HAL
open science

Groupe fondamental premier à p, nombre de Milnor des singularités isolées, motifs de dimension inférieure ou égale à 1

Fabrice Orgogozo

To cite this version:

Fabrice Orgogozo. Groupe fondamental premier à p, nombre de Milnor des singularités isolées, motifs de dimension inférieure ou égale à 1. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2003. Français. NNT : . tel-00004093v1

HAL Id: tel-00004093

https://theses.hal.science/tel-00004093v1

Submitted on 5 Jan 2004 (v1), last revised 6 Jan 2004 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS VI — Pierre & Marie Curie

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Présentée par **Fabrice Orgogozo**
Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Paris 6

Groupe fondamental premier à p,
nombres de Milnor des singularités isolées,
motifs de dimension inférieure ou égale à 1.

Soutenue le 30 juin 2003 devant la commission d'examen composée de

M. Ahmed Abbes	Rapporteur
M. Luc Illusie	Directeur
M. Yves Laszlo	
M. François Loeser	Directeur
M. Michel Raynaud	
M. Takeshi Saito (斎藤 毅)	Rapporteur

Remerciements

Impossible d'être exhaustif en évoquant l'importance qu'a eue Luc Illusie dans ma formation de mathématicien. J'aimerais souligner le plaisir que j'ai eu à l'écouter en cours de D.E.A. à Orsay (pour y découvrir les schémas) puis (*sic* !) au cours de maîtrise à l'É.N.S. et enfin lors des deux groupes de travail qu'il a organisés autour de la topologie étale et des cycles évanescents, auxquels j'ai eu la chance de participer, profitant ainsi de ses explications lumineuses. Cependant, en écrivant ces remerciements, je pense plus particulièrement à la bienveillance et la générosité dont il fit preuve durant cette thèse ; qu'il s'agisse de mathématiques, de conseils de rédaction ou bien d'encouragements, toutes ces discussions avec lui me furent extrêmement précieuses, et plus spécialement encore durant le difficile premier semestre 2002.

Fraîchement sorti de D.E.A., j'ai eu la chance de rencontrer François Loeser, dont la curiosité mathématique restera un modèle pour moi. Je lui suis reconnaissant d'avoir toujours été extrêmement disponible et prêt à écouter mes questions souvent saugrenues.

Je remercie très chaleureusement Ahmed Abbes, non seulement d'avoir été un rapporteur attentif de ce travail, mais aussi d'avoir spontanément voulu guider mon attention vers de fort belles questions que j'espère étudier par la suite.

Mes plus vifs remerciements vont aussi à 斎藤 毅 qui a accepté de rapporter cette thèse. Je me félicite d'avoir aussi la chance, par un heureux concours de circonstance, de le compter parmi les membres du jury.

Yves Laszlo et Michel Raynaud me font un grand honneur en acceptant d'être eux aussi membres de mon jury. Yves Laszlo fut mon tuteur à l'École ; depuis, j'ai eu l'occasion de travailler comme chargé de T.D. pour lui à Jussieu. Ce fut une expérience très agréable et un grand plaisir de constater que je n'étais pas le seul à m'interroger sur la pertinence de certains exercices en vogue à Paris 6. Je le remercie aussi de m'avoir donné l'opportunité de faire un exposé au séminaire de géométrie algébrique de Jussieu. Merci aussi à Michel Raynaud qui répondit toujours du tac au tac à mes questions, de vive voix ou par courriel. Sa présence à proximité de Paris et sa gentillesse à mon égard furent un soutien considérable.

Tout au long de la rédaction des résultats de cette thèse, Ofer Gabber m'a très généreusement offert de son temps. C'est avec un grand plaisir que je l'en remercie ici. En particulier, le premier chapitre de cette thèse a été complètement réécrit suivant ses conseils et améliorations.

Jean-Louis Colliot-Thélène m'a fait profiter tout au long de mon mémoire de D.E.A. de sa vision extrêmement claire des mathématiques. Sa façon de me les expliquer dans les moindres détails, stylo velleda à la main et exemples à l'appui, est un exemple que j'espère être en mesure de suivre un jour.

Une grande partie de ma formation a été effectuée à l'École normale supérieure et partiellement au sein de son département de mathématiques. Je suis ravi de l'occasion qui m'est donnée ici de remercier le personnel de la bibliothèque — en particulier Chantal de Gaalon, maintenant à la retraite, et Alain Duys —, Bénédicte Auffray pour son aide administrative sympathique et efficace, ainsi que Jacques Beigbeder et son équipe du service de prestation informatique grâce à qui l'informatique ne fut jamais un véritable problème.

J'ai parfois eu la chance de discuter de mathématiques avec Joël Bellaiche, Gaëtan Chenevier, David Harari, Vincent Lafforgue, David Madore, Alban Moreau, Joël Riou, Isabelle Vidal, et certainement bien d'autres, dont les contributeurs au forum des élèves et archicubes[i], que je souhaite remercier pour nos échanges. Merci aussi à Julien Sebag qui a parfois pris le temps de relire mes ébauches.

Je n'oublie pas mes amis, ma famille et belle-famille qui ont su me faire oublier les difficultés inhérentes à un tel travail. Qu'ils soient assurés ici de ma sincère reconnaissance ; ils savent mieux que quiconque ce que je leur dois.

Enfin, merci à Virginie, ma femme depuis maintenant 730 jours, pour mon plus grand bonheur.

[i] `forum.sciences.maths`, `forum.alt.bavardage.maths` (et parfois `forum.informatique.tex`)

Introduction

Cette thèse se compose de trois parties indépendantes, dont voici un aperçu succinct. Le lecteur trouvera plus de détails dans leurs introductions respectives.

I. Altérations et groupe fondamental premier à p.
Soient k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique $p \geq 1$, $p\prime$ l'ensemble des nombres premiers distincts de p, X et Y deux schémas algébriques sur k, géométriquement pointés. On dispose, par fonctorialité, d'un morphisme $\pi_1(X \times_k Y) \to \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$. Si $p > 1$, ce morphisme n'est pas un isomorphisme en général, comme le montre l'exemple du plan affine sur k. L'obstruction à l'existence d'une formule de Künneth générale est la ramification sauvage, qui est déjà à l'origine de la non simple connexité de la droite affine $\mathbf{A}^1_k$. Dans cette partie, on démontre que la formule de Künneth modifiée

$$\pi_1^{p\prime}(X \times_k Y) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{p\prime}(X) \times \pi_1^{p\prime}(Y),$$

où $\pi_1^{p\prime}$ désigne le plus grand quotient premier à p, est vraie. Une telle formule est établie dans [**SGA 1** XIII] modulo la résolution forte des singularités, non démontrée à ce jour en caractéristique positive. Bien que cette formule ait été la motivation principale de ce travail, elle n'apparaît plus en fait que comme corollaire de résultats généraux de finitude, propreté cohomologique et locale acyclicité génériques pour les ensembles de cohomologie de degré 0 et 1. Cette partie s'achève par une discussion du cas modéré.

II. Conjecture de Bloch et nombres de Milnor.
Soient $S = \mathrm{Spec}(A)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien de corps résiduel algébriquement clos d'exposant caractéristique $p \geq 1$ et X un schéma régulier, séparé et de type fini sur S. Inspiré par la formule de Milnor en géométrie algébrique complexe, Pierre Deligne a conjecturé dans [**SGA 7** XVI], dans le cas où X/S présente un point de non lissité isolé x, une formule exprimant le nombre de Milnor de la singularité en x comme la dimension « totale » des cycles évanescents du faisceau étale constant $\mathbf{F}_\ell$ sur X pour un nombre premier $\ell \neq p$. Cette dimension totale est la somme de la dimension usuelle (virtuelle) et d'un conducteur de Swan qui tient compte de la ramification sauvage. Par ailleurs, en 1985 [**Blo87**], Spencer Bloch a proposé, et démontré dans le cas des courbes, une autre formule dans le cas où X/S est propre et à fibre générique lisse mais sans hypothèse supplémentaire sur le lieu de non lissité. Cette formule fait intervenir une classe de Chern localisée du faisceau des différentielles relatives $\Omega^1_{X/S}$. Dans cette partie, on démontre que la formule de Deligne découle de celle de Bloch. Comme corollaire, on obtient, dans le cas de la dimension relative 1, la conjecture de Deligne, ainsi qu'une généralisation au cas d'un lieu de non lissité propre sur S.

III. 1-motifs, d'après V. Voevodsky.
Si k est un corps parfait, on dispose d'au moins deux constructions de catégories de motifs (mixtes) de dimension ≤ 1 : la catégorie (additive) 1-Mot(k) des 1-motifs de P. Deligne, historiquement la première (cf. [**Del74**]), et la catégorie (triangulée) $d_1\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ des motifs géométriques effectifs de dimension ≤ 1, introduite récemment par V. Voevodsky (cf. [**Voe00**]). On construit dans cette dernière partie un foncteur

triangulé naturel

$$\mathsf{D}^b(1\text{-Isomot}(k)) \to d_1\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q},$$

qui est une équivalence de catégories, comme annoncé dans *loc. cit.* (p. 218).

CHAPITRE I

ALTÉRATIONS ET GROUPE FONDAMENTAL PREMIER À p

Paru au Bulletin de la SMF (131) tome 1, 2003. L'appendice est nouveau.

Introduction

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p et soit $p\prime$ l'ensemble des nombres premiers distincts de p. Dans [**Ray71**], il est démontré que, si X et Y sont des k-schémas de type fini connexes, on a alors $\pi_1^{p\prime}(X \times_k Y) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{p\prime}(X) \times \pi_1^{p\prime}(Y)$, où $\pi_1^{p\prime}$ désigne le plus grand quotient premier à p du groupe fondamental, sous réserve que l'on dispose de la résolution forte des singularités. Nous prouvons dans cet article que cette formule est valable sans restriction. Nous démontrons en fait des théorèmes de finitude, propreté cohomologique et locale acyclicité génériques sans hypothèse de résolution. Il s'agit ici d'énoncés sur les ensembles de cohomologie de degré 0 et 1. Une partie de ces résultats figurent sous forme conditionnelle dans *loc. cit.* Par ailleurs, les analogues en cohomologie abélienne sont démontrés sans restriction dans [**Del77**]. L'ingrédient essentiel de ce travail est le théorème ([**dJ96**]) de A.J. de Jong sur les altérations, qui remplace la résolution forte des singularités. Les altérations ont en effet la propriété d'être de descente effective universelle pour la catégorie fibrée des faisceaux étales. Comme dans [**Ray71**], nous travaillons systématiquement dans la 2-catégorie des champs en groupoïdes, qui est le pendant non commutatif de la catégorie dérivée des faisceaux abéliens.

Au numéro 2 (respectivement 3), nous démontrons le théorème de propreté cohomologique et constructibilité (respectivement locale acyclicité) générique. Certaines démonstrations initiales de l'auteur ont été modifiées pour faire profiter au lecteur de l'approche plus conceptuelle d'O. Gabber, qui sera certainement plus utile à l'avenir. Le numéro 4 contient divers énoncés de constance locale générique pour les images directes de champs, ainsi que des applications au groupe fondamental premier à p : locale invariance générique des $\pi_1^{p\prime}$ des fibres géométriques d'un morphisme, invariance par changement de corps séparablement clos et formule de Künneth. Nous énonçons des résultats semblables pour les groupes d'homotopie supérieurs. Enfin, le numéro I.4, indépendant des précédents, concerne la formule de Künneth et l'invariance par changement de corps algébriquement clos pour le groupe fondamental modéré ; nous avons recours ici à des techniques de géométrie logarithmique.

I.1. Propreté cohomologique générique

Soient X un schéma, et $\mathscr{F}$ un champ (en groupoïdes) sur X (muni de la topologie étale). Dans toute la suite, seuls la topologie étale et les champs en groupoïdes seront envisagés et nous omettrons donc ces qualificatifs. Notons $\pi_0(\mathscr{F})$ le faisceau associé au préfaisceau

$$U/X \mapsto \{\text{classes d'isomorphismes d'objets de } \mathscr{F}(U)\} \ ;$$

c'est aussi le faisceau des sous-gerbes maximales de $\mathscr{F}$. Soient U/X un ouvert étale et $x_U \in \mathsf{Ob}\ \mathscr{F}(U)$; nous noterons $\pi_1(\mathscr{F}, x_U)$ le U-faisceau $\underline{\mathsf{Aut}}(x_U)$[(i)]. Si L est un ensemble de nombres premiers, rappelons que le

[(i)] Justifions rapidement ces notations. Pour toute catégorie $\mathscr{C}$, on peut définir — fonctoriellement — un ensemble simplicial, son *nerf*, noté $\mathsf{Nerf}(\mathscr{C})$, dont la définition est rappelée par exemple dans [**Ill72**], VI.2.1. Si $\mathscr{C}$ est un groupoïde et x un objet de $\mathscr{C}$, les π_i de son nerf (pointé en x) sont nuls pour $i \geq 2$ (*loc. cit.* 2.6.2). Considérant les $\mathscr{F}(U)$ pour U variable, on obtient, par faisceautisation, les ensembles définis plus haut.

champ $\mathscr{F}$ est *ind–*L*–fini*, si pour toute section locale x, le faisceau en groupes $\pi_1(\mathscr{F}, x)$ est ind–L–fini au sens de [**Art73b**], 1.5. Cela signifie que pour tout point géométrique ξ, la fibre de ce faisceau en ξ s'identifie à la colimite *filtrante* de ses sous-groupes finis de L-torsion. Le champ $\mathscr{F}$ est dit *constructible* si le faisceau $\pi_0(\mathscr{F})$ et les divers $\pi_1(\mathscr{F}, x)$ sont constructibles (cf. *loc. cit.*, 2.3) ; nous ne considérerons que le cas d'un schéma de base noethérien pour cette dernière notion. Pour tout schéma X, nous noterons L_X l'ensemble des nombres premiers inversibles sur X. (Dans le cas particulier où seul un nombre premier p n'est pas inversible sur X, nous noterons $p\prime$ l'ensemble L_X.)

Pour alléger les notations, nous désignerons souvent par la même lettre un X–champ et son extension, comme catégorie fibrée, à la catégorie des schémas sur X (cf. [**Gir71**], VII.2.2.7). De même, nous noterons souvent par des égalités des flèches qui ne sont en fait que des équivalences.

Pour fixer les notations, et motiver les théorèmes généraux qui vont suivre, voici quelques exemples. Le dernier — le plus important pour nos applications — précise le lien entre variation du groupe fondamental en famille (lié à l'étude des faisceaux non abéliens $\mathrm{R}^1 f_* G$ pour une famille $f : X \to S$ et G un groupe fini constant) et le formalisme des images directes de champs que nous allons étudier par la suite.

I.1.1 Exemples. —

Soient $f : X \to Y$ et $g : Z \to X$ des morphismes de schémas.

- **Champs de Picard.** À tout complexe $K = [d : \mathscr{L}^{-1} \to \mathscr{L}^0]$ de faisceaux abéliens sur X, on associe un champ $\mathrm{ch}(K)$. C'est le *champ associé* au *préchamp* dont le préfaisceau des objets est $\mathscr{L}^0$, et dont les homomorphismes entre deux sections locales a et b sur U sont les sections $s \in \mathscr{L}^{-1}(U)$ telles que $ds = b - a$. Cette construction, qui se factorise par $\mathsf{D}^{[-1,0]}(X, \mathbf{Z})$, permet de retrouver tous les champs de Picard (strictement commutatifs), définis par P. Deligne et A. Grothendieck dans [**Del73**]. Le champ $\mathrm{ch}(K)$ est constructible si et seulement si les faisceaux de cohomologie de K le sont. Le π_0 correspond au $\underline{\mathrm{H}}^0$, et le π_1, pointé en la section nulle, au $\underline{\mathrm{H}}^{-1}$. On a $g^*\mathrm{ch}(K) = \mathrm{ch}(g^*K)$ et $f_*\mathrm{ch}(K) = \mathrm{ch}(\tau_{\leq 0}\mathrm{R}f_*K)$.
- **Champs en catégories discrètes.** Soit $\mathscr{F}$ un faisceau d'ensembles sur X. On peut définir un champ $\mathsf{CD}(\mathscr{F})$ en prenant pour $\mathsf{CD}(\mathscr{F})(U)$ la catégorie discrète construite sur $\mathscr{F}(U)$. Ces groupoïdes sont « totalement disconnexes » en un sens évident. Dans le cas où $\mathscr{F}$ est un faisceau abélien, on a $\mathrm{ch}(\mathscr{F}[0]) = \mathsf{CD}(\mathscr{F})$. Le champ $\mathsf{CD}(\mathscr{F})$ est constructible si et seulement si $\mathscr{F} = \pi_0(\mathsf{CD}(\mathscr{F}))$ l'est (car les π_1 sont tous nuls). On a $g^*\mathsf{CD}(\mathscr{F}) = \mathsf{CD}(g^*\mathscr{F})$ et $f_*\mathsf{CD}(\mathscr{F}) = \mathsf{CD}(f_*\mathscr{F})$; la situation est donc particulièrement simple. À partir de maintenant, nous considérerons tout faisceau $\mathscr{F}$ comme un champ en l'identifiant à $\mathsf{CD}(\mathscr{F})$.
- **Champs classifiant.** Soit G un faisceau en groupes sur X. Rappelons qu'un G-torseur sur X, est un X-faisceau T muni d'une action de G, qui est localement isomorphe (sur X) à G muni de l'action par translation sur lui-même. On en fait une catégorie en appelant « morphismes » les morphismes de G-faisceaux. Nous noterons $\mathsf{Tors}(G)$ le champ dont la fibre en U est la catégorie des $G_{|U}$-torseurs sur U. Dans le cas où G est abélien, on a $\mathsf{Tors}(G) = \mathrm{ch}(G[1])$; la terminologie « champs de Picard » se justifie par le fait qu'elle englobe le cas $G = \mathbf{G}_m$. Le champ $\mathsf{Tors}(G)$, pour G à nouveau quelconque, est constructible si et seulement si G est constructible ; en effet, $\pi_1(\mathsf{Tors}(G))$, pointé en le G-torseur trivial, n'est autre que G et $\pi_0(\mathsf{Tors}(G)) = \{\varnothing\}$. De même, si G est un groupe constant fini de L-torsion, le

champ $\mathsf{Tors}(G)$ est ind–L–fini. On a $g^*\mathsf{Tors}(G) = \mathsf{Tors}(G_{|Z})$ mais $f_*\mathsf{Tors}(G)$ n'est pas nécessairement un champ du même type[(ii)] : cela dépend des propriétés géométriques du morphisme f. On montre aisément que $\pi_0(f_*\mathsf{Tors}(G)) = \mathrm{R}^1 f_* G$ (cohomologie non abélienne) et $\pi_1(f_*\mathsf{Tors}(G)) = f_*G$ (pointé par l'image du revêtement trivial).

Soient S un schéma, $f : X \to Y$ un S-morphisme entre S-schémas et $\mathscr{F}$ un champ sur X. Nous dirons que le couple $(f, \mathscr{F})$ est *cohomologiquement propre* relativement à S si pour tout S-schéma S', la formation du champ $f_*\mathscr{F}$ commute au changement de base par le morphisme $Y' \overset{\text{déf}}{=} Y \times_S S' \to Y$.

I.1.2 Théorème. — *Soient S un schéma noethérien et $f : X \to Y$ un S-morphisme entre S-schémas de type fini. Alors,*

a) *il existe un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ vérifiant les conditions suivantes :*

   (i) *pour tout ensemble fini E, le champ $f_{U*}E_{X_U}$ est constructible et le couple (f_U, E_{X_U}) est cohomologiquement propre relativement à U.*

   (ii) *pour tout L_U–groupe fini G, le champ $f_{U*}\mathsf{Tors}(G_{X_U})$ est constructible et le couple $(f_U, \mathsf{Tors}(G_{X_U}))$ est cohomologiquement propre relativement à U.*

b) *pour tout champ $\mathscr{F}$ sur X, constructible, ind–L_S–fini, il existe un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ tel que le champ $f_{U*}\mathscr{F}_{X_U}$ soit constructible et que le couple $(f_U, \mathscr{F}_{X_U})$ soit cohomologiquement propre relativement à U.*

L'énoncé a) (i) était déjà démontré inconditionnellement dans [**Ray71**].

I.1.3 Remarque. — Si $f : X \to S$ est un morphisme de type fini, on peut montrer que l'image directe d'un faisceau d'ensembles constructible est constructible dès que S est noethérien (cf. [**Gab01**]). Par contre, la constructibilité de $\mathrm{R}^1 f_* \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, avec n inversible sur S, peut être mise en défaut avec S noethérien (cf. *loc. cit*) ; on conjecture que ce phénomène disparaît si S est excellent.

En particulier,

I.1.4 Corollaire. — *Soient k un corps de caractéristique p et $f : X \to S = \mathrm{Spec}(k)$ un k-schéma de type fini. Pour tout champ $\mathscr{F}$ sur X, constructible, ind–$p\prime$–fini, le champ $f_*\mathscr{F}$ est constructible et de formation compatible aux changements de base $Y \to S$.*

Pour démontrer le théorème, nous ferons appel à un lemme de descente, dont l'énoncé nécessite quelques rappels. Un *schéma simplicial* $X_\bullet$ est un foncteur contravariant de la catégorie Δ, constituée des ensembles finis $[n] = \{0, \ldots, n\}$ $(n \geq 0)$, munis des applications croissantes, dans la catégorie des schémas (cf. e.g. [**Fri82**], chap. 1, dont nous reprenons les notations). À un tel objet est associé un topos étale, que l'on notera $X_\bullet^\sim$: ses objets sont les familles de faisceaux étales F_n sur X_n, pour chaque $n \geq 0$, munies, pour chaque morphisme $\alpha : [n] \to [m]$, d'un X_α–morphisme $F_n \to F_m$ (c'est-à-dire un morphisme $X_\alpha^* F_n \to F_m$) satisfaisants les conditions de transitivité évidentes pour les composés. Les champs sur ce topos admettent

[(ii)] Dans le cas où G est abélien, cela résulte du fait que $\tau_{\leq 0}(\mathrm{R}f_*G[1])$ n'est concentré en degré -1 que si $\mathrm{R}^1 f_* G = 0$, ce qui est faux en général.

une description explicite : un champ $\mathscr{F}$ sur $X_\bullet^\sim$ correspond à la donnée d'un champ $\mathscr{F}_n$ sur chaque X_n, de 1–flèches $X_\alpha^*\mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_m$ pour chaque morphisme $\alpha : [n] \to [m]$ dans Δ et d'isomorphismes de transitivité pour les composés, satisfaisant des conditions de cocycles pour les triplets d'applications composables.
Soit $\varepsilon : X_\bullet \to X$ un schéma simplicial augmenté vers X ; on en déduit un morphisme entre les topos associés : $X_\bullet^\sim \to X^\sim$. Soit $\mathscr{F}_\bullet$ un champ sur $X_\bullet$; le champ $\varepsilon_*\mathscr{F}_\bullet$ se décrit comme la catégorie fibrée dont la fibre au-dessus d'un ouvert étale $U \to X$ est la catégorie des données de descente, c'est-à-dire des couples (x, φ), où x est un objet de $\mathscr{F}_0(U \times_X X_0)$ et φ un isomorphisme (dans $\mathscr{F}_1(U \times_X X_1)$), $\varphi : \partial_0^* x \xrightarrow{\sim} \partial_1^* x$ satisfaisant la condition de cocycle sur X_2 (dans $\mathscr{F}_2(U \times_X X_2)$) : $\partial_2^*\varphi \circ \partial_0^*\varphi = \partial_1^*\varphi$. Les ∂_i désignent les morphismes déduits des applications strictement croissantes $d_0, d_1 : \{0\} \to \{0, 1\}$ et $d_0, d_1, d_2 : \{0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$.
Pour la définition d'un hyper-recouvrement propre d'un schéma, nous renvoyons le lecteur à [**Del74**], 5.3.8 ou [**SD73**].

***I.1.5 Proposition* (O. Gabber).** — *Soit $\varepsilon : X_\bullet \to X$ un hyper-recouvrement propre d'un schéma X. Pour tout champ $\mathscr{F}$ sur X le 1-morphisme d'adjonction $\alpha : \mathscr{F} \to \varepsilon_*\varepsilon^*\mathscr{F}$ est une équivalence.*

C'est l'analogue non abélien du théorème de descente cohomologique propre de [**SD73**]. La flèche d'adjonction associe à tout objet x sur U/X, son image inverse sur X_0, muni de la donnée de descente canonique.

Démonstration. — Commençons par la pleine fidélité des foncteurs $\alpha(U)$ pour tout ouvert étale $U \to X$. Comme $X_\bullet \times_X U$ est encore un hyper-recouvrement propre de U, on peut supposer $X = U$. De plus, par commutation de la formation des faisceaux de morphismes aux images directes et inverses (cf. [**Gir71**], II.3.2.8 et 3.1.5.3), il suffit de démontrer la proposition pour un champ en catégories discrètes. Ce dernier cas résulte du théorème de descente [**Gro73**], VIII, 9.1 qui traite le cas d'un cosquelette-0 et du fait que le morphisme de topos induit par la surjection $(\partial_0, \partial_1) : X_1 \to X_0 \times_X X_0$ est conservatif, si bien que les isomorphismes de faisceaux sur $X_0 \times_X X_0$ se testent après changement de base à X_1.
Pour montrer que α est une équivalence, il suffit de le vérifier sur les fibres (cf. [**Gir71**], III.2.1.5.8) ; on peut donc supposer que X est un schéma strictement local. Commençons par le cas où X est le spectre d'un corps séparablement clos k. On peut supposer k algébriquement clos.

Si $X_\bullet$ est le cosquelette du morphisme $X_0 \to X$, c'est-à-dire $X_n = X_0^{\times_k (n+1)}$ pour tout $n \geq 0$, l'existence d'une section s au morphisme $X_0 \to X$ permet de montrer que toute donnée de descente est effective. Plus précisément, si $x_0 \in \mathsf{Ob}\ \mathscr{F}_{X_0}(X_0)$ est muni d'une donnée de descente φ, le couple (x_0, φ) est isomorphe à l'image inverse de $s^* x_0 \in \mathsf{Ob}\ \mathscr{F}(X)$ sur X_0, muni de la donnée de descente canonique (cf. e.g. [**BLR90**], 6.1.3). L'essentielle surjectivité du morphisme d'adjonction en découle.

Si l'on ne suppose plus que $X_\bullet = \mathrm{cosq}_0(X_0 \to X)$, on dispose seulement, par adjonction, d'un morphisme $X_\bullet \to \mathrm{cosq}_0(X_0 \to X)$; par ce qui précède, il suffit de montrer que toute donnée de descente pour $X_\bullet$ provient d'une donnée de descente sur $\mathrm{cosq}_0(X_0 \to X)$. Soit $x_0 \in \mathsf{Ob}\ \mathscr{F}_{X_0}(X_0)$ et $\varphi : \partial_0^* x_0 \xrightarrow{\sim} \partial_1^* x_0$ un isomorphisme dans $\mathscr{F}_{X_1}(X_1)$, dont les images inverses satisfont la condition de cocycle dans $\mathscr{F}_{X_2}(X_2)$. Montrons que φ se descend en un morphisme φ' sur $X_0 \times_X X_0 = X_1'$; comme $X_2 \to \mathrm{cosq}_0(X_0 \to X)_2$ est surjectif, la condition de cocycle pour φ' résultera de celle pour φ, comme expliqué plus haut. D'après [**Gro73**], VIII, 9.2, appliqué au faisceau $\underline{\mathsf{Isom}}_{X_1'}(\partial_0'^* x_0, \partial_1'^* x_0)$, il suffit, pour prouver l'existence de φ', de montrer que les deux

images inverses de φ sur $X_1 \times_{X_1'} X_1$ coïncident. Notons $\partial_1', \partial_2' : X_1 \times_{X_1'} X_1 \rightrightarrows X_1$ les deux projections. Par hypothèse, $\partial_2^*\varphi \circ \partial_0^*\varphi = \partial_1^*\varphi$ sur X_2 ; il s'agit de montrer que ${\partial_1'}^*\varphi = {\partial_2'}^*\varphi$. Posons $Z = X_2 \times_{\partial_0, X_1, s_0} X_0$, et notons i (resp. p) la projection $i : Z \to X_2$ (resp. $p : Z \to X_0$). Appliquons i^* à la condition de cocycle ; elle se réécrit $i^*\partial_1^*\varphi = i^*\partial_2^*\varphi \circ p^* s_0^*\varphi$. Comme $s_0^*\varphi = \mathrm{Id} \in \mathsf{Aut}_{X_0}(x_0)$, on a égalité des deux images inverses sur Z. Il nous suffit donc de montrer que le morphisme évident, défini par (∂_1, ∂_2), $Z \to X_1 \times_{X_1'} X_1$ est une surjection. Considérons les carrés cartésiens suivants :

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[d] & Z \arrow[l, "i"'] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "p"] \\
\mathrm{cosq}_1^X(X_\bullet)_2 \arrow[d, "\partial_0"] & Z' \arrow[l] \arrow[d] \\
X_1 & X_0 \arrow[l, "s_0"]
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $Z \to Z'$ est surjectif ; il reste à montrer qu'il s'identifie au morphisme $(\partial_1, \partial_2) : Z \to X_1 \times_{X_1'} X_1$. Rappelons (cf. [**Fri82**], p.10) que $\mathrm{cosq}_1^X(X_\bullet)_2 = (X_1 \times_{X_0} X_1) \times_{X_1'} X_1$, de sorte que le morphisme ∂_0 : $\mathrm{cosq}_1^X(X_\bullet)_2 \to X_1$ correspond à la première projection $X_1 \times_{X_0} X_1 \to X_1$. On en déduit immédiatement le résultat.

