N}^{\tilde{b}}(\mathbf{B}^{\tilde{b}}), \quad (2.12)$$

$$\mathbf{M}^{\tilde{c}} = \bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}). \quad (2.13)$$

**Proposition 2.1** : *Le principe de l'indifférence matérielle (ou principe d'objectivité) qui s'écrit pour  $\bar{N}^{\tilde{b}}$  et  $\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}$*

$$\forall \mathbf{X}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \mathbf{Q} \in O^3, \quad \bar{N}^{\tilde{b}}(\mathbf{X} + \mathbf{QB}) = \bar{N}^{\tilde{b}}(\mathbf{B}), \quad (2.14)$$

$$\forall \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2 \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{e}^1\| = \|\mathbf{e}^2\| = 1, \text{ et } \mathbf{Q} \in O^3, \quad \bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{Qe}^1, \mathbf{Qe}^2) = \det(\mathbf{Q})\mathbf{Q}\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2), \quad (2.15)$$

implique que  $\bar{N}^{\tilde{b}}$  et  $\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}$  sont de la forme

$$\bar{N}^{\tilde{b}}(\mathbf{B}^{\tilde{b}}) = \mathcal{N}^{\tilde{b}}(l^{\tilde{b}}), \quad \text{où } l^{\tilde{b}} = \|\mathbf{B}^{\tilde{b}}\|, \quad (2.16)$$

$$\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) = \mathcal{M}^{\tilde{c}}(p^{\tilde{c}}) \mathbf{e}^{P(\tilde{c})} \wedge \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}, \quad \text{où } p^{\tilde{c}} = \mathbf{e}^{P(\tilde{c})} \cdot \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}. \quad (2.17)$$

**Démonstration.** Commençons par la tension normale. Choisissons alors une rotation  $\mathbf{Q}$  qui transforme le vecteur  $\mathbf{e}^{\tilde{b}}$  en un vecteur unitaire quelconque  $\mathbf{e}_1$ , par exemple le vecteur unitaire de l'axe des abscisses. Dans ce cas, la tension s'écrit :

$$\bar{N}^{\tilde{b}}(\mathbf{B}^{\tilde{b}}) = \bar{N}^{\tilde{b}}(\mathbf{QB}^{\tilde{b}}) = \bar{N}^{\tilde{b}}(l^{\tilde{b}}\mathbf{Qe}^{\tilde{b}}) = \bar{N}^{\tilde{b}}(l^{\tilde{b}}\mathbf{e}_1) = \mathcal{N}^{\tilde{b}}(l^{\tilde{b}}).$$

D'autre part, en ce qui concerne le moment  $\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}$ , nous distinguons deux cas :

- Les vecteurs  $\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}$  et  $\mathbf{e}^{D(\tilde{c})}$  sont indépendants : on considère la seule isométrie  $\mathbf{Q}$  qui conserve  $\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}$  et  $\mathbf{e}^{D(\tilde{c})}$ , c'est-à-dire la symétrie par rapport au plan contenant ces deux vecteurs. Cette isométrie est donc définie par

$$\mathbf{Qe}^{P(\tilde{c})} = \mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \quad \mathbf{Qe}^{D(\tilde{c})} = \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})} \wedge \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) = -\mathbf{e}^{P(\tilde{c})} \wedge \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}.$$

On a  $\det(\mathbf{Q}) = -1$  et  $\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) = -\mathbf{Q}\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})})$  qui peut être décomposé de la façon suivante

$$\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) = \mu^1 \mathbf{e}^{P(\tilde{c})} + \mu^2 \mathbf{e}^{D(\tilde{c})} + \bar{\mathcal{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) \mathbf{e}^{P(\tilde{c})} \wedge \mathbf{e}^{D(\tilde{c})},$$

$$\text{par suite } \mathbf{Q}\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) = \mu^1 \mathbf{e}^{P(\tilde{c})} + \mu^2 \mathbf{e}^{D(\tilde{c})} - \bar{\mathcal{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) \mathbf{e}^{P(\tilde{c})} \wedge \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}.$$

La condition  $\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) = -\mathbf{Q}\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})})$  entraîne  $\mu^1 = 0$  et  $\mu^2 = 0$  et

$$\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) = \bar{\mathcal{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) \mathbf{e}^{P(\tilde{c})} \wedge \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}.$$

Par conséquent, l'objectivité des moments s'écrit sous la forme

$$\forall \mathbf{Q} \in O^3, \quad \bar{\mathcal{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{Qe}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{Qe}^{D(\tilde{c})}) = \bar{\mathcal{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}).$$

Maintenant, nous décomposons  $\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}$  en :  $\mathbf{e}^{P(\tilde{c})} = (\mathbf{e}^{P(\tilde{c})} \cdot \mathbf{e}^{D(\tilde{c})})\mathbf{e}^{D(\tilde{c})} + \mathbf{e}_\perp^{D(\tilde{c})}$  où  $\mathbf{e}_\perp^{D(\tilde{c})}$  est un vecteur, qui n'est pas nécessairement unitaire, de norme  $\alpha$ , orthogonal à  $\mathbf{e}^{D(\tilde{c})}$ . Nous avons  $\alpha^2 = 1 - (p^{\tilde{c}})^2$ , où  $p^{\tilde{c}} = \mathbf{e}^{P(\tilde{c})} \cdot \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}$ . Considérons la rotation  $\mathbf{Q}$  qui transforme  $\mathbf{e}^{D(\tilde{c})}$  en  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_\perp^{D(\tilde{c})}$  en  $\alpha\mathbf{e}_2$  où  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont deux vecteurs unitaires orthogonaux quelconques (considérons par exemple une base orthonormale  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ). Dans ce cas

$$\mathbf{Q}\mathbf{e}^{D(\tilde{c})} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{Q}\mathbf{e}^{P(\tilde{c})} = p^{\tilde{c}}\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2,$$

par suite  $\bar{\mathcal{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) = \bar{\mathcal{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{Q}\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{Q}\mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) = \bar{\mathcal{M}}^{\tilde{c}}(p^{\tilde{c}}\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \mathcal{M}^{\tilde{c}}(p^{\tilde{c}})$ .

- Les vecteurs  $\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}$  et  $\mathbf{e}^{D(\tilde{c})}$  sont linéairement dépendants et l'on a  $\mathbf{e}^{P(\tilde{c})} = \pm\mathbf{e}^{D(\tilde{c})}$  : on prend une rotation  $\mathbf{Q}$  laissant invariant  $\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}$ , alors  $\mathbf{e}^{D(\tilde{c})}$  est invariant, et l'on a  $\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})})$ . Ceci veut dire que  $\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}$  est invariant pour toute rotation laissant  $\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}$  invariant ce qui implique que  $\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}$  est parallèle à  $\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}$  :

$$\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) = \bar{\mathcal{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})})\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}.$$

On considère maintenant une symétrie  $\mathbf{S}$  laissant invariant  $\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}$ , par exemple une symétrie par rapport à un plan contenant  $\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}$ , alors on a  $\det(\mathbf{S}) = -1$  et

$$\bar{\mathcal{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})})\mathbf{e}^{P(\tilde{c})} = -\bar{\mathcal{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})})\mathbf{S}\mathbf{e}^{P(\tilde{c})} = -\bar{\mathcal{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})})\mathbf{e}^{P(\tilde{c})},$$

et par conséquent  $\bar{\mathcal{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) = 0$ .

En conclusion, on a

$$\bar{\mathbf{M}}^{\tilde{c}}(\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}) = \mathcal{M}^{\tilde{c}}(p^{\tilde{c}})\mathbf{e}^{P(\tilde{c})} \wedge \mathbf{e}^{D(\tilde{c})},$$

où  $p^{\tilde{c}} = \mathbf{e}^{P(\tilde{c})} \cdot \mathbf{e}^{D(\tilde{c})}$ . On peut facilement vérifier que cette expression est objective.  $\square$

### Problème de déformation du treillis

Quand il est soumis à des forces extérieures et à des conditions de placement de certains nœuds, le treillis se déforme. Le problème de déformation du treillis revient à déterminer les positions  $\mathbf{R}(\tilde{n})$  des nœuds qui ne sont pas soumis à des conditions de placement. Ces positions sont les inconnues primales du problème qui est constitué des équations d'équilibre du treillis (2.10) et des lois de comportement (2.12) et (2.13).

En supposant le problème bien posé et résolu, il est possible de déterminer les tensions axiales  $N^{\tilde{b}}$  par (2.12), les moments  $\mathbf{M}^{\tilde{c}}$  par (2.13) ainsi que les efforts transversaux  $\mathbf{T}_f^{\tilde{b}}$  qui sont des multiplicateurs de Lagrange par (2.11).

## 2.2 Homogénéisation d'un treillis répétitif

La modélisation du réseau de cardiomyocytes par un treillis de barres ayant été décrite aux paragraphes de la section précédente, nous allons maintenant développer la méthode d'ho-

mogénéisation discrète, [92], pour cette modélisation particulière.

L'homogénéisation discrète est une méthode pour déterminer le milieu continu équivalent d'une structure discrète répétitive obtenue par la répétition d'un grand nombre de motif ou cellule élémentaire. Elle est inspirée de l'homogénéisation des milieux continus périodiques (Bakhvalov et Panasenko [3], Panasenko [71], Sanchez [78]). L'homogénéisation discrète, comme celle des milieux continus périodiques, est basée sur des convergences ou sur des développements asymptotiques vis-à-vis d'un petit paramètre  $\varepsilon$  qui est typiquement le rapport d'une longueur caractéristique d'une cellule élémentaire sur une longueur caractéristique de la structure étudiée, ici nous utilisons les développements asymptotiques. Pour que les développements asymptotiques aient un sens, il est nécessaire de considérer que le paramètre  $\varepsilon$  tend vers 0, ce qui signifie qu'on n'étudie pas une structure particulière, mais une suite de structures paramétrée par  $\varepsilon$ . Il faut, par conséquent décrire complètement la dépendance des structures envisagées en fonction du paramètre  $\varepsilon$ . Cela concerne évidemment l'aspect géométrique des structures mais aussi l'aspect mécanique, en particulier il faut préciser la dépendance vis-à-vis de  $\varepsilon$  des lois de comportement impliquées dans la description mécanique des structures étudiées. Le choix de cette dépendance influe de façon importante sur le modèle homogénéisé obtenu.

Dans cette section, nous allons décrire un système de numérotation des nœuds et des barres qui traduit la répétitivité du treillis et qui facilite la mise en œuvre des développements asymptotiques. Puis, nous allons déduire des développements asymptotiques les équations d'équilibre et la loi de comportement du milieu continu équivalent.

### 2.2.1 Description d'un treillis répétitif et numérotation

Décrivons tout d'abord un treillis infini. Nous considérons des treillis dont les configurations de référence (ensembles de nombres dans notre modélisation) sont obtenues par la répétition sur  $\mathbb{Z}^3$  d'une cellule élémentaire (un ensemble fini de nombres dans notre modélisation), que nous appelons cellule de référence. Cette cellule contient des "nœuds" et des "barres". Leurs numéros appartiennent à des sous-ensembles finis  $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$  de  $\mathbb{N}$ . A tout  $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{Z}^3$ , on associe la cellule  $\mathbf{v}$  qui contient  $\text{Card}\mathcal{N}_{\mathcal{R}}$  nœuds et  $\text{Card}\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$  barres. Donc les nœuds et les barres du treillis infini tout entier sont maintenant numérotés par des quadruplets  $\tilde{n} = (n, v^1, v^2, v^3)$  dans  $\mathcal{N}_{\mathcal{R}} \times \mathbb{Z}^3$ ,  $\tilde{b} = (b, v^1, v^2, v^3)$  dans  $\mathcal{B}_{\mathcal{R}} \times \mathbb{Z}^3$ . Ceci veut dire que le nœud (respectivement barre) référé par  $\tilde{n}$  (respectivement  $\tilde{b}$ ) est le nœud (respectivement barre) ayant le numéro  $n$  (respectivement  $b$ ) dans la cellule  $\mathbf{v}$ . Soient  $\tilde{\mathcal{N}}^\infty = \mathcal{N}_{\mathcal{R}} \times \mathbb{Z}^3$  et  $\tilde{\mathcal{B}}^\infty = \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \times \mathbb{Z}^3$ , nous disons que  $\tilde{\mathcal{N}}^\infty$  (respectivement  $\tilde{\mathcal{B}}^\infty$ ) est l'ensemble des nœuds (respectivement barres) du treillis infini.

$b$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$
$O_R(b)$	$n_1$	$n_2$	$n_2$	$n_3$	$n_3$
$E_R(b)$	$n_2$	$n_1$	$n_3$	$n_1$	$n_1$
$\delta^1(b)$	0	1	0	0	1
$\delta^2(b)$	0	0	0	1	1



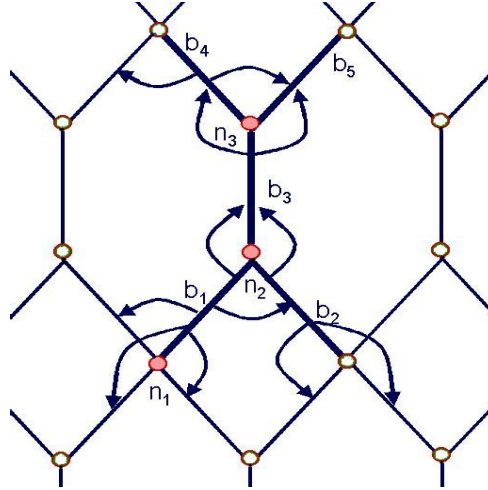


FIG. 2.2 – En gras, une cellule élémentaire à trois nœuds coloriés en rouge et cinq barres :  $\mathcal{N}_{\mathcal{R}} = \{n_1, n_2, n_3\}$ ,  $\mathcal{B}_{\mathcal{R}} = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ . Il y a douze interactions :  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}\}$ .

Tableau 1 : Numérotation des barres.

$c$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$c_8$	$c_9$	$c_{10}$	$c_{11}$	$c_{12}$
$P_R(c)$	$b_1$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_3$	$b_4$	$b_1$	$b_1$	$b_1$	$b_2$	$b_2$	$b_4$
$D_R(c)$	$b_2$	$b_3$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_5$	$b_2$	$b_4$	$b_5$	$b_4$	$b_5$	$b_5$
$\gamma^1(c)$	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	1	0	-1
$\gamma^2(c)$	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0

Tableau 2 : Numérotation des interactions entre barres.

Nous allons maintenant expliquer comment les nœuds se connectent entre eux. Tout d'abord nous supposons que chaque barre de  $\tilde{\mathcal{B}}^\infty$  joint deux nœuds. A chaque barre  $\tilde{b}$  nous associons un nœud origine  $O(\tilde{b})$  et un nœud extrémité  $E(\tilde{b})$ . D'après notre description ci-dessus, chaque nœud  $O(\tilde{b})$  et chaque nœud  $E(\tilde{b})$  peut être écrit sous la forme d'un quadruplet. Nous supposons que le nœud origine  $O(\tilde{b})$  de la barre  $\tilde{b} = (b, v^1, v^2, v^3)$  associée à la cellule  $(v^1, v^2, v^3)$  appartient à cette cellule. Donc, il existe un entier  $n$  tel que  $O((b, v^1, v^2, v^3)) = (n, v^1, v^2, v^3)$ . De plus, afin d'exprimer la répétitivité du treillis, nous imposons que l'entier  $n$  dépend uniquement de  $b$ . Il coïncide avec le numéro du nœud origine de la barre  $b$  dans la cellule de référence et il peut être désigné par  $O_R(b)$ . Au contraire, le nœud extrémité  $E(\tilde{b})$  qu'on peut écrire sous la forme  $(m, \mu^1, \mu^2, \mu^3)$  n'appartient pas nécessairement à la même cellule que  $\tilde{b}$ . Dans tous les cas, il appartient à une cellule qui peut être numérotée par  $(v^1 + \delta^1, v^2 + \delta^2, v^3 + \delta^3)$ , où  $(\delta^1, \delta^2, \delta^3) \in \mathbb{Z}^3$ . A nouveau, comme le treillis est répétitif,  $m$ ,  $\delta^1$ ,  $\delta^2$  et  $\delta^3$  dépendent uniquement de  $b$  et ils peuvent être désignés par  $E_R(b)$ ,  $\delta^{1b}$ ,  $\delta^{2b}$  et  $\delta^{3b}$ . Autrement dit,

$$O((b, v^1, v^2, v^3)) = (O_R(b), v^1, v^2, v^3), \quad E((b, v^1, v^2, v^3)) = (E_R(b), v^1 + \delta^{1b}, v^2 + \delta^{2b}, v^3 + \delta^{3b}).$$

Un exemple d'une telle numérotation pour l'exemple bidimensionnel de la Figure 2.2 est donné dans le Tableau 1.

Remarquons que nous pourrions décrire le treillis de la façon équivalente suivante. Considérons deux sous-ensembles finis  $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$  de  $\mathbb{N}$ , appelés respectivement l'ensemble des nœuds de référence et l'ensemble des barres de référence. Choisissons deux applications  $O_R, E_R : \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \mapsto \mathcal{N}_{\mathcal{R}}$  et une application  $\delta : \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \mapsto \mathbb{Z}^3$  telles que pour tout  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ ,  $(O_R(b), 0) \neq (E_R(b), \delta(b))$  et telles que l'application  $O_R \times (E_R, \delta)$  soit injective. Ensuite, l'ensemble des nœuds (respectivement barres) du treillis associé est défini par  $\tilde{\mathcal{N}}^\infty = \mathcal{N}_{\mathcal{R}} \times \mathbb{Z}^3 = \{\tilde{n} = (n, \mathbf{v}); n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^3\}$  (respectivement  $\tilde{\mathcal{B}}^\infty = \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \times \mathbb{Z}^3 = \{\tilde{b} = (b, \mathbf{v}); b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^3\}$ ). Tout  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^3$  est supposé définir une cellule  $\mathbf{v}$  dont l'ensemble des nœuds (respectivement barres) est donné par  $\{(n, \mathbf{v}); n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}\}$  (respectivement  $\{(b, \mathbf{v}); b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}\}$ ). Les applications globales  $O, E : \tilde{\mathcal{B}}^\infty \mapsto \tilde{\mathcal{N}}^\infty$  sont définies par

$$\forall \tilde{b} = (b, \mathbf{v}) \in \tilde{\mathcal{B}}^\infty, O((b, \mathbf{v})) = (O_R(b), \mathbf{v}), E((b, \mathbf{v})) = ((E_R(b), \mathbf{v} + \delta(b))).$$

Quand une barre appartient à une cellule numéroté par  $\mathbf{v}$ , son origine appartient à cette même cellule.

Avec les numérotations des nœuds et des barres ci-dessus, une configuration de référence d'un treillis infini est bien définie. Introduisons maintenant une façon de numéroté les interactions entre les barres. Une telle numérotation peut naturellement être écrite en termes des définitions précédentes mais afin d'avoir des rotations plus légères, nous la définissons directement. Nous supposons dans la suite que deux barres partageant un nœud commun interagissent mécaniquement. A partir de la répétitivité de la configuration de référence, chaque barre  $(b, \mathbf{v})$  de  $\tilde{\mathcal{B}}^\infty$  interagit avec un nombre fini de barres, et ce nombre ne dépend pas de  $\mathbf{v}$ . Il dépend de  $b$  uniquement. De plus, si une barre  $(b, \mathbf{v})$  interagit avec  $(b', \mathbf{v}')$ , alors pour tout  $\mu$  de  $\mathbb{Z}^3$ ,  $(b, \mu)$  interagit avec  $(b', \mu + \mathbf{v}' - \mathbf{v})$ . Par conséquent, l'ensemble global de toutes les interactions entre les barres connectées peut être défini par

$$\tilde{\mathcal{C}}^\infty = \{(c, \mathbf{v}); c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^3\}$$

où chaque  $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}} \subset \mathbb{N}$  réfère à l'interaction entre des barres qui peuvent être écrites  $(b(c), \mathbf{v})$  et  $(b'(c), \mathbf{v} + \gamma(c))$ . Dans une telle numérotation, nous prenons garde à ne pas tenir compte d'une interaction globale deux fois. Pour cela, il est convenable de considérer que toutes les interactions  $\tilde{c}$  dans le treillis apparaissent entre une première barre  $P(\tilde{c})$  et une deuxième barre  $D(\tilde{c})$ . Une interaction répétée référée par  $c$  fonctionne entre une première barre  $(P_R(c), \mathbf{v})$  et une deuxième barre  $(D_R(c), \mathbf{v} + \gamma(c))$ . En résumé, toutes les interactions  $\tilde{c} = (c, \mathbf{v})$  s'écrivent  $\tilde{c} = (P(\tilde{c}), D(\tilde{c}))$  avec

$$P(\tilde{c}) = (P_R(c), \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3), \quad D(\tilde{c}) = (D_R(c), \mathbf{v}^1 + \gamma^{1c}, \mathbf{v}^2 + \gamma^{2c}, \mathbf{v}^3 + \gamma^{3c}).$$

Un exemple d'une telle numérotation est donné dans le Tableau 2. Remarquons que notre méthode s'étend facilement à d'autres cas. Par exemple, nous pourrions supposer que quelques connections entre barres sont activées et d'autres ne le sont pas. Dans la mesure où ce modèle est répétitif, il peut être facilement inclus dans la définition de l'ensemble  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}} \subset \mathbb{N}$  et les applications  $P_R, D_R : \mathcal{C}_{\mathcal{R}} \mapsto \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$  et  $\gamma : \mathcal{C}_{\mathcal{R}} \mapsto \mathbb{Z}^3$ .

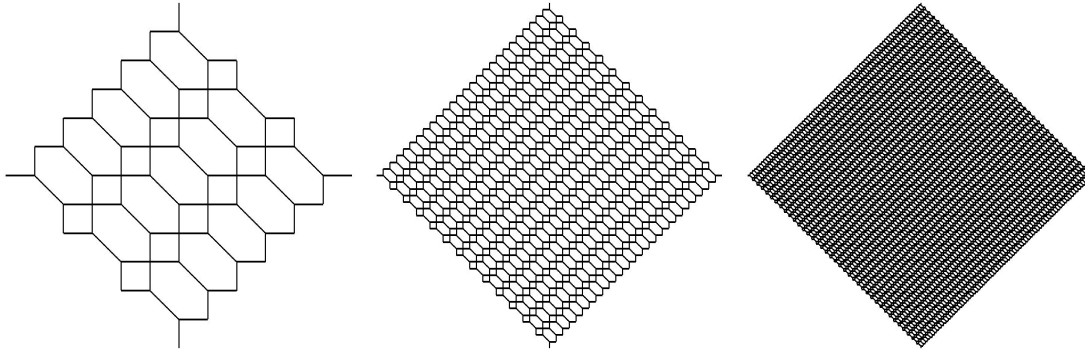


FIG. 2.3 – Un exemple de trois structures périodiques obtenues à partir d'une même cellule de référence avec un nombre différent de périodes élémentaires. De gauche à droite, structures avec 10, 50 et 150 cellules élémentaires respectivement.

Nous retournons maintenant au cas des treillis finis que nous considérons dans le reste de ce travail. Suivant la technique d'homogénéisation générale, nous introduisons une suite de configurations de référence paramétrée par  $\varepsilon$ . Soit  $\omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$ . Pour tout  $\varepsilon$ , nous définissons un sous-ensemble  $Z^\varepsilon$  de  $\mathbb{Z}^3$  par

$$Z^\varepsilon = \{v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{Z}^3; \varepsilon v \in \omega\}. \quad (2.18)$$

Ceci définit les cellules d'un réseau fini. Nous définissons une configuration de référence associée à  $\varepsilon$  par l'ensemble de ses nœuds  $\tilde{\mathcal{N}}^\varepsilon = \mathcal{N}_R \times Z^\varepsilon$  et par l'ensemble de ses barres  $\tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon = \{\tilde{b} = (b, v) \in \mathcal{B}_R \times Z^\varepsilon; E(\tilde{b}) \in \tilde{\mathcal{N}}^\varepsilon\}$ . Les interactions globales sont alors décrites par  $\tilde{\mathcal{C}}^\varepsilon = \{\tilde{c} = (c, v) \in \mathcal{C}_R \times Z^\varepsilon; D(\tilde{c}) \in \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon\}$ . Remarquons que les cellules "proches de la frontière" de  $\omega$  ne sont pas une répétition exacte de la cellule de référence. Quelques barres et quelques interactions sont ignorées. Ceci n'a pas de conséquence sur le processus d'homogénéisation qui traite les cellules intérieures et ne tient pas compte des conditions aux bords.

Dans la suite, nous utiliserons la notation  $\lambda^\varepsilon = (\varepsilon v^1, \varepsilon v^2, \varepsilon v^3)$ . Les cellules d'un  $\varepsilon$ -treillis sont, selon la terminologie de Truesdell [95], désignées par  $v \in Z^\varepsilon$  ou par  $\lambda^\varepsilon \in \omega$ . Donc,  $v$  ou  $\lambda^\varepsilon$  jouent le rôle de variables lagrangiennes discrètes. La configuration lagrangienne du milieu continu qu'il faut définir sera  $\omega$  et sa variable lagrangienne sera  $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ .

La Figure 2.4 montre un exemple d'un treillis obtenu par la répétition d'une cellule élémentaire. Ce modèle correspond à des surfaces toroïdales emboîtées. Le dessin à gauche représente une surface toroïdale recouverte par un réseau de barres où une direction privilégiée peut être distinguée, c'est celle qui correspond aux fibres. Donc une fibre est représentée par un arrangement de cellules élémentaires suivant une certaine direction. A droite, on représente trois surfaces emboîtées sur chacune d'elles on a tracé une seule fibre. Les fibres sont choisies de façon à courir comme des géodésiques périodiques et à avoir une variation progressive de leurs directions en passant d'une couche à une autre.

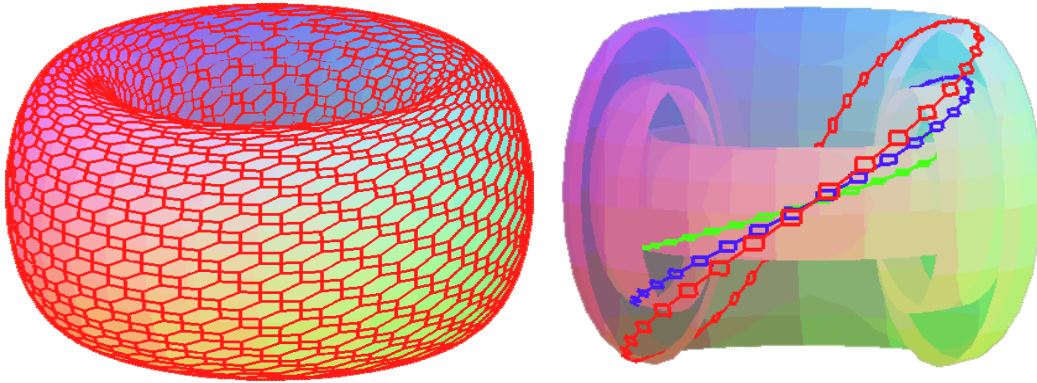


FIG. 2.4 – Modèle d'un treillis de barres représentant des surfaces toroïdales emboîtées.

## 2.2.2 Développements asymptotiques

### Développements asymptotiques des positions des nœuds

Comme il est expliqué dans l'introduction, nous utilisons la séparation d'échelles pour modéliser les treillis de barres par un milieu continu. Nous avons déjà introduit la procédure d'homogénéisation qui consiste à considérer une suite de treillis paramétrisée par  $\varepsilon$  et à identifier les inconnues, et, surtout, le modèle que leurs termes dominants satisfont par le moyen des développements asymptotiques.

Nous rappelons que  $\omega$  est le domaine de  $\mathbb{R}^3$ , et que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $Z^\varepsilon$  et  $\tilde{\mathcal{N}}^\varepsilon$  sont définis par  $Z^\varepsilon = \{v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{Z}^3; \varepsilon v \in \omega\}$  et  $\tilde{\mathcal{N}}^\varepsilon = \mathcal{N}_{\mathcal{R}} \times Z^\varepsilon$ . En les utilisant pour un  $\varepsilon$ -treillis, les équations d'équilibre et les équations de comportement que nous avons données dans (2.5), (2.6), (2.16) et (2.17) seront appelées  $(2.5_\varepsilon)$ ,  $(2.6_\varepsilon)$ ,  $(2.16_\varepsilon)$  et  $(2.17_\varepsilon)$ . Nous supposons que dans n'importe quel état déformé, les treillis restent quasipériodiques. La méthode d'homogénéisation discrète est basée sur l'Ansatz que, pour tout  $n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ , il existe des fonctions vectorielles  $\mathbf{R}^0$ ,  $\mathbf{R}^{n1}$ ,  $\mathbf{R}^{n2}$ , ... définies sur  $\omega$  telles que, pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $\tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}^\varepsilon$ , les positions actuelles des nœuds peuvent être développées en

$$\mathbf{R}^\varepsilon(\tilde{n}) = \mathbf{R}^0(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon \mathbf{R}^{n1}(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon^2 \mathbf{R}^{n2}(\lambda^\varepsilon) + \dots, \quad (2.19)$$

où  $\tilde{n} = (n, v)$  et  $\lambda^\varepsilon = \varepsilon v$ .

Remarquons que nous supposons que  $\mathbf{R}^0$  ne dépend pas de  $n$ . Ceci veut dire que le terme dominant est le même pour tous les nœuds de la cellule numérotée par  $v$ . Donc, il localise la position actuelle de la cellule, et par conséquent sera interprété comme la fonction de déformation du milieu continu équivalent. Les termes suivants  $\mathbf{R}^{n1}$ ,  $\mathbf{R}^{n2}$ , ... du développement asymptotique dépendent de  $n$ , ils donnent pour des ordres différents la position du nœud  $n$  de la cellule  $v$  relativement à  $\mathbf{R}^0(\lambda^\varepsilon)$ .

**Proposition 2.2** : En ajoutant quelques hypothèses de régularité sur  $\mathbf{R}^0$ , le développement du vecteur  $\mathbf{B}^{\varepsilon\tilde{b}} = \mathbf{R}^\varepsilon(E(\tilde{b})) - \mathbf{R}^\varepsilon(O(\tilde{b}))$  s'écrit

$$\forall \varepsilon, \forall \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon, \mathbf{B}^{\varepsilon\tilde{b}} = \varepsilon \mathbf{B}^{b0}(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon^2 \mathbf{B}^{b1}(\lambda^\varepsilon) + \dots, \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{B}^{b0} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3$  est définie par

$$\forall \lambda \in \omega, \mathbf{B}^{b0}(\lambda) = \mathbf{R}^{E_R(b)1}(\lambda) - \mathbf{R}^{O_R(b)1}(\lambda) + \frac{\partial \mathbf{R}^0(\lambda)}{\partial \lambda^j} \delta^{jb}. \quad (2.21)$$

**Démonstration.** En effet, à partir de (2.19), nous avons simultanément

$$\mathbf{R}^\varepsilon(O(\tilde{b})) = \mathbf{R}^0(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon \mathbf{R}^{O_R(b)1}(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon^2 \mathbf{R}^{O_R(b)2}(\lambda^\varepsilon) + \dots, \quad (2.22)$$

et

$$\mathbf{R}^\varepsilon(E(\tilde{b})) = \mathbf{R}^0(\lambda^\varepsilon + \varepsilon \delta^b) + \varepsilon \mathbf{R}^{E_R(b)1}(\lambda^\varepsilon + \varepsilon \delta^b) + \varepsilon^2 \mathbf{R}^{E_R(b)2}(\lambda^\varepsilon + \varepsilon \delta^b) + \dots. \quad (2.23)$$

En utilisant le développement de Taylor de  $\mathbf{R}^0$

$$\mathbf{R}^0(\lambda^\varepsilon + \varepsilon \delta^b) = \mathbf{R}^0(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{R}^0(\lambda^\varepsilon)}{\partial \lambda^j} \delta^{jb} + \dots, \quad (2.24)$$

il suit que

$$\forall \varepsilon, \forall \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon, \mathbf{B}^{\varepsilon\tilde{b}} = \varepsilon \mathbf{B}^{b0}(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon^2 \mathbf{B}^{b1}(\lambda^\varepsilon) + \dots, \quad (2.25)$$

où  $\mathbf{B}^{b0} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3$  est définie par l'équation (2.21) □

Ceci conduit immédiatement aux développements asymptotiques de  $l^{\varepsilon\tilde{b}}$  et  $\mathbf{e}^{\varepsilon\tilde{b}}$ . Plus précisément,

$$\forall \varepsilon, \forall \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon, l^{\varepsilon\tilde{b}} = \varepsilon l^{b0}(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon^2 l^{b1}(\lambda^\varepsilon) + \dots, \text{ et, } \mathbf{e}^{\varepsilon\tilde{b}} = \mathbf{e}^{b0}(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon \mathbf{e}^{b1}(\lambda^\varepsilon) + \dots, \quad (2.26)$$

où  $l^{b0} : \omega \mapsto \mathbb{R}$  et  $\mathbf{e}^{b0} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3$  sont définies par  $l^{b0} = \|\mathbf{B}^{b0}\|$ , et  $\mathbf{e}^{b0} = \frac{\mathbf{B}^{b0}}{l^{b0}}$ .

### Développements asymptotiques des tensions et des moments

Les développements de  $l^{\varepsilon\tilde{b}}$  et  $\mathbf{e}^{\varepsilon\tilde{b}}$  que nous avons obtenus dans la section précédente conduisent aux développements des efforts par l'intermédiaire des équations de comportement (2.16<sub>ε</sub>) et (2.17<sub>ε</sub>). Néanmoins, nous devons indiquer comment les lois de comportement  $\mathcal{N}^{\varepsilon b}$  et  $\mathcal{M}^{\varepsilon c}$  dépendent de  $\varepsilon$ . En particulier, il est nécessaire de préciser les ordres de grandeur des tensions et des moments vis-à-vis de  $\varepsilon$ . Le choix relatif détermine le modèle homogénéisé par contre le choix absolu ne fait que décaler les ordres de grandeur, il ne modifie pas le modèle homogénéisé. De même la dépendance en  $\varepsilon$  des forces extérieures  $\mathbf{f}^{\varepsilon e/\tilde{n}}$  doit être précisée.

Pour justifier les choix faits, nous commençons par décrire la méthode que nous utilisons dans la section 2.2.3 pour déterminer les contraintes équivalentes du milieu continu homogénéisé en fonction des tensions et moments du milieu discret.

Pour avoir une idée sur ces ordres de grandeur en  $\varepsilon$ , nous allons décomposer en deux chacune des sommations de l'équation (2.10), c'est-à-dire, nous utilisons

$$\sum_{\tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}^\varepsilon} = \sum_{v^i \in Z^\varepsilon} \sum_{n \in \mathcal{N}_R} , \quad \sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon} = \sum_{v^i \in Z^\varepsilon} \sum_{b \in \mathcal{B}_R} , \quad \sum_{\tilde{c} \in \tilde{\mathcal{C}}^\varepsilon} = \sum_{v^i \in Z^\varepsilon} \sum_{c \in \mathcal{C}_R} .$$

Par suite l'équation (2.10) devient

$$\begin{aligned} & \sum_{v^i \in Z^\varepsilon} \sum_{b \in \mathcal{B}_R} N^{\varepsilon \tilde{b}} \mathbf{e}^{\varepsilon \tilde{b}} \cdot [\mathbf{v}^\varepsilon(O(\tilde{b})) - \mathbf{v}^\varepsilon(E(\tilde{b}))] + \sum_{v^i \in Z^\varepsilon} \sum_{c \in \mathcal{C}_R} \mathbf{M}^{\varepsilon \tilde{c}} \cdot [\mathbf{w}^\varepsilon(P(\tilde{c})) - \mathbf{w}^\varepsilon(D(\tilde{c}))] \\ & + \sum_{v^i \in Z^\varepsilon} \sum_{n \in \mathcal{N}_R} \mathbf{f}^{\varepsilon e/\tilde{n}} \cdot \mathbf{v}^\varepsilon(\tilde{n}) = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Soit  $\mathbf{v} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3$  un champ de vitesses virtuelles macroscopique, et, pour tout  $\varepsilon$ , pour tout  $\tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}^\varepsilon$ , nous choisissons  $\mathbf{v}^\varepsilon(\tilde{n}) = \mathbf{v}(\lambda^\varepsilon)$ . Un développement de Taylor conduit à :

$$\mathbf{v}^\varepsilon(O(\tilde{b})) - \mathbf{v}^\varepsilon(E(\tilde{b})) = \mathbf{v}(\lambda^\varepsilon) - \mathbf{v}(\lambda^\varepsilon + \varepsilon \delta^{ib}) = -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i}(\lambda^\varepsilon) \delta^{ib} + \dots \quad (2.28)$$

Ceci montre que  $\mathbf{v}^\varepsilon(O(\tilde{b})) - \mathbf{v}^\varepsilon(E(\tilde{b}))$  est d'ordre 1 en  $\varepsilon$ .

La relation de compatibilité (2.9) et le développement de Taylor précédent (2.28) entraînent que  $\mathbf{w}^\varepsilon(P(\tilde{c})) - \mathbf{w}^\varepsilon(D(\tilde{c}))$  est d'ordre 0 en  $\varepsilon$ .

D'autre part nous avons le résultat suivant

**Lemme 2.1** : *Pour toute fonction assez régulière  $g$ , la quantité  $\varepsilon^3 \sum_{v^i \in Z^\varepsilon} g(\varepsilon v^i)$  peut être interprétée comme une somme de Riemann d'une intégrale sur  $\omega$ . Elle tend vers  $\int_\omega g(\lambda) d\lambda$ , quand  $\varepsilon$  tend vers 0. En 2D, nous avons  $\varepsilon^2 \sum_{v^i \in Z^\varepsilon} g(\varepsilon v^i) \rightarrow \int_\omega g(\lambda) d\lambda$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

Donc, pour passer dans l'équation (2.27) d'une somme discrète à une intégrale, et en tenant compte des ordres de grandeur en  $\varepsilon$  de  $\mathbf{v}^\varepsilon(O(\tilde{b})) - \mathbf{v}^\varepsilon(E(\tilde{b}))$ ,  $\mathbf{w}^\varepsilon(P(\tilde{c})) - \mathbf{w}^\varepsilon(D(\tilde{c}))$  et  $\mathbf{v}^\varepsilon(\tilde{n})$ , nous devons choisir la tension normale  $N^{\varepsilon \tilde{b}}$  d'ordre 2, le moment  $\mathbf{M}^{\varepsilon \tilde{c}}$  d'ordre 3 et l'effort extérieur  $\mathbf{f}^{\varepsilon e/\tilde{n}}$  d'ordre 3. D'une façon équivalente, nous pourrions par exemple choisir la tension normale d'ordre 0, le moment d'ordre 1 et l'effort extérieur d'ordre 1, ce qui reviendrait à multiplier l'équation (2.27) par  $\varepsilon^2$ .

