

CHAOS ONDULATOIRE EN PRÉSENCE DE PERTES: MODÉLISATION ET EXPÉRIENCE DE BILLARDS MICRO-ONDES

Jérôme Barthélemy

▶ To cite this version:

Jérôme Barthélemy. CHAOS ONDULATOIRE EN PRÉSENCE DE PERTES : MODÉLISATION ET EXPÉRIENCE DE BILLARDS MICRO-ONDES. Physique [physics]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2003. Français. NNT : . tel-00004114

HAL Id: tel-00004114 https://theses.hal.science/tel-00004114

Submitted on 9 Jan 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés. l'UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT UFR de Sciences École Doctorale : Constituants Élémentaires Systèmes Complexes

DOCTORAT

Physique

BARTHÉLEMY Jérôme

CHAOS ONDULATOIRE EN PRÉSENCE DE PERTES : MODÉLISATION ET EXPÉRIENCE DE BILLARDS MICRO-ONDES

Thèse dirigée par Olivier LEGRAND et Fabrice MORTESSAGNE Soutenue le 29 Septembre 2003

JURY

Mathias Fink Patricio Leboeuf Olivier Legrand Fabrice Mortessagne Hans-Jürgen Stöckmann Richard Weaver Professeur à l'ESPCI, Paris Directeur de Recherche, Orsay Professeur, UNSA Maître de Conférence, UNSA Professeur, Marburg(Allemagne) Professeur, Urbana(USA)

Président

Rapporteur Directeur de Thèse Co-directeur de Thèse

Rapporteur

Remerciements

REMERCIEMENTS

Au moment de mettre un point final à ce manuscrit, je pense à vous tous qui m'avez permis d'en arriver là ... ces quelques pages ne suffiraient pas à nommer chacun d'entre vous. Aussi, que ceux dont je ne parlerai pas ici me pardonnent, et qu'ils sachent que cela ne m'a pas empêché d'avoir une pensée émue pour eux en écrivant ces lignes.

Pour commencer, je tient à remercier l'ensemble du laboratoire de Physique de la Matière Condensée de Nice pour son accueil et son soutien tout au long de ces années. Merci en particulier à Jean-Pierre Romagnan et Gérard Monnom qui ont tous deux su créer un environnement de travail à la fois convivial et studieux tout au long des années passées à la tête de ce laboratoire. L'un comme l'autre, vous n'avez compté ni votre temps, ni vos efforts et j'ai beaucoup apprécié votre aide et vos conseils.

Je remercie également Yves Charon et Pierre Binétruy qui, après m'avoir accueilli au sein du DEA «Champs, Particules, Matières» de Paris, m'ont fait confiance lorsque j'ai émis le vœux de venir faire ma thèse à Nice.

J'ai eu la chance et l'honneur de ne compter parmi les membres de mon jury que des chercheurs de grande valeur, tant sur le plan humain que scientifique. Je remercie chaleureusement Richard Weaver et Patricio Leboeuf pour avoir immédiatement accepté de rapporter mon travail, n'hésitant pas à emmener ce manuscrit comme livre de chevet durant leurs vacances. Merci à Hans-Jürgen Stöckmann qui, en plus de m'avoir chaleureusement accueilli dans son équipe à Marburg et de m'avoir fait profité sans retenue de son expérience des cavités micro-ondes, m'a fait l'amitié de venir d'Allemagne pour prendre part à ce jury. Je suis très reconnaissant à Mathias Fink d'avoir accepté de présider ce jury et de l'avoir si bien fait : en toute simplicité mais avec efficacité et justesse. Enfin, je dois bien plus que des remerciements aux derniers, mais non des moindres, membres de mon jury : Fabrice Mortessagne et Olivier Legrand, qui ont également porté la lourde charge de me diriger pendant ces quatre années de thèse. Vous m'avez accordé votre confiance mais également votre amitié. Toujours disponibles, vous avez su me donner mon autonomie tout en m'apportant l'expérience et les conseils dont j'avais besoin. Cette thèse, c'est aussi un peu la votre ...

Merci au reste de l'équipe POMC : à Patrick Sebbah qui m'a fait profité de son expérience en général, et des micro-ondes en particulier, et à Christian Vanneste, toujours prêt à modifier quelques lignes de son code pour satisfaire mes lubies, y compris à quelques jours de la soutenance pour me permettre de mieux illustrer mes propos.

Pour m'aider dans mes tâtonnements expérimentaux, j'ai pu compter sur la disponibilité et les compétences en mécanique d'André Audoly, d'Omar Bessir et de Christophe Pitiot. Chacun à votre tour, vous m'avez aidé à résoudre les petits problèmes pratiques qui font le sel de la vie d'expérimentateur et je vous en suis très reconnaissant. Merci également à Catherine Laye pour m'avoir accompagné de son sourire et de sa bonne humeur dans mes tribulations chimiques.

Toujours prêts à écouter mes petits problèmes autour d'un bon repas au restaurant des impôts (Si, si!!), j'ai pu compter sur l'amitié de Pascal Baldi (Un *hobbit* footballeur!! Très rare!!) et Nathalie Fraysse. D'ailleurs, en parlant de gastronomie, je repense à un discours édifiant sur les pizzas, italiennes en général et napolitaines en particulier, entendu un soir d'été à Cargèse; ça te rappelle rien Toto? Merci à tous les trois pour votre gentillesse. Je me rappelle également des foots endiablés du midi : passe de Loïc pour Wilfried qui reprend de volée, mais il est contré par un tacle rageur de Franck, et ce malgré le tirage de maillot de Gilles (Si! On t'a vu!!). Merci à tous, ça fait du bien de se défouler un peu de temps en temps. Mais y a pas que le foot dans la vie (il parait en tous cas), et pour citer un peu de latin, une fois n'est pas coutume, «Mens sana in corpore sano». Je veux donc également remercier ici Michel, Pierre, Laurent, Seb et Dima dont les conversations, parfois sérieuses, souvent loufoques mais toujours sympathiques, m'ont permis de conserver un certain équilibre mental. Entre thésards on se comprend ...enfin je crois ! Non ? Parce que des fois ...

De temps en temps, quand on a beaucoup travaillé, quand on est très fatigué et qu'il fait gris, quand le doute s'installe et quand la déprime menace, bref très très rarement, il faut aussi savoir s'amuser un peu. Et pour ça, rien de mieux qu'un petit *cs* avec des potes, mais pas longtemps hein, juste quelques frags, non parce qu'après faut bosser quand même. Merci donc au War, au Djey, à Baz, à Gayp et à Bab pour

REMERCIEMENTS

ces instants de barbarie bucolique mais aussi pour tous les autres bons moments partagés autour d'une bière ou d'un café, devant un match de foot ou dans le patio, sur un hot-dog ou sur les pistes.

Je pense aussi à Pierre et Valérie, qui ont été pour moi d'un soutien sans failles. Hand, courge, chaos, 2CV et surtout amitié, des mots *a priori* pas évident à faire rimer ensembles, mais qui, grâce à vous deux, sont maintenant indissociables. À propos de courges, j'ai lu quelque part, Valérie, que tu étais heureuse d'avoir pu en planter dans le jardin de Pierre, ..., c'est bien mais faudrait voir à lui rendre la pareille : quand est-ce que vous plantez une petite graine?

Merci à mes parents, à mes frères, à ma sœur, à ma belle-famille et à mes amis de lycée pour leur aide et leur affection. Du début à la fin, que vous attendiez tous avec impatience, vous avez toujours été derrière moi pour m'encourager et me pousser en avant. Me voilà enfin arrivé au bout cette fois!

Enfin, à toi qui partage ma vie, plus qu'un merci, trois petits mots, une simple phrase qui commence et se termine comme mon prénom ...

REMERCIEMENTS

Table des matières

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières

Τŧ	Table des matières						
In	trod	uction	13				
1	Chaos, cavités et micro-ondes						
	1.1	Du chaos classique au chaos ondulatoire	19				
	1.2	Cavité micro-ondes et matrice de diffusion	25				
	1.3	Approximation semiclassique et RMT	29				
	1.4	Chaos ondulatoire dans les cavités micro-ondes	40				
2	Description détaillée de l'expérience						
	2.1	Vue d'ensemble de l'expérience	57				
	2.2	Construire une cavité «ohmique»	61				
	2.3	Coupler la cavité à l'extérieur	65				
	2.4	L'analyseur de réseau	69				
	2.5	Détail du protocole expérimental	72				
3	Cal	Calcul de la matrice S 7					
	3.1	Modèle électromagnétique d'une antenne	79				
	3.2	Formule de Breit-Wigner	82				
	3.3	Prise en compte des pertes ohmiques	94				
	3.4	Conclusion	101				

4	Extraire les paramètres de résonance				
	4.1	Les paramètres de résonance	110		
	4.2	La procédure d'ajustement	114		
	4.3	Tests et limites de l'ajustement	121		
5	Analyse des résultats d'ajustements				
	5.1	Le billard rectangulaire	131		
	5.2	Le billard de Sinaï	147		
6	Les pertes dans le domaine spatial et spectral				
	6.1	Distributions de phase dans un système ouvert	160		
	6.2	Relier les largeurs de résonance à la phase	165		
	6.3	Comparaison	170		
Co	onclu	sion	177		
Aı	nex	es	181		
\mathbf{A}	Description alternative du couplage				
	A.1	Description électromagnétique	185		
	A.2	Description quantique	186		
в	Pertes à la réflexion et à la propagation				
	B.1	Les pertes à la réflexion	191		
	B.2	Les pertes à la propagation	193		
Liste des figures et des tableaux					
Bibliographie					

Introduction

Le terme de «chaos ondulatoire» associe deux notions physiques qui peuvent *a priori* sembler contradictoires. En effet, la notion de chaos est intimement liée à celles d'espace des phases et de trajectoire, deux notions mal définies lorsqu'il s'agit d'ondes. Cependant, lorsque la longueur d'onde est petite devant les dimensions caractéristiques du problème, la propagation d'une onde peut être approximée par la propagation de rayons : c'est la limite géométrique des rayons. Dans cette limite, espace des phases et trajectoire reprenant tout leur sens, la notion de chaos est pertinente et l'on peut distinguer systèmes chaotiques et réguliers (non chaotiques). Que devient cette distinction lorsque, tout le reste étant inchangé, on augmente suffisamment la longueur d'onde pour quitter le domaine de validité de la limite géométrique? C'est à ce type de questions que s'intéresse le chaos ondulatoire, plus généralement, on regroupe sous ce terme l'étude de l'ensemble des systèmes dont la limite géométrique est chaotique.

Le chaos ondulatoire est un domaine très vaste trouvant des applications aussi bien en physique nucléaire, qu'en acoustique ou en électromagnétisme. Le développement de l'approximation semiclassique et de la Théorie des Matrices Aléatoires a largement contribué à améliorer notre compréhension des systèmes ondulatoires chaotiques, tant dans le domaine spatial que spectral, en décrivant à la fois les propriétés statistiques des fonctions d'onde et du spectre de ces systèmes. Cependant, la façon dont le couplage avec l'extérieur (pertes) peut modifier les propriétés de ces systèmes est encore relativement mal connue.

Dans le domaine spectral, les pertes conduisent principalement à ajouter une partie imaginaire Γ_n à la fréquence propre f_n du système sans pertes. On dit alors que le système présente une résonance de largeur Γ_n à la fréquence f_n (que l'on appellera position de la résonance). Dans le domaine spatial, la présence de pertes conduit généralement à considérer des fonctions propres à valeurs complexes. Ainsi, nous montrerons à la fin de ce manuscrit qu'il est possible de relier ces deux aspects en comparant les largeurs de résonances et la distribution spatiale de la phase de la fonction d'onde. La dérivation exacte de ce lien manque encore mais nous verrons dans le chapitre 6 qu'une relation de proportionnalité entre la largeur de résonance associée aux pertes localisées et la largeur de la distribution de phase, semble naturelle. Nous vérifierons expérimentalement cette relation, ce qui constitue, à notre connaissance, la première observation expérimentale de cet effet. Nous nous attacherons donc dans ce manuscrit à décrire le dispositif expérimental, la procédure de traitement de données et l'analyse théorique qui ont rendu possible cette observation.

Le premier chapitre est essentiellement un chapitre d'introduction au chaos ondulatoire et aux cavités micro-ondes destiné aux lecteurs novices en la matière. Nous commencerons par une approche didactiques menant de la notion de chaos classique jusqu'à celle de chaos ondulatoire. Nous verrons ensuite pourquoi les cavités microondes à deux dimensions constituent des systèmes modèles particulièrement bien adaptés à l'étude de ce domaine. Puis, nous introduirons quelques uns des concepts de base de l'approximation semiclassique et de la Théorie des Matrices Aléatoires, en insistant sur la complémentarité de ces deux approches théoriques. Enfin, nous décrirons les principales étapes de l'utilisation des cavités micro-ondes pour l'étude du chaos ondulatoire de 1990 à 1999 et nous nous appuierons sur ce bref historique pour motiver notre propre expérience micro-ondes.

Le deuxième chapitre est consacré à la réalisation expérimentale de notre cavité micro-ondes. Après avoir effectué un rapide tour d'horizon de l'ensemble de l'expérience, nous nous attacherons à justifier nos choix quant à la construction de la cavité elle-même. Nous décrirons ensuite les antennes permettant à la fois d'exciter la cavité et de mesurer le champ existant à l'intérieur. Puis nous nous intéresserons à l'analyseur de réseau vectoriel qui, en plus d'intégrer une source hyperfréquence de qualité, permet, après calibration, une mesure très précise de la matrice de diffusion

INTRODUCTION

(matrice S) complexe de la cavité. Pour finir, nous décrirons brièvement le protocole expérimental de mesure.

Dans le troisième chapitre, nous expliciterons la matrice S de la cavité à l'aide de la théorie de la diffusion. Nous nous concentrerons en particulier sur la description électromagnétique du couplage de la cavité avec les antennes. Nous établirons ensuite l'expression des pertes ohmiques dues à la conductivité finie des parois de la cavité. Nous aboutirons finalement à une écriture de la matrice S de type Breit-Wigner (somme de lorentziennes) prenant en compte l'ensemble des processus de pertes existant dans une cavité micro-ondes.

Au cours du chapitre 4, nous verrons comment extraire de nos mesures les différents paramètres caractéristiques de chaque résonance en ajustant la matrice Sà l'aide du résultat obtenu au chapitre 3. Cet ajustement présente des difficultés importantes étant donné le très grand nombre de résonances impliquées et le recouvrement parfois important entre résonances. Nous décrirons en détail la procédure de traitement numérique permettant de réaliser convenablement cet ajustement. Pour finir, nous évaluerons la qualité de convergence de cette procédure ainsi que la précision sur les paramètres obtenus.

Dans le chapitre 5, nous verrons comment exploiter les paramètres issus de l'ajustement. Nous nous restreindrons dans un premier temps à l'étude d'une cavité régulière (rectangulaire) qui présente l'avantage de permettre le calcul analytique des largeurs, positions et fonctions d'onde des résonances. Ainsi, grâce à la précision obtenue pour la mesure de la position des résonances, nous pourrons déterminer les dimensions de la cavité avec plus de précision que ne le permet la mesure directe. Nous vérifierons ensuite que la présence des antennes ne modifie significativement, ni les propriétés statistiques des positions de résonance, ni la fonction d'onde de la cavité. Enfin, nous verrons que la largeur totale de résonance se décompose bien sur les différents mécanismes de pertes : pertes à travers les antennes, pertes ohmiques à la propagation et pertes ohmiques localisées sur les bords. Nous mènerons ensuite le même type d'analyse dans une cavité chaotique (de type Sinaï) : après avoir vérifié que les propriétés spectrales et spatiales correspondent bien aux prédictions de la Théorie des Matrices Aléatoires pour un système GOE, nous commenterons les fluctuations de largeurs observées.

Enfin, nous terminerons au chapitre 6 par le résultat évoqué plus haut, à savoir la mise en évidence du lien existant entre la largeur q de la distribution de la phase de la fonction d'onde et les largeurs des résonances. Plus précisément, nous verrons que seules les pertes localisées spatialement – c'est-à-dire, dans la mesure où les pertes à travers les antennes sont négligeables, les largeurs associées aux pertes ohmiques sur les bords de la cavité – sont à relier au paramètre q. Ainsi, pour terminer, nous mettrons clairement en évidence la proportionnalité du paramètre q avec les largeurs dues aux pertes non localisées de la cavité.

Chapitre 1

Chaos, cavités et micro-ondes ...

Sommaire

1.1	Du e	chaos classique au chaos ondulatoire	19
	1.1.1	Le chaos classique	19
	1.1.2	Le chaos quantique	22
	1.1.3	Le chaos ondulatoire	23
1.2	Cavi	ité micro-ondes et matrice de diffusion	25
	1.2.1	Billard électromagnétique ou billard quantique ?	25
	1.2.2	Pourquoi les micro-ondes?	27
	1.2.3	Mesurer la matrice de diffusion	28
1.3	App	${f roximation\ semiclassique\ et\ RMT\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .}$	29
	1.3.1	Introduction à l'approche semiclassique	29
	1.3.2	Introduction à la Théorie des Matrices Aléatoires	33
1.4	Cha	os ondulatoire dans les cavités micro-ondes	40
	1.4.1	Les expériences micro-ondes de 1990 à 1999 \ldots	40
	1.4.2	Étudier les pertes dans les cavités micro-ondes \ldots	45

CHAPITRE 1. CHAOS, CAVITÉS ET MICRO-ONDES ...

Le but de ce premier chapitre est double. D'une part, nous souhaitons introduire les concepts (théoriques et expérimentaux) de base qui seront nécessaires au lecteur novice dans le domaine du chaos quantique dans les cavités micro-ondes. D'autre part, nous souhaitons également décrire le contexte expérimental qui aboutit au lancement, en 1999, des travaux décrits dans ce manuscrit.

Nous commencerons par introduire la notion de chaos classique que nous généraliserons ensuite à celle de chaos quantique, pour aboutir finalement à celle, encore plus large, de chaos ondulatoire. Nous nous attarderons ensuite sur le principe des expériences de cavité micro-ondes. Puis, nous introduirons quelques notions et concepts de base de la Théorie des Matrices Aléatoires et de l'approche Semiclassique. Enfin, après avoir décrit quelques unes des expériences de cavité micro-ondes les plus marquantes, nous parlerons du contexte et des motivations qui ont conduit à la réalisation de notre propre cavité.

1.1 Du chaos classique au chaos ondulatoire

1.1.1 Le chaos classique

Le terme de chaos est couramment utilisé en dehors du contexte scientifique pour exprimer la complexité ou le désordre. Mais on le trouve également souvent lié à la notion d'aléatoire alors que la plupart des systèmes chaotiques sont régis par des équations parfaitement déterministes, ne laissant aucune place au hasard. De plus, s'il est vrai que les systèmes chaotiques sont souvent complexes et que les systèmes désordonnés sont souvent chaotiques, il existe également des système chaotiques très simples.

Un système dynamique hamiltonien¹ est dit non-intégrable, lorsque son nombre de degrés de liberté est supérieur au nombre de quantités conservées au cours de son évolution. Cette condition est nécessaire à l'apparition d'une dynamique chaotique².

¹Dans ce qui suit, nous nous limiterons à ces systèmes à la fois conservatifs et invariants par renversement du temps.

²C'est une condition nécessaire mais non suffisante. Ces systèmes non-intégrables peuvent être rangés dans différentes classes suivant qu'ils sont «plus ou moins chaotiques»



FIG. 1.1 – Calcul numérique en double précision de la trajectoire dans un cercle tronqué après 200 rebonds.

Dans le cas le plus simple, un système chaotique possède deux degrés de liberté et une seule constante du mouvement. Les billards constituent l'exemple le plus couramment utilisé de tels systèmes. On parle de billard pour décrire le déplacement libre et sans perte d'énergie d'une particule ponctuelle à l'intérieur d'un domaine fermé à deux dimensions. Les deux degrés de libertés correspondent aux deux composantes de la vitesse (ou de la quantité de mouvement) de la particule et l'énergie est une des constantes du mouvement. C'est uniquement la géométrie du contour du billard considéré qui détermine sa nature chaotique ou non. Pour des formes simples, il existe une deuxième quantité conservée, le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de quantités conservées, et on dit que la dynamique de la particule est régulière ou intégrable. Dans un billard circulaire, c'est l'angle d'incidence (ou le moment

[[]Bohigas and Giannoni, 1984]. Les plus chaotiques d'entre eux sont appelés B-systèmes. Dans la suite, c'est à eux que nous ferons référence lorsque nous parlerons de systèmes chaotiques ou complètement chaotiques.

angulaire) qui, en plus de l'énergie, est conservé. Dans un billard rectangulaire, c'est la valeur absolue de la vitesse parallèlement à l'un des bords³. Pour autant, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à des formes très compliquées pour que la dynamique d'un billard devienne chaotique.⁴ Il suffit par exemple de tronquer très légèrement le cercle (voir figure 1.1)⁵ ou d'introduire un réflecteur circulaire à l'intérieur du rectangle («billard de Sinaï») pour rendre chaotique ces géométries régulières. En effet, ces petites modifications de contour suffisent à rompre certaines symétries, or c'est justement aux symétries que sont attachées les lois de conservation. La conservation de l'énergie est liée à l'invariance au cours du temps, celle du moment angulaire à l'invariance par rotation, ... Par conséquent, seule l'énergie est conservée dans ces billards et leur dynamique est chaotique.

Mais à quoi voit-on que ces systèmes sont chaotiques ? Il y a plusieurs manières de répondre à cette question mais la réponse la plus courante, et sans doute la plus parlante, est l'extrême sensibilité aux conditions initiales. On montre en effet que les trajectoires suivies par deux particules, aussi proches que soient leurs conditions initiales, finissent toujours par diverger exponentiellement avec le temps. C'est d'ailleurs de là que vient une certaine confusion entre les systèmes chaotiques et les systèmes aléatoires : la trajectoire est parfaitement prévisible, puisqu'elle est contrôlée par des équations déterministes, mais à la seule condition de connaître les conditions initiales avec une précision infinie. En pratique, il est donc impossible de prévoir l'évolution d'un système chaotique avec précision (en tous cas au delà d'un temps d'autant plus long que la mesure des conditions initiales est fine). Finalement, pour l'observateur, tout se passe comme si l'évolution du système était effectivement aléatoire. La simulation numérique permet d'illustrer parfaitement ce problème. La précision numérique d'un ordinateur, bien qu'importante, n'en est pas moins finie.

³L'énergie E étant proportionnelle à $v_x^2 + v_y^2$, on peut indifféremment dire que $|v_x|$ et $|v_y|$, E et $|v_x|$ ou E et $|v_y|$ sont conservés.

⁴On parlera de dynamique d'un billard pour désigner la dynamique de la particule se déplaçant à l'intérieur du billard.

⁵Le cercle tronqué est une géométrie familière de l'équipe POMC, puisque c'est celle utilisée par V. Doya dans sa thèse [Doya, 2000, Doya et al., 2002b]. C'est pourquoi nous nous référerons régulièrement à cette géométrie dans la suite.

Elle est par exemple de 14 décimales si on travaille en double précision. La figure 1.2 (d'après [Doya, 2000]) montre l'évolution d'une trajectoire particulière dans un cercle tronqué. Les conditions initiales placent la particule sur l'axe de symétrie horizontale. En théorie, elle devrait rester indéfiniment sur cet axe mais après 10 rebonds elle s'en écarte déjà significativement et elle tend rapidement à explorer l'ensemble du billard.



FIG. 1.2 – Orbite périodique instable dans un cercle tronqué. La trajectoire est représentée après, de gauche à droite et de haut en bas, 1, 5, 10, 15, 50 et un très grand nombre de rebonds.

1.1.2 Le chaos quantique

Nous nous sommes jusqu'ici contentés de parler de particules ponctuelles dans un domaine fermé sans plus de précisions. Laissés ainsi dans le flou, et sans doute un peu influencés par le terme de billard, nous sommes naturellement amenés à imaginer des billes ou un autre projectile quelconque se heurtant à des parois solides. Tant que l'hypothèse de conservation de l'énergie reste valide, c'est en effet une représentation tout à fait valable. Cependant, les figures 1.1 et 1.2, en représentant la trajectoire sous forme de rayons, peuvent évoquer un autre type de système. En effet, la propagation de n'importe quelle onde peut, sous certaines conditions (essentiellement il faut que la longueur d'onde soit petite devant les longueurs caractéristiques du problème), être approchée par la propagation d'une particule ponctuelle : c'est l'approximation géométrique des rayons. Elle s'applique également au domaine de la mécanique quantique même si on parle alors plus volontiers de limite classique. Dans cette limite, un objet quantique (ou quanton) obéit aux lois de la mécanique classique. Les problèmes de billard tels que décrits plus haut se rencontrent fréquemment en mécanique quantique (quanton dans un puits de potentiel infini).

Hors de l'approximation classique, un quanton se comporte davantage comme une onde. Mais alors la notion de trajectoire perd son sens pour un tel quanton puisque les inégalités d'Heisenberg interdisent de fixer à la fois sa position et sa quantité de mouvement. Qu'advient-il alors de la notion de chaos telle que nous l'avons décrite jusqu'ici ? Continue-t-on à observer des différence de comportement selon la forme du contour ? C'est sous le terme de «chaos quantique» que l'on regroupe aujourd'hui l'ensemble des questions traitant du comportement de systèmes quantiques dont la limite classique est chaotique.

1.1.3 Le chaos ondulatoire

Le terme de chaos quantique possède une large dimension historique. En effet, lorsqu'il fut adopté⁶ les rares résultats expérimentaux étaient tous issus de la physique quantique (nucléaire, plus précisément). Mais, comme nous l'avons évoqué précédemment, le champ de ses applications s'étend à l'ensemble des ondes. C'est pourquoi le terme de chaos ondulatoire est parfois préféré en dehors de la mécanique quantique. Évoquons à présent ces différents domaines dans un rapide historique (non-exhaustif) des expériences de chaos quantique dans les billards qui

 $^{^{6}}$ Le terme de «quantum chaos» fut adopté aux Houches en 1989 de préférence à celui de «quantum chaology» proposé deux ans plus tôt par Berry.

nous ont précédées.

Bien que l'étude du chaos quantique soit relativement récente (une trentaine d'années), il est amusant de constater que les premières expériences de billards chaotiques furent réalisées il y a plus de 200 ans par Chladni. Il avait en effet remarqué que la poussière couvrant des plaques de verre ou de métal soumises à une vibration, s'organise en figures géométriques complexes. Il faut ensuite attendre le milieu des années 60 pour que Porter présente de nouvelles observations expérimentales de systèmes ondulatoires chaotiques dans le domaine de la physique nucléaire [Porter, 1965]. A sa suite, Bayfield et Koch [Bayfield and Koch, 1974] en 1974 publient leurs travaux sur l'atome d'hydrogène. Ils sont les premiers à faire le parallèle entre ces systèmes quantiques complexes et leur contrepartie classique. Mais jusqu'au milieu des années 80, l'effort porte principalement sur le développement de nouvelles théories à même de décrire ce type de systèmes quantiques. Ainsi, la Théorie des Matrices Aléatoires (RMT pour Random Matrix Theory), introduite par Wigner en 1951 [Wigner, 1951], est complétée en 1967 par Dyson et Mehta [Mehta, 1991]. Dans le même temps, Gutzwiller [Gutzwiller, 1971, Balian and Bloch, 1971] et Berry [Berry, 1977] développent une approche semiclassique de ces systèmes (on peut également citer les travaux de Voros [Voros, 1976]). Puis, au début des années 80, Bohigas, Giannoni et Schmidt [Bohigas et al., 1984], conjointement avec Casati, Valz-Gris et Guarneri [Casati et al., 1980], conjecturent «l'universalité des fluctuations spectrales des systèmes ondulatoires dont la limite géométrique est chaotique». Dès lors, les études expérimentales se multiplient, avec succès, dans de nombreux domaines. Weaver en 1989 [Weaver, 1989], puis Ellegaard en 1995 [Ellegaard et al., 1995] explorent le domaine de l'acoustique dans les solides alors que Chinnery et Humphrey font de même en 1996 [Chinnery and Humphrey, 1996] dans les liquides. Dans le même temps, Lindelof et al. en 1986 [Lindelof et al., 1986] puis Blümel et al. en 1992 [Blümel et al., 1992] choisissent d'utiliser les ondes de surface de l'eau. Citons pour finir les expériences réalisées par Weiss et ses collaborateurs [Weiss et al., 1991] dans le domaine de la physique mésoscopique⁷. Nous avons volontairement omis ici

⁷Nous ne rentrerons pas ici dans les détails de ces travaux, mais le lecteur intéressé pourra consulter le deuxième chapitre de l'ouvrage de H.J. Stöckmann [Stöckmann, 1999].

les nombreux travaux utilisant des cavités micro-ondes : nous y reviendrons par la suite, après avoir décrit en détail le principe de ces expériences micro-ondes.

1.2 Cavité micro-ondes et matrice de diffusion

1.2.1 Billard électromagnétique ou billard quantique?

Écrivons pour commencer les équations qui permettent de décrire le champ électromagnétique dans une cavité conductrice. La propagation d'une onde électromagnétique de pulsation ω (évolution temporelle en $e^{-i\omega t}$) dans un milieu homogène de permittivité électrique ϵ et de perméabilité magnétique μ est décrite par les équations de Maxwell indépendantes du temps :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = i\omega \mu \vec{H}$$
 (1.1a)

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} - i\omega\epsilon \vec{E} \tag{1.1b}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \tag{1.1c}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \tag{1.1d}$$

où \vec{J} et ρ sont respectivement les densités de courant et de charge volumiques. En combinant (1.1a) et (1.1b) pour éliminer \vec{H} et en l'absence de courant et de charge en volume, on obtient l'équation d'onde suivante pour \vec{E} , également connue sous le nom d'équation d'Helmholtz :

$$(\Delta + k^2)\vec{E} = 0 \tag{1.2}$$

où $k = \omega/v$ et $\epsilon \mu v^2 = 1$. En éliminant \vec{E} , on obtient exactement la même équation d'onde pour \vec{H} . De plus, à la surface d'un conducteur parfait, les champs \vec{E} et \vec{H} doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\hat{n} \wedge \vec{E} = 0 \text{ et } \hat{n} \cdot \vec{H} = 0 \tag{1.3}$$

où \hat{n} est le vecteur unitaire normal à la surface⁸.

⁸Par convention, on prendra toujours \hat{n} dirigé vers l'extérieur de la cavité.



FIG. 1.3 – Cavité cylindrique quelconque

Considérons une cavité cylindrique de section \mathcal{A} quelconque (on notera \mathcal{C} le contour), de hauteur d et d'axe (O, z) (figure 1.3) dont les parois sont parfaitement conductrices («tranche de guide d'onde»). On distingue deux façons de satisfaire à la fois l'équation d'Helmholtz (1.2) et les conditions de bord (1.3) suivant qu'on annule la composante z de \vec{E} ou de \vec{H} . On parle dans le premier cas de mode Transverse Électrique (TE) et dans le second de mode Transverse Magnétique (TM). Cependant, tant que $d < \lambda/2$, les seuls modes possibles sont les modes TM d'ordre 0 (voir, par exemple, la référence [Jackson, 1965]) définis par :

$$\vec{H} = \begin{cases} H_x(x,y) \\ H_y(x,y) & \text{et } \vec{E} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_z(x,y) \end{cases}$$
(1.4)

avec

$$(\Delta + k^2)E_z(x,y) = 0 \tag{1.5a}$$

$$E_z(x,y)|_{\mathcal{C}} = 0 \tag{1.5b}$$

 H_x et H_y se déduisent directement de E_z grâce à (1.1a). On voit bien qu'une telle cavité peut être considérée comme un système à deux dimensions (billard) puisque tous les champs sont invariants suivant z. Nous n'avons donc besoin de connaître qu'un seul champ, par exemple E_z , pour résoudre entièrement le problème électromagnétique. On est finalement ramené au problème d'une onde scalaire, décrite par l'équation d'onde (1.5a), se propageant dans un milieu bidimensionnel de contour Cavec les conditions de bord (1.5b). L'analogie de ce problème avec celui d'un quanton piégé dans un puits de potentiel infini à deux dimensions est parfaite. C'est ce qui fait des cavités électromagnétiques des expériences modèle pour l'étude du chaos quantique en général.

1.2.2 Pourquoi les micro-ondes?

Tout ce qui vient d'être dit est indépendant de la longueur d'onde λ . Mais par contre, la difficulté et le coût de la mise en œuvre d'une expérience de ce type dépendent fortement de la gamme de longueur d'onde choisie. Comme nous l'avons vu, les dimensions à utiliser pour la cavité sont directement liées à λ . D'une part son épaisseur doit rester plus petite que λ pour que la cavité soit quasi-2D. D'autre part, ses dimensions transverses doivent être du même ordre de grandeur que la plus grande longueur d'onde utilisée afin de pouvoir observer ses modes. De plus, il est important de disposer dans cette gamme, d'une source, d'un détecteur et d'un ensemble complet de composants (connecteurs, coupleurs et câbles) à la fois performants, pratiques et peu coûteux.

La gamme des micro-ondes décimétriques possède tous ces avantages. En effet, l'utilisation intensive des micro-ondes, depuis de nombreuses années, dans le cadre industriel (antennes, télécommunications, ...) a donné lieu au développement de tout l'équipement utile. Citons en particulier, les analyseurs de réseau vectoriels qui permettent de mesurer très facilement la réponse en fréquence de n'importe quel dispositif micro-ondes. En outre, le choix de travailler dans cette gamme nous amène à considérer des cavités dont les dimensions sont de l'ordre du centimètre jusqu'au mètre, ce qui les rend relativement aisées à usiner. Cette gamme de longueur d'onde présente par contre l'inconvénient, comme nous le verrons par la suite, d'être très sensible à l'état de surface du métal et à la qualité des contacts électriques.

1.2.3 Mesurer la matrice de diffusion

À présent, décrivons brièvement le principe d'une expérience de chaos ondulatoire dans une cavité micro-ondes. Il est bien connu que l'établissement d'une onde scalaire stationnaire dans un milieu fermé (mode propre), n'est possible que pour certaines valeurs de la fréquence (fréquence propre). L'ensemble discret de ces fréquences constitue le spectre de la cavité. La comparaison de l'équation d'Helmholtz à deux dimensions avec l'équation de Schrödinger pour une particule de masse m permet de voir immédiatement que l'énergie quantique est ici l'analogue de k^2 . On pourra donc facilement transposer les résultats standards de la mécanique quantique en posant $\hbar^2/(2m) = 1$.

On utilise pour les mesures un analyseur de réseau. Ce dernier dispose de deux ports pouvant fonctionner aussi bien en émission qu'en réception. La cavité est connectée entre ces ports et l'analyseur mesure, en fonction de la fréquence, le rapport entre les ondes transmises ou réfléchies et l'onde incidente : on accède ainsi expérimentalement aux éléments de la matrice S de diffusion. La cavité est considérée comme un simple problème de diffusion à deux canaux. De ce point de vue, elle apparaît transparente à ses fréquences propres et complètement réfléchissante en dehors. Les coefficients de transmission (S_{12} et S_{21}) sont donc nuls sauf aux fréquences propres de la cavité où ils valent 1. C'est l'inverse pour les coefficients de réflexion (S_{11} et S_{22}).

En pratique, l'existence des pertes modifie un peu cette vision idéale. Les modes deviennent des résonances et on observe sur les paramètres S des pics de résonance dont la largeur est fixée par les pertes. De plus, le couplage de la cavité avec l'extérieur étant local, l'amplitude des pics de résonance dépend de la valeur du champ au niveau des zones de couplage. Toutes les expériences de chaos quantique dans les cavités micro-ondes s'appuient sur le même procédé : mesurer la matrice S grâce à un analyseur de réseau. En revanche, les conditions expérimentales (type de cavité, matériau utilisé, système de couplage, ...) et le type d'exploitation (comptage de résonances, ajustement des pics, transformée de Fourier, ...) de ces mesures sont extrêmement variés. Ainsi, bien que relativement simple dans sa conception, ce type d'expérience permet d'aborder quasiment tous les aspects du chaos quantique.

1.3 Approximation semiclassique et Théorie des Matrices Aléatoires

Avant d'entamer un rapide historique des expériences réalisées dans les cavités micro-ondes, l'introduction de quelques concepts théoriques de base semble nécessaire.

1.3.1 Introduction à l'approche semiclassique

Comme nous l'avons vu, la propagation d'onde dans un billard peut se ramener, pour les faibles longueurs d'onde, à la propagation de rayons : c'est la limite classique⁹. Ce passage à la limite se fait continûment, il existe donc une gamme de longueur d'onde où , bien que cette approximation ne soit plus tout à fait valide, les propriétés classiques du système continuent à jouer un rôle important. L'approche semiclassique consiste donc à utiliser des arguments classiques pour décrire un système qui ne l'est plus vraiment. Cette approche repose essentiellement sur la notion classique d'orbite périodique (OP). On nomme ainsi les trajectoires se reparcourant indéfiniment après un nombre n de rebonds sur les bords du billard. Le nombre d'OPs augmente exponentiellement (resp. linéairement) avec n dans un billard chaotique (resp. régulier) [Gutzwiller, 1990]. La figure 1.4 montrent pour l'exemple quelques OPs dans le billard en forme de cercle tronqué que nous avons déjà rencontré précédemment. L'ensemble de toutes les OPs explore la totalité du billard, si bien qu'une trajectoire quelconque évolue toujours au voisinage d'une orbite périodique. Autrement dit, les OPs constituent une ossature de base pour l'ensemble de toutes les trajectoires du billard.

Supposons qu'une particule parcourant une OP donnée, subisse à t = 0 une petite perturbation. Suivant la suite de son évolution on peut distinguer trois types d'orbites périodiques. Si l'orbite est stable, la particule reste, au cours du temps, au

⁹Dans toute cette section, «classique» pourra être indifféremment remplacer par «géométrique».



FIG. 1.4 – Orbites périodiques dans un billard en forme de cercle tronqué.

voisinage de l'orbite. Si elle est instable, au contraire, la trajectoire de la particule s'écarte exponentiellement de l'orbite. Enfin, on parle de stabilité marginale si la trajectoire ne s'éloigne de l'orbite que linéairement. Dans un billard complètement chaotique (B-système), presque toutes les OPs sont instables; c'est cette particularité qui est à l'origine du phénomène d'extrême sensibilité aux conditions initiales décrit au début de ce chapitre. Dans les billard réguliers, les OPs ne sont en général pas isolées, c'est-à-dire qu'il existe des familles continues d'orbites périodiques. Dans un cercle, par exemple, on peut transformer n'importe quelle OP en une autre OP en lui appliquant une rotation d'angle quelconque par rapport à son centre. Ce type d'OP est de stabilité neutre. On trouve aussi des familles d'OPs non isolées dans certains billards chaotiques. L'orbite «bouncing ball» du stade de Bunimovich en est l'exemple le plus connu, aussi utiliserons nous, par abus de langage, ce terme de *bouncing ball* pour désigner ce type d'orbite en général.

Nous ne rentrerons pas ici dans le détail des calculs de la Théorie Semiclassique,

le lecteur intéressé peut par exemple consulter la référence [Gutzwiller, 1990]. Nous nous contenterons ici de donner quelques uns de ses résultats principaux.

Supposons que nous ayons mesuré l'ensemble $\{E_i\}$ des énergies des N premiers modes du spectre d'un billard chaotique. On appelle nombre cumulé la fonction en escalier N(E) donnant le nombre de modes d'énergie inférieure ou égale à E. La formule de trace de Gutzwiller [Gutzwiller, 1971, Balian and Bloch, 1971] permet d'écrire cette fonction comme la somme d'une contribution moyenne $N_{moy}(E)$ et d'une contribution fluctuante $N_{fluct}(E)$. La contribution moyenne dépend seulement des propriétés géométriques globales du billard. Plus précisément, pour un billard avec des conditions de bord de Dirichlet, elle est donnée par la formule de Weyl [Balian and Bloch, 1971, Baltes and Hilf, 1976] suivante :

$$N_{moy}(E) = \frac{S}{4\pi}E - \frac{P}{4\pi}\sqrt{E} + K$$
(1.6)

où S, P sont respectivement la surface, le périmètre du billard et K est une constante liée aux propriétés topologiques (courbure, continuité, angles) de son contour. Dans un billard chaotique, la partie fluctuante de N(E) s'écrit comme une somme sur les orbites périodiques isolées seulement, mais la contribution des *bouncing balls* peut être calculée séparément [Sieber et al., 1993]. Nous avons jusqu'ici parlé que du nombre cumulé, mais sa dérivée, qui n'est autre que la densité de mode $\rho(E)$, est également couramment utilisée. On peut finalement résumer ces résultats dans la formule suivante¹⁰ :

$$\rho(k) = \rho_{moy}(k) + \sum_{i} A_i e^{ikl_i}$$
(1.7)

La somme porte sur l'ensemble des orbites périodiques, l_i représente la longueur de l'orbite i et l'amplitude A_i est principalement déterminée par la stabilité de l'orbite i. On voit alors que la transformée de Fourier de la partie oscillante de la densité de mode s'écrit comme une somme sur i de pics de Dirac centrés en l_i et de poids $|A_i|^2$. C'est un résultat particulièrement frappant puisqu'il signifie qu'il doit être possible d'obtenir la longueur des orbites périodiques (au moins les plus courtes) à partir de la mesure des fluctuations spectrales.

