



HAL
open science

Quelques problèmes aux limites pour des équations de Navier-Stokes compressibles et isentropiques

Sébastien Novo

► **To cite this version:**

Sébastien Novo. Quelques problèmes aux limites pour des équations de Navier-Stokes compressibles et isentropiques. Mathématiques [math]. Université du Sud Toulon Var, 2002. Français. NNT : . tel-00004012

HAL Id: tel-00004012

<https://theses.hal.science/tel-00004012>

Submitted on 17 Dec 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE DE TOULON ET DU VAR
U.F.R. SCIENCES ET TECHNIQUES**

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE TOULON ET DU VAR

Discipline : Mathématiques Appliquées

présentée et soutenue publiquement

par

Sébastien NOVO

le 19 décembre 2002

Titre :

**Quelques problèmes aux limites pour des équations de
Navier-Stokes compressibles et isentropiques**

Directeur de thèse : M. ANTONÍN NOVOTNÝ

JURY

M. EDUARD FEIREISL	Rapporteur
M. THIERRY GALLOUET	Examineur
M. NADER MASMOUDI	Rapporteur
M. ANTONÍN NOVOTNÝ	Examineur
M. PATRICK PENEL	Examineur
M. DENIS SERRE	Examineur

**UNIVERSITE DE TOULON ET DU VAR
U.F.R. SCIENCES ET TECHNIQUES**

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE TOULON ET DU VAR

Discipline : Mathématiques Appliquées

présentée et soutenue publiquement

par

Sébastien NOVO

le 19 décembre 2002

Titre :

**Quelques problèmes aux limites pour des équations de
Navier-Stokes compressibles et isentropiques**

Directeur de thèse : M. ANTONÍN NOVOTNÝ

JURY

M. EDUARD FEIREISL	Rapporteur
M. THIERRY GALLOUET	Examineur
M. NADER MASMOUDI	Rapporteur
M. ANTONÍN NOVOTNÝ	Examineur
M. PATRICK PENEL	Examineur
M. DENIS SERRE	Examineur

J'exprime ma profonde gratitude envers Monsieur Antonín NOVOTNÝ pour sa rigueur et son enthousiasme dans la direction de ce travail. Avec toute mon amitié, je lui adresse ma plus grande estime.

Je remercie sincèrement Monsieur Eduard FEIREISL et Monsieur Nader MASMOUDI pour l'honneur qu'ils m'ont fait en rapportant mon travail. Une mention particulière à Monsieur Eduard FEIREISL pour les discussions enrichissantes que nous avons eues lors de son séjour à Toulon en juin 2002. Sans lui, une grande partie de cette thèse n'aurait sans doute pas vu le jour. Qu'il trouve dans ces quelques mots toute ma considération.

Mes remerciements vont également à Monsieur Thierry GALLOUET, Monsieur Patrick PENEL et Monsieur Denis SERRE pour avoir accepté de faire partie du jury.

Un grand merci aux membres du laboratoire A.N.A.M. pour leur accueil sympathique.

A mes parents qui sans relâche m'ont accompagné et encouragé, j'adresse toute ma tendresse et ma reconnaissance.

A mon frère, merci pour ta joie de vivre et bon courage pour la suite.

A mes grands-parents qui ont toujours suivi mon parcours avec intérêt, je fais part de toute mon affection.

A Reine et Julien, merci pour votre gentillesse et votre soutien.

A Véronique, Robert et Cédric qui m'ont chaleureusement accueilli parmi eux, j'adresse d'affectueuses pensées.

Aux grands-parents d'Alice que je remercie pour leur sympathie et toute l'attention qu'ils ont accordé à mon travail.

A tous mes amis qui m'ont supporté durant toutes ces années et à tous nos souvenirs.

A Alice qui m'a dit « oui » malgré toutes ces soirées passées à mon bureau ou devant mon mac, je dédie cette thèse avec tout mon amour.

Table des matières

Introduction	1
Première Partie : Equations stationnaires	11
1 Quelques outils	13
1 Equation de continuité, solutions renormalisées	14
2 Quelques problèmes elliptiques	19
3 Sur les opérateurs de Riesz	24
4 Compacité par compensation, commutateurs	25
5 Flux effectif visqueux (cas stationnaire)	26
2 Equations stationnaires en domaines bornés	31
1 Formulation du problème et résultat principal	32
2 Stratégie de la preuve	34
3 Preuve : Etape n°1	41
4 Preuve : Etape n°2	46
5 Preuve : Etape n°3	54
6 Preuve : Etape n°4	57
7 Preuve : Conclusion (Etude du problème d'origine)	62
3 Equations stationnaires en domaines non bornés	69
1 Formulation du problème et résultats principaux	70
2 Planification de la preuve	74
3 Solutions du système avec pression artificielle	76
4 Solutions du système d'origine	90
5 Commentaires	94
Deuxième Partie : Equations non stationnaires	97
I Résultats préliminaires	99
1 Un peu d'analyse fonctionnelle	100
2 Sur l'équation de continuité	103
3 Quelques problèmes paraboliques	108
4 Flux effectif visqueux (cas non stationnaire)	115
5 Divers	122

II	Equations non stationnaires en domaines bornés	123
1	Formulation du problème et théorème principal	124
2	Les grandes lignes de la preuve	128
3	Preuve : Etape n°1	135
4	Preuve : Etape n°2	156
5	Preuve : Etape n°3	161
6	Preuve : Conclusion (Etude du problème d'origine)	178
	Troisième Partie : Annexes	189
A	Notations et Rappels	191
1	Généralités	192
2	Espaces de Lebesgue	199
3	Distributions	203
4	Espaces de Sobolev	204
5	Espaces de Sobolev homogènes	211
6	Champs de vecteurs à divergence sommable	213
7	Fonctions absolument continues	213
8	Multiplicateurs de Fourier	214
9	Fonctions à valeurs dans un espace de Banach	216
10	Analyse convexe, fonctions monotones	222
B	Un problème auxiliaire d'usage fréquent	225
1	Les domaines bornés	226
2	Les domaines extérieurs	227
3	Les cônes de révolution	228
4	Les domaines à sorties côniques	232
C	Le degré topologique	235
1	Le degré topologique de Brouwer	236
2	Le degré topologique de Leray-Schauder	239
	Bibliographie	243

Notations

Ici sont présentées les notations utilisées dans cette thèse. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'annexe A ou aux passages correspondants dans le texte.

Les différents corollaires, lemmes, propositions, remarques et théorèmes sont, dans ce mémoire, numérotés dans chaque chapitre de manière séquentielle. Les formules, quant à elles, sont numérotées dans chaque chapitre par section et ce également de manière séquentielle. Par ailleurs, une étiquette du type (1.1.4) fera référence à la formule (1.4) du chapitre 1.

Notations générales

X' ou X^*	dual topologique de X
\langle , \rangle	produit de dualité X', X
$B_R(x_0)$	boule ouverte de centre x_0 et de rayon $R > 0$
$B^R(x_0)$	complémentaire de la fermeture de $B_R(x_0)$
B_R	$B_R(x_0)$ avec x_0 l'origine du système de coordonnées cartésiennes
B^R	complémentaire de la fermeture de B_R
Ω_R	$\Omega \cap B_R$
Ω^R	$\Omega \cap B^R$
$\Omega_{R_1}^{R_2}$	$\Omega^{R_1} \cap \Omega_{R_2}, R_1 < R_2$
$\partial\Omega$	frontière de Ω
ν	vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	produit scalaire de deux vecteurs
$\mathbf{S} : \mathbf{T}$	$\sum_{i,j} S_{ij} T_{ij}$ produit scalaire de deux tenseurs d'ordre deux
$\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$	vecteur de composantes $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{T})_i = \sum_j T_{ij} v_j$
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$	vecteur de composantes $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{T})_j = \sum_i v_i T_{ij}$

$\text{supp } f, \text{supp } \mathbf{v}$	support d'un champ scalaire, de vecteurs
$f * g$	produit de convolution de deux fonctions
$\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$	suite régularisante
$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$	$S_n(f) = \omega_n * f$
$\mathcal{F}(f)$	transformée de Fourier de la fonction f
$\mathcal{F}^{-1}(f)$	transformée de Fourier inverse de la fonction f
$\partial_i f, \partial_i \mathbf{v}$	$i^{\text{ème}}$ dérivée partielle d'un champ scalaire, de vecteurs
$\nabla f, \nabla \mathbf{v}$	gradient d'un champ scalaire, de vecteurs
$\text{div } \mathbf{v}$	divergence d'un champ de vecteurs
$\text{div } \mathbf{T}$	vecteur de composantes $\text{div } \mathbf{T}_i, \mathbf{T}_i = (T_{i1}, \dots, T_{iN})$
$\text{rot } \mathbf{v}$	rotationnel d'un champ de vecteurs
$\Delta f, \Delta \mathbf{v}$	Laplacien d'un champ scalaire, de vecteurs
$D^\alpha f, D^\alpha \mathbf{v}$	différentielle d'ordre $ \alpha = \sum_i \alpha_i$ d'un champ scalaire, de vecteurs
$J_{\mathbf{v}}(x_0)$	matrice Jacobienne d'un champ de vecteurs au point x_0
$\partial_\nu f$	dérivée normale extérieure d'un champ scalaire
$\sigma(X, X')$	topologie faible définie sur X
\rightharpoonup	convergence faible
$\sigma(X', X)$	topologie *-faible définie sur X'
\rightharpoonup^*	convergence *-faible
p'	exposant conjugué de p , <i>i.e.</i> $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
p.p.	presque partout
p.p.t.	pour presque tout
$ \mathcal{O} $	mesure de Lebesgue de l'ensemble \mathcal{O}

Espaces fonctionnels

$C^k(\Omega)$	fonctions k fois continûment différentiables sur Ω
$C^\infty(\Omega)$	$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$
$C^k(\overline{\Omega})$	fonctions de $C^k(\Omega)$ dont toutes les dérivées d'ordre $ \alpha \leq k$ se prolongent continûment sur $\overline{\Omega}$
$C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$	fonctions de $C^k(\overline{\Omega})$ dont toutes les dérivées d'ordre $ \alpha \leq k$ satisfont une condition de Hölder d'exposant $\theta \in (0, 1]$
$C_0^\infty(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)$	fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$	classe des fonctions à décroissance rapide de Schwartz
$\mathcal{D}'(\Omega)$	distributions sur Ω
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$	distributions tempérées
$L^p(\Omega)$	espace de Lebesgue équipé de la norme $\ \cdot\ _{0,p}$
$L_{loc}^p(\Omega)$	espace des fonctions de $L^p(\Omega')$, $\forall \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$
$\tilde{L}^p(\Omega)$	espace des fonctions de $L^p(\Omega')$, $\forall \Omega' \subset \Omega$
$W^{m,p}(\Omega)$	espace de Sobolev d'ordre m équipé de la norme $\ \cdot\ _{m,p}$
$H^m(\Omega)$	$W^{m,2}(\Omega)$
$W_0^{m,p}(\Omega)$	fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme $\ \cdot\ _{m,p}$
$H_0^m(\Omega)$	$W_0^{m,2}(\Omega)$
$D^{1,p}(\Omega)$	espace de Sobolev homogène d'ordre 1 équipé de la norme $ \cdot _{1,p}$
$D_0^{1,p}(\Omega)$	fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme $ \cdot _{1,p}$
$E^p(\Omega)$	champs de vecteurs \mathbf{v} de $[L^p(\Omega)]^3$ tels que $\operatorname{div} \mathbf{v} \in L^p(\Omega)$
$C^k(I; X)$	fonctions k fois continûment dérivables sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans X
$C^0(I, X_{\text{weak}})$	fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans X et continues par rapport à la topologie faible de X
$L^p(I; X)$	espace de Lebesgue des fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans X .

Introduction

Presque deux siècles se sont écoulés depuis que le mathématicien anglais Sir George Gabriel STOKES [74] a clarifié la mise en équations des écoulements de fluides visqueux introduite par le mathématicien et ingénieur français Claude Louis Marie Henry NAVIER [55] à partir de considérations antérieures établies par le mathématicien suisse Leonhard EULER [13] qui n'avait pas pris en compte les effets de la viscosité. Pourtant, aujourd'hui encore, nombre de questions mathématiques concernant ces équations, dites de Navier-Stokes, restent sans réponse. Lorsque l'écoulement est incompressible, un des problèmes qui résiste encore et toujours aux assauts des mathématiciens est l'existence de solutions classiques globales de ces équations en trois dimensions d'espace pour des données initiales générales (*i.e.* pas nécessairement régulières). En ce qui concerne les solutions dites faibles des équations de Navier-Stokes incompressibles, concept introduit par le mathématicien français Jean LERAY qui en étudia principalement l'existence [36, 38, 37], reste à l'heure actuelle encore totalement ouverte la question de régularité globale et d'unicité et ce en dépit de nombreuses tentatives. Lorsque l'écoulement est compressible et barotrope, même le problème d'existence de solutions faibles globales en dimension d'espace supérieure ou égale à deux est longtemps resté sans réponse. Il existe une vaste littérature sur cette question dans laquelle de nombreux auteurs, MATSUMURA et NISHIDA [53], HOFF [30] et WEIGANT et KAZHIKOV [80] pour n'en citer que quelques uns, ont apporté des réponses partielles sous diverses contraintes plus ou moins restrictives sur les données initiales (régularité, petitesse) ou sur les coefficients de viscosité (dépendance par rapport à la densité). La première approche rigoureuse de ce problème dans toute sa généralité est due à P.L. LIONS [46] dans le cas des équations de Navier-Stokes compressibles en régime isentropique (*i.e.* lorsque la loi d'état du fluide reliant la pression p à la densité ρ est du type $p(\rho) = a\rho^\gamma$ où a est une constante strictement positive et γ est la constante obtenue par le rapport entre la chaleur spécifique à pression constante et la chaleur spécifique à volume constant, constante dite adiabatique). Dans ses travaux, P.L. LIONS a présenté une théorie complète permettant d'obtenir des résultats d'existence de solutions faibles globales en N dimensions d'espace ($N \geq 2$) et ce pour des données initiales générales.

Avant de continuer et afin que les lignes qui suivent soient claires, nous introduisons les équations de Navier-Stokes modélisant l'évolution temporelle de la densité ρ et de la vitesse \mathbf{u} d'un fluide compressible en régime isentropique occupant une région bornée Ω de l'espace à N dimensions, $N \geq 2$. Elles s'écrivent

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu_1 \Delta \mathbf{u} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + a \nabla \rho^\gamma = \rho \mathbf{f} + \mathbf{g}. \quad (2)$$

L'équation (1), communément appelée équation de continuité, provient du principe de

conservation de la masse, tandis que l'équation vectorielle (2), communément appelée équation de mouvement, provient, quant à elle, du principe de conservation de la quantité de mouvement. Dans ces équations, $a > 0$, la constante adiabatique γ satisfait $\gamma > 1$, μ_1 et μ_2 sont les coefficients de viscosité supposés constants et satisfaisant certaines contraintes physiques et \mathbf{f} et \mathbf{g} représentent respectivement les forces externes volumiques et non volumiques agissant sur le fluide et sont des données du problème. Lorsque l'écoulement est stationnaire, *i.e.* lorsque la densité et la vitesse du fluide ne dépendent pas de la variable temporelle, ces équations s'écrivent

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu_1 \Delta \mathbf{u} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + a \nabla \rho^\gamma = \rho \mathbf{f} + \mathbf{g}. \quad (4)$$

Pour que l'examen de ces équations soit un problème mathématique a priori bien posé, dans la présente situation (Ω est une région bornée), on impose les conditions usuelles de non glissement. Autrement dit, on impose à la vitesse \mathbf{u} des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega. \quad (5)$$

Dans le cas des équations non stationnaires (1)-(2), il faut également connaître la densité et la vitesse du fluide ou de manière équivalente la densité et la quantité de mouvement à l'instant initial. Ces données initiales, couramment notées ρ_0 et \mathbf{q}_0 , sont des fonctions de la position. Dans le cas des équations stationnaires, pour éviter que le système soit indéterminé, on impose la masse totale du fluide contenu dans la région Ω , *i.e.* que l'on souhaite que la densité ρ soit telle que

$$\int_{\Omega} \rho \, dx = M > 0. \quad (6)$$

Reste à préciser la notion de solutions faibles du problème de Cauchy (1)-(2) complété par les conditions aux limites (5) et par la donnée des conditions initiales ρ_0 et \mathbf{q}_0 , ainsi que celle de solutions faibles du problème stationnaire (3)-(4) complété par les conditions aux limites (5) et par la donnée (6).

Dans cette thèse, nous nous intéresserons aux solutions faibles dites renormalisées à énergie bornée de ces problèmes. On donne maintenant un bref aperçu des principaux points que doit satisfaire ce type de solutions et ce sans entrer dans les détails techniques. Pour ce faire, il est bon de noter que si les fonctions ρ et \mathbf{u} sont régulières et satisfont l'équation de continuité (1), pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$, il est clair qu'elles sont également solutions de l'équation de continuité dite « renormalisée », cette terminologie provenant de la théorie du transport de DiPERNA et P.L. LIONS [12]. Cette équation s'écrit

$$\partial_t b(\rho) + \operatorname{div}(b(\rho) \mathbf{u}) + \{\rho b'(\rho) - b(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (7)$$

Dans le cas stationnaire, par le même formalisme, on récupère l'équation de continuité renormalisée

$$\operatorname{div}(b(\rho) \mathbf{u}) + \{\rho b'(\rho) - b(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (8)$$

Pour un temps $T \in (0, \infty)$, des forces \mathbf{f} et \mathbf{g} et des données initiales ρ_0 et \mathbf{q}_0 satisfaisant certaines hypothèses techniques, on dira que le couple de fonctions (ρ, \mathbf{u}) est une solution faible renormalisée à énergie bornée des équations (1)-(2) s'il possède les propriétés suivantes : $\rho \in L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^\gamma(\Omega))$, $\rho \geq 0$ p.p. dans Ω , $\rho(0) = \rho_0$ p.p. dans Ω , $\mathbf{u} \in [L^2(0, T; H_0^1(\Omega))]^3$, $\rho|\mathbf{u}|^2 \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$, $\rho\mathbf{u} \in [C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))]^3$ et $(\rho\mathbf{u})(0) = \mathbf{q}_0$ p.p. dans Ω ; si le prolongement par zéro de (ρ, \mathbf{u}) dans $(0, T) \times \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ est solution dans $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^N)$ des équations (1) et (7) pour une classe bien précise de fonctions $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$; si (ρ, \mathbf{u}) est solution de l'équation de mouvement (2) dans $[\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)]^3$; si p.p.t. $\tau \in (0, T)$, (ρ, \mathbf{u}) satisfait l'inégalité d'énergie

$$\begin{aligned} E(\rho, \mathbf{u})(\tau) + \int_0^\tau \int_\Omega \{ \mu_1 |\nabla \mathbf{u}|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 \} dx dt \\ \leq E_0 + \int_0^\tau \int_\Omega (\rho \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} dx dt, \end{aligned} \quad (9)$$

inégalité dans laquelle $E(\rho, \mathbf{u})(\tau) = \int_\Omega \{ \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \frac{a}{\gamma-1} \rho^\gamma \}(\tau) dx$ désigne l'énergie totale au temps τ et $E_0 = \int_\Omega \{ \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} 1_{\{\rho_0 > 0\}} + \frac{a}{\gamma-1} \rho_0^\gamma \} dx$ l'énergie totale initiale.

Pour des forces \mathbf{f} et \mathbf{g} et une masse M données, on dira que le couple de fonctions (ρ, \mathbf{u}) est une solution faible renormalisée à énergie bornée des équations (3)-(4) s'il existe $p \in [\frac{3}{2}, \infty)$ tel que $\rho \in L^p(\Omega)$, $\rho \geq 0$ p.p. dans Ω et satisfait (6), $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^3$; si le prolongement par zéro de (ρ, \mathbf{u}) à l'extérieur de Ω est solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ des équations (3) et (8) pour une classe bien précise de fonctions $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$; si (ρ, \mathbf{u}) est solution de l'équation de mouvement (4) dans $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$; si (ρ, \mathbf{u}) satisfait l'inégalité d'énergie

$$\int_\Omega \{ \mu_1 |\nabla \mathbf{u}|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 \} dx \leq \int_\Omega (\rho \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} dx. \quad (10)$$

Dans cette thèse, tous les résultats sont présentés en trois dimensions d'espace. C'est un choix de notre part. Tous sont aisément généralisables au cas de la dimension $N \geq 2$. Lorsque $N = 3$, la théorie développée par P.L. LIONS [46] pour démontrer l'existence de solutions faibles renormalisées à énergie bornée fait apparaître une limitation sur les valeurs autorisées pour la constante adiabatique γ , à savoir : $\gamma \geq \frac{9}{5}$ dans les équations non stationnaires et $\gamma > \frac{5}{3}$ ($\gamma = \frac{5}{3}$ sous certaines hypothèses techniques) dans les équations stationnaires. Nous expliquerons les grandes lignes de l'approche de P.L. LIONS pour les équations non stationnaires dans la suite. Récemment, E. FEIREISL [16] a généralisé cette approche pour pouvoir traiter les valeurs $\gamma > \frac{3}{2}$ dans le cas non stationnaire (ou plus généralement $\gamma > \frac{N}{2}$ en dimension N). Son approche diffère en certains points de celle de P.L. LIONS mais en reprend les principales idées, notamment celles qui concernent la compacité faible de la suite des flux effectifs visqueux ou pressions effectives (voir plus loin). Nous en expliquerons également les grandes lignes dans la suite. Il semble que ce résultat soit optimal dans le sens où les méthodes utilisées, basées sur des estimations d'énergie, font apparaître de manière redondante cette contrainte $\gamma > \frac{3}{2}$.

Bien souvent, dans l'étude d'un système non linéaire d'équations aux dérivées partielles, on modifie celui-ci dans le but d'obtenir un système « approché » dont on sait démontrer l'existence de solutions par des arguments standard d'analyse tel que des

théorèmes de point fixe, des approximations de type Faedo-Galerkin. Ceci se fait en introduisant un, voire plusieurs paramètres, puis en modifiant le système d'origine de telle sorte que les solutions « approchées » du système obtenu tendent vers une solution du système d'origine lorsque le, voire les paramètres en question approchent leur valeur critique. Cette méthode fait continuellement apparaître le problème de compacité d'un ensemble borné de solutions approchées.

Lors de l'examen des équations stationnaires, la plupart des approximations que nous utiliserons trouvent leurs origines dans les travaux de P.L. LIONS [46]. Ce sera également le cas lors de l'étude des équations non stationnaires dans laquelle nous adopterons une présentation inspirée de celle de FEIREISL, NOVOTNÝ et PETZELTOVÁ [18]. Dans un cas comme dans l'autre, à chaque niveau d'approximation, on trouvera différentes idées et techniques mais, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, se posera à chaque fois le problème de la compacité d'une suite bornée de solutions approchées. Nous allons maintenant expliquer de façon formelle comment résoudre ce problème au travers de l'étude de la compacité d'une suite bornée de solutions faibles renormalisées à énergie bornée des équations (1)-(2). Plus exactement, nous allons maintenant donner les grandes lignes de l'approche de P.L. LIONS qui, on le rappelle, s'applique pour $\gamma \geq \frac{9}{5}$ et de celle de E. FEIREISL qui, elle, s'applique pour $\gamma > \frac{3}{2}$. Pour ce faire, nous allons esquisser la preuve du théorème suivant :

Théorème 1 *Soient $T \in (0, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné à frontière Lipschitzienne et $\mathbf{f} = \mathbf{g} = \mathbf{0}$. On suppose que $\{(\rho_n, \mathbf{u}_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de solutions faibles renormalisées à énergie bornée des équations (1)-(2) correspondant à une suite de données initiales $\{(\rho_{0,n}, \mathbf{q}_{0,n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et que lorsque $n \rightarrow \infty$, on a*

$$\rho_{0,n} \rightarrow \rho_0 \text{ dans } L^1(\Omega), \quad \mathbf{q}_{0,n} \rightarrow \mathbf{q}_0 \text{ dans } [L^1(\Omega)]^3, \\ E_{0,n} = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_{0,n}|^2}{\rho_{0,n}} 1_{\{\rho_{0,n} > 0\}} + \frac{a}{\gamma - 1} \rho_{0,n}^{\gamma} \right\} dx \rightarrow E_0 < \infty \text{ dans } \mathbb{R}_+.$$

Alors il existe un couple de fonctions (ρ, \mathbf{u}) tel que, modulo l'extraction de sous-suites et lorsque $n \rightarrow \infty$, on a

$$\rho_n \rightarrow \rho \text{ dans } L^1((0, T) \times \Omega), \quad \mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } [L^2(0, T; H_0^1(\Omega))]^3.$$

En outre (ρ, \mathbf{u}) est une solution faible renormalisée à énergie bornée des équations (1)-(2) correspondant aux données initiales (ρ_0, \mathbf{q}_0) .

Tout d'abord, de l'inégalité d'énergie (9) dans laquelle ρ_n , \mathbf{u}_n , $E_{0,n}$ et $\mathbf{0}$ remplacent ρ , \mathbf{u} , E_0 et \mathbf{f} et \mathbf{g} , il résulte que

$$\|\rho_n\|_{L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega))} + \|\mathbf{u}_n\|_{[L^2(0,T;H_0^1(\Omega))]^3} + \|\rho_n |\mathbf{u}_n|^2\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leq c(T, E_{0,n}) \quad (11)$$

En accord avec ces bornes, il existe des fonctions ρ et \mathbf{u} telles que, modulo l'extraction de sous-suites et lorsque $n \rightarrow \infty$, on a

$$\rho_n \overset{*}{\rightharpoonup} \rho \text{ dans } L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega)), \quad \mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } [L^2(0, T; H_0^1(\Omega))]^3.$$

Ceci rend possible le passage à la limite $n \rightarrow \infty$ dans l'équation de continuité et dans tous les termes qui apparaissent dans l'équation de mouvement, « excepté » dans le terme de pression $p(\rho_n) = a\rho_n^\gamma$. En effet, pour s'assurer que celui-ci converge vers sa contrepartie $p(\rho) = a\rho^\gamma$, il est nécessaire d'avoir plus d'informations, comme par exemple la convergence $\rho_n \rightarrow \rho$ dans $L^1_{loc}((0, T) \times \Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$.

Dans un premier temps, pour éviter que la limite de la suite $\{a\rho_n^\gamma\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit une mesure, il est intéressant de posséder davantage d'informations sur la suite $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour cela, on teste formellement l'équation de mouvement (2), dans laquelle ρ_n , \mathbf{u}_n et $\mathbf{0}$ remplacent ρ , \mathbf{u} et \mathbf{f} et \mathbf{g} , par

$$\varphi = \mathcal{B}(\rho_n^\theta - \int_{\Omega} \rho_n^\theta dy)$$

où \mathcal{B} est l'opérateur de Bogovskiï sur Ω (un inverse de l'opérateur de divergence, voir l'annexe B pour plus de détails) et $0 < \theta < \gamma$. Après de nombreux calculs, on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho_n^{\gamma+\theta} dx dt \leq c(T, \Omega, E_{0,n}), \quad \theta = \frac{2}{3}\gamma - 1. \quad (12)$$

Cette estimation est une observation que l'on doit à P.L. LIONS [46, Theorem 7.1] qui l'a obtenue d'une autre manière. Il faut tout de même noter que pour la démontrer, on a besoin de savoir que (ρ_n, \mathbf{u}_n) est une solution de l'équation de continuité renormalisée (7) dans laquelle $b(s) = s^\theta$. Noter également que l'hypothèse de régularité de la région Ω est étroitement liée à l'utilisation de l'opérateur de Bogovskiï qui n'est pas défini si Ω ne possède pas la régularité minimale d'avoir une frontière Lipschitzienne. Evidemment, une estimation locale du type (12) suffit pour assurer que la pression limite n'est pas une mesure. A l'aide de (12), il est alors possible de préciser certaines convergences, notamment que modulo l'extraction de sous-suites et lorsque $n \rightarrow \infty$, on a

$$\begin{aligned} \rho_n &\rightarrow \rho \text{ dans } C^0([0, T]; L^{\gamma}_{\text{weak}}(\Omega)), \\ \rho_n^\gamma &\rightharpoonup \overline{\rho^\gamma} \text{ dans } L^{\frac{\gamma+\theta}{\gamma}}((0, T) \times \Omega), \\ \rho_n \mathbf{u}_n &\rightarrow \rho \mathbf{u} \text{ dans } [C^0([0, T]; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}_{\text{weak}}(\Omega))]^3, \\ \rho_n u_n^i u_n^j &\rightarrow \rho u^i u^j \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega), \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

En conséquence, les prolongements par zéro dans $(0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ des fonctions ρ , \mathbf{u} et $\overline{\rho^\gamma}$ encore notés ρ , \mathbf{u} et $\overline{\rho^\gamma}$ satisfont les équations

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu_1 \Delta \mathbf{u} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \\ + a \nabla \overline{\rho^\gamma} = \mathbf{0} \text{ dans } [\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)]^3. \end{aligned} \quad (14)$$

La difficulté qui consiste à prouver que (ρ, \mathbf{u}) est une solution faible renormalisée à énergie bornée reste entière et réside principalement dans la démonstration de $\overline{\rho^\gamma} = \rho^\gamma$ p.p. dans $(0, T) \times \Omega$. Ceci requiert une forme de compacité de la suite des densités $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui n'est pas disponible au vu des seules estimations (11)-(12). C'est une observation cruciale de P.L. LIONS [46] qui va combler cette lacune. Celle-ci fait état de la chose

suivante : la suite des quantités $\{a\rho_n^\gamma - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, couramment appelée suite des flux effectifs visqueux ou suite des pressions effectives, possède une certaine forme de compacité faible. Plus exactement, on a le

Théorème 2 *Pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ satisfaisant certaines conditions de croissance à l'infini, on a*

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \{a\rho_n^\gamma - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_n\} b(\rho_n) \varphi \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \{a\overline{\rho^\gamma} - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}\} \overline{b(\rho)} \varphi \, dx \, dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}((0, T) \times \Omega) \end{aligned} \quad (15)$$

où les quantités surmontées d'une barre désignent les limites faibles des suites correspondantes.

Jusque là, rien ne différencie réellement les approches de P.L. LIONS et de E. FEIREISL. En effet, ce dernier dans son approche aura besoin d'une version semblable au théorème 2, à savoir le

Théorème 3 *Pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ et tout $k > 0$, si on dénote par b_k la fonction définie par $b_k(s) = b(s)$ si $s \in [0, k)$ et $b_k(s) = b(k)$ si $s \in [k, \infty)$, alors*

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \{a\rho_n^\gamma - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_n\} b_k(\rho_n) \varphi \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \{a\overline{\rho^\gamma} - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}\} \overline{b_k(\rho)} \varphi \, dx \, dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}((0, T) \times \Omega). \end{aligned} \quad (16)$$

Que ce soit P.L. LIONS ou E. FEIREISL, tous deux ont ensuite respectivement utilisé (15) et (16) avec $b(s) = s$ (dans ce cas b_k sera noté T_k). En réalité, le premier à avoir fait cette observation, à l'aide d'une écriture de chaque intégrale de (15) faisant apparaître des commutateurs, est D. SERRE [71] en dimension un d'espace. En dimension supérieure, la preuve de P.L. LIONS est basée sur des résultats d'analyse harmonique et tient compte des observations de D. SERRE. La preuve due à E. FEIREISL est, quant à elle, basée sur le lemme div-rot de la théorie de la compacité par compensation introduite par F. MURAT [54] et L. TARTAR [75] et sur l'écriture de chaque intégrale de (16) faisant apparaître un autre commutateur.

Voyons tout d'abord comment P.L. LIONS a conclu à la convergence forte de la suite des densités $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers ρ . Pour simplifier la présentation, supposons que $s(\gamma) > \gamma + 1$, i.e. que $\gamma > 3$. Au vu de l'estimation (12), il est clair que $\rho \in L^2((0, T) \times \Omega)$ si $\gamma \geq \frac{9}{5}$. Dans ce cas, la théorie du transport de DiPERNA et P.L. LIONS [12] s'applique à l'équation de continuité (13) pour garantir la validité de l'équation (7). Alors, si $b(s) = s \ln s$, le passage à la limite $n \rightarrow \infty$ dans l'équation (7) satisfaite par ρ_n et \mathbf{u}_n , l'équation (7) et l'identité (15) permettent l'obtention d'une équation d'évolution pour l'amplitude des oscillations de la suite des densités mesurée par $\{\overline{\rho \ln \rho} - \rho \ln \rho\}$. Celle-ci s'écrit

$$\begin{aligned} & \partial_t \{\overline{\rho \ln \rho} - \rho \ln \rho\} + \operatorname{div}(\{\overline{\rho \ln \rho} - \rho \ln \rho\} \mathbf{u}) \\ &= \frac{a}{2\mu_1 + \mu_2} \{\overline{\rho^\gamma \rho} - \overline{\rho^{\gamma+1}}\} \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (17)$$

L'intégration formelle de cette équation sur $(0, T) \times \Omega$, la monotonie de la pression $p(\rho) = a\rho^\gamma$ et la convexité de la fonction $s \mapsto s \ln s$, $s \geq 0$, impliquent que $\overline{\rho \ln \rho} = \rho \ln \rho$ p.p. dans $(0, T) \times \Omega$. Autrement dit, la convergence faible commute avec une fonction strictement convexe, ce qui est totalement équivalent à la convergence forte de la suite des densités $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers ρ dans $L^1((0, T) \times \Omega)$ et achève la preuve du théorème 1 dans le cas $\gamma > 3$.

Voyons maintenant où résident les améliorations de E. FEIREISL permettant de traiter les valeurs γ pour lesquelles $\gamma < s(\gamma) \leq \gamma + 1$, *i.e.* les valeurs $\gamma \in (\frac{3}{2}, 3]$. Pour cet intervalle de valeurs, on n'est pas toujours assuré que $\rho \in L^2((0, T) \times \Omega)$. En conséquence, il n'est pas possible d'appliquer directement la théorie du transport de DiPERNA et P.L. LIONS [12]. Ce manque d'information, E. FEIREISL l'a comblé par son observation cruciale :

Théorème 4

$$\sup_{k>0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_k(\rho_n) - T_k(\rho)\|_{0, \gamma+1, (0, T) \times \Omega}^{\gamma+1} \leq c(T, \Omega, E_{0, n}). \quad (18)$$

La démonstration de ce résultat fait usage du théorème 3. Noter également que celle-ci ne nécessite en aucun cas l'estimation (12) mais que (11) suffit. Ce résultat doit être perçu de la façon suivante : bien que pour les valeurs $\gamma \in (\frac{3}{2}, \frac{9}{5})$ la suite des densités $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit seulement bornée dans $L^{\gamma+\theta}((0, T) \times \Omega)$, l'amplitude de ses oscillations, mesurée par le membre de gauche de l'inégalité (18), l'est toujours dans un espace meilleur que $L^2((0, T) \times \Omega)$. Cette propriété va ensuite se substituer à l'information manquante $\rho \in L^2((0, T) \times \Omega)$ et permettre de démontrer, en particulier, que pour les valeurs $\gamma \in (\frac{3}{2}, \frac{9}{5})$ le couple (ρ, \mathbf{u}) est une solution de l'équation renormalisée (7). Pour conclure, E. FEIREISL a adapté les arguments de la fin de l'approche de P.L. LIONS présentés plus haut. Disons simplement qu'il a utilisé une fonction $b(s) = L_k(s)$ telle que $sL'_k(s) - \underline{L_k}(s) = T_k(s)$ et $L_k(s) \rightarrow s \ln s$ quand $k \rightarrow \infty$ à la place de $b(s) = s \ln s$ pour récupérer $\rho \ln \rho = \rho \ln \rho$ p.p. dans $(0, T) \times \Omega$. D'où la fin de la preuve du théorème 1 pour les valeurs $\gamma \in (\frac{3}{2}, 3]$.

Après cette brève introduction de ce que l'on pourrait qualifier de point de départ de cette thèse, passons maintenant à la description de son contenu et de son organisation.

Dans ce mémoire, nous traitons principalement la question d'existence de solutions faibles renormalisées à énergie bornée des équations de Navier-Stokes compressibles en régime isentropique.

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude des écoulements stationnaires et se divise en trois chapitres. Dans le premier chapitre, il nous a semblé utile de regrouper des résultats spécifiques aux équations stationnaires et dont nous faisons un usage fréquent dans les autres chapitres de cette partie. On y trouvera notamment la version stationnaire de la théorie du transport de DiPERNA et P.L. LIONS [12] appliquée à l'équation de continuité, ainsi que plusieurs résultats généraux ayant un rapport avec la suite des flux effectifs visqueux ou pressions effectives. A ce propos, il est intéressant de souligner que dans ses travaux, P.L. LIONS [46, Chapter 6] a obtenu une propriété plus forte que celle que nous présentons. En effet, lorsque Ω est une région bornée de l'espace à trois dimensions, P.L. LIONS a démontré que le flux effectif visqueux $a\rho^\gamma - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u} \in h^{\frac{3(\gamma-1)}{2\gamma-1}}(K)$, K désignant ici tout sous-ensemble compact de Ω et $h^p(K)$ l'espace classique de Hardy

local. Ce résultat peut être obtenu à l'aide d'injections compactes et d'interpolations et a également été démontré indépendamment par A. NOVOTNÝ [62]. Ici, nous avons délibérément choisi de présenter la compacité faible de la suite des flux effectifs visqueux sous la forme exposée dans ce premier chapitre pour la simple et bonne raison que la preuve de ce résultat suit les mêmes lignes dans les cas stationnaire et non stationnaire.

Dans le deuxième chapitre sur les écoulements stationnaires, la question d'existence de solutions faibles renormalisées des équations de Navier-Stokes compressibles en régime isentropique est examinée lorsque la région occupée par le fluide est bornée. Dans ses travaux, P.L. LIONS [46, Chapter 6] en a démontré l'existence avec $p = s(\gamma)$, $s(\gamma) = 3(\gamma - 1)$ si $\gamma < 3$ et $s(\gamma) = 2\gamma$ si $\gamma \geq 3$, sous la contrainte $\gamma > \frac{5}{3}$ ($\gamma = \frac{5}{3}$ sous l'hypothèse que $M^{\frac{2}{3}} \|\mathbf{f}\|_{0,\infty}$ soit suffisamment petit) pour la constante adiabatique γ . Comme dans le cas non stationnaire, cette contrainte est liée au problème mathématique de la validité de l'équation de continuité renormalisée (8) quand la densité $\rho \notin L^2(\Omega)$. Le chapitre 2 expose une adaptation de la méthode proposée par E. FEIREISL et formellement présentée auparavant. Celle-ci permet de relâcher l'hypothèse $\gamma > \frac{5}{3}$ et de traiter les valeurs $\gamma \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{3}]$. En contrepartie de cette amélioration, cette méthode fait apparaître (comme dans le cas $\gamma = \frac{5}{3}$, traité par P.L. LIONS) une contrainte sur les forces volumiques \mathbf{f} agissant sur le fluide, contrainte que nous n'avons pas cherché à affaiblir. Les forces non volumiques \mathbf{g} , quant à elles, restent arbitraires. Sans cette contrainte, les estimations d'énergie ne sont plus satisfaites. Noter que mise à part cette contrainte, le résultat semble être optimal dans le sens où la méthode qui est utilisée pour le démontrer (basée sur des estimations d'énergie) ne s'applique pas lorsque $\gamma \leq \frac{3}{2}$. Pour en terminer avec le chapitre 2, il est bon de noter que nous y présentons également une méthode permettant de relâcher les hypothèses de régularité de la frontière de la région Ω en la supposant seulement Lipschitzienne. Cette limitation est étroitement liée à l'utilisation de l'opérateur de Bogovskiï et constitue un outil technique utilisé dans le chapitre 3. Sans cela, le chapitre 3 aurait été probablement plus long et beaucoup plus difficile à rédiger (et donc à lire!).

Dans le troisième et dernier chapitre concernant les écoulements stationnaires, c'est dans des domaines non bornés que l'existence de solutions faibles des équations de Navier-Stokes est étudiée. Plus exactement, nous nous plaçons dans la situation où la région occupée par le fluide est un domaine ayant plusieurs sorties côniques \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, n$, à l'infini et nous considérons le problème (3)-(5) auquel nous rajoutons les conditions

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \mathcal{C}_i}} \rho(x) = \rho_i \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \Omega}} \mathbf{u}(x) = \mathbf{0} \quad (19)$$

où, sans perte de généralité, nous supposons que $0 < \rho_n \leq \dots \leq \rho_1 < \infty$. La notion de solution faible diffère de celle du cas borné. Elle fait notamment apparaître le concept de flux sortant au travers de chaque sortie cônique, flux que l'on retrouve dans l'inégalité d'énergie satisfaite par toute solution faible à énergie bornée. Nous démontrons l'existence de ces solutions à l'aide d'une construction basée sur des approximations successives. La méthode fait apparaître la contrainte $\gamma > 3$ sur la constante adiabatique. Sans cela, les estimations d'énergie ne peuvent être obtenues alors qu'elles sont indispensables au bon fonctionnement de la méthode. Dans ce chapitre, il est important de souligner qu'une fois de plus l'opérateur de Bogovskiï est utilisé. Plus exactement, nous utilisons en fait une

famille d'opérateurs dont chaque terme, noté \mathcal{B}_{Ω_R} possède des propriétés similaires à celles de l'opérateur de Bogovskii avec toutefois la particularité de ne pas dépendre (dans un sens à préciser) de l'indice R . Les détails de la construction d'une telle famille d'opérateurs se trouvent dans la troisième partie de ce mémoire qui est intitulée « Annexes » (cf. annexe B). Disons juste que celle-ci est inspirée des idées de LADYZENSKAYA et SOLONNIKOV [33], BORCHERS et PILECKAS [6]. Puisqu'un domaine extérieur peut plus ou moins être vu comme « un cône complet », le résultat que nous obtenons généralise celui de P.L. LIONS [46, Theorem 6.12] dans le cas de domaines extérieurs à celui de domaines avec plusieurs sorties côniques à l'infini avec des sauts de pression non nécessairement nuls. Il généralise également au cas des équations de Navier-Stokes compressibles en régime isentropique les travaux dont HEYWOOD [29] est l'instigateur. Dans un deuxième temps, nous remplaçons les sorties côniques \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, n$, par des sorties cylindriques. Bien que la notion de flux et que le problème d'existence de solutions faibles à énergie bornée semblent raisonnables, nous montrons qu'en général il n'existe aucune solution faible à énergie bornée. Cette observation généralise les résultats de NOVOTNÝ, PADULA et PENEL [63] ainsi que ceux de P.L. LIONS [46, Chapter 6.8] sur la non existence de solution faible localement régulière dans un tube (qui peut être considéré comme un domaine à deux sorties cylindriques). Nous terminons ce chapitre en émettant quelques conjectures sur la question d'existence de solutions faibles à énergie bornée dans des domaines avec divers types de sorties à l'infini.

Dans la seconde partie de cette thèse, divisée en deux chapitres, nous nous concentrons sur les écoulements non stationnaires et compressibles en régime isentropique. Comme dans la partie consacrée aux écoulements stationnaires, le premier chapitre regroupe de nombreux outils indispensables dans la suite. On y trouvera notamment quelques résultats d'analyse fonctionnelle, la version non stationnaire de la théorie du transport de DIPERNA et P.L. LIONS [12] appliquée à l'équation de continuité, ainsi que des résultats généraux liés à la compacité de la suite des flux effectifs visqueux ou pressions effectives.

Dans le deuxième chapitre, notre attention se focalise sur le problème d'existence de solutions faibles des équations de Navier-Stokes compressibles en régime isentropique avec des conditions aux limites de type Dirichlet non homogènes pour la vitesse. Ce problème est discuté dans toute sa généralité par P.L. LIONS [46, Chapter 7.6]. A notre connaissance, aucune preuve rigoureuse n'existe dans la littérature mathématique. C'est ce qui, en partie, a motivé l'écriture de ce chapitre. En réalité, le problème que nous traitons est particulier par le type de région Ω considérée et par le fait que l'on impose à la vitesse du fluide d'être constante sur une partie ∂B de la frontière $\partial\Omega$ et nulle sur $\partial\Omega \setminus \partial B$. Soit dit en passant, il est alors nécessaire de connaître au préalable la densité du fluide qui pénètre à vitesse constante dans Ω . On la suppose également constante. L'origine de notre intérêt à ce problème provient de la lecture des travaux en optimisation de formes de E. FEIREISL [17]. Dans cet article, l'auteur introduit rigoureusement une définition convenable de solutions faibles renormalisées à énergie bornée et en suppose l'existence. Nos travaux viennent donc confirmer le pressentiment de E. FEIREISL. La méthode utilisée pour démontrer ce résultat d'existence est inspirée du schéma d'approximations proposé par FEIREISL, NOVOTNÝ et PETZELTOVÁ [18]. Elle utilise en outre une méthode de pénalisation de domaine. On y retrouve à divers stades les approches de P.L. LIONS et de E. FEIREISL concernant la compacité d'un ensemble borné de solutions approchées. Une

fois encore, l'approche de E. FEIREISL permettra de traiter les valeurs $\gamma > \frac{3}{2}$. La longueur de ce chapitre, comme celle du chapitre 2 dans la partie stationnaire, réside dans notre souci permanent de présenter une preuve très détaillée des résultats énoncés. Bien sûr, certains passages font partie du folklore de l'analyse standard. Nous sommes convaincus que ce choix ne peut nuire à la lecture de ce mémoire.

Dans la dernière partie, intitulée « Annexes », nous regroupons les principales notations utilisées dans ce mémoire ainsi que de nombreux rappels d'analyse dans l'annexe A. Dans l'annexe B, nous nous intéressons à l'opérateur de divergence et à un inverse de celui-ci, appelé opérateur de Bogovskiï. A partir de résultats connus, nous construisons de tels opérateurs avec des propriétés bien spécifiques selon le domaine considéré. Enfin, dans l'annexe C, nous donnons un bref aperçu des notions de degré topologique de Brouwer et Schauder et ce dans le but de rendre ce mémoire encore plus autonome.

Enfin, apparaît la bibliographie dans laquelle nous avons regroupé de nombreuses références en rapport avec cette thèse. Cette liste est bien sûr non exhaustive et certaines entrées ne sont pas citées dans le texte.

Première Partie :

Equations stationnaires

Chapitre 1

Quelques outils

Sommaire

1	Equation de continuité, solutions renormalisées	14
2	Quelques problèmes elliptiques	19
2.1	Le problème de Neumann associé au laplacien	19
2.2	Equation de continuité discrétisée en temps perturbée par une dissipation artificielle	20
2.3	Système elliptique de Lamé	23
3	Sur les opérateurs de Riesz	24
4	Compacité par compensation, commutateurs	25
5	Flux effectif visqueux (cas stationnaire)	26

Dans ce chapitre sont introduits divers résultats d'usage fréquent dans cette première partie. Ils sont, pour la plupart, accompagnés d'une preuve détaillée. Lorsque ce n'est pas le cas, le lecteur est systématiquement invité à consulter les références bibliographiques citées. Tout au long de ce chapitre, nous ne ferons pas la distinction entre une fonction définie sur un domaine $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ et son prolongement par zéro à l'extérieur de \mathcal{O} .

1 Equation de continuité, solutions renormalisées

L'équation de continuité stationnaire (1.1) possède entre autres certaines propriétés dont nous ferons usage de nombreuses fois dans les deux prochains chapitres. Cette section leur est entièrement consacrée.

La première de ces propriétés concerne le prolongement de cette équation à l'extérieur d'un domaine borné de l'espace à N dimensions, $N \geq 2$, dans le cas particulier où $N = 3$. Précisément, on a le

Lemme 1.1 *Soient Ω un domaine borné Lipschitzien de \mathbb{R}^3 et $p \geq 2$. On suppose que $\rho \in L^p(\Omega)$, $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^3$ et $f \in L^1(\Omega)$ satisfont*

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (1.1)$$

Alors

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (1.2)$$

Preuve. Il faut démontrer que

$$- \int_{\mathbb{R}^3} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} f \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3). \quad (1.3)$$

Considérons la suite de fonctions $\{\Phi_m\}_{m \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que pour $m \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \Phi_m \leq 1$,

$$\Phi_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{y \in \Omega, \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) \geq \frac{2}{m}\} \\ 0 & \text{si } x \in \{y \in \Omega, \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) \leq \frac{1}{m}\} \end{cases}, \quad |\nabla \Phi_m(x)| \leq cm, \quad x \in \Omega, \quad c > 1. \quad (1.4)$$

Clairement,

$$\Phi_m(x) \rightarrow 1 \text{ quand } m \rightarrow \infty, \quad x \in \Omega \quad (1.5)$$

$$\operatorname{supp} \nabla \Phi_m \subset \{x \in \Omega, \frac{1}{m} \leq \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq \frac{2}{m}\}. \quad (1.6)$$

En accord avec (1.1), on peut écrire que

$$- \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_m \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} f \varphi \Phi_m \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi_m \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3). \quad (1.7)$$

Or, d'après (1.4), (1.5) et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, les deux premières intégrales de cette égalité tendent respectivement vers $-\int_{\mathbb{R}^3} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi dx$ et $\int_{\mathbb{R}^3} f \varphi dx$. La troisième, quant à elle, se majore *e.g.* par

$$c \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |\varphi(x)| \|\rho\|_{0,2,\text{supp}\nabla\Phi_m} \left\| \frac{\mathbf{u}}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} \right\|_{0,2,\Omega}.$$

Par ailleurs, (1.6) et l'hypothèse de sommabilité sur ρ implique que $\|\rho\|_{0,2,\text{supp}\nabla\Phi_m} \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$ tandis que, puisque $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^3$, l'inégalité de Hardy garantit que $\frac{\mathbf{u}}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} \in [L^2(\Omega)]^3$. Le passage à la limite $m \rightarrow \infty$ dans (1.7) induit (1.3). D'où le résultat. \square

En modifiant légèrement cette preuve, on peut aisément démontrer le lemme suivant :

Lemme 1.2 *Soient Ω un domaine borné Lipschitzien de \mathbb{R}^3 et $p \geq 2$. On suppose que $\rho \in L^p(\Omega)$, $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^3$ et $f \in L^1(\Omega)$ satisfont*

$$\text{div}(\rho \mathbf{u}) \geq f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (1.8)$$

Alors

$$\text{div}(\rho \mathbf{u}) \geq f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (1.9)$$

Les résultats suivants découlent de la théorie du transport et plus particulièrement du concept de solutions renormalisées, de DIPERNA et P.L. LIONS [12]. La plupart d'entre eux sont accompagnés d'une preuve détaillée et ce, pour des raisons évidentes de clarté. Rappelons tout d'abord la généralisation du « lemme de Friedrichs » qui est un résultat incontournable lorsque l'on s'intéresse au concept de solutions renormalisées.

Lemme 1.3 *Soient $p \in [1, \infty]$, $q \geq p'$, $\rho \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\mathbf{u} \in [W_{loc}^{1,q}(\mathbb{R}^3)]^3$. On dénote par $\{S_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ la famille d'opérateurs de régularisation usuels. Alors*

$$S_\varepsilon(\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) - \mathbf{u} \cdot \nabla S_\varepsilon(\rho) \rightarrow 0 \text{ dans } L_{loc}^r(\mathbb{R}^3), \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

où la distribution $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho$ est naturellement définie par $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = \text{div}(\rho \mathbf{u}) - \rho \text{div } \mathbf{u}$.

Preuve. Pour une démonstration sommaire, consulter par exemple [12, Lemma II.1]. \square

Soit la classe de fonctions $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$b \in C^0([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty)), \quad \exists c > 0, \exists \lambda_0 < 1, \forall t \in (0, 1], |b'(t)| \leq ct^{-\lambda_0} \quad (1.10)$$

et dont le comportement à l'infini est donné par

$$\exists c > 0, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall t \geq 1, |b'(t)| \leq ct^{\lambda_1}, \quad |tb'(t) - b(t)| \leq ct^{\lambda_2}. \quad (1.11)$$

Lemme 1.4 *Soient $p \geq 2$ et*

$$-1 < \lambda_1 \leq \frac{p}{2} - 1 \quad \text{et} \quad 0 < \lambda_2 \leq \frac{p}{2}. \quad (1.12)$$

On suppose que $\rho \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $\rho \geq 0$ p.p. dans \mathbb{R}^3 , $\mathbf{u} \in [H^1_{loc}(\mathbb{R}^3)]^3$ et $f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $q = \frac{p}{\lambda_1}$ si $\lambda_1 > 0$ et $q \in (1, \infty)$ si $\lambda_1 \leq 0$, satisfont l'équation (1.2). Alors, pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ de la classe (1.11), (1.12), on a

$$\operatorname{div}(b(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho b'(\rho) - b(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = f b'(\rho) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (1.13)$$

Si $f \equiv 0$, (1.13) est encore vraie pour toute fonction b de la classe (1.10), (1.11) et (1.12).

Preuve. D'après (1.2), $-\int_{\mathbb{R}^3} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} f \varphi \, dx$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. En particulier, $\forall y \in \mathbb{R}^3$ arbitrairement fixé, on a

$$-\int_{\mathbb{R}^3} (\rho \mathbf{u})(x) \cdot \nabla \omega_\varepsilon(y-x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_j^y \omega_\varepsilon(y-x) (\rho u_j)(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) \omega_\varepsilon(y-x) \, dx,$$

$\{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ désignant une suite régularisante et $\{S_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ la suite d'opérateurs associée. Autrement dit,

$$\operatorname{div}(S_\varepsilon(\rho)\mathbf{u}) = r_\varepsilon + S_\varepsilon(f) \equiv \operatorname{div}(S_\varepsilon(\rho)\mathbf{u}) - \operatorname{div}(S_\varepsilon(\rho \mathbf{u})) + S_\varepsilon(f) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3. \quad (1.14)$$

Puisque $\operatorname{div}(S_\varepsilon(\rho \mathbf{u})) = S_\varepsilon(\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}))$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, en accord avec le lemme 1.3, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$ on a $r_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L^r_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$.

Soit $b \in C^1([0, \infty))$ une fonction de la classe (1.11) et (1.12). En multipliant (1.14) par $b'(S_\varepsilon(\rho))$, il vient alors que

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(b(S_\varepsilon(\rho))\mathbf{u}) + \{S_\varepsilon(\rho)b'(S_\varepsilon(\rho)) - b(S_\varepsilon(\rho))\} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ & = S_\varepsilon(f)b'(S_\varepsilon(\rho)) + r_\varepsilon b'(S_\varepsilon(\rho)) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Puisque, modulo l'extraction d'une sous-suite, $S_\varepsilon(\rho) \rightarrow \rho$ p.p. dans ω où $\omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine borné, il est clair que $b(S_\varepsilon(\rho))$, $\{S_\varepsilon(\rho)b'(S_\varepsilon(\rho)) - b(S_\varepsilon(\rho))\}$ et $b'(S_\varepsilon(\rho))$ convergent respectivement vers $b(\rho)$, $\{\rho b'(\rho) - b(\rho)\}$ et $b'(\rho)$ p.p. dans ω . Par ailleurs, d'après les hypothèses de croissance de la fonction b , il est facile de vérifier que les suites $\{b(S_\varepsilon(\rho))\}_\varepsilon$, $\{S_\varepsilon(\rho)b'(S_\varepsilon(\rho)) - b(S_\varepsilon(\rho))\}_\varepsilon$ et $\{b'(S_\varepsilon(\rho))\}_\varepsilon$ sont respectivement uniformément bornées par rapport à ε dans les espaces $L^{\frac{p}{\lambda_1+1}}(\omega)$, $L^{\frac{p}{\lambda_2}}(\omega)$ et $L^q(\omega)$, $q = \frac{p}{\lambda_1}$ si $\lambda_1 > 0$ et $q \in (1, \infty)$ si $\lambda_1 \leq 0$. Ainsi, en accord avec le lemme A.6, on a

$$b(S_\varepsilon(\rho)) \rightarrow b(\rho) \text{ dans } L^{\frac{6}{5}}(\omega) \text{ à condition que } \frac{6}{5} \leq \frac{p}{\lambda_1 + 1},$$

$$\{S_\varepsilon(\rho)b'(S_\varepsilon(\rho)) - b(S_\varepsilon(\rho))\} \rightarrow \{\rho b'(\rho) - b(\rho)\} \text{ dans } L^2(\omega) \text{ à condition que } 2 \leq \frac{p}{\lambda_2},$$

$$b'(S_\varepsilon(\rho)) \rightarrow b'(\rho) \text{ dans } L^{r'}(\omega) \text{ à condition que } r' \leq \frac{p}{\lambda_1} \text{ si } \lambda_1 > 0,$$

$$b'(S_\varepsilon(\rho)) \rightarrow b'(\rho) \text{ dans } L^q(\omega) \text{ si } \lambda_1 \leq 0,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} r_\varepsilon b'(S_\varepsilon(\rho)) \varphi \, dx \right| \leq c \int_{\mathbb{R}^3} |r_\varepsilon \varphi| \, dx \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \text{ si } \lambda_1 \leq 0.$$

Puisque $S_\varepsilon(f) \rightarrow f$ dans $L^q(\omega)$ où $\omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine borné, le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dans l'identité (1.15) testée par une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ implique (1.13).

Considérons maintenant le cas où $f \equiv 0$ et b est une fonction de la classe (1.10), (1.11) et (1.12). Soient $h \in (0, 1)$ et $b_h(\cdot) = b(\cdot + h)$. Alors, en accord avec la première partie de la preuve, on a

$$\operatorname{div}(b_h(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho b'_h(\rho) - b_h(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (1.16)$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de faire tendre h vers 0^+ . Pour ce faire, au vu des hypothèses (1.10), pour tout $t \geq 0$, on a $b_h(t) \rightarrow b(t)$ et $tb'_h(t) - b_h(t) \rightarrow tb'(t) - b(t)$ lorsque $h \rightarrow 0^+$. Ensuite, pour tout $k \geq 1$ fixé, il est clair que

$$\max_{t \in [0, k]} |b_h(t)| \leq \max_{t \in [0, 2k]} |b(t)|.$$

D'autre part, encore d'après (1.10), on a

$$\max_{[0, k]} |tb'_h(t) - b_h(t)| \leq \max_{[0, 2k]} |tb'(t) - b(t)| + ch^{1-\lambda_0} + h \max_{[1, 2k]} |b'(t)|.$$

De plus, en accord avec (1.11), pour tout sous-ensemble $\omega \subset \mathbb{R}^3$ borné, remarquer que

$$\begin{aligned} \|b_h(\rho)1_{\{\rho \geq k\}}\|_{0, \frac{6}{5}, \omega} &\leq ck^{(\lambda_1+1)-\frac{5}{6}p} \|\rho 1_{\{\rho \geq k\}}\|_{0, p, \omega}^{\frac{5p}{6}}, \\ \|\{\rho b'_h(\rho) - b_h(\rho)\}1_{\{\rho \geq k\}}\|_{0, 2, \omega} &\leq c(k^{\lambda_1-\frac{p}{2}} + k^{\lambda_2-\frac{p}{2}}) \|\rho 1_{\{\rho \geq k\}}\|_{0, p, \omega}^{\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

Enfin, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, on peut écrire que

$$\int_{\mathbb{R}^3} b_h(\rho)\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} b_h(\rho)1_{\{\rho < k\}}\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} b_h(\rho)1_{\{\rho \geq k\}}\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

La première intégrale converge vers $\int_{\mathbb{R}^3} b(\rho)1_{\{\rho < k\}}\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx$ quand $h \rightarrow 0^+$ d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, tandis que la deuxième est bornée par $ck^{(\lambda_1+1)-\frac{5p}{6}} \|\rho 1_{\{\rho \geq k\}}\|_{0, p, \operatorname{supp} \nabla \varphi}^{\frac{5p}{6}} \|\mathbf{u}\|_{0, 6, \operatorname{supp} \nabla \varphi} \|\nabla \varphi\|_{0, \infty}$ et, par conséquent, tend vers zéro quand $k \rightarrow \infty$. L'analyse du deuxième terme de (1.16) est tout a fait semblable et achève la démonstration. \square

Une fois encore, il est facile d'adapter cette démonstration à celle du lemme suivant :

Lemme 1.5 Soient $p \geq 2$, $\rho \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $\rho \geq 0$ p.p. dans \mathbb{R}^3 , $\mathbf{u} \in [H^1_{loc}(\mathbb{R}^3)]^3$ et $f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $q = \frac{p}{\lambda_1}$ si $\lambda_1 > 0$ et $q \in (1, \infty)$ si $\lambda_1 \leq 0$, satisfaisant l'équation (1.9). Alors, pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$, non décroissante de la classe (1.11), (1.12), on a

$$\operatorname{div}(b(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho b'(\rho) - b(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} \geq fb'(\rho) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (1.17)$$

Soient $k > 0$ et $b \in C^1([0, \infty))$. On pose

$$b_k(t) = \begin{cases} b(t) & \text{si } t \in [0, k), \\ b(k) & \text{si } t \geq k. \end{cases} \quad (1.18)$$

Alors la dérivée à droite de cette fonction, notée $(b_k)'_+$ existe sur $[0, \infty)$ et la composition $(b_k)'_+ \circ \rho$, $\rho \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, est bien définie p.p. dans \mathbb{R}^3 . Ces définitions en tête, on peut maintenant énoncer un corollaire du lemme 1.4.

Corollaire 1.1 Soient $p \geq 2$, $\rho \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $\rho \geq 0$ p.p. dans \mathbb{R}^3 , $\mathbf{u} \in [H^1_{loc}(\mathbb{R}^3)]^3$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant l'équation (1.2). Alors, pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$, on a

$$\operatorname{div}(b_k(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho(b_k)'_+(\rho) - b_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = f(b_k)'_+(\rho) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad \forall k > 0. \quad (1.19)$$

Preuve. Démontrons tout d'abord que

$$\forall k > 0, k \operatorname{div} \mathbf{u} = f \text{ p.p. dans } \{\rho = k\}. \quad (1.20)$$

On fixe $k > 0$. On considère une fonction $b \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp} b \subset \mathbb{R}_+$, $b(t) = t$ dans $(\frac{3}{4}k, \frac{5}{4}k)$ puis on introduit $b_{k,\varepsilon}^\pm = S_\varepsilon(b_{k \pm \varepsilon})$, S_ε désignant un opérateur régularisant unidimensionnel. Alors, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on a

$$\begin{aligned} b_{k,\varepsilon}^+(t) &\rightarrow b_k(t), & \forall t \geq 0, & \quad (b_{k,\varepsilon}^+)'(t) \rightarrow b'_k(t), & \forall t \neq k, & \quad (b_{k,\varepsilon}^+)'(t) \rightarrow 1, \\ b_{k,\varepsilon}^-(t) &\rightarrow b_k(t), & \forall t \geq 0, & \quad (b_{k,\varepsilon}^-)'(t) \rightarrow b'_k(t), & \forall t \neq k, & \quad (b_{k,\varepsilon}^-)'(t) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, le lemme 1.4, appliqué à $b_{k,\varepsilon}^\pm$ au lieu de b , garantit la validité des équations

$$\operatorname{div}(b_{k,\varepsilon}^\pm(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho(b_{k,\varepsilon}^\pm)'(\rho) - b_{k,\varepsilon}^\pm(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = f(b_{k,\varepsilon}^\pm)'(\rho) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

On passe à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, il vient alors que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(b_k(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho b'_k(\rho)1_{\{\rho \neq k\}} + k1_{\{\rho = k\}} - b_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ = f\{b'_k(\rho)1_{\{\rho \neq k\}} + 1_{\{\rho = k\}}\} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \\ \operatorname{div}(b_k(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho b'_k(\rho)1_{\{\rho \neq k\}} - b_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = f b'_k(\rho)1_{\{\rho \neq k\}} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

et en soustrayant la deuxième équation de la première, on récupère l'affirmation (1.20).

A présent, démontrons le corollaire 1.1. Soient $b \in C^1([0, \infty))$ et $k > 0$ fixé. On dénote encore par b le prolongement de b par $b(0)$ dans $(-\infty, 0)$ et on applique le lemme 1.4 à $S_\varepsilon(b_k)$, où S_ε , $\varepsilon \in (0, 1)$, est un opérateur de régularisation unidimensionnel. On trouve que

$$\operatorname{div}(S_\varepsilon(b_k)(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho S_\varepsilon(b_k)'(\rho) - S_\varepsilon(b_k)(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = f S_\varepsilon(b_k)'(\rho) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (1.21)$$

Puisque $b_k \in C^0([0, \infty)) \cap C^1([0, k) \cup (k, \infty))$, $\forall t \in [0, \infty)$, $S_\varepsilon(b_k)(t) \rightarrow b_k(t)$ et, $\forall t \in [0, k) \cup (k, \infty)$, $S_\varepsilon(b_k)'(t) \rightarrow (b_k)'_+(t)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Par conséquent, $S_\varepsilon(b_k)(\rho) \rightarrow b_k(\rho)$ p.p. dans \mathbb{R}^3 et $S_\varepsilon(b_k)'(\rho) \rightarrow (b_k)'_+(\rho)$ p.p. dans l'ensemble $\{\rho \neq k\}$. Ensuite, en accord avec (1.20), il est clair que

$$\rho S_\varepsilon(b_k)'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} = f S_\varepsilon(b_k)'(\rho) \text{ p.p. dans } \{\rho = k\}.$$

Enfin, la forme très particulière de la fonction b_k implique que $S_\varepsilon(b_k)$ et $S_\varepsilon(b_k)'$ sont uniformément bornées par rapport à ε . Ainsi, à l'aide du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dans (1.21) est complètement justifié et implique (1.19). \square

Remarque 1.1 Noter qu'en faisant tendre $k \rightarrow \infty$ dans (1.19), pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ de la classe (1.11), (1.12), on récupère (1.13).

2 Quelques problèmes elliptiques

Dans cette section, nous nous concentrons sur divers problèmes de type elliptique que nous rencontrerons par la suite.

2.1 Le problème de Neumann associé au laplacien

Soient $p \in (1, \infty)$, $\varepsilon \in (0, 1]$ et Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 . Etant donné un champ de vecteurs $\mathbf{g} \in [L^p(\Omega)]^3$, resp. un champ scalaire $\mathcal{F} \in L^p(\Omega)$, le problème de Neumann faible, resp. fort, consiste à trouver $\rho \in W^{1,p}(\Omega)$, resp. $W^{2,p}(\Omega)$, tel que

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla \rho \cdot \nabla \eta \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \nabla \eta \, dx, \quad \forall \eta \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad (2.1)$$

resp.

$$-\varepsilon \Delta \rho = \mathcal{F} \text{ dans } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\partial_{\nu} \rho = 0 \text{ sur } \partial \Omega. \quad (2.3)$$

Dans ce paragraphe, nous rappelons un résultat classique sur l'existence, l'unicité et la régularité des solutions des problèmes de Neumann faible et fort associés à l'opérateur de Laplace.

Lemme 1.6 *Soient $p \in (1, \infty)$, Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 et $\theta \in (0, 1]$.*

(i) *On suppose que Ω est de classe $C^{1,\theta}$ et que $\mathbf{g} \in [L^p(\Omega)]^3$. Alors il existe une fonction $\rho \in W^{1,p}(\Omega)$ solution du problème de Neumann faible (2.1) satisfaisant*

$$\|\nabla \rho\|_{0,p} \leq \frac{c(\Omega, p)}{\varepsilon} \|\mathbf{g}\|_{0,p}. \quad (2.4)$$

Toute autre solution dans la classe $W^{1,p}(\Omega)$ est de la forme $\rho + c$, $c \in \mathbb{R}$.

(ii) *On suppose que Ω est de classe $C^{2,\theta}$ et que $\mathcal{F} \in L^p(\Omega)$ satisfait*

$$\int_{\Omega} \mathcal{F} \, dx = 0. \quad (2.5)$$

Alors il existe une fonction $\rho \in W^{2,p}(\Omega)$ solution du problème de Neumann fort (2.2)-(2.3) satisfaisant

$$\|\nabla \rho\|_{1,p} \leq \frac{c(\Omega, p)}{\varepsilon} \|\mathcal{F}\|_{0,p}. \quad (2.6)$$

On suppose en outre que $\mathbf{g} \in E_0^p(\Omega)$. Alors toute solution $\rho \in W^{1,p}(\Omega)$ du problème de Neumann faible (2.1) est solution du problème de Neumann fort (2.2)-(2.3) dans lequel $\mathcal{F} = \operatorname{div} \mathbf{g}$ et satisfait $\rho \in W^{2,p}(\Omega)$, $\partial_{\nu} \rho = 0$ sur $\partial \Omega$ ainsi que l'estimation

$$\|\nabla \rho\|_{1,p} \leq \frac{c(\Omega, p)}{\varepsilon} \|\mathbf{g}\|_{E_0^p(\Omega)}. \quad (2.7)$$

Preuve. Voir par exemple NEČAS [56] ou SIMADER et SOHR [72]. □

2.2 Equation de continuité discrétisée en temps perturbée par une dissipation artificielle

Soient $\alpha, \varepsilon \in (0, 1]$ fixés, \mathbf{v} et h des fonctions données. Dans le prochain chapitre, nous aurons besoin d'informations sur le problème auxiliaire suivant :

$$\alpha\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) - \varepsilon\Delta\rho = \alpha h \text{ dans } \Omega, \quad (2.8)$$

$$\partial_{\nu}\rho = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.9)$$

$$\int_{\Omega} \rho \, dx = \int_{\Omega} h \, dx. \quad (2.10)$$

Dans le théorème qui suit, nous précisons la notion de solution de ce problème dont nous prouvons l'existence et l'unicité.

Théorème 1.1 *Soient $\alpha, \varepsilon \in (0, 1]$ fixés, Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 de classe $C^{2,\theta}$, $\theta \in (0, 1]$, $\mathbf{v} \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^3$ satisfaisant $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega$ au sens des traces et $h \in L^{\infty}(\Omega)$. Alors il existe un unique champ scalaire ρ satisfaisant pour tout $p \in (1, \infty)$, $\rho \in W^{2,p}(\Omega)$, l'équation (2.8) p.p. dans Ω , (2.9), (2.10), ainsi que l'estimation*

$$\|\rho\|_{2,p} \leq c(\Omega, p, \alpha, \varepsilon, K) \|h\|_{0,\infty} \text{ si } \|\mathbf{v}\|_{1,\infty} \leq K. \quad (2.11)$$

Si $h \geq 0$ p.p. dans Ω . Alors $\rho \geq 0$ p.p. dans Ω .

Preuve. Soient $\alpha, \varepsilon \in (0, 1]$, $p \in (1, \infty)$ et $t \in [0, 1]$. On note $T_t : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ l'opérateur qui à tout champ scalaire $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ fait correspondre $\rho = T_t(\varphi)$ la solution du problème

$$-\varepsilon\Delta\rho = t\{\alpha(h - \varphi) - \operatorname{div}(\varphi\mathbf{v})\} \text{ dans } \Omega, \quad (2.12)$$

$$\partial_{\nu}\rho = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.13)$$

$$\int_{\Omega} \rho \, dx = \int_{\Omega} h \, dx. \quad (2.14)$$

En accord avec le lemme 1.6, l'opérateur T_t est bien défini. Noter alors que pour démontrer l'existence d'au moins une solution ρ du problème (2.8)-(2.10), il suffit de prouver que l'opérateur T_t admet au moins un point fixe ρ . Pour ce faire, nous allons démontrer deux affirmations qui permettront de conclure à l'aide de la théorie du degré topologique de Leray-Schauder rappelée dans l'Annexe C.

Affirmation n° 1 *On suppose que $\rho \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfait $\rho = T_t(\rho)$ et la contrainte (2.14) et que $\|\mathbf{v}\|_{1,\infty} \leq K$. Alors il existe une constante $C_{ptf} = c(\Omega, p, \alpha, \varepsilon, K, h)$ indépendante de t telle que*

$$\|\rho\|_{1,p} < C_{ptf}.$$

Autrement dit,

$$0 \notin (I - T_t)(\partial D), \quad D = \left\{ \varphi \in W^{1,p}(\Omega), \|\varphi\|_{1,p} < C_{ptf}, \int_{\Omega} \varphi \, dx = \int_{\Omega} h \, dx \right\}.$$

Preuve. Soient $\beta \in (0, 1)$ et $l \in (0, 1]$. On pose $\eta^+ = (\rho^+ + l)^\beta$ et $\eta^- = -(\rho^- + l)^\beta$. Alors η^+ et η^- sont des fonctions test admissibles de l'équation (2.12) dans laquelle on remplace φ par ρ . En effet, si $p \geq 2$, il est clair que $\eta^+, \eta^- \in W^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p'}(\Omega)$. Si $p < 2$, le lemme 1.6 et les injections de Sobolev garantissent que $\rho \in W^{2,p}(\Omega) \subset W^{1,p^*}(\Omega)$. On considère ensuite les deux situations $p^* \geq 2$ et $p^* < 2$. En répétant un nombre fini de fois cette procédure, on arrive à la conclusion $\rho \in W^{1,q}(\Omega)$, $q \geq p'$. On teste donc l'équation (2.12), dans laquelle φ est remplacée par ρ , par η^\pm . En accord avec les inégalités de Hölder et de Young, il vient que

$$\begin{aligned} & \pm \alpha t \int_{\Omega} \rho(\rho^\pm + l)^\beta dx = \\ & \mp \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \rho \cdot \nabla (\rho^\pm + l)^\beta dx \pm \alpha t \int_{\Omega} h(\rho^\pm + l)^\beta dx \pm t \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho^\pm + l)^\beta dx \\ & \leq -\varepsilon \beta \int_{\Omega} (\rho^\pm + l)^{\beta-1} |\nabla (\rho^\pm + l)|^2 dx + \alpha t \|h\|_{0,\beta+1} \|\rho^\pm + l\|_{0,\beta+1}^\beta \\ & \quad + t \beta \int_{\Omega} |\mathbf{v}| (\rho^\pm + l)^\beta |\nabla (\rho^\pm + l)| dx + t \beta l \int_{\Omega} |\mathbf{v}| (\rho^\pm + l)^{\beta-1} |\nabla (\rho^\pm + l)| dx \\ & \leq -\varepsilon \beta \int_{\Omega} (\rho^\pm + l)^{\beta-1} |\nabla (\rho^\pm + l)|^2 dx + \frac{\alpha t}{\beta+1} \|h\|_{0,\beta+1}^{\beta+1} + \frac{\alpha t \beta}{\beta+1} \|\rho^\pm + l\|_{0,\beta+1}^{\beta+1} \\ & \quad + (t \beta \|\mathbf{v}\|_{1,\infty} \|\rho^\pm + l\|_{0,\beta+1}^{\frac{\beta+1}{2}} + t \beta l^{\frac{\beta+1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{1,\infty} \sqrt{|\Omega|}) \left(\int_{\Omega} (\rho^\pm + l)^{\beta-1} |\nabla (\rho^\pm + l)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau l'inégalité de Young, le fait que $t \in [0, 1]$ et en supposant que $\|\mathbf{v}\|_{1,\infty} \leq K$, il en résulte que

$$\pm \alpha t \int_{\Omega} \rho(\rho^\pm + l)^\beta dx \leq \frac{\alpha t}{\beta+1} \|h\|_{0,\beta+1}^{\beta+1} + \frac{t \beta K^2 |\Omega|}{2\varepsilon} l^{\beta+1} + t \left(\frac{\alpha \beta}{\beta+1} + \frac{\beta K^2}{2\varepsilon} \right) \|\rho^\pm + l\|_{0,\beta+1}^{\beta+1}. \quad (2.15)$$

On passe alors à la limite quand $l \rightarrow 0^+$. On trouve que

$$t \left(\frac{\alpha}{\beta+1} - \frac{\beta K^2}{2\varepsilon} \right) \|\rho^\pm\|_{0,\beta+1}^{\beta+1} \leq \frac{\alpha t}{\beta+1} \|h\|_{0,\beta+1}^{\beta+1}.$$

En choisissant β de sorte que $\frac{\alpha}{\beta+1} - \frac{\beta K^2}{2\varepsilon} > 0$, on en déduit que

$$\|T_t(\rho)\|_{0,\beta+1} = \|\rho\|_{0,\beta+1} \leq c(\alpha, \varepsilon, K) \|h\|_{0,\beta+1}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Soit $\mathcal{G} = t(\alpha \mathcal{B}(h - \rho) - \rho \mathbf{v})$, \mathcal{B} désignant l'opérateur de Bogovskiï introduit dans le lemme B.1. D'après la condition (2.14) complétée par le lemme B.1, uniformément par rapport à t , on a

$$\|\mathcal{G}\|_{0,\beta+1} \leq \alpha (\|h\|_{0,\beta+1} + \|\rho\|_{0,\beta+1}) + \|\rho\|_{0,\beta+1} \|\mathbf{v}\|_{1,\infty}.$$

Puisque $\rho = T_t(\rho)$, il est évident que ρ est solution d'un problème de Neumann faible du type (2.1), \mathcal{G} étant défini ci-dessus. Par conséquent, en accord avec le lemme 1.6,

$$\|\nabla \rho\|_{0,\beta+1} \leq c(\Omega, \alpha, \varepsilon, K) \|h\|_{0,\beta+1}.$$

Ainsi, nous venons de prouver que

$$\|\rho\|_{1,s} \leq c(\Omega, \alpha, \varepsilon, K) \|h\|_{0,s}, \quad s = \beta + 1. \quad (2.16)$$

Dans le cas $1 < p \leq \beta + 1$, il en résulte que

$$\|\rho\|_{1,p} \leq c(\Omega, \alpha, \varepsilon, K) \|h\|_{0,\infty} \quad (2.17)$$

et pour conclure il suffit de poser $C_{ptf} = c(\Omega, \alpha, \varepsilon, K) \|h\|_{0,\infty} + 1$. Alors, à partir de (2.16) et à l'aide des injections de Sobolev, on trouve que

$$\|\rho\|_{0,s} \leq c(\Omega, \alpha, \varepsilon, K) \|h\|_{0,\beta+1} \leq c(\Omega, \alpha, \varepsilon, K) \|h\|_{0,s}, \quad s = \frac{3(\beta+1)}{3-(\beta+1)}.$$

Comme précédemment, on en déduit l'inégalité (2.16) dans laquelle $s = \frac{3(\beta+1)}{3-(\beta+1)}$. En répétant un nombre fini de fois cette procédure, on obtiendra l'inégalité (2.16) dans laquelle $s \geq 3$. Autrement dit, on se retrouvera dans la deuxième alternative. Par suite, les injections de Sobolev impliqueront en particulier que

$$\|\rho\|_{0,\tilde{s}} \leq c(\Omega, \alpha, \varepsilon, K) \|h\|_{0,\tilde{s}}, \quad \tilde{s} \in (s, \infty).$$

Il suffira alors de répéter une dernière fois la procédure présentée ci-dessus pour conclure à l'inégalité (2.15) pour $p \in [1, \infty)$ puis de poser $C_{ptf} = c(\Omega, \alpha, \varepsilon, K) \|h\|_{0,\infty} + 1$. \square

Affirmation n° 2 *L'opérateur $H : \overline{D} \times [0, 1] \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ défini par $H(\cdot, t) = T_t(\cdot)$ est une homotopie de transformations compactes.*

Preuve. On démontre tout d'abord que pour tout $t \in [0, 1]$, $H(\cdot, t) : \overline{D} \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ est un opérateur compact. Puisque $\int_{\Omega} \varphi \, dx = \int_{\Omega} h \, dx$, le lemme B.1 garantit que le champ de vecteurs $\mathcal{G} = t(\alpha \mathcal{B}(h - \varphi) - \varphi \mathbf{v}) \in E_0^p(\Omega)$ et satisfait l'estimation

$$\|\mathcal{G}\|_{E_0^p(\Omega)} \leq 2t\{\alpha(\|\varphi\|_{0,p} + \|h\|_{0,p}) + \|\varphi\|_{1,p}\|\mathbf{v}\|_{1,\infty}\}.$$

Le lemme 1.6, quant à lui, assure l'existence et l'unicité de $\rho = T_t(\varphi)$ satisfaisant (2.7), \mathcal{G} étant défini ci-dessus. L'inégalité de Poincaré-Wirtinger appliquée à $(\rho - h)$ donne alors une estimation de la norme $L^p(\Omega)$ de ρ qui, ajoutée à (2.7), implique que

$$\|\rho\|_{2,p} \leq ct\{\alpha\|\varphi\|_{0,p} + \alpha\|h\|_{0,p} + \|\varphi\|_{1,p}\|\mathbf{v}\|_{1,\infty}\} + \|h\|_{0,p}.$$

L'injection compacte $W^{2,p}(\Omega) \subset\subset W^{1,p}(\Omega)$ assure la compacité de $H(\cdot, t)$, $t \in [0, 1]$.

Soient $\varphi \in L \subset \overline{D}$ et $s, t \in [0, 1]$. Pour conclure, il suffit de démontrer l'inégalité

$$\|T_t(\varphi) - T_s(\varphi)\|_{1,p} \leq c|t - s|\{\|\varphi\|_{1,p}\|\mathbf{v}\|_{1,\infty} + \alpha\|\varphi\|_{0,p} + \alpha\|h\|_{0,p}\}. \quad (2.18)$$

Pour ce faire, on remarque que $H(\varphi, t) - H(\varphi, s)$ est solution du problème

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta(H(\varphi, t) - H(\varphi, s)) &= (t - s)\{\alpha(h - \varphi) - \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v})\} \text{ dans } \Omega, \\ \partial_{\nu}(H(\varphi, t) - H(\varphi, s)) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} (H(\varphi, t) - H(\varphi, s)) \, dx &= 0. \end{aligned}$$

Le lemme 1.6 dans lequel on pose $\mathcal{G} = (t - s)\{\alpha\mathcal{B}(h - \varphi) - \varphi\mathbf{v}\}$ et l'inégalité de Poincaré-Wirtinger appliquée à $(\rho - h)$ conduisent alors à l'inégalité (2.18). L'affirmation est donc démontrée. \square

Ceci étant, pour tout $t \in [0, 1]$, l'existence d'au moins un point fixe de l'opérateur $H(\cdot, t)$ s'en suit. En effet, lorsque $t = 0$, en accord avec le lemme 1.6, le problème (2.12)-(2.14) admet une unique solution $\rho_0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} h \, dx$. Par suite, compte tenu de la définition du degré de Leray-Schauder, on a $\deg(I - H(\cdot, t), D, 0) = \pm 1$. Les affirmations n° 1 et 2 garantissent la validité des hypothèses du théorème C.4 dont la conclusion est : pour tout $t \in [0, 1]$, $\deg(I - H(\cdot, t), D, 0) = \deg(I - H(\cdot, 0), D, 0) = \pm 1$. Enfin, d'après le théorème C.3, il existe au moins une solution ρ du problème (2.8)-(2.10). L'estimation (2.17) est encore vraie et donne l'unicité de ρ , tandis que du lemme 1.6 il résulte que

$$\|\nabla\rho\|_{1,p} \leq \frac{c(\Omega, p)}{\varepsilon} \{\alpha(\|\rho\|_{0,p} + \|h\|_{0,p}) + \|\rho\|_{1,p}\|\mathbf{v}\|_{1,\infty}\},$$

d'où on déduit l'inégalité (2.11).

Pour terminer, on suppose que $h \geq 0$ p.p. dans Ω . On teste l'équation (2.12) avec $\varphi = \rho$ par $\eta = -(\rho^- + l)^\beta$ avec $l \in (0, 1]$ et $\beta \in (0, 1)$ qui sera fixé plus loin. Dans le calcul qui nous a conduit à (2.15) avec $t = 1$, on utilise l'hypothèse $h \geq 0$ et on trouve que

$$-\alpha \int_{\Omega} \rho(\rho^- + l)^\beta \, dx \leq \frac{\beta K^2}{2\varepsilon} \|\rho^- + l\|_{0,\beta+1}^{\beta+1} + \frac{\beta K^2 |\Omega|}{2\varepsilon} l^{\beta+1}.$$

On passe ensuite à la limite $l \rightarrow 0^+$. Il vient alors que $(\alpha - \frac{\beta K^2}{2\varepsilon}) \|\rho^-\|_{0,\beta+1}^{\beta+1} \leq 0$. Ainsi, le choix $\beta < \min(1, \frac{2\varepsilon\alpha}{K^2})$ implique que $\rho^- = 0$ p.p. dans Ω et, par conséquent, termine la preuve du théorème 1.1. \square

2.3 Système elliptique de Lamé

Dans ce paragraphe, nous rappelons un résultat concernant le système d'équations

$$-\mu_1 \Delta \mathbf{u} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{F} \text{ dans } \Omega, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega \quad (2.20)$$

dans lequel nous supposons que les coefficients μ_1 et μ_2 sont constants et satisfont

$$\mu_1 > 0, \quad 4\mu_1 + 3\mu_2 > 0. \quad (2.21)$$

Lemme 1.7 *Soient $p \in (1, \infty)$, Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 de classe $C^{1,\theta}$, $\theta \in (0, 1]$ et $\mathbf{F} \in [W^{-1,p}(\Omega)]^3$. Alors il existe une unique fonction $\mathbf{u} \in [W_0^{1,p}(\Omega)]^3$ satisfaisant l'équation (2.19) dans $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ ainsi que l'estimation*

$$\|\mathbf{u}\|_{1,p} \leq c(\Omega, p) \|\mathbf{F}\|_{-1,p}. \quad (2.22)$$

On suppose en outre que Ω est de classe $C^{2,\theta}$ et que $\mathbf{F} \in [L^p(\Omega)]^3$. Alors $\mathbf{u} \in [W^{2,p}(\Omega)]^3$ satisfait l'équation (2.19) p.p. dans Ω ainsi que l'estimation

$$\|\mathbf{u}\|_{2,p} \leq c(\Omega, p) \|\mathbf{F}\|_{0,p}. \quad (2.23)$$

Preuve. Sous les hypothèses (2.21), l'opérateur $-\mu_1\Delta - (\mu_1 + \mu_2)\nabla \operatorname{div}$ est un opérateur fortement elliptique du second ordre. En effet, c'est un exercice simple que de démontrer que

$$\mu_1\xi_{ij}\xi_{ij} + (\mu_1 + \mu_2)\xi_{ii}\xi_{kk} \geq \min(\mu_1, 4\mu_1 + 3\mu_2)\xi_{ij}\xi_{ij}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Par conséquent, les résultats classiques sur l'existence et la régularité des solutions des systèmes elliptiques s'appliquent. On renvoie le lecteur intéressé par le sujet au livre de GILBARG, TRUDINGER [24]. \square

3 Sur les opérateurs de Riesz

Nous consacrons cette section à de brefs rappels concernant les opérateurs de Riesz $\mathcal{R}_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, $j = 1, 2, 3$, définis par

$$\mathcal{R}_j(f) = \mathcal{F}^{-1}(m_j\mathcal{F}(f)), \quad m_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto \frac{i\xi_j}{|\xi|} \quad (3.1)$$

où \mathcal{F} désigne la transformée de Fourier et \mathcal{F}^{-1} son inverse. A l'aide du théorème de Marcinkiewicz sur les multiplicateurs de Fourier, nous sommes assurés que $\mathcal{R}_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ et que

$$\|\mathcal{R}_j(f)\|_{0,p,\mathbb{R}^3} \leq c(p)\|f\|_{0,p,\mathbb{R}^3}, \quad j = 1, 2, 3, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \quad (3.2)$$

et ce pour tout $p \in (1, \infty)$. Par conséquent, l'opérateur \mathcal{R}_j , $j = 1, 2, 3$, peut être prolongé par densité en un opérateur linéaire et continu défini sur $L^p(\mathbb{R}^3)$ à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^3)$. On introduit ensuite les opérateurs $\mathcal{A}_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, $j = 1, 2, 3$, définis par

$$\mathcal{A}_j(f) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{m}_j\mathcal{F}(f)), \quad \tilde{m}_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto \frac{i\xi_j}{|\xi|^2} \quad (3.3)$$

puis, pour $j, k = 1, 2, 3$, on pose $\mathcal{R}_{jk} = \partial_k\mathcal{A}_j$. Clairement l'opérateur $\mathcal{R}_{jk} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, $j, k = 1, 2, 3$ ainsi défini est la composition des transformées de Riesz \mathcal{R}_k et \mathcal{R}_j . Par suite, il peut être prolongé en un opérateur linéaire et continu sur $L^p(\mathbb{R}^3)$ à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^3)$ et

$$\|\mathcal{R}_{jk}(f)\|_{0,p,\mathbb{R}^3} \leq c(p)\|f\|_{0,p,\mathbb{R}^3}, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^3) \quad (3.4)$$

et ce pour tout $p \in (1, \infty)$. D'après la définition de \mathcal{A}_j , $j = 1, 2, 3$, à l'aide des théorèmes d'injections de Sobolev, remarquer que

$$\forall p \in (1, 3), \quad \|\mathcal{A}_j(f)\|_{0,p^*,\mathbb{R}^3} \leq c(p)\|f\|_{0,p,\mathbb{R}^3}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^3). \quad (3.5)$$

Clairement, en accord avec l'égalité de Parseval classique, pour toutes fonctions f, g de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f\mathcal{A}_j(g) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F}(f)\overline{\mathcal{F}(\mathcal{A}_j(g))} d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F}(f)\frac{i\xi_j}{|\xi|^2}\overline{\mathcal{F}(g)} d\xi \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F}(\mathcal{A}_j(f))\overline{\mathcal{F}(g)} d\xi = - \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{A}_j(f)g dx, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Par un simple argument de densité complété par les théorèmes d'injections de Sobolev, il est aisé de vérifier que (3.6) est encore vraie pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $p \in (1, 3)$ et toute fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Semblablement, pour toutes fonctions f, g de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \mathcal{R}_{jk}(g) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{R}_{jk}(f) g dx, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Noter que (3.7) reste vrai pour $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^3)$, $p \in (1, \infty)$ puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $L^q(\mathbb{R}^3)$, $q \in (1, \infty)$ et $\mathcal{R}_{jk} : L^q(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^3)$ est continu. Pour terminer cette section, nous laissons le soin au lecteur de vérifier les propriétés suivantes :

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3), \quad \partial_k \mathcal{A}_j(f) = \mathcal{A}_j(\partial_k f) \Rightarrow \mathcal{A}_j(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.8)$$

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3), \quad \mathcal{R}_{jk}(f) = \mathcal{R}_{kj}(f), \quad \mathcal{R}_{jj}(f) = f, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

4 Compacité par compensation, commutateurs

Dans cette section, nous rappelons la version L^p - L^q du lemme div-rot obtenue par YI [81] en théorie de la compacité par compensation introduite par MURAT [54] et TARTAR [75]. Nous utiliserons ensuite ce résultat pour démontrer la convergence d'une certaine suite de commutateurs.

Lemme 1.8 *Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^3 et $1 < p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$. On suppose que*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n \rightharpoonup \mathbf{f} \text{ dans } [L^{p_1}(\Omega)]^3, \quad \mathbf{g}_n \rightharpoonup \mathbf{g} \text{ dans } [L^{p_2}(\Omega)]^3, \\ \operatorname{div} \mathbf{f}_n \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{f} \text{ dans } W^{-1, q_1}(\Omega), \quad \operatorname{rot} \mathbf{g}_n \rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{g} \text{ dans } [W^{-1, q_2}(\Omega)]^3. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathbf{f}_n \cdot \mathbf{g}_n \rightharpoonup \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \text{ dans } L^r(\Omega), \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1.$$

Lemme 1.9 *On suppose que*

$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^3), \quad g_n \rightharpoonup g \text{ dans } L^q(\mathbb{R}^3), \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1.$$

Alors

$$f_n \mathcal{R}_{ij}(g_n) - g_n \mathcal{R}_{ij}(f_n) \rightharpoonup f \mathcal{R}_{ij}(g) - g \mathcal{R}_{ij}(f) \text{ dans } L^r(\mathbb{R}^3), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Preuve. La démonstration qui suit est due à FEIREISL [16]. Il est facile de vérifier que la conclusion du lemme 1.9 est un cas particulier de l'affirmation plus générale

$$\sum_{i,j=1}^3 \{v_n^i \mathcal{R}_{ij}(w_n^j) - w_n^j \mathcal{R}_{ij}(v_n^i)\} \rightharpoonup \sum_{i,j=1}^3 \{v^i \mathcal{R}_{ij}(w^j) - w^j \mathcal{R}_{ij}(v^i)\} \text{ dans } L^r(\mathbb{R}^3)$$

sous les hypothèses $\mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v}$ dans $[L^p(\mathbb{R}^3)]^3$, $\mathbf{w}_n \rightharpoonup \mathbf{w}$ dans $[L^q(\mathbb{R}^3)]^3$. En effet, à l'aide de la propriété de symétrie (3.9), on voit que

$$\sum_{i,j=1}^3 \{v^i \mathcal{R}_{ij}(w^j) - w^j \mathcal{R}_{ij}(v^i)\} = \sum_{i=1}^3 U_n^i V_n^i - \sum_{j=1}^3 X_n^j Y_n^j = \mathbf{U}_n \cdot \mathbf{V}_n - \mathbf{X}_n \cdot \mathbf{Y}_n$$

avec

$$U_n^i = \sum_{j=1}^3 \mathcal{R}_{ij}(w_n^j), \quad V_n^i = v_n^i - \sum_{k=1}^3 \mathcal{R}_{ik}(v_n^k), \quad X_n^j = \sum_{i=1}^3 \mathcal{R}_{ji}(v_n^i), \quad Y_n^j = w_n^j - \sum_{k=1}^3 \mathcal{R}_{jk}(w_n^k).$$

Puisque l'opérateur \mathcal{R}_{ij} est linéaire continu de $L^s(\mathbb{R}^3)$ dans $L^s(\mathbb{R}^3)$, il en résulte que

$$\begin{aligned} U_n^i \rightharpoonup U^i &= \sum_{j=1}^3 \mathcal{R}_{ij}(w^j) \text{ dans } L^q(\mathbb{R}^3), & V_n^i \rightharpoonup V^i &= v^i - \sum_{k=1}^3 \mathcal{R}_{ik}(v^k) \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^3), \\ X_n^j \rightharpoonup X^j &= \sum_{i=1}^3 \mathcal{R}_{ji}(v^i) \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^3), & Y_n^j \rightharpoonup Y^j &= w^j - \sum_{k=1}^3 \mathcal{R}_{jk}(w^k) \text{ dans } L^q(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

En accord avec la propriété (3.9), $\operatorname{div} \mathbf{V}_n = \operatorname{div} \mathbf{Y}_n = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{U}_n = \operatorname{rot} \mathbf{X}_n = \mathbf{0}$ et on peut donc appliquer le lemme 1.8. On obtient finalement

$$\mathbf{U}_n \cdot \mathbf{V}_n - \mathbf{X}_n \cdot \mathbf{Y}_n \rightharpoonup \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \text{ dans } L^r(\mathbb{R}^3).$$

D'où le résultat. \square

5 Flux effectif visqueux (cas stationnaire)

Les résultats de cette section sont absolument essentiels aux preuves de l'existence de solutions faibles des équations de Navier-Stokes données dans les chapitres 2 et 3. En gros, ils permettront de compenser le manque de compacité de la suite des densités $\{\rho_n\}_n$, information qui ne peut être obtenue à partir des seules estimations provenant de l'inégalité d'énergie. Plus exactement, le théorème 1.2 garantira que la suite des flux effectifs visqueux $\{\Pi_n - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_n\}_n$, parfois appelée suite des pressions effectives, possède une sorte de compacité faible. Cette observation est originellement due à SERRE [71] en dimension un d'espace pour les écoulements non stationnaires. En dimension supérieure, la preuve de ce résultat, due à P.L. LIONS [46], utilise principalement le fait que cette suite soit bornée dans un certain espace de Hardy et les résultats de compacité par compensation dans ce type d'espace obtenus par COIFMAN, P.L. LIONS, MEYER et SEMMES [9]. Ici, nous en donnons une preuve inspirée de l'approche de FEIREISL [16]. Celle-ci est basée sur les résultats de la section précédente et nous évite d'utiliser des résultats délicats tels que ceux concernant la régularité des équations elliptiques dans les espaces de Hardy.

Théorème 1.2 *Soient Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 à frontière Lipschitzienne, $1 < p < \infty$, $\max\{2, p'\} < r \leq \infty$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{r^*} \leq 1$ si $r < 3$ et $1 < w < \infty$, $\frac{1}{w} + \frac{1}{r} < \frac{5}{6}$ si $r < \infty$, $\frac{6}{5} < w < \infty$ si $r = \infty$. On suppose que*

$$\Pi_n \rightharpoonup \Pi \text{ dans } L^p(\Omega), \quad (5.1)$$

$$b_n \xrightarrow{*} b \text{ dans } L^r(\Omega), \quad (5.2)$$

$$\mathbf{F}_n \rightharpoonup \mathbf{F} \text{ dans } [L^s(\Omega)]^3, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{q}_n \rightharpoonup \mathbf{q} \text{ dans } [L^w(\Omega)]^3, \quad (5.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_n \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{q} \text{ dans } W^{-1,w}(\Omega),$$

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } [H^1(\Omega)]^3. \quad (5.5)$$

On suppose en outre que pour $i = 1, 2, 3$

$$\partial_j(q_n^i u_n^j) - \mu_1 \Delta u_n^i - (\mu_1 + \mu_2) \partial_i \operatorname{div} \mathbf{u}_n + \partial_i \Pi_n = F_n^i \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (5.6)$$

Alors

$$\overline{\Pi b} - (2\mu_1 + \mu_2) \overline{b \operatorname{div} \mathbf{u}} = \Pi b - (2\mu_1 + \mu_2) b \operatorname{div} \mathbf{u} \text{ p.p. dans } \Omega, \quad (5.7)$$

où $\overline{\Pi b}$ et $\overline{b \operatorname{div} \mathbf{u}}$ dénotent les limites faibles des suites $\{\Pi_n b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\{b_n \operatorname{div} \mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans les espaces $L^{\frac{2r}{r+2}}(\Omega)$ et $L^{\frac{pr}{p+r}}(\Omega)$.

Preuve. On rappelle que l'on ne fait pas la distinction entre une fonction définie sur un domaine \mathcal{O} de \mathbb{R}^3 et son prolongement par zéro à l'extérieur de \mathcal{O} .

Dans un premier temps, noter que le système (5.6) testé par une fonction $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ s'écrit

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} q_n^i u_n^j \partial_j \varphi^i dx + \int_{\Omega} \{ \mu_1 \partial_j u_n^i \partial_j \varphi^i + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_n) (\operatorname{div} \varphi) \} dx \\ - \int_{\Omega} \Pi_n \operatorname{div} \varphi dx = \int_{\Omega} F_n^i \varphi^i dx. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Au vu des hypothèses (5.1)-(5.5), par un argument de densité, l'identité (5.8) reste vraie pour toute fonction φ telle que $\partial_j \varphi^i \in L^2(\Omega) \cap L^{\frac{6w}{5w-6}}(\Omega)$, $\operatorname{div} \varphi \in L^{p'}(\Omega)$, $\varphi^i \in L^{s'}(\Omega)$ et $\varphi^i = 0$ au sens des traces sur $\partial\Omega$, $i, j = 1, 2, 3$.

Soit $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$. On pose $\varphi^i = \eta \mathcal{A}_i(b_n)$, $i = 1, 2, 3$. Alors, en accord avec la propriété (3.5) de l'opérateur \mathcal{A}_i , on peut vérifier que $\varphi^i \in W_0^{1,r}(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$. Supposons $r < \infty$. Les hypothèses $\max\{2, p'\} \leq r$, $\frac{1}{w} + \frac{1}{r} < \frac{5}{6}$ impliquent que $\partial_j \varphi^i \in L^2(\Omega) \cap L^{\frac{6w}{5w-6}}(\Omega)$, $i, j = 1, 2, 3$ et $\operatorname{div} \varphi \in L^{p'}(\Omega)$. Par ailleurs, les théorèmes d'injections de Sobolev et l'hypthèse $\frac{1}{r^*} + \frac{1}{s} \leq 1$ dans le cas où $r < 3$ garantissent que $\varphi^i \in L^{s'}(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$. Lorsque $r = \infty$, $b_n \in L^{\tilde{r}}(\Omega)$, $\tilde{r} \in [1, \infty)$ et par suite $\varphi^i \in W_0^{1,\tilde{r}}(\Omega)$, $\tilde{r} \in (1, \infty)$. En choisissant $\tilde{r} = \max\{2, \frac{6w}{5w-6}, p', s'\}$, on en déduit que $\partial_j \varphi^i \in L^2(\Omega) \cap L^{\frac{6w}{5w-6}}(\Omega)$, $\operatorname{div} \varphi \in L^{p'}(\Omega)$ et $\varphi^i \in L^{s'}(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$. En conclusion, la fonction $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$, $\varphi^i = \eta \mathcal{A}_i(b_n)$, $i = 1, 2, 3$, est une fonction admissible dans l'identité (5.8). Avant d'utiliser cette fonction dans (5.8), on justifie la formule suivante :

$$\int_{\Omega} \partial_j u_n^i \eta \partial_j \mathcal{A}_i(b_n) dx = - \int_{\Omega} u_n^i \partial_j \eta \partial_j \mathcal{A}_i(b_n) dx + \int_{\Omega} u_n^i \partial_i \eta b_n dx + \int_{\Omega} \eta b_n \operatorname{div} \mathbf{u}_n dx. \quad (5.9)$$

Pour ce faire, il suffit de remarquer que $S_\varepsilon(b_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Par conséquent, d'après (3.8), $\mathcal{A}_i(S_\varepsilon(b_n)) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Par suite, il suffit de calculer l'intégrale $\int_{\Omega} \partial_j u_n^i \eta \partial_i \mathcal{A}_i(S_\varepsilon(b_n)) dx$ à l'aide d'intégrations par parties et des propriétés (3.9) de l'opérateur \mathcal{R}_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, puis de passer à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ en utilisant la continuité de cet opérateur. Après un long calcul plutôt simple dans lequel sont utilisées plusieurs intégrations par parties, les propriétés (3.6) et (3.7) des opérateurs \mathcal{A}_i et \mathcal{R}_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ et la formule (5.9), on

obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \eta \{ \Pi_n - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_n \} b_n \, dx = - \int_{\Omega} \Pi_n \partial_i \eta \mathcal{A}_i(b_n) \, dx \\
& + \mu_1 \int_{\Omega} \partial_j u_n^i \partial_j \eta \mathcal{A}_i(b_n) \, dx - \mu_1 \int_{\Omega} u_n^i \partial_j \eta \mathcal{R}_{ij}(b_n) \, dx + \mu_1 \int_{\Omega} u_n^i \partial_i \eta b_n \, dx \\
& + (\mu_1 + \mu_2) \int_{\Omega} \partial_i \eta \mathcal{A}_i(b_n) \operatorname{div} \mathbf{u}_n \, dx - \int_{\Omega} q_n^i u_n^j \partial_j \eta \mathcal{A}_i(b_n) \, dx - \int_{\Omega} F_n^i \eta \mathcal{A}_i(b_n) \, dx \\
& - \int_{\Omega} \mathcal{R}_{ij}(b_n u_n^j) q_n^i \eta \, dx + \int_{\Omega} u_n^j \{ b_n \mathcal{R}_{ij}(q_n^i \eta) - q_n^i \eta \mathcal{R}_{ij}(b_n) \} \, dx. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

A présent, l'objectif est de passer à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans (5.10). Pour cela, commençons par énumérer quelques conséquences directes des hypothèses (5.1)-(5.5). En premier lieu, on a

$$\begin{aligned}
& \{ \Pi_n - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_n \} b_n \rightharpoonup \overline{\Pi b} - (2\mu_1 + \mu_2) \overline{b \operatorname{div} \mathbf{u}} \text{ dans } L^{z_1}(\Omega), \\
& z_1 = \begin{cases} \min\left\{ \frac{2r}{r+2}, \frac{pr}{p+r} \right\} & \text{si } r < \infty, \\ \min\{2, p\} & \text{si } r = \infty. \end{cases} \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Ensuite, compte tenu de l'injection compacte $H^1(\Omega) \subset\subset L^{z_2}(\Omega)$, $z_2 \in [1, 6)$, de (5.5) il vient que

$$u_n^j \rightarrow u^j \text{ dans } L^{z_2}(\Omega), \quad j = 1, 2, 3. \tag{5.12}$$

Ceci étant, (5.12) ajoutée à (5.2) et (5.4) permet d'affirmer que

$$b_n u_n^j \rightharpoonup b u^j \text{ dans } L^{z_3}(\Omega), \quad z_3 = \begin{cases} \frac{6r}{r+6} & \text{si } r < \infty, \\ 6 & \text{si } r = \infty \end{cases}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{5.13}$$

$$q_n^i u_n^j \rightharpoonup q^i u^j \text{ dans } L^{\frac{6w}{w+6}}(\Omega), \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{5.14}$$

En accord avec les convergences (5.2), (5.4) et (5.14), de la continuité forte des opérateurs $\mathcal{R}_{ij} : L^q(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^3)$, $q \in (1, \infty)$, $i, j = 1, 2, 3$, il découle que

$$\mathcal{R}_{ij}(b_n) \rightharpoonup \mathcal{R}_{ij}(b) \text{ dans } L^{r_1}(\Omega), \quad r_1 \in \begin{cases} (1, r] & \text{si } r < \infty, \\ (1, \infty) & \text{si } r = \infty \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{5.15}$$

$$\mathcal{R}_{ij}(q_n^i \eta) \rightharpoonup \mathcal{R}_{ij}(q^i \eta) \text{ dans } L^w(\Omega), \quad j = 1, 2, 3, \tag{5.16}$$

$$\mathcal{R}_{ij}(b_n u_n^j) \rightharpoonup \mathcal{R}_{ij}(b u^j) \text{ dans } L^{z_2}(\Omega), \quad j = 1, 2, 3. \tag{5.17}$$

Par suite, pour toute fonction $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
& \xi \mathcal{R}_{ij}(b_n) \rightharpoonup \xi \mathcal{R}_{ij}(b) \text{ dans } L^{r_1}(\Omega), \quad i, j = 1, 2, 3, \\
& \xi \nabla \mathcal{A}_i(b_n) \rightharpoonup \xi \nabla \mathcal{A}_i(b) \text{ dans } [L^{r_1}(\Omega)]^3, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

En outre, à l'aide de la propriété (3.6), on vérifie facilement que $\mathcal{A}_i(b_n)\nabla\xi \rightarrow \mathcal{A}_i(b)\nabla\xi$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ tandis qu'il est clair que la suite $\{\mathcal{A}_i(b_n)\nabla\xi\}_n$ est uniformément bornée dans $[L^{r_1}(\Omega)]^3$. Puisque Ω est borné, ceci est complètement équivalent à la convergence

$$\xi\mathcal{A}_i(b_n) \rightharpoonup \xi\mathcal{A}_i(b) \text{ dans } W_0^{1,r_1}(\Omega), \quad \xi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad i = 1, 2, 3.$$

Puisque $W_0^{1,r_1}(\Omega) \subset\subset L^{r_2}(\Omega)$, $1 \leq r_2 < r_1^*$ si $r_1 \in [\frac{3}{2}, 3)$ et $1 \leq r_2 < \infty$ si $r_1 \in [3, \infty)$, il s'en suit que

$$\xi\mathcal{A}_i(b_n) \rightarrow \xi\mathcal{A}_i(b) \text{ dans } L^{r_2}(\Omega), \quad \xi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.18)$$

En posant $\mathbf{f}_n = \mathbf{q}_n$ et $\mathbf{g}_n = \nabla\mathcal{A}_j(b_n u_n^j)$, sous la condition $\frac{1}{w} + \frac{1}{z_3} < 1$, *i.e.* $\frac{1}{w} + \frac{1}{r} < \frac{5}{6}$ si $r < \infty$ et $\frac{6}{5} < w < \infty$ si $r = \infty$, le lemme 1.8 assure la convergence

$$\mathcal{R}_{ij}(b_n u_n^j) q_n^i \rightharpoonup \mathcal{R}_{ij}(b u^j) q^i \text{ dans } L^{\frac{wz_3}{w+z_3}}(\mathbb{R}^3). \quad (5.19)$$

Enfin, en posant $f_n = b_n$ et $g_n = q_n^i \eta$, sous la condition $\frac{1}{r} + \frac{1}{w} < 1$, le lemme 1.9 garantit que

$$b_n \mathcal{R}_{ij}(q_n^i \eta) - q_n^i \eta \mathcal{R}_{ij}(b_n) \rightharpoonup b \mathcal{R}_{ij}(q^i \eta) - q^i \eta \mathcal{R}_{ij}(b) \text{ dans } L^{z_4}(\mathbb{R}^3), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$z_4 \in \begin{cases} (1, \frac{rw}{r+w}) & \text{si } r < \infty, \\ (1, w) & \text{si } r = \infty. \end{cases}$$

A condition que $z_4 > \frac{6}{5}$, *i.e.* $\frac{1}{w} + \frac{1}{r} < \frac{5}{6}$ si $r < \infty$ et $\frac{6}{5} < w < \infty$ si $r = \infty$, il en résulte que

$$\int_{\Omega} u_n^j \{b_n \mathcal{R}_{ij}(q_n^i \eta) - q_n^i \eta \mathcal{R}_{ij}(b_n)\} dx \rightarrow \int_{\Omega} u^j \{b \mathcal{R}_{ij}(q^i \eta) - q^i \eta \mathcal{R}_{ij}(b)\} dx. \quad (5.20)$$

Tout est près pour passer à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans l'identité (5.10). On obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \eta \{ \overline{\Pi b} - (2\mu_1 + \mu_2) \overline{b \operatorname{div} \mathbf{u}} \} dx = - \int_{\Omega} \Pi \partial_i \eta \mathcal{A}_i(b) dx \\ & + \mu_1 \int_{\Omega} \partial_j u^i \partial_j \eta \mathcal{A}_i(b) dx - \mu_1 \int_{\Omega} u^i \partial_j \eta \mathcal{R}_{ij}(b) dx + \mu_1 \int_{\Omega} u^i \partial_i \eta b dx \\ & + (\mu_1 + \mu_2) \int_{\Omega} \partial_i \eta \mathcal{A}_i(b) \operatorname{div} \mathbf{u} dx - \int_{\Omega} q^i u^j \partial_j \eta \mathcal{A}_i(b) dx - \int_{\Omega} F^i \eta \mathcal{A}_i(b) dx \\ & - \int_{\Omega} \mathcal{R}_{ij}(b u^j) q^i \eta dx + \int_{\Omega} u^j \{b \mathcal{R}_{ij}(q^i \eta) - q^i \eta \mathcal{R}_{ij}(b)\} dx. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Justifions brièvement le passage à la limite dans chacun des termes du membre de droite de (5.10) : dans le premier terme, on utilise (5.1) et (5.18) ; dans les quatre suivants, (5.5), (5.15) et (5.18) ; dans le sixième, (5.4) et (5.17) ; dans le septième, (5.3) et (5.18) ; dans le huitième, (5.19) ; dans le neuvième, (5.20).

Faisons maintenant tendre $n \rightarrow \infty$ dans (5.6). En utilisant les convergences (5.1)-(5.5), pour $i = 1, 2, 3$, il vient alors que

$$\partial_j (q^i u^j) - \mu_1 \Delta u^i - (\mu_1 + \mu_2) \partial_i \operatorname{div} \mathbf{u} + \partial_i \Pi = F^i \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (5.22)$$

Le système (5.22) testé par une fonction $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ s'écrit

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} q^i u^j \partial_j \varphi^i dx + \int_{\Omega} \{ \mu_1 \partial_j u^i \partial_j \varphi^i + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}) (\operatorname{div} \varphi) \} dx \\ & - \int_{\Omega} \Pi \operatorname{div} \varphi dx = \int_{\Omega} F^i \varphi^i dx. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Au vu des hypothèses (5.1)-(5.5), par un argument de densité, l'identité (5.23) reste vraie pour toute fonction φ telle que $\partial_j \varphi^i \in L^2(\Omega) \cap L^{\frac{6w}{5w-6}}(\Omega)$, $\operatorname{div} \varphi \in L^{p'}(\Omega)$, $\varphi^i \in L^{s'}(\Omega)$ et $\varphi^i = 0$ au sens des traces sur $\partial\Omega$, $i, j = 1, 2, 3$. En suivant les idées présentées au début de la preuve, on peut vérifier que la fonction $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$, $\varphi^i = \eta \mathcal{A}_i(b)$, $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$, est une fonction admissible dans l'identité (5.23). Ainsi, après un long calcul plutôt simple dans lequel sont utilisées plusieurs intégrations par parties, les propriétés (3.6) et (3.7) des opérateurs \mathcal{A}_i et \mathcal{R}_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ et une formule analogue à (5.9), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \eta \{ \Pi - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u} \} b dx = - \int_{\Omega} \Pi \partial_i \eta \mathcal{A}_i(b) dx \\ & + \mu_1 \int_{\Omega} \partial_j u^i \partial_j \eta \mathcal{A}_i(b) dx - \mu_1 \int_{\Omega} u^i \partial_j \eta \mathcal{R}_{ij}(b) dx + \mu_1 \int_{\Omega} u^i \partial_i \eta b dx \\ & + (\mu_1 + \mu_2) \int_{\Omega} \partial_i \eta \mathcal{A}_i(b) \operatorname{div} \mathbf{u} dx - \int_{\Omega} q^i u^j \partial_j \eta \mathcal{A}_i(b) dx - \int_{\Omega} F^i \eta \mathcal{A}_i(b) dx \\ & - \int_{\Omega} \mathcal{R}_{ij}(b u^j) q^i \eta dx + \int_{\Omega} u^j \{ b \mathcal{R}_{ij}(q^i \eta) - q^i \eta \mathcal{R}_{ij}(b) \} dx. \end{aligned} \quad (5.24)$$

En comparant (5.21) et (5.24), on récupère l'identité (5.7). D'où le résultat. \square

Corollaire 1.2 *Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^3 à frontière localement Lipschitzienne, $1 < p < \infty$, $\max\{2, p'\} < r \leq \infty$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{r^*} \leq 1$ si $r < 3$ et $1 < w < \infty$, $\frac{1}{w} + \frac{1}{r} < \frac{5}{6}$ si $r < \infty$, $\frac{6}{5} < w < \infty$ si $r = \infty$. Pour tout sous-ensemble borné $\Omega' \subset \Omega$, on suppose que*

$$\Pi_n \rightharpoonup \Pi \text{ dans } L^p(\Omega'), \quad (5.25)$$

$$b_n \xrightarrow{*} b \text{ dans } L^r(\Omega'), \quad (5.26)$$

$$\mathbf{F}_n \rightharpoonup \mathbf{F} \text{ dans } [L^s(\Omega')]^3, \quad (5.27)$$

$$\mathbf{q}_n \rightharpoonup \mathbf{q} \text{ dans } [L^w(\Omega')]^3, \quad (5.28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_n \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{q} \text{ dans } W^{-1,w}(\Omega'),$$

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } [H^1(\Omega')]^3. \quad (5.29)$$

En outre, on suppose que les équations (5.6) sont satisfaites pour $i = 1, 2, 3$. Alors la conclusion du théorème 1.2, i.e. (5.7), reste vraie.