Par conséquent, le choix de l'ordre de grandeur en  $\varepsilon$  de la tension normale peut être un choix arbitraire mais il faut choisir le moment et l'effort extérieur d'ordre supérieur de 1 de celui de la tension normale. Nous remarquons que si la rigidité des moments est très faible par rapport à la rigidité de la tension, alors les moments n'apparaissent pas dans le modèle continu, et, si de plus

le treillis n'est pas triangulé, le modèle continu équivalent est singulier à cause des mécanismes internes. Au contraire, si la rigidité des moments est très grande, alors le modèle continu ne prend pas en compte des tensions des barres.

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons que, pour tout  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ , la loi de comportement  $\mathcal{N}^{\varepsilon \tilde{b}}$  est d'ordre 2 en  $\varepsilon$ . Plus précisément, nous supposons qu'il existe  $\mathcal{N}^{b0} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$  telle que

$$\forall \varepsilon, \forall \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon, \mathcal{N}^{\varepsilon \tilde{b}}(l^{\varepsilon \tilde{b}}) = \varepsilon^2 \mathcal{N}^{b0}(l^{b0}(\lambda^\varepsilon)) + \varepsilon^3[\dots] + \dots. \quad (2.29)$$

Afin d'obtenir, avec ce choix de la tension normale, le modèle continu le plus riche incorporant à la fois les tensions et les moments il faut choisir un ordre de grandeur de 3 pour les moments. Autrement dit, nous supposons qu'il existe  $\mathcal{M}^{c0} : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$  telle que

$$\forall \varepsilon, \forall \tilde{c} \in \tilde{\mathcal{C}}^\varepsilon, \mathcal{M}^{\varepsilon \tilde{c}}(p^{\varepsilon \tilde{c}}) = \varepsilon^3 \mathcal{M}^{c0}(p^{c0}(\lambda^\varepsilon)) + \varepsilon^4[\dots] + \dots, \quad (2.30)$$

où  $p^{c0} = \mathbf{e}^{P_R(c)0} \cdot \mathbf{e}^{D_R(c)0}$ ,  $p^{c0} : \omega \mapsto \mathbb{R}$ .

Les indices  $b$  et  $c$  dans  $\mathcal{N}^{b0}$  et  $\mathcal{M}^{c0}$  permettent d'avoir des lois différentes pour chacune des barres ou chacun des couples de barres de la cellule de répétitivité. La variation d'une cellule à l'autre pour deux barres ou deux couples homologues est décrite par la dépendance de  $l^{b0}$  et  $p^{c0}$  vis-à-vis de  $\lambda^\varepsilon$ .

Finalement, nous prenons  $\mathbf{f}^{\varepsilon e/\tilde{n}}$  d'ordre 3 et telle que

$$\forall \varepsilon, \forall \tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}^\varepsilon, \mathbf{f}^{\varepsilon e/\tilde{n}} = \varepsilon^3 \mathbf{f}^{e/n}(\lambda^\varepsilon). \quad (2.31)$$

Examinons les conséquences des choix (2.29) et (2.30), et des développements asymptotiques obtenus dans la section 2.2.2, sur les ordres de grandeurs des tensions et des moments. De (2.26) et (2.29) nous obtenons que

$$\forall \varepsilon, \forall \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon, N^{\varepsilon \tilde{b}} \mathbf{e}^{\varepsilon \tilde{b}} = \varepsilon^2 \mathcal{N}^{b0}(l^{b0}(\lambda^\varepsilon)) \mathbf{e}^{b0}(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon^3[\dots] + \dots. \quad (2.32)$$

Utilisant (2.26) et (2.30), nous obtenons

$$\forall \varepsilon, \forall \tilde{c} \in \tilde{\mathcal{C}}^\varepsilon, \mathbf{M}^{\varepsilon \tilde{c}} = \varepsilon^3 \mathcal{M}^{c0}(p^{c0}(\lambda^\varepsilon)) \mathbf{e}^{P_R(c)0}(\lambda^\varepsilon) \wedge \mathbf{e}^{D_R(c)0}(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon^4[\dots] + \dots. \quad (2.33)$$

Rappelons que, comme c'est expliqué précédemment dans la section 2.1.3, les forces de cisaillement peuvent être éliminées et sont données par l'équation (2.11). Ceci montre qu'elles ont le même ordre de grandeur en  $\varepsilon$  que les tensions  $N^{\varepsilon \tilde{b}} \mathbf{e}^{\varepsilon \tilde{b}}$  et nous pouvons donc écrire

$$\forall \varepsilon, \forall \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon, \mathbf{T}_t^{\varepsilon \tilde{b}} = \varepsilon^2 \mathbf{T}_t^{b0}(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon^3[\dots] + \dots. \quad (2.34)$$

Finalement, soient

$$\mathbf{T}^{b0} = N^{b0} \mathbf{e}^{b0} + \mathbf{T}_t^{b0} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3, \text{ et, } \mathbf{M}^{c0} = \mathcal{M}^{c0}(p^{c0}) \mathbf{e}^{P_R(c)0} \wedge \mathbf{e}^{D_R(c)0} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3, \quad (2.35)$$

où  $N^{b0} = \mathcal{N}^{b0}(l^{b0})$ , par suite nous obtenons les développements que nous avons visés

$$\forall \varepsilon, \forall \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon, \forall \tilde{c} \in \tilde{\mathcal{C}}^\varepsilon, \mathbf{T}^{\varepsilon\tilde{b}} = \varepsilon^2 \mathbf{T}^{b0}(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon^3[\dots] + \dots, \mathbf{M}^{\varepsilon\tilde{c}} = \varepsilon^3 \mathbf{M}^{c0}(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon^4[\dots] + \dots. \quad (2.36)$$

Dans la suite de ce chapitre, afin de simplifier les notations, les exposants  $P_R(c)$  et  $D_R(c)$  seront remplacés par  $P$  et  $D$  respectivement.

### 2.2.3 Tenseur de contraintes de Cauchy et équations d'équilibre du milieu continu

Les efforts intérieurs dans les treillis sont les tensions et les moments. Dans un milieu continu, tous les efforts sont décrits par un champ de tenseurs de contraintes, qui est une application définie sur une configuration de référence (ou bien sur une configuration déformée) à valeurs dans  $(\mathbb{R}^3)^3$  (ou bien dans l'ensemble  $\mathbb{M}_3$  des matrices réelles  $3 \times 3$ ). Cette section est consacrée à définir un tenseur de contraintes à partir d'ensembles discrets de tensions de barres et de moments. En même temps, nous dérivons les équations aux dérivées partielles de l'équilibre vérifiées par les contraintes. Tout d'abord, nous obtenons les efforts intérieurs du milieu continu et ses équations d'équilibre dans la représentation curviligne lagrangienne donnée par la variable  $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ , voir chapitre 1. Ensuite, nous écrivons nos résultats dans la représentation usuelle en espace Cartésien.

#### Représentation curviligne lagrangienne

**Equation d'équilibre** L'équation d'équilibre du milieu continu est obtenue en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 dans la formulation des puissances virtuelles (2.5 $_\varepsilon$ )-(2.6 $_\varepsilon$ ) de l'équilibre des treillis. Elle apportera la définition des efforts intérieurs continus.

**Proposition 2.3** : *La formulation des puissances virtuelles de l'équation d'équilibre du milieu continu équivalent s'écrit*

$$\forall \mathbf{v} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3, \mathbf{v}|_{\partial\omega} = 0, \quad - \int_{\omega} \mathbf{S}^{i0} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i} d\lambda + \int_{\omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\lambda = 0, \quad (2.37)$$

où  $\mathbf{f} = \sum_{n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}} \mathbf{f}^{e/n}$ , et, pour tout  $i = 1, 2, 3$ , le vecteur  $\mathbf{S}^{i0} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3$  est défini par

$$\mathbf{S}^{i0} = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \mathbf{T}^{b0} \delta^{ib}. \quad (2.38)$$

**Démonstration.** Choisissons dans (2.5 $_\varepsilon$ ) des vitesses virtuelles  $\mathbf{v}^\varepsilon(\tilde{n})$  coïncidant avec les valeurs en  $\lambda^\varepsilon$  d'un champ régulier de vitesses virtuelles macroscopiques. Plus précisément, soit  $\mathbf{v} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3$  un champ de vitesses virtuelles macroscopique égal à 0 sur  $\partial\omega$ , et, pour tout  $\varepsilon$ , pour tout  $\tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}^\varepsilon$ , soit  $\mathbf{v}^\varepsilon(\tilde{n}) = \mathbf{v}(\lambda^\varepsilon)$ . Un développement de Taylor conduit à :

$$\mathbf{v}^\varepsilon(O(\tilde{b})) - \mathbf{v}^\varepsilon(E(\tilde{b})) = \mathbf{v}(\lambda^\varepsilon) - \mathbf{v}(\lambda^\varepsilon + \varepsilon \delta^{ib}) = -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i}(\lambda^\varepsilon) \delta^{ib} + \dots. \quad (2.39)$$



Insérant dans (2.5 $_{\varepsilon}$ ), il apparaît des sommes  $\sum_{\tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}^{\varepsilon}}$  (resp.  $\sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}^{\varepsilon}}$ ) sur l'ensemble de tous les nœuds (resp. barres) des treillis, dont le cardinal tend vers l'infini quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Pour régler ce problème, nous décomposons ces sommes en deux sommes successives  $\sum_{v^i \in Z^{\varepsilon}} \sum_{n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}}$  (resp.  $\sum_{v^i \in Z^{\varepsilon}} \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}}$ ) sur toutes les cellules et tous les nœuds (resp. barres) de chaque cellule.

Utilisons le lemme 2.1, et faisons tendre  $\varepsilon$  vers 0, nous obtenons la formulation des puissances virtuelles de l'équation d'équilibre du milieu continu équivalent donnée par l'équation (2.37).

□

Les trois vecteurs  $\mathbf{S}^{i0}$  doivent être interprétés comme les vecteurs de contraintes décrivant les efforts internes d'un milieu continu dans sa représentation paramétrique lagrangienne, voir Washizu [98]. L'équation (2.38) donne leur définition en termes des forces internes de la structure discrète. Pour plus de détails sur cette définition, voir Caillerie et Cambou [18].

Les vecteurs de contraintes  $\mathbf{S}^{i0}, i = 1, 2, 3$ , ont été définis par l'équation (2.38), où tout  $\mathbf{T}^{b0}, b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ , est donné par l'équation (2.35). Cette équation contient les termes  $\mathbf{T}_t^{b0}$  qui ne suivent pas une loi de comportement, et qui seront en fait des inconnues du problème du treillis sur une cellule de référence, voir 2.2.4. Ecrivons une autre expression de  $\mathbf{S}^{i0}, i = 1, 2, 3$ , qui n'utilise pas ces termes.

**Proposition 2.4** : Les vecteurs de contraintes  $\mathbf{S}^{i0}, i = 1, 2, 3$ , peuvent être exprimés de la façon suivante

$$\mathbf{S}^{i0} = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0} \mathbf{e}^{b0} \delta^{ib} + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0} \wedge \left[ \frac{\mathbf{e}^{D0}}{l^{D0}} \delta^{iD} - \frac{\mathbf{e}^{P0}}{l^{P0}} \delta^{iP} \right]. \quad (2.40)$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{v}^i : \omega \mapsto \mathbb{R}^3, i = 1, 2, 3$ , trois champs de vecteurs macroscopiques et choisissons maintenant dans (2.6 $_{\varepsilon}$ ) les vitesses de rotation virtuelles  $\mathbf{w}^{\varepsilon}(\tilde{b})$  telles que, pour tout  $\varepsilon$ , pour tout  $\tilde{b} = (b, v^1, v^2, v^3)$ ,

$$\mathbf{w}^{\varepsilon}(\tilde{b}) = \varepsilon \frac{1}{l^{\tilde{b}}} \mathbf{e}^{\tilde{b}} \wedge \mathbf{v}^i(\varepsilon \mathbf{v}) \delta^{ib}. \quad (2.41)$$

Nous savons à partir de (2.26) que  $\mathbf{w}^{\varepsilon}(\tilde{b})$  se développe en

$$\mathbf{w}^{\varepsilon}(\tilde{b}) = \left( \frac{1}{l^{b0}} \mathbf{e}^{b0} \wedge \mathbf{v}^i \delta^{ib} \right) (\lambda^{\varepsilon}) + \dots. \quad (2.42)$$

Donc, les deux termes de (2.6 $_{\varepsilon}$ ) se développent en

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\varepsilon \tilde{c}} \cdot \left[ \mathbf{w}^{\varepsilon}(P(\tilde{c})) - \mathbf{w}^{\varepsilon}(D(\tilde{c})) \right] &= \varepsilon^3 \mathbf{M}^{c0} \cdot \left[ \left( \frac{\mathbf{e}^{P0}}{l^{P0}} \delta^{iP} - \frac{\mathbf{e}^{D0}}{l^{D0}} \delta^{iD} \right) \wedge \mathbf{v}^i \right] + \dots \\ &= \varepsilon^3 \left[ \mathbf{M}^{c0} \wedge \left( \frac{\mathbf{e}^{P0}}{l^{P0}} \delta^{iP} - \frac{\mathbf{e}^{D0}}{l^{D0}} \delta^{iD} \right) \right] \cdot \mathbf{v}^i + \dots, \end{aligned} \quad (2.43)$$

et

$$\begin{aligned}
l^{\tilde{b}}(\mathbf{e}^{\tilde{b}} \wedge \mathbf{T}^{\tilde{b}}) \cdot \mathbf{w}^\varepsilon(\tilde{b}) &= \varepsilon^3 (\mathbf{e}^{b0} \wedge \mathbf{T}^{b0}) \cdot (\mathbf{e}^{b0} \wedge \mathbf{v}^i \delta^{ib}) + \dots \\
&= \varepsilon^3 \left[ (\mathbf{e}^{b0} \wedge \mathbf{T}^{b0}) \wedge \mathbf{e}^{b0} \right] \cdot \mathbf{v}^i \delta^{ib} + \dots \\
&= \varepsilon^3 \left[ \mathbf{T}^{b0} - (\mathbf{T}^{b0} \cdot \mathbf{e}^{b0}) \mathbf{e}^{b0} \right] \cdot \mathbf{v}^i \delta^{ib} + \dots \\
&= \varepsilon^3 \mathbf{T}_t^{b0} \cdot \mathbf{v}^i \delta^{ib} + \dots
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Faisons la somme sur  $\tilde{\mathcal{C}}^\varepsilon$  et  $\tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon$ , et utilisons la convergence des sommes de Riemann vers des intégrales de volume, nous obtenons la relation prévue entre les termes dominants des moments et des forces de cisaillement. Plus précisément,  $\forall \mathbf{v}^i : \omega \mapsto \mathbb{R}^3, i = 1, 2, 3$ ,

$$\int_\omega \left[ \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0} \wedge \left( \frac{\mathbf{e}^{P0}}{l^{P0}} \delta^{iP} - \frac{\mathbf{e}^{D0}}{l^{D0}} \delta^{iD} \right) + \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \mathbf{T}_t^{b0} \delta^{ib} \right] \cdot \mathbf{v}^i d\lambda = 0, \tag{2.45}$$

ou bien de façon équivalente,

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \mathbf{T}_t^{b0} \delta^{ib} = - \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0} \wedge \left[ \frac{\mathbf{e}^{P0}}{l^{P0}} \delta^{iP} - \frac{\mathbf{e}^{D0}}{l^{D0}} \delta^{iD} \right]. \tag{2.46}$$

La définition (2.38) de  $\mathbf{S}^{i0}$ , qui peut être écrite comme  $\mathbf{S}^{i0} = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} (N^{b0} \mathbf{e}^{b0} + \mathbf{T}_t^{b0}) \delta^{ib}$ , devient

$$\mathbf{S}^{i0} = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0} \mathbf{e}^{b0} \delta^{ib} + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0} \wedge \left[ \frac{\mathbf{e}^{D0}}{l^{D0}} \delta^{iD} - \frac{\mathbf{e}^{P0}}{l^{P0}} \delta^{iP} \right]. \tag{2.47}$$

□

## Représentation en espace et tenseur de contraintes de Cauchy

Dans la procédure d'homogénéisation, les variables discrètes  $\lambda^\varepsilon = \varepsilon \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} \in Z^\varepsilon$ , deviennent des variables continues  $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$  qui désignent les points matériels du milieu continu équivalent. D'après (2.19), nous pouvons voir que la position dans l'espace physique d'un point matériel désigné par  $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$  est  $\mathbf{R}^0(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ , et que la configuration déformée du milieu continu est  $\Omega = \mathbf{R}^0(\omega)$ . Les coordonnées Cartésiennes dans l'espace usuel de la configuration déformée  $\Omega$  seront notées par  $x$ , ( $x = \mathbf{R}^0(\lambda)$ ). La description de base des efforts internes d'un milieu continu est donnée par le tenseur de contraintes de Cauchy qui est défini en chaque point de la configuration en espace déformée et, en chaque point, est un opérateur linéaire de l'espace physique. Expliquons comment le tenseur de contraintes de Cauchy  $\sigma : \Omega \mapsto L(\mathbb{R}^3)$  du milieu continu équivalent peut être exprimé en termes des vecteurs  $\mathbf{S}^{i0} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3, i = 1, 2, 3$ . Soit  $\tilde{g}(\lambda) = \left| \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^1}, \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^2}, \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^3} \right|(\lambda)$  le produit mixte des dérivées partielles de  $\mathbf{R}^0$ , et,  $g(x) = \tilde{g}(\lambda) = \tilde{g} \circ (\mathbf{R}^0)^{-1}(x)$ .

**Proposition 2.5** : La formulation des puissances virtuelles de l'équilibre du milieu continu écrite sur la configuration déformée dans l'espace usuel est donnée par

$$\forall \mathbf{v} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3, \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \frac{1}{g} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx = 0, \quad (2.48)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur de contraintes de Cauchy défini par

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{g} \mathbf{S}^{i0} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^i}. \quad (2.49)$$

**Démonstration.** Il suffit d'utiliser  $\mathbf{R}^0$  comme un changement de variables entre la configuration paramétrique lagrangienne  $\omega$  et la configuration déformée  $\Omega = \mathbf{R}^0(\omega)$ . A tout  $\mathbf{v} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3$ , nous pouvons associer  $\mathbf{v} \circ (\mathbf{R}^0)^{-1} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ . Gardons la même notation pour les deux champs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v} \circ (\mathbf{R}^0)^{-1}$ , et désignons par  $\nabla_x \mathbf{v}$  le tenseur gradient de  $\mathbf{v}$  par rapport à  $x$ . Nous avons évidemment

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i} = \nabla_x \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^i}. \quad (2.50)$$

La formulation des puissances virtuelles (2.37) devient :

$$\forall \mathbf{v} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3, \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad - \int_{\Omega} (\mathbf{S}^{i0} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^i}) : \nabla_x \mathbf{v} \frac{1}{g} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \frac{1}{g} \, dx = 0, \quad (2.51)$$

où : désigne le produit scalaire de deux tenseurs. Donc, le tenseur de contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  est donné par (2.49) et vérifie la formulation des puissances virtuelles de l'équilibre du milieu continu (2.48).  $\square$

### Symétrie du tenseur de contraintes de Cauchy

En mécanique des milieux continus, l'existence d'un tenseur de contraintes de Cauchy et le fait qu'il est symétrique dérivent des principes fondamentaux. Ici, nous avons obtenu un tenseur de contraintes de Cauchy à partir de tensions et moments de la structure discrète. Vérifions qu'il est symétrique.

**Proposition 2.6** : L'application  $\sum_{b \in \mathcal{B}_R} \mathbf{B}^{b0} \wedge \mathbf{T}^{b0} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3$  est identiquement nulle. **Démonstration.** Nous traitons (2.6<sub>ε</sub>) de la même façon que (2.5<sub>ε</sub>) lors de l'obtention de l'équation d'équilibre du milieu continu. Soit  $\mathbf{w} : \omega \mapsto \mathbb{R}^3$  un champ macroscopique de vitesses de rotation et, pour tout  $\varepsilon$ , pour tout  $\tilde{b} = (b, \mathbf{v}) \in \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon$ , soit  $\mathbf{w}^\varepsilon(\tilde{b}) = \mathbf{w}(\lambda^\varepsilon)$ . Donc, la différence  $\mathbf{w}^\varepsilon(P(\tilde{c})) - \mathbf{w}^\varepsilon(D(\tilde{c}))$  est d'ordre 1 et, de (2.36),  $\mathbf{M}^{\varepsilon\tilde{c}} \cdot [\mathbf{w}^\varepsilon(P(\tilde{c})) - \mathbf{w}^\varepsilon(D(\tilde{c}))]$  est d'ordre 4. D'où, le développement de (2.6<sub>ε</sub>) donne, dans l'ensemble des applications de  $\omega$  dans  $\mathbb{R}^3$ , l'identité

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_R} \mathbf{B}^{b0} \wedge \mathbf{T}^{b0} = 0. \quad (2.52)$$

$\square$

Désignons par  $L^A$  la partie antisymétrique d'un endomorphisme  $L$ .

**Lemme 2.2** : Pour tout  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , nous avons

$$[\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0] \Leftrightarrow [(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^A = 0].$$

*Démonstration.* Le tenseur  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  est défini par :  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}$  pour tout  $\mathbf{c}$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Or,

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = 2(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^A \mathbf{c}.$$

D'où le résultat  $[\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0] \Leftrightarrow [(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^A = 0]$ . □

**Théorème 2.1** : Le tenseur de contraintes de Cauchy  $\sigma$  est égal à  $\frac{1}{g} \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \mathbf{T}^{b0} \otimes \mathbf{B}^{b0}$  et est symétrique.

*Démonstration.* Soit  $A(\cdot) : \omega \mapsto \mathbb{M}_3$  un champ régulier de tenseurs de second ordre et choisissons  $\mathbf{v}(\tilde{n}) = A(\lambda^\varepsilon) \mathbf{R}^{n1}(\lambda^\varepsilon)$  dans  $(2.5_\varepsilon)$ . Le développement de  $(2.5_\varepsilon)$  conduit à

$$\int_{\omega} \left[ \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \mathbf{T}^{b0} \otimes (\mathbf{R}^{E_R(b)1} - \mathbf{R}^{O_R(b)1}) \right] : A d\lambda = 0, \quad (2.53)$$

ou bien, de façon équivalente,

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \mathbf{T}^{b0} \otimes (\mathbf{R}^{E_R(b)1} - \mathbf{R}^{O_R(b)1}) = 0. \quad (2.54)$$

Les définitions (2.49) et (2.38) de  $\sigma$  et  $\mathbf{S}^{i0}$ , et l'équation (2.21), donnent

$$\sigma = \frac{1}{g} \mathbf{S}^{i0} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^i} = \frac{1}{g} \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \mathbf{T}^{b0} \otimes (\mathbf{B}^{b0} - \mathbf{R}^{E_R(b)1} + \mathbf{R}^{O_R(b)1}), \quad (2.55)$$

qui par (2.54) conduit à  $\sigma = \frac{1}{g} \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \mathbf{T}^{b0} \otimes \mathbf{B}^{b0}$ .

D'après le lemme précédent et la proposition précédente, l'équation (2.52) est équivalente à

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{B}^{b0} \otimes \mathbf{T}^{b0})^A = 0. \quad (2.56)$$

D'où la symétrie de  $\sigma$ . □

## 2.2.4 Equations d'autoéquilibre - Loi de comportement macroscopique

Pour compléter le modèle continu équivalent du treillis, il reste à déterminer la relation contraintes-déformations du milieu continu. Dans le cadre de l'élasticité que nous considérons, ceci veut dire que nous cherchons une loi de comportement

$$(\lambda, \mathbf{G} = (\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)) \in \omega \times (\mathbb{R}^3)^3 \mapsto \hat{\mathbf{S}}^0(\lambda, \mathbf{G}) \in (\mathbb{R}^3)^3$$

telle que, pour toute déformation  $\mathbf{R}^0 : \omega \mapsto \mathbb{R}^3$ , les vecteurs de contraintes  $\mathbf{S}^{i0}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont donnés, en tout  $\lambda \in \omega$ , par

$$\mathbf{S}^0(\lambda) = (\mathbf{S}^{10}(\lambda), \mathbf{S}^{20}(\lambda), \mathbf{S}^{30}(\lambda)) = \hat{\mathbf{S}}^0(\lambda, \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^1}(\lambda), \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^2}(\lambda), \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^3}(\lambda)).$$

Nous avons déjà donné dans (2.38) et (2.47) les expressions de  $\mathbf{S}^{i0}$ . Nous rappelons que les termes du membre de droite de ces équations contiennent à la fois  $\frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda}$  et les différences  $\mathbf{R}^{Er(b)1} - \mathbf{R}^{Or(b)1}$ ,  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ , voir (2.21), (2.35). Donc nous devons aller un pas plus loin et être capables d'exprimer  $\mathbf{R}^{Er(b)1} - \mathbf{R}^{Or(b)1}$ ,  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ , en fonction de  $\frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^i}$ .

Comme c'est usuel en homogénéisation des milieux périodiques (voir Sanchez-Palencia [78], par exemple), ceci est effectué par la résolution d'un problème mécanique "à l'échelle d'une cellule élémentaire". Ce problème est constitué des relations de comportement des barres et couples de barres que nous avons obtenues dans la section 2.2.2, et des équations d'autoéquilibre d'une cellule de référence. Nous commençons par établir ces équations d'équilibre.

### Equations d'autoéquilibre

Par un choix convenable de fonctions test, les équations d'autoéquilibre d'une cellule de référence dérivent des équations d'équilibre du treillis. Plus précisément, pour tout  $n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ , soit  $\mathbf{v}^n$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et pour tout  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ , soit  $\mathbf{w}^b$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans (2.5 $_{\varepsilon}$ )-(2.6 $_{\varepsilon}$ ), prenons  $\mathbf{v}^{\varepsilon}(\tilde{n}) = \varepsilon \theta(\lambda^{\varepsilon}) \mathbf{v}^n$  et  $\mathbf{w}^{\varepsilon}(\tilde{b}) = \varepsilon \eta(\lambda^{\varepsilon}) \mathbf{w}^b$  où  $\theta$  et  $\eta$  sont des champs scalaires réguliers définis sur  $\omega$ . Donc,

$$\forall \varepsilon, \forall \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}^{\varepsilon}, \mathbf{v}^{\varepsilon}(O(\tilde{b})) - \mathbf{v}^{\varepsilon}(E(\tilde{b})) = \varepsilon [\theta(\lambda^{\varepsilon}) \mathbf{v}^{Or(b)} - \theta(\lambda^{\varepsilon} + \varepsilon \delta^b) \mathbf{v}^{Er(b)}], \quad (2.57)$$

et, par un développement de Taylor,

$$\forall \varepsilon, \forall \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}^{\varepsilon}, \mathbf{v}^{\varepsilon}(O(\tilde{b})) - \mathbf{v}^{\varepsilon}(E(\tilde{b})) = \varepsilon \theta(\lambda^{\varepsilon}) [\mathbf{v}^{Or(b)} - \mathbf{v}^{Er(b)}] + \dots \quad (2.58)$$

De la même façon, nous avons :

$$\forall \varepsilon, \forall \tilde{c} \in \tilde{\mathcal{C}}^{\varepsilon}, \mathbf{w}^{\varepsilon}(P(\tilde{c})) - \mathbf{w}^{\varepsilon}(D(\tilde{c})) = \varepsilon \eta(\lambda^{\varepsilon}) [\mathbf{w}^P - \mathbf{w}^D] + \dots \quad (2.59)$$

Développons (2.5 $_{\varepsilon}$ )-(2.6 $_{\varepsilon}$ ), nous obtenons par identification des termes dominants les deux équations suivantes :

$$\forall \theta : \omega \mapsto \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^3, \int_{\omega} \theta(\lambda) \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \mathbf{T}^{b0}(\lambda) \cdot [\mathbf{v}^{Or(b)} - \mathbf{v}^{Er(b)}] d\lambda = 0, \quad (2.60)$$

$$\forall \eta : \omega \mapsto \mathbb{R}, \forall \mathbf{w}^b \in \mathbb{R}^3,$$

$$\int_{\omega} \eta(\lambda) \left\{ \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0}(\lambda) \cdot [\mathbf{w}^P - \mathbf{w}^D] + \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} [\mathbf{B}^{b0}(\lambda) \wedge \mathbf{T}^{b0}(\lambda)] \cdot \mathbf{w}^b \right\} d\lambda = 0. \quad (2.61)$$

Elles sont trivialement équivalentes aux identités suivantes dans l'espace des fonctions scalaires définies sur  $\omega$  :

$$\forall \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^3, n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}, \quad \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \mathbf{T}^{b0} \cdot [\mathbf{v}^{O_R(b)} - \mathbf{v}^{E_R(b)}] = 0, \quad (2.62)$$

et,

$$\forall \mathbf{w}^b \in \mathbb{R}^3, b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}, \quad \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0} \cdot [\mathbf{w}^P - \mathbf{w}^D] + \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{B}^{b0} \wedge \mathbf{T}^{b0}) \cdot \mathbf{w}^b = 0. \quad (2.63)$$

Les équations (2.62) et (2.63) sont similaires aux équations d'équilibre du treillis (2.5)-(2.6) avec lesquelles nous avons commencé. Au lieu d'avoir des sommes sur l'ensemble de toutes les barres  $\tilde{\mathcal{B}}^{\varepsilon}$  ou bien sur l'ensemble  $\tilde{\mathcal{C}}^{\varepsilon}$  tout entier, elles utilisent seulement les ensembles  $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$  qui sont associés à une cellule de référence. En plus, elles ne contiennent aucun chargement extérieur, d'où le terme d'équations d'autoéquilibre.

### Élimination des forces de cisaillement

Les vecteurs de cisaillement  $\mathbf{T}_t^{b0}$  peuvent être éliminés du système (2.62)-(2.63) et nous obtenons un problème dont les inconnues sont les vecteurs  $\mathbf{R}^n$ ,  $n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ .

Afin de simplifier les notations, nous désignons dans la suite  $\mathbf{v}^{E_R(b)} - \mathbf{v}^{O_R(b)}$  par  $\Delta \mathbf{v}^b$ .

**Proposition 2.7** : Le système (2.62)-(2.63) peut être réduit à  $\forall \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^3, n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ ,

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0} \mathbf{e}^{b0} \cdot \Delta \mathbf{v}^b + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{1}{l^D} \mathbf{e}^D) \cdot \Delta \mathbf{v}^D - \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{1}{l^P} \mathbf{e}^P) \cdot \Delta \mathbf{v}^P = 0. \quad (2.64)$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^3, n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ , un champ de translations virtuelles, et choisissons  $\mathbf{w}^b, b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ , de la façon suivante :

$$\mathbf{w}^b = \frac{1}{l^b} \left( \mathbf{e}^{b0} \wedge (\mathbf{v}^{E_R(b)} - \mathbf{v}^{O_R(b)}) \right). \quad (2.65)$$

Pour ce choix de  $\mathbf{w}^b$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{b0} \wedge \mathbf{w}^b &= \mathbf{B}^{b0} \wedge \frac{1}{l^b} (\mathbf{e}^{b0} \wedge \Delta \mathbf{v}^b) = \mathbf{e}^{b0} \wedge (\mathbf{e}^{b0} \wedge \Delta \mathbf{v}^b) \\ &= (\mathbf{e}^{b0} \cdot \Delta \mathbf{v}^b) \mathbf{e}^{b0} - (\mathbf{e}^{b0} \cdot \mathbf{e}^{b0}) \Delta \mathbf{v}^b = [\mathbf{e}^{b0} \otimes \mathbf{e}^{b0} - \mathbf{Id}] \Delta \mathbf{v}^b. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Il suit

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_t^{b0} \wedge \mathbf{B}^{b0}) \cdot \mathbf{w}^b &= \mathbf{T}_t^{b0} \cdot (\mathbf{B}^{b0} \wedge \mathbf{w}^b) = \mathbf{T}_t^{b0} \cdot [(\mathbf{e}^{b0} \cdot \Delta \mathbf{v}^b) \mathbf{e}^{b0} - (\mathbf{e}^{b0} \cdot \mathbf{e}^{b0}) \Delta \mathbf{v}^b] \\ &= (\mathbf{e}^{b0} \cdot \Delta \mathbf{v}^b) \cdot (\mathbf{T}_t^{b0} \cdot \mathbf{e}^{b0}) - \mathbf{T}_t^{b0} \cdot \Delta \mathbf{v}^b = -\mathbf{T}_t^{b0} \cdot \Delta \mathbf{v}^b. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Additionnons les équations (2.62) et (2.63)

$$\forall \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^3, n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}, \quad \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0} \mathbf{e}^{b0} \cdot [\mathbf{v}^{E_R(b)} - \mathbf{v}^{O_R(b)}] + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0} \cdot [\mathbf{w}^D - \mathbf{w}^P] = 0. \quad (2.68)$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{c0} \cdot [\mathbf{w}^D - \mathbf{w}^P] &= \mathbf{M}^{c0} \cdot \left[ \frac{1}{l^D} (\mathbf{e}^D \wedge \Delta \mathbf{v}^D) - \frac{1}{l^P} (\mathbf{e}^P \wedge \Delta \mathbf{v}^P) \right] \\ &= (\mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{\mathbf{e}^D}{l^D}) \cdot \Delta \mathbf{v}^D - (\mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{\mathbf{e}^P}{l^P}) \cdot \Delta \mathbf{v}^P. \end{aligned} \quad (2.69)$$

D'où l'équation d'autoéquilibre finale (2.64).  $\square$

### Le problème d'une cellule de référence. Loi de comportement

Le problème complet d'une cellule de référence est constitué de l'équation d'autoéquilibre (2.64) et des équations de comportement dans l'espace des fonctions scalaires ou vectorielles définies sur  $\omega$

$$N^{b0}(\lambda) = \mathcal{N}^{b0}(l^{b0}(\lambda)), \quad \mathbf{M}^{c0}(\lambda) = \mathcal{M}^{c0}(p^{c0}(\lambda)) \mathbf{e}^P(\lambda) \wedge \mathbf{e}^D(\lambda), \quad (2.70)$$

où pour tout  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ ,  $\mathbf{B}^{b0} = \mathbf{R}^{E_R(b)1} - \mathbf{R}^{O_R(b)1} + \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^j} \delta^{jb}$ ,  $l^{b0} = \|\mathbf{B}^{b0}\|$  et  $\mathbf{e}^{b0} = \frac{\mathbf{B}^{b0}}{l^{b0}}$ , et pour tout  $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ ,  $p^{c0} = \mathbf{e}^P \cdot \mathbf{e}^D$ . Dans l'équation d'autoéquilibre (2.64), la variable d'espace agit comme un paramètre. En effet, pour tout  $\lambda$  dans  $\omega$ , les quantités  $N^{b0}(\lambda)$ ,  $\mathbf{M}^{c0}(\lambda)$  et  $\mathbf{B}^{b0}(\lambda)$  vérifient l'équation (2.64) considérée en  $\lambda$ . Une remarque similaire s'applique quand l'équation (2.70) est ajoutée. Pour un  $\lambda$  donné et pour une valeur de  $\frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^i}(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , l'ensemble des équations détermine, à condition d'être bien posé, les quantités que nous pouvons appeler  $\mathbf{B}^{b0}(\lambda)$ ,  $N^{b0}(\lambda)$ ,  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ ,  $\mathbf{M}^{c0}(\lambda)$ ,  $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ , qui à leur tour déterminent  $(\mathbf{S}^{10}(\lambda), \mathbf{S}^{20}(\lambda), \mathbf{S}^{30}(\lambda))$ . Comme  $\frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^i}(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , peut être n'importe quel  $(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)$  dans  $(\mathbb{R}^3)^3$ , ceci construit en fait une application de  $\omega \times (\mathbb{R}^3)^3$  dans  $(\mathbb{R}^3)^3$ . Cette application n'est autre que la loi de comportement.

Résumons la construction de la loi de comportement. Soit  $\lambda$  dans  $\omega$ , et soit  $\mathbf{G}$  le triplet  $(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)$  dans  $(\mathbb{R}^3)^3$ . Trouver  $\mathbf{R}^{n1} \in \mathbb{R}^3$ ,  $n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ , tels que, posant pour tout  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ ,  $\mathbf{B}^b = \mathbf{R}^{E_R(b)1} - \mathbf{R}^{O_R(b)1} + \mathbf{G}^j \delta^{jb}$ ,  $l^b = \|\mathbf{B}^b\|$  et  $\mathbf{e}^b = \frac{\mathbf{B}^b}{l^b}$ , et définissant  $N^{b0}$  et  $\mathbf{M}^{c0}$  par

$$N^{b0} = \mathcal{N}^{b0}(l^b), \quad \mathbf{M}^{c0} = \mathcal{M}^{c0}(\mathbf{e}^P \cdot \mathbf{e}^D) \mathbf{e}^P \wedge \mathbf{e}^D, \quad (2.71)$$

alors l'équation suivante soit satisfaite

$$\forall \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^3, \quad \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0} \mathbf{e}^b \cdot \Delta \mathbf{v}^b + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{1}{l^D} \mathbf{e}^D) \cdot \Delta \mathbf{v}^D - \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{1}{l^P} \mathbf{e}^P) \cdot \Delta \mathbf{v}^P = 0. \quad (2.72)$$

Ensuite, définir  $\mathbf{S}^{i0}$  par

$$\forall i = 1, 2, 3, \mathbf{S}^{i0} = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0} \mathbf{e}^b \delta^{ib} + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0} \wedge \left[ \frac{\mathbf{e}^D}{l^D} \delta^{iD} - \frac{\mathbf{e}^P}{l^P} \delta^{iP} \right]. \quad (2.73)$$

Nous avons un problème dont les inconnues sont les vecteurs  $\mathbf{R}^{n1}$ ,  $n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ . Il est clair qu'une solution ne peut pas être unique parce que ces vecteurs apparaissent uniquement à travers leurs différences  $\mathbf{R}^{E_{\mathcal{R}}(b)1} - \mathbf{R}^{O_{\mathcal{R}}(b)1}$ . Ils peuvent, au mieux, être uniquement déterminés à un vecteur additif près. Autres singularités et un manque d'unicité ou d'existence peuvent apparaître, liés, par exemple, au flambement de la cellule de référence.