Si maintenant X est strictement local de point fermé x, on a un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(X) \cong \mathscr{F}_x(x) \arrow[r, "\alpha(X)"] \arrow[dr, "\alpha_x"'] & (\varepsilon_*\varepsilon^*\mathscr{F})(X) \arrow[d, "r"] \\
& (\varepsilon_{x*}{\varepsilon_x}^*\mathscr{F}_x)(x)
\end{tikzcd}$$

On vient de prouver que α_x est une équivalence ; d'après le théorème de changement de base propre pour les faisceaux d'ensembles, appliqué aux faisceaux d'homomorphismes, le foncteur r est pleinement fidèle. Ainsi, α est une équivalence.

□

I.1.6 Lemme. — *Soient S un schéma noethérien et $f : X \to Y$ un S-morphisme séparé entre S-schémas de type fini, avec Y séparé. Il existe un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ et un homéomorphisme universel $U' \to U$ tels qu'après changement de base par $U' \to S$, on ait un diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
X'_{\bullet_{\leq 2}} \arrow[r, hook, "j_\bullet"] \arrow[d, "\varepsilon_X"] & Z'_{\bullet_{\leq 2}} \arrow[d, "\varepsilon_Z"] & D_{\bullet_{\leq 2}} \arrow[l, hook'] \\
X_{U'} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d] & Z \arrow[dl, "p \text{ propre}"] & \\
Y_{U'} & &
\end{tikzcd}$$

où j est une immersion ouverte dominante, ε_Z un hyper-recouvrement propre tronqué à l'ordre 2, et $D_{\bullet_{\leq 2}}$ un diviseur à croisements normaux relativement à U' dans le schéma simplicial tronqué $Z'_{\bullet_{\leq 2}}$ lisse sur U', de complémentaire $X'_{\bullet_{\leq 2}}$.

Démonstration. — Cas $S = \mathrm{Spec}(k)$, avec k parfait. Soit $X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{p} Y$ une factorisation de f en une immersion ouverte dominante et un morphisme propre.
Montrons qu'il existe un morphisme propre et surjectif $a : Z_0 \to Z$, avec Z_0 régulier (donc lisse sur k) tel que l'image inverse de X dans Z_0 soit le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux. Le théorème [**dJ96**], 3.1 affirme que si Z est intègre séparé, il existe un morphisme $r : Z_0 \to Z$ propre, surjectif (génériquement étale) et une compactification (projective) $\overline{Z_0}$ de Z_0 telle que $\left(\overline{Z_0} - Z_0\right) \cup r^{-1}(Z - X)$ soit un diviseur à croisements normaux stricts dans $\overline{Z_0}$; en particulier, $r^{-1}(X)$ est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans Z_0. Voyons comment cela implique notre résultat. Soit $b : Z' \overset{\text{déf}}{=} \coprod (Z_\alpha)_{\text{réd}} \to Z$ le morphisme canonique, où les Z_α sont les composantes irréductibles (en nombre fini) de Z. Le morphisme b est fini et surjectif. Les $(Z_\alpha)_{\text{réd}}$ sont intègres donc il existe une altération $c_\alpha : Z_{\alpha 0} \to (Z_\alpha)_{\text{réd}}$ comme précédemment, associée à l'ouvert $(Z_\alpha)_{\text{réd}} \times_Z X$. Le coproduit des c_α définit un morphisme $c : Z'_0 \overset{\text{déf}}{=} \coprod Z_{\alpha 0} \to Z'$ propre et surjectif ; le morphisme $a = bc : Z'_0 \to Z$ satisfait les conditions précédentes.
Finalement, utilisant les techniques de [**Del74**], on construit de même Z'_1 et Z'_2. Ceci achève la démonstration du lemme dans ce cas.

Cas général. On peut supposer S connexe, puis irréductible et enfin intègre quitte à faire un changement de base par un homéomorphisme universel. Soit η_S le point générique de S, et $\overline{\eta_S}$ le spectre d'une clôture parfaite de $\kappa(\eta_S)$. D'après le cas précédent, il existe une compactification de $f_{\overline{\eta_S}}$ ainsi que des hyper-recouvrements tronqués comme dans l'énoncé, sur $\overline{\eta_S}$. Comme il s'agit d'hyper-recouvrements tronqués, on peut descendre ces constructions à une extension finie de η_S, puis les étendre à un S–schéma dominant, génériquement fini et radiciel U', que l'on peut supposer s'envoyant sur son image par un homéomorphisme universel.

□

On peut démontrer le même résultat sans hypothèse de séparation sur Y. Il est aussi possible d'étendre l'hyper-recouvrement tronqué de X en un hyper-recouvrement propre, mais les images directes ne dépendent que de ces tronqués à l'ordre 2.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème **I.1.2**. Ici, comme souvent par la suite, on notera avec des égalités des équivalences.

Il est démontré dans [**Ray71**], pages 59–65, comment déduire le b) du a). Nous allons donc démontrer a), en supposant le morphisme f et le schéma Y séparés. Soient U et U' comme dans **I.1.6** — dont nous reprenons les notations — ; vérifions que a) vaut sur U. Comme le morphisme $U' \to U$ est un homéomorphisme universel, il suffit de démontrer le résultat sur U'. On peut donc supposer $S = U = U'$. On dispose alors d'hyper-recouvrements (tronqués) $\varepsilon_X : X_{\bullet_{\leq 2}} \to X$ et $\varepsilon_Z : Z_{\bullet_{\leq 2}} \to Z$ des schémas X et Z, ainsi que des schémas qui s'en déduisent par changement de base relativement à S. Soit maintenant $S' \to S$ un morphisme, et $\mathscr{F}$ comme dans l'énoncé. On note g_Y (resp. g_X, resp. $g_{X_\bullet}$) la flèche de changement de base $Y_{S'} \to Y$ (resp. $X_{S'} \to X$, resp. $X_{\bullet_{\leq 2}} \times_S S' \to X_{\bullet_{\leq 2}}$).

Les notations sont récapitulées dans le diagramme suivant, où les « $\cdot_{\leq 2}$ » sont omis pour les hyper-recouvrements tronqués.

$$\begin{tikzcd}
D'_\bullet \arrow[r] & Z'_\bullet \arrow[d, "\varepsilon_{Z'}"] & X'_\bullet \arrow[l, "j'_\bullet"'] \arrow[r, "g_{X_\bullet}"] \arrow[d, "\varepsilon_{X'}"] & X_\bullet \arrow[r, "j_\bullet"] \arrow[d, "\varepsilon_X"] & Z_\bullet \arrow[d, "\varepsilon_Z"] & D_\bullet \arrow[l] \\
 & Z' \arrow[dr, "p'"'] & X' \arrow[l, "j'"'] \arrow[r, "g_X"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[dl, "p"] & \\
 & & Y' \arrow[r, "g_Y"] & Y & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Z'_\bullet \arrow[rr, bend left, "r_\bullet"] & & X'_\bullet \arrow[ll, "j'_\bullet"'] \arrow[r, "g_{X_\bullet}"] & X_\bullet \arrow[r, "j_\bullet"] & Z_\bullet \\
Z' \arrow[rr, bend left, "r"] & & X' \arrow[ll, "j'"'] \arrow[r, "g_X"] & X \arrow[r, "j"] & Z
\end{tikzcd}$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
g_Y^* f_* \mathscr{F} &= g_Y^* f_* \varepsilon_{X*} {\varepsilon_X}^* \mathscr{F} \text{ (par descente, cf. proposition } \mathbf{I.1.5}) \\
&= g_Y^* p_* j_* \varepsilon_{X*} {\varepsilon_X}^* \mathscr{F} \text{ (par commutativité du diagramme)} \\
&= p'_* r^* j_* \varepsilon_{X*} {\varepsilon_X}^* \mathscr{F} \text{ (par changement de base propre appliqué à } p, \text{ cf. [}\mathbf{Gir71}\text{], VII.2.2.2)} \\
&= p'_* r^* \varepsilon_{Z*} j_{\bullet *} {\varepsilon_X}^* \mathscr{F} \text{ (par commutativité du diagramme)} \\
&= p'_* \varepsilon_{Z'*} r_\bullet^* j_{\bullet *} {\varepsilon_X}^* \mathscr{F} \text{ (par changement de base propre appliqué à } \varepsilon_Z) \\
&= p'_* \varepsilon_{Z'*} j'_{\bullet *} {g_{X_\bullet}}^* {\varepsilon_X}^* \mathscr{F} \text{ (car } D_\bullet \text{ est un dcn rel. } S + \text{hypothèse de modération, cf. [}\mathbf{Ray71}\text{], 2.4)} \\
&= f'_* \varepsilon_{X'*} {\varepsilon_{X'}}^* {g_X}^* \mathscr{F} \text{ (par commutativité du diagramme)} \\
&= f'_* {g_X}^* \mathscr{F} \text{ (par descente, cf. proposition } \mathbf{I.1.5}).
\end{aligned}$$

Pour traiter le cas général, on se ramène au cas où Y est affine (la question est locale sur Y), donc séparé. Considérant un recouvrement ouvert affine de X et l'hyper-recouvrement associé, on se ramène aussitôt au cas où X est affine, donc f séparé.
Il nous faut maintenant démontrer la constructibilité. Commençons par rappeler le lemme :

I.1.7 Lemme **([Ray71], 3.1.1)**. — *Soient $\varepsilon : X_\bullet \to X$ un schéma simplicial augmenté et $\mathscr{F}$ un champ sur $X_\bullet$. Pour que le champ $\varepsilon_* \mathscr{F}$ soit constructible, il suffit que $\varepsilon_{0*}\mathscr{F}_0$ et $\varepsilon_{1*}\mathscr{F}_1$ le soient.*

En effet, dans le langage de *loc. cit.*, on a un diagramme exact de champs :

$$\varepsilon_* \mathscr{F} \to [\varepsilon_{0*}\mathscr{F}_0 \rightrightarrows \varepsilon_{1*}\mathscr{F}_1].$$

En utilisant cette fois-ci le théorème de constructibilité des images directes par un morphisme propre (*loc. cit.*, 6.2) ainsi que la constructibilité dans le cas d'une l'immersion ouverte de complémentaire un diviseur à croisements normaux (*loc. cit.*, $2.4_{2)}$), l'énoncé de constructibilité du a) se démontre comme précédemment.

I.1.8 Remarque. — Dans la première version de se texte, on donnait une autre démonstration, par « approximations successives », du théorème **I.1.2**, indépendante de la proposition **I.1.5**. Pour cela, on commence par montrer que le morphisme de changement de base est fidèle, du moins génériquement sur la base S. Il suffit de considérer un hyper-recouvrement tronqué à l'ordre 0 convenable (i.e. comme dans **I.1.6**) $X_0 \to X$, et d'utiliser les deux théorèmes de propreté cohomologique rappelés plus haut. Fort de ce résultat générique, que l'on applique ensuite aux constituants du 0-cosquelette tronqué à l'ordre 1, $\mathrm{cosq}_0(X_0 \to X)_{\bullet \leq 1}$, on démontre la pleine fidélité générique des flèches de changement de base et enfin le fait que ce sont des équivalences, en utilisant cette fois le tronqué à l'ordre 2. De même pour la constructibilité.

I.2. Locale acyclicité générique

***I.2.1 Théorème* (O. Gabber)**. — *Soient S un schéma noethérien et $f : X \to S$ un morphisme de type fini. Il existe un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ tel que pour tout morphisme cohérent*[iii] *$g : Y \to Z$ de U–schémas, et tout champ $\mathscr{F}$ ind–L_Z–fini sur Y, le morphisme de changement de base $p^* g_* \mathscr{F} \to g'_* p'^* \mathscr{F}$ soit une équivalence, où g', p et p' sont les morphismes définis par le carré cartésien ci-dessous :*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "g"] & Y \times_U X_U \arrow[l, "p'"'] \arrow[d, "g'"] \\ Z & Z \times_U X_U \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soient U et U' comme dans **I.1.6** — dont nous reprenons les notations — ; montrons que la conclusion du théorème vaut sur U. Comme expliqué plus haut, on peut supposer $U' = U$, et finalement, pour alléger les notations, $S = U$. Soient g et $\mathscr{F}$ comme dans l'énoncé ; considérons le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "g"] & Y \times_S X \arrow[l, "p'"'] \arrow[d, "g'"] & Y \times_S X_{\bullet \leq 2} \arrow[l, "\varepsilon_Y"'] \arrow[d, "g_\bullet"] \\ Z & Z \times_S X \arrow[l, "p"'] & Z \times_S X_{\bullet \leq 2} \arrow[l, "\varepsilon_Z"'] \end{tikzcd}$$

D'après le théorème de changement de base lisse pour les champs ind-finis, de torsion première aux caractéristiques résiduelles ([**Gir71**], 2.1.2), on a

$$(p\varepsilon_Z)^* g_* \mathscr{F} \xrightarrow{\sim} g_{\bullet *} (p' \varepsilon_Y)^* \mathscr{F},$$

car g est cohérent.

En appliquant ε_{Z*}, on trouve à gauche

$$\varepsilon_{Z*} {\varepsilon_Z}^* p^* g_* \mathscr{F} \xleftarrow{\sim} p^* g_* \mathscr{F},$$

par descente.

[iii] On rappelle que cela signifie que g est quasi-compact et quasi-séparé.

À droite, on a, par commutativité du diagramme :

$$\varepsilon_{Z*} g_{\bullet *}(p'\varepsilon_Y)^* \mathscr{F} \simeq g'_* \varepsilon_{Y*}(p'\varepsilon_Y)^* \mathscr{F}.$$

Enfin, par descente (cf. proposition **I.1.5**),

$$g'_* \varepsilon_{Y*} \varepsilon_Y^* p'^* \mathscr{F} \xleftarrow{\sim} g'_* p'^* \mathscr{F}.$$

□

Pour tout schéma X et tout point géométrique x de X, on note $X(x)$ le localisé strict de X en x.

I.2.2 Définition. — Soient $f : X \to S$ un morphisme, et $\mathscr{F}$ un champ sur X. On dit que $(f, \mathscr{F})$ est *localement* 1*–acyclique* (resp. 0–acyclique, resp. -1–acyclique) si pour tout point géométrique x de X d'image s par f, et toute générisation t de s (i.e. un point géométrique de $S(s)$), le foncteur $\mathscr{F}(X(x)) \to \mathscr{F}(X(x)_t)$ est une équivalence (resp. pleinement fidèle, resp. fidèle).

Les schémas $X(x)_t$ seront appelés *fibres de Milnor* du morphisme $X \to S$. On dira souvent localement acyclique au lieu de localement 1–acyclique.

I.2.3 Théorème. — *Soient S un schéma noethérien et $f : X \to S$ un morphisme de type fini. Alors,*

a) *il existe un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ vérifiant les conditions suivantes :*

   (i) *pour tout ensemble fini E, le couple (f, E_X) est universellement localement acyclique.*

   (ii) *pour tout L_S–groupe fini G, le couple $(f, \mathsf{Tors}(G_X))$ est universellement localement acyclique.*

b) *pour tout champ $\mathscr{F}$ sur X constructible, ind–L_S–fini, il existe un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ tel que le couple $(f_U, \mathscr{F}_{X_U})$ soit universellement localement acyclique.*

Démonstration. — L'universalité résultera de la démonstration. Commençons par démontrer a). Soit U un ouvert dense de S pour lequel les conclusions du théorème précédent sont valables (relativement au morphisme $f : X \to S$) et montrons que l'on a (i) et (ii). Soient E un ensemble fini (resp. G un L_U–groupe fini), x un point géométrique de X_U et t, s comme plus haut ; considérons le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} t \arrow[d, "g"] & X_t \arrow[l, "f_t"'] \arrow[d, "g'"] \\ S(s) & X \times_U S(s) \arrow[l, "f(s)"'] \end{tikzcd}$$

Notons $\mathscr{F}$ le champ E_t (resp. $\mathsf{Tors}(G_t)$) sur t. Le morphisme $f(s)^* g_* \mathscr{F} \to g'_* f_t^* \mathscr{F}$ est une équivalence ; calculons sa fibre en x. Comme x s'envoie sur s, on a $(f(s)^* g_* \mathscr{F})_x = (g_* \mathscr{F})_s = \mathscr{F}(t)$ tandis que $(g'_* f_t^* \mathscr{F})_x = \mathscr{F}(X(x)_t)$ avec les notations de *loc. cit.* Cela démontre que $X(x)_t$ est connexe (resp. L_U–simplement connexe) d'où le résultat.

Venons-en au cas général, i.e. b).

Commençons par le cas d'un champ en catégories discrètes $\mathscr{F} = E$. On sait qu'il existe un morphisme fini $\pi : X' \to X$, un faisceau d'ensembles F constructible, constant sur chaque composante connexe de X' —

nous dirons *presque constant* — et un monomorphisme $E \to \pi_* F \overset{\text{déf}}{=} E'$. Ainsi $E = \pi_0(\mathscr{F})$ est le noyau de la double flèche naturelle $E' \rightrightarrows E' \coprod_E E' \overset{\text{déf}}{=} E''$. Plongeant cette fois E'' dans l'image directe d'un faisceau presque constant par un morphisme fini, on exprime E comme noyau d'une double flèche entre faisceaux constructibles du type précédent ; il suffit, par exactitude, de vérifier le théorème pour ces faisceaux.
Soient $\pi : X' \to X$ un morphisme fini et E l'image directe par π d'un faisceau constructible F presque constant. D'après a), il existe un ouvert dense U de S tel que les fibres de Milnor de $X'_U \to U$ soient connexes. Montrons que U convient pour E. Si x est un point géométrique de $X_U{}^\sim$, $E(X(x)) = F(X' \times_X X(x)) = F(\coprod_{x' \to x} X'(x'))$; il ne reste plus qu'à rappeler que les « restrictions » $F(X'(x')) \to F(X'(x')_t)$ sont des isomorphismes.
Soit maintenant $\mathscr{F}$ un champ sur X constructible, ind–L_S–fini. Il existe un nombre fini d'ouverts étales $U_i \to X$ ($i \in \{1, \ldots, r\} = I$) et des sections $s_i \in \mathsf{Ob}\ \mathscr{F}(U_i)$ qui engendrent $\pi_0(\mathscr{F})$ (i.e. telles que pour tout point géométrique x de X, et toute section $s_x \in \mathsf{Ob}\ \mathscr{F}_x$, il existe un indice i tel que x se factorise par U_i et que s_x soit isomorphe à s_{ix}). Pour tout $i, j \in I$, notons $U_{i,j} = U_i \times_X U_j$ et $F_{i,j}$ le $U_{i,j}$–faisceau $\underline{\mathsf{Isom}}(s_{i|U_{i,j}}, s_{j|U_{i,j}})$. Soit U un ouvert dense de S tel que b) soit valable pour tous ces faisceaux ; il en existe par ce qui précède. Soient x un point géométrique de X_U, t une générisation de $f(x)$ et α, β deux objets de $\mathscr{F}(X(x))$. Montrons que le morphisme $\mathsf{Hom}_{X(x)}(\alpha, \beta) \to \mathsf{Hom}_{X(x)_t}(\alpha_t, \beta_t)$ est un isomorphisme ; cela démontrera que le couple $(f_U, \mathscr{F}_{X_U})$ est localement 0-acyclique. Deux cas se présentent : soit il existe un indice i tel que $\alpha \cong \beta \cong s_{ix}$, auquel cas la conclusion résulte de l'hypothèse faite sur $F_{i,i} = \mathsf{Aut}_{U_{i,i}}(s_i)$, soit α et β ne sont pas isomorphes, et il faut montrer qu'ils ne le deviennent pas après restrictions à $X(x)_t$. Il existe i, j tels que $\alpha \cong s_{ix}$ et $\beta \cong s_{jx}$; si l'on note encore x un point géométrique de $U_{i,j}$ relevant x, on a : $\varnothing = \mathsf{Hom}_{X(x)}(\alpha, \beta) = F_{i,j}(U_{i,j}(x))$ et $\mathsf{Hom}_{X(x)_t}(\alpha_t, \beta_t) = F_{i,j}(U_{i,j}(x)_t) = \varnothing$, CQFD.
La locale 0–acyclicité (générique) étant acquise, nous pouvons supposer, d'après [**Gir71**], III.2.1.5.9, que $\mathscr{F}$ est la gerbe des $\underline{\mathsf{Aut}}(s_i)$–torseurs sur U_i. Comme I est fini, cela nous ramène à démontrer le b) dans le cas particulier d'un champ de torseurs sous un groupe constructible ind–L_S–fini, noté $\mathscr{G}$. Il existe un monomorphisme de faisceaux en groupes $\mathscr{G} \hookrightarrow \mathscr{G}'$, où $\mathscr{G}'$ est l'image directe par un morphisme fini $\pi : X' \to X$ d'un faisceau en groupe presque constant L_S–fini G. Il résulte de la suite exacte longue tronquée de cohomologie non abélienne [**Art73a**], 3.1, qu'il suffit de traiter le cas de $\mathsf{Tors}(\mathscr{G}')$ et de $\mathscr{G}'/\mathscr{G}$. Quitte à restreindre encore S, on peut supposer le résultat acquis pour $\mathscr{G}'/\mathscr{G}$. D'après a) (ii), on peut aussi supposer que les fibres de Milnor du morphisme $X' \to S$ sont L_S-simplement connexe. Soient maintenant x, s, t comme dans l'énoncé ; on veut montrer que $\mathrm{H}^1(X(x)_t, \pi_* G) = \{e\}$. Or, $\mathrm{H}^1(X(x)_t, \pi_* G) = \mathrm{H}^1(X' \times_X X(x)_t, G) = \mathrm{H}^1(\coprod_{x' \to x} X'(x')_t, G) = \{e\}$, le premier isomorphisme vient du fait que le morphisme π est fini. □

Cette dernière réduction (du cas d'un groupe constructible à un groupe constant) est due à Ofer Gabber. Dans la première version de ce texte, le a) était démontré sans utiliser le théorème **I.2.1**. Remarquons par exemple que l'on peut déduire a) (i) des énoncés abéliens de P. Deligne en utilisant, si ℓ est un nombre premier inversible sur S, l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli $\{\text{Faisceaux abéliens de } \ell\text{-torsion}\} \to X^\sim$, parfois noté $E \mapsto \mathbf{F}_\ell[E]$.

***I.2.4 Remarque* (Variante abélienne de I.2.1).** — Soient S un schéma noethérien, X un schéma séparé et $f : X \to S$ un morphisme de type fini. Il existe un ouvert dense U de S tel que pour tout morphisme cohérent $g : Y \to Z$ de U–schémas, tout n un entier inversible sur S, et tout faisceau constructible $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$–modules sur Y, le morphisme $p^*\mathrm{R}g_*\mathscr{F} \to \mathrm{R}g'_*p'^*\mathscr{F}$ soit un isomorphisme. *A priori*, on s'attendrait à un énoncé tronqué. Cependant, si r est un entier supérieur à la dimension des fibres de f, la r-acyclicité locale générique, qui se démontre à l'aide d'un hyper-recouvrement tronqué, entraîne l'acyclicité locale sur le même ouvert (cf. [**Art73c**], 1.17, et le fait que r majore la dimension cohomologique des fibres de Milnor qui apparaissent).

On peut aussi retrouver par la même méthode (i.e. descente cohomologique abélienne et altérations) les deux théorèmes génériques de [**Del77**].

I.3. Locale constance générique et applications au $\pi_1^{p'}$

I.3.1 Lemme. — *Soient X un schéma et $\mathscr{F}$ un champ sur X constructible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) pour tout point géométrique x de X et toute générisation $y \to x$, le morphisme $\mathscr{F}(X(x)) \to \mathscr{F}(X(y))$ est une équivalence.

(ii) le faisceau $\pi_0(\mathscr{F})$ et, pour toute section locale s, les faisceaux $\pi_1(\mathscr{F}, s)$ sont localement constants.

Démonstration. — Que la première condition entraîne la seconde résulte de [**Art73b**], 2.11.
Pour l'autre implication, on commence par remarquer que l'essentielle surjectivité de ces foncteurs découle de la surjectivité de $\pi_0(\mathscr{F})(X(x)) \to \pi_0(\mathscr{F})(X(y))$. (Bien que $\pi_0(\mathscr{F})$ ne soit que le faisceau *associé* au préfaisceau des classes d'isomorphismes, cette difficulté disparaît car les schémas considérés sont strictement locaux.) Soit $y \to x$ une générisation et $s, s' \in \mathsf{Ob}\ \mathscr{F}(X(x))$; montrons que $\mathsf{Hom}_x(s, s') = \mathsf{Hom}_y(s_y, s'_y)$. Si $s \cong s'$, on utilise l'hypothèse faite sur $\pi_1(\mathscr{F}, s)$ tandis que si s et s' ne sont pas isomorphes, cela résulte de l'injectivité de $\pi_0(\mathscr{F})(X(x)) \to \pi_0(\mathscr{F})(X(y))$. □

Un champ satisfaisant les deux conditions précédentes est dit *localement constant.*

Suivant [**Ill77**], on peut définir — dans certains cas — des flèches de spécialisation et de cospécialisation de la façon suivante. Si $(f, \mathscr{F})$ est cohomologiquement propre, et $t \to s$ une spécialisation sur S (comme dans **I.2.2**), $\mathscr{F}(X \times_S S(s)\langle t\rangle) \to \mathscr{F}(X_s)$ est une équivalence, où $S(s)\langle t\rangle$ désigne le normalisé de $S(s)$ dans t (cf. *loc. cit.*, 1.1). Un foncteur de *spécialisation* est défini en composant une équivalence quasi-inverse $\mathscr{F}(X_s) \to \mathscr{F}(X \times_S S(s)\langle t\rangle)$ avec le foncteur $\mathscr{F}(X \times_S S(s)\langle t\rangle) \to \mathscr{F}(X_t)$. Si l'on suppose cette fois $(f, \mathscr{F})$ localement acyclique, on définit de manière analogue un foncteur de *cospécialisation* $\mathscr{F}(X_t) \to \mathscr{F}(X_s)$ pour toute spécialisation $t \to s$. Lorsque les flèches de spécialisation et cospécialisation sont définies, leurs composés sont 2-isomorphes à l'identité.
Finalement, on trouve (cf. *loc. cit.* 2) :

I.3.2 Proposition. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme cohérent et $\mathscr{F}$ un champ sur X tel que $(f, \mathscr{F})$ soit cohomologiquement propre et localement acyclique. Alors, $f_*\mathscr{F}$ est localement constant.*

Remarquons que si $\mathscr{F}$ est un champ en catégories discrètes, le couple $(f, \mathscr{F})$ sera localement acyclique si le faisceau $\mathscr{F}$ est localement constant et (f, E) est localement acyclique pour un ensemble fini E de cardinal supérieur à 2.