 $^{^{10}\}mathrm{Pour}$ les billards, le nombre d'onde k est une variable plus naturelle que E.



FIG. 1.5 – Répartition spatiale de type speckle dans un billard en forme de cercle tronqué.

Nous avons jusqu'ici envisagé les implications de l'approche semiclassique dans le domaine spectral, mais l'influence des OP se fait également sentir au niveau spatial. Comme nous l'avons vu, les rayons d'une trajectoire quelconque explorent rapidement la totalité d'un billard chaotique. Cette exploration se faisant de façon désordonnée, l'orientation des rayons passant par un élément de surface quelconque se distribue uniformément. À chaque rayon est associé une onde plane $ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$. Finalement, tout se passe comme si, pour un mode d'énergie k^2 , le champ en tout point était construit comme une superposition d'ondes planes d'amplitudes et de directions aléatoires [Berry, 1977] :

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{n} a_n \cos(\vec{k}_n \cdot \vec{r} - \phi_n) \tag{1.8}$$

où $\|\vec{k_n}\| = k, \forall n$. L'allure d'un mode de ce type est donnée sur la figure 1.5, on appelle ce type de répartition un «speckle». À partir de cette hypothèse, on peut par exemple établir les lois de distribution de $\psi(\vec{r})$ et de son intensité $I = |\psi(\vec{r})|^2$. La première est une simple distribution gaussienne et la seconde porte le nom de distribution de Porter-Thomas :

$$P(\psi) = \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \exp(-\frac{S\psi^2}{2}) \tag{1.9}$$

$$P(I) = \sqrt{\frac{S}{2\pi I}} \exp(-\frac{SI}{2}) \tag{1.10}$$

où ψ est normalisé à l'unité :

$$\iint_{\mathcal{A}} |\psi(\vec{r})|^2 \mathrm{d}^2 r = 1 \tag{1.11}$$

Ces distributions sont effectivement observées sur les modes de type speckle. Mais on observe également des déviations importantes de ces statistiques pour certains modes particuliers. Les plus célèbres d'entre eux, les «scars» sont des modes présentant une forte surintensité au voisinage d'une ou plusieurs orbites périodiques instables. Ce phénomène fut découvert par Heller [Heller, 1984] en 1984. Bogomolny en 1988 [Bogomolny, 1988] puis Berry en 1989 [Berry, 1989] le justifièrent dans le cadre de la théorie semiclassique. Cet effet fut récemment observé dans une fibre optique chaotique par Doya *et al.*, voir figure 1.6

1.3.2 Introduction à la Théorie des Matrices Aléatoires

Comme nous venons de le voir, l'approche semiclassique de la dynamique des billards chaotiques est basée sur les orbites périodiques. Bien que ces orbites dépendent de la géométrie particulière du billard considéré, cette approche permet d'établir un certain nombre de propriétés spectrales et spatiales communes à l'ensemble des billards chaotiques : ces propriétés sont dites «universelles». La recherche



FIG. 1.6 – Répartition spatiale de type scar dans un billard en forme de cercle tronqué, d'après la référence [Doya et al., 2002a].

d'universalité est un thème intimement lié à la «philosophie» du chaos quantique et comme nous allons le voir, la Théorie des Matrices Aléatoires procède pleinement de cette démarche.

La Théorie des Matrices Aléatoires repose sur l'hypothèse que l'hamiltonien quantique d'un système chaotique à N degrés de liberté peut être modélisé par un ensemble statistique de matrices $N \times N$ dont les éléments sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes (voir, par exemple, la référence [Haake, 1991] pour plus de détails). La démarche procède du même esprit que celle de la physique statistique : plutôt que de chercher à connaître l'évolution de tous les paramètres internes du système (ce qui représente une quantité d'information énorme et le plus souvent inutile), on définit un certain nombre de quantités statistiques moyennes mieux à même de décrire le système¹¹. On distingue trois grands ensembles de matrices aléatoires :

- l'ensemble orthogonal gaussien (GOE) des matrices orthogonales représente les systèmes invariants par renversement du temps et invariant par rotation,
- l'ensemble unitaire gaussien (GUE) des matrices hermitiques complexes représente les systèmes non-invariants par renversement du temps,
- l'ensemble symplectique gaussien (GSE) des matrices réelles quaternion représente les systèmes invariants par renversement du temps mais pas par rotation et dont le moment angulaire total est demi-entier.

L'ensemble GOE est le plus couramment rencontré et c'est à lui que nous nous référerons le plus souvent dans ce manuscrit. En effet, bien que l'invariance par renversement du temps ne soit plus strictement valable dès que des pertes sont présentes, l'ensemble GUE n'est invoqué que pour de très fortes brisures de cette invariance, c'est-à-dire pour des pertes très importantes. La RMT ne s'applique évidemment pas à des systèmes réguliers, mais il est cependant possible de suivre une approche similaire pour définir un ensemble de matrices capable de décrire les propriétés spectrales de systèmes intégrables [Dittes, 2000]. Cet ensemble, qui porte le nom d'ensemble poissonnien orthogonal (POE)¹², ne revêt pas le même caractère d'universalité (faculté à décrire des systèmes *a priori* très différents) que les ensembles décrits précédemment. Il faut le considérer comme un outil mathématique introduit pour faciliter la comparaison avec les systèmes réguliers au sein de la RMT.

Que nous apprends la RMT sur le spectre $\{E_i\}$ d'un système chaotique? La réponse complète à cette question prend plusieurs chapitres d'un ouvrage consacré à la RMT [Mehta, 1991, Haake, 1991], nous nous contenterons donc ici de quelques éléments de réponse. Contrairement à la théorie semiclassique, la RMT ne décrit, par construction, que les propriétés universelles d'un système. Autrement dit, la

¹¹Par exemple, il est généralement plus utile de connaître la température d'une mole de gaz que la vitesse de chacune de ses $6 \ 10^{23}$ molécules.

¹²Il est défini comme l'ensemble des matrices obtenues par transformation orthogonale aléatoire d'une matrice diagonale dont les éléments sont décorrélés et suivent la loi semicirculaire de Wigner [Wigner, 1957].
RMT prédit seulement le comportement de quantités fluctuantes, pas de quantités moyennes. Revenons, pour illustrer ceci, au nombre cumulé N(E) telle que nous l'avons définie précédemment. Nous avons vu que l'on pouvait séparer son comportement moyen de son comportement fluctuant : $N(E) = N_{moy}(E) + N_{fluct}(E)$. Pour rester dans le cadre de la RMT, il faut s'affranchir de l'évolution moyenne du nombre cumulé. Cette opération porte le nom de redressement du spectre et permet de comparer des spectres issus de n'importe quel domaine de la physique. Elle s'effectue très simplement en substituant à la série $\{E_i\}$ une nouvelle série sans dimension $\{x_i\}$ définie par :

$$x_i = N_{moy}(E_i) \tag{1.12}$$

Il est facile de vérifier que la série des x_i ainsi construite possède un écart moyen entre niveaux successifs constant et égal à un, ou autrement dit que sa densité moyenne vaut 1. Une fois le spectre redressé, on peut enfin s'intéresser au comportement de ses fluctuations. La quantité la plus souvent utilisée pour cela est la distribution des écarts $s_i = x_{i+1} - x_i$ entre niveaux successifs, couramment appelée P(s). Pour un système régulier cette distribution est une simple exponentielle décroissante (poissonnienne)¹³ caractéristique de l'absence de corrélations entre modes :

$$P(s)\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s \tag{1.13}$$

On remarque en particulier que les petits écarts sont les plus probables. Pour les systèmes chaotiques de type GOE, par contre, la RMT prédit une «répulsion de niveau» linéaire qui se traduit par la faible fréquence des petits écarts; leur P(s) suit une distribution très bien approchée par la loi de Wigner :

$$P(s)\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}s\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}s^2}\mathrm{d}s \tag{1.14}$$

Les distributions (1.13) et (1.14) sont représentées sur la figure 1.9.

Les propriétés de fluctuations spectrales sont caractérisées par l'ensemble des fonction de corrélation à *n*-niveaux $R_n(E_1, \ldots, E_n)$; $R_n(E_1, \ldots, E_n) dE_1 \ldots dE_n$ est la probabilité de trouver un niveau, quel que soit son indice, dans chaque intervalle

 $^{^{13}\}mathrm{D'où}$ le nom de POE.

 $[E_i, E_i + dE_i]$ quelle que soit l'énergie de chacun des autres niveaux¹⁴. Le P(s)dépend de façon non triviale de l'ensemble de toutes ces fonctions de corrélations, c'est pourquoi on utilise fréquemment deux autres quantités qui ne dépendent que de la fonction de corrélation à deux-niveaux. Soit n(E, L) le nombre de niveaux présents dans un intervalle de longueur L centré autour de E, on note $\Sigma^2(L)$ sa variance. Puisque $\langle \rho(E) \rangle = 1$ (après redressement), on a $\langle n(E, L) \rangle = L$ et :

$$\Sigma^{2}(L) = \langle (n(E,L) - L)^{2} \rangle = \langle n(E,L)^{2} \rangle - L^{2}$$
(1.15)

Comme la notation utilisée l'anticipe, on peut montrer que le nombre de variance $\Sigma^2(L)$ ne dépend pas de E. Pour l'ensemble POE, on trouve facilement $\Sigma^2(L) = L$ alors que pour les ensembles gaussiens (GOE, GUE, GSE) $\Sigma^2(L)$ augmente de façon logarithmique avec L [Mehta, 1991]. La figure 1.7 montre l'excellent accord du $\Sigma^2(L)$ obtenu à partir de spectres nucléaires avec la prédiction GOE. La deuxième quantité, basée sur la fonction de corrélation à deux-niveaux, couramment rencontrée porte le nom de rigidité spectrale ; on la note $\Delta_3(L)$. Elle est donnée par la valeur moyenne du minimum de la fonction χ^2 correspondant à un ajustement linéaire de N(E) sur un intervalle de longueur L centré en E :

$$\Delta_3(L) = \left\langle \min_{a,b} \int_{E-L/2}^{E+L/2} (N(E) - a - bE)^2 dE \right\rangle$$
(1.16)

Comme $\Sigma^2(L)$, la rigidité ne dépend pas de E. Pour l'ensemble POE, on trouve $\Delta_3(L) = L/15$ et pour les ensembles gaussiens on trouve le même comportement logarithmique que pour $\Sigma^2(L)$. En fait la rigidité peut être vu comme une version lissée du nombre de variance, ce qui explique sa plus grande popularité. La figure 1.8 montre encore une fois l'excellent accord observé entre la rigidité calculée d'après la référence [Bohigas et al., 1983] et le comportement prévu pour l'ensemble GOE.

Le comportement du nombre de variance et de la rigidité spectrale, peuvent cependant, dans certains cas, présenter une déviation systématique à longue portée (Lgrand) par rapport aux prédictions de la RMT. En effet, comme nous l'avons déjà

¹⁴Les corrélations spectrales dépendent évidemment de la densité moyenne du spectre, c'est pourquoi il est nécessaire là encore de travailler sur le spectre redressé $\{x_i\}$. Cependant, par convention, on conserve le plus souvent la notation en énergie E.



FIG. 1.7 – Comparaison du $\Sigma^2(L)$ calculé à partir des mesures de la référence [Bohigas et al., 1983] avec les prédictions de la RMT (d'après la référence [Stöckmann, 1999]).

vu, la RMT ne peut, par essence, prédire que les propriétés universelles des systèmes. Or, dans l'approche semiclassique, la formule (1.7) montre qu'une OP de longueur l_i est responsable de fluctuations spectrales sur une échelle $\Delta k = 2\pi/l_i$. Les corrélations spectrales à courte distance sont donc liées aux orbites longues, les orbites les plus courtes déterminant, au contraire, les corrélations spectrales à longue portée. On peut adopter une approche statistique similaire à celle de la RMT pour décrire les propriétés génériques des orbites longues, mais les propriétés des orbites courtes sont fortement liées aux caractéristiques particulières du système. Par conséquent, il est naturel que la RMT et sa démarche statistique peine à décrire les corrélations spectrales à longue portée. L'approche semiclassique, bien qu'elle permette de décrire



FIG. 1.8 – Comparaison du $\Delta_3(L)$ calculé à partir des mesures de la référence [Bohigas et al., 1983] avec les prédictions de la RMT (d'après la référence [Stöckmann, 1999]).

l'ensemble des corrélations spectrales, est plus particulièrement adaptée au calcul des corrélations à longues portées. En effet, pour décrire correctement des corrélations spectrales à l'échelle de $\Delta k = 2\pi/l$ il est nécessaire de connaître toutes les OPs de longueur $l_i < l$, or ce nombre augmente exponentiellement avec l dans un billard chaotique. Finalement, la RMT et la théorie semiclassique apparaissent comme deux approches très complémentaires pour décrire les corrélations à longue et à courte portées du spectre d'un système chaotique. Voyons à présent comment, en l'espace d'une dizaine d'années, les cavités micro-ondes permirent d'illustrer abondamment la plupart des notions présentées ici.

1.4 Chaos ondulatoire dans les cavités micro-ondes

1.4.1 Les expériences micro-ondes de 1990 à 1999

Nous nous contenterons ici de donner un rapide aperçu chronologique des expériences réalisées dans des cavités micro-ondes. Notre objectif est de préciser le contexte expérimental au moment où les travaux présentés dans ce manuscrit débutèrent, en 1999. Bien entendu, cette restriction dans le temps ne s'applique qu'ici et nous nous référerons fréquemment par la suite à des travaux plus récents.

La première expérience utilisant une cavité micro-ondes comme système modèle pour l'étude du chaos quantique fut réalisée par Stöckmann et Stein en 1990 [Stöckmann and Stein, 1990]. Elle permit notamment de mettre pour la première fois en évidence la répulsion de niveau décrite précédemment. Cette répulsion est clairement visible sur la figure 1.9. Les P(s) ont été calculés à partir de mesures dans une cavité rectangulaire (POE) et de type Sinaï (GOE). Pour le Sinaï, les auteurs vérifient également que la transforméee de Fourier de la densité de modes fait bien apparaître des pics qui peuvent être associés aux orbites périodiques de la cavité. La même année, Doron, Smilansky et Frenkel utilisent également une cavité micro-ondes pour mettre à l'épreuve diverses prédictions semiclassiques, notamment concernant les fluctuations de la matrice S et la fonction d'autocorrélation spectrale [Doron et al., 1990].

Un an plus tard, Sridhar mesure pour la première fois la distribution spatiale de l'intensité du champ (cavité de type Sinaï) [Sridhar, 1991, Sridhar et al., 1992]. Il introduit pour cela une petite bille métallique (perturbation) à l'intérieur de la cavité. Il utilise ensuite la proportionnalité du décalage des fréquences de résonance qui s'ensuit avec l'intensité du champ au niveau de la bille. Bien que la cavité soit complètement chaotique, il observe l'existence de modes dont la répartition spatiale ne remplit pas uniformément la cavité. Ces modes qui s'organisent autour d'orbites périodiques particulières mettent en évidence les phénomènes de scar et de boucing ball décrits précédemment.

En 1991 toujours, Haake *et al.* observent la transition d'un système régulier vers un système chaotique [Haake et al., 1991]. Ils utilisent dans leur cas une cavité rec-



FIG. 1.9 – L'histograme représente le P(s) caculé à partir de la mesure dans une cavité micro-ondes des 1000 premiers modes d'un billard de Sinaï. En insert, ce même P(s) calculé à partir de 300 premiers modes d'une cavité rectangulaire. Les courbes en pointillés correspondent respectivement à une distribution de Wigner et à une poissonnienne (d'après [Stöckmann and Stein, 1990]).

tangulaire couplée à l'extérieur grâce à une antenne de diamètre faible devant la longueur d'onde. L'antenne se comporte comme un diffuseur ponctuel dont le couplage effectif augmente avec la fréquence. Ce type de billard (diffuseur ponctuel à l'intérieur d'un rectangle) porte le nom de billard de Šeba [Šeba and Życzkowski, 1991]. Dans un certain sens, il peut être considéré comme la limite d'un billard de Sinaï dont le rayon du diffuseur tend vers zéro. Il apparaît ainsi comme intermédiaire entre le billard de Sinaï (complètement chaotique) et le billard rectangulaire (régulier) et constitue de fait un des exemples les plus courants de la famille des billards pseudointégrables. On appelle ainsi les billards possédant un ou plusieurs points singuliers, c'est-à-dire des points capables de briser la conservation d'une des deux constantes du mouvement, comme un diffuseur ponctuel (billard de Seba) ou un point de jonction entre deux segments (billard polygonal)¹⁵. Dans un tel billard, toutes les trajectoires sont régulières sauf celles interceptant un ou plusieurs points singuliers. Bien que formant un ensemble de mesure nulle, ces trajectoires confèrent à ces billards des propriétés ondulatoires différentes de celles d'un système régulier, alors même que la limite classique de ces billards est intégrable. La distinction entre trajectoires régulières ou pas, conduit les auteurs à utiliser un modèle additif de matrices aléatoires : l'hamiltonien du système est la somme d'une matrice de type GOE et d'une matrice de type POE. Cette somme est pondérée, de sorte que le modèle tende asymptotiquement vers un système régulier ou chaotique en fonction d'un paramètre continu (ce paramètre mesure en quelques sorte la «chaoticité» du système). Dans cette expérience, le couplage est trop faible à basse fréquence pour que l'antenne perturbe significativement la dynamique régulière. À haute fréquence, le couplage devient suffisant pour que la présence de l'antenne modifie la dynamique. À l'aide du P(s), les auteurs observent ainsi l'augmentation avec la fréquence de la «chaoticité» de la cavité .

Ces premières expériences furent essentiellement appréhendées comme une alternative expérimentale à la simulation numérique pour l'obtention de spectres de systèmes chaotiques. Mais même si le cuivre est excellent conducteur il occasionne des pertes ohmiques non négligeables aux fréquences utilisées. Ces pertes entraînent un élargissement des modes qui rend plus difficile la résolution de modes très proches. En outre, ni le modèle semiclassique, ni la RMT ne tiennent compte de l'existence de pertes. Dans cette optique, les cavités supra-conductrices se sont vite imposées comme plus appropriées que les cavités à température ambiante. L'annulation de leur résistivité permet en effet d'atteindre des facteurs de qualité (rapport de la position en fréquence sur la largeur de la résonance) environ 1000 fois supérieurs (c'est-à-dire des pertes 1000 fois inférieures) à ceux d'une cavité à température ambiante. La figure 1.10 illustre bien cette différence.

¹⁵Quelques billards polygonaux font figure d'exception et arborent une dynamique régulières, comme bien sûr le rectangle.



FIG. 1.10 – Coefficient de transmission mesuré entre 17 et 18 GHz. En haut mesure effectuée à température ambiante; en bas à 2 K. Insert : Forme de la cavité et position des antennes (d'après [Gräf et al., 1992]).

Gräf *et al.* [Gräf et al., 1992] sont les premiers en 1992 à exploiter ce type de cavité. Ils parviennent ainsi pour la première fois à mesurer un spectre complet, c'est-à-dire avec la certitude de ne manquer aucun mode. La précision de leurs mesures leur permet de vérifier de façon approfondie les prédictions de l'approche semiclassique sur la densité de modes, incluant l'influence des *bouncing balls*. Ils montrent également que la prise en compte des bouncing balls dans l'opération de redressement du spectre permet d'améliorer l'accord avec les prédictions de la RMT.

Puis en 1995, Alt et al. [Alt et al., 1995] s'intéressent pour la première fois aux

largeurs des résonances. Alors que jusque là on se contentait de repérer la position des pics observés pour mesurer les fréquences des résonances, ils utilisent un algorithme d'ajustement (voir pour plus de précisions la référence [Alt et al., 1993]) pour extraire les paramètres (amplitude, largeur et position) de chaque résonance. Dans leur cas, les pertes ohmiques peuvent être négligées (cavité supra-conductrice) devant les pertes dues au couplage avec les antennes. Ces dernières étant directement proportionnelles à l'intensité du champ au niveau des antennes, leur propriétés statistiques sont identiques à celles de l'intensité du champ dans la cavité. Leurs résultats montrent effectivement un très bon accord de la distribution de l'intensité avec la distribution de Porter-Thomas. Ils vérifient également avec succès que la fonction d'autocorrélation en fréquence de la matrice S correspond bien à la prédiction de la RMT pour un système de type GOE.

En 1995 toujours, Stein, Stöckmann et Stoffregen franchissent un nouveau pas en mesurant non seulement l'intensité de la fonction d'onde mais également sa phase [Stein et al., 1995]. Ils utilisent pour cela une cavité dont la plaque inférieure est mobile par rapport au reste de la cavité et mesurent la transmission entre une antenne fixée sur la plaque supérieure et une autre fixée sur la plaque inférieure. Déplacer la plaque inférieure revient alors à déplacer l'antenne qui y est fixée par rapport au reste de la cavité. Or, le coefficient de transmission, à la résonance, est proportionnel au produit des champs au niveau des antennes. La position d'une des antennes étant fixée, on obtient une correspondance directe entre le coefficient de transmission complexe (module et phase) et le champ au niveau de l'antenne mobile. L'accès à la phase permet notamment, par transformation de Fourier, de visualiser la propagation temporelle d'une impulsion dans la cavité.

De leur côté, Deus, Koch et Sirko [Deus et al., 1995] mesurent le spectre d'une cavité chaotique à trois dimensions et vérifient que son P(s) est bien décrit par la distribution de Wigner.

En 1997, Šeba *et al.* étudient la distribution du champ dans une cavité désordonnée (13 à 17 diffuseurs circulaires sont disposés aléatoirement à l'intérieur de la cavité) [Šeba et al., 1997]. Ils observent que les distributions spatiales de l'intensité, comme de l'amplitude (partie réelle et imaginaire), sont proches, à haute fréquence, de celles d'un système décrit par l'ensemble GUE. Cela se justifie par la brisure de l'invariance par renversement du temps due à la présence de pertes très importantes à haute fréquence.

En 1999, Barth, Kuhl et Stöckmann profitent de la grande flexibilité des expériences de cavité micro-ondes pour étudier les déplacements des fréquences de résonances (dynamique des niveaux) en fonction d'une perturbation locale ou globale [Barth et al., 1999]. Dans le premier cas, ils font varier la position de l'un des diffuseurs dans une cavité désordonnée. Dans le second, ils modifient l'une des dimensions d'une cavité (paroi mobile) de type Sinaï. Il apparaît que la dynamique des niveaux est sensible au type (local ou global) de paramètre utilisé. Par exemple, la sensibilité des niveaux à la perturbation (vitesse de variation par rapport au paramètre) est beaucoup plus dispersée si la perturbation est globale que si elle est locale.

Lu *et al.* regardent, la même année, le problème ouvert de la diffusion à *n*-disques [Lu et al., 1999]. Pour réaliser une cavité ouverte, ils placent un matériau absorbant pour les micro-ondes sur tout son pourtour. Leurs résultats montrent que là encore les orbites périodiques permettent, dans le cadre de la théorie semiclassique, de bien décrire les propriétés spectrales du système.

1.4.2 Etudier les pertes dans les cavités micro-ondes

Comme nous venons de le voir, les expériences de chaos quantique dans les cavités micro-ondes étaient déjà très nombreuses avant le début de nos travaux. Les cavités à température ambiante ont ouvert la voie, rapidement suivies par les cavités supraconductrices. Dans un premier temps, l'effort porta essentiellement sur la vérification de prédictions théoriques (RMT et approche semiclassique) quant aux fluctuations spectrales. Les pertes, absentes des modèles utilisés à l'époque, représentent alors une gêne pour la mesure des fréquences de résonance. C'est pourquoi les cavités supraconductrices se montrent bien mieux adaptées dans ce domaine. Lorsque les largeurs sont mesurées pour la première fois par l'équipe de Darmstadt [Alt et al., 1995] en 1995, c'est dans le cas très spécifique où les pertes ohmiques sont négligeables. Dans cette situation, mesurer les largeurs revient à mesurer l'intensité du champ au niveau des antennes $^{16}.$

Puis, la grande flexibilité des cavités micro-ondes entraîne une large diversification de ces expériences : on s'intéresse à la répartition spatiale du champ, à des cavités 3D, ouvertes, désordonnées, ... Finalement, en 1999, les rôle des pertes sur les propriétés statistiques spatiales et spectrales des cavités micro-ondes ont encore fait l'objet de très peu d'études.

Si les pertes sont très faibles, les résonances peuvent être considérées comme isolées. Lorsque les pertes sont très importantes, il devient difficile de distinguer les résonances (à cause du recouvrement) et la description du système en termes de modes perd sa pertinence puisqu'il devient impossible d'en exciter un séparément des autres. Ce régime fut décrit simultanément et de façon similaire [Mortessagne, 1994], par les études indépendantes d'Ericson dans le domaine quantique (plus précisément nucléaire) [Ericson, 1960, Ericson, 1963] et de Schræder dans le domaine acoustique [Schræder and Kutruff, 1962, Schræder, 1962]. Que se passe-t-il dans le régime intermédiaire où la notion de résonance tient encore mais où on ne peut plus négliger le recouvrement entre résonances voisines ? C'est à cette question très vaste que nous avons voulu essayer de donner quelques éléments de réponse grâce à l'expérience présentée dans cet manuscrit.

Dans une cavité micro-ondes à température ambiante on peut distinguer trois types de pertes :

- les pertes ohmiques dues à la conductivité finie du métal,
- les pertes par couplage vers l'extérieur à travers les antennes,
- le reste des pertes lié aux imperfections de la cavité.

Toutes les précautions sont prises pour minimiser ce dernier type de perte, de sorte que l'on puisse les négliger sans risque. Comme nous l'avons vu, les pertes à travers les antennes ont déjà fait l'objet d'études spécifiques. Les pertes ohmiques par contre ont suscité relativement peu d'intérêt. Elles sont pourtant directement reliées à la dynamique de la cavité puisqu'une partie d'entre elles est localisée sur les bords de

 $^{^{16}}$ Les largeurs sont également mesurées dans la référence [Šeba et al., 1997], mais là encore elles ne sont qu'un moyen pour accéder à l'intensité du champ

la cavité. C'est donc sur elles que nous avons choisi de concentrer notre étude. Pour cela, il faut construire une cavité dans laquelle les pertes ohmiques sont dominantes. Pour autant, il est souhaitable que ces pertes restent perturbatives¹⁷ afin de pouvoir s'appuyer sur les outils développés pour décrire les systèmes fermés, et notamment la RMT. C'est la réalisation de cette cavité et le dispositif de mesure qui y est attaché que nous allons décrire dans le chapitre suivant.

¹⁷Nous préciserons au Chapitre 3 ce qu'on entend ici par «perturbatives». Jusque là, on peut se contenter de considérer les pertes comme perturbatives tant qu'elles ne rendent pas caduque la notion de résonances distinctes.

CHAPITRE 1. CHAOS, CAVITÉS ET MICRO-ONDES ...

Bibliographie

- [Alt et al., 1995] Alt, H., Gräf, H.-D., Harney, H., Lengeler, H., Richter, A., Schardt, P., and Weidenmüller, H. (1995). Gaussian orthogonal ensemble statistics in a microwave stadium billiard with chaotic dynamics : Porter-Thomas distribution and algebraic decay of time correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 74 :62–65.
- [Alt et al., 1993] Alt, H., von Bretano, P., Gräf, H.-D., Herzberg, R.-D., Philipp, M., Richter, A., and Schardt, P. (1993). Resonances of a superconducting cavity : A test of the Breit-Wigner formula over a large dynamic range. Nucl. Phys. A, A560(1) :293-305.
- [Balian and Bloch, 1971] Balian, R. and Bloch, C. (1971). Asymptotic evaluation of Green's function for large quantum numbers. *Ann. Phys.*, 63:582.
- [Baltes and Hilf, 1976] Baltes, H. and Hilf, E. (1976). Spectra of Finite Systems.Bibliographisches Institut, Mannheim.
- [Barth et al., 1999] Barth, M., Kuhl, U., and Stöckmann, H.-J. (1999). Global versus local billiard level dynamics : The limits of universality. *Phys. Rev. Lett.*, 82(10) :2026-2029.
- [Bayfield and Koch, 1974] Bayfield, J. and Koch, P. (1974). Multiphoton ionization of highly excited hydrogen atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 33 :258.
- [Berry, 1977] Berry, M. (1977). Regular and irregular semiclassical wavefunctions. J. Phys. A : Math. Gen., 10 :2083-2091.
- [Berry, 1989] Berry, M. V. (1989). Quantum scars of classically closed orbits in phase space. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 423 :219.

- [Blümel et al., 1992] Blümel, R., Davidson, I. H., Reinhardt, W. P., Lin, H., and Sharnoff, M. (1992). Quasilinear ridge structures in water surface waves. *Phys. Rev. A*, 45(4) :2641–2644.
- [Bogomolny, 1988] Bogomolny, E. (1988). Smoothed wavefunctions of chaotic quantum systems. *Physica D*, page 169.
- [Bohigas et al., 1984] Bohigas, O., Giannoni, M., and Schmidt, C. (1984). Characterisation of chaotic spectra and universality of level fluctuations laws. *Phys. Rev. Lett.*, 52(1) :1–4.
- [Bohigas and Giannoni, 1984] Bohigas, O. and Giannoni, M.-J. (1984). Chaotic motion and random matrix theories. *Lect. Notes Phys.*, 209.
- [Bohigas et al., 1983] Bohigas, O., Haq, R., and Pandey, A. (1983). Fluctuations properties of nuclear energy levels and widths : comparison of theory with experiments, page 809. Reidel Dordrecht.
- [Casati et al., 1980] Casati, G., Vlaz-Gris, F., and Guarneri, I. (1980). On the connection between quantization of nonintegrable systems and statistical theory of spectra. Lett. Nuovo Cimento, 28:279.
- [Chinnery and Humphrey, 1996] Chinnery, P. A. and Humphrey, V. F. (1996). Experimental visualization of acoustic resonances within a stadium-shaped cavity. *Phys. Rev. E*, 53(1) :272–276.
- [Deus et al., 1995] Deus, S., Koch, P., and Sirko, L. (1995). Statistical properties of the eigenfrequency distribution of three-dimensional microwave cavities. *Phys. Rev. E*, 52(1) :1146–1155.
- [Dittes, 2000] Dittes, F.-M. (2000). The decay of quantum systems with a small number of open channels. *Phys. Rep.*, 339 :215–316.
- [Doron et al., 1990] Doron, E., Smilansky, U., and Frenkel, A. (1990). Experimental demonstration of chaotic scattering of microwaves. *Phys. Rev. Lett.*, 65(25):3072– 3075.
- [Doya, 2000] Doya, V. (2000). Du speckle aux scars : une expérience de chaos ondulatoire dans une fibre optique. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis.

- [Doya et al., 2002a] Doya, V., Legrand, O., and Mortessagne, F. (2002a). Light scarring in an optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 88(1):014102.
- [Doya et al., 2002b] Doya, V., Legrand, O., and Mortessagne, F. (2002b). Speckle statistics in a chaotic multimode fiber. *Phys. Rev. E*, 65(5):6223.
- [Ellegaard et al., 1995] Ellegaard, C., Guhr, T., Lindemann, K., Lorensen, H. Q., Nygøard, J., and Oxborrow, M. (1995). Spectral statistics of acoustic resonances in aluminium blocks. *Phys. Rev. Lett.*, 75(8) :1546-1549.
- [Ericson, 1960] Ericson, T. (1960). Fluctuations of nuclear cross section in the "continuum" region. Phys. Rev. Lett., 5:430-431.
- [Ericson, 1963] Ericson, T. (1963). A theory of fluctuations in nuclear cross sections. Ann. Phys., 23 :390-414.
- [Gräf et al., 1992] Gräf, H.-D., Harney, H., Lengeler, H., Lewenkopf, C., Rangacharyulu, C., Richter, A., Schardt, P., and Weidenmüller, H. (1992). Distribution of eigenmodes in a superconducting stadium billiard with chaotic dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 69(9) :1296–1299.
- [Gutzwiller, 1971] Gutzwiller, M. C. (1971). Periodic orbits and classical quantization conditions. J. Math. Phys., 12 :343–358.
- [Gutzwiller, 1990] Gutzwiller, M. C. (1990). Chaos in classical and quantum mechanics. Springer-Verlag.
- [Haake, 1991] Haake, F. (1991). Quantum Signatures of Chaos. Springer-Verlag Berlin.
- [Haake et al., 1991] Haake, F., Lenz, G., Šeba, P., Stein, J., Stöckmann, H.-J., and Życzkowski, K. (1991). Manisfestation of wave chaos in pseudointegrable microwave resonators. *Phys. Rev. A*, 44(10) :R6161–R6164.
- [Heller, 1984] Heller, E. J. (1984). Bound-state eigenfunctions of classically chaotic hamiltonian systems : Scars of periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.*, pages 1515–1518.
- [Jackson, 1965] Jackson, J. D. (1965). Classical Electrodynamics. Academic Press, New York.

- [Lindelof et al., 1986] Lindelof, P. E., Nørregard, J., and Hanberg, J. (1986). New light on the scattering mechanisms in Si inversion layers by weak localization experiments. *Physica Scripta*, T14 :17.
- [Lu et al., 1999] Lu, W., Rose, M., Pance, K., and Sridhar, S. (1999). Quantum resonances and decay of a chaotic fractal repeller observed using microwaves. *Phys. Rev. Lett.*, 82(26) :5233-5236.
- [Mehta, 1991] Mehta, M. (1991). *Random Matrices*. Academic Press, San Diego, second edition.
- [Mortessagne, 1994] Mortessagne, F. (1994). Dynamique et interférences géométriques dans les billards chaotiques. PhD thesis, Université Paris 7 - Denis Diderot.
- [Porter, 1965] Porter, C. (1965). Statistical Theory of Spectra : Fluctuations. Academic Press New York.
- [Schrœder, 1962] Schrœder, M. (1962). Frequency-correlation functions of frequency responses in rooms. J. Acoust. Soc. Am., 34 :1819–1823.
- [Schrœder and Kutruff, 1962] Schrœder, M. and Kutruff, K. (1962). On frequency responses curves in rooms. comparison of experimental, theoretical, and Monte Carlo results for the average frequency spacing between maxima. J. Acoust. Soc. Am., 34 :76-80.
- [Sieber et al., 1993] Sieber, M., Smilansky, U., Creagh, S., and Littlejohn, R. (1993). Non-generic spectrals statistics in the quantized stadium billiard. J. Phys. A : Math. Gen., 26 :6217.
- [Sridhar, 1991] Sridhar, S. (1991). Experimental observation of scarred eigenfunctions of chaotic microwave cavities. *Phys. Rev. Lett.*, 67(7):785–788.
- [Sridhar et al., 1992] Sridhar, S., Hogenboom, D., Balam, A., and Willemsen, A. (1992). Microwave experiments on chaotic billiards. J. Stat. Phys., 68(1/2) :239– 258.
- [Stein et al., 1995] Stein, J., Stöckmann, H.-J., and Stoffregen, U. (1995). Microwave studies of billiard Green functions and propagators. *Phys. Rev. Lett.*, 75(1):53–56.

- [Stöckmann, 1999] Stöckmann, H.-J. (1999). *Quantum Chaos*. Cambridge University Press.
- [Stöckmann and Stein, 1990] Stöckmann, H.-J. and Stein, J. (1990). "Quantum" chaos in billiards studied by microwave absorption. *Phys. Rev. Lett.*, 64(19):2215– 2218.
- [Voros, 1976] Voros, A. (1976). Semi-classical approximations. Ann. Inst. Henri Poincaré, XXIV(1):31–90.
- [Seba et al., 1997] Seba, P., Haake, F., Kuš, M., Barth, M., Kuhl, U., and Stöckmann, H.-J. (1997). Distribution of the wave function inside chaotic partially open systems. *Phys. Rev. E*, 56(3):2680–2686.
- [Šeba and Życzkowski, 1991] Šeba, P. and Życzkowski, K. (1991). Wave chaos in quantized classically nonchaotic systems. *Phys. Rev. A*, 44(6) :3457–3465.
- [Weaver, 1989] Weaver, R. L. (1989). Specral statistics in elastodynamics. J. Acoust. Soc. Am., 85(3) :1005–1013.
- [Weiss et al., 1991] Weiss, D., Roukes, M., Menschig, A., Grambow, P., von Klitzing, K., and Weimann, G. (1991). Electronic pinball and commensurate orbits in a periodic array of scatterers. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :2790.
- [Wigner, 1951] Wigner, E. (1951). Proc. Cambridge Phil. Soc., pages 47-790.
- [Wigner, 1957] Wigner, E. (1957). Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions II. Ann. Math., 65:203.

BIBLIOGRAPHIE

Chapitre 2

Description détaillée de l'expérience

Sommaire

2.1	Vue	d'ensemble de l'expérience	57
2.2	Construire une cavité «ohmique»		61
2	2.2.1	Un compromis entre pertes et modularité $\ldots \ldots \ldots$	61
2	2.2.2	Bien fermer la cavité	62
2	2.2.3	Contrôler l'état de surface	63
2.3	Coup	pler la cavité à l'extérieur	65
2	2.3.1	Des antennes pour émettre et pour recevoir $\ldots \ldots \ldots$	65
2	2.3.2	Un couplage faible	67
2	2.3.3	Des câbles de qualité	68
2.4	L'an	alyseur de réseau	69
2	2.4.1	Principe de fonctionnement de l'analyseur	69
2	2.4.2	Pourquoi et comment calibrer ?	70
2	2.4.3	Piloter l'analyseur par ordinateur	72
2.5	Déta	il du protocole expérimental	72

Après avoir décrit le dispositif expérimental dans son ensemble, nous détaillerons les différents problèmes rencontrés lors de la réalisation pratique. Nous commencerons par considérer les difficultés inhérentes à la construction de la cavité elle-même (conception, usinage, entretien, ...). Puis nous nous intéresserons aux antennes permettant de coupler la cavité à l'extérieur. Enfin nous verrons quels sont les choix à faire et les précautions à prendre concernant l'analyseur de réseau vectoriel qui nous sert à la fois de source et de détecteur pour les micro-ondes.

2.1 Vue d'ensemble de l'expérience

Cette section décrit rapidement l'ensemble des constituants de l'expérience. Elle a pour but de permettre au lecteur qui ne serait pas intéressé par les détails techniques, de se faire une idée globale de l'expérience sans avoir à lire le reste de ce chapitre. La figure 2.1 présente l'ensemble du dispositif expérimental. La cavité en constitue évidemment l'élément central. Elle est reliée à un analyseur de réseau vectoriel, luimême piloté à l'aide d'un ordinateur. Comme on peut le voir sur la figure 2.2, la



FIG. 2.1 – Dispositif expérimental

cavité possède une structure en couches. Les deux couches externes sont constituées

par deux épaisses plaques en dural qui assurent la rigidité de l'ensemble. La cavité elle-même est ménagée par un cadre rectangulaire en cuivre pris en sandwich entre une plaque et une feuille de cuivre. Pour coupler la cavité avec l'extérieur on utilise un dizaine d'antennes coaxiales qui traversent la plaque épaisse en cuivre pour pénétrer à l'intérieur de la cavité. Ces antennes excitent le champ électrique E_z dans la cavité. Elles fonctionnent aussi bien en émission qu'en réception et permettent donc deux types de mesure. Si la même antenne est utilisée à la fois comme émetteur et comme récepteur on parle d'une mesure en réflexion. Si deux antennes distinctes sont utilisées on parle de mesure en transmission. Les antennes pénètrent peu dans la cavité et sont d'un faible diamètre. Nous verrons que cela permet de limiter l'influence des antennes tant au niveau de la diffusion que de la dissipation.