L'ensemble des trois dernières équations associe à tout  $(\lambda, \mathbf{G} = (\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)) \in \omega \times (\mathbb{R}^3)^3$  trois vecteurs  $\hat{\mathbf{S}}^{i0}(\lambda, \mathbf{G})$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Il définit la relation de comportement du milieu continu, qui est comme prévu élastique. La variable  $\lambda$  entre en jeu à travers la longueur au repos et peut rendre la loi de comportement non homogène.

Dans la section 2.3.2 il est démontré que, grâce à l'objectivité des équations de comportement (2.16), (2.17) des barres et des couples de barres, la loi de comportement du milieu continu équivalent vérifie aussi l'indifférence matérielle. Cette propriété peut aussi être une conséquence de l'indifférence matérielle de l'énergie potentielle élastique déterminée dans la section 2.3.1.

## 2.3 Compléments sur la loi de comportement

### 2.3.1 Hyperélasticité

Nous démontrons dans cette section que le milieu continu équivalent est hyperélastique, c'est-à-dire, que la loi de comportement dérive d'un potentiel, voir, par exemple, Ciarlet [22], Gurtin [38].

Les équations de comportement des barres et des couples de barres ont été définies dans (2.29) et dans (2.30) comme des applications  $l \mapsto \mathcal{N}^{b0}(l)$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  et  $p \mapsto \mathcal{M}^{c0}(p)$  de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Quand les développements asymptotiques ont été écrits, nous avons déjà supposé que ces applications sont continues ce qui est une hypothèse mécaniquement raisonnable. Elles sont donc évidemment les dérivées de certaines fonctions régulières. Définissons les potentiels  $W^b(\cdot)$  et  $W^c(\cdot)$  par

$$\forall l \in \mathbb{R}^+, \mathcal{N}^{b0}(l) = \frac{dW^b}{dl}(l), \quad \forall p \in [-1, 1], -\mathcal{M}^{c0}(p) = \frac{dW^c}{dp}(p),$$

où nous omettons la dépendance en  $l_0^b$  et en  $p_0^c$ . Comme nous l'avons mentionné dans la section 2.2.4, l'ensemble des équations (2.71)-(2.72) qui définit la loi de comportement associe (à condition qu'il soit bien posé) à tout  $\mathbf{G} = (\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3) \in ((\mathbb{R}^3)^3)$  un ensemble de vecteurs



$\mathbf{B}^b(\mathbf{G}) = \mathbf{R}^{Er(b)1} - \mathbf{R}^{Or(b)1} + \mathbf{G}^j \delta^{jb}$ , où  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ . Avec les mêmes notations, les équations (2.72)-(2.71) définissent pour tout  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$  et pour tout  $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$  les applications

$$\mathbf{G} \mapsto l^b(\mathbf{G}) \text{ et } \mathbf{G} \mapsto p^c(\mathbf{G}) = \mathbf{e}^P(\mathbf{G}) \cdot \mathbf{e}^D(\mathbf{G}). \quad (2.74)$$

Il est bien connu que dans un système mécanique les énergies sont additives. Ceci nous conduit à prévoir qu'une énergie pour le milieu continu est donnée par

$$W(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3) = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} W^b(l^b(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)) + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} W^c(p^c(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)), \quad (2.75)$$

ce que la proposition suivante démontre.

**Proposition 2.8** : *L'application  $W(\cdot) = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} W^b(l^b(\cdot)) + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} W^c(p^c(\cdot))$  définie sur  $(\mathbb{R}^3)^3$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$  est une énergie du milieu équivalent.*

**Démonstration.** Nous devons démontrer que, pour tout  $\mathbf{G}$  dans  $(\mathbb{R}^3)^3$ , et pour tout  $i = 1, 2, 3$ ,  $\hat{\mathbf{S}}^{i0}(\mathbf{G}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{G}^i}(\mathbf{G})$  où  $\hat{\mathbf{S}}^{i0}$  est défini par les équations (2.72)-(2.71)-(2.73). Dans (2.75), nous devons dériver  $l^b$  et  $p^c$  par rapport à  $\mathbf{G}^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Nous utilisons des notations incrémentales. Pour tout  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ , soit  $\mathbf{U}^b = \mathbf{R}^{Er(b)1} - \mathbf{R}^{Or(b)1}$  et définissons  $d\mathbf{U}^b$ , pour tout  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ , par

$$d\mathbf{U}^b = \mathbf{U}^b(\mathbf{G}^1 + d\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2 + d\mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3 + d\mathbf{G}^3) - \mathbf{U}^b(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3).$$

Des définitions analogues s'appliquent à  $d\mathbf{B}^b$ ,  $dl^b$ ,  $d\mathbf{e}^b$ ,  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ , et à  $dp^c$ ,  $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ . A partir des définitions de toutes les applications, nous obtenons tout d'abord

$$d\mathbf{B}^b = d\mathbf{U}^b + d\mathbf{G}^i \delta^{ib} + \dots, \quad dl^b = \mathbf{e}^b \cdot d\mathbf{B}^b + \dots, \quad (2.76)$$

ce qui fournit

$$dl^b = \mathbf{e}^b \cdot d\mathbf{U}^b + \mathbf{e}^b \cdot d\mathbf{G}^i \delta^{ib} + \dots. \quad (2.77)$$

Puis, nous obtenons

$$d\mathbf{e}^b = \frac{1}{l^b} [d\mathbf{B}^b - (d\mathbf{B}^b \cdot \mathbf{e}^b) \mathbf{e}^b] + \dots, \quad dp^c = \mathbf{e}^P \cdot d\mathbf{e}^D + d\mathbf{e}^P \cdot \mathbf{e}^D + \dots, \quad (2.78)$$

à partir duquel nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} dp^c &= [\mathbf{e}^P - (\mathbf{e}^P \cdot \mathbf{e}^D) \mathbf{e}^D] \cdot \frac{d\mathbf{B}^D}{l^D} + [\mathbf{e}^D - (\mathbf{e}^D \cdot \mathbf{e}^P) \mathbf{e}^P] \cdot \frac{d\mathbf{B}^P}{l^P} + \dots \\ &= (\mathbf{e}^P \wedge \mathbf{e}^D) \cdot \left[ \mathbf{e}^P \wedge \frac{d\mathbf{B}^P}{l^P} - \mathbf{e}^D \wedge \frac{d\mathbf{B}^D}{l^D} \right] + \dots \\ &= (\mathbf{e}^P \wedge \mathbf{e}^D) \cdot \left[ \left( \frac{\mathbf{e}^P}{l^P} \delta^{iP} - \frac{\mathbf{e}^D}{l^D} \delta^{iD} \right) \wedge d\mathbf{G}^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{e}^P}{l^P} \wedge d\mathbf{U}^P - \frac{\mathbf{e}^D}{l^D} \wedge d\mathbf{U}^D \right] + \dots, \end{aligned} \quad (2.79)$$

où nous avons utilisé (2.76) dans la dernière identité. Dérivons maintenant  $W$ . En utilisant (2.77) et (2.79), nous obtenons

$$dW^b = \mathcal{N}^{b0}(l^b) (e^b \cdot d\mathbf{G}^i \delta^{ib} + e^b \cdot d\mathbf{U}^b) + \dots, \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} dW^c = & -\mathcal{M}^{c0}(p^c) (\mathbf{e}^P \wedge \mathbf{e}^D) \cdot \left[ \left( \frac{\mathbf{e}^P}{l^P} \delta^{iP} - \frac{\mathbf{e}^D}{l^D} \delta^{iD} \right) \wedge d\mathbf{G}^i \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{e}^P}{l^P} \wedge d\mathbf{U}^P - \frac{\mathbf{e}^D}{l^D} \wedge d\mathbf{U}^D \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.81)$$

Soient  $N^{b0} = \mathcal{N}^{b0}(l^b)$  et  $\mathbf{M}^{c0} = \mathcal{M}^{c0}(p^c) \mathbf{e}^P \wedge \mathbf{e}^D$ , nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned} dW &= \sum_{b \in \mathcal{B}_R} dW^b + \sum_{c \in \mathcal{C}_R} dW^c \\ &= \left[ \sum_{b \in \mathcal{B}_R} N^{b0} \mathbf{e}^b \delta^{ib} + \sum_{c \in \mathcal{C}_R} \mathbf{M}^{c0} \wedge \left( \frac{\mathbf{e}^D}{l^D} \delta^{iD} - \frac{\mathbf{e}^P}{l^P} \delta^{iP} \right) \right] \cdot d\mathbf{G}^i \\ &\quad + \sum_{b \in \mathcal{B}_R} N^{b0} \mathbf{e}^b \cdot d\mathbf{U}^b + \sum_{c \in \mathcal{C}_R} \mathbf{M}^{c0} \cdot \left[ \frac{\mathbf{e}^D}{l^D} \wedge d\mathbf{U}^D - \frac{\mathbf{e}^P}{l^P} \wedge d\mathbf{U}^P \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.82)$$

D'après (2.47), la deuxième ligne dans (2.82) coïncide avec  $\mathbf{S}^{i0} \cdot d\mathbf{G}^i$ . On démontre que la troisième est égale à 0 en choisissant  $\mathbf{v}^n = d\mathbf{R}^{n1}$  dans la formulation des puissances virtuelles de l'autoéquilibre de la cellule de référence (2.64). Donc, nous avons démontré que, pour tout  $i = 1, 2, 3$ ,  $\mathbf{S}^{i0} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{G}^i}(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)$ .  $\square$

### 2.3.2 Indifférence matérielle

Dans cette section nous allons démontrer que grâce à l'objectivité des lois de comportement des tensions normales et des moments, la loi de comportement macroscopique est elle-même objective, c'est-à-dire que pour toute rotation  $\mathbf{Q}$  et pour tout  $\mathbf{G} = (\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)$ , les vecteurs  $\mathbf{S}^{10}$ ,  $\mathbf{S}^{20}$ ,  $\mathbf{S}^{30}$  vérifient  $\mathbf{S}^{i0}(\mathbf{Q}\mathbf{G}) = \mathbf{Q}\mathbf{S}^{i0}(\mathbf{G})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , où  $\mathbf{Q}\mathbf{G}$  est le triplet  $(\mathbf{Q}\mathbf{G}^1, \mathbf{Q}\mathbf{G}^2, \mathbf{Q}\mathbf{G}^3)$ .

**Théorème 2.2** : *Sous la condition que le problème (2.71)-(2.72) soit bien posé, la loi de comportement macroscopique du milieu continu équivalent vérifie l'indifférence matérielle.*

**Démonstration.** On sait que pour  $\mathbf{G} = (\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)$ , la résolution du système (2.71)-(2.72) fournit, à une translation près, les vecteurs  $\mathbf{R}^{n1}$  où  $n \in \mathcal{N}_R$ , c'est-à-dire nous obtenons pour toute barre  $b \in \mathcal{B}_R$  l'expression de  $\mathbf{R}^{E_R(b)1} - \mathbf{R}^{O_R(b)1}$  de façon unique ce qui permet de définir les vecteurs  $\mathbf{B}^b(\mathbf{G}) = \mathbf{R}^{E_R(b)1} - \mathbf{R}^{O_R(b)1} + \mathbf{G}^i \delta^{ib}$ . Désignons par  $\mathbf{U}^b = \mathbf{R}^{E_R(b)1} - \mathbf{R}^{O_R(b)1}$  et  $\Delta\mathbf{R}^1 = (\mathbf{U}^b)_{b \in \mathcal{B}_R}$ , nous pouvons donc définir une application  $\mathcal{P} : \mathbf{G} \mapsto \Delta\mathbf{R}^1$ , où  $\Delta\mathbf{R}^1 = \mathcal{P}(\mathbf{G})$  est la solution du système (2.71)-(2.72) correspondante au tenseur  $\mathbf{G}$ .

Rappelons nous que la tension  $N^{b0}$  est une fonction de la longueur  $\|\mathbf{B}^b\|$  et le moment  $\mathcal{M}^{c0}$  est une fonction du produit scalaire  $p^c = \mathbf{e}^P \cdot \mathbf{e}^D$ . Nous allons procéder en deux étapes.

Étape 1 : Soit  $\Delta\mathbf{R}^1 = (\mathbf{U}^b)_{b \in \mathcal{B}_R} = \mathcal{P}(\mathbf{G})$  et  $\mathbf{B}^b(\mathbf{G}) = \mathbf{U}^b + \mathbf{G}^i \delta^{ib}$ ,  $b \in \mathcal{B}_R$ . Démontrons tout d'abord que pour toute rotation  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Q}\Delta\mathbf{R}^1 = \mathcal{P}(\mathbf{Q}\mathbf{G})$ , c'est-à-dire,  $\mathbf{Q}\Delta\mathbf{R}^1$  est la solution de l'équation (2.72) correspondante au tenseur  $\mathbf{Q}\mathbf{G}$  où  $\mathbf{Q}\Delta\mathbf{R}^1 = (\mathbf{Q}\mathbf{U}^b)_{b \in \mathcal{B}_R}$ .

Comme  $\mathbf{Q}$  est une rotation, alors

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{B}^b\| = \|\mathbf{B}^b\|, \quad \mathbf{Q}\mathbf{e}^P \cdot \mathbf{Q}\mathbf{e}^D = \mathbf{e}^P \cdot \mathbf{e}^D, \quad (\mathbf{Q}\mathbf{e}^P \wedge \mathbf{Q}\mathbf{e}^D) \wedge \mathbf{Q}\mathbf{e}^D = \mathbf{Q}(\mathbf{e}^P \wedge \mathbf{e}^D) \wedge \mathbf{e}^D.$$

Par conséquent,

$$N^{b0}(\|\mathbf{Q}\mathbf{B}^b\|)\mathbf{Q}\mathbf{e}^b \cdot \Delta\mathbf{v}^b = N^{b0}(\|\mathbf{B}^b\|)\mathbf{e}^b \cdot \mathbf{Q}^T \Delta\mathbf{v}^b, \quad (2.83)$$

$$\left( \mathbf{M}^{c0}(\mathbf{Q}\mathbf{e}^P, \mathbf{Q}\mathbf{e}^D) \wedge \frac{\mathbf{Q}\mathbf{e}^D}{\|\mathbf{Q}\mathbf{B}^D\|} \right) \cdot \Delta\mathbf{v}^D = \left( \mathbf{M}^{c0}(\mathbf{e}^P, \mathbf{e}^D) \wedge \frac{\mathbf{e}^D}{\|\mathbf{B}^D\|} \right) \cdot \mathbf{Q}^T \Delta\mathbf{v}^D, \quad (2.84)$$

$$\left( \mathbf{M}^{c0}(\mathbf{Q}\mathbf{e}^P, \mathbf{Q}\mathbf{e}^D) \wedge \frac{\mathbf{Q}\mathbf{e}^P}{\|\mathbf{Q}\mathbf{B}^P\|} \right) \cdot \Delta\mathbf{v}^P = \left( \mathbf{M}^{c0}(\mathbf{e}^P, \mathbf{e}^D) \wedge \frac{\mathbf{e}^P}{\|\mathbf{B}^P\|} \right) \cdot \mathbf{Q}^T \Delta\mathbf{v}^P. \quad (2.85)$$

Par suite  $\forall \mathbf{v}^n, n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0}(\|\mathbf{Q}\mathbf{B}^b\|)\mathbf{Q}\mathbf{e}^b \cdot \Delta\mathbf{v}^b + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \left( \mathbf{M}^{c0}(\mathbf{Q}\mathbf{e}^P, \mathbf{Q}\mathbf{e}^D) \wedge \frac{\mathbf{Q}\mathbf{e}^D}{\|\mathbf{Q}\mathbf{B}^D\|} \right) \cdot \Delta\mathbf{v}^D \\ & \quad - \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \left( \mathbf{M}^{c0}(\mathbf{Q}\mathbf{e}^P, \mathbf{Q}\mathbf{e}^D) \wedge \frac{\mathbf{Q}\mathbf{e}^P}{\|\mathbf{Q}\mathbf{B}^P\|} \right) \cdot \Delta\mathbf{v}^P \\ & = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0}(\|\mathbf{B}^b\|)\mathbf{e}^b \cdot \mathbf{Q}^T \Delta\mathbf{v}^b + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \left( \mathbf{M}^{c0}(\mathbf{e}^P, \mathbf{e}^D) \wedge \frac{\mathbf{e}^D}{\|\mathbf{B}^D\|} \right) \cdot \mathbf{Q}^T \Delta\mathbf{v}^D \\ & \quad - \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \left( \mathbf{M}^{c0}(\mathbf{e}^P, \mathbf{e}^D) \wedge \frac{\mathbf{e}^P}{\|\mathbf{B}^P\|} \right) \cdot \mathbf{Q}^T \Delta\mathbf{v}^P \\ & = 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Donc  $\mathbf{Q}\Delta\mathbf{R}^1$  est la solution de l'équation (2.72) correspondante au tenseur  $\mathbf{Q}\mathbf{G}$ , c'est-à-dire  $\mathbf{Q}\Delta\mathbf{R}^1 = \mathcal{P}(\mathbf{Q}\mathbf{G})$ . Par conséquent,  $\mathbf{B}^b(\mathbf{Q}\mathbf{G}) = \mathbf{Q}\mathbf{B}^b(\mathbf{G})$  et  $\mathbf{e}^b(\mathbf{Q}\mathbf{G}) = \mathbf{Q}\mathbf{e}^b(\mathbf{G})$ .

Étape 2 : Démontrons maintenant l'objectivité de la loi de comportement. Pour cela, il faut démontrer que  $\mathbf{S}^{i0}(\mathbf{Q}\mathbf{G}) = \mathbf{Q}\mathbf{S}^{i0}(\mathbf{G})$ ,  $i = 1, 2, 3$ . En effet, d'après l'équation (2.73) nous avons,

$\forall i = 1, 2, 3,$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^{i0}(\mathbf{QG}) &= \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0}(\|\mathbf{B}^b(\mathbf{QG})\|) \mathbf{e}^b(\mathbf{QG}) \delta^{ib} \\
&+ \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0}(\mathbf{e}^P(\mathbf{QG}), \mathbf{e}^D(\mathbf{QG})) \wedge \left[ \frac{\mathbf{e}^D(\mathbf{QG})}{\|\mathbf{B}^D(\mathbf{QG})\|} \delta^{iD} - \frac{\mathbf{e}^P(\mathbf{QG})}{\|\mathbf{B}^P(\mathbf{QG})\|} \delta^{iP} \right] \\
&= \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0}(\|\mathbf{QB}^b(\mathbf{G})\|) \mathbf{Qe}^b(\mathbf{G}) \delta^{ib} \\
&+ \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0}(\mathbf{Qe}^P(\mathbf{G}), \mathbf{Qe}^D(\mathbf{G})) \wedge \left[ \frac{\mathbf{Qe}^D(\mathbf{G})}{\|\mathbf{QB}^D(\mathbf{G})\|} \delta^{iD} - \frac{\mathbf{Qe}^P(\mathbf{G})}{\|\mathbf{QB}^P(\mathbf{G})\|} \delta^{iP} \right] \quad (2.87) \\
&= \mathbf{Q} \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0}(\|\mathbf{B}^b(\mathbf{G})\|) \mathbf{e}^b(\mathbf{G}) \delta^{ib} \\
&+ \mathbf{Q} \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0}(\mathbf{e}^P(\mathbf{G}), \mathbf{e}^D(\mathbf{G})) \wedge \left[ \frac{\mathbf{e}^D(\mathbf{G})}{\|\mathbf{B}^D(\mathbf{G})\|} \delta^{iD} - \frac{\mathbf{e}^P(\mathbf{G})}{\|\mathbf{B}^P(\mathbf{G})\|} \delta^{iP} \right] \\
&= \mathbf{QS}^{i0}(\mathbf{G}).
\end{aligned}$$

□

## 2.4 Détermination numérique de la loi de comportement

La non linéarité est présente de deux façons dans le problème (2.72)-(2.71). Tout d'abord, la loi de comportement est non linéaire. Deuxièmement, comme nous travaillons dans le cadre de grandes déformations, nous n'avons pas linéarisé dans notre modélisation les termes comme  $\mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{1}{l^b} \mathbf{e}^D$ , ou bien  $l^b$ . Les inconnues du problème sont les  $\mathbf{R}^{n1}$  où  $\mathbf{B}^b = \mathbf{R}^{E_R(b)1} - \mathbf{R}^{O_R(b)1} + \mathbf{G}^j \delta^{jb}$ ,  $l^b = \|\mathbf{B}^b\|$ , et  $\mathbf{e}^b = \frac{\mathbf{B}^b}{l^b}$ . Les données sont les déformations macroscopiques, c'est-à-dire les  $\mathbf{G}^j$ . Ce problème non linéaire peut être résolu par une méthode itérative. Nous avons mis en œuvre sa résolution par la méthode de Newton.

### 2.4.1 La méthode de Newton

La méthode de Newton permet de résoudre numériquement les équations de la forme  $F(x) = 0$ .

– Cas scalaire  $f(x) = 0$  :

Pour le distinguer d'autres indices éventuels, le numéro des itérations est indiqué entre parenthèses. On suppose que  $f$  est dérivable et à chaque itération, on remplace  $f(x)$  par l'équation de la tangente au graphe de  $f$  au point  $x^{(k)}$ , c'est-à-dire qu'on résout l'équation :

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0, \quad (2.88)$$

dont la solution  $x = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$  définit  $x^{(k+1)}$  pour l'itération suivante.

La méthode de Newton est une méthode de point fixe, la solution vérifie l'équation :

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (2.89)$$

En notant  $\delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ , l'équation (2.88) s'écrit :

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})\delta x^{(k)} = 0 \quad (2.90)$$

dont le terme de gauche est le développement asymptotique à l'ordre 1 de  $f(x^{(k)} + \delta x^{(k)})$  en  $x^{(k)}$  :

$$f(x^{(k)} + \delta x^{(k)}) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})\delta x^{(k)} + \dots = 0. \quad (2.91)$$

– Cas vectoriel  $F_i(x_1, \dots, x_N) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  :

Cette équation est résolue en la remplaçant à chaque itération par :

$$\forall i, \quad F_i(x_1^{(k)}, \dots, x_N^{(k)}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1^{(k)}, \dots, x_N^{(k)})\delta x_j^{(k)} = 0. \quad (2.92)$$

Ces équations en  $\delta x_j^{(k)}$  forment un système carré qui est résoluble si, à chaque itération, la matrice de coefficients  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$  est régulière.

## 2.4.2 Résolution du problème par la méthode de Newton

Afin de faciliter les calculs dans le développement de l'équation (2.72) par la méthode de Newton, nous donnons une autre expression équivalente à cette équation.

**Proposition 2.9** : Soit  $\mathbf{A}^b = [\mathbf{e}^b \otimes \mathbf{e}^b - \mathbf{Id}]$ ,  $\tilde{N}^{b0} = N^{b0}/l^b$ ,  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$  et  $\tilde{M}^{c0} = \mathcal{M}^{c0}(p^c)/(l^P l^D)$ ,  $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ . L'équation (2.72) est équivalente à

$$\forall \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^3, \quad \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \tilde{N}^{b0} \mathbf{B}^b \cdot \Delta \mathbf{v}^b + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \tilde{M}^{c0} [\mathbf{A}^P \mathbf{B}^D \cdot \Delta \mathbf{v}^P + \mathbf{A}^D \mathbf{B}^P \cdot \Delta \mathbf{v}^D] = 0. \quad (2.93)$$

**Démonstration.** Tout d'abord nous avons  $\mathbf{M}^{c0} = \mathcal{M}^{c0}(p^c) \mathbf{e}^P \wedge \mathbf{e}^D = \tilde{M}^{c0} \mathbf{B}^P \wedge \mathbf{B}^D$ . Pour établir l'équivalence entre (2.72) et (2.93), il suffit de remarquer que

$$\mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{\mathbf{e}^D}{l^D} = \tilde{M}^{c0} \mathbf{A}^D \mathbf{B}^P, \quad \text{et} \quad \mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{\mathbf{e}^P}{l^P} = -\tilde{M}^{c0} \mathbf{A}^P \mathbf{B}^D.$$

□

Maintenant, il s'agit donc de résoudre l'équation (2.93) par la méthode de Newton.

A l'itération  $k$  de la méthode de Newton nous connaissons les  $\mathbf{R}^{n1(k)}$  et, par conséquent, les  $\mathbf{B}^{b(k)}$ ,  $l^{b(k)}$  et  $\mathbf{e}^{b(k)}$  :

$$\mathbf{B}^{b(k)} = \mathbf{R}^{E_R(b)1(k)} - \mathbf{R}^{O_R(b)1(k)} + \mathbf{F}^j \delta^j b, \quad l^{b(k)} = \|\mathbf{B}^{b(k)}\|, \quad \mathbf{e}^{b(k)} = \frac{\mathbf{B}^{b(k)}}{l^{b(k)}}. \quad (2.94)$$

De plus, nous connaissons les tensions normales des barres  $\tilde{N}^{b0(k)} = \tilde{N}^{b0}(l^{b(k)})$  et les moments entre barres  $\tilde{M}^{c0(k)} = \tilde{M}^{c0}(p^{c(k)})$ .

On cherche les  $\mathbf{R}^{n1(k+1)}$  sous la forme :

$$\mathbf{R}^{n1(k+1)} = \mathbf{R}^{n1(k)} + \delta \mathbf{R}^{n1(k)}, \quad (2.95)$$

où les  $\delta \mathbf{R}^{n1(k)}$  vérifient l'équation suivante :  $\forall \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^3$ ,  $n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} [\delta \tilde{N}^{b0(k)} \mathbf{B}^{b(k)} + \tilde{N}^{b0(k)} \delta \mathbf{B}^{b(k)}] \cdot \Delta \mathbf{v}^b + \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \tilde{N}^{b0(k)} \mathbf{B}^{b(k)} \cdot \Delta \mathbf{v}^b \\ & + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} [\delta \tilde{M}^{c0(k)} \mathbf{A}^{P(k)} \mathbf{B}^{D(k)} + \tilde{M}^{c0(k)} \delta(\mathbf{A}^{P(k)} \mathbf{B}^{D(k)})] \cdot \Delta \mathbf{v}^P \\ & + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} [\delta \tilde{M}^{c0(k)} \mathbf{A}^{D(k)} \mathbf{B}^{P(k)} + \tilde{M}^{c0(k)} \delta(\mathbf{A}^{D(k)} \mathbf{B}^{P(k)})] \cdot \Delta \mathbf{v}^D \\ & + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \tilde{M}^{c0(k)} \mathbf{A}^{P(k)} \mathbf{B}^{D(k)} \cdot \Delta \mathbf{v}^P + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \tilde{M}^{c0(k)} \mathbf{A}^{D(k)} \mathbf{B}^{P(k)} \cdot \Delta \mathbf{v}^D = 0. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Explicitons maintenant les termes  $\delta \tilde{N}^{b0(k)} \mathbf{B}^{b(k)}$  et  $\delta \tilde{M}^{c0(k)} \mathbf{A}^{b'(k)} \mathbf{B}^{b(k)}$ . Nous avons :

$$\delta \tilde{N}^{b0(k)} = \frac{d \tilde{N}^{b0(k)}}{dl} \delta l^{b(k)}, \quad \delta l^{b(k)} = \delta \mathbf{B}^{b(k)} \cdot \mathbf{e}^{b(k)}, \quad \delta \mathbf{B}^{b(k)} = \delta \mathbf{R}^{E_R(b)1(k)} - \delta \mathbf{R}^{O_R(b)1(k)}. \quad (2.97)$$

Nous avons,

$$\delta \tilde{N}^{b0(k)} \mathbf{B}^{b(k)} = \frac{d \tilde{N}^{b0(k)}}{dl} [\delta \mathbf{B}^{b(k)} \cdot \mathbf{e}^{b(k)}] \mathbf{B}^{b(k)} = \frac{1}{l^{b(k)}} \frac{d \tilde{N}^{b0(k)}}{dl} (\mathbf{B}^{b(k)} \otimes \mathbf{B}^{b(k)}) \delta \mathbf{B}^{b(k)}. \quad (2.98)$$

D'autre part,

$$\delta \tilde{M}^{c0(k)} = \delta \left( \frac{\mathcal{M}^{c0(k)}}{l^{P(k)} l^{D(k)}} \right) = \delta \left( \frac{1}{l^{P(k)} l^{D(k)}} \right) \mathcal{M}^{c0(k)} + \frac{1}{l^{P(k)} l^{D(k)}} \frac{d \mathcal{M}^{c0(k)}}{dp} \delta p^{c(k)}. \quad (2.99)$$

Pour calculer  $\delta p^{c(k)}$ , nous différencions l'équation  $p^{c(k)} = \mathbf{e}^{P(k)} \cdot \mathbf{e}^{D(k)}$  et nous obtenons :

$$\delta p^{c(k)} = \delta \mathbf{e}^{P(k)} \cdot \mathbf{e}^{D(k)} + \mathbf{e}^{P(k)} \cdot \delta \mathbf{e}^{D(k)}, \quad (2.100)$$

or,

$$\delta \mathbf{e}^{b(k)} = \delta \left( \frac{\mathbf{B}^{b(k)}}{l^{b(k)}} \right) = \frac{1}{l^{b(k)}} \delta \mathbf{B}^{b(k)} - \frac{\delta l^{b(k)}}{l^{b(k)^2}} \mathbf{B}^{b(k)} = -\frac{1}{l^{b(k)}} \mathbf{A}^{b(k)} \delta \mathbf{B}^{b(k)}, \quad (2.101)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \delta p^{c(k)} &= - \left[ \frac{1}{l^{P(k)}} \mathbf{A}^{P(k)} \delta \mathbf{B}^{P(k)} \cdot \mathbf{e}^{D(k)} + \mathbf{e}^{P(k)} \cdot \frac{1}{l^{D(k)}} \mathbf{A}^{D(k)} \delta \mathbf{B}^{D(k)} \right] \\ &= \frac{-1}{l^{P(k)} l^{D(k)}} \left[ \mathbf{A}^{P(k)} \mathbf{B}^{D(k)} \cdot \delta \mathbf{B}^{P(k)} + \mathbf{A}^{D(k)} \mathbf{B}^{P(k)} \cdot \delta \mathbf{B}^{D(k)} \right]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Le terme  $\delta p^c \mathbf{A}^{b'} \mathbf{B}^b$  s'écrit finalement sous la forme suivante :

$$\delta p^{c(k)} \mathbf{A}^{b'(k)} \mathbf{B}^{b(k)} = \frac{-1}{l^{P(k)} l^{D(k)}} \left[ \left( \mathbf{A}^{b'(k)} \mathbf{B}^{b(k)} \otimes \mathbf{A}^{P(k)} \mathbf{B}^{D(k)} \right) \delta \mathbf{B}^{P(k)} + \left( \mathbf{A}^{b'(k)} \mathbf{B}^{b(k)} \otimes \mathbf{A}^{D(k)} \mathbf{B}^{P(k)} \right) \delta \mathbf{B}^{D(k)} \right]. \quad (2.103)$$

De la même façon, nous obtenons les expressions suivantes :

$$\delta \left( \frac{1}{l^{P(k)} l^{D(k)}} \right) \mathbf{A}^{b'(k)} \mathbf{B}^{b(k)} = -\frac{\mathbf{A}^{b'(k)}}{l^{P(k)} l^{D(k)}} \left[ \frac{\mathbf{B}^{b(k)} \otimes \mathbf{B}^{P(k)}}{l^{P(k)^2}} \delta \mathbf{B}^{P(k)} + \frac{\mathbf{B}^{b(k)} \otimes \mathbf{B}^{D(k)}}{l^{D(k)^2}} \delta \mathbf{B}^{D(k)} \right]. \quad (2.104)$$

$$\delta \mathbf{A}^{b'(k)} \mathbf{B}^{b(k)} = \frac{-1}{l^{b'^2(k)}} \left[ (\mathbf{B}^{b'(k)} \cdot \mathbf{B}^{b(k)}) Id + \mathbf{B}^{b'(k)} \otimes \mathbf{B}^{b(k)} \right] \mathbf{A}^{b'(k)} \delta \mathbf{B}^{b'(k)}. \quad (2.105)$$

En utilisant tous ces calculs, l'équation (2.96) devient :  $\forall \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^3, n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \left[ \frac{1}{l^{b0(k)}} \frac{d\tilde{N}^{b0(k)}}{dl} (\mathbf{B}^{b(k)} \otimes \mathbf{B}^{b(k)}) \delta \mathbf{B}^{b(k)} + \tilde{N}^{b0(k)} \delta \mathbf{B}^{b(k)} \right] \cdot \Delta \mathbf{v}^b + \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \tilde{N}^{b0(k)} \mathbf{B}^{b(k)} \cdot \Delta \mathbf{v}^b \\
& - \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \tilde{M}^{c0(k)} \mathbf{A}^{P(k)} \left[ \frac{\mathbf{B}^{D(k)} \otimes \mathbf{B}^{P(k)}}{l^{P(k)^2}} \delta \mathbf{B}^{P(k)} + \frac{\mathbf{B}^{D(k)} \otimes \mathbf{B}^{D(k)}}{l^{D(k)^2}} \delta \mathbf{B}^{D(k)} \right] \cdot \Delta \mathbf{v}^P \\
& - \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \tilde{M}^{c0(k)} \mathbf{A}^{D(k)} \left[ \frac{\mathbf{B}^{P(k)} \otimes \mathbf{B}^{P(k)}}{l^{P(k)^2}} \delta \mathbf{B}^{P(k)} + \frac{\mathbf{B}^{P(k)} \otimes \mathbf{B}^{D(k)}}{l^{D(k)^2}} \delta \mathbf{B}^{D(k)} \right] \cdot \Delta \mathbf{v}^D \\
& - \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{(l^P l^D)^2} \frac{d\mathcal{M}^{c0(k)}}{dp} \left[ (\mathbf{A}^P \mathbf{B}^D \otimes \mathbf{A}^P \mathbf{B}^D) \delta \mathbf{B}^P + (\mathbf{A}^P \mathbf{B}^D \otimes \mathbf{A}^D \mathbf{B}^P) \delta \mathbf{B}^D \right] \cdot \Delta \mathbf{v}^P \\
& - \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{(l^P l^D)^2} \frac{d\mathcal{M}^{c0(k)}}{dp} \left[ (\mathbf{A}^D \mathbf{B}^P \otimes \mathbf{A}^P \mathbf{B}^D) \delta \mathbf{B}^P + (\mathbf{A}^D \mathbf{B}^P \otimes \mathbf{A}^D \mathbf{B}^P) \delta \mathbf{B}^D \right] \cdot \Delta \mathbf{v}^D \quad (2.106) \\
& - \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \frac{\tilde{M}^{c0(k)}}{l^{P^2(k)}} \left[ (\mathbf{B}^{P(k)} \cdot \mathbf{B}^{D(k)}) Id + \mathbf{B}^{P(k)} \otimes \mathbf{B}^{D(k)} \right] \mathbf{A}^{P(k)} \delta \mathbf{B}^{P(k)} \cdot \Delta \mathbf{v}^P \\
& - \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \frac{\tilde{M}^{c0(k)}}{l^{D^2(k)}} \left[ (\mathbf{B}^{D(k)} \cdot \mathbf{B}^{P(k)}) Id + \mathbf{B}^{D(k)} \otimes \mathbf{B}^{P(k)} \right] \mathbf{A}^{D(k)} \delta \mathbf{B}^{D(k)} \cdot \Delta \mathbf{v}^D \\
& + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \tilde{M}^{c0(k)} \mathbf{A}^{P(k)} \delta \mathbf{B}^{D(k)} \cdot \Delta \mathbf{v}^P + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \tilde{M}^{c0(k)} \mathbf{A}^{D(k)} \delta \mathbf{B}^{P(k)} \cdot \Delta \mathbf{v}^D \\
& + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \tilde{M}^{c0(k)} \mathbf{A}^{P(k)} \mathbf{B}^{D(k)} \cdot \Delta \mathbf{v}^P + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \tilde{M}^{c0(k)} \mathbf{A}^{D(k)} \mathbf{B}^{P(k)} \cdot \Delta \mathbf{v}^D = 0.
\end{aligned}$$

Comme le problème a une solution à une translation près, nous fixons un nœud de la structure par pénalisation.

## Conclusion

Nous avons démontré qu'un treillis de barres élastiques interagissant par des moments élastiques est équivalent à un milieu continu quand le nombre de ses cellules élémentaires est grand. Nous avons obtenu une définition des contraintes du milieu équivalent en termes des tensions des barres et des moments entre couples de barres, et nous avons déterminé la loi de comportement du milieu équivalent. Cette loi est obtenue par la résolution d'un problème de treillis sur une cellule élémentaire. De plus, nous avons démontré que la loi est objective, hyperélastique, et facile à calculer.





# Chapitre 3

## Application au myocarde : nouvelle loi de comportement

Au chapitre précédent nous avons décrit la modélisation mécanique du réseau de cardiomyocytes par un treillis de barres en interaction et nous avons développé une méthode d'homogénéisation permettant de déterminer la loi de comportement du milieu continu équivalent à un treillis répétitif. Nous allons maintenant appliquer ces résultats à un treillis particulier en utilisant des données expérimentales sur le comportement des cardiomyocytes et nous allons comparer les résultats obtenus aux lois de comportement phénoménologiques macroscopiques construites à partir d'essais sur des échantillons de myocarde. La comparaison est numérique car la construction de la loi de comportement par homogénéisation nécessite la résolution d'un problème sur une cellule de périodicité du treillis ce qui est fait numériquement en utilisant une méthode de Newton. Préalablement à ces calculs, il faut définir la cellule de répétitivité et exposer les résultats expérimentaux sur les cardiomyocytes de la littérature.