Preuve. Soit $R > 0$ arbitraire. Les hypothèses (5.25)-(5.29) induisent celles du théorème 1.2 avec $\Omega_R = \Omega \cap B_R$ à la place de Ω . D'où le résultat puisque $R > 0$ est arbitraire. \square

Chapitre 2

Equations stationnaires en domaines bornés

Sommaire

1	Formulation du problème et résultat principal	32
2	Stratégie de la preuve	34
2.1	Approximation n°1 (Etape n°4)	34
2.2	Approximation n°2 (Etape n°3)	35
2.3	Approximation n°3 (Etape n°2)	37
2.4	Approximation n°4 (Etape n°1)	40
3	Preuve : Etape n°1	41
3.1	Existence d'une solution	41
3.2	Inégalité d'énergie, bornes uniformes	45
4	Preuve : Etape n°2	46
4.1	Construction d'une solution (cadre général)	47
4.2	Inégalité d'énergie (cadre général)	52
4.3	Bornes uniformes (cas particulier)	53
5	Preuve : Etape n°3	54
5.1	Construction d'une solution	54
5.2	Inégalité d'énergie, bornes uniformes	56
6	Preuve : Etape n°4	57
6.1	Construction d'une solution	57
6.2	Inégalité d'énergie, bornes uniformes	60
7	Preuve : Conclusion (Etude du problème d'origine)	62
7.1	Construction d'une solution	62
7.2	Flux effectif visqueux	63
7.3	Une fonction de coupure bien utile	63
7.4	Equation de continuité et solutions renormalisées	65
7.5	Convergence forte de la densité	66

Dans ce chapitre, nous présentons nos travaux concernant l'existence de solutions faibles des équations de Navier-Stokes stationnaires compressibles et barotropes en régime isentropique, considérées dans des domaines bornés de l'espace à trois dimensions. Ces travaux ont engendré les publications [59] et [60]. Ici, nous regroupons les résultats obtenus dans ces deux articles sous la forme d'un seul, le théorème 2.1, dont la preuve est l'objectif principal de ce chapitre.

1 Formulation du problème et résultat principal

Commençons par rappeler brièvement le problème considéré. Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 à frontière Lipschitzienne. Dans la suite de ce chapitre nous étudions les équations de Navier-Stokes stationnaires modélisant l'écoulement d'un fluide compressible isentropique dans la région Ω . Celles-ci s'écrivent

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu_1 \Delta \mathbf{u} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + a \nabla \rho^\gamma = \rho \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } \Omega. \quad (1.2)$$

Nous supposons que les coefficients de viscosité μ_1 et μ_2 sont constants et satisfont les contraintes physiquement raisonnables

$$\mu_1 > 0, \quad \frac{2}{3}\mu_1 + \mu_2 \geq 0, \quad (1.3)$$

que $a > 0$ est une constante et que γ , la constante adiabatique, est telle que :

$$\gamma > \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } \operatorname{rot} \mathbf{f} = 0, \\ \frac{5}{3} & \text{autrement.} \end{cases} \quad (1.4)$$

Les inconnues de ce système d'équations sont le champ scalaire $\rho(x)$, $x \in \Omega$, qui représente la densité du fluide et qui, en conséquence, doit être non négatif et le champ de vecteurs $\mathbf{u}(x) = (u^1(x), u^2(x), u^3(x))$, $x \in \Omega$, qui, lui, représente la vitesse du fluide. Quant aux champs de vecteurs $\mathbf{f}(x) = (f^1(x), f^2(x), f^3(x))$ et $\mathbf{g}(x) = (g^1(x), g^2(x), g^3(x))$, $x \in \Omega$, ils sont donnés et correspondent aux forces externes volumiques et non volumiques agissant sur le fluide. Les équations (1.1), (1.2) sont complétées en imposant les conditions usuelles de non glissement

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.5)$$

et en prescrivant la masse totale du fluide contenu dans le volume Ω , c'est à dire en imposant à la densité de vérifier

$$\int_{\Omega} \rho \, dx = M > 0. \quad (1.6)$$

Précisons maintenant ce que nous entendons par solution du problème (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6). Supposons satisfaites les hypothèses (1.3) et (1.4). Nous nous intéressons aux solutions dites « solutions faibles renormalisées à énergie bornée » du problème (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6) dont la définition suit.

Définition 2.1 On considère les fonctions $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$b \in C^0([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty)), \quad \exists c > 0, \exists \lambda_0 < 1, \forall t \in (0, 1], |b'(t)| \leq ct^{-\lambda_0} \quad (1.7)$$

et dont le comportement à l'infini est donné par

$$\exists c > 0, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall t \geq 1, |b'(t)| \leq ct^{\lambda_1}, |tb'(t) - b(t)| \leq ct^{\lambda_2}. \quad (1.8)$$

Soit $p \in [\frac{3}{2}, \infty)$. Un couple de fonctions (ρ, \mathbf{u}) sera appelé solution faible renormalisée à énergie bornée du problème (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6) si

- (i) $\rho \in L^p(\Omega)$, $\rho \geq 0$ p.p. dans Ω et satisfait (1.6), $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^3$;
- (ii) l'équation de continuité (1.1) est satisfaite au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 à condition que (ρ, \mathbf{u}) soit prolongé par zéro à l'extérieur de Ω ;
- (iii) le couple (ρ, \mathbf{u}) est une solution de l'équation de continuité renormalisée au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 à condition qu'il soit prolongé par zéro à l'extérieur de Ω . Plus exactement, si pour toute fonction b satisfaisant (1.7), (1.8) avec

$$-1 < \lambda_1 \leq \frac{p}{2} - 1, \quad 0 < \lambda_2 \leq \frac{p}{2}, \quad (1.9)$$

on a

$$\operatorname{div}(b(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho b'(\rho) - b(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) ; \quad (1.10)$$

- (iv) l'équation de mouvement (1.2) est satisfaite au sens des distributions dans Ω ;
- (v) le couple (ρ, \mathbf{u}) satisfait l'inégalité d'énergie

$$\int_{\Omega} \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}|^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2\} dx \leq \int_{\Omega} (\rho \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} dx. \quad (1.11)$$

Ceci étant, nous terminons cette section introductive par l'énoncé du théorème principal dont la preuve fait l'objet des prochaines sections.

Théorème 2.1 Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 à frontière Lipschitzienne. On suppose (1.3), (1.4), $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in [L^\infty(\Omega)]^3$ et $M > 0$. Alors il existe une solution faible renormalisée à énergie bornée (ρ, \mathbf{u}) du problème (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6) telle que

$$\rho \in L^{s(\gamma)}(\Omega), \quad s(t) = \begin{cases} 3(t-1) & \text{si } t < 3, \\ 2t & \text{si } t \geq 3. \end{cases}$$

Remarque 2.1 Par densité, l'hypothèse sur \mathbf{g} peut être relaxée en supposant seulement $\mathbf{g} \in [L^{\frac{6}{5}}(\Omega)]^3$. De même l'hypothèse sur \mathbf{f} n'est pas optimale mais commode pour la suite. Diverses conditions apparaîtront tout au long de la preuve du théorème 2.1. Nous laissons le soin au lecteur de les regrouper.

Sous l'hypothèse technique (1.4), le théorème 2.1 généralise le résultat obtenu par P.L. LIONS [46, Theorem 6.7] au cas $\gamma > \frac{3}{2}$ et Ω à frontière Lipschitzienne. L'amélioration des hypothèses concernant la constante adiabatique γ était une question ouverte. Quant à l'affaiblissement des hypothèses de régularité du domaine, nous l'utiliserons comme un outil technique dans le prochain chapitre. Pour simplifier les notations, dans la suite, nous considérons $a = 1$.

2 Stratégie de la preuve

Pour établir la preuve du théorème 2.1, nous utiliserons un procédé d'approximations successives dans lequel le problème d'origine pourrait être vu comme « l'approximation zéro ». Dans la suite de cette section nous décrivons chaque approximation constituant une étape de la preuve et nous indiquons brièvement comment les utiliser pour construire une solution faible renormalisée à énergie bornée du problème (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6).

2.1 Approximation n°1 (Etape n°4)

Comme nous pourrions le constater tout au long de la preuve du théorème 2.1, le système originel peut être résolu sous l'hypothèse commode, mais non optimale, $\gamma > 3$. Ainsi, pour pallier au manque de sommabilité de la densité, nous commencerons par ajouter un terme de pression artificielle dans l'équation (1.2). Plus exactement, sous les hypothèses du théorème 2.1 nous considérerons le système d'équations de Navier-Stokes stationnaires compressibles

$$\operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_\delta - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta + \nabla \{ \rho_\delta^\gamma + \delta(\rho_\delta^2 + \rho_\delta^\beta) \} \\ = \rho_\delta \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}_\delta = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.3)$$

$$\int_{\Omega} \rho_\delta dx = M \quad (2.4)$$

où

$$\delta \in (0, 1] \quad \text{et} \quad \beta = \max(\gamma, 3). \quad (2.5)$$

Remarque 2.2 Dans la pression artificielle $p(\rho_\delta) = \rho_\delta^\gamma + \delta(\rho_\delta^2 + \rho_\delta^\beta)$, le terme $\delta\rho_\delta^2$ n'est pas indispensable, il simplifiera techniquement l'obtention de certaines estimations.

Nous étudierons ce problème dans la section 6. Plus précisément, nous démontrerons la

Proposition 2.1 *Soient les hypothèses du théorème 2.1. On suppose que $\delta \in (0, 1]$ et que β satisfait (2.5). Alors il existe un couple de fonctions $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ satisfaisant*

(δ -1) $\rho_\delta \in L^{2\beta}(\mathbb{R}^3)$, $\rho_\delta \geq 0$ p.p. dans Ω , $\rho_\delta = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ et vérifie (2.4), $\mathbf{u}_\delta \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$, $\mathbf{u}_\delta = \mathbf{0}$ p.p. dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$;

(δ -2) l'équation de continuité (2.1) au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 ;

(δ -3) l'équation de continuité renormalisée

$$\operatorname{div}(b(\rho_\delta) \mathbf{u}_\delta) + \{ \rho_\delta b'(\rho_\delta) - b(\rho_\delta) \} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (2.6)$$

pour toute fonction b satisfaisant (1.7) et (1.8) avec

$$-1 < \lambda_1 \leq \beta - 1, \quad 0 < \lambda_2 \leq \beta; \quad (2.7)$$

(δ -4) l'équation de mouvement (2.2) au sens des distributions dans Ω ;

(δ -5) l'inégalité d'énergie

$$\int_{\Omega} \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}_{\delta}|^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_{\delta})^2\} dx \leq \int_{\Omega} (\rho_{\delta} \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_{\delta} dx ; \quad (2.8)$$

(δ -6) les bornes uniformes par rapport à δ

$$\|\rho_{\delta}\|_{0,s(\gamma),\mathbb{R}^3} + \delta^{\frac{1}{\beta}} \|\rho_{\delta}\|_{0,\frac{s(\gamma)}{\gamma},\beta,\mathbb{R}^3} \leq c, \quad (2.9)$$

$$\|\mathbf{u}_{\delta}\|_{1,2,\mathbb{R}^3} \leq c \quad (2.10)$$

dans lesquelles c désigne une constante arbitraire qui ne dépend que des données Ω , M , β , γ , \mathbf{f} et \mathbf{g} .

Un tel couple de fonctions $(\rho_{\delta}, \mathbf{u}_{\delta})$ sera appelé solution faible renormalisée à énergie bornée du problème (2.1)-(2.4).

Remarque 2.3 Par densité, il est aisé de vérifier que l'équation (2.2) reste vraie pour toute fonction test $\varphi \in [H_0^1(\Omega)]^3$.

Lorsque nous aurons démontré la proposition 2.1, à toute suite $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset (0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, nous serons capable de faire correspondre une suite $\{(\rho_{\delta_n}, \mathbf{u}_{\delta_n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que chacun de ses termes possède les propriétés (δ -1)-(δ -6) avec $\delta = \delta_n$. Nous en extrairons alors une sous-suite faiblement convergente dont la limite faible (ρ, \mathbf{u}) est une solution faible renormalisée à énergie bornée du problème (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6). Cette procédure sera détaillée dans la section 7.

2.2 Approximation n°2 (Etape n°3)

Puisque l'équation de continuité (1.1) est de type hyperbolique dégénérée, il est naturel de relaxer cette dégénérescence en s'intéressant à l'équation $\alpha \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$, $\alpha > 0$. Noter alors que si cette équation est satisfaite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ par le prolongement par zéro des fonctions ρ et \mathbf{u} à l'extérieur de Ω , en considérant une fonction $\varphi_R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $0 \leq \varphi_R \leq 1$, $\varphi_R = 1$ dans B_R , $\varphi_R = 0$ dans B^{2R} et R suffisamment grand pour que $\Omega \subset B_R$, on a $\alpha \int_{\Omega} \rho dx = 0$. Ceci est en contradiction avec (1.6). C'est la raison pour laquelle nous considérerons l'équation $\alpha \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \alpha h$ où $h = \frac{M}{|\Omega|}$. Après une telle modification, nous introduirons le terme $\frac{1}{2} \alpha h \mathbf{u} + \frac{3}{2} \alpha \rho \mathbf{u}$ dans l'équation de mouvement (1.2). Ceci nous permettra d'obtenir une inégalité d'énergie (cf. (2.16)) très utile dans la preuve du théorème 3.2 (cf. Chapitre 3). En résumé, pour démontrer la proposition 2.1, nous aurons besoin d'étudier le système d'équations suivant :

$$\alpha \rho_{\alpha} + \operatorname{div}(\rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) = \alpha h \text{ dans } \Omega, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha h \mathbf{u}_{\alpha} + \frac{3}{2} \alpha \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} + \operatorname{div}(\rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha}) - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_{\alpha} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_{\alpha} \\ + \nabla \{\rho_{\alpha}^{\gamma} + \delta(\rho_{\alpha}^2 + \rho_{\alpha}^{\beta})\} = \rho_{\alpha} \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{u}_{\alpha} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.13)$$

$$\int_{\Omega} \rho_{\alpha} dx = \int_{\Omega} h dx \quad (2.14)$$

dans lequel $\alpha \in (0, 1]$ et $h = \frac{M}{|\Omega|}$. Nous examinerons ce système d'équations dans un cadre plus général à la section 5 où nous prouverons la proposition ci-contre.

Proposition 2.2 *Soient les hypothèses de la proposition 2.1. On suppose que $\alpha \in (0, 1]$ et que $h \in L^\infty(\Omega)$, $h \geq 0$ p.p. dans Ω . Alors il existe un couple de fonctions $(\rho_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)$ satisfaisant*

(α -1) $\rho_\alpha \in L^{2\beta}(\mathbb{R}^3)$, $\rho_\alpha \geq 0$ p.p. dans Ω , $\rho_\alpha = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ et vérifie (2.14),
 $\mathbf{u}_\alpha \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$, $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{0}$ p.p. dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$;

(α -2) l'équation (2.11) au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 dans laquelle h dénote encore le prolongement par zéro à l'extérieur de Ω de h ;

(α -3) l'équation

$$\operatorname{div}(b(\rho_\alpha)\mathbf{u}_\alpha) + \{\rho_\alpha b'(\rho_\alpha) - b(\rho_\alpha)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha = \alpha(h - \rho_\alpha)b'(\rho_\alpha) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (2.15)$$

pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ satisfaisant (1.8) et (2.7), h dénotant encore le prolongement par zéro à l'extérieur de Ω de h ;

(α -4) l'équation (2.12) au sens des distributions dans Ω ;

(α -5) l'inégalité d'énergie

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} (h + \rho_\alpha) |\mathbf{u}_\alpha|^2 dx + \int_{\Omega} \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}_\alpha|^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha)^2\} dx \\ & + \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} \int_{\Omega} (\rho_\alpha - h) (\rho_\alpha^{\gamma-1} - h^{\gamma-1}) dx + \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \int_{\Omega} (\rho_\alpha - h) (\rho_\alpha^{\beta-1} - h^{\beta-1}) dx \\ & + 2\delta\alpha \int_{\Omega} (\rho_\alpha - h)^2 dx \leq \int_{\Omega} (\rho_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_\alpha dx + \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} \int_{\Omega} (h - \rho_\alpha) h^{\gamma-1} dx \\ & \quad + \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \int_{\Omega} (h - \rho_\alpha) h^{\beta-1} dx + 2\delta\alpha \int_{\Omega} (h - \rho_\alpha) h dx ; \end{aligned} \quad (2.16)$$

(α -6) les bornes uniformes par rapport à α

$$\|\rho_\alpha\|_{0,2\beta,\mathbb{R}^3} \leq c, \quad (2.17)$$

$$\|\mathbf{u}_\alpha\|_{1,2,\mathbb{R}^3} \leq c \quad (2.18)$$

dans lesquelles c désigne une constante arbitraire qui ne dépend que des données Ω , β , γ , δ , \mathbf{f} , \mathbf{g} et h .

Un tel couple de fonctions $(\rho_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)$ sera appelé solution faible renormalisée à énergie bornée du problème (2.11)-(2.14).

Remarque 2.4 Par densité, il est facile de vérifier que l'équation (2.12) reste vraie pour toute fonction test $\varphi \in [H_0^1(\Omega)]^3$.

Lorsque nous aurons démontré la proposition 2.2, à toute suite $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset (0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, nous pourrons faire correspondre une suite $\{(\rho_{\alpha_n}, \mathbf{u}_{\alpha_n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que chacun de ses termes possède les propriétés (α -1)-(α -6) avec $\alpha = \alpha_n$. Nous montrerons alors qu'il existe une sous-suite faiblement convergente de cette suite dont la limite faible $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ possède les propriétés (δ -1)-(δ -6). Cette procédure sera détaillée à la section 6.

2.3 Approximation n°3 (Etape n°2)

A la lecture de la preuve du théorème 2.1, il apparaîtra clairement que nous utilisons à diverses reprises des résultats de régularité d'équations aux dérivées partielles de type elliptique. Nous aurons donc besoin de plus de régularité sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω . Ainsi, afin de prouver la proposition 2.2, nous examinerons l'analogie du problème (2.11)-(2.14) formulé dans un domaine plus régulier (au moins $C^{2,\nu}$, $\nu \in (0, 1]$). L'introduction de ce nouveau problème se fait naturellement une fois démontré le résultat suivant concernant l'approximation d'un domaine borné par une suite décroissante de domaines réguliers.

Lemme 2.1 *Soient $N \geq 2$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné à frontière Lipschitzienne. Alors il existe une suite de domaines bornés $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que*

- (i) *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Ω_n est de classe C^∞ ;*
- (ii) *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\left\{x, \text{dist}(x, \Omega) < \frac{1}{n+1}\right\} \subset\subset \Omega_n \subset\subset \left\{x, \text{dist}(x, \Omega) < \frac{1}{n}\right\} \Rightarrow \Omega \subset\subset \Omega_{n+1} \subset\subset \Omega_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Omega_n \setminus \Omega| = 0.$$

Preuve. Soient $\omega_n = \{x, \text{dist}(x, \Omega) < \frac{1}{n}\}$ et $\varphi_n \in \mathcal{D}(\omega_n)$ telle que $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n = 1$ sur $\overline{\omega_{n+1}}$. En accord avec le théorème de Morse-Sard, p.p.t. $t \in (0, 1)$, l'intersection de l'ensemble de niveau $\{\varphi_n = t\}$ et de l'ensemble des points critiques de φ_n , *i.e.* l'ensemble $\{J_{\varphi_n} = 0\}$, est vide. Choisissons $t_n \in (0, 1)$ de telle sorte que cette propriété soit satisfaite et posons $\Omega_n = \{\varphi_n > t_n\}$. Alors, il est évident que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Ω_n vérifie (ii). Il reste donc à démontrer (i). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in \partial\Omega_n = \{\varphi_n = t_n\}$. D'après le choix de t_n , le Jacobien $J_{\varphi_n}(x_0) \neq 0$. Ainsi, le rang de la matrice Jacobienne $D_{\varphi_n}(x_0) = \nabla\varphi_n(x_0)$ est maximal, *i.e.* égal à 1. Après un éventuel changement de système de coordonnées, il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites pour conclure que Ω_n est de classe C^∞ . D'où le résultat. \square

Au vu de ce lemme, nous étudierons le système d'équations suivant :

$$\alpha\rho_n + \text{div}(\rho_n \mathbf{u}_n) = \alpha h_n \text{ dans } \Omega_n, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha h_n \mathbf{u}_n + \frac{3}{2}\alpha\rho_n \mathbf{u}_n + \text{div}(\rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n) - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_n - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \text{div} \mathbf{u}_n \\ + \nabla \{\rho_n^\gamma + \delta(\rho_n^2 + \rho_n^\beta)\} = \rho_n \mathbf{f}_n + \mathbf{g}_n \text{ dans } \Omega_n, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_n, \quad (2.21)$$

$$\int_{\Omega_n} \rho_n dx = \int_{\Omega_n} h_n dx, \quad (2.22)$$

dans lequel $n \in \mathbb{N}^*$ et les champs \mathbf{f}_n , \mathbf{g}_n et h_n sont définis par

$$\mathbf{f}_n = \begin{cases} \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_n \setminus \Omega \end{cases}, \quad \mathbf{g}_n = \begin{cases} \mathbf{g} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_n \setminus \Omega \end{cases}, \quad h_n = \begin{cases} h & \text{dans } \Omega, \\ 0 & \text{dans } \Omega_n \setminus \Omega \end{cases}. \quad (2.23)$$

Dans les sections 4.1-4.2, en se plaçant dans un cadre général, nous démontrons la

Proposition 2.3 *Soient G un domaine borné de \mathbb{R}^3 de classe $C^{2,\nu}$, $\nu \in (0, 1]$, $\delta, \alpha \in (0, 1]$ fixés, $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in [L^\infty(G)]^3$, $h \in L^\infty(G)$, $h \geq 0$ p.p. dans G et les hypothèses (1.3), (1.4) et (2.5). Alors il existe un couple de fonctions (ρ, \mathbf{u}) satisfaisant*

(G-1) $\rho \in L^{2\beta}(\mathbb{R}^3)$, $\rho \geq 0$ p.p. dans G , $\rho = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$ et vérifie $\int_G \rho \, dx = \int_G h \, dx$,
 $\mathbf{u} \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ p.p. dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$;

(G-2) l'équation

$$\alpha \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \alpha h \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (2.24)$$

dans laquelle h dénote encore le prolongement par zéro à l'extérieur de G de h ;

(G-3) l'équation

$$\operatorname{div}(b(\rho) \mathbf{u}) + \{\rho b'(\rho) - b(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = \alpha(h - \rho)b'(\rho) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (2.25)$$

pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ satisfaisant (1.8) et (2.7), h dénotant encore le prolongement par zéro à l'extérieur de G de h ;

(G-4) l'équation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha h \mathbf{u} + \frac{3}{2} \alpha \rho \mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu_1 \Delta \mathbf{u} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \\ + \nabla \{\rho^\gamma + \delta(\rho^2 + \rho^\beta)\} = \rho \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } [\mathcal{D}'(G)]^3; \end{aligned} \quad (2.26)$$

(G-5) l'inégalité d'énergie

$$\begin{aligned} \alpha \int_G (h + \rho) |\mathbf{u}|^2 \, dx + \int_G \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}|^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2\} \, dx \\ + \frac{\gamma \alpha}{\gamma - 1} \int_G (\rho - h) (\rho^{\gamma-1} - h^{\gamma-1}) \, dx + \frac{\delta \beta \alpha}{\beta - 1} \int_G (\rho - h) (\rho^{\beta-1} - h^{\beta-1}) \, dx \\ + 2\delta \alpha \int_G (\rho - h)^2 \, dx \leq \int_G (\rho \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} \, dx + \frac{\gamma \alpha}{\gamma - 1} \int_G (h - \rho) h^{\gamma-1} \, dx \\ + \frac{\delta \beta \alpha}{\beta - 1} \int_G (h - \rho) h^{\beta-1} \, dx + 2\delta \alpha \int_G (h - \rho) h \, dx. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Remarque 2.5 Par densité, il est aisé de vérifier que l'équation (2.26) reste vraie pour toute fonction test $\varphi \in [H_0^1(G)]^3$.

Une fois la proposition 2.3 démontrée, pour chaque Ω_n , $n \in \mathbb{N}^*$, nous serons donc assuré de l'existence d'un couple (ρ_n, \mathbf{u}_n) satisfaisant

(n-1) $\rho_n \in L^{2\beta}(\mathbb{R}^3)$, $\rho_n \geq 0$ p.p. dans Ω_n , $\rho_n = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_n}$ et vérifie (2.22),
 $\mathbf{u}_n \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$, $\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ p.p. dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_n}$;

(n-2) l'équation (2.19) au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 dans laquelle h_n dénote encore le prolongement par zéro à l'extérieur de Ω_n de h_n ;

(n-3) l'équation

$$\operatorname{div}(b(\rho_n)\mathbf{u}_n) + \{\rho_n b'(\rho_n) - b(\rho_n)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_n = \alpha(h_n - \rho_n)b'(\rho_n) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (2.28)$$

pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ satisfaisant (1.8) et (2.7), h_n dénotant encore le prolongement par zéro à l'extérieur de Ω_n de h_n ;

(n-4) l'équation (2.20) au sens des distributions dans Ω_n ;

(n-5) l'inégalité d'énergie

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega_n} (h_n + \rho_n)|\mathbf{u}_n|^2 dx + \int_{\Omega_n} \{\mu_1|\nabla \mathbf{u}_n|^2 + (\mu_1 + \mu_2)(\operatorname{div} \mathbf{u}_n)^2\} dx \\ & + \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} \int_{\Omega_n} (\rho_n - h_n)(\rho_n^{\gamma-1} - h_n^{\gamma-1}) dx + \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \int_{\Omega_n} (\rho_n - h_n)(\rho_n^{\beta-1} - h_n^{\beta-1}) dx \\ & + 2\delta\alpha \int_{\Omega_n} (\rho_n - h_n)^2 dx \leq \int_{\Omega_n} (\rho_n \mathbf{f}_n + \mathbf{g}_n) \cdot \mathbf{u}_n dx + \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} \int_{\Omega_n} (h_n - \rho_n)h_n^{\gamma-1} dx \\ & + \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \int_{\Omega_n} (h_n - \rho_n)h_n^{\beta-1} dx + 2\delta\alpha \int_{\Omega_n} (h_n - \rho_n)h_n dx. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Dans la section 4.3, nous prouverons en particulier les estimations suivantes :

$$\|\rho_n\|_{0,2\beta,\Omega} \leq c, \quad (2.30)$$

$$\|\mathbf{u}_n\|_{1,2,\Omega} \leq c, \quad (2.31)$$

dans lesquelles c désigne une constante arbitraire qui ne dépend que des données Ω , β , γ , δ , \mathbf{f} , \mathbf{g} et h . Nous montrerons alors qu'il existe une sous-suite faiblement convergente de la suite $\{(\rho_n, \mathbf{u}_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont la limite faible $(\rho_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)$ possède les propriétés (α-1)-(α-6). Toute cette procédure constituera la section 5.

Remarque 2.6 Une question assez naturelle se pose : pourquoi ne pas effectuer cette approximation au niveau un ou deux de notre schéma d'approximations successives ? Pour y répondre de manière claire, supposons que $\gamma > 3$, ce qui implique que le niveau un est facultatif. Nous affirmons que pour chaque Ω_n , il est possible d'obtenir l'existence d'un couple (ρ_n, \mathbf{u}_n) qui possède les propriétés (n-1)-(n-5) et qui satisfait les estimations (2.30) et (2.31) avec β remplacé par γ . Nous verrons qu'en fait l'estimation (2.31) est vraie si on remplace Ω par Ω_n , ce qui n'est pas le cas de l'estimation (2.30). Ceci est du essentiellement au fait que l'on ne sache pas contrôler la constante qui apparaît dans le lemme B.1 concernant l'inverse de Bogovskiï de l'opérateur div , lorsque $G = \Omega_n$. On peut alors supposer, modulo l'extraction d'une sous-suite, que $\rho_n \rightharpoonup \rho$ dans $L^{2\gamma}(\Omega)$. En écrivant

$$M = \int_{\Omega_n} \rho_n dx = \int_{\Omega_n \setminus \Omega} \rho_n dx + \int_{\Omega} \rho_n dx,$$

on s'aperçoit que le manque d'information sur le comportement de la suite $\{\rho_n\}_n$ à l'extérieur de Ω nous empêche de savoir si la masse se conserve. Il est assez facile de se convaincre, au moins formellement, que cette difficulté disparaît lorsque l'on considère l'équation (2.19) avec la fonction h_n définie en (2.23).

2.4 Approximation n°4 (Etape n°1)

A ce stade, l'équation (2.24) reste tout de même de type hyperbolique. Transformer cette équation en une équation de type elliptique en introduisant une dissipation artificielle est une voie courante pour la résoudre. Par conséquent, nous nous intéresserons à l'équation de type elliptique $\alpha\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) - \varepsilon\Delta\rho = \alpha h$, $\varepsilon > 0$. Supposons alors que la vitesse \mathbf{u} soit connue. Pour que cette équation soit bien posée, il faut la compléter par une condition aux limites sur ρ . Celle-ci apparaît naturellement au vu de la conservation de la masse (1.6). En effet, supposons *e.g.* que $(\rho, \mathbf{u}) \in C^1(\overline{\Omega}) \times [C^1(\overline{\Omega})]^3$, $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$, soit solution de l'équation $\alpha\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) - \varepsilon\Delta\rho = \alpha h$ p.p. dans Ω . Alors

$$\alpha \int_{\Omega} \rho \, dx - \varepsilon \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu}\rho \, d\sigma = \alpha \int_{\Omega} h \, dx = M \text{ si } h = \frac{M}{|\Omega|}.$$

On voit donc que la masse est conservée si $\partial_{\nu}\rho|_{\partial\Omega} = 0$. En contrepartie, l'équation (2.26) doit être modifiée pour qu'une inégalité d'énergie du type (2.27) soit en particulier satisfaite. Sous les hypothèses de la proposition 2.3 et pour $\varepsilon \in (0, 1]$, nous examinerons donc le système d'équations suivant :

$$\alpha\rho_{\varepsilon} + \operatorname{div}(\rho_{\varepsilon}\mathbf{u}_{\varepsilon}) - \varepsilon\Delta\rho_{\varepsilon} = \alpha h \text{ dans } G, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \alpha h\mathbf{u}_{\varepsilon} + \alpha\rho_{\varepsilon}\mathbf{u}_{\varepsilon} + \frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_{\varepsilon}\mathbf{u}_{\varepsilon} \otimes \mathbf{u}_{\varepsilon}) + \frac{1}{2}\rho_{\varepsilon}\mathbf{u}_{\varepsilon} \cdot \nabla\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mu_1\Delta\mathbf{u}_{\varepsilon} - (\mu_1 + \mu_2)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}_{\varepsilon} \\ + \nabla\{\rho_{\varepsilon}^{\gamma} + \delta(\rho_{\varepsilon}^2 + \rho_{\varepsilon}^{\beta})\} = \rho_{\varepsilon}\mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } G \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\partial_{\nu}\rho_{\varepsilon} = 0, \quad \mathbf{u}_{\varepsilon} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial G, \quad (2.34)$$

$$\int_G \rho_{\varepsilon} \, dx = \int_G h \, dx. \quad (2.35)$$

Dans la section 3, nous focaliserons notre attention à la démonstration de la

Proposition 2.4 *Soient les hypothèses de la proposition 2.3. On suppose que $\varepsilon \in (0, 1]$. Alors il existe un couple de fonctions $(\rho_{\varepsilon}, \mathbf{u}_{\varepsilon})$ satisfaisant*

(ε -1) *pour tout $p \in (1, \infty)$, $\rho_{\varepsilon} \in W^{2,p}(G)$, $\rho_{\varepsilon} \geq$ dans G , $\partial_{\nu}\rho_{\varepsilon} = 0$ sur ∂G et vérifie (2.35), $\mathbf{u}_{\varepsilon} \in [W^{2,p}(G)]^3$, $\mathbf{u}_{\varepsilon} = \mathbf{0}$ sur ∂G ;*

(ε -2) *les équations (2.32)-(2.33) p.p. dans G ;*

(ε -3) *l'inégalité d'énergie*

$$\begin{aligned} & \alpha \int_G (h + \rho_{\varepsilon})|\mathbf{u}_{\varepsilon}|^2 \, dx + \int_G \{\mu_1|\nabla\mathbf{u}_{\varepsilon}|^2 + (\mu_1 + \mu_2)(\operatorname{div}\mathbf{u}_{\varepsilon})^2\} \, dx \\ & + \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} \int_G (\rho_{\varepsilon} - h)(\rho_{\varepsilon}^{\gamma-1} - h^{\gamma-1}) \, dx + \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \int_G (\rho_{\varepsilon} - h)(\rho_{\varepsilon}^{\beta-1} - h^{\beta-1}) \, dx \\ & + 2\delta\alpha \int_G (\rho_{\varepsilon} - h)^2 \, dx + \varepsilon\delta\beta \int_G \rho_{\varepsilon}^{\beta-2}|\nabla\rho_{\varepsilon}|^2 \, dx + 2\varepsilon\delta \int_G |\nabla\rho_{\varepsilon}|^2 \, dx \\ & \leq \int_G (\rho_{\varepsilon}\mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon} \, dx + \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} \int_G (h - \rho_{\varepsilon})h^{\gamma-1} \, dx \\ & + \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \int_G (h - \rho_{\varepsilon})h^{\beta-1} \, dx + 2\delta\alpha \int_G (h - \rho_{\varepsilon})h \, dx. \end{aligned} \quad (2.36)$$

(ε -4) les bornes uniformes par rapport à ε

$$\|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta,G} \leq c, \quad (2.37)$$

$$\varepsilon \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{0,2,G}^2 \leq c, \quad (2.38)$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,2,G} \leq c \quad (2.39)$$

dans lesquelles c désigne une constante arbitraire qui ne dépend que des données G , β , γ , δ , \mathbf{f} , \mathbf{g} et h .

Remarque 2.7 Par densité, il est aisé de vérifier que l'équation (2.33) reste vraie pour toute fonction test $\varphi \in [W_0^{1,q}(G)]^3$, $q \in (1, \infty)$.

Une fois démontrée la proposition 2.4, à toute suite $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset (0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, il sera possible de faire correspondre une suite $\{(\rho_{\varepsilon_n}, \mathbf{u}_{\varepsilon_n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que chacun de ses termes possède les propriétés (ε -1)-(ε -4) avec $\varepsilon = \varepsilon_n$. Nous en extrairons alors une sous-suite faiblement convergente dont la limite faible (ρ, \mathbf{u}) possède les propriétés (G -1)-(G -5). Nous détaillerons toute cette procédure dans les sections 4.1-4.2.

3 Preuve : Etape n°1

Dans cette section, nous démontrons la proposition 2.4 en deux temps. Tout d'abord, nous prouvons l'existence d'un couple de fonctions $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ satisfaisant les propriétés (ε -1), (ε -2), puis nous vérifions qu'il possède également les propriétés (ε -3), (ε -4). Cette preuve est une application standard des résultats de régularité d'équations aux dérivées partielles de type elliptique et de la théorie du point fixe de Leray-Schauder. Nous la présentons en détail puisque notre objectif est de fournir une preuve complète du théorème 2.1.

3.1 Existence d'une solution

Dénotons par $\mathbf{T}_t : [\mathcal{W}_0^{1,\infty}(G)]^3 \equiv \{\mathbf{v} \in [W^{1,\infty}(G)]^3, \mathbf{v}|_{\partial G} = \mathbf{0}\} \rightarrow [\mathcal{W}_0^{1,\infty}(G)]^3$ l'opérateur qui à tout champ de vecteurs $\mathbf{v} \in [\mathcal{W}_0^{1,\infty}(G)]^3$ fait correspondre la solution $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{T}_t(\mathbf{v})$ du système elliptique

$$-\mu_1 \Delta \mathbf{u}_\varepsilon - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = t \mathbf{F}(\rho_\varepsilon, \mathbf{v}) \text{ dans } G, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{0} \text{ sur } \partial G \quad (3.2)$$

dans lequel

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\rho_\varepsilon, \mathbf{v}) = & -\alpha(h + \rho_\varepsilon)\mathbf{v} - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \frac{1}{2} \rho_\varepsilon \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \\ & - \nabla \{\rho_\varepsilon^\gamma + \delta(\rho_\varepsilon^2 + \rho_\varepsilon^\beta)\} + \rho_\varepsilon \mathbf{f} + \mathbf{g} \end{aligned} \quad (3.3)$$

et ρ_ε désigne la solution du problème

$$\alpha \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbf{v}) - \varepsilon \Delta \rho_\varepsilon = \alpha h \text{ dans } G, \quad (3.4)$$

$$\partial_\nu \rho_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial G, \quad (3.5)$$

$$\int_G \rho_\varepsilon dx = \int_G h dx. \quad (3.6)$$

En accord avec le théorème 1.1, nous savons que le problème (3.4)-(3.6) admet une unique solution $\rho_\varepsilon \in W^{2,p}(G)$, $p \in (1, \infty)$. Ainsi, nous sommes assurés que $\mathbf{F}(\rho_\varepsilon, \mathbf{v}) \in [L^p(G)]^3$ et le lemme 1.7 garantit l'existence d'une unique solution $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{T}_t(\mathbf{v}) \in [W^{2,p}(G)]^3$ du système elliptique (3.1)-(3.3). Par suite, les théorèmes d'injections de Sobolev prouvent que l'opérateur \mathbf{T}_t , $t \in [0, 1]$, est convenablement défini. Remarquer alors que construire un couple de fonctions $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ satisfaisant les propriétés $(\varepsilon-1)$ - $(\varepsilon-2)$ revient à chercher un point fixe \mathbf{u}_ε de l'opérateur $\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}_1$ et à vérifier que le couple $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ qui lui est associé par la définition de \mathbf{T}_t satisfait les propriétés $(\varepsilon-3)$ - $(\varepsilon-4)$. Pour cela, nous allons utiliser la théorie du degré topologique de Leray-Schauder. Le lecteur intéressé par les grandes lignes de cette théorie pourra se reporter à l'annexe C. Avant cela, nous démontrons deux résultats préliminaires.

Affirmation n° 1 *On suppose que $\mathbf{u}_\varepsilon \in [\mathcal{W}_0^{1,\infty}(G)]^3$ satisfait $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{T}_t(\mathbf{u}_\varepsilon)$. Alors il existe une constante $C_{ptf} = c(G, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)$ indépendante de t telle que*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,\infty} < C_{ptf}.$$

Autrement dit,

$$\mathbf{0} \notin (\mathbf{I} - \mathbf{T}_t)(\partial D), \quad D = \{\mathbf{w} \in [\mathcal{W}_0^{1,\infty}(G)]^3, \|\mathbf{w}\|_{1,\infty} < C_{ptf}\}.$$

Preuve. Soit $\mathbf{u}_\varepsilon \in [\mathcal{W}_0^{1,\infty}(G)]^3$ un champ de vecteurs satisfaisant $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{T}_t(\mathbf{u}_\varepsilon)$, $t \in [0, 1]$. En accord avec le théorème 1.1, pour tout $p \in (1, \infty)$ il vient que $\rho_\varepsilon \in W^{2,p}(G)$ et par suite il découle du lemme 1.7 que $\mathbf{u}_\varepsilon \in [W^{2,p}(G)]^3$. Par ailleurs, le couple $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ associé à \mathbf{u}_ε (cf. la définition de l'opérateur \mathbf{T}_t) est solution de l'équation

$$\begin{aligned} \alpha t(h + \rho_\varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon + \frac{t}{2} \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes \mathbf{u}_\varepsilon) + \frac{t}{2} \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_\varepsilon - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon \\ + t \nabla \{\rho_\varepsilon^\gamma + \delta(\rho_\varepsilon^2 + \rho_\varepsilon^\beta)\} = t \rho_\varepsilon \mathbf{f} + t \mathbf{g} \text{ p.p. dans } G. \end{aligned}$$

Pour des raisons similaires à celles de la remarque 2.7, toute fonction $\varphi \in [W_0^{1,p}(G)]^3$, $p \in (1, \infty)$, est une fonction test admissible de cette équation. Après quelques intégrations par parties, en testant cette équation par $\varphi = \mathbf{u}_\varepsilon$, on arrive à

$$\begin{aligned} \alpha t \int_G (h + \rho_\varepsilon) |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 dx + \int_G \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon)^2\} dx \\ + \frac{\gamma \alpha}{\gamma - 1} t \int_G (\rho_\varepsilon - h) (\rho_\varepsilon^{\gamma-1} - h^{\gamma-1}) dx + \frac{\delta \beta \alpha}{\beta - 1} t \int_G (\rho_\varepsilon - h) (\rho_\varepsilon^{\beta-1} - h^{\beta-1}) dx \\ + 2\delta \alpha t \int_G (\rho_\varepsilon - h)^2 dx + \varepsilon \delta \beta t \int_G \rho_\varepsilon^{\beta-2} |\nabla \rho_\varepsilon|^2 dx + 2\varepsilon \delta t \int_G |\nabla \rho_\varepsilon|^2 dx \\ \leq t \int_G (\rho_\varepsilon \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_\varepsilon dx + \frac{\gamma \alpha}{\gamma - 1} t \int_G (h - \rho_\varepsilon) h^{\gamma-1} dx \\ + \frac{\delta \beta \alpha}{\beta - 1} t \int_G (h - \rho_\varepsilon) h^{\beta-1} dx + 2\delta \alpha t \int_G (h - \rho_\varepsilon) h dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pour se ramener à cette inégalité, on a entre autres utilisé l'identité

$$\begin{aligned} \forall s \in (1, \infty), \quad \int_G \nabla \rho_\varepsilon^s \cdot \mathbf{u}_\varepsilon dx = -\frac{s}{s-1} \int_G \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon) \rho_\varepsilon^{s-1} dx \\ = \alpha \frac{s}{s-1} \int_G (\rho_\varepsilon - h) (\rho_\varepsilon^{s-1} - h^{s-1}) dx + \int_G (\rho_\varepsilon - h) h^{s-1} dx - \varepsilon \frac{s}{s-1} \int_G \Delta \rho_\varepsilon \rho_\varepsilon^{s-1} dx \end{aligned}$$

complétée par les observations suivantes

$$\begin{aligned} & \forall s \in (1, 2), \quad -\varepsilon \frac{s}{s-1} \int_G \Delta \rho_\varepsilon \rho_\varepsilon^{s-1} dx \\ &= -\varepsilon \frac{s}{s-1} \lim_{l \rightarrow 0^+} \int_G \Delta(\rho_\varepsilon + l)(\rho_\varepsilon + l)^{s-1} dx = \varepsilon s \lim_{l \rightarrow 0^+} \int_G (\rho_\varepsilon + l)^{s-2} |\nabla \rho_\varepsilon|^2 dx \geq 0, \\ & \forall s \in (2, \infty), \quad -\varepsilon \frac{s}{s-1} \int_G \Delta \rho_\varepsilon \rho_\varepsilon^{s-1} dx = \varepsilon s \int_G \rho_\varepsilon^{s-2} |\nabla \rho_\varepsilon|^2 dx. \end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité de Hölder et de la condition (3.6), on majore le membre de droite de l'inégalité (3.7) par

$$t\{(\|\rho_\varepsilon\|_{0, \frac{6}{5}} \|\mathbf{f}\|_{0, \infty} + \|\mathbf{g}\|_{0, \frac{6}{5}}) \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,6} + c(G, \beta, \gamma)(\|h\|_{0, \infty}^\gamma + \|h\|_{0, \infty}^\beta + \|h\|_{0, \infty}^2)\}. \quad (3.8)$$

Puisque $L^{3\beta}(G) \subset L^{\frac{6}{5}}(G)$ et $[H^1(G)]^3 \subset [L^6(G)]^3$, en utilisant l'inégalité de Young, on peut estimer le terme (3.8) par

$$\begin{aligned} & t\{c(G)(\|\rho_\varepsilon\|_{0,3\beta} \|\mathbf{f}\|_{0, \infty} + \|\mathbf{g}\|_{0, \frac{6}{5}}) \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,2} + c(G, \beta, \gamma, h)\} \\ & \leq t\left\{\frac{c(G)^2}{2l_0} (\|\mathbf{f}\|_{0, \infty}^2 \|\rho_\varepsilon\|_{0,3\beta}^2 + \|\mathbf{g}\|_{0, \frac{6}{5}}^2) + c(G, \beta, \gamma, h) + l_0 \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,2}^2\right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Par ailleurs, noter que $\varepsilon \beta \int_G \rho_\varepsilon^{\beta-2} |\nabla \rho_\varepsilon|^2 dx = \varepsilon \frac{4}{\beta} \int_G |\nabla(\rho_\varepsilon^{\frac{\beta}{2}})|^2 dx$. Prenant en compte cette remarque, de (3.7), (3.8) et (3.9) il vient alors que

$$\|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,2}^2 + \|\nabla(\rho_\varepsilon^{\frac{\beta}{2}})\|_{0,2}^2 \leq c_0(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)(1 + \|\rho_\varepsilon\|_{0,3\beta}^2). \quad (3.10)$$

Par suite, d'après les injections de Sobolev, il en résulte que

$$\|\rho_\varepsilon\|_{0,3\beta}^\beta \leq c_1(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)(1 + \|\rho_\varepsilon\|_{0,3\beta}^2),$$

d'où, puisque $\beta > 2$,

$$\|\rho_\varepsilon\|_{0,3\beta} \leq c_2(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h). \quad (3.11)$$

En accord avec (3.10), ceci implique que

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,2} \leq c_3(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h). \quad (3.12)$$

Soit $\mathcal{G} = -\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon + \alpha \mathcal{B}(h - \rho_\varepsilon)$ où \mathcal{B} est l'opérateur de Bogovskiï introduit dans le lemme B.1. Les estimations (3.11), (3.12) complétées par le lemme B.1 nous permettent d'affirmer que $\|\mathcal{G}\|_{0, \frac{6\beta}{\beta+2}} \leq c_4(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)$. Ainsi en appliquant le lemme 1.6 à (3.4) et en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger pour $(\rho_\varepsilon - h)$, on trouve que

$$\|\rho_\varepsilon\|_{1, \frac{6\beta}{\beta+2}} \leq c_5(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h).$$

Puisque $3 < \frac{6\beta}{\beta+2} < 6$, à l'aide des injections de Sobolev, on en déduit l'inégalité suivante

$$\|\rho_\varepsilon\|_{0, \infty} \leq c_6(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)$$

qui elle même implique que $\|\mathbf{F}(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)\|_{-1,3} \leq c_7(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)$. Alors, d'après le lemme 1.7, complété par les injections de Sobolev, on peut affirmer que

$$\forall p \in [1, \infty), \quad \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,p} \leq c(G)\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,3} \leq c_8(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h).$$

Ainsi, pour tout $p \in (2, \infty)$, $\|\mathbf{F}(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)\|_{-1, \frac{6p}{p+6}} \leq c_9(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)$. En particulier, pour tout $q \in (3, 6)$, on a $\|\mathbf{F}(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)\|_{-1,q} \leq c_9(G, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)$. Une fois encore le lemme 1.7, ajouté aux injections de Sobolev, justifie que

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,\infty} \leq c(G)\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,q} \leq c_{10}(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h), \quad q \in (3, 6).$$

Revenons sur \mathcal{G} . Clairement pour tout $p \in (1, \infty)$, $\|\mathcal{G}\|_{0,p} \leq c_{11}(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)$. A l'aide du lemme 1.6, de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger pour $(\rho_\varepsilon - h)$, on en déduit que pour tout $p \in (1, \infty)$,

$$\|\rho_\varepsilon\|_{1,p} \leq c_{12}(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h).$$

De cette inégalité provient alors l'estimation $\|\mathbf{F}(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)\|_{0,2} \leq c_{13}(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)$ qui, complétée par le lemme 1.7, nous permet d'affirmer que

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,2} \leq c_{14}(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h).$$

Par conséquent $\|\mathbf{F}(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)\|_{0,6} \leq c_{15}(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)$ et de nouveau, en accord avec le lemme 1.7 et les injections de Sobolev, on a

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,\infty} \leq c(G)\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,6} \leq c_{16}(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h).$$

Pour conclure la preuve il suffit de poser $C_{ptf} = c_{16}(G, \beta, \gamma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h) + 1$. \square

Affirmation n° 2 *L'opérateur $\mathbf{H} : \overline{D} \times [0, 1] \rightarrow [\mathcal{W}_0^{1,\infty}(G)]^3$ défini par $\mathbf{H}(\cdot, t) = \mathbf{T}_t(\cdot)$ est une homotopie de transformations compactes.*

Preuve. Montrons que $\mathbf{H}(\cdot, t) : \overline{D} \rightarrow [\mathcal{W}_0^{1,\infty}(G)]^3$ est un opérateur compact. Pour tout $p \in (1, \infty)$, la norme $[L^p(G)]^3$ de $t\mathbf{F}(\rho_\varepsilon, \mathbf{v})$, avec $\mathbf{F}(\rho_\varepsilon, \mathbf{v})$ définie en (3.3), est majorée par

$$c(G, p, \beta, \gamma)t\{(\|h\|_{0,\infty} + \|\rho_\varepsilon\|_{1,p})\|\mathbf{v}\|_{1,\infty} + \|\rho_\varepsilon\|_{1,p}\|\mathbf{v}\|_{1,\infty}^2 \\ + (\|\rho_\varepsilon\|_{0,\infty}^{\gamma-1} + \|\rho_\varepsilon\|_{0,\infty}^{\beta-1} + \|\rho_\varepsilon\|_{0,\infty})\|\nabla\rho_\varepsilon\|_{0,p} + \|\rho_\varepsilon\|_{0,p}\|\mathbf{f}\|_{0,\infty} + \|\mathbf{g}\|_{0,p}\}.$$

Comme $\mathbf{v} \in \overline{D}$, le théorème 1.1 justifie l'estimation $\|\rho_\varepsilon\|_{2,p} \leq c(G, p, \varepsilon, C_{ptf}, h)$ pour tout $p \in (1, \infty)$, ce qui entraîne que $t\|\mathbf{F}(\rho_\varepsilon, \mathbf{v})\|_{0,p} \leq c(G, p, \beta, \gamma, \varepsilon, C_{ptf}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)t$. Mais alors, le lemme 1.7 implique que

$$\forall p \in (3, \infty), \forall \mathbf{v} \in \overline{D}, \quad \|\mathbf{H}(\mathbf{v}, t)\|_{2,p} \leq c(G, p, \beta, \gamma, \varepsilon, C_{ptf}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)t.$$

A l'aide des injections compactes de Sobolev, cette inégalité permet de conclure que pour tout $t \in [0, 1]$, l'opérateur $\mathbf{H}(\cdot, t)$ est compact.

Soient $\mathbf{v} \in L \subset \overline{D}$ et $s, t \in [0, 1]$. Alors la différence $\mathbf{H}(\mathbf{v}, t) - \mathbf{H}(\mathbf{v}, s)$ est solution du problème (3.1)-(3.2) dans lequel le membre de droite de l'équation (3.1) doit être remplacé

par $(t-s)\mathbf{F}(\rho_\varepsilon, \mathbf{v})$. En suivant une démarche analogue à celle utilisée précédemment, on trouve que

$$\forall p \in (3, \infty), \forall \mathbf{v} \in L, \quad \|\mathbf{H}(\mathbf{v}, t) - \mathbf{H}(\mathbf{v}, s)\|_{2,p} \leq c(G, p, \beta, \gamma, \varepsilon, C_{ptf}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)|t-s|.$$

En accord avec les injections de Sobolev, cette inégalité nous permet d'affirmer que pour tout $\mathbf{v} \in L$ et tout $s, t \in [0, 1]$, on a

$$\|\mathbf{H}(\mathbf{v}, t) - \mathbf{H}(\mathbf{v}, s)\|_{1,\infty} \leq c(G, p, \beta, \gamma, \varepsilon, C_{ptf}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)|t-s|.$$

Ceci achève la preuve de l'affirmation 2. \square

Pour tout $t \in [0, 1]$, l'existence d'au moins un point fixe de l'opérateur $\mathbf{H}(\cdot, t)$ est une conséquence des affirmations n° 1 et 2. En effet, lorsque $t = 0$, le lemme 1.7 garantit que le problème (3.1)-(3.2) admet une unique solution $\mathbf{u}_\varepsilon^0 = \mathbf{0}$. Compte tenu de la définition du degré de Leray-Schauder, $\deg(\mathbf{I} - \mathbf{H}(\cdot, 0), D, \mathbf{0}) = \pm 1$. Les affirmations n° 1 et 2 justifient l'application du théorème C.4 qui, pour tout $t \in [0, 1]$, assure que

$$\deg(\mathbf{I} - \mathbf{H}(\cdot, t), D, \mathbf{0}) = \deg(\mathbf{I} - \mathbf{H}(\cdot, 0), D, \mathbf{0}) = \pm 1.$$

Ainsi, du théorème C.3 découle l'existence d'au moins un point fixe \mathbf{u}_ε^t de l'opérateur $\mathbf{H}(\cdot, t)$, $t \in [0, 1]$. Associons y la fonction ρ_ε^t solution du problème (3.4)-(3.6) avec $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\varepsilon^t$. Il s'en suit que le couple $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon) \equiv (\rho_\varepsilon^1, \mathbf{u}_\varepsilon^1)$ satisfait bien les propriétés $(\varepsilon-1)$, $(\varepsilon-2)$.

3.2 Inégalité d'énergie, bornes uniformes

Noter tout d'abord que l'inégalité d'énergie (2.36) n'est rien d'autre que (3.7) dans laquelle $t = 1$. Pour les mêmes raisons que celles qui ont conduit à l'estimation du membre de droite de (3.7) par (3.8), celui de (2.36) peut être majoré par

$$\|\rho_\varepsilon\|_{0, \frac{6}{5}} \|\mathbf{f}\|_{0,\infty} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,6} + \|\mathbf{g}\|_{0, \frac{6}{5}} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,6} + c(G, \beta, \gamma) (\|h\|_{0,\infty}^\gamma + \|h\|_{0,\infty}^\beta + \|h\|_{0,\infty}^2). \quad (3.13)$$

Par ailleurs $2\beta > \frac{6}{5}$ et $[H_0^1(G)]^3 \subset [L^6(G)]^3$. Ceci étant, (2.36), (3.13), l'hypothèse (1.3) et l'inégalité de Young impliquent en particulier que

$$\|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,2}^2 + \varepsilon \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{0,2}^2 \leq c(G, \beta, \gamma, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h) (1 + \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^2). \quad (3.14)$$

Le lemme B.1 garantit que la fonction $\varphi = \mathcal{B}(\rho_\varepsilon^\beta - \frac{1}{|G|} \int_G \rho_\varepsilon^\beta dy)$, où \mathcal{B} est l'opérateur de Bogovskii appliqué à G , est un champ de vecteurs de $[W_0^{1,p}(G)]^3$, $p \in (1, \infty)$, satisfaisant

$$\|\nabla \varphi\|_{0,p} \leq c(G, p) \|\rho_\varepsilon\|_{0,p\beta}^\beta. \quad (3.15)$$

Compte tenu de la remarque 2.7, il est clair que φ est une fonction test admissible de l'équation (2.33). Ainsi, après quelques intégrations par parties aisément justifiées, l'équation (2.33) testée par φ donne l'identité suivante :

$$\begin{aligned} & \int_G \rho_\varepsilon^{\gamma+\beta} dx + \delta \int_G (\rho_\varepsilon^{2\beta} + \rho_\varepsilon^{2+\beta}) dx = \frac{1}{|G|} \int_G \{\rho_\varepsilon^\gamma + \delta(\rho_\varepsilon^\beta + \rho_\varepsilon^2)\} dx \left(\int_G \rho_\varepsilon^\beta dy \right) \\ & + \alpha \int_G (h + \rho_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \varphi dx + \int_G \{\mu_1 \nabla \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla \varphi + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon) (\operatorname{div} \varphi)\} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_G \rho_\varepsilon u_\varepsilon^i u_\varepsilon^j \partial_j \varphi^i dx + \frac{1}{2} \int_G \rho_\varepsilon u_\varepsilon^j \partial_j u_\varepsilon^i \varphi^i dx - \int_G (\rho_\varepsilon \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \varphi dx = \sum_{k=1}^6 I_k. \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'inégalité d'interpolation $\|\rho_\varepsilon\|_{0,\beta} \leq \|\rho_\varepsilon\|_{0,1}^{\frac{1}{2\beta-1}} \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^{\frac{2\beta-2}{2\beta-1}}$, la condition (2.35) et les inclusions $L^{2\beta}(G) \subset L^{\beta+\gamma}(G) \subset L^2(G)$ entraînent que

$$|I_1| \leq c(G, \beta, \gamma, h) (\|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^\gamma + \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^\beta + \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^2) \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^{\left(\frac{2\beta-2}{2\beta-1}\right)\beta}. \quad (3.17)$$

En accord avec l'inégalité de Hölder, l'inclusion $[L^2(G)]^3 \subset [L^{\frac{6\beta}{5\beta-3}}(G)]^3$, l'inégalité de Poincaré, (3.14) et (3.15), on a

$$|I_2| \leq \alpha \|\rho_\varepsilon + h\|_{0,2\beta} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,6} \|\varphi\|_{0,\frac{6\beta}{5\beta-3}} \leq c(G, \beta, \gamma, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h) (1 + \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^2) \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^\beta. \quad (3.18)$$

A l'aide de l'inégalité de Schwarz, de (3.14) et de (3.15), I_3 peut être majoré comme suit :

$$|I_3| \leq c \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,2} \|\nabla \varphi\|_{0,2} \leq c(G, \beta, \gamma, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h) (1 + \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}) \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^\beta. \quad (3.19)$$

A condition que l'inclusion $[L^2(G)]^{3 \times 3} \subset [L^{\frac{6\beta}{4\beta-3}}(G)]^{3 \times 3}$ soit vraie, *i.e.* que $\beta \geq 3$, de l'inégalité de Hölder et des estimations (3.14) et (3.15), il vient que

$$|I_4| \leq c \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,6}^2 \|\nabla \varphi\|_{0,\frac{6\beta}{4\beta-3}} \leq c(G, \beta, \gamma, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h) (1 + \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^2) \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^{\beta+1}. \quad (3.20)$$

Puisque $\beta \geq 3$, en utilisant l'injection $[W_0^{1,\frac{6\beta}{4\beta-3}}(G)]^3 \subset [L^{\frac{6\beta}{2\beta-3}}(G)]^3$ et, une fois encore, (3.14) et (3.15), on trouve que

$$|I_5| \leq c \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,6} \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,2} \|\varphi\|_{0,\frac{6\beta}{2\beta-3}} \leq c(G, \beta, \gamma, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h) (1 + \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^2) \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^{\beta+1}. \quad (3.21)$$

Enfin, l'inégalité de Hölder, l'injection $[L^6(G)]^3 \subset [L^{\frac{2\beta}{2\beta-1}}(G)]^3$, l'inégalité de Sobolev et (3.15) impliquent que

$$|I_6| \leq \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta} \|\mathbf{f}\|_{0,\infty} \|\varphi\|_{0,\frac{2\beta}{2\beta-1}} + \|\mathbf{g}\|_{0,\frac{6}{5}} \|\varphi\|_{0,6} \leq c(G, \beta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) (1 + \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}) \|\rho_\varepsilon\|_{0,2\beta}^\beta. \quad (3.22)$$

En regroupant les estimations (3.17)-(3.22) dans l'identité (3.16), par le biais de l'inégalité de Young, on conclut finalement à l'estimation (2.37). Par suite, en accord avec (3.14), les estimations (2.38) et (2.39) en découlent. La preuve de la proposition 2.4 est donc complète. \square

4 Preuve : Etape n°2

Cette section est consacrée à la preuve de la proposition 2.3. Tout d'abord, nous construisons un couple de fonctions (ρ, \mathbf{u}) satisfaisant les propriétés (G-1)-(G-4). Pour ce faire, nous utilisons l'argument de compacité du à P.L. LIONS [46, Theorem 6.4] dont nous détaillons la démonstration et ce, parceque notre objectif est de fournir une preuve complète du théorème 2.1. Dans un deuxième temps nous vérifions que le couple (ρ, \mathbf{u}) ainsi construit, possède en outre la propriété (G-5).

4.1 Construction d'une solution (cadre général)

Soient $\delta, \alpha \in (0, 1]$ fixés. Considérons une suite $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset (0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ et associons y par la proposition 2.4 la suite $\{(\rho_{\varepsilon_n}, \mathbf{u}_{\varepsilon_n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Ici, sauf mention explicite du contraire, nous ne ferons pas la distinction entre une fonction définie sur un domaine \mathcal{O} de \mathbb{R}^3 et son prolongement par zéro à l'extérieur de \mathcal{O} . De plus, pour alléger les notations, nous écrirons plutôt $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ et $\varepsilon \rightarrow 0^+$ au lieu de $(\rho_{\varepsilon_n}, \mathbf{u}_{\varepsilon_n})$ et $n \rightarrow \infty$. Au vu des estimations (2.37), (2.38) et (2.39), on peut supposer qu'il existe des fonctions $\rho, \mathbf{u}, \overline{\rho^\gamma}, \overline{\rho^2}$ et $\overline{\rho^\beta}$ telles que modulo l'extraction de sous-suites et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } [H^1(\mathbb{R}^3)]^3, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } [L^q(G)]^3, \quad q \in [1, 6),$$

$$\rho_\varepsilon \rightharpoonup \rho \text{ dans } L^{2\beta}(\mathbb{R}^3), \quad \rho \geq 0 \text{ p.p. dans } G, \quad \rho = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}, \quad (4.2)$$

$$\rho_\varepsilon^\gamma \rightharpoonup \overline{\rho^\gamma} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\gamma}}(\mathbb{R}^3), \quad \rho_\varepsilon^2 \rightharpoonup \overline{\rho^2} \text{ dans } L^\beta(\mathbb{R}^3), \quad \rho_\varepsilon^\beta \rightharpoonup \overline{\rho^\beta} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3), \quad (4.3)$$

$$\overline{\rho^\gamma} = \overline{\rho^2} = \overline{\rho^\beta} = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus G,$$

$$\varepsilon \nabla \rho_\varepsilon \rightarrow \mathbf{0} \text{ dans } [L^2(G)]^3. \quad (4.4)$$

Quelques intégrations par parties, licites d'après la propriété $(\varepsilon-1)$, justifient la chaîne d'égalités suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_G \rho_\varepsilon u_\varepsilon^j \partial_j u_\varepsilon^i \varphi^i dx &= -\frac{1}{2} \int_G \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi} dx - \frac{1}{2} \int_G \rho_\varepsilon u_\varepsilon^j u_\varepsilon^i \partial_j \varphi^i dx \\ &= -\frac{1}{2} \alpha \int_G (h - \rho_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi} dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_G \nabla \rho_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi} dx \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \int_G \partial_j \rho_\varepsilon u_\varepsilon^i \partial_j \varphi^i dx - \frac{1}{2} \int_G \rho_\varepsilon u_\varepsilon^j u_\varepsilon^i \partial_j \varphi^i dx, \quad \boldsymbol{\varphi} \in [\mathcal{D}(G)]^3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

On rappelle que l'équation (2.32) est satisfaite p.p. dans G . A la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on récupère l'équation (2.24) dans $\mathcal{D}'(G)$. Par suite, puisque $\rho \in L^{2\beta}(G)$, $\mathbf{u} \in [H_0^1(G)]^3$ et $\alpha(h - \rho) \in L^{2\beta}(G)$, du lemme 1.1 on déduit la validité de (2.24) puis, d'après le lemme 1.4, celle de (2.25) pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ satisfaisant (1.8) et (2.7). Par ailleurs, à l'aide des convergences (4.1)-(4.4) et de (4.5), on peut passer à la limite dans l'équation (2.33). On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha h \mathbf{u} + \frac{3}{2} \alpha \rho \mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu_1 \Delta \mathbf{u} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla \{\overline{\rho^\gamma} + \delta(\overline{\rho^2} + \overline{\rho^\beta})\} \\ = \rho \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Au vu de (4.6), pour conclure que le couple (ρ, \mathbf{u}) , défini par (4.1)-(4.2), satisfait les propriétés (G-1)-(G-4), il suffit *e.g.* de démontrer que

$$\overline{p(\rho)} \equiv \overline{\rho^\gamma} + \delta(\overline{\rho^2} + \overline{\rho^\beta}) = p(\rho) \equiv \rho^\gamma + \delta(\rho^2 + \rho^\beta) \text{ p.p. dans } G. \quad (4.7)$$

Puisque la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^\gamma + \delta(t^2 + t^\beta)$ est strictement convexe, ceci revient à démontrer la convergence forte dans $L^1(G)$ de la suite $\{\rho_\varepsilon\}_\varepsilon$ vers ρ . Pour ce faire, nous allons démontrer deux lemmes intermédiaires avant de conclure dans un troisième.

Lemme 2.2 *Pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ satisfaisant (1.8) et (2.7) avec $\lambda_1 = 0$, on a*

$$\overline{p(\rho)b(\rho)} - (2\mu_1 + \mu_2)\overline{b(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}} = \overline{p(\rho)} \overline{b(\rho)} - (2\mu_1 + \mu_2)\overline{b(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}} \text{ p.p. dans } G, \quad (4.8)$$

où $\overline{p(\rho)b(\rho)}$, $\overline{b(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}}$ et $\overline{b(\rho)}$ sont les limites faibles quand $\varepsilon \rightarrow 0$ des suites correspondantes.

Preuve. Dans le théorème 1.2, on pose

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon &= p(\rho_\varepsilon), \quad b_\varepsilon = b(\rho_\varepsilon), \quad \mathbf{F}_\varepsilon = \rho_\varepsilon \mathbf{f} + \mathbf{g} - \alpha(h + \rho_\varepsilon) - \frac{1}{2} \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \quad \mathbf{q}_\varepsilon = \frac{1}{2} \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon; \\ \Pi &= \overline{p(\rho)}, \quad b = \overline{b(\rho)}, \quad \mathbf{F} = \rho \mathbf{f} + \mathbf{g} - \alpha(h + \rho) - \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Clairement, en accord avec les convergences (4.1)-(4.4), on a

$$\Pi_\varepsilon \rightharpoonup \Pi \text{ dans } L^2(G), \quad (4.9)$$

$$b_\varepsilon \rightarrow b \text{ dans } L^{2\beta}(G), \quad (4.10)$$

$$\rho_\varepsilon \mathbf{f} + \mathbf{g} - \alpha(h + \rho_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \rho \mathbf{f} + \mathbf{g} - \alpha(h + \rho) \mathbf{u} \text{ dans } [L^{\frac{6\beta}{\beta+3}}(G)]^3, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{q}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{q} \text{ dans } [L^{\frac{6\beta}{\beta+3}}(G)]^3, \quad (4.12)$$

$$\Pi_\varepsilon b_\varepsilon \rightharpoonup \overline{p(\rho)b(\rho)} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(G), \quad (4.13)$$

$$b_\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \overline{b(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(G). \quad (4.14)$$

D'autre part, puisque $\frac{6\beta}{\beta+3} \geq \frac{6}{5}$, de (4.1) et (4.12) il vient que

$$\rho_\varepsilon u_\varepsilon^i u_\varepsilon^j \rightarrow \rho u^i u^j \text{ dans } \mathcal{D}'(G), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

De plus, le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dans la formule (4.5) donne

$$\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \rho_\varepsilon u_\varepsilon^j \partial_j u_\varepsilon^i \varphi^i dx = \frac{1}{2} \alpha \int_{\Omega} (\rho - h) \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho u^j u^i \partial_j \varphi^i dx, \quad \boldsymbol{\varphi} \in [\mathcal{D}(G)]^3.$$

Ainsi, en remarquant que l'équation (2.24) reste vraie pour toute fonction test de l'espace $H_0^1(G)$, on en déduit que

$$\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_G \rho_\varepsilon u_\varepsilon^j \partial_j u_\varepsilon^i \varphi^i dx = \frac{1}{2} \int_G \rho u^j \partial_j u^i \varphi^i dx, \quad \boldsymbol{\varphi} \in [\mathcal{D}(G)]^3.$$

Etant donné que la suite $\{\rho_\varepsilon u_\varepsilon^j \partial_j u_\varepsilon^i\}_\varepsilon$ est uniformément bornée par rapport à ε dans $[L^{\frac{6\beta}{4\beta+3}}(G)]^3$, il s'en suit que

$$\mathbf{F}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{F} \text{ dans } [L^{\frac{6\beta}{4\beta+3}}(G)]^3. \quad (4.15)$$

Enfin, au vu des équations (2.24), (2.32) et des convergences (4.1)-(4.4), on a

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_\varepsilon = \frac{1}{2} \alpha (h - \rho_\varepsilon) + \frac{1}{2} \varepsilon \Delta \rho_\varepsilon \rightarrow \frac{1}{2} \alpha (h - \rho) = \operatorname{div} \mathbf{q} \text{ dans } H^{-1}(G). \quad (4.16)$$

Noter que $\frac{6\beta}{\beta+3} > 2$. Alors les convergences (4.1), (4.9), (4.10), (4.12), (4.15) et (4.16) garantissent que les hypothèses du théorème 1.2 sont satisfaites pour $p = w = 2$, $r = 2\beta$ et $s = \frac{6\beta}{4\beta+3}$. La conclusion de ce théorème dans la présente situation n'est rien d'autre que l'identité (4.8). D'où le résultat. \square

Soit $0 < \theta < 1$. Au vu de l'estimation (2.37), après d'éventuelles extractions de sous-suites, on peut supposer que

$$\rho_\varepsilon^\theta \rightharpoonup \overline{\rho^\theta} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\theta}}(G), \quad p(\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon^\theta \rightharpoonup \overline{p(\rho)\rho^\theta} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\beta+\theta}}(G). \quad (4.17)$$

Lemme 2.3 *Soient les hypothèses de la proposition 2.3 et $0 < \theta < 1$. Alors*

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\overline{\rho^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} + \operatorname{div} \left\{ \left(\overline{\rho^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \mathbf{u} \right\} \\ & \geq \alpha h + \frac{(1-\theta)}{\theta(2\mu_1 + \mu_2)} \left\{ \overline{p(\rho)\rho^\theta} - \overline{p(\rho)} \overline{\rho^\theta} \right\} \left(\overline{\rho^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Preuve. Tout d'abord, puisque pour tout $p \in (1, \infty)$, $\rho_\varepsilon \in W^{2,p}(G)$, il est facile de vérifier que pour toute fonction $b \in C^2([0, \infty))$, on a

$$\Delta b(\rho_\varepsilon) = \operatorname{div}(b'(\rho_\varepsilon)\nabla\rho_\varepsilon) = b''(\rho_\varepsilon)|\nabla\rho_\varepsilon|^2 + b'(\rho_\varepsilon)\Delta\rho_\varepsilon \text{ p.p. dans } G.$$

En outre, si on suppose que la fonction b est concave, il s'en suit que

$$b'(\rho_\varepsilon)\Delta\rho_\varepsilon \geq \Delta b(\rho_\varepsilon) \text{ p.p. dans } G. \quad (4.19)$$

Soit $l \in (0, 1]$. On pose $b(t) = (t + l)^\theta$. Cette fonction satisfait les hypothèses du lemme 1.4 ($f \equiv \alpha(h - \rho_\varepsilon) + \varepsilon\Delta\rho_\varepsilon$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$) dont la conclusion complétée par (4.19) nous permet en particulier d'affirmer que

$$\begin{aligned} & \alpha\theta(\rho_\varepsilon + l)^\theta + \operatorname{div}((\rho_\varepsilon + l)^\theta \mathbf{u}_\varepsilon) + (\theta - 1)(\rho_\varepsilon + l)^\theta \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon \geq \alpha\theta h(\rho_\varepsilon + l)^{\theta-1} \\ & \quad + \theta l(\rho_\varepsilon + l)^{\theta-1} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon + \varepsilon\theta \operatorname{div}((\rho_\varepsilon + l)^{\theta-1} \nabla\rho_\varepsilon) \text{ dans } \mathcal{D}'(G). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Au vu des estimations (2.37) et (2.39), quitte à extraire des sous-suites, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on peut supposer que

$$(\rho_\varepsilon + l)^\theta \rightharpoonup \overline{(\rho + l)^\theta} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\theta}}(G), \quad (4.21)$$

$$(\rho_\varepsilon + l)^\theta \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \overline{(\rho + l)^\theta \operatorname{div} \mathbf{u}} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\beta+\theta}}(G). \quad (4.22)$$

En conséquence, de la convergence forte (4.1), il vient que

$$\operatorname{div}((\rho_\varepsilon + l)^\theta \mathbf{u}_\varepsilon) \rightarrow \operatorname{div}(\overline{(\rho + l)^\theta} \mathbf{u}) \text{ dans } \mathcal{D}'(G). \quad (4.23)$$

Par ailleurs, noter que $(\rho_\varepsilon + l)^{\theta-1} \leq l^{\theta-1}$. Ainsi, quitte à extraire une sous-suite, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on peut également supposer que

$$(\rho_\varepsilon + l)^{\theta-1} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{(\rho + l)^{\theta-1}} \text{ dans } L^\infty(G), \quad (4.24)$$

$$(\rho_\varepsilon + l)^{\theta-1} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \overline{(\rho + l)^{\theta-1} \operatorname{div} \mathbf{u}} \text{ dans } L^2(G). \quad (4.25)$$

Enfin, utilisant à nouveau cette observation, couplée à la convergence (4.4), on trouve que

$$\varepsilon \theta \operatorname{div}((\rho_\varepsilon + l)^{\theta-1} \nabla \rho_\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(G) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (4.26)$$

Regroupant les informations (4.21)-(4.26), le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dans l'identité (4.20) implique la suivante :

$$\begin{aligned} & \alpha \overline{(\rho + l)^\theta} + \operatorname{div}(\overline{(\rho + l)^\theta} \mathbf{u}) \\ & \geq (1 - \theta) \overline{(\rho + l)^\theta} \operatorname{div} \mathbf{u} + \alpha h \overline{(\rho + l)^{\theta-1}} + \theta l \overline{(\rho + l)^{\theta-1}} \operatorname{div} \mathbf{u} \text{ dans } \mathcal{D}'(G). \end{aligned} \quad (4.27)$$

En remplaçant *e.g.* ρ , p , \mathbf{u} et f par $\overline{(\rho + l)^\theta}$, $\frac{2\beta}{\theta}$, \mathbf{u} et $-\alpha \theta \overline{(\rho + l)^\theta} + (1 - \theta) \overline{(\rho + l)^\theta} \operatorname{div} \mathbf{u} + \alpha \theta h \overline{(\rho + l)^{\theta-1}} + \theta l \overline{(\rho + l)^{\theta-1}} \operatorname{div} \mathbf{u}$, il est facile de vérifier que les hypothèses du lemme 1.2, $\Omega = G$, sont satisfaites. Il s'en suit que l'inégalité (4.27) reste vraie dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Par suite, en accord avec le lemme 1.5 dont les hypothèses sont vérifiées pour $b(t) = t^{\frac{1}{\theta}}$, on en déduit que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ on a

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} + \operatorname{div} \left\{ \left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \mathbf{u} \right\} + \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ & \geq \left\{ \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \overline{(\rho + l)^\theta} \operatorname{div} \mathbf{u} + \alpha h \overline{(\rho + l)^{\theta-1}} + l \overline{(\rho + l)^{\theta-1}} \operatorname{div} \mathbf{u} \right\} \left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

D'après le lemme 2.2 appliqué à $b(t) = (t + l)^\theta$, cette inégalité a pour conséquence directe

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} + \operatorname{div} \left\{ \left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \mathbf{u} \right\} \\ & \geq \frac{(1 - \theta)}{\theta(2\mu_1 + \mu_2)} \left\{ \overline{p(\rho)(\rho + l)^\theta} - \overline{p(\rho)} \overline{(\rho + l)^\theta} \right\} \left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \\ & + \alpha h \overline{(\rho + l)^{\theta-1}} \left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} + l \overline{(\rho + l)^{\theta-1}} \operatorname{div} \mathbf{u} \left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Noter alors que de la convexité de la fonction $t \mapsto t^{1-\frac{1}{\theta}}$, $t \geq l > 0$, provient l'inégalité $\left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \leq \overline{(\rho + l)^{\theta-1}}$ p.p. dans G . Cette observation insérée dans (4.29) implique que

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} + \operatorname{div} \left\{ \left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \mathbf{u} \right\} \geq \alpha h + l \overline{(\rho + l)^{\theta-1}} \operatorname{div} \mathbf{u} \left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \\ & + \frac{(1 - \theta)}{\theta(2\mu_1 + \mu_2)} \left\{ \overline{p(\rho)(\rho + l)^\theta} - \overline{p(\rho)} \overline{(\rho + l)^\theta} \right\} \left(\overline{(\rho + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Pour conclure, nous allons passer à la limite $l \rightarrow 0^+$ dans (4.30). Tout d'abord, on sait que pour $t \geq 0$ on a $|(t + l)^\theta - t^\theta| \leq \theta l^\theta + o(l)$. D'autre part, la semi-continuité inférieure faible de la norme $L^1(G)$ nous permet d'affirmer que

$$\| \overline{(\rho + l)^\theta} - \overline{\rho^\theta} \|_{0,1} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \| (\rho_\varepsilon + l)^\theta - \rho_\varepsilon^\theta \|_{0,1}.$$

De ces deux observations, on tire aisément la convergence forte dans $L^1(G)$ de la suite $\{\overline{(\rho+l)^\theta}\}_l$ vers $\overline{\rho^\theta}$. Puisque $\overline{(\rho+l)^\theta} - \overline{\rho^\theta} \in L^{\frac{2\beta}{\theta}}(G)$, d'après l'inégalité d'interpolation

$$\|\overline{(\rho+l)^\theta} - \overline{\rho^\theta}\|_{0,p} \leq \|\overline{(\rho+l)^\theta} - \overline{\rho^\theta}\|_{0,1}^\eta \|\overline{(\rho+l)^\theta} - \overline{\rho^\theta}\|_{0,\frac{2\beta}{\theta}}^{(1-\eta)}, \quad \frac{1}{p} = \eta + \frac{(1-\eta)\theta}{2\beta}$$

et la semi-continuité inférieure faible de la norme $L^{\frac{2\beta}{\theta}}(G)$, on déduit alors la convergence forte dans $L^p(G)$, $p \in [1, \frac{2\beta}{\theta})$, de la suite $\{\overline{(\rho+l)^\theta}\}_l$ vers $\overline{\rho^\theta}$. Il en résulte que

$$\forall a \in (0, \frac{2\beta}{\theta}), \quad \forall q \in [1, \frac{2\beta}{a\theta}), \quad \left(\overline{(\rho+l)^\theta}\right)^a \rightarrow \left(\overline{\rho^\theta}\right)^a \quad \text{dans } L^q(G). \quad (4.31)$$

Par des arguments tout à fait semblables, il est possible de démontrer que

$$\forall r \in [1, \frac{2\beta}{\beta+\theta}), \quad \overline{p(\rho)(\rho+l)^\theta} \rightarrow \overline{p(\rho)\rho^\theta} \quad \text{dans } L^r(G). \quad (4.32)$$

Enfin, en accord avec la semi-continuité inférieure faible de la norme $L^2(G)$ et la borne (2.39), on voit que

$$l\|\overline{(\rho+l)^{\theta-1} \operatorname{div} \mathbf{u}}\|_{0,2} \leq l \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|(\rho_\varepsilon + l)^{\theta-1} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,2} \leq l^\theta \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,2} \leq cl^\theta. \quad (4.33)$$

Le passage à la limite $l \rightarrow 0^+$ dans (4.30) pour récupérer (4.18) est alors justifié par (4.31) avec *e.g.* $a = \frac{1}{\theta}$ ou $a = \frac{1}{\theta} - 1$, (4.32) et (4.33). D'où le résultat. \square

Lemme 2.4 *Pour tout $p \in [1, 2\beta)$, la convergence de la suite $\{\rho_\varepsilon\}_\varepsilon$ vers ρ_α est forte dans $L^p(G)$.*

Preuve. En soustrayant l'équation (2.24) de l'inégalité (4.18), il vient que

$$\alpha r + \operatorname{div}(r\mathbf{u}) \geq \frac{(1-\theta)}{\theta(2\mu_1 + \mu_2)} \left\{ \overline{p(\rho)\rho^\theta} - \overline{p(\rho)} \overline{\rho^\theta} \right\} \left(\overline{\rho^\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}-1} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

où $r \equiv \left(\overline{\rho^\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} - \rho$. La convexité de la fonction $t \mapsto t^{\frac{1}{\theta}}$, $t \geq 0$, implique que $r \leq 0$ p.p. dans G . En conséquence, on a

$$\operatorname{div}(r\mathbf{u}) \geq \frac{(1-\theta)}{\theta(2\mu_1 + \mu_2)} \left\{ \overline{p(\rho)\rho^\theta} - \overline{p(\rho)} \overline{\rho^\theta} \right\} \left(\overline{\rho^\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}-1} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (4.34)$$

Choissant dans (4.34) la fonction test particulière $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset B_{2R}$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ dans B_R et $R > 0$ suffisamment grand pour que $G \subset B_R$, on se ramène à l'inégalité suivante :

$$\int_G \left\{ \overline{p(\rho)\rho^\theta} - \overline{p(\rho)} \overline{\rho^\theta} \right\} \left(\overline{\rho^\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}-1} dx \leq 0.$$

Par ailleurs, d'après le lemme A.20 (monotonie de la pression $p(\rho) = \rho^\gamma + \delta(\rho^2 + \rho^\beta)$), on sait que $\left\{ \overline{p(\rho_\alpha)\rho_\alpha^\theta} - \overline{p(\rho_\alpha)} \overline{\rho_\alpha^\theta} \right\} \geq 0$ p.p. dans G . On en déduit que

$$\left\{ \overline{p(\rho)\rho^\theta} - \overline{p(\rho)} \overline{\rho^\theta} \right\} \left(\overline{\rho^\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}-1} = 0 \quad \text{p.p. dans } G. \quad (4.35)$$

De cette identité, il résulte immédiatement que

$$\overline{p(\rho)\rho^\theta} = \overline{p(\rho)} \overline{\rho^\theta} \text{ p.p. dans } \{\overline{\rho^\theta} > 0\}. \quad (4.36)$$

A nouveau, d'après le lemme A.20, on sait que $\overline{\rho^{s+\theta}} - \overline{\rho^s} \overline{\rho^\theta} \geq 0$ p.p. dans G , $s > 1$. Par suite, au vu de (4.36), on a

$$\overline{\rho^{s+\theta}} - \overline{\rho^s} \overline{\rho^\theta} = 0 \text{ p.p. dans } \{\overline{\rho^\theta} > 0\}, \quad s = \gamma, 2, \beta. \quad (4.37)$$

D'autre part, la convexité de la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^{\frac{s+\theta}{s}}$, $s > 1$, implique que $(\overline{\rho^s})^{\frac{s+\theta}{s}} \leq \overline{\rho^{s+\theta}}$. Ainsi, (4.37) combinée à cette information montre que

$$\overline{\rho^s} (\overline{\rho^s})^{\frac{\theta}{s}} - \overline{\rho^\theta} \leq 0 \text{ p.p. dans } \{\overline{\rho^\theta} > 0\}, \quad s = \gamma, 2, \beta. \quad (4.38)$$

Noter alors que $(\overline{\rho^\theta})^{\frac{s}{\theta}} \leq \overline{\rho^s}$ puisque la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^{\frac{s}{\theta}}$, $s > 1$, est convexe. A partir de (4.38), cette observation justifie la suivante :

$$(\overline{\rho^s})^{\frac{\theta}{s}} \leq \overline{\rho^\theta} \text{ p.p. dans } \{\overline{\rho^\theta} > 0\}, \quad s = \gamma, 2, \beta. \quad (4.39)$$

Or la concavité de la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^{\frac{\theta}{s}}$ implique que $(\overline{\rho^s})^{\frac{\theta}{s}} \geq \overline{\rho^\theta}$ p.p. dans G . A ce stade, nous avons donc démontré que $\overline{\rho^s} = (\overline{\rho^\theta})^{\frac{s}{\theta}}$ p.p. dans $\{\overline{\rho^\theta} > 0\}$, $s = \gamma, 2, \beta$. Les inégalités $\rho^s \leq \overline{\rho^s}$ et $\overline{\rho^\theta} \leq \rho^\theta$ provenant respectivement de la convexité de la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^s$ et de la concavité de la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^\theta$ permettent alors de conclure que $\overline{\rho^s} = \rho^s$ p.p. dans l'ensemble $\{\overline{\rho^\theta} > 0\}$, $s = \gamma, 2, \beta$. Ainsi, $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ dans $L^1(\{\overline{\rho^\theta} > 0\})$. L'interpolation de L^p entre L^1 et $L^{2\beta}$ et la semi-continuité inférieure faible de la norme $L^{2\beta}$ donne alors pour tout $p \in [1, 2\beta)$ la convergence forte de la suite $\{\rho_\varepsilon\}_\varepsilon$ vers ρ dans $L^p(\{\overline{\rho^\theta} > 0\})$. En ce qui concerne l'ensemble $\{\overline{\rho^\theta} = 0\}$, il est évident que

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon^\theta 1_{\{\overline{\rho^\theta}=0\}} dx \rightarrow \int_\Omega \overline{\rho^\theta} 1_{\{\overline{\rho^\theta}=0\}} dx = 0.$$

Autrement dit, la suite $\{\rho_\varepsilon^\theta\}_\varepsilon$ converge vers 0 dans $L^1(\{\overline{\rho^\theta} = 0\})$. On en déduit aisément que pour tout $p \in [1, \frac{2\beta}{\theta})$, $\rho_\varepsilon^\theta \rightarrow 0$ dans $L^p(\{\overline{\rho^\theta} = 0\})$. Par suite

$$\forall a \in (0, \frac{2\beta}{\theta}), \forall q \in [1, \frac{2\beta}{a\theta}), \quad \rho_\varepsilon^{a\theta} \rightarrow 0 \text{ dans } L^q(\{\overline{\rho^\theta} = 0\}). \quad (4.40)$$

Au vu de (4.2), en posant $a = \frac{1}{\theta}$ dans (4.40), il vient que $\rho = 0$ p.p. dans $\{\overline{\rho^\theta} = 0\}$ et le lemme en découle. \square

4.2 Inégalité d'énergie (cadre général)

Pour terminer la preuve de la proposition 2.3, il reste à vérifier que le couple (ρ, \mathbf{u}) précédemment construit, satisfait l'inégalité d'énergie (2.27). Pour ce faire, il suffit de faire tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dans (2.36). Justifions brièvement ce passage à la limite. Tout d'abord, remarquer que

$$\varepsilon\delta\beta \int_G \rho_\varepsilon^{\beta-2} |\nabla \rho_\varepsilon|^2 dx + 2\varepsilon\delta \int_G |\nabla \rho_\varepsilon|^2 dx \geq 0$$

et qu'en accord avec l'hypothèse (1.3), $\mathbf{v} \mapsto (\int_G \{\mu_1 |\nabla \mathbf{v}|^2 + (\mu_1 + \mu_2)(\operatorname{div} \mathbf{v})^2\} dx)^{\frac{1}{2}}$ est une norme équivalente sur $[H_0^1(G)]^3$. La semi-continuité inférieure faible de cette norme, la convergence (4.1), le lemme 2.4 et *e.g.* le théorème de convergence de Vitali permettent alors de conclure. La preuve de la proposition 2.3 est donc complète. \square

4.3 Bornes uniformes (cas particulier)

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition 2.3, appliquée avec $G = \Omega_n$ (cf. lemme 2.1), $\mathbf{f} = \mathbf{f}_n$, $\mathbf{g} = \mathbf{g}_n$ et $h = h_n$ (cf (2.23)), assure l'existence d'un couple de fonctions (ρ_n, \mathbf{u}_n) satisfaisant les propriétés (n-1)-(n-5). Dans cette section, nous prouvons que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, ce couple (ρ_n, \mathbf{u}_n) satisfait également les estimations (2.30) et (2.31).

Majorons dans un premier temps le membre de droite de l'inégalité d'énergie (2.29). D'une part, en accord avec (2.22), on a

$$\int_{\Omega_n} (h_n - \rho_n) h_n^{s-1} dx \leq \|h\|_{0,\infty,\Omega}^{s-1} \left(\int_{\Omega_n} h_n dx + \int_{\Omega_n} \rho_n dx \right) \leq 2|\Omega| \|h\|_{0,\infty,\Omega}^s, \quad s = \gamma, \beta, 2.$$

D'autre part, en utilisant les inégalités de Hölder, de Sobolev et de Young, on trouve que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} (\rho_n \mathbf{f}_n + \mathbf{g}_n) \cdot \mathbf{u}_n dx &\leq \|\rho_n \mathbf{f} + \mathbf{g}\|_{0,\frac{6}{5},\Omega} \|\mathbf{u}_n\|_{0,6,\Omega_n} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) (1 + \|\rho_n\|_{0,\frac{6}{5},\Omega}) \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{0,2,\Omega_n} \\ &\leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) (1 + \|\rho_n\|_{0,\frac{6}{5},\Omega})^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{0,2,\Omega_n}^2. \end{aligned}$$

En insérant ces deux bornes dans (2.29), la positivité de h_n et ρ_n sur Ω_n et l'équivalence des normes $\|\nabla \mathbf{u}_n\|_{0,2,\Omega_n}$ et $(\mu_1 \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{0,2,\Omega_n}^2 + (\mu_1 + \mu_2) \|\operatorname{div} \mathbf{u}_n\|_{0,2,\Omega_n})^{\frac{1}{2}}$ sur $[H_0^1(\Omega_n)]^3$ impliquent en particulier que

$$\|\nabla \mathbf{u}_n\|_{0,2,\Omega_n} \leq c(\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h) (1 + \|\rho_n\|_{0,\frac{6}{5},\Omega}) \leq c(\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h) (1 + \|\rho_n\|_{0,2\beta,\Omega}). \quad (4.41)$$

Le fait que la norme de ρ_n qui apparaît dans cette inégalité soit une norme sur Ω est essentiel pour la suite. En effet, le système (2.20) testé par une fonction $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ s'écrit

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \{\rho_n^\gamma + \delta(\rho_n^2 + \rho_n^\beta)\} \operatorname{div} \varphi dx = \\ &+ \frac{1}{2} \alpha \int_{\Omega} (h + 3\rho_n) \mathbf{u}_n \cdot \varphi dx + \int_{\Omega} \{\mu_1 \nabla \mathbf{u}_n : \nabla \varphi + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_n \operatorname{div} \varphi\} dx \\ &- \int_{\Omega} \rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n : \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} (\rho_n \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \varphi dx. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Ceci étant, nous laissons le soin au lecteur de vérifier par densité qu'en vertu des propriétés (n-1) du couple (ρ_n, \mathbf{u}_n) , toute fonction $\varphi \in [H_0^1(\Omega)]^3$ est une fonction admissible dans l'identité (4.42). Considérons alors la fonction

$$\varphi = \mathcal{B}(\rho_n^\beta - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho_n^\beta dy),$$

\mathcal{B} étant l'opérateur de Bogovskiï introduit dans le lemme B.1 dans lequel on pose $G = \Omega$, lemme qui garantit que $\varphi \in [W_0^{1,p}(\Omega)]^3$, $p \in (1, 2]$ ($\rho_n \in L^{2\beta}(\Omega_n)$), ainsi que l'inégalité

$$\|\nabla \varphi\|_{0,p,\Omega} \leq c(\Omega, p) \|\rho_n\|_{0,p\beta,\Omega}^\beta. \quad (4.43)$$

Pour cette fonction test, l'identité (4.42) se réécrit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_n^\beta \{ \rho_n^\gamma + \delta(\rho_n^2 + \rho_n^\beta) \} dx &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho_n^\beta dy \int_{\Omega} \{ \rho_n^\gamma + \delta(\rho_n^2 + \rho_n^\beta) \} dx \\ + \frac{1}{2} \alpha \int_{\Omega} (h + 3\rho_n) \mathbf{u}_n \cdot \boldsymbol{\varphi} dx &+ \int_{\Omega} \{ \mu_1 \nabla \mathbf{u}_n : \nabla \boldsymbol{\varphi} + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_n \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \} dx \\ - \int_{\Omega} \rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n : \nabla \boldsymbol{\varphi} dx &- \int_{\Omega} (\rho_n \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \boldsymbol{\varphi} dx = \sum_{k=1}^5 I_k. \end{aligned} \quad (4.44)$$

A ce stade, il suffit de répéter les arguments (3.17)-(3.20) et (3.22) en prenant garde de toujours ramener la norme L^6 de \mathbf{u}_n sur Ω_n pour que l'inégalité de Sobolev soit justifiée puisque, on le rappelle, $\mathbf{u}_n \in [H_0^1(\Omega_n)]^3$. On obtient

$$\|\rho_n\|_{0,2\beta,\Omega} \leq c(\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h), \quad (4.45)$$

qui en accord avec (4.41) implique que

$$\|\nabla \mathbf{u}_n\|_{0,2,\Omega} \leq \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{0,2,\Omega_n} \leq c(\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h) \quad (4.46)$$

où $c(\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{g}, h)$ est une constante qui ne dépend ni de n ni de α . Ainsi sont prouvées les estimations (2.30) et (2.31). \square

5 Preuve : Etape n°3

Dans cette section, nous nous concentrons sur la preuve de la proposition 2.2. Par le biais des résultats démontrés à la section 4, nous construisons un couple de fonction $(\rho_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)$ satisfaisant les propriétés $(\alpha-1)$ - $(\alpha-4)$, puis nous montrons qu'il satisfait également les propriétés $(\alpha-5)$ et $(\alpha-6)$. Comme dans la précédente section, la distinction entre une fonction définie sur un domaine $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ et son prolongement par zéro à l'extérieur de Ω ne sera pas faite.

5.1 Construction d'une solution

Soient $\delta, \alpha \in (0, 1]$ fixés. Considérons la suite $\{(\rho_n, \mathbf{u}_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont chaque terme est construit à la section 4 et satisfait les propriétés $(n-1)$ - $(n-5)$ ainsi que les estimations (2.30) et (2.31). En accord avec celles-ci, on peut supposer qu'il existe des fonctions $\rho_\alpha, \mathbf{u}_\alpha, \overline{\rho_\alpha^\gamma}, \overline{\rho_\alpha^2}$ et $\overline{\rho_\alpha^\beta}$ telles que modulo l'extraction de sous-suites et lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &\rightharpoonup \mathbf{u}_\alpha \text{ dans } [H^1(\mathbb{R}^3)]^3, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \mathbf{u}_n &\rightarrow \mathbf{u}_\alpha \text{ dans } [L^q(\Omega)]^3, \quad q \in [1, 6), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\rho_n \rightharpoonup \rho_\alpha \text{ dans } L^{2\beta}(\Omega), \quad \rho_\alpha \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad (5.2)$$

$$\rho_n^\gamma \rightharpoonup \overline{\rho_\alpha^\gamma} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\gamma}}(\Omega), \quad \rho_n^2 \rightharpoonup \overline{\rho_\alpha^2} \text{ dans } L^\beta(\Omega), \quad \rho_n^\beta \rightharpoonup \overline{\rho_\alpha^\beta} \text{ dans } L^2(\Omega), \quad (5.3)$$

$$\rho_n \mathbf{u}_n \rightharpoonup \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \text{ dans } [L^{\frac{6\beta}{\beta+3}}(\Omega)]^3, \quad \rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n \rightharpoonup \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha \text{ dans } [L^{\frac{6\beta}{2\beta+3}}(\Omega)]^{3 \times 3}. \quad (5.4)$$

Ceci étant, on peut passer à la limite dans les équations (2.19) et (2.20). On trouve que

$$\alpha\rho_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = \alpha h \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha h \mathbf{u}_\alpha + \frac{3}{2}\alpha\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha) - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_\alpha - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha \\ + \nabla \{ \overline{\rho_\alpha^\gamma} + \delta(\overline{\rho_\alpha^2} + \overline{\rho_\alpha^\beta}) \} = \rho_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Vérifions maintenant que ρ_α satisfait la contrainte (2.14). L'équation de continuité (5.5), testée par la fonction Φ_m introduite en (1.1.4) s'écrit

$$\int_{\Omega} (\rho_\alpha - h) \Phi_m \, dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \Phi_m \, dx.$$

Clairement, lorsque $m \rightarrow \infty$, le membre de gauche de cette égalité tend vers $\int_{\Omega} (\rho_\alpha - h) \, dx$. De plus, puisque $\mathbf{u}_\alpha \in [H_0^1(\Omega)]^3$, l'inégalité de Hardy, complétée par l'appartenance de ρ_α à l'espace $L^{2\beta}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, entraîne la convergence du membre de droite vers zéro. D'où l'affirmation annoncée.

Le prolongement de l'équation de continuité (5.5) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ est une application directe du lemme 1.1 dans lequel ρ , \mathbf{u} et f sont remplacées par ρ_α , \mathbf{u}_α et $\alpha(h - \rho_\alpha)$. Dans cette situation, le lemme 1.4 assure alors la validité de l'équation (2.15) et ce pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ satisfaisant (1.8) et (2.7). Pour aboutir à la conclusion que le couple $(\rho_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)$ défini par (5.1)-(5.2) satisfait les propriétés $(\alpha-1)$ - $(\alpha-4)$, compte tenu de l'équation (5.6), il suffit de démontrer que

$$\overline{p(\rho_\alpha)} \equiv \overline{\rho_\alpha^\gamma} + \delta(\overline{\rho_\alpha^2} + \overline{\rho_\alpha^\beta}) = p(\rho_\alpha) \equiv \rho_\alpha^\gamma + \delta(\rho_\alpha^2 + \rho_\alpha^\beta) \text{ p.p. dans } \Omega. \quad (5.7)$$

A nouveau, puisque la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^\gamma + \delta(t^2 + t^\beta)$ est strictement convexe, (5.7) est équivalent à la convergence forte dans $L^1(\Omega)$ de la suite $\{\rho_n\}_n$ vers ρ_α . Nous conclurons à cette convergence après avoir énoncé et démontré deux résultats intermédiaires. Cette démarche est analogue à celle qui a permis de démontrer le lemme 2.4.

Lemme 2.5 *Pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ satisfaisant (1.8) et (2.7) avec $\lambda_1 = 0$, on a*

$$\overline{p(\rho_\alpha)b(\rho_\alpha)} - (2\mu_1 + \mu_2)\overline{b(\rho_\alpha)\operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha} = \overline{p(\rho_\alpha)} \overline{b(\rho_\alpha)} - (2\mu_1 + \mu_2)\overline{b(\rho_\alpha)\operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha} \text{ p.p. dans } \Omega, \quad (5.8)$$

où $\overline{p(\rho_\alpha)b(\rho_\alpha)}$, $\overline{b(\rho_\alpha)\operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha}$ et $\overline{b(\rho_\alpha)}$ sont les limites faibles quand $n \rightarrow \infty$ des suites correspondantes.

Preuve. On pose

$$\begin{aligned} \Pi_n = p(\rho_n), \quad b_n = b(\rho_n), \quad \mathbf{F}_n = \rho_n \mathbf{f} + \mathbf{g} - \frac{1}{2}\alpha h \mathbf{u}_n - \frac{3}{2}\alpha \rho_n \mathbf{u}_n, \quad \mathbf{q}_n = \rho_n \mathbf{u}_n; \\ \Pi_\alpha = \overline{p(\rho_\alpha)}, \quad b_\alpha = \overline{b(\rho_\alpha)}, \quad \mathbf{F}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{g} - \frac{1}{2}\alpha h \mathbf{u}_\alpha - \frac{3}{2}\alpha \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha, \quad \mathbf{q}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha. \end{aligned}$$

Clairement, au vu des convergences (5.1)-(5.4), on a

$$\Pi_n \rightharpoonup \Pi_\alpha \text{ dans } L^2(\Omega), \quad (5.9)$$

$$b_n \rightharpoonup b_\alpha \text{ dans } L^{2\beta}(\Omega), \quad (5.10)$$

$$\mathbf{F}_n \rightharpoonup \mathbf{F}_\alpha \text{ dans } [L^{\frac{6\beta}{\beta+3}}(\Omega)]^3, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{q}_n \rightharpoonup \mathbf{q}_\alpha \text{ dans } [L^{\frac{6\beta}{\beta+3}}(\Omega)]^3, \text{ div } \mathbf{q}_n \rightharpoonup \text{div } \mathbf{q}_\alpha \text{ dans } L^{2\beta}(\Omega) \quad (5.12)$$

$$\Pi_n b_n \rightharpoonup \overline{p(\rho_\alpha)b(\rho_\alpha)} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega), \quad b_n \text{ div } \mathbf{u}_n \rightharpoonup \overline{b(\rho_\alpha) \text{div } \mathbf{u}_\alpha} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega). \quad (5.13)$$

Noter que $2\beta > \frac{6}{5}$. Ainsi, l'injection compacte $L^{2\beta}(\Omega) \subset\subset H^{-1}(\Omega)$ et (5.12) impliquent que $\text{div } \mathbf{q}_n \rightarrow \text{div } \mathbf{q}_\alpha$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Remarquer également que $\frac{6\beta}{\beta+3} > 2$. Par conséquent, les convergences (5.1), (5.9)-(5.12) garantissent que les hypothèses du théorème 1.2 sont satisfaites pour $p = w = 2$, $r = 2\beta$ et $s = \frac{6\beta}{\beta+3}$, théorème dont la conclusion dans la présente situation n'est rien d'autre que l'identité (5.8). La preuve du lemme 2.5 est donc complète. \square

Soit $0 < \theta < 1$. En accord avec l'estimation (2.30), après d'éventuelles extractions de sous-suites, on peut supposer que

$$\rho_n^\theta \rightharpoonup \overline{\rho_\alpha^\theta} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\theta}}(\Omega), \quad p(\rho_n)\rho_n^\theta \rightharpoonup \overline{p(\rho_\alpha)\rho_\alpha^\theta} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\beta+\theta}}(\Omega). \quad (5.14)$$

Lemme 2.6 *Soient les hypothèses de la proposition 2.2 et $0 < \theta < 1$. Alors*

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\overline{\rho_\alpha^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} + \text{div} \left\{ \left(\overline{\rho_\alpha^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \mathbf{u}_\alpha \right\} \\ & \geq \alpha h + \frac{(1-\theta)}{\theta(2\mu_1 + \mu_2)} \left\{ \overline{p(\rho_\alpha)\rho_\alpha^\theta} - \overline{p(\rho_\alpha)} \overline{\rho_\alpha^\theta} \right\} \left(\overline{\rho_\alpha^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Preuve. Il suffit d'adapter à la présente situation les arguments exposés dans la preuve du lemme 2.3 débutant après (4.19). \square

Lemme 2.7 *Pour tout $p \in [1, 2\beta)$, la convergence de la suite $\{\rho_n\}_n$ vers ρ_α est forte dans $L^p(\Omega)$.*

Preuve. Il suffit d'adapter à la présente situation la preuve du lemme 2.4. \square

5.2 Inégalité d'énergie, bornes uniformes

En accord avec l'inégalité d'énergie (2.29), il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le couple (ρ_n, \mathbf{u}_n) satisfait

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} (h + \rho_n) |\mathbf{u}_n|^2 dx + \int_{\Omega} \{ \mu_1 |\nabla \mathbf{u}_n|^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\text{div } \mathbf{u}_n)^2 \} dx \\ & + \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} \int_{\Omega} (\rho_n - h) (\rho_n^{\gamma-1} - h^{\gamma-1}) dx + \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \int_{\Omega} (\rho_n - h) (\rho_n^{\beta-1} - h^{\beta-1}) dx \\ & + 2\delta\alpha \int_{\Omega} (\rho_n - h)^2 dx \leq \int_{\Omega} (\rho_n \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_n dx + \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} \int_{\Omega} (h - \rho_n) h^{\gamma-1} dx \\ & \quad + \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \int_{\Omega} (h - \rho_n) h^{\beta-1} dx + 2\delta\alpha \int_{\Omega} (h - \rho_n) h dx. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Des arguments similaires à ceux exposés dans la section 4.2 et adaptés à la présente situation, justifient le passage à la limite $n \rightarrow \infty$ dans (5.16) et conduisent à l'inégalité (2.16). Quant aux estimations (2.17) et (2.18), elles découlent directement de (2.30), (2.31) et de la semi-continuité inférieure faible des normes $L^2(\Omega)$ et $[H_0^1(\Omega)]^3$. Ainsi, la preuve de la proposition 2.2 est complète. \square

6 Preuve : Etape n°4

Cette section est dédiée à la preuve de la proposition 2.1. En suivant une démarche analogue à celle adoptée dans les précédentes sections, nous utilisons la proposition 2.2 pour construire un couple de fonctions $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ satisfaisant les propriétés $(\delta-1)$ - $(\delta-4)$. Nous prouvons ensuite qu'il satisfait également les propriétés $(\delta-5)$ et $(\delta-6)$.

6.1 Construction d'une solution

Soit $\delta \in (0, 1]$ fixé. Considérons une suite $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset (0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ et faisons y correspondre par la proposition 2.2 la suite $\{(\rho_{\alpha_n}, \mathbf{u}_{\alpha_n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Comme auparavant, la distinction entre une fonction définie sur un domaine \mathcal{O} de \mathbb{R}^3 et son prolongement par zéro à l'extérieur de \mathcal{O} ne sera pas faite et nous préférons les notations $(\rho_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)$ et $\alpha \rightarrow 0^+$ plutôt que $(\rho_{\alpha_n}, \mathbf{u}_{\alpha_n})$ et $n \rightarrow \infty$. En accord avec les estimations (2.17) et (2.18), on peut supposer qu'il existe des fonctions $\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta, \overline{\rho_\delta^\gamma}, \overline{\rho_\delta^2}$ et $\overline{\rho_\delta^\beta}$ telles que modulo l'extraction de sous-suites et lorsque $\alpha \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha &\rightharpoonup \mathbf{u}_\delta \text{ dans } [H^1(\mathbb{R}^3)]^3, \quad \mathbf{u}_\delta = \mathbf{0} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \mathbf{u}_\alpha &\rightarrow \mathbf{u}_\delta \text{ dans } [L^q(\Omega)]^3, \quad q \in [1, 6), \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\rho_\alpha \rightarrow \rho_\delta \text{ dans } L^{2\beta}(\mathbb{R}^3), \quad \rho_\delta \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad \rho_\delta = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \rho_\alpha^\gamma &\rightharpoonup \overline{\rho_\delta^\gamma} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\gamma}}(\mathbb{R}^3), \quad \rho_\alpha^2 \rightharpoonup \overline{\rho_\delta^2} \text{ dans } L^\beta(\mathbb{R}^3), \quad \rho_\alpha^\beta \rightharpoonup \overline{\rho_\delta^\beta} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3), \\ \overline{\rho_\delta^\gamma} &= \overline{\rho_\delta^2} = \overline{\rho_\delta^\beta} = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \rightharpoonup \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \text{ dans } [L^{\frac{6\beta}{\beta+3}}(\mathbb{R}^3)]^3, \quad \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha \rightharpoonup \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta \text{ dans } [L^{\frac{6\beta}{2\beta+3}}(\mathbb{R}^3)]^{3 \times 3}. \quad (6.4)$$

En conséquence, du passage à la limite $\alpha \rightarrow 0^+$ dans les équations (2.11) et (2.12), il vient que

$$\operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_\delta - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta + \nabla \{ \overline{\rho_\delta^\gamma} + \delta(\overline{\rho_\delta^2} + \overline{\rho_\delta^\beta}) \} \\ = \rho_\delta \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Les hypothèses du lemme 1.4 dans lequel ρ et \mathbf{u} sont remplacées par ρ_δ et \mathbf{u}_δ sont clairement satisfaites. S'en suit alors la validité de l'équation (2.6) et ce pour toute fonction b satisfaisant (1.7), (1.8) et (2.7). L'objectif étant de démontrer que le couple $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ défini par (6.1) et (6.2) satisfait les propriétés $(\delta-1)$ - $(\delta-4)$, il reste à prouver que

$$\overline{p(\rho_\delta)} \equiv \overline{\rho_\delta^\gamma} + \delta(\overline{\rho_\delta^2} + \overline{\rho_\delta^\beta}) = p(\rho_\delta) \equiv \rho_\delta^\gamma + \delta(\rho_\delta^2 + \rho_\delta^\beta) \text{ p.p. dans } \Omega, \quad (6.7)$$

ce qui, rappelons le, revient à prouver la convergence forte dans $L^1(\Omega)$ de la suite $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ vers ρ_δ ($t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^\gamma + \delta(t^2 + t^\beta)$ strictement convexe). Semblablement aux précédentes sections, cette démonstration sera découpée en plusieurs lemmes intermédiaires.

Lemme 2.8 *Pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ satisfaisant (1.8) et (2.7) avec $\lambda_1 = 0$, on a*

$$\overline{p(\rho_\delta)b(\rho_\delta)} - (2\mu_1 + \mu_2)\overline{b(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta} = \overline{p(\rho_\delta)} \overline{b(\rho_\delta)} - (2\mu_1 + \mu_2)\overline{b(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta} \text{ p.p. dans } \Omega, \quad (6.8)$$

où $\overline{p(\rho_\delta)b(\rho_\delta)}$, $\overline{b(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta}$ et $\overline{b(\rho_\delta)}$ désignent les limites faibles quand $\alpha \rightarrow 0^+$ des suites correspondantes.

