



Modèles de matrices aléatoires à N grand, groupe de renormalisation, solutions exactes et universalité

Gabrielle Bonnet

► To cite this version:

Gabrielle Bonnet. Modèles de matrices aléatoires à N grand, groupe de renormalisation, solutions exactes et universalité. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2000. Français. NNT: . tel-00004217

HAL Id: tel-00004217

<https://theses.hal.science/tel-00004217>

Submitted on 19 Jan 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Paris Sud
U.F.R. Scientifique d'Orsay
Thèse

présentée
pour obtenir

Le grade de docteur en sciences de
l'Université Paris XI Orsay

par

BONNET Gabrielle

Sujet : Modèles de matrices aléatoires à N grand, groupe
de renormalisation, solutions exactes et universalité

Soutenue le 16 juin 2000 devant le jury

M. DAVID François, directeur
M. ELLWANGER Ulrich
M. KRZYWICKI André
M. STAUDACHER Matthias, rapporteur
M. WINDEY Paul, rapporteur
M. ZINN-JUSTIN Jean

Table des matières

1	Introduction	9
2	Les modèles de matrices en physique	11
2.1	Physique nucléaire, systèmes chaotiques	11
2.1.1	Problèmes physiques concernés	11
2.1.2	Nécessité d'un modèle simplifié	12
2.1.3	Modèles de matrices aléatoires	12
2.2	Modèles sur surfaces aléatoires	15
2.2.1	Le modèle	15
2.2.2	Interprétation en terme de matrices aléatoires	16
2.2.3	Grandeurs étudiées dans les modèles sur surface aléatoires	19
2.3	QCD et matrices aléatoires	20
2.4	Théorie des cordes	21
2.5	Gravitation quantique	23
2.5.1	gravité pure	23
2.5.2	gravité + matière	24
2.6	Charge centrale conforme et modèles de matrices aléatoires	25
2.6.1	Rappels sur les théories conformes	25
2.6.2	Théorie discrète et théorie continue	26
2.6.3	Charge centrale conforme associée à une théorie continue conforme donnée	26
3	Méthodes de résolution des modèles de matrices	29
3.1	Méthode du col	29
3.1.1	Théorème du col	29
3.1.2	Application au modèle à une matrice	29
3.1.3	Modèle à 2 matrices	34
3.1.4	Modèle à plusieurs matrices	36

3.2	Méthode des polynômes orthogonaux	37
3.2.1	Fonction de partition et fonctions de corrélations . . .	38
3.2.2	Relation de récurrence entre les P_j et calcul des polynômes orthogonaux	39
3.3	Méthode des équations de boucles	41
3.3.1	Limite planaire et théorème de factorisation	42
3.3.2	Exemple : résolution explicite du modèle cubique . . .	42
3.3.3	Cas à plusieurs matrices	44
3.4	Groupe de renormalisation	44
3.4.1	Motivations	44
3.4.2	Principe de la méthode	45
3.4.3	Obtention des points et des exposants critiques	46
4	Prédire l'allure des flots	49
4.1	La conjecture	49
4.2	Vérifications pour le modèle à une matrice	55
4.2.1	Premières approximations	56
4.2.2	Equations du mouvement	58
4.2.3	Approximation linéaire	58
4.2.4	résolution d'un modèle mêlant gravité et termes de branchements	60
4.3	Généralisation à des modèles plus complexes	67
5	Modèles de Potts sur réseau aléatoire	71
5.1	Le modèle	71
5.1.1	Le modèle de Potts sur réseau fixe	71
5.1.2	Le modèle de Potts sur surface aléatoire.	72
5.2	Quelle technique utiliser Γ	74
5.2.1	Transformation d'un modèle en boucle en un modèle en arbre [53, 61]	74
5.2.2	Principe de la méthode de [54]	75
5.2.3	Principe de la méthode de [55]	77
5.3	Les équations du mouvement	77
5.3.1	Position du problème	78
5.3.2	Invariance par permutations circulaires des traces . . .	79
5.4	Exemple du modèle de Potts-3	80
5.4.1	Résolvante de Potts-3 avec termes de branchement . .	81
5.4.2	Détermination des lignes et exposants critiques	83
5.5	Cas général	85
5.5.1	Définitions	85

5.5.2	Equations du mouvement	86
5.5.3	Solution non-perturbative	88
5.6	Conclusion	94
6	Modèles à plusieurs coupures et limite $N \rightarrow \infty$	95
6.1	Le cas symétrique	96
6.1.1	Rappels sur l'usage de la méthode du col dans le cas d'un support de valeurs propres non connexe	96
6.1.2	Forme de la fonction à 2 points : calcul classique	98
6.1.3	Détermination de C	100
6.2	Cas général	101
6.3	Cas à plus de deux coupures	109
7	Conclusion	111
8	Articles	113

Remerciements

De nombreuses personnes ont rendu cette thèse, préparée au Service de Physique Théorique du CEA Saclay, possible : qu'elles trouvent ici la sincère expression de ma reconnaissance.

Matthias Staudacher et Paul Windey ont accepté d'être mes rapporteurs. Ils m'ont donné de leur temps, et m'ont fait bénéficier de leur lecture attentive ainsi que de leurs précieux commentaires. Qu'ils soient donc ici remerciés de leur gentillesse et de leur disponibilité. Ulrich Ellwanger, André Krzywicki et Jean Zinn-Justin ont accepté de faire partie de mon jury. Ils m'ont eux aussi fait part de leurs remarques avisées. Qu'ils soient donc tous remerciés pour leur contribution à cette thèse. François David a été un directeur de thèse remarquable tout au long des trois années que j'ai passées avec lui. Sans ses conseils, ses connaissances, sa patience, et son humour, cette thèse n'aurait pas été ce qu'elle a été. C'est donc à lui que vont mes remerciements les plus chaleureux. Bertrand Eynard a été au centre d'une collaboration fructueuse, depuis son laboratoire de Colombie Britannique, ainsi que lors de son retour en France. Son travail et sa rigueur ont été des atouts précieux pendant cette thèse. Je voudrais remercier encore Stéphane Nonnenmacher et Marc Bocquet, qui ont partagé mon bureau, Marc avec brio pendant la totalité de ces trois ans, pour leur compagnie et leur amitié. Mes remerciements vont encore à tout le SPhT, ainsi qu'à tous ceux qui, de près ou de loin, pendant ou avant cette thèse, ont contribué à son existence. Enfin, je tiens à remercier tout particulièrement ma famille qui m'a donné les moyens de réussir : mes parents et mes grands-parents, pour leur engagement et leur soutien : il est des remerciements qui ne pourront jamais être assez dits.

Chapitre 1

Introduction

Les modèles de matrices aléatoires, d'abord introduits en physique pour décrire les statistiques de niveaux d'énergie en physique nucléaire, ont par la suite trouvé des applications dans des domaines extrêmement variés, du chaos quantique et de la physique mésoscopique, à la chromodynamique quantique, la théorie des cordes et la gravité quantique via les modèles de surfaces aléatoires.

Bien que certains modèles de matrices soient bien compris, il s'agit principalement des cas particuliers de matrices couplées en chaîne, correspondant à des théories de gravité quantique ou des théories des cordes de charge centrale conforme inférieure ou égale à un. Ainsi, tout un pan des modèles de matrices aléatoires, les modèles de matrices de charge centrale $c > 1$, nous échappe.

J'ai cherché, au cours de mon travail de thèse, à mieux comprendre et à résoudre ces modèles. La méthode de groupe de renormalisation nous a permis, par l'étude de l'évolution des flots en fonction de la charge centrale conforme, de mieux comprendre le lien entre celle-ci et le comportement des modèles de matrices [1]. Par la méthode des équations de boucles, nous avons résolu [2, 3] des modèles de matrices couplées deux à deux : les modèles de Potts- q sur réseau aléatoire. Cette résolution ouvre la voie à celle d'une classe de modèles plus vaste que les simples modèles de matrices couplées en chaîne. Enfin, bien que dans notre étude nous nous soyons intéressés principalement à la limite planeaire, où la taille N des matrices tend vers l'infini, nous avons aussi étudié l'effet, sous-dominant dans la fonction de partition du modèle, de la discrétisation des valeurs propres. Nous avons montré [4] que, dans le cas d'un modèle où le support des valeurs propres est non-connexe, il n'y a pas de développement topologique en puissances de

N . L'influence de la discrétisation des valeurs propres devient alors d'ordre dominant dans les fonctions de corrélation à deux points ou au-delà.

Nous allons commencer ici par la signification physique des modèles de matrices, puis nous parlerons des techniques classiques de résolution, enfin, nous décrirons les résultats que nous avons obtenus au cours de cette thèse.

Chapitre 2

Les modèles de matrices en physique

2.1 Physique nucléaire, systèmes chaotiques

2.1.1 Problèmes physiques concernés

Les modèles de matrices ont été d'abord introduits en 1951 par Wigner [5] pour décrire les niveaux d'énergie de systèmes compliqués comme des états nucléaires hautement excités. Ceux-ci sont formés par l'interaction de neutrons lents avec des noyaux lourds. On étudie alors les pics de résonance qui apparaissent dans la section efficace de diffusion des neutrons. Les niveaux d'énergie des noyaux d'Uranium ou de Magnésium, par exemple, [7] peuvent ainsi être expérimentalement déterminés.

Les modèles de physique nucléaire sont les premiers à avoir été interprétés en terme de matrices aléatoires, mais ce ne sont pas les seuls : les modèles de matrices vont apparaître aussi dans l'étude de certains atomes, ou même, certaines molécules : atome d'hydrogène ou de lithium, molécule de dioxyde d'azote ... Les modèles de matrices aléatoires apparaissent lors de l'étude de régimes bien particuliers, comme lorsqu'on place un atome d'hydrogène en champ microonde ou encore dans un fort champ magnétique statique.

Enfin, un grand nombre de systèmes classiquement chaotiques pouvant n'avoir rien à voir avec la physique nucléaire ou atomique peuvent eux aussi être modélisés en terme de matrices aléatoires : billard de Sinai, stade de Bunimovich, billard en forme d'anneau ...

2.1.2 Nécessité d'un modèle simplifié

L'état des systèmes cités précédemment ne peut être extensivement décrit, en l'état actuel de nos connaissances, par des calculs exacts. En fait, seuls l'état fondamental du noyau ainsi que ses tout premiers niveaux d'énergie peuvent être calculés par ce biais, alors que, par l'expérience, on peut en observer un million.

Des résultats expérimentaux, cependant, on peut tirer de nombreuses fonctions statistiques : distribution des niveaux d'énergie, corrélations entre niveaux... On remarque en particulier une répulsion entre niveaux d'énergie des systèmes chaotiques (abondance d'anticroisements de niveaux, cf. figure 2.1) qui n'apparaît pas dans les systèmes non-chaotiques. Le calcul exact, dans l'état actuel des choses, ne nous permet pas d'espérer retrouver ou comprendre une seule de ces données.

Voilà pourquoi il est nécessaire de mettre au point un modèle simplifié du système, intégrant les données physiques de base du problème (système classique ou chaotique, symétries...), et nous donnant, si ce n'est des résultats exacts, du moins la compréhension des propriétés statistiques du problème.

2.1.3 Modèles de matrices aléatoires

Une façon simple de modéliser les propriétés statistiques d'un système physique comprenant un grand nombre de niveaux d'énergie consiste à considérer les niveaux d'énergie eux-mêmes comme des variables aléatoires. La probabilité d'avoir la configuration d'énergie $\{E_i\}_{i=1,\dots,N}$ vérifie :

$$dp(\{E_i\}) = dE_1 \dots dE_N f(\{E_i\})$$

où $f(\{E_i\})$ est une fonction régulière en les $\{E_i\}$, par exemple $e^{-N \sum_i E_i}$.

La loi de distribution des écarts entre niveaux est alors Poissonnienne (cf. figure 2.2), et correspond bien aux résultats expérimentaux pour des systèmes non-chaotiques.

En revanche, ce modèle ne rend pas compte de la répulsion entre niveaux observée dans le cas de systèmes chaotiques. Pour rendre compte du comportement de ces derniers, il faut alors élaborer un modèle plus complexe.

Dans un système chaotique, un petit volume d'espace des phases se déforme jusqu'à remplir densément l'espace aux temps longs. Or, lorsqu'on a un système ergodique, privilégier une base d'états propres du hamiltonien par rapport aux autres n'a plus de sens. La fonction de partition ne fera alors plus intervenir une intégration sur toutes les énergies possibles, mais plutôt une intégration sur tous les hamiltoniens possibles. Les variables aléatoires

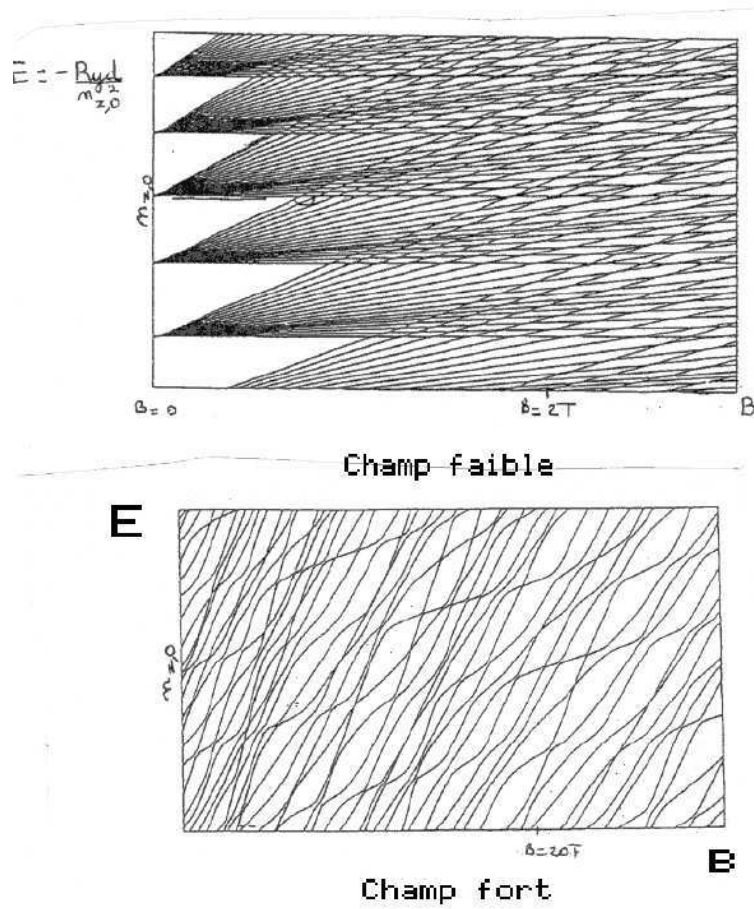


FIG. 2.1 – Différence entre les niveaux d'énergie d'un système non-chaotique (en haut) et d'un système chaotique (figure du bas). Le système représenté ici est un atome d'hydrogène en présence de champ magnétique. En ordonnée, on a les niveaux d'énergie et en abscisse le champ magnétique. On remarque le grand nombre d'anticroisements de niveaux présents dans le cas chaotique (fort champ magnétique, figure du bas). Figures tirées de [6]

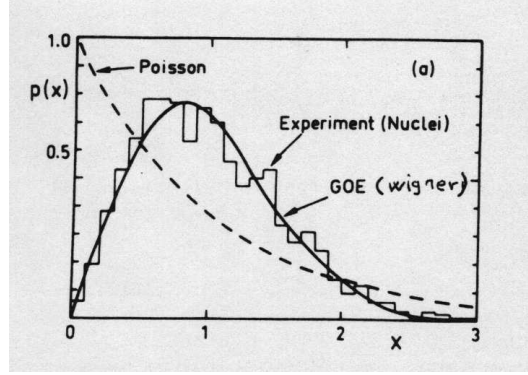


FIG. 2.2 – Distribution des espacements entre valeurs propres voisines, comparaison de la distribution de Poisson et de l'ensemble gaussien orthogonal avec l'expérience [7]. $p(x)$ est la probabilité d'avoir deux valeurs propres voisines distantes de $\frac{x}{N}$ (N : nombre total de valeurs propres).

indépendantes à considérer sont désormais les éléments de matrice du hamiltonien. De plus, la probabilité $p(H)$ d'avoir le hamiltonien H doit obéir aux symétries du problème. Ceci nous amène à considérer

$$dp(H) = dH e^{-N \frac{1}{2} \text{tr } H^2}$$

où H est une matrice hermitienne dans le cas d'un système non invariant par renversement du temps (ensemble gaussien unitaire GUE) ou une matrice symétrique dans le cas d'un système invariant par renversement du temps (ensemble gaussien orthogonal GOE). dH est la mesure plate : produit des dH_{ij} ($i \leq j$) dans le cas symétrique, produit des $d\Re H_{ij} d\Im H_{ij}$ dans le cas hermitien.

On obtient, en étudiant le modèle de matrices respectant les symétries du problème à étudier, une loi d'espacement entre les niveaux où l'on retrouve bien la répulsion à courte distance entre valeurs propres observée expérimentalement (voir la comparaison entre les données expérimentales et l'expérience en figure 2.2). Remarquons que l'existence de cette répulsion vient simplement de la mesure dH : exprimée en terme de valeurs propres, celle-ci se réécrit comme

$$dH = \prod_i d\lambda_i \prod_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j| \times dU \quad (U \text{ matrice unitaire})$$

soit, dans l'action finale exprimée en fonction des valeurs propres, un terme de répulsion en $\sum_{i \neq j} \ln |\lambda_i - \lambda_j|$.

La loi de distribution des niveaux, quant à elle, est une loi dite “de demi-cercle” :

$$\rho(\lambda) = \frac{4}{\pi(b-a)} \sin(\phi) \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \phi$$

Cette loi n’est pas une loi universelle, contrairement à la loi donnant les corrélations entre niveaux. La loi de demi-cercle ne concorde en effet pas, pour la plupart des systèmes étudiés, avec les résultats expérimentaux.

Enfin, notons que l’on peut toujours considérer des systèmes respectant les mêmes symétries mais ayant une action plus complexe (les H_{ij} ne sont alors en général pas des variables indépendantes), par exemple $e^{-N \operatorname{tr} V(H)}$ plutôt que $e^{-N \frac{1}{2} \operatorname{tr} H^2}$. Ces modèles, qui seront utilisés pour décrire la gravité quantique ou la théorie des cordes [8], donnent des lois de distribution de niveaux différentes, mais les fonctions de corrélation entre niveaux successifs, quant à elles, obéissent à la même loi universelle que le modèle gaussien.

2.2 Modèles sur surfaces aléatoires

Nous allons montrer ici comment un modèle statistique défini sur une surface aléatoire (par exemple, un système de spins en interaction sur un réseau fluctuant) peut se réécrire, de façon équivalente, comme un modèle de matrices aléatoires. Ce lien entre les modèles de matrices et les modèles de surface a été pour la première fois mis en évidence par t’Hooft [9], dans le cadre de la chromodynamique quantique.

Les modèles sur surface aléatoire apparaîtront de plus comme modèles intermédiaires lorsque nous chercherons à interpréter la gravité quantique bidimensionnelle ou la théorie des cordes en terme de matrices aléatoires.

2.2.1 Le modèle

Une surface aléatoire consiste en un réseau de taille et de genre variés, où on associe un poids statistique g_n à chaque nœud relié à n voisins : par exemple, une surface où 3 nœuds ont 4 plus proches voisins, et 2 nœud 3 plus proches voisins, correspondra à un coefficient $g_3^2 g_4^3$ dans la fonction de partition.

Ceci nous donne une action proportionnelle au nombre de nœuds de chaque sorte. De ce fait, si l’on étudie un modèle où l’on n’autorise qu’une seule sorte de nœuds (en mettant tous les autres g_n à 0) l’action finale sera proportionnelle au nombre total de nœuds, c’est-à-dire à l’aire de la surface.

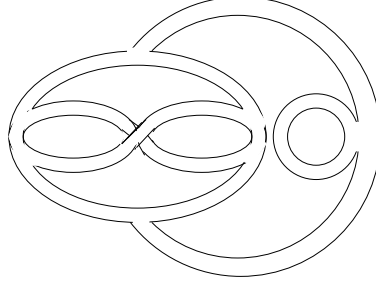


FIG. 2.3 – Exemple de réseau de poids $g_4^3 g_3^2$. Les liens entre les nœuds sont des propagateurs “épais” composés d’un double trait.

Pour que le modèle de surface aléatoire soit complet, il faut ajouter un terme dépendant de la topologie de la surface : une surface de genre h (à h “poignées”) aura un poids N^{2-2h} . On a la relation d’Euler :

$$n_v - n_p + n_b = 2 - 2h \quad (2.1)$$

où n_v est le nombre de nœuds (ou vertex), n_b le nombre de lignes continues (boucles) et n_p le nombre de propagateurs reliant deux nœuds.

Le réseau donné précédemment (Figure 2.3) en exemple correspond donc à une surface de topologie torique, puisque le réseau comporte 5 nœuds, 4 lignes continues, et 9 propagateurs.

On peut coupler à ce modèle de surface aléatoire un modèle de spins sur réseau, par exemple un modèle d’Ising : on a alors des spins up et down, et une action d’Ising :

$$S = \sum_{\langle i,j \rangle} J \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + \sum_i (\vec{S}_i)^2$$

Le modèle final est un modèle de spins désordonnés sur réseau ; il ne s’agit cependant pas d’un modèle de désordre gelé, mais fluctuant, sur une surface elle-même aléatoire, dont la taille, ainsi que la topologie, sont susceptibles de varier.

2.2.2 Interprétation en terme de matrices aléatoires

Soit un modèle de matrices aléatoires : $\Phi_1 \dots \Phi_k$ hermitiennes, de taille $N \times N$, de fonction de partition

$$Z = \int d\Phi_1 \dots d\Phi_k e^{-N^2 S(\{\Phi_i\})}$$

S ne dépend que de traces de produits des matrices Φ_i .

Pour fixer les idées, nous prendrons l'exemple suivant :

$$S = g_1 \frac{\text{tr } \Phi_1^3}{3N} + g_2 \frac{\text{tr } \Phi_2^3}{3N} + \frac{\text{tr } \Phi_1^2}{2N} + \frac{\text{tr } \Phi_2^2}{2N} + c \frac{\text{tr } \Phi_1 \Phi_2}{N}$$

Pour retrouver un modèle de spins sur réseau, on développe tout d'abord la partie non quadratique de l'action S . On ramène ainsi le calcul de la fonction de partition précédente au calcul de valeurs moyennes du type : $(\text{tr } \Phi_1^3)^{n_1} (\text{tr } \Phi_2^3)^{n_2}$ par une action quadratique. Grâce au théorème de Wick, un tel calcul peut se faire aisément.

On utilise alors les règles diagrammatiques de Feynman : un seul et même indice sera représenté par une ligne continue, un élément de matrice $\Phi_{\alpha\beta}$ par un demi-propagateur, et $\text{tr } \Phi_i^n$ correspondra à un nœud à n pattes de couleur i :

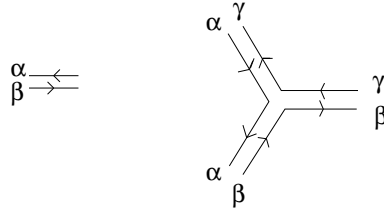


FIG. 2.4 – Représentation d'un élément de matrice $\Phi_{\alpha\beta}$ (à gauche) et de $\text{tr } \Phi^3 = \Phi_{\alpha\beta} \Phi_{\beta\gamma} \Phi_{\gamma\alpha}$ (à droite)

Les valeurs moyennes $\langle \text{tr } \Phi_{i\alpha\beta} \Phi_{i\beta\alpha} \rangle$ et $\langle \text{tr } \Phi_{i\alpha\beta} \Phi_{j\beta\alpha} \rangle$ ($i \neq j$) ($\langle \Phi_{i\alpha\beta} \Phi_{i\gamma\delta} \rangle$ est nulle si $\alpha \neq \delta$ ou $\beta \neq \gamma$) sont représentées par des propagateurs complets, de couleurs i et j (Figure 2.5).

$$\langle \Phi_{1\alpha\beta} \Phi_{2\alpha\beta} \rangle \quad \begin{array}{c} \alpha \rightarrow \text{blue line} \rightarrow \alpha \\ \beta \leftarrow \text{green line} \leftarrow \beta \end{array}$$

FIG. 2.5 – valeur moyenne $\langle \Phi_{1\alpha\beta} \Phi_{2\beta\alpha} \rangle$ où les éléments de matrices de Φ_1 sont représentés en bleu, ceux de la matrice 2 en vert.

La fonction de partition Z peut alors se réécrire comme une somme sur toutes les façons possibles de coller des nœuds les uns aux autres (i.e. de fabriquer des propagateurs complets), avec un poids g_1 par nœud de couleur 1, et g_2 par nœud de couleur 2. On retrouve le modèle d'Ising sur réseau lorsqu'on interprète chaque nœud de type 1 (resp. 2) comme un nœud portant un spin up (resp. down) : le poids (proportionnel à c) que l'on trouve

pour chaque propagateur reliant deux nœuds de même couleur correspond à une énergie d'interaction entre spins identiques. Remarquons enfin que, si l'on s'intéresse aux puissances de N apparaissant dans le développement de la fonction de partition, on trouve les facteurs N^{2-2h} pour des surfaces de genre h (voir définition donnée au 2.2.1). Dans la limite où la taille N des matrices tend vers l'infini, on sélectionne uniquement les surfaces sans poignée, i.e. celles de topologie planaire.

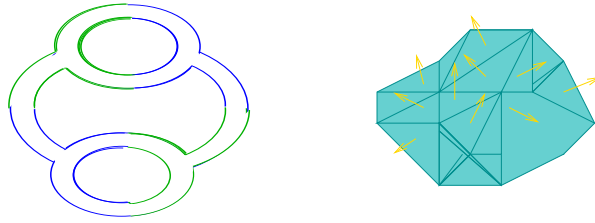


FIG. 2.6 – A gauche, une surface où l'on a assemblé des nœuds à 3 pattes de 2 couleurs différentes. A droite, des surfaces où l'on utilise la représentation duale où l'on colle des polygones à n côtés sur chaque nœud à n pattes

Plutôt que de représenter la surface comme un réseau de nœuds, on utilise souvent la représentation duale où l'on “colle” des triangles équilatéraux sur chaque nœud à 3 pattes, des carrés si on a un nœud à 4 pattes ... Sur chaque polygone régulier vit alors un spin de la même “couleur” que le nœud correspondant.