Grâce aux deux théorèmes génériques, on en déduit :

I.3.3 Corollaire. — *Soient S un schéma noethérien, $f : X \to S$ un morphisme de type fini, et $\mathscr{F}$ un champ constructible, ind–L_S–fini sur X. Il existe un ouvert dense U de S tel que $f_{U*}\mathscr{F}_{X_U}$ soit localement constant, constructible et de formation compatible à tout changement de base.*

I.3.4 Corollaire. — *Soient S un schéma noethérien et $f : X \to S$ un morphisme séparé de type fini. Il existe un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ tel que pour tout L_S–groupe fini G, toute générisation $t \to s$ de points géométriques de U les flèches $\mathrm{H}^1(X_s, G) \leftarrow (\mathrm{R}^1 f_* G)_s \cong \mathrm{H}^1(X_{S(s)}, G) \to \mathrm{H}^1(X_t, G)$ soient des isomorphismes.*

Cela résulte immédiatement de **I.3.3**. La traduction de cet énoncé en termes plus géométriques est immédiate :

> Si S est un schéma noethérien intègre de point générique η et $f : X \to S$ un morphisme de type fini de fibre générique géométrique connexe, il existe un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ tel que pour chaque point géométrique $\bar{u}$ de U, le schéma $X_{\bar{u}}$ soit connexe et de groupe fondamental L_S-primaire isomorphe à $\pi_1^{\mathsf{L}_S}(X_{\bar{\eta}})$.

On laisse le soin au lecteur de préciser cet énoncé en choisissant des points bases et des chemins.

I.3.5 Corollaire. — *Soient k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique p, X un k-schéma de type fini et x un k-point de X. Pour toute extension K/k, avec K algébriquement clos, le morphisme canonique $\pi_1^{p\prime}(X_K, x) \to \pi_1^{p\prime}(X_k, x)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du fait que si l'on note f le morphisme $X \to \mathrm{Spec}(k)$, pour tout $p\prime$-groupe fini G, la formation du faisceau $\mathrm{R}^1 f_* G$ commute à tous les changements de bases $S \to \mathrm{Spec}(k)$ (cf. **I.1.4**) et en particulier à $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(k)$. □

Soient X un schéma noethérien et L un ensemble de nombres premiers. Suivant Artin-Mazur, on peut définir un pro–objet, noté $X_{\text{ét}}^{\mathsf{L}}$, de la catégorie homotopique des CW-complexes. Pour la définition de ce pro–objet, nous renvoyons à [**AM69**], 3.4 ainsi qu'au 4.2 pour la définition des $\natural$–*équivalences*.

I.3.6 Corollaire. — *Soient S un schéma noethérien et $f : X \to S$ un morphisme de type fini. Il existe un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ tel que pour toute flèche de spécialisation $t \to s$ de points géométriques de U, les morphismes $X_s \to X \times_S S(s)\langle t\rangle \leftarrow X_t$ induisent des $\natural$–équivalences $X_{s\,\acute{e}t}^{\mathsf{L}_U} \cong X_{t\,\acute{e}t}^{\mathsf{L}_U}$.*

Suivant Sullivan, on peut aussi définir fonctoriellement, pour chaque schéma X, un vrai type d'homotopie holim $X_{\text{ét}}^{\mathsf{L}}$; après application de ce foncteur, les morphismes précédents deviennent des équivalences d'homotopie.

Démonstration. — Compte-tenu des propositions 5.8, 5.9 et 6.4 de [**Fri82**], qui permettent de comparer faisceaux lisses sur X et sur $X^{\mathsf{L}}_{\text{ét}}$ ainsi que la cohomologie de ces topos à valeurs dans ces faisceaux, le théorème d'Artin-Mazur-Quillen (*loc. cit.*, 6.5) prend la forme qui suit :
Si $g : Y \to Z$ est un morphisme de schémas noethériens, et L un ensemble de nombres premiers, $g^{\mathsf{L}} : Y^{\mathsf{L}}_{\text{ét}} \to Z^{\mathsf{L}}_{\text{ét}}$ est une $\natural$–équivalence si et seulement si :

(i) le morphisme $\mathrm{H}^1(g, G) : \mathrm{H}^1(Z, G) \to \mathrm{H}^1(Y, G)$ est un isomorphisme pour tout L–groupe fini G,

(ii) pour tout entier m à support dans L, et tout $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$–faisceau lisse $\mathscr{L}$ sur Z, se factorisant par $\pi_1^{\mathsf{L}}(Z)$, les morphismes $\mathrm{H}^i(g) : \mathrm{H}^i(Z, \mathscr{L}) \to \mathrm{H}^i(Y, \mathscr{L}_{|Y})$ sont des isomorphismes.

Par la suite, les faisceaux lisses du (ii) seront simplement appelés faisceaux lisses L–monodromiques.

Compte-tenu du **I.3.4**, on peut supposer que pour tout générisation géométrique $t \to s$ de points de S, la condition (i) (avec $\mathsf{L} = \mathsf{L}_S$) est satisfaite pour les morphismes $X_s \to X_{S(s)\langle t\rangle} \overset{\text{déf}}{=} X(s)\langle t\rangle$ et $X_t \to X(s)\langle t\rangle$. Il nous reste à vérifier l'énoncé de cohomologie abélienne.

D'après **I.2.4**, on peut supposer le morphisme f universellement localement acyclique (pour les coefficients abéliens). Soient $t \to s$ une spécialisation de points géométriques et $\mathscr{L}$ un faisceau lisse L-monodromique sur $X(s)\langle t\rangle$. Pour chaque entier i, le morphisme $\mathrm{H}^i(X(s)\langle t\rangle, \mathscr{L}) \to \mathrm{H}^i(X_t, \mathscr{L})$ est un isomorphisme. Ainsi, pour démontrer corollaire, il suffit de le vérifier le critère (ii), pour les indices $i \leq 2d = r$, où d est un majorant de la dimension des fibres de f. Quitte à rétrécir S, et faire un changement de base inoffensif, on peut supposer qu'il existe un hyper-recouvrement tronqué $\varepsilon : X_{\bullet \leq r+1} \to X$, qui soit le complémentaire d'un diviseur à croisement normaux relatifs dans un schéma simplicial tronqué propre et lisse sur S (cf. **I.1.6**, et la remarque qui suit). Nous allons voir que la conclusion du corollaire est valable sur S. Pour $\alpha \in \{0, \ldots, r+1\}$, notons f_α le morphisme lisse $X_\alpha \to S$ déduit de f, et $f(s)\langle t\rangle_\alpha$ les morphismes déduits par changement de base $S(s)\langle t\rangle \to S$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que les morphismes $\mathrm{H}^i(X(s)\langle t\rangle, \mathscr{L}) \to \mathrm{H}^i(X_s, \mathscr{L})$ sont des isomorphismes pour $0 \leq i \leq r$.

Pour chaque indice α, le faisceau $\mathscr{L}_{X_\alpha(s)\langle t\rangle}$ est par hypothèse modérément ramifié à l'infini si bien que pour chaque $i \in \mathbf{N}$, la formation des $S(s)\langle t\rangle$-faisceaux $\mathrm{R}^i f(s)\langle t\rangle_{\alpha *}\mathscr{L}_{|X(s)\langle t\rangle_\alpha}$ est compatible au changement de base (cf. [**Ill77**], 1.3.3). La conclusion résulte maintenant du fait que, par descente cohomologique, on a l'égalité : $\tau_{\leq r}\mathrm{R}f(s)\langle t\rangle_*\mathscr{L} = \tau_{\leq r}\mathrm{R}(f(s)\langle t\rangle_{\bullet \leq r+1})_*\mathscr{L}_\bullet$.

□

On peut aussi montrer que les flèches $X_s \to X \times_S S(s) \leftarrow X_t$ induisent des $\natural$–équivalences.

I.3.7 Remarque. — Il est naturel de s'intéresser à la question d'uniformité en le faisceau suivante : soit $X \to S$ un morphisme lisse, ℓ un nombre premier inversible sur S. Existe-t-il un ouvert dense U de S tel que pour *tout* $\mathbf{F}_\ell$–faisceau lisse $\mathscr{F}$ sur X, et tout point géométrique u de U, les morphismes $\mathrm{H}^i(X \times_S U(u), \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^i(X_u, \mathscr{F})$ soient des isomorphismes ? Il n'en est rien comme le montre l'exemple suivant que Lei Fu a aimablement communiqué à l'auteur.
Soient k la clôture algébrique d'un corps fini, ℓ un nombre premier inversible sur k, et $q : X = \mathbf{A}^1_k \times_k \mathbf{A}^1_k \to$

$S = \mathbf{A}^1_k$ la seconde projection. Notons p la première projection. Supposons un instant qu'il existe un ouvert non vide U de S tel que la formation de $\mathrm{R}q_*\mathscr{F}$ commute aux changements de bases $\bar{u} \to U$, avec $\bar{u}$ localisé en un point fermé, pour tout $\mathbf{F}_\ell$–faisceau lisse $\mathscr{F}$. Par t-exactitude de la transformation de Fourier sur S, on sait que si $\mathscr{L}$ désigne un $\mathbf{F}_\ell$–faisceau lisse de rang 1 d'Artin-Schreier sur $\mathbf{A}^1_k$, et $\mathscr{F}$ un faisceau sur S, $\mathrm{R}q_!(p^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(\langle,\rangle)) = \mathrm{R}q_*(p^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(\langle,\rangle))$. Si maintenant a est un point géométrique de U, on a : $\mathrm{H}^2_c(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(xa)) = \mathrm{H}^2(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(xa))$. Si l'on pose $\mathscr{F} = \mathscr{L}(-xa)$, le terme de gauche est non nul (par dualité) alors que celui de droite est trivial. Absurde.

***I.3.8 Proposition* (Formule de Künneth).** — *Soit k un corps séparablement clos d'exposant caractéristique $p \geq 1$. Soient X, Y deux k-schémas connexes de type fini, et $(x, y) \in X(k) \times Y(k)$. Le morphisme*

$$\pi_1^{p\prime}(X \times_k Y, (x, y)) \to \pi_1^{p\prime}(X, x) \times \pi_1^{p\prime}(Y, y),$$

défini par covariance du $\pi_1^{p\prime}$, est un isomorphisme.

Il est bien connu que cela est faux pour le π_1 entier.

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons comment déduire la formule de Künneth des théorèmes de propreté cohomologique et locale acyclicité génériques.

Démonstration. — Notons P le k-schéma $X \times_k Y$ et f la projection $P \to Y$. Il suffit de montrer que les morphismes $P_y = X \times \{y\} \to P \xrightarrow{f} Y$ induisent une suite exacte :

$$1 \to \pi_1^{p\prime}(X \times \{y\}) \to \pi_1^{p\prime}(P) \to \pi_1^{p\prime}(Y) \to 1.$$

En effet, comme cette suite s'envoie sur la suite exacte tautologique

$$1 \to \pi_1^{p\prime}(X) \to \pi_1^{p\prime}(X) \times \pi_1^{p\prime}(Y) \to \pi_1^{p\prime}(Y) \to 1,$$

le morphisme $\pi_1^{p\prime}(X \times_k Y) \to \pi_1^{p\prime}(X) \times \pi_1^{p\prime}(Y)$ sera un isomorphisme par exactitude.

L'injectivité (à gauche) est automatique car le composé de $\pi_1^{p\prime}(X \times \{y\}) \to \pi_1^{p\prime}(P)$ avec $\pi_1^{p\prime}(P) \to \pi_1^{p\prime}(X)$ est un isomorphisme. La surjectivité de $\pi_1^{p\prime}(P) \to \pi_1^{p\prime}(Y)$ se traduit de la façon suivante : pour tout revêtement étale connexe galoisien d'ordre premier à p, $Y' \to Y$, le schéma $X \times_k Y' = P \times_Y Y'$ est connexe ; c'est évident. Pour établir l'exactitude au centre, nous allons vérifier, comme dans [**Gro71b**], 1.2, que tout $p\prime$-revêtement connexe de P scindé sur P_y est image inverse d'un $p\prime$-revêtement de Y. Soit P' un tel revêtement, de degré d, et notons $\mathsf{h}_{P'} = \mathsf{Hom}_P(-, P')$ le faisceau de Yoneda associé, localement constant constructible. Nous démontrerons un peu plus bas le résultat suivant :

(H) le faisceau $f_*\mathsf{h}_{P'}$ sur Y est localement constant constructible, et de formation compatible aux changements de bases (relativement à Y).

Ainsi, l'espace algébrique étalé associé à ce faisceau est un revêtement étale $Y' \to Y$. La flèche d'adjonction au niveau des faisceaux $f^*f_*\mathsf{h}_{P'} \to \mathsf{h}_{P'}$ correspond[iv] à un morphisme de P-schémas étales : $Y' \times_Y P \to P'$.

[iv] Rappelons que si un faisceau étale $\mathscr{F}$ sur un schéma S est représenté par un S-schéma T, pour tout morphisme $c : S' \to S$, le S'-faisceau $c^*\mathscr{F}$ est représentable par le schéma $S' \times_S T$.

Regardons la fibre en $z = (x, y)$ de ce morphisme de faisceaux : le terme de gauche est $(\mathsf{h}_{Y'}(y) =) f_*\mathsf{h}_{P'}(y) = \mathsf{h}_{P'_y}(P_y)$ par commutation au changement de base, tandis que le terme de droite est $\mathsf{h}_{P'}(z) = f^{-1}(z)$, de cardinal d. Géométriquement, cette flèche n'est autre que la restriction des sections. Le revêtement P'/P étant scindé au-dessus de P_y, $\mathsf{h}_{Y'}(y)$, et par conséquent le schéma Y', sont non vides si bien que le morphisme $g : P \times_Y Y' \to P'$ est un morphisme entre revêtements non vides de P ; le schéma P' étant connexe, le morphisme g est un revêtement étale. Il en résulte que $\deg(Y' \times_Y P/P) = \deg(Y'/Y) \geq \deg(P'/P) = d$. D'un autre côté, $\deg(Y'/Y) = \sharp\mathsf{h}_{Y'}(y) = \sharp\mathsf{h}_{P'_y}(P_y) \leq d$. Finalement $\deg(g) = 1$ et g est un isomorphisme. Ainsi, sous nos hypothèses, P' provient bien de la base ; il reste à montrer que le revêtement Y'/Y dont il est déduit est d'ordre premier à p. On peut supposer par fonctorialité que P'/P est galoisien de groupe un p'–groupe G (scindé, donc totalement décomposé, sur P_y). La surjectivité du morphisme $\pi_1(P) \to \pi_1(Y)$ se traduit en la pleine fidélité du foncteur $\mathrm{RevÉt}(Y) \to \mathrm{RevÉt}(P)$. Dans notre cas, cela implique l'égalité $\mathrm{Aut}_Y(Y') = \mathrm{Aut}_P(P') = G$, si bien que Y'/Y est lui-aussi galoisien de groupe G.
Il nous faut maintenant justifier l'hypothèse (H). Il existe un revêtement galoisien P'' de groupe G de P, et un sous-groupe H de G tel que $P' = P''/H$. D'après [**Ray71**],1.13 (iii), pour démontrer la commutation au changement de base, il suffit de vérifier que les couples $(f, \mathsf{Tors}(G))$ et $(f, \mathsf{Tors}(H))$ sont cohomologiquement propres (relativement à Y). Or, il résulte de **I.1.4** que cela est vrai pour tout p'-groupe (constant), f se déduisant du morphisme $X \to \mathrm{Spec}(k)$ par changement de base. Une fois la commutation au changement de base acquise, la constructibilité est automatique, d'après le lemme suivant :

I.3.9 Lemme. — *Soient $\alpha : A \to B$ un morphisme de type fini entre schémas noethériens et $\mathscr{F}$ un faisceau d'ensembles constructible tel que $(\alpha, \mathscr{F})$ soit cohomologiquement propre. Alors, le faisceau $\alpha_*\mathscr{F}$ sur B est constructible.*

Démonstration. — En effet, par constructibilité générique, il existe un ouvert U de B tel que $(\alpha_*\mathscr{F})_{|U}$ soit constructible. Notons $i : Z \hookrightarrow B$ l'immersion fermée du complémentaire réduit de U dans B. Par hypothèse, le faisceau $i^*\alpha_*\mathscr{F}$ est isomorphe à l'image directe de $\mathscr{F}_{|A_Z}$ par $\alpha_Z : A_Z = A \times_B Z \to Z$. Comme $\mathscr{F}_{|A_Z}$ est constructible et que $(\alpha_Z, \mathscr{F}_{|A_Z})$ est cohomologiquement propre, on conclut par récurrence noethérienne. □

Il ne reste plus qu'à montrer que notre faisceau $f_*\mathsf{h}_{P'}$ est localement constant. D'après la remarque suivant **I.3.2**, compte-tenu de la propreté cohomologique, il suffit de montrer que si I est un ensemble à deux éléments, (f, I) est localement acyclique. Or il résulte de **I.2.3**, a) (i) que $(X \to \mathrm{Spec}(k), I)$ l'est universellement, d'où le résultat. □

I.3.10 Corollaire. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p. Soient X et Y deux k–schémas de type fini. Le morphisme*

$$(X \times_k Y)^{p\prime}_{\acute{e}t} \to X^{p\prime}_{\acute{e}t} \times Y^{p\prime}_{\acute{e}t}$$

est une $\natural$–équivalence.

Démonstration. — Il suffit, comme dans **I.3.6**, de vérifier deux conditions sur cette flèche : qu'elle induit des isomorphismes d'une part sur les H^1 non abéliens à valeurs dans les $p\prime$-groupes, et sur tous les H^i à valeurs dans des $\mathbf{F}_\ell$–faisceaux lisses $p\prime$–monodromiques ($\ell \neq p$) d'autre part. Compte-tenu des isomorphismes

$\mathrm{H}^1((X \times_k Y)^{p\prime}_{\text{ét}}, G) \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X \times_k Y, G) \cong \mathsf{Hom}(\pi_1^{p\prime}(X \times_k Y), G)$ pour tout $p\prime$-groupe G, la première condition résulte de la formule de Künneth que nous venons de démontrer et de son analogue topologique pour le produit $X^{p\prime}_{\text{ét}} \times Y^{p\prime}_{\text{ét}}$. Pour vérifier la seconde condition, remarquons que dans le cas particulier où $\mathscr{L}$ est un $\mathbf{F}_\ell$-faisceau lisse $p\prime$-monodromique sur $X^{p\prime}_{\text{ét}} \times Y^{p\prime}_{\text{ét}}$, produit externe de deux faisceaux sur $X^{p\prime}_{\text{ét}}$ et $Y^{p\prime}_{\text{ét}}$, l'isomorphisme désiré (pour chaque $i \in \mathbf{N}$) n'est autre que la formule de Künneth abélienne de [**Del77**] : $\mathrm{R}\Gamma(X \times_k Y, \mathscr{F}_X \boxtimes \mathscr{F}_Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(X, \mathscr{F}_X) \otimes^{\mathbb{L}} \mathrm{R}\Gamma(Y, \mathscr{F}_Y)$. Remarquons maintenant que pour tout couple de groupes finis G et G', les $\overline{\mathbf{F}_\ell}[G \times G']$-modules simples sont des produits externes de représentations irréductibles de G et G'. Soient $r \in \mathbf{N}$ et $\mathscr{L}$ un $\mathbf{F}_\ell$-faisceau lisse $p\prime$-monodromique sur $X^{p\prime}_{\text{ét}} \times Y^{p\prime}_{\text{ét}}$; posons $\mathscr{L}_r = \mathscr{L} \otimes_{\mathbf{F}_\ell} \mathbf{F}_{\ell^r}$. Pour $r \gg 0$, $\mathscr{L}_r$ est somme directe de produits externes de $\mathbf{F}_{\ell^r}$-faisceaux lisses, si bien que la seconde condition est satisfaite pour ce faisceau. Comme le faisceau $\mathscr{L}$ se plonge dans $\mathscr{L}_r$, une récurrence sur i donne l'isomorphisme des H^i pour tout i. □

I.3.11 Théorème. — *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$, X un k-sous-schéma connexe d'un espace projectif $\mathbf{P}_k$ sur k. Supposons X régulier de dimension ≥ 3. Alors, si Y une section hyperplane générale de X on a :*

- *le schéma Y est connexe,*
- *pour tout point géométrique y de Y, la morphisme canonique $\pi_1^{p\prime}(Y, y) \to \pi_1^{p\prime}(X, y)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — L'énoncé se trouve dans [**Ray74**] avec l'hypothèse supplémentaire que la caractéristique est nulle. Cette hypothèse était nécessaire pour pouvoir utiliser le théorème **I.1.2**. Celui-ci étant maintenant démontré en toute généralité, la même démonstration donne ce théorème, à condition bien entendu de se restreindre aux $p\prime$-groupes.

□

De même, utilisant le théorème de Michèle Raynaud sur les surfaces, on trouve :

I.3.12 Théorème. — *Soient k un corps séparablement clos caractéristique $p \geq 0$ et X un k-schéma algébrique. Alors le groupe $\pi_1^{p\prime}(X)$ est topologiquement de présentation finie.*

Démonstration. — On peut supposer k algébriquement clos. Utilisant des altérations à la place de la résolution des singularités, on peut se ramener facilement par descente (cf. [**Ray72**]) au cas d'un schéma affine lisse. Utilisant le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes, on se ramène au cas où X est une surface, traité dans *loc. cit.* □

I.4. Discussion du cas modéré

Les résultats de cette partie utilisent la géométrie logarithmique ; nous renvoyons le lecteur à [**Ill02**].

I.4.1. Soient k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique $p \geq 1$, X un schéma régulier connexe, propre sur k et $U \hookrightarrow X$ le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux Y. Nous dirons que X est une *bonne compactification* de U. Soit u un point géométrique de U ; notons $\pi_1^t(U_{/X}, u)$ le quotient de $\pi_1(U, u)$ classifiant les revêtements de U modérément ramifiés le long de $Y = X - U$; rappelons qu'il s'agit des

revêtements de U dont les restrictions (après normalisation) aux localisés de X en les points génériques de Y sont modérés, au sens valuatif classique. Il revient au même de dire que le faisceau lisse $\mathscr{L}(V/U)$ représenté par V sur U est modérément ramifié en ces points.
Rappelons que le groupe fondamental modéré d'un k-schéma pointé connexe U possédant une bonne compactification ne dépend pas du choix de celle-ci. Soient en effet $j_1 : U \hookrightarrow X_1$ et $j_2 : U \hookrightarrow X_2$ deux telles compactifications, $\bar{\eta}$ un point générique géométrique de U et $V \to U$ un revêtement modéré de U relativement à X_1 (i.e. le long de $Y_1 = X_1 - U$) ; on souhaite montrer qu'il est modéré le long de $Y_2 = X_2 - U$. Soit Z une compactification de U dominant X_1 et X_2 (quitte à la normaliser, on peut supposer Z normal). Soit $x \in Y_2$ un point de codimension 1. Le schéma Z étant intègre, séparé, et propre sur X_2, il résulte de ÉGA II 7.3.1 que $Z \times_{X_2} \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X_2,x}) \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X_2,x})$ est un isomorphisme (c'est un isomorphisme générique sur un trait). Ainsi, il suffit de montrer que V est modérément ramifié relativement à Z, en les points de codimension 1, c'est-à-dire que les p-Sylow des groupes d'inertie locale en ces points agissent trivialement sur $\mathscr{L}(V/U)_{\bar{\eta}}$. Soit $\overline{z}$ un point géométrique de Z localisé en un point maximal de $Y = Z - U$ et notons $\overline{x_1}$ son image dans X_1. Il résulte du lemme d'Abhyankar et du théorème de pureté de Zariski-Nagata (le schéma X_1 est régulier), que les p-Sylow du groupe $\pi_1(X_1(\overline{x_1}) \times_{X_1} U, \bar{\eta})$ agissent trivialement sur $\mathscr{L}(V/U)_{\bar{\eta}}$. Comme l'action de $\pi_1(Z(\overline{z}) \times_Z U, \bar{\eta})$ se factorise par l'action précédente, son p-Sylow agit trivialement. Le résultat en découle. (La démonstration qui précède est due à Michel Raynaud.)

I.4.2 Théorème. — *Soient k un corps séparablement clos, (U, u) et (V, v) deux k-schémas pointés connexes ayant de bonnes compactifications. Alors, le morphisme*

$$\pi_1^t(U \times_k V, u \times v) \to \pi_1^t(U, u) \times \pi_1^t(V, v)$$

est un isomorphisme.

Le point clé est l'interprétation logarithmique que l'on peut donner du groupe fondamental modéré dans le cas d'une bonne compactification : $\pi_1^t(U_{/X}, u)$ s'identifie, d'après un théorème de K. Fujiwara et K. Kato [**FK**] (voir aussi [**Ill02**], 7.6), à $\pi_1^{\log}(\mathsf{X}, u)$, le groupe fondamental logarithmique du log-schéma X dont le schéma sous-jacent est X, muni de la log-structure définie par U (*loc. cit.* 1.7)[(v)]. Ainsi, la formule à démontrer devient l'analogue logarithmique de la formule de Künneth pour les schémas *propres* sur k démontrée par A. Grothendieck dans [**Gro71b**], 1.7. La démonstration de *loc. cit.* se recopie mot à mot à condition de vérifier l'analogue de *loc. cit.* 1.2 sur la factorisation de Stein. C'est l'objet de la proposition suivante :

***I.4.3 Proposition* (I. Vidal)**. — *Soient $U \hookrightarrow X$ et $V \hookrightarrow Y$ de bonnes compactifications, et $\mathsf{R} \to \mathsf{P} \overset{\text{déf}}{=} \mathsf{X} \times_k \mathsf{Y}$ un revêtement Kummer-étale connexe où X et Y sont munis des log-structures définies par le diviseur à croisements normaux à l'infini. Soit $R \to Y' \to Y$ la factorisation de Stein du morphisme (propre) sous-jacent. Alors Y'/Y est étale au-dessus de V et modérément ramifié le long de $Y - V$.*

[(v)] Dorénavant, nous notons en caractères usuels (e.g. S) les schémas, et sans sérif (e.g. S) les log-schémas, même si le contexte devrait permettre d'éviter les confusions.

Ainsi, par Fujiwara-Kato, on peut faire de $Y^{'}$ le schéma sous-jacent à un log-schéma fs Y' de telle sorte que $\mathsf{Y}' \to \mathsf{Y}$ soit un revêtement Kummer-étale.

Démonstration. — Le morphisme $\mathsf{R}_\mathsf{V} = \mathsf{R} \times_\mathsf{Y} \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ est propre et log-lisse. Les fibres log-géométriques sont donc log-régulières, et en particulier réduites, et s'identifient aux fibres géométriques car la log-structure de V est triviale. Finalement, $R_V \to V$ est séparable et $V' = Y' \times_Y V \to V$, qui en est la factorisation de Stein, est étale. Il nous reste à montrer que l'extension correspondante est modérée le long de $D_V = Y - V$; pour cela, on peut remplacer Y par son hensélisé strict en un point générique de D_V, noté S et que l'on munira de la log-structure induite. On remplace aussi $\mathsf{R} \to \mathsf{P}$ par une composante connexe de $\mathsf{R} \times_\mathsf{Y} \mathsf{S}$, qui est un revêtement *connexe* de $\mathsf{X} \times_k \mathsf{S}$.