Preuve. On pose

$$\Pi_\alpha = p(\rho_\alpha), \quad b_\alpha = b(\rho_\alpha), \quad \mathbf{F}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{g} - \frac{1}{2} \alpha h \mathbf{u}_\alpha - \frac{3}{2} \alpha \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha, \quad \mathbf{q}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha;$$

$$\Pi_\delta = \overline{p(\rho_\delta)}, \quad b_\delta = \overline{b(\rho_\delta)}, \quad \mathbf{F}_\delta = \rho_\delta \mathbf{f} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{q}_\delta = \rho_\delta \mathbf{u}_\delta.$$

Des convergences (6.1)-(6.4), il découle alors que

$$\Pi_\alpha \rightharpoonup \Pi_\delta \text{ dans } L^2(\Omega), \quad (6.9)$$

$$b_\alpha \rightharpoonup b_\delta \text{ dans } L^{2\beta}(\Omega), \quad (6.10)$$

$$\mathbf{F}_\alpha \rightharpoonup \mathbf{F}_\delta \text{ dans } [L^{\frac{6\beta}{\beta+3}}(\Omega)]^3, \quad (6.11)$$

$$\mathbf{q}_\alpha \rightharpoonup \mathbf{q}_\delta \text{ dans } [L^{\frac{6\beta}{\beta+3}}(\Omega)]^3, \quad (6.12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_\alpha = \alpha(h - \rho_\alpha) \rightharpoonup 0 = \operatorname{div} \mathbf{q}_\delta \text{ dans } L^{2\beta}(\Omega)$$

$$\Pi_\alpha b_\alpha \rightharpoonup \overline{p(\rho_\delta)b(\rho_\delta)} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega), \quad (6.13)$$

$$b_\alpha \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha \rightharpoonup \overline{b(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega), \quad (6.14)$$

Pour conclure, noter que $L^{2\beta}(\Omega) \subset\subset H^{-1}(\Omega)$ ($2\beta > \frac{6}{5}$), $\frac{6\beta}{\beta+3} > 2$ et appliquer le théorème 1.2 avec $p = w = 2$, $r = 2\beta$ et $s = \frac{6\beta}{\beta+3}$. D'où le résultat. \square

Soit $0 < \theta < 1$. D'après l'estimation (2.17), quitte à extraire des sous-suites si nécessaire, on peut supposer que

$$\rho_\alpha^\theta \rightharpoonup \overline{\rho_\delta^\theta} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\theta}}(\Omega), \quad p(\rho_\alpha)\rho_\alpha^\theta \rightharpoonup \overline{p(\rho_\delta)\rho_\delta^\theta} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\beta+\theta}}(\Omega). \quad (6.15)$$

Lemme 2.9 *Soient les hypothèses de la proposition 2.1 et $0 < \theta < 1$. Alors*

$$\operatorname{div} \left\{ \left(\overline{\rho_\delta^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \mathbf{u}_\delta \right\} = \frac{(1-\theta)}{\theta(2\mu_1 + \mu_2)} \left\{ \overline{p(\rho_\delta)\rho_\delta^\theta} - \overline{p(\rho_\delta)} \overline{\rho_\delta^\theta} \right\} \left(\overline{\rho_\delta^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (6.16)$$

Preuve. Soit $l \in (0, 1]$. On pose $b(t) = (t+l)^\theta$. Alors, le lemme 1.4 appliqué avec $\rho = \rho_\alpha$, $p = \frac{2\beta}{\theta}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha$ et $f = \alpha(h - \rho_\alpha)$ garantit en particulier que

$$\begin{aligned} & \alpha\theta(\rho_\alpha + l)^\theta + \operatorname{div}((\rho_\alpha + l)^\theta \mathbf{u}_\alpha) + (\theta - 1)(\rho_\alpha + l)^\theta \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha \\ & = \alpha\theta(h + l)(\rho_\alpha + l)^{\theta-1} + \theta l(\rho_\alpha + l)^{\theta-1} \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Compte tenu des estimations (2.17) et (2.18), après d'éventuelles extractions de sous-suites, on peut supposer que $(\rho_\alpha + l)^\theta \rightharpoonup \overline{(\rho_\delta + l)^\theta}$ dans $L^{\frac{2\beta}{\theta}}(\omega)$, $(\rho_\alpha + l)^\theta \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha \rightharpoonup \overline{(\rho_\delta + l)^\theta \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta}$ dans $L^{\frac{2\beta}{\beta+\theta}}(\omega)$ lorsque $\alpha \rightarrow 0^+$, ω designant tout domaine borné de \mathbb{R}^3 . S'en suit la convergence $\operatorname{div}((\rho_\alpha + l)^\theta \mathbf{u}_\alpha) \rightarrow \operatorname{div}((\rho_\delta + l)^\theta \mathbf{u}_\delta)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, $(\rho_\alpha + l)^{\theta-1} \leq l^{\theta-1}$. Ainsi, quitte à extraire des sous-suites si nécessaire, on peut supposer que $(\rho_\alpha + l)^{\theta-1} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{(\rho_\delta + l)^{\theta-1}}$ dans $L^\infty(\omega)$ et $(\rho_\alpha + l)^{\theta-1} \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha \rightharpoonup \overline{(\rho_\delta + l)^{\theta-1} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta}$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Ces convergences en tête, on passe à la limite $\alpha \rightarrow 0^+$ dans (6.17). On obtient

$$\operatorname{div}(\overline{(\rho_\delta + l)^\theta} \mathbf{u}_\delta) = (1 - \theta) \overline{(\rho_\delta + l)^\theta \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta} + \theta \overline{(\rho_\delta + l)^{\theta-1} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (6.18)$$

Soit alors $b(t) = t^{\frac{1}{\theta}}$. En accord avec le lemme 1.4 complété par le lemme 2.8, de (6.18) on déduit que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left\{ \left(\overline{(\rho_\delta + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \mathbf{u}_\delta \right\} &= \frac{(1 - \theta)}{\theta(2\mu_1 + \mu_2)} \left\{ \overline{p(\rho_\delta)(\rho_\delta + l)^\theta} - \overline{p(\rho_\delta)} \overline{(\rho_\delta + l)^\theta} \right\} \left(\overline{(\rho_\delta + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \\ &\quad + l \overline{(\rho_\delta + l)^{\theta-1} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta} \left(\overline{(\rho_\delta + l)^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (6.19)$$

La dernière étape de la preuve consiste à faire tendre $l \rightarrow 0^+$ dans (6.19). Pour cela, comme à la fin de la preuve du lemme 2.6, il suffit d'adapter les arguments présentés dans celle du lemme 2.3 à partir de (4.30). La preuve du lemme 2.9 est donc complète. \square

Lemme 2.10 *Pour tout $p \in [1, 2\beta)$, la convergence de la suite $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ vers ρ_δ est forte dans $L^p(\Omega)$.*

Preuve. En soustrayant l'équation (2.1) de l'égalité (6.18), on trouve que

$$\operatorname{div}(r_\delta \mathbf{u}_\delta) = \frac{(1 - \theta)}{\theta(2\mu_1 + \mu_2)} \left\{ \overline{p(\rho_\delta)\rho_\delta^\theta} - \overline{p(\rho_\delta)} \overline{\rho_\delta^\theta} \right\} \left(\overline{\rho_\delta^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (6.20)$$

où $r_\delta \equiv \left(\overline{\rho_\delta^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} - \rho_\delta$. Choisisant alors dans (6.20) la fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset B_{2R}$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ dans B_R et R suffisamment grand pour que $\Omega \subset B_R$, on récupère

$$\int_{\Omega} \left\{ \overline{p(\rho_\delta)\rho_\delta^\theta} - \overline{p(\rho_\delta)} \overline{\rho_\delta^\theta} \right\} \left(\overline{\rho_\delta^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} dx = 0.$$

En découle immédiatement que

$$\overline{p(\rho_\delta)\rho_\delta^\theta} = \overline{p(\rho_\delta)} \overline{\rho_\delta^\theta} \text{ p.p. dans } \{\overline{\rho_\delta^\theta} > 0\}. \quad (6.21)$$

Noter alors que dans la situation actuelle, cette identité est l'analogie de (4.36) et qu'il suffit donc d'adapter les arguments présentés dans la preuve du lemme 2.4 à partir de (4.36) pour conclure. D'où le résultat. \square

6.2 Inégalité d'énergie, bornes uniformes

Pour achever la preuve de la proposition 2.1, il reste à démontrer que le couple $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ construit ci-dessus satisfait les propriétés $(\delta-5)$ et $(\delta-6)$. Tout d'abord, en remarquant que

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} (h + \rho_\alpha) |\mathbf{u}_\alpha|^2 dx + \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} \int_{\Omega} (\rho_\alpha - h) (\rho_\alpha^{\gamma-1} - h^{\gamma-1}) dx \\ & + \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \int_{\Omega} (\rho_\alpha - h) (\rho_\alpha^{\beta-1} - h^{\beta-1}) dx + 2\delta\alpha \int_{\Omega} (\rho_\alpha - h)^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

et à l'aide de la convergence forte (6.1), du lemme 2.10, de la semi-continuité inférieure faible de la norme équivalente sur $[H_0^1(\Omega)]^3$, $\mathbf{v} \mapsto (\int_{\Omega} \{\mu_1 |\nabla \mathbf{v}|^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{v})^2\} dx)^{\frac{1}{2}}$, et *e.g.* du théorème de convergence de Vitali, on effectue le passage à la limite $\alpha \rightarrow 0^+$ dans (2.16) pour finalement conclure à l'inégalité d'énergie (2.8).

Remarque 2.8 Avant de poursuivre, nous souhaitons insister sur le fait que pour les valeurs $\gamma \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{3}]$ l'hypothèse (1.4) va être cruciale dans l'obtention des estimations (2.9) et (2.10) alors que jusqu'ici elle n'était pas indispensable du fait de la présence de la pression artificielle.

Ayant à l'esprit l'hypothèse (1.4), par l'inégalité de Hölder on peut majorer le membre de droite de l'inégalité d'énergie (2.8) par $\|\rho_\delta\|_{0, \frac{6}{5}} \|\mathbf{f}\|_{0, \infty} \|\mathbf{u}_\delta\|_{0,6} 1_{\{\gamma > \frac{5}{3}\}} + \|\mathbf{g}\|_{0, \frac{6}{5}} \|\mathbf{u}_\delta\|_{0,6}$ et en déduire, en utilisant les injections de Sobolev, que

$$\|\nabla \mathbf{u}_\delta\|_{0,2} \leq c(\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \{1 + \|\rho_\delta\|_{0, \frac{6}{5}} 1_{\{\gamma > \frac{5}{3}\}}\}. \quad (6.22)$$

Soit $\theta \in (0, 1]$ un réel qui sera fixé de manière optimale ultérieurement. On pose

$$\varphi = \mathcal{B}(p_\delta^\theta - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p_\delta^\theta dy)$$

où $p_\delta = \rho_\delta^\gamma + \delta(\rho_\delta^2 + \rho_\delta^\beta)$ et \mathcal{B} désigne l'opérateur de Bogovskiï introduit dans le lemme B.1. En accord avec la remarque 2.3, cette fonction φ peut être utilisée comme fonction test de l'équation (2.2) puisque, d'après le lemme B.1, elle satisfait

$$\forall 1 < p \leq \frac{2}{\theta}, \quad \|\nabla \varphi\|_{0,p} \leq c(\Omega, p) \|p_\delta\|_{0,p\theta}^\theta. \quad (6.23)$$

Après quelques intégrations par parties, l'équation (2.2) testée par φ implique que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p_\delta^{1+\theta} dx &= \int_{\Omega} p_\delta dx - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p_\delta^\theta dy + \int_{\Omega} \{\mu_1 \nabla \mathbf{u}_\delta : \nabla \varphi + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta \operatorname{div} \varphi\} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta : \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} (\rho_\delta \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \varphi dx \sum_{k=1}^4 I_k. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Majorons les intégrales I_1 - I_4 . L'inégalité de Hölder, l'inclusion $L^\beta(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ et l'inégalité d'interpolation $\|\rho_\delta\|_{0,s} \leq \|\rho_\delta\|_{0,1}^{a_s} \|\rho_\delta\|_{0,(1+\theta)s}^{1-a_s}$, $s > 1$, dans laquelle $a_s = \frac{\theta}{(1+\theta)s-1}$, impliquent

que

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq |\Omega|^{-\frac{\theta}{1+\theta}} \int_{\Omega} p_{\delta} dx \|p_{\delta}\|_{0,1+\theta}^{\theta} \\ &\leq c(\Omega, M, \beta, \gamma) \{ \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}^{(1-a_{\gamma})\gamma} + \delta(\|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\beta}^{2(1-a_{\beta})} + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\beta}^{(1-a_{\beta})\beta}) \} \|p_{\delta}\|_{0,1+\theta}^{\theta}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

En accord avec les inégalités de Schwarz, (6.22), de Hölder et d'interpolation

$$\|\rho_{\delta}\|_{0,\frac{6}{5}} \leq \|\rho_{\delta}\|_{0,1}^a \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}^{1-a}, \quad a = \frac{5\gamma(1+\theta) - 6}{6\gamma(1+\theta) - 6}, \quad (6.26)$$

on a

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq c \|\nabla \mathbf{u}_{\delta}\|_{0,2} \|\nabla \varphi\|_{0,2} \leq c(\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \{1 + \|\rho_{\delta}\|_{0,\frac{6}{5}} 1_{\{\gamma > \frac{5}{3}\}}\} \|p_{\delta}\|_{0,1+\theta}^{\theta} \\ &\leq c(\Omega, M, \gamma, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \{1 + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}^{1-a} 1_{\{\gamma > \frac{5}{3}\}}\} \|p_{\delta}\|_{0,1+\theta}^{\theta}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Sous les conditions $\theta \leq \frac{2\gamma-3}{\gamma}$ et $1+\theta > \frac{3}{2\gamma}$, les inégalités de Hölder, (6.22), (6.26) et l'inclusion $L^{1+\theta}(\Omega) \subset L^{\frac{3\gamma\theta(1+\theta)}{2\gamma(1+\theta)-3}}(\Omega)$ impliquent que

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma} \|\mathbf{u}_{\delta}\|_{0,6}^2 \|\nabla \varphi\|_{0,\frac{3\gamma(1+\theta)}{2\gamma(1+\theta)-3}} \\ &\leq C(\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma} \{1 + \|\rho_{\delta}\|_{0,\frac{6}{5}} 1_{\{\gamma > \frac{5}{3}\}}\}^2 \|p_{\delta}\|_{0,\frac{3\gamma\theta(1+\theta)}{2\gamma(1+\theta)-3}}^{\theta} \\ &\leq C(\Omega, M, \gamma, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma} \{1 + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}^{2(1-a)} 1_{\{\gamma > \frac{5}{3}\}}\} \|p_{\delta}\|_{0,(1+\theta)}^{\theta}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

L'inégalité de Hölder, les injections de Sobolev, (6.23), l'inclusion $L^{1+\theta}(\Omega) \subset L^{2\theta}(\Omega)$ et la condition $1+\theta > \frac{6}{5\gamma}$ justifient les majorations

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq (\|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma} \|\mathbf{f}\|_{0,\frac{6\gamma(1+\theta)}{5\gamma(1+\theta)-6}} + \|\mathbf{g}\|_{0,\frac{6}{5}}) \|\varphi\|_{0,6} \leq c(\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{g}) (1 + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}) \|\nabla \varphi\|_{0,2} \\ &\leq c(\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{g}) (1 + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}) \|p_{\delta}\|_{0,2\theta}^{\theta} \leq c(\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{g}) (1 + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}) \|p_{\delta}\|_{0,1+\theta}^{\theta}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

En insérant les estimations (6.25), (6.27)-(6.29) dans l'identité (6.24), on trouve que

$$\begin{aligned} \|p_{\delta}\|_{0,1+\theta} &\leq c(\Omega, M, \beta, \gamma, \mathbf{f}, \mathbf{g}) [(\|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}^{1-a} + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}^{2(1-a)+1}) 1_{\{\gamma > \frac{5}{3}\}} \\ &\quad + \{1 + \delta(\|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\beta}^{2(1-a_{\beta})} + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\beta}^{(1-a_{\beta})\beta}) + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}^{(1-a_{\gamma})\gamma} + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}\}] \end{aligned}$$

inégalité de laquelle découle la suivante :

$$\begin{aligned} \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}^{\gamma} + \delta \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\beta}^{\beta} &\leq c(\Omega, M, \beta, \gamma, \mathbf{f}, \mathbf{g}) [(\|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}^{1-a} + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}^{2(1-a)+1}) 1_{\{\gamma > \frac{5}{3}\}} \\ &\quad + \{1 + \delta(\|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\beta}^{2(1-a_{\beta})} + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\beta}^{(1-a_{\beta})\beta}) + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}^{(1-a_{\gamma})\gamma} + \|\rho_{\delta}\|_{0,(1+\theta)\gamma}\}]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Pour conclure à (2.9), il suffit d'utiliser l'inégalité de Young dans (6.30) puis de remarquer que $\theta = \frac{2\gamma-3}{\gamma}$ si $\frac{3}{2} < \gamma < 3$ et $\theta = 1$ si $\gamma \geq 3$ est optimal. L'estimation (2.10), quant à elle, est une conséquence immédiate de (6.22), et (2.9). Ceci termine la preuve de la proposition 2.1. \square

7 Preuve : Conclusion (Etude du problème d'origine)

Cette section constitue l'ultime étape de la preuve du théorème 2.1, étape qui consiste à construire une solution faible renormalisée à énergie bornée du problème d'origine (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6) à partir de la proposition 2.1 démontrée auparavant. C'est ici que va apparaître l'adaptation au cas stationnaire de l'approche introduite par FEIREISL [16] pour traiter les valeurs $\gamma > \frac{3}{2}$ dans le cas non stationnaire.

7.1 Construction d'une solution

Considérons une suite $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset (0, 1]$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ et associons y par la proposition 2.1 la suite $\{(\rho_{\delta_n}, \mathbf{u}_{\delta_n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Une fois encore, la distinction entre une fonction définie sur un domaine \mathcal{O} de \mathbb{R}^3 et son prolongement par zéro à l'extérieur de \mathcal{O} ne sera pas faite et nous préférons les notations $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ et $\delta \rightarrow 0^+$ aux notations $(\rho_{\delta_n}, \mathbf{u}_{\delta_n})$ et $n \rightarrow \infty$. D'après les estimations (2.9) et (2.10), on peut supposer qu'il existe des fonctions ρ , \mathbf{u} et $\overline{\rho^\gamma}$ telles que modulo l'extraction de sous-suites et lorsque $\delta \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\delta &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } [H^1(\mathbb{R}^3)]^3, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \mathbf{u}_\delta &\rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } [L^q(\Omega)]^3, \quad q \in [1, 6), \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\rho_\delta \rightharpoonup \rho \text{ dans } L^{s(\gamma)}(\mathbb{R}^3), \quad \rho \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad \rho = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \quad (7.2)$$

$$\rho_\delta^\gamma \rightharpoonup \overline{\rho^\gamma} \text{ dans } L^{\frac{s(\gamma)}{\gamma}}(\mathbb{R}^3), \quad \overline{\rho^\gamma} = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \quad (7.3)$$

$$\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \rho \mathbf{u} \text{ dans } [L^{\frac{6s(\gamma)}{s(\gamma)+6}}(\mathbb{R}^3)]^3, \quad \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \text{ dans } [L^{\frac{3s(\gamma)}{s(\gamma)+3}}(\mathbb{R}^3)]^{3 \times 3}. \quad (7.4)$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité d'interpolation $\|\rho_\delta\|_{0,\eta\beta} \leq \|\rho_\delta\|_{0,1}^a \|\rho_\delta\|_{0,\frac{s(\gamma)}{\gamma}\beta}^{1-a}$, dans laquelle $\frac{1}{\beta} < \eta < \frac{s(\gamma)}{\gamma}$ et $a = \frac{s(\gamma)-\eta\gamma}{\eta(s(\gamma)\beta-\gamma)}$, on peut écrire que $\delta \|\rho_\delta\|_{0,\eta\beta}^\beta \leq c(\beta, \gamma, M) \delta^a \delta^{1-a} \|\rho_\delta\|_{0,\frac{s(\gamma)}{\gamma}\beta}^{(1-a)\beta}$.

Puisque $\frac{1}{\beta} < \frac{2}{\beta} < 1 < \frac{s(\gamma)}{\gamma}$ ($\gamma > \frac{3}{2}$), il vient alors que

$$\delta \rho_\delta^2 \rightarrow 0 \text{ dans } L^1(\mathbb{R}^3), \quad \delta \rho_\delta^\beta \rightarrow 0 \text{ dans } L^1(\mathbb{R}^3). \quad (7.5)$$

Au vu des convergences (7.1)-(7.5), on peut passer à la limite $\delta \rightarrow 0^+$ dans les équations (2.1) et (2.2). On trouve alors que le couple (ρ, \mathbf{u}) défini ci-dessus satisfait l'équation de continuité (2.1) au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 ainsi que

$$-\mu_1 \Delta \mathbf{u} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \overline{\rho^\gamma} = \rho \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3. \quad (7.6)$$

Remarque 2.9 Si on suppose que $\frac{3}{2} < \gamma < \frac{5}{3}$, les hypothèses du lemme 1.4 ne sont pas vérifiées par ρ , $p = \frac{s(\gamma)}{\gamma}$, \mathbf{u} et $f \equiv 0$ puisque $\frac{s(\gamma)}{\gamma} < 2$. Dans ce cas, il faut travailler davantage pour prouver que le couple (ρ, \mathbf{u}) possède la propriété (iii) de la définition 2.1.

Dans la suite, nous démontrerons tout d'abord que la propriété (iii) est satisfaite par le couple (ρ, \mathbf{u}) ce qui, conformément à la remarque précédente, n'est pas immédiat. Nous terminerons par la preuve de la convergence forte vers ρ dans $L^1(\Omega)$ de la suite $\{\rho_\delta\}_\delta$. Ceci étant, puisque la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^\gamma$ est strictement convexe, on aura $\overline{\rho^\gamma} = \rho^\gamma$ p.p. dans Ω et nous pourrions donc conclure (cf. (7.6)). Cette démarche fait l'objet des prochains paragraphes.

7.2 Flux effectif visqueux

Comme dans les précédentes sections, la quantité appelée usuellement « flux effectif visqueux » possède certaines propriétés remarquables. En particulier :

Lemme 2.11 *Pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$, on a*

$$\overline{\rho^\gamma b_k(\rho)} - (2\mu_1 + \mu_2) \overline{b_k(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}} = \overline{\rho^\gamma b_k(\rho)} - (2\mu_1 + \mu_2) \overline{b_k(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}} \text{ p.p. dans } \Omega, \quad (7.7)$$

dans laquelle b_k est définie en (1.1.18) et $\overline{\rho^\gamma b_k(\rho)}$, $\overline{b_k(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}}$ sont les limites faibles des suites $\{p(\rho_\delta) b_k(\rho_\delta)\}_\delta$ dans $L^{\frac{s(\gamma)}{\gamma}}(\Omega)$, $\{b_k(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\}_\delta$ dans $L^2(\Omega)$, tandis que $\overline{b_k(\rho)}$ est la limite *-faible de la suite $\{b_k(\rho_\delta)\}_\delta$ dans $L^\infty(\Omega)$.

Preuve. On pose

$$\begin{aligned} \Pi_\delta &= \rho_\delta^\gamma + \delta(\rho_\delta^2 + \rho_\delta^\beta), & b_\delta &= b_k(\rho_\delta), & \mathbf{F}_\delta &= \rho_\delta \mathbf{f} + \mathbf{g}, & \mathbf{q}_\delta &= \rho_\delta \mathbf{u}_\delta; \\ \Pi &= \overline{\rho^\gamma}, & b &= \overline{b_k(\rho)}, & \mathbf{F} &= \rho \mathbf{f} + \mathbf{g}, & \mathbf{q} &= \rho \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Des convergences (7.1)-(7.5), il découle immédiatement que

$$\Pi_\delta \rightharpoonup \Pi \text{ dans } L^{\frac{s(\gamma)}{\gamma}}(\Omega), \quad (7.8)$$

$$b_\delta \xrightarrow{*} b \text{ dans } L^\infty(\Omega), \quad (7.9)$$

$$\mathbf{F}_\delta \rightharpoonup \mathbf{F} \text{ dans } L^{s(\gamma)}(\Omega), \quad (7.10)$$

$$\mathbf{q}_\delta \rightharpoonup \mathbf{q} \text{ dans } [L^{\frac{6s(\gamma)}{s(\gamma)+6}}(\Omega)]^3, \quad \operatorname{div} \mathbf{q}_\delta = 0 \rightarrow 0 = \operatorname{div} \mathbf{q} \text{ dans } W^{-1, \frac{6s(\gamma)}{s(\gamma)+6}}(\Omega), \quad (7.11)$$

$$\Pi_\delta b_\delta \rightharpoonup \overline{\rho^\gamma b_k(\rho)} \text{ dans } L^{\frac{s(\gamma)}{\gamma}}(\Omega), \quad (7.12)$$

$$b_\delta \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \overline{b(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}} \text{ dans } L^2(\Omega) \quad (7.13)$$

S'en suit alors que les hypothèses du théorème 1.2 sont satisfaites pour $p = \frac{s(\gamma)}{\gamma}$, $r = \infty$, $s = s(\gamma)$, $w = \frac{6s(\gamma)}{s(\gamma)+6}$ et par suite la validité de (7.7). D'où le résultat. \square

7.3 Une fonction de coupure bien utile

Soit $k > 0$. On définit la fonction $T_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$T_k(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, k), \\ k & \text{si } t \geq k. \end{cases} \quad (7.14)$$

Clairement, $T_k \in C^0([0, \infty))$, $(T_k)'_+ \in L^\infty((0, \infty) \cap C^0([0, k) \cup (k, \infty)))$ et vérifie

$$|T_k(t) - t| \leq 2t 1_{\{t \geq k\}}, \quad |t(T_k)'_+(t) - T_k(t)| \leq T_k(t) 1_{\{t \geq k\}}. \quad (7.15)$$

Ensuite, en accord avec les inégalités $a^\gamma - b^\gamma \geq (a - b)^\gamma$ et $|T_k(a) - T_k(b)| \leq |a - b|$, vraies pour tous $0 \leq b \leq a < \infty$, on remarque que

$$\forall s, t \geq 0, \quad |T_k(t) - T_k(s)|^{\gamma+1} \leq (t^\gamma - s^\gamma)(T_k(t) - T_k(s)), \quad (7.16)$$

tandis que l'inégalité $|\{\rho_\delta \geq k\}| \leq \frac{1}{k} \int_\Omega \rho_\delta 1_{\{\rho_\delta \geq k\}} dx \leq \frac{1}{k} \int_\Omega \rho_\delta dx \leq \frac{M}{k}$ nous assure que

$$\forall p \in [1, s(\gamma)), \quad \|\rho_\delta 1_{\{\rho_\delta \geq k\}}\|_{0,p} \leq \left(\frac{M}{k}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{s(\gamma)}} \|\rho_\delta\|_{0,s(\gamma)}. \quad (7.17)$$

Si on dénote par $\overline{T_k(\rho)}$ la limite $*$ -faible de la suite $\{T_k(\rho_\delta)\}_\delta$ dans $L^\infty(\Omega)$, la propriété (7.15) et l'inégalité

$$\begin{aligned} \|\overline{T_k(\rho)} - \rho\|_{0,p} &\leq \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta) - \rho_\delta\|_{0,p} \\ &\leq 2 \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \|\rho_\delta 1_{\{\rho_\delta \geq k\}}\|_{0,p} \leq C k^{\frac{1}{s(\gamma)} - \frac{1}{p}}, \quad \forall 1 \leq p < s(\gamma), \end{aligned}$$

sont des justifications possibles de la convergence

$$\forall p \in [1, s(\gamma)), \quad \overline{T_k(\rho)} \rightarrow \rho \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ quand } k \rightarrow \infty. \quad (7.18)$$

En utilisant des arguments tout a fait analogues, on pourra aisément vérifier que

$$\forall p \in [1, s(\gamma)), \quad T_k(\rho) \rightarrow \rho \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ quand } k \rightarrow \infty. \quad (7.19)$$

Pour conclure ce paragraphe, nous démontrons l'analogie de l'observation cruciale de FEIREISL [16] qui va remplacer l'information manquante $\rho \in L^2(\Omega)$ dans la théorie du transport de DIPERNA et P.L. LIONS [12].

Lemme 2.12

$$\sup_{k>0} \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)\|_{0,\gamma+1} \leq c \quad (7.20)$$

où la constante c ne dépend ni de k ni de δ .

Preuve. Si on dénote par $\overline{\rho^\gamma T_k(\rho)}$ la limite faible dans $L^{\frac{s(\gamma)}{\gamma}}(\Omega)$ de la suite $\{\rho_\delta T_k(\rho_\delta)\}_\delta$, on a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \{\overline{\rho^\gamma T_k(\rho)} - \overline{\rho^\gamma T_k(\rho)}\} dx \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_\Omega (\rho_\delta^\gamma - \rho^\gamma)(T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)) dx + \int_\Omega (\overline{\rho^\gamma} - \rho^\gamma)(T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)}) dx. \end{aligned}$$

Puisque les fonctions $t \mapsto t^\gamma$ et $t \mapsto T_k(t)$, $t \geq 0$, sont respectivement convexe et concave, la positivité du deuxième terme du membre de droite est immédiate. Ceci étant, à l'aide de (7.7) et (7.16), on obtient

$$\begin{aligned} \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \int_\Omega |T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)|^{\gamma+1} dx &\leq (2\mu_1 + \mu_2) \int_\Omega (\overline{T_k(\rho)} \operatorname{div} \mathbf{u} - T_k(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}) dx \\ &= (2\mu_1 + \mu_2) \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_\Omega (T_k(\rho_\delta) - \overline{T_k(\rho)}) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta dx. \end{aligned} \quad (7.21)$$

En tenant compte de (2.10), le terme du membre de droite de (7.21) peut être majoré par

$$\begin{aligned} &c \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_\Omega \{(T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)) + (T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)})\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta dx \\ &\leq c \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)\|_{0,2} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\|_{0,2} \leq c \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)\|_{0,\gamma+1}. \end{aligned}$$

L'inégalité de Young permet alors de conclure. \square

7.4 Equation de continuité et solutions renormalisées

Dans ce paragraphe, nous revenons sur le problème évoqué à la remarque 2.9. Plus exactement, nous prouvons que le couple (ρ, \mathbf{u}) construit auparavant est une solution de l'équation de continuité renormalisée (1.10) même pour les valeurs $\gamma \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$.

Lemme 2.13 *Soit b une fonction de la classe (1.7), (1.8) et (1.9) avec $p = s(\gamma)$. Alors le couple (ρ, \mathbf{u}) est solution de l'équation (1.10).*

Preuve. Tout d'abord, on suppose que $b \in C^1([0, \infty))$. D'après le corollaire 1.1 dans lequel on choisit $b(t) = t$, pour tout $k > 0$, on voit que

$$\operatorname{div}(T_k(\rho_\delta)\mathbf{u}_\delta) + \{\rho_\delta(T_k)_+'(\rho_\delta) - T_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

On dénote par $\overline{\{\rho(T_k)_+'(\rho) - T_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}}$ la limite faible quand $\delta \rightarrow 0^+$ de la suite $\{\{\rho_\delta(T_k)_+'(\rho_\delta) - T_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\}_\delta$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ puis on passe à la limite dans cette équation. Alors, pour tout $k > 0$, on trouve que

$$\operatorname{div}(\overline{T_k(\rho)\mathbf{u}}) = -\overline{\{\rho(T_k)_+'(\rho) - T_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Soit $R > 0$. Le corollaire 1.1 appliqué à $\overline{T_k(\rho)}$, $p = \infty$, \mathbf{u} , $-\overline{\{\rho(T_k)_+'(\rho) - T_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}}$ et b_R avec $b \in C^1([0, \infty))$ garantit ensuite que pour tout k et tout $R > 0$,

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(b_R(\overline{T_k(\rho)\mathbf{u}}) + \{\overline{T_k(\rho)}(b_R)_+'(\overline{T_k(\rho)}) - b_R(\overline{T_k(\rho)})\} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &= -\overline{\{\rho(T_k)_+'(\rho) - T_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}} (b_R)_+'(\overline{T_k(\rho)}) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Or, lorsque $k \rightarrow \infty$, (7.18) et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue montrent la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ vers $\operatorname{div}(b_R(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho(b_R)_+'(\rho) - b_R(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}$ du membre de gauche de (7.22). La norme $L^1(\Omega)$ du membre de droite, quant à elle, peut être majorée par

$$\max_{s \in [0, R]} |b'(s)| \int_{\Omega_R} |\overline{\{\rho(T_k)_+'(\rho) - T_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}}| dx$$

où $\Omega_R = \{x \in \Omega, \overline{T_k(\rho)}(x) \leq R\}$. De plus, en accord avec la semi-continuité inférieure faible de norme L^1 , on sait que

$$\|\overline{\{\rho(T_k)_+'(\rho) - T_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}}\|_{0,1,\Omega_R} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \|\{\rho_\delta(T_k)_+'(\rho_\delta) - T_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\|_{0,1,\Omega_R}.$$

A l'aide de l'inégalité de Schwarz, de (7.15) et de l'interpolation de $L^2(\Omega_R)$ entre $L^1(\Omega_R)$ et $L^{\gamma+1}(\Omega_R)$, le membre de droite cette inégalité peut être estimé par

$$\begin{aligned} & \|\rho_\delta(T_k)_+'(\rho_\delta) - T_k(\rho_\delta)\|_{0,2,\Omega_R} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\|_{0,2,\Omega_R} \\ & \leq \|T_k(\rho_\delta)1_{\{\rho_\delta \geq k\}}\|_{0,2,\Omega_R} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\|_{0,2,\Omega_R} \leq c \|T_k(\rho_\delta)1_{\{\rho_\delta \geq k\}}\|_{0,1,\Omega_R}^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \|T_k(\rho_\delta)1_{\{\rho_\delta \geq k\}}\|_{0,\gamma+1,\Omega_R}^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}. \end{aligned}$$

Ayant à l'esprit que $T_k(\rho_\delta) \leq \rho_\delta$, on se sert de (7.17) avec $p = 1$ pour obtenir que

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta)1_{\{\rho_\delta > k\}}\|_{0,1,\Omega_R} \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

D'autre part, en accord avec le lemme 2.12, on se rend compte que

$$\begin{aligned} \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta)1_{\{\rho_\delta \geq k\}}\|_{0,\gamma+1,\Omega_R} &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta) - \overline{T_k(\rho)}\|_{0,\gamma+1,\Omega} + \|\overline{T_k(\rho)}\|_{0,\gamma+1,\Omega_R} \\ &\leq c + R|\Omega|^{\frac{1}{\gamma+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $k \rightarrow \infty$, le membre de droite de l'équation (7.22) tend vers 0 dans $L^1(\Omega)$. Par conséquent, après le passage à la limite quand $k \rightarrow \infty$ dans (7.22), on trouve que

$$\operatorname{div}(b_R(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho(b_R)'_+(\rho) - b_R(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (7.23)$$

Pour conclure, il suffit de faire tendre $R \rightarrow \infty$. Pour ce faire, remarquer tout d'abord qu'à l'aide des propriétés (1.8), on a

$$\begin{aligned} \|b_R(\rho)1_{\{\rho \geq R\}}\|_{0,\frac{6}{5}} &\leq cR^{(\lambda_1+1)-\frac{5}{6}s(\gamma)} \|\rho 1_{\{\rho \geq R\}}\|_{0,s(\gamma)}^{\frac{5s(\gamma)}{6}}, \\ \|\{\rho(b_R)'_+(\rho) - b_R(\rho)\}1_{\{\rho \geq R\}}\|_{0,2} &\leq cR^{(\lambda_1+1)-\frac{s(\gamma)}{2}} \|\rho 1_{\{\rho \geq R\}}\|_{0,s(\gamma)}^{\frac{s(\gamma)}{2}}, \end{aligned}$$

puis que $\int_{\mathbb{R}^3} b_R(\rho)\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, peut s'écrire comme la somme des intégrales $\int_{\mathbb{R}^3} b(\rho)1_{\{\rho < R\}}\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx$ et $\int_{\mathbb{R}^3} b_R(\rho)1_{\{\rho \geq R\}}\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx$. La première intégrale converge vers $\int_{\mathbb{R}^3} b(\rho)\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx$ et la seconde est majorée par $cR^{(\lambda_1+1)-\frac{5s(\gamma)}{6}} \|\rho 1_{\{\rho \geq R\}}\|_{0,s(\gamma)}^{\frac{5s(\gamma)}{6}} \|\mathbf{u}\|_{0,6} \|\nabla \varphi\|_{0,\infty}$ et donc, tend vers zéro quand $R \rightarrow \infty$. L'analyse de la convergence de l'autre terme de (7.23) est tout à fait analogue. Noter simplement qu'elle fait apparaître la condition $\lambda_2 \leq \frac{p}{2}$.

Dans le cas où b satisfait (1.7), (1.8) et (1.9) avec $p = s(\gamma)$, on copie mot à mot la preuve du lemme 1.4 à partir de (1.1.16). D'où le résultat. \square

7.5 Convergence forte de la densité

Pour conclure la preuve du théorème 2.1, dans ce paragraphe nous démontrons la convergence forte de ρ_δ vers ρ .

Lemme 2.14 *Pour tout $p \in [1, s(\gamma))$, la convergence de la suite $\{\rho_\delta\}_\delta$ vers ρ est forte dans $L^p(\Omega)$.*

Preuve. Soit $k > 0$. On définit la fonction $L_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$L_k(t) = \begin{cases} t \ln t & \text{si } t \in [0, k), \\ t \ln k + t - k & \text{si } t \in [k, \infty). \end{cases} \quad (7.24)$$

Alors il est clair que L_k vérifie (1.7) et (1.8) avec $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$. En outre, L_k peut s'écrire $L_k(t) = S_k(t) + (\ln k + 1)t$ où S_k satisfait (1.7), (1.8) et (1.9) puisque $|S'_k(t)| \leq c(k)$ si $t \geq 1$ et $tS'_k(t) - S_k(t) = tL'_k(t) - L_k(t) = T_k(t)$. Par conséquent, en accord avec (2.6), on a d'une part

$$\operatorname{div}(L_k(\rho_\delta)\mathbf{u}_\delta) + T_k(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Soit $R > 0$ tel que $\Omega \subset\subset B_R$. Alors, en choisissant comme fonction test la fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ dans B_R et $\varphi = 0$ dans B^{2R} , on en déduit aisément que

$$\int_{\Omega} \overline{T_k(\rho)} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = 0. \quad (7.25)$$

Par ailleurs, d'après le lemme 2.13, on sait que

$$\operatorname{div}(L_k(\rho)\mathbf{u}) + T_k(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

et pour la même raison que celle évoquée ci-dessus, on en déduit aisément que

$$\int_{\Omega} T_k(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = 0. \quad (7.26)$$

En injectant les identités (7.25) et (7.26) dans l'inégalité (7.21), on voit que

$$\begin{aligned} \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} |T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)|^{\gamma+1} \, dx &\leq \|T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)}\|_{0,2} \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,2} \\ &\leq c \|T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)}\|_{0,1}^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \|T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)}\|_{0,\gamma+1}^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}, \end{aligned}$$

d'où, compte tenu de (7.18), (7.19) et (7.20), on extrait la propriété suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)\|_{0,\gamma+1} = 0. \quad (7.27)$$

Puisqu'à l'aide de l'inégalité triangulaire et de la formule (7.17) avec $p = 1$, on a

$$\begin{aligned} \|\rho_\delta - \rho\|_{0,1} &\leq \|\rho_\delta - T_k(\rho_\delta)\|_{0,1} + \|T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)\|_{0,1} + \|T_k(\rho) - \rho\|_{0,1} \\ &\leq \left(\frac{M}{k}\right)^{1-\frac{1}{s(\gamma)}} \|\rho_\delta\|_{0,s(\gamma)} + \|T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)\|_{0,1} + \|T_k(\rho) - \rho\|_{0,1}, \end{aligned}$$

la convergence $\rho_\delta \rightarrow \rho$ dans $L^1(\Omega)$ quand $\delta \rightarrow 0^+$ est une conséquence directe de (7.19) et (7.27). Pour conclure, il suffit d'interpoler $L^p(\Omega)$ entre $L^1(\Omega)$ et $L^{s(\gamma)}(\Omega)$. La preuve du lemme 2.14 et donc du théorème 2.1 est complète. \square

Chapitre 3

Equations stationnaires en domaines non bornés

Sommaire

1	Formulation du problème et résultats principaux	70
2	Planification de la preuve	74
3	Solutions du système avec pression artificielle	76
3.1	Approximation et localisation du problème	76
3.2	Estimations indépendantes des paramètres	77
3.3	Introduction des flux dans l'inégalité d'énergie	85
3.4	Construction d'une solution	85
4	Solutions du système d'origine	90
4.1	Bornes uniformes par rapport au paramètre introduit lors de l'ajout de la pression artificielle	90
4.2	Elimination de la pression artificielle et conclusion	93
5	Commentaires	94

Suite logique du chapitre 2, celui-ci a pour but d'exposer nos travaux sur l'existence de solutions faibles des équations de Navier-Stokes stationnaires, compressibles et barotropes en régime isentropique, considérées dans des domaines non bornés, et plus particulièrement dans des domaines extérieurs ou dans des domaines présentant plusieurs sorties à l'infini (cônes, cylindriques) de l'espace à trois dimensions. On retrouvera ces travaux sous une forme plus concise dans l'article [58]. Bien qu'étant étroitement lié au chapitre précédent, celui-ci n'en nécessite pas la lecture une fois la proposition 2.2 considérée comme acquise. Il est donc volontaire de notre part de répéter certaines notions déjà introduites dans le chapitre 2. Tout au long de ce chapitre, et sauf mention explicite du contraire, n désignera un entier positif supérieur ou égal à deux.

1 Formulation du problème et résultats principaux

Avant tout, nous rappelons la définition d'un domaine à n sorties cônes.

Définition 3.1 Soit $\{s_1, \dots, s_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, des points de \mathbb{R}^3 . Par \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, n$, on dénote le cône de révolution d'axe de symétrie la droite Δ_i , de demi-ouverture $\theta_i \in (0, \pi)$, et de sommet s_i . On dira que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine à n sorties cônes de classe $C^{k,\theta}$, $k \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0, 1]$ si

(1) il existe un nombre réel $R_0 > 0$ tel que

$$\forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j, \quad \overline{(\mathcal{C}_i)^{R_0}} \cap \overline{(\mathcal{C}_j)^{R_0}} = \emptyset \quad \text{et} \quad \Omega = (\Omega \cap \widetilde{B}_{R_0}) \cup \bigcup_{i=1}^n (\mathcal{C}_i)^{R_0}$$

où pour tout $R \geq R_0$, $(\mathcal{C}_i)^R = \mathcal{C}_i \setminus \overline{B(s_i, R)}$, $i = 1, \dots, n$ et $\widetilde{B}_R = \bigcup_{i=1}^n B(s_i, R)$;

(2) la frontière $\partial\Omega$ est localement de classe $C^{k,\theta}$.

Dès que Ω désignera un tel domaine, on utilisera les notations suivantes :

$$\Omega_R \equiv \Omega \cap \widetilde{B}_R \quad \text{and} \quad \Omega^R \equiv \Omega \setminus \widetilde{B}_R = \bigcup_{i=1}^n (\mathcal{C}_i)^R.$$

Dans la suite, par souci de clarté et sans perte de généralité, on supposera $R_0 = 1$.

Soit Ω un domaine extérieur ou à n sorties cônes de \mathbb{R}^3 , à frontière Lipschitzienne. Nous nous intéressons au système d'équations de Navier-Stokes stationnaires

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu_1 \Delta \mathbf{u} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + a \nabla \rho^\gamma = \rho \mathbf{f} + \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.2)$$

où $a > 0$ est une constante et dans lequel nous supposons les coefficients de viscosité μ_1 et μ_2 constants et satisfaisant également les contraintes physiquement raisonnables

$$\mu_1 > 0, \quad \frac{2}{3}\mu_1 + \mu_2 \geq 0. \quad (1.3)$$

Pour simplifier les notations, dans la suite, nous considérons $a = 1$. Ici, comme nous le verrons apparaître plus loin, nous devons imposer à la constante adiabatique γ l'hypothèse technique

$$\gamma > 3. \quad (1.4)$$

Comme dans le chapitre 2, les inconnues de ce système d'équations sont la densité $\rho(x)$, $x \in \Omega$, et la vitesse $\mathbf{u}(x) = (u^1(x), u^2(x), u^3(x))$ du fluide, et les champs de vecteurs $\mathbf{f}(x) = (f^1(x), f^2(x), f^3(x))$ et $\mathbf{g}(x) = (g^1(x), g^2(x), g^3(x))$, $x \in \Omega$, sont des données du problème. D'autre part, pour que le système (1.1)-(1.2) soit bien posé, nous le complétons en imposant les conditions usuelles de non glissement

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega. \quad (1.5)$$

Nous prescrivons également le comportement à l'infini de la densité et de la vitesse du fluide en nous plaçant dans la situation naturelle d'un écoulement constant à l'infini. Dans le cas d'un domaine extérieur, ceci se traduit par les conditions

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = \rho_\infty > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(x) = \mathbf{0}. \quad (1.6)_1$$

Lorsque Ω est un domaine à n sorties cônes \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, n$, ces conditions s'écrivent

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \mathcal{C}_i}} \rho(x) = \rho_i > 0, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(x) = \mathbf{0}. \quad (1.6)_2$$

Remarque 3.1 Sans perte de généralité, on peut supposer que $0 < \rho_n \leq \dots \leq \rho_1 < \infty$.

Dans ce chapitre, nous traitons de l'existence de solutions appelées « solutions faibles à énergie bornée » des problèmes (1.1), (1.2), (1.5), (1.6)₁ et (1.1), (1.2), (1.5), (1.6)₂. Précisons dès à présent cette notion dans chacun des cas (domaines extérieurs, domaines à n sorties cônes).

Définition 3.2 (Cas extérieur) Une solution faible à énergie bornée du problème (1.1), (1.2), (1.5), (1.6)₁ est un couple de fonctions (ρ, \mathbf{u}) satisfaisant

- (i) $\rho \in L_{loc}^{2\gamma}(\overline{\Omega})$, $\rho \geq 0$ p.p. dans Ω et $(\rho - \rho_\infty) \in L^3(\Omega) \cap L^{2\gamma}(\Omega)$, $\mathbf{u} \in [D_0^{1,2}(\Omega)]^3$;
- (ii) l'équation de continuité (1.1) au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 , à condition qu'il soit prolongé par zéro à l'extérieur de Ω ;
- (iii) l'équation de mouvement (1.2) au sens des distributions dans Ω ;
- (iv) l'inégalité d'énergie

$$\int_{\Omega} \{ \mu_1 |\nabla \mathbf{u}|^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \} dx \leq \int_{\Omega} (\rho \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} dx. \quad (1.7)$$

Remarque 3.2 Soient les fonctions $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$b \in C^0([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty)), \quad \exists c > 0, \exists \lambda_0 < 1, \forall t \in (0, 1], |b'(t)| \leq ct^{-\lambda_0}, \quad (1.8)$$

dont le comportement à l'infini est donné par

$$\exists c > 0, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall t \geq 1, |b'(t)| \leq ct^{\lambda_1}, |tb'(t) - b(t)| \leq ct^{\lambda_2}. \quad (1.9)$$

Au vu de cette définition, le lemme 1.4 implique que le prolongement par zéro à l'extérieur de Ω de toute solution faible à énergie bornée (ρ, \mathbf{u}) du problème (1.1), (1.2), (1.5), (1.6)₁ est une solution de l'équation de continuité renormalisée, *i.e.* de l'équation

$$\operatorname{div}(b(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho b'(\rho) - b(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (1.10)$$

et ce pour toute fonction b de la classe (1.8) et (1.9) avec

$$-1 < \lambda_1 \leq \gamma - 1 \quad \text{et} \quad 0 < \lambda_2 \leq \gamma. \quad (1.11)$$

Avant de donner l'analogie de cette définition dans le cas d'un domaine à n sorties côniques, nous devons introduire la notion de flux sortant à travers chaque sortie \mathcal{C}_i . Désignons donc par $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine à n sorties côniques de classe $C^{0,1}$. Soient $p > \frac{6}{5}$ et $(\rho, \mathbf{u}) \in L^p_{loc}(\overline{\Omega}) \times [D_0^{1,2}(\Omega)]^3$ un couple de fonctions satisfaisant

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (1.12)$$

à condition que (ρ, \mathbf{u}) et $f \in L^q_{loc}(\overline{\Omega})$, $q \in (1, \infty)$, soient prolongées par zéro à l'extérieur de Ω . Introduisons ensuite les ensembles

$$\begin{aligned} S > 2, \quad \mathcal{A}_i^S &= \{\xi \in \mathcal{D}(\tilde{B}_S), \xi = 1 \text{ in } \overline{(\mathcal{C}_i)_2^S}, \xi = 0 \text{ in } (\mathcal{C}_j)_2^S, j \neq i\}, \\ \mathcal{B}_i &= \{\xi \in C^\infty(\overline{\Omega_2}), \xi = 1 \text{ in } \overline{(\mathcal{C}_i)_2^S}, \xi = 0 \text{ in } \overline{(\mathcal{C}_j)_2^S}, j \neq i\}. \end{aligned}$$

Clairement, la restriction du champ de vecteurs $\rho\mathbf{u}$ à Ω_2 , resp. à $(\mathcal{C}_i)_2^S$, $i = 1, \dots, n$, est un élément de l'espace $E^r(\Omega_2)$, resp. $E^r((\mathcal{C}_i)_2^S)$, $r = \min(\frac{6p}{p+6}, q)$ (cf. A.6 pour la définition de ces espaces). D'après le théorème A.40, on sait qu'il existe des opérateurs linéaires

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_\nu &: E^r(\Omega_2) \rightarrow W^{1-\frac{1}{r}, r}(\partial\Omega_2) \\ \gamma_{\nu, i}^S &: E^r((\mathcal{C}_i)_2^S) \rightarrow W^{1-\frac{1}{r}, r}(\partial(\mathcal{C}_i)_2^S), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

satisfaisant

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in [C^\infty(\overline{\Omega_2})]^3, \quad \tilde{\gamma}_\nu(\mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega_2}, \\ \forall \mathbf{v} \in [C^\infty(\overline{(\mathcal{C}_i)_2^S})]^3, \quad \gamma_{\nu, i}^S(\mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\partial(\mathcal{C}_i)_2^S}. \end{aligned}$$

En outre, le théorème A.40 garantit également la validité des formules de Stokes suivantes :

$$\forall \mathbf{v} \in E^r(\Omega_2), \forall \eta \in W^{1, r'}(\Omega_2), \langle \tilde{\gamma}_\nu(\mathbf{v}), \gamma_0(\eta) \rangle = \int_{\Omega_2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \eta + \eta \operatorname{div} \mathbf{v}) dx \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in E^r((\mathcal{C}_i)_2^S), \forall \eta \in W^{1, r'}((\mathcal{C}_i)_2^S), \\ \langle \gamma_{\nu, i}^S(\mathbf{v}), \gamma_0(\eta) \rangle = \int_{(\mathcal{C}_i)_2^S} (\mathbf{v} \cdot \nabla \eta + \eta \operatorname{div} \mathbf{v}) dx, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.14)$$

dans lesquelles γ_0 denote l'opérateur de trace usuel. Pour $i = 1, \dots, n$, considérons deux fonctions $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{B}_i$. Alors il est clair que $\eta = \xi_1 - \xi_2 \in C^\infty(\overline{\Omega_2})$ et $\eta = 0$ dans $\overline{(\mathcal{C}_j)_2^S}$,

$j = 1, \dots, n$. Par ailleurs, on peut toujours construire une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{B}_2)$ telle que $\varphi = 1$ dans $\overline{\Omega_{\frac{2}{3}}}$. Ceci étant, on pose $\tilde{\eta} = \eta\varphi$. Alors $\tilde{\eta} \in \mathcal{D}(\tilde{B}_2)$, $\tilde{\eta} = \eta$ dans Ω_2 , et puisque l'extension par zéro de $\tilde{\eta}$ en dehors de \tilde{B}_2 appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, au vu de l'équation (1.12), on peut écrire que

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^3} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\eta} \, dx &= \int_{\mathbb{R}^3} f \tilde{\eta} \, dx \Leftrightarrow - \int_{\tilde{B}_2} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\eta} \, dx = \int_{\tilde{B}_2} f \tilde{\eta} \, dx \\ \text{i.e.} \quad \int_{\Omega_2} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \eta \, dx + \int_{\Omega_2} f \eta \, dx &= 0. \end{aligned}$$

En accord avec la formule de Stokes (1.13), il en découle que

$$\langle \tilde{\gamma}_{\nu}(\rho \mathbf{u}), \xi_1|_{\partial\Omega_2} \rangle = \langle \tilde{\gamma}_{\nu}(\rho \mathbf{u}), \xi_2|_{\partial\Omega_2} \rangle, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{B}_i. \quad (1.15)$$

Cette propriété induit tout naturellement la définition suivante du flux sortant Φ_i du fluide à travers chaque sortie cônica \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, n$:

$$\Phi_i = \langle \tilde{\gamma}_{\nu}(\rho \mathbf{u}), \xi|_{\partial\Omega_2} \rangle, \quad \xi \in \mathcal{B}_i. \quad (1.16)$$

Soit ensuite une fonction $\xi \in \mathcal{A}_i^S$, $S > 2$. En conséquence, $\xi \in \mathcal{B}_i$ et le prolongement par zéro à l'extérieur de \tilde{B}_S de ξ est un élément de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Avec ξ comme fonction test de l'équation (1.12), à l'aide des formules de Stokes (1.13) et (1.14), on voit que

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^3} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \xi \, dx &= \int_{\mathbb{R}^3} f \xi \, dx \\ \text{i.e.} \quad - \int_{\Omega_2} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \xi \, dx - \int_{(\mathcal{C}_i)_2^S} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \xi \, dx &= \int_{\Omega_2} f \xi \, dx + \int_{(\mathcal{C}_i)_2^S} f \xi \, dx. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$- \langle \gamma_{\nu,i}^S(\rho \mathbf{u}), \xi|_{\partial(\mathcal{C}_i)_2^S} \rangle = \langle \tilde{\gamma}_{\nu}(\rho \mathbf{u}), \xi|_{\partial\Omega_2} \rangle, \quad \xi \in \mathcal{A}_i^S, \quad S > 2. \quad (1.17)$$

Pour terminer cette parenthèse sur les flux, il est important de noter qu'à l'aide de (1.12)-(1.15), et du fait que la fonction $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i - 1$, $\xi_i \in \mathcal{B}_i$, appartient à $C^\infty(\overline{\Omega_2})$ et soit telle que $\eta = 0$ dans $(\mathcal{C}_j)_{\frac{2}{3}}^2$, $j = 1, \dots, n$, on peut calculer la somme des flux sortants à travers chaque sortie cônica \mathcal{C}_i comme-suit :

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = \langle \tilde{\gamma}_{\nu}(\rho \mathbf{u}), (\sum_{i=1}^n \xi_i - 1)|_{\partial\Omega_2} \rangle + \langle \tilde{\gamma}_{\nu}(\rho \mathbf{u}), 1|_{\partial\Omega_2} \rangle = \int_{\Omega_2} f \, dx, \quad \xi_i \in \mathcal{B}_i. \quad (1.18)$$

Nous pouvons maintenant introduire la notion de solution faible à énergie bornée du problème (1.1), (1.2), (1.5), (1.6)₂ :

Définition 3.3 (Cas des sorties côniques) Une solution faible à énergie bornée du problème (1.1), (1.2), (1.5), (1.6)₂ est un couple de fonctions (ρ, \mathbf{u}) satisfaisant

- (i) $\rho \in L_{loc}^{2\gamma}(\overline{\Omega})$, $\rho \geq 0$ p.p. dans Ω et $(\rho - \rho_i) \in L^3((\mathcal{C}_i)^2) \cap L^{2\gamma}((\mathcal{C}_i)^2)$, $i = 1, \dots, n$,
 $\mathbf{u} \in [D_0^{1,2}(\Omega)]^3$;

- (ii) l'équation de continuité (1.1) au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 , à condition qu'il soit prolongé par zéro à l'extérieur de Ω ;
- (iii) l'équation de mouvement (1.2) au sens des distributions dans Ω ;
- (iv) l'inégalité d'énergie

$$\int_{\Omega} \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}|^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2\} dx \leq \int_{\Omega} (\rho \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} dx + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sum_{i=2}^n (\rho_1^{\gamma-1} - \rho_i^{\gamma-1}) \Phi_i \quad (1.19)$$

où Φ_i désigne le flux sortant du fluide à travers la $i^{\text{ème}}$ sortie cônica \mathcal{C}_i (cf. (1.16)).

Remarque 3.3 Pour des raisons identiques à celles évoquées dans la remarque 3.2, le prolongement par zéro à l'extérieur de Ω de toute solution faible à énergie bornée (ρ, \mathbf{u}) du problème (1.1), (1.2), (1.5), (1.6)₂ est une solution de l'équation de continuité renormalisée (1.10) et ce pour toute fonction b de la classe (1.8), (1.9) et (1.11).

A ce stade, nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les deux principaux résultats de ce chapitre démontrés dans les prochaines sections.

Théorème 3.1 Soit Ω un domaine extérieur à frontière Lipschitzienne de \mathbb{R}^3 . On suppose (1.3), (1.4), $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in [L^1(\Omega)]^3 \cap [L^\infty(\Omega)]^3$ et $0 < \rho_\infty < \infty$. Alors il existe une solution faible à énergie bornée (ρ, \mathbf{u}) du problème (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6)₁.

Théorème 3.2 Soit Ω un domaine à n sorties côniques à frontière Lipschitzienne de \mathbb{R}^3 . On suppose (1.3), (1.4), $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in [L^1(\Omega)]^3 \cap [L^\infty(\Omega)]^3$ et $0 < \rho_n \leq \dots \leq \rho_1 < \infty$. Alors il existe une solution faible à énergie bornée (ρ, \mathbf{u}) du problème (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6)₂.

Dans la suite du chapitre, nous nous concentrons sur la preuve du théorème 3.2 qui est plus délicate et plus générale que celle du théorème 3.1. Nous en signalerons les adaptations nécessaires à la preuve du théorème 3.1.

Les théorèmes 3.1 et 3.2 généralisent le résultat obtenu par P.L. LIONS [46, Theorem 6.12] au cas de domaines extérieurs à frontière Lipschitzienne ainsi qu'à celui de domaines à plusieurs sorties côniques avec d'éventuelles différences de pression à l'infini. Le théorème 3.2 généralise également les résultats d'existence de solutions faibles des équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles de HEYWOOD [29], BORCHERS et SOHR [7], LADYZHENSKAYA et SOLONNIKOV [33, 34], PILECKAS [64], PILECKAS et SOLONNIKOV [65], aux équations de Navier-Stokes stationnaires, compressibles et barotropes en régime isentropique. Le lecteur intéressé par ce type de problème pourra *e.g.* consulter le livre de GALDI [22].

2 Planification de la preuve

La stratégie de la preuve du théorème 3.2 sera semblable à celle du théorème 2.1. Dans un premier temps, nous modifierons le système d'origine en ajoutant un terme de

pression artificielle dans l'équation (1.2). La principale raison de cette modification réside dans le fait que le théorème 3.2 peut être démontré sous l'hypothèse commode, mais non optimale, $\gamma \geq 4$. Nous considérerons donc le système d'équations suivant

$$\operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_\delta - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta + \nabla \{\rho_\delta^\gamma + \delta \rho_\delta^\beta\} = \rho_\delta \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}_\delta = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.3)$$

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \mathcal{C}_i}} \rho_\delta(x) = \rho_i > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{u}_\delta(x) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

où

$$\delta \in (0, 1] \quad \text{et} \quad \beta \geq \max(\gamma, 4). \quad (2.5)$$

Précisons la notion de solution faible à énergie bornée du système d'équations (2.1)-(2.4).

Définition 3.4 Soient les hypothèses du théorème 3.2 et (2.5). Une solution faible à énergie bornée du problème (2.1)-(2.4) est un couple de fonctions $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ satisfaisant

- (i) $\rho_\delta \in L_{loc}^{2\beta}(\mathbb{R}^3)$, $\rho_\delta \geq 0$ p.p dans Ω , $\rho_\delta = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ et $(\rho_\delta - \rho_i) \in L^3(\mathcal{C}_i^2) \cap L^{2\gamma}(\mathcal{C}_i^2)$, $i = 1, \dots, n$, $\mathbf{u}_\delta \in [D^{1,2}(\mathbb{R}^3)]^3$, $\mathbf{u}_\delta = \mathbf{0}$ p.p. dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$;
- (ii) l'équation de continuité (2.1) au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 ;
- (iii) l'équation de mouvement (2.2) au sens des distributions dans Ω ;
- (iv) l'inégalité d'énergie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \mu_1 |\nabla \mathbf{u}_\delta|^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_\delta)^2 \} dx &\leq \int_{\Omega} (\rho_\delta \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_\delta dx \\ &+ \sum_{i=2}^n \left\{ \frac{\gamma}{\gamma-1} (\rho_1^{\gamma-1} - \rho_i^{\gamma-1}) + \frac{\delta\beta}{\beta-1} (\rho_1^{\beta-1} - \rho_i^{\beta-1}) \right\} \Phi_{i,\delta} \end{aligned} \quad (2.6)$$

où $\Phi_{i,\delta}$ désigne le flux sortant du fluide à travers la $i^{\text{ème}}$ sortie cônica \mathcal{C}_i défini par

$$\Phi_{i,\delta} = \langle \tilde{\gamma}_\nu(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta), \xi|_{\partial\Omega_2} \rangle, \quad \xi \in \mathcal{B}_i. \quad (2.7)$$

Remarque 3.4 Une fois de plus, il est clair que toute solution faible à énergie bornée $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ du problème (2.1)-(2.4) est une solution de l'équation de continuité renormalisée

$$\operatorname{div}(b(\rho_\delta) \mathbf{u}_\delta) + \{ \rho_\delta b'(\rho_\delta) - b(\rho_\delta) \} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (2.8)$$

et ce pour toute fonction b de la classe (1.8), (1.9) et (1.11) avec β à la place de γ .

A la prochaine section, sous la condition $\beta \geq \max(\gamma, 4)$, nous prouverons l'existence de solutions faibles à énergie bornée du problème (2.1)-(2.4) par le biais des résultats obtenus dans le chapitre 2. Ainsi pour chaque $\delta \in (0, 1]$, nous serons donc assurés de l'existence d'au moins une solution des équations (2.1)-(2.4). Nous introduirons alors une suite $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\delta_n \rightarrow 0^+$ quand $n \rightarrow \infty$, et nous y associerons la suite $\{(\rho_{\delta_n}, \mathbf{u}_{\delta_n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de solutions faibles à énergie bornée correspondantes. Nous concluons la preuve du théorème en construisant une solution faible à énergie bornée du problème d'origine comme limite faible de la suite $\{(\rho_{\delta_n}, \mathbf{u}_{\delta_n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Cette procédure sera détaillée dans la section 4.2.

3 Solutions du système avec pression artificielle

Comme annoncé, cette section a pour but la démonstration de l'existence de solutions faibles à énergie bornée du problème (2.1)-(2.4). Pour ce faire, nous introduisons tout d'abord un nouveau problème qui, en accord avec les résultats obtenus au chapitre 2, donne lieu à une suite de solutions approchées. Le reste de la section est alors consacrée à l'examen de cette suite.

3.1 Approximation et localisation du problème

Comme au chapitre 2, nous relaxons le caractère hyperbolique dégénéré de l'équation de continuité $\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$ en nous intéressant à une équation du type $\alpha \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \alpha h$. Cette modification induit alors un changement dans l'équation de mouvement afin de récupérer une inégalité d'énergie convenable. Le problème obtenu est semblable à celui introduit à la section 2.2 du chapitre 2 et ne peut être directement résolu puisqu'ici Ω est un domaine non borné. En conséquence, nous l'étudions sur une suite croissante de domaines bornés à frontière Lipschitzienne $\{\Omega_R\}_{R>2}$. Plus exactement, nous nous intéressons au système d'équations suivant :

$$\alpha \rho_{\alpha,R} + \operatorname{div}(\rho_{\alpha,R} \mathbf{u}_{\alpha,R}) = \alpha h 1_{\Omega_R} \text{ dans } \Omega_R, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha h 1_{\Omega_R} \mathbf{u}_{\alpha,R} + \frac{3}{2} \alpha \rho_{\alpha,R} \mathbf{u}_{\alpha,R} + \operatorname{div}(\rho_{\alpha,R} \mathbf{u}_{\alpha,R} \otimes \mathbf{u}_{\alpha,R}) - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_{\alpha,R} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_{\alpha,R} \\ + \nabla \{ \rho_{\alpha,R}^\gamma + \delta \rho_{\alpha,R}^\beta \} = \rho_{\alpha,R} \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } \Omega_R, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}_{\alpha,R} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \Omega_R, \quad (3.3)$$

$$\int_{\Omega_R} \rho_{\alpha,R} dx = \int_{\Omega_R} h dx \quad (3.4)$$

dans lequel $\alpha \in (0, 1]$, $R > 2$ et $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction définie par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho_n & \text{si } x \in \Omega_1, \\ (\rho_i - \frac{1}{2} \rho_n) |x - s_i| + (\rho_n - \rho_i) & \text{si } x \in (\mathcal{C}_i)_1^2, \\ \rho_i & \text{si } x \in (\mathcal{C}_i)_2^2, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Clairement, $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ et satisfait

$$\forall x \in \Omega, \quad \frac{1}{2} \rho_n \leq h(x) \leq \rho_1, \quad \operatorname{supp} \nabla h \subset \Omega_1^2. \quad (3.5)$$

Remarquer que le problème (3.1)-(3.4) n'est ni plus ni moins qu'un cas particulier du problème (2.2.12)-(2.2.14) introduit lors de la démonstration du théorème 2.1. De ce fait, la proposition 2.2 dans laquelle on remplace Ω par Ω_R et h par $h 1_{\Omega_R}$ garantit que pour tout $\alpha \in (0, 1]$ et tout $R > 2$, il existe une paire de fonctions $(\rho_{\alpha,R}, \mathbf{u}_{\alpha,R})$ qui possède les propriétés suivantes :

- (i) $\rho_{\alpha,R} \in L^{2\beta}(\mathbb{R}^3)$, $\rho_{\alpha,R} \geq 0$ p.p. dans Ω_R , $\rho_{\alpha,R} = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_R$ et satisfait (3.4), $\mathbf{u}_{\alpha,R} \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$, $\mathbf{u}_{\alpha,R} = \mathbf{0}$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_R$;

(ii) l'équation de continuité (3.1) est satisfaite au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 . Il en est de même de l'équation de continuité renormalisée, *i.e.* de l'équation

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(b(\rho_{\alpha,R})\mathbf{u}_{\alpha,R}) + \{\rho_{\alpha,R}b'(\rho_{\alpha,R}) - b(\rho_{\alpha,R})\} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\alpha,R} \\ & = \alpha(h1_{\Omega_R} - \rho_{\alpha,R})b'(\rho_{\alpha,R}) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \quad (3.6)$$

pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ satisfaisant (1.9), (1.11) avec β à la place de γ ;

(iii) l'équation de mouvement (3.2) est satisfaite au sens des distributions dans Ω_R ;

(iv) $(\rho_{\alpha,R}, \mathbf{u}_{\alpha,R})$ satisfait l'inégalité d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega_R} (h + \rho_{\alpha,R})|\mathbf{u}_{\alpha,R}|^2 dx + \int_{\Omega_R} \{\mu_1|\nabla \mathbf{u}_{\alpha,R}|^2 + (\mu_1 + \mu_2)(\operatorname{div} \mathbf{u}_{\alpha,R})^2\} dx \\ & + \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} - h)(\rho_{\alpha,R}^{\gamma-1} - h^{\gamma-1}) dx + \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} - h)(\rho_{\alpha,R}^{\beta-1} - h^{\beta-1}) dx \\ & \leq \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R}\mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha,R} dx \\ & + \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} \int_{\Omega_R} (h - \rho_{\alpha,R})h^{\gamma-1} dx + \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \int_{\Omega_R} (h - \rho_{\alpha,R})h^{\beta-1} dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2 Estimations indépendantes des paramètres

Ici, nous travaillons sur la suite de solutions approchées $\{(\rho_{\alpha,R}, \mathbf{u}_{\alpha,R})\}_{(\alpha,R) \in (0,1] \times (2,\infty)}$ dont les propriétés sont listées ci-dessus. En particulier, nous démontrons que certaines normes L^p faisant intervenir les fonctions $\rho_{\alpha,R}$, $\mathbf{u}_{\alpha,R}$ et h sont uniformément bornées par rapport au paramètre de relaxation α et au paramètre R . Soulignons au passage que c'est à ce moment de la preuve du théorème 3.2 que l'hypothèse $\beta \geq 4$ va intervenir.

Au vu des propriétés (3.5) de la fonction h , l'équation de mouvement (3.2) testée par une fonction $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega_R)]^3$ s'écrit :

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega_R} \left(\frac{1}{2}h + \frac{3}{2}\rho_{\alpha,R}\right)\mathbf{u}_{\alpha,R} \cdot \varphi dx + \int_{\Omega_R} \{\mu_1 \nabla \mathbf{u}_{\alpha,R} : \nabla \varphi + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_{\alpha,R} \operatorname{div} \varphi\} dx \\ & - \int_{\Omega_R} \rho_{\alpha,R} \mathbf{u}_{\alpha,R} \otimes \mathbf{u}_{\alpha,R} : \nabla \varphi dx - \int_{\Omega_R} \{(\rho_{\alpha,R}^{\gamma} - h^{\gamma}) + \delta(\rho_{\alpha,R}^{\beta} - h^{\beta})\} \operatorname{div} \varphi dx \\ & + \int_{\Omega_1^2} \nabla(h^{\gamma} + \delta h^{\beta}) \cdot \varphi dx = \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R}\mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \varphi dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

En conséquence, puisque $\rho_{\alpha,R} \in L^{2\beta}(\Omega_R)$, $\mathbf{u}_{\alpha,R} \in [H_0^1(\Omega_R)]^3$ et $h \in W^{1,\infty}(\Omega_R)$, il est clair que par densité (3.8) est encore vraie pour toute fonction test $\varphi \in [H_0^1(\Omega_R)]^3$.

Penchons nous maintenant sur l'inégalité d'énergie (3.7) et plus particulièrement sur son membre de droite. Tout d'abord, en accord avec les inégalités de Hölder, de Sobolev

et de Young, pour $\zeta, \zeta' > 0$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha,R} dx \\
= & \int_{\Omega_R} [(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} \leq 2h\}} + h] \mathbf{f} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_{\alpha,R} dx + \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_{\alpha,R} dx \\
& \leq \{(2\rho_1 + 1)(\|\mathbf{f}\|_{0, \frac{6}{5}} + \|\mathbf{g}\|_{0, \frac{6}{5}}) + \|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0, \beta} \|\mathbf{f}\|_{0, \frac{6\beta}{5\beta-6}}\} \|\mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,6} \\
& \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g})(1 + \|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0, \beta}) \|\nabla \mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2} \\
& \leq c(\zeta, \mathbf{f}, \mathbf{g})(1 + \|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0, \beta}^2) + \zeta \|\nabla \mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2}^2 \\
& \leq \zeta' \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0, \beta}^\beta + \zeta \|\nabla \mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2}^2 + c(\zeta, \zeta', \delta, \mathbf{f}, \mathbf{g})(1 + \alpha^{-\frac{2}{\beta-2}}).
\end{aligned}$$

D'autre part, étant donné que l'équation de continuité (3.1) est satisfaite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, à l'aide des propriétés de la fonction h et d'un argument de régularisation standard, il n'est pas très difficile de vérifier que

$$\alpha \int_{\Omega_R} (h - \rho_{\alpha,R}) h^{s-1} dx = -(s-1) \int_{\Omega_R} \rho_{\alpha,R} \mathbf{u}_{\alpha,R} \cdot (h^{s-2} \nabla h) dx \quad s = \gamma, \beta. \quad (3.9)$$

Par ailleurs, en utilisant une fois encore les inégalités de Hölder, de Sobolev et de Young, on peut estimer l'intégrale de droite de (3.9) comme-suit :

$$\begin{aligned}
& -(s-1) \int_{\Omega_R} \rho_{\alpha,R} \mathbf{u}_{\alpha,R} \cdot (h^{s-2} \nabla h) dx \\
= & -(s-1) \int_{\Omega_R} \{(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} \leq 2h\}} + h + (\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\} \mathbf{u}_{\alpha,R} \cdot (h^{s-2} \nabla h) dx \\
& \leq 2(s-1)(\rho_1)^{s-1} \|\nabla h\|_{0, \frac{6}{5}, \Omega_1^2} \|\mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,6} \\
& \quad + (s-1)(\rho_1)^{s-2} \|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0, \beta} \|\nabla h\|_{0, \frac{6\beta}{5\beta-6}, \Omega_1^2} \|\mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,6} \\
& \leq \zeta' \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0, \beta}^\beta + \zeta \|\nabla \mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2}^2 + c(\zeta, \zeta', \delta)(1 + \alpha^{-\frac{2}{\beta-2}}).
\end{aligned}$$

Ainsi, nous venons de prouver que le membre de droite de l'inégalité d'énergie (3.7) peut être majoré par

$$2\zeta' \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0, \beta}^\beta + 2\zeta \|\nabla \mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2}^2 + c(\zeta, \zeta', \delta, \mathbf{f}, \mathbf{g})(1 + \alpha^{-\frac{2}{\beta-2}}). \quad (3.10)$$

Par suite, choisissant *e.g.* $\zeta = \frac{\mu_1}{12}$ et $\zeta' = \frac{1}{4}$, à l'aide des équivalences

$$\begin{aligned}
c_0 |\rho_{\alpha,R} - h| 1_{\{\rho_{\alpha,R} \leq 2h\}} & \leq |\rho_{\alpha,R}^s - h^s| 1_{\{\rho_{\alpha,R} \leq 2h\}} \leq c_1 |\rho_{\alpha,R} - h| 1_{\{\rho_{\alpha,R} \leq 2h\}}, \\
(\rho_{\alpha,R} - h)^s 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}} & \leq (\rho_{\alpha,R}^s - h^s) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}} \leq c_2 (\rho_{\alpha,R} - h)^s 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}, \quad s > 1, \\
0 < c_0 < c_1 < \infty, \quad c_2 = 2^s - 1 > 1, \quad s > 1
\end{aligned} \quad (3.11)$$

avec $s = \gamma - 1, \beta - 1$ et d'après les hypothèses (1.3), $\beta \geq \max(\gamma, 4)$, l'insertion de la borne (3.10) dans l'inégalité d'énergie (3.7) induit l'inégalité :

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 (\|\rho_{\alpha,R} |\mathbf{u}_{\alpha,R}|^2\|_{0,1} + \|h |\mathbf{u}_{\alpha,R}|^2\|_{0,1}) + \alpha \|\nabla \mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2}^2 + \alpha^2 \|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} \leq 2h\}}\|_{0,2}^2 \\
& \quad + \alpha^2 \|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,s}^s \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g})(1 + \alpha^{\frac{\beta-4}{\beta-2}}) \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad s = \gamma, \beta.
\end{aligned}$$

On en déduit aisément que

$$\alpha^2(\|\rho_{\alpha,R}|\mathbf{u}_{\alpha,R}|^2\|_{0,1} + \|h|\mathbf{u}_{\alpha,R}|^2\|_{0,1}) + \alpha\|\nabla\mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2}^2 \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad (3.12)$$

$$\alpha^2\|(\rho_{\alpha,R} - h)\|_{0,2}^2 \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \alpha^2\|(\rho_{\alpha,R} - h)\|_{0,s}^s \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad s = \gamma, \beta. \quad (3.13)$$

En effet, lorsque $s \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \alpha^2 \int_{\Omega_R} |\rho_{\alpha,R} - h|^s 1_{\{\rho_{\alpha,R} \leq 2h\}} dx &\leq (\rho_1)^{s-2} \alpha^2 \int_{\Omega_R} |\rho_{\alpha,R} - h|^2 1_{\{\rho_{\alpha,R} \leq 2h\}} dx, \\ \alpha^2 \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} - h)^2 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}} dx &\leq \left(\frac{2}{\rho_n}\right)^{2-s} \alpha^2 \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} - h)^s 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}} dx. \end{aligned}$$

Revenons un instant sur le membre de droite de l'inégalité d'énergie (3.7). Par des arguments semblables à ceux présentés auparavant, il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha,R} dx &\leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g})(1 + \|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta})^2 + \frac{\mu_1}{12} \|\nabla\mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2}^2, \\ \alpha \int_{\Omega_R} (h - \rho_{\alpha,R})h^{s-1} dx &\leq c(1 + \|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta})^2 + \frac{\mu_1}{12} \|\nabla\mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2}^2, \quad s = \gamma, \beta. \end{aligned}$$

Insérant alors ces majorations dans l'inégalité (3.7), il en découle que

$$\|\nabla\mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g})(1 + \|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta}). \quad (3.14)$$

A ce stade, remarquer que la fonction

$$\varphi = \mathcal{B}_{\Omega_R} \left\{ (\rho_{\alpha,R} - h)^\beta 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}} - \frac{1}{|\Omega_R|} \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} - h)^\beta 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}} dy \right\}$$

est une fonction admissible dans l'identité (3.8), \mathcal{B}_{Ω_R} désignant l'opérateur introduit dans le lemme B.8. Rappelons que d'après ce lemme, pour tout $q \in (1, 2]$, $\varphi \in [W_0^{1,q}(\Omega_R)]^3$ et satisfait l'inégalité

$$\|\nabla\varphi\|_{0,q,\Omega_R} \leq c\|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,q\beta,\Omega_R}^\beta \quad (3.15)$$

dans laquelle la constante c ne dépend ni de α ni de R . Avec cette fonction φ , (3.8) s'écrit

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_R} \{(\rho_{\alpha,R}^\gamma - h^\gamma) + \delta(\rho_{\alpha,R}^\beta - h^\beta)\} (\rho_{\alpha,R} - h)^\beta 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}} dx \\ &= \int_{\Omega_R} \{(\rho_{\alpha,R}^\gamma - h^\gamma) + \delta(\rho_{\alpha,R}^\beta - h^\beta)\} dx \times \frac{1}{|\Omega_R|} \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} - h)^\beta 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}} dy \\ &+ \alpha \int_{\Omega_R} \left(\frac{1}{2}h + \frac{3}{2}\rho_{\alpha,R}\right) \mathbf{u}_{\alpha,R} \cdot \varphi dx + \int_{\Omega_R} \{\mu_1 \nabla\mathbf{u}_{\alpha,R} : \nabla\varphi + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_{\alpha,R} \operatorname{div} \varphi\} dx \\ &\quad - \int_{\Omega_R} \rho_{\alpha,R} \mathbf{u}_{\alpha,R} \otimes \mathbf{u}_{\alpha,R} : \nabla\varphi dx + \int_{\Omega_1^2} \nabla(h^\gamma + \delta h^\beta) \cdot \varphi dx \\ &\quad - \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \varphi dx = \sum_{k=1}^6 I_k. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Commençons par majorer le premier terme de cette somme. En accord avec les estimations (3.13) et l'inégalité de Hölder, on trouve que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\Omega_R|} \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} - h)^\beta 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}} dy \leq \frac{c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g})}{\alpha^2 |\Omega_R|}, \\ \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R}^s - h^s) dx & \leq c \left(\int_{\Omega_R} |\rho_{\alpha,R} - h| 1_{\{\rho_{\alpha,R} \leq 2h\}} dx + \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} - h)^s 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}} dx \right) \\ & \leq c(|\Omega_R|^{\frac{1}{2}} \|\rho_{\alpha,R} - h\|_{0,2} + \|\rho_{\alpha,R} - h\|_{0,s}^s) \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \left(\frac{|\Omega_R|^{\frac{1}{2}}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que

$$|I_1| \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \left(\frac{1}{\alpha^3 |\Omega_R|^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\alpha^4 |\Omega_R|} \right).$$

En ce qui concerne le terme suivant, des inégalités de Hölder et de Sobolev complétées par les estimations (3.12), il vient que

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{3}{2} \alpha \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} - h) (1_{\{\rho_{\alpha,R} \leq 2h\}} + 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}) \mathbf{u}_{\alpha,R} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx + 2\alpha \int_{\Omega_R} h \mathbf{u}_{\alpha,R} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx, \\ &\leq \frac{7}{2} \alpha \int_{\Omega_R} h |\mathbf{u}_{\alpha,R}| |\boldsymbol{\varphi}| dx + \frac{3}{2} \alpha \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta} \|\mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{0, \frac{2\beta}{\beta-1}} \\ &\leq \frac{7}{2} (\rho_1)^{\frac{1}{2}} \alpha \|h |\mathbf{u}_{\alpha,R}|^2\|_{0,1}^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{0,2} + c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta} \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{0, \frac{6\beta}{5\beta-3}} \\ &\leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) (\|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{0, \frac{6}{5}} + \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta} \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{0, \frac{6\beta}{5\beta-3}}). \end{aligned}$$

Par suite, par l'intermédiaire de (3.15) et de l'observation, aisément vérifiable,

$$\|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,s\beta}^\beta \leq \left(\frac{2}{\rho_n} \right)^{\frac{2-s}{s}\beta} \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta}^{\frac{2\beta}{s}}, \quad s \in (1, 2], \quad (3.17)$$

on en déduit finalement que

$$|I_2| \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta}^{\frac{5}{3}\beta}.$$

Pour majorer le terme I_3 , on peut *e.g.* utiliser l'inégalité de Schwarz et les estimations (3.14), (3.15). En effet, on a

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq c \|\nabla \mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2} \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{0,2} \\ &\leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) (1 + \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta}) \times \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta}^\beta \\ &\leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) (\|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta}^\beta + \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta}^{\beta+1}). \end{aligned}$$

Les inégalités de Hölder et de Sobolev ainsi que les estimations (3.14), (3.15) et (3.17) constituent la justification de la chaîne d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned}
|I_4| &\leq c \int_{\Omega_R} |\mathbf{u}_{\alpha,R} \otimes \mathbf{u}_{\alpha,R} : \nabla \varphi| dx + \int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}} |\mathbf{u}_{\alpha,R} \otimes \mathbf{u}_{\alpha,R} : \nabla \varphi| dx \\
&\leq c \|\mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,6}^2 \|\nabla \varphi\|_{0,\frac{3}{2}} + \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta} \|\mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,6}^2 \|\nabla \varphi\|_{0,\frac{6\beta}{4\beta-3}} \\
&\leq c \|\nabla \mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2}^2 \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,\frac{3}{2}\beta}^\beta \\
&\quad + c \|\nabla \mathbf{u}_{\alpha,R}\|_{0,2} \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta} \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,\frac{6\beta^2}{4\beta-3}}^\beta \\
&\leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) (1 + \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta})^2 \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta}^{\frac{4}{3}\beta}.
\end{aligned}$$

Ensuite, les propriétés (3.5) de la fonction h , les inégalités de Hölder et de Sobolev et l'estimation (3.15) garantissent que

$$|I_5| \leq 2 \max_{s=\gamma,\beta} (\rho_1)^{s-1} \|\nabla h\|_{0,\frac{6}{5},\Omega_1^2} \|\varphi\|_{0,6} \leq c \|\nabla \varphi\|_{0,2} \leq c \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta}^\beta.$$

Enfin, en utilisant de nouveau les inégalités de Hölder et de Sobolev puis (3.15), on trouve que

$$\begin{aligned}
|I_6| &\leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) (1 + \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta}) \|\nabla \varphi\|_{0,2} \\
&\leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) (\|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta}^\beta + \|(\rho_{\alpha,R} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,2\beta}^{\beta+1}).
\end{aligned}$$

Ceci étant, on insère les estimations des termes I_k , $k = 1, \dots, 6$, dans (3.16) et à l'aide de l'inégalité de Young, on conclut à

$$\int_{\Omega_R} (\rho_{\alpha,R} - h)^{2\beta} 1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}} dx \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \left(1 + \frac{1}{\alpha^3 |\Omega_R|^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\alpha^4 |\Omega_R|} \right).$$

Noter alors que si l'on choisit $R \equiv R(\alpha) = \alpha^{-2}$, cette estimation induit la suivante :

$$\|(\rho_{\alpha,R(\alpha)} - h) 1_{\{\rho_{\alpha,R(\alpha)} > 2h\}}\|_{0,2\beta,\Omega_{R(\alpha)}} \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}). \quad (3.18)$$

En accord avec (3.14), il en découle alors la borne

$$\|\nabla \mathbf{u}_{\alpha,R(\alpha)}\|_{0,2,\Omega_{R(\alpha)}} \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}). \quad (3.19)$$

Avec les estimations (3.18) et (3.19) à l'esprit et en accord avec les majorations précédant (3.14), il est facile de vérifier que le membre de droite de l'inégalité d'énergie (3.7) est borné par une constante $c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ qui ne dépend que de δ de \mathbf{f} et de \mathbf{g} . De cette nouvelle information, en particulier il vient que

$$\alpha (\|\rho_{\alpha,R(\alpha)} |\mathbf{u}_{\alpha,R(\alpha)}|^2\|_{0,1} + \|h |\mathbf{u}_{\alpha,R(\alpha)}|^2\|_{0,1}) \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad (3.20)$$

$$\alpha \|(\rho_{\alpha,R(\alpha)} - h)\|_{0,2}^2 \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \alpha \|(\rho_{\alpha,R(\alpha)} - h)\|_{0,s}^s \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad s = \gamma, \beta. \quad (3.21)$$

A partir de maintenant, on pose $R \equiv R(\alpha) = \alpha^{-2}$ et, pour plus de clarté, on utilise les notations Ω_R et $(\rho_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)$ au lieu des notations $\Omega_{R(\alpha)}$ et $(\rho_{\alpha,R(\alpha)}, \mathbf{u}_{\alpha,R(\alpha)})$. Soit θ un

réel strictement positif qui sera fixé ultérieurement de manière à ce qu'il soit optimal. Clairement, la fonction

$$\varphi = \mathcal{B}_{\Omega_R} \left\{ \operatorname{sgn}(\rho_\alpha - h) |\rho_\alpha - h|^\theta 1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}} - \frac{1}{|\Omega_R|} \int_{\Omega_R} \operatorname{sgn}(\rho_\alpha - h) |\rho_\alpha - h|^\theta 1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}} dy \right\}$$

est une fonction admissible dans l'identité (3.8). Par ailleurs, d'après le lemme B.8, pour tout $q \in (\max(\frac{1}{\theta}, 1), \frac{2\beta}{\theta}]$, $\varphi \in [W_0^{1,q}(\Omega_R)]^3$ et satisfait l'inégalité

$$\|\nabla \varphi\|_{0,q,\Omega_R} \leq c \|(\rho_\alpha - h) 1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,q\theta,\Omega_R}^\theta$$

dans laquelle c ne dépend pas de α . En outre, lorsque $2 \leq q\theta < 1 + \theta$, en interpolant $L^{q\theta}(\Omega_R)$ entre $L^2(\Omega_R)$ et $L^{1+\theta}(\Omega_R)$, on peut préciser celle-ci en écrivant

$$\|\nabla \varphi\|_{0,q,\Omega_R} \leq c \|(\rho_\alpha - h) 1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,2,\Omega_R}^{\lambda\theta} \|(\rho_\alpha - h) 1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,1+\theta,\Omega_R}^{(1-\lambda)\theta}, \quad \frac{1}{q\theta} = \frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{1+\theta}. \quad (3.22)$$

D'autre part, lorsque $1 + \theta \leq q\theta$, les propriétés (3.5) de la fonction h impliquent que

$$\|\nabla \varphi\|_{0,q,\Omega_R} \leq c(\rho_1)^{\frac{q\theta - (1+\theta)}{q}} \|(\rho_\alpha - h) 1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,1+\theta,\Omega_R}^{\frac{1+\theta}{q}}. \quad (3.23)$$

Pour cette fonction φ , l'identité (3.8) s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R} (|\rho_\alpha^\gamma - h^\gamma| + \delta |\rho_\alpha^\beta - h^\beta|) |\rho_\alpha - h|^\theta 1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}} dx \\ &= \int_{\Omega_R} \{(\rho_\alpha^\gamma - h^\gamma) + \delta(\rho_\alpha^\beta - h^\beta)\} dx \times \frac{1}{|\Omega_R|} \int_{\Omega_R} \operatorname{sgn}(\rho_\alpha - h) |\rho_\alpha - h|^\theta 1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}} dy \\ &+ \alpha \int_{\Omega_R} \left(\frac{1}{2}h + \frac{3}{2}\rho_\alpha\right) \mathbf{u}_\alpha \cdot \varphi dx + \int_{\Omega_R} \{\mu_1 \nabla \mathbf{u}_\alpha : \nabla \varphi + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha \operatorname{div} \varphi\} dx \\ &- \int_{\Omega_R} \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha : \nabla \varphi dx + \int_{\Omega_1^2} \nabla(h^\gamma + \delta h^\beta) \cdot \varphi dx - \int_{\Omega_R} (\rho_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \varphi dx = \sum_{k=1}^6 I_k. \end{aligned}$$

Expliquons brièvement comment majorer chacun des termes I_k , $k = 1, \dots, 6$. Sous la condition $\theta \in [2, \beta)$, en interpolant $L^\theta(\Omega_R)$ entre $L^2(\Omega_R)$ et $L^\beta(\Omega_R)$, on trouve que

$$\int_{\Omega_R} |\rho_\alpha - h|^\theta 1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}} dy \leq \|(\rho_\alpha - h) 1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,2}^{\tilde{\lambda}\theta} \times \|(\rho_\alpha - h) 1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,\beta}^{(1-\tilde{\lambda})\theta}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{2(\beta - \theta)}{\theta(\beta - 2)}.$$

En conséquence, au vu des estimations (3.21), il est clair que

$$\frac{1}{|\Omega_R|} \int_{\Omega_R} |\rho_\alpha - h|^\theta 1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}} dy \leq \frac{c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g})}{|\Omega_R| \alpha^{\frac{\tilde{\lambda}\theta}{2} + \frac{1}{\beta}(1-\tilde{\lambda})\theta}}.$$

Par ailleurs, l'inégalité de Hölder, complétée une fois encore par les estimations (3.13) nous permet d'affirmer que

$$\int_{\Omega_R} |\rho_\alpha^s - h^s| dx \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \left(\frac{|\Omega_R|^{\frac{1}{2}}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right), \quad s = \gamma, \beta.$$

Des deux dernières inégalités résulte alors la suivante

$$|I_1| \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \left(\frac{1}{|\Omega_R|^{\frac{1}{2}} \alpha^{1 + \frac{\lambda\theta}{2} + \frac{1}{\beta}(1-\tilde{\lambda})\theta}} + \frac{1}{|\Omega_R| \alpha^{2 + \frac{\lambda\theta}{2} + \frac{1}{\beta}(1-\tilde{\lambda})\theta}} \right).$$

Ensuite, sous les conditions $2 \leq \frac{6}{5}\theta < 1 + \theta \leq \frac{3}{2}\theta$, *i.e.* $2 \leq \theta \leq 5$, la combinaison des inégalités de Hölder, de Sobolev, des estimations (3.19)-(3.21) et des propriétés (3.22), $q = \frac{6}{5}$, et (3.23), $q = \frac{3}{2}$, de la fonction φ , assure que

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega_R} \left(\frac{1}{2}h + \frac{3}{2}\rho_\alpha \right) \mathbf{u}_\alpha \cdot \varphi \, dx &= \frac{3}{2}\alpha \int_{\Omega_R} (\rho_\alpha - h) \mathbf{u}_\alpha \cdot \varphi \, dx + 2\alpha \int_{\Omega_R} h \mathbf{u}_\alpha \cdot \varphi \, dx \\ &\leq c\alpha \|\rho_\alpha - h\|_{0,2} \|\mathbf{u}_\alpha\|_{0,6} \|\varphi\|_{0,3} + 2(\rho_1)^{\frac{1}{2}} \alpha \|h|\mathbf{u}_\alpha|^2\|_{0,1}^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{0,2} \\ &\leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \alpha^{\frac{1}{2}} (\|\nabla \mathbf{u}_\alpha\|_{0,2} \|\nabla \varphi\|_{0,\frac{3}{2}} + \|\nabla \varphi\|_{0,\frac{6}{5}}) \\ &\leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) (\|(\rho_\alpha - h)1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,1+\theta}^{\frac{2}{3}(1+\theta)} + \alpha^{\frac{1}{2}} \|(\rho_\alpha - h)1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,2}^{\lambda\theta} \|(\rho_\alpha - h)1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,1+\theta}^{(1-\lambda)\theta}) \end{aligned}$$

où ici $\frac{5}{6\theta} = \frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{1+\theta}$ *i.e.* $\lambda = \frac{10-2\theta}{6\theta(\theta-1)}$. En conséquence, sous la condition $\lambda\theta \leq 1$ *i.e.* $\theta \geq 2$, (3.21) permet de conclure que

$$|I_2| \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) (\|(\rho_\alpha - h)1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,1+\theta}^{(1-\lambda)\theta} + \|(\rho_\alpha - h)1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,1+\theta}^{\frac{2}{3}(1+\theta)}), \quad \lambda = \frac{10-2\theta}{6\theta(\theta-1)}.$$

D'après l'inégalité de Schwarz, la borne (3.19) et (3.23) avec $q = 2$, on a

$$|I_3| \leq c \|\nabla \mathbf{u}_\alpha\|_{0,2} \|\nabla \varphi\|_{0,2} \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \|(\rho_\alpha - h)1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,1+\theta}^{\frac{(1+\theta)}{2}}.$$

Puisque $\beta \geq 4$, sous la condition $1 + \theta \geq \frac{3}{2}\theta$ *i.e.* $\theta \geq 1$, la succession d'inégalités

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq c \|\mathbf{u}_\alpha\|_{0,6}^2 \|\nabla \varphi\|_{0,\frac{3}{2}} + \|(\rho_\alpha - h)1_{\{\rho_\alpha > 2h\}}\|_{0,6} \|\mathbf{u}_\alpha\|_{0,6}^2 \|\nabla \varphi\|_{0,2} \\ &\leq c \|\mathbf{u}_\alpha\|_{0,6}^2 \|\nabla \varphi\|_{0,\frac{3}{2}} + c \|(\rho_\alpha - h)1_{\{\rho_\alpha > 2h\}}\|_{0,2\beta}^{\frac{\beta}{3}} \|\mathbf{u}_\alpha\|_{0,6}^2 \|\nabla \varphi\|_{0,2} \\ &\leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \left(\|(\rho_\alpha - h)1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,1+\theta}^{\frac{2}{3}(1+\theta)} + \|(\rho_\alpha - h)1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,1+\theta}^{\frac{(1+\theta)}{2}} \right). \end{aligned}$$

est aisément justifiée par les inégalités de Hölder, de Sobolev et la propriété (3.23), $q = \frac{3}{2}$, 2, de la fonction φ . Les propriétés (3.5) de la fonction h , ajoutées à des arguments similaires, impliquent que

$$|I_5| \leq 2 \max_{s=\gamma,\beta} (\rho_1)^{s-1} \|\nabla h\|_{0,\frac{6}{5},\Omega_1^2} \|\varphi\|_{0,6} \leq c \|\nabla \varphi\|_{0,2} \leq c \|(\rho_{\alpha,R} - h)1_{\{\rho_{\alpha,R} > 2h\}}\|_{0,1+\theta}^{\frac{(1+\theta)}{2}}.$$

Pour terminer, par des arguments déjà utilisés à de nombreuses reprises et sous la condition $1 + \theta \leq 2\theta$ *i.e.* $\theta \geq 1$, on a

$$|I_6| \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) (1 + \|(\rho_\alpha - h)1_{\{\rho_\alpha > 2h\}}\|_{0,2\beta}) \|\nabla \varphi\|_{0,2} \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \|(\rho_\alpha - h)1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,1+\theta}^{\frac{1+\theta}{2}}.$$

Noter alors qu'au vu des conditions imposées à θ , il s'avère que le choix optimal est $\theta = 2$. Ainsi, des estimations des termes I_k , $k = 1, \dots, 6$, il vient que

$$\|(\rho_\alpha - h)1_{\{\rho_\alpha \leq 2h\}}\|_{0,3,\Omega_R} \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}). \quad (3.24)$$

Finalement, remarquer que (3.18), (3.19) et (3.24) ont pour conséquences directes les bornes :

$$\begin{aligned} \|(\rho_\alpha - h)\|_{0,3,\Omega_R} &\leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \|(\rho_\alpha - h)\|_{0,2\gamma,\Omega_R} \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \\ \|\nabla \mathbf{u}_\alpha\|_{0,2,\Omega_R} &\leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad R = R(\alpha) = \alpha^{-2}. \end{aligned}$$

Résumons la situation actuelle.

Lemme 3.1 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine à n sorties côniques à frontière Lipschitzienne, $\alpha \in (0, 1]$ tel que $R = R(\alpha) = \alpha^{-2} \in (2, \infty)$. Alors il existe une paire de fonctions $(\rho_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)$ satisfaisant*

- (i) $\rho_\alpha \in L^{2\beta}(\mathbb{R}^3)$, $\rho_\alpha \geq 0$ p.p. dans Ω_R , $\rho_\alpha = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_R$, $\mathbf{u}_\alpha \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$, $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{0}$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_R$ et

$$\int_{\Omega_R} \rho_\alpha dx = \int_{\Omega_R} h dx ; \quad (3.25)$$

- (ii) les équations

$$\operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = \alpha(h1_{\Omega_R} - \rho_\alpha) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) ; \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha h1_{\Omega_R} \mathbf{u}_\alpha + \frac{3}{2}\alpha \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_\alpha - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha) \\ + \nabla \{\rho_\alpha^\gamma + \delta \rho_\alpha^\beta\} = \rho_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega_R)]^3, \end{aligned} \quad (3.27)$$

- (iii) pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ satisfaisant (1.9) et (1.11) avec β à la place de γ , l'équation de continuité renormalisée

$$\operatorname{div}(b(\rho_\alpha) \mathbf{u}_\alpha) + \{\rho_\alpha b'(\rho_\alpha) - b(\rho_\alpha)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha = \alpha(h1_{\Omega_R} - \rho_\alpha) b'(\rho_\alpha) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (3.28)$$

- (iv) l'inégalité d'énergie

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega_R} (h + \rho_\alpha) |\mathbf{u}_\alpha|^2 dx + \int_{\Omega_R} \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}_\alpha|^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha)^2\} dx \\ + \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} \int_{\Omega_R} (\rho_\alpha - h) (\rho_\alpha^{\gamma-1} - h^{\gamma-1}) dx + \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \int_{\Omega_R} (\rho_\alpha - h) (\rho_\alpha^{\beta-1} - h^{\beta-1}) dx \\ \leq \int_{\Omega_R} (\rho_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_\alpha dx + \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} \int_{\Omega_R} (h - \rho_\alpha) h^{\gamma-1} dx + \frac{\delta\beta\alpha}{\beta-1} \int_{\Omega_R} (h - \rho_\alpha) h^{\beta-1} dx ; \end{aligned} \quad (3.29)$$

- (v) les estimations uniformes par rapport à α

$$\|(\rho_\alpha - h)\|_{0,3,\Omega_R} \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \|(\rho_\alpha - h)\|_{0,2\gamma,\Omega_R} \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad (3.30)$$

$$\|\nabla \mathbf{u}_\alpha\|_{0,2,\Omega_R} \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}). \quad (3.31)$$

3.3 Introduction des flux dans l'inégalité d'énergie

Dans ce paragraphe, nous donnons une écriture de $\int_{\Omega_R} (h - \rho_\alpha) h^{s-1} dx$, $s = \gamma, \beta$, faisant intervenir les flux sortant $\Phi_{i,\alpha}$ du fluide à travers chaque sortie cônica \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, n$, qui, rappelons le, d'après (1.16), sont définis par

$$\Phi_{i,\alpha} = \langle \tilde{\gamma}_\nu(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha), \xi|_{\partial\Omega_2} \rangle, \quad \xi \in \mathcal{B}_i. \quad (3.32)$$

A l'aide de l'équation (3.26), des propriétés (3.5) de la fonction h , de la formule de Stokes (1.14) et des identités (1.17), (1.18) dans lesquelles $S > R$, $\rho = \rho_\alpha$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha$ et $f = \alpha(h - \rho_\alpha)$, on a

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega_2^R} (h - \rho_\alpha) h^{s-1} dx &= \sum_{i=1}^n \rho_i^{s-1} \int_{(\mathcal{C}_i)_2^R} \alpha(h - \rho_\alpha) dx = \sum_{i=1}^n \rho_i^{s-1} \int_{(\mathcal{C}_i)_2^R} \alpha(h - \rho_\alpha) \xi_i dx \\ &= \sum_{i=1}^n \rho_i^{s-1} \int_{(\mathcal{C}_i)_2^S} \alpha(h 1_{\Omega_R} - \rho_\alpha) \xi_i dx = \sum_{i=1}^n \rho_i^{s-1} \int_{(\mathcal{C}_i)_2^S} \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) \xi_i dx \\ &= \sum_{i=1}^n \rho_i^{s-1} \langle \gamma_{\nu,i}^S(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha), \xi_i|_{\partial(\mathcal{C}_i)_2^S} \rangle = \sum_{i=2}^n (\rho_1^{s-1} - \rho_i^{s-1}) \Phi_{i,\alpha} - \rho_1^{s-1} \sum_{i=1}^n \Phi_{i,\alpha} \\ &= \sum_{i=2}^n (\rho_1^{s-1} - \rho_i^{s-1}) \Phi_{i,\alpha} + \alpha \rho_1^{s-1} \int_{\Omega_2} (\rho_\alpha - h) dx, \quad s = \gamma, \beta, \quad \xi_i \in \mathcal{A}_i^S, \quad \xi_i = 1 \text{ dans } (\mathcal{C}_i)_2^R. \end{aligned}$$

En conséquence, on peut écrire que

$$\alpha \int_{\Omega_{R(\alpha)}} (h - \rho_\alpha) h^{s-1} dx = \sum_{i=2}^n (\rho_1^{s-1} - \rho_i^{s-1}) \Phi_{i,\alpha} + \alpha \int_{\Omega_2} (\rho_\alpha - h) (\rho_1^{s-1} - h^{s-1}) dx, \quad s = \gamma, \beta.$$

Cette information insérée dans l'inégalité d'énergie (3.29), nous permet de réécrire celle-ci de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\alpha \int_{\Omega_R} (h + \rho_\alpha) |\mathbf{u}_\alpha|^2 dx + \int_{\Omega_R} \{ \mu_1 |\nabla \mathbf{u}_\alpha|^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha)^2 \} dx \\ &+ \frac{\gamma \alpha}{\gamma - 1} \int_{\Omega_R} (\rho_\alpha - h) (\rho_\alpha^{\gamma-1} - h^{\gamma-1}) dx + \frac{\delta \beta \alpha}{\beta - 1} \int_{\Omega_R} (\rho_\alpha - h) (\rho_\alpha^{\beta-1} - h^{\beta-1}) dx \\ &\leq \int_{\Omega_R} (\rho_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_\alpha dx + \sum_{i=2}^n \left\{ \frac{\gamma}{\gamma - 1} (\rho_1^{\gamma-1} - \rho_i^{\gamma-1}) + \frac{\delta \beta}{\beta - 1} (\rho_1^{\beta-1} - \rho_i^{\beta-1}) \right\} \Phi_{i,\alpha} \\ &+ \alpha \int_{\Omega_2} (\rho_\alpha - h) \left\{ \frac{\gamma}{\gamma - 1} (\rho_1^{\gamma-1} - h^{\gamma-1}) + \frac{\delta \beta}{\beta - 1} (\rho_1^{\beta-1} - h^{\beta-1}) \right\} dx. \quad (3.33) \end{aligned}$$

3.4 Construction d'une solution

Soient $\delta \in (0, 1]$ fixé et $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset (0, 1]$ une suite telle que $\{R_n = \alpha_n^{-2}\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset (2, \infty)$ et $\alpha_n \rightarrow 0^+$ quand $n \rightarrow \infty$. En accord avec le lemme 3.1, nous pouvons y associer une suite de couple $\{(\rho_{\alpha_n}, \mathbf{u}_{\alpha_n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont chacun des termes satisfait toutes les propriétés qui y sont listées ainsi que l'inégalité d'énergie (3.33) avec $\alpha = \alpha_n$ et $R = R_n$. Par souci

de clarté, comme souvent, nous préférons les notations $\{(\rho_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)\}_\alpha$ et R aux notations $\{(\rho_{\alpha_n}, \mathbf{u}_{\alpha_n})\}_n$ et R_n . En accord avec les estimations (3.30)-(3.31), on peut supposer qu'il existe des fonctions $\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta, \overline{\rho_\delta^\gamma}$ et $\overline{\rho_\delta^\beta}$ telles que modulo l'extraction de sous-suites et lorsque $\alpha \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \rho_\alpha &\rightharpoonup \rho_\delta \text{ dans } L^{2\beta}(\omega), \quad \rho_\delta \geq 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3, \\ (\rho_\alpha - h1_{\Omega_R}) &\rightharpoonup (\rho_\delta - h) \text{ dans } L^3(\mathbb{R}^3) \cap L^{2\beta}(\mathbb{R}^3), \quad \rho_\delta = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha &\rightharpoonup \mathbf{u}_\delta \text{ dans } [L^6(\mathbb{R}^3)]^3, \quad \nabla \mathbf{u}_\alpha \rightharpoonup \nabla \mathbf{u}_\delta \text{ dans } [L^2(\mathbb{R}^3)]^{3 \times 3}, \\ \forall p \in [1, 6), \quad \mathbf{u}_\alpha &\rightharpoonup \mathbf{u}_\delta \in [L^p(\omega)]^3, \quad \mathbf{u}_\delta = \mathbf{0} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \rightharpoonup \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \text{ dans } [L^{\frac{6\beta}{\beta+3}}(\omega)]^3, \quad \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha \rightharpoonup \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta \text{ dans } [L^{\frac{6\beta}{2\beta+3}}(\omega)]^{3 \times 3}, \quad (3.36)$$

$$\rho_\alpha^\gamma \rightharpoonup \overline{\rho_\delta^\gamma} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\gamma}}(\omega), \quad \rho_\alpha^\beta \rightharpoonup \overline{\rho_\delta^\beta} \text{ dans } L^2(\omega), \quad (3.37)$$

$\omega \subset \mathbb{R}^3$ désignant ici tout domaine borné arbitraire de \mathbb{R}^3 . Par suite, le passage à la limite $\alpha \rightarrow 0^+$ dans les équations (3.26)-(3.27) implique que les fonctions $\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta, \overline{\rho_\delta^\gamma}$ et $\overline{\rho_\delta^\beta}$ sont solutions des équations

$$\operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_\delta - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta + \nabla \{ \overline{\rho_\delta^\gamma} + \delta \overline{\rho_\delta^\beta} \} \\ = \rho_\delta \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3. \end{aligned} \quad (3.39)$$

En outre, les hypothèses du lemme 1.4 étant satisfaites pour $p = 2\beta$, $\rho = \rho_\delta$ et $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\delta$, il en découle que, pour toute fonction b de la classe (1.8), (1.9) et (1.11) avec β à la place de γ , l'équation de continuité renormalisée (1.10) est satisfaite par $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$.

Notre objectif étant de prouver l'existence d'une solution faible à énergie bornée du problème (2.1)-(2.4), on démontre dans un premier temps la convergence forte de la suite $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ vers ρ_δ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, fait équivalent à l'égalité p.p. dans Ω des quantités $\overline{p(\rho_\delta)} \equiv \overline{\rho_\delta^\gamma} + \delta \overline{\rho_\delta^\beta}$ et $p(\rho_\delta) \equiv \rho_\delta^\gamma + \delta \rho_\delta^\beta$. Une fois cette convergence démontrée, nous montrerons que le couple $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ construit ci-dessus satisfait bien l'inégalité d'énergie (2.6).

Tout d'abord, nous affirmons que les lemmes 2.8 et 2.9 démontrés dans le cas d'un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ à frontière Lipschitzienne restent vrais lorsque Ω est un domaine à n sorties cônes à frontière Lipschitzienne. Pour une meilleure lisibilité du texte, rappelons en les énoncés.

Lemme 3.2 *Pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ satisfaisant (1.9) et (1.11) avec β à la place de γ et $\lambda_1 = 0$, on a*

$$\overline{p(\rho_\delta) b(\rho_\delta)} - (2\mu_1 + \mu_2) \overline{b(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta} = \overline{p(\rho_\delta)} \overline{b(\rho_\delta)} - (2\mu_1 + \mu_2) \overline{b(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta} \text{ p.p. dans } \Omega, \quad (3.40)$$

où $\overline{p(\rho_\delta) b(\rho_\delta)}$, $\overline{b(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta}$ et $\overline{b(\rho_\delta)}$ désignent les limites faibles dans $L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\omega)$ et $L^{2\beta}(\omega)$ des suites $\{p(\rho_\alpha) b(\rho_\alpha)\}_\alpha$, $\{b(\rho_\alpha) \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha\}_\alpha$ et $\{b(\rho_\alpha)\}_\alpha$ et ω désignant tout domaine borné arbitraire de \mathbb{R}^3 .

Preuve. Adapter la preuve du lemme 2.8 en utilisant le corollaire 1.2 à la place du théorème 1.2. \square

Lemme 3.3 *Soit $0 < \theta < 1$. Alors il existe des fonctions $\overline{\rho_\delta^\theta}$ et $\overline{p(\rho_\delta)\rho_\delta^\theta}$ telles que*

$$\rho_\alpha^\theta \rightharpoonup \overline{\rho_\delta^\theta} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\theta}}(\omega), \quad p(\rho_\alpha)\rho_\alpha^\theta \rightharpoonup \overline{p(\rho_\delta)\rho_\delta^\theta} \text{ dans } L^{\frac{2\beta}{\beta+\theta}}(\omega) \quad (3.41)$$

et

$$\operatorname{div} \left\{ \left(\overline{\rho_\delta^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \mathbf{u}_\delta \right\} = \frac{(1-\theta)}{\theta(2\mu_1 + \mu_2)} \left\{ \overline{p(\rho_\delta)\rho_\delta^\theta} - \overline{p(\rho_\delta)} \overline{\rho_\delta^\theta} \right\} \left(\overline{\rho_\delta^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad (3.42)$$

$\omega \subset \mathbb{R}^3$ désignant à nouveau tout domaine borné arbitraire de \mathbb{R}^3 .

Preuve. Adapter à la présente situation la preuve du lemme 2.9. \square

Ceci étant, on soustrait (3.38) de (3.42) et on récupère l'équation suivante :

$$-\operatorname{div}(r_\delta \mathbf{u}_\delta) = \frac{(1-\theta)}{\theta(2\mu_1 + \mu_2)} \left\{ \overline{p(\rho_\delta)\rho_\delta^\theta} - \overline{p(\rho_\delta)} \overline{\rho_\delta^\theta} \right\} \left(\overline{\rho_\delta^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (3.43)$$

où $r_\delta = \rho_\delta - \left(\overline{\rho_\delta^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \geq 0$ p.p. dans \mathbb{R}^3 en raison de la convexité de la fonction $t \mapsto t^{\frac{1}{\theta}}$, $t \geq 0$. Montrons alors que cette fonction r_δ appartient aux espaces $L^3(\mathbb{R}^3) \cap L^{2\beta}(\mathbb{R}^3)$. Laissant au lecteur le soin de vérifier les inégalités

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\rho_\alpha^\theta - h^\theta|^3 1_{\{\rho_\alpha^\theta \leq 2h^\theta\}} dx &\leq c \int_{\mathbb{R}^3} |\rho_\alpha - h|^3 1_{\{\rho_\alpha^\theta \leq 2h^\theta\}} dx \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \\ \int_{\mathbb{R}^3} (\rho_\alpha^\theta - h^\theta)^{\frac{2\beta}{\theta}} 1_{\{\rho_\alpha^\theta > 2h^\theta\}} dx &\leq c \int_{\mathbb{R}^3} |\rho_\alpha - h|^{2\beta} 1_{\{\rho_\alpha^\theta > 2h^\theta\}} dx \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \end{aligned}$$

après extraction éventuelle d'une sous-suite, on peut supposer que $(\rho_\alpha^\theta - h^\theta) \rightharpoonup (\overline{\rho_\delta^\theta} - h^\theta)$ dans $L^3(\mathbb{R}^3) \cap L^{\frac{2\beta}{\theta}}(\mathbb{R}^3)$. Noter alors qu'au vu des équivalences (3.11) et de la semi-continuité inférieure faible des normes $L^3(\mathbb{R}^3)$ et $L^{\frac{2\beta}{\theta}}(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \left(\overline{\rho_\delta^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} - h \right|^3 1_{\{\overline{\rho_\delta^\theta} \leq 2h^\theta\}} dx &\leq c \int_{\mathbb{R}^3} |\overline{\rho_\delta^\theta} - h^\theta|^3 1_{\{\overline{\rho_\delta^\theta} \leq 2h^\theta\}} dx \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \\ \int_{\mathbb{R}^3} \left| \left(\overline{\rho_\delta^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} - h \right|^{2\beta} 1_{\{\overline{\rho_\delta^\theta} > 2h^\theta\}} dx &\leq c \int_{\mathbb{R}^3} |\overline{\rho_\delta^\theta} - h^\theta|^{\frac{2\beta}{\theta}} 1_{\{\overline{\rho_\delta^\theta} > 2h^\theta\}} dx \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}). \end{aligned}$$

Soient ensuite $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ la fonction de troncature classique, c'est à dire la fonction satisfaisant $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ si $x \in B_1$ et $\varphi(x) = 0$ si $x \in B^2$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi_k(\cdot) = \varphi\left(\frac{\cdot}{k}\right)$. L'équation (3.43) testée par φ_k et le lemme A.20 (cf. p.224), dont les hypothèses sont clairement satisfaites, impliquent que

$$\int_{B_k} \left\{ \overline{p(\rho_\delta)\rho_\delta^\theta} - \overline{p(\rho_\delta)} \overline{\rho_\delta^\theta} \right\} \left(\overline{\rho_\delta^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} dx \leq \frac{c}{k} \int_{\{k \leq |x| \leq 2k\}} r_\delta |\mathbf{u}_\delta| dx \quad (3.44)$$

Par ailleurs, si ψ désigne une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\psi \geq 0$, l'inégalité de Hölder garantit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha \psi dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{\theta(1+\frac{\theta}{s})+1-\theta(1+\frac{\theta}{s})} \psi^{\frac{\theta}{s}+1-\frac{\theta}{s}} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{s+\theta} \psi dx \right)^{\frac{\theta}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{\frac{s(1-\theta)-\theta^2}{s-\theta}} \psi dx \right)^{1-\frac{\theta}{s}}, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^s \psi dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{(s+\theta)(1-\frac{\theta}{s})+s-(s+\theta)(1-\frac{\theta}{s})} \psi^{1-\frac{\theta}{s}+\frac{\theta}{s}} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^{s+\theta} \psi dx \right)^{1-\frac{\theta}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha^\theta \psi dx \right)^{\frac{\theta}{s}} \end{aligned}$$

où $s = \gamma, \beta$. En faisant tendre $\alpha \rightarrow 0^+$, on en déduit que

$$\rho_\delta \leq \left(\overline{\rho_\delta^{s+\theta}} \right)^{\frac{\theta}{s}} \times \left(\overline{\rho_\delta^{\frac{s(1-\theta)-\theta^2}{s-\theta}}} \right)^{1-\frac{\theta}{s}} \quad \text{et} \quad \overline{\rho_\delta^s} \leq \left(\overline{\rho_\delta^{s+\theta}} \right)^{1-\frac{\theta}{s}} \times \left(\overline{\rho_\delta^\theta} \right)^{\frac{\theta}{s}} \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^3, \quad s = \gamma, \beta$$

où, on le rappelle, $\overline{\rho^a}$, $a > 1$ denote la limite faible dans un certain espace de Lebesgue de la suite $\{\rho_\alpha^a\}_{\alpha \in (0,1]}$. Noter alors que dans le cas particulier $\theta = \frac{1}{2}$, ces deux inégalités impliquent que

$$\overline{\rho_\delta^s} \rho_\delta \leq \overline{\rho_\delta^{s+\frac{1}{2}}} \overline{\rho_\delta^{\frac{1}{2}}} \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^3, \quad s = \gamma, \beta. \quad (3.45)$$

A partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce paragraphe, $\theta = \frac{1}{2}$. De (3.45), il résulte que

$$\overline{\rho_\delta^s} r_\delta = \overline{\rho_\delta^s} \rho_\delta - \overline{\rho_\delta^s} \left(\overline{\rho_\delta^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \leq \left\{ \overline{\rho_\delta^{s+\frac{1}{2}}} - \overline{\rho_\delta^s} \overline{\rho_\delta^{\frac{1}{2}}} \right\} \overline{\rho_\delta^{\frac{1}{2}}} \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^3, \quad s = \gamma, \beta.$$

Complété par (3.44) et l'inégalité de Hölder, ceci montre que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $s = \gamma, \beta$, on a

$$\begin{aligned} \int_{B_k} \overline{\rho_\delta^s} r_\delta dx &\leq c(\delta) \int_{B_k \cap \Omega} (\overline{\rho_\delta^\gamma} + \delta \overline{\rho_\delta^\beta}) r_\delta dx \\ &\leq c(\delta) \int_{B_k \cap \Omega} \left\{ \overline{p(\rho_\delta) \rho_\delta^{\frac{1}{2}}} - \overline{p(\rho_\delta)} \overline{\rho_\delta^{\frac{1}{2}}} \right\} \overline{\rho_\delta^{\frac{1}{2}}} dx \leq \frac{c(\delta)}{k} \int_{\{k \leq |x| \leq 2k\}} r_\delta |\mathbf{u}_\delta| dx \\ &\leq \frac{c(\delta)}{k} \|r_\delta\|_{0,3,\mathbb{R}^3} \|\mathbf{u}_\delta\|_{0,6,\mathbb{R}^3} |\{k \leq |x| \leq 2k\}|^{\frac{1}{2}} \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) k^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

D'autre part, en accord avec la convexité de la fonction $t \mapsto t^s$, $s = \gamma, \beta$, $t \geq 0$, les equivalences (3.11) et l'inégalité de Hölder, remarquer que

$$\begin{aligned} \int_{\{k \leq |x| \leq 2k\}} (h^s - \overline{\rho_\delta^s}) r_\delta dx &\leq \int_{\{k \leq |x| \leq 2k\}} (h^s - \rho_\delta^s) r_\delta dx \\ &\leq c \|(\rho_\delta - h) 1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}}\|_{0,3,\mathbb{R}^3} \|r_\delta^{\frac{1}{2}}\|_{0,6,\mathbb{R}^3} \|r_\delta^{\frac{1}{2}}\|_{0,2,\{k \leq |x| \leq 2k\}} \\ &\quad + c \|(\rho_\delta - h) 1_{\{\rho_\delta > 2h\}}\|_{0,2s,\mathbb{R}^3}^s \|r_\delta\|_{0,3,\mathbb{R}^3} |\{k \leq |x| \leq 2k\}|^{\frac{1}{6}} \\ &\leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) (\|r_\delta\|_{0,1,\{k \leq |x| \leq 2k\}}^{\frac{1}{2}} + k^{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Or, d'après les propriétés (3.5) de la fonction h , il est évident que

$$\int_{\{k \leq |x| \leq 2k\}} r_\delta dx \leq \left(\frac{2}{\rho_n} \right)^s \int_{\{k \leq |x| \leq 2k\}} h^s r_\delta dx, \quad s = \gamma, \beta.$$

Ainsi, décomposant h^s en $(h^s - \overline{\rho_\delta^s}) + \overline{\rho_\delta^s}$ puis utilisant les estimations (3.46), (3.47) et l'inégalité de Young, il en découle que

$$\|r_\delta\|_{0,1,\{k \leq |x| \leq 2k\}} \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g})k^{\frac{1}{2}}. \quad (3.48)$$

Alors, l'inégalité de Hölder associée à (3.48) nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \int_{\{k \leq |x| \leq 2k\}} r_\delta |\mathbf{u}_\delta| dx &\leq \frac{1}{k} \int_{\{k \leq |x| \leq 2k\}} r_\delta (|\mathbf{u}_\delta| 1_{\{|\mathbf{u}_\delta| \leq 1\}} + |\mathbf{u}_\delta| 1_{\{|\mathbf{u}_\delta| > 1\}}) dx \\ &\leq \frac{1}{k} (\|r_\delta\|_{0,1,\{k \leq |x| \leq 2k\}} + \|r_\delta\|_{0,3,\mathbb{R}^3} \|\mathbf{u}_\delta 1_{\{|\mathbf{u}_\delta| > 1\}}\|_{0,\frac{3}{2},\mathbb{R}^3}) \\ &\leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g})k^{-\frac{1}{2}}(1 + \|\mathbf{u}_\delta\|_{0,6,\mathbb{R}^3}^4) \leq c(\delta, \mathbf{f}, \mathbf{g})k^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

A ce stade, nous sommes prêt pour passer à la limite $k \rightarrow \infty$ dans (3.44). Pour tout $R > 0$, on trouve que

$$\int_{B_R} \left\{ \overline{p(\rho_\delta) \rho_\delta^{\frac{1}{2}}} - \overline{p(\rho_\delta)} \overline{\rho_\delta^{\frac{1}{2}}} \right\} \overline{\rho_\delta^{\frac{1}{2}}} dx \leq 0. \quad (3.49)$$

Or d'après le lemme A.20 dans lequel on pose $\theta = \frac{1}{2}$, on sait que $\left\{ \overline{p(\rho_\delta) \rho_\delta^{\frac{1}{2}}} - \overline{p(\rho_\delta)} \overline{\rho_\delta^{\frac{1}{2}}} \right\} \geq 0$ p.p. dans \mathbb{R}^3 . Combinant cette observation avec (3.49), on vérifie aisément que

$$\overline{p(\rho_\delta) \rho_\delta^{\frac{1}{2}}} = \overline{p(\rho_\delta)} \overline{\rho_\delta^{\frac{1}{2}}} \text{ p.p. dans } \{\overline{\rho_\delta^{\frac{1}{2}}} > 0\}. \quad (3.50)$$

Ici, il faut souligner que l'identité (3.50) est exactement la même que celle obtenue dans le cas borné, à savoir (2.6.21), lorsque $\theta = \frac{1}{2}$ (cf. p.59). Nous affirmons alors qu'une simple adaptation des arguments présentés à la fin de la preuve du lemme 2.4, débutant par (2.4.37), permet finalement de conclure à la convergence forte de la suite $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ vers ρ_δ dans $L_{loc}^p(\mathbb{R}^3)$, $p \in [1, 2\beta)$.