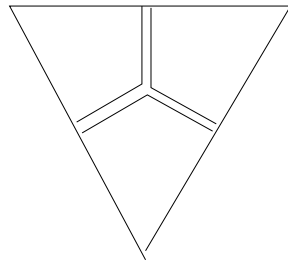
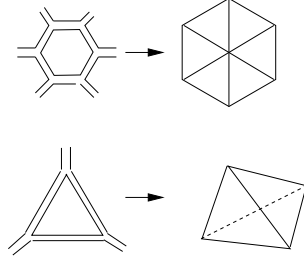


FIG. 2.7 – Triangle équilatéral correspondant à un nœud à 3 pattes

Selon la façon dont les nœuds sont reliés les uns aux autres, la surface obtenue sera plate ou non. Si une boucle est composée de 6 nœuds à 3 pattes, par exemple, il faut dessiner 6 triangles équilatéraux issus d'un même

sommet, la figure est donc plate. Si par contre on a seulement 3 nœuds à 3 pattes dans une boucle, soit 3 triangles équilatéraux seulement issus d'un même sommet, la figure n'est plus plane.



Notons que la fonction de partition obtenue contient toutes les surfaces possibles, y compris les surfaces non connexes. Pour éliminer ces termes, il suffit de considérer l'énergie libre $F = -\frac{1}{N^2} \ln Z$ qui, quant à elle, ne contient que des surfaces connexes.

2.2.3 Grandeurs étudiées dans les modèles sur surface aléatoires

On peut calculer le diagramme de phase du modèle de surfaces, ainsi que ses exposants critiques, soit en faisant l'étude du modèle de matrices aléatoires correspondant, soit ou par simulations numériques. On peut aussi étudier les propriétés de surfaces de genres variés, avec bord ou sans bord.

Ainsi, quand on se rapproche du point critique $g \rightarrow g_c$, le développement de Z en puissances de g diverge, et, par suite, ce sont les termes correspondant à une surface de grande taille qui dominent la fonction de partition (rappelons-nous que le poids g^{n_v} est associé à une surface de n_v nœuds, c'est-à-dire de "taille" n_v). $F = -\frac{1}{N^2} \ln Z$ pouvant s'écrire sous la forme d'un développement en puissances de N comme $F = \sum_{h=0}^{\infty} N^{-2h} F_h(g)$ où h est le genre des surfaces, si l'on passe d'abord à la limite $N \rightarrow \infty$ puis $g \rightarrow g_c$, on étudie uniquement les surfaces de topologie plane. Dans la limite où la taille des surfaces devient très grande devant la taille des polygones qui composent la surface, on peut passer à la limite continue, et on peut alors retrouver un modèle de gravité quantique bidimensionnelle ou de théorie des cordes (une surface aléatoire correspond à une surface d'espace-temps en gravité quantique bidimensionnelle, ou à la surface balayée par une corde entre deux instants t_1 et t_2 . Voir paragraphes suivants).

Pour étudier simultanément les surfaces de tous genres, il faut effectuer une double limite. En effet, le terme dominant dans $F_h(g)$ est $(g - g_c)^{\frac{5}{2}(1-h)}$.

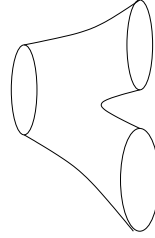


FIG. 2.8 – Interaction d’une corde

Par suite, si on prend la limite (aussi appelée double limite d’échelle [10]) $N \rightarrow \infty$ et $g \rightarrow g_c$ simultanément avec $(g - g_c)^{\frac{5}{2}} N^2$ constant, on trouve une limite continue qui prend en compte les surfaces de tous h .

Calculer $\langle \text{tr } \Phi^n \rangle$ revient à étudier des surfaces avec bord de largeur n , et étudier la résolvante $\omega = \langle \frac{1}{N} \text{tr } \frac{1}{z - \Phi} \rangle$ au voisinage d’une singularité $z = z_c$ et à $g = g_c$ revient à s’intéresser aux surfaces de taille infinie dont le bord a une taille qui tend elle aussi vers l’infini. Là aussi, on peut passer à la limite continue et retrouver un modèle de théorie des cordes. Alors qu’une surface sans bord correspond à la surface balayée par une corde entre sa création et son annihilation, le bord d’une surface avec bord correspond à la corde à l’instant initial et à l’instant final.

2.3 QCD et matrices aléatoires

La chromodynamique quantique (QCD) est la théorie de jauge qui décrit les interactions fortes.

En QCD, les hadrons ne sont pas des particules élémentaires mais sont composés de quarks dotés d’une masse, d’une charge électrique, d’une “saveur”, ainsi que d’une charge de couleur qui est un objet à trois composantes. Les interactions fortes entre quarks sont décrites par l’échange de gluons. Ces interactions, faibles à hautes énergies (la théorie est asymptotiquement libre), sont non-perturbatives au-delà de l’échelle de distance correspondant à la taille typique d’un hadron. Elles sont décrites par un champ de jauge qui est, du point de vue des indices de couleur, une matrice hermitienne sans trace 3×3 . Pour compléter la théorie, il faut aussi faire intervenir l’opérateur de Dirac ainsi que la masse m des fermions. L’opérateur de Dirac est invariant par symétrie chirale, mais cette symétrie est a priori brisée si la masse m est non-nulle. En fait, il y a brisure spontanée de la symétrie chirale : ceci peut s’interpréter en terme du spectre de l’opérateur de Dirac, comme

le signe d'une accumulation de valeurs propres au voisinage de 0.

La QCD est une théorie complexe où de nombreuses choses sont encore loin d'être résolues. En particulier, on ne sait toujours pas expliquer le confinement des quarks de façon rigoureuse. Un certain nombre de procédés, cependant, permettent d'obtenir des résultats intéressants. t'Hooft [9], en particulier, a proposé de considérer, non pas des matrices de $SU(3)$, mais des matrices de $SU(N)$, où le cas $N = 3$ est considéré comme un développement perturbatif au voisinage de $N = \infty$. On obtient alors un développement en la topologie des diagrammes, la limite $N \rightarrow \infty$ correspondant, comme on l'a vu dans la section précédente, à ne garder que des diagrammes de topologie planaire. On peut obtenir d'autres résultats dans la limite large N , sur lesquels nous ne nous étendrons pas ici : les résultats sur réseau 2D de Gross Witten par exemple. Très récemment, des conjectures ont été faites et des résultats obtenus concernant des théories de jauge superconformes, par leur lien avec les M -théories et la supergravité dans des espaces anti De Sitter (Groos-Ooguri, Maldacena).

Plus récemment, on [11] s'est intéressé au spectre de l'opérateur de Dirac lorsque l'échelle d'énergie est grande devant la masse du pion, mais petite devant la masse typique d'un hadron. On peut alors considérer l'opérateur de Dirac comme une matrice aléatoire obéissant à la symétrie chirale. La validité de cette approche a été confirmée par de nombreuses simulations numériques, et un certain nombre d'extensions, en particulier aux cas d'une température et d'un potentiel chimique non nuls ont été faites.

2.4 Théorie des cordes

Les modèles de matrices aléatoires interviennent aussi en théorie des cordes. Cette-dernière s'utilise pour décrire le comportement des particules fondamentales.

Lorsqu'on mène des calculs en théorie des champs, on considère que l'on a des particules ponctuelles. Or, on trouve des divergences à petites distances. Dans le cas de théories comme le modèle standard ou la QCD, on peut se débarrasser de ces divergences par des méthodes de groupe de renormalisation. Cependant dès qu'on a une théorie comme la gravité qui est non renormalisable, on ne peut pas formuler la théorie sans introduire une distance minimale (ou cut-off) arbitraire. Pourtant, le comportement des particules à petites distances nous intéresse d'autant plus que l'on pense que c'est aux plus petites échelles que l'on aura la physique la plus fondamentale, *i.e.* la plus unifiée.

Une des manières d'éliminer le problème des divergences ultraviolettes est de ne plus utiliser des particules ponctuelles mais des objets étendus : par exemple, des cordes, qui sont des objets de dimension 1.

Lorsque ces objets évoluent dans le temps, ils engendrent des surfaces de l'espace-temps quadridimensionnel, caractérisées par les coordonnées X_μ qui dépendent de deux paramètres : le temps propre et l'abscisse curviligne le long de la corde.

Pour construire une théorie quantique des cordes, il faut se donner l'action S , et sommer sur toutes les évolutions de la corde (*i.e.* toutes les surfaces) d'états initial et final donnés :

$$Z = \sum_{surfaces} e^{-i\frac{S}{\hbar}}$$

Deux actions, l'action de Nambu-Goto et celle de Polyakov, donnent la même limite classique.

L'action de Nambu Goto [12] est simplement déterminée par l'aire balayée par la corde entre les instants initiaux et finals :

$$S(\text{surface}) = \mu \int d\text{Aire} = -\mu \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{-\det g}$$

μ est la masse linéique de la corde et g la métrique bidimensionnelle induite sur la surface.

Quant à l'action de Polyakov [13], elle introduit une métrique g_{ab} interne à la surface et vaut :

$$S(g, X) = \frac{T}{2} \int d\xi^a d\xi^b \sqrt{-\det g} \left(g^{ab} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X_\mu}{\partial \xi^b} + \mu \right)$$

où les X^μ sont les coordonnées de la surface, et T la tension de corde.

Pour calculer la fonction de partition quantique, que ce soit avec l'action de Nambu-Goto ou celle de Polyakov, il faut introduire un cut-off invariant par reparamétrisation de la surface. On peut ainsi être amené à considérer des surfaces discrétisées, composées de surfaces de base (par exemple des petits triangles de côté a où a est le cutoff) collées les unes aux autres par leurs arêtes.

Ceci justifie l'usage de modèles de surfaces aléatoires, et donc de matrices aléatoires, dans le domaine de la théorie des cordes.

2.5 Gravitation quantique

2.5.1 gravité pure

L'action de la relativité générale, dans un espace-temps euclidien de dimension D , est celle d'Einstein-Hilbert :

$$S(g) = \frac{1}{16\pi G} \int (-R + 2\Lambda) \sqrt{g} \, d^D x$$

qui dépend de la géométrie de l'espace-temps via la métrique g et la courbure scalaire R , et fait aussi intervenir la constante cosmologique Λ et la constante de Newton G .

Une façon de quantifier la gravité consiste à effectuer une intégration fonctionnelle sur toutes les métriques g possibles. La fonction de partition est alors :

$$Z = \int dg \, e^{-S(g)}$$

Comme il est difficile de définir le problème pour un espace-temps de dimension supérieure à 2, une des pistes de recherche possibles consiste à s'intéresser d'abord au cas de la gravité quantique bidimensionnelle, en espérant par là mieux comprendre la gravitation quantique en général.

Dans ce cas, l'action $S(g)$ s'exprime simplement en fonction de l'aire et de la topologie de la surface

$$S = \frac{\Lambda}{8\pi G} \text{ aire} + (4G)^{-1}(2 - 2h)$$

où h est le genre, c'est-à-dire le nombre de “poignées” de la surface.

Pour pouvoir effectuer la sommation sur toutes les métriques g , on a été amené, comme dans le cas de la théorie des cordes, à discrétiser l'espace. Par exemple, on recouvre la surface de triangles équilatéraux et on écrit :

$$Z = \sum_{\tau} e^{-S(\tau)}$$

où τ est une triangulation de l'espace bidimensionnel. Le résultat final ne doit pas dépendre du type de discrétisation : triangulation, quadrangulation... effectuée (Notons cependant qu'un mélange de triangulation et de quadrangulation, par exemple, revient à ajouter un degré de liberté interne, non géométrique, à la surface, et ne correspond donc plus toujours à un simple modèle de gravité pure).

L'aire étant proportionnelle au nombre n_v de triangles de la surface : aire = $n_v \mathcal{A}$, on a

$$Z = \sum_{\tau} (e^{\frac{\Lambda}{8\pi G} \mathcal{A}})^{n_v} (e^{\frac{1}{4\pi G}})^{(2-2h)}$$

ce qui est équivalent à un modèle de matrices aléatoires, lui-même relié à un modèle de surface sans spins vivant sur cette surface, et dont l'action S est de la forme

$$S = -N \frac{g}{3} \text{tr } \Phi^3 + N \frac{1}{2} \text{tr } \Phi^2$$

avec $g = e^{\frac{\Lambda}{8\pi G} \mathcal{A}}$ (g est le poids associé à chaque triangle, donc, dans la version duale, à chaque nœud à 3 pattes de la surface) et une taille de matrice $N = e^{\frac{1}{4\pi G}}$. Le système où l'on a des quadrangulations, par exemple, donc un $\text{tr } \Phi^4$ à la place du $\text{tr } \Phi^3$ écrit précédemment doit, dans la limite continue redonner la même limite.

2.5.2 gravité + matière

On peut aussi étudier le problème du couplage entre gravitation et matière.

Une façon de faire cela simplement consiste à coupler la gravité à des bosons libres. On écrit alors :

$$S = \int \int dx^2 \sqrt{\det g} \left(\Lambda + \frac{R}{G} + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X_i \partial_\beta X_i \right)$$

où les X_i sont des “champs de matière”. Il faudra alors, non seulement sommer sur les surfaces, mais aussi intégrer sur les champs de matière.

Les spins sur surfaces aléatoires décrits précédemment (2.2) sont des degrés de liberté *non-géométriques* vivant sur ces surfaces, c'est-à-dire qu'ils peuvent être considérés comme des “toy models” représentant de la matière dans une théorie de gravité quantique bidimensionnelle. L'étude de modèles à plusieurs matrices avec une action a priori complexe, traduction matricielle de modèles de spins sur surfaces aléatoires, permet ainsi d'avoir accès au comportement de modèles de matière sur surface aléatoire de charges centrales conformes diverses.

2.6 Charge centrale conforme et modèles de matrices aléatoires

2.6.1 Rappels sur les théories conformes

Ce sont les théories qui sont invariantes par toute transformation respectant les angles : translations, rotations, homothéties, inversions ... D'une façon générale, une transformation conforme pourra s'écrire comme la composition de translations, rotations, et homothéties locales.

Les théories conformes apparaissent souvent en physique. Lorsqu'on se place au voisinage d'une transition critique de deuxième ordre, les longueurs de corrélation divergent. Par suite, en se plaçant à une échelle grande devant la longueur minimale (maille du réseau ...) du modèle, on a invariance d'échelle. Dans un grand nombre de cas, on a même invariance conforme. Pour une théorie unitaire bidimensionnelle, en particulier, l'invariance d'échelle implique l'invariance conforme. À cette invariance, comme à toute invariance est associé un certain nombre de propriétés intéressantes. Dans le cas d'une théorie conforme bidimensionnelle, les transformations conformes locales correspondent aux changements de variables analytiques : $z \rightarrow w(z)$, $\bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z})$. On écrit alors la réponse d'un opérateur $\phi(z, \bar{z})$ à une variation de la métrique $g^{\mu\nu}$, correspondant au changement de variable $z \rightarrow w(z)$ comme :

$$T(w)\phi(z, \bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (w - z)^{-2-n} L_n \phi(z, \bar{z})$$

avec

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}$$

Les L_n vérifient les relations de commutation :

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0}$$

qui définissent l'algèbre de Virasoro. c est appelée la charge centrale conforme de la théorie. Nous verrons qu'un grand nombre de propriétés physiques font intervenir cette charge centrale conforme. En particulier, nous verrons que l'on peut relier certains exposants critiques du modèle à la valeur de c .

2.6.2 Théorie discrète et théorie continue

Dans le cas de la théorie des cordes ou de la gravitation quantique, la théorie que l'on modélise par un modèle de matrices aléatoires est une théorie continue où l'on intègre sur toutes les métriques possibles.

On a en particulier ;

$$Z = \sum_{\text{topologies}} \int Dg_{\alpha\beta} DX_{\mu} e^{-\int \int dx^2 \sqrt{\det g} (\Lambda + \frac{R}{G} + g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X_{\mu} \partial_{\beta} X^{\mu})}$$

(g : métrique de la surface, Λ : constante cosmologique, G : constante de Newton, R : courbure de la surface)

pour la gravitation quantique avec des champs de matière X_{μ} .

Cette théorie possède un certain nombre de symétries, en particulier, si la constante cosmologique Λ est nulle, la théorie est invariante conforme. Or, en passant aux modèles de matrices, on a discrétisé notre théorie, brisant ainsi l'invariance conforme.

Si on veut retrouver cette invariance, ainsi qu'une théorie continue en prenant la limite appropriée, il faut se placer au voisinage des points critiques de notre modèle de matrices, où on sait que l'on a invariance d'échelle. Si l'on désire étudier simultanément des surfaces de toutes topologies, on pourra alors effectuer une double limite. Prenons l'exemple d'une action $S = N^2(\frac{\text{tr}\Phi^2}{2N} + g\frac{\text{tr}\Phi^4}{4N})$ (gravité pure). Sachant que l'on a un développement de la théorie en $\ln Z = \sum_h N^{2-2h} F_h(g)$ où h est le genre de la surface et $F_h(g) \sim (g - g_c)^{\frac{5}{2}(1-h)}$ quand g est au voisinage de g_c , en prenant la double limite d'échelle $N \rightarrow \infty$ avec $x = N^2(g - g_c)^{\frac{5}{2}}$ constant, on retrouve une théorie continue où le terme en x^{1-h} représente une théorie continue de gravité sur des surfaces de topologie h .

2.6.3 Charge centrale conforme associée à une théorie continue conforme donnée

Quelle est la valeur de la charge centrale conforme associée à une théorie continue conforme bidimensionnelle donnée Γ Comment la détermine-t-on Γ

Nous allons nous intéresser dans toute la suite à la contribution c des champs de matière à la charge centrale. Dans le cadre de la théorie des cordes, on sait que la charge centrale vaut $c = 1$ pour chaque champ scalaire bosonique libre ; on trouve qu'elle vaut $1/2$ pour un champ fermionique, et elle prend des valeurs rationnelles, voire réelles, pour des champs plus exotiques.

En terme de gravité quantique, si $c = 0$, cela signifie pour une théorie de gravité unitaire que l'on a une théorie de gravité pure, sans champ de matière. Par suite, les modèles les plus intéressants se situeront à $c \neq 0$.

D'autre part, on considère parfois c comme une dimension : en effet, en théorie des cordes, lorsqu'une corde évolue dans un espace-temps de dimension D , les champs X_μ sont les coordonnées de la surface générée par la corde. On a alors D champs bosoniques, soit une charge centrale $c = D$. Là encore, on voit que les théories les plus intéressantes sont celles où la charge centrale est $c \geq 1$.

Lorsqu'on résout un modèle de matrices aléatoires, on détermine en particulier la position des points critiques et la valeur des exposants critiques. A un point critique donné, en passant à la limite continue, on est susceptible de trouver une théorie continue conforme correspondant. On peut alors relier les exposants du modèle de matrices à la valeur de la charge centrale conforme de la théorie continue correspondante. L'exposant critique γ_s (exposant de corde), en particulier, décrit le comportement d'échelle de la fonction de partition en fonction de l'aire de la surface. Z se comporte, en fonction de la constante cosmologique Λ :

$$Z(\Lambda) \sim \Lambda^{2-\gamma_s}$$

ou encore, si on somme sur les surfaces à aire fixée, puis que l'on examine le comportement de $Z(\text{Aire})$ en fonction de l'aire :

$$Z(\text{Aire}) \sim \text{Aire}^{\gamma_s-3}$$

On montre, par des considérations de théorie conforme que γ_s vaut, pour des surfaces de topologie planaire, [22] :

$$\gamma_s = \frac{1}{12}(c - 1 - \sqrt{(25 - c)(1 - c)})$$

On peut ainsi relier les grandeurs de la théorie continue et celles du modèle de matrices.

Chapitre 3

Méthodes de résolution des modèles de matrices

3.1 Méthode du col

3.1.1 Théorème du col

Le théorème du col nous donne le développement en t , au voisinage de l'infini, d'une fonction du type $Z(t) = \int dx e^{-tf(x)}$. On a :

$$Z(t) = e^{-tf(x_c)} \sqrt{\frac{2\pi}{tf''(x_c)}} (1 + O(\frac{1}{t}))$$

où l'on peut aussi si nécessaire écrire explicitement les termes suivants du développement. x_c est le col de la variable x , c'est-à-dire que l'on a $f'(x_c) = 0$.

Si l'on s'intéresse à “l'énergie libre” du problème définie par $Z(t) = e^{-tF(t)}$, on voit que le développement de $F(t)$ quand t est grand est simplement dominé par f au col : $F \simeq f(x_c)$.

3.1.2 Application au modèle à une matrice

Position du problème

La fonction de partition du modèle à une matrice est plus complexe que la fonction $Z(t)$ puisqu'il s'agit d'une fonction de N^2 variables (les parties réelles et parties imaginaires des éléments de matrice de Φ) :

$$Z = \int d\Phi e^{-N^2 S(\Phi)} \quad d\Phi = \prod_{i < j} \Re \Phi_{ij} \Im \Phi_{ij} \prod_i d\Phi_{ii}$$

où Φ est une matrice hermitienne de taille N et $S(\Phi)$ une action invariante par transformation unitaire sur la matrice Φ . On prendra, pour fixer les idées,

$$S(\Phi) = \frac{1}{N} \text{tr } V(\Phi)$$

Nous voulons calculer Z ou $F = -\frac{1}{N^2} \ln Z$, dans la limite planaire ($N \rightarrow \infty$), et, le cas échéant, les autres termes du développement topologique en $\frac{1}{N^2}$ (Rappelons qu'en terme de surfaces, les termes en N^{-2h} dans l'énergie libre correspondent à des surfaces à h poignées).

La généralisation la plus “naturelle” de la méthode du col au cas à plusieurs variables semble être de déterminer le minimum de la fonction $S(\Phi)$ par rapport à toutes les variables $\Re \Phi_{ij}$ et $\Im \Phi_{ij}$ puis d'assimiler F à $S(\Phi)_{\text{col}}$ à l'ordre dominant quand $N \rightarrow \infty$. Cette généralisation de la méthode du col, quoique valable pour un modèle avec un nombre fini de variables, ne marche pas lorsque ce nombre tend vers l'infini aussi rapidement que le terme dans l'exponentielle.

Supposons que les valeurs propres de Φ sont d'ordre 1,

$$N \text{tr } V(\Phi) = N \sum_{i=1}^N V(\lambda_i)$$

est alors d'ordre N^2 et le nombre de variables est lui aussi d'ordre N^2 .

On peut aisément se convaincre, sur le modèle gaussien, par exemple, ou en revenant à la démonstration du théorème du col, que la version “intuitive” de la méthode du col ne marche pas ici.

Réécriture en terme de valeurs propres

La solution proposée par [14] consiste à réduire le nombre de variables, en mettant à profit l'invariance de l'action par transformation unitaire, avant d'utiliser la méthode du col. Ainsi, on réécrit la fonction de partition comme une intégrale sur les valeurs propres $\{\lambda_i\}$ de la matrice et sur les variables angulaires représentées par la matrice unitaire U diagonalisant Φ .

On a :

$$Z = \int dU \prod_i d\lambda_i \prod_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j| e^{-N \sum_i V(\lambda_i)}$$

Le jacobien de la transformation $d\Phi \rightarrow dU \prod d\lambda_i$ est $\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$ et est le carré du déterminant de Vandermonde $\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$. En effet, si

$\Phi = U\Lambda U^{-1}$, où Λ est la matrice Φ diagonalisée,

$$d\Phi = U d\Lambda U^{-1} + U[U^{-1}dU, \Lambda]U^{-1} = d\Lambda + [U^{-1}dU, \Lambda]$$

car $d\Phi$ est invariante par transformation unitaire. Le terme qui va donner le jacobien de la transformation est $dZ = [U^{-1}dU, \Lambda]$. On a

$$dZ_{ij} = (\lambda_j - \lambda_i)U_{ki}^* dU_{kj}$$

On voit que l'on peut finalement réécrire $d\Phi$ sous la forme

$$d\Phi = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_i d\lambda_i d\mu(U)$$

De l'invariance de $d\Phi$ on tire l'invariance de la mesure $d\mu(U)$ par transformation unitaire. Par suite $d\mu(U)$ est la mesure de Haar qui sera notée dU dans toute la suite de cet exposé.

Par suite,

$$Z \propto \int \prod_i d\lambda_i e^{-NE(\lambda_i)}$$

avec

$$E(\{\lambda_i\}) = \sum_i V(\lambda_i) - \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} \ln |\lambda_i - \lambda_j|$$

La méthode du col donne alors

$$V'(\lambda_i) - \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} = 0$$

pour la distribution de valeurs propres au col.

Limite continue et résolvante du modèle

On peut se représenter le problème comme un système de N valeurs propres placées dans un potentiel V et se repoussant entre elles.

Si la répulsion (qui vient simplement du jacobien du changement de variables) n'existait pas, toutes les valeurs propres, dans la limite N infini, tomberaient au fond du puits caractérisé par $V'(\lambda_i) = 0$. Comme les valeurs propres se repoussent, elles se répartissent en fait le long d'un support $[a, b]$ de taille finie. Le potentiel effectif : $V_{eff}(\lambda) = V(\lambda) - \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \ln |\lambda - \lambda_j|$ est constant le long de ce support.

