HAL
open science

Localisation et Concentration de la Marche de Sinai

Pierre Andreoletti

To cite this version:

Pierre Andreoletti. Localisation et Concentration de la Marche de Sinai. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2003. Français. NNT : . tel-00004116

HAL Id: tel-00004116

https://theses.hal.science/tel-00004116v1

Submitted on 8 Jan 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Localisation et Concentration de la Marche de Sinai

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 05 Décembre 2003

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II

par

Andreoletti Pierre

Composition du jury

Président :	F. Bentosela
Rapporteurs :	F. Comets Z. Shi
Directeur de thèse :	P. Picco
Autre membre :	E. Andgel

Centre de Physique Théorique (CNRS-FRUMAN, Marseille, France), Centro de Modelamiento Matemático (CNRS, Santiago, Chili)

Mis en page avec la classe thloria.

INTRODUCTION

Dans le présent travail de thèse nous nous sommes intéressés à la marche aléatoire unidimensionnelle récurrente en milieu aléatoire, définie par F. Solomon en 1975. En particulier nous avons mis l'accent sur les propriétés de localisation et de concentration de ce processus. Avant de préciser ces notions, revenons à la définition de la marche aléatoire en milieu aléatoire dont il sera question ici. Un milieu aléatoire sera défini comme une suite de variables aléatoires $(\alpha_i, i \in \mathbb{Z})$ indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $]0,1[^{\mathbb{Z}}$. La variable aléatoire α_i $(i \in \mathbb{Z})$ représente la probabilité pour le processus noté $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ et appelé Marche Aléatoire en Milieu Aléatoire (M.A.M.A.) d'effectuer un saut à droite lorsqu'il se trouve sur le site i. Si on impose une condition sur le milieu de manière à ce qu'aucune direction (droite ou gauche) ne soit privilégiée, F. Solomon ([95]) montre que le processus $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est récurrent c'est à dire qu'il visite une infinité de fois chacun des points du réseau $\mathbb{Z}$ avec une probabilité un. Cette condition de récurrence se traduit de la façon suivante :

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] = 0 \ , \tag{H.1}$$

où $\mathbb{E}_Q$ représente la moyenne relative au milieu aléatoire. Si on utilise uniquement cette première hypothèse, le processus $(X_n, n \in \mathbb{N})$ sera bien entendu récurrent, mais cela ne suffit pas pour obtenir une M.A.M.A. , pour cela on doit imposer l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$\mathrm{Var}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] > 0 \ , \tag{H.2}$$

où Var_Q désigne la variance relative au milieu aléatoire. Cette dernière condition implique que le processus $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ n'est pas réduit à une marche aléatoire simple effectuant des sauts de longueur $+1$ ou -1 avec une probabilité 1/2. Nous appellerons les hypothèses H.1 et H.2 les hypothèses nécessaires pour obtenir une M.A.M.A. récurrente.

Localisation de la M.A.M.A. récurrente. La première question qui se pose est : quel comportement asymptotique peut avoir un tel processus ? Pour répondre à cette question une hypothèse sur les v.a. $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ est ajoutée aux hypothèses nécessaires :

$$Q\left[\eta \leq \alpha_0 \leq 1-\eta\right] = 1, \quad 0 < \eta \leq \frac{1}{2} \ , \tag{H.3}$$

nous appellerons hypothèse de régularité toute hypothèse de type H.3, c'est à dire toute hypothèse ajoutée aux deux hypothèses nécessaires. Y. Sinai [92] parvient, sous ces trois hypothèses, à répondre à la question posée précédemment : il montre, pour un instant n donné, non seulement que le comportement asymptotique de la M.A.M.A. est en $(\ln n)^2$ mais, de plus, que la M.A.M.A. est **localisée** au voisinage d'un point bien défini du réseau $\mathbb{Z}$. Ce point que nous noterons $\tilde{m}_0$ est une variable aléatoire dépendant uniquement du milieu et de n. La première constatation est que l'hypothèse H.2 impose à la M.A.M.A. d'être sous-diffusive en opposition à une marche aléatoire simple qui se comporte en $\sqrt{n}$. Ce phénomène de localisation confirme en outre que le comportement d'une M.A.M.A. récurrente est très différent de celui de la marche aléatoire récurrente classique. La partie II de cette thèse est entièrement consacrée à cet aspect de localisation, en particulier on donne une preuve alternative au résultat de Y. Sinai sous une hypothèse de régularité plus faible que H.3.

Concentration de la M.A.M.A. récurrente. Le second aspect que nous traitons dans ce travail et qui constitue la partie originale de cette thèse est ce que nous appelons la concentration de la M.A.M.A. récurrente. Nous avons fait l'étude du temps local de la M.A.M.A. , d'une part dans un voisinage du point de localisation $\tilde{m}_0$ et d'autre part au point $\tilde{m}_0$ lui même. Le temps local en un point $k \in \mathbb{Z}$ jusqu'à un instant n, est une v.a. directement liée au processus $(X_n, n \in \mathbb{N})$ qui compte le nombre de fois où la M.A.M.A. est passée par le point k. Sous les hypothèses H.1, H.2 et H.3, nous avons montré que la M.A.M.A. dépense la quasi totalité de son temps dans un petit voisinage de $\tilde{m}_0$ négligeable devant $(\ln n)^2$, la M.A.M.A. est donc non seulement localisée mais également extrêmement **concentrée** au voisinage de $\tilde{m}_0$. Nous avons également montré sous ces mêmes hypothèses que le temps local en $\tilde{m}_0$ était de l'ordre de n en probabilité. Ce dernier résultat est une conséquence directe d'un résultat plus fort que nous expliciterons dans le troisième paragraphe ci-dessous.

Nous décrivons maintenant les quatre parties de cette thèse.

La partie I comporte deux chapitres. Dans le premier on donne une vue d'ensemble des résultats connus à ce jour sur les M.A.M.A. unidimensionnelles, l'accent ayant été mis sur le cas des M.A.M.A. récurrentes. Dans le second chapitre on donne quelques résultats élémentaires sur les processus de naissance et de mort que l'on appellera M.A.M.I. pour "Marche Aléatoire en Milieu Inhomogène", la majorité de ces résultats étant dus à K.L. Chung [23]. En fin de chapitre on montre le résultat de F. Solomon [95] qui donne le critère de récurrence pour les M.A.M.A. unidimensionnelles (H.1).

La partie II est consacrée à la preuve de la localisation de M.A.M.A. récurrente. Dans le premier chapitre nous énoncerons les hypothèses qui seront utilisées dans cette partie et les résultats que nous montrerons : ceux de Y. Sinai [92] et de H. Kesten [56]. Dans un second chapitre, on décrit en détail le comportement du milieu aléatoire sous ces hypothèses, nous introduisons pour cela la notion de potentiel aléatoire, de vallée et de raffinement. Après avoir défini la vallée "minimale" $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ dans laquelle la M.A.M.A. reste la totalité du temps n qui lui est imparti, on effectue un découpage ordonné en vallées à partir de l'opération de raffinement. Ce découpage "ordonné" nous permettra de comprendre intuitivement et par le calcul pourquoi la M.A.M.A. est localisée. Les propriétés du milieu aléatoire dont nous aurons besoin sont montrées en détail dans ce second chapitre. Ces propriétés sont ensuite regroupées dans la définition d'un ensemble que nous appellerons ensemble des "bons" environnements. Dans le troisième chapitre de cette partie nous montrerons la sous-diffusivité de la M.A.M.A. récurrente puis nous ferons une brève analyse du temps de retour au point du réseau où la marche se concentre : $\tilde{m}_0$. Le quatrième chapitre de cette partie est consacré à la preuve du théorème de Y. Sinai : avec une Q probabilité aussi proche de un que l'on veut

$$\frac{X_n}{(\ln n)^2} \to m_0, \quad \text{en } \mathbb{P}^\alpha \text{ probabilité} , \tag{0.1}$$

où Q est la mesure de probabilité associée au milieu aléatoire et $\mathbb{P}^\alpha$ la mesure associée au processus $(X_n, n \in \mathbb{N})$, $\mathbb{P}^\alpha$ étant une v.a. pour la mesure Q. Ce type de résultat est appelé résultat "trempé" en référence à la métallurgie (quenched pour les anglophones) car on travaille à milieu fixé, c'est à dire sous la mesure $\mathbb{P}^\alpha$ puis on explicite le résultat en Q probabilité. Nous donnons dans un premier temps une preuve de ce résultat basée sur la construction ordonnée en vallées effectuée dans le second chapitre et l'étude des temps de retour à $\tilde{m}_0$ faite au troisième chapitre. Nous exposons ensuite les principaux arguments de la preuve de Y. Sinai. Nous avons simplifié et clarifié plusieurs points de sa démonstration en donnant les définitions probabilistes des objets qu'il introduit pour sa preuve. C'est le dernier point de son calcul dont nous n'avons pu clarifier la méthode de calcul qui a motivé l'élaboration d'une preuve alternative avec une approche différente. Nous terminons ce chapitre par le résultat de H. Kesten [56] et A. O. Golosov [38] qui donnent explicitement la distribution limite de la M.A.M.A. normalisée. Nous décrivons alors en détail la démarche de H. Kesten qui est une discussion basée uniquement sur le milieu aléatoire. La partie III de cette thèse, que l'on introduit ci-dessous, a été motivé d'une part par certaines remarques de Y. Sinai concernant les temps locaux et d'autre part par la méthode qu'utilise H. Kesten pour caractériser le point de localisation défini par Y. Sinai.

Dans la partie III nous nous intéressons au temps local de la M.A.M.A. , plus particulièrement au temps local de la M.A.M.A. dans le voisinage ainsi qu'au point de localisation $\tilde{m}_0$. Comme pour la partie II, le premier chapitre est consacré à l'énoncé des hypothèses et des résultats qui seront montrés dans les chapitres suivants.

Dans le second chapitre nous rappelons quelques propriétés élémentaires du milieu aléatoire que nous avions exposées et montrées dans la partie II. Dans le troisième chapitre nous faisons une analyse fine de la Q v.a. :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right],\ k\in\{\tilde{M}'_0,\ \tilde{M}'_0+1,\cdots,\tilde{m}_0,\cdots,\ \tilde{M}_0+1,\ \tilde{M}_0\}\ , \tag{0.2}$$

qui est la moyenne du temps local de la M.A.M.A. au point k en un temps de retour au point $\tilde{m}_0$. Les résultats obtenus nous ont permis de montrer que le temps local dans un voisinage de $\tilde{m}_0$ de taille $(\ln\ln n)^2$ jusqu'à un instant n est plus grand que $n(1-o(1))$: avec une Q probabilité aussi proche de un que nous souhaitons,

$$\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}, n\right) \geq n(1-\delta_n) \text{ avec une } \mathbb{P}^{\alpha} \text{ probabilité tendant vers 1,} \tag{0.3}$$

où $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ et $V_{\tilde{m}_0}$ est le voisinage de $\tilde{m}_0$ de taille $(\ln\ln n)^2$. Ce résultat met en évidence que la M.A.M.A. dépense la quasi totalité de son temps dans $V_{\tilde{m}_0}$, c'est à dire qu'elle se concentre dans ce voisinage. Notre second résultat est le suivant : avec une Q probabilité aussi proche de 1 que nous voulons :

$$\frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n)}{n} \to \frac{1}{\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{M}'_0,\tilde{m}_0,\tilde{M}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]} \text{ en } \mathbb{P}^{\alpha} \text{ probabilité .} \tag{0.4}$$

où $V_{\{\tilde{M}'_0,\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}$ est l'ensemble des points contenus dans la vallée minimale $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$. Nous terminons ce chapitre en montrant que nos résultats ont des conséquences directes sur le maximum des temps locaux et sur le lieu favori de la M.A.M.A. . Tous les résultats que nous avons obtenus sont donc de type "trempés".

La partie IV de cette thèse est une discussion heuristique sur les résultats des parties II et III avec un support numérique. Nous avons programmé une application permettant la visualisation ainsi que l'étude d'une M.A.M.A. récurrente. Une des possibilités de cette application est de faire apparaître les phénomènes de localisation et de concentration.

Table des matières

INTRODUCTION **i**

I Historique et résultats élémentaires sur les M.A.M.A. unidimensionnelles **1**

1 Historique sur l'étude des Marches Aléatoires en Milieux Aléatoires (M.A.M.A.) **3**

1.1 Définition des M.A.M.A. et propriétés élémentaires 4

1.2 Les M.A.M.A. récurrentes 5

1.3 Les M.A.M.A. transitoires 13

2 Résultats Elémentaires sur la M.A.M.A. et la M.A.M.I. Unidimensionnelle **15**

2.1 Marche Aléatoire en Milieu Inhomogène (M.A.M.I.) 15

2.2 Marche Aléatoire en Milieu Aléatoire (M.A.M.A.) 29

Annexes **33**

A Invariance par translation et propriété de Markov forte **33**

A.1 Chaînes de Markov Homogènes 33

A.2 Propriété de Markov forte 34

B Quelques résultats sur les sommes de v.a. i.i.d. **37**

II Localisation de la M.A.M.A. récurrente **41**

3 Hypothèses et Résultats. **43**

4 Description du milieu aléatoire sous H.1, H.2 et H.6 **45**

4.1 Définition du potentiel aléatoire et contrôle des fluctuations 45

4.2 Découpage ordonné en vallées 50

4.3 Propriétés de l'ensemble des "bons" environnements 64

5 Comportement sous-diffusif et analyse des temps de retour au point $\tilde{m}_0$ **87**

5.1 Comportement sous diffusif de la M.A.M.A. récurrente 87

5.2 Analyse du temps de retour $T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}$ 92

6 Preuves du théorème de Localisation **103**

6.1 Preuve par analyse des temps de retour 103

6.2 Preuve de Y. Sinai (par analyse de temps locaux) 111

6.3 Distribution limite pour la M.A.M.A récurrente 121

III Concentration de la M.A.M.A. récurrente **129**

7 Hypothèses et Résultats **131**

7.1 Hypothèses et Notations 131

7.2 Temps local dans un voisinage de $\tilde{m}_0$ 132

7.3 Temps local au point $\tilde{m}_0$ 133

7.4 Conséquences sur le maximum des temps locaux et le lieu favori de la M.A.M.A. 135

8 Propriétés élémentaires du milieu aléatoire sous les hypothèses H.1, H.2 et H.3 **137**

8.1 Rappels sur l'hypothèse H.3 et sur les vallées 137

8.2 Description du milieu aléatoire sous H.1, H.2 et H.3 139

9 Etude de la Q variable aléatoire : $\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})],\ k \in V_{\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}\right)$ **151**

9.1 Etude de la Q variable aléatoire $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\mathcal{L}(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})$ 151

9.2 Etude de la Q v.a. $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})]$ 166

9.3 Variations maximales du potentiel aléatoire dans le voisinage $V_{\tilde{m}_0}$ 177

9.4 Définition de l'ensemble des "bons" environnements 181

10 Temps local au point de localisation $\tilde{m}_0$ (preuve des théorèmes 7.2.1 et 7.3.1) **185**

10.1 Temps local dans le voisinage du point $\tilde{m}_0$ (preuve du théorème 7.2.1) 185

10.2 Convergence en probabilité du temps local au point de concentration $\tilde{m}_0$ (preuve du théorème 7.3.1) 189

10.3 Conséquences sur le maximum des temps locaux et le lieu favori de la M.A.M.A. (preuves des corollaires) 206

IV Visualisation numérique d'une M.A.M.A. récurrente **209**

Conclusion et Projets de Recherche **221**

Bibliographie **227**

Liste des Notations

Abréviations.

v.a.	variable(s) aléatoire(s) ,
p.s.	presque sûrement ,
i.i.d.	indépendant(e)(s) identiquement distribué(e)(s) ,
M.A.M.A.	Marche Aléatoire en Milieu Aléatoire ,
M.A.M.I.	Marche Aléatoire en Milieu Inhomogène ,
M.A.R.S.	Marche Aléatoire Récurrente Simple.

Conventions et symboles.

$\sigma(X)$	σ-algèbre engendrée par la variable aléatoire X ,
$a \wedge b$	minimum de a et b ,
$a \vee b$	maximum de a et b ,
$\mathcal{O}(h)$	de l'ordre de h ,
$\delta_{\cdot}^{\cdot}$	symbole de Kronecker ,
$[a]$	partie entière de $a \in \mathbb{R}$,
$\lvert A \rvert$ ou $\#A$	le nombre d'éléments dans A.

Tout vrai langage est incompréhensible.

J. Cocteau

Partie I

Historique et résultats élémentaires sur les M.A.M.A. unidimensionnelles

Le premier chapitre de cette partie est consacré d'une part à la description du modèle dont il est question dans ce travail de thèse : les Marches Aléatoires en Milieu Aléatoire (M.A.M.A.) et d'autre part à un bref historique sur un certain nombre de résultats obtenus depuis 1975 jusqu'à nos jours sur ces processus. Le but est de donner au lecteur un bref aperçu des connaissances actuelles sur les M.A.M.A. unidimensionnelles et de lui permettre de situer nos travaux dans cette thématique. Le second chapitre est un rappel de résultats, en grande partie dus à K. L. Chung [23], sur les processus de naissance et de mort. Les travaux de K. L. Chung constituent la base des calculs qui nous permettrons l'étude de la M.A.M.A. . Ce second chapitre donne une certaine autonomie à ce travail. Le lecteur pourra faire une lecture complète de la thèse sans se référer à d'autres ouvrages. A la fin de ce chapitre on présente le résultat de F. Solomon [95] qui donne un critère de récurrence pour la M.A.M.A. unidimensionnelle.

Chapitre 1

Historique sur l'étude des Marches Aléatoires en Milieux Aléatoires (M.A.M.A.)

On présente dans ce chapitre quelques résultats retraçant l'étude des Marches Aléatoires en Milieux Aléatoires (M.A.M.A.) sur le réseau $\mathbb{Z}$. Le but est de donner au lecteur un bref aperçu de ce qui a été étudié sur les M.A.M.A. depuis leur apparition en physique et théorie des probabilités au milieu des années 70. Ce premier chapitre permet également de situer les recherches menées dans cette thèse. Pour des résumés plus détaillés sur les M.A.M.A. et plus généralement les milieux aléatoires voir les notes de O. Zeitouni [117], A. S. Sznitman [101], S. A. Molchanov [76] et les livres de B. D. Hughes [47] et P. Revesz [84]. Dans ce chapitre on s'est restreint essentiellement à une M.A.M.A. effectuant des sauts sur ses plus proches voisins et on a mis l'accent sur le cas récurrent car c'est cet aspect qui fait l'objet de nos recherches.
Dans le premier paragraphe on donne la définition du modèle puis on énonce le résultat de F. Solomon [95] qui donne une première classification des M.A.M.A. en fonction d'hypothèses faites sur le milieu aléatoire. Ce premier résultat ainsi que les travaux de H. Kesten, M. V. Kozlov et F. Spizer ([57], 1975) puis ceux de Y. Sinai ([92] 1982) mettent en évidence la diversité des comportements de la M.A.M.A. : récurrente sous-diffusive, transitoire sous balistique, transitoire balistique.
Le second paragraphe est consacré à la M.A.M.A. récurrente. Nous commençons par énoncer le résultat de Y. Sinai qui montre, pour un instant n donné, la sous-diffusivité ainsi que la localisation la M.A.M.A. . Le point du réseau $\mathbb{Z}$ au niveau duquel la M.A.M.A. se localise est une v.a. dépendant uniquement du milieu et de n dont la distribution limite est déterminée indépendamment par A. O. Golosov [39] et H. Kesten [56] (1986). Les premiers résultats obtenus avec une probabilité égale à 1 sont montrés par P. Deheuvels et P. Revesz [29], [84] et [85] (1986), en particulier sur le maximum et le temps local de la M.A.M.A. . Il faut ensuite attendre la fin des années 90 pour voir apparaître de nouveaux résultats sur la M.A.M.A. récurrente : par le biais du calcul stochastique H. Shi et Y. Hu. résolvent un grand nombre de problèmes classiques qui étaient résolus uniquement dans le cas des marches aléatoires récurrentes simples.
Le troisième paragraphe est une très courte introduction aux M.A.M.A. transitoires. On distingue deux types de marches transitoires celles dites balistiques ayant une vitesse non nulle et celles sous-balistiques avec une vitesse nulle. Pour ces M.A.M.A. , dont l'étude commence avec H. Kesten, M. V. Kozlov et F. Spizer ([57], 1975), on observe un nombre important de résultats sur les grandes déviations (1994-2001). La double stochasticité des M.A.M.A. offre, en effet, deux possibilités de résultats pour les grandes déviations : soit à milieu fixé (dit "Quenched") soit après avoir moyenné sur le milieu ("dit annealed"). Enfin un résultat presque sûr, obtenu récemment par Z. Shi et N. Gantert (2001), sur le temps local de la M.A.M.A. sous-balistique est présenté.

1.1 Définition des M.A.M.A. et propriétés élémentaires .

Définissons dans un premier temps une marche aléatoire en milieu inhomogène (ou à milieu fixé) : la M.A.M.I. .

Définition 1.1.1. Soit $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ une suite de nombres réels strictement compris entre 0 et 1, on appellera Marche Aléatoire en Milieu Inhomogène (M.A.M.I.) une chaîne de Markov Homogène $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}^\alpha)$, ayant pour matrice de transition : pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^\alpha\left[X_n = i+1 | X_{n-1} = i\right] = \alpha_i, \\ &\mathbb{P}^\alpha\left[X_n = i-1 | X_{n-1} = i\right] = 1 - \alpha_i \equiv \beta_i. \end{aligned} \tag{1.1}$$

La mesure de probabilité $\mathbb{P}^\alpha\left[.\,|\, X_0 = a\right]$ sera notée $\mathbb{P}^\alpha_a\left[.\right]$, et $\mathbb{E}^\alpha_a$ désignera la moyenne associée à $\mathbb{P}^\alpha_a$.

Remarque 1.1.2. – Cette chaîne de Markov est un processus de naissance et de mort irréductible.
– La mesure associée à cette chaîne de Markov est notée $\mathbb{P}^\alpha$ pour rappeler qu'elle est définie à partir de la suite $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$.

On définit maintenant ce qu'on appellera "milieu aléatoire" :

Définition 1.1.3. On appellera milieu aléatoire et on notera α une suite de variables aléatoires $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ à valeurs dans $]0,1[^{\mathbb{Z}}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, Q)$. On notera $\mathbb{E}_Q$ la moyenne associée à Q et Var_Q la variance.

Soit $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{F}_2$, pour tout $\omega \in \mathcal{A}_2$ fixé, $\alpha(w) \in]0,1[^{\mathbb{Z}}$ est une réalisation de l'environnement α, pour simplifier les notations on notera $\alpha \in \mathcal{A}_2$ plutôt que $w \in \mathcal{A}_2$. Soit $B \in \mathcal{F}_1$, on écrira par exemple : pour tout $\alpha \in A_2$

$$\mathbb{P}^\alpha\left[B\right] = \cdots\ , \tag{1.2}$$

plutôt que : pour tout $\omega \in A_2$

$$\mathbb{P}^{\alpha(w)}\left[B\right] = \cdots\ . \tag{1.3}$$

On remarque que cette notation est cohérente avec la définition de la M.A.M.I. $(X_n, n \in \mathbb{N})$, en effet pour définir cette chaîne de Markov il faut fixer une suite $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ dans $]0,1[^{\mathbb{Z}}$.

Définissons enfin la M.A.M.A. :

Définition 1.1.4. Une Marche Aléatoire en Milieu Aléatoire est une suite de variables aléatoires $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_1 \times \Omega_2,\ \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2,\ \mathbb{P})$, telle que :
• $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ est la chaîne de Markov définie en 1.1.1 sous la mesure $\mathbb{P}^\alpha$, et
• $\forall A_1 \in \mathcal{F}_1$ et $\forall A_2 \in \mathcal{F}_2$, $\mathbb{P}\left[A_1 \times A_2\right] = \int_{A_2} Q(dw_2) \int_{A_1} \mathbb{P}^{\alpha(w_2)}(dw_1)$.

Dans ce travail de thèse on supposera que les v.a. $(\alpha_i, i \in \mathbb{Z})$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

Remarque 1.1.5. La première constatation est que $\mathbb{P}^\alpha$ est une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, Q)$ on ne peut donc pas exploiter $\mathbb{P}^\alpha$ comme une mesure associée à la chaîne de Markov $(X_n, n \in \mathbb{N})$. Cependant si on fixe ω dans Ω_2, alors $\mathbb{P}^\alpha \equiv \mathbb{P}^{\alpha(w)}$ est la mesure de probabilité associée à la chaîne de Markov définie en 1.1.1. On rappelle que l'on a adopté la notation suivante, soit $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{F}_2$:

$$\omega \in \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{A}_2. \tag{1.4}$$

Dans ce chapitre nous serons amenés à étudier les variables aléatoires suivantes :

Définition 1.1.6. Soient $x \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$:
- $\mathcal{L}(x,n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_k = x\}}$, est le temps local de $(X_k, k \in \mathbb{N})$ au point x pour un temps compris entre 1 et n.
- $\mathcal{L}^*(n) = \max_x \{\mathcal{L}(x,n)\}$ (le maximum des temps locaux).
- $\mathbb{F}(n) = \left\{x \in \mathbb{Z}_+, \mathcal{L}(x,n) = \max_{y \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{L}(y,n)\right\}$ est l'ensemble des lieux favoris de $(X_k, k \in \mathbb{N})$.
- $F(n) = \max\{x \in \mathbb{Z}^+,\ x \in \mathbb{F}(n)\}$ (le plus grand des points favoris de $(X_k, k \in \mathbb{N})$).

Nous serons amenés à comparer certains résultats de la M.A.M.A. à ceux d'une marche aléatoire simple effectuant des sauts de longueur $+1$ ou -1 avec une probabilité égale à $1/2$. Nous noterons M.A.R.S. (Marche Aléatoire Récurrente Simple) cette marche aléatoire.

Le résultat suivant dû à F. Solomon (1975) [95], permet de donner une première classification des comportements que présentent les M.A.M.A. , il s'agit du "critère de récurrence" :

Théorème 1.1.7. *On a :*

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = \infty \quad \mathbb{P}\ p.s.\ , \tag{1.5}$$

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = -\infty \quad \mathbb{P}\ p.s.\ , \tag{1.6}$$

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] = 0 \Rightarrow (X_n,\ n \in \mathbb{N})\ \textit{est récurrente}\ \ \mathbb{P}\ p.s.\ . \tag{1.7}$$

Nous donnerons la preuve de ce résultat dans le chapitre suivant (page 30).

Remarque 1.1.8. Notons $(S_n = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i, n \in \mathbb{N})$ où $(\epsilon_i,\ i \in \mathbb{N})$ est une suite de v.a. i.i.d. On sait que le critère de récurrence pour $(S_n,\ n \in \mathbb{N})$ est que la moyenne d'un incrément soit nulle i.e. $\mathbb{E}[\epsilon_0] = 0$. Ceci semble également vrai pour une M.A.M.A. si on définit les incréments comme étant : $\epsilon_i \equiv \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i},\ i \in \mathbb{Z}$, à la différence près qu'il ne s'agit plus de l'incrément de la M.A.M.A. $(X_j,\ j \in \mathbb{N})$ proprement dite mais d'une variable aléatoire relative au milieu aléatoire $(S_n, n \in \mathbb{N})$. L'hypothèse $\mathbb{E}[\epsilon_0] = 0$ implique donc que le milieu aléatoire ne permet pas à la M.A.M.A. d'avoir une direction (droite ou gauche) privilégiée.

1.2 Les M.A.M.A. récurrentes

Dans ce paragraphe nous travaillerons sous l'hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] = 0. \tag{H.1}$$

1.2.1 Premiers résultats : localisation de la M.A.M.A. (1975-1986)

Y. Sinai [92] (1982) étudie le premier rigoureusement le cas délicat de la M.A.M.A. récurrente à une dimension. Avant lui G. A. Ritter [87] (1976) s' intéresse déjà à cette marche mais ne parvient pas à résoudre complètement le problème. Sinai montre sous l'hypothèse H.1, ainsi que les deux hypothèses suivantes :

$$\mathrm{Var}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] \equiv \sigma^2 > 0\ , \tag{H.2}$$

$$Q\left[\eta \le \alpha_0 \le 1-\eta\right] = 1, \quad 0 < \eta \le \frac{1}{2}\ , \tag{H.3}$$

que la M.A.M.A. a non seulement un comportement sous-diffusif([1]) (en $(\ln n)^2$) mais qu'elle se localise au voisinage d'un point $\tilde{m}_0$ pour un instant n avec une probabilité proche de 1, ce point $\tilde{m}_0$ dépendant uniquement de n ainsi que du milieu α :

[1] on entend sous-diffusif par opposition au comportement d'une marche aléatoire récurrente simple dont le comportement "diffusif" est en $\sqrt{n}$.

Théorème 1.2.1. *Supposons H.1 et H.2 et H.3 pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\delta > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \delta)$ tel que pour tout $n > n_0$, pour tout milieu $\alpha \in C_n$:*

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\left| \frac{X_n}{\ln^2 n} - m_0 \right| > \delta \right] \to 0, \text{ quand } n \to \infty, \tag{1.12}$$

avec $Q[C_n] \geq 1 - \epsilon$ et $m_0 \equiv \frac{\tilde{m}_0}{(\ln n)^2}$.

Nous préciserons dans la partie II de ce travail le rôle de C_n et m_0, nous donnerons une preuve alternative à ce résultat puis nous expliquerons en détail la démarche de Y. Sinai.

Discutons maintenant des hypothèses nécessaires et celles utilisées en pratique pour montrer ce résultat : on sait que la M.A.M.A. est récurrente si et seulement si H.1 est vérifiée, donc H.1 fait partie des hypothèses nécessaires, de même H.2 est une condition nécessaire pour que la M.A.M.A. ne soit pas réduite à une marche aléatoire simple récurrente, en effet :

$$H.2 \Leftrightarrow \mathrm{Var}_Q \left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0} \right] > 0 \Rightarrow Q\left[\alpha_0 = \frac{1}{2}\right] < 1. \tag{1.13}$$

A ces deux hypothèses élémentaires il faut ajouter une hypothèse de régularité supplémentaire. L'hypothèse la plus simple à laquelle on pense est :

$$\mathrm{Var}_Q \left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0} \right] \equiv \sigma^2 < +\infty \ . \tag{H.4}$$

Cette hypothèse permet de faire l'étude d'un potentiel aléatoire associé au milieu, défini comme somme partielle des v.a. $(\ln \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i},\ i \in \mathbb{Z})$ dont la moyenne est nulle et la variance est finie, en utilisant la convergence en distribution vers le mouvement Brownien de ce potentiel rendue possible gâce à H.4. Nous verrons que l'étude de ce potentiel aléatoire, qui sera défini le moment venu, est fondamentale pour l'étude des M.A.M.A. . Cependant à ma connaissance le résultat de Y. Sinai n'a pas été montré sous H.4. C'est en général l'hypothèse forte H.3 qui est la plus souvent utilisée pour étudier les M.A.M.A. récurrentes. Nous utiliserons nous même cette hypothèse dans la troisième partie de cette thèse. Dans le paragraphe 1.2.3 et 1.2.4 nous introduirons deux autres hypothèses de régularité.

Les hypothèses H.1 et H.2 seront appelées **"hypothèses nécessaires"** et les hypothèses H.3, H.4 et H.6 (page 12) **"hypothèses de régularité"**.

Nous appellerons marche de Sinai une M.A.M.A. récurrente c'est à dire sous les hypothèses "nécessaires" H.1 et H.2 avec de plus une hypothèse de régularité.

Revenons maintenant à notre discussion sur la M.A.M.A. , la distribution limite de m_0 est déterminée (indépendamment) par A. Kesten [56] et A. O. Golosov [38] (1986), ils en déduisent le théorème suivant :

Théorème 1.2.2. *Supposons H.1, H.2 et H.3 alors :*

$$\sigma^2 \frac{X_n}{\ln^2 n} \to L, \text{ en distribution} \tag{1.14}$$

où

$$\frac{d\mathbb{P}[L \leq x]}{dx} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8} |x| \right). \tag{1.15}$$

On expose la preuve de H. Kesten dans la Partie II. On note également que M. Nauenberg [77] donne, en 1985, un argument heuristique sur la forme de la distribution limite de m_0 sans parvenir tout à fait au résultat (voir la remarque de H. Kesten [56] page 300).
A. O. Golosov (1986) [37] étudie un cas très similaire de M.A.M.A. sur $\mathbb{Z}^+$ ayant une probabilité non nulle de rester sur place, il aboutit à un résultat similaire à Sinai. Dans [39] Golosov montre, en plus, que $X_n - m_0(\ln n)^2$ (sans facteur de normalisation) a une distribution limite, résultat qu'il généralise dans [38] à la marche sur $\mathbb{Z}$:

Théorème 1.2.3. *Supposons H.1, H.2 et H.3, il existe une suite aléatoire* $(\tilde{m}_0 \equiv m_0(\ln n)^2, n \in \mathbb{N}^*)$ *telle que pour tout* $-\infty < y < \infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[X_n - \tilde{m}_0 \leq y\right] = F(y), \tag{1.16}$$

la fonction de distribution $F(y)$ *étant inconnue.*

Comme nous l'avons déjà fait remarquer la Partie II de ce travail est consacrée, entre autre, aux preuves des théorèmes que l'on vient d'énoncer (excepté le théorème 1.2.3), on invite donc le lecteur à se reporter à cette partie pour plus de détails (voir également O. Zeitouni [117] pour une extension du théorème de Sinai à des milieux stationnaires ergodiques et R. Durett [32] pour une généralisation en dimension quelconque).

1.2.2 Premiers résultats, presque sûrs, sur le maximum et les temps locaux (1986-1988)

P. Deheuvels et P. Révész [29] (1986) s'intéressent au maximum de la M.A.M.A. . Le résultat ci-dessous donne les corrections que l'on doit apporter au résultat de Sinai (qui montre le comportement en $(\ln n)^2$) pour obtenir un résultat presque sûr :

Théorème 1.2.4. *Supposons vérifiées les hypothèses H.1, H.2 et H.3. Pour tout* $\epsilon > 0$*, tout* $p \geq 3$ *et tout* n *assez grand on a :*

$$\frac{\ln^2 n}{(\ln\ln n)^{2+\epsilon}} \leq \max_{0\leq k\leq n} (|X_k|) \leq \left(\ln n \ln\ln n \cdots \ln_{p-1} n (\ln_p n)^{1+\epsilon}\right)^2 \quad \mathbb{P}\ p.s.\ . \tag{1.17}$$

$\ln_p n$ *est le* p *ième itéré du logarithme de* n*.*

ce résultat a été précisé par Y. Hu et Z. Shi ([44]) sous une hypothèse de régularité plus faible que H.3, voir le théorème 1.2.18.

P. Revesz s'intéresse également (voir [84] et [85]) au temps local en 0 :

Théorème 1.2.5. *Sous les hypothèses H.1, H.2 et H.3, pour tout* $\epsilon > 0$ *et tout* n *suffisamment grand :*

$$\mathcal{L}(0,n) \geq \exp\left(\frac{\ln n}{(\ln_2 n)^{1+\epsilon}}\right) \quad \mathbb{P}.p.s.\ , \tag{1.18}$$

$$\mathcal{L}(0,n) \leq \exp\left(\frac{\ln n}{(\ln_2 n)^{1-\epsilon}}\right) \quad i.s.\ \mathbb{P}.p.s.\ , \tag{1.19}$$

$$\mathcal{L}(0,n) \geq e^{\ln n\left(1-\frac{C}{\ln_3 n}\right)} \quad i.s.\ \mathbb{P}.p.s.\ , \tag{1.20}$$

$$\mathcal{L}(0,n) \leq e^{\ln n\left(1-\frac{\theta_n}{\ln_3 n}\right)} \quad \mathbb{P}.p.s.\ , \tag{1.21}$$

où $C \equiv C(\sigma)$*,* $\theta_n = (\ln n)^{-C\frac{\ln_4 n}{(\ln_3 n)^{1/2}}}$*, i.s. signifiant "infiniment souvent".*

Remarque 1.2.6. On rappelle (voir par exemple [85]) que pour une marche aléatoire récurrente simple (M.A.R.S.) on a le résultat suivant, $\forall\epsilon > 0$:

$$\mathcal{L}_s(0,n) \leq (1+\epsilon)\sqrt{2n\ln\ln n} \quad \mathbb{P}.p.s.\ , \tag{1.22}$$

$$\mathcal{L}_s(0,n) \geq (1-\epsilon)\frac{\sqrt{n}}{\ln n \ln\ln n} \quad \mathbb{P}.p.s.\ , \tag{1.23}$$

où $\mathcal{L}_s(0,n)$ est le temps local en 0 de la M.A.R.S. . 1.20 implique que le temps local en 0 de la M.A.M.A. peut être vraiment très grand puisque quasiment de l'ordre de n en comparaison à la M.A.R.S. (1.22) qui est au plus

comme $\sqrt{2n \ln \ln n}$. Par contre 1.19 implique que $\mathcal{L}(0,n)$ peut également être très petit (plus petit que n'importe quelle valeur de la forme n^{δ}, $\delta > 0$) contrairement à $\mathcal{L}_s(0,n)$ qui par 1.23 reste plus grand que $n^{1/2-\delta'}$ pour tout $\delta' > 0$. On en déduit que même si la M.A.M.A. reste localisée (par le théorème de Sinai et le théorème 1.2.4) dans une région de taille de l'ordre $(\ln n)^2$ cela n'implique pas nécessairement que le temps local en 0 soit plus grand que le temps local en 0 d'une M.A.R.S. . Comme on va le voir dans le prochain résultat ainsi que la partie III de cette thèse ceci est dû au fait que la M.A.M.A. privilégie certains points (aléatoires) du réseau (pour un instant donné n).

Le théorème 1.2.5 a été précisé par Y. Hu et Z. Shi [45], voir les théorèmes 1.2.20 et 1.2.21, page 11.

Revesz ([85], [84]) s'intéresse également au maximum des temps locaux de la M.A.M.A. (Définition 1.1.6), il s'interroge sur la $\limsup \frac{\mathcal{L}^*(n)}{n}$, il ne parvient à résoudre le problème que dans le cas particulier suivant :

Théorème 1.2.7. *Supposons que $Q[\alpha_0 = p] = Q[\alpha_0 = 1-p] = 1/2$ où $0 < p < 1/2$, alors il existe une constante $g = g(p) > 0$ telle que :*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathcal{L}^*(n)}{n} \geq g(p) \quad \mathbb{P}\ p.s.\ . \tag{1.24}$$

Remarque 1.2.8. L'hypothèse du théorème 1.2.7 implique bien H.1 :

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{1-p}{p} + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{1-p} = 0, \tag{1.25}$$

et également H.2 et H.3 puisque $0 < p < 1/2$.
On rappelle que pour la M.A.R.S. on a le résultat suivant dû à H. Kesten [53]

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{L}^*(n)}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1 \quad p.s.\ . \tag{1.26}$$

La M.A.M.A. semble donc bien privilégier certains points bien plus que la M.A.R.S. . Nous montrerons (partie III) que ceci est dû à la très forte concentration de la M.A.M.A. dans un petit voisinage du point $\tilde{m}_0$ défini par Y. Sinai ; concentration due à la configuration du milieu sous H.1, H.2 et H.3.

Z. Shi [90] généralise le théorème 1.2.7 dans le cas plus général où seulement H.1, H.2 et H.3 sont vérifiées, voir le théorème 1.2.22.

Enfin énonçons un dernier résultat de Révesz (issu des mêmes références que précédemment) :

Théorème 1.2.9. *Supposons que $Q[\alpha_0 = p] = Q[\alpha_0 = 1-p] = 1/2$ ou $0 < p < 1/2$, alors il existe une constante $\eta \equiv \eta(p) > 0$ telle que*

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[\frac{\mathcal{L}^*(n)}{n} > \eta\right] > 0. \tag{1.27}$$

Nous montrerons un résultat ("trempé") en probabilité sur le maximum des temps locaux dans la partie III.

On note également, dans la même période, les travaux de M. Csörgö, L. Horvàth et P. Révész [86] qui étudient les moments exponentiels de certains temps locaux, résultats que nous exploiterons dans la partie III.

1.2.3 La M.A.M.A. : approche par le calcul stochastique (1986 - 2003)

Un grand nombre de résultats récents (1997 - 2003) sur la M.A.M.A. de Y. Sinai sont dus à Y. Hu et Z. Shi qui utilisent le calcul stochastique pour étudier ce modèle. T. Brox [14] (1986) introduit un processus de diffusion

continu en milieu aléatoire équivalent au modèle de Y. Sinai (voir les deux définitions suivantes). Il montre que le comportement asymptotique de ce processus est le même que celui de Y. Sinai et S. Schumacher [88] (1985) donne un moyen de relier les modèles de type modèle de T. Brox à la marche de Sinai. La méthode du calcul stochastique ne s'applique donc pas directement à la marche de Sinai mais plutôt à un modèle à temps continu que l'on associe à la marche de Sinai par un principe d'invariance (remarque de Z. Shi [91]). En nous inspirant d'un résumé récent de Z. Shi [91] nous décrirons comment on peut générer la marche de Sinai par l'introduction d'un processus stochastique équivalent. Nous donnerons ensuite quelques uns des résultats obtenus par Y. Hu et Z. Shi ([44]-[46]), Y. Hu ([42],[43]) et Z. Shi ([90]) par le biais de cette méthode.

Pour définir l'équivalent continu (temps et espace) de la M.A.M.A., on introduit un potentiel aléatoire :

Définition 1.2.10. Soit $V = (V(x), x \in \mathbb{R})$ un processus stochastique défini sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que $V(0) = 0$, càdlàg (i.e V est continu à droite et possède une limite à gauche) et localement borné.

On peut définir alors :

Définition 1.2.11. Un processus de diffusion $\mathcal{X}_V$ sur un potentiel aléatoire V, est défini comme un processus dont le générateur conditionné par V (*i.e* à V fixé) est donné par :

$$\frac{1}{2}\exp\left(V(x)\right)\frac{d}{dx}\left(\exp(-V(x))\frac{d}{dx}\right),\ x \in \mathbb{R}. \tag{1.28}$$

Remarque

– Le processus $\mathcal{X}_V$ est une solution formelle de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{aligned} d\mathcal{X}_V(t) &= d\beta(t) - \tfrac{1}{2}V'(\mathcal{X}_V(t))dt, \\ \mathcal{X}_V(0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.29}$$

où $(\beta(t), t \geq 0)$ est le mouvement Brownien standard indépendant de V.

– C'est T. Brox [14] qui s'intéresse pour la première fois en 1986 à un tel processus dans le cas particulier où V est le mouvement Brownien standard.

Comment générer la marche de Sinai à partir de $\mathcal{X}_V$?

Introduit comme ceci il est difficile de voir directement le rapport entre ce processus de diffusion $\mathcal{X}_V$ et la marche de Sinai qui nous intéresse ! De la même façon que l'on peut construire pas à pas la M.A.R.S. à partir du mouvement Brownien par l'argument de Skorokhod (voir [12], [28]), S. Shumacher [88] montre qu'il est également possible de construire la marche de Sinai à partir d'un processus de diffusion dont le potentiel aléatoire serait défini de la façon suivante :

Définition 1.2.12. On appellera potentiel aléatoire d'une M.A.M.A. , le processus :

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} \quad \text{si } x \in [n, n+1[\text{ pour } n \in \mathbb{Z}, \tag{1.30}$$

où $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ est une suite de v.a. On adopte de plus les conventions suivantes : $\sum_{i=1}^{0} = 0$, $\sum_{i=-1}^{n} a_i = a_{-1} + \cdots + a_n$, si $n < 0$.

Ainsi $\{V(x), x \in \mathbb{R}\}$ est une fonction en escalier telle que $V(0) = 0$, qui est plate sur tout intervalle $[n, n+1[$ et qui effectue un saut à chaque entier n de hauteur : $V(n) - V(n^-) = V(n) - V(n-1) = \ln \frac{1-\alpha_n}{\alpha_n}$.

Remarque 1.2.13. Si l'on veut générer le modèle de la marche de Y. Sinai on supposera que les variables α_i sont i.i.d. et vérifient les hypothèses H.1, H.2 ainsi qu'une hypothèse de régularité. En fait nous verrons plus tard que Y. Hu et Z. Shi introduisent une hypothèse de régularité que nous n'avons pas encore mentionnée.

Maintenant que le potentiel est choisi on obtient par la défintition 1.2.11 un processus de diffusion $\mathcal{X}_V$ avec V défini en 1.2.12.

Définissons la suite de temps d'arrêt :

Définition 1.2.14.

$$\mu_0 = 0, \tag{1.31}$$

$$\mu_n = \inf\{t > \mu_{n-1},\ |\mathcal{X}_V(t) - \mathcal{X}_V(\mu_{n-1})| = 1\},\ n \geq 1. \tag{1.32}$$

Définissons aussi pour V fixé, A_x la fonction de changement d'échelle du processus $\mathcal{X}_V$:

Définition 1.2.15. :

$$A_x = \int_0^x \exp V(y)dy. \tag{1.33}$$

Avec ces définitions on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_V\left[\mathcal{X}_V(\mu_{n+1}) = i+1 | \mathcal{X}_V(\mu_n) = i\right] = \frac{A_i - A_{i-1}}{A_{i+1} - A_{i-1}} \equiv \alpha_i. \tag{1.34}$$

Autrement dit le processus $(\mathcal{X}_V(\mu_n), n \geq 0)$ est distribué comme la marche de Sinai $(X_n, n \geq 0)$, on obtient par cette construction le théorème de S. Schumacher [88] (1985) :

Théorème 1.2.16. *Soit $(X_n,\ n \geq 0)$ la marche de Sinai et soit V défini en 1.2.12. Si $\mathcal{X}_V$ est un processus de diffusion dans le potentiel V, et si $(\mu_n,\ n \in \mathbb{N})$ est définie comme en 1.2.14, alors $(\mathcal{X}_V(\mu_n); n \geq 0)$ a la même distribution que $(X_n,\ n \geq 0)$.*

Si on veut maintenant "remplacer" le temps aléatoire (μ_n, n) on utilise la :

Proposition 1.2.17. *$(\mu_n - \mu_{n-1}, n \geq 1)$ est une suite de v.a. i.i.d. ayant même distribution que $\inf\{t > 0,\ |B_t| = 1\}$, où B est le mouvement Brownien standard.*

On sait de plus que μ_1 a un moment exponentiel fini tel que : $\mathbb{E}[\mu_1] = 1$, donc par la loi des grands nombres presque sûrement $\frac{\mu_n}{n} \to 1$.

Pour étudier le comportement de la marche de Sinai (par exemple la convergence de $\frac{X_n}{(\ln n)^2}$), on peut donc étudier le processus $\mathcal{X}_V(n)$ par des méthodes de calcul stochastique puis utiliser le théorème 1.2.16 pour conclure sur la marche de Sinai. Nous ne développerons pas ici les méthodes de calculs utilisées par Y. Hu et Z. Shi, pour une première approche voir [91].

L'hypothèse de Y. Hu et Z. Shi.

Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, c'est le potentiel aléatoire de la M.A.M.A. (définition 1.2.12) et non plus directement les probabilités d'aller à gauche $(1 - \alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ et à droite $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ comme on l'a vu définition 1.1.1 que l'on exploite pour définir la M.A.M.A. d'un point de vue du calcul stochastique.
On peut alors facilement généraliser le potentiel défini en 1.2.12 qui conservait strictement les hypothèses H.1 , H.2 ainsi qu'une hypothèse de régularité, par un potentiel aléatoire tel que pour tout n suffisamment grand :

$$Q\left[\sup_{1 \leq |m| \leq n} \left| \sum_{j=1}^{m} \ln \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} - \sigma W(m) \right| \geq C_1 \ln n \right] \leq \frac{C_2}{n^{C_3}}, \tag{H.5}$$

où les C_i $(1 \leq i \leq 3)$ et σ sont des constantes strictement positives et finies et W est le mouvement brownien standard : $(W(y), y \in \mathbb{R})$.

Remarque Par le théorème d'approximation forte de Kolmós-Major-Tusnády (voir [28] par exemple) les hypothèses H.1, H.2 et H.3 impliquent bien l'hypothèse H.5 et les résultats de F. Solomon [95] impliquent la récurrence de la M.A.M.A. définie sur ce potentiel.

Les résultats de Y. Hu et Z. Shi

Nous présentons maintenant quelques uns des résultats des travaux de Y. Hu et Z. Shi. Nous ne donnerons pas de preuve de ces résultats. L'idée générale est la suivante : ils résolvent le problème dans le cas du processus de diffusion que l'on a décrit dans le paragraphe précédent en utilisant des méthodes propres au calcul stochastique (changement d'échelle, théorème de Ray-Knight ...). Puis ils utilisent l'argument de S. Schumacher pour obtenir le résultat pour la marche de Sinai.

Le premier résultat que nous présentons, dû à Y. Hu et Z. Shi [44] (1998) donne le comportement exacte de X_n avec une $\mathbb{P}$ probabilité égale à *un* :

Théorème 1.2.18. *Supposons que l'hypothèse H.5 soit vérifiée on a :*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{(\ln n)^2 \ln\ln\ln n} = \frac{8}{\pi^2\sigma^2} \quad \mathbb{P}.p.s \ , \tag{1.35}$$

on peut remplacer X_n par $\max_{0\le k\le n} |X_k|$ où $\max_{0\le k\le n} X_k$ dans 1.35. On a aussi :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\ln\ln\ln n}{(\ln n)^2} \max_{0\le k\le n} |X_k| = \frac{1}{\sigma^2} \quad \mathbb{P}.p.s \ , \tag{1.36}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{(\ln\ln n)^a}{(\ln n)^2} \max_{0\le k\le n} X_k = \begin{cases} 0 & si\ a\le 0 \\ \infty & sinon \end{cases} \quad \mathbb{P}.p.s. \ . \tag{1.37}$$

Le théorème suivant est également obtenu par Y. Hu [42] :

Théorème 1.2.19. *Soit c une constante fixée : $(0 < c < \frac{\pi^2\sigma^2}{8})$. Supposons que les hypothèses H.1, H.2 et H.3 soient vérifiées, alors $\mathbb{P}$-presque sûrement pour toute fonction continue presque partout telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \exp(-c|x|) < \infty$, on a :*

$$\frac{1}{\ln\ln n} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln k} f\left(\frac{X_k}{\ln^2 k}\right) \xrightarrow[a.s]{} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{L}{\sigma^2}\right)\right). \tag{1.38}$$

L est donnée par 1.15.

Dans [45] (1998) Y. Hu et Z. Shi continuent les travaux de P. Revesz ([84]) sur le temps local de la M.A.M.A. . Les théorèmes 1.2.20 et 1.2.21 suivants précisent donc les résultats obtenus par P. Révesz.

Théorème 1.2.20. *Soit $(a_n)_{n\ge 0}$ une suite croissante de nombres positifs et $x \in \mathbb{Z}$, supposons que l'hypothèse H.5 soit vérifiée alors :*

$$\mathbb{P}\left[\frac{\ln \mathcal{L}(x,n)}{\ln n} \ge 1 - \frac{1}{a_n}; i.s.\right] = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \iff \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n a_n^2 \ln n} \begin{cases} <\infty \\ =\infty \end{cases} . \tag{1.39}$$

Théorème 1.2.21. *Soient $(b_n)_{n\ge 0}$ une suite croissante de nombres positifs et $x \in \mathbb{Z}$, supposons que l'hypothèse H.5 soit vérifiée alors :*

$$\mathbb{P}\left[\frac{\ln \mathcal{L}(x,n)}{\ln n} \le \frac{1}{b_n}; i.s.\right] = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \iff \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n b_n \ln n} \begin{cases} <\infty \\ =\infty \end{cases} . \tag{1.40}$$

Z. Shi [90] (1998) montre dans le cas général le résultat proposé par Révesz sur le maximum des temps locaux :

Théorème 1.2.22. *Supposons vérifiées les hypothèses H.1, H.2 et H.3, alors il existe une constante $c_2 > 0$ telle que :*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathcal{L}^*(n)}{n} \ge c_2 \quad \mathbb{P}.p.s. \ . \tag{1.41}$$

Remarque 1.2.23. Z. Shi montre que le comportement pour le processus de diffusion (en milieu aléatoire) est sensiblement différent.

En ce qui concerne la limite inférieure de $\mathcal{L}^*(n)$ le problème n'a pas encore été résolu à ma connaissance, cependant la conjecture suivante a été proposée par Revesz [85] :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathcal{L}^*(n)(\ln\ln n)^2}{n} = 0 \quad \mathbb{P}.p.s. \ , \tag{1.42}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathcal{L}^*(n)(\ln\ln n)^3}{n} = +\infty \quad \mathbb{P}.p.s. \tag{1.43}$$

On énonce également le résultat suivant, toujours dû à Y. Hu et Z. Shi, sur la localisation du lieu favori de la marche [46] (2000) $F(n)$ (voir la définition 1.1.6) :

Théorème 1.2.24. *Supposons H.1, H.2 et H.3, alors*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{F(n)}{(\ln n)^2 \ln\ln\ln n} = \frac{8}{\pi^2\sigma^2} \quad \mathbb{P}.p.s \ , \tag{1.44}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{(\ln\ln n)^a F(n)}{(\ln n)^2} = \begin{cases} 0 & si\ a \leq 2 \\ \infty & sinon \end{cases} \quad \mathbb{P}.p.s \ . \tag{1.45}$$

Remarque 1.2.25. On remarque que le comportement asymptotique avec probabilité 1 de $F(n)$ est le même que celui de X_n on rappelle en effet (théorème 1.2.18) que :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{(\ln n)^2 \ln\ln\ln n} = \frac{8}{\pi^2\sigma^2} \quad \mathbb{P}.p.s \ . \tag{1.46}$$

Une conséquence des résultats que l'on obtient dans la troisième partie de cette thèse montre que $\frac{F(n)}{(\ln n)^2}$ et $\frac{X_n}{(\ln n)^2}$ ont même distribution limite.

Avant de terminer ce paragraphe sur les M.A.M.A. récurrentes nous souhaitons revenir sur les différentes hypothèses de régularité :

1.2.4 A propos des hypothèses H.3, H.5 et H.6

On commence par introduire l'hypothèse de régularité H.6 qui sera utilisée dans la seconde partie de cette thèse soit $\kappa^+ \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa \ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}}\right] < \infty, \tag{H.6}$$

pour tout $\kappa \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\kappa| < k^+$. Par le théorème de J. Kolmós, P. Major et G. Tusnády (voir par exemple [28] page 107) on a :

$$H.1,\ H.2,\ H.6 \Rightarrow H.5 \ , \tag{1.47}$$

de plus :

$$H.3 \Rightarrow H.6 \ . \tag{1.48}$$

en effet pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$:

$$Q\left[\eta < \alpha_0 < 1-\eta\right] = 1 \Rightarrow \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa \ln \frac{1-\eta}{\eta}}\right] \leq \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \leq \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa \ln \frac{\eta}{1-\eta}}\right] < \infty \ . \tag{1.49}$$

Ainsi l'hypothèse de régularité la plus faible dans notre discussion sur la marche de Sinai est H.5 utilisée par Y. Hu et Z. Shi. La plus fréquemment utilisée est bien entendu H.3, c'est d'ailleurs celle-ci que Y. Sinai exploite

dans [92]. A ma connaissance aucun résultat sur la marche de Sinai n'a été montré avec, uniquement, l'existence du second moment de la v.a. $\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}$ en plus des hypothèses nécessaires. Dans la seconde partie nous donnerons une preuve alternative au résultat de Y. Sinai sous H.1, H.2 et H.6, nous verrons que cette hypothèse nous permet d'avoir un contrôle suffisant sur les v.a. $\left(\ln \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}, i \in \mathbb{Z}\right)$, c'est à dire tel que la fluctuation d'une de ces variables aléatoires ne vienne pas "tuer" les fluctuations d'une somme partielle de ces mêmes v.a. .
On remarque que toute hypothèse de type H.6 ou H.3 rend l'hypothèse H.4 : $\mathbb{E}_Q\left[\left(\ln \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\right)^2\right] < +\infty$ obsolète.
On donne maintenant très sommairement un historique de l'étude des M.A.M.A. transitoires :

1.3 Les M.A.M.A. transitoires

Comportements balistiques et sous-balistiques (1975)

Par le théorème 1.1.7 on sait que la condition nécessaire et suffisante pour que la marche aléatoire en milieu aléatoire soit transitoire est :

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] \neq 0.$$

Le théorème suivant dû à F. Solomon ([95]) donne une première précision sur le comportement général des M.A.M.A. transitoires :

Théorème 1.3.1. *On a :*

$$\mathbb{E}_Q\left[\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \frac{1-\mathbb{E}_Q\left[\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right]}{1+\mathbb{E}_Q\left[\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right]} \quad \mathbb{P}\ p.s\ , \tag{1.50}$$

$$\mathbb{E}_Q\left[\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right] < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = -\frac{1-\mathbb{E}_Q\left[\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right]}{1-\mathbb{E}_Q\left[\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right]} \quad \mathbb{P}\ p.s\ , \tag{1.51}$$

$$\frac{1}{\mathbb{E}_Q\left[\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right]} \leq 1 \leq \mathbb{E}_Q\left[\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0 \quad \mathbb{P}\ p.s\ . \tag{1.52}$$

Dans les cas 1.50 et 1.51 on obtient un résultat similaire à une marche aléatoire simple dont la moyenne des incréments est non nulle, on dit que ces M.A.M.A. sont transitoires balistiques car si on définit la vitesse comme étant le rapport de X_n sur n, il apparaît que cette vitesse est $\mathbb{P}.p.s.$ non nulle.
Dans le cas 1.52 on distingue le cas récurrent, c'est à dire si $\mathbb{E}\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] = 0$, du cas transitoire sous balistique si $\mathbb{E}\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] \neq 0$.

Kesten Kozlov et Spizer [57] (1975) montrent, dans le cas sous-balisique $\left(\mathbb{E}\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] < 0 \text{ et } \mathbb{E}_Q\left[\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] \geq 1\right)$ avec l'hypothèse supplémentaire que la distribution de $\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}$ ne soit pas arithmétique, que le comportement asymptotique de ces M.A.M.A. est caractérisé par une valeur $\kappa > 0$ qui vérifie :

$$\mathbb{E}_Q\left[\left(\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right)^{\kappa}\right] = 1. \tag{1.53}$$

Résultats de grande déviation (1994-2000)

On distingue deux types de résultats : ceux à milieu fixé (dit "quenched" i.e trempé) et ceux à milieu non fixé (dit "annealed" i.e recuit). Dans le cas quenched le résultat de grande déviation est donné pour la mesure $\mathbb{P}^\alpha$, Q presque sûrement voir les travaux de H. den Hollander et A. Greven [40] et de N. Gantert et O. Zeitouni [120]. Pour le cas annealed le résultat de grande déviation est donné pour la mesure de probabilité totale $\mathbb{P}$ voir pour cela les travaux de F. Comets N. Gantert et O. Zeitouni [26], de A. Dembo Y. Perez et O. Zeitouni [119]

et A. Pisztora, T. Povel et O. Zeitouni [121]. Pour une revue de ces résultats voir les notes de O. Zeitouni et N. Gantert [36], de O. Zeitouni [117] et également l'introduction de la thèse de M. Taleb [107].
Pour terminer ce bref paragraphe sur les marches transitoires on propose d'énoncer le résultat suivant sur le temps local des M.A.M.A. .

Un résultat presque sûr pour le temps local d'une M.A.M.A. transitoire (2000).

Le résultat suivant est dû à N. Gantert et Z. Shi [35] :

Théorème 1.3.2. *Supposons que*

$$-\infty < \mathbb{E}\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] < 0 \ , \tag{1.54}$$

qu'il existe $\kappa > 0$ tel que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right)^{\kappa}\right] = 1 \ , \tag{1.55}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right)^{\kappa} \ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] < \infty \ , \tag{1.56}$$

et que la distribution de $\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}$ ne soit pas arithmétique, alors si $0 < \kappa \leq 1$, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathcal{L}^*(n)}{n} = c, \ \mathbb{P}.p.s. \ , \tag{1.57}$$

si $\kappa > 1$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathcal{L}^*(n)}{n} = 0, \ \mathbb{P}.p.s. \ . \tag{1.58}$$

On remarque que 1.57 est similaire au cas récurrent (théorème 1.2.7). Afin de pouvoir bien distinguer les deux cas il serait intéressant de déterminer la limite inférieure de $\mathcal{L}^*(n)$ pour ces deux M.A.M.A. .

1.3.1 Autres modèles de M.A.M.A. unidimensionnels.

Dans cet historique on s'est uniquement préoccupé des M.A.M.A. effectuant des sauts sur ses plus proches voisins, on voudrait dire quelques mots sur les autres modèles. L'équivalent continu de la M.A.M.A. a déjà été évoqué au paragraphe concernant la marche récurrente. Comme dans le cas de la M.A.M.A. on distingue les processus de diffusion en milieu aléatoire récurrent et transitoire, pour le cas récurrent voir par exemple l'article fondateur de T. Brox [14] ainsi que les travaux de Y. Hu et Z. Shi évoqués dans le paragraphe sur les M.A.M.A. récurrentes. Pour le cas transitoire je recommande la thèse de M. Taleb [107] qui offre, entre autre, un résumé sur les résultats obtenus jusqu'à nos jours (notre bibliographie comporte également quelques références sur cette thématique).
Notons également le cas d'une M.A.M.A. effectuant des sauts bornés dont un critère de récurrence a été déterminé par E. S. Key [58] (1984) voir également les travaux de E. Andjel [5] (1988) sur le même type de problèmes.

Chapitre 2

Résultats Elémentaires sur la M.A.M.A. et la M.A.M.I. Unidimensionnelle

Dans ce chapitre on présente les résultats obtenus essentiellement par K. L. Chung [23] qui nous permettront d'étudier la M.A.M.A. sous la mesure $\mathbb{P}^\alpha$ c'est à dire lorsque la M.A.M.A. est réduite à la chaîne de Markov que nous avons définie au début du chapitre précédent (la M.A.M.I.). C'est un chapitre "formulaire" qui permettra au lecteur d'avoir à portée de main les résultats et preuves des outils nécessaires à l'étude de la M.A.M.A. à milieu fixé. En fin de chapitre on montre le résultat de F. Solomon [95] qui donne le critère de récurrence de cette M.A.M.A. .

2.1 Marche Aléatoire en Milieu Inhomogène (M.A.M.I.)

Nous commencerons ce paragraphe en rappelant la définition d'une marche aléatoire en milieu inhomogène notée M.A.M.I. .

Définition 2.1.1. Soit $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ une suite de nombres réels strictement compris entre 0 et 1, on appellera Marche Aléatoire en Milieu Inhomogène (M.A.M.I.) une chaîne de Markov Homogène $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}^\alpha)$, ayant pour matrice de transition : pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^\alpha\left[X_n = i+1 | X_{n-1} = i\right] = \alpha_i, \\ &\mathbb{P}^\alpha\left[X_n = i-1 | X_{n-1} = i\right] = 1 - \alpha_i \equiv \beta_i. \end{aligned} \tag{2.1}$$

La mesure de probabilité $\mathbb{P}^\alpha\left[.\,|\, X_0 = a\right]$ sera notée $\mathbb{P}^\alpha_a\left[.\right]$, et $\mathbb{E}^\alpha_a$ désignera la moyenne associée à $\mathbb{P}^\alpha_a$.

On adoptera pour ce paragraphe la notation suivante :

$$(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z}) \in]0,1[^{\mathbb{Z}} \Longleftrightarrow \alpha \in \Omega_2\ . \tag{2.2}$$

cette notation est cohérente avec celle adoptée suite à la définition 1.1.3 où Ω_2 est l'ensemble de toutes les configurations possibles de la suite $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$.

Dans le paragraphe suivant nous allons donner les expressions explicites de probabilités d'événements écrits en fonction des temps d'arrêts définis ci-dessous (résultats de K. L. Chung [23]), ainsi que les moments de temps locaux arrêtés.

Définition 2.1.2. Soient x, a et b dans $\mathbb{Z}$, $a \neq b$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\bullet \quad T_b^a = \begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N}^*,\ X_k = b \text{ avec } X_0 = a\}, \\ +\infty, \text{ si un tel k n'existe pas.} \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\bullet \quad T_1^{x\to x} \equiv T^{x\to x} = T_x^x = \begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N}^*,\ X_k = x \text{ avec } X_0 = x\}, \\ +\infty, \text{ si un tel k n'existe pas.} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$T_n^{x\to x} = \begin{cases} \inf\{k > T_{n-1}^{x\to x}\ , X_k = x\}, \\ +\infty, \text{ si un tel k n'existe pas.} \end{cases} \tag{2.5}$$

On pose $T_0^{x\to x} = 0$.

2.1.1 Expressions explicites.

Pour le lemme suivant on s'est inspiré de K. L. Chung [23] (pages 71-74), voir aussi P. Revesz [85] (pages 273-274) :

Lemme 2.1.3. *Soient $a, b, x \in \mathbb{Z}$ tels que $a < x < b$ pour tout $\alpha \in \Omega_2$:*

$$\mathbb{P}_x^\alpha\left[T_a^x > T_b^x\right] = \frac{\sum_{i=a+1}^{x-1} \frac{\beta_{a+1}}{\alpha_{a+1}} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i} + 1}{\sum_{i=a+1}^{b-1} \frac{\beta_{a+1}}{\alpha_{a+1}} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i} + 1}\ , \tag{2.6}$$

de même :

$$\mathbb{P}_x^\alpha\left[T_a^x < T_b^x\right] = \frac{\sum_{i=x+1}^{b-1} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cdots \frac{\alpha_{b-1}}{\beta_{b-1}} + 1}{\sum_{i=a+1}^{b-1} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cdots \frac{\alpha_{b-1}}{\beta_{b-1}} + 1}\ . \tag{2.7}$$

Avec la convention $\sum_{i=l}^k = 0$ si $k < l$.

Preuve.
Prenons $a < x < b$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x^\alpha\left[T_a^x > T_b^x\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x^\alpha\left[T_b^x = n,\ T_a^x > T_b^x\right]\ , \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x^\alpha\left[\bigcap_{l=1}^{n-1}\{X_l \neq b,\ X_l \neq a\},\ X_n = b,\ X_n \neq a\right]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pour $n > 1$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_x^\alpha\left[\bigcap_{l=1}^{n-1}\{X_l \neq b,\ X_l \neq a\},\ X_n = b,\ X_n \neq a\right] \\ = \ & \mathbb{P}_x^\alpha\left[\bigcap_{l=1}^{n-1}\{X_l \neq b,\ X_l \neq a\},\ X_n = b,\ X_n \neq a,\ X_1 = x+1\right] \\ + \ & \mathbb{P}_x^\alpha\left[\bigcap_{l=1}^{n-1}\{X_l \neq b,\ X_l \neq a\},\ X_n = b,\ X_n \neq a,\ X_1 = x-1\right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} = \ & \alpha_x \mathbb{P}^\alpha\left[\bigcap_{l=2}^{n-1}\{X_l \neq b,\ X_l \neq a\},\ X_n = b,\ X_n \neq a \,\middle|\, X_1 = x+1,\ X_0 = x\right](1-\delta_b^{x-1}) \\ + \ & \beta_x \mathbb{P}^\alpha\left[\bigcap_{l=1}^{n-1}\{X_l \neq b,\ X_l \neq a\},\ X_n = b,\ X_n \neq a \,\middle|\, X_1 = x-1,\ X_0 = x\right](1-\delta_a^{x-1})\ , \end{aligned} \tag{2.10}$$

où $\delta_{\cdot}^{\cdot}$ est le symbole de Kronecker, par la propriété de Markov on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x^\alpha\left[\bigcap_{l=1}^{n-1}\{X_l\neq b,\ X_l\neq a\},\ X_n=b,\ X_n\neq a\right]\\
=\ &\alpha_x\mathbb{P}^\alpha\left[\bigcap_{l=2}^{n-1}\{X_l\neq b,\ X_l\neq a\},\ X_n=b,\ X_n\neq a\middle| X_1=x+1\right](1-\delta_b^{x-1})\\
+\ &\beta_x\mathbb{P}^\alpha\left[\bigcap_{l=1}^{n-1}\{X_l\neq b,\ X_l\neq a\},\ X_n=b,\ X_n\neq a\middle| X_1=x-1\right](1-\delta_a^{x-1})\ ,
\end{aligned}\tag{2.11}$$

l'invariance par translation dans le temps implique donc :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x^\alpha\left[\bigcap_{l=1}^{n-1}\{X_l\neq b,\ X_l\neq a\},\ X_n=b,\ X_n\neq a\right]\\
=\ &\alpha_x\mathbb{P}_{x+1}^\alpha\left[\bigcap_{l=1}^{n-2}\{X_l\neq b,\ X_l\neq a\},\ X_{n-1}=b,\ X_{n-1}\neq a\right](1-\delta_b^{x-1})\\
+\ &\beta_x\mathbb{P}_{x-1}^\alpha\left[\bigcap_{l=1}^{n-2}\{X_l\neq b,\ X_l\neq a\},\ X_{n-1}=b,\ X_{n-1}\neq a\right](1-\delta_a^{x-1})\ ,
\end{aligned}\tag{2.12}$$

ainsi, en reprenant les notations avec les temps d'arrêts, pour tout n>1 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x^\alpha\left[T_b^x=n,T_a^x>T_b^x\right] &= \alpha_x\mathbb{P}_{x+1}^\alpha\left[T_b^{x+1}=n-1,\ T_a^{x+1}>T_b^{x+1}\right](1-\delta_b^{x-1})\\
&+ \beta_x\mathbb{P}_{x-1}^\alpha\left[T_b^{x-1}=n-1,\ T_a^{x-1}>T_b^{x-1}\right](1-\delta_a^{x-1})\ .
\end{aligned}\tag{2.13}$$

Pour $n=1$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x^\alpha\left[\bigcap_{l=1}^{n-1}\{X_l\neq b,\ X_l\neq a\},\ X_n=b,X_n\neq a\right]\\
=\ &\alpha_x\mathbb{P}_x^\alpha\left[X_1=b,\ X_1\neq a,\ X_1=x+1\right]+\beta_x\mathbb{P}_x^\alpha\left[X_1=b,\ X_1\neq a,\ X_1=x-1\right]\\
=\ &\alpha_x\delta_b^{x+1}\ .
\end{aligned}\tag{2.14}$$

En remplaçant 2.13 et 2.14 dans 2.8, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x^\alpha\left[T_a^x>T_b^x\right] &= \alpha_x\delta_b^{x+1}+\alpha_x(1-\delta_b^{x-1})\sum_{n=2}^{\infty}\mathbb{P}_{x+1}^\alpha\left[T_b^{x+1}=n-1,T_a^{x+1}>T_b^{x+1}\right]\\
&+ \beta_x(1-\delta_a^{x-1})\sum_{n=2}^{\infty}\mathbb{P}_{x-1}^\alpha\left[T_b^{x-1}=n-1,T_a^{x-1}>T_b^{x-1}\right]\ ,
\end{aligned}\tag{2.15}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x^\alpha\left[T_a^x>T_b^x\right] &= \alpha_x\mathbb{P}_{x+1}^\alpha\left[T_a^{x+1}>T_b^{x+1}\right](1-\delta_{b-1}^x)\\
&+ \beta_x\mathbb{P}_{x-1}^\alpha\left[T_a^{x-1}>T_b^{x-1}\right](1-\delta_{a+1}^x)+\alpha_x\delta_{b-1}^x.
\end{aligned}\tag{2.16}$$

On remarque que résoudre l'équation 2.16 revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x^\alpha\left[T_a^x>T_b^x\right]=\alpha_x\mathbb{P}_{x+1}^\alpha\left[T_a^{x+1}>T_b^{x+1}\right]+\beta_x\mathbb{P}_{x-1}^\alpha\left[T_a^{x-1}>T_b^{x-1}\right]\ ,\\
&\mathbb{P}_b^\alpha\left[T_a^b>T_b^b\right]=1\quad \mathbb{P}_a^\alpha\left[T_a^a<T_b^a\right]=0.
\end{aligned}\tag{2.17}$$

En effet, prenons $a+1<x<b-1$, alors 2.16 est exactement la première équation du système 2.17. Si on prend maintenant $x=a+1$, (par hypothèse $b>a+1$) alors 2.16 s'écrit :

$$\mathbb{P}_{a+1}^\alpha[T_a^{a+1}>T_b^{a+1}] = \alpha_{a+1}\mathbb{P}_{a+1}^\alpha[T_a^{a+2}>T_b^{a+2}]\tag{2.18}$$

$$\equiv \alpha_{a+1}\mathbb{P}_{a+2}^\alpha[T_a^{a+2}>T_b^{a+2}]+\beta_{a+1}\mathbb{P}_a^\alpha[T_a^a<T_b^a]\ ,\tag{2.19}$$

car $\mathbb{P}_a^\alpha[T_a^a < T_b^a] = 0$ dans 2.17, on effectue le même raisonnement pour $x = b - 1$.

Remarque Le système 2.17 se comprend intuitivement : la probabilité que partant de l'état x la marche rencontre le point b avant le point a est égale à la probabilité que (partant de x) la marche atteigne le point $x+1$ (qui est égal à α_x) multipliée par la probabilité que partant de $x+1$ la marche rencontre b avant a plus la probabilité de l'événement symétrique. De plus si $x = b$ l'événement est réalisé ainsi $\mathbb{P}_b^\alpha[T_a^b > T_b^b] = 1$ et inversement $\mathbb{P}_a^\alpha[T_a^a > T_b^a] = 0$.

On va maintenant résoudre le système 2.17, notons $\mathbb{P}_y^\alpha(T_a^y > T_b^y) = u_y$, avec cette notation le système 2.17 s'écrit :

$$\begin{aligned} u_y &= \alpha_y u_{y+1} + \beta_y u_{y-1} \quad a < y < b \ , \\ u_a &= 0, \quad u_b = 1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

L'équation 2.20, avec la condition $u_a = 0$, donne alors :

$$u_{y+1} - u_y = \frac{\beta_y}{\alpha_y} \cdots \frac{\beta_{a+1}}{\alpha_{a+1}} (u_{a+1} - 0) \ , \tag{2.21}$$

en sommant 2.21 pour tout $a + 1 \leq y \leq b - 1$, on obtient :

$$u_{a+1} = \frac{1}{1 + \sum_{y=a+1}^{b-1} \frac{\beta_y}{\alpha_y} \cdots \frac{\beta_{a+1}}{\alpha_{a+1}}}. \tag{2.22}$$

En sommant maintenant 2.21 sur tout $a + 1 \leq y \leq x - 1$ on obtient :

$$u_x - u_{a+1} = \sum_{y=a+1}^{x-1} \frac{\beta_y}{\alpha_y} \cdots \frac{\beta_{a+1}}{\alpha_{a+1}} u_{a+1} \ . \tag{2.23}$$

2.22 et 2.23 impliquent alors le résultat suivant :

$$\mathbb{P}_x^\alpha \left[T_a^x > T_b^x\right] = \frac{\sum_{i=a+1}^{x-1} \frac{\beta_{a+1}}{\alpha_{a+1}} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i} + 1}{\sum_{i=a+1}^{b-1} \frac{\beta_{a+1}}{\alpha_{a+1}} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i + 1} + 1} \ . \tag{2.24}$$

ce qui donne 2.6, on effectue les mêmes opérations pour trouver 2.7. ■

Nous verrons que ce simple lemme nous sera très utile tout au long de cette thèse. On remarque de plus que pour tout a, x, b dans $\mathbb{Z}$, si $a \neq b$ alors $T_a^x \neq T_b^x$, donc :

$$\mathbb{P}_x^\alpha \left[T_a^x \leq T_b^x\right] = \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_a^x < T_b^x\right] \ . \tag{2.25}$$

De manière similaire on peut faire le calcul de la moyenne du temps défini ci-dessous :

Définition 2.1.4. Soient $a,\ m,\ b \in \mathbb{Z}$, tels que $a < m < b$:

$$T_a^m \wedge T_b^m = \inf\{t > 0,\ X_t = a \text{ ou } X_t = b \text{ avec } X_0 = m\}$$

c'est le temps nécessaire à la marche pour atteindre l'un des deux points a ou b partant de m.

Remarque 2.1.5. $T_a^m \wedge T_b^m$ est un temps d'arrêt, comme minimum des deux temps d'arrêts T_a^m et T_b^m.

Montrons dans un premier temps que le moment d'ordre $l \in \mathbb{N}^*$ du temps défini ci-dessus vérifie l'équation du lemme suivant :

Lemme 2.1.6. *Soient $a,\ m,\ b$ dans $\mathbb{Z}$ tels que $a < m < b$ et $l \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\alpha \in \Omega_2$ on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_m^\alpha\left[(T_a^m \wedge T_b^m)^l\right] &= \sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}\left(\alpha_m \mathbb{E}_{m+1}^\alpha\left[\left(T_a^{m+1}\wedge T_b^{m+1}\right)^j\right]\right.\\ &+ \left.\beta_m \mathbb{E}_{m-1}^\alpha\left[\left(T_a^{m-1}\wedge T_b^{m-1}\right)^j\right]\right)\ ,\end{aligned}$$

avec $\mathbb{E}_a^\alpha\left[(T_a^a \wedge T_b^a)^l\right] = \mathbb{E}_b^\alpha\left[\left(T_a^b \wedge T_b^b\right)^l\right] = 0.$

Preuve.
La preuve ne présente aucune difficulté on utilise les mêmes idées que pour la preuve du lemme 2.1.3, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_m^\alpha\left[(T_a^m \wedge T_b^m)^l\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} k^l \mathbb{P}_m^\alpha\left[T_a^m \wedge T_b^m = k\right]\\ &= \beta_m\delta_a^{m-1} + \alpha_m\delta_b^{m+1} + \sum_{k=2}^{\infty} k^l \mathbb{P}_m^\alpha\left[T_a^m \wedge T_b^m = k\right] \qquad (2.26)\\ &= \beta_m\delta_a^{m-1} + \alpha_m\delta_b^{m+1}\\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} k^l\left(\alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha\left[T_a^{m+1}\wedge T_b^{m+1} = k-1\right] + \beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha\left[T_a^{m-1}\wedge T_b^{m-1} = k-1\right]\right)\ . \qquad (2.27)\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue par la propriété de Markov et l'invariance par translation dans le temps, on en déduit :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_m^\alpha\left[(T_a^m \wedge T_b^m)^l\right]\\ &= \beta_m\delta_a^{m-1} + \alpha_m\delta_b^{m+1}\\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^l\left(\alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha\left[T_a^{m+1}\wedge T_b^{m+1} = k\right] + \beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha\left[T_a^{m-1}\wedge T_b^{m-1} = k\right]\right)\ . \qquad (2.28)\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^l\left(\alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha\left[T_a^{m+1}\wedge T_b^{m+1} = k\right] + \beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha\left[T_a^{m-1}\wedge T_b^{m-1} = k\right]\right)\\ &= \sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}\sum_{k=1}^{\infty} k^j\left(\alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha\left[T_a^{m+1}\wedge T_b^{m+1} = k\right] + \beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha\left[T_a^{m-1}\wedge T_b^{m-1} = k\right]\right) \qquad (2.29)\\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha\left[T_a^{m+1}\wedge T_b^{m+1} = k\right] + \beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha\left[T_a^{m-1}\wedge T_b^{m-1} = k\right]\right)\ ,\end{aligned}$$

or on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}_{m+1}^\alpha\left[T_a^{m+1}\wedge T_b^{m+1} = k\right] = 1 - \mathbb{P}_{m+1}^\alpha\left[T_a^{m+1}\wedge T_b^{m+1} = 0\right] = 1 - \delta_b^{m+1}\ , \qquad (2.30)$$

où $\delta_{\cdot}^{\cdot}$ est le symbole de Kronecker, de même :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}_{m-1}^\alpha\left[T_a^{m-1}\wedge T_b^{m-1} = k\right] = 1 - \delta_a^{m-1}\ . \qquad (2.31)$$

En remplaçant 2.30 et 2.31 dans 2.29 on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^l\left(\alpha_m\mathbb{P}^{\alpha}_{m+1}\left[T_a^{m+1}\wedge T_b^{m+1}=k\right]+\beta_m\mathbb{P}^{\alpha}_{m-1}\left[T_a^{m-1}\wedge T_b^{m-1}=k\right]\right) \tag{2.32}$$

$$=\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}\sum_{k=1}^{\infty}k^j\left(\alpha_m\mathbb{P}^{\alpha}_{m+1}\left[T_a^{m+1}\wedge T_b^{m+1}=k\right]+\beta_m\mathbb{P}^{\alpha}_{m-1}\left[T_a^{m-1}\wedge T_b^{m-1}=k\right]\right) \tag{2.33}$$

$$+\quad \alpha_m(1-\delta_b^{m+1})+\beta_m(1-\delta_a^{m-1}). \tag{2.34}$$

En remplaçant cette dernière expression dans 2.28 on obtient le lemme. ■

On donne maintenant une expression explicite pour le premier moment de $T_a^m\wedge T_b^m$:

Lemme 2.1.7. *Soient $a,\ m,\ b$ dans $\mathbb{Z}$ tels que $a<m<b$, pour tout $\alpha\in\Omega_2$ on a :*

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{a+1}\left[T_a^{a+1}\wedge T_b^{a+1}\right]=\frac{\sum_{l=a+1}^{b-1}\sum_{j=l}^{b-1}\frac{1}{\alpha_l}F(j,l)}{\sum_{j=a+1}^{b-1}F(j,a)+1}\ , \tag{2.35}$$

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{m}\left[T_a^{m}\wedge T_b^{m}\right]=\mathbb{E}^{\alpha}_{a+1}\left[T_a^{a+1}\wedge T_b^{a+1}\right]\left(1+\sum_{j=a+1}^{m-1}F(j,a)\right)-\sum_{l=a+1}^{m-1}\sum_{j=l}^{m-1}\frac{1}{\alpha_l}F(j,l)\ , \tag{2.36}$$

où

$$F(j,l)=\frac{\beta_{l+1}}{\alpha_{l+1}}\cdots\frac{\beta_j}{\alpha_j}\ .$$

Preuve.
En utilisant la notation suivante : $u_j=\mathbb{E}^{\alpha}\left[T_a^j\wedge T_b^j\right]$, on obtient du lemme 2.1.6 (en prenant $l=1$) que u_j est solution du système :

$$\begin{cases} u_j=1+\alpha_ju_{j+1}+\beta_ju_{j-1}\ \ a<j<b\ ,\\ u_a=0\quad u_b=0\ . \end{cases} \tag{2.37}$$

Résolvons le système 2.37, on a :

$$u_j=1+\alpha_ju_{j+1}+\beta_ju_{j-1}\quad\Leftrightarrow\quad u_{j+1}-u_j=-\frac{1}{\alpha_j}+\frac{\beta_j}{\alpha_j}(u_j-u_{j-1})\ , \tag{2.38}$$

ainsi :

$$u_{j+1}-u_j=-\left(\frac{1}{\alpha_j}+\frac{1}{\alpha_{j-1}}\frac{\beta_j}{\alpha_j}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{a+1}}\frac{\beta_{a+2}}{\alpha_{a+2}}\cdots\frac{\beta_j}{\alpha_j}\right)+\prod_{i=a+1}^{j}\frac{\beta_i}{\alpha_i}u_{a+1}\ . \tag{2.39}$$

En sommant 2.39 pour tout $a+1\le j\le b-1$ on obtient :

$$-u_{a+1}=-\sum_{l=a+1}^{b-1}\sum_{j=a+1}^{l}\frac{1}{\alpha_l}F(j,l)+\sum_{j=a+1}^{b-1}F(j,a)u_{a+1}\ , \tag{2.40}$$

ce qui donne 2.35 puisque :

$$\sum_{j=a+1}^{b-1}\sum_{l=a+1}^{j}\frac{1}{\alpha_l}F(j,l)=\sum_{l=a+1}^{b-1}\sum_{j=l}^{b-1}\frac{1}{\alpha_l}F(j,l)\ . \tag{2.41}$$

En sommant maintenant 2.39 pour tout $a+1\le j\le m-1$ on obtient 2.36. ■

On déduit des lemmes 2.1.3 et 2.1.7 :

Lemme 2.1.8. *Soient $a,\ b,\ x \in \mathbb{Z}$ tels que $a < x < b$, pour tout $\alpha \in \Omega_2$ on a :*

$$\lim_{a\to-\infty} \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_a^x > T_b^x\right] = \mathbb{P}_x^\alpha \left[\bigcup_n \{X_n = b\}\right] \ , \tag{2.42}$$

$$\lim_{b\to\infty} \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_a^x < T_b^x\right] = \mathbb{P}_x^\alpha \left[\bigcup_n \{X_n = a\}\right] \ , \tag{2.43}$$

$$\textit{Si } \mathbb{E}_x^\alpha \left[T_b^x\right] < \infty \textit{ alors } \lim_{a\to-\infty} \mathbb{E}_x^\alpha \left[T_b^x \mathbb{I}_{T_a^x > T_b^x}\right] = \mathbb{E}_x^\alpha \left[T_b^x\right] \ . \tag{2.44}$$

Preuve.
Montrons 2.44, pour tout $n > 0$, par la propriété de Markov forte (voir Annexe A page 34) on a :

$$\mathbb{P}_x^\alpha \left[T_b^x = n\right] \ = \ \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_b^x = n,\ T_a^x > T_b^x\right] + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_a^x = k,\ T_a^x < T_b^x\right] \mathbb{P}_a^\alpha \left[T_b^a = n-k\right] \ , \tag{2.45}$$

on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_a^x = k,\ T_a^x < T_b^x\right] \mathbb{P}_a \left[T_b^a = n-k\right] \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_a^x = k\right] \ , \tag{2.46}$$

de plus pour tout $n > 0$:

$$\lim_{a\to-\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_a^x = k\right] = 0 \ , \tag{2.47}$$

ainsi pour tout $n > 0$:

$$\lim_{a\to-\infty} \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_b^x = n,\ T_a^x > T_b^x\right] = \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_b^x = n\right] \ . \tag{2.48}$$

Par hypothèse $\mathbb{E}_x \left[T_b^x\right] < \infty$ donc :

$$\mathbb{E}_x^\alpha \left[T_b^x \mathbb{I}_{T_a^x > T_b^x}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_b^x = n, T_a^x > T_b^x\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_b^x = n\right] \equiv \mathbb{E}_x \left[T_b^x\right] < \infty \ , \tag{2.49}$$

par 2.48 et la convergence dominée on en déduit :

$$\lim_{a\to-\infty} \mathbb{E}_x^\alpha \left[T_b^x \mathbb{I}_{T_a^x > T_b^x}\right] \ = \ \lim_{a\to-\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_b^x = n, T_a^x > T_b^x\right] \tag{2.50}$$

$$= \ \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}_x^\alpha \left[T_b^x = n\right] = \mathbb{E}_x^\alpha \left[T_b^x\right] \ . \tag{2.51}$$

Ceci donne 2.44 ; 2.42 et 2.43 se déduisent également de ce calcul. ■

Rappelons la définition du temps local en un point $z \in \mathbb{Z}$ d'un processus discret $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ pour un instant I :

Définition 2.1.9. Soient $I \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{Z}$, le temps local en z du processus $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ pour un instant I est donné par :

$$\mathcal{L}(z, I) = \sum_{j=1}^{I} \mathbb{I}_{X_n = z} \ . \tag{2.52}$$

On remarque que l'on peut calculer explicitement les probabilités d'événements simples écrits en terme de temps locaux ainsi que les moments de temps locaux si l'on prend, pour l'instant I, un temps d'arrêt. Ceci fait l'objet des trois lemmes suivants.

Pour le résultat suivant on s'est inspiré de P. Révesz [85] (page 278-279) :

Lemme 2.1.10. *Soit $\alpha \in \Omega_2$, soient a, m, b, z dans $\mathbb{Z}$ tels que $a < m < b$ et $a < z < b$ et soit q=0 ou 1. Si $z < m$ on a :*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_m^\alpha \left[(\mathcal{L}(z,\ T_b^m \wedge T_a^m)) \left(\mathcal{L}(z,\ T_b^m \wedge T_a^m) - 1 \right)^q \right] \\ = & \frac{\mathbb{P}_m^\alpha \left[T_z^m < T_b^m \right]}{\left(\alpha_z \mathbb{P}_{z+1}^\alpha \left[T_z^{z+1} > T_b^{z+1} \right] + \beta_z \mathbb{P}_{z-1}^\alpha \left[T_z^{z-1} > T_a^{z-1} \right] \right)^{1+q}} \ . \end{aligned} \tag{2.53}$$

Si $z > m$ on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_m^\alpha \left[(\mathcal{L}(z,\ T_b^m \wedge T_a^m)) \left(\mathcal{L}(z,\ T_b^m \wedge T_a^m) - 1 \right)^q \right] \\ = & \frac{\mathbb{P}_m^\alpha \left[T_z^m < T_a^m \right]}{\left(\alpha_z \mathbb{P}_{z+1}^\alpha \left[T_z^{z+1} > T_b^{z+1} \right] + \beta_z \mathbb{P}_{z-1}^\alpha \left[T_z^{z-1} > T_a^{z-1} \right] \right)^{1+q}} \ . \end{aligned} \tag{2.54}$$

De plus $\mathcal{L}(m, T_b^m \wedge T_a^m)$ suit une loi géométrique de paramètre :

$$\alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha \left[T_m^{m+1} < T_b^{m+1} \right] + \beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha \left[T_m^{m-1} < T_a^{m-1} \right] \ . \tag{2.55}$$

Preuve.
Supposons $z < m$, on obtient par la propriété de Markov forte :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_m^\alpha \left[\mathcal{L}(z, T_b^m \wedge T_a^m) = l \right] \\ = & \mathbb{P}_m^\alpha \left[T_z^m < T_b^m \right] \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l-1}{j} \left(\alpha_z \mathbb{P}_{z+1}^\alpha \left[T_z^{z+1} < T_b^{z+1} \right] \right)^j \left(\beta_z \mathbb{P}_{z-1}^\alpha \left[T_z^{z-1} < T_a^{z-1} \right] \right)^{l-j-1} \times \\ & \left(1 - \alpha_z \mathbb{P}_{z+1}^\alpha \left[T_z^{z+1} < T_b^{z+1} \right] + \beta_z \mathbb{P}_{z-1}^\alpha \left[T_z^{z-1} < T_a^{z-1} \right] \right) \\ = & \mathbb{P}_m^\alpha \left[T_z^m < T_b^m \right] \left(\alpha_z \mathbb{P}_{z+1}^\alpha \left[T_z^{z+1} < T_b^{z+1} \right] + \beta_z \mathbb{P}^\alpha \left[T_z^{z-1} < T_a^{z-1} \right] \right)^{l-1} \times \\ & \left(1 - \alpha_z \mathbb{P}_{z+1}^\alpha \left[T_z^{z+1} < T_b^{z+1} \right] + \beta_z \mathbb{P}_{z-1}^\alpha \left[T_z^{z-1} < T_a^{z-1} \right] \right) \ . \end{aligned}$$

2.53 s'obtient en utilisant la définition de la moyenne d'une v.a, un calcul identique donne 2.54. ■

On a également :

Lemme 2.1.11. *Soit $\alpha \in \Omega_2$, soient m, i, b dans $\mathbb{Z}$ et soit $l \in \mathbb{N}$. Si $i < b$ on a :*
• *si $i + 1 \leq m \leq b - 1$*

$$\mathbb{P}_i^\alpha \left[\mathcal{L}(m, T_b^i) = l \right] = \begin{cases} \left(\alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha \left[T_m^{m+1} < T_b^{m+1} \right] + \beta_m \right)^{l-1} \alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha \left[T_m^{m+1} > T_b^{m+1} \right] & \text{si } l > 0 \ , \\ 0 & \text{si } l = 0 \ , \end{cases} \tag{2.56}$$

en particulier

$$\mathbb{E}_i^\alpha \left[\mathcal{L}(m, T_b^i) \right] = \frac{1}{\alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha \left[T_m^{m+1} > T_b^{m+1} \right]} \ , \tag{2.57}$$

• *si $m \geq b + 1$*

$$\mathbb{P}_i^\alpha \left[\mathcal{L}(m, T_b^i) = 0 \right] = 1 \ , \tag{2.58}$$

• *si $m = b$*

$$\mathbb{P}_i^\alpha \left[\mathcal{L}(m, T_b^i) = 1 \right] = 1 \ . \tag{2.59}$$

Si $i > b$, on a :
• *si $b+1 \leq m \leq i-1$*

$$\mathbb{P}_i^\alpha\left[\mathcal{L}(m,T_b^i)=l\right] = \begin{cases} \left(\alpha_m + \beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha\left[T_m^{m-1} < T_b^{m-1}\right]\right)^{l-1} \beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha\left[T_m^{m-1} > T_b^{m-1}\right] & \text{si } l>0\ , \\ 0 & \text{si } l=0\ , \end{cases} \tag{2.60}$$

en particulier

$$\mathbb{E}_i^\alpha\left[\mathcal{L}(m,T_b^i)\right] = \frac{1}{\beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha\left[T_m^{m-1} > T_b^{m-1}\right]}\ , \tag{2.61}$$

• *si $m \leq b-1$*

$$\mathbb{P}_i^\alpha\left[\mathcal{L}(m,T_b^i)=0\right] = 1\ , \tag{2.62}$$

• *si $m = b$*

$$\mathbb{P}_i^\alpha\left[\mathcal{L}(m,T_b^i)=1\right] = 1\ . \tag{2.63}$$

Si $i = b$ on a :
• *si $m > i$*

$$\mathbb{P}_i^\alpha\left[\mathcal{L}(m,T^{i\to i})=l\right] \tag{2.64}$$

$$= \begin{cases} \alpha_i \mathbb{P}_{i+1}^\alpha\left[T_m^{i+1} < T_i^{i+1}\right]\left(\alpha_m + \beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha\left[T_m^{m-1} < T_i^{m-1}\right]\right)^{l-1} \beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha\left[T_m^{m-1} > T_i^{m-1}\right] & \text{si } l>0\ , \\ \beta_i + \alpha_i \mathbb{P}_{i+1}^\alpha\left[T_i^{i+1} < T_m^{i+1}\right] & \text{si } l=0\ , \end{cases} \tag{2.65}$$

en particulier

$$\mathbb{E}_i^\alpha\left[\mathcal{L}(m,T^{i\to i})\right] = \frac{\alpha_i \mathbb{P}_{i+1}^\alpha\left[T_m^{i+1} < T_i^{i+1}\right]}{\beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha\left[T_m^{m-1} > T_i^{m-1}\right]}\ , \tag{2.66}$$

• *si $m < i$*

$$\mathbb{P}_i^\alpha\left[\mathcal{L}(m,T^{i\to i})=l\right] \tag{2.67}$$

$$= \begin{cases} \beta_i \mathbb{P}_{i-1}^\alpha\left[T_m^{i-1} < T_i^{i-1}\right]\left(\alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha\left[T_m^{m+1} < T_i^{m+1}\right] + \beta_m\right)^{l-1} \alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha\left[T_m^{m+1} > T_i^{m+1}\right] & \text{si } l>0\ , \\ \alpha_i + \beta_i \mathbb{P}_{i-1}^\alpha\left[T_i^{i-1} < T_m^{i-1}\right] & \text{si } l=0\ , \end{cases} \tag{2.68}$$

en particulier

$$\mathbb{E}_i^\alpha\left[\mathcal{L}(m,T^{i\to i})\right] = \frac{\beta_i \mathbb{P}_{i-1}^\alpha\left[T_m^{i-1} < T_i^{i-1}\right]}{\alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha\left[T_m^{m+1} > T_i^{m+1}\right]}\ , \tag{2.69}$$

• *si $m = i$*

$$\mathbb{P}_i^\alpha\left[\mathcal{L}(m,T^{i\to i})=1\right] = 1. \tag{2.70}$$

Preuve.
La preuve de ce lemme est similaire à la preuve du lemme 2.1.10 : on itère la propriété de Markov forte. ■

Pour ce dernier lemme on s'est inspiré des travaux de [86] :

Lemme 2.1.12. *Soit $\alpha \in \Omega_2$, soient m, i et b dans $\mathbb{Z}$ tels que $i < b$, $m < b$ et $m \neq i$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lambda < -\ln\left(1 - \alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha\left[T_m^{m+1} > T_b^{m+1}\right]\right)$, on a :*

$$\mathbb{E}_i^\alpha\left[e^{\lambda \mathcal{L}(m,T_b^i)}\right] = 1 - \mathbb{P}_i^\alpha\left[T_m^i < T_b^i\right] + \mathbb{P}_i^\alpha\left[T_m^i < T_b^i\right] \frac{e^\lambda \alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha\left[T_m^{m+1} > T_b^{m+1}\right]}{1 - e^\lambda\left(1 - \alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha\left[T_m^{m+1} > T_b^{m+1}\right]\right)}\ . \tag{2.71}$$

Supposons $m < i$, soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lambda < -\ln\left(1 - \alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha \left[T_m^{m+1} > T_i^{m+1}\right]\right)$ on a :

$$\begin{aligned} (2.72) \qquad & \mathbb{E}_i^\alpha \left[e^{\lambda \mathcal{L}(m, T^{i\to i})}\right] \\ = \; & 1 - \beta_i \mathbb{P}_{i-1}^\alpha \left[T_i^{i-1} > T_m^{i-1}\right] + \beta_i \mathbb{P}_{i-1}^\alpha \left[T_i^{i-1} > T_m^{i-1}\right] \frac{e^\lambda \alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha \left[T_m^{m+1} > T_i^{m+1}\right]}{1 - e^\lambda \left(1 - \alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha \left[T_m^{m+1} > T_i^{m+1}\right]\right)}. \end{aligned}$$

Supposons $m > i$, soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lambda < -\ln\left(1 - \beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha \left[T_m^{m-1} > T_i^{m-1}\right]\right)$ on a :

$$\begin{aligned} (2.73) \qquad & \mathbb{E}_i^\alpha \left[e^{\lambda \mathcal{L}(m, T^{i\to i})}\right] \\ = \; & 1 - \alpha_i \mathbb{P}_{i+1}^\alpha \left[T_i^{i+1} > T_m^{i+1}\right] + \alpha_i \mathbb{P}_{i+1}^\alpha \left[T_i^{i+1} > T_m^{i+1}\right] \frac{e^\lambda \beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha \left[T_m^{m-1} > T_i^{m-1}\right]}{1 - e^\lambda \left(1 - \beta_m \mathbb{P}_{m-1}^\alpha \left[T_m^{m-1} > T_i^{m-1}\right]\right)}. \end{aligned}$$

Preuve.
Montrons 2.71, on a :

$$\begin{aligned} (2.74) \qquad \mathbb{E}_i^\alpha \left[e^{\lambda \mathcal{L}(m, T_b^i)}\right] &= \mathbb{P}_i^\alpha \left[\mathcal{L}(m, T_b^i) = 0\right] + \sum_{l=1}^{+\infty} e^{\lambda l} \mathbb{P}_i^\alpha \left[\mathcal{L}(m, T_b^i) = l\right] \\ (2.75) \qquad &= \mathbb{P}_i^\alpha \left[T_m^i > T_b^i\right] + \sum_{l=1}^{+\infty} e^{\lambda l} \mathbb{P}_i^\alpha \left[\mathcal{L}(m, T_b^i) = l\right] . \end{aligned}$$

D'après 2.56, pour tout $0 < \lambda < -\ln\left(1 - \alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha \left[T_m^{m+1} > T_b^{m+1}\right]\right)$, on a :

$$\begin{aligned} (2.76) \qquad & \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \mathbb{P}_i^\alpha \left[\mathcal{L}(m, T_b^i) = l\right] \\ (2.77) \qquad = \; & \mathbb{P}_i^\alpha \left[T_m^i < T_b^i\right] \sum_{l=1}^{+\infty} e^{\lambda l} \left(\alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha \left[T_m^{m+1} < T_b^{m+1}\right] + \beta_m\right)^{l-1} \alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha \left[T_m^{m+1} > T_b^{m+1}\right] \\ (2.78) \qquad = \; & \mathbb{P}_i^\alpha \left[T_m^i < T_b^i\right] \frac{e^\lambda \alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha \left[T_m^{m+1} > T_b^{m+1}\right]}{1 - e^\lambda \left(1 - \alpha_m \mathbb{P}_{m+1}^\alpha \left[T_m^{m+1} > T_b^{m+1}\right]\right)} . \end{aligned}$$

En remplaçant ceci dans 2.75 on obtient le lemme. ■

2.1.2 Critère de récurrence pour une M.A.M.I.

Commençons par rappeler la définition de récurrence pour une chaîne de Markov :

Définition 2.1.13. Soit $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ une chaîne de Markov définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeur dans $\mathbb{Z}$, on dira que $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ est récurrente si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $T^{a\to a}$ est fini *P.p.s.* Une chaîne de Markov non récurrente est dite transitoire.

Rappelons la définition du temps d'occupation d'un état $a \in \Omega$:

$$(2.79) \qquad \mathcal{L}(a, \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{X_n = a} .$$

On rappelle le résultat d'équivalence suivant (S. Asmussen [7]) :

Proposition 2.1.14. *Soit $a \in \Omega$,*

1. *les assertions suivantes sont équivalentes :*

$$\begin{aligned} i) \quad & \textit{l'état } a \textit{ est récurrent} \ , \\ ii) \quad & \mathcal{L}(a, \infty) = \infty \ \textit{P.p.s} \ , \\ iii) \quad & \mathbb{E}[\mathcal{L}(a, \infty)] = \infty. \end{aligned}$$

2. de même les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} i) &\quad \textit{l'état } a \textit{ est transitoire} \ , \\ ii) &\quad \mathcal{L}(a,\infty) < \infty \ P.p.s \ , \\ iii) &\quad \mathbb{E}[\mathcal{L}(a,\infty)] < \infty. \end{aligned}$$

Dire qu'une chaîne de Markov est récurrente équivaut donc à dire que tout point de l'espace des états de cette chaîne est visité une infinité de fois. En particulier ceci implique qu'aucun point dans l'espace des états n'est privilégié pour un temps infini.

On peut maintenant énoncer le lemme suivant qui donne un critère de récurrence pour la marche aléatoire en milieu inhomogène (résultat dû à K. L. Chung [23]).

Lemme 2.1.15. *Pour tout $\alpha \in \Omega_2$, on a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-n}}{\beta_{-n}} \cdots \frac{\alpha_{-1}}{\beta_{-1}} = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdots \frac{\beta_n}{\alpha_n} < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = \infty \quad \mathbb{P}^{\alpha} \ p.s \ , \tag{2.80}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-n}}{\beta_{-n}} \cdots \frac{\alpha_{-1}}{\beta_{-1}} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdots \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = -\infty \quad \mathbb{P}^{\alpha} \ p.s \ , \tag{2.81}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-n}}{\beta_{-n}} \cdots \frac{\alpha_{-1}}{\beta_{-1}} = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdots \frac{\beta_n}{\alpha_n} \Rightarrow X_n \ \textit{est} \ \ \textit{récurrente} \ . \tag{2.82}$$

Preuve.
Soient a, x, b dans $\mathbb{Z}$ tels que $a < x < b$ d'après 2.6 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x^{\alpha}\left[T_a^x > T_b^x\right] &= \frac{\sum_{i=a+1}^{x-1} \frac{\beta_{a+1}}{\alpha_{a+1}} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i} + 1}{\sum_{i=a+1}^{b-1} \frac{\beta_{a+1}}{\alpha_{a+1}} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i} + 1} && (2.83) \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=x}^{b-1} \frac{\beta_{a+1}}{\alpha_{a+1}} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i}}{\sum_{i=a+1}^{b-1} \frac{\beta_{a+1}}{\alpha_{a+1}} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i}} && (2.84) \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=x}^{b-1} \frac{\beta_x}{\alpha_x} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i}}{\sum_{i=a+1}^{b-1} \frac{\beta_x}{\alpha_x} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i}} \ , && (2.85) \end{aligned}$$

ainsi d'après 2.42 :

$$\mathbb{P}_x^{\alpha}\left[\bigcup_{n\geq 1}\{X_n = b\}\right] = 1 - \frac{\sum_{i=x}^{b-1} \frac{\beta_x}{\alpha_x} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i}}{\sum_{i=-\infty}^{b-1} \frac{\beta_x}{\alpha_x} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i}} \ . \tag{2.86}$$

On en déduit donc :

$$\begin{cases} \sum_{i=-\infty}^{-1} \frac{\beta_x}{\alpha_x} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i} < \infty \Rightarrow \mathbb{P}_x^{\alpha}\left[\bigcup_{n\geq 1}\{X_n = b\}\right] < 1, \\ \sum_{i=-\infty}^{-1} \frac{\beta_x}{\alpha_x} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \infty \Rightarrow \mathbb{P}_x^{\alpha}\left[\bigcup_{n\geq 1}\{X_n = b\}\right] = 1, \end{cases} \tag{2.87}$$

de même :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_x}{\alpha_x} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i} < \infty \Rightarrow \mathbb{P}_x^{\alpha}\left[\bigcup_{n\geq 1}\{X_n = a\}\right] < 1, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_x}{\alpha_x} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \infty \Rightarrow \mathbb{P}_x^{\alpha}\left[\bigcup_{n\geq 1}\{X_n = a\}\right] = 1. \end{cases} \tag{2.88}$$

De ceci on peut en déduire le lemme, en effet, supposons :

$$\sum_{i=-\infty}^{-1} \frac{\beta_x}{\alpha_x} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \infty \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_x}{\alpha_x} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i} < \infty, \tag{2.89}$$

alors :

$$\mathbb{P}_x^\alpha\left[\bigcup_{n\geq 1}\{X_n=a\}\right]<1 \text{ et } \mathbb{P}_x^\alpha\left[\bigcup_{n\geq 1}\{X_n=b\}\right]=1, \tag{2.90}$$

ce qui implique que $\lim_{n\to\infty} X_n=\infty$ $\mathbb{P}^\alpha.p.s.$, on obtient 2.81 de façon similaire. Pour 2.82 il suffit de remarquer :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_a^\alpha\left[T^{a\to a}<+\infty\right] &= \mathbb{P}_a^\alpha\left[\cup_{n=1}^\infty\{X_n=a\}\right] && (2.91)\\
&= \alpha_a\mathbb{P}_{a+1}^\alpha\left[\cup_{n=1}^\infty\{X_n=a\}\right]+\beta_a\mathbb{P}_{a-1}^\alpha\left[\cup_{n=1}^\infty\{X_n=a\}\right] && (2.92)\\
&= \alpha_a+\beta_a=1. && (2.93)
\end{aligned}$$

■

2.1.3 Critère d'existence de la moyenne des temps de retour

Définition 2.1.16. Une chaîne de Markov $(X_n,\ n\in\mathbb{N})$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$ est positivement récurrente si elle est récurrente et si de plus pour tout $a\in\mathbb{Z}$, $\mathbb{E}_a^\alpha\left[T^{a\to a}\right]<+\infty$. Inversement on dira qu'elle est récurrente nulle si elle est récurrente et pour tout $a\in\mathbb{Z}$, $\mathbb{E}_a^\alpha\left[T^{a\to a}\right]=+\infty$.