### 3.1 Cellule de répétitivité

Les cellules cardiaques, ou cardiomyocytes, sont des petites structures cylindriques, de 60 à 100  $\mu\text{m}$  de longueur. Elles sont attachées bout à bout par des anastomoses qui forment des jonctions en Y ou en I et fournissent les fibres myocardiques, voir Figure 3.1.

Sauf mention contraire, nous désignerons par le mot “cellule” une période élémentaire du treillis dans son sens classique dans le cadre de la théorie d'homogénéisation. Il n'y aura pas de confusion avec les cellules cardiaques que nous appelons cardiomyocytes.

Conformément au paragraphe 2.2.1 du chapitre précédent, pour décrire la cellule de répétitivité (ou cellule élémentaire), il faut définir l'ensemble des nœuds  $n$  de la cellule, l'ensemble des barres  $b$  en précisant le nœud origine  $O_R(b)$ , le nœud extrémité  $E_R(b)$  et les paramètres  $\delta^{1b}$ ,  $\delta^{2b}$ ,  $\delta^{3b}$  donnant la position relative de la cellule du nœud extrémité. De même il faut définir l'ensemble des couples  $c$  de barres en interaction avec la donnée de la première barre  $P_R(c)$  et

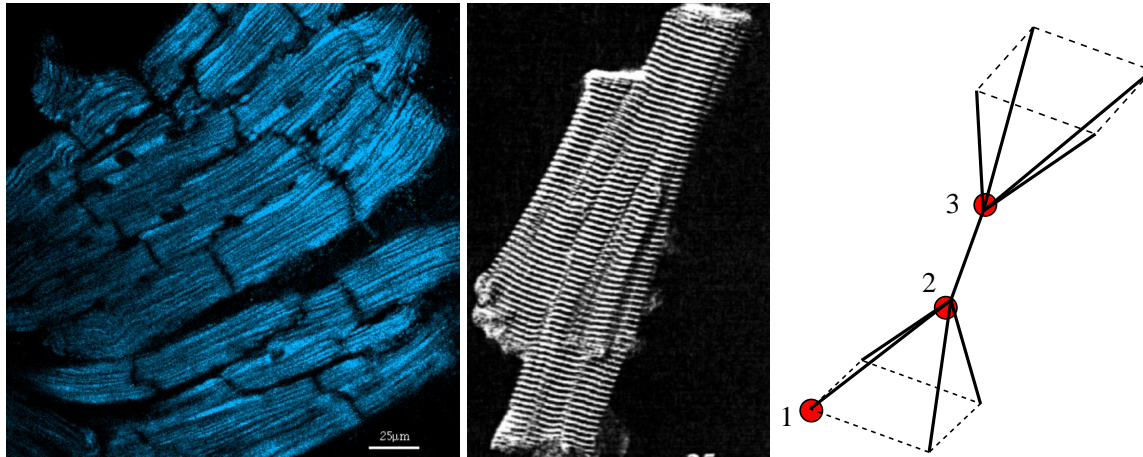


FIG. 3.1 – Des cardiomyocytes connectés par anastomoses (à gauche) où une direction privilégiée peut être déterminée (au centre). A droite un exemple d’une cellule élémentaire de barres élastiques modélisant l’arrangement des cardiomyocytes.

de la dernière barre  $D_R(c)$  ; les paramètres  $\gamma^{1c}$ ,  $\gamma^{2c}$ ,  $\gamma^{3c}$  de position de la cellule de la dernière barre sont inutiles car ils n’interviennent pas dans la détermination de la loi de comportement du paragraphe 2.2.4.

Pour la mise en œuvre de l’homogénéisation effectuée dans ce chapitre, nous avons choisi, à partir d’observations d’images microscopiques de l’arrangement des cardiomyocytes (Figure 3.1 à gauche), une cellule relativement simple de la forme donnée par la Figure 3.1 à droite. C’est une cellule à 3 nœuds numérotés comme indiqué. Elle comporte 9 barres et 48 couples de barres. Les numéros des barres et des couples de barres sont donnés dans les tableaux 1 et 2. D’autres développements avec des cellules plus complexes ne nécessiteraient que plus de temps de calcul mais nous verrons à la fin de ce chapitre que la cellule choisie permet déjà de retrouver assez bien les lois de comportement macroscopiques de la littérature.

$b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$O_R(b)$	1	2	2	2	2	3	3	3	3
$E_R(b)$	2	1	1	1	3	1	1	1	1
$\delta^1(b)$	0	1	1	0	0	0	1	1	0
$\delta^2(b)$	0	0	1	1	0	0	0	1	1
$\delta^3(b)$	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Tableau 1 : Numérotation des barres.

$c$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$P_R(c)$	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	5	5	5	5	6	6
$D_R(c)$	2	3	4	5	3	4	5	4	5	5	6	7	8	9	7	8
$c$	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
$P_R(c)$	6	7	7	8	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
$D_R(c)$	9	8	9	9	2	3	4	6	7	8	9	3	4	6	7	8
$c$	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
$P_R(c)$	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	6	6	6	7	7	8
$D_R(c)$	9	4	6	7	8	9	6	7	8	9	7	8	9	8	9	9

Tableau 2 : Numérotation des couples de barres.

## 3.2 Données expérimentales sur des cellules isolées

Plusieurs techniques d'essais mécaniques sur des cardiomyocytes isolés sont décrites dans la littérature. Chaque méthode fournit des informations sur les propriétés constitutives des cardiomyocytes mais présente des limitations qui perturbent la détermination du comportement. Par exemple, Brady [10] a attaché les cardiomyocytes à un capteur de force ou de longueur, une limitation importante de cette méthode est que le cardiomyocyte est extrêmement sensible à l'effort appliqué. Une variante consiste à maintenir des cardiomyocytes entre deux micropipettes concentriques, Brady [11]. Les forces utilisées pour attacher le cardiomyocyte aux micropipettes peuvent être suffisantes pour changer les propriétés mécaniques. Il existe une autre technique qui consiste à attacher le cardiomyocyte à des aiguilles de verre, Sweitzer et Moss [86], Granzier et Irving [37]. Cependant, au moins 75% des cardiomyocytes attachés en utilisant cette méthode sont de mauvaise qualité, ou bien ils sont endommagés pendant l'attachement. Zile et al., [111], [112], ont mesuré les propriétés de comportement des cardiomyocytes en les plongeant dans un gel et en utilisant une méthode d'étirement du gel. Cette technique n'exige pas l'attachement direct du cardiomyocyte à un capteur de force ou de longueur, et la force est appliquée sur la longueur entière du cardiomyocyte. Récemment, Yasuda et al. [102] ont attaché les cardiomyocytes à des fibres de carbone. Cette méthode, qui a été aussi utilisée par Fish et al. [32], exige un processus de préparation qui peut changer les propriétés de comportement viscoélastique des cardiomyocytes.

Dans notre étude, nous utilisons les résultats de Zile et al., [111], [112], sur le comportement élastique du cardiomyocyte passif obtenus par la méthode d'étirement du gel. Les données expérimentales mesurées par cette méthode sont les contraintes du gel et les déformations du cardiomyocyte. Les contraintes du gel ne sont pas les mêmes que celles du cardiomyocyte plongé dans le gel. Zile et al. ont calculé les contraintes du cardiomyocyte en trois étapes. (1) Tout d'abord ils ont défini la loi de comportement du gel à partir d'essais mécaniques de traction compression du gel, (2) ensuite ils ont utilisé une méthode d'éléments finis pour décrire la loi de comportement du cardiomyocyte. En effet, ils supposent que le cardiomyocyte est plongé dans un cylindre de gel de longueur infinie et que le système gel-cardiomyocyte est axisymétrique.

De plus, ils supposent que le gel et le cardiomyocyte sont des matériaux hyperélastiques incompressibles. Ils choisissent la forme de la loi de comportement du cardiomyocyte, par exemple  $\sigma = C_1\alpha + C_2\alpha^2$ , où  $\alpha$  représente le rapport d'extension du cardiomyocyte,  $\alpha = \frac{l-l_0}{l_0}$ ,  $l$  désigne la longueur du cardiomyocyte déformé et  $l_0$  sa longueur au repos. Ils initialisent les constantes  $C_1$  et  $C_2$  en utilisant les contraintes du gel et les déformations du cardiomyocyte obtenues par la méthode d'étirement du gel. Maintenant les valeurs des déformations longitudinale et radiale du cardiomyocyte obtenues par la méthode d'éléments finis, sont comparées avec celles observées expérimentalement et les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont ajustées en utilisant une méthode de moindres carrés. Cette procédure est itérée jusqu'à ce que les déformations calculées collent au mieux avec les déformations observées. Une fois cette procédure itérative complétée, les dernières valeurs de  $C_1$  et  $C_2$  sont utilisées pour définir la loi de comportement du cardiomyocyte. (3) Finalement, ils ont obtenu les contraintes du cardiomyocyte à partir des données expérimentales sur les déformations du cardiomyocyte en utilisant la loi de comportement obtenue par la méthode d'éléments finis.

Quatre types de fonctions ont été proposés pour la relation contraintes-déformations d'un cardiomyocyte. Ces fonctions sont résumées dans le tableau suivant. Les graphes de ces fonctions sont représentés sur la Figure 3.2. Les contraintes sont mesurées en  $\text{kN.m}^{-2}$ .

<b>Polynomiale</b>	<b>Exponentielle Eq1</b>	<b>Exponentielle Eq2</b>	<b>Exponentielle Eq3</b>
$\sigma = 300\alpha + 1020\alpha^2$	$\sigma = 0,75e^{50\alpha}$	$\sigma = 14,5(e^{14,5\alpha} - 1)$	$\sigma = \frac{29,5}{6,5}(e^{6,5\alpha} - 1)$

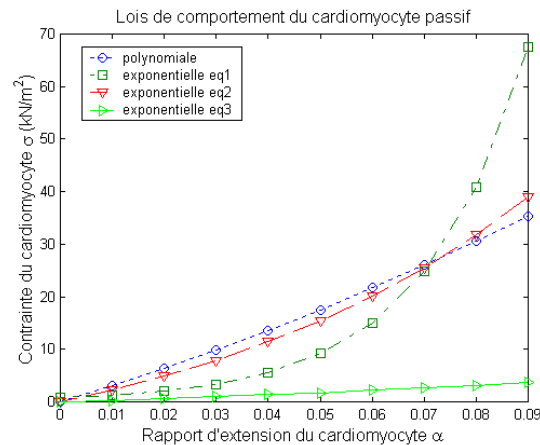


FIG. 3.2 – Les graphes des différentes lois de comportement du cardiomyocyte passif proposées par Zile et al. [112].

Nous remarquons que les graphes de la forme polynomiale et la deuxième forme exponentielle Eq2 sont très proches l'un de l'autre, alors que les graphes des deux autres formes

exponentielles Eq1 et Eq3 sont très éloignés des deux premiers. Nous n'avons pas trouvé d'explications de cette différence dans les articles de Zile et al., [111], [112].

### 3.3 Loi de comportement macroscopique

La détermination de la loi de comportement macroscopique du myocarde par homogénéisation passe par la résolution d'un problème d'élasticité non linéaire sur une cellule de répétitivité (voir paragraphe 2.2.4). Cela nécessite de définir les lois de comportement (2.71) du problème en question. Dans l'application au myocarde, les lois (2.71) sont déterminées à partir des lois de comportement des cardiomyocytes par des changements d'échelles. Nous avons donc besoin de définir les lois (2.16) et (2.17) écrites sous la forme

$$N^{\tilde{e}\tilde{b}} = \mathcal{N}^{\tilde{e}\tilde{b}}(I^{\tilde{e}\tilde{b}}), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{M}^{\tilde{e}\tilde{c}} = \mathcal{M}^{\tilde{e}\tilde{c}}(p^{\tilde{e}\tilde{c}}) \mathbf{e}^{\varepsilon P(\tilde{c})} \wedge \mathbf{e}^{\varepsilon D(\tilde{c})}. \quad (3.2)$$

La loi (3.1) portant sur la tension normale dans les cardiomyocytes est déterminée à partir des lois proposées dans Zile et al. [111]. Pour la loi en moment, nous ne disposons d'aucune donnée expérimentale et cette loi est choisie le plus simplement possible c'est-à-dire linéaire par rapport à l'angle que font les deux barres en interaction.

#### 3.3.1 Loi en traction compression des cardiomyocytes

Les lois proposées par Zile et al. [111] pour le comportement en traction compression des cardiomyocytes sont des lois scalaires en contraintes de la forme

$$\sigma = \sigma(\alpha),$$

où  $\alpha$  est le rapport d'extension du cardiomyocyte et  $\sigma$  est une contrainte. Cette loi n'est pas une loi tensorielle et, bien que ce ne soit pas précisé dans l'article,  $\sigma$  est très probablement la contrainte normale à une section de cardiomyocyte moyennée sur cette section.

Pour obtenir l'effort normal dans le cardiomyocyte, il faut multiplier  $\sigma$  par une surface, en toute rigueur la surface de la section du cardiomyocyte déformé. Nous avons choisi de multiplier par la surface de la section du cardiomyocyte non déformé. Ce choix donne une loi de comportement plus simple à utiliser que celui consistant à multiplier par la surface déformée qui semble plus rigoureux, il est justifié par le manque de précision sur la démarche utilisée par Zile et al. En effet, Zile et al. font un calcul par éléments finis pour déterminer leur loi mais la loi de comportement tridimensionnelle du cardiomyocyte utilisée dans ce calcul n'est pas complètement précisée, seule une loi scalaire est donnée. On peut aussi justifier le choix simplifié fait en remarquant que le calcul par éléments finis de Zile et al. est fait sur un seul cardiomyocyte modèle qui est cylindrique et que, pour déterminer l'énergie de déformation des cardiomyocytes, ils utilisent une section moyenne.

La loi de comportement en traction compression des barres utilisée par la suite est

$$\mathcal{N}^{\varepsilon\tilde{b}}(l^{\varepsilon\tilde{b}}) = A_0^{\varepsilon\tilde{b}} \sigma(\alpha^{\varepsilon\tilde{b}}), \quad \text{où} \quad \alpha^{\varepsilon\tilde{b}} = \frac{l^{\varepsilon\tilde{b}} - l_0^{\varepsilon\tilde{b}}}{l_0^{\varepsilon\tilde{b}}}. \quad (3.3)$$

Le terme  $A_0^{\varepsilon\tilde{b}}$  a la dimension d'une surface et  $\sigma$  est l'une des lois proposées par Zile et al. Or, nous pouvons écrire  $A_0^{\varepsilon\tilde{b}} = \frac{V^\varepsilon}{l_0^{\varepsilon\tilde{b}}}$  où  $V^\varepsilon$  désigne le volume d'un cardiomyocyte qu'on suppose indépendant de  $\tilde{b}$ , ce qui veut dire que tous les cardiomyocytes ont le même volume. De plus, Zile et al. ont supposé que le cardiomyocyte est incompressible, donc  $V^\varepsilon$  ne change pas pendant la déformation. Donc nous faisons dépendre l'équation de comportement de  $N^{\varepsilon\tilde{b}}$  explicitement d'un paramètre  $l_0^{\varepsilon\tilde{b}}$ . Ce paramètre est la longueur au repos de  $\tilde{b}$  et il est tel que  $\mathcal{N}^{\varepsilon\tilde{b}}(l_0^{\varepsilon\tilde{b}}) = 0$ .

Dans le processus d'homogénéisation du chapitre 2,  $\varepsilon$  est un petit paramètre lié à la taille des cardiomyocytes, typiquement c'est le rapport de la longueur d'un cardiomyocyte sur la taille du myocarde. Il est donc logique de considérer que le volume d'un cardiomyocyte est d'ordre  $\varepsilon^3$  et s'écrit  $V^\varepsilon = \varepsilon^3 V_0$ . Par suite l'expression de la tension normale est

$$\mathcal{N}^{\varepsilon\tilde{b}}(l^{\varepsilon\tilde{b}}) = \varepsilon^3 \frac{V_0}{l_0^{\varepsilon\tilde{b}}} \sigma(\alpha^{\varepsilon\tilde{b}}). \quad (3.4)$$

Il est logique également de supposer que la longueur neutre  $l_0^{\varepsilon\tilde{b}}$  des barres est d'ordre  $\varepsilon$ . De plus, nous supposons que cette longueur neutre admet un développement analogue à celui de  $l^{\varepsilon\tilde{b}}$  donné par l'équation (2.26)

$$l^{\varepsilon\tilde{b}} = \varepsilon l^{b0}(\lambda^\varepsilon) + \dots \quad (3.5)$$

$$l_0^{\varepsilon\tilde{b}} = \varepsilon l_0^b(\lambda^\varepsilon) + \dots \quad (3.6)$$

La loi de comportement se développe en fonction de  $\varepsilon$  en

$$\mathcal{N}^{\varepsilon\tilde{b}}(l^{\varepsilon\tilde{b}}) = \varepsilon^2 \frac{V_0}{l_0^b} \sigma(\alpha^{b0}) + \dots, \quad \text{où} \quad \alpha^{b0} = \frac{l^{b0} - l_0^b}{l_0^b}. \quad (3.7)$$

La loi (2.71) intervenant dans le problème d'élasticité de la cellule de répétitivité est alors

$$N^{b0} = \mathcal{N}^{b0}(l^{b0}) = \frac{V_0}{l_0^b} \sigma(\alpha^{b0}). \quad (3.8)$$

### 3.3.2 Loi de comportement des moments

La loi de comportement des moments entre barres (2.17) ne peut pas être basée sur des données expérimentales puisqu'il n'y en a pas de disponibles. Nous l'avons choisie de façon à ce qu'elle corresponde à celle d'un ressort spiral, c'est-à-dire que l'amplitude de  $\mathbf{M}^{\varepsilon\tilde{c}}$  sur le

vecteur  $\mathbf{e}^{\varepsilon P(\tilde{c})} \wedge \mathbf{e}^{\varepsilon D(\tilde{c})}$  est proportionnelle à la différence entre l'angle  $\theta^{\varepsilon\tilde{c}} = (\mathbf{e}^{\varepsilon P(\tilde{c})}, \mathbf{e}^{\varepsilon D(\tilde{c})})$  et l'angle de repos  $\theta_0^{\varepsilon\tilde{c}}$ , appelé aussi angle neutre. La loi de comportement (2.17) s'écrit donc

$$\mathbf{M}^{\varepsilon\tilde{c}} = k_{\theta}^{\varepsilon\tilde{c}} \frac{(\theta^{\varepsilon\tilde{c}} - \theta_0^{\varepsilon\tilde{c}})}{\sin \theta^{\varepsilon\tilde{c}}} \mathbf{e}^{\varepsilon P(\tilde{c})} \wedge \mathbf{e}^{\varepsilon D(\tilde{c})}, \quad (3.9)$$

où  $\theta^{\varepsilon\tilde{c}} = \text{Arccos}(p^{\varepsilon\tilde{c}})$  avec  $p^{\varepsilon\tilde{c}} = \mathbf{e}^{\varepsilon P(\tilde{c})} \cdot \mathbf{e}^{\varepsilon D(\tilde{c})}$ . Il est clair que cette loi n'est définie que si  $p^{\varepsilon\tilde{c}} \neq \pm 1$ .

Donc  $\mathbf{M}^{\varepsilon\tilde{c}}$  dépend explicitement d'un paramètre  $p_0^{\varepsilon\tilde{c}}$ . Ce paramètre est le produit scalaire des vecteurs  $\mathbf{e}^{P(\tilde{c})}$  et  $\mathbf{e}^{D(\tilde{c})}$  au repos,  $p_0^{\varepsilon\tilde{c}} = \cos \theta_0^{\varepsilon\tilde{c}}$ , et il est tel que  $\mathcal{M}^{\varepsilon\tilde{c}}(p_0^{\varepsilon\tilde{c}}) = 0$ .

Pour respecter l'ordre de grandeur vis-à-vis de  $\varepsilon$  entre les tensions et les moments, nous prendrons  $k_{\theta}^{\varepsilon\tilde{c}}$  d'ordre  $\varepsilon^3$ ,  $k_{\theta}^{\varepsilon\tilde{c}} = \varepsilon^3 k_{\theta}$ . De plus, comme pour la longueur neutre des barres, nous supposons que l'angle neutre  $\theta_0^{\varepsilon\tilde{c}}$  se développe en

$$\theta_0^{\varepsilon\tilde{c}} = \theta_0^c(\lambda^{\varepsilon}) + \dots \quad (3.10)$$

Donc  $p_0^{\varepsilon\tilde{c}} = \cos \theta_0^{\varepsilon\tilde{c}}$  se développe en

$$p_0^{\varepsilon\tilde{c}} = p_0^c(\lambda^{\varepsilon}) + \dots, \quad \text{où } p_0^c = \cos \theta_0^c. \quad (3.11)$$

D'après (2.26),  $p^{\varepsilon\tilde{c}}$  se développe en

$$p^{\varepsilon\tilde{c}} = p^{c0}(\lambda^{\varepsilon}) + \dots, \quad \text{où } p^{c0} = \mathbf{e}^{P_R(c)0} \cdot \mathbf{e}^{D_R(c)0}. \quad (3.12)$$

Soit  $\theta^{c0} = \text{Arccos}(p^{c0})$ . Par suite l'angle  $\theta^{\varepsilon\tilde{c}}$  se développe en

$$\theta^{\varepsilon\tilde{c}} = \theta^{c0}(\lambda^{\varepsilon}) + \dots \quad (3.13)$$

La loi de comportement de (2.71) intervenant dans le problème d'élasticité de la cellule de périodicité du paragraphe 2.2.4 est alors

$$\mathbf{M}^{c0} = \mathcal{M}^{c0}(p^{c0}) \mathbf{e}^{P_R(c)0} \wedge \mathbf{e}^{D_R(c)0}, \quad \text{où } \mathcal{M}^{c0}(p^{c0}) = k_{\theta} \frac{(\text{Arccos}(p^{c0}) - \text{Arccos}(p_0^c))}{\sqrt{1 - (p^{c0})^2}}. \quad (3.14)$$

Cette relation devient singulière si  $p^{c0} = \pm 1$  ce qui est évitée si les déformations de la cellule ne sont pas trop grandes.

### 3.3.3 Problème sur la cellule de répétitivité - Loi de comportement macroscopique

Ainsi qu'il est décrit au paragraphe 2.2.4, la loi de comportement macroscopique du myocarde s'obtient en résolvant un problème d'élasticité non linéaire sur la cellule de périodicité. Ce problème est constitué des équations d'équilibre (2.72) et des lois de comportement (3.8) et (3.14), il s'écrit dans le cas étudié ici :



Etant donnés 3 vecteurs  $\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3$  représentant la sollicitation macroscopique, trouver  $\mathbf{R}^{11}, \mathbf{R}^{21}, \mathbf{R}^{31}$  tels que les équations d'équilibre

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^3, \quad & \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0} \mathbf{e}^b \cdot \Delta \mathbf{v}^b + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{1}{l^{D_R(c)}} \mathbf{e}^{D_R(c)}) \cdot \Delta \mathbf{v}^{D_R(c)} \\ & - \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{1}{l^{P_R(c)}} \mathbf{e}^{P_R(c)}) \cdot \Delta \mathbf{v}^{P_R(c)} = 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

où  $\forall b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}, \Delta \mathbf{v}^b = \mathbf{v}^{E_R(b)} - \mathbf{v}^{O_R(b)}$ , et les lois de comportement

$$N^{b0} = \frac{V_0}{l_0^b} \sigma(\alpha^b), \quad \mathbf{M}^{c0} = k_\theta \frac{1}{\sqrt{1-(p^c)^2}} (\text{Arccos}(p^c) - \theta_0^c) \mathbf{e}^{P_R(c)} \wedge \mathbf{e}^{D_R(c)} \quad (3.16)$$

soient satisfaites, où

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^b &= \mathbf{R}^{E_R(b)1} - \mathbf{R}^{O_R(b)1} + \mathbf{G}^j \delta^{jb}, \quad l^b = \|\mathbf{B}^b\|, \quad \mathbf{e}^b = \frac{\mathbf{B}^b}{l^b}, \\ p^c &= \mathbf{e}^{P_R(c)} \cdot \mathbf{e}^{D_R(c)}, \quad \alpha^b = \frac{l^b - l_0^b}{l_0^b}. \end{aligned}$$

Ce problème étant résolu, la loi de comportement macroscopique est obtenue en calculant tout d'abord les vecteurs de contraintes macroscopiques  $\mathbf{S}^{i0}$  par

$$\forall i = 1, 2, 3, \mathbf{S}^{i0} = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0} \mathbf{e}^b \delta^{ib} + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0} \wedge \left[ \frac{\mathbf{e}^{D_R(c)}}{l^{D_R(c)}} \delta^{iD_R(c)} - \frac{\mathbf{e}^{P_R(c)}}{l^{P_R(c)}} \delta^{iP_R(c)} \right], \quad (3.17)$$

et ensuite en calculant le tenseur de contraintes de Cauchy défini par

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{g} \mathbf{S}^{i0} \otimes \mathbf{G}^i, \quad (3.18)$$

où  $g = |\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3|$  est le produit mixte de  $\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3$ .

### 3.3.4 Loi de comportement macroscopique inverse - état neutre

On peut déterminer la loi macroscopique inverse en se donnant les contraintes macroscopiques ou, de façon équivalente, les  $\mathbf{S}^{i0}$  de (3.17) et en cherchant  $\mathbf{R}^{11}, \mathbf{R}^{21}, \mathbf{R}^{31}$  et  $\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3$  tels que toutes les équations du problème soient satisfaites.

Cette dernière façon d'envisager la loi de comportement macroscopique permet de déterminer l'état neutre de la loi définie au chapitre 1. Quand on utilise des coordonnées curvilignes comme c'est le cas ici, l'état neutre est le triplet  $(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)$  tel que les vecteurs  $\mathbf{S}^{10}, \mathbf{S}^{20}, \mathbf{S}^{30}$  soient nuls. Il est clair que l'état neutre de la loi homogénéisée dépend de la "topologie" de la cellule

de répétitivité, c'est-à-dire du nombre de nœuds, de barres, de couples de barres et des connectivités entre ces éléments mais aussi des lois de comportement, et en particulier dans notre cas, des longueurs et angles neutres  $l_0^b$  et  $\theta_0^c$ . Le changement de ces valeurs modifie les lois de comportement des tensions et des moments et par conséquent l'état neutre de la loi macroscopique. Le choix de longueurs et angles neutres dépendant de la variable lagrangienne  $\lambda$  permet de décrire les variations de la loi de comportement du myocarde d'un point à l'autre dues au changement d'orientation locale des cardiomyocytes.

Pour comparer la loi de comportement obtenue par homogénéisation avec les lois macroscopiques de Lin et Yin [57], il faut utiliser une même configuration de référence qui, dans le cas de Lin et Yin, correspond à l'état neutre du myocarde passif, voir chapitre 1. La comparaison entre les lois nécessite donc de déterminer l'état neutre de la loi de comportement homogénéisée. Pour ce faire, il est possible de procéder comme indiqué précédemment. On peut aussi se donner des vecteurs  $\mathbf{R}_R^{11}$ ,  $\mathbf{R}_R^{21}$ ,  $\mathbf{R}_R^{31}$  et  $\mathbf{G}_R^1$ ,  $\mathbf{G}_R^2$ ,  $\mathbf{G}_R^3$ , ce qui détermine la position des nœuds 1, 2 et 3 de la cellule de référence et de ses voisines, en déduire les longueurs des barres et les angles entre barres correspondants et prendre ces valeurs comme longueurs et angles neutres dans les lois de comportement. Ces choix assurent que les tensions et les moments correspondants à la géométrie définie sont nuls et donc l'état macroscopique défini par  $\mathbf{G}_R^1$ ,  $\mathbf{G}_R^2$  et  $\mathbf{G}_R^3$  est neutre.

### 3.3.5 Configuration de référence

Il a été souligné au chapitre 1 que l'expression d'une loi de comportement dépend de la configuration de référence utilisée pour déterminer le tenseur de déformation de Cauchy  $\mathbf{C}$ , voir paragraphe 1.1.3. Dans la littérature, la configuration de référence utilisée pour formuler les lois de comportement du myocarde est l'état neutre du myocarde passif, c'est la configuration adoptée par Lin et Yin [57]. Pour pouvoir mener des comparaisons avec des lois macroscopiques phénoménologiques, nous devons exprimer la loi de comportement homogénéisée en fonction de l'application linéaire tangente  $\mathbf{F}$  entre l'état neutre définissant la configuration de référence et la configuration déformée du milieu continu équivalent.

Soit  $\varphi$  la fonction donnant la position dans la configuration déformée d'un point matériel  $P$  de position  $X$  dans la configuration de référence, voir paragraphe 1.1.1. On rappelle que

$$\mathbf{F} = \nabla_X \varphi.$$

Au chapitre 2, nous avons utilisé des variables lagrangiennes curvilignes  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  et la position d'un point matériel dans une configuration quelconque est donnée par  $\mathbf{R}^0(\lambda)$ , voir paragraphe 2.2.2. La position d'un point matériel dans la configuration correspondant à l'état neutre pour ce point est notée  $\mathbf{R}_R^0(\lambda)$ . Quand la configuration de référence correspond à l'état neutre pour le point considéré, on a pour toute configuration déformée

$$\mathbf{R}^0(\lambda) = \varphi(\mathbf{R}_R^0(\lambda)),$$

et par dérivation on obtient

$$\mathbf{G}^i = \nabla_X \varphi \mathbf{G}_R^i = \mathbf{F} \mathbf{G}_R^i,$$

où  $\mathbf{G}^i = \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^i}$  et  $\mathbf{G}_R^i = \frac{\partial \mathbf{R}_R^0}{\partial \lambda^i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Pour obtenir la loi homogénéisée comme fonction de  $\mathbf{F}$ , il suffit donc, une fois l'état neutre de la loi déterminée, de résoudre le problème du paragraphe 3.3.3 avec comme donnée  $\mathbf{G}^i = \mathbf{F}\mathbf{G}_R^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

### 3.3.6 Energie de déformation élastique

Au paragraphe 2.3.1 du chapitre 2, nous avons montré que la loi de comportement homogénéisée est hyperélastique, c'est-à-dire qu'elle dérive d'une fonction  $W$  qui est la densité d'énergie de déformation élastique en coordonnées curvilignes  $\lambda$ . Pour un milieu continu hyperélastique, la donnée de  $W$  définit complètement la loi de comportement. C'est sous cette forme que Lin et Yin donnent leurs lois de comportement macroscopiques et c'est sous cette forme que nous comparons leurs lois avec la loi homogénéisée.

Les énergies de déformation des barres et des couples de barres du paragraphe 2.3.1 sont définies par

$$\forall l \in \mathbb{R}^+, \frac{dW^b}{dl}(l) = \mathcal{N}^{b0}(l), \quad (3.19)$$

$$\forall p \in ]-1, 1[, \frac{dW^c}{dp}(p) = -\mathcal{M}^{c0}(p). \quad (3.20)$$

Pour la loi polynomiale  $\sigma(\alpha) = k_1\alpha + k_2\alpha^2$  proposée par Zile et al., on obtient donc

$$W^b(l) = V_0 \left[ \frac{k_1}{2}\alpha^2 + \frac{k_2}{3}\alpha^3 \right], \quad \text{où } \alpha = \frac{l - l_0^b}{l_0^b}, \quad (3.21)$$

et pour la loi de comportement des moments (3.14) on a

$$W^c(p) = \frac{k_\theta}{2}(\theta - \theta_0^c)^2, \quad \text{où } \theta = \text{Arccos}(p) \text{ et } \theta_0^c = \text{Arccos}(p_0^c). \quad (3.22)$$

La densité d'énergie de déformation élastique  $W$  est donc dans ce cas d'après l'équation (2.75),

$$W(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3) = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} W^b(l^b(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)) + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} W^c(p^c(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)), \quad (3.23)$$

qui s'écrit donc dans ce cas

$$W = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} V_0 \left[ \frac{k_1}{2} \left( \frac{l^b - l_0^b}{l_0^b} \right)^2 + \frac{k_2}{3} \left( \frac{l^b - l_0^b}{l_0^b} \right)^3 \right] + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \frac{k_\theta}{2} (\theta^c - \theta_0^c)^2, \quad (3.24)$$

où les  $l^b$  et  $\theta^c$  sont des fonctions de  $\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3$  par l'intermédiaire de  $\mathbf{R}^{11}, \mathbf{R}^{21}, \mathbf{R}^{31}$ .

Pour mener la comparaison avec la densité d'énergie de déformation élastique proposée par Lin et Yin [57], il faut ramener  $W$  qui est la densité d'énergie par unité de volume en coordonnées curvilignes  $\lambda$  à une densité  $\tilde{W}$  par unité de volume de la configuration de référence correspondant ici à l'état neutre comme expliqué au paragraphe 3.3.3. On a

$$\tilde{W} = W / |\mathbf{G}_R^1, \mathbf{G}_R^2, \mathbf{G}_R^3|,$$

où  $|\mathbf{G}_R^1, \mathbf{G}_R^2, \mathbf{G}_R^3|$  est le produit mixte de  $\mathbf{G}_R^1, \mathbf{G}_R^2, \mathbf{G}_R^3$  définis au paragraphe 3.3.4.

### 3.3.7 Incompressibilité

Les lois de comportement du myocarde proposées dans la littérature sont toutes incompressibles. L'incompressibilité est due à la matrice extracellulaire essentiellement composée d'eau. Dans le modèle de réseau de cardiomyocytes décrit au chapitre 2, nous n'avons pas pris en compte cette matrice extracellulaire et la loi homogénéisée que nous avons obtenue n'a aucune raison d'être incompressible. Nous allons maintenant introduire de façon simplifiée la matrice extracellulaire dans le modèle pour obtenir une loi de comportement incompressible. Pour ce faire, nous nous basons sur des résultats obtenus par homogénéisation pour des problèmes analogues, Caillerie [17].

Nous supposons que le réseau de cardiomyocytes baigne dans un liquide visqueux incompressible. Il est peu raisonnable, qu'au cours des cycles de systoles et diastoles du myocarde, se produise un écoulement significatif du liquide extracellulaire relativement aux cardiomyocytes, cela revient à supposer en quelque sorte que le liquide suit le réseau de cardiomyocytes dans son mouvement. Nous supposons que les vitesses de déformation dans le liquide restent faibles et que les contraintes  $\sigma_l$  s'y résument à une compression uniforme :

$$\sigma_l = -p\mathbf{I}.$$

L'action du liquide extracellulaire sur les cardiomyocytes se limite dans ce cas à des forces de pression, les forces dues à la viscosité du liquide sont négligées. Comme les cardiomyocytes sont eux-mêmes incompressibles, nous pouvons supposer que la pression exercée par le liquide ne change pas leur comportement élastique, d'ailleurs notre modélisation des cardiomyocytes par des bâtonnets sans épaisseur exclut la prise en compte d'une pression fluide sur ces bâtonnets. Les hypothèses précédentes entraînent que le seul couplage mécanique existant entre le réseau de cardiomyocytes et le liquide extracellulaire est l'absence de mouvement relatif entre ces deux constituants du modèle mécanique. Cela signifie en particulier que le problème de déformation du réseau de cardiomyocytes peut être résolu comme s'il n'y avait pas de liquide. Dans ces conditions, le rôle du liquide se limite à deux aspects. D'une part interdire les déformations macroscopiques avec le changement de volume et cela en tous points du milieu continu équivalent puisqu'il n'y a pas d'écoulement du liquide relativement aux cardiomyocytes. D'autre part ajouter aux contraintes macroscopiques dues au réseau de cardiomyocytes une pression uniforme  $-p\mathbf{I}$ ,  $p$  étant le multiplicateur de Lagrange associé à l'incompressibilité.

Transposé à la cellule de répétitivité, le rôle du liquide se résume aussi aux deux aspects évoqués ci-dessus. Par conséquent, la loi de comportement incompressible homogénéisée que nous utilisons pour mener des comparaisons avec la loi de Lin et Yin se décrit de la façon suivante : Les contraintes macroscopiques  $\sigma$  se décomposent en la somme des contraintes de compression simple dues au liquide  $\sigma_l$  et des contraintes  $\sigma_m$  dues au réseau de cardiomyocytes

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \sigma_m.$$

Seul  $\sigma_m$  fait véritablement l'objet d'une loi de comportement qui est obtenue par la résolution du problème (3.15)-(3.16) où pour respecter l'incompressibilité macroscopique la sollicitation  $(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3)$  doit correspondre à une déformation conservant le volume, c'est-à-dire telle que

$$|\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3| = |\mathbf{G}_R^1, \mathbf{G}_R^2, \mathbf{G}_R^3|.$$

### 3.4 Données expérimentales macroscopiques

Lin et Yin ont proposé des lois de comportement pour le myocarde passif et le myocarde actif, voir [57]. Ces lois sont décrites dans le chapitre 1. Dans les deux états passif et actif du myocarde, certaines hypothèses ont été faites, comme l'hyperélasticité, l'incompressibilité et l'isotropie transverse où la direction privilégiée est la direction prédominante des fibres myocardiques. La loi de comportement est donnée par l'intermédiaire de la fonction énergie de déformation. Lin et Yin ont supposé que cette fonction ne dépend que de l'invariant  $I_1$  et de la quantité  $I_4$ , voir chapitre 1.