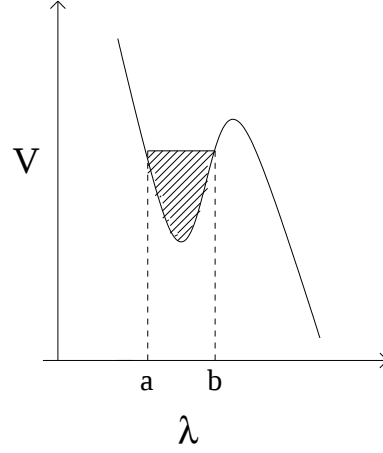


FIG. 3.1 – Distribution des valeurs propres dans un potentiel cubique $V(z) = \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{2}z^2$. $[a, b]$ est le support des valeurs propres et $V_{eff}(\lambda)$ est constant le long de $[a, b]$

En définissant la densité d'états

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(\lambda - \lambda_i)$$

et en se plaçant dans la limite continue, on a

$$V'(\lambda) - 2\mathcal{P}\mathcal{P} \int d\mu \frac{\rho(\mu)}{\lambda - \mu} = 0$$

sur le support de ρ , où $\mathcal{P}\mathcal{P}$ signifie partie principale. La résolvante $\omega(\lambda)$ est définie par :

$$\omega(\lambda) = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr} \frac{1}{\lambda - \Phi} \right\rangle = \int \rho(\mu) \frac{1}{\lambda - \mu} d\mu$$

On a donc, λ appartenant au support de ρ ,

$$V'(\lambda) - 2\Re(\omega(\lambda)) = 0$$

ω est une fonction analytique dans tout le plan complexe, sauf sur le support $[a, b]$ de ρ . Ceci suffit à déterminer la forme de la résolvante :

$$\omega(\lambda) = \frac{V'(\lambda)}{2} + \frac{M(\lambda)}{2} \sqrt{(\lambda - a)(\lambda - b)}$$

Le développement de l'expression ci-dessus pour ω au voisinage de l'infini, et la condition $\omega \sim \frac{1}{\lambda}$ (tirée de la définition de ω , sachant que $\int \rho(\mu) d\mu = 1$) suffisent à déterminer $M(\lambda)$ ainsi que les valeurs de a et b .

Sachant que $\omega(\lambda + i0) - \omega(\lambda - i0) = i\pi\rho(\lambda)$, on déduit de l'expression ci-dessus la distribution de valeurs propres qui, dans le cas gaussien ($g = 0$) prend la forme de la loi de demi-cercle donnée en introduction (2.1.3).

Remarquons que ces résultats sont valables uniquement dans la limite planaire. Pour accéder à des topologies différentes de la topologie planaire, il faudrait développer perturbativement au voisinage de l'infini. Il serait nécessaire d'inclure les termes suivants apparaissant dans la méthode du col, ainsi que les corrections venant du caractère discret des valeurs propres.

Points critiques

Le point critique du modèle correspond à la valeur de g pour laquelle l'énergie libre devient singulière.

Visuellement, cela correspond au moment où les valeurs propres commencent à “déborder” du puits. On peut alors étudier le comportement

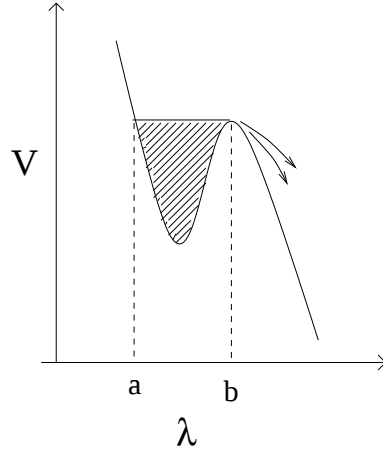


FIG. 3.2 – Distribution des valeurs propres au point critique du modèle : $g \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^2}{2}$

critique de ω , des bornes a et b de la coupure, ou des valeurs moyennes de traces. On peut en particulier déterminer la valeur de l'exposant de corde γ_s à partir du comportement de $\langle \frac{\text{tr } \Phi^n}{N} \rangle$ au voisinage de $g = g_c$. On a : $\langle \frac{\text{tr } \Phi^n}{N} \rangle \sim (g - g_c)^{1-\gamma_s}$.

3.1.3 Modèle à 2 matrices

Formule d'Itzykson-Zuber

Soit un modèle à 2 matrices :

$$Z = \int d\Phi_1 d\Phi_2 e^{-N^2[S(\Phi_1)+S(\Phi_2)-\frac{\beta}{N} \text{tr}(\Phi_1\Phi_2)]}$$

composé de deux modèles à une matrice couplés via l'action d'interaction $\frac{\beta}{N} \text{tr} \Phi_1 \Phi_2$.

Ce modèle est seulement invariant par transformation unitaire *globale* sur les matrices Φ_1 et Φ_2 . Si U_1 et U_2 sont les matrices diagonalisant Φ_1 et Φ_2 , et Λ_1 et Λ_2 les matrices diagonalisées correspondantes, on a :

$$Z = \int dU_1 dU_2 d\Lambda_1 d\Lambda_2 \Delta^2(\Lambda_1) \Delta^2(\Lambda_2) e^{-N^2[S(\Lambda_1)+S(\Lambda_2)-\beta \text{tr}(\Lambda_1 \Omega \Lambda_2 \Omega^{-1})]}$$

avec

$$\Delta(\Lambda) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) \quad \text{et} \quad \Omega = U_1^{-1} U_2$$

Les éléments de matrice de Ω sont les seules variables angulaires intervenant dans l'action. Il est possible d'effectuer cette intégrale [48], par des techniques que nous ne détaillerons pas ici, et l'on obtient alors l'expression suivante :

$$Z \propto \int d\Lambda_1 d\Lambda_2 \Delta(\Lambda_1) \Delta(\Lambda_2) e^{-N^2[S(\Lambda_1)+S(\Lambda_2)]} \det[e^{\beta \lambda_{1,i} \lambda_{2,j}}]$$

Cas à plusieurs coupures

Avec un potentiel cubique, il est impossible d'avoir deux coupures. Cependant, dès que l'on a un potentiel plus complexe, cette possibilité n'est plus à exclure.

Dans le cas d'un potentiel $V(\Phi)$ de degré n , avec k coupures, on écrit

$$\omega(\lambda) = \frac{V'(\lambda) - M(\lambda) \sqrt{(\lambda - a_1)(\lambda - b_1) \dots (\lambda - a_k)(\lambda - b_k)}}{2}$$

ce qui fait, $n + 2$ équations (pour avoir $\omega \sim \frac{1}{\lambda}$) et $n + k + 1$ inconnues. Ces $n + 2$ équations imposent la constance du potentiel effectif dans *chaque* puits.

Les inconnues restantes doivent être déterminées par des considérations de symétries, ou, dans le cas général, en imposant l'égalité des potentiels

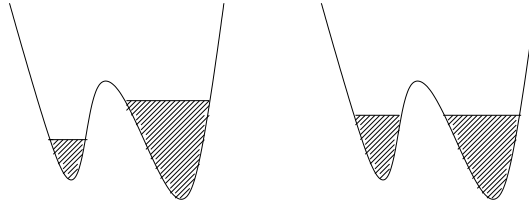


FIG. 3.3 – Potentiel et potentiel effectif dans le cas d'un support à plusieurs coupures. L'équation du col nous donne la condition pour avoir un minimum *local* de l'action seulement (figure de gauche). Pour avoir un minimum *global* il faut rajouter la condition que les potentiels effectifs sont identiques dans les différents puits (figure de droite).

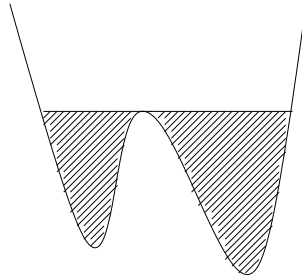


FIG. 3.4 – Point critique d'un exemple de modèle à deux coupures

effectifs $V(\lambda) - 2 \int \ln(\lambda - \mu) \rho(\mu) d\mu$ sur *tous* les segments $[a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k]$ constituant le support de ρ .

Le point critique du modèle quadratique donné en exemple précédemment correspond au moment où les deux coupures correspondant au support des valeurs propres fusionnent.

Il correspond aussi, comme nous l'avons vu dans le cas à une coupure, à un comportement singulier des valeurs moyennes d'opérateurs.

3.1.4 Modèle à plusieurs matrices

Le modèle à plusieurs matrices est a priori passablement plus complexe.

Les seuls modèles se résolvant assez facilement par la méthode du col sont les modèles de matrices couplées en chaîne. Pour un modèle à k matrices, on a

$$S = \sum_{i=1}^k S_i(\Phi_i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \operatorname{tr} \Phi_i \Phi_{i+1}$$

qui peut se réécrire

$$S = \sum_{i=1}^k S_i(\Lambda_i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \operatorname{tr} \Lambda_i \Omega_i \Lambda_{i+1} \Omega_i^{-1}$$

où les $\Omega_i = U_i^{-1} U_{i+1}$ sont $k-1$ matrices unitaires indépendantes. On peut alors utiliser pour effectuer chaque intégration sur Ω_i la formule de [48] pour le modèle à deux matrices.

Pour un “simple” modèle à 3 matrices couplées en boucle, cependant

$$S = \sum_{i=1}^3 S(\Phi_i) + \frac{1}{N} \operatorname{tr} (\Phi_1 \Phi_2 + \Phi_2 \Phi_3 + \Phi_3 \Phi_1)$$

se réécrit comme

$$S = \sum_{i=1}^3 S(\Lambda_i) + \frac{1}{N} \operatorname{tr} (\Lambda_1 \Omega_1 \Lambda_2 \Omega_1^{-1} + \Lambda_2 \Omega_2 \Lambda_3 \Omega_2^{-1} + \Lambda_3 (\Omega_1 \Omega_2)^{-1} \Lambda_3 (\Omega_1 \Omega_2))$$

et ne peut pas en principe s'effectuer simplement.

Nous verrons dans le chapitre 5 deux méthodes permettant de résoudre ce problème, l'une basée sur une idée de V. Kazakov et I. Kostov, développée par J.M. Daul puis plus récemment par P. Zinn-Justin, l'autre basée sur la méthode des équations du mouvement et développée (en parallèle avec le travail de P. Zinn-Justin) par Bertrand Eynard et moi-même.

3.2 Méthode des polynômes orthogonaux

La méthode des polynômes orthogonaux, tout comme la méthode du col, utilise l'écriture de Z en fonction des valeurs propres λ_i de la matrice :

$$Z = \int \prod_i d\lambda_i \prod_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j| e^{-N \sum_{i=1}^N V(\lambda_i)}$$

Cependant, c'est une méthode exacte pour tout N , et non une méthode semi-classique comme la méthode du col.

On remarque que la valeur moyenne d'un opérateur $\frac{\text{tr} A(\Phi)}{N}$ se réécrit en fonction des λ_i comme

$$\frac{\langle \text{tr} A(\Phi) \rangle}{N} = \frac{1}{Z} \int \prod_i d\lambda_i \left(\prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| e^{-N \sum_{i=1}^N \frac{V(\lambda_i)}{2}} \right)^2 \frac{\sum_{i=1}^N A(\lambda_i)}{N}$$

Par suite, si on note

$$\Psi = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) e^{-N \sum_{i=1}^N \frac{V(\lambda_i)}{2}}$$

on peut écrire, du moins formellement :

$$\frac{\langle \text{tr} A(\Phi) \rangle}{N} = \frac{\langle \Psi | A(\lambda) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}$$

où Ψ est une fonction d'onde à N particules : $\Psi(\{1 : \lambda_1, \dots, N : \lambda_N\})$. Ces particules sont des fermions car Ψ est antisymétrique en les λ_i .

De plus,

$$\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$$

est le carré du déterminant de Vandermonde $\det(\lambda_i^j)_{i,j \in [1,n]}$.

$\Psi(\{\lambda_i\})$ est par conséquent le déterminant de Slater $\det(\psi_j(\lambda_i))$, les $|\psi_j(\lambda_i)\rangle$ étant les fonctions d'onde à une particule :

$$\psi_j(\lambda) = \lambda^j e^{-N \frac{V(\lambda)}{2}}$$

Le modèle à une matrice se réinterprète donc comme un problème de fermions libres occupant les N premiers niveaux d'énergie et dont les fonctions d'onde sont les $\psi_j(\lambda)$. De ce point de vue, la répulsion entre valeurs propres proches est simplement l'expression du principe de Pauli.

On peut, par des combinaisons judicieuses de lignes et de colonnes, sans changer la valeur du déterminant, changer la fonction $\psi_j(\lambda)$ (qui vaut $\lambda^j e^{-N \frac{V(\lambda)}{2}}$) par $\phi_j(\lambda) = P_j(\lambda) e^{-N \frac{V(\lambda)}{2}}$, où $P_j(\lambda)$ est un polynôme de degré j , et de terme dominant λ^j .

La méthode des polynômes orthogonaux consiste, comme l'indique son nom, à choisir les $P_j(\lambda)$ afin que les fonctions $\phi_j(\lambda)$ forment une base orthogonale.

$$\int \phi_j(\lambda) \phi_l(\lambda) d\lambda = \delta_{j,l} h_l$$

On montre qu'on peut exprimer les fonctions de corrélation de valeurs propres en terme des P_j . La résolution du modèle de ramène alors au calcul des polynômes orthogonaux.

3.2.1 Fonction de partition et fonctions de corrélations

La fonction de partition $Z = \langle \Psi | \Psi \rangle$ où $\Psi = \det(\phi_j(\lambda_i))$ s'écrit simplement

$$Z = N! \prod_{i=0}^{N-1} h_n$$

Définissons les fonctions d'onde orthonormalisées :

$$\Psi_j(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{h_j}} \phi_j(\lambda)$$

la probabilité $\langle \frac{1}{N} \delta(\lambda_1 - \Phi) \dots \delta(\lambda_N - \Phi) \rangle$ d'avoir une valeur propre en $\lambda_1, \dots$, une en λ_N s'écrit

$$\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{N!} (\det \Psi_j(\lambda_i))^2$$

Que l'on peut réécrire

$$\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{N^N}{N!} \det |K(\lambda_i, \lambda_j)|$$

où le noyau K est défini par :

$$K(\lambda, \mu) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \Psi_i(\lambda) \Psi_i(\mu)$$

On a

$$\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \int d\lambda_{n+1} \dots d\lambda_N \rho(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

Ces fonctions de corrélation peuvent se réexprimer simplement grâce à la relation : $\int d\mu K(\lambda, \mu) K(\mu, \nu) = \frac{1}{N} K(\lambda, \nu)$ (théorème de Dyson [40]). En particulier, la densité de valeurs propres et la fonction à deux points pour les valeurs propres s'expriment en fonction de K , sous la forme :

$$\rho(\lambda) = K(\lambda, \lambda)$$

$$\frac{N-1}{N} \rho(\lambda, \mu) = \rho(\lambda) \rho(\mu) - K(\lambda, \mu)^2$$

3.2.2 Relation de récurrence entre les P_j et calcul des polynômes orthogonaux

A priori, on peut écrire (étant donné que les $P_k, k = 1, \dots, n+1$ forment une base de l'ensemble des polynômes de degré $\leq n+1$)

$$\lambda P_n = P_{n+1} + \sum_{k=1}^n s_{n,k} P_k$$

Soit, comme les P_k sont orthogonaux,

$$\int \lambda P_n P_k e^{-NV(\lambda)} d\lambda = h_k s_k$$

or $\lambda P_k = P_{k+1} + s_{k,k} P_k + s_{k,k-1} P_{k-1} + \dots$, donc l'intégrale précédente n'est non nulle que pour $k+1 \geq n$ soit $k \geq n-1$.

Par suite, la relation de récurrence entre les P_n se limite en fait à trois termes, et on peut écrire :

$$P_{n+1} = (\lambda + \beta_n) P_n + \alpha_n P_{n-1}$$

et on a aussi

$$\frac{\partial P_n}{\partial \lambda} = n P_{n-1} + \sum_{i=2}^n \gamma_i P_{n-i}$$

Le calcul des P_n se ramène alors à celui des α_n et des β_n .

On introduit les notations :

$|n\rangle$ pour $\Psi_n(\lambda)$, Q pour l'opérateur multiplication par λ , et P pour l'opérateur $\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \lambda}$. $\hat{n}$ sera l'opérateur tel que

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$$

Les α_n et les β_n seront notés $\hat{\alpha} = \alpha(\hat{n})$ et $\hat{\beta} = \beta(\hat{n})$. Enfin, $\hat{x}$ est l'opérateur tel que

$$\hat{x}|n\rangle = |n-1\rangle$$

Alors, les équations précédentes se réécrivent comme :

$$\begin{aligned} Q &= \hat{x}^\dagger \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\alpha} \hat{x} \\ P + \frac{1}{2} V'(Q) &= \frac{1}{\hat{\alpha}} \hat{x} \frac{\hat{n}}{N} + \sum_{k \geq 2} \hat{\gamma}_k \hat{x}^k \end{aligned}$$

Si on développe tous les termes de l'équation ci-dessus en puissances (positives et négatives) de $\hat{x}$, on trouve que les puissances négatives du développement de P en $\hat{x}$ sont identiques à celles de $-\frac{1}{2} V'(Q)$. En utilisant l'antihermiticité de P (qui découle directement de sa définition) et sachant que $\hat{x}^\dagger = \frac{1}{\hat{x}}$, on peut en déduire la totalité du développement de P en fonction de celui de $V'(Q)$.

$$P = \frac{1}{2} (V'(Q)_+ - V'(Q)_-)$$

Le signe $+$ (resp. $-$) indique que l'on ne prend que les puissances positives (resp. négatives) du développement de $V'(Q)$ en puissances de $\hat{x}$.

$V'(Q)$ pouvant se réécrire en fonction des α_n et β_n , on a finalement les équations :

$$V'(Q)_1 = \frac{1}{\hat{\alpha}} \hat{x} \frac{\hat{n}}{N}$$

$$V'(Q)_0 = 0$$

où $V'(Q)_k$ est le terme d'ordre k du développement de $V'(Q)$ en puissances de $\hat{x}$.

Ceci nous donne les équations de récurrence pour les α_n et les β_n . Leur calcul permet d'obtenir à leur tour les expressions des polynômes orthogonaux.

Plutôt que de calculer les α_n et β_n pour toutes les valeurs de n , on est bien souvent intéressé seulement par les valeurs de n proches de N , avec $N \rightarrow \infty$. Dans cette limite, il est possible de simplifier les expressions ci-dessus, et, dans le cas où le support des valeurs propres est connexe $[a, b]$, α_n et β_n tendent vers des valeurs constantes :

$$\alpha = \frac{a-b}{4} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{a+b}{2}$$

3.3 Méthode des équations de boucles

Soit la fonction de partition :

$$Z = \int \prod_i d\Phi_i e^{-N^2 S(\{\Phi_i\})} \quad (3.1)$$

Comme toute intégrale, Z est invariante par changement de variable, pour peu que ce changement de variable ne soit pas singulier. Ainsi, si on écrit la transformation *infinitésimale*

$$\Phi_i = \Phi'_i + \epsilon f_i(\{\Phi'_j\})$$

de jacobien

$$1 + \epsilon J(\{\Phi'_j\}) + O(\epsilon^2)$$

on a, en développant l'intégrande au premier ordre en ϵ ($\epsilon \ll \frac{1}{N^2}$) et en écrivant $S(\{\Phi_i\}) = S(\{\Phi'_i\}) + \epsilon \Delta S(\{\Phi'_i\})$:

$$Z = \int \prod_i d\Phi'_i e^{-N^2 S(\{\Phi'_i\})} (1 - N^2 \epsilon (\Delta S(\{\Phi'_i\}) - J(\{\Phi'_i\}))) \quad (3.2)$$

Ceci nous donne, en comparant à Eq. (3.1), l'équation :

$$\langle \Delta S(\{\Phi_i\}) - J(\{\Phi_i\}) \rangle = 0 \quad (3.3)$$

où $\langle A \rangle$ représente

$$\frac{\int \prod_i d\Phi_i e^{-N^2 S(\{\Phi_i\})} A}{\int \prod_i d\Phi_i e^{-N^2 S(\{\Phi_i\})}}$$

Cette équation est appelée équation du mouvement, ou encore équation des boucles. Elle est la conséquence de la conservation de Z par le changement de variables $\Phi_i \rightarrow \Phi_i + \epsilon f_i(\{\Phi_i\})$

3.3.1 Limite planaire et théorème de factorisation

Les équation du mouvement (autant que de changements de variables infinitésimaux) donnent un grand nombre de relations entre des valeurs moyennes d'opérateurs du modèle.

Sont-elles suffisantes pour calculer ces valeurs moyennes Γ

Examinons, pour fixer les idées, le cas d'un modèle à une matrice

$$S = \frac{1}{N} \text{tr } V(\Phi)$$

Le changement de variable

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon \Phi^n$$

donne l'équation du mouvement (a priori valable pour tout N)

$$\left\langle \frac{\text{tr } V'(\Phi) \Phi^{n-1}}{N} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\text{tr } \Phi^i}{N} \frac{\text{tr } \Phi^{n-1-i}}{N} \right\rangle = 0 \quad (3.4)$$

Le théorème de factorisation nous permet d'écrire, pour un modèle de matrice général, mais dans la limite $N \rightarrow \infty$ (limite planaire) uniquement

$$\left\langle \frac{\text{tr } A}{N} \frac{\text{tr } B}{N} \right\rangle = \left\langle \frac{\text{tr } A}{N} \right\rangle \left\langle \frac{\text{tr } B}{N} \right\rangle \quad (3.5)$$

Par suite, on a

$$\left\langle \frac{\text{tr } V'(\Phi) \Phi^n}{N} \right\rangle - \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle \frac{\text{tr } \Phi^i}{N} \right\rangle \left\langle \frac{\text{tr } \Phi^{n-1-i}}{N} \right\rangle = 0 \quad (3.6)$$

qui nous permet de ne faire intervenir dans les équations du mouvement, dans la limite planaire, que les $u_n = \left\langle \frac{\text{tr } \Phi^n}{N} \right\rangle$. L'équation 3.6 du mouvement est alors une relation de récurrence reliant, pour un potentiel de degré d , u_{d-2+n} à des termes d'ordre inférieur.

3.3.2 Exemple : résolution explicite du modèle cubique

Soit

$$V(\Phi) = \frac{g}{3} \Phi^3 + \frac{1}{2} \Phi^2$$

On voudrait calculer la résolvante

$$\omega(z) = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr } \frac{1}{z - \Phi} \right\rangle$$

du modèle, dont le développement nous donne les valeurs moyennes des $\text{tr } \Phi^n$.

Soit le changement de variable :

$$\Phi = \Phi' + \epsilon \frac{1}{z - \Phi'}$$

On a

$$\Delta S = \frac{\text{tr } V'(\Phi') \Phi'^n}{N}$$

En ce qui concerne le jacobien de la transformation,

$$\frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \Phi'_{l,m}} = \delta_{i,l} \delta_{j,m} + \epsilon \sum_{k,n} z^{-n-1} \Phi'_{il}{}^k \Phi'^{n-1-k}_{mj}$$

Les seuls termes qui contribuent, à l'ordre 1 en ϵ au jacobien sont les termes diagonaux : $i = l$ et $j = m$. Celui-ci vaut alors

$$1 + \epsilon \left(\frac{1}{N} \text{tr } \frac{1}{z - \Phi'} \right)^2 + O(\epsilon^2)$$

L'équation du mouvement correspondante est (en remplaçant la notation Φ' par Φ)

$$g \left\langle \frac{1}{N} \text{tr } \Phi^2 \frac{1}{z - \Phi} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{N} \text{tr } \Phi \frac{1}{z - \Phi} \right\rangle - \omega(z)^2 = 0$$

soit en simplifiant

$$(g z^2 + z) \omega(z) - g t_\Phi - g z - 1 - \omega(z)^2 = 0 \quad (3.7)$$

avec la notation :

$$t_{\Phi^n} = \left\langle \frac{\text{tr } \Phi^n}{N} \right\rangle$$

Ceci nous donne immédiatement :

$$\omega(z) = \frac{(gz + 1)z \pm \sqrt{z^2(gz + 1)^2 - 4(gz + 1 + g t_\Phi)}}{2} \quad (3.8)$$

La propriété

$$\omega(z) \sim \frac{1}{z}$$

à l'infini nous permet de choisir la bonne détermination de ω . Il reste cependant une inconnue : t_Φ , en fonction de laquelle on peut écrire tous les t_{Φ^n} . On peut la déterminer en ajoutant une condition physique : la coupure de ω correspond au support des valeurs propres de la matrice hermitienne Φ et

est donc un segment $[a, b]$ de l'axe réel. Le polynôme placé sous la racine de l'expression de ω a donc une solution double ainsi que deux solutions simples réelles. Ceci suffit à déterminer totalement ω et t_Φ .

Le modèle est critique quand $t_\Phi(g)$ est singulier. On obtient ainsi $g_{critique}$. On peut aussi remarquer que $\omega(z)$ change elle aussi de comportement en $g = g_c$:

$$\omega \sim (z - b)^{\frac{3}{2}}$$

au lieu de $(z - b)^{\frac{1}{2}}$. Déterminer la condition pour laquelle ω se comporte en puissance $\frac{3}{2}$ peut être une autre méthode pour trouver la position du point critique.

On peut remarquer ici que $g = 0$ correspond au cas gaussien. On a alors, comme $\omega(z + i0) - \omega(z - i0) = i\pi\rho(z)$, la formule $\rho(z) = \frac{1}{\pi}\sqrt{z^2 - 4}$. On retrouve ici la loi de distribution en demi-cercle.

3.3.3 Cas à plusieurs matrices

A priori, dans le cas à plusieurs matrices, le nombre d'opérateurs apparaissant dans les équations du mouvement est nettement plus important : pour un modèle à k matrices, pour une trace d'ordre n (contenant n matrices Φ_i), on a tous les opérateurs du type

$$\text{tr} \prod_{i=1}^n \Phi_{\epsilon_i} \quad \text{où} \quad \epsilon_i = 1, 2 \dots k$$

Cela fait un nombre d'opérateurs de l'ordre de k^n .

Certes, le nombre d'équations du mouvement impliquant uniquement des traces d'ordre inférieur ou égal à n est aussi très élevé, cependant, il n'existe pas de technique permettant a priori d'obtenir une relation de récurrence simple et de calculer, comme dans le cas à une matrice, toutes les valeurs moyennes de traces, en fonction d'un nombre fini d'inconnues.

3.4 Groupe de renormalisation

3.4.1 Motivations

La méthode du col et la méthode des polynômes orthogonaux utilisent toutes deux l'expression de la fonction de partition du modèle de matrices en terme de valeurs propres.

Pour cela, on réécrit la mesure en fonction des valeurs propres et des variables angulaires et on intègre sur ces-dernières. Nous avons vu, cependant,

que ceci n'est aisé que si l'on peut se ramener à une série d'intégrations par la formule de [48] sur des variables angulaires indépendantes.

Cette condition nous limite a priori à des modèles de matrices couplées en chaîne ou en arbre et exclut en principe les modèles, même simples, où les matrices sont couplées en boucle. De plus, si les modèles que l'on sait résoudre (chaînes et arbres) nous permettent d'avoir accès à des charges centrales $c \leq 1$, on n'a jusqu'à présent su résoudre, par quelque méthode que ce soit, aucun modèle de charge centrale conforme supérieure à 1.