On propose de montrer la proposition suivante (voir K. L. Chung [23] pages 45-75) :

Proposition 2.1.17. *Soit $\alpha\in\Omega_2$, supposons $(X_n,\ n\in\mathbb{N})$ récurrente, on a :*

$$(X_n,\ n\in\mathbb{N}) \text{ est positivement récurrente} \iff \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha_0}{\beta_0}\cdots\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}}\frac{1}{\beta_k}<\infty\ , \\ \text{et} \\ \sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{\alpha_k}\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1}}\cdots\frac{\alpha_1}{\beta_1}<\infty\ . \end{cases} \tag{2.94}$$

Pour montrer cette proposition on montre les deux lemmes suivants :

Lemme 2.1.18. *Soit $\alpha\in\Omega_2$, supposons $(X_n,\ n\in\mathbb{N})$ récurrente, soit $a\in\mathbb{Z}$, on a :*

$$\mathbb{E}_a^\alpha\left[T^{a\to a}\right]<+\infty \iff \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}_a^\alpha\left[X_n=k,\cap_{l=1}^{n-1}\{X_l\neq a\}\right]<\infty\ . \tag{2.95}$$

Preuve.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathbb{P}_a^\alpha\left[X_n=k,\cap_{l=1}^{n-1}\{X_l\neq a\}\right] &= \mathbb{P}_a^\alpha\left[\cap_{l=1}^{n-1}\{X_l\neq a\}\right] && (2.96)\\
&= \sum_{l=n}^{+\infty}\mathbb{P}_a^\alpha\left[T^{a\to a}=l\right]\ , && (2.97)
\end{aligned}$$

la seconde égalité vient du fait que l'on a supposé la marche récurrente et donc que $\mathbb{P}^\alpha\left[T^{a\to a}<\infty\right]=1$. Ainsi en sommant 2.97 sur $n=1,\cdots,+\infty$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}_a^\alpha\left[X_n=k,\cap_{l=1}^{n-1}\{X_l\neq a\}\right] &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{l=n}^{+\infty}\mathbb{P}_a^\alpha\left[T^{a\to a}=l\right] && (2.98)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}_a^\alpha\left[T^{a\to a}>n\right]=\mathbb{E}_a^\alpha\left[T^{a\to a}\right]\ . && (2.99)
\end{aligned}$$

ce qui donne le lemme. ■

Lemme 2.1.19. *Soient $\alpha \in \Omega_2$, a et k dans $\mathbb{Z}$, supposons que $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ soit récurrente, on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_a^\alpha \left[X_n = k, \cap_{l=1}^{n-1} \{X_l \neq a\}\right] = \frac{\mathbb{P}_a^\alpha \left[T_k^a < T^{a\to a}\right]}{\mathbb{P}_k^\alpha \left[T_a^k < T^{k\to k}\right]} \ . \tag{2.100}$$

Preuve.
On effectuera la preuve de ce lemme en deux étapes. Première étape, soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_a^\alpha \left[X_n = k, \cap_{l=1}^{n-1} \{X_l \neq a\}\right] && (2.101)\\
&= \mathbb{P}_a^\alpha \left[X_n = k, \cap_{l=1}^{n-1} \{X_l \neq a,\ X_l \neq k\}\right] + \sum_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}_a^\alpha \left[X_n = k, \cap_{l=1}^{n-1} \{X_l \neq a\},\ T_k^a = m\right] && (2.102)\\
&= \mathbb{P}_a^\alpha \left[T^{a\to a} > T_k^a,\ T_k^a = n\right] && (2.103)\\
&+ \sum_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}_k^\alpha \left[X_{n-m} = k, \cap_{l=1}^{n-m-1} \{X_l \neq a\}\right] \mathbb{P}_a^\alpha \left[T_k^a = m, \cap_{l=1}^{m-1} \{X_l \neq a\}\right] \ .
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue par la propriété de Markov forte. On somme maintenant cette dernière équation de $n = 1$ à $n = N$ où $N \geq 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_a^\alpha \left[X_n = k, \cap_{l=1}^{n-1} \{X_l \neq a\}\right] && (2.104)\\
&= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_a^\alpha \left[T^{a\to a} > T_k^a,\ T_k^a = n\right] && (2.105)\\
&+ \sum_{m=1}^{N-1} \mathbb{P}_k^\alpha \left[X_m = k, \cap_{l=1}^{m-1} \{X_l \neq a\}\right] \sum_{n=1}^{N-m} \mathbb{P}_a^\alpha \left[T_k^a = n, \cap_{l=1}^{n-1} \{X_l \neq a\}\right] && (2.106)\\
&= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_a^\alpha \left[T^{a\to a} > T_k^a,\ T_k^a = n\right] && (2.107)\\
&+ \sum_{m=1}^{N-1} \mathbb{P}_k^\alpha \left[X_m = k, \cap_{l=1}^{m-1} \{X_l \neq a\}\right] \sum_{n=1}^{N-m} \mathbb{P}_a^\alpha \left[T^{a\to a} > T_k^a,\ T_k^a = n\right] && (2.108)\\
&= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_a^\alpha \left[T^{a\to a} > T_k^a,\ T_k^a = n\right] \left(1 + \sum_{m=1}^{N-n} \mathbb{P}_k^\alpha \left[X_m = k, \cap_{l=1}^{m-1} \{X_l \neq a\}\right]\right) \ . && (2.109)
\end{aligned}$$

On a $\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_a^\alpha \left[T^{a\to a} > T_k^a,\ T_k^a = n\right] \leq 1$, si on fait tendre N vers l'infini on obtient donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_a^\alpha \left[X_n = k, \cap_{l=1}^{n-1} \{X_l \neq a\}\right] = \mathbb{P}_a^\alpha \left[T^{a\to a} > T_k^a\right] \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{P}_k^\alpha \left[X_m = k, \cap_{l=1}^{m-1} \{X_l \neq a\}\right]\right) \ , \tag{2.110}$$

cette égalité étant vraie même si les séries divergent car par convention $\mathbb{P}_a^\alpha \left[T^{a\to a} > T_k^a\right] \times +\infty = +\infty$ si $\mathbb{P}_a^\alpha \left[T^{a\to a} > T_k^a\right] > 0$.

Deuxième étape, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_k^\alpha\left[X_n = a, \cap_{l=1}^{n-1}\{\ X_l \neq a\}\right] && (2.111)\\
&= \mathbb{P}_k^\alpha\left[X_n = a, \cap_{l=1}^{n-1}\{X_l \neq k,\ X_l \neq a\}\right] && (2.112)\\
&+ \sum_{m=1}^{n-1}\mathbb{P}_k^\alpha\left[X_n = a, \cap_{l=1}^{n-1}\{X_l \neq a\}, X_m = k, \cap_{q=m+1}^{n}\{X_q \neq k\}\right] && (2.113)\\
&= \mathbb{P}_k^\alpha\left[T^{k\to k} > T_a^k,\ T_a^k = n\right] && (2.114)\\
&+ \sum_{m=1}^{n-1}\mathbb{P}_k^\alpha\left[X_{n-m} = a, \cap_{l=1}^{n-m-1}\{X_l \neq k, X_l \neq a\}\right]\mathbb{P}_k^\alpha\left[X_m = k, \cap_{l=1}^{n-m-1}\{X_l \neq a\}\right]\\
&= \mathbb{P}_k^\alpha\left[T^{k\to k} > T_a^k,\ T_a^k = n\right] && (2.115)\\
&+ \sum_{m=1}^{n-1}\mathbb{P}_k^\alpha\left[T^{k\to k} > T_a^k,\ T_a^k = n-m\right]\mathbb{P}_k^\alpha\left[X_m = k, \cap_{l=1}^{n-m-1}\{X_l \neq a\}\right]\ .
\end{aligned}$$

On a utilisé la propriété de Markov et l'invariance par translation dans le temps pour obtenir la seconde égalité. Si on effectue maintenant la même opération que précédemment (on somme la dernière équation de 1 à N puis on passe à la limite) on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}_k^\alpha\left[X_n = a, \cap_{l=1}^{n-1}\{X_l \neq a\}\right] && (2.116)\\
&= \mathbb{P}_k^\alpha\left[T^{k\to k} > T_a^k\right]\left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty}\mathbb{P}_k^\alpha\left[X_m = k, \cap_{l=1}^{m-1}\{X_l \neq a\}\right]\right)\ , && (2.117)
\end{aligned}$$

or par hypothèse $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ est récurrente, cette dernière équation est donc réduite à :

$$1 = \mathbb{P}_k^\alpha\left[T^{k\to k} > T_a^k\right]\left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty}\mathbb{P}_k^\alpha\left[X_m = k, \cap_{l=1}^{m-1}\{X_l \neq a\}\right]\right)\ . \qquad (2.118)$$

On obtient alors le lemme en faisant la division de 2.110 par 2.118. ■

Preuve (Proposition 2.1.17).

Par les lemmes 2.1.18 et 2.1.19 on a :

$$\mathbb{E}_a\left[T^{a\to a}\right] < +\infty \iff \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathbb{P}_a^\alpha\left[T_k^a < T^{a\to a}\right]}{\mathbb{P}_k^\alpha\left[T_a^k < T^{k\to k}\right]} < +\infty\ . \qquad (2.119)$$

Étant donné que $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov irréductible, on sait que pour tout $a \in \Omega_2$:

$$\mathbb{E}_a\left[T^{a\to a}\right] < +\infty \iff \mathbb{E}_0\left[T^{0\to 0}\right] < \infty. \qquad (2.120)$$

Il suffit donc de trouver une condition telle que $\mathbb{E}_0\left[T^{0\to 0}\right] < \infty$, par 2.119 on a :

$$\mathbb{E}_0\left[T^{0\to 0} < +\infty\right] \iff \sum_{k=-\infty}^{0}\frac{\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_k^0 < T^{0\to 0}\right]}{\mathbb{P}_k^\alpha\left[T_0^k < T^{k\to k}\right]} < \infty \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_k^0 < T^{0\to 0}\right]}{\mathbb{P}_k^\alpha\left[T_0^k < T^{k\to k}\right]} < \infty\ . \qquad (2.121)$$

On va donc calculer : $\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_k^0 < T^{0\to 0}\right]$ et $\mathbb{P}_k^\alpha\left[T_0^k < T^{k\to k}\right]$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_k^0 < T^{0\to 0}\right] = \alpha_0\mathbb{P}_1^\alpha\left[T_k^1 < T_0^1\right] + \beta_0\mathbb{P}_{-1}^\alpha\left[T_k^{-1} < T_0^{-1}\right]\ , \qquad (2.122)$$

supposons d'abord $k \geq 2$ on a alors $\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_k^0 < T^{0\to 0}\right] = \alpha_0\mathbb{P}_1^\alpha\left[T_k^1 < T_0^1\right]$, par l'équation 2.6 (en prenant x=0, a=1 et b=k) on obtient :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_k^0 < T^{0\to 0}\right] = \frac{\alpha_0}{\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_1}{\alpha_1}\cdots\frac{\beta_i}{\alpha_i} + 1}\ , \qquad (2.123)$$

de plus si $k=1$, $\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_k^0 < T^{0\to 0}\right] = \alpha_0$.
En utilisant la convention $\sum_{l=1}^0 = 0$, on obtient que pour tout $k \geq 1$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_k^0 < T^{0\to 0}\right] = \frac{\alpha_0}{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdots \frac{\beta_i}{\alpha_i} + 1}\ , \tag{2.124}$$

par les mêmes calculs, pour tout $k \geq 1$:

$$\mathbb{P}_k^\alpha\left[T_0^k < T^{k\to k}\right] = \frac{\beta_k}{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta_i}{\alpha_i} \cdots \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}} + 1}\ , \tag{2.125}$$

par 2.124 et 2.125 on obtient :

$$\frac{\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_k^0 < T^{0\to 0}\right]}{\mathbb{P}_k^\alpha\left[T_0^k < T^{k\to k}\right]} = \alpha_0 \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}} \frac{1}{\beta_k}\ . \tag{2.126}$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_k^0 < T^{0\to 0}\right]}{\mathbb{P}_k^\alpha\left[T_0^k < T^{k\to k}\right]} < \infty \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_0}{\beta_0} \cdots \frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}} \frac{1}{\beta_k} < \infty\ . \tag{2.127}$$

On effectue les mêmes calculs pour tout $k \leq 0$, on obtient :

$$\sum_{k=-\infty}^{0} \frac{\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_k^0 < T^{0\to 0}\right]}{\mathbb{P}_k^\alpha\left[T_0^k < T^{k\to k}\right]} < \infty \iff \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{\alpha_k} \frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1}} \cdots \frac{\alpha_1}{\beta_1} < \infty\ . \tag{2.128}$$

On déduit la Proposition de 2.121, 2.127 et 2.128. ■

2.2 Marche Aléatoire en Milieu Aléatoire (M.A.M.A.)

Dans ce paragraphe on rappelle la définition d'une marche aléatoire en milieu aléatoire, puis on détaille les différents comportements (critère de récurrence) que présente la M.A.M.A. en fonction des caractéristiques du milieu aléatoire.

2.2.1 Rappel des Definitions

Milieu Aléatoire :

Définition 2.2.1. On appellera milieu aléatoire et on notera α une suite de variables aléatoires $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ à valeurs dans $]0,1[^{\mathbb{Z}}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, Q)$. On notera $\mathbb{E}_Q$ la moyenne associée à Q et Var_Q la variance.

Soit $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{F}_2$, pour tout $\omega \in \mathcal{A}_2$ fixé, $\alpha(w) \in]0,1[^{\mathbb{Z}}$ est une réalisation de l'environnement α, pour simplifier les notations on note $\alpha \in \mathcal{A}_2$ plutôt que $w \in \mathcal{A}_2$.

On rappelle que les v.a. $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

Marche Aléatoire en Milieu Aléatoire : Une Marche Aléatoire en Milieu Aléatoire est une suite de variables aléatoires $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \mathbb{P})$, telle que :
• $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ est la chaîne de Markov définie en 2.1.1, et
• $\forall A_1 \in \mathcal{F}_1$ et $\forall A_2 \in \mathcal{F}_2$, $\mathbb{P}\left[A_1 \times A_2\right] = \int_{A_2} Q(dw_2) \int_{A_1} \mathbb{P}^{\alpha(w_2)}(dw_1)$.

Remarque : Si la suite $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ a certaines propriétés $\mathbb{P}^\alpha$ $p.s$ presque sûrement pour Q presque tout environnement α, alors X_n possède ces propriétés $\mathbb{P}$ $p.s$ autrement dit :

Lemme 2.2.2. *Soit $A \in \mathcal{F}_1$, supposons que $\mathbb{P}^\alpha[A] = 1$ Q p.s. alors : $\mathbb{P}[A] = 1$.*

Preuve.
On a : $\mathbb{P}[A] = \int \mathbb{P}^\alpha[A]\, dQ = 1$. ■

2.2.2 Critère de récurrence.

On montre maintenant le résultat de F. Solomon [95] qui donne un critère de récurrence pour la marche aléatoire en milieu aléatoire à une dimension :

Théorème 2.2.3. *On a :*

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = \infty \quad \mathbb{P}\ p.s.\ , \tag{2.129}$$

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = -\infty \quad \mathbb{P}\ p.s.\ ,$$

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] = 0 \Rightarrow (X_n,\ n\in\mathbb{N})\ \textit{est récurrente}\ \ \mathbb{P}.p.s\ . \tag{2.130}$$

Pour montrer ceci nous avons besoin de résultats sur les sommes de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, que l'on trouvera dans l'annexe B (page 37).
Notation

$$\epsilon_i = \ln\left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}\right) \equiv \ln\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right)\ , \tag{2.131}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\ , \tag{2.132}$$

$$S_{-n} = \sum_{i=-n}^{-1} \epsilon_i\ . \tag{2.133}$$

Commençons par montrer le lemme suivant :

Lemme 2.2.4. *On a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n} > 1\right]}{n} < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = \infty \quad \mathbb{P}.p.s\ , \tag{2.134}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n} < 1\right]}{n} < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = -\infty \quad \mathbb{P}.p.s\ , \tag{2.135}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n}>1\right]}{n} = \infty \\ et \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n}>1\right]}{n} = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow (X_n,\ n\in\mathbb{N})\ \textit{est récurrente}\ \mathbb{P}.p.s\ . \tag{2.136}$$

Preuve.
Montrons 2.134 (les autres cas se déduisent de façon similaire), par hypothèse on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n} > 1\right]}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[S_n > 0\right]}{n} < \infty$$

ce qui implique par la proposition B.0.5 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_1}{\alpha_1}\cdots\frac{\beta_n}{\alpha_n} < \infty \quad Q.p.s\ , \tag{2.137}$$

or e^{S_n} et $e^{S_{-n}}$ ont même distribution d'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{S_{-n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-n}}{\beta_{-n}} \cdots \frac{\alpha_{-1}}{\beta_{-1}} = \infty \quad Q.p.s \ . \tag{2.138}$$

On déduit de 2.137, 2.138 et du lemme 2.1.15 que pour Q presque tout environnement $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$, donc par le lemme 2.2.2 $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$ $\mathbb{P}.p.s.$
■
Le lemme suivant est montré dans l'annexe B :

Lemme 2.2.5. *On a :*

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] < 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n} > 1\right]}{n} < \infty \ , \tag{2.139}$$

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n} < 1\right]}{n} < \infty \ ,$$

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n}>1\right]}{n} = \infty \\ et \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n}>1\right]}{n} = \infty \end{cases} \ . \tag{2.140}$$

Preuve (Théorème 2.2.3).
Le théorème se déduit des lemmes 2.2.4 et 2.2.5. ■

2.2.3 Existence du premier moment des temps de retour ?

Le résultat suivant implique que si la M.A.M.A. est récurrente alors elle est récurrente nulle :

Proposition 2.2.6. *Si H.1 est vérifiée alors la M.A.M.A.* $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ *est récurrente nulle* $\mathbb{P}.p.s.$ *.*

Preuve.
Cela vient du fait que l'on a choisi les variables aléatoires $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ identiquement distribuées. On a $\mathbb{E}\left[\ln \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right] = -\mathbb{E}\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] = 0$, on en déduit par le lemme 2.2.5 et la proposition B.0.5 (implication B.14) que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty \ Q \ p.s. \ , \tag{2.141}$$

or d'après la Proposition 2.1.17 pour que $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ soit récurrente positive, il faut :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_0}{\beta_0} \cdots \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} \frac{1}{\beta_n} < \infty \ Q. \ p.s. \ , \tag{2.142}$$

mais $\frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} \frac{1}{\beta_n} \geq \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$, ce qui donne la proposition. ■

Annexe A

Invariance par translation et propriété de Markov forte

On rappelle dans cette annexe quelques propriétés élémentaires sur les chaînes de Markov homogènes. On ne donnera pas les résultats en toute généralité étant donné que les processus de Markov que nous traitons dans ce travail sont simples. Soit $(X_n,\ n \in \mathbb{N},\ X_0 = 0)$ une chaîne de Markov homogène (à temps discret) à valeurs dans un espace d'état $\mathcal{E}$, on note P la mesure de probabilité associée.

A.1 Chaînes de Markov Homogènes

On rappelle qu'une chaîne de Markov $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est homogène si et seulement si pour tout $(i,j) \in \mathcal{E}^2$:

$$P\left[X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right] \text{ ne dépend pas de } n\ . \tag{A.1}$$

On dit que les probabilités de transition de $(X_n, n \in \mathbb{N})$ sont stationnaires, ou que $P[\ .\ \mid\ .\ ]$ est invariante par translation dans le temps.

Deux exemples : 1) par définition la M.A.M.I, définie au chapitre 2, est un exemple simple de chaîne de Markov homogène. 2) Une somme $(S_n = \sum_{i=1}^n \epsilon_i, n \in \mathbb{Z}, S_0 = 0)$ où $(\epsilon_i,\ i \in \mathbb{Z})$ est une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$, est une chaîne de Markov homogène. En effet, c'est une chaîne de Markov par indépendance des v.a. $(\epsilon_i, i \in \mathbb{Z})$: supposons $P\left[S_n = b_n, \cdots, S_1 = b_1\right] > 0$, on a

$$\begin{aligned}
P\left[S_{n+1} = a \middle| S_n = b_n, \cdots, S_1 = b_1\right] &= \frac{P\left[S_{n+1} - S_n = a - b_n,\ S_n = b_n, \cdots, S_1 = b_1\right]}{P\left[S_n = b_n, \cdots, S_1 = b_1\right]} && \text{(A.2)}\\
&= P\left[S_{n+1} - S_n = a - b_n\right] && \text{(A.3)}\\
&= P\left[S_{n+1} - S_n = a - b_n \middle| S_n = b_n\right] && \text{(A.4)}\\
&= P\left[S_{n+1} = a \middle| S_n = b_n\right]\ , && \text{(A.5)}
\end{aligned}$$

où la seconde et la troisième égalité sont obtenues par indépendance. De plus $(S_n)_n$ est homogène car les v.a. $(\epsilon_i, i \in \mathbb{Z})$ sont i.d. :

$$\begin{aligned}
P\left[S_{n+1} = a \middle| S_n = b\right] &= P\left[\epsilon_{n+1} = a - b\right] && \text{(A.6)}\\
&= P\left[\epsilon_0 = a - b\right]\ . && \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

En particulier il nous arrivera souvent d'écrire pour tout $B_{n,k} \in \sigma\left(X_{n+1}, \cdots, X_{n+k}\right)$ et tout $j \in \Omega$:

$$P\left[\ B_{n,k}\ \middle| X_k = j\right] = P\left[\ B_{0,n}\ \middle| X_0 = j\right] \equiv P_j\left[B_{0,n}\right]\ . \tag{A.8}$$

Ainsi même si la M.A.M.A. ne possède pas ces propriétés, la M.A.M.I ainsi que certaines fonctions du milieu notamment $(S_n = \sum_{i=1}^n \epsilon_i, n \in \mathbb{Z}, S_0 = 0)$ sont des chaînes de Markov homogènes. La propriété que nous utiliserons sans modération dans ce travail, caractéristique des processus Markovien, est la propriété de Markov forte.

A.2 Propriété de Markov forte

La propriété de Markov forte est une conséquence de la propriété de Markov et de l'homogénéité du processus dans le temps. Rappelons la définition d'un temps d'arrêt :

Définition A.2.1. Notons $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$, une variable aléatoire T est un temps d'arrêt si et seulement si :

$$T \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \tag{A.9}$$

$$\text{et} \quad \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \ . \tag{A.10}$$

on dit que T est adapté à la chaîne de Markov $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$.

Soit T un temps d'arrêt, la propriété de Markov forte peut se traduire par l'énoncé suivant, soit $A_T \in \mathcal{F}_T$ tel que :

$$P[T < +\infty,\ A_T,\ X_T = i] > 0 \ , \tag{A.11}$$

on a :

$$P[X_{T+1} = b_1,\ X_{T+2} = b_2,\ \cdots | T < \infty,\ A_T,\ X_T = i] = P_i[X_1 = b_1,\ X_2 = b_2,\ \cdots] \ , \tag{A.12}$$

en effet :

$$P[X_{T+1} = b_1,\ X_{T+2} = b_2,\ \cdots,\ T < \infty,\ A_T,\ X_T = i] \tag{A.13}$$

$$= \sum_{n \geq 0} P[X_{n+1} = b_1,\ X_{n+2} = b_2,\ \cdots,\ A_n,\ X_n = i,\ T = n] \tag{A.14}$$

$$= \sum_{n \geq 0} P[X_{n+1} = b_1,\ X_{n+2} = b_2,\ \cdots | X_n = i]\, P[A_n,\ X_n = i,\ T = n] \tag{A.15}$$

$$= \sum_{n \geq 0} P_i[X_1 = b_1,\ X_2 = b_2,\ \cdots | X_n = i]\, P[A_n,\ X_n = i,\ T = n] \tag{A.16}$$

$$= P_i[X_1 = b_1,\ X_2 = b_2,\ \cdots]\, P[A_T,\ X_T = i,\ T < +\infty] \ , \tag{A.17}$$

où la seconde égalité vient de la propriété de Markov et la troisième de l'homogénéité dans le temps. On obtient alors A.12 par définition d'une probabilité conditionnelle.
La propriété de Markov forte nous sera notamment utile pour montrer l'indépendance de variables aléatoires, un exemple typique est le suivant : soit $(a_i, i \in \mathbb{N})$ une suite d'éléments appartenant à $\mathcal{E}$, notons $(T_{a_i,i} = \inf\{k > T_{a_{i-1},i-1},\ X_k = a_i\},\ 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N}^*,\ T_{a_0,0} = 0)$ une suite de v.a. . On montre facilement que ces v.a. sont des temps d'arrêts. Pour tout $\lambda > 0$, on a alors, par la propriété de Markov forte :

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_{a_n,n}}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{a_{i-1}}\left[e^{-\lambda T_{a_i}}\right] \ . \tag{A.18}$$

où $(T_{a_i} = \inf\{k > 0,\ X_k = a_i\},\ 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ en effet :

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_{a_n,n}}\right]$$

$$= \sum_{l_1 \geq 1} \sum_{l_2 = l_1+1} \cdots \sum_{l_n = l_{n-1}+1} e^{-\lambda l_n} P[T_{a_1,1} = l_1,\ T_{a_2,2} = l_2, \cdots,\ T_{a_n,n} = l_n] \tag{A.19}$$

$$= \sum_{l_1 \geq 1} \sum_{l_2 = l_1+1} \cdots \sum_{l_n = l_{n-1}+1} e^{-\lambda l} P\left[\bigcap_{k_1=1}^{l_1-1} \{X_{l_1} \neq a_1\},\ X_{l_1} = a_1, \cdots,\ \bigcap_{k=l_{n-1}+1}^{l_n-1} \{X_{l_n} \neq a_n\},\ X_{l_2} = a_n\right] \tag{A.20}$$

$$= \sum_{l_1 \geq 1} \sum_{l_2 = l_1+1} \cdots \sum_{l_n = l_{n-1}+1} e^{-\lambda l} P\left[\bigcap_{k_1=1}^{l_1-1} \{X_{l_1} \neq a_1\},\ X_{l_1} = a_1\right] \times \tag{A.21}$$

$$P\left[\bigcap_{k_2=l_1+1}^{l_2-1} \{X_{l_2} \neq a_2\},\ X_{l_2} = a_2, \cdots,\ \bigcap_{k=l_{n-1}+1}^{l_n-1} \{X_{l_n} \neq a_n\},\ X_{l_n} = a_n \middle| X_{l_1} = a_1\right] \ , \tag{A.22}$$

où la dernière égalité est obtenue par la propriété de Markov, l'invariance par translation dans le temps implique :

$$P\left[\bigcap_{k_2=l_1+1}^{l_2-1}\{X_{l_2}\neq a_2\},\ X_{l_2}=a_2,\cdots,\bigcap_{k=l_{n-1}+1}^{l_n-1}\{X_{l_n}\neq a_n\},\ X_{l_n}=a_n\middle| X_{l_1}=a_1\right] \tag{A.23}$$

$$= P_{a_1}\left[\bigcap_{k_2=1}^{l_2-l_1-1}\{X_{l_2-l_1}\neq a_2\},\ X_{l_2-l_1}=a_2,\cdots,\bigcap_{k=l_{n-1}-l_1+1}^{l_n-l_1-1}\{X_{l_n-l_1}\neq a_n\},\ X_{l_n-l_1}=a_n\right] , \tag{A.24}$$

par récurrence on obtient :

$$P\left[\bigcap_{k_2=l_1+1}^{l_2-1}\{X_{l_2}\neq a_2\},\ X_{l_2}=a_2,\cdots,\bigcap_{k=l_{n-1}+1}^{l_n-1}\{X_{l_n}\neq a_n\},\ X_{l_n}=a_n\middle| X_{l_1}=a_1\right] \tag{A.25}$$

$$= \prod_{i=2}^{n}P_{a_{i-1}}\left[\bigcap_{k=1}^{l_i-l_{i-1}-1}\{X_k\neq a_i\},\ X_{l_i-l_{i-1}}=a_i\right]=\prod_{i=2}^{n}P_{a_{i-1}}\left[T_{a_i}=l_i-l_{i-1}\right] . \tag{A.26}$$

En remplaçant ceci dans A.22 on obtient

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_{a_n,n}}\right] = \sum_{l_1\geq 1}\sum_{l_2=l_1+1}\cdots\sum_{l_n=l_{n-1}+1}e^{-\lambda l_n}\prod_{i=1}^{n}P_{a_{i-1}}\left[T_{a_i}=l_i-l_{i-1}\right] , \tag{A.27}$$

on effectue maintenant le changement de variable $l_i'=l_i-l_{i-1}$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_{a_n,n}}\right] = \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{l_i'\geq 1}e^{-\lambda l_i'}P_{a_{i-1}}\left[T_{a_i}=l_i'\right]\right) . \tag{A.28}$$

ce qui donne A.18.

Annexe B

Quelques résultats sur les sommes de v.a. i.i.d.

Soit $(\epsilon_i,\ i \in \mathbb{N})$ une suite de v.a i.i.d définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, Q)$, définissons la marche aléatoire simple, pour tout $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \ , \tag{B.1}$$

telle que $S_0 = 0$.
Les résultats qui suivent sont des résultats classiques sur les sommes de v.a. i.i.d. On rappelle qu'une v.a. ϵ_0 est dégénérée si elle possède un atome en un point *i.e* : s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $Q[\epsilon_0 = a] = 1$.

Théorème B.0.2. *Supposons que ϵ_0 soit non dégénérée, alors :*

$$\textit{soit} \quad S_n \to \infty \quad p.s \tag{B.2}$$

$$\textit{ou} \quad S_n \to -\infty \quad p.s \tag{B.3}$$

$$\textit{ou} \quad S_n = 0 \quad p.s \ \textit{pour tout} \ n \geq 1, \tag{B.4}$$

$$\textit{ou} \quad \limsup S_n = \infty \ \textit{et} \ \liminf S_n = -\infty \tag{B.5}$$

Preuve.
On ne présentera pas de preuve ici (voir par exemple W. Stout [98]). ■

Définition B.0.3. Soit $n \geq 1$:

$$N_n = \sum_{l=1}^{n} \mathbb{I}_{\{S_l > 0\}} \ . \tag{B.6}$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $|s| < 1$:

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} Q[S_n > 0]\, s^n \ , \tag{B.7}$$

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} Q[N_n = n]\, s^n \ , \tag{B.8}$$

$$K(s) = \sum_{n=0}^{\infty} Q[N_n = 0]\, s^n \ , \tag{B.9}$$

Le résultat suivant est dû à E. S. Andersen [4] :

Théorème B.0.4. *Posons $Q[N_0 = 0] = 1$ et $Q[N_{-1} = 0] = 0$. Alors on a :*

$$P(s) = \exp\Big(\int_0^s \frac{A(\sigma)}{\sigma} d\sigma\Big), \tag{B.10}$$

$$K(s) = \frac{1}{1-s}\exp\Big(-\int_0^s \frac{A(\sigma)}{\sigma} d\sigma\Big) = \frac{1}{(1-s)P(s)}. \tag{B.11}$$

Proposition B.0.5. *On a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q[S_n > 0]}{n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} e^{S_n} < +\infty \ Q.p.s\ , \tag{B.12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q[S_n < 0]}{n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-S_n} < +\infty \ Q.p.s\ , \tag{B.13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q[S_n > 0]}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q[S_n < 0]}{n} = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} e^{S_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-S_n} = +\infty \ Q.p.s\ . \tag{B.14}$$

Pour la preuve de cette proposition on montre les deux lemmes suivants :

Lemme B.0.6. *On a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q[S_n > 0]}{n} < \infty \iff \lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty \quad Q\ p.s, \tag{B.15}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q[S_n < 0]}{n} < \infty \iff \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \quad Q\ p.s, \tag{B.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q[S_n > 0]}{n} = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q[S_n < 0]}{n} \iff -\infty = \liminf_{n\to+\infty} S_n < \limsup_{n\to+\infty} S_n = +\infty \quad Q\ p.s\ . \tag{B.17}$$

Preuve.
Montrons l'équivalence B.15.
Soit $r_n = Q[S_i \le 0$ pour tout $0 \le i < n,\ S_n > 0]$ pour tout $n \ge 1$, rappelons que $S_0 = 0$ on pose donc $r_0 = 0$. Appelons $R(.)$ la fonction génératrice définie par $R(s) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n s^n$. Soit :

$$W_j = \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N}^*, \#\{S_l > 0,\ l \le k\} = j\} & \text{s'il existe} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{B.18}$$

Supposons que $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty \quad Q.p.s$ alors $\lim_{n\to+\infty} Q[W_n = \infty] = 1$. W_n est la somme de n v.a.i, chacune ayant pour fonction génératrice $R(.)$. On doit avoir $Q[W_1 = \infty] > 0$ puisque $Q[W_1 = \infty] = 0$ implique que $Q[W_n = \infty] = 0$ pour tout $n \ge 1$. Ainsi :

$$R(1) = \sum_{n=1}^{\infty} Q[W_1 = n] = Q[W_1 < \infty] < 1\ ,$$

ainsi par le théorème B.0.4 ([2]) on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q[S_n > 0]}{n} < \infty\ .$$

Réciproquement, supposons $Q[\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty] < 1$, par le théorème B.0.2, on a $\limsup S_n = \infty \quad Q\ p.s.$ Ainsi $Q[W_1 = \infty] = 0$ donc $R(1) = 1$ et par le théoreme B.0.4, on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\{S_n > 0\}}{n} = \infty$.
On fait un calcul identique pour obtenir B.16. B.17 se déduit de B.15, B.16 et du théorème B.0.2. ■

[2] il suffit de remarquer que : $q_{n-1} = q_n + r_n$, donc que $(s-1)K(s) = R(s) - 1$ et ainsi $\ln\Big(\frac{1}{1-R(s)}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Q[S_n > 0]}{n} s^n$

Lemme B.0.7. *On a :*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty \quad Q\ p.s \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \exp(S_n) < \infty \quad Q\ p.s\ , \tag{B.19}$$

$$-\infty = \liminf_{n\to+\infty} S_n < \limsup_{n\to+\infty} S_n = +\infty \quad Q\ p.s \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-S_n) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(S_n) \quad Q\ p.s\ . \tag{B.20}$$

Preuve.
On a besoin du résultat de C. J. Stone [97] suivant :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{1/2}} = +\infty \quad Q\ p.s \quad \text{ ou } \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{1/2}} = -\infty \quad Q\ p.s \tag{B.21}$$

Pour B.19 on a par hypothèse que $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty \quad Q\ p.s$, donc $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{1/2}} = -\infty$, ainsi $S_n < -n^{1/2}$ et il existe un entier N tel que :

$$0 \leq \sum_{n=N}^{\infty} \exp(S_n) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \exp(-n^{1/2}) < \infty\ ,$$

ce qui montre B.19, l'implication B.20 est claire compte tenu de l'hypothèse. ■

Lemme B.0.8. *On a :*

$$\mathbb{E}_Q\left[\epsilon_1\right] < 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n} > 1\right]}{n} < \infty\ , \tag{B.22}$$

$$\mathbb{E}_Q\left[\epsilon_1\right] > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n} < 1\right]}{n} < \infty\ , \tag{B.23}$$

$$\mathbb{E}_Q\left[\epsilon_1\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n} > 1\right]}{n} = \infty\ , \\ et \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n} > 1\right]}{n} = \infty\ . \end{cases} \tag{B.24}$$

Preuve.
On a : $\mathbb{E}_Q\left[\epsilon_1\right] < 0$ si et seulement si ([3]) $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty \quad Q.p.s.$ si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[S_n > 0\right]}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q\left[e^{S_n} > 1\right]}{n} < \infty\ , \tag{B.25}$$

d'après le lemme B.0.6 ce qui donne B.22. B.23 et B.24 s'obtiennent de la même façon. ■

[3] par loi forte des grands nombres voir par exemple [22] page 121

La Nature est un temple où de vivants piliers
Laissent parfois sortir de confuses paroles ;
L'homme y passe à travers des forêts de symboles
Qui l'observent avec des regards familiers.

C. Baudelaire

Partie II

Localisation de la M.A.M.A. récurrente

Cette partie est consacrée à la preuve du théorème de localisation de Sinai. Après le rappel des hypothèses H.1, H.2, et H.6 qui seront utilisées pour cette partie et l'énoncé du théorème de localisation on effectue, dans le second chapitre de cette partie (chapitre 4 de la thèse), une analyse détaillée du milieu aléatoire :
Nous introduisons un potentiel aléatoire associé au milieu aléatoire, la notion de vallée ainsi que l'opération de raffinement. Nous donnons ensuite quelques résultats élémentaires (temps d'atteinte, fluctuations maximales, ...) sur le potentiel aléatoire. Parmi les vallées que nous pouvons construire à partir du milieu aléatoire l'une d'entres elles nous intéressera plus particulièrement que les autres, nous l'appellerons la vallée "minimale", on la notera : $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ où $\tilde{M}_0'$ et $\tilde{M}_0$ sont des maximisants du potentiel aléatoire et $\tilde{m}_0$ un minimisant. On effectue ensuite à l'intérieur de cette vallée une construction basée sur l'opération de raffinement. Cette construction nous permettra de comprendre intuitivement et par le calcul pourquoi la M.A.M.A. est localisée au voisinage de $\tilde{m}_0$. Les propriétés du milieu aléatoire que nous utiliserons pour montrer la localisation sont rassemblées dans la définition de l'ensemble des "bons" environnements que l'on trouvera à la fin du chapitre 4. Le lecteur a donc la possibilité de passer directement au chapitre 5 en ayant juste en tête les définitions de la vallée minimale et de l'ensemble des bons environnements. Nous appuyons ici sur le fait que les résultats du chapitre 4 sont connus dans la littérature mais que nous les avons redémontrés point par point pour les hypothèses H.1, H.2 et H.6. Ces résultats sont obtenus par l'application de techniques élémentaires en théorie des probabilités : l'inégalité de Bernstein, l'inégalité de Ottaviani, une inégalité de concentration, l'identité de Wald pour une martingale et un temps d'arrêt régulier et le théorème de la limite centrale.
Dans le chapitre 5 on montre la sous diffusivité de la M.A.M.A. puis on fait une brève étude du temps de retour en $\tilde{m}_0$, ce qui termine la préparation de la preuve du théorème de localisation.
Le dernier chapitre de cette partie (chapitre 6) est donc consacré à la preuve du théorème de Y. Sinai. Nous commençons par une démonstration basée sur la construction ordonnée en vallées effectuée au chapitre 4. Nous verrons que cette méthode nous donne un résultat légèrement plus fort que celui de Y. Sinai tout en donnant une explication intuitive à ce comportement. Cette preuve alternative utilise les hypothèses H.1, H.2 et H.6. Nous détaillons ensuite la démarche de Y. Sinai : on rappelle le résultat qu'il utilise pour le milieu aléatoire puis on introduit le processus auxiliaire sur lequel est basé l' argument principal de sa preuve. Nous terminons ce chapitre en présentant le résultat de H. Kesten [56] et A. O. Golosov [38] (obtenu indépendamment), qui donne la distribution limite de la M.A.M.A. correctement normalisée, la preuve de H. Kesten est ensuite détaillée.

Chapitre 3

Hypothèses et Résultats.

Commençons par donner les hypothèses que nous utiliserons dans cette partie, on rappelle d'abord celles qui sont nécessaires pour obtenir une M.A.M.A. récurrente :

$$\mathbb{E}_Q\left[\epsilon_0\right] = 0 \ , \tag{H.1}$$

où $\left(\epsilon_0 \equiv \ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right)$, qui implique que la M.A.M.A. est $\mathbb{P}.p.s.$ récurrente (voir le Théorème 2.2.3) et

$$\mathrm{Var}_Q\left[\epsilon_0\right] \equiv \sigma^2 > 0 \ , \tag{H.2}$$

qui nous assure que la M.A.M.A. n'est pas réduite à une marche aléatoire récurrente simple. On utilisera de plus l'hypothèse de régularité suivante, soit $\kappa^+ \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] < \infty \ , \tag{H.6}$$

pour tout $\kappa \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\kappa| < \kappa^+$. Voici les principaux résultats qui seront montrés dans cette partie.

Premièrement, le résultat de **sous diffusivité** :

Proposition 3.0.9. *Supposons H.1 et H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, soit $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ la vallée "minimale" (définie au paragraphe 4.2.2), pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\gamma > 2$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \kappa, C, \sigma, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout milieu $\alpha \in G_n$, on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcup_{m=0}^{n}\left\{X_m \notin \left[\tilde{M}_0', \tilde{M}_0\right]\right\}\right] \leq \frac{2E}{(\ln n)^{\gamma-2}} \ , \tag{3.1}$$

en particulier :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcup_{m=0}^{n}\left\{X_m \notin \left[-E(\ln n)^2, E(\ln n)^2\right]\right\}\right] \leq \frac{2E}{(\ln n)^{\gamma-2}} \ , \tag{3.2}$$

avec $Q\left[G_n\right] \geq 1-\epsilon$, $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$, $E = \frac{24R^2\left|\ln \frac{\epsilon}{R}\right|}{\sigma^2\epsilon^2}$ et $R = 1000$.

Ce résultat montre que jusqu'à l'instant n la M.A.M.A. est prisonnière entre les deux Q v.a. $\tilde{M}_0'$, $\tilde{M}_0$ qui sont fonction du milieu aléatoire et de plus que ces deux variables sont au plus éloignées de l'origine d'une valeur de l'ordre de $(\ln n)^2$, et donc que la M.A.M.A. est sous diffusive.

On énonce maintenant le théorème de **localisation** de Y. Sinai :

Théorème 3.0.10. *Supposons H.1 et H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \kappa, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout milieu $\alpha \in G_n$:*

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\left| \frac{X_n}{\ln^2 n} - m_0 \right| > \left(\frac{\mathcal{G}(\ln \ln n)^9}{\ln n} \right)^{1/2} \right] \leq \frac{4E^5}{(\gamma_0 \ln n \ln \ln n)^{1/2}} \ , \tag{3.3}$$

avec $Q\left[G_n\right] \geq 1 - \epsilon$. $\mathcal{G} = (\gamma_0 (1000)^2 E)^2$, $E = \frac{24R^2 \left|\ln \frac{\epsilon}{R}\right|}{\sigma^2 \epsilon^2}$, $R = 1000$, $\gamma_0 = \frac{12}{\kappa} + 11$, $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa \epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa \epsilon_0}\right]$. $\tilde{m}_0 \equiv m_0 (\ln n)^2$ est le minimisant de la vallée $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ que l'on définira au paragraphe 4.2.2.

Ce résultat montre que la M.A.M.A. récurrente est localisée à un instant n dans le voisinage du point m_0 dépendant du milieu aléatoire, ce voisinage a de plus une taille très négligeable devant la distance parcourue.

Pour terminer cette partie on donnera la preuve de H. Kesten qui donne la distribution limite de la M.A.M.A. :

Théorème 3.0.11. *Supposons H.1 et H.2 et H.6 on a :*

$$\frac{\sigma^2 X_n}{\ln^2 n} \to L, \ \textit{en distribution} \ , \tag{3.4}$$

où

$$\frac{d\mathbb{P}\left[L \leq x\right]}{dx} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8} |x| \right) \ . \tag{3.5}$$

Chapitre 4

Description du milieu aléatoire sous H.1, H.2 et H.6

Dans ce chapitre on a rassemblé les propriétés essentielles du milieu aléatoire qui nous permettrons dans le chapitre 6 de donner une preuve alternative au théorème de localisation sous les hypothèses H.1, H.2 et H.6. Toutes ces propriétés ont été rassemblées dans la définition de l'ensemble des "bons" environnements (page 83).

On commence par rappeler la définition que l'on a donnée d'un milieu aléatoire :

On appellera milieu aléatoire et on notera α une suite de variables aléatoires $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ à valeurs dans $]0,1[^{\mathbb{Z}}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, Q)$. On notera $\mathbb{E}_Q$ la moyenne associée à Q et Var_Q la variance.

On rappelle, de plus, que l'on a supposé que la suite $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ est indépendante et identiquement distribuée (on dira aussi indépendante et stationnaire). Les notations suivantes ont été adoptées, dans la partie I, pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$\beta_i = 1 - \alpha_i \ , \qquad \epsilon_i = \ln\left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}\right). \tag{4.1}$$

4.1 Définition du potentiel aléatoire et contrôle des fluctuations

4.1.1 Contrôle des v.a. $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$

On s'intéresse dans ce paragraphe aux fluctuations des v.a. $(\alpha_i, -L \leq i \leq L,\ L \in \mathbb{N}^*)$. L'hypothèse H.6 nous permet d'avoir le contrôle suivant :

Lemme 4.1.1. *Soit $\kappa \in]0, k^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout entier $L > 0$ et tout $D > 0$ on a :*

$$Q\left[\max_{-L\leq i\leq L}\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right) \leq D^{6/\kappa}\right] \geq 1 - \frac{(2L+1)\mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right]}{D^6} \ , \tag{4.2}$$

$$Q\left[\max_{-L\leq i\leq L}\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right) \leq D^{6/\kappa}\right] \geq 1 - \frac{(2L+1)\mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]}{D^6} \ , \tag{4.3}$$

de plus si $D > 2^{1+\kappa/6}$:

$$Q\left[\max_{-L\leq i\leq L}\left(\frac{1}{\alpha_i}\right) \leq D^{6/\kappa}\right] \geq 1 - \frac{2^\kappa(2L+1)\mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right]}{D^6} \ , \tag{4.4}$$

$$Q\left[\max_{-L\leq i\leq L}\left(\frac{1}{\beta_i}\right) \leq D^{6/\kappa}\right] \geq 1 - \frac{2^\kappa(2L+1)\mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]}{D^6} \ . \tag{4.5}$$

Preuve.
Montrons 4.2, soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, par indépendance et stationnarité de la suite $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$:

$$Q\left[\max_{-L\leq i\leq L}\left(\frac{1}{\alpha_i}\right) \leq D^{6/\kappa}\right] = \left(Q\left[\frac{1}{\alpha_0} \leq D^{6/\kappa}\right]\right)^{2L+1} = \left(1 - Q\left[\frac{1}{\alpha_0} > D^{6/\kappa}\right]\right)^{2L+1} . \tag{4.6}$$

On a :

$$Q\left[\frac{1}{\alpha_0} > D^{6/\kappa}\right] = Q\left[\frac{1}{\alpha_0} > D^{6/\kappa},\ \alpha_0 < \frac{1}{2}\right] + Q\left[\frac{1}{\alpha_0} > D^{6/\kappa},\ \alpha_0 \geq \frac{1}{2}\right] , \tag{4.7}$$

or pour tout $D > 2^{1+\kappa/6}$, $Q\left[\frac{1}{\alpha_0} > D^{6/\kappa},\ \alpha_0 \geq 1/2\right] = 0$. Donc pour tout $D > 2^{1+\kappa/6}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
Q\left[\frac{1}{\alpha_0} > D^{6/\kappa}\right] &= Q\left[\frac{1}{\alpha_0} > D^{6/\kappa},\ \alpha_0 < \frac{1}{2}\right] && (4.8)\\
&= Q\left[\frac{\beta_0}{\alpha_0} > \beta_0 D^{6/\kappa},\ \alpha_0 < \frac{1}{2}\right] && (4.9)\\
&\leq Q\left[\frac{\beta_0}{\alpha_0} > \frac{D^{6/\kappa}}{2}\right] && (4.10)\\
&= Q\left[\kappa \ln\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right) > 6(\ln D) - \kappa \ln(2)\right] && (4.11)\\
&\leq \frac{2^\kappa \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa \ln\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)}\right]}{D^6} . && (4.12)
\end{aligned}$$

On déduit 4.4 en remplaçant 4.12 dans 4.6 et en remarquant que $(1-x)^a \geq 1 - ax$, pour tout $0 \leq x \leq 1$ et tout $a > 1$. 4.2, 4.3 et 4.5 s'obtiennent de façon similaire. ■

4.1.2 Définition du potentiel aléatoire et premières propriétés

On définit maintenant le processus $(S_s,\ s \in \mathbb{R})$ (et son équivalent normalisé $(S_s^n,\ s \in \mathbb{R})$) qui est fonction des variables aléatoires $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ caractérisant le milieu aléatoire :

Définition 4.1.2. On appellera potentiel aléatoire et l'on notera $(S_s,\ s \in \mathbb{R})$, le processus défini par :

$$S_s = \begin{cases} \sum_{1\leq i\leq s} \epsilon_i, & s = 1, 2, \cdots , \\ \sum_{s\leq i\leq -1} \epsilon_i, & s = -1, -2, \cdots , \end{cases}$$

pour les autres s, tels que $s \notin \mathbb{Z}$, S_s est défini par interpolation linéaire et $S_0 = 0$. De plus, le potentiel aléatoire normalisé associé à $(S_s,\ s \in \mathbb{R})$ est défini par :

$$S_s^n = \frac{1}{\ln n} S_s,\ \forall s \in \mathbb{R} .$$

Notation : on notera pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{t} = t \times (\ln n)^2 . \tag{4.13}$$

Lemme 4.1.3. *Supposons H.1 H.2 et H.6, alors le processus $S^n_{[\tilde{t}]}$ converge en loi vers un mouvement Brownien $(W(t))_{t\in\mathbb{R}}$ de moyenne nulle, de variance $\sigma^2 t$ et tel que $W(0) = 0$.*

Preuve.
Pour la preuve de ce lemme on renvoie le lecteur au théorème de Donsker, voir par exemple [8] page 137. On remarque en effet que les hypothèses de ce théorème sont vérifiées ici : les variables aléatoires $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ étant indépendantes par hypothèse, on a l'indépendance des variables $\left(\ln \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i},\ i \in \mathbb{Z}\right)$, par l'hypothèse H.1 $\mathbb{E}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] = 0$, enfin par H.6, $\mathbb{E}_Q\left[\ln\left(\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right)^2\right] \equiv \sigma^2 < \infty$. ■

4.1.3 Contrôle des fluctuations du potentiel aléatoire $(S_r,\ r \in \mathbb{R})$

On commence par montrer une inégalité de type "inégalité de Bernstein" :

Lemme 4.1.4. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa_+[$ où $\kappa^+ \in \mathbb{R}_+^*$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $p > 0$ et tout $q > 0$ tel que $q < (\sigma^2 \kappa p) \wedge (\frac{\sigma^4 \kappa^3 p}{2C})$ on a :*

$$Q\left[|S_p| > q\right] \leq 2e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2 p}\left(1-\frac{2qC}{\sigma^4\kappa^3 p}\right)} \ , \tag{4.14}$$

Pour tout $p > 1$, tout $s \geq 0$ et tout $k > 1$ tel que $\ln k < (1+s)32\sigma^2\kappa^2 p$, on a pour tout $0 \leq j \leq p$:

$$Q\left[|S_p - S_j| > \left(32(1+s)\sigma^2 p \ln k\right)^{1/2}\right] \leq 2e^{-\ln k + \frac{(p-j)\ln k}{(1+s)64p} + \frac{(p-j)(\ln k)^{3/2}}{((1+s)32\sigma^2 p)^{3/2}\kappa^3}C} \ , \tag{4.15}$$

où $C = (\mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right]) \vee (\mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right])$.

Preuve.
Soient $p > 0$ et $q > 0$, on a :

$$Q\left[|S_p| > q\right] \quad \leq \quad Q\left[S_p > q\right] + Q\left[-S_p > q\right] \ . \tag{4.16}$$

Estimons $Q\left[S_p > q\right]$, soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, par l'inégalité de Markov et l'indépendance des v.a. $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$ on a :

$$Q\left[S_p > q\right] \quad \leq \quad \mathbb{E}_Q\left[e^{tS_p}\right] e^{-tq} = \left(\mathbb{E}_Q\left[e^{t\epsilon_0}\right]\right)^p e^{-tq} \ . \tag{4.17}$$

Par hypothèse, on a :

$$\mathbb{E}_Q\left[e^{t\epsilon_0}\right] = 1 + 0 + \frac{t^2}{2}\sigma^2 + \sum_{i=3}^{+\infty} \frac{t^i \mathbb{E}_Q\left[\epsilon_0^i\right]}{i!} \ . \tag{4.18}$$

Considérons la fonction $f : t \mapsto p\sigma^2\frac{t^2}{2} - tq$, f admet un minimum en $t_1 = \frac{q}{\sigma^2 p}$ et $f(t_1) = -\frac{q^2}{2\sigma^2 p}$. En prenant $\kappa \in]0, \kappa^+[$ on a :

$$\sum_{i=3}^{+\infty} \frac{t_1^i \mathbb{E}_Q\left[\epsilon_0^i\right]}{i!} \quad = \quad \sum_{i=3}^{+\infty} \left(\frac{q}{\sigma^2 p}\right)^i \frac{\mathbb{E}_Q\left[\epsilon_0^i\right]}{i!} \tag{4.19}$$

$$= \quad \sum_{i=3}^{+\infty} \left(\frac{q}{\sigma^2 p\kappa}\right)^i \frac{\mathbb{E}_Q\left[\kappa^i\epsilon_0^i\right]}{i!} \tag{4.20}$$

$$= \quad \left(\frac{q}{\sigma^2 p\kappa}\right)^3 \sum_{i=3}^{+\infty} \left(\frac{q}{\sigma^2 p\kappa}\right)^{i-3} \frac{\mathbb{E}_Q\left[\kappa^i\epsilon_0^i\right]}{i!} \ , \tag{4.21}$$

prenons $0 < q < \sigma^2 p\kappa$, on obtient :

$$\sum_{i=3}^{+\infty} \frac{t_1^i \mathbb{E}_Q\left[\epsilon_0^i\right]}{i!} \quad \leq \quad \left(\left(\frac{q}{\sigma^2 p\kappa}\right)^3 \sum_{i=3}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}_Q\left[\kappa^i\epsilon_0^i\right]}{i!}\right) \vee 0 \tag{4.22}$$

$$\leq \quad C_1 \left(\frac{q}{\sigma^2 p\kappa}\right)^3 \ , \tag{4.23}$$

où $C_1 \equiv \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] < \infty$ par H.6. En prenant $t = t_1$ et en utilisant l'inégalité $1 + x \leq e^x\ \forall x \in \mathbb{R}$, on déduit de 4.18 et 4.23, que pour tout $0 < q < \sigma^2 p\kappa$:

$$\left(\mathbb{E}_Q\left[e^{t_1\epsilon_0}\right]\right)^p e^{-t_1 q} \quad = \quad \left(1 + \frac{t_1^2\sigma^2}{2} + \sum_{i=3}^{+\infty} \frac{t_1^i \mathbb{E}_Q\left[\epsilon_0^i\right]}{i!}\right)^p e^{-t_1 q} \tag{4.24}$$

$$\leq \quad e^{\frac{p\sigma^2 t_1^2}{2} - t_1 q + pC_1\left(\frac{q}{\sigma^2 p\kappa}\right)^3} \tag{4.25}$$

$$= \quad e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2 p} + pC_1\left(\frac{q}{\sigma^2 p\kappa}\right)^3} \ , \tag{4.26}$$

ainsi pour tout $p > 0$ et $0 < q < (\sigma^2\kappa p) \wedge (\frac{\sigma^4\kappa^3 p}{2C_1})$, on déduit de 4.17 et 4.26 que :

$$Q\left[S_p > q\right] \leq \left(\mathbb{E}_Q\left[e^{t\epsilon_0}\right]\right)^p e^{-tq} \leq e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2 p}\left(1-\frac{2C_1 q}{\sigma^4\kappa^3 p}\right)} \ . \tag{4.27}$$

On effectue les mêmes calculs pour le second terme de 4.16, en remarquant que $-S_p = \sum_{i=1}^p \ln \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$, on obtient pour tout $p > 0$ et tout $0 < q < (\sigma^2\kappa p) \wedge (\frac{\sigma^4\kappa^3 p}{2C_2})$:

$$Q\left[-S_p > q\right] \leq e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2 p}\left(1-\frac{2C_2 q}{\sigma^4\kappa^3 p}\right)} \ , \tag{4.28}$$

où $C_2 \equiv \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right] < \infty$ par H.6. En remplaçant 4.27 et 4.28 dans 4.16 on obtient 4.14.
On montre maintenant 4.15, soient $p > 1$ et $k > 1$ notons $q = \left(32(1+s)\sigma^2 p \ln k\right)^{1/2}$, pour tout $1 \leq j \leq p$, tout $t > 0$ et tout $t' > 0$, par un calcul similaire à celui effectué pour montrer 4.17 on a :

$$Q\left[|S_p - S_j| > q\right] \leq e^{-tq}\left(\mathbb{E}_Q\left[e^{t\epsilon_0}\right]\right)^{p-j} + e^{-t'q}\left(\mathbb{E}_Q\left[e^{-t'\epsilon_0}\right]\right)^{p-j} \ . \tag{4.29}$$

Estimons $e^{-tq}\left(\mathbb{E}_Q\left[e^{t\epsilon_0}\right]\right)^{p-j}$, par hypothèse on a :

$$\mathbb{E}_Q\left[e^{t\epsilon_0}\right] = 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{t^i \mathbb{E}\left[(\epsilon_0)^i\right]}{i!} \ . \tag{4.30}$$

Soit $\kappa \in]0, \kappa_+[$ tel que H.6 soit vérifiée, soient $k > 1$ et $s \geq 0$, en prenant $t = \frac{(\ln k)^{1/2}}{(32(1+s)\sigma^2 p)^{1/2}}$, on obtient :

$$\mathbb{E}_Q\left[e^{t\epsilon_0}\right] = 1 + \frac{\ln k}{(1+s)64p} + \frac{(\ln k)^{3/2}}{((1+s)32\sigma^2\kappa^2 p)^{3/2}} \sum_{i=3}^{\infty}\left(\frac{(\ln k)^{1/2}}{((1+s)32\sigma^2\kappa^2 p)^{1/2}}\right)^{i-3} \frac{\mathbb{E}\left[(\kappa\epsilon_0)^i\right]}{i!} \ .$$

Supposons $\ln k < (1+s)32\sigma^2\kappa^2 p$, on obtient :

$$\mathbb{E}_Q\left[e^{t\epsilon_0}\right] \leq 1 + \frac{\ln k}{(1+s)64p} + \left(\frac{(\ln k)^{3/2}}{((1+s)32\sigma^2\kappa^2 p)^{3/2}} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left[(\kappa\epsilon_0)^i\right]}{i!}\right) \vee 0 \tag{4.31}$$

$$= 1 + \frac{\ln k}{(1+s)64p} + \frac{(\ln k)^{3/2}}{((1+s)32\sigma^2\kappa^2 p)^{3/2}} C_1 \ , \tag{4.32}$$

où $C_1 = \mathbb{E}\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right]$. On a $q = \left(32(1+s)\sigma^2 p \ln k\right)^{1/2}$, en remarquant que $1 + x \leq e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ on en déduit que pour tout $\ln k < (1+s)32\sigma^2\kappa^2 p$:

$$e^{-tq}\left(\mathbb{E}_Q\left[e^{t\epsilon_0}\right]\right)^{(p-j)} \leq e^{-\ln k + \frac{(p-j)\ln k}{(1+s)64p} + \frac{(p-j)(\ln k)^{3/2}}{((1+s)32\sigma^2\kappa^2 p)^{3/2}} C_1} \ . \tag{4.33}$$

Par un calcul identique, pour tout $k > 1$ tel que $\ln k < (1+s)32\sigma^2\kappa^2 p$:

$$e^{-tq}\mathbb{E}_Q\left[e^{-t\epsilon_0(p-j)}\right] \leq e^{-\ln k + \frac{(p-j)\ln k}{(1+s)64p} + \frac{(p-j)(\ln k)^{3/2}}{((1+s)32\sigma^2 p)^{3/2}\kappa^3} C_2} \ . \tag{4.34}$$

En remplaçant 4.33 et 4.34 dans 4.29 on obtient 4.15. ■

Le lemme suivant donne une borne supérieure à la plus grande fluctuation du potentiel $(S_r, r \in \mathbb{R})$ dans un bloc de taille B à l'intérieur d'un intervalle donné :

Lemme 4.1.5. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa_+[$ où $\kappa^+ \in \mathbb{R}_+^*$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $s > 0$, tout entier $K > 1$ et tout entier $B > 1$ tels que $\ln K < \sigma^2\kappa^2 e_0 B$ on a :*

$$Q\left[\max_{-K-1 \leq i \leq K} \max_{iB \leq j \leq (i+1)B} \max_{iB \leq l \leq (i+1)B} (|S_l - S_j|) > ((1+s)32\sigma^2 B \ln K)^{1/2}\right]$$

$$\leq \frac{2}{K^{s-\mathcal{O}\left(\frac{\ln K}{B}\right)^{1/2}}}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{K^{1-\frac{1}{64}-\mathcal{O}\left(\frac{\ln K}{B}\right)^{1/2}}}\right)\right) \ . \tag{4.35}$$

Pour tout $L > 1$, tout $K > 1$ et tout entier $B > 1$ tel que $[L] + 1 = K \times B$ et tel que pour tout $s > 0$ $\ln K < \sigma^2\kappa^2 e_0 B$, on a :

$$\begin{aligned} & Q\left[\max_{-[L]-1\le m\le [L]+1}\ \max_{m\le l\le m+B}\ \max_{m\le j\le m+B}(|S_l - S_j|) > ((1+s)32\sigma^2 B\ln K)^{1/2}\right] \\ (4.36)\qquad \le\ & \frac{2(B+1)}{K^{s-\mathcal{O}\left(\frac{\ln K}{B}\right)^{1/2}}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{K^{1-\frac{1}{64}-\mathcal{O}\left(\frac{\ln K}{B}\right)^{1/2}}}\right)\right)\ , \end{aligned}$$

où $e_0 = \left(\frac{1}{32(1+s)} \wedge \frac{\sigma^6\kappa^4}{128C^2(1+s)} \wedge (32\kappa(1+s))\right)$.

Preuve.
Montrons 4.35, soient $s > 0$, $K > 1$ et $B > 1$ deux entiers positifs, notons $q = ((1+s)32\sigma^2 B\ln K)^{1/2}$ par indépendance et stationnarité des v.a. $(\alpha_i, i \in \mathbb{Z})$ on a :

$$(4.37)\qquad Q\left[\max_{-K-1\le i\le K}\ \max_{-iB\le j\le (i+1)B}\ \max_{iB\le l\le (i+1)B}(|S_l - S_j|) > q\right]$$

$$(4.38)\qquad \le\ 1-\left(1-Q\left[\max_{1\le j\le B}\ \max_{1\le l\le B}(|S_l - S_j|) > q\right]\right)^{2K+2}$$

$$(4.39)\qquad \le\ 1-\left(1-Q\left[2\max_{1\le j\le B}(|S_j|) > q\right]\right)^{2K+2}\ .$$

Par l'inégalité de Ottaviani (voir par exemple [12] page 45) :

$$(4.40)\qquad Q\left[2\max_{1\le j\le B}(|S_j|) > q\right] \le \frac{Q\left[|S_B| > q/4\right]}{1-\sup_{1\le j\le B}\left(Q\left[|S_B - S_j| > q/4\right]\right)}\ .$$

Notons $C \equiv C(\kappa) = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$ et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que $C < +\infty$, en utilisant 4.14, on a pour tout $q < \left(\sigma^2\kappa B\right) \wedge \left(\frac{\sigma^4\kappa^3 B}{2C}\right)$:

$$(4.41)\qquad Q\left[|S_B| > q/4\right] \le 2e^{-\frac{q^2}{32\sigma^2 B}\left(1-\frac{qC}{2\sigma^4\kappa^3 B}\right)}\ ,$$

or ici $q = ((1+s)32\sigma^2 B\ln K)^{1/2}$, où $s > 0$, on en déduit que pour tout $K > 1$ tel que $\ln K < \left(\frac{\sigma^2\kappa^2 B}{32(1+s)}\right) \wedge \left(\frac{\sigma^8\kappa^6 B}{128C^2(1+s)}\right)$ on a :

$$(4.42)\qquad Q\left[|S_B| > q/4\right] \le 2e^{-\ln K\left(1+s-\mathcal{O}\left(\frac{\ln K}{B}\right)^{1/2}\right)}\ .$$

De même par 4.15, pour tout $K > 1$ tel que $\ln K < (1+s)32\sigma^2\kappa^2 B$, on a :

$$\begin{aligned} (4.43)\qquad \sup_{0\le j\le B} Q\left[|S_B - S_j| > q\right] &\le 2e^{-\ln K + \frac{\ln K}{(1+s)64} + \frac{(\ln K)^{3/2}}{B^{1/2}((1+s)32\sigma^2)^{3/2}\kappa^3}C} \\ (4.44)\qquad &= \frac{2}{K^{1-\frac{1}{(1+s)64}-\mathcal{O}\left(\frac{\ln K}{B}\right)^{1/2}}} \le \frac{2}{K^{1-\frac{1}{64}-\mathcal{O}\left(\frac{\ln K}{B}\right)^{1/2}}}\ . \end{aligned}$$

Ainsi en remplaçant 4.42 et 4.44 dans 4.40 on obtient pour tout $K > 1$ tel que $\ln K < \sigma^2\kappa^2 e_0 B$ où $e_0 = \left(\frac{1}{32(1+s)} \wedge \frac{\sigma^6\kappa^4}{128C^2(1+s)} \wedge (32\kappa(1+s))\right)$:

$$\begin{aligned} (4.45)\qquad Q\left[2\max_{1\le j\le B}(|S_j|) > ((1+s)32\sigma^2 B\ln K)^{1/2}\right] &\le \frac{2}{K^{1+s-\mathcal{O}\left(\frac{\ln K}{B}\right)^{1/2}}}\frac{1}{1-\frac{2}{K^{1-\frac{1}{64}-\mathcal{O}\left(\frac{\ln K}{B}\right)^{1/2}}}} \\ (4.46)\qquad &= \frac{2}{K^{1+s-\mathcal{O}\left(\frac{\ln K}{B}\right)^{1/2}}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{K^{1-\frac{1}{64}-\mathcal{O}\left(\frac{\ln K}{B}\right)^{1/2}}}\right)\right)\ . \end{aligned}$$

En remplaçant ce résultat dans 4.39 et en remarquant que $(1-x)^a \geq 1-ax$ pour tout $0 \leq x \leq 1$ et $a \geq 1$ on obtient 4.35.
On montre maintenant 4.36, soient $L > 1$, $B > 1$ un entier et $K > 1$ tel que $[L]+1 = K \times B$, on a $[K] \times B \leq [L]+1 \leq ([K]+1) \times B$ on remarque que :

$$\max_{-[L]-1 \leq m \leq [L]+1} \max_{m \leq l \leq m+B} \max_{m \leq j \leq m+B} (|S_l - S_j|) \tag{4.47}$$

$$\leq \max_{0 \leq q \leq B} \max_{-[K]-1 \leq i \leq [K]-1} \max_{iB+q \leq l \leq (i+1)B+q} \max_{iB+q \leq j \leq (i+1)B+q} (|S_l - S_j|) \ , \tag{4.48}$$

on en déduit :

$$Q\left[\max_{-L \leq m \leq L} \max_{m \leq l \leq m+B} \max_{m \leq j \leq m+B} (|S_l - S_j|) > ((1+s)32\sigma^2 B \ln K)^{1/2}\right] \tag{4.49}$$

$$\leq Q\left[\max_{0 \leq q \leq B} \max_{-[K]-1 \leq i \leq [K]-1} \max_{iB+q \leq l \leq (i+1)B+q} \max_{iB+q \leq j \leq (i+1)B+q} (|S_l - S_j|) > ((1+s)32\sigma^2 B \ln K)^{1/2}\right] \tag{4.50}$$

$$\leq \sum_{0 \leq q \leq B} Q\left[\max_{-[K]-1 \leq i \leq [K]-1} \max_{iB+q \leq l \leq (i+1)B+q} \max_{iB+q \leq j \leq (i+1)B+q} (|S_l - S_j|) > ((1+s)32\sigma^2 B \ln K)^{1/2}\right] \tag{4.51}$$

$$= (B+1) \times Q\left[\max_{-[K]-1 \leq i \leq [K]-1} \max_{iB \leq l \leq (i+1)B} \max_{iB \leq j \leq (i+1)B} (|S_l - S_j|) > ((1+s)32\sigma^2 B \ln K)^{1/2}\right] \ , \tag{4.52}$$

où la dernière égalité est obtenue par invariance par translation. On peut alors utiliser 4.35, on obtient ainsi 4.36. ■

On introduit maintenant les notions de vallée et de raffinement :

4.2 Découpage ordonné en vallées

4.2.1 Vallées et opération de raffinement

Définition 4.2.1. On dira que le triplet $\{\tilde{M}', \tilde{m}, \tilde{M}''\}$ est une vallée si :

$$S^n_{\tilde{M}'} = \max_{\tilde{M}' \leq t \leq \tilde{m}} S^n_t \ , \tag{4.53}$$

$$S^n_{\tilde{M}''} = \max_{\tilde{m} \leq t \leq \tilde{M}''} S^n_t \ , \tag{4.54}$$

$$S^n_{\tilde{m}} = \min_{\tilde{M}' \leq t \leq \tilde{M}''} S^n_t \ . \tag{4.55}$$

Si $\tilde{m}$ n'est pas unique, on choisira pour $\tilde{m}$ le point vérifiant 4.55 ayant la plus petite valeur absolue.

Notations : Les maximisants d'une vallée seront notés $\tilde{M}_.$, les minimisants $\tilde{m}_.$, on rappelle que $\tilde{a} \equiv a(\ln n)^2$, $a \in \mathbb{R}$. On désignera également une vallée $\{\tilde{M}', \tilde{m}, \tilde{M}''\}$ par l'intervalle $\left[\tilde{M}', \tilde{M}''\right]$.

Définition 4.2.2. On appellera profondeur de la vallée $\{\tilde{M}_1, \tilde{m}, \tilde{M}_2\}$ et on notera $d([\tilde{M}_1, \tilde{M}_2])$ la quantité :

$$\min(S^n_{\tilde{M}_1} - S^n_{\tilde{m}}, S^n_{\tilde{M}_2} - S^n_{\tilde{m}}) \ . \tag{4.56}$$

On définit maintenant l'opération de raffinement :

Définition 4.2.3. Soit $\{\tilde{M}_i', \tilde{m}_i, \tilde{M}_i\}$ une vallée et soient $\tilde{M}''$ et $\tilde{m}''$ tels que $\tilde{m}_i \leq \tilde{M}'' < \tilde{m}'' \leq \tilde{M}_i$ et

$$S^n_{\tilde{M}''} - S^n_{\tilde{m}''} = \max_{\tilde{m}_i \leq t' \leq t'' \leq \tilde{M}_i} (S^n_{t'} - S^n_{t''}) \ , \tag{4.57}$$

on appelle **raffinement à droite** l'opération qui consiste à singulariser les points $\tilde{m}''$ et $\tilde{M}''$ (voir Fig. 4.1). Si le couple $(\tilde{m}'', \tilde{M}'')$ n'est pas unique, on prendra celui tel que $\tilde{m}''$ et $\tilde{M}''$ aient la plus petite valeur absolue. On définit de même l'opération de raffinement à gauche.

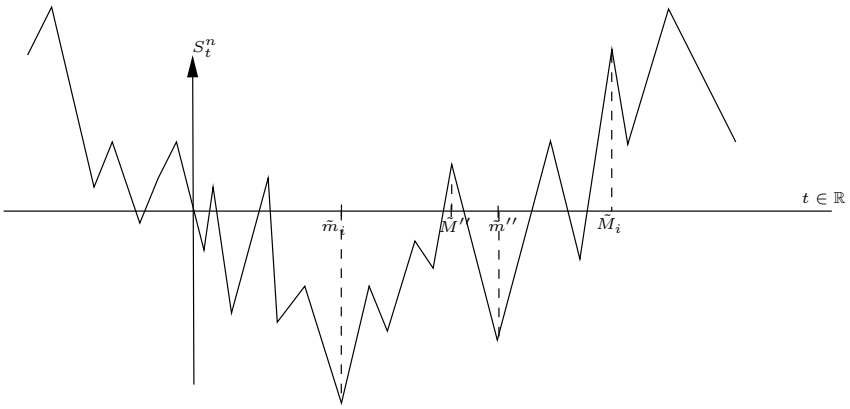


Fig. 4.1 –

Définition 4.2.4. Soient :

$$\tilde{M}^+ = \inf\{t > 0,\ S^n_t = 1\} \ , \tag{4.58}$$

$$\tilde{M}^- = \sup\{t < 0,\ S^n_t = 1\} \ , \tag{4.59}$$

$$\tilde{m} \text{ tel que : } S^n_{\tilde{m}} = \min_{\tilde{M}^- \leq t \leq \tilde{M}^+} S^n_t \ . \tag{4.60}$$

Si $\tilde{m}$ n'est pas unique on prendra le plus petit point en valeur absolue vérifiant 4.60.

Remarque 4.2.5. Par définition $\{\tilde{M}^-, \tilde{m}, \tilde{M}^+\}$ est une vallée.

On a le résultat suivant :

Proposition 4.2.6. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right])$ tel que pour tout $n > n_0$:*

$$Q\left[\max_{-E(\ln n)^2 \leq l \leq E(\ln n)^2} \left(\frac{1}{\alpha_l}\right)\right] \geq 1 - \frac{EC_1 2^{\kappa+1}}{(\ln n)^4} \ , \tag{4.61}$$

$$Q\left[\max_{-E(\ln n)^2 \leq l \leq E(\ln n)^2} \left(\frac{1}{\beta_l}\right)\right] \geq 1 - \frac{EC_2 2^{\kappa+1}}{(\ln n)^4} \ , \tag{4.62}$$

$$Q\left[\tilde{M}^+ \leq E(\ln n)^2\right] \geq 1 - \frac{3\epsilon}{R} \ , \tag{4.63}$$

$$Q\left[\tilde{M}^- \geq -E(\ln n)^2\right] \geq 1 - \frac{3\epsilon}{R} \ . \tag{4.64}$$

où $C_1 = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right]$, $C_2 = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right]$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. R est un paramètre libre qui sera choisi ultérieurement.

Pour la preuve de cette proposition on montre le lemme 4.2.7 suivant, on introduit pour cela la notation suivante, soit $a > 0$:

$$U_a^+ \equiv U_a^+(S_t^n,\ t \in \mathbb{R}_+^*) = \begin{cases} \inf\{t > 0,\ S_t^n \geq a\}, \\ +\infty, \text{ si un tel } t \text{ n'existe pas.} \end{cases} \tag{4.65}$$

$$U_a^- \equiv U_a^+(S_t^n,\ t \in \mathbb{R}_+^*) = \begin{cases} \inf\{t > 0,\ S_t^n \leq -a\}, \\ +\infty, \text{ si un tel } t \text{ n'existe pas.} \end{cases} \tag{4.66}$$

Lemme 4.2.7. *Supposons H.1 et H.2, et soit $\kappa \in]0, k^+[$ tel que H.6 soit vérifiée. Soient $a > 0$, $c > 0$, notons $d = a \vee c$. Il existe $n_0 \equiv n_0\left(d, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$, tout $L > \frac{(2(d\ln n))^2}{\sigma^2} + 1$ et tout $D > 1$:*

$$Q\left[U_a^- \wedge U_c^+ > L\right] \leq 2q_1^{\frac{L\sigma^2}{(2(d\ln n))^2+\sigma^2}}, \tag{4.67}$$

$$Q\left[U_a^- < U_c^+\right] \leq \frac{1}{c+a}\left(c + \frac{1}{\ln n}\left(\frac{\sigma q_1^{\frac{1}{2}\frac{L\sigma^2}{(2(d\ln n))^2+\sigma^2}}}{1-q_1} + \frac{6\ln D}{\kappa} + \frac{L^{3/2}(C)^{1/2}\sigma}{D^3}\right)\right), \tag{4.68}$$

$$Q\left[U_a^- > U_c^+\right] \leq \frac{1}{c+a}\left(a + \frac{1}{\ln n}\left(\frac{\sigma q_1^{\frac{1}{2}\frac{L\sigma^2}{(2(d\ln n))^2+\sigma^2}}}{1-q_1} + \frac{6\ln D}{\kappa} + \frac{L^{3/2}(C)^{1/2}\sigma}{D^3}\right)\right). \tag{4.69}$$

où $C \equiv C(\kappa) = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$, $\sigma^2 = \mathbb{E}_Q\left[\epsilon_0^2\right]$ et $q_1 = 0.7 + \frac{3{,}75\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]}{(d\ln n)\sigma^2} < 1$.

Preuve.
Soient $a > 0$, $c > 0$, notons $d = a \vee c$, on a :

$$\begin{aligned} Q\left[U_a^- \wedge U_c^+ > L\right] &\leq Q\left[U_d^- \wedge U_d^+ > L\right] \\ &= Q\left[\max_{0\leq l\leq L}|S_l| < (d\ln n)\right]. \end{aligned} \tag{4.70, 4.71}$$

Soit $b = \left[\frac{(2(d\ln n))^2}{\sigma^2}\right] + 1$, pour tout $L > b$ il existe $k \equiv k(b, L)$ tel que $k \times b \leq L \leq b \times (k+1)$, notons $[k]$ la partie entière de k, on a :

$$\begin{aligned} Q\left[U_a^- \wedge U_c^+ > L\right] &\leq Q\left[U_d^- \wedge U_d^+ > L\right] \\ &\leq Q\left[U_d^- \wedge U_d^+ > [k] \times b\right] && (4.72) \\ &\leq Q\left[\left\{\max_{0\leq l\leq([k]-1)b}|S_l| < (d\ln n)\right\} \bigcap_{j=([k]-1)b+1}^{[k]b}\left\{\left|S_{([k]-1)b} + \sum_{i=([k]-1)b+1}^{j}\epsilon_i\right| < (d\ln n)\right\}\right] && (4.73) \\ &\leq Q\left[\left\{\max_{0\leq l\leq([k]-1)b}|S_l| < (d\ln n)\right\} \bigcap_{j=([k]-1)b+1}^{[k]b}\left\{\left|\sum_{i=([k]-1)b+1}^{j}\epsilon_i\right| < 2(d\ln n)\right\}\right] && (4.74) \\ &= Q\left[\left\{\max_{0\leq l\leq([k]-1)b}|S_l| < (d\ln n)\right\}\right] Q\left[\bigcap_{j=([k]-1)b+1}^{[k]b}\left\{\left|\sum_{i=([k]-1)b+1}^{j}\epsilon_i\right| < 2(d\ln n)\right\}\right]. && (4.75) \end{aligned}$$

En itérant cette opération, on obtient :

$$\begin{aligned} Q\left[U_a^- \wedge U_c^+ > L\right] &\leq \left(Q\left[\bigcap_{j=1}^{b}\left\{\left|\sum_{i=1}^{j}\epsilon_i\right| < 2(d\ln n)\right\}\right]\right)^{[k]} && (4.76) \\ &\leq \left(Q\left[\left|\sum_{i=1}^{b}\epsilon_i\right| < 2(d\ln n)\right]\right)^{[k]} = \left(Q\left[\left|\frac{S_b}{\sigma b^{1/2}}\right| < \frac{2(d\ln n)}{\sigma b^{1/2}}\right]\right)^{[k]}. && (4.77) \end{aligned}$$

On utilise maintenant le théorème de Berry-Essen (voir par exemple [22] page 299) : pour tout $0 < \delta \leq 1$ il existe une constante universelle $F \equiv F(\delta) > 0$ telle que :

$$Q\left[\left|\frac{S_b}{\sigma b^{1/2}}\right| < \frac{2(d\ln n)}{\sigma b^{1/2}}\right] \leq 1 - 2\int_{\frac{2(d\ln n)}{\sigma b^{1/2}}}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}}dx + \frac{F\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^{2+\delta}\right]}{b^{\delta/2}\sigma^{2+\delta}} \ , \tag{4.78}$$

de plus, on travaille sous l'hypothèse H.6, on peut donc prendre $\delta = 1$ car $\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right] < \infty$, dans ce cas on a $F \leq 7,5$. Ainsi en remplaçant la valeur de b dans 4.78 on obtient :

$$Q\left[\left|\frac{S_b}{\sigma b^{1/2}}\right| < \frac{2(d\ln n)}{\sigma b^{1/2}}\right] \leq 2\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}}dx + \frac{3,75\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]}{(d\ln n)\sigma^2} \ , \tag{4.79}$$

De plus $2\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}}dx < 0.7$, donc il existe $n_0 \equiv n_0(\sigma, d, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right])$ tel que pour tout $n > n_0$:

$$q_1 \equiv 0.7 + \frac{3,75\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]}{(d\ln n)\sigma^2} < 1 \ . \tag{4.80}$$

On déduit de 4.77, 4.79 et 4.80 que pout tout $n > n_0$:

$$Q\left[U_a^- \wedge U_c^+ > L\right] \quad \leq \quad q_1^{[k]} \leq q_1^{k-1} \leq 2q_1^k = 2q_1^{\frac{L}{b}} \leq 2q_1^{\frac{L\sigma^2}{(2(d\ln n))^2+\sigma^2}} \ , \tag{4.81}$$

avec $q_1 < 1$ ce qui donne 4.67.
Pour montrer 4.68 on utilise l'identité de Wald (voir J. Neveu [78]) pour la martingale $(S_t^n,\ t \in \mathbb{R})$ et le temps d'arrêt régulier $U = U_a^- \wedge U_c^+$ (en effet d'après le première partie du lemme, on a : $\mathbb{E}_Q[U] < \infty$ donc U est régulier). Par l'identité de Wald on a donc :

$$\mathbb{E}_Q\left[S_U^n\right] = 0 \ . \tag{4.82}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q\left[S_U^n\right] &= \mathbb{E}_Q\left[S_{U_a^-}^n \mathbb{I}_{U_a^- < U_c^+}\right] + \mathbb{E}_Q\left[S_{U_c^+}^n \mathbb{I}_{U_a^- \geq U_c^+}\right] && (4.83)\\
&= \mathbb{E}_Q\left[\left(S_{U_a^-}^n + a\right)\mathbb{I}_{U_a^- < U_c^+}\right] + \mathbb{E}_Q\left[\left(S_{U_c^+}^n - c\right)\mathbb{I}_{U_a^- \geq U_c^+}\right] && (4.84)\\
&\quad -aQ\left[U_a^- < U_c^+\right] + cQ\left[U_a^- \geq U_c^+\right] && (4.85)\\
&= 0 \ , && (4.86)
\end{aligned}$$

de plus $\mathbb{E}_Q\left[\left(S_{U_a^-}^n + a\right)\mathbb{I}_{U_a^- < U_c^+}\right] \leq 0$ donc :

$$Q\left[U_a^- < U_c^+\right] \quad \leq \quad \frac{c}{c+a} + \frac{1}{c+a}\mathbb{E}_Q\left[(S_{U_c^+}^n - c)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-}\right] \ . \tag{4.87}$$

On a :

$$\mathbb{E}_Q\left[(S_{U_c^+}^n - c)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-}\right] = \mathbb{E}_Q\left[(S_{U_c^+}^n - c)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U \geq [L]+1}\right] + \mathbb{E}_Q\left[(S_{U_c^+}^n - c)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U < [L]+1}\right] \ . \tag{4.88}$$

On estime maintenant chacun des termes du membre de droite de cette égalité, pour le second terme on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q\left[(S_{U_c^+}^n - c)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U < [L]+1}\right] &= \sum_{i=1}^{[L]} \mathbb{E}_Q\left[(S_i^n - c)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U = i}\right] && (4.89)\\
&\leq \frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{[L]} \mathbb{E}_Q\left[(\epsilon_i)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U = i}\right] \ , && (4.90)
\end{aligned}$$

en effet :

$$(S_i^n - c)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U = i} \quad = \quad (S_{i-1}^n - c)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U = i} + \frac{\epsilon_i}{\ln n}\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U = i} \ , \tag{4.91}$$

or par définition de U, $(S^n_{i-1} - c)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U=i} \leq 0$. Pour tout $D > 1$, on a :

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{[L]} \mathbb{E}_Q\left[(\epsilon_i)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U=i}\right] \tag{4.92}$$

$$= \frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{[L]} \mathbb{E}_Q\left[(\epsilon_i)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U=i, \max_{1\leq j\leq [L]}(\epsilon_j)\leq \frac{6}{\kappa}\ln D}\right] \tag{4.93}$$

$$+ \frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{[L]} \mathbb{E}_Q\left[(\epsilon_i)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U=i, \max_{1\leq j\leq [L]}(\epsilon_j)> \frac{6}{\kappa}\ln D}\right] \tag{4.94}$$

$$\leq \frac{6\ln D}{\kappa \ln n} + \frac{\sigma[L]}{\ln n}\left(Q\left[\max_{1\leq j\leq [L]}(\epsilon_j) > \frac{6}{\kappa}\ln D\right]\right)^{1/2} , \tag{4.95}$$

en effet, pour 4.93 on a majoré les ϵ_i par $\frac{6}{\kappa}\ln D$ (ce qui donne le premier terme de l'inégalité) et pour 4.94 on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ce qui donne le second terme de 4.95). Pour finir on utilise l'inégalité 4.2, pour tout $D > 2^{1+\kappa/6}$:

$$\mathbb{E}_Q\left[(S^n_{U_c^+} - c)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U<[L]+1}\right] \leq \frac{6\ln D}{\kappa \ln n} + \frac{\sigma([L])^{3/2}\left(\mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa \ln\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)}\right]\right)^{1/2}}{D^3 \ln n} . \tag{4.96}$$

Pour le premier terme de l'égalité 4.88, on utilise la remarque qui nous a permis d'écrire l'inégalité 4.90, ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}_Q\left[(S^n_{U_c^+} - c)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U\geq [L]+1}\right] \leq \frac{1}{\ln n}\sum_{i=[L]+1}^{\infty} \mathbb{E}_Q\left[(\epsilon_i)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U=i}\right] \tag{4.97}$$

$$\leq \frac{\sigma}{\ln n}\sum_{i=[L]+1}^{\infty} \left(Q\left[U \geq i\right]\right)^{1/2} , \tag{4.98}$$

l'inégalité 4.67 donne alors :

$$\mathbb{E}_Q\left[(S^n_{U_c^+} - c)\mathbb{I}_{U_c^+ \leq U_a^-, U>[L]+1}\right] \leq \frac{\sigma}{\ln n}\sum_{i=[L]+1}^{\infty} 2q_1^{\frac{1}{2}\frac{i\sigma^2}{(2(d\ln n))^2+\sigma^2}} \leq \frac{2\sigma}{\ln n}\frac{q_1^{\frac{1}{2}\frac{L\sigma^2}{(2(d\ln n))^2+\sigma^2}}}{1-q_1} , \tag{4.99}$$

où $q_1 \equiv 0.7 + \frac{3{,}75\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]}{(d\ln n)\sigma^2}$, de plus pour tout $n > n_0$, $q_1 < 1$. Par 4.87, 4.88, 4.96 et 4.99, on obtient 4.68. ■

Avant de montrer la proposition 4.2.6, on fait la remarque suivante :

Remarque 4.2.8. Pour tout $a > 0$, $b > 0$ et $l > 0$ on a :

$$Q\left[U_c^+ > l\right] \leq Q\left[U_c^+ \wedge U_a^- > l\right] + Q\left[U_c^+ > U_a^-\right] . \tag{4.100}$$

En effet, on a :

$$\{U_c^+ > l\} = \{U_c^+ > l,\ U_c^+ \leq U_a^+\} \cup \{U_c^+ > l,\ U_c^+ > U_a^+\} \tag{4.101}$$

$$\subset \{U_c^+ \wedge U_a^+ > l\} \cup \{U_c^+ > U_a^+\} . \tag{4.102}$$

ce qui donne 4.100. On dira que l'on "symétrise" lorsqu'on écrit l'inégalité 4.100.

Preuve (Proposition 4.2.6).

Montrons 4.61 Soit $E > 0$, on va appliquer l'inégalité 4.4 en prenant $L = E(\ln n)^2$ et $D = \ln n$, on obtient que pour tout $n > e^{2^{1+\kappa/6}}$ on a :

$$Q\left[\max_{-E(\ln n)^2 \leq l \leq E(\ln n)^2} \left(\frac{1}{\alpha_l}\right) \leq (\ln n)^{\frac{6}{\kappa}}\right] \geq 1 - \frac{EC_1 2^{\kappa+1}}{(\ln n)^4} \ , \tag{4.103}$$

où $C_1 = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right]$, $\kappa \in]0, k_+[$ tel que H.6 soit vérifiée, 4.62 se montre de la même façon.
Montrons 4.63 (le problème étant symétrique 4.64 se montre de la même façon). On a $\tilde{M}^+ = U_1^+$, en symétrisant le problème (remarque 4.2.8), on obtient pour tout $G > 1$:

$$Q\left[\tilde{M}^+ > E(\ln n)^2\right] \leq Q\left[U_1^+ > E(\ln n)^2\right] \tag{4.104}$$

$$\leq Q\left[U_1^+ \wedge U_G^- > E(\ln n)^2\right] + Q\left[U_1^+ \geq U_G^-\right] \ . \tag{4.105}$$

Prenons $a = G$, $c = 1$ (on a alors $d \equiv a \vee c = G$) dans 4.67, il existe $n_1 \equiv n_1(G, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right])$ tel que pour tout $n > n_1$, tout $L \geq \frac{(2G\ln n)^2}{\sigma^2} + 1$:

$$Q\left[U_1^+ \wedge U_G^- > L\right] \leq 2q_1^{\frac{L\sigma^2}{4G^2(\ln n)^2+\sigma^2}} \ , \tag{4.106}$$

avec $q_1 < 1$. Avec $L = E(\ln n)^2$, on obtient pour tout $n > n_1$ et $E \geq \frac{4G^2}{\sigma^2} + \frac{1}{(\ln n)^2}$

$$Q\left[U_1^+ \wedge U_G^- > E(\ln n)^2\right] \leq 2q_1^{\frac{E\sigma^2}{4G^2+\frac{\sigma^2}{(\ln n)^2}}} \ . \tag{4.107}$$

$G > 1$ donc :

$$\frac{E\sigma^2}{4G^2 + \frac{\sigma^2}{(\ln n)^2}} \geq \frac{E\sigma^2}{4G^2}\left(1 - \frac{\sigma^2}{4(\ln n)^2}\right) \ , \tag{4.108}$$

ainsi il existe $n_2 \equiv n_2(\sigma)$ tel que pour tout $n > n_2$:

$$\frac{E\sigma^2}{4G^2 + \frac{\sigma^2}{(\ln n)^2}} \geq \frac{E\sigma^2}{8G^2} \ . \tag{4.109}$$

On obtient donc pour tout tout $G > 1$, tout $n > n_1 \vee n_2$ et tout $E \geq \frac{4G^2}{\sigma^2} + \frac{1}{(\ln n)^2}$:

$$Q\left[U_1^+ \wedge U_G^- > E(\ln n)^2\right] \leq 2q_1^{\frac{E\sigma^2}{8G^2}} \ . \tag{4.110}$$

En prenant $D = \ln n$ dans 4.68 on a pour tout $n > n_1 \vee n_2$:

$$Q\left[U_1^+ \geq U_G^-\right] \leq \frac{1}{G} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right) \ . \tag{4.111}$$

De 4.110 et 4.111, on obtient que pour tout $G > 1$ tout $n > n_1 \vee n_2$ tout $E \geq \frac{4G^2}{\sigma^2} + \frac{1}{(\ln n)^2}$:

$$Q\left[\tilde{M}^+ > E(\ln n)^2\right] \leq \frac{1}{G} + 2q_1^{\frac{E\sigma^2}{8G^2}} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right) \ . \tag{4.112}$$

Soient $R > 1$ et $\epsilon > 0$, prenons $G = \frac{R}{\epsilon}$ et soit $E_0 = \frac{8G^2}{\sigma^2}\frac{|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{|\ln q_1|}$. On a $q_1 \equiv 0.7 + \frac{3{,}75\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]}{(d\ln n)\sigma^2} \geq 0.7$ donc $\frac{1}{|\ln q_1|} \leq 3$ on en déduit :

$$E_0 \leq 24\frac{R^2}{\sigma^2\epsilon^2}\left|\ln\frac{R}{\epsilon}\right| \ . \tag{4.113}$$

On prend donc pour E la valeur suivante :

$$E = 24\frac{R^2}{\sigma^2\epsilon^2}\left|\ln\frac{R}{\epsilon}\right| \ , \tag{4.114}$$

on remarque qu'il existe $n_3 \equiv n_3(R,\epsilon,\sigma)$ tel que pour tout $n > n_3$ on a bien :

$$E \equiv \frac{8G^2}{\sigma^2}\frac{|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{|\ln q_1|} \geq \frac{4G^2}{\sigma^2} + \frac{1}{(\ln n)^2} \ , \tag{4.115}$$

On en déduit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]) = n_1 \vee n_2 \vee n_3$ tel que pour tout $n > n_0$:

$$Q\left[\tilde{M}^+ > E(\ln n)^2\right] \leq \frac{3\epsilon}{R} \ . \tag{4.116}$$

où E est donnée en 4.115, on a ainsi obtenu 4.63. ■

4.2.2 Définition et existence de la vallée "minimale" $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$

Définition 4.2.9. Soient $n > 3$, et $\gamma > 0$, la vallée, $\{\tilde{M}_{i_1}, \tilde{m}_{i_2}, \tilde{M}_{i_2}\}$ est de profondeur supérieure à $1+\gamma(n)$ si et seulement si :

$$d\left(\{\tilde{M}_{i_1}, \tilde{m}_{i_2}, \tilde{M}_{i_2}\}\right) \geq 1+\gamma(n) \ , \tag{4.117}$$

où $d(.,.)$ a été défini en 4.2.2, $\gamma(n) = \frac{\gamma \ln\ln n}{\ln n}$ et γ est un paramètre libre que l'on choisira ultérieurement.

Définition 4.2.10. On dira que la vallée $\{\tilde{M}_{i_1}, \tilde{m}_{i_2}, \tilde{M}_{i_2}\}$ contient le point 0 et est de profondeur supérieure à $1+\gamma(n)$ si et seulement si

1. $0 \in [\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}]$,
2. $d\left(\{\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}\}\right) \geq 1+\gamma(n)$,
3. si $\tilde{m}_{i_2} < 0$, $S^n_{\tilde{M}_{i_2}} - \max_{\tilde{m}_{i_2} \leq t \leq 0}(S^n_t) \geq \gamma(n)$,
   si $\tilde{m}_{i_2} > 0$, $S^n_{\tilde{M}_{i_1}} - \max_{0 \leq t \leq \tilde{m}_{i_2}}(S^n_t) \geq \gamma(n)$.

où $d(.,.)$ a été défini en 4.2.2, $\gamma(n) = \frac{\gamma \ln\ln n}{\ln n}$ et $\gamma > 0$ est un paramètre libre que l'on choisira ultérieurement.

Notation : notons $\mathcal{E}^n_0$ l'ensemble des vallées contenant 0 et de profondeur supérieure à $1+\gamma(n)$.

Remarques :

- d'après la définition précédente si $\tilde{m}_{i_2} < 0$ et si $\max_{0 \leq t \leq \tilde{m}_{i_2}}(S^n_t) - S^n_{\tilde{m}_{i_2}} \leq 1$ alors $S^n_{\tilde{M}_{i_1}} - \max_{0 \leq t \leq \tilde{m}_{i_2}}(S^n_t) \geq \gamma(n)$ car $d\left(\{\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}\}\right) > 1+\gamma(n)$, remarque similaire si $\tilde{m}_{i_2} > 0$.
- si $\tilde{m}_{i_2} = 0$, alors la vallée $[\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}]$ contient nécessairement le point 0, pour qu'elle appartienne à $\mathcal{E}^n_0$ il suffit donc que $d\left(\{\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}\}\right) \geq 1+\gamma(n)$.

Lemme 4.2.11. *Supposons H.1 et H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, il existe $n_0 \equiv n_0(\gamma, \sigma, \mathbb{E}[|\epsilon_0|^3])$ tel que pour tout $n > n_0$*

$$Q\left[\mathcal{E}^n_0 = \varnothing\right] \leq \frac{3\ln\ln n}{\ln n}\left(\gamma + \frac{6}{\kappa} + O\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)\right) \ , \tag{4.118}$$

avec $\gamma > 0$.