Pour le myocarde passif, ils ont choisi une fonction exponentielle :

$$W_{pas} = C_1(e^Q - 1), \quad \text{avec,} \quad Q = C_2(I_1 - 3)^2 + C_3(I_1 - 3)(I_4 - 1) + C_4(I_4 - 1)^2. \quad (3.25)$$

Les expériences ont été menées sur plusieurs spécimens de myocarde de lapin. Dans leur article Lin et Yin fournissent les constantes pour 7 spécimens différents (S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7) :

Spécimen	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
$C_1$ (g.cm <sup>-2</sup> )	1,01	2,42	9,86	2,92	2,62	1,67	6,85
$C_2$ (g.cm <sup>-2</sup> )	3,05	12,13	4,62	3,21	2,40	1,70	2,88
$C_3$ (g.cm <sup>-2</sup> )	-2,24	0,63	2,37	-2,60	-0,89	1,90	-0,76
$C_4$ (g.cm <sup>-2</sup> )	1,92	1,05	0,09	2,01	2,01	0,38	0,38

Cas du myocarde passif.

Les unités utilisées font que  $W$  s'exprime en gf.cm<sup>-2</sup> où gf signifie gramme-force, c'est la force subie par 1 gramme de matière dans le champ de pesanteur terrestre.

Pour pouvoir comparer la fonction densité d'énergie de déformation  $\tilde{W}$  (N.m<sup>-2</sup>) obtenue par la méthode d'homogénéisation avec les données expérimentales macroscopiques de Lin et

Yin, nous avons converti en  $\text{N.m}^{-2}$  les fonctions d'énergie proposées par Lin et Yin et qui sont exprimées en  $\text{gf.cm}^{-2}$  en utilisant la conversion :

$$1\text{gf.cm}^{-2} = 10^{-3} \times 9,81\text{N.cm}^{-2} = 10 \times 9,81\text{N.m}^{-2}.$$

Sur la Figure 3.3, on trace les énergies de déformation des 7 spécimens, exprimées en  $\text{N.m}^{-2}$ , en fonction du rapport d'extension de la fibre  $\lambda_f = I_4^{1/2}$ . On constate sur la Figure 3.3 que les énergies de déformation sont assez différentes d'un spécimen à l'autre.

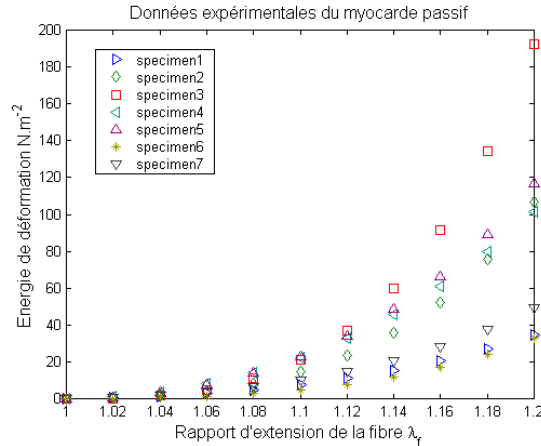


FIG. 3.3 – Les courbes des énergies passives proposées par Lin et Yin, [57].

### 3.5 Résultats numériques

La cellule de répétitivité choisie possède une direction privilégiée modélisant la direction d'une fibre cardiaque, voir Figure 3.4. Afin de comparer notre loi de comportement obtenue par homogénéisation avec des résultats expérimentaux, nous avons fait des essais numériques de traction uniaxiale le long de la direction privilégiée de la cellule élémentaire qui représente la direction de la fibre cardiaque. On désigne par  $\lambda_f$  le rapport d'extension dans la direction de la fibre,  $\lambda_{cf}$  le rapport d'extension dans la direction transverse à celle de la fibre et se trouvant dans la couche contenant la fibre, et  $\lambda_{nf}$  le rapport d'extension dans la direction orthogonale à la couche contenant la fibre.

Nous avons mené des essais numériques pour les formes polynomiale ( $\sigma = 300\alpha + 1020\alpha^2$ ) et exponentielle Eq2 ( $\sigma = 14,5(e^{14,5\alpha} - 1)$ ) de la loi de comportement des cardiomyocytes proposée par Zile et al. [111].

Le choix de la rigidité des moments étant arbitraire, nous avons étudié les différentes lois de comportement obtenues pour une gamme de valeurs de cette rigidité afin de trouver celle qui coïncide le plus avec les résultats expérimentaux.

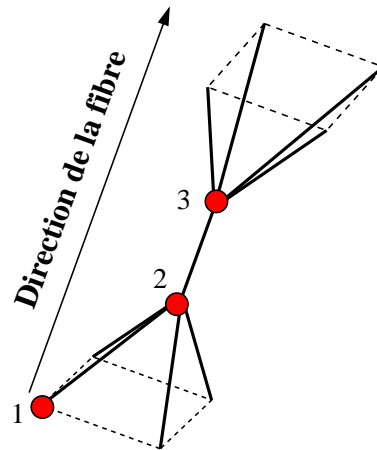


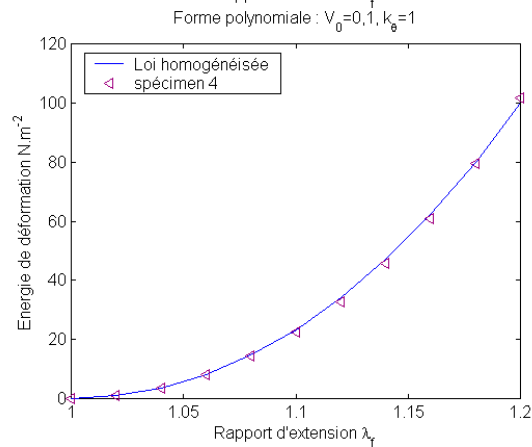
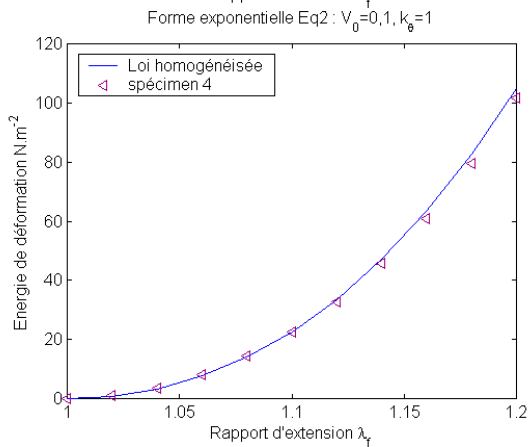
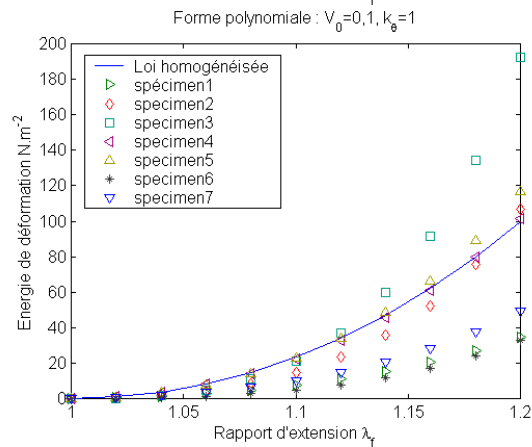
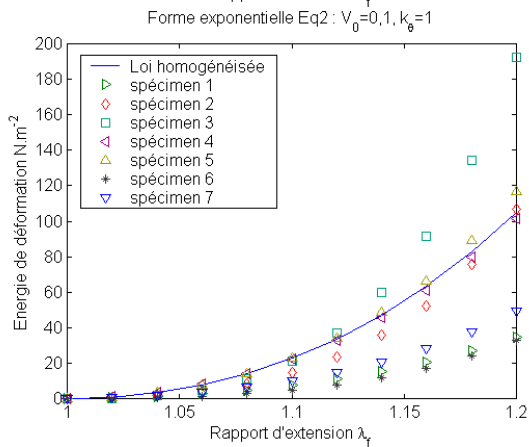
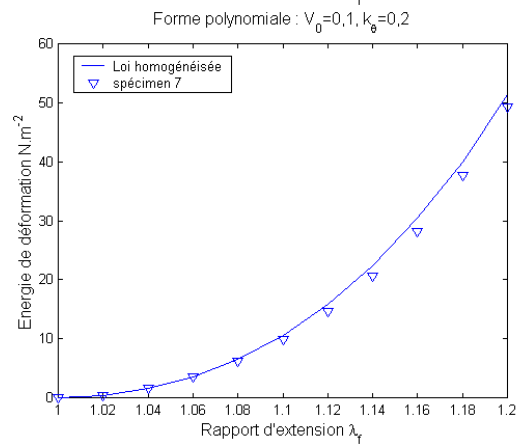
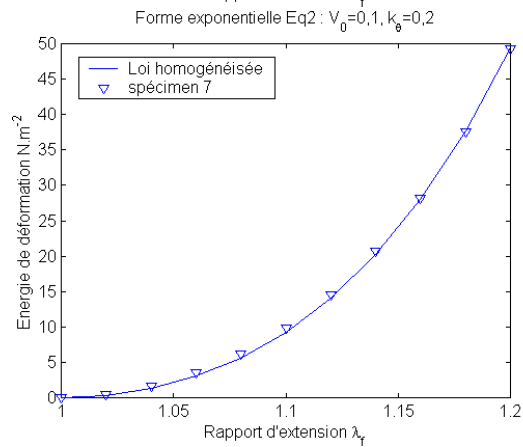
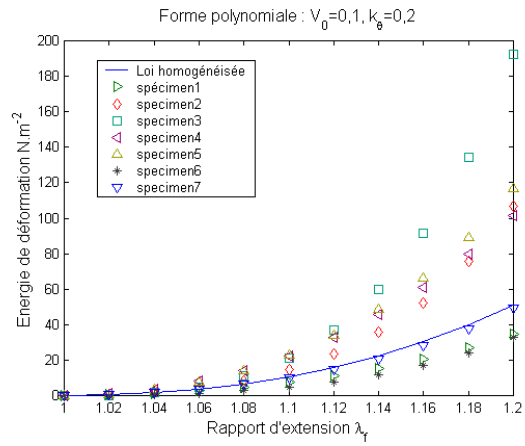
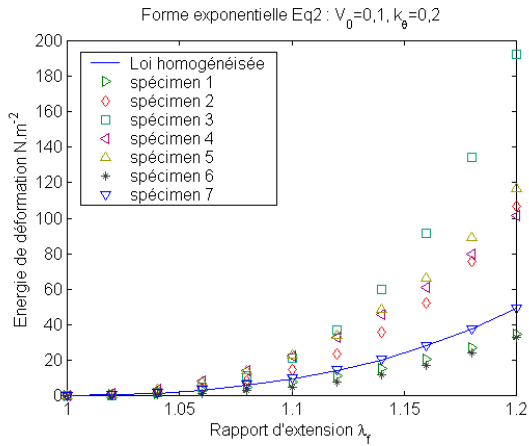
FIG. 3.4 – La direction prédominante d’une cellule de répétitivité modélise celle d’une fibre cardiaque.

Les tractions uniaxiales que nous avons faites sont en incompressible, c’est-à-dire, nous avons fait varier  $\lambda_f$  et pris  $\lambda_{cf} = \lambda_{nf} = 1/\sqrt{\lambda_f}$  ce qui correspond à tenir un volume constant pendant la traction. Voir paragraphe 3.3.7. Les graphes qui apparaissent dans la suite correspondent à l’énergie de déformation en fonction du rapport d’extension de la fibre  $\lambda_f$ . La courbe en ligne continue représente le résultat de la méthode d’homogénéisation, et les symboles correspondent aux données expérimentales.

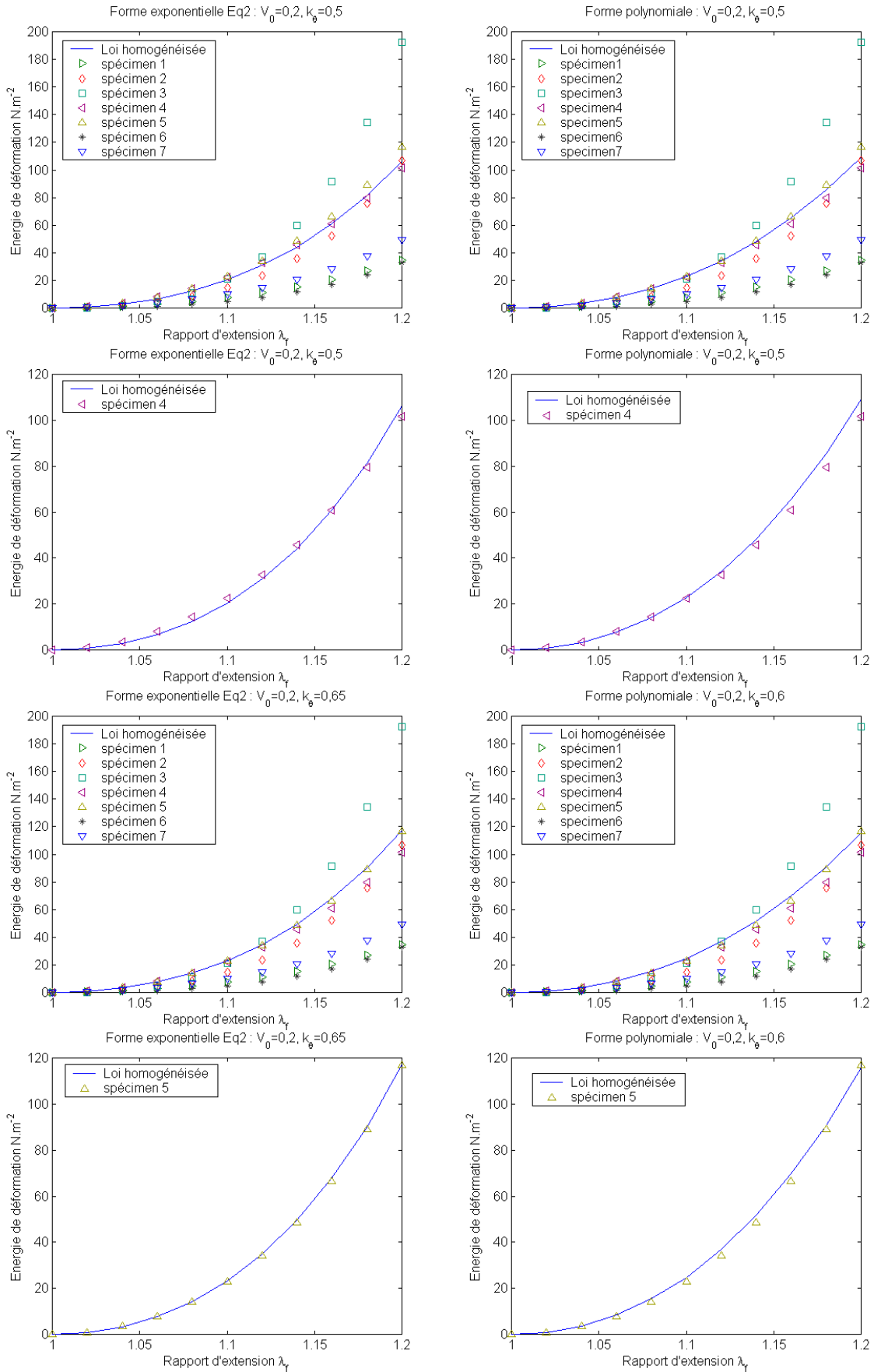
### 3.6 Interprétation des résultats

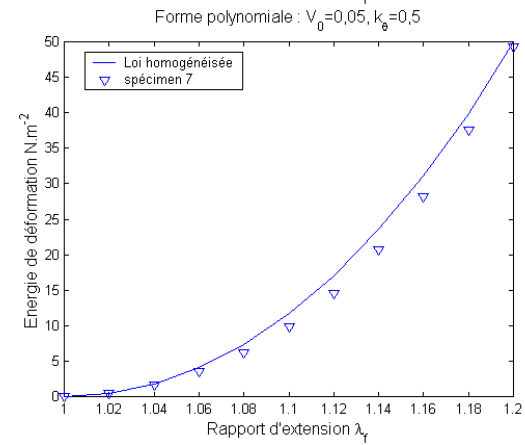
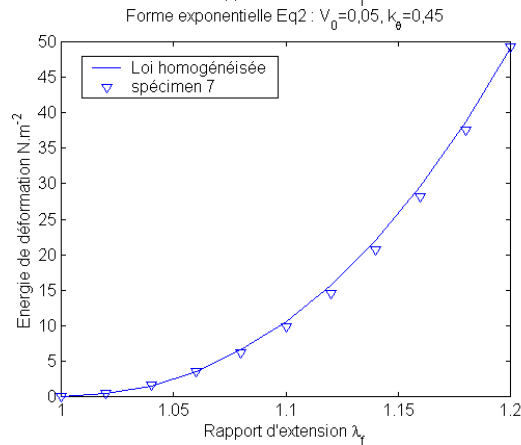
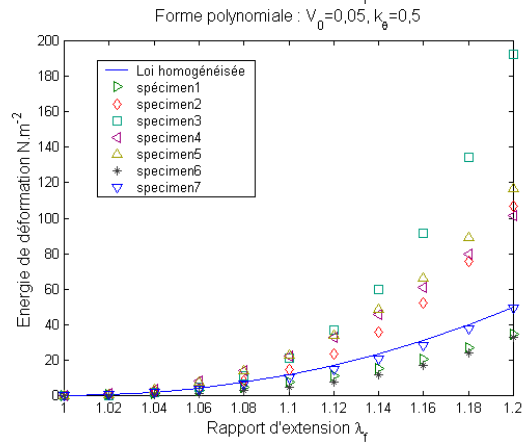
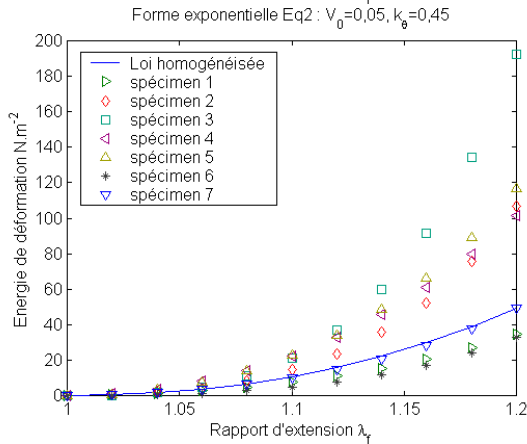
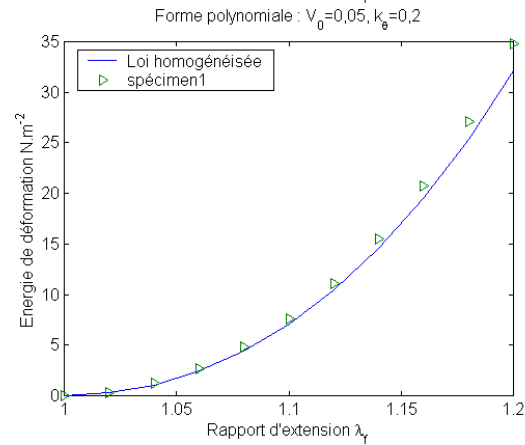
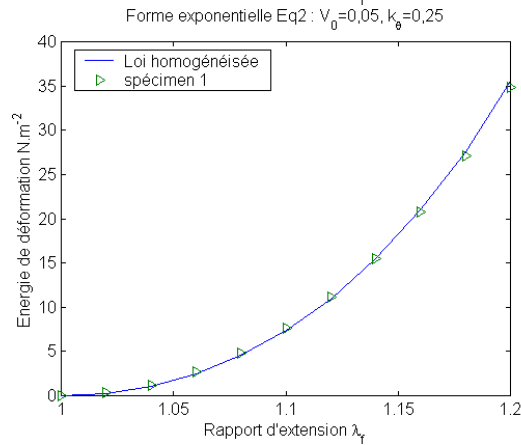
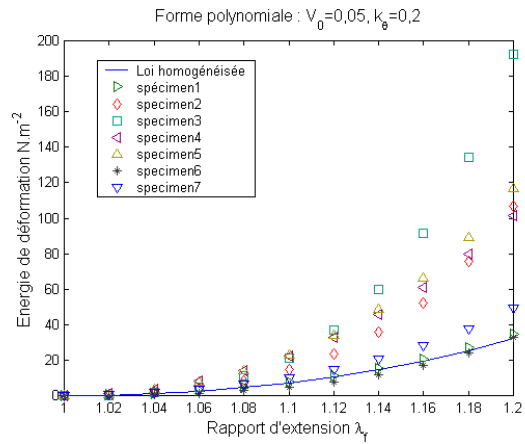
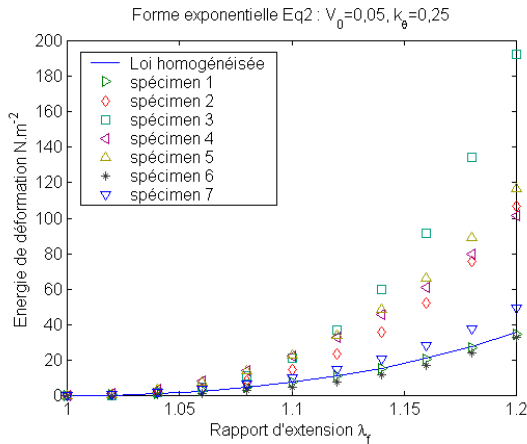
Pour une même valeur de la rigidité des moments, les lois homogénéisées obtenues pour les deux formes polynomiale et exponentielle Eq2 de la loi de comportement du cardiomyocyte sont peu différentes. Ce résultat est attendu parce que au niveau du cardiomyocyte, ces deux formes sont aussi peu différentes, voir Figure 3.2. D’autre part, on remarque que pour des choix différents de la rigidité des moments nous avons pu approcher les données macroscopiques des différents échantillons (différents spécimens) à l’état passif.

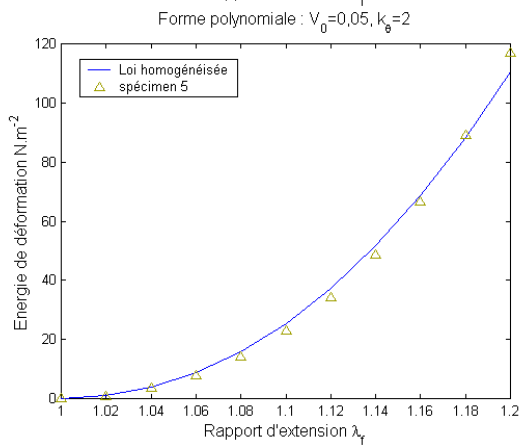
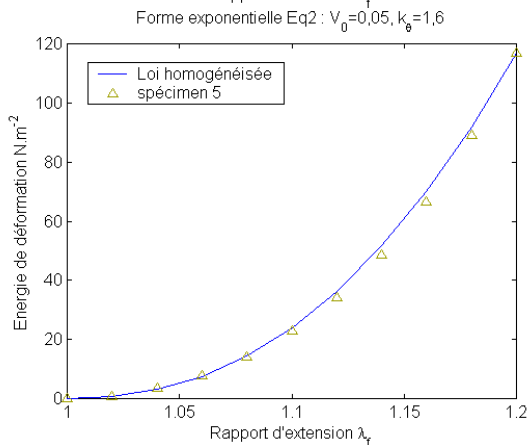
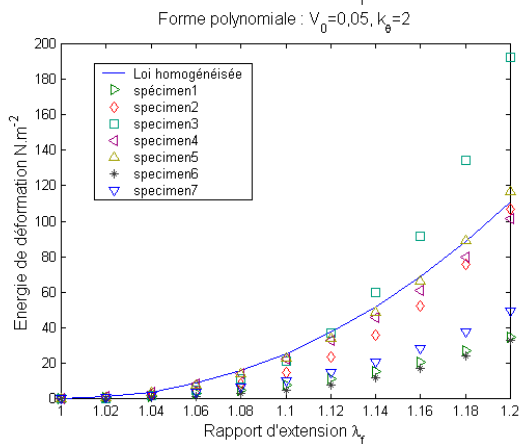
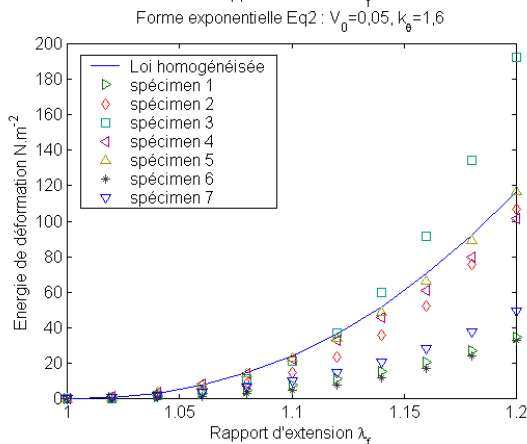
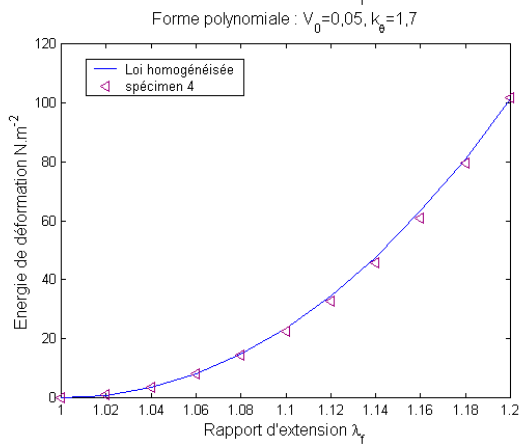
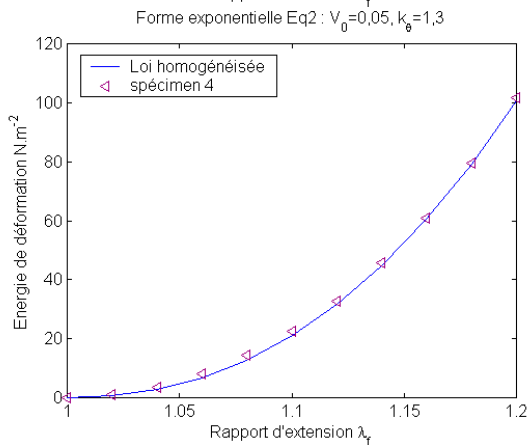
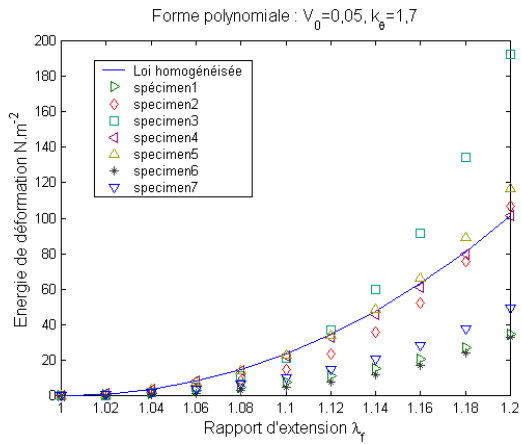
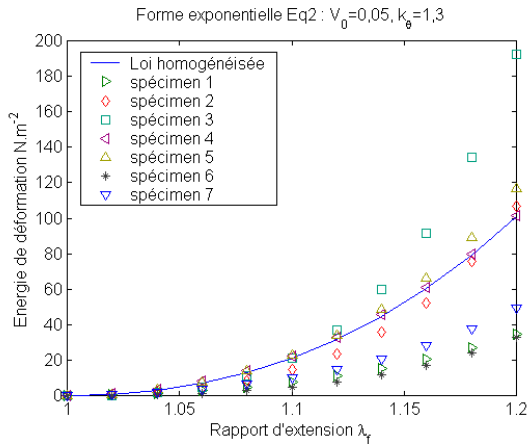
Pour mener une comparaison avec les lois phénoménologiques proposées par Lin et Yin pour le muscle à l’état actif, il faudrait disposer de données expérimentales sur le comportement en traction compression de cardiomyocytes isolés activés. En l’absence de ces données, il serait envisageable d’essayer de modéliser l’activation des cardiomyocytes en modifiant leurs longueurs neutres tout en gardant la forme (3.8) de la loi en traction compression et, éventuellement, en changeant les raideurs des moments.

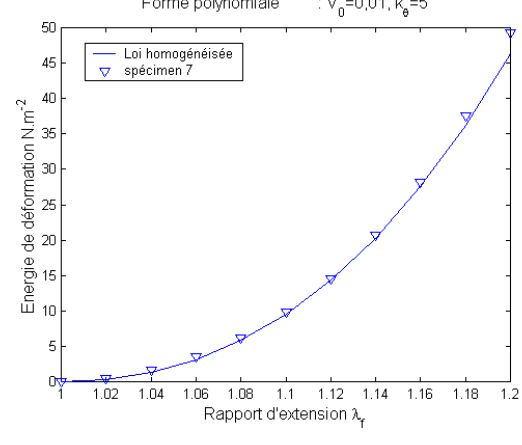
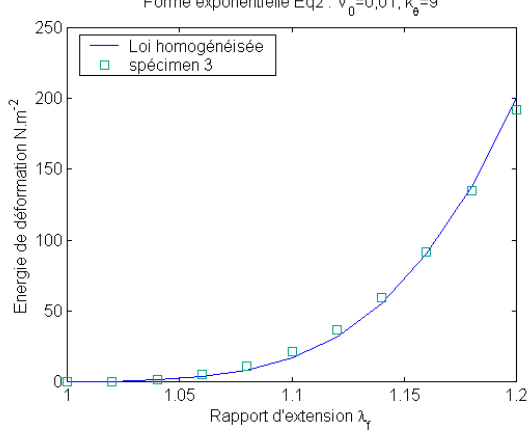
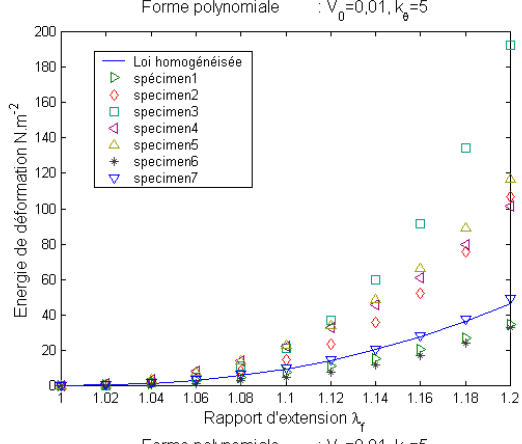
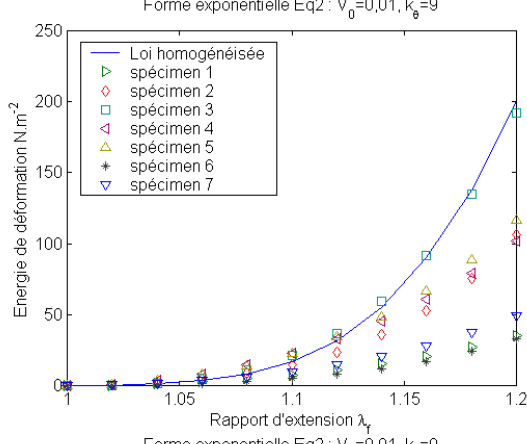
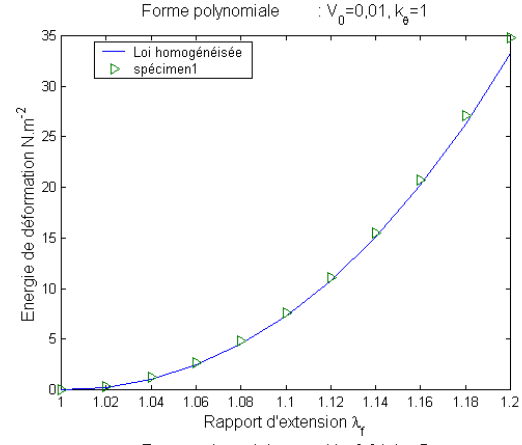
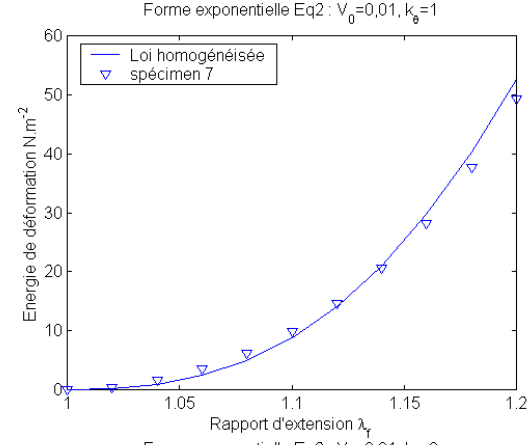
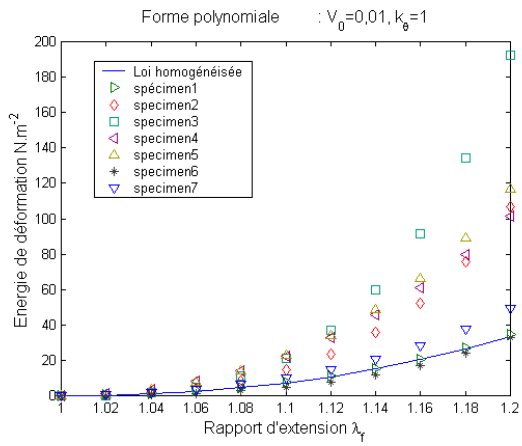
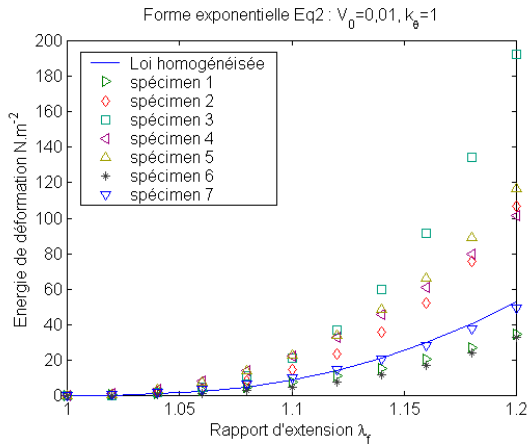














# Chapitre 4

## Application aux nanotubes de carbone

### Introduction

Les nanotubes de carbone, que nous désignerons par NTC, sont des macromolécules cylindriques de carbone qui peuvent présenter une ou plusieurs couches d'atomes, ils sont dits monofeuillets ou multifeuillets. En raison de leurs propriétés physiques remarquables, tant au plan électronique, thermique que mécanique, les nanotubes de carbone sont l'objet d'une recherche importante.

Un NTC monofeuillet peut être vu comme une feuille de graphite, ou graphène, enroulée sur elle-même en un cylindre fermé par une demi-sphère à chaque extrémité, voir Figure 4.1. Une feuille de graphite est formée d'atomes de carbone liés par des liaisons atomiques et arrangés de manière à former un réseau d'anneaux hexagonaux. Quand une feuille de graphite est enroulée sur elle-même, l'arrangement de carbone devient très rigide, de haute résistance axiale et de forte flexibilité. La littérature fait mention de module d'Young de l'ordre de 1 TPa pour des NTC monofeuillets.

Depuis leur première découverte en 1991 par Ijima [45], de nombreux travaux tant expérimentaux que théoriques ont été développés pour déterminer la structure des NTC, pour mesurer et pour calculer leurs propriétés physiques. Les mesures sont rendues très délicates par la faible taille des nanotubes. Des mesures expérimentales ont été réalisées à partir de la fréquence de vibration thermique dans un microscope électronique en transmission, voir Treacy et al. [94], Krishnan et al. [51]. D'autres mesures ont été obtenues à l'aide d'un microscope à force atomique, voir par exemple Wong et al. [100], Yu et al. [105], [106].

Quant aux études théoriques, la dynamique moléculaire a été utilisée avec différentes formes du potentiel interatomique, voir Robertson et al. [77], Yakobson et al. [101], Cornwell et Wille [24]. D'autre part, Tu et Ou-Yang [96] ont obtenu l'expression complète de l'énergie d'un nanotube déformé à partir du modèle d'approximation de la densité locale proposé par Lenosky et al. [55], et ils ont ensuite exprimé cette énergie en élasticité classique. Récemment, Zhou

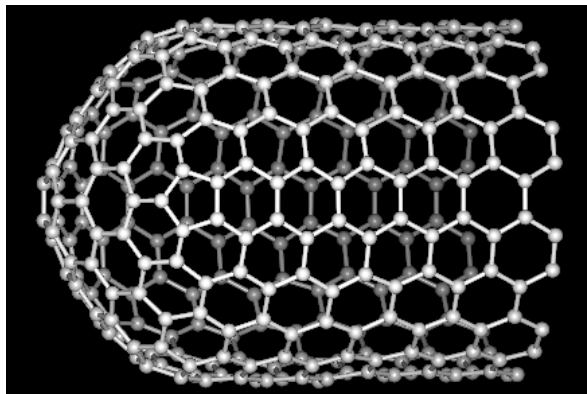


FIG. 4.1 – Un morceau d'un nanotube faisant apparaître un cylindre fermé par une demi-sphère à l'une de ses extrémités.

et al. [110] ont mené une étude théorique basée sur la combinaison linéaire des orbitales atomiques et du faisceau orbital moléculaire. Il y a, cependant, très peu d'études en mécanique des milieux continus des NTC parce qu'on pense généralement que les théories de mécanique des milieux continus ne sont pas applicables à l'échelle atomique ou à celle du nanomètre. Dans ce cadre, les propriétés élastiques des NTC monofeuillets et multifeuillets sont obtenues en général en couplant la mécanique quantique et la théorie élastique classique. La variation des énergies électroniques microscopiques provoquées par les déformations de la structure est d'abord calculée, ensuite, l'énergie de déformation correspondante en théorie élastique classique est écrite afin d'obtenir les constantes élastiques telles que le coefficient de Poisson et le module d'Young. Dans les études en mécanique des milieux continus, un NTC est modélisé soit par une coque cylindrique (par exemple, Yakobson et al. [101]), soit par une poutre (Liu et al. [58]), soit par un treillis (Odegard et al. [65]). Une étude de Zhou et al. [109] basée sur l'élasticité des milieux continus a permis de calculer l'énergie de déformation d'un NTC monofeuillet directement à partir de la structure de bande électronique des atomes sans introduire de potentiel empirique. L'épaisseur du nanotube est calculée de la bande des électrons et le module d'Young est obtenu en considérant à la fois l'énergie de répulsion entre les ions et la dépendance de l'énergie électronique en la longueur de liaison. Récemment, Zhang et al. [107] ont proposé un modèle de milieu continu à l'échelle du nanomètre incorporant directement le potentiel interatomique dans le modèle. Ils ont déduit la densité d'énergie de déformation du milieu continu de l'énergie stockée dans les liaisons atomiques en moyennant sur les orientations et la distribution des liaisons. Ils se sont basés sur les potentiels interatomiques pour le carbone de Tersoff [91] et Brenner [13]. Ensuite, Zhang et al. [108] ont généralisé cette théorie de milieu continu à l'échelle du nanomètre sans faire d'hypothèses sur le potentiel d'interaction et sur la fonction densité de liaisons.