Le schéma $S' = Y' \times_Y S$ est fini sur S ; il est de plus connexe (image d'un connexe) et normal (car R_S, noté maintenant R, l'est). C'est donc un trait, fini et génériquement étale sur S. Soit S_t l'extension modérée maximale de S dans S' ; on veut montrer que $S_t = S'$. Le revêtement S_t/S est modéré ; le trait S_t, muni de la log-structure naturelle, est donc un revêtement Kummer-étale de S. Le morphisme $\mathsf{R} \to \mathsf{S_t}$ est donc log-lisse et $R \to S^{'} \to S_t$ en est la factorisation de Stein. Supposons l'extension totalement sauvage S'/S_t non triviale, et montrons que R n'est pas connexe. On peut donc supposer $S = S_t$ dans la suite. Notons $\mathsf{R}' = \mathsf{R} \times_\mathsf{S} \mathsf{S}'$ (produit comme log-schémas fs), et η (resp. η') le point générique de S (resp. S'). Comme $\eta' \times_\eta \eta'$ n'est pas connexe, la fibre générique de $R^{'}$ ne l'est pas. Le log-schéma R' étant log-régulier (car log-lisse sur S' log-régulier), $R^{'}$ est normal si bien que $\pi_0(R^{'}) = \pi_0(R^{'}_{\eta'})$, l'ouvert $R^{'}_{\eta'}$ étant dense dans $R^{'}$. Finalement, on voit que $R^{'}$ n'est pas connexe ; il en est donc de même de sa log-fibre spéciale $\mathsf{R}'_{s'} = \mathsf{R}_{s'}$. Cependant, $\mathsf{R}_{s'} \to \mathsf{R}_s$ est un homéomorphisme universel de Kummer car $s' \to s$ l'est, alors que R_s est connexe comme on le déduit de la connexité de R par la factorisation de Stein. Absurde. □

Cette proposition entraîne, comme dans [**Gro71b**] 1.3-1.4, l'exactitude de la suite

$$\pi_1^{\log}(X) \to \pi_1^{\log}(X \times_k Y) \to \pi_1^{\log}(Y) \to 1,$$

dont on déduit la formule de Künneth (**I.4.2**), comme en **I.3.8**.

I.4.4 Remarque. — On peut aussi montrer que si est k un corps séparablement clos, (U, u) un k-schéma pointé connexe ayant une bonne compactification, et K/k un sur-corps séparablement clos de k, le morphisme canonique $\pi_1^t(U \times_k K, u) \to \pi_1^t(U, u)$ est un isomorphisme. Indiquons rapidement l'idée, due à O. Gabber. Soit X une bonne compactification de U, et G un groupe fini. On a un morphisme canonique de topos $\alpha : X_{K\text{ét}} \to X_{\text{ét}}$, où $X_{K\text{ét}}$ est le topos Kummer-étale associé à la log-structure évidente sur X, définie par $X - U$. La remarque résulte du théorème de changement de base propre pour les champs ind-finis appliqué au morphisme propre de schémas usuels $X \to \mathrm{Spec}(k)$ et aux champs $\alpha_*(\mathsf{Tors}_{K\text{ét}}(G))$ pour G variable.

Appendice : théorème de changement de base propre en cohomologie Kummer-étale non abélienne.

On précise ici l'idée d'O. Gabber, énoncée en **I.4.4**.

I.4.5. Soient X un log-schéma fs, S un schéma noethérien, X le schéma sous-jacent à X, et $f : X \to S$ un morphisme de schémas. Notons $\varphi_{(\mathsf{X},f)} : \mathsf{X}_{K\text{ét}} \to S_{\text{ét}}$ le morphisme de topos naturel. Pour alléger les notations, on note ε_{X} le morphisme $\varphi_{(\mathsf{X},\mathrm{Id})} : \mathsf{X}_{K\text{ét}} \to X_{\text{ét}}$, considéré dans [**Ill02**], 2.4. Pour tout morphisme de schémas $\pi : S' \to S$, notons $f_{S'} : X_{S'} \to S'$ le morphisme déduit de f par changement de base, et $\mathsf{X}_{S'}$ le schéma $X_{S'}$ muni de la log-structure (fs) image inverse de celle de X. Enfin, pour tout groupe fini G, on note $\mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(\mathsf{X}, G)$ le champ des G-torseurs sur X muni de la topologie Kummer-étale. On dispose alors d'un morphisme de changement de base :

(**I.4.5**.a) $$\pi^*_{\text{ét}}\varphi_{(\mathsf{X},f)_*}\mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(\mathsf{X}, G) \to \varphi_{(\mathsf{X}_{S'},f_{S'})_*}\pi^*_{K\text{ét}}\mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(\mathsf{X}, G)$$

associé au diagramme essentiellement commutatif de topos :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{X}_{K\text{ét}} \arrow[d, "\varphi_{(\mathsf{X},f)}"'] & \mathsf{X}_{S'K\text{ét}} \arrow[l, "\pi_{K\text{ét}}"'] \arrow[d, "\varphi_{(\mathsf{X}_{S'},f_{S'})}"] \\
S_{\text{ét}} & S'_{\text{ét}} \arrow[l, "\pi_{\text{ét}}"]
\end{tikzcd}$$

De plus, le foncteur naturel $\pi^*_{K\text{ét}}\mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(\mathsf{X}, G) \to \mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(\mathsf{X}_{S'}, G)$ est une équivalence (cf. [**Gir71**], III.2.1.5.7).

I.4.6 Théorème. — *Si le morphisme f est propre, le foncteur **I.4.5**.a est une équivalence.*

I.4.7 Corollaire. — *Soient k un corps séparablement clos, (U, u) un schéma géométriquement pointé ayant une bonne compactification (cf. **I.4.1**) et k'/k un sur-corps séparablement clos. Le morphisme canonique $\pi_1^t(U_{k'}, u) \to \pi_1^t(U, u)$ entre les groupes fondamentaux modérés est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soit X une compactification régulière de U telle que $D = X - U$ soit un diviseur à croisements normaux dans X. Soit X le log-schéma fs défini par D (cf. [**Ill02**], 1.7). Le théorème précédent implique que pour tout groupe fini G, $\mathrm{H}^1(\mathsf{X}_{K\text{ét}}, G) \to \mathrm{H}^1(\mathsf{X}_{k'K\text{ét}}, G)$ est une bijection i.e. $\pi_1^{\log}(\mathsf{X}_{k'}, u) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\log}(\mathsf{X}, u)$. La conclusion résulte de l'isomorphisme $\pi_1^{\log}(\mathsf{X}) \simeq \pi_1^t(U)$ et de l'isomorphisme analogue sur k'. □

De même, on déduit de **I.4.6** le corollaire :

I.4.8 Corollaire. — *Soient S un schéma strictement local de point fermé s, X un log-schéma fs connexe de schéma sous-jacent X propre sur S. Le morphisme $\pi_1^{\log}(\mathsf{X}_s) \to \pi_1^{\log}(\mathsf{X})$ est un isomorphisme.*

I.4.9 Lemme. — *Soient $\mathsf{g} : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ un morphisme* strict *de log-schémas fs, et G un groupe fini. Alors :*

1. *le champ $\varepsilon_{\mathsf{X}*}\mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(\mathsf{X}, G)$ sur $X_{\text{ét}}$ est ind-fini,*

2. *le foncteur de changement de base*

$$g_{\acute{e}t}^*\varepsilon_{\mathsf{X}*}\mathrm{Tors}_{K\acute{e}t}(\mathsf{X},G) \to \varepsilon_{\mathsf{Y}*}\mathsf{g}_{K\acute{e}t}^*\mathrm{Tors}_{K\acute{e}t}(\mathsf{X},G)$$

associé au diagramme de topos

$$\begin{tikzcd} \mathsf{X}_{K\acute{e}t} \arrow[d, "\varepsilon_{\mathsf{X}}"'] & \mathsf{Y}_{K\acute{e}t} \arrow[l, "\mathsf{g}_{K\acute{e}t}"'] \arrow[d, "\varepsilon_{\mathsf{Y}}"'] \\ X_{\acute{e}t} & Y_{\acute{e}t} \arrow[l, "g_{\acute{e}t}"'] \end{tikzcd}$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration de ***I.4.9***. — 1. Le faisceau en groupes $\pi_1(\varepsilon_*\mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(\mathsf{X},G))$ (pointé en un point quelconque) est fini puisqu'il est isomorphe au faisceau étale constant fini $G \xrightarrow{\sim} \varepsilon_*G$.
2. Soit y un point de $Y_{\text{ét}}$, d'image x. Par passage aux fibres, et cohérence des morphismes ε de topos, il s'agit de montrer que le foncteur $\mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(X(x),G) \to \mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(Y(y),G)$ est une équivalence. Rappelons ([**Ill02**] 4.7 a,d) que si le schéma sous-jacent à un log-schéma fs S est strictement local, et que S est muni d'un log-point géométrique $\tilde{\mathsf{s}}$ localisé en un log-point fs s, le morphisme canonique $\pi_1^{\log}(\mathsf{s},\tilde{\mathsf{s}}) \to \pi_1^{\log}(\mathsf{S},\tilde{\mathsf{s}})$ est un isomorphisme et le groupe d'inertie logarithmique $\pi_1^{\log}(\mathsf{s},\tilde{\mathsf{s}})$ est abélien d'ordre (profini) premier à l'exposant caractéristique de $\kappa(s)$. On est donc ramené à prouver que $\mathrm{H}^1_{K\text{ét}}(X(x),G) \to \mathrm{H}^1_{K\text{ét}}(Y(y),G)$ est un isomorphisme dans le cas où G est abélien fini d'ordre premier à $p = \exp.\mathrm{car.}\,\kappa(x)$. Finalement, on peut supposer le groupe G isomorphe à $\Lambda := \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, pour un entier $n \geq 1$ premier à p, et X, Y strictement locaux. Dans ce cas, on a d'après *loc. cit.*, 5.2 — dont on reprend les notations — un isomorphisme

$$\overline{M_{\mathsf{X}}}^{\mathrm{gp}} \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda(-1) \to \mathrm{R}^1\varepsilon_{\mathsf{X}*}\Lambda,$$

et de même pour Y. La conclusion résulte alors de l'isomorphisme

$$(\overline{M_{\mathsf{X}}}^{\mathrm{gp}} \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda(-1))_x \xrightarrow{\sim} (\overline{M_{\mathsf{Y}}}^{\mathrm{gp}} \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda(-1))_y,$$

qui provient du fait que le morphisme g est supposé strict. □

Démonstration de ***I.4.6***. — Notons g le morphisme de schéma $X_{S'} \to X$. Le champ $\varepsilon_{\mathsf{X}*}\mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(\mathsf{X},G)$ est ind-fini donc, par le théorème de changement de base propre pour les champs étales, le foncteur

$$\pi_{\text{ét}}^* f_{\text{ét}*}\big(\varepsilon_{\mathsf{X}*}\mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(\mathsf{X},G)\big) \to f_{S'\text{ét}*}\big(g_{\text{ét}}^*\varepsilon_{\mathsf{X}*}\mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(\mathsf{X},G)\big)$$

est une équivalence. Pour conclure, on remarque que d'après **I.4.9**, le champ $g_{\text{ét}}^*\varepsilon_{\mathsf{X}*}\mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(\mathsf{X},G)$ est équivalent au champ $\varepsilon_{\mathsf{X}_{S'}*}\mathrm{Tors}_{K\text{ét}}(\mathsf{X}_{S'},G)$ sur $X_{S'}$, joint au fait que $\varphi_{(\mathsf{X},f)_*} \simeq f_{\text{ét}*}\varepsilon_{\mathsf{X}*}$. □

CHAPITRE II

CONJECTURE DE BLOCH ET NOMBRES DE MILNOR

À paraître aux Annales de l'institut Fourier.

Introduction

II.0.1. Soient $S = \mathrm{Spec}(A)$ un trait hensélien à corps résiduel algébriquement clos, de point fermé (resp. générique) s (resp. η), X un S-schéma plat, séparé de type fini, purement de dimension relative $n \in \mathbf{N}$, et lisse en dehors d'un unique point fermé x de la fibre spéciale X_s. On suppose de plus X régulier. Soit

(**II.0.1**.a) $$\mu(X/S,\, x) = \mathrm{long}_{\mathscr{O}_{X,x}}\, \underline{\mathsf{Ext}}^1(\Omega^1_{X/S}, \mathscr{O}_X)_x,$$

le nombre de Milnor de X en x ([**SGA 7** XVI 1.2]).

Soient $\bar{\eta}$ un point géométrique localisé en η, et ℓ un nombre premier inversible dans $\mathscr{O}_S$; le complexe des cycles évanescents sur X_s, noté $\Phi(\mathbf{F}_\ell)$, est concentré en x et à cohomologie constructible. Pour tout $\mathbf{F}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie M, muni d'une action continue de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$, on note $\dim \mathrm{tot}\, M$ l'entier $\dim_{\mathbf{F}_\ell}(M) + \mathrm{Swan}(M)$. Dans [**SGA 7** XVI 1.9], P. Deligne fait la conjecture suivante :

II.0.2 Conjecture (**« Deligne-Milnor »**). — *Sous les hypothèses précédentes, on a l'égalité :*

(**II.0.2**.a) $$\mu(X/S,\, x) = (-1)^n \dim\, \mathrm{tot}\, \Phi(\mathbf{F}_\ell)_x.$$

Cette conjecture est démontrée dans *loc. cit.* dans les trois cas suivants :
- $n = 0$,
- X/S présente une singularité quadratique ordinaire en x,
- S est d'égale caractéristique.

II.0.3. Plus généralement, cette conjecture a un sens dès que $\kappa(s)$ est parfait. Cependant, on ignore comment définir un second membre sans cette hypothèse. Notons que, d'après [**Ill00**], $\Phi(\mathbf{F}_\ell)$ est concentré en degré n, de sorte que le second membre de **II.0.2**.a est $\dim_{\mathbf{F}_\ell}(\Phi^n(\mathbf{F}_\ell)_x) + \mathrm{Swan}(\Phi^n(\mathbf{F}_\ell)_x)$.

II.0.4. Soient S comme précédemment et X un S-schéma régulier, plat, séparé de type fini, purement de dimension relative n, à fibre générique lisse. Soit

$$\mathrm{Art}(X/S) = \dim\, \mathrm{tot}\, \mathrm{R}\Gamma(X_s, \Phi(\mathbf{F}_\ell)),$$

le conducteur d'Artin. Si X/S est propre, le complexe des cycles proches calcule la cohomologie de la fibre générique géométrique, et l'on a

$$\mathrm{Art}(X/S) = \chi(X_{\bar{\eta}}) - \chi(X_s) + \mathrm{Swan}\, \mathrm{R}\Gamma(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{F}_\ell).$$

Dans [**Blo87**], S. Bloch définit une classe de Chern localisée

$$c_{n+1}{}^X_{X_s}(\Omega^1_{X/S}) \in \mathrm{CH}_0(X_s),$$

et fait la conjecture suivante :

II.0.5 Conjecture (**Bloch**). — *Supposons de plus X/S propre, on a :*

(**II.0.5**.a) $$\mathrm{Art}(X/S) = (-1)^n \deg c_{n+1}{}^X_{X_s}(\Omega^1_{X/S}).$$

Cette conjecture est démontrée par S. Bloch dans *loc. cit.* pour $n = 1$, et par K. Kato et T. Saito si l'on suppose que $(X_s)_{\text{réd}}$ est un diviseur à croisement normaux ([**KS01**]).

II.0.6. Dans [**Ill72**], L. Illusie définit les dérivés du foncteur non additif Λ^{n+1}. Si $Z_{X/S} \subset X_s$ désigne le lieu fermé de non lissité de $f : X \to S$, le complexe $\mathsf{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S}$ appartient à $\mathsf{D}^b_{Z_{X/S}}(X)_{\text{parf}}$. La structure de schéma (non nécessairement réduit) sur l'espace $Z_{X/S}$ est explicitée dans la section suivante. D'après T. Saito ([**Sai88**], 2.3 et [**Sai00**], corrections), on a l'égalité

$$\deg c_{n+1}{}^{X}_{X_s}(\Omega^1_{X/S}) = \chi(X, \mathsf{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S}), \tag{II.0.6.a}$$

où χ désigne le composé $\mathsf{K}_{X_s}(X) \xrightarrow{\sim} \mathsf{K}(X_s) \xrightarrow{f_{s*}} \mathsf{K}(s) = \mathbf{Z}$. Le terme de droite de **II.0.6**.a nous permet de définir le second terme de **II.0.5**.a en supposant seulement que $Z_{X/S}$ est propre sur s et par là même d'émettre la conjecture suivante :

II.0.7 Conjecture. — *Soient S et X comme dans **II.0.4**. Supposons le lieu $Z_{X/S}$ de non lissité de X/S propre sur s. On a :*

$$\mathrm{Art}(X/S) = (-1)^n \chi(X, \mathsf{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S}).$$

Nous verrons plus bas que c'est une généralisation commune de **II.0.2** et **II.0.5**, démontrée pour $n = 1$ dans l'appendice II.5. Le résultat principal de cette note est le théorème suivant :

II.0.8 Théorème. — *La conjecture **II.0.2** se déduit de la conjecture **II.0.5**.*

On en tire le

II.0.9 Corollaire. — *La formule de Deligne-Milnor est valable en dimension relative* 1.

II.0.10. Nous vérifierons dans la section suivante que la conjecture **II.0.2** est équivalente à la conjecture **II.0.7** dans le cas où $Z_{X/S} = \{x\}$. En particulier, **II.0.2** est équivalent à **II.0.5** si X/S est propre et présente une unique singularité dans la fibre spéciale. Il serait intéressant de généraliser l'énoncé **II.0.8** en une démonstration de l'implication **II.0.5** $\Rightarrow$ **II.0.7**.

II.1. Nombre de Milnor et classe de Bloch

Les hypothèses sont celles du **II.0.4**.

II.1.1. Description locale du lieu singulier. — Localement sur X pour la topologie de Zariski, il existe un S-schéma lisse P de dimension relative $n+1$ et une S-immersion régulière $i : X \hookrightarrow P$ (cf. par exemple [**KS01**], §1). Pour simplifier l'écriture, nous notons encore X un tel ouvert. La suite exacte en traits pleins

$$0 \dashrightarrow \mathscr{N}_{X/P} \xrightarrow{d} i^*\Omega^1_{P/S} \to \Omega^1_{X/S} \to 0 \tag{II.1.1.a}$$

est aussi exacte à gauche. En effet, le faisceau $\mathscr{N}_{X/P}$ est localement libre (de rang 1) par hypothèse et l'exactitude à gauche est valable en restriction à la fibre générique X_η, supposée lisse sur η. L'image $\mathscr{J}_X$ du morphisme $\mathscr{N}_{X/P} \otimes_{\mathscr{O}_X} (i^*\Omega^1_{P/S})^\vee \to \mathscr{O}_X$ définit un sous-schéma fermé

$$e : Z \hookrightarrow X.$$

C'est l'idéal Jacobien $\mathscr{J}^n_{X/S}$ (cf. [**SGA 7** VI §5]) abstraitement défini comme l'idéal de Fitting $\mathrm{Fitt}_n(\Omega^1_{X/S})$. En particulier, il est indépendant du choix de P, ce qui résulte aussi de **II.1.1**.d. De la suite exacte **II.1.1**.a, on déduit la suite exacte :

(**II.1.1**.b) $$\mathscr{N}_{X/P} \otimes_{\mathscr{O}_X} i^*\Omega^n_{P/S} \to i^*\Omega^{n+1}_{P/S} \to \Omega^{n+1}_{X/S} \to 0.$$

Par tensorisation avec le faisceau $(i^*\Omega^{n+1}_{P/S})^\vee$, localement libre de rang 1, on en déduit une suite exacte :

(**II.1.1**.c) $$\mathscr{N}_{X/P} \otimes_{\mathscr{O}_X} (i^*\Omega^1_{P/S})^\vee \xrightarrow{d^\vee} \mathscr{O}_X \to \Omega^{n+1}_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} (i^*\Omega^{n+1}_{P/S})^\vee \to 0.$$

Ainsi, on a un isomorphisme

(**II.1.1**.d) $$\mathscr{O}_Z = \mathscr{O}_X / \mathscr{J}_X \xrightarrow{\sim} \Omega^{n+1}_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} (i^*\Omega^{n+1}_{P/S})^\vee,$$

II.1.2. Expression locale de $T^1_{X/S} = \underline{\mathsf{Ext}}^1(\Omega^1_{X/S}, \mathscr{O}_X)$. — Plaçons-nous dans un ouvert affine convenable de X, comme dans le paragraphe précédent. La résolution localement libre de $\Omega^1_{X/S}$ permet de calculer le faisceau $T^1_{X/S}$. En appliquant le foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}(-, \mathscr{O}_X)$ à **II.1.1**.a, on trouve la suite exacte :

$$(i^*\Omega^1_{P/S})^\vee \to \mathscr{N}^\vee_{X/P} \to \underline{\mathsf{Ext}}^1(\Omega^1_{X/S}, \mathscr{O}_X) \to 0.$$

Tensorisant **II.1.1**.c avec $\mathscr{N}^\vee_{X/P}$, on obtient un isomorphisme

(**II.1.2**.a) $$T^1_{X/S} = \Omega^{n+1}_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} (i^*\Omega^{n+1}_{P/S})^\vee \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{N}^\vee_{X/P}$$

(**II.1.2**.b) $$= \mathscr{O}_Z \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{N}^\vee_{X/P}.$$

Ainsi, $T^1_{X/S}$ a pour support Z, donc est de longueur finie sur $\mathscr{O}_{X,x}$ si $Z_{\text{réd}} = \{x\}$. En particulier, si $P = \mathbf{A}^{n+1}_S$, et $0 \in X = V(f)$ est une singularité isolée, on retrouve la définition usuelle du nombre de Milnor donnée dans [**SGA 7** XVI §1] :

$$\mu(f) = \mathrm{long}_A A[t_1, \dots, t_{n+1}]_{(t_1,\dots,t_{n+1})} / \big(f, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n+1}}\big).$$

II.1.3. Complexes de Koszul et dérivés des puissances extérieures. —

II.1.3.1. *Rappels et notations.* — Soient R un anneau local régulier, r un entier, et $u = (u_1, \dots, u_r) : R^r \to R$ une application R-linéaire. Notons $e_1, \dots, e_r$ la base canonique de R^r et

$$\mathsf{Kos}^\llcorner(u) : [0 \to \Lambda^r R^r \to \cdots \to \Lambda^{k+1} R^r \to \Lambda^k R^r \to \cdots \to R^r \xrightarrow{u} R \to 0],$$

le complexe de Koszul usuel, où R est placé en degré 0 et $\Lambda^{k+1}R^r \to \Lambda^k R^r$ est donné par

$$x = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{k+1}} \mapsto x \llcorner u = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} u(e_{i_j}) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge e_{i_{k+1}}.$$

On a $\mathrm{H}^0\big(\mathsf{Kos}^{\llcorner}(u)\big) = R/u(R^r)$, et le morphisme canonique $\mathsf{Kos}^{\llcorner}(u) \to R/u(R^r)$ est un isomorphisme si, et seulement si, la suite u est régulière (*complètement sécante* dans la terminologie de Bourbaki [**Bou80**]), c'est-à-dire $\operatorname{long}_R\big(R/u(R^r)\big) < +\infty$ si l'on suppose de plus $r = \dim R$.

Dualement, pour tout morphisme $v : R \to R^r$, on a le complexe

$$\mathsf{Kos}^{\wedge}(v) : [0 \to R \xrightarrow{v} R^r \to \cdots \to \Lambda^k R^r \xrightarrow{v\wedge} \Lambda^{k+1} R^r \to \cdots \to \Lambda^r R^r \to 0],$$

où R est à nouveau placé en degré 0.

Rappelons enfin la dualité de Koszul (cf. par exemple [**Eis95**], 17.15) : $\mathsf{Kos}^{\llcorner}(u)^{\vee} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Kos}^{\wedge}(u^{\vee})$.

II.1.3.2. Soient R et r comme précédemment, et $\mathscr{C}_v : [R \xrightarrow{v} R^r]$ un objet de $\mathsf{D}^-_{\mathrm{coh}}(R)$ (la catégorie des complexes bornés supérieurement de R-modules dont les groupes de cohomologie sont de type fini), où R est placé en degré -1.

II.1.3.3 Lemme. — *Avec les notations précédentes, on a un isomorphisme dans* $\mathsf{D}^-_{\mathrm{coh}}(R)$ *:*

$$\mathsf{L}\Lambda^r(\mathscr{C}_v) = \mathsf{Kos}^{\wedge}(v)[r].$$

Démonstration. — D'après l'isomorphisme de Quillen (cf. [**Ill72**], I.4.3.2), on a $\mathsf{L}\Lambda^r(\mathscr{C}_v) = \mathsf{L}\Gamma^r(\mathscr{C}_v[-1])[r]$, où Γ désigne le foncteur non additif « algèbre à puissances divisées » (les tenseurs symétriques). Il est démontré dans *loc. cit.*, VIII.2.1.2.1 que si $\mathscr{L} = [R \xrightarrow{a} R^r]$, ses composantes étant placées en degré 0 et 1, on a $\mathsf{L}\Gamma^r(\mathscr{L}) = \mathsf{Kos}^{\wedge}(a)$. Le lemme en découle. □

On trouvera dans *loc. cit.* des résultats plus généraux : cas des complexes à composantes plates, etc.

En particulier, il résulte de la dualité de Koszul que le morphisme canonique $\mathsf{L}\Lambda^r\mathscr{C}_v \to \Lambda^r\mathrm{H}^0(\mathscr{C}_v)$ est un isomorphisme si v est une suite régulière.

II.1.4. Globalisation. —

II.1.4.1. Sous les hypothèses de **II.0.4**, on a :

1. l'idéal Jacobien $\mathscr{J}_X$ est l'annulateur du $\mathscr{O}_X$-module $\Omega^{n+1}_{X/S}$. Par la suite, nous noterons $e : Z_{X/S} = V(\operatorname{Ann}\Omega^{n+1}_{X/S}) \hookrightarrow X$.
2. le morphisme canonique $L_{X/S} \to \Omega^1_{X/S}$, où $L_{X/S}$ est le complexe cotangent défini dans [**Ill72**], est un isomorphisme (dans la catégorie dérivée adéquate).
3. on a un isomorphisme canonique

(**II.1.4**.a) $$T^1_{X/S} = e_*(e^*\Omega^{n+1}_{X/S})^{\vee} \otimes_{\mathscr{O}_X} \operatorname{dét}(\Omega^1_{X/S})$$

4. le morphisme canonique

(**II.1.4**.b) $$\mathsf{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S} \to \Omega^{n+1}_{X/S}$$

est un isomorphisme si $Z_{X/S}$ est de dimension 0.

Le premier énoncé résulte de **II.1.1**.d. Le second est bien connu (cf. [**KS01**], §1.5) et justifie la définition que nous avons prise du faisceau $T^1_{X/S}$ dans le paragraphe précédent. L'isomorphisme **II.1.4**.a est une globalisation de **II.1.2**.a, que nous laissons au lecteur. (Voir [**KM76**] pour la définition du déterminant d'un complexe parfait.) Rappelons cependant que localement, avec les notations de **II.1.1**.a, on a $\text{dét}(\Omega^1_{X/S}) = i^*\Omega^{n+1}_{P/S} \otimes {\mathscr{N}_{X/P}}^\vee$. Le dernier point résulte, par localisation, des calculs locaux précédents : $\mathsf{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S}$ est acyclique hors du degré 0.

Dans le cas complexe, la relation entre nombre de Milnor d'une singularité isolée et les classes de Chern localisées du faisceau des différentielles relatives est bien connu (cf. [**Ful98**], 14.1.5).

II.1.4.2. Pour mémoire, signalons le résultat suivant. Soit $\mathscr{L}$ le faisceau $\underline{\mathrm{H}}^{-1}Le^*\Omega^1_{X/S}$ considéré dans [**KS01**]. Sous les hypothèses de **II.1.1**, le complexe $Le^*\Omega^1_{X/S}$ est (localement) isomorphe au complexe $[e^*\mathscr{N}_{X/P} \xrightarrow{0} (ie)^*\Omega^1_{P/S}]$, si bien que $\mathscr{L}$ est (localement) isomorphe à $e^*\mathscr{N}_{X/P}$. Le faisceau inversible $\mathscr{L}^\vee$, localement isomorphe à $e^*\mathscr{N}^\vee_{X/P}$, est globalement isomorphe à $e^*T^1_{X/S}$.