On utilise pour les mesures un analyseur de réseau vectoriel HP 8720D pouvant travailler sur une gamme de fréquences allant de 50 MHz à 20 GHz. L'analyseur dispose de deux ports de mesure ce qui lui permet de servir à la fois de source et de détecteur. Il mesure des rapports entre les ondes émises et reçues sur chacun de ses ports. Il effectue la mesure en quadrature de phase et permet ainsi d'obtenir les coefficients complexes de diffusion. On définit alors une matrice de diffusion appelée matrice S. Elle est de la forme $\binom{S_{11} S_{12}}{S_{21} S_{22}}$ où S_{11} (resp. S_{22}) mesure la réflexion sur le port 1 (resp. 2) et S_{12} (resp. S_{21}) mesure la transmission du port 2 (resp. 1) vers le port 1(resp. 2). Enfin, un ordinateur relié à l'analyseur permet à la fois d'automatiser et de sauvegarder les mesures. On utilise pour cela le logiciel Matlab[®] combiné à une interface GPIB. La plus petite longueur d'onde utilisée, $\lambda \simeq 5.5$ cm, restant supérieure à d, on a vu que les équations de Maxwell indépendantes du temps se ramènent à l'équation de Helmholtz à deux dimensions, soit :

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\psi = 0 \tag{2.1}$$

avec des conditions de bord de Dirichlet :

$$\psi|_{\mathcal{C}} = 0 \tag{2.2}$$

où $\psi = E_z(x, y).$



FIG. 2.2 – Coupe de la cavité

Nous nous limiterons ici à des fréquences allant jusqu'à 5.5 GHz car au-delà le recouvrement entre résonances devient trop important¹. Avant toute mesure, il est nécessaire de procéder à la calibration de l'analyseur de réseau. Cette opération permet de s'affranchir de l'influence des câbles et connecteurs situés entre l'analyseur et la cavité. Il suffit de remplacer, dans le dispositif de mesure, la cavité par des terminaisons simples pour que l'analyseur calcule et retranche numériquement cette influence. Cependant, des problèmes de connectique empêchent la prise en compte des antennes elles-mêmes dans la calibration. Ceci n'est pas gênant pour les mesures en transmission mais perturbe de façon importante les mesures en réflexion. Nous avons donc choisi de ne travailler que sur le coefficient de transmission². Une simple calibration en réponse de la transmission permet d'obtenir un très bon rapport signal à bruit³ comme on peut le voir sur la figure 2.3. Le module du coefficient de transmission est représenté en bleu et sa phase cumulée en rouge. Les pics de résonance sont clairement visibles sur le module tandis que le passage d'une résonance se traduit par une marche sur la phase. Cette mesure a été réalisée dans la cavité vide (rectangulaire) qui n'est évidemment pas chaotique. On peut, par exemple,

¹La largeur et la densité des modes augmentent tous deux avec la fréquence.

²Le principe de réciprocité assure $S_{12} = S_{21}$.

³On effectue, à basse fréquence, une moyenne sur quelques passages.

ajouter un disque en cuivre de 5 mm d'épaisseur et 12 cm de diamètre à l'intérieur de la cavité. On réalise ainsi une cavité en forme de billard de Sinaï, connu pour être complètement chaotique. Suivant la taille, le nombre, la forme, la position et les propriétés électriques (conducteur ou diélectrique) des diffuseurs introduits, on pourra ainsi varier les réalisations de cavités chaotiques et désordonnées.

Les mesures sont en général effectuées par bandes de 0.5 GHz comportant 1601 points chacune, soit avec un pas en fréquence de 0.3125 MHz. Les 45 couples d'antennes possibles sont exploités. Au total, cela représente quelques 756 000 points de mesure entre 0.25 GHz et 5.5 GHz pour chaque campagne de mesure. L'étape suivante consiste à traiter numériquement cette grande quantité de données afin d'en extraire les paramètres (position, largeur, amplitude) caractéristiques de chaque résonance. Ce travail sera décrit en détail dans les chapitres suivants.



FIG. 2.3 – Module et phase du coefficient de transmission mesuré entre 3 GHz et 3.25 GHz.

2.2 Construire une cavité «ohmique»

Comme cela a été précisé à la fin du chapitre précédent, on souhaite réaliser une cavité dans laquelle les pertes ohmiques, bien que perturbatives, sont non négligeables et constituent la source de perte dominante. Qualifions d'«ohmique» ce type de cavité. Une cavité supraconductrice n'est pas adaptée car les pertes ohmiques y sont complètement négligeables. Dans une cavité à température ambiante, les pertes ohmiques dépendent directement de la conductivité du matériaux choisi. Afin que les pertes ohmiques restent perturbatives, il est nécessaire d'utiliser un bon conducteur. Nous avons donc choisi d'utiliser du cuivre, et plus précisément, de nuance CuC⁴ lorsque c'était possible. Il reste ensuite à prendre toutes les précautions nécessaires pour minimiser toutes les pertes d'origine non-ohmiques.

2.2.1 Un compromis entre pertes et modularité

Évidemment, il est tentant de réaliser une cavité la plus modulable possible, c'està-dire une cavité dont les paramètres géométriques puissent être changés à volonté, que l'on puisse facilement ouvrir pour y introduire d'éventuels diffuseurs, voire dans laquelle on puisse déplacer librement les antennes de mesure. Mais cette modularité a un coût en terme de pertes. En effet cela implique d'utiliser de nombreuses pièces séparées et également de laisser certaine pièces mobiles entre elles. Or, lorsqu'on travaille avec des hyperfréquences, les jonctions entre les différentes pièces créent des pertes supplémentaires que nous appellerons les pertes de fuite. Il nous a donc fallu trouver un compromis entre modularité et minimisation des pertes de fuite.

De la moins flexible à la plus flexible on peut distinguer trois grands types de cavité : cavité monobloc, cavité à structure interne modifiable et cavité de dimension variable. La première, est une cavité d'un seul bloc obtenue par moulage. En plus de poser de réels problèmes de fabrication et de rendre très délicat l'entretien de sa surface interne, ce type de cavité limite vraiment beaucoup le champ des investigations. A moins bien sûr de construire une nouvelle cavité à chaque fois mais ce sont alors des problèmes de finances et de délais qui apparaissent. La dernière suppose de

⁴CuC est une norme de qualité équivalente à la norme OFHC (Oxygen Free High Conductivity).

laisser une pièce libre de se déplacer par rapport aux autres pour chaque dimension variable. Il devient alors très compliqué d'assurer un contact satisfaisant entres les pièces, ce qui conduit à des pertes de fuite trop importantes pour rester négligeables devant les pertes ohmiques. Nous avons donc choisi le deuxième type de cavité, c'està-dire une cavité munie d'un système de fermeture efficace et contraignant, mais qui permette de temps à autre d'y introduire des diffuseurs et de modifier ainsi la dynamique. C'est ainsi que nous avons abouti à la structure représentée sur la figure 2.2.

L'espace intérieur de la cavité est ménagé par un cadre rectangulaire pris en tenaille entre les parois inférieures et supérieures. Le cadre est usiné d'une seule pièce, à la fois pour éviter les problèmes de jonction évoqués ci-dessus et les problèmes de flambage lors de l'usinage⁵. La paroi inférieure est une plaque épaisse de 5 mm afin de pouvoir y fixer solidement les antennes. On a par contre utilisé une feuille de cuivre (0.5 mm d'épaisseur) collée sur une plaque en dural pour la paroi supérieure. Cela permet d'éviter à la paroi supérieure de ployer sous son propre poids. Malheureusement, il est difficile de trouver des feuilles de cette épaisseur en qualité CuC, celle qui est utilisée ici est en cuivre à la norme CuB. Sa conductivité est un peu inférieure à celle du cuivre CuC. La forme du cadre détermine la dynamique de la cavité vide. Il nous est apparu naturel de choisir une forme géométrique simple de sorte que cette dernière soit régulière. La cavité vide ou régulière (nous dirons l'un et l'autre indifféremment) est donc ici rectangulaire et servira de cavité de référence dans la mesure où sa dynamique est entièrement connue analytiquement.

2.2.2 Bien fermer la cavité

Comme évoqué dans la section précédente, il est important de concevoir un système de fermeture efficace. Il est ici constitué de vis traversant la cavité sur toute son épaisseur, comme on peut le voir sur la figure 2.4(a). Le grand nombre de vis utilisées (voir figure 2.4(b)) assure un serrage uniforme sur l'ensemble des bords et le diamètre important de ces vis (5 mm) permet d'appliquer un couple de vissage

⁵Le cuivre est un matériau très tendre ce qui rend son usinage assez délicat.



FIG. 2.4 – Système de fermeture de la cavité.

important. La figure 2.5 montre l'évolution des largeurs de quatre résonances successives en fonction du serrage appliqué. On a mesuré le coefficient de transmission pour trois couples d'antennes différents et quatre conditions de serrage différentes. Les trois couples d'antennes permettent de voir si le serrage joue un rôle différent suivant la position des antennes. Le premier couple est constitué par des antennes très excentrées, le deuxième par des antennes plutôt centrées et le troisième par une de chaque. Les conditions de serrage sont : pas de serrage du tout (a), un demi-tour à chaque écrou (b), trois quarts de tour à chaque écrou (c) et tous les écrous serrés au maximum(d) ⁶. C'est en l'absence de serrage que les largeurs sont les plus grandes. Lorsqu'on augmente le serrage, elles diminuent et se stabilisent rapidement. Il est très difficile de discerner une différence entre les cas c) et d). Cela démontre l'efficacité de ce dispositif de serrage et il est clairement inutile d'essayer de serrer plus fort. Enfin, il n'apparaît pas de différence notable en fonction de la position des antennes.

2.2.3 Contrôler l'état de surface

Enfin, l'état de surface de la cavité est le dernier paramètre important pour contrôler les pertes. En effet, le cuivre est un excellent conducteur mais il présente l'inconvénient de s'oxyder rapidement au contact de l'air. Or, les pertes ohmiques

 $^{^{6}\}mathrm{Cela}$ qui correspond à un serrage supplémentaire d'un quart de tour maximum.



FIG. 2.5 – Largeurs des résonances en fonction du serrage : a) pas de serrage (\diamond), b) serrage léger (+), c) serrage fort (\Box) et d) serrage très fort (×).

sont dues à l'effet joule induit par les courants de surface. Ces courants vivent dans une couche dont la profondeur est de l'ordre de l'épaisseur de peau δ du cuivre, c'est-à-dire de l'ordre du micron (δ dépend de la fréquence). Il est donc clair que l'état de surface (oxydation et rugosité) joue un rôle important pour les pertes ohmiques. Pour ce qui est de l'oxydation nous avons choisi d'utiliser le Citranox[®] (produit par Alconox). C'est à la fois un acide désoxydant et un détergent (Voir www.alconox.com pour plus de détails). Il s'emploi avec une éponge ou un chiffon, comme un simple savon (rinçage à l'eau) et facilite grandement le nettoyage des pièces en cuivre. La désoxydation est très efficace, malheureusement on ne peut empêcher l'oxydation de revenir à moins de recouvrir la surface du cuivre avec une couche protectrice (ce que font les produits ménagers du commerce). Or pour qu'une telle solution soit satisfaisante, il faudrait que cette couche protectrice soit électriquement et électromagnétiquement transparente, sous peine de remplacer une couche parasite par une autre. À notre connaissance, il n'existe pas de produit remplissant toutes ces conditions. Pour limiter les effets de l'oxydation de surface, nous avons donc pris soin de nettoyer entièrement la cavité avant chaque campagne de mesure.

Concernant la rugosité, il faudrait idéalement qu'elle reste nettement inférieure à l'épaisseur de peau pour que son rôle puisse être ignoré. L'épaisseur de peau diminue quand la fréquence augmente et, à 5.5 GHz, elle est d'environ un micron. Un polissage électrochimique permet d'obtenir une rugosité inférieure au micron. Mais étant donné la taille des pièces à traiter il ne nous a pas été possible de l'appliquer à notre cavité. La rugosité observée sur nos pièces est de l'ordre de quelques microns. On peut donc s'attendre à une légère diminution de la conductivité de surface à haute fréquence [Tischer, 1976, Pitt et al., 1999, Seeger, 1986].

2.3 Coupler la cavité à l'extérieur

2.3.1 Des antennes pour émettre et pour recevoir



FIG. 2.6 – Schéma détaillé des antennes utilisées.

Pour coupler la cavité avec l'extérieur, nous avons choisi d'utiliser des antennes monopolaires. La figure 2.6 représente l'une d'elle de manière détaillée. La connectique est de type SMA, elle est utilisée de manière standard dans la gamme de fréquence 0 - 18 GHz. L'impédance est de 50 Ω et tous les contacts sont dorés afin d'obtenir des résistances de contact négligeables. Le diélectrique est en téflon (PTFE). Ces antennes, au nombre de 10, sont fixées directement sur la plaque en cuivre de 5 mm d'épaisseur qu'elles traversent pour pénétrer à l'intérieur de la cavité (voir figure 2.2). La position des antennes a été tirée au hasard (leurs coordonnées sont deux variables aléatoires indépendantes uniformément réparties). Le résultat est représenté sur la figure 2.7.



FIG. 2.7 – La position des antennes sur la plaque de cuivre est représentée vue de l'extérieur. Les cotes sont données en mm. Le coin inférieur gauche est marqué pour servir de repère.

Lors d'une mesure en transmission une seule des dix antennes est utilisée pour coupler de la puissance vers l'intérieur de la cavité et une autre (la même si on travaille en réflexion) vers l'extérieur. Cette puissance couplée vers l'extérieur est perdue pour la cavité et contribue donc à élargir les résonances. Or, elle dépend directement de l'intensité du champ E_z au niveau de l'antenne réceptrice et de l'impédance de sortie de cette dernière. Afin que les pertes dues aux antennes ne varient pas suivant les antennes utilisées pour la mesure, il est donc nécessaire que l'impédance vue par les antennes reste toujours la même. Par conséquent, on connectera à toutes les antennes non utilisées des terminaisons de 50 Ω (impédance des antennes, des câbles et de l'analyseur) et toutes les antennes joueront le rôle de drain de puissance, quelles que soient celles qui sont utilisées pour la mesure.

Disposer de plusieurs antennes de mesure est important afin de pouvoir observer tous les modes. En effet, les antennes étant quasi-ponctuelles, il suffit que E_z soit proche de zéro au niveau d'une des antennes utilisées, que ce soit en émission ou en réception, pour qu'il devienne pratiquement impossible de voir un pic de résonance. En variant les couples d'antennes de mesure, on est sûr de ne manquer aucun mode. De plus, comme nous le verrons plus loin, on facilite ainsi le travail d'extraction des paramètres de résonance et on dispose bien sûr de plus d'information sur la cavité. En contrepartie, chaque antenne supplémentaire augmente un peu les pertes par couplage vers l'extérieur et perturbe un peu plus la dynamique interne de la cavité. Trois antennes sont *a priori* suffisantes pour ne pas manquer de mode mais nous avons choisi d'en utiliser une dizaine, notamment pour disposer de plus d'information sur la répartition spatiale du champ dans la cavité.

2.3.2 Un couplage faible

Comme on peut le voir sur la figure 2.6, l'âme centrale des antennes est entourée par une gaine en téfion. Cette gaine a pour effet d'augmenter la section efficace des antennes et donc le couplage. Mais plus la section efficace est grande et plus la dynamique des ondes se propageant à l'intérieur de la cavité est perturbée par la présence des antennes. Or, dans notre cas, il est nécessaire que cette dynamique soit, autant que possible, gouvernée par les seules propriétés géométriques de la cavité. Nous avons donc retiré cette gaine, obtenant ainsi des antennes dont le diamètre (1.27 mm) reste très faible devant la longueur d'onde (1.5 cm $< \lambda < 6$ m). On pourra parler d'antennes quasi-ponctuelles.

De plus, la longueur des antennes, et en particulier leur longueur de pénétration l à l'intérieur de la cavité, joue également fortement sur l'intensité du couplage. Cet aspect sera étudié en détail plus loin. À ce stade, nous pouvons nous contenter de savoir que le couplage augmente avec cette longueur. Il faut donc choisir une longueur l assez faible pour que les pertes ohmiques restent dominantes à haute fréquence. D'un autre coté, si cette longueur devient trop petite, le rapport signal à bruit devient trop faible pour permettre une exploitation correcte de nos mesures. C'est un problème particulièrement critique pour la phase du coefficient de transmission. En effet, lorsque son module s'approche de zéro, le bruit suffit à faire «tourner» sa phase. La figure 2.8 montre l'influence de la longueur l sur ce bruit de phase. Le bruit est très important pour l = 1 mm (antenne de 6 mm) et disparaît complètement pour l = 4 mm (antenne de 9 mm). Mais avec des antennes qui traversent presque entièrement

la cavité (5 mm d'épaisseur), les pertes dues aux antennes sont dominantes à haute fréquence et la dynamique est fortement influencée par la présence des antennes [Šeba and Życzkowski, 1991]. C'est pourquoi nous avons choisi de travailler avec des antennes de 7 mm de longueur, c'est-à-dire l = 2 mm, ce qui parait être un bon compromis entre le bruit et les pertes.



FIG. 2.8 – Phase du coefficient de transmission en fonction de la longueur d'antenne : antennes de 6 mm (trait-point), de 7 mm (trait plein) et de 9 mm (tirets).

2.3.3 Des câbles de qualité

Pour relier les antennes à l'analyseur de réseau vectoriel, on utilise des câbles flexibles (NTC195 de marque Flexco, voir www.FlexcoMW.com pour plus de détails). Leur impédance est de 50 Ω comme pour les antennes. Ils assurent un déphasage et des pertes minimum quelle que soit leur courbure. Jusqu'à 5.5 GHz le déphasage ne dépasse pas 0.15° et les pertes restent inférieures à 0.025 dB. Ces qualités sont nécessaires à la reproductibilité de nos mesures ainsi qu'à leur indépendance vis-à-vis du choix des antennes auxquelles sont reliés les câbles.

2.4 L'analyseur de réseau vectoriel : source et détecteur à la fois

2.4.1 Principe de fonctionnement de l'analyseur



FIG. 2.9 – Pour déterminer les paramètres S en sens direct, l'analyseur mesure l'amplitude et la phase des signaux incident, réfléchi et transmis, la sortie étant terminée dans une charge exactement égale à l'impédance du système de test.

Maintenant que l'on a à notre disposition une cavité propre, bien fermée et munie d'antennes et de câbles appropriés pour envoyer et recevoir des micro-ondes, il ne manque plus qu'une source et un détecteur. Ces deux éléments sont réunis en un seul appareil appelé analyseur de réseau vectoriel. Le modèle utilisé est un HP8720D. Le principe de la mesure des paramètres S par l'analyseur est schématisé sur la figure 2.9. Il mesure les puissances émise, réfléchie et transmise puis effectue le rapport. Un circuit de séparation interne permet non seulement à l'analyseur de mesurer une partie du signal incident qui servira de référence pour les rapports mais également de séparer le signal incident du signal réfléchi. Les deux ports de l'analyseur peuvent fonctionner indifféremment en émission et en réception, permettant ainsi de mesurer l'ensemble des paramètres S sans avoir à changer les branchements.

2.4.2 Pourquoi et comment calibrer?

L'analyseur n'étant pas connecté directement à la cavité, il ne mesure pas les paramètres S de la cavité mais ceux de l'ensemble «cavité + antennes + câbles». Heureusement l'analyseur intègre un algorithme de calibration qui permet de s'affranchir de toute la connectique située entre lui et le système à mesurer. Pour cela on dispose d'un kit de calibration, c'est-à-dire d'un ensemble d'étalons présentant des caractéristiques électriques précises et connues. On connecte ces étalons à la place de la cavité et l'analyseur mesure leur réponse. Il calcule ensuite numériquement les corrections à apporter pour faire correspondre cette mesure avec ce qu'elle devrait être si les étalons était directement connectés à l'analyseur. Cela permet également de corriger les erreurs systématiques inhérentes à ce type de mesure (directivité, diaphonie, ...).

Dans notre cas, la calibration souffre tout de même d'une légère limitation : il est impossible de connecter des étalons de type SMA à la sortie des antennes, on ne peut donc calibrer que les câbles seuls. L'absence de calibration des antennes est peu visible au niveau de la transmission mais perturbe grandement les mesures en réflexion. On observe non seulement une oscillation du module de la réflexion mais aussi un fond linéaire important sur la phase. Cela rend très délicate l'exploitation numérique de ces mesures en réflexion. Mais comme on peut trouver la totalité des informations qui nous intéressent dans le coefficient de transmission, on pourra se contenter de ce type de mesure sans difficulté.

Il existe différents types de calibration suivant le type de mesure envisagée (transmission ou réflexion) et le niveau de précision souhaité. La plus complète (Full 2port) corrige l'ensemble des sources d'erreur sur les quatre paramètres S. Mais c'est une manipulation qui prend du temps inutilement lorsque, comme nous, on envisage de ne mesurer que le coefficient de transmission. On peut en effet obtenir des résultats tout à fait satisfaisant avec une calibration en réponse simple associée, à basse fréquence, à une moyenne sur quelques passages permettant de diminuer le bruit de phase. La figure 2.10 permet d'observer le gain du rapport signal à bruit obtenu grâce à la calibration.



FIG. 2.10 – Module du coefficient de transmission sans calibration (tirets) et après une calibration en réponse (trait plein).

Malgré toutes les précautions prises, on a remarqué une très légère dérive des mesures avec le temps. Les causes possibles de ce comportement sont nombreuses. Certaines sont liées à l'analyseur, comme la possibilité d'une dérive de la source micro-ondes (klystron). D'autres le sont à la cavité elle-même qui, avec le temps, a inévitablement tendance à s'oxyder et peut aussi légèrement bouger avec la relaxation progressive des contraintes mécaniques. D'autres, enfin, sont indépendantes de l'analyseur et de la cavité, citons parmi elles les variations de température et d'humidité de l'air ambiant. Il ne nous a pas été possible d'établir clairement la source de cette dérive qui, précisons-le, est extrêmement légère et ne devient observable qu'après plusieurs jours d'attente. Cependant pour plus de sûreté, les campagnes de mesure sont toujours effectuées sur une seule journée et précédées d'une nouvelle calibration.
2.4.3 Piloter l'analyseur par ordinateur

Nous avons passé en revue l'ensemble des éléments nécessaires à la mesure. Mais lors d'une campagne de mesure complète on doit balayer la gamme de fréquence 0.25 - 5.5 GHz pour chacun des 45 couples d'antennes possibles. Cela correspond à 540 mesures successives (une par antenne et par fenêtre de fréquence) si on mesure un seul paramètre S (sans compter les calibrations). Heureusement l'analyseur peut être piloté par une interface GPIB et l'on peut ainsi rendre ce travail moins fastidieux. Nous avons donc écrit sous Matlab[®] quelques programmes de sauvegarde et d'acquisition des données. Ainsi le balayage des fenêtres de fréquence se fait automatiquement et on divise par 12 le nombre d'interventions de l'expérimentateur. Tous les fichiers de calibrations ainsi que tous les fichiers de données sont stockés en binaire et directement accessibles par le réseau local du laboratoire.

2.5 Détail du protocole expérimental

Cette section est destinée à l'expérimentateur qui, possédant le même type de matériel que celui décrit dans ce chapitre, souhaiterait pouvoir reproduire nos conditions de mesure. Toutes nos mesures s'effectuent par bandes de 0.5 GHz contenant 1601 points chacune. Les paramètres de l'analyseur sont ceux par défaut à part le «sweep mode» et l'«IF Bandwith». Pour le sweep mode, on utilise le réglage «alternate A and B» qui empêche de mesurer les signaux entrant sur les deux ports en un seul balayage de fréquence. On diminue ainsi l'effet de diaphonie. L'IF (Intermediate Frequency) Bandwith correspond à la largeur de la bande de fréquence admise par le récepteur (le signal d'entrée est converti à une fréquence moins élevée avant d'être mesuré). Plus l'IF Bandwith est petit, mieux le bruit est filtré mais plus la mesure prend du temps. On peut également diminuer le bruit en moyennant la mesure sur plusieurs passages, cette méthode est particulièrement efficace pour éliminer le bruit basse fréquence. Nous avons choisi d'utiliser un IF Bandwith de 100 Hz combiné avec une moyenne sur un nombre de passages diminuant avec la longueur d'onde. Une dizaine de passages est effectuée jusqu'à 1GHz, 5 seulement entre 1 GHz et 2.5 GHz, 3 entre 2.5 GHz et 4 GHz et enfin un seul passage au-delà de 4 GHz.

Pour la calibration on effectue une calibration de type «response» en transmission. Après avoir réglé l'analyseur sur une mesure en transmission et positionné la fenêtre de fréquence, on connecte les deux câbles entre eux à l'aide de l'adaptateur «thru» du kit de calibration. On lance ensuite la calibration «response» qui, une fois terminée, est sauvegardée sur l'ordinateur. On recommence avec toutes les autres fenêtres pour terminer la procédure de calibration. Comme il n'y a aucun branchement à modifier entre deux calibrations, c'est un processus assez rapide (environ 5 mn pour les 12 fenêtres allant de 0.25 jusqu'à 5.5 GHz).

On connecte ensuite les câbles au premier couple d'antennes choisi et on règle les paramètres de l'application Matlab[®] pour qu'elle appelle successivement les calibration réalisées au préalable. La mesure proprement dite de l'ensemble de la gamme de fréquence pour une antenne prend environ un quart d'heure. Il faut donc être présent tous les quarts d'heure pour changer le couple d'antennes connecté et l'ensemble de la campagne prend une douzaine d'heures.

Bibliographie

- [Pitt et al., 1999] Pitt, K., Free, C., Li, D., and Barnwell, P. (1999). The influence of materials properties on the design of MCM and microstrip structures. J. Mater. Sci. : Mater. Electron., 10:519-524.
- [Seeger, 1986] Seeger, J. (1986). Microwave Theory, Components and Devices. Prentice Hall.
- [Tischer, 1976] Tischer, F. (1976). Excess conduction losses at millimeter wavelengths. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-24(11) :853-858.
- [Šeba and Życzkowski, 1991] Šeba, P. and Życzkowski, K. (1991). Wave chaos in quantized classically nonchaotic systems. *Phys. Rev. A*, 44(6) :3457–3465.

BIBLIOGRAPHIE

Chapitre 3

Calcul de la matrice S

Sommaire

3.1	Mod	lèle électromagnétique d'une antenne	79	
3.2	Forn	nule de Breit-Wigner 8	82	
	3.2.1	Diffusion quantique	82	
	3.2.2	Écriture matricielle	84	
	3.2.3	Description du couplage	86	
	3.2.4	Condition d'auto-adjonction	89	
	3.2.5	Les fonctions de Green	91	
	3.2.6	La matrice S	93	
3.3	Prise	e en compte des pertes ohmiques S	94	
	3.3.1	Dissipation ohmique à la surface d'un conducteur imparfait	95	
	3.3.2	Application à une cavité	98	
3.4 Conclusion				

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit la cavité micro-ondes et la façon dont on mesure sa matrice de diffusion. Il convient à présent de se demander comment cette mesure peut être reliée aux différents paramètres du problème. Ainsi, nous verrons dans ce chapitre que l'on peut dériver un expression analytique de la matrice S en fonction des valeurs et fonctions propres du billard et de paramètres expérimentaux tels que la conductivité, la fonction de transfert des antennes, les dimensions de la cavité, ...

Nous commencerons par une description quantique du problème d'une cavité couplée à l'extérieur par des antennes «ponctuelles». L'adaptation d'un calcul standard en théorie de la diffusion nous permettra de relier la matrice S aux fonctions de Green de la cavité et à la fonction de transfert des antennes. À l'aide d'arguments électromagnétiques, nous expliciterons ensuite cette fonction de transfert. Nous verrons pour finir comment on peut développer les fonctions de Green de la cavité en tenant compte de la conductivité finie du cuivre.

3.1 Modèle électromagnétique d'une antenne



FIG. 3.1 – Modélisation de l'antenne.

Une antenne se présente comme le prolongement de l'âme centrale d'une ligne coaxiale, voir figure 3.1. Dans la ligne coaxiale, seules des modes TEM (Transverse Électro-Magnétique) peuvent se propager, par conséquent, on pourra toujours écrire le champ comme la superposition d'une onde incidente et d'une onde sortante. Mais au voisinage de défauts ou de discontinuités de la ligne, et donc près de ses extrémités, peuvent apparaître des ondes non progressives comme, par exemple, les ondes évanescentes. On appelle «zone perturbée» la région de longueur l^* , à partir de l'extrémité de l'antenne, dans laquelle vivent ces ondes perturbatives locales et «zone TEM» la région dans laquelle seuls les modes TEM existent. On note z la variable longitudinale de la ligne, elle est orientée vers l'extérieur de la cavité et on place son origine à la limite entre les deux zone, c'est-à-dire à la distance l^* de l'extrémité. Soit $I_{pert}(z)$ le courant porté par l'âme centrale dans la zone perturbée, en première approximation on suppose qu'il reste sinusoïdal [Harrington, 2001, p. 435], soit, avec la convention d'une évolution temporelle en $e^{-i\omega t}$:

$$I_{pert}(z) = I_{+} e^{ikz} + I_{-} e^{-ikz} \text{ pour } -l^{*} < z < 0$$
(3.1)

Le courant I(z) porté par l'âme centrale dans la zone TEM s'écrit :

$$I(z) = \frac{V_0}{Z_c} (\mathcal{A}_{out} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} + \mathcal{A}_{inc} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}) \text{ pour } z > 0$$
(3.2)

où $Z_c = 50 \Omega$ est l'impédance caractéristique de la ligne coaxiale. On impose alors les conditions de bord suivantes :

$$\begin{cases} I_{pert}(-l^*) = 0\\ I_{pert}(0) = I(0) \end{cases}$$
(3.3)

D'où :

$$I_{pert}(z) = I(0) \frac{\sin k(l^* + z)}{\sin k l^*} \text{ pour } -l^* < z < 0$$
(3.4)

avec :

$$I(0) = \frac{V_0}{Z_c} (\mathcal{A}_{out} + \mathcal{A}_{inc})$$
(3.5)

Les équations de Maxwell indépendantes du temps donnent l'équation d'on de suivante pour le champ électrique \vec{E} :

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = i\omega \mu \vec{J} + \frac{\vec{\nabla}\rho}{\epsilon}$$
(3.6)

Les antennes sont des sources de courant et il n'y a donc pas ici de charge source. Toutes les antennes sont supposées identiques. En négligeant le diamètre des antennes devant la longueur d'onde (antennes «ponctuelles»), on peut écrire la densité de courant associée à une antenne placée en $\vec{r_0}$:

$$\vec{J}(z,\vec{r}) = I(z)\delta(\vec{r} - \vec{r_0})\hat{z} \text{ pour } -l^* < z < 0$$
(3.7)

où \vec{r} appartient au plan (O, x, y) de la cavité. La cavité étant, dans un premier temps, supposée parfaitement conductrice, le champ électrique à l'intérieur de la cavité s'écrit $\vec{E} = E_z(x, y)\hat{z}$. L'équation vectorielle (3.6) se réduit donc à sa projections sur \hat{z} et on peut intégrer sur z pour se ramener à un problème à deux dimensions. Le membre de gauche est intégré sur l'épaisseur de la cavité, c'est-àdire pour $-l^* + l - d < z < -l^* + l$. L'intégration du membre de droite est plus délicate : comment le champ E_z dans la cavité se couple-t-il au courant porté par l'antenne pour $z > -l^* + l$? On est naturellement amené, pour répondre à cette question, à définir une fonction de couplage f(z) par laquelle on multiplie le courant I(z) avant l'intégration. On définit cette fonction sur l'intervalle $[-l^*, 0]$ car on considère que le couplage est nul au-delà. Elle vaut 1 de $-l^*$ à $-l^* + l$ puis décroît jusqu'à zéro. Pour écrire cette fonction, il faut pouvoir résoudre le problème électromagnétique décrivant le système complexe «antenne-cavité». À notre connaissance, la description analytique de ce problème manque encore; on peut cependant trouver dans la référence [Liu and Grimes, 2000] une modélisation numérique (FDTD) de ce type de problème et dans les références [Shen and MacPhie, 1996, Eom et al., 2000] une analyse basée sur une décomposition modale dont les coefficients sont calculés numériquement. Nous adopterons ici une description effective : on suppose que f(z)est constante par morceaux, elle vaut 1 entre $z = -l^*$ et $z = -l^* + l_{eff}$ puis 0 jusqu'à z = 0. On réduit ainsi la description de la fonction de couplage à cette seule longueur effective l_{eff} comprise entre l et l^* . C'est un paramètre ajustable du modèle qui, comme l^* , dépend, a priori, de la fréquence. Notons cependant que l_{eff} et l^* ont un statut un peu différent dans ce modèle. En effet, en dehors de la contrainte $l^* > l_{eff}$, la longueur l^* peut varier librement en fonction de la fréquence, elle n'est reliée à aucune autre longueur caractéristique de l'expérience. l_{eff} , par contre, est fortement liée à la longueur l dont dépassent les antennes à l'intérieur de la cavité. Ne pouvant devenir beaucoup plus grande que l, l_{eff} dépend probablement peu de la fréquence. Finalement, dans le cadre de cette description, l'intégration du membre de droite de l'équation (3.6) s'effectue pour $-l^* < z < -l^* + l_{eff}$ et pour M antennes identiques cette équation devient :

$$d(\Delta + k^{2})E_{z}(\vec{r}) = i\omega\mu_{0}\sum_{c=1}^{M}\delta(\vec{r} - \vec{r}_{c})\frac{V_{0}}{Z_{c}}(\mathcal{A}_{out}^{c} + \mathcal{A}_{inc}^{c})\int_{-l^{*}}^{-l^{*}+l_{eff}}\frac{\sin k(l^{*} + z)}{\sin kl^{*}}dz$$
$$= \frac{i\omega\mu_{0}V_{0}}{Z_{c}}\sum_{c=1}^{M}\delta(\vec{r} - \vec{r}_{c})(\mathcal{A}_{out}^{c} + \mathcal{A}_{inc}^{c})\frac{\sin^{2}\frac{kl_{eff}}{2}}{k\sin\frac{kl^{*}}{2}\cos\frac{kl^{*}}{2}}$$
$$= \frac{iV_{0}Z_{0}}{Z_{c}}\frac{\sin^{2}\frac{kl_{eff}}{2}}{\sin\frac{kl^{*}}{2}\cos\frac{kl^{*}}{2}}\sum_{c=1}^{M}\delta(\vec{r} - \vec{r}_{c})(\mathcal{A}_{out}^{c} + \mathcal{A}_{inc}^{c})$$
(3.8)

où $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ est l'impédance du vide. Nous nous inspirerons de cette description électromagnétique tout au long de l'approche quantique qui va suivre.

3.2 Formule de Breit-Wigner

3.2.1 Diffusion quantique

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la mesure d'une cavité microondes peut être vue comme un problème de diffusion. À chaque antenne est associé son propre canal de diffusion et la matrice S mesure les rapports entre les signaux sortant et entrant. Nous allons donc suivre une démarche standard en théorie de la diffusion pour exprimer de façon analytique la matrice S décrivant une cavité micro-ondes couplée à des antennes quasi-ponctuelles. Ce type de calcul fut mené pour la première fois en physique nucléaire au début des années 50 [Blatt and Weisskopf, 1952], mais il donna ensuite lieu à de nombreuses variantes (voir, par exemple, les références [Stöckmann, 1999] et [Dittes, 2000]).