Les méthodes de groupe de renormalisation ont été développées pour pallier à ces difficultés en offrant une nouvelle technique d'investigation des modèles de matrices. On espère en particulier accéder, par le biais de cette méthode approchée, à des modèles complexes, qui sont restés jusqu'ici inaccessibles aux méthodes exactes. On espère aussi mieux comprendre, et pourquoi pas dépasser, la "barrière"    $c = 1$.

3.4.2 Principe de la méthode

Notations :

Un modèle de matrices est caractérisé par :

- La taille N de sa (ou ses) matrice(s) Φ_N
- Son action S , que l'on va décrire par l'ensemble de ses constantes de couplage $g = \{g_1, \dots, g_n\}$.

On écrit alors la fonction de partition : $Z_N(g) = \int d\Phi_N e^{-N^2 S(\Phi_N, g)}$.

Renormaliser le modèle consiste à réexprimer la fonction de partition $Z_{N+1}(g)$ comme $Z_N(g + \delta g)$, fonction de partition d'un modèle de même forme, mais dont la (les) matrice(s) est (sont) de taille inférieure, et dont les constantes de couplage ont été modifiées.

Pour passer d'une matrice de taille $(N + 1) \times (N + 1)$ à une matrice de taille $N \times N$, on écrit

$$\Phi_{N+1} = \begin{pmatrix} \Phi_N & v \\ v^* & \alpha \end{pmatrix}$$

où α est un réel et v un vecteur colonne à N composantes, et où l'on intègre sur v , v^* et α .

On a alors :

$$Z_{N+1}(g) = \int d\Phi_{N+1} e^{-(N+1)^2 S(\Phi_{N+1}, g)} = \int d\Phi_N dv dv^* d\alpha e^{-(N+1)^2 S(\Phi_N, v, v^*, \alpha, g)}$$

soit, après intégration, et en ne gardant que les deux premiers ordre du

développement en $\frac{1}{N}$:

$$Z_{N+1}(g) = \int d\Phi_N e^{-N^2 S'(\Phi_N)}$$

Pour peu que l'on puisse réécrire la nouvelle action S' sous la même forme que l'action de départ, mais avec des constantes de couplages différentes comme $S(\Phi_N, g + \delta g)$, nous obtenons le changement de constante de couplage δg équivalent à un changement de taille de la matrice : $\frac{\delta N}{N} = -\frac{1}{N}$.

3.4.3 Obtention des points et des exposants critiques

On espère que la méthode de groupe de renormalisation pourra s'appliquer alors même que l'on ne sait pas résoudre exactement le problème car calculer Z_N revient à intégrer sur les N^2 variables de Φ_N , tandis que renormaliser le modèle consiste à intégrer sur $(2N + 1)$ composantes réelles seulement.

La contrepartie de cette simplicité est que l'on obtient un résultat moins complet que dans le cas des méthodes exactes : en particulier, on ne connaît pas la valeur de Z .

Cependant, connaître l'équation donnant l'évolution de g est suffisant pour obtenir les renseignements les plus importants sur le modèle : points critiques, exposants critiques ...

Expression de l'invariance d'échelle

On sait que, d'une façon générale, il y a invariance d'échelle au voisinage des points critiques d'un problème. Dans le cadre des modèles de matrices aléatoires, on va considérer la taille des matrices comme le facteur d'échelle. Si l'on exprime cette propriété, on a, dans le cas où il n'y a qu'une seule constante de couplage g , le point critique étant noté g_c :

$$Z_{N'}(g, \Phi_{N'}) = Z_N((g - g_c)(\frac{N'}{N})^\rho + g_c, \Phi_N)$$

à une constante de proportionnalité $c(g)$ près, ne dépendant pas de Φ , et régulière en g .

Si on écrit l'équation d'évolution générale pour l'énergie libre du modèle $F = -\frac{1}{N^2} \ln Z$, on a [15] :

$$N \frac{\partial}{\partial N} F = \beta_i(g) \frac{\partial}{\partial g_i} F + r(g)$$

où

$$\beta_i = N \frac{\partial g_i}{\partial N}$$

traduit l'évolution des constantes de couplage, et où $r(g)$ est une fonction régulière en g issue de la constante de proportionnalité $c(g)$.

Dans le cas où on peut se ramener à un modèle à une seule constante de couplage, le point critique est un point fixe du groupe de renormalisation et vérifie :

$$\beta(g) \simeq \rho(g - g_c) \text{ au voisinage de } g_c \quad \text{soit} \quad \beta(g_c) = 0$$

Détermination des points critiques à partir des flots

D'une façon plus générale, les points critiques décrivent un changement dans le comportement du modèle. Les lignes de flot du groupe de renormalisation sont l'ensemble des valeurs des constantes de couplages, obtenues en faisant changer N , à partir d'un ensemble de constantes de couplages de départ donné. Le long d'une ligne de flot du groupe de renormalisation, le comportement physique reste le même. La ligne critique marque la transition entre les domaines de couplages où l'on est attiré par des points fixes du groupe de renormalisation différents. Pour des raisons topologiques simples, la ligne critique est elle-même une ligne de flots du groupe de renormalisation. Les points de la ligne critique sont attirés vers un point fixe qui possède au moins une direction instable : le point fixe critique du modèle.

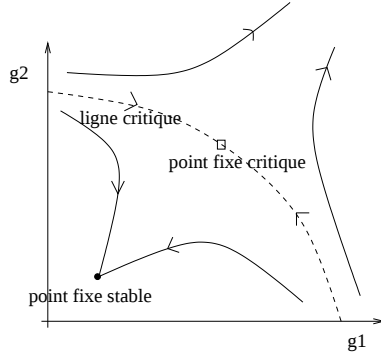


FIG. 3.5 – Les points critiques (qui forment ici une ligne critique) marquent la séparation entre les points de l'espace des constantes de couplage attirés vers des points fixes différents.

Exposants critiques

D'autre part, si on linéarise les $\beta_i(g)$ au voisinage d'un point fixe g_{ic}^* du groupe de renormalisation, on a, en fonction des constantes de couplage linéarisées $g_i^* : \beta_i \propto \lambda_i(g_i^* - g_{ic}^*)$ soit

$$N \frac{\partial F}{\partial N} = \lambda_i(g_i^* - g_{ic}^*) \frac{\partial F}{\partial g_i^*}$$

où les λ_i sont reliés aux singularités de F , donc aux exposants critiques (cf ch 1).

Exemple : modèle à une matrice :
au voisinage du point critique,

$$N \frac{\partial F}{\partial N} = \lambda(g - g_c) \frac{\partial F}{\partial g}$$

la partie singulière de F est donnée par la solution de l'équation sans second membre : $F_{\text{sing}} = N^2(g - g_c)^{2/\lambda}$
soit

$$\gamma_s = 2 - 2/\lambda$$

γ_s est l'exposant de corde que nous avons défini au 2.6.3.

À présent, dans les chapitre 4, 5, et 6 suivants, nous allons décrire le travail que nous avons effectué dans les articles inclus à la fin de cet ouvrage (chapitre 8).

Chapitre 4

Prédire l'allure des flots ...

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord expliquer comment on peut relier [16] l'allure des flots de groupe de renormalisation à la valeur de la charge centrale conforme. Nous verrons ensuite la méthode que nous avons mise au point [1] pour mettre en œuvre les techniques de groupe de renormalisation. Nous verrons enfin comment nous avons amélioré la précision des points et exposants critiques, et nous décrirons ceux de nos résultats qui viennent à l'appui de la conjecture de [16].

4.1 La conjecture

Les modèles qui nous intéressent le plus sont les modèles de matrices correspondant à une charge centrale conforme $c > 1$: il a été en effet jusqu'à présent impossible d'en trouver et d'en résoudre un seul. La physique dans ce domaine devrait pourtant être plus intéressante, que ce soit du point de vue de la gravitation quantique ou de la théorie des cordes.

Dans toute cette partie, les modèles que nous allons étudier sont des modèles bien connus de charge centrale conforme $c < 1$. Cependant, la connaissance des flots de renormalisation de modèles de charge centrale $c \leq 1$, même déjà résolus par ailleurs, pourrait faire avancer la compréhension des problèmes à $c > 1$. En effet, F. David [16] a émis une conjecture sur l'allure des flots des modèles de charge centrale $c < 1$, ainsi que sur leur évolution lorsque $c \rightarrow 1$. Il prédit aussi le comportement de ces modèles lorsque c a dépassé 1. La vérification de cette conjecture, ne serait-ce que pour des modèles de $c \leq 1$, ferait grandement avancer la compréhension de la barrière à $c = 1$.

Nous allons à présent expliquer cette conjecture.

Prenons l'exemple d'un modèle simple (introduit pour la première fois dans [46]) :

$$S = \frac{\text{tr}\Phi^2}{2N} - g \frac{\text{tr}\Phi^4}{4N} - \frac{x}{2} \left(\frac{\text{tr}\Phi^2}{2N} \right)^2$$

Lorsque $x = 0$, on retrouve un modèle de gravité pure : $S = \frac{\text{tr}\Phi^2}{2N} - g \frac{\text{tr}\Phi^4}{4N}$ (voir 2.5).

En terme de surfaces aléatoires, résoudre ce modèle revient à sommer sur des surfaces régulières, discrétisées par l'intermédiaire de quadrangulations, avec une action proportionnelle à l'aire de celles-ci.

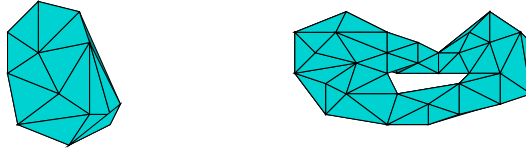


FIG. 4.1 – Gravité pure (avec une action en $\text{tr}\Phi^3$) : dans la limite $N \rightarrow \infty$, seules les surfaces de topologie planaire (à gauche) sont autorisées

Lorsque $x \neq 0$, par contre, le terme en x introduit des singularités dans la surface. Plus précisément, il signifie que l'on peut avoir des surfaces collées l'une à l'autre par une arête : le poids d'un tel branchement dans la fonction de partition est alors x . On dit que x est un terme de branchement.

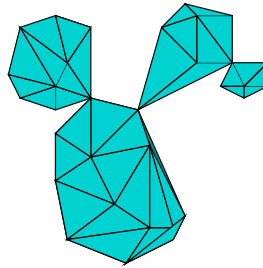


FIG. 4.2 – Gravité et termes de branchement. Lorsque ce-dernier est non nul, on engendre des surfaces singulières composées de plusieurs surfaces collées (“branchées”) en un point.

On considèrera dans la conjecture des problèmes plus généraux, pouvant

être dominés, selon les régions de constante de couplage où l'on se place, soit par la gravité avec ou sans champ de matière, soit par les termes de branchement. Cependant, on notera toujours la constante de couplage correspondant physiquement à la gravité g , et la constante de couplage de branchement x .

Le modèle simple dont l'action a été donnée plus haut est un modèle assez générique, puisqu'il mêle les deux types de comportement : gravité et branchements. On peut le résoudre exactement, et sa solution est donnée par la figure 4.3.

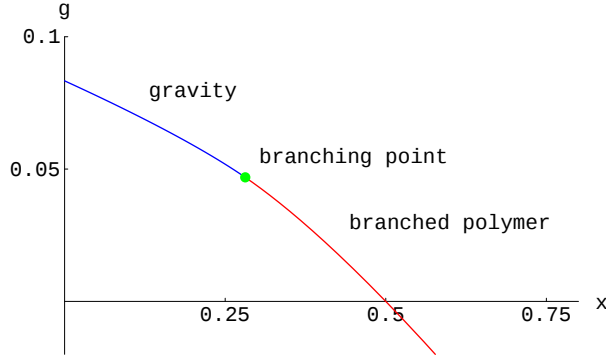


FIG. 4.3 – Solution exacte : ligne critique et point bicritique (branching point) du modèle suivant : $S = \frac{\text{tr } \Phi^2}{2N} - g \frac{\text{tr } \Phi^4}{4N} - \frac{x}{2} \left(\frac{\text{tr } \Phi^2}{2N} \right)^2$

Lorsqu'on se place à $x = 0$ (gravité pure), le point critique du modèle est : $g_c = -\frac{1}{12}$. Le point critique du modèle à $g = 0$ (termes de branchement seuls) correspond à une valeur de x : $x_c = -\frac{1}{2}$. L'ensemble des points critiques du plan (g, x) constitue la ligne critique dessinée sur la figure 4.3. Le point bicritique du modèle sera noté C.

La solution exacte nous permet aussi d'avoir accès aux exposants critiques du modèle : entre le point critique de gravité pure et C, on a $\gamma_s = -\frac{1}{2}$, par suite, le comportement est celui de la gravité. Entre C et le point critique de branchement, par contre $\gamma_s = +\frac{1}{2}$, ce qui correspond à un comportement critique de branchement. Enfin, en C, $\gamma_s = \frac{1}{3}$.

Conjecture quand $c < 1$

La conjecture nous donne a priori l'allure des flots de groupe de renormalisation d'un modèle générique (voir figure 4.4), avec un axe pour le couplage de la gravité (ici g), et un axe pour la constante de couplage de branchement (ici x). Les flèches indiquent le sens de l'évolution des constantes de couplage sous l'action du groupe de renormalisation, lorsque N décroît. La ligne critique marque la séparation entre deux comportements. D'un côté, les flots sont attirés par le point fixe gaussien (g et x nuls, l'action est alors quadratique) qui est dans tous les cas un point fixe purement attractif du modèle. De l'autre, ils divergent. Sur la ligne critique, on place le point bi-critique C dont on sait qu'il représente un point totalement répulsif. On sait de plus que la variété où l'on n'a que des termes de branchements ($g = 0$) représente une sous-variété fixe du problème.

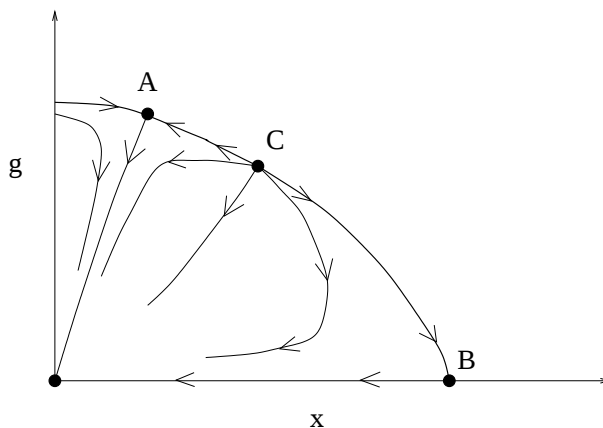


FIG. 4.4 – Allure conjecturée des flots de renormalisation pour un modèle de $c < 1$ (figure tirée de [16])

On conjecture enfin l'existence d'un point fixe de gravité A (avec $\gamma_s = -\frac{1}{2}$), vers lequel sont attirés tous les points critiques d'exposant de corde $\gamma_s = -\frac{1}{2}$.

A l'époque où cette conjecture a été faite (1997), les flots de groupe de renormalisation de ce modèle avaient été calculés de manière extrêmement élémentaire, ce qui donnait la figure 4.5.

On voit que les calculs étaient trop approchés pour confirmer ou infirmer notre hypothèse.

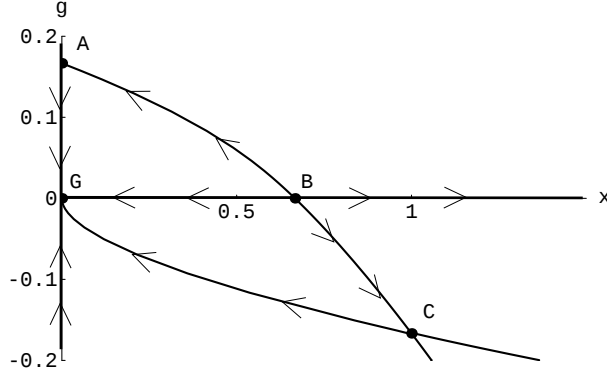


FIG. 4.5 – Premiers calculs approchés de flots (figure tirée de [16])

Evolution des flots pour $c \rightarrow 1$ et cas $c = 1$

Tout l'intérêt de la conjecture réside dans l'évolution des points A et C en fonction de la valeur de la charge centrale c .

On sait que l'exposant de gravité est relié à la charge centrale par la formule $\gamma_s = \frac{1}{12}(c - 1 - \sqrt{(25 - c)(1 - c)})$ donnée au 2.6.3. (Par exemple, si $c = 0$, ce qui correspond à un modèle de gravité pure, on retrouve $\gamma_s = -\frac{1}{2}$). On peut montrer que, dans la limite planaire ($N \rightarrow \infty$), l'exposant γ' au point C est relié à γ_s par la formule $\gamma' = \frac{\gamma_s}{\gamma_s - 1}$ (soit, quand $c = 0$, $\gamma' = \frac{1}{3}$).

Lorsqu'on linéarise les flots au voisinage des points fixes A et C, γ_s et γ' sont reliés à l'évolution des constantes de couplage linéarisées au voisinage du point fixe (g^*, x^*) par la formule $\gamma = 2 - 2/\lambda$ où $N \frac{\partial g^*}{\partial N} = \lambda x^*$. En particulier, si $\lambda > 0$, la direction est répulsive (les flots vont dans le sens des N décroissants) tandis qu'elle est attractive si $\lambda < 0$.

Lorsque $c \rightarrow 1$, γ_s et γ' tendent tous deux vers 0, donc $\lambda_C = \lambda_A = 1$. D'autre part, si on calcule λ' défini par $N \frac{\partial g}{\partial N} = \lambda' g^*$; $\lambda'_C > 0$ et $\lambda'_A < 0$ lorsque $c < 1$ (ce qui correspond bien au fait que C est totalement répulsif, et que A a une direction attractive) mais λ'_C et λ'_A tendent tous deux vers 0 quand $c \rightarrow 1$.

Ces deux arguments suggèrent la conjecture suivante : quand c se rapproche de 1, les points fixes C et A se rapprochent.

On a montré que, si tout au moins le point fixe A existe bien comme on l'a supposé, les exposants de A et de C sont confondus lorsque $c = 1$.

On conjecture donc que, quand $c = 1$, C et A sont confondus, ce qui donne l'allure donnée sur la figure 4.6 pour les flots de renormalisation du problème.

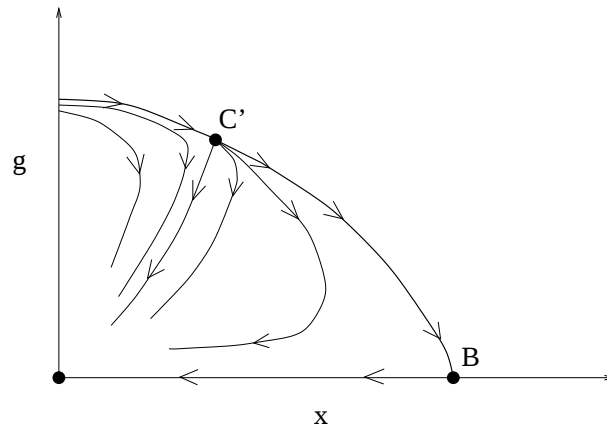


FIG. 4.6 – Flots de renormalisation conjecturés pour un modèle de $c = 1$ (figure tirée de [16])

Flots du modèle quand “on dépasse $c = 1$ ”

Enfin, en prolongeant ce comportement lorsque $c > 1$, on obtient la figure 4.7.

La vérification de cette conjecture serait très importante (ne serait-ce que si on la vérifie pour $c \leq 1$) car la figure ci-dessus nous montre que les flots du modèle ainsi décrit sont attirés vers l'axe $g = 0$ (branchements “purs”).

Il n'y a pas de point fixe à $g \neq 0$, et donc pas d'exposant critique qui ne soit pas un exposant d'un modèle de branchements, ni de théorie continue “intéressante” à $c > 1$ (i.e. une théorie de gravité+matière bidimensionnelle).

Remarque : on peut toujours imaginer que, même si la conjecture s'avère vraie, lorsque le mécanisme qui nous donne, “au-delà de $c = 1$, une théorie

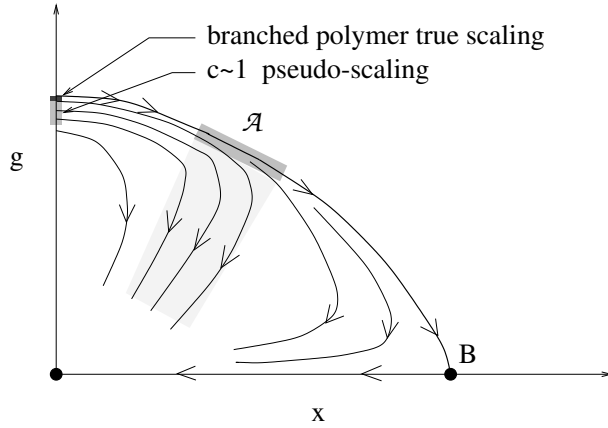


FIG. 4.7 – Flots de renormalisation conjecturés pour un modèle “au-delà de $c = 1$ ” (figure tirée de [16])

continue peu intéressante sera mieux compris, on pourra modifier intelligemment cette théorie pour obtenir, cette fois, une théorie continue de gravité à $c > 1$.

4.2 Vérifications pour le modèle à une matrice

Les modèles à une matrice sont certainement les mieux connus : on ne s’intéresse donc pas à eux pour trouver la ligne critique ni les exposants critiques, par exemple, puisqu’on les connaît déjà.

Cependant, précisément parce que l’on possède à leur sujet des résultats exacts, il est essentiel, avant toute étude plus complexe, de mettre à l’épreuve les techniques de flot de renormalisation sur un de ces modèles simples et connus, afin de déterminer en particulier le degré de précision auquel on peut s’attendre.

Enfin, si les modèles à une matrice auxquels je me suis intéressée sont déjà résolus par des méthodes exactes, une partie des résultats obtenus ici, comme l’allure des flots ainsi que l’existence d’un point fixe de gravité (le point fixe A du 3) nous restaient inconnues, car ce sont des données propres à la technique de flot de renormalisation. Or ces données sont justement celles que l’on cherche pour étayer enfin la conjecture décrite en 3 par des résultats concrets, “expérimentaux”.

4.2.1 Premières approximations

Ecrivons un modèle de matrices très simple, par exemple le modèle de gravité pure où :

$$S = N^2 \left(\frac{\text{tr} \Phi^2}{2N} + g \frac{\text{tr} \Phi^4}{4N} \right) \quad \text{avec} \quad g < 0$$

Nous allons calculer la première étape de l'évolution de S sous l'action du groupe de renormalisation. On a

$$Z_{N+1} = \int d\Phi_{N+1} e^{-(N+1)^2 \left(\frac{\text{tr} \Phi^2}{2(N+1)} + g \frac{\text{tr} \Phi^4}{4(N+1)} \right)}$$

avec les notations :

$$\Phi_{N+1} = \begin{pmatrix} \Phi & v \\ v^* & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \Phi \text{ est une matrice } N \times N \\ v \text{ un vecteur colonne} \\ \alpha \text{ un réel} \end{array}$$

$$\frac{\text{tr} \Phi^n}{nN} = T_n = \frac{\tau_n}{n} \quad \text{et} \quad V = \frac{S}{N^2} = T_2 + gT_4$$

Remarque : on montre que T_n , v^*v , et α sont tous d'ordre 0 en $1/N$.

Si on calcule, à l'ordre 1 en $\frac{1}{N}$, $\frac{\text{tr} \Phi^2}{2}$ et $\frac{\text{tr} \Phi^4}{4}$ en fonction de Φ , v et α , on obtient

$$Z_{n+1} = \int d\Phi e^{-N^2 \left((1 + \frac{1}{N})(T_2 + gT_4) \right)} \int dv dv^* d\alpha f_0(v, v^*, \alpha, \Phi)$$

avec

$$f_0(v, v^*, \alpha, \Phi) = e^{-N(v^*(1+g\Phi^2+g\alpha\Phi+g\alpha^2)v + \frac{(v^*v)^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4})}$$

En utilisant la méthode du col, on trouve que, lorsque $N \rightarrow \infty$, α peut être remplacé par sa valeur moyenne. En utilisant ensuite la parité de l'action de notre modèle, on a immédiatement $\langle \alpha \rangle = 0$.

Pour le calcul de l'intégrale en v :

$$\int dv dv^* e^{-N(v^*(1+g\Phi^2)v + \frac{(v^*v)^2}{2})}$$

on introduit le champ auxiliaire $\sigma = v^*v$ et on remplace $\frac{(v^*v)^2}{2}$ par $\sigma(v^*v) - \frac{\sigma^2}{2}$ dans l'expression précédente. Une fois l'intégrale en v effectuée, on minimise par rapport à σ . On obtient alors $\sigma = \sigma_s$ qui vérifie :

$$\left\langle \frac{\text{tr}}{N} \frac{1}{1 + g\sigma_s + g\Phi^2} - g\sigma_s \right\rangle = 0$$

En utilisant les équations du mouvement (voir rappels plus loin), on obtient $\sigma_s = 2T_2$.

On a finalement l'équation de renormalisation :

$$-N \frac{\partial V}{\partial N} = T_2 + gT_4 + \text{tr} \ln(1 + g\Phi^2 + 2gT_2) - 2gT_2^2$$

Cette expression engendre de nombreux termes que l'on n'avait pas dans l'expression initiale : en particulier tous les $T_{2n}, n \in N$, ainsi que des puissances arbitraires de T_2 . Or le but de la méthode de groupe de renormalisation est de conserver une action de même forme que l'action de départ. Pour résoudre ce problème, on peut tronquer tous les termes qui ne correspondent pas à la forme initiale, ce qui donne, en ne gardant que les termes linéaires en T_4 et T_2 :

$$-N \frac{\partial V}{\partial N} = (1 + 4g)T_2 + gT_4$$

Par le changement de variable

$$\Phi \rightarrow \Phi \left(1 - \frac{1 + 4g}{2N}\right)$$

on obtient

$$-N \frac{\partial g}{\partial N} = -g - 4g^2$$

soit $g_c = -\frac{1}{4}$ à comparer avec la valeur exacte de $g_c = -\frac{1}{12}$. Ainsi, si on tronque les termes qui ne sont pas de la forme de l'action initiale, on obtient une valeur de g_c triple de la bonne valeur [15] !