Preuve.
Soient $\gamma > 0$, $\kappa > 0$, tel que H.6 soit vérifiée, pour montrer ce lemme il suffit de montrer que :

$$Q\left[\{\tilde{M}^-, \tilde{m}, \tilde{M}^+\} \notin \mathcal{E}_0^n\right] \leq \frac{3\ln\ln n}{\ln n}\left(\gamma + \frac{6}{\kappa} + O\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)\right) . \tag{4.119}$$

Vérifions que $\{\tilde{M}^-, \tilde{m}, \tilde{M}^+\}$ satisfait chacun des trois points de la définition 4.2.10 :
1. par définition $0 \in [\tilde{M}^-, \tilde{M}^+]$.
2. Par définition de $(S_t^n, t \in \mathbb{R})$ on a $U_1^+ = \tilde{M}^+$. En prenant $a = \gamma(n)$ et $c = 1$ dans 4.69 on sait qu'il existe $n_1 \equiv n_1(\gamma, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right])$ tel que pour tout $n > n_1$ $d = 1$ et en prenant $D = \ln n$ et $L = (\ln n)^2$ on a :

$$Q\left[\tilde{M}^+ < U_{\gamma(n)}^-\right] \leq \frac{\gamma(n)}{1+\gamma(n)} + \frac{1}{\ln n + \gamma\ln\ln n}\left(\frac{6\ln\ln n}{\kappa} + \mathcal{O}(1)\right) , \tag{4.120}$$

or par définition $S_{\tilde{m}}^n = \min_{\tilde{M}^- \leq t \leq \tilde{M}^+}(S_t^n)$, ainsi $\tilde{M}^+ > U_{\gamma(n)}^- \Rightarrow S_{\tilde{m}}^n < -\gamma(n)$, d'où par 4.120 :

$$Q\left[S_{\tilde{m}}^n > -\gamma(n)\right] \leq \frac{\ln\ln n}{\ln n}\left(\gamma + \frac{6}{\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)\right) , \tag{4.121}$$

mais par définition $S_{\tilde{M}^+}^n = S_{\tilde{M}^-}^n = 1$ ainsi :

$$\begin{aligned}
Q\left[d\left([\{\tilde{M}^-, \tilde{m}, \tilde{M}^+\}]\right) \leq 1+\gamma(n)\right] &\equiv Q\left[\left(S_{\tilde{M}^-}^n - S_{\tilde{m}}^n\right) \wedge \left(S_{\tilde{M}^+}^n - S_{\tilde{m}}^n\right) \leq 1+\gamma(n)\right] && (4.122)\\
&\leq Q\left[S_{\tilde{m}}^n \geq -\gamma(n)\right] && (4.123)\\
&\leq \frac{\ln\ln n}{\ln n}\left(\gamma + \frac{6}{\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)\right) . && (4.124)
\end{aligned}$$

3. Supposons $\tilde{m} > 0$, on remarque qu'estimer $Q\left[S_{\tilde{M}^-}^n - \max_{0\leq t\leq m}(S_t^n) \leq \gamma(n)\right]$ revient, par définition de M^-, à estimer : $Q\left[\max_{0\leq t\leq m}(S_t^n) \geq 1-\gamma(n)\right]$. Par définition de $\tilde{m}$ et $\tilde{M}^+$ on a :

$$\max_{0\leq t\leq \tilde{m}}(S_t^n) \leq \max_{0\leq t\leq \tilde{M}^+}(S_t^n) = S_{\tilde{M}^+}^n = 1 , \tag{4.125}$$

donc

$$Q\left[\max_{0\leq t\leq \tilde{m}}(S_t^n) \geq 1-\gamma(n)\right] = Q\left[1-\gamma(n) \leq \max_{0\leq t\leq \tilde{m}}(S_t^n) \leq 1\right] . \tag{4.126}$$

On rappelle que l'on a montré au point 2 qu'il existe $n_1 \equiv n_1(\gamma, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right])$ tel que pour tout $n > n_1$:

$$Q\left[S_{\tilde{m}}^n \leq -\gamma(n)\right] \geq 1 - \frac{\ln\ln n}{\ln n}\left(\gamma + \frac{6}{\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)\right) . \tag{4.127}$$

Notons $\mathcal{A} = \{1-\gamma(n) \leq \max_{0\leq t\leq \tilde{m}}(S_t^n) < 1,\ S_{\tilde{m}}^n \leq -\gamma(n)\}$, par 4.126 et 4.127 on a :

$$Q\left[\max_{0\leq t\leq \tilde{m}}(S_t^n) \geq 1-\gamma(n)\right] \leq Q\left[\mathcal{A}\right] + \frac{\ln\ln n}{\ln n}\left(\gamma + \frac{6}{\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)\right) , \tag{4.128}$$

définissons

$$H_{\gamma(n)} = \begin{cases} \inf\{m \in \mathbb{N}^*,\ S_m^n \in [1-\gamma(n), 1]\} , \\ +\infty, \text{ si un tel } m \text{ n'existe pas.} \end{cases} \tag{4.129}$$

On a :

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{j > H_{\gamma(n)}} \left\{ S_j^n \leq -\gamma(n), \bigcap_{k=H_{\gamma(n)}+1}^{j} \{S_k^n \leq 1\} \right\} , \tag{4.130}$$

ainsi :

$$Q\left[\mathcal{A}\right] \leq Q\left[\bigcup_{j>H_{\gamma(n)}}\left\{S_j^n \leq -\gamma(n),\ \bigcap_{k=H_{\gamma(n)}+1}^{j}\{S_k^n<1\}\right\}\right] \ . \tag{4.131}$$

En partitionnant sur les valeurs de $H_{\gamma(n)}$ on a :

$$Q\left[\bigcup_{j>H_{\gamma(n)}}\left\{S_j^n \leq -\gamma(n),\ \bigcap_{k=H_{\gamma(n)}+1}^{j}\{S_k<1\}\right\}\right] \tag{4.132}$$

$$= \sum_{r=0}^{+\infty} Q\left[\bigcup_{j>r}\left\{S_j^n \leq -\gamma(n),\ \bigcap_{k=r+1}^{j}\{S_k^n<1\}\right\},\ H_{\gamma(n)}=r\right] \ , \tag{4.133}$$

on remarque que $H_{\gamma(n)}=r \Rightarrow S_r \in [1-\gamma(n),1]$, ainsi par la propriété de Markov :

$$Q\left[\bigcup_{j>H_{\gamma(n)}}\left\{S_j^n \leq -\gamma(n),\ \bigcap_{k=H_{\gamma(n)}+1}^{j}\{S_k^n<1\}\right\}\right] \tag{4.134}$$

$$= \sum_{r=0}^{+\infty}\int_{1-\gamma(n)}^{1} Q\left[\bigcup_{j>r}\left\{S_j^n \leq -\gamma(n),\ \bigcap_{k=r+1}^{j}\{S_k^n<1\}\right\}\middle| S_r^n \in dx\right] Q\left[H_{\gamma(n)}=r,\ S_r^n \in dx\right] \ , \tag{4.135}$$

posons $\bar{S}_i^n = S_i^n - S_r^n,\ i>r$, on a :

$$Q\left[\bigcup_{j>r}\left\{S_j^n \leq -\gamma(n),\ \bigcap_{k=r+1}^{j}\{S_k^n\leq 1\}\right\}\middle| S_r^n \in dx\right] \tag{4.136}$$

$$= Q\left[\bigcup_{j>r}\left\{\bar{S}_j^n \leq -\gamma(n)-x,\ \bigcap_{k=r+1}^{j}\{\bar{S}_k^n\leq 1-x\}\right\}\right] \tag{4.137}$$

$$= Q\left[\bar{U}^-_{\gamma(n)+x} < \bar{U}^+_{1-x}\right] = Q\left[U^-_{\gamma(n)+x} < U^+_{1-x}\right] \ , \tag{4.138}$$

où la dernière égalité est obtenue par stationnarité du milieu et pour tout $f>0$, $\bar{U}_f^- \equiv U_f^-(\bar{S}_j^n, j\in\mathbb{Z})$. On en déduit :

$$Q\left[\bigcup_{j>H_{\gamma(n)}}\left\{S_j^n \leq -\gamma(n),\ \bigcap_{k=H_{\gamma(n)}+1}^{j}\{S_k^n<1\}\right\}\right] \tag{4.139}$$

$$\leq \sup_{1-\gamma(n)\leq x\leq 1}\left(Q\left[U^-_{\gamma(n)+x} < U^+_{1-x}\right]\right)\sum_{r=0}^{+\infty}\int_{1-\gamma(n)}^{1} Q\left[H_{\gamma(n)}=r,\ S_r^n \in dx\right] \tag{4.140}$$

$$\leq Q\left[U_1^- < U^+_{\gamma(n)}\right] \ , \tag{4.141}$$

on utilise maintenant le lemme 4.2.7, on obtient qu'il existe $n_2 \equiv n_2(\sigma, \mathbb{E}[|\epsilon_0|^3])$ tel que pour tout $n>n_2$:

$$Q\left[U^+_{\gamma(n)} > U_1^-\right] \leq \frac{\ln\ln n}{\ln n}\left(\gamma + \frac{6}{\kappa} + O\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)\right) \ , \tag{4.142}$$

de 4.128, 4.131, 4.141 et 4.142 on en déduit :

$$Q\left[1-\gamma(n) \leq \max_{0\leq t\leq \tilde{m}}(S_t^n) < 1\right] \leq \frac{2\ln\ln n}{\ln n}\left(\gamma + \frac{6}{\kappa} + O\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)\right) \tag{4.143}$$

On déduit le lemme de 1. 2. et 3 et en prenant $n_0 = n_1 \vee n_2$. ■

Lemme 4.2.12. *Soient $\{\tilde{M}_{i_1}, \tilde{m}_{i_2}, \tilde{M}_{i_2}\}$ et $\{\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{m}'_{i_2}, \tilde{M}'_{i_2}\}$ deux vallées distinctes de profondeur supérieure à $1+\gamma(n)$ et contenant le point 0, alors $[\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}] \cap [\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}]$ est encore une vallée de profondeur supérieure à $1+\gamma(n)$ contenant le point 0.*

Preuve.
Il y a deux cas possibles :
Premier cas (trivial) : supposons que l'une des deux vallées soit entièrement contenue dans l'autre, par exemple : supposons $[\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}] \subset [\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}]$, alors (par définition) $[\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}] \cap [\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}] \equiv [\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}]$, est une vallée de profondeur strictement supérieure à 1 et contenant 0. (voir figure 4.2 Cas 1)
Deuxième cas (figures 4.2, Cas 2 a) et b)) : $[\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}] \cap [\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}] = [\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}]$ ou $[\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}] \cap [\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}] = [\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}]$, montrons, par exemple, que $[\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}]$ vérifie bien les trois points de la définition 4.2.10 :
1. $0 \in [\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}]$, car les deux vallées : $[\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}]$ et $[\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}]$ contiennent ce point.
2. • montrons que nécessairement $\tilde{m}_{i_2}$ ou $\tilde{m}'_{i_2}$ est dans $[\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}]$. En effet, supposons le contraire ($\tilde{m}_{i_2} \notin [\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}]$ et $\tilde{m}'_{i_2} \notin [\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}]$) alors : $\tilde{m}_{i_2} \in [M''_{i_2}, \tilde{M}_{i_2}]$ et $\tilde{m}'_{i_2} \in [\tilde{M}'_{i_2}, \tilde{M}_{i_2}]$, on a donc : $\tilde{M}'_{i_1} < \tilde{m}'_{i_2} < \tilde{M}_{i_1} < \tilde{M}'_{i_2} < \tilde{m}_{i_2} < \tilde{M}_{i_2}$.
Supposons : $S^n_{\tilde{M}_{i_1}} > S^n_{\tilde{M}'_{i_2}}$, alors on obtient une contradiction car $\max_{\tilde{m}'_{i_2} \le t \le \tilde{M}'_{i_2}} (S^n_t) = S^n_{\tilde{M}_{i_1}}$ et donc $\{\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{m}'_{i_2}, \tilde{M}'_{i_2}\}$ ne serait pas une vallée.
Supposons $S^n_{\tilde{M}_{i_1}} < S^n_{\tilde{M}'_{i_2}}$, alors on obtient encore une contradiction car $\max_{\tilde{M}_{i_1} \le t \le \tilde{m}_{i_2}} (S^n_t) = S^n_{\tilde{M}'_{i_2}}$ et donc $\{\tilde{M}_{i_1}, \tilde{m}_{i_2}, \tilde{M}_{i_2}\}$ ne serait pas une vallée.
On remarque de plus que les deux vallées ont soit leur minimum en commun (figure 4.2, Cas 2 b)) soit deux minimums distincts (figure 4.2, Cas 2 a)) et dans ce dernier cas le minimum $\tilde{m}$ de la vallée obtenu par intersection est tel que : $S^n_{\tilde{m}} = \max\left(S^n_{\tilde{m}_{i_2}}, S^n_{\tilde{m}'_{i_2}}\right)$.
• On montre maintenant que la vallée obtenue par intersection $[\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}]$ est de profondeur strictement supérieure à 1. D'après ce que l'on vient de montrer (l'intersection des deux vallées contient l'un des minimum), on a l'un des deux cas (équivalents) suivants : $\tilde{M}'_{i_1} < \tilde{m}'_{i_2} < \tilde{M}_{i_1} < \tilde{m}_{i_2} < \tilde{M}'_{i_2} < \tilde{M}_{i_2}$ ou $\tilde{M}'_{i_1} < \tilde{M}_{i_1} < \tilde{m}'_{i_2} < \tilde{M}'_{i_2} < \tilde{m}_{i_2} < \tilde{M}_{i_2}$, montrons donc que $d\left([\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}]\right) > 1$:
Supposons le contraire alors $S^n_{\tilde{M}'_{i_2}} - S^n_{\tilde{m}_{i_2}} \le 1$, car par définition $d\left([\tilde{M}_{i_1}, \tilde{M}_{i_2}]\right) > 1$, alors nécessairement $S^n_{\tilde{M}'_{i_2}} \le S^n_{\tilde{M}_{i_1}}$, et on aboutit à une contradiction car dans ce cas : $\max'_{\tilde{m}_{i_2} \le t \le \tilde{M}'_{i_2}}$ et donc $\{\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{m}'_{i_2}, \tilde{M}'_{i_2}\}$ ne serait pas une vallée.
3. Prenons le cas $\tilde{M}'_{i_1} < \tilde{m}'_{i_2} < \tilde{M}_{i_1} < \tilde{m}_{i_2} < \tilde{M}'_{i_2} < \tilde{M}_{i_2}$, • supposons $\tilde{m}_{i_2} > 0$ alors par définition on a bien : $S^n_{\tilde{M}_{i_1}} - \max_{0 \le t \le \tilde{m}_{i_2}} (S^n_t) \ge \gamma(n)$. • Si maintenant $\tilde{m}_{i_2} < 0$, on a : $S^n_{\tilde{m}'_{i_2}} - \max_{\tilde{m}_{i_2} \le t \le 0} (S^n_t) \ge S^n_{\tilde{m}'_{i_2}} - \max_{\tilde{m}'_{i_1} \le t \le 0} (S^n_t) \ge \gamma(n)$ par définition de la vallée $\{\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{m}'_{i_1}, \tilde{M}'_{i_2}\}$ avec $\tilde{m}'_{i_2} < 0$. • Si $\tilde{m}_{i_2} = 0$ on n'a pas besoin de vérifier le point 3. ■

Construction de la vallée "minimale" $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$:

1ère étape : considérons la vallée $\{\tilde{M}^-, \tilde{m}, \tilde{M}^+\}$ effectuons un raffinement à droite et à gauche de cette vallée, on obtient les points (classés par ordre croissant de valeur) $\{\tilde{M}^-, \tilde{m}'_1, \tilde{M}'_1, \tilde{m}, \tilde{M}_1, \tilde{m}_1, \tilde{M}^+\}$ où $\tilde{M}'_1 \in \mathbb{Z}$ et $\tilde{M}_1 \in \mathbb{Z}$ sont des maximisants relatifs et $\tilde{m}'_1 \in \mathbb{Z}$ et $\tilde{m}_1 \in \mathbb{Z}$ des minimisants relatifs. Parmi les 3 vallées obtenues : $\{\tilde{M}^-, \tilde{m}'_1, \tilde{M}'_1\}$, $\{\tilde{M}'_1, \tilde{m}, \tilde{M}_1\}$ et $\{\tilde{M}_1, \tilde{m}_1, \tilde{M}^+\}$ une seule contient le point 0 notons $\{\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{m}_{i_1}, \tilde{M}_{i_1}\}$ cette vallée. Si $d\left([\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{M}_{i_1}]\right) \ge 1+\gamma(n)$ on réitère l'opération de raffinement sur la vallée $\{\tilde{M}'_{i_1}, \tilde{m}_{i_1}, \tilde{M}_{i_1}\}$ jusqu'à obtenir les vallées $\{\tilde{M}'_{i_k}, \tilde{m}_{i_k}, \tilde{M}_{i_k}\}$ et $\{\tilde{M}'_{i_{k+1}}, \tilde{m}_{i_{k+1}}, \tilde{M}_{i_{k+1}}\}$ contenant le point 0 telles que :

$$d\left([\tilde{M}'_{i_k}, \tilde{M}_{i_k}]\right) \ge 1+\gamma(n) \text{ et} \tag{4.144}$$

$$d\left([\tilde{M}'_{i_{k+1}}, \tilde{M}_{i_{k+1}}]\right) \le 1+\gamma(n), \tag{4.145}$$

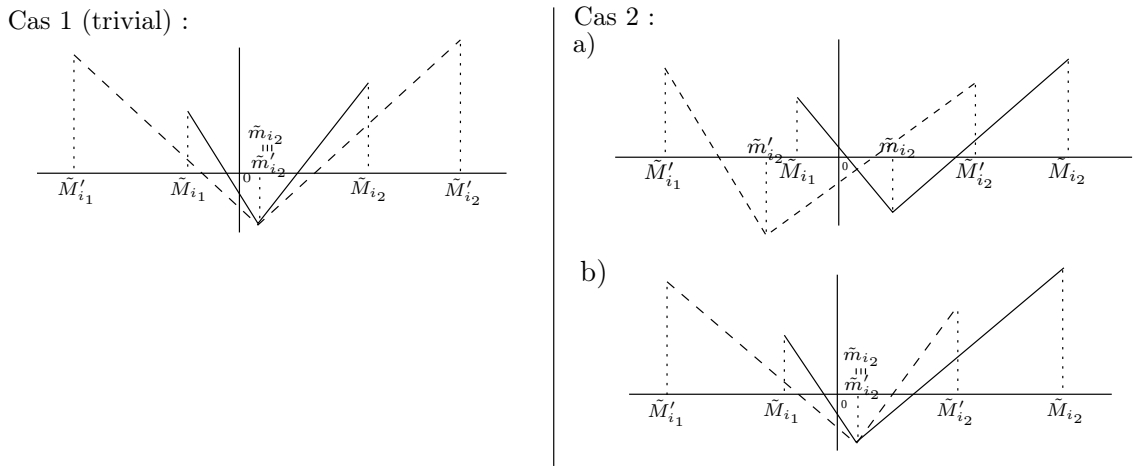


FIG. 4.2 –

sinon on conserve la vallée $\{\tilde{M}^-, \tilde{m}, \tilde{M}^+\}$. Notons $\{\tilde{M}', \tilde{m}_0, \tilde{M}\}$ la vallée finalement obtenue ($\{\tilde{M}'_{i_k}, \tilde{m}_{i_k}, \tilde{M}_{i_k}\}$ ou $\{\tilde{M}^-, \tilde{m}, \tilde{M}^+\}$), par construction cette vallée contient le point 0 et $d\left([\tilde{M}', \tilde{M}]\right) \geq 1 + \gamma(n)$. Cette première étape nous a permis de singulariser le minimisant de la vallée "minimale" : $\tilde{m}_0$.
2ième étape : on extrait les deux maximisants $\tilde{M}'_0 \in \mathbb{Z}^-$ et $\tilde{M}_0 \in \mathbb{Z}^+$ tels que $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ soit la plus petite vallée contenant le point 0 et de profondeur supérieure à $1 + \gamma(n)$, c'est à dire que l'on définie $\tilde{M}'_0$ et $\tilde{M}_0$ de la façon suivante : si $\tilde{m}_0 > 0$

$$\tilde{M}'_0 = \sup\left\{l \in \mathbb{Z}_-,\ l < \tilde{m}_0,\ S_l^n - S_{\tilde{m}_0}^n \geq 1 + \gamma(n),\ S_l - \max_{0 \leq k \leq \tilde{m}_0} S_k \geq \gamma(n)\right\} , \tag{4.146}$$

$$\tilde{M}_0 = \inf\left\{l \in \mathbb{Z}_+,\ l > \tilde{m}_0,\ S_l^n - S_{\tilde{m}_0}^n \geq 1 + \gamma(n)\right\} . \tag{4.147}$$

Si $\tilde{m}_0 < 0$:

$$\tilde{M}'_0 = \sup\left\{l \in \mathbb{Z}_-,\ l < \tilde{m}_0,\ S_l^n - S_{\tilde{m}_0}^n \geq 1 + \gamma(n)\right\} , \tag{4.148}$$

$$\tilde{M}_0 = \inf\left\{l \in \mathbb{Z}_+,\ l > \tilde{m}_0,\ S_l^n - S_{\tilde{m}_0}^n \geq 1 + \gamma(n),\ S_l - \max_{\tilde{m}_0 \leq k \leq 0} S_k \geq \gamma(n)\right\} . \tag{4.149}$$

Si $\tilde{m}_0 = 0$:

$$\tilde{M}'_0 = \sup\left\{l \in \mathbb{Z}_-,\ l < \tilde{m}_0,\ S_l^n - S_{\tilde{m}_0}^n \geq 1 + \gamma(n)\right\} , \tag{4.150}$$

$$\tilde{M}_0 = \inf\left\{l \in \mathbb{Z}_+,\ l > \tilde{m}_0,\ S_l^n - S_{\tilde{m}_0}^n \geq 1 + \gamma(n)\right\} . \tag{4.151}$$

Lemme 4.2.13. *Supposons H.1 et H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, il existe $n_0 \equiv n_0(\gamma, \sigma, E[|\epsilon_0|^3])$ tel que pour tout $n > n_0$*

$$Q\left[\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}\ \textit{existe}\ \right] \geq 1 - \frac{6 \ln\ln n}{\ln n}\left(\gamma + \frac{6}{\kappa} + O\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)\right) , \tag{4.152}$$

Preuve.
Deux cas peuvent se présenter : soit $[\tilde{M}'_0, \tilde{M}_0] \subsetneqq [\tilde{M}^+, \tilde{M}^-]$, dans ce cas par construction $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ existe si et seulement si $\mathcal{E}_n^0$ est non vide, or par le lemme 4.2.11 on a : $Q\left[\mathcal{E}_n^0\right] \geq 1 - \frac{3 \ln\ln n}{\ln n}\left(\gamma + \frac{6}{\kappa} + O\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)\right)$. On remarque que $[\tilde{M}'_0, \tilde{M}_0] = [\tilde{M}^+, \tilde{M}^-]$ uniquement si $\tilde{M}^+$ et $\tilde{M}^-$ sont des entiers. Supposons maintenant que $[\tilde{M}'_0, \tilde{M}_0] \nsubseteq [\tilde{M}^+, \tilde{M}^-]$ on sait que si $\{\tilde{M}^+, \tilde{m}, \tilde{M}^-\}$ est une vallée contenant 0 et de profondeur supérieure à $1 + \gamma(n)$ alors la vallée $\{\tilde{M}_1, \tilde{m}_0, \tilde{M}_2\}$ telle que : $\tilde{M}_1 = [\tilde{M}^+] + 1$ et $\tilde{M}_2 = [\tilde{M}^+] + 1$ contient le point 0 et est de profondeur supérieure à $1 + \gamma(n)$. Or par les calculs effectués dans la preuve du lemme 4.2.11 on sait

que : $Q\left[\{\tilde{M}^+,\tilde{m},\tilde{M}^-\}\in\mathcal{E}_n^0\right]\geq 1-\frac{3\ln\ln n}{\ln n}\left(\gamma+\frac{6}{\kappa}+O\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right)\right)$ donc, dans ce cas il suffit de prendre pour $\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}$, la vallée $\{\tilde{M}_1,\tilde{m}_0,\tilde{M}_2\}$. On en déduit le lemme. ■

On a le résultat suivant :

Proposition 4.2.14. *Supposons H.1, H.2 et H.6, pour tout $R>1$, tout $\gamma>0$ et tout $\epsilon>0$, il existe $n_0\equiv n_0\left(\epsilon,\gamma,\sigma,\mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n>n_0$:*

$$Q\left[\tilde{M}_0\leq E(\ln n)^2\right]\geq 1-\frac{3\epsilon}{R}\ , \tag{4.153}$$

$$Q\left[\tilde{M}_0'\geq -E(\ln n)^2\right]\geq 1-\frac{3\epsilon}{R}\ , \tag{4.154}$$

$$Q\left[\max_{\tilde{M}_0'\leq l\leq\tilde{M}_0}\left(\frac{1}{\alpha_l}\right)\right]\geq 1-\frac{6\epsilon}{R}\ , \tag{4.155}$$

$$Q\left[\max_{\tilde{M}_0'\leq l\leq\tilde{M}_0}\left(\frac{1}{\beta_l}\right)\right]\geq 1-\frac{6\epsilon}{R}\ . \tag{4.156}$$

avec $E=\frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. R est un paramètre libre que nous choisirons le moment venu.

Preuve.
4.153 (respectivement 4.154) se déduit de 4.63 (respectivement 4.64). 4.155 (respectivement 4.156) se déduit de 4.153 et 4.61 (respectivement 4.154 et 4.62). ■
Cette proposition nous permet de définir l'intervalle (déterministe) dans lequel nous allons étudier les fluctuations du potentiel aléatoire. Dans la suite de la preuve nous considérerons le découpage (déterministe) suivant, soit $n>1$:

$$E(\ln n)^2=k_n\times b_n \tag{4.157}$$

Les valeurs de k_n et b_n seront fixées ultérieurement, nous verrons alors que les valeurs de b_n et k_n satisfaisantes pour nos calculs sont :

$$b_n=\left[E(\ln n)^{3/2}(\gamma\ln\ln n)^{1/2}\right]+1\ , \tag{4.158}$$

$$k_n=\frac{E(\ln n)^2}{b_n}\ , \tag{4.159}$$

on rappelle que $\gamma>0$ est un paramètre libre, introduit dans la définition 4.2.10, que l'on choisira ultérieurement.

4.2.3 Découpage ordonné en vallées

Construction de l'ensemble de maximisants et minimisants $\mathcal{M}$

Soit $n>1$, on définit la suite positive $l_n=D\sigma^2\ln k_n$ où D est une valeur numérique. La forme de l_n et la valeur du paramètre D seront justifiées lors de la preuve du lemme 4.3.1.
On effectue la construction suivante : prenons $\{\tilde{M}_0,\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}$ comme vallée initiale et notons $\mathcal{M}_0'=\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0\}$ et $\mathcal{M}_0=\{\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}$.
Considérons le premier raffinement à droite de la vallée $\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}$ notons $\{\tilde{M}_1,\tilde{m}_1\}$ le couple de maximisant et minimisant obtenu après ce raffinement, ajoutons ces points à l'ensemble $\mathcal{M}_0$. On considère maintenant le premier raffinement de $\{\tilde{m}_0,\tilde{M}_1\}$, on obtient le couple $\{\tilde{M}_2,\tilde{m}_2\}$ que l'on ajoute à l'ensemble $\mathcal{M}_0$ et ainsi de suite jusqu'à obtenir les points $\{\tilde{M}_r,\tilde{m}_r\}$ tels que $\tilde{M}_{r-1}-\tilde{m}_0\geq l_nb_n$ et $\tilde{M}_r-\tilde{m}_0\leq l_nb_n$. On obtient par cette construction un ensemble de maximisants et minimisants (à droite de $\tilde{m}_0$) : $\mathcal{M}_0\equiv\left\{\tilde{m}_0,\tilde{M}_r,\tilde{m}_r,\cdots,\tilde{M}_1,\tilde{m}_1,\tilde{M}_0\right\}$, de cardinal $2r+3$, (voir figure 4.3). De même on construit l'ensemble $\mathcal{M}_0'$ en effectuant de façon équivalente des raffinements à gauche de la vallée $\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}$: on effectue un premier raffinement ce qui donne les points $\{\tilde{m}_1',\tilde{M}_1'\}$, on raffine ensuite $\{\tilde{M}_1',m_0\}$ et ansi de suite jusqu'à obtenir

$\{m'_{r'}, M'_{r'}\}$ tels que $\tilde{m}_0 - \tilde{M}'_{r'-1} \geq b_n l_n$ et $\tilde{m}_0 - \tilde{M}'_{r'} \leq b_n l_n$ (on note $\mathcal{M}'_0$ cet ensemble de maximisants et minimisants à gauche de $\tilde{m}_0$). On obtient ainsi un ensemble de minimisants et maximisants que l'on notera $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'_0 \cup \mathcal{M}_0 = \{M'_0, m'_1, M'_1, \cdots, M'_{r'}, m_0, M_r, \cdots, M_1, m_1, M_0\}$.

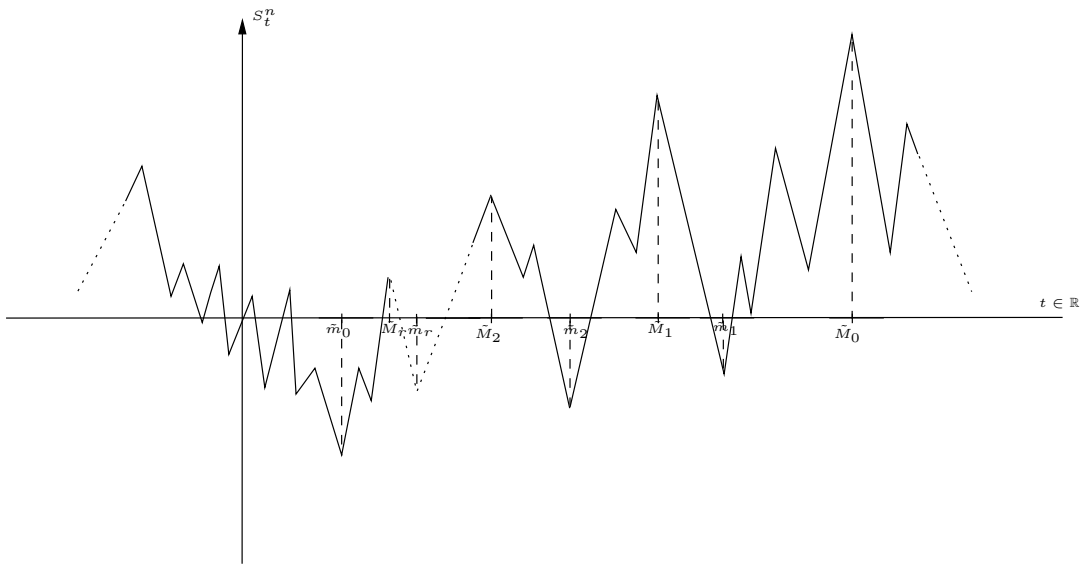


FIG. 4.3 –

La construction que l'on a effectuée ci-dessus n'a de sens que si $\tilde{M}_0 - \tilde{m}_0 \geq b_n l_n$ et $\tilde{m}_0 - \tilde{M}'_0 \geq b_n l_n$. On montre (en probabilité) que l'on a mieux que cela, en effet :

Lemme 4.2.15. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $R > 1$, tout $\gamma > 0$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \equiv n_0\left(\epsilon, \gamma, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], C\right)$ tel que pour tout $n > n_0$:*

$$Q\left[\tilde{M}_0 - \tilde{m}_0 \leq \frac{(\ln n)^2}{65\sigma^2(\ln\ln n)}\right] \leq \frac{6\epsilon}{R} + \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}} \ , \tag{4.160}$$

$$Q\left[\tilde{m}_0 - \tilde{M}'_0 \leq \frac{(\ln n)^2}{65\sigma^2(\ln\ln n)}\right] \leq \frac{6\epsilon}{R} + \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}} \ , \tag{4.161}$$

où $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. R est un paramètre libre que nous choisirons le moment venu..

Preuve.
La preuve de ce lemme utilise la même idée que la preuve du lemme 4.1.5. D'après la proposition 4.2.14 on sait que pour tout $R > 1$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $n'_0 \equiv n'_0\left(\epsilon, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n > n'_0$:

$$Q\left[\tilde{M}_0 \geq E(\ln n)^2, \tilde{M}'_0 \leq -E(\ln n)^2\right] \leq \frac{6\epsilon}{R} \ , \tag{4.162}$$

avec $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. Notons $A_0 = \left\{\tilde{M}_0 \geq E(\ln n)^2, \tilde{M}'_0 \leq -E(\ln n)^2\right\}$, soit u_n une suite d'entiers et v_n une seconde suite toutes deux positives et croissantes en n et telles que $u_n \times v_n = [E(\ln n)^2] + 1$, par 4.162 on a :

$$Q\left[\tilde{M}_0 - \tilde{m}_0 \leq u_n\right] \leq Q\left[\tilde{M}_0 - \tilde{m}_0 \leq u_n,\ A_0\right] + \frac{6\epsilon}{R} \ , \tag{4.163}$$

or par définition $S_{\tilde{M}_0} - S_{\tilde{m}_0} \geq \ln n$, on en déduit :

$$Q\left[\tilde{M}_0 - \tilde{m}_0 \leq u_n,\ A_0\right] \tag{4.164}$$

$$\leq\ Q\left[\max_{-[E(\ln n)^2]-1\leq m\leq [E(\ln n)^2]+1}\ \max_{m\leq l\leq m+u_n}\ \max_{m\leq j\leq m+u_n} (|S_l - S_j|) \geq \ln n\right]\ , \tag{4.165}$$

par définition, v_n vérifie $([v_n])u_n \leq [E(\ln n)^2] + 1 \leq ([v_n]+1)u_n$ ainsi :

$$\max_{-[E(\ln n)^2]-1\leq m\leq [E(\ln n)^2]+1}\ \max_{m\leq l\leq m+u_n}\ \max_{m\leq j\leq m+u_n} (|S_l - S_j|) \tag{4.166}$$

$$\leq\ \max_{0\leq q\leq u_n}\ \max_{-[v_n]-1\leq i\leq [v_n]-1}\ \max_{(i)u_n+q\leq l\leq (i+1)u_n+q}\ \max_{(i)u_n+q\leq j\leq (i+1)u_n+q} (|S_l - S_j|)\ , \tag{4.167}$$

on obtient donc par un calcul similaire à celui effectué dans la preuve du lemme 4.1.5 :

$$Q\left[\tilde{M}_0 - \tilde{m}_0 \leq u_n,\ A_0\right] \tag{4.168}$$

$$\leq\ (u_n+1)\left(1 - \left(1 - \frac{Q\left[|S_{u_n}| > \frac{\ln n}{4}\right]}{1 - \sup_{1\leq j\leq u_n}\left(|S_{u_n} - S_j| > \frac{\ln n}{4}\right)}\right)^{2[v_n]+2}\right)\ . \tag{4.169}$$

Par le lemme 4.1.4, pour tout $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, si $\frac{\ln n}{4} < \left(\sigma^2\kappa u_n\right) \wedge \left(\frac{\sigma^4\kappa^3 u_n}{2C}\right)$ on a :

$$Q\left[|S_{u_n}| > \frac{\ln n}{4}\right] \leq 2e^{-\frac{(\ln n)^2}{32\sigma^2 u_n}\left(1 - \frac{2C\ln n}{\sigma^4\kappa^3 u_n}\right)}\ , \tag{4.170}$$

où $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$, en prenant $u_n = \left[\frac{(\ln n)^2}{65\sigma^2(\ln\ln n)}\right] + 1$ on montre qu'il existe $n_1 \equiv n_1(\sigma, C, \kappa)$ tel que pour tout $n > n_1$, $\frac{\ln n}{4} < \left(\sigma^2\kappa u_n\right) \wedge \left(\frac{\sigma^4\kappa^3 u_n}{2C}\right)$, on obtient donc pour tout $n > n_1$:

$$Q\left[|S_{u_n}| > \frac{\ln n}{4}\right] \leq \frac{2}{(\ln n)^{2+1/32-\mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)}}\ . \tag{4.171}$$

En prenant $p = u_n$, $s = 0$ et $\ln k = \frac{((\ln n)/4)^2}{32\sigma^2 u_n}$, dans 4.15, il existe $n_2 \equiv n_2(\sigma, \kappa)$ tel que pour tout $n > n_2$:

$$\ln k \leq \ln\ln n < 32\sigma^2\kappa^2 u_n\ , \tag{4.172}$$

on obtient donc par 4.15 que pour tout $n > n_2$:

$$\sup_{1\leq j\leq u_n}\left(Q\left[|S_{u_n} - S_j| > \frac{\ln n}{4}\right]\right)\ \leq\ 2e^{-\ln k + \frac{\ln k}{64} + \frac{(\ln k)^{3/2}}{32\sigma^2\kappa^3 p^{1/2}}}\ , \tag{4.173}$$

de plus il existe $n_3 \equiv n_3(\sigma, \kappa)$ tel que pour tout $n > n_3$

$$\frac{1}{10}\ln\ln n \leq \ln k + \frac{\ln k}{64} + \frac{(\ln k)^{3/2}}{32\sigma^2\kappa^3 p^{1/2}}\ . \tag{4.174}$$

On déduit de 4.173 et 4.174 que pour tout $n > n_2 \vee n_3$:

$$\sup_{1\leq j\leq u_n}\left(Q\left[|S_{u_n} - S_j| > \frac{\ln n}{4}\right]\right)\ \leq\ \frac{1}{(\ln n)^{1/10}}\ . \tag{4.175}$$

En remarquant que $(1-x)^a \geq 1 - ax$ pour tout $0 \leq x \leq 1$ et $a \geq 1$, on déduit de 4.171 et 4.175 que pour tout $n > n_1 \vee n_2 \vee n_3$:

$$\left(1 - \frac{Q\left[|S_{u_n}| > \frac{\ln n}{4}\right]}{1 - \sup_{1\leq j\leq u_n}\left(|S_{u_n} - S_j| > \frac{\ln n}{4}\right)}\right)^{2[v_n]+2} \tag{4.176}$$

$$\geq\ 1 - \frac{2(v_n+1)}{(\ln n)^{2+1/32-\mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)}}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/10}}\right)\right)\ , \tag{4.177}$$

en remplaçant 4.177 dans 4.169 et en remplaçant $u_n v_n$ par $E(\ln n)^2$, on obtient qu'il existe $n_4 \geq n_1 \vee n_2 \vee n_3$ tel que pour tout $n > n_4$:

$$Q\left[\tilde{M}_0 - \tilde{m}_0 \leq u_n,\ A_0\right] \leq \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}} \ , \tag{4.178}$$

en remplaçant ceci dans 4.163 et en prenant $n_0 = n_0' \vee n_4$ on obtient 4.160. On effectue des calculs similaires pour obtenir 4.161. ■

4.3 Propriétés de l'ensemble des "bons" environnements

4.3.1 Écart minimal entre les deux points issus d'un raffinement

Le lemme suivant est fondamental : il donne un lien entre le découpage ordonné en vallées de $[\tilde{M}_0', \tilde{M}_0]$ (paragraphe 4.2.3) et le découpage déterministe en blocs de taille b_n de l'intervalle $[\tilde{M}_0', \tilde{M}_0] \subset [-E(\ln n)^2, E(\ln n)^2]$ (voir proposition 4.2.14 et équation 4.157).

Lemme 4.3.1. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$ et tout $\gamma > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, R, \sigma, \kappa, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$:*

$$Q\left[\bigcup_{i=1}^{r'} \{M_i' - m_i' \leq b_n\}\right] \leq \frac{18\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right) \ , \tag{4.179}$$

$$Q\left[\bigcup_{i=1}^{r} \{M_i - m_i \leq b_n\}\right] \leq \frac{18\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right) \ , \tag{4.180}$$

où $b_n = \left[E(\ln n)^{3/2}(\sigma\gamma \ln\ln n)^{1/2}\right] + 1$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$, r et r' ont été définis au paragraphe 4.2.3. R et γ sont des paramètres libres qui seront choisis le moment venu.

Preuve.
Soient $\epsilon > 0$, $R > 1$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ et $\gamma > 0$, en notant $A_0 = \left\{\tilde{M}_0' \geq -E(\ln n)^2,\ \tilde{M}_0 \leq E(\ln n)^2\right\}$, par la proposition 4.2.14 il existe $n_1 \equiv n_1(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right])$ tel que pour tout $n > n_1$ on a :

$$Q\left[A_0\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} \ . \tag{4.181}$$

On rappelle que l'on a effectué le découpage suivant, pour tout $n \geq 3$:

$$E(\ln n)^2 = k_n \times b_n \tag{4.182}$$

avec :

$$b_n = \left[E(\ln n)^{3/2}(\gamma \ln\ln n)^{1/2}\right] + 1 \ , \tag{4.183}$$

et

$$k_n = \frac{E(\ln n)^2}{b_n} \ . \tag{4.184}$$

Nous verrons que pour obtenir ce lemme on fixera la suite l_n introduite au paragraphe 4.2.3 de la façon suivante :

$$l_n = D\sigma^2(\ln k_n)^2 \text{ avec } D = 1000. \tag{4.185}$$

Montrons 4.179.
Notons :

$$A_1 = \bigcup_{i=0}^{r'} \{M'_i - m'_i \leq b_n\} \tag{4.186}$$

$$A_2 = \bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \bigcup_{j=l+[l_n]}^{[k_n]+1} \left\{ \max_{(l+1)b_n \leq w < z \leq jb_n} (S_z - S_w) \leq \max_{lb_n \leq m \leq (j+1)b_n} \max_{m \leq u < v \leq m+b_n} (S_v - S_u) \right\} , \tag{4.187}$$

on va montrer qu'il existe $n'_0 \equiv n'_0(\epsilon, R, \sigma, \kappa, \mathbb{E}_Q \left[|\epsilon_0|^3\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n'_0$:

1. $Q[A_1] \leq Q[A_2] + \frac{18\epsilon}{R} + \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}}$,
2. $Q[A_2] \leq \mathcal{O}\left(\frac{(\ln \ln n)^{5/2}}{(\ln n)^{1/2}}\right)$.

Montrons 1.
Notons

$$C_1 = \bigcap_{j=0}^{r'} \bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \left\{ \tilde{M}'_j \in [lb_n, (l+1)b_n] \right\} , \tag{4.188}$$

$$C_2 = \bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \{\tilde{m}_0 \in [lb_n, (l+1)b_n]\} , \tag{4.189}$$

$$C_3 = \bigcap_{i=0}^{r'-1} \{M'_i \geq \tilde{m}_0 - l_n b_n\} , \tag{4.190}$$

On commence par les remarques suivantes :
A) pour tout $n > n_1$:

$$Q[C_1] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} , \tag{4.191}$$

en effet, on a :

$$Q[C_1] = Q\left[\bigcap_{j=0}^{r'} \left\{-([k_n]+1)b_n \leq \tilde{M}'_i \leq ([k_n]+1)b_n\right\}\right] \tag{4.192}$$

$$\leq Q\left[\bigcap_{j=0}^{r'} \left\{-E(\ln n)^2 \leq \tilde{M}'_i \leq E(\ln n)^2\right\}\right] \tag{4.193}$$

(4.194)

or par construction (voir page 61) on a :

$$\tilde{M}'_0 \geq -E(\ln n)^2,\ \tilde{M}_0 \leq E(\ln n)^2 \Rightarrow \forall i,\ 0 \leq i \leq r', -E(\ln n)^2 \leq \tilde{M}'_i \leq E(\ln n)^2 \tag{4.195}$$

ainsi

$$Q[C_1] \geq Q[A_0] , \tag{4.196}$$

on obtient donc la remarque A) par 4.181.
B) pour une raison similaire à celle évoquée pour A) pour tout $n > n_1$:

$$Q[C_2] = Q[-([k_n]+1)b_n \leq \tilde{m}_0 \leq ([k_n]+1)b_n] \tag{4.197}$$

$$\geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} . \tag{4.198}$$

C) D'après le lemme 4.2.15 il existe $n_2 \equiv n_0\left(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], c\right)$ tel que pour tout $n > n_2$:

$$Q\left[\bigcap_{i=0}^{r'-1}\{M'_i \geq \tilde{m}_0 - l_n b_n\}\right] \leq Q\left[M'_0 \geq \tilde{m}_0 - l_n b_n\right] \tag{4.199}$$

$$\leq \frac{6\epsilon}{R} + \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}} , \tag{4.200}$$

où $c = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$.
On a d'après la remarque A), pour tout $n > n_1$:

$$Q\left[A_1\right] \leq Q\left[A_1, C_1\right] + \frac{6\epsilon}{R} \tag{4.201}$$

$$\leq Q\left[\bigcup_{i=1}^{r'}\left\{\left\{\tilde{M}'_i - m'_i \leq b_n\right\}, \bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\left\{\tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n]\right\}\right\}\right] + \frac{6\epsilon}{R} \tag{4.202}$$

$$= Q\left[\bigcup_{i=1}^{r'}\bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\left\{\tilde{M}'_i - m'_i \leq b_n,\ \tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n]\right\}\right] + \frac{6\epsilon}{R} , \tag{4.203}$$

on utilise maintenant la remarque C) on obtient pour tout $n > n_2$:

$$Q\left[\bigcup_{i=1}^{r'}\bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\left\{\tilde{M}'_i - m'_i \leq b_n,\ \tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n]\right\}\right] \tag{4.204}$$

$$\leq Q\left[\bigcup_{i=1}^{r'}\bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\left\{\tilde{M}'_i - m'_i \leq b_n,\ \tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n]\right\},\ C_3\right] + \frac{6\epsilon}{R} + \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}} \tag{4.205}$$

$$= Q\left[\bigcup_{i=1}^{r'}\bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\left\{\tilde{M}'_i - m'_i \leq b_n,\ \tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n],\ \tilde{M}'_{i-1} \leq \tilde{m}_0 - l_n b_n\right\}\right]$$

$$+ \frac{6\epsilon}{R} + \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}} , \tag{4.206}$$

enfin on utilise la remarque B) pour tout $n > n_1$:

$$Q\left[\bigcup_{i=1}^{r'}\bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\left\{\tilde{M}'_i - m'_i \leq b_n,\ \tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n],\ \tilde{M}'_{i-1} \leq \tilde{m}_0 - l_n b_n\right\}\right] \tag{4.207}$$

$$\leq Q\left[\bigcup_{i=1}^{r'}\bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\left\{\tilde{M}'_i - m'_i \leq b_n,\ \tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n],\ \tilde{M}'_{i-1} \leq \tilde{m}_0 - l_n b_n,\right.\right. \tag{4.208}$$

$$\left.\left.\bigcup_{j=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\{\tilde{m}_0 \in [b_n j, b_n(j+1)]\}\ \right\}\right] + \frac{6\epsilon}{R} . \tag{4.209}$$

On remarque maintenant que :

$$\left\{\tilde{M}'_{i-1} \leq \tilde{m}_0 - l_n b_n,\ \tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n]\right\} \subset \{\tilde{m}_0 \geq lb_n + l_n b_n\} , \tag{4.210}$$

on en déduit :

$$\bigcup_{i=1}^{r'} \bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \Big\{ \mathcal{M}'_i - m'_i \leq b_n,\ \tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n],\ \tilde{M}'_{i-1} \leq \tilde{m}_0 - l_n b_n, \tag{4.211}$$

$$\bigcup_{j=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \{\tilde{m}_0 \in [b_n j, b_n(j+1)]\} \Big\} \tag{4.212}$$

$$\subset \bigcup_{i=1}^{r'} \bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \bigcup_{j=l+[l_n]}^{[k_n]+1} \Big\{ \tilde{M}'_i - m'_i \leq b_n,\ \tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n], \tag{4.213}$$

$$\tilde{m}_0 \in [b_n j, b_n(j+1)] \Big\} \ , \tag{4.214}$$

de plus, si on effectue un raffinement de $\{\tilde{M}_{i-1}, \tilde{m}_0\}$ on obtient les point $\tilde{M}'_i$ et $\tilde{m}'_i$ tels que :

$$S_{\tilde{M}'_i} - S_{\tilde{m}'_i} = \max_{\tilde{M}'_{i-1} \leq w < z \leq \tilde{m}_0} (S_z - S_w) \ , \tag{4.215}$$

on en déduit :

$$\Big\{ \tilde{M}'_i - m'_i \leq b_n,\ \tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n],\ \tilde{m}_0 \in [b_n j, b_n(j+1)] \Big\} \tag{4.216}$$

$$\subset \Big\{ \max_{\tilde{M}'_{i-1} \leq w < z \leq \tilde{m}_0} (S_z - S_w) \leq \max_{lb_n \leq m \leq (j+1)b_n} \max_{m \leq u < v \leq m+b_n} (S_v - S_u) \, , \tag{4.217}$$

$$\tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n],\ \tilde{m}_0 \in [b_n j, b_n(j+1)] \Big\} \ , \tag{4.218}$$

ainsi :

$$\Big\{ \tilde{M}'_i - m'_i \leq b_n,\ \tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n],\ \tilde{m}_0 \in [b_n j, b_n(j+1)] \Big\} \tag{4.219}$$

$$\subset \Big\{ \max_{(l+1)b_n \leq w < z \leq j b_n} (S_z - S_w) \leq \max_{lb_n \leq m \leq (j+1)b_n} \max_{m \leq u < v \leq m+b_n} (S_v - S_u) \Big\} \ . \tag{4.220}$$

En remplaçant 4.220 dans 4.214, on obtient :

$$\bigcup_{i=1}^{r'} \bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \Big\{ \mathcal{M}'_i - m'_i \leq b_n,\ \tilde{M}'_{i-1} \in [lb_n, (l+1)b_n],\ \tilde{M}'_{i-1} \leq \tilde{m}_0 - l_n b_n, \tag{4.221}$$

$$\bigcup_{j=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \{\tilde{m}_0 \in [b_n j, b_n(j+1)]\} \Big\} \tag{4.222}$$

$$\subset \bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \bigcup_{j=l+[l_n]}^{[k_n]+1} \Big\{ \max_{(l+1)b_n \leq w < z \leq j b_n} (S_z - S_w) \leq \max_{lb_n \leq m \leq (j+1)b_n} \max_{m \leq u < v \leq m+b_n} (S_v - S_u) \Big\}$$

$$= A_2 \ , \tag{4.223}$$

on déduit de cette dernière inclusion, de 4.209, 4.206 et 4.203 le 1.
Montrons 2. on introduit l'événement :

$$A_3 = \max_{-([k_n]+1)b_n \leq m \leq ([k_n]+1)b_n} \max_{m \leq l \leq m+b_n} \max_{m \leq j \leq m+b_n} (|S_l - S_j|) \leq ((1+s)32\sigma^2 b_n \ln k_n)^{1/2} \ , \tag{4.224}$$

on a :

$$Q\left[A_2\right] \leq Q\left[A_2, A_3\right] + Q\left[A_3^c\right] \ . \tag{4.225}$$

On applique maintenant l'inégalité 4.36 en prenant $[L]+1=([k_n]+1)b_n$ et $\ln K=\ln(k_n)$ dans cette inégalité, pour tout $s>0$ il existe $n_3\equiv n_3(\epsilon,R,\sigma,s,\kappa,\mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3,C\right])$ tel que pour tout $n>n_3$:

$$\ln(k_n)<\sigma^2\kappa^2 e_0 b_n\ , \tag{4.226}$$

où $e_0=\left(\frac{1}{32(1+s)}\wedge\frac{\sigma^6\kappa^4}{128C^2(1+s)}\wedge(32\kappa(1+s))\right)$. On en déduit par 4.36 que pour tout $n>n_3$:

$$Q\left[A_3^c\right]\leq\frac{2(b_n+1)}{k_n^{s-\mathcal{O}\left(\frac{\ln k_n}{b_n}\right)^{1/2}}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k_n^{1-\frac{1}{64}-\mathcal{O}\left(\frac{\ln k_n}{b_n}\right)^{1/2}}}\right)\right)\ . \tag{4.227}$$

Pour simplifier cette expression on choisie $n_4\geq n_3$ tel que pour tout $n>n_4$:

$$Q\left[A_3^c\right]\leq\frac{4b_n}{k_n^{\frac{s}{2}}}\ . \tag{4.228}$$

En remplaçant ceci dans 4.225, il vient pour tout $n\geq n_4$:

$$Q\left[A_2\right]\leq Q\left[A_2,A_3\right]+\frac{4b_n}{k_n^{\frac{s}{2}}}\ . \tag{4.229}$$

Il reste donc à estimer $Q\left[A_2,A_3\right]$, on a :

$$Q\left[A_2,A_3\right]\leq Q\left[\bigcup_{l=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\bigcup_{j=i+[l_n]}^{[k_n]+1}\left\{\max_{(l+1)b_n\leq w<z\leq jb_n}(S_z-S_w)\leq g_n\right\}\right]\ , \tag{4.230}$$

où $g_n=((1+s)32\sigma^2 b_n\ln k_n)^{1/2}$, de plus :

$$Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\bigcup_{j=i+[l_n]}^{[k_n]+1}\left\{\max_{(i+1)b_n\leq w<z\leq jb_n}(S_z-S_w)\leq g_n\right\}\right] \tag{4.231}$$

$$\leq\sum_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}Q\left[\bigcup_{j=i+[l_n]}^{[k_n]+1}\left\{\max_{(i+1)b_n\leq w<z\leq jb_n}(S_z-S_w)\leq g_n\right\}\right]\ . \tag{4.232}$$

On remarque que l'événement $\{\max_{ib_n\leq w<z\leq jb_n}(S_z-S_w)\leq g_n\}$ est décroissant en j, ainsi :

$$Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\bigcup_{j=i+[l_n]}^{[k_n]+1}\left\{\max_{(i+1)b_n\leq w<z\leq jb_n}(S_z-S_w)\leq g_n\right\}\right] \tag{4.233}$$

$$\leq\sum_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}Q\left[\max_{(i+1)b_n\leq w<z\leq(i+[l_n])b_n}(S_z-S_w)\leq g_n\right]\ . \tag{4.234}$$

On effectue le nouveau découpage suivant, $[l_n]=d_n\times a_n$ où $a_n\in\mathbb{N}^*$ ainsi :

$$Q\left[\max_{(i+1)b_n\leq w<z\leq(i+1+l_n)b_n}(S_z-S_w)\leq g_n\right] \tag{4.235}$$

$$\leq\ Q\left[\bigcap_{j=0}^{[d_n]-1}\left\{S_{(a_nj+i+1)b_n}-S_{(a_n(j+1)+i+1)b_n}\leq g_n\right\}\right]\ , \tag{4.236}$$

par indépendance et stationnarité du milieu on a :

$$Q\left[\bigcap_{j=0}^{[d_n]-1}\left\{S_{(a_nj+i+1)b_n}-S_{(a_n(j+1)+i+1)b_n}\leq g_n\right\}\right] \tag{4.237}$$

$$=\ \left(Q\left[S_{a_nb_n}\leq g_n\right]\right)^{[d_n]}=\left(Q\left[\frac{S_{a_nb_n}}{(a_nb_n)^{1/2}}\leq\frac{g_n}{(a_nb_n)^{1/2}}\right]\right)^{[d_n]-1}\ . \tag{4.238}$$

On utilise maintenant le résultat de Berry-Essen (voir par exemple [22] page 299) : pour $0 < \delta \leq 1$ il existe une constante universelle $H \equiv H(\delta) > 0$ telle que :

$$Q\left[\frac{S_{a_n b_n}}{(a_n b_n)^{1/2}} \leq \frac{g_n}{(a_n b_n)^{1/2}}\right] \leq 1 - \int_{\frac{g_n}{(a_n b_n)^{1/2}}}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx + \frac{H g_n \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^{2+\delta}\right]}{(a_n b_n)^{\delta/2}\sigma^{2+\delta}} \ . \tag{4.239}$$

De plus comme on travaille sous l'hypothèse H.6 on a $\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right] < \infty$, on peut donc prendre $\delta = 1$, A. C. Essen montre dans ce cas que $H \leq 7,5$. On a $g_n = ((1+s)32\sigma^2 b_n \ln k_n)^{1/2}$ en prenant $a_n = [(1+s)32\sigma^2 \ln k_n] + 1$ on obtient :

$$Q\left[S_{a_n b_n} \leq g_n\right] \quad \leq \quad 2\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx + \frac{7.5\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^{2+\delta}\right]}{(g_n)^{1/2}\sigma^3} \ , \tag{4.240}$$

en remplaçant 4.240 dans 4.238 puis en remplaçant le résultat dans 4.234 on obtient :

$$Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \bigcup_{j=i+[l_n]}^{[k_n]+1} \left\{\max_{(i+1)b_n \leq w < z \leq j b_n} (S_z - S_w) \leq g_n\right\}\right] \tag{4.241}$$

$$\leq \quad (2[k_n]+2)\left(\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx + \frac{7.5\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]}{g_n \sigma^3}\right)^{[d_n]-1} \ , \tag{4.242}$$

on rappelle de plus que $\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx < 0,7$ donc il existe $n_5 \equiv n_5(\sigma, \epsilon, R, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], \gamma)$ tel que pour tout $n > n_5$:

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx + \frac{7.5\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]}{g_n \sigma^3} < 1 \ . \tag{4.243}$$

On a :

$$(2[k_n]+2)\left(\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx + \frac{7.5\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]}{g_n \sigma^3}\right)^{[d_n]-1} \quad \leq \quad (2[k_n]+2)e^{(d_n-2)\left(\ln\left(\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx\right) + r_n\right)} \ , \tag{4.244}$$

où $r_n = \frac{7.5\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^{2+\delta}\right]}{(g_n)^{1/2}\sigma^3 \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx}$, on prend $d_n = -(1+s_2)\frac{\ln(k_n+2)}{\ln\left(\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx\right)} + 2$ avec $s_2 > 0$, on en déduit que :

$$Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \bigcup_{j=i+[l_n]}^{[k_n]+1} \left\{\max_{(i+1)b_n \leq w < z \leq j b_n} (S_z - S_w) \leq g_n\right\}\right]$$

$$\leq \quad \frac{1}{k_n^{s_2}} e^{d_n r_n} \ . \tag{4.245}$$

De plus $d_n r_n = \mathcal{O}\left(\frac{\ln k_n^3}{b_n}\right)^{1/4} = \mathcal{O}\left(\frac{(\ln\ln n)^5}{(\ln n)^3}\right)^{1/8}$, donc il existe $n_6 \equiv n_6(n_5, s_2) \geq n_5$ tel que pour tout $n > n_6$:

$$Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \bigcup_{j=i+[l_n]}^{[k_n]+1} \left\{\max_{(i+1)b_n \leq w < z \leq j b_n} (S_z - S_w) \leq g_n\right\}\right] \tag{4.246}$$

$$\leq \quad \frac{2}{k_n^{s_2}} \ . \tag{4.247}$$

En remplaçant 4.247 dans 4.230 puis le résultat obtenu dans 4.229, on obtient pour tout $n > n_4 \vee n_6$:

$$Q\left[A_2\right] \leq \frac{2}{k_n^{s_2}} + \frac{4b_n}{(k_n)^{s/2}} \tag{4.248}$$

avec $b_n = \left[E(\ln n)^{3/2}(\sigma\gamma \ln\ln n)^{1/2}\right]$ et $k_n = \frac{E(\ln n)^2}{b_n}$ si l'on prend $s = 4$ et $s_2 = 1$, on obtient qu'il existe $n_7 \equiv n_7(\epsilon, R, \sigma, \kappa, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], C, \gamma) \geq n_4 \vee n_6$ tel que pour tout $n > n_7$:

$$Q\left[A_2\right] \leq \mathcal{O}\left(\frac{(\ln\ln n)^{5/2}}{(\ln n)^{1/2}}\right) , \tag{4.249}$$

ce qui donne 2. On obtient 1. et 2. en prenant $n_0' = n_7 \vee n_2 \vee n_1$, ce qui donne 4.179 en prenant $n_0 = n_7 \vee n_2 \vee n_1$. En effectuant des calculs similaires on montre que ce résultat est aussi vrai pour l'ensemble des raffinements à droite de $\{M_0', m_0, M_0\}$ ce qui donne le lemme.

Contrainte sur l_n : on voit que la partie de la preuve que l'on vient d'effectuer impose la valeur de l_n, on a : $[l_n] = a_n \times d_n$ avec $a_n = ([(1+s)32\sigma^2 \ln k_n] + 1)$ et $d_n = -(1+s_2)\frac{\ln(k_n+2)}{\ln\left(\int_0^1 \gamma(x)dx\right)} + 1$, avec $s = 4$ et $s_2 = 1$, on a donc :

$$l_n = D\sigma^2(\ln k_n)^2 \tag{4.250}$$

avec $D = 1000$, $b_n = \left[E(\ln n)^{3/2}(\gamma \ln\ln n)^{1/2}\right]$ et $k_n = \frac{E(\ln n)^2}{b_n}$. ■

On déduit du lemme 4.3.1 le résultat suivant :

Corollaire 4.3.2. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$*

$$Q\left[r' \leq 2k_n + 1\right] \geq 1 - \frac{24\epsilon}{R} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right) , \tag{4.251}$$

$$Q\left[r \leq 2k_n + 1\right] \geq 1 - \frac{24\epsilon}{R} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right) . \tag{4.252}$$

où $k_n = E(\ln n)^2/b_n$, avec $b_n = \left[E(\ln n)^{3/2}(\sigma\gamma \ln\ln n)^{1/2}\right] + 1$ et $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$, r et r' ont été définis au paragraphe 4.2.3. R et γ sont des paramètres libres qui seront choisis le moment venu.

Preuve.
Soit $\epsilon > 0$, $R > 1$. Montrons 4.251, par construction :

$$\tilde{M}_0' \geq -k_n b_n \ , \tilde{m}_0 \leq k_n b_n \Rightarrow \forall\ 0 \leq j \leq r',\ \tilde{M}_j' \in [-k_n b_n, k_n b_n],\ \tilde{m}_j' \in [-k_n b_n, k_n b_n] \ , \tag{4.253}$$

de plus :

$$\forall j\ 0 \leq j \leq r',\ M_j' - m_j' > b_n,\ \tilde{M}_j' \in [-k_n b_n, k_n b_n],\ \tilde{m}_j' \in [-k_n b_n, k_n b_n] \Rightarrow r' \leq 2k_n \ , \tag{4.254}$$

donc :

$$\forall j,\ 0 \leq j \leq r',\ M_j' - m_j' > b_n,\ \tilde{M}_0' \geq -k_n b_n \ , \tilde{m}_0 \leq k_n b_n \Rightarrow r' \leq 2k_n \ , \tag{4.255}$$

On en déduit :

$$Q\left[r' \leq 2k_n + 1\right] \geq Q\left[\bigcap_{j=0}^{r'}\left\{M_j' - m_j' > b_n\right\},\ \tilde{M}_0' \geq -k_n b_n \ ,\ \tilde{m}_0 \leq k_n b_n\right] \tag{4.256}$$

$$\geq Q\left[\tilde{M}_0' \geq -k_n b_n \ ,\ \tilde{m}_0 \leq k_n b_n\right] - Q\left[\bigcup_{j=0}^{r'}\left\{M_j' - m_j' \leq b_n\right\}\right] , \tag{4.257}$$

la seconde inégalité est obtenue en remarquant que pour tout événement A et B : $Q[A, B] \geq Q[B] - Q[A^c]$. On sait d'après le lemme 4.3.1, qu'il existe $n_1 \equiv n_1(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_1$:

$$Q\left[\bigcup_{i=1}^{r'}\left\{M_i' - m_i' \leq b_n\right\}\right] \leq \frac{18\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right) . \tag{4.258}$$

De plus par le lemme 4.403 il existe $n_2 \equiv n_2(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right])$ tel que pour tout $n > n_2$:

$$Q\left[\tilde{M}_0' \geq -k_n b_n \ , \tilde{m}_0 \leq k_n b_n\right] \geq Q\left[\tilde{M}_0' \geq -k_n b_n\right] - Q\left[\tilde{m}_0 > k_n b_n\right] \tag{4.259}$$

$$\geq Q\left[\tilde{M}_0' \geq -k_n b_n\right] - Q\left[\tilde{M}_0 > k_n b_n\right] \tag{4.260}$$

$$\equiv Q\left[\tilde{M}_0' \geq -E(\ln n)^2\right] - Q\left[\tilde{M}_0 > E(\ln n)^2\right] \tag{4.261}$$

$$\geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} \ . \tag{4.262}$$

En remplaçant 4.258 et 4.262 dans 4.257 on obtient 4.251 en prenant $n_0 = n_1 \vee n_2$. On fait un calcul similaire pour obtenir 4.252. ■

4.3.2 Conséquences du découpage ordonné en vallées

On adopte les notations suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \text{Si } 0 \leq i,j \leq r : & \text{Si } 0 \leq i,j \leq r' : \\ \delta_{i,j} = S^n_{\tilde{M}_i} - S^n_{\tilde{m}_j}, & \delta'_{i,j} = S^n_{\tilde{M}'_i} - S^n_{\tilde{m}'_j}, \\ \eta_{i,j} = S^n_{\tilde{M}_i} - S^n_{\tilde{M}_j}, & \eta'_{i,j} = S^n_{\tilde{M}'_i} - S^n_{\tilde{M}'_j}, \\ \mu_{i,j} = S^n_{\tilde{m}_i} - S^n_{\tilde{m}_j}. & \mu'_{i,j} = S^n_{\tilde{m}'_i} - S^n_{\tilde{m}'_j}. \end{array} \tag{4.263}$$

Premières remarques

D'après la construction que l'on a effectuée page 61, sans calcul supplémentaire, on a :

$$\delta_{0,0} > \delta_{1,1} > \cdots > \delta_{r,r} \geq 0 \ , \tag{4.264}$$

$$\delta_{1,0} > \delta_{2,1} > \cdots > \delta_{r,0} \geq 0 \ , \tag{4.265}$$

de même :

$$\delta'_{0,0} > \delta'_{1,1} > \cdots > \delta'_{r,r} \geq 0 \ , \tag{4.266}$$

$$\delta'_{1,0} > \delta'_{2,0} > \cdots > \delta'_{r',0} \geq 0 \ . \tag{4.267}$$

De plus par la définition d'une vallée de profondeur supérieure à $1 + \gamma(n)$ on a :

$$\delta_{0,0} \geq 1 + \gamma(n) \ , \tag{4.268}$$

$$\delta'_{0,0} \geq 1 + \gamma(n) \ , \tag{4.269}$$

on a aussi :

$$0 \leq i \leq r-1, \ \eta_{i,i+1} \geq 0 \ , \tag{4.270}$$

$$0 \leq i \leq r'-1, \ \eta'_{i,i+1} \geq 0 \ . \tag{4.271}$$

Distance minimale entre deux maximums relatifs successifs

Proposition 4.3.3. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, R, \sigma, \kappa, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$:*

$$Q\left[\bigcap_{i=0}^{r-1} \{\eta_{i,i+1} \geq \gamma(n)\}\right] \geq 1 - \frac{\epsilon}{R}\left(24 + \frac{(12\pi)^{1/2}}{\left|\ln \frac{\epsilon}{R}\right|^{1/2}}\right) - \mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{1/4}}\right) \ , \tag{4.272}$$

$$Q\left[\bigcap_{i=0}^{r'-1} \{\eta'_{i,i+1} \geq \gamma(n)\}\right] \geq 1 - \frac{\epsilon}{R}\left(24 + \frac{(12\pi)^{1/2}}{\left|\ln \frac{\epsilon}{R}\right|^{1/2}}\right) - \mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{1/4}}\right) \ , \tag{4.273}$$

où $\gamma(n) = \gamma \frac{\ln\ln n}{\ln n}$, $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$, les v.a. r et r' ont été définies au paragraphe 4.2.3, $\eta_{.,.}$ et $\eta'_{.,.}$ ont été définis 4.263. R et γ sont des paramètres libres qui seront choisis le moment venu.

Preuve.
Montrons 4.273
Pour montrer cette proposition on va se servir du découpage en blocs b_n de l'intervalle $[-E(\ln n)^2, E(\ln n)^2]$ ainsi que du lemme 4.3.1. Soient $n > 3$, $R > 1$, $\epsilon > 0$ et $\gamma > 0$, on rappelle les notations suivantes :

$$E = \frac{24R^2|\ln \frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2} \ , \tag{4.274}$$

$$b_n = \left[E(\ln n)^{3/2}(\sigma\gamma \ln\ln n)^{1/2}\right] + 1 \ , \tag{4.275}$$

$$k_n = \frac{E(\ln n)^2}{b_n} \ . \tag{4.276}$$

On note :

$$A = \bigcap_{i=0}^{r'} \left\{-E(\ln n)^2 \leq \tilde{M}'_i \leq E(\ln n)^2\right\} \ , \tag{4.277}$$

$$A_1 = \bigcup_{i=1}^{r'} \bigcup_{j=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \{m'_i \in [b_n j, b_n(j+1)],\ M'_i \in [b_n j, b_n(j+1)]\} \ , \tag{4.278}$$

$$A_2 = \bigcup_{i=1}^{r'} \bigcup_{j=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \left\{M'_i \in [b_n j, b_n(j+1)],\ M'_{i+1} \in [b_n j, b_n(j+1)]\right\} \ , \tag{4.279}$$

$$A_3 = \bigcup_{i=0}^{r'-1} \left\{0 \leq \eta'_{i,i+1} \leq \gamma(n)\right\} \ . \tag{4.280}$$

En se plaçant sous les hypothèses et notations du lemme 4.3.3 on a : 1) par la proposition 4.2.14, il existe $n_1 \equiv n_1(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right])$ tel que pour tout $n > n_1$:

$$Q\left[A\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} \ , \tag{4.281}$$

(en effet A est égal à l'événement C_1 dans la preuve du lemme 4.3.1).
2) Par définition des raffinements on a $A_2 \subset A_1$, de plus $A_1 \subset \bigcup_{i=1}^{r'} \left\{\tilde{M}'_i - \tilde{m}'_i \leq b_n\right\}$, ainsi par 4.179, il existe $n_2 \equiv n_2(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_2$:

$$Q\left[A_2\right] \leq \frac{18\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right) \ . \tag{4.282}$$

Par 1) et 2) on a donc pour tout $n > n_1 \vee n_2$:

$$Q\left[A_3\right] \leq Q\left[A_3,\ A_1^c,\ A\right] + \frac{24\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right) \ . \tag{4.283}$$

Notons :

$$A_4 = \bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} \bigcup_{j=i+1}^{[k_n]+1} \left\{0 \leq \max_{b_n i \leq k \leq b_n(i+1)} (S_k^n) - \max_{b_n j \leq l \leq b_n(j+1)} (S_l^n) \leq \gamma(n)\right\} \ , \tag{4.284}$$

par définition des raffinements, on a :

$$\tilde{M}'_i < \tilde{M}'_{i+1} \text{ et } S_{\tilde{M}'_i} > S_{\tilde{M}'_{i+1}}, \forall i\ 0 \leq i \leq r'-1 \ , \tag{4.285}$$

ainsi :

$$\{A_3,\ A_2^c,\ A\} \subset A_4. \tag{4.286}$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
(4.287)\qquad & Q\left[A_3,\ A_2^c,\ A\right] \\
(4.288)\qquad \leq\ & Q\left[A_4\right] \\
(4.289)\qquad \leq\ & Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\bigcup_{j=i+2}^{[k_n]+1}\left\{0\leq \max_{b_n i\leq k\leq b_n(i+1)}(S_k^n)-\max_{b_n j\leq l\leq b_n(j+1)}(S_l^n)\leq\gamma(n)\right\}\right] \\
(4.290)\qquad +\ & Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\left\{0\leq \max_{b_n i\leq k\leq b_n(i+1)}(S_k^n)-\max_{b_n (i+1)\leq l\leq b_n(i+2)}(S_l^n)\leq\gamma(n)\right\}\right]\ .
\end{aligned}
$$

On veut maintenant estimer les deux probabilités 4.289 et 4.290 ceci fait l'objet (respectivement) des lemmes 4.3.4 et 4.3.5. Pour la preuve de ces lemmes on a utilisé les notes en préparation de [20].

Lemme 4.3.4. *Supposons H.1, H.2 et H.6, pour tout $E>0$, tout $\gamma>0$ il existe $n_0'\equiv n_0'\left(\sigma,\gamma,\mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right]\right)$ tel que pour tout $n>n_0'$:*

$$
\begin{aligned}
& Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\bigcup_{j=i+2}^{[k_n]+1}\left\{\max_{b_n i\leq k\leq b_n(i+1)}(S_k^n)-\max_{b_n j\leq l\leq b_n(j+1)}(S_l^n)\right\}\leq\gamma(n)\right] \\
(4.291)\qquad \leq\ & 10\left(\frac{\pi}{\sigma^2}\right)^{1/2}\frac{\gamma\ln\ln n}{(b_n)^{1/2}}\left([k_n]+1\right)^{3/2}
\end{aligned}
$$

où $k_n=\frac{E(\ln n)^2}{b_n}$, $b_n=\left[E(\ln n)^{3/2}(\sigma\gamma\ln\ln n)^{1/2}\right]+1$ et $\gamma(n)=\frac{\gamma\ln\ln n}{\ln n}$. γ est un paramètre libre qui sera choisi le moment venu.

Preuve.
On a :

$$
\begin{aligned}
(4.292)\qquad & Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\bigcup_{j=i+2}^{[k_n]+1}\left\{0\leq \max_{b_n i\leq k\leq b_n(i+1)}(S_k^n)-\max_{b_n j\leq l\leq b_n(j+1)}(S_l^n)\leq\gamma(n)\right\}\right] \\
(4.293)\qquad \leq\ & \sum_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\sum_{j=i+2}^{[k_n]+1}Q\left[\left\{0\leq \max_{b_n i\leq k\leq b_n(i+1)}(S_k^n)-\max_{b_n j\leq l\leq b_n(j+1)}(S_l^n)\leq\gamma(n)\right\}\right]\ .
\end{aligned}
$$

On partitionne la double somme de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
(4.294)\qquad & \sum_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\sum_{j=i+2}^{[k_n]+1}Q\left[\left\{0\leq \max_{b_n i\leq k\leq b_n(i+1)}(S_k^n)-\max_{b_n j\leq l\leq b_n(j+1)}(S_l^n)\leq\gamma(n)\right\}\right] \\
(4.295)\qquad =\ & \sum_{i=-[k_n]-1}^{-2}\sum_{j=i+2}^{0}Q\left[\cdots\right] \\
(4.296)\qquad +\ & \sum_{i=-[k_n]-1}^{-2}\sum_{j=1}^{[k_n]+1}Q\left[\cdots\right] \\
(4.297)\qquad +\ & \sum_{i=-2}^{-1}\sum_{j=i+2}^{[k_n]+1}Q\left[\cdots\right] \\
(4.298)\qquad +\ & \sum_{i=0}^{[k_n]+1}\sum_{j=i+2}^{[k_n]+1}Q\left[\cdots\right]\ .
\end{aligned}
$$

4.295 correspond aux termes : $i < 0$ et $j \leq 0$, 4.296 et 4.297 correspondent aux termes : $i < 0$ et $j \geq 1$ enfin 4.298 correspond aux termes : $i \geq 0$. On veut maintenant écrire $\max_{b_n i \leq k \leq b_n(i+1)} (S_k) - \max_{b_n j \leq l \leq b_n(j+1)} (S_l)$ comme somme de deux blocs indépendants. Selon les valeurs de i et j on obtient : • pour $i \geq 0$:

$$\max_{b_n i \leq k \leq b_n(i+1)} (S_k^n) = \frac{1}{\ln n} \sum_{l=0}^{b_n(i+1)} \epsilon_l - \min_{ib_n \leq k \leq (i+1)b_n} \frac{1}{\ln n} \sum_{m=k}^{(i+1)b_n} \epsilon_m \ , \tag{4.299}$$

$$\max_{b_n j \leq l \leq b_n(j+1)} (S_l^n) = \frac{1}{\ln n} \sum_{l=0}^{b_n(j)} \epsilon_l + \max_{jb_n+1 \leq k \leq (j+1)b_n} \frac{1}{\ln n} \sum_{m=jb_n+1}^{k} \epsilon_m \ , \tag{4.300}$$

donc pour $i \geq 0$

$$\begin{aligned} &\max_{b_n i \leq k \leq b_n(i+1)} (S_k^n) - \max_{b_n j \leq l \leq b_n(j+1)} (S_l^n) \\ = \ & -\frac{1}{\ln n} \sum_{l=b_n(i+1)+1}^{b_n j} \epsilon_l - \min_{ib_n \leq k \leq (i+1)b_n} \frac{1}{\ln n} \sum_{m=k}^{(i+1)b_n} \epsilon_m - \max_{jb_n+1 \leq k \leq (j+1)b_n} \frac{1}{\ln n} \sum_{m=jb_n+1}^{k} \epsilon_m \ . \end{aligned} \tag{4.301}$$

• Pour $i < 0,\ j \geq 1$:

$$\begin{aligned} &\max_{b_n i \leq k \leq b_n(i+1)} (S_k^n) - \max_{b_n j \leq l \leq b_n(j+1)} (S_l^n) \\ = \ & \frac{1}{\ln n} \sum_{l=b_n(i+1)}^{b_n j} \epsilon_l + \max_{ib_n \leq k \leq (i+1)b_n - 1} \frac{1}{\ln n} \sum_{m=k}^{(i+1)b_n} \epsilon_m - \max_{jb_n+1 \leq k \leq (j+1)b_n} \frac{1}{\ln n} \sum_{m=jb_n+1}^{k} \epsilon_m \ . \end{aligned} \tag{4.302}$$

• Pour $i < 0,\ j \leq 0$

$$\begin{aligned} &\max_{b_n i \leq k \leq b_n(i+1)} (S_k^n) - \max_{b_n j \leq l \leq b_n(j+1)} (S_l^n) \\ = \ & \frac{1}{\ln n} \sum_{l=b_n(i+1)}^{b_n j} \epsilon_l + \max_{ib_n \leq k \leq (i+1)b_n - 1} \frac{1}{\ln n} \sum_{m=ib_n}^{k} \epsilon_m + \min_{jb_n+1 \leq k \leq (j+1)b_n} \frac{1}{\ln n} \sum_{m=k}^{(j+1)b_n} \epsilon_m \ . \end{aligned} \tag{4.303}$$

On va maintenant estimer la probabilité $Q\left[0 \leq \max_{b_n i \leq k \leq b_n(i+1)} (S_k^n) - \max_{b_n j \leq l \leq b_n(j+1)} (S_l^n) \leq \gamma(n)\right]$. Pour le cas $i \geq 0$, on a par 4.301 :

$$\begin{aligned} & Q\left[0 \leq \max_{b_n i \leq k \leq b_n(i+1)} (S_k^n) - \max_{b_n j \leq l \leq b_n(j+1)} (S_l^n) \leq \gamma(n)\right] \\ = \ & Q\left[0 \leq -\sum_{l=b_n(i+1)+1}^{b_n j} \epsilon_l - \min_{ib_n \leq k \leq (i+1)b_n} \sum_{m=k}^{(i+1)b_n} \epsilon_m - \max_{jb_n+1 \leq k \leq (j+1)b_n} \sum_{m=jb_n}^{k} \epsilon_m \leq \gamma(n) \ln n\right] \\ = \ & \int_{\mathbb{R}} Q\left[0 \leq -\sum_{l=b_n(i+1)+1}^{b_n j} \epsilon_l - x \leq \gamma(n) \ln n,\ Y \in dx\right] \ , \end{aligned} \tag{4.304}$$

où $Y = -\min_{ib_n \leq k \leq (i+1)b_n} \sum_{m=k}^{(i+1)b_n} \epsilon_m - \max_{jb_n+1 \leq k \leq (j+1)b_n} \sum_{m=jb_n}^{k} \epsilon_m$ par indépendance des v.a. $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} Q\left[0 \leq -\sum_{l=b_n(i+1)+1}^{b_n j} \epsilon_l - x \leq \gamma(n) \ln n,\ Y \in dx\right] \tag{4.305}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} Q\left[0 \leq -\sum_{l=b_n(i+1)+1}^{b_n j} \epsilon_l - x \leq \gamma(n) \ln n\right] Q\left[Y \in dx\right] \tag{4.306}$$

$$\leq \sup_x \left(Q\left[x \leq -\sum_{l=b_n(i+1)+1}^{b_n j} \epsilon_l \leq \gamma(n) \ln n + x\right]\right) \ . \tag{4.307}$$

Pour estimer ce dernier terme on utilise l'inégalité de concentration (voir [18]), ce résultat donne :

$$\sup_x \left(Q\left[x \leq -\sum_{l=1}^{b_n(j-i-1)} \epsilon_l \leq \gamma(n)\ln n + x \right] \right) \leq \frac{2(\pi)^{1/2}}{Z} , \tag{4.308}$$

où $Z^2 \equiv Z^2(\gamma(n)) = \sum_{l=1}^{b_n(j-i-1)} \mathbb{E}\left[1 \wedge (\frac{\epsilon_l^s}{\gamma(n)\ln n})^2\right]$ et ϵ_l^s la variable symétrisée associée à (ϵ_l [4]).
On a :

$$\mathbb{E}\left[1 \wedge \left(\frac{\epsilon_l^s}{\gamma(n)\ln n}\right)^2\right] \geq \mathbb{E}\left[\left(\frac{\epsilon_l^s}{\gamma(n)\ln n}\right)^2 \mathbb{I}_{1>\frac{\epsilon_l^s}{\gamma(n)\ln n}}\right] = \frac{1}{(\gamma(n)\ln n)^2}\mathbb{E}\left[(\epsilon_l^s)^2 \mathbb{I}_{1>\frac{\epsilon_l^s}{\gamma(n)\ln n}}\right] . \tag{4.309}$$

Par l'inégalité de Schwarz et l'inégalité de Markov on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(\epsilon_l^s)^2 \mathbb{I}_{1>\frac{\epsilon_l^s}{\gamma(n)\ln n}}\right] &= \mathbb{E}\left[(\epsilon_l^s)^2\right] - \mathbb{E}\left[(\epsilon_l^s)^2 \mathbb{I}_{1\leq\frac{\epsilon_l^s}{\gamma(n)\ln n}}\right] && (4.310)\\
&\geq \mathbb{E}\left[(\epsilon_l^s)^2\right] - \mathbb{E}\left[(\epsilon_l^s)^4\right]^{1/2} Q^{1/2}\left[\epsilon_l^s > \gamma(n)\ln n\right] && (4.311)\\
&\geq \mathbb{E}\left[(\epsilon_l^s)^2\right] - \mathbb{E}\left[(\epsilon_l^s)^4\right]^{1/2} \frac{(\mathbb{E}\left[(\epsilon_l^s)^2\right])^{1/2}}{\gamma\ln\ln n} && (4.312)\\
&\equiv 2\sigma^2 - \frac{\mathbb{E}\left[(\epsilon_l^s)^4\right]^{1/2}(2\sigma^2)^{1/2}}{\gamma\ln\ln n} . && (4.313)
\end{aligned}$$

où $\gamma > 0$ par hypothèse. On déduit qu'il existe $n_0' \equiv n_0'\left(\sigma, \gamma, \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0'$:

$$\mathbb{E}\left[(\epsilon_l^s)^2 \mathbb{I}_{1>\frac{\epsilon_l^s}{\gamma(n)\ln n}}\right] \geq \frac{3\sigma^2}{2} . \tag{4.314}$$

En remplaçant ceci dans 4.309 on obtient pour tout $n > n_0'$:

$$\mathbb{E}\left[1 \wedge \left(\frac{\epsilon_l^s}{\gamma(n)\ln n}\right)^2\right] \geq \frac{3\sigma^2}{2(\gamma(n)\ln n)^2} . \tag{4.315}$$

Ainsi pour tout $n > n_0'$:

$$Z \geq \sqrt{\frac{3}{2}\sigma^2}\frac{\sqrt{b_n(j-i-1)}}{\gamma(n)\ln n} . \tag{4.316}$$

En remplaçant ceci dans 4.308 puis le résultat obtenu dans 4.307 et dans 4.304 on en déduit pour $n > n_0'$:

$$\begin{aligned}
& Q\left[0 \leq \max_{b_n i\leq k\leq b_n(i+1)}(S_k^n) - \max_{b_n j\leq l\leq b_n(j+1)}(S_l^n) \leq \gamma(n)\right] && (4.317)\\
\leq & \left(\frac{8\pi}{3\sigma^2}\right)^{1/2}\frac{\gamma(n)\ln n}{(b_n)^{1/2}(j-i-1)^{1/2}} . && (4.318)
\end{aligned}$$

On peut maintenant estimer la somme 4.298 en utilisant 4.318, pour tout $n > n_0'$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{[k_n]+1}\sum_{j=i+2}^{[k_n]+1} Q\left[\cdots\right] &\leq \left(\frac{8\pi}{3\sigma^2}\right)^{1/2}\frac{\gamma(n)\ln n}{(b_n)^{1/2}}\sum_{i=0}^{[k_n]+1}\sum_{j=i+2}^{[k_n]+1}\frac{1}{(j-i-1)^{1/2}} && (4.319)\\
&\leq \left(\frac{8\pi}{3\sigma^2}\right)^{1/2}\frac{\gamma(n)\ln n}{(b_n)^{1/2}}\frac{4}{3}\left([k_n+1]\right)^{3/2} \leq \frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{\sigma^2}\right)^{1/2}\frac{\gamma\ln\ln n}{(b_n)^{1/2}}\left([k_n]+1\right)^{3/2} && (4.320)
\end{aligned}$$

[4] on prend $\epsilon_l^s = \epsilon_l - \epsilon_s'$ où ϵ_l' et ϵ_l sont i.i.d. .

En effectuant des calculs similaires pour les autres sommes 4.295 à 4.297, on montre que l'on peut borner chacune d'elle par 4.320 ce qui nous donne le lemme 4.3.4. ■

Contrainte sur k_n et b_n : Ce dernier calcul impose des contraintes sur k_n et b_n, on rappelle que l'on a imposé : $k_n \times b_n = E(\ln n)^2$, on veut que

$$10\left(\frac{\pi}{\sigma^2}\right)^{1/2}\frac{\gamma \ln\ln n}{(b_n)^{1/2}}\left([k_n]+1\right)^{3/2} \ , \tag{4.321}$$

soit le plus proche de 0 possible, et b_n le moins grand possible. Pour cela on prend :

$$b_n = \left[E(\ln n)^{3/2}(\gamma \ln\ln n)^{1/2}\right] + 1 \ , \tag{4.322}$$

$k_n = \frac{E(\ln n)^2}{b_n}$ donc :

$$\begin{aligned}
10\left(\frac{\pi}{\sigma^2}\right)^{1/2}\frac{\gamma \ln\ln n}{(b_n)^{1/2}}\left([k_n]+1\right)^{3/2} &\leq 10\left(\frac{\pi}{\sigma^2}\right)^{1/2}\gamma \ln\ln n\frac{k_n^{3/2}(1+\frac{1}{k_n})^{3/2}}{(b_n)^{1/2}} && (4.323)\\
&\leq 10\left(\frac{\pi}{\sigma^2}\right)^{1/2}\gamma \ln\ln n\frac{E^{3/2}(\ln n)^3(1+\frac{1}{k_n})^{3/2}}{(b_n)^{2}} && (4.324)\\
&\leq 10\left(\frac{\pi}{\sigma^2}\right)^{1/2}\frac{(1+\frac{1}{k_n})^{3/2}}{E^{1/2}} \ , && (4.325)
\end{aligned}$$

on remarque que $k_n \equiv k_n(E,\gamma)$, soit $n_3 \equiv n_3(E,\gamma)$ tel que pour tout $n > n_3$, $\frac{1}{k_n} \leq 1/5$. On obtient donc pour tout $n > n_3$:

$$10\left(\frac{\pi}{\sigma^2}\right)^{1/2}\frac{\gamma \ln\ln n}{(b_n)^{1/2}}\left([k_n]+1\right)^{3/2} \leq 12\left(\frac{\pi}{\sigma^2}\right)^{1/2}\frac{1}{E^{1/2}} \ . \tag{4.326}$$

Soient $R > 1$ et $\epsilon > 0$, on prend $E = \frac{12R^2\left|\ln\frac{R}{\epsilon}\right|}{\sigma^2\epsilon^2}$ d'où en remplaçant 4.326 dans le résultat du lemme 4.3.4, on obtient que pour tout $\gamma > 0$, $R > 1$ et $\epsilon > 0$ il existe $n_1' \equiv n_1'(\epsilon, R, \sigma, \gamma, \mathbb{E}[\epsilon_0^4]) > n_0' \vee n_3$ tel que pour tout $n > n_1'$:

$$Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\bigcup_{j=i+2}^{[k_n]+1}\left\{\max_{b_n i\leq k\leq b_n(i+1)}(S_k^n) - \max_{b_n j\leq l\leq b_n(j+1)}(S_l^n) \leq \gamma(n)\right\}\right] \leq \frac{(12\pi)^{1/2}\epsilon}{R\left|\ln\frac{\epsilon}{R}\right|^{1/2}} \ . \tag{4.327}$$

On montre maintenant :

Lemme 4.3.5. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0,\kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$ et tout $\gamma > 0$ il existe $n_0'' \equiv n_0''(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0''$:*

$$\begin{aligned}
&Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\left\{0 \leq \max_{b_n i\leq k\leq b_n(i+1)}(S_k^n) - \max_{b_n(i+1)\leq l\leq b_n(i+2)}(S_l^n)\right\} \leq \gamma(n)\right] && (4.328)\\
&\leq \frac{(2[k_n]+3)(\ln\ln n)^{5/2}}{(b_n)^{1/2}}\left(2\gamma + \left(\frac{16\pi}{3\sigma^2}\right)\frac{\gamma}{\sigma(\ln\ln n)^{3/2}}\right) && (4.329)
\end{aligned}$$

où $k_n = \frac{E(\ln n)^2}{b_n}$, avec $b_n = \left[E(\ln n)^{3/2}(\sigma\gamma\ln\ln n)^{1/2}\right] + 1$ et $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$. R et γ sont des paramètres libres qui seront choisis le moment venu.

Preuve.
On a :

$$\begin{aligned}
&Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\left\{0 \leq \max_{b_n i\leq k\leq b_n(i+1)}(S_k^n) - \max_{b_n(i+1)\leq l\leq b_n(i+2)}(S_l^n)\right\} \leq \gamma(n)\right] && (4.330)\\
&\leq \sum_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1} Q\left[0 \leq \max_{b_n i\leq k\leq b_n(i+1)}(S_k^n) - \max_{b_n(i+1)\leq l\leq b_n(i+2)}(S_l^n) \leq \gamma(n)\right] \ . && (4.331)
\end{aligned}$$

Or $\max_{b_n(i+1)\le l\le b_n(i+2)}(S_l^n) = X + \max_{b_n(i+1)+1\le l\le b_n(i+2)}\left(\sum_{l=b_n(i+1)}^{l}\right)$ avec $X\in\sigma\left(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{b_n(i+1)}\right)$, de plus $Y\equiv\max_{b_n i\le k\le b_n(i+1)}(S_k^n)\in\sigma\left(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{b_n(i+1)}\right)$ d'où par indépendance des v.a. $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$:

$$Q\left[0\le \max_{b_n i\le k\le b_n(i+1)}(S_k^n) - \max_{b_n(i+1)\le l\le b_n(i+2)}(S_l^n)\le\gamma(n)\right] \tag{4.332}$$

$$= \int Q\left[-x\le \max_{b_n(i+1)+1\le l\le b_n(i+2)}\left(\sum_{l=b_n(i+1)+1}^{l}\right)\le\gamma(n)-x\right]Q\left[X+Y\in dx\right] \tag{4.333}$$

$$\le \sup_x\left(Q\left[x\le \max_{b_n(i+1)+1\le l\le b_n(i+2)}\left(\sum_{k=b_n(i+1)+1}^{l}\right)\le x+\gamma(n)\right]\right) \tag{4.334}$$

$$= \sup_x\left(Q\left[x\le \max_{1\le k\le b_n}(S_k^n)\le x+\gamma(n)\right]\right)\ , \tag{4.335}$$

la dernière égalité étant obtenue par stationnarité du milieu, en remplaçant ceci dans 4.331, on obtient :

$$Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\left\{0\le \max_{b_n i\le k\le b_n(i+1)}(S_k^n) - \max_{b_n(i+1)\le l\le b_n(i+2)}(S_l^n)\right\}\le\gamma(n)\right] \tag{4.336}$$

$$\tag{4.337}$$

$$\le (2[k_n]+3)\sup_x\left(Q\left[x\le \max_{1\le k\le b_n}(S_k^n)\le x+\gamma(n)\right]\right)\ . \tag{4.338}$$

Pour estimer $\sup_x\left(Q\left[x\le\max_{1\le k\le b_n}(S_k^n)\le x+\gamma(n)\right]\right)$ on commence par écrire :

$$Q\left[x\le \max_{1\le k\le b_n}(S_k^n)\le x+\gamma(n)\right] = Q\left[U_x^+\le b_n\le U_{x+\gamma(n)}^+\right] \tag{4.339}$$

$$= Q\left[U_x^+\le\frac{b_n}{2},\ U_{x+\gamma(n)}^+\ge b_n\right] \tag{4.340}$$

$$+ Q\left[\frac{b_n}{2}<U_x^+\le b_n\le U_{x+\gamma(n)}^+\right]\ . \tag{4.341}$$

On va estimer chacune des probabilités 4.340 et 4.341. On commence par 4.341, on remarque que :

$$\frac{b_n}{2}<U_x^+\le b_n\le U_{x+\gamma(n)}^+\Rightarrow x\le \max_{b_n/2\le k\le b_n}(S_k^n)\le x+\gamma(n)\ , \tag{4.342}$$

on en déduit par l'inégalité de concentration (voir [18]) déjà utilisée pour la preuve du lemme précédent (équation 4.308 à 4.318) qu'il existe $n_4\equiv n_4(\epsilon,R,\sigma,\mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right])$ tel que pour tout $n>n_4$:

$$Q\left[\frac{b_n}{2}<U_x^+\le b_n\le U_{x+\gamma(n)}^+\right] \le Q\left[x\le \max_{b_n/2\le k\le b_n}(S_k^n)\le x+\gamma(n)\right] \tag{4.343}$$

$$\le \sup_y\left(Q\left[y\le S_{b_n/2}^n\le y+\gamma(n)\right]\right) \tag{4.344}$$

$$\le \left(\frac{16\pi}{3\sigma^2}\right)^{1/2}\frac{\gamma\ln\ln n}{(b_n)^{1/2}}\ . \tag{4.345}$$

On estime maintenant 4.340, par la propriété de Markov forte on a :

$$Q\left[U_x^+\le\frac{b_n}{2},\ U_{x+\gamma(n)}^+\ge b_n\right] \tag{4.346}$$

$$= \sum_{l=0}^{b_n/2}\int_x^{x+\gamma(n)}Q\left[U_x^+=l,S_l\in dy\right]Q\left[\ U_{x+\gamma(n)-y}^+\ge b_n-l\right]\ , \tag{4.347}$$

de plus $x - y \leq 0$, ainsi :

$$Q\left[\, U^+_{x+\gamma(n)-y} \geq b_n - l\right] \leq Q\left[\, U^+_{\gamma(n)} \geq b_n - l\right] \ , \tag{4.348}$$

on en déduit :

$$Q\left[U^+_x \leq \frac{b_n}{2},\ U^+_{x+\gamma(n)} \geq b_n\right] \leq Q\left[\, U^+_{\gamma(n)} \geq b_n/2\right] \ . \tag{4.349}$$

Pour estimer cette probabilité on commence par la symétriser (voir remarque 4.2.8), soit $a > 0$, on a :

$$Q\left[\, U^+_{\gamma(n)} \geq b_n/2\right] \leq Q\left[\, U^+_{\gamma(n)} \wedge U^-_a \geq b_n/2\right] + Q\left[\, U^+_{\gamma(n)} > U^-_a\right] \ . \tag{4.350}$$

On applique maintenant le lemme 4.2.7, prenons $c = \frac{\gamma \ln\ln n}{\ln n}$, $a = \frac{(b_n)^{1/2}}{\ln n(\ln\ln n)^{3/2}}$, $L = b_n/2$, $D = \ln n$, et on rappelle que $b_n = \left[E(\ln n)^{3/2}(\gamma \ln\ln n)^{1/2}\right] + 1$, avec $E = \frac{12R^2\left|\ln\frac{R}{\epsilon}\right|}{\sigma^2\epsilon^2}$, donc il existe $n_5 \equiv n_5(\epsilon, R, \sigma, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_5$:

$$c < a \ (\Rightarrow d \equiv a \vee c = a) \ , \tag{4.351}$$

$$L \geq \frac{(2a\ln n)^2}{\sigma^2} + 1 \ . \tag{4.352}$$

on a donc d'après le lemme 4.2.7 qu'il existe $n_6 \equiv n_6(\epsilon, R, \sigma, \kappa, \gamma, \mathbb{E}[|\epsilon_0|^3], \mathbb{E}[\epsilon_0^4], C) > n_5$ tel que pour tout $n > n_6$:

$$Q\left[\, U^+_{\gamma(n)} \geq b_n/2\right] \quad \leq \quad \frac{2\gamma(\ln\ln n)^{5/2}}{(b_n)^{1/2}} \ . \tag{4.353}$$

En remplaçant 4.345 et 4.353 dans (respectivement) 4.340 et 4.341 puis en remplaçant le résultat obtenu dans 4.338 on obtient pour tout $n > n_6$:

$$Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\left\{0 \leq \max_{b_n i \leq k \leq b_n(i+1)}(S_k) - \max_{b_n(i+1)\leq l\leq b_n(i+2)}(S_l)\right\} \leq \gamma(n)\right] \tag{4.354}$$

$$\leq \quad \frac{(2[k_n]+3)(\ln\ln n)^{5/2}}{(b_n)^{1/2}}\left(2\gamma + \left(\frac{16\pi}{3\sigma^2}\right)\frac{\gamma}{\sigma(\ln\ln n)^{3/2}}\right) \ , \tag{4.355}$$

ce qui donne le lemme 4.3.5 en prenant $n_0'' = n_4 \vee n_6$. ■

On rappelle que $b_n = \left[E(\ln n)^{3/2}(\gamma\ln\ln n)^{1/2}\right] + 1$ et $k_n = \frac{E(\ln n)^2}{b_n}$, on obtient donc par le lemme 4.3.5, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma > 0$ il existe $n_1'' \equiv n_1''(\epsilon, R, \sigma, \kappa, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma) \geq n_0''$ tel que pour tout $n > n_1''$:

$$Q\left[\bigcup_{i=-[k_n]-1}^{[k_n]+1}\left\{0 \leq \max_{b_n i \leq k \leq b_n(i+1)}(S^n_k) - \max_{b_n(i+1)\leq l\leq b_n(i+2)}(S^n_l)\right\} \leq \gamma(n)\right] \tag{4.356}$$

$$\leq \quad \mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{1/4}}\right) \ . \tag{4.357}$$

On termine maintenant la preuve de la proposition 4.3.3. En regroupant 4.357 et 4.327 que l'on remplace respectivement dans 4.290 et 4.289, puis en remplaçant le résultat obtenu dans 4.283, on obtient alors qu'il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, R, \sigma, \kappa, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma) > n_1 \vee n_2 \vee n_1' \vee n_1''$ tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$Q\left[\bigcup_{i=0}^{r'-1}\left\{0 \leq \eta'_{i,i+1} \leq \gamma(n)\right\}\right] \leq \frac{\epsilon}{R}\left(24 + \frac{(12\pi)^{1/2}}{\left|\ln\frac{\epsilon}{R}\right|^{1/2}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right) \ . \tag{4.358}$$

Le problème étant symétrique on montre 4.272 par des calculs similaires. ■

Distance minimale entre le maximum et le minimum issus d'un raffinement.

Proposition 4.3.6. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$:*

$$Q\left[\bigcap_{i=0}^{r-1}\{\delta_{i+1,i+1} \geq \gamma(n)\}\right] \geq 1 - \frac{\epsilon}{R}\left(24 + \frac{(12\pi)^{1/2}}{\left|\ln \frac{\epsilon}{R}\right|^{1/2}}\right) - \mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{1/4}}\right) , \tag{4.359}$$

$$Q\left[\bigcap_{i=0}^{r'-1}\{\delta'_{i+1,i+1} \geq \gamma(n)\}\right] \geq 1 - \frac{\epsilon}{R}\left(24 + \frac{(12\pi)^{1/2}}{\left|\ln \frac{\epsilon}{R}\right|^{1/2}}\right) - \mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{1/4}}\right) , \tag{4.360}$$

où $\gamma(n) = \gamma\frac{\ln\ln n}{\ln n}$, $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$, les v.a. r et r' ont été définies au paragraphe 4.2.3, $\delta_{.,.}$ et $\delta'_{.,.}$ ont été définis en 4.263. R et γ sont des paramètres libres qui seront choisis le moment venu.

Preuve.
Pour montrer cette proposition on commence par remarquer que par construction l'événement $\{\delta_{i+1,i+1} \geq \gamma(n)\}$ est décroissant en i, on obtient donc :

$$Q\left[\bigcap_{i=0}^{r-1}\{\delta_{i+1,i+1} \geq \gamma(n)\}\right] = Q\left[\delta_{r,r} \geq \gamma(n)\right] , \tag{4.361}$$

pour terminer la preuve il suffit de faire des calculs similaires à ceux effectués pour montrer la proposition 4.3.3. ■

Distance minimale entre les minimums issus des raffinements et le minimum absolu $S_{\tilde{m}_0}$.

Proposition 4.3.7. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$:*

$$Q\left[\bigcap_{i=0}^{r-1}\{\mu_{i+1,0} \geq \gamma(n)\}\right] \geq 1 - \frac{\epsilon}{R}\left(24 + \frac{(12\pi)^{1/2}}{\left|\ln \frac{\epsilon}{R}\right|^{1/2}}\right) - \mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{1/4}}\right) , \tag{4.362}$$

$$Q\left[\bigcap_{i=0}^{r'-1}\{\mu'_{i+1,0} \geq \gamma(n)\}\right] \geq 1 - \frac{\epsilon}{R}\left(24 + \frac{(12\pi)^{1/2}}{\left|\ln \frac{\epsilon}{R}\right|^{1/2}}\right) - \mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{1/4}}\right) , \tag{4.363}$$

où $\gamma(n) = \gamma\frac{\ln\ln n}{\ln n}$, $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$, les v.a. r et r' ont été définies au paragraphe 4.2.3, $\mu_{.,.}$ et $\mu'_{.,.}$ ont été définies en 4.263. R et γ sont des paramètres libres qui seront choisis le moment venu.

Preuve.
Pour montrer cette proposition il suffit d'appliquer la méthode utilisée pour montrer la proposition 4.3.3. ■

Contrôle du premier et du dernier raffinement.

Proposition 4.3.8. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$:*

$$Q\left[\delta_{1,1} \leq 1 - \gamma(n)\right] \geq 1 - \frac{\epsilon}{R}\left(24 + \frac{(12\pi)^{1/2}}{\left|\ln \frac{\epsilon}{R}\right|^{1/2}}\right) - \mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{1/4}}\right) , \tag{4.364}$$

$$Q\left[\delta'_{1,1} \leq 1 - \gamma(n)\right] \geq 1 - \frac{\epsilon}{R}\left(24 + \frac{(12\pi)^{1/2}}{\left|\ln \frac{\epsilon}{R}\right|^{1/2}}\right) - \mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{1/4}}\right) , \tag{4.365}$$

$$Q\left[\delta_{r,r} \leq \frac{\left((100\sigma)^2\gamma E(\ln\ln n)^{3+1/2}(\ln n)^{3/2}\right)^{1/2}}{\ln n}\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} - \mathcal{O}\left(\frac{(\ln\ln n)^{7/2}}{(\ln n)^{1/4}}\right) , \tag{4.366}$$

$$Q\left[\delta'_{r',r'} \leq \frac{\left((100\sigma)^2\gamma E(\ln\ln n)^{3+1/2}(\ln n)^{3/2}\right)^{1/2}}{\ln n}\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} - \mathcal{O}\left(\frac{(\ln\ln n)^{7/2}}{(\ln n)^{1/4}}\right) , \tag{4.367}$$

où $\gamma(n) = \gamma\frac{\ln\ln n}{\ln n}$, $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$, les v.a. r et r' ont été définies au paragraphe 4.2.3, $\delta_{.,.}$ et $\delta'_{.,.}$ ont été définis en 4.263. R et γ sont des paramètres libres qui seront choisis le moment venu.

Preuve.
Montrons 4.364, par construction on sait que $\delta_{1,1} \leq 1 + \gamma(n)$. Il faut donc montrer que pour tout $\gamma > 0$ l'événement

$$-\gamma(n) \leq \delta_{1,1} - 1 \leq \gamma(n) , \tag{4.368}$$

a une probabilité proche de 0, pour cela il suffit d'utiliser les mêmes techniques que celles, déjà présentées, pour montrer la proposition 4.3.3. La même remarque est valable pour 4.365.
Montrons 4.366, soient $\epsilon > 0$, $R > 1$, et $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ par construction, on a :

$$\tilde{M}'_0 \leq \tilde{M}_r \leq \tilde{M}_0 , \tag{4.369}$$

$$\tilde{M}_r - \tilde{m}_0 \leq l_n \times b_n , \tag{4.370}$$

et on a posé :

$$b_n = [E(\ln n)^{3/2}(\gamma\ln\ln n)^{1/2}] + 1 , \tag{4.371}$$

$$k_n = \frac{E(\ln n)^2}{b_n} , \tag{4.372}$$

$$l_n = 1000\sigma^2(\ln k_n)^2 . \tag{4.373}$$

par 4.369 et la proposition 4.2.14, on sait qu'il existe $n_1 \equiv n_1\left(\epsilon, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_1$:

$$Q\left[-E(\ln n)^2 \leq \tilde{M}_r \leq E(\ln n)^2\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} \tag{4.374}$$

avec : $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. Considérons le découpage suivant : $\left[E(\ln n)^2 + 1\right] = b'_n \times k'_n$ où $b'_n = [l_n \times b_n] + 1$, ($k'_n = \frac{E(\ln n)^2}{b'_n}$), on a $\delta_{r,0} \geq \delta_{r,r}$ donc :

$$\left.\begin{array}{l} -E(\ln n)^2 \leq \tilde{M}_r \leq E(\ln n)^2 \\ \text{et } \tilde{m}_0 - \tilde{M}_r \leq l_n \times b_n . \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_{r,r} \leq \delta_{r,0} \leq \max_{-[E(\ln n)^2]-1 \leq m \leq [E(\ln n)^2]+1} \max_{m \leq j \leq m+b'_n} \max_{m \leq l \leq m+b'_n} \left(\left|S_l^n - S_j^n\right|\right) .$$

On déduit de ceci et de 4.374 que pour tout $n > n_1$ on a :

$$Q\left[\delta_{r,r} \leq \max_{-[E(\ln n)^2]-1 \leq m \leq [E(\ln n)^2]+1} \max_{m \leq j \leq m+b'_n} \max_{m \leq l \leq m+b'_n} \left(\left|S_l^n - S_j^n\right|\right)\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} . \tag{4.375}$$

On va maintenant appliquer le lemme 4.1.5, soit $s > 0$, dans 4.36 on prend $K = k'_n$, $[L] + 1 = [E(\ln n)^2] + 1$ et $B = b'_n$, il est clair qu'il existe $n_2 \equiv n_2\left(\epsilon, R, \sigma, s, \kappa, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], C\right)$ tel que pour tout $n > n_2$:

$$\ln(k'_n) < \sigma^2\kappa^2 e_0 b'_n \ , \tag{4.376}$$

où $e_0 = \left(\frac{1}{32(1+s)} \wedge \frac{\sigma^6\kappa^4}{128C^2(1+s)} \wedge (32\kappa(1+s))\right)$. On en déduit par 4.36 que pour tout $n > n_2$:

$$\begin{aligned} & Q\left[\max_{-[E(\ln n)^2]-1\leq m\leq [E(\ln n)^2]+1} \ \max_{m\leq j\leq m+b'_n} \ \max_{m\leq l\leq m+b'_n} (|S_l - S_j|) > ((1+s)32\sigma^2 b'_n \ln k'_n)^{1/2}\right] \\ \leq \ & \frac{2(b'_n+1)}{{k'_n}^{s-\mathcal{O}\left(\frac{\ln k'_n}{b'_n}\right)^{1/2}}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{{k'_n}^{1-\frac{1}{64}-\mathcal{O}\left(\frac{\ln k'_n}{b'_n}\right)^{1/2}}}\right)\right) \ . \end{aligned} \tag{4.377}$$

Pour simplifier cette expression on choisit $n_3 \geq n_2$ tel que pour tout $n > n_3$:

$$\begin{aligned} & Q\left[\max_{-[E(\ln n)^2]-1\leq m\leq [E(\ln n)^2]+1} \ \max_{m\leq j\leq m+b'_n} \ \max_{m\leq l\leq m+b'_n} (|S_l - S_j|) > ((1+s)32\sigma^2 b'_n \ln k'_n)^{1/2}\right] \\ \leq \ & \frac{4b'_n}{{k'_n}^{\frac{31}{32}s}} \ . \end{aligned} \tag{4.378}$$

En prenant $s = 4$ on a :

$$\frac{4b'_n}{{k'_n}^{\frac{31}{32}s}} = \frac{b'^5_n}{E(\ln n)^{8\times\frac{31}{32}}} \leq \frac{b_n^5(1000\sigma^2\ln(k_n))^2}{E^4(\ln n)^{8\times\frac{31}{32}}} = \mathcal{O}\left(\frac{(\ln\ln n)^{7/2}}{(\ln n)^{1/4}}\right) \ , \tag{4.379}$$

de 4.375, 4.378 et 4.379 on obtient donc pour tout $n > n_3$:

$$Q\left[\delta_{r,r}(\ln n) \leq (160\sigma^2 b'_n \ln k'_n)^{1/2}\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} - \mathcal{O}\left(\frac{(\ln\ln n)^{7/2}}{(\ln n)^{1/4}}\right) \ , \tag{4.380}$$

on remarque de plus qu'il existe $n_4 \equiv n_4(\epsilon, R, \sigma, s, \kappa)$ tel que pour tout $n > n_4$ que :

$$160\sigma^2 b'_n \ln k'_n = ([l_n b_n] + 1)\ln\frac{E(\ln n)^2}{[l_n b_n]+1} \leq (100\sigma)^2(\gamma)^{1/2}E(\ln\ln n)^{3+1/2}(\ln n)^{3/2} \ . \tag{4.381}$$

On obtient 4.366, en prenant $n_0 = n_1 \vee n_4$. On effectue le même raisonnement pour $\delta'_{r',r'}$. ■

Distance maximale entre $\tilde{m}_0$ et le plus grand des deux maximisants $\tilde{M}_r$ et $\tilde{M}'_{r'}$

Nous montrons la dernière propriété suivante, soit $n > 3$, définissons les points $\tilde{M}_<$ et $\tilde{M}_>$:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_< &= \sup\left\{m \in \mathbb{Z},\ m < \tilde{m}_0,\ S^n_m - S^n_{\tilde{m}_0} \geq \frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}\right\} \ , \\ \tilde{M}_> &= \inf\left\{m \in \mathbb{Z},\ m > \tilde{m}_0,\ S^n_m - S^n_{\tilde{m}_0} \geq \frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}\right\} \ , \end{aligned} \tag{4.382}$$

où $q(n)$ est défini dans le lemme suivant, on a :

Lemme 4.3.9. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, R, \gamma, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right])$ tel que pour tout $n > n_0$:*

$$Q\left[\tilde{M}_> \geq \tilde{m}_0 + \left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln\ln n\right] \leq \frac{6\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right) \ , \tag{4.383}$$

$$Q\left[\tilde{M}_< \leq \tilde{m}_0 - \left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln\ln n\right] \leq \frac{6\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right) \ , \tag{4.384}$$

où $q(n) = e^{\left((100\sigma)^2\gamma E(\ln\ln n)^{3+1/2}(\ln n)^{3/2}\right)^{1/2}}$ *et* $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, R *et* γ *sont des paramètres libres qui seront fixés ultérieurement.*

Preuve.
On a :

$$Q\left[\tilde{M}_> \geq \tilde{m}_0 + \left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln\ln n\right] \tag{4.385}$$

$$\equiv Q\left[\inf\left\{m > \tilde{m}_0,\ S_m^n - S_{\tilde{m}_0}^n \geq \frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}\right\} \geq \tilde{m}_0 + \left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln\ln n\right] \tag{4.386}$$

$$= Q\left[\inf\left\{m > \tilde{m}_0,\ |S_m^n - S_{\tilde{m}_0}^n| \geq \frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}\right\} \geq \tilde{m}_0 + \left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln\ln n\right] , \tag{4.387}$$

car $\tilde{m}_0$ est le minimisant de la vallée $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ et par définition $\tilde{M}_0 \geq M_>$. Soient $\epsilon > 0$ et $R > 1$, par la proposition 4.2.14, on sait qu'il existe $n_1 \equiv n_1\left(R, \epsilon, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_1$:

$$Q\left[-E(\ln n)^2 \leq \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} , \tag{4.388}$$

avec $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, donc pour tout $n > n_1$:

$$Q\left[\inf\left\{m > \tilde{m}_0,\ |S_m^n - S_{\tilde{m}_0}^n| \geq \frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}\right\} \geq \tilde{m}_0 + \left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln\ln n\right] \tag{4.389}$$

$$\leq \sum_{k=-[E(\ln n)^2]-1}^{[E(\ln n)^2]+1} Q\left[\inf\left\{m > k,\ |S_m^n - S_k^n| \geq \frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}\right\} \geq k + \left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln\ln n\right] + \frac{6\epsilon}{R} .$$

Par stationnarité du milieu on obtient pour tout $n > n_1$:

$$Q\left[\inf\left\{m > \tilde{m}_0,\ |S_m^n - S_{\tilde{m}_0}^n| \geq \frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}\right\} \geq \tilde{m}_0 + \left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln\ln n\right] \tag{4.390}$$

$$\leq 2([E(\ln n)^2]+1)Q\left[\inf\left\{m > 0, |S_m^n| \geq \frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}\right\} \geq \left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln\ln n\right] + \frac{6\epsilon}{R} \tag{4.391}$$

$$\equiv 2([E(\ln n)^2]+1)Q\left[U^-_{\frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}} \wedge U^+_{\frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}} \geq \left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln\ln n\right] + \frac{6\epsilon}{R} . \tag{4.392}$$

On applique maintenant l'inégalité 4.67, on obtient qu'il existe $n_2 \equiv n_2\left(R, \epsilon, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_2$:

$$Q\left[U^-_{\frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}} \wedge U^+_{\frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}} \geq \left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln\ln n\right] \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right) . \tag{4.393}$$

En remplaçant ceci dans 4.392 puis le résultat obtenu dans 4.387, on obtient 4.383 en prenant $n_0 = n_1 \vee n_2$, 4.384 s'obtient de façon identique. ■

On donne maintenant la définition de l'ensemble des "bons" environnements G' :

4.3.3 Définition de l'ensemble des "bons" environnements G

Définition 4.3.10. Soient $n > 3$, $\epsilon > 0$, $R > 1$, $\kappa \in]0, k_+[$ $(k_+ \in \mathbb{R}_+^*)$, $\gamma > 0$ et soit $\omega \in \Omega_2$, on dira que $\alpha \equiv \alpha(\omega)$ est un "bon" environnement si et seulement si la suite $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z}) \equiv (\alpha_i(\omega),\ i \in \mathbb{Z})$ vérifie les propriétés 4.394 à 4.414 :

(4.394) • La vallée $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ existe, en particulier :

(4.395) $0 \in [\tilde{M}_0', \tilde{M}_0]$,

(4.396) $\delta_{0,0} \geq 1 + \gamma(n),\ \delta_{0,0}' \geq 1 + \gamma(n)$,

(4.397) Si $\tilde{m}_0 > 0, S_{\tilde{M}_0'} - \max\limits_{0 \leq m \leq \tilde{m}_0} (S_m^n) \leq 1 - \gamma(n)$,

(4.398) si $\tilde{m}_0 < 0, S_{\tilde{M}_0} - \max\limits_{\tilde{m}_0 \leq m \leq 0} (S_m^n) \leq 1 - \gamma(n)$.