La cavité est décrite comme un système fermé couplé avec M canaux de sortie, un par antenne. L'espace de Hilbert complet du système décrit à la fois la cavité et les canaux de sortie. Il se décompose donc en somme directe des espaces de Hilbert associés à l'intérieur de la cavité et à l'extérieur : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{in} \oplus \mathcal{E}_{out}$. L'hamiltonien \mathcal{H}_{in} de la cavité est de dimension infinie mais on peut, sans perte de généralité (voir la référence [Dittes, 2000], p. 221), simplifier l'écriture en le considérant de dimension $N \gg 1$. \mathcal{H}_{in} sera donc représenté par une matrice H de dimension $N \times N$ appartemant à l'ensemble voulu (GOE, POE, $\dots)$ suivant le type de cavité envisagé. On note $|\mu\rangle$ les états propres associés à \mathcal{H}_{in} , c'est-à-dire les états liés de la cavité. L'espace des canaux se décompose lui-même en une somme directe des espaces associés à chacun des canaux : $\mathcal{E}_{out}(E) = \mathcal{E}_1(E) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_M(E)$. Contrairement à la cavité, les canaux autorisent une propagation libre quelle que soit l'énergie, autrement dit, les états propres d'un seul canal forment un ensemble continu par rapport à E. On note $|c, E\rangle \in \mathcal{E}_{c}(E)$ l'état du canal c à l'énergie E (état libre des câbles). Enfin on note W la matrice de couplage (de dimension $N \times M$) entre les états liés et les états libres, c'est-à-dire entre la cavité et les antennes. Tant que la longueur d'onde reste inférieure aux distances entre antennes, le couplage direct entre canaux peut être négligé¹. En toute généralité, l'hamiltonien complet du système \mathcal{H} s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\mathcal{H} = \sum_{\mu,\nu=1}^{N} |\mu\rangle H_{\mu\nu} \langle \nu| + \sum_{c=1}^{M} \int dE |c, E\rangle E \langle c, E| + \sum_{c=1}^{M} \sum_{\mu=1}^{N} \left(|\mu\rangle \int dE W_{\mu c}(E) \langle c, E| + \text{h.c.} \right)$$
(3.9)
$$= \mathcal{H}_{in} + \mathcal{H}_{out} + \mathcal{W}_{out \to in} + \mathcal{W}_{in \to out}$$

Les états propres $|\nu\rangle$ et $|c, E\rangle$ sont normalisés par :

$$\langle \nu | \mu \rangle = \delta_{\nu\mu} \text{ et } \langle a, E | b, E' \rangle = \delta_{ab} \delta(E - E')$$
 (3.10)

Le plus souvent, le couplage dépend de l'énergie mais s'il varie peu à l'échelle de l'écart moyen entre modes alors la matrice S peut s'écrire de la façon suivante [Dittes, 2000, pp 221-230] :

$$S_{ab} = \delta_{ab} - 2\pi i \langle a, E | W^{\dagger} (E - H_{eff})^{-1} W | b, E \rangle$$
(3.11)

¹Expérimentalement, cette condition n'est pas vérifiée pour les premiers modes de la cavité : nous verrons dans le chapitre suivant quelles en sont les conséquences.

où

$$H_{eff} = H - i\pi W W^{\dagger} \tag{3.12}$$

Soit

$$S = \frac{1 - \mathrm{i}K}{1 + \mathrm{i}K} \tag{3.13}$$

avec

$$K = \pi W^{\dagger} \frac{1}{E - H} W \tag{3.14}$$

3.2.2 Écriture matricielle

Un état lié quelconque $|\alpha\rangle = \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_{\nu} |\nu\rangle$ est représenté par le vecteur complexe $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)^T$ et un état libre d'énergie E_0 quelconque $|\beta\rangle = \sum_{c=1}^{M} \int dE \beta_c \delta(E - E_0) |c, E\rangle = \sum_{c=1}^{M} \beta_c |c, E_0\rangle$ est représenté par le vecteur complexe $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_N)^T$. On ne considérera que des états libres d'énergie E_0 fixée car nous souhaitons décrire le problème sous la forme stationnaire suivante : une onde incidente d'énergie E_0 portée par l'un des canaux est diffusée par la cavité et ressort, à cette même énergie E_0 , par l'ensemble des M canaux. On peut donc se restreindre au sous-espace $\mathcal{E}_{out}(E_0)$ (de dimension M) de $\mathcal{E}_{out}(E)$. Avec ces notations on peut réécrire l'équation (3.9) dans la base $(|1\rangle, \cdots, |N\rangle, |1, E_0\rangle, \cdots, |M, E_0\rangle)$ sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{H}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H\boldsymbol{\alpha} + W(E_0)\boldsymbol{\beta}\\ W^{\dagger}(E_0)\boldsymbol{\alpha} + E_0\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$$
(3.15)

Soient $|r\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$ l'état de localisation en un point $\vec{r} = (x, y)$ de la cavité et $|z_c\rangle$ l'état de localisation du canal c en z_c . On note $\varphi_{\alpha}(\vec{r}) = \langle r | \alpha \rangle$ la représentation spatiale de $|\alpha\rangle$ et $\varphi_{\beta}(\vec{z}) = \left(\sum_{c=1}^{M} \langle z_c | \right) |\beta\rangle = \langle z | \beta \rangle$ la représentation spatiale de $|\beta\rangle$. On définit de plus $\varphi_{\beta}(\vec{z}) = (\varphi_{\beta_1}(z_1), \cdots, \varphi_{\beta_M}(z_M))^T$ la représentation matricielle de $\varphi_{\beta}(\vec{z}) = \sum_{c=1}^{M} \varphi_{\beta_c}(z_c)$ où $\varphi_{\beta_c}(z_c) = \beta_c \langle z_c | c, E_0 \rangle = \langle z_c | \beta \rangle$. On définit la représentation spatiale $\hat{\mathcal{A}}$ d'un opérateur \mathcal{A} par :

$$\varphi_u(\vec{r}) = \langle r|u \rangle = \langle r|\mathcal{A}|v \rangle = \hat{\mathcal{A}}(\varphi_v(\vec{r})) \text{ où } \varphi_v(\vec{r}) = \langle r|v \rangle$$
(3.16)

$$= \int \mathrm{d}\vec{r}' \langle r | \mathcal{A} | r' \rangle \langle r' | v \rangle \tag{3.17}$$

84

La représentation spatiale de l'hamiltonien (3.9) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} \Big[\varphi_{\alpha}(\vec{r}) + \varphi_{\beta}(\vec{z}) \Big] &= (\langle r| + \langle z|) \mathcal{H}(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) \\ &= \langle r|\mathcal{H}_{in}|\alpha\rangle + \langle r|\mathcal{W}_{out \to in}(E_0)|\beta\rangle + \langle z|\mathcal{W}_{in \to out}(E_0)|\alpha\rangle + \langle z|\mathcal{H}_{out}|\beta\rangle \\ &= \iint_{\mathcal{A}} d\vec{r}' \langle r|\mathcal{H}_{in}|r'\rangle \langle r'|\alpha\rangle + \sum_{c=1}^{M} \int dz'_{c} \langle r|\mathcal{W}_{out \to in}(E_0)|z'_{c}\rangle \langle z'_{c}|\beta\rangle \\ &+ \iint_{\mathcal{A}} d\vec{r}' \langle z|\mathcal{W}_{in \to out}(E_0)|r'\rangle \langle r'|\alpha\rangle + \sum_{c=1}^{M} \int dz'_{c} \langle z|\mathcal{H}_{out}|z'_{c}\rangle \langle z'_{c}|\beta\rangle \end{aligned}$$
(3.18)
$$&= \iint_{\mathcal{A}} d\vec{r}' \langle r|\mathcal{H}_{in}|r'\rangle \varphi_{\alpha}(\vec{r}') + \sum_{c=1}^{M} \int dz'_{c} \langle r|\mathcal{W}_{out \to in}(E_0)|z'_{c}\rangle \varphi_{\beta_{c}}(z'_{c}) \\ &+ \iint_{\mathcal{A}} d\vec{r}' \langle z|\mathcal{W}_{in \to out}(E_0)|r'\rangle \varphi_{\alpha}(\vec{r}') + \sum_{c=1}^{M} \int dz'_{c} \langle z|\mathcal{H}_{out}|z'_{c}\rangle \varphi_{\beta_{c}}(z'_{c}) \end{aligned}$$

Or, puisque \mathcal{H}_{in} est l'hamiltonien de la cavité, on a (voir l'équation de Helmholtz (2.1)) :

$$\langle r | \mathcal{H}_{in} | r' \rangle = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \Delta_r$$
 (3.19)

De même, \mathcal{H}_{out} représente la propagation libre dans une ligne coaxiale, d'où :

$$\langle z_a | \mathcal{H}_{out} | z_b \rangle = -\langle z_a | z_b \rangle \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z_b}$$
 (3.20)

Enfin, on souhaite modéliser le couplage de la cavité avec des antennes quasiponctuelles. Le terme de couplage doit donc être proportionnel à une fonction delta par rapport à la variable \vec{r} , on écrit donc :

$$\langle r | \mathcal{W}_{out \to in}(E_0) | z_c \rangle = t_c(E_0, z_c) \,\,\delta(\vec{r} - \vec{r_c}) \tag{3.21}$$

où la fonction $t_c(E_0, z_c)$ décrit le couplage à une distance z_c de l'extrémité de l'antenne c située en $\vec{r_c}$ et à l'énergie E_0 . La représentation spatiale de $\mathcal{W}_{in\to out}(E_0)$ s'obtient par transposition et conjugaison de celle de $\mathcal{W}_{out\to in}(E_0)$. En remplaçant dans l'équation (3.18) on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}[\varphi_{\alpha}(\vec{r}) + \varphi_{\beta}(\vec{z})] \\ &= -\Delta\varphi_{\alpha}(\vec{r}) + \sum_{c=1}^{M} \int \mathrm{d}z_{c}' t_{c}(E_{0}, z_{c}') \delta(\vec{r} - \vec{r}_{c}) \varphi_{\beta_{c}}(z_{c}') \\ &+ \sum_{c=1}^{M} \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\vec{r}' t_{c}^{*}(E_{0}, z_{c}) \delta(\vec{r}' - \vec{r}_{c}) \varphi_{\alpha}(\vec{r}') - \sum_{b,c=1}^{M} \int \mathrm{d}z_{c}' \langle z_{b} | z_{c}' \rangle \frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}z_{c}'} \varphi_{\beta_{c}}(z_{c}') \\ &= -\Delta\varphi_{\alpha}(\vec{r}) + \sum_{c=1}^{M} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{c}) \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}z_{c} t_{c}(E_{0}, z_{c}) \varphi_{\beta_{c}}(z_{c}) \\ &+ \sum_{c=1}^{M} t_{c}^{*}(E_{0}, z_{c}) \varphi_{\alpha}(\vec{r}_{c}) - \sum_{c=1}^{M} \varphi_{\beta_{c}}''(z_{c}) \end{aligned}$$
(3.22)

Soit, sous forme matricielle :

$$\hat{\mathcal{H}}[\Phi] = \begin{pmatrix} -\Delta\varphi_{\alpha}(\vec{r}) + \sum_{c=1}^{M} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{c}) \int dz_{c} t_{c}(E_{0}, z_{c})\varphi_{\beta_{c}}(z_{c}) \\ t_{1}^{*}(E_{0}, z_{1})\varphi_{\alpha}(\vec{r}_{1}) - \varphi_{\beta_{1}}^{"}(z_{1}) \\ \vdots \\ t_{M}^{*}(E_{0}, z_{M})\varphi_{\alpha}(\vec{r}_{M}) - \varphi_{\beta_{M}}^{"}(z_{M}) \end{pmatrix}$$
(3.23)

où $\mathbf{\Phi} = \left(\varphi_{\alpha}(\vec{r}) \varphi_{\beta_1}(z_1) \dots \varphi_{\beta_M}(z_M)\right)^T$ est un état du système complet (cavité attachée aux canaux) appartenant à l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^N) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^M)$. Le problème aux valeurs propres $\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{\Phi}) = E_0 \mathbf{\Phi}$, s'écrit :

$$\begin{cases}
-\Delta\varphi_{\alpha}(\vec{r}) + \sum_{c=1}^{M} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{c}) \int dz_{c} t_{c}(E_{0}, z_{c})\varphi_{\beta_{c}}(z_{c}) &= E_{0}\varphi_{\alpha}(\vec{r}) \\
t_{1}^{*}(E_{0}, z_{1})\varphi_{\alpha}(\vec{r}_{1}) - \varphi_{\beta_{1}}''(z_{1}) &= E_{0}\varphi_{\beta_{1}}(z_{1}) \\
\vdots \\
t_{M}^{*}(E_{0}, z_{M})\varphi_{\alpha}(\vec{r}_{M}) - \varphi_{\beta_{M}}''(z_{M}) &= E_{0}\varphi_{\beta_{M}}(z_{M})
\end{cases}$$
(3.24)

3.2.3 Description du couplage

Il est temps à présent de préciser un peu la forme de la fonction $t_c(E_0, z_c)$. En suivant la description électromagnétique du début du chapitre, on définit une zone perturbée de longueur l^* , à partir de l'extrémité de l'antenne, hors de laquelle $t_c(E_0, z_c)$ est nul. Il est naturel de choisir de placer l'origine de z_c à la fin de cette région. De plus, les deux premières lignes de l'équation matricielle (3.23) fixent la dimension de $t_c(E_0, z_c)$ et la relation dimensionnelle entre $\varphi_{\alpha}(\vec{r})$ et $\varphi_{\beta_c}(z_c)$:

$$\begin{cases} \left[t_c(E_0, z_c) \right] = L^{-\frac{3}{2}} \\ \left[\varphi_{\beta_c}(z_c) \right] = L^{\frac{1}{2}} \left[\varphi_{\alpha}(\vec{r}) \right] \end{cases}$$
(3.25)

Si l'on choisit $\varphi_{\alpha}(\vec{r})$ sans dimension, alors $\left[\varphi_{\beta_c}(z_c)\right] = L^{\frac{1}{2}}$. Pour $z_c > 0$, les M équations associées aux canaux sont de simples équations de Schrödinger en présence d'un potentiel nul. Le champ s'écrit donc dans cette région comme la superposition d'une onde incidente et d'une onde sortante soit, en posant $E_0 = k^2$ (toujours avec la convention d'une dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$ et $\hbar^2/(2m) = 1$):

$$\varphi_{\beta_c}(z_c) = \frac{1}{\sqrt{k}} (\mathcal{A}_{out}^c \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz_c} + \mathcal{A}_{inc}^c \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz_c}) \text{ pour } z_c > 0$$
(3.26)

où le facteur $1/\sqrt{k}$ joue à la fois un rôle dimensionnel et de normalisation (voir (3.10)). \mathcal{A}_{inc}^c et \mathcal{A}_{out}^c sont donc les amplitudes complexes (sans dimension) des ondes incidentes et sortantes. Pour $z_c \in [-l^*, 0]$, par contre la présence du terme $t_c^*(E_0, z_c)\varphi_{\alpha}(\vec{r_c})$ complique l'équation. Ce terme restant perturbatif, on peut approcher le champ, que l'on notera $\phi(z_c)$, dans la zone de couplage par une superposition d'ondes planes.

$$\phi_{\beta_c}(z_c) = \frac{1}{\sqrt{k}} (\mathcal{A}^c_+ e^{ikz_c} + \mathcal{A}^c_- e^{-ikz_c}) \text{ pour } -l^* < z_c < 0$$
(3.27)

Les coefficients A_+ et A_- sont fixés par la condition de bords. Là encore on choisit des conditions cohérentes avec la description électromagnétique, soit :

$$\begin{cases} \phi_{\beta_c}(-l^*) = 0\\ \phi_{\beta_c}(0) = \varphi_{\beta_c}(0) \end{cases}$$
(3.28)

On en déduit :

$$\phi_{\beta_c}(z_c) = \varphi_{\beta_c}(0) \frac{\sin k(z_c + l^*)}{\sin k l^*} \text{ pour } -l^* < z_c < 0$$
(3.29)

Or, par définition, la matrice S est la matrice $M \times M$ reliant les vecteurs $\mathcal{A}_{inc} = \left(\mathcal{A}_{inc}^1 \dots \mathcal{A}_{inc}^M\right)^T$ et $\mathcal{A}_{out} = \left(\mathcal{A}_{out}^1 \dots \mathcal{A}_{out}^M\right)^T$:

$$\mathcal{A}_{out} = S \mathcal{A}_{inc} \tag{3.30}$$

Par conséquent, seules les fonctions $\varphi_{\beta_c}(z_c)$ définies sur \mathbb{R}^+ par l'équation (3.26) nous intéressent et il est naturel de se restreindre à l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^N) \oplus$ $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^M)$ dans lequel l'équation (3.23) se réécrit :

$$\hat{\mathcal{H}}[\Phi] = \begin{pmatrix} -\Delta \varphi_{\alpha}(\vec{r}) + \sum_{c=1}^{M} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{c}) \int_{-l^{*}}^{0} \mathrm{d}z_{c} t_{c}(E_{0}, z_{c}) \phi_{\beta_{c}}(z_{c}) \\ -\varphi_{\beta_{1}}''(z_{1}) \\ \vdots \\ -\varphi_{\beta_{M}}''(z_{M}) \end{pmatrix}$$
(3.31)

où on a utilisé le fait que $t_c(E_0, z_c) = 0$ pour $z_c > 0$. Nous appuyant toujours sur la description électromagnétique qui précède, on suppose que la dépendance en z_c de $t_c(E_0, z_c)$ peut être oubliée au profit d'une description effective dans laquelle $t_c(E_0, z_c)$ vaut $t_c(E_0)$ sur $[-l^*, -l^* + l_{eff}]$ et 0 sur $]-l^* + l_{eff}, 0]$. Avec cette hypothèse et en utilisant l'équation (3.29) pour $\phi_{\beta_c}(z_c)$, on peut expliciter l'intégration sur z_c et la première ligne de l'équation précédente se réécrit :

$$-\Delta\varphi_{\alpha}(\vec{r}) + \sum_{c=1}^{M} \frac{t_c(E_0)}{k} \delta(\vec{r} - \vec{r}_c) \varphi_{\beta_c}(0) \frac{\sin^2 \frac{k l_{eff}}{2}}{\sin \frac{k l^*}{2} \cos \frac{k l^*}{2}}$$
(3.32)

Finalement, en posant

$$T_c(k) = \frac{t_c(E_0)}{k} \frac{\sin^2 \frac{kl_{eff}}{2}}{\sin \frac{kl^*}{2} \cos \frac{kl^*}{2}}$$
(3.33)

on a :

$$\hat{\mathcal{H}}[\boldsymbol{\Phi}] = \begin{pmatrix} -\Delta\varphi_{\alpha}(\vec{r}) + \sum_{c=1}^{M} T_{c}(k)\delta(\vec{r} - \vec{r}_{c})\varphi_{\beta_{c}}(0) \\ -\varphi_{\beta_{1}}''(z_{1}) \\ \vdots \\ -\varphi_{\beta_{M}}''(z_{M}) \end{pmatrix}$$
(3.34)

avec le produit scalaire :

$$(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Phi}') = \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\vec{r} \,\varphi^*_{\alpha}(\vec{r}) \varphi_{\alpha'}(\vec{r}) + \sum_{c=1}^M \int_0^\infty \mathrm{d}z_c \,\varphi^*_{\beta_c}(z_c) \varphi_{\beta'_c}(z_c) \tag{3.35}$$

3.2. FORMULE DE BREIT-WIGNER

Pour identifier l'équation (3.8) avec la première ligne de l'équation aux valeurs propres $\hat{\mathcal{H}}[\Phi] = k^2 \Phi$, il suffit de multiplier cette dernière par V_0 , d'où :

$$\frac{\mathrm{i}V_0 Z_0}{Z_c} \frac{\mathrm{sin}^2 \frac{k l_{eff}}{2}}{\mathrm{sin} \frac{k l^*}{2} \cos \frac{k l^*}{2}} \sum_{c=1}^M \delta(\vec{r} - \vec{r_c}) (\mathcal{A}_{out}^c + \mathcal{A}_{inc}^c) = V_0 \sum_{c=1}^M T_c(k) \delta(\vec{r} - \vec{r_c}) \varphi_{\beta_c}(0) \quad (3.36)$$

Soit, en remplaçant $\varphi_{\beta_c}(0)$ par son expression (3.26) :

$$\frac{\mathrm{i}V_0 Z_0}{Z_c} \frac{\mathrm{sin}^2 \frac{k l_{eff}}{2}}{\mathrm{sin} \frac{k l^*}{2} \cos \frac{k l^*}{2}} \sum_{c=1}^M \delta(\vec{r} - \vec{r_c}) (\mathcal{A}_{out}^c + \mathcal{A}_{inc}^c) = \frac{1}{\sqrt{k}} V_0 \sum_{c=1}^M T_c(k) \delta(\vec{r} - \vec{r_c}) (\mathcal{A}_{out}^c + \mathcal{A}_{inc}^c)$$
(3.37)

 $\operatorname{D'où}$ on déduit :

$$T_{c}(k) = \frac{i\sqrt{k}Z_{0}}{Z_{c}} \frac{\sin^{2}\frac{kl_{eff}}{2}}{\sin\frac{kl^{*}}{2}\cos\frac{kl^{*}}{2}}$$
(3.38)

3.2.4 Condition d'auto-adjonction

Pour que l'opérateur $\hat{\mathcal{H}}$ ainsi défini soit auto-adjoint, il faut que :

$$\left(\hat{\mathcal{H}}[\Phi], \Phi'\right) = \left(\Phi, \hat{\mathcal{H}}[\Phi']\right)$$
 (3.39)

On a

$$(\hat{\mathcal{H}}[\Phi], \Phi') = \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\vec{r} \left(-\Delta\varphi_{\alpha}(\vec{r}) + \sum_{c=1}^{M} T_{c}(k)\delta(\vec{r} - \vec{r}_{c})\varphi_{\beta_{c}}(0) \right)^{*}\varphi_{\alpha'}(\vec{r}) - \sum_{c=1}^{M} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}z_{c} \left(\varphi_{\beta_{c}}''(z_{c})\right)^{*}\varphi_{\beta_{c}'}(z_{c}) = \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\vec{r} \left(-\Delta\varphi_{\alpha}(\vec{r}) \right)^{*}\varphi_{\alpha'}(\vec{r}) + \sum_{c=1}^{M} T_{c}^{*}(k)\varphi_{\beta_{c}}^{*}(0)\varphi_{\alpha'}(\vec{r}_{c}) - \sum_{c=1}^{M} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}z_{c} \,\varphi_{\beta_{c}}''(z_{c})\varphi_{\beta_{c}'}(z_{c})$$
(3.40)

 et

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{\Phi}, \hat{\mathcal{H}} \left[\boldsymbol{\Phi}' \right] \right) &= \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\vec{r} \, \varphi_{\alpha}^{*}(\vec{r}) \left(-\Delta \varphi_{\alpha'}(\vec{r}) + \sum_{c=1}^{M} T_{c}(k) \delta(\vec{r} - \vec{r}_{c}) \varphi_{\beta_{c}'}(0) \right) \\ &- \sum_{c=1}^{M} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}z_{c} \, \varphi_{\beta_{c}}^{*}(z_{c}) \varphi_{\beta_{c}'}''(z_{c}) \\ &= \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\vec{r} \, \varphi_{\alpha}^{*}(\vec{r}) \left(-\Delta \varphi_{\alpha'}(\vec{r}) \right) + \sum_{c=1}^{M} \varphi_{\alpha}^{*}(\vec{r}_{c}) T_{c}(k) \varphi_{\beta_{c}'}(0) \\ &- \sum_{c=1}^{M} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}z_{c} \, \varphi_{\beta_{c}}^{*}(z_{c}) \varphi_{\beta_{c}'}''(z_{c}) \end{aligned}$$
(3.41)

d'où

$$(\hat{\mathcal{H}}[\Phi], \Phi') - (\Phi, \hat{\mathcal{H}}[\Phi']) = \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\vec{r} \left[\varphi_{\alpha}^{*}(\vec{r}) \left(\Delta\varphi_{\alpha'}(\vec{r})\right) - \left(\Delta\varphi_{\alpha}(\vec{r})\right)^{*} \varphi_{\alpha'}(\vec{r})\right] + \sum_{c=1}^{M} \left(T_{c}^{*}(k)\varphi_{\beta_{c}}^{*}(0)\varphi_{\alpha'}(\vec{r}_{c}) - \varphi_{\alpha}^{*}(\vec{r}_{c})T_{c}(k)\varphi_{\beta_{c}}(0)\right) - \sum_{c=1}^{M} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}z_{c} \left[\varphi_{\beta_{c}}^{\prime\prime*}(z_{c})\varphi_{\beta_{c}}(z_{c}) - \varphi_{\beta_{c}}^{*}(z_{c})\varphi_{\beta_{c}}^{\prime\prime}(z_{c})\right]$$

$$(3.42)$$

En appliquant le théorème de Green au premier terme et en intégrant par parties le troisième on obtient :

$$(\hat{\mathcal{H}}[\Phi], \Phi') - (\Phi, \hat{\mathcal{H}}[\Phi']) = \oint_{\mathcal{C}} d\hat{n} [\varphi_{\alpha}(\vec{r}) (\nabla \varphi_{\alpha'}(\vec{r})) - (\nabla \varphi_{\alpha}(\vec{r})) \varphi_{\alpha'}(\vec{r})]$$

$$+ \sum_{c=1}^{M} (T_{c}^{*}(k) \varphi_{\beta_{c}}^{*}(0) \varphi_{\alpha'}(\vec{r}_{c}) - \varphi_{\alpha}^{*}(\vec{r}_{c}) T_{c}(k) \varphi_{\beta_{c}'}(0))$$

$$- \sum_{c=1}^{M} [\varphi_{\beta_{c}}^{\prime*}(z_{c}) \varphi_{\beta_{c}'}(z_{c}) - \varphi_{\beta_{c}}^{*}(z_{c}) \varphi_{\beta_{c}'}^{\prime}(z_{c})]_{0}^{\infty}$$

$$(3.43)$$

Les $\varphi_{\alpha}(\vec{r})$ obéissent à des conditions de Dirichlet sur les bords de la cavité et le terme tout intégré est nul à l'infini, la condition d'auto-adjonction se résume donc

 \hat{a} :

$$\sum_{c=1}^{M} \left[\left(\varphi_{\beta_{c}}^{\prime*}(0) \varphi_{\beta_{c}^{\prime}}(0) - \varphi_{\beta_{c}}^{*}(0) \varphi_{\beta_{c}^{\prime}}^{\prime}(0) \right) + \varphi_{\beta_{c}}^{*}(0) T_{c}^{*}(k) \varphi_{\alpha^{\prime}}(\vec{r_{c}}) - T_{c}(k) \varphi_{\alpha}^{*}(\vec{r_{c}}) \varphi_{\beta_{c}^{\prime}}(0) \right] = 0$$
(3.44)

Le moyen le plus simple de remplir cette condition est d'imposer :

$$T_c^*(k)\varphi_\alpha(\vec{r_c}) = \varphi'_{\beta_c}(0)$$
(3.45)

3.2.5 Les fonctions de Green

Avec les notations du paragraphe précédent, et en posant $E_0 = k^2$, la première ligne de l'équation aux valeurs propres $\hat{\mathcal{H}}[\Phi] = k^2 \Phi$ s'écrit :

$$\sum_{c=1}^{M} T_c(k)\delta(\vec{r} - \vec{r}_c)\varphi_{\beta_c}(0) = (k^2 + \Delta)\varphi_{\alpha}(\vec{r})$$
(3.46)

Or, on définit les fonctions de Green de la cavité seule par :

$$(\Delta + k^2)G(\vec{r}, \vec{r'}, k^2) = \delta(\vec{r} - \vec{r'})$$
(3.47)

on peut donc réécrire (3.46) pour $\vec{r}=\vec{r_b}$ de la façon suivante :

$$\varphi_{\alpha}(\vec{r}_b) = \sum_{c=1}^{M} T_c(k) G(\vec{r}_b, \vec{r}_c, k) \varphi_{\beta_c}(0)$$
(3.48)

En combinant avec la condition (3.45), on obtient :

$$T_b^*(k) \sum_{c=1}^M T_c(k) G(\vec{r_b}, \vec{r_c}, k) \varphi_{\beta_c}(0) = \varphi'_{\beta_b}(0)$$
(3.49)

En utilisant l'écriture (3.26) de $\varphi_{\beta_c}(z_c)$, on a :

$$\begin{cases} \varphi_{\beta_c}(0) = \frac{1}{\sqrt{k}} (\mathcal{A}_{out}^c + \mathcal{A}_{inc}^c) \\ \varphi_{\beta_c}'(0) = i\sqrt{k} (\mathcal{A}_{out}^c - \mathcal{A}_{inc}^c) \end{cases}$$
(3.50)

d'où :

$$T_{b}^{*}(k)\sum_{c=1}^{M}T_{c}(k)G(\vec{r}_{b},\vec{r}_{c},k)(\mathcal{A}_{out}^{c}+\mathcal{A}_{inc}^{c}) = \mathrm{i}k(\mathcal{A}_{out}^{b}-\mathcal{A}_{inc}^{b})$$
(3.51)

Soit :

$$\frac{i}{k}T_{b}^{*}(k)\sum_{c=1}^{M}T_{c}(k)G(\vec{r}_{b},\vec{r}_{c},k)\mathcal{A}_{inc}^{c}-\mathcal{A}_{inc}^{b}$$

$$=-\frac{i}{k}T_{b}^{*}(k)\sum_{b=1}^{M}T_{c}(k)G(\vec{r}_{b},\vec{r}_{c},k)\mathcal{A}_{out}^{c}-\mathcal{A}_{out}^{b}$$
(3.52)

Cette équation peut se réécrire sous la forme matricielle :

$$iK\mathcal{A}_{inc} - \mathcal{A}_{inc} = -iK\mathcal{A}_{out} - \mathcal{A}_{out}$$
 (3.53)

où K est une matrice $M\times M$ définie par :

$$K_{ab}(k) = \frac{T_a^*(k)}{\sqrt{k}} G(\vec{r}_a, \vec{r}_b, k) \frac{T_b(k)}{\sqrt{k}}$$
(3.54)

Soit, finalement, puisque $\mathcal{A}_{out} = S \mathcal{A}_{inc}$:

$$S = \frac{1 - \mathrm{i}K}{1 + \mathrm{i}K} \tag{3.55}$$

Les fonctions de Green peuvent se développer sur les fonctions propres de la cavité $\psi_{\nu}(\vec{r}) = \langle r | \nu \rangle$ [Morse and Feshbach, 1953], soit :

$$G(\vec{r}, \vec{r}', E) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\psi_{\nu}(\vec{r})\psi_{\nu}^{*}(\vec{r}')}{k^{2} - k_{\nu}^{2}}$$
(3.56)

avec la normalisation :

$$\iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\vec{r} \,\psi_{\nu}^*(\vec{r})\psi_{\nu}(\vec{r}) = 1 \tag{3.57}$$

En introduisant ce développement dans (3.54), on trouve :

$$K_{ab}(k) = \left(\frac{T_a(k)\psi_{\nu}^*(\vec{r}_a)}{\sqrt{k}}\right)^* \frac{1}{k^2 - k_{\nu}^2} \left(\frac{T_b(k)\psi_{\nu}^*(\vec{r}_b)}{\sqrt{k}}\right)$$
(3.58)

Soit, sous forme matricielle,

$$K = \pi W^{\dagger} \frac{1}{k^2 - H_{diag}} W \tag{3.59}$$

оù

$$W_{\mu c} = \frac{T_c(k)\psi_{\mu}^*(\vec{r_c})}{\sqrt{k\pi}}$$
(3.60)

 et

$$H_{diag} = \operatorname{diag}\left(k_1^2, \cdots, k_N^2\right) \tag{3.61}$$

3.2.6 La matrice S

Un calcul matriciel standard [Fyodorov and Sommers, 1997] permet de réécrire (3.55) sous la forme suivante :

$$S = I_M - 2i\pi W^{\dagger} \frac{1}{k^2 - H_{diag} + i\pi W W^{\dagger}} W$$
(3.62)

Un élément de matrice S s'écrit alors :

$$S_{ab} = \delta_{ab} - 2i\pi \sum_{\mu,\nu=1}^{N} (W^{\dagger})_{a\mu} \left(\frac{1}{k^2 - H_{diag} + i\pi W W^{\dagger}}\right)_{\mu\nu} W_{\nu b}$$
(3.63)

Or

$$(k^2 - H_{diag} + i\pi WW^{\dagger})_{\mu\nu} = (k^2 - k_{\mu}^2)\delta_{\mu\nu} + i\pi \sum_{c=1}^{M} W_{\nu c}W_{\mu c}^*$$
(3.64)

et dans le cas du couplage faible, les termes hors diagonale de cette matrice pouvant être considérés comme perturbatifs, son inversion donne au premier ordre :

$$\left(\frac{1}{k^2 - H_{diag} + i\pi W W^{\dagger}}\right)_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{k^2 - k_{\mu}^2 + i\pi \sum_{c=1}^{M} |W_{\mu c}|^2} \delta_{\mu\nu}$$
(3.65)

D'où :

$$S_{ab} = \delta_{ab} - 2i\pi \sum_{\mu=1}^{N} \frac{W_{\mu a}^* W_{\mu b}}{k^2 - k_{\mu}^2 + i\pi \sum_{c=1}^{M} |W_{\mu c}|^2}$$
(3.66)

Ainsi, le couplage de la cavité avec l'extérieur conduit à ajouter une partie imaginaire $\pi \sum_{c=1}^{M} |W_{\mu c}|^2$ aux vecteurs d'onde propres k_{μ} . Notons que le signe de cette partie imaginaire est lié au choix d'une évolution temporelle en $e^{-i\omega t}$. En effet, avec la convention inverse, les rôles de \mathcal{A}_{inc} et \mathcal{A}_{out} sont inversés. Cela conduit à changer le signe de K, et donc à remplacer, dans les expressions (3.62) à (3.66), π par $-\pi$.

On obtient finalement :

$$S_{ab} = \delta_{ab} - 2i \frac{T_a^*(E_0) T_b(E_0)}{k} \sum_{\mu=1}^N \frac{\psi_\mu(\vec{r}_a) \psi_\mu^*(\vec{r}_b)}{k^2 - k_\mu^2 + \frac{i}{k} \sum_{c=1}^M |T_c(E_0) \psi_\mu(\vec{r}_c)|^2}$$
(3.67)

où encore, en supposant que les antennes sont toutes identiques, c'est-à-dire $T_c(k) = T(k) \forall c$:

$$S_{ab} = \delta_{ab} - 2i \frac{|T(k)|^2}{k} \sum_{\mu=1}^{N} \frac{\psi_{\mu}(\vec{r}_a)\psi_{\mu}^*(\vec{r}_b)}{k^2 - k_{\mu}^2 + \frac{i}{k}|T(k)|^2 \sum_{c=1}^{M} |\psi_{\mu}(\vec{r}_c)|^2}$$
(3.68)

Enfin, en remplaçant T(k) par son expression (3.38) on trouve :

$$S_{ab} = \delta_{ab} - 2i \left(\frac{Z_0}{Z_c} \frac{\sin^2 \frac{k l_{eff}}{2}}{\sin \frac{k l^*}{2} \cos \frac{k l^*}{2}} \right)^2 \dots$$

$$\dots \sum_{\mu=1}^N \frac{\psi_\mu(\vec{r}_a)\psi_\mu^*(\vec{r}_b)}{k^2 - k_\mu^2 + i \left(\frac{Z_0}{Z_c} \frac{\sin^2 \frac{k l_{eff}}{2}}{\sin \frac{k l^*}{2} \cos \frac{k l^*}{2}} \right)^2 \sum_{c=1}^M |\psi_\mu(\vec{r}_c)|^2$$
(3.69)

soit, en fonction de la fréquence $(k=2\pi f/c)$:

$$S_{ab} = \delta_{ab} - 2i \left(\frac{cZ_0}{2\pi Z_c} \frac{\sin^2 \frac{\pi f l_{eff}}{c}}{\sin \frac{\pi f l^*}{c} \cos \frac{\pi f l^*}{c}} \right)^2 \dots$$

$$\dots \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n(\vec{r}_a)\psi_n^*(\vec{r}_b)}{f^2 - f_n^2 + i \left(\frac{cZ_0}{2\pi Z_c} \frac{\sin^2 \frac{\pi f l^* f f}{c}}{\sin \frac{\pi f l^* f}{c} \cos \frac{\pi f l^*}{c}} \right)^2 \sum_{c=1}^{M} |\psi_n(\vec{r}_c)|^2}$$
(3.70)

On a ainsi obtenu une expression complètement explicite de la matrice S. Bien qu'au premier abord, il semble que la formule ainsi obtenue dépende fortement de la façon dont nous avons décrit le couplage, on montre dans l'Annexe A qu'un choix différent dans l'écriture des champs dans la zone de couplage mène à la même expression finale. Rappelons de plus que ce résultat s'appuie sur l'hypothèse d'un couplage faible avec les canaux de pertes; sans cette hypothèse, l'inversion de la matrice $k^2 - \mathcal{H}_{eff}$ est nettement plus délicate. Plus précisément, cette hypothèse revient à considérer que la largeur des résonances reste faible devant l'écart moyen entre deux résonances successives. Cependant, nous verrons au chapitre 5, que bien que cette condition ne soit pas toujours vérifiée expérimentalement, les expressions obtenues ici restent tout à fait adaptées à la description de notre système.

3.3 Prise en compte des pertes ohmiques

Dans la section précédente, nous avons considéré une cavité sans pertes ohmiques. L'existence de cet autre mécanisme de perte ne modifie pratiquement pas la forme de l'expression analytique que nous venons d'obtenir pour la matrice S.

Pour tenir compte de la conductivité finie des parois, il suffit d'utiliser les fonctions de Green de la cavité qui intègrent les pertes ohmiques. Cependant, avec l'introduction de pertes ohmiques, le problème n'est plus auto-adjoint. On est alors amené à décomposer les fonctions de Green sur un ensemble biorthogonal de fonctions propres composé à la fois des fonctions propres du problème direct et du problème adjoint[Morse and Feshbach, 1953]. Pour que la fonction de Green reste symétrique, il faut que les fonctions propres du problème adjoint soient simplement les conjuguées de celles du problème direct. Finalement, la décomposition (3.56) reste, formellement, quasiment identique : il suffit de supprimer la conjugaison au numérateur et de considérer que les valeurs propres sont maintenant des nombres complexes. La conductivité finie de la cavité nous amène donc à corriger l'équation (3.70) en supprimant la conjugaison au numérateur et en ajoutant² $-(1+i)\Gamma_n^{ohm}/2$ aux valeurs propres non perturbées f_n^0 . Il convient également de noter que le terme en $\sum_{c=1}^{M} |\psi_n(\vec{r_c})|^2$ du dénominateur étant une correction à l'ordre dominant, ce sont ici les fonction propres non perturbées ψ_n^0 (cavité sans pertes) qui doivent intervenir. La correction sur les valeurs propres s'obtient facilement par la méthode dite de perturbation des conditions aux limites et dans la limite où $\Gamma_n^{ohm} \ll f_n^0$. Cette méthode est décrite, par exemple, dans la référence [Jackson, 2001], aussi nous contenterons nous ici de détailler le calcul de Γ_n^{ohm} .

3.3.1 Dissipation ohmique à la surface d'un conducteur imparfait

La puissance dP dissipée (effet ohmique) par une onde de pulsation ω (évolution temporelle en $e^{-i\omega t}$) dans l'élément de surface da d'un conducteur est donnée par le flux de la partie réelle du vecteur de Poynting à travers cette surface :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}a} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[\hat{n} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}^*)\right] \tag{3.71}$$

 $^{^{2}}$ Le signe de la partie imaginaire des valeurs propres est fixé par la convention choisie pour l'évolution temporelle.



FIG. 3.2 – Champs au voisinage d'un conducteur parfait.

où \hat{n} est dirigé vers l'intérieur du conducteur et \vec{E} et \vec{H} sont les champs à la surface du conducteur.

Si le conducteur est parfait, voir figure 3.2, \vec{E} est perpendiculaire à la surface³, \vec{H} est parallèle et la puissance dissipée est nulle. Cette situation idéale correspond dans la suite à l'ordre 0 de notre description des champs près de la surface d'un conducteur. Lorsque la conductivité σ du conducteur est finie, on peut calculer les corrections au premier ordre des champs en suivant la démarche décrite dans [Jackson, 1965, page 236-240]. A l'ordre 1, on considère que, juste à l'extérieur du conducteur, le champ électrique perpendiculaire et le champ magnétique parallèle ne sont pas modifiés. Leurs valeurs sont fixées par la résolution d'un problème aux limites adéquat, par exemple celui d'une cavité résonnante. En utilisant les conditions de bord appropriées et les équations de Maxwell on montre qu'il existe à

 $^{^{3}}$ Dans la suite on parlera de champs parallèle ou perpendiculaire sans préciser «à la surface du conducteur».

l'intérieur du conducteur des composantes parallèles du champ électrique et magnétique. Ces champs décroissent en $e^{-\frac{z}{\delta}}$, où $\delta = 1/\sqrt{\pi \mu \sigma f}$ est l'épaisseur de peau, et ne dépendent que de la valeur de $\vec{H}_{\parallel}^{(0)}$ à la surface du conducteur. Toujours par continuité, on en déduit l'existence juste en dehors du conducteur d'une petite composante parallèle du champ électrique (correction d'ordre 1) :

$$\vec{E}_{\parallel}^{(1)} = \sqrt{\frac{\omega\,\mu}{2\,\sigma}} (1 - \mathbf{i})(\hat{n} \wedge \vec{H}_{\parallel}^{(0)}) \tag{3.72}$$

ainsi qu'une petite composante perpendiculaire du champ magnétique :



 $\vec{H}_{\perp}^{(1)} = -\frac{i}{\omega \, \mu} \vec{\nabla}_{/\!\!/} \wedge \vec{E}_{/\!\!/}^{(1)} \tag{3.73}$

FIG. 3.3 – Champs au voisinage d'un conducteur réel.

Dans (3.71), on peut remplacer \vec{E} par $\vec{E}_{\perp}^{(0)} + \vec{E}_{\parallel}^{(1)}$ et \vec{H} par $\vec{H}_{\parallel}^{(0)} + \vec{H}_{\perp}^{(1)}$ (voir figure 3.3) puisque $\vec{E}_{\parallel}^{(0)}$ et $\vec{H}_{\perp}^{(0)}$ sont nuls sur la surface⁴. On s'aperçoit alors que seul

⁴On ne considère ici que les corrections au premier ordre mais il existe aussi des corrections au second ordre sur \vec{E}_{\perp} et \vec{H}_{\parallel} .