Si au contraire on essaye de garder les termes engendrés par la renormalisation, il faut calculer l'expression de la renormalisation d'un potentiel général $V(T_n)$.

Ceci est possible, soit en introduisant de nombreux champs auxiliaires, soit encore en calculant explicitement la renormalisation du potentiel général. Dans tous les cas, cependant, les calculs par ordinateur des points fixes d'un modèle à partir de ces formules convergent extrêmement lentement. Ils peuvent même ne pas converger du tout en ce qui concerne les valeurs des exposants critiques. En effet, on peut constater que, dans le cas d'un modèle de branchements purs par exemple, on obtient, à chaque ordre de troncation, des dimensions d'échelle entières, alors que la dimension exacte est connue et vaut $\frac{4}{3}$.

4.2.2 Equations du mouvement

Les équations du mouvement permettent de relier les valeurs moyennes des opérateurs $T_n = \tau_n/n = \frac{\text{tr}\Phi^n}{nN}$ entre elles. Grâce à elles, nous allons pouvoir simplifier les équations de renormalisation. On écrit que la fonction de partition du modèle est invariante par changement de variable d'intégration : si

$$\Phi = \Phi' + \epsilon \Phi'^k A_k(\{T'_n\})$$

on obtient

$$V(\{T_n\}) = V(\{T'_n\}) + \frac{\partial V}{\partial T_n}(k+n-1)T'_{k+n-1}\epsilon A_k(\{T'_n\})$$

et le jacobien de la transformation est :

$$J = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi'} \right| = 1 + N^2 A_k(\{T_n\}) \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \tau_{k-1-i} \text{ d'où}$$

$$\int d\Phi e^{-N^2 V(\{T_n\})} = \int d\Phi' e^{-N^2 V(\{T'_n\}) + \epsilon A_k(\frac{\partial V}{\partial T_n} \tau_{k+n-1} - \tau_i \tau_{k-1-i})}$$

On peut alors écrire les équations du mouvement générales pour un modèle à une matrice :

$$\left\langle \frac{\partial V}{\partial T_n} \tau_{k+n-1} - \sum_i \tau_i \tau_{k-1-i} = 0 \right\rangle$$

Ceci signifie que l'on peut ajouter à V toute équation du mouvement ou somme d'équations du mouvement sans changer la fonction de partition, puisque cela ne fait qu'exprimer un simple changement de variable.

4.2.3 Approximation linéaire

Il s'agit d'une méthode de renormalisation approchée utilisant les équations du mouvement pour réduire le nombre de termes engendrés par la renormalisation. Cette méthode a été mise au point par Higuchi, Itoi, Nishigaki et Sakai [17] et leur a permis de calculer les flots approchés de modèles ne comportant pas de terme de branchement (i.e. : pas de carrés ou de puissances plus élevées de traces).

Pour cela, on écrit les équations du mouvement du modèle : pour le modèle de gravité pure $V = T_2 + gT_4$, ces équations sont :

$$g\tau_{2n+4} + \tau_{2n+2} - \sum_{i=0}^n \tau_{2i}\tau_{2(n-i)} = 0$$

(On rappelle la notation : $\tau_n = nT_n = \frac{\text{tr}\Phi^n}{N}$). Si on définit $f(z) = \frac{\text{tr}}{N} \frac{1}{1+z\Phi^2}$, on obtient, par le changement de variable

$$\Phi = \Phi' + \epsilon \frac{1}{1+z\Phi'^2}$$

une équation quadratique en f qui donne :

$$f(z) = \frac{(g+z) + \sqrt{(g+z)^2 - 4z^2(g+z+g\tau_2z)}}{2z^2}$$

où on choisit la détermination de la racine telle que, quand $z = 0$, la racine carrée $\sqrt{g^2}$ soit $|g| = -g > 0$.

L'évolution de V devient alors :

$$N \frac{\partial V}{\partial N} = gT_4 + T_2 + \ln(1 + 2gT_2) + 2gT_2^2 + \int_0^{\frac{-g}{1+g\tau_2}} dz \frac{1-f(z)}{z}$$

Comme la première équation du mouvement est $g\tau_4 + \tau_2 - 1 = 0$, on peut écrire $f(z)$ en fonction de τ_4 . L'approximation linéaire consiste à écrire $2T_2 = 1 - 4gT_4$ et à ne conserver que les termes linéaires en T_4 , ce qui donne :

$$N \frac{\partial V}{\partial N} = -g + \int_0^{\frac{-g}{1+g}} -4g^2((z+g)^2 - 4z^2(z+g+gz))^{-\frac{1}{2}} dz$$

le point critique du modèle s'obtient par la relation $\frac{\partial V}{\partial N} = 0$, ce qui donne : $g_c \simeq -0.0841$. Le véritable g_c vaut $-\frac{1}{12}$, ce qui fait un erreur de 0.9%. Cette méthode permet aussi de calculer l'exposant critique de gravité : on obtient la valeur propre $\lambda = 0.76$ au lieu de 0.8, soit 5% d'erreur ce qui donne un exposant $\gamma_s = 2 - \frac{2}{\lambda} \simeq -0.6$ au lieu de -0.5 soit une erreur de 26%.

Comme il fallait s'y attendre, la précision est plus difficile à obtenir pour les exposants critiques que pour la position des points critiques.

Cette méthode a donc permis d'obtenir des résultats quantitatifs et non plus seulement qualitatifs (1% environ de précision sur le point critique au lieu de 200% comme dans les premières approximations), néanmoins, elle a permis de trouver des flots approchés seulement pour des modèles de gravité sans branchement. Or, pour vérifier la conjecture sur les flots de renormalisation, ce qui nous intéresse c'est d'obtenir des flots pour des modèles de gravité et branchements. De plus, en se limitant à l'ordre linéaire,

la méthode de [17] commet une erreur a priori “incompressible”, c’est-à-dire qu’elle ne comporte pas de technique permettant d’améliorer la précision autant qu’on le désire. C’est pour cela que nous avons développé une autre technique que nous allons décrire maintenant.

4.2.4 résolution d’un modèle mêlant gravité et termes de branchements

Ambiguïté des flots de groupe de renormalisation

Les flots de groupe de renormalisation ne sont pas uniquement déterminés. En effet, les équations du mouvement, dont nous avons déjà parlé, sont des relations qui expriment la possibilité de réécrire l’équation de groupe renormalisation sous une autre forme sans rien changer à la fonction de partition.

Ainsi, si j’avais par exemple $N \frac{\partial V}{\partial N} = T_4 + T_2^2$ et l’équation du mouvement $T_2 = T_4$, je pourrais écrire aussi bien $N \frac{\partial V}{\partial N} = T_4 + T_4^2$ que $T_2 + T_2^2$. Selon les cas, le couplage associé à l’opérateur T_4 varie en fonction de N ou bien est constant. De ce fait, si je dessine les flots correspondant dans l’espace des constantes de couplages, leur allure est totalement différente selon la formulation choisie.

En particulier, un point fixe dans l’espace des constantes de couplages, si je décide de le réécrire de façon arbitraire en fonction de plusieurs couplages reliés entre eux, pourra ne plus apparaître comme fixe.

Il convient donc, pour utiliser les équations du mouvement de façon judicieuse, de comprendre tout d’abord où se trouve la physique lorsque tant de diagrammes de flots différents représentent pourtant la même fonction de partition. Nous constatons que l’existence d’opérateurs “redondants” (par exemple si on a la relation $T_4 = T_2$) entraîne l’existence de sous-variétés sur lesquelles les flots peuvent évoluer sans que cela représente quoi que ce soit du point de vue de la physique sous-jacente (dans l’exemple cité plus haut, tous les points de la courbe (coefficient de T_4 + coefficient de T_2 = constante) représentent la même physique).

Ainsi, si C est un point fixe dans la représentation physique “idéale” où on aurait éliminé tous les opérateurs redondants, il ne sera pas fixe dans toutes les représentations. Il sera, dans le cas général, attiré vers un nouveau point fixe C' de la sous-variété physiquement équivalente à C dans notre représentation.

On peut ainsi, si l’on sait par exemple que, dans l’idéal, on devrait pou-

voir exprimer les flots du modèle $V = T_2 + gT_4 + x\frac{T_2^2}{2}$ exclusivement dans le plan (g, x) , identifier les points fixes, lignes et points critiques physiques à partir des flots que l'on a réussi à obtenir et qui font intervenir un plus grand nombre de constantes de couplages.

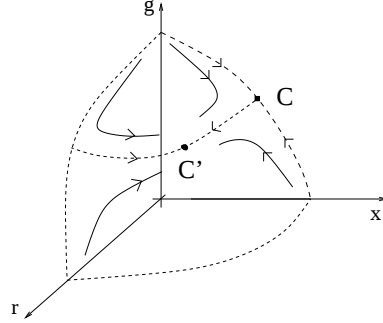


FIG. 4.8 – Evolution des flots dans l'espace des 3 constantes de couplages g , x , et r où r correspond à un opérateur redondant. Les lignes et variétés critiques sont en pointillés, et les flots en trait plein.

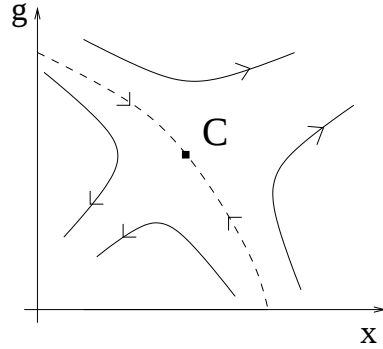


FIG. 4.9 – Evolution des flots dans l'espace (g, x) , déduite de ceux obtenus dans l'espace (g, x, r)

Cas d'un nombre de constantes de couplage infini

Bien que l'on puisse sans difficulté, à partir d'un nombre d'opérateurs fini plus grand que le nombre minimum d'opérateurs non redondants possible, identifier les points et lignes critiques, le cas d'un nombre d'opérateurs (et donc de constantes de couplage) infini est plus délicat. En effet, obtenir un

nombre infini d'opérateurs, c'est risquer de devoir faire une troncature non contrôlée dans l'équation de groupe de renormalisation, troncature susceptible de ne pas converger vers l'expression exacte. C'est ce qui se passait dans le cas du modèle de "branchements purs" (voir annexe de [1]), où, dans les tout premiers calculs de flots les équations du mouvement n'avaient pas été utilisées. On trouvait alors que certains exposants critiques ne convergeaient pas. L'expression exacte de l'équation de renormalisation, sous sa forme "brute" (sans usage des équations du mouvement) n'était pas développable en série entière. Par conséquent, la troncature sous forme de développement limité, qui avait paru pourtant raisonnable, ne convergeait pas. Nous avons donc, dans toute la suite, utilisé les équations du mouvement au maximum de nos possibilités : en plus de la simplification notable des flots que cela occasionne, nous avons pu obtenir, en outre, l'assurance de la convergence de nos expressions.

Equations de groupe de renormalisation dans le cas avec branchements

Soit à présent le modèle :

$$V = T_2 + gT_4 + \frac{xT_2^2}{2}$$

Ecrivons les équations du mouvement de ce modèle :

$$g\tau_{2n+4} + \tau_{2n+2}(1 + xT_2) - \sum \tau_{2i}\tau_{2(n-i)} = 0$$

On voit que l'on ne peut pas, par un changement de variable régulier dans la fonction de partition, exprimer l'intégrale exclusivement en fonction de T_4 : en effet, on engendre aussi des termes en $T_4T_2^n$.

Puisque, de toute façon, on engendre des puissances de T_2 dont on ne peut se débarrasser, nous allons écrire l'équation de renormalisation d'un modèle plus général mais linéaire en T_4 :

$$V = gT_4 + \phi(T_2)$$

où ϕ est la fonction définie par :

$$\phi(T_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_j T_2^j}{2^{j-1}} \quad \text{et} \quad h_1 = 1, \quad h_2 = x$$

Nous pouvons montrer que

$$N \frac{\partial V}{\partial N} = gT_4 + 2\phi - T_2U + \text{tr} \ln(U + 2gT_2 + g\Phi^2) - 2gT_2^2$$

$$\text{avec} \quad \frac{\partial \phi}{\partial T_2}$$

Nous pouvons alors resommer les équations du mouvement en écrivant, comme précédemment : $f(z) = \text{tr} \left(\frac{1}{1-z\Phi^2} \right)$, et nous avons :

$$\begin{aligned} N \frac{\partial V}{\partial N} &= gT_4 + 2\phi - \frac{x}{2} + \ln U + \ln(1 - \rho x) + \rho \frac{x^2}{2} + \\ &\quad \int_0^{\frac{\rho}{1-\rho x}} dz \frac{z - \rho - 2z^2 + \sqrt{(z - \rho)^2 - 4z^2(z - \rho - \rho zx)}}{-2z^3} \end{aligned}$$

L'introduction des variables $x = 2T_2U$ et $\rho = -\frac{g}{U^2}$ permet de simplifier les écritures.

Nous développons alors cette expression à l'ordre n en g avec ϕ tronquée à l'ordre Y en T_2 . Le développement en g n'est pas un simple développement en série entière mais comporte aussi des termes en $g^n \ln g$ et nécessite donc un traitement soigneux. Après transformations, l'intégrale devient :

$$\begin{aligned} &\int_{x\sqrt{\rho}}^1 da \frac{(1 - \rho x)(\rho x - a) - 2\rho(1 - a)^2 + (1 - \rho x)\sqrt{(\rho x - a)^2 + 4\rho a(1 - a)^2}}{-2(1 - a)^3\rho} \\ &+ \\ &\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\rho}}} du \quad \rho x \frac{(1 - \rho x)x(1 - u) - 2(1 - \rho xu)^2 + x(1 - \rho x)\sqrt{(1 - u)^2 + 4\frac{u}{x}(1 - \rho xu)^2}}{-2(1 - \rho xu)^3} \end{aligned}$$

et peut alors se développer à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Résolution numérique

Nous pouvons résoudre numériquement (en dépit de difficultés techniques) l'équation différentielle ainsi obtenue, qui fait intervenir un nombre Y de constantes de couplage. Celles qui nous intéressent sont g et x , c'est pour cela que nous nous contenterons généralement de visualiser la projection des flots de renormalisation sur le plan (g, x) .

L'allure des flots met en évidence l'existence de trois points fixes du groupe de renormalisation définis dans l'espace à Y constantes de couplage.

(A') a une direction répulsive, (C') en a deux, quant à (B'), qui est le point fixe des branchements purs, il a une direction répulsive selon l'axe des x .

Enfin, pour en revenir aux points du plan (g, x) , le point bicritique (C) marque la séparation entre les points de la ligne critique qui sont attirés vers (A') et ceux qui sont attirés vers (B'). Nous identifions aussi le point fixe de la gravité (A).

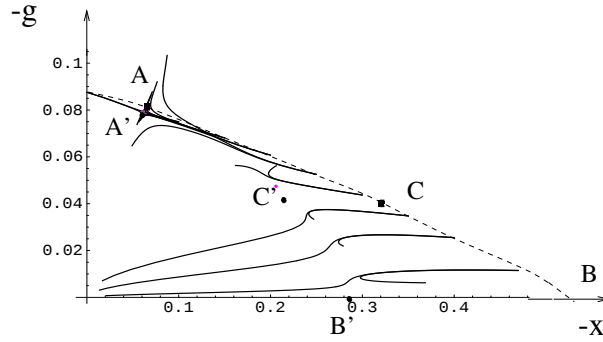


FIG. 4.10 – Projection des flots de renormalisation dans l'espace (g, x) , avec en abscisse $-x$ et en ordonnée $-g$, calculés à l'ordre $n = 5$ en g et à l'ordre $Y = 6$ en T_2 . La ligne critique (en pointillés sur la figure) est approchée par des constantes de couplage légèrement en-dessus et légèrement en-dessous de cette ligne ($\frac{\Delta g}{g} \simeq 10^{-4}$). L'évolution de ces constantes de couplage sous l'action du groupe de renormalisation est dessinée en trait plein : nous voyons clairement que les évolutions de deux points très proches de part et d'autre de la ligne critique sont d'abord presque identiques (les lignes correspondantes semblent confondues sur la figure), puis se séparent : d'un côté de la ligne critique, le flot est attiré par le point fixe gaussien $(g, x) = (0, 0)$, de l'autre, les constantes de couplage croissent (en fait, elles divergent même en un temps fini).

A cet ordre d'approximation assez bas, nous obtenons $g_c = -0.087575(25)$, ce qui fait 5% d'erreur sur le point critique de gravité pure. (Contre 1% avec la méthode de [17]). Nous avons 18% d'erreur sur la valeur propre de gravité (contre 5% chez [17]) et 13% sur la valeur propre du point bicritique (résultat que l'on ne peut obtenir avec la méthode de l'approximation linéaire).

Notre méthode nous renseigne donc sur les flots dans tout le plan (g, x) , qui était inaccessible par [17]. De plus, même pour les grandeurs que l'approximation linéaire permet de calculer, notre méthode, après extrapolation, va s'avérer plus précise que cette dernière.

En effet, contrairement à [17] qui obtiennent de bons résultats dès le premier ordre d'approximation (approximation linéaire) mais ne peuvent pas aller au-delà, notre méthode converge plus lentement mais permet - théoriquement du moins - d'aller aussi loin qu'on le veut dans le développement en g et T_2 .

Dans la pratique, cela se traduit par des calculs à différents ordres et une extrapolation des résultats obtenus.

Par exemple, nous cherchons la valeur extrapolée de g_c , point critique de gravité pure, où n est l'ordre de développement en g :

$$\begin{aligned} n = 2 \quad g &= -0.095415(5), \quad n = 3 \quad g = -0.090745(5), \\ n = 4 \quad g &= -0.088725(5), \quad n = 5 \quad g = -0.087585(5) \end{aligned}$$

(les résultats sur le point de gravité pure ne dépendent pas de Y).

La valeur extrapolée est $g_c = -0.083325(5)$, sachant que la valeur exacte est $-\frac{1}{12}$, on a 0.016% d'erreur maximum !

En extrapolant les diverses grandeurs cherchées de la même façon, on trouve d'une façon générale de bonnes valeurs pour la ligne critique : 0.016% sur le point critique de gravité pure, nous venons de le voir, mais aussi -0.50037 au lieu de -0.5 soit 0.07% d'erreur environ sur le point critique des branchements, 0.02% et 0.5% sur le point bicritique.

Tous ces résultats soulignent l'efficacité de la méthode employée.

Cependant, le résultat le plus intéressant de notre point de vue est certainement la mise en évidence du point fixe (A), attractif dans la direction de la ligne critique, répulsif dans l'autre direction du plan (g, x) .

Nous pouvons trouver sa position sur le graphique (à $Y = 6$, $n = 5$, $(g, x) \simeq (-0.079, -0.061)$) et par extrapolation, une approximation de sa position réelle $(g, x) \simeq (-0.072, -0.084)$. (A) se trouve, comme le prédisait la conjecture, à x_A strictement inférieur à x_C , et de la position de (A) découle l'allure générale des flots (N.B. : on a ici une charge centrale conforme $c = 0$).

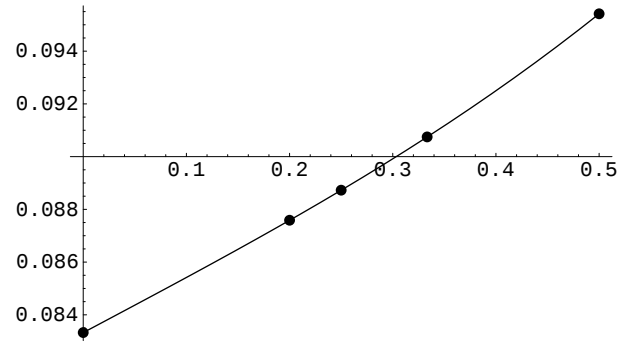


FIG. 4.11 – Extrapolation de la position du point critique de gravité pure. La valeur de $g_{critique}$ converge en $1/n$.

Nous pouvons aussi trouver des valeurs approchées des exposants critiques, sachant que $\gamma = 2 - \frac{2}{\lambda}$, et que γ_{exact} vaut $-\frac{1}{2}$ pour la gravité pure, soit $\lambda = 0.8$, et $\gamma_{exact} = \frac{1}{3}$ pour le point bicritique soit $\lambda = 1.2$.

Après extrapolation, nous avons $\lambda = 0.7$ pour la gravité, soit 12.5% d'erreur à comparer au meilleur résultat (5% d'erreur) que l'on obtient à l'approximation linéaire, tandis que nous obtenons 1.25% d'erreur sur la valeur propre du point bicritique, ce qui est plutôt bon si on se rappelle que les exposants critiques convergent plus lentement que les points critiques.

Nous avons ainsi pu comparer les résultats de notre méthode de groupe de renormalisation à ceux des techniques exactes sur un modèle sur lequel on peut calculer exactement bon nombre de grandeurs. Nous avons de plus pu vérifier la conjecture (existence de (A), allure des flots) sur ce modèle particulier.

A présent, nous allons voir que cette méthode peut s'appliquer aussi à des modèles plus compliqués.

4.3 Généralisation à des modèles plus complexes

Le paragraphe précédent nous a permis de nous familiariser avec la méthode de groupe de renormalisation et de constater son efficacité sur un exemple de modèle à une matrice. Nous allons à présent nous attacher à montrer quels sont les problèmes qui surgissent dans des modèles plus généraux et comment on peut dans certains cas les résoudre.

(i) La première étape de toute technique de renormalisation consiste à écrire l'équation d'évolution de l'action initiale, en laissant à ce stade de côté les équations du mouvement.

Nous pouvons montrer que l'expression des $\text{tr}\Phi_{N+1}^n$ en fonction de Φ , v , et α fait intervenir les facteurs : $\text{tr}\Phi^n$, $v^*\Phi^{n-2}v$, et tout scalaire obtenu en remplaçant en nombres égaux des Φ arbitraires par v et par v^* (par exemple : $\text{tr}\Phi_{N+1}^6$ fait intervenir $\text{tr}\Phi^6$, $v^*\Phi^4v$, $(v^*v)(v^*\Phi^2v)$, $(v^*\Phi v)^2$ et $(v^*v)^3$).

Nous savons intégrer sur v et v^* un terme du type $v^*\Phi^n v$, mais, pour $(v^*\Phi^n v)^2$, par exemple, il faut faire intervenir des champs auxiliaires σ_n ($(v^*\Phi^n v)^2$ est alors remplacé par $2(v^*\Phi^n v)\sigma_n - \sigma_n^2$).

Nous voyons que, s'il est toujours possible d'écrire l'équation de groupe de renormalisation, elle devient cependant vite compliquée. Dans la pratique,

on préfère donc généralement se limiter à des termes en $\text{tr}\Phi$, $\text{tr}\Phi^2$, $\text{tr}\Phi^3$, voire $\text{tr}\Phi^4$.

Pour la vérification de la conjecture, cependant, il n'est heureusement pas nécessaire de faire intervenir des puissances de Φ trop élevées.

(ii) La deuxième étape de notre méthode consiste à écrire les équations du mouvement, et grâce à elles, à exprimer $N \frac{\partial V}{\partial N}$ en fonction d'un nombre réduit de traces (sur le modèle précédent, nous pouvions tout exprimer en fonction de puissances de $\text{tr}\Phi^2$). Il n'est pas évident cependant que nous réussissions à resommer les équations du mouvement comme nous l'avons fait tout à l'heure en introduisant $f(z) = \text{tr} \frac{1}{1+z\Phi^2}$.

Nous allons voir dans les deux exemples qui suivent comment nous pouvons résoudre la difficulté.

Cas du modèle d'Ising en champ extérieur nul (modèle à deux matrices)

Ce modèle, en terme de matrices, est défini par

$$V = \frac{\text{tr}(A^2 + B^2)}{2N} + g \frac{\text{tr}(A^3 + B^3)}{3N} - \beta \frac{\text{tr}AB}{N}$$

Les symétries du problème permettent de l'exprimer en fonction des matrices :

$$\Phi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \text{ et } \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{soit } V = \frac{\text{tr}\Phi^2}{2N} + g \frac{\text{tr}\Phi^3}{3N} - \beta \frac{\text{tr}\sigma_1\Phi\sigma_1}{2N}$$

Notre méthode va nous amener à étudier le potentiel plus général :

$$V = \phi\left(\frac{\text{tr}\Phi^2}{2N}, \frac{\text{tr}\sigma_1\Phi\sigma_1}{2N}\right) + g \frac{\text{tr}\Phi^3}{3N}$$

de dérivées U et $-\beta$ (qui est désormais une fonction des traces quadratiques en A et B) respectivement à $\frac{\text{tr}\Phi^2}{2N}$ et $\frac{\text{tr}\sigma_1\Phi\sigma_1}{2N}$.

Si l'on écrit de la façon la plus naturelle les équations du mouvement du modèle, leur resommation ne semble pas évidente. L'usage de quatre changements de variables très particuliers (le premier des quatre est $\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon \sum_{a=A \text{ ou } B} P_a (z\mathbb{I} - \beta\sigma_1/g + \Phi)^{-1} P_a$ où P_A (resp. P_B) est la projection sur le sous-espace correspondant à A (resp. B)) permet cependant d'écrire

une équation polynomiale de degré 4 en $\text{tr}(\frac{1}{gz\mathbb{I}-\beta\sigma_1+g\Phi})$ qui est l'expression resommée des équations du mouvement. Nous pouvons alors utiliser la méthode que nous avons décrite précédemment et obtenir l'approximation ci-dessous des flots du modèle projetés dans le plan (β, g) .