(4.399) • $\delta_{1,1} \leq 1 - \gamma(n)$,

(4.400) $\delta_{1,1}' \leq 1 - \gamma(n)$.

(4.401) • $\max\limits_{\tilde{M}_0' \leq l \leq \tilde{M}_0} \left(\dfrac{1}{\alpha_l}\right) \leq (\ln n)^{\frac{6}{\kappa}}$,

(4.402) $\max\limits_{\tilde{M}_0' \leq l \leq \tilde{M}_0} \left(\dfrac{1}{\beta_l}\right) \leq (\ln n)^{\frac{6}{\kappa}}$.

(4.403) • $\tilde{M}_0 \leq E(\ln n)^2, -\tilde{M}_0' \leq E(\ln n)^2$.

• Pour tout $0 \leq i \leq r - 1$:

(4.404) $\eta_{i,i+1} \geq \gamma(n)$,

(4.405) $\delta_{i+1,i+1} \geq \gamma(n)$,

(4.406) $\mu_{i+1,0} \geq \gamma(n)$.

• Pour tout $0 \leq i \leq r' - 1$:

(4.407) $\eta_{i,i+1}' \geq \gamma(n)$,

(4.408) $\delta_{i+1,i+1}' \geq \gamma(n)$,

(4.409) $\mu_{i+1,0}' \geq \gamma(n)$.

(4.410) • $r \leq 2\dfrac{(\ln n)^{1/2}}{(\gamma \ln \ln n)^{1/2}}$,

(4.411) $r' \leq 2\dfrac{(\ln n)^{1/2}}{(\gamma \ln \ln n)^{1/2}}$.

(4.412) • $\delta_{r,r} \leq \dfrac{\ln(q(n))}{\ln n}$,

(4.413) $\delta_{r',r'}' \leq \dfrac{\ln(q(n))}{\ln n}$.

(4.414) $\tilde{M}_< \geq \tilde{m}_0 - \left(\dfrac{8\ln(q(n)\gamma \ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln \ln n$, $\quad \tilde{M}_> \leq \tilde{m}_0 + \left(\dfrac{8\ln(q(n)\gamma \ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln \ln n$.

où $\gamma(n) = \frac{\gamma \ln \ln n}{\ln n}$, $E = \frac{24R^2 \left|\ln \frac{R}{\epsilon}\right|}{\sigma^2 \epsilon^2}$, $q(n) = e^{\left((100\sigma)^2 \gamma E (\ln \ln n)^{3+1/2} (\ln n)^{3/2}\right)^{1/2}}$. On trouvera les définitions de $\eta_{.,.}$, $\eta_{.,.}'$, $\delta_{.,.}'$ et $\delta_{.,.}$ en 4.263 (page 71), r et r' ont été définies au paragraphe 4.2.3, les points $\tilde{M}_0'$, $\tilde{M}_0'$ et $\tilde{m}_0$ qui forment la vallée minimale sont définis au paragraphe 4.2.2 enfin $\tilde{M}_>$ et $\tilde{M}_<$ sont définis en 4.382.

Proposition 4.3.11. *Soit $G_n = \{\omega \in \Omega_2,\ \alpha(\omega)$ est un "bon" environement $\}$. Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\gamma > 0$, il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \sigma, \kappa, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$:*

(4.415) $$Q\left[\omega \in \Omega_2,\ \omega \in G_n\right] \geq 1 - \epsilon \ .$$

Preuve.
Il suffit de rassembler les résultats des propositions : 4.2.6, 4.2.14, 4.272, 4.359, 4.3.7, 4.3.8 du corollaire 4.410 et des lemmes 4.3.9 et 4.2.13, puis d'ajuster la constante : $R = 1000$. ■
Par abus de langage on dira que $\alpha \in G_n$, si α est un "bon" environnement.

4.3.4 Variables aléatoires caractéristiques fonctions du potentiel S^n

On remarque que l'on peut exprimer le résultat du lemme 2.1.3 en fonction du potentiel aléatoire S^n :

Lemme 4.3.12. *Soient $a, x, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a < x < b$, pour tout $\alpha \in \Omega_2$ on a :*

$$\mathbb{P}_x^\alpha\left[T_a^x > T_b^x\right] = \frac{\sum_{i=a+1}^{x-1} \exp\left(\ln n\left(S_i^n - S_a^n\right)\right) + 1}{\sum_{i=a+1}^{b-1} \exp\left(\ln n\left(S_i^n - S_a^n\right)\right) + 1} \ , \tag{4.416}$$

$$\mathbb{P}_x^\alpha\left[T_a^x < T_b^x\right] = \frac{\sum_{i=x+1}^{b-1} \exp\left(\ln n\left(S_i^n - S_b^n\right)\right) + 1}{\sum_{i=a+1}^{b-1} \exp\left(\ln n\left(S_i^n - S_b^n\right)\right) + 1} \ . \tag{4.417}$$

Avec la construction que l'on a effectuée page 61 et les notations que l'on a adoptées page 71, on a :

Lemme 4.3.13. *Soit $n > 1$, et soient $\tilde{m}_j \in \mathcal{M}_0$ et $\tilde{s}_i \in \mathcal{M}_0$, si $0 \le i < j \le r$ on a :*

$$n^{\delta_{i,j}} \le \sum_{l=\tilde{m}_j}^{\tilde{s}_i} \exp\left(\ln n\left(S_l^n - S_{\tilde{m}_j}^n\right)\right) \le |m_j - s_i|(\ln n)^2 n^{\delta_{i,j}} \ , \tag{4.418}$$

avec $\delta_{i,j} = S_{\tilde{M}_i}^n - S_{\tilde{m}_j}^n$, si $r \ge i > j \ge 0$ on a :

$$n^{\delta_{j,j}} \le \sum_{l=\tilde{m}_j}^{\tilde{s}_i} \exp\left(\ln n\left(S_l^n - S_{\tilde{m}_j}^n\right)\right) \le |m_j - s_i|(\ln n)^2 n^{\delta_{j,j}} \ , \tag{4.419}$$

avec $\delta_{j,j} = S_{\tilde{M}_j}^n - S_{\tilde{m}_j}^n$.
Soient $\tilde{M}_j \in \mathcal{M}_0$ et $\tilde{s}_i \in \mathcal{M}_0$, si $0 \le i < j \le r$ on a :

$$n^{\delta_{j-1,j-1}} \le \sum_{l=\tilde{m}_j}^{\tilde{s}_i} \exp\left(\ln n\left(S_l^n - S_{\tilde{M}_j}^n\right)\right) \le |M_j - M_i|(\ln n)^2 n^{\delta_{j-1,j-1}} \ , \tag{4.420}$$

avec $\delta_{j-1,j-1} = S_{\tilde{M}_{j-1}}^n - S_{\tilde{m}_{j-1}}^n$, si $r \ge i > j \ge 0$ on a :

$$n^{\eta_{j,i}} \le \sum_{l=\tilde{m}_j}^{\tilde{s}_i} \exp\left(\ln n\left(S_l^n - S_{\tilde{M}_j}^n\right)\right) \le |M_j - M_i|(\ln n)^2 n^{\eta_{j,i}} \ , \tag{4.421}$$

avec $\eta_{j,i} = S_{\tilde{M}_j}^n - S_{\tilde{M}_i}^n$.
Soient $\tilde{M}_j \in \mathcal{M}_0$ et $\tilde{s}_i \in \mathcal{M}_0$, si $0 \le i+1 < j \le r$ on a :

$$n^{\delta_{j+1,j+1}} \le \sum_{l=\tilde{m}_j}^{\tilde{s}_i} \exp\left(\ln n\left(S_l^n - S_{\tilde{M}_j}^n\right)\right) \le |M_j - m_i|(\ln n)^2 n^{\delta_{j+1,j+1}} \ , \tag{4.422}$$

avec $\delta_{j-1,j-1} = S_{\tilde{M}_{j-1}}^n - S_{\tilde{m}_{j-1}}^n$, si $r \ge i > j \ge 0$ on a :

$$n^{\eta_{j,i}} \le \sum_{l=\tilde{m}_j}^{\tilde{s}_i} \exp\left(\ln n\left(S_l^n - S_{\tilde{M}_j}^n\right)\right) \le |M_j - m_i|(\ln n)^2 n^{\eta_{j,i}} \ . \tag{4.423}$$

Preuve.
Montrons 4.418, par construction de l'ensemble $\mathcal{M}_0$ on a : $\tilde{M}_r \leq \tilde{m}_r \leq \tilde{M}_{r-1} \leq \cdots \leq \tilde{M}_1 \leq \tilde{m}_1 \leq \tilde{M}_0$, et $S^n_{\tilde{M}_r} \leq S^n_{\tilde{M}_{r-1}} \leq \cdots \leq S^n_{\tilde{M}_0}$. On en déduit que si on fixe $\tilde{m}_j \in \mathcal{M}_0$ (un minimisant) alors pour tout $i < j$ tel que $\tilde{s}_i \in \mathcal{M}_0$, on a :

$$\tilde{s}_i \geq \tilde{M}_i \ , \ \tilde{s}_i > \tilde{m}_j \ , \tag{4.424}$$

$$\max_{\tilde{M}_i \leq m \leq \tilde{s}_i} (S^n_m) \leq S^n_{\tilde{M}_i} \ . \tag{4.425}$$

De plus

$$\max_{\tilde{m}_j \leq m \leq \tilde{M}_i} (S^n_m) = S^n_{\tilde{M}_i} \ , \tag{4.426}$$

on déduit de 4.425 et 4.426 que :

$$\max_{\tilde{m}_j \leq m \leq \tilde{s}_i} (S^n_m) = S^n_{\tilde{M}_i} \ . \tag{4.427}$$

Ce qui donne :

$$\delta_{i,j} \equiv S^n_{\tilde{M}_i} - S^n_{\tilde{m}_j} = \max_{\tilde{m}_j \leq m \leq \tilde{s}_i} (S^n_m) - S^n_{\tilde{m}_j} \ , \tag{4.428}$$

on en déduit 4.418, les autres relations se déduisent par un raisonnement similaire. ■

Chapitre 5

Comportement sous-diffusif et analyse des temps de retour au point $\tilde{m}_0$

5.1 Comportement sous diffusif de la M.A.M.A. récurrente

L'objet de ce paragraphe est de montrer que la marche aléatoire en milieu aléatoire $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ se comporte, pour une échelle de temps donnée n, en $(\ln n)^2$. Plus précisément on montre qu'avec une probabilité proche de un la M.A.M.A. reste prisonnière dans la vallée "minimale" $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ définie au paragraphe 4.2.2. Pour établir ce résultat nous allons exploiter les résultats que l'on a obtenus pour la $M.A.M.I$ (partie I chapitre 2) ainsi que quelques propriétés de l'ensemble des "bons" environnements. (Définition 4.3.10).

On rappelle la définition de la v.a. :

Définition 5.1.1. Soient a et b dans $\mathbb{Z}$, $a \neq b$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_b^a = \begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N}^*,\ X_k = b \text{ avec } X_0 = a\}, \\ +\infty, \text{ si un tel k n'existe pas.} \end{cases} \tag{5.1}$$

Nous rappelons également, qu'afin d'alléger les notations, nous avons introduit dans le chapitre précédent la notation suivante, soit $a \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{a} = a(\ln n)^2 \tag{5.2}$$

On remarque qu'avec cette notation $T_{b(\ln n)^2}^{a(\ln n)^2} \equiv T_{\tilde{b}}^{\tilde{a}}$, de plus $\tilde{0} \equiv 0$.

Proposition 5.1.2. *Supposons H.1 et H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 (cf. page 43) soit vérifiée, soit $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ la vallée définie au paragraphe 4.2.2, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\gamma > 2$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \kappa, C, \sigma, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout milieu $\alpha \in G_n$, on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\bigcup_{m=0}^{n} \left\{ X_m \notin \left[\tilde{M}_0', \tilde{M}_0\right] \right\} \right] \leq \frac{2E}{(\ln n)^{\gamma-2}}\ , \tag{5.3}$$

de plus :

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\bigcup_{m=0}^{n} \left\{ X_m \notin \left[-E(\ln n)^2, E(\ln n)^2\right] \right\} \right] \leq \frac{2E}{(\ln n)^{\gamma-2}}\ , \tag{5.4}$$

avec $Q\left[G_n\right] \geq 1-\epsilon$, $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$, $E = \frac{24R^2\left|\ln \frac{\epsilon}{R}\right|}{\sigma^2\epsilon^2}$ et $R = 1000$ (l'ensemble G_n est définie page 83).

Pour la preuve de cette proposition, on montre que partant de 0 la probabilité de rencontrer $\tilde{m}_0$ avant de toucher l'un des deux points $\tilde{M}_0' - 1$ ou $\tilde{M}_0 + 1$ tend vers 1 (lemme 5.1.3) et que, partant de $\tilde{m}_0$, la probabilité de sortir de l'intervalle $[\tilde{M}_0', \tilde{M}_0]$ en un temps n tend vers 0 quand n tend vers l'infini (lemme 5.1.5).

On supposera $m_0 < 0$, (les calculs sont similaires pour $m_0 \geq 0$).

Lemme 5.1.3. *Supposons H.1 et H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, soit $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ la vallée définie au paragraphe 4.2.2, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\gamma > 2$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \kappa, C, \sigma, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout milieu $\alpha \in G_n$, on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[T_{\tilde{m}_0}^{\tilde{0}} \geq T_{\tilde{M}_0+1}^{\tilde{0}} \right] \leq \frac{E}{(\ln n)^{\gamma-2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n(\ln n)^\gamma} \right) \tag{5.5}$$

et $Q[G_n] \geq 1 - \epsilon$, $E = \frac{24R^2 |\ln \frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2 \epsilon^2}$ avec $R = 1000$ et $C = \mathbb{E}_Q[e^{\kappa\epsilon_0}] \vee \mathbb{E}_Q[e^{-\kappa\epsilon_0}]$.

Preuve.
Montrons que la marche partant de 0 rencontre le point $\tilde{m}_0$ avant de rencontrer le point $\tilde{M}_0 + 1$:
Soit $n > 1$, par le lemme 4.3.12 pour tout $\alpha \in \Omega_2$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0^\alpha \left[T_{\tilde{m}_0}^{\tilde{0}} \geq T_{\tilde{M}_0+1}^{\tilde{0}} \right] &= \frac{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{-1} \exp\left(\ln n \big(S_i^n - S_{\tilde{m}_0}^n \big) \right) + 1}{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_0} \exp\left(\ln n \big(S_i^n - S_{\tilde{m}_0}^n \big) \right) + 1} \\
&\leq \frac{|m_0| (\ln n)^2 \max_{\tilde{m}_0+1 \leq i \leq -1} \left(\exp\left(\ln n \big(S_i^n - S_{\tilde{m}_0}^n \big) \right) \right) + 1}{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_0} \exp\left(\ln n \big(S_i^n - S_{\tilde{m}_0}^n \big) \right)} ,
\end{aligned}$$

par 4.418, on a donc pour tout $n > 1$ et tout $\alpha \in \Omega_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0^\alpha \left[T_{\tilde{m}_0}^{\tilde{0}} \geq T_{\tilde{M}_0}^{\tilde{0}} \right] &\leq \frac{|m_0| (\ln n)^2 \max_{\tilde{m}_0+1 \leq i \leq -1} \left(\exp\left(\ln n \big(S_i^n - S_{\tilde{m}_0}^n \big) \right) \right) + 1}{\exp\left(\ln n \big(S_{\tilde{M}_0}^n - S_{\tilde{m}_0}^n \big) \right)} \\
&= \frac{|m_0| (\ln n)^2}{\exp\left(\ln n \left(S_{\tilde{M}_0}^n - \max_{\tilde{m}_0+1 \leq i \leq -1} (S_i^n) \right) \right)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n(\ln n)^\gamma} \right) .
\end{aligned}$$

On rappelle que l'on a supposé $\tilde{m}_0 < 0$, on en déduit, par la définition 4.3.10 de l'ensemble des "bons" environnements, que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\gamma > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$, et tout $\alpha \in G_n$, on a :

$$S_{\tilde{M}_0}^n - \max_{\tilde{m}_0+1 \leq i \leq -1} (S_i^n) \geq \frac{\gamma \ln \ln n}{\ln n} , \tag{5.6}$$

$$|m_0| \leq E . \tag{5.7}$$

avec $E = \frac{24R^2 |\ln \frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2 \epsilon^2}$, on prend $\gamma > 2$ on obtient pour tout $n > n_0$ et tout $\alpha \in G_n$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[T_{\tilde{m}_0}^{\tilde{0}} > T_{\tilde{M}_0}^{\tilde{0}} \right] \leq \frac{E}{(\ln n)^{\gamma-2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n(\ln n)^\gamma} \right) . \tag{5.8}$$

on obtient ainsi le lemme 5.1.3. ■

Remarque 5.1.4. : par hypothèse $\tilde{M}_0' < \tilde{m}_0 < 0$, ainsi

$$\mathbb{P}^\alpha \left[T_{\tilde{m}_0}^{\tilde{0}} > T_{\tilde{M}_0'-1}^{\tilde{0}} \right] = 0 \tag{5.9}$$

Le lemme 5.1.5 suivant montre que partant de $\tilde{m}_0$ avec une probabilité qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini le temps d'atteinte de l'un des deux points $\tilde{M}_0' - 1$ ou $\tilde{M}_0 + 1$ est supérieur à n :

Lemme 5.1.5. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$:*

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0'-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} > n\right] \geq 1 - \frac{1}{(\ln n)^{\gamma}} \tag{5.10}$$

et $Q\left[G_n\right] \geq 1 - \epsilon$, avec $R = 1000$ et $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$. En particulier :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{-[E(\ln n)^2]-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{[E(\ln n)^2]+1} > n\right] \geq 1 - \frac{1}{(\ln n)^{\gamma}} \tag{5.11}$$

et $Q\left[G_n\right] \geq 1 - \epsilon$ avec $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$.

Preuve.
Pour faire ce calcul, on va montrer que la marche aléatoire "préfère" visiter n fois le point $\tilde{m}_0$ plutôt que de dépasser les points $\tilde{M}_0$ ou $\tilde{M}_0'$.
Pour commencer, on rappelle la définition suivante :

$$T_1^{x\to x} \equiv T^{x\to x} = \begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N}^*,\ X_k = x \text{ avec } X_0 = x\}, \\ +\infty, \text{ si un tel k n'existe pas.} \end{cases} \tag{5.12}$$

$$T_i^{x\to x} = \begin{cases} \inf\{k > T_{i-1},\ X_k = x\}, \\ +\infty, \text{ si un tel k n'existe pas .} \end{cases} \quad i \geq 1\ , \tag{5.13}$$

et on pose $T_0^{x\to x} = 0$. On notera $\tau_i = T_i^{x\to x} - T_{i-1}^{x\to x}$, pour tout $i \geq 1$.
On introduit maintenant l'événement certain :

$$T_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} = \sum_{i=1}^{n} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} > n\ , \tag{5.14}$$

on a $\tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} \geq 2$ donc la probabilité de l'événement 5.14 est bien égale à un, on a donc :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0'-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} > n\right] = \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0'-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} > n, \sum_{i=1}^{n} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} > n\right]\ , \tag{5.15}$$

On a :

$$\begin{aligned} &\left\{T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0'-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} > n, \sum_{i=1}^{n} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} > n\right\} \\ = &\left\{T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0'-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} > \sum_{i=1}^{n} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} > n\right\} \bigcup \left\{n < T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0'-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} < \sum_{i=1}^{n} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right\}\ , \end{aligned} \tag{5.16}$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0'-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} > n\right] &\geq \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0'-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} > \sum_{i=1}^{n} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} > n\right] \\ &= \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0'-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} > \sum_{i=1}^{n} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}, \sum_{i=1}^{n} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} > n\right] \qquad (5.17) \\ &= \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0'-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} > \sum_{i=1}^{n} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right]\ , \qquad (5.18) \end{aligned}$$

de plus on peut écrire 5.18 de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} > \sum_{i=1}^{n} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right] \\
= \; & \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\sup\left\{X_m, \quad \sum_{i=1}^{k} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} \le m \le \sum_{i=1}^{k+1} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right\} < \tilde{M}_0+1,\right. \\
& \left.\inf\left\{X_m, \quad \sum_{i=1}^{k} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} \le m \le \sum_{i=1}^{k+1} \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right\} > \tilde{M}'_0-1 \quad k=0,\dots,n-1\right] \\
= \; & \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\tau_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} \le T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1}, \dots, \tau_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} \le T^{m_0}_{M'_0-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1}\right] .
\end{aligned}$$

Or on sait par la propriété de Markov forte que la suite de variables $(\tau_i^{m_0\to m_0})_{1\le i\le n}$ est i.i.d. , on obtient donc :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left(T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} > n\right) \ge \left(\mathbb{P}^{\alpha}\left[T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} \le T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1}\right]\right)^n . \tag{5.19}$$

On voudrait maintenant évaluer le terme obtenu en 5.19, pour cela on fait le calcul suivant :
Soit $\mathbb{P}^{\alpha}_a(T^x_a \wedge T^x_b < T^{x\to x})$ la probabilité que partant de x la marche aléatoire touche a ou b avant de revenir à x. On a pour $a < x < b$:

$$\mathbb{P}^{\alpha}_a\left(T^x_a \wedge T^x_b < T^{x\to x}\right) = \alpha_x \mathbb{P}^{\alpha}_{x+1}(T^{x+1}_x > T^{x+1}_b) + \beta_x \mathbb{P}^{\alpha}_{x-1}[T^{x-1}_a < T^{x-1}_x]. \tag{5.20}$$

On comprend bien 5.20 intuitivement, sinon on peut effectuer un calcul similaire à celui exposé pour obtenir l'équation du système 2.17. Prenons $x = \tilde{m}_0$, $a = \tilde{M}'_0 - 1$ et $b = \tilde{M}_0 + 1$, on obtient de 5.20 :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} < T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1}\right] = \alpha_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_0+1} < T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0}\right] + \beta_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{M}'_0-1} < T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0}\right] . \tag{5.21}$$

De 4.416 et 4.418 on obtient pour tout $\alpha \in \Omega_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_0+1} < T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0}\right] &= \frac{1}{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_0} \exp\left(\ln n\big(S^n_i - S^n_{\tilde{m}_0}\big)\right) + 1} \\
&\le \exp(-\delta_{0,0}\ln n) .
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Soient $\epsilon > 0$ et $\gamma > 0$, par la propriété 4.394, il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout $\alpha \in G_n$:

$$\delta_{0,0} \ge 1 + \gamma(n) , \tag{5.23}$$

où $\gamma(n) = \frac{\gamma \ln\ln n}{\ln n}$, donc pour tout $n > n_0$ et tout $\alpha \in G_n$:

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_0+1} < T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0}\right] \le \frac{1}{n^{1+\gamma(n)}} , \tag{5.24}$$

de même de 4.417 et de 4.419 on obtient pour tout $\gamma > 0$, $n > n_0$ et tout $\alpha \in G_n$:

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{M}'_0-1} < T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0}\right] \le \frac{1}{n^{1+\gamma(n)}} , \tag{5.25}$$

on déduit de 5.21 et des estimations 5.24 et 5.25 que pour tout $\gamma > 0$, $n > n_0$ et tout $\alpha \in G_n$:

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} < T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right] \le \frac{1}{n^{1+\gamma(n)}} . \tag{5.26}$$

En remplaçant 5.26 dans 5.19 et en utilisant que $(1-x)^n \ge 1 - nx$, pour tout $0 \le x \le 1$ et tout $n \ge 1$ on en déduit que pour tout $\gamma > 0$, tout $n > n_0$ et tout $\alpha \in G_n$:

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} > n\right] \ge 1 - \frac{1}{n^{\gamma(n)}} \equiv 1 - \frac{1}{(\ln n)^{\gamma}} . \tag{5.27}$$

ce qui termine la preuve du lemme 5.1.5. ■

Preuve (Proposition 5.1.2).
En résumé on a donc (on rappelle que l'on a supposé $\tilde{m}_0 < 0$), par la propriété de Markov forte et en utilisant la remarque 5.1.4 :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcap_{k=0}^{n}\left\{X_m \in \left[\tilde{M}_0', \tilde{M}_0\right]\right\}\right] \geq \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T_{\tilde{M}_0'-1}^{\tilde{m}_0} \wedge T_{\tilde{M}_0+1}^{\tilde{m}_0} > n\right] - \mathbb{P}_0^\alpha\left[T_{\tilde{m}_0}^{\tilde{0}} > T_{\tilde{M}_0+1}^{\tilde{0}}\right], \tag{5.28}$$

En utilisant les lemme 5.1.3 et 5.1.5, on obtient donc que pour tout $\gamma > 2$ et tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcap_{k=0}^{n}\left\{X_m \in \left[\tilde{M}_0', \tilde{M}_0\right]\right\}\right] \geq 1 - \frac{2E}{n^{\gamma-2}} . \tag{5.29}$$

ce qui termine la preuve de 5.3, on obtient 5.4 en utilisant la propriété 4.403 de l'ensemble des "bons" environnements. ■

On montre maintenant le lemme suivant qui sera utile pour montrer la localisation de la M.A.M.A. (dans le chapitre suivant) :

Lemme 5.1.6. *Supposons H.1, H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, R, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_0$:*

$$\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T_{\tilde{m}_0-\left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2\ln\ln n}^{\tilde{m}_0} \wedge T_{\tilde{m}_0+\left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2\ln\ln n}^{\tilde{m}_0} > q(n)\right] \geq 1 - \frac{1}{(\ln n)^\gamma} \tag{5.30}$$

et $Q\left[G_n\right] \geq 1 - \epsilon$, où $q(n) = e^{\left((100\sigma)^2\gamma E(\ln\ln n)^{3+1/2}(\ln n)^{3/2}\right)^{1/2}}$ et $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$.

Preuve.
On rappelle la définition des points $\tilde{M}_>$ et $\tilde{M}_<$:

$$\tilde{M}_< = \sup\left\{m \in \mathbb{Z},\ m < \tilde{m}_0,\ S_m^n - S_{\tilde{m}_0}^n \geq \frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}\right\} , \tag{5.31}$$

$$\tilde{M}_> = \inf\left\{m \in \mathbb{Z},\ m > \tilde{m}_0,\ S_m^n - S_{\tilde{m}_0}^n \geq \frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}\right\} . \tag{5.32}$$

En suivant la démarche effectuée pour montrer le lemme 5.1.5, on obtient qu'il existe $n_1 \equiv n_1(\epsilon, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_1$:

$$\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T_{\tilde{M}_<-1}^{\tilde{m}_0} \wedge T_{\tilde{M}_>+1}^{\tilde{m}_0} > q(n)\right] \geq 1 - \frac{q(n)}{n^{\frac{\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\ln n}}} \equiv 1 - \frac{1}{(\ln n)^\gamma} . \tag{5.33}$$

de plus par la propriété 4.414 de l'ensemble des bons environnements, on sait que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G_n$ on a aussi :

$$\tilde{M}_< \geq \tilde{m}_0 - \left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2\ln\ln n \text{ et } \tilde{M}_> \leq \tilde{m}_0 + \left(\frac{8\ln(q(n)\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2\ln\ln n \tag{5.34}$$

on en déduit le lemme. ■

5.2 Analyse du temps de retour $T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}$

Dans ce paragraphe on s'intéresse au temps de retour, noté $T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}$, de la M.A.M.A. au minimisant de la vallée $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$: $\tilde{m}_0$. Comme on l'a vu (proposition 2.2.6), la M.A.M.A. sous H.1 est récurrente nulle $\mathbb{P}.p.s$, en particulier : $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}\right] = \infty$ $Q.p.s.$. On voudrait cependant avoir une borne supérieure de la probabilité : $\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0} > k\right]$ (où k est un entier positif).
Dans tout ce paragraphe nous travaillerons à milieu fixé tout en ayant en tête le découpage en vallées effectué dans le chapitre 4 :

Rappelons l'idée du découpage ordonné en vallées effectué au paragraphe 4.2.3 (page 61). On part de la vallée "minimale" $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$, puis on construit pas à pas l'ensemble de maximisants et minimisants $\mathcal{M}$: on effectue un premier raffinement à gauche et à droite de cette vallée on obtient quatre points : $\tilde{m}'_1$, $\tilde{M}'_1$, $\tilde{m}_1$ et $\tilde{M}_1$ on ajoute ces points à l'ensemble $\mathcal{M}$. Puis on effectue une opération similaire sur la vallée $\{\tilde{M}'_1,\ \tilde{m}_0,\ \tilde{M}_1\}$ et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne les points $\tilde{m}'_{r'}$ et $\tilde{M}'_{r'}$ à gauche de $\tilde{m}_0$ et $\tilde{M}_r$ et $\tilde{m}_r$ à droite de $\tilde{m}_0$ tels que :

$$\tilde{m}_0 - \tilde{M}'_{r'-1} > l_n b_n \text{ et } \tilde{m}_0 - \tilde{M}'_{r'} \leq l_n b_n \ , \tag{5.35}$$

$$\tilde{M}_{r-1} - \tilde{m}_0 > l_n b_n \text{ et } \tilde{M}_r - \tilde{m}_0 \leq l_n b_n \ , \tag{5.36}$$

où pour $n > 3$, $\epsilon > 0$ et $\gamma > 0$ fixés :

$$b_n = [E(\ln n)^{3/2}(\gamma \ln\ln n)^{1/2}] + 1 \ , \tag{5.37}$$

$$k_n = \frac{E(\ln n)^2}{b_n} \ , \tag{5.38}$$

$$l_n = 1000\sigma^2(\ln k_n)^2 \ , \tag{5.39}$$

$$E = \frac{24R^2|\ln \frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2} \ . \tag{5.40}$$

Il est donc clair que r et r' sont des Q v.a. On renvoie le lecteur au chapitre précédent (paragraphe 4.2.3) pour plus de détails. Par construction les points contenus dans $\mathcal{M}$ vérifient :

$$\tilde{M}'_0 \leq \tilde{m}'_1 \leq \tilde{M}'_1 \leq \cdots \leq \tilde{m}'_{r'} \leq \tilde{M}'_{r'} \leq \tilde{m}_0 \leq \tilde{M}_r \leq \tilde{m}_r \leq \cdots \leq \tilde{M}_1 \leq \tilde{m}_1 \leq \tilde{M}_0 \ , \tag{5.41}$$

$$S^n_{\tilde{M}'_0} \geq S^n_{\tilde{M}'_1} \geq \cdots \geq S^n_{\tilde{M}'_{r'}} \text{ et } S^n_{\tilde{M}_0} \geq S^n_{\tilde{M}_1} \geq \cdots \geq S^n_{\tilde{M}_r} \ . \tag{5.42}$$

On rappelle que l'on a adopté les notations suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \text{Si } 0 \leq i,j \leq r : & \text{Si } 0 \leq i,j \leq r' : \\ \delta_{i,j} = S^n_{\tilde{M}_i} - S^n_{\tilde{m}_j}, & \delta'_{i,j} = S^n_{\tilde{M}'_i} - S^n_{\tilde{m}'_j}, \\ \eta_{i,j} = S^n_{\tilde{M}_i} - S^n_{\tilde{M}_j}, & \eta'_{i,j} = S^n_{\tilde{M}'_i} - S^n_{\tilde{M}'_j}, \\ \mu_{i,j} = S^n_{\tilde{m}_i} - S^n_{\tilde{m}_j}. & \mu'_{i,j} = S^n_{\tilde{m}'_i} - S^n_{\tilde{m}'_j}. \end{array} \tag{5.43}$$

5.2.1 Temps de retour à $\tilde{m}_0$, (première méthode).

On commence par rappeler la définition 2.1.4 et le lemme 2.1.7 :

Définition 5.2.1. Soient x, a et b dans $\mathbb{Z}$, tels que $a < x < b$:

$$T^x_a \wedge T^x_b = \inf\{m \in \mathbb{N}^*,\ X_m = a \text{ ou } X_m = b, X_0 = x\} \ .$$

Lemme 2.1.7 (rappel) Pour tout $\alpha \in \Omega_2$, on a :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{a+1}\left[T^{a+1}_a \wedge T^{a+1}_b\right] = \frac{\sum_{l=a+1}^{b-1}\sum_{j=l}^{b-1}\frac{1}{\alpha_l}F_n(j,l)}{\sum_{j=a+1}^{b-1}F_n(j,a)+1} \ , \tag{5.44}$$

$$\mathbb{E}^{\alpha}_x\left[T^x_a \wedge T^x_b\right] = \mathbb{E}^{\alpha}\left[T^{a+1}_a \wedge T^{a+1}_b\right]\left(1 + \sum_{j=a+1}^{x-1} F_n(j,a)\right) - \sum_{l=a+1}^{a-1}\sum_{j=l}^{a-1}\frac{1}{\alpha_l}F_n(j,l) \ , \tag{5.45}$$

où

$$F_n(j,l) = \exp\left(\ln n \left(S_j^n - S_l^n\right)\right) \ .$$

Lemme 5.2.2. *Pour tout $\alpha \in \Omega_2$ et tout $n > 1$, on a :*

$$1 \leq \mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right] \leq C_i(\ln n)^4 \ , \ \forall i, \ 0 \leq i \leq r. \tag{5.46}$$

$$1 \leq \mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0-1}_{M_i'-1}\right] \leq C_i'(\ln n)^4 \ , \ \forall i, \ 0 \leq i \leq r'. \tag{5.47}$$

$C_i' \equiv C_i'(\alpha) = \max_{\tilde{M}_i' \leq l \leq \tilde{m}_0}\left(\frac{1}{\beta_l}\right)(M_i' - m_0)^2$ *et* $C_i \equiv C_i(\alpha) = \max_{\tilde{m}_0 \leq l \leq \tilde{M}_i}\left(\frac{1}{\alpha_l}\right)(M_i - m_0)^2$.

Preuve.
Soit $1 \leq i \leq r-1$, calculons $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right]$, par le lemme 2.1.7 on a :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right] = \frac{\sum_{l=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i}\sum_{j=l}^{\tilde{M}_i}\frac{1}{\alpha_l}F_n(j,l)}{\sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i}F_n(j,\tilde{m}_0)+1} \ . \tag{5.48}$$

On a :

$$\max_{\{\tilde{m}_0+1 \leq l \leq \tilde{M}_i\}}\left(\sum_{j=l}^{\tilde{M}_i}\frac{1}{\alpha_l}F_n(j,l)\right) \leq \max_{\tilde{m}_0 \leq l \leq \tilde{M}_i}\left(\frac{1}{\alpha_l}\right)\sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i}F_n(j,\tilde{m}_0) \ , \tag{5.49}$$

et

$$\max_{\{\tilde{m}_0+1 \leq j \leq \tilde{M}_i\}} F_n(j,\tilde{m}_0) = F_n(\tilde{M}_i,\tilde{m}_0) \ , \tag{5.50}$$

ainsi

$$\sum_{l=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i}\sum_{j=l}^{\tilde{M}_i}\frac{1}{\alpha_l}F_n(j,l) \quad \leq \quad C_i(\ln n)^4 F_n(\tilde{M}_i,\tilde{m}_0) \equiv C_i(\ln n)^4 n^{\delta_{i,0}} \ . \tag{5.51}$$

où $C_i \equiv C_i(\alpha) = (M_i - m_0)^2 \max_{\tilde{M}_i' \leq l \leq \tilde{m}_0}\left(\frac{1}{\alpha_l}\right)$.
Pour minimiser le dénominateur de 5.48 on remarque que :

$$\sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i} F_n(j,\tilde{m}_0) + 1 \geq F_n(\tilde{M}_i,\tilde{m}_0) \equiv n^{\delta_{i,0}} \ , \tag{5.52}$$

et donc par 5.51 et 5.52 :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right] \leq C_i(\ln n)^4 \ .$$

De plus il faut au moins un pas à la marche pour passer de $\tilde{m}_0 + 1$ à $\tilde{m}_0$ donc $\mathbb{E}^{\alpha}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i}\right] \geq 1$. Un calcul identique à celui-ci donne 5.47. ■
On s'intéresse également au second moment :

Lemme 5.2.3. *Pour tout $\alpha \in \Omega_2$ et tout $n > 1$, on a :*

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\left(T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)^2\right] \leq D_i(\ln n)^{10} n^{(\delta_{i+1,i+1}-\eta_{i,i+1})\vee 0}, \quad \forall i, \ 0 \leq i \leq r \ , \tag{5.53}$$

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[\left(T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0-1}_{M_i'-1}\right)^2\right] \leq D_i'(\ln n)^{10} n^{(\delta'_{i+1,i+1}-\eta'_{i,i+1})\vee 0}, \quad \forall i, \ 0 \leq i \leq r' \ . \tag{5.54}$$

$D_i' \equiv D_i'(\alpha) = |M_i' - m_0|^5\left(\max_{\tilde{M}_i' \leq l \leq \tilde{m}_0}\left(\frac{1}{\beta_l}\right)\right)^2$ *et* $D_i \equiv D_i(\alpha) = |M_i - m_0|^5\left(\max_{\tilde{m}_0 \leq l \leq \tilde{M}_i}\left(\frac{1}{\alpha_l}\right)\right)^2$, *voir aussi 5.43, pour les notations de :* $\eta'_{i,i+1}$, $\delta'_{i+1,i+1}$, $\eta_{i,i+1}$ *et* $\delta_{i+1,i+1}$.

Preuve.
Les preuves de 5.53 et de 5.54 étant identiques on montrera seulement 5.53.
D'après le lemme 2.1.6 (en prenant $l = 2$), et en posant, $v_m = \mathbb{E}_m^\alpha \left[(T_a^m \wedge T_b^m)^2\right]$ et $u_m = \mathbb{E}_m^\alpha \left[T_a^m \wedge T_b^m\right]$, on a :

$$v_m = \alpha_m v_{m+1} + \beta_m v_{m-1} + 2\left(\alpha_m u_{m-1} + \beta_m u_{m-1}\right) + 1 \ . \tag{5.55}$$

De plus toujours par le lemme 2.1.6 (en prenant $l = 1$), on a :

$$2\left(\alpha_m u_{m-1} + \beta_m u_{m-1}\right) = 2(u_m - 1) \ , \tag{5.56}$$

ainsi, on doit résoudre l'équation :

$$v_m = \alpha_m v_{m+1} + \beta_m v_{m-1} + 2(u_m - 1) + 1 \ . \tag{5.57}$$

avec $v_a = v_b = u_a = u_b = 0$. On utilise la même méthode que pour le premier moment (voir la preuve du lemme 2.1.7), l'équation 5.57 est équivalente à :

$$v_{m+1} - v_m = \frac{\beta_m}{\alpha_m}(v_m - v_{m-1}) - 2\frac{u_m}{\alpha_m} + \frac{1}{\alpha_m} \tag{5.58}$$

$$= \frac{\beta_m}{\alpha_m}\left(\frac{\beta_{m-1}}{\alpha_{m-1}}(v_{m-1} - v_{m-2}) + \frac{1}{\alpha_{m-1}}(1 - 2u_{m-1})\right) + \frac{1}{\alpha_m}\left(1 - 2u_m\right) \ , \tag{5.59}$$

en itérant cette dernière opération et en utilisant le fait que $v_a = u_a = 0$, on obtient :

$$v_{m+1} - v_m = \frac{1 - 2u_m}{\alpha_m} + \frac{1 - 2u_{m-1}}{\alpha_{m-1}}\frac{\beta_m}{\alpha_m} + \cdots + \frac{1 - 2u_{a+1}}{\alpha_{a+1}}\frac{\beta_{a+2}}{\alpha_{a+2}}\cdots\frac{\beta_m}{\alpha_m}\prod_{i=a+1}^{m}\frac{\beta_i}{\alpha_i}v_{a+1} \ . \tag{5.60}$$

En sommant cette dernière égalité pour $a - 1 \leq m \leq b - 1$ et en utilisant que $v_b = 0$, on obtient :

$$-v_{a+1} = -\sum_{l=a+1}^{b-1}\sum_{j=a+1}^{l}\frac{2u_l - 1}{\alpha_l}F_n(j,l) + \sum_{j=a+1}^{b-1}F_n(j,a)v_{a+1} \ , \tag{5.61}$$

avec $F_n(j,a) = \exp\left(\ln n(S_j^n - S_a^n)\right)$. On obtient donc :

$$v_{a+1} = \frac{\sum_{l=a+1}^{b-1}\sum_{j=a+1}^{l}\frac{2u_l-1}{\alpha_l}F_n(j,l)}{\sum_{j=a+1}^{b-1}F_n(j,a) + 1} \ . \tag{5.62}$$

On rappelle que :

$$v_{a+1} = \mathbb{E}_a^\alpha\left[\left(T_{a+1}^a \wedge T_b^a\right)^2\right] \ , \tag{5.63}$$

$$u_l = \mathbb{E}_l^\alpha\left[T_{a+1}^l \wedge T_b^l\right] \ . \tag{5.64}$$

dans notre cas on prend : $a = \tilde{m}_0$ et $b = \tilde{M}_i + 1$, on a donc :

$$\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\left(T_{\tilde{m}_0+1}^{\tilde{m}_0} \wedge T_{\tilde{M}_i+1}^{\tilde{m}_0}\right)^2\right] = \frac{\sum_{l=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i}\sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{l}\frac{2u_l-1}{\alpha_l}F_n(j,l)}{\sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i}F_n(j,\tilde{m}_0) + 1} \ , \tag{5.65}$$

avec (lemme 2.1.7) :

$$u_l = u_{\tilde{m}_0}\left(1 + \sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{l-1}F_n(j,\tilde{m}_0)\right) - \sum_{k=\tilde{m}_0+1}^{l-1}\sum_{j=k}^{l-1}\frac{1}{\alpha_l}F_n(j,k) \ , \tag{5.66}$$

$$u_{\tilde{m}_0} = \frac{\sum_{l=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i}\sum_{j=l}^{\tilde{M}_i}\frac{1}{\alpha_l}F_n(j,l)}{\sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i}F_n(j,\tilde{m}_0) + 1} \ . \tag{5.67}$$

On veut majorer 5.65, pour ça on doit majorer 5.66 et donc 5.67, d'après le lemme 5.2.2 en prenant $C_i \equiv C_i(\alpha) = \max_{\tilde{m}_0 \le l \le \tilde{M}_i} \left(\frac{1}{\alpha_l}\right)(M_i - m_0)^2$ on a :

$$u_{\tilde{m}_0} \le C_i (\ln n)^4 \ , \tag{5.68}$$

on en déduit :

$$u_l \le C_i (\ln n)^4 \left(1 + \sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{l-1} F_n(j, \tilde{m}_0)\right) \ . \tag{5.69}$$

Pour le numérateur de 5.65 on a par 5.69 :

$$\begin{aligned} & \sum_{l=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i} \sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{l} \frac{2u_l - 1}{\alpha_l} F_n(j,l) \ , \\ \le \ & 2C_i (\ln n)^4 \sum_{l=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i} \sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{l} \frac{\left(1 + \sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{l-1} F_n(i, \tilde{m}_0)\right)}{\alpha_l} F_n(j,l) \ . \end{aligned} \tag{5.70}$$

Considérons maintenant le premier raffinement du couple $\{\tilde{m}_0, \tilde{M}_i\}$, notons $\tilde{m}_{i+1}$ le minimisant obtenu et $\tilde{M}_{i+1}$ le maximisant, on a (voir figure 5.1) :

$$\begin{aligned} & \sum_{l=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i} \sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{l} \frac{\left(1 + \sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{l-1} F_n(i, \tilde{m}_0)\right)}{\alpha_l} F_n(j,l) \\ \le \ & \frac{|M_i - m_0|^3 (\ln n)^6}{2} \max_{\tilde{m}_0 \le l \le \tilde{M}_i} \left(\frac{1}{\alpha_l}\right) n^{(S^n(\tilde{M}_i) - S^n(\tilde{m}_0)) \vee (S^n(\tilde{M}_{i+1}) - S^n(\tilde{m}_0) + S^n(\tilde{M}_{i+1}) - S^n(\tilde{m}_{i+1}))} \\ \equiv \ & \frac{|M_i - m_0|^3 (\ln n)^6}{2} \max_{\tilde{m}_0 \le l \le \tilde{M}_i} \left(\frac{1}{\alpha_l}\right) n^{(\delta_{i,0}) \vee (\delta_{i+1,0} + \delta_{i+1,i+1})} \ , \end{aligned} \tag{5.71}$$

par 5.70 et 5.71 on a donc :

$$\sum_{l=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i} \sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{l} \frac{2u_l - 1}{\alpha_l} F_n(j,l) \le D_i (\ln n)^{10} n^{(\delta_{i,0}) \vee (\delta_{i+1,0} + \delta_{i+1,i+1})} \ , \tag{5.72}$$

où $D_i = |M_i - m_0|^5 \left(\max_{\tilde{m}_0 \le l \le \tilde{M}_i} \left(\frac{1}{\alpha_l}\right)\right)^2$. Pour le dénominateur de 5.65, comme on l'a déjà vu, (lemme 5.2.2) il vérifie :

$$\sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i} F_n(j, \tilde{m}_0) \ge n^{\delta_{i,0}} \ . \tag{5.73}$$

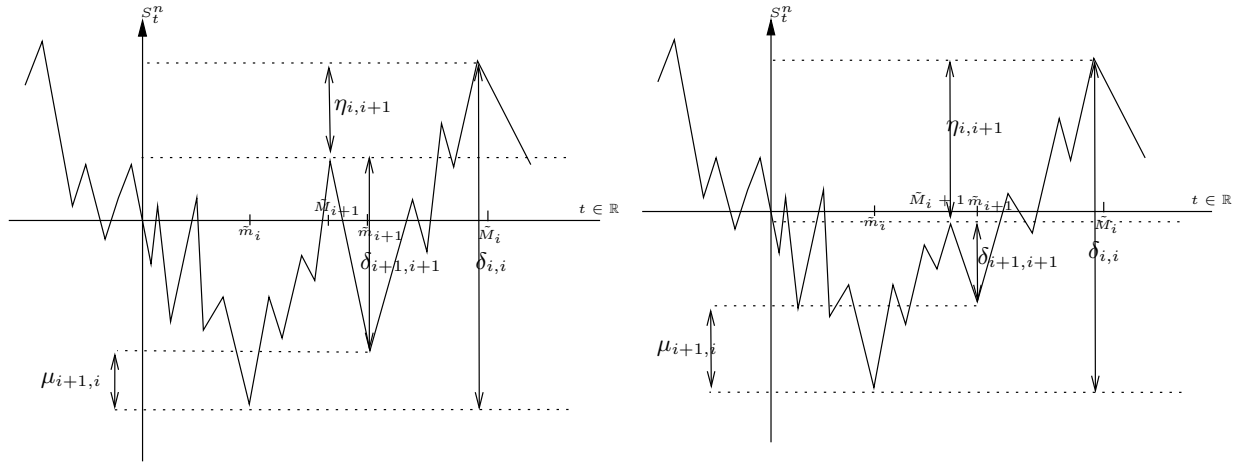
En remplaçant 5.72 et 5.73 dans 5.65 on obtient 5.53. ■

Montrons maintenant la proposition suivante :

Proposition 5.2.4. *Pour tout $\alpha \in \Omega_2$, tout $n > 1$ et tout $q > 0$ on a :*

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0} > q+1\right] \le \frac{(C_i + C'_{i'})(\ln n)^4}{q} + \frac{1}{n^{\delta'_{i',0}}} + \frac{1}{n^{\delta_{i,0}}} \ , \quad \forall i \ 0 \le i \le r, \ \forall i' \ 0 \le i' \le r' \ . \tag{5.74}$$

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > q\right] \le \frac{D_i (\ln n)^{10} n^{(\delta_{i+1,i+1} - \eta_{i,i+1}) \vee 0}}{q^2} + \frac{1}{n^{\delta_{i,0}}} \ , \quad \forall i \ 0 \le i \le r \ . \tag{5.75}$$



Cas : $\eta_{i,i+1} < \delta_{i+1,i+1}$ Cas : $\eta_{i,i+1} > \delta_{i+1,i+1}$

FIG. 5.1 –

Et

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} > q\right] \leq \frac{D'_i(\ln n)^{10} n^{(\delta'_{i+1,i+1}-\eta'_{i,i+1})\vee 0}}{q^2} + \frac{1}{n^{\delta'_{i,0}}} \quad \forall i \ 0 \leq i \leq r' \ . \tag{5.76}$$

$C_i = |M_i - m_0|^2 \max_{\tilde{m}_0 \leq l \leq \tilde{M}_i}\left(\frac{1}{\alpha_l}\right)$, $C'_{i'} = |M'_{i'} - m_0|^2 \max_{\tilde{M}'_{i'} \leq l \leq \tilde{m}_0}\left(\frac{1}{\beta_l}\right)$
$D_i = |M_i - m_0|^5 \left(\max_{\tilde{m}_0 \leq l \leq \tilde{M}_i}\left(\frac{1}{\alpha_l}\right)\right)^2$, $D'_i = |M'_i - m_0|^5 \left(\max_{\tilde{M}'_i \leq l \leq \tilde{m}_0}\left(\frac{1}{\beta_l}\right)\right)^2$, *voir aussi 5.43 (page 92) pour les notations de :* $\delta'_{i,0}$, $\eta'_{i,i+1}$, $\delta'_{i+1,i+1}$, $\delta_{i,0}$, $\eta_{i,i+1}$ *et* $\delta_{i+1,i+1}$.

Une remarque avant d'effectuer la preuve de cette proposition :

Remarque 5.2.5. 5.75 n'implique pas que $\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > q\right]$ soit sommable en q, en effet malgré la présence de $\frac{1}{q^2}$, il reste une masse indépendante de q : $\frac{1}{n^{\delta_{i,0}}}$, ce résultat n'est donc pas en contradiction avec le fait que la M.A.M.A. sous H.1 soit récurrente nulle (proposition 2.2.6), une remarque similaire est vraie pour 5.76. On remarque également que 5.75 et 5.76 implique que pour tout $0 \leq i \leq r$ et tout $0 \leq i' \leq r'$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0} > q+1\right] \\ \leq \ & \frac{D_i(\ln n)^{10} n^{(\delta_{i+1,i+1}-\eta_{i,i+1})\vee 0}}{q^2} + + \frac{D'_i(\ln n)^{10} n^{(\delta'_{i'+1,i'+1}-\eta'_{i',i'+1})\vee 0}}{q^2} + \frac{1}{n^{\delta_{i,0}}} + \frac{1}{n^{\delta'_{i',0}}} \ , \end{aligned} \tag{5.77}$$

on remarque alors que les masses (indépendantes de q) sont identiques pour les estimations 5.74 et 5.77. On voit également que 5.77 a un meilleur comportement en q que 5.74 mais cependant a un moins bon comportement en n. Nous verrons dans le prochain chapitre que cette proposition est un des résultats clé de notre preuve de la localisation.

Montrons maintenant cette proposition :
Preuve (Proposition 5.2.4).
Soit $q \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0} > q+1\right] = \alpha_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > q\right] + \beta_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} > q\right] \tag{5.78}$$

Estimons $\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > q\right]$, soit $0 \leq i \leq r$, on remarque que :

$$\begin{aligned}
(5.79) \qquad \left\{T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > q\right\} &= \left\{T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > q\right\} \bigcap \left[\left\{T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \leq T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right\} \bigcup \left\{T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1} < T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0}\right\}\right] \\
(5.80) \qquad &= \left\{T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > q,\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \leq T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right\} \bigcup \left\{T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > q,\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1} < T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0}\right\} \\
(5.81) \qquad &\subseteq \left\{T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1} > q\right\} \bigcup \left\{T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1} < T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0}\right\} ,
\end{aligned}$$

on en déduit :

$$(5.82) \qquad \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > q\right] \leq \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1} > q\right] + \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right] .$$

On estime maintenant chacun des deux termes de la somme précédente. Par 4.417 et 4.418, en posant $\delta_{i,0} = S^n_{\tilde{M}_i} - S^n_{\tilde{m}_0}$ on obtient :

$$(5.83) \qquad \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right] \leq \frac{1}{n^{\delta_{i,0}}} .$$

Par l'inégalité de Markov on a :

$$(5.84) \qquad \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1} > q\right] \leq \frac{\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right]}{q} ,$$

par le lemme 5.2.2 on obtient :

$$(5.85) \qquad \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1} > q\right] \leq \frac{C_i(\ln n)^4}{q} ,$$

où $C_i = |M_i - m_0|^2 \max_{\tilde{m}_0 \leq l \leq \tilde{M}_i}\left(\frac{1}{\alpha_l}\right)$, en remplaçant les estimations 5.85 et 5.83 dans 5.82 on obtient :

$$(5.86) \qquad \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > q\right] \leq \frac{1}{n^{\delta_{i,0}}} + \frac{C_i(\ln n)^4}{q} ,$$

par un calcul identique pour tout i', $0 \leq i' \leq r$

$$(5.87) \qquad \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} > q\right] \leq \frac{1}{n^{\delta'_{i',0}}} + \frac{C'_{i'}(\ln n)^4}{q} ,$$

où $C'_{i'} = |M'_{i'} - m_0|^2 \max_{\tilde{M}'_{i'} \leq l \leq \tilde{m}_0}\left(\frac{1}{\beta_l}\right)$. On obtient 5.74 en remplaçant 5.87 et 5.86 dans 5.78. Pour obtenir 5.75, on procède de la même façon en utilisant le second moment plutôt que le premier pour l'inégalité de Markov en 5.84, et on utilise l'estimation 5.53 du lemme 5.2.3 (on effectue des calculs identiques pour obtenir 5.76). ■

5.2.2 Temps de retour à $\tilde{m}_0$, (deuxième méthode)

Dans ce paragraphe on donne d'autres estimations des probabilités de la proposition 5.2.4. On a besoin, pour cela, de majorer le premier et second moment des temps locaux définis ci-dessous. Pour tout $0 \leq i \leq r$ et tout $\tilde{m}_0 + 1 \leq \tilde{k} \leq \tilde{M}_i$:

$$(5.88) \qquad \mathcal{L}\left(\tilde{k},\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right) = \sum_{l=1}^{T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}} \mathbb{I}_{\left\{X_l = \tilde{k}\right\}} ,$$

Pour tout $0 \leq i \leq r'$ et tout $\tilde{M}'_i \leq \tilde{k} \leq \tilde{m}_0 - 1$,

$$(5.89) \qquad \mathcal{L}\left(\tilde{k},\ T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{M}'_i-1}\right) = \sum_{l=1}^{T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{M}'_i-1}} \mathbb{I}_{\left\{X_l = \tilde{k}\right\}} .$$

On montre maintenant le lemme suivant :

Lemme 5.2.6. *Pour tout $\alpha \in \Omega_2$, tout $n > 1$, tout $0 \leq i \leq r$ et tout $\tilde{m}_0 + 1 < \tilde{k} \leq \tilde{M}_i$, on a :*

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{k},\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\right] \leq \frac{|m_0 - M_i|(\ln n)^2}{\beta_{\tilde{k}} n^{\Delta_{\tilde{k},\tilde{m}_0}}} \tag{5.90}$$

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\left(\mathcal{L}\left(\tilde{k},\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\right)^2\right] \ ,$$

$$\leq \frac{(\ln n)^4 |M_i - m_0|^2}{\beta_{\tilde{k}} n^{\Delta_{\tilde{k},\tilde{m}_0}}} \left(\frac{1}{\frac{\alpha_{\tilde{k}}}{n^{\Delta_{\tilde{M}_i,\tilde{k}}}} + \frac{\beta_{\tilde{k}}}{n^{\Delta_{\{\tilde{m}_0+1,\tilde{k}-1\},\tilde{k}}}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)\right) \ , \tag{5.91}$$

où $\Delta_{a,b} = S^n_a - S^n_b$ et $\Delta_{\{a,b\},c} = \max_{a \leq j \leq b}\left(S^n_j\right) - S^n_c$, si $\tilde{k} = \tilde{m}_0 + 1$:

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{k},\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\right] \leq \frac{1}{\beta_{\tilde{m}_0+1}} \ , \tag{5.92}$$

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\left(\mathcal{L}\left(\tilde{k},\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\right)^2\right] \leq \frac{1}{(\beta_{\tilde{m}_0+1})^2} \ . \tag{5.93}$$

Pour tout $\alpha \in \Omega_2$ tout $n > 1$, tout $0 \leq i \leq r'$ et tout $\tilde{M}'_i + 1 \leq \tilde{k} < \tilde{m}_0 - 1$ on a :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{k},\ T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{M}'_i-1}\right)\right] \leq \frac{|M'_i - m_0|(\ln n)^2}{\alpha_{\tilde{k}} n^{\Delta_{\tilde{k},\tilde{m}_0}}} \ , \tag{5.94}$$

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[\left(\mathcal{L}\left(\tilde{k},\ T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{M}'_i-1}\right)\right)^2\right]$$

$$\leq \frac{(\ln n)^4 |M'_i - m_0|^2}{\alpha_{\tilde{k}} n^{\Delta_{\tilde{k},\tilde{m}_0}}} \left(\frac{1}{\frac{\beta_{\tilde{k}}}{n^{\Delta_{\tilde{M}'_i,\tilde{k}}}} + \frac{\alpha_{\tilde{k}}}{n^{\Delta_{\{\tilde{k}+1,\tilde{m}_0-1\},\tilde{k}}}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)\right) \ , \tag{5.95}$$

si $\tilde{k} = \tilde{m}_0 - 1$ on a :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{k},\ T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{M}'_i-1}\right)\right] \leq \frac{1}{\alpha_{\tilde{m}_0-1}} \ , \tag{5.96}$$

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[\left(\mathcal{L}\left(\tilde{k},\ T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{M}'_i-1}\right)\right)^2\right] \leq \frac{1}{(\alpha_{\tilde{m}_0-1})^2} \ . \tag{5.97}$$

Preuve.
Soient $n > 1$, $0 \leq i \leq r$ et $\tilde{m}_0 + 1 < \tilde{k} \leq \tilde{M}_i$, On utilise le lemme 2.1.10 (en prenant, $q = 0$, $a = \tilde{m}_0$, $m = \tilde{m}_0 + 1$ et $b = \tilde{M}_i + 1$), pour tout $\alpha \in \Omega_2$ on a :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{k},\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\right] = \frac{\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{k}} < T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0}\right]}{\alpha_{\tilde{k}}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{k}+1}\left[T^{\tilde{k}+1}_{\tilde{k}} > T^{\tilde{k}+1}_{\tilde{M}_i+1}\right] + \beta_{\tilde{k}}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{k}-1}\left[T^{\tilde{k}-1}_{\tilde{k}} > T^{\tilde{k}-1}_{\tilde{m}_0}\right]} \ , \tag{5.98}$$

on a par 4.416 :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{k}+1}\left[T^{\tilde{k}+1}_{\tilde{k}} > T^{\tilde{k}+1}_{\tilde{M}_i+1}\right] = \frac{1}{\sum_{i=\tilde{k}+1}^{\tilde{M}_i} \exp\left(\ln n\left(S^n_i - S^n_{\tilde{k}}\right)\right) + 1} \tag{5.99}$$

$$\geq \frac{1}{(\ln n)^2 \left|M_i - k\right| \exp\left(\ln n\left(S^n_{\tilde{M}_i} - S^n_{\tilde{k}}\right)\right)} \ , \tag{5.100}$$

de même :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{k}} < T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0}\right] = \frac{1}{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{k}-1} \exp\left(\ln n\left(S^n_i - S^n_{\tilde{m}_0}\right)\right) + 1} \tag{5.101}$$

$$\leq \frac{1}{\exp\left(\ln n\left(\max_{\tilde{m}_0+1 \leq i \leq \tilde{k}-1} S^n_i - S^n_{\tilde{m}_0}\right)\right)} \ , \tag{5.102}$$

par 4.417

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{k}-1}\left[T^{\tilde{k}-1}_{\tilde{k}} > T^{\tilde{k}-1}_{\tilde{m}_0}\right] = \frac{1}{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{k}-1}\exp\left(\ln n\left(S^n_i - S^n_{\tilde{k}}\right)\right)+1} \tag{5.103}$$

$$\geq \frac{1}{(\ln n)^2\,|k-m_0|\exp\left(\ln n\left(\max_{\tilde{m}_0+1\leq i\leq\tilde{k}-1} S^n_i - S^n_{\tilde{k}}\right)\right)}\ , \tag{5.104}$$

en remplaçant 5.100, 5.102 et 5.104 dans 5.98 on obtient :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{k},\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0}\wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\right] \tag{5.105}$$

$$\leq \frac{(\ln n)^2|M_i-m_0|}{\exp\left(\ln n\left(S^n_{\tilde{k}}-S^n_{\tilde{m}_0}\right)\right)}\frac{1}{\alpha_{\tilde{k}}\exp\left(\ln n\left(\max_{\tilde{m}_0+1\leq i\leq\tilde{k}+1} S^n_i - S^n_{\tilde{M}_i}\right)\right)+\beta_{\tilde{k}}} \tag{5.106}$$

$$\leq \frac{(\ln n)^2|M_i-m_0|}{\beta_{\tilde{k}}n^{\Delta_{\tilde{k},\tilde{m}_0}}}\ , \tag{5.107}$$

ce qui donne 5.90. On prend maintenant $q=1$ dans le lemme 2.1.10 on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\left(\mathcal{L}\left(\tilde{k},\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0}\wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\right)^2\right]\\
&= \frac{\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{k}} < T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right]}{\left(\alpha_{\tilde{k}}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{k}+1}\left[T^{\tilde{k}+1}_{\tilde{k}} > T^{\tilde{k}+1}_{\tilde{M}_i+1}\right]+\beta_{\tilde{k}}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{k}-1}\left[T^{\tilde{k}-1}_{\tilde{k}} > T^{\tilde{k}-1}_{\tilde{m}_0}\right]\right)^2} + \frac{\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{k}} < T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right]}{\alpha_{\tilde{k}}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{k}+1}\left[T^{\tilde{k}+1}_{\tilde{k}} > T^{\tilde{k}+1}_{\tilde{M}_i+1}\right]+\beta_{\tilde{k}}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{k}-1}\left[T^{\tilde{k}-1}_{\tilde{k}} > T^{\tilde{k}-1}_{\tilde{m}_0}\right]}\\
&\leq \frac{(\ln n)^4|M_i-m_0|^2}{\exp\left(\ln n\left(S^n_{\tilde{k}}-S^n_{\tilde{m}_0}\right)\right)}\frac{1}{\beta_{\tilde{k}}}\left(\frac{1}{\frac{\alpha_{\tilde{k}}}{\exp\left(\ln n(S_{\tilde{M}_i}-S_{\tilde{k}})\right)}+\frac{\beta_{\tilde{k}}}{\exp\left(\ln n(\max_{\tilde{m}_0+1\leq i\leq\tilde{k}-1}S^n_i-S_{\tilde{k}})\right)}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)\right)\ ,
\end{aligned}$$

ce qui donne 5.91. On effectue les mêmes calculs pour obtenir les autres estimations du lemme. ■

Avec les calculs que l'on vient de faire nous pouvons maintenant écrire une autre version de la proposition 5.2.4 :

Proposition 5.2.7. *Pour tout $\alpha\in\Omega_2$, tout $n>1$ et tout $q>0$, on a :*

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} > q+1\right] \leq \frac{(E_i+E'_{i'})(\ln n)^4}{q}+\frac{1}{n^{\delta'_{i',0}}}+\frac{1}{n^{\delta_{i,0}}},\quad \forall i\ 0\leq i\leq r,\ \forall i'\ 0\leq i'\leq r', \tag{5.108}$$

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > q\right] \leq F_i(\ln n)^8\frac{n^{(\delta_{i,i+1}-\mu_{i+1,0})\wedge(\delta_{i,i}-\mu_{i+1,0})}}{q^2}+\frac{1}{n^{\delta_{i,0}}},\quad \forall i\ 0\leq i\leq r, \tag{5.109}$$

et

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} > q\right] \leq F'_i(\ln n)^8\frac{n^{(\delta'_{i,i+1}-\mu'_{i+1,0})\wedge(\delta'_{i,i}-\mu'_{i+1,0})}}{q^2}+\frac{1}{n^{\delta'_{i,0}}},\quad \forall\ 0\leq i\leq r'. \tag{5.110}$$

$E_i=|M_i-m_0|^2\max_{\tilde{m}_0+1\leq l\leq\tilde{M}_i}\left(\frac{1}{\beta_l}\right)$, $E'_{i'}|M'_i-m_0|^2\max_{\tilde{M}'_i\leq l\leq\tilde{m}_0-1}\left(\frac{1}{\alpha_l}\right)$,
$F_i=|M_i-m_0|^4\left(\max_{\tilde{m}_0+1\leq l\leq\tilde{M}_i}\left(\frac{1}{\beta_l\wedge\alpha_l}\right)\right)^2$, $F'_i=|M'_i-m_0|^4\left(\max_{\tilde{M}'_i\leq l\leq\tilde{m}_0-1},\left(\frac{1}{\beta_l\wedge\alpha_l}\right)\right)^2$
voir également 5.43 pour les notations de $\delta_{i,i+1}$, $\delta'_{i,i+1}$, $\delta_{i,i}$, $\delta'_{i,i}$, $\mu_{i+1,0}$ et $\mu'_{i+1,0}$.

Preuve.
Soit $q\in\mathbb{N}$ tel que $q>1$, on a :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} > q+1\right] = \alpha_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > q\right]+\beta_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} > q\right]\ . \tag{5.111}$$

On estime le premier terme du membre de droite de cette égalité de la même façon que dans la première méthode (voir équations 5.82 et 5.83), on obtient pour tout $0 \leq i \leq r$:

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > q\right] \leq \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1} > q\right] + \frac{1}{n^{\delta_{i,0}}} \ . \tag{5.112}$$

On fait maintenant la remarque suivante :

$$\left\{T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1} > q\right\} = \left\{\sum_{k=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i} \mathcal{L}\left(k, T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right) + 1 > q\right\} \ , \tag{5.113}$$

le "+1" (devant $> q$) correspond au dernier saut qu'effectue la marche pour atteindre $\tilde{M}_i + 1$ ou $\tilde{m}_0$. Pour obtenir 5.108 on utilise l'inégalité de Markov ainsi que les estimations 5.90 et 5.92 on obtient pour tout $q > 1$ et $0 \leq i \leq r$:

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1} > q\right] \leq \frac{1}{\beta_{\tilde{m}_0+1}}\frac{1}{q} + \frac{1}{q}\sum_{k=\tilde{m}_0+2}^{\tilde{M}_i} \frac{|m_0-k|(\ln n)^2}{\beta_k n^{S^n_k - S^n_{\tilde{m}_0}}} \tag{5.114}$$

$$\leq \frac{(\ln n)^4 C_i}{q} \ . \tag{5.115}$$

En remplaçant 5.115 dans 5.112, puis en faisant un calcul identique pour $\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} > q\right]$ on obtient 5.108 par 5.111. Montrons maintenant 5.109, il suffit d'appliquer l'inégalité de Tchebichev :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1} > q\right] \equiv \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1} \geq q+1\right] \\
\leq\ & \frac{1}{q^2}\sum_{k=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i}\sum_{l=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i} \mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\mathcal{L}\left(k,\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\mathcal{L}\left(l,\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\right] \\
\leq\ & \frac{1}{q^2}\sum_{k=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i}\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\left(\mathcal{L}\left(k,\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\right)^2\right]\right)^{1/2} \qquad (5.116) \\
&\times \sum_{l=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_i}\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\left(\mathcal{L}\left(l,\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\right)^2\right]\right)^{1/2} \\
\leq\ & \frac{|M_i-m_0|^2(\ln n)^4}{q^2}\max_{\tilde{m}_0+1\leq k\leq \tilde{M}_i}\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\left(\mathcal{L}\left(k,\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\right)^2\right]\right) \ , \qquad (5.117)
\end{aligned}$$

où la seconde inégalité a été obtenue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, par 5.91, 5.93 et en utilisant la figure 5.1, on obtient :

$$\max_{\tilde{m}_0+1\leq k\leq \tilde{M}_i}\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\left(\mathcal{L}\left(k,\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\right)^2\right]\right) \tag{5.118}$$

$$\leq \frac{(\ln n)^4|M_i-m_0|^2}{n^{S^n_{\tilde{m}_{i+1}}-S^n_{\tilde{m}_0}}}\max_{\tilde{m}_0+1\leq l\leq \tilde{M}_i}\left(\frac{1}{\beta_l\wedge\alpha_l}\right)^2\left(\frac{1}{\frac{1}{n^{S^n_{\tilde{M}_i}-S^n_{\tilde{m}_{i+1}}}}+\frac{1}{n^{S^n_{\tilde{M}_{i+1}}-S^n_{\tilde{m}_{i+1}}}}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)\right) \ , \tag{5.119}$$

où $\tilde{m}_{i+1}$ et $\tilde{M}_{i+1}$ sont obtenus par raffinement de $\{\tilde{m}_0, \tilde{M}_i\}$, ainsi :

$$\max_{\tilde{m}_0+1\leq k\leq \tilde{M}_i}\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[\left(\mathcal{L}\left(k,\ T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \wedge T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_i+1}\right)\right)^2\right]\right) \tag{5.120}$$

$$\leq (\ln n)^4|M_i-m_0|^2 n^{(\delta_{i,i+1}-\mu_{i+1,0})\wedge(\delta_{i,i}-\mu_{i+1,0})}\max_{\tilde{m}_0+1\leq l\leq \tilde{M}_i}\left(\frac{1}{\beta_l\wedge\alpha_l}\right)^2 \ , \tag{5.121}$$

voir 5.43 pour les notations, en remplaçant 5.121 dans 5.117 puis le résultat obtenu dans 5.112 on obtient 5.109, un calcul identique donne 5.110. ■

5.2.3 A propos de ces deux méthodes et de l'hypothèse H.6

Comparons les résultats obtenus dans les propositions 5.2.4 et 5.2.7. On remarque que ces deux méthodes de calculs donnent des résultats sensiblement différents. Nous voudrions, cependant, faire remarquer les points suivants :

• Étant donné que les deux méthodes commencent par le même calcul ("symétrisation") on trouve de part et d'autre les mêmes masses de probabilité indépendantes de q.

• Le second point commun est la présence des Q v.a. $\delta_{.,.}$ et $\delta'_{.,.}$ qui produisent un effet négatif pour la majoration des probabilités dans les deux méthodes.

• Enfin, on remarque que les variables aléatoires : $\max_{\tilde{a} \leq l \leq \tilde{b}} \left(\frac{1}{\beta_l}\right)$ et $\max_{\tilde{a} \leq l \leq \tilde{b}} \left(\frac{1}{\alpha_l}\right)$ apparaissent également dans les deux méthodes de calculs. Nous remarquons, pour ce dernier point, que grâce à l'hypothèse H.6 on contrôle assez bien ces v.a., en effet par les propriétés 4.401 et 4.402 de l'ensemble des bons environnements on sait pour $\epsilon > 0$ fixé qu'il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$ et tout $\alpha \in G_n$:

$$\max_{\tilde{M}'_0 \leq l \leq \tilde{m}_0 - 1} \left(\frac{1}{\alpha_l}\right) \leq (\ln n)^{\frac{6}{\kappa}} \ , \tag{5.122}$$

$$\max_{\tilde{m}_0 + 1 \leq l \leq \tilde{M}_0} \left(\frac{1}{\beta_l}\right) \leq (\ln n)^{\frac{6}{\kappa}} \ , \tag{5.123}$$

avec $Q\left[G_n\right] = 1 - \epsilon$, $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée.

Pour la preuve de la localisation que nous présentons dans le chapitre suivant, nous aurons besoin des estimations données par l'une de ces deux propositions. Nous avons choisi la première méthode car elle donne des estimations simples.

Chapitre 6

Preuves du théorème de Localisation

Dans ce chapitre on commence par présenter une preuve de la localisation de la marche sous les hypothèses H.1 H.2 et H.6. Cette preuve est basée sur le découpage "ordonné" en vallées décrit au chapitre 4. Grâce à ce découpage on montre qu'il n'existe pas d'échelle de temps, assez grande, comprise entre 0 et n telle que la M.A.M.A. ne revienne pas au minimisant $\tilde{m}_0$. On énonce ensuite le théorème de Y. Sinai tel qu'il le donne dans [92], puis on détaille la démarche qu'il utilise sous les hypothèses H.1, H.2 et H.3 pour montrer son résultat. Dans le troisième paragraphe on expose la méthode de la preuve de H. Kesten qui donne la distribution limite de la M.A.M.A. .

6.1 Preuve par analyse des temps de retour

On montre dans cette section le théorème suivant :

Théorème 6.1.1. *Supposons H.1 et H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \kappa, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout milieu $\alpha \in G_n$:*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\left|\frac{X_n}{\ln^2 n} - m_0\right| > \left(\frac{\mathcal{G}(\ln\ln n)^9}{\ln n}\right)^{1/2}\right] \leq \frac{4E^5}{(\gamma_0 \ln n \ln\ln n)^{1/2}} \ , \tag{6.1}$$

avec $Q\left[G_n\right] \geq 1 - \epsilon$. $\mathcal{G} = (\gamma_0(1000)^2 E)^2$, $E = \frac{24R^2\left|\ln\frac{\epsilon}{R}\right|}{\sigma^2\epsilon^2}$, $R = 1000$, $\gamma_0 = \frac{12}{\kappa} + 11$, $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$.

Preuve.
Le schéma de la preuve est le suivant : on montre (avec une probabilité qui tend vers un) que la M.A.M.A $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ atteint $\tilde{m}_0$ en un temps $\leq n$ puis qu'il n'existe pas d'instant $1 \leq k \leq n - q$ ($q \equiv q(n) << n$) tel que la M.A.M.A. ne retourne pas à $\tilde{m}_0$ (proposition 6.1.2). On montre ensuite que partant de $\tilde{m}_0$, en un temps inférieur à $n - (n - q) = q$ la M.A.M.A ne peut pas s'échapper d'une petite région autour de $\tilde{m}_0$ (proposition 6.1.6) .

Pour effectuer les calculs on travaille sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}^\alpha$, puis on estime les probabilités obtenus en prenant α dans l'ensemble des "bons" environnements G_n (défini page 83).

On rappelle les notations suivantes : $\tilde{a} = a(\ln n)^2$ ainsi $T_{b(\ln n)^2}^{a(\ln n)^2} \equiv T_{\tilde{b}}^{\tilde{a}}$, et $\tilde{0} \equiv 0$. On rappelle aussi que $\mathbb{P}^\alpha\left[.|X_0 = 0\right] \equiv \mathbb{P}_0^\alpha\left[.\right]$.

On introduit l'événement suivant, soit $n > 1$ et $1 \leq q \leq n$:

$$\mathcal{A}_q = \bigcup_{n-q\leq k\leq n} \{X_k = \tilde{m}_0\} \ . \tag{6.2}$$

Soit $\delta_q > 0$, on a :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\left|\frac{X_n}{(\ln n)^2} - m_0\right| > \delta_q\right] = \mathbb{P}_0^\alpha\left[\left|\frac{X_n}{(\ln n)^2} - m_0\right| > \delta_q,\ \mathcal{A}_q\right] + \mathbb{P}_0^\alpha\left[\left|\frac{X_n}{(\ln n)^2} - m_0\right| > \delta_q,\ \mathcal{A}_q^c\right] \tag{6.3}$$

$$\leq \mathbb{P}_0^\alpha\left[\left|\frac{X_n}{(\ln n)^2} - m_0\right| > \delta_q,\ \mathcal{A}_q\right] + \mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{A}_q^c\right] . \tag{6.4}$$

On va estimer chacune des probabilités du membre de droite de 6.4 dans les propositions 6.1.2 et 6.1.6.

Proposition 6.1.2. *Supposons H.1 et H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma \geq \frac{12}{\kappa} + 10 + 1/2$, il existe $n_0' \equiv n_0'(\epsilon, \kappa, \gamma, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3 c\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C)$ tel que pour tout $n > n_0'$ et tout milieu $\alpha \in G_n$, on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{A}_{q_0}^c\right] \leq \frac{2E^5}{(\gamma \ln\ln n)^{1/2}(\ln n)^{\gamma-(\frac{12}{\kappa}+10+1/2)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{\gamma-(6/\kappa+6)}}\right) , \tag{6.5}$$

avec $Q\left[G_n\right] \geq 1 - \epsilon$, où $q_0 = \left[e^{\left((100\sigma)^2\gamma E(\ln\ln n)^{3+1/2}(\ln n)^{3/2}\right)^{1/2}}\right]$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, $R = 1000$ et $C = \mathbb{E}_Q\left[e^{\kappa\epsilon_0}\right] \vee \mathbb{E}_Q\left[e^{-\kappa\epsilon_0}\right]$.

Preuve.
Pour montrer cette proposition on commence par remarquer que pour tout $n > 1$ et tout $1 \leq q \leq n$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{A}_q^c\right] = \mathbb{P}_0^\alpha\left[A_q^c,\ T_{\tilde{m}_0}^0 > n\right] + \mathbb{P}_0^\alpha\left[A_q^c,\ T_{\tilde{m}_0}^0 \leq n\right] \tag{6.6}$$

$$\leq \mathbb{P}_0^\alpha\left[T_{\tilde{m}_0}^0 > n\right] + \mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{A}_q^c,\ T_{\tilde{m}_0}^0 \leq n\right] . \tag{6.7}$$

On va maintenant estimer chacun des deux termes de la somme précédente, le premier dans le lemme 6.1.3 le second dans le lemme 6.1.4 :

Lemme 6.1.3. *Supposons H.1 et H.2 et soit $\kappa \in]0, \kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma > \frac{6}{\kappa} + 4$, il existe $n_1' \equiv n_1'(\epsilon, \kappa, \gamma, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3 c\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C)$ tel que pour tout $n > n_1'$ et tout milieu $\alpha \in G_n$, on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_{\tilde{m}_0}^0 > n\right] \leq \frac{5E^2}{(\ln n)^{\gamma-\left(\frac{6}{\kappa}+4\right)}} . \tag{6.8}$$

avec $Q\left[G_n'\right] \geq 1 - \epsilon$. $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, $R = 1000$.

Preuve.
On considère la plus petite vallée $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ de profondeur supérieure à 1 contenant le point 0, on supposera $\tilde{m}_0 > 0$ (les calculs sont similaires si $\tilde{m}_0 \leq 0$). On a :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_{\tilde{m}_0}^0 > n\right] \leq \mathbb{P}_0^\alpha\left[T_{\tilde{m}_0}^0 \wedge T_{\tilde{M}_0'-1}^0 > n\right] + \mathbb{P}_0^\alpha\left[T_{\tilde{M}_0'-1}^0 < T_{\tilde{m}_0}^0\right] . \tag{6.9}$$

En effet :

$$\left\{T_{\tilde{m}_0}^0 > n\right\} = \left\{T_{\tilde{m}_0}^0 > n\right\} \bigcap \left[\left\{T_{\tilde{m}_0}^0 \leq T_{\tilde{M}_0'-1}^0\right\} \bigcup \left\{T_{\tilde{M}_0'-1}^0 < T_{\tilde{m}_0}^0\right\}\right] \tag{6.10}$$

$$= \left\{T_{\tilde{m}_0}^0 > n,\ T_{\tilde{m}_0}^0 \leq T_{\tilde{M}_0'-1}^0\right\} \bigcup \left\{T_{\tilde{m}_0}^0 > n,\ T_{\tilde{M}_0'-1}^0 < T_{\tilde{m}_0}^0\right\} \tag{6.11}$$

$$\subseteq \left\{T_{\tilde{m}_0}^0 \wedge T_{\tilde{M}_0'-1}^0 > n\right\} \bigcup \left\{T_{\tilde{M}_0'-1}^0 < T_{\tilde{m}_0}^0\right\} . \tag{6.12}$$

On estime maintenant les termes de la somme 6.9. Pour le second terme on a déjà vu (lemme 5.1.3) que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\gamma > 2$ il existe $n_1 \equiv n_1(\epsilon, \kappa, C, \sigma, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_1$ et tout milieu $\alpha \in G_n$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_{\tilde{M}_0'-1}^0 < T_{\tilde{m}_0}^0\right] \leq \frac{E}{(\ln n)^{\gamma-2}} . \tag{6.13}$$

avec $Q\left[G_n\right] \geq 1-\epsilon$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. Pour le premier terme on utilise l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[T^0_{\tilde{m}_0} \wedge T^0_{\tilde{M}'_0-1} > n\right] \leq \frac{\mathbb{E}_0\left[T^0_{\tilde{m}_0} \wedge T^0_{\tilde{M}'_0-1}\right]}{n} \ . \tag{6.14}$$

Pour calculer cette moyenne on se sert du résultat du lemme 2.1.7, on rappelle que pour tout $\alpha \in \Omega_2$:

$$\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{M}'_0}\left[T^{\tilde{M}'_0}_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^{\tilde{M}'_0}_{\tilde{m}_0}\right] = \frac{\sum_{l=\tilde{M}'_0}^{\tilde{m}_0-1}\sum_{j=l}^{\tilde{m}_0-1}\frac{1}{\alpha_l}F_n(j,l)}{1+\sum_{j=\tilde{M}'_0}^{\tilde{m}_0-1}F_n(j,\tilde{M}'_0-1)} \ , \tag{6.15}$$

$$\mathbb{E}_0^\alpha\left[T^0_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^0_{\tilde{m}_0}\right] = \mathbb{E}^\alpha\left[T^{\tilde{M}'_0}_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^{\tilde{M}'_0}_{\tilde{m}_0}\right]\left(1+\sum_{j=\tilde{M}'_0}^{-1}F_n(j,\tilde{M}'_0-1)\right) - \sum_{l=\tilde{M}'_0}^{-1}\sum_{j=l}^{-1}\frac{1}{\alpha_l}F_n(j,l) \ , \tag{6.16}$$

où

$$F_n(j,l) = \exp\left(\ln n(S^n_l - S^n_j)\right) \ .$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^\alpha\left[T^0_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^0_{\tilde{m}_0}\right] &\leq \mathbb{E}^\alpha_{\tilde{M}'_0}\left[T^{\tilde{M}'_0}_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^{\tilde{M}'_0}_{\tilde{m}_0}\right]\left(1+\sum_{j=\tilde{M}'_0}^{-1}F_n(j,\tilde{M}'_0-1)\right) && (6.17)\\
&\equiv \sum_{l=\tilde{M}'_0}^{\tilde{m}_0-1}\sum_{j=l}^{\tilde{m}_0-1}\frac{1}{\alpha_l}F_n(j,l)\frac{1+\sum_{j=\tilde{M}'_0}^{-1}F_n(j,\tilde{M}'_0-1)}{1+\sum_{j=\tilde{M}'_0}^{m_0-1}F_n(j,\tilde{M}'_0-1)} && (6.18)\\
&\leq \sum_{l=\tilde{M}'_0}^{\tilde{m}_0-1}\sum_{j=l}^{\tilde{m}_0-1}\frac{1}{\alpha_l}F_n(j,l) \ , && (6.19)
\end{aligned}$$

car par hypothèse $\tilde{m}_0 > 0$. Il suffit maintenant de considérer le premier raffinement du couple $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0\}$ (c'est à dire celui qui donne la plus grande vallée à l'intérieur de $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0\}$), ce raffinement donne les points : $\tilde{M}'_1$ (pour le maximisant) et $\tilde{m}'_1$ (pour le minimisant), on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{l=\tilde{M}'_0}^{\tilde{m}_0-1}\sum_{j=l}^{\tilde{m}_0-1}\frac{1}{\alpha_l}F_n(j,l) &\leq (M'_0-m_0)^2(\ln n)^4\max_{\tilde{M}'_0\leq l\leq\tilde{m}_0}\left(\frac{1}{\alpha_l}\right)F_n(\tilde{M}'_1,\tilde{m}'_1) && (6.20)\\
&= (M'_0-m_0)^2(\ln n)^4\max_{\tilde{M}'_0\leq l\leq\tilde{m}_0}\left(\frac{1}{\alpha_l}\right)n^{S^n_{\tilde{M}'_1}-S^n_{\tilde{m}'_1}} && (6.21)\\
&\equiv C_0(\ln n)^4 n^{\delta'_{1,1}} \ , && (6.22)
\end{aligned}$$

on rappelle que $\delta'_{1,1} \equiv S^n_{\tilde{M}'_1} - S^n_{\tilde{m}'_1}$, de plus $C_0 \equiv C_0(\alpha,n) = (M'_0-m_0)^2\max_{\tilde{M}'_0\leq l\leq\tilde{m}_0}\left(\frac{1}{\alpha_l}\right)$. En remplaçant 6.22 dans 6.19 on en déduit que :

$$\mathbb{E}_0^\alpha\left[T^0_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^0_{\tilde{m}_0}\right] \leq C_0(\ln n)^4 n^{\delta'_{1,1}} \ . \tag{6.23}$$

En remplaçant 6.23 dans 6.14 on a donc pour tout $\alpha \in \Omega_2$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[T^0_{\tilde{m}_0} \wedge T^0_{\tilde{M}'_0-1} > n\right] \leq \frac{C_0(\ln n)^4 n^{\delta'_{1,1}}}{n} \ . \tag{6.24}$$

De plus, pour tout $\kappa \in]0,\kappa^+[$ ($\kappa \in \mathbb{R}^*_+$) tel que H.6 soit vérifiée, il existe $n_2 \equiv n_2(\epsilon,\sigma,\mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right],\mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right],C,\gamma)$ tel que pour tout $n > n_2$ et tout $\alpha \in G_n$ on a (voir définition 4.3.10 formules 4.400, 4.401 et 4.403) :

$$\delta'_{1,1} \leq 1-\gamma(n) \ , \tag{6.25}$$

$$\max_{\tilde{M}'_0\leq l\leq\tilde{m}_0}\left(\frac{1}{\alpha_l}\right) \leq (\ln n)^{\frac{6}{\kappa}} \ , \tag{6.26}$$

$$|M'_0| \leq E, \ |\tilde{m}_0| \leq E \ . \tag{6.27}$$

et $Q\left[G_n\right] \geq 1-\epsilon$. $\gamma(n) = \frac{\gamma \ln\ln n}{\ln n}$ et $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, $R = 1000$, donc pour tout $\gamma > \frac{6}{\kappa}+4$, $n > n_2$ et tout $\alpha \in G_n$, on a donc :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[T^0_{\tilde{m}_0} \wedge T^0_{\tilde{M}'_0} > n\right] \leq \frac{(2E)^2(\ln n)^{6/\kappa+4} n^{1-\gamma\frac{\ln\ln n}{\ln n}}}{n} \tag{6.28}$$

$$= \frac{4E^2}{(\ln n)^{\gamma-\left(\frac{6}{\kappa}+4\right)}}\ , \tag{6.29}$$

on déduit le lemme 6.1.3 de l'inégalité 6.9 des estimations 6.13 et 6.29 et en prenant $n'_1 = n_1 \vee n_2$. ■
On estime maintenant le second terme de la somme 6.7 dans le lemme suivant :

Lemme 6.1.4. *Supposons H.1 et H.2 et soit $\kappa \in]0,\kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma > \frac{12}{\kappa}+10+1/2$, il existe $n''_1 \equiv n''_1(\epsilon,\kappa,\sigma,\mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3 c\right],\mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right],C,\gamma)$ tel que pour tout $n > n''_1$ et tout milieu $\alpha \in G_n$, on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{A}^c_{q_0},\ T^0_{\tilde{m}_0} \leq n\right] \leq \frac{4E^5}{(\gamma\ln\ln n)^{1/2}(\ln n)^{\gamma-(\frac{12}{\kappa}+10+1/2)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{\gamma-1/2}(\ln\ln n)^{1/2}}\right) \tag{6.30}$$

avec $Q\left[G_n\right] \geq 1-\epsilon$, où $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, $R = 1000$ et $q_0 = \left[e^{\left((100\sigma)^2\gamma E(\ln\ln n)^{3+1/2}(\ln n)^{3/2}\right)^{1/2}}\right]+1$.

Preuve.
On rappelle que pour tout $1 \leq q \leq n$ on a posé :

$$\mathcal{A}^c_q = \bigcap_{n-q\leq k\leq n}\{X_k \neq \tilde{m}_0\}\ . \tag{6.31}$$

On commence par la remarque suivante :

$$\left\{\bigcap_{n-q\leq k\leq n}\{X_k \neq \tilde{m}_0\}\,,\ T^0_{\tilde{m}_0} \leq n\right\} \subset \left\{\bigcup_{1\leq p\leq n-q-1}\left\{\{X_p = \tilde{m}_0\}\bigcap_{m=p+1}^{n}\{\ X_m \neq \tilde{m}_0\}\right\}\right\}, \tag{6.32}$$

en effet, si la M.A.M.A. a atteint $\tilde{m}_0$ i.e. $T^0_{\tilde{m}_0} \leq n$, et qu'après un certain instant k $(n-q \leq k \leq n)$ elle ne revient plus à $\tilde{m}_0$ i.e. $\bigcap_{n-q\leq k\leq n}\{X_k \neq \tilde{m}_0\}$ alors il existe un certain instant p $(1 \leq p \leq n-q-1)$ tel que la M.A.M.A. rencontre $\tilde{m}_0$ pour la dernière fois.
On cherche donc maintenant à majorer la probabilité :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcup_{1\leq p\leq n-q-1}\left\{\{X_p = \tilde{m}_0\}\bigcap_{m=p+1}^{n}\{\ X_m \neq \tilde{m}_0\}\right\}\right]\ . \tag{6.33}$$

On a une union disjointe (en p) donc :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcup_{1\leq p\leq n-q-1}\left\{\{X_p = \tilde{m}_0\}\bigcap_{m=p+1}^{n}\{\ X_m \neq \tilde{m}_0\}\right\}\right] \tag{6.34}$$

$$= \sum_{1\leq p\leq n-q-1}\mathbb{P}_0^\alpha\left[\{X_p = \tilde{m}_0\}\bigcap_{m=p+1}^{n}\{\ X_m \neq \tilde{m}_0\}\right] \tag{6.35}$$

$$= \sum_{1\leq p\leq n-q-1}\mathbb{P}^\alpha\left[\bigcap_{m=p+1}^{n}\{\ X_m \neq \tilde{m}_0\}\middle| X_0 = 0,\ X_p = \tilde{m}_0\right]\mathbb{P}_0^\alpha\left[X_p = \tilde{m}_0\right] \tag{6.36}$$

$$= \sum_{1\leq p\leq n-q-1}\mathbb{P}^\alpha\left[\bigcap_{m=p+1}^{n}\{\ X_m \neq \tilde{m}_0\}\middle| X_p = \tilde{m}_0\right]\mathbb{P}_0^\alpha\left[X_p = \tilde{m}_0\right] \tag{6.37}$$

$$= \sum_{1\leq p\leq n-q-1}\mathbb{P}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\bigcap_{m=1}^{n-p}\{\ X_m \neq \tilde{m}_0\}\right]\mathbb{P}_0^\alpha\left[X_p = \tilde{m}_0\right]\ , \tag{6.38}$$

la troisième égalité est obtenue par la propriété de Markov, la quatrième par invariance par translation dans le temps, en posant $k = n - p$, on obtient de la dernière égalité ci-dessus :

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\bigcup_{1\leq p\leq n-q-1} \left\{ \{X_p = \tilde{m}_0\} \bigcap_{m=p+1}^{n} \{ X_m \neq \tilde{m}_0\} \right\} \right] \tag{6.39}$$

$$\leq \sum_{q+1\leq k\leq n-1} \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\bigcap_{m=1}^{k} \{ X_m \neq \tilde{m}_0\} \right] \mathbb{P}_0^\alpha \left[\{X_{n-k} = \tilde{m}_0\} \right] \tag{6.40}$$

$$\leq \sum_{q+1\leq k\leq n-1} \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\bigcap_{m=1}^{k} \{ X_m \neq \tilde{m}_0\} \right] , \tag{6.41}$$

par définition on a :

$$\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\bigcap_{m=1}^{k} \{ X_m \neq \tilde{m}_0\} \right] = \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0} > k \right] , \tag{6.42}$$

ainsi

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\bigcup_{1\leq p\leq n-q-1} \left\{ \{X_p = \tilde{m}_0\} \bigcap_{m=p+1}^{n} \{ X_m \neq \tilde{m}_0\} \right\} \right] \tag{6.43}$$

$$\leq \sum_{q+1\leq k\leq n-1} \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0} > k \right] \tag{6.44}$$

Remarque 6.1.5. : On rappelle que la M.A.M.A. est récurrente nulle $\mathbb{P}.p.s$ (proposition 2.2.6), donc on ne peut à ce stade rien conclure sur le comportement de la somme : $\sum_{q+1\leq k\leq n-1} \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0} > k \right]$.

C'est ici que l'on va se servir de la construction faite au paragraphe 4.2.3, on commence par écrire :

$$\sum_{q+1\leq k\leq n-1} \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0} > k \right] = \sum_{q\leq k\leq n-2} \alpha_{\tilde{m}_0} \mathbb{P}_{\tilde{m}_0+1}^\alpha \left[T_{\tilde{m}_0}^{\tilde{m}_0+1} > k \right] \tag{6.45}$$

$$+ \sum_{q\leq k\leq n-2} \beta_{\tilde{m}_0} \mathbb{P}_{\tilde{m}_0-1}^\alpha \left[T_{\tilde{m}_0}^{\tilde{m}_0-1} > k \right] \tag{6.46}$$

On va maintenant effectuer les calculs qui nous permettrons de majorer 6.45 (ils sont similaires pour 6.46). Le but est de trouver q le plus petit possible mais tel que la somme 6.45 tende vers 0. Pour ça on va appliquer pas à pas l'inégalité 5.75 du lemme 5.2.4 à $\mathbb{P}_{\tilde{m}_0+1}^\alpha \left[T_{\tilde{m}_0}^{\tilde{m}_0+1} > k \right]$. Par la construction effectuée au paragraphe 4.2.3 on a un ensemble de maximisants et minimisants noté $\mathcal{M} = \{\tilde{M}_0, \tilde{m}'_1, \tilde{M}'_1, \cdots, \tilde{m}'_r, \tilde{M}'_r, \tilde{m}_0, \tilde{M}_r, \tilde{m}_r, \cdots, \tilde{m}_1, \tilde{M}_0\}$ tel qu'avec les notations suivantes :

$$\delta_{i,j} = S_{\tilde{M}_i}^n - S_{\tilde{m}_j}^n , \tag{6.47}$$

$$\eta_{i,j} = S_{\tilde{M}_i}^n - S_{\tilde{M}_j}^n , \tag{6.48}$$

$$\mu_{i,j} = S_{\tilde{m}_i}^n - S_{\tilde{m}_j}^n , \tag{6.49}$$

pour tout $0 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq r$ on ait :

$$\delta_{0,0} > \delta_{1,0} > \cdots > \delta_{r,0} , \tag{6.50}$$

$$\delta_{1,1} > \delta_{2,2} > \cdots > \delta_{r,r} . \tag{6.51}$$

Notons de plus que :

$$\delta_{i,0} - \delta_{i,i} = \mu_{i,0} \ . \tag{6.52}$$

La somme 6.45 peut donc se décomposer de la façon suivante, en prenant $q = \left[n^{\delta_{r,r}}\right] + 1$:

$$\sum_{q \leq k \leq n-2} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > k\right] \tag{6.53}$$

$$= \sum_{k=[n^{\delta_{1,1}}]+1}^{n-2} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > k\right] \tag{6.54}$$

$$+ \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{k=[n^{\delta_{i+1,i+1}}]+1}^{[n^{\delta_{i,i}}]} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > k\right] \ . \tag{6.55}$$

Pour la première somme (6.54) on a, par l'inégalité 5.75 (en prenant $i = 0$), pour tout $\alpha \in \Omega_2$:

$$\sum_{k=[n^{\delta_{1,1}}]+1}^{n-2} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > k\right] \tag{6.56}$$

$$\leq \frac{n - n^{\delta_{1,1}}}{n^{\delta_{0,0}}} + \sum_{k=[n^{\delta_{1,1}}]+1}^{n} \frac{D_0(\ln n)^{10} n^{(\delta_{1,1}-\eta_{0,1})\vee 0}}{k^2} \tag{6.57}$$

$$\leq \frac{n}{n^{\delta_{0,0}}} + \frac{D_0(\ln n)^{10} n^{(\delta_{1,1}-\eta_{0,1})\vee 0}}{n^{\delta_{1,1}}} \tag{6.58}$$

$$= \frac{n}{n^{\delta_{0,0}}} + \frac{D_0(\ln n)^{10}}{n^{\delta_{1,1}\wedge\eta_{0,1}}} \ , \tag{6.59}$$

où $D_0 = |M_0 - m_0|^5 \left(\max_{\tilde{m}_0 \leq l \leq \tilde{M}_0} \left(\frac{1}{\alpha_l}\right)\right)^2$. Pour les termes ($1 \leq i \leq r-1$) de la deuxième somme (6.55) on a par l'inégalité 5.75, pour tout $\alpha \in \Omega_2$:

$$\sum_{k=[n^{\delta_{i+1,i+1}}]+1}^{[n^{\delta_{i,i}}]} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > k\right] \tag{6.60}$$

$$\leq \frac{n^{\delta_{i,i}} - n^{\delta_{i+1,i+1}}}{n^{\delta_{i,0}}} + \sum_{k=[n^{\delta_{i+1,i+1}}]+1}^{[n^{\delta_{i,i}}]} \frac{D_i(\ln n)^{10} n^{(\delta_{i+1,i+1}-\eta_{i,i+1})\vee 0}}{k^2} \tag{6.61}$$

$$\leq \frac{n^{\delta_{i,i}}}{n^{\delta_{i,0}}} + \frac{D_i(\ln n)^{10} n^{(\delta_{i+1,i+1}-\eta_{i,i+1})\vee 0}}{n^{\delta_{i+1,i+1}}} \tag{6.62}$$

$$= \frac{1}{n^{\mu_{i,0}}} + \frac{D_i(\ln n)^{10}}{n^{\delta_{i+1,i+1}\wedge\eta_{i,i+1}}} \ , \tag{6.63}$$

où $D_i = |M_i - m_0|^5 \left(\max_{\tilde{m}_0 \leq l \leq \tilde{M}_i} \left(\frac{1}{\alpha_l}\right)\right)^2$ et on a utilisé 6.52. Ainsi pour la somme 6.55 on obtient de 6.63 que pour tout $\alpha \in \Omega_2$:

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{k=[n^{\delta_{i+1,i+1}}]+1}^{[n^{\delta_{i,i}}]} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > k\right] \leq \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{n^{\mu_{i,0}}} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{D_i(\ln n)^{10}}{n^{\delta_{i+1,i+1}\wedge\eta_{i,i+1}}} \tag{6.64}$$

$$\leq \frac{r-1}{n^{\min_{1\leq i\leq r-1}(\mu_{i,0})}} + \frac{(r-1)(\ln n)^{10} D_0}{n^{\min_{1\leq i\leq r-1}(\delta_{i+1,i+1}\wedge\eta_{i,i+1})}} \ , \tag{6.65}$$

car D_i est décroissante en i. En regroupant les termes 6.65 et 6.59 on obtient pour tout $\alpha \in \Omega_2$:

$$\sum_{[n^{\delta_{r,r}}]+1 \leq k \leq n-2} \alpha_{\tilde{m}_0} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > k\right] \leq \frac{n}{n^{\delta_{0,0}}} + \frac{r-1}{n^{\min_{1\leq i\leq r-1}(\mu_{i,0})}} + \frac{r(\ln n)^{10} D_0}{n^{\min_{0\leq i\leq r-1}(\delta_{i+1,i+1}\wedge\eta_{i,i+1})}} \ , \tag{6.66}$$

De plus, pour tout $\kappa \in]0,\kappa^+[$ ($\kappa \in \mathbb{R}_+^*$) tel que H.6 soit vérifiée, tout $\epsilon > 0$ et tout $\gamma > 0$ il existe $n_1 \equiv n_1(\epsilon, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C, \gamma)$ tel que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G_n$ on a (voir définition 4.3.10) :

$$\max_{\tilde{m}_0 \le l \le \tilde{M}_0} \left(\frac{1}{\alpha_l}\right) \le (\ln n)^{\frac{6}{\kappa}} , \tag{6.67}$$

$$\min_{0 \le i \le r-1} (\delta_{i+1,i+1}) \ge \frac{\gamma(\ln\ln n)}{\ln n} , \tag{6.68}$$

$$\delta_{0,0} \ge 1 + \frac{\gamma(\ln\ln n)}{\ln n} , \tag{6.69}$$

$$\min_{0 \le i \le r-1} (\eta_{i,i+1}) \ge \frac{\gamma(\ln\ln n)}{\ln n} , \tag{6.70}$$

$$\min_{0 \le i \le r-1} (\mu_{i,0}) \ge \frac{\gamma(\ln\ln n)}{\ln n} , \tag{6.71}$$

$$M_0 \le E , \tag{6.72}$$

$$r \le 2\left(\frac{\ln n}{\gamma \ln\ln n}\right)^{1/2} , \tag{6.73}$$

$$\delta_{r,r} \le \frac{\left((100\sigma)^2 \gamma E (\ln\ln n)^{3+1/2} (\ln n)^{3/2}\right)^{1/2}}{\ln n} , \tag{6.74}$$

et $Q\left[G_n\right] \ge 1 - \epsilon$. $\gamma(n) = \frac{\gamma \ln\ln n}{\ln n}$, $E = \frac{24R^2 |\ln \frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ et $R = 1000$, donc pour tout $\gamma \ge \frac{12}{\kappa} + 10$, $n > n_1$ et tout $\alpha \in G_n$, on obtient, en remplaçant 6.67 à 6.73 dans 6.66 :

$$\begin{aligned} \sum_{[n^{\delta_{r,r}}]+1 \le k \le n-2} \alpha_{\tilde{m}_0} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > k-1\right] &\le \frac{1}{(\ln n)^{\gamma}} + \frac{2(\ln n)^{1/2}}{(\gamma \ln\ln n)^{1/2}(\ln n)^{\gamma}} + \frac{2E^5 (\ln n)^{\frac{12}{\kappa}10+1/2}}{(\gamma\ln\ln n)^{1/2}(\ln n)^{\gamma}} \\ &= \frac{2E^5}{(\gamma\ln\ln n)^{1/2}(\ln n)^{\gamma-(\frac{12}{\kappa}+10+1/2)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{\gamma-1/2}(\ln\ln n)^{1/2}}\right) . \end{aligned} \tag{6.75}$$

En utilisant maintenant 6.74, on en déduit, en notant $q_0 \equiv \left[e^{\left((100\sigma)^2\gamma E(\ln\ln n)^{3+1/2}(\ln n)^{3/2}\right)^{1/2}}\right] + 1$ que pour tout $\gamma \ge \frac{12}{\kappa} + 10 + 1/2$, tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G_n$:

$$\sum_{q_0 \le k \le n-2} \alpha_{\tilde{m}_0} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > k\right] \le \sum_{q=[n^{\delta_{r,r}}]+1 \le k \le n-2} \alpha_{\tilde{m}_0} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > k\right] \tag{6.76}$$

$$\le \frac{2E^5}{(\gamma\ln\ln n)^{1/2}(\ln n)^{\gamma-(\frac{12}{\kappa}+10+1/2)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{\gamma-1/2}(\ln\ln n)^{1/2}}\right) \tag{6.77}$$

En effectuant un calcul similaire pour 6.46 on obtient une estimation identique i.e pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G_n$:

$$\sum_{q_0 \le k \le n-2} \beta_{\tilde{m}_0} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} > k\right] \le \frac{2E^5}{(\gamma\ln\ln n)^{1/2}(\ln n)^{\gamma-(\frac{12}{\kappa}+10+1/2)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{\gamma-1/2}(\ln\ln n)^{1/2}}\right) \tag{6.78}$$

En remplaçant 6.77 et 6.78 dans (respectivement) 6.46 et 6.45 avec $q = q_0$, puis le résultat obtenu dans 6.44 on obtient le lemme 6.1.4 par 6.32 et en prenant $n_1'' = n_1$. ■

On déduit la proposition 6.1.2 en remplaçant les résultats des lemmes 6.1.3 et 6.1.4 dans 6.7, en prenant $n_0' = n_1' \vee n_1''$ et $q = q_0 \equiv \left[e^{\left((100\sigma)^2\gamma E(\ln\ln n)^{3+1/2}(\ln n)^{3/2}\right)^{1/2}}\right] + 1$ ■

Proposition 6.1.6. *Supposons H.1 et H.2 et soit $\kappa \in]0,\kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, pour tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma > 0$, il existe $n_0'' \equiv n_0''(\epsilon, \kappa, \gamma, \sigma, \mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3 c\right], \mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right], C)$ tel que pour tout $n > n_0''$ et tout milieu $\alpha \in G_n$, on a :*

$$\mathbb{P}^{\alpha}_0\left[\left|\frac{X_n}{(\ln n)^2} - m_0\right| > \delta_{q_0},\ \mathcal{A}_{q_0}\right] \le \frac{1}{(\ln n)^{\gamma}} , \tag{6.79}$$

avec $Q[G_n] \geq 1-\epsilon$, $q_0 = \left[e^{\left((100\sigma)^2\gamma E(\ln\ln n)^{3+1/2}(\ln n)^{3/2}\right)^{1/2}}\right]+1$, $\delta_{q_0} = \frac{\left(\frac{8\ln(q_0\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2\ln\ln n}{(\ln n)^2}$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ *et* $R = 1000$.