 $\vec{E}_{/\!\!/}^{(1)}$ donne une contribution non nulle dans le calcul de la puissance dissipée. En utilisant (3.72) on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}a} = \frac{\mu\,\omega\,\delta}{4} \,\|\vec{H}_{\mathscr{I}}^{(0)}\|^2 = \frac{1}{2\,\sigma\,\delta} \,\|\vec{H}_{\mathscr{I}}^{(0)}\|^2 \tag{3.74}$$

3.3.2 Application à une cavité

Pour obtenir la puissance totale dissipée par effet ohmique dans une cavité, il suffit d'intégrer l'équation (3.74) sur l'ensemble des parois. On utilise ici la même géométrie que celle décrite sur la figure 1.3 :

$$P^{ohm} = \frac{1}{2\sigma\delta} \left[\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\ell \int_{0}^{d} \mathrm{d}z \, \|\hat{n} \wedge \vec{H}^{(0)}\|_{\mathrm{côt\acute{e}s}}^{2} + \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a \, \|\hat{n} \wedge \vec{H}^{(0)}\|_{\mathrm{bouts}}^{2} \right]$$
(3.75)

où \mathcal{A} et \mathcal{C} sont la surface et le contour de la section et \hat{n} est dirigé vers l'extérieur de la cavité. Les champs à l'ordre 0 sont donnés par l'équation de Helmhotz associée à des conditions de bords de Dirichlet (voir équations (1.4) et (1.5)). On pose $\vec{E}^{(0)} =$ $E_z^{(0)}\hat{z} = \psi(x,y)\hat{z}$. La Loi de Faraday à l'ordre 0 s'écrit $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}^{(0)} = i \omega \vec{B}^{(0)}$, soit :

$$\vec{B}^{(0)} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{y} \right)$$
(3.76)

Soient les intégrales I_1 et I_2 telles que, d'après (3.75) :

$$P^{ohm} = \frac{I_1 + I_2}{2\,\sigma\,\delta\,\mu^2} \tag{3.77}$$

Soient les opérateurs $\vec{\nabla}_{\perp}$ et $\vec{\nabla}_t$ (respectivement le gradient normal et transverse) définis par $\vec{\nabla}_{\perp}\psi = (\vec{\nabla}\psi \cdot \hat{n})\hat{n}$ et $\vec{\nabla}_t\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{y}$. Pour I_1 , l'intégrale sur zest triviale puisqu'à l'ordre 0 les champs sont invariants suivant cette direction. En utilisant l'équation (3.76) on obtient :

$$\begin{split} I_1 &= d \left[\int_0^a \mathrm{d}x \, \|\hat{y} \wedge \vec{B}^{(0)}\|^2 + \int_0^b \mathrm{d}y \, \| - \hat{x} \wedge \vec{B}^{(0)} \|^2 \\ &+ \int_a^0 -\mathrm{d}x \, \| - \hat{y} \wedge \vec{B}^{(0)} \|^2 + \int_b^0 -\mathrm{d}y \, \|\hat{y} \wedge \vec{B}^{(0)} \|^2 \right] \\ &= 2d \left[\int_0^a \mathrm{d}x \, \|\hat{y} \wedge \vec{B}^{(0)} \|^2 + \int_0^b \mathrm{d}y \, \|\hat{x} \wedge \vec{B}^{(0)} \|^2 \right] \\ &= 2d \left[\int_0^a \mathrm{d}x \, \|\hat{y} \wedge -\frac{\mathrm{i}}{\omega} (\frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \hat{y}) \|^2 \\ &+ \int_0^b \mathrm{d}y \, \|\hat{x} \wedge -\frac{\mathrm{i}}{\omega} (\frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \hat{y}) \|^2 \right] \\ &= 2d \left[\int_0^a \mathrm{d}x \, \|\frac{\mathrm{i}}{\omega} \frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{z} \|^2 + \int_0^b \mathrm{d}y \, \| - \frac{\mathrm{i}}{\omega} \frac{\partial\psi}{\partial x} \hat{z} \|^2 \right] \\ &= \frac{d}{\omega^2} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\ell \, |\frac{\partial\psi}{\partial n}|^2 \end{split}$$

so
it :

$$I_1 = \frac{d}{\omega^2} \oint_{\mathcal{C}} d\ell \, \|\vec{\nabla}_{\perp}\psi\|^2 \tag{3.78}$$

On définit ξ par :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\ell \, \frac{c^2}{\omega^2} \|\vec{\nabla}_{\perp}\psi\|^2 \equiv \xi \frac{C}{A} \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a \, |\psi|^2 \tag{3.79}$$

où C est la circonférence du billard et A sa surface. ξ est un paramètre de l'ordre de l'unité fluctuant d'un mode à l'autre en fonction de la répartition spatiale ψ . I_1 se réécrit alors :

$$I_1 = \frac{d}{c^2} \xi \frac{C}{A} \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a \, |\psi|^2 \tag{3.80}$$

De la même façon, on calcule I_2 en utilisant l'équation (3.76) et en remarquant que les intégrations sur les parois inférieures et supérieures sont identiques :

$$I_{2} = 2 \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a \, \|\hat{z} \wedge -\frac{\mathrm{i}}{\omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{y}\right)\|^{2}$$
$$= \frac{2}{\omega^{2}} \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a \, \|\frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{x}\|^{2}$$
$$= \frac{2}{\omega^{2}} \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a \, \|\vec{\nabla}_{t}\psi\|^{2}$$
(3.81)

D'après le théorème de Green à deux dimensions :

$$\iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a \, \|\vec{\nabla}_t \psi\|^2 = \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\ell \, \psi^* \, \frac{\partial \, \psi}{\partial \, n} - \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a \, \psi^* \, \vec{\nabla}_t^2 \psi \tag{3.82}$$

La première intégrale s'annule puisque $\psi = 0$ sur les bords. De plus, d'après l'équation d'Helmholtz, $\vec{\nabla}_t^2 \psi = -\frac{\omega^2}{c^2} \psi$, d'où :

$$I_2 = \frac{2}{c^2} \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a \, |\psi|^2 \tag{3.83}$$

 et

$$P^{ohm} = \frac{\epsilon}{\sigma \,\delta \,\mu} \,\left(1 + \xi \,\frac{C \,d}{2 \,A}\right) \,\iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a \,|\psi|^2 \tag{3.84}$$

Afin de ne pas alourdir inutilement les calculs, nous avons jusqu'ici supposé que la conductivité σ de la cavité était identique sur toutes les parois. Or, nous avons vu au chapitre 2 que la paroi supérieure de la cavité (feuille de cuivre) n'était pas de la même qualité que le reste de la cavité. Par conséquent, le calcul des pertes ohmiques sur les parois inférieures et supérieures (calcul de I_2) doit se faire avec des conductivités σ_+ et σ_- différentes. Cependant, le calcul de ces deux contributions étant identique par ailleurs, on arrive au même résultat en attribuant la même conductivité $\sigma_{prop} = 4\sigma_+\sigma_-/(\sqrt{\sigma_+} + \sqrt{\sigma_-})^2$ aux parois inférieures et supérieures. En notant σ_{bords} la conductivité des parois latérales, on a donc :

$$P^{ohm} = \epsilon \sqrt{\frac{\pi f}{\mu \sigma_{prop}}} \left(1 + \xi \sqrt{\frac{\sigma_{prop}}{\sigma_{bords}}} \frac{Cd}{2A} \right) \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a |\psi|^2 \tag{3.85}$$

Soit W l'énergie électromagnétique emmagasinée dans la cavité :

$$W = \frac{\epsilon}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}v \|\vec{E}^{(0)}\|^2 = \frac{d\epsilon}{2} \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a |\psi|^2$$
(3.86)

Le facteur de qualité $Q^{ohm}=f/\Gamma^{ohm}$ de la cavité est alors donné par :

$$Q^{ohm} = \frac{\omega W}{P^{ohm}} = d \frac{\sqrt{\pi \mu \sigma_{prop} f}}{1 + \xi \frac{Cd}{2A} \sqrt{\frac{\sigma_{prop}}{\sigma_{bords}}}}$$
(3.87)

d'où, finalement, la largeur à mi-hauteur associée aux pertes ohmiques :

$$\Gamma^{ohm} = \frac{f}{Q^{ohm}} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{f}{\pi \mu \sigma_{prop}}} \left(1 + \xi \frac{Cd}{2A} \sqrt{\frac{\sigma_{prop}}{\sigma_{bords}}} \right)$$
(3.88)

3.4. CONCLUSION

On constate finalement qu'il existe deux types de pertes ohmiques, les pertes ohmiques à la propagation et les pertes ohmiques à la réflexion (sur es bords) :

$$\Gamma^{ohm} = \Gamma^{prop} + \Gamma^{bords} \tag{3.89}$$

оù

$$\Gamma^{prop} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{f}{\pi \mu \sigma_{prop}}} = \frac{\delta_{prop} f}{d}$$
(3.90)

$$\Gamma^{bords} = \xi \frac{C}{2A} \sqrt{\frac{f}{\pi \mu \sigma_{bords}}} = \xi \frac{C \delta_{bords} f}{2A}$$
(3.91)

En adoptant un point de vue différent pour les calculer, l'annexe B met en exergue cette séparation entre pertes à la propagation et à la réflexion. Bien que similaires dans leur écriture ces deux termes jouent un rôle physique très différent l'un de l'autre. Γ^{prop} correspond à des pertes réparties uniformément sur la surface de la cavité et n'a donc aucun lien avec la dynamique des ondes dans la cavité. C'est une fonction monotone avec la fréquence, qui ne dépend ni de la géométrie transverse de la cavité, ni de la répartition spatiale des modes dans la cavité. Γ^{bords} , par contre, est associé à un mécanisme de fuite sur le contour du billard. En conséquence, c'est un terme qui dépend de la géométrie du billard mais aussi, et surtout, de la répartition spatiale des modes par l'intermédiaire de ξ . Γ^{bords} fluctue donc d'un mode à l'autre et ses fluctuations sont liées à la dynamique dans la cavité. C'est pourquoi nous nous intéresserons tout particulièrement à ce terme dans les chapitres suivants.

3.4 Conclusion

En regroupant les résultats des deux sections précédentes, on obtient pour la matrice S d'une cavité micro-ondes faiblement couplée à des antennes quasi-ponctuelles, l'expression suivante :

$$S_{ab} = \delta_{ab} - 2iT^2(f) \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n(\vec{r}_a)\psi_n(\vec{r}_b)}{f^2 - f_n^2 + if_n^0(\Gamma_n^{ohm} + \Gamma_n^{ant})}$$
(3.92)

où $f_n=f_n^0-\Gamma_n^{ohm}/2$ et $\{f_n^0\}$ sont les fréquences propres non perturbées. On a de plus :

$$\Gamma_n^{ant} = \frac{T^2(f_n)}{f_n^0} \sum_{c=1}^M |\psi_n^0(\vec{r_c})|^2, \qquad (3.93)$$

$$T(f) = \frac{cZ_0}{2\pi Z_c} \frac{\sin^2 \frac{\pi f l_{eff}}{c}}{\sin \frac{\pi f l^*}{c} \cos \frac{\pi f l^*}{c}}$$
(3.94)

 et

$$\Gamma_n^{ohm} = \Gamma^{prop}(f_n) + \Gamma_n^{bords} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{f_n}{\pi \mu \sigma_{prop}}} \left(1 + \xi_n \frac{Cd}{2A} \sqrt{\frac{\sigma_{prop}}{\sigma_{bords}}} \right)$$
(3.95)

où, A, C et d sont respectivement la surface, le périmètre et l'épaisseur de la cavité et ξ_n est donné par :

$$\xi_n = \frac{A \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\ell \frac{c^2}{\omega^2} \|\vec{\nabla}_{\perp} \psi_n^0\|^2}{C \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a \, |\psi_n^0|^2} \tag{3.96}$$

Notons que la matrice S ainsi obtenue est bien symétrique mais pas unitaire.

D'après (3.92) le coefficient de transmission $(a \neq b)$ en $f = f_n$ s'écrit :

$$|S_{ab}(f_n)| = 2T^2(f_n) \frac{|\psi_n(\vec{r_a})\psi_n(\vec{r_b})|}{f_n^0(\Gamma_n^{ohm} + \Gamma_n^{ant})}$$
(3.97)

Or, dans un billard rectangulaire de dimension $a \times b$ avec des conditions de bords de Dirichlet et en l'absence de pertes, on a :

$$f_{l,m}^{0} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^{2} + \left(\frac{m}{b}\right)^{2}}$$
(3.98)

 et

$$\psi_{l,m}^0(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$
(3.99)

En supposant les pertes ohmiques dominantes et $|\psi_n(\vec{r})| \simeq |\psi_{l,m}^0(x,y)|$, on en déduit :

$$\langle |S_{ab}(f_n)| \rangle \simeq T^2(f_n) \frac{128}{ab\pi^4 f_n \Gamma_n^{ohm}}$$
(3.100)

où la moyenne porte sur $\vec{r_a}$ et $\vec{r_b}$. Le membre de gauche de cette équation est obtenu expérimentalement grâce à la mesure, dans la cavité vide, du coefficient de transmission à travers les 45 couples d'antennes. Connaissant les dimensions a et

102

b de la cavité, le membre de droite ne dépend que l_{eff} et l^* . On sait que $l_{eff} \simeq l$ et $l = 2 \pm 0.3$ mm où l est la longueur de pénétration des antennes. De plus, il semble raisonnable de prendre pour l^* la distance entre l'extrémité de l'antenne et le plan de connexion entre l'antenne et le câble (plan de calibration), c'est-à-dire l^* de l'ordre de 1.65 ± 0.03 cm. La figure 3.4 compare $T^2(f_n)$ pour $l_{eff} = 1.8$ mm et $l^* = 1.65$ cm avec la mesure $\langle |S_{ab}(f_n)| \rangle ab\pi^4 f_n \Gamma_n^{ohm}/128$. On observe un excellent accord entre l'expérience et notre modèle. Il ne s'agit ici que d'un test rapide qui possède l'avantage de ne nécessiter aucun traitement de données. Grâce à la procédure d'ajustement des mesures que nous allons détailler dans le prochain chapitre, nous verrons au chapitre 5 que cette modélisation du couplage avec les antennes reste très satisfaisante face à des tests bien plus exigeants.



FIG. 3.4 – Comparaison de $T^2(f_n)$ (pour $l_{eff} = 1.8$ mm et $l^* = 1.65$ cm), en trait plein, avec la mesure $\langle |S_{ab}(f_n)| \rangle ab\pi^4 f_n \Gamma_n^{ohm}/128$ représentée par les croix.

Bibliographie

- [Blatt and Weisskopf, 1952] Blatt, J. and Weisskopf, V. (1952). Theoretical Nuclear Physics. John Wiley & Sons, New York.
- [Dittes, 2000] Dittes, F.-M. (2000). The decay of quantum systems with a small number of open channels. *Phys. Rep.*, 339 :215–316.
- [Eom et al., 2000] Eom, H. J., Cho, Y. H., and Kwon, M. S. (2000). Monopole antenna radiating into a parallel-plate waveguide. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 48(7):1142–1144.
- [Fyodorov and Sommers, 1997] Fyodorov, Y. and Sommers, H.-J. (1997). Statistics of resonance poles, phase shifts and time delays in quantum chaotic scattering : Random matrix approach for systems with broken time-reversal invariance. J. Math. Phys., 38 :1918.
- [Harrington, 2001] Harrington, R. F. (2001). Time-Harmonic Electromagnetic Fields. A Classic Reissue. Wiley-Interscience, reissued edition.
- [Jackson, 1965] Jackson, J. D. (1965). Classical Electrodynamics. Academic Press, New York.
- [Jackson, 2001] Jackson, J. D. (2001). *Électrodynamique Classique*. Dunod, Paris, third edition.
- [Liu and Grimes, 2000] Liu, G. and Grimes, C. A. (2000). A quasistatic FDTD source model for coaxially driven monopole antennas. *Microwave Opt. Technol. Lett.*, 26(1):30-34.
- [Morse and Feshbach, 1953] Morse, P. M. and Feshbach, H. (1953). Methods of Theoretical Physics, volume I. McGraw-Hill Bokk Company.

- [Shen and MacPhie, 1996] Shen, Z. and MacPhie, R. H. (1996). Modal expansion analysis of monopole antennas driven from a coaxial line. *Radio Sci.*, 31(5):1037– 1046.
- [Stöckmann, 1999] Stöckmann, H.-J. (1999). *Quantum Chaos*. Cambridge University Press.

Chapitre 4

Extraire les paramètres de résonance

Sommaire

4.1 Les	paramètres de résonance		
4.1.1	Amplitude, largeur et position d'une résonance $\ldots \ldots 110$		
4.1.2	Évaluation des paramètres de résonance		
4.2 La procédure d'ajustement			
4.2.1	Deux algorithmes de minimisation complémentaires 114		
4.2.2	Limiter le nombre de paramètres à ajuster simultanément 118		
4.2.3	Améliorer l'estimation des paramètres de départ 118		
4.2.4	«Nettoyage» des résultats		
4.3 Tes	ts et limites de l'ajustement		
4.3.1	Stabilité par rapport aux paramètres initiaux $\ldots \ldots \ldots 121$		
4.3.2	Résolution de pics très proches		
4.3.3	Cohérence en fonction des antennes de mesure		
108

Dans le deuxième chapitre, nous avons décrit la cavité micro-ondes et le dispositif expérimental nous permettant de mesurer la matrice S décrivant la cavité. Au cours du chapitre précédent, nous avons vu comment l'expression de la matrice S en fonction de la fréquence se décompose en une somme sur les résonances de la cavité (voir (3.92)). La contribution de la $n^{i eme}$ résonance dans cette somme est une lorentzienne complexe centrée en f_n dont l'amplitude et la largeur dépendent à la fois de $T^2(f_n)$, de $\psi_n(\vec{r_c})$ et de Γ_n^{ohm} . Ce sont ces paramètres qui portent l'information quant à la dynamique de la cavité et ce sont donc eux que nous devons chercher à obtenir. Partant de la mesure du coefficient de transmission $S_{ab}(f)$ (voir figure 4.1) entre 0.25 GHz et 5.5 GHz et pour les 45 couples d'antennes possibles, il s'agit donc d'extraire un jeu de quelques paramètres caractérisant chacune des N résonances présentes dans cette gamme de fréquence. Nous verrons dans ce chapitre que c'est une tâche délicate nécessitant un travail important : le nombre N de résonances est de l'ordre de 330 à 350, ce qui, multiplié par les 45 couples d'antennes, porte à près de 15000 le nombre de lorentziennes (ou pics de résonance) concernées pour une seule campagne de mesure. La nécessité de travailler sur des données complexes et d'aller jusqu'à des régimes ou le recouvrement entre résonances est important complique encore ce travail. Pour parvenir à ce résultat, il est donc nécessaire de procéder à un traitement numérique complexe des mesures : c'est cette procédure que nous allons détailler dans ce chapitre¹.

Après avoir réécrit la formule (3.92) sous une forme qui associe explicitement quatre paramètres réels à chaque lorentzienne, nous verrons, dans un premier temps, comment il est possible d'évaluer ces paramètres sans faire appel à d'autre algorithme qu'une simple recherche de maxima. Cette première évaluation est entachée d'une erreur trop importante pour être exploitée en l'état mais constitue, par contre, un excellent *ansatz* pour l'ajustement des pics de résonance. Nous détaillerons donc, dans un second temps, la procédure d'ajustement que nous avons développée spécifiquement pour ce travail. Enfin, nous évaluerons la précision et les limites de ce traitement numérique.

¹Toutes les procédures et fonctions nécessaires au traitement numérique décrit dans ce chapitre sont écrites sous IDL (Interactive Data Language, développé par Research Systems, Inc.).



FIG. 4.1 – Module et phase cumulée du coefficient de transmission mesurés entre 3 GHz et 3.25 GHz.

4.1 Les paramètres de résonance

4.1.1 Amplitude, largeur et position d'une résonance

La formule (3.92) obtenue à la fin du chapitre précédent fait apparaître le coefficient de transmission $S_{ab,a\neq b}$ (on omettra dans la suite de préciser $a \neq b$) comme une somme de N lorentziennes complexes, chacune d'entre elles étant caractérisée par les paramètres { $\psi_n(\vec{r_c}), c = 1 \dots M$ }, f_n et Γ_n^{ohm} . La fonction de couplage T(f) variant lentement avec la fréquence, on peut ignorer sa dépendance en fréquence à l'échelle d'une résonance. On remplace donc T(f) par $T(f_n)$ qui apparaît ainsi comme un autre paramètre caractéristique de la $n^{ième}$ lorentzienne. On définit le jeu de quatre paramètres { $\alpha_n^{ab}, \beta_n^{ab}, \Gamma_n, f_n$ }, en posant :

$$S_{ab}(f) = \sum_{n} \frac{\alpha_n^{ab} + i \beta_n^{ab}}{f^2 - f_n^2 + i f_n \Gamma_n}$$
(4.1)

4.1. LES PARAMÈTRES DE RÉSONANCE

La lorentzienne associée à la $n^{i \grave{e} m e}$ résonance lors d'une mesure de la transmission entre l'antenne a et l'antenne b est donc caractérisée par son amplitude complexe $\alpha_n^{ab} + i\beta_n^{ab}$, sa largeur à mi-hauteur Γ_n et sa position f_n . D'après (3.92), on a :

$$\alpha_n^{ab} + \mathrm{i}\beta_n^{ab} = -2\mathrm{i}T^2(f_n)\psi_n(\vec{r_a})\psi_n(\vec{r_b}) \tag{4.2}$$

$$\Gamma_n = \Gamma_n^{ohm} + \Gamma_n^{ant} \tag{4.3}$$

$$f_n = f_n^0 - \frac{\Gamma_n^{ohm}}{2}$$
 (4.4)

On rappelle que f_n^0 désigne ici la $n^{\text{ième}}$ fréquence propre de la cavité non perturbée.

4.1.2 Évaluation des paramètres de résonance

Voyons à présent comment déterminer les paramètres $\{\alpha_n^{ab}, \beta_n^{ab}, \Gamma_n, f_n\}$. La première question qui se pose est évidemment de connaître le nombre N de résonances présentes dans la gamme de fréquence où l'on travaille. En observant la figure 4.1, il paraît, *a priori* naturel de procéder pour cela à une simple recherche de maxima sur le module de la transmission. Cependant l'efficacité de cette méthode chute rapidement quand le recouvrement entre résonances augmente. On préfère par conséquent utiliser le group delay, c'est-à-dire la dérivée de la phase² $\varphi(f)$ de $S_{ab}(f)$. En effet, la figure 4.1 montre qu'à chaque résonance correspond un saut de phase et donc un pic sur le group delay. Ce dernier présentant l'avantage d'être plus étroit que le pic de résonance lui même, le group delay permet de séparer plus facilement des résonances proches. La phase augmente de façon monotone avec la fréquence, mais définie comme $\varphi = \arctan(\operatorname{Im}(S_{ab})/\operatorname{Re}(S_{ab}))$, elle est restreinte à l'intervalle $[-\pi, \pi[$. Ce repliement induit des sauts de phase brutaux de 2π qui rendent délicate l'exploitation de sa dérivée. Aussi, pour pallier ce problème, on utilise la formule suivante, obtenue en dérivant tan $\varphi = \operatorname{Im}(S_{ab})/\operatorname{Re}(S_{ab})$:

$$\varphi'(f) = \frac{\operatorname{Im}\left(S'_{ab}(f)\right)\operatorname{Re}\left(S_{ab}(f)\right) - \operatorname{Im}\left(S_{ab}(f)\right)\operatorname{Re}\left(S'_{ab}(f)\right)}{|S_{ab}(f)|^2}$$
(4.5)

Lorsque $|S_{ab}| \rightarrow 0$, la phase n'est plus bien définie et, sous l'effet du bruit, oscille

²En toute rigueur, on devrait noter $\varphi_{ab}(f)$ mais pour alléger un peu l'écriture on ne précisera l'indice ab que lorsque c'est utile à la compréhension.



FIG. 4.2 – Comparaison entre $|S_{ab}|$ et g(f).

fortement. Cela génère un bruit considérable sur la dérivée de la phase. Pour atténuer cet effet, on peut multiplier le group delay par l'intensité $I = |S_{ab}|^2$, mais ce faisant, on atténue considérablement les résonances de faible intensité. Ainsi, afin de ne pas trop augmenter la dynamique, on préfère utiliser la fonction g(f) définie par³:

$$g(f) = \varphi'(f) \sqrt{\frac{I}{\langle I \rangle}}$$
(4.6)

où la moyenne porte sur la fréquence. Sur la figure 4.2, qui permet de comparer $|S_{ab}(f)|$ et g(f) à haute fréquence, on remarque ainsi que les deux pics situés au début de cette fenêtre sont résolus sur g(f) mais pas sur le module de la transmission.

À l'aide d'une simple recherche de maxima sur g(f), on obtient ainsi l'évaluation $\{f_n^0\}$ des positions des résonances⁴. Les autres paramètres s'en déduisent, par

³On utilise également un filtre de Lee [Lee, 1986] pour diminuer le bruit de phase.

⁴Attention à ne pas confondre le f_n^0 définit ici avec celui utilisé auparavant, voir équation (4.4).



FIG. 4.3 – Comparaison entre le coefficient de transmission calculé à partir de l'évaluation des paramètres (4.7) (trait plein) et la mesure (croix). Les courbes en tirets montrent la contribution de chacun des trois pics de résonance. Le module est représenté en haut et la phase en bas.

exemple, à l'aide des relations suivantes :

$$\Gamma_n^0 = \frac{2}{\varphi'(f_n^0)} \tag{4.7}$$

$$\alpha_n^0 = -\operatorname{Im}\left(S_{ab}(f_n^0)\right)\Gamma_n^0 f_n^0 \tag{4.8}$$

$$\beta_n^0 = \operatorname{Re}\left(S_{ab}(f_n)\right)\Gamma_n^0 f_n^0 \tag{4.9}$$

La figure 4.3 permet de visualiser la précision de cette première évaluation. Si l'allure de la courbe obtenue est très semblable à celle de la courbe expérimentale, l'accord quantitatif n'est pas très bon. Cela vient de ce que notre calcul ne tient pas compte du recouvrement entre les résonances. Les paramètres α_n^0 , β_n^0 et Γ_n^0 sont définis de telle sorte que chaque pic, pris séparément des autres, décrive correctement la mesure. Une fois la somme effectuée, par contre, le recouvrement diminue fortement l'accord entre notre évaluation et la mesure : ceci est particulièrement visible sur le module.

En conclusion, cette façon d'évaluer les paramètres caractéristiques des pics de résonances mesurés ne peut être efficace que lorsque le recouvrement est très faible. Puisque nous sommes, au contraire, intéressés par l'étude de régimes où le recouvrement est important, il nous est nécessaire d'avoir recours à l'ajustement des pics de résonances. Les paramètres α_n^0 , β_n^0 , Γ_n^0 et f_n^0 tels qu'ils ont été définis ici n'en restent pas moins très intéressants car ils constituent une excellente estimation de départ pour les procédures d'ajustement.

4.2 La procédure d'ajustement

4.2.1 Deux algorithmes de minimisation complémentaires

La plupart des algorithmes d'ajustement numérique sont basés sur la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire sur la minimisation de la somme (éventuellement pondérée) du carré des écarts entre la mesure expérimentale et la fonction théorique. Cette quantité à minimiser porte le nom de χ^2 . On ne peut minimiser que des quantités réelles, or nous travaillons ici avec des quantités complexes, par conséquent la définition du χ^2 est un peu ambiguë. Sur un intervalle en fréquence $[f_1, f_n]$ de n

4.2. LA PROCÉDURE D'AJUSTEMENT

points, on peut, par exemple, définir les χ^2 suivant :

$$\chi^{2}_{mod}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{n} w_{i} |S^{exp}_{ab}(f_{i}) - S^{theo}_{ab}(f_{i}; \boldsymbol{a})|^{2}$$
(4.10a)

$$\chi^{2}_{reel}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{n} w_{i} \left[\operatorname{Re} \left(S^{exp}_{ab}(f_{i}) \right) - \operatorname{Re} \left(S^{theo}_{ab}(f_{i};\boldsymbol{a}) \right) \right]^{2}$$
(4.10b)

$$\chi_{imag}^2(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n w_i \left[\operatorname{Im} \left(S_{ab}^{exp}(f_i) \right) - \operatorname{Im} \left(S_{ab}^{theo}(f_i; \boldsymbol{a}) \right) \right]^2$$
(4.10c)

où ν est le nombre de degrés de libertés, $\{w_i\}$ le poids associé à la mesure, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ l'ensemble des m paramètres ajustables, $S_{ab}^{exp}(f_i)$ le coefficient de transmission mesuré et $S_{ab}^{theo}(f)$ l'expression analytique avec laquelle on veut ajuster la mesure. Le nombre de degrés de liberté ν est donné par la différence entre le nombre de points n et le nombre de paramètres ajustables m. Le poids w_i est en général choisi comme l'inverse de l'incertitude absolue de mesure. Dans notre cas, cette incertitude est très faible ($\simeq 10^{-5}$ à 10^{-6}) et dépend peu de la fréquence. On choisit d'attribuer le même poids $w_i = 1$ à tous les points de mesure, en conséquence, il faut s'attendre à trouver des χ^2 de l'ordre de 10^{-10} à 10^{-12} au lieu de 1, lorsque l'ajustement est réussi.

Il existe de nombreuses méthodes numériques de recherche de minima. Elles donnent toutes d'excellents résultats lorsqu'elles convergent bien, mais étant donné le très grand nombre d'ajustements que nous avons à réaliser (environ 15000), le taux de réussite est, pour nous, un critère particulièrement important. En effet, il est courant que ces algorithmes de minimisation convergent vers un ensemble de paramètres correspondant à un minimum local. Ces minima locaux sont fortuits et peuvent correspondre à des paramètres très différents de ceux recherchés. Après avoir testé quelques méthodes connues, on a choisi d'utiliser la combinaison de deux d'entre elles : «Levenberg-Marquardt Method» [Marquardt, 1963] et «Downhill Simplex Method : Amœba» [Press et al., 1997]. La première combine elle-même deux méthodes : la «méthode du gradient» loin du minimum et «l'approximation parabolique» proche du minimum. Notons que c'est une méthode «exacte» pour les paramètres intervenant linéairement dans la fonction utilisée pour l'ajustement, c'est-à-dire α_n et β_n dans notre cas. Elle converge rapidement et se montre relativement peu sensible à la précision des paramètres initiaux. En contrepartie, elle aboutit fréquemment à des minima locaux correspondant à des paramètres nonsatisfaisants. La seconde est une méthode géométrique : par transformations successives, le volume de l'espace des phases formé par les paramètres initiaux, se contracte autour du minimum. En pratique, on observe que cette méthode est moins sujette à converger vers des minima locaux, mais nécessite en revanche une bonne précision sur l'évaluation des paramètres initiaux. Ces deux méthodes apparaissent donc comme complémentaires : on commence par la méthode de Levenberg-Marquardt et on utilise le résultat obtenu comme point de départ pour Amæba. Ainsi, on utilise successivement trois algorithmes distincts au fur et à mesure que l'on s'approche du minimum.

Dans le détail, on commence par ajuster séparément la partie réelle et la partie imaginaire de $S_{ab}^{exp}(f_i)$ en minimisant $\chi^2_{reel}(a)$ et $\chi^2_{imag}(a)$ à l'aide de la méthode de Levenberg-Marquardt. Les résultats obtenus pour a sont évidemment similaires, on utilise donc leur moyenne comme point de départ pour la méthode Amæba. Cette dernière est alors exécutée en boucle jusqu'à ce que la diminution de $\chi^2_{mod}(a)$ entre deux itérations soit inférieure à un millième. On atteint ainsi une excellente qualité d'ajustement ($\chi^2 \simeq 10^{-10}$) avec un bon taux de réussite (près de 90 %)⁵. La figure 4.4 illustre la précision de cette procédure d'ajustement, aussi bien sur le module que sur la phase du coefficient de transmission : le résultat de l'ajustement semble directement tracé à partir des points expérimentaux! Ce résultat est à comparer avec la figure 4.3 sur laquelle est représenté l'ansatz utilisé comme point de départ pour l'ajustement, le gain en précision est très net. On remarque également sur la figure 4.4 que, du fait du recouvrement entre résonances, les maxima du module de la transmission ne coïncident pas avec ceux des pics de résonances, c'est-à-dire avec les positions réelles des résonances.

⁵Avec un processeur de type «AMD AthlonTM XP 1800+», l'ajustement d'une fenêtre de trois pics de résonance ne prend que quelques secondes et il faut environ une quinzaine d'heures de calculs pour dépouiller une campagne de mesures complète ($\simeq 1500$ pics).



FIG. 4.4 – Résultat de l'ajustement de S_{ab} , en haut sur le module et en bas sur la phase. Les croix représentent la mesure et la ligne en trait plein le résultat de l'ajustement. Les courbes en tirets montrent la contribution de chacun des trois pics de résonances.

4.2.2 Limiter le nombre de paramètres à ajuster simultanément

Les paramètres ajustables sont au nombre de quatre par pic de résonance. Or, lorsque leur nombre est trop grand, les algorithmes d'ajustement ont beaucoup de mal à converger. On travaillera donc toujours sur des fenêtres fréquentielles ne contenant que quelques résonances. Nous avons choisi de nous limiter à 3 résonances, soit douze paramètres par fenêtre. Ce découpage ne pose pas de problème à basse fréquence, lorsque les pics de résonance sont bien séparés, mais devient plus délicat à haute fréquence lorsque le recouvrement est important. Ainsi, pour prendre en compte l'influence des pics extérieurs à la fenêtre, on ajoute à l'équation (4.1) un fond polynômial de la forme $P(f) = z_0 + z_1 \cdot (f - f_0) + z_2 \cdot (f - f_0)^2$ où f_0 est le centre de la fenêtre et z_0, z_1 et z_2 sont des paramètres complexes ajustables. On porte ainsi le nombre de paramètres réels à 18 pour l'ajustement d'une fenêtre de trois pics de résonance. Malgré le fond polynômial, l'ajustement a peu de chance d'aboutir si le dernier (respectivement le premier) pic de la fenêtre possède un recouvrement trop important avec le pic suivant (respectivement précédent). Pour pallier ce problème, on fait glisser la fenêtre d'ajustement pic par pic, chaque pic de résonance est donc ajusté trois fois : une première avec ses deux prédécesseurs, une deuxième avec ses deux voisins et une troisième avec ses deux successeurs. Des trois jeux de paramètres obtenus pour chaque résonance, on choisit le meilleur en comparant les χ^2_{mod} calculés localement autour du pic, c'est-à-dire sur l'intervalle $[f_n - \Gamma_n, f_n + \Gamma_n]$. Un ajustement sur un aussi grand nombre de paramètres n'est possible que grâce à la bonne résolution en fréquence des mesures qui nous assure un nombre suffisant de points par fenêtre et au très bon rapport signal à bruit de la mesure.

4.2.3 Améliorer l'estimation des paramètres de départ

Aussi efficace que soit la procédure d'ajustement, la qualité de l'*antsatz* conditionne toujours la précision du résultat ainsi que la vitesse de convergence. En particulier, il est primordial de ne pas faire d'erreur sur le nombre de pics présents dans la fenêtre choisie. Or, une résonance donnée peut être plus ou moins facilement repérée selon le couple d'antennes utilisées pour la mesure. Pour augmenter le taux de détection des résonances, on effectue donc la recherche de maxima sur le group delay modifié g(f) (voir (4.6)) sur chacune des 45 mesures associées aux 45 couples d'antennes possibles. On recoupe ensuite le résultat de ces recherches en éliminant les pics qui n'apparaissent que pour moins de 20 % des couples. Cette détection des résonances est automatisée et le nombre de résonances manquées est d'environ 4 % dans la cavité chaotique, contre un peu plus de 5 % dans la cavité régulière (l'absence de répulsion de niveaux rend les quasi-dégénérescences plus fréquentes dans ce cas). En s'aidant de la loi de Weyl 1.6, on cherche ensuite les quelques résonances manquantes en examinant visuellement les mesures. De plus, f_n^0 et Γ_n^0 étant, *a priori*, indépendants du couple d'antennes choisi, on pourra minimiser l'erreur sur leur évaluation en moyennant les valeurs trouvées à l'aide des différents couples d'antennes.

4.2.4 «Nettoyage» des résultats

On essaye toujours d'ajuster toutes les résonances trouvées, quel que soit le couple d'antennes utilisé pour la mesure. Or, d'après (4.2), il suffit que l'intensité du champ du $n^{ième}$ mode soit proche de zéro au niveau d'une des antennes de mesure, pour que $|S_{ab}(f_n)|$, c'est-à-dire l'amplitude du pic de résonance, soit très faible. Évidemment, il est peu probable que l'ajustement converge correctement dans ces conditions. On procède donc, pour finir, au nettoyage, ou filtrage, des paramètres fournis par les ajustements afin d'éliminer les paramètres non-valides. Essentiellement cette opération consiste à restreindre le facteur de qualité $Q_n = f_n/\Gamma_n$ et l'amplitude $|\alpha_n + i\beta_n|$ à des intervalles bornés traduisant ce qui est physiquement acceptable. On élimine également les résultats d'ajustement qui mènent à une largeur ou une position trop éloignée de ce qui est obtenu, en moyenne, pour la même résonance mais avec d'autres couples d'antennes. Le processus décrit jusqu'ici peut quasiment se dérouler sans l'intervention directe d'un opérateur et permet déjà d'obtenir un ajustement très satisfaisant de l'ensemble des mesures. Sur les 15000 pics de résonance ajustés, la proportion de pics qui n'ont pu l'être correctement par

ce processus automatique est d'environ 10 % dans la cavité régulière et d'environ 15 % dans la cavité chaotique. Environ la moitié d'entre eux sont de trop faibles amplitudes pour pouvoir être ajustés et ce sont les imperfections dues à l'automatisation du processus qui ont empêché l'autre moitié d'être ajustée correctement. On peut donc encore compléter le traitement en traitant ces derniers au cas par cas. Nous avons utilisé pour ce faire l'interface interactive du programme «Together» (voir figure 4.5) développée, au sein de l'équipe de H.-J. Stöckmann, par U. Kuhl et M. Barth afin de faciliter leur propre exploitation de données. Cette interface permet non seulement de visualiser facilement l'ensemble des ajustements réalisés, mais aussi d'en ajouter de nouveaux de façon complètement interactive. C'est donc un excellent outil pour, d'une part compléter le nettoyage des résultats et, d'autre part, récupérer les 5 à 8 % d'ajustements manqués lors du traitement automatique.



FIG. 4.5 – Capture d'écran du programme interactif de traitement des mesures Together.

Au besoin, l'ensemble de la procédure d'ajustement peut être réitérée en utilisant le résultat de l'itération précédente comme point de départ pour la suivante.

4.3 Tests et limites de l'ajustement

Nous avons, dans la section précédente, décrit l'ensemble du traitement numérique appliqué à une campagne de mesure complète afin d'en extraire les paramètres de chaque résonance. Ce traitement consiste principalement à ajuster les pics de résonance par fenêtre de trois. Dans le chapitre suivant, nous analyserons ces résultats dans le cadre du chaos quantique mais, avant cela, voyons quelles sont les limites de l'ajustement numérique d'une seule de ces fenêtres.

4.3.1 Stabilité par rapport aux paramètres initiaux

L'algorithme de minimisation converge d'autant plus rapidement et d'autant plus facilement que les paramètres de départ sont proches de ceux recherchés. Nous avons vu que notre méthode d'estimation de ces paramètres de départ est en général très satisfaisante (voir figure 4.3). Cependant il est important que l'algorithme converge également lorsque l'estimation est moins bonne. Le tableau 4.1 indique dans quelle mesure les paramètres de départ $\{\alpha^0_n,\beta^0_n,\Gamma^0_n,f^0_n\}$ peuvent typiquement varier sans altérer significativement le résultat $\{\alpha_n, \beta_n, \Gamma_n, f_n\}$ de l'ajustement. La méthode de Levenberg-Marquardt est une méthode exacte pour les paramètres, comme α_n et β_n , intervenant linéairement dans la formule d'ajustement. C'est pourquoi ils peuvent varier, en valeur absolue, de 18 ordres de grandeur sans que cela ne pose de problème. La largeur et la positions sont des paramètres plus critiques pour la convergence mais les marges autorisées restent tout à fait satisfaisantes. Il est à noter que, contrairement aux autres paramètres, l'amplitude de variation de f_n dépend fortement de la fréquence et de la fenêtre considérée. De manière générale, on peut considérer que la limite de variation de f_n est fixée par la distance séparant les deux pics les plus proches de la fenêtre, c'est-à-dire 5 MHz dans notre exemple.

Lorsque les paramètres initiaux varient dans les limites précisées dans le tableau 4.1, les paramètres obtenus par l'ajustement fluctuent très légèrement. Toutefois, comme le montre le tableau 4.2, ces fluctuations sont très faibles. En particulier, la position f_n de chacune des résonances ne bouge quasiment pas.

$\alpha^0_n\;,eta^0_n$	Γ_n^0	f_n^0
$10^{-2} < \frac{\alpha_n^0}{\alpha_n} , \frac{\beta_n^0}{\beta_n} < 10^{16}$	$10^{-1} < \frac{\Gamma_n^0}{\Gamma_n} < 10$	$f_n - 5 \text{ MHz} < f_n^0 < f_n + 5 \text{ MHz}$

TAB. 4.1 – Limites de variation des paramètres initiaux α_n^0 , β_n^0 , Γ_n^0 et f_n^0 compatible avec la qualité de l'ajustement représenté sur la figure 4.4.

	$\frac{\Delta \alpha_n}{\alpha_n}$, $\frac{\Delta \beta_n}{\beta_n}$	$\frac{\Delta\Gamma_n}{\Gamma_n}$	$\frac{\Delta f_n}{f_n}$
α_n^0,β_n^0	0.3%	0.05%	$10^{-5}\%$
Γ_n^0	2%	2%	$10^{-4}\%$
f_n^0	2%	1%	$10^{-4}\%$

TAB. 4.2 – Variation maximale des paramètres α_n , β_n , Γ_n et f_n trouvée lorsque les paramètres initiaux α_n^0 , β_n^0 , Γ_n^0 et f_n^0 varient dans les limites fixées par le tableau 4.1.

4.3.2 Résolution de pics très proches

Après avoir vu l'influence des paramètres initiaux sur l'ajustement, voyons quelle est la capacité de notre procédure à séparer deux pics très proches. Afin de pouvoir faire varier à volonté la distance entre les pics, il est plus pratique de travailler ici sur une mesure fictive. On génère donc à l'aide de la formule (4.1) la superposition de deux pics centrés autour de 3.75 GHz et séparés de la distance Δf . On fixe leur largeur à 1 MHz et leur amplitude $\alpha + i\beta$ à $10^{13}(1+i)$. Le plus petit Δf pour lequel la fonction g(f) (group delay modifié, voir (4.6)) présente encore deux maxima distincts est de 1.1 MHz. L'ajustement des pics correspondant à cet écart est représenté sur la figure 4.6 et le tableau 4.3 permet de comparer les paramètres obtenus avec les paramètres exacts : la correspondance est quasiment exacte.

De plus, il est possible d'ajuster des pics encore plus proches. Il suffit pour cela d'avoir pu détecter l'existence du doublet, par exemple en utilisant les multiples couples d'antennes sur lesquels pourront apparaître tantôt l'un et tantôt l'autre des deux pics. La figure 4.7 représente l'ajustement d'un doublet de pics séparés de $\Delta f = 0.2$ MHz. Il est intéressant de noter que l'écart qui les sépare est inférieur au pas de mesure (0.3125 MHz). Le tableau 4.4 compare les paramètres obtenus par



FIG. 4.6 – Ajustement d'un doublet de pics de largeurs égales à 1 MHz et séparés de 1.1 MHz; le module est représenté en haut et la phase en bas. Les croix représentent la mesure et la ligne en trait plein le résultat de l'ajustement. Les courbes en tirets montrent la contribution de chacune des deux lorentziennes.