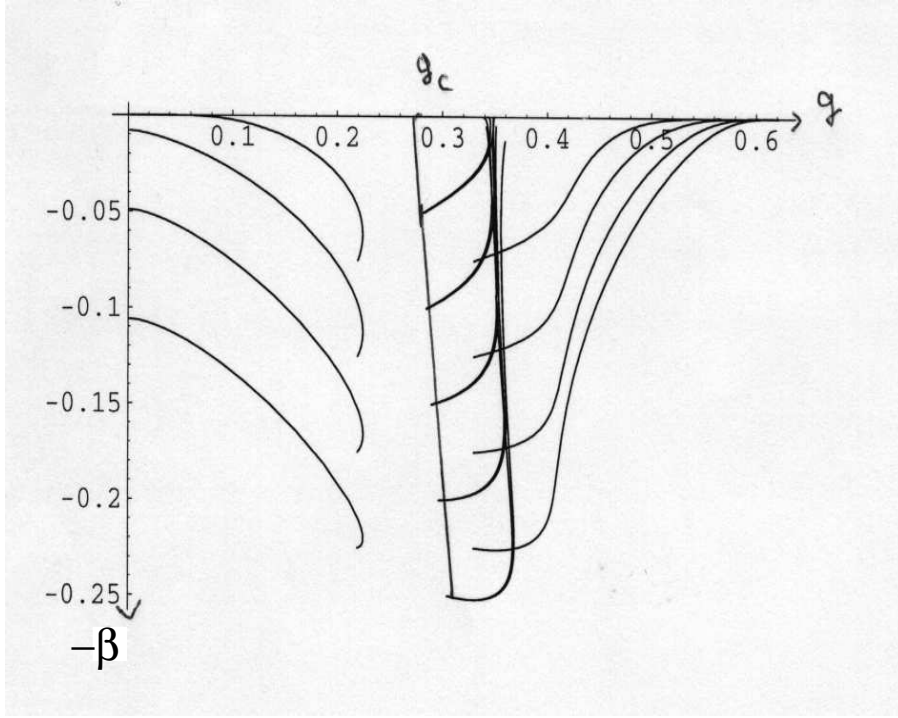


FIG. 4.12 – Flots de renormalisation approchés du modèle d’Ising en champ nul.

Le modèle d’Ising n’est pas un cas exceptionnel : on a pu resommer aussi les équations du mouvement d’une chaîne de matrices [65], tout au moins sans terme de branchement. Ceci donne bon espoir de pouvoir appliquer notre méthode aux modèles de $c \rightarrow 1$ qui nous intéressent.

Perspective

Nous voudrions achever de vérifier l’hypothèse de [16] sur l’allure des flots de groupe de renormalisation en fonction de la charge centrale conforme. Pour cela, il faut trouver une suite de modèles de matrices dont la charge

centrale $c \rightarrow 1$. Les modèles de chaînes de k matrices, où $k \rightarrow \infty$, ou les modèles de Potts- q , lorsque $q \rightarrow 4$, sont de tels modèles.

Les modèles de chaînes de k matrices, bien que déjà résolus par des méthodes exactes, sont cependant susceptibles de donner lieu pour k grand à des équations de groupe de renormalisation passablement complexes. Dans le principe, il est possible de resommer les équations du mouvement, mais la complexité des équations obtenues rend un important travail de simplification nécessaire.

Dans la suite de cette thèse, nous nous intéresserons plutôt aux modèles de Potts. Cependant, plutôt que d'aborder ces modèles difficiles sous l'angle des méthodes de groupe de renormalisation, nous montrerons comment nous avons pu les résoudre totalement et de façon exacte en utilisant uniquement les équation du mouvement. Pour obtenir les informations supplémentaires (allure des flots, position et évolution des points fixes en fonction de la charge centrale conforme...) données par la méthode de groupe de renormalisation, il faudrait aller plus loin : les résultats obtenus au cours de cette thèse sur les équations du mouvement des modèles de Potts seraient alors un atout crucial pour mettre en œuvre les techniques développées dans ce chapitre.

Chapitre 5

Modèles de Potts sur réseau aléatoire

Les modèles de Potts sur surface aléatoire font partie des modèles complexes (de matrices qui ne sont pas couplées en chaîne) qui ont poussé la recherche vers la mise au point de techniques approchées de résolution. Nous avons parlé dans le chapitre précédent des résultats que l'on peut obtenir par la méthode de groupe de renormalisation. Cependant, dans ce chapitre, nous allons voir comment on peut malgré tout résoudre ces modèles *directement*, de façon exacte, par la méthode des boucles. Ceci devrait nous permettre d'ouvrir la voie à la résolution d'autres modèles complexes. De plus, la résolution des modèles de Potts devraient aussi nous permettre de mieux comprendre la barrière à $c = 1$ puisque la charge centrale conforme associée tend vers 1 quand q , le nombre de matrices du modèle, tend vers 4.

5.1 Le modèle

5.1.1 Le modèle de Potts sur réseau fixe

Il s'agit d'un modèle de spins sur réseau où les spins peuvent prendre q valeurs différentes (que l'on appelle aussi des "couleurs") $\{\sigma_i\}_{i=1}^q$. L'énergie du modèle est alors donnée par :

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}$$

Ce modèle apparaît lorsqu'on cherche à décrire une grande variété de phénomènes critiques : percolation, ferromagnétisme, monocouches adsorbées

[27] ...

La fonction de partition correspondante est :

$$Z = \sum e^{\frac{J}{kT}p}$$

où p est le nombre de couples de spins plus proches voisins de même couleur, k la constante de Boltzman et T la température, et où la somme se fait sur toutes les configurations de spins possibles.

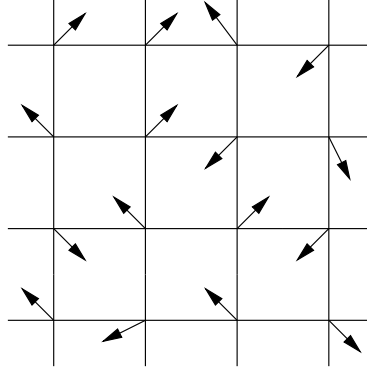


FIG. 5.1 – Modèle de spins sur réseau fixe (notons que ce-dernier pourrait ne pas être régulier). Les spins peuvent prendre q valeurs différentes mais le réseau est le même dans toutes les configurations.

Le diagramme de phase du modèle de Potts sur réseau fixe permet de mettre en évidence une transition de phase de deuxième ordre pour $q \leq 4$, correspondant à une théorie conforme de charge centrale $c \leq 1$, avec $q = 4$ correspondant à $c = 1$; pour $q > 4$, la transition devient de premier ordre.

5.1.2 Le modèle de Potts sur surface aléatoire.

Dans ce modèle, les spins vivent sur une surface aléatoire : le poids d'une configuration de spins sur une surface donnée dépend alors non seulement des valeurs des spins, mais aussi de la taille et du genre de la surface.

En terme de matrices, on a :

$$S(\{\Phi_i\}) = \sum_{i=1}^q \left(g \frac{\text{tr } \Phi_i^3}{3N} + \frac{\text{tr } \Phi_i^2}{2N} \right) - \beta \sum_{i \neq j} \frac{\text{tr } \Phi_i \Phi_j}{2N}$$

et

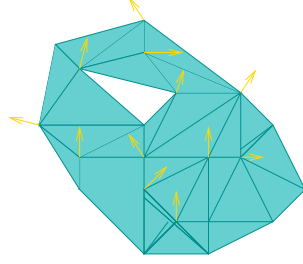


FIG. 5.2 – Modèle de Potts sur surface aléatoire. Les spins peuvent prendre q valeurs différentes et vivent sur des configurations de surfaces de tailles et de genres variés. Ici une surface de topologie torique.

$$Z = \int d\Phi_1 \dots d\Phi_q e^{-N^2 S(\{\Phi_i\})}$$

avec

$$d\Phi = \prod_{i < j} d\Re \Phi_{i,j} d\Im \Phi_{i,j} \prod_i d\Phi_{i,i}$$

La taille N des matrices donne le poids respectif des divers termes topologiques dans l'énergie libre : $F = -\frac{1}{N^2} \ln Z$. Le poids pour une surface de genre h est N^{-2h} . Les q couleurs du modèle sur réseau fixe correspondent aux q matrices différentes du modèle sur surface aléatoire. Avoir inclus dans l'action des termes en $\text{tr } \Phi^3$ indique que chaque spin aura 3 plus proches voisins. La constante de couplage g est le poids associé à chaque vertex à 3 pattes, on a ainsi un poids g^v pour une surface de taille v . Enfin, la valeur de β indique la probabilité d'avoir 2 spins identiques côte à côte plutôt que 2 spins différents.

Plus précisément, nous avons

$$Z = \sum_{\text{diagrammes}} \left(g \left(\frac{\beta}{\text{cste}} \right)^{\frac{3}{2}} \right)^v \left(\frac{1}{\beta} \right)^p N^{2(1-h)}$$

v = nombre de nœuds $\propto$ aire de la surface

h = genre de la surface

p = nombre de propagateurs reliant 2 couleurs identiques

On obtient en outre $\beta = e^{-\frac{J}{kT}}$.

Quand $\beta = 0$, $T = 0$ quand $\beta = 1$, $T = \infty$

5.2 Quelle technique utiliser ?

Dès que le nombre de matrices q devient supérieur à 2, on est confronté à un modèle qui n'est ni une chaîne, ni même un arbre de matrices, et où l'on ne sait donc pas a priori intégrer sur les variables angulaires. Tant que ceci est impossible, l'on ne peut pas utiliser la méthode du col ou celle des polynômes orthogonaux.

En ce qui concerne l'usage de la méthode des équations du mouvement (rappelons-nous que, même pour la méthode de groupe de renormalisation, les équations du mouvement sont nécessaires pour améliorer la convergence des résultats), nous avons vu 3.3 que, dès que l'on a plus d'une matrice, il n'existe pas a priori de relation de récurrence permettant de calculer la résolvante du modèle.

Nous allons voir à présent comment on peut contourner ces difficultés. Une idée de V. Kazakov [53], appliquée aux modèles de Potts par I. Kostov [61], développée ultérieurement par J.-M. Daul [54] et, plus récemment par P. Zinn-Justin [55], permet de transformer le modèle de Potts en un modèle de matrices couplées en arbre.

5.2.1 Transformation d'un modèle en boucle en un modèle en arbre [53, 61]

Il s'agit de transformer l'ensemble de q matrices couplées 2 à 2 en un ensemble de q matrices toutes couplées à une même matrice centrale X .

Cela correspond à réécrire

$$Z = \int d\Phi_1 \dots d\Phi_q e^{-N^2[\sum_i S_0(\Phi_i) - \beta \sum_{i,j} \frac{1}{2N} \text{tr} \Phi_i \Phi_j]}$$

comme

$$Z = \int d\Phi_1 \dots d\Phi_q dX e^{-N^2[\frac{\text{tr} X^2}{2N} + \sum_i S_0(\Phi_i) - \sqrt{\beta} \sum_i \frac{\text{tr} \Phi_i X}{N}]}$$

En effet, une intégration sur X dans la deuxième fonction de partition redonne la première expression. On peut alors en principe utiliser la formule d'[48] pour intégrer sur les variables angulaires et résoudre le problème.

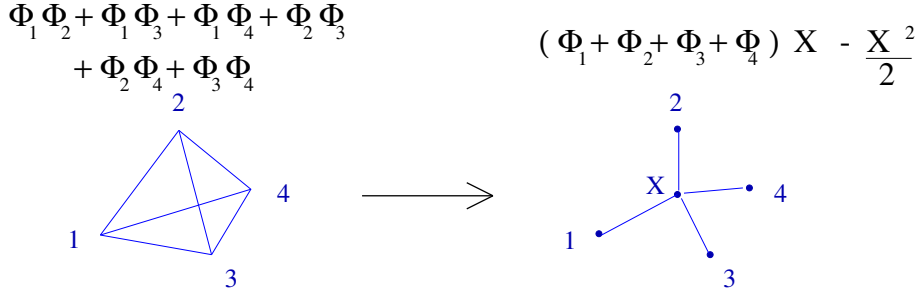


FIG. 5.3 – A gauche modèle de Potts-4 : nous avons 4 matrices couplées 2 à 2. A droite la réécriture du modèle de Potts-4 sous forme d'un modèle à 5 matrices couplées en arbre.

Nous allons maintenant rappeler brièvement les méthodes qui ont été développées et les résultats qui ont été obtenus en se basant sur cette réécriture de Z .

En 95, J.-M. Daul [54] obtint les exposants critiques des modèles de Potts, pour $q < 4$, avec $S_0(\Phi) = g \frac{\text{tr} \Phi^3}{3N} + \frac{\text{tr} \Phi^2}{2N}$ cubique, ainsi que la position du point critique de Potts pour le modèle de Potts-3. Il obtint aussi, dans le cas général, une équation implicite pour une fonction reliée à la résolvante du modèle.

5.2.2 Principe de la méthode de [54]

Le modèle de Potts- q sur réseau aléatoire se réécrit :

$$Z = \int dX e^{-N \frac{1}{2} \text{tr} X^2} I(X)^q$$

en introduisant :

$$I(X) = \int d\Phi e^{-N(\frac{q}{3} \text{tr} \Phi^3 + \frac{1}{2} \text{tr} \Phi^2 - \sqrt{\beta} \text{tr} \Phi X)}$$

On peut écrire une équation du col pour la distribution de valeurs propres de la matrice X , qui subit l'influence du potentiel effectif :

$$V = \text{tr} (X^2 - q \ln I(X))$$

Cette équation est :

$$2\Re f(x) - x + qw(x) = 0$$

pour x appartenant au support des valeurs propres de X , $f(x)$ étant la résolvante associée, et $w(x) = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial x} \ln I$.

De plus, on voit que les valeurs propres d'une des matrices Φ subissent l'action d'un potentiel dépendant de façon explicite uniquement de X (la matrice X elle-même subit l'action des autres matrices Φ_i). En supposant que la symétrie du modèle de Potts n'est pas brisée, on a ainsi une équation du col pour la distribution de valeurs propres de chaque matrice Φ (la symétrie implique qu'elles ont toutes la même distribution).

Cette équation s'écrit :

$$2\Re g(y) - gy^2 - y + \zeta(y) = 0$$

pour y appartenant au support des valeurs propres de la matrice Φ , $g(y)$ étant la résolvante associée et $\zeta(y) = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial y} \ln J$

$$J(\Phi) = \int dX e^{-N \operatorname{tr} (\frac{1}{2} X^2 - X\Phi)} I(X)^{q-1}$$

[54] obtient ainsi deux équations du col couplées, permettant en principe d'obtenir les deux distributions de valeurs propres inconnues.

Plutôt que de résoudre explicitement ces dernières, [54] étudie les propriétés analytiques de la résolvante généralisée :

$$F(z, s) = 1 - \frac{1}{N} \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{s - X} \frac{1}{z - \Phi} \right\rangle$$

Il obtient ainsi l'expression générale des exposants critiques, ainsi qu'une équation pour une "résolvante" assez complexe, devant en principe permettre de trouver les points critiques d'un modèle de Potts général. Il ne l'a cependant résolue que dans le cas du modèle de Potts-3, où il trouve la valeur de g et de β au point critique.

En 99, P. Zinn-Justin [55] s'est intéressé à son tour aux modèles de Potts. Il a étudié le modèle de Potts dilué (où la matrice X a elle-même une action cubique) et a résolu ce modèle dans le cas des modèles de Potts-1,2,3 et 4 dilués. Il a obtenu non seulement les points critiques de ces modèles, mais aussi une équation algébrique pour la résolvante dans le cas où $q = 1, 2$ ou 3.

Nous allons rappeler en quelques mots sa méthode.

5.2.3 Principe de la méthode de [55]

Le modèle de Potts dilué peut s'écrire

$$Z = \int dA e^{N \operatorname{tr} (-\frac{\gamma}{2} A^2 + \frac{\alpha}{3} A^3)} \left(\int dB e^{N \operatorname{tr} (-\frac{\gamma}{2} B^2 + \frac{\beta}{3} B^3 + AB)} \right)^q$$

Ce modèle est réécrit en terme des valeurs propres

$$Z = \int \prod_i da_i e^{-N \sum_i -\frac{\gamma}{2} a_i^2 + \frac{\alpha}{3} a_i^3} \Delta[a_i]^{1-q} \left(\prod_i db_i \Delta[b_i] \det_{i,j} [e^{N a_i b_j}] e^{-N \sum_i \frac{\beta}{3} b_i^3 - \frac{1}{2} b_i^2} \right)^q$$

où $\Delta[a_i]$ et $\Delta[b_i]$ sont les déterminants de Vandermonde pour les matrices A et B respectivement.

[55] écrit alors les équations du col correspondantes, en faisant intervenir, plutôt que les résolvantes classiques

$$\omega_B(b) = \int \frac{dy \rho_B(y)}{b-y} dy \quad \text{et} \quad \omega_A(a) = \int \frac{dx \rho_A(x)}{a-x} dx$$

les fonctions $a(b)$ et $b(a)$ ayant les mêmes coupures que les résolvantes ci-dessus mais inverses fonctionnelles l'une de l'autre [55].

En tirant parti de cette propriété, on peut obtenir des équations algébriques pour les résolvantes des modèles de Potts-1,2,3, et 4 dilués, ainsi que les points critiques correspondants.

5.3 Les équations du mouvement

La méthode que nous allons utiliser dans la suite de ce chapitre est très différente des méthodes de [54] et [55]. Nous n'allons pas utiliser la transformation d'un modèle de Potts en modèle en arbre, ni la méthode du col.

Nous allons montrer en effet que nous pouvons obtenir [2, 3], par la méthode des équations du mouvement uniquement, non seulement les exposants critiques et une équation implicite générale pour toute valeur de q , mais aussi une équation algébrique pour la résolvante du modèle pour toutes les valeurs de $q = 2 - 2 \cos \frac{l}{r} \pi$ avec l et r entiers. La solution générale ne fait pas intervenir de fonction algébrique, mais des fonctions elliptiques.

La méthode des équations du mouvement est d'autre part, nous l'avons vu, un élément clé dans la mise en œuvre des techniques de groupe de renormalisation. Cette méthode offre donc des perspective différentes de celles

données par les méthodes précédentes. Notons que le cas $q = 2$ avait été résolu par cette méthode dans [63, 64]

5.3.1 Position du problème

On s'intéresse ici au modèle cubique, avec des termes de branchement :

$$S = \sum_i \frac{g}{3N} \text{tr} \Phi_i^3 + \psi \left(\frac{1}{2N} \text{tr} \Phi_i^2, \frac{1}{N} \text{tr} \sum_{j \neq i} \Phi_i \Phi_j \right)$$

$$Z = \int d\Phi_1 \dots d\Phi_q e^{-N^2 S}$$

U est la dérivée partielle de ψ par rapport à $\frac{1}{2N} \text{tr} \Phi_i^2$, et $-\beta$ sa dérivée partielle par rapport à $\frac{1}{N} \text{tr} \sum_{j \neq i} \Phi_i \Phi_j$.

Exemple : changement de variable et équation associée

Prenons d'abord, pour fixer les idées, l'exemple du modèle de Potts-2 et du changement de variable :

$$\Phi_1 = \Phi'_1 + \epsilon \Phi'_2 \Phi'_1 \Phi'_2$$

On utilisera la notation :

$$t_A = \left\langle \frac{\text{tr} A}{N} \right\rangle$$

Réécrivons tout d'abord l'action $S(\Phi_1, \Phi_2)$ en fonction de Φ'_1 et Φ'_2 , à l'ordre 1 en ϵ :

$$S(\Phi_1, \Phi_2) = S(\Phi'_1, \Phi'_2) + \epsilon (gt_{\Phi'_1 \Phi'_2 \Phi'_1 \Phi'_2} + Ut_{\Phi'_1 \Phi'_2 \Phi'_1 \Phi'_2} - \beta t_{\Phi'_2 \Phi'_2 \Phi'_1 \Phi'_2})$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \Phi'_{lm}} = \delta_{il} \delta_{jm} + \epsilon \sum_k \Phi'_{2il} \Phi'_{2mj}$$

et, par suite (seuls les termes diagonaux contribuent tant qu'on se limite à l'ordre 1 en ϵ), le jacobien

$$1 + \epsilon \left(\frac{\text{tr} \Phi'_2}{N} \right)^2 + O(\epsilon^2)$$

L'équation du mouvement correspondante est :

$$gt_{\Phi_1^2 \Phi_2 \Phi_1 \Phi_2} + Ut_{\Phi_1 \Phi_2 \Phi_1 \Phi_2} - \beta t_{\Phi_2^3 \Phi_1} - t_{\Phi_2}^2 = 0$$

Cas général

D'une façon générale, on peut calculer ΔS et J dans le cas de Potts- q et du changement de variable :

$$\Phi_i \rightarrow \Phi_i + \epsilon \Phi_{\alpha_1} \dots \Phi_{\alpha_n}$$

L'équation du mouvement correspondante s'écrit :

$$gt_{\Phi_i^2 \Phi_{\alpha_1} \dots \Phi_{\alpha_n}} + Ut_{\Phi_i \Phi_{\alpha_1} \dots \Phi_{\alpha_n}} - \beta \sum_{j \neq i} t_{\Phi_j \Phi_{\alpha_1} \dots \Phi_{\alpha_n}} - J = 0 \quad (5.1)$$

J est le terme issu du jacobien de la transformation, et fait intervenir des traces contenant au plus $n - 1$ matrices Φ . Par suite, dans l'équation ci-dessus, le terme de degré le plus élevé en Φ est le premier terme : $t_{\Phi_i^2 \Phi_{\alpha_1} \dots \Phi_{\alpha_n}}$ qui contient $n + 2$ matrices Φ . Les autres termes sont de degré inférieur ou égal à $n + 1$. Les équations du mouvement nous permettent donc de calculer, en fonction de traces de degré inférieur en Φ , à condition de bien choisir $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, n'importe quelle trace pouvant se réécrire, moyennant une permutation circulaire : $\frac{\text{tr } \Phi_i^2 A}{N}$ où A est une fonction quelconque des $\{\Phi_j\}$.

Cependant, les termes d'ordre inférieur à $n + 2$ dans l'équation du mouvement 5.1 ne sont pas a priori de la forme $t_{\Phi_i^2 A}$. Il n'existe alors pas de relation de récurrence permettant de les calculer à leur tour en fonction de traces de degré inférieur.

Ainsi, il nous reste a priori un nombre infini de constantes inconnues : tous les

$$t_{\Phi_{\alpha_1} \dots \Phi_{\alpha_n}}$$

où $\alpha_i \neq \alpha_{i+1} \forall 0 \leq i < n$ et $\alpha_n \neq \alpha_1$.

Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment réduire ce nombre de constantes inconnues.

5.3.2 Invariance par permutations circulaires des traces

Soit le changement de variables :

$$\Phi_i \rightarrow \Phi_i + \epsilon(\Phi_i A - A \Phi_i)$$

avec

$$A = \Phi_{\alpha_1} \dots \Phi_{\alpha_n}$$

Grâce à l'invariance par permutation circulaire des deux premières traces intervenant dans l'équation du mouvement, les termes en g et U disparaissent, alors que les termes en β sont a priori non triviaux. L'équation du mouvement correspondante est alors :

$$-\beta \sum_{j \neq i} (t_{\Phi_i \Phi_j A} - t_{\Phi_i \Phi_j A}) - J = 0$$

où J est d'ordre n en Φ .

Ainsi, on peut trouver des équations du mouvement reliant entre elles les traces "inconnues" mises en évidence au paragraphe précédent.

Nous allons montrer à présent que, sur l'exemple du modèle de Potts-3, il est possible de se ramener à un nombre *fini* de traces inconnues.

Nous verrons ensuite le cas général où il reste un nombre infini de constantes inconnues. Nous pourrions cependant réduire suffisamment leur nombre pour, en ajoutant des considérations physiques simples sur la résolvante, résoudre totalement le problème.

5.4 Exemple du modèle de Potts-3

Soient les matrices

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_3 \end{pmatrix}, \delta_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \delta_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$\delta = \delta_+ + \delta_- \text{ et } \delta_0 = Id$$

Rappelons tout d'abord les notations.

On s'intéresse au modèle simple de Potts-3 + branchements :

$$S = \frac{g}{3N} \text{tr } \Phi^3 + \psi \left(\frac{1}{2N} \text{tr } \Phi^2, \frac{1}{2N} \text{tr } \Phi \delta \Phi \delta \right)$$

avec

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \frac{\text{tr } \Phi^2}{2N}} = U \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \frac{\text{tr } \Phi \delta \Phi \delta}{2N}} = -\beta$$

et on notera :

$$t_{i_1 i_2 \dots i_n \Phi^k} = \frac{1}{3N} \langle \text{tr } \delta_{i_1} \Phi \delta_{i_2} \dots \delta_{i_n} \Phi^k \rangle$$

où $i_1, \dots, i_n$ peuvent valoir $+1, -1$ ou 0 . Cette trace n'est non nulle que si

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad (3)$$

Rappelons qu'une trace est dite "d'ordre m " si elle contient m matrices Φ . Par exemple, la trace ci-dessus est d'ordre $k + n - 1$.

5.4.1 Résolvante de Potts-3 avec termes de branchement

Calculons à présent la résolvante du modèle. Soit :

$$\omega_{i_1 \dots i_n} = \frac{1}{3N} \langle \text{tr} \delta_{i_1} \dots \delta_{i_n} \frac{1}{z - \Phi} \rangle \quad (5.3)$$

non nulle ssi $\sum i_k = 0 \quad (3)$.

$$\omega_0 = \omega = \langle \frac{\text{tr}}{3N} \frac{1}{z - \Phi} \rangle$$

est la résolvante habituelle.

L'équation du mouvement :

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon \frac{1}{z - \Phi} \quad (5.4)$$

donne :

$$z(U + gz)\omega - U - gz - g t_\Phi - \omega^2 - 2\beta\omega_{+-} = 0 \quad (5.5)$$

De même, avec

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon \delta_+ \Phi \delta_- \frac{1}{z - \Phi} \quad (5.6)$$

on a l'équation :

$$z(U + gz)\omega_{+-} - (U + gz)t_\Phi - g t_{+-\Phi} - \omega\omega_{+-} - \beta\omega_{+0-} - \beta\omega_{---} = 0 \quad (5.7)$$

et on relie ω_{+-} à ω_{+0-} et ω_{---}

L'équation du mouvement :

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon \delta_- \frac{1}{z - \Phi} \delta_+ \quad (5.8)$$

donne ($\omega_{+-} = \omega_{-+}$ pour des raisons de symétrie)

$$g\omega_{+0-} + (U - \beta)\omega_{+-} - \beta z\omega - c = 0 \quad (5.9)$$

On peut donc calculer ω_{+0-} en fonction de ω_{+-} .

Par le biais d'équations du mouvement similaires :

On relie :

ω_{---} à ω_{+--+} et ω_{-0--}

et ω_{++--} à ω_{+0+-} et ω_{--+-}

On peut calculer

ω_{-0--} et ω_{+0+-} , par suite il nous reste uniquement à calculer ω_{--+-} .