Pour pouvoir affirmer que le couple $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ est une solution faible à énergie bornée du problème (2.1)-(2.4), il reste à démontrer qu'il satisfait l'inégalité d'énergie (2.6). Pour cela, remarquer tout d'abord que l'inégalité ci-contre est une conséquence directe de l'inégalité d'énergie (3.33) :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}_\alpha|^2 + (\mu_1 + \mu_2)(\operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha)^2\} dx \\ &\leq \int_{\Omega} (\rho_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_\alpha dx + \sum_{i=2}^n \left\{ \frac{\gamma}{\gamma-1} (\rho_1^{\gamma-1} - \rho_i^{\gamma-1}) + \frac{\delta\beta}{\beta-1} (\rho_1^{\beta-1} - \rho_i^{\beta-1}) \right\} \Phi_{i,\alpha} dx \\ &\quad + \alpha \int_{\Omega_2} (\rho_\alpha - h) \left\{ \frac{\gamma}{\gamma-1} (\rho_1^{\gamma-1} - h^{\gamma-1}) + \frac{\delta\beta}{\beta-1} (\rho_1^{\beta-1} - h^{\beta-1}) \right\} dx. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Au vu des estimations (3.30), il est bien clair que la dernière intégrale du membre de droite de (3.51) disparaît lorsque $\alpha \rightarrow 0^+$. Par ailleurs, puisque la convergence de la suite $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ vers ρ_δ est forte dans $L_{loc}^p(\mathbb{R}^3)$, $p \in [1, 2\beta)$, et que celle de la suite $\{\mathbf{u}_\alpha\}_\alpha$ vers \mathbf{u}_δ est forte dans $[L_{loc}^p(\mathbb{R}^3)]^3$, $p \in [1, 6)$, le théorème de convergence de Vitali garantit que

$$\int_{\Omega} (\rho_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_\alpha dx \rightarrow \int_{\Omega} (\rho_\delta \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_\delta dx \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0^+.$$

D'après la définition (3.32) du flux $\Phi_{i,\alpha}$ et la formule de Stokes (1.13), on sait également que

$$\Phi_{i,\alpha} = \alpha \int_{\Omega_2} (h - \rho_\alpha) \xi \, dx + \int_{\Omega_2} \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \xi \, dx, \quad \xi \in \mathcal{B}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ici, la première intégrale disparaît lorsque $\alpha \rightarrow 0^+$ et de nouveau d'après (1.13), on obtient

$$\Phi_{i,\alpha} \rightarrow \Phi_{i,\delta} = \int_{\Omega_2} \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \cdot \nabla \xi \, dx \quad \text{lorsque } \alpha \rightarrow 0^+, \quad \xi \in \mathcal{B}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.52)$$

Tous ces arguments, ainsi que la semi-continuité inférieure faible de la forme quadratique positive convexe $\mathbf{v} \in [D_0^{1,2}(\Omega)]^3 \mapsto \int_{\Omega} \{\mu_1 |\nabla \mathbf{v}|^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{v})^2\} \, dx$, prouvent que le couple $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ construit auparavant satisfait l'inégalité d'énergie (2.6) et donc est une solution faible à énergie bornée du problème (2.1)-(2.4).

4 Solutions du système d'origine

Dans la section précédente, pour chaque $\delta \in (0, 1]$ fixé, nous avons construit une solution faible à énergie bornée du problème (2.1)-(2.4). Dans la présente, le but est d'éliminer le terme de pression artificielle en passant à la limite $\delta \rightarrow 0^+$ pour récupérer une solution faible à énergie bornée du problème d'origine (1.1), (1.2), (1.5), (1.6)₂. Pour cela, on introduit une suite $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset (0, 1]$ telle que $\delta_n \rightarrow 0^+$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et on y associe la suite $\{(\rho_{\delta_n}, \mathbf{u}_{\delta_n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de solutions faibles à énergie bornée du problème (2.1)-(2.4) construites précédemment. C'est une procédure analogue à celle exposée à la section 3 qui va permettre de conclure. Comme nous l'avons souvent fait, nous utiliserons les notations $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ et $\delta \rightarrow 0^+$ au lieu des notations $(\rho_{\delta_n}, \mathbf{u}_{\delta_n})$ et $n \rightarrow \infty$.

4.1 Bornes uniformes par rapport au paramètre introduit lors de l'ajout de la pression artificielle

Dans ce paragraphe, nous prouvons que certaines normes L^p faisant intervenir les fonctions ρ_δ , \mathbf{u}_δ et h sont bornées indépendamment du paramètre δ .

Remarque 3.5 D'après les propriétés (3.5) de la fonction h , l'équation (2.2) testée par une fonction $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{\mu_1 \nabla \mathbf{u}_\delta : \nabla \varphi + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta \operatorname{div} \varphi\} \, dx \\ & - \int_{\Omega} (\rho_\delta - h) \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta : \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} h \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta : \nabla \varphi \, dx \\ & - \int_{\Omega} \{(\rho_\delta^\gamma - h^\gamma) + \delta(\rho_\delta^\beta - h^\beta)\} \operatorname{div} \varphi \, dx + \int_{\Omega_1^2} \nabla(h^\gamma + \delta h^\beta) \cdot \varphi \, dx = \int_{\Omega} (\rho_\delta \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \varphi \, dx. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sachant que $\mathbf{u}_\delta \in [D_0^{1,2}(\Omega)]^3$, $(\rho_\delta - h) \in L^3(\Omega) \cap L^{2\beta}(\Omega)$ et $h \in L^\infty(\Omega)$, les équivalences (3.11) et un simple argument de densité garantissent que l'identité (4.1) reste vraie pour toute fonction test $\varphi \in [D_0^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)]^3 \cap [D_0^{1,2}(\Omega)]^3$.

En premier lieu, d'après les inégalités de Hölder, de Sobolev et de Young, on vérifie sans peine que pour $\zeta > 0$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\rho_{\delta} \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u}_{\delta} dx \\ & \leq \{(2\rho_1 + 1)(\|\mathbf{f}\|_{0, \frac{6}{5}} + \|\mathbf{g}\|_{0, \frac{6}{5}}) + \|(\rho_{\delta} - h)1_{\{\rho_{\delta} > 2h\}}\|_{0, 2\gamma} \|\mathbf{f}\|_{0, \frac{6\gamma}{5\gamma-3}}\} \|\mathbf{u}_{\delta}\|_{0,6} \\ & \leq c(\zeta, \mathbf{f}, \mathbf{g})(1 + \|(\rho_{\delta} - h)1_{\{\rho_{\delta} > 2h\}}\|_{0, 2\gamma})^2 + \zeta \|\nabla \mathbf{u}_{\delta}\|_{0,2}^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, en accord avec la formule (3.52) et, à nouveau, d'après les inégalités de Hölder, de Sobolev et de Young, on trouve que

$$\begin{aligned} \Phi_{i,\delta} &= \int_{\Omega_2} \{(\rho_{\delta} - h)1_{\{\rho_{\delta} \leq 2h\}} + h\} \mathbf{u}_{\delta} \cdot \nabla \xi dx + \int_{\Omega_2} (\rho_{\delta} - h)1_{\{\rho_{\delta} > 2h\}} \mathbf{u}_{\delta} \cdot \nabla \xi dx \\ &\leq (2\rho_1 \|\nabla \xi\|_{0, \frac{6}{5}, \Omega_2} + \|(\rho_{\delta} - h)1_{\{\rho_{\delta} > 2h\}}\|_{0, 2\gamma} \|\nabla \xi\|_{0, \frac{6\gamma}{5\gamma-3}, \Omega_2}) \|\mathbf{u}_{\delta}\|_{0,6} \\ &\leq c(\zeta)(1 + \|(\rho_{\delta} - h)1_{\{\rho_{\delta} > 2h\}}\|_{0, 2\gamma})^2 + \zeta \|\nabla \mathbf{u}_{\delta}\|_{0,2}^2, \quad \xi \in \mathcal{B}_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.2)$$

En choisissant par exemple $\zeta = \frac{\mu_1}{6(n-1)}$, on voit que le membre de droite de l'inégalité d'énergie (2.6) peut être majoré par

$$\frac{\mu_1}{6} \|\nabla \mathbf{u}_{\delta}\|_{0,2}^2 + c(\mathbf{f}, \mathbf{g})(1 + \|(\rho_{\delta} - h)1_{\{\rho_{\delta} > 2h\}}\|_{0, 2\gamma})^2$$

d'où l'estimation :

$$\|\nabla \mathbf{u}_{\delta}\|_{0,2} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g})(1 + \|(\rho_{\delta} - h)1_{\{\rho_{\delta} > 2h\}}\|_{0, 2\gamma}). \quad (4.3)$$

Rappelons ensuite que, d'après le lemme B.9, la fonction $\varphi = \mathcal{B}_{\Omega} \{(\rho_{\delta} - h)^{\gamma} 1_{\{\rho_{\delta} > 2h\}}\}$ satisfait

$$\varphi \in [D_0^{1,p}(\Omega)]^3, \quad p \in (1, \frac{2\beta}{\gamma}], \quad \|\nabla \varphi\|_{0,p} \leq c(\Omega, p) \|(\rho_{\delta} - h)^{\gamma} 1_{\{\rho_{\delta} > 2h\}}\|_{0, p\gamma}^p. \quad (4.4)$$

Puisque $2 \leq \frac{2\beta}{\gamma}$, φ est une fonction admissible dans l'identité (4.1) qui alors s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{(\rho_{\delta}^{\gamma} - h^{\gamma}) + \delta(\rho_{\delta}^{\beta} - h^{\beta})\} (\rho_{\delta} - h)^{\gamma} 1_{\{\rho_{\delta} > 2h\}} dx \\ &= \int_{\Omega} \{\mu_1 \nabla \mathbf{u}_{\delta} : \nabla \varphi + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_{\delta} \operatorname{div} \varphi\} dx - \int_{\Omega} (\rho_{\delta} - h) \mathbf{u}_{\delta} \otimes \mathbf{u}_{\delta} : \nabla \varphi dx \\ & - \int_{\Omega} h \mathbf{u}_{\delta} \otimes \mathbf{u}_{\delta} : \nabla \varphi dx + \int_{\Omega_1^2} \nabla(h^{\gamma} + \delta h^{\beta}) \cdot \varphi dx - \int_{\Omega} (\rho_{\delta} \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \varphi dx = \sum_{k=1}^5 I_k. \end{aligned} \quad (4.5)$$

En ce qui concerne le premier terme I_1 , il peut être majoré en utilisant l'inégalité de Schwarz puis les estimations (4.3) et (4.4) comme-suit :

$$|I_1| \leq c \|\nabla \mathbf{u}_{\delta}\|_{0,2} \|\nabla \varphi\|_{0,2} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g})(1 + \|(\rho_{\delta} - h)1_{\{\rho_{\delta} > 2h\}}\|_{0, 2\gamma}) \|(\rho_{\delta} - h)1_{\{\rho_{\delta} > 2h\}}\|_{0, 2\gamma}^2.$$

Ecrivant une fois encore $(\rho_\delta - h) = (\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}} + (\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta > 2h\}}$, à l'aide des inégalités de Hölder et de Sobolev, de l'observation (3.17) dans laquelle on remplace $\rho_{\alpha,R}$ et β par ρ_δ et γ et des majorations (4.3) et (4.4), on trouve que

$$\begin{aligned} |I_2 + I_3| &\leq c \|\mathbf{u}_\delta\|_{0,6}^2 \|\nabla \varphi\|_{0,\frac{3}{2}} + \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta > 2h\}}\|_{0,2\gamma} \|\mathbf{u}_\delta\|_{0,6}^2 \|\nabla \varphi\|_{0,\frac{6\gamma}{4\gamma-3}} \\ &\leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) (1 + \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta > 2h\}}\|_{0,2\gamma})^2 \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta > 2h\}}\|_{0,2\gamma}^{\frac{4}{3}\gamma}. \end{aligned}$$

Les propriétés (3.5) de la fonction h complétées par les inégalités de Hölder, de Sobolev et l'estimation (4.4) assurent que

$$|I_4| \leq c \|\varphi\|_{0,6} \leq c \|\nabla \varphi\|_{0,2} \leq c \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta > 2h\}}\|_{0,2\gamma}^\gamma.$$

Enfin, une majoration du terme I_5 , se justifiant encore par des arguments semblables à ceux présentés précédemment, est donnée par

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) (1 + \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta > 2h\}}\|_{0,2\gamma}) \|\nabla \varphi\|_{0,2} \\ &\leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) (1 + \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta > 2h\}}\|_{0,2\gamma}) \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta > 2h\}}\|_{0,2\gamma}^\gamma. \end{aligned}$$

Ceci étant, toutes ces majorations insérées dans l'identité (4.5), ajoutées aux équivalences (3.11) dans lesquelles on remplace $\rho_{\alpha,R}$ par ρ_δ , impliquent finalement, par le biais de l'inégalité de Young, que

$$\|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta > 2h\}}\|_{0,2\gamma} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \delta \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta > 2h\}}\|_{0,\gamma+\beta}^{\gamma+\beta} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad (4.6)$$

$$\|\nabla \mathbf{u}_\delta\|_{0,2} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}). \quad (4.7)$$

Considérons maintenant la fonction $\varphi = \mathcal{B}_\Omega \{ \text{sgn}(\rho_\delta - h)(\rho_\delta - h)^2 1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}} \}$. D'après le lemme B.9, celle-ci satisfait

$$\varphi \in [D_0^{1,p}(\Omega)]^3, \quad p \in [\frac{3}{2}, \beta], \quad \|\nabla \varphi\|_{0,p} \leq c(\Omega, p) \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}}\|_{0,2p}^2. \quad (4.8)$$

D'après la remarque 3.5, φ est une fonction admissible dans l'identité (4.5). Alors on a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \{ |\rho_\delta^\gamma - h^\gamma| + \delta |\rho_\delta^\beta - h^\beta| \} (\rho_\delta - h)^2 1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}} dx \\ &= \int_\Omega \{ \mu_1 \nabla \mathbf{u}_\delta : \nabla \varphi + (\mu_1 + \mu_2) \text{div } \mathbf{u}_\delta \text{div } \varphi \} dx - \int_\Omega (\rho_\delta - h) \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta : \nabla \varphi dx \\ &- \int_\Omega h \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta : \nabla \varphi dx + \int_{\Omega_1^2} \nabla (h^\gamma + \delta h^\beta) \cdot \varphi dx - \int_\Omega (\rho_\delta \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \varphi dx = \sum_{k=1}^5 I_k. \quad (4.9) \end{aligned}$$

L'utilisation de l'inégalité de Schwarz et des estimations (4.6) et (4.7) entraîne que

$$|I_1| \leq c \|\nabla \mathbf{u}_\delta\|_{0,2} \|\nabla \varphi\|_{0,2} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}}\|_{0,4}^2 \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}}\|_{0,3}^{\frac{3}{2}}.$$

Pour les mêmes raisons, en remplaçant simplement l'inégalité de Schwarz par celle de Hölder, on a

$$|I_2 + I_3| \leq c \left(\|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}}\|_{0,3}^2 + \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}}\|_{0,3}^{\frac{3}{2}} \right).$$

Ensuite, les propriétés (3.5) de la fonction h , les inégalités de Hölder et de Sobolev et l'estimation (4.8) garantissent la majoration suivante du terme I_4 :

$$|I_4| \leq c \|\varphi\|_{0,6} \leq c \|\nabla \varphi\|_{0,2} \leq c \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}}\|_{0,4}^2 \leq c \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}}\|_{0,3}^{\frac{3}{2}}.$$

Enfin, en ce qui concerne le terme I_5 , on trouve que

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g})(1 + \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta > 2h\}}\|_{0,2\gamma}) \|\nabla \varphi\|_{0,2} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}}\|_{0,4}^2 \\ &\leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}}\|_{0,3}^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

A l'aide de ces majorations, insérées dans l'identité (4.9) et de l'inégalité de Young, on conclut que

$$\|(\rho_\delta - h)1_{\{\rho_\delta \leq 2h\}}\|_{0,3} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}). \quad (4.10)$$

En fin de compte, en reprenant les estimations (4.2), (4.6), (4.7) et (4.10), on en déduit aisément que

$$\|(\rho_\delta - h)\|_{0,3} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \|(\rho_\delta - h)\|_{0,2\gamma} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \delta^{\frac{1}{\gamma+\beta}} \|(\rho_\delta - h)\|_{0,\gamma+\beta} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \quad (4.11)$$

$$\|\nabla \mathbf{u}_\delta\|_{0,2} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad (4.12)$$

$$|\Phi_{i,\delta}| \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.13)$$

En particulier, à partir de (4.11) on voit que pour tout domaine borné $\omega \subset \mathbb{R}^3$, on a

$$\delta \|\rho_\delta^\beta\|_{0,\frac{\gamma+\beta}{\beta},\omega} \leq \delta^{\frac{\gamma}{\gamma+\beta}} \delta^{\frac{\beta}{\gamma+\beta}} \|\rho_\delta^\beta\|_{0,\frac{\gamma+\beta}{\beta},\omega} = \delta^{\frac{\gamma}{\gamma+\beta}} (\delta^{\frac{1}{\gamma+\beta}} \|\rho_\delta\|_{0,\gamma+\beta,\omega})^\beta \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \delta^{\frac{\gamma}{\gamma+\beta}}. \quad (4.14)$$

4.2 Elimination de la pression artificielle et conclusion

En accord avec les estimations (4.11)-(4.14), à d'éventuelles extractions de sous-suites, on peut supposer qu'il existe des fonctions ρ , \mathbf{u} et $\bar{\rho}^\gamma$ telles que lorsque $\delta \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} \rho_\delta &\rightharpoonup \rho \text{ dans } L^{2\gamma}(\omega), \quad \rho \geq 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3, \quad \rho = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ (\rho_\delta - h) &\rightharpoonup (\rho - h) \text{ dans } L^3(\mathbb{R}^3) \cap L^{2\gamma}(\mathbb{R}^3), \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\rho_\delta^\gamma \rightharpoonup \bar{\rho}^\gamma \text{ dans } L^2(\omega), \quad \delta \rho_\delta^\beta \rightarrow 0 \text{ dans } L_{loc}^{\frac{\gamma+\beta}{\beta}}(\mathbb{R}^3), \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\delta &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } [L^6(\mathbb{R}^3)]^3, \quad \nabla \mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \nabla \mathbf{u} \text{ dans } [L^2(\mathbb{R}^3)]^{3 \times 3}, \\ \forall p \in [1, 6), \quad \mathbf{u}_\delta &\rightarrow \mathbf{u} \in [L^p(\omega)]^3, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \rho \mathbf{u} \text{ dans } [L^{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\omega)]^3, \quad \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \text{ dans } [L^{\frac{6\gamma}{2\gamma+3}}(\omega)]^{3 \times 3}, \quad (4.18)$$

ω désignant ici tout domaine borné arbitraire de \mathbb{R}^3 . Le passage à la limite $\delta \rightarrow 0^+$ dans les équations (2.1)-(2.2) montre alors que les fonctions ρ , \mathbf{u} et $\bar{\rho}^\gamma$ sont solutions du problème

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad (4.19)$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu_1 \Delta \mathbf{u} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla \bar{\rho}^\gamma = \rho \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3. \quad (4.20)$$

Noter que les hypothèses du lemme 1.4 sont satisfaites avec $p = 2\gamma$. Ainsi, pour toute fonction b de la classe (1.8), (1.9) et (1.11), l'équation de continuité renormalisée (1.10) est satisfaite.

Nous affirmons ensuite que la preuve de la convergence forte de la suite $\{\rho_\delta\}_\delta$ vers ρ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ et donc dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $p \in [1, 2\gamma)$ est une simple adaptation de notations de celle qui nous a permis d'obtenir la convergence forte de la suite $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ vers ρ_δ dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $p \in [1, 2\beta)$, à l'étape précédente (cf. p.86–89).

Pour conclure que le couple (ρ, \mathbf{u}) est une solution faible à énergie bornée du problème (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6)₂, il suffit de prouver qu'il satisfait l'inégalité d'énergie (1.19). Nous laissons au lecteur le soin de le vérifier en adaptant à la présente situation les arguments présentés dans le dernier paragraphe de la section 3.4. La preuve du théorème 3.2 est donc complète. \square

Remarque 3.6 Pour démontrer le théorème 3.1, il suffit par exemple de poser $h = \rho_i = \rho_\infty$, $i = 1, \dots, n$, dans la preuve du théorème 3.2.

5 Commentaires

Suite au théorème 3.2, une première conjecture assez naturelle est que celui-ci est encore vrai pour des domaines ayant des sorties contenant un cône, sous réserve que l'on puisse démontrer des résultats semblables aux lemmes B.8 et B.9. Aucune classification de ce type de domaines, ni aucune étude de ce type de problème n'existe dans la littérature mathématique.

Autre question intéressante : le théorème 3.2 reste-t'il vrai pour des domaines à plusieurs sorties cylindriques, domaines définis semblablement aux domaines à plusieurs sorties côniques avec chaque cône \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, n$, remplacé par un cylindre de révolution d'axe de symétrie Δ_i , $s_i \in \Delta_i$, et de rayon $r_i > 0$, encore dénoté \mathcal{C}_i . Dans cette configuration, il est à nouveau possible de définir le flux sortant du fluide à travers chaque sortie cylindrique par la formule (1.16). Malheureusement, bien que le problème d'existence de solutions faibles à énergie bornée du système (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6)₂ considéré dans un domaine à plusieurs sorties cylindriques semble être en tout point semblable à celui considéré dans le théorème 3.2, c'est un problème mal posé. En effet, comme le montre le théorème suivant, un tel problème n'admet, en général, aucune solution faible à énergie bornée.

Théorème 3.3 *Soit Ω un domaine à deux sorties cylindriques à frontière Lipschitzienne de \mathbb{R}^3 . On suppose (1.3), (1.4), $\mathbf{f} = \mathbf{g} = \mathbf{0}$ et $0 < \rho_2 < \rho_1 < \infty$. Alors il n'existe aucune solution faible à énergie bornée du problème (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6)₂.*

Preuve. Sous les hypothèses de ce théorème, supposons que le couple (ρ, \mathbf{u}) est une solution faible à énergie bornée du problème (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6)₂. Soit $\xi \in \mathcal{A}_i^{S+1}$, $S > 2$, une fonction telle que $\xi = 1$ dans $(\mathcal{C}_i)_2^S$, $|\nabla \xi| \leq 2$. Alors, en accord avec la formule de Stokes (1.14) et l'égalité (1.17), on a

$$\Phi_i = - \int_{(\mathcal{C}_i)_2^{S+1}} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \xi \, dx = - \int_{(\mathcal{C}_i)_2^{S+1}} \{(\rho - \rho_i) + \rho_i\} \mathbf{u} \cdot \nabla \xi \, dx.$$

A l'aide de l'inégalité de Hölder et puisque $|(\mathcal{C}_i)^{S+1}| = 2\pi r_i^2$, on en déduit que

$$|\Phi_i| \leq 2\|(\rho - \rho_i)\|_{0,s} |(\mathcal{C}_i)^{S+1}|^{\frac{5s-6}{6s}} \|\mathbf{u}\|_{0,6,(\mathcal{C}_i)^{S+1}} + \rho_i |(\mathcal{C}_i)^{S+1}|^{\frac{5}{6}} \|\mathbf{u}\|_{0,6,(\mathcal{C}_i)^{S+1}} \leq c \|\mathbf{u}\|_{0,6,(\mathcal{C}_i)^{S+1}}$$

où $s = 3, 2\gamma$, et c est une constante qui ne dépend pas de S . Par suite, puisque $\mathbf{u} \in [D_0^{1,2}(\Omega)]^3$, il est clair que lorsque $S \rightarrow \infty$, $\|\mathbf{u}\|_{0,6,(\mathcal{C}_i)^{S+1}} \rightarrow 0$. En résulte alors que $\Phi_i = 0$, $i = 1, 2$. L'insertion de cette information dans l'inégalité d'énergie (1.19), complétée par le fait que $\mathbf{u} \in [D_0^{1,2}(\Omega)]^3$, implique ensuite que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ p.p. dans Ω . De l'équation (1.2) en découle alors que la densité ρ est constante p.p. dans Ω , ce qui contredit les conditions $(\rho - \rho_i) \in L^s((\mathcal{C}_i)^2)$, $s = 3, 2\gamma$, $i = 1, 2$. \square

Cette observation généralise le résultat de NOVOTNÝ, PADULA et PENEL [63] ainsi que celui de P.L. LIONS [46] sur la non existence de solution faible à énergie bornée localement régulière dans un tube.

Suite à cela, il nous semble raisonnable d'émettre une seconde conjecture : le problème d'existence de solutions faibles à énergie bornée du système (1.1), (1.2), (1.5) et (1.6)₂, considéré dans des domaines à plusieurs sorties du type

$$\mathcal{C}_i = \{x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3, x_3 > 0, |x' - s'_i| \leq c x_3^s\}, c \in \mathbb{R}_+, s \in [0, 1), i = 1, \dots, n$$

est un problème mal posé. Aucune classification de ce type de domaines, ni aucune étude de ce type de problème n'existe dans la littérature mathématique.

Deuxième Partie :

Equations non stationnaires

Chapitre I

Résultats préliminaires

Sommaire

1	Un peu d'analyse fonctionnelle	100
2	Sur l'équation de continuité	103
3	Quelques problèmes paraboliques	108
3.1	Le problème de Neumann associé au Laplacien	109
3.2	Dissipation artificielle dans l'équation de continuité	109
4	Flux effectif visqueux (cas non stationnaire)	115
5	Divers	122

Ce chapitre est l'analogie du premier chapitre de la partie stationnaire. Il regroupe quelques résultats souvent utilisés dans cette seconde partie. Nombre d'entre eux seront démontrés, quant aux autres, ils seront systématiquement accompagnés de références à la bibliographie. Tout au long de ce chapitre, nous ne ferons pas la distinction entre une fonction définie sur $(0, T) \times \mathcal{O}$, $T \in (0, \infty)$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ un domaine, et son prolongement par zéro dans $(0, T) \times (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$.

1 Un peu d'analyse fonctionnelle

Dans cette section, nous donnons quelques résultats d'analyse fonctionnelle nécessaires dans la preuve du théorème principal du prochain chapitre.

Lemme I.1 *Soient $T \in (0, \infty)$, Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 , $p \in [1, \infty)$ et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C^0([0, T]; L^p_{weak}(\Omega))$ une suite bornée dans $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{t \in [0, T]} \|f_n(t)\|_{0,p} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|f_n\|_{L^\infty(0, T; L^p(\Omega))}.$$

Preuve. Simple conséquence de la définition de l'espace $C^0([0, T]; L^p_{weak}(\Omega))$. \square

Lemme I.2 *Soient $T \in (0, \infty)$, Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 , $p, q \in (1, \infty)$ et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C^0([0, T]; L^p_{weak}(\Omega))$ une suite uniformément bornée dans $L^p(\Omega)$, i.e.*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in [0, T]} \|f_n(t)\|_{0,p} \leq c \tag{1.1}$$

et uniformément continue dans $W^{-1,q}(\Omega)$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T], \quad |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f_n(t_1) - f_n(t_2)\|_{-1,q} < \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.2}$$

Alors il existe une fonction $f \in C^0([0, T]; L^p_{weak}(\Omega))$ telle que

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } C^0([0, T]; L^p_{weak}(\Omega)). \tag{1.3}$$

Si en outre,

$$q \in (1, \frac{3}{2}] \text{ et } p \in (1, \infty) \text{ ou } q \in (\frac{3}{2}, \infty) \text{ et } p \in (\frac{3q}{3+q}, \infty), \tag{1.4}$$

on a

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } C^0([0, T]; W^{-1,q}(\Omega)). \tag{1.5}$$

Preuve. Puisque l'injection $L^p(\Omega) \subset W^{-1,q_0}(\Omega)$, $q_0 = \min(\frac{3}{2}, q)$, est compacte, la suite $\{f_n\}_n$ est une suite uniformément bornée dans $L^p(\Omega)$ et uniformément continue dans $W^{-1,q_0}(\Omega)$. Par conséquent, le corollaire A.7 appliqué à $I = (0, T)$, $B = L^p(\Omega)$ et $X = W^{-1,q_0}(\Omega)$, assure l'existence d'une fonction $f \in C^0([0, T]; W^{-1,q_0}(\Omega))$ telle que, modulo l'extraction d'une sous-suite,

$$f_n \rightarrow f \in C^0([0, T]; W^{-1,q_0}(\Omega)).$$

Par suite, en écrivant que pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left| \int_{\Omega} \{f_m - f_n\}(t) \phi \, dx \right| \leq \| \{f_m - f_n\}(t) \|_{-1, q_0} \| \phi \|_{1, q'_0}, \quad t \in [0, T], \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

on voit que la suite $\{ \int_{\Omega} f_n \phi \, dx \}_n$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, est de Cauchy dans l'espace $C^0([0, T])$. On peut donc supposer qu'il existe une fonction f_{ϕ} telle que

$$\int_{\Omega} f_n \phi \, dx \rightarrow f_{\phi} = \langle f, \phi \rangle_{W^{-1, q_0}(\Omega), W_0^{1, q'_0}(\Omega)} \quad \text{dans } C^0([0, T]), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (1.6)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W^{-1, q_0}(\Omega), W_0^{1, q'_0}(\Omega)}$ dénote le produit de dualité entre les espaces $W^{-1, q_0}(\Omega)$ et $W_0^{1, q'_0}(\Omega)$. En accord avec (1.1), il est clair que

$$|f_{\phi}(t)| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} f_n(t) \phi \, dx \right| \leq c \| \phi \|_{0, p'}, \quad t \in [0, T], \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.7)$$

Soit $t \in [0, T]$ fixé. Alors l'opérateur $T_{f(t)} : \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto f_{\phi}(t)$ est un opérateur linéaire et continu défini sur le sous-espace vectoriel dense $\mathcal{D}(\Omega)$ de $L^{p'}(\Omega)$ à valeurs dans \mathbb{R} et satisfaisant

$$\sup_{\substack{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \| \phi \|_{0, p'} \leq 1}} |T_{f(t)} \phi| \leq c.$$

Il se prolonge de manière unique en un opérateur défini sur $L^{p'}(\Omega)$ à valeurs dans \mathbb{R} , encore noté $T_{f(t)}$ et satisfaisant

$$\| T_{f(t)} \|_{(L^{p'}(\Omega))'} \leq c.$$

Par suite, le théorème de représentation de Riesz garantit l'existence d'un unique élément de $L^p(\Omega)$, noté $g(t)$, tel que

$$\langle T_{f(t)}, \phi \rangle_{(L^{p'}(\Omega))', L^{p'}(\Omega)} = \int_{\Omega} g(t) \phi \, dx, \quad \| g(t) \|_{0, p} \leq c, \quad t \in [0, T].$$

En accord avec (1.6), il en résulte que pour tout $t \in [0, T]$, $f(t) \in L^p(\Omega)$, $f(t) = g(t)$ p.p. dans Ω et que

$$f_{\phi} = \int_{\Omega} f(t) \phi \, dx \in C^0([0, T]), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ et le fait que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{f(t_1) - f(t_2)\} \phi \, dx &= \int_{\Omega} \{g(t_1) - g(t_2)\} (\phi - \bar{\phi}) \, dx + \int_{\Omega} \{f(t_1) - f(t_2)\} \bar{\phi} \, dx \\ &\leq 2c \| \phi - \bar{\phi} \|_{0, p'} + \int_{\Omega} \{f(t_1) - f(t_2)\} \bar{\phi} \, dx, \quad t_1, t_2 \in [0, T], \quad \phi \in L^{p'}(\Omega), \quad \bar{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega), \end{aligned}$$

montrent que la fonction $t \mapsto \int_{\Omega} f(t) \phi \, dx$, $\phi \in L^{p'}(\Omega)$, est continue sur $[0, T]$. Pour conclure à (1.3), il suffit à nouveau d'utiliser la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ et d'écrire que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \{f_n - f\}(t) \phi \, dx \right| &\leq \left| \int_{\Omega} \{f_n - g\}(t) (\phi - \bar{\phi}) \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} \{f_n - f\}(t) \bar{\phi} \, dx \right| \\ &\leq 2c \| \phi - \bar{\phi} \|_{0, p'} + \left| \int_{\Omega} \{f_n - f\}(t) \bar{\phi} \, dx \right|, \quad t \in [0, T], \quad \phi \in L^{p'}(\Omega), \quad \bar{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

Sous les hypothèses (1.4), l'injection $L^p(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega)$ est compacte et (1.5) est alors une conséquence directe du corollaire A.7 appliqué à $I = (0, T)$, $B = L^p(\Omega)$ et $X = W^{-1,q}(\Omega)$. Le lemme est donc démontré. \square

Lemme I.3 Soient $T \in (0, \infty)$, Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 , $p \in (1, \infty)$ et

$$f \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \text{ telle que } \partial_t \left(\int_{\Omega} f(t) \phi \, dx \right) \in L^1(0, T), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Alors il existe une fonction $g \in C^0([0, T]; L^p_{\text{weak}}(\Omega))$ telle que p.p.t. $t \in (0, T)$, $g(t) = f(t)$ p.p. dans Ω .

Preuve. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. D'après le théorème A.43, il existe une fonction f_ϕ absolument continue sur $[0, T]$ telle que

$$\int_{\Omega} f(t) \phi \, dx = f_\phi(t) \text{ p.p.t. } t \in (0, T). \quad (1.8)$$

Noter alors que l'identité

$$|f_\phi(t)| \leq \|f\|_{L^\infty(0, T; L^p(\Omega))} \|\phi\|_{0, p'} \text{ p.p.t. } t \in (0, T), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

reste vraie pour tout $t \in [0, T]$ puisque $f_\phi \in C^0([0, T])$. Ceci étant, il suffit d'adapter les arguments présentés dans la preuve du lemme I.2, à partir de (1.7), pour conclure à l'existence d'une fonction $g \in C^0([0, T]; L^p_{\text{weak}}(\Omega))$ telle que

$$f_\phi(t) = \int_{\Omega} g(t) \phi \, dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad t \in [0, T].$$

D'où le résultat. \square

Lemme I.4 Soient $T \in (0, \infty)$, Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 , $p \in (1, \infty)$ et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C^0([0, T]; L^p_{\text{weak}}(\Omega))$ une suite telle que $f_n \rightarrow f$ dans $C^0([0, T]; L^p_{\text{weak}}(\Omega))$. On suppose que

$$r' \in (1, 3) \text{ et } p \in \left(\frac{3r'}{4r' - 3}, \infty \right) \text{ ou } r' \in [3, \infty) \text{ et } p \in (1, \infty). \quad (1.9)$$

Alors

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } L^q(0, T; [W^{1, r'}(\Omega)]^*), \quad q \in [1, \infty) \quad (1.10)$$

Preuve. Par hypothèses, on sait que la suite $\{\int_{\Omega} f_n \phi \, dx\}_n$, $\phi \in L^{p'}(\Omega)$, est bornée dans $C^0([0, T])$, i.e.

$$\exists c > 0 \text{ tq } \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_{\Omega} f_n(t) \phi \, dx \right| \leq c, \quad \phi \in L^{p'}(\Omega).$$

En particulier, si on choisit $\phi = |f_n(t)|^{p-2} f_n(t)$, il en découle que

$$\begin{aligned} \|f_n(t)\|_{0, p} &\leq c^{\frac{1}{p}}, \quad t \in [0, T], \\ f_n(t) &\rightharpoonup f(t) \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ et } \|f(t)\|_{0, p} \leq c^{\frac{1}{p}}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Puisque sous les conditions (1.9), l'injection $W^{1,r'}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$ est compacte, l'injection duale $L^p(\Omega) \subset [W^{1,r'}(\Omega)]^*$ l'est également. Après une éventuelle extraction de sous-suite, on peut donc supposer que

$$f_n(t) \rightarrow f(t) \text{ dans } [W^{1,r'}(\Omega)]^*, \quad t \in [0, T].$$

D'autre part, d'après (1.11), la suite $\{\|f_n(t)\|_{[W^{1,r'}(\Omega)]^*}\}_n$, $t \in [0, T]$, est uniformément bornée. Ceci garantit les hypothèses du théorème de la convergence dominée de Lebesgue qui implique que

$$\int_0^T \|f_n(t) - f(t)\|_{[W^{1,r'}(\Omega)]^*} dt \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

L'affirmation (1.10) est alors une conséquence directe de l'interpolation de $L^p(0, T)$ entre $L^1(0, T)$ et $L^\infty(0, T)$. \square

2 Sur l'équation de continuité

Comme dans le cas stationnaire (cf. 1.1), l'examen de l'équation de continuité non stationnaire (2.1) donne lieu à des résultats d'usage fréquent dans le chapitre à venir. Un outil particulièrement important dans la suite réside dans la théorie du transport de DiPERNA et P.L. LIONS [12] appliquée à l'équation de continuité. La plupart des résultats présentés ici ne sont que de simples adaptations de ceux DiPERNA et P.L. LIONS et ont déjà été proposés dans leur version stationnaire. En conséquence, nombre d'entre eux ne seront que sommairement démontrés et le lecteur désirant plus de détails est invité à se reporter au chapitre 1.1.

Le premier résultat donne le cadre dans lequel l'équation de continuité se prolonge à l'extérieur d'une région bornée de l'espace à N dimensions, $N \geq 2$, dans le cas particulier $N = 3$, et ce pour tout temps.

Lemme I.5 *Soient $T \in (0, \infty)$, Ω un domaine borné Lipschitzien de \mathbb{R}^3 et $p \geq 2$. On suppose que $\rho \in L^p((0, T) \times \Omega)$, $\mathbf{u} \in [L^2(0, T; H_0^1(\Omega))]^3$ et $f \in L^1((0, T) \times \Omega)$ satisfont*

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = f \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega). \quad (2.1)$$

Alors

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = f \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3). \quad (2.2)$$

Preuve. Il faut démontrer que

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \rho \partial_t \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f \varphi \, dx \, dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}^3). \quad (2.3)$$

En accord avec (2.1), on peut écrire que

$$\begin{aligned} & -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \rho \Phi_m \partial_t \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_m \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f \varphi \Phi_m \, dx \, dt \\ & \quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi_m \, dx \, dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

où la suite $\{\Phi_m\}_m$ est introduite dans la preuve du lemme 1.1. D'après les propriétés de cette suite, les trois premières intégrales de cette égalité tendent respectivement vers $-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \rho \partial_t \varphi \, dx \, dt$, $-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt$ et $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f \varphi \, dx \, dt$ quand $m \rightarrow \infty$. Ainsi, pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi_m \, dx \, dt \rightarrow 0 \text{ quand } m \rightarrow \infty.$$

Pour cela, nous proposons au lecteur de se reporter à la preuve du lemme 1.1 (cf. p.14) et d'en adapter la fin. \square

Remarque I.1 Soient des fonctions $\rho \in L^1((0, T) \times \Omega)$, $\mathbf{u} \in [L^1((0, T) \times \Omega)]^3$ telles que $\rho \mathbf{u} \in [L^1((0, T) \times \Omega)]^3$ et satisfaisant l'équation (2.2) avec $f = 0$. Alors

$$-\int_0^T \psi' \int_{\mathbb{R}^3} \rho \phi_R \, dx \, dt - \int_0^T \psi \int_{\mathbb{R}^3} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_R \, dx \, dt = 0,$$

$\psi \in \mathcal{D}(0, T)$, $R > 0$, $\phi_R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $0 \leq \phi_R \leq 1$, $\phi_R = 1$ dans B_R , $\phi_R = 0$ dans B^{2R} .

Si R est choisi suffisamment grand pour que $\Omega \subset B_R$, il en résulte que

$$\partial_t \left(\int_{\Omega} \rho(t) \, dx \right) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T).$$

Autrement dit, puisque $\rho \in L^1((0, T) \times \Omega)$,

$$\int_{\Omega} \rho(t_1) \, dx = \int_{\Omega} \rho(t_2) \, dx \text{ p.p.t. } t_1, t_2 \in (0, T).$$

En revanche, lorsque ces mêmes fonctions sont seulement solutions de l'équation (2.1), en général, on ne sait pas si la masse se conserve. Le lemme I.5 donne les hypothèses de sommabilité que doivent vérifier la densité et la vitesse pour que l'équation (2.2) soit satisfaite et donc que la masse se conserve. En particulier, il est important de souligner que l'hypothèse $p \geq 2$ dans le lemme I.5 est essentielle.

Avant d'énoncer certains résultats de la théorie du transport de DIPERNA et P.L. LIONS [12] appliquée à l'équation de continuité, on rappelle le lemme sur lequel repose cette théorie, à savoir le lemme de Friedrichs généralisé dans sa version non stationnaire.

Lemme I.6 Soient $T \in (0, \infty)$, $p, q_1 \in [1, \infty]$, $q_2 \geq p'$, $\rho \in L^\infty(0, T; L_{loc}^p(\mathbb{R}^3))$ et $\mathbf{u} \in [L^{q_1}(0, T; W_{loc}^{1, q_2}(\mathbb{R}^3))]^3$. On dénote par $\{S_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, 1]}$ la famille d'opérateurs de régularisation usuels par rapport à la variable d'espace. Alors

$$S_\varepsilon(\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) - \mathbf{u} \cdot \nabla S_\varepsilon(\rho) \rightarrow 0 \text{ dans } L^{q_1}(0, T; L_{loc}^r(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q_2}$$

où la distribution $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho$ est naturellement définie par $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) - \rho \operatorname{div} \mathbf{u}$.

Preuve. Pour une démonstration sommaire, consulter par exemple [12, Lemma II.1]. \square

Soit la classe de fonctions $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$b \in C^0([0, +\infty)) \cap C^1((0, \infty)), \quad \exists c > 0, \exists \lambda_0 < 1, \forall t \in (0, 1], |b'(t)| \leq ct^{-\lambda_0} \quad (2.4)$$

et dont le comportement à l'infini est donné par

$$\exists c > 0, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall t \geq 1, |b'(t)| \leq ct^{\lambda_1}, \quad |tb'(t) - b(t)| \leq ct^{\lambda_2}. \quad (2.5)$$

Lemme I.7 Soient $T \in (0, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine, $p \geq 2$ et

$$-1 < \lambda_1 \leq \frac{p}{2} - 1 \quad \text{et} \quad 0 < \lambda_2 \leq \frac{p}{2}. \quad (2.6)$$

On suppose que $\rho \in L^\infty(0, T; L^p_{loc}(\Omega))$, $\rho \geq 0$ p.p. dans $(0, T) \times \Omega$, $\mathbf{u} \in [L^2(0, T; H^1_{loc}(\mathbb{R}^3))]^3$ et $f \in L^1(0, T; L^q_{loc}(\Omega))$, $q = \frac{p}{\lambda_1}$ si $\lambda_1 > 0$ et $q \in (1, \infty)$ si $\lambda_1 \leq 0$, satisfait l'équation (2.1). Alors, pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ de la classe (2.5), (2.6), on a

$$\partial_t b(\rho) + \operatorname{div}(b(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho b'(\rho) - b(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = fb'(\rho) \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega). \quad (2.7)$$

Si $f \equiv 0$, (2.7) est encore vraie pour toute fonction b de la classe (2.4), (2.5) et (2.6).

Preuve. Soit $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$ un domaine borné arbitraire. D'après (2.1), si $y \in \Omega'$, $\{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$ est une suite régularisante et $\{S_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$ la suite d'opérateurs associée, pour ε_0 suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \psi' \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) \omega_\varepsilon(y-x) dx \right) dt - \int_0^T \psi \left(\int_{\mathbb{R}^3} (\rho \mathbf{u})(x) \cdot \nabla \omega_\varepsilon(y-x) dx \right) dt \\ & = \int_0^T \psi \left(\int_{\mathbb{R}^3} f(x) \omega_\varepsilon(y-x) dx \right) dt, \quad \psi \in \mathcal{D}(0, T). \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\partial_t S_\varepsilon(\rho) + \operatorname{div}(S_\varepsilon(\rho)\mathbf{u}) = S_\varepsilon(f) + r_\varepsilon \text{ p.p. dans } (0, T) \times \Omega' \quad (2.8)$$

où, en accord avec le lemme I.6, $r_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L^2(0, T; L^r_{loc}(\mathbb{R}^3))$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$. En multipliant (2.8) par $b'(S_\varepsilon(\rho))$ où $b \in C^1([0, \infty))$ est une fonction de la classe (2.5), (2.6), on trouve que

$$\begin{aligned} & \partial_t b(S_\varepsilon(\rho)) + \operatorname{div}(b(S_\varepsilon(\rho))\mathbf{u}) + \{S_\varepsilon(\rho)b'(S_\varepsilon(\rho)) - b(S_\varepsilon(\rho))\} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ & = S_\varepsilon(f)b'(S_\varepsilon(\rho)) + r_\varepsilon b'(S_\varepsilon(\rho)) \text{ p.p. dans } (0, T) \times \Omega'. \end{aligned} \quad (2.9)$$

On passe ensuite à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Au vu des propriétés sur les suites régularisantes (cf. lemme A.13), si ρ dénote encore le prolongement de ρ par zéro dans $(\mathbb{R} \setminus (0, T)) \times \mathbb{R}^3$, on sait que $S_\varepsilon(\rho) \rightarrow \rho$ dans $L^\infty(0, T; L^p_{loc}(\mathbb{R}^3))$ et donc, modulo l'extraction d'une sous-suite,

que $S_\varepsilon(\rho) \rightarrow \rho$ p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}^3$. Alors on vérifie aisément que

$$\begin{aligned} b(S_\varepsilon(\rho)) &\rightarrow b(\rho) \text{ dans } L^2(0, T; L^{\frac{6}{5}}(\Omega')) \text{ si } \frac{6}{5} \leq \frac{p}{\lambda_1 + 1}, \\ \{S_\varepsilon(\rho)b'(S_\varepsilon(\rho)) - b(S_\varepsilon(\rho))\} &\rightarrow \{\rho b'(\rho) - b(\rho)\} \text{ dans } L^2((0, T) \times \Omega') \text{ si } 2 \leq \frac{p}{\lambda_2}, \\ b'(S_\varepsilon(\rho)) &\xrightarrow{*} b'(\rho) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^{r'}(\Omega')) \text{ si } r' \leq \frac{p}{\lambda_1} \text{ si } \lambda_1 > 0, \\ b'(S_\varepsilon(\rho)) &\xrightarrow{*} b'(\rho) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^q(\Omega')) \text{ si } \lambda_1 \leq 0, \\ \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} b'(S_\varepsilon(\rho)) r_\varepsilon \varphi \, dx \, dt \right| &\leq c \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |r_\varepsilon \varphi| \, dx \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+, \\ \varphi &\in \mathcal{D}((0, T) \times \Omega'), \text{ si } \lambda_1 \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $S_\varepsilon(f) \rightarrow f$ dans $L^1(0, T; L^q_{loc}(\mathbb{R}^3))$, le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dans l'identité (2.9) testée par une fonction $\varphi \in \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega')$ est justifié et implique (2.7) avec Ω' à la place de Ω . Puisque Ω' est arbitraire, (2.7) en résulte.

Dans le cas où $f = 0$ et b est une fonction de la classe (2.4), (2.5) et (2.6), utiliser les arguments présentés à la fin de la preuve du lemme 1.4 (cf. p.15).

Remarque I.2 Il est intéressant de noter que la conclusion du lemme I.7 reste la même si $\rho \in L^p(0, T; L^p_{loc}(\Omega))$. Pour le voir, il suffit de remarquer que la régularisation en temps de ρ est un élément de $L^\infty(0, T; L^p_{loc}(\Omega))$, d'utiliser le lemme I.7 et de faire tendre le paramètre de régularisation vers 0^+ . D'autre part, il est également intéressant de noter que si \mathbf{u} est par exemple un élément de l'espace $[L^2(0, T; W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^3))]^3$, les conditions (2.6) peuvent être remplacées par

$$-1 < \lambda_1 \leq p - 1 \quad \text{et} \quad 0 < \lambda_2 \leq p. \quad (2.10)$$

Soient $k > 0$ et $b \in C^1([0, \infty))$. Comme dans le chapitre 1.1, on considère la fonction b_k définie en (1.1.18). Dans un premier temps, noter que sous les hypothèses du lemme I.7 pour ρ , \mathbf{u} et $f \in L^1_{loc}((0, T) \times \Omega)$, on peut adapter la preuve du Corollaire 1.1 (cf. p.18) et démontrer que

$$\forall k > 0, \quad k \operatorname{div} \mathbf{u} = f \text{ p.p. dans } \{\rho = k\}.$$

Le lemme I.7, complété par cette dernière observation, a pour conséquence immédiate le

Corollaire I.1 Soient $T \in (0, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine, $p \geq 2$, $\rho \in L^\infty(0, T; L^p_{loc}(\Omega))$, $\rho \geq 0$ p.p. dans $(0, T) \times \Omega$, $\mathbf{u} \in [L^2(0, T; H^1_{loc}(\mathbb{R}^3))]^3$, et $f \in L^1_{loc}((0, T) \times \Omega)$ satisfaisant l'équation (2.1). Alors, pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ et tout $k > 0$, on a

$$\partial_t b_k(\rho) + \operatorname{div}(b_k(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho(b_k)'_+(\rho) - b_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = f(b_k)'_+ \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega). \quad (2.11)$$

Remarque I.3 Noter qu'en faisant tendre $k \rightarrow \infty$ dans (2.11), pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ de la classe (2.5), (2.6), on récupère (2.7).

Comme on peut le voir dans le résultat ci-dessous, la notion de solution faible de l'équation de continuité renormalisée (2.7) implique la continuité forte de la fonction ρ en tant que fonction définie sur $[0, T]$ à valeurs dans $L^p(\Omega)$. Plus précisément, on a le

Lemme I.8 Soient $T \in (0, \infty)$, Ω un domaine borné Lipschitzien de \mathbb{R}^3 , $q \in (1, \infty)$ et $\theta \in (0, \min(1, \frac{q}{4}))$. On suppose que $\rho \in L^\infty(0, T; L^q(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^q_{\text{weak}}(\Omega))$, $\rho \geq 0$ p.p. dans $(0, T) \times \Omega$, $\mathbf{u} \in [L^2(0, T; H_0^1(\Omega))]^3$ satisfait l'équation

$$\partial_t \rho^\theta + \operatorname{div}(\rho^\theta \mathbf{u}) + (\theta - 1) \rho^\theta \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3). \quad (2.12)$$

Alors

$$\rho \in C^0([0, T]; L^p(\Omega)), \quad p \in [1, q]. \quad (2.13)$$

Preuve. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. D'après (2.12), on a

$$\partial_t \left(\int_\Omega \rho^\theta(t) \phi \, dx \right) = \int_\Omega \rho^\theta \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \, dx + (1 - \theta) \int_\Omega \phi \rho^\theta \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx.$$

Noter au passage que les deux intégrales de droite dans cette égalité ont bien un sens puisque $2\theta \leq q$. Clairement, $\rho^\theta \in L^\infty(0, T; L^{\frac{q}{\theta}}(\Omega))$, $\partial_t \left(\int_\Omega \rho^\theta(t) \phi \, dx \right) \in L^2(0, T)$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et le lemme I.3 garantit l'existence d'une fonction $g \in C^0([0, T]; L^{\frac{q}{\theta}}_{\text{weak}}(\Omega))$ telle que p.p.t. $t \in (0, T)$, $g(t) = \rho^\theta(t)$ p.p. dans Ω . Remarquer que l'inégalité

$$\|g(t)\|_{0, \frac{q}{\theta}} = \|\rho^\theta(t)\|_{0, \frac{q}{\theta}} = \|\rho(t)\|_{0, q}^\theta \leq \|\rho\|_{L^\infty(0, T; L^q(\Omega))}^\theta \quad (2.14)$$

a priori vraie p.p.t. $t \in (0, T)$ est en réalité vraie pour tout $t \in [0, T]$ puisque $g \in C^0([0, T]; L^{\frac{q}{\theta}}_{\text{weak}}(\Omega))$. D'après (2.12), on a

$$\partial_t g + \operatorname{div}(g \mathbf{u}) = (1 - \theta)g \operatorname{div} \mathbf{u} \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3).$$

En régularisant cette équation par rapport à la variable d'espace à l'aide de la famille d'opérateurs usuels $\{S_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, 1]}$, en accord avec le lemme I.6, on trouve que

$$\partial_t S_\varepsilon(g) + \operatorname{div}(S_\varepsilon(g) \mathbf{u}) = S_\varepsilon((1 - \theta)g \operatorname{div} \mathbf{u}) + r_\varepsilon \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3) \quad (2.15)$$

où $r_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L^2(0, T; L^{\frac{2q}{2\theta+q}}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3))$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Puisque $g \in C^0([0, T]; L^{\frac{q}{\theta}}_{\text{weak}}(\Omega))$, d'après les propriétés standard sur la régularisation, on sait que

$$S_\varepsilon(g) \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^3), \quad (2.16)$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \sup_{t \in [0, T]} \|S_\varepsilon(g(t))\|_{0, p, \omega} \leq c \|\rho\|_{L^\infty(0, T; L^{\max(p, \frac{1}{\theta})}(\Omega))}, \quad p \in [1, \frac{q}{\theta}], \quad (2.17)$$

pour tout domaine borné $\omega \subset \mathbb{R}^3$ et que, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on a

$$S_\varepsilon(g(t)) \rightarrow g(t) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3), \quad t \in [0, T], \quad (2.18)$$

$$S_\varepsilon(g \operatorname{div} \mathbf{u}) \rightarrow g \operatorname{div} \mathbf{u} \text{ dans } L^2(0, T; L^{\frac{2q}{2\theta+q}}(\mathbb{R}^3)). \quad (2.19)$$

Il apparaît alors que les hypothèses du lemme I.7 sont satisfaites pour $b(s) = s^2$. En conséquence,

$$\begin{aligned} \partial_t \{S_\varepsilon(g)\}^2 + \operatorname{div}(\{S_\varepsilon(g)\}^2 \mathbf{u}) &= 2\{S_\varepsilon((1 - \theta)g \operatorname{div} \mathbf{u}) + r_\varepsilon\} S_\varepsilon(g) \\ &\quad - 2\{S_\varepsilon(g)\}^2 \operatorname{div} \mathbf{u} \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Autrement dit, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\phi = 1$ dans Ω , on a

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \{S_\varepsilon(g(t))\}^2 \phi \, dx &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \{S_\varepsilon((1-\theta)g(t) \operatorname{div} \mathbf{u}(t)) + r_\varepsilon(t)\} S_\varepsilon(g(t)) \phi \, dx \\ &\quad - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi \{S_\varepsilon(g(t))\}^2 \operatorname{div} \mathbf{u}(t) \, dx \text{ p.p.t. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

On intègre cette égalité sur l'intervalle de temps (t_1, t_2) , $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$. A l'aide de l'inégalité de Hölder, on trouve que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} [\{S_\varepsilon(g(t_2))\}^2 - \{S_\varepsilon(g(t_1))\}^2] \phi \, dx &\leq 2 \sup_{t \in [0, T]} \|S_\varepsilon(g(t)) \phi\|_{0,4} \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,2,(0,T) \times \Omega} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2 \sup_{t \in [0, T]} \|S_\varepsilon(g(t)) \phi\|_{0, \frac{2q}{q-2\theta}} \|\{S_\varepsilon((1-\theta)g \operatorname{div} \mathbf{u}) + r_\varepsilon\}\|_{L^2(0, T; L^{\frac{2q}{2\theta+q}}(\mathbb{R}^3))} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Puisque $\theta \leq \frac{q}{4}$, on a $\frac{2q}{q-2\theta} \in [1, \frac{q}{\theta}]$. D'après (2.17), (2.19) et la convergence $r_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L^2(0, T; L^{\frac{2q}{2\theta+q}}(\mathbb{R}^3))$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on peut justifier l'existence d'une constante $c > 0$ qui ne dépend pas de ε , telle que

$$\int_{\mathbb{R}^3} [\{S_\varepsilon(g(t_2))\}^2 - \{S_\varepsilon(g(t_1))\}^2] \phi \, dx \leq c |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci montre que la suite $\{\int_{\mathbb{R}^3} \{S_\varepsilon(g)\}^2 \phi \, dx\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)}$ est une suite de fonctions uniformément continues dans \mathbb{R} . Par ailleurs, toujours d'après (2.17), il est clair que cette suite est uniformément bornée dans $C^0([0, T])$. Le corollaire A.7 dans lequel on pose $I = (0, T)$, $B = X = \mathbb{R}$ et la convergence (2.18) montrent alors que modulo l'extraction d'une sous-suite et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \{S_\varepsilon(g)\}^2 \phi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} g^2 \, dx \text{ dans } C^0([0, T]), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \phi = 1 \text{ dans } \Omega.$$

Ainsi, on vient de prouver que $g \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ et donc que $g \in C^0([0, T]; L^p(\Omega))$, $p \in [1, 2]$. A l'aide de l'interpolation de $L^q(\Omega)$ entre $L^2(\Omega)$ et $L^{\frac{p}{\theta}}(\Omega)$, on peut écrire que

$$\|g(t_2) - g(t_1)\|_{0,p} \leq \|g(t_2) - g(t_1)\|_{0,2}^\alpha \|g(t_2) - g(t_1)\|_{0, \frac{p}{\theta}}^{1-\alpha}, \quad t_1, t_2 \in [0, T], \alpha \in (0, 1)$$

et utiliser (2.14) pour en déduire finalement que $g \in C^0([0, T]; L^p(\Omega))$, $p \in [1, \frac{q}{\theta}]$. On rappelle alors que p.p.t. $t \in (0, T)$, $g(t) = \rho^\theta(t)$ p.p. dans Ω , ce qui implique en particulier que

$$\|g(t)\|_{0,p} = \|\rho(t)\|_{0,p\theta}^\theta \text{ p.p.t. } t \in (0, T), \quad p \in [\frac{1}{\theta}, \frac{q}{\theta}].$$

Puisque évidemment $\rho \in C^0([0, T], L^p_{\text{weak}}(\Omega))$, $p \in [1, q]$, cette égalité est en fait satisfaite pour tout $t \in [0, T]$ et termine la preuve. \square

3 Quelques problèmes paraboliques

Dans cette section, nous discutons de l'existence, de l'unicité et de la régularité de certaines équations paraboliques de type diffusion, considérées sur le cylindre $(0, T) \times V$, $T \in (0, \infty)$ et $V \subset \mathbb{R}^3$ une région bornée, et pour lesquelles des conditions aux limites de type Neumann sont imposées.

3.1 Le problème de Neumann associé au Laplacien

Soit $\varepsilon \in (0, 1]$. On considère le problème

$$- \iint_{(0,T) \times V} \rho \partial_t \varphi - \varepsilon \nabla \rho \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt = \iint_{(0,T) \times V} f \varphi \, dx, \quad \varphi \in C^\infty(\overline{(0,T) \times V}), \quad \varphi(0, \cdot) = \varphi(T, \cdot) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_V \rho(t, x) \phi(x) \, dx \rightarrow \int_V \rho_0(x) \phi(x) \, dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(V). \quad (3.1)$$

Le lemme ci-dessous est une adaptation à la présente situation des résultats classiques concernant l'existence, l'unicité et la régularité de solutions d'équations paraboliques.

Lemme I.9 *Soient $0 < \alpha \leq 1$ et $p, q \in (1, \infty)$. On suppose que $T \in (0, \infty)$, $V \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine borné de classe $C^{1,\alpha}$, $\rho_0 \in L^q(V)$ et que $f \in L^p(0, T; W^{-1,q}(V))$. Alors il existe une unique fonction*

$$\rho \in L^p(0, T; W^{1,q}(V)) \cap C^0([0, T]; L^q_{weak}(V))$$

solution du problème (3.1) satisfaisant

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^q(V))} + \varepsilon \|\rho\|_{L^p(0,T;W^{1,q}(V))} \leq c(T, V, p, q) \{ \|\rho_0\|_{0,q,V} + \|f\|_{L^p(0,T;W^{-1,q}(V))} \}.$$

Si on suppose en outre que $V \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine borné de classe $C^{2,\alpha}$ et que $f \in L^p(0, T; L^q(V))$, alors

$$\rho \in L^p(0, T; W^{2,q}(V)) \cap C^0([0, T]; L^q(V)), \quad \partial_t \rho \in L^p(0, T; L^q(V))$$

et satisfait

$$\|\partial_t \rho\|_{L^p(0,T;L^q(V))} + \varepsilon \|\rho\|_{L^p(0,T;W^{2,q}(V))} \leq c(T, V, p, q) \{ \|\rho_0\|_{0,q,V} + \|f\|_{L^p(0,T;L^q(V))} \}.$$

Preuve. Ces résultats classiques sont issus du livre de LADYZHENSKAYA, SOLONNIKOV, URALTSEVA [35]. \square

3.2 Dissipation artificielle dans l'équation de continuité

Soient $T \in (0, \infty)$, $V \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné, $\varepsilon \in (0, 1]$ fixé et \mathbf{u} un champ de vecteurs donné s'annulant sur la frontière de V . Ici, nous sommes intéressés par la perturbation de l'équation continuité par une dissipation artificielle, *i.e.* par l'équation

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) - \varepsilon \Delta \rho = 0 \text{ dans } (0, T) \times V, \quad (3.2)$$

complétée par les conditions aux limites

$$\partial_\nu \rho = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial V \quad (3.3)$$

et par la condition initiale

$$\rho(0) = \rho_0 \text{ dans } V. \quad (3.4)$$

Dans cette équation, l'inconnue est la fonction $\rho(t, x)$, $(t, x) \in (0, T) \times V$ et la fonction $\rho_0(x)$, $x \in V$, est donnée. Notre étude du problème (3.2)-(3.3) est résumée dans le résultat ci-contre. Dans la suite, pour éviter de nombreux dépassement de ligne, pour tout $t \in [0, T]$, nous utiliserons la notation $\|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}}$ au lieu de $\|\mathbf{u}\|_{[C^0([0,t]; W^{1,\infty}(V))]^3}$.

Théorème I.1 Soient $T \in (0, \infty)$ et $V \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné de classe $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$. On suppose que

$$\rho_0 \in L^\infty(V) \cap H^1(V), \quad 0 < \underline{\rho} \leq \rho_0 \leq \bar{\rho} < \infty \text{ p.p. dans } V, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u} \in [C^0([0, T]; W^{1,\infty}(V))]^3, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } (0, T) \times \partial V. \quad (3.6)$$

Alors il existe une unique fonction

$$\rho \in C^0([0, T]; H^1(V)) \cap L^2(0, T; H^2(V)), \quad \partial_t \rho \in L^2((0, T) \times V)$$

satisfaisant (3.2) p.p. dans $(0, T) \times V$, (3.3) p.p.t. $t \in (0, T)$ au sens des traces, (3.4) p.p. dans V et pour tout $t \in [0, T]$ les estimations

$$\|\rho(t)\|_{1,2} \leq \frac{c}{\varepsilon} \|\rho_0\|_{1,2} (1 + t \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}}^2) e^{\frac{1}{2}(t \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}} + \frac{t}{\varepsilon} \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}}^2)}, \quad (3.7)$$

$$\|\nabla^2 \rho\|_{L^2((0,t) \times V)} \leq \frac{c}{\varepsilon^2} \|\rho_0\|_{1,2} (1 + t \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}}^2)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2}(t \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}} + \frac{t}{\varepsilon} \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}}^2)}, \quad (3.8)$$

$$\|\partial_t \rho\|_{L^2((0,t) \times V)} \leq \frac{c}{\varepsilon} \|\rho_0\|_{1,2} (1 + t \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}}^2)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2}(t \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}} + \frac{t}{\varepsilon} \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}}^2)}, \quad (3.9)$$

$$\underline{\rho} e^{-\int_0^t \|\operatorname{div} \mathbf{u}(s)\|_{0,\infty,V} ds} \leq \rho(t, x) \leq \bar{\rho} e^{\int_0^t \|\operatorname{div} \mathbf{u}(s)\|_{0,\infty,V} ds}, \quad \forall x \in \bar{V}. \quad (3.10)$$

De plus,

$$\rho \in L^p(0, T; W^{2,p}(V)) \cap C^0([0, T]; L^p(V)), \quad \partial_t \rho \in L^p((0, T) \times V), \quad p \in (1, \infty). \quad (3.11)$$

Soit l'opérateur $S_{\rho_0} : \{\mathbf{u} \in [C^0([0, T]; W^{1,\infty}(V))]^3, \mathbf{u}|_{\partial V} = \mathbf{0}\} \rightarrow C^0([0, T]; H^1(V))$ défini par $S_{\rho_0}(\mathbf{u}) = \rho$. On suppose que $\|\mathbf{u}_i\|_{C^0([0,T]; [W^{1,\infty}(V)]^3)} \leq K$, $i = 1, 2$. Alors

$$\|\{S_{\rho_0}(\mathbf{u}_1) - S_{\rho_0}(\mathbf{u}_2)\}(t)\|_{0,2} \leq c(T, V, \varepsilon, K) t \|\rho_0\|_{1,2} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{C^0([0,T]; [W^{1,\infty}(V)]^3)}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.12)$$

Preuve. Soit $A : D(A) = \{\varphi \in H^2(V), \int_V \varphi dx = 0, \partial_\nu \varphi|_{\partial V} = 0\} \subset \tilde{L}^2(V) \rightarrow \tilde{L}^2(V)$ défini par $A = -\Delta$. D'après la formule de Green, on a

$$\int_V Auv dx = \int_V uAv dx, \quad u, v \in D(A).$$

Autrement dit, l'opérateur A est un opérateur symétrique. Par ailleurs, le lemme 1.6 garantit que pour toute fonction $f \in \tilde{L}^2(V)$ il existe une unique fonction $u \in D(A)$ telle que $Au = f$, ce qui implique que l'opérateur A est surjectif. D'autre part, la formule de Green et l'inégalité de Poincaré-Wirtinger prouvent que

$$\int_V Auu dx = \int_V |\nabla u|^2 dx \geq c(V) \|u\|_{1,2}^2, \quad u \in D(A)$$

d'où, d'après l'inégalité de Schwarz, que

$$\|Au\|_{0,2} \geq c(V) \|u\|_{1,2}, \quad u \in D(A).$$

En conséquence, l'opérateur A est inversible et A^{-1} considéré comme un opérateur de $\tilde{L}^2(V)$ à valeurs dans $\tilde{L}^2(V)$ est compact. Puisque tout opérateur symétrique T défini sur un espace de Hilbert H , à valeurs dans ce même espace H est un opérateur borné et autoadjoint (cf. [82, Proposition VII.3.2]) et que $\tilde{L}^2(V)$ est un espace de Hilbert séparable, le [8, Théorème VI.11] garantit qu'il existe une base Hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $\tilde{L}^2(V)$ ainsi qu'une suite de réels strictement positifs $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, $\lambda_k \rightarrow \infty$, satisfaisant

$$e_k \in D(A), Ae_k = \lambda_k e_k.$$

En accord avec les résultats classiques concernant la régularité elliptique, $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in C^\infty(V)$. Noter que $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme aussi un système orthogonal complet de $\{\varphi \in H^1(V), \int_V \varphi dx = 0\}$ muni du produit scalaire

$$((\varphi_1, \varphi_2)) = \int_V \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 dx.$$

Noter enfin qu'en posant $e_0 = |V|^{-\frac{1}{2}}$ et $\lambda_0 = 0$ ($\Rightarrow Ae_0 = \lambda_0 e_0$), la suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \{\varphi \in H^2(V), \partial_\nu \varphi|_{\partial V} = 0\}$ forme une base hilbertienne de $L^2(V)$ ainsi qu'un système orthogonal complet de $H^1(V)$ muni de son produit scalaire usuel.

Soient $X_n = \text{Vect}(e_k, k = 0, \dots, n)$ le sous-espace vectoriel de $L^2(V)$ muni du produit scalaire induit

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_V \varphi_1 \varphi_2 dx$$

et P_n l'opérateur de projection de $L^2(V)$ sur X_n . On rappelle que cet opérateur possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \|P_n\|_{\mathcal{L}(L^2(V), L^2(V))} &= 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n \varphi - \varphi\|_{0,2} = 0, \quad \varphi \in L^2(V), \\ \|P_n \varphi\|_{k,2} &\leq c \|\varphi\|_{k,2}, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{3.13}$$

c désignant ici une constante indépendante du paramètre $n \in \mathbb{N}^*$. Bien sûr, puisque X_n est de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes.

Par hypothèses, on a $\mathbf{u} \in [C^0([0, T]; H_0^1(V))]^3$. Soit l'opérateur $A_n : [0, T] \rightarrow \text{End}(X_n)$ défini par $A_n(t)\Phi = \varepsilon \Delta \Phi - P_n[\text{div}\{\Phi \mathbf{u}(t)\}]$, $t \in [0, T]$, $\Phi \in X_n$. On vérifie sans peine que A_n est continu de $[0, T]$ à valeurs dans $\text{End}(X_n)$. Par suite, les résultats classiques de calcul différentiel nous permettent d'affirmer qu'il existe une unique fonction $\rho_n \in C^1([0, T]; X_n)$ solution du problème

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \rho_n(s) &= A_n(s) \rho_n(s) \text{ pour } s \in [0, T], \\ \rho_n(0) &= P_n \rho_0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

En multipliant (3.14) par $\rho_n(s)$ et en intégrant par rapport à la variable d'espace, quelques intégrations par parties nous conduisent à l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_V |\rho_n(s)|^2 dx + \varepsilon \int_V |\nabla \rho_n(s)|^2 dx = -\frac{1}{2} \int_V \rho_n^2(s) \text{div} \mathbf{u}(s) dx, \quad s \in [0, T],$$

d'où on déduit pour tout $t \in [0, T]$ que

$$\|\rho_n(t)\|_{0,2}^2 + 2\varepsilon \int_0^t \|\nabla \rho_n(s)\|_{0,2}^2 ds \leq \|P_n \rho_0\|_{0,2}^2 + \int_0^t \|\rho_n(s)\|_{0,2}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}(s)\|_{0,\infty} ds.$$

D'après le lemme de Gronwall A.14, il en résulte que

$$\|\rho_n(t)\|_{0,2}^2 \leq \|P_n \rho_0\|_{0,2}^2 e^{(\int_0^t \|\operatorname{div} \mathbf{u}(s)\|_{0,\infty} ds)}, \quad t \in [0, T]. \quad (3.15)$$

Cette estimation n'est pas suffisante pour atteindre notre objectif. A l'aide de (3.14), pour tout $s \in [0, T]$, on peut écrire que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V (\partial_s \rho_n(s) + P_n [\operatorname{div} \{\rho_n(s) \mathbf{u}(s)\}] - \varepsilon \Delta \rho_n(s))^2 dx \\ &= \int_V [|\partial_s \rho_n(s)|^2 + |\varepsilon \Delta \rho_n(s)|^2 - (P_n [\operatorname{div} \{\rho_n(s) \mathbf{u}(s)\}])^2 - 2\varepsilon \partial_s \rho_n(s) \Delta \rho_n(s)] dx \\ &\quad + \int_V [2P_n [\operatorname{div} \{\rho_n(s) \mathbf{u}(s)\}] (\partial_s \rho_n(s) + P_n [\operatorname{div} \{\rho_n(s) \mathbf{u}(s)\}] - \varepsilon \Delta \rho_n(s))] dx \\ &= \int_V [|\partial_s \rho_n(s)|^2 + |\varepsilon \Delta \rho_n(s)|^2 - (P_n [\operatorname{div} \{\rho_n(s) \mathbf{u}(s)\}])^2 + 2\varepsilon \partial_s \nabla \rho_n(s) \nabla \rho_n(s)] dx. \end{aligned}$$

Il en découle que

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{ds} \int_V |\nabla \rho_n(s)|^2 dx + \int_V \{(\partial_s \rho_n(s))^2 + \varepsilon^2 |\Delta \rho_n(s)|^2\} dx &\leq \int_V |\operatorname{div}(\rho_n(s) \mathbf{u}(s))|^2 dx \\ &\leq (\|\mathbf{u}(s)\|_{0,\infty}^2 \|\nabla \rho_n(s)\|_{0,2}^2 + \|\rho_n(s)\|_{0,2}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}(s)\|_{0,\infty}^2). \end{aligned}$$

En particulier, en intégrant cette inégalité sur l'intervalle $(0, t)$, $t \in [0, T]$, on trouve que

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\nabla \rho_n(t)\|_{0,2}^2 + \int_0^t \int_V \{(\partial_s \rho_n(s))^2 + \varepsilon^2 |\Delta \rho_n(s)|^2\} dx ds \\ \leq \varepsilon \|\nabla P_n \rho_0\|_{0,2}^2 + \int_0^t (\|\mathbf{u}(s)\|_{0,\infty}^2 \|\nabla \rho_n(s)\|_{0,2}^2 + \|\rho_n(s)\|_{0,2}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}(s)\|_{0,\infty}^2) ds \\ \leq \varepsilon \|\nabla P_n \rho_0\|_{0,2}^2 + \int_0^t \|P_n \rho_0\|_{0,2}^2 e^{\int_0^s \|\operatorname{div} \mathbf{u}(\sigma)\|_{0,\infty} d\sigma} \|\operatorname{div} \mathbf{u}(s)\|_{0,\infty}^2 ds \\ + \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{0,\infty}^2 \|\nabla \rho_n(s)\|_{0,2}^2 ds \equiv w(t) + \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{0,\infty}^2 \|\nabla \rho_n(s)\|_{0,2}^2 ds. \end{aligned} \quad (3.16)$$

A l'aide du corollaire A.9, il en résulte que

$$\|\nabla \rho_n(t)\|_{0,2}^2 \leq \frac{w(t)}{\varepsilon} + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{u}(s)\|_{0,\infty}^2 \frac{w(s)}{\varepsilon} e^{\int_s^t \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{u}(\sigma)\|_{0,\infty}^2 d\sigma} ds. \quad (3.17)$$

En insérant cette information dans l'identité (3.16), il en ressort la suivante : pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_V \{(\partial_s \rho_n(s))^2 + \varepsilon^2 |\Delta \rho_n(s)|^2\} dx ds \\ \leq w(t) + \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{0,\infty}^2 \times \left(\frac{w(s)}{\varepsilon} + \int_0^s \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{u}(\sigma)\|_{0,\infty}^2 \frac{w(\sigma)}{\varepsilon} e^{\int_\sigma^s \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{u}(\tau)\|_{0,\infty}^2 d\tau} d\sigma \right) ds. \end{aligned} \quad (3.18)$$

D'autre part, ajoutée à l'inégalité (3.16), (3.17) implique que

$$\begin{aligned} \|\rho_n(t)\|_{1,2}^2 &\leq \|P_n \rho_0\|_{0,2}^2 e^{\int_0^t \|\operatorname{div} \mathbf{u}(s)\|_{0,\infty} ds} \\ &+ \frac{w(t)}{\varepsilon} + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{u}(s)\|_{0,\infty}^2 \frac{w(s)}{\varepsilon} e^{\int_s^t \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{u}(\sigma)\|_{0,\infty}^2 d\sigma} ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Remarquer que pour $m > n$, la procédure ci-dessus aboutit également à l'estimation

$$\begin{aligned} \|(\rho_m - \rho_n)(t)\|_{1,2}^2 &\leq \|(P_m - P_n)\rho_0\|_{0,2}^2 e^{\int_0^t \|\operatorname{div} \mathbf{u}(s)\|_{0,\infty} ds} \\ &+ \left(\frac{\tilde{w}(t)}{\varepsilon} + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{u}(s)\|_{0,\infty}^2 \frac{\tilde{w}(s)}{\varepsilon} e^{\int_s^t \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{u}(\sigma)\|_{0,\infty}^2 d\sigma} ds\right), \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

dans laquelle

$$\tilde{w}(t) = \varepsilon \|\nabla(P_m - P_n)\rho_0\|_{0,2}^2 + \int_0^t \|(P_m - P_n)\rho_0\|_{0,2}^2 e^{\int_0^s \|\operatorname{div} \mathbf{u}(\sigma)\|_{0,\infty} d\sigma} \|\operatorname{div} \mathbf{u}(s)\|_{0,\infty}^2 ds.$$

Ainsi, la suite $\{\rho_n\}_n$ est de Cauchy dans $C^0([0, T]; H^1(V))$. Par ailleurs, puisque on peut *e.g.* majorer $w(t)$ par

$$\|\rho_0\|_{1,2}^2 (1 + t \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}}^2) e^{t \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}}},$$

en utilisant (3.19), on trouve que

$$\|\rho_n(t)\|_{1,2} \leq \frac{C}{\varepsilon} \|\rho_0\|_{1,2} (1 + t \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}}^2) e^{\frac{1}{2}(t \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}} + \frac{t}{\varepsilon} \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}}^2)}, \quad t \in [0, T]. \quad (3.20)$$

De même, à partir de (3.18), on obtient

$$\begin{aligned} &\|\partial_s \rho_n\|_{L^2((0,t) \times V)} + \varepsilon \|\Delta \rho_n\|_{L^2((0,t) \times V)} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \|\rho_0\|_{1,2} (1 + t \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}}^2)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2}(t \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}} + \frac{t}{\varepsilon} \|\mathbf{u}\|_{C_t^0; W^{1,\infty}}^2)}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Les estimations (3.20) et (3.21) montrent que les suites $\{\rho_n\}_n$, $\{\partial_t \rho_n\}_n$ et $\{\nabla \rho_n\}_n$ sont respectivement uniformément bornées par rapport à n dans $L^2((0, T) \times V)$, $L^2((0, T) \times V)$ et $L^2(0, T; E_0^2(V))$. Ainsi, modulo l'extraction d'une sous-suite, on peut supposer qu'il existe une fonction $\rho \in C^0([0, T]; H^1(V)) \cap L^2(0, T; H^2(V))$, $\partial_t \rho \in L^2((0, T) \times V)$, $\nabla \rho \in L^2(0, T; E_0^2(V))$, telle que lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \rho_n &\rightarrow \rho \text{ dans } C^0([0, T]; H^1(V)), \\ D^\alpha \rho_n &\rightharpoonup D^\alpha \rho, \quad \partial_t \rho_n \rightharpoonup \partial_t \rho \text{ dans } L^2((0, T) \times V), \quad \nabla \rho_n \rightharpoonup \nabla \rho \text{ dans } L^2(0, T; E_0^2(V)). \end{aligned}$$

On teste alors l'équation (3.14) par une fonction $\varphi \in L^2((0, T) \times V)$. On obtient

$$\iint_{(0,T) \times V} \{\partial_t \rho_n \varphi + \operatorname{div}(\rho_n \mathbf{u}) P_n \varphi - \varepsilon \Delta \rho_n \varphi\} dt dx = 0.$$

Ayant en tête le fait que $P_n \varphi \rightarrow \varphi$ dans $L^2((0, T) \times V)$, on passe à la limite $n \rightarrow \infty$ dans cette identité. A ce stade, nous avons donc démontré l'existence d'une solution ρ

satisfaisant (3.2) p.p. dans $(0, T) \times V$, p.p.t. $t \in (0, T)$ (3.3) au sens des traces et (3.4) p.p. dans V . Pour montrer que celle-ci est unique, il suffit de supposer l'existence de deux solutions ρ_1 et ρ_2 , de tester l'équation satisfaite par la différence $(\rho_1 - \rho_2)$ par $(\rho_1 - \rho_2)$, d'intégrer l'identité obtenue par rapport à la variable d'espace puis sur l'intervalle de temps $(0, t)$, $t \in [0, T]$, et enfin d'utiliser le lemme de Gronwall A.14 avec $c = 0$.

Passons à la preuve de (3.10). On introduit la fonction $r(t) = \underline{\rho} e^{(-\int_0^t \|\operatorname{div} \mathbf{u}(s)\|_{0,\infty,V} ds)}$ qui est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire $r' + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\infty,V} r = 0$, complétée par la condition initiale $r(0) = \underline{\rho}$. Il est facile de voir que $r' + \operatorname{div}(r\mathbf{u}) = r(\operatorname{div} \mathbf{u} - \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\infty,V}) \leq 0$. On dénote $w(t, x) = r(t) - \rho(t, x)$. Alors il est clair que w est une solution du problème

$$\begin{aligned} \partial_t w + \operatorname{div}(w\mathbf{u}) - \varepsilon \Delta w &= r' + \operatorname{div}(r\mathbf{u}) \leq 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times V, \\ \partial_\nu w &= -\partial_\nu \rho = 0 \text{ sur } \partial V, \quad w(0, \cdot) = \underline{\rho} - \rho_0 \leq 0 \text{ p.p. dans } V. \end{aligned}$$

En intégrant la première équation testée par w^+ par rapport à la variable d'espace, p.p.t. $s \in [0, T]$ on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_V |w^+(s)|^2 dx + \varepsilon \int_V |\nabla w^+(s)|^2 dx \leq - \int_V \operatorname{div} \mathbf{u}(s) \frac{|w^+(s)|^2}{2} dx.$$

En particulier, on a

$$\partial_s \|w^+(s)\|_{0,2,V}^2 \leq \|\operatorname{div} \mathbf{u}(s)\|_{0,\infty,V} \|w^+(s)\|_{0,2,V}^2.$$

Ainsi, puisque $w^+(0, \cdot) = 0$, le lemme de Gronwall A.14 avec $c = 0$ garantit que pour tout $t \in [0, T]$, $\|w^+(t)\|_{0,2,V} = 0$. Finalement, on conclut que pour tout $t \in [0, T]$, $r(t) \leq \rho(t, x)$ p.p.t. $x \in V$. Au vu de la régularité $C^0([0, T]; H^1(V)) \cap L^2(0, T; H^2(V))$ de ρ , cette inégalité est en fait vraie pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \bar{V}$. Pour obtenir la borne supérieure, on considère la fonction $R(t) = \bar{\rho} e^{(\int_0^t \|\operatorname{div} \mathbf{u}(s)\|_{0,\infty,V} ds)}$ qui est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire $R' - \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\infty,V} R = 0$, complétée par la condition initiale $R(0) = \bar{\rho}$. Il est facile de voir que $R' + \operatorname{div}(R\mathbf{u}) = R(\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\infty,V} + \operatorname{div} \mathbf{u}) \geq R(\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\infty,V} - |\operatorname{div} \mathbf{u}|) \geq 0$. On dénote $W(t, x) = R(t) - \rho(t, x)$. Alors W est une solution du problème

$$\begin{aligned} \partial_t W + \operatorname{div}(W\mathbf{u}) - \varepsilon \Delta W &= R' + \operatorname{div}(R\mathbf{u}) \geq 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times V, \\ \partial_\nu W &= -\partial_\nu \rho = 0 \text{ sur } \partial V, \quad W(0, \cdot) = \bar{\rho} - \rho_0 \geq 0 \text{ dans } V. \end{aligned}$$

En testant la première équation par $-W^-$ puis en intégrant par rapport à la variable d'espace et en suivant une démarche analogue à celle adoptée précédemment, pour tout $t \in [0, T]$, on obtient $\|W^-(t)\|_{0,2,V} = 0$, ce qui termine la preuve pour la borne supérieure et par la même occasion celle de (3.8).

Le gain de régularité (3.11) se justifie à l'aide du lemme I.9. En effet, d'après (3.10), on sait que $\rho \in L^\infty(0, T; L^\infty(V))$. Alors, puisque $\rho_0 \in L^\infty(V)$, le lemme I.9 avec $f = \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})$ garantit dans un premier temps que $\rho \in L^p(0, T; W^{1,p}(V)) \cap C^0([0, T]; L^p_{weak}(V))$, $p \in (1, \infty)$. Mais alors $f \in L^p((0, T) \times V)$ et, à nouveau, le lemme I.9 nous permet de conclure à la validité de (3.11).

Pour terminer, on démontre l'inégalité (3.12). Pour ne pas alourdir les notations, on pose $\rho_i = S_{\rho_0}(\mathbf{u}_i)$, $i = 1, 2$. Alors

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_1 - \rho_2) - \varepsilon \Delta(\rho_1 - \rho_2) &= (\rho_1 - \rho_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \rho_2 \operatorname{div}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \\ &\quad + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla(\rho_1 - \rho_2) + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla \rho_2 \text{ p.p. dans } (0, T) \times V. \end{aligned}$$

On multiplie cette équation par $(\rho_1 - \rho_2)$ puis on intègre par rapport à la variable d'espace. Pour presque tout $s \in (0, T)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_V |(\rho_1 - \rho_2)(s)|^2 dx + \varepsilon \int_V |\nabla(\rho_1 - \rho_2)(s)|^2 dx \\ &\leq \int_V \{ |(\rho_1 - \rho_2)(s)|^2 |\operatorname{div} \mathbf{u}_1(s)| + |\mathbf{u}_1(s)| |\nabla(\rho_1 - \rho_2)(s)| |(\rho_1 - \rho_2)(s)| \} dx \\ &+ \int_V \{ |\rho_2(s)| |\operatorname{div}((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(s))| |(\rho_1 - \rho_2)(s)| + |\nabla \rho_2(s)| |(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(s)| |(\rho_1 - \rho_2)(s)| \} dx \\ &\leq \|\mathbf{u}_1(s)\|_{1,\infty} \|(\rho_1 - \rho_2)(s)\|_{0,2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}_1(s)\|_{1,\infty}^2 \|(\rho_1 - \rho_2)(s)\|_{0,2}^2 \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)(s)\|_{0,2}^2 + 2\|\rho_2(s)\|_{1,2} \|(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(s)\|_{1,\infty} \|(\rho_1 - \rho_2)(s)\|_{0,2}. \end{aligned}$$

Puisque $\|\rho_1 - \rho_2\|_{0,2,V} \in H^1(0, T)$, de l'inégalité précédente découle alors la suivante :

$$\begin{aligned} &\|(\rho_1 - \rho_2)(s)\|_{0,2} \times \partial_s \|(\rho_1 - \rho_2)(s)\|_{0,2} + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)(s)\|_{0,2}^2 \\ &\leq 2\|\rho_2(s)\|_{1,2} \|(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(s)\|_{1,\infty} \times \|(\rho_1 - \rho_2)(s)\|_{0,2} \\ &+ (\|\mathbf{u}_1(s)\|_{1,\infty} + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}_1(s)\|_{1,\infty}^2) \|(\rho_1 - \rho_2)(s)\|_{0,2} \times \|(\rho_1 - \rho_2)(s)\|_{0,2}. \end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité sur l'intervalle de temps $(0, t)$, $t \in [0, T]$, en particulier, on en déduit que

$$\begin{aligned} &\|(\rho_1 - \rho_2)(t)\|_{0,2} \leq \int_0^t 2\|\rho_2(s)\|_{1,2} \|(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(s)\|_{1,\infty} ds \\ &+ \int_0^t (\|\mathbf{u}_1(s)\|_{1,\infty} + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}_1(s)\|_{1,\infty}^2) \|(\rho_1 - \rho_2)(s)\|_{0,2} ds, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

A l'aide de l'estimation (3.7) pour ρ_2 , on trouve que

$$\begin{aligned} &\|(\rho_1 - \rho_2)(t)\|_{0,2} \leq \frac{C}{\varepsilon} (1 + KT) e^{\frac{1}{2}(KT + \frac{K^2}{\varepsilon} T)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{C_t^0; W^{1,\infty}} \\ &+ \int_0^t (\|\mathbf{u}_1(s)\|_{1,\infty} + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}_1(s)\|_{1,\infty}^2) \|(\rho_1 - \rho_2)(s)\|_{0,2} ds, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (3.12) d'après le lemme de Gronwall A.14. \square

4 Flux effectif visqueux (cas non stationnaire)

La continuité faible de la suite des flux effectifs visqueux dans la cas stationnaire a fait l'objet du théorème 1.2. Cette propriété observée en dimension un d'espace par SERRE [71] puis généralisée par P.L. LIONS [46] en N dimensions d'espaces, $N \geq 2$, aura un rôle essentiel dans la preuve des résultats présentés dans le prochain chapitre.

Théorème I.2 Soient $I = (0, T)$, $T \in (0, \infty)$, Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 de classe $C^{0,1}$, $1 < p < \infty$, $\frac{3}{2} \leq r < \infty$, $\max\{2, p'\} \leq \tilde{r} \leq \infty$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{r^*} \leq 1$ si $r < 3$ et $1 < w < \infty$, $\frac{1}{w} + \frac{1}{r} < \frac{5}{6}$. On suppose que

$$\Pi_n \rightharpoonup \Pi \text{ dans } L^p(I \times \Omega), \quad (4.1)$$

$$b_n \rightarrow b \text{ dans } C^0(\bar{I}; L^r_{weak}(\Omega)), \quad b_n \overset{*}{\rightharpoonup} b \text{ dans } L^{\tilde{r}}(I \times \Omega), \quad (4.2)$$

$$\mathbf{F}_n \rightharpoonup \mathbf{F} \text{ dans } [L^s(I \times \Omega)]^3, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{q}_n \rightarrow \mathbf{q} \text{ dans } [C^0(\bar{I}; L^w_{weak}(\Omega))]^3, \quad (4.4)$$

$$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset L^1(I \times \Omega), \quad f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^2(I; [H^1(\Omega)]^*), \quad (4.5)$$

$$\mathcal{A}_i(f_n) \rightarrow \mathcal{A}_i(f) \text{ dans } L^2(I; L^{w'}(\mathbb{R}^3)), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } [L^2(I; H^1(\Omega))]^3. \quad (4.6)$$

On suppose en outre que pour $i = 1, 2, 3$

$$\partial_t b_n + \operatorname{div}(b_n \mathbf{u}_n) = f_n \text{ dans } \mathcal{D}'(I \times \mathbb{R}^3), \quad (4.7)$$

$$\partial_t q_n^i + \partial_j (q_n^i u_n^j) - \mu_1 \Delta u_n^i - (\mu_1 + \mu_2) \partial_i \operatorname{div} \mathbf{u}_n + \partial_i \Pi_n = F_n^i \text{ dans } \mathcal{D}'(I \times \Omega). \quad (4.8)$$

Alors pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(I)$ et toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \psi \int_{\Omega} \phi \{ \Pi_n - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_n \} b_n \, dx \, dt = \int_I \psi \int_{\Omega} \phi \{ \Pi - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u} \} b \, dx \, dt. \quad (4.9)$$

Preuve. Noter tout d'abord que le système (4.8) testé par une fonction $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$, $\varphi_i \in \mathcal{D}(I \times \Omega)$, $i = 1, 2, 3$, s'écrit

$$\begin{aligned} & - \iint_{I \times \Omega} q_n^i \partial_t \varphi_i \, dx \, dt + \iint_{I \times \Omega} \{ \mu_1 \partial_j u_n^i \partial_j \varphi^i + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_n) (\operatorname{div} \varphi) \} \, dx \, dt \\ & - \iint_{I \times \Omega} q_n^i u_n^j \partial_j \varphi^i \, dx \, dt - \iint_{I \times \Omega} \Pi_n \operatorname{div} \varphi \, dx \, dt = \iint_{I \times \Omega} F_n^i \varphi^i \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Au vu des hypothèses (4.1)-(4.6), par densité, (4.10) reste vraie pour toute fonction $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ telle que $\partial_t \varphi^i \in L^1(I; L^{w'}(\Omega))$, $\partial_j \varphi^i \in L^2(I; L^2(\Omega)) \cap L^2(I; L^{\frac{6w}{5w-6}}(\Omega))$, $\operatorname{div} \varphi \in L^{p'}(I \times \Omega)$, $\varphi^i \in L^{s'}(I \times \Omega)$, $i, j = 1, 2, 3$.

Soit $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(I \times \mathbb{R}^3)$. D'après (1.3.8), la fonction $\mathcal{A}_i(\tilde{\varphi})$, $i = 1, 2, 3$, est une fonction de l'espace $\mathcal{D}(I; C^\infty(\mathbb{R}^3))$. En conséquence, pour toute fonction $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, la fonction $\tilde{\phi} \mathcal{A}_i(\tilde{\varphi}) \in \mathcal{D}(I \times \mathbb{R}^3)$. L'équation (4.7) testée par $\tilde{\phi} \mathcal{A}_i(\tilde{\varphi})$ s'écrit

$$- \iint_{I \times \mathbb{R}^3} b_n \tilde{\phi} \mathcal{A}_i(\partial_t \tilde{\varphi}) \, dx \, dt - \iint_{I \times \mathbb{R}^3} b_n u_n^j \{ \partial_j \tilde{\phi} \mathcal{A}_i(\tilde{\varphi}) + \tilde{\phi} \mathcal{R}_{ij}(\tilde{\varphi}) \} \, dx \, dt = \iint_{I \times \mathbb{R}^3} f_n \tilde{\phi} \mathcal{A}_i(\tilde{\varphi}) \, dx \, dt. \quad (4.11)$$

Par hypothèses, $b_n \in L^{\min(r, 3^-)}(\mathbb{R}^3)$, $b_n u_n^j \in L^{\min(\frac{6r}{r+6}, 3^-)}(\mathbb{R}^3)$, $j = 1, 2, 3$, $f_n \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et ce p.p.t. $t \in I$. Alors, en utilisant (1.3.6) et (1.3.7), de (4.11) il vient que

$$\partial_t \mathcal{A}_i(b_n \tilde{\phi}) + \mathcal{R}_{ij}(b_n u_n^j \tilde{\phi}) = \mathcal{A}_i(f_n \tilde{\phi}) + \mathcal{A}_i(b_n u_n^j \partial_j \tilde{\phi}) \text{ dans } \mathcal{D}'(I \times \mathbb{R}^3), \quad \tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3). \quad (4.12)$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En accord avec les propriétés (1.3.4) et (1.3.5) des opérateurs \mathcal{R}_{ij} et \mathcal{A}_i , sous la condition $\frac{1}{w} + \frac{1}{r} \leq \frac{5}{6}$, on voit que $\phi \mathcal{R}_{ij}(b_n u_n^j \tilde{\phi})$, $\phi \mathcal{A}_i(b_n u_n^j \partial_j \tilde{\phi})$, $\phi \mathcal{A}_i(f_n \tilde{\phi}) \in L^2(I; L^{w'}(\Omega))$. Ainsi $\partial_t \{\phi \mathcal{A}_i(b_n \tilde{\phi})\} \in L^2(I; L^{w'}(\Omega))$. Par ailleurs, $b_n \in L^\infty(I; L^r(\mathbb{R}^3)) \cap L^{\tilde{r}}(I \times \mathbb{R}^3)$ et de (1.3.5), il découle que $\phi \mathcal{A}_i(b_n \tilde{\phi}) \in L^{\tilde{r}}(I; W_0^{1, \tilde{r}}(\Omega)) \cap L^\infty(I, W_0^{1, r}(\Omega))$.

Soient $\psi \in \mathcal{D}(I)$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. On pose maintenant $\varphi^i = \psi \phi \mathcal{A}_i(b_n \tilde{\phi})$, $i = 1, 2, 3$. Alors, sous la condition $\frac{1}{w} + \frac{1}{r} \leq \frac{5}{6}$, on sait que $\partial_t \varphi^i \in L^2(I; L^{w'}(\Omega))$ et que $\partial_j \varphi^i \in L^2(I; L^{\frac{6w}{5w-6}}(\Omega))$ tandis que, sous la condition $\frac{1}{s} + \frac{1}{r^*} \leq 1$ si $r < 3$, le fait que $\phi \mathcal{A}_i(b_n \tilde{\phi}) \in L^\infty(I, W_0^{1, r}(\Omega))$ assure que $\varphi^i \in L^s(I \times \Omega)$, $i, j = 1, 2, 3$. Par ailleurs, puisque $\tilde{r} \geq \max\{2, p'\}$ et $\phi \mathcal{A}_i(b_n \tilde{\phi}) \in L^{\tilde{r}}(I; W_0^{1, \tilde{r}}(\Omega))$, il est clair que $\partial_j \varphi^i \in L^2(I; L^2(\Omega))$ et $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \in L^{p'}(I \times \Omega)$. Ainsi, la fonction $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$, $\varphi^i = \psi \phi \mathcal{A}_i(b_n \tilde{\phi})$ est une fonction admissible dans l'identité (4.10). Après un long calcul dans lequel sont utilisées plusieurs intégrations par parties, une formule analogue à (1.5.9) (cf. p.27), l'équation (4.12) et les propriétés (1.3.6) et (1.3.7) des opérateurs \mathcal{A}_i et \mathcal{R}_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_I \psi \int_\Omega \phi \{\Pi_n - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_n\} b_n \tilde{\phi} \, dx \, dt = - \int_I \psi \int_\Omega \Pi_n \partial_i \phi \mathcal{A}_i(b_n \tilde{\phi}) \, dx \, dt \\
& - \int_I \partial_t \psi \int_\Omega q_n^i \phi \mathcal{A}_i(b_n \tilde{\phi}) \, dx \, dt - \int_I \psi \int_\Omega q_n^i \phi \mathcal{A}_i(f_n \tilde{\phi}) \, dx \, dt - \int_I \int_\Omega q_n^i \phi \mathcal{A}_i(b_n u_n^j \partial_j \tilde{\phi}) \, dx \, dt \\
& + \mu_1 \int_I \psi \int_\Omega \partial_j u_n^i \partial_j \phi \mathcal{A}_i(b_n \tilde{\phi}) \, dx \, dt - \mu_1 \int_I \psi \int_\Omega u_n^i \partial_j \phi \mathcal{R}_{ij}(b_n \tilde{\phi}) \, dx \, dt \\
& + \mu_1 \int_I \psi \int_\Omega u_n^i \partial_i \phi b_n \tilde{\phi} \, dx \, dt + (\mu_1 + \mu_2) \int_I \psi \int_\Omega \partial_i \phi \mathcal{A}_i(b_n \tilde{\phi}) \operatorname{div} \mathbf{u}_n \, dx \, dt \\
& - \int_I \psi \int_\Omega q_n^i u_n^j \partial_j \phi \mathcal{A}_i(b_n \tilde{\phi}) \, dx \, dt - \int_I \psi \int_\Omega F_n^i \phi \mathcal{A}_i(b_n \tilde{\phi}) \, dx \, dt \\
& + \int_I \psi \int_\Omega u_n^j \{b_n \tilde{\phi} \mathcal{R}_{ij}(q_n^i \phi) - q_n^i \phi \mathcal{R}_{ij}(b_n \tilde{\phi})\} \, dx \, dt. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

En particulier, en choisissant dans (4.13) $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $\tilde{\phi} = 1$ dans Ω , on trouve que

$$\begin{aligned}
& \int_I \psi \int_\Omega \phi \{\Pi_n - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_n\} b_n \, dx \, dt = - \int_I \psi \int_\Omega \Pi_n \partial_i \phi \mathcal{A}_i(b_n) \, dx \, dt \\
& - \int_I \partial_t \psi \int_\Omega q_n^i \phi \mathcal{A}_i(b_n) \, dx \, dt - \int_I \psi \int_\Omega q_n^i \phi \mathcal{A}_i(f_n) \, dx \, dt \\
& + \mu_1 \int_I \psi \int_\Omega \partial_j u_n^i \partial_j \phi \mathcal{A}_i(b_n) \, dx \, dt - \mu_1 \int_I \psi \int_\Omega u_n^i \partial_j \phi \mathcal{R}_{ij}(b_n) \, dx \, dt \\
& + \mu_1 \int_I \psi \int_\Omega u_n^i \partial_i \phi b_n \, dx \, dt + (\mu_1 + \mu_2) \int_I \psi \int_\Omega \partial_i \phi \mathcal{A}_i(b_n) \operatorname{div} \mathbf{u}_n \, dx \, dt \\
& - \int_I \psi \int_\Omega q_n^i u_n^j \partial_j \phi \mathcal{A}_i(b_n) \, dx \, dt - \int_I \psi \int_\Omega F_n^i \phi \mathcal{A}_i(b_n) \, dx \, dt \\
& + \int_I \psi \int_\Omega u_n^j \{b_n \mathcal{R}_{ij}(q_n^i \phi) - q_n^i \phi \mathcal{R}_{ij}(b_n)\} \, dx \, dt. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

A présent, l'objectif est de passer à la limite $n \rightarrow \infty$ dans (4.14). Pour cela, on commence par énumérer quelques conséquences directes des hypothèses (4.1)-(4.6). En

accord avec le lemme I.4, puisque $r > \frac{6}{5}$, on a

$$b_n \rightarrow b \text{ dans } L^{r_1}(I; [H^1(\Omega)]^*), \quad r_1 \in [1, \infty). \quad (4.15)$$

Ceci étant, complétée par (4.6), la convergence (4.15) permet d'affirmer que

$$b_n \mathbf{u}_n \rightharpoonup b \mathbf{u} \text{ dans } [L^2(I; L^{\frac{6r}{r+6}}(\Omega))]^3. \quad (4.16)$$

Par ailleurs, il est clair que pour tout $t \in \bar{I}$, $b_n(t) \rightarrow b(t)$ dans $L^r(\mathbb{R}^3)$. De la continuité forte des opérateurs $\mathcal{R}_{ij} : L^q(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^3)$, $q \in (1, \infty)$, $i, j = 1, 2, 3$, il découle alors que

$$\mathcal{R}_{ij}(b_n(t)) \rightarrow \mathcal{R}_{ij}(b(t)) \text{ dans } L^r(\mathbb{R}^3), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Par suite, pour toute fonction $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pour tout $t \in \bar{I}$, on a

$$\xi \mathcal{R}_{ij}(b_n(t)) \rightarrow \xi \mathcal{R}_{ij}(b(t)) \text{ dans } L^r(\Omega), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.17)$$

$$\xi \nabla \mathcal{A}_i(b_n(t)) \rightarrow \xi \nabla \mathcal{A}_i(b(t)) \text{ dans } [L^r(\Omega)]^3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.18)$$

En outre, à l'aide de la propriété (1.3.6), on vérifie facilement que pour tout $t \in \bar{I}$, $\mathcal{A}_i(b_n(t)) \nabla \xi \rightarrow \mathcal{A}_i(b(t)) \nabla \xi$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ tandis qu'il est clair que la suite $\{\mathcal{A}_i(b_n(t)) \nabla \xi\}_n$ est uniformément bornée dans $[L^r(\Omega)]^3$. Par conséquent, pour tout $t \in \bar{I}$, $\nabla(\xi \mathcal{A}_i(b_n(t))) \rightharpoonup \nabla(\xi \mathcal{A}_i(b(t)))$ dans $[L^r(\Omega)]^3$. Puisque Ω est borné, ceci est complètement équivalent à la convergence

$$\xi \mathcal{A}_i(b_n(t)) \rightarrow \xi \mathcal{A}_i(b(t)) \text{ dans } W_0^{1,r}(\Omega), \quad \xi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad t \in \bar{I}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Puisque $W_0^{1,r}(\Omega) \subset\subset L^{r_2}(\Omega)$, $1 \leq r_2 < r^*$ si $r \in [\frac{3}{2}, 3)$ et $1 \leq r_2 < \infty$ si $r \in [3, \infty)$, il s'en suit que

$$\xi \mathcal{A}_i(b_n(t)) \rightarrow \xi \mathcal{A}_i(b(t)) \text{ dans } L^{r_2}(\Omega), \quad \xi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad t \in \bar{I}, \quad i = 1, 2, 3.$$

En accord avec la propriété (1.3.6), par densité, on peut vérifier que la suite $\{\xi \mathcal{A}_i(b_n)\}_n \subset C^0(\bar{I}; L_{\text{weak}}^{r_2}(\Omega))$ est bornée dans $L^\infty(I; L^{r_2}(\Omega))$. Au vu du lemme I.1, ceci implique que la suite $\{\sup_{t \in \bar{I}} \|\xi \mathcal{A}_i(b_n(t))\|_{0,r_2,\Omega}\}_n$ est bornée. En utilisant le théorème de convergence de Vitali, on trouve que

$$\xi \mathcal{A}_i(b_n) \rightarrow \xi \mathcal{A}_i(b) \text{ dans } L^{r_3}(I; L^{r_2}(\Omega)), \quad \xi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad r_3 \in [1, \infty), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.19)$$

A nouveau, puisque $w > \frac{6}{5}$, le lemme I.4 garantit que

$$q_n^i \rightarrow q^i \text{ dans } L^{w_1}(I; [H^1(\Omega)]^*), \quad w_1 \in [1, \infty), \quad i = 1, 2, 3.$$

Cette observation associée aux hypothèses (4.4) et (4.6) justifie alors que

$$q_n^i u_n^j \rightharpoonup q^i u^j \text{ dans } L^2(I; L^{\frac{6w}{w+6}}(\Omega)), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.20)$$

Ensuite, en utilisant l'injection $L^r(\Omega) \subset [H^1(\Omega)]^*$, compacte puisque $r \geq \frac{3}{2}$, de (4.17) provient la convergence

$$\xi \mathcal{R}_{ij}(b_n(t)) \rightarrow \xi \mathcal{R}_{ij}(b(t)) \text{ dans } [H^1(\Omega)]^*, \quad \xi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad t \in \bar{I}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

En accord avec la propriété (1.3.7), par densité, on voit que la suite $\{\xi\mathcal{R}_{ij}(b_n)\}_n \subset C^0(\bar{I}; L_{\text{weak}}^r(\Omega))$ est bornée dans $L^\infty(I; L^r(\Omega))$ et le lemme I.1 implique que la suite $\{\sup_{t \in \bar{I}} \|\xi\mathcal{R}_{ij}(b_n(t))\|_{0,r,\Omega}\}_n$ est bornée. Ainsi, la suite $\{\xi\mathcal{R}_{ij}(b_n)\}_n$ est uniformément bornée en temps dans $[H^1(\Omega)]^*$ et comme précédemment, à l'aide du théorème de Vitali, on trouve que

$$\xi\mathcal{R}_{ij}(b_n) \rightarrow \xi\mathcal{R}_{ij}(b) \text{ dans } L^{r_4}(I; [H^1(\Omega)]^*), \quad \xi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad r_4 \in [1, \infty), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.21)$$

Enfin, (4.2) et (4.4) assurent que les hypothèses du lemme 1.9 (cf. p. 25) sont satisfaites. Celui-ci implique que

$$\begin{aligned} b_n(t)\mathcal{R}_{ij}(q_n^i(t)\phi) - q_n^i(t)\phi\mathcal{R}_{ij}(b_n(t)) &\rightarrow b(t)\mathcal{R}_{ij}(q^i(t)\phi) - q^i(t)\phi\mathcal{R}_{ij}(b(t)) \\ &\text{dans } L^{\frac{rw}{r+w}}(\Omega), \quad t \in \bar{I}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Or, on sait que $\frac{rw}{r+w} > \frac{6}{5}$. Par conséquent $L^{\frac{rw}{r+w}}(\Omega) \subset\subset [H^1(\Omega)]^*$ et donc que

$$\begin{aligned} b_n(t)\mathcal{R}_{ij}(q_n^i(t)\phi) - q_n^i(t)\phi\mathcal{R}_{ij}(b_n(t)) &\rightarrow b(t)\mathcal{R}_{ij}(q^i(t)\phi) - q^i(t)\phi\mathcal{R}_{ij}(b(t)) \\ &\text{dans } [H^1(\Omega)]^*, \quad t \in \bar{I}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Alors, par des arguments semblables à ceux qui nous ont permis de conclure à la convergence (4.21), on peut montrer que

$$\begin{aligned} b_n\mathcal{R}_{ij}(q_n^i\phi) - q_n^i\phi\mathcal{R}_{ij}(b_n) &\rightarrow b\mathcal{R}_{ij}(q^i\phi) - q^i\phi\mathcal{R}_{ij}(b) \\ &\text{dans } L^z(I; [H^1(\Omega)]^*), \quad z \in [1, \infty) \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Tout est près pour passer à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans l'identité (4.14). On obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \psi \int_\Omega \phi \{ \Pi_n - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}_n \} b_n \, dx \, dt &= - \int_I \psi \int_\Omega \Pi \partial_i \phi \mathcal{A}_i(b) \, dx \, dt \\ &\quad - \int_I \partial_t \psi \int_\Omega q^i \phi \mathcal{A}_i(b) \, dx \, dt - \int_I \psi \int_\Omega q^i \phi \mathcal{A}_i(f) \, dx \, dt \\ &\quad + \mu_1 \int_I \psi \int_\Omega \partial_j u^i \partial_j \phi \mathcal{A}_i(b) \, dx \, dt - \mu_1 \int_I \psi \int_\Omega u^i \partial_j \phi \mathcal{R}_{ij}(b) \, dx \, dt \\ &\quad + \mu_1 \int_I \psi \int_\Omega u^i \partial_i \phi b \, dx \, dt + (\mu_1 + \mu_2) \int_I \psi \int_\Omega \partial_i \phi \mathcal{A}_i(b) \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx \, dt \\ &\quad - \int_I \psi \int_\Omega q^i u^j \partial_j \phi \mathcal{A}_i(b) \, dx \, dt - \int_I \psi \int_\Omega F^i \phi \mathcal{A}_i(b) \, dx \, dt \\ &\quad + \int_I \psi \int_\Omega u^j \{ b \mathcal{R}_{ij}(q^i \phi) - q^i \phi \mathcal{R}_{ij}(b) \} \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Justifions brièvement le passage à la limite $n \rightarrow \infty$ dans chacun des termes du membre de droite de (4.14) : pour le premier terme, on utilise (4.1) et (4.19) ; pour le deuxième, (4.4) et (4.19) ; dans le troisième, (4.4) et (4.5) ; dans les quatre suivants, (4.2), (4.6), (4.19) et (4.21) ; pour le huitième, (4.19) et (4.20) ; pour le neuvième, (4.3) et (4.19) ; pour le dernier, (4.6) et (4.22).