Preuve.
Soit $n > 3$, on rappelle que pour tout $1 \leq q \leq n$

$$\mathcal{A}_q = \bigcup_{n-q\leq k\leq n}\{X_k = \tilde{m}_0\} \ . \tag{6.80}$$

Introduisons la v.a. :

$$T_{\tilde{m}_0}(q) = \inf\{l \geq n-q,\ X_l = \tilde{m}_0\} \ , \tag{6.81}$$

on remarque :

$$\mathcal{A}_q \Leftrightarrow n-q \leq T_{\tilde{m}_0}(q) \leq n \ . \tag{6.82}$$

Soient $\epsilon > 0$ et $\gamma > 0$ on prendra désormais $q = q_0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0^\alpha\left[\left|\frac{X_n}{(\ln n)^2} - m_0\right| > \delta_{q_0},\ A_{q_0}\right] &= \mathbb{P}_0^\alpha\left[n-q_0 \leq T_{\tilde{m}_0}(q_0) \leq n, \left|\frac{X_n}{(\ln n)^2} - m_0\right| > \delta_{q_0}\right] \\
&= \sum_{l=n-q_0}^{n}\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_{\tilde{m}_0}(q_0) = l, \left|\frac{X_n}{(\ln n)^2} - m_0\right| > \delta_{q_0}\right] && (6.83)\\
&= \sum_{l=n-q_0}^{n}\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\left|\frac{X_{n-l}}{(\ln n)^2} - m_0\right| > \delta_{q_0}\right]\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_{\tilde{m}_0}(q_0) = l\right] \ , && (6.84)
\end{aligned}$$

la dernière égalité vient de la propriété de Markov forte, on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0^\alpha\left[\left|\frac{X_n}{(\ln n)^2} - m_0\right| > \delta_{q_0},\ A_{q_0}\right] &\leq \sum_{l=0}^{q_0}\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T^{\tilde{m}_0}_{(\tilde{m}_0+\tilde{\delta}_{q_0})} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{(\tilde{m}_0-\tilde{\delta}_{q_0})} < q_0 - l\right]\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_{\tilde{m}_0}(q_0) = l\right] && (6.85)\\
&\leq \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T^{\tilde{m}_0}_{(\tilde{m}_0+\tilde{\delta}_{q_0})} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{(\tilde{m}_0-\tilde{\delta}_{q_0})} < q_0\right]\sum_{l=0}^{q_0}\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_{\tilde{m}_0}(q_0) = l\right] && (6.86)\\
&\leq \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T^{\tilde{m}_0}_{(\tilde{m}_0+\tilde{\delta}_{q_0})} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{(\tilde{m}_0-\tilde{\delta}_{q_0})} < q_0\right] \ , && (6.87)
\end{aligned}$$

où $\tilde{\delta}_{q_0} = \delta_{q_0}(\ln n)^2$. Pour terminer la preuve on utilise le lemme 5.1.6 : soit $\epsilon > 0$ et $\gamma > 0$ en prenant $\tilde{\delta}_{q_0} = \left(\frac{8\ln(q_0\gamma\ln n)}{\sigma}\right)^2\ln\ln n$ avec $q_0 = \left[e^{\left((100\sigma)^2\gamma E(\ln\ln n)^{3+1/2}(\ln n)^{3/2}\right)^{1/2}}\right]+1$, on obtient par ce lemme qu'il existe $n_0'' \equiv n_0''(\epsilon,\kappa,\gamma,\sigma,\mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3c\right],\mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right],C)$ tel que pour tout $n > n_0''$ et tout milieu $\alpha \in G_n$:

$$\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T^{\tilde{m}_0}_{(\tilde{m}_0+\tilde{\delta}_{q_0})} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{(\tilde{m}_0-\tilde{\delta}_{q_0})} < q_0\right] \leq \frac{1}{(\ln n)^\gamma} \tag{6.88}$$

et $Q[G_n] \geq 1-\epsilon$. En remplaçant 6.88 dans 6.87 on termine la preuve de la proposition 6.1.6. ■
On écrit maintenant la preuve du théorème 6.1.1 :
Supposons H.1 et H.2 et soit $\kappa \in]0,\kappa^+[$ tel que H.6 soit vérifiée, soit $\epsilon > 0$ et fixons $\gamma = \gamma_0 \equiv \frac{12}{\kappa}+11$. En prenant $\delta_q = \delta_{q_0} \equiv \frac{\left(\frac{8\ln(q_0\ln\ln n)}{\sigma}\right)^2\ln\ln n}{(\ln n)^2}$ avec $q = q_0 \equiv \left[e^{\left((100\sigma)^2\gamma_0 E(\ln\ln n)^{3+1/2}(\ln n)^{3/2}\right)^{1/2}}\right]+1$ où $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ et $R = 1000$, dans 6.4 on déduit des propositions 6.1.2 et 6.1.6 qu'il existe $n_1 \equiv n_1(\epsilon,\kappa,\sigma,\mathbb{E}\left[|\epsilon_0|^3c\right],\mathbb{E}\left[\epsilon_0^4\right],C)$ tel que pour tout $n > n_1$ et tout milieu $\alpha \in G_n$, on a :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\left|\frac{X_n}{(\ln n)^2} - m_0\right| > \delta_{q_0}\right] \leq \frac{2E^5}{(\gamma_0\ln\ln n)^{1/2}(\ln n)^{1/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{\gamma_0-(6/\kappa+6)}}\right) \ , \tag{6.89}$$

avec $Q[G_n] \geq 1-\epsilon$. On remarque de plus qu'il existe $n_2 > n_1$ tel que pour tout $n > n_2$ on a :

$$\delta_{q_0} = \frac{\left(\frac{8\ln(q_0 \ln\ln n)}{\sigma}\right)^2 \ln\ln n}{(\ln n)^2} \leq \frac{(1000)^2 \gamma_0 E(\ln\ln n)^{4+1/2}}{(\ln n)^{1/2}} \ . \tag{6.90}$$

on obtient ainsi le théorème. ■

Idée intuitive de la preuve du théorème 6.1.1 :
La preuve de ce théorème est basée sur le découpage de l'intervalle de temps $\{1, \cdots, n\}$ en plusieurs intervalle de temps qui sont dépendants de la configuration du milieu aléatoire, par exemple si on travaille à droite de $\tilde{m}_0$ on prend :

$$\{1, \cdots, n\} = \{1, \cdots, [n^{\delta_{r,r}}], \cdots, [n^{\delta_{r-1,r-1}}], \cdots, [n^{\delta_{1,1}}], \cdots, n\},$$

essayons de comprendre intuitivement pourquoi un tel découpage fonctionne : supposons que la M.A.M.A. parte de $\tilde{m}_0 + 1$ et a à sa disposition un intervalle de temps égal à $\left\{[n^{\delta_{i+1,i+1}}], [n^{\delta_{i+1,i+1}}] + 1, \cdots, [n^{\delta_{i,i}}]\right\}$, quel est l'événement qui pourrait faire que la M.A.M.A. ne revienne pas à $\tilde{m}_0$? Simplement, l'événement tel que la marche atteigne le minimum de la vallée $\{\tilde{M}_i, \tilde{m}_i, \tilde{M}_{i-1}\}$ (de profondeur $S_{\tilde{M}_i} - S_{\tilde{m}_i} = \delta_{i,i}$) et ne puisse pas en ressortir car il lui faudrait un temps supérieur à $[n^{\delta_{i,i}}]$ pour y parvenir. Cependant, partant de $\tilde{m}_0 + 1$, si la M.A.M.A. a atteint $\tilde{m}_i$, c'est qu'elle avait à sa disposition un intervalle de temps au moins de l'ordre de $n^{\delta_{i,0}}$ pour franchir la barrière de potentiel égale à $\delta_{i,0} = S_{\tilde{M}_i} - S_{\tilde{m}_0}$. Mais si elle dispose vraiment de ce temps ($n^{\delta_{i,0}}$) alors elle s'échappera avec une probabilité proche de un de la vallée $\{\tilde{M}_i, \tilde{m}_i, \tilde{M}_{i-1}\}$, car $\delta_{i,0} - \delta_{i+1,i+1} = \mu_{i+1,0}$, et de plus par la propriété 4.362 $\mu_{i+1,0} \geq \gamma(n)$, et ainsi retournera à $\tilde{m}_0$. En itérant ce raisonnement on montre que, pour tout les intervalles de temps $\left\{[n^{\delta_{i+1,i+1}}], \cdots, [n^{\delta_{i,i}}]\right\}$, $r-1 \leq i \leq 1$, ainsi que pour l'intervalle $\left\{[n^{\delta_{1,1}}], \cdots, n\right\}$ la M.A.M.A. revient à $\tilde{m}_0$ (fin de la preuve de la proposition 6.1.2).
Que peut-il se passer dans l'intervalle de temps qui reste $[1, \cdots, [n^{\delta_{r,r}}]]$? On rappelle que le $\delta_{r,r}$ provient du dernier raffinement que l'on effectue et donc en particulier du plus petit. Le découpage en vallée que nous avons effectué nous permet donc d'avoir un bon contrôle de $\delta_{r,r}$ et ainsi de montrer que la M.A.M.A. n'a pas le temps de s'échapper d'une petite vallée autour de $\tilde{m}_0$ si elle dispose au plus d'un temps $[n^{\delta_{r,r}}]$ (fin de la preuve de la proposition 6.1.6).

6.2 Preuve de Y. Sinai (par analyse de temps locaux)

Dans ce paragraphe on donne les arguments de la preuve de la localisation donnée par Y. Sinai ([92]). On conserve les définitions de $\tilde{M}^+$ et $\tilde{M}^-$ ainsi que celle de la vallée minimale $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ données au chapitre 2 même si celle de Y. Sinai diffère légèrement. Sinai formule son résultat de la façon suivante :

Théorème 6.2.1. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout tout $\epsilon > 0$ et tout $\delta > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \delta)$ tel que pour tout $n > n_0$ on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\alpha \in C_n} \mathbb{P}_0^\alpha \left[\left|\frac{X_n}{\ln^2 n} - m_0\right| > \delta\right] = 0 \tag{6.91}$$

avec $Q[C_n] \geq 1-\epsilon$, où C_n est défini dans le paragraphe suivant.

On rappelle que l'hypothèse H.3 est la suivante :

$$Q[\eta \leq \alpha_0 \leq 1-\eta] = 1, \quad 0 < \eta \leq \frac{1}{2} \ , \tag{H.3}$$

Dans le paragraphe suivant on donne le résultat sur le milieu exploité par Y. Sinai dans sa preuve, on explique ensuite sa démarche puis on donne quelques détails sur les calculs qu'il effectue.

6.2.1 Découpage en vallées de Sinai et définition de l'ensemble des bons environnements C_n.

Y. Sinai donne (sans démonstration) le résultat suivant :

Lemme 6.2.2. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\delta > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \delta)$ tel que pour tout $n > n_0$, il existe un ensemble C_n tel que $Q(C_n) \geq 1 - \epsilon$ un entier $r > 0$ et $\delta_1 > 0$ tel que pour tout milieu $\alpha \in C_n$ on peut obtenir en utilisant r raffinements un ensemble de minimisants et maximisants : $\mathcal{M}' = \{M^-, m_1, M_1, \ldots, m_r, M_r, m_{r+1}, M^+\}$ à partir de l'ensemble $\{M^-, m, M^+\}$ tel que :*

$$\min_{t', t'' \in \mathcal{M}',\ t' \neq t''} |S^n_{\tilde{t}'} - S^n_{\tilde{t}''}| \geq \delta_1, \tag{6.93}$$

$$\min_{t \in \mathcal{M}',\ t \neq M_0, M_{r+1}} |S^n_{\tilde{t}} - 1| \geq \delta_1, \tag{6.94}$$

$$\min_{t \in \mathcal{M}'} |t| \geq \delta_1, \tag{6.95}$$

$$M_+ - M_- \leq \frac{1}{\delta_1}, \tag{6.96}$$

$$\max_{0 \leq j \leq r} (M_{j+1} - M_j) \leq \delta. \tag{6.97}$$

Remarque 6.2.3. Nous ne donnerons pas de preuve de ce lemme. On renvoie le lecteur au chapitre 2 pour les définitions des points M^+ et M^- et de l'opération de raffinement (voir paragraphe 4.2.1). Les notations qu'utilise Y. Sinai sont légèrement différentes des nôtres, en particulier :
– Y. Sinai note m_0 le point que nous notons m qui est le minimisant de la vallée $\{M^+, M^-\}$,
– Y. Sinai note $m^{(0)}$ le point que nous notons m_0,
– Y. Sinai note $M_-^{(0)}$ (respectivement $M_+^{(0)}$) le point que nous notons M_0' (respectivement M_0),
– Y. Sinai note son potentiel aléatoire $(w^n(t), t \in \mathbb{R})$ de plus $w^n(t) = S^n(t(\ln n)^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Bien entendu nous garderons dans cette discussion nos propres notations. Les éléments de $\mathcal{M}'$ sont classés par ordre croissant et ils sont normalisés ($a \in \mathcal{M}' \Leftrightarrow \tilde{a} \equiv a(\ln n)^2 \in \mathbb{Z}$).
Analysons les résultats de ce lemme (voir figure 6.1) et comparons les à ceux que nous avons obtenus dans le second chapitre (définition 4.3.10).

Y. Sinai n'explique pas comment il effectue les raffinements à partir de la vallée $\{M^-, m, M^+\}$ pour obtenir l'ensemble $\mathcal{M}'$, qui correspond à l'ensemble $\mathcal{M}$ que l'on a construit au chapitre 2 (voir paragraphe 4.2.3). Il dit seulement qu'avec un nombre fini r de raffinements, les points obtenus par ce procédé vérifient les propriétés 6.93 à 6.97 avec une Q probabilité proche de 1.

Commençons par une première remarque entre les propriétés énoncées dans le lemme 6.2.2 et celles énoncées dans la définition 4.3.10, le paramètre $\delta_1 > 0$ qu'introduit ici Y. Sinai est remplacé dans notre définition par $\gamma(n) \equiv \frac{\gamma \ln \ln n}{\ln n}$, où $\gamma > 0$. Le fait d'utiliser $\gamma(n)$ qui tend vers 0 quand n tend vers plus l'infini plutôt que le paramètre $\delta_1 > 0$ fixé nous a permis d'effectuer un plus grand nombre de raffinements et donc finalement d'obtenir un voisinage de localisation plus restreint que celui de Y. Sinai.

1. L'inégalité 6.93 implique que pour deux éléments quelconques a, b dans l'ensemble des maximisants et minimisants, la différence $|S^n_{\tilde{a}} - S^n_{\tilde{b}}|$ est toujours supérieure à un nombre δ_1 qui est strictement positif, sur le dessin (figure 6.1) : $a = m_0$ et $b = m_3$. Cette propriété joue un rôle similaire aux propriétés 4.404 à 4.409 de la définition 4.3.10, elle n'est cependant pas équivalente, car notre découpage en vallées étant "ordonné" on n'a pas besoin de comparer tous les éléments de $\mathcal{M}$ entre eux.
2. 6.94 implique que tout maximum (excepté $S^n_{\tilde{M}^+}$ et $S^n_{\tilde{M}^-}$) est distant de 1 par au moins δ_1 , sur la figure 6.1 on prend $t = M_3$. Cette propriété correspond aux propriétés 4.397 et 4.398 de la définition 4.3.10.
3. 6.95 est clair : tout point dans $\mathcal{M}'$ est assez éloigné de l'origine. Cette propriété n'a pas d'équivalent dans la définition 4.3.10 car elle n'a pas été utile pour notre preuve.
4. 6.96 : les maximisants M^- et M^+ sont au plus distants de $\frac{1}{\delta}$. Cette propriété correspond à la propriété 4.403 de la définition 4.3.10.

5. 6.97 : La différence entre deux maximisants a et b successifs de $\mathcal{M}'$ est toujours plus petite qu'une valeur fixée $\delta > 0$, sur l'exemple : $a = M_1$ et $b = M_2$. Cette propriété joue un rôle similaire à la propriété 4.414.

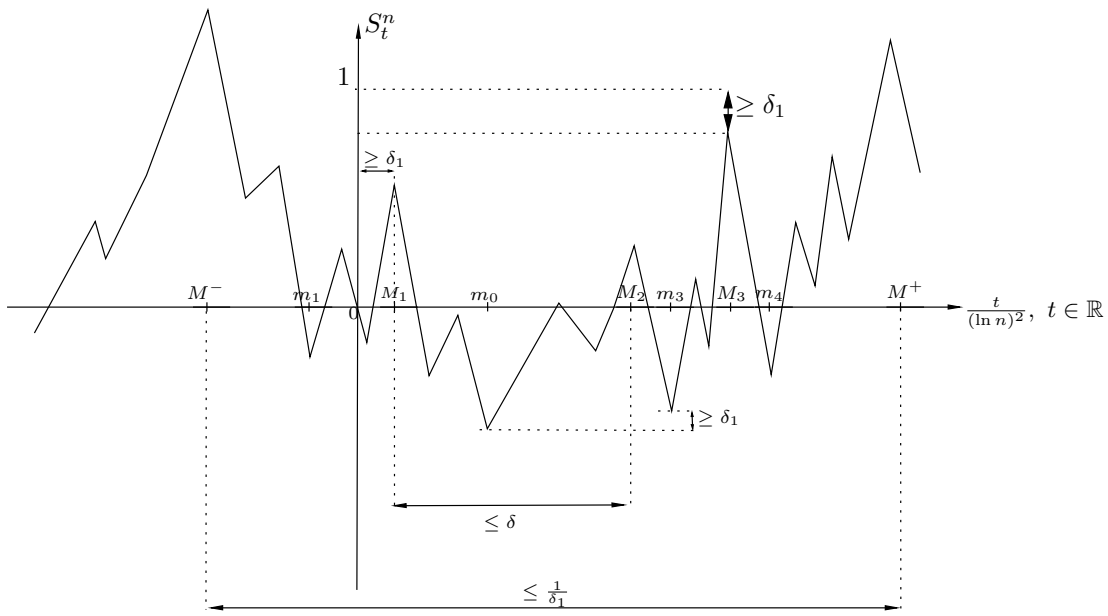


FIG. 6.1 –

Il est donc clair que l'ensemble des propriétés du lemme 6.2.2 et l'ensemble des propriétés de la définition 4.3.10 ne sont pas totalement équivalents. Ceci est dû au fait d'une part que les besoins pour notre preuve et la preuve de Y. Sinai sont différents et d'autre part que Y. Sinai travaille avec des hypothèses plus fortes que les nôtres. Par exemple les propriétés 4.401 et 4.402 nous sont utiles car nous travaillons sous l'hypothèse H.6.

Une dernière remarque avant d'expliquer la démarche de Y. Sinai. Dans son article Y. Sinai appelle les éléments de $\mathcal{M}'$ symboles, de plus on rappelle qu'ils sont normalisés : $(a \in \mathcal{M}' \Leftrightarrow a(\ln n)^2 \in \mathbb{Z})$.

6.2.2 Démarche de la preuve de Y. Sinai

L'idée de la preuve de Y. Sinai est la suivante, pour $1 \leq k \leq n$, la M.A.M.A. reste prisonnière dans une région donnée de l'espace : la vallée minimale $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ (voir la proposition 5.1.2). Cette région nous est décrite ici par le lemme 2.1.3, en effet ce lemme caractérise les points issus de la vallée initiale $\{\tilde{M}^+, \tilde{m}, \tilde{M}^-\}$ par l'opération de raffinement, en particulier $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ est obtenue à partir de $\{\tilde{M}^+, \tilde{m}, \tilde{M}^-\}$. Y. Sinai définit une variable aléatoire w qu'il appelle message, w est un vecteur (aléatoire) dont les coordonnées sont des points de $\mathcal{M}'$. Un message w retrace la chronologie de certains événements de la M.A.M.A. : chaque fois que la marche normalisée $\left(\frac{X_i}{(\ln n)^2}, 1 \leq i \leq n\right)$ passe par un point appartenant à $\mathcal{M}'$, ce point est inscrit dans le message w. Les coordonnées du message w $(w_1, w_2, ...)$ forment ainsi un processus aléatoire dont l'espace des états est $\mathcal{M}'$. On remarque, d'un point de vue de la M.A.M.A. , que le temps de passage d'un état w_j à l'état suivant w_{j+1} est aléatoire.
Y. Sinai montre, dans un premier temps, que dans un message le nombre de coordonnées différentes de m_0 est négligeable par rapport au nombre de coordonnées égales à m_0. Il montre ainsi qu'à partir d'un certain $c \equiv c(n)$ la probabilité que w_j $(j \geq c)$ soit égale à m_0 tend vers un quand n tend vers l'infini (proposition 6.2.5). Ce premier résultat est basé sur une analyse de moyenne de temps locaux (paragraphe 6.2.5). Il montre dans un second temps qu'il existe un entier positif c tel que : $w_c = m_0$, le temps d'atteinte de w_c $(T_c(\mathcal{M}'))$ est inférieur à n et le temps d'atteinte de w_{c+1} $(T_{c+1}(\mathcal{M}'))$ est supérieur à n. Or si $w_c = \tilde{m}_0$ alors cela signifie que $w_{c+1} = M'$ ou $w_{c+1} = \tilde{m}_0$ ou $w_{c+1} = M''$, où M' et M'' sont des maximisants de $\mathcal{M}'$ les plus proches de m_0 et d'après

6.97 $M' - M'' \leq \delta$. On en déduit finalement que si $T_c(\mathcal{M}') \leq n$ et $T_{c+1}(\mathcal{M}') > n$ avec $w_c = m_0$ cela implique qu'au temps n la M.A.M.A. se trouve quelque part dans la vallée $\{\tilde{M}', \tilde{m}_0, \tilde{M}''\}$ dont la taille est plus petite que $\delta(\ln n)^2$, ce qui montre le théorème 6.2.1.

Étant donné que Y. Sinai travaille avec la M.A.M.A. normalisée on adopte la notation suivante :

$$\left(x_i \equiv \frac{X_i}{(\ln n)^2},\ i \in \mathbb{N}\right). \tag{6.98}$$

6.2.3 Définition et résultats sur les "messages"

Définition d'un message.

Définissons d'abord les v.a. suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{Soit } T_1(\mathcal{M}') = \inf\{m \geq 0,\ x_m \in \mathcal{M}'\} \\ &\text{et } T_j(\mathcal{M}') = \inf\{m > T_{j-1}(w),\ x_m \in \mathcal{M}'\}, \quad j \geq 2\ . \end{aligned}$$

Définition 6.2.4. Soient I et $c \equiv c(I)$ deux entiers positifs tels que :

$$T_c(\mathcal{M}') \leq I,\ T_{c+1}(\mathcal{M}') > I\ , \tag{6.99}$$

on définit les coordonnées d'un message $w \equiv (w_1, w_2, \cdots, w_{c+1})$ de la façon suivante :

$$w_j = x_{T_j(w)} \text{ pour tout } 1 \leq j \leq c+1. \tag{6.100}$$

I sera un temps arrêt dans tout le paragraphe présent et un entier n fixé dans le paragraphe 6.2.4.

Résultats sur les messages.

Sinai montre la proposition suivante (théorème 2 page 266 de [92]) :

Proposition 6.2.5. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\delta > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \delta)$ tel que pour tout $n > n_0$, tout environnement $\alpha \in C_n$, il existe $r > 0$ et il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $0 < \mu < \delta_1$ et tout $n^{1-\mu} \leq c \leq n$:*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[w_c = m_0\right] \geq 1 - \frac{(2r+2)}{\eta\delta}\frac{(\ln n)^2}{n^{\delta_1 - \mu}} - \frac{(2r+2)}{\eta\delta}\frac{(\ln n)^3}{n^{\delta_1}}\ , \tag{6.101}$$

et $Q[C_n] \geq 1 - \epsilon$ ($\eta > 0$ vient de l'hypothèse H.3).

Ce résultat montre qu'à partir d'un certain n et à partir d'une certaine coordonnée $c \equiv c(n)$, w_c est égale à m_0 avec une probabilité proche de un. La preuve de ce résultat est basée sur des calculs de moyennes de temps locaux que l'on a résumés dans le paragraphe 6.2.5.

Notons $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}' \setminus \{m_0\}$ commençons par définir la v.a. $N(q)$ qui est le nombre total d'éléments appartenant à $\mathcal{M}^*$ rencontrés dans w jusqu'à ce que m_0 ait été observé q fois :

Définition 6.2.6. Soit $q > 0$, prenons $I = T_q^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}$ dans la définition d'un message, soit :

$$N(q) = \sum_{a \in \mathcal{M}^*} \sum_{i=1}^{c} \mathbb{I}_{\{w_i = a\}}\ , \tag{6.102}$$

avec $T_c(w) \leq T_q^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}$ et $T_{c+1}(w) > T_q^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}$, on pose $N(0) = 0$.

Remarque 6.2.7. Soit $q > 0$, étant donné que l'on a pris $I = T_q^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}$ dans la définition de $N(q)$ et $m_0 \in \mathcal{M}'$ on a $T_c(w) = T_q^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}$, donc on peut aussi définir $N(q)$ de la façon suivante :

$$N(q) = \sum_{a \in \mathcal{M}^*} \sum_{k=1}^{T_q^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}} \mathbb{I}_{\{x_k = a\}} \equiv \sum_{a \in \mathcal{M}^*} \mathcal{L}\left(\tilde{a}, T_q^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}\right) \tag{6.103}$$

où $\mathcal{L}$ est le temps local de la M.A.M.A. , qui a été défini de la façon suivante, soient $m \in \mathbb{Z}$ et J un entier positif :

$$\mathcal{L}(m, J) = \sum_{k=1}^{J} \mathbb{I}_{\{k,\ X_k = m\}} \ , \tag{6.104}$$

J pouvant être une v.a. ou déterministe.

Il est simple alors de montrer le lemme suivant :

Lemme 6.2.8. *Soit $q > 0$, $N(q)$ s'écrit comme une somme de v.a. indépendantes $(\gamma_j,\ 0 \leq j \leq q)$:*

$$N(q) = \sum_{j=0}^{q} \gamma_j \ , \tag{6.105}$$

où

$$\gamma_0 = \sum_{a \in \mathcal{M}^*} \mathcal{L}(\tilde{a}, T_{\tilde{m}_0}^0) \ , \tag{6.106}$$

et $(\gamma_j,\ 1 \leq j \leq q)$ est identiquement distribuée à :

$$\gamma_1 = \sum_{a \in \mathcal{M}^*} \mathcal{L}(\tilde{a}, T_1^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}) \ . \tag{6.107}$$

Preuve.
Ce résultat est une conséquence de la propriété de Markov forte. ■

Le lemme suivant donne une estimation du premier moment de la variable $N(q)$:

Lemme 6.2.9. *Supposons H.1, H.2 et H.3, soit $q > 0$, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\delta > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \delta)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout environnement $\alpha \in C_n$, il existe $r > 0$ et $\delta_1 > 0$ tel que :*

$$\frac{\mathbb{E}_0^\alpha[N(q)]}{q} \leq \frac{(2r+2)}{\eta\delta} \frac{(\ln n)^2}{n^{\delta_1}} + \frac{(2r+2)}{\eta\delta} \frac{n^{1-\delta_1}(\ln n)^2}{q} \ . \tag{6.108}$$

et $Q\left[C_n\right] \geq 1 - \epsilon$ ($\eta > 0$ vient de l'hypothèse H.3).

Preuve.
On déduit de l'égalité 6.105 et de la linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}_0^\alpha[N(q)] \equiv \mathbb{E}_0^\alpha\left[\sum_{i=0}^{q} \gamma_i\right] \tag{6.109}$$

$$= \sum_{a \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_0^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{a}, T_{\tilde{m}_0}^0)\right] + q \sum_{a \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{a}, T_1^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right] \ , \tag{6.110}$$

On a donc :

$$\mathbb{E}_0^\alpha[N(q)] \quad \leq \quad q\#(\mathcal{M}^*) \max_{a\in\mathcal{M}^*} \left\{\mathbb{E}_0^\alpha\left[\mathcal{L}(a, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]\right\} + \#(\mathcal{M}^*) \max_{a\in\mathcal{M}^*} \left\{\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{a}, T_{\tilde{m}_0}^0)\right]\right\} \tag{6.111}$$

où $\#\mathcal{M}^*$ est le nombre d'élément dans $\mathcal{M}^*$. Soient $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$, par les lemme 6.2.12 et 6.2.13 il existe $n_1 \equiv n_1(\epsilon, \delta)$ tel que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in C_n$ on a :

$$\max_{a\in\mathcal{M}^*} \left\{\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{a}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]\right\} \leq \frac{1}{\eta\delta}\frac{(\ln n)^2}{n^{\delta_1}} \tag{6.112}$$

et :

$$\max_{a\in\mathcal{M}^*} \left(\mathbb{E}_0^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{a}, T_{\tilde{m}_0}^0)\right]\right) \leq \frac{n^{1-\delta_1}\ln^2 n}{\eta\delta} \ , \tag{6.113}$$

avec $Q[C_n] \geq 1 - \epsilon$. De plus pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in C_n$ il existe $r > 0$ tel que :

$$\#\{\mathcal{M}^*\} = 2(r+1). \tag{6.114}$$

car pour obtenir $\mathcal{M}^*$ on effectue r raffinements, or à chaque raffinement on ajoute deux points à l'ensemble initial : $\{M^-, m, M^+\}$, ainsi $\#\mathcal{M}^*$=3+2r-1=2r+2. On obtient le lemme en remplaçant 6.112, 6.113 et 6.114 dans 6.111 et en prenant $n_0 = n_1$. ■

Ce lemme montre qu'en moyenne, pour q suffisamment grand le nombre de symboles différents de m_0 insérés dans w est négligeable devant q qui est le nombre de fois où l'on rencontre m_0 dans w.

Preuve (Proposition 6.2.5).
On commence par remarquer que l'événement $\{w_c = m_0\}$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\{w_c = m_0\} = \bigcup_{1\leq q\leq c} \{q + N(q) = c\} \ , \tag{6.115}$$

En effet si on veut que la coordonnée c de w (w_c) soit égale à m_0, alors il faut qu'il existe un entier q (qui est le nombre de fois où la M.A.M.A. a atteint m_0) tel que q plus le nombre de points appartenant à $\mathcal{M}^*$ rencontrés entre ces q passages à m_0 ($N(q)$) soit égal à c.

Remarque 6.2.10. Dans sa preuve Y. Sinai applique le théorème de la limite centrale local à $N(q)$ (voir page 266 de son article), nous proposons ici une preuve de cette proposition en utilisant une inégalité de Markov.

Soit $c > 0$, notre méthode consiste à majorer la probabilité :

$$\mathbb{P}_0^\alpha[w_c \neq m_0] \equiv \mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcap_{1\leq q\leq c} \{N(q) + q \neq c\}\right] \ . \tag{6.116}$$

Notons :

$$\mathcal{A}_1 = \bigcap_{1\leq q\leq c} \{N(q) + q < c\} \ , \tag{6.117}$$

$$\mathcal{A}_2 = \bigcup_{1\leq q\leq c} \{N(q-1) + q - 1 < c, \ N(q) + q > c\} \ , \tag{6.118}$$

$$\mathcal{A}_3 = \bigcap_{1\leq q\leq c} \{N(q) + q > c\} \ . \tag{6.119}$$

On a :

$$\bigcap_{1\leq q\leq c}\{N(q)+q\neq c\}=\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2\cup\mathcal{A}_3\ . \tag{6.120}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{A}_2\right] &= \sum_{q=1}^{c}\mathbb{P}_0^\alpha\left[N(q-1)+q-1<c,\ N(q)+q>c\right] && (6.121)\\
&= \sum_{q=1}^{c}\sum_{k=1}^{c}\mathbb{P}_0^\alpha\left[N(q-1)=-q+k,\ N(q)+q>c\right] && (6.122)\\
&= \sum_{q=1}^{c}\sum_{k=1}^{c}\mathbb{P}_0^\alpha\left[N(q-1)=-q+k,\ N(q)-N(q-1)>c-k\right]\ , && (6.123)
\end{aligned}$$

par le lemme 6.2.8 $N(q)-N(q-1)$ et $N(q)$ sont indépendants, d'où :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_0^\alpha\left[N(q-1)=k,\ N(q)-N(q-1)>c-q-k\right] && (6.124)\\
=\ &\mathbb{P}_0^\alpha\left[N(q-1)=-q+k\right]\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}\left(\mathcal{M}^*,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)>c-k\right]\ , && (6.125)
\end{aligned}$$

en remplaçant ceci dans 6.123 on obtient :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{A}_2\right]=\sum_{k=1}^{c}\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}\left(\mathcal{M}^*,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)>c-k\right]\sum_{q=1}^{c}\mathbb{P}_0^\alpha\left[N(q-1)=-q+k\right]\ , \tag{6.126}$$

par définition $N(q)$ est croissant en q ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{A}_2\right] &= \sum_{k=1}^{c}\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}\left(\mathcal{M}^*,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)>c-k\right]\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcup_{q=1}^{c}\{N(q-1)=-q+k\}\right] && (6.127)\\
&\leq \sum_{k=1}^{c}\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}\left(\mathcal{M}^*,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\geq c-k+1\right]\ , && (6.128)
\end{aligned}$$

on utilise maintenant l'inégalité de Markov, on obtient :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{A}_2\right]\ \leq\ \mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}\left(\mathcal{M}^*,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]\sum_{k=1}^{c}\frac{1}{c-k+1}\leq\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}\left(\mathcal{M}^*,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]\ln c\ . \tag{6.129}$$

Soit $\epsilon>0$ et $\delta>0$, par le lemme et 6.2.12 on déduit de 6.129 qu'il existe $n_1\equiv n_1(\epsilon,\delta)$ tel que pour tout $n>n_1$ et tout $\alpha\in C_n$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{A}_2\right]\ \leq\ \frac{(2r+2)}{\eta\delta}\frac{\ln c(\ln n)^2}{n^{\delta_1}}\ . \tag{6.130}$$

car on a vu que $\#\mathcal{M}^*=2r+2$. On remarque que :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{A}_1\right]=0\ , \tag{6.131}$$

en effet $\mathcal{A}_1\Rightarrow n(c)<0$ or $N(q)\geq 0,\ \forall q\geq 0$. On estime maintenant $\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{A}_3\right]$, par l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{A}_3\right] &= \mathbb{P}_0^\alpha\left[N(1)>c-1\right] && (6.132)\\
&\equiv \mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{L}\left(\mathcal{M}^*,T_{\tilde{m}_0}^0\right)>c-1\right] && (6.133)\\
&\leq \frac{\mathbb{E}_0^\alpha\left[\mathcal{L}\left(\mathcal{M}^*,T_{\tilde{m}_0}^0\right)\right]}{c-1}\ , && (6.134)
\end{aligned}$$

par le lemme et 6.2.13 on déduit de l'inégalité ci-dessus qu'il existe $n_2 \equiv n_2(\epsilon, \delta)$ tel que pour tout $n > n_2$ et tout $\alpha \in C_n$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha [\mathcal{A}_3] \leq \frac{2r+2}{\eta\delta} \frac{(\ln n)^2 n^{1-\delta_1}}{c-1} . \tag{6.135}$$

On déduit de 6.120, 6.130, 6.131 et 6.135 que pour tout $n > n_1 \vee n_2$ et tout $\alpha \in C_n$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\bigcap_{1 \leq q \leq c} \{N(q) + q \neq c\} \right] \leq \frac{(2r+2)(\ln c)(\ln n)^2}{\eta\delta n^{\delta_1}} + \frac{(2r+2)}{\eta\delta} \frac{(\ln n)^2 n^{1-\delta_1}}{c-1} , \tag{6.136}$$

pour que cette inégalité soit intéressante il faut prendre $n^{1-\mu} \leq c \leq n$, avec $\mu < \delta_1$, on obtient alors la proposition 6.2.5 en prenant $n_0 = n_1 \vee n_2$. ■

Dans la section suivante on donne le lien entre la M.A.M.A. prise à l'instant n et le temps d'atteinte de la coordonnée c d'un message telle que $w_c = m_0$.

6.2.4 Relations entre les messages et la M.A.M.A.

Y. Sinai montre la proposition suivante (voir page 267 de [92]) dont on peut déduire son théorème final :

Proposition 6.2.11. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout environnement $\alpha \in C_n$ on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\bigcup_{c \geq 1} \{T_c(\mathcal{M}') \leq n,\ T_{c+1}(\mathcal{M}') > n,\ w_c = m_0\} \right] = 1 - o(1) , \tag{6.137}$$

avec $Q[C_n] \geq 1 - \epsilon$ ($\lim_{n \to +\infty} o(1) = 0$).

La proposition ci-dessus montre qu'avec une probabilité qui tend vers un le temps d'atteinte d'une coordonnée c du message w (w_c) avec $w_c = m_0$ est proche de n. Nous ne donnerons pas tous les détails de la preuve car nous n'avons pas réussi à élucider tous les arguments de calcul que donne Y. Sinai. Cependant toute la démarche est présentée ci-dessous.

Dans ce paragraphe nous prendrons $I = n$ dans la définition d'un message w c'est à dire que $w = (w_1, \cdots, w_c, w_{c+1})$ avec $T_c(\mathcal{M}') \leq n$, $T_{c+1}(\mathcal{M}') > n$.
Pour la preuve de la proposition 6.2.11 on commence par réécrire la probabilité 6.137, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_0^\alpha \left[\bigcup_{c \geq 1} \{T_c(\mathcal{M}') \leq n,\ T_{c+1}(\mathcal{M}') > n,\ w_c = m_0\} \right] \\ = & \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha [T_1(\mathcal{M}') > i] \sum_{c \geq 1} \mathbb{P}_0^\alpha [T_c(\mathcal{M}') = n - i,\ w_c = m_0] , \end{aligned} \tag{6.138}$$

en effet :

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\bigcup_{c \geq 1} \{T_c(\mathcal{M}') \leq n,\ T_{c+1}(\mathcal{M}') > n,\ w_c = m_0\} \right] \tag{6.139}$$

$$= \sum_{c \geq 1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=n+1}^{\infty} \mathbb{P}_0^\alpha [T_c(\mathcal{M}') = k,\ T_{c+1}(\mathcal{M}') = j,\ w_c = m_0] , \tag{6.140}$$

de plus par la propriété de Markov forte :

$$\mathbb{P}_0^\alpha [T_c(\mathcal{M}') = k,\ T_{c+1}(\mathcal{M}') = j,\ w_c = m_0] \tag{6.141}$$

$$= \mathbb{P}_0^\alpha [T_c(\mathcal{M}') = k,\ w_c = m_0] \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha [T_1(\mathcal{M}') = j - k] , \tag{6.142}$$

on en déduit :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcup_{c\geq 1}\{T_c(\mathcal{M}')\leq n,\ T(w_{c+1})>n,\ w_c=m_0\}\right] \tag{6.143}$$

$$= \sum_{c\geq 1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=n+1}^{\infty}\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T_1(\mathcal{M}')=j-k\right]\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_c(\mathcal{M}')=k,\ w_c=m_0\right] \tag{6.144}$$

$$= \sum_{c=1}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T_1(\mathcal{M}')>n-k\right]\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_c(\mathcal{M}')=k,\ w_c=m_0\right] \tag{6.145}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T_1(\mathcal{M}')>i\right]\sum_{c\geq 1}\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_c(\mathcal{M}')=n-i,\ w_c=m_0\right]\ , \tag{6.146}$$

ce qui donne 6.138. Suite à cela Y. Sinai fait remarquer que, pour n suffisamment grand, on a :

$$\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T_1(\mathcal{M}')>i\right]\geq\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T_1(\mathcal{M}')\right](1-o(1))\ . \tag{6.147}$$

Le point surprenant, compte tenu que la M.A.M.A. est récurrente nulle $\mathbb{P}.p.s.$, est que Y. Sinai n'insiste pas sur le fait que $\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T_1(\mathcal{M}')\right]$ est bornée. Ceci est effectivement le cas, car partant de $\tilde{m}_0$ on a :

$$X_{T_1(\mathcal{M}')}=\tilde{m}_0 \text{ ou } X_{T_1(\mathcal{M}')}=\tilde{M}' \text{ ou } X_{T_1(\mathcal{M}')}=\tilde{M}''\ , \tag{6.148}$$

où $M'\in\mathcal{M}'$ est le plus grand maximisant avant $\tilde{m}_0$ et $M''\in\mathcal{M}'$ le plus petit maximisant après $\tilde{m}_0$, ainsi :

$$T_1(\mathcal{M}')=T_{\tilde{M}'}^{\tilde{m}_0}\wedge T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\wedge T_{\tilde{M}''}^{\tilde{m}_0}\ , \tag{6.149}$$

or nous savons que les moments de $T_{\tilde{M}'}^{\tilde{m}_0}\wedge T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\wedge T_{\tilde{M}''}^{\tilde{m}_0}$ sont bornés (voir par exemple le lemme 5.2.2). De plus $T_c(\mathcal{M}')$ s'écrit comme une somme de v.a. indépendantes par la propriété de Markov forte, et pour des raisons similaires à celles que l'on vient d'évoquer les premiers et seconds moments de ces v.a. sont bornés.

Y. Sinai utilise alors la proposition 6.2.5, le lemme 6.2.9 et le théorème de la limite centrale local appliqué à $T_c(\mathcal{M}')$ (voir page 267 de [92]) et montre que pour n suffisamment grand :

$$\sum_{c\geq 1}\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_c(\mathcal{M}')=n-i,\ w_c=m_0\right]\geq\frac{1}{\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[T_1(\mathcal{M}')\right]}\ , \tag{6.150}$$

c'est précisément ce dernier argument que nous n'avons pas réussi à rendre rigoureux en totalité.

Si on accepte 6.150, on déduit la proposition 6.2.11 de 6.138, 6.147 et 6.150.

La preuve du théorème principal est alors une simple conséquence de la proposition dont on vient de donner les arguments de preuve :

Preuve (Théorème 6.2.1).

Par la proposition 6.2.11, pour tout $\epsilon>0$ il existe $n_1\equiv n_1(\epsilon)$ tel que pour tout $n>n_1$ et tout environnement $\alpha\in C_n$ on a :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcup_{c}\{T_c(\mathcal{M}')\leq n,\ T_{c+1}(\mathcal{M}')>n,\ w_c=m_0\}\right]=1-o(1)\ , \tag{6.151}$$

avec $Q\left[C_n\right]\geq 1-\epsilon$. On en déduit pour tout $n>n_1$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcup_{k\leq n}\left\{X_k=\tilde{m}_0,\ \bigcap_{j=k+1}^{n}\{M'\leq X_j\leq M''\}\right\}\right]=1-o(1)\ , \tag{6.152}$$

avec $Q[C_n] \geq 1-\epsilon$. En effet 6.151 implique que la dernière fois que la M.A.M.A. atteint un point de $\mathcal{M}' = \{M^-, \cdots, M', m_0, M'', \cdots, M^+\}$ avant l'instant n est m_0, donc entre cet instant ($T_c(\mathcal{M}) \leq n$) et l'instant n la marche reste dans l'intervalle $[M', M'']$ (avec un probabilité proche de 1). Or par 6.97 pour tout $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$, il existe $n_2 \equiv n_2(\epsilon, \delta)$ tel que pour tout $n > n_2$ et tout $\alpha \in C_n$:

$$|M'' - M'| \leq \delta \ , \tag{6.153}$$

on en déduit alors le théorème en prenant $n_0 = n_1 \vee n_2$. ■

6.2.5 Calculs de moyennes de temps locaux.

Les résultats suivants sont suggérés par Y. Sinai dans [92] (page 263-264).
Voici les deux résultats principaux qui nous permettent de montrer la proposition 6.2.5 et le lemme 6.2.9.

Lemme 6.2.12. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\delta > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \delta)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout environnement $\alpha \in C_n$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que :*

$$\frac{\eta}{(\ln n)^2 n^{\delta_1}} \leq \max_{a \in \mathcal{M}^*} \left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(\tilde{a}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right]\right) \leq \frac{1}{\eta\delta} \frac{(\ln n)^2}{n^{\delta_1}} \ , \tag{6.154}$$

et $Q[C_n] \geq 1-\epsilon$. ($\eta > 0$ vient de l'hypothèse H.3).

Preuve.
Il suffit d'appliquer le lemme 6.2.2 au lemme 6.2.14 ci dessous. ■

On a également :

Lemme 6.2.13. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\delta > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\epsilon, \delta)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout environnement $\alpha \in C_n$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que :*

$$\max_{a \in \mathcal{M}^*} \left(\mathbb{E}^{\alpha}_{0}\left[\mathcal{L}(\tilde{a}, T^{0}_{\tilde{m}_0})\right]\right) \leq \frac{1}{\eta\delta} (\ln n)^2 n^{1-\delta_1} \ , \tag{6.155}$$

et $Q[C_n] \geq 1-\epsilon$ ($\eta > 0$ vient de l'hypothèse H.3).

Preuve.
on obtient ce résultat par le lemme 6.2.15 et le lemme 6.2.2. ■

Pour montrer ces deux lemmes nous avons besoin des calculs exacts de la partie I chapitre 2, en particulier du lemme 2.1.11. On a également besoin du lemme 4.3.12. Étant donné que nous discuterons longuement des temps locaux dans la partie III, nous ne donnerons pas le détail des différentes preuves.

Moyenne du temps local en $a \in \mathcal{M}^*$ entre un temps de retour à m_0

Lemme 6.2.14. *Soit $a \in \mathcal{M}^*$, si $a > m_0$, on a :*

$$\frac{\alpha_{\tilde{m}_0}}{\beta_{\tilde{a}} I_0 (\ln n)^2 n^{\delta_a}} \leq \mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(\tilde{a}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right] \leq \frac{\alpha_{\tilde{m}_0} I_0 (\ln n)^2}{\beta_{\tilde{a}} n^{\delta_a}} \ , \tag{6.156}$$

où $\delta_a = S^n_{\tilde{a}} - S^n_{\tilde{m}_0}$ et $I_0 = |a - \tilde{m}_0|$. Si $a < m_0$, on a :

$$\frac{\beta_{\tilde{m}_0}}{\alpha_{\tilde{a}} I_0 (\ln n)^2 n^{\delta_a}} \leq \mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(\tilde{a}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right] \leq \frac{\beta_{\tilde{m}_0} I_0 (\ln n)^2}{\alpha_{\tilde{a}} n^{\delta_a}} \ , \tag{6.157}$$

Preuve.
On obtient 6.156 en utilisant le lemme 2.1.11 équation 2.66, 4.417 et 4.418. 6.157 s'obtient de façon similaire. ■

Moyenne du temps local en $a \in \mathcal{M}^*$ entre un passage de 0 à $\tilde{m}_0$

Lemme 6.2.15. *Soit $a \in \mathcal{M}^*$, on a : si $0 < \tilde{a} < \tilde{m}_0$*

$$\frac{n^{\Delta_{\{a,m_0\},a}}}{\alpha_{\tilde{a}}} \leq \mathbb{E}_0^\alpha \left[\mathcal{L}(\tilde{a}, T^0_{\tilde{m}_0})\right] \leq \frac{I_0(\ln n)^2 n^{\Delta_{\{a,m_0\},a}}}{\alpha_{\tilde{a}}} \ , \tag{6.158}$$

où $\Delta_{\{a,m_0\},a} = \max_{k\in\mathcal{M}^*,\ a<k<\tilde{m}_0} \left(S^n(\tilde{k}) - S^n(\tilde{a})\right)$ *et* $I_0 = |a - m_0|$.
Si $\tilde{a} < 0 < \tilde{m}_0$

$$\frac{n^{\Delta_{\{a,m_0\},a}}}{\alpha_{\tilde{a}} I_0(\ln n)^2 n^{\Delta_{\{a,0\},0}}} \leq \mathbb{E}_0^\alpha \left[\mathcal{L}(\tilde{a}, T^0_{\tilde{m}_0})\right] \leq \frac{I_0(\ln n)^2 n^{\Delta_{\{a,m_0\},a}}}{\alpha_{\tilde{a}} n^{\Delta_{\{a,0\},0}}} \ , \tag{6.159}$$

où $\Delta_{\{a,0\},0} = \max_{k\in\mathcal{M}^*,\ a<k<0} \left(S^n(\tilde{k}) - S^n(\tilde{a})\right)$.

Preuve.
Pour le premier cas $0 < \tilde{a} < \tilde{m}_0$, on utilise le lemme 2.1.11 égalité 2.57, puis 4.416 et enfin 4.418. Pour le second cas il suffit de multiplier les estimations du premier cas par la probabilité $\mathbb{P}_0^\alpha[T^0_{\tilde{a}} < T^0_{\tilde{m}_0}]$ et d'estimer cette dernière en utilisant 4.417 puis le lemme 4.3.13. ■

6.3 Distribution limite pour la M.A.M.A récurrente

H. Kesten [55] et A. O. Golosov [38], donnent (indépendamment) la distribution limite de la M.A.M.A. . On reprend dans ce paragraphe la démarche de H. Kesten :

Théorème 6.3.1. *Supposons H.1, H.2 et H.3 alors :*

$$\sigma^2 \frac{X_n}{\ln^2 n} \to L, \ \textit{en distribution} \ , \tag{6.160}$$

où

$$\frac{dQ\left[L \leq x\right]}{dx} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8}|x|\right) \ , \tag{6.161}$$

Par le théorème de localisation de Y. Sinai on a :

$$\frac{X_n}{(\ln n)^2} \to m_0, \ \text{en probabilité.} \tag{6.162}$$

où m_0 est la v.a. fonction du potentiel aléatoire $(S^n_t,\ t \in \mathbb{R})$ définie paragraphe 4.2.2. On rappelle de plus que $S^n_{[t]}$ converge en loi vers le mouvement brownien $(W(t)_t,\ t \in \mathbb{R},\ W(0) = 0)$ de variance $t\sigma^2$. On en déduit :

$$\frac{\sigma^2 \tilde{m}_0}{(\ln n)^2} \to L, \ \text{en distribution} \ , \tag{6.163}$$

où L est une fonctionnelle du mouvement Brownien standard $(W(t), t \in \mathbb{R}, W(0) = 0)$ que l'on caractérise ci-dessous, on en déduit :

$$\frac{\sigma^2 X_n}{(\ln n)^2} \to L, \ \text{en distribution} \ . \tag{6.164}$$

Les notions de vallées et raffinement pour le mouvement Brownien sont semblables à celles définies pour le potentiel aléatoire $(S^n_t, t \in \mathbb{R})$, le lecteur peut donc se reporter à la page 50 pour un rappel des définitions. Notons $\{a', b', c'\}$ la plus petite vallée contenant le point 0 et de profondeur strictement supérieure à 1, cette vallée correspond à la vallée minimale "$\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$" définie au paragraphe 4.2.2. Pour obtenir cette vallée il suffit donc de reprendre les notions que l'on a développées pour le potentiel aléatoire S^n_t. Le point que nous

notions m_0 est donc ici b', et on notera $L \equiv b'$. On va maintenant donner une caractérisation fine de L suivant les cas où $L > 0$ ou $L < 0$, on adopte pour cela les notations suivantes :

$$m_+(t) = \min\{W(s) : 0 \le s \le t\},\ m_-(t) = \min\{W(-s) : 0 \le s \le t\},$$
$$T_+ = \inf\{s : W(s) - m_+(s) = 1\},\ T_- = -\inf\{s : W(-s) - m_-(s) = 1\},$$
$$s_+ :\ \text{temps pour lequel } m_+(T_+) \text{ est atteint},\ s_- :\ \text{temps pour lequel } m_-(T_-) \text{ est atteint},$$
$$S^+ = \max\{W(s) : 0 \le s \le s_+\},\ S^- = \max\{W(s) : s_- \le s \le 0\},$$
$$t_{S^+} = \inf\{t : W(t) = S^+\},$$
$$t_{S^-} = \inf\{t : W(t) = S^-\}.$$

Remarque 6.3.2. On a conservé les notations de H. Kesten excepté pour S^+ et S^- qu'il note (respectivement) M^+ et M^-. Par rapport aux notations que l'on a adoptées pour $(S_t^n, t \in \mathbb{R})$ on a :
• s_+ joue le rôle de m_0 si $m_0 > 0$, s_- joue le rôle de m_0 si $m_0 < 0$.
• T^+ (respectivement T^-) joue le rôle de $\tilde{M}_0$ (respectivement $\tilde{M}_0'$) si $m_0 > 0$ (respectivement $m_0 < 0$). On remarque aussi que, par construction, $(W(t), t \in \mathbb{R}_+^*)$ est indépendant de $(W(t), t \in \mathbb{R}_-^*)$.

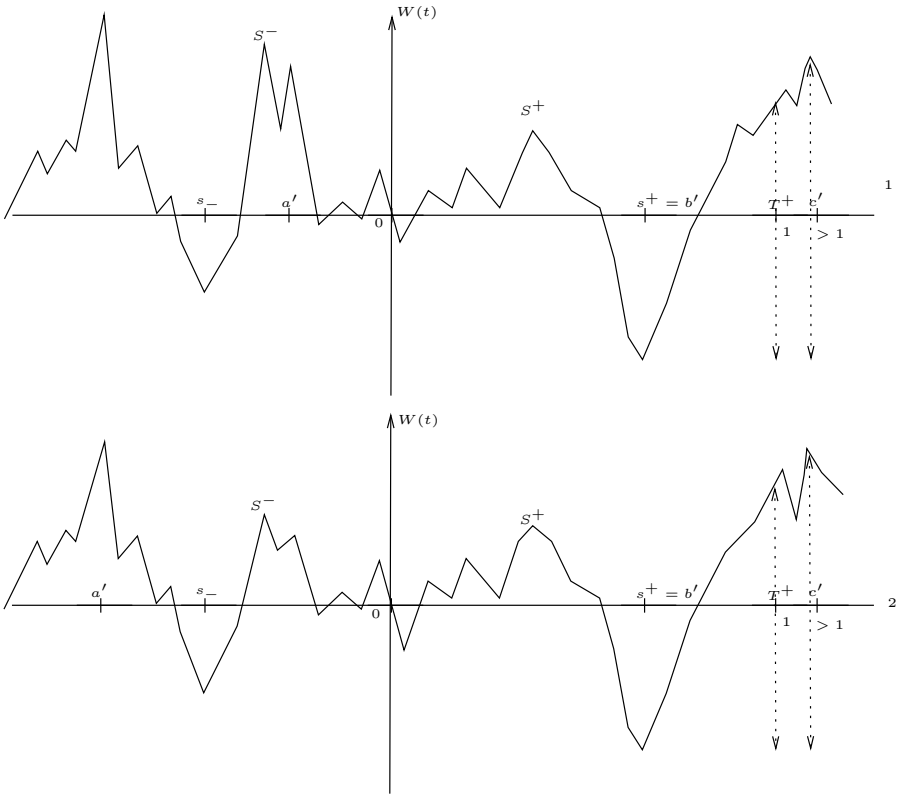


FIG. 6.2 –

La preuve se décompose en trois parties : on montre d'abord que $L = s_+$ ou s_- avec une probabilité égale à un. On caractérise ensuite les événements $L = s_+$ et $L = s_-$, puis on détermine la loi de s_+ on en déduit celle de s_- par symétrie.

6.3.1 $L = s_+$ ou s_- avec une probabilité un

Lemme 6.3.3. *on a :*

$$Q\,[L = s_+ |\, L > 0] = Q\,[L = s_- |\, L < 0] = 1\ . \tag{6.165}$$

Preuve.
On rappelle que l'on a posé $L = b'$, où $\{a', b', c'\}$ est la vallée minimale contenant 0 et de profondeur : $d([a', c']) > 1$.
Supposons $b' > 0$ montrons dans ce cas que $L = b' = s_+$ avec une probabilité 1.
Par définition $W(c') - W(b') \geq d([a', c']) > 1$, ainsi $T^+ \leq c'$, on a alors deux choix possibles :
Soit $b' \leq T^+ \leq c'$ alors par définition de b' on a donc $b' = s_+$.
Soit $T^+ < b' < c'$ dans ce cas on arrive à une contradiction. En effet, effectuons un raffinement à gauche de $\{a', b', c'\}$: soient d' et e' tels que,

$$\max_{a' \leq d' \leq e' \leq b'} = W(e') - W(d') \ , \tag{6.166}$$

par hypothèse $0 \geq s_+ < T_+ < b'$ donc :

$$W(e') - W(b') \geq W(T_+) - W(b') \ , \tag{6.167}$$

on en déduit :

$$W(e') - W(b') > 1 \quad p.s. \ , \tag{6.168}$$

on aboutit donc à une contradiction puisque :
Soit $e' < 0 < c'$ et dans ce cas on a trouvé une plus petite vallée $[e', b', c']$ de profondeur > 1 d'après 6.168 contenant 0 ce qui contre dit la minimalité de $[a', b', c']$.
Soit $a' < 0 \leq e'$, alors nécessairement par définition de T^+ : $0 < T^+ \leq e' < b'$ ce qui impliquerait l'existence d'un point b'' $(0 < b'' < T^+)$ tel que $W(T^+) - W(b'') = 1$ ce qui est en contradiction avec la minimalité de la vallée $[a', b', c']$.
Si on suppose maintenant $b' < 0$ par le même type de raisonnement, on montre que $L = s_-$ p.s.
■

6.3.2 Caractérisation des événements $L = s_+$ et $L = s_-$

Lemme 6.3.4. *avec une probabilité 1 on a :*

$$L = s_+ \iff \begin{cases} W(s_-) > W(s_+) \ et \ S^+ < (W(s_-) + 1) \vee S^- \ , \\ ou \\ W(s_+) > W(s_-) \ et \ S^- > (W(s_+) + 1) \vee S^+ \ , \end{cases} \tag{6.169}$$

$$L = s_- \iff \begin{cases} W(s_+) > W(s_-) \ et \ S^- < (W(s_+) + 1) \vee S^+ \ , \\ ou \\ W(s_-) > W(s_+) \ et \ S^- > (W(s_+) + 1) \vee S^+ \ . \end{cases} \tag{6.170}$$

On fera la preuve de ce lemme dans le paragraphe 6.3.4.

6.3.3 Discussion heuristique sur le comportement de la M.A.M.A. avec $L = s_+$

Ce paragraphe nous permet de comprendre heuristiquement pourquoi $L = s_+$, c'est à dire, pourquoi la M.A.M.A. se concentre en s_+ si le milieu vérifie :

$$W(s_-) > W(s_+) \text{ et } S^+ < (W(s_-) + 1) \vee S^- \ , \tag{6.171}$$

ou

$$W(s_+) > W(s_-) \text{ et } S^- > (W(s_+) + 1) \vee S^+ \ . \tag{6.172}$$

• L'événement 6.171 s'écrit :

$$6.171 \iff W(s_-) > W(s_+) \text{ et } S^- < W(s_-) + 1 \text{ et } S^+ < W(s_-) + 1 \ , \tag{6.173}$$

ou

$$W(s_+) > W(s_-) \text{ et } S^- > W(s_-) + 1 \text{ et } S^+ < S^- \ . \tag{6.174}$$

Si on se place dans le cas 6.173, on a :

$$S^- < W(s_-) + 1 \iff S^- - W(s_-) < 1 \ , \tag{6.175}$$

et

$$S^+ < W(s_-) + 1 \iff S^+ - W(s_-) < 1 \ , \tag{6.176}$$

ainsi quelque soit les deux cas : $S^+ < S^-$ ou $S^+ > S^-$, si la marche "tombe" dans le minimum en s_- alors elle aura une barrière de hauteur strictement inférieure à 1 ($S^+ - W(s_-)$ ou $S^- - W(s_-)$) pour passer de ce minimum au minimum plus profond s_+.
Si on se place maintenant dans le cas 6.174, on a :

$$S^- > W(s_-) + 1 \iff S^- - W(s_-) > 1 \ , \tag{6.177}$$

or $W(s_+) < W(s_-)$ donc

$$S^- - W(s_+) > 1 \ , \tag{6.178}$$

comme $S^+ < S^-$ avec une probabilité tendant vers un la marche visitera s_+ avant de visiter s_- et comme elle ne peut pas (en un temps n) franchir des barrières supérieures à 1 elle ne visitera pas s_- (en un temps n).

Remarque dans le cas 6.173, si $S^+ > S^-$ la marche visitera le point s_- avec une probabilité tendant vers 1, de même si $S^+ < S^-$ et que $S^- - w(s_+) < 1$ alors la marchera visitera d'abord s_+ (avec une probabilité tendant vers 1), mais visitera également s_- avec une probabilité proche de 1.

• Événement 6.172

$$6.172 \iff W(s_-) > W(s_+) \text{ et } S^- > (W(s_+) + 1) \text{ et } S^- > S^+ \ , \tag{6.179}$$

$S^+ < S^-$ implique que la marche (avec une probabilité tendant vers un) commence par visiter s_+ avant de dépasser S^-, de plus $S^- > W(s_+) + 1 \iff S^- - W(s_+) > 1$ implique qu'elle ne visitera pas s_- avec une probabilité tendant vers un.

6.3.4 Preuve du lemme 6.3.4

On montre maintenant 6.169 :
1) Montrons l'implication suivante :

$$L = s_+ \text{ et } W(s_-) > W(s_+) \Rightarrow S^+ < (W(s_-) + 1) \vee S^- \ , \tag{6.180}$$

$L = s_+ \Rightarrow b' > 0$ donc $a' < 0 < b' = s_+ < c'$, on distingue deux cas :
• Si $s_- < a' < 0$ alors $s_- < a' < 0 < t_{S^+} < T_+ \leq c'$([5]) donc :

$$S^- \equiv \max_{s_- \leq s \leq 0} W(s) \geq \max_{a' \leq s \leq 0} W(s) = W(a') \ , \tag{6.181}$$

or par définition de la vallée $\{a', b', c'\}$ on a aussi ([6]) :

$$W(a') > S^+ \ p.s. \ , \tag{6.182}$$

ainsi par 6.181 et 6.182 :

$$L = s_+, \ s_- < a' < 0 \Rightarrow S^- > S^+ \ p.s. \ , \tag{6.183}$$

[5] t_{S^+} est le temps d'atteinte de S^+.
[6] $W(a') - W(s_+) > 1$ et $S^+ - W(s_+) < W(T^+) - W(s_+) = 1$.

• Si $a' < s_-$ on a : $a' < s_- < 0 < t_{S^+} < b' = s_+ < T^+$,
effectuons un raffinement à gauche de la vallée $\{a', b', c'\}$ (comme en 6.166) on a donc

$$W(e') - W(b') \geq S^+ - W(s_-) \ , \tag{6.184}$$

car $W(e') \geq S^+$ et $W(s_-) > W(s_+) = W(b')$ par hypothèse. Raisonnons alors par l'absurde, supposons $S^+ \geq W(s_-) + 1$, alors :

$$W(e') - W(b') > 1 \ p.s. \ . \tag{6.185}$$

Deux cas possibles, contredisant la minimalité de la vallée $\{a', b', c'\}$, peuvent alors se présenter :
– Si $e' < 0$, alors la vallée $\{e', b', c'\}$ contient le point 0 et $d([e', c']) > 1$ par 6.185
– Si $e' > 0$, alors la vallée $\{a', d', e'\}$ est telle que $0 \in [a', e']$ et $d([a', e']) > 1$ car $d([a', e']) \geq W(e') - W(s_-) \geq S^+ - W(s_-) > 1$ Q $p.s.$
on en déduit :

$$L = s_+, \ W(s_-) > W(s_+) \text{ et } a' < s_- < 0 \Rightarrow S^+ < W(s_-) + 1. \tag{6.186}$$

De 6.183 et 6.186 on en déduit 6.180.
2) Réciproquement, montrons l'implication :

$$W(s_-) > W(s_+) \text{ et } S^+ < (W(s_-) + 1) \vee S^- \Rightarrow L = s_+ \ , \tag{6.187}$$

on distingue deux cas :
• $s_- < a' < 0$, ceci implique directement que $b' = s_+$ car $s_- \notin [a', c']$.
• $a' \leq s_-$, le cas délicat serait que $s_+ \geq c' > 0$, mais cela ne peut pas être le cas, en effet supposons $s_+ \geq c' > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
&\max_{0 \leq s \leq c'} W(s) = W(c') \leq \max_{0 \leq s \leq s_+} W(s) = S^+ < 1 + W(s_-) \ , \\
&\text{de plus} \\
&L = b' = s_- \text{ car } s_+ \geq c' \ ,
\end{aligned}$$

ce qui impliquerait : $d([a', c']) \leq S^+ - W(s_-) < 1$ qui contredit l'hypothèse $d([a', c']) > 1$. Ce qui donne 6.187.
Par un raisonnement similaire, on obtient les deux résultats suivants :

$$L = s_+ \text{ et } W(s_+) > W(s_-) \Rightarrow S^- > S^+ \vee W(T_+) \ , \tag{6.188}$$

$$W(s_-) < W(s_+) \text{ et } S^- > (W(s_+) + 1) \vee S^+ \Rightarrow L = s_+ \ . \tag{6.189}$$

De 6.180, 6.187, 6.188 et 6.188 on obtient 6.169. On refait un raisonnement similaire pour obtenir 6.170.

6.3.5 Calcul de la Transformée de Laplace de la v.a L avec $L > 0$.

On a le résultat suivant :

Proposition 6.3.5. *Soit $\theta > 0$, on a :*

$$\mathbb{E}\left[e^{-\theta L} \mathbb{I}_{L>0}\right] = \frac{1}{2\theta}\left(1 - \frac{1}{\cosh\sqrt{2\theta}}\right) \ . \tag{6.190}$$

Preuve.
Notons :

$$\begin{aligned}
A_1 &= W(s_-) > W(s_+) \text{ et } S^+ < (W(s_-) + 1) \vee S^- \ , \\
A_2 &= W(s_+) > W(s_-) \text{ et } S^- > (W(s_+) + 1) \vee S^+ \ , \\
B_1 &= W(s_-) > W(s_+) \text{ et } S^- < W(s_-) + 1 \text{ et } S^+ < W(s_-) + 1 \ , \\
B_2 &= W(s_-) > W(s_+) \text{ et } S^- > W(s_-) + 1 \text{ et } S^+ < S^- \ .
\end{aligned}$$

On a $A_1 = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, avec ces notations et d'après les lemme 6.3.3 et 6.3.4 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-\theta L}\mathbb{I}_{L>0}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta L}\mathbb{I}_{L=s_+}\right] && (6.191)\\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\theta S^+}\mathbb{I}_{A_1\cup A_2}\right] && (6.192)\\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{B_1}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{B_2}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{A_2}\right] \ . && (6.193)
\end{aligned}$$

Evaluons chacun des trois termes de la dernière égalité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{A_2}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)>W(s_-) \text{ et } S^->(W(s_+)+1)\vee S^+}\right] && (6.194)\\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)>W(s_-),\ S^->(W(s_+)+1),\ S^->S^+}\right] && (6.195)\\
&= \int_0^\infty \int_{1-y}^{+\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)>-y,\ W(s_+)<-(1-x),\ S^+<x,\ S^-\in dx,\ W(s_-)\in(-dy)}\right] \ . && (6.196)
\end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que les processus $(W(t), t>0)$ et $(W(t), t<0)$ sont indépendants, ainsi :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{A_2}\right]\\
&= \int_0^\infty dy \int_{1-y}^{+\infty} dx \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)>-y,\ W(s_+)<-(1-x),\ S^+<x}\right] \frac{d}{dx}\frac{d}{dy} Q\left[S^- \le x, W(s_-) \le -y\right] && (6.197)\\
&= -\int_0^\infty dy \int_{1-y}^{+\infty} dx \int_{1-x}^{y} dz \frac{d}{dz}\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)>-z,\ S^+<x}\right] \frac{d}{dx}\frac{d}{dy} Q\left[S^- \le x, W(s_-) \le -y\right] && (6.198)\\
&= \int_0^\infty dy \int_{1-y}^{+\infty} dx \int_{1-x}^{y} dz \frac{d}{dz}\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)>-z,\ S^+<x}\right] \frac{d}{dx}\frac{d}{dy} Q\left[S^- \le x, W(s_-) > -y\right] \ . && (6.199)
\end{aligned}$$

Par les mêmes calculs :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{B_1}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)<W(s_-),\ S^-<(W(s_-)+1),\ S^+<W(s_-)+1}\right] && (6.200)\\
&= \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{1-y} dx \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)<-y,\ S^+<1-y}\right] \frac{d}{dx}\frac{d}{dy} Q\left[S^- \le x, W(s_-) \le -y\right] && (6.201)\\
&= \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{1-y} dx \int_{y}^{+\infty} dz \frac{d}{dz}\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)<-z,\ S^+<1-y}\right] \frac{d}{dx}\frac{d}{dy} Q\left[S^- \le x, W(s_-) \le -y\right] && (6.202)\\
&= \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{1-y} dx \int_{y}^{+\infty} dz \frac{d}{dz}\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)>-z,\ S^+<1-y}\right] \frac{d}{dx}\frac{d}{dy} Q\left[S^- \le x, W(s_-) > -y\right] \ . && (6.203)
\end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{B_2}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_-)>W(s_+),\ S^->(W(s_-)+1),\ S^+<S^-}\right] && (6.204)\\
&= \int_0^\infty dy \int_{1-y}^{+\infty} dx \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)<-y,\ S^+<x}\right] \frac{d}{dx}\frac{d}{dy} Q\left[S^- \le x, W(s_-) \le -y\right] && (6.205)\\
&= \int_0^\infty dy \int_{1-y}^{+\infty} dx \int_{y}^{\infty} dz \frac{d}{dz}\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)<-z,\ S^+<x}\right] \frac{d}{dx}\frac{d}{dy} Q\left[S^- \le x, W(s_-) \le -y\right] && (6.206)\\
&= \int_0^\infty dy \int_{1-y}^{+\infty} dx \int_{y}^{\infty} dz \frac{d}{dz}\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)>-z,\ S^+<x}\right] \frac{d}{dx}\frac{d}{dy} Q\left[S^- \le x, W(s_-) > -y\right] \ . && (6.207)
\end{aligned}$$

Afin de déterminer ces intégrales H. Kesten montre le lemme suivant :

Lemme 6.3.6. *Soient $z \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$ pour tout $\theta > 0$, on a :*

$$\frac{d}{dz}\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)\geq -z,\ S^+<x}\right] = \begin{cases} \frac{\sinh(x\sqrt{2\theta})}{\sinh((x+z)\sqrt{2\theta})} & si\ z \leq 1-x\ , \\ \frac{\sinh(x\sqrt{2\theta})}{\sinh(\sqrt{2\theta})}\exp(-\sqrt{2\theta}(z-1+x)\coth(\sqrt{2\theta})) & si\ z \geq 1-x\ . \end{cases} \tag{6.208}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dz}Q[W(s_-) \geq -z,\ S^- < x] = \begin{cases} \frac{z}{(x+z)^2} & si\ z \leq 1-x\ , \\ (1-y)\exp\left(-(z-1+x)\right) & si\ z \geq 1-x\ . \end{cases} \tag{6.209}$$

de plus $Q\left[S^+ > 1\right] = Q\left[S^- > 1\right] = 0$, $(S^+ \geq W(0) = 0,\ S^- \geq W(0) = 0)$.

Preuve.
H. Kesten montre 6.208 en considérant une marche aléaroire récurrente simple plutôt que le mouvement Brownien puis en passant à la limite. Nous avons laissé de côté cette partie de la preuve. ■

On a :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{B_1}\right] \\
(6.210)\quad &= \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{1-y} dx \int_y^{+\infty} dz \frac{d}{dz}\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)>-z,\ S^+<1-y}\right]\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}Q\left[S^- \leq x, W(s_-) > -y\right] \\
(6.211)\quad &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_y^{+\infty} dz \frac{d}{dz}\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)>-z,\ S^+<1-y}\right]\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}Q\left[S^- \leq x, W(s_-) > -y\right] \\
(6.212)\quad &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_y^{+\infty} dz \frac{\sinh((1-y)\sqrt{2\theta})}{\sinh(\sqrt{2\theta})}\exp(-\sqrt{2\theta}(z-y)\coth(\sqrt{2\theta}))\frac{y}{(x+y)^2} \\
(6.213)\quad &= \int_0^1 dy \int_y^{+\infty} dz \frac{\sinh((1-y)\sqrt{2\theta})}{\sinh(\sqrt{2\theta})}\exp(-\sqrt{2\theta}(z-y)\coth(\sqrt{2\theta}))(1-y) \\
(6.214)\quad &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{+\infty} dz \frac{\sinh(x\sqrt{2\theta})}{\sinh(\sqrt{2\theta})}\exp(-\sqrt{2\theta}(z+x-1)\coth(\sqrt{2\theta}))x \\
(6.215)\quad &= \int_0^{+\infty} dz \int_{1-z}^1 dx \frac{\sinh(x\sqrt{2\theta})}{\sinh(\sqrt{2\theta})}\exp(-\sqrt{2\theta}(z+x-1)\coth(\sqrt{2\theta}))x\ ,
\end{aligned}$$

l'avant dernière égalité est obtenue en faisant le changement de variable $x = 1-y$, la dernière en changeant l'ordre d'intégration. De même

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{A_2}\right] \\
(6.216)\quad &= \int_0^\infty dy \int_{1-y}^1 dx \int_{1-x}^y dz \frac{d}{dz}\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)>-z,\ S^+<x}\right]\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}Q\left[S^- \leq x,\ W(s_-) > -y\right] \\
(6.217)\quad &= \int_0^\infty dy \int_{1-y}^1 dx \int_{1-x}^y dz \frac{\sinh(x\sqrt{2\theta})}{\sinh(\sqrt{2\theta})}\exp(-\sqrt{2\theta}(z-1+x)\coth(\sqrt{2\theta}))(1-x)\exp\left(-(y-1+x)\right)\ ,
\end{aligned}$$

enfin :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{B_2}\right] \\
(6.218)\quad &= \int_0^\infty dy \int_{1-y}^{+\infty} dx \int_y^\infty dz \frac{d}{dz}\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)>-z,\ S^+<x}\right]\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}Q\left[S^- \leq x, W(s_-) > -y\right] \\
(6.219)\quad &= \int_0^\infty dy \int_{1-y}^1 dx \int_y^\infty dz \frac{d}{dz}\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{W(s_+)>-z,\ S^+<x}\right]\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}Q\left[S^- \leq x, W(s_-) > -y\right] \\
(6.220)\quad &= \int_0^\infty dy \int_{1-y}^1 dx \int_y^\infty dz \frac{\sinh(x\sqrt{2\theta})}{\sinh(\sqrt{2\theta})}\exp(-\sqrt{2\theta}(z-1+x)\coth(\sqrt{2\theta}))(1-x)\exp\left(-(y-1+x)\right)\ .
\end{aligned}$$

En sommant 6.217 et 6.220, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{B_2}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{A_2}\right] \tag{6.221}$$

$$= \int_0^\infty dy \int_{1-y}^1 dx \int_{1-x}^{+\infty} dz \frac{\sinh(x\sqrt{2\theta})}{\sinh(\sqrt{2\theta})} \exp(-\sqrt{2\theta}(z-1+x)\coth(\sqrt{2\theta}))(1-x)\exp\left(-(y-1+x)\right) \tag{6.222}$$

$$= \int_0^\infty dz \int_{1-z}^1 dx \int_{1-x}^{+\infty} dy \frac{\sinh(x\sqrt{2\theta})}{\sinh(\sqrt{2\theta})} \exp(-\sqrt{2\theta}(z-1+x)\coth(\sqrt{2\theta}))(1-x)\exp\left(-(y-1+x)\right) \tag{6.223}$$

$$= \int_0^\infty dz \int_{1-z}^1 dx \frac{\sinh(x\sqrt{2\theta})}{\sinh(\sqrt{2\theta})} \exp(-\sqrt{2\theta}(z-1+x)\coth(\sqrt{2\theta}))(1-x)\ . \tag{6.224}$$

En sommant 6.215 et 6.224 on obtient :

$$\mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{B_2}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{A_2}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-\theta s_+}\mathbb{I}_{A_1}\right] \tag{6.225}$$

$$= \int_0^\infty dz \int_{1-z}^1 dx \frac{\sinh(x\sqrt{2\theta})}{\sinh(\sqrt{2\theta})} \exp(-\sqrt{2\theta}(z-1+x)\coth(\sqrt{2\theta})) \tag{6.226}$$

$$= \int_0^1 dx \frac{\sinh(x\sqrt{2\theta})}{\sinh(\sqrt{2\theta})} \int_{1-x}^{+\infty} dz \exp(-\sqrt{2\theta}(z-1+x)\coth(\sqrt{2\theta})) \tag{6.227}$$

$$= \int_0^1 dx \frac{\sinh(x\sqrt{2\theta})}{\sinh(\sqrt{2\theta})} \frac{1}{\sqrt{2\theta}\coth(\sqrt{2\theta})} \tag{6.228}$$

$$= \left(\frac{\cosh(\sqrt{2\theta})}{\sqrt{2\theta}} - \frac{1}{\sqrt{2\theta}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\theta}\cosh(\sqrt{2\theta})} = \frac{1}{2\theta}\left(1 - \frac{1}{\cosh(\sqrt{2\theta})}\right)\ . \tag{6.229}$$

ce qui donne 6.230. ■
Pour obtenir 6.161, H. Kesten utilise la représentation de Mittag-Leffer de $\frac{1}{\cosh(u)}$:

$$\mathbb{E}\left[e^{-\theta L}\mathbb{I}_{L>0}\right] = \frac{1}{2\theta}\left(1 - \frac{1}{\cosh\sqrt{2\theta}}\right) \tag{6.230}$$

$$= \frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)}\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2 + 8\theta} \tag{6.231}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)}\int_0^{+\infty} e^{-y\left(\theta + (2k+1)^2\frac{\pi^2}{8}\right)} \tag{6.232}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\theta y}\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)} e^{-y\left((2k+1)^2\frac{\pi^2}{8}\right)}\ , \tag{6.233}$$

par identification on en déduit :

$$\frac{dQ\left[L \le x,\ L > 0\right]}{dx} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)} e^{-x\left((2k+1)^2\frac{\pi^2}{8}\right)}\ , \tag{6.234}$$

on obtient 6.161 par symétrie.

Quand je considère la petite durée de ma vie, absorbée dans l'éternité précédente et suivante, [...] je m'effraie.

B. Pascal

Partie III

Concentration de la M.A.M.A. récurrente

Dans cette partie on étudie le temps local de la M.A.M.A. , plus particulièrement on s'intéresse au temps local de la M.A.M.A. dans un petit voisinage autour du point de localisation $\tilde{m}_0$ et au point $\tilde{m}_0$ lui même. Le premier chapitre de cette partie (chapitre 7 de la thèse) est consacré à l'énoncé des hypothèses qui seront utilisées ainsi qu'à la présentation des résultats. Dans un second chapitre (chapitre 8) on donne quelques résultats élémentaires sur le milieu aléatoire sous les hypothèses H.1, H.2 et H.3, ainsi qu'une caractérisation du point $\tilde{m}_0$. Dans le troisième chapitre (chapitre 9) on fait l'étude de la Q variable aléatoire :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right], \quad k \in V_{\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}} \ .$$

$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right]$ représente la moyenne du temps local de la M.A.M.A. en un point k entre deux passages à $\tilde{m}_0$ et $V_{\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}} \equiv \{\tilde{M}'_0, \tilde{M}'_0 + 1, \cdots, \tilde{m}_0, \cdots, \tilde{M}_0 - 1, \tilde{M}_0\}$ est l'ensemble des points contenus dans la vallée minimale notée $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$. Nous verrons que la variable aléatoire $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right]$, $k \in V_{\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}$ témoigne de la concentration de la M.A.M.A. dans un petit voisinage autour de $\tilde{m}_0$. En effet nous montrerons dans le quatrième chapitre de cette partie (chapitre 10) qu'en plus d'être localisée pour un instant donné n (objet de la partie II) la marche est concentrée, c'est à dire qu'elle passe la quasi totalité de son temps n dans un voisinage de $\tilde{m}_0$ de taille au plus de l'ordre de $(\ln \ln n)^2$. Le second résultat que nous montrerons est que le temps local en $\tilde{m}_0$ au temps n normalisé par n converge avec une Q probabilité aussi proche de 1 que nous voulons en $\mathbb{P}^{\alpha}$ probabilité vers la Q v.a. :

$$\frac{1}{\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right]} \ ,$$

où $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(V_{\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}\right)\right]$ est la moyenne du temps local dans la vallée $V_{\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}$ entre deux passages à $\tilde{m}_0$. Nous montrerons, enfin, que ces deux résultats ont des conséquences directes sur le maximum des temps locaux de la M.A.M.A. ainsi que sur son lieu favori.

Chapitre 7

Hypothèses et Résultats

7.1 Hypothèses et Notations

Dans ce chapitre on conservera les deux hypothèses nécessaires pour obtenir une M.A.M.A. récurrente :

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right]=0\ , \tag{H.1}$$

$$\mathrm{Var}_Q\left[\ln\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right]\equiv\sigma^2>0\ . \tag{H.2}$$

Et l'on considérera de plus l'hypothèse de régularité suivante :

$$Q\left[\eta\leq\alpha_0\leq 1-\eta\right]=1,\quad 0<\eta\leq\frac{1}{2}\ . \tag{H.3}$$

Cette dernière hypothèse remplace l'hypothèse plus faible H.6 (page 43) de la partie précédente. Nous discuterons dans la conclusion (page 221) des extensions possibles de nos résultats à des hypothèses plus faibles que H.3.

Une première remarque sur H.3, cette hypothèse implique qu'il existe $\eta_0'\geq\eta$ et $\eta_0''\geq\eta$ tels que :

$$\sup\left\{x,\ Q\left[\alpha_0\geq x\right]=1\right\}=\eta_0'\ , \tag{7.1}$$

$$\sup\left\{x,\ Q\left[\alpha_0\leq 1-x\right]=1\right\}=\eta_0''\ , \tag{7.2}$$

pour simplifier les notations on supposera, sans perte de généralité, que $\eta_0'=\eta_0''\equiv\eta_0$. On remarque de plus que H.2 implique que $\eta_0<\frac{1}{2}$, en effet :

$$H.2\Rightarrow Q\left[\alpha_0=\frac{1}{2}\right]<1\Rightarrow\sup\left\{x,\ Q\left[\alpha_0\geq x\right]=1\right\}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta_0<\frac{1}{2}\ . \tag{7.3}$$

On adoptera la notation suivante :

$$I_{\eta_0}=\ln\frac{1-\eta_0}{\eta_0},\quad\left(0<\eta_0<\frac{1}{2}\right)\ . \tag{7.4}$$

Dans cette partie $\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}$ désignera la vallée "minimale" dans laquelle la M.A.M.A. est prisonnière (voir la partie II chapitre 5), on renvoie le lecteur au paragraphe 8.2.2 pour la définition des points $\tilde{m}_0$, $\tilde{M}_0'$ et $\tilde{M}_0$. On notera :

$$V_{\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}=\left\{\tilde{M}_0'\ ,\ \tilde{M}_0'+1\ ,\cdots,\ \tilde{m}_0,\cdots,\ \tilde{M}_0-1,\ \tilde{M}_0\right\}\ , \tag{7.5}$$

i.e. $V_{\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}$ est l'ensemble des points appartenant à $\mathbb{Z}$, contenus dans la vallée $\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}$. Soit $n>3$, on notera

$$V_{\tilde{m}_0} \equiv V_{\tilde{m}_0}(f,n) = \{\tilde{m}_0 - f(n),\ \cdots,\tilde{m}_0,\ \cdots,\ \tilde{m}_0 + f(n)\}\ , \tag{7.6}$$

où $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$, $F>1$ sera précisée dans le paragraphe suivant, $V^c_{\tilde{m}_0}$ désignera le complémentaire dans $\mathbb{Z}$ de $V_{\tilde{m}_0}$. On notera aussi :

$$V^{c,r}_{\tilde{m}_0} = \left\{\tilde{M}_0',\cdots,\tilde{m}_0 - f(n) - 1\right\} \cup \left\{\tilde{m}_0 + f(n) + 1,\cdots,\tilde{M}_0\right\}\ , \tag{7.7}$$

qui est le complémentaire de $V_{\tilde{m}_0}$ dans $V_{\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}$. Enfin notons :

$$V^*_{\tilde{m}_0} = V_{\tilde{m}_0} \setminus \{\tilde{m}_0\}\ , \tag{7.8}$$

$$V^+_{\tilde{m}_0} = \{\tilde{m}_0 + 1,\cdots,\ \tilde{m}_0 + f(n)\}\ , \tag{7.9}$$

$$V^-_{\tilde{m}_0} = \{\tilde{m}_0 - f(n),\cdots,\tilde{m}_0 - 1\}\ . \tag{7.10}$$

Soit $k\in\mathbb{Z}$, on rappelle que $\mathcal{L}(k,T)$ est le temps local de la M.A.M.A. en k en un temps T (où T peut être une variable aléatoire ou déterministe). Soit $A\subset\mathbb{Z}$ on note

$$\mathcal{L}(A,T) \equiv \sum_{j\in A}\mathcal{L}(j,T) = \sum_{i=1}^{T}\sum_{j\in A}\mathbb{I}_{\{X_i=j\}}\ . \tag{7.11}$$

Une dernière notation avant d'énoncer nos résultats, si $A\subset\mathbb{Z}$, $|A|$ désignera le nombre d'éléments dans A.
On a obtenu deux résultats principaux sur le temps local de la M.A.M.A. pour un instant donné n : les théorèmes 7.2.1 et 7.3.1, le premier concerne le :

7.2 Temps local dans un voisinage de $\tilde{m}_0$

Théorème 7.2.1. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour toute suite* $(\delta_n,\ n\in\mathbb{N})$ *positive décroissante telle que* $\lim_{n\to\infty}\delta_n(\ln\ln n)^2 = \infty$ *et* $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$, *tout* $\epsilon>0$ *il existe* $n_0 \equiv n_0\Big(\epsilon, I_{\eta_0},\sigma,\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right],$ $Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\Big)$ *tel que pour tout* $n>n_0$ *et tout* $\alpha\in G_n'$ *on a :*

$$\mathbb{P}^\alpha_0\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},n) \geq n(1-\delta_n)\right] \geq 1 - \frac{4}{\eta_0}\frac{1}{\delta_n F(\ln\ln n)^2} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right)\ , \tag{7.12}$$

et $Q[G_n'] \geq 1-\epsilon$. $V_{\tilde{m}_0} = \{\tilde{m}_0 - [F(\ln\ln n)^2],\cdots,\tilde{m}_0,\cdots,\tilde{m}_0 + [F(\ln\ln n)^2]\}$, $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2}Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, *et* $R = 1000$.

Remarque 7.2.2. L'ensemble des bons environnements G' joue un rôle similaire à l'ensemble des bons environnements G de la partie II, il sera défini dans le chapitre 3 (page 181).

Ce résultat montre que pour tout environnement α dans l'ensemble des "bons" environnements G' la M.A.M.A. reste un temps supérieur à $n(1-\delta_n)$ (où $\delta_n\to 0$), dans un voisinage de $\tilde{m}_0$ au plus de taille $F(\ln\ln n)^2$ avec une $\mathbb{P}^\alpha$ probabilité proche de 1. On a donc non seulement une localisation de la M.A.M.A. récurrente (résultat de Y. Sinai), mais également une concentration de la M.A.M.A. dans un petit intervalle. On remarque de plus que la taille du voisinage que nous avons trouvée pour la localisation (voir 6.1) n'est pas aussi réduite que celle que nous trouvons pour la concentration.

Pour montrer le théorème 7.2.1 nous avons étudié le potentiel aléatoire $(S_m,\ m \in \mathbb{Z})$ dans le complémentaire du voisinage de $\tilde{m}_0$ noté $V^{c,r}_{\tilde{m}_0}$, la proposition ci-dessous est le résultat clé sur le milieu aléatoire qui nous a permis de montrer ce théorème :

Proposition 7.2.3. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \equiv n_0\left(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$ on a :*

$$Q\left[\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] > \frac{2}{\eta_0}\frac{1}{f(n)+1}\right] \leq \epsilon\ , \tag{7.13}$$

où

$$f(n) = [F(\ln\ln n)^2], \quad F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2} Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2, \tag{7.14}$$

$E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ *et* $R = 1000$.

Ce résultat montre que la somme $\sum_{k\in V^{c,r}_{\tilde{m}_0}} \mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]$ tend vers 0 avec une Q probabilité proche de un. En particulier cela signifie, qu'avec une Q probabilité aussi proche de 1 que l'on veut, en moyenne, la M.A.M.A. n'atteindra aucun point $k \in V^{c,r}_{\tilde{m}_0}$ en un temps de retour à $\tilde{m}_0$. Et ceci malgré le fait que $\frac{|V^{c,r}_{\tilde{m}_0}|}{|V_{\{\tilde{M}'_0,\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}|} \approx 1$ et que la M.A.M.A. reste la totalité de son temps dans $V_{\{\tilde{M}'_0,\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}$ avec une $\mathbb{P}^{\alpha}$ probabilité proche de 1.

Le second résultat montre la convergence en $\mathbb{P}^{\alpha}$ probabilité de $\frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0,n)}{n}$ vers une variable dépendant uniquement du milieu α et de n avec une Q probabilité aussi proche de 1 que l'on veut :

7.3 Temps local au point $\tilde{m}_0$

Le théorème ci-dessous précise le théorème 7.2.1 tout en se limitant au point $\tilde{m}_0$, c'est un résultat de type loi faible des grands nombres pour le temps local de la M.A.M.A. en $\tilde{m}_0$. Nous avons ainsi obtenu une convergence du temps local en $\tilde{m}_0$ normalisé par n, du même type que celle qu'obtient Y. Sinai pour $(X_n, n \in \mathbb{N})$, vers une quantité dépendant uniquement du milieu aléatoire et de n :

Théorème 7.3.1. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour toute suite $(\delta_n, n \in \mathbb{N})$ positive décroissante telle que $\lim_{n\to\infty}\delta_n(\ln\ln n)^2 = \infty$ et $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$, pour tout $\epsilon > 0$, tout $\delta > 0$, tel que $\delta\mu < 1$ il existe $n_0 \equiv n_0\left(\epsilon, \delta, \mu, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout $\alpha \in G'_n$ on a :*

$$\mathbb{P}^{\alpha}_0\left[\left|\frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0,n)}{n} - \frac{1}{\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}'_0,\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]}\right| > \delta\right] \leq \frac{4}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} + \frac{4e^{-\frac{\delta}{2}n^{1/2}}}{\delta} \tag{7.15}$$

et $Q\left[G'_n\right] \geq 1-\epsilon$. $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0<-I_{\eta_0}/2\right])^{1/2}Q\left[\epsilon_0>I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$, $\mu = 3 + \frac{2}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\eta_0}\left(\frac{2e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^3} + \frac{(E_2+3)}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^2} + \frac{3(E_2-1)}{1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}\right)$,

$E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon}\frac{I_{\eta_0}(I_{\eta_0}\vee 1)(21E+1)}{\left(Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\wedge Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ *et* $R = 1000$.

On peut donner facilement une idée intuitive de ce résultat : on sait que la M.A.M.A. reste prisonnière

dans la vallée $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ avec une probabilité proche de un (voir proposition 5.1.2) jusqu'à un instant donné n. Ainsi on peut considérer que jusqu'à cet instant n le temps moyen de retour en $\tilde{m}_0$ est égal à $\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]$, on peut donc découper l'intervalle de temps $\{1,\cdots,n\}$ en $\mathcal{L}(\tilde{m}_0,n)$ tranches de longueur $\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]$, d'où

$$n \approx \mathcal{L}(\tilde{m}_0,n)\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \Leftrightarrow \frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0,n)}{n} \approx \frac{1}{\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]} \ . \tag{7.16}$$

Une remarque importante est qu'avec une Q probabilité proche de un $\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]$ est bornée par une constante ne dépendant pas de n, nous montrerons en effet dans le chapitre 9 (troisième de cette partie) la proposition suivante :

Proposition 7.3.2. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0\left(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$:*

$$Q\left[\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] > \mu\right] \leq \epsilon \ , \tag{7.17}$$

où

$$\mu = 3 + \frac{2}{\eta_0}\left(\frac{2e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^3} + \frac{(E_2+3)}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^2} + \frac{3(E_2-1)}{1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}\right), \tag{7.18}$$

$E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon}\frac{I_{\eta_0}(I_{\eta_0}\vee 1)(21E+1)}{\left(Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\wedge Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, *et* $R = 1000$.

On remarque dans ce résultat le phénomène suivant : bien que $V_{\tilde{m}_0}$ soit une fonction de n ($|V_{\tilde{m}_0}| = 2F(\ln\ln n)^2 + 1$), avec une Q probabilité proche de un la M.A.M.A. en un temps de retour à $\tilde{m}_0$ visite, en moyenne, au plus quelques points de $V_{\tilde{m}_0}$ un nombre de fois très limité (tel que la somme $\sum_{k\in V_{\tilde{m}_0}} \mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]$ soit bornée par une valeur indépendante de n). Si on rassemble maintenant les résultats des propositions 7.2.3 et 7.3.2 on obtient (pour n suffisamment grand) :

$$\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] = \mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] + \mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \tag{7.19}$$

$$\leq \mu + \frac{2}{F(\ln\ln n)^2} \tag{7.20}$$

$$\leq 2\mu \ , \tag{7.21}$$

avec une Q probabilité aussi proche de 1 que nous voulons. Ce qui montre bien que $\mathbb{E}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]$ est bornée par une constante indépendante de n avec une Q probabilité aussi proche de 1 que nous souhaitons.

Du théorème 7.3.1 on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 7.3.3. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour toute suite $(\delta_n,\ n \in \mathbb{N})$ positive décroissante telle que $\lim_{n\to\infty}\delta_n(\ln\ln n)^2 = \infty$ et $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$, tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \equiv n_0\Big(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]$, $Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\Big)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout $\alpha \in G_n'$ on a :*

$$\mathbb{P}^\alpha_0\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0,n) \geq \frac{n}{2\mu}\right] \geq 1 - \frac{4}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} - (2\mu)e^{-\frac{1}{2\mu}n^{1/2}} \tag{7.22}$$

et $Q\left[G'_n\right] \geq 1-\epsilon$, $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0<-I_{\eta_0}/2\right])^{1/2}Q\left[\epsilon_0>I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$, $\mu = 3+\frac{2}{\eta_0}\left(\frac{2e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^3}+\frac{(E_2+3)}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^2}+\frac{3(E_2-1)}{1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}\right)$,
$E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon}\frac{I_{\eta_0}(I_{\eta_0}\vee 1)(21E+1)}{\left(Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\wedge Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ *et* $R = 1000$.

Ces résultats montrent donc qu'en plus d'être **localisée** la M.A.M.A. est **concentrée** et que le lieu de concentration et celui de la localisation sont extrêmement liés. Dans le paragraphe suivant nous montrons que ce phénomène de concentration de la M.A.M.A. a des conséquences sur le maximum des temps locaux et le lieu favori de la M.A.M.A. :

7.4 Conséquences sur le maximum des temps locaux et le lieu favori de la M.A.M.A.

Rappelons la définition de l'ensemble des lieux favoris de la M.A.M.A. et du maximum des temps locaux pour un instant n fixé :

Définition 7.4.1.

$$\bar{\mathbb{F}}(n) = \left\{k\in\mathbb{Z},\ \mathcal{L}(k,n) = \max_{j\in\mathbb{Z}}\{\mathcal{L}(j,n)\}\right\}\ , \tag{7.23}$$

$$\mathcal{L}^*(n) = \max_{k\in\mathbb{Z}}\left(\mathcal{L}(k,n)\right)\ . \tag{7.24}$$

Le corollaire 7.3.3 implique :

Corollaire 7.4.2. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour toute suite* $(\delta_n,\ n\in\mathbb{N})$ *positive décroissante telle que* $\lim_{n\to\infty}\delta_n(\ln\ln n)^2 = \infty$ *et* $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$, *tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $n_0 \equiv n_0\Big(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\Big)$ *tel que pour tout* $n > n_0$ *et tout* $\alpha\in G'_n$ *on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{L}^*(n)\geq\frac{n}{2\mu}\right]\geq 1-\frac{4}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n}-(2\mu)e^{-\frac{1}{2\mu}n^{1/2}}\ , \tag{7.25}$$

$Q\left[G'_n\right]\geq 1-\epsilon$ *(l'expression de* μ *est donnée en 7.18, celle de* F *en 7.14).*

On remarque que ce résultat est compatible avec, par exemple, le résultat $\mathbb{P}.p.s.$ de Z. Shi [90] suivant, supposons H.1, H.2 et H.3 alors :

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{\mathcal{L}^*(n)}{n} > c_2\ \mathbb{P}.p.s.\ , \tag{7.26}$$

où $c_2 > 0$.

Le résultat ci-dessous est une conséquence du théorème 7.2.1 et du corollaire 7.4.2 :

Corollaire 7.4.3. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour toute suite* $(\delta_n,\ n\in\mathbb{N})$ *positive décroissante telle que* $\lim_{n\to\infty}\delta_n(\ln\ln n)^2 = \infty$ *et* $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$, *tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $n_0 \equiv n_0\Big(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\Big)$ *tel que pour tout* $n > n_0$ *et tout* $\alpha\in G'_n$ *on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bar{\mathbb{F}}(n)\subset V_{\tilde{m}_0}\right]\geq 1-\frac{8}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n}-(2\mu)e^{-\frac{1}{2\mu}n^{1/2}}-\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)}\right)\ , \tag{7.27}$$

en particulier pour tout $\delta > 0$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcup_{\tilde{k}^*\in\bar{\mathbb{F}}(n)}\left\{\left|\frac{\tilde{k}^*}{(\ln n)^2}-m_0\right|>\delta\right\}\right]\leq\frac{8}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n}+(2\mu)e^{-\frac{1}{2\mu}n^{1/2}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)}\right) \tag{7.28}$$

avec $Q\left[G_n'\right]\geq 1-\epsilon$. L'expression de F est donné par 7.14 et de μ par 7.18.

Notons $F(n)=\max\{m\in\mathbb{Z},\ m\in\bar{\mathbb{F}}(n)\}$, on déduit de ce corollaire et du théorème de Y. Sinai que $\frac{F(n)}{(\ln n)^2}$ et $\frac{X_n}{(\ln n)^2}$ ont la même $\mathbb{P}$ distribution limite (voir théorème 6.3.1). On note que ceci est en accord avec les résultats $\mathbb{P}.p.s.$ de Y. Hu et Z. Shi ([44],[46]) :

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{F(n)}{(\ln n)^2\ln\ln\ln n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{(\ln n)^2\ln\ln\ln n}=\frac{8}{\pi^2\sigma^2}\quad\mathbb{P}.p.s\ . \tag{7.29}$$

On trouvera dans la conclusion une série de questions et de conjectures sur le maximum des temps locaux et le lieu favori de la M.A.M.A. en relation avec les résultats que nous venons de présenter.

Chapitre 8

Propriétés élémentaires du milieu aléatoire sous les hypothèses H.1, H.2 et H.3

Dans ce paragraphe on commence par rappeler des conséquences simples de l'hypothèse H.3 et la notion de vallée. On adapte ensuite certains résultats relatifs au milieu aléatoire, montrés dans la partie II sous l'hypothèse H.6 (voir page 43), à l'hypothèse H.3. Étant donné que H.3 est plus forte que H.6 nous verrons que l'expression de certains résultats obtenus dans la partie II est simplifiée. On montre ensuite quelques résultats élémentaires supplémentaires (lemmes 8.2.7 à 8.2.11) puis on caractérise le point $\tilde{m}_0$.

8.1 Rappels sur l'hypothèse H.3 et sur les vallées

8.1.1 Sur l'hypothèse H.3

On rappelle que pour simplifier les écritures on a choisi :

$$\sup\{x,\ Q[\alpha_0 \geq x] = 1\} = \sup\{x,\ Q[\alpha_0 \leq 1-x] = 1\} \equiv \eta_0, \quad 0 < \eta_0 < 1/2\ . \tag{8.1}$$

On a alors adopté la notation suivante :

$$I_{\eta_0} = \ln \frac{1-\eta_0}{\eta_0}, \quad \left(0 < \eta_0 < \frac{1}{2}\right)\ , \tag{8.2}$$

ainsi :

$$\inf\{x,\ Q[\epsilon_0 \leq x] = 1\} = I_{\eta_0}\ , \tag{8.3}$$

$$\sup\{x,\ Q[\epsilon_0 \geq x] = 1\} = -I_{\eta_0}\ , \tag{8.4}$$

on rappelle que $\epsilon_0 = \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}$. On s'est donc restreint au cas où le support de ϵ_0 est symétrique, cependant ϵ_0 n'est pas, a priori, une variable aléatoire symétrique.
Une dernière remarque très simple qui nous sera utile dans le paragraphe 8.2.3 et le chapitre 9 : par 8.3 $Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right] > 0$ et de même $Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] > 0$ par 8.4.

8.1.2 Rappels sur les vallées

Dans cette partie nous avons supprimé l'interpolation linéaire pour la définition du potentiel aléatoire ($S_m,\ m \in \mathbb{Z}$), on a :

Définition 8.1.1. Nous appellerons potentiel aléatoire et nous noterons $(S_m,\ m \in \mathbb{Z})$, le processus défini par :

$$S_k = \begin{cases} \sum_{1 \le i \le k} \epsilon_i, & k = 1, 2, \cdots , \\ \sum_{k \le i \le -1} \epsilon_i, & k = -1, -2, \cdots , \end{cases}$$

et $S_0 = 0$ avec $\left(\epsilon_i \equiv \ln \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i},\ i \in \mathbb{Z}\right)$. De plus :

$$S_m^n = \frac{S_m}{\ln n},\ m \in \mathbb{Z} \ . \tag{8.5}$$

On rappelle également la définition d'une vallée et de la profondeur d'une vallée pour le potentiel aléatoire $(S_m,\ m \in \mathbb{Z})$:

Définition 8.1.2. On dira que le triplet $\{\tilde{M}', \tilde{m}, \tilde{M}''\}$ est une vallée si :

$$S_{\tilde{M}'} = \max_{\tilde{M}' \le t \le \tilde{m}} S_t \ , \tag{8.6}$$

$$S_{\tilde{M}''} = \max_{\tilde{m} \le t \le \tilde{M}''} S_t \ , \tag{8.7}$$

$$S_{\tilde{m}} = \min_{\tilde{M}' \le t \le \tilde{M}''} S_t \ . \tag{8.8}$$

si $\tilde{m}$ n'est pas unique, on choisira le point vérifiant 8.8 ayant la plus petite valeur absolue.

Dans cette partie la notion de raffinement définie au paragraphe 4.2.1 n'intervient pas directement, on la laisse donc de côté.