II.2. Compactification

Le résultat principal est le suivant :

II.2.1 Proposition. — *Sous les hypothèses de **II.0.2**, et si l'on suppose de plus S complet, il existe un S-schéma projectif et plat Y, purement de dimension relative n, lisse en dehors d'un unique point fermé y de la fibre spéciale Y_s, tel que les hensélisés stricts $X_{(x)}$ et $Y_{(y)}$ soient S-isomorphes.*

La démonstration fait l'objet des paragraphes **II.2.2** à **II.2.7**. Dans le cas de la dimension relative 1, un autre argument, dû à M. Raynaud, est donné dans l'appendice II.4.

II.2.2. Comme X est régulier et que toute S-immersion dans un S-schéma lisse est régulière, il existe un entier r tel que (X, x) soit Zariski-localement isomorphe à $(V(\mathbf{f}), 0)$, où $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_r)$ est une suite régulière de $A[T_1, \ldots, T_{n+r}] = A[\mathbf{T}]$ et $\{0\}$ désigne l'origine de $\mathbf{A}^{n+r}_s$. On suppose désormais S complet, $X = V(\mathbf{f})$ et $x = 0$. Notons $\mathfrak{m}$ (resp. $\hat{\mathfrak{m}}$) l'idéal maximal en l'origine de $A[\mathbf{T}]$ (resp. du complété $A[\![\mathbf{T}]\!]$) et $\hat{\mathfrak{m}}_X$ (resp. $\mathfrak{m}_X$) l'image de $\hat{\mathfrak{m}}$ dans $R \overset{\text{déf}}{=} \widehat{\mathscr{O}_{X,x}}$ (resp. l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{X,x}$). Enfin, supposons $\mu = \mu(X/S,\, x) > 0$.

II.2.3 Lemme. — *Sous les hypothèses de **II.2.2**, il existe un entier $\lambda_{X,x}$ tel que pour toute suite $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_r)$ de $A[T_1, \ldots, T_{n+r}]$, satisfaisant les r relations de congruences $g_i - f_i \in \mathfrak{m}^{\lambda_{X,x}}$, les deux schémas strictement locaux $V(\mathbf{g})_{(0)}$ et $X_{(x)}$ soient S-isomorphes.*

La démonstration se coupe en deux : une partie formelle (**II.2.4**), et une de descente aux hensélisés.

II.2.4 Lemme **(Suffisance des jets)**. — *Pour tout r-uplet d'éléments $\mathbf{g} \in A[\![\mathbf{T}]\!]^r$, satisfaisant $\mathbf{f} - \mathbf{g} \in (\hat{\mathfrak{m}}^{3\mu})^r$, il existe $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+r})$ dans $A[\![\mathbf{T}]\!]^{n+r}$, tel que $\mathbf{x} \equiv \mathbf{T} \mod \hat{\mathfrak{m}}^2$ et $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ dans $A[\![\mathbf{T}]\!]/(\mathbf{f})$. En d'autres termes, il existe un A-isomorphisme tangent à l'identité : $A[\![\mathbf{T}]\!]/(\mathbf{g}) \xrightarrow{\sim} A[\![\mathbf{T}]\!]/(\mathbf{f})$, défini par $t_i \mapsto x_i$.*

Notons $\mathbf{f}'$ l'application linéaire $A[\mathbf{T}]^{n+r} \to A[\mathbf{T}]^r$, définie par les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial T_j}$. Par hypothèse, le nombre de Milnor

$$\mu = \operatorname{long}_R R^r/\operatorname{Im}(\mathbf{f}'_R) \geq 1,$$

est fini (cf. **II.1.2**), où $\mathbf{f}'_R$ désigne $\mathbf{f}' \otimes_{A[\mathbf{T}]} R$. (De même, nous noterons $\mathbf{g}_R$ l'image dans R^r d'un $\mathbf{g}$, mais nous noterons $\mathbf{t}$ l'image des variables $\mathbf{T}$ dans R.) Ainsi, $(\hat{\mathfrak{m}}_X^{\mu} R)^r \subset \mathbf{f}'_R R^{n+r}$. On en déduit, pour tout $c \in \mathbf{N}$, l'inclusion de sous-R-modules de R^r :

$$(\hat{\mathfrak{m}}_X^{\mu+c} R)^r \subset \mathbf{f}'_R\big((\hat{\mathfrak{m}}_X^{c} R)^{n+r}\big) \ (\star_c).$$

Remarquons que si $\mathbf{g} \in A[\![\mathbf{T}]\!]^r$ satisfait les congruences $\mathbf{f}_R - \mathbf{g}_R \in (\hat{\mathfrak{m}}_X^{\mu+2})^r$, l'inclusion $(\star_0)$ est encore valable avec $\mathbf{g}'_R$ à la place de $\mathbf{f}'_R$. Considérons $\mathbf{g} \in A[\![\mathbf{T}]\!]^r$ tel que $\mathbf{g} - \mathbf{f} \in (\hat{\mathfrak{m}}^{3\mu})^r$ comme dans l'énoncé et tâchons de vérifier les conclusions de **II.2.4**. Soit $\varepsilon \in R^{n+r}$; la formule de Taylor pour $\mathbf{g}$, vu comme élément de $R[\![\mathbf{T}]\!]$ via le plongement $A \hookrightarrow R$, s'écrit :

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}+\varepsilon) = \mathbf{g}(\mathbf{t}) + \mathbf{g}'(\mathbf{t}) \cdot \varepsilon + \big(\text{termes quadratiques en } \varepsilon\big).$$

Il s'agit d'une égalité dans R^r. Remarquons que $\mathbf{g}(\mathbf{t})$ n'est autre que $\mathbf{g}_R$, de même que l'application linéraire $\mathbf{g}'(\mathbf{t})$ correspond à $\mathbf{g}'_R$.

D'après $(\star_{2\mu})$, on peut trouver $\varepsilon_{[0]} \in (\hat{\mathfrak{m}}_X^{2\mu} R)^{n+r}$ tel que $\mathbf{g}'_R \cdot \varepsilon_{[0]} = \mathbf{f}_R - \mathbf{g}_R$. Considérons $\tilde{\varepsilon}_{[0]} \in A[\![\mathbf{T}]\!]^{n+r}$ un relèvement quelconque de $\varepsilon_{[0]} \in R^{n+r}$. Notons $\mathbf{g}_{[0]} \in A[\![\mathbf{T}]\!]$ la série formelle $\mathbf{g}(\mathbf{T} + \tilde{\varepsilon}_{[0]})$.

La formule précédente montre qu'on a alors $\mathbf{g}(\mathbf{t}+\varepsilon_{[0]})(= \mathbf{g}_{[0]}(\mathbf{t})) = \mathbf{g}_R + \alpha_{[1]}$, où $\alpha_{[1]} \in (\hat{\mathfrak{m}}_X^{4\mu} R)^{n+r}$. La nouvelle série $\mathbf{g}_{[0]}$ satisfait donc en particulier les inclusions $(\star_c)$, pour le même μ, car on a $(\mathbf{g} - \mathbf{g}_{[0]})_R \in (\hat{\mathfrak{m}}_X^{3\mu})^r \subset (\hat{\mathfrak{m}}_X^{\mu+2})^r$. Par récurrence, on construit de proche en proche, une suite d'éléments $\varepsilon_{[i]} \in (\hat{\mathfrak{m}}_X^{(2^i+1)\mu} R)^{n+r}$ (et leurs relèvements $\tilde{\varepsilon}_{[i]}$), pour $i \geq 0$, telle que

$$\mathbf{g}_{[i]_R} \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{g}(\mathbf{t} + \varepsilon_{[0]} + \cdots + \varepsilon_{[i]})\big(= \mathbf{g}_{[i-1]}(\mathbf{t} + \varepsilon_{[i]})\big) = \mathbf{f}_R + \alpha_{[i+1]},$$

où $\alpha_{[i+1]} \in (\hat{\mathfrak{m}}_X^{(2^{i+1}+2)\mu} R)^r$. L'anneau R étant complet, on peut considérer

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{[i]} \in \hat{\mathfrak{m}}_X^2.$$

On a $\mathbf{g}(\mathbf{t}+\varepsilon) = \mathbf{f}(\mathbf{t}) = 0$. Donc, si $\tilde{\varepsilon} \in (\hat{\mathfrak{m}}^2)^{n+r}$ relève ε, alors $\mathbf{x} = \mathbf{T} + \tilde{\varepsilon}$ vérifie les conditions de **II.2.4**.

Algébrisation. — Montrons que l'entier $\lambda_{X,x} = 3\mu$ de **II.2.4** convient pour **II.2.3**. Soit

$$B = A[T_1, \ldots, T_{n+r}]_{\mathfrak{m}}{}^{hs}/(f_1, \ldots, f_n) = \Gamma(X_{(x)}, \mathscr{O});$$

par hypothèse les équations $g_1 = \cdots = g_n = 0$ ont une solution dans $\widehat{B}$. Comme B est l'hensélisé du localisé d'un schéma de type fini sur un trait complet donc excellent, on peut utiliser le théorème d'approximation de M. Artin. Ainsi, il existe des x_i, $1 \leq i \leq n+r$, congrus aux T_i modulo $\mathfrak{m}_X^2$ tels que $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ dans B. On peut donc définir un A-morphisme $\varphi : A[\mathbf{T}]_{\mathfrak{m}}{}^{hs}/(\mathbf{g}) \to B$, par $T_i \mapsto x_i$. Le morphisme $\widehat{\varphi}$ induit sur les complétés est un isomorphisme ; le morphisme φ est donc étale et, finalement, un isomorphisme.

II.2.5 Remarque. — On peut aussi, comme l'a remarqué le rapporteur, utiliser le lemme 2 p. 561 de [**Elk73**] pour démontrer directement le lemme **II.2.3**.

II.2.6. Soient X, n, et $\lambda_{X,x} = \lambda$ comme précédemment. Le problème étant local au voisinage de x sur X pour la topologie de Zariski, on peut supposer qu'il existe un entier r et un S-module $\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_S^{n+r}$ tel que X soit isomorphe à un sous-schéma fermé de $\mathbf{V}(\mathscr{E})$, défini par un S-morphisme $\mathbf{f} : \mathscr{O}_S^r \to \mathbf{S}(\mathscr{E})$, satisfaisant les hypothèses de **II.2.2**. D'après **II.2.3**, on peut supposer que $\mathbf{f}$ est à valeur dans

$$\mathbf{S}(\mathscr{E})_{\leq\lambda} = \mathscr{O}_S \oplus \cdots \oplus \mathbf{S}^\lambda(\mathscr{E}).$$

Remarquons qu'il est important de ne pas choisir immédiatement d'isomorphisme $\Gamma(S, \mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} A^{n+r}$. Cela simplifie les calculs qui vont suivre ; je dois cette remarque à Luc Illusie.

Pour tout morphisme $\mathbf{a} : \mathscr{O}_S^r \to \mathbf{S}(\mathscr{E})$, et pour tout entier $i \in \mathbf{N}$, notons $\mathbf{a}^{[i]}$ la composante homogène de degré i de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}^{[\leq i]} = \mathbf{a}^{[0]} + \cdots + \mathbf{a}^{[i]}$ sa partie de degré inférieur à i. Posons $\widetilde{\mathscr{E}} = \mathscr{O}_S t_0 \oplus \mathscr{E}$, et $\mathbf{P}_{\mathscr{E}} = \mathbf{P}(\widetilde{\mathscr{E}})$. Si $\mathbf{a}$ est un morphisme $\mathscr{O}_S^r \to \mathbf{S}(\mathscr{E})_{\leq\lambda+2}$, notons $\widetilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^{[\lambda+2]} + t_0\mathbf{a}^{[\lambda+1]} + \cdots + t_0^{\lambda+2}\mathbf{a}^{[0]}$. Enfin, notons $Y(\mathbf{a})/S$ le S–schéma projectif $V(\widetilde{\mathbf{a}}) \hookrightarrow \mathbf{P}_{\mathscr{E}}$, et $y = (1, 0_{\mathscr{E}}) \in (\mathbf{P}_{\mathscr{E}})_s$: c'est l'image de x par l'immersion composée $X \hookrightarrow \mathbf{V}(\mathscr{E}) \hookrightarrow \mathbf{P}_{\mathscr{E}}$. Remarquons qu'en vertu de **II.2.3**, si $\mathbf{a} : \mathscr{O}_S^r \to \mathbf{S}(\mathscr{E})_{\leq\lambda+2}$ a pour λ–tronqué $\mathbf{f}$, les hensélisés stricts $Y(\mathbf{a})_{(y)}$ et $X_{(x)}$ sont automatiquement S-isomorphes. On cherche $\mathbf{a}$ tel que $Y(\mathbf{a})$ satisfasse les autres conditions de **II.2.1**, c'est-à-dire les hypothèses de lissité et de dimension relative hors de y. Il suffit de les vérifier en les points fermés de la fibre spéciale (privée de y). En effet, si elles sont satisfaites en ces points, le schéma $Y(\mathbf{a})$ sera régulier en tous les points fermés de $Y(\mathbf{a})_s$. Comme le lieu $\mathrm{reg}(Y(\mathbf{a}))$ des points réguliers est ouvert (cf. [**Gro69**] IV.6.12.6), cet ouvert contient nécessairement toute la fibre spéciale et, par propreté, on a l'égalité $\mathrm{reg}(Y(\mathbf{a})) = Y(\mathbf{a})$. De même, le morphisme $Y(\mathbf{a}) \to S$ est aussi plat car il est plat en tous les points fermés de la fibre spéciale et son lieu de platitude est ouvert (cf. [**Gro69**] IV.11.1.1). La fibre générique est lisse : tout point y_η de Y_η est générisation d'un point y_s de Y_s. Si y_s est différent de y, la lissité est évidente par hypothèse tandis que si $y_s = y$ cela résulte du fait que l'on a supposé $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}) - \{x\}$ essentiellement lisse sur S. Finalement, pour démontrer **II.2.1**, il nous suffit de démontrer la proposition suivante :

II.2.7 Proposition. — *Il existe un morphisme $\mathbf{a} : \mathscr{O}_S^r \to \mathbf{S}(\mathscr{E})_{\leq\lambda+2}$ tel que $\mathbf{a}^{[\leq\lambda]} = \mathbf{f}$ et $Y(\mathbf{a}) \to S$ soit lisse de dimension relative n en tous les points fermés de la fibre spéciale différents de y.*

Considérons le S–schéma $T = \mathbf{V}\big(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathscr{O}_S^r, S^{\lambda+1}(\mathscr{E}) \oplus S^{\lambda+2}(\mathscr{E}))^\vee\big)$, paramétrant les morphismes $\mathbf{a} : \mathscr{O}_S^r \to \mathbf{S}(\mathscr{E})_{\leq\lambda+2}$ tels que $\mathbf{a}^{[\leq\lambda]} = \mathbf{f}$. Au-dessus de T, on a la variété universelle $\mathscr{Y} \to \mathbf{P}_{\mathscr{E}} \times_S T$. La projection $h : \mathscr{Y} \to T$ admet une section au-dessus de T_s, qui correspond à l'origine y, et que nous noterons donc y. Soit $\mathscr{Z}$ le fermé complémentaire de l'ouvert où h est lisse de dimension relative n, muni par exemple de la structure réduite. Pour conclure, il suffit de démontrer le

II.2.8 Lemme. — *Soit $z \neq y$ un point fermé de $\mathbf{P}_{\mathscr{E}_s}$, qui est dans l'image de la projection $\mathscr{Z} \to \mathbf{P}_{\mathscr{E}}$. La codimension de $\mathscr{Z} \cap (z \times_S T)$ dans T_s vaut $n + r + 1$.*

En effet, **II.2.8** entraîne que la codimension de $\mathscr{Z}_s$ dans $(\mathbf{P}_{\mathscr{E}} \times_S T)_s$ est supérieure à $n+r+1 = \dim \mathbf{P}_{\mathscr{E}s}+1$ en tout point qui n'est pas dans $y(T_s)$. Ainsi, les composantes irréductibles de $\mathscr{Z}_s$ qui ne sont pas contenues dans $y(T_s)$ sont de dimension strictement inférieure à $\dim T_s$. L'union des images par h de ces composantes est donc un sous-schéma fermé $\mathscr{I}$ (car h est propre) strict de T_s. Soit $\mathscr{M}$ l'ouvert $\mathscr{Z} - y(T_s)$ de $\mathscr{Z}$. Les deux inclusions $h(\mathscr{M}(k)) \subset \mathscr{I}(k) \subsetneq T(k)$ (on rappelle que $k = \kappa(s)$ est supposé algébriquement clos) entraînent l'inclusion stricte $h(\mathscr{M}(k)) \subsetneq T(k)$. Ainsi, si t est une section de T sur S de réduction dans $T(k) - h(\mathscr{M}(k))$, le schéma $\mathscr{Y}_t \to t \xrightarrow{\sim} S$ est lisse en tout point fermé de $(\mathscr{Y}_t)_s$, excepté y, d'où la proposition **II.2.7**. Insistons sur le fait que cela est a priori plus fort que la lissité de $(\mathscr{Y}_t)_s/s$ (hors y).

*Démonstration de **II.2.8**.* — Soit z comme dans l'énoncé. On peut choisir un isomorphisme $\widetilde{\mathscr{E}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_S t_0 \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_S t_{n+r}$ tel que $z \in (\mathbf{P}_{\mathscr{E}})_s \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}_s^{n+r}$ (resp. y) soit de coordonnées $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ (resp. $(1, 0, 0, \ldots, 0)$). Cela résulte du fait que z est supposé différent de y. Le schéma T est S-isomorphe à un espace affine $S[c_{(i,\alpha)}]$, de dimension relative N_T sur S, où i parcourt l'ensemble $\{1, \ldots, r\}$ et α l'ensemble des suites finies dans $\mathbf{N}^{n+r}$ de somme $|\alpha|$ appartenant à $\{\lambda+1, \lambda+2\}$. Le sous-schéma fermé $\mathscr{Y}$ de $\mathbf{P}_{\mathscr{E}} \times_S T$ est défini par l'annulation des r équations :

$$\underbrace{t_0^{\lambda+2}\mathbf{f}_i(\frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_{n+r}}{t_0})}_{\mathbf{g}_i(t_0,\ldots,t_{n+r})} + \sum_{|\alpha| \in \{\lambda+1,\lambda+2\}} c_{i,\alpha} t_0^{\lambda+2-|\alpha|} t_1^{\alpha_1} \cdots t_{n+r}^{\alpha_{n+r}}.$$

Soit $\tilde{z} = (z, \mathbf{a})$ un point de $\mathscr{Y}$ au-dessus de z ; en son voisinage, $\mathscr{Y}$ est donc T-isomorphe au sous-schéma fermé de $T[t'_0, t'_1, \cdots, t'_{n+r-1}] \cong \mathbf{A}_S^{N_T+n+r}$, d'équations

$$\widetilde{\mathbf{a}}_i = \mathbf{g}_i(t'_0, \ldots, t'_{n+r-1}, 1) + \sum_{\alpha} c_{i,\alpha} \underbrace{t_0'^{\lambda+2-|\alpha|} t_1'^{\alpha_1} \cdots t_{n+r-1}'^{\alpha_{n+r-1}} \cdot 1^{\alpha_{n+r}}}_{m_\alpha(\mathbf{t}')}.$$

Il résulte de cette description et du critère Jacobien, que $\mathscr{Z}_s$, la fibre spéciale du schéma $\mathscr{Z}$, coïncide avec le lieu où h_s n'est pas lisse de dimension relative n, du moins au-dessus de l'ouvert affine $S[t'_0, t'_1, \cdots, t'_{n+r-1}]$ de $\mathbf{P}_{\mathscr{E}}$ ne contenant pas y. On peut donc faire notre calcul de codimension en travaillant uniquement sur $k = \kappa(s)$ (et dans l'espace affine précédent). Pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$, le seul monôme $m_\alpha(\mathbf{t}')$ qui ne soit pas nul évalué en z est celui pour lequel $\alpha = (0, 0, \ldots, 0, \lambda+2) \overset{\text{déf}}{=} \beta$. Comme le point $\tilde{z} \in \mathbf{A}_S^{N_T+n+r}$ appartient à $\mathscr{Y}$, sa seconde coordonnée $\mathbf{a}$ appartient au sous-espace affine L_z de T_s d'équations $\mathbf{g}_i(0, 0, \ldots, 0, 1) + c_{i,\beta}(\mathbf{a}) = 0$, où i appartient à $\{1, \ldots, r\}$. Pour un tel indice i, calculons la dérivée partielle $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{a}}_i}{\partial t'_0}$ en z dans ces coordonnées. Elle vaut :

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial t'_0} \overbrace{(0, \ldots, 0)}^{n+r \text{ zéros}}}_{\chi_{i,0}} + c_{i,\gamma}(\mathbf{a}),$$

où $\gamma \in \mathbf{N}^{n+r}$ est la suite $(0, \ldots, 0, \lambda+1)$. En effet, pour que la dérivée partielle par rapport à t'_0 du monôme $t_0'^{\lambda+2-|\alpha|} t_1'^{\alpha_1} \cdots t_{n+r-1}'^{\alpha_{n+r-1}}$ soit non nulle évaluée en $(0, \ldots, 0)$, il faut que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n+r-1} = 0$ et $|\alpha| = \lambda+1$. Pour $\alpha = \gamma$ cette dérivée partielle vaut 1. Si maintenant j est un indice dans $\{1, \ldots, n+r-1\}$, on a de

même :

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{a}}_i}{\partial t'_j}(0,\dots,0) = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial t'_j}(0,\dots,0)}_{\chi_{i,j}} + c_{i,\gamma(j)}(\mathbf{a}),$$

où $\gamma(j) \in \mathbf{N}^{n+r}$ est définie par $\gamma(j)_j = 1$, $\gamma(j)_u = 0$ pour $u \notin \{j, n+r\}$, et $|\gamma(j)| = \lambda + 2$. On peut noter qu'avec ces conventions, on a l'égalité $\chi_{i,j} = 0$ pour tous les couples (i,j) considérés. Cela résulte du fait que $t_0'^2$ divise tous les $\mathbf{g}_i$. La condition $\tilde{z} = (z, \mathbf{a}) \in \mathscr{Z}_z$ est donc définie dans T_s par l'intersection du sous-espace affine L_z, de codimension r, et du sous-schéma fermé d'équations les mineurs $r \times r$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} c_{1,\gamma} & \cdots & c_{r,\gamma} \\ c_{1,\gamma(1)} & \cdots & c_{r,\gamma(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,\gamma(n+r-1)} & \cdots & c_{r,\gamma(n+r-1)} \end{pmatrix}.$$

Comme les suites $\gamma, \gamma(i)$, $i \in \{1,\dots,n+r-1\}$ sont distinctes, le sous-schéma Min défini par l'annulation de ces mineurs est de codimension $n+1$ dans l'espace affine T_s (cf. par exemple [**Art76**]). De plus comme ces suites sont différentes de β, l'intersection de Min avec le sous-espace affine L_z est transverse. Ainsi, $\mathrm{codim}_{T_s}(\mathscr{Z}_z) = r + (n+1)$, d'où le résultat. □

II.3. Démonstration du théorème II.0.8

Commençons par remarquer que pour démontrer la conjecture **II.0.2**, on peut supposer S complet. En effet, d'après [**SGA 4$\frac{1}{2}$** Th. Finitude 3.7], le terme étale est invariant changement de base $\hat{S} \to S$, où $\hat{S}$ désigne le complété de S le long du point fermé. L'égalité des termes cohérents, $\mu(X/S,\, x) = \mu(X_{\hat{S}}/\hat{S},\, x)$, résulte de l'isomorphisme $\mathscr{O}_{Z_{\hat{S}}} = \mathscr{O}_{Z_S} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{\hat{S}}$, dans les notations de **II.1.2**.a. Ceci étant, on peut supposer d'après **II.2.1**, que X/S est propre car les deux termes de l'égalité à démontrer ne dépendent que de l'hensélisé (strict) en x. D'un côté on a, inconditionnellement,

$$\chi(X, \mathsf{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S}) \overset{\mathbf{II.1.4}}{=} \chi(X, \Omega^{n+1}_{X/S}) \overset{\mathbf{II.1.2}.\mathrm{a}}{=} \mu(X/S,\, x),$$

tandis que la conjecture de Bloch prédit que

$$\chi(X, \mathsf{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S}) = (-1)^n \mathrm{Art}(X/S) = (-1)^n \mathrm{dim\ tot}\, \Phi(\mathbf{F}_\ell).$$

Donc **II.0.5** implique **II.0.2**.

II.4. Appendice A : compactification en dimension relative 1

Voici l'argument de M. Raynaud qui permet de démontrer directement **II.2.1** dans le cas des courbes. Supposons X/S affine (et S complet). Notons $Y = X_s$ la fibre spéciale. Comme c'est une courbe, il existe une compactification $\overline{Y}$ de Y, projective, et lisse hors de x. Le s-schéma $\overline{Y} - \{x\}$ est affine et lisse donc (cf. [**SGA 1** III 6.8]) il existe un S-schéma formel affine et lisse $\mathscr{T}$ dont $\overline{Y} - \{x\}$ est la fibre spéciale. L'affine $Y - \{x\}$ admet un unique relèvement formel $\mathscr{U}$ sur S. Il est naturellement muni d'immersions ouvertes

$\mathscr{U} \hookrightarrow \mathscr{T}$ et $\mathscr{U} \hookrightarrow \widehat{X}$, où $\widehat{X}$ désigne le complété formel le long de la fibre spéciale. On peut donc recoller $\mathscr{T}$ et $\widehat{X}$ le long de $\mathscr{U}$: le schéma formel $\mathscr{T} \coprod_{\mathscr{U}} \widehat{X}$ est une déformation plate de $\overline{Y}$, donc propre sur S et s'algébrise (cf. [**SGA 1** III 7.2]) en un schéma X' sur S propre et lisse hors de x sur S, qui est formellement, donc localement pour la topologie étale (cf. **II.2.2**), isomorphe à X en x.

Ce type d'argument est aussi utilisé dans [**Lau81**], et repris dans [**KSS88**] proposition 4.1.

II.5. Appendice B : démonstration de la conjecture II.0.7 en dimension relative 1

Reprenons les notations de **II.0.4**, en supposant de plus que $n = \dim X/S = 1$. Posons $Z = Z_{X/S_{\text{réd}}}$. Utilisant à nouveau la méthode de l'annexe II.4, avec Z à la place de $\{x\}$, on voit qu'il existe un schéma X', propre sur S, obtenu par algébrisation d'un schéma formel sur S, tel qu'on ait une immersion ouverte $\widehat{X} \hookrightarrow \widehat{X'}$, induisant un isomorphisme entre les complétés formels $X_{/Z}$ et $X'_{/Z}$ le long de Z, avec l'hypothèse supplémentaire que X' est lisse sur S hors de Z.

II.5.1 Lemme. — *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\dim \operatorname{tot} \mathrm{R}\Gamma(X_s, \Phi_X(\mathbf{F}_\ell)) = \dim \operatorname{tot} \mathrm{R}\Gamma(X'_s, \Phi_{X'}(\mathbf{F}_\ell)).$$

Démonstration. — En effet, on a $\mathrm{R}\Gamma(X_s, \Phi_X(\mathbf{F}_\ell)) = \mathrm{R}\Gamma(Z, \Phi_X(\mathbf{F}_\ell)_{|Z})$; idem pour X'. Or, d'après [**Ber96**] Theorem 3.1, les complexes $\Phi_{X'}(\mathbf{F}_\ell)_{|Z}$ et $\Phi_X(\mathbf{F}_\ell)_{|Z}$ sont isomorphes comme complexes de $\mathbf{F}_\ell$–faisceaux sur Z munis d'une action continue de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$. □

Il nous faut maintenant comparer les termes cohérents.

Soit $\mathscr{I}$ l'idéal de définition de Z dans X. Notons $i : X_{/Z} \to X$ le morphisme d'espaces annelés canonique, et $i_n : Z_n \hookrightarrow X$ l'immersion fermée d'idéal $\mathscr{I}^{n+1}$. Notons $\Omega^1_{X_{/Z}}$ le $\mathscr{O}_{X_{/Z}}$–module limite (projective) $\lim_n \Omega^1_{(X_{/Z})_n/S}$; dans la suite, on identifiera $(X_{/Z})_n$ et Z_n. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, on a un morphisme canonique $i_n^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{Z_n/S}$. Par passage à la limite, on en déduit un morphisme $\lim_n i_n^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X_{/Z}}$, que l'on peut composer avec le morphisme canonique $i^*\Omega^1_{X/S} \to \lim_n i_n^*\Omega^1_{X/S}$.