Faisons maintenant tendre $n \rightarrow \infty$ dans les équations (4.7), (4.8) et (4.12). En utilisant les convergences (4.1)-(4.6) et les propriétés (1.3.6) et (1.3.7) des opérateurs \mathcal{A}_i et \mathcal{R}_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, pour $i = 1, 2, 3$, il vient alors que

$$\partial_t b + \operatorname{div}(b\mathbf{u}) = f \text{ dans } \mathcal{D}'(I \times \mathbb{R}^3), \quad (4.24)$$

$$\partial_t \mathcal{A}_i(b\tilde{\phi}) + \mathcal{R}_{ij}(bu^j\tilde{\phi}) = \mathcal{A}_i(f\tilde{\phi}) + \mathcal{A}_i(bu^j\partial_j\tilde{\phi}) \text{ dans } \mathcal{D}'(I \times \mathbb{R}^3), \quad \tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad (4.25)$$

$$\partial_t q^i + \partial_j(q^i u^j) - \mu_1 \Delta u^i - (\mu_1 + \mu_2) \partial_i \operatorname{div} \mathbf{u} + \partial_i \Pi = F^i \text{ dans } \mathcal{D}'(I \times \Omega). \quad (4.26)$$

Le système (4.26) testé par une fonction $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$, $\varphi^i \in \mathcal{D}(I \times \Omega)$, $i = 1, 2, 3$, s'écrit

$$\begin{aligned} & - \iint_{I \times \Omega} q^i \partial_t \varphi_i \, dx \, dt + \iint_{I \times \Omega} \{ \mu_1 \partial_j u^i \partial_j \varphi^i + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}) (\operatorname{div} \varphi) \} \, dx \, dt \\ & - \iint_{I \times \Omega} q^i u^j \partial_j \varphi^i \, dx \, dt - \iint_{I \times \Omega} \Pi \operatorname{div} \varphi \, dx \, dt = \iint_{I \times \Omega} F^i \varphi^i \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Au vu des hypothèses (4.1)-(4.6), par un argument de densité, l'identité (4.27) reste vraie pour toute fonction $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ telle que $\partial_t \varphi^i \in L^1(I; L^{w'}(\Omega))$, $\partial_j \varphi \in L^2(I; L^2(\Omega)) \cap L^2(I; L^{\frac{6w}{5w-6}}(\Omega))$, $\operatorname{div} \varphi \in L^{p'}(I \times \Omega)$, $\varphi^i \in L^{s'}(I \times \Omega)$, $i, j = 1, 2, 3$. En utilisant entre autres l'équation (4.25) et en suivant les idées présentées au début de la preuve, on peut vérifier que la fonction $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$, $\varphi^i = \psi \phi \mathcal{A}_i(b\tilde{\phi})$, $\psi \in \mathcal{D}(I)$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, est une fonction admissible dans l'identité (4.27). En choisissant $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\tilde{\phi} = 1$ dans Ω , après un long calcul plutôt simple dans lequel sont utilisées plusieurs intégrations par parties, une formule analogue à (1.5.9), l'équation (4.25) et les propriétés (1.3.6) et (1.3.7) des opérateurs \mathcal{A}_i et \mathcal{R}_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_I \psi \int_{\Omega} \phi \{ \Pi - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u} \} b \, dx \, dt = - \int_I \psi \int_{\Omega} \Pi \partial_i \phi \mathcal{A}_i(b) \, dx \, dt \\ & - \int_I \partial_t \psi \int_{\Omega} q^i \phi \mathcal{A}_i(b) \, dx \, dt - \int_I \psi \int_{\Omega} q^i \phi \mathcal{A}_i(f) \, dx \, dt \\ & + \mu_1 \int_I \psi \int_{\Omega} \partial_j u^i \partial_j \phi \mathcal{A}_i(b) \, dx \, dt - \mu_1 \int_I \psi \int_{\Omega} u^i \partial_j \phi \mathcal{R}_{ij}(b) \, dx \, dt \\ & + \mu_1 \int_I \psi \int_{\Omega} u^i \partial_i \phi b \, dx \, dt + (\mu_1 + \mu_2) \int_I \psi \int_{\Omega} \partial_i \phi \mathcal{A}_i(b) \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx \, dt \\ & - \int_I \psi \int_{\Omega} q^i u^j \partial_j \phi \mathcal{A}_i(b) \, dx \, dt - \int_I \psi \int_{\Omega} F^i \phi \mathcal{A}_i(b) \, dx \, dt \\ & + \int_I \psi \int_{\Omega} u^j \{ b \mathcal{R}_{ij}(q^i \phi) - q^i \phi \mathcal{R}_{ij}(b) \} \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (4.28)$$

En comparant (4.23) et (4.28), on récupère l'identité (4.9). D'où le résultat. \square

Remarque I.4 Il est bon de noter que si les hypothèses (4.5) sont remplacées par

$$\begin{aligned} \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} & \subset L^2(I \times \Omega), \quad f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^2(I; [H^1(\Omega)]^*), \\ \mathcal{A}_i(f_n) & \rightharpoonup \mathcal{A}_i(f) \text{ dans } L^2(I; H^1(\mathbb{R}^3)), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

la conclusion du théorème I.2 reste vraie. Nous laissons au lecteur le soin de le vérifier.

Corollaire I.2 Soient les hypothèses du théorème I.2. On suppose en outre que $\tilde{r} > 2$. Alors, modulo l'extraction d'une sous-suite, $b_n \operatorname{div} \mathbf{u}_n \rightharpoonup \overline{b \operatorname{div} \mathbf{u}}$ dans $L^{\frac{2\tilde{r}}{\tilde{r}+2}}(I \times \Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$. De plus, si $\overline{\Pi b}$ dénote la limite faible de la suite correspondante lorsque $n \rightarrow \infty$, on a

$$\begin{aligned} \overline{\Pi b} &\in L^{\min\{\frac{2\tilde{r}}{\tilde{r}+2}, \frac{\tilde{r}p}{\tilde{r}+p}\}}(I \times \Omega), \\ \overline{\Pi b} - (2\mu_1 + \mu_2)\overline{b \operatorname{div} \mathbf{u}} &= \Pi b - (2\mu_1 + \mu_2)b \operatorname{div} \mathbf{u} \text{ p.p. dans } I \times \Omega. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Preuve. Puisque $\tilde{r} > 2$, la convergence $b_n \operatorname{div} \mathbf{u}_n \rightharpoonup \overline{b \operatorname{div} \mathbf{u}}$ dans $L^{\frac{2\tilde{r}}{\tilde{r}+2}}(I \times \Omega)$ est claire. Par conséquent, pour toute fonctions $\psi \in \mathcal{D}(I)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, (4.9) peut se réécrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \psi \int_{\Omega} \phi \Pi_n b_n dx dt = \int_I \psi \int_{\Omega} \phi [(2\mu_1 + \mu_2)\overline{b \operatorname{div} \mathbf{u}} + \{\Pi - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}\}b] dx dt.$$

Par densité de $\mathcal{D}(I) \otimes \mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(I \times \Omega)$, ceci a pour conséquence la convergence faible dans $L^{\min\{\frac{2\tilde{r}}{\tilde{r}+2}, \frac{\tilde{r}p}{\tilde{r}+p}\}}(I \times \Omega)$ de la suite $\{\Pi_n b_n\}_n$ vers une limite dénotée $\overline{\Pi b}$ et égale à $(2\mu_1 + \mu_2)\overline{b \operatorname{div} \mathbf{u}} + \{\Pi - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}\}b$. Ainsi, on a

$$\iint_{I \times \Omega} [\overline{\Pi b} - (2\mu_1 + \mu_2)\overline{b \operatorname{div} \mathbf{u}} - \{\Pi - (2\mu_1 + \mu_2) \operatorname{div} \mathbf{u}\}b] \varphi dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I \times \Omega).$$

La conclusion (4.29) s'en suit. Le corollaire I.2 est donc démontré. \square

Corollaire I.3 Soient $I = (0, T)$, $T \in (0, \infty)$, Ω un domaine de \mathbb{R}^3 à frontière localement Lipschitzienne, $1 < p < \infty$, $\frac{3}{2} \leq r < \infty$, $\max\{2, p'\} \leq \tilde{r} \leq \infty$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{r^*} \leq 1$ si $r < 3$ et $1 < w < \infty$, $\frac{1}{w} + \frac{1}{r} < \frac{5}{6}$. Pour tout sous-ensemble $\Omega' \subset\subset \Omega$, on suppose que

$$\Pi_n \rightharpoonup \Pi \text{ dans } L^p(I \times \Omega'), \quad (4.30)$$

$$b_n \rightarrow b \text{ dans } C^0(\bar{I}; L^r_{weak}(\Omega')), \quad b_n \overset{*}{\rightharpoonup} b \text{ dans } L^{\tilde{r}}(I \times \Omega'), \quad (4.31)$$

$$\mathbf{F}_n \rightharpoonup \mathbf{F} \text{ dans } [L^s(I \times \Omega')]^3, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{q}_n \rightarrow \mathbf{q} \text{ dans } [C^0(\bar{I}; L^w_{weak}(\Omega'))]^3, \quad (4.33)$$

$$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset L^1(I \times \Omega'), \quad f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^2(I; [H^1(\Omega')]^*), \quad (4.34)$$

$$\mathcal{A}_i(f_n) \rightarrow \mathcal{A}_i(f) \text{ dans } L^2(I; L^{w'}(\mathbb{R}^3)), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } [L^2(I; H^1(\Omega'))]^3. \quad (4.35)$$

En outre, on suppose que les équations (4.7), $i = 1, 2, 3$, (4.8) sont satisfaites. Alors la conclusion du théorème I.2 reste vraie. Si de plus, on suppose que $\tilde{r} > 2$, alors

$$\begin{aligned} \overline{\Pi b} &\in L^{\min\{\frac{2\tilde{r}}{\tilde{r}+2}, \frac{\tilde{r}p}{\tilde{r}+p}\}}(I \times \Omega'), \\ \overline{\Pi b} - (2\mu_1 + \mu_2)\overline{b \operatorname{div} \mathbf{u}} &= \Pi b - (2\mu_1 + \mu_2)b \operatorname{div} \mathbf{u} \text{ p.p. dans } I \times \Omega. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Preuve. Des hypothèses du corollaire I.3, il découle celles du corollaire I.2 avec Ω' à la place de Ω . D'où le résultat. \square

Remarque I.5 En remplaçant (4.34) par les hypothèses introduites dans la remarque I.4 avec Ω' à la place de Ω , la conclusion du corollaire I.3 reste vraie.

5 Divers

Dans cette dernière section, nous regroupons divers résultats utiles dans les preuves à venir. Certains sont donnés sans preuve, celle-ci constituant alors un simple exercice.

Lemme I.10 Soient $T \in (0, \infty)$, $E \in L^\infty(0, T)$ et V, F deux fonctions de $L^1(0, T)$. Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

$$\frac{d}{dt}E + V \leq F \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T) ; \quad (5.1)$$

$$E(t_2) - E(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} V dt \leq \int_{t_1}^{t_2} F dt \text{ p.p.t. } t_1, t_2 \in [0, T], t_2 \geq t_1. \quad (5.2)$$

Si de plus $E \in C^0([0, T])$, (5.2) est vraie pour tout $t_1, t_2 \in [0, T]$.

Lemme I.11 Soient $T \in (0, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné et $p_1, p_2 \in [1, \infty)$. On suppose que $\rho \in C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{p_1}(\Omega))$, $\rho \geq 0$ p.p. dans $(0, T) \times \Omega$, $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\rho u^2 \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ et $q \in C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{p_2}(\Omega))$ satisfait

$$\text{p.p.t. } t \in (0, T), (\rho u)(t) = q(t) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Alors

$$q(t) = 0 \text{ p.p. dans } V(t) \text{ où } V(t) = \{x \in \Omega, \rho(t, x) = 0\}, t \in [0, T] \quad (5.3)$$

et il existe un représentant $\tilde{u} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ tel que

$$\text{p.p.t. } t \in (0, T), \tilde{u}(t) = u(t) \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } \forall t \in [0, T], q(t) = (\rho \tilde{u})(t) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Preuve. Commençons par démontrer (5.3). Soit $t \in [0, T]$. Si $|V(t)| = 0$, (5.3) est évident. On suppose donc que $|V(t)| > 0$. On introduit l'ensemble

$$Q = \{\tau \in (0, T), (\rho u)(\tau) = q(\tau) \text{ p.p. dans } \Omega, \|(\rho|u|^2)(\tau)\|_{0,1} \leq \|\rho|u|^2\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\}.$$

En accord avec les hypothèses, $|[0, T] \setminus Q| = 0$. Par conséquent, il existe une suite $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset Q$ telle que $t_n \rightarrow t$. Par suite, puisque $q \in C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{p_2}(\Omega))$, il est clair que $q(t_n) \rightarrow q(t)$ dans $L^1(\Omega)$. En particulier, il en résulte que

$$\begin{aligned} \|q(t)\|_{0,1,V(t)} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|q(t_n)\|_{0,1,V(t)} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|(\rho u)(t_n)\|_{0,1,V(t)} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \{\|\rho(t_n)\|_{0,1,V(t)}^{\frac{1}{2}} \|(\rho|u|^2)(t_n)\|_{0,1,V(t)}^{\frac{1}{2}}\} \leq \|\rho|u|^2\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^{\frac{1}{2}} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\rho(t_n)\|_{0,1,V(t)}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $\rho \in C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{p_1}(\Omega))$, il est clair que $\|\rho(t_n)\|_{0,1,V(t)} \rightarrow \|\rho(t)\|_{0,1,V(t)}$ quand $n \rightarrow \infty$ et puisque $\|\rho(t)\|_{0,1,V(t)} = 0$, on récupère (5.3). Pour conclure, on pose

$$\tilde{u}(t, x) = \begin{cases} u(t, x) & \text{si } (t, x) \in Q \times \Omega, \\ 0 & \text{si } (t, x) \in [0, T] \setminus Q \times V(t), \\ \frac{q(t, x)}{\rho(t, x)} & \text{si } (t, x) \in [0, T] \setminus Q \times \Omega \setminus V(t). \end{cases}$$

D'où le résultat. \square

Chapitre II

Equations non stationnaires en domaines bornés

Sommaire

1	Formulation du problème et théorème principal	124
2	Les grandes lignes de la preuve	128
2.1	Approximation n°3 (Etape n°1)	128
2.2	Approximation n°2 (Etape n°2)	130
2.3	Approximation n°1 (Etape n°3)	132
3	Preuve : Etape n°1	135
3.1	Approximation de Faedo-Galerkin	136
3.2	Existence de solutions	147
3.3	Bornes uniformes	154
4	Preuve : Etape n°2	156
4.1	Existence de solutions	156
4.2	Bornes uniformes	158
5	Preuve : Etape n°3	161
5.1	Existence de solutions	162
5.2	Inégalité d'énergie	167
5.3	Comportement de la densité et conséquences	168
5.4	Bornes uniformes	172
6	Preuve : Conclusion (Etude du problème d'origine)	178
6.1	Relaxation des conditions initiales	178
6.2	Construction d'une solution du problème d'origine	179
6.3	Flux effectif visqueux	181
6.4	Mesure de l'amplitude des oscillations	181
6.5	Equation de continuité et solutions renormalisées	183
6.6	Convergence forte de la densité et conclusion	185

Ce chapitre est consacré à la preuve de l'existence de solutions faibles des équations de Navier-Stokes non stationnaires, compressibles, en régime isentropique, considérées dans des domaines d'un type particulier de l'espace à trois dimensions et complétées par des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes pour les inconnues. Cette démonstration détaille celle de l'article [57].

1 Formulation du problème et théorème principal

Soient $T \in (0, \infty)$ et Ω une région de \mathbb{R}^3 , remplie d'un fluide compressible et barotrope. La modélisation de l'évolution temporelle de la densité $\rho = \rho(t, x)$, $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ et de la vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x) = (u^1(t, x), u^2(t, x), u^3(t, x))$, $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$, est donnée par le système d'équations de Navier-Stokes :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \quad (1.1)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu_1 \Delta \mathbf{u} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla p(\rho) = \rho \mathbf{f} \text{ dans } (0, T) \times \Omega. \quad (1.2)$$

Comme toujours, les coefficients de viscosité μ_1 et μ_2 sont supposés être constants et satisfaire les contraintes physiques

$$\mu_1 > 0, \quad \frac{2}{3}\mu_1 + \mu_2 \geq 0. \quad (1.3)$$

Le champ de vecteurs $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x)$, $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ est une donnée du problème, il correspond aux forces externes volumiques agissant sur le fluide (ici, on ne considère pas les forces non volumiques). Dans ce chapitre, comme dans le cas stationnaire, nous nous concentrons sur les écoulements de fluides compressibles en régime isentropique, *i.e.* lorsque la pression $p = p(\rho)$ est donnée par la loi d'état

$$p(\rho) = a\rho^\gamma, \quad a > 0. \quad (1.4)$$

Sur la constante adiabatique γ , nous faisons l'hypothèse technique suivante :

$$\gamma > \frac{3}{2}. \quad (1.5)$$

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction de ce chapitre, le système (1.1), (1.2), (1.4) va être examiné dans des domaines Ω d'un type particulier, à savoir des domaines de la forme

$$\Omega = B_{R_0}(x_0) \setminus S \quad (1.6)$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $R_0 > 0$ et S est un sous-ensemble compact de $B_{R_0}(x_0)$. Par souci de clarté et sans perte de généralité, dans la suite nous supposerons que $S \subset B_{\frac{R_0}{2}}(x_0)$ où x_0 est l'origine du système de coordonnées cartésiennes fixe et $R_0 = 1$. En conséquence Ω sera de la forme $B \setminus S$, avec S un compact de $B_{\frac{1}{2}}$.

Pour que le problème (1.1), (1.2), (1.4) soit bien posé, il faut notamment prescrire des conditions initiales pour la densité et la quantité de mouvement :

$$\rho(0, x) = \rho_0(x) \geq 0 \text{ dans } \Omega, \quad (\rho \mathbf{u})(0, x) = \mathbf{q}_0(x) \text{ dans } \Omega. \quad (1.7)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, nous imposons à la vitesse \mathbf{u} de coïncider avec un champ de vecteurs constant \mathbf{u}_∞ sur la partie extérieure ∂B de la frontière de Ω et d'être nulle dans le profil S . Autrement dit, les conditions aux limites imposées à la vitesse \mathbf{u} sont les suivantes :

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{u}_\infty \text{ dans } (0, T) \times \partial B \text{ et } \mathbf{u}(t, x) = \mathbf{0} \text{ dans } (0, T) \times S. \quad (1.8)$$

Soit dit en passant, si ∂S possède un minimum de régularité, la propriété du cône par exemple, les conditions imposées à \mathbf{u} dans le profil S peuvent se réduire aux conditions usuelles de non glissement sur la frontière ∂S du profil S . Conséquence directe de (1.8), la densité doit être connue sur la partie de la frontière de B par laquelle le fluide pénètre à la vitesse \mathbf{u}_∞ . Nous la supposons constante, *i.e*

$$\rho(t, x) = \rho_\infty \geq 0 \text{ dans } (0, T) \times \Gamma, \quad \Gamma = \{x \in \partial B, \mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu}(x) < 0\} \quad (1.9)$$

où $\boldsymbol{\nu}$ dénote la normale extérieure unitaire à la frontière ∂B .

Afin de préciser la notion de solutions auxquelles nous allons nous intéresser, il nous est nécessaire de construire un champ de vecteurs $\mathbf{U}_\infty \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3$ tel que $\text{supp } \mathbf{U}_\infty \subset B_{2R}$, $R > 1$, $\mathbf{U}_\infty = \mathbf{0}$ dans un voisinage ouvert du profil S , $\mathbf{U}_\infty = \mathbf{u}_\infty$ dans un voisinage ouvert de la frontière ∂B de B et satisfaisant $\text{div } \mathbf{U}_\infty = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}$. Pour ce faire, on considère deux fonctions $\varphi, \psi_R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant

$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{dans } B_{\frac{5}{8}}, \\ 0 & \text{dans } B_{\frac{3}{4}}, \end{cases} \quad \psi_R = \begin{cases} 1 & \text{dans } B_{\frac{3}{2}R}, \\ 0 & \text{dans } B^{2R-\frac{1}{4}}. \end{cases}$$

Soit $\mathbf{z}_\infty = \mathbf{u}_\infty(1 - \varphi)\psi_R$. Alors, d'après la formule de Stokes classique, on a

$$\int_{B_{2R-\frac{1}{4}} \cap B^{\frac{3}{2}R}} \text{div } \mathbf{z}_\infty dx = - \int_{\partial B_{\frac{3}{2}R}} \mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma = 0.$$

Par conséquent, le corollaire B.1 nous garantit l'existence d'un champ de vecteurs $\mathbf{v}_\infty \in [W_0^{1,p}(B_{2R-\frac{1}{4}} \cap B^{\frac{3}{2}R})]^3$, $p \in (1, \infty)$, satisfaisant $\text{div } \mathbf{v}_\infty = -\text{div } \mathbf{z}_\infty$ p.p. dans $B_{2R-\frac{1}{4}} \cap B^{\frac{3}{2}R}$. Il est alors facile de vérifier que le champ de vecteurs $\mathbf{U}_\infty = \omega_\varepsilon * (\mathbf{z}_\infty + \mathbf{v}_\infty)$, où \mathbf{v}_∞ dénote ici le prolongement par zéro à l'extérieur de $B_{2R-\frac{1}{4}} \cap B^{\frac{3}{2}R}$ de \mathbf{v}_∞ et $\{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \frac{1}{8})}$ une suite régularisante standard, possède bien les propriétés annoncées.

Ceci étant, nous pouvons maintenant définir la notion de solutions faibles renormalisées à énergie bornée du problème (1.1), (1.2), (1.4), (1.7)-(1.9).

Définition II.1 *On considère les fonctions $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que*

$$b \in C^0([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty)), \quad \exists c > 0, \exists \lambda_0 < 1, \forall t \in (0, 1], |b'(t)| \leq ct^{-\lambda_0} \quad (1.10)$$

et dont le comportement à l'infini est donné par

$$\exists c > 0, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall t \geq 1, |b'(t)| \leq ct^{\lambda_1}, |tb'(t) - b(t)| \leq ct^{\lambda_2}. \quad (1.11)$$

Etant données les conditions initiales ρ_0, \mathbf{q}_0 et la force $\mathbf{f} \in [L^\infty((0, T) \times \Omega)]^3$, on dira qu'un couple de fonctions (ρ, \mathbf{u}) est une solution faible renormalisée à énergie bornée du problème (1.1), (1.2), (1.4), (1.7)-(1.9), s'il possède les propriétés suivantes :

- (i) $\rho \in L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L_{weak}^\gamma(\Omega))$, $\rho \geq 0$ p.p. dans $(0, T) \times \Omega$, $\rho(0) = \rho_0$ p.p. dans Ω , $(\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty) \in [L^2(0, T; H_0^1(B))]^3$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ p.p. dans $(0, T) \times S$ et $\rho|\mathbf{u}|^2 \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$, $\rho\mathbf{u} \in [C^0([0, T]; L_{weak}^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))]^3$, $(\rho\mathbf{u})(0) = \mathbf{q}_0$ p.p. dans Ω ;
- (ii) l'équation de continuité (1.1) est satisfaite au sens des distributions dans $(0, T) \times \Omega$. Plus précisément, pour toute fonction test $\varphi \in C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ telle que $\varphi \equiv 0$ pour $t = 0, T$ et dans $(0, T) \times (\partial B \setminus \Gamma)$, on a

$$\int_0^T \int_\Omega \{\rho \partial_t \varphi + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi\} dx dt = \int_0^T \int_\Gamma \rho_\infty (\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu}) \varphi d\sigma dt ; \quad (1.12)$$

- (iii) l'équation de continuité renormalisée est satisfaite au sens des distributions dans $(0, T) \times \Omega$. Plus précisément, pour toute fonction b de la classe (1.10), (1.11) avec

$$-1 < \lambda_1 \leq \frac{\gamma}{2} - 1, \quad 0 < \lambda_2 \leq \frac{\gamma}{2} \quad (1.13)$$

et toute fonction test $\varphi \in C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ telle que $\varphi \equiv 0$ pour $t = 0, T$ et dans $(0, T) \times (\partial B \setminus \Gamma)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega [b(\rho) \partial_t \varphi + b(\rho) \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi - \varphi \{\rho b'(\rho) - b(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}] dx dt \\ = \int_0^T \int_\Gamma b(\rho_\infty) (\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu}) \varphi d\sigma dt ; \end{aligned} \quad (1.14)$$

- (iv) l'équation de mouvement (1.2) est satisfaite au sens des distributions dans $(0, T) \times \Omega$;
- (v) p.p.t. $\tau \in (0, T)$, (ρ, \mathbf{u}) satisfait l'inégalité d'énergie sous forme intégrale

$$\begin{aligned} E(\rho, \mathbf{u})(\tau) + \int_0^\tau \int_\Omega \{\mu_1 |\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty)|^2\} dx dt \\ \leq E_0 - \int_0^\tau \int_\Gamma P(\rho_\infty) (\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu}) d\sigma dt \\ + \int_0^\tau [\int_\Omega \rho \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty) dx + \int_\Omega \{\rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{U}_\infty - p(\rho) \operatorname{div} \mathbf{U}_\infty\} dx] dt \\ - \int_0^\tau \int_\Omega \{\mu_1 \nabla \mathbf{U}_\infty : \nabla(\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}) + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{U}_\infty) (\operatorname{div}(\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}))\} dx dt, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$E(\rho, \mathbf{u})(\tau)$ désignant p.p.t. $\tau \in (0, T)$ l'énergie totale définie par

$$E(\rho, \mathbf{u})(\tau) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty|^2 + P(\rho) \right\} (\tau) dx \quad \text{où } P(\rho) = \frac{a}{\gamma - 1} \rho^\gamma$$

et E_0 l'énergie totale au temps $t = 0$ définie par

$$E_0 = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_0 - \rho_0 \mathbf{U}_\infty|^2}{\rho_0} 1_{\{\rho_0 > 0\}} + P(\rho_0) \right\} dx.$$

Remarque II.1 Pour que la définition II.1 soit cohérente, les conditions initiales ρ_0 et \mathbf{q}_0 doivent être compatibles, *i.e.* telles que

$$\rho_0 \in L^\gamma(\Omega), \rho_0 \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{q}_0 \in [L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)]^3, \mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \text{ p.p. dans } \{\rho_0 = 0\}, \frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} (= 0 \text{ dans } \{\rho_0 = 0\}) \in L^1(\Omega). \quad (1.17)$$

La définition II.1 est fortement inspirée de celle proposée par FEIREISL dans ses travaux sur l'optimisation de formes dans des fluides compressibles visqueux [17].

Ceci étant, nous pouvons maintenant énoncer notre résultat concernant l'existence de solutions faibles renormalisées à énergie bornée du problème (1.1), (1.2), (1.4) et (1.7)-(1.9).

Théorème II.1 Soient $T \in (0, \infty)$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine du type (1.6). On suppose que les coefficients μ_1 et μ_2 , la constante adiabatique γ et les données initiales ρ_0 et \mathbf{q}_0 satisfont respectivement (1.3), (1.5) et (1.16) et (1.17) et que $\mathbf{f} \in [L^\infty((0, T) \times \Omega)]^3$. Alors il existe une solution faible renormalisée à énergie bornée (ρ, \mathbf{u}) du problème (1.1), (1.2), (1.4), (1.7)-(1.9) telle que $\rho \in L^{\gamma+\theta}((0, T) \times K)$, $\theta = \frac{2}{3}\gamma - 1$, K désignant tout sous-ensemble compact de Ω .

Remarque II.2 L'hypothèse sur le champ de vecteurs \mathbf{f} n'est pas optimale, mais plutôt commode pour la suite. Diverses conditions apparaîtront tout au long de la preuve du théorème II.1. Nous laissons le soin au lecteur de les regrouper.

Le problème résolu par le théorème II.1 est abordé par P.L. LIONS [46, Section 7.6] dans toute sa généralité et sous la contrainte $\gamma \geq \frac{9}{5}$. Cependant, aucune preuve complète de ce type de résultat n'existe dans la littérature mathématique. L'objectif de ce chapitre est d'en fournir une pour celui énoncé dans le théorème II.1. Noter tout de même la relaxation de l'hypothèse émise par P.L. LIONS sur la constante adiabatique γ , puisque l'on suppose seulement que $\gamma > \frac{3}{2}$. Malheureusement, comme le lecteur pourra s'en rendre compte en lisant la preuve complète du théorème II.1, celle-ci semble assez spécifique à la présente situation. La géométrie relativement simple des domaines considérés et le fait que ρ_∞ et u_∞^i , $i = 1, 2, 3$, soient des constantes sont les principales raisons de cette spécificité. Autre fait qu'il est intéressant de souligner, tout au long de la preuve du théorème II.1, nous verrons que la méthode utilisée pour construire une solution faible renormalisée à énergie bornée implique également que celle-ci satisfait une inégalité d'énergie modifiée, à savoir celle obtenue en remplaçant $P(\cdot)$ par $\Pi(\cdot)$ dans (1.15) où

$$\Pi(\rho) = \frac{a}{\gamma - 1} \{ \rho^\gamma - \gamma \rho \rho_\infty^{\gamma-1} + (\gamma - 1) \rho_\infty^\gamma \}.$$

Cette inégalité modifiée jouera un rôle important dans l'examen du problème (1.1), (1.2), (1.4), (1.7), considéré dans un domaine extérieur, problème qui fera l'objet d'un prochain travail.

2 Les grandes lignes de la preuve

Cette section a pour objectif d'expliquer brièvement le déroulement de la preuve du théorème II.1. Pour ce faire, nous allons, une fois de plus, introduire divers paramètres tout en modifiant le système d'origine et obtenir ainsi un schéma d'approximations successives. La plupart de ces approximations ont tout d'abord été proposées par P.L. LIONS [46]. Le schéma que nous présentons ici est inspiré de celui proposé par FEIREISL, NOVOTNÝ et PETZELTOVÀ dans [18]. A la différence du cas stationnaire et ce, pour des raisons évidentes de clarté, le schéma est introduit en partant du niveau d'approximation le plus élevé pour se ramener au problème d'origine.

2.1 Approximation n°3 (Etape n°1)

A la lecture de la preuve du théorème II.1, il apparaîtra que sous l'hypothèse non optimale $\gamma \geq 6$, celle-ci est plus simple. Ainsi, pour compenser le manque de sommabilité de la densité, comme dans le cas stationnaire, nous commencerons par insérer un terme de pression artificielle $\delta \nabla \rho^\beta$, dans l'équation de mouvement (1.2), $\delta > 0$, $\beta \geq \max(\gamma, 6)$. Puisque l'équation de continuité (1.1) est une équation de type hyperbolique, il sera assez naturel d'y ajouter un terme de dissipation artificielle $-\varepsilon \Delta \rho$, $\varepsilon > 0$, pour la rendre de type parabolique. Moralement, afin de préserver la conservation de la masse, nous devons compléter les équations par une condition aux limites de Neumann homogène pour la densité ρ . Supposant la vitesse connue, le problème $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) - \varepsilon \Delta \rho = 0$, complété par la condition aux limites $\partial_\nu \rho = 0$, pourra être traité à l'aide du théorème I.1, sous réserve de plus d'informations sur la condition initiale ρ_0 que celles données par les hypothèses (1.16). C'est en parti pour cette raison que nous travaillerons avec des données initiales plus régulières. Une fois la dissipation artificielle insérée dans l'équation de continuité, afin d'obtenir une inégalité d'énergie convenable, nous modifierons l'équation de mouvement en y ajoutant le terme $\varepsilon \nabla \rho \cdot \nabla \mathbf{u}$. Enfin, pour des raisons qui seront plus claires dans la suite, nous résoudrons le problème obtenu sur $(0, T) \times V$ où $V = B_{2R} \supset \operatorname{supp} \mathbf{U}_\infty$, problème dans lequel nous insérerons un terme de pénalisation afin de récupérer les conditions aux limites $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty$ sur ∂B .

Commençons à clarifier cette approche heuristique. Le premier problème que nous étudierons est semblable à celui examiné dans [18, Section 2]. La principale différence réside dans un terme additionnel provenant de la méthode de pénalisation de domaine. Plus précisément, nous considérerons le système d'équations suivant :

$$\partial_t \rho_n + \operatorname{div}(\rho_n \mathbf{u}_n) - \varepsilon \Delta \rho_n = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_n \mathbf{u}_n) + \operatorname{div}(\rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n) - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_n - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_n + \nabla p_\delta(\rho_n) + \varepsilon \nabla \rho_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n \\ = \rho_n \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) \text{ dans } (0, T) \times V, \end{aligned} \quad (2.2)$$

complété par les conditions aux limites et les conditions initiales modifiées :

$$\partial_\nu \rho_n|_{\partial V} = 0 \text{ et } \mathbf{u}_n|_{\partial V} = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

$$\rho_n(0) = \rho_0 \in C^{2,\alpha}(\bar{V}), \quad 0 < \underline{\rho} \leq \rho_0 \leq \bar{\rho} \text{ dans } \bar{V}, \quad \partial_\nu \rho_0|_{\partial V} = 0, \quad (2.4)$$

$$(\rho_n \mathbf{u}_n)(0) = \mathbf{q}_0 = (q_0^1, q_0^2, q_0^3), \quad q_0^i \in C^2(\bar{V}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

Dans les équations (2.1)-(2.2), $n \in \mathbb{N}^*$, $V = B_{2R} \supset \text{supp } \mathbf{U}_\infty$, $R > 1$, \mathbf{f} dénote encore le prolongement de \mathbf{f} par zéro dans $(0, T) \times V \setminus \Omega$, $\varepsilon \in (0, 1]$ et la pression $p_\delta(\cdot)$ est donnée par la loi d'état suivante :

$$p_\delta(\rho) = p(\rho) + \delta \rho^\beta, \quad \delta \in (0, 1], \quad \beta \geq \max(\gamma, 6). \quad (2.6)$$

L'examen du problème (2.1)-(2.6) fera l'objet de la section 3 dans laquelle nous nous affairerons en particulier à démontrer la

Proposition II.1 *Soient $T \in (0, \infty)$, $V \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné de classe $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$, $\Omega \subset V$, μ_1, μ_2 et γ des constantes satisfaisant (1.3) et (1.5), $\mathbf{f} \in [L^\infty((0, T) \times V)]^3$, $\mathbf{U}_\infty \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3$, $\text{supp } \mathbf{U}_\infty \subset V$, $\delta \in (0, 1]$, $\beta \geq \max(\gamma, 6)$, $\varepsilon \in (0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que ρ_0 et \mathbf{q}_0 satisfont les hypothèses (2.4) et (2.5). Alors il existe un couple de fonctions (ρ_n, \mathbf{u}_n) satisfaisant*

(i) $\rho_n \in L^{\frac{4}{3}\beta}((0, T) \times V) \cap C^0([0, T]; L_{weak}^\beta(V))$, $\rho_n \geq 0$ p.p. dans $(0, T) \times V$, $\rho_n(0) = \rho_0$ p.p. dans V , $D^\alpha \rho_n, \partial_t \rho_n \in L^s(0, T; L^{\frac{2\beta}{\beta+2}}(V))$, $\forall |\alpha| = 2$, $s = \frac{5\beta-3}{4\beta}$ et p.p.t. $t \in (0, T)$, $\partial_\nu \rho_n(t)|_{\partial V} = 0$, $\mathbf{u}_n \in [L^2(0, T; H_0^1(V))]^3$, $\rho_n \mathbf{u}_n \in [L^s(0, T; W_0^{1,s}(V))]^3$, $\rho_n \mathbf{u}_n \in [C^0([0, T]; L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(V))]^3$, $(\rho_n \mathbf{u}_n)(0) = \mathbf{q}_0$ p.p. dans V et $\nabla \rho_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n \in [L^s((0, T) \times V)]^3$;

(ii) l'équation de continuité avec dissipation (2.1) p.p. dans $(0, T) \times V$;

(iii) l'équation de mouvement (2.2) au sens des distributions dans $(0, T) \times V$;

(iv) au sens des distributions dans $(0, T)$, l'inégalité d'énergie sous forme différentielle

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n) + \int_V \{ \mu_1 |\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\text{div}(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 \} dx \\ & + \varepsilon \delta \beta \int_V \rho_n^{\beta-2} |\nabla \rho_n|^2 dx + n \int_{V \setminus \bar{\Omega}} |\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty|^2 dx \leq \int_\Omega \rho_n \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) dx \\ & + \int_V \{ \varepsilon \nabla \rho_n \cdot \nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) \cdot \mathbf{U}_\infty + \rho_n \mathbf{u}_n \otimes (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}_n) : \nabla \mathbf{U}_\infty - p_\delta(\rho_n) \text{div } \mathbf{U}_\infty \} dx \\ & - \int_V \{ \mu_1 \nabla \mathbf{U}_\infty : \nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) + (\mu_1 + \mu_2) (\text{div } \mathbf{U}_\infty) (\text{div}(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)) \} dx \quad (2.7) \end{aligned}$$

et p.p.t. $\tau \in (0, T)$, l'inégalité d'énergie sous forme intégrale

$$\begin{aligned} & E_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n)(\tau) + \int_0^\tau \int_V \{ \mu_1 |\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\text{div}(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 \} dx dt \\ & + \varepsilon \delta \beta \int_0^\tau \int_V \rho_n^{\beta-2} |\nabla \rho_n|^2 dx dt + n \int_0^\tau \int_{V \setminus \bar{\Omega}} |\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty|^2 dx dt \\ & \leq E_{\delta,0} + \int_0^\tau \int_\Omega \rho_n \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) dx dt + \varepsilon \int_0^\tau \int_V \nabla \rho_n \cdot \nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) \cdot \mathbf{U}_\infty dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_V \{ \rho_n \mathbf{u}_n \otimes (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}_n) : \nabla \mathbf{U}_\infty - p_\delta(\rho_n) \text{div } \mathbf{U}_\infty \} dx dt \\ & - \int_0^\tau \int_V \{ \mu_1 \nabla \mathbf{U}_\infty : \nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) + (\mu_1 + \mu_2) (\text{div } \mathbf{U}_\infty) (\text{div}(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)) \} dx dt, \quad (2.8) \end{aligned}$$

dans lesquelles $E_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n)$ dénote l'énergie totale modifiée, définie par

$$E_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n) = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \rho_n |\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty|^2 + P_\delta(\rho_n) \right\} dx, \quad P_\delta(\rho) = P(\rho) + \frac{\delta}{\beta - 1} \rho^\beta \quad (2.9)$$

et $E_{\delta,0}$ l'énergie modifiée des données initiales ρ_0 et \mathbf{q}_0 provenant de (2.4) et (2.5), définie par

$$E_{\delta,0} = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_0 - \rho_0 \mathbf{U}_\infty|^2}{\rho_0} + P_\delta(\rho_0) \right\} dx ; \quad (2.10)$$

(v) les bornes uniformes par rapport à n :

$$\sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|\rho_n(t)\|_{0, \gamma, V}^\gamma \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.11)$$

$$\delta \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|\rho_n(t)\|_{0, \beta, V}^\beta \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.12)$$

$$\sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|(\sqrt{\rho_n} |\mathbf{u}_n|)(t)\|_{0, 2, V}^2 \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.13)$$

$$\int_0^T \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{0, 2, V}^2 dt \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.14)$$

$$\varepsilon \int_0^T \|\nabla \rho_n\|_{0, 2, V}^2 dt \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.15)$$

$$\varepsilon \delta \beta \int_0^T \int_V \rho_n^{\beta-2} |\nabla \rho_n|^2 dx dt \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.16)$$

$$\int_0^T \int_{V \setminus \bar{\Omega}} |\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty|^2 dx dt \leq \frac{c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f})}{n}, \quad (2.17)$$

$$\|\rho_n^\beta\|_{0, \frac{4}{3}, (0, T) \times V} \leq c(T, \varepsilon, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}). \quad (2.18)$$

Remarque II.3 Durant la preuve de la proposition II.1, nous montrerons également que le couple (ρ_n, \mathbf{u}_n) satisfait les inégalités d'énergie modifiées, obtenues en remplaçant $P_\delta(\cdot)$ par $\Pi_\delta(\cdot)$ dans (2.7) et (2.8) où

$$\Pi_\delta(\rho) = \Pi(\rho) + \frac{\delta}{\beta - 1} \{\rho^\beta - \beta \rho \rho_\infty^{\beta-1} + (\beta - 1) \rho_\infty^\beta\}.$$

Remarque II.4 Il est facile de vérifier que toute fonction $\varphi \in L^2(0, T; W_0^{1, \frac{2\beta}{\beta-1}}(V))$, $\partial_t \varphi \in L^1(0, T; L^{\beta'}(V))$ est une fonction test admissible de l'équation (2.1) et que toute fonction $\varphi \in [L^4(0, T; W_0^{1, 4}(V))]^3$, $\partial_t \varphi \in [L^2(0, T; L^{\frac{6\beta}{5\beta-6}}(V))]^3$ est une fonction test admissible de l'équation (2.2).

2.2 Approximation n°2 (Etape n°2)

La proposition II.1 en tête, nous nous placerons alors dans la configuration du problème (2.1)-(2.6) et nous ferons tendre le coefficient n du terme pénalisé vers sa valeur critique. Ceci engendrera la

Proposition II.2 *Pour tout $\delta \in (0, 1]$ fixé et $\varepsilon \in (0, 1]$, il existe un couple de fonctions $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ satisfaisant*

(i) $\rho_\varepsilon \in L^{\frac{4}{3}\beta}((0, T) \times V) \cap C^0([0, T]; L_{weak}^\beta(V))$, $\rho_\varepsilon \geq 0$ p.p. dans $(0, T) \times V$, $\rho_\varepsilon(0) = \rho_0$ p.p. dans V , $D^\alpha \rho_\varepsilon, \partial_t \rho_\varepsilon \in L^s(0, T; L^{\frac{2\beta}{\beta+2}}(V))$, $\forall |\alpha| = 2$, $s = \frac{5\beta-3}{4\beta}$ et p.p.t. $t \in (0, T)$, $\partial_\nu \rho_\varepsilon(t)|_{\partial V} = 0$, $\mathbf{u}_\varepsilon \in [L^2(0, T; H_0^1(V))]^3$, $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{U}_\infty$ p.p. dans $(0, T) \times V \setminus \overline{\Omega}$, $\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \in [L^s(0, T; W_0^{1,s}(V))]^3$, $\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \in [C^0([0, T]; L_{weak}^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega))]^3$, $(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(0) = \mathbf{q}_0$ p.p. dans V , $\nabla \rho_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \in [L^s((0, T) \times V)]^3$;

(ii) *l'équation de continuité avec dissipation*

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon) - \varepsilon \Delta \rho_\varepsilon = 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times V ; \quad (2.19)$$

(iii) *l'équation de mouvement*

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes \mathbf{u}_\varepsilon) - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_\varepsilon - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon + \nabla p_\delta(\rho_\varepsilon) + \varepsilon \nabla \rho_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \\ = \rho_\varepsilon \mathbf{f} \text{ dans } [\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)]^3 ; \end{aligned} \quad (2.20)$$

(iv) *au sens des distributions dans $(0, T)$ l'inégalité d'énergie sous forme différentielle*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_\delta(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon) + \int_\Omega \{ \mu_1 |\nabla(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty)|^2 \} dx \\ \leq \int_\Omega \rho_\varepsilon \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty) dx + \varepsilon \int_\Omega \nabla \rho_\varepsilon \cdot \nabla(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty) \cdot \mathbf{U}_\infty dx \\ + \int_\Omega \{ \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla \mathbf{U}_\infty - p_\delta(\rho_\varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{U}_\infty \} dx \\ - \int_\Omega \{ \mu_1 \nabla \mathbf{U}_\infty : \nabla(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty) + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{U}_\infty) (\operatorname{div}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty)) \} dx \end{aligned} \quad (2.21)$$

et p.p.t. $\tau \in (0, T)$ l'inégalité d'énergie sous forme intégrale

$$\begin{aligned} E_\delta(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)(\tau) + \int_0^\tau \int_\Omega \{ \mu_1 |\nabla(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty)|^2 \} dx dt \\ \leq E_{\delta,0} + \int_0^\tau \int_\Omega \rho_\varepsilon \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty) dx dt + \varepsilon \int_0^\tau \int_\Omega \nabla \rho_\varepsilon \cdot \nabla(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty) \cdot \mathbf{U}_\infty dx dt \\ + \int_0^\tau \int_\Omega \{ \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla \mathbf{U}_\infty - p_\delta(\rho_\varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{U}_\infty \} dx dt \\ - \int_0^\tau \int_\Omega \{ \mu_1 \nabla \mathbf{U}_\infty : \nabla(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty) + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{U}_\infty) (\operatorname{div}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty)) \} dx dt ; \end{aligned} \quad (2.22)$$

(v) les bornes uniformes par rapport à ε :

$$\sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|\rho_\varepsilon(t)\|_{0, \gamma, V}^\gamma \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.23)$$

$$\delta \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|\rho_\varepsilon(t)\|_{0, \beta, V}^\beta \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.24)$$

$$\sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|(\sqrt{\rho_\varepsilon} |\mathbf{u}_\varepsilon|)(t)\|_{0, 2, V}^2 \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.25)$$

$$\int_0^T \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0, 2, V}^2 dt \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.26)$$

$$\varepsilon \int_0^T \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{0, 2, V}^2 dt \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.27)$$

$$\|\rho_\varepsilon\|_{0, \gamma+1, (0, T) \times K} + \|\rho_\varepsilon\|_{0, \beta+1, (0, T) \times K} \leq c(T, \Omega, K, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.28)$$

K désignant tout sous-ensemble compact de Ω .

Preuve. Voir la section 4. □

Remarque II.5 Nous verrons que le couple $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ satisfait également les inégalités d'énergie modifiées obtenues en remplaçant $P_\delta(\cdot)$ par $\Pi_\delta(\cdot)$ dans (2.21) et (2.22).

Remarque II.6 Il est facile de vérifier que toute fonction $\varphi \in L^2(0, T; W_0^{1, \frac{2\beta}{\beta-1}}(V))$, $\partial_t \varphi \in L^1(0, T; L^{\beta'}(V))$ est une fonction test admissible de l'équation (2.19) et que toute fonction $\varphi \in [L^4(0, T; W_0^{1,4}(\Omega'))]^3$ telle que $\partial_t \varphi \in [L^1(0, T; L^{\frac{2\beta}{\beta-1}}(\Omega'))]^3 + [L^2(0, T; L^{\frac{6\beta}{5\beta-6}}(\Omega'))]^3$, $\Omega' \subset \Omega$, est une fonction test admissible de l'équation (2.20).

2.3 Approximation n°1 (Etape n°3)

Un fois la proposition II.2 démontrée, nous ferons tendre ε vers sa valeur critique dans les équations (2.19)-(2.20). Pour ce faire, nous utiliserons une approche due à P.L. LIONS [46, Chapter 5,7] qui nous permettra de conclure que :

Proposition II.3 Pour $\delta \in (0, 1]$, il existe un couple de fonctions $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ qui possède les propriétés suivantes :

- (i) $\rho_\delta \in L^{\beta+1}(0, T; L_{loc}^{\beta+1}(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L_{weak}^\beta(V))$, $\rho_\delta \geq 0$ p.p. dans $(0, T) \times V$, $\rho_\delta = 0$ dans $(0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus V$ et $\rho_\delta(0) = \rho_0$ p.p. dans V , $\mathbf{u}_\delta \in [L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))]^3$, $\mathbf{u}_\delta = \mathbf{U}_\infty$ p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, $\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \in [C^0([0, T]; L_{weak}^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega))]^3$, $(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta)(0) = \mathbf{q}_0$ p.p. dans Ω ;

- (ii) $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ est solution de l'équation de continuité

$$\partial_t \rho_\delta + \text{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3) ; \quad (2.29)$$

(iii) pour toute fonction b de la classe (1.10), (1.11) et (1.13) avec β à la place de γ , $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ est solution de l'équation de continuité renormalisée

$$\partial_t b(\rho_\delta) + \operatorname{div}(b(\rho_\delta)\mathbf{u}_\delta) + \{\rho_\delta b(\rho_\delta) - b(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3); \quad (2.30)$$

(iv) pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ et tout $k > 0$, $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ satisfait l'équation

$$\partial_t b_k(\rho_\delta) + \operatorname{div}(b_k(\rho_\delta)\mathbf{u}_\delta) + \{\rho_\delta (b_k)_+(\rho_\delta) - b_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3); \quad (2.31)$$

(v) $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ est solution de l'équation de mouvement

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta) + \operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_\delta - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta + \nabla p_\delta(\rho_\delta) \\ = \rho_\delta \mathbf{f} \text{ dans } [\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)]^3; \end{aligned} \quad (2.32)$$

(vi) p.p.t. $\tau \in (0, T)$, $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ satisfait l'inégalité d'énergie sous forme intégrale

$$\begin{aligned} E_\delta(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)(\tau) + \int_0^\tau \int_\Omega \{\mu_1 |\nabla(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div}(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty)|^2\} dx dt \\ \leq E_{\delta,0} + \int_0^\tau \int_\Omega \rho_\delta \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty) dx dt \\ + \int_0^\tau \int_\Omega \{\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}_\delta) : \nabla \mathbf{U}_\infty - p_\delta(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{U}_\infty\} dx dt \\ - \int_0^\tau \int_\Omega \{\mu_1 \nabla \mathbf{U}_\infty : \nabla(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty) + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{U}_\infty) (\operatorname{div}(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty))\} dx dt. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Preuve. Voir la section 5. □

Remarque II.7 Nous montrerons également que le couple $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ satisfait l'inégalité d'énergie modifiée, obtenue en remplaçant $P_\delta(\cdot)$ par $\Pi_\delta(\cdot)$ dans (2.33).

A ce stade de la preuve, nous introduirons une région $\mathcal{U} \subset V$ telle que $\Gamma \subset \partial \mathcal{U}$ et nous prouverons que si la condition initiale modifiée ρ_0 est telle que $\rho_0 = \rho_\infty$ dans \mathcal{U} , alors il existe une région $\Sigma(T) \subset \mathcal{U}$, telle que $\Gamma \subset \partial \Sigma(T)$, dans laquelle

$$\rho_\delta = \rho_\infty \text{ p.p. dans } (0, T) \times \Sigma(T). \quad (2.34)$$

Sous la condition $\rho_0 = \rho_\infty$ dans \mathcal{U} qui, pour des raisons évidentes de compatibilité avec l'hypothèse (2.4), nécessite que $0 < \underline{\rho} \leq \rho_\infty \leq \bar{\rho} < \infty$, de (2.34) découlera diverses propriétés satisfaites par le couple $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$. Citons entre autres un affinement de l'inégalité d'énergie (2.33). Ensuite, partant de $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$, nous construirons un nouveau couple de fonctions, encore noté $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$, qui bien sûr possédera les propriétés induites par celles de l'ancien couple $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$, mais également d'autres, essentielles dans le passage à la limite $\delta \rightarrow 0^+$. En voici la liste sous forme de proposition.

Proposition II.4 Soient ρ_0 satisfaisant (2.4), $\rho_0 = \rho_\infty$ dans \mathcal{U} avec $0 < \underline{\rho} \leq \rho_\infty \leq \bar{\rho} < \infty$ et \mathbf{q}_0 satisfaisant (2.5). Pour tout $\delta \in (0, 1]$, il existe un couple de fonctions $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ satisfaisant

- (i) $\rho_\delta \in L^{\beta+1}(0, T; L_{loc}^{\beta+1}(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L_{weak}^\beta(\Omega))$, $\rho_\delta \geq 0$ p.p. dans $(0, T) \times \Omega$, $\rho_\delta(\tau) = \rho_0$ p.p. dans $B \setminus \bar{\Omega}$, $\tau \in [0, T]$, $\rho_\delta = \rho_\infty$ dans $(0, T) \times (\mathbb{R}^3 \setminus B)$, $\rho_\delta(0) = \rho_0$ p.p. dans Ω , $(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty) \in [L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))]^3$, $\mathbf{u}_\delta = \mathbf{U}_\infty$ p.p. dans $(0, T) \times (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$, $\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \in [C^0([0, T]; L_{weak}^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega))]^3$, $(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta)(0) = \mathbf{q}_0$ p.p. dans Ω ;
- (ii) l'équation de continuité (2.29), l'équation de continuité renormalisée (2.30) pour toute fonction b de la classe (1.10), (1.11) et (1.13) avec β à la place de γ et l'équation (2.31) pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ et tout $k > 0$ au sens des distributions dans $(0, T) \times (\mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma))$;
- (iii) l'équation de mouvement (2.32) dans $[\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)]^3$;
- (iv) p.p.t. $\tau \in (0, T)$ l'inégalité d'énergie sous forme intégrale

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \rho_\delta |\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty|^2 + P_\delta(\rho_\delta) \right\}(\tau) dx + \int_0^\tau \int_{\Gamma} P_\delta(\rho_\infty)(\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu}) d\sigma dt \\
& + \int_0^\tau \int_{\Omega} \left\{ \mu_1 |\nabla(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div}(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty)|^2 \right\} dx dt \\
& \leq \int_V \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_0 - \rho_0 \mathbf{U}_\infty|^2}{\rho_0} \right\} dx + \int_{\Omega} P_\delta(\rho_0) dx + \int_0^\tau \int_{\Omega} \rho_\delta \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty) dx dt \\
& + \int_0^\tau \int_{\Omega} \left\{ \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}_\delta) : \nabla \mathbf{U}_\infty - p_\delta(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{U}_\infty \right\} dx dt \\
& - \int_0^\tau \int_{\Omega} \left\{ \mu_1 \nabla \mathbf{U}_\infty : \nabla(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty) + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{U}_\infty) (\operatorname{div}(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty)) \right\} dx dt.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Preuve. Voir la section 6. □

Remarque II.8 Suite logique de la remarque II.7, nous verrons que le couple $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ satisfait également l'inégalité d'énergie modifiée, obtenue en remplaçant $P_\delta(\cdot)$ par $\Pi_\delta(\cdot)$ dans (2.35).

Remarque II.9 Soit $p \in (\frac{2\gamma}{\gamma+1}, \frac{6\gamma}{\gamma+6})$. Par interpolation, il est clair que p.p.t. $t \in (0, T)$,

$$\|(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta)(t)\|_{0,p,\Omega} \leq \|(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta)(t)\|_{0, \frac{2\gamma}{\gamma+1}, \Omega}^{\alpha(p)} \|(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta)(t)\|_{0, \frac{6\gamma}{\gamma+6}, \Omega}^{1-\alpha(p)}, \quad \frac{1}{p} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \alpha(p) + \frac{\gamma+6}{6\gamma} (1-\alpha(p)).$$

En conséquence, il est clair que $\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \in [L^{\frac{2}{1-\alpha(p)}}(0, T; L^p(\Omega))]^3$. Par suite, il est facile de vérifier que toute fonction $\boldsymbol{\varphi} \in [L^{\beta+1}(0, T; W_0^{1,\beta+1}(\Omega'))]^3$ telle que

$$\begin{aligned}
\partial_t \boldsymbol{\varphi} & \in [L^1(0, T; L^{\frac{2\beta}{\beta-1}}(\Omega'))]^3 + [L^{(\frac{2}{1-\alpha(p)})'}(0, T; L^{p'}(\Omega'))]^3 + [L^2(0, T; L^{\frac{6\beta}{5\beta-6}}(\Omega'))]^3, \\
p & \in \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}, \frac{6\gamma}{\gamma+6} \right), \quad \frac{1}{p} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \alpha(p) + \frac{\gamma+6}{6\gamma} (1-\alpha(p))
\end{aligned}$$

où $\Omega' \subset \Omega$, est une fonction test admissible de l'équation de mouvement (2.32).

Nous poserons ensuite

$$\mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0) = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_0 - \rho_0 \mathbf{U}_\infty|^2}{\rho_0} \right\} dx + \int_\Omega P_\delta(\rho_0) dx. \quad (2.36)$$

Avec cette notation, nous montrerons que les bornes suivantes découlent de l'inégalité d'énergie (2.35) :

$$\sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|\rho_\delta(t)\|_{0, \gamma, \Omega}^\gamma \leq c(T, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.37)$$

$$\delta \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|\rho_\delta(t)\|_{0, \beta, \Omega}^\beta \leq c(T, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.38)$$

$$\sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|(\sqrt{\rho_\delta} |\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty|)(t)\|_{0, 2, \Omega}^2 \leq c(T, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (2.39)$$

$$\int_0^T \|\nabla(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty)\|_{0, 2, \Omega}^2 dt \leq c(T, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}). \quad (2.40)$$

A partir de ces bornes, suivant une observation due à P.L. LIONS [46, Theorem 7.1], nous récupérerons également une estimation du type

$$\int_0^T \int_K (a\rho_\delta^{\gamma+\theta} + \delta\rho_\delta^{\beta+\theta}) dx dt \leq c(T, \Omega, K, \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \quad (2.41)$$

où K désigne tout sous-ensemble compact de Ω et $\theta = \frac{2}{3}\gamma - 1$. Cette information sera indispensable pour assurer que la pression limite lorsque $\delta \rightarrow 0^+$ n'est pas une mesure.

La dernière et ultime étape de la preuve consistera à éliminer le terme de pression artificielle par passage à la limite $\delta \rightarrow 0^+$ tout en relaxant les hypothèses (2.4) et (2.5) sur les conditions initiales ainsi que l'hypothèse $0 < \underline{\rho} \leq \rho_\infty \leq \bar{\rho} < \infty$. Pour ce faire, partant de conditions initiales ρ_0 et \mathbf{q}_0 satisfaisant (1.16) et (1.17), nous construirons des conditions initiales modifiées $\rho_{0, \delta}$ et $\mathbf{q}_{0, \delta}$ satisfaisant (2.4), $\rho_{0, \delta} = \rho_{\infty, \delta} \equiv \rho_\infty + \delta$ dans \mathcal{U} et (2.5). Ces nouvelles conditions initiales modifiées auront la particularité d'être telles que la constante $c(T, \Omega, K, \mathcal{E}_\delta(\rho_{0, \delta}, \mathbf{q}_{0, \delta}), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f})$ qui apparaîtra dans les bornes (2.37)-(2.41) reste uniforme par rapport à δ . Finalement, pour le passage à la limite $\delta \rightarrow 0^+$, nous utiliserons l'approche due à FEIREISL [16, 17], approche que nous avons adaptée dans la partie stationnaire de ce mémoire. Cette approche diffère en plusieurs points de celle due à P.L. LIONS [46, Chapter 5,7] et semble être plus appropriée puisqu'elle permet de traiter le cas $\gamma > \frac{3}{2}$. Les détails de cette procédure seront exposés dans la section 6.

3 Preuve : Etape n°1

Dans cette section, nous nous plaçons dans les hypothèses de la proposition II.1 afin de démontrer celle-ci. Cette preuve utilise une méthode standard consistant à introduire une approximation de type Faedo-Galerkin, comme l'ont fait FEIREISL, NOVOTNÝ et PETZELTOVÁ dans [18, Section 2].

3.1 Approximation de Faedo-Galerkin

Soit $A : D(A) = [H_0^1(V)]^3 \cap [H^2(V)]^3 \subset [L^2(V)]^3 \rightarrow [L^2(V)]^3$ l'opérateur défini par $A = -\mu_1 \Delta - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div}$ où μ_1 et μ_2 sont des constantes satisfaisant (1.3). On rappelle que sous ces hypothèses, A est un opérateur fortement elliptique. Par ailleurs, à l'aide de la formule de Green, on vérifie sans peine que A est un opérateur symétrique alors que le lemme 1.7 garantit que pour toute fonction $\mathbf{f} \in [L^2(V)]^3$, il existe une unique fonction $\mathbf{u} \in D(A)$ telle que $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$, ce qui implique que A est surjectif. D'autre part, la formule de Green et l'inégalité de Poincaré prouvent que

$$\int_V A\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dx = \int_V \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2\} \, dx \geq c(V) \frac{\mu_1}{3} \|\mathbf{u}\|_{1,2}^2, \quad \mathbf{u} \in D(A)$$

d'où, d'après l'inégalité de Schwarz, que

$$\|A\mathbf{u}\|_{0,2} \geq c(V) \frac{\mu_1}{3} \|\mathbf{u}\|_{1,2}, \quad \mathbf{u} \in D(A).$$

En conséquence, l'opérateur A est inversible et A^{-1} considéré comme un opérateur de $[L^2(V)]^3$ à valeurs dans $[L^2(V)]^3$ est compact. Or, tout opérateur symétrique T défini sur un espace de Hilbert H , à valeurs dans ce même espace H est un opérateur borné et autoadjoint (cf. [82, Proposition VII.3.2]). Ainsi, puisque $[L^2(V)]^3$ est un espace de Hilbert séparable, le [8, Théorème VI.11] garantit l'existence d'une base hilbertienne $(\mathbf{e}_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $[L^2(V)]^3$ et d'une suite de réels strictement positifs $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, $\lambda_k \rightarrow \infty$, satisfaisant

$$\mathbf{e}_k \in D(A), \quad A\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k.$$

En accord avec les résultats classiques sur la régularité elliptique, $(\mathbf{e}_k)_k \subset [C^\infty(V)]^3$. Noter que $(\mathbf{e}_k)_k$ forme également un système orthogonal complet de $[H_0^1(V)]^3$ muni du produit scalaire

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \int_V \{\mu_1 \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{v})\} \, dx.$$

Soient $X_m = \operatorname{Vect}(\mathbf{e}_k, k = 1, \dots, m)$ le sous-espace vectoriel de $[L^2(V)]^3$ muni du produit scalaire induit

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx$$

et P_m l'opérateur de projection de $[L^2(V)]^3$ sur X_m . On rappelle que cet opérateur possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \|P_m\|_{\mathcal{L}([L^2(V)]^3, [L^2(V)]^3)} &= 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m \phi - \phi\|_{0,2} = 0, \quad \phi \in [L^2(V)]^3, \\ \|P_m \phi\|_{k,2} &\leq c \|\phi\|_{k,2}, \quad \phi \in [H^k(V)]^3, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

où c est une constante indépendante de $m \in \mathbb{N}^*$. De plus, remarquer que par l'absurde, il est facile de montrer que

$$\sup_{\substack{\phi \in [L^2(V)]^3 \\ \phi \neq 0}} \frac{\|(P_m - I)\phi\|_{-1,2}}{\|\phi\|_{0,2}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } m \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Bien sûr, puisque X_m est de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Dans la suite, nous noterons par $0 < \underline{c} = \underline{c}(m, k, p, l, q) < \bar{c} = \bar{c}(m, k, p, l, q)$ les constantes optimales dans les inégalités

$$\underline{c}\|\mathbf{u}\|_{k,p} \leq \|\mathbf{u}\|_{l,q} \leq \bar{c}\|\mathbf{u}\|_{k,p}, \quad \mathbf{u} \in X_m, \quad k, l \in \mathbb{N}, \quad p, q \in [1, \infty] \quad (3.3)$$

et par $\tilde{c} = \tilde{c}(p, V)$ la constante optimale dans l'inégalité de Poincaré

$$\|\varphi\|_{0,p} \leq \tilde{c}\|\nabla\varphi\|_{0,p}, \quad \varphi \in W_0^{1,p}(V), \quad p \in [1, \infty]. \quad (3.4)$$

Soit φ une fonction telle que

$$\varphi \in C^0([0, T]; L^2(V)), \quad \partial_t\varphi \in L^1(0, T; L^2(V)), \quad \inf_{x \in V} \varphi(t, x) > 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.5)$$

Pour $t \in [0, T]$ fixé, on introduit l'opérateur

$$\mathcal{M}_{\varphi(t)} : X_m \rightarrow X_m, \quad \mathbf{v} \mapsto P_m(\varphi(t)\mathbf{v}). \quad (3.6)$$

Cet opérateur est clairement linéaire et en accord avec les propriétés (3.1) et les inégalités (3.3), on a

$$\|\mathcal{M}_{\varphi(t)}\mathbf{v}\|_{X_m} \leq \|\varphi(t)\mathbf{v}\|_{0,2} \leq \bar{c}\|\varphi(t)\|_{0,2}\|\mathbf{v}\|_{X_m}$$

d'où on déduit que

$$\|\mathcal{M}_{\varphi(t)}\|_{\mathcal{L}(X_m, X_m)} \leq \bar{c}\|\varphi(t)\|_{0,2}. \quad (3.7)$$

Par ailleurs,

$$\int_V \mathcal{M}_{\varphi(t)}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_V P_m(\varphi(t)\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_V \varphi(t)|\mathbf{v}|^2 \, dx \geq \inf_{x \in V} \varphi(t, x)\|\mathbf{v}\|_{X_m}^2.$$

Ceci prouve l'injectivité de l'opérateur $\mathcal{M}_{\varphi(t)}$ et donc, sa bijectivité puisque X_m est de dimension finie, ainsi que l'inégalité

$$\|(\mathcal{M}_{\varphi(t)})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_m, X_m)} \leq (\inf_{x \in V} \varphi(t, x))^{-1}. \quad (3.8)$$

Considérons maintenant deux fonctions φ_i , $i = 1, 2$, possédant les propriétés (3.5). Noter alors que $\mathcal{M}_{\varphi_1(t)} - \mathcal{M}_{\varphi_2(t)} = \mathcal{M}_{(\varphi_1 - \varphi_2)(t)}$ et par suite que

$$(\mathcal{M}_{\varphi_2(t)})^{-1} - (\mathcal{M}_{\varphi_1(t)})^{-1} = (\mathcal{M}_{\varphi_2(t)})^{-1}\mathcal{M}_{(\varphi_1 - \varphi_2)(t)}(\mathcal{M}_{\varphi_1(t)})^{-1}.$$

De ces remarques, complétées par les inégalités (3.7) et (3.8), il résulte que

$$\|(\mathcal{M}_{\varphi_2(t)})^{-1} - (\mathcal{M}_{\varphi_1(t)})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_m, X_m)} \leq \bar{c} \max_{i=1,2} (\inf_{x \in V} \varphi_i(t, x))^{-2} \|(\varphi_1 - \varphi_2)(t)\|_{0,2}. \quad (3.9)$$

Enfin, en considérant $\mathbf{v} \in X_m$ fixé, on peut voir $\mathcal{M}_{\varphi(\cdot)}\mathbf{v}$ comme une fonction continue sur $[0, T]$ à valeurs dans X_m . On calcule alors $-\int_0^T (\mathcal{M}_{\varphi(t)}\mathbf{v}, \Phi)\partial_t\psi \, dt$, $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$, $\Phi \in X_m$. A l'aide du théorème de Fubini, on conclut finalement que

$$\partial_t\mathcal{M}_{\varphi(t)}\mathbf{v} \in X_m \text{ p.p.t. } t \in (0, T) \text{ et } \partial_t\mathcal{M}_{\varphi(t)}\mathbf{v} = \mathcal{M}_{\partial_t\varphi(t)}\mathbf{v} \text{ p.p. dans } (0, T). \quad (3.10)$$

Ces quelques notions en tête, nous pouvons énoncer le résultat suivant dont la preuve fait l'objet de la suite et fin de cette sous-section.

Proposition II.5 Soient $T \in (0, \infty)$, $V \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné de classe $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$, $\Omega \subset\subset V$, μ_1, μ_2 et γ des constantes satisfaisant (1.3) et (1.5), $\mathbf{f} \in [L^\infty((0, T) \times V)]^3$, $\mathbf{U}_\infty \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3$, $\text{supp } \mathbf{U}_\infty \subset V$, $\delta \in (0, 1]$ fixé, $\beta \geq \max(\gamma, 6)$, $\varepsilon \in (0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que

$$\begin{aligned} \rho_0 \in L^\infty(V) \cap H^1(V), \quad 0 < \underline{\rho} \leq \rho_0 \leq \bar{\rho} < \infty, \\ \mathbf{u}_0 \in X_m \quad (\mathbf{q}_0 = \rho_0 \mathbf{u}_0 \Rightarrow \frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} \in L^1(V)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Alors il existe un couple de fonctions (ρ_m, \mathbf{u}_m) qui possède les propriétés suivantes :

(i) $\rho_m \in L^p(0, T; W^{2,p}(V)) \cap C^0([0, T]; L^p(V) \cap H^1(V))$, $\partial_t \rho_m \in L^p((0, T) \times V)$, $\rho_m > 0$ dans $[0, T] \times \bar{V}$, $\partial_\nu \rho_m(t)|_{\partial V} = 0$ p.p.t. $t \in (0, T)$, $\mathbf{u}_m \in C^0([0, T]; X_m)$, $\partial_t \mathbf{u}_m \in L^p(0, T; X_m)$, $p \in (1, \infty)$, $\rho_m(0) = \rho_0$, $\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_0$;

(ii) (ρ_m, \mathbf{u}_m) est solution de l'équation de continuité avec dissipation

$$\partial_t \rho_m + \text{div}(\rho_m \mathbf{u}_m) - \varepsilon \Delta \rho_m = 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times V ; \quad (3.12)$$

(iii) (ρ_m, \mathbf{u}_m) satisfait

$$\begin{aligned} \int_V \partial_t(\rho_m \mathbf{u}_m) \cdot \Phi \, dx &= \int_V \{\mu_1 \Delta \mathbf{u}_m + (\mu_1 + \mu_2) \nabla \text{div } \mathbf{u}_m\} \cdot \Phi \, dx \\ &\quad - \int_V \{\text{div}(\rho_m \mathbf{u}_m \otimes \mathbf{u}_m) + \nabla p(\rho_m) + \varepsilon \nabla \rho_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m\} \cdot \Phi \, dx \\ &\quad + \int_V \{\rho_m \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u}_m - \mathbf{U}_\infty)\} \cdot \Phi \, dx \text{ p.p. dans } (0, T), \forall \Phi \in X_m ; \end{aligned} \quad (3.13)$$

(iv) (ρ_m, \mathbf{u}_m) satisfait l'inégalité d'énergie sous forme différentielle

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{E}_\delta(\rho_m, \mathbf{u}_m) + \int_V \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}_m|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\text{div } \mathbf{u}_m|^2\} \, dx + \varepsilon \delta \beta \int_V \rho_m^{\beta-2} |\nabla \rho_m|^2 \, dx \\ \leq \int_V \{\rho_m \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u}_m - \mathbf{U}_\infty)\} \cdot \mathbf{u}_m \, dx \text{ p.p. dans } (0, T) \end{aligned} \quad (3.14)$$

où

$$\tilde{E}_\delta(\rho_m, \mathbf{u}_m) = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \rho_m |\mathbf{u}_m|^2 + P_\delta(\rho_m) \right\} \, dx, \quad (3.15)$$

aussi bien que sous la forme intégrale

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\delta(\rho_m, \mathbf{u}_m)(\tau) + \int_0^\tau \int_V \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}_m|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\text{div } \mathbf{u}_m|^2\} \, dx \, dt \\ + \varepsilon \delta \beta \int_0^\tau \int_V \rho_m^{\beta-2} |\nabla \rho_m|^2 \, dx \, dt \leq \tilde{E}_{\delta,0} \\ + \int_0^\tau \int_V \{\rho_m \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u}_m - \mathbf{U}_\infty)\} \cdot \mathbf{u}_m \, dx \, dt \text{ pour tout } \tau \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.16)$$

où

$$\tilde{E}_{\delta,0} = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} + P_\delta(\rho_0) \right\} dx ; \quad (3.17)$$

(v) (ρ_m, \mathbf{u}_m) satisfait les bornes uniformes par rapport à m :

$$\sup_{t \in (0,T)} \text{ess} \|\rho_m(t)\|_{0,\gamma,V}^\gamma \leq c(T, n, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}), \quad (3.18)$$

$$\delta \sup_{t \in (0,T)} \text{ess} \|\rho_m\|_{0,\beta,V}^\beta \leq c(T, n, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}), \quad (3.19)$$

$$\sup_{t \in (0,T)} \text{ess} \|(\sqrt{\rho_m} |\mathbf{u}_m|)(t)\|_{0,2,V}^2 \leq c(T, n, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}), \quad (3.20)$$

$$\int_0^T \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{0,2,V}^2 dt \leq c(T, n, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}), \quad (3.21)$$

$$\varepsilon \delta \beta \int_0^T \int_V \rho_m^{\beta-2} |\nabla \rho_m|^2 dx dt \leq c(T, n, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}), \quad (3.22)$$

$$\|\rho_m^\beta\|_{L^{\frac{4}{3}}((0,T) \times V)} \leq c(T, n, \varepsilon, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}), \quad (3.23)$$

$$\varepsilon \int_0^T \|\nabla \rho_m\|_{0,2,V}^2 dt \leq c(T, n, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}). \quad (3.24)$$

Preuve. Soient $T' \in (0, T]$ et $\mathbf{q}_0 = \rho_0 \mathbf{u}_0$. Supposons dans un premier temps, qu'il existe un champ de vecteurs $\mathbf{u} \in C^0([0, T']; X_m)$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \int_V \{(\rho \mathbf{u})(t) - \mathbf{q}_0\} \cdot \Phi dx &= \int_0^t \int_V \{\mu_1 \Delta \mathbf{u} + (\mu_1 + \mu_2) \nabla \text{div} \mathbf{u}\}(s) \cdot \Phi dx ds \\ &\quad - \int_0^t \int_V \{\text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p_\delta(\rho) + \varepsilon \nabla \rho \cdot \nabla \mathbf{u}\}(s) \cdot \Phi dx ds \\ &+ \int_0^t \int_V \{\rho \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty)\}(s) \cdot \Phi dx ds, \quad \forall t \in [0, T'], \Phi \in X_m \end{aligned} \quad (3.25)$$

où $\rho = S_{\rho_0}(\mathbf{u}) \in \mathcal{R}_{T'}$, S_{ρ_0} désignant l'opérateur construit dans le théorème I.1 et

$$\mathcal{R}_\tau = \left\{ \varphi \in L^p(0, \tau; W^{2,p}(V)) \cap C^0([0, \tau]; L^p(V) \cap H^1(V)), \right. \\ \left. \partial_t \varphi \in L^p((0, \tau) \times V), p \in (1, \infty) \right\}, \quad \tau \in (0, T].$$

Remarquer que les hypothèses (3.11) et $\mathbf{u} \in C^0([0, T']; X_m)$ assurent celles du théorème I.1. Ainsi $\rho = S_{\rho_0}(\mathbf{u}) \in \mathcal{R}_{T'}$ a bien un sens et, on le rappelle, est l'unique solution du problème

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{u}) - \varepsilon \Delta \rho &= 0 \text{ p.p. dans } (0, T') \times V, \\ \partial_\nu \rho &= 0 \text{ sur } \partial V \text{ p.p.t. } t \in (0, T'), \\ \rho(0) &= \rho_0 \text{ p.p. dans } V. \end{aligned}$$

De manière évidente, l'identité (3.25) est équivalente à

$$\begin{aligned} \int_V P_m(\rho(t)\mathbf{u}(t)) \cdot \Phi \, dx &= \int_V P_m \mathbf{q}_0 \cdot \Phi \, dx + \int_0^t \int_V P_m \{ \mathcal{N}(\rho(s), \mathbf{u}(s)) \} \cdot \Phi \, dx \, ds, \\ \mathcal{N}(\varphi, \mathbf{v}) &= -\operatorname{div}(\varphi \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \mu_1 \Delta \mathbf{v} + (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - \nabla p_\delta(\varphi) - \varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \mathbf{v} \\ &\quad + \varphi \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{v} - \mathbf{U}_\infty). \end{aligned}$$

En accord avec le théorème de Fubini, dont les hypothèses sont clairement satisfaites au vu de la régularité des fonctions ρ , \mathbf{u} , celle-ci peut s'écrire sous la forme

$$(\mathcal{M}_{\rho(t)} \mathbf{u}(t), \Phi) = (P_m \mathbf{q}_0 + \int_0^t P_m \{ \mathcal{N}(\rho(s), \mathbf{u}(s)) \} \, ds, \Phi), \quad \forall t \in [0, T], \quad \Phi \in X_m.$$

Puisque l'opérateur $\mathcal{M}_{\rho(t)}$, $t \in [0, T]$, est bijectif, on vient finalement de montrer que le problème (3.25) est équivalent au problème suivant :

$$\mathbf{u}(t) = (\mathcal{M}_{\rho(t)})^{-1} [P_m \mathbf{q}_0 + \int_0^t P_m \{ \mathcal{N}(\rho(s), \mathbf{u}(s)) \} \, ds], \quad \forall t \in [0, T], \quad \rho = S_{\rho_0}(\mathbf{u}). \quad (3.26)$$

Pour cette raison, nous allons nous intéresser à la résolution du problème (3.26). Soit l'ensemble

$$\mathcal{Q}_{\rho_0, \mathbf{q}_0} = \{T' \in (0, T], \exists (\rho, \mathbf{u}) \in \mathcal{R}_{T'} \times C^0([0, T']; X_m) \text{ solution de (3.26)}\}$$

Dans un premier temps, nous démontrerons l'existence d'une solution \mathbf{u} du problème (3.26) locale en temps. Autrement dit, nous prouverons que l'ensemble $\mathcal{Q}_{\rho_0, \mathbf{q}_0}$ est non vide. Ensuite, par l'absurde, nous montrerons que le supremum de l'ensemble $\mathcal{Q}_{\rho_0, \mathbf{q}_0}$ ne peut être que T .

Soient $\tau \in (0, T]$, $K \geq \|\mathbf{u}_0\|_{X_m}$ et $\mathbf{v} \in C^0([0, \tau]; X_m)$ satisfaisant $\|\mathbf{v}\|_{C^0([0, \tau]; X_m)} \leq K$. Alors, après quelques intégrations par parties aisément justifiées du fait de la régularité de \mathbf{v} et $\varphi = S_{\rho_0}(\mathbf{v})$, on trouve que

$$\begin{aligned} (P_m \{ \mathcal{N}(\varphi, \mathbf{v}) \}, \Phi) &= - \int_V \{ \mu_1 \nabla \mathbf{v} : \nabla \Phi + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{v}) (\operatorname{div} \Phi) \} \, dx \\ &+ \int_V \varphi \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} : \nabla \Phi \, dx + \int_V p_\delta(\varphi) \operatorname{div} \Phi \, dx + \varepsilon \int_V \{ \varphi \Delta v^i \Phi^i + \varphi \partial_j v^i \partial_j \Phi^i \} \, dx \\ &+ \int_V \{ \varphi \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{v} - \mathbf{U}_\infty) \} \cdot \Phi \, dx, \quad \Phi \in X_m. \end{aligned}$$

Ainsi, au vu des équivalences de normes (3.3), on a

$$\begin{aligned} |(P_m \{ \mathcal{N}(\varphi, \mathbf{v}) \}, \Phi)| &\leq c \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,2} \|\nabla \Phi\|_{0,2} + \|\varphi\|_{0,\infty} \|\mathbf{v}\|_{0,2}^2 \|\nabla \Phi\|_{0,\infty} \\ &+ c (\|\varphi\|_{0,\infty}^\gamma + \|\varphi\|_{0,\infty}^\beta) \|\operatorname{div} \Phi\|_{0,1} + \|\Delta \mathbf{v}\|_{0,2} \|\varphi\|_{0,\infty} \|\Phi\|_{0,2} + \|\varphi\|_{0,\infty} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,2} \|\nabla \Phi\|_{0,2} \\ &\quad + \|\varphi\|_{0,\infty} \|\mathbf{f}\|_{0,\infty} \|\Phi\|_{0,1} + n (\|\mathbf{v}\|_{0,2} + \|\mathbf{U}_\infty\|_{0,2}) \|\Phi\|_{0,2} \\ &\leq c(m) \{ \|\mathbf{v}\|_{X_m} + \|\varphi\|_{0,\infty} (\|\mathbf{v}\|_{X_m}^2 + \|\mathbf{v}\|_{X_m} + \|\mathbf{f}\|_{0,\infty}) + \|\varphi\|_{0,\infty}^\gamma + \|\varphi\|_{0,\infty}^\beta \\ &\quad + n (\|\mathbf{v}\|_{X_m} + \|\mathbf{U}_\infty\|_{0,2}) \} \|\Phi\|_{X_m} \end{aligned}$$

Or, on rappelle qu'en particulier le théorème I.1 garantit que

$$\varphi(s, x) \leq \bar{\rho} e^{\int_0^s \|\operatorname{div} \mathbf{v}(\xi)\|_{0,\infty} d\xi}, \quad \forall s \in [0, \tau], \quad x \in \bar{V}. \quad (3.27)$$

A l'aide de cette observation et de l'hypothèse $\|\mathbf{v}\|_{C^0([0,\tau];X_m)} \leq K$, en fin de compte, on trouve que

$$\|P_m\{\mathcal{N}(\varphi(s), \mathbf{v}(s))\}\|_{X_m} \leq c(T, m, n, \bar{\rho}, K, \mathbf{f}), \quad \forall s \in [0, \tau]. \quad (3.28)$$

Par ailleurs, à l'aide de la formule classique $b(z_1) - b(z_2) = \int_0^1 b'(\xi z_1 + (1-\xi)z_2)(z_1 - z_2) d\xi$, $b \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}_+$, pour $\mathbf{v}_i \in C^0([0, \tau]; X_m)$, $\|\mathbf{v}_i\|_{C^0([0,\tau];X_m)} \leq K$, $\varphi_i = S_{\rho_0}(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, 2$, on peut calculer

$$\begin{aligned} (P_m\{\mathcal{N}(\varphi_1, \mathbf{v}_1) - \mathcal{N}(\varphi_2, \mathbf{v}_2)\}, \Phi) &= \int_V \{\mu_1 \Delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\} \cdot \Phi \, dx \\ &\quad + \gamma \int_V \int_0^1 (\xi \varphi_1 + (1-\xi)\varphi_2)^{\gamma-1} (\varphi_1 - \varphi_2) \, d\xi \operatorname{div} \Phi \, dx \\ &\quad + \delta \beta \int_V \int_0^1 (\xi \varphi_1 + (1-\xi)\varphi_2)^{\beta-1} (\varphi_1 - \varphi_2) \, d\xi \operatorname{div} \Phi \, dx \\ &\quad + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) v_1^i v_1^j \partial_j \Phi^i \, dx + \int_V \varphi_2 (v_1^i - v_2^i) v_1^j \partial_j \Phi^i \, dx + \int_V \varphi_2 v_2^i (v_1^j - v_2^j) \partial_j \Phi^i \, dx \\ &\quad + \varepsilon \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) (\Delta v_1^i \Phi^i + \partial_j v_1^i \partial_j \Phi^i) \, dx + \varepsilon \int_V \varphi_2 \{\Delta (v_1^i - v_2^i) \Phi^i + \partial_j (v_1^i - v_2^i) \partial_j \Phi^i\} \, dx \\ &\quad + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \mathbf{f} \cdot \Phi \, dx + n \int_V (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) 1_{V \setminus \bar{\Omega}} \cdot \Phi \, dx, \quad \Phi \in X_m. \end{aligned}$$

En utilisant les équivalences (3.3) et la borne (3.27), on majore chacun des termes du membre de droite de cette égalité. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que l'on obtient

$$\begin{aligned} &\|P_m\{\mathcal{N}(\varphi_1, \mathbf{v}_1) - \mathcal{N}(\varphi_2, \mathbf{v}_2)\}(s)\|_{X_m} \\ &\leq c(T, m, n, \bar{\rho}, K, \mathbf{f}) \{ \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|(s)\|_{X_m} + \|(\varphi_1 - \varphi_2)(s)\|_{0,2} \}, \quad s \in [0, \tau]. \end{aligned}$$

Du théorème I.1 et plus particulièrement de (I.3.12), il résulte que

$$\begin{aligned} &\|P_m\{\mathcal{N}(\varphi_1, \mathbf{v}_1) - \mathcal{N}(\varphi_2, \mathbf{v}_2)\}(s)\|_{X_m} \\ &\leq c(T, V, m, n, \bar{\rho}, K, \varepsilon, \mathbf{f}) (1 + \|\rho_0\|_{1,2}) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{C^0([0,\tau];X_m)}, \quad s \in [0, \tau]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

D'autre part, les propriétés (3.8), (3.9) et la borne (3.28) montrent que

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{M}_{\varphi(t_1)})^{-1} \int_0^{t_1} P_m\{\mathcal{N}(\varphi(s), \mathbf{v}(s))\} \, ds - \mathcal{M}_{\varphi(t_2)}^{-1} \int_0^{t_2} P_m\{\mathcal{N}(\varphi(s), \mathbf{v}(s))\} \, ds\|_{X_m} \\ &\leq \|\mathcal{M}_{\varphi(t_1)}^{-1} \int_{t_2}^{t_1} P_m\{\mathcal{N}(\varphi(s), \mathbf{v}(s))\} \, ds\|_{X_m} \\ &\quad + \| \{ (\mathcal{M}_{\varphi(t_1)}^{-1})^{-1} - (\mathcal{M}_{\varphi(t_2)}^{-1})^{-1} \} \int_0^{t_2} P_m\{\mathcal{N}(\varphi(s), \mathbf{v}(s))\} \, ds \|_{X_m} \\ &\leq c(T, m, n, \bar{\rho}, K, \mathbf{f}) (\infess_V \varphi(t_1)^{-1} |t_1 - t_2| + c(m) \max_{i=1,2} (\infess_V \varphi(t_i))^{-2} \|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|_{0,2}). \end{aligned}$$

Sachant que $\varphi = S_{\rho_0}(\mathbf{v}) \in C^0([0, \tau]; L^2(V))$, on vient de prouver que la fonction

$$t \mapsto (\mathcal{M}_{\varphi(t)})^{-1} \int_0^t P_m \{ \mathcal{N}(\varphi(s), \mathbf{v}(s)) \} ds \in C^0([0, \tau]; X_m). \quad (3.30)$$

En outre, puisque d'après le théorème I.1, on sait que

$$\varphi(s, x) \geq \underline{\rho} e^{-\int_0^s \|\operatorname{div} \mathbf{v}(\xi)\|_{0,\infty} d\xi}, \quad \forall s \in [0, \tau], x \in \bar{V}, \quad (3.31)$$

à l'aide de (3.8) et (3.28), on vérifie sans peine que

$$\|(\mathcal{M}_{\varphi(t)})^{-1} \int_0^t P_m \{ \mathcal{N}(\varphi(s), \mathbf{v}(s)) \} ds\|_{X_m} \leq c_1(T, m, n, \underline{\rho}, \bar{\rho}, K, \mathbf{f})t, \quad t \in [0, \tau]. \quad (3.32)$$

Par des arguments similaires à ceux qui ont permis d'obtenir (3.30) et (3.32), il n'est pas très difficile de montrer que

$$\begin{aligned} t \mapsto (\mathcal{M}_{\varphi(t)})^{-1} \{ P_m \mathbf{q}_0 \} &\in C^0([0, \tau]; X_m), \\ \|(\mathcal{M}_{\varphi(t)})^{-1} \{ P_m \mathbf{q}_0 \}\|_{X_m} &\leq \underline{\rho}^{-1} e^{K\tau} \|P_m \mathbf{q}_0\|_{X_m}, \quad t \in [0, \tau]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

A ce moment de la preuve, si on considère

$$K > \max(\|\mathbf{u}_0\|_{X_m}, 2\underline{\rho}^{-1} \|P_m \mathbf{q}_0\|_{X_m}), \quad (3.34)$$

on remarque qu'il est toujours possible de trouver $T_0 = T_0(m, n, \underline{\rho}, \bar{\rho}, T, K, \mathbf{f}) \in (0, T]$ satisfaisant

$$\underline{\rho}^{-1} e^{KT_0} \|P_m \mathbf{q}_0\|_{X_m} \leq \frac{K}{2} \text{ et } c_1(T, m, n, \underline{\rho}, \bar{\rho}, K, \mathbf{f})T_0 \leq \frac{K}{2}.$$

La situation actuelle peut être résumée de la façon suivante : pour tout $\tau \in (0, T_0]$, la restriction à l'ensemble $B_K^\tau = \{ \mathbf{v} \in C^0([0, \tau]; X_m), \|\mathbf{v}\|_{C^0([0, \tau]; X_m)} \leq K \}$ de l'opérateur $\mathcal{A}_{\rho_0, \mathbf{q}_0} : C^0([0, \tau]; X_m) \rightarrow C^0([0, \tau]; X_m)$ défini par

$$\mathcal{A}_{\rho_0, \mathbf{q}_0}(\mathbf{v})(t) = (\mathcal{M}_{\varphi(t)})^{-1} \{ P_m \mathbf{q}_0 + \int_0^t P_m \{ \mathcal{N}(\varphi(s), \mathbf{v}(s)) \} ds \}, \quad \varphi = S_{\rho_0}(\mathbf{v})$$

est à valeurs dans ce même ensemble B_K^τ .

Pour conclure que l'ensemble $\mathcal{Q}_{\rho_0, \mathbf{q}_0}$ est non vide, on démontre l'existence d'un temps $T'_0 \in (0, T_0]$ tel que l'opérateur $\mathcal{A}_{\rho_0, \mathbf{q}_0} : C^0([0, \tau]; X_m) \rightarrow C^0([0, \tau]; X_m)$, $\tau \in (0, T'_0]$, est une contraction. Les propriétés (3.8), (3.9) de l'opérateur $\mathcal{M}_{\varphi(t)}$ avec φ satisfaisant (3.5) et $t \in [0, \tau]$, les estimations (3.28), (3.29), le choix de K et enfin le théorème I.1 sont des arguments possibles pour justifier le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned} &\| \{ \mathcal{A}_{\rho_0, \mathbf{q}_0}(\mathbf{v}_1) - \mathcal{A}_{\rho_0, \mathbf{q}_0}(\mathbf{v}_2) \} (t) \|_{X_m} \\ &\leq \| (\mathcal{M}_{\varphi_1(t)})^{-1} - (\mathcal{M}_{\varphi_2(t)})^{-1} \|_{\mathcal{L}(X_m, X_m)} \| P_m \mathbf{q}_0 + \int_0^t P_m \{ \mathcal{N}(\varphi_1(s), \mathbf{v}_1(s)) \} ds \|_{X_m} \\ &\quad + \| (\mathcal{M}_{\varphi_2(t)})^{-1} \|_{\mathcal{L}(X_m, X_m)} \int_0^t \| P_m \{ \mathcal{N}(\varphi_1(s), \mathbf{v}_1(s)) - \mathcal{N}(\varphi_2(s), \mathbf{v}_2(s)) \} \|_{X_m} ds \\ &\leq c(m) \max_{i=1,2} (\infess_V \varphi_i(t))^{-2} \| (\varphi_1 - \varphi_2)(t) \|_{0,2} \times \{ \underline{\rho} \frac{K}{2} + c(T, m, n, \bar{\rho}, K, \mathbf{f})t \} \\ &\quad + (\infess_V \varphi_2(t))^{-1} \times c(T, V, m, n, \varepsilon, \bar{\rho}, K, \mathbf{f})t (1 + \|\rho_0\|_{1,2}) \| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|_{C^0([0, t]; X_m)} \\ &\leq c_2(T, V, m, n, \varepsilon, \underline{\rho}, \bar{\rho}, K, \mathbf{f})t (1 + \|\rho_0\|_{1,2}) \| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|_{C^0([0, t]; X_m)}, \quad t \in [0, \tau]. \end{aligned}$$

On pose $T'_0 = \min(T_0, \tilde{T}_0)(1 + \|\rho_0\|_{1,2})^{-1}$, $\tilde{T}_0 < (c_2(T, V, m, n, \varepsilon, \rho, \bar{\rho}, K, \mathbf{f}))^{-1}$. Noter une fois de plus que $T'_0 = c_3(T, V, m, n, \varepsilon, \underline{\rho}, \bar{\rho}, K, \mathbf{f})(1 + \|\rho_0\|_{1,2})^{-1}$. Ainsi, l'opérateur $\mathcal{A}_{\rho_0, \mathbf{q}_0} : B_K^\tau \rightarrow B_K^\tau$, K satisfaisant (3.34) et $\tau \in (0, T'_0]$, est bien une contraction et le théorème de point fixe de Banach assure donc l'existence d'une unique fonction $\mathbf{u} \in B_K^\tau$, telle que $\mathcal{A}_{\rho_0, \mathbf{q}_0} \mathbf{u} = \mathbf{u}$. Autrement dit, $(0, T'_0] \subset \mathcal{Q}_{\rho_0, \mathbf{q}_0}$.

Démontrons maintenant que $\mathcal{Q}_{\rho_0, \mathbf{q}_0} = (0, T]$. Pour cela, on pose $T' = \sup \mathcal{Q}_{\rho_0, \mathbf{q}_0}$ et on considère un couple $(\rho, \mathbf{u}) \in \mathcal{R}_{T'} \times B_K^{T'}$ solution du problème (3.26). Alors, d'après (3.10) et (3.26), on a

$$\mathcal{M}_{\partial_t \rho(t)} \mathbf{u}(t) + \mathcal{M}_{\rho(t)} \partial_t \mathbf{u}(t) = \partial_t \mathcal{M}_{\rho(t)} \mathbf{u}(t) = P_m \{ \mathcal{N}(\rho(t), \mathbf{u}(t)) \} \text{ p.p.t. } t \in (0, T')$$

et donc

$$\partial_t \mathbf{u}(t) = (\mathcal{M}_{\rho(t)})^{-1} [P_m \{ \mathcal{N}(\rho(t), \mathbf{u}(t)) \} - \mathcal{M}_{\partial_t \rho(t)} \mathbf{u}(t)] \text{ p.p.t. } t \in (0, T').$$

A l'aide de (3.7), (3.8) et (3.28), il en résulte que

$$\|\partial_t \mathbf{u}(t)\|_{X_m} \leq (\inf_V \rho(t))^{-1} \{ c(T, m, n, \bar{\rho}, K, \mathbf{f}) + \|\partial_t \rho(t)\|_{0,2} \|\mathbf{u}(t)\|_{X_m} \}.$$

Puisque d'après le théorème I.1, $\partial_t \rho \in L^p((0, T') \times V)$, $p \in (1, \infty)$, on en déduit que $\partial_t \mathbf{u} \in L^p(0, T'; X_m)$, $p \in (1, \infty)$. Grâce à cette nouvelle information, à partir de (3.25), il est possible d'écrire que

$$\begin{aligned} & \int_V \partial_t(\rho \mathbf{u}) \cdot \Phi \, dx + \int_V \{ \mu_1 \nabla \mathbf{u} : \nabla \Phi + (\mu_1 + \mu_2)(\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \Phi) \} \, dx \\ & \quad - \int_V \rho u^i u^j \partial_j \Phi^i \, dx + \int_V \nabla p_\delta(\rho) \cdot \Phi \, dx \\ + \varepsilon \int_V \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \cdot \Phi \, dx &= \int_V \{ \rho \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty) \} \cdot \Phi \, dx, \quad \Phi \in X_m. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Les formules suivantes se justifient aisément au vu de la régularité des fonctions ρ et \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} & \int_V \partial_t(\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \, dx - \int_V \rho u^i u^j \partial_j u^i \, dx = \int_V \{ \partial_t \rho |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2} \rho \partial_t |\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2} \rho u^j \partial_j |\mathbf{u}|^2 \} \, dx \\ & \quad = \frac{1}{2} \int_V \{ \partial_t(\rho |\mathbf{u}|^2) + (\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})) |\mathbf{u}|^2 \} \, dx \\ & = \frac{1}{2} \int_V \{ \partial_t(\rho |\mathbf{u}|^2) + \varepsilon \Delta \rho |\mathbf{u}|^2 \} \, dx = \frac{1}{2} \int_V \{ \partial_t(\rho |\mathbf{u}|^2) - \varepsilon \nabla \rho \cdot (\nabla |\mathbf{u}|^2) \} \, dx \end{aligned} \quad (3.36)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_V \nabla \rho^s \cdot \mathbf{u} \, dx = \frac{s}{s-1} \int_V \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \rho^{s-1} \, dx = -\frac{s}{s-1} \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \rho^{s-1} \, dx \\ & \quad = \frac{s}{s-1} \int_V \partial_t \rho \rho^{s-1} \, dx - \frac{\varepsilon s}{s-1} \int_V \Delta \rho \rho^{s-1} \, dx, \quad s > 1. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dans le cas $s \in [2, \infty)$, noter que

$$-\frac{\varepsilon s}{s-1} \int_V \Delta \rho \rho^{s-1} dx = \varepsilon s \int_V \rho^{s-2} |\nabla \rho|^2 dx \quad (3.38)$$

tandis que si $s \in (1, 2)$, on a

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon s}{s-1} \int_V \Delta \rho \rho^{s-1} dx &= \lim_{l \rightarrow 0^+} -\frac{\varepsilon s}{s-1} \int_V \Delta \rho (\rho + l)^{s-1} dx \\ &= \lim_{l \rightarrow 0^+} \varepsilon s \int_V (\rho + l)^{s-2} |\nabla \rho|^2 dx \geq 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

En remplaçant Φ par \mathbf{u} dans (3.35) et en utilisant les formules (3.36)-(3.39), on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{E}_\delta(\rho, \mathbf{u}) + \int_V \{ \mu_1 |\nabla \mathbf{u}|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 \} dx + \varepsilon \delta \beta \int_V \rho^{\beta-2} |\nabla \rho|^2 dx \\ \leq \int_V \{ \rho \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty) \} \cdot \mathbf{u} dx \text{ p.p. dans } (0, T'). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Par le biais des inégalités de Hölder, de Sobolev et de Young, on peut *e.g.* majorer le terme de droite de (3.40) par

$$\xi \|\nabla \mathbf{u}\|_{0,2}^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}\|_{0,2}^2 + \frac{a}{\gamma-1} \|\rho\|_{0,\gamma}^\gamma + c(V, \xi, n) (1 + \|\mathbf{f}\|_{0, \frac{2\gamma}{\gamma-1}}^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}), \quad \xi > 0.$$

Alors, en insérant cette observation dans (3.40) avec ξ convenablement choisi, puis en intégrant sur l'intervalle de temps $(0, \tau)$, $\tau \in (0, T']$, on se ramène à

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\delta(\rho, \mathbf{u})(\tau) + c \int_0^\tau \|\mathbf{u}(t)\|_{1,2}^2 dt + \varepsilon \delta \beta \int_0^\tau \int_V \rho(t)^{\beta-2} |\nabla \rho(t)|^2 dx dt \\ \leq \{ \tilde{E}_{\delta,0} + c(V, n) \int_0^\tau (1 + \|\mathbf{f}(t)\|_{0, \frac{2\gamma}{\gamma-1}}^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}) dt \} + \int_0^\tau \tilde{E}_\delta(\rho, \mathbf{u})(t) dt \\ \equiv w(\tau) + \int_0^\tau \tilde{E}_\delta(\rho, \mathbf{u})(t) dt. \end{aligned}$$

En particulier, par l'intermédiaire du corollaire A.9 (Gronwall), on en déduit que pour tout $\tau \in [0, T']$,

$$\tilde{E}_\delta(\rho, \mathbf{u})(\tau) \leq w(\tau) + \int_0^\tau w(s) e^{\tau-s} ds \equiv F(\tau),$$

et par suite que

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\delta(\rho, \mathbf{u})(\tau) + c \int_0^\tau \|\mathbf{u}(t)\|_{1,2}^2 dt + \varepsilon \delta \beta \int_0^\tau \int_V \rho(t)^{\beta-2} |\nabla \rho(t)|^2 dx dt \\ \leq w(\tau) + \int_0^\tau (w(t) + \int_0^t w(s) e^{t-s} ds) dt \equiv G(\tau), \quad \forall \tau \in [0, T']. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ici, noter que la fonction G dépend de l'énergie initiale $\tilde{E}_{\delta,0}$ et des données n , V et \mathbf{f} mais pas de m . De (3.41), on tire les estimations suivantes :

$$\int_V (\rho|\mathbf{u}|^2)(\tau) dx \leq 2G(T), \quad \forall \tau \in [0, T'] \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}\|_{[L^2(0,T';H_0^1(V))]^3} \leq \sqrt{G(T)}. \quad (3.42)$$

Par ailleurs, puisque d'après le théorème I.1 on sait que

$$\underline{\rho} e^{-\int_0^\tau \|\operatorname{div} \mathbf{u}(t)\|_{0,\infty} dt} \leq \rho(\tau, x) \leq \bar{\rho} e^{\int_0^\tau \|\operatorname{div} \mathbf{u}(t)\|_{0,\infty} dt}, \quad \forall \tau \in [0, T'], \quad x \in \bar{V},$$

les équivalences de normes (3.3), l'inégalité de Schwarz et les estimations (3.42) montrent que

$$\underline{\rho} e^{-\bar{c}\sqrt{TG(T)}} \leq \rho(\tau, x) \leq \bar{\rho} e^{\bar{c}\sqrt{TG(T)}}, \quad \forall \tau \in [0, T'], \quad x \in \bar{V}. \quad (3.43)$$

Insérée dans (3.42), cette remarque implique alors que

$$\|\mathbf{u}\|_{C^0([0,T'];X_m)} \leq \sqrt{2\underline{\rho}^{-1}G(T)e^{\bar{c}\sqrt{TG(T)}}} \equiv c_4(m, n, \underline{\rho}, T, V, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}) \quad (3.44)$$

et par suite que

$$\|\rho\mathbf{u}\|_{[C^0([0,T'];L^2(V))]^3} \leq \bar{\rho} e^{\bar{c}\sqrt{TG(T)}} \|\mathbf{u}\|_{C^0([0,T'];X_m)} \leq c_5(m, n, \underline{\rho}, \bar{\rho}, T, V, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}). \quad (3.45)$$

A ce stade, tout est maintenant prêt pour démontrer que $T' = T$. En effet, supposons $T' < T$ et $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subset (0, T']$ une suite croissante telle que $T_k \rightarrow T'$ quand $k \rightarrow \infty$ et posons $\rho_{0,k} = \rho(T_k)$, $\mathbf{q}_{0,k} = (\rho\mathbf{u})(T_k)$. Alors, en remplaçant la condition (3.34) par

$$K > \max(c_4, 2\underline{\rho}^{-1}c_5)$$

il est possible de répéter, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la procédure qui a aboutit à la preuve de l'affirmation $\mathcal{Q}_{\rho_0, \mathbf{q}_0} \neq \emptyset$ pour d'obtenir l'existence d'un temps

$$T'_k = c_3(T, V, m, n, \varepsilon, \underline{\rho}, \bar{\rho}, K, \mathbf{f})(1 + \|\rho_{0,k}\|_{1,2})^{-1}$$

ainsi que celle d'un couple $(\rho = \rho_k, \mathbf{u} = \mathbf{u}_k) \subset \mathcal{R}_{T'_k} \times B_K^{T'_k}$ solution du problème (3.25) avec $(\rho_{0,k}, \mathbf{q}_{0,k})$ à la place de (ρ_0, \mathbf{q}_0) et $\rho_k = S_{\rho_{0,k}}(\mathbf{u}_k)$. Puisque d'après le théorème I.1 on sait que

$$\|\rho(t)\|_{1,2} \leq c(T, \varepsilon, K)\|\rho_0\|_{1,2}, \quad t \in [0, T'],$$

on a

$$T'_k \geq T''_0 = c(\varepsilon, T, K)^{-1}T'_0.$$

Ceci étant, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on peut définir un couple de fonction $(\varphi_k, \mathbf{v}_k)$ par

$$(\varphi_k, \mathbf{v}_k)(t) = \begin{cases} (\rho, \mathbf{u})(t) & \text{si } t \in [0, T_k), \\ (\rho_k, \mathbf{u}_k)(t - T_k) & \text{si } t \in [T_k, T_k + T'_k]. \end{cases}$$

Clairement $(\varphi_k = S_{\rho_0}(\mathbf{v}_k), \mathbf{v}_k) \in \mathcal{R}_{T_k+T'_k} \times C^0([0, T_k + T'_k]; X_m)$ est une solution du problème (3.25) avec ρ_0 et \mathbf{q}_0 pour conditions initiales. Puisque il existe un k_0 tel que pour tout $k > k_0$, on ait $T_k + T'_k > T'$, ceci contredit l'hypothèse $T' = \sup \mathcal{Q}_{\rho_0, \mathbf{q}_0}$. Donc $T' = T$.

A ce stade, si l'on résume la situation, en notant $(\rho = \rho_m, \mathbf{u} = \mathbf{u}_m)$ nous avons démontré les points (i)-(iii) de la proposition II.5 ainsi que l'inégalité d'énergie dans la forme différentielle (3.14). L'inégalité d'énergie dans la forme intégrale (3.16) en est alors une conséquence directe dès lors que l'on remarque que $\tilde{E}_\delta(\rho_m, \mathbf{u}_m) \in C^0([0, T])$ et que $\tilde{E}_\delta(\rho_m, \mathbf{u}_m)(0) = \tilde{E}_{\delta,0}$. En effet, il suffit alors d'appliquer le lemme I.10 avec

$$E = \tilde{E}_\delta(\rho_m, \mathbf{u}_m), \quad V = \int_V \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}_m|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div} \mathbf{u}_m|^2\} dx + \varepsilon \delta \beta \int_V \rho_m^{\beta-2} |\nabla \rho_m|^2 dx,$$

$$F = \int_V \{\rho_m \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u}_m - \mathbf{U}_\infty)\} \cdot \mathbf{u}_m dx.$$

Remarque II.10 D'après la formule de Stokes, on a

$$\int_V \partial_t \rho_m dx = \int_V \operatorname{div}(\varepsilon \nabla \rho_m - \rho_m \mathbf{u}_m) dx = \int_{\partial V} (\varepsilon \nabla \rho_m + \rho_m \mathbf{u}_m) \cdot \boldsymbol{\nu} dx = 0.$$

En conséquence, il est clair que $\frac{d}{dt} \tilde{E}_\delta(\rho_m, \mathbf{u}_m) = \frac{d}{dt} \int_V \{\frac{1}{2} \rho_m |\mathbf{u}_m|^2 + \Pi_\delta(\rho_m)\} dx$ p.p. dans $(0, T)$ et donc (3.14) implique que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V \{\frac{1}{2} \rho_m |\mathbf{u}_m|^2 + \Pi_\delta(\rho_m)\} dx + \int_V \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}_m|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div} \mathbf{u}_m|^2\} dx \\ & + \varepsilon \delta \beta \int_V \rho_m^{\beta-2} |\nabla \rho_m|^2 dx \leq \int_V \{\rho_m \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u}_m - \mathbf{U}_\infty)\} \cdot \mathbf{u}_m dx. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Enfin, puisque clairement $\int_V \{\frac{1}{2} \rho_m |\mathbf{u}_m|^2 + \Pi_\delta(\rho_m)\} dx \in C^0([0, T])$, l'intégration de (3.46) sur l'intervalle de temps $(0, \tau)$, $\tau \in [0, T]$, donne l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & \int_V \{\frac{1}{2} \rho_m |\mathbf{u}_m|^2 + \Pi_\delta(\rho_m)\}(\tau) dx + \int_0^\tau \int_V \{\mu_1 |\nabla \mathbf{u}_m|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div} \mathbf{u}_m|^2\} dx dt \\ & + \varepsilon \delta \beta \int_0^\tau \int_V \rho_m^{\beta-2} |\nabla \rho_m|^2 dx dt \leq \int_V \{\frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} + \Pi_\delta(\rho_0)\} dx \\ & + \int_0^\tau \int_V \{\rho_m \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u}_m - \mathbf{U}_\infty)\} \cdot \mathbf{u}_m dx dt \text{ p.p. dans } (0, T). \end{aligned} \quad (3.47)$$

On rappelle que des inégalités du type (3.46), (3.47) seront importantes dans l'étude de problèmes similaires au problème d'origine, considérés dans des domaines extérieurs.

Reste donc à démontrer les estimations uniformes en m du point (v). Clairement, les estimations (3.18)-(3.22) découlent directement de l'identité (3.41) dans laquelle on pose $(\rho = \rho_m, \mathbf{u} = \mathbf{u}_m)$ et $T' = T$. De plus, comme $H^1(V) \subset L^6(V)$, en accord avec (3.22) on a

$$\|\rho_m^\beta\|_{L^1(0,T;L^3(V))} = \|\rho_m^{\frac{\beta}{2}}\|_{L^2(0,T;L^6(V))}^2 \leq c(T, n, \varepsilon, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}). \quad (3.48)$$

Par ailleurs, l'interpolation de $L^2(V)$ entre $L^1(V)$ et $L^3(V)$ garantit que p.p.t. $t \in (0, T)$, on a $\|\rho_m(t)^\beta\|_{0,2} \leq \|\rho_m(t)^\beta\|_{0,1}^{\frac{1}{4}} \|\rho_m(t)^\beta\|_{0,3}^{\frac{3}{4}}$. Cette remarque, ajoutée aux estimations (3.19) et (3.48) implique alors que $\|\rho_m^\beta\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;L^2(V))} \leq c(T, n, \varepsilon, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f})$ et par suite que (3.23) est satisfaite. Pour terminer, on teste l'équation (3.12) par ρ_m puis on intègre par rapport à la variable d'espace. On obtient

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} |\rho_m(t)|^2 dx + \varepsilon \int_V |\nabla \rho_m(t)|^2 dx = -\frac{1}{2} \int_V (\rho_m^2 \operatorname{div} \mathbf{u}_m)(t) dx, \quad t \in [0, T].$$

L'intégration de cette identité sur l'intervalle de temps $(0, T)$ et l'inégalité de Hölder induisent l'estimation suivante :

$$\frac{1}{2} \|\rho_m(T)\|_{0,2}^2 + \varepsilon \int_0^T \|\nabla \rho_m\|_{0,2}^2 dt \leq \frac{1}{2} \|\rho_0\|_{0,2}^2 + \frac{1}{2} \sqrt{T} \|\rho_m\|_{L^\infty(0,T;L^4(V))} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_m\|_{L^2((0,T) \times V)}.$$

En ressort en particulier (3.24) puisque ρ_m satisfait (3.19) et $\beta \geq 4$. Ceci achève la démonstration de la proposition II.5. \square

3.2 Existence de solutions

A partir de maintenant, nous travaillons sur la suite $\{(\rho_m, \mathbf{u}_m)\}_m$ résultant de la proposition II.5. Tout au long de l'étude de cette suite, n désigne un entier positif fixé.