Définition 8.1.3. On appellera profondeur de la vallée $\{\tilde{M}_1, \tilde{m}, \tilde{M}_2\}$ et on notera $d([\tilde{M}_1, \tilde{M}_2])$ la quantité :

$$\min(S_{\tilde{M}_1} - S_{\tilde{m}}, S_{\tilde{M}_2} - S_{\tilde{m}}) \ . \tag{8.9}$$

On termine ces rappels par la :

Définition 8.1.4. Soient $\gamma > 0$ et $n > 3$, on dira que la vallée $\{\tilde{M}_1, \tilde{m}_2, \tilde{M}_2\}$ contient le point 0 et est de profondeur supérieure à $\Gamma_n \equiv \ln n + \gamma \ln \ln n$ si et seulement si :

1. $0 \in [\tilde{M}_1, \tilde{M}_2]$,
2. $d\left(\{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2\}\right) \ge \Gamma_n$,
3. si $\tilde{m}_2 < 0,\ S_{\tilde{M}_2} - \max_{\tilde{m}_2 \le t \le 0} (S_t) \ge \gamma \ln \ln n$,
   si $\tilde{m}_2 > 0,\ S_{\tilde{M}_1} - \max_{0 \le t \le \tilde{m}_2} (S_t) \ge \gamma \ln \ln n$.

On renvoie le lecteur à la page 56, pour la construction de la vallée "minimale" $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$. On rappelle cependant les propriétés élémentaires de cette vallée qui nous servirons dans cette partie. $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ contient le point 0 et est de profondeur supérieure à Γ_n, de plus elle est "minimale" c'est à dire que tout autre vallée contenue dans cette vallée ne contient pas le point 0 ou n'est pas de profondeur supérieure à Γ_n (i.e ne vérifie pas la définition 8.1.4). De plus on rappelle que l'on peut définir $\tilde{M}_0'$ et $\tilde{M}_0$ à partir de $\tilde{m}_0$ de la façon suivante : si $\tilde{m}_0 > 0$

$$\tilde{M}_0' = \sup\left\{ l \in \mathbb{Z}_-,\ l < \tilde{m}_0,\ S_l - S_{\tilde{m}_0} \ge \Gamma_n,\ S_l - \max_{0 \le k \le \tilde{m}_0} S_k \ge \gamma \ln \ln n \right\} \ , \tag{8.10}$$

$$\tilde{M}_0 = \inf\left\{ l \in \mathbb{Z}_+,\ l > \tilde{m}_0,\ S_l - S_{\tilde{m}_0} \ge \Gamma_n \right\} \ . \tag{8.11}$$

Si $\tilde{m}_0 < 0$:

$$\tilde{M}_0' = \sup\left\{ l \in \mathbb{Z}_-,\ l < \tilde{m}_0,\ S_l - S_{\tilde{m}_0} \ge \Gamma_n \right\} \ , \tag{8.12}$$

$$\tilde{M}_0 = \inf\left\{ l \in \mathbb{Z}_+,\ l > \tilde{m}_0,\ S_l - S_{\tilde{m}_0} \ge \Gamma_n,\ S_l - \max_{\tilde{m}_0 \le k \le 0} S_k \ge \gamma \ln \ln n \right\} \ . \tag{8.13}$$

Si $\tilde{m}_0 = 0$:

$$\tilde{M}_0' = \sup\left\{l \in \mathbb{Z}_-^*,\ S_l - S_{\tilde{m}_0} \geq \Gamma_n\right\} \ , \tag{8.14}$$

$$\tilde{M}_0 = \inf\left\{l \in \mathbb{Z}_+^*,\ S_l - S_{\tilde{m}_0} \geq \Gamma_n\right\} \ . \tag{8.15}$$

Nous avons également montré dans la seconde partie que la vallée $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ existait avec une Q probabilité proche de 1 (voir lemme 4.2.13, page 60) :

Lemme 8.1.5. *Supposons H.1 et H.2 et H.3, pour tout $\gamma > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(\sigma, \gamma, E[|\epsilon_0|^3])$ tel que pour tout $n > n_0$ on a :*

$$Q\left[\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\} \ \textit{existe}\ \right] \geq 1 - \left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right) \ . \tag{8.16}$$

Remarque 8.1.6. Dans toute la suite on se servira du lemme 8.1.5, on ne fera cependant pas toujours apparaître la dépendance en γ qui apparaîtra dans les choix de n_0, n_1 ...

On rappelle maintenant quelques résultats que l'on a montrés dans la partie II et dont on va se resservir dans cette partie.

8.2 Description du milieu aléatoire sous H.1, H.2 et H.3

8.2.1 Résultats élémentaires

On ne donnera pas de preuves des résultats ci-dessous, elles sont une version simplifiée de ce qui a déjà été fait dans le second chapitre de la partie II. On travaillera toujours à droite de l'origine, c'est à dire avec $(S_m, m \in \mathbb{N})$, on obtient par symétrie des résultats identiques pour $m \in \mathbb{Z}_-$.

Commençons par l'inégalité de Bernstein :

Lemme 8.2.1. *Supposons H.1, H.2 et H.3. Pour tout $q > 0$ et $p > 0$ tels que $q < (\sigma^2 p) \wedge \left(\frac{\sigma^4 p}{2e^{I_{\eta_0}}}\right)$ on a :*

$$Q\left[|S_p| > q\right] \leq 2e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2 p}\left(1 - \frac{2qe^{I_{\eta_0}}}{\sigma^4 p}\right)} \ , \tag{8.17}$$

Pour tout $p > 1$, tout $s > 0$ et tout $k > 1$ tel que $\ln k < (1+s)32\sigma^2 p$, on a pour tout $0 \leq j \leq p$:

$$Q\left[|S_p - S_j| > \left(32(1+s)\sigma^2 p \ln k\right)^{1/2}\right] \leq 2e^{-\ln k + \frac{(p-j)\ln k}{(1+s)64p} + \frac{(p-j)(\ln k)^{3/2} e^{I_{\eta_0}}}{((1+s)32\sigma^2 p)^{3/2}}} \ . \tag{8.18}$$

On adoptera les notations suivantes, soit $a > 0$:

$$V_a^+ \equiv V_a^+(S_j, j \in \mathbb{N}) = \begin{cases} \inf\{m \in \mathbb{N}^*,\ S_m \geq a\} \ , \\ +\infty, \text{ si un tel } m \text{ n'existe pas.} \end{cases} \tag{8.19}$$

$$V_a^- \equiv V_a^-(S_j, j \in \mathbb{N}) = \begin{cases} \inf\{m \in \mathbb{N}^*,\ S_m \leq -a\} \ , \\ +\infty, \text{ si un tel } m \text{ n'existe pas.} \end{cases} \tag{8.20}$$

On a :

Lemme 8.2.2. *Supposons H.1, H.2 et H.3, soient $a > 0$, $c > 0$ on a :*

$$Q\left[V_a^- < V_c^+\right] \leq \frac{c + I_{\eta_0}}{c + a + I_{\eta_0}} \ , \tag{8.21}$$

$$Q\left[V_a^- > V_c^+\right] \leq \frac{a + I_{\eta_0}}{c + a + I_{\eta_0}} \ , \tag{8.22}$$

où $I_{\eta_0} = \ln \frac{1-\eta_0}{\eta_0}$. *Soient* $a \equiv a(n)$ *et* $c \equiv c(n)$ *deux suites positives croissantes tel que* $\lim_{n\to\infty} a(n) = \lim_{n\to\infty} c(n) = +\infty$, *notons* $d = a \vee c$, *alors il existe* $n_0 \equiv n_0(d, \sigma, \mathbb{E}[|\epsilon_0|^3])$ *tel que pour tout* $n > n_0$ *et tout* $L > (2d^2) + 1$ *on a :*

$$Q\left[V_a^- \wedge V_c^+ > L\right] \leq 2q_1^{\frac{L\sigma^2}{(2d)^2+\sigma^2}} \ , \tag{8.23}$$

où $\sigma = \mathbb{E}_Q\left[\epsilon_0^2\right]$ *et* $q_1 = 0.7 + \frac{3{,}75\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]}{d\sigma^2} < 1$.

On voit que l'hypothèse H.3 rend les expressions 8.21 et 8.22 plus simple que 4.68 et 4.69 (page 52) en réduisant les termes correctifs.

Notation : On notera $Q[.|S_0 = y] = Q_y[.]$ ($Q[.|S_0 = 0] \equiv Q_0[.] = Q[.]$).

Remarque 8.2.3. • Soit $c > 0$, on a :

$$Q\left[V_0^- > V_c^+\right] \leq \frac{I_{\eta_0}}{I_{\eta_0} + c} \ , \tag{8.24}$$

En effet soit $a > 0$, on a par 8.22 :

$$Q\left[V_a^- > V_c^+\right] \leq \frac{a + I_{\eta_0}}{a + I_{\eta_0} + c} \ , \tag{8.25}$$

l'événement $V_a^- > V_c^+$ étant décroissant lorsque a décroît, on obtient :

$$\lim_{a\to 0} Q\left[V_a^- > V_c^+\right] = Q\left[V_0^- > V_c^+\right] \leq \frac{I_{\eta_0}}{I_{\eta_0} + c} \ . \tag{8.26}$$

• Soit $c > 0$, $0 \leq y \leq c$ et $a > 0$ tel que $a - c \geq 0$ alors $Q_y[V_a^+ < V_0^-]$ est croissante en y, en effet :

$$Q_y[V_a^+ < V_0^-] = Q[V_{a-y}^+ < V_y^-] \tag{8.27}$$

$$= Q\left[\max_{0<m<V_y^-}(S_m) \geq a - y\right] \tag{8.28}$$

la première égalité est obtenue par stationnarité du milieu. V_y^- étant croissant en y, $\max_{0<m<V_y^-}(S_m)$ l'est aussi, ainsi l'événement $\max_{0<m<V_y^-}(S_m) + y \geq a$ est croissant en y donc $Q_y[V_a^+ < V_0^-]$ est croissante en y.

On termine ce paragraphe par la remarque suivante :

Remarque 8.2.4. Pour tout $a > 0$, $b > 0$ et $l > 0$ on a :

$$Q\left[V_c^+ > l\right] \leq Q\left[V_c^+ \wedge V_a^- > l\right] + Q\left[V_c^+ > V_a^-\right] \ . \tag{8.29}$$

En effet, on a :

$$\{V_c^+ > l\} = \{V_c^+ > l,\ V_c^+ \leq V_a^+\} \cup \{V_c^+ > l,\ V_c^+ > V_a^+\} \tag{8.30}$$

$$\subset \{V_c^+ \wedge V_a^+ > l\} \cup \{V_c^+ > V_a^+\} \ . \tag{8.31}$$

ce qui donne 8.29. Nous appellerons symétrisation l'opération qui consiste à écrire l'inégalité 8.29.

8.2.2 Résultats sur la vallée $\{\tilde{M}_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0'\}$.

Les deux lemmes suivants sont extraits de la partie II (à partir de la page 61).

Lemme 8.2.5. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \equiv n_0\left(R, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$, on a :*

$$Q\left[\tilde{M}_0 \leq E(\ln n)^2\right] \geq 1 - \frac{3\epsilon}{R}\ , \tag{8.32}$$

$$Q\left[\tilde{M}_0' \geq -E(\ln n)^2\right] \geq 1 - \frac{3\epsilon}{R}\ , \tag{8.33}$$

où $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, R est un paramètre libre que l'on choisira le moment venu.

Lemme 8.2.6. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \equiv n_0\left(R, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$, on a :*

$$Q\left[\tilde{M}_0 - \tilde{m}_0 \geq \frac{(\ln n)^2}{65\sigma^2(\ln\ln n)}\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} - \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}}\ , \tag{8.34}$$

$$Q\left[\tilde{m}_0 - \tilde{M}_0' \geq \frac{(\ln n)^2}{65\sigma^2(\ln\ln n)}\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} - \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}}\ , \tag{8.35}$$

où $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, R est un paramètre libre que l'on choisira le moment venu.

On termine ce paragraphe en montrant le :

Lemme 8.2.7. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, et tout $F > 1$, il existe $n_0 \equiv n_0\left(R, \epsilon, F, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$, on a :*

$$Q\left[\tilde{M}_0 > \tilde{m}_0 + f(n)\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} - \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}}\ , \tag{8.36}$$

supposons de plus $\tilde{m}_0 > 0$, alors pour tout $n > n_0$:

$$Q\left[\tilde{m}_0 > f(n)\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right)\ . \tag{8.37}$$

où $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ et $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$. R et F sont des paramètres libres qui seront choisis ultérieurement.

Preuve.
On remarque d'abord que 8.36 est une conséquence directe du lemme 8.2.6.
On effectue maintenant la preuve de 8.37 . Par le lemme 8.2.6 pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, il existe $n_1 \equiv n_1\left(R, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_1$, on a :

$$Q\left[\tilde{M}_0 - \tilde{m}_0 \geq \frac{(\ln n)^2}{65\sigma^2(\ln\ln n)}\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} - \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}}\ , \tag{8.38}$$

on a supposé $\tilde{m}_0 > 0$ donc par définition $S_{\tilde{m}_0} = \min_{0\leq t\leq\tilde{M}_0}(S_t)$, on en déduit que pour tout $n > n_1$:

$$Q\left[S_{\tilde{m}_0} \leq \min_{0\leq t\leq\frac{(\ln n)^2}{65\sigma^2(\ln\ln n)}}(S_t)\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} - \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}}\ . \tag{8.39}$$

De plus par la remarque 8.2.4 on a :

$$Q\left[V^-_{(\ln\ln n)^3} > \frac{(\ln n)^2}{65\sigma^2(\ln\ln n)}\right] \leq Q\left[V^-_{(\ln\ln n)^3} \wedge V^+_{g(n)} > \frac{(\ln n)^2}{65\sigma^2(\ln\ln n)}\right] + Q\left[V^-_0 > V^+_{g(n)}\right]\ , \tag{8.40}$$

où $g(n) = (\ln n)^{1/4}$ ([7]), par le lemme 8.2.2, on obtient qu'il existe $n_2 \equiv n_2\left(R, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_2$, on a :

$$Q\left[V^-_{(\ln\ln n)^3} \leq \frac{(\ln n)^2}{65\sigma^2(\ln\ln n)}\right] \geq 1 - \mathcal{O}\left(\frac{(\ln\ln n)^3}{(\ln n)^{1/4}}\right)\ . \tag{8.41}$$

[7] Nous ne cherchons pas ici quelque chose d'optimal, ce choix pour $g(n)$ est le plus simple qui nous est apparu.

Or :

$$\left\{ V^-_{(\ln\ln n)^3} \leq \frac{(\ln n)^2}{65\sigma^2(\ln\ln n)},\ S_{\tilde{m}_0} \leq \min_{0\leq t\leq \frac{(\ln n)^2}{65\sigma^2(\ln\ln n)}} (S_t) \right\} \Rightarrow S_{\tilde{m}_0} \leq -(\ln\ln n)^3 \ , \tag{8.42}$$

On déduit de 8.39, 8.41 et 8.42 que pour tout $n > n_1 \vee n_2$ on a :

$$Q\left[S_{\tilde{m}_0} \leq -(\ln\ln n)^3\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right) \ . \tag{8.43}$$

Soit $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$ avec $F > 1$, on remarque qu'il existe $n_3 \equiv n_3(F, I_{\eta_0})$ tel que pour tout $n > n_3$, $\frac{(\ln\ln n)^3}{I_{\eta_0}} \geq f(n)$. Donc pour tout $n > n_3$, même en effectuant uniquement des sauts maximums (égaux à I_{η_0}), le potentiel aléatoire ne peut pas atteindre une valeur inférieure ou égale à $-(\ln\ln n)^3$ en un temps $F(\ln\ln n)^2$, ainsi pour tout $n > n_3$:

$$V^-_{(\ln\ln n)^3} > f(n) \ , \tag{8.44}$$

est toujours vrai. Or :

$$V^-_{(\ln\ln n)^3} > f(n),\ S_{\tilde{m}_0} \leq -(\ln\ln n)^3 \Rightarrow \tilde{m}_0 \geq f(n) \ . \tag{8.45}$$

On en déduit par 8.43 que pour tout $n > n_1 \vee n_2 \vee n_3$:

$$Q\left[\tilde{m}_0 > f(n)\right] \geq 1 - \frac{6\epsilon}{R} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right) \ , \tag{8.46}$$

on obtient le lemme en prenant $n_0 = n_1 \vee n_2 \vee n_3$. ■

8.2.3 Derniers résultats

Soit $a = \frac{I_{\eta_0}}{4}$ (on sait que $0 < I_{\eta_0} \equiv \ln\frac{1-\eta_0}{\eta_0} < +\infty$) et soit $i \in \mathbb{N},\ i \geq 1$, définissons :

$$H_{ia,1} = \begin{cases} \inf\{m > 0,\ S_m \in [a(i-1), ai[\} \ , \\ +\infty, \text{ si un tel } m \text{ n'existe pas.} \end{cases} \tag{8.47}$$

$$H_{ia,k} = \begin{cases} \inf\{m > H_{ia,k-1},\ S_m \in [a(i-1), ai[\} \ , \\ +\infty, \text{ si un tel } m \text{ n'existe pas.} \end{cases} \ k > 1 \ . \tag{8.48}$$

On montre alors le résultat suivant :

Lemme 8.2.8. *Soit $k \geq 1$, pour tout $i > 1$, on a :*

$$Q\left[V_0^- > H_{ia,k}\right] \leq Q\left[V_0^- > V^+_{(i-1)a}\right]\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] Q_{(i-1)a-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} \geq V_0^-\right]\right)^{k-1} \ , \tag{8.49}$$

pour $i = 1$, on a :

$$Q\left[V_0^- > H_{a,k}\right] \leq Q\left[\epsilon_0 \geq 0\right]\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]\right)^{k-1} \ . \tag{8.50}$$

Preuve.
On commence par effectuer une partition sur les valeurs de $H_{ia,k-1}$, on a :

$$Q\left[V_0^- > H_{ia,k}\right] = \sum_{l=1}^{+\infty} Q\left[\bigcap_{m=1}^{l}\{S_m > 0\},\ H_{ia,k-1} = l,\ \bigcap_{m=l+1}^{\bar{H}_{ia,l}}\{S_m > 0\}\right] \ , \tag{8.51}$$

où

$$\bar{H}_{ia,l} = \begin{cases} \inf\{j > l,\ S_j \in [a(i-1), ai[\} \ , \\ +\infty, \text{ si un tel } j \text{ n'existe pas.} \end{cases} \tag{8.52}$$

On remarque que $H_{ia,k-1} = l \Rightarrow (i-1)a \leq S_l \leq ia$ ainsi :

$$Q\left[\bigcap_{m=1}^{l}\{S_m > 0\}\,,\ H_{ia,k-1} = l,\ \bigcap_{m=l+1}^{\bar{H}_{ia,l}}\{S_m > 0\}\right] \tag{8.53}$$

$$= \int_{(i-1)a}^{ia} Q\left[\bigcap_{m=1}^{l}\{S_m > 0\}\,,\ H_{ia,k-1} = l,\ S_l \in dy,\ \bigcap_{m=l+1}^{\bar{H}_{ia,l}}\{S_m > 0\}\right] \tag{8.54}$$

$$= \int_{(i-1)a}^{ia} Q\left[\bigcap_{m=1}^{l}\{S_m > 0\}\,,\ H_{ia,k-1} = l,\ S_l \in dy\right] Q\left[\bigcap_{m=l+1}^{\bar{H}_{ia,l}}\{S_m > 0\}\middle| S_l \in dy\right] \tag{8.55}$$

$$= \int_{(i-1)a}^{ia} Q\left[\bigcap_{m=1}^{l}\{S_m > 0\}\,,\ H_{ia,k-1} = l,\ S_l \in dy\right] Q_y\left[H_{ia,1} < V_0^-\right] \ , \tag{8.56}$$

où la seconde égalité est obtenue par la propriété de Markov et la dernière par la stationnarité du milieu. On effectue maintenant la remarque suivante :

Remarque 8.2.9. • Pour tout $i > 1$ on a :

$$\begin{aligned} Q_y\left[H_{ia,1} < V_0^-\right] &= Q_y\left[H_{ia,1} < V_0^-,\ S_1 \geq (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] + Q_y\left[H_{ia,1} < V_0^-,\ S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] \\ &\leq Q_y\left[S_1 \geq (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] + Q_y\left[H_{ia,1} < V_0^-,\ S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] \qquad (8.57) \\ &= Q_y\left[S_1 \geq (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] + Q_y\left[H_{ia,1} < V_0^-,\ 0 \leq S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] \ , \qquad (8.58) \end{aligned}$$

la dernière égalité vient du fait que $Q_y\left[H_{ia,1} < V_0^-,\ S_1 < 0\right] = 0$. De plus par hypothèse $Q\left[|\epsilon_0| \leq I_{\eta_0}\right] = 1$ et $y \geq (i-1)a$ ainsi :

$$Q_y\left[H_{ia,1} < V_0^-,\ 0 \leq S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] \tag{8.59}$$

$$= \int_{((i-1)a - I_{\eta_0})\vee 0}^{(i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}} Q_y\left[H_{ia,1} < V_0^-,\ 0 \leq S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4},\ S_1 \in dz\right] \ , \tag{8.60}$$

en utilisant la propriété de Markov ainsi que la stationnarité du milieu on obtient :

$$\begin{aligned} & Q_y\left[H_{ia,1} < V_0^-,\ 0 \leq S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] \\ &= \int_{((i-1)a - I_{\eta_0})\vee 0}^{(i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}} Q_z\left[H_{ia,1} < V_0^-\right] Q_y\left[0 \leq S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4},\ S_1 \in dz\right] \qquad (8.61) \\ &\leq \int_{((i-1)a - I_{\eta_0})\vee 0}^{(i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}} Q_z\left[V_{(i-1)a}^+ < V_0^-\right] Q_y\left[0 \leq S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4},\ S_1 \in dz\right] \qquad (8.62) \\ &\leq Q_{(i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V_{(i-1)a}^+ < V_0^-\right] \int_{((i-1)a - I_{\eta_0})\vee 0}^{(i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}} Q_y\left[0 \leq S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4},\ S_1 \in dz\right] \qquad (8.63) \\ &\leq Q_{(i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V_{(i-1)a}^+ < V_0^-\right] Q_y\left[S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] \ , \qquad (8.64) \end{aligned}$$

où la première inégalité est due au fait que $V^+_{(i-1)a} \leq H_{ia,1}$ et la seconde inégalité est obtenu par la croissance de l'application $z \mapsto Q_z\left[V^+_{(i-1)a} < V_0^-\right]$, en remplaçant 8.64 dans 8.58 on obtient :

$$\begin{aligned} Q_y\left[H_{ia,1} < V_0^-\right] &\leq Q_y\left[S_1 \geq (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] + Q_{(i-1)a-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} < V_0^-\right] Q_y\left[S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] \\ &= 1 - Q_{(i-1)a-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} \geq V_0^-\right] Q_y\left[S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] . \end{aligned} \tag{8.65}$$

Pour tout $(i-1)a \leq y \leq ia$,

$$Q_y\left[S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] \geq Q_{ia}\left[S_1 < (i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}\right] \tag{8.66}$$

$$= Q_0\left[S_1 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] = Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] , \tag{8.67}$$

où les deux égalités sont obtenues en utilisant la stationnarité du milieu. Or par hypothèse I_{η_0} est le plus petit réel tel que

$$Q\left[-I_{\eta_0} \leq \epsilon_0\right] = 1 , \tag{8.68}$$

donc

$$Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] > 0 . \tag{8.69}$$

En remplaçant 8.67 dans 8.65 on obtient :

$$Q_y\left[H_{ia,1} < V_0^-\right] \leq 1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] Q_{(i-1)a-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} \geq V_0^-\right] . \tag{8.70}$$

• Pour $i = 1$ on a pour tout $0 \leq y \leq a$:

$$Q_y\left[H_{a,1} < V_0^-\right] = Q_y\left[\inf\{m > 0,\ S_m \in [0,a[\} < V_0^-\right] \tag{8.71}$$

$$\leq Q_y\left[V_0^+ < V_0^-\right] \tag{8.72}$$

$$\leq Q_a\left[V_0^+ < V_0^-\right] \tag{8.73}$$

$$\leq Q\left[S_1 \geq -a\right] = Q\left[\epsilon_0 \geq -a\right] , \tag{8.74}$$

la dernière égalité est obtenue en utilisant la stationnarité du milieu. Par un raisonnement similaire à celui effectué un peu plus haut (voir 8.68-8.69) on a :

$$Q\left[\epsilon_0 \geq -a\right] \equiv Q\left[\epsilon_0 \geq -\frac{I_{\eta_0}}{4}\right] < 1 \tag{8.75}$$

Cette remarque nous a permis de donner une borne supérieure à la probabilité $Q_y\left[H_{ia,1} < V_0^-\right]$ indépendante de y.
On continue maintenant le calcul de la façon suivante :
• Pour $i > 1$, en remplaçant 8.70 dans 8.56, on obtient :

$$Q\left[\bigcap_{m=1}^{l}\{S_m \geq 0\},\ H_{ia,k-1} = l,\ \bigcap_{m=l+1}^{\bar{H}_{ia,l}}\{S_m \geq 0\}\right] \tag{8.76}$$

$$\leq \int_{(i-1)a}^{ia} Q\left[\bigcap_{m=1}^{l}\{S_m \geq 0\},\ H_{ia,k-1} = l,\ S_l \in dy\right]\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] Q_{(i-1)a-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} \geq V_0^-\right]\right) \tag{8.77}$$

$$= Q\left[\bigcap_{m=1}^{l}\{S_m \geq 0\},\ H_{ia,k-1} = l\right]\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] Q_{(i-1)a-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} \geq V_0^-\right]\right) , \tag{8.78}$$

en remplaçant maintenant 8.78 dans 8.51 on a :

$$
\begin{aligned}
(8.79)\qquad & Q\left[V_0^- > H_{ia,k}\right] \\
(8.80)\qquad & \leq \sum_l Q\left[\bigcap_{m=1}^{l}\{S_m \geq 0\},\ H_{ia,k-1} = l\right]\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] Q_{(i-1)a-\frac{I_{\eta_0}}{2}}\left[V^+_{(i-1)a} \geq V_0^-\right]\right) \\
(8.81)\qquad & = Q\left[V_0^- > H_{ia,k-1}\right]\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] Q_{(i-1)a-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} \geq V_0^-\right]\right) ,
\end{aligned}
$$

par récurrence on en déduit :

$$
\begin{aligned}
(8.82)\qquad & Q\left[V_0^- > H_{ia,k}\right] \\
(8.83)\qquad & \leq Q\left[V_0^- > V^+_{(i-1)a}\right]\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] Q_{(i-1)a-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} \geq V_0^-\right]\right)^{k-1} .
\end{aligned}
$$

• Pour $i = 1$, on a par un raisonnement similaire :

$$
(8.84)\qquad Q\left[V_0^- > H_{ia,k}\right] \leq Q\left[\epsilon_0 \geq 0\right]\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]\right)^{k-1} ,
$$

ce qui termine la preuve du lemme. ■
On montre maintenant le lemme suivant :

Lemme 8.2.10. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \equiv n_0\left(R, \epsilon, Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$, on a :*

$$
(8.85)\qquad \sum_{l=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[V_0^- > l\right] \leq H \ln n ,
$$

sous les mêmes hypothèses, pour tout $R > 1$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \equiv n_0\left(R, \epsilon, Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$, on a :

$$
(8.86)\qquad \sum_{l=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[V_0^+ > l\right] \leq H' \ln n ,
$$

où $H = \frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$, $H' = \frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$ et $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, on notera $h(n) \equiv H \ln n$, et $h'(n) \equiv H' \ln n$.

Preuve.
On rappelle que pour tout $n > 1$, tout $E > 0$ et tout $l \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
(8.87)\qquad \{V_0^- > l\} &= \{V_0^- > l, V^+_{EI_{\eta_0}\ln n} \leq V_0^-\} \cup \{V_0^- > l,\ V^+_{EI_{\eta_0}\ln n} > V_0^-\} \\
(8.88)\qquad &\subset \{V^+_{EI_{\eta_0}\ln n} \leq V_0^-\} \cup \{V^+_{EI_{\eta_0}\ln n} \wedge V_0^- > l\} ,
\end{aligned}
$$

on en déduit :

$$
(8.89)\qquad \sum_{l=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[V_0^- > l\right] \leq \sum_{l=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[V^+_{EI_{\eta_0}\ln n} \leq V_0^-\right] + \sum_{l=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[V^+_{EI_{\eta_0}\ln n} \wedge V_0^- > l\right] .
$$

On estime maintenant chacune des sommes en 8.89, par 8.22, on a :

$$
(8.90)\qquad Q\left[V^+_{EI_{\eta_0}\ln n} \leq V_0^-\right] \leq \frac{I_{\eta_0}}{EI_{\eta_0}\ln n + I_{\eta_0}} ,
$$

ainsi :

$$\sum_{l=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[V^+_{EI_{\eta_0}\ln n} \leq V_0^-\right] \leq \ln n \ . \tag{8.91}$$

On rappelle que :

$$\sum_{l=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[V^+_{EI_{\eta_0}\ln n} \wedge V_0^- > l\right] \leq \mathbb{E}_Q\left[V_0^- \wedge V^+_{EI_{\eta_0}\ln n}\right] \ , \tag{8.92}$$

on fait maintenant la remarque suivante :

$$\mathbb{E}_Q\left[V_0^- \wedge V^+_{EI_{\eta_0}\ln n}\right] \leq \mathbb{E}_Q\left[\mathcal{L}\left([0, EI_{\eta_0}\ln n], V_0^- \wedge V^+_{EI_{\eta_0}\ln n}\right)\right] + 1 \tag{8.93}$$

$$\leq \mathbb{E}_Q\left[\mathcal{L}\left([0, EI_{\eta_0}\ln n], V_0^-\right)\right] + 1 \ , \tag{8.94}$$

il est facile de montrer dans le cas d'une marche aléatoire effectuant des sauts de longueur $+\lambda$ ou $-\lambda$ ($\lambda > 0$) avec une probabilité 1/2 que :

$$\mathbb{E}_Q\left[\mathcal{L}\left([0, EI_{\eta_0}\ln n], V_0^-\right)\right] \leq EI_{\eta_0}\ln n \ , \tag{8.95}$$

en effet dans ce cas $\mathbb{E}_Q\left[\mathcal{L}\left(k, V_0^-\right)\right] = 1,\ k \in \mathbb{Z}^*$, voir par exemple [85] page 96. Nous allons maintenant effectuer un calcul qui nous confirme le comportement en $\ln n$ dans le cas plus général du potentiel aléatoire $(S_n, n \in \mathbb{Z})$ sous H.1, H.2 et H.3. On commence par effectuer le découpage suivant :

$$\mathbb{E}_Q\left[\mathcal{L}\left([0, EI_{\eta_0}\ln n], V_0^-\right)\right] = \sum_{i=1}^{N_1} \mathbb{E}_Q\left[\mathcal{L}\left([a(i-1), ai[, V_0^-\right)\right] \ , \tag{8.96}$$

où $a = I_{\eta_0}/4$ et $N_1 = \left[\frac{EI_{\eta_0}\ln n}{a}\right] + 1$, on utilise maintenant le fait que $\mathcal{L}\left([a(i-1), ai[, V_0^-\right)$ est une v.a. positive :

$$\mathbb{E}_Q\left[\mathcal{L}\left([a(i-1), ai[, V_0^-\right)\right] = \sum_{l=0}^{+\infty} Q\left[\mathcal{L}\left([a(i-1), ai[, V_0^-\right) > l\right] \ . \tag{8.97}$$

Pour tout $i \geq 1$, on rappelle que :

$$H_{ia,1} = \begin{cases} \inf\{m > 0,\ S_m \in [a(i-1), ai[\} \ , \\ +\infty, \text{ si un tel } m \text{ n'existe pas.} \end{cases} \tag{8.98}$$

$$H_{ia,k} = \begin{cases} \inf\{m > H_{ia,k-1},\ S_m \in [a(i-1), ai[\} \ , \\ +\infty, \text{ si un tel } m \text{ n'existe pas.} \end{cases} \ k > 1 \ . \tag{8.99}$$

on a :

$$\mathcal{L}\left([a(i-1), ai[, V_0^-\right) > l \Rightarrow H_{ia,l+1} < V_0^- \ . \tag{8.100}$$

On veut donc estimer $Q\left[H_{ia,l+1} < V_0^-\right]$, étant donné que $(H_{ia,l+1}, l)$ est une suite de temps d'arrêt on s'attend à un comportement "géométrique" c'est à dire de la forme $Q[A_1] \times (Q[A_2])^l$ ceci nous est confirmé par le lemme 8.2.8, on obtient pour tout $i > 1$:

$$Q\left[H_{ia,l+1} < V_0^-\right] \leq Q\left[V^+_{(i-1)a} < V_0^-\right]\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] Q_{(i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} \geq V_0^-\right]\right)^l \ , \tag{8.101}$$

et pour $i = 1$:

$$Q\left[H_{a,l+1} < V_0^-\right] \leq Q\left[\epsilon_0 \geq 0\right]\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]\right)^l \ . \tag{8.102}$$

Par 8.97, 8.100, 8.101 et 8.102, on obtient :

$$\mathbb{E}_Q\left[\mathcal{L}\left([a(i-1),ai[,V_0^-\right)\right] = \sum_{l=0}^{+\infty} Q\left[\mathcal{L}\left([a(i-1),ai[,V_0^-\right) > l\right] \tag{8.103}$$

$$\leq \frac{Q\left[V^+_{(i-1)a} < V_0^-\right]}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] Q_{(i-1)a-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} \geq V_0^-\right]} + \frac{Q\left[\epsilon_0 \geq 0\right]}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]} . \tag{8.104}$$

On utilise maintenant la stationnarité du milieu et le lemme 8.2.2, on obtient :

$$Q\left[V^+_{(i-1)a} < V_0^-\right] \leq \frac{I_{\eta_0}}{(i-1)a + I_{\eta_0}} \equiv \frac{4}{3+i} , \tag{8.105}$$

$$Q_{(i-1)a-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} > V_0^-\right] \equiv Q\left[V_a^+ > V^-_{(i-1)a-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right] \geq \frac{a}{(i-1)a + I_{\eta_0}} \equiv \frac{1}{3+i} . \tag{8.106}$$

En remplaçant 8.105 et 8.106 dans 8.104, on en déduit :

$$\mathbb{E}_Q\left[\mathcal{L}\left([a(i-1),ai[,V_0^-\right)\right] \leq \frac{4}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} + \frac{Q\left[\epsilon_0 \geq 0\right]}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]} \leq \frac{5}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} , \tag{8.107}$$

ce résultat est très satisfaisant car il ne dépend pas de i comme pour le cas des marches aléatoires effectuant des sauts constants. En remplaçant 8.107 dans 8.96, on obtient donc pour tout n>1 :

$$\mathbb{E}_Q\left[\mathcal{L}\left([0,EI_{\eta_0}\ln n],V_0^-\right)\right] \leq N_1 \frac{5}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} \tag{8.108}$$

$$\leq \frac{20E\ln n + 5}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} , \tag{8.109}$$

en remplaçant ceci dans 8.94 on obtient pour tout $n > 1$:

$$\mathbb{E}_Q\left[V_0^- \wedge V^+_{EI_{\eta_0}\ln n}\right] \leq \frac{20E\ln n + 5}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} + 1 . \tag{8.110}$$

On déduit de ceci qu'il existe $n_0 \equiv n_0\left(E, Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$:

$$\mathbb{E}_Q\left[V_0^- \wedge V^+_{EI_{\eta_0}\ln n}\right] \leq \frac{21E\ln n}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} . \tag{8.111}$$

En remplaçant 8.111 dans 8.92 puis le résultat obtenu ainsi que 8.91 dans 8.89 on obtient pour tout $n > n_0$:

$$\sum_{l=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[V_0^- > l\right] \leq \frac{(21E+1)\ln n}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} . \tag{8.112}$$

ce qui donne 8.85. On fait un calcul similaire pour 8.86. ■

Pour terminer ce paragraphe montrons le lemme suivant :

Lemme 8.2.11. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $F > 1$, il existe $n_0 \equiv n_0\left(I_{\eta_0}, F, Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$, on a :*

$$Q\left[V_0^- > f(n)\right] \leq \frac{I_{\eta_0}}{g(n)} + \frac{21g(n)}{I_{\eta_0} f(n) Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} , \tag{8.113}$$

où $f(n) = [F(\ ln\ln n)^2]$, et $g(n)$ est une suite croissante positive telle que $\lim_{n\to+\infty} g(n) = +\infty$ et $g(n) < \frac{I_{\eta_0} f(n) Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}{21}$. F est un paramètre libre qui sera choisi ultérieurement.

Preuve.
Par la remarque 8.2.4, on a :

$$Q\left[V_0^- > f(n)\right] \quad \leq \quad Q\left[V_{g(n)}^+ \leq V_0^-\right] + Q\left[V_{g(n)}^+ \wedge V_0^- > f(n)\right] \ . \tag{8.114}$$

Par 8.22, on a :

$$Q\left[V_{g(n)}^+ \leq V_0^-\right] \leq \frac{I_{\eta_0}}{g(n) + I_{\eta_0}} \leq \frac{I_{\eta_0}}{g(n)} \ . \tag{8.115}$$

Par l'inégalité de Markov :

$$Q\left[V_{g(n)}^+ \wedge V_0^- > f(n)\right] \leq \frac{E\left[V_{g(n)}^+ \wedge V_0^-\right]}{f(n)} \ . \tag{8.116}$$

Par un calcul similaire à celui effectué pour montrer 8.111, on montre qu'il existe $n_0 \equiv n_0\left(I_{\eta_0}, F, Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$:

$$E\left[V_{g(n)}^+ \wedge V_0^-\right] \leq \frac{21 g(n)}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] I_{\eta_0}} \ . \tag{8.117}$$

En remplaçant 8.117 dans 8.116 puis le résultat obtenu ainsi que 8.115 dans 8.114 on obtient le lemme. ■

8.2.4 Caractérisation du point $\tilde{m}_0$

Dans le lemme suivant on donne deux façons de caractériser le point $\tilde{m}_0$:

Lemme 8.2.12. *Soit $n > 3$, supposons $\tilde{m}_0 > 0$, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ on a :*

$$\tilde{m}_0 = l \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bigcap_{i=0}^{l-1} \{S_i - S_l > 0\} \ \ et \\ \bigcap_{i=l+1}^{V^+_{S_l+\Gamma_n,l}} \{S_i - S_l \geq 0\} \ \ et \\ \tilde{M}_0 = V^+_{S_l+\Gamma_n,l} \ , \end{cases} \tag{8.118}$$

où

$$V_{z,l}^+ \equiv V_{z,l}^+\left(S_j, j \geq 1\right) = \begin{cases} \inf\left(m > l, \ S_m \geq z\right), \\ +\infty, \ \textit{si un tel } m \textit{ n'existe pas.} \end{cases} \tag{8.119}$$

et $\Gamma_n = \ln n + \gamma \ln\ln n$, $\gamma > 0$. Si de plus $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\tilde{m}_0 = l, \ S_{\tilde{m}_0} \in (-dx) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bigcap_{i=0}^{l-1} \{S_i > -x\} \ \ et \\ \bigcap_{i=l+1}^{V^+_{-x+\Gamma_n,l}} \{S_i \geq -x\} \ \ et \\ \tilde{M}_0 = V^+_{-x+\Gamma_n,l} \ . \end{cases} \tag{8.120}$$

Preuve.
Ce lemme est une conséquence directe de la définition de la vallée $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ avec $\tilde{m}_0 > 0$. Montrons 8.118, supposons $\tilde{m}_0 > 0$ et soit $l \in \mathbb{N}^*$, par définition $\tilde{m}_0$ est le plus petit minimisant absolu de la vallée $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$, on a donc bien :

$$\tilde{m}_0 = l \Rightarrow \bigcap_{i=0}^{l-1} \{S_i - S_l > 0\} \ , \tag{8.121}$$

comme $\tilde{m}_0 > 0$ on a par définition :

$$\tilde{M}_0 = \inf\left\{k \in \mathbb{Z}_+, \ k > \tilde{m}_0, \ S_k - S_{\tilde{m}_0} \geq \Gamma_n\right\} \ . \tag{8.122}$$

donc :

$$\tilde{m}_0 = l \Rightarrow \tilde{M}_0 = \inf\{k \in \mathbb{Z}_+,\ k > l,\ S_k - S_l \geq \Gamma_n\} = V^+_{S_l+\Gamma_n,l}\ , \tag{8.123}$$

mais comme $\tilde{m}_0$ est un minimisant absolu de la vallée $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ on a aussi :

$$\tilde{m}_0 = l \Rightarrow \left\{\tilde{m}_0 = l,\ \tilde{M}_0 = V^+_{S_l+\Gamma_n,l}\right\} \Rightarrow \bigcap_{i=l+1}^{V^+_{S_l+\Gamma_n,l}} \{S_i \geq S_l\}\ . \tag{8.124}$$

la preuve de 8.120 est identique. ■
On peut faire une caractérisation similaire de $\tilde{m}_0$ si $\tilde{m}_0 \leq 0$ (le cas $\tilde{m}_0 = 0$ est trivial).

Chapitre 9

Etude de la Q variable aléatoire : $\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})],\ k \in V_{\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}\right)$

Dans ce chapitre nous allons faire l'étude de la Q variable aléatoire $\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})],\ k \in V_{\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}\right)$, plus exactement nous ferons séparément l'étude de :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right] \ , \tag{9.1}$$

dans le paragraphe 9.1 (voir ci-dessous pour la définition de $V^{c,r}_{\tilde{m}_0}$) et :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right] \ , \tag{9.2}$$

dans le paragraphe 9.2 (voir 7.6 pour la définition de $V_{\tilde{m}_0}$). Nos résultats montrent que 9.1 tend vers 0 et que 9.2 est bornée par une constante indépendante de n avec une Q probabilité aussi proche de 1 que l'on veut. Dans toutes les preuves que nous effectuerons nous supposerons $\tilde{m}_0 > 0$, des calculs similaires à ceux que nous effectuons donnent des résultats identiques pour le cas $\tilde{m}_0 \leq 0$. En fin de chapitre nous donnerons la définition de l'ensemble des bons environnements de cette partie que nous noterons G'_n. Dans ce chapitre nous effectuerons un certain nombre de calculs explicites relativement longs, tous sont basés sur la caractérisation du point $\tilde{m}_0$ donnée au lemme 8.2.12. Le lecteur peut cependant laisser de côté ce chapitre en se reportant directement à la définition 9.4.1 qui résume les propriétés de l'ensemble des bons environnements G'_n nécessaires à la compréhension du chapitre 10.

9.1 Etude de la Q variable aléatoire $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\mathcal{L}(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})$

On rappelle que :

$$V^{c,r}_{\tilde{m}_0} = \left\{\tilde{M}'_0, \cdots, \tilde{m}_0 - f(n) - 1\right\} \cup \left\{\tilde{m}_0 + f(n) + 1, \cdots, \tilde{M}_0\right\} \ , \tag{9.3}$$

Énonçons le résultat principal qui nous intéresse :

9.1.1 Résultat principal

On va montrer le résultat suivant :

Proposition 9.1.1. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \equiv n_0\Big(R, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\Big)$ tel que pour tout $n > n_0$ on a :*

$$Q\left[\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right] > \frac{2}{\eta_0}\frac{1}{(f(n)+1)},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \leq \frac{140\epsilon}{R} \ , \tag{9.4}$$

où $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$, $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0<-I_{\eta_0}/2\right])^{1/2}Q\left[\epsilon_0>I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$ *et* $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, *$R$ est un paramètre libre que l'on fixera ultérieurement.*

Ce résultat montre avec une Q probabilité proche de 1 (en prenant par exemple $R = 140$), que la moyenne du temps local de la M.A.M.A. dans $V^{c,r}_{\tilde{m}_0}$ en un temps de retour à $\tilde{m}_0$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Cette proposition est le résultat principal sur le milieu aléatoire qui nous permettra de montrer que la M.A.M.A. est concentrée (voir paragraphe 10.1).

Dans le paragraphe suivant nous donnons une borne supérieure de $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]$ dépendant du potentiel aléatoire $(S_n, n \in \mathbb{Z})$ (voir 9.21). Ce résultat préliminaire est une conséquence des calculs exacts effectués dans la partie I chapitre 2. Il apparaît alors que montrer la proposition 9.1.1 revient à faire l'étude des fluctuations du potentiel aléatoire dans $V^{c,r}_{\tilde{m}_0}$. Le paragraphe 9.1.3 est donc consacré à l'étude de ces fluctuations.

9.1.2 Préliminaires à la preuve du résultat

Par linéarité de l'espérance on sait que $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]$ est la somme de la moyenne des temps locaux $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]$, pour $k \in \{\tilde{M}'_0, \cdots, \tilde{m}_0 - f(n), \tilde{m}_0 + f(n), \cdots, \tilde{M}'_0\}$.

Par le lemme 2.1.11 (page 22) :

Lemme 9.1.2. *Soit $\alpha \in \Omega_2$, soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k > \tilde{m}_0$ on a :*

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] = \frac{\alpha_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_k < T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0}\right]}{\beta_k\mathbb{P}^{\alpha}_{k-1}\left[T^{k-1}_k > T^{k-1}_{\tilde{m}_0}\right]}\ , \tag{9.5}$$

de même si $k < \tilde{m}_0$:

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] = \frac{\beta_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_k < T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0}\right]}{\alpha_k\mathbb{P}^{\alpha}_{k+1}\left[T^{k+1}_k > T^{k+1}_{\tilde{m}_0}\right]}\ , \tag{9.6}$$

et

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] = 1\ . \tag{9.7}$$

Preuve.
On obtient 9.5 en prenant $i = \tilde{m}_0$ et $m = k$ dans 2.66, de même pour 9.6 mais en utilisant 2.69 et 9.7 est obtenue par 2.70. ■

Montrons le lemme suivant :

Lemme 9.1.3. *Supposons H.3, pour tout $\tilde{M}'_0 \le k \le \tilde{M}_0$, $k \neq \tilde{m}_0$:*

$$\frac{\eta_0}{1-\eta_0}\frac{1}{e^{S_k - S_{\tilde{m}_0}}} \le \mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \le \frac{1}{\eta_0}\frac{1}{e^{S_k - S_{\tilde{m}_0}}}\ , \tag{9.8}$$

avec une Q probabilité égale à un.

Preuve.
Supposons $k > \tilde{m}_0$ (la preuve est identique pour $k < \tilde{m}_0$). Par 9.5 et le lemme 4.3.12 on a :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] = \frac{\alpha_{\tilde{m}_0}}{\beta_k}\frac{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{k-1} e^{S_i - S_k} + 1}{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{k-1} e^{S_i - S_{\tilde{m}_0}} + 1} \tag{9.9}$$

$$= \frac{\alpha_{\tilde{m}_0}}{\beta_k}\frac{1}{e^{S_k - S_{\tilde{m}_0}}}\frac{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{k-1} e^{S_i} + e^{S_k}}{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{k-1} e^{S_i} + e^{S_{\tilde{m}_0}}}\ , \tag{9.10}$$

Pour la borne inférieure, on a $\tilde{m}_0+1 \le k \le \tilde{M}_0$ donc $S_k \ge S_{\tilde{m}_0}$, ainsi :

$$\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{k-1} e^{S_i} + e^{S_k} \ge \sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{k-1} e^{S_i} + e^{S_{\tilde{m}_0}} \ , \tag{9.11}$$

ainsi par H.3 :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \ \ge \ \frac{\alpha_{\tilde{m}_0}}{\beta_k}\frac{1}{e^{S_k-S_{\tilde{m}_0}}} \tag{9.12}$$

$$\ge \ \frac{\eta_0}{1-\eta_0}\frac{1}{e^{S_k-S_{\tilde{m}_0}}} \ . \tag{9.13}$$

avec une Q probabilité égale à un. Pour la borne supérieure, on a :

$$\frac{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{k-1} e^{S_i} + e^{S_k}}{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{k-1} e^{S_i} + e^{S_{\tilde{m}_0}}} \ = \ 1 + \frac{e^{S_k} - e^{S_{\tilde{m}_0}}}{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{k-1} e^{S_i} + e^{S_{\tilde{m}_0}}} \tag{9.14}$$

$$\le \ 1 + \frac{e^{S_k}}{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{k-1} e^{S_i} + e^{S_{\tilde{m}_0}}} \tag{9.15}$$

$$\le \ 1 + \frac{e^{S_k}}{e^{S_{k-1}}} = 1 + \frac{\beta_k}{\alpha_k} \ , \tag{9.16}$$

donc par H.3 :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(k, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \ \le \ \frac{\alpha_{\tilde{m}_0}}{\beta_k}\frac{1}{e^{S_k-S_{\tilde{m}_0}}}\left(1+\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right) \tag{9.17}$$

$$= \ \alpha_{\tilde{m}_0}\frac{1}{e^{S_k-S_{\tilde{m}_0}}}\left(\frac{1}{\beta_k}+\frac{1}{\alpha_k}\right) \le \frac{1}{e^{S_k-S_{\tilde{m}_0}}}\frac{1}{\eta_0} \ . \tag{9.18}$$

avec une Q probabilité égale à un. ■

On rappelle que l'on veut trouver une borne supérieure de :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \tag{9.19}$$

$$= \sum_{l=\tilde{m}_0+f(n)+1}^{\tilde{M}_0} \mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(l, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] + \sum_{l=\mathcal{M}'_0}^{\tilde{m}_0-f(n)-1} \mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(l, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \ , \tag{9.20}$$

où $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$ et $F > 1$ est un paramètre libre qui sera fixé le moment venu. Par le lemme 9.1.3 il suffit, pour cela, de majorer :

$$\sum_{l=\tilde{m}_0+f(n)+1}^{\tilde{M}_0} \frac{1}{e^{S_l-S_{\tilde{m}_0}}} + \sum_{l=M'_0}^{\tilde{m}_0-f(n)-1} \frac{1}{e^{S_l-S_{\tilde{m}_0}}} \ . \tag{9.21}$$

Supposons pour l'instant que :

$$S_k - S_{\tilde{m}_0} \ge 2\ln(|k-\tilde{m}_0|), \ \forall k \in \{\tilde{M}'_0, \cdots, \tilde{m}_0 - f(n), \ \tilde{m}_0 + f(n), \cdots, \tilde{M}'_0\} \ , \tag{9.22}$$

avec une Q probabilité proche de 1. Alors pour tout $k \in \{\tilde{M}'_0, \cdots, \tilde{m}_0 - f(n), \ \tilde{m}_0 + f(n), \cdots, \tilde{M}'_0\}$:

$$\frac{1}{e^{S_k-S_{\tilde{m}_0}}} \le \frac{1}{(k-\tilde{m}_0)^2} \ , \tag{9.23}$$

ceci implique la convergence des sommes partielles en 9.21 et donc avec une Q probabilité proche de 1 :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \ \le \ \frac{1}{\eta_0}\left(\sum_{l=\tilde{m}_0+f(n)+1}^{\tilde{M}_0} \frac{1}{e^{S_l-S_{\tilde{m}_0}}} + \sum_{l=M'_0}^{\tilde{m}_0-f(n)-1} \frac{1}{e^{S_l-S_{\tilde{m}_0}}}\right) \tag{9.24}$$

$$\le \ \frac{1}{\eta_0}\frac{2}{f(n)+1} \ , \tag{9.25}$$

ce qui montre la proposition 9.1.1. Dans le paragraphe suivant on montre 9.22 en deux temps (Proposition 9.1.4 et 9.1.6).

9.1.3 Etude du potentiel $(S_m,\ m \in \mathbb{Z})$ à l'extérieur du voisinage $V_{\tilde{m}_0}$

Pour la preuve des deux propositions de ce paragraphe nous supposerons $\tilde{m}_0 > 0$ (les calculs sont similaires pour le cas $\tilde{m}_0 \leq 0$).

Proposition 9.1.4. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, et tout $F > 1$ il existe $n'_0 \equiv n'_0\left(R, \epsilon, F, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n'_0$, on a :*

$$Q\left[\bigcup_{k=\tilde{m}_0+f(n)}^{\tilde{M}_0} \{S_k - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(k-\tilde{m}_0)\},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \tag{9.26}$$

$$\leq \frac{9\epsilon}{R} + 3H'\left(\frac{I_{\eta_0}\ln\ln n}{g(n)} + \frac{21 g(n)\ln\ln n}{I_{\eta_0} f(n) Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln f(n)}{\ln\ln n}\right)\right) + \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}}\ , \tag{9.27}$$

où $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$, $H' = \frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, $g(n)$ est une suite croissante positive telle que $\lim_{n\to+\infty} g(n) = +\infty$ et $g(n) < \frac{I_{\eta_0} f(n) Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}{21}$. F et R sont des paramètres libres que l'on choisira le moment venu, de même la suite $(g(n), n \in \mathbb{N})$ sera fixée en fin de discussion de manière à neutraliser $3H' I_{\eta_0}\ln\ln n$.

Preuve (Proposition 9.1.4).
Soient $R > 1$, $\epsilon > 0$, $F > 1$, par 8.32 et 8.36, il existe $n_1 \equiv n_1\left(R, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, F, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_1$:

$$Q\left[\bigcup_{k=\tilde{m}_0+f(n)}^{\tilde{M}_0} \{S_k - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(k-\tilde{m}_0)\},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \tag{9.28}$$

$$\leq Q\left[\bigcup_{k=\tilde{m}_0+f(n)}^{\tilde{M}_0} \{S_k - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(k-\tilde{m}_0)\},\ \tilde{m}_0 + f(n) < \tilde{M}_0 \leq E(\ln n)^2,\ \tilde{m}_0 > 0\right] +$$

$$+\frac{3\epsilon}{R} + \frac{6\epsilon}{R} + \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}}\ , \tag{9.29}$$

où $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. On a :

$$Q\left[\bigcup_{k=\tilde{m}_0+f(n)}^{\tilde{M}_0} \{S_k - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(k-\tilde{m}_0)\},\ \tilde{m}_0 + f(n) < \tilde{M}_0 \leq E(\ln n)^2,\ \tilde{m}_0 > 0\right] \tag{9.30}$$

$$\leq \sum_{l=1}^{E(\ln n)^2} Q\left[\mathcal{A}(l)\right]\ ,$$

en posant :

$$\mathcal{A}(l) = \left\{\bigcup_{k=l+f(n)}^{\tilde{M}_0} \{S_k - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(k-\tilde{m}_0)\},\ l + f(n) < \tilde{M}_0 \leq E(\ln n)^2,\ \tilde{m}_0 = l\right\}\ . \tag{9.31}$$

Par le lemme 8.2.12 (implication 8.118) on a :

$$\mathcal{A}(l) \subset \mathcal{A}_+(l) \cap \mathcal{A}_-(l)\ , \tag{9.32}$$

avec :

$$(9.33)\ \mathcal{A}_-(l) = \left\{\bigcap_{i=0}^{l-1}\{S_i - S_l > 0\}\right\} ,$$

$$(9.34)\ \mathcal{A}_+(l) = \left\{\bigcap_{i=l+1}^{V^+_{S_l+\Gamma_{n,l}}}\{S_i - S_l \geq 0\}, \bigcup_{k=f(n)+l}^{V^+_{S_l+\Gamma_{n,l}}}\{S_k - S_l \leq 2\ln(k-l)\},\ l+f(n) < V^+_{S_l+\Gamma_{n,l}} \leq E(\ln n)^2\right\} ,$$

on remarque que $\mathcal{A}_-(l) \in \sigma(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l)$ et $\mathcal{A}_+(l) \in \sigma(\epsilon_{l+1}, \cdots)$ ainsi ces deux événements sont indépendants, on en déduit :

$$(9.35)\qquad Q[\mathcal{A}(l)] \leq Q[\mathcal{A}_+(l)]\, Q[\mathcal{A}_-(l)] ,$$

posons $\bar{S}_j = S_{j+l} - S_l$ et $\bar{V}^+_{\Gamma_n} = V^+_{\Gamma_n}(\bar{S}_j,\ j \geq 1)$ (voir page 139 pour la définition de $V^+_{\cdot}$) on obtient :

$$(9.36)\qquad Q[\mathcal{A}_+(l)]$$

$$(9.37)\qquad = Q\left[\bigcap_{i=1}^{\bar{V}^+_{\Gamma_n}}\{\bar{S}_i \geq 0\}, \bigcup_{i=f(n)}^{\bar{V}^+_{\Gamma_n}}\{\bar{S}_i \leq 2\ln(i)\},\ f(n) < \bar{V}^+_{\Gamma_n} \leq E(\ln n)^2\right]$$

$$(9.38)\qquad = Q\left[\bigcap_{i=1}^{V^+_{\Gamma_n}}\{S_i \geq 0\}, \bigcup_{i=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}}\{S_i \leq 2\ln(i)\},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n} \leq E(\ln n)^2\right] ,$$

où la dernière égalité est obtenue par stationnarité du milieu. En remplaçant 9.38 dans 9.35 on obtient :

$$(9.39)\qquad Q[\mathcal{A}(l)]$$

$$\leq Q\left[\bigcap_{i=1}^{l-1}\{S_i - S_l > 0\}\right] Q\left[\bigcap_{i=1}^{V^+_{\Gamma_n}}\{S_i \geq 0\}, \bigcup_{i=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}}\{S_i \leq 2\ln(i)\},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n} \leq E(\ln n)^2\right] ,$$

on remarque que le terme 9.38 ne dépend pas de l. En remplaçant 9.39 dans 9.30 on obtient donc :

$$(9.40)\qquad Q\left[\bigcup_{k=\tilde{m}_0+f(n)}^{\tilde{M}_0}\{S_k - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(k-\tilde{m}_0)\},\ \tilde{m}_0 + f(n) < \tilde{M}_0 \leq E(\ln n)^2\right]$$

$$\leq Q\left[\bigcap_{i=1}^{V^+_{\Gamma_n}}\{S_i \geq 0\}, \bigcup_{i=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}}\{S_i \leq 2\ln(i)\},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n} \leq E(\ln n)^2\right] \sum_{l=1}^{E(\ln n)^2} Q\left[\bigcap_{i=0}^{l-1}\{S_i - S_l > 0\}\right] .$$

Or par 8.85, il existe $n_2 \equiv n_2\left(R, \epsilon, Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_2$, on a :

$$(9.41)\qquad \sum_{l=1}^{E(\ln n)^2} Q\left[\bigcap_{i=0}^{l-1}\{S_i - S_l > 0\}\right] = \sum_{l=1}^{E(\ln n)^2} Q\left[V^+_0 > l\right] \leq h'(n) ,$$

avec $h'(n) = H' \ln n$, où $H' = \frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$ et $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. Ainsi pour tout $n > n_2$:

$$(9.42)\qquad Q\left[\bigcup_{k=f(n)}^{\tilde{M}_0}\{S_{\tilde{m}_0+k} - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln k\},\ f(n) < \tilde{M}_0 \leq E(\ln n)^2\right]$$

$$(9.43)\qquad \leq h'(n) Q\left[\bigcap_{i=1}^{V^+_{\Gamma_n}}\{S_i \geq 0\}, \bigcup_{i=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}}\{S_i \leq 2\ln(i)\},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n} \leq E(\ln n)^2\right] ,$$

Pour estimer 9.43 on effectue la partition suivante sur les valeurs de $S_{f(n)}$:

$$Q\left[\bigcup_{k=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_k \leq 2\ln k\},\ V_0^- > V^+_{\Gamma_n},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n} \leq E(\ln n)^2\right] \tag{9.44}$$

$$= Q\left[\bigcup_{k=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_k \leq 2\ln k\},\ V_0^- > V^+_{\Gamma_n},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n} \leq E(\ln n)^2,\ S_{f(n)} \leq 2\ln f(n)\right] + \tag{9.45}$$

$$Q\left[\bigcup_{k=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_k \leq 2\ln k\},\ V_0^- > V^+_{\Gamma_n},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n} \leq E(\ln n)^2,\ S_{f(n)} > 2\ln f(n)\right] . \tag{9.46}$$

Commençons par estimer 9.45, on remarque que :

$$\{V_0^- > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n)\} \Rightarrow S_{f(n)} \geq 0\ , \tag{9.47}$$

on a donc par la propriété de Markov et la stationnarité du milieu :

$$\begin{aligned}
& Q\left[\bigcup_{k=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_k \leq 2\ln k\},\ V_0^- > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n),\ S_{f(n)} \leq 2\ln f(n)\right] \\
&= \int_0^{2\ln f(n)} Q\left[\bigcup_{k=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_k \leq 2\ln k\},\ V_0^- > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n),\ S_{f(n)} \in dy\right] \\
&\leq \int_0^{2\ln f(n)} Q\left[\bigcap_{k=1}^{f(n)} \{S_k \geq 0\},\ S_{f(n)} \in dy\right] Q_y\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - y}\right]\ , \qquad (9.48)
\end{aligned}$$

or $Q_y\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - y}\right]$ est croissante en y (voir remarque 8.2.3), on en déduit :

$$\begin{aligned}
& Q\left[\bigcup_{k=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_k \leq 2\ln k\},\ V_0^- > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n),\ S_{f(n)} \leq 2\ln f(n)\right] \\
&\leq Q_{2\ln f(n)}\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - 2\ln(f(n))}\right] \int_0^{2\ln f(n)} Q\left[\bigcap_{k=1}^{f(n)} \{S_k \geq 0\},\ S_{f(n)} \in dy\right] \qquad (9.49) \\
&= Q\left[\bigcap_{k=1}^{f(n)} \{S_k \geq 0\}\right] Q_{2\ln f(n)}\left[V_0^- > V^+_{\Gam_n - 2\ln f(n)}\right] \qquad (9.50) \\
&= Q\left[V_0^- > f(n)\right] Q_{2\ln f(n)}\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - 2\ln f(n)}\right]\ . \qquad (9.51)
\end{aligned}$$

Estimons maintenant 9.46, pour cela définissons la v.a. :

$$W_{f(n)} = \inf\{m > f(n),\ S_m \leq \ln m\}\ , \tag{9.52}$$

on remarque que :

$$\left\{\bigcup_{k=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_k \leq 2\ln k\},\ S_{f(n)} \geq 2\ln f(n)\right\} \Rightarrow \left\{f(n) \leq W_{f(n)} \leq V^+_{\Gamma_n}\right\}\ , \tag{9.53}$$

en notant :

$$\mathcal{A}'(l) \tag{9.54}$$

$$= \left\{ \bigcup_{k=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_k \le 2\ln k\}\,,\ V_0^- > V^+_{\Gamma_n},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n} \le E(\ln n)^2,\ S_{f(n)} \ge 2\ln f(n),\ W_{f(n)} = l \right\}\ , \tag{9.55}$$

on a donc :

$$Q\left[\bigcup_{k=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_k \le 2\ln k\}\,,\ V_0^- > V^-_{\Gamma_n},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n} \le E(\ln n)^2,\ S_{f(n)} \ge 2\ln f(n)\right] \tag{9.56}$$

$$= \sum_{l=f(n)}^{E(\ln n)^2} Q\left[\mathcal{A}'(l)\right]\ , \tag{9.57}$$

par hypothèse $Q\left[-I_{\eta_0} \le \epsilon_0 \le I_{\eta_0}\right] = 1$ donc :

$$W_{f(n)} = l \Rightarrow \ln l - I_{\eta_0} \le S_l \le \ln l \quad Q.p.s.\ , \tag{9.58}$$

ainsi :

$$\begin{aligned} &\sum_{l=f(n)}^{E(\ln n)^2} Q\left[A'(l)\right] \\ &= \sum_{l=f(n)}^{E(\ln n)^2} \int_{\ln l - I_{\eta_0}}^{\ln l} Q\left[\bigcup_{k=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_k \le 2\ln k\}\,,\ V_0^- > V^+_{\Gamma_n},\right. \\ &\qquad \left. f(n) < V^+_{\Gamma_n} \le E(\ln n)^2,\ S_{f(n)} \ge 2\ln f(n),\ \bigcap_{j=f(n)}^{l-1} \{S_j < \ln j\}\,,\ S_l \in dy\right]\ . \end{aligned} \tag{9.59}$$

Par la propriété de Markov et la stationnarité du milieu on obtient :

$$\sum_{l=f(n)}^{E(\ln n)^2} Q\left[A'(l)\right] \le \sum_{l=f(n)}^{E(\ln n)^2} \int_{\ln l - I_{\eta_0}}^{\ln l} Q_y\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - y}\right] \times \tag{9.60}$$

$$Q\left[S_{f(n)} \ge 2\ln f(n),\ \bigcap_{j=0}^{l} \{S_j \ge 0\}\,,\ \bigcap_{j=f(n)}^{l-1} \{S_j < \ln j\}\,,\ S_l \in dy\right]\ . \tag{9.61}$$

$Q_y\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - y}\right]$ étant croissante en y on obtient :

$$\sum_{l=f(n)}^{E(\ln n)^2} Q\left[A'(l)\right] \le \sum_{l=f(n)}^{E(\ln n)^2} Q_{\ln l}\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - \ln l}\right] \times \tag{9.62}$$

$$\int_{\ln l - I_{\eta_0}}^{\ln l} Q\left[\bigcap_{i=1}^{l} \{S_i > 0\}\,,\ \bigcap_{j=f(n)}^{l-1} \{S_j < \ln j\}\,,\ S_l \in dy\right] \tag{9.63}$$

$$\le Q_{\ln(E(\ln n)^2)}\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - \ln(E(\ln n)^2)}\right] \sum_{l=f(n)}^{E(\ln n)^2} Q\left[\bigcap_{i=1}^{f(n)} \{S_i > 0\}\,,\ W_{f(n)} = l\right] \tag{9.64}$$

$$= Q_{\ln(E(\ln n)^2)}\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - \ln(E(\ln n)^2)}\right] Q\left[V_0^- > f(n)\right]\ . \tag{9.65}$$

En remplaçant 9.51 dans 9.45, et 9.65 dans 9.57 puis le résultat obtenu dans 9.46 on a :

$$Q\left[\bigcup_{k=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_k \leq 2\ln k\},\ V_0^- > V^+_{\Gamma_n},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n} \leq E(\ln n)^2\right] \tag{9.66}$$

$$\leq\ Q\left[V_0^- > f(n)\right]\left(Q_{2\ln f(n)}\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - 2\ln f(n)}\right] + Q_{\ln(E(\ln n)^2)}\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - \ln(E(\ln n)^2)}\right]\right)\ . \tag{9.67}$$

On rappelle que $\Gamma_n = \ln n + \gamma \ln\ln n$, $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$ et $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ où $\gamma > 0$, $F > 1$ et $R > 1$ sont des paramètres libres que l'on choisira le moment venu. Par le lemme 8.2.2, en utilisant la stationnarité du milieu on a pour tout $n > 16$:

$$Q_{\ln(f(n))}\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - 2\ln f(n)}\right] \leq \frac{2\ln f(n) + I_{\eta_0}}{\ln n + \gamma\ln\ln n - 2\ln f(n) + I_{\eta_0}} \leq \frac{2\ln f(n) + I_{\eta_0}}{\ln n - 2\ln f(n)}\ , \tag{9.68}$$

$$Q_{\ln(E(\ln n)^2)}\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - \ln(E(\ln n)^2)}\right] \leq \frac{\ln(E(\ln n)^2) + I_{\eta_0}}{\ln n + \gamma\ln\ln n - \ln(E(\ln n)^2} \leq \frac{\ln(E(\ln n)^2) + I_{\eta_0}}{\ln n - \ln(E(\ln n)^2}\ . \tag{9.69}$$

On en déduit qu'il existe $n_3 \equiv n_3\left(R, \epsilon, F, I_{\eta_0}\right)$ tel que pour tout $n > n_3$, on a :

$$Q_{2\ln(f(n))}\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - 2\ln f(n)}\right] \leq \frac{3\ln f(n)}{\ln n}\ , \tag{9.70}$$

$$Q_{\ln(E(\ln n)^2)}\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n - 2\ln(E(\ln n)^2)}\right] \leq \frac{3\ln\ln n}{\ln n}\ . \tag{9.71}$$

Par le lemme 8.2.11, il existe $n_4 \equiv n_4\left(I_{\eta_0}, F, Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_4$ on a :

$$Q\left[V_0^- > f(n)\right] \leq \frac{I_{\eta_0}}{g(n)} + \frac{21 g(n)}{I_{\eta_0} f(n) Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\ , \tag{9.72}$$

où $g(n)$ est une suite croissante positive telle que $\lim_{n\to+\infty} g(n) = 0$ et $g(n) < \frac{I_{\eta_0} f(n) Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}{21}$ qui sera choisie ultérieurement. En remplaçant 9.72, 9.71, 9.70 dans 9.67 on obtient pour tout $n > n_3 \vee n_4$:

$$Q\left[\bigcup_{k=f(n)}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_k \leq 2\ln k\},\ V_0^- > V^+_{\Gamma_n},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n} \leq E(\ln n)^2\right] \tag{9.73}$$

$$\leq\ \left(\frac{I_{\eta_0}}{g(n)} + \frac{21 g(n)}{I_{\eta_0} f(n) Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)\left(\frac{3\ln\ln n}{\ln n} + \frac{3\ln(f(n))}{\ln n}\right) \tag{9.74}$$

$$\leq\ \frac{3}{\ln n}\left(\frac{I_{\eta_0}\ln\ln n}{g(n)} + \frac{21 g(n)\ln\ln n}{I_{\eta_0} f(n) Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln f(n)}{\ln\ln n}\right)\right)\ , \tag{9.75}$$

en remplaçant ceci dans 9.43 on obtient pour tout $n > n_2 \vee n_3 \vee n_4$:

$$Q\left[\bigcup_{k=\tilde{m}_0+f(n)}^{\tilde{M}_0} \{S_k - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln k\},\ f(n) + \tilde{m}_0 < \tilde{M}_0 \leq E(\ln n)^2,\ \tilde{m}_0 > 0\right] \tag{9.76}$$

$$\leq\ 3H'\left(\frac{I_{\eta_0}\ln\ln n}{g(n)} + \frac{21 g(n)\ln\ln n}{I_{\eta_0} f(n) Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln f(n)}{\ln\ln n}\right)\right)\ , \tag{9.77}$$

en remplaçant 9.77 dans 9.29 on obtient la proposition 9.1.4 en prenant $n'_0 = n_1 \vee n_2 \vee n_3 \vee n_4$, ainsi $n'_0 \equiv n'_0\left(R, \epsilon, F, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$. ■

On montre maintenant un résultat similaire à celui que l'on vient de montrer mais à "gauche" de $\tilde{m}_0$:

Proposition 9.1.5. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $R>1$, tout $\epsilon>0$, et tout $F>1$ il existe $n_0'' \equiv n_0''\left(R,\epsilon,F,I_{\eta_0},\sigma,\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right],Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right],Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n>n_0''$, on a :*

$$Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}_0'}^{\tilde{m}_0-f(n)}\{S_l-S_{\tilde{m}_0}\le 2\ln(\tilde{m}_0-l)\},\tilde{m}_0>0\right] \le \frac{15\epsilon}{R}+I_{\eta_0}H'\left(\frac{5I_{\eta_0}\ln\ln n}{g(n)}+\frac{43g(n)\ln\ln n}{I_{\eta_0}f(n)Q\left[\epsilon_0<-I_{\eta_0}/2\right]}\right)+ + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right), \tag{9.78}$$

où $f(n)=[F(\ln\ln n)^2]$, $H'=\frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$, $E=\frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, $g(n)$ est une suite croissante positive telle que $\lim_{n\to+\infty}g(n)=+\infty$ et $g(n)<\frac{I_{\eta_0}f(n)Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}{21}$. F et R sont des paramètres libres que l'on choisira le moment venu, la suite $(g(n),n>3)$ sera également choisie ultérieurement.

Preuve.
On commence par séparer la probabilité en deux parties que l'on traitera séparément dans les lemmes 9.1.6 et 9.1.7 :

$$Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}_0'}^{\tilde{m}_0-f(n)}\{S_l-S_{\tilde{m}_0}\le 2\ln(\tilde{m}_0-l)\},\ \tilde{m}_0>0\right] \tag{9.79}$$

$$\le Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}_0'}^{-1}\{S_l-S_{\tilde{m}_0}\le 2\ln(\tilde{m}_0-l)\},\ \tilde{m}_0>0\right]+Q\left[\bigcup_{l=0}^{\tilde{m}_0-f(n)}\{S_l-S_{\tilde{m}_0}\le 2\ln(\tilde{m}_0-l)\},\ \tilde{m}_0>0\right] \tag{9.80}$$

On montre maintenant le lemme suivant :

Lemme 9.1.6. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $R>1$, tout $\epsilon>0$, et tout $F>1$ il existe $n_1' \equiv n_1'\left(R,\epsilon,F,I_{\eta_0},\sigma,\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right],Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right],Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n>n_1'$, on a :*

$$Q\left[\bigcup_{l=0}^{\tilde{m}_0-f(n)}\{S_l-S_{\tilde{m}_0}\le 2\ln(\tilde{m}_0-l)\},\ \tilde{m}_0>0\right] \le \frac{9\epsilon}{R}+I_{\eta_0}H'\left(\frac{5I_{\eta_0}\ln\ln n}{g(n)}+\frac{43\ln\ln n g(n)}{I_{\eta_0}f(n)Q\left[\epsilon_0<-I_{\eta_0}/2\right]}\right)+ + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right), \tag{9.81}$$

où $f(n)=[F(\ln\ln n)^2]$, $H=\frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$, $E=\frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ et $g(n)$ est une suite croissante positive telle que $\lim_{n\to+\infty}g(n)=+\infty$ et $g(n)<\frac{I_{\eta_0}f(n)Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}{21}$. F et R sont des paramètres libres que l'on choisira le moment venu.

Preuve.
Soient $R>1$ et $\epsilon>0$, on commence par la remarque suivante déduite de 8.32, il existe $n_1\equiv n_1\left(R,\epsilon,I_{\eta_0},\sigma,\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n>n_1$:

$$Q\left[\tilde{m}_0\le E(\ln n)^2\right] \ge Q\left[\tilde{M}_0\le E(\ln n)^2\right] \tag{9.82}$$

$$\ge 1-\frac{3\epsilon}{R}, \tag{9.83}$$

où $E=\frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. Soit $F>1$, par 8.37 il existe $n_2\equiv n_2\left(R,\epsilon,F,I_{\eta_0},\sigma,\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n>n_2$ on a :

$$Q\left[\tilde{m}_0>f(n),\ \tilde{m}_0>0\right]\ge 1-\frac{6\epsilon}{R}-\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right). \tag{9.84}$$

où $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$. Pour tout $n > n_1 \vee n_2$, on a donc par 9.83 et 9.84 :

$$Q\left[\bigcup_{l=0}^{\tilde{m}_0 - f(n)} \{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(\tilde{m}_0 - l)\}\,,\ \tilde{m}_0 > 0\right] \tag{9.85}$$

$$\leq\ Q\left[\bigcup_{l=0}^{\tilde{m}_0 - f(n)} \{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(\tilde{m}_0 - l)\}\,,\ f(n) < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2\right] + \frac{9\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right)\ , \tag{9.86}$$

On remarque que :

$$f(n) < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2,\ l \geq 0 \Rightarrow \tilde{m}_0 - l \leq E(\ln n)^2\ , \tag{9.87}$$

ainsi :

$$\left\{\bigcup_{l=0}^{\tilde{m}_0 - f(n)} \{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(\tilde{m}_0 - l)\}\,,\ f(n) < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2\right\} \tag{9.88}$$
$$\subset \left\{\bigcup_{l=0}^{\tilde{m}_0 - f(n)} \left\{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(E(\ln n)^2)\right\}\,,\ f(n) < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2\right\}\ ,$$

on a donc :

$$Q\left[\bigcup_{l=0}^{\tilde{m}_0 - f(n)} \{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(\tilde{m}_0 - l)\}\,,\ f(n) < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2\right] \tag{9.89}$$

$$\leq Q\left[\bigcup_{l=0}^{\tilde{m}_0 - f(n)} \left\{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(E(\ln n)^2)\right\}\,,\ f(n) < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2\right]\ . \tag{9.90}$$

On écrit que :

$$Q\left[\bigcup_{l=0}^{\tilde{m}_0 - f(n)} \left\{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(E(\ln n)^2)\right\}\,,\ f(n) < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2\right] = \sum_{k=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} Q\left[\mathcal{D}(k)\right]\ , \tag{9.91}$$

où :

$$\mathcal{D}(k) = \left\{\bigcup_{l=0}^{k - f(n)} \left\{S_l - S_k \leq 2\ln(E(\ln n)^2)\right\}\,,\ \tilde{m}_0 = k\right\}\ . \tag{9.92}$$

Par le lemme 8.2.12 (implication 8.118) on a :

$$D(k) \subset D_-(k) \cap D_+(k)\ , \tag{9.93}$$

où

$$D_-(k) = \left\{\bigcup_{l=0}^{k - f(n)} \left\{S_l - S_k \leq 2\ln(E(\ln n)^2)\right\}, \bigcap_{i=0}^{k-1} \{S_i - S_k > 0\}\right\}\ , \tag{9.94}$$

$$D_+(k) = \bigcap_{i=k+1}^{V^+_{S_k + \Gamma_n, k}} \{S_i - S_k \geq 0\}\,, \qquad V^+_{S_k + \Gamma_n, k} = \inf\{m > k,\ S_m - S_k \geq \Gamma_n\}\ , \tag{9.95}$$

on remarque que $D_-(k) \in \sigma(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k)$ et $D_+(k) \in \sigma(\epsilon_{k+1}, \cdots)$ ces deux évènements sont donc indépendants d'où par 9.93 :

$$Q\left[D(k)\right] \leq Q\left[D_-(k)\right] Q\left[D_+(k)\right]\ . \tag{9.96}$$

Par stationnarité du milieu, on a :

$$Q\left[D_+(k)\right] = Q\left[V_0^- \geq V_{\Gamma_n}^+\right] \ , \tag{9.97}$$

donc $Q\left[D_+(k)\right]$ ne dépend pas de k. On en déduit en remplaçant 9.97 dans 9.96 puis le résultat obtenu dans 9.91 :

$$\sum_{k=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} Q\left[\mathcal{D}(k)\right] \leq Q\left[V_0^- \geq V_{\Gamma_n}^+\right] \sum_{k=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} Q\left[D_-(k)\right] \ . \tag{9.98}$$

On estime maintenant la somme obtenue en 9.98, on commence par remarquer que :

$$\bigcup_{l=0}^{k-f(n)} \left\{S_l - S_k \leq 2\ln(E(\ln n)^2)\right\} \Rightarrow 0 \leq V^-_{-S_k-2\ln(E(\ln n)^2)} \leq k - f(n) \ , \tag{9.99}$$

où $V^-_{-S_k-2\ln(E(\ln n)^2)} = \inf\{j \geq 0,\ S_j - S_k \leq 2\ln(E(\ln n)^2)\}$, ainsi :

$$Q\left[D_-(k)\right] \leq \sum_{s=0}^{k-f(n)} Q\left[V^-_{-S_k-2\ln(E(\ln n)^2)} = s,\ \bigcap_{i=0}^{k-1}\{S_i - S_k > 0\}\right] \ , \tag{9.100}$$

or

$$\left\{V^-_{-S_k-2\ln(E(\ln n)^2)} = s\right\} \Rightarrow \left\{\bigcap_{j=0}^{s-1}\left\{S_j - S_k > 2\ln(E(\ln n)^2)\right\},\ 2\ln(E(\ln n)^2) - I_{\eta_0} \leq S_s - S_k \leq 2\ln(E(\ln n)^2)\right\}$$

avec une Q probabilité égale à 1, de plus on a :

$$\left\{S_j - S_k \equiv S_j - S_s + S_s - S_k > 2\ln(E(\ln n)^2),\ S_s - S_k \leq 2\ln(E(\ln n)^2)\right\} \Rightarrow S_j - S_s > 0 \ . \tag{9.101}$$

On en déduit :

$$\left\{V^-_{-S_k+2\ln(E(\ln n)^2)} = s\right\} \Rightarrow \left\{\bigcap_{j=0}^{s-1}\{S_j - S_s > 0\},\ 2\ln(E(\ln n)^2) - I_{\eta_0} \leq S_s - S_k \leq 2\ln(E(\ln n)^2)\right\} \ ,$$

en remplaçant ceci dans 9.100, on obtient

$$Q\left[D_-(k)\right] \quad \leq \quad \sum_{s=0}^{k-f(n)} Q\left[\mathcal{G}_-(s),\ \mathcal{G}_+(s,k)\right] \ , \tag{9.102}$$

où

$$\mathcal{G}_-(s) = \bigcap_{j=0}^{s-1}\{S_j - S_s > 0\} \ , \tag{9.103}$$

$$\mathcal{G}_+(s,k) = \left\{2\ln(E(\ln n)^2) - I_{\eta_0} \leq S_s - S_k \leq 2\ln(E(\ln n)^2),\ \bigcap_{i=s}^{k-1}\{S_i - S_k > 0\}\right\} \ , \tag{9.104}$$

de plus

$$\mathcal{G}_-(s) \in \sigma\left(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_s\right) \ , \tag{9.105}$$

$$\mathcal{G}_+(s,k) \in \sigma\left(\epsilon_{s+1}, \cdots, \epsilon_k\right) \ , \tag{9.106}$$

par indépendance des v.a. $(\epsilon_i, i \in \mathbb{Z})$ on obtient :

$$Q\left[\mathcal{G}_-(s),\ \mathcal{G}_+(s,k)\right] \quad = \quad Q\left[\mathcal{G}_-(s)\right] Q\left[\mathcal{G}_+(s,k)\right] \ . \tag{9.107}$$

En remplaçant ceci dans 9.102 puis en sommant sur k pour $f(n)+1 \leq k \leq E(\ln n)^2$ on obtient :

$$\sum_{k=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} Q\left[D_-(k)\right] \leq \sum_{k=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} \sum_{s=0}^{k-f(n)} Q\left[\mathcal{G}_-(s)\right] Q\left[\mathcal{G}_+(s,k)\right] \tag{9.108}$$

$$\leq \sum_{s=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[\mathcal{G}_-(s)\right] \sum_{k=f(n)+s+1}^{E(\ln n)^2} Q\left[\mathcal{G}_+(s,k)\right] \ . \tag{9.109}$$

Par stationnarité du milieu on a :

$$Q\left[\mathcal{G}_-(s)\right] = Q\left[V_0^+ > s\right] \ . \tag{9.110}$$

Par définition on a :

$$\mathcal{G}_+(s,k) = \left\{2\ln(E(\ln n)^2) - I_{\eta_0} \leq -\sum_{m=s+1}^{k} \epsilon_m \leq 2\ln(E(\ln n)^2),\ \bigcap_{i=s}^{k-1}\left\{-\sum_{m=i+1}^{k} \epsilon_m > 0\right\}\right\} \ , \tag{9.111}$$

donc par stationnarité du milieu on obtient :

$$Q\left[\mathcal{G}_+(s,k)\right] = Q\left[-2\ln(E(\ln n)^2) \leq S_{k-s-1} \leq -2\ln(E(\ln n)^2) + I_{\eta_0},\ \bigcap_{i=1}^{k-s-1}\{S_i < 0\}\right] \ , \tag{9.112}$$

or

$$\left\{-2\ln(E(\ln n)^2) \leq S_{k-s-1} \leq -2\ln(E(\ln n)^2) + I_{\eta_0},\ \bigcap_{i=1}^{k-s-1}\{S_i < 0\}\right\} \Rightarrow V^-_{2(\ln E(\ln n)^2) - I_{\eta_0}} = k-s-1 \ ,$$

d'où :

$$Q\left[\mathcal{G}_+(s,k)\right] \leq Q\left[V^-_{2(\ln E(\ln n)^2) - I_{\eta_0}} = k-s-1\right] \ . \tag{9.113}$$

en remplaçant 9.110 et 9.113 dans 9.109 on obtient :

$$\sum_{k=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} Q\left[D_-(k)\right] \leq \sum_{s=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[V_0^+ > s\right] \sum_{k=f(n)+s+1}^{E(\ln n)^2} Q\left[V^-_{2(\ln E(\ln n)^2)} = k-s-1\right] \tag{9.114}$$

$$\leq Q\left[V^-_{2(\ln E(\ln n)^2)} > f(n)\right] \sum_{s=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[V_0^+ > s\right] \ . \tag{9.115}$$

En remplaçant 9.115 dans 9.98 puis le résultat obtenu dans 9.91 on obtient :

$$Q\left[\bigcup_{l=0}^{\tilde{m}_0 - f(n)} \left\{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(E(\ln n)^2)\right\},\ f(n) < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2\right] \tag{9.116}$$

$$\leq Q\left[V_0^- \geq V^+_{\Gamma_n}\right] Q\left[V^-_{2(\ln E(\ln n)^2)} > f(n)\right] \sum_{s=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[V_0^+ > s\right] \tag{9.117}$$

Par le lemme 8.2.10 il existe $n_3 \equiv n_3\left(R, \epsilon, Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_3$:

$$\sum_{s=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[V_0^+ > s\right] \leq h'(n) \ , \tag{9.118}$$

où $h'(n) = H' \ln n$, avec $H' = \frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$ et $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. Par le lemme 8.2.2 on a :

$$Q\left[V_0^- \geq V_{\Gamma_n}^+\right] \leq \frac{I_{\eta_0}}{\ln n}\ , \tag{9.119}$$

On rappelle que $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$ avec $F > 1$, on montre par des calculs similaires à ceux effectués pour montrer le lemme 8.2.11, qu'il existe $n_4 \equiv n_4\left(R, \epsilon, I_{\eta_0}, F, \sigma, Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_4$ on a :

$$Q\left[V^-_{2\ln(E(\ln n)^2)} > f(n)\right] \quad \leq \quad \frac{2I_{\eta_0}\ln(E(\ln n)^2)}{g(n)} + \frac{21\times 2\ln(E(\ln n)^2)g(n)}{I_{\eta_0}f(n)Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right]}\ , \tag{9.120}$$

où $f(n) = [F(\ ln\ln n)^2]$ et $g(n)$ est une suite croissante positive telle que $\lim_{n\to+\infty} g(n) = 0$ et $g(n) < \frac{I_{\eta_0}f(n)Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}{42\ln(2E(\ln n)^2)}$. Donc il existe $n_5 \geq n_4$ tel que pour tout $n > n_5$:

$$Q\left[V^-_{2\ln(E(\ln n)^2)} > f(n)\right] \quad \leq \quad \frac{5I_{\eta_0}\ln\ln n}{g(n)} + \frac{43g(n)\ln\ln n}{I_{\eta_0}f(n)Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right]}\ . \tag{9.121}$$

En remplaçant 9.118, 9.119 et 9.121 dans 9.117 on obtient pour tout $n > n_3 \vee n_5$:

$$Q\left[\bigcup_{l=0}^{\tilde{m}_0 - f(n)} \left\{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(E(\ln n)^2)\right\},\ f(n) < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2\right] \tag{9.122}$$

$$\leq \quad I_{\eta_0}\frac{h'(n)}{\ln n}\left(\frac{5I_{\eta_0}\ln\ln n}{g(n)} + \frac{43\ln\ln n g(n)}{I_{\eta_0}f(n)Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right]}\right)\ , \tag{9.123}$$

on obtient le lemme en remplaçant 9.123 dans 9.86 et en prenant $n_1' = n_1 \vee n_2 \vee n_3 \vee n_5$. ■

Lemme 9.1.7. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, il existe $n_1'' \equiv n_1''\left(R, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_1''$, on a :*

$$Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}_0'}^{-1} \left\{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(\tilde{m}_0 - l)\right\},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \leq \frac{6\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)\ , \tag{9.124}$$

où $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, R est un paramètre libre que l'on choisira le moment venu.

Preuve.
On a supposé $\tilde{m}_0 > 0$ donc, d'après la définition 8.1.4 (page 138) d'une vallée de profondeur supérieure à Γ_n, $\tilde{M}_0'$ vérifie :

$$S_{\tilde{M}_0'} - \max_{0\leq m\leq\tilde{m}_0} S_m \geq \gamma\ln\ln n \text{ et } S_{\tilde{M}_0'} - S_{\tilde{m}_0} \geq \Gamma_n \tag{9.125}$$

on sera donc amené, pour caractériser $\tilde{M}_0'$, à faire une partition sur les valeurs de $\max_{0\leq m\leq\tilde{m}_0} S_m$. On rappelle aussi qu'étant donné que les v.a. $(\alpha_i, i \in \mathbb{Z})$ sont indépendantes et $S_0 = 0$ les processus $(S_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ et $(S_{-n},\ n \in \mathbb{N}^*)$ sont indépendants. Soient $R > 1$ et $\epsilon > 0$, par 8.32 et 8.33 il existe $n_1 \equiv n_1\left(R, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_1$, on a :

$$Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}_0'}^{-1} \left\{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(\tilde{m}_0 - l)\right\},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \tag{9.126}$$

$$\leq \quad Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}_0'}^{-1} \left\{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(\tilde{m}_0 - l)\right\},\ 0 < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2,\ \tilde{M}_0' \geq -E(\ln n)^2\right] + \frac{6\epsilon}{R}\ , \tag{9.127}$$

où $E = \frac{24R^2 |\ln \frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2 \epsilon^2}$, on a donc :

$$Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}'_0}^{-1} \{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(\tilde{m}_0 - l)\},\ 0 < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2,\ \tilde{M}'_0 \geq -E(\ln n)^2\right] \tag{9.128}$$

$$\leq\ Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}'_0}^{-1} \left\{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(2E(\ln n)^2)\right\},\ 0 < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2,\ \tilde{M}'_0 \geq -E(\ln n)^2\right] . \tag{9.129}$$

On fixe maintenant la valeur de $S_{\tilde{m}_0}$, on remarque par définition que $S_{\tilde{m}_0} \leq S_0 = 0$, ainsi :

$$Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}'_0}^{-1} \left\{S_l - S_{\tilde{m}_0} \leq 2\ln(2E(\ln n)^2)\right\},\ 0 < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2,\ \tilde{M}'_0 \geq -E(\ln n)^2\right] \tag{9.130}$$

$$\leq\ \int_0^{+\infty} Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}'_0}^{-1} \left\{S_l \leq 2\ln(2E(\ln n)^2) - x\right\},\ 0 < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2,\ \tilde{M}'_0 \geq -E(\ln n)^2,\ S_{\tilde{m}_0} \in (-dx)\right] \tag{9.131}$$

$$\leq\ \int_0^{+\infty} Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}'_0}^{-1} \left\{S_l \leq 2\ln(2E(\ln n)^2) - x\right\},\ 0 < \tilde{m}_0,\ S_{\tilde{m}_0} \in (-dx)\right] . \tag{9.132}$$

On partitionne maintenant sur les valeurs de $\max_{0 \leq m \leq \tilde{m}_0} S_m$ ([8]) :

$$Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}'_0}^{-1} \left\{S_l \leq 2\ln(2E(\ln n)^2) - x\right\},\ 0 < \tilde{m}_0,\ S_{\tilde{m}_0} \in (-dx)\right] \tag{9.133}$$

$$\leq\ \int_0^{+\infty} Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}'_0}^{-1} \left\{S_l \leq 2\ln(2E(\ln n)^2) - x\right\},\ S_{\tilde{m}_0} \in (-dx),\ \max_{0 \leq m \leq \tilde{m}_0} S_m \in dy,\ \tilde{m}_0 > 0\right] , \tag{9.134}$$

Par 9.125 on a :

$$\max_{0 \leq m \leq \tilde{m}_0} S_m \in dy,\ S_{\tilde{m}_0} \in (-dx) \Rightarrow \tilde{M}'_0 = \nu^+_{(\Gamma_n - x) \vee (y + \gamma \ln\ln n - x)} , \tag{9.135}$$

où $\nu^+_{(\Gamma_n - x) \vee (y + \gamma \ln\ln n - x)} = \sup\left(p < 0,\ S_p \geq (\Gamma_n - x) \vee (y + \gamma \ln\ln n - x)\right)$. Ainsi par indépendance :

$$Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}'_0}^{-1} \left\{S_l \leq 2\ln(2E(\ln n)^2) - x\right\},\ S_{\tilde{m}_0} \in (-dx),\ \max_{0 \leq m \leq \tilde{m}_0} S_m \in dy,\ \tilde{m}_0 > 0\right] \tag{9.136}$$

$$\leq\ Q\left[\bigcup_{l=\nu^+_{(\Gamma_n - x) \vee (y + \gamma \ln\ln n - x)}}^{-1} \left\{S_l \leq 2\ln(2E(\ln n)^2) - x\right\},\ \bigcap_{l=\nu^+_{(\Gamma_n - x) \vee (y + \gamma \ln\ln n - x)}}^{-1} \{S_l > -x\}\right] \times \tag{9.137}$$

$$Q\left[S_{\tilde{m}_0} \in (-dx),\ \max_{0 \leq m \leq \tilde{m}_0} S_m \in dy,\ \tilde{m}_0 > 0\right] . \tag{9.138}$$

[8] par définition $\max_{0 \leq m \leq \tilde{m}_0} S_m \geq S_0 = 0$.

Par des calculs similaires à ceux effectués pour montrer le lemme précédent, on montre que :

$$Q\left[\bigcup_{l=\nu^+_{(\Gamma_n-x)\vee(y+\gamma\ln\ln n-x)}}^{-1}\left\{S_l\leq 2\ln(2E(\ln n)^2)-x\right\},\bigcap_{l=\nu^+_{(\Gamma_n-x)\vee(y+\gamma\ln\ln n-x)}}^{-1}\{S_l>-x\}\right] \tag{9.139}$$

$$\leq Q_{2\ln(2E(\ln n)^2)-x}\left[\nu^+_{(\Gamma_n-x)\vee(y+\gamma\ln\ln n-x)}>\nu^-_x\right] \tag{9.140}$$

$$= Q_{2\ln(2E(\ln n)^2)}\left[\nu^+_{(\Gamma_n)\vee(y+\gamma\ln\ln n)}>\nu^-_0\right] \tag{9.141}$$

$$\leq Q_{2\ln(2E(\ln n)^2)}\left[\nu^+_{\Gamma_n}>\nu^-_0\right]\equiv Q_{2\ln(2E(\ln n)^2)}\left[V^+_{\Gamma_n}<V^-_0\right]\ , \tag{9.142}$$

où l'égalité 9.141 ainsi que la dernière équivalence sont obtenus par stationnarité du milieu. En remplaçant ceci dans 9.137 on obtient :

$$Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}'_0}^{-1}\left\{S_l\leq 2\ln(2E(\ln n)^2)-x\right\},\ S_{\tilde{m}_0}\in(-dx),\ \max_{0\leq m\leq\tilde{m}_0}S_m\in dy,\ \tilde{m}_0>0\right] \tag{9.143}$$

$$\leq Q_{2\ln(2E(\ln n)^2)}\left[V^+_{\Gamma_n}<V^-_0\right]Q\left[S_{\tilde{m}_0}\in(-dx),\ \max_{0\leq m\leq\tilde{m}_0}S_m\in dy,\ \tilde{m}_0>0\right]\ . \tag{9.144}$$

On remplace maintenant 9.144 dans 9.134 puis le résultat obtenu dans 9.132, on obtient :

$$\begin{aligned}
&Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}'_0}^{-1}\left\{S_l-S_{\tilde{m}_0}\leq 2\ln(2E(\ln n)^2)\right\},\ 0<\tilde{m}_0\leq E(\ln n)^2,\ \tilde{M}'_0\geq -E(\ln n)^2\right]\\
&\leq Q_{2\ln(2E(\ln n)^2)}\left[V^+_{\Gamma_n}<V^-_0\right]\\
&\leq \mathcal{O}\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)\ ,
\end{aligned} \tag{9.145}$$

où la dernière égalité est obtenue par 8.21, en remplaçant 9.145 dans 9.127 on obtient le lemme en prenant $n''_1=n_1$. ■

Pour finir la preuve de la proposition 9.1.6 il suffit de remplacer les résultats des lemmes 9.1.7 et 9.1.6 dans 9.80 et prendre $n''_0=n'_1\vee n''_1$. ■

Preuve (Proposition 9.1.1).

Soient $\epsilon>0$, $R>1$ et $n>3$ on pose :

$$g(n)\equiv G\ln\ln n,\ \text{avec } G=I_{\eta_0}(I_{\eta_0}\vee 1)H'\frac{R}{\epsilon}\ , \tag{9.146}$$

$$f(n)=\left[\left(\frac{g(n)}{I_{\eta_0}}\right)^2\frac{1}{Q\left[\epsilon_0<-I_{\eta_0}/2\right]}\right]\ , \tag{9.147}$$

où $H'=\frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$, et $E=\frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. En remplaçant ceci dans les propositions 9.1.4 et 9.1.6, on obtient qu'il existe $n_0\equiv n_0\left(R,\epsilon,I_{\eta_0},\sigma,\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right],Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right],Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)\geq n'_0\vee n''_0$ tel que pour tout $n>n_0$ on a :

$$Q\left[\bigcup_{l=\tilde{M}'_0}^{\tilde{m}_0-f(n)}\left\{S_l-S_{\tilde{m}_0}\leq 2\ln(\tilde{m}_0-l)\right\},\ \tilde{m}_0>0\right]\leq\frac{60\epsilon}{R}\ , \tag{9.148}$$

$$Q\left[\bigcup_{k=\tilde{m}_0+f(n)}^{\tilde{M}_0}\left\{S_k-S_{\tilde{m}_0}\leq 2\ln(k-\tilde{m}_0)\right\},\ \tilde{m}_0>0\right]\leq\frac{80\epsilon}{R}\ , \tag{9.149}$$

on en déduit, par passage au complémentaire que pour tout $n>n_0$ 9.22 est vraie avec une Q probabilité supérieure à $1-\frac{140\epsilon}{R}$, où $R>1$ est un paramètre libre que l'on fixera ultérieurement. On remarque de plus, par

définition de H', que :

$$f(n) = \left[\frac{\left((I_{\eta_0}\vee 1)H'\frac{R}{\epsilon}\right)^2}{Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right]}(\ln\ln n)^2\right] \tag{9.150}$$

$$= \left[\left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2}Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2(\ln\ln n)^2\right] . \tag{9.151}$$

on notera $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0<-I_{\eta_0}/2\right])^{1/2}Q\left[\epsilon_0>I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$ ce qui termine la preuve de la proposition. ■

9.2 Etude de la Q v.a. $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})]$

Voici le résultat principal de ce paragraphe :

9.2.1 Résultat principal

Proposition 9.2.1. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0\left(R, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$:*

$$Q\left[\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] > \mu\right] \leq \frac{110\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{\frac{1}{33}}}\right) , \tag{9.152}$$

où $\mu = 3+\frac{2}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\eta_0}\left(\frac{2e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^3} + \frac{(E_2+3)}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^2} + \frac{3(E_2-1)}{1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}\right)$, $E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon}\frac{I_{\eta_0}(I_{\eta_0}\vee 1)(21E+1)}{\left(Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\wedge Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)$ *et* $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, *$R$ est un paramètre libre que l'on choisira le moment venu.*

Ce résultat montre que $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]$ est bornée par une constante indépendante de n avec une Q probabilité aussi proche de 1 que l'on veut. Cette proposition, est le point clé concernant le milieu qui nous permettra de montrer la convergence en $\mathbb{P}^{\alpha}$ probabilité du temps local normalisé par n de la M.A.M.A. au point $\tilde{m}_0$ en un instant n (voir paragraphe 10.2). Pour montrer cette proposition on se sert de résultats obtenus dans le paragraphe 9.1.2, on obtient alors une borne supérieure pour $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]$ (paragraphe qui suit) qui fait apparaître que pour borner cette Q v.a. il suffit de faire l'étude du potentiel aléatoire dans le voisinage $V_{\tilde{m}_0}$ (inégalité 9.161), cette étude fera l'objet du paragraphe 9.2.3.

9.2.2 Préliminaire à la preuve du résultat

Par le lemme 9.1.3 on a :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \equiv \sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{m}_0+f(n)}\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(j, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] + \sum_{j=\tilde{m}_0-f(n)}^{\tilde{m}_0-1}\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(j, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] + 1 \tag{9.153}$$

$$\leq \frac{1}{\eta_0}\sum_{j=1}^{f(n)}\frac{1}{e^{S_{\tilde{m}_0+j}-S_{\tilde{m}_0}}} + \frac{1}{\eta_0}\sum_{j=1}^{f(n)}\frac{1}{e^{S_{\tilde{m}_0-j}-S_{\tilde{m}_0}}} + 1 , \tag{9.154}$$

avec une Q probabilité égale à 1. Le $+1$ dans 9.154 venant du fait que $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] = 1$, pour montrer la proposition il suffit donc de montrer que les deux sommes en 9.154 sont bornées par une fonction ne dépendant pas de n. Pour cela on commence par montrer le lemme préliminaire suivant :

Lemme 9.2.2. *Soient $\alpha \in \Omega_2$, $F > 1$ et $n > 3$, on a :*

$$\sum_{j=1}^{f(n)} \frac{1}{e^{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0}}} \leq 1 + \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \frac{1}{e^{a(i-1)}} \sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0} \in [a(i-1), ai[} \ , \tag{9.155}$$

$$\sum_{j=1}^{f(n)} \frac{1}{e^{S_{\tilde{m}_0-j} - S_{\tilde{m}_0}}} \leq 1 + \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \frac{1}{e^{a(i-1)}} \sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0-j} - S_{\tilde{m}_0} \in [a(i-1), ai[} \ , \tag{9.156}$$

où $a = \frac{I_{\eta_0}}{4}$ et $Z(n) = \left[\frac{\ln f(n)}{a}\right]$, et $f(n) = [F(\ln \ln n)^2]$.

Preuve.
Montrons 9.155 (9.156 se montre de la même façon)

$$\sum_{j=1}^{f(n)} \frac{1}{e^{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0}}} = \sum_{j=1}^{f(n)} \frac{1}{e^{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0}}} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0} \leq \ln f(n)} + \sum_{j=1}^{f(n)} \frac{1}{e^{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0}}} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0} > \ln f(n)} \tag{9.157}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{f(n)} \frac{1}{e^{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0}}} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0} \leq \ln f(n)} + 1 \ . \tag{9.158}$$

Notons $a = \frac{I_{\eta_0}}{4}$, $Z(n) = \left[\frac{\ln f(n)}{a}\right]$, avec ceci :

$$\sum_{j=1}^{f(n)} \frac{1}{e^{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0}}} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0} \leq \ln f(n)} \leq \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \sum_{j=1}^{f(n)} \frac{1}{e^{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0}}} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0} \in [a(i-1), ai[} \tag{9.159}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \frac{1}{e^{a(i-1)}} \sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0} \in [a(i-1), ai[} \ . \tag{9.160}$$

■

On déduit de 9.154 et du lemme 9.2.2 que pour tout $F > 1$ et $n > 3$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right] \\ \leq\ & 3 + \frac{1}{\eta_0} \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \frac{1}{e^{a(i-1)}} \sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0} \in [a(i-1), ai[} + \frac{1}{\eta_0} \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \frac{1}{e^{a(i-1)}} \sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0-j} - S_{\tilde{m}_0} \in [a(i-1), ai[} \ , \end{aligned} \tag{9.161}$$

avec une Q probabilité égale à un.
On va montrer dans le paragraphe suivant (lemmes 9.2.3 et 9.2.4) que les sommes $\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0} \in [a(i-1), ai[}$ et $\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0-j} - S_{\tilde{m}_0} \in [a(i-1), ai[}$ se comportent polynômialement en i, ceci revient à faire l'étude du potentiel aléatoire dans le voisinage de $V_{\tilde{m}_0}$.