II.5.2 Lemme. — *Le morphisme $i^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X_{/Z}}$ défini précédemment est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après [**Gro69**] I 10.8.8. (ii) le morphisme $i^*\Omega^1_{X/S} \to \lim_n i_n^*\Omega^1_{X/S}$ est un isomorphisme car $\Omega^1_{X/S}$ est cohérent.
Écrivons la suite exacte associée à l'immersion fermée i_n de S-schémas :

$$\mathscr{I}^{n+1}/(\mathscr{I}^{n+1})^2 \to i_n^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{Z_n/S} \to 0$$

Le système projectif $\mathscr{I}^n/(\mathscr{I}^n)^2$ est essentiellement nul, donc le morphisme $(i_n^*\Omega^1_{X/S})_n \to (\Omega^1_{Z_n/S})_n$ est un isomorphisme de pro-objets. Le morphisme $\lim_n i_n^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X_{/Z}}$ est donc également un isomorphisme. □

Comparons maintenant les puissances extérieures dérivées.

Par fonctorialité des foncteurs dérivés à gauche, on a un morphisme canonique

$$\mathsf{L}i^*\mathsf{L}\Lambda^2(\Omega^1_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{L}\Lambda^2\mathsf{L}i^*(\Omega^1_{X/S}) \to \mathsf{L}\Lambda^2 i^*(\Omega^1_{X/S}).$$

Il résulte de la platitude de i que le morphisme de foncteurs $\mathsf{L}i^* \to i^*$ est un isomorphisme si bien que le morphisme précédent se réécrit, compte tenu du lemme précédent, sous la forme :

(**II.5.2**.a) $$i^*\mathsf{L}\Lambda^2\Omega^1_{X/S} \xrightarrow{\sim} \mathsf{L}\Lambda^2\Omega^1_{X_{/Z}}.$$

II.5.3 Lemme. — *Pour tout complexe $\mathscr{K} \in \mathsf{D}^b_{\mathrm{coh}}(X)$, à support dans Z, le morphisme canonique* $\mathrm{R}\Gamma(X, \mathscr{K}) \to \mathrm{R}\Gamma(X_{/Z}, i^*\mathscr{K})$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il résulte de [**Gro69**] III 5.1.2, que le morphisme $\mathrm{R}\Gamma(X, \mathscr{K}) \to \mathrm{R}\Gamma(\widehat{X}, i_X^*\mathscr{K})$ est un isomorphisme, où $i_X : \widehat{X} \to X$ désigne le morphisme canonique. Notons k l'immersion fermée de schémas formels : $X_{/Z} \overset{k}{\hookrightarrow} \widehat{X}$. Comme dans le cas non formel, les foncteurs dérivés $\mathrm{R}^j k_*$ évalués en un faisceau cohérent sont nuls pour $j > 0$: cela résulte de la description du foncteur k_* dans le cas où X, et donc $\widehat{X}$, sont affines (cas auquel on peut se ramener). Le complexe $i_X^*\mathscr{K} =: \widehat{\mathscr{K}}$ étant à support dans $X_{/Z}$, la flèche d'adjonction $\widehat{\mathscr{K}} \to k_*k^*\widehat{\mathscr{K}} = k_*i^*\mathscr{K}$ est un isomorphisme. Le résultat en découle. □

Finalement, on a la chaîne d'égalités suivante :

$$\begin{aligned}
&\chi(X, \mathsf{L}\Lambda^2\Omega^1_{X/S}) \\
&\overset{\text{déf}}{=} \sum_i (-1)^i \mathrm{long}_A \mathrm{R}\Gamma(X, \mathsf{L}^i\Lambda^2\Omega^1_{X/S}) \text{ (somme finie car } \mathsf{L}\Lambda^2\Omega^1_{X/S} \in \mathsf{D}^{[-2,0]}_{\mathrm{parf}}(X)) \\
&= \mathrm{long}_A \mathrm{R}\Gamma(X_{/Z}, i^*\mathsf{L}\Lambda^2\Omega^1_{X/S}) \text{ (d'après } \mathbf{II.5.3}) \\
&= \mathrm{long}_A \mathrm{R}\Gamma(X_{/Z}, \mathsf{L}\Lambda^2\Omega^1_{X_{/Z}}) \text{ (d'après } \mathbf{II.5.2}\text{.a)} \\
&\overset{\text{déf}}{=} \chi(X_{/Z}, \mathsf{L}\Lambda^2\Omega^1_{X_{/Z}}).
\end{aligned}$$

De même pour X'. Comme, par hypothèse, $X_{/Z} \xrightarrow{\sim} X'_{/Z}$, on a le résultat souhaité grâce au théorème de Bloch (**II.0.5**, en dimension 1).

CHAPITRE III

MOTIFS DE DIMENSION INFÉRIEURE À 1, D'APRÈS V. VOEVODSKY

Introduction

Dans [**Voe00**], Vladimir Voevodsky définit, pour tout corps k, deux catégories triangulées, notées $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ et $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$. Il construit un foncteur $[\cdot]$ de la catégorie des k-schémas algébriques lisses vers $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ et, pour k parfait, un foncteur pleinement fidèle $i : \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k) \hookrightarrow \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$. On pourrait espérer munir $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ d'une t–structure dont le coeur serait la catégorie des *motifs mixtes* sur k, dont l'existence avait été conjecturée par Alexandre Grothendieck. Cela n'est en général pas possible à moins peut-être de se restreindre aux coefficients rationnels (cf. *loc. cit.* 4.3.8). D'un autre côté, Pierre Deligne définit dans [**Del74**] la catégorie additive des 1–motifs sur un corps. Après tensorisation par $\mathbf{Q}$, elle devient abélienne et est appelée catégorie des 1–isomotifs sur k ; on la note $1-\mathrm{isomot}(k)$. L'objet de ces notes est de construire un foncteur

$$\mathsf{D}^b(1-\mathrm{isomot}(k)) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k) \otimes \mathbf{Q},$$

de montrer qu'il induit une équivalence de catégories entre $\mathsf{D}^b(1-\mathrm{isomot}(k))$ et la sous-catégorie épaisse strictement pleine de $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k) \otimes \mathbf{Q}$ engendrée par les motifs $[X]$, où X est un k-schéma algébrique lisse de dimension inférieure à 1. On note $d_1\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)_{\mathbf{Q}}$ cette sous-catégorie pleine de $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)_{\mathbf{Q}}$. Le plan de ces notes est le suivant. On commence par rappeler les définitions de Voevodsky, et en particulier celles des catégories triangulées $d_i\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ (resp. $d_i\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$) pour tout entier $i \in \mathbf{N}$ ainsi que le foncteur i, faisant intervenir un complexe dit de Suslin. Dans la partie suivante, on montre que la catégorie dérivée des motifs d'Artin à coefficients rationnels est canoniquement équivalente à $d_0\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)_{\mathbf{Q}}$. L'analogue à coefficients entiers ainsi qu'une description de $d_0\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$ seront également considérés. Enfin on démontre dans une dernière partie l'équivalence annoncée, après avoir rappelé les calculs fondamentaux de l'homologie du complexe des chaînes singulières, dus à Andreï Suslin et V. Voevodsky [**SV96**]. La présentation donnée ici en est légèrement différente dans la mesure où l'on se contente du seul calcul de l'homologie de $\mathbf{G}_m$.

III.1. Rappels sur la catégorie triangulée des motifs géométriques

Soit k un corps et $\eta = \mathrm{Spec}(k)$. On note $\mathscr{L}(\eta)$ la catégorie des η-schémas algébriques lisses. Si X et Y sont deux objets de cette catégorie, on note $c(X,Y)$ le groupe abélien librement engendré par les sous-schémas fermés intègres de $X \times_\eta Y$ qui sont finis sur X et surjectifs sur une des composantes connexes de X. De telles correspondances se composent (cf. [**Voe00**], 2.1) ce qui nous permet de définir une catégorie additive $\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta)$ ayant pour objets les mêmes que ceux de $\mathscr{L}(\eta)$ et pour morphismes entre X et Y les correspondances précédentes. En particulier, on a un foncteur covariant

$$[\cdot] : \mathscr{L}(\eta) \to \mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta)$$

donné sur les morphismes par le graphe. (Dans sa construction de motifs de Chow, A. Grothendieck prend la convention opposée et obtient un foncteur *contravariant* de la catégorie des η-schémas projectifs et lisses vers $\mathrm{Chow}(\eta)$.) La somme directe dans $\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta)$ est donnée sur les objets par la somme disjointe des schémas.

La catégorie des *motifs géométriques effectifs*

$$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta)$$

s'obtient à partir de la catégorie additive $\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta))$ par localisation puis passage à l'enveloppe pseudo-abélienne (ou *Karoubienne*). La localisation s'effectue en divisant par la sous-catégorie épaisse ([**Nee01**], 2.1.6) $\mathscr{T}$ engendrée par les complexes $[\mathbf{A}^1_X] \to [X]$ et les $[U \cap V] \to [U] \oplus [V] \to [X]$ pour X la réunion des ouverts U et V. Après passage à l'enveloppe pseudo-abélienne (de sorte que tout projecteur correspond à une décomposition en somme directe), c'est encore naturellement une catégorie triangulée, cf. [**BS01**].

Il est commode d'introduire la catégorie $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)$ des *complexes motiviques effectifs* ; elle a entre autres avantages celui de posséder certains Hom internes[(i)]. Un préfaisceau (abélien) *avec transferts* est un foncteur additif contravariant sur $\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta)$ à valeur dans la catégorie des groupes abéliens. Il est dit de *Nisnevich* si c'est un faisceau pour la topologie de Nisnevich. Rappelons que si X est un schéma hensélien, le topos X_{Nis} associé est local. Les préfaisceaux représentables sur $\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta)$ sont des faisceaux de Nisnevich et tautologiquement munis de transferts. Un préfaisceau avec transferts $\mathscr{F}$ est dit *invariant par homotopie* si pour tout $X \in \mathsf{Ob}\,\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta)$, le morphisme $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(\mathbf{A}^1_X)$ induit par la projection est un isomorphisme. Notons $\mathrm{NisTrans}(\eta)$ la catégorie abélienne des faisceaux de Nisnevich avec transferts. La catégorie

$$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)$$

est la sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}^-(\mathrm{NisTrans}(\eta))$ constituée des complexes à cohomologie invariante par homotopie.

Rappelons maintenant la définition, due à A. Suslin, du complexe des chaînes singulières associé à un faisceau de Nisnevich avec transferts $\mathscr{F}$. Soit $\Delta^\bullet$ l'objet cosimplicial standard dans $\mathscr{L}(\eta)$ et notons $C_\bullet(\mathscr{F})$ le complexe de faisceaux abéliens associé à l'objet simplicial $T \mapsto C_n(\mathscr{F})(T) := \mathscr{F}(T \times_\eta \Delta^n)$, avec la convention classique $C_i = C^{-i}$. On note $h_i(\mathscr{F})$ le faisceau de Nisnevich avec transferts $\mathrm{H}^{-i}(C_\bullet(\mathscr{F}))$; il est automatiquement invariant par homotopie (cf. *loc. cit.* 3.2.1). Par composition avec le foncteur *complexe simple associé*, on en déduit un foncteur $\mathsf{K}^-(\mathrm{NisTrans}(\eta)) \xrightarrow{\mathrm{s}C_\bullet} \mathsf{D}^-(\mathrm{NisTrans}(\eta))$, qui se factorise en $\mathsf{K}^-(\mathrm{NisTrans}(\eta)) \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta) \hookrightarrow \mathsf{D}^-(\mathrm{NisTrans}(\eta))$. De plus, la catégorie triangulée $\mathsf{K}^-(\mathrm{NisTrans}(\eta))$ reçoit naturellement la catégorie $\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta))$ en associant à un complexe d'objets de $\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta)$, le complexe de faisceaux de Nisnevich avec transferts qu'ils représentent :

$$\big(\cdots \to X_{i-1} \to X_i \to X_{i+1} \to \cdots\big) \mapsto \big(\cdots \to c(-, X_{i-1}) \to c(-, X_i) \to c(-, X_{i+1}) \to \cdots\big).$$

Finalement, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta)) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \mathsf{K}^-(\mathrm{NisTrans}(\eta)) \arrow[d, "\mathbf{C}"] \\
\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta) \arrow[r, dotted, "i"] & \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)
\end{tikzcd}$$

Si k est parfait, on montre (*loc. cit.* 3.2.6) que la flèche diagonale se factorise par un foncteur i qui est pleinement fidèle. De plus, i est d'image *dense*, en ce sens que la catégorie localisante (cf. infra) engendrée par l'image est $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)$ tout entier.

[(i)] Nous renvoyons le lecteur à [**Voe00**], § 3.2 pour la définition de la structure tensorielle sur $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)$.

Convention : dorénavant, η est le spectre d'un corps parfait.

Soit $i \in \mathbf{N}$ un entier. Notons $\mathscr{L}\mathrm{Corr}_i(\eta)$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta)$ dont les objets sont les η-schémas algébriques lisses de dimension inférieure à i. On note $d_i\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta)$ (resp. $d_i\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(\eta)$) la sous-catégorie *épaisse* ([**Nee01**], 2.1.6) (resp. *localisante*, *loc. cit.* 3.2.6) strictement pleine de $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta)$ (resp. $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(\eta)$) engendrée par objets $[X]$ (resp. les complexes $C_\bullet([X])$, $[X]$ étant le faisceau de Nisnevich avec transferts représenté par X) où $X \in \mathsf{Ob}\,\mathscr{L}\mathrm{Corr}_i(\eta)$.

III.2. Motifs de dimension nulle

Notons $\eta = \mathrm{Spec}(k)$, $\bar{\eta}$ le spectre d'une clôture séparable quelconque de k et π le groupe de Galois $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$. Rappelons ([**SGA 4** VIII 2.1]) que le foncteur $X \rightsquigarrow X(\bar{\eta})$, de la catégorie des η-schémas étales vers la catégorie des ensembles discrets sur lesquels π agit continûment est une équivalence de catégories. Un quasi-inverse est donné par $E \rightsquigarrow \mathrm{Spec}\,\mathsf{Hom}_{\pi-\mathrm{ens}}(E, \kappa(\bar{\eta}))$. Le schéma X est connexe ssi $X(\bar{\eta})$ est transitif. Notons $\mathrm{Perm}_{\mathbf{Z}}(\eta)$, ou bien $\mathrm{Perm}(\eta)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, la catégorie sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}[\pi])$ dont les objets sont les $\mathbf{Z}[\pi]$-modules de permutation, c'est-à-dire les modules de la forme $\mathbf{Z}[E]$, où E est un π-ensemble fini continu. Il résulte du rappel précédent que le foncteur naturel des η-schémas étales de type fini vers $\mathrm{Perm}(\eta)$ est fidèle. Montrons qu'il s'étend en un foncteur $\mathscr{L}\mathrm{Corr}_0(\eta) \to \mathrm{Perm}(\eta)$. Soient X et X' deux η-schémas étales finis. Une correspondance intègre $Z \in c(X, X')$ est un sous-schéma intègre de $X \times_\eta X'$; il est nécessairement étale sur η et s'identifie à une composante connexe de $X \times_\eta X'$ c'est-à-dire, par la théorie de Galois, à une π-orbite de $X(\bar{\eta}) \times X'(\bar{\eta})$. À Z on associe donc une application π-équivariante $\chi_Z : X(\bar{\eta}) \times X'(\bar{\eta}) \to \mathbf{Z}$, sa fonction caractéristique, dont on déduit un morphisme $\mathbf{Z}[\pi]$-modules $\varphi_Z : \mathbf{Z}[X(\bar{\eta})] \to \mathbf{Z}[X'(\bar{\eta})]$. Si Z n'est plus supposé connexe mais s'écrit $Z = \sum n_i Z_i$, avec Z_i intègre pour tout i, on pose $\varphi_Z = \sum n_i \varphi_{Z_i}$. Réciproquement, tout tel morphisme dans $\mathrm{Perm}(\eta)$ s'obtient ainsi ; on a donc démontré la proposition :

III.2.1 Proposition. — *Le foncteur additif* $\mathscr{L}\mathrm{Corr}_0(\eta) \to \mathrm{Perm}(\eta)$ *ainsi construit est une équivalence de catégories.*

L'inclusion $\mathscr{L}\mathrm{Corr}_0(\eta) \hookrightarrow \mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta)$ induit un foncteur $\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}_0(\eta)) \to \mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta))/\mathscr{T}$, qui se factorise à travers $d_0\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta))/\mathscr{T}$, définie de manière analogue à $d_0\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta)$ mais sans passage à l'enveloppe pseudo-abélienne.

III.2.2 Théorème. — *Le foncteur* $\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}_0(\eta)) \to d_0\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta))_{/\mathscr{T}}$ *est une équivalence de catégories triangulées.*

Par passage à l'enveloppe pseudo-abélienne, notée avec un indice $_{\mathrm{psab}}$, il résulte de **III.2.1** et **III.2.2** que l'on a une équivalence de catégories :

$$\mathsf{K}^b(\mathrm{Perm}(\eta))_{\mathrm{psab}} \to d_0\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta).$$

Démonstration du théorème ***III.2.2***. — Il s'agit de montrer que si A et B sont deux complexes de $\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta))$, constitués de schémas de dimension 0, le morphisme $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta))}(A, B) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta))/\mathscr{T}}(A, B)$ est

un isomorphisme. Par définition des morphismes dans une catégorie localisée, et puisqu'on a calcul des fractions, on a :

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta))/\mathscr{T}}(A,B) = \operatorname{colim} \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta))}(A',B),$$

où la colimite est relative aux flèches $A' \to A$ dont le cône est dans $\mathscr{T}$. Par dévissage, on peut supposer que B est concentré en un seul degré : $B = [\eta'][i]$, où η'/η est fini étale et $i \in \mathbf{Z}$. On se ramène donc à prouver le lemme suivant :

III.2.3 Lemme. — *Pour tout objet $T \in \mathsf{Ob}\ \mathscr{T}$, tout η-schéma fini étale η' et tout entier $i \in \mathbf{Z}$, on a* $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta))}(T,[\eta'][i]) = 0$.

*Démonstration de **III.2.3***. — Par dévissage, on peut supposer que T de la forme $[\mathbf{A}^1_X] \to [X]$ (cas a.) (resp. $[U \cap V] \to [U] \oplus [V] \to [X]$ (cas b.)) avec $[\mathbf{A}^1_X]$ (resp. $[U] \oplus [V]$) placé en degré 0 et X un η-schéma algébrique lisse.

<u>Cas a.</u> Traitons d'abord le cas où $i = 0$. Il faut montrer que si $f : \mathbf{A}^1_X \to \eta'$ est un morphisme de $\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta)$, il existe un morphisme $g : X \to \eta'$ tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & {[\mathbf{A}^1_X]} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & {[X]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "g"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & {[\eta']} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

soit commutatif, de sorte que le morphisme de complexes $T \to [\eta'][0]$ soit homotope au morphisme nul. Le schéma η' est de dimension 0 donc pour tout η-schéma algébrique lisse Y,

$$\mathrm{H}^0(Y_{\eta'}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} c(Y, \eta').$$

Il s'agit donc de montrer que le morphisme canonique $\mathrm{H}^0(X_{\eta'}, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^0(\mathbf{A}^1_{X_{\eta'}}, \mathbf{Z})$ est surjectif. C'est même un isomorphisme, compte tenu de l'invariance par homotopie du π_0, qui traduit le fait élémentaire que si A est un anneau sans idempotent non trivial, il en est de même de $A[x]$, où x est une indéterminée. Le cas où $i = 1$ se traite de même ; les autres cas sont triviaux.

<u>Cas b.</u> Soit U, V un recouvrement ouvert de X. Traitons d'abord le cas $i = 0$. On doit montrer que pour tout morphisme $f : [U \coprod V] = [U] \oplus [V] \to [\eta']$ dans $\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta)$, il existe un morphisme $g : [X] \to [\eta']$ qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & {[U \cap V]} \arrow[r] \arrow[d] & {[U] \oplus [V]} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "g"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & {[\eta']} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

Cela revient à montrer que l'injection naturelle

$$\mathrm{Im}(\mathbf{Z}(X_{\eta'}) \to \mathbf{Z}(U_{\eta'} \coprod V_{\eta'})) \hookrightarrow \mathrm{Ker}(\mathbf{Z}(U_{\eta'} \coprod V_{\eta'}) \to \mathbf{Z}(U_{\eta'} \cap V_{\eta'}))$$

est un isomorphisme. Cela résulte du fait que le diagramme $\mathbf{Z}(X_{\eta'}) \to \mathbf{Z}(X'_{\eta'}) \rightrightarrows \mathbf{Z}(X'_{\eta'} \times_{X_{\eta'}} X'_{\eta'})$ est exact, où l'on a posé $X' = U \coprod V$, compte tenu du fait que $X' \times_X X' \xrightarrow{\sim} X' \coprod (U \cap V)$ (de même après changement

de base à η'). Les cas $i \in \{-1, 1\}$ ne présentent guère plus de difficulté tandis que pour $|i| > 1$, le résultat est évident. Cela conclut la démonstration du lemme et du théorème. □

□

Voyons maintenant une variante à coefficients rationnels. Soit $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}^{f,\mathrm{cont}}(\pi)$ la catégorie des $\mathbf{Q}[\pi]$–modules continus de dimension finie sur $\mathbf{Q}$, il résulte du lemme de Maschke qu'elle est abélienne semi-simple. En particulier, les foncteurs

$$\mathsf{K}^b(\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}^{f,\mathrm{cont}}(\pi))_{\mathrm{psab}} \leftarrow \mathsf{K}^b(\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}^{f,\mathrm{cont}}(\pi)) \to \mathsf{D}^b(\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}^{f,\mathrm{cont}}(\pi))$$

sont des équivalences de catégories. Ces catégories sont aussi équivalentes à la catégorie $\mathbf{Q}[\pi]$-mod.-$\mathbf{Z}$-gradués des $\mathbf{Q}[\pi]$–modules continus de dimension finie, $\mathbf{Z}$-gradués. Notons $\mathrm{Perm}_{\mathbf{Q}}(\pi)$ la catégorie des représentations de permutation à coefficients rationnels.

III.2.4 Lemme. — *Le foncteur*

$$\mathsf{K}^b(\mathrm{Perm}_{\mathbf{Q}}(\pi))_{\mathrm{psab}} \to \mathsf{K}^b(\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}^{f,\mathrm{cont}}(\pi))_{\mathrm{psab}} \simeq \mathbf{Q}[\pi]\text{-}\mathit{mod.}\text{-}\mathbf{Z}\text{-}\mathit{gradués}$$

déduit du foncteur pleinement fidèle $\mathrm{Perm}_{\mathbf{Q}}(\pi) \to \mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}}^{f,\mathrm{cont}}(\pi)$ *est une équivalence de catégories.*

On retrouve donc les motifs d'Artin, définis par A. Grothendieck.

Démonstration. — La pleine fidélité du foncteur est évidente. Soit M une représentation (continue, de dimension finie) quelconque de π et montrons qu'elle est dans l'image essentielle de ce foncteur. On peut supposer M irréductible. Soit G un quotient fini à travers lequel l'action de π sur M se factorise. Il est bien connu qu'en caractéristique 0, toute représentation irréductible d'un groupe fini est facteur direct de la représentation régulière. La représentation M coïncide donc avec l'image d'un idempotent $p : \mathbf{Q}[G] \to \mathbf{Q}[G]$ de $\mathrm{Perm}_{\mathbf{Q}}(\eta)$. Le résultat en découle puisque, par définition, $\mathsf{K}^b(\mathrm{Perm}_{\mathbf{Q}}(\pi))_{\mathrm{psab}}$ est pseudo-abélienne. □

III.2.5 Remarque. — Insistons sur le fait qu'il est nécessaire de se restreindre aux représentations de dimension finie *continues* de π (adjectif oublié dans [**Voe00**], p. 217). En effet, il est facile de construire, par exemple, des morphismes non continus $\mathbf{Z}_p \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$ pour tout $n > 1$. De même la semi-simplicité deviendrait fausse si l'on considérait les représentations ℓ-adiques de dimension finie continues.

Le lemme précédent s'interprète plus suggestivement comme un isomorphisme :

$$d_0\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(\eta)_{\mathbf{Q}} \simeq \mathbf{Q}[\pi]\text{-mod.-}\mathbf{Z}\text{-gradués}.$$

Avant d'énoncer le théorème de comparaison pour $d_0\mathrm{DM}_{-}^{\mathrm{eff}}(\eta)$, commençons par un lemme :

III.2.6 Lemme. — *Pour tout faisceau $\mathscr{F}$ invariant par homotopie, le morphisme $C_0(\mathscr{F}) \to C_\bullet(\mathscr{F})$ est un quasi-isomorphisme. En particulier, si $p : X \to \eta$ un η-schéma algébrique étale, le morphisme de complexes $C_\bullet([X]) \leftarrow C_0([X]) \backsimeq p_*\mathbf{Z} =: \mathbf{Z}^{X/\eta}$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. — Comme $\mathscr{F}$ est invariant par homotopie, le complexe $C_\bullet(\mathscr{F})$ est isomorphe au complexe :

$$\big(\cdots \xrightarrow{0} \mathscr{F} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathscr{F} \xrightarrow{0} \mathscr{F} \to 0 \to 0 \to \cdots\big),$$

où le dernier $\mathscr{F}$ est placé en degré 0. Le résultat annoncé en découle. Le cas particulier résulte de l'invariance par homotopie de $c(-,X) = \mathbf{Z}^{X/\eta}$. □

En particulier, pour deux η-schémas étale finis X et Y, le morphisme induit par le foncteur H^0,

$$\mathsf{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)}(C_\bullet([X]), C_\bullet([Y])) \leftarrow \mathsf{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)}(\mathbf{Z}^{X/\eta}, \mathbf{Z}^{Y/\eta}) \overset{\textbf{III.2.1}}{\simeq} c(X,Y)$$

est un isomorphisme.

Pour toute catégorie additive C, notons $\mathscr{F}(C)$ la catégorie de foncteurs additifs contravariants de C dans la catégorie des groupes abéliens. Le foncteur $\mathrm{Perm}(\eta) \to \mathscr{F}(\mathrm{Perm}(\eta))$, qui à X associe $h_X = \mathsf{Hom}(-,X)$, est pleinement fidèle et tombe tautologiquement dans la sous-catégorie pleine P des objets projectifs de $\mathscr{F}(\mathrm{Perm}(\eta))$. Ainsi, son extension en un foncteur $\mathsf{K}^b(\mathrm{Perm}(\eta)) \to \mathsf{D}^b(\mathscr{F}(\mathrm{Perm}(\eta))$ est encore pleinement fidèle.