Dans un premier temps, au vu des estimations (3.19), (3.21), (3.22) et (3.23), on peut supposer qu'il existe un couple de fonctions (ρ_n, \mathbf{u}_n) tel que modulo l'extraction de sous-suites et lorsque $m \rightarrow \infty$,

$$\rho_m \xrightarrow{*} \rho_n \text{ dans } L^\infty(0, T; L^\beta(V)), \quad (3.49)$$

$$\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u}_n \text{ dans } [L^2(0, T; H_0^1(V))]^3, \quad (3.50)$$

$$\rho_m \rightharpoonup \rho_n \text{ dans } L^{\frac{4}{3}\beta}((0, T) \times V), \quad (3.51)$$

$$\nabla \rho_m \rightharpoonup \nabla \rho_n \text{ dans } [L^2((0, T) \times V)]^3. \quad (3.52)$$

De plus, puisque

$$\left| \int_V \rho_m \mathbf{u}_m \cdot \phi dx \right| \leq \|\sqrt{\rho_m}\|_{0,2\beta} \|\sqrt{\rho_m} |\mathbf{u}_m|\|_{0,2} \|\phi\|_{0, \frac{2\beta}{\beta-1}}, \quad \phi \in [\mathcal{D}(V)]^3,$$

les estimations (3.19) et (3.20) impliquent que la suite $\{\rho_m \mathbf{u}_m\}_m$ est uniformément bornée par rapport à m dans $[L^\infty(0, T; L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(V))]^3$. Puisque (ρ_m, \mathbf{u}_m) est solution de l'équation (3.12), on peut évidemment écrire que

$$\partial_t \int_V \rho_m \phi dx - \int_V \rho_m \mathbf{u}_m \cdot \nabla \phi + \varepsilon \int_V \nabla \rho_m \cdot \nabla \phi dx = 0 \text{ p.p. dans } (0, T), \quad \phi \in \mathcal{D}(V)$$

et en déduire que $\partial_t \int_V \rho_m \phi dx \in L^2(0, T)$. L'identité précédente peut notamment être intégrée sur l'intervalle de temps $(t_1, t_2) \subset (0, T)$. Puisque $\int_V \rho_m \phi dx \in C^0([0, T])$, on

trouve que

$$\begin{aligned} \int_V \{\rho_m(t_2) - \rho_m(t_1)\} \phi \, dx &= \int_{t_1}^{t_2} \int_V \{\rho_m \mathbf{u}_m \cdot \nabla \phi + \varepsilon \nabla \rho_m \cdot \nabla \phi\} \, dx \, dt \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|\rho_m \mathbf{u}_m\|_{0, \frac{2\beta}{\beta+1}} \|\nabla \phi\|_{0, \frac{2\beta}{\beta-1}} + \varepsilon \|\nabla \rho_m\|_{0,2} \|\nabla \phi\|_{0,2} \, dt \\ &\leq c(V) \left\{ \sup_{t \in (0,T)} \text{ess} \|(\rho_m \mathbf{u}_m)(t)\|_{0, \frac{2\beta}{\beta+1}} (t_2 - t_1) + \varepsilon \|\nabla \rho_m\|_{0,2,(0,T) \times V} (t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}} \right\} \|\nabla \phi\|_{0, \frac{2\beta}{\beta-1}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $\{\rho_m\}_m$ est uniformément continue dans $W^{-1, \frac{2\beta}{\beta+1}}(V)$. En accord avec (3.19) et les lemmes I.1 et I.2, il en résulte que

$$\rho_m \rightarrow \rho_n \text{ dans } C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^\beta(V)) \text{ quand } m \rightarrow \infty. \quad (3.53)$$

Ceci implique en particulier que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_V \rho_n(t) \phi \, dx = \int_V \rho_0 \phi \, dx$, $\phi \in \mathcal{D}(V)$ et donc que $\rho_n(0) = \rho_0$ p.p. dans V . D'autre part, toujours puisque (ρ_m, \mathbf{u}_m) est solution de l'équation (3.12) et satisfait les estimations (3.19), (3.20) et (3.24), on vérifie très facilement que la suite $\{\partial_t \rho_m\}_m$ est uniformément bornée par rapport à m dans $L^2(0, T; W^{-1, \frac{2\beta}{\beta+1}}(V))$. D'après (3.19) et (3.24), on sait déjà que la suite $\{\rho_m\}_m$ est uniformément bornée par rapport à m dans $L^2(0, T; H^1(V))$. On pose alors $X = H^1(V)$, $B = L^2(V)$ et $Y = W^{-1, \frac{2\beta}{\beta+1}}(V)$ dans le lemme A.15 (Lions-Aubin). Cela nous permet d'affirmer que modulo l'extraction d'une sous-suite, on a

$$\rho_m \rightarrow \rho_n \text{ dans } L^p(0, T; L^q(V)) \text{ quand } m \rightarrow \infty, \, p \in [1, \infty), \, q \in [1, 2]. \quad (3.54)$$

En interpolant l'espace $L^p((0, T) \times V)$ entre les espaces $L^1((0, T) \times V)$ et $L^{\frac{4}{3}\beta}((0, T) \times V)$, à l'aide de l'estimation (3.23), on en déduit que

$$\rho_m \rightarrow \rho_n \text{ dans } L^p((0, T) \times V) \text{ quand } m \rightarrow \infty, \, p \in [1, \frac{4}{3}\beta]. \quad (3.55)$$

Grâce à cette nouvelle information, il est notamment clair que

$$\rho_m^s \rightarrow \rho_n^s \text{ dans } L^1((0, T) \times V) \text{ quand } m \rightarrow \infty, \, s = \gamma, \beta. \quad (3.56)$$

Examinons maintenant les suites $\{\rho_m \mathbf{u}_m\}_m$ et $\{\rho_m \mathbf{u}_m \otimes \mathbf{u}_m\}_m$. Puisque

$$\left| \int_V \rho_m \mathbf{u}_m \cdot \phi \, dx \right| \leq \|\rho_m\|_{0,\beta} \|\mathbf{u}_m\|_{0,6} \|\phi\|_{0, \frac{6\beta}{5\beta-6}}, \quad \phi \in [\mathcal{D}(V)]^3,$$

d'après les estimations (3.19), (3.21) et l'inégalité de Sobolev, s'ajoute au fait que la suite $\{\rho_m \mathbf{u}_m\}_m$ soit uniformément bornée dans $[L^\infty(0, T; L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(V))]^3$ celui de l'être également dans $[L^2(0, T; L^{\frac{6\beta}{\beta+6}}(V))]^3$. Par conséquent, au vu de (3.50) et (3.55), après d'éventuelles extractions de sous-suites et lorsque $m \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \rho_m \mathbf{u}_m &\overset{*}{\rightharpoonup} \rho_n \mathbf{u}_n \text{ dans } [L^\infty(0, T; L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(V))]^3, \\ \rho_m \mathbf{u}_m &\rightharpoonup \rho_n \mathbf{u}_n \text{ dans } [L^2(0, T; L^{\frac{6\beta}{\beta+6}}(V))]^3. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Puisque $\beta > \frac{3}{2}$, l'interpolation de l'espace $[L^r(V)]^3$, $\frac{2\beta}{\beta+1} < r < \frac{6\beta}{\beta+6}$, entre les espaces $[L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(V)]^3$ et $[L^{\frac{6\beta}{\beta+6}}(V)]^3$ s'écrit

$$\|\rho_m \mathbf{u}_m\|_{0,r} \leq \|\rho_m \mathbf{u}_m\|_{0,\frac{2\beta}{\beta+1}}^\theta \|\rho_m \mathbf{u}_m\|_{0,\frac{6\beta}{\beta+6}}^{1-\theta}, \quad \frac{6\beta}{r} = 3\theta(\beta+1) + (1-\theta)(\beta+6). \quad (3.58)$$

Choisissant alors r de telle sorte que $(1-\theta)r = 2$, *i.e.* $r = \frac{10\beta-6}{3\beta+3}$, il en résulte que la suite $\{\rho_m \mathbf{u}_m\}_m$ est uniformément bornée par rapport à m dans $[L^r((0,T) \times V)]^3$. En conséquence, le lemme I.9 garantit que la suite $\{\rho_m\}_m$ satisfait

$$\varepsilon \|\rho_m\|_{L^r(0,T;W^{1,r}(V))} \leq c(T, V, n, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}). \quad (3.59)$$

Ceci étant, puisque (ρ_m, \mathbf{u}_m) est solution de l'équation de continuité avec dissipation (3.12) et que $\frac{54}{21} < r < \frac{10}{3}$, on vérifie sans peine que la suite $\{\partial_t \rho_m\}_m$ est uniformément bornée par rapport à m dans $L^2(0,T;W^{-1,r}(V))$. Il suffit alors de poser $X = W^{1,r}(V)$, $B = L^r(V)$, $Y = W^{-1,r}(V)$, $p = r$, $q = 2$ et $\theta = \frac{1}{2}$ dans le lemme A.16 (cf. p.221) pour justifier la relative compacité de la suite $\{\rho_m\}_m$ dans $C^0([0,T];L^r(V))$. Autrement dit, nous venons de voir que modulo l'extraction d'une sous-suite, on a

$$\rho_m \rightarrow \rho_n \text{ dans } C^0([0,T];L^r(V)) \text{ quand } m \rightarrow \infty. \quad (3.60)$$

Par suite, il est clair que la suite $\{\operatorname{div}(\rho_m \mathbf{u}_m) = \rho_m \operatorname{div} \mathbf{u}_m + \nabla \rho_m \cdot \mathbf{u}_m\}_m$ est uniformément bornée par rapport à m dans $L^s(0,T;L^{\frac{2\beta}{\beta+2}}(V))$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2}$ *i.e.* $s = \frac{5\beta-3}{4\beta}$ et à nouveau le lemme I.9 garantit que

$$\varepsilon \|\rho_m\|_{L^s(0,T;W^{2,\frac{2\beta}{\beta+2}}(V))} + \|\partial_t \rho_m\|_{L^s(0,T;L^{\frac{2\beta}{\beta+2}}(V))} \leq c(T, V, n, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}).$$

Modulo l'extraction de sous-suites et lorsque $m \rightarrow \infty$, on en déduit les convergences ci-dessous :

$$\rho_m \rightharpoonup \rho_n \text{ dans } L^s(0,T;W^{2,\frac{2\beta}{\beta+2}}(V)), \quad \partial_t \rho_m \rightharpoonup \partial_t \rho_n \text{ dans } L^s(0,T;L^{\frac{2\beta}{\beta+2}}(V)). \quad (3.61)$$

En conséquence, la continuité de l'opérateur de trace implique que

$$\text{p.p.t. } t \in (0, T), \quad \partial_\nu \rho_n(t) = \gamma_0(\nabla \rho_n(t)) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0. \quad (3.62)$$

Après ce bref aparté concernant de nouvelles informations sur la suite $\{\rho_m\}_m$, revenons à l'examen des suites $\{\rho_m \mathbf{u}_m\}_m$ et $\{\rho_m \mathbf{u}_m \otimes \mathbf{u}_m\}_m$. Tout d'abord, puisque

$$\left| \int_V \rho_m u_m^i u_m^j \phi \, dx \right| \leq \|\rho_m \mathbf{u}_m\|_{0,\frac{2\beta}{\beta+1}} \|\mathbf{u}_m\|_{0,6} \|\phi\|_{0,\frac{6\beta}{2\beta-3}}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \phi \in \mathcal{D}(V), \quad (3.63)$$

et puisque $\beta > \frac{3}{2}$, des observations antérieures on déduit que la suite $\{\rho_m u_m^i u_m^j\}_m$, $i, j = 1, 2, 3$, est uniformément bornée par rapport à m dans $L^2(0,T;L^{\frac{6\beta}{4\beta+3}}(V))$. Par ailleurs, le couple (ρ_m, \mathbf{u}_m) est solution de l'équation (3.13) avec $\boldsymbol{\Phi} = P_m \boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\phi} \in [\mathcal{D}(V)]^3$, *i.e.*

$$\begin{aligned} \int_V \partial_t(\rho_m \mathbf{u}_m) \cdot P_m \boldsymbol{\phi} \, dx &= - \int_V \{\mu_1 \nabla \mathbf{u}_m : \nabla P_m \boldsymbol{\phi} + (\mu_1 + \mu_2)(\operatorname{div} \mathbf{u}_m)(\operatorname{div} P_m \boldsymbol{\phi})\} \, dx \\ &+ \int_V \{\rho_m u_m^i u_m^j \partial_j P_m \phi^i - p_\delta(\rho_m) \operatorname{div} P_m \boldsymbol{\phi} - \varepsilon \nabla \rho_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m \cdot P_m \boldsymbol{\phi}\} \, dx \\ &+ \int_V \{\rho_m \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u}_m - \mathbf{U}_\infty)\} \cdot P_m \boldsymbol{\phi} \, dx \text{ p.p. dans } (0, T). \end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité et des injections de Sobolev, on peut facilement vérifier que p.p.t. $t \in (0, T)$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \int_V \partial_t(\rho_m \mathbf{u}_m)(t) \cdot P_m \boldsymbol{\phi} \, dx \right| = \left| \int_V \partial_t P_m(\rho_m \mathbf{u}_m)(t) \cdot \boldsymbol{\phi} \, dx \right| \\ & \leq c \|\nabla \mathbf{u}_m(t)\|_{0,2} \|\nabla P_m \boldsymbol{\phi}\|_{0,2} + \|(\rho_m \mathbf{u}_m \otimes \mathbf{u}_m)(t)\|_{0, \frac{6\beta}{4\beta+3}} \|\nabla P_m \boldsymbol{\phi}\|_{0, \frac{6\beta}{2\beta-3}} \\ & \quad + \|\rho_\delta(\rho_m(t))\|_{0, \frac{4}{3}} \|\operatorname{div} P_m \boldsymbol{\phi}\|_{0,4} + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_m(t)\|_{0,2} \|\nabla \rho_m(t)\|_{0,r} \|P_m \boldsymbol{\phi}\|_{0,s'} \\ & \quad + \|\rho_m(t)\|_{0,\beta} \|\mathbf{f}\|_{0,\infty} \|P_m \boldsymbol{\phi}\|_{0,\beta'} + n(\|\mathbf{u}_m(t)\|_{0,6} + \|\mathbf{U}_\infty\|_{0,6}) \|P_m \boldsymbol{\phi}\|_{0, \frac{6}{5}} \\ & \leq c(V, \beta) G_m(t) \|P_m \boldsymbol{\phi}\|_{2,2}, \end{aligned}$$

$\{G_m\}_m$ désignant une suite uniformément bornée par rapport à m dans $L^s(0, T)$. Ajoutée aux propriétés (3.1) de l'opérateur de projection P_m , cette information implique que

$$\|\partial_t P_m(\rho_m \mathbf{u}_m)\|_{[L^s(0,T;H^{-2}(V))]^3} \leq c(T, V, n, \varepsilon, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}).$$

D'autre part, en accord avec (3.58), on sait déjà que p.p.t. $t \in (0, T)$,

$$\|P_m(\rho_m \mathbf{u}_m)\|_{[L^r(0,T;L^2(V))]^3} \leq c(T, V, n, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}).$$

Il suffit alors de poser $X = [L^2(V)]^3$, $B = [H^{-1}(V)]^3$ et $Y = [H^{-2}(V)]^3$ dans le lemme A.15 (Lions-Aubin) pour justifier que modulo l'extraction d'une sous-suite, $P_m(\rho_m \mathbf{u}_m)$ converge fortement dans $L^{\tilde{r}}(0, T; [H^{-1}(V)]^3)$, $\tilde{r} \in [1, r)$. Puisque d'après les propriétés de l'opérateur P_m et (3.57), pour toute fonction $\boldsymbol{\varphi} \in [\mathcal{D}((0, T) \times V)]^3$, lorsque $m \rightarrow \infty$,

$$\int_0^T \int_V P_m(\rho_m \mathbf{u}_m) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dt = \int_0^T \int_V \rho_m \mathbf{u}_m \cdot P_m \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dt \rightarrow \int_0^T \int_V \rho_n \mathbf{u}_n \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dt,$$

finalemt on a démontré que

$$P_m(\rho_m \mathbf{u}_m) \rightarrow \rho_n \mathbf{u}_n \text{ dans } L^{\tilde{r}}(0, T; [H^{-1}(V)]^3) \text{ quand } m \rightarrow \infty.$$

Pour conclure que

$$\rho_m \mathbf{u}_m \rightarrow \rho_n \mathbf{u}_n \text{ dans } [L^2(0, T; H^{-1}(V))]^3 \text{ quand } m \rightarrow \infty, \quad (3.64)$$

il suffit simplement de noter que d'après (3.2), p.p.t. $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} \|(P_m - I)(\rho_m \mathbf{u}_m)(t)\|_{-1,2} & \leq \frac{c(T, V, n, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f})}{\|(\rho_m \mathbf{u}_m)(t)\|_{0,2}} \|(P_m - I)(\rho_m \mathbf{u}_m)(t)\|_{-1,2} \\ & \leq \sup_{\substack{\boldsymbol{\phi} \in [L^2(V)]^3 \\ \boldsymbol{\phi} \neq 0}} \frac{\|(P_m - I)\boldsymbol{\phi}\|_{-1,2}}{\|\boldsymbol{\phi}\|_{0,2}} \rightarrow 0 \text{ quand } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ceci étant, des convergences (3.50) et (3.64) il résulte celle de la suite $\{\rho_m u_m^i u_m^j\}_m$, $i, j = 1, 2, 3$, au sens des distributions dans $(0, T) \times V$ vers $\rho_n u_n^i u_n^j$ et donc, au vu de (3.63), on conclut finalement que

$$\rho_m u_m^i u_m^j \rightharpoonup \rho_n u_n^i u_n^j \text{ dans } L^2(0, T; L^{\frac{6\beta}{4\beta+3}}(V)) \text{ quand } m \rightarrow \infty, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.65)$$

Avant de poursuivre, signalons une autre propriété intéressante de la suite $\{\rho_m \mathbf{u}_m\}_m$. D'après ce que nous avons vu auparavant, il est clair que la suite $\{\rho_m \mathbf{u}_m\}_m$ est uniformément bornée par rapport à m dans $[L^s(0, T; W_0^{1,s}(V))]^3$. En conséquence,

$$\rho_m \mathbf{u}_m \rightharpoonup \rho_n \mathbf{u}_n \text{ dans } [L^s(0, T; W_0^{1,s}(V))]^3 \text{ quand } m \rightarrow \infty. \quad (3.66)$$

Poursuivons notre examen par l'étude de la suite $\{\nabla \rho_m\}_m$. Comme nous l'avons déjà vu dans la preuve de la proposition II.5, l'équation (3.12) testée par ρ_m , intégrée ensuite par rapport à la variable d'espace, puis sur l'intervalle de temps $(0, \tau)$, $\tau \in [0, T]$, induit l'identité

$$\frac{1}{2} \|\rho_m(\tau)\|_{0,2}^2 + \varepsilon \int_0^\tau \|\nabla \rho_m\|_{0,2}^2 dt = \frac{1}{2} \|\rho_0\|_{0,2}^2 - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_V \rho_m^2 \operatorname{div} \mathbf{u}_m dx dt$$

d'où la suivante :

$$\frac{1}{2} \|\rho_m\|_{0,2,(0,T) \times V} + \varepsilon \int_0^T \int_0^\tau \|\nabla \rho_m\|_{0,2}^2 dt d\tau = \frac{T}{2} \|\rho_0\|_{0,2}^2 - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^\tau \int_V \rho_m^2 \operatorname{div} \mathbf{u}_m dx dt d\tau.$$

A l'aide des convergences (3.50) et (3.55), on passe à la limite $m \rightarrow \infty$. On obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\rho_m\|_{0,2,(0,T) \times V} + \varepsilon \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^\tau \|\nabla \rho_m\|_{0,2}^2 dt d\tau \\ &= \frac{T}{2} \|\rho_0\|_{0,2}^2 - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^\tau \int_V \rho_n^2 \operatorname{div} \mathbf{u}_n dx dt d\tau. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Par ailleurs, en accord avec les propriétés de régularité du couple limite (ρ_n, \mathbf{u}_n) , le passage à la limite $m \rightarrow \infty$ dans l'équation (3.12) implique que

$$\partial_t \rho_n + \operatorname{div}(\rho_n \mathbf{u}_n) - \varepsilon \Delta \rho_n = 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times V. \quad (3.68)$$

En utilisant (3.62), la formule de Stokes généralisée du théorème A.40 et (3.66), puisque $\beta > 3$, il est alors possible de montrer que toute fonction $\varphi \in L^2(0, T; H^1(V))$ telle que $\partial_t \varphi \in L^1(0, T; L^{\beta'}(V))$ est une fonction test admissible de l'équation (3.68). Or, d'après (3.59), $\rho_n \in L^r(0, T; W^{1,r}(V))$ et $r > 2$, tandis que (3.61) garantit que $\partial_t \rho_n \in L^s(0, T; L^{\frac{2\beta}{\beta+2}}(V))$, $s > 1$ et $\frac{2\beta}{\beta+2} > \beta'$ à condition que $\beta > 4$. Ayant en tête (3.60), l'équation (3.68) testée par ρ_n , intégrée ensuite par rapport à la variable d'espace, puis sur l'intervalle de temps $(0, \tau)$, $\tau \in [0, T]$, nous conduit à l'identité

$$\frac{1}{2} \|\rho_n(\tau)\|_{0,2}^2 + \varepsilon \int_0^\tau \|\nabla \rho_n\|_{0,2}^2 dt = \frac{1}{2} \|\rho_0\|_{0,2}^2 - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_V \rho_n^2 \operatorname{div} \mathbf{u}_n dx dt \quad (3.69)$$

d'où on tire la suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\rho_n\|_{0,2,(0,T) \times V} + \varepsilon \int_0^T \int_0^\tau \|\nabla \rho_n\|_{0,2}^2 dt d\tau \\ &= \frac{T}{2} \|\rho_0\|_{0,2}^2 - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^\tau \int_V \rho_n^2 \operatorname{div} \mathbf{u}_n dx dt d\tau. \end{aligned} \quad (3.70)$$

La comparaison de (3.67) et (3.70) entraîne que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^\tau \|\nabla \rho_m\|_{0,2}^2 dt d\tau = \int_0^T \int_0^\tau \|\nabla \rho_n\|_{0,2}^2 dt d\tau. \quad (3.71)$$

En introduisant les fonctions $F_k(\tau) = \int_0^\tau \|\nabla \rho_k\|_{0,2}^2 dt$, $k = m, n$ et $G(\tau) = 1$, par des intégrations par parties, (3.71) se réécrit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (T - \tau) \|\nabla \rho_m(\tau)\|_{0,2}^2 d\tau = \int_0^T (T - \tau) \|\nabla \rho_n(\tau)\|_{0,2}^2 d\tau,$$

c'est à dire

$$\|\sqrt{T - \cdot} \nabla \rho_m\|_{0,2,(0,T) \times V} \rightarrow \|\sqrt{T - \cdot} \nabla \rho_n\|_{0,2,(0,T) \times V} \text{ quand } m \rightarrow \infty. \quad (3.72)$$

Complété par (3.52), ceci implique clairement que pour tout $\alpha \in (0, T)$, on a

$$\nabla \rho_m \rightarrow \nabla \rho_n \text{ dans } [L^2((0, T - \alpha) \times V)]^3. \quad (3.73)$$

Noter alors que pour toute fonction $\varphi \in [\mathcal{D}((0, T) \times V)]^3$, il existe toujours un réel $\alpha > 0$ tel que $\text{supp } \varphi \subset (0, T - \alpha) \times V$. Par conséquent, les convergences (3.50) et (3.73) assurent la suivante lorsque $m \rightarrow \infty$: $\nabla \rho_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m \rightarrow \nabla \rho_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n$ dans $[\mathcal{D}((0, T) \times V)]^3$ d'où, en accord avec (3.50) et (3.59),

$$\nabla \rho_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m \rightharpoonup \nabla \rho_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n \text{ dans } [L^s((0, T) \times V)]^3. \quad (3.74)$$

A ce stade, nous avons en notre possession toutes les informations pour passer à la limite $m \rightarrow \infty$ dans (3.13). Bien évidemment, ceci montre que le couple (ρ_n, \mathbf{u}_n) est solution de l'équation de mouvement (2.2). Nous laissons au lecteur le soin de le vérifier. Ceci étant, on peut alors utiliser les propriétés de sommabilité du couple (ρ_n, \mathbf{u}_n) et à partir de (2.2), montrer que $\partial_t(\int_V \rho_n \mathbf{u}_n \cdot \boldsymbol{\phi} dx) \in L^1(0, T)$, $\boldsymbol{\phi} \in [\mathcal{D}(V)]^3$. Par suite, en accord avec le lemme I.3, il existe une fonction $\mathbf{q}_n \in [C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(V))]^3$ telle que p.p.t. $t \in (0, T)$, $\mathbf{q}_n(t) = (\rho_n \mathbf{u}_n)(t)$ p.p. dans V . En redéfinissant \mathbf{u}_n sur un ensemble de temps de mesure nulle à l'aide du lemme I.11, on peut alors affirmer que $\rho_n \mathbf{u}_n \in [C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(V))]^3$. Ceci implique en particulier que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_V (\rho_n \mathbf{u}_n)(t) \cdot \boldsymbol{\phi} dx = \int_V \mathbf{q}_0 \cdot \boldsymbol{\phi} dx$, $\boldsymbol{\phi} \in [\mathcal{D}(V)]^3$, donc que $(\rho_n \mathbf{u}_n)(0) = \mathbf{q}_0$ p.p. dans V .

En ce qui concerne les inégalités d'énergie, noter tout d'abord qu'en accord avec (3.55), (3.57) et (3.65), $\tilde{E}_\delta(\rho_m, \mathbf{u}_m) \rightarrow \tilde{E}_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n)$ dans $\mathcal{D}'(0, T)$. Pour le passage à la limite $m \rightarrow \infty$ dans les autres termes du membre de gauche de l'inégalité (3.14), il suffit simplement d'utiliser la semi-continuité inférieure faible des fonctionnelles convexes

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in [L^2(0, T; H_0^1(V))]^3 &\mapsto \int_0^T \psi \int_V \{\mu_1 |\nabla \mathbf{v}|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\text{div } \mathbf{v}|^2\} dx dt, \\ \eta \in L^2(0, T; H^1(V)) &\mapsto \frac{2}{\beta} \int_0^T \psi \int_V |\nabla \eta^{\frac{\beta}{2}}|^2 dx dt, \quad \psi \in \mathcal{D}(0, T). \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \tilde{E}_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n) + \int_V \{ \mu_1 |\nabla \mathbf{u}_n|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div} \mathbf{u}_n|^2 \} dx + \varepsilon \delta \beta \int_V \rho_n^{\beta-2} |\nabla \rho_n|^2 dx \\
 & \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_V \{ \rho_m \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u}_m - \mathbf{U}_\infty) \} \cdot \mathbf{u}_m dx \\
 & = \int_V \rho_n \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_n dx - n \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{V \setminus \bar{\Omega}} |\mathbf{u}_m|^2 dx + n \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{V \setminus \bar{\Omega}} \mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{u}_m dx \\
 & \leq \int_V \{ \rho_n \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) \} \cdot \mathbf{u}_n dx \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T). \tag{3.75}
 \end{aligned}$$

En utilisant le même type d'arguments dans l'inégalité d'énergie sous forme intégrale (3.16), on arrive à la conclusion que celle-ci est valide au sens des distributions dans $(0, T)$ avec (ρ_m, \mathbf{u}_m) remplacé par (ρ_n, \mathbf{u}_n) . Néanmoins, puisque $\tilde{E}_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n) \in L^\infty(0, T)$, on trouve finalement que

$$\begin{aligned}
 & \tilde{E}_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n)(\tau) + \int_0^\tau \int_V \{ \mu_1 |\nabla \mathbf{u}_n|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div} \mathbf{u}_n|^2 \} dx dt \\
 & \quad + \varepsilon \delta \beta \int_0^\tau \int_V \rho_n^{\beta-2} |\nabla \rho_n|^2 dx dt \\
 & \leq \tilde{E}_{\delta,0} + \int_0^\tau \int_V \{ \rho_n \mathbf{f} - n 1_{V \setminus \bar{\Omega}}(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) \} \cdot \mathbf{u}_n dx dt \text{ p.p.t. } \tau \in (0, T). \tag{3.76}
 \end{aligned}$$

A ce stade de la preuve, on sait que le couple (ρ_n, \mathbf{u}_n) possède les propriétés (i)-(iii) de la proposition II.1. Montrons maintenant qu'il satisfait également les inégalités d'énergie (2.7) et (2.8). Puisque \mathbf{U}_∞ est un champ de vecteurs régulier à support compact dans V , on peut utiliser la quantité $\psi \mathbf{U}_\infty$, $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$, comme fonction test dans l'équation de mouvement (2.2). On trouve que

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \left(\int_V \rho_n \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{U}_\infty dx \right) + \int_V \{ \mu_1 \nabla \mathbf{u}_n : \nabla \mathbf{U}_\infty + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_n) (\operatorname{div} \mathbf{U}_\infty) \} dx \\
 & - \int_V \rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n : \nabla \mathbf{U}_\infty dx - \int_\Omega p_\delta(\rho_n) \operatorname{div} \mathbf{U}_\infty dx + \varepsilon \int_V \nabla \rho_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{U}_\infty dx \\
 & = \int_\Omega \rho_n \mathbf{f} \cdot \mathbf{U}_\infty dx - n \int_{V \setminus \bar{\Omega}} (\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) \cdot \mathbf{U}_\infty dx \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T) \tag{3.77}
 \end{aligned}$$

Sachant que $\partial_t \left(\int_V \rho_n \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{U}_\infty dx \right) \in L^1(0, T)$, que $\rho_n \mathbf{u}_n \in [C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(V))]^3$ et donc que $\int_V \rho_n \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{U}_\infty dx \in C^0([0, T])$, en intégrant (3.77) sur l'intervalle de temps $(0, \tau)$, $\tau \in [0, T]$, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_V (\rho_n \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{U}_\infty)(\tau) dx + \int_0^\tau \int_V \{ \mu_1 \nabla \mathbf{u}_n : \nabla \mathbf{U}_\infty + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_n) (\operatorname{div} \mathbf{U}_\infty) \} dx dt \\
 & - \int_0^\tau \int_V \rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n : \nabla \mathbf{U}_\infty dx dt - \int_0^\tau \int_\Omega p_\delta(\rho_n) \operatorname{div} \mathbf{U}_\infty dx dt \\
 & \quad + \varepsilon \int_0^\tau \int_V \nabla \rho_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{U}_\infty dx dt = \int_V \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{U}_\infty dx \\
 & + \int_0^\tau \int_\Omega \rho_n \mathbf{f} \cdot \mathbf{U}_\infty dx dt - n \int_0^\tau \int_{V \setminus \bar{\Omega}} (\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) \cdot \mathbf{U}_\infty dx dt. \tag{3.78}
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'équation de continuité modifiée (2.1) testée par la fonction $\frac{1}{2}\psi|\mathbf{U}_\infty|^2$, $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$, implique qu'au sens des distributions dans $(0, T)$, on a

$$\partial_t \left(\int_V \frac{1}{2} \rho_n |\mathbf{U}_\infty|^2 dx \right) = \int_V \rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{U}_\infty : \nabla \mathbf{U}_\infty dx - \varepsilon \int_V \nabla \rho_n \cdot \nabla \mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{U}_\infty dx. \quad (3.79)$$

Sachant que $\partial_t \left(\int_V \frac{1}{2} \rho_n |\mathbf{U}_\infty|^2 dx \right) \in L^2(0, T)$, que $\rho_n \in C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^\beta(V))$ et donc que $\int_V \frac{1}{2} \rho_n |\mathbf{U}_\infty|^2 dx \in C^0([0, T])$, on peut intégrer (3.79) sur l'intervalle de temps $(0, \tau)$, $\tau \in [0, T]$, pour récupérer

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_V \rho_n(\tau) |\mathbf{U}_\infty|^2 dx = \frac{1}{2} \int_V \rho_0 |\mathbf{U}_\infty|^2 dx \\ & + \int_0^\tau \int_V \rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{U}_\infty : \nabla \mathbf{U}_\infty dx dt - \varepsilon \int_0^\tau \int_V \nabla \rho_n \cdot \nabla \mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{U}_\infty dx dt. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Les inégalités d'énergie (2.7) et (2.8) sont alors respectivement obtenues en soustrayant (3.77) de (3.75) tout en tenant compte de (3.78) et en soustrayant (3.79) de (3.76) tout en tenant compte de (3.80). En outre, comme nous l'avons souligné dans la remarque II.3, il est clair que le couple (ρ_n, \mathbf{u}_n) satisfait également les inégalités d'énergie modifiées obtenues en remplaçant $P_\delta(\cdot)$ par $\Pi_\delta(\cdot)$ dans (2.7) et (2.8).

3.3 Bornes uniformes

Façon de parler, on pourrait dire que la partie « existence » de la proposition II.1 est démontrée. Ici, nous démontrons que le couple (ρ_n, \mathbf{u}_n) , construit auparavant, satisfait les bornes (2.11)-(2.18).

Tout d'abord, on commence par majorer chaque intégrale se trouvant à droite dans l'inégalité d'énergie (2.8). D'après les inégalités de Hölder et de Young, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_\Omega \rho_n \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) dx dt & \leq \int_0^\tau \left\{ \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho_n} \mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty\|_{0,2,V}^2 + \frac{\delta}{\beta-1} \|\rho_n\|_{0,\beta,V}^\beta \right. \\ & \left. + c(\delta) \int_0^\tau \|\mathbf{f}\|_{0,\frac{2\beta}{\beta-1},\Omega}^{\frac{2\beta}{\beta-1}} dt \right\} \leq \int_0^\tau E_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n)(t) dt + c(\delta, \mathbf{f}). \end{aligned} \quad (3.81)$$

On introduit ensuite un réel strictement positif ζ que l'on fixera ultérieurement. Alors, des arguments identiques complétés par l'équivalence des normes $\mathbf{v} \mapsto \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,2,(0,\tau) \times V}$ et $\mathbf{v} \mapsto \left(\int_0^\tau \int_V \{ \mu_1 |\nabla \mathbf{v}|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div} \mathbf{v}|^2 \} dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$ dans $[L^2(0, \tau; H_0^1(V))]^3$ garantissent que

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^\tau \int_V \nabla \rho_n \cdot \nabla (\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) \cdot \mathbf{U}_\infty dx dt & \leq \varepsilon \int_0^\tau \|\nabla \rho_n\|_{0,2,V} \|\nabla (\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)\|_{0,2,V} \|\mathbf{U}_\infty\|_{0,\infty} dt \\ & \leq c(\zeta) \varepsilon \|\mathbf{U}_\infty\|_{0,\infty}^2 \int_0^\tau \|\nabla (\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)\|_{0,2,V}^2 dt + \zeta \varepsilon \int_0^\tau \|\nabla \rho_n\|_{0,2,V}^2 dt \\ & \leq c(\zeta) \varepsilon \|\mathbf{U}_\infty\|_{0,\infty}^2 \int_0^\tau \int_V \{ \mu_1 |\nabla (\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div} (\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 \} dx dt \\ & \quad + \zeta \varepsilon \int_0^\tau \|\nabla \rho_n\|_{0,2,V}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.82)$$

et que

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\tau \int_V \{ \mu_1 \nabla \mathbf{U}_\infty : \nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) + (\mu_1 + \mu_2)(\operatorname{div} \mathbf{U}_\infty)(\operatorname{div}(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)) \} dx dt \\
& \leq c \|\nabla \mathbf{U}_\infty\|_{0,2} \int_0^\tau \left(\int_V \{ \mu_1 |\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div}(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 \} dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
& \leq \frac{1}{4} \int_0^\tau \int_V \{ \mu_1 |\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div}(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 \} dx dt + c(T, \mathbf{U}_\infty). \quad (3.83)
\end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^\tau \int_V \rho_n \mathbf{u}_n \otimes (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}_n) : \nabla \mathbf{U}_\infty dx dt$, quant à elle, peut se décomposer comme suit :

$$\int_0^\tau \int_V \rho_n \{ (\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty) \otimes (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}_n) + \mathbf{U}_\infty \otimes (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}_n) \} : \nabla \mathbf{U}_\infty dx dt.$$

Ainsi, à nouveau à l'aide des arguments utilisés ci-dessus, on trouve que

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \int_V \rho_n \mathbf{u}_n \otimes (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}_n) : \nabla \mathbf{U}_\infty dx dt \\
& \leq (c + 2\|\nabla \mathbf{U}_\infty\|_{0,\infty}) \int_0^\tau E_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n)(t) dt + c(T, \mathbf{U}_\infty). \quad (3.84)
\end{aligned}$$

Enfin, de manière évidente, on a

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\tau \int_\Omega p_\delta(\rho_n) \operatorname{div} \mathbf{U}_\infty dx dt \\
& \leq \frac{\|\operatorname{div} \mathbf{U}_\infty\|_{0,\infty}}{\gamma - 1} \int_0^\tau \int_V P_\delta(\rho_n) dx dt \leq c(\mathbf{U}_\infty) \int_0^\tau E_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n)(t) dt. \quad (3.85)
\end{aligned}$$

En conséquence, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 = \min((4c(\zeta)\|\mathbf{U}_\infty\|_{0,\infty}^2)^{-1}, 1)]$, les estimations (3.81)-(3.85) insérées dans l'inégalité d'énergie (2.8) induisent la suivante : p.p.t. $\tau \in (0, T)$

$$\begin{aligned}
& E_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n)(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_V \{ \mu_1 |\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div}(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 \} dx dt \\
& \quad + \varepsilon \delta \beta \int_0^\tau \int_V \rho_n^{\beta-2} |\nabla \rho_n|^2 dx dt + n \int_0^\tau \int_{V \setminus \bar{\Omega}} |\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty|^2 dx dt \\
& \leq c(\zeta, T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) + \zeta \varepsilon \int_0^\tau \|\nabla \rho_n(t)\|_{0,2,V}^2 dt + \int_0^\tau c(\mathbf{U}_\infty) E_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n)(t) dt. \quad (3.86)
\end{aligned}$$

En accord avec le lemme A.14 (Gronwall), il en résulte en particulier que p.p.t. $\tau \in (0, T)$

$$E_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n)(\tau) \leq \{ c(\zeta, T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) + \zeta \varepsilon \int_0^\tau \|\nabla \rho_n\|_{0,2,V}^2 dt \} \times e^{c(\mathbf{U}_\infty)T}.$$

Avec cette information supplémentaire, à partir de (3.86) on récupère finalement que

$$\begin{aligned}
& E_\delta(\rho_n, \mathbf{u}_n)(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_V \{ \mu_1 |\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div}(\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty)|^2 \} dx dt \\
& \quad + \varepsilon \delta \beta \int_0^\tau \int_V \rho_n^{\beta-2} |\nabla \rho_n|^2 dx dt + n \int_0^\tau \int_{V \setminus \bar{\Omega}} |\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty|^2 dx dt \\
& \leq c(\zeta, T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) + (c(\mathbf{U}_\infty)T e^{c(\mathbf{U}_\infty)T} + 1) \zeta \varepsilon \int_0^\tau \|\nabla \rho_n\|_{0,2,V}^2 dt \text{ p.p.t. } \tau \in (0, T).
\end{aligned}$$

Noter alors que si l'on choisit ζ de telle sorte que $(c(\mathbf{U}_\infty)Te^{c(\mathbf{U}_\infty)T} + 1)\zeta \leq 1$, de cette inégalité, on tire les estimations

$$\sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|\rho_n(t)\|_{0, \gamma, V}^\gamma \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) + \varepsilon \int_0^T \|\nabla \rho_n\|_{0, 2, V}^2 dt, \quad (3.87)$$

$$\delta \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|\rho_n(t)\|_{0, \beta, V}^\beta \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) + \varepsilon \int_0^T \|\nabla \rho_n\|_{0, 2, V}^2 dt, \quad (3.88)$$

$$\sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|(\sqrt{\rho_n} |\mathbf{u}_n|)(t)\|_{0, 2, V}^2 \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) + \varepsilon \int_0^T \|\nabla \rho_n\|_{0, 2, V}^2 dt, \quad (3.89)$$

$$\int_0^T \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{0, 2, V}^2 dt \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) + \varepsilon \int_0^T \|\nabla \rho_n\|_{0, 2, V}^2 dt, \quad (3.90)$$

$$\varepsilon \delta \beta \int_0^T \int_V \rho_n^{\beta-2} |\nabla \rho_n|^2 dx dt \leq c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) + \varepsilon \int_0^T \|\nabla \rho_n\|_{0, 2, V}^2 dt. \quad (3.91)$$

Par ailleurs, au vu de (3.69) et à l'aide de (3.88) et (3.90), on voit que

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^T \|\nabla \rho_n\|_{0, 2, V}^2 dx &\leq \frac{1}{2} \left\{ \|\rho_0\|_{0, 2, V}^2 + \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|\rho_n(t)\|_{0, 4, V}^2 \sqrt{T} \left(\int_0^T \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{0, 2, V}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ \|\rho_0\|_{0, 2, V}^2 + \delta^{-\frac{2}{\beta}} \sqrt{T} \left(c(T, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) + \varepsilon \int_0^T \|\nabla \rho_n\|_{0, 2, V}^2 dt \right)^{\frac{2}{\beta} + \frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Puisque $\beta > 4$, on a $\frac{2}{\beta} + \frac{1}{2} < 1$. L'inégalité de Young utilisée dans (3.92) permet de conclure à l'estimation (2.15). Pour conclure à la validité des estimations (2.11)-(2.14), (2.16) et (2.17), il suffit alors d'insérer (2.15) dans (3.87)-(3.91). Enfin, en ce qui concerne (2.18), celle-ci est obtenue comme son analogue (3.23) à partir de (2.16) (cf. p.146). La preuve de la proposition II.1 est donc complète. \square

4 Preuve : Etape n°2

Dans cette section $\delta, \varepsilon \in (0, 1]$ sont supposés fixes. A partir d'une suite de couples $\{(\rho_n, \mathbf{u}_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, provenant de la proposition II.1, nous démontrons la proposition II.2. Comme le lecteur peut le constater, les informations sur la suite $\{(\rho_n, \mathbf{u}_n)\}_n$ sont très proches de celles que nous avons sur la suite $\{(\rho_m, \mathbf{u}_m)\}_m$ au début de la sous-section 3.2. En conséquence, nombre d'arguments pourront être calqués sur ceux présentés à la sous-section 3.2 afin de démontrer la partie « existence » de la proposition II.2. En revanche, pour la partie « estimations », nous verrons qu'il faudra davantage travailler qu'à la sous-section 3.3.

4.1 Existence de solutions

Noter tout d'abord qu'en remplaçant chacune des estimations (3.18)-(3.24) par leur analogue parmi les estimations (2.11)-(2.18), les indices n par ε et m par n , on peut copier

mot à mot les lignes situées entre le début de la sous-section 3.2 et (3.63). On rappelle tout de même l'équivalent de (3.59), à savoir que

$$\varepsilon \|\rho_n\|_{L^r(0,T;W^{1,r}(V))} \leq c(T, V, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0), \quad r = \frac{10\beta - 6}{3\beta + 3}. \quad (4.1)$$

Remarquer également que l'estimation (2.17) implique que \mathbf{u}_ε , la limite faible de la suite $\{\mathbf{u}_n\}_n$ dans $[L^2(0, T; H_0^1(V))]^3$, satisfait

$$\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{U}_\infty \text{ p.p. dans } (0, T) \times V \setminus \overline{\Omega}. \quad (4.2)$$

D'autre part, puisque le couple (ρ_n, \mathbf{u}_n) est solution de l'équation de mouvement (2.2), on a

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\int_{\Omega} \rho_n \mathbf{u}_n \cdot \boldsymbol{\phi} \, dx \right) &= - \int_{\Omega} \{ \mu_1 \nabla \mathbf{u}_n : \nabla \boldsymbol{\phi} + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_n) (\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}) \} \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \{ \rho_n u_n^i u_n^j \partial_j \phi^i - p_\delta(\rho_n) \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} - \varepsilon \nabla \rho_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n \cdot \boldsymbol{\phi} \} \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho_n \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\phi} \, dx \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T), \quad \boldsymbol{\phi} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\partial_t \left(\int_{\Omega} \rho_n \mathbf{u}_n \cdot \boldsymbol{\phi} \, dx \right) \in L^1(0, T)$. Puisque $\int_{\Omega} \rho_n \mathbf{u}_n \cdot \boldsymbol{\phi} \, dx \in C^0([0, T])$, en intégrant l'identité précédente sur l'intervalle de temps $(t_1, t_2) \subset (0, T)$, puis en utilisant à plusieurs reprises l'inégalité de Hölder, on trouve que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \{ (\rho_n \mathbf{u}_n)(t_2) - (\rho_n \mathbf{u}_n)(t_1) \} \cdot \boldsymbol{\phi} \, dx \leq \\ &\int_{t_1}^{t_2} \{ c \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{0,2,V} \|\nabla \boldsymbol{\phi}\|_{0,2,\Omega} + \|\rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n\|_{0,\frac{6\beta}{4\beta+3},V} \|\nabla \boldsymbol{\phi}\|_{0,\frac{6\beta}{2\beta-3},\Omega} \} \, dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \{ \|p_\delta(\rho_n)\|_{0,\frac{4}{3},V} \|\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}\|_{0,4,\Omega} + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{0,2,V} \|\nabla \rho_n\|_{0,r,V} \|\boldsymbol{\phi}\|_{0,s',\Omega} \} \, dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \|\rho_n\|_{0,\beta,V} \|\mathbf{f}\|_{0,\infty,\Omega} \|\boldsymbol{\phi}\|_{0,\beta',\Omega} \, dt. \end{aligned}$$

Par l'intermédiaire des injections de Sobolev, des inégalités de Poincaré et de Hölder et des estimations (2.11)-(2.18), on en déduit que la suite $\{\rho_n \mathbf{u}_n\}_n \subset [C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(V))]^3$ est uniformément continue dans $W^{-1,\frac{4}{3}}(\Omega)$. Etant données les estimations (2.12)-(2.13), on sait que cette suite est uniformément bornée par rapport à n dans $[L^\infty(0, T; L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(V))]^3$ et les lemmes I.1 et I.2 ($p = \frac{2\beta}{\beta+1}$, $q = \frac{4}{3}$) assurent l'existence d'une fonction $\mathbf{q}_\varepsilon \in [C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega))]^3$ telle que

$$\begin{aligned} \rho_n \mathbf{u}_n &\rightarrow \mathbf{q}_\varepsilon \text{ dans } [C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega))]^3 \text{ quand } n \rightarrow \infty, \\ &\text{p.p.t. } t \in (0, T), \quad (\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t) = \mathbf{q}_\varepsilon(t) \text{ p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on redéfinit \mathbf{u}_ε sur un ensemble de temps de mesure nulle à l'aide du lemme I.11, on conclut que

$$\rho_n \mathbf{u}_n \rightarrow \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \text{ dans } [C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega))]^3 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Par suite, puisque $\beta > \frac{3}{2}$, on a $\frac{2\beta}{\beta+1} > \frac{6}{5}$ et le lemme I.4 garantit que

$$\rho_n \mathbf{u}_n \rightarrow \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \text{ dans } [L^q(0, T; [H^1(\Omega)]^*)]^3 \text{ quand } n \rightarrow \infty, \quad q \in [1, \infty). \quad (4.4)$$

Ajoutée à (4.4), la convergence faible de la suite $\{\mathbf{u}_n\}_n$ vers \mathbf{u}_ε dans $[L^2(0, T; H_0^1(V))]^3$ implique celle de la suite $\{\rho_n u_n^i u_n^j\}_n$, $i, j = 1, 2, 3$, vers $\rho_\varepsilon u_\varepsilon^i u_\varepsilon^j$ dans $\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)$ qui elle-même, au vu des estimations (2.12)-(2.14), implique à son tour que

$$\rho_n u_n^i u_n^j \rightharpoonup \rho_\varepsilon u_\varepsilon^i u_\varepsilon^j \text{ dans } L^2(0, T; L^{\frac{6\beta}{4\beta+3}}(\Omega)) \text{ quand } n \rightarrow \infty, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.5)$$

Ainsi, on vient de démontrer l'analogie de (3.65), à la différence notoire que nous n'en sommes capable seulement que sur Ω et non pas sur V . A ce stade, en remplaçant à nouveau chacune des estimations (3.18)-(3.24) par leur analogue parmi les estimations (2.11)-(2.18), les indices n par ε et m par n , on peut copier mot à mot les lignes de la sous-section 3.2 de (3.65) jusqu'à (3.74).

Maintenant, nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'à l'aide des informations collectées tout au long de cette sous-section, le passage à la limite $n \rightarrow \infty$ dans la restriction à $\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)$ de l'équation de mouvement (2.2) permet de conclure à la validité de l'équation (2.20).

En ce qui concerne les inégalités d'énergie, une fois le terme positif $n \int_{V \setminus \overline{\Omega}} |\mathbf{u}_n - \mathbf{U}_\infty|^2 dx$ oublié, il suffit d'utiliser des arguments similaires à ceux qui ont permis le passage à la limite $m \rightarrow \infty$ dans (3.14) et (3.16) pour passer à la limite $n \rightarrow \infty$ dans (2.7) et (2.8) et enfin d'avoir à l'esprit que $\operatorname{div} \mathbf{U}_\infty = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}$ et que $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{U}_\infty$ p.p. dans $(0, T) \times V \setminus \overline{\Omega}$ pour conclure à la validité de (2.21) et (2.22). Pour les mêmes raisons, le passage à la limite $n \rightarrow \infty$ dans les inégalités d'énergie modifiées obtenues en remplaçant $P_\delta(\cdot)$ par $\Pi_\delta(\cdot)$ dans (2.7) et (2.8) induit les inégalités analogues au niveau ε .

4.2 Bornes uniformes

Pour terminer la preuve de la proposition II.2, reste à démontrer que le couple $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ construit ci-dessus satisfait les estimations (2.23)-(2.28). Clairement, la seule estimation à justifier est (2.28) puisque (2.23)-(2.27) découlent directement de (2.11)-(2.15) et de la semi-continuité inférieure faible des normes entrant en ligne de compte. Noter également que pour les mêmes raisons, en accord avec (4.1), on a

$$\varepsilon \|\rho_\varepsilon\|_{L^r(0, T; W^{1, r}(V))} \leq c(T, V, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{f}). \quad (4.6)$$

Etant donné que l'équation (2.19) est satisfaite p.p. dans $(0, T) \times V$, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on peut écrire que

$$\partial_t(\rho_\varepsilon \phi) + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \phi - \varepsilon \nabla(\rho_\varepsilon \phi)) = \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \phi - 2\varepsilon \nabla \rho_\varepsilon \cdot \nabla \phi - \rho_\varepsilon \Delta \phi \text{ p.p. dans } (0, T) \times \Omega. \quad (4.7)$$

Soit K un sous-ensemble compact arbitraire de Ω . Alors il est clair qu'il existe toujours un sous-domaine borné à frontière Lipschitzienne Ω' de Ω tel que $K \subset \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$. On

pose

$$\begin{aligned}\varphi(t, x) &= \psi(t)\tilde{\varphi}(t, x), \quad \psi \in \mathcal{D}(0, T), \quad 0 \leq \psi \leq 1, \\ \tilde{\varphi}(t, x) &= \mathcal{B}[\rho_\varepsilon(t)\phi - \int_{\Omega'} \rho_\varepsilon(t)\phi \, dy](x), \\ \phi &\in \mathcal{D}(\Omega'), \quad 0 \leq \phi \leq 1, \quad \phi = 1 \text{ dans } K, \quad \forall |\alpha| \leq 2, \quad |D^\alpha \phi| \leq c(K).\end{aligned}\quad (4.8)$$

où $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2, \mathcal{B}^3)$ dénote l'opérateur de Bogovskiï introduit dans le lemme B.1 dans lequel on considère $G = \Omega'$ (Ω' est un domaine borné à frontière Lipschitzienne), lemme qui en particulier permet d'affirmer que p.p.t. $t \in (0, T)$,

$$\|\nabla \varphi(t)\|_{0,p,\Omega'} \leq c(\Omega', p) \|\rho_\varepsilon(t)\|_{0,p,V}, \quad p \in (1, \beta]. \quad (4.9)$$

En conséquence, il est clair que $\varphi \in [L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))]^3$, $p \in (1, \beta]$. Par ailleurs, \mathcal{B} étant un opérateur linéaire et continu de $\tilde{L}^q(\Omega')$ à valeurs dans $[W_0^{1,q}(\Omega')]^3$, $q \in (1, \infty)$, il n'est pas très difficile de se convaincre que p.p.t. $t \in (0, T)$,

$$\partial_t \mathcal{B}[\rho_\varepsilon(t)\phi - \int_{\Omega'} \rho_\varepsilon(t)\phi \, dy] = \mathcal{B}[\partial_t(\rho_\varepsilon(t)\phi) - \partial_t(\int_{\Omega'} \rho_\varepsilon(t)\phi \, dy)]. \quad (4.10)$$

D'autre part, il est facile de voir que p.p.t. $t \in (0, T)$, $(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t)\phi - \varepsilon \nabla(\rho_\varepsilon(t)\phi) \in [L^2(\Omega')]^3$ et $(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t)\phi - \varepsilon \nabla(\rho_\varepsilon(t)\phi) \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega'} = 0$. Ainsi, en utilisant (4.7) et (4.10), p.p.t. $t \in (0, T)$, on peut écrire que

$$\begin{aligned}\partial_t \varphi(t) &= \psi'(t)\tilde{\varphi}(t) + \psi(t)\mathcal{B}[\text{div}((\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t)\phi - \varepsilon \nabla(\rho_\varepsilon(t)\phi))] \\ &\quad + \psi(t)\mathcal{B}[(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t) \cdot \nabla \phi - \int_{\Omega'} (\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t) \cdot \nabla \phi \, dy] \\ &\quad - 2\psi(t)\mathcal{B}[\varepsilon \nabla \rho_\varepsilon(t) \cdot \nabla \phi - \int_{\Omega'} \varepsilon \nabla \rho_\varepsilon(t) \cdot \nabla \phi \, dy] - \psi \mathcal{B}[\rho_\varepsilon(t)\Delta \phi - \int_{\Omega'} \rho_\varepsilon(t)\Delta \phi \, dy].\end{aligned}\quad (4.11)$$

On pose $\boldsymbol{\eta}_1(t) = \psi'(t)\tilde{\varphi}(t)$ et $\boldsymbol{\eta}_2(t) = \partial_t \varphi(t) - \boldsymbol{\eta}_1(t)$. D'après les injections de Sobolev, l'inégalité de Poincaré et le lemme B.1, on trouve que

$$\|\boldsymbol{\eta}_1(t)\|_{0,p,\Omega'} \leq c(\Omega', p) |\psi'(t)| \|\rho_\varepsilon(t)\|_{0,\beta,V}, \quad p \in (1, \infty). \quad (4.12)$$

De plus, en accord avec le lemme B.1, l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Sobolev, on a

$$\begin{aligned}\|\psi \mathcal{B}[\text{div}((\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t)\phi - \varepsilon \nabla(\rho_\varepsilon(t)\phi))]\|_{0,2,\Omega'} &\leq c(\Omega') \|(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t)\phi - \varepsilon \nabla(\rho_\varepsilon(t)\phi)\|_{0,2,\Omega'} \\ &\leq c(\Omega', K) \{ \|\rho_\varepsilon(t)\|_{0,3,V} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{0,6,V} + \varepsilon \|\nabla \rho_\varepsilon(t)\|_{0,2,V} \},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|\psi(t)\mathcal{B}[(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t) \cdot \nabla \phi - \int_{\Omega'} (\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t) \cdot \nabla \phi \, dy]\|_{0,2,\Omega'} \\ &\leq c(\Omega') \|\nabla \mathcal{B}[(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t) \cdot \nabla \phi - \int_{\Omega'} (\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t) \cdot \nabla \phi \, dy]\|_{0,2,\Omega'} \leq c(\Omega') \|(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t) \cdot \nabla \phi\|_{0,2,\Omega'} \\ &\leq c(\Omega', K) \|\rho_\varepsilon(t)\|_{0,3,V} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{0,6,V},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|2\psi(t)\mathbf{B}[\varepsilon\nabla\rho_\varepsilon(t) \cdot \nabla\phi - \int_{\Omega'} \varepsilon\nabla\rho_\varepsilon(t) \cdot \nabla\phi dy]\|_{0,2,\Omega'} \\
& \leq c(\Omega')\|\nabla\mathbf{B}[\varepsilon\nabla\rho_\varepsilon(t) \cdot \nabla\phi - \int_{\Omega'} \varepsilon\nabla\rho_\varepsilon(t) \cdot \nabla\phi dy]\|_{0,2,\Omega'} \\
& \leq c(\Omega')\varepsilon\|\nabla\rho_\varepsilon(t) \cdot \nabla\phi\|_{0,2,\Omega'} \leq c(\Omega', K)\varepsilon\|\nabla\rho_\varepsilon(t)\|_{0,2,V}
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\|\psi\mathbf{B}[\rho_\varepsilon(t)\Delta\phi - \int_{\Omega'} \rho_\varepsilon(t)\Delta\phi dy]\|_{0,2,\Omega'} & \leq c(\Omega')\|\nabla\mathbf{B}[\rho_\varepsilon(t)\Delta\phi - \int_{\Omega'} \rho_\varepsilon(t)\Delta\phi dy]\|_{0,2,\Omega'} \\
& \leq c(\Omega')\|\rho_\varepsilon(t)\Delta\phi\|_{0,2,\Omega'} \leq c(\Omega', K)\|\rho_\varepsilon(t)\|_{0,2,V}.
\end{aligned}$$

Par suite, puisque $\beta > 3$, au vu des estimations (2.24), (2.26) et (2.27), il en résulte que $\boldsymbol{\eta}_2 \in [L^2((0, T) \times \Omega)]^3$ et plus précisément que

$$\|\boldsymbol{\eta}_2\|_{[L^2((0,T)\times\Omega)]^3} \leq c(T, \Omega', K, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}). \quad (4.13)$$

Après relecture de la remarque II.6, puisque $\beta > 4$, il apparaît que $\boldsymbol{\varphi}$ est une fonction test admissible de l'équation de mouvement (2.20). Quelques calculs élémentaires consistant principalement en des intégrations par parties, nous conduisent à l'identité suivante :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \psi \int_{\Omega'} (a\rho_\varepsilon^{\gamma+1} + \delta\rho_\varepsilon^{\beta+1})\phi dx dt & = \int_0^T \psi \left(\int_{\Omega'} (a\rho_\varepsilon^\gamma + \delta\rho_\varepsilon^\beta) dx \right) \left(\int_{\Omega'} \rho_\varepsilon\phi dy \right) dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega'} \{ \mu_1 \nabla \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla \boldsymbol{\varphi} + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon) (\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}) \} dx dt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega'} \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega'} \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla \boldsymbol{\varphi} dx dt \\
& + \varepsilon \int_0^T \psi \int_{\Omega'} \nabla \rho_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi} dx dt - \int_0^T \psi \int_{\Omega'} \rho_\varepsilon \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx dt = \sum_{k=1}^6 I_k. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Les intégrales I_k , $k = 1, \dots, 6$, à droite de l'égalité (4.14) sont majorées dans les lignes ci-dessous. Tout d'abord, d'après les estimations (2.23) et (2.24), il est clair que

$$|I_1| \leq c(T, \Omega', \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}).$$

A l'aide de l'inégalité de Schwarz et des estimations (2.26) et (4.9), on prouve ensuite que

$$\begin{aligned}
|I_2| & \leq c \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,2,V} \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{0,2,\Omega'} dt \\
& \leq c\sqrt{T} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{[L^2(0,T;H_0^1(V))]^3} \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{[L^\infty(0,T;L^2(\Omega'))]^{3 \times 3}} \leq c(T, \Omega', \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}).
\end{aligned}$$

En ce qui concerne l'intégrale I_3 , on peut *e.g.* utiliser les inégalités de Hölder et de Sobolev, (4.12) et (4.13), ainsi que les estimations (2.24)-(2.27) pour montrer que

$$\begin{aligned}
|I_3| & \leq \int_0^T \|\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0, \frac{2\beta}{\beta+1}, V} \|\boldsymbol{\eta}_1\|_{0, \frac{2\beta}{\beta-1}, V} + \|\rho_\varepsilon\|_{0,3,V} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,6,V} \|\boldsymbol{\eta}_2\|_{0,2,V} dt \\
& \leq c(T, \Omega', K, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \left(1 + \int_0^T |\psi'| dt \right).
\end{aligned}$$

Pour des raisons tout à fait semblables, avec (4.9) à la place de (4.12)-(4.13), complétées par les injections de Sobolev, on trouve que

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq c \int_0^T \|\rho_\varepsilon\|_{0,3,V} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,6,V}^2 \|\nabla \varphi\|_{0,3,\Omega'} dt \leq c(T, \Omega', \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \\ |I_5| &\leq \sqrt{\varepsilon} \int_0^T \sqrt{\varepsilon} \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{0,2,V} \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,2,V} \|\varphi\|_{0,\infty,\Omega'} dt \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} c(\Omega', \beta) \int_0^T \sqrt{\varepsilon} \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{0,2,V} \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,2,V} \|\nabla \varphi\|_{0,\beta,\Omega'} dt \leq c(T, \Omega', \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \end{aligned}$$

et enfin

$$|I_6| \leq \int_0^T \|\rho_\varepsilon\|_{0,\beta,V} \|\mathbf{f}\|_{0,\infty,\Omega'} \|\varphi\|_{0,\beta',\Omega'} dt \leq c(T, \Omega', \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}).$$

Ceci étant, le regroupement de toutes ces estimations dans (4.14) montre que pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$, $0 \leq \psi \leq 1$ et toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega')$, $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 1$ dans un sous-ensemble compact K de $\Omega' \subset \Omega$, $\forall |\alpha| \leq 2$, $|D^\alpha \phi| \leq c(K)$, on a

$$\int_0^T \psi \int_{\Omega'} (a\rho_\varepsilon^{\gamma+1} + \delta\rho_\varepsilon^{\beta+1}) \phi dx dt \leq c(T, \Omega', K, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) (1 + \int_0^T |\psi'| dt). \quad (4.15)$$

Soit alors une fonction

$$w \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 \leq w \leq 1, \quad w(s) = 0 \text{ si } s \leq 1, \quad w(s) = 1 \text{ si } s \geq 2 \text{ et } 0 \leq w'(s) \leq 2. \quad (4.16)$$

On considère alors dans (4.15) $\psi = \psi_m$ avec $\psi_m(t) = w(m \times \min(t, T-t))$ et on passe à la limite $m \rightarrow \infty$. Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 1$ dans un sous-ensemble compact K de $\Omega' \subset \Omega$, $\forall |\alpha| \leq 2$, $|D^\alpha \phi| \leq c(K)$, on obtient l'estimation

$$\int_0^T \int_{\Omega'} (a\rho_\varepsilon^{\gamma+1} + \delta\rho_\varepsilon^{\beta+1}) \phi dx dt \leq c(T, \Omega', K, \delta, \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (4.17)$$

de laquelle découle directement la validité de (2.28). Ainsi se termine la preuve de la proposition II.2. \square

5 Preuve : Etape n°3

Dans cette section, $\delta \in (0, 1]$ étant supposé fixe, nous travaillons sur la suite $\{(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)\}_\varepsilon$ associée par la proposition II.2 à une suite de réels $\varepsilon \in (0, 1]$. Notre objectif est dans un premier temps de démontrer la proposition II.3. Pour cela, nous faisons tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$ afin d'éliminer le terme de dissipation artificielle qui apparaît dans l'équation (2.19) aussi bien que les quantités avec coefficient ε présentes dans l'équation (2.20). La méthode utilisée ici est due à P.L. LIONS [46, Chapter 5,7]. Elle est essentiellement basée sur la propriété de compacité faible de la suite des pressions effectives (cf. I.4), sur la théorie du transport de DI PERNA et P.L. LIONS [12] appliquée à l'équation de continuité (cf. I.2) et enfin, sur

certaines résultats classiques d'analyse (concavité, convexité, semi-continuité et monotonie, cf. Annexe A). Comme le lecteur pourra le constater, cette méthode à une limitation du fait que la densité limite doit appartenir au moins à l'espace $L^2((0, T) \times K)$. Ici cela ne pose aucun problème puisque le terme de pression artificielle est toujours présent. Une fois la proposition II.3 démontrée, nous consacrerons la fin de cette section à la preuve de la proposition II.4 ainsi qu'à l'obtention de bornes uniformes par rapport au paramètre $\delta \in (0, 1]$ pour les solutions approchées $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ données par cette proposition.

5.1 Existence de solutions

Dans la suite, nous ne ferons pas la distinction entre une fonction définie sur $(0, T) \times V$ et son prolongement par zéro dans $(0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus V$.

Tout d'abord, au vu des estimations (2.24), (2.26)-(2.28) et (4.6), on peut supposer qu'il existe des fonctions $\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta, \overline{\rho_\delta^\gamma}$ et $\overline{\rho_\delta^\beta}$ telles que modulo l'extraction de sous-suites et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon &\xrightarrow{*} \rho_\delta \text{ dans } L^\infty(0, T; L^\beta(V)), \quad \rho_\varepsilon \rightarrow \rho_\delta \text{ dans } L^{\beta+1}((0, T) \times K) \\ \rho_\delta &\geq 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times V, \quad \rho_\delta = 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus V, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} p_\delta(\rho_\varepsilon) &\rightarrow \overline{p_\delta(\rho_\delta)} = a\overline{\rho_\delta^\gamma} + \delta\overline{\rho_\delta^\beta} \text{ dans } L^{\frac{\beta+1}{\beta}}((0, T) \times K), \\ \overline{\rho_\delta^\gamma} &= \overline{\rho_\delta^\beta} = 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus V, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{u}_\delta \text{ dans } [L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))]^3, \quad \mathbf{u}_\delta = \mathbf{U}_\infty \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \quad (5.3)$$

$$\varepsilon \nabla \rho_\varepsilon \rightarrow \mathbf{0} \text{ dans } [L^2((0, T) \times V)]^3, \quad (5.4)$$

$$\varepsilon \nabla \rho_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon^i \rightarrow 0 \text{ dans } L^1((0, T) \times V),$$

$$\varepsilon \nabla \rho_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon^i \rightarrow 0 \text{ dans } L^s((0, T) \times V), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.5)$$

K désignant tout sous-ensemble compact arbitraire de Ω . Ensuite, à l'aide d'arguments déjà utilisés à plusieurs reprises, pour $t_1, t_2 \in [0, T]$ et $\phi \in \mathcal{D}(V)$, on voit que

$$\begin{aligned} & \left| \int_V \{\rho_\varepsilon(t_2) - \rho_\varepsilon(t_1)\} \phi \, dx \right| \\ & \leq c(V) \left\{ \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(t)\|_{0, \frac{2\beta}{\beta+1}, V} |t_2 - t_1| + \varepsilon \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{0, 2, (0, T) \times V} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} \right\} \|\nabla \phi\|_{0, \frac{2\beta}{\beta-1}, V}. \end{aligned}$$

Ceci prouve que la suite $\{\rho_\varepsilon\}_\varepsilon \subset C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^\beta(V))$ est uniformément continue dans $W^{-1, \frac{2\beta}{\beta+1}}(V)$. Par conséquent, (2.24) et les lemmes I.1 et I.2 garantissent que

$$\rho_\varepsilon \rightarrow \rho_\delta \text{ dans } C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^\beta(V)) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (5.6)$$

Par suite, d'après le lemme I.4, il en découle que

$$\rho_\varepsilon \rightarrow \rho_\delta \text{ dans } L^q(0, T; W^{-1, r}(V)) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+, \quad q \in [1, \infty), \quad r \in (1, \infty). \quad (5.7)$$

Cette dernière information pour $q = r = 2$, couplée à la convergence (5.3), implique que $\rho_\varepsilon u_\varepsilon^i \rightarrow \rho_\delta u_\delta^i$ au sens des distributions dans $(0, T) \times V$, $i = 1, 2, 3$ et de ce fait précise les

convergences induites par les estimations (2.24)-(2.26). Autrement dit,

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon u_\varepsilon^i &\overset{*}{\rightharpoonup} \rho_\delta u_\delta^i \text{ dans } L^\infty(0, T; L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(V)), \\ \rho_\varepsilon u_\varepsilon^i &\rightharpoonup \rho_\delta u_\delta^i \text{ dans } L^2(0, T; L^{\frac{6\beta}{\beta+6}}(V)) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ici, il est intéressant de noter que la convergence $\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \rho_\delta \mathbf{u}_\delta$ dans $[C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega))]^3$ n'est pas vraie. Elle l'est uniquement sur tout sous-ensemble compact K de Ω , *i.e.*

$$\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \text{ dans } [C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(K))]^3 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (5.9)$$

Ceci est dû au fait que l'estimation améliorée (2.28) est seulement locale et non globale sur Ω . Pour s'en convaincre, il suffit d'adapter à la présente situation les arguments qui ont permis de prouver (4.3). Ensuite, puisque l'injection $L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(V) \subset\subset H^{-1}(V)$ est compacte, de (5.8), on extrait la convergence $\rho_\varepsilon u_\varepsilon^i \rightarrow \rho_\delta u_\delta^i$ dans $L^2(0, T; H^{-1}(V))$, $i = 1, 2, 3$. Cette convergence et (5.3) nous permettent donc d'affirmer que $\rho_\varepsilon u_\varepsilon^i u_\varepsilon^j \rightarrow \rho_\delta u_\delta^i u_\delta^j$ au sens des distributions dans $(0, T) \times V$, $i, j = 1, 2, 3$ et de ce fait de préciser la convergence induite par les estimations (2.24)-(2.26). Autrement dit,

$$\rho_\varepsilon u_\varepsilon^i u_\varepsilon^j \rightharpoonup \rho_\delta u_\delta^i u_\delta^j \text{ dans } L^2(0, T; L^{\frac{6\beta}{4\beta+3}}(V)) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.10)$$

Toutes les convergences nécessaires au passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dans les équations (2.19) et (2.20) sont maintenant à notre disposition. Il vient alors que

$$\partial_t \rho_\delta + \operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times V), \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta) + \operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) - \mu_1 \Delta \mathbf{u}_\delta + (\mu_1 + \mu_2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta + \nabla \overline{p_\delta(\rho_\delta)} \\ = \rho_\delta \mathbf{f} \text{ dans } [\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)]^3. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Il est bon de noter que puisque $\rho_\delta \in C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^\beta(V))$ et $\mathbf{u}_\delta = \mathbf{U}_\infty = \mathbf{0}$ p.p. dans $(0, T) \times B \setminus \overline{\Omega}$, l'équation (5.11) implique que pour tout $\tau \in [0, T]$, $\rho_\delta(\tau) = \rho_0$ p.p. dans $B \setminus \overline{\Omega}$, tandis que l'équation (5.12) a pour conséquence directe l'identité

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\int_\Omega \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \cdot \boldsymbol{\phi} \, dx \right) = - \int_\Omega \{ \mu_1 \nabla \mathbf{u}_\delta : \nabla \boldsymbol{\phi} + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_\delta) (\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}) \} \, dx \\ + \int_\Omega \{ \rho_\delta u_\delta^i u_\delta^j \partial_j \phi^i - \overline{p_\delta(\rho_\delta)} \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} + \rho_\delta \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\phi} \} \, dx \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T), \quad \boldsymbol{\phi} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3, \end{aligned}$$

Celle-ci implique que $\partial_t \left(\int_\Omega \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \cdot \boldsymbol{\phi} \, dx \right) \in L^1(0, T)$, $\boldsymbol{\phi} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$. Puisque par ailleurs on sait déjà que $\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \in [L^\infty(0, T; L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(V))]^3$, en accord avec le lemme I.3 et (5.9), on peut affirmer que

$$\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \in [C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega))]^3. \quad (5.13)$$

Ajoutée à (5.6), (5.13) donne un sens aux conditions initiales. Plus exactement, on a

$$\rho_\delta(0) = \rho_0 \text{ p.p. dans } V \text{ et } (\rho_\delta \mathbf{u}_\delta)(0) = \mathbf{q}_0 \text{ p.p. dans } \Omega. \quad (5.14)$$

On remarque ensuite que les hypothèses du lemme I.5 sont satisfaites avec $p = \beta$ et $f = 0$. L'équation de continuité (5.11) peut alors être prolongée en dehors de V . Autrement dit celle-ci est vraie dans $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3)$. On se retrouve dans la configuration du lemme I.7 qui assure la validité du point (iii) de la proposition II.3 concernant l'équation de continuité renormalisée. Noter que si $b(s) = s^\theta$, cette propriété n'est rien d'autre qu'une des hypothèses du lemme I.8 dans lequel $q = \beta$, lemme dont la conclusion est $\rho_\delta \in C^0([0, T]; L^p(V))$, $p \in [1, \beta)$. Quant au point (iv), il est une conséquence directe du corollaire I.1.

Nous allons maintenant utiliser les résultats démontrés dans le chapitre précédent concernant la suite des pressions effectives (flux effectifs visqueux) (cf. I.4). Nous tenons encore une fois à insister sur le caractère essentiel de ce passage et ce malgré sa brièveté due à notre choix de regrouper les résultats fréquemment utilisés dans cette partie dans le chapitre I. On pose

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon &= p_\delta(\rho_\varepsilon), \quad b_\varepsilon = \rho_\varepsilon, \quad \mathbf{F}_\varepsilon = \rho_\varepsilon \mathbf{f} - \varepsilon \nabla \rho_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \quad \mathbf{q}_\varepsilon = \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon, \quad f_\varepsilon = \operatorname{div} \mathbf{g}_\varepsilon \\ \Pi_\delta &= \overline{p_\delta(\rho_\delta)}, \quad b_\delta = \rho_\delta, \quad \mathbf{F}_\delta = \rho_\delta \mathbf{f}, \quad \mathbf{q}_\delta = \rho_\delta \mathbf{u}_\delta, \quad f_\delta = 0 \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{g}_\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon \nabla \rho_\varepsilon & \text{dans } (0, T) \times V, \\ 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus V. \end{cases}$$

Alors les convergences (5.1)-(5.10) montrent que pour tout sous-ensemble compact K de Ω , on a

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon &\rightharpoonup \Pi_\delta \text{ dans } L^{\frac{\beta+1}{\beta}}((0, T) \times K), \\ b_\varepsilon &\rightarrow b_\delta \text{ dans } C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^\beta(V)), \quad b_\varepsilon \rightharpoonup b_\delta \text{ dans } L^{\beta+1}((0, T) \times K), \\ \mathbf{F}_\varepsilon &\rightharpoonup \mathbf{F}_\delta \text{ dans } L^s((0, T) \times V), \\ \mathbf{q}_\varepsilon &\rightarrow \mathbf{q}_\delta \text{ dans } [C^0([0, T]; L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(K))]^3, \\ f_\varepsilon &\rightharpoonup f_\delta \text{ dans } L^2(0, T; H^{-1}(V)). \end{aligned}$$

D'autre part, à l'aide des propriétés de l'opérateur \mathcal{A}_i , $i = 1, 2, 3$, introduit dans la section 3 du chapitre 1 de la partie stationnaire, en utilisant l'inégalité de Hölder, on voit que

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{A}_i(f_\varepsilon) \phi \, dx \, dt \right| = \varepsilon \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \partial_j \rho_\varepsilon \mathcal{R}_{ij}(\phi) \, dx \, dt \right| \leq \varepsilon \int_0^T \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{0, \frac{2\beta}{\beta-1}, V} \|\phi\|_{0, \frac{2\beta}{\beta+1}, \mathbb{R}^3}$$

Grâce à l'hypothèse $\beta \geq 6$ qui implique que $2 < \frac{2\beta}{\beta-1} < \frac{10\beta-6}{3\beta+3}$, on peut interpoler les espaces de Lebesgue d'exposant correspondant et écrire que

$$\|\nabla \rho_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^{\frac{2\beta}{\beta-1}}(V))} \leq \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{0, 2, (0, T) \times V}^\alpha \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^{\frac{10\beta-6}{3\beta+3}}(V))}^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Des deux précédentes inégalités et des estimations (2.27) et (4.6), on tire la convergence

$$\mathcal{A}_i(f_\varepsilon) \rightarrow \mathcal{A}_i(f_\delta) \text{ dans } L^2(0, T; L^{\left(\frac{2\beta}{\beta+1}\right)' }(\mathbb{R}^3)), \quad i = 1, 2, 3.$$

On vient donc de vérifier que les hypothèses du corollaire I.3 sont satisfaites avec $p = \frac{\beta+1}{\beta}$, $r = \beta$, $\tilde{r} = \beta + 1 > 2$, $s = \frac{5\beta-3}{4\beta}$ et $w = \frac{2\beta}{\beta+1}$. Dénotant par $\overline{p_\delta(\rho_\delta)\rho_\delta}$ la limite faible de la suite $\{p_\delta(\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon\}_\varepsilon$, nous sommes donc assurés que

$$\overline{p_\delta(\rho_\delta)\rho_\delta} - \overline{p_\delta(\rho_\delta)\rho_\delta} = (2\mu_1 + \mu_2)\{\overline{\rho_\delta \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta} - \rho_\delta \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\} \text{ p.p. dans } (0, T) \times \Omega. \quad (5.15)$$

D'un autre côté, les hypothèses du lemme A.20 (monotonie de la pression) sont également satisfaites par la suite $\{\rho_\varepsilon\}_\varepsilon$, $s = \gamma, \beta$ et $\theta = 1$. Il en résulte que

$$0 \leq \overline{p_\delta(\rho_\delta)\rho_\delta} - \overline{p_\delta(\rho_\delta)\rho_\delta} = (2\mu_1 + \mu_2)\{\overline{\rho_\delta \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta} - \rho_\delta \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\} \text{ p.p. dans } (0, T) \times \Omega. \quad (5.16)$$

A présent, il faut se rappeler que $\operatorname{div} \mathbf{u}_\delta = \operatorname{div} \mathbf{U}_\infty = 0$ p.p. dans $(0, T) \times V \setminus \overline{\Omega}$ pour déduire de (5.16) que

$$\overline{\rho_\delta \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta} \geq \rho_\delta \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta \text{ p.p. dans } (0, T) \times V. \quad (5.17)$$

Revenons un instant sur la suite $\{(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)\}_\varepsilon$. En accord avec les propriétés listées dans le point (i) de la proposition II.2, le lemme I.5 dans lequel on pose $p = \beta$ et $f = \varepsilon \Delta \rho_\varepsilon$ garantit que l'équation de continuité (2.19) est prolongeable dans $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3)$. Sous les conditions $\lambda_1 > 0$ et $\left(\frac{\beta}{\lambda_1}\right)' \leq \frac{2\beta}{\beta+2}$, i.e. $0 < \lambda_1 \leq \frac{\beta}{2} - 1$, on se retrouve alors dans le cadre des hypothèses du lemme I.7 avec $p = \beta$, $\rho = \rho_\varepsilon$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\varepsilon$ et f le prolongement par zéro dans $(0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus V$ de $\varepsilon \Delta \rho_\varepsilon$. En conséquence, pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ de la classe (1.10) et (1.13) avec $\lambda_1 > 0$ et β à la place de γ , on a

$$\partial_t b(\rho_\varepsilon) + \operatorname{div}(b(\rho_\varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon) + \{\rho_\varepsilon b'(\rho_\varepsilon) - b(\rho_\varepsilon)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = f b'(\rho_\varepsilon) \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3). \quad (5.18)$$

Si de plus, on suppose que la fonction $b \in C^2([0, \infty))$ est une fonction convexe, il est clair que

$$\varepsilon \Delta b(\rho_\varepsilon) = b''(\rho_\varepsilon) |\nabla \rho_\varepsilon|^2 + b'(\rho_\varepsilon) \varepsilon \Delta \rho_\varepsilon \geq b'(\rho_\varepsilon) \varepsilon \Delta \rho_\varepsilon \text{ p.p. dans } (0, T) \times V,$$

inégalité que l'on peut aisément prolongée à $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ sous réserve que $b(0) = 0$. Autrement dit, pour toute fonction $b \in C^2([0, \infty))$ de la classe (1.10) et (1.13) avec $\lambda_1 > 0$, β à la place de γ et telle que $b(0) = 0$, on a

$$\varepsilon \Delta b(\rho_\varepsilon) \geq b'(\rho_\varepsilon) f \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}^3.$$

La prise en compte de cette inégalité dans (5.18) implique que

$$\begin{aligned} \partial_t b(\rho_\varepsilon) + \operatorname{div}(b(\rho_\varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon) + \{\rho_\varepsilon b'(\rho_\varepsilon) - b(\rho_\varepsilon)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon \\ - \varepsilon \Delta b(\rho_\varepsilon) \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Bien sûr, au vu des propriétés de régularité de $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ listées dans le point (i) de la proposition II.2, cette inégalité n'est pas seulement vraie au sens des distributions mais également p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}^3$. La fonction $b(s) = s \ln(s + h)$, $h \in (0, 1]$, est admissible dans (5.19). Pour cette même fonction, noter que p.p.t. $t \in (0, T)$, $b(\rho_\varepsilon(t)) \in W^{1, \frac{6\beta}{\beta+12}}(V)$,

$b'(\rho_\varepsilon(t)) \in W^{1, \frac{6\beta}{\beta+6}}(V)$ et $\nabla \rho_\varepsilon(t) \in W^{1, \frac{2\beta}{\beta+2}}(V)$. Puisque $\beta \geq 6$, on en déduit que p.p.t. $t \in (0, T)$, $b(\rho_\varepsilon(t))\mathbf{u}_\varepsilon(t)$, $\nabla b(\rho_\varepsilon(t)) \in W^{1, \frac{6\beta}{4\beta+12}}(V)$ et donc que

$$\gamma_0\{b(\rho_\varepsilon(t))\mathbf{u}_\varepsilon(t)\} \cdot \boldsymbol{\nu} = \gamma_0\{b(\rho_\varepsilon(t))\}\gamma_0\{\mathbf{u}_\varepsilon(t)\} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad (5.20)$$

$$\gamma_0\{\nabla b(\rho_\varepsilon(t))\} \cdot \boldsymbol{\nu} = \gamma_0\{b'(\rho_\varepsilon(t))\}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\rho_\varepsilon(t) = 0. \quad (5.21)$$

A l'aide de la formule de Stokes classique, de (5.20) et (5.21), il est possible d'intégrer l'inégalité (5.19) par rapport à la variable d'espace puis sur l'intervalle de temps $(0, \tau)$, $\tau \in [0, T]$, pour se ramener à

$$\int_0^\tau \int_V \frac{\rho_\varepsilon^2}{\rho_\varepsilon + h} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon \, dx \, dt \leq \int_V \{\rho_0 \ln(\rho_0 + h) - (\rho_\varepsilon \ln(\rho_\varepsilon + h))(\tau)\} \, dx, \quad \tau \in [0, T].$$

On passe alors à la limite $h \rightarrow 0^+$ en utilisant *e.g.* le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. On trouve que

$$\int_0^\tau \int_V \rho_\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon \, dx \, dt \leq \int_V \{\rho_0 \ln \rho_0 - (\rho_\varepsilon \ln \rho_\varepsilon)(\tau)\} \, dx, \quad \tau \in [0, T]. \quad (5.22)$$

Or, d'après le lemme I.1 appliqué à la suite $\{\rho_\varepsilon\}_\varepsilon \subset C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^\beta(V))$, bornée dans $L^\infty(0, T; L^\beta(V))$, on sait que pour tout $\tau \in [0, T]$, la suite $\{\|\rho_\varepsilon(\tau)\|_{0, \beta, V}\}_\varepsilon$ et donc la suite $\{\|(\rho_\varepsilon \ln \rho_\varepsilon)(\tau)\|_{0, p, V}\}_\varepsilon$, $p \in [1, \beta)$, est uniformément bornée par rapport à ε . Ainsi, modulo l'extraction de sous-suites, on peut supposer que

$$(\rho_\varepsilon \ln \rho_\varepsilon)(\tau) \rightharpoonup \overline{(\rho_\delta \ln \rho_\delta)(\tau)} \text{ dans } L^p(V), \quad p \in (1, \beta), \quad \tau \in [0, T].$$

On passe à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dans (5.22) et on obtient finalement l'inégalité suivante :

$$\int_0^\tau \int_V \overline{\rho_\delta \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta} \, dx \, dt \leq \int_V \{\rho_0 \ln \rho_0 - \overline{(\rho_\delta \ln \rho_\delta)(\tau)}\} \, dx, \quad \tau \in [0, T]. \quad (5.23)$$

D'un autre côté, pour $b(s) = s \ln s$, on sait que l'équation (2.30) est satisfaite dans $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3)$. Choissant comme fonction test dans cette équation $\varphi = \psi\phi$ avec $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$ et $\psi = 1$ dans V , on voit que

$$\partial_t \left(\int_V \rho_\delta \ln \rho_\delta \, dx \right) + \int_V \rho_\delta \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta \, dx = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T).$$

Ceci prouve que $\partial_t \left(\int_V \rho_\delta \ln \rho_\delta \, dx \right) \in L^2(0, T)$. Par ailleurs, comme on l'a fait remarquer plus haut, $\rho_\delta \in C^0([0, T]; L^p(V))$, $p \in [1, \beta)$. On a donc $\int_V \rho_\delta \ln \rho_\delta \, dx \in C^0([0, T])$. Ainsi, on peut intégrer l'égalité précédente sur l'intervalle de temps $(0, \tau)$, $\tau \in [0, T]$, pour se ramener à

$$\int_0^\tau \int_V \rho_\delta \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta \, dx \, dt = \int_V \{\rho_0 \ln \rho_0 - (\rho_\delta \ln \rho_\delta)(\tau)\} \, dx, \quad \tau \in [0, T]. \quad (5.24)$$

La comparaison des identités (5.23) et (5.24), complétée par la propriété (5.17) déduite de la compacité faible de la suite des pressions effectives, implique finalement l'inégalité

$$\int_V \overline{(\rho_\delta \ln \rho_\delta)(\tau)} \, dx \leq \int_V (\rho_\delta \ln \rho_\delta)(\tau) \, dx, \quad \tau \in [0, T]. \quad (5.25)$$

Puisque $\rho_\delta \ln \rho_\delta \leq \overline{\rho_\delta \ln \rho_\delta}$ p.p. dans $(0, T) \times V$, en fin de compte, on conclut que $\overline{\rho_\delta \ln \rho_\delta} = \rho_\delta \ln \rho_\delta$ p.p. dans $(0, T) \times V$. Autrement dit, la convergence faible commute avec une fonction strictement convexe. En accord avec le lemme A.18, il en résulte que

$$\rho_\varepsilon \rightarrow \rho_\delta \text{ dans } L^p((0, T) \times V) \cap L^q((0, T) \times K), \quad p \in [1, \beta), \quad q \in [1, \beta + 1), \quad (5.26)$$

K désignant tout sous-ensemble compact de Ω . En particulier, $\overline{p_\delta(\rho_\delta)} = p_\delta(\rho_\delta)$ p.p. dans $(0, T) \times \Omega$ et donc $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ est solution de l'équation de mouvement (2.32).

5.2 Inégalité d'énergie

A première vue, on remarque que le manque d'information sur la suite $\{\rho_\varepsilon^\beta\}_\varepsilon$ dans $V \setminus \overline{\Omega}$ est la cause de la perte de l'inégalité d'énergie sous forme différentielle. Expliquons brièvement comment le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dans l'inégalité (2.22) entraîne (2.33). A l'aide de (5.8), (5.10) et (5.26), on voit que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \frac{1}{2} \rho_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty|^2 dx \rightarrow \int_\Omega \frac{1}{2} \rho_\delta |\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty|^2 dx \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T), \\ & \int_0^\tau \int_\Omega \rho_\varepsilon \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty) dx dt \rightarrow \int_0^\tau \int_\Omega \rho_\delta \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty) dx dt, \quad \tau \in [0, T], \\ & \int_0^\tau \int_\Omega \{\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla \mathbf{U}_\infty - p_\delta(\rho_\varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{U}_\infty\} dx dt \\ & \rightarrow \int_0^\tau \int_\Omega \{\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{u}_\delta) : \nabla \mathbf{U}_\infty - p_\delta(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{U}_\infty\} dx dt, \quad \tau \in [0, T]. \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho_\delta$ dans $C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^\beta(V))$, pour tout $\tau \in [0, T]$ il est clair que $\rho_\varepsilon(\tau) \rightarrow \rho_\delta(\tau)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Il suffit alors d'utiliser la convexité de la fonction $s \mapsto P_\delta(s)$ et le théorème A.49 pour justifier le fait que

$$\int_V P_\delta(\rho_\delta)(\tau) dx \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_V P_\delta(\rho_\varepsilon) dx, \quad \tau \in [0, T].$$

Ensuite, en accord avec (5.3)-(5.5), il est clair que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, pour $\tau \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_\Omega \{\mu_1 |\nabla(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div}(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty)|^2\} dx dt \\ & \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\tau \int_\Omega \{\mu_1 |\nabla(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) |\operatorname{div}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty)|^2\} dx dt, \\ & \quad \varepsilon \int_0^\tau \int_\Omega \nabla \rho_\varepsilon \cdot \nabla(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty) \cdot \mathbf{U}_\infty dx dt \rightarrow 0, \\ & \int_0^\tau \int_\Omega \{\mu_1 \nabla \mathbf{U}_\infty : \nabla(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty) + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{U}_\infty) (\operatorname{div}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{U}_\infty))\} dx dt \\ & \rightarrow \int_0^\tau \int_\Omega \{\mu_1 \nabla \mathbf{U}_\infty : \nabla(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty) + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{U}_\infty) (\operatorname{div}(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty))\} dx dt. \end{aligned}$$

Ceci prouve que (2.33) est vraie dans $\mathcal{D}'(0, T)$ mais également p.p.t. $\tau \in (0, T)$ puisque $E_\delta(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta) \in L^\infty(0, T)$. Pour les mêmes raisons, le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dans l'inégalité d'énergie (2.22) dans laquelle $P_\delta(\cdot)$ est remplacé par $\Pi_\delta(\cdot)$ prouve la validité de (2.33) avec $\Pi_\delta(\cdot)$ à la place de $P_\delta(\cdot)$. Ainsi s'achève la preuve de la proposition II.3. \square

5.3 Comportement de la densité et conséquences

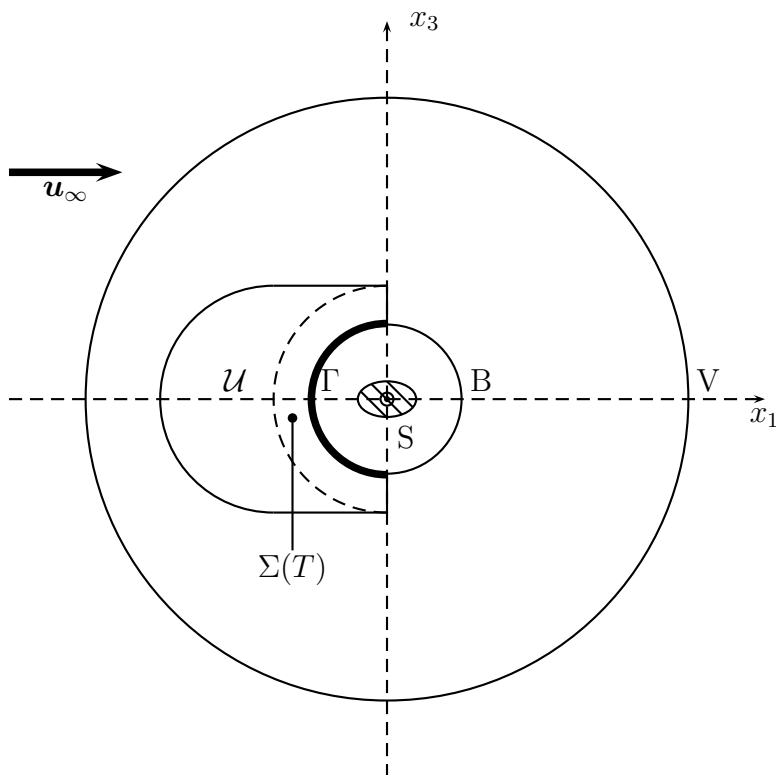
Dans cette sous-section, nous étudions le comportement au voisinage de la partie Γ de la frontière du domaine Ω par laquelle le fluide pénètre de la densité ρ_δ donnée par la proposition II.3. Nous montrons ensuite comment ce comportement implique un affinement de l'inégalité d'énergie (2.33) ainsi qu'une voie naturelle pour démontrer de la proposition II.4.

Pour commencer, noter que sans perte de généralité (quitte à effectuer un changement de repère par rotation), on peut supposer que $\mathbf{u}_\infty = (u_\infty^1, 0, 0)$, $u_\infty^1 > 0$. D'autre part, si on revient à la construction du champ de vecteurs \mathbf{U}_∞ et que l'on choisit $R > 0$ tel que $\frac{3}{2}R - \frac{1}{8} > (1 + \alpha) + T|\mathbf{u}_\infty|$ où $\alpha > 0$ est petit, alors $\mathbf{U}_\infty = \mathbf{u}_\infty$ dans $B_{(1+\alpha)+T|\mathbf{u}_\infty|} \setminus B_{\frac{7}{8}}$.

Soit $s \in [0, T]$ arbitrairement fixé. On introduit les ensembles

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{\{r\Gamma, r \in (1, 1 + \alpha)\} - \xi\mathbf{u}_\infty, \xi \in [0, T]\}, \\ \Sigma(\xi) &= \{\{r\Gamma, r \in (1, 1 + \alpha)\} - (T - \xi)\mathbf{u}_\infty\}, \xi \in [0, T]. \end{aligned}$$

Voici schématiquement la situation pour que le lecteur puisse se faire une idée :



Puisque l'équation de continuité (2.29) est satisfaite dans $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3)$, à l'aide du lemme de Friedrichs généralisé I.6, on peut la régulariser par rapport à la variable d'espace en utilisant la famille d'opérateurs de régularisation usuels $\{S_m\}_{m \in \mathbb{N}^*}$. On obtient

$$\begin{aligned} \partial_t S_m(\rho_\delta) + \operatorname{div}(S_m(\rho_\delta)\mathbf{u}_\delta) &= r_m \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ r_m &\rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, T; L_{loc}^{\frac{2\beta}{\beta+2}}(\mathbb{R}^3)) \text{ quand } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Avec le choix précédent de R dans la construction de \mathbf{U}_∞ , il en résulte que

$$\partial_t S_m(\rho_\delta) + \nabla S_m(\rho_\delta) \cdot \mathbf{u}_\infty = r_m \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathcal{U}.$$

Soit \tilde{B} une boule ouverte de $\Sigma(s)$ et $\tilde{B}(t)$ la boule résultant du transport de \tilde{B} à la vitesse \mathbf{u}_∞ à l'instant $t \in [0, T - s]$, *i.e.* $\tilde{B}(t) = \tilde{B} + t\mathbf{u}_\infty$. Etant donné que les champs $S_m(\rho_\delta)$ et \mathbf{u}_∞ sont continus sur $[0, T] \times \bar{\mathcal{U}}$ et à dérivées partielles bornées dans $L^\infty((0, T) \times \mathcal{U})$, on peut calculer la dérivée par rapport au temps de l'intégrale $\int_{\tilde{B}(t)} S_m(\rho_\delta)(t) dx$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tilde{B}(t)} S_m(\rho_\delta)(t) dx = \int_{\tilde{B}(t)} \{\partial_t S_m(\rho_\delta) + \nabla S_m(\rho_\delta) \cdot \mathbf{u}_\infty\}(t) dx = \int_{\tilde{B}(t)} r_m(t) dx.$$

En intégrant cette dernière identité sur l'intervalle (t_1, t_2) , $t_1, t_2 \in [0, T - s]$, on trouve que

$$\int_{\tilde{B}(t_2)} S_m(\rho_\delta)(t_2) dx - \int_{\tilde{B}(t_1)} S_m(\rho_\delta)(t_1) dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tilde{B}(t)} r_m(t) dx dt$$

d'où on déduit, en passant à la limite $m \rightarrow \infty$, que

$$\int_{\tilde{B}(t_2)} \rho_\delta(t_2) dx - \int_{\tilde{B}(t_1)} \rho_\delta(t_1) dx, \quad t_1, t_2 \in [0, T - s].$$

En particulier, ceci montre que

$$\int_{\tilde{B}(t)} \rho_\delta(t) dx = \int_{\tilde{B}} \rho_0 dx, \quad t \in [0, T - s].$$

Ainsi, pour tout point de Lebesgue x de ρ_0 dans $\Sigma(s)$, le point $x + t\mathbf{u}_\infty$ est un point de Lebesgue de $\rho_\delta(t)$ dans $\Sigma(s + t)$, $t \in [0, T - s]$ et donc, au vu des hypothèses (2.4) sur la condition initiale modifiée ρ_0 , on a

$$\forall x \in \Sigma(s), \quad \rho_\delta(t, x + t\mathbf{u}_\infty) = \rho_0(x), \quad t \in [0, T - s] \quad (5.27)$$

On suppose alors que $\rho_0 = \rho_\infty$ dans \mathcal{U} . Soit $(\tau, x) \in (0, T) \times \Sigma(T)$. Le point $y = x - \tau\mathbf{u}_\infty \in \Sigma(T - \tau)$. Il suffit alors d'utiliser (5.27) avec $s = T - \tau$ pour conclure que $\rho_\delta(\tau, x) = \rho_\delta(\tau, y + \tau\mathbf{u}_\infty) = \rho_\infty$. En résumé, sous la condition $\rho_0 = \rho_\infty$ dans \mathcal{U} , on a

$$\rho_\delta = \rho_\infty \text{ dans } (0, T) \times \Sigma(T). \quad (5.28)$$

Noter tout de même que pour que la nouvelle condition $\rho_0 = \rho_\infty$ dans \mathcal{U} soit compatible avec les hypothèses (2.4), il faut imposer à ρ_∞ la contrainte $0 < \underline{\rho} \leq \rho_\infty \leq \bar{\rho} < \infty$.

Montrons maintenant que (5.28) induit un affinement de l'inégalité d'énergie (2.33). Pour cela, il faut commencer par noter que d'après le lemme I.7 et la remarque I.2, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{V \setminus \bar{B}} P_\delta(\rho_\delta) \phi dx = \int_{V \setminus \bar{B}} P_\delta(\rho_\delta) \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \phi dx \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T), \quad \phi \in \mathcal{D}(V \setminus \bar{B}). \quad (5.29)$$

Soit la suite de fonctions $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}^*}$, $\phi_m(x) = w(m \operatorname{dist}(x, \partial(V \setminus \overline{B})))$, $x \in V \setminus \overline{B}$ où w est la fonction réelle à valeurs réelles introduite en (4.16). On pose

$$C_+^m = \{x \in V \setminus \overline{B}, \frac{1}{m} < \operatorname{dist}(x, \partial V) < \frac{2}{m}\},$$

$$C_-^m = \{x \in V \setminus \overline{B}, \frac{1}{m} < \operatorname{dist}(x, \partial B) < \frac{2}{m}\}, \quad C_{-,l}^m = C_-^m \cap \Sigma(T), \quad C_{-,r}^m = C_-^m \setminus \overline{C_{-,l}^m}.$$

On suppose m suffisamment grand pour que $C_+^m \cap \operatorname{supp} \mathbf{U}_\infty = \emptyset$ et $\Gamma_{1+\frac{2}{m}} \cap \Sigma(T) \neq \emptyset$ où $\Gamma_r = r\Gamma$, $r \in (1, \infty)$. Noter au passage qu'il est facile de vérifier que $\mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \phi_m = m(\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu})w'(m \operatorname{dist}(x, \partial(V \setminus \overline{B}))) \geq 0$ dans $C_{-,r}^m$, $\boldsymbol{\nu}$ désignant ici la normale extérieure à la surface ∂B . Ces notations en tête, à l'aide de la formule de Stokes classique, on peut calculer $\int_{V \setminus \overline{B}} P_\delta(\rho_\delta) \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \phi_m dx$ comme-suit :

$$\begin{aligned} & \int_{V \setminus \overline{B}} P_\delta(\rho_\delta) \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \phi_m dx \\ &= \int_{C_+^m} P_\delta(\rho_\delta) \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \phi_m dx + \int_{C_{-,l}^m} P_\delta(\rho_\infty) \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \phi_m dx + \int_{C_{-,r}^m} P_\delta(\rho_\delta) \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \phi_m dx \\ &\geq \int_{C_{-,l}^m} P_\delta(\rho_\infty) \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \phi_m dx = \int_{C_{-,l}^m} \operatorname{div}(P_\delta(\rho_\infty) \mathbf{u}_\infty \phi_m) dx = \int_{\partial C_{-,l}^m} P_\delta(\rho_\infty) (\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu}) \phi_m d\sigma \\ &\geq \int_{\Gamma_{1+\frac{2}{m}}} P_\delta(\rho_\infty) (\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu}) d\sigma \geq \int_\Gamma P_\delta(\rho_\infty) (\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu}) d\sigma. \end{aligned}$$

D'après (5.29) avec $\phi = \phi_m$, on sait que $\frac{d}{dt} \int_{V \setminus \overline{B}} P_\delta(\rho_\delta) \phi_m dx \in L^1(0, T)$. Puisque l'on sait également que $P_\delta(\rho_\delta) \phi_m \in L^\infty(0, T)$, en accord avec le lemme I.10, on a

$$\begin{aligned} & \int_{V \setminus \overline{B}} P_\delta(\rho_\delta)(\tau) \phi_m dx - \int_{V \setminus \overline{B}} P_\delta(\rho_\delta)(s) \phi_m dx \\ &\geq \int_s^\tau \int_\Gamma P_\delta(\rho_\infty) (\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu}) d\sigma dt \text{ p.p.t. } s, \tau \in (0, T). \end{aligned} \quad (5.30)$$

On passe à la limite $m \rightarrow \infty$ dans (5.30). On trouve que

$$\begin{aligned} & \int_{V \setminus \overline{B}} P_\delta(\rho_\delta)(\tau) dx - \int_{V \setminus \overline{B}} P_\delta(\rho_\delta)(s) dx \\ &\geq \int_s^\tau \int_\Gamma P_\delta(\rho_\infty) (\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu}) d\sigma dt \text{ p.p.t. } s, \tau \in (0, T). \end{aligned} \quad (5.31)$$

On rappelle que le paramètre $\delta \in (0, 1]$ est fixe. Puisque $\rho_\delta \in C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^\beta(V))$, il est clair que pour tout $s \in [0, T]$, $\rho_\delta(s) \rightarrow \rho_\delta(0)$ dans $L^\beta(V)$ lorsque $s \rightarrow 0^+$. Suite à cela, puisque $P_\delta(\cdot)$ est une fonction convexe sur \mathbb{R}_+ , on peut utiliser le théorème A.49 (cf. p. 222) pour montrer que

$$\int_{V \setminus \overline{B}} P_\delta(\rho_0) dx = \int_{V \setminus \overline{B}} P_\delta(\rho_\delta(0)) dx \leq \liminf_{s \rightarrow 0^+} \int_{V \setminus \overline{B}} P_\delta(\rho_\delta(s)) dx.$$

Insérée dans le passage à la limite $s \rightarrow 0^+$ dans (5.31), cette observation nous permet de conclure que p.p.t. $\tau \in (0, T)$,

$$\int_{V \setminus \bar{B}} P_\delta(\rho_\delta)(\tau) dx - \int_{V \setminus \bar{B}} P_\delta(\rho_0) dx \geq \int_0^\tau \int_\Gamma P_\delta(\rho_\infty)(\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu}) d\sigma dt. \quad (5.32)$$

Pour des raisons évidentes, il n'est pas difficile de se convaincre que l'on peut également montrer que

$$\int_{B \setminus \bar{\Omega}} P_\delta(\rho_\delta)(\tau) dx = \int_{B \setminus \bar{\Omega}} P_\delta(\rho_0) dx, \quad \tau \in [0, T]. \quad (5.33)$$

Il suffit alors d'insérer les identités (5.32) et (5.33) dans l'inégalité d'énergie (2.33) pour affiner celle-ci et récupérer (2.35).

On considère maintenant une fonction $\varphi \in \mathcal{D}((0, T) \times (B \cup \Gamma \cup \Sigma(T)))$ comme fonction test dans l'équation de continuité (2.29). A nouveau, à l'aide de (5.28), on peut écrire que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_V \{\rho_\delta \partial_t \varphi + \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \cdot \nabla \varphi\} dx dt \\ &= \int_0^T \int_B \{\rho_\delta \partial_t \varphi + \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \cdot \nabla \varphi\} dx dt + \int_0^T \int_{\Sigma(T)} \rho_\infty \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \varphi dx dt. \end{aligned}$$

La formule de Stokes classique nous permet alors de conclure que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_B \{\rho_\delta \partial_t \varphi + \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \cdot \nabla \varphi\} dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Gamma \rho_\infty (\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu}) \varphi d\sigma dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}((0, T) \times (B \cup \Gamma \cup \Sigma(T))). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Par densité, (5.34) reste vraie pour toute fonction test $\varphi \in C^\infty([0, T] \times \bar{B})$ telle que $\varphi = 0$ dans $\{0, T\} \times \bar{B}$ et dans $(0, T) \times (\partial B \setminus \Gamma)$. A partir de maintenant, on dénote encore par $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ le prolongement par $(\rho_\infty, \mathbf{U}_\infty)$ dans $(0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus B$ de la restriction à $(0, T) \times B$ de $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$. On considère une fonction $\varphi \in \mathcal{D}((0, T) \times (\mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma)))$. Alors il est clair que (5.34), les propriétés du champ \mathbf{U}_∞ et la formule de Stokes classique justifient le calcul ci-contre :

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \{\rho_\delta \partial_t \varphi + \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \cdot \nabla \varphi\} dx dt \\ &= -\int_0^T \int_B \{\rho_\delta \partial_t \varphi + \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \cdot \nabla \varphi\} dx dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}} \rho_\infty \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \varphi dx dt \\ &= -\int_0^T \int_\Gamma \rho_\infty (\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu}) \varphi d\sigma dt - \int_0^T \int_{V \setminus \bar{B}} \operatorname{div}(\rho_\infty \mathbf{U}_\infty \varphi) dx dt = 0. \end{aligned}$$

En résumé, on vient de démontrer que

$$\partial_t \rho_\delta + \operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times (\mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma))). \quad (5.35)$$

Le lemme I.7 et le corollaire I.1 s'appliquent et garantissent respectivement que le couple $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ ainsi construit est solution dans $\mathcal{D}'((0, T) \times (\mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma)))$ de l'équation de

continuité renormalisée (2.30) pour toute fonction b de la classe (1.10), (1.11) et (1.13) avec β à la place de γ et de l'équation (2.31) pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$ et tout $k > 0$. Enfin, puisqu'aucune modification n'a été faite dans Ω , $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)$ est bien solution de l'équation de mouvement (2.32) au sens des distributions dans $(0, T) \times \Omega$ et p.p.t. $\tau \in (0, T)$ satisfait l'inégalité d'énergie (2.35). En d'autres termes, la proposition II.4 est démontrée. \square

5.4 Bornes uniformes

Dans cette sous-section, on poursuit l'étude de la nouvelle suite $\{(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)\}_\delta$ provenant de la proposition II.4. Partant de l'inégalité d'énergie (2.35), on dérive les bornes (2.37)-(2.40) et (2.41).

Dans un premier temps, en s'inspirant des arguments présentés à la sous-section 3.3, nous affirmons qu'il est facile de vérifier la validité des estimations (2.37)-(2.40) à partir de l'inégalité d'énergie (2.35).

Soient $\theta > 0$ et $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $b(s) = s^\theta$. Cette fonction est admissible dans l'équation (2.31) qui à ce stade, on le rappelle, est satisfaite dans $\mathcal{D}'((0, T) \times (\mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma)))$. De plus, si $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dénote la suite d'opérateurs de régularisation usuels par rapport à la variable d'espace, à l'aide du lemme de Friedrichs généralisé I.6 et à partir de l'équation (2.31), on peut écrire

$$\begin{aligned} \partial_t S_n[b_k(\rho_\delta)] + \operatorname{div}(S_n[b_k(\rho_\delta)]\mathbf{u}_\delta) + S_n[\{\rho_\delta(b_k)_+'(\rho_\delta) - b_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta] \\ = r_n \text{ p.p. dans } (0, T) \times (\mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma)) \end{aligned} \quad (5.36)$$

où $r_n \rightarrow 0$ dans $L^2(0, T; L^r_{loc}(\mathbb{R}^3))$, $r \leq 2$. Puisque $|\partial B \setminus \Gamma| = 0$, cette égalité est vraie p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}^3$. En conséquence, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \partial_t(S_n[b_k(\rho_\delta)]\phi) + \operatorname{div}(S_n[b_k(\rho_\delta)]\mathbf{u}_\delta\phi) + S_n[\{\rho_\delta(b_k)_+'(\rho_\delta) - b_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta]\phi \\ = S_n[b_k(\rho_\delta)]\mathbf{u}_\delta \cdot \nabla \phi + r_n\phi \text{ p.p. dans } (0, T) \times \Omega \end{aligned} \quad (5.37)$$

Soit K un sous-ensemble compact arbitraire de Ω . Alors il est clair qu'il existe toujours un sous-domaine borné à frontière Lipschitzienne Ω' de Ω tel que $K \subset \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$. On pose

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) &= \psi(t)\tilde{\varphi}(t, x), \quad \psi \in \mathcal{D}(0, T), \quad 0 \leq \psi \leq 1, \\ \tilde{\varphi}(t, x) &= \mathcal{B}[S_n[b_k(\rho_\delta)](t)\phi - \int_{\Omega'} S_n[b_k(\rho_\delta)](t)\phi dy](x), \\ \phi &\in \mathcal{D}(\Omega'), \quad 0 \leq \phi \leq 1, \quad \phi = 1 \text{ dans } K, \quad |\nabla \phi| \leq c(K). \end{aligned} \quad (5.38)$$

où $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2, \mathcal{B}^3)$ dénote l'opérateur de Bogovskiï introduit dans le lemme B.1 dans lequel on considère $G = \Omega'$ (Ω' est un domaine borné à frontière Lipschitzienne), lemme qui en particulier permet de justifier que p.p.t. $t \in (0, T)$,

$$\|\nabla \varphi(t)\|_{0,p,\Omega'} \leq c(\Omega', p)\|\psi(t)S_n[b_k(\rho_\delta)](t)\phi\|_{0,p,\Omega'}, \quad p \in (1, \infty). \quad (5.39)$$

En conséquence, il est clair que $\varphi \in [L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega'))]^3$, $p \in (1, \infty)$. Par ailleurs, d'après (5.37), p.p.t. $t \in (0, T)$, on a

$$\begin{aligned}
 \partial_t \varphi(t) &= \psi'(t) \tilde{\varphi}(t) + \psi(t) \mathcal{B}[\partial_t(S_n[b_k(\rho_\delta(t))])\phi] - \int_{\Omega'} \partial_t(S_n[b_k(\rho_\delta(t))])\phi \, dy \\
 &= \psi'(t) \tilde{\varphi}(t) - \psi(t) \mathcal{B}[\operatorname{div}(S_n[b_k(\rho_\delta(t))])\mathbf{u}_\delta(t)\phi] - \int_{\Omega'} \operatorname{div}(S_n[b_k(\rho_\delta(t))])\mathbf{u}_\delta(t)\phi \, dy \\
 &\quad - \psi(t) \mathcal{B}[S_n[\{\dots\}] \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta(t)\phi] - \int_{\Omega'} S_n[\{\dots\}] \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta(t)\phi \, dy \\
 &\quad + \psi(t) \mathcal{B}[S_n[b_k(\rho_\delta(t))]\mathbf{u}_\delta(t) \cdot \nabla \phi] - \int_{\Omega'} S_n[b_k(\rho_\delta(t))\mathbf{u}_\delta(t)] \cdot \nabla \phi \, dy \\
 &\quad + \psi(t) \mathcal{B}[r_n(t)\phi] - \int_{\Omega'} r_n(t)\phi \, dy = \sum_{i=1}^5 \boldsymbol{\eta}_i(t) \text{ p.p. dans } \Omega' \tag{5.40}
 \end{aligned}$$

où les points de suspension \dots entre accolades remplacent le terme $\rho_\delta(b_k)'_+(\rho_\delta) - b_k(\rho_\delta)$ et ce uniquement pour éviter un dépassement de ligne. Noter que p.p.t. $t \in (0, T)$, $S_n[b_k(\rho_\delta(t))]\mathbf{u}_\delta(t)\phi \in [L^6(\Omega')]^3$ et $S_n[b_k(\rho_\delta(t))]\mathbf{u}_\delta(t)\phi \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega'} = 0$. Alors, en accord avec le lemme B.1, l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Sobolev, l'inégalité de Young sur la convolution et la définition de la fonction b_k , $b(s) = s^\theta$, p.p.t. $t \in (0, T)$, on voit que

$$\begin{aligned}
 \|\boldsymbol{\eta}_1(t)\|_{0, \frac{2\gamma}{\gamma-1}, \Omega'} &\leq c(\Omega', \gamma) |\psi'(t)| \|\nabla \mathcal{B}[S_n[b_k(\rho_\delta(t))])\phi - \int_{\Omega'} S_n[b_k(\rho_\delta(t))]\phi \, dy\|_{0, \frac{6\gamma}{5\gamma-3}, \Omega'} \\
 &\leq c(\Omega', \gamma) |\psi'(t)| \|S_n[b_k(\rho_\delta(t))]\phi\|_{0, \frac{6\gamma}{5\gamma-3}, \Omega'} \leq c(\Omega', \gamma) |\psi'(t)| \|b_k(\rho_\delta(t))\|_{0, \frac{6\gamma}{5\gamma-3}, \Omega} \\
 &\leq c(\Omega', \gamma) |\psi'(t)| \|\rho_\delta^\theta(t)\|_{0, \frac{6\gamma}{5\gamma-3}, \Omega} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\boldsymbol{\eta}_2(t)\|_{0, \frac{6\gamma}{5\gamma-6}, \Omega'} &\leq c(\Omega', \gamma) \|S_n[b_k(\rho_\delta(t))]\mathbf{u}_\delta(t)\phi\|_{0, \frac{6\gamma}{5\gamma-6}, \Omega'} \\
 &\leq c(\Omega', \gamma) \|S_n[b_k(\rho_\delta(t))]\|_{0, \frac{3\gamma}{2\gamma-3}, \Omega} \|\mathbf{u}_\delta(t)\|_{0,6,\Omega} \leq c(\Omega', \gamma) \|b_k(\rho_\delta(t))\|_{0, \frac{3\gamma}{2\gamma-3}, \Omega} \|\mathbf{u}_\delta(t)\|_{0,6,\Omega} \\
 &\leq c(\Omega', \gamma) \|\rho_\delta^\theta(t)\|_{0, \frac{3\gamma}{2\gamma-3}, \Omega} \|\mathbf{u}_\delta(t)\|_{0,6,\Omega} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\boldsymbol{\eta}_3(t)\|_{0,p',\Omega'} &\leq c(\Omega', p) \psi(t) \|\nabla \mathcal{B}[S_n[\{\dots\}] \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta(t)\phi] - \int_{\Omega'} S_n[\{\dots\}] \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta(t)\phi \, dy\|_{0, \frac{3p'}{3+p'}, \Omega'} \\
 &\leq c(\Omega', p) \|\psi(t) S_n[\{\rho_\delta(b_k)'_+(\rho_\delta) - b_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta(t)\phi]\|_{0, \frac{3p'}{3+p'}, \Omega'}
 \end{aligned}$$

où

$$p = \frac{6\gamma}{\gamma+6} \text{ si } \frac{3}{2} < \gamma < 6 \text{ et } p \in \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}, \frac{6\gamma}{\gamma+6}\right) \text{ si } \gamma \geq 6 ;$$

$$\begin{aligned}
 &\|\boldsymbol{\eta}_4(t)\|_{0, \frac{6\gamma}{5\gamma-6}, \Omega'} \\
 &\leq c(\Omega', \gamma) \|\nabla \mathcal{B}[S_n[b_k(\rho_\delta(t))]\mathbf{u}_\delta(t) \cdot \nabla \phi] - \int_{\Omega'} S_n[b_k(\rho_\delta(t))]\mathbf{u}_\delta(t) \cdot \nabla \phi \, dy\|_{0, \frac{6\gamma}{5\gamma-6}, \Omega'} \\
 &\leq c(\Omega', K, \gamma) \|S_n[b_k(\rho_\delta(t))]\phi\|_{0, \frac{3\gamma}{2\gamma-3}, \Omega'} \|\mathbf{u}_\delta(t)\|_{0,6,\Omega} \\
 &\leq c(\Omega', K, \gamma) \|b_k(\rho_\delta(t))\|_{0, \frac{3\gamma}{2\gamma-3}, \Omega} \|\mathbf{u}_\delta(t)\|_{0,6,\Omega} \leq c(\Omega', K, \gamma) \|\rho_\delta^\theta(t)\|_{0, \frac{3\gamma}{2\gamma-3}, \Omega} \|\mathbf{u}_\delta(t)\|_{0,6,\Omega}
 \end{aligned}$$

et enfin que

$$\|\boldsymbol{\eta}_5(t)\|_{0, \frac{2\gamma}{\gamma-1}, \Omega'} \leq c(\Omega', \gamma) \|r_n(t)\|_{0, \frac{6\gamma}{5\gamma-3}, \Omega'}.$$

Suite à cela, sous les conditions $\theta \leq \frac{5}{6}\gamma - \frac{1}{2}$, $\theta \leq \frac{2}{3}\gamma - 1$, les estimations (2.37) et (2.40) entraînent que

$$\|\boldsymbol{\eta}_1\|_{[L^1(0,T;L^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega'))]^3} \leq c(T, \Omega', \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \int_0^T |\psi'| dt, \quad (5.41)$$

$$\|\boldsymbol{\eta}_2\|_{[L^2(0,T;L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-6}}(\Omega'))]^3} \leq c(T, \Omega', \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} & \|\boldsymbol{\eta}_3\|_{[L^{(\frac{2}{1-\alpha(p)})'}(0,T;L^{p'}(\Omega'))]^3} \\ & \leq c(\Omega', p) \|\psi S_n[\{\rho_\delta(b_k)_+(\rho_\delta) - b_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta] \phi\|_{[L^{(\frac{2}{1-\alpha(p)})'}(0,T;L^{\frac{3p'}{3+p'}}(\Omega'))]^3} \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\|\boldsymbol{\eta}_4\|_{[L^2(0,T;L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-6}}(\Omega'))]^3} \leq c(T, \Omega', K, \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}), \quad (5.44)$$

$$\|\boldsymbol{\eta}_5\|_{[L^1(0,T;L^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega'))]^3} \leq c(T, \Omega', \gamma) \|r_n\|_{L^2(0,T;L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-3}}(\Omega'))}. \quad (5.45)$$

où $\alpha(p) \in [0, 1]$ désigne l'exposant qui apparaît dans l'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_{0,p,\Omega'} \leq \|f\|_{0, \frac{2\gamma}{\gamma+1}, \Omega'}^{\alpha(p)} \|f\|_{0, \frac{6\gamma}{\gamma+6}, \Omega'}^{1-\alpha(p)}, \quad f \in L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega') \cap L^{\frac{6\gamma}{\gamma+6}}(\Omega'), \quad p \in \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}, \frac{6\gamma}{\gamma+6}\right].$$

Lorsque $\frac{3}{2} < \gamma < 6$ ($p = \frac{6\gamma}{\gamma+6}$), il est bon de noter que (5.43) peut être précisée à l'aide de l'inégalité de Young sur la convolution, de l'inégalité de Hölder et de la définition de la fonction b_k , $b(s) = s^\theta$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\eta}_3\|_{[L^2(0,T;L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-6}}(\Omega'))]^3} & \leq c(\Omega', \gamma) \|\psi S_n[\{\rho_\delta(b_k)_+(\rho_\delta) - b_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta] \phi\|_{[L^2(0,T;L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-6}}(\Omega'))]^3} \\ & \leq c(\Omega', \gamma) \|\rho_\delta^\theta\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{3\gamma}{2\gamma-3}}(\Omega))} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\|_{0,2,(0,T) \times \Omega}. \end{aligned}$$

En conséquence, lorsque $\frac{3}{2} < \gamma < 6$, sous la condition $\theta \leq \frac{7}{6}\gamma - 1$, l'estimation (2.37) entraîne que

$$\|\boldsymbol{\eta}_3\|_{[L^2(0,T;L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-6}}(\Omega'))]^3} \leq c(T, \Omega', \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}). \quad (5.46)$$

Dans la suite, nous démontrons l'estimation (2.41) lorsque $\frac{3}{2} < \gamma < 6$, puis nous indiquons au lecteur les idées pour démontrer celle-ci lorsque $\gamma \geq 6$. Soit dit en passant, on rappelle que lorsque $\gamma \geq 6$, le paramètre δ peut directement prendre la valeur $\delta = 0$ puisque l'introduction de la pression artificielle dans le système d'origine n'est pas nécessaire.