Pic nº 1	Référence	Ajustement	Pic n° 2	Référence	Ajustement
α_1	$1.000 \ 10^{13}$	$1.000 \ 10^{13}$	α_2	$1.000 \ 10^{13}$	$1.000 \ 10^{13}$
β_1	$1.000 \ 10^{13}$	$0.999 \ 10^{13}$	β_2	$1.000 \ 10^{13}$	$1.000 \ 10^{13}$
Γ_1	$1.000 \ 10^6$	$1.000 \ 10^6$	Γ_2	$1.000 \ 10^6$	$1.000 \ 10^6$
f_1	3.74945 GHz	3.74945 GHz	f_2	3.75055 GHz	3.75055 GHz

TAB. 4.3 – Comparaison des paramètres ajustés avec ceux utilisés pour générer le doublet de la figure 4.6 avec $\Delta f = 1.1$ MHz.

Pic nº 1	Référence	Ajustement	Pic n° 2	Référence	Ajustement
α_1	$1.000 \ 10^{13}$	$1.032 \ 10^{13}$	α_2	$1.000 \ 10^{13}$	$0.968 \ 10^{13}$
β_1	$1.000 \ 10^{13}$	$0.986 \ 10^{13}$	β_2	$1.000 \ 10^{13}$	$1.014 \ 10^{13}$
Γ_1	$1.000 \ 10^{6}$	$0.996 \ 10^6$	Γ_2	$1.000 \ 10^6$	$0.995 \ 10^6$
f_1	3.74990 GHz	3.74990 GHz	f_2	3.75010 GHz	3.75010 GHz

TAB. 4.4 – Comparaison des paramètres ajustés avec ceux utilisés pour générer le doublet de la figure 4.7 avec $\Delta f = 0.2$ MHz.

ajustement à ceux utilisés pour générer les pics, là encore, l'accord est excellent.

4.3.3 Cohérence en fonction des antennes de mesure

Pour finir, on peut vérifier que les largeurs et positions obtenues en ajustant les mesures de transmission obtenues à l'aide des différents couples d'antennes sont bien cohérentes. Pour chaque résonance, on calcule l'écart-type des largeurs et des positions obtenues en fonction des antennes de mesure et on en déduit l'incertitude relative en divisant par la moyenne. Le tableau 4.5 présente cette incertitude moyenne, exprimée en pourcentage, pour une cavité régulière et une cavité chaotique. Dans la cavité chaotique, c'est la présence de résonances très larges à haute fréquence qui augmente l'incertitude moyenne sur les largeurs. Dans la cavité régulière c'est le couplage direct, à basse fréquence, entre les antennes qui perturbe la mesure des positions. Dans tous les cas, l'incertitude moyenne est au maximum d'environ 10 %.



FIG. 4.7 – Ajustement d'un doublet quasi-dégénéré; le module est représenté en haut et la phase en bas. Les croix représentent la mesure et la ligne en trait plein le résultat de l'ajustement. Les courbes en tirets montrent la contribution de chacune des deux lorentziennes.

Incertitude	Régulier	Chaotique
$\langle 100 \frac{\sigma_{f_n}}{f_n} \rangle_{f < 3 \text{ GHz}}$	$8.6 \ 10^{-3}\%$	$2.2 \ 10^{-3}\%$
$\langle 100 \frac{\sigma_{f_n}}{f_n} \rangle_{f>3 \text{GHz}}$	$1.4 \ 10^{-3}\%$	$3.5 \ 10^{-3}\%$
$\langle 100 \frac{\sigma_{f_n}}{f_n} \rangle_{\forall f}$	$3.5 \ 10^{-3}\%$	$3.1 \ 10^{-3}\%$
$\langle 100 \frac{\sigma_{\Gamma_n}}{\overline{\Gamma_n}} \rangle_{f < 3 \text{ GHz}}$	$3.0 \ \%$	5.3~%
$\langle 100 \frac{\sigma_{\Gamma_n}}{\overline{\Gamma_n}} \rangle_{f>3 \text{GHz}}$	$6.9 \ \%$	10.3~%
$\langle 100 \frac{\sigma_{\Gamma_n}}{\overline{\Gamma_n}} \rangle_{\forall f}$	$5.8 \ \%$	8.8 %

TAB. 4.5 – Incertitude des largeurs et des positions suivant les antennes de mesure ; à basse fréquence, à haute fréquence et sur l'ensemble du spectre ; dans une cavité régulière et dans une cavité chaotique.

L'ensemble de ces tests montre que nous disposons d'un outil performant et fiable pour extraire de nos mesures l'ensemble des paramètres caractéristiques des résonances du système. Dans le prochain chapitre, nous verrons comment exploiter ces résultats pour l'étude des propriétés ondulatoires de la cavité.

Bibliographie

- [Lee, 1986] Lee, J.-S. (1986). Speckle suppression and analysis for synthetic aperture radar images. *Opt. Eng.*, 25(5):636-643.
- [Marquardt, 1963] Marquardt, D. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. J. Soc. Indust. Appl. Math., II(2):431-441.
- [Press et al., 1997] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery,
 B. P. (1997). Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing, chapter 10.4, pages 408-412. Cambridge University Press, second edition.

BIBLIOGRAPHIE

Chapitre 5

Analyse des résultats d'ajustements

Sommaire

5.1	Le b	illard rectangulaire
	5.1.1	Ajuster les dimensions du billard
	5.1.2	La loi de Weyl \ldots 133
	5.1.3	Le $P(s)$
	5.1.4	Le couplage
	5.1.5	Les largeurs
5.2	Le b	oillard de Sinaï
5.2	Le b 5.2.1	billard de Sinaï
5.2	Le b 5.2.1 5.2.2	billard de Sinaï 147 La loi de Weyl 147 Le P(s) 148
5.2	Le b 5.2.1 5.2.2 5.2.3	Dillard de Sinaï 147 La loi de Weyl 147 Le $P(s)$ 148 Le couplage 150
5.2	Le b 5.2.1 5.2.2 5.2.3 5.2.4	Dillard de Sinaï 147 La loi de Weyl 147 Le $P(s)$ 148 Le couplage 150 Les largeurs 151

La procédure d'ajustement décrite dans le chapitre précédent est appliquée aux mesures obtenues pour deux cavités particulières. La première cavité étudiée est la cavité vide, c'est-à-dire une cavité modélisée par un billard rectangulaire. Ce billard est régulier, ce qui signifie qu'en l'absence de pertes, ses fréquences et fonctions propres peuvent être calculées analytiquement (voir équations (3.98) et (3.99)). Par suite, les résultats du chapitre 3 nous permettent d'en déduire la matrice S complète. Cette cavité nous servira donc de référence pour l'analyse des résultats de l'ajustement. La deuxième cavité est obtenue en introduisant un disque en cuivre de rayon R = 6 cm (et de l'épaisseur de la cavité) à l'intérieur de la cavité. On réalise ainsi un billard chaotique de type Sinaï.

5.1 Le billard rectangulaire

5.1.1 Ajuster les dimensions du billard

Nous avons vu dans le chapitre précédent que notre procédure d'ajustement permet de déterminer la position des résonances avec une très grande précision. En l'absence de perte, les fréquences propres $f_{l,m}^0$ sont données par la formule (3.98), elles ne dépendent donc que des dimensions a et b de la cavité. Un calcul d'incertitude standard donne :

$$\frac{\Delta f_{l,m}^0}{f_{l,m}^0} = \frac{l^2 b^2 \frac{\Delta a}{a} + m^2 a^2 \frac{\Delta b}{b}}{l^2 b^2 + m^2 a^2} \tag{5.1}$$

Avec $\Delta a = \Delta b = 1$ mm, on trouve une incertitude relative sur $f_{l,m}^0$ oscillant entre 0.14% et 0.22%. Bien que faible, cette incertitude reste très supérieure à l'incertitude observée pour la détermination des positions de résonance par ajustement (voir tableau 4.2 et 4.5). On peut donc légitimement utiliser nos résultats pour préciser les valeurs de *a* et *b*. Pour ce faire, on utilise le résultat du chapitre 3 précisant que la différence entre les fréquences propres non perturbées et la positions des résonances est égale à $\Gamma_{l,m}^{ohm}/2$:

$$f_n = f_{l,m}^0 - \frac{\Gamma_{l,m}^{ohm}}{2}$$
(5.2)

En ajustant a et b de sorte que $f_{l,m}^0$ et $\Gamma_{l,m}^{ohm}/2$, donnés par les formules (3.98)



FIG. 5.1 – $f_{l,m}^0 - \Gamma_{l,m}^{ohm}/2 - f_n$ en fonction du numéro de résonance pour a = 465.64mm et b = 756.21 mm.

et (3.95), vérifient bien cette relation, on trouve $a = (465.64 \pm 0.01)$ mm et $b = (756.21 \pm 0.01)$ mm¹ (à comparer avec les valeurs mesurées $a = (466 \pm 1)$ mm et $b = (757 \pm 1)$ mm). La figure 5.1 permet de visualiser l'écart observé entre f_n et $f_{l,m}^0 - \Gamma_{l,m}^{ohm}/2$. En pratique, on n'utilise pas les premières résonances pour cet ajustement car elles sont situées à des longueurs d'onde où le couplage direct entre antennes est non négligeable. Les antennes les plus proches sont espacées de 10 cm, les plus éloignées le sont de 70 cm et la distance moyenne séparant deux antennes est de 30 cm. On peut donc considérer que le couplage direct entre antennes, qui a notamment pour conséquence de modifier la position des résonances, est négligeable pour $\lambda < 15$ cm, soit $\nu > 2$ GHz ou encore n > 50. Cet effet est très net sur la figure 5.1 mais en dehors de cette région, l'écart ne dépasse pas 1 MHz (pour des fréquence de quelques GHz). Nous utiliserons ces valeurs de a et b dans tout ce qui suit, et notamment dans la prochaine section traitant de la loi de Weyl. Notons que l'on peut toujours considérer que $f_n \simeq f_{l,m}^0$ tant que $\Gamma_n^{ohm}/2$ reste petit devant l'écart moyen entre résonances successives. Cette condition étant vérifiée dans l'ensemble

¹L'ajustement est très sensible : le χ^2 augmente de 25 % lorsque *a* et *b* varient de 0.02 mm.

de cette section, nous utiliserons le terme de fréquence sans préciser davantage de quelle fréquence il s'agit.

5.1.2 La loi de Weyl

Dans le premier chapitre, nous avons vu que la loi de Weyl (équation (1.6)) donne le comportement moyen du nombre cumulé de résonances. En fonction de la fréquence (on rappelle que $E = k^2$) et pour un billard rectangulaire de dimension $a \times b$, cette loi s'écrit :

$$N_{Weyl}(f) = \frac{ab\pi}{c^2} f^2 - \frac{a+b}{c} f + \frac{1}{4}$$
(5.3)

où la constante est obtenue en multipliant 1/16 par le nombre d'angles droits [Baltes and Hilf, 1976].



FIG. 5.2 – Comparaison entre le nombre cumulé expérimental (courbe en escalier) et celui prédit par la loi de Weyl (courbe en trait plein) dans la cavité rectangulaire. Un agrandissement sur la fenêtre fréquentielle allant de 4.5 GHz à 5 GHz est représenté en insert.

La figure 5.2 compare la loi de Weyl, pour a = 465.64 mm et b = 756.21 mm, avec le nombre cumulé expérimental $N_{exp}(f_n)$ obtenu grâce à la procédure d'ajustement décrite au chapitre précédent. On n'observe aucune déviation systématique sur l'ensemble de la gamme de fréquence, ce qui prouve que nous n'avons manqué aucune des 349 premières résonances. Ceci est particulièrement remarquable dans la mesure où les quasi-dégénérescences ne sont pas rares dans les billards réguliers. Ce phénomène mène souvent à ne voir qu'une seule résonance au lieu de deux dans les observations expérimentales, mais dans notre cas, la résolution de ces quasidégénérescences est rendue possible par l'efficacité de notre procédure d'ajustement. L'insert de la figure 5.2 permet d'observer les fluctuations de $N_{exp}(f_n)$ autour de $N_{moy}(f)$. Aucun paramètre ajustable n'intervient ici puisque a et b ont été déterminés précédemment. D'ailleurs, le nombre cumulé est peu adapté à l'ajustement des dimensions de la cavité : en utilisant a = 466 mm et b = 757 mm au lieu de a = 465.64 mm et b = 756.21 mm, la différence sur le nombre cumulé de résonances est inférieure à 0.5 à la fréquence maximum f = 5.5 GHz.

5.1.3 Le P(s)

Étant donné l'excellent accord observé avec la loi de Weyl, on peut directement utiliser cette dernière pour redresser le spectre $\{f_n\}$ (voir chapitre 1). À l'aide du spectre redressé $\{x_n = N_{Weyl}(f_n)\}$ on construit la distribution des écart *s* entre niveaux successifs, cette distribution, appelée P(s), est représentée sur la figure 5.3. On observe un très bon accord avec la loi de Poisson, caractéristique des systèmes réguliers, y compris pour les faibles écarts. Là encore, c'est la qualité de l'ajustement qui permet d'obtenir le bon comportement à l'origine.

Les fluctuations importantes du P(s) expérimental sont principalement dues au manque de statistique (349 résonances), c'est pourquoi on utilise souvent le P(s) intégré, I(s), défini par :

$$I(s) = \int_0^s P(s') \mathrm{d}s' \tag{5.4}$$

Le I(s) expérimental est représenté sur la figure 5.4 ainsi que la courbe attendue si le P(s) suit une statistique de type POE.



FIG. 5.3 – L'histogramme représente la probabilité P(s)ds mesurée dans la cavité rectangulaire et la courbe en trait plein suit la loi de Poisson (1.13).



FIG. 5.4 – La courbe en escalier représente la probabilité intégrée I(s) mesurée dans la cavité rectangulaire et la courbe en trait plein le comportement attendu pour un système de type POE.

Le bon accord avec les prédictions associées à un système POE montrent que la présence des antennes ne perturbe pas suffisamment la cavité pour rendre chaotique sa dynamique (voir références [Šeba and Życzkowski, 1991] et [Šeba et al., 1997]). De plus, la présence des pertes ne semble pas non plus perturber significativement la statistique des positions de résonance.

5.1.4 Le couplage

Nous avons vu dans ce qui précède que les positions des résonances obtenues par ajustement de la transmission sont en bon accord avec celles attendues dans un billard rectangulaire. Voyons à présent si les fonctions d'onde de la cavité sont également proches de ce qu'on peut attendre dans un billard rectangulaire. On rappelle que l'amplitude A_n^{ab} du pic de résonance mesuré en transmission entre les antennes a et b est donnée par :

$$A_n^{ab} = \alpha_n^{ab} + \mathrm{i}\beta_n^{ab} = -2\mathrm{i}T^2(f_n)\psi_n(\vec{r}_a)\psi_n(\vec{r}_b)$$
(5.5)

où $\psi_n(\vec{r})$ est la fonction d'onde de la $n^{i em}$ résonance. On en déduit :

$$\frac{A_n^{ab}A_n^{ac}}{A_n^{bc}} = -2iT^2(f_n)\frac{\psi_n(\vec{r_a})\psi_n(\vec{r_b})\psi_n(\vec{r_a})\psi_n(\vec{r_c})}{\psi_n(\vec{r_b})\psi_n(\vec{r_c})} = -2iT^2(f_n)\psi_n^2(\vec{r_a})$$
(5.6)

soit, en module :

$$\frac{|A_n^{ab}||A_n^{ac}|}{|A_n^{bc}|} = 2T^2(f_n)|\psi_n(\vec{r_a})|^2$$
(5.7)

En l'absence de pertes et pour $n = \{l, m\}$ on a :

$$\psi_n(\vec{r}) = \psi_{l,m}^0(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$
 (5.8)

L'existence de pertes non uniformes (pertes sur les antennes et sur les bords) conduit à considérer des fonctions d'ondes complexes. Nous reviendrons en détails sur cet aspect dans le chapitre suivant, mais dans la mesure où les pertes restent perturbatives, on peut considérer que $|\psi_n(\vec{r})| \simeq |\psi_{l,m}^0(x,y)|$, d'où :

$$\frac{|A_n^{ab}||A_n^{ac}|}{|A_n^{bc}|} \simeq 2T^2(f_n)|\psi_{l,m}^0(x_a, y_a)|^2$$
(5.9)

5.1. LE BILLARD RECTANGULAIRE

Ainsi, on peut combiner de 36 façons les 45 amplitudes A_{ab} mesurées pour évaluer $2T^2(f_n)|\psi^0_{l,m}(x_a, y_a)|^2$ avec a = 1, ..., 10, soit, en moyennant ces différentes valeurs :

$$2T^{2}(f_{n})|\psi_{l,m}^{0}(x_{a}, y_{a})|^{2} = \frac{1}{36} \sum_{\substack{b,c \neq a \\ b < c}} \frac{|A_{n}^{ab}||A_{n}^{ac}|}{|A_{n}^{bc}|}$$
(5.10)

L'équation (5.8) nous donne $|\psi^0_{l,m}(x_a,y_a)|^2$ et $T^2(f)$ est donné par :

$$T(f) = \frac{cZ_0}{2\pi Z_c} \frac{\sin^2 \frac{\pi f l_{eff}}{c}}{\sin \frac{\pi f l^*}{c} \cos \frac{\pi f l^*}{c}}$$
(5.11)

où l_{eff} et l^* sont des paramètres ajustables et dépendant éventuellement de la fréquence. On commence donc par ajuster ces deux paramètres de sorte que l'équation (5.10) moyennée sur *a* soit vérifiée, c'est-à-dire :

$$2T^{2}(f_{n}) = \frac{\langle \frac{1}{36} \sum_{\substack{b,c \neq a \\ b < c}} \frac{|A_{n}^{ab}||A_{n}^{ac}|}{|A_{n}^{bc}|} \rangle_{a}}{\langle |\psi_{l,m}^{0}(x_{a}, y_{a})|^{2} \rangle_{a}}$$
(5.12)

Notons que c'est le membre de droite de cette équation qui est obtenu expérimentalement par ajustement des résonances. Afin de prendre en compte la dépendance en fréquence de l_{eff} et l^* , on réalise cet ajustement par morceaux : pour les 30 premières résonances, pour les résonances de 30 à 100 et pour le reste des résonances. Le résultat est représenté sur la figure 5.5.

	$0 \le n \le 30$	$30 \le n \le 100$	$100 \le n \le 348$
l_{eff}	$2.2 \mathrm{mm}$	2.0 mm	1.8 mm
l^*	$3.80~\mathrm{cm}$	$2.30 \mathrm{~cm}$	$1.43~\mathrm{cm}$

TAB. 5.1 – Valeurs de l_{eff} et l^* ajustées pour différentes gammes de fréquence.

Les valeurs de l_{eff} et l^* obtenues dans chaque fenêtre sont données par le tableau 5.1. l_{eff} est à comparer à la longueur de pénétration des antennes dans la cavité $l = (2 \pm 0.3)$ mm : comme on pouvait s'y attendre, l_{eff} reste très proche de l sur toute la gamme de fréquence. l^* varie beaucoup plus : au minimum, il est de l'ordre de la distance entre l'extrémité de l'antenne et le plan de connexion entre



FIG. 5.5 – Les croix représentent les valeurs expérimentales et les courbes l'ajustement de ces données d'après la formule (5.11) dans trois fenêtres de fréquences successives. Les trois courbes sont en trait-point (basse fréquence), en tirets (moyenne fréquence) et en pointillés (haute fréquence) en dehors de la fenêtre utilisée pour leur ajustement, et en trait plein à l'intérieur. L'ajustement par morceaux sur l'ensemble de la gamme de fréquence est donc représenté par la courbe en trait plein.

l'antenne et le câble, mais il devient nettement plus grand à basse fréquence. Autrement dit, la zone perturbée augmente avec la longueur d'onde, ce qui semble tout à fait naturel. Maintenant que nous connaissons l_{eff} et l^* , nous pouvons comparer directement la quantité expérimentale $\langle \frac{1}{36} \sum_{\substack{b,c \neq a \\ b < c}} |A_n^{ab}|| A_n^{ac}|/|A_n^{bc}|\rangle_a$ avec la prédiction $2T^2(f_n) \langle |\psi_{l,m}^0(x_a, y_a)|^2 \rangle_a$. La figure 5.6 montre un très bon accord entre ces quantités, y compris en ce qui concerne les fluctuations. En regardant bien, on remarque que l'accord se dégrade en général pour les résonances quasi-dégénérées, ceci est dû au recouvrement. En effet, si ce dernier est très important, on s'attend à ce que la répartition spatiale des résonances apparaisse comme une combinaison linéaire des fonctions d'onde non-perturbées. Pour finir, on peut, pour une résonance donnée, directement comparer $|A_n^{ac}||A_n^{bc}|/|A_n^{ab}| = 2T^2(f_n)|\psi_n(\vec{r_c})|^2$ avec $2T^2(f_n)|\psi_{l,m}^0(x_c, y_c)|^2$



FIG. 5.6 – Comparaison expérience (\diamondsuit) et théorie (trait plein et croix), en haut sur toute la gamme de fréquence et en bas entre 2 et 3 GHz

pour c = 1, ..., 10. La figure 5.7 illustre cette comparaison pour quelques résonances. Là encore l'accord est très bon tant que le recouvrement n'est pas trop important car alors les valeurs théoriques ne sont plus pertinentes.

5.1.5 Les largeurs

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, la largeur totale d'une résonance se décompose en une somme de trois largeurs partielles associées aux pertes à travers les antennes, aux pertes ohmiques situées sur les bords de la cavité et aux pertes ohmiques sur la surface de la cavité qui apparaissent comme des pertes à la propagation. Dans une cavité rectangulaire, la largeur totale de la $n^{i\rm eme}$ résonance, caractérisée par les nombres quantiques l et m, est donnée par :

$$\Gamma_n = \Gamma^{prop}(f_n) + \Gamma^{bords}_{l,m} + \Gamma^{ant}_{l,m}$$
(5.13)

La largeur $\Gamma^{prop}(f_n)$ associée aux pertes à la propagation varie le ntement avec la fréquence :

$$\Gamma^{prop}(f_n) = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{f_n}{\pi \mu \sigma_{prop}}}$$
(5.14)

оù

$$\sigma_{prop} = \frac{4\sigma_+\sigma_-}{(\sqrt{\sigma_+} + \sqrt{\sigma_-})^2} \tag{5.15}$$

La conductivité σ_+ de la paroi supérieure de la cavité (cuivre CuB) est inférieure à celle de la paroi inférieure (cuivre CuC). On pose donc $\sigma_- = \sigma = 5.8 \, 10^7 \, \text{S.m}^{-1}$ et $\sigma_+ = \alpha \sigma_-$, avec $\alpha < 1$, d'où :

$$\sigma_{prop} = \frac{4\alpha\sigma}{(1+\sqrt{\alpha})^2} \tag{5.16}$$

et

$$\Gamma^{prop}(f_n) = \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{2d\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{f_n}{\pi\mu\sigma}}$$
(5.17)

La largeur $\Gamma_{l,m}^{bords}$ associée aux pertes ohmiques sur les bords de la cavité, en revanche, fluctue d'une résonance à l'autre par l'intermédiaire du facteur $\xi_{l,m}$:

$$\Gamma_{l,m}^{bords} = \frac{C}{2A} \xi_{l,m} \sqrt{\frac{f_n}{\pi \mu \sigma_{bords}}}$$
(5.18)



FIG. 5.7 – Comparaison expérience (trait plein) et théorie (trait pointillé) pour $2T^2(f_n)|\psi_n(\vec{r_c})|^2$ en fonction du numéro d'antenne c. De haut en bas et de droite gauche, on a les résonances numéro 8, 28, 44, 78, 238 et 329 dont les fréquences respectives sont : $f_8 = 9.847$ GHz, $f_{28} = 1.656$ GHz, $f_{44} = 2.028$ GHz, $f_{78} = 2.655$ GHz, $f_{238} = 4.558$ GHz et $f_{329} = 5.316$ GHz.

Les fonctions d'onde étant données par (5.8), on peut calculer $\xi_{l,m}$ qui est représentée sur la figure 5.8 :

$$\xi_{l,m} = \frac{Ac^2}{f_{l,m}^2 C} \left(\frac{l^2}{a^3} + \frac{m^2}{b^3}\right)$$
(5.19)

En remplaçant dans (5.18) et en utilisant $f_n \simeq f_{l,m}^0$, on trouve :



FIG. 5.8 – Représentation de la fonction $\xi_{l,m} - 1$ en fonction de la fréquence.

$$\Gamma_{l,m}^{bords} \simeq \frac{c^2 \delta_{bords}(f_n)}{2f_{l,m}^0} \left(\frac{l^2}{a^3} + \frac{m^2}{b^3}\right)$$
(5.20)

Notons qu'on s'attend donc à des fluctuations de Γ^{bords} de l'ordre de 20 % autour de sa valeur moyenne. Enfin, la largeur $\Gamma^{ant}_{l,m}$ associée aux pertes par couplage avec les antennes fluctue également d'une résonance à l'autre puisqu'elle dépend de la fonction d'onde $\psi^0_{l,m}(\vec{r})$:

$$\Gamma_{l,m}^{ant} = \frac{T^2(f_n)}{f_{l,m}^0} \sum_{c=1}^M |\psi_{l,m}^0(\vec{r_c})|^2$$
(5.21)

Finalement, les équations (5.17), (5.20) et (5.21) permettent de calculer explicitement les largeurs totales dans une cavité rectangulaire. Expérimentalement, on obtient par l'ajustement de la transmission une mesure directe de Γ_n ainsi qu'une mesure indirecte de Γ_n^{ant} , en effet, nous avons vu dans la section précédente que l'on pouvait calculer $2T^2(f_n)|\psi_n(\vec{r_c})|^2$ à partir de $A_n^{ab} = \alpha_n^{ab} + i\beta_n^{ab}$ (voir (5.10)). La figure 5.9 permet de comparer les largeurs théoriques et expérimentales associées aux antennes. Comme on pouvait s'y attendre au vu des résultats obtenus précédemment, on observe un très bon accord. On note de plus que cette contribution est relativement faible par rapport aux largeurs totales : elle représente environ 5% de la largeur de résonance totale a basse fréquence (en dessous de 3 GHz) et un peu moins de 14 % à haute fréquence (au dessus de 3 GHz). En moyenne, les pertes dues aux antennes représentent environ 11 % des pertes totales dans la cavité régulière.



FIG. 5.9 – Comparaison entre théorie (courbe en trait plein) et mesure (croix) pour les largeurs associées aux antennes. En insert : agrandissement entre 4.45 GHz et 4.55 GHz.

En revanche, il n'est pas possible de séparer expérimentalement les deux contributions ohmiques Γ_n^{bords} et $\Gamma^{prop}(f_n)$, on ne peut accéder qu'à $\Gamma_n^{ohm} = \Gamma_n - \Gamma_n^{ant}$. Une comparaison directe entre Γ_n^{ohm} et $\Gamma^{prop}(f_n) + \Gamma_{l,m}^{bords}$, avec $\alpha = 0.8$ (en moyenne
la conductivité du cuivre CuB vaut 80% de celle du cuivre CuC) n'est pas très satisfaisante. En effet, d'après (5.17) et (5.18) on a :

$$\frac{\Gamma^{prop}(f_n)}{\Gamma^{bords}_{l,m}} = \frac{A(1+\sqrt{\alpha})}{dC\xi_{l,m}\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\sigma_{bords}}{\sigma}}$$
(5.22)

Or $\xi_{l,m}$ est de l'ordre de l'unité, $\alpha = 0.8$ et, a priori, $\sigma_{bords} = \sigma$ puisque les parois latérales de la cavité sont également en cuivre CuC, d'où $\Gamma^{prop}(f_n)/\Gamma^{bords}_{l,m} \simeq 60$. Autrement dit, la partie fluctuante des pertes ohmiques est théoriquement négligeable devant sa partie propagative, ce qui est en contradiction avec les observations expérimentales sur lesquelles les fluctuations de Γ_n^{ohm} sont clairement visibles. On peut en partie expliquer ce désaccord par une modification globale de la conductivité électrique sur les bords de la cavité. Ceci peut être dû à l'existence d'une rugosité importante (effet de crénelage) apparue lors de l'usinage du cadre ou aux problèmes de contact entre le cadre et les parois inférieure et supérieure de la cavité. Ces défauts ne sont pas très génants, dans la mesure où il sont homogènes sur tout le contour de la cavité. Ainsi, on peut les prendre en compte en utilisant une conductivité effective $\sigma_{bords} < \sigma$ dans le calcul des pertes ohmiques sur les bords. Cependant, il faut noter que ces effets semblent très important puisqu'il faut poser $\sigma_{bords} = \sigma/80$, ce qui revient à multiplier $\Gamma_{l,m}^{bords}$ par un facteur 9. De plus, on peut voir sur la figure 5.10 que l'accord n'est satisfaisant qu'en dessous de 3 GHz. Malgré l'importance des largeurs observées par rapport aux valeurs attendues, la largeur totale des résonances reste toujours inférieure à l'écart moyen $\Delta(f)$ entre résonances successives donné par l'inverse de la dérivée du nombre cumulé N(f). Dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire aux plus hautes fréquences, les largeurs atteignent seulement 20 à 25 %de $\Delta(f)$.

Il est probable que l'augmentation des fluctuations de largeurs à partir de 3 GHz est liée aux interactions entre résonances. En effet, lorsque le recouvrement est important, il s'opère une redistribution des largeurs de résonance. Cet effet a été observé dans une cavité micro-ondes couplée à l'extérieur par un guide d'onde à ouverture variable par Persson *et al.* [Persson et al., 2000]. Le couplage entre la cavité et l'extérieur étant contrôlé par l'ouverture du guide d'ondes, les auteurs ont mesuré la variation des largeurs de résonance en fonction du couplage. Ils ont ob-



FIG. 5.10 – Comparaison entre les largeurs ohmiques théoriques (trait plein) et expérimentales (croix). La courbe en tirets représente la partie propagative des pertes ohmiques. En haut, cette comparaison est illustrée sur l'ensemble de la gamme de fréquence alors qu'en bas elle est restreinte aux fréquences inférieures à 3 GHz.

servé, lorsque le couplage augmente, une diminution ou une stagnation de la largeur de 58 % des résonances. Ce type de comportement, appelé *resonance trapping*, est lié à l'interaction, à travers les canaux de perte, entre des résonances possédant un recouvrement non négligeable. Cette interaction mène certaines de ces résonances à s'aligner avec les canaux de pertes, augmentant ainsi fortement leur largeur, alors que les autres, au contraire, tendent à devenir orthogonales à ces mêmes canaux, diminuant ainsi leur largeur. Dans leurs mesures, les auteurs ont également observé une augmentation non uniforme des autres largeurs de résonance avec le couplage. Ainsi, ces travaux ont montré que lorsque le couplage avec l'extérieur augmente, l'ensemble des largeurs de résonance évolue de façon non triviale en augmentant sensiblement leur dispersion. Dans notre cas, le couplage n'est pas un paramètre de contrôle mais l'ensemble des mécanismes de pertes (pertes ohmiques et pertes à travers les antennes) augmente avec la fréquence de sorte que l'interaction entre résonances voisines prend également de l'importance avec la fréquence, ce qui est probablement à l'origine de l'augmentation des fluctuations de largeurs observée.

Grâce à la comparaison théorie-expérience effectuée ici pour la cavité régulière, nous avons pu :

- déterminer très précisément les dimensions a et b de la cavité,
- vérifier que la présence des antennes ne perturbe pas significativement la dynamique de la cavité,
- évaluer, en fonction de la fréquence, les paramètres l_{eff} et l^* caractérisant le couplage des antennes avec la cavité,
- analyser le rôle des différentes contributions $\Gamma^{prop}(f_n)$, Γ^{bords}_n et Γ^{ant}_n des largeurs de résonances.

Fort de ces enseignements, intéressons-nous à présent à une cavité chaotique de type Sinaï.

5.2 Le billard de Sinaï

5.2.1 La loi de Weyl

En notant $R = 60.0 \pm 0.5$ mm le rayon du disque introduit dans la cavité, la loi de Weyl s'écrit pour un billard de Sinaï [Baltes and Hilf, 1976] :

$$N_{Weyl}(f) = \frac{\pi(ab - \pi R^2)}{c^2} f^2 - \frac{a + b + \pi R}{c} f + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$
(5.23)

où la constante supplémentaire de 1/16 est un terme de courbure.



FIG. 5.11 – Comparaison entre le nombre cumulé expérimental (courbe en escalier) et celui prédit par la loi de Weyl (courbe en trait plein) dans la cavité de Sinaï. Un agrandissement sur la fenêtre fréquentielle allant de 4.5 GHz à 5.5 GHz est représenté en insert.

Contrairement à ce que nous avons vu pour la cavité rectangulaire, on observe, voir figure 5.11, un écart systématique, à haute fréquence, entre le nombre cumulé de résonances et la loi de Weyl. Cet écart est trop important pour être expliqué par l'incertitude sur la mesure de R. Pour que cet écart puisse être dû à quelques résonances manquantes, il nous faudrait avoir manqué 3 résonances entre 4 GHz et 5.35 GHz puis 2 autres entre 5.35 GHz et 5.5 GHz. Mais étant données les précautions prises lors de la procédure de traitement de données, il est peu probable que nous ayons manqué autant de résonances. Par contre, il semble raisonnable d'envisager qu'à haute fréquence, le recouvrement entre résonances modifie légèrement la loi de Weyl. En effet, au delà de 5 GHz les résonances les plus larges possèdent une largeur comparable à l'écart moyen entre résonances successives. Or la Loi de Weyl, comme le modèle utilisé pour décrire le système au chapitre 3, repose sur l'hypothèse de résonances isolées, c'est-à-dire de pertes perturbatives. Cet effet reste trop faible dans la gamme de fréquence où nous travaillons pour pouvoir l'étudier de manière plus approfondie. Notons enfin que le décalage des fréquences de résonances dû à la présence des pertes ohmiques, tel qu'il a été décrit au chapitre 3, ne suffit pas non plus à expliquer cette déviation du nombre cumulé ². Pour le redressement du spectre, on utilise, au lieu de la loi de Weyl, un ajustement polynômial du second degré du nombre cumulé expérimental.

5.2.2 Le P(s)

À partir du spectre redressé, on construit là encore le P(s) et le P(s) intégré I(s)que l'on compare (voir figures 5.12 et 5.13) avec les prédictions (loi de Wigner) de la RMT pour un système de type GOE. Cette comparaison se justifie tant que les largeurs restent faibles devant l'écart moyen entre résonances successives $\Delta(f)$. Á quelques exceptions près, on a $\Gamma_n < \Delta(f)/4$ jusqu'à environ 4.5 GHz et $\Gamma_n < \Delta(f)/2$ sur l'ensemble de la gamme de fréquence. Ainsi, malgré la petite déviation observée précédemment par rapport à la loi de Weyl, on observe un accord satisfaisant, au vu des fluctuations statistiques liées au nombre de résonances mesurées, en utilisant le spectre complet pour construire le P(s).

²Visuellement, on observe aucune différence sur le nombre cumulé suivant que l'on utilise f_n ou $f_n + \Gamma^{ohm}/2$.



FIG. 5.12 – L'histogramme représente la probabilité P(s)ds mesurée dans la cavité de Sinaï et la courbe en trait plein suit la loi de Wigner (1.14).



FIG. 5.13 – La courbe en escalier représente la probabilité intégrée I(s) mesurée dans la cavité de Sinaï et la courbe en trait plein le comportement attendu pour un système de type GOE.

5.2.3 Le couplage

Le couplage des antennes avec la cavité est complètement indépendant de la dynamique de la cavité, la fonction de couplage T(f) est donc exactement la même que celle déterminée précédemment. Évidemment, on ne dispose pas, dans une cavité chaotique, d'expression théorique des fonctions d'onde avec laquelle comparer nos mesures. Par contre, on a vu au chapitre 1 que l'on s'attend à ce que la répartition spatiale de l'intensité I du champ suive une loi de distribution de type Porter-Thomas (voir (1.10)). La figure 5.14 montre que la mesure de $I/\langle I \rangle$ suit assez bien cette loi de distribution sur 3 décades, au-delà les fluctuations statistiques sont trop importantes. Nous verrons au chapitre suivant, qu'en réalité on s'attend à une déviation par rapport à la loi de Porter-Thomas pour les grandes intensités I. Cette déviation est due à l'existence de pertes localisées qui ont pour effet de rendre le champ complexe.



FIG. 5.14 – Distribution de l'intensité normalisée $I/\langle I \rangle$ (histogramme) comparée avec la distribution de Porter-Thomas.

5.2.4 Les largeurs

Dans la cavité chaotique, l'équation (3.93) permet également de déduire Γ_n^{ant} des résultats de l'ajustement. Ainsi, on représente sur la figure 5.15 les largeurs ohmiques $\Gamma_n - \Gamma_n^{ant}$ mesurées dans la cavité de Sinaï en fonction de la position f_n des résonances. Les pertes à la propagation doivent rester les mêmes que pour la cavité régulière et on voit en effet sur la figure 5.15 que la fonction $\Gamma^{prop}(f_n)$ semble constituer un fond adéquat. Par contre , la comparaison avec la figure 5.10 montre que les pertes ohmiques sur les bords de la cavité, et en particulier leurs fluctuations, sont beaucoup plus importantes que pour la cavité régulières. Cette augmentation des pertes sur les bords est à relier à la présence du disque à l'intérieur de la cavité puisque c'est la seule différence entre les deux cavités. On rappelle que les pertes ohmiques sur les bords sont données par :

$$\Gamma_n^{bords} = \xi_n \frac{C}{2A} \sqrt{\frac{f_n}{\pi \mu \sigma_{bords}}} = \xi_n \frac{C \delta_{bords} f_n}{2A}$$
(5.24)

оù

$$\xi_n = \frac{A}{C} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\ell \|\vec{\nabla}_\perp \psi_n^0\|^2}{\iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a |\psi_n^0|^2}$$
(5.25)

Nous avons vu, dans la cavité régulière, que la conductivité effective σ_{bords} (ou, ce qui revient au même, l'épaisseur de peau δ_{bords}) semble dépendre de manière critique de la qualité du contact entre le cadre et le reste de la cavité ainsi que de l'état de surface du cuivre. Or, si les vis de serrage permettent d'assurer un bon contact sur l'ensemble du cadre, les contraintes sont beaucoup moins importantes au niveau du disque. Un problème de contact entre le disque et les parois supérieures et inférieures de la cavité peut donc expliquer en partie cette différence. Mais, si ce type d'imperfection expérimentale joue certainement un rôle non négligeable, on doit également invoquer la nature chaotique de la cavité pour expliquer ce comportement.

En effet, le paramètre fluctuant ξ_n se comporte, *a priori*, très différemment selon la dynamique de la cavité. Dans une cavité régulière, la dérivée normale du champ varie toujours sinusoïdalement sur les bords, seule la période de ces oscillations varie. En conséquence, l'amplitude de fluctuation des pertes sur les bords augmente

lentement avec la fréquence, comme le montre la figure 5.8. L'hypothèse d'ergodicité du champ dans une cavité chaotique, permet d'envisager le même type de comportement. Cependant, cette hypothèse est clairement mise en défaut à basse fréquence, comme le montre notamment les cartes de champ mesurées dans un billard microondes de type sinaï par Sridhar et al. dans la référence [Sridhar et al., 1992]. Dans une cavité chaotique, la proportion de modes ergodiques augmente avec la fréquence mais, à basse fréquence, les modes non-ergodiques sont très fréquents. Citons par exemple les modes de galerie (modes présentant une surintensité sur les bords de la cavité) où encore les «scars» et les «bouncing balls» que nous avons déjà évoqués au début de ce manuscrit. On comprend aisément que ce type d'objet puisse donner lieu à des fluctuations importantes de ξ_n dans un billard chaotique. Ainsi, Mortessagne et al. ont pu observer numériquement des fluctuations, entre modes proches, allant jusqu'à un facteur 4 sur l'équivalent du paramètre ξ_n dans un billard chaotique associé à des conditions de Neumann sur les bords [Mortessagne et al., 1993]. Du fait de ces fluctuations importantes, on peut atteindre très rapidement un recouvrement important entre résonances et ainsi augmenter encore la dispersion des largeurs de résonance par le mécanisme de *resonance trapping*. Ainsi on note la présence sur la figure 5.15 de quelques résonances beaucoup plus larges que celles qui les entourent : il paraît envisageable que ces résonances illustrent le phénomène d'alignement de certains modes avec les canaux de pertes tel que décrit par le principe de resonance trapping. Enfin, notons qu'étant donnée l'importance des pertes ohmiques, les pertes dues aux antennes sont tout à fait négligeables dans la cavité chaotique : Γ_n^{ant} représente en moyenne un peu plus de 2 % de la largeur totale en dessous de 3 GHz et un peu plus de 6 % au dessus de 3 GHz.