Des questions se sont posées sur l'applicabilité de la théorie des milieux continus pour interpréter les réponses mécaniques des nanotubes. Govindjee et Sackman [36] ont examiné la validité de l'utilisation des modèles de coques et de poutres élastiques. Ils ont montré que, pour qu'un modèle de poutre en flexion soit valide, il faut que le nanotube ait un grand nombre de

couches afin de supposer que la section est un milieu continu. Récemment, Harik et al. [39] ont identifié quatre classes pour les modèles des NTC : les modèles de coque mince et épaisse, le modèle de coque avec un rapport d'aspect très grand (le rapport de la longueur du nanotube sur son rayon), et le modèle de poutre.

Nous avons abordé une étude théorique des propriétés élastiques des NTC en utilisant la technique d'homogénéisation que nous avons développée dans le cadre de la modélisation cardiaque. En effet, nous avons modélisé le réseau de liaisons de carbone dans les feuilles de graphite par un treillis bidimensionnel périodique de barres élastiques liées entre elles par leurs extrémités atomiques. Les interactions carbone-carbone sont modélisées par des tensions élastiques et la variation angulaire entre deux liaisons partageant la même extrémité est modélisée par des moments. Tout d'abord nous avons étudié le modèle en grandes déformations et puis nous nous sommes intéressés aux déformations en petits déplacements. Dans la deuxième modélisation, nous avons obtenu la solution analytique du système d'autoéquilibre ainsi que les expressions explicites du module d'Young et du coefficient de Poisson en fonction des rigidités des tensions et des moments, et de la longueur de liaison atomique.

Il est à souligner que notre méthode n'est pas limitée aux NTC monofeuillets, elle peut aussi être appliquée à d'autres nanostructures une fois connus le potentiel interatomique et la structure atomique du matériau.

## 4.1 Description géométrique et mécanique d'un graphène

### 4.1.1 Géométrie du graphène et configuration de référence

La structure dont nous cherchons un modèle continu équivalent n'est pas un nanotube de carbone, c'est la structure bidimensionnelle appelée graphène considérée par Odegard et al. [65] dont la configuration neutre (configuration d'équilibre en l'absence de chargement) est un plan. Dans la configuration neutre, que nous prendrons par la suite comme configuration de référence, les atomes de carbone sont situés aux nœuds d'un réseau hexagonal dont les côtés mesurent 0,14 nm. Sur la Figure 4.2, on peut voir que le réseau hexagonal peut être généré par la répétition périodique suivant les vecteurs  $\mathbf{y}^1$  et  $\mathbf{y}^2$  d'une cellule élémentaire constituée de 2 atomes de carbone. En adoptant la numérotation des atomes de carbone  $\tilde{n} = (n, v^1, v^2)$  décrite dans la section 2.2.1 où  $(v^1, v^2)$  numérote les cellules élémentaires et  $n$  l'atome dans la cellule, nous voyons que la position des atomes dans l'état neutre du graphène sont données par

$$\mathbf{R}_R(\tilde{n}) = v^1 \mathbf{y}^1 + v^2 \mathbf{y}^2 + \mathbf{R}_R^n. \quad (4.1)$$

Les vecteurs de base  $\mathbf{i}^1$  et  $\mathbf{i}^2$  étant ceux de la Figure 4.2, nous avons  $\mathbf{y}^i = r \mathbf{Y}^i$  avec

$$\mathbf{Y}^1 = \sqrt{3} \mathbf{i}^1 \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i}^1 + \frac{3}{2} \mathbf{i}^2, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{R}_R^1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_R^2 = r \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i}^1 + \frac{1}{2} \mathbf{i}^2 \right), \quad (4.3)$$



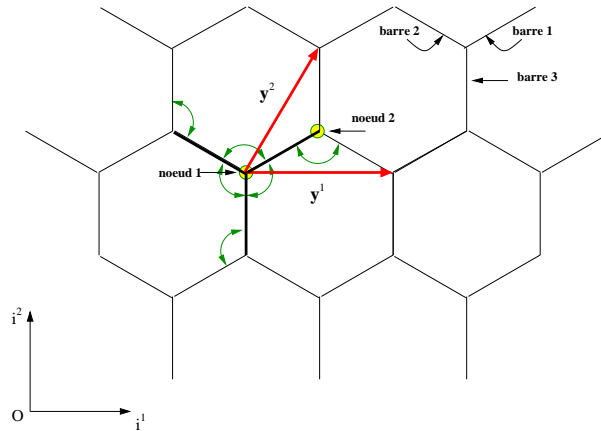


FIG. 4.2 – Treillis modélisant un graphène. La période élémentaire générant le treillis est représentée en gras. Elle consiste en deux nœuds, trois barres et six couples de barres.

où  $r = 0,14$  nm.

#### 4.1.2 Modèle mécanique du graphène

Nous utilisons des données dues à Allinger et al. [1] sur la rigidité des liaisons atomiques et sur la rigidité de la variation angulaire entre deux liaisons partageant un même atome. Ces données ont été utilisées par Odegard et al. [65] qui ont modélisé la feuille de graphite, comme nous l'avons fait, par un treillis de barres élastiques. Dans leur modèle, la variation angulaire entre deux liaisons atomiques partageant un même atome n'a pas été modélisée par des moments. Pour cela, ils ont introduit dans le treillis de nouvelles barres qui ont des propriétés mécaniques différentes de celles modélisant les liaisons atomiques. Notre méthode d'homogénéisation permet de prendre en compte sans le modifier le modèle de Allinger et al. [1].

Dans le modèle mécanique proposé par Allinger et al. [1], la tension  $N$  d'une liaison interatomique est donnée en fonction de la distance interatomique  $l$  par

$$N = 652(l - r), \quad (4.4)$$

et l'intensité du couple entre deux liaisons partageant un même atome est

$$M = 8,76 \times 10^{-19} \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \left( \text{Arccos}(p) - \frac{2\pi}{3} \right), \quad (4.5)$$

où  $p$  est le produit scalaire des vecteurs unitaires des deux liaisons.

Les forces sont mesurées en Newton, les longueurs en mètre, les moments en N.m.

Avec le choix de la loi de comportement du moment ci-dessus, il est exclu d'avoir de couples formés de deux barres alignées ( $p \neq \pm 1$ ). Ce choix n'est pas restrictif dans le cas des nanotubes

parce qu'il semble physiquement impossible d'atteindre une telle situation, c'est-à-dire d'aligner trois atomes de carbones liés entre eux par deux liaisons atomiques.

### 4.1.3 Description et numérotation des éléments du graphène

Compte tenu de la modélisation mécanique du graphène décrite dans la section 4.1.2, les éléments du graphène sont les atomes de carbone et les liaisons entre carbone, ce sont les mêmes éléments que ceux pris en compte au chapitre 2. Pour mettre en œuvre la méthode d'homogénéisation de ce chapitre, nous devons décrire la cellule élémentaire (ou cellule de répétitivité) du graphène conformément au système décrit dans la section 2.2.1.

La cellule n'est pas un hexagone, elle rassemble les éléments qui, par répétition spatiale, génèrent la structure de la feuille de graphite, voir Figure 4.2. Dans notre étude, nous choisissons la cellule élémentaire définie sur la Figure 4.2. Cette cellule contient deux nœuds, trois barres et six couples de barres dont les numéros sont donnés dans les tableaux suivants :

Tableau 1

$b$	1	2	3
$O_R(b)$	1	1	1
$E_R(b)$	2	2	2
$\delta^1(b)$	0	-1	0
$\delta^2(b)$	0	0	-1

Numérotation des barres.

Tableau 2

$c$	1	2	3	4	5	6
$P_R(c)$	2	3	1	2	3	1
$D_R(c)$	3	1	2	3	1	2
$\gamma^1(c)$	0	0	0	-1	0	1
$\gamma^2(c)$	0	0	0	1	-1	0

Numérotation des couples de barres.

Voir chapitre 2 pour les notations et la façon de décrire la "topologie" d'une cellule élémentaire. Nous avons donc :

$$\mathcal{N}_{\mathcal{R}} = \{1, 2\}, \quad \mathcal{B}_{\mathcal{R}} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{R}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

### 4.1.4 Application de l'homogénéisation au graphène

Ainsi qu'il est expliqué au chapitre 2, la technique des développements asymptotiques de l'homogénéisation suppose qu'on étudie une suite de structures paramétrée par  $\varepsilon$ .

Il est nécessaire en particulier de préciser la dépendance vis-à-vis de  $\varepsilon$  des lois de comportement pour les tensions et les moments de la suite de structures que nous considérons dans le processus d'homogénéisation.

En reprenant en dimension 2 l'argument développé dans la section 2.2.2, nous choisissons la loi de comportement des tensions de façon à ce qu'elle soit d'ordre  $\varepsilon$  :

$$\mathcal{N}^{\varepsilon \tilde{b}}(l) = k_l(l - \varepsilon L), \quad (4.6)$$

où  $L$  est une longueur de référence.

De même, pour respecter les ordres de grandeur relatifs entre tensions et moments nous choisissons

$$\mathcal{M}^{\varepsilon\tilde{c}}(p) = \varepsilon^2 k_p \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \left( \text{Arccos}(p) - \frac{2\pi}{3} \right). \quad (4.7)$$

Les développements (2.32) et (2.33) deviennent

$$\mathcal{N}^{\varepsilon\tilde{b}}(l^{\varepsilon\tilde{b}}) = \varepsilon k_l (l^{b0} - L) + \varepsilon^2 [\dots] + \dots, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{M}^{\varepsilon\tilde{c}}(p^{\varepsilon\tilde{c}}) = \varepsilon^2 k_p \frac{1}{\sqrt{1-(p^{c0})^2}} \left( \text{Arccos}(p^{c0}) - \frac{2\pi}{3} \right) + \varepsilon^3 [\dots] + \dots. \quad (4.9)$$

Les lois de comportement (2.71) intervenant dans le problème sur la cellule de répétitivité de la section 2.2.4 sont donc

$$\mathcal{N}^{b0}(l) = k_l (l - L), \quad (4.10)$$

$$\mathcal{M}^{c0}(p) = k_p \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \left( \text{Arccos}(p) - \frac{2\pi}{3} \right). \quad (4.11)$$

Par cohérence avec les ordres de grandeur choisis pour les tensions et les moments, nous choisissons des efforts extérieurs d'ordre 2 par rapport à  $\varepsilon$  :

$$\mathbf{f}^{\varepsilon\tilde{n}} = \varepsilon^2 \mathbf{f}^{e/n}(\lambda^\varepsilon). \quad (4.12)$$

## 4.2 Modélisation en grandes transformations

### 4.2.1 Loi de comportement du milieu homogénéisé

La loi de comportement est obtenue en résolvant le problème sur une cellule élémentaire décrit dans la section 2.2.4. Nous rappelons ici l'équation (2.64) :  $\forall \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^3, n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ ,

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0} \mathbf{e}^{b0} \cdot \Delta \mathbf{v}^b + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{1}{l^D} \mathbf{e}^D) \cdot \Delta \mathbf{v}^D - \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{1}{l^P} \mathbf{e}^P) \cdot \Delta \mathbf{v}^P = 0, \quad (4.13)$$

avec  $\Delta \mathbf{v}^b = \mathbf{v}^{E_R(b)} - \mathbf{v}^{O_R(b)}$ ,  $\Delta \mathbf{v}^P = \Delta \mathbf{v}^{P_R(c)}$ , et  $\Delta \mathbf{v}^D = \Delta \mathbf{v}^{D_R(c)}$ .

D'après les Tableaux 1 et 2, on remarque que  $\Delta \mathbf{v}^b = \Delta \mathbf{v}^P = \Delta \mathbf{v}^D = \mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1$ . Par suite, la formulation faible (4.13) de l'équilibre se ramène à l'équation

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0} \mathbf{e}^{b0} + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0} \wedge \left( \frac{1}{l^D} \mathbf{e}^D - \frac{1}{l^P} \mathbf{e}^P \right) = 0. \quad (4.14)$$

Compte tenu de la description de la cellule élémentaire du graphène décrite dans les Tableaux 1 et 2, les vecteurs  $\mathbf{B}^{b0}$  définis par (2.21), on a

$$\mathbf{B}^{10} = \mathbf{R}^{21} - \mathbf{R}^{11}, \quad \mathbf{B}^{20} = \mathbf{R}^{21} - \mathbf{R}^{11} - \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^1}, \quad \mathbf{B}^{30} = \mathbf{R}^{21} - \mathbf{R}^{11} - \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda^2}. \quad (4.15)$$

On constate que les vecteurs  $\mathbf{R}^{11}$  et  $\mathbf{R}^{21}$  n'interviennent dans les vecteurs  $\mathbf{B}^{b0}$  que par  $\mathbf{U} = \mathbf{R}^{21} - \mathbf{R}^{11}$ . Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{10} &= \mathbf{M}^{40} = \mathcal{M}^{10}(p^{10}) \mathbf{e}^{20} \wedge \mathbf{e}^{30}, \\ \mathbf{M}^{20} &= \mathbf{M}^{50} = \mathcal{M}^{20}(p^{20}) \mathbf{e}^{30} \wedge \mathbf{e}^{10}, \\ \mathbf{M}^{30} &= \mathbf{M}^{60} = \mathcal{M}^{30}(p^{30}) \mathbf{e}^{10} \wedge \mathbf{e}^{20}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

La loi de comportement macroscopique est obtenue en résolvant le problème suivant :

Etant donnés  $\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2$ , trouver  $\mathbf{U}$  tel que

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_R} N^{b0} \mathbf{e}^{b0} + 2 \left[ \mathbf{M}^{10} \wedge \left( \frac{\mathbf{e}^{30}}{l^{30}} - \frac{\mathbf{e}^{20}}{l^{20}} \right) + \mathbf{M}^{20} \wedge \left( \frac{\mathbf{e}^{10}}{l^{10}} - \frac{\mathbf{e}^{30}}{l^{30}} \right) + \mathbf{M}^{30} \wedge \left( \frac{\mathbf{e}^{20}}{l^{20}} - \frac{\mathbf{e}^{10}}{l^{10}} \right) \right] = 0,$$

$$N^{b0} = k_l(l^{b0} - L),$$

$$\mathbf{M}^{c0} = k_p \frac{1}{\sqrt{1 - (p^{c0})^2}} \left( \text{Arccos}(p^{c0}) - \frac{2\pi}{3} \right) \mathbf{e}^{P_R(c)0} \wedge \mathbf{e}^{D_R(c)0}, \quad (4.17)$$

$$l^{b0} = \|\mathbf{B}^{b0}\|, \quad \mathbf{e}^{b0} = \frac{\mathbf{B}^{b0}}{l^{b0}}, \quad p^{c0} = \mathbf{e}^{P_R(c)0} \cdot \mathbf{e}^{D_R(c)0},$$

$$\mathbf{B}^{10} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{B}^{20} = \mathbf{U} - \mathbf{G}^1, \quad \mathbf{B}^{30} = \mathbf{U} - \mathbf{G}^2.$$

Une fois déterminé  $\mathbf{U}$ , on calcule les vecteurs de contraintes  $\mathbf{S}^{10}$  et  $\mathbf{S}^{20}$  par (2.47) qui s'écrit dans le cas du graphène étudié

$$\mathbf{S}^{10} = -N^{20} \mathbf{e}^{20} + \frac{2}{l^{20}} (\mathbf{M}^{10} - \mathbf{M}^{30}) \wedge \mathbf{e}^{20}, \quad \mathbf{S}^{20} = -N^{30} \mathbf{e}^{30} + \frac{2}{l^{30}} (\mathbf{M}^{20} - \mathbf{M}^{10}) \wedge \mathbf{e}^{30}. \quad (4.18)$$

On peut aussi calculer le tenseur de contraintes de Cauchy équivalent par (2.49) ce qui s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{g} (\mathbf{S}^{10} \otimes \mathbf{G}^1 + \mathbf{S}^{20} \otimes \mathbf{G}^2), \quad \text{où } g = \|\mathbf{G}^1 \wedge \mathbf{G}^2\|. \quad (4.19)$$

### 4.2.2 Dépendance de la loi macroscopique vis-à-vis de $L$

**Proposition 4.1** *La solution  $\mathbf{U}$  du problème (4.17) pour la sollicitation  $\mathbf{G} = L\tilde{\mathbf{G}} = (L\tilde{\mathbf{G}}^1, L\tilde{\mathbf{G}}^2)$  est  $\mathbf{U} = L\tilde{\mathbf{U}}$  où  $\tilde{\mathbf{U}}$  est solution du problème*

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_R} \tilde{N}^{b0} \mathbf{e}^{b0} + 2 \left[ \tilde{\mathbf{M}}^{10} \wedge \left( \frac{\mathbf{e}^{30}}{\tilde{l}^{30}} - \frac{\mathbf{e}^{20}}{\tilde{l}^{20}} \right) + \tilde{\mathbf{M}}^{20} \wedge \left( \frac{\mathbf{e}^{10}}{\tilde{l}^{10}} - \frac{\mathbf{e}^{30}}{\tilde{l}^{30}} \right) + \tilde{\mathbf{M}}^{30} \wedge \left( \frac{\mathbf{e}^{20}}{\tilde{l}^{20}} - \frac{\mathbf{e}^{10}}{\tilde{l}^{10}} \right) \right] = 0,$$

$$\tilde{N}^{b0} = k_l(\tilde{l}^{b0} - 1),$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{c0} = \frac{k_p}{L^2} \frac{1}{\sqrt{1 - (p^{c0})^2}} (\text{Arccos}(p^{c0}) - \frac{2\pi}{3}) \mathbf{e}^{P_R(c)0} \wedge \mathbf{e}^{D_R(c)0}, \quad (4.20)$$

$$\tilde{l}^{b0} = \|\tilde{\mathbf{B}}^{b0}\|, \quad \mathbf{e}^{b0} = \frac{\tilde{\mathbf{B}}^{b0}}{\tilde{l}^{b0}}, \quad p^{c0} = \mathbf{e}^{P_R(c)0} \cdot \mathbf{e}^{D_R(c)0},$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^{10} = \tilde{\mathbf{U}}, \quad \tilde{\mathbf{B}}^{20} = \tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{G}}^1, \quad \tilde{\mathbf{B}}^{30} = \tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{G}}^2.$$

De plus la réponse  $(\mathbf{S}^{10}, \mathbf{S}^{20})$  à la sollicitation  $\mathbf{G} = (\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2)$  est égale à  $(L\tilde{\mathbf{S}}^{10}, L\tilde{\mathbf{S}}^{20})$  où  $(\tilde{\mathbf{S}}^{10}, \tilde{\mathbf{S}}^{20})$  est la réponse à la sollicitation  $\tilde{\mathbf{G}} = (\tilde{\mathbf{G}}^1, \tilde{\mathbf{G}}^2)$ , c'est-à-dire

$$\tilde{\mathbf{S}}^{10} = -\tilde{N}^{20} \mathbf{e}^{20} + \frac{2}{\tilde{l}^{20}} (\tilde{\mathbf{M}}^{10} - \tilde{\mathbf{M}}^{30}) \wedge \mathbf{e}^{20}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{20} = -\tilde{N}^{30} \mathbf{e}^{30} + \frac{2}{\tilde{l}^{30}} (\tilde{\mathbf{M}}^{20} - \tilde{\mathbf{M}}^{10}) \wedge \mathbf{e}^{30}. \quad (4.21)$$

**Démonstration.** Soit  $\tilde{\mathbf{U}}$  la solution du problème (4.20), on pose  $\mathbf{U} = L\tilde{\mathbf{U}}$ ,  $l^{b0} = L\tilde{l}^{b0}$ ,  $N^{b0} = L\tilde{N}^{b0}$ ,  $\mathbf{M}^{c0} = L^2\tilde{\mathbf{M}}^{c0}$ . On a alors

$$\mathbf{B}^{10} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{B}^{20} = \mathbf{U} - \mathbf{G}^1, \quad \mathbf{B}^{30} = \mathbf{U} - \mathbf{G}^2,$$

$$l^{b0} = \|\mathbf{B}^{b0}\|, \quad \mathbf{e}^{b0} = \frac{\mathbf{B}^{b0}}{l^{b0}}, \quad p^{c0} = \mathbf{e}^{P_R(c)0} \cdot \mathbf{e}^{D_R(c)0},$$

$$N^{b0} = k_l(l^{b0} - L), \quad \mathbf{M}^{c0} = k_p \frac{1}{\sqrt{1 - (p^{c0})^2}} (\text{Arccos}(p^{c0}) - \frac{2\pi}{3}) \mathbf{e}^{P_R(c)0} \wedge \mathbf{e}^{D_R(c)0}$$

et

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_R} N^{b0} \mathbf{e}^{b0} + 2 \left[ \mathbf{M}^{10} \wedge \left( \frac{\mathbf{e}^{30}}{l^{30}} - \frac{\mathbf{e}^{20}}{l^{20}} \right) + \mathbf{M}^{20} \wedge \left( \frac{\mathbf{e}^{10}}{l^{10}} - \frac{\mathbf{e}^{30}}{l^{30}} \right) + \mathbf{M}^{30} \wedge \left( \frac{\mathbf{e}^{20}}{l^{20}} - \frac{\mathbf{e}^{10}}{l^{10}} \right) \right] = 0.$$

Ce qui montre que  $\mathbf{U}$  est solution du problème (4.17) pour la sollicitation  $(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2)$ .

Les vecteurs contraintes  $\tilde{\mathbf{S}}^{10}$  et  $\tilde{\mathbf{S}}^{20}$  peuvent s'écrire

$$\tilde{\mathbf{S}}^{10} = -\frac{N^{20}}{L} \mathbf{e}^{20} + \frac{2}{Ll^{20}} (\mathbf{M}^{10} - \mathbf{M}^{30}) \wedge \mathbf{e}^{20}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{20} = -\frac{N^{30}}{L} \mathbf{e}^{30} + \frac{2}{Ll^{30}} (\mathbf{M}^{20} - \mathbf{M}^{10}) \wedge \mathbf{e}^{30}. \quad (4.22)$$

Soit encore

$$\tilde{\mathbf{S}}^{10} = \frac{\mathbf{S}^{10}}{L}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{20} = \frac{\mathbf{S}^{20}}{L}. \quad (4.23)$$

□

**Corollaire 4.1** *La loi de comportement donnant les contraintes de Cauchy  $\sigma$  en fonction de  $\mathbf{G} = (\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2)$  est invariante par le changement d'échelle sur  $\mathbf{G}$  donné par  $\tilde{\mathbf{G}}^i = L\tilde{\mathbf{G}}^i$ .*

**Démonstration.** D'après la démonstration de la proposition (4.1) les vecteurs contraintes  $(\tilde{\mathbf{S}}^{10}, \tilde{\mathbf{S}}^{20})$  et  $(\mathbf{S}^{10}, \mathbf{S}^{20})$  correspondant aux sollicitations  $\tilde{\mathbf{G}} = (\tilde{\mathbf{G}}^1, \tilde{\mathbf{G}}^2)$  et  $\mathbf{G} = L\tilde{\mathbf{G}} = (L\tilde{\mathbf{G}}^1, L\tilde{\mathbf{G}}^2)$  vérifient  $\mathbf{S}^{i0} = L\tilde{\mathbf{S}}^{i0}$ ,  $i = 1, 2$ .

Le tenseur de contraintes  $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\tilde{g}}(\tilde{\mathbf{S}}^{10} \otimes \tilde{\mathbf{G}}^1 + \tilde{\mathbf{S}}^{20} \otimes \tilde{\mathbf{G}}^2), \quad \tilde{g} = \|\tilde{\mathbf{G}}^1 \wedge \tilde{\mathbf{G}}^2\|,$$

s'écrit aussi

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{g}(\mathbf{S}^{10} \otimes \mathbf{G}^1 + \mathbf{S}^{20} \otimes \mathbf{G}^2), \quad g = \|\mathbf{G}^1 \wedge \mathbf{G}^2\|,$$

ce qui montre que  $\sigma = \tilde{\sigma}$ . □

### 4.2.3 Etat neutre de la loi de comportement macroscopique

L'état neutre d'une loi de comportement de milieu continu élastique a été défini dans la section 1.1.3. C'est, dans le cas d'une représentation lagrangienne curviligne, les vecteurs  $\mathbf{G}_N^1, \mathbf{G}_N^2$  donnant des contraintes nulles, soit  $\mathbf{S}^{10} = \mathbf{S}^{20} = 0$ .

**Lemme 4.1** *Les vecteurs  $\mathbf{G}_N^1$  et  $\mathbf{G}_N^2$  définis par  $\mathbf{G}_N^i = L\mathbf{Y}^i$ ,  $i = 1, 2$ , où les  $\mathbf{Y}^i$  sont définis par (4.2) forment un état neutre de la loi de comportement macroscopique.*

**Démonstration.** En posant  $\mathbf{U}_N = L(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}^1 + \frac{1}{2}\mathbf{i}^2)$  on vérifie facilement que les longueurs  $l_N^{b0}$  et les angles  $\text{Arccos}(p_N^{c0})$  correspondants sont égaux à  $L$  et  $\frac{2\pi}{3}$ . Par conséquent, les tensions et moments  $N_N^{b0}$  et  $\mathbf{M}_N^{c0}$  correspondants sont nuls ainsi que les vecteurs contraintes  $\mathbf{S}_N^{i0}$ ,  $i = 1, 2$ . Cela montre que  $\mathbf{G}_N^1$  et  $\mathbf{G}_N^2$  forment un état neutre de la loi macroscopique. □

### 4.2.4 Configuration de référence

Il est possible d'exprimer la loi de comportement macroscopique en donnant les contraintes de Cauchy  $\sigma$  en fonction du gradient  $\mathbf{F}$  de la déformation du milieu continu par rapport à une configuration de référence. Si la configuration de référence est donnée en représentation curviligne par  $\lambda \mapsto \mathbf{R}_R^0(\lambda)$  et la configuration étudiée par  $\lambda \mapsto \mathbf{R}^0(\lambda)$ , nous avons donc

$$\frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial \lambda} = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{R}_R^0}{\partial \lambda}, \quad i = 1, 2. \quad (4.24)$$

En prenant une configuration de référence correspondant localement à un état neutre du milieu, la loi de comportement vis-à-vis de la configuration de référence au point considéré s'obtient en résolvant le problème (4.17) pour la sollicitation  $\mathbf{G}^i = \mathbf{F}\mathbf{G}_N^i$ ,  $i = 1, 2$ .

### 4.2.5 Energie de déformation

Maintenant nous allons exprimer explicitement l'énergie de déformation  $W$  du milieu continu équivalent. Nous avons démontré dans le chapitre 2 que la loi de comportement du milieu continu équivalent est hyperélastique, et nous avons obtenu l'expression de  $W$  à l'aide des primitives de  $\mathcal{N}^{b0}(l)$  et  $\mathcal{M}^{c0}(p)$  par rapport à  $l$  et à  $p$  respectivement, voir section 2.3.1.

D'après l'équation (2.75), l'énergie de déformation macroscopique  $W(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2)$  est donnée par

$$W = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} W_l(l^{b0}) + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} W_p(p^{c0}), \quad (4.25)$$

où  $l^{b0}$  et  $p^{c0}$  dépendent de  $(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2)$  par l'intermédiaire de  $\mathbf{U}$  solution du problème (4.17).

Les fonctions  $W_l$  et  $W_p$  sont des primitives par rapport à  $l$  et  $p$  de  $\mathcal{N}^{b0}(l)$  et  $\mathcal{M}^{c0}(p)$ , (4.10) et (4.11), soit :

$$W_l(l) = \frac{k_l}{2}(l - L)^2, \quad W_p(p) = \frac{k_p}{2} \left( \text{Arccos}(p) - \frac{2\pi}{3} \right)^2.$$

Soit  $\theta^{c0} = \text{Arccos}(p^{c0})$ , l'expression de la fonction énergie de déformation  $W$  est donc donnée par

$$W = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \frac{k_l}{2} (l^{b0} - L)^2 + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \frac{k_p}{2} \left( \theta^{c0} - \frac{2\pi}{3} \right)^2. \quad (4.26)$$

L'énergie de déformation  $W$  est une fonction de  $\mathbf{G}^1$  et  $\mathbf{G}^2$ , la proposition 4.1 nous permet d'énoncer :

**Proposition 4.2** *On a  $W(L\tilde{\mathbf{G}}^1, L\tilde{\mathbf{G}}^2) = L^2\tilde{W}(\tilde{\mathbf{G}}^1, \tilde{\mathbf{G}}^2)$ , où*

$$\tilde{W}(\tilde{\mathbf{G}}^1, \tilde{\mathbf{G}}^2) = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \frac{k_l}{2} (\tilde{l}^{b0} - 1)^2 + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \frac{k_p}{2L^2} \left( \theta^{c0} - \frac{2\pi}{3} \right)^2 \quad (4.27)$$

où  $\tilde{l}^{b0}$  et  $\theta^{c0}$  dépendent de  $(\tilde{\mathbf{G}}^1, \tilde{\mathbf{G}}^2)$  par l'intermédiaire de  $\tilde{\mathbf{U}}$  solution du problème (4.20) pour la sollicitation  $(\tilde{\mathbf{G}}^1, \tilde{\mathbf{G}}^2)$ .

**Démonstration.** D'après la définition de  $\tilde{l}^{b0}$  du problème (4.20) on a  $l^{b0} = L\tilde{l}^{b0}$ , on obtient donc (4.27) en mettant  $L^2$  en facteur.  $\square$

### 4.2.6 Calcul numérique

Pour déterminer la loi de comportement du milieu continu équivalent au graphène décrit dans la section 4.1.1, il faut déterminer les valeurs de  $\varepsilon$ ,  $L$ ,  $k_l$ ,  $k_p$  correspondant à cette structure. Pour cela, nous commençons par faire coïncider les positions des atomes de carbone du graphène dans la configuration neutre avec celles des nœuds du treillis données par les développements asymptotiques à partir de la configuration neutre du milieu continu équivalent.

Pour  $L$  indépendant de  $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ , l'état neutre  $(\mathbf{G}_N^1, \mathbf{G}_N^2)$  défini dans la section 4.2.3 lui aussi indépendant de  $\lambda$  et il est facile de vérifier qu'une configuration neutre du milieu continu, c'est-à-dire une configuration correspondant à un chargement nul, est donnée par  $\mathbf{R}_N^0(\lambda) = \lambda^1 \mathbf{G}_N^1 + \lambda^2 \mathbf{G}_N^2$ , nous avons en effet,  $\frac{\partial \mathbf{R}_N^0}{\partial \lambda^i} = \mathbf{G}_N^i$ ,  $i = 1, 2$ .

Les positions des nœuds de la structure paramétrée par  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  assez petit) sont donc données par (voir (2.19))

$$\mathbf{R}_N^\varepsilon(\tilde{n}) = \varepsilon v^i \mathbf{G}_N^i + \varepsilon \mathbf{R}_N^{n1}, \quad (4.28)$$

où  $\mathbf{R}_N^{21} - \mathbf{R}_N^{11} = \mathbf{U}_N = L(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}^1 + \frac{1}{2}\mathbf{i}^2)$ .

Nous voyons qu'il est possible de faire coïncider à l'ordre 1 ces positions avec celles des atomes de graphène données dans la section 4.1.1 en prenant  $\mathbf{R}_N^{11} = 0$  et  $\varepsilon L = r = 0,14$  nm.

En comparant les lois de comportement en  $\varepsilon$ , (4.8) et (4.9) de la section 4.1.4 avec celles du graphène données dans la section 4.1.2 nous voyons qu'il faut prendre

$$k_l = 652 \text{N.m}^{-1} \quad \text{et} \quad k_p = \frac{8,76 \times 10^{-19}}{\varepsilon^2} \text{N.m},$$

$$\text{soit } \frac{k_p}{L^2} = \frac{8,76 \times 10^{-19}}{r^2} = 44,7 \text{N.m}^{-1}.$$

Pour étudier la loi de comportement du milieu continu équivalent au graphène, nous appliquons un gradient de déformation  $\mathbf{F}$  à la configuration neutre du graphène qui est choisie comme configuration de référence. Le tenseur de contraintes correspondant est obtenu par la résolution du problème (4.17) pour la sollicitation  $\mathbf{G} = (\mathbf{F}\mathbf{G}_N^1, \mathbf{F}\mathbf{G}_N^2)$  et par les relations (4.19). L'état neutre  $\mathbf{G}_N = (\mathbf{G}_N^1, \mathbf{G}_N^2)$  est égal à  $L(\mathbf{Y}^1, \mathbf{Y}^2)$  donc  $\mathbf{G} = L(\mathbf{F}\mathbf{Y}^1, \mathbf{F}\mathbf{Y}^2)$ .

D'après la proposition 4.1 et le corollaire 4.1 on obtient la loi de comportement en résolvant le problème (4.20) avec en particulier

$$\tilde{N}^{b0} = k_l(\tilde{l}^{b0} - 1) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{M}}^{c0} = \frac{k_p}{L^2} \frac{1}{\sqrt{1 - (p^{c0})^2}} (\text{Arccos}(p^{c0}) - \frac{2\pi}{3}) \mathbf{e}^{Pr(c)0} \wedge \mathbf{e}^{Dr(c)0}.$$

La fonction  $W(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2)$  de la section 4.2.5 est une densité d'énergie par rapport aux variables  $\lambda^1, \lambda^2$ . Comme la loi de comportement est donnée comme fonction de  $\mathbf{F}$ , il est préférable d'utiliser comme énergie de déformation la densité d'énergie par rapport à la configuration de référence comme fonction de  $\mathbf{F}$ .

Soit  $\hat{W}$  la densité d'énergie par rapport à la configuration de référence. Soit  $dS$  l'élément de surface dans la configuration de référence définie par

$$\mathbf{R}_R^0(\lambda^1, \lambda^2) = \lambda^1 L\mathbf{Y}^1 + \lambda^2 L\mathbf{Y}^2.$$



Nous avons donc

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}_R^0}{\partial \lambda^1} \wedge \frac{\partial \mathbf{R}_R^0}{\partial \lambda^2} \right\| d\lambda^1 d\lambda^2 = L^2 \|\mathbf{Y}^1 \wedge \mathbf{Y}^2\| d\lambda^1 d\lambda^2 = \frac{3\sqrt{3}L^2}{2} d\lambda^1 d\lambda^2.$$

Nous avons par conséquent

$$\hat{W} = \frac{2}{3\sqrt{3}L^2} W.$$

Nous avons vu que la relation entre  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  est

$$\mathbf{G} = L(\mathbf{F}\mathbf{Y}^1, \mathbf{F}\mathbf{Y}^2),$$

d'où

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = \frac{2}{3\sqrt{3}L^2} W(L\mathbf{F}\mathbf{Y}^1, L\mathbf{F}\mathbf{Y}^2),$$

ce qui s'écrit d'après la proposition 4.2 de la section 4.2.5

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \tilde{W}(\mathbf{F}\mathbf{Y}^1, \mathbf{F}\mathbf{Y}^2).$$

Supposons que le tenseur de déformation  $\mathbf{F}$  est donné par

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}.$$

Les essais numériques que nous avons menés correspondent à des tractions uniaxiales dans la direction du vecteur  $\mathbf{i}^2$ , c'est-à-dire en faisant varier le coefficient  $F_{22}$  du tenseur  $\mathbf{F}$  tout en maintenant invariant le coefficient  $F_{11}$  et en considérant des cisaillements nuls,  $F_{12} = F_{21} = 0$ . Sur la Figure 4.3 nous avons tracé la densité d'énergie  $\hat{W}$  ainsi que les contraintes de Cauchy  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$  en fonction de  $F_{22}$  pour différentes valeurs de  $F_{11}$ .

### 4.3 Modélisation en petits déplacements

Dans cette section les termes portant l'indice 0 correspondent à la configuration de référence. De plus, si  $\mathbf{v}$  est un vecteur du plan  $(\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2)$ , on définit son vecteur transverse dans le même plan par  $\mathbf{v}^\perp = \mathbf{i}^3 \wedge \mathbf{v}$ , où  $(\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \mathbf{i}^3)$  est une base orthonormée directe.

A la configuration de référence, le treillis est exactement périodique, par conséquent, le vecteur unitaire d'une barre  $\tilde{\mathbf{b}} = (b, \mathbf{v})$  ne dépend pas du numéro  $\mathbf{v}$  de la cellule contenant la barre ni du petit paramètre  $\varepsilon$ ; il dépend uniquement du numéro  $b$  de la barre dans une cellule de référence. Nous avons donc  $\mathbf{e}_0^{\tilde{b}} = \mathbf{e}_0^b$  et l'on a pour  $b = 1, 2, 3$  :  $\mathbf{e}_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\mathbf{i}^1 + \mathbf{i}^2)$ ,  $\mathbf{e}_0^2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\mathbf{i}^1 + \mathbf{i}^2)$ , et  $\mathbf{e}_0^3 = -\mathbf{i}^2$ . De plus, la configuration de référence est plane et supposée se trouvant dans le plan  $(\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2)$ , par suite les vecteurs unitaires qui sont transverses aux barres dans le plan du treillis sont :  $\mathbf{e}_0^{1\perp} = \frac{1}{2}(-\mathbf{i}^1 + \sqrt{3}\mathbf{i}^2)$ ,  $\mathbf{e}_0^{2\perp} = \frac{1}{2}(-\mathbf{i}^1 - \sqrt{3}\mathbf{i}^2)$ , et  $\mathbf{e}_0^{3\perp} = \mathbf{i}^1$ .