Soit $\frac{3}{2} < \gamma < 6$. D'après (5.41)-(5.45), il est clair que la fonction $\boldsymbol{\varphi}$, introduite en (5.38) satisfait $\partial_t \boldsymbol{\varphi} \in [L^1(0, T; L^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega'))]^3 + [L^2(0, T; L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-6}}(\Omega'))]^3$. Ainsi, si l'on se réfère à la remarque II.9, cette fonction $\boldsymbol{\varphi}$ est une fonction test admissible de l'équation de

mouvement (2.32). En conséquence, on a

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \psi \int_{\Omega'} (a\rho_\delta^\gamma + \delta\rho_\delta^\beta) S_n[b_k(\rho_\delta)] \phi \, dx \, dt \\
 &= \int_0^T \psi \left\{ \left(\int_{\Omega'} (a\rho_\delta^\gamma + \delta\rho_\delta^\beta) \, dx \right) \times \left(\int_{\Omega'} S_n[b_k(\rho_\delta)] \phi \, dy \right) \right\} dt \\
 &+ \int_0^T \int_{\Omega'} \{ \mu_1 \nabla \mathbf{u}_\delta : \nabla \boldsymbol{\varphi} + (\mu_1 + \mu_2) (\operatorname{div} \mathbf{u}_\delta) (\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}) \} \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega'} \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dt \\
 &- \int_0^T \int_{\Omega'} \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta : \nabla \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega'} \rho_\delta \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dt = \sum_{i=1}^5 I_i. \quad (5.47)
 \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on majore chaque intégrale I_i , $i = 1, \dots, 5$. Dans chaque majoration, on utilisera systématiquement une combinaison des arguments suivants : l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Sobolev, (5.39), l'inégalité de Young sur la convolution, la définition de la fonction b_k , $b(s) = s^\theta$, et enfin les estimations (2.37)-(2.40). Afin de ne pas alourdir la présentation, on ne le répétera pas à chaque fois. Ainsi, sous la condition $\theta \leq \gamma$, il est clair que

$$\begin{aligned}
 |I_1| &\leq c(T, \Omega', \rho_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \|S_n[b_k(\rho_\delta)]\|_{0,1,(0,T)\times\Omega} \\
 &\leq c(T, \Omega', \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \|\rho_\delta^\theta\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{\gamma}{\theta}}(\Omega))} \leq c(T, \Omega', \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}).
 \end{aligned}$$

En ce qui concerne l'intégrale I_2 , sous la condition $\theta \leq \frac{\gamma}{2}$ et à l'aide de (5.39), on peut la majorer par

$$\begin{aligned}
 |I_2| &\leq c \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}_\delta\|_{0,2,\Omega} \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{0,2,\Omega'} \, dt \leq c(\Omega') \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}_\delta\|_{0,2,\Omega} \|S_n[b_k(\rho_\delta)]\|_{0,2,\Omega} \, dt \\
 &\leq c(T, \Omega', \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \|\rho_\delta^\theta\|_{0,2,(0,T)\times\Omega} \leq c(T, \Omega', \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}).
 \end{aligned}$$

Pour ce qui est de l'intégrale I_3 , il suffit de la décomposer en l'écrivant

$$- \int_0^T \int_{\Omega'} \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \cdot \left(\sum_{i=1}^5 \boldsymbol{\eta}_i \right) \, dx \, dt$$

et, sous les conditions $\theta \leq \frac{5}{6}\gamma - \frac{1}{2}$, $\theta \leq \frac{2}{3}\gamma - 1$ et $\theta \leq \frac{7}{6}\gamma - 1$, d'utiliser (5.41)-(5.45) pour finalement obtenir que

$$|I_3| \leq c(T, \Omega', K, \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \left(1 + \|r_n\|_{L^2(0,T;L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-3}}(\Omega'))} \right).$$

Enfin, sous les conditions $\theta \leq \frac{2}{3}\gamma - 1$ et $\theta \leq \gamma - 1$, dans les arguments évoqués plus haut, complétés par les injections de Sobolev et l'inégalité de Poincaré, se trouve la justification des majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
 |I_4| &\leq \int_0^T \|\rho_\delta\|_{0,\gamma,\Omega} \|\mathbf{u}_\delta\|_{0,6,\Omega}^2 \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{0,\frac{3\gamma}{2\gamma-3},\Omega'} \, dt \\
 &\leq c(\Omega', \gamma) \int_0^T \|\rho_\delta\|_{0,\gamma,\Omega} \|\mathbf{u}_\delta\|_{0,6,\Omega}^2 \|S_n[b_k(\rho_\delta)]\|_{0,\frac{3\gamma}{2\gamma-3},\Omega} \, dt \\
 &\leq c(\Omega', \gamma) \int_0^T \|\rho_\delta\|_{0,\gamma,\Omega} \|\mathbf{u}_\delta\|_{0,6,\Omega}^2 \|\rho_\delta^\theta\|_{0,\frac{3\gamma}{2\gamma-3},\Omega} \, dt \leq c(T, \Omega', \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f})
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|I_5| &\leq \int_0^T \|\rho_\delta\|_{0,\gamma,\Omega} \|\mathbf{f}\|_{0,\infty,\Omega} \|\varphi\|_{0,\gamma',\Omega'} dt \\
&\leq c(\Omega', \gamma) \int_0^T \|\rho_\delta\|_{0,\gamma,\Omega} \|\mathbf{f}\|_{0,\infty,\Omega} \|\nabla\varphi\|_{0,\gamma',\Omega'} dt \\
&\leq c(\Omega', \gamma) \int_0^T \|\rho_\delta\|_{0,\gamma,\Omega} \|\mathbf{f}\|_{0,\infty,\Omega} \|S_n[b_k(\rho_\delta)]\|_{0,\gamma',\Omega} dt \\
&\leq c(\Omega', \gamma) \int_0^T \|\rho_\delta\|_{0,\gamma,\Omega} \|\mathbf{f}\|_{0,\infty,\Omega} \|\rho_\delta^\theta\|_{0,\gamma',\Omega} dt \leq c(T, \Omega', \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}).
\end{aligned}$$

A ce stade, nous laissons au lecteur vérifier que toutes les conditions imposées à θ tout au long de ces majorations induisent que le coefficient optimal est $\theta = \frac{2}{3}\gamma - 1$. Ceci étant, les majorations des intégrales I_i , $i = 1, \dots, 5$, insérées dans (5.47) montrent que pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$, $0 \leq \psi \leq 1$ et toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega')$, $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 1$ dans un sous-ensemble compact K de $\Omega' \subset \Omega$, $|\nabla\phi| \leq c(K)$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \psi \int_{\Omega'} (a\rho_\delta^\gamma + \delta\rho_\delta^\beta) S_n[b_k(\rho_\delta)] \phi dx dt \\
&\leq c(T, \Omega', K, \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \left(1 + \int_0^T |\psi'| dt + \|r_n\|_{L^2(0,T;L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-3}}(\Omega'))}\right). \quad (5.48)
\end{aligned}$$

On considère alors dans (5.48) $\psi = \psi_m$ avec $\psi_m(t) = w(m \times \min(t, T - t))$ et w définie en (4.16), puis on passe à la limite $m \rightarrow \infty$. Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega')$, $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 1$ dans un sous-ensemble compact K de $\Omega' \subset \Omega$, $|\nabla\phi| \leq c(K)$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega'} (a\rho_\delta^\gamma + \delta\rho_\delta^\beta) S_n[b_k(\rho_\delta)] \phi dx dt \\
&\leq c(T, \Omega', K, \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \left(1 + \|r_n\|_{L^2(0,T;L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-3}}(\Omega'))}\right). \quad (5.49)
\end{aligned}$$

Pour conclure à la validité de l'estimation (2.41), il suffit dans un premier temps de passer à la limite $n \rightarrow \infty$ à l'aide du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, du fait que $\frac{6\gamma}{5\gamma-3} \leq 2$ et de la convergence $r_n \rightarrow 0$ dans $L^2(0, T; L^2_{loc}(\mathbb{R}^3))$. On obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega'} (a\rho_\delta^\gamma + \delta\rho_\delta^\beta) b_k(\rho_\delta) \phi dx dt \leq c(T, \Omega, K, \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}). \quad (5.50)$$

Enfin, il suffit d'utiliser le lemme de Fatou pour le passage à la limite $k \rightarrow \infty$.

Lorsque $\gamma \geq 6$ et $\theta = \frac{2}{3}\gamma - 1$, puisque $\gamma > \frac{3}{2}$ on a

$$\frac{2\gamma}{\gamma+1} \leq p = \frac{6(\gamma+\theta)}{5(\gamma+\theta)-6\theta} = \frac{3(10\gamma-6)}{13\gamma+3} \leq \frac{6\gamma}{\gamma+6}, \quad \alpha(p) = \frac{4\gamma+6}{5\gamma-3}, \quad 1-\alpha(p) = \frac{\gamma+3}{5\gamma-3}.$$

En conséquence, l'identité (5.47) est encore vraie pour φ la fonction introduite en (5.38). Les seuls changements résident dans la majoration des intégrales I_2 et I_3 de l'identité

(5.47). En effet, d'après l'inégalité de Hölder, (5.39) et les propriétés de la fonction b_k , $b(s) = s^\theta$, on a

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq c \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}_\delta\|_{0,2,\Omega} \|\nabla \varphi\|_{0,2,\Omega'} dt \leq c(\Omega') \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}_\delta\|_{0,2,\Omega} \|\psi S_n[b_k(\rho_\delta)]\phi\|_{0,2,\Omega} dt \\ &\leq c(T, \Omega', \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \|\psi S_n[b_k(\rho_\delta)]\phi\|_{0,2,(0,T)\times\Omega'} \\ &\leq c(T, \Omega', \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \|\psi S_n[b_k(\rho_\delta)]\phi\|_{0, \frac{\gamma+\theta}{\theta}, (0,T)\times\Omega'}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Ensuite, en remarquant que pour $p = \frac{6(\gamma+\theta)}{5(\gamma+\theta)-6\theta}$, on a $q \equiv \left(\frac{2}{1-\alpha(p)}\right)' = \frac{3p'}{3+p'}$, à l'aide de (5.43) et des estimations (2.37) et (2.40), on majore l'intégrale $-\int_0^T \int_{\Omega'} \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \cdot \boldsymbol{\eta}_3 dx dt$ par

$$c(\Omega', \gamma) \|\rho_\delta \mathbf{u}_\delta\|_{L^{\frac{2}{1-\alpha(p)}}(0,T;L^p(\Omega))} \|\psi S_n[\{\rho_\delta(b_k)'_+(\rho_\delta) - b_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta]\phi\|_{0,q,(0,T)\times\Omega'}.$$

En accord avec les estimations (2.37) et (2.40), il est clair que ce dernier terme peut lui-même être majoré par

$$c(T, \Omega, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \|\psi S_n[\{\rho_\delta(b_k)'_+(\rho_\delta) - b_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta]\phi\|_{0,q,(0,T)\times\Omega'}.$$

En suivant les arguments présentés dans le cas où $\frac{3}{2} < \gamma < 6$ et complétés par l'inégalité de Young, au lieu de trouver (5.49), on aura

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega'} (a\rho_\delta^\gamma + \delta\rho_\delta^\beta) S_n[b_k(\rho_\delta)]\phi dx dt \\ &\leq c(T, \Omega', K, \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \left\{ (1 + \|r_n\|_{L^2(0,T;L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-3}}(\Omega'))}) \right. \\ &\quad \left. + (\|S_n[b_k(\rho_\delta)]\phi\|_{0, \frac{\gamma+\theta}{\theta}, (0,T)\times\Omega'} + \|S_n[\{\rho_\delta(b_k)'_+(\rho_\delta) - b_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta]\phi\|_{0,q,(0,T)\times\Omega'}) \right\}. \end{aligned}$$

Il suffira ensuite de passer à la limite $n \rightarrow \infty$ dans cette inégalité à l'aide du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, du fait que $\frac{6\gamma}{5\gamma-3} \leq 2$ et de la convergence $r_n \rightarrow 0$ dans $L^2(0, T; L^2_{loc}(\mathbb{R}^3))$, puis d'utiliser l'inégalité de Hölder, l'estimation (2.40) et les propriétés de la fonction b_k , $b(s) = s^\theta$ pour justifier la suivante :

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega'} (a\rho_\delta^\gamma + \delta\rho_\delta^\beta) b_k(\rho_\delta) \phi dx dt \leq c(T, \Omega', K, \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \times \\ &\quad \times (1 + \|S_n[b_k(\rho_\delta)]\phi\|_{0, \frac{\gamma+\theta}{\theta}, (0,T)\times\Omega'} + \|\{\rho_\delta(b_k)'_+(\rho_\delta) - b_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\phi\|_{0,q,(0,T)\times\Omega'}) \\ &\leq c(T, \Omega', K, \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) (1 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\|_{0,2,(0,T)\times\Omega}) \|b_k(\rho_\delta)\phi\|_{0, \frac{\gamma+\theta}{\theta}, (0,T)\times\Omega'} \\ &\leq c(T, \Omega', K, \gamma, \mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{U}_\infty, \mathbf{f}) \left(1 + \left(\int_0^T \int_{\Omega'} (a\rho_\delta^\gamma + \delta\rho_\delta^\beta) b_k(\rho_\delta) \phi dx dt \right)^{\frac{\theta}{\gamma+\theta}} \right). \end{aligned}$$

Pour conclure à la validité de l'estimation (2.41), il suffit d'utiliser l'inégalité de Young classique, puis le lemme de Fatou pour passer à la limite $k \rightarrow \infty$.

6 Preuve : Conclusion (Etude du problème d'origine)

Cette section constitue la dernière et ultime étape dans la preuve du théorème II.1. Elle consiste à relaxer les hypothèses (2.4)-(2.5) sur les conditions initiales ainsi que l'hypothèse de compatibilité $0 < \underline{\rho} \leq \rho_\infty \leq \bar{\rho} < \infty$, puis à passer à la limite $\delta \rightarrow 0^+$ sur une suite de solutions approchées $\{(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)\}_\delta$ dont chaque terme satisfait les propriétés listées à la proposition II.4 ainsi que les estimations (2.37)-(2.41).

6.1 Relaxation des conditions initiales

Considérons des données initiales ρ_0, \mathbf{q}_0 satisfaisant les hypothèses (1.16) et (1.17) et $\rho_\infty \geq 0$. Pour tout domaine borné $A \subset \mathbb{R}^3$, on note

$$A_{\delta,-} = \{x \in A, \text{dist}(x, \partial A) > \delta\}, \quad A_{\delta,+} = \{x \in \mathbb{R}^3, \text{dist}(x, \bar{A}) < \delta\}$$

et par $\{S_{\frac{\delta}{4}}(\cdot)\}_{\delta \in (0,1]}$, on dénote la suite d'opérateurs de régularisation usuels. Ceci étant, on pose

$$\rho_{0,\delta} = S_{\frac{\delta}{4}}(\rho_0 1_{B_{\delta,-}} + \rho_\infty 1_{U_{\frac{\delta}{2},+}}) + \delta$$

où ici ρ_0 désigne le prolongement par zéro à l'extérieur de Ω de ρ_0 . On vérifie sans peine que la suite $\{\rho_{0,\delta}\}_\delta \subset C^{2,\alpha}(\bar{V})$ satisfait

$$\begin{aligned} 0 < \delta \equiv \underline{\rho} \leq \rho_{0,\delta} &\leq (\|\rho_0\|_{0,1,\Omega} + \rho_\infty + \delta) \equiv \bar{\rho} < \infty, \\ \partial_\nu \rho_{0,\delta}|_{\partial V} &= 0, \quad \rho_{0,\delta} = \rho_{\infty,\delta} \equiv \rho_\infty + \delta \text{ dans } \mathcal{U}, \\ \rho_{0,\delta} &\rightarrow \rho_0 \text{ dans } L^\gamma(\Omega) \text{ quand } \delta \rightarrow 0^+, \\ 0 < \underline{\rho} &\leq \rho_{\infty,\delta} \leq \bar{\rho} < \infty. \end{aligned}$$

On pose ensuite

$$\tilde{\mathbf{q}}_{0,\delta} = \begin{cases} \mathbf{q}_0 \sqrt{\frac{\rho_{0,\delta}}{\rho_0}} & \text{dans } \{\rho_0 > 0\}, \\ \mathbf{0} & \text{dans } \{\rho_0 = 0\}, \\ \rho_{0,\delta} \mathbf{U}_\infty & \text{dans } V \setminus \Omega. \end{cases}$$

Bien évidemment, la suite $\{\frac{|\tilde{\mathbf{q}}_{0,\delta}|^2}{\rho_{0,\delta}}\}_\delta$ est uniformément bornée par rapport à δ dans $L^1(V)$. D'autre part, pour tout $\delta \in (0, 1]$, la densité des fonctions régulières dans $L^2(V)$ garantit qu'il existe une fonction de $[C^2(\bar{V})]^3$, notée \mathbf{h}_δ , telle que

$$\left\| \frac{\tilde{\mathbf{q}}_{0,\delta}}{\sqrt{\rho_{0,\delta}}} - \mathbf{h}_\delta \right\|_{0,2,V} \leq \delta.$$

Remarquer alors que la suite $\{\mathbf{q}_{0,\delta} \equiv \mathbf{h}_\delta \sqrt{\rho_{0,\delta}}\}_\delta \subset [C^2(\bar{V})]^3$ est uniformément bornée par rapport à δ dans $[L^1(V)]^3$ et que

$$\mathbf{q}_{0,\delta} \rightarrow \mathbf{q}_0 \text{ dans } [L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)]^3 \text{ quand } \delta \rightarrow 0^+.$$

Il s'agit maintenant de noter que la proposition II.4 s'applique si l'on remplace ρ_0 , \mathbf{q}_0 et ρ_∞ par $\rho_{0,\delta}$, $\mathbf{q}_{0,\delta}$ et $\rho_{\infty,\delta}$. Pour la suite, l'étude du terme $\mathcal{E}_\delta(\rho_{0,\delta}, \mathbf{q}_{0,\delta})$ qui apparaîtra dans l'inégalité d'énergie (2.35) adaptée à la présente situation semble s'imposer. On a

$$\mathcal{E}_\delta(\rho_{0,\delta}, \mathbf{q}_{0,\delta}) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_{0,\delta} - \rho_{0,\delta} \mathbf{U}_\infty|^2}{\rho_{0,\delta}} + P_\delta(\rho_{0,\delta}) \right\} dx + \int_{V \setminus \bar{\Omega}} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_{0,\delta} - \rho_{0,\delta} \mathbf{U}_\infty|^2}{\rho_{0,\delta}} dx$$

et d'après la construction de $(\rho_{0,\delta}, \mathbf{q}_{0,\delta})$, il est clair que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_{0,\delta} - \rho_{0,\delta} \mathbf{U}_\infty|^2}{\rho_{0,\delta}} + P_\delta(\rho_{0,\delta}) \right\} dx \\ = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} 1_{\{\rho_0 > 0\}} + \frac{1}{2} \rho_{0,\delta} |\mathbf{U}_\infty|^2 - \mathbf{q}_{0,\delta} \cdot \mathbf{U}_\infty + P_\delta(\rho_{0,\delta}) \right\} dx \rightarrow E_0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0^+, \\ & \int_{V \setminus \bar{\Omega}} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}_{0,\delta} - \rho_{0,\delta} \mathbf{U}_\infty|^2}{\rho_{0,\delta}} dx \\ \leq & \int_{V \setminus \bar{\Omega}} \left\{ \left| \mathbf{h}_\delta - \frac{\tilde{\mathbf{q}}_{0,\delta}}{\sqrt{\rho_{0,\delta}}} \right|^2 + \frac{|\tilde{\mathbf{q}}_{0,\delta} - \rho_{0,\delta} \mathbf{U}_\infty|^2}{\rho_{0,\delta}} \right\} dx \leq c\delta^2 \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

On vient donc de démontrer que $\mathcal{E}_\delta(\rho_{0,\delta}, \mathbf{q}_{0,\delta})$ est uniformément borné par rapport à δ . Puisqu'il est évident que $-\int_0^\tau \int_{\Gamma} P_\delta(\rho_{\infty,\delta}) d\sigma dt \rightarrow -\int_0^\tau \int_{\Gamma} P(\rho_\infty) d\sigma dt$ quand $\delta \rightarrow 0^+$, ce terme n'interfère en aucun cas dans l'obtention des estimations (2.37)-(2.41) provenant de l'inégalité d'énergie (2.35) adaptée à la présente situation, *i.e.* dans lesquelles $\mathcal{E}_\delta(\rho_{0,\delta}, \mathbf{q}_{0,\delta})$ remplace $\mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0)$. Toutes ces estimations sont donc uniformes par rapport à δ .

6.2 Construction d'une solution du problème d'origine

A partir de maintenant, on travaille sur une suite de solutions approchées $\{(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta)\}_\delta$ dont chaque terme est donné par la proposition II.4 dans laquelle ρ_0 , \mathbf{q}_0 et ρ_∞ sont systématiquement remplacés par $\rho_{0,\delta}$, $\mathbf{q}_{0,\delta}$ et $\rho_{\infty,\delta}$. En accord avec les estimations (2.37)-(2.41) dans lesquelles $\mathcal{E}_\delta(\rho_{0,\delta}, \mathbf{q}_{0,\delta})$ remplace $\mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0)$ et qui, on le rappelle, sont uniformes par rapport à δ , on peut supposer qu'il existe des fonctions ρ , \mathbf{u} et $\bar{\rho}^\gamma$ telles que modulo l'extraction de sous-suites et lorsque $\delta \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} \rho_\delta & \xrightarrow{*} \rho \text{ dans } L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega)), \quad \rho_\delta \rightharpoonup \rho \text{ dans } L^{\gamma+\theta}((0, T) \times K), \\ \rho & \geq 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times \Omega, \quad \rho = \rho_\infty 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}} \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\rho_\delta^\gamma \rightharpoonup \bar{\rho}^\gamma \text{ dans } L^{\frac{\gamma+\theta}{\gamma}}((0, T) \times K), \quad \bar{\rho}^\gamma = \rho_\infty^\gamma 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}} \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \quad (6.2)$$

$$\delta \rho_\delta^\beta \rightarrow 0 \text{ dans } L^{\frac{\beta+\theta}{\beta}}((0, T) \times K), \quad (6.3)$$

$$\mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } [L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))]^3, \quad \mathbf{u} = \mathbf{U}_\infty \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \quad (6.4)$$

K désignant tout sous-ensemble compact arbitraire de Ω . Ensuite, de nouveau par des arguments déjà exposés à plusieurs reprises, pour $t_1, t_2 \in [0, T]$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on montre que

$$\int_{\Omega} \{\rho_\delta(t_2) - \rho_\delta(t_1)\} \phi dx \leq c(\Omega) \left\{ \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta)(t)\|_{0, \frac{2\gamma}{\gamma+1}, \Omega} |t_2 - t_1| \right\} \|\nabla \phi\|_{0, \frac{2\gamma}{\gamma-1}, \Omega}.$$

Autrement dit, la suite $\{\rho_\delta\}_\delta \subset C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^\gamma(\Omega))$ est uniformément continue dans $W^{-1, \frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)$. Par conséquent, l'estimation (2.37) dans laquelle on remplace $\mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0)$ par $\mathcal{E}_\delta(\rho_{0,\delta}, \mathbf{q}_{0,\delta})$ et les lemmes I.1 et I.2 nous permettent de conclure que

$$\rho_\delta \rightarrow \rho \text{ dans } C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^\gamma(\Omega)) \text{ quand } \delta \rightarrow 0^+. \quad (6.5)$$

Ainsi, puisque $\gamma > \frac{6}{5}$, le lemme I.4 assure en particulier que

$$\rho_\delta \rightarrow \rho \text{ dans } L^q(0, T; [H^1(\Omega)]^*), \quad q \in [1, \infty). \quad (6.6)$$

Par suite, (6.6) avec $q = 2$ et le fait que $(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty) \rightharpoonup (\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty)$ dans $[L^2(0, T; H_0^1(\Omega))]^3$, implique la convergence au sens des distributions dans $(0, T) \times \Omega$ de la suite $\{\rho_\delta \mathbf{u}_\delta\}_\delta$ vers $\rho \mathbf{u}$ ce qui précise les convergences provenant directement des estimations (2.37) et (2.40) dans lesquelles on remplace $\mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0)$ par $\mathcal{E}_\delta(\rho_{0,\delta}, \mathbf{q}_{0,\delta})$. Autrement dit

$$\begin{aligned} \rho_\delta \mathbf{u}_\delta &\xrightarrow{*} \rho \mathbf{u} \text{ dans } [L^\infty(0, T; L_{\text{weak}}^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))]^3, \\ \rho_\delta \mathbf{u}_\delta &\rightharpoonup \rho \mathbf{u} \text{ dans } [L^2(0, T; L_{\text{weak}}^{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega))]^3 \text{ quand } \delta \rightarrow 0^+. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Pour les mêmes raisons qu'à l'étape $\varepsilon \rightarrow 0^+$, la convergence de la suite $\{\rho_\delta \mathbf{u}_\delta\}_\delta$ vers $\rho \mathbf{u}$ dans $[C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))]^3$ n'est pas réalisée. Elle l'est uniquement sur tout sous-ensemble compact K de Ω , *i.e.*

$$\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \rightarrow \rho \mathbf{u} \text{ dans } [C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(K))]^3 \text{ quand } \delta \rightarrow 0^+. \quad (6.8)$$

Enfin, puisque $\gamma > \frac{3}{2}$, l'injection $L_{\text{weak}}^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega) \subset [H^1(\Omega)]^*$ est compacte, de (6.7) on déduit alors que $\rho_\delta u_\delta^i \rightarrow \rho u^i$ dans $L^2(0, T; [H^1(\Omega)]^*)$, $i = 1, 2, 3$, quand $\delta \rightarrow 0^+$. Cette convergence et le fait que $(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{U}_\infty) \rightharpoonup (\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty)$ dans $[L^2(0, T; H_0^1(\Omega))]^3$, garantit que $\rho_\delta u_\delta^i u_\delta^j \rightarrow \rho u^i u^j$ dans $\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)$, $i, j = 1, 2, 3$ et donc précise celle déduite des estimations (2.37) et (2.40) dans lesquelles on remplace $\mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0)$ par $\mathcal{E}_\delta(\rho_{0,\delta}, \mathbf{q}_{0,\delta})$. Autrement dit

$$\rho_\delta u_\delta^i u_\delta^j \rightharpoonup \rho u^i u^j \text{ dans } L^2(0, T; L_{\text{weak}}^{\frac{6\gamma}{4\gamma+3}}(\Omega)) \text{ quand } \delta \rightarrow 0^+, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6.9)$$

A ce stade, nous sommes en possession de toutes les convergences pour passer à la limite $\delta \rightarrow 0^+$ dans les équations (2.29) et (2.32). On trouve que

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma)), \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu_1 \Delta \mathbf{u} - (\mu_1 + \mu_2) \nabla \text{div} \mathbf{u} + a \nabla \overline{\rho^\gamma} \\ = \rho \mathbf{f} \text{ dans } [\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)]^3. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Comme à l'étape précédente, à partir de l'équation de mouvement (6.11) et à l'aide de (6.8), on conclut que $\rho \mathbf{u} \in [C^0([0, T]; L_{\text{weak}}^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))]^3$. La convergence (6.5) et cette dernière observation confèrent un sens aux conditions initiales. Plus exactement, on a

$$\rho(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \rho_{0,\delta} = \rho_0 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad (\rho u^i)(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} q_{0,\delta}^i = q_0^i \text{ p.p. dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ici, il est important de souligner que les hypothèses du lemme I.7 (cf. remarque I.2) ne sont pas satisfaites lorsque $\frac{3}{2} < \gamma < \frac{9}{5}$. Pour cette raison, afin de démontrer que $\rho_\delta \rightarrow \rho$ dans $L^p((0, T) \times K)$, $p \in [1, \gamma + \theta)$, quand $\delta \rightarrow 0^+$, nous allons utiliser l'approche due à FEIREISL, approche que nous avons déjà adapté dans le chapitre 2 de la partie stationnaire. Chaque étape importante de cette approche fera l'objet d'une sous-section.

6.3 Flux effectif visqueux

A l'aide des résultats démontrés dans la section intitulée « Flux effectif visqueux (cas non stationnaire) » du chapitre I, on peut démontrer le

Lemme II.1 *Pour toute fonction $b \in C^1([0, \infty))$, on a*

$$\begin{aligned} & \overline{a\rho^\gamma b_k(\rho)} - (2\mu_1 + \mu_2)\overline{b_k(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}} \\ &= \overline{a\rho^\gamma \overline{b_k(\rho)}} - (2\mu_1 + \mu_2)\overline{\overline{b_k(\rho)} \operatorname{div} \mathbf{u}} \text{ p.p. dans } (0, T) \times \Omega \end{aligned} \quad (6.12)$$

où $\overline{\rho^\gamma b_k(\rho)}$, $\overline{b_k(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}}$ dénotent les limites faibles des suites $\{\rho_\delta^\gamma b_k(\rho_\delta)\}_\delta$, $\{b_k(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\}_\delta$ dans $L^{\frac{\gamma+\theta}{\gamma}}((0, T) \times K)$, $L^2((0, T) \times \Omega)$, K désignant tout sous-ensemble compact de Ω et $\overline{b_k(\rho)}$ la limite *-faible de la suite $\{b_k(\rho_\delta)\}_\delta$ dans $L^\infty((0, T) \times \Omega)$.

Preuve. On pose

$$\begin{aligned} \Pi_\delta &= p_\delta(\rho_\delta), \quad b_\delta = b_k(\rho_\delta), \quad \mathbf{F}_\delta = \rho_\delta \mathbf{f}, \quad \mathbf{q}_\delta = \rho_\delta \mathbf{u}_\delta, \quad f_\delta = -\{\rho_\delta (b_k)_+'(\rho_\delta) - b_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta, \\ \Pi &= \overline{a\rho^\gamma}, \quad b = \overline{b_k(\rho)}, \quad \mathbf{F} = \rho \mathbf{f}, \quad \mathbf{q} = \rho \mathbf{u}, \quad f = -\overline{\{\rho (b_k)_+'(\rho) - b_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}}, \end{aligned}$$

f désignant la limite faible de la suite $\{f_\delta\}_\delta$ dans $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^3)$, limite qui est égale à zéro p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Alors, les convergences (6.1)-(6.9) et les lemmes I.1 et I.2 montrent que pour tout sous-ensemble compact K de Ω , on a

$$\begin{aligned} \Pi_\delta &\rightharpoonup \Pi \text{ dans } L^{\frac{\gamma+\theta}{\gamma}}((0, T) \times K), \\ b_\delta &\rightarrow b \text{ dans } C^0([0, T]; L^r_{\text{weak}}(\Omega)), \quad r \in [1, \infty), \\ b_\delta &\overset{*}{\rightharpoonup} b \text{ dans } L^\infty((0, T) \times \Omega), \\ \mathbf{F}_\delta &\rightharpoonup \mathbf{F} \text{ dans } [L^{\gamma+\theta}((0, T) \times K)]', \\ \mathbf{q}_\delta &\rightarrow \mathbf{q} \text{ dans } [C^0([0, T]; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(K))]^3, \\ f_\delta &\rightharpoonup f \text{ dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

De plus, à l'aide des propriétés de l'opérateur \mathcal{A}_i , $i = 1, 2, 3$, exposées dans le chapitre 1 de la partie stationnaire (cf. p.24), il est clair que

$$\mathcal{A}_i(f_\delta) \rightharpoonup \mathcal{A}_i(f) \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)).$$

Il suffit alors d'appliquer le corollaire I.3 dont on vient de vérifier les hypothèses (cf. remarque I.5) avec $p = \frac{\gamma+\theta}{\gamma}$, $r \in [1, \infty)$, $\tilde{r} = \infty$, $s = \gamma + \theta$ et $w = \frac{2\gamma}{\gamma+1}$ pour conclure à la validité de (6.12). D'où le résultat. \square

6.4 Mesure de l'amplitude des oscillations

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, si $\gamma < \frac{9}{5}$, a priori on ne sait pas si la densité ρ appartient à $L^2_{loc}((0, T) \times \mathbb{R}^3)$. En conséquence, on ne peut directement affirmer que (ρ, \mathbf{u}) est solution de l'équation de continuité renormalisée. Ce manque d'information sera comblé par l'observation capitale suivante, due à FEIREISL [16].

Lemme II.2 *Pour tout sous-ensemble compact K de Ω ,*

$$\sup_{k>0} \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)\|_{0,\gamma+1,(0,T) \times K} \leq c \quad (6.13)$$

où $T_k = b_k$ avec $b(s) = s$ dénote la fonction de coupure introduite dans le chapitre 2 de la partie stationnaire (cf. p.63) et c est une constante qui ne dépend ni du compact K , ni de k et ni de δ .

Preuve. Avant de lire cette preuve, le lecteur désireux de se remémorer les propriétés de base de la fonction de coupure T_k peut se reporter à la page 63.

Soit K un sous-ensemble compact de Ω . En dénotant par $\overline{\rho^\gamma T_k(\rho)}$ la limite faible de la suite $\{\rho_\delta^\gamma T_k(\rho_\delta)\}_\delta$ dans $L^{\frac{\gamma+\theta}{\gamma}}((0,T) \times K)$, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_K \{\overline{\rho^\gamma T_k(\rho)} - \overline{\rho^\gamma T_k(\rho)}\} dx dt \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^T \int_K (\rho_\delta^\gamma - \rho^\gamma)(T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)) dx dt + \int_0^T \int_K (\overline{\rho^\gamma} - \rho^\gamma)(T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)}) dx dt. \end{aligned}$$

A l'aide du lemme II.1 et de la propriété (2.7.16), on en déduit que

$$\begin{aligned} & \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^T \int_K |T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)|^{\gamma+1} dx dt \\ & \leq (2\mu_1 + \mu_2) \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^T \int_K (T_k(\rho_\delta) - \overline{T_k(\rho)}) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta dx dt. \end{aligned}$$

En prenant en considération l'estimation (2.40) dans laquelle on remplace $\mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0)$ par $\mathcal{E}_\delta(\rho_{0,\delta}, \mathbf{q}_{0,\delta})$, le membre de droite de cette dernière inégalité peut être majoré à l'aide de l'inégalité de Hölder comme-suit :

$$\begin{aligned} & (2\mu_1 + \mu_2) \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^T \int_K (T_k(\rho_\delta) - \overline{T_k(\rho)}) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta dx dt \\ &= (2\mu_1 + \mu_2) \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^T \int_K \{(T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)) + (T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)})\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta dx dt \\ & \leq c \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)\|_{0,2,(0,T) \times K} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\|_{0,2,(0,T) \times \Omega} \\ & \leq c \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)\|_{0,\gamma+1,(0,T) \times K}. \end{aligned}$$

L'inégalité de Young permet alors de conclure. \square

Voici comment doit être perçue le lemme II.2 : bien que la suite $\{\rho_\delta\}_\delta$ soit seulement bornée dans $L^{\gamma+\theta}((0,T) \times K)$, ses oscillations, mesurées par la quantité introduite dans la conclusion du lemme, le sont toujours dans un espace meilleur que $L^2((0,T) \times K)$. Dans la suite, nous verrons que c'est cette propriété qui remplacera la condition $\rho \in L^2_{loc}((0,T) \times \mathbb{R}^3)$ dans la théorie du transport de DiPERNA et P.L. LIONS [12], appliquée à l'équation de continuité.

Le lemme II.2 a pour conséquence immédiate

$$\sup_{k>0} \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)\|_{0,\gamma+1,(0,T) \times \Omega} \leq c, \quad (6.14)$$

c désignant une constante qui ne dépend ni de k et ni de δ . En effet, pour le voir, il suffit de considérer un sous-ensemble compact K de Ω satisfaisant $|\Omega \setminus K| \leq \frac{1}{k^{\gamma+1}}$ et d'écrire

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega |T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)|^{\gamma+1} dx dt \\ & \leq \int_0^T \int_K |T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)|^{\gamma+1} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega \setminus K} |T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)|^{\gamma+1} dx dt \\ & \leq \int_0^T \int_K |T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)|^{\gamma+1} dx dt + 2^{\gamma+1} T. \end{aligned}$$

6.5 Equation de continuité et solutions renormalisées

Ici, à l'aide de l'observation capitale (6.13), on montre que le couple (ρ, \mathbf{u}) construit ci-dessus est une solution de l'équation de continuité renormalisée.

Lemme II.3 *Soit b une fonction de la classe (1.10), (1.11) et (1.13). Alors*

$$\partial_t b(\rho) + \operatorname{div}(b(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho b'(\rho) - b(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma)). \quad (6.15)$$

Preuve. Tout d'abord, on suppose que $b \in C^1([0, \infty))$ satisfait (1.11) et (1.13). D'après le point (ii) de la proposition II.4, pour tout $k > 0$ on a

$$\partial_t T_k(\rho_\delta) + \operatorname{div}(T_k(\rho_\delta)\mathbf{u}_\delta) + \{\rho_\delta (T_k)_+'(\rho_\delta) - T_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma)).$$

Puisque clairement $T_k(\rho_\delta) \rightarrow \overline{T_k(\rho)}$ dans $C^0([0, T]; L^p_{\text{weak}}(\Omega))$, $p \in [1, \infty)$ et donc $T_k(\rho_\delta) \rightarrow \overline{T_k(\rho)}$ dans $L^2(0, T; [H^1(\Omega)]^*)$ quand $\delta \rightarrow 0^+$, le passage à la limite $\delta \rightarrow 0^+$ dans la dernière équation donne

$$\partial_t \overline{T_k(\rho)} + \operatorname{div}(\overline{T_k(\rho)}\mathbf{u}) + \{\overline{\rho (T_k)_+'(\rho)} - \overline{T_k(\rho)}\} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma)).$$

Soit $R > 0$. Le corollaire I.1, appliqué dans la présente situation à $\overline{T_k(\rho)}$, $p = \infty$, \mathbf{u} et $f \equiv -\{\overline{\rho (T_k)_+'(\rho)} - \overline{T_k(\rho)}\} \operatorname{div} \mathbf{u}$, garantit alors que pour tout $R > 0$ et tout $k > 0$,

$$\begin{aligned} & \partial_t b_R(\overline{T_k(\rho)}) + \operatorname{div}(b_R(\overline{T_k(\rho)})\mathbf{u}) + \{\overline{T_k(\rho)}(b_R)_+'(\overline{T_k(\rho)}) - b_R(\overline{T_k(\rho)})\} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ & = -\overline{\{\rho (T_k)_+'(\rho) - T_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}} (b_R)_+'(\overline{T_k(\rho)}) \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma)). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et la propriété (2.7.18) de la fonction de coupure adaptée à la présente situation, à savoir que

$$\forall p \in [1, \gamma), \quad \overline{T_k(\rho)} \rightarrow \rho \text{ dans } L^p((0, T) \times \Omega) \text{ quand } k \rightarrow \infty,$$

prouvent la convergence du membre de gauche de l'équation (6.16) lorsque $k \rightarrow \infty$ vers $\partial_t b_R(\rho) + \operatorname{div}(b_R(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho(b_R)_+'(\rho) - b_R(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}$ dans $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma))$. Quant au terme du membre de droite, sa norme $L^1((0, T) \times \Omega)$ peut être majorée par

$$\max_{s \in [0, R]} |b'(s)| \int_{\Omega_{k,R}^T} |\overline{\{\rho(T_k)_+'(\rho) - T_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}}| dx dt$$

où $\Omega_{k,R}^T = \{(t, x) \in (0, T) \times \Omega, \overline{T_k(\rho)}(t, x) \leq R\}$. En outre, la semi-continuité inférieure faible de la norme L^1 implique que

$$\|\overline{\{\rho(T_k)_+'(\rho) - T_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}}\|_{0,1,\Omega_{k,R}^T} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \|\{\rho_\delta(T_k)_+'(\rho_\delta) - T_k(\rho_\delta)\} \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\|_{0,1,\Omega_{k,R}^T}.$$

D'après l'inégalité de Schwarz, le fait que $|s(T_k)_+'(s) - T_k(s)| \leq T_k(s)1_{\{s \geq k\}}$, l'interpolation de $L^2(\Omega_{k,R}^T)$ entre $L^1(\Omega_{k,R}^T)$ et $L^{\gamma+1}(\Omega_{k,R}^T)$ et l'estimation (2.40) avec $\mathcal{E}_\delta(\rho_{0,\delta}, \mathbf{q}_{0,\delta})$ à la place de $\mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0)$, le membre de droite de cette inégalité peut être estimé par

$$\begin{aligned} & \|T_k(\rho_\delta)1_{\{\rho_\delta \geq k\}}\|_{0,2,\Omega_{k,R}^T} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\|_{0,2,(0,T) \times \Omega} \\ & \leq c \|T_k(\rho_\delta)1_{\{\rho_\delta \geq k\}}\|_{0,1,\Omega_{k,R}^T}^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \|T_k(\rho_\delta)1_{\{\rho_\delta \geq k\}}\|_{0,\gamma+1,\Omega_{k,R}^T}^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \forall p \in [1, \gamma), \quad & \|\rho_\delta 1_{\{\rho_\delta \geq k\}}\|_{0,p,(0,T) \times \Omega} \leq \|\rho_\delta\|_{0,\gamma,(0,T) \times \Omega} |1_{\{\rho_\delta \geq k\}}|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}} \\ & \leq \|\rho_\delta\|_{0,\gamma,(0,T) \times \Omega} k^{\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p}} \int_0^T \int_K \rho_\delta dx dt \leq ck^{\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

En conséquence, il est clair que

$$\|T_k(\rho_\delta)1_{\{\rho_\delta \geq k\}}\|_{0,1,\Omega_{k,R}^T} \leq \|\rho_\delta 1_{\{\rho_\delta \geq k\}}\|_{0,1,(0,T) \times \Omega} \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

D'autre part, à l'aide de la conséquence (6.14) du lemme II.2, on voit que

$$\begin{aligned} & \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta)1_{\{\rho_\delta \geq k\}}\|_{0,\gamma+1,\Omega_{k,R}^T} \\ & \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho_\delta) - \overline{T_k(\rho)}\|_{0,\gamma+1,(0,T) \times \Omega} + \|\overline{T_k(\rho)}\|_{0,\gamma+1,\Omega_{k,R}^T} \leq c + R|(0, T) \times \Omega|^{\frac{1}{\gamma+1}}. \end{aligned}$$

Ces deux observations montrent que lorsque $k \rightarrow \infty$, $\overline{\{\rho(T_k)_+'(\rho) - T_k(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u}} \rightarrow 0$ dans $L^1((0, T) \times \Omega)$. En conséquence, le passage à la limite $k \rightarrow \infty$ dans (6.16) donne

$$\partial_t b_R(\rho) + \operatorname{div}(b_R(\rho)\mathbf{u}) + \{\rho(b_R)_+'(\rho) - b_R(\rho)\} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma)). \quad (6.17)$$

Pour conclure dans le cas $b \in C^1([0, \infty))$ satisfaisant (1.11) et (1.13), il suffit de passer à la limite $R \rightarrow \infty$ dans (6.17) en adaptant à la présente situation les arguments exposés à la fin de la preuve du lemme 2.13 (cf. p.65). Enfin, dans le cas où b satisfait (1.10), (1.11) et (1.13), il suffit d'adapter à la présente situation les arguments exposés à la fin de la preuve du lemme 1.4 (cf. p.15). D'où le résultat. \square

6.6 Convergence forte de la densité et conclusion

A ce stade avancé de la preuve, nous sommes en possession de tous les éléments pour démontrer la convergence forte de la suite de densité $\{\rho_\delta\}_\delta$. Pour ce faire, pour $k > 0$, on considère la fonction $L_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui, on le rappelle, est définie par

$$L_k(s) = \begin{cases} s \ln s & \text{si } s \in [0, k), \\ s \ln k + s - k & \text{si } s \in [k, \infty). \end{cases}$$

Clairement L_k vérifie (1.10) et (1.11) avec $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$ puisque $sL'_k(s) - L_k(s) = T_k(s)$. En outre, L_k peut s'écrire $L_k(s) = S_k(s) + (\ln k + 1)s$ où S_k satisfait (1.10) et (1.11) et (1.13) puisque $|S'_k(s)| \leq c(k)$ si $s \geq 1$ et $sS'_k(s) - S_k(s) = sL'_k(s) - L_k(s) = T_k(s)$. Par conséquent, en accord avec le point (ii) de la proposition II.4 et le lemme II.3, on se retrouve avec l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \partial_t \{L_k(\rho_\delta) - L_k(\rho)\} + \operatorname{div}(L_k(\rho_\delta)\mathbf{u}_\delta - L_k(\rho)\mathbf{u}) \\ & + \{T_k(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta - T_k(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}\} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^3 \setminus (\partial B \setminus \Gamma)). \end{aligned}$$

Noter alors que le point (ii) de la proposition II.4, respectivement le lemme II.3, assure la validité des hypothèses du lemme I.8 pour $p = \gamma$, ρ_δ et \mathbf{u}_δ , respectivement $p = \gamma$, ρ et \mathbf{u} , qui entraîne que $\rho_\delta \in C^0([0, T]; L^p(\Omega))$, respectivement $\rho \in C^0([0, T]; L^p(\Omega))$, $p \in [1, \gamma)$. Il est donc clair que $L_k(\rho_\delta), L_k(\rho) \in C^0([0, T]; L^p(\Omega))$, $p \in [1, \gamma)$. De l'intégration par rapport à la variable temps sur l'intervalle $(0, \tau)$, $\tau \in [0, T]$, de la précédente équation on déduit en particulier que pour tout $\tau \in [0, T]$ et toute fonction test $\phi \in C^\infty(\overline{B})$ qui s'annule sur $\partial B \setminus \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} & \int_B \{L_k(\rho_\delta) - L_k(\rho)\}(\tau) \phi \, dx = \int_B \{L_k(\rho_{0,\delta}) - L_k(\rho_0)\} \phi \, dx \\ & + \int_0^\tau \int_B \{L_k(\rho_\delta)\mathbf{u}_\delta - L_k(\rho)\mathbf{u}\} \cdot \nabla \phi \, dx \, dt + \int_0^\tau \int_B \{T_k(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} - T_k(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta\} \phi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on sait que $\{L_k(\rho_\delta)\}_\delta$ est une suite de $C^0([0, T]; L^p_{\text{weak}}(\Omega))$, $p \in [1, \gamma)$. D'autre part, en accord avec le point (ii) de la proposition II.4, pour $t_1, t_2 \in [0, T]$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on voit en particulier que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \{L_k(\rho_\delta(t_2)) - L_k(\rho_\delta(t_1))\} \phi \, dx \\ & = - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega L_k(\rho_\delta)\mathbf{u}_\delta \cdot \nabla \phi \, dx \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega T_k(\rho_\delta) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta \phi \, dx \, dt \end{aligned}$$

d'où on déduit que chaque élément de la suite $\{L_k(\rho_\delta)\}_\delta$ est uniformément continue dans $W^{-1, \frac{6\gamma}{5\gamma-6}}(\Omega)$. Par suite, l'estimation (2.37) dans laquelle $\mathcal{E}_\delta(\rho_{0,\delta}, \mathbf{q}_{0,\delta})$ remplace $\mathcal{E}_\delta(\rho_0, \mathbf{q}_0)$ et les lemmes I.1 et I.2 garantissent que pour tout $p \in [1, \gamma)$, $L_k(\rho_\delta) \rightarrow \overline{L_k(\rho)}$ dans $C^0([0, T]; L^p_{\text{weak}}(\Omega))$ quand $\delta \rightarrow 0^+$. Immédiatement, il en résulte que pour tout $\tau \in [0, T]$, $L_k(\rho_\delta)(\tau) \rightarrow \overline{L_k(\rho)}(\tau)$ dans $L^p(\Omega)$, $p \in (1, \gamma)$ et, d'après le lemme I.4 que $L_k(\rho_\delta) \rightarrow \overline{L_k(\rho)}$

dans $L^2(0, T; [H^1(\Omega)]^*)$ puisque $\gamma > \frac{6}{5}$. Ces deux observations justifient le passage à la limite $\delta \rightarrow 0^+$ dans l'identité ci-dessus et nous conduisent à la suivante :

$$\begin{aligned} & \int_B \{\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho)\}(\tau) \phi \, dx \\ &= \int_0^T \int_B \{\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho)\} \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \, dx \, dt + \int_0^T \int_B \{T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)}\} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \phi \, dx \, dt \\ & \quad + \int_0^T \int_B \{\overline{T_k(\rho)} \operatorname{div} \mathbf{u} - \overline{T_k(\rho)} \operatorname{div} \mathbf{u}\} \phi \, dx \, dt, \quad \tau \in [0, T]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Soit $\phi = \phi_m$ avec $\phi_m = w(m \operatorname{dist}(x, \partial B \setminus \Gamma))$, $x \in \overline{B}$ où w est la fonction définie en (4.16). Alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_B \{\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho)\} \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_m \, dx \, dt &= \int_0^T \int_B \{\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho)\} (\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty) \cdot \nabla \phi_m \, dx \, dt \\ & \quad + \int_0^T \int_B \{\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho)\} \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \phi_m \, dx \, dt. \end{aligned}$$

D'après la construction du champ de vecteurs \mathbf{U}_∞ , on sait que $\mathbf{U}_\infty = \mathbf{u}_\infty$ dans un voisinage de la frontière ∂B . Ainsi, pour m suffisamment grand,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_B \{\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho)\} \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \phi_m \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\{\frac{1}{m} \leq \operatorname{dist}(x, \partial B \setminus \Gamma) \leq \frac{2}{m}\}} \{\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho)\} \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \phi_m \, dx \, dt. \end{aligned}$$

De plus, la convexité de la fonction L_k implique que $\{\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho)\} \geq 0$ p.p. dans $(0, T) \times B$ tandis qu'il est facile de se convaincre que $\mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \phi_m \leq 0$ dans l'ensemble $\{\frac{1}{m} \leq \operatorname{dist}(x, \partial B \setminus \Gamma) \leq \frac{2}{m}\}$. Par conséquent

$$\int_0^T \int_B \{\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho)\} \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \phi_m \, dx \, dt \leq 0.$$

Par ailleurs, puisque $\{\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho)\} = \{\overline{S_k(\rho)} - S_k(\rho)\}$ et $|S_k(s)| \leq k(2 \ln k + 1)$ pour tout $s \geq 0$, il est très facile de se convaincre que $\{\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho)\} \in L^p((0, T) \times B)$, $p \in [1, \infty)$. Comme sur l'ensemble $\{\frac{1}{m} \leq \operatorname{dist}(x, \partial B \setminus \Gamma) \leq \frac{2}{m}\}$ on a $|\nabla \phi_m| \leq 2m \leq 4 \operatorname{dist}(x, \partial B \setminus \Gamma) \leq 4 \operatorname{dist}(x, \partial B)$ et que $(\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty) \in [L^2(0, T; H_0^1(B))]^3$, à l'aide de l'inégalité de Hardy, on prouve que

$$\int_0^T \int_B \{\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho)\} (\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty) \cdot \nabla \phi_m \, dx \, dt \rightarrow 0 \text{ quand } m \rightarrow \infty.$$

Ceci étant, on revient sur l'égalité (6.18) avec $\phi = \phi_m$ et on passe à la limite $m \rightarrow \infty$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \{\overline{L_k(\rho)} - L_k(\rho)\}(\tau) \, dx &\leq \int_0^\tau \int_\Omega \{T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)}\} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx \, dt \\ & \quad + \int_0^\tau \int_\Omega \{\overline{T_k(\rho)} \operatorname{div} \mathbf{u} - \overline{T_k(\rho)} \operatorname{div} \mathbf{u}\} \, dx \, dt, \quad \tau \in [0, T]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

D'après l'inégalité de Hölder, l'interpolation de $L^2((0, T) \times \Omega)$ entre $L^1((0, T) \times \Omega)$ et $L^{\gamma+1}((0, T) \times \Omega)$, (6.14) et les propriétés suivantes de la fonction de troncature T_k :

$$T_k(\rho) \rightarrow \rho \text{ dans } L^1((0, T) \times \Omega), \quad \overline{T_k(\rho)} \rightarrow \rho \text{ dans } L^1((0, T) \times \Omega) \text{ quand } k \rightarrow \infty,$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_\Omega \{T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)}\} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx \, dt \leq \|T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)}\|_{0,2,(0,T) \times \Omega} \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,2,(0,T) \times \Omega} \\ & \leq c \|T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)}\|_{0,1,(0,T) \times \Omega}^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \times \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \|T_k(\rho) - T_k(\rho_\delta)\|_{0,\gamma+1,(0,T) \times \Omega}^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

En ce qui concerne l'autre intégrale du membre de droite de (6.19), en accord avec le lemme II.1 dans lequel on pose $b(s) = s$, celle-ci est égale à

$$\frac{1}{(2\mu_1 + \mu_2)} \int_0^\tau \int_\Omega a(\overline{\rho^\gamma T_k(\rho)} - \overline{\rho^\gamma T_k(\rho)}) \, dx \, dt,$$

intégrale qui, d'après le lemme A.19 (monotonie de la pression) est négative ou nulle. On passe maintenant à la limite $k \rightarrow \infty$ dans (6.19). Pour ce faire, noter que

$$\|\rho_\delta(\tau) 1_{\{\rho_\delta(\tau) \geq k\}}\|_{0,p,\Omega} \leq ck^{\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p}}, \quad \tau \in [0, T], \quad p \in [1, \gamma]$$

et que

$$\begin{aligned} & \forall \alpha \in (0, \gamma - 1], \quad \exists \eta(\alpha) > 0, \quad (\gamma - \alpha)(1 + \eta(\alpha)) < \gamma \text{ tel que } \forall \tau \in [0, T], \\ & \quad \quad \quad \|(\rho_\delta \ln \rho_\delta)(\tau) 1_{\{\rho_\delta(\tau) \geq k\}}\|_{0,\gamma-\alpha,\Omega} \\ & \leq \|\rho_\delta(\tau) 1_{\{\rho_\delta(\tau) \geq k\}}\|_{0,(\gamma-\alpha)(1+\eta(\alpha)),\Omega}^{(1+\eta(\alpha))} \leq ck^{(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{(\gamma-\alpha)(1+\eta(\alpha))})(1+\eta(\alpha))}. \end{aligned}$$

De plus, $|L_k(s) - s \ln s| \leq \{s \ln s + s(\ln k + 1)\} 1_{\{s \geq k\}}$. Quand $k \rightarrow \infty$, ces deux dernières observations entraînent que

$$L_k(\rho)(\tau) \rightarrow (\rho \ln \rho)(\tau) \text{ et } \overline{L_k(\rho)}(\tau) \rightarrow \overline{\rho \ln \rho}(\tau) \text{ dans } L^p(\Omega), \quad p \in [1, \gamma), \quad \tau \in [0, T].$$

Finalement, on conclut à l'inégalité

$$\int_\Omega \{\overline{\rho \ln \rho} - \rho \ln \rho\}(\tau) \, dx \leq 0, \quad \tau \in [0, T].$$

Puisque la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t \ln t$ est convexe, on sait que $\rho \ln \rho \leq \overline{\rho \ln \rho}$ p.p. dans $(0, T) \times \Omega$. En résumé, on vient de démontrer que la convergence faible commute avec une fonction strictement convexe. D'après le lemme A.18, il en résulte que

$$\rho_\delta \rightarrow \rho \text{ dans } L^p((0, T) \times \Omega) \cap L^q((0, T) \times K), \quad p \in [1, \gamma), \quad q \in [1, \gamma + \theta), \quad (6.20)$$

K désignant tout sous-ensemble compact de Ω . En particulier de (6.20), il vient que $\overline{\rho^\gamma} = \rho^\gamma$ p.p. dans $(0, T) \times \Omega$ et donc que (ρ, \mathbf{u}) est solution de l'équation de mouvement (1.2). Pour conclure, il suffit de passer à la limite $\delta \rightarrow 0^+$ dans l'inégalité d'énergie (2.35) dans laquelle $\rho_0 = \rho_{0,\delta}$, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_{0,\delta}$ et $\rho_\infty = \rho_{\infty,\delta}$ en utilisant des arguments similaires à ceux présentés à plusieurs reprises dans les situations analogues (semi-continuité inférieure faible, théorème de convergence de Vitali, ...) pour récupérer (1.15). Ainsi s'achève la preuve du théorème II.1. \square

Troisième Partie :

Annexes

Annexe A

Notations et Rappels

Sommaire

1	Généralités	192
2	Espaces de Lebesgue	199
3	Distributions	203
4	Espaces de Sobolev	204
4.1	Définition et propriétés élémentaires	204
4.2	Injections continues, compactes	205
4.3	Traces et relèvement	206
4.4	Inégalités	210
4.5	Dualité	210
4.6	Interpolation	211
5	Espaces de Sobolev homogènes	211
6	Champs de vecteurs à divergence sommable	213
7	Fonctions absolument continues	213
8	Multiplicateurs de Fourier	214
8.1	Distributions tempérées	214
8.2	Transformée de Fourier	215
8.3	Résultats sur les multiplicateurs	216
9	Fonctions à valeurs dans un espace de Banach	216
9.1	Fonctions continues, continûment dérivables	217
9.2	Intégrale de Bochner	218
9.3	Espaces de Lebesgue à valeurs dans un espace de Banach	219
9.4	Lemmes de Gronwall	220
9.5	Quelques résultats de compacité	221
10	Analyse convexe, fonctions monotones	222

Dans ce chapitre, nous dressons une liste non exhaustive des principales notations utilisées tout au long de ce mémoire. D'autres, plus spécifiques, seront introduites dans le texte. Nous rappelons également divers résultats généraux qui pour la plupart sont accompagnés de références à la bibliographie et seront utilisés dans le texte de manière plus ou moins transparente.

1 Généralités

Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, muni d'un système de coordonnées cartésiennes d'origine O et d'axes Ox_1, \dots, Ox_N engendrés par les vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$, pour distinguer les vecteurs $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$ des points $x = (x_1, \dots, x_N)$, ceux-ci sont notés en gras. Pour un vecteur ligne \mathbf{v} (respectivement colonne), \mathbf{v}^T est le vecteur transposé colonne (respectivement ligne) correspondant. Dans \mathbb{R}^N , le produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est défini par

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N u_i v_i$$

et, les normes étant toutes équivalentes, la norme d'un vecteur \mathbf{v} est indifféremment notée $|\mathbf{v}|$. Par $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ et $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, on désigne les produits vectoriel et tensoriel de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_N \\ u_1 & \cdots & u_N \\ v_1 & \cdots & v_N \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \{u_i v_j\}_{i,j=1,\dots,N}$$

où le déterminant doit être compris dans un sens symbolique. On utilisera aussi des tenseurs \mathbf{T} d'ordre deux qui peuvent être exprimés comme des matrices $\{T_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$. Le produit scalaire de deux tenseurs \mathbf{S} , \mathbf{T} d'ordre deux et la norme d'un tenseur \mathbf{T} d'ordre deux sont définis par

$$\mathbf{S} : \mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^N S_{ij} T_{ij} \quad \text{et} \quad |\mathbf{T}| = (\mathbf{T} : \mathbf{T})^{\frac{1}{2}}.$$

Pour un vecteur \mathbf{v} et un tenseur \mathbf{T} d'ordre deux, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$, resp. $\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$, désigne le vecteur de composantes

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{T})_j = \sum_{i=1}^N v_i T_{ij} \quad , \quad \text{resp.} \quad (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v})_i = \sum_{j=1}^N T_{ij} v_j.$$

Soient $R > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N$. Par $B_R(x)$, on notera la boule ouverte de \mathbb{R}^N de centre x et de rayon R , *i.e.*

$$B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^N, |x - y| < R\}$$

et par $B^R(x)$ le complémentaire de $B_R(x)$ dans \mathbb{R}^N . Pour simplifier les notations, lorsque le point x est l'origine du système de coordonnées cartésiennes O , on écrira B_R , resp. B^R , plutôt que $B_R(x)$, resp. $B^R(x)$. On rappelle qu'un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ qui possède la

propriété qu'il n'existe pas de partition de Ω en des ensembles ouverts non vides, est dit connexe. Tout au long de ce mémoire un domaine de \mathbb{R}^N désigne un ouvert connexe de \mathbb{R}^N . Sauf mention explicite du contraire, pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $R > 0$, les notations standard $\Omega_R = \Omega \cap B_R$ et $\Omega^R = \Omega \cap B^R$ seront utilisées. Nous dirons que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné s'il existe un réel R_0 tel que $\Omega \subset B_{R_0}$. Dans le cas contraire, nous dirons que Ω est un domaine non borné. Par $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine extérieur, il faudra comprendre que $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ est un domaine borné.

Dans ce paragraphe, nous regroupons diverses notions d'analyse fonctionnelle utilisées de manière intensive dans ce mémoire. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter les livres de BRÉZIS [8], RUDIN [68] et YOSIDA [82] qui constituent une base solide en analyse fonctionnelle. Nous supposons que le lecteur est familiarisé avec les notions élémentaires de topologie. Pour les notions d'opérateur linéaire borné, non borné, de domaine, d'image, de noyau ou de graphe d'un opérateur, d'opérateur fermé, d'adjoint, d'opérateur compact, nous renvoyons le lecteur à [8, Chapitre II, Chapitre VI].

Soient E et F deux espaces vectoriels normés muni de leur norme respective $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. On dit qu'il y a injection de E dans F si $E \subset F$ au sens des ensembles et s'il existe un opérateur linéaire I défini sur E à valeurs dans F , injectif et tel que $I(x) = x$ pour $x \in E$. Si I est continu, on parle d'injection continue de E dans F , fait qui revient à dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $x \in E$, $\|x\|_F \leq c\|x\|_E$. Enfin, lorsque l'opérateur I est compact (on reviendra sur ce type d'opérateurs dans l'annexe C), on dira que l'injection de E dans F est compacte. Dans ce cas, on a la conséquence immédiate suivante : si une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans E , il est possible d'en extraire une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui converge dans F .

Soient E et F deux espaces de Banach. On désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires et continus de E dans F muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F.$$

Lorsque $F = \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(E, F)$ est noté E' (parfois E^* comme dans la littérature américaine) et désigne le dual topologique de E , *i.e.* l'espace des formes linéaires et continues sur E . A tout élément $f \in E'$ peut être associé une application $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_f(x) = f(x)$. La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie avec le minimum d'ouverts rendant continues toutes les applications $\{\varphi_f\}_{f \in E'}$. Cette topologie est séparée et coïncide avec la topologie usuelle lorsque E est de dimension finie. Etant donnée une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset E$, on écrira $x_n \rightharpoonup x$ pour spécifier que celle-ci converge vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Lemme A.1 Soient E un espace de Banach et $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de E . On a

- (i) dire que $x_n \rightharpoonup x$ est équivalent à dire que pour tout $f \in E'$, $f(x_n) \rightarrow f(x)$;
- (ii) si $x_n \rightarrow x$, alors $x_n \rightharpoonup x$;
- (iii) si $x_n \rightharpoonup x$, alors $\{\|x_n\|\}_n$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$;
- (iv) si $x_n \rightharpoonup x$ et si $f_n \rightarrow f$ dans E' , alors $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Preuve. Voir *e.g.* [8, Proposition III.5]. □

Théorème A.1 Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire et continu de E dans F . Alors T est continu de E muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$ dans F muni de la topologie faible $\sigma(F, F')$ et réciproquement.

Preuve. Voir *e.g.* [8, Théorème III.9]. □

Soit E un espace de Banach, E' son dual et E'' le dual de E' muni de la norme duale. Soit $x \in E$ fixé. A tout élément $f \in E'$ peut être associé une application $J_x : E' \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $J_x(f) = f(x)$. En conséquence, on peut définir une application $J : E \rightarrow E''$ par $J(x) = J_x$, application qui est clairement injective mais est également une isométrie. A l'aide de cette application J , il est toujours possible d'identifier E à un sous-espace de E'' . A tout élément $x \in E$ peut être associé une application $\varphi_x : E' \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_x(f) = f(x)$. La topologie $*$ faible (ou faible $*$) $\sigma(E', E)$ sur E' est la topologie avec le minimum d'ouverts rendant continues toutes les applications $\{\varphi_x\}_{x \in E}$. Puisque $E \subset E''$, cette topologie possède moins d'ouverts que la topologie faible $\sigma(E', E'')$. Comme la topologie faible, c'est une topologie séparée. Etant donnée une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset E'$, on écrira $f_n \xrightarrow{*} f$ pour spécifier que celle-ci converge vers f pour la topologie $*$ faible $\sigma(E', E)$.

Lemme A.2 Soient E un espace de Banach et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de E' . On a

- (i) dire que $f_n \xrightarrow{*} f$ est équivalent à dire que pour tout $x \in E$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$;
- (ii) si $f_n \rightarrow f$, alors $f_n \xrightarrow{*} f$;
- (iii) si $f_n \xrightarrow{*} f$, alors $\{\|f_n\|\}_n$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf_n \|f_n\|$;
- (iv) si $f_n \xrightarrow{*} f$ et si $x_n \rightarrow x$ dans E , alors $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Preuve. Voir *e.g.* [8, Proposition III.12]. □

Soient E un espace de Banach et J l'injection de E dans E'' introduite auparavant. Si J est une application surjective, on dit que E est un espace réflexif et on identifie E à son bidual E'' par le biais de J . Pour diverses propriétés des espaces de Banach réflexifs, le lecteur peut consulter [8, Section III.5]. Un résultat sur les espaces de Banach réflexifs et la topologie faible $\sigma(E, E')$ que nous utiliserons fréquemment est donné par le

Théorème A.2 (Kakutani) Soient un espace de Banach réflexif E et $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset E$ une suite bornée. Alors il existe une sous-suite extraite $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui converge pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Preuve. Voir *e.g.* [8, Théorème III.16, Théorème III.27]. □

Soit E un espace de Banach. On rappelle que E est dit séparable s'il existe un sous-ensemble de E dénombrable et dense. Pour diverses propriétés des espaces de Banach séparables, le lecteur peut consulter [8, Section III.6]. Un résultat sur les espaces de Banach réflexifs et la topologie $*$ faible $\sigma(E', E)$ que nous utiliserons fréquemment est donné par le

Théorème A.3 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) Soient un espace de Banach séparable E et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset E'$ une suite bornée. Alors il existe une sous-suite extraite $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui converge pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Preuve. Voir *e.g.* [8, Théorème III.15, Théorème III.25, Corollaire III.26]. \square

Soit E un espace de Banach. On dit de E qu'il est uniformément convexe si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $x, y \in E$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ et $\|x - y\| > \varepsilon$ impliquent que $\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$. Terminons sur les notions de topologie faible et faible $*$ par la propriété suivante des espaces de Banach uniformément convexes :

Théorème A.4 Soient un espace de Banach uniformément convexe E et $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset E$ une suite telle que $x_n \rightharpoonup x$ et $\limsup_n \|x_n\| \leq \|x\|$. Alors $x_n \rightarrow x$.

Preuve. Voir *e.g.* [8, Proposition III.30]. \square

Soit une fonction u définie sur un domaine Ω de \mathbb{R}^N à valeurs dans \mathbb{R} dont les dérivées partielles, notées $\partial_i u$, $i = 1, \dots, N$, existent. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, \dots, N$, un multi-indice de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$. D^α dénote l'opérateur différentiel $\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_N^{\alpha_N}$. Avec ces notations, on désigne par ∇ l'opérateur gradient défini par $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_N u)^T$.

Pour un champ de vecteurs $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$ dont chaque composante est une fonction définie sur un domaine Ω de \mathbb{R}^N à valeurs dans \mathbb{R} dont les dérivées partielles existent, les expressions suivantes désignent respectivement les opérateurs différentiels divergence et rotationnel : $\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ et $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$. La matrice Jacobienne de \mathbf{v} en $x_0 \in \Omega$ est la matrice notée $D\mathbf{v}(x_0)$ et définie par

$$D\mathbf{v}(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1(x_0) & \cdots & \partial_N v_1(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 v_N(x_0) & \cdots & \partial_N v_N(x_0) \end{pmatrix}_{N \times N}$$

et par $J_{\mathbf{v}}(x_0) = \det D\mathbf{v}(x_0)$, on désigne le Jacobien de \mathbf{v} en x_0 . Pour une fonction v définie sur \mathbb{R}^N à valeurs dans \mathbb{R}^M , $M \leq N$, dont chaque composante v_i , $i = 1, \dots, M$, possède des dérivées partielles $\partial_j v_i$, $j = 1, \dots, N$, ces deux notions se généralisent de la façon suivante :

$$D\mathbf{v}(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1(x_0) & \cdots & \partial_N v_1(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 v_M(x_0) & \cdots & \partial_N v_M(x_0) \end{pmatrix}_{M \times N}.$$

Il est alors possible de décomposer $D\mathbf{v}(x_0)$ en un produit d'une matrice symétrique de type $M \times M$, notée S_{x_0} et de l'adjoint d'une matrice orthogonale O_{x_0} de type $N \times M$, *i.e.* $D\mathbf{v}(x_0) = S_{x_0} O_{x_0}^*$. On définit alors le Jacobien de \mathbf{v} en x_0 et on le note à nouveau $J_{\mathbf{v}}(x_0)$, par $J_{\mathbf{v}}(x_0) = \det S_{x_0}$. Dans le cas particulier $N \geq 2$ et $M = 1$, $Dv(x_0) = \nabla v(x_0)^T$ et si $J_{\mathbf{v}}(x_0) \neq 0$, S_{x_0} étant dans ce cas une constante, il est clair que $S_{x_0} \neq 0$. Par conséquent, puisque O_{x_0} est orthogonale, au moins une des composantes de $\nabla v(x_0)^T$ et donc de $\nabla v(x_0)$ est non nulle. Enfin, si on suppose que chaque composante du champ de vecteurs \mathbf{v} défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ à valeurs dans \mathbb{R}^N possède des dérivées partielles du second ordre $\partial_j \partial_k v_i$, $i, j, k = 1, \dots, N$, l'opérateur différentiel de Laplace, souvent appelé

Laplacien, est défini par $\Delta \mathbf{v} = (\Delta v_1, \dots, \Delta v_N)^T$ où $\Delta v_i = \partial_j \partial_j v_i$, $i = 1, \dots, N$. Dans cette dernière expression, comme la plupart du temps dans le texte, nous avons utilisé la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés, à savoir que dans une expression, une paire d'indices identiques signifie la sommation par rapport à cet indice de cette expression. Ici, $\partial_j \partial_j v_i := \sum_{j=1}^N \partial_j \partial_j v_i$, $i = 1, \dots, N$.

De manière analogue, si $\mathbf{T} = \{T_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$ est un champ de tenseurs d'ordre deux dont chaque composante est une fonction définie sur un domaine Ω de \mathbb{R}^N à valeurs dans \mathbb{R} dont les dérivées partielles existent, on définit l'opérateur divergence $\operatorname{div} \mathbf{T}$ par $(\operatorname{div} \mathbf{T}_1, \dots, \operatorname{div} \mathbf{T}_N)$ où \mathbf{T}_i désigne le vecteur de composantes (T_{i1}, \dots, T_{iN}) .

On rappelle maintenant les notations usuelles des espaces de fonctions continues ou plusieurs fois continûment dérivables ou Höldériennes, à valeurs réelles, définies sur un domaine Ω de \mathbb{R}^N . Soit $k \in \mathbb{N}$. On notera $C^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f qui sont telles que, pour tout $|\alpha| \leq k$, la fonction $D^\alpha f$ est continue. $C^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions définies sur Ω qui possèdent des dérivées de tout ordre. Autrement dit,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Pour une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, son support, l'ensemble noté $\operatorname{supp} f$, est la fermeture de l'ensemble des points de Ω pour lesquels f ne s'annule pas, *i.e.*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}}.$$

Par $C_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on dénote l'ensemble de toutes les fonctions de $C^k(\Omega)$ à support compact dans Ω et par $C_0^\infty(\Omega)$ l'ensemble $\bigcap_{k=0}^{\infty} C_0^k(\Omega)$. Dans ce mémoire, lorsque l'on désignera l'ensemble $C_0^\infty(\Omega)$ en tant qu'ensemble, celui-ci sera indifféremment noté $C_0^\infty(\Omega)$ ou $\mathcal{D}(\Omega)$ et ce pour des raisons évoquées plus loin. Soit $k \in \mathbb{N}$. On notera $C^k(\overline{\Omega})$ le sous-ensemble des fonctions f de $C^k(\Omega)$ pour lesquelles toutes les dérivées $D^\alpha f$ d'ordre $|\alpha| \leq k$ sont bornées et uniformément continues sur Ω . De manière équivalente, $C^k(\overline{\Omega})$ peut être caractérisé par le sous-ensemble des fonctions f de $C^k(\Omega)$ telles que pour chaque multi-indice $|\alpha| \leq k$, l'application $x \in \Omega \mapsto D^\alpha f(x)$ se prolonge continûment sur $\overline{\Omega}$. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\theta \in (0, 1]$. On notera $C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$ le sous-ensemble des fonctions f de $C^k(\overline{\Omega})$ telles que pour tout multi-indice $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha f$ satisfait une condition de Hölder d'exposant θ , *i.e.*

$$\exists c = c(f) > 0, \quad |D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq c|x - y|^\theta, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Soient $k \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0, 1]$. On pose

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} &= \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|, \quad f \in C^k(\overline{\Omega}), \\ \|f\|_{C^{k,\theta}(\overline{\Omega})} &= \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x - y|^\theta}, \quad f \in C^{k,\theta}(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Alors $\|\cdot\|_{C^k(\overline{\Omega})}$, resp. $\|\cdot\|_{C^{k,\theta}(\overline{\Omega})}$, est une norme sur l'espace vectoriel $C^k(\overline{\Omega})$, resp. $C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$, et muni de cette norme, $C^k(\overline{\Omega})$, resp. $C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$, est un espace de Banach.

Donnons maintenant quelques résultats classiques d'analyse.

Lemme A.3 (Inégalité de Hardy (classique)) Soit $f \in C^1([0, \infty))$. Alors l'inégalité

$$\int_0^\infty |f(t)|^p t^{\varepsilon-p} dt \leq \left(\frac{p}{|\varepsilon - p + 1|} \right)^p \int_0^\infty |f'(t)|^p t^\varepsilon dt$$

vaut pour $\varepsilon > p - 1$ si $f(\infty) = 0$ et pour $\varepsilon < p - 1$ si $f(0) = 0$.

Preuve. Voir e.g. [26]. □

Théorème A.5 (Théorème des fonctions implicites) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ et $\mathbf{f} \in [C^1(\Omega)]^N$, $M, N \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $(x_0, y_0) \in \Omega$ est tel que $\mathbf{f}(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ et que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \partial_{M+1}f_1 & \cdots & \partial_{M+N}f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{M+1}f_N & \cdots & \partial_{M+N}f_N \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alors il existe un voisinage ω de x_0 et une unique application $\varphi \in [C^1(\omega)]^N$ telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et pour tout $x \in \omega$ on ait $\mathbf{f}(x, \varphi(x)) = \mathbf{0}$. De plus, si $x \in \omega$ et $\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{0}$ alors $y = \varphi(x)$ et la matrice Jacobienne de $D_\varphi(x)$ est donnée par

$$-\begin{pmatrix} \partial_{M+1}f_1(x, y) & \cdots & \partial_{M+N}f_1(x, y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{M+1}f_N(x, y) & \cdots & \partial_{M+N}f_N(x, y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_1f_1(x, y) & \cdots & \partial_Mf_1(x, y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1f_N(x, y) & \cdots & \partial_Mf_N(x, y) \end{pmatrix}, \quad y = \varphi(x).$$

Preuve. Voir e.g. [2] dans un cadre plus général ou [11]. □

Théorème A.6 (Théorème de Morse-Sard) Soient $M, N \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{f} \in [C^k(\mathbb{R}^N)]^M$, $k = 1 + N - M$. Alors, p.p.t. $y \in \mathbb{R}^N$ (voir plus loin pour la signification de l'abréviation p.p.t.), on a

$$\{x \in \mathbb{R}^N, J_{\mathbf{f}}(x) = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^N, \mathbf{f}(x) = y\} = \emptyset.$$

Preuve. Voir e.g. [15, Section 3.4.2] pour des considérations plus générales. □

Ceci étant, lorsque Ω est un domaine de \mathbb{R}^N , on désignera par $\partial\Omega$ son bord ou sa frontière dont nous rappelons maintenant la notion de régularité. Tous les systèmes de coordonnées considérés dans la définition ci-dessous ont même orientation que le système fixe $X = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N)$. Plus exactement, si $\tilde{X} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_N)$, la tranformation $\tilde{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, N$, est de la forme

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_i) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{e}_i + \tilde{\mathbf{c}}, \quad i = 1, \dots, N$$

où $\tilde{\mathbf{A}}$ est une matrice de rotation et $\tilde{\mathbf{c}}$ un vecteur de \mathbb{R}^N .

Définition A.1 Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\theta \in (0, 1]$. On dit qu'un domaine à frontière bornée $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est de classe $C^{k, \theta}$ et on note $\Omega \in C^{k, \theta}$ (ou parfois $\partial\Omega \in C^{k, \theta}$) s'il existe

- (i) m systèmes de coordonnées cartésiennes X_r , $r = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}^*$, dans lesquels les points de \mathbb{R}^N sont notés $(x_{r_1}, \dots, x_{r_N}) = (x'_r, x_{r_N})$;
- (ii) un nombre $\alpha > 0$ et m fonctions $a_r \in C^{k,\theta}(\overline{\Delta_r})$, $r = 1, \dots, m$, avec

$$\Delta_r = \{x'_r, x_{r_i} \in]-\alpha, \alpha[, i = 1, \dots, N-1\} ;$$

(iii) un nombre $\delta > 0$ tel que

- les ensembles $\Lambda_r = \mathbf{A}_r^{-1}(\{x_r = (x'_r, x_{r_N}), x'_r \in \Delta_r, x_{r_N} = a(x'_r)\})$, \mathbf{A}_r désignant la transformation permettant de passer du système de coordonnées fixes X au système X_r , sont des sous-ensembles de $\partial\Omega$ satisfaisant

$$\partial\Omega = \bigcup_{r=1}^m \Lambda_r ;$$

- les ensembles $U_r^+ = \mathbf{A}_r^{-1}(\{x_r = (x'_r, x_{r_N}), x'_r \in \Delta_r, a(x'_r) < x_{r_N} \leq a(x'_r) + \delta\})$ sont des sous-ensembles de Ω ;
- les ensembles $U_r^- = \mathbf{A}_r^{-1}(\{x_r = (x'_r, x_{r_N}), x'_r \in \Delta_r, a(x'_r) - \delta < x_{r_N} \leq a(x'_r)\})$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

Lorsque $k = 0$ et $\theta = 1$, on dit aussi que Ω est un domaine à frontière Lipschitzienne. Enfin, si Ω est un domaine à frontière non bornée, on dit que Ω est un domaine localement de classe $C^{k,\theta}$ si pour tout $R > 0$, $\Omega_R = \Omega \cap B_R$ est de classe $C^{k,\theta}$.

Dans la suite, pour pouvoir introduire convenablement la notion de trace d'une fonction appartenant à un espace de Sobolev, on aura besoin de l'application $Q_r : \overline{\Delta_r} \times [-\alpha, \alpha]$, $r = 1, \dots, m$, définie par $Q_r(x'_r, \xi) = (x'_r, a_r(x'_r) + \xi)$. Cette application est inversible sur $Q_r(\Delta_r \times (-\alpha, \alpha)) = \mathbf{A}_r(U_r^- \cup \Lambda_r \cup U_r^+)$ d'inverse noté Q_r^{-1} et défini par $Q_r^{-1}(y'_r, \xi) = (y'_r, \xi - a_r(y'_r))$. On aura également besoin de la notion de partition de l'unité subordonnée à un recouvrement ouvert d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Théorème A.7 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine et $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de Ω . Alors il existe une famille finie de fonctions $\{\varphi_j\}_{j \in J \subset I} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, appelée partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de Ω , telle que :

- (i) pour chaque $j \in J$, $\text{supp } \varphi_j \subset U_i$ pour un certain $i \in I$;
- (ii) $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $j \in J$;
- (iii) $\sum_{j \in J} \varphi_j(x) = 1$, $\forall x \in \Omega$.

Preuve. Voir e.g [82]. □

Dans le chapitre 3 et l'annexe B, des problèmes posés sur des domaines dits à plusieurs sorties côniques sont examinés. Voici la définition de ce type de domaines :

Définition A.2 Soit $\{s_1, \dots, s_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, des points de \mathbb{R}^3 . Par \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, n$, on dénote le cône de révolution d'axe de symétrie la droite Δ_i , de demi-ouverture $\theta_i \in (0, \pi)$, et de sommet s_i . On dira que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine à n sorties côniques de classe $C^{k,\theta}$, $k \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0, 1]$ si

(1) il existe un nombre réel $R_0 > 0$ tel que

$$\forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j, \quad \overline{(\mathcal{C}_i)^{R_0}} \cap \overline{(\mathcal{C}_j)^{R_0}} = \emptyset \quad \text{et} \quad \Omega = (\Omega \cap \overline{\tilde{B}_{R_0}}) \cup \bigcup_{i=1}^n (\mathcal{C}_i)^{R_0}$$

où pour tout $R \geq R_0$, $(\mathcal{C}_i)^R = \mathcal{C}_i \setminus \overline{B(s_i, R)}$, $i = 1, \dots, n$ et $\tilde{B}_R = \bigcup_{i=1}^n B(s_i, R)$;

(2) la frontière $\partial\Omega$ est localement de classe $C^{k,\theta}$.

Dès que Ω désignera un tel domaine, on utilisera les notations suivantes :

$$\Omega_R \equiv \Omega \cap \tilde{B}_R \quad \text{and} \quad \Omega^R \equiv \Omega \setminus \overline{\tilde{B}_R} = \bigcup_{i=1}^n (\mathcal{C}_i)^R.$$

Souvent, par souci de clarté et sans perte de généralité, on supposera $R_0 = 1$.

Pour terminer avec les généralités, rappelons l'inégalité de Young

Lemme A.4 (Inégalité de Young (classique)) Soient $p \in (1, \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}_+$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$ab \leq \varepsilon \frac{a^p}{p} + \varepsilon^{-\frac{1}{p-1}} \frac{b^{p'}}{p'}$$

où p' est l'exposant conjugué de p , i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

2 Espaces de Lebesgue

On suppose le lecteur familiarisé avec la théorie de la mesure de Lebesgue et des fonctions intégrables au sens de Lebesgue. Pour des rappels sur le sujet, on pourra *e.g.* consulter les livres de HALMOS [25], HEWITT-STROMBERG [28] ou RUDIN [67].

Soit $p \in [1, \infty)$. On dénote par $L^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω à valeurs réelles de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable et par $L^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω à valeurs réelles essentiellement bornées. Muni de la norme

$$\|f\|_{0,p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p \in [1, \infty),$$

$$\|f\|_{0,\infty,\Omega} = \inf\{c, |f(x)| \leq c \text{ p.p. dans } \Omega\} \quad \text{si } p = \infty,$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach, séparable pour $p \in [1, \infty)$, et réflexif pour $p \in (1, \infty)$. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous omettons de préciser le domaine dans la norme. Dans ce mémoire, nous désignerons par $\tilde{L}^p(\Omega)$ le sous-espace des fonctions de $L^p(\Omega)$ d'intégrale nulle, *i.e.*

$$\tilde{L}^p(\Omega) \equiv \left\{ f \in L^p(\Omega), \int_{\Omega} f dx = 0 \right\}$$

et

$$L_{loc}^p(\Omega) = \{f \in L^p(K), \forall K \subset \Omega, K \text{ compact}\},$$

$$L_{loc}^p(\overline{\Omega}) = \{f \in L^p(\omega), \forall \omega \subset \Omega\}.$$

Rappelons divers résultats classiques. Tout au long du texte, nous utiliserons les abréviations p.p. = presque partout et p.p.t. = pour presque tout.

Théorème A.8 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue) *On suppose que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions mesurables sur un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ telle que $f_n \rightarrow f$ p.p. dans Ω et qu'il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. dans Ω . Alors $f \in L^1(\Omega)$ et*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Une réciproque « partielle » du théorème de la convergence dominée de Lebesgue s'énonce

Théorème A.9 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable, $p \in [1, \infty)$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ telles que $\|f_n - f\|_{0,p} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|f_{n_k}| \leq g$ p.p. dans Ω et $f_{n_k} \rightarrow f$ p.p. dans Ω quand $k \rightarrow \infty$.*

Lemme A.5 (Fatou) *Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions mesurables sur un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, p.p. positive dans Ω . Alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ est intégrable et*

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

Définition A.3 (Equi-intégrabilité) *On dit d'une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset L^1(\Omega)$ qu'elle est équi-intégrable si la condition suivante est satisfaite : $\forall \varepsilon > 0, \exists E \subset \Omega$ un ensemble de mesure finie et $\delta > 0$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{E^c} |f_n(x)| dx < \varepsilon ;$$

$$\forall A \subset \Omega, |A| < \delta, \int_A |f_n(x)| dx < \varepsilon.$$

Remarque A.1 Noter que lorsque Ω est de mesure finie, la notion d'équi-intégrabilité se réduit à la seconde condition.

Théorème A.10 (Théorème de convergence de Vitali) *Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions mesurables, d'intégrale finie, sur un ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de mesure finie. On suppose que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ p.p.t. } x \in \Omega$$

et que f est presque partout une fonction finie. Alors $f_n \rightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$ si et seulement si la suite $\{f_n\}_n$ est équi-intégrable.

Voici un lien entre la convergence presque partout et la convergence faible dans les espaces $L^p(\Omega)$.

Lemme A.6 Soient $p \in (1, \infty)$ et $\{f_n\}_n$ une suite bornée dans $L^p(\Omega)$ qui converge p.p. dans Ω vers f . Alors la suite $\{f_n\}_n$ converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$.

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences du théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Théorème A.11 Soient $T \in (0, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable et f une fonction définie sur $(0, T) \times \Omega$. On suppose que

- (i) p.p.t. $x \in \Omega$, $f(\cdot, x)$ est continue sur $(0, T)$;
- (ii) pour tout $t \in (0, T)$, $f(t, \cdot)$ est mesurable sur Ω ;
- (iii) il existe une fonction g d'intégrale finie sur Ω telle que $|f(t, x)| \leq g(x)$ pour tout $t \in (0, T)$ et p.p.t. $x \in \Omega$.

Alors

$$F(t) = \int_{\Omega} f(t, x) dx$$

est continue sur $(0, T)$.

Théorème A.12 Soient $T \in (0, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable et f une fonction définie sur $(0, T) \times \Omega$. On suppose que

- (i) l'intégrale

$$F(t) = \int_{\Omega} f(t, x) dx \tag{2.1}$$

est finie pour au moins une valeur $t_0 \in (0, T)$;

- (ii) pour tout $t \in (0, T)$, $f(t, \cdot)$ est mesurable sur Ω ;
- (iii) pour tout $t \in (0, T)$ et p.p.t. $x \in \Omega$, la dérivée $\partial_t f(t, x)$ existe et est finie ;
- (iv) il existe une fonction g d'intégrale finie sur Ω telle que $|\partial_t f(t, x)| \leq g(x)$ pour tout $t \in (0, T)$ et p.p.t. $x \in \Omega$. Alors, pour tout $t \in (0, T)$, l'intégrale (2.1) est finie et

$$F'(t) = \int_{\Omega} \partial_t f(t, x) dx.$$

Théorème A.13 (Fubini) Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ deux ouverts et une fonction $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors, p.p.t. $x \in \Omega_1$,

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, p.p.t. $y \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

En outre, on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

Théorème A.14 (Inégalité de Hölder) Soient $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ où p' est l'exposant conjugué de p . Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{0,1} \leq \|f\|_{0,p} \|g\|_{0,p'}.$$

Une conséquence directe et très utile de l'inégalité de Hölder est donnée par le

Corollaire A.1 (Inégalité d'interpolation) Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [p, q]$ et

$$\|f\|_{0,r} \leq \|f\|_{0,p}^\theta \|f\|_{0,q}^{1-\theta}, \quad \theta \in [0, 1], \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Rappelons maintenant le théorème de représentation de Riesz permettant d'identifier le dual $(L^p(\Omega))'$ à l'espace $L^{p'}(\Omega)$ où p' est l'exposant conjugué de p .

Théorème A.15 (Théorème de représentation de Riesz) Soit $F \in (L^p(\Omega))'$, $p \in (1, \infty)$. Alors il existe une unique fonction $f \in L^{p'}(\Omega)$ telle que

$$\langle F, g \rangle_{(L^p(\Omega))', L^p(\Omega)} = \int_{\Omega} fg \, dx, \quad \forall g \in L^p(\Omega)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(L^p(\Omega))', L^p(\Omega)}$ désigne le produit de dualité entre $(L^p(\Omega))'$ et $L^p(\Omega)$.

Regroupons dans ce paragraphe quelques rappels concernant la convolution et la régularisation. Soit $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction non négative satisfaisant $\text{supp } w \subset B_1$ et $\int_{\mathbb{R}^N} w(x) \, dx = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit la fonction w_ε par $w_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} w(\frac{x}{\varepsilon})$. La famille $\{w_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ est appelée famille régularisante (mollifiers en anglais). Soit $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$. On introduit la suite d'opérateurs de régularisation $\{S_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ définie par la convolution

$$S_\varepsilon(f) = \int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon(x-y) f(y) \, dy.$$

On en rappelle maintenant les principales propriétés.

Lemme A.7 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et f une fonction définie sur Ω et à valeurs réelles. On a :

- (i) si $f \in L_{loc}^1(\overline{\Omega})$, alors $S_\varepsilon(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$;
- (ii) si $f \in C^0(\overline{\Omega})$, alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} S_\varepsilon(f)(x) = f(x)$ uniformément sur Ω ;
- (iii) si $p \in [1, \infty)$ et $f \in L^p(\Omega)$, alors $S_\varepsilon(f) \in L^p(\Omega)$. De plus

$$\|S_\varepsilon(f)\|_{0,p} \leq \|f\|_{0,p} \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|S_\varepsilon(f) - f\|_{0,p} = 0.$$

Preuve. Voir e.g. [14, Appendix C, Theorem 6]. □

A toutes fins utiles, noter qu'une conséquence directe de ce lemme réside dans la densité de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$.

Terminons ce paragraphe par l'énoncé de l'inégalité de Young sur la convolution.

Théorème A.16 (Inégalité de Young (convolution)) Soit $p, q \in [1, \infty]$. On suppose que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Alors

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^N), \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \|f * g\|_{0,r} \leq \|f\|_{0,p} \|g\|_{0,q}.$$

Pour conclure cette section, on donne un bref aperçu de la notion de point de Lebesgue. La valeur moyenne d'une fonction intégrable f sur un ensemble mesurable Ω sera souvent notée $\int_{\Omega} f dx$.

Théorème A.17 (de différentiation de Lebesgue-Besicovitch) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On a

(i) si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B_r(x)} f dy = f(x) \text{ p.p.t. } x \in \Omega ; \tag{2.2}$$

(ii) si $f \in C^0(\Omega)$, alors (2.2) est vraie pour tout $x \in \Omega$;

Tout point $x \in \Omega$ satisfaisant l'identité (i) ou (ii) est appelé point de Lebesgue de f .

Preuve. Voir *e.g.* [15] pour le point (i). □

3 Distributions

La notion de dérivée au sens des distributions ou de dérivée faible s'avère être un outil indispensable lorsque l'on s'intéresse à des équations aux dérivées partielles. Dans cette section, on rappelle brièvement les définitions de base de la théorie des distributions. Pour plus de détails, consulter *e.g.* le livre de SCHWARTZ [69], référence incontournable sur la question, mais également celui de REED-SIMON [66] ou encore celui de RUDIN [68].

L'espace des fonctions test, $\mathcal{D}(\Omega)$, est $C_0^\infty(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence uniforme locale : on dira qu'une suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si et seulement s'il existe un ensemble compact $K \subset \Omega$ tel que le support de $\varphi_n \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et tel que $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformément dans K lorsque $n \rightarrow \infty$ et ce pour tout multi-indice α . Il est clair que $\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel. Voici donc la raison pour laquelle, comme annoncé plus haut, nous noterons indifféremment $C_0^\infty(\Omega)$ ou $\mathcal{D}(\Omega)$. Une distribution T est un élément du dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$, noté $\mathcal{D}'(\Omega)$, *i.e.* une forme linéaire et continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Cela signifie que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\langle T, \lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2 \rangle = \lambda \langle T, \varphi_1 \rangle + \mu \langle T, \varphi_2 \rangle, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$;
2. lorsque $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_n \rightarrow \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$

où $\langle T, \varphi \rangle$ dénote la valeur de la forme linéaire T en φ , à savoir $T(\varphi)$. L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ est muni d'une notion naturelle de convergence : on dit qu'une suite $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, le nombre

$\langle T_n, \varphi \rangle$ converge vers $\langle T, \varphi \rangle$. Soit, un multi-indice α . La dérivée $D^\alpha T$ d'ordre $|\alpha|$ d'une distribution T est défini par son action sur les fonctions test comme-suit :

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle .$$

Ceci montre en particulier que la notion de convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est très faible puisqu'il est clair que la dérivation au sens des distributions est une opération continue dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

4 Espaces de Sobolev

Les espaces de fonctions Höldériennes n'apparaissent quasiment jamais, voire très peu, dans la théorie élémentaire des équations aux dérivées partielles et c'est parfois au prix d'une analyse très fine et laborieuse qu'il est possible de prouver que certaines solutions appartiennent en fait à ces espaces. Par conséquent, il semble que le bon cadre fonctionnel pour étudier des équations aux dérivées partielles se trouve dans des espaces de fonctions a priori moins régulières. Dans bon nombre de situations, ce cadre réside dans celui des espaces de Sobolev dont on rappelle la définition et les principales propriétés dans cette section. Pour plus de détails, le lecteur pourra *e.g.* consulter le livre d'ADAMS [1] ainsi que celui de BRÉZIS [8] ou de KUFNER-JOHN-FUČÍK [32].

4.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition A.4 Soient $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est constitué des fonctions $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ dont toutes les dérivées au sens des distributions $D^\alpha f$, d'ordre $|\alpha| \leq m$, sont des fonctions de $L^p(\Omega)$. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, est muni de la norme

$$\|f\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{0,p,\Omega} \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

tandis que pour l'espace $W^{m,\infty}(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{0,\infty,\Omega} .$$

Comme pour les normes des espaces de Lebesgue, lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous omettons de préciser le domaine dans ces normes.

Le sous-espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ de $W^{m,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, est défini par la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$. Autrement dit $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}$.

Souvent, lorsque $p = 2$, on utilisera les notations standard $H^m(\Omega) \equiv W^{m,2}(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega) \equiv W_0^{m,2}(\Omega)$.

L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, muni de la norme correspondante, est un espace de Banach qui est séparable si $p \in [1, \infty)$ et réflexif si $p \in (1, \infty)$. L'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ peut *e.g.* être caractérisé de la façon suivante si Ω est un domaine borné de classe C^1 : $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$ si et seulement si f est Lipschitzienne (cf. *e.g.* [14]). Certains sous-espaces de fonctions régulières de $W^{m,p}(\Omega)$ y sont denses comme l'affirment les théorèmes suivants :

Théorème A.18 (Meyers-Serrin) Soit $p \in [1, \infty)$. Alors l'ensemble des fonctions $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ telles que $\|\varphi\|_{m,p} < \infty$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Preuve. Voir *e.g.* [1]. □

On rappelle qu'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ satisfait la propriété dite du segment si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage U_x de x et un vecteur non nul $\mathbf{v}_x \in \mathbb{R}^N$ tel que $y + t\mathbf{v}_x \in \Omega$ pour tout $y \in \partial\Omega \cap U_x$ et $t \in (0, 1)$.

Théorème A.19 Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^N ayant la propriété du segment et $p \in [1, \infty)$. Alors $C_0^\infty(\overline{\Omega})$, l'ensemble des restrictions à Ω des fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Preuve. Voir également [1]. □

Rappelons ensuite une propriété très intéressante concernant le prolongement d'une fonction de l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ à \mathbb{R}^N .

Théorème A.20 (Nikol'skii) Soit Ω un domaine à frontière bornée et Lipschitzienne de \mathbb{R}^N . Alors il existe un opérateur de prolongement linéaire et continu $P : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve. Voir *e.g.* [32]. □

Une autre propriété intéressante concerne la composition d'une fonction réelle à valeurs réelles avec une fonction appartenant à un espace de Sobolev.

Lemme A.8 Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^N à frontière Lipschitzienne, $G \in C^{0,1}(\mathbb{R})$ et $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$. Alors la fonction $F = G \circ f$ appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ et

$$\partial_i F = G' \circ f \cdot \partial_i f \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Preuve. Voir *e.g.* [32]. □

Lemme A.9 Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^N et $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$. Alors $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = -\min(f, 0) \in W^{1,p}(\Omega)$ et

$$\partial_i f^+ = \begin{cases} \partial_i f & \text{p.p. dans } \{f > 0\} \\ 0 & \text{p.p. dans } \{f \leq 0\} \end{cases}, \quad \partial_i f^- = \begin{cases} -\partial_i f & \text{p.p. dans } \{f < 0\} \\ 0 & \text{p.p. dans } \{f \geq 0\} \end{cases}.$$

Preuve. Voir *e.g.* [14]. □

4.2 Injections continues, compactes

Avant d'énoncer les théorèmes d'injections classiques, on commence par rappeler l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, inégalité que nous appellerons simplement inégalité de Sobolev dans le texte.

Théorème A.21 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine, $p \in [1, N)$ et $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors il existe une constante $c(p, N)$ qui ne dépend que de p et de N telle que

$$\|f\|_{0, \frac{Np}{N-p}} \leq c(p, N) \|\nabla f\|_{0,p}.$$

Preuve. Cette inégalité classique est *e.g.* démontrée dans [8] dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$ et s'étend aisément au cas d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Par densité, elle reste vraie pour $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$. \square

Théorème A.22 (Injections continues) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné à frontière Lipschitzienne, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, \infty)$. Alors les injections suivantes sont continues :

- (i) $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $q \in [1, \frac{Np}{N-mp}]$, si $mp < N$;
- (ii) $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$, si $mp = N$;
- (iii) $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ si $mp > N$;
- (iv) si $m - \frac{N}{p} > 0$ n'est pas un entier, $W^{m,p}(\Omega) \subset C^{[m-\frac{N}{p}]}(\overline{\Omega})$ où $[\alpha]$ désigne la valeur entière du réel α .

Preuve. Voir *e.g.* [8]. \square

Théorème A.23 (Rellich-Kondrachov) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné à frontière Lipschitzienne, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, \infty)$. Alors les injections suivantes sont compactes :

- (i) $W^{m,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$, $q \in [1, \frac{Np}{N-mp})$, si $mp < N$;
- (ii) $W^{m,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$, si $mp = N$;
- (iii) $W^{m,p}(\Omega) \subset\subset C^0(\overline{\Omega})$ si $mp > N$.

Preuve. Voir également [8]. \square

4.3 Traces et relèvement

Ici, nous rappelons les notions de mesure sur le bord d'un domaine régulier, de trace, de relèvements ainsi que les formules usuelles de Green et de Stokes

Définition A.5 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine à frontière bornée et Lipschitzienne. Avec les notations introduites lors de la définition de la régularité de la frontière d'un domaine, on dira que $\Gamma \subset \partial\Omega$ est un sous-ensemble nul de $\partial\Omega$ si pour tout $r = 1, \dots, m$, la mesure de Lebesgue $(N-1)$ -dimensionnelle de l'ensemble $Q_r^{-1} \circ \mathbf{A}_r(\Gamma \cap \Lambda_r)$ est nulle. On dira alors qu'une fonction f est définie presque partout sur $\partial\Omega$ si les points où f n'est pas définie forment un sous-ensemble nul de $\partial\Omega$.

Définition A.6 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine à frontière bornée et Lipschitzienne et $p \in [1, \infty)$. On dira qu'une fonction f définie presque partout sur $\partial\Omega$ appartient à l'espace $L^p(\partial\Omega)$ si chaque fonction ${}_r f = f \circ \mathbf{A}_r^{-1} \circ Q_r$ est un élément de l'espace $L^p(\Delta_r)$, $r = 1, \dots, m$. L'espace $L^p(\partial\Omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_{0,q,\partial\Omega} = \left(\sum_{r=1}^m \int_{\Delta_r} |{}_r f(x'_r, 0)|^p dx'_r \right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach qui est séparable si $p \in [1, \infty)$ et réflexif si $p \in (1, \infty)$.

Avant de poursuivre, on ouvre une brève parenthèse sur les fonctions Lipschitziennes. Plus exactement, on rappelle le théorème de Rademacher.

Théorème A.24 (Rademacher) *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine et $f \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Alors f est presque partout dérivable dans Ω .*

Preuve. Voir *e.g.* [3, Théorème VII.2]. □

A l'aide du théorème de Rademacher, on peut définir sur $L^p(\partial\Omega)$ une norme équivalente à celle introduite ci-dessus. Pour ce faire, il suffit de considérer $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ de $\partial\Omega$, puis de poser

$$\|f\|_{0,p,\partial\Omega} = \left(\int_{\partial\Omega} |f|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{r=1}^m \int_{\Delta_r} |{}_r(f\varphi_r)(x'_r, 0)|^p \psi_r(x'_r) dx'_r \right)^{\frac{1}{p}}$$

où

$$\psi_r(x'_r) = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{r_i}}(x'_r) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Définition A.7 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine à frontière bornée et Lipschitzienne. Le vecteur normal unitaire extérieur au point $x \in \Lambda_r$, $r = 1, \dots, m$, existe p.p.t. $x \in \partial\Omega$ et a pour coordonnées dans le $r^{\text{ième}}$ système de coordonnées locales X_r*

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N) = \frac{1}{\psi_r(x'_r)} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{r_1}}, \dots, \frac{\partial a_r}{\partial x_{r_{N-1}}}, -1 \right), \quad (x'_r, 0) = Q_r^{-1} \circ \mathbf{A}_r(x).$$

Introduisons ensuite les espaces de Sobolev fractionnaires, *i.e.* d'ordre non entier, puis les espaces de traces.

Définition A.8 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine, $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in [1, \infty)$. On définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme le sous-espace des fonctions $f \in W^{[m],p}(\Omega)$ pour lesquelles*

$$I_\alpha(f) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^p}{|x - y|^{N+p(m-[m])}} dx dy < \infty, \quad \forall |\alpha| = [m].$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\|f\|_{[m],p,\Omega} + \sum_{|\alpha|=[m]} I_\alpha(f) \right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach qui est séparable si $p \in [1, \infty)$ et réflexif si $p \in (1, \infty)$.

Définition A.9 Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in [1, \infty)$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine à frontière bornée de classe $C^{[m],1}$. Par $W^{m,p}(\partial\Omega)$, on désigne le sous-espace constitué des fonctions f de $L^p(\partial\Omega)$ pour lesquelles pour $r = 1, \dots, m$ on a $r f \in W^{m,p}(\Delta_r)$, espace qui muni de la norme

$$\|f\|_{m,p,\partial\Omega} = \left(\sum_{r=1}^m \|r f\|_{W^{m,p}(\Delta_r)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach qui est séparable si $p \in [1, \infty)$ et réflexif si $p \in (1, \infty)$.

Avec ces définitions en main, on peut maintenant introduire les notions de trace et de relèvement.

Théorème A.25 (Théorème de trace) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine à frontière bornée et Lipschitzienne et $p \in [1, \infty)$. Alors il existe un unique opérateur linéaire et continu $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$, appelé opérateur de trace, satisfaisant $\gamma_0 f = f|_{\partial\Omega}$ pour toute fonction $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ où $f|_{\partial\Omega}$ désigne la restriction de la fonction f à l'ensemble $\partial\Omega$. Si $p \in (1, \infty)$, l'opérateur de trace $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ est linéaire et continu.

Preuve. Voir e.g. [32]. □

Théorème A.26 (Théorème de relèvement) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine à frontière bornée et Lipschitzienne et $p \in (1, \infty)$. Alors il existe un opérateur linéaire et continu $R_\Omega : W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$, appelé opérateur de relèvement, satisfaisant $\gamma_0(R_\Omega f) = f$ où γ_0 est l'opérateur de trace introduit au théorème précédent.

Preuve. Voir également [32]. □

Dans la suite ainsi que tout au long de ce mémoire, lorsqu'aucune confusion n'est possible, on omettra l'opérateur de trace γ_0 , i.e. que l'on écrira f au lieu de $\gamma_0 f$.

Théorème A.27 (Formule de Green) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine à frontière bornée et Lipschitzienne et $p \in (1, \infty)$. Alors pour toute fonction $f \in W^{1,p}(\Omega)$ et toute fonction $g \in W^{1,p'}(\Omega)$, p' désignant l'exposant conjugué de p , on a

$$\int_{\Omega} \partial_i f g \, dx = - \int_{\Omega} f \partial_i g \, dx + \int_{\partial\Omega} f g \nu_i \, d\sigma, \quad i = 1, \dots, N,$$

ν_i désignant ici la $i^{\text{ième}}$ composante de $\boldsymbol{\nu}$ le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega$.

Preuve. Voir e.g. [3] ou [56]. □

Corollaire A.2 (Formule de Stokes) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine à frontière bornée et Lipschitzienne et $p \in (1, \infty)$. Alors pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v} \in [W^{1,p}(\Omega)]^3$, on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma,$$

$\boldsymbol{\nu}$ désignant ici le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega$.

Corollaire A.3 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine à frontière bornée et Lipschitzienne et $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $p \in (1, \infty)$, telle que $f = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$. Alors $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

A l'aide de la notion de dérivée normale introduite ci-après, il est possible de généraliser les notions de trace et de relèvement.

Définition A.10 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine à frontière bornée et Lipschitzienne et $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in (1, \infty)$. D'après le théorème de trace, pour tout $|\alpha| \leq m-1$, $D^\alpha f \in L^p(\partial\Omega)$. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \leq m-1$. On définit la dérivée normale de f d'ordre k par

$$\partial_\nu^k f = \frac{\partial^k f}{\partial \nu^k} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f \nu^\alpha \text{ sur } \partial\Omega$$

où ν est le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega$.

Théorème A.28 (Généralisation du théorème de trace) Soient Ω un domaine à frontière bornée de classe $C^{m-1,1}$ de \mathbb{R}^N , $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in (1, \infty)$. Alors il existe un unique opérateur linéaire continu $\gamma_{m-1} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \prod_{k=0}^{m-1} W^{m-k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, appelé opérateur de trace, satisfaisant $\gamma_{m-1} f = (f, \partial_\nu f, \dots, \partial_\nu^{m-1} f)|_{\partial\Omega}$ pour toute fonction $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Preuve. Voir e.g. [56]. □

Théorème A.29 (Généralisation du théorème de relèvement) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine à frontière bornée de classe $C^{m,1}$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in (1, \infty)$. Alors il existe un opérateur linéaire et continu $R_\Omega^{m-1} : \prod_{k=0}^{m-1} W^{m-k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\Omega)$, appelé opérateur de relèvement, satisfaisant pour $(f_0, \dots, f_{m-1}) \in \prod_{k=0}^{m-1} W^{m-k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$,

$$R_\Omega^{m-1}(f_0, \dots, f_{m-1}) = g \Rightarrow \frac{\partial^k g}{\partial \nu^k} = f_k \text{ sur } \partial\Omega, \quad k = 1, \dots, m-1.$$

Preuve. Voir également [56]. □

On termine cette sous-section concernant les notions de trace et de relèvement par une caractérisation bien utile du sous espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ de $W^{1,p}(\Omega)$ que le lecteur pourra aisément généraliser pour obtenir une caractérisation du sous-espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ de $W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Théorème A.30 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine à frontière bornée et Lipschitzienne et $p \in [1, \infty)$. Alors

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \text{Ker}(\gamma_0)$$

où γ_0 désigne l'opérateur de trace.

Preuve. Voir e.g. [32]. □

4.4 Inégalités

Ici, on a regroupé diverses inégalités satisfaites par des fonctions appartenant à des espaces de Sobolev, inégalités que nous utiliserons fréquemment dans ce mémoire.

Théorème A.31 (Inégalité de Poincaré) *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine inclu dans une bande, i.e. inclu dans le produit cartésien d'un domaine non nécessairement borné ω de \mathbb{R}^{N-1} et d'un intervalle du type $(-a, a)$, a un réel positif. Alors, pour toute fonction $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a*

$$\|f\|_{0,p} \leq 2a \|\nabla f\|_{0,p}.$$

Preuve. Voir *e.g.* [3, Théorème II.56]. □

Théorème A.32 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger) *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné de classe $C^{0,1}$ et $p \in [1, \infty)$. Alors il existe une constante $c = c(\Omega, N, p)$ telle que, pour toute fonction $f \in W^{1,p}(\Omega)$, on ait*

$$\|f - \int_{\Omega} f \, dy\|_{0,p} \leq c \|\nabla f\|_{0,p}.$$

Preuve. On trouvera une démonstration simple de cette inégalité, utilisant les injections compactes de Sobolev, dans [22, p. 54-55]. □

Théorème A.33 (Inégalité de Friedrichs) *Soient Ω un domaine borné de classe $C^{0,1}$ de \mathbb{R}^N , $\Gamma \subset \partial\Omega$ une partie de la frontière de mesure de Lebesgue $(N-1)$ -dimensionnelle non nulle et $p \in (1, \infty)$. Alors il existe une constante $c = c(\Omega, N, p)$ telle que, pour toute fonction $f \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfaisant $\gamma_0(f) = 0$ sur Γ , on ait*

$$\|f\|_{0,p} \leq c \|\nabla f\|_{0,p}.$$

Preuve. Voir *e.g.* [3, Corollaire II.59] pour le cas $p = 2$. □

Dans ce mémoire, nous aurons également besoin de l'inégalité suivante, dite de Hardy :

Théorème A.34 (Inégalité de Hardy) *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné de classe $C^{0,1}$ et $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$. Alors la fonction $x \mapsto f(x)(\text{dist}(x, \partial\Omega))^{-1}$ est une fonction de $L^p(\Omega)$ et il existe une constante $c(\Omega, N, p)$ qui ne dépend que de Ω , N et p telle que*

$$\|f(\text{dist}(\cdot, \partial\Omega))^{-1}\|_{0,p} \leq c(\Omega, N, p) \|f\|_{1,p}.$$

Preuve. Voir *e.g.* [32]. □

4.5 Dualité

Si $p \in (1, \infty)$, nous utiliserons les notations usuelles $[W^{m,p}(\Omega)]^*$ et $W^{-m,p'}(\Omega)$ pour désigner le dual topologique des espaces $W^{m,p}(\Omega)$ et $W_0^{m,p}(\Omega)$. On rappelle un résultat de représentation des éléments de $W^{-m,p'}(\Omega)$.

Théorème A.35 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine et $f \in W^{-m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in (1, \infty)$. Alors il existe une famille de fonctions $\{f_\alpha\}_{|\alpha| \leq m} \subset L^p(\Omega)$ telle que

$$f = \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (4.1)$$

$$\|f\|_{-m,p} \leq \inf \sum_{|\alpha| \leq k} \|f_\alpha\|_{0,p}$$

où l'infimum est pris sur toutes les familles $\{f_\alpha\}_{|\alpha| \leq m} \subset L^p(\Omega)$ telles que f puisse être exprimée par la formule (4.1).

Preuve. Voir e.g. [32]. □

Remarque A.2 Noter qu'une conséquence directe de ce théorème réside dans la densité de $C_0^\infty(\Omega)$ dans les espaces $W^{-m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in (1, \infty)$.

4.6 Interpolation

Pour conclure, dans cette section on donne un résultat d'interpolation concernant les espaces de Sobolev fractionnaires, résultat également valable pour des espaces de Sobolev d'ordre entier.

Théorème A.36 (Théorème d'interpolation) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine, $m_0, m_1 \in [0, \infty)$ et $p_0, p_1 \in [1, \infty)$. Alors, pour $f \in W^{m_0,p_0}(\Omega) \cap W^{m_1,p_1}(\Omega)$, on a

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \|f\|_{W^{m_0,p_0}(\Omega)}^\theta \|f\|_{W^{m_1,p_1}(\Omega)}^{1-\theta}, \quad \theta \in (0, 1), \quad m = \theta m_0 + (1-\theta)m_1, \quad \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}.$$

Preuve. Voir e.g. [1]. □

5 Espaces de Sobolev homogènes

Dans cette section, sauf mention explicite du contraire, Ω désigne un domaine non borné de \mathbb{R}^N . Soit $p \in [1, \infty)$. Les ensembles $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ et $C_0^\infty(\Omega)$, équipés de la norme

$$|f|_{1,p} \equiv \|\nabla f\|_{0,p,\Omega}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega) \text{ ou } f \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$$

sont des espaces vectoriels normés. On définit les espaces de Sobolev homogènes $D^{1,p}(\Omega)$ et $D_0^{1,p}(\Omega)$ comme la fermeture de ces ensembles par rapport à cette norme. Autrement dit,

$$D^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\bar{\Omega})}^{| \cdot |_{1,p}}, \quad D_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{| \cdot |_{1,p}}$$

Les espaces $D^{1,p}(\Omega)$ et $D_0^{1,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach qui sont séparables si $p \in [1, \infty)$ et réflexifs si $p \in (1, \infty)$.