9.2.3 Etude du potentiel aléatoire dans le voisinage $V_{\tilde{m}_0}$

On supposera que $\tilde{m}_0 > 0$, les calculs sont symétriquement similaires pour le cas $\tilde{m}_0 < 0$ et le cas $\tilde{m}_0 = 0$ est trivial. On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 9.2.3. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$ et tout $E_2 > 1$, il existe $n'_0 \equiv$*

$n'_0\left(R,\epsilon,I_{\eta_0},\sigma,\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right],Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ *tel que pour tout* $n>n'_0$*, on a :*

$$\begin{aligned}&Q\left[\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j}-S_{\tilde{m}_0}\in[a(i-1),ai[}>g(i)\right\},\ \tilde{m}_0>0\right]\\ &\leq\ \frac{12\epsilon}{R}+\frac{21}{5}\frac{H'I_{\eta_0}}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}e^{-E_2}+\frac{4E}{(\ln n)^{1/33}}\ ,\end{aligned}\tag{9.162}$$

où $g(i)=\frac{(i+3)(i-1+E_2)}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$, $H'=\frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$, $a=\frac{I_{\eta_0}}{4}$, $Z(n)=\left[\frac{\ln f(n)}{a}\right]$, $E=\frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, $f(n)=[F(\ln\ln n)^2]$ *et* $F=\left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0<-I_{\eta_0}/2\right])^{1/2}Q\left[\epsilon_0>I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$. *$R$ et E_2 sont des paramètres libres qui seront choisis ultérieurement.*

Preuve.
Soient $R>1$ et $\epsilon>0$, par 8.32 et 8.36 il existe $n_1\equiv n_1\left(R,\epsilon,I_{\eta_0},\sigma,\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$ tel que pour tout $n>n_1$, on a :

$$Q\left[\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j}-S_{\tilde{m}_0}\in[a(i-1),ai[}>g(i)\right\},\ \tilde{m}_0>0\right]\leq\sum_{l=1}^{E(\ln n)^2}Q\left[\mathcal{A}(l)\right]+\frac{12\epsilon}{R}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right)\ ,\tag{9.163}$$

où :

$$\mathcal{A}(l)=\left\{\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_{l+j}-S_l\in[a(i-1),ai[}>g(i)\right\},\ \tilde{m}_0=l,\ \tilde{M}_0>\tilde{m}_0+f(n)\right\}\ ,\tag{9.164}$$

par le lemme 8.2.12 (implication 8.118), on a :

$$\mathcal{A}(l)\subset\mathcal{A}_-(l)\cap\mathcal{A}_+(l)\ ,\tag{9.165}$$

où :

$$\mathcal{A}_-(l)=\bigcap_{i=1}^{l-1}\{S_i-S_l>0\}\tag{9.166}$$

$$\mathcal{A}_+(l)=\left\{\bigcap_{i=l+1}^{V^+_{S_l+\Gamma_{n,l}}}\{S_i-S_l\geq 0\},\ \bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_{l+j}-S_l\in[a(i-1),ai[}>g(i)\right\},\ l+f(n)<V^+_{S_l+\Gamma_n,l}\right\}\ .\tag{9.167}$$

On remarque que $\mathcal{A}_-(l)\in\sigma\left(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l\right)$ et $\mathcal{A}_+(l)\in\sigma\left(\epsilon_{l+1},\cdots\right)$ on en déduit par indépendance des v.a. $(\epsilon_i,i\in\mathbb{Z})$:

$$Q\left[\mathcal{A}(l)\right]\leq Q\left[\mathcal{A}_-(l)\right]Q\left[\mathcal{A}_+(l)\right]\ ,\tag{9.168}$$

Par un raisonnement similaire à celui effectué entre 9.35 et 9.38, on a :

$$Q\left[\mathcal{A}_+(l)\right]=Q\left[\bigcap_{i=1}^{V^+_{\Gamma_n}}\{S_i\geq 0\},\ \bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{\bar{S}_j\in[a(i-1),ai[}>g(i)\right\},\ f(n)<V^+_{\Gamma_n}\right]\ ,\tag{9.169}$$

on remarque que $Q\left[\mathcal{A}_+(l)\right]\equiv Q\left[\mathcal{A}_+\right]$ ne dépend pas de l, en remplaçant 9.169 dans 9.168 puis le résultat obtenu dans 9.163 on obtient donc pour tout $n>n_1$:

$$\begin{aligned}&Q\left[\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j}-S_{\tilde{m}_0}\in[a(i-1),ai[}>g(i)\right\},\ \tilde{m}_0>0\right]\\ &\leq\ Q\left[\mathcal{A}_+\right]\sum_{l=1}^{E(\ln n)^2}Q\left[\mathcal{A}_-(l)\right]+\frac{12\epsilon}{R}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right)\ ,\end{aligned}\tag{9.170}$$

par stationnarité on a :

$$Q\left[\mathcal{A}_-(l)\right] = Q\left[V_0^+ > l-1\right] \ , \tag{9.171}$$

donc par le lemme 8.2.10, il existe $n_2 \equiv n_2\left(R, \epsilon, Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_2$, on a :

$$\sum_{l=1}^{E(\ln n)^2} Q\left[\mathcal{A}_-(l)\right] \leq \sum_{l=0}^{E(\ln n)^2} Q\left[V_0^+ > l\right] \leq h'(n) \ , \tag{9.172}$$

où $H' = \frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$ et $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. Ainsi en remplaçant 9.172 dans 9.170, on obtient pour tout $n > n_1 \vee n_2$:

$$Q\left[\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j}-S_{\tilde{m}_0}\in[a(i-1),ai[} > g(i)\right\},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \leq h'(n)Q\left[\mathcal{A}_+\right] + \frac{12\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right) \ . \tag{9.173}$$

On estime maintenant $Q\left[\mathcal{A}_+\right]$, on a :

$$Q\left[\mathcal{A}_+\right] \leq \sum_{i=1}^{Z(n)+1} Q\left[\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_j\in[a(i-1),ai[} > g(i),\ f(n) < V^+_{\Gamma_n},\ \bigcap_{i=1}^{V^+_{\Gamma_n}}\{S_i \geq 0\}\right] \tag{9.174}$$

$$= \sum_{i=1}^{Z(n)+1}\sum_{k=g(i)+1}^{f(n)} Q\left[\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_j\in[a(i-1),ai[} = k,\ f(n) < V^+_{\Gamma_n},\ \bigcap_{i=1}^{V^+_{\Gamma_n}}\{S_i \geq 0\}\right] \ . \tag{9.175}$$

On rappelle que :

$$H_{ia,1} = \inf\left\{m > 0,\ S_m \in [a(i-1), ai[\right\} \ , \tag{9.176}$$

$$H_{ia,k} = \inf\left\{m > H_{ia,k-1},\ S_m \in [a(i-1), ai[\right\},\ k > 1 \ . \tag{9.177}$$

On a :

$$Q\left[\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_j\in[a(i-1),ai[} = k,\ f(n) < V^+_{\Gamma_n},\ \bigcap_{i=1}^{V^+_{\Gamma_n}}\{S_i \geq 0\}\right] \tag{9.178}$$

$$= \sum_{l=k-1}^{f(n)} Q\left[\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_j\in[a(i-1),ai[} = k,\ f(n) < V^+_{\Gamma_n},\ \bigcap_{i=1}^{V^+_{\Gamma_n}}\{S_i \geq 0\},\ H_{ia,k} = l\right] \tag{9.179}$$

$$\leq \sum_{l=k-1}^{f(n)} Q\left[\bigcap_{m=0}^{l}\{S_m \geq 0\},\ H_{ia,k} = l,\ \bigcap_{m=l+1}^{V^+_{\Gamma_n,l}}\{S_m \geq 0\},\ f(n) < \inf\left\{m > l,\ S_m \geq \Gamma_n\right\}\right] \ . \tag{9.180}$$

où $V^+_{\Gamma_n,l} = \inf\left\{m > l,\ S_m \geq \Gamma_n\right\}$. De plus $H_{ia,k} = l \Rightarrow a(i-1) \leq S_l \leq ai$, on en déduit :

$$Q\left[\bigcap_{m=0}^{l}\{S_m \geq 0\},\ H_{ia,k} = l,\ \bigcap_{m=l+1}^{V^+_{\Gamma_n,l}}\{S_m \geq 0\},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n,l}\right] \tag{9.181}$$

$$= \int_{a(i-1)}^{ai} Q\left[\bigcap_{m=0}^{l}\{S_m \geq 0\},\ H_{ia,k} = l,\ S_l \in dy,\ \bigcap_{m=l+1}^{V^+_{\Gamma_n,l}}\{S_m \geq 0\},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n,l}\right] \tag{9.182}$$

$$= \int_{a(i-1)}^{ai} Q\left[\bigcap_{m=0}^{l}\{S_m \geq 0\},\ H_{ia,k} = l,\ S_l \in dy\right] Q\left[\bigcap_{m=l+1}^{V^+_{\Gamma_n,l}}\{S_m \geq 0\},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n,l}\,\middle|\, S_l \in dy\right] \ , \tag{9.183}$$

la dernière égalité est obtenue par la propriété de Markov. Par stationnarité du milieu on a :

$$Q\left[\bigcap_{m=l+1}^{V^+_{\Gamma_n,l}} \{S_m \geq 0\},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n,l} \middle| S_l \in dy\right] = Q_y\left[\bigcap_{m=1}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_m \geq 0\},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n,l}\right] \tag{9.184}$$

$$\leq Q_y\left[\bigcap_{m=1}^{V^+_{\Gamma_n,l}} \{S_m \geq 0\}\right] = Q_y\left[V^-_0 > V^+_{\Gamma_n}\right] \tag{9.185}$$

$$\leq Q_{ia}\left[V^-_0 > V^+_{\Gamma_n}\right]\ , \tag{9.186}$$

la dernière inégalité est due au fait que $Q_y\left[V^-_0 > V^+_{\Gamma_n}\right]$ est croissante en y. On remarque que 9.186 ne dépend ni de y ni de l, en remplaçant 9.186 dans 9.183 puis le résultat obtenu dans 9.180 on obtient :

$$Q\left[\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_j \in [a(i-1), ai[} = k,\ f(n) < V^+_{\Gamma_n},\ \bigcap_{i=1}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_i \geq 0\}\right] \leq Q\left[V^-_0 > H_{ia,k}\right] Q_{ia}\left[V^-_0 > V^+_{\Gamma_n}\right]. \tag{9.187}$$

Il reste donc à estimer $Q\left[V^-_0 > H_{ia,k}\right]$ (on connaît $Q_{ia}\left[V^-_0 > V^+_{\Gamma_n}\right]$ par le lemme 8.2.2). Par le lemme 8.2.8, on a pour $i > 1$:

$$Q\left[V^-_0 > H_{ia,k}\right] \leq Q\left[V^-_0 > V^+_{(i-1)a}\right]\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] Q_{(i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} > V^-_0\right]\right)^{k-1}\ , \tag{9.188}$$

et pour $i = 1$:

$$Q\left[V^-_0 > H_{a,k}\right] \leq Q\left[\epsilon_0 \geq 0\right]\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]\right)^{k-1}\ . \tag{9.189}$$

En remplaçant 9.188 dans 9.187 (si i>1) et 9.189 dans 9.187 (si i=1) puis les résultats obtenus dans 9.175, on a :

$$Q\left[\mathcal{A}_+\right] \tag{9.190}$$

$$\leq \sum_{i=2}^{Z(n)+1} \sum_{k=g(i)+1}^{f(n)} Q\left[V^-_0 > V^+_{(i-1)a}\right]\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{4}\right] Q_{(i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} > V^-_0\right]\right)^{k-1} \times \tag{9.191}$$

$$Q_{ia}\left[V^-_0 > V^+_{\Gamma_n}\right] + \sum_{k=g(1)+1}^{f(n)} Q\left[\epsilon_0 \geq 0\right]\left(Q\left[\epsilon_0 \geq -\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]\right)^{k-1} Q_a\left[V^-_0 > V^+_{\Gamma_n}\right]\ . \tag{9.192}$$

Les sommes sur k sont des sommes géométriques d'où :

$$Q\left[\bigcap_{i=1}^{V^+_{\Gamma_n}} \{S_i \geq 0\},\ \bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_j \in [a(i-1), ai[} > g(i)\right\},\ f(n) < V^+_{\Gamma_n}\right] \tag{9.193}$$

$$\leq \sum_{i=2}^{Z(n)+1} Q\left[V^-_0 > V^+_{(i-1)a}\right] \frac{(1-r_i)^{g(i)}}{r_i} Q_{ia}\left[V^-_0 > V^+_{\Gamma_n}\right] + \tag{9.194}$$

$$+\ Q\left[\epsilon_0 \geq 0\right] \frac{(1-r_0)^{g(1)}}{r_0} Q_a\left[V^-_0 > V^+_{\Gamma_n}\right]\ , \tag{9.195}$$

où $r_i = Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] Q_{(i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} > V^-_0\right]$ et $r_0 = Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]$.
Commençons par estimer 9.194, par stationnarité du milieu et le lemme 8.22, on a :

$$Q_{(i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V^+_{(i-1)a} > V^-_0\right] = Q\left[V^+_{\frac{I_{\eta_0}}{4}} > V^-_{(i-1)a - \frac{I_{\eta_0}}{4}}\right] \tag{9.196}$$

$$\geq \frac{I_{\eta_0}}{4} \frac{1}{(i-1)a + I_{\eta_0}} = \frac{1}{i+3}\ , \tag{9.197}$$

de même :

$$Q_{ia}\left[V_0^- > V_{\Gamma_n}^+\right] = Q\left[V_{ia}^- > V_{\Gamma_n - ia}^+\right] \tag{9.198}$$

$$\leq \frac{ia + I_{\eta_0}}{\Gamma_n + I_{\eta_0}} = \frac{I_{\eta_0}(i+4)}{4(\Gamma_n + I_{\eta_0})} , \tag{9.199}$$

et

$$Q\left[V_0^- > V_{(i-1)a}^+\right] \leq \frac{I_{\eta_0}}{(i-1)a + I_{\eta_0}} = \frac{4}{i+3} , \tag{9.200}$$

on en déduit :

$$\sum_{i=2}^{Z(n)+1} Q\left[V_0^- > V_{(i-1)a}^+\right] \frac{(1-r_i)^{g(i)}}{r_i} Q_{ia}\left[V_0^- > V_{\Gamma_n}^+\right] \tag{9.201}$$

$$\leq \sum_{i=2}^{Z(n)+1} \frac{4}{i+3}\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\frac{1}{i+3}\right)^{g(i)} \frac{i+3}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} \frac{I_{\eta_0}(i+4)}{4(\Gamma_n + I_{\eta_0})} \tag{9.202}$$

$$= \frac{1}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} \frac{I_{\eta_0}}{\Gamma_n + I_{\eta_0}} \sum_{i=2}^{Z(n)+1} (i+4)\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\frac{1}{i+3}\right)^{g(i)} . \tag{9.203}$$

Soit $E_2 > 1$, en choisissant $g(i) = \frac{(i+3)(i-1+E_2)}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$, on a pour tout $i \geq 2$:

$$\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\frac{1}{i+3}\right)^{g(i)} \leq e^{-(i-1+E_2)} = e^{-(i-1+E_2)} . \tag{9.204}$$

De plus :

$$\sum_{i=2}^{Z(n)+1} ie^{-(i-1)} = \sum_{i=1}^{Z(n)+1} ie^{-(i-1)} - 1 \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} - 1 \leq \frac{3}{2} , \tag{9.205}$$

$$\sum_{i=2}^{Z(n)+1} e^{-(i-1)} \leq \frac{1}{e-1} \leq \frac{6}{10} . \tag{9.206}$$

On déduit des trois dernières estimations :

$$\sum_{i=2}^{Z(n)+1} (i+4)\left(1 - Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\frac{1}{i+3}\right)^{g(i)} \leq 4e^{-E_2} . \tag{9.207}$$

En remplaçant ceci dans 9.203 on obtient :

$$\sum_{i=2}^{Z(n)+1} Q\left[V_0^- > V_{(i-1)a}^+\right] \frac{(1-r_i)^{g(i)}}{r_i} Q_{ia}\left[V_0^- > V_{\Gamma_n}^+\right] \leq e^{-E_2} \frac{1}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} \frac{4I_{\eta_0}}{\Gamma_n + I_{\eta_0}} . \tag{9.208}$$

De même pour 9.195 on a :

$$Q\left[\epsilon_0\geq 0\right]\frac{\left(1-Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]\right)^{g(1)}}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]}Q_a\left[V_0^-> V_{\Gamma_n}^+\right] \tag{9.209}$$

$$\leq \frac{5I_{\eta_0}}{4(\Gamma_n+I_{\eta_0})}\frac{Q\left[\epsilon_0\geq 0\right]}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]}\left(1-Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]\right)^{\frac{4E_2}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]}} \tag{9.210}$$

$$\leq \frac{5I_{\eta_0}}{4(\Gamma_n+I_{\eta_0})}\frac{Q\left[\epsilon_0\geq 0\right]}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]}e^{-\frac{4E_2}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]}\left(Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]-\frac{\left(Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]\right)^2}{2}\right)} \tag{9.211}$$

$$\leq e^{-4E_2}\frac{1}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]}\frac{5I_{\eta_0}}{4(\Gamma_n+I_{\eta_0})}\ . \tag{9.212}$$

En remplaçant 9.208 ainsi que 9.212 dans respectivement 9.194 et 9.195 on obtient :

$$Q\left[\bigcap_{i=1}^{V_{\Gamma_n}^+}\{S_i\geq 0\},\ \bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{\bar{S}_j\in[a(i-1),ai[}>g(i)\right\},\ f(n)<V_{\Gamma_n}^+\right] \tag{9.213}$$

$$\leq e^{-E_2}\frac{1}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]}\frac{4I_{\eta_0}}{\Gamma_n+I_{\eta_0}}+e^{-4E_2}\frac{1}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{4}\right]}\frac{5I_{\eta_0}}{4(\Gamma_n+I_{\eta_0})} \tag{9.214}$$

$$\leq e^{-E_2}\frac{1}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\frac{I_{\eta_0}}{\Gamma_n+I_{\eta_0}}\left(4+\frac{5e^{-3E_2}}{4}\right) \tag{9.215}$$

$$\leq \frac{21}{4}\frac{e^{-E_2}}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\frac{I_{\eta_0}}{\Gamma_n+I_{\eta_0}}\ . \tag{9.216}$$

En remplaçant ceci dans 9.173, on obtient pour $n>n_1\vee n_2$:

$$Q\left[\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j}-S_{\tilde{m}_0}\in[a(i-1),ai[}>g(i)\right\},\ \tilde{m}_0>0\right]$$

$$\leq \frac{I_{\eta_0}h'(n)}{\Gamma_n+I_{\eta_0}}\frac{21}{4}\frac{e^{-E_2}}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}+\frac{12\epsilon}{R}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right). \tag{9.217}$$

On obtient le lemme en remplaçant $h'(n)\equiv H'\ln n$ et $\Gamma_n\equiv\ln n+\gamma\ln n$ et en prenant $n'_0=n_1\vee n_2$. ■

On montre maintenant un résultat similaire mais à "gauche" de $\tilde{m}_0$:

Lemme 9.2.4. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $R>1$, tout $\epsilon>0$ et tout $E_2>0$, il existe $n''_0\equiv n''_0\left(R,\epsilon,I_{\eta_0},\sigma,\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right],Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n>n''_0$, on a :*

$$Q\left[\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0-j}-S_{\tilde{m}_0}\in[a(i-1),ai[}>g(i)\right\},\ \tilde{m}_0>0\right]$$

$$\leq \frac{12\epsilon}{R}+\frac{5}{2}\frac{I_{\eta_0}^2H'}{Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}e^{-E_2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right)\ , \tag{9.218}$$

où $g(i)=\frac{(i+3)(i-1+E_2)}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$, $H'=\frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$, $E=\frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. R et E_2 sont des paramètres libres qui seront choisis ultérieurement.

Preuve.
La démarche est similaire à celle que l'on a déjà appliquée pour les lemmes précédents, soient $\epsilon > 0$, $R > 1$, par 8.32 et 8.37 il existe $n_1 \equiv n_1\left(R, \epsilon, F, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]\right)$, tel que pour tout $n > n_1$ on a :

$$Q\left[\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0-j}-S_{\tilde{m}_0}\in[a(i-1),ai[} > g(i)\right\},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \tag{9.219}$$

$$\leq\ Q\left[\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0-j}-S_{\tilde{m}_0}\in[a(i-1),ai[} > g(i)\right\},\ f(n) < \tilde{m}_0 \leq E(\ln n)^2\right] + \frac{6\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right) \tag{9.220}$$

$$=\ \sum_{l=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} Q\left[D(l)\right] + \frac{12\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right)\ , \tag{9.221}$$

où :

$$\mathcal{D}(l) = \left\{\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_{l-j}-S_l\in[a(i-1),ai[} > g(i)\right\},\ \tilde{m}_0 = l\right\}\ , \tag{9.222}$$

par le lemme 8.2.12 (implication 8.118) on a :

$$D(l) \subset D_-(l) \cap D_+(l)\ , \tag{9.223}$$

où

$$D_-(l) = \left\{\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_{l-j}-S_l\in[a(i-1),ai[} > g(i)\right\}, \bigcap_{i=1}^{l-1}\{S_i - S_l > 0\}\right\}\ , \tag{9.224}$$

$$D_+(l) = \bigcap_{i=l+1}^{V^+_{S_l+\Gamma_n,l}}\{S_i - S_l \geq 0\}\ . \tag{9.225}$$

On remarque que $D_-(l) \in \sigma\left(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l\right)$ et $D_+(l) \in \sigma\left(\epsilon_{l+1}, \cdots\right)$ ces deux événements sont donc indépendants d'où par 9.223 :

$$Q\left[D(l)\right] \leq Q\left[D_-(l)\right] Q\left[D_+(l)\right]\ . \tag{9.226}$$

Par stationnarité du milieu, on a :

$$Q\left[D_+(l)\right] = Q\left[V_0^- \geq V^+_{\Gamma_n}\right]\ , \tag{9.227}$$

donc $Q\left[D_+(l)\right]$ ne dépend pas de l. En remplaçant 9.227 dans 9.226, puis en sommant le résultat obtenu sur l, $f(n) + 1 \leq l \leq E(\ln n)^2$ on en déduit que :

$$\sum_{l=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} Q\left[\mathcal{D}(l)\right] \leq Q\left[V_0^- \geq V^+_{\Gamma_n}\right] \sum_{l=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} Q\left[D_-(l)\right]\ . \tag{9.228}$$

Estimons maintenant la somme obtenue en 9.228, par stationnarité du milieu on a :

$$Q\left[D_-(l)\right] \ =\ Q\left[\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1}\left\{\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_j\in]-ai,-a(i-1)]} > g(i)\right\}, \bigcap_{i=1}^{l-1}\{S_i < 0\}\right] \tag{9.229}$$

$$\leq\ \sum_{i=1}^{Z(n)+1} Q\left[\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_j\in]-ai,-a(i-1)]} > g(i), \bigcap_{i=1}^{l-1}\{S_i < 0\}\right] \tag{9.230}$$

$$=\ \sum_{i=1}^{Z(n)+1}\sum_{k=g(i)+1}^{f(n)} Q\left[\sum_{j=1}^{f(n)}\mathbb{I}_{S_j\in]-ai,-a(i-1)]} = k, \bigcap_{i=1}^{l-1}\{S_i < 0\}\right]\ , \tag{9.231}$$

soit :

$$H_{-ia,1} = \inf\{m > 0,\ S_m \in]-ia, -a(i-1)]\} \tag{9.232}$$

$$H_{-ia,k} = \inf\{m > H_{-ia,k-1},\ S_m \in]-ia, -a(i-1)]\},\ k > 1. \tag{9.233}$$

on remarque que :

$$\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_j\in]-ai,-a(i-1)]} = k, \bigcap_{i=1}^{l-1}\{S_i < 0\},\ l > f(n) \quad \Rightarrow \quad H_{-ia,k} < V_0^+,\ H_{-ia,k} \le f(n),\ \cap_{i=H_{-ia,k}+1}^{l-1}\{S_i < 0\}\ ,$$

ainsi par la propriété de Markov et la stationnarité du milieu :

$$Q\left[\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_j\in]-ai,-a(i-1)]} = k, \bigcap_{i=1}^{l-1}\{S_i < 0\}\right] \tag{9.234}$$

$$\le \sum_{m=1}^{f(n)} Q\left[H_{-ia,k} < V_0^+,\ H_{-ia,k} = m,\ \cap_{i=m+1}^{l-1}\{S_i < 0\}\right] \tag{9.235}$$

$$\le \sum_{m=1}^{f(n)} \int_{-ia}^{-(i-1)a} Q\left[H_{-ia,k} < V_0^+,\ H_{-ia,k} = m,\ S_m \in dy\right] Q_y\left[\cap_{i=1}^{l-m-1}\{S_i < 0\}\right]\ . \tag{9.236}$$

De plus pour tout $-ia \le y \le -(i-1)a$ et $1 \le m \le f(n)$ on a :

$$Q_y\left[\cap_{i=1}^{l-m-1}\{S_i < 0\}\right] \le Q_{-ia}\left[\cap_{i=1}^{l-f(n)-1}\{S_i < 0\}\right] \equiv Q_{-ia}\left[V_0^+ > l - f(n) - 1\right]\ , \tag{9.237}$$

en remplaçant ceci dans 9.236, on obtient :

$$Q\left[\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_j\in]-ai,-a(i-1)]} = k, \bigcap_{i=1}^{l-1}\{S_i < 0\}\right] \le Q\left[H_{-ia,k} < V_0^+\right] Q_{-ia}\left[V_0^+ > l - f(n) - 1\right]\ , \tag{9.238}$$

en remplaçant 9.238 dans 9.231 puis le résultat obtenu dans 9.228 on obtient :

$$\sum_{l=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} Q\left[\mathcal{D}(l)\right] \tag{9.239}$$

$$\le Q\left[V_0^- \ge V_{\Gamma_n}^+\right] \sum_{l=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \sum_{k=g(i)+1}^{f(n)} Q\left[H_{-ia,k} < V_0^+\right] Q_{-ia}\left[V_0^+ > l - f(n) - 1\right] \tag{9.240}$$

$$= Q\left[V_0^- \ge V_{\Gamma_n}^+\right] \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \sum_{k=g(i)+1}^{f(n)} Q\left[H_{-ia,k} < V_0^+\right] \sum_{l=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} Q_{-ia}\left[V_0^+ > l - f(n) - 1\right] \tag{9.241}$$

$$\le Q\left[V_0^- \ge V_{\Gamma_n}^+\right] \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \sum_{k=g(i)+1}^{f(n)} Q\left[H_{-ia,k} < V_0^+\right] \sum_{l=0}^{E(\ln n)^2} Q_{-ia}\left[V_0^+ > l\right]\ . \tag{9.242}$$

par des calculs similaires à ceux effectués pour montrer le lemme 8.2.10, il existe $n_2 \equiv n_2\left(R, \epsilon, Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_2$:

$$\sum_{l=0}^{E(\ln n)^2} Q_{-ia}\left[V_0^+ > l\right] \le (ia)h'(n)\ , \tag{9.243}$$

avec $h'(n) \equiv H' \ln n$, $H' = \frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$, en remplaçant ceci dans 9.242, on obtient pout tout $n > n_2$:

$$\sum_{l=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} Q\left[\mathcal{D}(l)\right] \tag{9.244}$$

$$\leq \quad h'(n) Q\left[V_0^- \geq V_{\Gamma_n}^+\right] \sum_{i=1}^{Z(n)+1} (ia) \sum_{k=g(i)+1}^{f(n)} Q\left[H_{-ia,k} < V_0^+\right] \ . \tag{9.245}$$

On veut maintenant estimer $Q\left[H_{-ia,k} < V_0^+\right]$, en effectuant des calculs similaires à ceux effectués pour montrer le lemme 8.2.8, on a : pour $i > 1$

$$Q\left[H_{-ia,k} < V_0^+\right] \leq Q\left[V_{(i-1)a}^- > V_0^+\right] \left(1 - Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right] Q_{-(i-1)a+\frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V_{(i-1)a}^- > V_0^+\right]\right)^{k-1} , \tag{9.246}$$

• pour $i = 1$:

$$Q\left[H_{-a,k} < V_0^+\right] \leq Q\left[\epsilon_0 \leq 0\right] \left(1 - Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{4}\right]\right)^{k-1} . \tag{9.247}$$

Par 9.246 et 9.247 on obtient :

$$\sum_{k=g(i)+1}^{f(n)} Q\left[H_{-ia,k} < V_0^+\right] \quad \leq \quad Q\left[V_{(i-1)a}^- > V_0^+\right] \frac{(1-r_i)^{g(i)}}{r_i} \tag{9.248}$$

$$\sum_{k=g(1)+1}^{f(n)} Q\left[H_{-a,k} < V_0^+\right] \quad \leq \quad Q\left[\epsilon_0 \leq 0\right] \frac{(1-r_0)^{g(1)}}{r_0} , \tag{9.249}$$

avec $r_0 = Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{4}\right]$ et $r_i = Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right] Q_{(i-1)a-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\left[V_{(i-1)a}^- > V_0^+\right]$. Par stationnarité du milieu et le lemme 8.2.2 :

$$r_i \geq Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right] \frac{1}{i+3} , \tag{9.250}$$

on déduit de 9.248 et 9.250 :

$$\sum_{i=2}^{Z(n)+1} (ia) \sum_{k=g(i)+1}^{f(n)} Q\left[H_{-ia,k} < V_0^+\right] \quad \equiv \quad a \sum_{i=2}^{Z(n)+1} \sum_{k=g(i)+1}^{f(n)} iQ\left[H_{-ia,k} < V_0^+\right] \tag{9.251}$$

$$\leq \quad a \sum_{i=2}^{Z(n)+1} \frac{i(i+3)}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} \left(1 - Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right] \frac{1}{i+3}\right)^{g(i)} . \tag{9.252}$$

Soit $E_2 > 1$, en prenant $g(i) = \frac{(i+3)(i-1+E_2)}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$ on a :

$$\left(1 - Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right] \frac{1}{i+3}\right)^{g(i)} \leq e^{-(i-1+E_2)+\frac{3}{5}E_2} = e^{-(i-1+E_2)} , \tag{9.253}$$

or :

$$\sum_{i=2}^{Z(n)+1} ie^{-(i-1)} \leq \frac{1}{(1-1/e)^2} - 1 \leq \frac{3}{2} , \tag{9.254}$$

$$\sum_{i=2}^{Z(n)+1} i(i-1)e^{-(i-1)} \leq \frac{2}{e(1-1/e)^3} \leq 3 . \tag{9.255}$$

On déduit de ces trois dernières estimations et de 9.252 que :

$$\sum_{i=2}^{Z(n)+1} (ia) \sum_{k=g(i)+1}^{f(n)} Q\left[H_{-ia,k} < V_0^+\right] \leq \frac{9I_{\eta_0}}{4Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} e^{-E_2} . \tag{9.256}$$

De même, par 9.249, le terme $i = 1$ avec $g(1) \equiv \frac{4E_2}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$ s'écrit

$$a \sum_{k=g(1)+1}^{f(n)} Q\left[H_{-a,k} < V_0^+\right] \leq aQ\left[\epsilon_0 \leq 0\right] \frac{e^{-2E_2}}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{4}\right]} \leq \frac{I_{\eta_0} e^{-2E_2}}{4Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} . \tag{9.257}$$

De 9.256 et 9.257 on déduit :

$$\sum_{i=1}^{Z(n)+1} (ia) \sum_{k=g(i)+1}^{f(n)} Q\left[H_{-ia,k} < V_0^+\right] \leq \frac{9I_{\eta_0}}{4Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} e^{-E_2} + \frac{I_{\eta_0} e^{-2E_2}}{4Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} \tag{9.258}$$

$$\leq \frac{5}{2} \frac{I_{\eta_0}}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} e^{-E_2} . \tag{9.259}$$

On rappelle de plus que (lemme 8.2.2) :

$$Q\left[V_0^- \geq V_{\Gamma_n}^+\right] \leq \frac{I_{\eta_0}}{\Gamma_n + I_{\eta_0}} \leq \frac{I_{\eta_0}}{\ln n} , \tag{9.260}$$

en remplaçant 9.259 et 9.260 dans 9.245 on obtient pour tout $n > n_2$:

$$\sum_{l=f(n)+1}^{E(\ln n)^2} Q\left[\mathcal{D}(l)\right] \leq \frac{h'(n)}{\ln n} \frac{9I_{\eta_0}^2}{4Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} e^{-E_2} \equiv \frac{5}{2} \frac{I_{\eta_0}^2 H'}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} e^{-E_2} , \tag{9.261}$$

en remplaçant 9.261 dans 9.221, on obtient pour tout $n > n_1 \vee n_2$:

$$Q\left[\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1} \left\{\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0 - j} - S_{\tilde{m}_0} \in [a(i-1), ai[} > g(i)\right\},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \tag{9.262}$$

$$\leq \frac{5}{2} \frac{I_{\eta_0}^2 H'}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} e^{-E_2} + \frac{12\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/33}}\right) , \tag{9.263}$$

on obtient le lemme en prenant $n_0'' = n_1 \vee n_2$. ■

On montre maintenant la proposition 9.2.1 :

Preuve (Proposition 9.2.1).

Soient $\epsilon > 0$ et $R > 1$, supposons $\tilde{m}_0 > 0$, on commence par choisir la valeur de E_2 qui était un paramètre libre dans les lemmes 9.2.3 et 9.2.4, prenons donc :

$$E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon} \frac{H' I_{\eta_0}(I_{\eta_0} \vee 1)}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right] \wedge Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right) , \tag{9.264}$$

où $H' = \frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$ et $E = \frac{24R^2 |\ln \frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2 \epsilon^2}$, on obtient des lemmes 9.2.3 et 9.2.4 qu'il existe $n_0 \equiv n_0\left(R, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$:

$$Q\left[\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1} \left\{\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0 + j} - S_{\tilde{m}_0} \in [a(i-1), ai[} > g(i)\right\},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \leq \frac{81\epsilon}{5R} , \tag{9.265}$$

$$Q\left[\bigcup_{i=1}^{Z(n)+1} \left\{\sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0 - j} - S_{\tilde{m}_0} \in [a(i-1), ai[} > g(i)\right\},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \leq \frac{29\epsilon}{2R} , \tag{9.266}$$

où $g(i) = \frac{(i+3)(i-1+E_2)}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$. Par 9.161 on a aussi :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right] \\
(9.267) \leq\ & 3 + \frac{1}{\eta_0} \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \frac{1}{e^{a(i-1)}} \sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0+j} - S_{\tilde{m}_0} \in [a(i-1), ai[} + \frac{1}{\eta_0} \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \frac{1}{e^{a(i-1)}} \sum_{j=1}^{f(n)} \mathbb{I}_{S_{\tilde{m}_0-j} - S_{\tilde{m}_0} \in [a(i-1), ai[} \ ,
\end{aligned}$$

avec une Q probabilité égale à un. Donc par 9.265, 9.266 et 9.267 on obtient pour tout $n > n_0$:

$$Q\left[\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right] > \frac{2}{\eta_0} \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \frac{g(i)}{e^{a(i-1)}} + 3, \tilde{m}_0 > 0\right] \leq \frac{60\epsilon}{R} \ , \tag{9.268}$$

or

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{Z(n)+1} \frac{1}{e^{a(i-1)}} g(i) && (9.269)\\
&\equiv \frac{1}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \frac{1}{e^{a(i-1)}} (i+3)(i-1+E_2) && (9.270)\\
&= \frac{1}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} \left(\sum_{i=1}^{Z(n)+1} \frac{i(i-1)}{e^{a(i-1)}} + (E_2+3) \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \frac{i}{e^{a(i-1)}} + 3(E_2-1) \sum_{i=1}^{Z(n)+1} \frac{1}{e^{a(i-1)}} \right) && (9.271)\\
&\leq \frac{1}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]} \left(\frac{1}{e^a} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{e^a}\right)^3} + (E_2+3) \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{e^a}\right)^2} + 3(E_2-1) \frac{1}{1 - \frac{1}{e^a}} \right) && (9.272)
\end{aligned}$$

où $a = \frac{I_{\eta_0}}{4}$ et $E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon} \frac{H' I_{\eta_0}(I_{\eta_0} \vee 1)}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right] \wedge Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)$. Pour montrer la proposition il suffit donc de prendre :

$$\begin{aligned}
\mu &\equiv \mu\left(\epsilon, R, I_{\eta_0}, Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right) && (9.273)\\
&= 3 + \frac{2}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right] \eta_0} \left(\frac{2e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}{\left(1 - e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^3} + \frac{(E_2+3)}{\left(1 - e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^2} + \frac{3(E_2-1)}{1 - e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}} \right) , && (9.274)
\end{aligned}$$

où :

$$E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon} \frac{I_{\eta_0}(I_{\eta_0} \vee 1)(21E+1)}{\left(Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right] \wedge Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right) Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right) \ , \tag{9.275}$$

et $E = \frac{24R^2 |\ln \frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2 \epsilon^2}$. ■

9.3 Variations maximales du potentiel aléatoire dans le voisinage $V_{\tilde{m}_0}$

On adopte les notations suivantes :

$$V^+_{\tilde{m}_0} = \{\tilde{m}_0 + 1, \cdots, \tilde{m}_0 + f(n)\} \ , \tag{9.276}$$

$$V^-_{\tilde{m}_0} = \{\tilde{m}_0 - f(n), \cdots, \tilde{m}_0 - 1\} \ . \tag{9.277}$$

où $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$, $F > 1$, et

$$u^*_{k,\tilde{m}_0} = \beta_k \mathbb{P}^{\alpha}_{k-1}\left[T^{k-1}_k > T^{k-1}_{\tilde{m}_0}\right],\ k \in V^+_{\tilde{m}_0}\ , \tag{9.278}$$

$$v^*_{k,\tilde{m}_0} = \alpha_k \mathbb{P}^{\alpha}_{k+1}\left[T^{k+1}_k > T^{k+1}_{\tilde{m}_0}\right],\ k \in V^-_{\tilde{m}_0}\ , \tag{9.279}$$

Le but de cette section est de montrer le lemme suivant :

Lemme 9.3.1. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $R > 1$, tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \equiv n_0\left(R, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$, on a :*

$$Q\left[\min_{k \in V^+_{\tilde{m}_0}} u^*_{k,\tilde{m}_0} \le \frac{1}{g(n)},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \le \frac{9\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{(\ln\ln\ln n)^{1/2}}{\ln\ln n}\right)\ , \tag{9.280}$$

$$Q\left[\min_{k \in V^-_{\tilde{m}_0}} v^*_{k,\tilde{m}_0} \le \frac{1}{g(n)},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \le \frac{9\epsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{(\ln\ln\ln n)^{1/2}}{\ln\ln n}\right)\ , \tag{9.281}$$

avec $g(n) = e^{\left((2\sqrt{3}\sigma f(n))^2 \ln\ln\ln n\right)^{1/2}}$, $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$, $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0} \vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2} Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$ *et* $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$.
R est un paramètre libre qui sera fixé ultérieurement.

Ce lemme donne une borne inférieure uniforme en k aux probabilités $u^*_{k,\tilde{m}_0}$ où $k \in V^-_{\tilde{m}_0}$ et $v^*_{k,\tilde{m}_0}$ où $k \in V^-_{\tilde{m}_0}$ avec une Q probabilité aussi proche de 1 que l'on veut. C'est un lemme technique nous apportant peu de chose sur le comportement de la M.A.M.A. mais qui nous sera utile pour montrer le théorème 7.3.1 dans le paragraphe 10.2. Nous verrons dans le calcul préliminaire présenté ci-dessous que montrer le lemme 9.3.1 revient à étudier les variations maximales du potentiel aléatoire dans le voisinage $V_{\tilde{m}_0}$.
Preuve.
On rappelle que pour tout $k \in V^+_{\tilde{m}_0}$:

$$u^*_{k,\tilde{m}_0} = \beta_k \mathbb{P}^{\alpha}_{k-1}\mathbb{P}^{\alpha}\left[T^{k-1}_k > T^{\tilde{m}_0}_k\right] = \beta_k \frac{1}{\sum_{j=\tilde{m}_0+1}^{k-1} e^{S_j - S_k} + 1} \tag{9.282}$$

$$\ge \eta_0 \frac{1}{|\tilde{m}_0 - k|} \min_{\tilde{m}_0+1 \le j \le k} \frac{1}{e^{S_j - S_k}} \tag{9.283}$$

$$\ge \frac{\eta_0}{f(n)} \min_{\tilde{m}_0+1 \le j \le k} \frac{1}{e^{S_j - S_k}}\ , \tag{9.284}$$

(9.285)

avec une Q probabilité égale à 1, ainsi :

$$\min_{k \in V^+_{\tilde{m}_0}} u^*_{k,\tilde{m}_0} \ge \frac{\eta_0}{f(n)} \min_{k \in V^+_{\tilde{m}_0}} \min_{\tilde{m}_0+1 \le j \le k} \frac{1}{e^{S_j - S_k}} \quad Q.p.s.\ , \tag{9.286}$$

on en déduit :

$$\min_{k \in V^+_{\tilde{m}_0}} u^*_{k,\tilde{m}_0} \le \frac{1}{g(n)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\eta_0}{f(n)} \min_{k \in V^+_{\tilde{m}_0}} \min_{\tilde{m}_0+1 \le j \le k} \frac{1}{e^{S_j - S_k}} \le \frac{1}{g(n)} \tag{9.287}$$

$$\Leftrightarrow \max_{k \in V^+_{\tilde{m}_0}} \max_{\tilde{m}_0+1 \le j \le k} \{S_j - S_k\} \ge \ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\ . \tag{9.288}$$

avec une Q probabilité égale à 1. 9.288 montre que minorer $\min_{k \in V^+_{\tilde{m}_0}} u^*_{k,\tilde{m}_0}$ revient à majorer les fluctuations du potentiel $(S_n, n \in \mathbb{Z})$ dans le voisinage $V_{\tilde{m}_0}$ de $\tilde{m}_0$.
Soient $R > 1$, $\epsilon > 0$ et $n > 16$, prenons $g(n) = e^{\left((2\sqrt{3}\sigma f(n))^2 \ln\ln\ln n\right)^{1/2}}$, on rappelle que $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$,

$F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0} \vee 1) \frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2} Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]} \right)^2$, $E = \frac{24R^2 |\ln \frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2 \epsilon^2}$. En effectuant des calculs similaires à ceux effectués de 9.29 à 9.43 (page 154) on sait qu'il existe $n_1 \equiv n_1 \left(R, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q \left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_1$:

$$\begin{aligned} Q\left[\min_{k \in V^+_{\tilde{m}_0}} u^*_{k,\tilde{m}_0} \leq \frac{1}{g(n)},\ \tilde{m}_0 > 0\right] &\leq Q\left[\max_{k \in V^+_{\tilde{m}_0}} \max_{\tilde{m}_0+1 \leq j \leq k} \{S_j - S_k\} \geq \ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \\ &\leq h'(n) Q\left[\max_{1 \leq k \leq f(n)} \max_{1 \leq j \leq k} \{S_j - S_k\} \geq \ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)},\ V^0_- > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n)\right] \\ &+ \frac{9\epsilon}{R} + \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}}\ , \end{aligned} \tag{9.289}$$

où $h'(n) \equiv H' \ln n$ où $H' = \frac{21E+1}{Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}$ et $E = \frac{24R^2 |\ln \frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2 \epsilon^2}$. On a :

$$\begin{aligned} & Q\left[\max_{1 \leq k \leq f(n)} \max_{1 \leq j \leq k} \{S_j - S_k\} \geq \ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)},\ V^0_- > V^+_{\Gamma_n}, V^+_{\Gamma_n} > f(n)\right] \\ \leq\ & Q\left[\max_{1 \leq k \leq f(n)} \max_{1 \leq j \leq f(n)} \{S_j - S_k\} \geq \ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}, V^-_0 > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n)\right]\ , \end{aligned} \tag{9.290}$$

on remarque que :

$$\bigcap_{j=0}^{f(n)} \{S_j \geq 0\} \Rightarrow \max_{1 \leq k \leq f(n)} \{-S_k\} \leq 0\ , \tag{9.291}$$

or

$$V^-_0 > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n) \Rightarrow \bigcap_{j=0}^{f(n)} \{S_j \geq 0\}\ , \tag{9.292}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} & Q\left[\max_{1 \leq k \leq f(n)} \max_{1 \leq j \leq f(n)} \{S_j - S_k\} \geq \ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)},\ V^-_0 > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n)\right] \\ \leq\ & Q\left[\max_{1 \leq j \leq f(n)} \{S_j\} \geq \ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)},\ V^-_0 > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n)\right] \qquad (9.293) \\ =\ & Q\left[V^+_{\ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}} \leq f(n),\ V^-_0 > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n)\right]\ . \qquad (9.294) \end{aligned}$$

On effectue maintenant une partition sur les valeurs de $V^+_{\ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}}$ et on se sert du fait que :

$$V^+_{\ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}} = i \Rightarrow \ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)} \leq S_i \leq \ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)} + I_{\eta_0}\ , \tag{9.295}$$

avec une Q probabilité égale à 1. On obtient :

$$\begin{aligned} & Q\left[V^+_{\ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}} \leq f(n),\ V^-_0 > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n)\right] \qquad (9.296) \\ \leq\ & \sum_{i=1}^{f(n)} \int_{\ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}}^{\ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)} + I_{\eta_0}} Q\left[V^+_{\ln \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}} = i,\ V^-_0 > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n),\ S_i \in dx\right]\ . \qquad (9.297) \end{aligned}$$

Par la propriété de Markov et la stationnarité du milieu on a :

$$
\begin{aligned}
& Q\left[V^+_{\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}} \le f(n),\ V_0^- > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n)\right] \\
(9.298)\qquad \le\ & \sum_{i=1}^{f(n)} \int_{\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}}^{\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}+I_{\eta_0}} Q\left[\bigcap_{j=0}^{i-1}\left\{0 < S_j < \ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\right\},\ S_i \in dx\right] Q_x\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n}\right] \\
(9.299)\qquad \le\ & Q_{\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}+I_{\eta_0}}\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n}\right] \sum_{i=1}^{f(n)} \int_{\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}}^{\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}+I_{\eta_0}} Q\left[\bigcap_{j=0}^{i-1}\left\{0 < S_j < \ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\right\},\ S_i \in dx\right] \\
(9.300)\qquad \le\ & Q_{\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}+I_{\eta_0}} Q\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n}\right] Q\left[V^+_{\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}} \le f(n)\right] \\
(9.301)\qquad \le\ & Q_{\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}+I_{\eta_0}} Q\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n}\right] Q\left[\max_{1\le k\le f(n)}\{|S_k|\} \ge \ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\right],
\end{aligned}
$$

où l'inégalité 9.299 est obtenue en remarquant que $Q_x\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n}\right]$ est croissante en x. Par l'inégalité de Ottaviani (voir par exemple [12] page 45) on a :

$$
(9.302)\qquad Q\left[\max_{1\le k\le f(n)}\{|S_k|\} \ge \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\right] \le \frac{Q\left[\frac{1}{2}\left|S_{f(n)}\right| \ge \ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\right]}{1-\sup_{1\le i\le f(n)} Q\left[|S_i| \ge \frac{1}{2}\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\right]},
$$

on utilise maintenant le lemme 8.2.1 ([9]), on montre alors qu'il existe $n_2 \equiv n_2(R, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, F)$ tel que pour tout $n > n_2$:

$$
(9.303)\qquad \frac{Q\left[\left|S_{f(n)}\right| \ge \frac{1}{2}\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\right]}{1-\sup_{1\le i\le f(n)} Q\left[|S_i|\ \frac{1}{2} \ge \ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\right]} \le \frac{2e^{-\frac{\left(\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\right)^2}{16\sigma^2 f(n)}}}{1-e^{-\frac{\left(\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\right)^2}{160\sigma^2 f(n)}}},
$$

on rappelle de plus que $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$ avec $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2} Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$ et on a posé $g(n) = e^{\left((4\sqrt{3}\sigma f(n))^2 \ln\ln\ln n\right)^{1/2}}$ on obtient donc :

$$
(9.304)\qquad \frac{\left(\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\right)^2}{16\sigma^2 f(n)} \ge 3\ln\ln\ln n - \mathcal{O}\left(\frac{(\ln\ln\ln n)^2}{(\ln\ln n)^2}\right),
$$

$$
(9.305)\qquad \frac{\left(\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\right)^2}{160\sigma^2 f(n)} \ge \frac{3}{10}\ln\ln\ln n - \mathcal{O}\left(\frac{(\ln\ln\ln n)^2}{(\ln\ln n)^2}\right).
$$

En remplaçant 9.304 et 9.305 dans 9.303 puis le résultat obtenu dans 9.302 on obtient pour tout $n > n_2$:

$$
(9.306)\qquad Q\left[\max_{1\le k\le f(n)}\{|S_k|\} \ge \frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}\right] \le \frac{1}{(\ln\ln n)^3}\left(4 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln\ln n)^{3/10}}\right)\right).
$$

De plus en utilisant la stationnarité du milieu et l'inégalité 8.22 on a :

$$
\begin{aligned}
Q_{\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}+I_{\eta_0}} Q\left[V_0^- > V^+_{\Gamma_n}\right] &= Q\left[V^-_{\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}+I_{\eta_0}} > V^+_{\Gamma_n - \ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)} - I_{\eta_0}}\right] \\
(9.307)\qquad &\le \frac{\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)} + 2I_{\eta_0}}{\Gamma_n - 2\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)} - 2I_{\eta_0}} \\
(9.308)\qquad &\le \frac{4\sqrt{3}F\sigma^2(\ln\ln n)^2(\ln\ln\ln n)^{1/2}}{\ln n}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln\ln n)^2(\ln\ln\ln n)^{1/2}}\right)\right),
\end{aligned}
$$

[9] Ce calcul a été effectué plusieurs fois dans la partie II on ne le détaille donc pas ici.

En remplaçant 9.306 et 9.308 dans 9.301 on obtient pour tout $n > n_2$:

$$Q\left[V^+_{\ln\frac{\eta_0 g(n)}{f(n)}} \leq f(n),\ V_0^- > V^+_{\Gamma_n},\ V^+_{\Gamma_n} > f(n)\right] \leq \frac{4\sqrt{(}3)F\sigma^2(\ln\ln\ln n)^{1/2}}{\ln n\ln\ln n}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln\ln n)^{3/10}}\right)\right) . \tag{9.309}$$

En remplaçant ceci dans 9.294 puis le résultat obtenu dans 9.290 et enfin dans 9.289 on obtient pour tout $n > n_1 \vee n_2$:

$$Q\left[\min_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}} u^*_{k,\tilde{m}_0} \leq \frac{1}{g(n)},\ \tilde{m}_0 > 0\right] \tag{9.310}$$

$$\leq \frac{9\epsilon}{R} + \frac{h'(n)(4\sqrt{3}F\sigma^2)(\ln\ln\ln n)^{1/2}}{\ln n\ln\ln n}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln\ln n)^{3/10}}\right)\right) + \frac{4E}{(\ln n)^{1/33}} \tag{9.311}$$

$$\equiv \frac{9\epsilon}{R} + \frac{H'(4\sqrt{3}F\sigma^2)(\ln\ln\ln n)^{1/2}}{\ln\ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{(\ln\ln\ln n)^{1/2}}{(\ln\ln n)^{1+3/10}}\right) , \tag{9.312}$$

ce qui donne 9.280 en prenant $n_0 = n_1 \vee n_2$.
Pour 9.281 on utilise une méthode identique à celle que l'on vient d'exposer ainsi que des arguments similaires à ceux utilisés pour montrer le lemme 9.1.6. ■

9.4 Définition de l'ensemble des "bons" environnements

Dans ce paragraphe on définit l'ensemble des bons environnement G'_n, on rappelle que l'on a adopté les notations suivantes :

$$\sigma^2 \equiv \mathrm{Var}_Q\left[\ln\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] , \tag{9.313}$$

$$I_{\eta_0} = \ln\frac{1-\eta_0}{\eta_0} ,\ 0 < \eta_0 < 1/2 , \tag{9.314}$$

où η_0 vérifie :

$$\sup\{x,\ Q[\alpha_0 \geq x] = 1\} = \eta_0 , \tag{9.315}$$

$$\sup\{x,\ Q[\alpha_0 \leq 1-x] = 1\} = \eta_0 . \tag{9.316}$$

On définit donc :

Définition 9.4.1. Soient $\epsilon > 0$, $R > 1$, $\gamma > 0$, et soit $\omega \in \Omega_2$, on dira que $\alpha \equiv \alpha(\omega)$ est un "bon" environnement

si et seulement si la suite $(\alpha_i,\ i\in\mathbb{Z}) = (\alpha_i(\omega),\ i\in\mathbb{Z})$ vérifie les propriétés de 9.317 à 9.329 :

(9.317) • La vallée $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ existe, en particulier :

(9.318) $0 \in [\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0]$,

(9.319) Si $\tilde{m}_0 > 0,\ S_{\tilde{M}'_0} - \max\limits_{0\le m\le \tilde{m}_0}(S_m) \le 1 - \gamma \ln\ln n$,

(9.320) si $\tilde{m}_0 < 0,\ S_{\tilde{M}_0} - \max\limits_{\tilde{m}_0\le m\le 0}(S_m) \le 1 - \gamma \ln\ln n$,

(9.321) $S_{\tilde{M}'_0} - S_{\tilde{m}_0} \ge \ln n + \gamma \ln\ln n$,

(9.322) $S_{\tilde{M}_0} - S_{\tilde{m}_0} \ge \ln n + \gamma \ln\ln n$.

(9.323) • $S_{\tilde{M}'_1} - S_{\tilde{m}'_1} \le \ln n - \gamma \ln\ln n$,

(9.324) $S_{\tilde{M}_1} - S_{\tilde{m}_1} \le \ln n - \gamma \ln\ln n$.

(9.325) • $\tilde{M}'_0 \ge E(\ln n)^2,\ \tilde{M}_0 \le E(\ln n)^2$.

(9.326) • $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \le \dfrac{2}{f(n)+1}$.

(9.327) • $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \le \mu$.

(9.328) • $\min\limits_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}}\left(\beta_k \mathbb{P}^{\alpha}_{k-1}\left[T^{k-1}_k > T^{k-1}_{\tilde{m}_0}\right]\right) \le \dfrac{1}{g(n)}$,

(9.329) $\min\limits_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}}\left(\alpha_k \mathbb{P}^{\alpha}_{k+1}\left[T^{k+1}_k > T^{k+1}_{\tilde{m}_0}\right]\right) \le \dfrac{1}{g(n)}$.

où $\tilde{M}'_1$ et $\tilde{m}'_1$ sont respectivement le maximisant et minimisant obtenus par le premier raffinement à gauche de la vallée $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$, de même $\tilde{M}_1$ et $\tilde{m}_1$ sont respectivement le maximisant et minimisant obtenus par le premier raffinement à droite de la vallée $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$. Et

(9.330) $$E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2} ,$$

(9.331) $$f(n) = [F(\ln\ln n)^2], \quad F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2} Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2 ,$$

(9.332) $$V^+_{\tilde{m}_0} = \{\tilde{m}_0 + 1, \cdots,\ \tilde{m}_0 + f(n)\} ,$$

(9.333) $$V^-_{\tilde{m}_0} = \{\tilde{m}_0 - f(n), \cdots, \tilde{m}_0 - 1\} ,$$

(9.334) $$\mu = 3 + \frac{2}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\eta_0}\left(\frac{2e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^3} + \frac{(E_2+3)}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^2} + \frac{3(E_2-1)}{1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}\right) ,$$

(9.335) $$E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon}\frac{I_{\eta_0}(I_{\eta_0}\vee 1)(21E+1)}{\left(Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\wedge Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right) Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right) ,$$

(9.336) $$g(n) = e^{\left((4\sqrt{3}\sigma f(n))^2 \ln\ln\ln n\right)^{1/2}} .$$

Proposition 9.4.2. *Soit* $G'_n = \{\omega\in\Omega_2,\ \alpha(\omega)$ *est un "bon" environnement* $\}$, *supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout* $\epsilon > 0$ *et tout* $\gamma > 0$ *il existe* $n_0 \equiv n_0\left(\epsilon, \gamma, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ *tel que pour tout* $n > n_0$ *on a :*

(9.337) $$Q\left[\omega\in\Omega_2,\ \omega\in G'_n\right] \ge 1-\epsilon .$$

Preuve.
Les propriétés 9.317 à 9.322 sont issues du lemme 8.1.5, les propriétés 9.323 et 9.324 proviennent de la partie II (Proposition 4.3.8) et 9.325 de la proposition 8.2.5. Par les résultats des propositions 9.1.1 et 9.2.1 et du lemme

9.3.1 on obtient les quatres dernières propriétés pour $\tilde{m}_0 > 0$. On obtient, également, par des calculs similaires à ceux exposés dans ce chapitre les trois résultats 9.1.1, 9.2.1 et 9.3.1 pour $\tilde{m}_0 \leq 0$, on obtient alors la proposition 9.4.2 en regroupant tous les résultats cités et en prenant $R = 1000$. ■

Chapitre 10

Temps local au point de localisation $\tilde{m}_0$ (preuve des théorèmes 7.2.1 et 7.3.1)

Dans ce chapitre on montre deux résultats principaux, le premier (théorèmes 7.2.1) concerne le temps local de la M.A.M.A. dans le voisinage $V_{\tilde{m}_0}$. Ce résultat montre que la M.A.M.A. est concentrée dans une petite région de l'espace par rapport à la distance parcourue avec une Q et une $\mathbb{P}^\alpha$ probabilité aussi proche de un que l'on veut. La preuve de ce résultat fait l'objet du paragraphe 10.1. Le second résultat principal (théorème 7.3.1) est de type loi faible des grands nombres avec la convergence en $\mathbb{P}^\alpha$ probabilité du temps local en $\tilde{m}_0$ vers une v.a. dépendant du milieu aléatoire avec une Q probabilité aussi proche de un que l'on veut, on trouvera la preuve de ce théorème dans le paragraphe 10.2. Nous montrerons que ces deux résultats ont des conséquences directes sur le maximum des temps locaux et le lieu favori de la marche (Corollaires 7.4.3 et 7.4.2) dans le paragraphe 10.3.

10.1 Temps local dans le voisinage du point $\tilde{m}_0$ (preuve du théorème 7.2.1)

Pour montrer le théorème 7.2.1 que l'on rappelle ci-dessous, on utilise la propriété 9.326 ainsi que le résultat de sous-diffusivité de la M.A.M.A. (proposition 5.1.2 page 87).
Ce résultat est donc une simple conséquence de l'étude que nous venons de faire du milieu à l'extérieur du voisinage $V_{\tilde{m}_0}$. Il a été motivé par les remarques de Y. Sinai (voir [92] fin de la page 263 et début de la 264) :

Théorème 10.1.1. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour toute suite* $(\delta_n,\ n \in \mathbb{N})$ *positive décroissante telle que* $\lim_{n\to\infty} \delta_n (\ln\ln n)^2 = \infty$ *et* $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, *tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $n_0 \equiv n_0\Big(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\Big)$ *tel que pour tout* $n > n_0$ *et tout* $\alpha \in G'_n$ *on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}, n\right) \geq n\left(1-\delta_n\right)\right] \geq 1 - \frac{4}{\eta_0}\frac{1}{\delta_n F(\ln\ln n)^2} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right) , \tag{10.1}$$

et $Q\left[G'_n\right] \geq 1-\epsilon$. $V_{\tilde{m}_0} = \{\tilde{m}_0 - [F(\ln\ln n)^2], \cdots, \tilde{m}_0, \cdots, \tilde{m}_0 + [F(\ln\ln n)^2]\}$, $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2} Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, *et* $R = 1000$.

La preuve de ce résultat ne présente pas de difficulté moyennant l'étude de la variable aléatoire $\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]$ effectué au paragraphe 9.1. On commence par rappeler deux résultats obtenus dans la partie II, puis on montre le théorème 10.1.1 :

10.1.1 Rappels de résultats de la partie II

On sait que pour tout instant compris entre 1 et n, la M.A.M.A. est localisée dans la "vallée minimale" $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$:

Proposition 10.1.2. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\gamma > 2$ il existe $n_0 \equiv n_0\left(\epsilon, \gamma, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout milieu $\alpha \in G_n'$, on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcup_{m=0}^{n}\left\{X_m \notin V_{\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}\right\}\right] \leq \frac{2E}{(\ln n)^{\gamma-2}}\ , \tag{10.2}$$

avec $Q\left[G_n'\right] \geq 1-\epsilon$, $E = \frac{24R^2 \ln\left|\frac{\epsilon}{R}\right|}{\sigma^2\epsilon^2}$ et $R = 1000$.

Preuve.
On effectue strictement les mêmes calculs que pour montrer la proposition 5.1.2. On remarque que pour montrer cette proposition on se sert de la propriété 9.323 et 9.325 de l'ensemble des bons environnements G_n'. ■

On a aussi le lemme suivant qui montre que le temps d'atteinte du point $\tilde{m}_0$ est négligeable devant n :

Lemme 10.1.3. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma > 10$, il existe $n_0 \equiv n_0\left(\epsilon, \gamma, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$ et tout milieu $\alpha \in G_n'$, on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[T_{\tilde{m}_0}^{\tilde{0}} > \frac{n}{(\ln n)^4}\right] \leq \frac{2E^3}{\eta_0(\ln n)^{\gamma-10}}\ , \tag{10.3}$$

avec $Q\left[G_n'\right] \geq 1-\epsilon$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, $R = 1000$.

Preuve.
La preuve de ce lemme est identique à la preuve du lemme 6.1.3, on effectue donc les mêmes calculs. La seule différence est que nous travaillons, ici, avec l'hypothèse forte H.3. On remarque de plus que pour montrer ce lemme on utilise les propriétés 9.323 et 9.325 de l'ensemble des bons environnements G_n'. ■

10.1.2 Preuve du théorème 10.1.1

Preuve (Théorème 10.1.1).

Soit $\epsilon > 0$ et $\gamma > 10$, pour cette preuve on prendra $n_1 \equiv n_1\left(\epsilon, \gamma, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n \geq n_1$:

$$Q\left[G_n'\right] \geq 1-\epsilon\ . \tag{10.4}$$

Pour montrer ce résultat on va majorer la probabilité suivante :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^c, n\right) \geq \delta_n n\right]\ , \tag{10.5}$$

où $V_{\tilde{m}_0}^c$ est le complémentaire de $V_{\tilde{m}_0}$ dans $\mathbb{Z}$ et $(\delta_n, n \in \mathbb{N})$ une suite décroissante positive telle que $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$.
On commence par se servir de la proposition 10.1.2 afin de réduire l'ensemble $V_{\tilde{m}_0}^c$, par la proposition 10.1.2 il existe $n_2 \equiv n_2\left(\epsilon, \gamma, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_2$ et tout milieu $\alpha \in G_n'$:

$$\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\bigcup_{k=0}^{n}\left\{X_k \notin V_{\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}\right\}\right] \leq \frac{2E}{(\ln n)^{\gamma-2}}\ , \tag{10.6}$$

où $\left\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\right\}$ est la plus petite vallée de profondeur supérieure à $\Gamma(n) \equiv \ln n + \gamma \ln\ln n$, contenant le point 0 et ayant pour minimum $\tilde{m}_0$ (voir paragraphe 8.1.2).
On en déduit pour tout $n > n_2$ et tout $\alpha \in G_n'$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^c, n\right) > \delta_n n\right] \tag{10.7}$$

$$\leq \mathbb{P}_0^\alpha \left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^c, n\right) \geq \delta_n n, \bigcap_{0\leq k\leq n} \left\{ X_k \in V_{\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}\right\}\right] + \frac{2E}{(\ln n)^{\gamma-2}} \tag{10.8}$$

$$\leq \mathbb{P}_0^\alpha \left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^{c,r}, n\right) \geq \delta_n n\right] + \frac{2E}{(\ln n)^{\gamma-2}} \ , \tag{10.9}$$

où $V_{\tilde{m}_0}^{c,r} = V_{\tilde{m}_0}^c \cap V_{\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}$.
On utilise maintenant le fait que le temps d'atteinte du point $\tilde{m}_0$ est négligeable devant n. Par le lemme 10.1.3, il existe $n_3 \equiv n_3\left(\epsilon, \gamma, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_3$ et tout $\alpha \in G_n'$ on a :

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^{c,r}, n\right) \geq \delta_n n\right] \tag{10.10}$$

$$\leq \mathbb{P}_0^\alpha \left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^{c,r}, n\right) \geq \delta_n n,\ T_{\tilde{m}_0}^0 \leq \frac{n}{(\ln n)^4}\right] + \mathbb{P}\left[T_{\tilde{m}_0}^0 > \frac{n}{(\ln n)^4}\right] \tag{10.11}$$

$$\leq \mathbb{P}_0^\alpha \left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^{c,r}, n\right) \geq \delta_n n,\ T_{\tilde{m}_0}^0 \leq \frac{n}{(\ln n)^4}\right] + \frac{2E^3}{\eta_0 (\ln n)^{\gamma-10}} \ . \tag{10.12}$$

Soit $\alpha \in \Omega_2$, par définition du temps local on a

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^{c,r}, n\right) \geq \delta_n n,\ T_{\tilde{m}_0}^0 \leq \frac{n}{(\ln n)^4}\right] \tag{10.13}$$

$$\leq \sum_{l=0}^{N_1} \mathbb{P}_0^\alpha \left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^{c,r}, n\right) \geq \delta_n n,\ T_{\tilde{m}_0}^0 = l\right] \tag{10.14}$$

$$= \sum_{l=0}^{N_1} \mathbb{P}_0^\alpha \left[\sum_{k=l+1}^{n} \mathbb{I}_{\left\{X_k \in V_{\tilde{m}_0}^{c,r}\right\}} \geq \delta_n n - \sum_{k=0}^{l} \mathbb{I}_{\left\{X_k \in V_{\tilde{m}_0}^{c,r}\right\}},\ T_{\tilde{m}_0}^0 = l\right] \tag{10.15}$$

où $N_1 = \left[\frac{n}{(\ln n)^4}\right] + 1$, or pour tout $0 \leq l \leq N_1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{l} \mathbb{I}_{\left\{X_k \in V_{\tilde{m}_0}^{c,r}\right\}} \leq l \leq N_1 \ . \tag{10.16}$$

Par la propriété de markov forte on obtient :

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^{c,r}, n\right) \geq \delta_n n,\ T_{\tilde{m}_0}^0 \leq \frac{n}{(\ln n)^4}\right] \leq \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\left\{X_k \in V_{\tilde{m}_0}^{c,r}\right\}} \geq \delta_n' n\right] \ , \tag{10.17}$$

où $\delta_n' = \delta_n - \frac{N_1}{n}$.
Introduisons maintenant l'événement certain $T_n^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0} \geq n$, on obtient :

$$\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\left\{X_k \in V_{\tilde{m}_0}^{c,r}\right\}} \geq n\delta_n'\right] = \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\left\{X_k \in V_{\tilde{m}_0}^{c,r}\right\}} \geq n\delta_n' n,\ T_n^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0} \geq n\right] \tag{10.18}$$

$$\leq \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\sum_{k=1}^{T_n^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}} \mathbb{I}_{\left\{X_k \in V_{\tilde{m}_0}^{c,r}\right\}} \geq \delta_n' n,\ T_n^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0} \geq n\right] \tag{10.19}$$

$$= \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\sum_{k=1}^{T_n^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0}} \mathbb{I}_{\left\{X_k \in V_{\tilde{m}_0}^{c,r}\right\}} \geq \delta_n' n\right] \ , \tag{10.20}$$

de plus :

$$\mathbb{I}_{\left\{X_k \in V_{\tilde{m}_0}^{c,r}\right\}} = \sum_{s_1=\tilde{m}_0+f(n)+1}^{\tilde{M}_0} \mathbb{I}_{\{X_k=s_1\}} + \sum_{s_2=\tilde{M}_0'}^{\tilde{m}_0-f(n)-1} \mathbb{I}_{\{X_k=s_2\}} \ , \tag{10.21}$$

on a donc par la définition du temps local en un point :

$$\sum_{k=1}^{T_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}} \mathbb{I}_{\left\{X_k \in V_{\tilde{m}_0}^{c,r}\right\}} = \sum_{s_1=\tilde{m}_0+f(n)+1}^{\tilde{M}_0} \sum_{k=1}^{T_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}} \mathbb{I}_{\{X_k=s_1\}} + \sum_{s_2=\tilde{M}_0'}^{\tilde{m}_0-f(n)-1} \sum_{k=1}^{T_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}} \mathbb{I}_{\{X_k=s_2\}} \tag{10.22}$$

$$= \sum_{s_1=\tilde{m}_0+f(n)+1}^{\tilde{M}_0} \mathcal{L}\left(s_1, T_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right) + \sum_{s_2=\tilde{M}_0'}^{\tilde{m}_0-f(n)-1} \mathcal{L}\left(s_2, T_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right) \tag{10.23}$$

ainsi :

$$\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\sum_{k=1}^{T_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}} \mathbb{I}_{\left\{X_k \in V_{\tilde{m}_0}^{c,r}\right\}} \geq \delta_n' n\right] \tag{10.24}$$

$$= \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\sum_{s_1=\tilde{m}_0+f(n)+1}^{\tilde{M}_0} \mathcal{L}\left(s_1, T_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right) + \sum_{s_2=\tilde{M}_0'}^{\tilde{m}_0-f(n)-1} \mathcal{L}\left(s_2, T_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right) \geq \delta_n' n\right] \ , \tag{10.25}$$

En utilisant l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\sum_{k=1}^{T_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}} \mathbb{I}_{\left\{X_k \in V_{\tilde{m}_0}^{c,r}\right\}} \geq \delta_n' n\right] \tag{10.26}$$

$$\leq \frac{\sum_{s_1=\tilde{m}_0+f(n)}^{\tilde{M}_0} \mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}\left(s_1, T_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right] + \sum_{s_2=\tilde{M}_0'}^{\tilde{m}_0-f(n)} \mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}\left(s_2, T_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]}{\delta_n' n} \ . \tag{10.27}$$

On utilise le fait que les v.a. $\mathcal{L}\left(s_2, \tau_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right) \equiv \mathcal{L}\left(s_2, T_{i+1}^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} - T_i^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)$ $(0 \leq i \leq n-1)$ sont *i.i.d* par la propriété de Markov forte on obtient :

$$\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\sum_{k=1}^{T_n^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}} \mathbb{I}_{\left\{X_k \in V_{\tilde{m}_0}^{c,r}\right\}} \geq \delta_n' n\right] \tag{10.28}$$

$$\leq \frac{\sum_{s_1=\tilde{m}_0+f(n)+1}^{\tilde{M}_0} \mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}\left(s_1, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right] + \sum_{s_2=\tilde{M}_0'}^{\tilde{m}_0-f(n)-1} \mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}\left(s_2, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]}{\delta_n'} \tag{10.29}$$

$$= \frac{\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^{c,r}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]}{\delta_n'} \ . \tag{10.30}$$

On utilise maintenant la propriété 9.326 de l'ensemble des "bons environnements", pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G_n'$:

$$\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^{c,r}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right] \leq \frac{2}{\eta_0}\frac{1}{f(n)+1} \ , \tag{10.31}$$

on rappelle que $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$, $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2} Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, et $R = 1000$.
En regroupant ce qui a été fait jusqu'à maintenant, on obtient pour tout $n > n_1 \vee n_2 \vee n_3$:

$$\mathbb{P}_0^{\alpha}\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^{c}, n\right) > \delta_n n\right] \leq \frac{2}{\eta_0}\frac{1}{(f(n)+1)\delta_n'} + \frac{2E}{(\ln n)^{\gamma-2}} + \frac{2E^3}{\eta_0(\ln n)^{\gamma-10}} \tag{10.32}$$

$$\leq \frac{2}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n'} + \frac{2E}{(\ln n)^{\gamma-2}} + \frac{2E^3}{\eta_0(\ln n)^{\gamma-10}} \ , \tag{10.33}$$

où $\delta'_n \equiv \delta_n - \frac{N_1}{n}$, $N_1 = \left[\frac{n}{(\ln n)^4}\right]$, pour que 10.33 tende vers 0 quand n tend vers l'infini, il faut donc que $F(\ln\ln n)^2\delta'_n$ tende vers l'infini. On choisit $n_0 > n_1 \vee n_2 \vee n_3$ tel que pour tout $n > n_0$, $\delta'_n = \delta_n - \frac{N_1}{n} \geq \frac{\delta_n}{2}$. Pour tout $n > n_0$ on obtient donc :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{L}\left(V^c_{\tilde{m}_0}, n\right) > \delta_n n\right] \leq \frac{4}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} + \frac{2E}{(\ln n)^{\gamma-2}} + \frac{2E^3}{\eta_0(\ln n)^{\gamma-10}} , \tag{10.34}$$

en prenant $\gamma = \gamma_0 \equiv 11$ ce qui donne le théorème. ■

On montre maintenant la proposition suivant qui nous sera utile dans le paragraphe 10.2 :

Proposition 10.1.4. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour toute suite $(\delta_n, n \in \mathbb{N})$ positive décroissante telle que $\lim_{n\to\infty}\delta_n(\ln\ln n)^2 = \infty$ et $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$, pour tout $\gamma > 0$, tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0\Big(\epsilon, \gamma, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]$, $Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\Big)$ tel que pour tout $n > n_0$, tout $\alpha \in G'_n$ et tout $0 < \xi' \leq 1$ on a :*

$$\mathbb{P}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}, [\xi' n]\right) \geq [n\xi'](1-\delta_n)\right] \geq 1 - \frac{2}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} - \frac{1}{(\ln n)^\gamma} , \tag{10.35}$$

et $Q\left[G'_n\right] \geq 1-\epsilon$. $V_{\tilde{m}_0} = \{\tilde{m}_0 - [F(\ln\ln n)^2], \cdots, \tilde{m}_0, \cdots, \tilde{m}_0 + [F(\ln\ln n)^2]\}$,
$F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2}Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, et $R = 1000$.

Preuve.
Pour la preuve de cette proposition on suit la même démarche que pour montrer le théorème 10.1.1, c'est à dire que l'on veut majorer : $\mathbb{P}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(V^c_{\tilde{m}_0}, [\xi' n]\right) \geq [\xi' n]\delta_n\right]$ où $0 < \xi' \leq 1$.
On rappelle le lemme suivant montré dans la partie II (lemme 5.1.5) :

Lemme 10.1.5. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $\epsilon > 0$, tout $\gamma > 0$ il existe $n_1 \equiv n_1\Big(\epsilon, \gamma, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right]$, $Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\Big)$ tel que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G'_n$:*

$$\mathbb{P}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}'_0-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_0+1} > n\right] \geq 1 - \frac{1}{(\ln n)^\gamma} . \tag{10.36}$$

Ce lemme permet donc de réduire l'ensemble $V^c_{\tilde{m}_0}$ à $V^{c,r}_{\tilde{m}_0}$ car $[\xi' n] \leq n$ pour tout $0 < \xi' \leq 1$. On en déduit que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G'_n$:

$$\mathbb{P}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(V^c_{\tilde{m}_0}, [\xi' n]\right) \geq \delta_n[\xi' n]\right] \leq \mathbb{P}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, [\xi' n]\right) \geq \delta_n[\xi' n]\right] + \frac{1}{(\ln n)^\gamma} , \tag{10.37}$$

En effectuant les mêmes calculs que ceux effectués de 10.18 à 10.31, on obtient que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G'_n$:

$$\mathbb{P}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(V^c_{\tilde{m}_0}, \xi' n\right) \geq \delta_n[\xi' n]\right] \leq \frac{2}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} + \frac{1}{(\ln n)^\gamma} , \tag{10.38}$$

avec $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2}Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, et $R = 1000$, ce qui donne la proposition en prenant $n_0 = n_1$. ■

10.2 Convergence en probabilité du temps local au point de concentration $\tilde{m}_0$ (preuve du théorème 7.3.1)

L'objet de ce paragraphe est de montrer le théorème 7.3.1. Dans le paragraphe 10.2.1 on commence par rappeler ce résultat puis on donne les outils de la preuve. Dans le paragraphe 10.2.2 on fait un calcul préliminaire à milieu fixé concernant la transformé de Laplace de la v.a. $\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)$, on utilise pour cela un résultat du chapitre 2 partie I que nous rappellerons, ainsi qu'un résultat de P. Révész, L. Horvàth et M. Csörgö [86] que nous redémontrerons. Enfin on donne la preuve du théorème 7.3.1 dans le paragraphe 10.2.3.

10.2.1 Énoncé du résultat principal et outils de la preuve

On rappelle la notation suivante :

$$V_{\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}} = \{\tilde{M}_0', \tilde{M}_0'+1, \cdots, \tilde{m}_0, \cdots, \tilde{M}_0 - 1, \tilde{M}_0\} \ , \tag{10.39}$$

qui est l'ensemble des points (dans $\mathbb{Z}$) contenus dans la "vallée minimale" notée $\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$.

Théorème 10.2.1. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour toute suite $(\delta_n, n \in \mathbb{N})$ positive décroissante telle que $\lim_{n\to\infty} \delta_n (\ln\ln n)^2 = \infty$ et $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, pour tout $\epsilon > 0$, tout $\delta > 0$, tel que $\delta\mu < 1$ il existe $n_0 \equiv n_0\left(\epsilon, \delta, \mu, I_{\eta_0}, \sigma, Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$ tout $\alpha \in G_n'$ on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\left|\frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n)}{n} - \frac{1}{\mathbb{E}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]}\right| > \delta\right] \leq \frac{4}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} + \frac{4e^{-\frac{\delta}{2}n^{1/2}}}{\delta} \tag{10.40}$$

et $Q\left[G_n'\right] \geq 1-\epsilon$. $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2} Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$, $\mu = 3 + \frac{2}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\eta_0}\left(\frac{2e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^3} + \frac{(E_2+3)}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^2} + \frac{3(E_2-1)}{1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}\right)$,

$E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon}\frac{I_{\eta_0}(I_{\eta_0}\vee 1)(21E+1)}{\left(Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right] \wedge Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right) Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ *et* $R = 1000$.

Pour la preuve de ce théorème nous avons eu besoin de plusieurs résultats intermédiaires :
Concernant le milieu, le résultat principal qui nous est utile est le fait que :

$$\mathbb{E}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}_0',\tilde{m}_0,\tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \ , \tag{10.41}$$

soit bornée par une constante indépendante de n avec une Q probabilité aussi proche de 1 que l'on veut, ce résultat a été montré dans le chapitre précédent (proposition 9.2.1). Un résultat secondaire plus technique est la connaissance des fluctuations maximales du potentiel aléatoire dans le voisinage $V_{\tilde{m}_0}$ (lemme 9.3.1). D'autres propriétés sur le milieu aléatoire, moins importantes, ont été utilisées, voir la définition 9.4.1 pour un résumé.
Concernant la M.A.M.A. , l'ingrédient principal de la preuve a été de comparer le temps local $\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n)$ avec le temps local $\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, n)$ ceci a été rendu possible grâce au premier résultat que nous avons montré (théorème 10.1.1). Nous avons besoin également d'une inégalité de type Markov exponentielle. Pour pouvoir appliquer cette inégalité nous avons eu besoin du fait que 10.41 soit bornée par une constante indépendante de n avec une Q probabilité proche de 1. Enfin, pour terminer les estimations des probabilités obtenues, nous utilisons le résultat de la proposition 10.2.2 (ci-dessous) ainsi que les propriétés 9.328 et 9.329 concernant le milieu aléatoire.

On rappelle les notations suivantes, soit $n > 3$:

$$V_{\tilde{m}_0} = \{\tilde{m}_0 - [F(\ln\ln n)^2], \cdots, \tilde{m}_0, \cdots, \tilde{m}_0 + [F(\ln\ln n)^2]\} \ , \tag{10.42}$$

$$V_{\tilde{m}_0}^* = V_{\tilde{m}_0} \setminus \{\tilde{m}_0\} \ , \tag{10.43}$$

$$V_{\tilde{m}_0}^- = \{\tilde{m}_0 - [F(\ln\ln n)^2], \cdots, \tilde{m}_0 - 1\}, \quad V_{\tilde{m}_0}^+ = \{\tilde{m}_0 + 1, \cdots, \tilde{m}_0 + [F(\ln\ln n)^2]\} \ , \tag{10.44}$$

où $F > 1$, et :

$$u_{k,\tilde{m}_0}^* = \beta_k \mathbb{P}_{k-1}^\alpha\left[T_k^{k-1} > T_{\tilde{m}_0}^{k-1}\right], \ k \in V_{\tilde{m}_0}^+ \ , \tag{10.45}$$

$$v_{k,\tilde{m}_0}^* = \alpha_k \mathbb{P}_{k+1}^\alpha\left[T_k^{k+1} > T_{\tilde{m}_0}^{k+1}\right], \ k \in V_{\tilde{m}_0}^- \ . \tag{10.46}$$

On notera de plus :

$$u_{\tilde{m}_0,k} = \alpha_{\tilde{m}_0} \mathbb{P}_{\tilde{m}_0+1}^\alpha\left[T_{\tilde{m}_0}^{\tilde{m}_0+1} > T_k^{\tilde{m}_0+1}\right], \ k \in V_{\tilde{m}_0}^+ \ , \tag{10.47}$$

$$v_{\tilde{m}_0,k} = \beta_{\tilde{m}_0} \mathbb{P}_{\tilde{m}_0-1}^\alpha\left[T_{\tilde{m}_0}^{\tilde{m}_0-1} > T_k^{\tilde{m}_0-1}\right], \ k \in V_{\tilde{m}_0}^- \ . \tag{10.48}$$

On commence par effectuer un calcul préliminaire concernant la M.A.M.A. à milieu fixé :

10.2.2 Moments exponentiels de temps locaux

Dans cette section on montrera la proposition suivante :

Proposition 10.2.2. *Soient $\alpha \in \Omega_2$ et $(\theta_k,\ k \in V^*_{\tilde{m}_0})$ une suite strictement positive telle que $\sum_{k\in V^*_{\tilde{m}_0}} \frac{1}{\theta_k} = 1$, pour tout $\lambda < \min\left(-\min_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}}\left(\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1-u^*_{k,\tilde{m}_0}\right)\right), -\min_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}}\left(\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1-v^*_{k,\tilde{m}_0}\right)\right)\right)$, on a :*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\left(\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]\right)}\right]\\
\leq\ & e^{\sum_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}}\frac{\lambda^2\theta_k}{2}\left(2\frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2}-\frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}-\frac{(u_{\tilde{m}_0,k})^2}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{(\theta_k)^{2/3}\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3}\\
&\times e^{\sum_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}}\frac{\lambda^2\theta_k}{2}\left(2\frac{v_{\tilde{m}_0,k}}{(v^*_{k,\tilde{m}_0})^2}-\frac{v_{\tilde{m}_0,k}}{v^*_{k,\tilde{m}_0}}-\frac{(v_{\tilde{m}_0,k})^2}{(v^*_{k,\tilde{m}_0})^2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{(\theta_k)^{2/3}\lambda}{v^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3}.
\end{aligned} \tag{10.49}$$

On commence par rappeler le lemme suivant :

Lemme 10.2.3. *Soient $\alpha \in \Omega_2$, $k \in V^*_{\tilde{m}_0}$, $\theta_k > 0$, si $k > \tilde{m}_0$ pour tout $\lambda < -\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1-u^*_{k,\tilde{m}_0}\right)$ on a :*

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\theta_k\mathcal{L}\left(k,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)}\right] = 1-u_{\tilde{m}_0,k}+u_{\tilde{m}_0,k}\left(\frac{e^{\lambda\theta_k}u^*_{k,\tilde{m}_0}}{1-e^{\lambda\theta_k}(1-u^*_{k,\tilde{m}_0})}\right), \tag{10.50}$$

si $k < \tilde{m}_0$ pour tout $\lambda < -\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1-v^*_{k,\tilde{m}_0}\right)$ on a :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\theta_k\mathcal{L}\left(k,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)}\right] = 1-v_{\tilde{m}_0,k}+v_{\tilde{m}_0,k}\left(\frac{e^{\lambda\theta_k}v^*_{k,\tilde{m}_0}}{1-e^{\lambda\theta_k}(1-v^*_{k,\tilde{m}_0})}\right). \tag{10.51}$$

Preuve.
voir le lemme 2.1.12 (page 23). ■

Pour le lemme suivant on s'est inspiré de [86] page 280 (voir également [85]) :

Lemme 10.2.4. *Soient $\alpha \in \Omega_2$, $k \in V^*_{\tilde{m}_0}$, $\theta_k > 0$, si $k > \tilde{m}_0$ pour tout $\lambda < -\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1-u^*_{k,\tilde{m}_0}\right)$, on a :*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\theta_k\left(\mathcal{L}\left(k,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(k,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]\right)}\right]\\
=\ & 1+\frac{(\lambda\theta_k)^2}{2}\left(2\frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2}-\frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}-\frac{(u_{\tilde{m}_0,k})^2}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3,
\end{aligned} \tag{10.52}$$

si $k < \tilde{m}_0$ pour tout $\lambda < -\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1-v^*_{k,\tilde{m}_0}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\theta_k\left(\mathcal{L}\left(k,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(k,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]\right)}\right]\\
=\ & 1+\frac{(\lambda\theta_k)^2}{2}\left(2\frac{v_{\tilde{m}_0,k}}{(v^*_{k,\tilde{m}_0})^2}-\frac{v_{\tilde{m}_0,k}}{v^*_{k,\tilde{m}_0}}-\frac{(v_{\tilde{m}_0,k})^2}{(v^*_{k,\tilde{m}_0})^2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{\theta_k\lambda}{v^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3.
\end{aligned} \tag{10.53}$$

Preuve.

Soit $k \in V^+_{\tilde{m}_0}$, supposons $\lambda < -\frac{1}{\theta_k} \ln\left(1 - u^*_{k,\tilde{m}_0}\right)$, on écrit le développement en série de Taylor de $\frac{e^{\lambda\theta_k} u^*_{k,\tilde{m}_0}}{1-e^{\lambda\theta_k}(1-u^*_{k,\tilde{m}_0})}$:

$$\frac{e^{\lambda\theta_k} u^*_{k,\tilde{m}_0}}{1 - e^{\lambda\theta_k}(1 - u^*_{k,\tilde{m}_0})} = \frac{1}{1 - \frac{1-e^{-\theta_k\lambda}}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}} \tag{10.54}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-\theta_k\lambda}}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^l \tag{10.55}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\theta_k\lambda - (\theta_k\lambda)^2/2 + \mathcal{O}\left(\theta_k\lambda\right)^3}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^l \tag{10.56}$$

$$= 1 + \frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}} + \left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^2 - \frac{(\theta_k\lambda)^2}{2u^*_{k,\tilde{m}_0}} + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3 , \tag{10.57}$$

d'après 10.50 on en déduit :

$$\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\theta_k\mathcal{L}\left(k,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)}\right] \tag{10.58}$$

$$= 1 - u_{\tilde{m}_0,k} + u_{\tilde{m}_0,k}\left(1 + \frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}} + \left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^2 - \frac{(\theta_k\lambda)^2}{2u^*_{k,\tilde{m}_0}} + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3\right) \tag{10.59}$$

$$= 1 + u_{\tilde{m}_0,k}\left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}} + \left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^2 - \frac{(\theta_k\lambda)^2}{2u^*_{k,\tilde{m}_0}} + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3\right) . \tag{10.60}$$

On rappelle de plus, par 2.66, que :

$$\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(k, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right] = \frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{u^*_{k,\tilde{m}_0}} , \tag{10.61}$$

d'où en effectuant le développement en série de Taylor de $e^{-\lambda\theta_k\mathbb{E}^\alpha\left[\mathcal{L}\left(k,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]}$ on obtient :

$$\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\theta_k\left(\mathcal{L}\left(k,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}^\alpha\left[\mathcal{L}\left(k,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]\right)}\right] \tag{10.62}$$

$$= \left(1 + u_{\tilde{m}_0,k}\left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}} + \left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^2 - \frac{(\theta_k\lambda)^2}{2u^*_{k,\tilde{m}_0}} + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3\right)\right) \times$$

$$\times \left(1 - u_{\tilde{m}_0,k}\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}} + \frac{1}{2}\left(u_{\tilde{m}_0,k}\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^2 + \mathcal{O}\left(u_{\tilde{m}_0,k}\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3\right) , \tag{10.63}$$

on en déduit 10.52, un calcul identique donne 10.53. ■
On montre maintenant la proposition qui nous intéresse :
Preuve (Proposition 10.2.2).
On a :

$$\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\left(\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]\right)}\right] = \mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\left(\mathcal{L}\left(V^*_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(V^*_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]\right)}\right] , \tag{10.64}$$

car $\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right] = \mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right) = 1$, par l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\mathcal{L}\left(V^*_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)}\right] \leq \prod_{k\in V^*_{\tilde{m}_0}}\left(\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\theta_k\mathcal{L}\left(\theta_k,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)}\right]\right)^{1/\theta_k} , \tag{10.65}$$

où pour tout $k \in V^*_{\tilde{m}_0}$, $\theta_k > 0$ avec $\sum_{k\in V^*_{\tilde{m}_0}} \frac{1}{\theta_k} = 1$, on en déduit :

$$\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]}\right] \tag{10.66}$$

$$\leq \prod_{k\in V^*_{\tilde{m}_0}}\left(\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\theta_k\left(\mathcal{L}\left(k,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(k,T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]\right)}\right]\right)^{1/\theta_k} . \tag{10.67}$$

Pour pouvoir appliquer le lemme 10.2.4 pour tout $k \in V^*_{\tilde{m}_0}$ on doit prendre :

$$\lambda < \min\left(-\min_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}}\left(\frac{1}{\theta_k}\ln(1-u^*_{k,\tilde{m}_0})\right),\ -\min_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}}\left(\frac{1}{\theta_k}\ln(1-v^*_{k,\tilde{m}_0})\right)\right) ,$$

on en déduit :

$$\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\left(\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}\right)\right]\right)}\right] \tag{10.68}$$

$$\leq e^{\sum_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}}\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1+\frac{(\lambda\theta_k)^2}{2}\left(2\frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2}-\frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}-\frac{(u_{\tilde{m}_0,k})^2}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3\right)} \tag{10.69}$$

$$\times e^{\sum_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}}\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1+\frac{(\lambda\theta_k)^2}{2}\left(2\frac{v_{\tilde{m}_0,k}}{(v^*_{k,\tilde{m}_0})^2}-\frac{v_{\tilde{m}_0,k}}{v^*_{k,\tilde{m}_0}}-\frac{(v_{\tilde{m}_0,k})^2}{(v^*_{k,\tilde{m}_0})^2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{\theta_k\lambda}{v^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3\right)} . \tag{10.70}$$

De plus $\ln(1+x) \leq x\ \forall x \geq 0$, ainsi pour tout $k \in V^+_{\tilde{m}_0}$ on a :

$$\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1+\frac{(\lambda\theta_k)^2}{2}\left(2\frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2}-\frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}-\frac{(u_{\tilde{m}_0,k})^2}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3\right) \tag{10.71}$$

$$\leq \frac{\lambda^2\theta_k}{2}\left(2\frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2}-\frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}-\frac{(u_{\tilde{m}_0,k})^2}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{(\theta_k)^{2/3}\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3 , \tag{10.72}$$

en effectuant la même remarque pour les $k \in V^-_{\tilde{m}_0}$ puis en remplaçant dans 10.70 et le résultat obtenu dans 10.67 on obtient la proposition. ■

On remarque que par une méthode similaire on obtient :

Proposition 10.2.5. *Soit $\alpha \in \Omega_2$, supposons $\tilde{m}_0 > 0$, soit (θ_k, k) une suite strictement positive telle que $\sum_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}} \frac{1}{\theta_k} = 1$ supposons $\lambda < -\min_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}}\left(\frac{1}{\theta_k}\ln(1-v^*_{k,\tilde{m}_0})\right)$ alors on a :*

$$\mathbb{E}^\alpha_0\left[e^{\lambda\left(\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0},T^0_{\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}^\alpha_0\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0},T^0_{\tilde{m}_0}\right)\right]\right)}\right] \leq e^{\sum_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}}\frac{\lambda^2\theta_k}{2(v^*_{k,\tilde{m}_0})^2}+\mathcal{O}\left(\frac{(\theta_k)^{2/3}\lambda}{v^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3} . \tag{10.73}$$

Supposons $\tilde{m}_0 < 0$, soit (θ_k, k) une suite strictement positive telle que $\sum_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}} \frac{1}{\theta_k} = 1$, supposons $\lambda < -\min_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}}\left(\frac{1}{\theta_k}\ln(1-u^*_{k,\tilde{m}_0})\right)$, alors on a :

$$\mathbb{E}^\alpha_0\left[e^{\lambda\left(\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0},T^0_{\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}^\alpha_0\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0},T^0_{\tilde{m}_0}\right)\right]\right)}\right] \leq e^{\sum_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}}\frac{\lambda^2\theta_k}{2(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2}+\mathcal{O}\left(\frac{(\theta_k)^{2/3}\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3} . \tag{10.74}$$

Pour la preuve de cette proposition on commence par rappeler le :

Lemme 10.2.6. *Soient $\alpha \in \Omega_2$, si $\tilde{m}_0 > 0$ pour tout $k \in V^-_{\tilde{m}_0}$, tout $\theta_k > 0$ et tout $\lambda < -\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1-v^*_{k,\tilde{m}_0}\right)$ on a :*

$$\mathbb{E}^\alpha_0\left[e^{\lambda\theta_k\mathcal{L}\left(k,T^0_{\tilde{m}_0}\right)}\right] = \frac{v^*_{k,\tilde{m}_0}}{1-e^{\lambda\theta_k}(1-v^*_{k,\tilde{m}_0})} , \tag{10.75}$$

si $\tilde{m}_0 < 0$, pour tout $k \in V^+_{\tilde{m}_0}$, tout $\theta_k > 0$ et tout $\lambda < -\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1 - u^*_{k,\tilde{m}_0}\right)$ on a :

$$\mathbb{E}_0^\alpha\left[e^{\lambda\theta_k\mathcal{L}\left(k,T^0_{\tilde{m}_0}\right)}\right] = \frac{u^*_{k,\tilde{m}_0}}{1 - e^{\lambda\theta_k}(1 - u^*_{k,\tilde{m}_0})} \ . \tag{10.76}$$

Preuve.
Voir le lemme 2.1.12. ■

Lemme 10.2.7. *Soient $\alpha \in \Omega_2$, si $\tilde{m}_0 > 0$ pour tout $k \in V^-_{\tilde{m}_0}$, tout $\theta_k > 0$ et tout $\lambda < -\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1 - v^*_{k,\tilde{m}_0}\right)$ on a :*

$$\mathbb{E}_0^\alpha\left[e^{\lambda\theta_k\left(\mathcal{L}\left(k,T^0_{\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}_0^\alpha\left[\mathcal{L}\left(k,T^0_{\tilde{m}_0}\right)\right]\right)}\right] = 1 + \frac{(\lambda\theta_k)^2}{2}\frac{1}{(v^*_{k,\tilde{m}_0})^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_k\lambda}{v^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3 \ . \tag{10.77}$$

si $\tilde{m}_0 < 0$, pour tout $k \in V^+_{\tilde{m}_0}$, tout $\theta_k > 0$ et tout $\lambda < -\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1 - u^*_{k,\tilde{m}_0}\right)$ on a :

$$\mathbb{E}_0^\alpha\left[e^{\lambda\theta_k\left(\mathcal{L}\left(k,T^0_{\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}_0^\alpha\left[\mathcal{L}\left(k,T^0_{\tilde{m}_0}\right)\right]\right)}\right] = 1 + \frac{(\lambda\theta_k)^2}{2}\frac{1}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3 \ , \tag{10.78}$$

Preuve.
Soient $\tilde{m}_0 < 0$, $k \in V^+_{\tilde{m}_0}$, $\theta_k > 0$ et $\lambda < -\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1 - u^*_{k,\tilde{m}_0}\right)$, par des calculs similaires à ceux effectués pour obtenir le lemme 10.2.4 on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_0^\alpha\left[e^{\lambda\theta_k\left(\mathcal{L}\left(k,T^0_{\tilde{m}_0}\right)-\mathbb{E}^\alpha\left[\mathcal{L}\left(k,T^0_{\tilde{m}_0}\right)\right]\right)}\right] && (10.79)\\
&= \left(1 + \frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}} + \left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^2 - \frac{(\theta_k\lambda)^2}{2u^*_{k,\tilde{m}_0}} + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3\right) \times \\
&\times \left(1 - \frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_k\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3\right) \ , && (10.80)
\end{aligned}$$

on obtient alors le lemme en développant ce terme. ■
Preuve (Proposition 10.2.5).
Après avoir remarqué que si $\tilde{m}_0 > 0$ (respectivement $\tilde{m}_0 < 0$), $\mathcal{L}\left(V^+_{\tilde{m}_0}, T^0_{\tilde{m}_0}\right) = 0$, (respectivement $\mathcal{L}\left(V^-_{\tilde{m}_0}, T^0_{\tilde{m}_0}\right) = 0$) on effectue des calculs similaires à ceux effectués pour obtenir la proposition 10.2.2 ■

10.2.3 Preuve du résultat principal (Théorème 10.2.1)

Soit $\epsilon > 0$ et $\gamma > 0$, dans toute la suite de la preuve on prendra $n_1 \equiv n_1\Big(\epsilon, \gamma, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\Big)$ tel que pour tout $n > n_1$:

$$Q\left[G'_n\right] \geq 1 - \epsilon. \tag{10.81}$$

Soit $\delta > 0$, pour commencer on va majorer la probabilité :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\left|\frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n)}{n} - \frac{1}{\mathbb{E}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]}\right| > \delta\right] \ , \tag{10.82}$$

on déduira le résultat 10.40 de cette majoration. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0^\alpha\left[\left|\frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n)}{n} - \frac{1}{\mathbb{E}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]}\right| > \delta\right] &\leq \mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) < n\left(\frac{1}{\mathbb{E}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]} - \delta\right)\right] && (10.83)\\
&+ \mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) > n\left(\frac{1}{\mathbb{E}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]} + \delta\right)\right] \ . && (10.84)
\end{aligned}$$

Notons :

$$\eta_1 = \frac{1}{\mathbb{E}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]} - \delta,\ \eta_2 = \frac{1}{\mathbb{E}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]} + \delta\ . \tag{10.85}$$

On va maintenant estimer chacun des termes 10.83 et 10.84 dans les propositions 10.2.8 et 10.2.12 :

Proposition 10.2.8. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour toute suite $(\delta_n, n \in \mathbb{N})$ positive décroissante telle que $\lim_{n\to\infty}\delta_n(\ln\ln n)^2 = \infty$ et $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$, tout $\epsilon > 0$, tout $\delta > 0$, tel que $\delta\mu < 1$ il existe $n_0 \equiv n_0\left(\epsilon, \delta, \mu, I_{\eta_0}, \sigma, Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0$, et tout $\alpha \in G'_n$ on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) < \eta_1 n\right] \leq \frac{2}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} + \frac{2e^{-\delta n^{1/2}}}{\delta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/2}}\right) \tag{10.86}$$

et $Q\left[G'_n\right] \geq 1-\epsilon$. $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0<-I_{\eta_0}/2\right])^{1/2}Q\left[\epsilon_0>I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$, $\mu = 3+\frac{2}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\eta_0}\left(\frac{2e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^3} + \frac{(E_2+3)}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^2} + \frac{3(E_2-1)}{1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}\right)$,
$E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon}\frac{I_{\eta_0}(I_{\eta_0}\vee 1)(21E+1)}{\left(Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\wedge Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ *et* $R = 1000$.

Preuve.

Le schéma de la preuve de la proposition 10.2.8 est le suivant :
- On commence par se ramener à une marche partant de $\tilde{m}_0$ (10.87 à 10.95).
- On utilise ensuite la proposition 10.1.4 pour ramener le problème à une comparaison entre deux temps locaux (équations 10.96 à 10.98).
- On montre ensuite le lemme 10.2.9 qui implique que partant de $\tilde{m}_0$ le temps local en $\tilde{m}_0$ en un temps proche de n est plus grand que $\frac{n}{(\ln n)^7}$ (10.99 à 10.117).
- On se ramène alors à un problème simple de l'étude du temps local dans le voisinage $V_{\tilde{m}_0}$ en un instant qui est un temps arrêt (10.118 à 10.122).
- On veut ensuite utiliser une inégalité de Markov exponentiel, pour cela on doit montrer le lemme 10.2.10 qui est un résultat sur le milieu aléatoire, obtenu grâce à la propriété 9.327 de l'ensemble des bons environnements (10.123 à 10.135).
- On utilise donc l'inégalité de Markov exponentielle puis la propriété de Markov forte ce qui ramène le calcul à l'évaluation de la transformée de Laplace de la v.a. $\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})$ (10.136 à 10.143).
- On se sert à ce moment de la proposition 10.2.2 pour estimer cette transformée de Laplace, puis on simplifie les expressions obtenues en choisissant le paramètre λ (de la transformée de Laplace) puis en montrant le lemme 10.2.11 (10.144 à 10.157)
- De 10.158 à la fin de la preuve on remplace l'estimation obtenue pour la transformée de Laplace dans les estimations des probabilités que l'on avait obtenues antérieurement puis on évalue le paramètre λ de la transformée de Laplace grâce aux propriétés 9.328 et 9.329 de l'ensemble des bons environnements, enfin on simplifie les expressions.

On commence maintenant la preuve de cette proposition :

Soient $\epsilon > 0$, $\gamma > 10$, par le lemme 10.1.3, il existe $n_2 \equiv n_2\left(\epsilon, \gamma, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_2$ et tout milieu $\alpha \in G'_n$, on a :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[T^0_{\tilde{m}_0} > \frac{n}{(\ln n)^4}\right] \leq \frac{2E^3}{\eta_0(\ln n)^{\gamma-10}}\ , \tag{10.87}$$

avec $Q\left[G'_n\right] \geq 1-\epsilon$. $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$, $R = 1000$.

Par 10.87 et la définition du temps local on a pour tout $n > n_2$ et tout $\alpha \in G'_n$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n\right) < \eta_1 n\right] \tag{10.88}$$

$$\leq \mathbb{P}_0^\alpha \left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n\right) < \eta_1 n,\ T^0_{\tilde{m}_0} \leq \frac{n}{(\ln n)^4}\right] + \frac{2E^3}{\eta_0 (\ln n)^{\gamma-10}} \tag{10.89}$$

$$= \mathbb{P}_0^\alpha \left[\sum_{j=T^0_{\tilde{m}_0}+1}^{n} \mathbb{I}_{X_j=\tilde{m}_0} < \eta_1 n - \sum_{j=0}^{T^0_{\tilde{m}_0}} \mathbb{I}_{X_j=\tilde{m}_0},\ T^0_{\tilde{m}_0} \leq \frac{n}{(\ln n)^4}\right] + \frac{2E^3}{\eta_0 (\ln n)^{\gamma-10}}\ , \tag{10.90}$$

Pour tout $\alpha \in \Omega_2$, on obtient par la propriété de Markov forte et le fait que $\sum_{j=0}^{T^0_{\tilde{m}_0}} \mathbb{I}_{X_j=\tilde{m}_0} = 1$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\sum_{j=T^0_{\tilde{m}_0}+1}^{n} \mathbb{I}_{X_j=\tilde{m}_0} < \eta_1 n - \sum_{j=0}^{T^0_{\tilde{m}_0}} \mathbb{I}_{X_j=\tilde{m}_0},\ T^0_{\tilde{m}_0} \leq \frac{n}{(\ln n)^4}\right] \tag{10.91}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{N_0} \mathbb{P}_0^\alpha \left[\sum_{j=T^0_{\tilde{m}_0}+1}^{n} \mathbb{I}_{X_j=\tilde{m}_0} < \eta_1 n,\ T^0_{\tilde{m}_0} = m\right] \tag{10.92}$$

$$= \sum_{m=1}^{N_0} \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\sum_{j=1}^{n-m} \mathbb{I}_{X_j=\tilde{m}_0} < \eta_1 n,\right] \mathbb{P}_0^\alpha \left[T^0_{\tilde{m}_0} = m\right] \tag{10.93}$$

$$\leq \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta_1 n\right]\ , \tag{10.94}$$

où $N_0 = \left[\frac{n}{(\ln n)^4}\right] + 1$ et $\zeta_n = \frac{N_0}{n}$. En remplaçant 10.94 dans 10.90 on obtient pour tout $n > n_2$ et tout $\alpha \in G'_n$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha \left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n\right) < \eta_1 n\right] \leq \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta_1 n\right] + \frac{2E^3}{\eta_0 (\ln n)^{\gamma-10}}\ . \tag{10.95}$$

Par la proposition 10.1.4, en prenant $\xi' = 1-\xi_n$, il existe $n_3 \equiv n_3\left(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_3$ et tout milieu $\alpha \in G'_n$, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta_1 n\right] \\ \leq\ & \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta_1 n,\ \mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, (1-\zeta_n)n) \geq (1-\delta_n)(1-\zeta_n)n\right] \\ +\ & \frac{2}{\eta_0} \frac{1}{F(\ln\ln n)^2 \delta_n} + \frac{1}{(\ln n)^\gamma}\ , \end{aligned} \tag{10.96}$$

où $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0} \vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right] \wedge Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$, $E = \frac{24R^2 |\ln \frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2 \epsilon^2}$ et $(\delta_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite positive décroissante telle que $\lim_{n\to\infty} \delta_n (\ln\ln n)^2 = \infty$. Notons $\eta'_1 \equiv \frac{\eta_1}{(1-\delta_n)(1-\zeta_n)}$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < n\eta_1 \\ \mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, n(1-\zeta_n)) \geq n(1-\delta_n)(1-\zeta_n) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta'_1 \mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, n(1-\zeta_n))\ , \tag{10.97}$$

ainsi :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < n\eta_1,\ \mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, n(1-\zeta_n)) \geq n(1-\delta_n)(1-\zeta_n)\right] \\ \leq\ & \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha \left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta'_1 \mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, n(1-\zeta_n))\right]\ . \end{aligned} \tag{10.98}$$

On veut maintenant estimer 10.98, pour cela on commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 10.2.9. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $\epsilon > 0$, tout $0 < \xi \leq 1$, il existe $n_4 \equiv n_4\Big(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\Big)$ tel que pour tout $n > n_4$ et tout $\alpha \in G'_n$ on a :*

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0,\ \xi n\right) \geq \frac{n}{(\ln n)^7}\right] \geq 1 - \frac{16E^3}{\eta_0^2 \xi (\ln n)^{1/2}} \ .$$

où $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$.