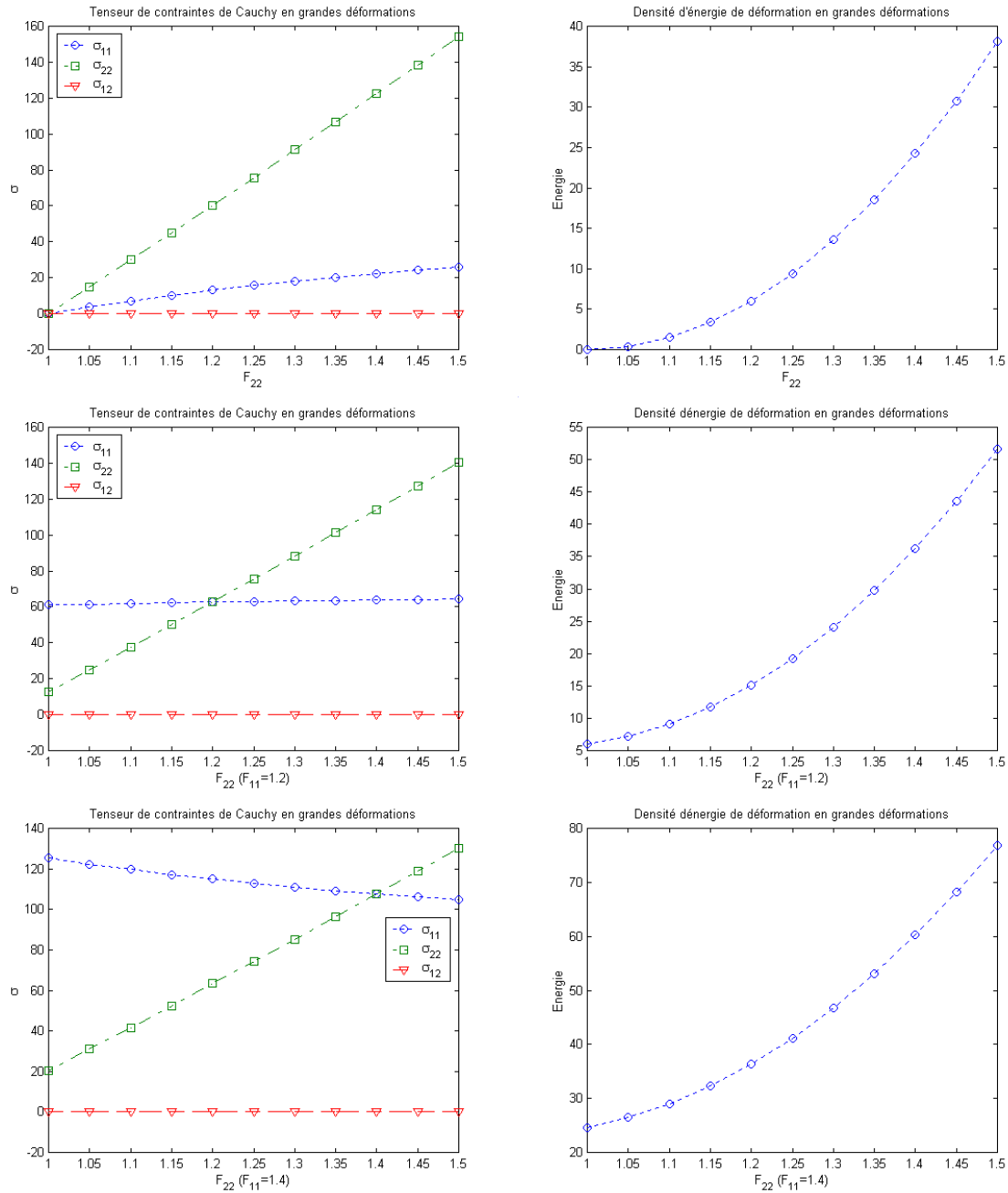


FIG. 4.3 – A gauche, les contraintes en fonction du coefficient  $F_{22}$  du tenseur de déformation, à droite la densité d'énergie en fonction de  $F_{22}$ . En haut  $F_{11} = 1$ , au centre  $F_{11} = 1.2$  et en bas  $F_{11} = 1.4$ .

Soit  $\mathbf{u}^\varepsilon(\tilde{n})$  le champ de déplacement des nœuds de la structure et  $\mathbf{U}^{\varepsilon\tilde{b}} = \mathbf{u}^\varepsilon(E(\tilde{b})) - \mathbf{u}^\varepsilon(O(\tilde{b}))$ .

Pour les mêmes raisons que dans le cadre des grandes déformations, nous considérons les deux lois de comportement suivantes :

$$N^{\varepsilon\tilde{b}} = \mathcal{N}^{\varepsilon\tilde{b}}(I^{\varepsilon\tilde{b}}), \quad (4.29)$$

$$\mathbf{M}^{\varepsilon\tilde{c}} = \mathcal{M}^{\varepsilon\tilde{c}}(p^{\varepsilon\tilde{c}}) \mathbf{e}^{\varepsilon P(\tilde{c})} \wedge \mathbf{e}^{\varepsilon D(\tilde{c})}. \quad (4.30)$$

Nous nous plaçons dans le cadre des petits déplacements, c'est-à-dire que nous supposons que les forces exercées sur la structures sont petites et qu'elles entraînent par conséquent des déplacements petits. La théorie des petits déplacements consiste à développer à l'ordre 1 par rapport aux déplacements les équations d'équilibre de la structure. La linéarisation des équations d'équilibre par rapport aux déplacements nous ramène à écrire les équations d'équilibre sur la configuration de référence mais avec comme lois de comportement les parties linéaires des développements par rapport aux déplacements des lois de comportement données par les équations (4.29)-(4.30).

### 4.3.1 Linéarisation par rapport aux déplacements

**Notation :** La partie linéaire par rapport aux déplacements d'une quantité scalaire (ou vectorielle)  $\mathcal{A}$  sera notée par  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  et on écrit  $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0 + \delta\mathcal{A}$  où  $\mathcal{A}_0$  désigne la valeur de  $\mathcal{A}$  dans la configuration de référence.

Nous savons que pour chaque barre  $\tilde{b}$ , le vecteur  $\mathbf{B}^{\varepsilon\tilde{b}}$  est donné par

$$\mathbf{B}^{\varepsilon\tilde{b}} = \mathbf{R}^\varepsilon(E(\tilde{b})) - \mathbf{R}^\varepsilon(O(\tilde{b})),$$

où  $\mathbf{R}^\varepsilon(\tilde{n})$  désigne la position du nœud  $\tilde{n}$  dans la configuration actuelle. Soit  $\mathbf{B}_0^{\varepsilon\tilde{b}} = \mathbf{R}_R^\varepsilon(E(\tilde{b})) - \mathbf{R}_R^\varepsilon(O(\tilde{b}))$ .

$$\mathbf{B}^{\varepsilon\tilde{b}} = \mathbf{B}_0^{\varepsilon\tilde{b}} + \mathbf{U}^{\varepsilon\tilde{b}}.$$

On constate que le vecteur  $\mathbf{B}^{\varepsilon\tilde{b}}$  est linéaire par rapport aux déplacements et l'on a

$$\mathcal{L}(\mathbf{B}^{\varepsilon\tilde{b}}) = \mathbf{B}_0^{\varepsilon\tilde{b}} + \delta\mathbf{B}^{\varepsilon\tilde{b}}, \quad (4.31)$$

avec  $\delta\mathbf{B}^{\varepsilon\tilde{b}} = \mathbf{U}^{\varepsilon\tilde{b}}$ . Or  $l^{\varepsilon\tilde{b}} = \|\mathbf{B}^{\varepsilon\tilde{b}}\|$  et  $\mathbf{e}^{\varepsilon\tilde{b}} = \mathbf{B}^{\varepsilon\tilde{b}}/l^{\varepsilon\tilde{b}}$ , on en déduit par un simple calcul que  $\delta l^{\varepsilon\tilde{b}} = \mathbf{e}_0^b \cdot \mathbf{U}^{\varepsilon\tilde{b}}$  et  $\delta\mathbf{e}^{\varepsilon\tilde{b}} = \frac{1}{r} [\mathbf{U}^{\varepsilon\tilde{b}} - (\mathbf{e}_0^b \cdot \mathbf{U}^{\varepsilon\tilde{b}}) \mathbf{e}_0^b] = \frac{1}{r} (\mathbf{e}_0^b \wedge \mathbf{U}^{\varepsilon\tilde{b}}) \wedge \mathbf{e}_0^b$ . Par suite, les parties linéaires de  $l^{\varepsilon\tilde{b}}$  et de  $\mathbf{e}^{\varepsilon\tilde{b}}$  sont

$$\mathcal{L}(l^{\varepsilon\tilde{b}}) = r + \mathbf{e}_0^b \cdot \mathbf{U}^{\varepsilon\tilde{b}}, \quad (4.32)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{e}^{\varepsilon\tilde{b}}) = \mathbf{e}_0^b + \frac{1}{r} (\mathbf{e}_0^b \wedge \mathbf{U}^{\varepsilon\tilde{b}}) \wedge \mathbf{e}_0^b. \quad (4.33)$$

Quant à la tension normale  $N^{\varepsilon\tilde{b}}$ , sa partie linéaire par rapport aux déplacements s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(N^{\varepsilon\tilde{b}}) &= \mathcal{L}(\mathcal{N}^{\varepsilon\tilde{b}}(l^{\varepsilon\tilde{b}})) = \mathcal{N}^{\varepsilon\tilde{b}}(r) + \delta\mathcal{N}^{\varepsilon\tilde{b}}(r) \\ &= \mathcal{N}^{\varepsilon\tilde{b}}(r) + \frac{d\mathcal{N}^{\varepsilon\tilde{b}}}{dl}(r)\delta l^{\varepsilon\tilde{b}}.\end{aligned}\quad (4.34)$$

De plus on a  $\mathcal{N}^{\varepsilon\tilde{b}}(r) = 0$ . Si on désigne par  $\frac{d\mathcal{N}^{\varepsilon\tilde{b}}}{dl}(r) = k_l^\varepsilon$ , la partie linéaire de la tension normale  $N^{\varepsilon\tilde{b}}$  devient

$$\mathcal{L}(N^{\varepsilon\tilde{b}}) = k_l^\varepsilon \mathbf{e}_0^b \cdot \mathbf{U}^{\varepsilon\tilde{b}}. \quad (4.35)$$

D'une façon similaire, la linéarisation du moment  $\mathcal{M}^{\varepsilon\tilde{c}}(p^{\varepsilon\tilde{c}})$  donne

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}^{\varepsilon\tilde{c}}(p^{\varepsilon\tilde{c}})) = \mathcal{M}^{\varepsilon\tilde{c}}(p_0^c) + \frac{d\mathcal{M}^{\varepsilon\tilde{c}}}{dp}(p_0^c)\delta p^{\varepsilon\tilde{c}}, \quad (4.36)$$

où

$$\begin{aligned}\delta p^{\varepsilon\tilde{c}} &= \delta(\mathbf{e}^{\varepsilon P(\tilde{c})} \cdot \mathbf{e}^{\varepsilon D(\tilde{c})}) = \delta\mathbf{e}^{\varepsilon P(\tilde{c})} \cdot \mathbf{e}_0^{D_R(c)} + \mathbf{e}_0^{P_R(c)} \cdot \delta\mathbf{e}^{\varepsilon D(\tilde{c})} \\ &= \frac{1}{r} \left[ \mathbf{e}_0^{P_R(c)} \wedge \mathbf{U}^{\varepsilon P(\tilde{c})} - \mathbf{e}_0^{D_R(c)} \wedge \mathbf{U}^{\varepsilon D(\tilde{c})} \right] \cdot \left[ \mathbf{e}_0^{P_R(c)} \wedge \mathbf{e}_0^{D_R(c)} \right] \\ &= \frac{\sin(\theta_0^c)}{r} \left[ \mathbf{e}_0^{P_R(c)} \wedge \mathbf{U}^{\varepsilon P(\tilde{c})} - \mathbf{e}_0^{D_R(c)} \wedge \mathbf{U}^{\varepsilon D(\tilde{c})} \right] \cdot \mathbf{i}^3 \\ &= \frac{\sin(\theta_0^c)}{r} \left[ \mathbf{e}_0^{P_R(c)\perp} \cdot \mathbf{U}^{\varepsilon P(\tilde{c})} - \mathbf{e}_0^{D_R(c)\perp} \cdot \mathbf{U}^{\varepsilon D(\tilde{c})} \right].\end{aligned}\quad (4.37)$$

Le terme  $\theta_0^c$  désigne l'angle que fait  $\mathbf{e}_0^{P_R(c)}$  et  $\mathbf{e}_0^{D_R(c)}$ . Or  $\mathcal{M}^{\varepsilon\tilde{c}}(p_0^c) = 0$ , alors la partie linéaire du moment  $\mathbf{M}^{\varepsilon\tilde{c}}$  s'écrit sous la forme

$$\mathcal{L}(\mathbf{M}^{\varepsilon\tilde{c}}) = \frac{\sin(\theta_0^c)}{r} \frac{d\mathcal{M}^{\varepsilon\tilde{c}}}{dp}(p_0^c) \left[ \mathbf{e}_0^{P_R(c)\perp} \cdot \mathbf{U}^{\varepsilon P(\tilde{c})} - \mathbf{e}_0^{D_R(c)\perp} \cdot \mathbf{U}^{\varepsilon D(\tilde{c})} \right] \mathbf{e}_0^{P_R(c)} \wedge \mathbf{e}_0^{D_R(c)}. \quad (4.38)$$

On va considérer dans cette modélisation la loi de comportement du moment qu'on a utilisée dans la modélisation en grandes déformations et inspirée des travaux d'Allinger et al. [1] :

$$\mathcal{M}^{\varepsilon\tilde{c}}(p) = k_p^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \left( \text{Arccos}(p) - \frac{2\pi}{3} \right).$$

Dans ce cas particulier, la partie linéaire du moment par rapport aux déplacements est donnée par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{M}^{\varepsilon\tilde{c}}) = \frac{k_p^\varepsilon}{r} \left[ \mathbf{e}_0^{D_R(c)\perp} \cdot \mathbf{U}^{\varepsilon D(\tilde{c})} - \mathbf{e}_0^{P_R(c)\perp} \cdot \mathbf{U}^{\varepsilon P(\tilde{c})} \right] \mathbf{i}^3. \quad (4.39)$$

### 4.3.2 Equations d'équilibre

Comme nous l'avons cité précédemment, la linéarisation des équations d'équilibre (2.3) et (2.4) revient à les écrire sur la configuration de référence. Par conséquent, les équations d'équilibre linéarisées s'écrivent

$$\forall \tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}, \quad \sum_{\tilde{b} \in O^{-1}(\tilde{n})} \mathcal{L}(\mathbf{T}^{\tilde{b}}) - \sum_{\tilde{b} \in E^{-1}(\tilde{n})} \mathcal{L}(\mathbf{T}^{\tilde{b}}) + \mathcal{L}(\mathbf{f}^{e/\tilde{n}}) = 0 \quad (4.40)$$

et

$$\forall \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}, \quad \sum_{\tilde{c} \in P^{-1}(\tilde{b})} \mathcal{L}(\mathbf{M}^{\tilde{c}}) - \sum_{\tilde{c} \in D^{-1}(\tilde{b})} \mathcal{L}(\mathbf{M}^{\tilde{c}}) + r \mathbf{e}_0^b \wedge \mathcal{L}(\mathbf{T}^{\tilde{b}}) = 0. \quad (4.41)$$

L'étape suivante consiste à développer les termes qui apparaissent dans les équations d'équilibre linéarisées en séries de  $\varepsilon$ .

### 4.3.3 Développements en série de $\varepsilon$

Nous supposons qu'après déformation, le treillis reste quasipériodique. Ceci va nous permettre de supposer que le développement du champ de déplacements  $\mathbf{u}^\varepsilon$  s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\tilde{n}) = \mathbf{u}^0(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon \mathbf{u}^{n1}(\lambda^\varepsilon) + \dots. \quad (4.42)$$

Or,  $\mathbf{U}^{\tilde{b}} = \mathbf{u}^\varepsilon(E(\tilde{b})) - \mathbf{u}^\varepsilon(O(\tilde{b}))$ . En ajoutant des hypothèses de régularité sur le champ  $\mathbf{u}^\varepsilon$ , on en déduit le développement en série de  $\varepsilon$  du champ  $\mathbf{U}^{\tilde{b}}$  :

$$\mathbf{U}^{\tilde{b}} = \varepsilon \mathbf{U}^{b1} + \dots = \varepsilon \left[ \mathbf{u}^{E_R(b)1} - \mathbf{u}^{O_R(b)1} + \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^i} \delta^{ib} \right] + \dots. \quad (4.43)$$

D'autre part, on suppose que la rigidité des tensions normales  $k_l^\varepsilon$  est d'ordre 0 en  $\varepsilon$  et celle des moments  $k_p^\varepsilon$  est d'ordre 2. On reprend les notations utilisées dans la modélisation en grandes déformations :

$$k_l^\varepsilon = k_l, \quad k_p^\varepsilon = \varepsilon^2 k_p. \quad (4.44)$$

Par conséquent, la tension normale est d'ordre 1 en  $\varepsilon$  et le moment est d'ordre 2, et l'on a :

$$\mathcal{L}(N^{\tilde{b}}) = \varepsilon N^{b0} + \dots, \quad \mathcal{L}(\mathbf{M}^{\tilde{c}}) = \varepsilon^2 M^{c0} \mathbf{i}^3 + \dots, \quad (4.45)$$

avec,

$$N^{b0} = k_l \mathbf{e}_0^b \cdot \mathbf{U}^{b1}, \quad M^{c0} = \frac{k_p}{L} \left( \mathbf{e}_0^{D_R(c)\perp} \cdot \mathbf{U}^{D_R(c)1} - \mathbf{e}_0^{P_R(c)\perp} \cdot \mathbf{U}^{P_R(c)1} \right). \quad (4.46)$$

D'après les équations d'équilibre linéarisées, on trouve que les tensions transverses sont de même ordre en  $\varepsilon$  que les tensions normales, i.e. elles sont d'ordre 1 :

$$\mathcal{L}(\mathbf{T}_t^{\tilde{b}}) = \varepsilon \mathbf{T}_t^{b0} + \dots, \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}_t^{b0} = T_t^{b0} \mathbf{e}_0^{b\perp}. \quad (4.47)$$

Nous rappelons que  $\mathbf{T}_t^{b0}$ ,  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ , sont des inconnues du problème. Soit  $\mathbf{T}^{b0} = N^{b0} \mathbf{e}_0^b + \mathbf{T}_t^{b0}$  et  $\mathbf{M}^{c0} = M^{c0} \mathbf{i}^3$ .

Quant aux efforts extérieurs, nous les choisissons dans ce cas aussi, avec les mêmes raisons que dans le cas des grandes déformations, d'ordre 2 en  $\varepsilon$

$$\mathbf{f}^{\varepsilon/\tilde{n}} = \varepsilon^2 \mathbf{f}^{\varepsilon/n}(\lambda^\varepsilon). \quad (4.48)$$

Soit  $\mathbf{U} = \mathbf{u}^{21} - \mathbf{u}^{11}$ . En résumé, on a :

$$\mathbf{U}^{11} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{U}^{21} = \mathbf{U} - \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^1}, \quad \mathbf{U}^{31} = \mathbf{U} - \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^2}, \quad (4.49)$$

$$N^{10} = k_l \mathbf{e}_0^1 \cdot \mathbf{U}, \quad N^{20} = k_l \mathbf{e}_0^2 \cdot \left[ \mathbf{U} - \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^1} \right], \quad N^{30} = k_l \mathbf{e}_0^3 \cdot \left[ \mathbf{U} - \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^2} \right], \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} M^{10} = M^{40} &= \frac{k_p}{L} \left[ (\mathbf{e}_0^{3\perp} - \mathbf{e}_0^{2\perp}) \cdot \mathbf{U} - \mathbf{e}_0^{3\perp} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^2} + \mathbf{e}_0^{2\perp} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^1} \right], \\ M^{20} = M^{50} &= \frac{k_p}{L} \left[ (\mathbf{e}_0^{1\perp} - \mathbf{e}_0^{3\perp}) \cdot \mathbf{U} + \mathbf{e}_0^{3\perp} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^2} \right], \\ M^{30} = M^{60} &= \frac{k_p}{L} \left[ (\mathbf{e}_0^{2\perp} - \mathbf{e}_0^{1\perp}) \cdot \mathbf{U} - \mathbf{e}_0^{2\perp} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^1} \right]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

#### 4.3.4 Autoéquilibre et résolution analytique

En suivant le processus d'homogénéisation décrit dans le chapitre 2, on obtient le système d'autoéquilibre écrit sur une cellule de référence :

$$\forall \mathbf{v}^n, n \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}, \quad \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} \mathbf{T}^{b0} \cdot (\mathbf{v}^{OR(b)} - \mathbf{v}^{ER(b)}) = 0, \quad (4.52)$$

$$\forall \mathbf{w}^b, b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}, \quad \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0} \cdot (\mathbf{w}^{PR(c)} - \mathbf{w}^{DR(c)}) + L \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{e}_0^b \wedge \mathbf{T}^{b0}) \cdot \mathbf{w}^b = 0. \quad (4.53)$$

L'équation (4.52) s'écrit :

$$\forall \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{T}^{10} \cdot [\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2] + \mathbf{T}^{20} \cdot [\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2] + \mathbf{T}^{30} \cdot [\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2] = 0, \quad (4.54)$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbf{T}^{10} + \mathbf{T}^{20} + \mathbf{T}^{30} = 0. \quad (4.55)$$

D'autre part, l'équation (4.53) s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \mathbf{w}^3 \in \mathbb{R}^3, \quad & \mathbf{M}^{10} \cdot [\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}^3] + \mathbf{M}^{20} \cdot [\mathbf{w}^3 - \mathbf{w}^1] + \mathbf{M}^{30} \cdot [\mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2] \\ & + \mathbf{M}^{40} \cdot [\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}^3] + \mathbf{M}^{50} \cdot [\mathbf{w}^3 - \mathbf{w}^1] + \mathbf{M}^{60} \cdot [\mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2] \\ & + LT_t^{10} \mathbf{i}^3 \cdot \mathbf{w}^1 + LT_t^{20} \mathbf{i}^3 \cdot \mathbf{w}^2 + LT_t^{30} \mathbf{i}^3 \cdot \mathbf{w}^3 = 0, \end{aligned} \quad (4.56)$$

ce qui conduit aux trois équations scalaires suivantes

$$-M^{20} + M^{30} - M^{50} + M^{60} + LT_t^{10} = 0, \quad (4.57)$$

$$-M^{30} + M^{10} - M^{60} + M^{40} + LT_t^{20} = 0, \quad (4.58)$$

$$-M^{10} + M^{20} - M^{40} + M^{50} + LT_t^{30} = 0. \quad (4.59)$$

On obtient l'équation finale en éliminant les tensions transverses de l'équation (4.55) et en utilisant les relations (4.57)-(4.58)-(4.59) :

$$N^{10}\mathbf{e}_0^1 + N^{20}\mathbf{e}_0^2 + N^{30}\mathbf{e}_0^3 + \frac{2}{L} \left[ (M^{20} - M^{30})\mathbf{e}_0^{1\perp} + (M^{30} - M^{10})\mathbf{e}_0^{2\perp} + (M^{10} - M^{20})\mathbf{e}_0^{3\perp} \right] = 0. \quad (4.60)$$

En utilisant les expressions données dans les équations (4.50) et (4.51), on obtient une équation linéaire en  $\mathbf{U}$ . Ceci nous conduit directement à l'expression de  $\mathbf{U}$  en fonction de  $\frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^1}$  et  $\frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^2}$  :

$$\mathbf{U} = \frac{2L^2}{3(k_l L^2 + 6k_p)} \left[ \left( k_l \mathbf{e}_0^2 \otimes \mathbf{e}_0^2 + \frac{6k_p}{L^2} \mathbf{e}_0^{2\perp} \otimes \mathbf{e}_0^{2\perp} \right) \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^1} + \left( k_l \mathbf{e}_0^3 \otimes \mathbf{e}_0^3 + \frac{6k_p}{L^2} \mathbf{e}_0^{3\perp} \otimes \mathbf{e}_0^{3\perp} \right) \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^2} \right]. \quad (4.61)$$

En reportant l'expression de  $\mathbf{U}$  dans les équations (4.50) et (4.51), nous obtenons les expressions des tensions normales et des moments. Par conséquent, nous déterminons les vecteurs de contraintes définis dans la description lagrangienne en utilisant l'équation suivante qui est l'équivalent en petits déplacements de l'équation (2.47) : pour  $i = 1, 2$ ,

$$\mathbf{S}^{i0} = \sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}} N^{b0} \mathbf{e}_0^b \delta^{ib} + \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}^{c0} \wedge \frac{1}{L} \left[ \mathbf{e}_0^{D_R(c)} \delta^{iD_R(c)} - \mathbf{e}_0^{P_R(c)} \delta^{iP_R(c)} \right]. \quad (4.62)$$

Après simplification, les expressions de  $\mathbf{S}^{10}$  et  $\mathbf{S}^{20}$  sont

$$\mathbf{S}^{10} = -N^{20}\mathbf{e}_0^2 + \frac{2}{L}(\mathbf{M}^{10} - \mathbf{M}^{30}) \wedge \mathbf{e}_0^2, \quad \mathbf{S}^{20} = -N^{30}\mathbf{e}_0^3 + \frac{2}{L}(\mathbf{M}^{20} - \mathbf{M}^{10}) \wedge \mathbf{e}_0^3. \quad (4.63)$$

Le tenseur de contraintes de Cauchy peut être obtenu par le changement de variables  $x = \mathbf{R}_R^0(\lambda)$  et l'on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{g} \mathbf{S}^{i0} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}_R^0}{\partial \lambda^i} = \frac{1}{g} \left( \mathbf{S}^{10} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}_R^0}{\partial \lambda^1} + \mathbf{S}^{20} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}_R^0}{\partial \lambda^2} \right), \quad (4.64)$$

où  $g$  est le jacobien de ce changement de variables.

D'autre part, de l'équation (4.1) on a  $\mathbf{R}_R^0(\lambda) = \lambda^1 L \mathbf{Y}^1 + \lambda^2 L \mathbf{Y}^2$  par suite on obtient les vecteurs  $\frac{\partial \mathbf{R}_R^0}{\partial \lambda^1} = L \mathbf{Y}^1$  et  $\frac{\partial \mathbf{R}_R^0}{\partial \lambda^2} = L \mathbf{Y}^2$ .

De plus, ce même changement de variables donne l'expression de  $(\frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^1}, \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^2})$  en termes de  $(\frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x^1}, \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x^2})$  et par suite en termes du tenseur de déformation linéarisé défini par :  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial u^{0i}}{\partial x^j} + \frac{\partial u^{0j}}{\partial x^i})$ ,  $i, j = 1, 2$ , où  $\mathbf{u}^0 = (u^{01}, u^{02})$ . Ceci nous permet d'exprimer le tenseur de contraintes de Cauchy en termes du tenseur de déformation linéarisé.

Finalement, après un long calcul, on obtient l'expression habituelle en élasticité linéaire du tenseur de contraintes de Cauchy :

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\delta_{ij} + 2\tilde{\mu}\varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad (4.65)$$

où  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\mu}$  sont les coefficients de Lamé du milieu élastique bidimensionnel qui sont donnés par les formules analytiques suivantes :

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{6} \frac{k_l \sqrt{3} (k_l L^2 - 6k_p)}{k_l L^2 + 6k_p}, \quad \tilde{\mu} = \frac{2k_p k_l \sqrt{3}}{k_l L^2 + 6k_p}. \quad (4.66)$$

Soit aussi

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{k_l (k_l - 6\frac{k_p}{L^2})}{k_l + 6\frac{k_p}{L^2}}, \quad \tilde{\mu} = 2\sqrt{3} \frac{k_l \frac{k_p}{L^2}}{k_l + 6\frac{k_p}{L^2}}. \quad (4.67)$$

Ces expressions permettent de calculer les modules équivalents  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\mu}$  pour le graphène à l'aide des valeurs numériques de  $k_l$  et  $\frac{k_p}{L^2}$  rappelées dans la section 4.2.6.

En inversant l'équation (4.65) en

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \tilde{\nu}}{\tilde{E}} \sigma_{ij} - \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{E}} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad (4.68)$$

on déduit les modules d'Young  $\tilde{E}$  et coefficient de Poisson  $\tilde{\nu}$  bidimensionnels :

$$\tilde{E} = \frac{4\tilde{\mu}(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \quad \tilde{\nu} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \quad (4.69)$$

ce qui, en fonction de (4.67), donne

$$\tilde{E} = \frac{8\sqrt{3}k_l \frac{k_p}{L^2}}{k_l + 18\frac{k_p}{L^2}}, \quad \tilde{\nu} = \frac{k_l - 6\frac{k_p}{L^2}}{k_l + 18\frac{k_p}{L^2}}. \quad (4.70)$$

**Module d'Young et coefficient de Poisson tridimensionnels** Plusieurs articles de la littérature font mention de module d'Young et coefficient de Poisson tridimensionnels (les modules d'Young sont en fait mesurés en Pa) pour les graphènes. Bien que ce ne soit pas explicite, il semble que la détermination de ces coefficients soit basée sur une analogie avec les coefficients de membrane d'une structure linéairement élastique mince. Il faut noter que le passage des coefficients d'élasticité à ceux de la membrane nécessite de connaître l'épaisseur de la structure mince et que cette épaisseur semble difficile à définir d'un point de vue physique, c'est peut-être la raison de la disparité des épaisseurs proposées dans la littérature, voir Tableau 3.

Rappelons, brièvement, la détermination des coefficients de membrane équivalents d'une structure mince d'épaisseur  $h$ .

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé d'un milieu élastique tridimensionnel, on a

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.71)$$



L'hypothèse pour passer au modèle de membrane revient à supposer que l'état de contraintes est plan, c'est-à-dire que  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$  en particulier cela entraîne :

$$\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} = 0$$

et

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\right) = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}).$$

On en déduit alors

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (4.72)$$

Par intégration sur l'épaisseur nous en déduisons en supposant  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$ , constants dans l'épaisseur

$$h\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}h(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\delta_{\alpha\beta} + 2\mu h\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (4.73)$$

les  $h\sigma_{\alpha\beta}$  sont les contraintes membranaires. Cette approche rapide a été justifiée depuis les années 80 par des techniques de convergence.

Si on assimile la feuille de graphène à une membrane mince, on a donc en comparant (4.73) à (4.65)

$$\tilde{\lambda} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}h, \quad \tilde{\mu} = \mu h$$

d'où

$$\tilde{E} = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}h, \quad \tilde{\nu} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Soient  $E$  et  $\nu$  le module d'Young et le coefficient de Poisson tridimensionnels, nous avons par définition de ces coefficients :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{\tilde{E}}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{\tilde{E}}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.74)$$

d'où

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Ce qui montre que

$$E = \tilde{E}/h, \quad \nu = \tilde{\nu}. \quad (4.75)$$

### 4.3.5 Application numérique

Dans cette partie nous utilisons les mêmes données, dues à Allinger et al. [1], que dans le cas des grandes déformations. Nous avons vu dans la section 4.2.6 qu'il convient de prendre

$k_l = 652 \text{ N.m}^{-1}$  et  $\frac{k_p}{L^2} = 44,7 \text{ N.m}^{-1}$  pour l'application de l'homogénéisation au graphène.

En utilisant les formules (4.70) nous obtenons pour  $\tilde{E}$  et  $\tilde{\nu}$

$$\tilde{E} = 278 \text{ N.m}^{-1}, \quad \tilde{\nu} = 0,26. \quad (4.76)$$

Dans notre étude nous avons modélisé la feuille de graphite par un milieu continu bidimensionnel plan. Donc nous n'avons pas introduit une épaisseur. Afin de comparer nos résultats avec ceux qui existent dans la littérature, nous avons calculé le rapport du module d'Young qu'on a trouvé sur l'épaisseur en utilisant les valeurs de l'épaisseur proposées par certaines études, notamment les études de Yakobson et al. [101], Lu [59], Zhou et al.[109], et Tu et Ou-Yang [96]. Nous résumons dans le tableau suivant leurs résultats.

Tableau 3

	$E$ en TPa	$\nu$	$h$ en nm
Yakobson et al.[101]	5,5	0,19	0,066
Lu [59]	0,97	0,28	0,34
Zhou et al.[109]	5	0,24	0,07
Tu et Ou-Yang [96]	4,7	0,34	0,074

Quelques résultats sur le module d'Young, le coefficient de Poisson et l'épaisseur d'un nanotube de carbone.

Les valeurs du module d'Young tridimensionnel  $E$  que nous avons trouvées à partir de notre valeur de  $\tilde{E}$  sont présentées dans le tableau suivant :

Tableau 4

$h$ en nm	0,066	0,074	0,34
$E$ en TPa	4,2	4	0,82

Les résultats du rapport du module d'Young sur l'épaisseur d'un nanotube de carbone.

Par exemple pour une épaisseur de 0,34 nm nous avons trouvé un module d'Young de 0,82 TPa alors que Lu [59] a trouvé la valeur 0,97 TPa. Et pour une épaisseur de 0,066 nm nous avons trouvé un module d'Young de 4,2 TPa alors que Yakobson et al.[101] ont trouvé la valeur 5,5 TPa.

En résumé, les valeurs du module d'Young et du coefficient de Poisson obtenues par notre méthode d'homogénéisation sont cohérentes avec celles obtenues par d'autres méthodes expérimentales, Lu [59], ou théoriques, Yakobson et al.[101], Zhou et al.[109], Tu et Ou-Yang [96].

### 4.4 Comparaison des modèles en petites et en grandes déformations

Afin de comparer les résultats obtenus en petites et en grandes déformations, nous avons représenté les courbes de contraintes des deux modèles sur une même figure en fonction du tenseur de déformation de Green  $E_{ij}$  qui est équivalent au tenseur de déformation linéarisé  $\epsilon_{ij}$ . On remarque que pour des petites déformations les courbes des contraintes en grandes déformations et les contraintes du modèle linéaire sont confondues, voir Figure 4.4 à gauche.

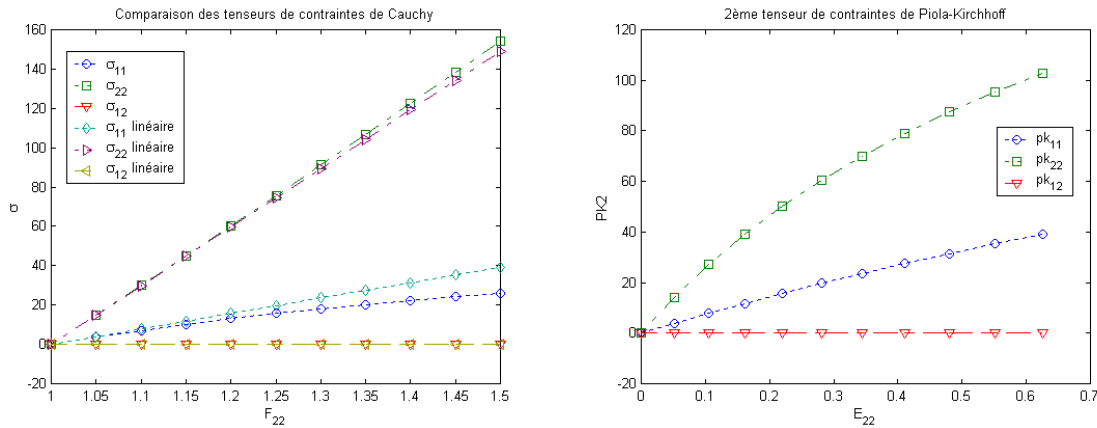


FIG. 4.4 – A gauche les courbes des contraintes obtenues par les deux modèles. A droite les composantes du second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff.

De plus nous avons calculé le second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff, pour vérifier si le modèle en grandes déformations correspond à un milieu de Saint-Venant Kirchhoff ou non, c'est-à-dire si le second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff est linéaire par rapport au tenseur de déformation de Green  $\mathbf{E}$ . Le résultat montre que les composantes du second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff ne sont pas linéaires en fonction des composantes de  $\mathbf{E}$ , voir Figure 4.4 à droite.

# Conclusion

Une nouvelle approche d'homogénéisation a été présentée. Cette méthode consiste à remplacer un modèle discret de treillis quasipériodique de barres par un modèle de milieu continu. Au niveau microscopique, c'est-à-dire à l'échelle d'une barre, deux comportements mécaniques doivent être définis : la tension normale d'une barre et le moment entre deux barres ayant un nœud commun. La loi de comportement macroscopique est obtenue par la résolution par la méthode de Newton d'un système d'auto-équilibre faisant intervenir les barres et couples de barres d'une période élémentaire du treillis. L'avantage de cette méthode est sa simplicité dans la mise en œuvre et son implémentation.

A partir de données mécaniques expérimentales microscopiques obtenues sur des cardiomyocytes isolés, nous avons obtenu une loi de comportement macroscopique a été construite. Ces données nous permettent de définir la tension normale, alors qu'il n'existe pas dans la littérature de données sur les moments qui existent au niveau des anastomoses pour lesquels nous avons choisi une expression fonction de la variation angulaire entre les directions des deux cardiomyocytes. Nous avons remarqué qu'il y a une légère différence entre les données mécaniques à l'état passif et celles à l'état actif, nous avons utilisé la même expression pour la tension normale dans les deux états passif et actif des cardiomyocytes. Afin de trouver une expression des moments modélisant au mieux le comportement des cardiomyocytes au niveau des anastomoses, nous avons fait des études pour des valeurs différentes de la rigidité des moments. En comparant nos résultats aux données expérimentales macroscopiques, nous nous sommes aperçus que la rigidité des moments jouent le rôle d'un paramètre modélisant l'activation électrique du cœur.

Pour une autre application de la technique d'homogénéisation aux nanotubes de carbone, nous avons obtenu deux modèles en grandes et en petites déformations. Dans l'hypothèse des petits déplacements, nous avons obtenu la solution analytique du système d'auto-équilibre et les formules explicites du module d'Young et du coefficient de Poisson. Les résultats numériques que nous avons obtenues sont très proches des résultats expérimentaux et des résultats théoriques proposés dans la littérature.