Remarque A.3 Définir les espaces de Sobolev homogènes $D_0^{1,p}(\Omega)$ dans le cas où Ω est un domaine borné est complètement sensé, mais dans ce cas, on peut montrer que $D_0^{1,p}(\Omega)$ est isométriquement isomorphe à $W^{1,p}(\Omega)$. Si en outre Ω est un domaine borné à frontière Lipschitzienne, on peut même démontré que $D_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ coïncident algébriquement. Au contraire, la définition des espaces $D^{1,p}(\Omega)$ dans le cas d'un domaine borné, même très régulier, n'a pas de sens puisque $|\cdot|_{1,p}$ n'est plus une norme mais une semi-norme.

Il est également intéressant de noter que par densité, l'inégalité de Sobolev reste vraie pour des fonctions $f \in D_0^{1,p}(\Omega)$.

Ici, on rappelle seulement les propriétés basiques des espaces de Sobolev homogènes et de leur dual topologique. Le lecteur désireux de plus de détails pourra parcourir le chapitre II du livre de GALDI [22].

Théorème A.37 (Caractérisation des espaces de Sobolev homogènes) *Soient Ω un domaine non borné à frontière localement Lipschitzienne de \mathbb{R}^N et $p \in [1, \infty)$. Alors*

$$D^{1,p}(\Omega) = \begin{cases} \{f \in \mathcal{D}'(\Omega), f \in L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega), \nabla f \in [L^p(\Omega)]^N\} & \text{si } p \in [1, N), \\ \{f = \{\bar{f} + c\}_{c \in \mathbb{R}}, \bar{f} \in L_{loc}^p(\Omega), \nabla \bar{f} \in [L^p(\Omega)]^N\} & \text{si } p \in [N, \infty), \end{cases}$$

$$D_0^{1,p}(\Omega) = \begin{cases} \{f \in \mathcal{D}'(\Omega), f \in L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega), \nabla f \in [L^p(\Omega)]^N, f|_{\partial\Omega} = 0\} & \text{si } p \in [1, N), \\ \{f \in \mathcal{D}'(\Omega), f \in L_{loc}^p(\Omega), \nabla f \in [L^p(\Omega)]^N, f|_{\partial\Omega} = 0\} & \text{si } p \in [N, \infty) \end{cases}$$

où par = on entend isométriquement isomorphes.

Preuve. A la lecture du chapitre II du livre de GALDI apparaîtra ce résultat. \square

Par analogie avec les espaces de Sobolev, pour $p \in (1, \infty)$, nous utiliserons les notations $[D^{1,p}(\Omega)]^*$ et $D^{-1,p'}(\Omega)$ pour désigner le dual topologique des espaces $D^{1,p}(\Omega)$ et $D_0^{1,p}(\Omega)$. On donne un résultat de représentation des éléments de $D^{-1,p'}(\Omega)$.

Théorème A.38 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine non borné et $f \in D^{-1,p'}(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$. Alors il existe une famille de fonctions $\{f_k\}_{1 \leq k \leq N} \subset L^p(\Omega)$ telle que*

$$f = \partial_k f_k \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{5.1}$$

$$|f|_{-1,p} \leq \inf \sum_{k=1}^N \|f_k\|_{0,p}$$

où l'infimum est pris sur toutes les familles $\{f_k\}_{1 \leq k \leq N} \subset L^p(\Omega)$ telles que f puisse être exprimée par la formule (5.1).

6 Champs de vecteurs à divergence sommable

Soit $p \in (1, \infty)$. Ce paragraphe est consacré à des rappels sur l'espace

$$E^p(\Omega) = \{\mathbf{u} \in [L^p(\Omega)]^3, \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^p(\Omega)\},$$

qui muni de la norme $\|\mathbf{u}\|_{E^p(\Omega)} = \|\mathbf{u}\|_{0,p,\Omega} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,p,\Omega}$ est un espace de Banach séparable et réflexif. Tous les résultats rappelés ici sont de simples généralisations de ceux démontrés par TEMAM dans [76] et ne se limitent pas uniquement au cas de la dimension $N = 3$.

Théorème A.39 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine borné à frontière Lipschitzienne, alors $[C^\infty(\overline{\Omega})]^3$ est dense dans $E^p(\Omega)$.*

Théorème A.40 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné à frontière Lipschitzienne. Alors il existe un unique opérateur linéaire et continu $\gamma_\nu : E^p(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, appelé trace normale, satisfaisant $\gamma_\nu(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}$ pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v} \in [C_0^\infty(\overline{\Omega})]^3$, $\boldsymbol{\nu}$ désignant le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$. En outre, on a la formule de Stokes*

$$\langle \gamma_\nu(\mathbf{v}), \gamma_0(\eta) \rangle_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega), W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega)} = \int_\Omega (\mathbf{v} \cdot \nabla \eta + \eta \operatorname{div} \mathbf{v}) dx, \quad \mathbf{v} \in E^p(\Omega), \eta \in W^{1,p'}(\Omega).$$

On introduit ensuite le sous-espace $E_0^p(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, défini comme étant la fermeture de l'ensemble $C_0^\infty(\Omega)$ dans l'espace $E^p(\Omega)$. Autrement dit, $E_0^p(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{E^p(\Omega)}}$.

Théorème A.41 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné à frontière Lipschitzienne. Alors*

$$E_0^p(\Omega) = \operatorname{Ker}(\gamma_\nu).$$

7 Fonctions absolument continues

Dans cette section, on rappelle quelques rudiments sur les fonctions réelles à valeurs réelles absolument continues.

Définition A.11 *Une fonction à valeurs réelles est absolument continue sur un intervalle I si*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tel que } \sum_{k=1}^m |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

lorsque $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_m < b_m$ sont des points de I tels que $\sum_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta$.

Théorème A.42 *Soit $\varphi \in L^1(a, b)$. Alors la fonction $\tau \in [a, b] \mapsto \int_a^\tau \varphi dt$ est absolument continue sur $[0, T]$ et sa dérivée est égale à φ p.p. dans $(0, T)$.*

Preuve. Voir [52, Theorem 23.4]. □

Corollaire A.4 *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle $[a, b]$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est absolument continue ;
(ii) il existe une fonction $\varphi \in L^1(a, b)$ telle que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t) dt, \quad \tau \in [a, b] ;$$

- (iii) f est presque partout différentiable, $f' \in L^1(a, b)$ et

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad \tau \in [a, b].$$

Preuve. Voir [52, Corollary 23.5]. □

Corollaire A.5 Soit f une fonction absolument continue sur $[a, b]$ telle que $f' = 0$ presque partout. Alors f est constante.

Preuve. Voir [52, Corollary 23.6]. □

Théorème A.43 Soit $\varphi \in W^{1,1}(a, b)$. Alors il existe une fonction $\tilde{\varphi} \in C^0([a, b])$ telle que $\varphi = \tilde{\varphi}$ p.p. dans (a, b) et

$$\tilde{\varphi}(t_2) - \tilde{\varphi}(t_1) = \int_x^y \varphi'(t) dt, \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b].$$

Preuve. Voir par exemple le [8, Théorème VIII.2]. □

Pour terminer, les deux derniers résultats impliquent immédiatement le suivant.

Corollaire A.6 Soit $\varphi \in W^{1,1}(a, b)$. Alors il existe une fonction absolument continue sur $[a, b]$ telle que $\varphi = \tilde{\varphi}$ p.p. dans (a, b) et

$$\tilde{\varphi}(t_2) - \tilde{\varphi}(t_1) = \int_x^y \varphi'(t) dt, \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b].$$

8 Multiplicateurs de Fourier

Avant d'énoncer un résultat concernant les multiplicateurs de Fourier, on commence par rappeler les notions de distributions tempérées ainsi que la définition et les propriétés de base de la transformée de Fourier.

8.1 Distributions tempérées

Par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on désigne l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide, *i.e.* l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que pour tous multi-indices α et β , on ait

$$\|f\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta f(x)| \leq c(\alpha, \beta),$$

$c(\alpha, \beta)$ dénotant une constante positive qui ne dépend que de α et β . Rappelons, à toutes fins utiles, que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1, \infty)$. On muni $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ de la topologie

de la convergence uniforme par rapport aux semi-normes $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$: on dira qu'une suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ vers une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si pour tous multi-indices α, β on a $x^\alpha D^\beta \varphi_n \rightarrow x^\alpha D^\beta \varphi$ uniformément dans \mathbb{R}^N lorsque $n \rightarrow \infty$. Une distribution tempérée T est un élément du dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Cela signifie que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ si les conditions suivantes sont satisfaites

1. $\langle T, \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \rangle = \lambda \langle T, \varphi_1 \rangle + \mu \langle T, \varphi_2 \rangle, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$;
2. lorsque $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \varphi_n \rightarrow \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a $\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$

où $\langle T, \varphi \rangle$ dénote la valeur de la forme linéaire T en φ , à savoir $T(\varphi)$. L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est muni d'une notion naturelle de convergence : on dit qu'une suite $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ vers $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, le nombre $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge vers $\langle T, \varphi \rangle$. Soit un multi-indice α . La notion de dérivée d'ordre $|\alpha|$ d'une distribution tempérée T est clairement définie puisque $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

8.2 Transformée de Fourier

On rappelle que la transformée de Fourier, notée \mathcal{F} , est un opérateur linéaire et continu défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \exp(-ix \cdot \xi) dx, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \xi \in \mathbb{R}^N.$$

En fait, on sait que la transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est un isomorphisme dont l'inverse, noté \mathcal{F}^{-1} , est défini par

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) \exp(ix \cdot \xi) d\xi, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), x \in \mathbb{R}^N.$$

Il est alors possible de définir la transformée de Fourier sur l'ensemble des distributions tempérées par son action sur les fonctions test comme-suit :

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle, \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

En conséquence, $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est un isomorphisme dont l'inverse, encore noté \mathcal{F}^{-1} , est défini par

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle, \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

On rappelle maintenant les propriétés basiques de la transformée de Fourier dont nous aurons besoin dans ce mémoire sous une forme condensée dans le théorème suivant.

Théorème A.44 *On a :*

(i) *pour tout multi-indice α ,*

$$D^\alpha \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f), \quad \mathcal{F}(D^\alpha f) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(f), \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) ;$$

(ii) *la transformée de Fourier est un isomorphisme isométrique défini sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et satisfait l'égalité de Parseval-Plancherel*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \bar{g} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f) \overline{\mathcal{F}(g)} dx, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

où \bar{z} dénote le conjugué du nombre complexe z .

Preuve. Voir e.g. [68]. □

8.3 Résultats sur les multiplicateurs

Définition A.12 (Multiplicateur de Fourier) Une fonction $m : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et bornée est appelée multiplicateur de Fourier de type (p, q) , $p, q \in (1, \infty)$, s'il existe une constante positive $c(p, q)$ qui ne dépend que de p et de q telle que

$$\|\mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}(f))\|_{0,q,\mathbb{R}^N} \leq c(p, q)\|f\|_{0,p,\mathbb{R}^N}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Suite à cette définition, on voit que si m est un multiplicateur de Fourier de type (p, q) , alors l'opérateur $T : D(T) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ défini par $T(f) = \mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}(f))$ est un opérateur linéaire continu défini sur un sous-espace dense de $L^p(\mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $L^q(\mathbb{R}^N)$. Sa fermeture, encore dénotée par T , est par conséquent un opérateur linéaire et continu de $L^p(\mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ et satisfait

$$\|T(f)\|_{0,q,\mathbb{R}^N} \leq c(p, q)\|f\|_{0,p,\mathbb{R}^N}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

On énonce maintenant des conditions suffisantes pour qu'une fonction $m : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et bornée soit un multiplicateur de Fourier de type (p, p) .

Théorème A.45 Soient $p \in (1, \infty)$ et $m \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction qui possède des dérivées au sens classique dans $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ jusqu'à l'ordre $[\frac{N}{2}] + 1$. On suppose qu'il existe un nombre $B > 0$ tel que pour tout $R > 0$ et tout multi-indice α satisfaisant $|\alpha| \leq [\frac{N}{2}] + 1$, on ait soit

$$R^{2|\alpha|-N} \int_{B_{\frac{R}{2}}^{2R}} |D^\alpha m| d\xi \leq B, \quad (8.1)$$

soit

$$|D^\alpha m(\xi)| \leq B|\xi|^{-|\alpha|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}. \quad (8.2)$$

Alors m est un multiplicateur de Fourier de type (p, p) .

Preuve. On trouvera *e.g.* la preuve de ce résultat, connu sous le nom de Mihlin's et Hörmander sous la condition (8.1) et de Marcinkiewicz sous la condition (8.2), dans le livre de TRIEBEL [77]. \square

Pour une généralisation de ce théorème aux multiplicateurs de type (p, q) , le lecteur pourra *e.g.* consulter les travaux de LIZORKIN [49, 50, 51].

9 Fonctions à valeurs dans un espace de Banach

Dans l'étude d'équations aux dérivées partielles faisant intervenir la variable de temps, il est d'usage de travailler avec des fonctions définies sur l'intervalle de temps considéré et à valeurs dans un espace de Banach X . Si f est un fonction dont les variables (t, x) sont le temps et la position dans l'espace, il est souvent intéressant de considérer pour chaque t , $f(t)$ comme une fonction de la variable x , fonction appartenant à un espace fonctionnel convenable. Autrement dit $f(t)$ représente la fonction $x \mapsto f(t)(x) = f(t, x)$.

9.1 Fonctions continues, continûment dérivables

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$. Par $C^0(I; X)$, on désignera l'ensemble de toutes les fonctions continues sur l'intervalle I à valeurs dans X . Cet ensemble, muni de la norme

$$\|f\|_{C^0(I; X)} = \sup_{t \in I} \|f(t)\|_X, \quad f \in C^0(I; X),$$

est un espace de Banach qui n'est pas réflexif et qui est séparable si X est séparable. De manière analogue, par $C^k(I; X)$, $k \in \mathbb{N}^*$, on désignera l'ensemble de toutes les fonctions k -fois continûment dérivables sur I à valeurs dans X , qui, muni de la norme

$$\|f\|_{C^k(I; X)} = \max\{\|f^{(j)}\|_{C^0(I; X)}, j = 0, \dots, k\}, \quad f \in C^k(I; X),$$

est un espace de Banach qui n'est pas réflexif et qui est séparable si X est séparable. Enfin par $C^0(I; X_{weak})$, on désignera l'ensemble des fonctions définies sur I , à valeurs dans X et continue par rapport à la topologie faible de X . Autrement dit :

$$C^0(I; X_{weak}) = \{f : I \rightarrow X, \langle T, f \rangle_{X^*, X} \in C^0(I) \text{ pour tout } T \in X^*\}.$$

Ci-dessous, on rappelle le théorème d'Arzéla-Ascoli sous une forme très générale, théorème dont on donne un corollaire immédiat.

Théorème A.46 (Arzéla-Ascoli) *Soient K un espace métrique compact et Y un espace métrique. Pour qu'une partie A de $C(K; Y)$ soit relativement compacte, il faut, et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

1. A est une partie équicontinue i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tel que } d_K(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon, \quad \forall f \in A$$

2. pour tout x de K , $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact dans Y .

Preuve. Voir e.g. [79, Théorème 2.34.5]. □

Corollaire A.7 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide, B, X deux espaces de Banach tels que $B \subset\subset X$ et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions uniformément continues dans X satisfaisant*

$$\exists c > 0 \text{ tq } \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in \bar{I}} \|f_n(t)\|_B \leq c.$$

Alors il existe une fonction $f \in C^0(\bar{I}; X)$ telle que $f_n \rightarrow f$ dans $C^0(\bar{I}; X)$ à une éventuelle extraction de sous-suite.

Preuve. Dans le théorème A.46, poser $K = \bar{I}$ et $Y = X$. □

9.2 Intégrale de Bochner

Dans cette sous-section, on rappelle brièvement les définitions et propriétés de base de la notion d'intégrale de Bochner, notion qui étend celle de l'intégrale de Lebesgue aux fonctions définie sur un intervalle ouvert borné et non vide $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach X . Pour plus de détails à propos de cette notion, consulter *e.g.* [32, 82]

Une fonction $f : I \rightarrow X$ est appelée fonction simple s'il existe des éléments $c_1, \dots, c_n \in X$ et des sous-ensembles mesurables J_1, \dots, J_n de I deux à deux disjoints, tels que $I = \bigcup_{i=1}^n J_i$ et

$$f(t) = \sum_{i=1}^n c_i 1_{J_i}(t), \quad t \in I$$

où 1_{J_i} , $i = 1, \dots, n$, dénote la fonction caractéristique de l'ensemble J_i . On dira alors d'une fonction $f : I \rightarrow X$ qu'elle est fortement mesurable s'il existe une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions simples telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0 \text{ p.p.t. } t \in I.$$

Lemme A.10 *Soit $f : I \rightarrow X$ une fonction fortement mesurable. Alors la fonction $t \mapsto \|f(t)\|_X$ est mesurable au sens de Lebesgue.*

Preuve. Voir *e.g.* [32, Lemma 2.19.2]. □

Définition A.13 *Soit $f : I \rightarrow X$ une fonction simple. L'intégrale de Bochner de f , notée $\int_I f(t) dt$, est définie par*

$$\int_I f(t) dt = \sum_{i=1}^n c_i |J_i|.$$

On dira qu'une fonction $f : I \rightarrow X$ est Bochner-intégrable s'il existe une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^}$ de fonctions simples satisfaisant*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0 \text{ p.p.t. } t \in I,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \|f_n(t) - f(t)\|_X dt = 0.$$

Pour un sous-ensemble mesurable $J \subset I$ et une fonction $f : I \rightarrow X$ fortement mesurable et Bochner-intégrable, on définit l'intégrale de Bochner $\int_J f(t) dt$ par

$$\int_J f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(t) 1_J(t) dt,$$

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^}$ étant une suite de fonctions simples satisfaisant les deux propriétés précédentes.*

Théorème A.47 (Théorème de Bochner) *Une fonction fortement mesurable $f : I \rightarrow X$ est Bochner-intégrable si et seulement si la fonction $t \mapsto \|f(t)\|_X$ possède une intégrale de Lebesgue finie.*

Preuve. Voir *e.g.* [32, Theorem 2.19.8]. □

Corollaire A.8 Si la fonction $f : I \rightarrow X$ est Bochner-intégrable, alors

(i)

$$\left\| \int_I f(t) dt \right\|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X dt ;$$

(ii) si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ où Y est un espace de Banach, $Tf : I \rightarrow Y$ est Bochner-intégrable et

$$\int_I Tf(t) dt = T \left(\int_I f(t) dt \right).$$

Preuve. Voir *e.g.* [32, Corollary 2.19.9, Corollary 2.19.11]. □

Terminons cette brève incursion dans les bases de la théorie de l'intégrale de Bochner par deux résultats parfois très utiles et dont on trouvera *e.g.* la preuve dans [82].

Lemme A.11 Si $f : I \rightarrow X$ est une fonction Bochner-intégrable, $t_0 \in \bar{I}$ et $\xi \in X$, alors la fonction

$$g(t) = \xi + \int_{t_0}^t f(s) ds, \quad t \in \bar{I},$$

est continue sur \bar{I} et dérivable p.p.t. $t \in I$. En outre, on a

$$\frac{d}{dt}g(t) = f(t) \text{ p.p.t. } t \in I.$$

Lemme A.12 Soient $f, g : I \rightarrow X$ deux fonctions Bochner-intégrables. Alors le fait que

$$g(t) = \xi + \int_{t_0}^t f(s) ds, \quad t_0, t \in \bar{I}, \quad \xi \in X$$

est équivalent à chacune des conditions suivantes :

(i)

$$\int_I f(t)\varphi(t) dt = - \int_I g(t)\varphi'(t) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I) ;$$

(ii)

$$\frac{d}{dt} \langle T, g \rangle_{X^*, X} = \langle T, f \rangle_{X^*, X}, \quad \forall T \in X^*$$

où la dérivée $\frac{d}{dt}$ doit être comprise au sens des distributions sur I .

9.3 Espaces de Lebesgue à valeurs dans un espace de Banach

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide, X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$ et $p \in [1, \infty]$. Par $L^p(I; X)$, on dénote l'espace des (classes d'équivalences de) fonctions fortement mesurables $f : I \rightarrow X$ telles que

$$\|f\|_{L^p(I; X)} = \|\|f\|_X\|_{0,p,I} < \infty.$$

Il est possible de prouver que muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(I; X)}$, $L^p(I; X)$ est un espace de Banach séparable si X est séparable et $p \in [1, \infty)$ et réflexif si X est réflexif et $p \in (1, \infty)$.

Pour $p \in [1, \infty)$, son dual topologique s'identifie à $L^{p'}(I; X^*)$ et la dualité entre $L^{p'}(I; X^*)$ et $L^p(I; X)$ s'écrit

$$\langle f, g \rangle_{L^{p'}(I; X^*), L^p(I; X)} = \int_I \langle f(t), g(t) \rangle_{X^*, X} dt, \quad f \in L^{p'}(I; X^*), \quad g \in L^p(I; X).$$

Une adaptation simple des propriétés des opérateurs de régularisation s'énonce ici comme-suit.

Lemme A.13 Soient $p, q \in [1, \infty]$ et $f \in L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^3))$.

(i) On suppose $p \in [1, \infty)$ et $\{S_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ une suite régularisante unidimensionnelle. On dénote $S_\varepsilon(f)(t, x) = S_\varepsilon(f(x))(t)$. Alors

$$S_\varepsilon(f) \in C^\infty(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^3)), \quad S_\varepsilon(f) \rightarrow f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^3)).$$

(ii) On suppose $q \in [1, \infty)$ et $\{S_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ une suite régularisante tridimensionnelle. On dénote $S_\varepsilon(f)(t, x) = S_\varepsilon(f(t))(x)$. Alors

$$S_\varepsilon(f) \in L^p(\mathbb{R}; C^\infty(\mathbb{R}^3)), \quad S_\varepsilon(f) \rightarrow f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^3)).$$

Preuve. Pour (i), il suffit d'adapter la preuve lorsque f est à valeurs réelles. Pour (ii), les outils sont *e.g.* l'inégalité de Young sur la convolution et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. \square

Pour terminer, on rappelle un résultat d'intégration par parties dont on trouvera *e.g.* la preuve dans [41].

Théorème A.48 Soient V, H deux espaces de Hilbert tels que V soit dense et s'injecte de manière continue dans H . On suppose que $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert non vide, $p \in (1, \infty)$ et que $f, g \in L^p(I; V)$, $f', g' \in L^{p'}(I; V^*)$. Alors $f, g \in C^0(\bar{I}; H)$ et

$$\begin{aligned} & (f(t), g(t))_H - (f(s), g(s))_H \\ &= \int_s^t \{ \langle f'(\tau), g(\tau) \rangle_{V^*, V} + \langle g'(\tau), f(\tau) \rangle_{V^*, V} \} d\tau, \quad s, t \in I, \quad s \leq t. \end{aligned}$$

9.4 Lemmes de Gronwall

Dans cette sous-section, on rappelle quelques variantes du lemme de Gronwall usuel.

Lemme A.14 Soient f, g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, $f, g \geq 0$ et c une constante positive. On suppose l'inégalité

$$f(t) \leq c + \int_a^t f(s)g(s) ds, \quad t \in [a, b]. \quad (9.1)$$

Alors

$$f(t) \leq ce^{\int_a^t g(s) ds} \quad t \in [a, b]. \quad (9.2)$$

Preuve. Voir *e.g.* [2, Lemme 3.1]. □

Remarque A.4 Si on suppose que $f \in L^\infty(a, b)$, $f \geq 0$ p.p. dans (a, b) , que $g \in L^1(a, b)$, $g \geq 0$ p.p. dans (a, b) et (9.1) p.p.t. $t \in (a, b)$, alors (9.2) reste vraie p.p.t. $t \in (a, b)$ (cf. *e.g.* [10]).

Corollaire A.9 Soient f, g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, $f, g \geq 0$, et h une fonction continuellement dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, $h \geq 0$. On suppose l'inégalité

$$f(t) \leq h(t) + \int_a^t f(s)g(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Alors

$$f(t) \leq h(t) + \int_0^t g(s)h(s)e^{\int_s^t g(\sigma) d\sigma} ds.$$

9.5 Quelques résultats de compacité

On regroupe ici deux résultats de compacité dans les espaces de Lebesgue à valeurs dans un espace de Banach. Le lecteur intéressé par ce type de résultat pourra consulter les travaux de SIMON [73] pour plus de détails.

On commence par rappeler une variante du lemme de Lions-Aubin.

Lemme A.15 Soient $T \in (0, \infty)$, $q \in (1, \infty]$, X, B, Y trois espaces de Banach tels que $X \subset\subset B \subset Y$ et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite bornée dans $L^q(0, T; B) \cap L^1_{loc}(0, T; X)$ telle que la suite $\{\partial_t f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit bornée dans $L^1(0, T; Y)$. Alors la suite $\{f_n\}_n$ est relativement compacte dans $L^p(0, T; B)$, $p \in [1, q)$.

Preuve. Voir *e.g.* [73, Corollary 6]. □

Un autre résultat utile dans ce mémoire concerne la compacité des fonctions à valeurs dans un espace intermédiaire dit de classe θ .

Lemme A.16 Soient X, B et Y trois espaces de Banach tels que $X \subset B \subset Y$ avec injection compacte $X \subset\subset Y$. On suppose qu'il existe des constantes $\theta \in (0, 1)$ et c telles que

$$\|f\|_B \leq c \|f\|_X^{1-\theta} \|f\|_Y^\theta, \quad f \in X \cap Y.$$

Soient $p \in [1, \infty]$, $q \in (1, \infty]$ et F un sous ensemble borné dans $L^p(0, T; X)$ tel que $\partial_t F$ est borné dans $L^q(0, T; Y)$. On a

- (i) si $\theta(1 - \frac{1}{q}) \leq \frac{(1-\theta)}{p}$ alors F est relativement compacte dans $L^r(0, T; B)$, $r \in [1, r_*)$
où $\frac{1}{r_*} = \frac{(1-\theta)}{p} - \theta(1 - \frac{1}{q})$;
- (ii) si $\theta(1 - \frac{1}{q}) > \frac{(1-\theta)}{p}$ alors F est relativement compacte dans $C^0([0, T]; B)$.

Preuve. Voir *e.g.* [73, Corollary 8, Corollary 9]. □

10 Analyse convexe, fonctions monotones

Dans cette section, on regroupe quelques conséquences de résultats bien connus en analyse convexe ainsi que quelques propriétés des fonctions monotones très utiles tout au long du texte.

Soient X un ensemble, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On désigne par $\text{dom } \varphi$ le domaine de φ , c'est à dire l'ensemble $\text{dom } \varphi = \{x \in X, \varphi(x) < +\infty\}$, par $\text{epi } \varphi$ l'épigraphe de φ , c'est à dire l'ensemble $\text{epi } \varphi = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}, \varphi(x) \leq t\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $[\varphi \leq t] = \{x \in X, \varphi(x) \leq t\}$.

Lemme A.17 *Soit (X, τ) un espace topologique et $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *epi φ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$;*
- (ii) *$[\varphi \leq \lambda]$ est fermé pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;*
- (iii) *pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que $\varphi(y) \geq \varphi(x) - \varepsilon$ pour tout $y \in V$;*
- (iv) *pour tout $x \in X$, $\varphi(x) \leq \liminf_{z \rightarrow x} \varphi(z)$.*

Si une de ces propriétés équivalentes est satisfaite, on dit que la fonction φ est semi-continue inférieurement.

Preuve. Voir e.g. [3, Théorème I.40]. □

Très souvent, il n'est pas facile de montrer qu'une fonction définie sur un espace de Banach, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible $\sigma(X, X')$. Il est plus simple de démontrer la semi-continuité pour la topologie forte. Pour des fonction convexes, ces deux propriétés sont équivalentes comme le rappelle le théorème suivant, basé sur le fait qu'un ensemble convexe C d'un espace de Banach X est faiblement fermé pour la topologie faible $\sigma(X, X')$ si et seulement s'il est fortement fermé.

Théorème A.49 *Soient X un espace de Banach et $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. Alors φ est semi continue inférieurement pour la topologie faible $\sigma(X, X')$. En particulier, si $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(X, X')$, alors*

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n).$$

Preuve. Voir e.g. [8, Corollaire III.8]. □

Corollaire A.10 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine, $p \in (1, \infty)$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. On suppose que $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions non négatives de $L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ telle que pour tout sous ensemble borné Ω' de Ω*

$$\rho_n \rightharpoonup \rho \text{ dans } L^1(\Omega') \text{ et } \overline{\varphi(\rho_n)} \rightharpoonup \overline{\varphi(\rho)} \text{ dans } L^p(\Omega') \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Alors

$$\varphi(\rho) \leq \overline{\varphi(\rho)} \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Preuve. Soit $\Omega' \subset \Omega$ un sous-ensemble borné. On pose

$$\mathcal{F}(\rho) = \int_{\Omega'} \varphi(\rho) dx.$$

Clairement, $\mathcal{F} : L^1(\Omega') \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe. D'autre part, la continuité de la fonction φ et le théorème de convergence de Vitali (valide puisque $\|\varphi(\rho_n)\|_{0,p,\Omega'} \leq c$) garantissent que \mathcal{F} est semi-continue inférieurement pour la topologie forte de $L^1(\Omega')$. D'après le théorème A.49, il en résulte que

$$\int_{\Omega'} \varphi(\rho) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} \varphi(\rho_n) dx = \int_{\Omega'} \overline{\varphi(\rho)} dx.$$

Le sous-ensemble Ω' étant arbitraire, le résultat en découle par contradiction. \square

Remarque A.5 Noter que si la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est convexe et semi-continue inférieurement, ce résultat reste vraie même si $p = 1$.

Corollaire A.11 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine et $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction concave, continue et bijective. On suppose que $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions non négatives de $L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ telle que pour tout sous ensemble borné Ω' de Ω

$$\rho_n \rightharpoonup \rho \text{ dans } L^1(\Omega') \text{ et } \varphi(\rho_n) \rightharpoonup \overline{\varphi(\rho)} \text{ dans } L^1(\Omega') \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Alors

$$\overline{\varphi(\rho)} \leq \varphi(\rho) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le corollaire A.10 à $\varrho_n = \varphi(\rho_n)$, $\varphi^{-1}(\varrho_n) = \rho_n$ pour conclure puisque φ^{-1} est une fonction convexe continue. \square

On rappelle maintenant un résultat donnant l'équivalence entre la commutation de la convergence faible et d'une fonction strictement convexe avec la convergence forte.

Lemme A.18 Soient Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N , $p \in (1, \infty)$, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe et une suite $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ tels que

$$\rho_n \rightharpoonup \rho \text{ dans } L^p(\Omega), \quad \varphi(\rho_n) \rightharpoonup \varphi(\rho) \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Alors

$$\rho_n \rightarrow \rho \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Preuve. Ce type de résultat est discuté sous forme générale dans [78]. \square

Pour terminer cette section, nous donnons deux résultats de monotonie sous une forme fréquemment utilisée dans ce mémoire.

Lemme A.19 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine et $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et non décroissante. Pour tout sous-ensemble borné $\Omega' \subset \Omega$, lorsque $n \rightarrow \infty$, dans $L^1(\Omega')$, on suppose que

$$\rho_n \rightharpoonup \rho, \\ \Pi(\rho_n) \rightharpoonup \overline{\Pi(\rho)}, \quad \Pi(\rho_n)\rho \rightharpoonup \overline{\Pi(\rho)}\rho, \quad \Pi(\rho_n)\rho_n \rightharpoonup \overline{\Pi(\rho)}\rho, \quad \Pi(\rho)(\rho_n - \rho) \rightharpoonup 0.$$

Alors

$$\overline{\Pi(\rho)\rho} \geq \overline{\Pi(\rho)}\rho \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Preuve. Soit $\Omega' \subset \Omega$ un sous-ensemble borné. La monotonie de la fonction Π garantit que

$$\int_{\Omega'} (\Pi(\rho_n) - \Pi(\rho))(\rho_n - \rho) dx \geq 0.$$

Par hypothèse, le passage à la limite $n \rightarrow \infty$ implique que

$$\int_{\Omega'} (\overline{\Pi(\rho)\rho} - \overline{\Pi(\rho)}\rho) dx \geq 0.$$

Le sous-ensemble Ω' étant arbitraire, le résultat en découle par contradiction. \square

Remarque A.6 En supposant que les suites $\{\rho_n\}_n$, $\{\Pi(\rho_n)\}_n$, $\{\Pi(\rho_n)\rho\}_n$, $\{\Pi(\rho_n)\rho_n\}_n$ et $\{\Pi(\rho)(\rho_n - \rho)\}_n$ appartiennent à $L^1_{loc}(\Omega)$ et ont respectivement pour limite au sens des distributions dans Ω les fonctions ρ , $\overline{\Pi(\rho)}$, $\overline{\Pi(\rho)\rho}$, $\overline{\Pi(\rho)\rho}$ et 0 appartenant toutes à $L^1_{loc}(\Omega)$, il est évident que la conclusion reste la même.

Une conséquence directe du résultat précédent s'énonce comme suit.

Lemme A.20 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine, $s \in (1, \infty)$ et $\theta \in (0, 1]$. Pour tout sous ensemble borné $\Omega' \subset \Omega$, lorsque $n \rightarrow \infty$, on suppose que

$$\rho_n^\theta \rightharpoonup \overline{\rho^\theta} \text{ dans } L^{\frac{s+\theta}{\theta}}(\Omega'), \quad \rho_n^s \rightharpoonup \overline{\rho^s} \text{ dans } L^{\frac{s+\theta}{s}}(\Omega'), \quad \rho_n^{s+\theta} \rightharpoonup \overline{\rho^{s+\theta}} \text{ dans } L^1(\Omega').$$

Alors

$$\overline{\rho^{s+\theta}} \geq \overline{\rho^s}\overline{\rho^\theta} \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Preuve. Poser $\varrho_n = \rho_n^\theta$, $\varrho = \overline{\rho^\theta}$ et $\Pi(t) = t^{\frac{s}{\theta}}$ dans le lemme A.19. \square

Annexe B

Un problème auxiliaire d'usage fréquent

Sommaire

1	Les domaines bornés	226
2	Les domaines extérieurs	227
3	Les cônes de révolution	228
4	Les domaines à sorties côniques	232

Soient G un domaine de \mathbb{R}^N , \mathcal{F} une fonction de l'espace $L^q(G)$, $q \in (1, \infty)$. Dans cette annexe, nous discutons de la possibilité d'associer à \mathcal{F} un élément \mathbf{v} de l'espace de Sobolev homogène $[D_0^{1,q}(G)]^N$ satisfaisant

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \mathcal{F} \text{ p.p. dans } G \quad \text{et} \quad \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,q,G} \leq c \|\mathcal{F}\|_{0,q,G}. \quad (*)$$

Le lecteur aura certainement pu constater que cette question est omni-présente dans la théorie mathématique des équations de Navier-Stokes, en particulier lorsqu'il s'agit d'obtenir des estimations de la pression ou de la densité. Dans la majeure partie des cas, la dépendance par rapport au domaine G de la constante qui apparaît dans l'estimation (*) sera cruciale pour l'obtention de ces estimations. Les prochaines sections traitent de ce problème dans divers types de domaines G tels que les domaines bornés, les domaines extérieurs, les cônes de révolutions et les domaines à plusieurs sorties coniques. Pour leur utilisation dans ce mémoire, les résultats sont présentés pour la dimension $N = 3$. Néanmoins, ils restent vrais en dimension $N \geq 2$.

1 Les domaines bornés

Soit $G \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné à frontière Lipschitzienne. Dans ce cas, on rappelle que l'espace de Sobolev homogène $[D_0^{1,q}(G)]^3$ coïncide avec l'espace de Sobolev $[W_0^{1,q}(G)]^3$. Soit $\mathcal{F} \in L^q(G)$, $q \in (1, \infty)$. Une condition nécessaire à l'existence de $\mathbf{v} \in [W_0^{1,q}(G)]^3$ satisfaisant (*) est donnée par l'hypothèse de compatibilité

$$\int_G \mathcal{F} \, dx = 0.$$

En effet, celle-ci apparaît en intégrant sur G l'équation (*) à l'aide de la formule classique de Stokes. Fin des années soixante-dix, début des années quatre-vingts, BOGOVSKIÏ [4], [5] fut l'instigateur du lemme suivant.

Lemme B.1 *Soit $G \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné à frontière Lipschitzienne. Alors il existe un opérateur linéaire $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2, \mathcal{B}^3)$ tel que*

$$\forall q \in (1, \infty), \quad \mathcal{B} : \tilde{L}^q(G) \rightarrow [W_0^{1,q}(G)]^3, \quad \forall \mathcal{F} \in \tilde{L}^q(G), \quad \operatorname{div} \mathcal{B}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \text{ p.p. dans } G, \\ \forall \mathcal{F} \in \tilde{L}^q(G), \quad \forall q \in (1, \infty), \quad \|\nabla \mathcal{B}(\mathcal{F})\|_{0,q,G} \leq c(G, q) \|\mathcal{F}\|_{0,q,G}.$$

Si de plus, on suppose que $\mathcal{F} = \operatorname{div} \mathcal{G}$ pour un certain $\mathcal{G} \in [L^p(G)]^3$, $p \in (1, \infty)$, satisfaisant $\mathcal{G} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\partial G} = 0$ où $\boldsymbol{\nu}$ désigne le vecteur normal unitaire extérieur à ∂G , alors

$$\|\mathcal{B}(\mathcal{F})\|_{0,p,G} \leq c(G, p) \|\mathcal{G}\|_{0,p,G}.$$

Preuve. La méthode de BOGOVSKIÏ est basée sur la formule explicite d'une solution \mathbf{v} lorsque G est un domaine étoilé par rapport à tous les points d'une boule $B_R(x_0) \subset\subset G$ et $\mathcal{F} \in C_0^\infty(G)$, puis sur la décomposition d'un domaine borné G à frontière Lipschitzienne en un nombre fini de domaines G_i étoilé par rapport à tous les points d'une boule $B_i \subset\subset G_i$ et enfin sur la décomposition de $\mathcal{F} \in L^q(G)$ en une somme de fonction $\mathcal{F}_i \in L^q(G)$ telle

que $\text{supp } \mathcal{F}_i \subset \overline{G_i}$ et $\int_{G_i} \mathcal{F}_i dx = 0$. On rappelle qu'un domaine G de \mathbb{R}^N est dit étoilé par rapport au point $x_0 \in G$ si il existe une fonction h définie sur la sphère unité, positive et continue, telle que

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^N, |x - x_0| < h \left(\frac{x - x_0}{|x - x_0|} \right) \right\}.$$

Pour les détails de la démonstration, le lecteur intéressé pourra consulter le chapitre III.3 du livre de GALDI [22]. \square

Corollaire B.1 *Soient $G \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné à frontière Lipschitzienne, $\mathcal{F} \in L^q(G)$ et $\mathbf{a} \in [W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial G)]^3$, $q \in (1, \infty)$, tels que*

$$\int_G \mathcal{F} dx = \int_{\partial G} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma.$$

Alors il existe une fonction $\mathbf{v} \in [W^{1,q}(G)]^3$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} &= \mathcal{F} \text{ p.p. dans } G, \quad \mathbf{v} = \mathbf{a} \text{ sur } \partial G \\ \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,q} &\leq c(G, q)(\|\mathcal{F}\|_{0,q} + \|\nabla \mathbf{A}\|_{0,q}) \leq c(G, q)(\|\mathcal{F}\|_{0,q} + \|\mathbf{a}\|_{1-\frac{1}{q},q,\partial G}) \end{aligned}$$

dans laquelle $\mathbf{A} \in [W^{1,q}(G)]^3$ dénote un relèvement continu de la fonction \mathbf{a} .

Preuve. Soit $\mathbf{A} \in [W^{1,q}(\Omega)]^3$ un relèvement continu de \mathbf{a} . Poser $\mathbf{v} = \mathcal{B}(\mathcal{F} - \text{div } \mathbf{A}) + \mathbf{A}$ puis appliquer le lemme B.1 en utilisant les résultats sur le relèvement. \square

Le prochain résultat étend le lemme B.1 et donne une classe de domaines bornés pour lesquels la constante c qui apparaît dans (*) est indépendante du domaine considéré.

Lemme B.2 *Soit $G \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné à frontière Lipschitzienne. On considère $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ et on pose $G_\tau^{x_0} = (1 - \tau)x_0 + \tau G$. Alors il existe un opérateur linéaire $\mathcal{B}_{G_\tau^{x_0}} = (\mathcal{B}_{G_\tau^{x_0}}^1, \mathcal{B}_{G_\tau^{x_0}}^2, \mathcal{B}_{G_\tau^{x_0}}^3)$ tel que*

$$\begin{aligned} \forall q \in (1, \infty), \quad \mathcal{B}_{G_\tau^{x_0}} &: \tilde{L}^q(G_\tau^{x_0}) \rightarrow [W_0^{1,q}(G_\tau^{x_0})]^3, \\ \forall \mathcal{F} \in \tilde{L}^q(G_\tau^{x_0}), \quad \text{div } \mathcal{B}_{G_\tau^{x_0}}(\mathcal{F}) &= \mathcal{F} \text{ p.p. dans } G_\tau^{x_0}, \\ \forall \mathcal{F} \in \tilde{L}^q(G_\tau^{x_0}), \quad \forall q \in (1, \infty), \quad \|\nabla \mathcal{B}(\mathcal{F})\|_{0,q,G_\tau^{x_0}} &\leq c(G, q)\|\mathcal{F}\|_{0,q,G_\tau^{x_0}} \end{aligned}$$

où la constante $c(G, q)$ ne dépend ni de \mathcal{F} ni de x_0 ni de τ .

Preuve. Ce lemme n'est qu'une reformulation du théorème 2.10 de l'article de BORCHERS et SOHR [7]. S'y reporter pour une démonstration complète. \square

2 Les domaines extérieurs

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine extérieur à frontière Lipschitzienne. Dans ce cas l'espace de Sobolev homogène $[D_0^{1,q}(\Omega)]^3$ contient l'espace de Sobolev $[W_0^{1,q}(\Omega)]^3$. Soient $q \in (1, \infty)$ et $\mathcal{F} \in L^q(\Omega)$. L'existence d'un $\mathbf{v} \in [D_0^{1,q}(\Omega)]^3$ satisfaisant (*) ne nécessite aucune condition de compatibilité puisque les hypothèses nécessaires à la validité de la formule classique de Stokes ne sont plus satisfaites.

Lemme B.3 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine extérieur à frontière Lipschitzienne. Alors il existe un opérateur linéaire $\mathbf{B}_{ext} = (\mathcal{B}_{ext}^1, \mathcal{B}_{ext}^2, \mathcal{B}_{ext}^3)$ tel que

$$\begin{aligned} \forall q \in (1, \infty), \quad \mathbf{B}_{ext} : L^q(\Omega) &\rightarrow [D_0^{1,q}(\Omega)]^3, \quad \forall \mathcal{F} \in L^q(\Omega), \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_{ext}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \text{ p.p. dans } \Omega, \\ \forall \mathcal{F} \in L^q(\Omega), \quad \forall q \in (1, \infty), \quad \|\nabla \mathbf{B}_{ext}(\mathcal{F})\|_{0,q,\Omega} &\leq c(\Omega, q) \|\mathcal{F}\|_{0,q,\Omega}. \end{aligned}$$

Preuve. Pour une démonstration complète, le lecteur pourra consulter le théorème 3.4 du chapitre III.3 dans livre de GALDI [22]. \square

3 Les cônes de révolution

Un cas très intéressant et qui n'entre pas dans le cadre des deux précédentes sections est celui d'un cône de révolution $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ de sommet $s \in \mathbb{R}^3$, d'axe de symétrie la droite Δ et de demi-ouverture $\theta \in (0, \pi)$. Bien que tous les résultats de cette section soient énoncés pour de tels domaines, ils seront démontrés dans le cas particulier du cône de révolution $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ de sommet l'origine des coordonnées, d'axe de symétrie la droite Ox_3 et de demi-ouverture $\theta \in (0, \pi)$ et ce sans aucune perte de généralité. Par ailleurs, pour $R_0 > 0$ et $R > R_0$, nous utiliserons les notations $\mathcal{C}_R = \mathcal{C} \cap B_R$, $\mathcal{C}^R = \mathcal{C} \cap \overline{B_R^C}$ et $\mathcal{C}_{R_0}^R = \mathcal{C}_R \setminus \overline{B_{R_0}}$. Une fois encore, nous allons pouvoir constater que tous les résultats de cette section sont étroitement liés au lemme B.1.

Lemme B.4 Il existe une famille d'opérateurs linéaires $\{\mathbf{B}_{\mathcal{C}_R} = (\mathcal{B}_{\mathcal{C}_R}^1, \mathcal{B}_{\mathcal{C}_R}^2, \mathcal{B}_{\mathcal{C}_R}^3)\}_{R > R_0}$ telle que pour $R > R_0$, on a

$$\begin{aligned} \forall q \in (1, \infty), \quad \mathbf{B}_{\mathcal{C}_R} : \tilde{L}^q(\mathcal{C}_R) &\rightarrow [W_0^{1,q}(\mathcal{C}_R)]^3, \quad \forall \mathcal{F} \in \tilde{L}^q(\mathcal{C}_R), \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_{\mathcal{C}_R}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \text{ p.p. dans } \mathcal{C}_R, \\ \forall \mathcal{F} \in \tilde{L}^q(\mathcal{C}_R), \quad \forall q \in (1, \infty), \quad \|\nabla \mathbf{B}_{\mathcal{C}_R}(\mathcal{F})\|_{0,q,\mathcal{C}_R} &\leq c(\mathcal{C}, q) \|\mathcal{F}\|_{0,q,\mathcal{C}_R}. \end{aligned}$$

Preuve. Soient $R > R_0$ fixé et $\mathcal{F} \in \tilde{L}^q(\mathcal{C}_R)$. On définit la fonction $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{C}_{R_0} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\tilde{\mathcal{F}}(x) = \frac{R}{R_0} \mathcal{F}\left(\frac{R}{R_0}x\right)$. Alors, en accord avec le changement de variables $y = \frac{R}{R_0}x$, il est clair que

$$\int_{\mathcal{C}_{R_0}} \tilde{\mathcal{F}}(x) dx = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_{\mathcal{C}_R} \mathcal{F}(y) dy = 0, \quad \|\tilde{\mathcal{F}}\|_{0,q,\mathcal{C}_{R_0}} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{1-\frac{3}{q}} \|\mathcal{F}\|_{0,q,\mathcal{C}_R}.$$

D'après le lemme B.1 avec $G = \mathcal{C}_{R_0}$, la fonction $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{B}(\tilde{\mathcal{F}}) \in [W_0^{1,q}(\mathcal{C}_{R_0})]^3$ satisfait $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathcal{F}}$ p.p. dans \mathcal{C}_{R_0} ainsi que $\|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_{0,q,\mathcal{C}_{R_0}} \leq c(\mathcal{C}_{R_0}, q) \|\tilde{\mathcal{F}}\|_{0,q,\mathcal{C}_{R_0}}$. On définit ensuite la fonction $\mathbf{v} : \mathcal{C}_R \rightarrow \mathbb{R}^3$ par $\mathbf{v}(x) = \tilde{\mathbf{v}}\left(\frac{R_0}{R}x\right)$. Il est clair que $\mathbf{v} \in [W_0^{1,q}(\mathcal{C}_R)]^3$. De plus, p.p.t. $x \in \mathcal{C}_R$, on a

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x) = \frac{R_0}{R} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}\left(\frac{R_0}{R}x\right) = \frac{R_0}{R} \tilde{\mathcal{F}}\left(\frac{R_0}{R}x\right) = \mathcal{F}(x).$$

Pour conclure que $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_R}(\mathcal{F}) \equiv \mathbf{v}$ possède toutes les propriétés requises, il suffit de noter qu'en effectuant le changement de variables $y = \frac{R_0}{R}x$, on trouve que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_R} |\nabla \mathbf{v}(x)|^q dx &= \int_{\mathcal{C}_R} \left(\frac{R_0}{R}\right)^q \left|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\left(\frac{x}{R}\right)\right|^q dx = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{3-q} \int_{\mathcal{C}_{R_0}} |\nabla \tilde{\mathbf{v}}(y)|^q dy \\ &\leq c(\mathcal{C}_{R_0}, q)^q \left(\frac{R}{R_0}\right)^{3-q} \int_{\mathcal{C}_{R_0}} |\tilde{\mathcal{F}}(y)|^q dy = c(\mathcal{C}_{R_0}, q)^q \int_{\mathcal{C}_R} |\mathcal{F}(x)|^q dx. \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

Lemme B.5 *Il existe une famille d'opérateurs linéaires $\{\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{R_0}^R} = (\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{R_0}^R}^1, \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{R_0}^R}^2, \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{R_0}^R}^3)\}_{R>2R_0}$ telle que pour $R > 2R_0$, on a*

$$\begin{aligned} \forall q \in (1, \infty), \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{R_0}^R} : \tilde{L}^q(\mathcal{C}_{R_0}^R) &\rightarrow [W_0^{1,q}(\mathcal{C}_{R_0}^R)]^3, \\ \forall \mathcal{F} \in \tilde{L}^q(\mathcal{C}_{R_0}^R), \operatorname{div} \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{R_0}^R}(\mathcal{F}) &= \mathcal{F} \text{ p.p. dans } \mathcal{C}_{R_0}^R, \\ \forall \mathcal{F} \in \tilde{L}^q(\mathcal{C}_{R_0}^R), \forall q \in (1, \infty), \|\nabla \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{R_0}^R}(\mathcal{F})\|_{0,q,\mathcal{C}_{R_0}^R} &\leq c(\mathcal{C}, q) \|\mathcal{F}\|_{0,q,\mathcal{C}_{R_0}^R}. \end{aligned}$$

Preuve. Soient $R > 2R_0$ fixé et $\mathcal{F} \in \tilde{L}^q(\mathcal{C}_{R_0}^R)$. On définit la fonction $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{C}_R \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\tilde{\mathcal{F}}(x) = \begin{cases} \mathcal{F}(x) & \text{si } x \in \mathcal{C}_{R_0}^R, \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{C}_{R_0}. \end{cases}$$

En accord avec le lemme B.4, la fonction $\tilde{\mathbf{v}} = \mathcal{B}_{\mathcal{C}_R}(\tilde{\mathcal{F}}) \in [W_0^{1,q}(\mathcal{C}_R)]^3$ satisfait $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathcal{F}}$ p.p. dans \mathcal{C}_R ainsi que $\|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_{0,q,\mathcal{C}_R} \leq c(\mathcal{C}, q) \|\tilde{\mathcal{F}}\|_{0,q,\mathcal{C}_R}$. De plus,

$$- \int_{\partial \mathcal{C}_{R_0} \cap \partial B_{R_0}} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma = - \int_{\partial \mathcal{C}_{R_0}} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma = - \int_{\mathcal{C}_{R_0}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} dx = - \int_{\mathcal{C}_{R_0}} \tilde{\mathcal{F}} dx = 0.$$

En conséquence, le corollaire B.1 garantit l'existence de $\tilde{\mathbf{w}} \in [W^{1,q}(\mathcal{C}_{R_0}^{2R_0})]^3$ satisfaisant $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}} = 0$ p.p. dans $\mathcal{C}_{R_0}^{2R_0}$, $\tilde{\mathbf{w}}|_{\partial \mathcal{C}_{R_0}^{2R_0} \cap \partial B_{R_0}} = -\tilde{\mathbf{v}}|_{\partial \mathcal{C}_{R_0}^{2R_0} \cap \partial B_{R_0}}$, $\tilde{\mathbf{w}}|_{\partial \mathcal{C}_{R_0}^{2R_0} \setminus \partial B_{R_0}} = \mathbf{0}$ et

$$\|\nabla \tilde{\mathbf{w}}\|_{0,q,\mathcal{C}_{R_0}^{2R_0}} \leq c(\mathcal{C}, q) \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{1,1-\frac{1}{q},\partial \mathcal{C}_{R_0}} \leq c(\mathcal{C}, q) \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{1,q,\mathcal{C}_{R_0}^{2R_0}}.$$

Par suite, en accord avec la variante de Friedrichs de l'inégalité de Poincaré qui dans la présente situation s'écrit

$$\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{0,q,\mathcal{C}_{R_0}^{2R_0}} \leq c(\mathcal{C}_{R_0}^{2R_0}, q) (\|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_{0,q,\mathcal{C}_{R_0}^{2R_0}} + \int_{\Gamma} |\tilde{\mathbf{v}}| d\sigma), \quad \Gamma = \partial \mathcal{C}_{R_0}^{2R_0} \setminus (\partial B_{R_0} \cup \partial B_{2R_0}),$$

il est possible de majorer $\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{1,q,\mathcal{C}_{R_0}^{2R_0}}$ par $\|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_{0,q,\mathcal{C}_R}$ pour finalement récupérer l'inégalité

$$\|\nabla \tilde{\mathbf{w}}\|_{0,q,\mathcal{C}_{R_0}^{2R_0}} \leq c(\mathcal{C}, q) \|\mathcal{F}\|_{0,q,\mathcal{C}_{R_0}^R}.$$

On dénote encore par \tilde{w} le prolongement par zéro dans $\mathcal{C}_{2R_0}^R$ de \tilde{w} et on pose $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{R_0}^R}(\mathcal{F}) = \tilde{v} + \tilde{w}$. Alors il est clair que $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{R_0}^R}(\mathcal{F}) \in [W_0^{1,q}(\mathcal{C}_{R_0}^R)]^3$, $\operatorname{div} \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{R_0}^R}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ p.p. dans $\mathcal{C}_{R_0}^R$ et

$$\|\nabla \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{R_0}^R}(\mathcal{F})\|_{0,q,\mathcal{C}_{R_0}^R} \leq \|\nabla \tilde{v}\|_{0,q,\mathcal{C}_R} + \|\nabla \tilde{w}\|_{0,q,\mathcal{C}_{2R_0}^R} \leq c(\mathcal{C}, q) \|\mathcal{F}\|_{0,q,\mathcal{C}_{R_0}^R}.$$

D'où le résultat. \square

Lemme B.6 *Il existe un opérateur linéaire $\mathcal{B}_{\mathcal{C}} = (\mathcal{B}_{\mathcal{C}}^1, \mathcal{B}_{\mathcal{C}}^2, \mathcal{B}_{\mathcal{C}}^3)$ tel que*

$$\begin{aligned} \forall q \in (1, \infty), \mathcal{B}_{\mathcal{C}} : L^q(\mathcal{C}) &\rightarrow [D_0^{1,q}(\mathcal{C})]^3, \quad \forall \mathcal{F} \in L^q(\mathcal{C}), \operatorname{div} \mathcal{B}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \text{ p.p. dans } \mathcal{C}, \\ \forall \mathcal{F} \in L^q(\mathcal{C}), \forall q \in (1, \infty), \|\nabla \mathcal{B}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})\|_{0,q,\mathcal{C}} &\leq c(q) \|\mathcal{F}\|_{0,q,\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

Preuve. La démonstration de ce lemme est une adaptation au cas d'un cône de révolution de celle d'un résultat de BORCHERS, PILECKAS [6, Lemma 3.1] avec $q \in (1, \infty)$. Soit $\mathcal{F} \in L^q(\mathcal{C})$. Introduisons la fonction $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_{\{x \in \mathcal{C}, |x| < t\}} \mathcal{F}(x) dx.$$

Etant donné que $\mathcal{F} \in L_{loc}^1(\mathcal{C})$, le théorème de différentiation de Lebesgue-Besicovitch nous assure que p.p.t. $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction F est dérivable en t et que

$$F'(t) = \int_{\{x \in \mathcal{C}, |x|=t\}} \mathcal{F}(x) d\sigma.$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Hölder, on voit que

$$|F(t)|^q \leq ct^{3(q-1)} \int_{\{x \in \mathcal{C}, |x| < t\}} |\mathcal{F}(x)|^q dx \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{3(q-1)} |F(t)|^q = 0.$$

En outre, en accord avec l'inégalité de Hardy classique et encore une fois à l'aide de l'inégalité de Hölder, on trouve que

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty r^{2(1-q)-q} |F(r)|^q dr \leq c \int_0^\infty r^{2(1-q)} |F'(r)|^q dr \\ &\leq c \int_0^\infty r^{2(1-q)} |\{x \in \mathcal{C}, |x|=r\}|^{\frac{q}{q-1}} \int_{\{x \in \mathcal{C}, |x|=r\}} |\mathcal{F}(x)|^q d\sigma dr = c \int_{\mathcal{C}} |\mathcal{F}(x)|^q dx. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction \mathbf{A} dont les composantes sphériques sont :

$$A_r(x) = \{2(\cos \alpha - 1) \cos \alpha - \frac{1}{2}(\cos(2\alpha) - 1)\}^{-1} \times \frac{\cos \theta - \cos \alpha}{\pi r^2}, \quad A_\theta(x) = 0, \quad A_\varphi(x) = 0.$$

Clairement, pour tout $x \in \mathcal{C}$ on a $\operatorname{div} \mathbf{A}(x) = 0$ et pour tout point x de $\partial \mathcal{C}$ où la normale extérieure existe, c'est à dire $\forall x \in \partial \mathcal{C} \setminus \{0\}$, $\mathbf{A}(x) = \mathbf{0}$. On vérifie également sans peine que

$$\int_{\{x \in \mathcal{C}, |x|=t\}} A_r(x) d\sigma = 1.$$

Ceci étant, on pose maintenant $\mathbf{W}(x) = \mathbf{A}(x)F(r)$. Noter qu'en tout point $x \in \partial\mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{W}(x) = \mathbf{0}$ et que

$$\operatorname{div} \mathbf{W}(x) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 A_r(x) F(r)) = A_r(x) F'(r) = A_r(x) \int_{\{y \in \mathcal{C}, |y|=r\}} \mathcal{F}(y) d\sigma \equiv \mathcal{F}_1(x).$$

Justifions au passage l'appartenance de la fonction \mathcal{F}_1 à l'espace $L^q(\mathcal{C})$: en utilisant l'inégalité de Hölder, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} |\mathcal{F}_1|^q dx &\leq c \int_{\mathcal{C}} r^{-2q} r^{2(q-1)} \int_{\{y \in \mathcal{C}, |y|=r\}} |\mathcal{F}(y)|^q d\sigma dx \\ &\leq c \int_0^\infty r^{2q-2q} r^{2(q-1)} \int_{\{y \in \mathcal{C}, |y|=r\}} |\mathcal{F}(y)|^q d\sigma dr \leq c \int_{\mathcal{C}} |\mathcal{F}(y)|^q dy. \end{aligned}$$

L'inégalité de Hardy classique ajoutée au comportement de $\partial_i \mathbf{W}$, $i = 1, 2, 3$, induit une borne sur le gradient de \mathbf{W} et plus exactement que

$$\int_{\mathcal{C}} |\nabla \mathbf{W}|^q dx \leq c \int_0^\infty \{r^{2-3q} |F(r)|^q + r^{2-2q} |F'(r)|^q\} dr \leq c \int_{\mathcal{C}} |\mathcal{F}(x)|^q dx.$$

Soit la fonction $\mathcal{G} = \mathcal{F} - \mathcal{F}_1 \in L^q(\mathcal{C})$. Alors

$$\int_{\{x \in \mathcal{C}, |x|=r\}} \mathcal{G}(x) d\sigma = 0 \Rightarrow \forall R > 0, \int_{\mathcal{C}^{2R}} \mathcal{G}(x) dx = \int_R^{2R} \int_{\{x \in \mathcal{C}, |x|=r\}} \mathcal{G}(x) d\sigma dr = 0.$$

Décomposons \mathcal{C} en « couronnes côniques », c'est à dire en écrivant \mathcal{C} comme la réunion pour $k \in \mathbb{Z}$ des ensembles $\mathcal{C}_{2^k}^{2^{k+1}}$. D'après le lemme B.2 appliqué à $G = \mathcal{C}_1^2$, $y = \mathbf{0}$ et $\tau = 2^k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ il existe dans chaque couronne $\mathcal{C}_{2^k}^{2^{k+1}}$ une fonction $\mathbf{v}_k \in [W_0^{1,q}(\mathcal{C}_{2^k}^{2^{k+1}})]^3$ telle que $\operatorname{div} \mathbf{v}_k = \mathcal{G}$ p.p. dans $\mathcal{C}_{2^k}^{2^{k+1}}$ et satisfaisant l'estimation $\|\nabla \mathbf{v}_k\|_{0,q,\mathcal{C}_{2^k}^{2^{k+1}}} \leq c \|\mathcal{G}\|_{0,q,\mathcal{C}_{2^k}^{2^{k+1}}}$ dans laquelle la constante c ne dépend ni de \mathcal{G} ni de k . On prolonge toutes les fonction \mathbf{v}_k par zéro dans le cône \mathcal{C} tout entier. Ainsi la fonction $\mathbf{v} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{v}_k$ satisfait $\operatorname{div} \mathbf{v} = \mathcal{G}$ p.p. dans \mathcal{C} et $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur $\partial\mathcal{C}$. Noter que les couronnes sont deux à deux disjointes. Ainsi, l'intégrale étant dénombrablement additive, il vient que

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{0,q,\mathcal{C}}^q \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\nabla \mathbf{v}_k\|_{0,q,\mathcal{C}_{2^k}^{2^{k+1}}}^q \leq c \|\mathcal{G}\|_{0,q,\mathcal{C}}^q.$$

On conclut, en fin de compte, en posant $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \mathbf{v} + \mathbf{W}$. D'où le résultat. \square

Lemme B.7 *Il existe un opérateur linéaire $\mathcal{B}_{\mathcal{C}^{R_0}} = (\mathcal{B}_{\mathcal{C}^{R_0}}^1, \mathcal{B}_{\mathcal{C}^{R_0}}^2, \mathcal{B}_{\mathcal{C}^{R_0}}^3)$ tel que*

$$\begin{aligned} \forall q \in (1, \infty), \quad \mathcal{B}_{\mathcal{C}^{R_0}} : L^q(\mathcal{C}^{R_0}) &\rightarrow [D_0^{1,q}(\mathcal{C}^{R_0})]^3, \\ \forall \mathcal{F} \in L^q(\mathcal{C}^{R_0}), \quad \operatorname{div} \mathcal{B}_{\mathcal{C}^{R_0}}(\mathcal{F}) &= \mathcal{F} \text{ p.p. dans } \mathcal{C}^{R_0}, \\ \forall \mathcal{F} \in L^q(\mathcal{C}^{R_0}), \quad \forall q \in (1, \infty), \quad \|\nabla \mathcal{B}_{\mathcal{C}^{R_0}}(\mathcal{F})\|_{0,q,\mathcal{C}^{R_0}} &\leq c(\mathcal{C}, q) \|\mathcal{F}\|_{0,q,\mathcal{C}^{R_0}}. \end{aligned}$$

Preuve. Ce lemme peut être démontré en adaptant la preuve du lemme B.5 dans laquelle on utilisera le lemme B.6 à la place du lemme B.4. \square

4 Les domaines à sorties côniques

Tout au long de cette section, n désignera un entier strictement positif. Une suite logique à la section précédente est l'étude du problème (*) dans des domaines à n sorties côniques (cf. la définition A.2 p.198).

Lemme B.8 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine à n sorties côniques à frontière Lipschitzienne et $R_0 > 0$ le nombre qui apparaît dans la définition A.2. Alors il existe une famille d'opérateurs linéaires $\{\mathcal{B}_{\Omega_R} = (\mathcal{B}_{\Omega_R}^1, \mathcal{B}_{\Omega_R}^2, \mathcal{B}_{\Omega_R}^3)\}_{R > 2R_0}$ telle que pour $R > 2R_0$, on a

$$\begin{aligned} \forall q \in (1, \infty), \mathcal{B}_{\Omega_R} : \tilde{L}^q(\Omega_R) &\rightarrow [W_0^{1,q}(\Omega_R)]^3, \\ \forall \mathcal{F} \in \tilde{L}^q(\Omega_R), \operatorname{div} \mathcal{B}_{\Omega_R}(\mathcal{F}) &= \mathcal{F} \text{ p.p. dans } \Omega_R, \\ \forall \mathcal{F} \in \tilde{L}^q(\Omega_R), \forall q \in (1, \infty), \|\nabla \mathcal{B}_{\Omega_R}(\mathcal{F})\|_{0,q,\Omega_R} &\leq c(\Omega, q) \|\mathcal{F}\|_{0,q,\Omega_R}. \end{aligned}$$

Preuve. Soient $R > 2R_0$ fixé et $\mathcal{F} \in \tilde{L}^q(\Omega_R)$. On dénote encore par \mathcal{F} le prolongement par zéro à l'extérieur de Ω_R de \mathcal{F} . On définit ensuite la fonction $\tilde{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$\tilde{\mathcal{F}}(x) = \begin{cases} \mathcal{F}(x) & \text{si } x \in \tilde{B}_{R_0}, \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{n+1} & \text{si } x \in \tilde{B}_{2R_0} \setminus \tilde{B}_{R_0}, \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{n} & \text{si } x \in \overline{\tilde{B}_{2R_0}}^C \end{cases}$$

où, on le rappelle, \tilde{B}_R désigne la réunion des boules $B(s_i, R)$ de centre le sommet du cône $\mathcal{C}_i, i = 1, \dots, n$. Soit ϕ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ telle que $0 \leq \phi \leq 1, \phi = 1$ dans $\tilde{B}_{\frac{7}{4}R_0} \setminus \tilde{B}_{\frac{5}{4}R_0}, \phi = 0$ dans $\tilde{B}_{R_0} \cup \overline{\tilde{B}_{2R_0}}^C$. On pose

$$F = \left(\int_{\Omega_{2R_0}} \phi dx \right)^{-1} \left(\int_{\Omega_{2R_0}} \tilde{\mathcal{F}} dx \right) \phi.$$

Puisque $\int_{\Omega_{2R_0}} (\tilde{\mathcal{F}} - F) dx = 0$, en accord avec le lemme B.1 dans lequel $G = \Omega_{2R_0}$, le champ $\mathbf{v}_0 = \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{F}} - F) \in [W_0^{1,q}(\Omega_{2R_0})]^3$ satisfait

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = \tilde{\mathcal{F}} - F \text{ p.p. dans } \Omega_{2R_0} \text{ et } \|\nabla \mathbf{v}_0\|_{0,q,\Omega_{2R_0}} \leq c(\Omega_{2R_0}, q) \|\tilde{\mathcal{F}} - F\|_{0,q,\Omega_{2R_0}}.$$

D'après le lemme B.7, on est assuré de l'existence d'une fonction $\mathbf{v}_i = \mathcal{B}_{(\mathcal{C}_i)^{R_0}}(\frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{F}} + \frac{1}{n}F)) \in [D_0^{1,q}((\mathcal{C}_i)^{R_0})]^3, i = 1, \dots, n$, satisfaisant

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_i = \frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{F}} + \frac{1}{n}F) \text{ p.p. dans } (\mathcal{C}_i)^{R_0} \text{ et } \|\nabla \mathbf{v}_i\|_{0,q,(\mathcal{C}_i)^{R_0}} \leq C(\mathcal{C}_i, q) \|\frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{F}} + \frac{1}{n}F)\|_{0,q,(\mathcal{C}_i)^{R_0}}.$$

Enfin, en adaptant à l'aide du lemme B.5, la preuve du corollaire B.1 dans laquelle $G = (\mathcal{C}_i)^{R_0}$, pour $i = 1, \dots, n$, on obtient l'existence d'une fonction $\tilde{\mathbf{v}}_i \in [W_0^{1,q}((\mathcal{C}_i)^{R_0})]^3$ telle

que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_i &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{F}} + \frac{1}{n}F) \text{ p.p. dans } (\mathcal{C}_i)_1^R, \\ \tilde{\mathbf{v}}_i|_{\partial(\mathcal{C}_i)_1^R \cap \partial B(s_i, R)} &= -\mathbf{v}_i|_{\partial(\mathcal{C}_i)_1^R \cap \partial B(s_i, R)}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_i|_{\partial(\mathcal{C}_i)_1^R \setminus \partial B(s_i, R)} = \mathbf{0}, \\ \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}_i\|_{0,p,(\mathcal{C}_i)_1^R} &\leq c(\mathcal{C}_i, p) \left(\left\| \frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{F}} + \frac{1}{n}F) \right\|_{0,p,(\mathcal{C}_i)_1^R} + \|\nabla \mathbf{v}_i\|_{0,p,(\mathcal{C}_i)_1^R} \right). \end{aligned}$$

On dénote encore par \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_i et $\tilde{\mathbf{v}}_i$, $i = 1, \dots, n$, les prolongements par zéro dans $\Omega_{2R_0}^C$, $[(\mathcal{C}_i)^{R_0}]^C$ et $[(\mathcal{C}_i)_{R_0}^R]^C$ de \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_i et $\tilde{\mathbf{v}}_i$. On pose

$$\mathbf{B}_{\Omega_R}(\mathcal{F}) = \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i + \tilde{\mathbf{v}}_i).$$

En tenant compte des propriétés de la fonction ϕ , de la définition de $\tilde{\mathcal{F}}$ et en écrivant Ω_R comme $\Omega_{R_0} \cup \{\bigcup_{i=1}^n (\mathcal{C}_i)_{R_0}^{2R_0}\} \cup \{\bigcup_{i=1}^n (\mathcal{C}_i)_{2R_0}^R\}$, il est facile de vérifier que p.p. dans Ω_R , $\operatorname{div} \mathbf{B}_{\Omega_R}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. De plus, il est clair que $\mathbf{B}_{\Omega_R}(\mathcal{F}) \in [W^{1,q}(\Omega_R)]^3$ et $\mathbf{B}_{\Omega_R}(\mathcal{F})|_{\partial\Omega_R} = \mathbf{0}$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} |\nabla \mathbf{B}_{\Omega_R}(\mathcal{F})|^q dx &\leq c(q) \left\{ \int_{\Omega_{2R_0}} |\nabla \mathbf{v}_0|^q dx + \sum_{i=1}^n \left(\int_{(\mathcal{C}_i)^{R_0}} |\nabla \mathbf{v}_i|^q dx + \int_{(\mathcal{C}_i)_{R_0}^R} |\nabla \tilde{\mathbf{v}}_i|^q dx \right) \right\} \\ &\leq c(\Omega_{2R_0}, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n, q) \left(\|\tilde{\mathcal{F}} - F\|_{0,q,\Omega_{2R_0}}^q + \sum_{i=1}^n \|\tilde{\mathcal{F}} + \frac{1}{n}F\|_{0,q,(\mathcal{C}_i)^{R_0}}^q \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $p \in [1, \infty)$, noter que

$$|(\tilde{B}_{\frac{7}{4}R_0} \setminus \tilde{B}_{\frac{5}{4}R_0}) \cap \Omega_{2R_0}| \leq \int_{\Omega_{2R_0}} \phi^p dx \leq |\Omega_{2R_0}|.$$

L'inégalité de Hölder complétée par ces deux observations montre finalement que

$$\int_{\Omega_R} |\nabla \mathbf{B}_{\Omega_R}(\mathcal{F})|^q dx \leq c(\Omega_{2R_0}, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n, q) \|\mathcal{F}\|_{0,q,\Omega_R}^q.$$

La preuve est ainsi complète. \square

Terminons cette section par le cas des domaines à n sorties côniques de \mathbb{R}^3 à frontière Lipschitzienne tout entier.

Lemme B.9 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine à n sorties côniques à frontière Lipschitzienne. Alors il existe un opérateur linéaire $\mathbf{B}_\Omega = (\mathcal{B}_\Omega^1, \mathcal{B}_\Omega^2, \mathcal{B}_\Omega^3)$ tel que*

$$\begin{aligned} \forall q \in (1, \infty), \mathbf{B}_\Omega : L^q(\Omega) &\rightarrow [D_0^{1,q}(\Omega)]^3, \quad \forall \mathcal{F} \in L^q(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{B}_\Omega(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \text{ p.p. dans } \Omega, \\ \forall \mathcal{F} \in L^q(\Omega), \forall q \in (1, \infty), &\|\nabla \mathbf{B}_\Omega(\mathcal{F})\|_{0,q,\Omega} \leq c(\Omega, q) \|\mathcal{F}\|_{0,q,\Omega}. \end{aligned}$$

Preuve. Soit $\mathcal{F} \in L^q(\Omega)$. On dénote encore par \mathcal{F} le prolongement par zéro à l'extérieur de Ω de \mathcal{F} . Il suffit alors de copier mot à mot la preuve du lemme B.8 à partir de la définition de la fonction $\tilde{\mathcal{F}}$ jusqu'à l'introduction de \mathbf{v}_0 et \mathbf{v}_i , $i = 1, \dots, n$ et de poser

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathcal{F}) = \mathbf{v}_0 + 2 \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i$$

En utilisant des arguments analogues à ceux présentés dans la preuve du lemme B.8, on vérifie aisément que $\mathcal{B}_\Omega(\mathcal{F})$ possède les propriétés requises. D'où le résultat. \square

Annexe C

Le degré topologique

Sommaire

1	Le degré topologique de Brouwer	236
2	Le degré topologique de Leray-Schauder	239

Dans cette annexe, nous donnons un bref aperçu de la notion de degré topologique que ce soit en dimension finie ou infinie. Le degré $\text{deg}(\mathcal{F}, D, c)$ de \mathcal{F} dans D par rapport à c donne une information sur le nombre de solutions de l'équation $\mathcal{F}(x) = c$ dans un ensemble ouvert $D \subset X$ où $\mathcal{F} : D \subset X \rightarrow X$ est continue, $c \notin \mathcal{F}(\partial D)$ et X est un espace topologique, métrique la plupart du temps.

1 Le degré topologique de Brouwer

Dans cette section, nous introduisons le degré topologique de Brouwer et nous en rappelons les principales propriétés. Néanmoins, nous ne nous attarderons pas sur ses possibles applications (théorèmes de point fixe, théorie des points critiques...). Le lecteur, intéressé par ces questions, pourra consulter le chapitre 3 du livre de FONSECA-GANGBO [21] ou le chapitre 2 de celui de KAVIAN [31] ainsi que les références qui y sont citées.

Commençons par introduire le degré pour les fonctions régulières. Sans restreindre la généralité, on considère $X = \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Ainsi, puisque N peut être égal à un, exceptionnellement la notation en gras pour distinguer un champ de vecteurs d'un champ scalaire ne sera pas utilisée.

Définition C.1 Soit $\mathcal{F} \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$. On dit que $x \in \overline{D}$ est un point critique de \mathcal{F} si $J_{\mathcal{F}}(x) = 0$. Dans le cas contraire, on dit que x est un point régulier de \mathcal{F} . On dit que $c \in \mathbb{R}^N$ est une valeur critique de \mathcal{F} si il existe un point critique $x \in \overline{D}$ de \mathcal{F} tel que $\mathcal{F}(x) = c$. Dans le cas contraire, on dit que c est une valeur régulière de \mathcal{F} . Dans la suite, on notera $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des points critiques de \mathcal{F} .

Définition C.2 Soient $D \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $N \geq 1$, $\mathcal{F} \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ et $c \in \mathbb{R}^N$ tel que $c \notin \{\mathcal{F}(\partial D) \cup \mathcal{F}(\mathcal{C}_{\mathcal{F}})\}$. On appelle degré topologique de Brouwer de \mathcal{F} dans D par rapport à c la quantité

$$\text{deg}(\mathcal{F}, D, c) \equiv \sum_{x \in \mathcal{F}^{-1}(\{c\})} \text{sgn}(J_{\mathcal{F}}(x)) \in \mathbb{Z}$$

où sgn désigne la fonction réelle à valeurs réelles définie par $\text{sgn}(t) = 1$ si $t > 0$ et $\text{sgn}(t) = -1$ si $t < 0$.

Une question assez naturelle se pose : comment étendre cette définition au cas où c est une valeur critique de \mathcal{F} ? La réponse se trouve dans le lemme de Sard et la formule de représentation utilisée par HEINZ [27] en 1959 pour introduire le degré topologique.

Lemme C.1 (Lemme de Sard) Soit une fonction $\mathcal{F} \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$. Alors l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{C}_{\mathcal{F}})$ des valeurs critiques de \mathcal{F} est de mesure nulle.

Preuve. Voir le lemme 1.4 du chapitre 1 du livre de FONSECA-GANGBO [21]. □

Proposition C.1 Soient $D \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $N \geq 1$, $\mathcal{F} \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ et $c \in \mathbb{R}^N$ tel que $c \notin \mathcal{F}(\partial D) \cup \mathcal{F}(\mathcal{C}_{\mathcal{F}})$. Soient $\varepsilon > 0$ et φ est une fonction de $C^0((0, \infty))$ telle que $\text{supp}\varphi \subset (0, \varepsilon)$ et $\int_0^\infty \varphi(t) dt = 1$. Alors pour tout $0 < \varepsilon < \text{dist}(c, \mathcal{F}(\partial D))$

$$\text{deg}(\mathcal{F}, D, c) = \int_D \varphi(|\mathcal{F}(x) - c|) J_{\mathcal{F}}(x) dx.$$

Preuve. Voir la proposition 1.7 du chapitre 1 du livre de FONSECA-GANGBO [21]. \square

A l'aide de plusieurs lemmes techniques et sous la condition $0 < \varepsilon < \text{dist}(c, \mathcal{F}(\partial D))$, il est possible de démontrer que cette formule de représentation ne dépend ni de ε ni de la fonction φ . Le lecteur intéressé pourra se reporter au chapitre 2 du livre de KAVIAN [31] qui utilise cette version de la définition du degré topologique de Brouwer.

De la proposition C.1, il résulte la suivante.

Proposition C.2 *Soient $D \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $N \geq 1$, et $\mathcal{F} \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$. On suppose que c_1 et c_2 sont dans la même composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{F}(\partial D)$. Alors*

$$\deg(\mathcal{F}, D, c_1) = \deg(\mathcal{F}, D, c_2).$$

Preuve. Voir la proposition 1.8 du chapitre 1 du livre de FONSECA-GANGBO [21]. \square

Considérons $\mathcal{F} \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$, $c \in \mathbb{R}^N$ tel que $c \notin \mathcal{F}(\partial D)$ et $c \in \mathcal{F}(C_{\mathcal{F}})$. En accord avec le lemme de Sard, pour tout $r > 0$ on a $B(c, r) \not\subset \mathcal{F}(C_{\mathcal{F}})$. De plus, puisque $\mathcal{F}(\partial D)$ est un ensemble compact et que l'on a supposé que $c \notin \mathcal{F}(\partial D)$, pour $r > 0$ suffisamment petit on a $B(c, r) \cap \mathcal{F}(\partial D) = \emptyset$. Par conséquent, il existe $\tilde{c} \in \mathbb{R}^N$ tel que $\tilde{c} \notin \mathcal{F}(\partial D) \cup \mathcal{F}(C_{\mathcal{F}})$ et $|c - \tilde{c}| < \text{dist}(c, \mathcal{F}(\partial D))$. Introduisons alors $\tilde{c}_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, 2$, tels que $\tilde{c}_i \notin \mathcal{F}(\partial D) \cup \mathcal{F}(C_{\mathcal{F}})$ et $|c - \tilde{c}_i| < \text{dist}(c, \mathcal{F}(\partial D))$. Clairement $\tilde{c}_i \in B(c, \text{dist}(c, \mathcal{F}(\partial D))) \subset \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{F}(\partial D)$, $i = 1, 2$. Par ailleurs, puisque $B(c, \text{dist}(c, \mathcal{F}(\partial D)))$ est un ensemble connexe contenu dans $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{F}(\partial D)$, il est inclu dans une composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{F}(\partial D)$. Ainsi, en accord avec la proposition C.2, on voit que

$$\deg(\mathcal{F}, D, \tilde{c}_1) = \deg(\mathcal{F}, D, \tilde{c}_2).$$

Ces quelques lignes justifient la définition ci-contre qui permet d'étendre la notion de degré dans le cas où c est une valeur critique de \mathcal{F} .

Définition C.3 *Soient $D \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $N \geq 1$, $\mathcal{F} \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ et $c \in \mathbb{R}^N$ tel que $c \notin \mathcal{F}(\partial D)$ et $c \in \mathcal{F}(C_{\mathcal{F}})$. On définit le degré topologique de Brouwer de \mathcal{F} dans D par rapport à c par*

$$\deg(\mathcal{F}, D, c) = \deg(\mathcal{F}, D, \tilde{c}), \quad \tilde{c} \notin \mathcal{F}(\partial D) \cup \mathcal{F}(C_{\mathcal{F}}), \quad |c - \tilde{c}| < \text{dist}(c, \mathcal{F}(\partial D)).$$

Une nouvelle question se pose ensuite : comment étendre la notion de degré au cas où la fonction \mathcal{F} est seulement continue? La réponse est une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme C.2 *Soient $D \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $N \geq 1$, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ et $c \in \mathbb{R}^N$ tel que $c \notin \mathcal{F}_1(\partial D) \cup \mathcal{F}_2(\partial D)$. Alors pourvu que $\varepsilon > 0$, introduit à la proposition C.1, soit tel que $\varepsilon < \frac{1}{4} \text{dist}(c, \mathcal{F}_1(\partial D) \cup \mathcal{F}_2(\partial D))$ et que $\|\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2\|_{0,\infty} < \varepsilon$, on a*

$$\deg(\mathcal{F}_1, D, c) = \deg(\mathcal{F}_2, D, c).$$

Preuve. Voir la proposition 1.6 du chapitre 2 du livre de KAVIAN [31]. \square

Considérons $\mathcal{F} \in C^0(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$, $c \in \mathbb{R}^N$ tel que $c \notin \mathcal{F}(\partial D)$ et $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions de $C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ qui converge uniformément vers \mathcal{F} dans \overline{D} . Alors il existe un

entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $c \notin \mathcal{F}_n(\partial D)$. Ainsi, pour $n \geq n_0$, le degré $\deg(\mathcal{F}_n, D, c)$ a un sens. De plus, puisque la suite $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $C^0(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$, il existe un entier n'_0 tel que pour $m, n \geq n'_0$,

$$\|\mathcal{F}_m - \mathcal{F}_n\|_{0,\infty} < \frac{1}{4} \text{dist}(c, \mathcal{F}_m(\partial D) \cup \mathcal{F}_n(\partial D)).$$

Ainsi, en accord avec le lemme C.2, la suite des degrés $\{\deg(\mathcal{F}_n, D, c)\}_{n \geq \max\{n_0, n'_0\}}$ est stationnaire et la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \deg(\mathcal{F}_n, D, c)$ est bien définie. Montrons alors qu'elle ne dépend pas de la suite $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour cela, on introduit une autre suite $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge uniformément vers \mathcal{F} dans \overline{D} . Alors il existe un entier N_0 tel que pour $n \geq N_0$, $c \notin \mathcal{F}_n(\partial D) \cup \mathcal{G}_n(\partial D)$. Par ailleurs

$$\exists N'_0 \geq N_0, \quad \forall n \geq N'_0, \quad \|\mathcal{F}_n - \mathcal{F}\|_{0,\infty} < \frac{1}{8} \text{dist}(c, \mathcal{F}_n(\partial D) \cup \mathcal{G}_n(\partial D))$$

et

$$\exists N''_0 \geq N_0, \quad \forall n \geq N''_0, \quad \|\mathcal{G}_n - \mathcal{F}\|_{0,\infty} < \frac{1}{8} \text{dist}(c, \mathcal{F}_n(\partial D) \cup \mathcal{G}_n(\partial D)).$$

On en déduit que pour $n \geq \max\{N'_0, N''_0\}$, $\|\mathcal{F}_n - \mathcal{G}_n\|_{0,\infty} < \frac{1}{4} \text{dist}(c, \mathcal{F}_n(\partial D) \cup \mathcal{G}_n(\partial D))$ et donc, en accord avec le lemme C.2, que $\deg(\mathcal{F}_n, D, c) = \deg(\mathcal{G}_n, D, c)$, ce qui prouve bien que $\lim_{n \rightarrow \infty} \deg(\mathcal{F}_n, D, c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \deg(\mathcal{G}_n, D, c)$.

Définition C.4 Soient $D \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $N \geq 1$, $\mathcal{F} \in C^0(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ et $c \in \mathbb{R}^N$ tel que $c \notin \mathcal{F}(\partial D)$. On définit le degré topologique de \mathcal{F} dans D par rapport à c par

$$\deg(\mathcal{F}, D, c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \deg(\mathcal{F}_n, D, c)$$

où $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de $C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ qui converge uniformément vers \mathcal{F} dans \overline{D} .

Nous allons maintenant rappeler quelques propriétés importantes du degré topologique de Brouwer. Le premier résultat s'avère parfois utile lorsqu'il s'agit de prouver l'existence de solutions d'équations non linéaires dans \mathbb{R}^N .

Théorème C.1 Soient $D \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $N \geq 1$, $\mathcal{F} \in C^0(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ et $c \in \mathbb{R}^N$ tel que $c \notin \mathcal{F}(\partial D)$. Alors l'équation $\mathcal{F}(x) = c$ admet au moins une solution dans D si $\deg(\mathcal{F}, D, c) \neq 0$.

Preuve. Voir la proposition 2.5 du chapitre 2 du livre de KAVIAN [31]. \square

Toujours dans le but de démontrer l'existence de solutions d'équations non linéaires dans \mathbb{R}^N , le théorème C.1 est souvent complété par la propriété d'invariance par homotopie du degré.

Définition C.5 Soient $D \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $N \geq 1$ et $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in [C^0(\overline{D})]^N$. On dit que $H : \overline{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une C^0 -homotopie entre \mathcal{F} , \mathcal{G} si H est continue sur $\overline{D} \times [0, 1]$, $H(x, 0) = \mathcal{F}(x)$ et $H(x, 1) = \mathcal{G}(x)$ pour tout $x \in \overline{D}$.

Théorème C.2 Soient $D \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $N \geq 1$, $H : \overline{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ une C^0 -homotopie entre $H(\cdot, 0)$, $H(\cdot, 1)$ et $c \in \mathbb{R}^N$ tel que $c \notin H(\partial D, t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\deg(H(\cdot, t), D, c) = \deg(H(\cdot, 0), D, c).$$

Preuve. Voir la proposition 2.8 du chapitre 2 du livre de KAVIAN [31]. \square

Pour terminer cette section, nous allons indiquer comment étendre la notion du degré de Brouwer dans un cadre plus général. Le lemme qui suit donne une voie assez naturelle pour introduire cette notion pour des fonctions continues $\mathcal{F} : \overline{D} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ où $M \leq N$. Soit $\mathcal{F} : \overline{D} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ une fonction continue. On rappelle que \mathbb{R}^M peut être identifié à l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^N, x_{M+1} = \dots = x_n = 0\}$. Par conséquent, la fonction \mathcal{F} peut être identifiée à une fonction continue sur \overline{D} à valeur dans \mathbb{R}^N . On définit ensuite la fonction $\mathcal{G} \in C^0(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ par $\mathcal{G}(x) = x + \mathcal{F}(x)$ puis on pose $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}|_{\overline{D \cap \mathbb{R}^M}}$.

Lemme C.3 Soit $c \in \mathbb{R}^M$ tel que $c \notin \mathcal{G}(\partial D)$. Alors

$$\deg(\mathcal{G}, D, c) = \deg(\tilde{\mathcal{G}}, D \cap \mathbb{R}^M, c).$$

Preuve. Voir le lemme 1.22 du chapitre 1 du livre de FONSECA-GANGBO [21] ou le lemme 5.7 du chapitre 2 du livre de KAVIAN [31]. \square

2 Le degré topologique de Leray-Schauder

Dans cette section, nous introduisons la notion de degré topologique de Leray-Schauder puis nous démontrons que le degré de Leray-Schauder possède des propriétés analogues à celles du degré de Brouwer.

Soient X un espace vectoriel normé de dimension infinie, $D \subset X$ un ensemble ouvert et borné, $\mathcal{F} : \overline{D} \rightarrow X$ une fonction continue et $c \in X$ tel que $c \notin \mathcal{F}(\partial D)$. Compte tenu des propriétés du degré de Brouwer, il serait préférable que le degré de Leray-Schauder de \mathcal{F} dans D par rapport à c , $\deg(\mathcal{F}, D, c)$ vérifie

- (i) $\deg(I, D, c) = 1$ si $c \in D$ où I désigne l'application identité de \overline{D} dans X ;
- (ii) $\deg(\mathcal{F}, D, c) \neq 0 \Rightarrow c \in \mathcal{F}(D)$;
- (iii) si $H : \overline{D} \times [0, 1] \rightarrow X$ est une C^0 -homotopie telle que $c \notin H(\partial D, t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors $\deg(H(\cdot, t), D, c)$ est indépendant de t .

Dans la section précédente, nous avons vu qu'en dimension finie, $C^0(\overline{D}, X)$ est une classe convenable de fonctions pour laquelle il existe une unique fonction degré, le degré de Brouwer, satisfaisant (i)-(iii). Malheureusement, en dimension infinie, $C^0(\overline{D}, X)$ n'est pas une classe convenable. En effet, un exemple dû à Leray montre qu'il faut restreindre la classe des fonctions pour laquelle il y a existence et unicité d'une fonction degré, le degré de Leray-Schauder, à un ensemble strictement contenu dans $C^0(\overline{D}, X)$.

L'exemple de Leray

On considère $X = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|$, à savoir pour $x \in X$, $\|x\| = \max_{s \in [0, 1]} |x(s)|$. On définit la fonction $x_0 \in X$ par $\forall s \in [0, 1]$, $x_0(s) = \frac{1}{2}$ puis on introduit l'ensemble ouvert borné $D = \{x \in X, \|x - x_0\| < \frac{1}{2}\}$. Alors, on peut montrer qu'il existe $c \in X$ tel que pour toute fonction $\deg(\cdot, D, c) : C^0(\overline{D}, X) \rightarrow \mathbb{Z}$, une des trois propriétés (i), (ii) ou (iii) listées ci-dessus est mise en défaut. En effet, supposons au contraire qu'il existe une fonction $\deg(\cdot, D, c) : C^0(\overline{D}, X) \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfaisant (i)-(iii). On définit $\mathcal{F} \in C^0(\overline{D}, X)$ par $\mathcal{F}(x) = \gamma \circ x$ où $\gamma \in X$,

$$\gamma(s) = \begin{cases} s & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - s & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{5}{8}, \\ \frac{5}{3}(s - 1) + 1 & \text{si } \frac{5}{8} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

On remarque que pour $x \in \overline{D}$, pour tout $s \in [0, 1]$, $0 \leq x(s) \leq 1$. Par suite, puisque $\gamma([0, 1]) = [0, 1]$, $\mathcal{F}(\overline{D}) \subset \overline{D}$. Soit $H : \overline{D} \times [0, 1] \rightarrow X$ définie par $H(x, t) = tx + (1-t)\mathcal{F}(x)$. Il est bien clair que H est une C^0 -homotopie entre l'application identité de \overline{D} dans X et \mathcal{F} et vérifie

$$\|H(t, x) - x_0\| \leq t\|x - x_0\| + (1-t)\|\mathcal{F}(x) - x_0\| \leq \frac{1}{2}.$$

Montrons en outre que pour tout $t \in [0, 1]$, $H(\partial D, t) \subset \partial D$. Pour ce faire, fixons $t \in [0, 1]$. Soit $x \in \partial D$ i.e. $\|x - x_0\| = \frac{1}{2}$. Alors pour tout $s \in [0, 1]$, $-\frac{1}{2} \leq x(s) - x_0(s) \leq \frac{1}{2}$ et pour un certain $s_0 \in [0, 1]$, $|x(s_0) - x_0(s_0)| = \frac{1}{2}$, ce qui implique que $x(s_0) \in \{0, 1\}$. Par conséquent, $H(x(s_0), t) = x(s_0)$ et donc $|H(x(s_0), t) - x_0(s_0)| = \frac{1}{2}$. Rappelons ensuite que puisque $x \in \partial D$, pour tout $s \in [0, 1]$, $0 \leq x(s) \leq 1$ ce qui entraîne que pour tout $s \in [0, 1]$, $0 \leq H(x(s), t) \leq 1$. Autrement dit, $|H(x(s), t) - x_0(s)| \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, on a bien démontré que pour tout $x \in \partial D$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $\|H(x, t) - x_0\| = \frac{1}{2}$.

Soit maintenant la fonction $c \in X$ définie pour $s \in [0, 1]$ par $c(s) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}$. Alors $c \notin \partial D$ puisque $\|c - x_0\| = \frac{1}{4}$. Par suite, d'après ce qui précède, pour tout $t \in [0, 1]$, $c \notin H(\partial D, t)$ et donc $\deg(H(\cdot, t), D, c)$ est bien défini. Ainsi, en accord avec les propriétés (i) et (iii), on a $\deg(\mathcal{F}, D, c) = \deg(I, D, c) = 1$ et vu la propriété (ii), on déduit l'existence de $x \in D$ tel que $\mathcal{F}(x) = \gamma \circ x = c$. Montrons alors que l'équation $x(s) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution. Pour cela, à l'aide de la définition de γ , on remarque tout d'abord que

$$\frac{1}{4} = c(0) = \gamma \circ x(0) \Rightarrow x(0) = \frac{1}{4} \text{ et } \frac{3}{4} = c(1) = \gamma \circ x(1) \Rightarrow x(1) = \frac{17}{20}.$$

Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $x(s) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution $\tilde{s} \in [0, 1]$. De plus, il est clair que \tilde{s} doit satisfaire $c(\tilde{s}) = \gamma \circ x(\tilde{s}) = \gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ i.e. $\tilde{s} = \frac{1}{2}$. D'où l'unicité. Ceci étant, du théorème des valeurs intermédiaires, il résulte que pour tout $s \in (\frac{1}{2}, 1]$, soit $x(s) < \frac{1}{2}$, soit $x(s) > \frac{1}{2}$. Le premier cas de figure n'est pas possible puisque $x(1) = \frac{17}{20}$. Donc pour tout $s \in (\frac{1}{2}, 1]$, $x(s) > \frac{1}{2}$. Mais comme $x(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $s \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon]$, $x(s) \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$, ce qui implique que

$\gamma \circ x(s) \in [\gamma(\frac{5}{8}), \gamma(\frac{1}{2})] = [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$ et conduit à une contradiction avec le fait que pour tout $s \in [0, 1]$, $c(s) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{4} = \gamma \circ x(s)$. Ainsi, l'affirmation annoncée est démontrée.

En fait le bon cadre pour introduire la notion de degré topologique de Leray-Schauder est celui des perturbations compactes de l'identité, c'est à dire des opérateurs du type $I - T$ avec T est un opérateur compact.

Définition C.6 Soient E et F deux espaces de Banach et $A \subset E$. On dit que $T : A \rightarrow F$ est un opérateur compact si T est continu et si pour tout sous-ensemble borné B de A , $T(B)$ est relativement compact dans F .

Définition C.7 Soient E un espace de Banach et $A \subset E$. On dit que A est de dimension fini si A est contenu dans un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Rappelons maintenant quelques lemmes concernant les opérateurs compacts.

Lemme C.4 Soient E un espace de Banach, $A \subset E$ un ouvert borné et $T : \bar{A} \rightarrow E$ un opérateur compact. On suppose que $c \in X$ est tel que $c \notin (I - T)(\partial A)$. Alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in \partial A$, on ait $\|c - (I - T)(x)\| \geq r$.

Preuve. Voir le lemme 7.4 du chapitre 7 du livre de FONSECA-GANGBO [21]. \square

Lemme C.5 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, $A \subset E$ un ensemble borné et $T : A \rightarrow F$ un opérateur compact. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur $T_\varepsilon : A \rightarrow F$ tel que $T_\varepsilon(A)$ est de dimension fini et pour tout $x \in A$, $\|T_\varepsilon(x) - T(x)\|_F < \varepsilon$.

Preuve. Voir le théorème 7.3 du chapitre 7 du livre de FONSECA-GANGBO [21] ou le lemme 5.5 du chapitre 2 du livre de KAVIAN [31]. \square

Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ la distance associée à la norme $\|\cdot\|$, D un ouvert borné de X , $T : \bar{D} \rightarrow X$ un opérateur compact, I l'application identité de \bar{D} sur X et $c \in X$ tel que $c \notin (I - T)(\partial D)$. En accord avec le lemme C.5, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur compact $T_\varepsilon : \bar{D} \rightarrow X$ tel que le plus petit sous-espace vectoriel contenant $T_\varepsilon(\bar{D})$, noté $\langle T_\varepsilon(\bar{D}) \rangle$, est de dimension finie et tel que pour tout $x \in \bar{D}$, on a $\|T_\varepsilon(x) - T(x)\| < \varepsilon$. On pose $D_\varepsilon = D \cap \langle c, T_\varepsilon(\bar{D}) \rangle$. Pour tout $0 < \varepsilon < \text{dist}(c, (I - T)(\partial D))$, en utilisant le lemme C.3, il est possible de démontrer que le degré de Brouwer $\text{deg}(I - T_\varepsilon, D_\varepsilon, c)$ est bien défini et indépendant de ε (lemme 7.5 du chapitre 7 du livre de FONSECA-GANGBO [21]). Cette observation permet de donner un sens à la définition ci-après.

Définition C.8 Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ la distance associée à la norme $\|\cdot\|$, D un ouvert borné de X , $T : \bar{D} \rightarrow X$ un opérateur compact, I l'application identité de \bar{D} sur X et $c \in X$ tel que $c \notin (I - T)(\partial D)$. Le degré topologique de Leray-Schauder de $I - T$ dans D par rapport à c , noté $\text{deg}(I - T, D, c)$, est défini par le degré de Brouwer $\text{deg}(I - \tilde{T}, \tilde{D}, c)$ dans lequel $\tilde{T} : \bar{D} \rightarrow X$ est un opérateur compact tel que $\tilde{T}(\bar{D})$ est de dimension finie et satisfaisant pour tout $x \in D$, $\|\tilde{T}(x) - T(x)\| < \text{dist}(c, (I - T)(\partial D))$ et $\tilde{D} = D \cap \tilde{X}$ où \tilde{X} désigne n'importe quel sous-espace vectoriel de X de dimension finie contenant c et $\tilde{T}(\bar{D})$.

Démontrons maintenant que le degré de Leray-Schauder satisfait les propriétés (i)-(iii) listées à la page 239 ainsi que des résultats analogues à ceux des théorèmes C.1 et C.2.

Théorème C.3 *Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ la distance associée à la norme $\|\cdot\|$, D un ouvert borné de X , $T : \overline{D} \rightarrow X$ un opérateur compact, I l'application identité de \overline{D} sur X et $c \in X$ tel que $c \notin (I - T)(\partial D)$. Alors*

- (1) $\text{deg}(I, D, c) = 1$ si $c \in D$;
- (2) $\text{deg}(I, D, c) = 0 \Rightarrow c \notin D$;
- (3) $\text{deg}(I - T, D, c) \neq 0 \Rightarrow \exists x \in D$ tel que $(I - T)(x) = c$.

Preuve. Voir le théorème 7.8 du chapitre 7 du livre de FONSECA-GANGBO [21]). \square

Introduisons maintenant la notion d'homotopie de transformations compactes, notion analogue à celle d'une C^0 -homotopie en dimension infinie.

Définition C.9 *Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $A \subset X$. On dit que l'opérateur $H : \overline{A} \times [0, 1] \rightarrow X$ est une homotopie de transformations compactes si*

- (i) pour tout $t \in [0, 1]$, $H(\cdot, t) : \overline{A} \rightarrow X$ est un opérateur compact ;
- (ii) pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-ensemble borné $B \subset A$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|H(x, s) - H(x, t)\| < \varepsilon \text{ dès que } x \in B \text{ et } |s - t| < \delta.$$

Théorème C.4 *Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, D un ouvert borné de X , une homotopie de transformations compactes $H : \overline{D} \times [0, 1] \rightarrow X$, I l'application identité de \overline{D} sur X et $c \in X$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $c \notin (I - H(\cdot, t))(\partial D)$. Alors le degré de Leray-Schauder $\text{deg}(I - H(\cdot, t), D, c)$ est indépendant de t .*

Preuve. Voir le théorème 7.10 du chapitre 7 du livre de FONSECA-GANGBO [21]). \square

Bibliographie

- [1] R.A. ADAMS. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] A. AVEZ. *Calcul différentiel*. Masson, 1983.
- [3] D. AZÉ. *Eléments d'analyse convexe et variationnelle*. Ellipses, 1997.
- [4] M.E. BOGOVSKIĬ. Solution of the first boundary value problem for the equation of continuity of an incompressible medium. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **248**(5) :1037–1040, 1979. En Russe.
- [5] M.E. BOGOVSKIĬ. Solution of some vector analysis problems connected with operators div and grad. *Trudy Seminar S.L. Sobolev*, pages 5–41, 1980. En Russe.
- [6] W. BORCHERS and K. PILECKAS. Existence, Uniqueness and Asymptotics of Steady Jets. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **120** :1–49, 1992.
- [7] W. BORCHERS and H. SOHR. On the equations $\operatorname{rot} v = g$ and $\operatorname{div} u = f$ with zero boundary conditions. *Hokkaido Math. J.*, **19** :67–87, 1990.
- [8] H. BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1983.
- [9] R. COIFMAN, P.L. LIONS, Y. MEYER, and S. SEMMES. Compensated compactness and Hardy spaces. *J. Math. Pures Appl.*, **72** :247–286, 1993.
- [10] R. DAUTRAY and J.L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Vol. 8. Masson, 1984.
- [11] J. DIEUDONNÉ. *Eléments d'Analyse*. Gauthiers-Villars, Paris, 1969.
- [12] R.J. DIPERNA and P.L. LIONS. Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory. *Invent. Math.*, **98** :511–547, 1989.
- [13] L. EULER. Opera omnia. *Series Secunda*, **12** :274–361, 1755.
- [14] L.C. EVANS. *Partial Differential Equations*. A.M.S. Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, 1998.
- [15] L.C. EVANS and R.F. GARIÉPY. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics, 1992.
- [16] E. FEIREISL. On compactness of solutions to the compressible isentropic Navier-Stokes equations when the density is not square integrable. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **42**(1) :83–98, 2001.
- [17] E. FEIREISL. Shape optimization in viscous compressible fluids. A paraître dans Applied Mathematics and Optimization, 2001.
- [18] E. FEIREISL, A. NOVOTNÝ, and H. PETZELTOVÁ. On the Existence of Globally Defined Weak Solutions to the Navier-Stokes Equations. *J. Math. Fluid Mech.*, **3** :358–392, 2001.

- [19] E FEIREISL and H. PETZELTOVÁ. On compactness of solutions to the Navier-Stokes equations of compressible flow. *J. Differential Equations*, **163**(1) :57–75, 2000.
- [20] E FEIREISL and H. PETZELTOVÁ. On integrability up to the boundary of the weak solutions of the Navier-Stokes equations of compressible flow. *Comm. P.D.E.*, **25**(3-4) :755–767, 2000.
- [21] I. FONSECA and W. GANGBO. *Degree Theory in Ananlysis and Applications*. Oxford Science Publications, 1995.
- [22] G.P. GALDI. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*. Vol. 1. Springer Tracts in Natural Philosophy, 1994.
- [23] G.P. GALDI. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*. Vol. 2. Springer Tracts in Natural Philosophy, 1994.
- [24] D. GILBARG and N. TRUDINGER. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, 1977.
- [25] P.R. HALMOS. *Measure Theory*. Van Nostrand, 1950.
- [26] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD, and G. PÓLYA. *Inequalities*. Cambridge, 1952.
- [27] E. HEINZ. An elementary analytic theory of the degree of mappings in N-dimension space. *J. of Mathematics & Mechanics*, **8**(2) :231–247, 1959.
- [28] E. HEWITT and K. STROMBERG. *Real and Abstract Analysis*. Springer, 1965.
- [29] J. HEYWOOD. On Uniqueness Questions in the Theory of Viscous Flow. *Acta Math.*, **136** :61–102, 1976.
- [30] D. HOFF. Strong convergence to global solutions for multidimensional flows of compressible, viscous fluids with polytropic equations of state and discontinuous initial data. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **132** :1–14, 1995.
- [31] O. KAVIAN. *Introduction à la théorie des points critiques et applications au problèmes elliptiques*. Vol. 13. *Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag, 1993.
- [32] A. KUFNER, O. JOHN, and S. FUČÍK. *Function spaces*. Academia, Prague, 1977.
- [33] O.A. LADYZHENSKAYA and V.A. SOLONNIKOV. On some problems of vector analysis and generalized formulations of boundary value problems for the Navier-Stokes equations. *J. Sov. Math.*, **10**(2) :257–285, 1978.
- [34] O.A. LADYZHENSKAYA and V.A. SOLONNIKOV. On the solvability of boundary value problem for the Navier-Stokes equations in regions with noncompact boundaries. *Vestnik Leningrad Univ. Math.*, **10** :271–280, 1982.
- [35] O.A. LADYZHENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV, and N. URALTSEVA. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Amer. Math. Soc., 1968.
- [36] J. LERAY. Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *J. Math. Pures Appl.*, **12** :1–82, 1933.
- [37] J. LERAY. Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois. *J. Math. Pures Appl.*, **13** :331–448, 1934.
- [38] J. LERAY. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, **63** :193–248, 1934.

-
- [39] E.H. LIEB and M. LOSS. *Analysis*. A.M.S. Graduate Studies in Mathematics, Volume 14, 1996.
- [40] J.L. LIONS. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod-Gauthier Villars, 1969.
- [41] J.L. LIONS and E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes* (3 volumes). Dunod, 1968.
- [42] P.L. LIONS. Compacité des solutions des équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **317** :115–120, 1993.
- [43] P.L. LIONS. Existence globale de solutions pour les équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **316** :1335–1340, 1993.
- [44] P.L. LIONS. Limites incompressibles et acoustique pour des fluides visqueux compressibles isentropiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **316** :1197–1202, 1993.
- [45] P.L. LIONS. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*. Vol. 1. *Incompressible Models*. Oxford Science Publications, 1996.
- [46] P.L. LIONS. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*. Vol. 2. *Compressible Models*. Oxford Science Publications, 1998.
- [47] P.L. LIONS. Bornes sur la densité pour les équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques avec conditions aux limites de dirichlet. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **328** :659–662, 1999.
- [48] P.L. LIONS and N. MASMOUDI. On a free boundary barotropic model. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **316**(3) :373–410, 1999.
- [49] P.I. LIZORKIN. (L^p, L^q) -multipliers of fourier integrals. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **152** :808–811, 1963.
- [50] P.I. LIZORKIN. Multipliers of fourier integrals in the spaces $L^{p,\theta}$. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, **89** :231–248, 1967.
- [51] P.I. LIZORKIN. Generalized Liouville differentiation and the multiplier method in the theory of classes of differentiable functions. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, **105** :89–167, 1969.
- [52] J. LUKEŠ and J. MALÝ. *Measure and Integral*. Matfyzpress, 1995.
- [53] A. MATSUMURA and T. NISHIDA. The initial value problem for the equations of motion of compressible and heat conductive fluids. *Comm. Math. Phys.*, **89** :445–464, 1983.
- [54] F. MURAT. Compacité par compensation. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **5** :489–507, 1978.
- [55] C.L.M.H. NAVIER. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mém. Acad. Sci. Inst. France*, **6**(2) :375–394, 1822.
- [56] J. NEČAS. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et Cie, 1967.
- [57] S. NOVO. The compressible Navier-Stokes equations with inflow-outflow boundary conditions. Preprint du laboratoire d'Analyse Non linéaire Appliquée et Modélisation.

- [58] S. NOVO and A. NOVOTNÝ. On the existence of weak solutions to the steady compressible Navier-Stokes equations in domains with conical outlets. Preprint du laboratoire d'Analyse Non linéaire Appliquée et Modélisation.
- [59] S. NOVO and A. NOVOTNÝ. A remark on the smoothness of bounded regions filled with a steady compressible and isentropic fluid. Preprint du laboratoire d'Analyse Non linéaire Appliquée et Modélisation.
- [60] S. NOVO and A. NOVOTNÝ. On the existence of weak solutions to the steady compressible Navier-Stokes equations when the density is not square integrable. A paraître dans *Journal of Mathematics Kyoto University*, 2001.
- [61] S. NOVO, A. NOVOTNÝ, and M. POKORNÝ. Some Notes to the Transport Equation and to the Green Formula. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **106** :65–76, 2001.
- [62] A. NOVOTNÝ. Some remarks about the compactness of steady compressible Navier-Stokes equations via the decomposition method. *Comm. Mat. Univ. Carolinae*, **37**(2) :305–342, 1996.
- [63] A. NOVOTNÝ, M. PADULA, and P. PENEL. A remark on the well posedness of the problem of a steady flow of viscous barotropic gas in a pipe. *Comm. P.D.E.*, **21** :23–24, 1996.
- [64] K. PILECKAS. On unique solvability of boundary value problems for the Stokes system of equations in domains with noncompact boundaries. *Proc. Math. Inst. Steklov*, **147**(issue 2) :117–126, 1981.
- [65] K. PILECKAS and V.A. SOLONNIKOV. Certain spaces of solenoidal vectors and the solvability of the boundary value problem for the Navier-Stokes system of equations in domains with noncompact boundaries. *J. Sov. Math.*, **34**(6) :2101–2111, 1986.
- [66] M. REED and B. SIMON. *Methods of Modern Mathematical Physics*. Vol I. Academic Press, New York, 1975.
- [67] W. RUDIN. *Analyse réelle et complexe*. Masson, 1975.
- [68] W. RUDIN. *Analyse fonctionnelle*. Ediscience international, Paris, 1995.
- [69] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1966.
- [70] D. SERRE. Solutions faibles globales des équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **303** :639–642, 1986.
- [71] D. SERRE. Variation de grande amplitude pour la densité d'un fluide visqueux compressible. *Physica D*, **48** :113–128, 1991.
- [72] C.G. SIMADER and H. SOHR. A new approach to the Helmholtz decomposition and the Neumann problem in L^q -spaces for bounded and exterior domain. *Mathematical problems relating to the Navier-Stokes equations, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, **11** :1–35, 1992.
- [73] J. SIMON. Compact Sets in the Space $L^p(0, T; B)$. *Ann. Mat. Pura Appl.*, **146** :65–96, 1987.
- [74] G.G. STOKES. On the theories of internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **8** :287–319, 1822.

-
- [75] L. TARTAR. Compensated compactness and applications to partial differential equations. *Nonlinear Analysis and Mechanics*, **IV** :136–192, 1979.
- [76] R. TEMAM. *Navier-Stokes Equations, theory and numerical analysis*. North-Holland Publishing Company, 1979.
- [77] H. TRIEBEL. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland, 1978.
- [78] A. VISINTIN. Strong convergence results related to strict convexity. *Comm. in Partial Differential Equations*, **9**(5) :439–466, 1984.
- [79] C. WAGSCHAL. *Topologie et analyse fonctionnelle*. Hermann, 1995.
- [80] V.A. WEIGANT and A.V. KAZHIKHOV. On the existence of global solutions to two-dimensional Navier-Stokes equations of a compressible viscous fluid. *Sibirskij Mat. Z.*, **36**(6) :1283–1316, 1995.
- [81] Z. YI. An L^p theorem for compensated compactness. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **122**(A) :177–189, 1992.
- [82] K. YOSIDA. *Functional Analysis*. Springer, 1965.

Résumé. Dans cette thèse, nous examinons la question d'existence de solutions faibles des équations de Navier-Stokes compressibles et isentropiques. Cette étude a été motivée par les travaux de P.L. LIONS qui a apporté une réponse à cette question lorsque la région occupée par le fluide est régulière et sous des hypothèses pas toujours satisfaisantes d'un point de vue physique pour la constante adiabatique. Récemment, E. FEIREISL a proposé une méthode permettant d'affaiblir ces hypothèses et l'a appliquée aux équations d'évolution.

Dans le cas stationnaire, nous montrons l'existence d'une solution faible renormalisée à énergie bornée lorsque la région d'écoulement est bornée, à régularité Lipschitzienne et nous améliorons dans certains cas les hypothèses sur la constante adiabatique. Nous étudions ensuite les écoulements lorsque la région est non bornée et présente plusieurs sorties à l'infini. Dans cette situation, nous définissons les solutions faibles à énergie bornée en faisant apparaître dans l'inégalité d'énergie la notion de flux à travers chaque sortie ainsi que celle de saut de pression entre les sorties. Nous démontrons l'existence de ces solutions lorsque les sorties sont coniques alors que dans le cas où celles-ci sont cylindriques, nous prouvons qu'en général de telles solutions n'existent pas.

Dans le cas non stationnaire, nous démontrons l'existence de solutions faibles pour un problème avec afflux et débit dans une région bornée ayant une géométrie particulière. Ces travaux sont inspirés de ceux de E. FEIREISL en optimisation de formes dans un écoulement compressible et visqueux.

Title : Some boundary-value problems for compressible and isentropic Navier-Stokes equations.

Abstract. In this thesis, we deal with the problem of existence of weak solutions to the compressible and isentropic Navier-Stokes equations. This study was motivated by the works of P.L. LIONS in which the author solves this problem when the region filled with the fluid is smooth and under assumptions for the adiabatic constant which are not always satisfactory from the physical point of view. A method to weaken these assumptions was suggested recently by E. FEIREISL and it was applied to the equations of evolution.

In the steady case, we prove existence of a renormalized bounded energy weak solution in bounded regions with Lipschitz boundary and in some cases, we improve the assumptions for the adiabatic constant. We also study flows in unbounded regions with several outlets at infinity. In this case, we define bounded energy weak solutions letting appear in the energy inequality the notion of flux through each outlet and the notion of pressure drop between the outlets. We prove existence of such solutions when the outlets are conical while for cylindrical outlets, we show a non-existence result.

In the unsteady case, we prove existence of weak solutions for a problem with inflow-outflow boundary conditions in a bounded region with a special shape. This part of this thesis is inspired by the work of E. FEIREISL about the shape optimization in a viscous compressible flow.

Mots-clés : Equations de Navier-Stokes compressibles et isentropiques, solutions faibles, méthode d'énergie, flux effectif visqueux, oscillations, solutions renormalisées.

Laboratoire d'Analyse Non linéaire Appliquée et Modélisation, Université de Toulon et du Var, B.P. 132, 83957 La Garde, FRANCE.