Dans le prochain chapitre, nous allons voir que les pertes ohmiques localisées sur les bords peuvent être reliées à la distribution de la phase du champ dans la cavité.



FIG. 5.15 – Largeurs ohmiques $\Gamma_n - \Gamma_n^{ant}$ mesurées dans la cavité de Sinaï (croix). En trait plein est représenté la fonction $\Gamma^{prop}(f_n)$ évaluée pour la cavité rectangulaire

Bibliographie

- [Baltes and Hilf, 1976] Baltes, H. and Hilf, E. (1976). Spectra of Finite Systems.Bibliographisches Institut, Mannheim.
- [Mortessagne et al., 1993] Mortessagne, F., Legrand, O., and Sornette, D. (1993). Transient chaos in room acoustics. *Chaos*, 3(4):529–541.
- [Persson et al., 2000] Persson, E., Rotter, I., Stöckmann, H.-J., and Barth, M. (2000). Observation of resonance trapping in an open microwave cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 85(12) :2478–2481.
- [Sridhar et al., 1992] Sridhar, S., Hogenboom, D., Balam, A., and Willemsen, A. (1992). Microwave experiments on chaotic billiards. J. Stat. Phys., 68(1/2):239– 258.
- [Seba et al., 1997] Seba, P., Haake, F., Kuš, M., Barth, M., Kuhl, U., and Stöckmann, H.-J. (1997). Distribution of the wave function inside chaotic partially open systems. *Phys. Rev. E*, 56(3):2680–2686.
- [Šeba and Życzkowski, 1991] Šeba, P. and Życzkowski, K. (1991). Wave chaos in quantized classically nonchaotic systems. *Phys. Rev. A*, 44(6) :3457–3465.

BIBLIOGRAPHIE

156

Chapitre 6

Les pertes dans le domaine spatial et spectral

Sommaire

6.1	6.1 Distributions de phase dans un système ouvert 160		
	6.1.1	Calcul des distributions de phase	
	6.1.2	Mesures des distributions de phase $\ldots \ldots 161$	
6.2 Relier les largeurs de résonance à la phase			
	6.2.1	L'hamiltonien effectif	
	6.2.2	Perturbation des conditions aux limites 168	
6.3 Comparaison			

158 CHAPITRE 6. LES PERTES DANS LE DOMAINE SPATIAL ET SPECTRAL

Le champ ψ dans un billard chaotique sans pertes excité à la fréquence ω peut être localement décrit comme une superposition d'ondes *stationnaires* dont la phase et la direction sont des variables aléatoires de distribution uniforme [Berry, 1977] :

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \cos(\theta_n + \vec{k}_n \cdot \vec{r}) \cos \omega t.$$
(6.1)

Soit, en régime stationnaire :

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=1}^{N} \cos(\theta_n + \vec{k}_n \cdot \vec{r}).$$
(6.2)

On remarque que dans ce cas, ψ est une fonction réelle et le théorème de la limite centrale indique que ψ est une variable gaussienne centrée. La même description vaut dans un système chaotique ouvert, à part que ce ne sont plus des ondes *stationnaires* qu'il faut considérer mais des ondes *progressives* [Ishimaru, 1978] :

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \cos(\theta_n + \vec{k}_n \cdot \vec{r} - \omega t).$$
(6.3)

ou encore, en régime stationnaire :

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=1}^{N} e^{i(\theta_n + \vec{k}_n \cdot \vec{r})}.$$
(6.4)

Dans un système ouvert, ψ est donc une fonction à valeurs complexes. De plus, en appliquant le théorème de la limite centrale, on voit que dans un système ouvert Re ψ et Im ψ sont des variables aléatoires gaussiennes centrées de même variance, c'està-dire telles que $\langle (\text{Im }\psi)^2 \rangle / \langle (\text{Re }\psi)^2 \rangle = 1$. Dans un système partiellement ouvert, on s'attend à observer une situation intermédiaire entre un champ ψ réel et un champ «complètement complexe». Pnini et Shapiro utilisent cette approche dans la référence [Pnini and Shapiro, 1996] pour décrire la distribution de l'intensité I = $|\psi|^2$ dans les systèmes chaotiques partiellement ouverts.

On définit le paramètre q par

$$q = \sqrt{\frac{\langle (\operatorname{Im} \psi)^2 \rangle}{\langle (\operatorname{Re} \psi)^2 \rangle}}.$$
(6.5)

On voit immédiatement que q = 0 pour un système fermé et q = 1 pour un système ouvert. Ainsi q peut jouer le rôle d'une mesure du «degré d'ouverture» du système. Or, la largeur de résonance Γ joue un rôle similaire dans le domaine spectral : plus le système est ouvert, plus les largeurs augmentent. En quelque sorte, q et Γ mesurent tous les deux les pertes du système, mais respectivement dans le domaine spatial et dans le domaine spectral. Par conséquent, on s'attend naturellement à observer une forte corrélation entre les évolutions de ces deux paramètres en fonction de l'intensité du couplage avec l'extérieur. Nous verrons, dans ce chapitre, comment on peut mesurer le paramètre q en construisant les distributions de la phase du champ dans la cavité. Puis nous préciserons la nature du lien qui unit q et les largeurs des résonances. Et enfin, nous comparerons l'évolution de ces deux quantités en fonction de la fréquence, et donc du couplage avec l'extérieur, dans une cavité chaotique de type Sinaï.

6.1 Distributions de phase dans un système ouvert

6.1.1 Calcul des distributions de phase

Nous appuyant sur ce qui précède, on suppose que la partie réelle et la partie imaginaire de $\psi(\vec{r})$ sont des variables aléatoires gaussiennes centrées telles que $\sqrt{\langle (\operatorname{Im} \psi)^2 \rangle / \langle (\operatorname{Re} \psi)^2 \rangle} = q$. La distribution de la phase

$$\varphi(\vec{r}) = \arctan(\operatorname{Im}(\psi(\vec{r})) / \operatorname{Re}(\psi(\vec{r})))$$
(6.6)

(connaissant les signes de Im ψ et Re ψ , on peut définir φ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$) est alors obtenue par un calcul standard de la distribution d'une fonction de variables aléatoires [Kanzieper and Freiliker, 1996, Lobkis and Weaver, 2000] :

$$P(\varphi) = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{q^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}$$
(6.7)

Cette distribution présente deux pics centrés autour de $\varphi = 0$ et π (voir figure 6.3), autrement dit, la probabilité est maximum autour des phases correspondant à un champ ψ réel. Inversement, la distribution présente des minima pour $\varphi = \pm \pi/2$, c'est-à-dire les phases correspondant à ψ imaginaire pur. De plus, la largeur de ces pics augmente avec q et leur amplitude est de $1/(2\pi q)$, si bien que cette distribution tend vers la somme de deux Dirac quand q tend vers 0 et vers une distribution uniforme quand q tend vers 1. On voit donc qu'à la limite $q \to 0$, c'est-à-dire pour un système fermé, on retrouve bien un champ ψ réel. À l'opposé, à la limite $q \to 1$, c'est-à-dire pour un système ouvert, on obtient un champ ψ complexe dont la phase est répartie uniformément (voir équation (6.4)).



6.1.2 Mesures des distributions de phase

FIG. 6.1 – Ensemble des phases φ_n^{ab} mesurées dans la cavité de Sinaï sur les 45 couples d'antennes.

Nous avons vu dans les chapitres précédents que le coefficient de transmission mesuré entre deux antennes est proportionnel au produit de la valeur du champ au niveau de chacune des deux antennes. Plus précisément, l'ajustement du coefficient de transmission S_{ab} nous permet d'obtenir les amplitudes complexes de résonance

$$\alpha_n^{ab} + \mathrm{i}\beta_n^{ab} = -2\mathrm{i}T^2(f_n)\psi_n(\vec{r_a})\psi_n(\vec{r_b})$$
(6.8)

où $\psi_n(\vec{r})$ est la $n^{\text{ième}}$ fonction propre perturbée. La phase φ_n^{ab} de l'amplitude complexe de résonance est donc donnée par :

$$\varphi_n^{ab} = -\frac{\pi}{2} + \varphi_n(\vec{r_a}) + \varphi_n(\vec{r_b}) \tag{6.9}$$

où $\varphi_n(\vec{r}) = \arctan(\operatorname{Im}(\psi_n(\vec{r}))/\operatorname{Re}(\psi_n(\vec{r})))$ est la phase de la fonction d'onde de la $n^{i\grave{e}me}$ résonance. En réalité on mesure $\varphi_n^{ab} + \varphi_{ant}(f)$ où $\varphi_{ant}(f)$ est un déphasage dû aux antennes de mesure¹. Heureusement, comme on peut le voir sur la figure 6.1, ce déphasage dépend lentement de la fréquence. Pour l'éliminer, on symétrise φ_n^{ab} autour de 0 pour chaque résonance. La figure 6.2 représente à nouveau φ_n^{ab} , après s'être affranchi de l'influence de $\varphi_{ant}(f)$. L'élargissement de la distribution de phase avec les pertes, et donc avec la fréquence, est très nettement visible, aussi bien sur la figure 6.1 que sur la figure 6.2.



FIG. 6.2 – Ensemble des phases φ_n^{ab} mesurées dans la cavité de Sinaï sur les 45 couples d'antennes, après «redressement».

À partir de l'équation (6.7) donnant la distribution de $\varphi_n(\vec{r})$, on calcule facile-

¹Pour que ce déphasage apparaisse dans une description du type de celle développée au chapitre 3, il faudrait probablement prendre en compte le diamètre non nul des antennes.

ment celle de φ_n^{ab} (somme de variables aléatoires) [Weaver and Lobkis, 2000] :

$$P(\varphi_n^{ab}) = \frac{q_n}{\pi} \frac{1+q_n^2}{4q_n^2 + (1-q_n^2)^2 \sin^2(\varphi_n^{ab} + \frac{\pi}{2})}$$
(6.10)

Cette distribution (voir figure 6.3) est très similaire à (6.7), elle est seulement translatée de $\pi/2$ et élargie par un facteur $\sqrt{2}$.



FIG. 6.3 – Distributions théoriques des phases $\varphi_n(\vec{r})$ (en trait plein) et φ_n^{ab} (en pointillés) avec q = 0.1 dans les deux cas.

L'idéal serait de déterminer l'ensemble des q_n en construisant la distribution des phases φ_n^{ab} pour chaque résonance. Malheureusement, nous disposons d'un nombre insuffisant (45 au maximum) de mesures de φ_n^{ab} pour un n donné et nous sommes donc amenés à travailler avec des fenêtres fréquentielles. Pour chaque fenêtre, on ajuste la distribution expérimentale des φ_n^{ab} par rapport à la distribution (6.10). On détermine ainsi \bar{q} qui est une sorte de valeur moyenne de q pour la fenêtre considérée. Afin de conserver une statistique équivalente en fonction des fenêtres, nous avons choisi de fixer le nombre de résonances par fenêtre plutôt que leur largeur en fréquence. De plus, la distribution (6.10) étant symétrique, on peut diminuer les fluctuations statistiques en repliant la distribution expérimentale sur $[0, \pi]$. La figure 6.4 montre la distribution de phase obtenue pour 150 < n < 180 ainsi que le résultat de l'ajustement de cette distribution à l'aide de (6.10). Pour cette fenêtre, on trouve $\bar{q} = 5.0 \times 10^{-2}$ seulement, c'est-à-dire une distribution relativement étroite. Pour 300 < n < 328, en revanche, on trouve $\bar{q} = 10.1 \times 10^{-2}$, soit une distribution beaucoup plus large (voir figure 6.5).



FIG. 6.4 – Distribution expérimentale de la phase φ_n^{ab} pour 150 < n < 180, soit 3.76 GHz < f < 4.1 GHz (histogramme) et résultat de l'ajustement en utilisant la formule (6.10) avec $\bar{q} = 5.0 \times 10^{-2}$ (trait plein).

Notons pour finir, que d'après les références [Kanzieper and Freiliker, 1996], [Šeba et al., 1997] et [Ishio et al., 2001] l'existence d'une partie imaginaire dans la fonction d'onde modifie également la distribution de l'intensité I du champ par rapport à la loi de Porter-Thomas. En théorie, il devrait donc être également possible de déduire q de la distribution de l'intensité. Cependant, cette correction est très faible et modifie principalement la distribution des fortes intensités, qui sont justement les moins probables. En conséquence, il est nécessaire de disposer d'un très grand nombre de mesures de I pour pouvoir observer des déviations significatives et en



FIG. 6.5 – Distribution expérimentale de la phase φ_n^{ab} pour 300 < n < 328, soit 5.24 GHz < f < 5.5 GHz (histogramme) et résultat de l'ajustement en utilisant la formule (6.10) avec $\bar{q} = 10.1 \times 10^{-2}$ (trait plein).

déduire une mesure de q. Ceci n'est clairement pas notre cas, c'est pourquoi nous ne travaillerons ici qu'à l'aide des distributions de phase décrites ci-dessus.

6.2 Relier les largeurs de résonance à la phase

Maintenant que nous savons comment mesurer \bar{q} , voyons comment on peut relier ce paramètre aux largeurs de résonance.

6.2.1 L'hamiltonien effectif

Nous avons vu au chapitre 3 que l'expression de la matrice S de la cavité couplée à M canaux extérieurs est donnée par l'équation (3.62) :

$$S = I_M - 2i\pi W^{\dagger} \frac{1}{E - H_{eff}} W$$
(6.11)

avec

$$H_{eff} = H_0 - i\Gamma \tag{6.12}$$

 et

$$\Gamma = \pi W W^{\dagger} \tag{6.13}$$

La matrice hermitique H_0 , de dimension $N \times N$, représente l'hamiltonien de la cavité sans pertes et W, de dimension $N \times M$, est la matrice de couplage avec les canaux extérieurs; elle dépend en général de l'énergie E. L'opérateur non hermitique H_{eff} est l'hamiltonien effectif de la cavité avec pertes : ses valeurs propres sont confondues avec les pôles de la matrice S, c'est-à-dire les résonances du système. Γ est hermitique et ses valeurs propres sont positives (avec la convention d'une évolution temporelle en $e^{-i\omega t}$). Dans le chapitre 3, nous ne traitons que les pertes à travers les antennes comme canaux extérieurs mais on peut généraliser ce traitement à l'ensemble des pertes.

Des pertes uniformes (pertes à la propagation), peuvent être modélisées par un très grand nombre M_{prop} de canaux identiques et indépendants couvrant uniformément la surface de la cavité et dont le couplage (ponctuel) est donné par $W_{nc}(E) = T_{prop}(E)\psi_n(\vec{r_c})$. $T_{prop}(E)$ est une fonction, en général lentement variable, traduisant la dépendance de ces pertes avec l'énergie et les $\psi_n(\vec{r})$ sont les fonctions propres de H_0 . On en déduit :

$$\Gamma_{ij}^{prop}(E) = \pi \sum_{k=1}^{M_{prop}} W_{ik} W_{jk}^{*}$$

$$= \pi |T_{prop}(E)|^{2} \sum_{k=1}^{M_{prop}} \psi_{i}(\vec{r}_{k}) \psi_{j}^{*}(\vec{r}_{k})$$
(6.14)

Dans la limite $M_{prop} \gg 1$, la somme sur k devient une intégrale sur toute la surface de la cavité et en supposant les fonctions $\psi_n(\vec{r})$ normalisées correctement, on trouve :

$$\Gamma^{prop}(E) = \pi |T_{prop}(E)|^2 I_N \tag{6.15}$$

Ainsi, on voit que la contribution $\Gamma^{prop}(E)$ est proportionnelle à l'identité. Cela signifie que les pertes à la propagation ne jouent aucun rôle quant aux fonctions

propres de H_{eff} et ne font qu'ajouter une partie imaginaire globale² aux valeurs propres de H_0 . Par conséquent, les pertes à la propagation peuvent être facilement prises en compte en remplaçant E par $E + i|T_{prop}(E)|^2$.

Pour des pertes localisées, ces simplifications n'ont pas lieu d'être, mais si le couplage avec l'extérieur reste faible, la théorie des perturbations donne, au premier ordre, pour les valeurs propres de H_{eff} (voir équation (3.65)) :

$$E_n = E_n^0 - i\Gamma_{nn} = E_n^0 - i\pi \sum_{c=1}^M |W_{nc}|^2$$
(6.16)

167

Nous avons vu en détail au chapitre 3 comment décrire le couplage des antennes avec la cavité (couplage ponctuel) afin d'expliciter la matrice de couplage. Nous avons obtenu une écriture de ses coefficients W_{nc} (voir équation (3.60)) tout à fait similaire à celle proposée ci-dessus pour les pertes à la propagation. Par contre, les antennes étant loin de couvrir uniformément la surface de la cavité, la somme dans l'équation (6.16) ne se ramène donc pas à une intégrale de surface. C'est pour cette raison que les pertes dues aux antennes fluctuent d'une résonance à l'autre en fonction de la répartition spatiale du champ. D'après l'équation (3.68), on peut écrire :

$$\mathbf{\Gamma}^{ant}(E) = |T_{ant}(E)|^2 \operatorname{diag}\left(\sum_{c=1}^{M_{ant}} |\psi_1(\vec{r_c})|^2, \dots, \sum_{c=1}^{M_{ant}} |\psi_N(\vec{r_c})|^2\right)$$
(6.17)

Le dernier type de pertes correspond aux pertes localisées sur les bords de la cavité. Là encore, on peut les décrire par un grand nombre M_{bords} de canaux couvrant uniformément le contour de la cavité et un couplage ponctuel. En revanche, nous avons vu que ces pertes ne sont pas proportionnelles à $|\psi_n|^2$ mais plutôt à $\|\vec{\nabla}_{\perp}\psi_n\|^2$ (voir équation (3.78)) et, en passant à la limite continue ($M_{bords} \gg 1$), la somme dans (6.16) se ramène ici à une intégrale de contour de $\|\vec{\nabla}_{\perp}\psi_n\|^2$ (voir équation (3.91) et (3.79)). C'est cette intégrale qui entraîne la fluctuation des pertes sur les

²Cette approche hamiltonienne ne permet de calculer que la partie imaginaire des corrections sur les valeurs propres. Il faut utiliser d'autres méthodes, comme la *perturbation des conditions aux limites*, introduite dans la section suivante, pour obtenir les corrections sur la partie réelle, voir [Jackson, 2001].

bords en fonction des résonances. On peut écrire :

$$\boldsymbol{\Gamma}^{bords}(E) = |T_{bords}(E)|^2 \operatorname{diag}\left(\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\ell \|\vec{\nabla}_{\perp}\psi_1(\vec{r})\|^2, \dots, \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\ell \|\vec{\nabla}_{\perp}\psi_M(\vec{r})\|^2\right) \quad (6.18)$$

Nous venons de voir comment les pertes, par l'intermédiaire de la matrice Γ , modifient les valeurs propres de H_0 au premier ordre de la théorie des perturbations. Nous avons également noté que la contribution $\Gamma^{prop}(E)$ des pertes à la propagation étant proportionnelle à la matrice identité, ces pertes ne modifient pas les fonctions propres de H_0 . En revanche, les autres contributions ($\Gamma^{ant}(E)$ et $\Gamma^{bords}(E)$) introduisent des corrections sur les fonctions propres de H_0 . En particulier, l'hamiltonien effectif n'étant pas hermitique, ses fonctions propres sont, a priori, complexes. Notons que les fonctions propres de H_{eff} ne sont pas, en général, les fonctions d'onde des résonances. En fait, Albeverio *et al.* montrent dans la référence [Albeverio et al., 1996] que le champ dans la cavité, à la résonance, est une superposition complexe de M fonctions propres de H_{eff} . Cependant, tant que le recouvrement n'est pas trop important, la somme se réduit à un seul terme et l'on peut identifier le champ dans la cavité avec les fonctions propres de H_{eff} .

Puisque seules les pertes localisées donnent lieu à une correction des fonctions propres, et puisqu'on a vu au chapitre précédent que les perturbations des fonctions d'onde par les antennes sont négligeables, ce sont donc essentiellement les pertes ohmiques sur les bords qui rendent les fonctions propres complexes. C'est donc sur ce dernier type de pertes que nous allons maintenant concentrer nos efforts. Nous verrons comment la conductivité finie des parois mène à des corrections au premier ordre de nature complexe et nous en déduirons une relation entre q et Γ^{bords} .

6.2.2 Perturbation des conditions aux limites

On considère à nouveau les champs électromagnétiques au voisinage d'un conducteur de conductivité finie, mais on s'intéresse plus particulièrement aux parois latérales de la cavité. À l'ordre 0, le champ magnétique est dans le plan (O, x, y) de la cavité et le champ électrique est dirigé suivant (O, z). On définit donc, sur les parois latérales, le trièdre direct mobile $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{z})$ où \hat{n} est le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur de la cavité et \hat{t} le vecteur unitaire tangent à la paroi. On rappelle l'expression (3.72) donnant la composante parallèle du champ électrique existant au voisinage d'une surface de conductivité finie :

$$\vec{E}_{\mathscr{J}}^{(1)} = \sqrt{\frac{\omega\,\mu}{2\,\sigma}} (1 - \mathbf{i})(\hat{n} \wedge \vec{H}_{\mathscr{J}}^{(0)}) \tag{6.19}$$

Or, d'après la loi de Faraday, on a :

$$\vec{H}_{\parallel}^{(0)} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu} \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial n} \hat{t}$$
(6.20)

D'où, en posant $E_z^{(0)}=\psi^{(0)}\hat{z}$ et $\vec{E}_{/\!\!/}^{(1)}=\psi^{(1)}\hat{z}$:

$$\psi^{(1)} = -\frac{(1+\mathrm{i})\delta}{2} \frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial n} \tag{6.21}$$

où $\delta = 1/\sqrt{\pi\mu\sigma f}$ est l'épaisseur de peau. On a ainsi obtenu une condition de bord reliant le champ au premier ordre à la dérivée normale du champ à l'ordre 0. Il est important de remarquer qu'alors que $\psi^{(0)}$ est réel (puisque c'est la solution de l'équation de Helmholtz avec des conditions de bord de Dirichlet), la correction $\psi^{(1)}$ est une quantité complexe. Cette relation met donc bien en évidence que la présence de pertes ohmiques sur les bords conduit à ajouter une partie imaginaire au champ. De façon tout à fait équivalente, on montre dans l'Annexe B que le coefficient de réflexion sur un métal d'une onde plane, polarisée de sorte que \vec{E} soit parallèle à la surface, est une quantité complexe (voir équation (B.5)). D'après l'équation (B.11), les pertes ohmiques sur les bords sont alors reliées, en moyenne, au coefficient de transmission (en puissance) à travers la paroi, par :

$$\langle \Gamma^{bords} \rangle = \frac{cC}{2\pi^2 A} \langle \mathcal{T} \rangle$$
 (6.22)

À ce stade, nous avons donc :

- défini un paramètre q mesurant l'importance de la partie imaginaire de la fonction d'onde par rapport à sa partie réelle, de telle sorte que q = 0 correspond à un système complètement fermé sur les bords (puisque les pertes à la propagation ne modifient pas le champ et puisque les pertes dues aux antennes sont négligeables) et q = 1 correspond, au contraire, à un système complètement ouvert sur les bords établi que les pertes sur les bords s'écrivent, en moyenne, en fonction du coefficient de transmission *T* qui vaut 0 pour des parois complètement réfléchissantes et 1 pour des parois transparentes

Il paraît donc tout à fait naturel d'identifier q et \mathcal{T} , d'où :

$$\langle \Gamma^{bords} \rangle = \frac{cC}{2\pi^2 A} \langle q \rangle \tag{6.23}$$

Ajoutons que cette identification simple est d'autant plus naturelle qu'elle conduit à une perturbation spectrale Γ^{bords} du même ordre que la perturbation spatiale q. En effet, la relation (6.21) nous indique que Im ψ , et donc également q d'après (6.5) (on rappelle que Re $\psi \simeq \psi^{(0)}$), est d'ordre $k\delta$. De même, l'équation (3.91) montre que Γ^{bords} est également d'ordre $k\delta$. Γ^{bords} et q sont donc bien des perturbations du même ordre, ce qui exclut une relation de puissance, autre que la proportionnalité, entre ces deux grandeurs. La moyenne intervenant dans l'équation (6.23) est une moyenne sur plusieurs résonances. Cependant, on peut s'attendre à ce que (6.23) reste valable pour une seule résonance, les fluctuations de q, comme celles de Γ^{bords} , suivant alors celles de ξ défini par :

$$\xi = \frac{A \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\ell \, \frac{c^2}{\omega^2} \, \|\vec{\nabla}_{\perp}\psi\|^2}{C \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a \, |\psi|^2} \tag{6.24}$$

Malheureusement, nous ne disposons pas de suffisamment de mesures du champ d'une même résonance pour pouvoir vérifier cette relation résonance par résonance.

6.3 Comparaison

On rappelle que $\Gamma_n = \Gamma^{prop}(f_n) + \Gamma_n^{bords} + \Gamma_n^{ant}$. Or, on sait calculer Γ_n^{ant} à partir de l'amplitude des résonances (voir (3.93)) et l'on connaît $\Gamma^{prop}(f_n)$ grâce aux mesures réalisées dans la cavité rectangulaire (voir chapitre précédent), on peut donc déduire Γ_n^{bords} de la mesure des largeurs totales des résonances. En supposant $\langle q \rangle = \bar{q}$, on dispose donc de deux évaluations indépendantes de $\langle \Gamma^{bords} \rangle$ par fenêtre fréquentielle : à partir de la relation (6.23) associée à la valeur de \bar{q} déduite des distributions de phases décrites précédemment et en moyennant directement Γ_n^{bords} sur les résonances



FIG. 6.6 – Comparaison entre $\langle \Gamma^{bords} \rangle$ mesuré directement (courbe en trait plein) et les valeurs déduites de la mesure de \bar{q} (courbe en pointillés) grâce à la formule (6.23), en utilisant des fenêtres de 30 résonances.

présentes dans la fenêtre. La figure 6.6 permet de comparer l'évolution de deux évaluations indépendantes de $\langle \Gamma^{bords} \rangle$ avec la fréquence, où l'on a choisi des fenêtres de 30 résonances chacune. Il apparaît clairement que les deux grandeurs évoluent de façon très similaire, y compris au niveau de leurs fluctuations. À basse fréquence, les distributions de phase étant très piquées, la détermination de \bar{q} est entachée d'une plus grande incertitude, ce qui explique les différences observées. De plus, on peut voir sur les figures 6.7 et 6.8 que la correspondance reste valable lorsque l'on diminue la taille des fenêtres à 15 et 10 résonances. Ainsi, bien que l'erreur statistique sur \bar{q} soit plus grande lorsque l'on diminue la taille des fenêtres, le bon accord observé à plus petite échelle montre que l'hypothèse d'une relation similaire à (6.23) entre q_n et Γ_n^{bords} est tout à fait justifiée. En réalité, il a été nécessaire pour obtenir les figures 6.6, 6.7 et 6.8 d'égaliser les valeurs moyennes des deux courbes, ce qui revient à diviser les largeurs obtenues à l'aide de la formule (6.23) par un facteur 3.45. Ce facteur de l'ordre de l'unité restant constant en fonction de la taille des fenêtres choisies, il ne remet pas en cause la nature de la relation (6.23). De plus, des travaux théoriques récents [Gorin and Seligman, 2002, Schäfer et al., 2003] ont montré que lorsque l'on s'approche du régime d'Ericson, il est possible de bien décrire les observations numériques en modifiant la dépendance des largeurs par rapport au couplage avec l'extérieur. Plus précisément, les largeurs se trouvent divisées par un facteur tendant vers 4 avec l'augmentation des pertes. Or, le facteur 3.45 trouvé en égalisant les valeurs moyennes des deux courbes sur l'ensemble de la gamme de fréquence, passe à 3.65 lorsque l'on se limite aux fréquences supérieures à 3 GHz. Ainsi ce facteur semble bien lié à une modification de la relation (6.22) entre $\langle \Gamma^{bords} \rangle$ et $\langle \mathcal{T} \rangle$ du fait du fort recouvrement entre résonances.



FIG. 6.7 – Comparaison entre $\langle \Gamma^{bords} \rangle$ mesuré directement (courbe en trait plein) et les valeurs déduites de la mesure de \bar{q} (courbe en pointillés) grâce à la formule (6.23), en utilisant des fenêtres de 15 résonances.

En conclusion, nous avons mis en évidence l'existence d'une relation de proportionnalité entre la largeur due aux pertes ohmiques localisées sur les bords et le rapport des écarts-type de la partie imaginaire et de la partie réelle du champ dans la cavité (avec éventuellement une légère dépendance du coefficient de proportionnalité



en fonction du recouvrement).

FIG. 6.8 – Comparaison entre $\langle \Gamma^{bords} \rangle$ mesuré directement (courbe en trait plein) et les valeurs déduites de la mesure de \bar{q} (courbe en pointillés) grâce à la formule (6.23), en utilisant des fenêtres de 10 résonances.

174CHAPITRE 6. LES PERTES DANS LE DOMAINE SPATIAL ET SPECTRAL

Bibliographie

- [Albeverio et al., 1996] Albeverio, S., Haake, F., Kurasov, P., Kuś, M., and Šeba, P. (1996). S-matrix, resonances, and wave functions for transport through billiards with leads. J. Math. Phys., 37(10) :4888-4903.
- [Berry, 1977] Berry, M. (1977). Regular and irregular semiclassical wavefunctions.J. Phys. A : Math. Gen., 10 :2083-2091.
- [Gorin and Seligman, 2002] Gorin, T. and Seligman, T. (2002). Signatures of the correlation hole in total and partial cross sections. *Phys. Rev. E*, 65 :026214.
- [Ishimaru, 1978] Ishimaru, A. (1978). Wave Propagation and Scattering in Random Media. Academic, New York.
- [Ishio et al., 2001] Ishio, H., Saichev, A. I., Sadreev, A. F., and Berggren, K.-F. (2001). Wave function statistics for ballistic quantum transport through chaotic open billiards : Statistical crossover and coexistence of regular and chaotic waves. *Phys. Rev. E*, 64 :056208.
- [Jackson, 2001] Jackson, J. D. (2001). *Électrodynamique Classique*. Dunod, Paris, third edition.
- [Kanzieper and Freiliker, 1996] Kanzieper, E. and Freiliker, V. (1996). Eigenfunctions of electrons in weakly disordered quantum dots : Crossover between orthogonal and unitary symmetries. *Phys. Rev. B*, 54(12) :8737–8742.
- [Lobkis and Weaver, 2000] Lobkis, O. and Weaver, R. (2000). Complex modal statistics in a reverberant dissipative body. J. Acoust. Soc. Am., 108(4) :1480-1485.
- [Pnini and Shapiro, 1996] Pnini, R. and Shapiro, B. (1996). Intensity fluctuations in closed and open systems. *Phys. Rev. E*, 54(2) :R1032–R1035.

- [Schäfer et al., 2003] Schäfer, R., Gorin, T., Seligman, T., and Stöckmann, H.-J. (2003). Correlation functions of scattering matrix elements in microwave cavities with strong absorption. J. Phys. A : Math. Gen., 36 :3289–3302.
- [Šeba et al., 1997] Šeba, P., Haake, F., Kuš, M., Barth, M., Kuhl, U., and Stöckmann, H.-J. (1997). Distribution of the wave function inside chaotic partially open systems. *Phys. Rev. E*, 56(3):2680–2686.
- [Weaver and Lobkis, 2000] Weaver, R. L. and Lobkis, O. I. (2000). Enhanced backscatter and modal echo of reverberant elastic waves. *Phys. Rev. Lett.*, pages 4942– 4945.

Conclusion

Nous nous somme efforcés tout au long de ce manuscrit de mieux cerner le rôle des pertes dans une cavité micro-ondes utilisée pour l'étude du chaos ondulatoire. Les pertes liées au couplage avec les antennes de mesure ayant déjà fait l'objet d'études soignées à l'aide de cavités supraconductrices, nous avons choisi de réaliser une «cavité ohmique», c'est-à-dire une cavité dans laquelle les pertes ohmiques sont dominantes. Nous nous sommes donc placés en situation de faible couplage avec les antennes (antennes pénétrant peu à l'intérieur de la cavité) afin de rendre négligeables les pertes qui y sont associées. Il nous a également fallu apporter un très grand soin au choix des matériaux utilisés, à l'usinage de la cavité ainsi qu'à son état de surface afin de maîtriser le comportement des pertes ohmiques et de les limiter suffisamment pour qu'elles restent perturbatives.

En utilisant une démarche empruntée à la théorie de la diffusion, nous avons décrit, de manière explicite et complète, la matrice S de la cavité (les antennes constituant les différents canaux de diffusion). Nous nous sommes notamment appuyés sur une description électromagnétique détaillée du comportement des antennes pour développer un formalisme adapté à ce type particulier de couplage. Ayant ainsi obtenu une formule de type Breit-Wigner décrivant la matrice S comme une somme de résonances, les corrections sur la position et la largeur des résonances ont été calculées séparément puis intégrées dans cette formule.

Forts de cette modélisation, nous avons développé une procédure d'ajustement complexe, spécifiquement adaptée à cette description de la matrice S en terme de somme de lorentziennes. Les paramètres de résonances sont obtenus avec une remarquable précision, comme la comparaison avec les valeurs exactes, que l'on peut calculer dans le cas d'une cavité rectangulaire, l'a montré. En particulier, nous avons pu établir que l'influence des antennes est effectivement négligeable, tant dans le domaine spectral que dans le domaine spatial. Concernant les pertes ohmiques, nous avons montré qu'elles pouvaient effectivement être séparées en deux termes bien distincts. D'un coté, les pertes ohmiques à la propagation, uniformément réparties, varient lentement avec la fréquence. De l'autre, les pertes ohmiques sur les bords de la cavité, fluctuent de manière importante d'une résonance à l'autre en fonction de la répartition du champ sur les bords. Bien que théoriquement négligeables dans une cavité «parfaite», ces pertes se sont révélées relativement importantes, nous conduisant à considérer une conductivité effective sur les bords nettement plus faible que sa valeur tabulée.

Grâce aux résultats obtenus dans la cavité régulière, il nous a été possible d'isoler la partie fluctuante des pertes dans la cavité chaotique (de type Sinaï). Or, ces pertes fluctuantes étant associées aux pertes localisées du système, on peut s'attendre à ce qu'elles soient à l'origine d'un étalement dans le plan complexe de la fonction d'onde ψ . Plus précisément, nous avons argumenté en faveur d'une relation de proportionnalité entre le paramètre $q = \sqrt{\langle (\operatorname{Im} \psi)^2 \rangle / \langle (\operatorname{Re} \psi)^2 \rangle}$, qui peut être associé à la largeur de la distribution de la phase de ψ , et la partie fluctuante des largeurs. Cette relation qui, à notre connaissance, n'a encore jamais été observée expérimentalement a ainsi pu être solidement démontrée.

La cavité avec laquelle nous avons travaillé répond à des exigences de qualité supérieures à la moyenne. Mais malgré toute l'attention apportée à sa réalisation, nous avons vu que les pertes localisées sur les bords sont sensiblement plus importantes que celles prévues théoriquement. Notons que ceci n'est pas vraiment étonnant, étant donné les simplifications considérables (géométrie parfaite, état de surface parfait, etc...) utilisées pour la modélisation de la cavité. Cette diminution de la conductivité effective est probablement liées aux imperfections de construction. En dehors de défauts accidentels, toujours possibles, deux facteurs principaux semblent dominer. D'abord, le cuivre présente l'inconvénient d'assez mal supporter l'usinage. Ainsi, on peut observer une rugosité importante sur la face intérieure du cadre. Bien que ses effets soient encore assez mal décrits, il est clair que la présence de rugosité de sur-

CONCLUSION

face de l'ordre de l'épaisseur de peau augmente sensiblement les pertes ohmiques. Ceci s'explique simplement par l'augmentation du chemin à parcourir par les courants de surface afin de suivre le relief de la rugosité. Une rugosité existe également sur les plaques inférieure et supérieure de la cavité mais en l'absence d'usinage de ces surfaces, elle est nettement plus faible. Pour s'affranchir de la rugosité, on peut soit recourir à des entreprises spécialisées dans l'usinage de haute précision, soit appliquer un traitement de polissage. Cependant, seul un polissage électrochimique permet d'atteindre des rugosités suffisamment faibles pour être négligées et la surface importante de la cavité rend difficile l'application de ce type de procédé. Le deuxième facteur est lié à l'existence de problèmes de contacts entre les plaques inférieure et supérieure, et le cadre, ou les diffuseurs, placés à l'intérieur de la cavité. Nous ne savons pas modéliser les effets de ces imperfections mais nous avons pu voir, à travers les problèmes de serrage de la cavité, qu'ils jouent un rôle important sur les pertes. Pour éliminer ce problème, on peut imaginer avoir recours à une cavité d'un seul bloc obtenu par moulage. L'inconvénient majeur d'une telle cavité est évidemment l'impossibilité de l'ouvrir tant pour la nettoyer que pour modifier sa géométrie interne. En contrepartie, on est certain d'éliminer tout problème de contact.

Nous avons vu que les largeurs mesurées dans la cavité chaotiques exhibent des fluctuations parfois très importantes, notamment dans le régime de fort recouvrement. Ces fluctuations sont dues à un recouvrement plus ou moins important des fonctions d'onde avec les sites localisés de pertes, à savoir principalement les bords de la cavité (en réalité les pertes sur les bords sont proportionnelles à la valeur moyenne de la dérivée normale du champ par rapport aux parois). Malheureusement, il n'est pas possible de cartographier le champ dans la cavité sans augmenter dramatiquement les pertes sur les bords. Aussi, l'obtention de la répartition spatiale du champ par une simulation numérique prenant en compte les pertes sur les bords permettrait de valider cette description. Plus spécifiquement, un tel outil serait particulièrement intéressant dans le cadre du phénomène de *resonance trapping* évoqué pour justifier la présence de résonances très nettement plus large que la moyenne. En effet, on s'attend à ce que les quelques résonances qui se concentrent sur les canaux de pertes présentent une répartition spatiale singulièrement différente des autres résonances.
Enfin, en plaçant à l'intérieur de la cavité de petits diffuseurs diélectriques (fortement diffusants et peu absorbants), on peut facilement réaliser des cavités désordonnées. Ainsi, en augmentant progressivement leur nombre, il doit être possible d'atteindre le régime de diffusion multiple puis d'observer les effets d'une transition vers la localisation. L'intérêt de l'utilisation d'une cavité micro-ondes pour ce type d'étude réside dans notre bonne connaissance des mécanismes de pertes existants. En effet, les pertes constituent souvent un obstacle notable à l'observation expérimentale de la localisation.

Annexes

CONCLUSION

Annexe A

Description alternative du couplage avec les antennes

Sommaire

A.1	Description électromagnétique	
A.2	Description quantique	

Dans la section 1 du chapitre 3, nous avons établi une expression explicite de la matrice S décrivant une cavité couplée à M antennes identiques. Nous avons pour cela suivi une démarche quantique en nous appuyant sur la description électromagnétique du problème. Nous présentons ici une démarche identique mais s'appuyant sur une description électromagnétique légèrement différente du problème. Heureusement, cette variante mène à des résultats identiques, ce qui montre bien la cohérence de notre démarche.

On conserve dans tout ce qui suit les notions de zone perturbée, de zone TEM et de couplage effectif telles que nous les avons définies dans le chapitre 3. De plus, nous ne donnerons ici que les étapes du calcul différant significativement de celles du chapitre 3.