Preuve.
Définissons les points $\tilde{M}_< \in [\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0]$ et $\tilde{M}_> \in [\tilde{m}_0, \tilde{M}_0]$:

$$\tilde{M}_< = \sup\left\{t,\ 0 > t > \tilde{M}'_0,\ S_t - S_{\tilde{m}_0} \geq \ln n - \left(6 + \frac{1}{2}\right)\ln\ln n\right\} \ , \tag{10.99}$$

$$\tilde{M}_> = \inf\left\{t,\ 0 < t < \tilde{M}_0,\ S_t - S_{\tilde{m}_0} \geq \ln n - \left(6 + \frac{1}{2}\right)\ln\ln n\right\} \ , \tag{10.100}$$

Il est important de remarquer que ces deux points existent, en effet par définition de la vallée $\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$, on a pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G_n$:

$$S_{\tilde{M}'_0} - S_{\tilde{m}_0} \geq \ln n + \gamma \ln\ln n \ , \tag{10.101}$$

$$S_{\tilde{M}_0} - S_{\tilde{m}_0} \geq \ln n + \gamma \ln\ln n \ , \tag{10.102}$$

de plus par hypothèse (H.3) $Q\left[-I_{\eta_0} \leq \epsilon_0 \leq I_{\eta_0}\right] = 1$, donc :

$$\ln n - \left(6 + \frac{1}{2}\right)\ln\ln n \leq S_{\tilde{M}_<} - S_{\tilde{m}_0} \leq \ln n - \left(6 + \frac{1}{2}\right)\ln\ln n + I_{\eta_0} \ , \tag{10.103}$$

$$\ln n - \left(6 + \frac{1}{2}\right)\ln\ln n \leq S_{\tilde{M}_>} - S_{\tilde{m}_0} \leq \ln n - \left(6 + \frac{1}{2}\right)\ln\ln n + I_{\eta_0} \ , \tag{10.104}$$

avec une Q probabilité égale à 1.
Par l'inégalité de Markov on a :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_<+1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_>-1} > \xi n\right] \quad \leq \quad \frac{\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_<-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_>+1}\right]}{\xi n} \ . \tag{10.105}$$

En utilisant le lemme 2.1.7 (page 20), puis en effectuant des calculs similaires à ceux effectués au paragraphe 5.2 (page 92) on obtient :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_<-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_>+1} > \xi n\right] \quad \leq \quad |M_< - M_>|^3 (\ln n)^6 \frac{n^{(S_{\tilde{M}_<} - S_{\tilde{m}_0}) \vee (S_{\tilde{M}_>} - S_{\tilde{m}_0})}}{\xi n} \ . \tag{10.106}$$

Par 10.99 et 10.100 et par la propriété 9.325 de l'ensemble des bons environnements, on sait qu'il existe $n_1 \equiv n_1\left(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G'_n$:

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_<-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_>+1} > \xi n\right] \leq \frac{8E^3(\ln n)^6}{\eta_0 n^{(6+\frac{1}{2})\frac{\ln\ln n}{\ln n} - \frac{I_{\eta_0}}{\ln n}}\xi} = \frac{8E^3 e^{I_{\eta_0}}}{\eta_0 (\ln n)^{\frac{1}{2}}\xi} \leq \frac{8E^3}{\eta_0^2 (\ln n)^{\frac{1}{2}}\xi} \ , \tag{10.107}$$

on en déduit que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G'_n$:

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, \xi n\right) \geq \frac{n}{(\ln n)^7}\right] \geq \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_<-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_>+1}\right) \geq \frac{n}{(\ln n)^7}\right] - \frac{8E^3}{\eta_0^2 (\ln n)^{\frac{1}{2}}\xi} \ . \tag{10.108}$$

On sait par le lemme 2.1.10 (page 22) qu'à milieu fixé $\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_<-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_>+1}\right)$ suit une loi géométrique de paramètre :

$$\alpha_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} < T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_>+1}\right] + \beta_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} < T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{M}_<-1}\right] \ , \tag{10.109}$$

ainsi pour tout $\alpha \in \Omega_2$:

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_<-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_>+1}\right) \geq \frac{n}{(\ln n)^7}\right]$$

$$= \sum_{j=\left[\frac{n}{(\ln n)^7}\right]+1}^{\infty} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_<-1} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_>+1}\right) = j\right] \tag{10.110}$$

$$= \left(\alpha_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} < T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_>+1}\right] + \beta_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} < T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{M}_<-1}\right]\right)^{\left[\frac{n}{(\ln n)^7}\right]+1} \tag{10.111}$$

$$\equiv \left(1 - \alpha_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \geq T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_>+1}\right] - \beta_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} \geq T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{M}_<-1}\right]\right)^{\left[\frac{n}{(\ln n)^7}\right]+1} . \tag{10.112}$$

De plus par 4.416 (page 84) on a pour tout $\alpha \in \Omega_2$:

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} \geq T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_>+1}\right] = \frac{1}{\sum_{i=\tilde{m}_0+1}^{\tilde{M}_>} \exp\left(\ln n\left(S^n_i - S^n_{\tilde{m}_0}\right)\right) + 1} \tag{10.113}$$

$$\leq \frac{1}{\exp\left(\ln n\left(S^n_{\tilde{M}_>} - S^n_{\tilde{m}_0}\right)\right)} \equiv \frac{1}{\exp\left(S_{\tilde{M}_>} - S_{\tilde{m}_0}\right)} , \tag{10.114}$$

de même par 4.417 on a :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} > T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{M}_<-1}\right] \leq \frac{1}{\exp\left(\ln n\left(S^n_{\tilde{M}_<} - S^n_{\tilde{m}_0}\right)\right)} \equiv \frac{1}{\exp\left(S_{\tilde{M}_<} - S_{\tilde{m}_0}\right)} , \tag{10.115}$$

D'où par définition de $\tilde{M}_>$ et $\tilde{M}_<$:

$$1 - \alpha_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0+1}\left[T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{m}_0} > T^{\tilde{m}_0+1}_{\tilde{M}_>}\right] - \beta_{\tilde{m}_0}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0-1}\left[T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{m}_0} > T^{\tilde{m}_0-1}_{\tilde{M}_<}\right] \geq 1 - \frac{(\ln n)^{6+\frac{1}{2}}}{n} , \tag{10.116}$$

ainsi en remplaçant 10.116 dans 10.112 et en remarquant que $(1-x)^m \geq 1 - mx$ pour tout $0 \leq x \leq 1$ et $m \geq 1$ on a :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_<} \wedge T^{\tilde{m}_0}_{\tilde{M}_>}\right) \geq \frac{n}{(\ln n)^7}\right] \geq 1 - \frac{1}{(\ln n)^{1/2}} \tag{10.117}$$

en remplaçant 10.117 dans 10.108 on obtient le lemme. ■

Le lemme que l'on vient de montrer implique que pour tout $n > n_4$ et tout milieu $\alpha \in G'_n$, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta'_1\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, (1-\zeta_n)n)\right] \\ \leq\ & \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta'_1\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, (1-\zeta_n)n),\ \mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) \geq \frac{n}{(\ln n)^7}\right] \\ +\ & \frac{16E^3}{\eta_0^2(\ln n)^{1/2}\left(1-\zeta_n\right)} , \end{aligned} \tag{10.118}$$

où $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. Notons $N_1 = \left[\frac{n}{(\ln n)^7}\right]$, on a :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta'_1\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, (1-\zeta_n)n),\ \mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) \geq \frac{n}{(\ln n)^7}\right] \tag{10.119}$$

$$= \sum_{l=N_1}^{n} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, (1-\zeta_n)n) > \frac{l}{\eta'_1},\ \mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) = l\right] \tag{10.120}$$

$$= \sum_{l=N_1}^{n} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, (1-\zeta_n)n) > \frac{l}{\eta'_1},\ T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}_{l} \leq n(1-\zeta_n),\ T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}_{l+1} > n(1-\zeta_n)\right] \tag{10.121}$$

$$\leq \sum_{l=N_1}^{n} \mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},\ T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}_{l+1}) > \frac{l}{\eta'_1}\right] , \tag{10.122}$$

où l'on rappelle la notation suivante :

$$T_{l+1}^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} = \inf\left\{k > T_l^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0},\ X_k = \tilde{m}_0\right\},\ l \geq 0\ ,$$
$$T_0^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0} = 0\ .$$

Pour pouvoir poursuivre notre discussion nous allons montrer le lemme suivant, on rappelle que pour tout $\delta > 0$ on a définit :

$$\eta_1' \equiv \frac{\eta_1}{(1-\delta_n)(1-\zeta_n)} = \frac{\frac{1}{\mathbb{E}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]} - \delta}{(1-\delta_n)(1-\zeta_n)}\ , \tag{10.123}$$

montrons donc :

Lemme 10.2.10. *Soit $\delta > 0$ tel que $\delta\mu < 1$ et soit $(\rho_n, n \in \mathbb{N})$ une suite positive décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty}\rho_n = 0$, alors il existe $n_5 \equiv n_5\left(\delta, \mu, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right) \geq n_1$ tel que pour tout $n > n_5$ et tout milieu $\alpha \in G_n'$, on a :*

$$\frac{1}{\eta_1'} - \mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] - \rho_n > \delta(\mathbb{E}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2 > 0\ , \tag{10.124}$$

où

$$\mu = 3 + \frac{2}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\eta_0}\left(\frac{2e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^3} + \frac{(E_2+3)}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^2} + \frac{3(E_2-1)}{1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}\right), \tag{10.125}$$

avec

$$E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon}\frac{I_{\eta_0}(I_{\eta_0}\vee 1)(21E+1)}{\left(Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\wedge Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)\ , \tag{10.126}$$

$$E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}\ ,\ R = 1000\ . \tag{10.127}$$

Preuve.
On a :

$$\eta_1' \equiv \frac{\eta_1}{(1-\delta_n)(1-\zeta_n)} = \frac{\frac{1}{\mathbb{E}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]} - \delta}{(1-\delta_n)(1-\zeta_n)}\ , \tag{10.128}$$

ainsi :

$$\frac{1}{\eta_1'} = \frac{1}{\frac{1}{\mathbb{E}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]} - \delta} - \frac{\delta_n + \xi_n}{\frac{1}{\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]} - \delta} + \frac{\delta_n\xi_n}{\frac{1}{\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]} - \delta}\ . \tag{10.129}$$

De plus, par la propriété 9.327, de l'ensemble des bons environnements, on sait que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G_n$:

$$\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \leq \mu, \tag{10.130}$$

où μ est définie en 10.125. Donc pour tout $\delta > 0$, tel que $\delta\mu < 1$ et tout $n > n_1$ on a pour tout $\alpha \in G_n'$:

$$\frac{1}{\frac{1}{\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]} - \delta} \equiv \frac{\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]}{1 - \delta\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]} \tag{10.131}$$

$$\geq \mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]\left(1 + \delta\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]\right.$$
$$\left. + \left(\delta\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]\right)^2\right)\ , \tag{10.132}$$

$$\equiv \mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] + \delta(\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2$$
$$+ \delta^2\left(\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^{\alpha}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]\right)^3\ . \tag{10.133}$$

Or $\lim_{n\to\infty}\delta_n = \lim_{n\to\infty}\xi_n = \lim_{n\to\infty}\rho_n = 0$ et $\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \geq 1$, il existe donc $n_5 \equiv n_5(n_1,\delta,\mu) \geq n_1$ tel que pour tout $n > n_5$:

$$\delta^2\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]\right)^3 - \frac{\delta_n+\xi_n}{\frac{1}{\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]}-\delta} + \frac{\delta_n\xi_n}{\frac{1}{\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]}-\delta} - \rho_n \geq 0\ . \tag{10.134}$$

On déduit de 10.134, 10.133 et 10.129 que pour tout $n > n_5$:

$$\frac{1}{\eta_1'} - \mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] - \rho_n \geq \delta(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2 > 0\ , \tag{10.135}$$

ce qui donne le lemme. ■

On revient maintenant à 10.122, en notant $x_1 = \mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]$ on a :

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta_1'\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, (1-\zeta_n)n),\ \mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) \geq \frac{n}{(\ln n)^7}\right] \tag{10.136}$$

$$\leq \sum_{l=N_1}^{n}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},\ T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}_{l+1}) > \frac{l}{\eta_1'}\right] \tag{10.137}$$

$$\equiv \sum_{l=N_1}^{n}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},\ T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}_{l+1}) - (l+1)x_1 > l\left(\frac{1}{\eta_1'} - x_1\left(1+\frac{1}{l}\right)\right)\right] \tag{10.138}$$

$$\leq \sum_{l=N_1}^{n}\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},\ T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}_{l+1}) - (l+1)x_1 > l\left(\frac{1}{\eta_1'} - x_1\left(1+\frac{1}{N_1}\right)\right)\right]\ . \tag{10.139}$$

Par le lemme 10.2.10, en prenant $\rho_n = \frac{x_1}{N_1} \equiv \frac{x_1}{\left[\frac{n}{(\ln n)^7}\right]}$, on sait que pour tout $\delta > 0$ tel que $\mu\delta < 1$ il existe $n_5 \equiv n_5\left(\epsilon,\mu,\delta,I_{\eta_0},\sigma,\mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_5$ et tout milieu $\alpha \in G_n'$, on a :

$$\frac{1}{\eta_1'} - x_1\left(1+\frac{1}{N_1}\right) \equiv \frac{1}{\eta_1'} - x_1 - \rho_n \geq \delta x_1^2 > 0\ . \tag{10.140}$$

Pour tout $n > n_5$ et tout $\alpha \in G_n'$ on peut donc utiliser l'inégalité de Markov exponentielle en 10.139, soit $\lambda > 0$ on a pour tout $\delta > 0$ tel que $\mu\delta < 1$, tout $n > n_5$ et tout $\alpha \in G_n'$:

$$\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},\ T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}_{l+1}) - (l+1)x_1 > l\left(\frac{1}{\eta_1'} - x_1\left(1+\frac{1}{N_1}\right)\right)\right] \tag{10.141}$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\left(\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},\ T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}_{l+1})-(l+1)x_1\right)}\right]}{e^{\lambda l\left(\frac{1}{\eta_1'}-x_1\left(1+\frac{1}{N_1}\right)\right)}}\ . \tag{10.142}$$

Par la propriété de Markov forte on obtient pour tout $\alpha \in \Omega_2$:

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\left(\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},\ T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}_{l+1})-(l+1)x_1\right)}\right] = \left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\left(\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},\ T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})-x_1\right)}\right]\right)^{l+1}\ . \tag{10.143}$$

On utilise maintenant la proposition 10.2.2, pour tout $\alpha \in \Omega_2$ et tout

$$\lambda < \min\left(\min_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}}\left(\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1-u^*_{k,\tilde{m}_0}\right)\right), \min_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}}\left(\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1-v^*_{k,\tilde{m}_0}\right)\right)\right)\ , \tag{10.144}$$

on a :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\left(\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},\ T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})-x_1\right)}\right] \tag{10.145}$$

$$\leq e^{\sum_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}}\lambda^2\theta_k\frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2}+\mathcal{O}\left(\frac{(\theta_k)^{2/3}\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3+\sum_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}}\lambda^2\theta_k\frac{v_{\tilde{m}_0,k}}{(v^*_{k,\tilde{m}_0})^2}+\mathcal{O}\left(\frac{(\theta_k)^{2/3}\lambda}{v^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3}\ . \tag{10.146}$$

où $u^*_{k,\tilde{m}_0}$, $v^*_{k,\tilde{m}_0}$, $u_{\tilde{m}_0,k}$ et $v_{\tilde{m}_0,k}$ sont définies de 10.45 à 10.48 et $(\theta_k, k \in V^*_{\tilde{m}_0})$ est une suite strictement positive telle que $\sum_{k\in V^*_{\tilde{m}_0}} \frac{1}{\theta_k} = 1$. Pour simplifier 10.146 on va choisir λ, pour commencer fixons la valeur de θ_k, prenons $\theta_k = |V^*_{\tilde{m}_0}|$. On rappelle que $V^*_{\tilde{m}_0} = V_{\tilde{m}_0} \setminus \{\tilde{m}_0\}$, où $V_{\tilde{m}_0} = \{-f(n) + \tilde{m}_0, \cdots, \tilde{m}_0, \cdots, \tilde{m}_0 + f(n)\}$ et

$$f(n) = [F(\ln\ln n)^2], \qquad F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0} \vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2} Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2 , \tag{10.147}$$

on remarque que l'on a bien $\sum_{k\in V^*_{\tilde{m}_0}} \frac{1}{\theta_k} = 1$, on prend :

$$\lambda = \frac{\left(\min_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}}\left(u^*_{k,\tilde{m}_0}\right) \wedge \min_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}}\left(v^*_{k,\tilde{m}_0}\right)\right)^2}{(|V^*_{\tilde{m}_0}|)^3} . \tag{10.148}$$

On remarque que l'on a bien $\lambda < \min\left(-\min_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}}\left(\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1-u^*_{k,\tilde{m}_0}\right)\right), -\min_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}}\left(\frac{1}{\theta_k}\ln\left(1-v^*_{k,\tilde{m}_0}\right)\right)\right)$ car $-\ln(1-x) \geq x, \forall x \geq 0$, avec ce choix pour λ, on obtient le lemme suivant :

Lemme 10.2.11. *Supposons 10.148, on a :*

$$\begin{aligned} &\sum_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}} \lambda^2\theta_k \frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2} + \mathcal{O}\left(\frac{(\theta_k)^{2/3}\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3 + \sum_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}} \lambda^2\theta_k \frac{v_{\tilde{m}_0,k}}{(v^*_{k,\tilde{m}_0})^2} + \mathcal{O}\left(\frac{(\theta_k)^{2/3}\lambda}{v^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3 \\ &\leq \lambda\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^3}\right)\right) . \end{aligned} \tag{10.149}$$

Preuve.
Supposons 10.148 on a :

$$\lambda\theta_k \frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2} \leq \frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{|V_{\tilde{m}_0}|^2} \text{ et } \lambda\theta_k \frac{v_{\tilde{m}_0,k}}{(v^*_{k,\tilde{m}_0})^2} \leq \frac{v_{\tilde{m}_0,k}}{|V_{\tilde{m}_0}|^2} , \tag{10.150}$$

d'où on déduit :

$$\begin{aligned} &\lambda \textstyle\sum_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}} \theta_k \frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2} \leq \frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^2} \sum_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}} u_{\tilde{m}_0,k} \leq \frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|} , \\ &\lambda \textstyle\sum_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}} \theta_k \frac{v_{\tilde{m}_0,k}}{(v^*_{k,\tilde{m}_0})^2} \leq \frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^2} \sum_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}} v_{\tilde{m}_0,k} \leq \frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|} . \end{aligned} \tag{10.151}$$

De même :

$$\left(\frac{(\theta_k\lambda)^{2/3}}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3 \leq \frac{\min_{k\in V_{\tilde{m}_0}}\left(u^*_{k,\tilde{m}_0}\right)}{|V_{\tilde{m}_0}|^4} \text{ et } \left(\frac{(\theta_k\lambda)^{2/3}}{v^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3 \leq \frac{\min_{k\in V_{\tilde{m}_0}}\left(v^*_{k,\tilde{m}_0}\right)}{|V_{\tilde{m}_0}|^4} , \tag{10.152}$$

ainsi

$$\sum_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}} \mathcal{O}\left(\frac{(\theta_k\lambda)^{2/3}}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3 + \sum_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}} \mathcal{O}\left(\frac{(\theta_k\lambda)^{2/3}}{v^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3 \leq \sum_{k\in V_{\tilde{m}_0}} \mathcal{O}\left(\frac{w^*_{\tilde{m}_0}}{|V_{\tilde{m}_0}|^4}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{w^*_{\tilde{m}_0}}{|V_{\tilde{m}_0}|^3}\right) \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^3}\right) , \tag{10.153}$$

car $w^*_{\tilde{m}_0} \equiv \max\left(\min_{k\in V_{\tilde{m}_0}}\left(u^*_{k,\tilde{m}_0}\right), \min_{k\in V_{\tilde{m}_0}}\left(v^*_{k,\tilde{m}_0}\right)\right) \leq 1$.
Par 10.151 et 10.153 on obtient :

$$\sum_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}} \lambda^2\theta_k \frac{u_{\tilde{m}_0,k}}{(u^*_{k,\tilde{m}_0})^2} + \mathcal{O}\left(\frac{(\theta_k)^{2/3}\lambda}{u^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3 + \sum_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}} \lambda^2\theta_k \frac{v_{\tilde{m}_0,k}}{(v^*_{k,\tilde{m}_0})^2} + \mathcal{O}\left(\frac{(\theta_k)^{2/3}\lambda}{v^*_{k,\tilde{m}_0}}\right)^3 \tag{10.154}$$

$$\leq \lambda\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^3}\right)\right) . \tag{10.155}$$

ce qui termine la preuve. ■
En remplaçant 10.149 dans 10.146 puis le résultat obtenu dans 10.143 on obtient :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\left(\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},\, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}_{l+1})-(l+1)x_1\right)}\right] \leq e^{\lambda l\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^3}\right)\right)\left(1+\frac{1}{l}\right)}, \tag{10.156}$$

si de plus $l \geq N_1$ on a :

$$\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\left(\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},\, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}_{l+1})-(l+1)x_1\right)}\right] \leq e^{\lambda l\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^3}\right)\right)\left(1+\frac{1}{N_1}\right)}. \tag{10.157}$$

En remplaçant ceci dans 10.142, on a donc pour tout $\delta > 0$ tel que $\mu\delta < 1$, tout $n > n_5$ tout $\alpha \in G'_n$ et tout $N_1 \leq l \leq n$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},\, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}_{l+1}) - (l+1)x_1 > l\left(\frac{1}{\eta'_1} - x_1\left(1+\frac{1}{N_1}\right)\right)\right] \\ \leq\ & \frac{1}{e^{\lambda l\left(\frac{1}{\eta'_1}-\left(\mathbb{E}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]+\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^3}\right)\right)\left(1+\frac{1}{N_1}\right)\right)}}. \end{aligned} \tag{10.158}$$

On en déduit donc, en remplaçant 10.158 dans 10.139, que pour tout $\delta > 0$ tel que $\mu\delta < 1$, tout $n > n_2$ et tout $\alpha \in G'_n$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta'_1\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},(1-\zeta_n)n),\ \mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) \geq \frac{n}{(\ln n)^7}\right] \\ \leq\ & \sum_{l=N_1}^{n}\left(\frac{1}{e^{\lambda\left(\frac{1}{\eta'_1}-\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]+\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^3}\right)\right)(1+1/N_1)\right)}}\right)^{l} \end{aligned} \tag{10.159}$$

$$\leq \frac{e^{-N_1\lambda\left(\frac{1}{\eta'_1}-\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]+\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^3}\right)\right)(1+1/N_1)\right)}}{1-e^{-\lambda\left(\frac{1}{\eta'_1}-\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]+\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^3}\right)\right)(1+1/N_1)\right)}}. \tag{10.160}$$

Par le lemme 10.2.10, en prenant $\rho_n = \frac{1}{N_1}\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] + \left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^3}\right)\right)(1+1/N_1)$ avec $N_1 \equiv \left[\frac{n}{(\ln n)^7}\right]$, on sait que pour tout $\delta > 0$ tel que $\mu\delta < 1$, il existe
$n'_5 \equiv n'_5\left(\epsilon, \mu, \delta, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n'_5$ et tout milieu $\alpha \in G'_n$, on a :

$$\frac{1}{\eta'_1} - \left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] + \frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^3}\right)\right)(1+1/N_1) \geq \delta\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]\right)^2. \tag{10.161}$$

Par 10.161 on déduit également que pour tout $n > n'_5$:

$$1 - e^{-\lambda\left(\frac{1}{\eta'_1}-\left(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]+\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|V_{\tilde{m}_0}|^3}\right)\right)(1+1/N_1)\right)} \tag{10.162}$$

$$\geq 1 - e^{-\lambda\delta(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2} \tag{10.163}$$

$$\geq \lambda\delta(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2 - \mathcal{O}\left(\lambda^2\delta^2(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^4\right). \tag{10.164}$$

Par 10.161 et 10.164 que l'on remplace dans 10.160 on obtient que pour tout $\delta > 0$ tel que $\mu\delta < 1$, tout $n > n_5 \vee n'_5$ et tout $\alpha \in G'_n$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta'_1\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},(1-\zeta_n)n),\ \mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) \geq N_1\right] \\ \leq\ & \frac{e^{-N_1\lambda\delta(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2}}{\lambda\delta(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2 - \mathcal{O}\left(\lambda^2\delta^2(\mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0},T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^4\right)}. \end{aligned} \tag{10.165}$$

On donne maintenant une borne inférieure pour λ, on rappelle que l'on a fixé :

$$\lambda = \frac{\left(\min_{k\in V^+_{\tilde{m}_0}}\left(u^*_{k,\tilde{m}_0}\right)\wedge \min_{k\in V^-_{\tilde{m}_0}}\left(v^*_{k,\tilde{m}_0}\right)\right)^2}{(|V^*_{\tilde{m}_0}|)^3} \ , \tag{10.166}$$

on rappelle aussi que $|V^*_{\tilde{m}_0}| = 2f(n) \equiv 2[F(\ln\ln n)^2]$ où F est donnée par 10.147, par les propriétés 9.328 et 9.329 de l'ensemble des bons environnements, on en déduit que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G'_n$ on a :

$$\lambda \geq \frac{1}{(g(n))^2 8F^3(\ln\ln n)^6} \ , \tag{10.167}$$

avec $g(n) = e^{((4\sqrt{(3)}\sigma f(n))^2 \ln\ln\ln n)^{1/2}}$. De plus par définition :

$$\lambda \leq \frac{1}{8F^3(\ln\ln n)^6} \ , \tag{10.168}$$

or on rappelle que la propriété 9.327 implique que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G'_n$:

$$\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \leq \mu \ , \tag{10.169}$$

où μ est donné en 10.125, donc il existe $n_6(\mu,\delta,n_1) \geq n_1$ tel que pour tout $n > n_6$:

$$\lambda\delta(\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2 - \mathcal{O}\left(\lambda^2\delta^2(\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^4\right) \tag{10.170}$$

$$\equiv \lambda\delta(\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2\left(1 - \mathcal{O}\left(\lambda\delta(\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2\right)\right) \tag{10.171}$$

$$\geq \frac{\lambda\delta}{2}(\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2 \ . \tag{10.172}$$

De plus $\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \geq 1$ car $\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}) = 1$, donc pour tout $n > n_6$

$$\lambda\delta(\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2 - \mathcal{O}\left(\lambda^2\delta^2(\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^4\right) \geq \frac{\lambda\delta}{2} \ . \tag{10.173}$$

par la même remarque on a aussi :

$$\lambda\delta(\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2 \geq \lambda\delta \ . \tag{10.174}$$

En remplaçant 10.173 et 10.174 dans 10.165 on a donc pour tout $\delta > 0$ tel que $\mu\delta < 1$, tout $n > n_5 \vee n'_5 \vee n_6$ et tout $\alpha \in G'_n$:

$$\mathbb{P}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta'_1\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, (1-\zeta_n)n),\ \mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) \geq N_1\right] \leq \frac{2e^{-N_1\lambda\delta}}{\lambda\delta} \ , \tag{10.175}$$

on utilise maintenant 10.167 on en déduit pour tout $n > n_5 \vee n'_5 \vee n_6$ et tout $\alpha \in G'_n$:

$$\mathbb{P}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) < \eta'_1\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, (1-\zeta_n)n),\ \mathcal{L}\left(\tilde{m}_0, n(1-\zeta_n)\right) \geq \frac{n}{(\ln n)^7}\right]$$

$$\leq \frac{(g(n))^2 16F^3(\ln\ln n)^6}{\delta} e^{-\frac{\delta N_1}{(g(n))^2 8F^3(\ln\ln n)^6}} \ , \tag{10.176}$$

où $N_1 = \left[\frac{n}{(\ln n)^7}\right]$, $g(n) = e^{((4\sqrt{(3)}\sigma f(n))^2 \ln\ln\ln n)^{1/2}}$ et $f(n)$ est donnée par 10.147. On montre sans difficulté qu'il existe $n_7 \equiv n_7(F,\sigma)$ tel que pour tout $n > n_7$:

$$\frac{(g(n))^2 16F^3(\ln\ln n)^6}{\delta} e^{-\frac{\delta N_1}{(g(n))^2 8F^3(\ln\ln n)^6}} \leq \frac{e^{-\delta n^{1/2}}}{\delta} \ . \tag{10.177}$$

En remplaçant ceci dans 10.176 puis en regroupant les termes 10.122, 10.118, 10.98, 10.96 et enfin 10.95 on obtient la proposition 10.2.8 en prenant $\gamma = \gamma_0 \equiv 11$ et $n'_0 = n_2 \vee n_3 \vee n_4 \vee n_5 \vee n'_5 \vee n_6 \vee n_7$. ■

On montre maintenant la proposition suivante :

Proposition 10.2.12. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour tout $\epsilon > 0$, tout $\delta > 0$, tel que $\delta\mu < 1$ il existe $n_0'' \equiv n_0''\left(\epsilon, \delta, \mu, I_{\eta_0}, \sigma, Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_0''$, et tout $\alpha \in G_n'$ on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) > \eta_2 n\right] \leq \frac{e^{-\delta n^{1/2}}}{\delta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/2}}\right) \tag{10.178}$$

et $Q\left[G_n'\right] \geq 1-\epsilon$. η_2 est donné par l'égalité 10.85, $\mu = 3+\frac{2}{Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\eta_0}\left(\frac{2e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^3} + \frac{(E_2+3)}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^2} + \frac{3(E_2-1)}{1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}\right)$,

$E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon}\frac{I_{\eta_0}(I_{\eta_0}\vee 1)(21E+1)}{\left(Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\wedge Q\left[\epsilon_0<-\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)Q\left[\epsilon_0>\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ et $R = 1000$.

Preuve.
La preuve de cette proposition est plus directe que la précédente et on peut utiliser la même méthode. Par le lemme 10.1.3 (avec $\gamma = 11$) on sait qu'il existe $n_1' \equiv n_1'\left(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_1'$ et tout milieu $\alpha \in G_n'$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) < n\eta_2\right] &\geq \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) < n\eta_2\right] - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right) && (10.179)\\
&= \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) < n\eta_2,\ \mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, n) \leq n\right] - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right) && (10.180)\\
&\geq \mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) < \mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, n)\eta_2\right] - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right), && (10.181)
\end{aligned}$$

Par le lemme 10.2.9, pour tout $n > n_4$ et tout milieu $\alpha \in G_n'$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) \geq \mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, n)\eta_2\right] && (10.182)\\
\leq\ &\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) \geq \mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, n)\eta_2,\ \mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) \geq \frac{n}{(\ln n)^7}\right] + \frac{16E^3}{\eta_0^2(\ln n)^{1/2}}. && (10.183)
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) \geq \mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, n)\eta_2,\ \mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) \geq \frac{n}{(\ln n)^7}\right] && (10.184)\\
\leq\ &\sum_{l=N_1}^{n}\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, n) \leq \frac{l}{\eta_2},\ \mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) = l\right] && (10.185)\\
\leq\ &\sum_{l=N_1}^{n}\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_l^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}) \leq \frac{l}{\eta_2}\right] && (10.186)\\
\leq\ &\sum_{l=N_1}^{n}\mathbb{P}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_l^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}) - l\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \leq l\left(\frac{1}{\eta_2} - \mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]\right)\right]. && (10.187)
\end{aligned}$$

où $N_1 = \left[\frac{n}{(\ln n)^7}\right]$. On a le lemme suivant :

Lemme 10.2.13. *Soit $\delta > 0$ tel que $\delta\mu < 1$ et soit $(\rho_n, n \in \mathbb{N})$ une suite positive décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty}\rho_n = 0$, alors il existe $n_3' \equiv n_3'\left(\delta, \mu, \epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right) \geq n_1$ tel que pour tout $n > n_3'$ et tout milieu $\alpha \in G_n'$, on a :*

$$\frac{1}{\eta_2} - \mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] + \rho_n \leq -\delta(\mathbb{E}_{\tilde{m}_0}^\alpha\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right])^2 < 0. \tag{10.188}$$

où

$$\mu = 3 + \frac{2}{Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\eta_0}\left(\frac{2e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^3} + \frac{(E_2+3)}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^2} + \frac{3(E_2-1)}{1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}\right), \tag{10.189}$$

avec

$$E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon}\frac{I_{\eta_0}(I_{\eta_0}\vee 1)(21E+1)}{\left(Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\wedge Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right), \tag{10.190}$$

$$E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}, \quad R = 1000. \tag{10.191}$$

Preuve.
La preuve de ce lemme est identique à celle du lemme 10.2.10 ■

Pour tout $n > n_3'$ et tout $\alpha \in G_n'$, on peut donc appliquer l'inégalité de Markov exponentielle ($\mathbb{P}^\alpha_{\tilde{m}_0}[Y < -a] \leq \mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{-Y}\right]e^{-a},\ a > 0$) à 10.187, pour tout $\lambda > 0$ on a :

$$\mathbb{P}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_l^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}) - l\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \leq -\frac{l}{\eta_2'}\right] \tag{10.192}$$

$$\leq \mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\left(-\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_l^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}) + l\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]\right)}\right]e^{-\frac{l}{\eta_2'}\lambda}, \tag{10.193}$$

Par la propriété de Markov forte :

$$\mathbb{P}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_l^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}) - l\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] \leq -\frac{l}{\eta_2'}\right] \tag{10.194}$$

$$\leq \left(\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{-\lambda\left(\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}) - \mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]\right)}\right]\right)^l e^{-\frac{l}{\eta_2'}\lambda}. \tag{10.195}$$

On remarque que $\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\left(-\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}) + \mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]\right)}\right]$ et $\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[e^{\lambda\left(\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0}) - \mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T_1^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]\right)}\right]$ ont des estimations similaires, on en déduit le résultat en effectuant les même calculs que dans la preuve de la proposition 10.2.8 à partir de 10.143. ■
On termine maintenant la preuve du théorème 10.2.1. En remplaçant les résultats des propositions 10.2.8 et 10.2.12 dans (respectivement) 10.83 et 10.84 on obtient pour tout $\epsilon > 0$, tout $\delta > 0$ tel que $\delta\mu < 1$ (μ est donné par 10.189) et tout $n > n_0' \vee n_0''$:

$$\mathbb{P}^\alpha_0\left[\left|\frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n)}{n} - \frac{1}{\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]}\right| > \delta\right] \leq \frac{2}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} + \frac{2e^{-\delta n^{1/2}}}{\delta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/2}}\right). \tag{10.196}$$

Par définition on a :

$$\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right] = x_1 + x_2, \tag{10.197}$$

où

$$x_1 = \mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right], \tag{10.198}$$

$$x_2 = \mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0\to\tilde{m}_0})\right]. \tag{10.199}$$

$\tilde{m}_0 \in V_{\tilde{m}_0}$ donc $x_1 \geq 1$ de plus par la propriété 9.327 on sait que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G_n'$:

$$1 \leq x_1 \leq \mu \tag{10.200}$$

où μ est donné par 10.189. De plus la propriété 9.326 donne également que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G'_n$, :

$$x_2 \equiv \mathbb{E}^{\alpha}_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V^{c,r}_{\tilde{m}_0}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right] \leq \frac{2}{f(n)} \ , \tag{10.201}$$

où $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$ (F est donné par 10.147). On a :

$$\frac{1}{x_1 + x_2} = \frac{1}{x_1} - \frac{x_2}{x_1(x_1 + x_2)} \ , \tag{10.202}$$

soit $n_2 \equiv n_2(\mu, F)$ tel que pour tout $n > n_2$:

$$\frac{x_2}{x_1(x_1 + x_2)} \leq \frac{\delta}{2} \ . \tag{10.203}$$

On obtient pour tout $n > n_2$:

$$\left|\frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n)}{n} - \frac{1}{x_1 + x_2}\right| > \delta \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n)}{n} - \frac{1}{x_1} + \frac{x_2}{x_1(x_1 + x_2)}\right| > \delta \tag{10.204}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n)}{n} - \frac{1}{x_1}\right| > \delta - \frac{x_2}{x_1(x_1 + x_2)} \tag{10.205}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n)}{n} - \frac{1}{x_1}\right| > \frac{\delta}{2} \ . \tag{10.206}$$

On obtient donc pour tout $n > n'_0 \vee n''_0 \vee n_2$:

$$\mathbb{P}^{\alpha}_0\left[\left|\frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n)}{n} - \frac{1}{x_1 + x_2}\right| > \delta\right] \leq \mathbb{P}^{\alpha}_0\left[\left|\frac{\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n)}{n} - \frac{1}{x_1}\right| > \frac{\delta}{2}\right] \tag{10.207}$$

$$\leq \frac{2}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} + \frac{4e^{-\frac{\delta}{2}n^{1/2}}}{\delta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1/2}}\right) \ , \tag{10.208}$$

ce qui donne le théorème 10.2.1.

10.3 Conséquences sur le maximum des temps locaux et le lieu favori de la M.A.M.A. (preuves des corollaires)

Commençons par une première conséquence directe du théorème précédent :

Corollaire 10.3.1. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour toute suite $(\delta_n,\ n \in \mathbb{N})$ positive décroissante telle que $\lim_{n\to\infty} \delta_n(\ln\ln n)^2 = \infty$ et $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \equiv n_0\Big(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\Big)$ tel que pour tout $n > n_0$, et tout $\alpha \in G'_n$ on a :*

$$\mathbb{P}^{\alpha}_0\left[\mathcal{L}(\tilde{m}_0, n) \geq \frac{n}{2\mu}\right] \geq 1 - \frac{4}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} - (2\mu)e^{-\frac{1}{2\mu}n^{1/2}} \ , \tag{10.209}$$

et $Q\left[G'_n\right] \geq 1 - \epsilon$. $F = \left(\frac{(21E+1)(I_{\eta_0}\vee 1)\frac{R}{\epsilon}}{(Q\left[\epsilon_0 < -I_{\eta_0}/2\right])^{1/2}Q\left[\epsilon_0 > I_{\eta_0}/2\right]}\right)^2$, $\mu = 3 + \frac{2}{\eta_0}\left(\frac{2e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^3} + \frac{(E_2+3)}{\left(1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}\right)^2} + \frac{3(E_2-1)}{1-e^{-\frac{I_{\eta_0}}{4}}}\right)$,

$E_2 = \ln\left(\frac{R}{\epsilon}\frac{I_{\eta_0}(I_{\eta_0}\vee 1)(21E+1)}{\left(Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right] \wedge Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]}\right)$, $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$ et $R = 1000$.

Preuve.
Ce corollaire se déduit de la proposition 10.2.8 en prenant $\delta = \frac{1}{2\mu}$. ■

On donne maintenant quelques conséquences de nos résultats sur le maximum des temps locaux et le lieu favori de la marche. On rappelle pour cela les définitions suivantes :

Définition 10.3.2.

$$\bar{\mathbb{F}}(n) = \left\{ k \in \mathbb{Z},\ \mathcal{L}(k,n) = \max_{j\in\mathbb{Z}}\{\mathcal{L}(j,n)\} \right\} \ , \tag{10.210}$$

$$\mathcal{L}^*(n) = \max_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}(k,n)) \ . \tag{10.211}$$

10.3.1 Sur le maximum des temps locaux.

Corollaire 10.3.3. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour toute suite* $(\delta_n,\ n \in \mathbb{N})$ *positive décroissante telle que* $\lim_{n\to\infty} \delta_n (\ln\ln n)^2 = \infty$ *et* $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$*, tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $n_0 \equiv n_0\Big(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\Big)$ *tel que pour tout* $n > n_0$*, et tout* $\alpha \in G'_n$ *on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{L}^*(n) \geq \frac{n}{2\mu}\right] \geq 1 - \frac{4}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} - (2\mu)e^{-\frac{1}{2\mu}n^{1/2}} \ , \tag{10.212}$$

et $Q\left[G'_n\right] \geq 1-\epsilon$ *(voir l'expression de* μ *et de* F *dans le corollaire 10.3.1).*

Preuve.
Ceci est une conséquence directe du corollaire 10.3.1. ■

10.3.2 Sur le lieu favori de la M.A.M.A. .

Corollaire 10.3.4. *Supposons H.1, H.2 et H.3, pour toute suite* $(\delta_n,\ n \in \mathbb{N})$ *positive décroissante telle que* $\lim_{n\to\infty} \delta_n (\ln\ln n)^2 = \infty$ *et* $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$*, tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $n_0 \equiv n_0\Big(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, \mathbb{E}_Q\left[|\epsilon_0|^3\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\Big)$ *tel que pour tout* $n > n_0$*, et tout* $\alpha \in G'_n$ *on a :*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bar{\mathbb{F}}(n) \subset V_{\tilde{m}_0}\right] \geq 1 - \frac{8}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} - (2\mu)e^{-\frac{1}{2\mu}n^{1/2}} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)}\right) \ , \tag{10.213}$$

et $Q\left[G'_n\right] \geq 1-\epsilon$*, en particulier pour tout* $\delta > 0$ *:*

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcup_{\tilde{k}^*\in\bar{\mathbb{F}}(n)} \left\{\left|\frac{\tilde{k}^*}{(\ln n)^2} - m_0\right| > \delta\right\}\right] \leq \frac{8}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} + (2\mu)e^{-\frac{1}{2\mu}n^{1/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln n)}\right) \ , \tag{10.214}$$

avec $Q\left[G'_n\right] \geq 1-\epsilon$*. L'expression de* F *est donnée dans le corollaire 10.3.1.*

Preuve.
10.213 est une conséquence de la proposition 10.1.2 du théorème, 10.1.1 et du corollaire 10.3.3 : fixons $\epsilon > 0$, par la proposition 10.1.2, en prenant $\gamma = 11$ on sait qu'il existe $n_1 \equiv n_1\left(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G'_n$ on a :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bigcap_{k=1}^{n}\left\{X_k \in \left\{\tilde{M}'_0, \cdots, \tilde{M}_0\right\}\right\}\right] \geq 1 - \frac{2E}{(\ln n)^9} \ , \tag{10.215}$$

où $E = \frac{24R^2|\ln\frac{R}{\epsilon}|}{\sigma^2\epsilon^2}$. Ainsi, pour tout $n > n_1$ et tout $\alpha \in G'_n$:

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\bar{\mathbb{F}}(n) \subset \left\{\tilde{M}'_0, \cdots, \tilde{M}_0\right\}\right] \geq 1 - \frac{2E}{(\ln n)^9} \ . \tag{10.216}$$

On rappelle que l'on a décomposée la vallée minimale de la façon suivante :

$$\left\{\tilde{M}'_0, \cdots, \tilde{M}_0\right\} = V_{\tilde{m}_0} \cup V^{c,r}_{\tilde{m}_0} \ , \tag{10.217}$$

avec

$$V_{\tilde{m}_0}^{c,r} = \left\{ M'_{\tilde{m}_0}, M'_{\tilde{m}_0}+1, \cdots, \tilde{m}_0 - f(n) - 1,\ \tilde{m}_0 + f(n) + 1, \cdots, \tilde{M}_0 \right\} \ , \tag{10.218}$$

où $f(n) = [F(\ln\ln n)^2]$. Or par le théorème 10.1.1, on sait qu'il existe $n_2 \equiv n_2\left(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_2$ et tout $\alpha \in G'_n$ on a :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^{c,r}, n\right) \leq n\delta_n\right] \geq 1 - \frac{4}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right) \ . \tag{10.219}$$

où $(\delta_n, n > 3)$ est une suite positive décroissante telle que $\lim_{n\to\infty} \delta_n(\ln\ln n)^2 = \infty$, et $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$. De plus par le corollaire 10.3.3, il existe $n_3 \equiv n_3\left(\epsilon, I_{\eta_0}, \sigma, Q\left[\epsilon_0 > \frac{I_{\eta_0}}{2}\right], Q\left[\epsilon_0 < -\frac{I_{\eta_0}}{2}\right]\right)$ tel que pour tout $n > n_3$ et tout $\alpha \in G'_n$ on a :

$$\mathbb{P}_0^\alpha\left[\mathcal{L}^*(n) \geq \mu n\right] \geq 1 - \frac{4}{\eta_0}\frac{1}{F(\ln\ln n)^2\delta_n} - (2\mu)e^{-\frac{1}{2\mu}n^{1/2}} \ . \tag{10.220}$$

En prenant $n_0 = n_1 \vee n_2 \vee n_3$ on obtient 10.213 de 10.216, 10.219 et 10.220 car :

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{L}\left(V_{\tilde{m}_0}^{c,r}, n\right) \leq n\delta_n \\ \text{et} \quad \max_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}(k,n) \geq \mu n \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{\mathbb{F}}(n) \not\subseteq V_{\tilde{m}_0}^{c,r} \ , \tag{10.221}$$

et

$$\left.\begin{array}{c} \bar{\mathbb{F}}(n) \not\subseteq V_{\tilde{m}_0}^{c,r} \\ \text{et} \quad \bar{\mathbb{F}}(n) \subset \left\{\tilde{M}'_0, \cdots, \tilde{M}_0\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{\mathbb{F}}(n) \subset V_{\tilde{m}_0} \ . \tag{10.222}$$

De plus 10.214 est une conséquence directe de 10.213. ■

Les hommes ? Il en existe, je crois, six ou sept. Je les ai aperçus il y a des années. Mais on ne sait jamais où les trouver. Le vent les promène.

A. De Saint-Exupéry

Partie IV

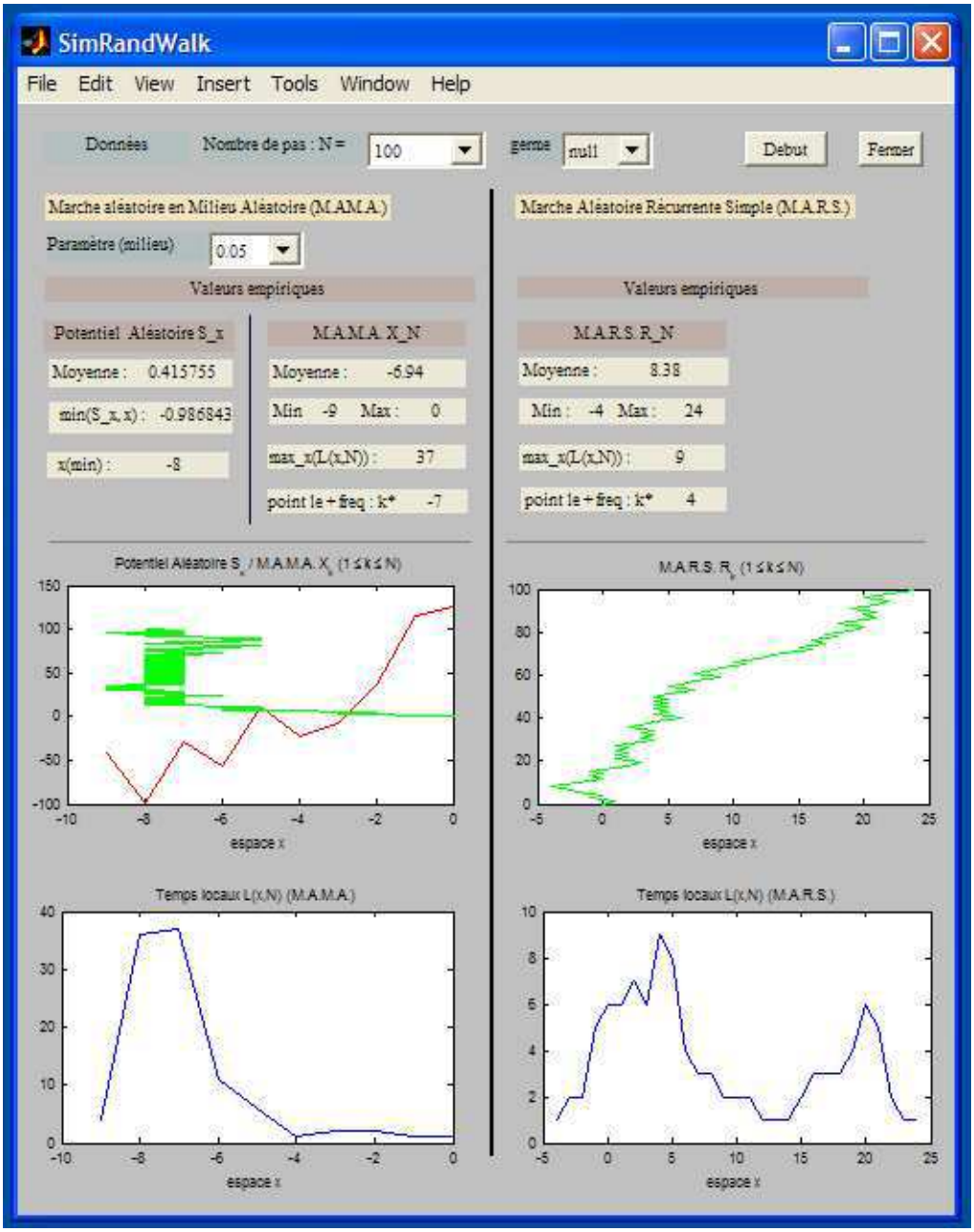
Visualisation numérique d'une M.A.M.A. récurrente

Introduction

On a programmé une application qui simule une marche aléatoire unidimensionnelle sur un milieu aléatoire. Le but dans un premier temps est d'avoir un support visuel au comportement de ces processus afin d'en étudier les différents aspects (sous-diffusivité, localisation, concentration), et également de comparer les comportements d'une M.A.M.A. et d'une M.A.R.S.. A terme cette application a pour but une étude statistique de ce modèle.

Présentation du Logiciel de Calcul

Le logiciel est simple d'utilisation avec une interface graphique générée par Matlab. La programmation a été effectuée avec le langage C puis compilée pour Matlab. Ce procédé permet notamment un gain en temps de calcul significatif. Selon l'étude que l'on décide de faire la fenêtre de simulation change légèrement, typiquement on obtient :



Dans cet exemple on veut comparer les comportements d'une M.A.M.A. et d'une marche aléatoire récurrente simple (M.A.R.S.) couplées (on donnera plus de détail dans le paragraphe suivant). L'utilisateur a la possibilité de changer le nombre de pas (N) que les marches effectuerons et pour la M.A.M.A. le paramètre du milieu c'est à dire le support de mesure de probabilité Q. Le germe permet à l'utilisateur de conserver ou pas une même suite de valeurs aléatoires qui servent à la génération des deux marches.
Ces trois paramètres sont donc les trois valeurs typiques pouvant être modifiées par l'utilisateur et apparaissant dans les différentes fenêtres de simulation.
Le générateur aléatoire est celui inclus au langage C, on ne s'est donc pas préoccupé des problèmes de dépendance entre les valeurs pseudo-aléatoires générées par la machine.
On présente dans ce travail quelques simulations qui donne un support visuel aux comportements de la M.A.M.A. que l'on a étudiée dans les parties II et III : la localisation et la concentration de la M.A.M.A. .

Visualisation d'une M.A.M.A.

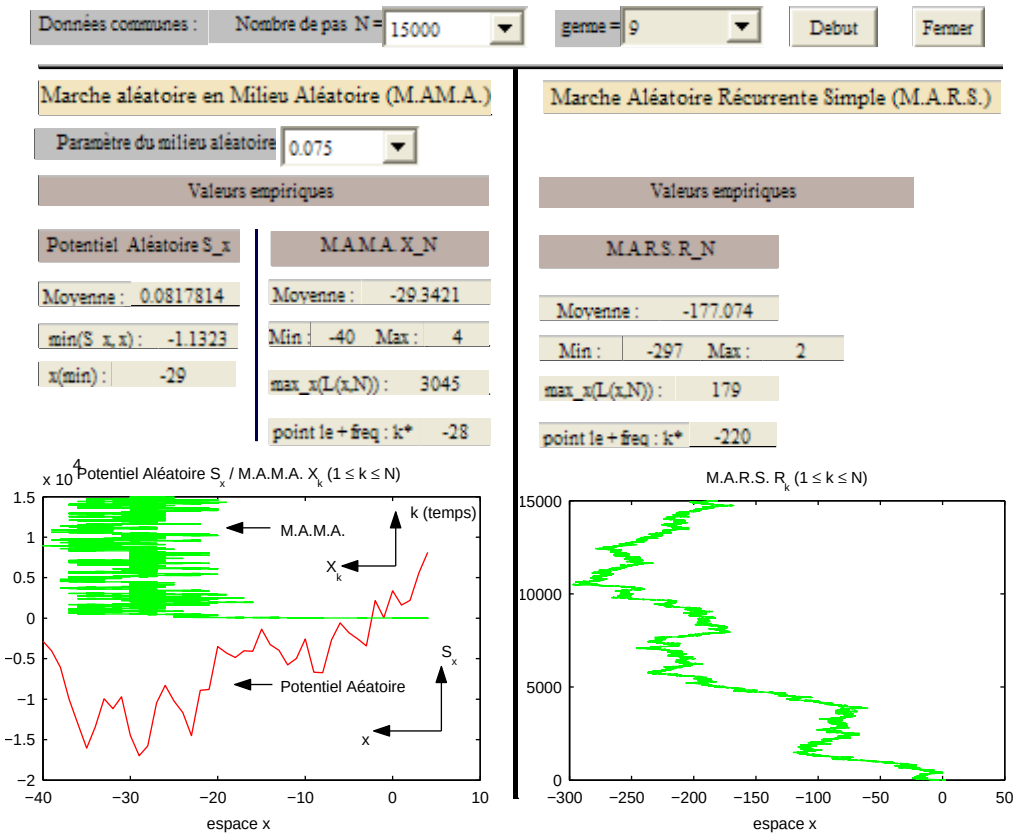
Couplage entre une M.A.M.A. et une M.A.R.S. (localisation).

Dans les pages suivantes on compare les comportements d'une M.A.M.A. et d'une M.A.R.S.. En particulier on met en évidence la sous-diffusivité et la localisation de la M.A.M.A. .
Le couplage entre la M.A.M.A. et la M.A.R.S. est effectué de la façon suivante : on commence par tirer une première valeur α_0 comprise entre 0 et 1, si cette valeur est acceptable compte tenu du paramètre du milieu, elle constitue la probabilité de faire un saut $+1$ si la M.A.M.A. se trouve sur le site 0. On tire ensuite une valeur ρ toujours entre 0 et 1, si $\rho < \alpha_0$ la M.A.M.A. effectue un saut $+1$ sinon elle effectue un saut -1, de même si $\rho < 1/2$ alors la M.A.R.S. fait un saut à droite sinon un saut à gauche. Et ainsi de suite, le milieu aléatoire est donc généré au fur et à mesure que la M.A.M.A. visite de nouveaux sites. On remarque que défini comme cela α_0 suit une loi uniforme, or on a :

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] = \int_0^1 \ln\frac{1-x}{x}dx = 0 \tag{10.223}$$

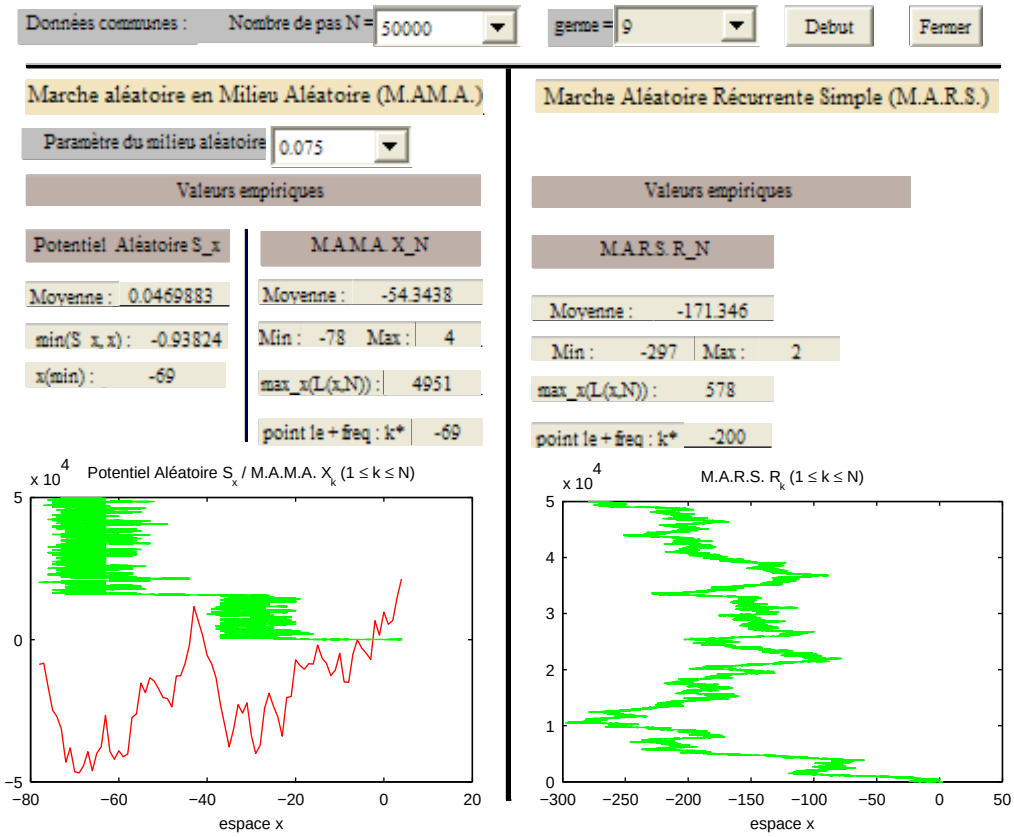
ainsi la M.A.M.A. obtenue est bien récurrente.

Prenons $N = 15000$, le paramètre du milieu égal à 0.075, c'est à dire $0.075 \leq \alpha_0 \leq 0.925$, et fixons le germe à 9, on obtient :



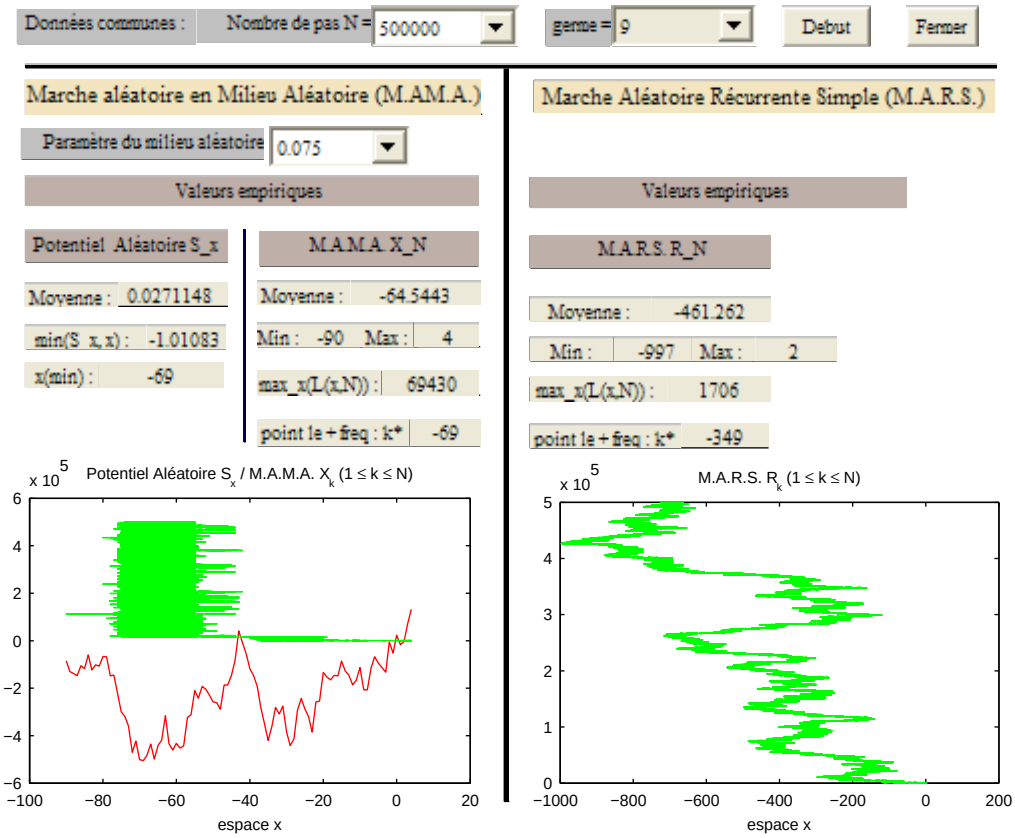
Pour les valeurs empiriques on remarque sur cet exemple que la M.A.M.A. dont le minimum est égal à -40 et le maximum à 4, diffuse beaucoup moins que la M.A.R.S. dont le minimum est égal à -297 et le maximum à 2, on remarque également que la trajectoire de la M.A.M.A. se concentre dans l'intervalle [-40,-20]. Si on inclut le potentiel aléatoire dans notre analyse, on remarque également que la moyenne empirique de la M.A.M.A. est proche de la valeur du minimisant absolu du potentiel aléatoire S (égale à 29). On voit également que le couplage entre la M.A.M.A. et la M.A.R.S. s'efface dès que la M.A.M.A. atteint le point où elle se concentre.

Gardons maintenant les paramètres précédents excepté N que l'on augmente jusqu'à la valeur 50000 :



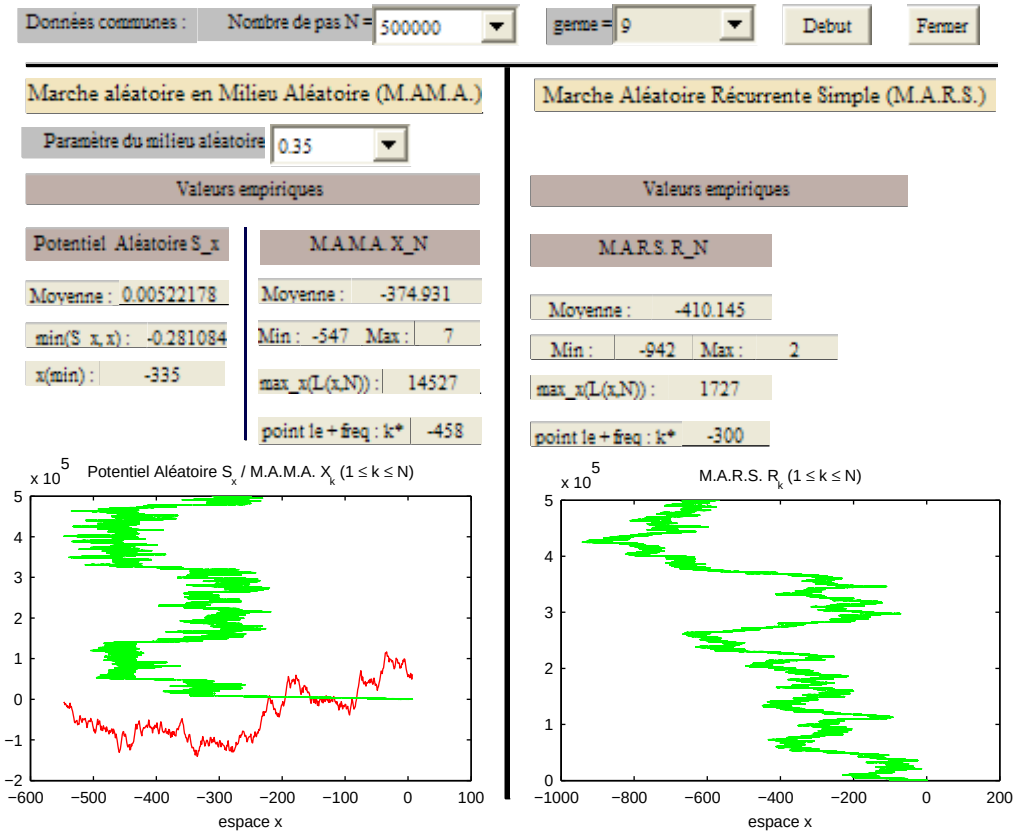
On remarque que le point de localisation de la M.A.M.A. s'est déplacé, il ne se trouve plus autour de -30 comme pour $N = 15000$ mais plutôt autour de -70, on voit que le minimum absolu du potentiel s'est déplacé et se situe également autour de -70 (-69 d'après la valeur empirique). On sait que ce phénomène est dû au fait que la barrière de potentiel obtenue pour $n = 15000$ n'est pas assez importante pour retenir la marche un temps bien supérieur à 15000, la M.A.M.A. franchit donc cette barrière et se retrouve rapidement emprisonnée dans une nouvelle vallée. On remarque que la moyenne empirique de la M.A.M.A. (≈ -54) est en transition de la valeur -29 vers la valeur -69 coordonnée du nouveau point de localisation.

Augmentons encore N, on obtient alors :



Il apparaît clairement que la M.A.M.A. diffuse beaucoup moins que la M.A.R.S. . Le graphique de gauche confirme également le précédent : la M.A.M.A. se localise au niveau du point de coordonnée -69, on voit d'ailleurs que la moyenne empirique de la M.A.M.A. est maintenant proche de -69 (-65 d'après la valeur empirique). Il apparaît clairement, en outre, que l'effet du couplage de ces deux marches est totalement effacé.

Jusqu'à présent, on a seulement joué sur le facteur temps, on obtient des configurations similaires si on change le germe c'est à dire la suite de nombres pseudo-aléatoires générée par l'ordinateur. Par contre si on augmente la valeur du paramètre du milieu, ce qui revient à imposer au potentiel de faire des plus petites fluctuations et donc à la M.A.M.A. de se rapprocher de la M.A.R.S. , on obtient que la M.A.M.A. diffuse un peu plus tout en restant localisée, par exemple, en prenant la valeur du paramètre du milieu égale à 0,35 tout en conservant N à 500000, on obtient :

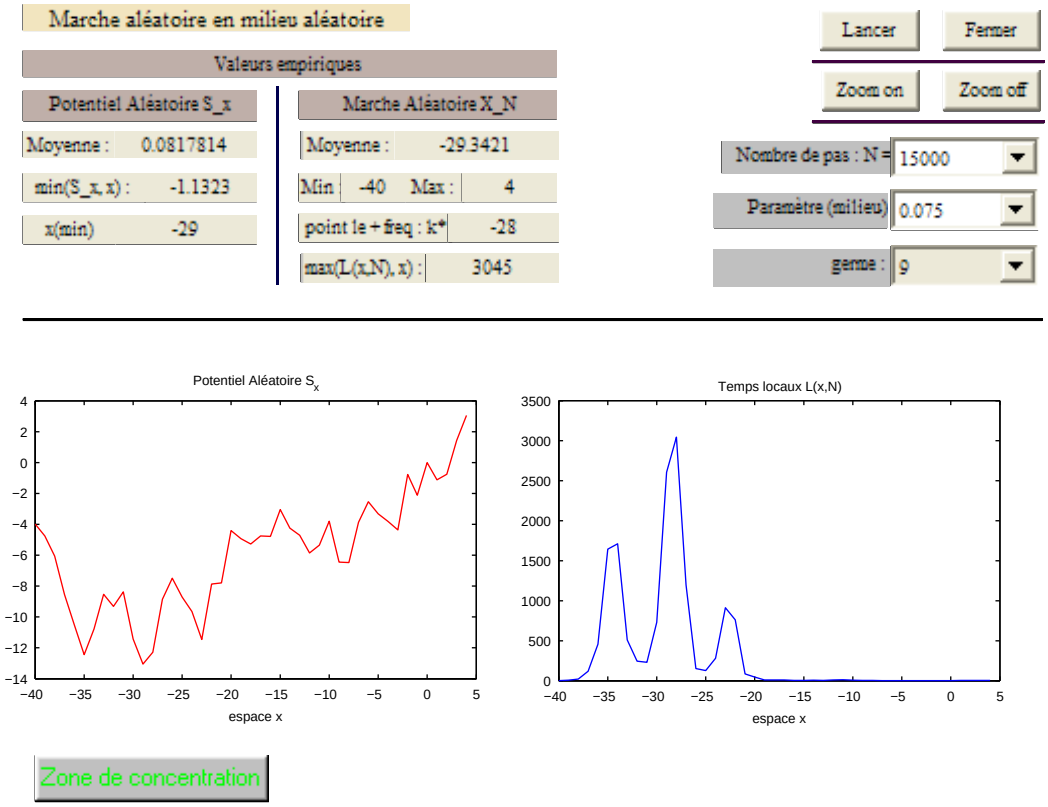


Ici on s'est clairement rapproché de la M.A.R.S. puisque $0.35 \leq \alpha_0 \leq 0.65$ on remarque que la M.A.M.A. diffuse beaucoup plus que dans le cas précédent. On remarque également par rapport aux simulations précédentes que le milieu fluctue beaucoup moins mais que cependant la M.A.M.A. reste localisée.

Dans le prochain paragraphe nous visualiserons le temps local de la M.A.M.A. ce qui mettra en relief les résultats de la partie III sur la concentration de la M.A.M.A. .

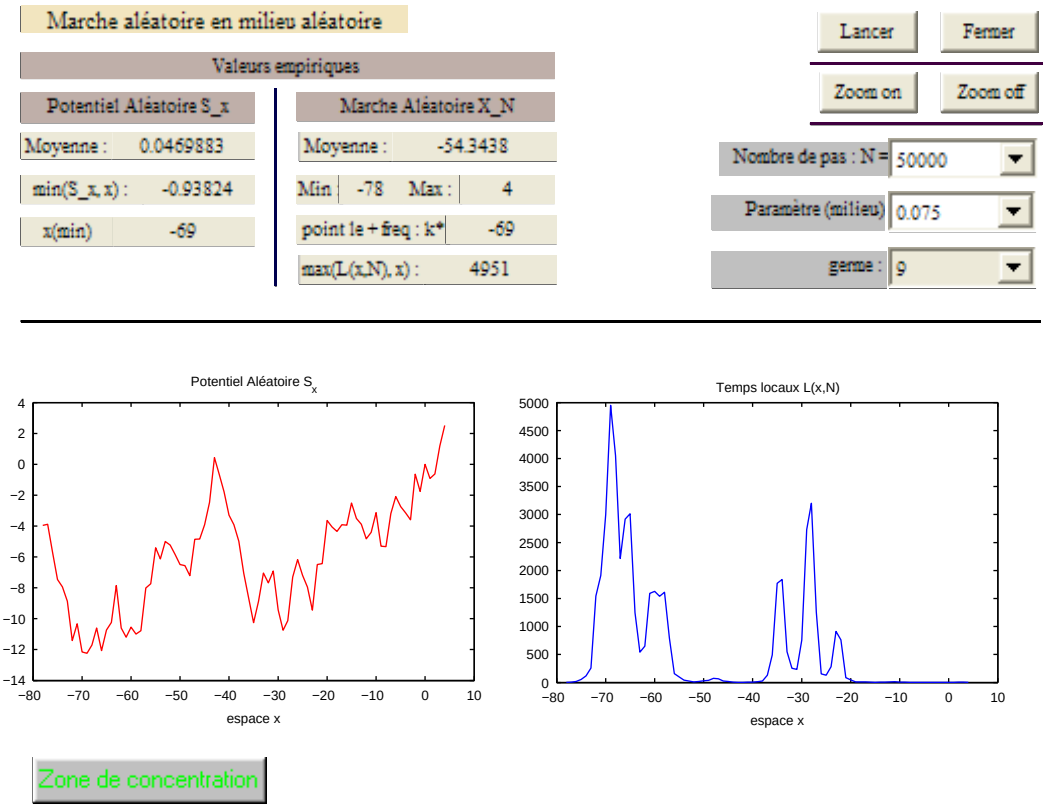
Temps locaux de M.A.M.A. et concentration.

Dans ce paragraphe on visualise les temps locaux de la M.A.M.A. . En prenant les mêmes paramètres utilisateurs qu'à la première simulation, on obtient :



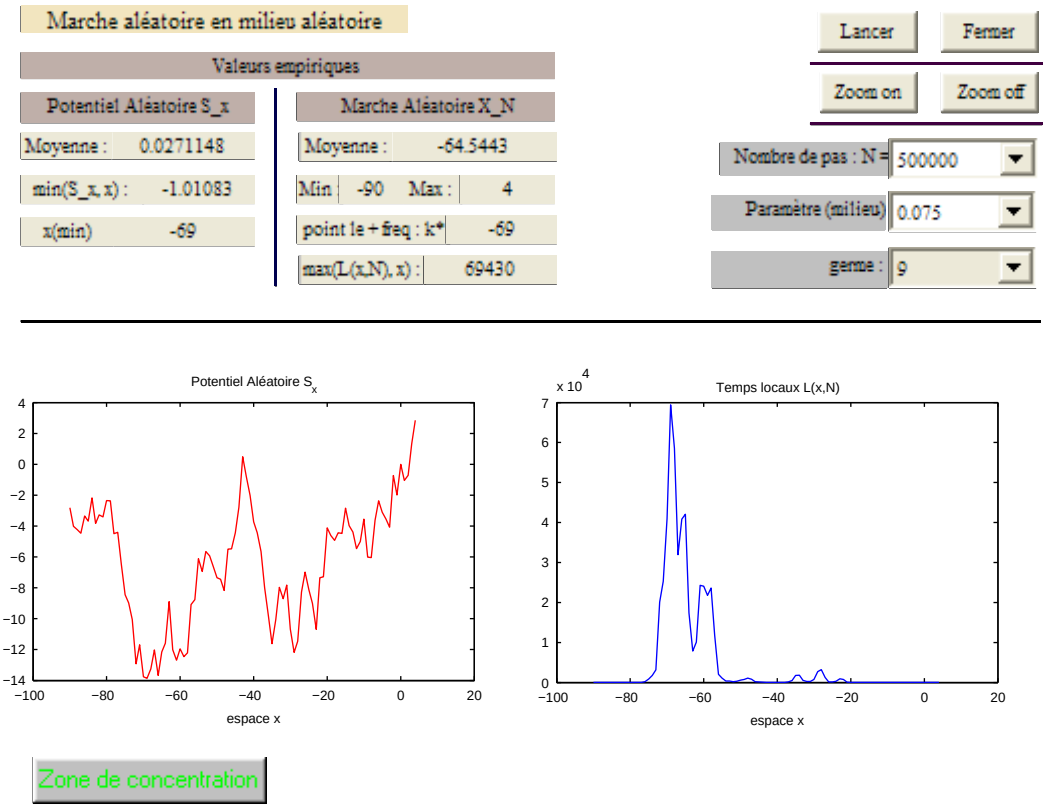
On remarque d'abord que le lieu de localisation observé à la première simulation est caractérisé ici par les trois plus grandes fluctuations du temps local, on remarque de plus, que ces trois maximums locaux du temps local correspondent à trois minimums locaux du potentiel. Il apparaît aussi clairement que la M.A.M.A. reste concentrée dans un voisinage de la valeur -29 dont la taille est inférieure à 10.

Pour cette simulation on augmente le nombre de pas à 50000 :



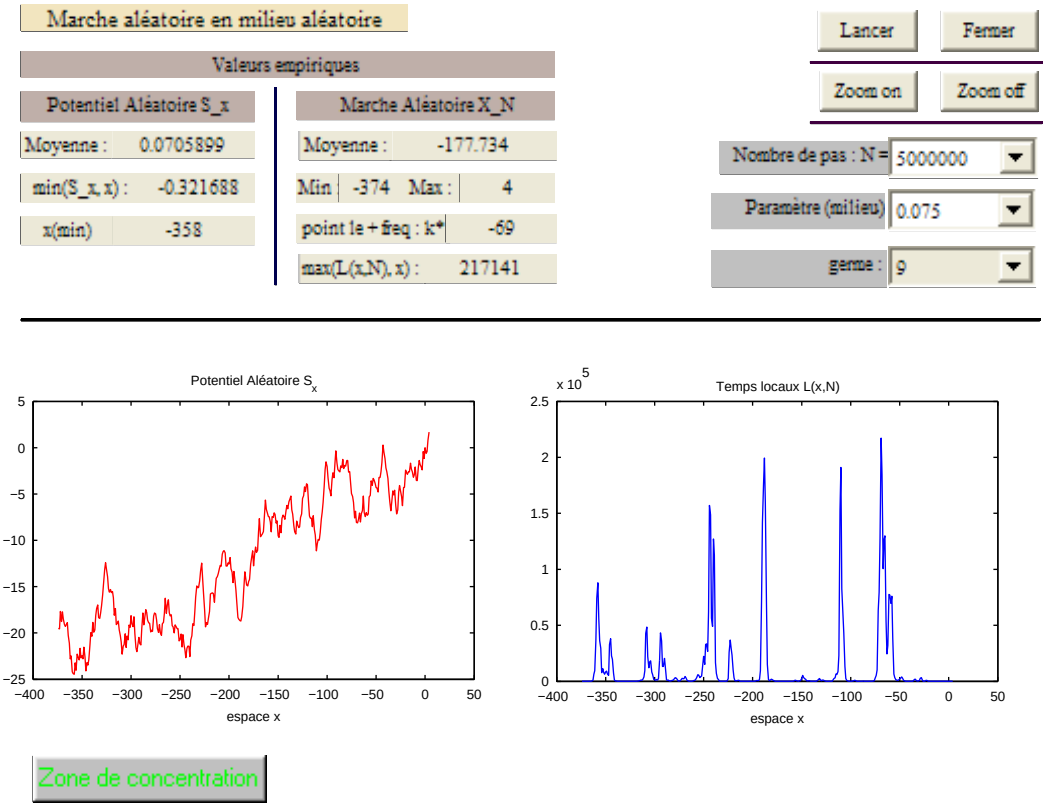
La M.A.M.A. a eu suffisamment de temps pour s'échapper de la vallée localisée entre -40 et -20, le point de localisation de la marche s'est donc déplacé de la coordonnée -29 à la coordonnée -69. Parallèlement, on remarque que le temps local est maximal dans un petit voisinage autour de -69, c'est à dire que la M.A.M.A. est maintenant concentrée dans cette région. On remarque également que la coordonnée où le temps local atteint son maximum est égale au minimum absolu du potentiel.

On fixe maintenant N à 5.10^5, on obtient :



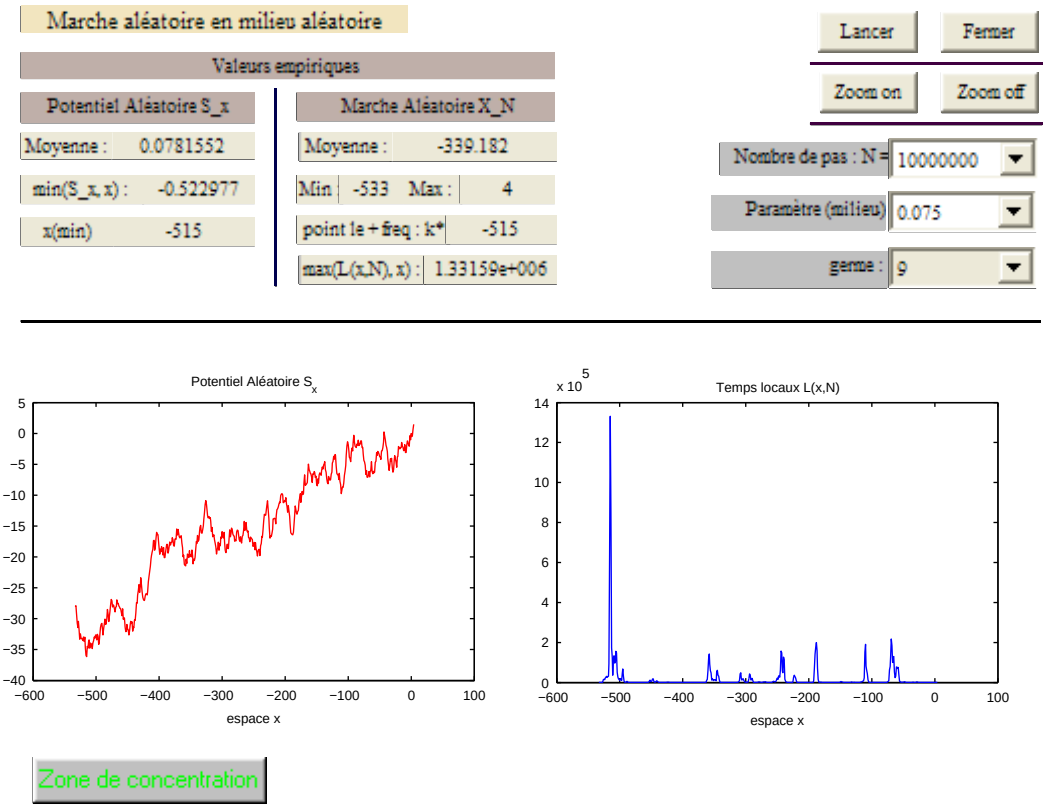
ces graphiques confirment la concentration de la M.A.M.A. dans le voisinage du minimisant du potentiel aléatoire (-69).

Fixons maintenant N à 5.10^6



dans ce cas la M.A.M.A. se trouve dans une phase de transition, cette phase est caractérisée par une différence significative entre le minimum absolu du potentiel visité par la M.A.M.A. (-358 ici) et la coordonnée où le temps local de la M.A.M.A. est maximal (-69 ici).

Terminons en prenant $N = 10^7$:



le point de concentration apparaît de nouveau très clairement en effet le temps local dans un petit voisinage autour de -515 monopolise la quasi totalité du temps imparti à la marche.

Conclusion et Projets de Recherche

Dans le présent travail nous avons mis en relief d'une part la localisation de la M.A.M.A. récurrente, c'est à dire que pour un instant n fixé la M.A.M.A. se situe avec une probabilité proche de un dans le voisinage d'un point. Ce point qui dépend uniquement du milieu et de n a été parfaitement défini par Y. Sinai (1982) et on connaît également la distribution limite grâce aux travaux de H. Kesten ([56]) et A. O. Golosov ([38]) (1986). D'autre part la concentration, c'est à dire, que si on regarde l'ensemble des points visités par la M.A.M.A. entre l'instant 0 et l'instant n, on remarque que c'est dans une région négligeable devant $(\ln n)^2$ que la M.A.M.A. passe la quasi totalité de son temps. C'est cet aspect que nous avons appelé "concentration" et qui constitue la partie originale de cette thèse. Grâce à ce résultat nous avons montré la convergence en probabilité du temps local au point de localisation $\tilde{m}_0$. Ces résultats ont abouti à des conséquences directes sur le maximum des temps locaux ainsi que sur le lieu favori de la M.A.M.A. . On donne maintenant quelques perspectives de recherche :

Sur la M.A.M.A. unidimensionnelle.

Pour le temps local

Conjectures "trempées" : La première conjecture que nous faisons est qu'avec une Q probabilité aussi proche de 1 que l'on veut,

$$\tilde{m}_0 \in \bar{\mathbb{F}}(n), \text{ avec une } \mathbb{P}^\alpha \text{ probabilité tendant vers 1.}$$

où $\bar{\mathbb{F}}(n)$ est l'ensemble des lieux favoris de la marche. Un résultat naturel qui apparaît suite à ce résultat, est le suivant, soit $k^* \in \bar{\mathbb{F}}(n)$ avec une Q probabilité aussi proche de 1 que l'on veut :

$$\frac{\mathcal{L}(k^*, n)}{n} \to \frac{1}{\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right]} \text{ en } \mathbb{P}^\alpha \text{ probabilité } ,$$

Ceci suggère d'étudier précisément la Q v.a $\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right]$ qui dépend uniquement du milieu et dont on connaît explicitement la forme. On rappelle de plus que H. Kesten ([55]) donne une caractérisation des v.a. $\tilde{m}_0$, $\tilde{M}'_0$ et $\tilde{M}_0$ que l'on voit apparaître explicitement dans $\mathbb{E}^\alpha_{\tilde{m}_0}\left[\mathcal{L}(V_{\{\tilde{M}'_0, \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}}, T^{\tilde{m}_0 \to \tilde{m}_0})\right]$.

Question "recuite" : Nous aimerions préciser avec une probabilité égale à 1, le plus petit voisinage autour de $\tilde{m}_0$ dans lequel la M.A.M.A. est concentrée, c'est à dire, trouver le plus petit voisinage V de $\tilde{m}_0$ tel que

$$\mathcal{L}(V, n) \geq n(1 - \delta_n) \quad \mathbb{P}.\ p.s.,$$

avec $\lim_{n \to +\infty} \delta_n = 0$.

Sur la marche transitoire sous-balistique :
Enfin une dernière remarque pour le temps local sur la marche transitoire sous-balistique : bien que celle-ci soit transitoire les résultats récents de N. Ganter et Z. Shi [35] montrent que le maximum des temps locaux de ce processus peut être très grand. Bien entendu un phénomène de concentration ne se pose pas car la marche est transitoire, par contre ce résultat suggère qu'il doit exister un point tel que si l'on prend un voisinage V autour de ce point, négligeable devant la distance parcourue on ait qu'il existe $0 < \eta < 1$ tel que $\mathcal{L}(V, n) \geq \eta n$ en Q et $\mathbb{P}^\alpha$ probabilité.

La M.A.M.A. comme modèle de prévision ?

Le dernier point suivant que nous sommes en train de formaliser a été motivé par les simulations numériques que nous avons effectuées mais qui ne sont pas présentes dans ce travail de thèse. On a remarqué qu'il existait des liens extrêmement étroits entre certaines fonctions du temps local en un point quelconque de la vallée minimale $\{\mathcal{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ et la valeur du potentiel aléatoire en ce même point. Ce lien est tel que l'on peut reconstruire la quasi totalité du potentiel aléatoire dans la vallée $\{\mathcal{M}_0', \tilde{m}_0, \tilde{M}_0\}$ en connaissant uniquement le temps local de la M.A.M.A. en ces points. En plus de connaissances nouvelles apportées à la compréhension du comportement de la M.A.M.A. , cet aspect fait apparaître naturellement un modèle de prévision qui pourrait avoir de nombreuses applications en physique, biologie, finance ...

Généralisation des résultats

Résultats de la partie III

La méthode que nous avons utilisée dans la partie III pour étudier le temps local s'applique également si on substitue l'hypothèse H.3 par l'hypothèse H.6 utilisée dans la partie II. Cependant il faudra modifier une partie des calculs car ils sont basés sur le fait que la v.a. $\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}$ est bornée ce qui ne sera plus le cas avec H.6. Les résultats obtenus avec cette hypothèse devraient cependant être très similaires à ceux obtenus avec H.3. Si maintenant on veut travailler simplement avec un milieu stationnaire ergodique, ce qui signifie se passer totalement de l'indépendance des v.a. $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{Z})$, alors il faudra revoir une grande partie de la méthode de calcul (sur le milieu aléatoire) ce qui n'empêchera pas de conserver l'idée des différentes preuves.

Questions avec une hypothèse de régularité faible :

On rappelle que avons introduit les deux hypothèses suivantes

$$\mathbb{E}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] = 0 \ , \tag{H.1}$$

$$\mathrm{Var}_Q\left[\ln \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right] \equiv \sigma^2 > 0 \ . \tag{H.2}$$

que nous avons appelé hypothèses nécessaires. A ma connaissance peu de chose ont été étudiés avec uniquement ces hypothèses et $\sigma^2 < \infty$, (avec bien évidemment l'hypothèse d'un milieu i.i.d.). Voilà la question que l'on se pose : peut-on montrer facilement que la M.A.M.A. est localisée ? Un des résultats que nous pensons fermement est que le point de localisation et de concentration sont confondus et donc que trouver le point de localisation revient à trouver le point de concentration. Il suffit donc d'étudier le temps local, ceci peut nous aider car le temps local est généralement moins délicat à traiter que la M.A.M.A. elle même. Le temps local nous permet en effet d'oublier qu'il existe une chronologie dans les événements successifs d'un processus qui est une source de problèmes supplémentaires.

Sur la M.A.M.A. multidimensionnelle

Dans ce travail de thèse nous avons discuté uniquement d'un modèle de M.A.M.A. unidimensionnelle. Cependant de très nombreux travaux ont été effectués en dimension supérieure à 1 (quelques uns d'entre eux apparaissent dans notre bibliographie), nous souhaiterions donc dire quelques mots sur ces modèles. La généralisation du modèle unidimensionnelle en dimension supérieure est source de très nombreux nouveaux problèmes, la preuve en est qu'en dimension 2 il n'existe pas de critère de récurrence dans le cas général ! Nous disons, cas général, car la marche de Y. Sinai en dimension quelconque existe : on pourrait l'appeler la marche de "Durrett" [32]. R. Durrett construit un potentiel aléatoire de manière à ce que la M.A.M.A. (en dimension quelconque) qu'il construit soit réversible comme l'est celle de Y. Sinai en dimension 1. Il obtient ainsi un critère de récurrence et montre que dans le cas récurrent le processus est sous-diffusif.

Voici les questions qui nous intéressent :

Que peut on dire du temps local de la M.A.M.A. de R. Durrett et existe-t-il un phénomène de concentration dans le cas récurrent ?

L'étude du temps local en dimension 2 peut-elle nous aider à trouver un critère de récurrence dans le cas général ?

Bref Souvenir

Je te propose de ne plus penser,
Laissons le temps nous retrouver.
Une exigence tu as : être là,
Qui sommes nous au-delà ?

Toi tu regardes, tes yeux aveugles,
Interdisent couleur et beauté.
Seul sur ce chemin, tu règles,
Tes différents de l'être aimé.

Non tu ne dois plus penser,
Tes yeux trahissent la douleur,
Comment en reconnaître la valeur ?
Au pouvoir de création laissé.

Tu marches sous un ciel grisé,
Acceptant ton échec face au réel,
Garde contre toi ce qui scelle,
Ton appartenance à l'humanité.

A.P.

Bibliographie

[1] V.I. Afanas'ev. On a maximum of a transient random walk in random environment. *Theor. Probab. Appl.*, **35** : 205–215, (1990).

[2] S. Alili. Asymptotic behaviour for random walks in random environments. *J. Appl. Probab.*, **36**(2) : 334–349, (1999).

[3] S. Alili. Persistent random walks in stationnary environment. *Journal of Stat. Phys.*, **94**(3/4), (1999).

[4] E. S. Andersene. On sums of symmetrically dependent random variables. *Scand. Aktuarietidskr*, **36** : 123–138, (1953).

[5] E. Andjel. A zero or one law for one dimensional random walks in random environments. *Ann. Probab.*, **16**(2) : 722–729, 1988.

[6] V. V. Anshelevich, K. M. Khanin, and Ya. G. Sinai. Symmetric random walks in random environments. *Com. Math. Phy.*, **85** : 449–470, (1982).

[7] S. Asmussen. *Applied Probability and Queues.* Springer-Verlag, New York, -.

[8] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures.* John Wiley Sons, 1968.

[9] D. Boivin. Weak convergence for reversible random walks in a random environment. *Ann. Probab.*, **21**(3) : 1427–1440, 1993.

[10] J.P. Bouchaud, A. Comtet, A. Georges, and P. Le Doussal. Anomalous diffusion in random media of any dimensionality. *J. Physique*, **48** : 1445–1450, 1987.

[11] M. Bramson and R. Durrett. Random walk in random environment : A counter exemple ? *Comm. Math Phys.*, **119** : 199–420, (1988).

[12] L. Breiman. *Probability.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1968.

[13] J. Brémont. On some random walks on z in random medium. *Preprint*, (2000).

[14] Th. Brox. A one-dimensional diffusion process in a wiener medium. *Ann. Probab.*, **14**(4) : 1206–1218, (1986).

[15] A. A. Butov. Random walks in random environments of a general type. *Stochastics Stochastics Rep.*, **48**(3-4) : 145–160, (1994).

[16] A. A. Butov. Martingale methods for studying random walks in a one-dimensional random environment. *Theory Probab. Appl.*, **39**(4) : 558–572, (1995).

[17] A. A. Butov and E. V. Krichagina. A functional limit theorem for a symmetric walk in a random environment. *Russian Math. Surveys*, **43**(2) : 163–164, (1988).

[18] L. Le Cam. *Asymptotic methods in statistical decision theory.* Springer-Verlag, 1986.

[19] P. Carmona. The mean velocity of a brownian motion in a random lévy potential. *Ann. Probab.*, **25**(4) : 1774–1788, 1997.

[20] M. Cassandro, E. Orlandi, P. Picco, and M. E. Varés. One dimensional random field kac's model : localisation of the phases. *Preprint.*

[21] A. A. Chernov. Replication of a multicomponent chain, by the "lightning mechanism". *Biophysics*, **12** : 336–341, (1962).

[22] Y. S. Chow and H. Teicher. *Probability Theory.* Srpinger, third edition, 1997.

[23] K. L. Chung. *Markov Chains.* Springer-Verlag, 1967.

[24] F. Comets and S. Popov. Limit law for transition probabilities and moderate deviations for sinai's random walk in random environment. *Preprint*, (2003).

[25] F. Comets and O. Zeitouni. A law of large numbers for random walk in random environments. *To appear in Ann. Probab.*

[26] F. Comets, O. Zeitouni, and N. Gantert. Quenched, annealed and functional large deviations for one-dimensional random walk in random environment. (1999).

[27] J. G. Conlon. Homogenization of random walk in asymmetric random environment. *Preprint*, (2001).

[28] M. Csörgö and P. Révész. *Strong Approximations in Probability and Statistics.* Academic Press, 1981.

[29] P. Deheuvels and P. Révész. Simple random walk on the line in random environment. *Probab. Theory Related Fields*, **72** : 215–230, (1986).

[30] A. Dembo, A. Guionnet, and O. Zeitouni. Aging properties of sinai's model of random walk in random environment. *In St. Flour summer school 2001 lecture notes*, (2001).

[31] P. Le Doussal, C. Monthus, and D. Fisher. Random walkers in one-dimensional random environments : Exact renormalization group analysis. *Phys, Rev. E*, pages 4795–4840, (1999).

[32] R. Durrett. Some multidimensional rwre with subclassical limiting behavior. *Commun. Math. Phys.*, **104** : 87–102, (1986).

[33] D. S. Fisher. Random walks in random environments. *Phys. Review A*, **30**(2) : 960–964, (1984).

[34] D. S. Fisher. Random walks in two-dimensional random environments with constrained drift forces. *Phys. Review A*, **31**(6) : 3841–3845, (1985).

[35] N. Gantert and Z. Shi. Many visits to a single site by a transient random walk in random environment. *Stochastic Processes and their applications*, 99 : 159–176, 2002.

[36] N. Gantert and O. Zeitouni. Large deviations for one-dimensional random walk in random environment - a survey. *Proceedings of the conference on random walks, Budapest, Bolyai society mathematical studies*, 9 : 127–165, (1998).

[37] A. O. Golosov. Limit distributions for random walks in random environments. *Soviet Math. Dokl.*, **28** : 18–22, (1983).

[38] A. O. Golosov. Localization of random walks in one-dimensional random environments. *Communications in Mathematical Physics*, **92** : 491–506, (1984).

[39] A. O. Golosov. On limiting distribution for a random walk in a critical one-dimensional random environment. *Com. of the Mosc. Math. Soc.*, pages 199–200, (1986).

[40] A. Greven and F. Hollander. Large deviation for a walk in random environment. *Ann. probab.*, **27**(4) : 1381–1428, (1994).

[41] K. Kawazu H. Tanaka. A diffusion process in a brownian environment with drift. *J. Math. Soc. Japan*, **49** : 189–211, (1997).

[42] Y. Hu. The logarithmic average of sinai's walk in random environment. *Period. Math. Hungar.*, **41** :175–185, (2000).

[43] Y. Hu. Tightness of localization and return time in random environment. *Stochastic Process. Appl.*, **86**(1) : 81–101, (2000).

[44] Y. Hu and Z. Shi. The limits of sinai's simple random walk in random environment. *Ann. Probab.*, **26**(4) : 1477–1521, (1998).

[45] Y. Hu and Z. Shi. The local time of simple random walk in random environment. *Journal of Theoritical Probability*, **11**(3), (1998).

[46] Y. Hu and Z. Shi. The problem of the most visited site in random environment. *Probab. Theory Related Fields*, **116**(2) : 273–302, (2000).

[47] B.D. Hughes. *Random Walks and Random Environment*, volume **2**. Clarendon Press, Oxford, (1996).

[48] A. Kupiainen J. Bricmont. Random walks in asymetric random environments. *Comm. in Math. Phys.*, **142** :342–420, (1991).

[49] B. de Dohlen J. G. Conlon. Numerical simulations of random walks in random environment. *Journal Stat. Phys.*, **92**(3/4) : 571–586, (1998).

[50] B. Derrida J. M. Luck. Diffusion on a random lattice : Weak-disorder expansion in arbitrary dimension. *Phys. Rew. B*, **28**(12), (1983).

[51] S. A. Kalikow. Generalised random walk in random environment. *Ann. Probab.*, **9**(5) : 753–768, (1981).

[52] K. Kawazu, Y. Tamura, and H. Tanaka. Limit theorems for one-dimensional diffusions and random walks in random environments. *Probab. Theory Related Fields*, **80** : 501–541, (1989).

[53] H. Kesten. An iterated logarithm law for the local time. *Duke Math.*, 32 : 447–456, (1965).

[54] H. Kesten. Random difference equations and rnewal theory for products of random matrices. *Acta. Math.*, **131** : 208–248, (1973).

[55] H. Kesten. A renewal theorem for random walk in random environment. *Proc. Sympos. Pure Math*, **31** :67–77, 1977.

[56] H. Kesten. The limit distribution of sinai's random walk in random environment. *Physica*, **138A** : 299–309, (1986).

[57] H. Kesten, M.V. Kozlov, and F. Spitzer. A limit law for random walk in a random environment. *Comp. Math.*, **30** : 145–168, 1975.

[58] E. S. Key. Recurrence and transience criteria for random walk in a random environment. *Ann. of Probab.*, **9** : 529–560, (1984).

[59] T. Komorowski and G. Krupa. The law of large numbers for ballistic, multidimensional random walks on random lattices with correlated sites. *Ann. Inst. H. Poincare*, **39** : 263–285, 2003.

[60] T. Komorowski and S. Olla. A note on central limit theorem for two-fold stochastic random walks in a random environment. *Bull. Polish Acad. Sciences*, **51** : 1222–1245, 2003.

[61] M. V. Kozlov. Random walk in one-dimensional random medium. *Theo. Prob. Appl.*, **18** : 387–388, (1973).

[62] M. V. Kozlov. The method of averaging and walks in inhomogeneous environments. *Russian Math. Surveys*, **40** : 73–145, (1985).

[63] S. Lalley. An extension of kesten's renewal theorem for random walk in a random environment. *Adv Appl Math*, **7** : 80–100, (1986).

[64] G. F. Lawler. Weak convergence of a random walk in a random environment. *Commun. Math. Phys.*, **87** : 81–87, (1982).

[65] A. V. Letchikov. Localization of one-dimensional random walks in random environments. *Mathematical Physics Reviews*, **8** : 173–220, (1989).

[66] A. V. Letchikov. A criterion for the applicability of the central limit theorem to onedimensional random walks in random environments. *Theor. Prob. Appl.*, **37** : 553–557, (1992).

[67] J.M. Luck. Diffusion in a random medium : A renormalization group approach. *Nuclear Physics*, pages 169–184, 1983.

[68] J.M. Luck. A numerical study of diffusion and conduction in a 2d random medium. *J. Phys. A*, **17** : 2069–2077, 1984.

[69] E. Marinari, G. Parisi, D. Ruelle, and P. Windey. On the interpretation of 1/f noise. *Comm. Math Phys.*, **89** : 1–12, (1983).

[70] E. Marinari, G. Parisi, D. Ruelle, and P. Windey. Random walk in random environment and 1/f noise. *Phys. Rev. Lett.*, **50**(17) : 1223–1225, 1983.

[71] J. Matcha. Generalized diffusion coefficient in one-dimensional random walks with static disorder. *Phy. Rew. B*, **24**(9), (1981).

[72] P. Mathieu. Zero white noise limit through dirichlet forms, with application to diffusions in a random media. *Proba. Theory Relat. Fields.*

[73] P. Mathieu. Limit theorems for diffusions with a random potential. *Stochastic Process. Appl.*, **60** : 103–111, 1995.

[74] P. Mathieu. On random perturbations of dynamical systems and diffusion with a random potentiel in dimension one. *Stochastic Process. Appl.*, **77** : 53–67, 1998.

[75] F. Merkl and M. Zerner. A zero-one law for plamar random walks in random environment. *Ann. Probab.*, to appear.

[76] S. A. Molchanov. *Lectures On the Random Media (Summer school, St-Floor France).* Springer, 1994.

[77] M. Nauenberg. Random walk in a random medium in one dimension. *Jour. of Stat. Phys.*, 41(5/6) : 803–810, (1985).

[78] J. Neveu. *Martinguales à temps discret.* Masson et Cie, 1972.

[79] S. Olla. Notes on the central limit theorems for tagged partcles and diffusions in random fields. *Panorama et Synthèses*, **12** : 75–100, (2001).

[80] A. Pisztora and T. Povel. Large deviation principle for random walk in a quenched random environment in the low speed regime. *Ann. Probab.*, **27** : 1389–1413, (1999).

[81] F. Rassoul-Agha. Large deviations for random walks in a mixing random environment, and other (non-markov) random walk. *Preprint*, 2003.

[82] F. Rassoul-Agha. The point of view of the particule on the law of large numbers for random walks in a mixing random environment. *Ann. Probab.*, **31** : 1441–1463, 2003.

[83] N. E. Ratanov. Random walks of a particle in an inhomogeneous one-dimensional environment with reflection and absorption. *Theoret. and Math. Phys.*, **112**(1) : 857–865, (1998).

[84] P. Révész. In random environment the local time can can be very big. *Astérisque*, pages 157–158,321–339, 1988.

[85] P. Révész. *Random walk in random and non-random environments.* World Scientific, (1989).

[86] P. Révész, L. Horvàth, and M. Csörgö. Stability and instability of local time of random walk in random environment. *Stoch Peroc Appl.*, **25** : 185–202, (1987).

[87] G.A. Ritter. *Random Walk in a Random Environment, critical case.* PhD thesis, Cornell, (1976).

[88] S. Schumacher. Diffusions with random coefficients. *Contemp. Math.*, **41** : 351–356, (1985).

[89] L. Shen. A law of large numbers and a central limit theorem for biased random motions in random environment. *To appear in Ann. Probab.*

[90] Z. Shi. A local time curiosity in random environment. *Stochastic Process. Appl.*, **76**(2) : 231–250, (1998).

[91] Z. Shi. Sinai's walk via stochastic calculus. *Panoramas et Synthèses*, **12** : 53–74, (2001).

[92] Ya. G. Sinai. The limit behaviour of a one-dimensional random walk in a random medium. *Theory Probab. Appl.*, **27**(2) : 256–268, 1982.

[93] Ya. G. Sinai. Lorentz gas and random walk. *Math. Problems in Theor. Physics, Lecture Notes in Physics, Springer Verlag*, 153 :12–14, 1982.

[94] Ya. G. Sinai. A random walk with random potential. *Theory Probab. Appl.*, **38** : 382–385, (1985).

[95] F. Solomon. Random walks in random environment. *The Annals of Probability*, **3**(1) : 1–31, (1975).

[96] M. J. Stephen and R. Kariotis. Diffusion in a one-dimensional disordered system. *Phy. Rew. B*, **26** : 2917, (1982).

[97] C. J. Stone. The growth of a random walk. *Ann. of Math. Stat.*, **40**(6) : 2203–2206, (1969).

[98] F. Stout. *Almost sure convergence.* Academic Press, 1974.

[99] D. Szász and B. Tóth. Persistent random walks in one dimensional random environment. *Journal of Stat. Phys.*, **37**(1/2), (1984).

[100] A. S. Sznitman. An effective criterion for ballistic behavior of random walk in random environement. *Probability Theory and Related Fields*, Preprint, (1999).

[101] A. S. Sznitman. Lectures on random motions in random media. *Preprint*, (1999).

[102] A. S. Sznitman. Slowdown and neutral pockets for a random walk in random environment. *Probability Theory and Related Fields*, **115**, (1999).

[103] A. S. Sznitman. Topics in random wlks in random environment. *Preprint ; School in Trieste*, (1999).

[104] A. S. Sznitman. On a class of transient random walks in random environment. *Ann. Probab.*, **29**(2) :723–764, (2001).

[105] A. S. Sznitman. On new examples of ballistic random walks in random environment. *Ann. Probab.*, **31**(1) : 285–322, (2003).

[106] A. Z. Sznitman and M. Zerner. A law of large number for random walks in random environment. *Ann. Probab.*, **27**(4) : 1851–1869, (1999).

[107] M. Taleb. *Grandes déviations pour une diffusion en milieu aléatoire.* PhD thesis, Université de Paris VII, (2000).

[108] M. Taleb. Large deviations for a brownian motion in a drifted brownian potential. *Ann. Probab.*, **29**(3) : 1173–1204, (2001).

[109] M. Taleb. Tail estimates for a brownian motion in a drifted brownian potential. *Preprint*, (2001+).

[110] H. Tanaka. Localization of a diffusion process in a one-dimensional brownian environmement. *Comm. Pure Appl. Math.*, **17** : 755–766, (1994).

[111] H. Tanaka. Diffusion processes in random environment. pages 1047–1054. Birkhäuser Boston, 1995.

[112] H. Tanaka. Limit theorem for a brownian motion with drift in a white noise environment. *Chaos Solitons Fractals*, **11** : 1807–1816, (1997).

[113] B. Tóth. Persistent random walks in random environment. *Prob. Theo. Relat. Fields*, **71** : 615–625, (1986).

[114] S. R. S. Varadhan. Large deviations for random walks in random environment. *Comm. Pure Appl. Math.*, **56**(8) : 1222–1245, 2003.

[115] I. Webman. Effective-medium approximation for diffusion on a random lattice. *Phys. Rew. Lett.*, **47**, (1981).

[116] M. Yor Y. Hu, Z.Shi. Rates of convergence for one-dimensional diffusion in a drifted brownian potential. *Trans. Amer, Math. Soc*, (2000).

[117] O. Zeitouni. Lectures notes on random walks in random environment. *St Flour Summer School*, (2001).

[118] O. Zeitouni. Notes of Rio lectures. *Preprint*, (2003).

[119] O. Zeitouni, A. Dembo, and Y. Perres. Tail estimates for one-dimensional random walk in random environment. *Com. Math. Phy.*, **181** : 667–683, (1996).

[120] O. Zeitouni and N. Gantert. Quenched sub-exponential tail estimates for one-dimentional random walk in random environment. *Comm. Math. Phys.*, **194** : 177–190, (1998).

[121] O. Zeitouni, A. Pisztora, and T. Povel. Precise large deviation estimates for a one-dimensional random walk in a random environment. *Probab. Theory Related Fields*, **113** : 191–219, (1999).

[122] M. Zerner. Lyapounov exponents and quenched large deviations for multidimentional random walk in random environment. *Ann. Probab.*, **26**(4) : 1446–1476, (1998).

[123] M. Zerner. Velocity and lyapounov exponents of some random walks in random environment. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **36**(6) : 737–748, (2000).

[124] M. Zerner. A non-ballistic law of large numbers for random walks in i.i.d. random environment. *Elect. Comm. in Probab*, **7**(19) : 191–197, (2002).