III.2.7 Lemme. — *L'image du foncteur composé* $\mathsf{K}^b(\mathrm{Perm}(\eta)) \to \mathsf{D}^-(\mathscr{F}(\mathrm{Perm}(\eta))$ *est dense.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que la catégorie $\mathscr{F}(\mathrm{Perm}(\eta))$ a suffisamment d'objets projectifs. En effet tout faisceau $\mathscr{G}$ est canoniquement quotient de $\bigoplus_{(X,\alpha)} h_X \to \mathscr{G}$, où X décrit les objets de $\mathrm{Perm}(\eta)$ et $\alpha \in \mathscr{G}(X) = \mathsf{Hom}(h_X, \mathscr{G})$. De plus toute somme directe d'objets projectifs est un objet projectif. Ainsi, le foncteur canonique $\mathsf{K}^-(\mathsf{P}) \to \mathsf{D}^-(\mathscr{F}(\mathrm{Perm}(\eta))$ est une équivalence. Le foncteur $\mathsf{K}^b(\mathrm{Perm}(\eta)) \to \mathsf{D}^-(\mathscr{F}(\mathrm{Perm}(\eta)) \xleftarrow{\sim} \mathsf{K}^-(\mathsf{P})$ se factorise à travers $\mathsf{K}^b(\mathrm{Perm}(\eta)) \to \mathsf{K}^b(\mathsf{P})$, trivialement d'image dense. Il reste donc à montrer que la sous-catégorie $\mathsf{K}^b(\mathsf{P})$ de $\mathsf{K}^-(\mathsf{P})$ est dense, ce qui est un fait général. Soit K un objet de $\mathsf{K}^-(\mathsf{P})$ et notons, pour chaque $i \in \mathbf{Z}$, $\sigma_{\geq i}K$ le tronqué naïf : $(\sigma_{\geq i}K)^\alpha = K^\alpha$ si $\alpha \geq i$ et 0 sinon. Les morphismes canoniques $\sigma_{\geq i}K \to K$ s'additionnent pour donner un morphisme

$$K' := \oplus_{i\in\mathbf{Z}}\sigma_{\geq i}K \to K.$$

Pour chaque $\alpha \in \mathbf{Z}$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
K'^\alpha = \oplus_{i\leq\alpha}K^\alpha \arrow[r, "\text{somme}"] \arrow[d, "\oplus_{i\leq\alpha}d_\alpha\oplus 0"] & K^\alpha \arrow[d, "d_\alpha"] \\
K'^{\alpha+1} = \oplus_{i\leq\alpha+1}K^{\alpha+1} \arrow[r, "\text{somme}"] & K^{\alpha+1}
\end{tikzcd}$$

Pour chaque $i \in \mathbf{Z}$, on a un morphisme canonique $\sigma_{\geq i+1}K \to \sigma_{\geq i}K$. Cependant, définissons un autre morphisme $f : K'' := \oplus_{i\in\mathbf{Z}}\sigma_{\geq i+1}K \to \oplus_{i\in\mathbf{Z}}\sigma_{\geq i}K = K'$. En degré α,

$$f^\alpha : K''^\alpha = \oplus_{i\leq\alpha-1}K^\alpha \to \oplus_{i\leq\alpha}K^\alpha = K'^\alpha,$$

est donné par

$$f^\alpha((\cdots, x_{\alpha-1})) = (\cdots, x_{\alpha-1}, -\sum_{i\leq\alpha-1} x_i).$$

On a une suite exacte :

$$0 \to K'' \xrightarrow{f} K' \to K \to 0,$$

scindée degré à degré. Comme K'' et K' appartiennent à l'*adhérence* de l'image de $\mathsf{K}^b(\mathsf{P})$ dans $\mathsf{K}^-(\mathsf{P})$, cela achève la démonstration du lemme. □

Le foncteur de restriction $r_* : \mathrm{NisTrans}(\eta) \to \mathscr{F}(\mathscr{L}\mathrm{Corr}_0(\eta)) \simeq \mathscr{F}(\mathrm{Perm}(\eta))$ admet un adjoint à gauche r^* : tout objet de $\mathscr{F}(\mathscr{L}\mathrm{Corr}_0(\eta))$ est canoniquement colimite de préfaisceaux représentables ; cette colimite, vue dans $\mathrm{NisTrans}(\eta)$, donne l'adjoint cherché. Son image est constituée de faisceaux invariants par homotopie. Ce foncteur r^* permet d'en définir un second : $\mathsf{D}^-(\mathscr{F}(\mathrm{Perm}(\eta))) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)$, qui se factorise par $d_0\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)$.

III.2.8 Proposition. — *Le foncteur* $\beta : \mathsf{D}^-(\mathscr{F}(\mathrm{Perm}(\eta))) \to d_0\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)$ *ainsi construit est une équivalence de catégories triangulées.*

Démonstration. — Compte tenu de [**Lev98**], II.2.4.8.1 et 2.4.9, la catégorie triangulée $\mathsf{D}^b(\mathscr{F}(\mathrm{Perm}(\eta))$ est pseudo-abélienne. (Cela résulte de l'existence de coproduits dénombrables d'un même objet, cf. *loc. cit.*) Ainsi, le foncteur pleinement fidèle $\mathsf{K}^b(\mathrm{Perm}(\eta)) \to \mathsf{D}^-(\mathscr{F}(\mathrm{Perm}(\eta))$ se factorise à travers $\mathsf{K}^b(\mathrm{Perm}(\eta))_{\mathrm{psab}}$. Le foncteur β s'inscrit dans un diagramme essentiellement commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}_0(\eta))_{\mathrm{psab}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{D}^-(\mathscr{F}(\mathscr{L}\mathrm{Corr}_0(\eta))) \arrow[d, "\beta"] \\
d_0\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta) \arrow[r, "d_0 i"] & d_0\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta),
\end{tikzcd}$$

où l'on a identifié $\mathscr{L}\mathrm{Corr}_0(\eta)$ et $\mathrm{Perm}(\eta)$. La commutativité du diagramme résulte de **III.2.6**. En effet, pour tout η-schéma fini étale X, le complexe $[X] \in \mathsf{Ob}\ \mathsf{K}^b(\mathscr{L}\mathrm{Corr}_0(\eta))_{\mathrm{psab}}$ est envoyé sur $c(-,X)[0] \simeq \mathbf{Z}^{X/\eta}$ par le triangle supérieur tandis qu'il est envoyé sur $C_\bullet([X])$ par le triangle inférieur. Il résulte de **III.2.2** que la première flèche verticale est une équivalence. Comme les foncteurs horizontaux sont d'image dense (cf. §1 et **III.2.7**), β est aussi une équivalence de catégories. □

Cela permet de munir $d_0\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)$ d'une t–structure non dégénérée, de coeur $\mathscr{F}(\mathrm{Perm}(\eta))$.

III.3. Motifs de dimension ≤ 1

III.3.1. Calcul de l'homologie du complexe des chaînes singulières de $\mathbf{G}_m$ et des courbes propres. —

III.3.1.1 Lemme. — *Soit X un schéma noethérien régulier. Les morphismes $\mathbf{G}_m(X) \to \mathbf{G}_m(\mathbf{A}^1_X)$ et $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\mathbf{A}^1_X)$ associés à la projection $p : \mathbf{A}^1_X \to X$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. — Pour tout anneau A *réduit*, l'inclusion $A^\times \to (A[x])^\times$ est un isomorphisme ; l'invariance par homotopie de $\mathbf{G}_m$ restreint aux schémas réguliers en résulte. La suite spectrale de Leray pour le morphisme p (pour la topologie étale par exemple), ainsi que l'isomorphisme $\mathbf{G}_m \xrightarrow{\sim} p_*\mathbf{G}_m$, nous ramènent à montrer que $\mathrm{R}^1_{\text{ét}} p_*\mathbf{G}_m = \{1\}$ est trivial. Le morphisme p étant cohérent, il s'agit par passage aux fibres, de vérifier que si X' est local régulier, donc factoriel (cf. [**Gro69**] IV 21.11.1), $\mathrm{Pic}(\mathbf{A}^1_{X'}) = 0$. Cela résulte du fait que $\mathbf{A}^1_{X'}$ est lui aussi factoriel et que le groupe de Picard d'un tel schéma est trivial (*loc. cit.* 21.6.10). □

De plus ces faisceaux (pour la topologie de Nisnevich) sont canoniquement munis de transferts :

III.3.1.2 Lemme. — *Soit G un η-schéma en groupes abéliens. Le faisceau de Nisnevich $\mathscr{G}$ qu'il représente sur $\mathscr{L}(\eta)$ peut être muni canoniquement de transferts.*

Démonstration. — Soient $X, Y \in \mathsf{Ob}\,\mathscr{L}(\eta)$ supposés connexes et $Z \hookrightarrow X \times_\eta Y$ un sous-schéma fermé intègre de degré fini d sur X. À un tel sous-schéma correspond un morphisme de schémas $f_Z : X \to Y^{(d)}$, où $Y^{(d)}$ désigne le produit symétrique d-ième de Y sur η (le schéma Y est quasi-projectif). Soit maintenant $x \in \mathscr{G}(Y)$, vu comme morphisme de η-schémas : $x : Y \to G$. La flèche en pointillés du diagramme suivant est l'élément de $\mathscr{G}(X)$ recherché.

$$\begin{tikzcd}
 & G & \\
 & G^{(d)} \arrow[u, "\text{somme}"] & \\
G \arrow[r] & Y^{(d)} \arrow[u, "x^{(d)}"] & \\
Y \arrow[u, "x"] \arrow[r] & X \arrow[u, "f_Z"] \arrow[uu, dotted, bend right=60] &
\end{tikzcd}$$

On étend ensuite par additivité cette définition aux correspondances quelconques et aux schémas X et Y non nécessairement connexes. □

III.3.1.3. L'homologie de $\mathbf{G}_m$. Par fonctorialité, le morphisme de η–schémas $\mathbf{G}_m \to \eta$ induit un morphisme de faisceaux représentables : $c(-, \mathbf{G}_m) \to c(-, \eta) = \mathbf{Z}$. Construisons un morphisme $c(-, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{G}_m$. Soit T un η–schéma algébrique lisse et $Z \in c(T, \mathbf{G}_m)$; on veut définir un élément de $\mathbf{G}_m(T)$. En composant $Z \hookrightarrow T \times_\eta \mathbf{G}_m$ avec la projection sur $\mathbf{G}_m$, on définit un élément $f \in \mathbf{G}_m(Z)$. Sa norme par le morphisme fini $Z \to T$ est un élément de $\mathscr{K}_T^\times$ (l'anneau total des fractions) ; comme le schéma T est normal, c'est même un élément de $\mathbf{G}_m(T)$. On a construit un morphisme de faisceaux Nisnevich avec transferts $c(-, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{G}_m \oplus \mathbf{Z}$. Comme $\mathbf{G}_m \oplus \mathbf{Z}$ est invariant par homotopie, $\mathbf{G}_m \oplus \mathbf{Z} \to C_\bullet(\mathbf{G}_m \oplus \mathbf{Z})$ est un quasi-isomorphisme. Finalement, par application du foncteur $C_\bullet$, on obtient un morphisme de $\mathrm{DM}^{\text{eff}}_-(\eta)$:

$$\varphi : C_\bullet([\mathbf{G}_m]) \to (\mathbf{G}_m \oplus \mathbf{Z})[0].$$

On a le résultat fondamental suivant :

***III.3.1.4 Proposition* (cf. [SV96], 3.1).** — *Le morphisme φ est un quasi-isomorphisme.*

La section unité $\eta \xrightarrow{1} \mathbf{G}_m$ induit un morphisme $C_\bullet([\mathbf{G}_m]) \to C_\bullet([\eta])$; notons $\mathbf{Z}(1)$ son conoyau, décalé de -1. D'après la proposition précédente, on a

$$\mathbf{Z}(1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m[-1].$$

III.3.1.5. Soit $f : X \to \eta$ une courbe propre et lisse. D'après [**Voe00**] 4.3.2, on dispose, sous réserve de la résolution des singularités, d'un isomorphisme canonique $C_\bullet(X) \to \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)}(C_\bullet(X), \mathbf{Z}(1)[2])$. Cet énoncé est en fait valable inconditionnellement, comme l'a indiqué Joël Riou à l'auteur. Voici rapidement l'argument dont les détails sont laissés au lecteur. Soit $\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(\eta)$ la catégorie des motifs (purs) de Chow effectifs (à coefficients entiers). On prend la convention homologique de Voevodsky (et non celle initialement choisie par Grothendieck) : si X et Y sont deux η-schémas projectifs et lisses, avec X connexe de dimension d_X, $\mathsf{Hom}_{\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(\eta)}(X, Y) = A_{d_X}(X \times_\eta Y)$, le groupe des cycles de dimension d_X modulo équivalence rationnelle. On a un foncteur naturel (cf. *loc. cit.*, 2.1.4) $\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(\eta) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta)$ envoyant le motif $h(X)$ d'une variété projective lisse X sur $[X]$ et le motif de Lefschetz (cf. [**Sch94**]) sur $\mathbf{Z}(1)[2]$. Soit $\mathrm{Chow}(\eta)$ la catégorie obtenue à partir de $\mathrm{Chow}(\eta)$ en inversant formellement le motif de Lefschetz $\mathbf{L}$[ii] et $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)$ la catégorie triangulée obtenue en inversant le motif de Tate $\mathbf{Z}(1)$ (cf. [**Voe00**], 2.1.3). Ces deux catégories sont encore des catégories tensorielles (cf. *loc. cit.*, 2.1.5 pour $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)$) et le foncteur $\mathrm{Chow}(\eta) \to \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)$ déduit de $\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(\eta) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta)$ préserve le produit tensoriel. Soit X une courbe projective et lisse purement de dimension 1 sur η comme précédemment. Posons $h(X)^\vee := h(X) \otimes \mathbf{L}^{-1}$, le motif de Chow dual de $h(X)$. Il existe des flèches $h(X) \otimes h(X)^\vee \to \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \to h(X) \otimes h(X)^\vee$ satisfaisant les hypothèses de [**LMSM86**], III.1.6. Le fait remarquable est que, *réciproquement*, pour tout objet A, l'existence d'un objet B, et de flèches $A \otimes B \to \mathbf{1}$ et $\mathbf{1} \to A \otimes B$ satisfaisant ces relations implique que $B \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathbf{1})$ (et A est dit *fortement dualisable*). En particulier, l'existence même du foncteur $\mathrm{Chow}(\eta) \to \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)$ montre que $[X] \xrightarrow{\sim} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)}([X] \otimes (\mathbf{Z}(1)[2])^{-1}, \mathbf{Z})$ (cf. *loc. cit.*,III.1.9). Finalement, on a la formule $[X] \xrightarrow{\sim} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)}([X], \mathbf{Z}(1)[2])$. Il résulte de la pleine fidélité du foncteur $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta) \to \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)$, démontrée inconditionnellement dans [**Voe**], que le Hom-interne $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\eta)}([X], \mathbf{Z}(1)[2])$ coïncide avec celui dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta)$. De plus, il est tautologique que le Hom-interne dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta)$ coïncide avec celui dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)$ quand il existe. En conclusion, nous avons vérifié qu'il existe un isomorphisme canonique $C_\bullet(X) \to \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)}(C_\bullet(X), \mathbf{Z}(1)[2])$.
D'après [**Voe00**] 3.2.8, l'objet $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\eta)}(C_\bullet(X), \mathbf{Z}(1)[2])$ est isomorphe au complexe $\mathrm{R}_{\mathrm{Nis}} f_* \mathbf{Z}(1)[2]$ (et donc à $\mathrm{R}_{\mathrm{Nis}} f_* \mathbf{G}_m[1]$). Comme X est de dimension 1, il résulte de *loc. cit.* 3.2.9 que le morphisme canonique $\tau_{\leq 0}(\mathrm{R}_{\mathrm{Nis}} f_* \mathbf{G}_m[1]) \to \mathrm{R}_{\mathrm{Nis}} f_* \mathbf{G}_m[1]$ est un isomorphisme. De plus, d'après Hilbert's 90,

$$\tau_{\leq 0}(\mathrm{R}_{\mathrm{Nis}} f_* \mathbf{G}_m[1]) \to \tau_{\leq 0}(\mathrm{R}_{\mathrm{fppf}} f_* \mathbf{G}_m[1])$$

est un isomorphisme. Admettant **III.3.1.4**, nous avons donc démontré le :

III.3.1.6 Corollaire. — *Soit $f : X \to \eta$ une courbe propre et lisse, on a un isomorphisme canonique :*

$$C_\bullet(X) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0}(\mathrm{R}_{\mathrm{fppf}} f_* \mathbf{G}_m[1]).$$

[ii] Il se trouve que le produit tensoriel avec ce motif est pleinement fidèle.

Ce résultat est un peu plus précis que [**Voe00**] 3.4.2, où l'on calcule seulement la cohomologie de ce complexe.

III.3.1.7 Remarques. —

1. Ce résultat est à rapprocher de la formule des coefficients universels de Deligne [**SGA 4** XVIII 1.5] faisant intervenir le champs de Picard (pour le gros site fppf sur η) :
$$\mathrm{PIC}(X/\eta) := f_*\mathrm{ch}(\mathbf{G}_m[1]) \simeq \mathrm{ch}(\tau_{\leq 0}(\mathrm{R}f_*\mathbf{G}_m[1])).$$
2. On peut déduire de **III.3.1.4** et **III.3.1.6** le calcul de l'homologie d'une courbe X affine et lisse sur η. Il suffit d'introduire une compactification lisse $\overline{X}$ de X, obtenue en rajoutant le fermé réduit X_∞. D'après **III.2.6**, on a un isomorphisme $C_\bullet(X_\infty) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}^{X_\infty/\eta}$. Le triangle de Gysin ([**Voe00**] 3.5.4) dans $\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}(\eta)$ se réécrit ici :
$$\mathbf{G}_m^{X_\infty} \to C_\bullet(X) \to \tau_{\leq 0}(\mathrm{R}_{\mathrm{fppf}} f_*\mathbf{G}_m[1]) \to .$$
On peut en déduire que $C_\bullet(X)$ est concentré en degré 0 et isomorphe au faisceau $\underline{\mathrm{Pic}}_{(\overline{X},X_\infty)}$ des classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles trivialisés à l'infini. Cela généralise **III.3.1.4** car on a un isomorphisme $\underline{\mathrm{Pic}}_{(\mathbf{P}^1_\eta,\{0,\infty\})} \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{G}_m$. Nous n'aurons pas besoin de cette remarque.

III.3.2. Rappels sur les 1-motifs de Deligne. — Soit S un schéma. Nous appellerons ici S-schéma semi-abélien tout S-schéma en groupe J commutatif, extension (pour la topologie fppf sur S) d'un schéma abélien A par un tore T. À isomorphisme près, A et T sont bien déterminés.

III.3.2.1 Définition **([Del74], § 10)**. — La catégorie 1-Mot(S) des 1-motifs sur S est la sous-catégorie pleine de $\mathsf{C}^{[-1,0]}(S_{\mathrm{fppf}})$ dont les objets sont les complexes S–schémas en groupes commutatifs de longueur 1 :
$$M = [X \to J],$$
où X, placé en degré -1, est localement isomorphe pour la topologie étale à un groupe $\mathbf{Z}^r$, $r \in \mathbf{N}$, et J est un schéma semi-abélien.

Ce n'est pas une catégorie abélienne. Si $S = \eta$ est le spectre d'un corps de point générique géométrique $\bar{\eta}$, la donnée de $M = [X \to J]$ est équivalente à la donnée d'un $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$-module continu $\mathbf{Z}^r$, d'un schéma semi-abélien J et d'un morphisme équivariant de groupes $\mathbf{Z}^r \to J(\bar{\eta})$.

Chaque 1-motif $M = [X \to J]$, où J est extension de A par T, est muni d'une *filtration par le poids* W, croissante, indexée par $\mathbf{Z}$, définie par
$$W_n(M) = 0 \text{ si } n < -2,\ W_{-2}(M) = [0 \to T],\ W_{-1}(M) = [0 \to J] \text{ et } W_m(M) = M \text{ si } m \geq 0.$$

On montre sans difficulté que tout morphisme de 1-motifs respecte la filtration par le poids et induit donc un morphisme sur les quotients successifs, que sont : la partie torique T (poids -2), la partie abélienne A (poids -1) et la partie étale $X[1]$ (poids 0).

Supposons dorénavant que S est le spectre d'un corps, de point générique noté η.

À toute catégorie additive C, on peut associer une catégorie $\mathbf{Q}$-linéaire $\operatorname{iso} C$, universelle pour les foncteurs de C dans une catégorie $\mathbf{Q}$-linéaire. Il suffit de conserver les mêmes objets et de changer les flèches en $\mathsf{Hom}_{\operatorname{iso} C}(-,-) := \mathsf{Hom}_C(-,-) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. Procédant ainsi pour la catégorie des 1-motifs sur η, on définit la catégorie des 1-*motifs à isogénie près*. Les morphismes de 1-Mot(η) qui deviennent des isomorphismes dans 1-Isomot(η), les *isogénies*, sont ceux pour lesquels le morphisme sous-jacent en poids 0 est injectif de conoyau fini, tandis que le morphisme sous-jacent entre les parties semi-abéliennes est surjectif de noyau fini. La filtration par le poids s'étend automatiquement en une filtration dans 1-Isomot(η).

III.3.2.2 Lemme. — *Pour chaque entier $i \in \{0, -1, -2\}$, la sous-catégorie des 1-isomotifs purs de poids i est abélienne semi-simple et épaisse. De plus, la catégorie 1-Isomot(η) est abélienne.*

Démonstration. — Pour $i = -1$ c'est un corollaire du théorème de complète irréductibilité de Poincaré. En poids 0, c'est le lemme de Maschke. Le cas du poids -2 s'en déduit, par dualité de Cartier. Que 1-Isomot(η) soit abélienne en résulte. □

III.3.2.3 Remarque. — Il est intéressant de remarquer que si η est le spectre d'un corps fini $\mathbf{F}_q$, cette catégorie est même semi-simple. Par exemple, la classe J est extension d'une variété abélienne A par le tore $\mathbf{G}_m$, sa classe dans $\operatorname{Ext}^1(A, \mathbf{G}_m) = A^\vee(\mathbf{F}_q)$ (fini) est de torsion. De même,

$$\operatorname{Ext}^1_{\text{1-Isomot}(\mathbf{F}_q)}([\mathbf{Z} \to 0], [0 \to \mathbf{G}_m]) \simeq \mathbf{F}_q^\times \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = 0.$$

Sans hypothèse sur η, on a le résultat suivant.

III.3.2.4 Proposition. — *La catégorie 1-Isomot(η) est de dimension cohomologique ≤ 1.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que pour tout couple de 1-motifs *purs* M et M', on a

$$\operatorname{Ext}^2_{\text{1-Isomot}(\eta)}(M, M') = 0.$$

Pour cela on commence par vérifier que le groupe des extensions de M par M', supposés purs, est nul si le poids de M' est supérieur (ou égal) au poids de M : cela résulte de calculs simples. (Si M et M' sont de même poids, c'est **III.3.2.2**.) Il résulte formellement de ce résultat que si $\operatorname{Ext}^2_{\text{1-Isomot}(\eta)}(M, M') \neq 0$, avec M et M' purs, on a $M = X[1]$ pur de poids 0 et $M' = T'$ pur de poids -2. Soit $e \in \operatorname{Ext}^2_{\text{1-Isomot}(\eta)}(X[1], T')$; il existe un 1-motif Z, et deux classes $e_1 \in \operatorname{Ext}^1_{\text{1-Isomot}(\eta)}(X[1], Z)$, $e_2 \in \operatorname{Ext}^1_{\text{1-Isomot}(\eta)}(Z, T')$ telles que $e = e_2 \cdot e_1$. Notons J_Z (resp. $X_Z[1], A_Z$) la partie semi-abélienne (resp. étale, abélienne) de Z ; compte tenu de la nullité de $\operatorname{Ext}^1(X[1], X_Z[1])$, la classe e_1 se factorise (non canoniquement) par $\operatorname{Ext}^1(X[1], J_Z)$, pour donner la classe e après multiplication par l'image de e_2 dans $\operatorname{Ext}^1(J_Z, T')$. On peut donc supposer Z de poids ≤ -1. De la même façon, e_2 se factorise par $\operatorname{Ext}^1(A_Z, T')$ si bien que l'on peut supposer que Z est une variété abélienne. Quitte à multiplier e_1 et e_2 par des entiers non nuls et remplacer les groupes intervenant par des groupes isogènes, on peut supposer qu'elles correspondent à des morphismes dans 1-Mot(η). Finalement e_1 correspond à une extension dans 1-Mot(η) : $0 \to T' \to J' \to A \to 0$ et e_2 à $0 \to A \to \widetilde{M}_0 \to X[1] \to 0$. Dans 1-Mot($\eta$), on ne peut pas toujours relever le morphisme $X \to A$ en $X \to J$, mais quitte à changer X en un groupe isogène c'est possible (car $J \to A$ est un épimorphisme dans 1-Isomot(η)). On peut donc supposer qu'il existe un 1-motif $\widetilde{M}$ de gradué $(X[1], A, T')$ réalisant ces extensions en ce sens que e_1 correspond à

$W_{-2}(\widetilde{M}) \to W_{-1}(\widetilde{M}) \to \mathrm{gr}_{-1}(\widetilde{M})$ et e_2 à $\mathrm{gr}_{-1}(\widetilde{M}) \to \widetilde{M}/W_{-2}(\widetilde{M}) \to \mathrm{gr}_0(\widetilde{M})$. Il résulte du lemme suivant que le morphisme composé correspondant $\mathrm{gr}_0(\widetilde{M}) \to W_{-2}(\widetilde{M})[2]$ (dans la catégorie dérivée) est nul. □

III.3.2.5 Lemme. — *Soit M un objet d'une catégorie abélienne, et $0 \to M_{-2} \subset M_{-1} \subset M$ une filtration à deux crans de M. Soit e_1 la classe de l'extension $0 \to M_{-1}/M_{-2} \to M/M_{-2} \to M/M_{-1} \to 0$ et e_2 la classe de l'extension $0 \to M_{-2} \to M_{-1} \to M_{-1}/M_{-2} \to 0$. Alors, la classe de $e_2 \cdot e_1$ dans $\mathsf{Ext}^2(M/M_{-1}, M_{-2})$ est nulle.*

Démonstration. — Il suffit de constater que e_1 correspond au morphisme de complexes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{-2} \arrow[r] & M_{-1} \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

tandis que e_2 correspond au morphisme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{-2} \arrow[r] \arrow[d] & M_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{-2} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le produit, qui correspondant à la composition dans la catégorie dérivée, est donc nul. □

III.3.3. Comparaison avec la théorie de Voevodsky. —

III.3.3.1 Lemme. — *Soit X (resp. T, A) un η-schéma localement isomorphe (pour la topologie étale) à un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini (resp. un tore, un variété abélienne sur η). Le faisceau de Nisnevich représenté par X (resp. T, A) est invariant par homotopie.*

Démonstration. — Par descente, on peut supposer X (resp. T) constant (resp. déployé). Dans ce cas, cela résulte de l'invariance par homotopie du π_0 (resp. de **III.3.1.1**).

Soit $S \in \mathsf{Ob}\ \mathscr{L}(\eta)$; il nous reste à montrer que le morphisme $A(S) \to A(\mathbf{A}^1_S)$ induit par la projection $p : \mathbf{A}^1_S \to S$ est un isomorphisme. Si S est un corps c'est classique. Notons $s : S \to \mathbf{A}^1_S$ la section nulle. Soit $f : \mathbf{A}^1_S \to A$; montrons que si $g = fs : S \to A$ et $\tilde{f} := gp$, on a $f = \tilde{f}$, c'est-à-dire $\varphi := f - \tilde{f} = 0$. Pour tout point s de S, le morphisme composé $\mathbf{A}^1_s \hookrightarrow \mathbf{A}^1_S \xrightarrow{\varphi} A$ est trivial. Ainsi, le morphisme φ est topologiquement constant. Comme $\mathbf{A}^1_S$ est intègre, on a bien $\varphi = 0$ d'où le résultat. □

III.3.3.2. Notons $\text{ÉtTrans}(\eta)$ la catégorie abélienne des préfaisceaux abéliens sur $\mathscr{L}\mathrm{Corr}(\eta)$ dont la restriction à $\mathscr{L}(\eta)$ soit un faisceau pour la topologie étale et $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}^-(\text{ÉtTrans}(\eta))$ constituée des complexes à cohomologie invariante par homotopie. D'après les lemmes **III.3.1.2** (existence de transferts canoniques) et **III.3.3.1** (invariance par homotopie) le foncteur canonique $1\text{-Mot}(\eta) \to$

$\mathsf{D}^-(\mathscr{L}_{\text{ét}}(\eta))$, où $\mathscr{L}_{\text{ét}}(\eta)$ est le gros site étale sur $\mathscr{L}(\eta)$, induit un foncteur $1\text{-Mot}(\eta) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)$. Par tensorisation par $\mathbf{Q}$ et application du foncteur complexe simple associé, on obtient un foncteur

$$\mathsf{D}^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \to \mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta).$$

III.3.3.3 Proposition. — *Le foncteur précédent est pleinement fidèle.*

III.3.3.4 Remarque. — D'après [**Voe00**], 3.3.2, le foncteur canonique $\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(\eta) \to \mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)$ est une équivalence de catégories. La topologie étale étant sans doute mieux connue du lecteur, nous la préférons ici.
Prendre garde au fait que le foncteur d'oubli des transferts $\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta) \to \mathrm{iso}\,\mathsf{D}^-(\mathscr{L}_{\text{ét}}(\eta))$ n'est pas pleinement fidèle. De même, il faut garder à l'esprit que si $\mathrm{iso}\,\mathsf{D}^b(\mathbf{Z}-\mathrm{mod}) \to \mathsf{D}^b(\mathrm{iso}\,\mathbf{Z}-\mathrm{mod})$ est bien une équivalence, il n'en va pas de même de $\mathsf{D}^b(\mathrm{iso}\,\mathbf{Z}-\mathrm{mod}) \to \mathsf{D}^b(\mathbf{Q}-\mathrm{ev})$. (Cette difficulté disparaît l'on se restreint aux groupes abéliens constructibles.)