A.1 Description électromagnétique

Soit I(z) le courant porté par l'âme centrale dans la zone perturbée $(-l^* < z < 0)$ et V(z) la différence de potentiel entre l'âme centrale et le conducteur externe dans la zone TEM. En supposant que I(z) reste sinusoïdal et avec la convention d'une évolution temporelle en $e^{-i\omega t}$, on a :

$$I(z) = I_{+} e^{ikz} + I_{-} e^{-ikz}$$
(A.1)

On impose alors les conditions de bord suivantes :

$$\begin{cases} I(-l^*) = 0 \\ I(0) = I_0 \end{cases}$$
(A.2)

D'où :

$$I(z) = I_0 \frac{\sin k(l^* + z)}{\sin k l^*} \text{ pour } -l^* < z < 0$$
(A.3)

 I_0 est le courant d'entrée, il est relié aux amplitudes des ondes TEM entrantes, \mathcal{A}_{inc} , et sortantes, \mathcal{A}_{out} , par :

$$I_0 = \frac{V_0}{Z_c} (\mathcal{A}_{out} + \mathcal{A}_{inc}) = \frac{V'(0)}{\mathrm{i}kZ_c}$$
(A.4)

où \mathbb{Z}_c est l'impédance caractéristique de la ligne coaxiale et V(z) est donné par :

$$V(z) = V_0(\mathcal{A}_{out} e^{ikz} - \mathcal{A}_{inc} e^{-ikz}) \text{ pour } z > 0$$
(A.5)

Les équations de Maxwell associées à l'hypothèse de couplage effectif donnent alors l'équation d'onde suivante :

$$d(\Delta + k^2)E_z(\vec{r}) = \frac{iV_0Z_0}{Z_c} \frac{\sin^2 \frac{kl_{eff}}{2}}{\sin \frac{kl^*}{2} \cos \frac{kl^*}{2}} \sum_{c=1}^M \delta(\vec{r} - \vec{r}_c)(\mathcal{A}_{out}^c + \mathcal{A}_{inc}^c)$$
(A.6)

A.2 Description quantique

Le champ s'écrit donc dans la région TEM :

$$\varphi_{\beta_c}(z_c) = \frac{1}{\sqrt{k}} (\mathcal{A}_{out}^c \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz_c} - \mathcal{A}_{inc}^c \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz_c}) \text{ pour } z_c > 0$$
(A.7)

et dans la zone perturbée :

$$\phi_{\beta_c}(z_c) = \frac{1}{\sqrt{k}} (\mathcal{A}_{-}^c e^{-ikz_c} + \mathcal{A}_{+}^c e^{ikz_c}) \text{ pour } -l^* < z_c < 0$$
(A.8)

Les coefficients A_- et A_+ sont fixés par les conditions de bords suivantes :

$$\begin{cases} \phi_{\beta_c}(-l^*) = 0\\ \phi_{\beta_c}(0) = \frac{1}{ik}\varphi'_{\beta_c}(0) \end{cases}$$
(A.9)

On en déduit :

$$\phi_{\beta_c}(z_c) = \frac{\varphi_{\beta_c}'(0)}{ik} \frac{\sin k(z_c + l^*)}{\sin k l^*} \text{ pour } -l^* < z_c < 0 \tag{A.10}$$

D'où, en posant $T_c(k)=\frac{t_c(E_0)}{\mathrm{i}k^2}\frac{\sin^2\frac{kl_{eff}}{2}}{\sin\frac{kl^*}{2}\cos\frac{kl^*}{2}}:$

$$\hat{\mathcal{H}}[\boldsymbol{\Phi}] = \begin{pmatrix} -\Delta\varphi_{\alpha}(\vec{r}) + \sum_{c=1}^{M} T_{c}(k)\delta(\vec{r} - \vec{r}_{c})\varphi_{\beta_{c}}'(0) \\ -\varphi_{\beta_{1}}''(z_{1}) \\ \vdots \\ -\varphi_{\beta_{M}}''(z_{M}) \end{pmatrix}$$
(A.11)

Et, en comparant à l'équation (A.6), on en déduit :

$$T_c(k) = \frac{Z_0}{\sqrt{k}Z_c} \frac{\sin^2 \frac{kl_{eff}}{2}}{\sin \frac{kl^*}{2} \cos \frac{kl^*}{2}}$$
(A.12)

La condition d'auto-adjonction s'écrit à présent :

$$T_c^*(k)\varphi_\alpha(\vec{r_c}) = -\varphi_{\beta_c}(0) \tag{A.13}$$

L'introduction des fonctions de Green dans la première ligne de l'équation aux valeurs propres $\hat{\mathcal{H}}[\Phi] = k^2 \Phi$ permet d'écrire :

$$\varphi_{\alpha}(\vec{r}_b) = \sum_{c=1}^{M} T_c(k) G(\vec{r}_b, \vec{r}_c, k) \varphi'_{\beta_c}(0)$$
(A.14)

En utilisant la condition (A.13), on obtient :

$$T_b^*(k) \sum_{c=1}^M T_c(k) G(\vec{r_b}, \vec{r_c}, k) \varphi'_{\beta_c}(0) = -\varphi_{\beta_b}(0)$$
(A.15)

En utilisant l'écriture (A.7) de $\varphi_{\beta_c}(z_c)$, on trouve :

$$ikT_{b}^{*}(k)\sum_{c=1}^{M}T_{c}(k)G(\vec{r}_{b},\vec{r}_{c},k)\mathcal{A}_{inc}^{c}-\mathcal{A}_{inc}^{b}$$

$$=-ikT_{b}^{*}(k)\sum_{b=1}^{M}T_{c}(k)G(\vec{r}_{b},\vec{r}_{c},k)\mathcal{A}_{out}^{c}-\mathcal{A}_{out}^{b}$$
(A.16)

Soit :

$$S = \frac{1 - \mathrm{i}K}{1 + \mathrm{i}K} \tag{A.17}$$

où K est définie par :

$$K_{ab}(k) = \sqrt{k}T_a^*(k)G(\vec{r}_a, \vec{r}_b, k)\sqrt{k}T_b(k)$$
(A.18)

En développant les fonctions de Green sur les fonctions propres de la cavité on peut écrire :

$$K = \pi W^{\dagger} \frac{1}{k^2 - H_{diag}} W \tag{A.19}$$

où

$$W_{\mu c} = \sqrt{\frac{k}{\pi}} T_c(k) \psi^*_{\mu}(\vec{r_c}) \tag{A.20}$$

On obtient finalement :

$$S_{ab} = \delta_{ab} - 2ik|T(k)|^2 \sum_{\mu=1}^{N} \frac{\psi_{\mu}(\vec{r_a})\psi_{\mu}^*(\vec{r_b})}{k^2 - k_{\mu}^2 + ik|T(k)|^2 \sum_{c=1}^{M} |\psi_{\mu}(\vec{r_c})|^2}$$
(A.21)

En remplaçant T(k) par son expression (A.12) on retrouve exactement résultat de la formule (3.69).

Ces deux descriptions ne diffèrent finalement que par l'écriture de la condition de continuité en $z_c = 0$. Ce choix mène à une condition d'auto-adjonction reliant $\varphi_{\alpha}(\vec{r_c})$ à $\varphi_{\beta_c}(0)$ (de type Dirichlet, voir (A.13)), ou $\varphi'_{\beta_c}(0)$ (de type Neumann, voir (3.45)). Suivant le cas, nous avons choisi une convention différente pour écrire $\varphi_{\beta_c}(z_c)$ en fonction de \mathcal{A}^c_{inc} et \mathcal{A}^c_{out} (voir (3.26) et (A.7)) de sorte que $\varphi_{\alpha}(\vec{r_c}) = 0$ implique dans les deux cas $\mathcal{A}^c_{inc} = \mathcal{A}^c_{out}$. Autrement dit, si l'antenne est située sur un nœud de $\varphi_{\alpha}(\vec{r})$ alors S = 1 ce qui signifie que la réflexion est totale. Ce sont donc les conventions choisies pour le signe de \mathcal{A}^c_{inc} dans les équations (3.26) et (A.7) qui permettent de trouver S = 1 dans les deux cas. Si on inverse ces conventions, on change le signe de la matrice S.

Annexe B

Pertes ohmiques à la réflexion et à la propagation

Sommaire

B.1	Les pertes à la réflexion	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	191
$\mathbf{B.2}$	Les pertes à la propagation	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	193

Nous avons vu au chapitre 3 comment calculer les pertes ohmiques dans une cavité en intégrant les pertes par unité de surface sur l'ensemble des parois. L'expression obtenue fait apparaître ces pertes comme la somme d'une contribution due à des pertes uniforme sur la section de la cavité et d'une contribution due aux pertes localisées sur les bords. Nous avions identifiées ces deux termes à des pertes à la propagation et à la réflexion. Nous décrivons ici une approche alternative du calcul de ces pertes s'appuyant sur ce point de vue.

B.1 Les pertes à la réflexion

Le coefficient de réflexion d'une onde plane à une interface air-métal est donné par

$$R = \frac{Z_{m\acute{e}t} - Z_{air}}{Z_{m\acute{e}t} + Z_{air}} \tag{B.1}$$

où $Z_{m\acute{e}t}$ est l'impédance du métal et Z_{air} celle de l'air [Collin, 1991, page 200]. L'onde plane est polarisée rectilignement avec le champ \vec{B} dans le plan d'incidence et le champ \vec{E} parallèle à l'interface, on choisit une dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$ et on définit un nouveau repère $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z})$, voir figure B.1. On a alors [Collin, 1991, page 193-200] :

$$Z_{air} = \frac{E_z^{inc}}{H_v^{inc}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\cos \theta_i}$$
(B.2)

$$Z_{m\acute{e}t} = \frac{E_z^{trans}}{H_v^{trans}} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} \frac{1-i}{\cos\theta_r}$$
(B.3)

Or $\sigma \gg \omega \epsilon$ implique $\cos \theta_r \approx 1$ d'où, en notant $\theta = \theta_i$ et avec $a = \sqrt{\omega \epsilon/(2\sigma)}$:

$$R = \frac{(a\cos\theta - 1) - ia\cos\theta}{(a\cos\theta + 1) - ia\cos\theta}$$
(B.4)

$$\mathcal{R} = |R|^2 = \frac{2a^2 \cos^2 \theta - 2a \cos \theta + 1}{2a^2 \cos^2 \theta + 2a \cos \theta + 1}$$
(B.5)

$$\mathcal{T} = |T|^2 = \frac{4a\cos\theta}{2a^2\cos^2\theta + 2a\cos\theta + 1}$$
(B.6)

Pour du cuivre CuC, $a \ll 1~(a \simeq 10^{-5}~{\rm S.I.}$ à 1 GHz) d'où

$$\mathcal{T} \simeq 4a\cos\theta \tag{B.7}$$



FIG. B.1 – Géométrie de la réflexion

Pour un billard chaotique, et sous l'hypothèse de champ ergodique, la mesure angulaire appropriée pour le calcul de $\langle \mathcal{T} \rangle$ est d $(\sin \theta)/2$ [Mortessagne, 1994, page 66]. On en déduit

$$\langle \mathcal{T} \rangle = a\pi = \pi \sqrt{\omega \epsilon / (2\sigma)}$$
 (B.8)

Or, en acoustique, la loi de Sabine [Mortessagne et al., 1993] donne le temps moyen τ de décroissance de l'énergie $(E(t) \propto e^{-\frac{t}{\tau}})$ dans un billard dont les parois sont absorbantes (l'absorption est décrite par le coefficient de transmission \mathcal{T}) :

$$\tau = \frac{\langle \ell \rangle}{c \langle T \rangle} \tag{B.9}$$

où $\langle \ell \rangle$ est le libre parcours moyen. Pour un billard 2D de surface A et de périmètre C, on a $\langle l \rangle = \pi A/C$. Toujours avec une dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$ et en se rappelant que les largeurs sont définies par $f = f^0 - \Gamma/2$, on en déduit que τ est relié à la largeur moyenne due aux pertes sur les bords par la relation suivante :

$$1/\tau = 2\pi \langle \Gamma_{r\acute{e}flexion} \rangle \tag{B.10}$$



FIG. B.2 – Calcul des pertes à la propagation

Et finalement :

$$\langle \Gamma_{r\acute{e}flexion} \rangle = \frac{c}{2\pi} \frac{\langle \mathcal{T} \rangle}{\langle \ell \rangle}$$
 (B.11)

Ou encore :

$$\langle \Gamma_{r\acute{e}flexion} \rangle = \frac{cCa}{2\pi A} = \frac{C}{2A} \sqrt{\frac{f}{\pi \mu \sigma}}$$
 (B.12)

Ce résultat est complètement cohérent avec celui obtenu au chapitre 3 (voir équation (3.91)) si on se souvient que $\langle \xi \rangle = 1$.

B.2 Les pertes à la propagation

On considère deux plans de conductivité finie σ séparés d'une distance d (voir figure B.2) et une onde plane se propageant entre ces deux plans, par exemple suivant y. L'équation (3.74) reste valable ici, et si on considère la propagation entre y_0 et $y_0 + dy$, les pertes sont données par :

$$dP = \frac{2\mu\omega\delta}{4}dy \int dx \, \|\vec{H}\|^2 \tag{B.13}$$

L'énergie électromagnétique stockée dans le volume correspondant est :

$$\mathrm{d}W = \frac{\mu d}{2} \mathrm{d}y \, \int \mathrm{d}x \, \|\vec{H}\|^2 \tag{B.14}$$

d'où la contribution propagative suivante :

$$\Gamma_{propagation} = \frac{\mathrm{d}P}{2\pi\mathrm{d}W} = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{f}{\pi\mu\sigma}} \tag{B.15}$$

Ce résultat est identique à celui obtenu au chapitre 3 (voir équation (3.90)).

Liste des figures et des tableaux

Table des figures

1.1	Calcul numérique en double précision de la trajectoire dans un cercle tronqué après 200 rebonds	20
1.2	Orbite périodique instable dans un cercle tronqué. La trajectoire est représentée après, de gauche à droite et de haut en bas, 1, 5, 10, 15, 50 et un très grand nombre de rebonds	22
1.3	Cavité cylindrique quelconque	26
1.4	Orbites périodiques dans un billard en forme de cercle tronqué	30
1.5	Répartition spatiale de type speckle dans un billard en forme de cercle tronqué.	32
1.6	Répartition spatiale de type scar dans un billard en forme de cercle tronqué, d'après la référence [Doya et al., 2002a].	34
1.7	Comparaison du $\Sigma^2(L)$ calculé à partir des mesures de la référence [Bohigas et al., 1983] avec les prédictions de la RMT (d'après la réfé- rence [Stöckmann, 1999]).	38
1.8	Comparaison du $\Delta_3(L)$ calculé à partir des mesures de la référence [Bohigas et al., 1983] avec les prédictions de la RMT (d'après la réfé- rence [Stöckmann, 1999]).	39

1.9	L'histograme représente le $P(s)$ caculé à partir de la mesure dans une	
	cavité micro-ondes des 1000 premiers modes d'un billard de Sinaï. En	
	insert, ce même $P(s)$ calculé à partir de 300 premiers modes d'une	
	cavité rectangulaire. Les courbes en pointillés correspondent respecti-	
	vement à une distribution de Wigner et à une poissonnienne (d'après	
	[Stöckmann and Stein, 1990])	41
1.10	Coefficient de transmission mesuré entre 17 et 18 GHz. En haut me-	
	sure effectuée à température ambiante; en bas à 2 K. Insert : Forme	
	de la cavité et position des antennes (d'après [Gräf et al., 1992])	43
2.1	Dispositif expérimental	57
2.2	Coupe de la cavité	59
2.3	Module et phase du coefficient de transmission mesuré entre 3 GHz	
	et 3.25 GHz	60
2.4	Système de fermeture de la cavité	63
2.5	Largeurs des résonances en fonction du serrage : a) pas de serrage	
	(\diamondsuit) , b) serrage léger $(+)$, c) serrage fort (\Box) et d) serrage très fort (\times) .	64
2.6	Schéma détaillé des antennes utilisées.	65
2.7	La position des antennes sur la plaque de cuivre est représentée vue	
	de l'extérieur. Les cotes sont données en mm. Le coin inférieur gauche	
	est marqué pour servir de repère	66
2.8	Phase du coefficient de transmission en fonction de la longueur d'an-	
	tenne : antennes de 6 mm (trait-point), de 7 mm (trait plein) et de 9	
	mm (tirets)	68
2.9	Pour déterminer les paramètres S en sens direct, l'analyseur mesure	
	l'amplitude et la phase des signaux incident, réfléchi et transmis, la	
	sortie étant terminée dans une charge exactement égale à l'impédance	
	du système de test	69
2.10	Module du coefficient de transmission sans calibration (tirets) et après	
	une calibration en réponse (trait plein)	71
3.1	Modélisation de l'antenne.	79

3.2	Champs au voisinage d'un conducteur parfait
3.3	Champs au voisinage d'un conducteur réel
3.4	Comparaison de $T^2(f_n)$ (pour $l_{eff} = 1.8$ mm et $l^* = 1.65$ cm), en trait plein, avec la mesure $\langle S_{ab}(f_n) \rangle ab\pi^4 f_n \Gamma_n^{ohm}/128$ représentée par
	les croix
4.1	Module et phase cumulée du coefficient de transmission mesurés entre
	3 GHz et 3.25 GHz
4.2	Comparaison entre $ S_{ab} $ et $g(f)$
4.3	Comparaison entre le coefficient de transmission calculé à partir de
	l'évaluation des paramètres (4.7) (trait plein) et la mesure (croix).
	Les courbes en tirets montrent la contribution de chacun des trois
	pics de résonance. Le module est représenté en haut et la phase en bas.113
4.4	Résultat de l'ajustement de S_{ab} , en haut sur le module et en bas
	sur la phase. Les croix représentent la mesure et la ligne en trait
	plein le résultat de l'ajustement. Les courbes en tirets montrent la
	contribution de chacun des trois pics de résonances
4.5	Capture d'écran du programme interactif de traitement des mesures
	<i>Together</i>
4.6	Ajustement d'un doublet de pics de largeurs égales à 1 MHz et séparés
	de 1.1 MHz; le module est représenté en haut et la phase en bas.
	Les croix représentent la mesure et la ligne en trait plein le résultat
	de l'ajustement. Les courbes en tirets montrent la contribution de
	chacune des deux lorentziennes
4.7	Ajustement d'un doublet quasi-dégénéré; le module est représenté en
	haut et la phase en bas. Les croix représentent la mesure et la ligne en
	trait plein le résultat de l'ajustement. Les courbes en tirets montrent
	la contribution de chacune des deux lorentziennes
5.1	$f_{l,m}^0 - \Gamma_{l,m}^{ohm}/2 - f_n$ en fonction du numéro de résonance pour $a = 465.64$
	$mm \ et \ b = 756.21 \ mm. \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots $

5.2	Comparaison entre le nombre cumulé expérimental (courbe en esca- lier) et celui prédit par la loi de Weyl (courbe en trait plein) dans la cavité rectangulaire. Un agrandissement sur la fenêtre fréquentielle allant de 4.5 GHz à 5 GHz est représenté en insert
5.3	L'histogramme représente la probabilité $P(s)$ ds mesurée dans la ca- vité rectangulaire et la courbe en trait plein suit la loi de Poisson (1.13)
5.4	La courbe en escalier représente la probabilité intégrée $I(s)$ mesurée dans la cavité rectangulaire et la courbe en trait plein le comporte- ment attendu pour un système de type POE
5.5	Les croix représentent les valeurs expérimentales et les courbes l'ajus- tement de ces données d'après la formule (5.11) dans trois fenêtres de fréquences successives. Les trois courbes sont en trait-point (basse fréquence), en tirets (moyenne fréquence) et en pointillés (haute fré- quence) en dehors de la fenêtre utilisée pour leur ajustement, et en trait plein à l'intérieur. L'ajustement par morceaux sur l'ensemble de la gamme de fréquence est donc représenté par la courbe en trait plein.138
5.6	Comparaison expérience (\$\$) et théorie (trait plein et croix), en haut sur toute la gamme de fréquence et en bas entre 2 et 3 GHz 139
5.7	Comparaison expérience (trait plein) et théorie (trait pointillé) pour $2T^2(f_n) \psi_n(\vec{r_c}) ^2$ en fonction du numéro d'antenne c. De haut en bas et de droite gauche, on a les résonances numéro 8, 28, 44, 78, 238 et 329 dont les fréquences respectives sont : $f_8 = 9.847$ GHz, $f_{28} = 1.656$ GHz, $f_{44} = 2.028$ GHz, $f_{78} = 2.655$ GHz, $f_{238} = 4.558$ GHz et $f_{329} =$ 5.316 GHz
5.8	Représentation de la fonction $\xi_{l,m}-1$ en fonction de la fréquence 142
5.9	Comparaison entre théorie (courbe en trait plein) et mesure (croix) pour les largeurs associées aux antennes. En insert : agrandissement entre 4.45 GHz et 4.55 GHz

5.10	Comparaison entre les largeurs ohmiques théoriques (trait plein) et expérimentales (croix). La courbe en tirets représente la partie propa- gative des pertes ohmiques. En haut, cette comparaison est illustrée sur l'ensemble de la gamme de fréquence alors qu'en bas elle est res- treinte aux fréquences inférieures à 3 GHz	. 145
5.11	Comparaison entre le nombre cumulé expérimental (courbe en esca- lier) et celui prédit par la loi de Weyl (courbe en trait plein) dans la cavité de Sinaï. Un agrandissement sur la fenêtre fréquentielle allant de 4.5 GHz à 5.5 GHz est représenté en insert	. 147
5.12	L'histogramme représente la probabilité $P(s)ds$ mesurée dans la ca- vité de Sinaï et la courbe en trait plein suit la loi de Wigner (1.14).	. 149
5.13	La courbe en escalier représente la probabilité intégrée $I(s)$ mesurée dans la cavité de Sinaï et la courbe en trait plein le comportement attendu pour un système de type GOE	. 149
5.14	Distribution de l'intensité normalisée $I/\langle I \rangle$ (histogramme) comparée avec la distribution de Porter-Thomas	. 150
5.15	Largeurs ohmiques $\Gamma_n - \Gamma_n^{ant}$ mesurées dans la cavité de Sinaï (croix). En trait plein est représenté la fonction $\Gamma^{prop}(f_n)$ évaluée pour la cavité rectangulaire	. 153
6.1	Ensemble des phases φ_n^{ab} mesurées dans la cavité de Sinaï sur les 45 couples d'antennes	. 161
6.2	Ensemble des phases φ_n^{ab} mesurées dans la cavité de Sinaï sur les 45 couples d'antennes, après «redressement».	. 162
6.3	Distributions théoriques des phases $\varphi_n(\vec{r})$ (en trait plein) et φ_n^{ab} (en pointillés) avec $q = 0.1$ dans les deux cas	. 163
6.4	Distribution expérimentale de la phase φ_n^{ab} pour 150 < n < 180, soit 3.76 GHz < f < 4.1 GHz (histogramme) et résultat de l'ajustement en utilisant la formule (6.10) avec $\bar{q} = 5.0 \times 10^{-2}$ (trait plein)	. 164

6.5	Distribution expérimentale de la phase φ_n^{ab} pour $300 < n < 328$, soit
	5.24~GHz < f < 5.5~GHz (histogramme) et résultat de l'ajustement
	en utilisant la formule (6.10) avec $\bar{q} = 10.1 \times 10^{-2}$ (trait plein) 165
6.6	Comparaison entre $\langle \Gamma^{bords} \rangle$ mesuré directement (courbe en trait plein)
	et les valeurs déduites de la mesure de \bar{q} (courbe en pointillés) grâce
	à la formule (6.23), en utilisant des fenêtres de 30 résonances 171
6.7	Comparaison entre $\langle \Gamma^{bords} \rangle$ mesuré directement (courbe en trait plein)
	et les valeurs déduites de la mesure de \bar{q} (courbe en pointillés) grâce
	à la formule (6.23), en utilisant des fenêtres de 15 résonances 172
6.8	Comparaison entre $\langle \Gamma^{bords} \rangle$ mesuré directement (courbe en trait plein)
	et les valeurs déduites de la mesure de \bar{q} (courbe en pointillés) grâce
	à la formule (6.23), en utilisant des fenêtres de 10 résonances 173
П 1	
В.1	Geometrie de la reflexion
B.2	Calcul des pertes à la propagation

Liste des tableaux

4.1	Limites de variation des paramètres initiaux α_n^0 , β_n^0 , Γ_n^0 et f_n^0 compa-	
	tible avec la qualité de l'ajustement représenté sur la figure 4.4. $\ .$.	. 122
4.2	Variation maximale des paramètres α_n , β_n , Γ_n et f_n trouvée lorsque	
	les paramètres initiaux $\alpha_n^0, \beta_n^0, \Gamma_n^0$ et f_n^0 varient dans les limites fixées	
	par le tableau 4.1	. 122
4.3	Comparaison des paramètres ajustés avec ceux utilisés pour générer	
	le doublet de la figure 4.6 avec $\Delta f = 1.1$ MHz	. 124
4.4	Comparaison des paramètres ajustés avec ceux utilisés pour générer	
	le doublet de la figure 4.7 avec $\Delta f = 0.2$ MHz	. 124
4.5	Incertitude des largeurs et des positions suivant les antennes de me-	
	sure; à basse fréquence, à haute fréquence et sur l'ensemble du spectre;	
	dans une cavité régulière et dans une cavité chaotique. \ldots .	. 126
5.1	Valeurs de l_{eff} et l^* ajustées pour différentes gammes de fréquence.	. 137

LISTE DES TABLEAUX

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [Albeverio et al., 1996] Albeverio, S., Haake, F., Kurasov, P., Kuś, M., and Šeba, P. (1996). S-matrix, resonances, and wave functions for transport through billiards with leads. J. Math. Phys., 37(10) :4888-4903.
- [Alt et al., 1995] Alt, H., Gräf, H.-D., Harney, H., Lengeler, H., Richter, A., Schardt, P., and Weidenmüller, H. (1995). Gaussian orthogonal ensemble statistics in a microwave stadium billiard with chaotic dynamics : Porter-Thomas distribution and algebraic decay of time correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 74 :62–65.
- [Alt et al., 1993] Alt, H., von Bretano, P., Gräf, H.-D., Herzberg, R.-D., Philipp, M., Richter, A., and Schardt, P. (1993). Resonances of a superconducting cavity : A test of the Breit-Wigner formula over a large dynamic range. Nucl. Phys. A, A560(1) :293-305.
- [Balian and Bloch, 1971] Balian, R. and Bloch, C. (1971). Asymptotic evaluation of Green's function for large quantum numbers. *Ann. Phys.*, 63:582.
- [Baltes and Hilf, 1976] Baltes, H. and Hilf, E. (1976). Spectra of Finite Systems. Bibliographisches Institut, Mannheim.
- [Barth et al., 1999] Barth, M., Kuhl, U., and Stöckmann, H.-J. (1999). Global versus local billiard level dynamics : The limits of universality. *Phys. Rev. Lett.*, 82(10) :2026-2029.
- [Bayfield and Koch, 1974] Bayfield, J. and Koch, P. (1974). Multiphoton ionization of highly excited hydrogen atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 33 :258.
- [Berry, 1977] Berry, M. (1977). Regular and irregular semiclassical wavefunctions. J. Phys. A : Math. Gen., 10 :2083-2091.

- [Berry, 1989] Berry, M. V. (1989). Quantum scars of classically closed orbits in phase space. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 423 :219.
- [Blatt and Weisskopf, 1952] Blatt, J. and Weisskopf, V. (1952). Theoretical Nuclear Physics. John Wiley & Sons, New York.
- [Blümel et al., 1992] Blümel, R., Davidson, I. H., Reinhardt, W. P., Lin, H., and Sharnoff, M. (1992). Quasilinear ridge structures in water surface waves. *Phys. Rev. A*, 45(4) :2641–2644.
- [Bogomolny, 1988] Bogomolny, E. (1988). Smoothed wavefunctions of chaotic quantum systems. *Physica D*, page 169.
- [Bohigas et al., 1984] Bohigas, O., Giannoni, M., and Schmidt, C. (1984). Characterisation of chaotic spectra and universality of level fluctuations laws. *Phys. Rev. Lett.*, 52(1) :1–4.
- [Bohigas and Giannoni, 1984] Bohigas, O. and Giannoni, M.-J. (1984). Chaotic motion and random matrix theories. *Lect. Notes Phys.*, 209.
- [Bohigas et al., 1983] Bohigas, O., Haq, R., and Pandey, A. (1983). Fluctuations properties of nuclear energy levels and widths : comparison of theory with experiments, page 809. Reidel Dordrecht.
- [Casati et al., 1980] Casati, G., Vlaz-Gris, F., and Guarneri, I. (1980). On the connection between quantization of nonintegrable systems and statistical theory of spectra. Lett. Nuovo Cimento, 28:279.
- [Chinnery and Humphrey, 1996] Chinnery, P. A. and Humphrey, V. F. (1996). Experimental visualization of acoustic resonances within a stadium-shaped cavity. *Phys. Rev. E*, 53(1):272–276.
- [Collin, 1991] Collin, R. E. (1991). Field Theory of Guided Waves. Electromagnetic waves. IEEE Press, New York, second edition.
- [Deus et al., 1995] Deus, S., Koch, P., and Sirko, L. (1995). Statistical properties of the eigenfrequency distribution of three-dimensional microwave cavities. *Phys. Rev. E*, 52(1) :1146–1155.
- [Dittes, 2000] Dittes, F.-M. (2000). The decay of quantum systems with a small number of open channels. *Phys. Rep.*, 339 :215–316.

- [Doron et al., 1990] Doron, E., Smilansky, U., and Frenkel, A. (1990). Experimental demonstration of chaotic scattering of microwaves. *Phys. Rev. Lett.*, 65(25):3072– 3075.
- [Doya, 2000] Doya, V. (2000). Du speckle aux scars : une expérience de chaos ondulatoire dans une fibre optique. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis.
- [Doya et al., 2002a] Doya, V., Legrand, O., and Mortessagne, F. (2002a). Light scarring in an optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 88(1):014102.
- [Doya et al., 2002b] Doya, V., Legrand, O., and Mortessagne, F. (2002b). Speckle statistics in a chaotic multimode fiber. *Phys. Rev. E*, 65(5):6223.
- [Ellegaard et al., 1995] Ellegaard, C., Guhr, T., Lindemann, K., Lorensen, H. Q., Nygøard, J., and Oxborrow, M. (1995). Spectral statistics of acoustic resonances in aluminium blocks. *Phys. Rev. Lett.*, 75(8) :1546-1549.
- [Eom et al., 2000] Eom, H. J., Cho, Y. H., and Kwon, M. S. (2000). Monopole antenna radiating into a parallel-plate waveguide. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 48(7):1142–1144.
- [Ericson, 1960] Ericson, T. (1960). Fluctuations of nuclear cross section in the "continuum" region. Phys. Rev. Lett., 5:430-431.
- [Ericson, 1963] Ericson, T. (1963). A theory of fluctuations in nuclear cross sections. Ann. Phys., 23 :390-414.
- [Fyodorov and Sommers, 1997] Fyodorov, Y. and Sommers, H.-J. (1997). Statistics of resonance poles, phase shifts and time delays in quantum chaotic scattering : Random matrix approach for systems with broken time-reversal invariance. J. Math. Phys., 38 :1918.
- [Gorin and Seligman, 2002] Gorin, T. and Seligman, T. (2002). Signatures of the correlation hole in total and partial cross sections. *Phys. Rev. E*, 65 :026214.
- [Gräf et al., 1992] Gräf, H.-D., Harney, H., Lengeler, H., Lewenkopf, C., Rangacharyulu, C., Richter, A., Schardt, P., and Weidenmüller, H. (1992). Distribution of eigenmodes in a superconducting stadium billiard with chaotic dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 69(9) :1296–1299.

- [Gutzwiller, 1971] Gutzwiller, M. C. (1971). Periodic orbits and classical quantization conditions. J. Math. Phys., 12 :343–358.
- [Gutzwiller, 1990] Gutzwiller, M. C. (1990). Chaos in classical and quantum mechanics. Springer-Verlag.
- [Haake, 1991] Haake, F. (1991). *Quantum Signatures of Chaos*. Springer-Verlag Berlin.
- [Haake et al., 1991] Haake, F., Lenz, G., Šeba, P., Stein, J., Stöckmann, H.-J., and Życzkowski, K. (1991). Manisfestation of wave chaos in pseudointegrable microwave resonators. *Phys. Rev. A*, 44(10) :R6161–R6164.
- [Harrington, 2001] Harrington, R. F. (2001). Time-Harmonic Electromagnetic Fields. A Classic Reissue. Wiley-Interscience, reissued edition.
- [Heller, 1984] Heller, E. J. (1984). Bound-state eigenfunctions of classically chaotic hamiltonian systems : Scars of periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.*, pages 1515–1518.
- [Ishimaru, 1978] Ishimaru, A. (1978). Wave Propagation and Scattering in Random Media. Academic, New York.
- [Ishio et al., 2001] Ishio, H., Saichev, A. I., Sadreev, A. F., and Berggren, K.-F. (2001). Wave function statistics for ballistic quantum transport through chaotic open billiards : Statistical crossover and coexistence of regular and chaotic waves. *Phys. Rev. E*, 64 :056208.
- [Jackson, 1965] Jackson, J. D. (1965). Classical Electrodynamics. Academic Press, New York.
- [Jackson, 2001] Jackson, J. D. (2001). *Electrodynamique Classique*. Dunod, Paris, third edition.
- [Kanzieper and Freiliker, 1996] Kanzieper, E. and Freiliker, V. (1996). Eigenfunctions of electrons in weakly disordered quantum dots : Crossover between orthogonal and unitary symmetries. *Phys. Rev. B*, 54(12) :8737–8742.
- [Lee, 1986] Lee, J.-S. (1986). Speckle suppression and analysis for synthetic aperture radar images. *Opt. Eng.*, 25(5):636–643.

- [Lindelof et al., 1986] Lindelof, P. E., Nørregard, J., and Hanberg, J. (1986). New light on the scattering mechanisms in Si inversion layers by weak localization experiments. *Physica Scripta*, T14 :17.
- [Liu and Grimes, 2000] Liu, G. and Grimes, C. A. (2000). A quasistatic FDTD source model for coaxially driven monopole antennas. *Microwave Opt. Technol. Lett.*, 26(1):30-34.
- [Lobkis and Weaver, 2000] Lobkis, O. and Weaver, R. (2000). Complex modal statistics in a reverberant dissipative body. J. Acoust. Soc. Am., 108(4) :1480-1485.
- [Lu et al., 1999] Lu, W., Rose, M., Pance, K., and Sridhar, S. (1999). Quantum resonances and decay of a chaotic fractal repeller observed using microwaves. *Phys. Rev. Lett.*, 82(26) :5233-5236.
- [Marquardt, 1963] Marquardt, D. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. J. Soc. Indust. Appl. Math., II(2):431-441.
- [Mehta, 1991] Mehta, M. (1991). *Random Matrices*. Academic Press, San Diego, second edition.
- [Morse and Feshbach, 1953] Morse, P. M. and Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*, volume I. McGraw-Hill Bokk Company.
- [Mortessagne, 1994] Mortessagne, F. (1994). Dynamique et interférences géométriques dans les billards chaotiques. PhD thesis, Université Paris 7 - Denis Diderot.
- [Mortessagne et al., 1993] Mortessagne, F., Legrand, O., and Sornette, D. (1993). Transient chaos in room acoustics. *Chaos*, 3(4):529–541.
- [Persson et al., 2000] Persson, E., Rotter, I., Stöckmann, H.-J., and Barth, M. (2000). Observation of resonance trapping in an open microwave cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 85(12) :2478–2481.
- [Pitt et al., 1999] Pitt, K., Free, C., Li, D., and Barnwell, P. (1999). The influence of materials properties on the design of MCM and microstrip structures. J. Mater. Sci. : Mater. Electron., 10:519-524.
- [Pnini and Shapiro, 1996] Pnini, R. and Shapiro, B. (1996). Intensity fluctuations in closed and open systems. *Phys. Rev. E*, 54(2) :R1032–R1035.

- [Porter, 1965] Porter, C. (1965). Statistical Theory of Spectra : Fluctuations. Academic Press New York.
- [Press et al., 1997] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery,
 B. P. (1997). Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing, chapter 10.4, pages 408-412. Cambridge University Press, second edition.
- [Schäfer et al., 2003] Schäfer, R., Gorin, T., Seligman, T., and Stöckmann, H.-J. (2003). Correlation functions of scattering matrix elements in microwave cavities with strong absorption. J. Phys. A : Math. Gen., 36 :3289–3302.
- [Schrœder, 1962] Schrœder, M. (1962). Frequency-correlation functions of frequency responses in rooms. J. Acoust. Soc. Am., 34 :1819–1823.
- [Schrœder and Kutruff, 1962] Schrœder, M. and Kutruff, K. (1962). On frequency responses curves in rooms. comparison of experimental, theoretical, and Monte Carlo results for the average frequency spacing between maxima. J. Acoust. Soc. Am., 34 :76-80.
- [Seeger, 1986] Seeger, J. (1986). Microwave Theory, Components and Devices. Prentice Hall.
- [Shen and MacPhie, 1996] Shen, Z. and MacPhie, R. H. (1996). Modal expansion analysis of monopole antennas driven from a coaxial line. *Radio Sci.*, 31(5):1037– 1046.
- [Sieber et al., 1993] Sieber, M., Smilansky, U., Creagh, S., and Littlejohn, R. (1993). Non-generic spectrals statistics in the quantized stadium billiard. J. Phys. A : Math. Gen., 26 :6217.
- [Sridhar, 1991] Sridhar, S. (1991). Experimental observation of scarred eigenfunctions of chaotic microwave cavities. *Phys. Rev. Lett.*, 67(7):785–788.
- [Sridhar et al., 1992] Sridhar, S., Hogenboom, D., Balam, A., and Willemsen, A. (1992). Microwave experiments on chaotic billiards. J. Stat. Phys., 68(1/2) :239– 258.
- [Stein et al., 1995] Stein, J., Stöckmann, H.-J., and Stoffregen, U. (1995). Microwave studies of billiard Green functions and propagators. *Phys. Rev. Lett.*, 75(1):53–56.

- [Stöckmann, 1999] Stöckmann, H.-J. (1999). *Quantum Chaos*. Cambridge University Press.
- [Stöckmann and Stein, 1990] Stöckmann, H.-J. and Stein, J. (1990). "Quantum" chaos in billiards studied by microwave absorption. *Phys. Rev. Lett.*, 64(19):2215– 2218.
- [Tischer, 1976] Tischer, F. (1976). Excess conduction losses at millimeter wavelengths. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-24(11) :853-858.
- [Voros, 1976] Voros, A. (1976). Semi-classical approximations. Ann. Inst. Henri Poincaré, XXIV(1):31–90.
- [Šeba et al., 1997] Šeba, P., Haake, F., Kuš, M., Barth, M., Kuhl, U., and Stöckmann, H.-J. (1997). Distribution of the wave function inside chaotic partially open systems. *Phys. Rev. E*, 56(3) :2680–2686.
- [Šeba and Życzkowski, 1991] Šeba, P. and Życzkowski, K. (1991). Wave chaos in quantized classically nonchaotic systems. *Phys. Rev. A*, 44(6) :3457–3465.
- [Weaver, 1989] Weaver, R. L. (1989). Specral statistics in elastodynamics. J. Acoust. Soc. Am., 85(3) :1005–1013.
- [Weaver and Lobkis, 2000] Weaver, R. L. and Lobkis, O. I. (2000). Enhanced backscatter and modal echo of reverberant elastic waves. *Phys. Rev. Lett.*, pages 4942– 4945.
- [Weiss et al., 1991] Weiss, D., Roukes, M., Menschig, A., Grambow, P., von Klitzing, K., and Weimann, G. (1991). Electronic pinball and commensurate orbits in a periodic array of scatterers. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :2790.
- [Wigner, 1951] Wigner, E. (1951). Proc. Cambridge Phil. Soc., pages 47–790.
- [Wigner, 1957] Wigner, E. (1957). Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions II. Ann. Math., 65:203.

BIBLIOGRAPHIE

Résumé :

Les **cavités micro-ondes** quasi-2D constituent des systèmes expérimentaux *modèles* du **chaos ondulatoire**. À température ambiante, ces cavités présentent une dissipation ohmique entraînant des **pertes** que l'on retrouve, avec des origines physiques diverses, dans tous les systèmes ondulatoires. Notre étude se concentre sur l'impact des pertes sur les propriétés de ces systèmes. Après une brève introduction au chaos ondulatoire, nous décrivons en détails l'ensemble du dispositif expérimental. Nous développons ensuite le calcul complet de la **matrice de diffusion** et aboutissons à une description en termes de **résonances** discrètes. Les paramètres caractéristiques de chaque résonance sont extraits de nos mesures par une **procédure d'ajustement originale**. L'analyse de ces paramètres nous permet de vérifier la validité de notre description et de mettre en évidence, pour la première fois, une relation entre les largeurs des résonances dues aux pertes et la partie imaginaire de la fonction d'onde.

Abstract :

Quasi-2D microwave cavities constitute experimental model systems of wave chaos. At room temperature, these cavities present ohmic dissipation implying losses that can be found, with various physical origins, in all wave systems. Our study concentrates on the impact of losses on the properties of these systems. After a short introduction to wave chaos, we describe the experimental set-up in details. We then develop the complete calculation of the scattering matrix to yield a description in terms of discrete resonances. The characteristic parameters for each resonance are extracted from our measurements by an original fitting procedure. The analysis of these parameters enables us to check the validity of our description and to highlight, for the first time, a relation between the widths of resonances due to losses and the imaginary part of the wavefunction.