# Conclusion générale

En se basant sur des méthodes numériques pour la résolution des systèmes d'équations différentielles, nous avons développé des algorithmes permettant de suivre point par point les trajectoires des fibres myocardiques à partir de données anatomiques obtenues par la technique de microscopie en lumière polarisée développée par Jouk et al. [47], ainsi que des algorithmes de reconstruction de surfaces. La forme géométrique de révolution du ventricule gauche nous a permis d'utiliser l'invariance de la constante de Clairaut le long des géodésiques des surfaces de révolution pour vérifier la conjecture de Streeter sur ce ventricule tout entier. Des difficultés ont été rencontrées lors de la vérification de cette conjecture sur le ventricule droit à cause de sa forme géométrique compliquée et du manque de précision des données anatomiques.

D'un point de vue mécanique, nous proposons d'utiliser une nouvelle approche, une approche micro-macro, pour déterminer une nouvelle loi de comportement macroscopique du myocarde par homogénéisation. L'arrangement des cardiomyocytes est modélisé par un système quasipériodique (treillis) de barres élastiques. Cette méthode est basée sur la description géométrique microscopique de l'arrangement des cardiomyocytes et de leur comportement mécanique individuel et elle permet de remplacer un modèle discret de l'équilibre du treillis qui pourrait prendre en compte séparément toutes les barres par un modèle de milieu continu. C'est une adaptation aux milieux discrets de la méthode des développements asymptotiques de l'homogénéisation des milieux périodiques.

De plus, nous avons appliqué la méthode d'homogénéisation aux nanotubes de carbone en modélisant le réseau de liaisons de carbone dans les feuilles de graphite par un treillis bidimensionnel périodique de barres élastiques liées entre elles par leurs extrémités atomiques. Les interactions carbone-carbone sont modélisées par des tensions élastiques et la variation angulaire entre deux liaisons partageant la même extrémité est modélisée par des moments. Dans le cas particulier des petits déplacements, nous avons obtenu les expressions analytiques du module d'Young et du coefficient de Poisson.



# Bibliographie

- [1] Allinger N.L., Yuh Y.H., et Lii J.H. (1989) - Molecular mechanics. The MM3 force field for hydrocarbons, *Journal of American Chemical Society*, vol. 111, pp. 8551-8566.
- [2] Arts T., Reneman R.S., et Veenstra P.C. (1979) - A model of the mechanics of the left ventricle, *Ann. Biomed. Engng*, vol. 7, pp. 299-318.
- [3] Bakhvalov N.S., et Panasenko G.P. (1984) - Homogenization processes in periodic media, *Proc. of the 8-th USSR Conference on Numerical Methods in the Elasticity and Plasticity Problems*, Novosibirsk, pp. 27-31.
- [4] Bangert V. (1980) - Closed geodesics on complete surfaces, *Math Ann*, vol. 251, pp. 83-96.
- [5] Bensoussan A., Lions J.L., et Papanicolaou G. (1978) - *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam.
- [6] Berger M. et Gostiaux B. (1992) - *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, 2ème édition corrigée, Presses Universitaires de France.
- [7] Bestel J. (2000) - *Modèle différentiel de la contraction musculaire contrôlée. Application au système cardio-vasculaire*, Thèse de l'Université Paris IX Dauphine.
- [8] Bestel J., Clément F., et Sorine M. (2001) - A biomechanical model of muscle contraction, *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, Utrecht.
- [9] Bogen D.K. (1987) - Strain energy descriptions of biological swelling I : Single fluid compartmental models, *ASME J. Biomech. Eng*, vol. 109, pp. 252-256.
- [10] Brady A.J. (1984) - Passive stiffness of rat cardiac myocytes, *J. Biomech. Eng.*, vol. 106, pp. 25-30.
- [11] Brady A.J. (1991) - Mechanical properties of isolated cardiac myocytes, *Physiol. Rev.*, vol. 71, pp. 413-428.
- [12] Braemer J.M. (1976) - *Géométrie des courbes et des surfaces*, Hermann, Paris.
- [13] Brenner D.W. (1990) - Empirical potential for hydrocarbons for use in simulating the chemical vapor deposition of diamond films, *Physical Review B*, vol. 42, pp. 9458-9471.
- [14] Brezzi F. et Fortin M. (1991) - *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer Series in Computational Mathematics 15, Springer-Verlag, New-York.
- [15] Briane M. (1993) - Three models of non periodic fibrous materials obtained by homogenization, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, vol. 27, pp. 759-775.



- [16] Cai H. (1998) - *Loi de comportement en grandes déformations du muscle à fibres actives. Application à la mécanique du cœur humain et à sa croissance*, Thèse de l'Université de Savoie, France.
- [17] Caillerie D. (2002) - Modeling by homogenization of the saturated porous medium consolidation under large deformations, in *Poromechanics II, Second Biot Conference on poromechanics*, Eds Auriault J.-L., Bloch J. F., Boutin C., Geindreau C., Gustave S., Lewandowska J., Royer P., Grenoble, pp. 141-144.
- [18] Caillerie D., et Cambou B. (2001) - Les techniques de changement d'échelles dans les milieux granulaires, in *Micromécanique des milieux granulaires*, Hermès Sciences, Paris.
- [19] Cartan H. (1977) - *Cours de calcul différentiel*, nouvelle édition refondue et corrigée, Hermann, Paris.
- [20] Chadwick R.S. (1982) - Mechanics of the left ventricle, *Biophys. J.*, vol. 112, pp. 333-339.
- [21] Chapelle D., Clément F., Génot F., Le Tallec P., Sorine M., et Urquiza J. M. (2001) - A Physiologically-Based Model for the Active Cardiac Muscle Contraction, *Functional Imaging and Modeling of the Heart*, Katila, Magnin, Clarysse, Montagnat, Nenonen Eds, LNCS 2230, pp. 128-133, Springer.
- [22] Ciarlet P.G. (1987) - *Mathematical Elasticity. Volume 1 : Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam.
- [23] Cioranescu D., et Saint Jean Paulin J. (1999) - *Homogenization of Reticulated Structures*, Applied Mathematical Sciences 136, Springer-Verlag, New York.
- [24] Cornwell C.F., et Wille L.T. (1997) - Elasti properties of single-walled carbon nanotubes in compression, *Solid State Communications*, vol. 101, pp. 555-558.
- [25] Crouzeix M. et Mignot A.L. (1986) - *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, Paris.
- [26] Demailly J.P. (1996) - *Analyse numérique et équations différentielles*, nouvelle édition, Presses Universitaires de Grenoble.
- [27] Denis C. (2002) - *Physiologie du cœur* cours à l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne, Faculté de médecine Jacques Lisfranc.
- [28] Dieudonné J. (1968) - *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris.
- [29] Do Carmo M.P. (1976) - *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall inc.
- [30] Farin G. (1988) - *Curves and surfaces for computer aided geometric design*, Academic Press, London, 1st edition.
- [31] Feneis H. (1943) - Das gerfuge des herzmuskels bei systole und diastole, *Morphologisches Jahrbuch*, vol. 89, pp. 371.
- [32] Fish D., Orenstein J. et Bloom S. - Passive stiffness of isolated cardiac and skeletal myocytes in the hamster, *Circ. Res.*, vol. 54, pp. 267-276.
- [33] Fung Y.C. (1993) - *Biomechanics : Mechanical Properties of Living Tissues*, second edition, Springer-Verlag, New York.

- [34] Geerts-Ossevoort L., Bovendeerd P.H.M., Prinzen F.W., Arts T., et Nicolay K. (2001) - Myofiber Orientation in the Normal and Infarcted Heart, Assessed with MR-Diffusion Tensor Imaging, *Am. J. Physiol.*, vol. 283, H126-H138.
- [35] Gould P., Ghista D., Brombolich L., et Mirsky I. (1972) - In-vivo stresses in the human left ventricular wall : Analysis accounting for the irregular 3-dimensional geometry and comparison with idealised geometry analyses, *J. Biomech.*, vol. 5, pp. 521-539.
- [36] Govindjee S. et Sackman J.L. (1999) - On the use of continuum mechanics to estimate the properties of nanotubes, *Solid State Communications*, vol. 110, pp. 227-230.
- [37] Granzier H.L. et Irving T.C. (1995) - Passive tension in cardiac muscle : contribution of collagen, titin, microtubules, and intermediate filaments, *Biophys. J.*, vol. 68, pp. 1027-1044.
- [38] Gurtin M. (1981) - *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, San Diego.
- [39] Harik V.M., Gates T.S., et Nemeth M.P. (2002) - Applicability of the continuum-shell theories to the mechanics of carbon nanotubes, *AIAA-2002-1429*.
- [40] Hill, A. V. (1938) - The heat of shortening and the dynamic constants of muscle, *Proc R Soc B*, vol. 126, pp. 136-195.
- [41] Humphrey J.D., Strumpf R.K., Yin F.C.P. (1990) - Determination of a constitutive relation for passive myocardium : I. A new functional form, *ASME, J. Biomech. Engng*, vol. 112, pp. 333-339.
- [42] Humphrey J.D., Strumpf R.K., Yin F.C.P. (1990) - Determination of a constitutive relation for passive myocardium : II. Parameter estimation, *ASME, J. Biomech. Engng*, vol. 112, pp. 340-346.
- [43] Hunter P.J. et Smaill B.H. (1988) - The analysis of cardiac function : A continuum approach, *Prog. Biophys. Molec. Biol.*, vol. 52, pp. 101-164.
- [44] Huxley A. F., (1957) - Muscle structure and theories of contraction, *Prog in Biophys Mol Biol*, vol. 7, pp. 255-318.
- [45] Iijima S., (1991) - Helical microtubes of graphitic carbon, *Nature*, vol. 354, pp. 56-58.
- [46] Jouk P.S., Usson Y., Michalowicz G., et Parazza F. (1995) - Mapping of the orientation of myocardial cells by means of polarized light and confocal scanning laser microscopy, *Microsc. Res. Tech.*, vol. 30, pp. 480-490.
- [47] Jouk P.S., Usson Y., Michalowicz G., et Grossi L. (2000) - Three-dimensional cartography of the pattern of the myofibres in the second trimester fetal human heart, *Anat. Embryol.*, vol. 202, pp. 103-118.
- [48] Katz A. (1992) - *Physiology of the heart*, second edition, Raven Press, New York.
- [49] Klingenberg W. (1995) - *Riemannian Geometry*, Walter de Gruyter, Berlin-New York.
- [50] Krehl L. (1891) - Beiträge zur kenntnis der füllung und entleerung des herzens, *Abh Math-Phys Kl Saechs Akad Wiss*, vol. 17, pp. 341-362.
- [51] Krishnan A., Dujardin E., Ebbesen E., Yianilos P.N., et Treacy M.M.J. (1998) - Young's modulus of single-walled nanotubes, *Physical Review B*, vol. 58, pp. 14013-14019.

- [52] Le Grice I.J. (1992) - *A finite element model of myocardial structure : Implications for electrical activation in the heart*, Thèse de l'Université d'Auckland, Nouvelle Zeland.
- [53] Le Grice I.J., Smaill B.H., Chai L.Z., Edgar S.G., Gavin J.B. et Hunter P.J. (1995) - Laminar structure of the heart : Ventricular myocyte arrangement and connective tissue architecture in the dog, *Am. J. Physiol.*, vol. 269(38), pp. H571-H582.
- [54] Lelong-Ferrand J. et Arnaudès J.M. (1975) - *Cours de mathématiques tome 3 : géométrie et cinématique*, Dunod.
- [55] Lenosky T., Gonze X., Teter M., et Elser V. (1992) - Energetics of negatively curved graphitic carbon, *Nature*, vol. 355, pp. 333-335.
- [56] Le Tallec P. (1994) - Numerical methods for nonlinear three-dimensional elasticity, *Handbook of Numerical Analysis*, vol. 3, Eds Ciarlet P.G. and Lions J.L., vol. 3, p.465-622.
- [57] Lin D.H.S. et Yin F.C.P. (1998) - A multiaxial constitutive law for mammalian left ventricular myocardium in steady-state barium contracture or tetanus, *ASME, J. Biomech. Engng Verla*, vol. 120, pp. 504-517.
- [58] Liu J.Z., Zheng Q., et Jiang Q. (2001) - Effect of a rippling mode on resonances of carbon nanotubes, *Physical Review Letters*, vol. 86, pp. 4843-4846.
- [59] Lu J.P. (1997) - Elastic properties of carbon nanotubes and nanoropes, *Physical Review Letters*, vol. 79, pp. 1297-1300.
- [60] McCulloch A. (1986) - *Deformation and stress in the passive heart*, Thèse de l'Université d'Auckland, Nouvelle Zeland.
- [61] Moreau G. et Caillerie D. (1998) - Continuum modeling of lattice structures in large displacement. Applications to buckling analysis, *Computers and Structures*, vol. 68, pp. 181-189.
- [62] Mulieri L.A., Hasenfuss G., Ittleman F., Blanchard E.M., et Alpert N.R. (1989) - Protection of human left ventricular myocardium from cutting injury with 2,3 butanedione monoxime, *Circ. Res.*, vol. 65, pp. 1441-1444.
- [63] Nash M.P. et Hunter P.J. (2000) - Computational mechanics of the heart, *J. Elasticity*, vol. 61, pp. 113-141.
- [64] Oddou C. et Ohayon J. (1998) - Mécanique de la structure cardiaque, dans *Biomécanique des fluides et des tissus*, Ed Jaffrin M.Y., Masson, pp. 247-292.
- [65] Odegard G., Gates T.S., Nicholson L., et Wise C. (2001) - Equivalent continuum modeling of nanostructured materials, *NASA Technical Report*, NASA TM-2001-210863.
- [66] Ogden R.W. (1984) - *Nonlinear elastic deformations*, Ellis Horwood, New York.
- [67] Ogden R.W. (2000) - Nonlinear elasticity, anisotropy, material stability and residual stresses in soft tissue, *CISM Course : Biomechanics of Soft Tissue*, Udine, Italy.
- [68] Ohayon J. (1985) - *Dynamique d'une cavité cylindrique en matériau composite fibreux : application à la mécanique cardiaque*, Thèse de l'Université Paris Val de Marne.
- [69] Ohayon J. et Chadwick R.S. (1988) - Effects of collagen microstructure on the mechanics of the left ventricle, *Biophys. J.*, vol. 54, pp. 145-154.

- [70] Ohayon J., Usson Y., Jouk P.S., et Cai H. (1998) - Fibre orientation in human fetal heart and ventricular mechanics : A small perturbation analysis, *Comput. Methods Biomechanics Biomed. Eng.*, vol. 2, pp. 83-105.
- [71] Panasenko G.P. (1983) - Homogenization processes in lattice structures, *Math. Sb.*, vol. 122 :2, pp.220-231.
- [72] Peskin C.S. (1989) - Fiber architecture of the left ventricular wall : An asymptotic analysis, *Comm. Pure Appl. Math.*, XLII, pp. 79-113.
- [73] Pham-Trong V. (2001) - *Détermination géométrique de chemins géodésiques sur des surfaces de subdivision*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, France.
- [74] Pradel F. (1998) - *Homogénéisation des milieux continus et discrets périodiques orientés*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [75] Robb J.S. et Robb R.C. (1942) - The normal heart : anatomy and physiology of the structural units, *Am Heart J*, vol. 23, pp. 455-467.
- [76] Robinson T.F., Factor M.F. et Sonnenblick E.H. (1986) - The heart as a suction pump, *Scientific American*, pp. 84-91.
- [77] Robertson D.H., Brenner D.W., et Mintmire J.W. (1992) - Energetics of nanoscale graphic tubules, *Physical Review B*, vol. 45, pp. 12592-12595.
- [78] Sanchez-Palencia E. (1980) - *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*, Monographs in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin.
- [79] Sanchez-Quintana D., Garcia-Martinez V., Climent V. et Hurle J.M. (1995) - *Morphological changes in the normal pattern of ventricular myoarchitecture in the developing human heart*, *The Anatomical Record*, vol. 243, pp. 483-495.
- [80] Sandler H. et Dodge H.T. (1963) - Left ventricular tension and stress in man, *Circ. Res.* vol. 13 :2, pp. 91-104.
- [81] Sands G. (1996) - *Mathematical model of ventricular activation in an anatomically accurate deforming heart*, Thèse de l'Université d'Auckland, New Zealand.
- [82] Schwartz L. (1997) - *Analyse II : Calcul différentiel et équations différentielles*, Hermann.
- [83] Smaill B.H. et Hunter P.J. (1991) - Structure and function of the diastolic heart : Material properties of passive myocardium, in *Theory of Heart : Biomechanics, Biophysics, and Nonlinear Dynamics of Cardiac Function*, Glass L., Hunter P.J. and McCulloch A.D. Eds., Springer-Verlag, New York, pp. 1-29.
- [84] Streeter D.D., Spotnitz H.M., Patel D.P., Ross J. et Sonnenblick E.H. (1969) - Fiber orientation in the canine left ventricle during diastole and systole, *Circ. Res.*, vol. 24, pp. 339-347.
- [85] Streeter D.D. (1979) - Gross morphology and fiber geometry of the heart, *Handbook of Physiology. The cardiovascular system*, Berne R.M., Sperelakis N., Geiger S.R. Eds, Am. Phys. Soc., Williams & Wilkins, Baltimore.
- [86] Sweitzer N.K. et Moss R.L. (1993)- Determinants of loaded shortening velocity in single cardiac myocytes permeabilized with  $\alpha$ -hemolysin, *Circ. Res.*, vol. 73, pp. 1150-1162.

- [87] Swynghedauw B. (1995)- *Le cœur : fonctionnement, dysfonctionnements et traitements*, Nathan-Inserm edition, Paris.
- [88] Taber L.A. (1991) - On a nonlinear theory for muscle shells : part I - Theoretical development, *J. of Biomech. Eng.*, vol. 113, pp. 63-71.
- [89] Taber L.A. (1991) - On a nonlinear theory for muscle shells : part II - Application to the beating left ventricle, *J. of Biomech. Eng.*, vol. 114, pp. 427-434.
- [90] Taber L.A. et Perucchio R. (2000) - Modeling heart development, *J. of Elasticity*, vol. 61, pp. 165-197.
- [91] Tersoff J. (1988) - New empirical approach for the structure and energy of covalent systems, *Physical Review B*, vol. 37, pp. 6991-7000.
- [92] Tollenaere H. et Caillerie D. (1998) - Continuous modeling of lattice structures by homogenization, *Adv. Engng Software*, vol. 29 :7-9, pp. 699-705.
- [93] Torrent-Guaspa F. (1975) - Organizacion de la musculatura cardiaca ventricular, *Zarco P., Perez J. (eds) El Fallo Mecànico del Corazon*, Ediciones Toray, Barcelona, pp. 3-36.
- [94] Treacy M.M.J., Ebbesen T.W., et Gibson J.M. (1996) - Exceptionally high Young's modulus observed for individual carbon nanotubes, *Nature*, vol. 381, pp. 678-680.
- [95] Truesdell C. (1977) - *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, Academic Press, New-York.
- [96] Tu Z. et Ou-Yang Z. (2002) - Single-walled and multiwalled carbon nanotubes viewed as elastic tubes with the effective Young's moduli dependent on layer number, *Physical Review B*, vol. 65, pp. 233407-233410.
- [97] Usyk T.P., Mazhari R, et McCulloch A.D. (2000) - Effect of laminar orthotropic myofiber architecture on regional stress and strain in the canine left ventricle, *J. Elasticity*, vol. 61, pp. 143-165.
- [98] Washizu K. (1975) - *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, second edition, Pergamon Press.
- [99] Wong A.Y.K. et Rautharju P.M. (1968) - Stress distribution within the left ventricular wall approximated as a thick ellipsoidal shell, *Am. Heart J.*, vol. 75 :5, pp. 649-662.
- [100] Wong E.W., Sheehan P.E., Lieber C.M. (1997) - Nanobeam mechanics : elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes, *Science*, vol. 277, pp. 1971-1975.
- [101] Yakobson B.I., Brabec C.J., et Bernholc J. (1996) - Nanomechanics of carbon tubes ; Instabilities beyond linear response, *Physical Review Letters*, vol. 76, pp. 2511-2514.
- [102] Yasuda S., Sugiura S., Kobayakawa N., Fukita H., Yamashita H., Katoh K., Saeki Y., Kaneko H., Suda Y., Nagai R., et Sugi H. (2001) - *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.*, vol. 281, pp. H1442-H1446.
- [103] Yin F.C.P., Strumpf R.K., Chew P.H., et Zeger S.L. (1987) - Quantification of the mechanical properties of noncontracting canine myocardium under simultaneous biaxial loading, *J. Biomechanics*, vol. 20, pp. 577-589.

- [104] Young A.A., LeGrice I.J., Young M.A., Smaill B.H. (1998) - Extended confocal microscopy of myocardial laminae and collagen network, *Journal of Microscopy*, vol. 192 :2, pp. 139-150.
- [105] Yu M.F., Files B.S., Arepalli S., et Ruoff R.S. (2000) - Tensile loading of ropes of single wall carbon nanotubes and their mechanical properties, *Physical Review Letters*, vol. 84, pp. 5552-5555.
- [106] Yu M.F., Lourie O., Dyer M.J., Moloni K., Kelly T.F., et Ruoff R.S. (2000) - Strength and breaking mechanism of multiwalled carbon nanotubes under tensile load, *Science*, vol. 287, pp. 637-640.
- [107] Zhang P., Huang Y., Gao H., et Hwang K.C. (2002) - Fracture nucleation in single-wall carbon nanotubes under tension : a continuum analysis incorporating intratomic potentials, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 69, pp. 454-458.
- [108] Zhang P., Huang Y., Geubelle P.H., Klein P.A., et Hwang K.C. (2002) - The elastic modulus of single-wall carbon nanotubes : a continuum analysis incorporating intratomic potentials, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, pp. 3893-3906.
- [109] Zhou X., Zhou J., et Ou-Yang Z. (2000) - Strain energy and Young's modulus of single-wall carbon nanotubes calculated from electronic energy-band theory, *Physical Review B*, vol. 62, pp. 13692-13696.
- [110] Zhou G., Duan W., et Gu B. (2001) - First-principles study on morphology and mechanical properties of single-walled carbon nanotube, *Chemical Physics Letters*, vol. 333, pp. 344-349.
- [111] Zile M.R., Cowles M.K., Buckley J.M., Richardson K., Cowles B.A., Baicu C.F., Cooper IV G., Gharpuray V. (1998) - Gel stretch method : a new method to measure constitutive properties of cardiac muscle cells, *Am. J. Physiol.*, vol. 274, pp. H2188-2202.
- [112] Zile M.R., Richardson K., Cowles M.K., Buckley J.M., Koide M., Cowles B.A., Gharpuray V., Cooper IV G. (1998) - Constitutive properties of adult mammalian cardiac muscle cells, *Circulation*, vol. 98, pp. 567-579.



## **Troisième partie**

### **ANNEXES**





## Annexe A

# Technique de microscopie en lumière polarisée

L'équipe RFMQ du laboratoire TIMC a développé une nouvelle technique, la technique de microscopie en lumière polarisée, pour déterminer l'orientation des fibres dans des cœurs fœtaux, [46], [47].

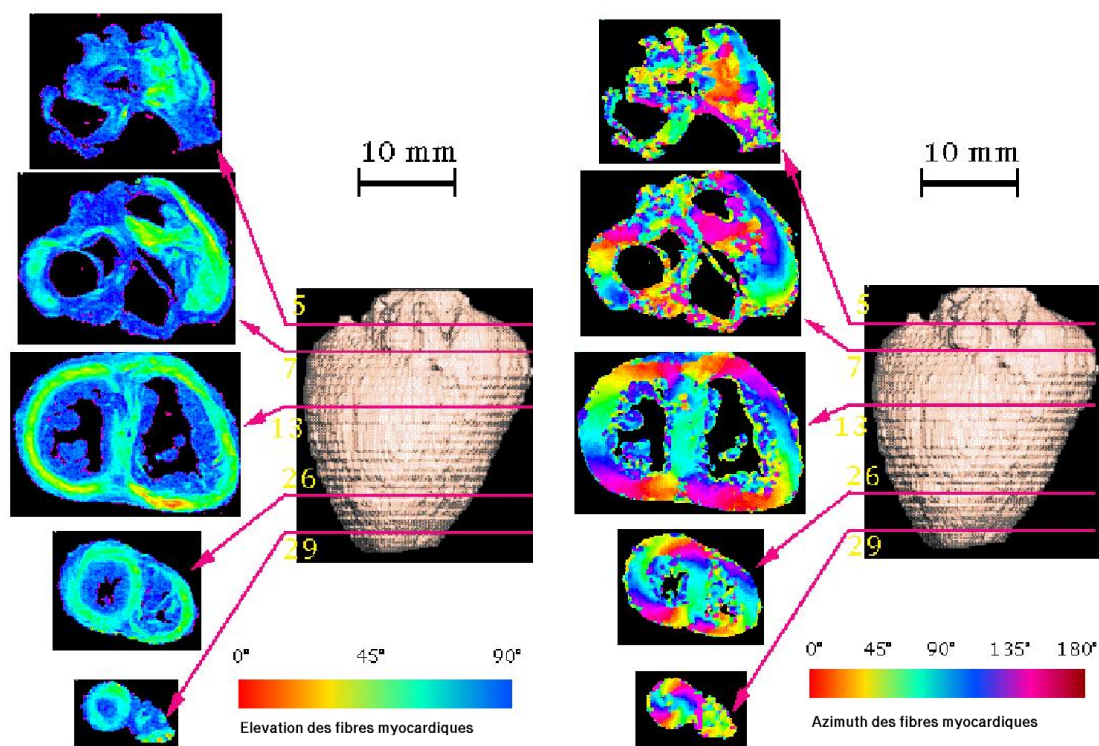


FIG. A.1 – Cartes angulaires de l'angle d'élévation (à gauche) et l'angle d'azimut (à droite) obtenues pour plusieurs coupes de la base jusqu'à l'apex. L'angle d'élévation est mesuré entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , et l'angle d'azimut est mesuré entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ .

Après son prélèvement, la partie ventriculaire est insérée dans une résine transparente dans laquelle après polymérisation les ventricules sont clairement visibles. On effectue des coupes d'épaisseur 500  $\mu\text{m}$ . Ces coupes peuvent être coronales (orthogonales à l'axe du ventricule gauche), sagittales (parallèles au septum) ou transversales (orthogonales au septum). La technique de mesure repose sur la propriété de biréfringence des filaments de myosine : la propagation de la lumière est plus lente le long de la direction longitudinale d'une cellule que le long d'une direction radiale. Le collagène est faiblement présent dans les cœurs fœtaux et ne gêne pas les mesures. Notons que l'indice de refraction de la résine choisie est proche de celui du collagène. Pour le myocarde post-natal des limitations apparaissent du fait probablement de l'augmentation de la teneur en collagène.

Les résultats sont constitués de cartes angulaires fournies sous forme de coupes discrétisées en voxels. Dans chaque voxel une information moyenne est collectée ; deux angles sont mesurés, l'angle d'élévation et l'angle d'azimut. L'angle d'élévation est l'angle que fait la fibre avec le plan de coupe et l'angle d'azimut est l'angle que fait la projection de la fibre sur le plan de coupe avec une direction fixe de ce plan.

# Annexe B

## Modélisation par des courbes et surfaces B-splines

Dans cette annexe nous présentons une introduction générale sur les courbes et les surfaces B-splines obtenues à partir de courbes et de surfaces de Bézier. Pour une étude bien détaillée sur la théorie des B-splines, voir Farin [30]. Ensuite, on utilise ce type de surfaces pour établir des modèles géométriques pour les deux ventricules sur lesquels on peut tracer des géodésiques en utilisant un algorithme développé pour tracer des plus courts chemins sur telles surfaces.

### B.1 Notions de Base

Soit  $n$  un entier naturel.

**Définition B.1** : Les polynômes de Bernstein sont définis par :

$$B_k^n(t) = C_n^k (1-t)^{n-k} t^k,$$

avec  $0 \leq k \leq n$  et  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Les polynômes de Bernstein sont de degré  $n$  et définissent une base pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

**Définition B.2** : étant donné  $(n+1)$  points  $P_0, P_1, \dots, P_n$  de  $\mathbb{R}^d$ , la courbe de Bézier  $\Gamma$  polynomiale de degré  $n$  de  $\mathbb{R}^d$  associée aux points  $\{P_k\}_{k=0, \dots, n}$ , est la courbe polynomiale paramétrée par  $\phi$  définie par :

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t) \quad t \in [0, 1]. \quad (\text{B.1})$$

Les points  $\{P_k\}_{k=0, \dots, n}$  sont appelés les points de contrôle de la courbe  $\Gamma$  et le polygone  $\mathcal{P} = P_0 P_1 \dots P_n$  est son polygone de contrôle. La courbe de Bézier  $\Gamma$  passe par les points  $P_0$  et  $P_n$ , elle est tangente en  $P_0$  au segment  $P_0 P_1$  et en  $P_n$  au segment  $P_{n-1} P_n$ . En plus, elle a d'autres

propriétés géométriques, citons par exemple l'invariance par translation et rotation, l'invariance par transformation affine de paramètre, ...

Les courbes de Bézier sont un outil puissant pour tracer des courbes, mais elles ont quelques limitations. Des courbes plus complexes peuvent cependant être modélisées grâce aux courbes polynomiales par morceaux qui sont appelées les splines.

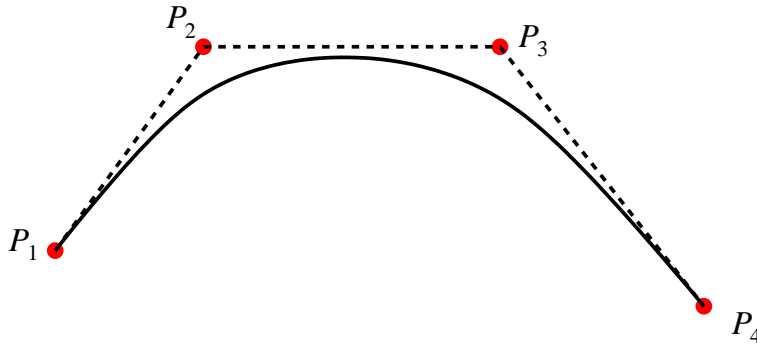


FIG. B.1 – Un exemple d'une courbe de Bézier polynomiale de degré 3.

**Définition B.3 :** Les fonctions B-splines uniformes  $N_k^n$  de degré  $n$  supérieur à 1 sont définies par la relation de récurrence :

$$N_k^n(t) = \frac{t-k}{n} N_k^{n-1}(t) + \frac{k+n-t}{n} N_{k+1}^{n-1}(t),$$

avec la B-spline de degré 0

$$N_k^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq t < k+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Définition B.4 :** Une courbe B-spline de degré  $n$  de  $\mathbb{R}^d$  est une courbe de classe  $C^{n-1}$  polynomiale par morceaux dont la restriction à chaque morceau est une courbe de Bézier polynomiale de degré  $n$  de  $\mathbb{R}^d$ . Le polygone obtenu à partir des polygones de Bézier de toutes les courbes de Bézier définissant la B-spline, est dit le polygone B-spline ou bien le polygone de De Boor.

Une courbe B-spline uniforme  $\Gamma$  de degré  $n$  de  $\mathbb{R}^d$  s'écrit sous forme paramétrée :

$$\phi(t) = \sum_k D_k N_k^n(t) \quad t \in [0, 1], \quad (\text{B.2})$$

où les  $D_k \in \mathbb{R}^d$  sont les points de De Boor.

L'avantage des courbes B-splines sur les courbes de Bézier est le *contrôle local*. En fait, pour une courbe de Bézier, un changement d'un des points de contrôle change toute la courbe,

c'est un changement global, alors qu'un changement d'un des points de contrôle d'une courbe B-spline n'affecte que quelques segments de courbe au voisinage du point modifié.

A partir de courbes de Bézier et B-splines, on peut obtenir des surfaces paramétrées en faisant le produit tensoriel de deux fonctions de base en suivant deux directions orthogonales. On appelle ces surfaces respectivement les surfaces de Bézier et les surfaces B-splines. Par exemple l'équation paramétrique d'une surface de Bézier s'écrit :

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m P_{kl} B_k^n(u) B_l^m(v) \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (\text{B.3})$$

et d'une surface B-spline :

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_k \sum_l D_{kl} N_k^n(u) N_l^m(v) \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (\text{B.4})$$

avec, les  $\{P_{kl}\}$  sont les points de contrôle de la surface de Bézier et les  $\{D_{kl}\}$  sont les points de De Boor de la surface B-spline.

## B.2 Application au myocarde

### B.2.1 Modèles géométriques pour les deux ventricules

Dans cette partie, on utilise des surfaces B-splines de classe  $C^2$  polynomiales par morceaux de degré 3.

#### Modèle pour le VG :

La surface externe du VG est considérée comme une surface toroïdale, elle ressemble à une partie d'ellipsoïde. L'extrémité de la partie inférieure est considéré comme un petit orifice, voir Figure 2.7. Cette surface peut être obtenue par rotation d'une courbe plane fermée, ayant la forme d'un croissant, autour d'un axe contenu dans le même plan que la courbe et qui ne la coupe pas.

#### Modèle pour le VD :

Le modèle établi pour le VD résulte des observations anatomiques classiques. Tout d'abord, on a construit un tore, puis on l'a allongé de manière à obtenir une surface "cylindrique" à paroi épaisse. Ensuite, on a tordu le cylindre pour obtenir une forme de tube en U et finalement on a modifié la grandeur des orifices, voir Figure 2.8.

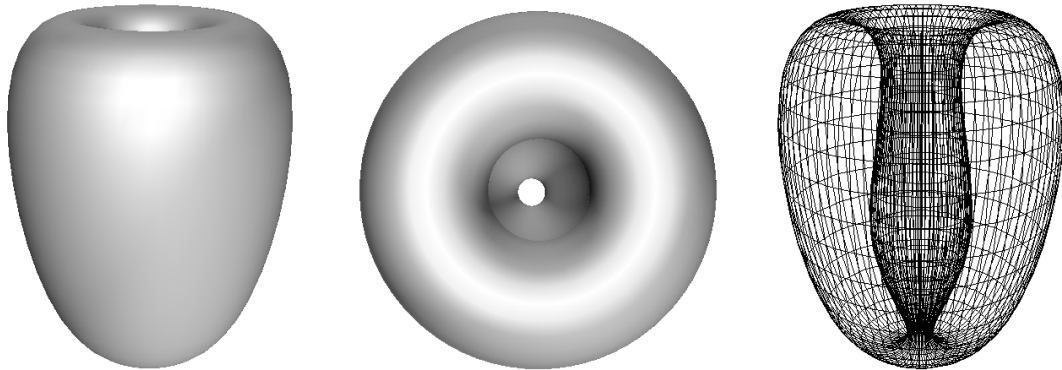


FIG. B.2 – Le modèle du VG.

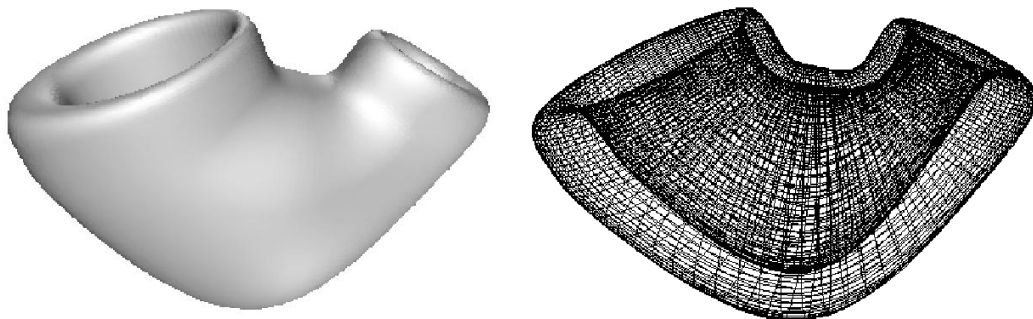


FIG. B.3 – Le modèle du VD.

### B.2.2 Plus courts chemins sur des surfaces B-splines

Pour déterminer une géodésique on peut procéder de deux manières, soit fixer un point de la géodésique et la tangente en ce point, soit fixer deux points de la géodésique. Nous utilisons un algorithme qui a été développé par [73] pour tracer des géodésiques sur des surfaces B-splines. Cet algorithme permet de tracer un plus court chemin entre deux points de la surface.

Si on cherche à tracer des géodésiques périodiques, on constate que les géodésiques obtenues par cet algorithme sont bien fermées mais elles ne se raccordent pas de manière régulière, voir Figure 2.9. Ce problème est du en principe au fait que la surface peut ne pas avoir de géodésiques périodiques passant par le point considéré.

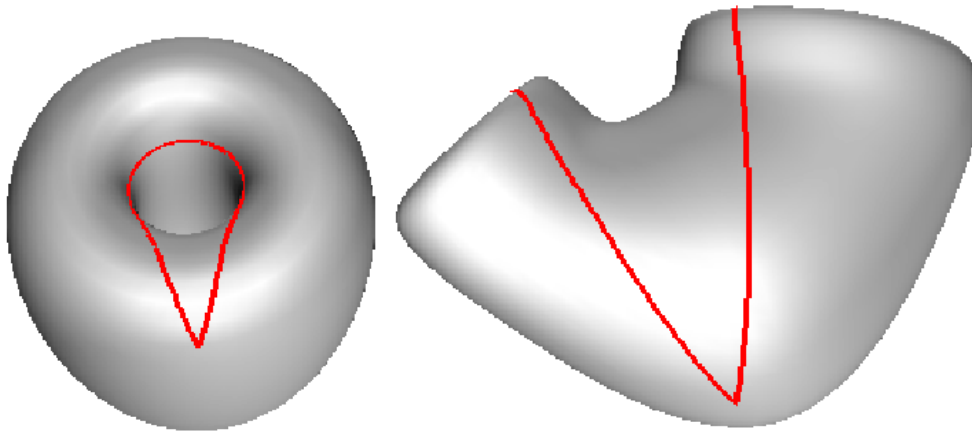


FIG. B.4 – Des géodésiques tracées sur les modèles des deux ventricules en utilisant l'algorithme développé par [73]. On voit des points anguleux aux points de raccord.