Calcul de ω_{--+-}

Ce calcul va s'effectuer en échangeant les positions de δ_+ et δ_- , moyennant un changement de signe à chaque fois, par le biais d'une équation du mouvement où on soustrait des changements de variables différents et où on utilise l'invariance par permutation circulaire des traces. D'une façon générale, on a :

$$\Phi A(z - \Phi)^{-1} B \Phi - A(z - \Phi)^{-1} B \Phi^2$$

qui donne

$$\beta(\omega_{B+-A} + \omega_{B-+A}) - J = 0$$

Plus précisément :

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon[\Phi \delta_- \Phi \delta_- (z - \Phi)^{-1} \delta_- \Phi - \delta_- \Phi \delta_- (z - \Phi)^{-1} \delta_- \Phi^2] \quad (5.10)$$

donne

$$-\beta(\omega_{--+-} + \omega_{-+--} - \omega_{--0-} - \omega_{-0+-}) - \omega_{---} + t_\Phi \omega_{+-} = 0 \quad (5.11)$$

Cette équation, dans la mesure où nous connaissons ω_{+-} , ω_{---} , ω_{--0-} et ω_{-0+-} , permet de relier ω_{--+-} à ω_{-+--} .

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon(\Phi \delta_- \Phi \delta_- \Phi \delta_- (z - \Phi)^{-1} \Phi - \delta_- \Phi \delta_- \Phi \delta_- (z - \Phi)^{-1} \Phi^2)$$

nous permet de relier de la même façon : ω_{-+--} à ω_{+----} .

Nous pouvons aussi changer 3 δ_- en 3 δ_+ via :

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon(\Phi \delta_- (z - \Phi)^{-1} \delta_+ \Phi \delta_- \Phi \delta_+ - \delta_- (z - \Phi)^{-1} \delta_+ \Phi \delta_- \Phi \delta_+ \Phi) \quad (5.12)$$

ce changement de variable nous permet de relier ω_{+----} à ω_{+----} , et nous avons $\omega_{+----} = \omega_{-+--}$ vu que les rôles de δ_+ et δ_- sont totalement

symétriques.

Finalement, nous avons :

$$\omega_{-+---} + \omega_{-+---} = K(z) \quad (5.13)$$

où $K(z)$ ne contient que des fonctions $\omega_{\dots}$ d'ordre inférieur aisées à calculer. (Nous les avons calculées explicitement plus haut ou sommes capables de les calculer grâce aux mêmes idées que précédemment et à des équations très similaires). Nous pouvons alors écrire une équation pour ω_{-+---} , et, par suite, pour ω_{--+++} .

De cette façon-là, nous avons un ensemble fermé d'équations : de ω_{--+++} , on déduit ω_{++--} , ω_{---} , ω_{+-} ...et finalement la résolvante ω elle-même. Nous obtenons une équation algébrique d'ordre 5 pour $\omega(z)$. Nous noterons cette équation $eq(\omega, z) = 0$.

Cette dernière ne contient que 4 constantes inconnues (les rôles des matrices Φ_1 , Φ_2 , et Φ_3 sont bien sûr interchangeables) :

$$\begin{aligned} t_\Phi &= \frac{1}{N} \langle \text{tr} \Phi_1 \rangle, \quad t_{+-\Phi} = \frac{1}{N} \langle \text{tr} \Phi_1 \Phi_2 \rangle \\ t_{+++ \Phi} &= \frac{1}{N} \langle \text{tr} \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \rangle, \quad t_{++--\Phi} = \frac{1}{N} \langle \text{tr} \Phi_1 \Phi_2 \Phi_1 \Phi_3 \rangle \end{aligned}$$

5.4.2 Détermination des lignes et exposants critiques

Nous allons maintenant calculer la ligne et les points critiques du modèle, pour le cas $U = 1 + \frac{h}{6N} \text{tr} \Phi^2$ et β constant. Les valeurs des paramètres inconnus sont fixées par la condition physique que la résolvante a une seule coupure physique, qui correspond au support des valeurs propres de Φ . On peut alors calculer le comportement critique du modèle.

La ligne critique issue du point critique de Potts (point critique sans terme de branchement, i.e. à $h = 0$) est aisée à calculer. En effet, le comportement d'échelle de la résolvante est alors, en notant $[a, b]$ la coupure physique de $\omega(z)$:

$$\omega(z) \sim (z - a)^{\frac{1}{2}} \text{ quand } z \sim a \text{ et } \omega(z) \sim (z - b)^{\frac{6}{5}} \text{ quand } z \sim b \quad (5.14)$$

L'exposant correspondant γ_s est $-\frac{1}{5}$, ce qui correspond à une charge centrale $C = \frac{4}{5}$.

Plutôt que de chercher à calculer la résolvante pour toutes les valeurs des constantes de couplage, il est plus simple de se limiter au calcul de la

résolvante sur la ligne critique où la présence de l'exposant en $\frac{6}{5}$ nous donne des conditions simples sur les dérivées partielles de l'équation algébrique.

Si l'on porte sur un graphique $eq(\omega, z)$ en fonction de ω , les différentes intersections $\omega_1(z), \dots, \omega_5(z)$ de la courbe avec l'axe des abscisses correspondent aux différentes déterminations de ω (voir Figure (5.4.2)).

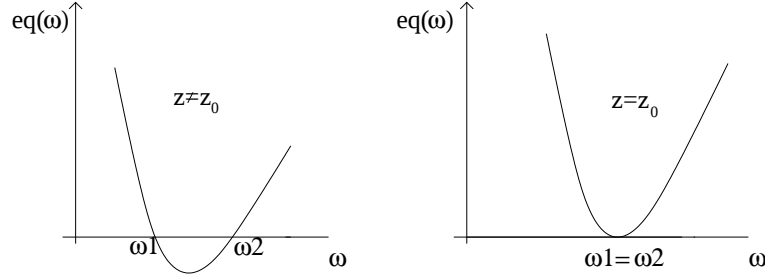


FIG. 5.4 – Fusion de deux déterminations de ω lorsque $z = z_0$

En particulier, si la courbe est tangente à l'axe des abscisses, cela signifie que deux déterminations de ω fusionnent en $z = z_0$, et ω a une singularité du type $\omega \sim (z - z_0)^{\frac{1}{2}} A + cste$ au voisinage de ce point.

Plus généralement, la fusion de n déterminations différentes correspond à une singularité en $(z - z_0)^{\frac{1}{n}}$. Dans le cas générique, pour des valeurs des constantes de couplage quelconques, ω se comporte en puissance $\frac{1}{2}$ au voisinage des bords de la coupure, les valeurs des constantes de couplage étant fixées par la condition qu'il n'y a qu'une seule coupure physique, correspondant à deux valeurs de z : a et b où deux déterminations de ω fusionnent.

Pour obtenir $\omega \sim (z - b)^{\frac{1}{5}} A + cste$, il faut que les 5 déterminations de ω fusionnent au même point. Cela correspond aux 5 conditions

$$eq(\omega, z) = 0, \quad \frac{\partial eq(\omega, z)}{\partial \omega} = 0, \dots, \frac{\partial^4 eq(\omega, z)}{\partial \omega^4} = 0$$

Si on réécrit l'équation $eq(\omega, z) = 0$ en fonction de $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$ (ω_0 est un polynôme) :

$$\tilde{\omega}^5 + P_4 \tilde{\omega}^3 + P_6 \tilde{\omega}^2 + P_8 \tilde{\omega} + P_{10} = 0$$

ces conditions correspondent à P_4, P_6, P_8 et $P_{10} = 0$ ainsi que $\omega = \omega_0$ quand $z = b$, où P_{2j} est un polynôme de degré $2j$ en z .

Pour avoir, avec A et B réguliers, $\omega \sim (z - b)^{\frac{6}{5}} A(z) + B(z) +$ éventuellement des singularités d'ordre supérieur comme $(z - b)^{\frac{7}{5}}$, on doit ajouter des conditions supplémentaires sur les dérivées des P_{2j} .

Finalement, on doit avoir :

$$\{P_{2j}, \frac{\partial P_{2j}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{j+1} P_{2j}}{\partial x^{j+1}}\} \quad j = 2, 3, 4, 5$$

simultanément nuls.

Ces conditions sont polynomiales et simples à résoudre.

Nous trouvons (rappelons que : $U = 1 + h \frac{\text{tr} \Phi^2}{6N}$, où h est la constante de couplage de branchement) :

$$\begin{aligned} 105 c^3 + 4 g^2 &= 0 \\ 2480625 c^2 (-1 - 4c + 43c^2) + 296100 c (15 + 113c) h - 692968 h^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Remarquons que, quand $h = 0$ (pas de terme de branchement) Nous retrouvons le point critique de Potts-3 :

$$c = \frac{2 - \sqrt{47}}{43}, \quad g = \frac{\sqrt{105}}{2} \left(\frac{-3 + \sqrt{47}}{41 + \sqrt{47}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Ce point critique avait déjà été obtenu par [54], bien qu'il n'ait pas déterminé l'équation algébrique à laquelle obéit alors (à $U = 1$) la résolvante.

5.5 Cas général

5.5.1 Définitions

On a :

$$Z = \int \prod_{i=1}^q dM_i e^{-N^2 S}$$

et

$$S = \sum_i \frac{g}{3N} \text{tr} M_i^3 + \psi \left(\frac{1}{2N} \text{tr} M_i^2, \frac{1}{N} \text{tr} \sum_{j \neq i} M_i M_j \right) \quad (5.16)$$

où les M_i sont des matrices hermitiennes de taille $N \times N$.

Les dérivées partielles de ψ par rapport à $\text{tr} M_i^2 / (2N)$ et $\text{tr} \sum_{j \neq i} M_i M_j / N$ respectivement sont $\tilde{U}$ et $\tilde{c}/2$, et leurs valeurs moyennes seront notées U et

c. Ce modèle général se ramène au cas du modèle de Potts sans terme de branchement lorsque $\tilde{U} = 1$ et $\tilde{c}$ est constante.

Soient les fonctions :

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{N} \langle \text{tr} \frac{1}{z-M_i} \rangle \\ \tilde{W}(z) &= \frac{1}{N} \langle \text{tr} \frac{1}{z-M_i} M_j \rangle \\ F(z, z') &= \frac{1}{N} \langle \text{tr} \frac{1}{z-M_i} \frac{1}{z'-M_j} \rangle \\ \tilde{F}(z, z') &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{N} \langle \text{tr} \frac{1}{z-M_i} \frac{1}{z'-M_j} M_k \rangle + \frac{1}{N} \langle \text{tr} \frac{1}{z'-M_i} \frac{1}{z-M_j} M_k \rangle \right] \end{aligned}$$

Ces expressions ne dépendent pas des indices i, j, k , pour peu que $i \neq j \neq k$. Par suite, $F(z, z')$ et $\tilde{F}(z, z')$ sont symétriques :

$$F(z, z') = F(z', z) \quad \text{et} \quad \tilde{F}(z, z') = \tilde{F}(z', z) \quad (5.17)$$

On notera aussi :

$$f(z) = W(z) - gz^2 + (c - U)z \quad (5.18)$$

Rappelons que U et c peuvent être des fonctions quelconques des nombres $\langle \frac{\text{tr}}{N} M_i^2 \rangle$ et $\langle \frac{\text{tr}}{N} M_i M_j \rangle$.

Les moments t_k de la resolvente $W(z)$ sont définis par le développement en puissances de $\frac{1}{z}$

$$W(z) \sim \frac{1}{z} + \frac{t_1}{z^2} + \dots + \frac{t_k}{z^{k+1}} + \dots \quad \text{quand } z \rightarrow \infty$$

et on définit :

$$u = \frac{c - U}{g}$$

5.5.2 Equations du mouvement

Les changements de variable suivants dans Eq. (5.16) donnent les équations du mouvement :

$$- \delta M_1 = \frac{1}{z-M_1} :$$

$$g(z^2 W(z) - z - t_1) + U(z W(z) - 1) + c(q-1) \tilde{W}(z) = W^2(z) \quad (5.19)$$

$$- \delta M_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z-M_1} \frac{1}{z'-M_2} + \frac{1}{z'-M_2} \frac{1}{z-M_1} \right] :$$

$$g \left(z'^2 F(z, z') - z' W(z) - \tilde{W}(z) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + U(z'F(z, z') - W(z)) \\
& + c(zF(z, z') - W(z')) \\
& + c(q-2)\tilde{F}(z, z') = W(z')F(z, z')
\end{aligned}
\tag{5.20}$$

Nous allons montrer comment on peut éliminer $\tilde{F}(z, z')$, et obtenir ainsi des équations du mouvement n'impliquant que les matrices M_i et M_j (au lieu de trois indices i, j , et k différents), puis comment on peut éliminer à son tour $F(z, z')$, pour obtenir ainsi des relations de récurrence entre les traces de puissances d'une seule matrice.

Le principe est le même que dans le cas particulier de Potts-3 : il s'agit de soustraire des changements de variables différents :

en soustrayant Eq. (5.20) à l'équation obtenue en échangeant les rôles de z et z' , et en utilisant Eq. (5.17) nous obtenons :

$$(f(z) - f(z'))F(z, z') = g(z'W(z) - zW(z') + \tilde{W}(z) - \tilde{W}(z') - uW(z) + uW(z')) \tag{5.21}$$

Si à présent nous choisissons z' tel que $f(z') = f(z)$ et $z' \neq z$, nous avons la relation :

$$(z' - u)W(z) - (z - u)W(z') + \tilde{W}(z) - \tilde{W}(z') = 0 \tag{5.22}$$

Eq. (5.19) nous permet d'éliminer $\tilde{W}$, et on a alors une équation impliquant seulement f, z , et z' :

$$\begin{cases} f(z') = f(z) \\ \frac{1}{c}(z + z' - u - q\frac{c}{g})f(z) = (z + z')^2 - qzz' - (2 - q)u(z + z') + (1 - q)u^2 - \frac{1}{c} \end{cases}
\tag{5.23}$$

Cette équation est une équation non-locale, a priori compliquée, mais nous allons voir qu'elle est suffisante pour obtenir f .

Etude perturbative

Nous avons, au voisinage de l'infini : $f(z) \sim -gz^2$, par suite l'équation $f(z) = f(z')$ et $z \neq z'$ admet la solution $z'(z)$ telle que $z' \sim -z$ au voisinage de l'infini. On peut trouver le développement complet de $z'(z)$ et on insère cette expression dans l'équation Eq. (5.23).

On obtient :

$$gt_2 + (cq - gu)t_1 = 0$$

$$g^2 t_4 + g(cq - 2gu)t_3 - gu(cq - 2gu)t_2 - g(gu^3 + 2)t_1 + c(1 - q) + gu = 0 \quad \dots \quad (5.24)$$

avec la notation $t_k = \langle \text{tr } M_i^k / N \rangle$. Remarquons que, dans le cas général, u et c sont des fonctions de t_2 et $t_{1,1} = \text{tr } M_i M_j / N$. Cependant, on peut exprimer $t_{1,1}$ (grâce à l'équation Eq. (5.19)) en fonction des t_k seulement :

$$c(q - 1)t_{1,1} + gt_3 + Ut_2 - 1 = 0$$

Par suite, nos équations du mouvement nous permettent de réexprimer n'importe quelle trace de puissances paires d'une des matrices M_i en fonction de puissances impaires seulement de cette matrice. Un tel résultat n'est absolument pas évident lorsqu'on considère les équations du mouvement dont nous sommes partis et qui, à première vue, relie les puissances d'une matrice donnée à des traces plus complexes impliquant toutes les matrices $\{M_j\}_{j=1}^q$.

Justifions à présent l'apparition de traces paires seulement à l'ordre dominant dans les équations du mouvement obtenues par développement perturbatif. Si nous écrivons le développement de $f(z)$:

$$f(z) = -gz(z - u) + 1/z + \sum_2^{\infty} t_{i-1}/z^i$$

les coefficients des termes en z^{-i} dans l'équation : $f(z') - f(z) = 0$ s'écrivent, comme $z' = -z + u + \dots$:

$$((-1)^i - 1)t_{i-1} + (-1)^{i-1}(i-1)t_{i-2}u + \dots = 0$$

Par suite, les équations du mouvement nous permettent de relier les parties paires et impaires de $f(z)$.

Ceci est suffisant pour avoir totalement $f(z)$ à condition d'ajouter la condition physique que $f(z)$ a une coupure seulement dans le feuillet physique.

Soulignons pour finir que ces équations du mouvement, que nous avons données dans le cas général d'un modèle de Potts avec branchements seraient un outil précieux pour toute tentative de résolution du modèle par une méthode de groupe de renormalisation.

5.5.3 Solution non-perturbative

Nous allons montrer ici comment l'équation 5.23 peut se réécrire simplement sous une forme semblable à ce que l'on obtient pour le modèle $O(n)$

(modèle de spins à n dimensions, ou de façon équivalente, de boucles sur réseau avec un poids n pour chaque boucle). On peut alors en principe la résoudre exactement, et la solution générale fait intervenir des fonctions elliptiques.

Correspondance avec le modèle $O(n)$

La fonction $f(z)$ solution du modèle de Potts- q possède, tout comme la résolvante $W(z)$, une seule coupure dans le feuillet physique, correspondant au support des valeurs propres que l'on suppose connexe. Il est cependant parfaitement possible que $f(z)$ possède un certain nombre d'autres coupures dans les feuillets non-physique.

C'est effectivement ce que l'on constate lorsqu'on étudie, par exemple, le modèle d'Ising (qui est aussi le modèle de Potts-2).

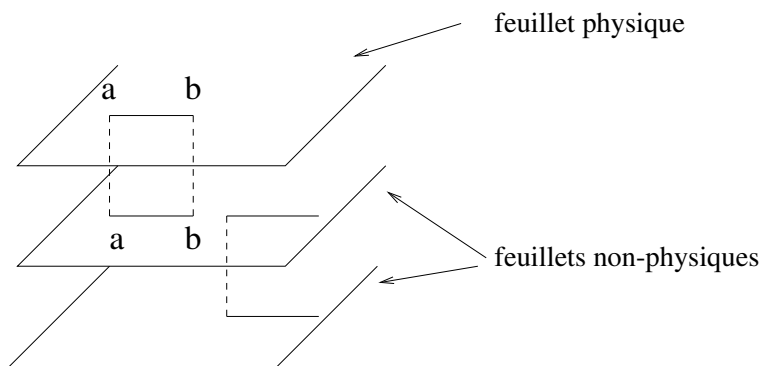


FIG. 5.5 – Modèle de Potts-2 (Ising). Il y a 3 déterminations possibles pour la résolvante. Dans le feuillet physique, on n'a qu'une seule coupure $[a, b]$. Cependant, dans les feuillets non physiques, on montre qu'il y a une autre coupure (non-physique) semi-infinie.

D'une façon générale, on verra que tous les modèles de Potts possèdent une coupure semi-infinie non-physique. Les manipulations qui vont suivre, visant à remplacer $f(z)$ par $\omega(\zeta)$ dans 5.23, reviennent en fait à "déplier" $f(z)$ autour de cette coupure : on remplace la fonction $f(z)$ singulière le long de la coupure $[c, \infty[$ par une autre fonction régulière sur ce segment. L'équation obtenue pour la fonction $\omega(\zeta)$, qui ne possède pas de coupure semi-infinie, est alors beaucoup plus "parlante" et aisée à résoudre que celle pour $f(z)$.

Voyons à présent comment on s'y prend pour “déplier” la coupure semi-infinie.

La fonction $z'(z)$, telle que définie plus haut, vérifiant $f(z') = f(z)$, est une fonction involutive au sens des fonctions multivaluées. On a :

$$z'(z'(z)) = z$$

Soit z_0 un point fixe de cette fonction :

$$z'(z_0) = z_0$$

et notons

$$f_0 = f(z_0) \quad \text{et} \quad \zeta = \sqrt{f_0 - f}$$

z , considérée comme une fonction de ζ , vérifie alors

$$z' = z(-\zeta)$$

et $z(\zeta)$ régulier en $\zeta = 0$. Définissons enfin :

$$\omega(\zeta) = z(\zeta) + \frac{1}{c} \frac{1}{4 - q} (\zeta^2 - f_0 - (2 - q)cu)$$

5.23 devient alors :

$$\omega^2(\zeta) + \omega^2(-\zeta) + (2 - q)\omega(\zeta)\omega(-\zeta) = R(\zeta) \quad (5.25)$$

$R(\zeta)$ est un polynôme pair et de degré 4 en ζ .

Cette équation est semblable à celle obtenue dans le cas du modèle $O(n)$: il suffit de faire le parallèle $2 - q \rightarrow n$. Cependant, les exposants critiques des deux modèles ne sont pas les mêmes : en effet, là où l'on avait la résolvante du modèle dans le cas $O(n)$, nous avons à présent $\omega(\zeta)$, qui est reliée à la réciproque $z(\zeta)$, avec $\zeta^2 = f - f_0$, de $f(z)$, plutôt qu'à la résolvante du modèle de Potts elle-même.

Résolution de l'équation 5.25

Notons :

$$q = 2 - 2 \cos(\nu\pi) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \nu \leq 1$$

et $[a, b]$, avec $ab > 0$ la coupure de la fonction $\omega(\zeta)$.

En écrivant $R(\zeta + i0) - R(\zeta - i0) = 0$, on obtient (lorsque ζ appartient à la coupure, $-\zeta$ n'y appartient pas) :

$$(\omega(\zeta + i0) - \omega(\zeta - i0))(\omega(\zeta + i0) + \omega(\zeta - i0) + 2 \cos(\nu\pi)\omega(-\zeta)) = 0$$

pour tout $a \leq \zeta \leq b$.

Par suite, nous avons l'équation :

$$\omega(\zeta + i0) + \omega(\zeta - i0) - 2 \cos(\nu\pi)\omega(-\zeta) = 0 \quad (5.26)$$

Nous allons à présent étudier la solution de cette équation dans le cas rationnel : $\nu = \frac{l}{r}$ où l et r sont deux entiers premiers entre eux.

Cas rationnel

On définit les fonctions ω_+ et ω_- :

$$\omega_+(\zeta) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}}\omega(\zeta) + e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}\omega(-\zeta)$$

Chaque fois que l'on traverse une coupure, $\omega_{\pm}$ est multiplié par une phase $-e^{\pm i\nu\pi}$. On voit que le nombre de feuillets n'est fini que dans le cas où ν est rationnel.

on a :

$$\omega_-(\zeta) = \omega_+(-\zeta)$$

et on peut réécrire l'équation quadratique en ω comme

$$\omega_+(\zeta)\omega_-(\zeta) = R(\zeta)$$

L'équation linéaire 5.26 devient

$$\omega_+(\zeta + i0) = -e^{i\nu\pi}\omega_-(\zeta - i0) \quad \omega_-(\zeta + i0) = -e^{-i\nu\pi}\omega_+(\zeta - i0)$$

On définit $\phi(\zeta)$ par :

$$\omega_+(\zeta) = \sqrt{R}e^{i(\phi - \frac{(\nu+1)\pi}{2})} \quad \omega_-(\zeta) = \sqrt{R}e^{-i(\phi - \frac{(\nu+1)\pi}{2})}$$

alors

$$\omega(\zeta) = -\frac{\sqrt{R} \cos(\phi)}{\sin \nu\pi}$$

Le polynôme $S(\zeta)$ défini par

$$S(\zeta) = \frac{1}{2}(\omega_+^r + (-1)^{r+l}\omega_-^r)$$

vérifie alors l'équation :

$$S(\zeta) = R(\zeta)^{\frac{r}{2}} e^{-\frac{i(r+l)\pi}{2}} T_r\left(-\frac{\omega(\zeta) \sin(\nu\pi)}{\sqrt{R(\zeta)}}\right)$$

où T_r est le polynôme de Chebychev : $T_r(\cos(\phi)) = \cos r\phi$.

L'équation ci-dessus nous permet d'obtenir, pour tout l et r , une équation algébrique en ζ et ω , et, par suite, en $W(z)$ (la résolvante du modèle) et z .

Le degré de cette équation dépend de la parité de $r+l$: en effet, S est un polynôme pair en ζ quand $r+l$ est pair, donc un polynôme en $f = f_0 - \zeta^2$. Quand $r+l$ est impair, cependant, S est aussi impair et il faut donc prendre le carré de l'équation ci-dessus pour obtenir une équation algébrique en f et z .

On a finalement une équation de degré d en $f(z)$:

$d = 2r - 1$ si $r + l$ est impair

$d = r - 1$ si $r + l$ est pair

Cette équation est facile à résoudre, selon les mêmes principes qui nous ont permis de résoudre l'exemple du modèle de Potts-3, en particulier dans le cas $l = r - 2$. Nous donnons ci-dessous l'évolution du point critique (ici la valeur de c au point critique) lorsque $q \rightarrow 4$ soit une charge centrale conforme qui tend vers l'infini.

On trouve, en particulier, dans la limite $r \rightarrow \infty$ c'est-à-dire pour $q = 4$:

$$c_{crit} = \frac{9 - 4\sqrt{3(3 + \pi^2)}}{21 + 16\pi^2} \simeq -0.0886148$$

$$g_{crit} = \frac{16\pi^2}{(21 + 16\pi^2)^3} [4(129 + 16\pi^2)\sqrt{3(3 + \pi^2)} - 27(57 + 16\pi^2)] \simeq -0.0366283$$

Exposants critiques

Les points critiques des modèles de Potts- q correspondent physiquement aux points où les extrémités de la coupure physique et de la coupure semi-infinie non-physique fusionnent : en terme de la variable ζ , l'extrémité de la coupure semi-infinie, qui correspond à $f = f_0$, se situe à $\zeta = 0$.