Pour tout objet $\mathscr{K} \in \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)$, nous noterons $\mathscr{K}_{\mathbf{Q}}$ son image dans $\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)$. De même, pour tout groupe abélien H, on pose $H_{\mathbf{Q}} := H \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

*Démonstration de la proposition **III.3.3.3***. — Il suffit de montrer le fait suivant :

pour tout $i \in \mathbf{Z}$ et tout couple de 1-motifs, M et M', le morphisme

$$(\star)\ \mathsf{Ext}^i_{1\text{-Isomot}(\eta)}(M, M') \to \mathsf{Hom}_{\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(M_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i]) \big(= \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^-(\text{ÉtTrans}(\eta))}(M, M'[i])_{\mathbf{Q}} \big)$$

est un isomorphisme.

Par dévissage, on peut supposer M et M' purs. De plus, par semi-simplicité, si M (ou M') est pur de poids 0 (resp. -2), on peut supposer que M (ou M') est isomorphe à un tore $\mathbf{G}_m^{\widetilde{\eta}/\eta}$ (resp. $\mathbf{Z}^{\widetilde{\eta}/\eta}$), où $\widetilde{\eta}/\eta$ est fini étale.

Nous utiliserons à plusieurs reprises la proposition suivante :

III.3.3.5 Proposition (**[Voe00], 3.1.9 et 3.1.12**). — *Soient X un η-schéma algébrique lisse et $\mathscr{F}$ un faisceau abélien étale avec transferts, invariant par homotopie. Alors, pour tout entier $i \in \mathbf{Z}$, on a un isomorphisme :*

$$\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\acute{e}t}(\eta)}(C_\bullet([X])_{\mathbf{Q}}, \mathscr{F}_{\mathbf{Q}}[i]) \simeq \mathrm{H}^i_{Zar}(X, \mathscr{F})_{\mathbf{Q}}$$

III.3.3.6. Démonstration de $(\star)$ avec $M = \mathbf{Z}^{\widetilde{\eta}/\eta}[1]$ pur de poids 0. On a vu en **III.2.6** que $M \xrightarrow{\sim} C_\bullet(\widetilde{\eta})[1]$; d'après **III.3.3.5**, on a donc, pour tout 1-motif pur M',

$$\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(M_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i]) \simeq \mathrm{H}^{i-1}(\widetilde{\eta}, M')_{\mathbf{Q}}.$$

Si $M' = X'[1]$ est pur de poids 0, on a $\mathrm{H}^{i-1}_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{\eta}, M')_{\mathbf{Q}} = \mathrm{H}^0(\widetilde{\eta}, X')_{\mathbf{Q}}$ si $i = 0$ et 0 sinon. Ces groupes coïncident bien avec $\mathsf{Ext}^i_{1\text{-Isomot}(\eta)}(\mathbf{Z}^{\widetilde{\eta}/\eta}[1], X'[1])$, isomorphe à $\mathsf{Hom}_{1\text{-Mot}(\eta)}(\mathbf{Z}^{\widetilde{\eta}/\eta}, X')_{\mathbf{Q}}$ pour $i = 0$. Si $M' = J'$ est une variété semi-abélienne pure, $\mathrm{H}^{i-1}_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{\eta}, J')_{\mathbf{Q}}$ est nul sauf éventuellement pour $i = 1$, auquel cas il s'agit de $J'(\widetilde{\eta})_{\mathbf{Q}}$. D'un autre côté, $\mathsf{Ext}^i_{1\text{-Isomot}(\eta)}(\mathbf{Z}^{\widetilde{\eta}/\eta}[1], J')$ est nul sauf éventuellement pour $i = 1$. Dans ce cas,

une extension représentant un élément de $\mathsf{Ext}^1_{\text{1-Isomot}(\eta)}(\mathbf{Z}^{\widetilde{\eta}/\eta}[1], J')$ correspond à un isomotif $[\mathbf{Z}^{\widetilde{\eta}/\eta} \xrightarrow{f} J']$, uniquement défini par la flèche $f \in J'(\widetilde{\eta})_{\mathbf{Q}}$.

III.3.3.7. Démonstration de $(\star)$ avec $M = \mathbf{G}_m^{\widetilde{\eta}/\eta}$ pur de poids -2. Il résulte de **III.3.1.6** que $h_{-1}(\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}})$ est isomorphe à M. Cela découle de l'isomorphisme $\mathbf{G}_m^{\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}}/\eta} \simeq \mathbf{G}_m^{\widetilde{\eta}/\eta}$. D'après *loc. cit.*, le groupe $h_0(\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}})$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Pic}}(\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}}/\eta)$, donc à $\mathbf{Z}^{\widetilde{\eta}/\eta}$. Soient M' un 1-isomotif pur et $i \in \mathbf{Z}$. Appliquons le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso\,DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(-, M'_{\mathbf{Q}}[i])$ au triangle distingué canonique :

$$h_0(\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}})_{\mathbf{Q}}[-2] \to h_{-1}(\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}})_{\mathbf{Q}} \to C_\bullet(\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}})_{\mathbf{Q}}[-1] \to .$$

Compte-tenu de **III.3.3.5**, **III.3.3.6** et des calculs précédents, on obtient un triangle distingué :

$$\mathrm{H}^{i+1}_{\mathrm{Zar}}(\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}}, M')_{\mathbf{Q}} \to \mathsf{Hom}_{\mathrm{iso\,DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(\mathbf{G}_m^{\widetilde{\eta}/\eta}{}_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i]) \to \mathrm{H}^{i+2}_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{\eta}, M')_{\mathbf{Q}} \to .$$

Compte-tenu du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C_\bullet(\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}}) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{h}_0(\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}}) \arrow[d, "\text{isom.}"] \\ C_\bullet(\widetilde{\eta}) \arrow[r, "\text{isom.}"] & \underline{h}_0(\widetilde{\eta}) \end{tikzcd} ,$$

la suite exacte longue précédente fait de $\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso\,DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(-, M'_{\mathbf{Q}}[i])$ le $(i+1)$-ième groupe de cohomologie d'un cône $\mathscr{C}$ du morphisme :

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{\eta}, M')_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Zar}}(\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}}, M')_{\mathbf{Q}}$$

associé à la projection $\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}} \to \widetilde{\eta}$.

On commence par en déduire que $\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso\,DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(\mathbf{G}_m^{\widetilde{\eta}/\eta}{}_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i])$ est nul pour $i \notin \{-1, 0\}$. En effet, $\mathscr{C}$ est dans $\mathsf{D}^{[0,1]}$, puisque $\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}}$ est de dimension 1. Pour $i \in \{-1, 0\}$, il est plus simple de démontrer $(\star)$ sans utiliser l'interprétation précédente (voir aussi **III.3.3.8**). Traitons en détail le cas $i = -1$. Si M' est pur de poids < 0, $\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso\,DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(\mathbf{G}_m^{\widetilde{\eta}/\eta}{}_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[-1])$ est trivialement nul, car $M'_{\mathbf{Q}}$ est placé en degré 0. La nullité de $\mathsf{Ext}^{-1}_{\text{1-Isomot}(\eta)}(M, M')$ est également évidente.
Si $M' = X'[1]$, $\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso\,DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(\mathbf{G}_m^{\widetilde{\eta}/\eta}{}_{\mathbf{Q}}, X'_{\mathbf{Q}}[1][-1]) = \mathsf{Hom}_{\mathrm{iso\,DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(\mathbf{G}_m^{\widetilde{\eta}/\eta}{}_{\mathbf{Q}}, X'_{\mathbf{Q}}) = 0$.
Pour $i = 0$, si M' est une variété abélienne A', on a

$$\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso\,DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(\mathbf{G}_m^{\widetilde{\eta}/\eta}{}_{\mathbf{Q}}, A') = \mathsf{Hom}_{\mathrm{SchGrp}/\eta}(\mathbf{G}_m^{\widetilde{\eta}/\eta}{}_{\mathbf{Q}}, A') \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = 0.$$

Les autres cas, toujours pour $i = 0$, sont laissés au lecteur.

III.3.3.8 Remarque. — On retrouve le fait élémentaire que si A' est une variété abélienne, $\mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}}, A')_{\mathbf{Q}}$ est nul (prendre $M' = A'$, $i = 0$ et regarder le H^1 de $\mathscr{C}$, dont on vient de montrer la nullité par d'autres moyens). Utilisant les résultats de [**Voe00**], 3.1.12 et **III.3.3.4** on voit que c'est aussi vrai pour la topologie étale. Ce résultat est bien connu (cf. e.g. [**Mil86**], II.5.1).

III.3.3.9. Démonstration de ($\star$) avec M pur de poids -1. Il résulte de [**Kat99**], theorem 11, et **III.3.2.2** que l'on peut supposer A facteur direct de la jacobienne Jac d'une η-courbe C propre, lisse, géométriquement connexe, et possédant un point rationnel. Dans la catégorie des motifs de Chow effectifs, notée $\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(\eta)$ (cf. [**Voe00**], 2.1.4), ce point rationnel induit une décomposition $h(C) = \mathbf{Z} \oplus h_1(C) \oplus \mathbf{L}$, où $\mathbf{L}$ est le motif de Lefschetz (cf. [**Sch94**], pages 167–172, mais avec une convention contravariante). L'existence d'un foncteur covariant $\mathrm{Chow}^{\mathrm{eff}}(\eta) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta)$, envoyant $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{Z}(1)[2]$, appliqué à cette décomposition, montre que le triangle distingué de $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(\eta)$, $h_1(C)[1] \to C_\bullet(C) \to h_0(C) \to$, est scindé. Le faisceau $h_0(C)$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Pic}}_{C/\eta}$, extension de $\mathbf{Z}$ par Jac. (Chaque point rationnel induit une section.) Finalement, on a (non canoniquement) un isomorphisme :

$$C_\bullet(C) \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathrm{Jac} \oplus \mathbf{G}_m[1].$$

Soient M' un 1-isomotif pur et $i \in \mathbf{Z}$ un entier. Le groupe $\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(\mathrm{Jac}_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i])$ est isomorphe au noyau d'un morphisme (non canonique)

$$\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(C_\bullet(C)_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i]) \to \mathsf{Hom}_{\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(\mathbf{Q}, M'_{\mathbf{Q}}[i]) \oplus \mathsf{Hom}_{\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(\mathbf{G}_{m\mathbf{Q}}[1], M'_{\mathbf{Q}}[i]).$$

Le but de cette flèche se réécrit, compte tenu de ce qui précède, $\mathrm{H}^i(\eta, M')_{\mathbf{Q}} \oplus \mathsf{Ext}^{i-1}_{\text{1-Isomot}(\eta)}(\mathbf{G}_m, M')$. Nous n'aurons pas besoin de ce résultat ; voir cependant **III.3.3.10** pour une interprétation.

En particulier, $\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(\mathrm{Jac}_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i])$ s'injecte dans $\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(C_\bullet(C)_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i_{\mathrm{Zar}}(C, M')_{\mathbf{Q}}$. Comme la variété abélienne A qui nous intéresse est facteur direct de Jac dans 1-Isomot(η), le groupe $\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(A_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[i])$ s'injecte aussi dans $\mathrm{H}^i_{\mathrm{Zar}}(C, M')_{\mathbf{Q}}$. En particulier, il est nul pour $i \geq 2$ ou $i < -1$. Il en est de même du groupe des homomorphismes calculé dans 1-Isomot(η). Traitons les différents cas restants, $i \in \{-1, 0, 1\}$, un par un.

1. $i = -1$. Le groupe $\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\text{1-Isomot}(\eta))}(A, M'[-1])$ est nul, pour tout M'. Si M' est de poids ≤ -1, $M'_{\mathbf{Q}}$ est concentré en degré 0, donc $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{Zar}}(C, M')_{\mathbf{Q}}$ est nul aussi. Si $M' = X'[1]$, $\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(A_{\mathbf{Q}}, M'_{\mathbf{Q}}[-1]) = \mathsf{Hom}_{\text{ÉtTrans}(\eta)}(A, X')_{\mathbf{Q}} = 0$ car tout morphisme de schémas en groupes de A vers $\mathbf{Z}$ est constant.
2. $i = 0$. On veut montrer que le morphisme $\mathsf{Hom}_{\text{1-Isomot}(\eta)}(A, M') \to \mathsf{Hom}_{\text{ÉtTrans}(\eta)}(A, M')_{\mathbf{Q}}$ est un isomorphisme. Si M' est concentré en degré 0, c'est évident. Si $M' = X'[1]$, le terme de gauche est nul ; la nullité du terme de droite résulte par exemple du fait que le groupe $\mathrm{H}^1_{\mathrm{Zar}}(C, X')_{\mathbf{Q}}$, dans lequel il s'injecte, est nul (X' est flasque).
3. $i = 1$. Si $M' = X'[1]$, le groupe $\mathsf{Ext}^1_{\text{1-Isomot}(\eta)}(A, X')$ est nul, pour des raisons de poids, tandis que $\mathsf{Hom}_{\mathrm{iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)}(A_{\mathbf{Q}}, X'_{\mathbf{Q}}[1]) \hookrightarrow \mathrm{H}^2_{\mathrm{Zar}}(C, X')_{\mathbf{Q}} = 0$. Supposons enfin $M' = J'$ pur de poids < 0 (i.e. semi-abélien). On veut montrer que le morphisme $\mathsf{Ext}^1_{\text{1-Isomot}(\eta)}(A, J') \to \mathsf{Ext}^1_{\text{ÉtTrans}(\eta)}(A, J')_{\mathbf{Q}}$ est un isomorphisme. Cela résulte du lemme **III.3.3.11**, qui achève la démonstration du théorème **III.3.3.3**.

□

III.3.3.10 Remarque. — Supposons un instant que $M = J = \mathrm{Jac}(C)$. On a vu que $\mathsf{Ext}^i_{\text{1-Isomot}(\eta)}(J, M')$ est (non canoniquement) isomorphe au noyau d'un morphisme $\mathrm{H}^i(C, M') \to \mathrm{H}^i(\eta, M')_{\mathbf{Q}} \oplus \mathsf{Ext}^{i-1}_{\text{1-Isomot}(\eta)}(\mathbf{G}_m, M')$.

Si $i = 1$ et $M' = \mathbf{G}_m$, on retrouve l'autodualité de la jacobienne : ${\mathrm{Pic}^0_{C/\eta}}^\vee(\eta)_{\mathbf{Q}} \simeq \mathrm{Pic}^0_{C/\eta}(\eta)_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{H}^1(C, \mathbf{G}_m)_{\mathbf{Q}} \to \mathsf{Hom}(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_m)_{\mathbf{Q}}\right)$.

Si $i = 0$ et $M' = A'$, on retrouve l'interprétation de la jacobienne comme variété d'Albanese (dans le cas des courbes).

III.3.3.11 Lemme. — *Soient G et G' deux η-schémas en groupes commutatifs lisses, supposés de type fini sur η ou localement pour la topologie étale isomorphe à un groupe abélien libre de type fini. Soit E un faisceau sur $\mathscr{L}_{\acute{e}t}(\eta)$, extension de G par G'. Alors E est représentable par un η-schéma en groupes lisse. De plus, si G et G' sont invariants par homotopie, il en est de même de E. Si l'on munit G et G' des transferts canoniques (**III.3.1.2**), la structure de transferts canonique sur E est la seule qui soit compatible avec celles de G et G'.*

Démonstration d'après M. Raynaud. — Seule la représentabilité est à démontrer : la stabilité par extension de l'invariance par homotopie ainsi que l'unicité des transferts sont évidents. Supposons pour commencer $k = \kappa(\eta)$ séparablement clos. Le G'-torseur E sur G (pour la topologie étale) est représentable au-dessus du point générique η_G de G (essentiellement lisse sur η) : cela résulte du fait que la $\kappa(\eta_G)$-forme correspondante de $G'_{\eta_G^{\text{sép}}}$ s'obtient en quotientant le schéma $G'_{\eta'_G}$, pour une extension finie étale η'_G/η_G, par un groupe fini. La représentabilité du quotient vient du fait que $G'_{\eta'_G}$ est quasi-projectif ou bien affine si G' n'est pas algébrique sur η. La représentabilité de E au-dessus de η_G entraîne le même résultat au-dessus d'un ouvert non vide U de G. Le schéma G étant recouvert par la réunion des $g \cdot U$ où g est un point η-rationnel de G, on peut représenter E au-dessus de $\coprod_{i=1,\dots,n} g_i U \to G$ et finalement recoller les morceaux pour obtenir un η-schéma $\mathscr{E}$ représentant E sur le gros site $\mathscr{L}_{\text{ét}}(G)$. En fait, le faisceau E sur $\mathscr{L}_{\text{ét}}(\eta)$ est aussi représenté par $\mathscr{E}$. En effet, E est automatiquement un faisceau pour la topologie fppf et $G \to \eta$ est couvrant pour cette topologie : si $X \in \mathsf{Ob}\,\mathscr{L}(\eta)$, on a $E(X) = \operatorname{Ker} E(G_X) \rightrightarrows E((G \times_\eta G)_X) = \mathscr{E}(X)$. Enfin, le passage du cas k séparablement clos au cas général se fait par descente finie étale, comme plus haut. □

III.3.4. Factorisation par les motifs géométriques. — Nous avons donc montré que le foncteur $\mathsf{D}^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \to \operatorname{iso}\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)$ est pleinement fidèle ; la proposition suivante décrit l'image essentielle de ce foncteur.

III.3.4.1 Proposition. — *Le foncteur pleinement fidèle $\mathsf{D}^b(1\text{-}Isomot(\eta)) \to \operatorname{iso}\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{-,\acute{e}t}(\eta)$ se factorise à travers $\operatorname{iso} d_1\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{\text{gm}}(\eta) \hookrightarrow \operatorname{iso}\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{-,\acute{e}t}(\eta)$ et induit une équivalence :*

$$\mathsf{D}^b(1\text{-}Isomot(\eta)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{iso} \mathrm{d}_1\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{\text{gm}}(\eta).$$

La mise en garde **III.3.3.4** ne s'applique pas ici : la catégorie $\operatorname{iso} d_1\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{\text{gm}}(\eta)$ est équivalente à $d_1\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{\text{gm}}(\eta, \mathbf{Q})$, où $\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{\text{gm}}(\eta, \mathbf{Q})$ est l'analogue de $\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{\text{gm}}(\eta)$ construit avec des coefficients rationnels.

Démonstration. — La sous-catégorie pleine $\mathrm{d}_1\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{\text{gm}}(k, \mathbf{Q})$ de $\operatorname{iso}\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)$ est par définition épaisse. Pour démontrer que le foncteur $\mathsf{D}^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \to \operatorname{iso}\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{-,\text{ét}}(\eta)$ se factorise en un foncteur pleinement fidèle $\mathsf{D}^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{iso}\mathrm{d}_1\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{\text{gm}}(\eta)$, il suffit donc de montrer que les motifs purs sont dans $\mathrm{d}_1\mathrm{DM}^{\text{eff}}_{\text{gm}}(k, \mathbf{Q})$. Que les motifs purs de poids 0 soient dans l'image résulte de **III.2.6**. Les tores de la forme $\mathbf{G}_m^{\widetilde{\eta}/\eta}$ sont donc également obtenus car $C_\bullet(\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}})$ est extension de $\mathbf{Z}^{\widetilde{\eta}/\eta} = \underline{\mathrm{Pic}}_{\mathbf{P}^1_{\widetilde{\eta}}/\eta}$ (déjà dans l'image par ce qui précède), par $\mathbf{G}_m^{\widetilde{\eta}/\eta}[1]$. On en déduit que tous les tores sont dans l'image. En poids -1, il suffit de montrer que les

jacobiennes sont dans l'image, car $\mathrm{d}_1\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k, \mathbf{Q})$ est stable par facteur direct. Compte tenu de la présence des tores et des 1-motifs étales sur η, cela résulte de **III.3.1.6**. Pour démontrer la pleine fidélité du foncteur $\mathsf{D}^b(1\text{-Isomot}(\eta)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{iso}\,\mathrm{d}_1\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta)$, on utilise enfin le calcul l'homologie du complexe des chaînes singulières (cf. **III.3.1.7**, ii). □

En particulier, on peut munir $d_1\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\eta, \mathbf{Q})$ d'une t-structure non dégénérée de coeur 1-Isomot(η).

BIBLIOGRAPHIE

[AM69] M. Artin & B. Mazur – *Étale homotopy*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[Art73a] M. Artin – « Changement de base pour un morphisme propre », 1973, exposé XII dans [**Gro73**].

[Art73b] M. Artin – « Faisceaux constructibles. cohomologie d'une courbe algébrique », 1973, exposé IX dans [**Gro73**].

[Art73c] M. Artin – « Morphismes acycliques », 1973, exposé XV dans [**Gro73**].

[Art76] M. Artin – *Lectures on deformations of singularities*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1976.

[Ber96] V. G. Berkovich – « Vanishing cycles for formal schemes. II », *Invent. Math.* **125** (1996), no. 2, p. 367–390.

[Blo87] S. Bloch – « Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves », Algebraic geometry, Bowdoin, 1985, Amer. Math. Soc., 1987, p. 421–450.

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud – *Néron models*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Bou80] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1980, Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique.

[BS01] P. Balmer & M. Schlichting – « Idempotent completion of triangulated categories », *J. Algebra* **236** (2001), no. 2, p. 819–834.

[Del73] P. Deligne – « La formule de dualité globale », 1973, exposé XVIII dans [**Gro73**].

[Del74] P. Deligne – « Théorie de Hodge III », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1974), no. 44, p. 5–77.

[Del77] P. Deligne – *Cohomologie étale*, Springer-Verlag, 1977, Avec la collaboration de J.-F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.-L. Verdier, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569.

[dJ96] A. J. de Jong – « Smoothness, semi-stability and alterations », *Publications Mathématiques de l'IHÉS* (1996), no. 83, p. 51–93.

[Eis95] D. Eisenbud – *Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Elk73] R. Elkik – « Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **6** (1973), p. 553–603.

[FK] K. Fujiwara & K. Kato – « Logarithmic étale topology theory », *Prépublication*.

[Fri82] E. M. Friedlander – *Étale homotopy of simplicial schemes*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1982.

[Ful98] W. Fulton – *Intersection theory*, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Gab01] O. Gabber – « Lettre à l'auteur », décembre 2001.

[Gir71] J. Giraud – *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179.

[Gro69] A. Grothendieck – « Éléments de géométrie algébrique », *Publications Mathématiques de l'IHÉS* (1960–1969).

[Gro71a] A. Grothendieck – *Revêtements étales et groupe fondamental*, Springer-Verlag, 1971, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960–1961 (SGA 1). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224.

[Gro71b] A. Grothendieck – « Théorie de la spécialisation du groupe fondamental », 1971, exposé x dans [**Gro71a**].

[Gro72] A. Grothendieck – *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Springer-Verlag, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I & II). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288 & 340.

[Gro73] A. Grothendieck – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Springer-Verlag, 1972-1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269-270 & 305.

[Ill72] L. Illusie – *Complexe cotangent et déformations*, Springer-Verlag, Berlin, 1971-1972, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239 & 283.

[Ill77] L. Illusie – « Appendice à [th. finitude] », 1977, dans [**Del77**].

[Ill00] L. Illusie – « Perversité et variation », *prépublication* (2000).

[Ill02] L. Illusie – *An overview of the work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on logarithmic étale cohomology*, Astérisque, Paris, 2002.

[Kat99] N. M. Katz – « Space filling curves over finite fields », *Math. Res. Lett.* **6** (1999), no. 5-6, p. 613–624.

[KM76] F. F. Knudsen & D. Mumford – « The projectivity of the moduli space of stable curves. I. Preliminaries on "det" and "Div" », *Math. Scand.* **39** (1976), no. 1, p. 19–55.

[KS01] K. Kato & T. Saito – « Conductor formula of Bloch », *prépublication* (2001).

[KSS88] K. Kato, S. Saito & T. Saito – « Artin characters for algebraic surfaces », *Amer. J. Math.* **110** (1988), no. 1, p. 49–75.

[Lau81] G. Laumon – « Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P. Deligne) », Astérisque, vol. 83, Soc. Math. France, 1981, p. 173–219.

[Lev98] M. Levine – *Mixed motives*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 57, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[LMSM86] L. G. Lewis, Jr., J. P. May, M. Steinberger & J. E. McClure – *Equivariant stable homotopy theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1213, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Mil86] J. S. Milne – *Arithmetic duality theorems*, Academic Press Inc., 1986.

[Nee01] A. Neeman – *Triangulated categories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 148, Princeton University Press, 2001.

[Ray71] M. Raynaud – « Propreté cohomologique des faisceaux d'ensembles et des faisceaux en groupes non commutatifs », 1971, exposé xiii dans [**Gro71a**].

[Ray72] M. Raynaud – « Propriétés de finitude du groupe fondamental », 1972, exposé ii dans [**Gro72**].

[Ray74] M. Raynaud – « Théorèmes de Lefschetz en cohomologie des faisceaux cohérents et en cohomologie étale. Application au groupe fondamental », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7** (1974), p. 29–52.

[Sai88] T. Saito – « Self-intersection 0-cycles and coherent sheaves on arithmetic schemes », *Duke Math. J.* **57** (1988), no. 2, p. 555–578.

[Sai00] T. Saito – « Parity in Bloch's conductor formula », *prépublication* (2000).

[Sch94] A. J. Scholl – « Classical motives », Motives (Seattle, WA, 1991), Amer. Math. Soc., 1994, p. 163–187.

[SD73] B. Saint-Donat – « Technique de descente cohomologique », 1973, exposé vbis dans [**Gro73**].

[SV96] A. Suslin & V. Voevodsky – « Singular homology of abstract algebraic varieties », *Invent. Math.* **123** (1996), no. 1, p. 61–94.

[Voe] V. Voevodsky – « Cancellation theorem », http ://www.math.uiuc.edu/K-theory/0541/.

[Voe00] V. Voevodsky – « Triangulated categories of motives over a field », Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 188–238.

Table des matières

I. Altérations et groupe fondamental premier à p I-0
Introduction I-1
I.1. Propreté cohomologique générique I-1
I.2. Locale acyclicité générique I-8
I.3. Locale constance générique et applications au $\pi_1^{p\prime}$ I-11
I.4. Discussion du cas modéré I-16

II. Conjecture de Bloch et nombres de Milnor II-0
Introduction II-1
II.1. Nombre de Milnor et classe de Bloch II-2
II.2. Compactification II-5
II.3. Démonstration du théorème **II.0.8** II-9
II.4. Appendice A : compactification en dimension relative 1 ..... II-9
II.5. Appendice B : démonstration de la conjecture **II.0.7** en dimension relative 1 ..... II-10

III. Motifs de dimension inférieure à 1, d'après V. Voevodsky III-0
Introduction III-1
III.1. Rappels sur la catégorie triangulée des motifs géométriques III-1
III.2. Motifs de dimension nulle III-3
III.3. Motifs de dimension ≤ 1 ..... III-7