Quant à la coupure du feuillet physique, nous l'avons notée $[a, b]$. Ainsi, lorsqu'on se trouve au point critique du modèle, on a $a = 0$. De ceci, et de

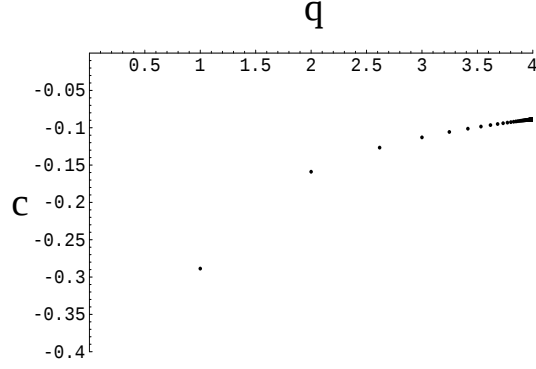


FIG. 5.6 – c critique en fonction de q , pour une suite de cas rationnels où $q \rightarrow 4$, ici $q = 2 - 2 \cos \frac{r-2}{r} \pi$

l'équation 5.25, on peut déduire la valeur des exposants critiques du modèle. En effet, ω s'écrit alors, au voisinage du point critique

$$\omega(\zeta) = C(-\zeta)^\alpha + \text{partie régulière}$$

Toutes les valeurs de α ne sont pas compatibles avec l'équation 5.25. En remplaçant dans cette équation $\omega(\zeta)$ par son expression au voisinage de $\zeta = 0$, on trouve la condition :

$$e^{2i\pi\alpha} + 1 + 2 \cos(\nu\pi) e^{i\pi\alpha} = 0$$

soit

$$\alpha = \pm\nu + 1 + 2p \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

$$\omega(\zeta) \sim (f_o - f)^{\frac{\pm\nu+1+2p}{2}}$$

donne

$$f \sim (z - cste)^{\frac{2}{\pm\nu+1+2p}}$$

par suite, on a, comme on s'attend à ce que l'exposant de f soit supérieur à 1 $f \sim (z - cste)^{\frac{2}{\pm\nu+1}}$, soit

$$\gamma_s = -\frac{(1 \pm \nu)}{(1 \mp \nu)}$$

5.6 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre comment la méthode des boucles permet de résoudre de façon élégante des modèles de matrices couplées de façon complexe : les modèles de Potts- q . Nous avons par cette méthode retrouvé les exposants critiques du modèle pour $q < 4$, ainsi que le lien entre les modèles de Potts et les modèles $O(n)$.

Nous avons de plus montré que la résolvante du modèle est la solution d'une équation algébrique que nous exprimons, pour les modèles de Potts-3 (ce résultat rejoint ceux de [54, 55]) et Potts- ∞ tout d'abord [2], puis pour le cas général des modèles de Potts- q avec $q = 2 - 2 \cos(\nu\pi)$, ν étant rationnel [3]. Ces résultats nouveaux soulignent l'efficacité de la méthode des boucles qui est, en outre, une première étape importante avant toute utilisation de la méthode de groupe de renormalisation.

Enfin, notre méthode, contrairement aux méthodes basées sur une équation de col peut, en principe, se généraliser aux termes suivants du développement topologique en puissances de $\frac{1}{N}$.

Ce travail sur les modèles de Potts laisse donc la porte ouverte à de nombreuses possibilités de travaux de recherche ultérieurs.

Chapitre 6

Modèles à plusieurs coupures et limite $N \rightarrow \infty$

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux modèles à une matrice dans le cas où la distribution de valeurs propres du modèle est non-connexe. Nous verrons que, même dans la limite $N \rightarrow \infty$, des comportements non triviaux surgissent. Nous verrons aussi comment un calcul “naïf” de ces modèles ne permet pas de mettre en évidence ce comportement.

Il est possible, par des méthodes valables à N fini, comme la méthode des polynômes orthogonaux, d’exprimer les grandeurs d’un modèle de matrices en fonction de N . En particulier, il existe, dans le cas bien connu d’un support connexe de valeurs propres, un développement topologique en puissances de $\frac{1}{N^2}$. Par exemple, l’énergie libre $F = -\frac{1}{N^2} \ln Z$ se réécrit sous la forme d’un développement perturbatif : $F = F_0 + \frac{1}{N^2} F_1 + O(\frac{1}{N^4})$.

Nous n’allons cependant pas nous étendre ici sur l’intérêt des termes sous-dominants dans le développement topologique. Les problèmes que nous allons mettre en évidence surgissent en effet dès l’ordre dominant en $\frac{1}{N^2}$, et s’appliquent au cas d’un support non connexe de valeurs propres, dès que l’on cherche à calculer des fonction de corrélation de valeurs propres comme $\rho^c(x, y) = -\frac{\partial^2 F}{\partial V(x) \partial V(y)}$, $\rho(x, y, z) \dots$

Les premiers travaux sur le sujet [31] ont mis en évidence un comportement semblable à celui que l’on a dans le cas d’un support connexe de valeurs propres. Des travaux ultérieurs [32, 33, 34], cependant, ont montré qu’il faut ajouter, dans le cas d’un modèle à deux coupures symétriques, un terme oscillant en $(-1)^N$ dans la fonction de corrélation connexe à deux points $\rho^c(x, y)$. Ceci montre qu’il n’y a pas, dans ce cas, de développement topologique à grand N . Des travaux plus récents [35] ont généralisé ce résultat à

des coupures quelconques, donnant l'expression des polynômes orthogonaux et de la fonction de corrélation d'un tel modèle.

J'expliquerai ici le principe de la méthode semi-classique que nous avons mise au point [4], qui permet à la fois de trouver la fonction de partition, les polynômes orthogonaux et les fonctions de corrélation, et de mettre clairement en évidence l'origine physique de ce comportement.

6.1 Le cas symétrique

Nous allons ici rappeler comment on peut obtenir la fonction à deux points dans le cas symétrique, ainsi que le résultat de [34].

6.1.1 Rappels sur l'usage de la méthode du col dans le cas d'un support de valeurs propres non connexe

Si

$$Z = \int d\Phi e^{-N^2 \text{tr} V(\Phi)}$$

on peut écrire

$$Z = \int \prod_i d\lambda_i e^{-N^2 \sum_i V(\lambda_i) - \sum_{j \neq i} \ln |\lambda_i - \lambda_j|}$$

soit, sous forme continue, une action :

$$S = \int \rho(\lambda) V(\lambda) d\lambda - \int \rho(\lambda) \rho(\mu) \ln |\lambda - \mu| d\lambda d\mu$$

où $\rho(\lambda)$ est la densité de valeurs propres du modèle.

Le calcul du col par rapport à chacune des variables λ_i dans l'expression discrète nous donne :

$$V'(\lambda_i) - \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} = 0$$

Si, par contre, on veut utiliser l'expression continue, on minimise S par rapport à ρ avec la condition :

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$$

En introduisant le multiplicateur de Lagrange Γ , on a :

$$\frac{\delta F}{\delta \rho(z)} - \Gamma = 0$$

soit

$$V(z) - 2 \int \rho(\lambda) \ln |z - \lambda| d\lambda - \Gamma = 0$$

pour z appartenant au support $\mathcal{C}$ des valeurs propres de la matrice.

Pour retrouver la relation habituelle, on dérive l'expression ci-dessus, et on obtient :

$$V'(z) - 2\mathcal{P}\mathcal{P} \int \frac{\rho(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda = 0$$

pour tout z appartenant à $\mathcal{C}$.

Cette dernière expression ne suffit cependant pas, dans le cas d'un support de valeurs propres non-connexe, à trouver le col. En effet, on écrit, dans le cas d'un potentiel de degré d et d'un support $\mathcal{C}$ comprenant k composantes connexes :

$$\omega(z) = \frac{V'(z) + M(z)\sqrt{\sigma(z)}}{2} \quad \text{où} \quad \deg M = d - k - 1$$

$$\sigma(z) = \prod_{i=1}^k (z - a_i)(z - b_i)$$

Le support des valeurs propres étant donné par :

$$\mathcal{C} = \cup_{i=1}^k [a_i, b_i]$$

Le nombre d'inconnues (coefficients du polynôme $M(z)$ et extrémités a_i et b_i des coupures) est alors $d + k - 1$, tandis que le nombre d'équations est d . Par suite, pour un support à plus d'une composante connexe, il nous manque $k - 1 \neq 0$ équations.

Cette apparente insuffisance de la méthode du col pour obtenir le résultat complet s'explique par le fait que la seconde relation s'obtient en dérivant l'action par rapport à de petites variations de λ_i . Quand on a un support en plusieurs parties, une petite variation de la valeur de λ_i ne permet pas de faire passer une valeur propre d'une coupure à l'autre, donc de changer le nombre de valeurs propres présentes dans chaque coupure. On n'a alors qu'un col **local**, minimum de l'action pour un nombre de valeurs propres donné.

Pour obtenir le col global, on utilise la relation non dérivée, issue de petite variations de ρ qui permettent de changer le nombre de valeurs propres de part et d'autre. A la relation

$$V_{eff} = V(z) - 2\mathcal{PP} \int \rho(\lambda) \ln |z - \lambda| d\lambda$$

constant sur chaque composante connexe du support, on ajoute la constance du potentiel effectif sur **tout le support**.

Ceci ajoute $k - 1$ équations aux d précédentes (identité de V_{eff} sur la i^{ieme} coupure et sur la $i + 1^{ieme}$), et on a donc à présent le même nombre d'équations que d'inconnues.

6.1.2 Forme de la fonction à 2 points : calcul classique

Soit

$$Z = \int d\Phi e^{-N^2 \text{tr} V(\Phi)}$$

Avec la définition

$$\frac{\partial V(\Phi)}{\partial V(z)} = \delta(z - \Phi)$$

on a :

$$\rho(x) = \frac{\partial F}{\partial V(x)} \quad \text{et} \quad \omega(x) = \int \frac{\rho(\lambda)}{x - \lambda} d\lambda$$

$$\rho^c(x, y) = -\frac{\partial^2 F}{\partial V(x) \partial V(y)} = -\frac{\partial \rho(x)}{\partial V(y)} \quad \omega^c(x, y) = \int \frac{\rho^c(\lambda, \mu)}{(x - \lambda)(y - \mu)} d\lambda d\mu$$

$\rho^c(x, y)$ n'est non nul que si x et y appartiennent tous deux au support des valeurs propres, que nous prendrons ici symétrique et formé de deux composantes connexes seulement : $\mathcal{C} = [-b, -a] \cup [a, b]$ du modèle.

Comme on a

$$\int \rho(x) dx = 1$$

alors

$$\int \rho^c(x, y) dy = 0$$

d'où

$$\omega^c(x, y) \sim \frac{cste}{x^2} \text{ quand } x \rightarrow \infty \quad (6.1)$$

$$\omega^c(x, y) \sim \frac{cste}{y^2} \text{ quand } y \rightarrow \infty \quad (6.2)$$

$$(6.3)$$

D'autre part, $\omega^c(x, y)$ n'a de coupure que quand x ou y appartiennent au support des valeurs propres $\mathcal{C}$.

La méthode du col nous donne l'équation

$$2\Re\omega(x) = V'(x)$$

soit

$$\Re \frac{\partial \omega(x)}{\partial V(y)} = \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \delta(x - y)$$

d'où

$$\Re \omega^c(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(x - y)^2}$$

De la définition de $\omega^c(x, y)$, on tire que ω^c n'a pas de raison, pour x et y hors de $\mathcal{C}$ d'être singulière en $x = y$.

Ceci signifie que

$$\omega^c(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(x - y)^2} \left(1 - \frac{N(x, y)}{\sqrt{\sigma(x)\sigma(y)}} \right)$$

avec

$$\sigma(x) = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)$$

et $N(x, y)$ polynôme symétrique en x et y tel que $\omega^c(x, y)$ ait le bon comportement ($\omega^c(x, y) \sim \frac{1}{x^2}$ quand $x \rightarrow \infty$) quand x et y grands et n'ait pas de pôle en $x = y$.

Ceci donne :

$$N(x, y) = x^2 y^2 - (a^2 + b^2)xy + a^2 b^2 + C(x - y)^2$$

C est a priori une constante indéterminée.

La partie connexe $\rho^c(x, y)$ de la fonction de corrélation des valeurs propres, lorsque x et y sont d'ordre 1 (nous verrons plus tard que cette expression n'est pas valable pour les corrélations entre valeurs propres voisines), se déduit simplement de la discontinuité de $\omega^c(x, y)$ au voisinage du support des valeurs propres. On a :

$$\rho^c(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{(x - y)^2} \frac{N(x, y)}{\sqrt{\sigma(x)\sigma(y)}}$$

Rappelons que

$$\rho^c(x, y) = N^2 \left(\left\langle \frac{\text{tr}}{N} \delta(x - M) \frac{\text{tr}}{N} \delta(y - M) \right\rangle - \left\langle \frac{\text{tr}}{N} \delta(x - M) \right\rangle \left\langle \frac{\text{tr}}{N} \delta(y - M) \right\rangle \right)$$

tant que $|x - y| = O(1)$, les positions des valeurs propres sont très peu corrélées, d'où le facteur N^2 pour avoir une expression d'ordre 1. Dès que $|x - y| = O(\frac{1}{N})$, cependant, les corrélations changent d'ordre de grandeur, d'où la divergence qualitativement correcte dans l'expression ci-dessus de la fonction à deux points.

6.1.3 Détermination de C

La méthode du col nous donne :

$$\int_b^c V'(z) - 2\omega(z) dz = 0$$

qui implique :

$$\int_b^c \frac{1}{(x - y)^2} - 2\omega^c(x, y) dy = 0$$

Cette relation nous permet de déterminer la valeur de la constante C .

On trouve [31] :

$$C = -\frac{1}{2}((a^2 + b^2) - (a + b)^2 \frac{E(k)}{K(k)})$$

où les intégrales elliptiques $E(k)$ et $K(k)$ sont calculées pour

$$k^2 = \frac{4ab}{(a + b)^2}$$

Cette méthode du col est cependant tributaire d'un grand nombre d'hypothèses. En particulier, on a utilisé une représentation continue de la densité de valeurs propres et on suppose qu'il existe un développement topologique à N grand.

[34] ont préféré utiliser la méthode des polynômes orthogonaux qui, étant valable pour tout N fini, n'est pas a priori tributaire de la supposition qu'il existe un développement topologique en puissances de $\frac{1}{N^2}$.

Après avoir choisi un ansatz pour les $P_n(\lambda)$, et en utilisant les propriétés d'unicité sur les polynômes orthogonaux, ils ont trouvé la valeur de C . L'expression asymptotique des P_n , pour $N \rightarrow \infty$ mais $N - n$ fini, est :

$$P_n(\lambda) = e^{\frac{n}{2}V(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{f(\lambda)}} \cos(N\zeta - (N - n)\phi + \chi + (-1)^n \eta)$$

où

$$f(\lambda) = \frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) \sin 2\phi(\lambda)$$

$$\zeta'(\lambda) = -\pi \rho(\lambda)$$

$$\cos 2\phi(\lambda) = \frac{2\lambda^2 - (a^2 + b^2)}{(b^2 - a^2)}$$

$$\cos 2\eta(\lambda) = \frac{b \cos \phi(\lambda)}{\lambda}$$

$$\sin 2\eta(\lambda) = \frac{a \sin \phi(\lambda)}{\lambda}$$

La constante C vaut alors :

$$C = (-1)^N ab$$

On voit que :

- 1) Cette valeur est différente de celle trouvée par la méthode du col.
- 2) Elle dépend explicitement de N , contredisant ainsi la supposition qu'il y aurait dans le cas à deux coupures un développement topologique en puissances de N .

6.2 Cas général

Les résultats précédents, en mettant en évidence une incompatibilité entre les résultats obtenus par des méthodes de calcul différentes, posent beaucoup de questions. Nous allons ici essayer d'y répondre en décrivant notre travail dans le cas général d'un modèle à deux coupures non symétriques.

On va s'attaquer à ce problème en utilisant la méthode du col. Cependant, au lieu de calculer l'énergie libre F (pour la dériver par la suite par rapport à $V(x)$ et $V(y)$ afin d'obtenir $\rho^c(x, y)$) uniquement au premier ordre en $\frac{1}{N^2}$, nous allons garder certains termes sous-dominants dans F . Nous verrons en effet que ceux-ci, lorsque dérivés deux fois par rapport au potentiel, contribuent à l'ordre dominant à $\rho^c(x, y)$.

Soit le modèle

$$Z = \int d\Phi e^{-N \text{tr } V(\Phi)}$$

où le potentiel $V(z)$ est un potentiel à deux puits.

On suppose que le support des valeurs propres est non connexe, donné par

$$\mathcal{C} = [a, b] \cup [c, d] \quad a < b < c < d$$

Soient x_1 et x_2 , $x_1 + x_2 = 1$ les proportions de valeurs propres comprises respectivement entre a et b et entre c et d .

On a

$$x_1 = \int_{[a,b]} \rho(\lambda) d\lambda$$

On peut, au lieu de calculer directement Z , calculer d'abord $Z(n)$, où le nombre $n = Nx_1$ de valeurs propres dans la première coupure est fixé.

On a alors

$$Z = \sum_{n=0}^N Z(n)$$

On peut écrire :

$$Z = \int \prod_i d\lambda_i \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 e^{-N \sum_k V(\lambda_k)}$$

et

$$Z(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \int_{-\infty}^E \prod_{i \leq n} d\lambda_i \int_E^{+\infty} \prod_{j > n} d\lambda_j e^{-N \sum_k V(\lambda_k)} \prod_{k < l} (\lambda_k - \lambda_l)^2$$

où E est un nombre arbitraire compris entre b et c .

On montre alors que chacun des

$$\tilde{Z}(n) = \frac{n!(N-n)!}{N!} Z(n)$$

admet un développement topologique en puissances de $\frac{1}{N^2}$.

En effet, on réécrit $\tilde{Z}(n)$ comme une intégrale sur deux matrices différentes : M_1 de taille $n \times n$, matrice carrée des n premières valeurs propres et M_2 de taille $(N-n) \times (N-n)$, matrice carrée des $(N-n)$ valeurs propres restantes.

$\tilde{Z}(n)$ est alors :

$$\tilde{Z}(n) = \frac{1}{C_n C_{N-n}} \int d[M_1] \int d[M_2] e^{-N \operatorname{tr}(V(M_1)) - N \operatorname{tr}(V(M_2)) + 2 \operatorname{tr} \ln(M_1 \otimes \mathbb{I} - \mathbb{I} \otimes M_2)}$$

C_n et C_{N-n} sont des constantes indépendantes de V .

On affirme que cette intégrale matricielle possède bien un développement topologique en $\frac{1}{N^2}$, dans la limite $N \rightarrow \infty$. En effet, on effectue un développement perturbatif au voisinage du plus petit minimum de V (celui compris entre a et b) pour M_1 , et au voisinage du plus grand minimum (compris entre c et d) de v pour M_2 . On réorganise ensuite le développement perturbatif obtenu selon la topologie des diagrammes de Feynman.

On a alors finalement

$$Z = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{\frac{N^2}{2}} N^{-\frac{1}{12}} \sum_{n=0}^N e^{-F(V, N, x_1)}$$

où chaque $F(V, N, x_1)$ a un développement asymptotique

$$F(V, N, x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} N^{2-2h} F_h(V, x_1)$$

$F_h(V, x_1)$ est une fonction **régulière** de $x_1 = \frac{n}{N}$.

La dépendance en E s'exprime par des termes exponentiellement petits du type

$$e^{-Ncste}$$

et est donc non-perturbative. Elle n'apparaît donc pas dans le développement ci-dessus.

La méthode du col consisterait ici à remplacer la somme sur n par une intégrale, puis à assimiler $F = -\frac{1}{N^2} \ln Z$, à l'ordre dominant quand $N \rightarrow \infty$, à sa valeur au col que l'on notera x_c :

$$F = F_0(V, x_c)$$

où x_c est la valeur de x_1 pour laquelle F_0 est minimale :

$$\frac{\partial F_0}{\partial x}(x_c) = 0$$

et Nx_c n'est pas a priori entière.

Or, ici, on a en fait une somme discrète sur n , et un calcul plus précis de Z donne, en développant F_0 au voisinage de x_c , et en remarquant que seules les valeurs de n proches de Nx_c contribuent (ce qui nous permet d'étendre la somme à tous les n compris entre $-\infty$ et $+\infty$) :

$$Z = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{\frac{N^2}{2}} N^{-\frac{1}{12}} e^{-N^2 F_0(V, x_c)} e^{-F_1(V, x_c)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(n-Nx_c)^2}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}(V, x_c)}$$

soit, à une constante indépendante de V près :

$$F = -\frac{1}{N^2} \ln Z = F_0(V, x_c) + \frac{1}{N^2} [F_1(V, x_c) + \frac{1}{2} \ln(2\pi F_0''(x_c)) - \ln \theta_3(Nx_c)] + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

la fonction

$$\theta_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2n\pi z} e^{in^2\tau\pi}$$

obéissant aux relations de périodicité :

$$\theta_3(z+1) = \theta_3(z) \quad , \quad \theta_3(z+\tau) = e^{-i\pi(2z+\tau)} \theta_3(z)$$

Et avec

$$\tau = \frac{2i\pi}{\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}(x_c)}$$

F est bien égale, à l'ordre dominant, à sa valeur au col $F_0(V, x_c)$. Cependant, dérivée deux fois par rapport à $V(\lambda)$ et $V(\mu)$ pour obtenir $\rho^c(\lambda, \mu)$, elle devient :

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial V(\lambda) \partial V(\mu)} = -\frac{\partial^2 F_0}{\partial V(\lambda) \partial V(\mu)} - \frac{\partial x_c}{\partial V(\lambda)} \frac{\partial x_c}{\partial V(\mu)} [\ln \theta_3(Nx_c)]''$$

On obtient donc

$$\rho^c(\lambda, \mu) = \rho_{col}^c(\lambda, \mu) - \frac{\partial x_c}{\partial V(\lambda)} \frac{\partial x_c}{\partial V(\mu)} [\ln(\theta_3(Nx_c))]''$$

En dérivant la définition de x_c :

$$\frac{\partial F_0}{\partial x}(V, x_c) = 0$$

par rapport à $V(\lambda)$, on déduit

$$\frac{\partial x_c}{\partial V(\lambda)} = -\frac{\tau}{2i\pi} \frac{\partial \rho(\lambda)}{\partial x} = -\frac{\tau}{2i\pi} \frac{Q}{\sqrt{\sigma(\lambda)}}$$

où Q est une constante, et

$$\sigma(\lambda) = (\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)$$

$\omega(\lambda) = \frac{V'(\lambda) - M\sqrt{\sigma}}{2} \sim \frac{1}{\lambda}$ entraine $\frac{\partial \omega(\lambda)}{\partial x} \sim \frac{cste}{\lambda^2}$. Par suite,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{M\sqrt{\sigma}}{2i\pi} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\omega(\lambda)}{2i\pi} = \frac{Q}{\sqrt{|\sigma|}}$$

où Q est un polynôme qui ne peut être que de degré 0 en λ , soit une constante.

On montre que :

$$Q = \left[\int_a^b \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \right]^{-1} \quad \text{et} \quad \tau = i \frac{\int_a^b \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}}}{\int_c^b \frac{1}{\sqrt{\sigma}}}$$

Et, par suite :

$$\rho^c(\lambda, \mu) = \rho_{col}^c(\lambda, \mu) - \frac{(c-a)(d-b)}{8\pi^2(K(m))^2} \frac{[\ln(\theta_3(Nx_c))]''}{\sqrt{\sigma(\lambda)\sigma(\mu)}}$$

avec

$$m = \frac{(d-a)(c-b)}{(c-a)(d-b)}$$

et

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} d\theta$$

En terme de fonctions elliptiques, on peut réécrire :

$$\rho^c(\lambda, \mu) = -\frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{(\sqrt{|R(\lambda, \mu)|} + \sqrt{|R(\mu, \lambda)|})}{(\lambda - \mu)^2} + \frac{\epsilon_\lambda \epsilon_\mu (c-a)(d-b) \operatorname{sn}^2(K(m)(2Nx_c + 1))}{\sqrt{|\sigma(\lambda)|} \sqrt{|\sigma(\mu)|}} \right]$$

$$R(\lambda, \mu) = \frac{(\lambda - a)(\lambda - b)(\mu - c)(\mu - d)}{(\mu - a)(\mu - b)(\lambda - c)(\lambda - d)}$$

$$\epsilon_\lambda = 1 \text{ si } \lambda \in [a, b], \quad -1 \text{ si } \lambda \in [c, d], \quad \text{et } 0 \text{ sinon}$$

La fonction $\text{sn}^2(K(m)(2Nx_c + 1))$ est une fonction paire de Nx_c , périodique de période 1, et qui varie entre 0 et 1. Par suite, la fonction à deux points ne dépend que de a, b, c , et d et de la partie fractionnaire de Nx_c , soit de la distance à une valeur entière du “nombre” Nx_c de valeurs propres au col dans la coupure $[-b, -a]$. Cette fonction est une fonction périodique de N si x_c rationnel, ou quasi-périodique sinon.

Dans le cas symétrique, on a $d = -a$, $c = -b$ et on retrouve bien le résultat de [34].

Polynômes orthogonaux

On trouve de la même façon les expressions des polynômes orthogonaux.

Pour cela, il suffit d'utiliser la représentation intégrale (voir références [39, 42]) :

$$P_n(\lambda) = \frac{\int dM_{n \times n} \det(\lambda - M) e^{-N \text{tr} V(M)}}{\int dM_{n \times n} e^{-N \text{tr} V(M)}}$$

où l'intégrale se fait sur des matrices hermitiennes M de taille $n \times n$.

Pour obtenir l'expression asymptotique de P_n quand $n - N = O(1)$, il suffit de réécrire $P_n(\lambda)$ comme le rapport de deux fonctions de partitions :

$$P_n(\lambda) = \frac{Z(V + \delta V_1 + \delta V_2)}{Z(V + \delta V_1)}$$

avec

$$\delta V_1(M) = \frac{N - n}{n} V(M)$$

et

$$\delta V_2(M) = -\frac{1}{n} \ln(z - M)$$

et de calculer celles-ci par la méthode utilisée précédemment.

On peut introduire les petits paramètres $t_1 = \frac{N-n}{n}$ et $t_2 = \frac{1}{n}$, et dériver l'expression de la fonction de partition par rapport à t_1 et t_2 .

On trouve alors :

$$P_n(\lambda) = \sqrt{u'(\lambda)} p_n(u(\lambda)) e^{N \int_{\lambda_0}^{\lambda} \omega}$$

avec

$$p_n(u) = C_n \frac{\theta_3(Nx + 2(N-n)u_\infty + u - u_\infty)\theta_1(2u_\infty)}{\theta_3(Nx + 2(N-n)u_\infty)\theta_1(u - u_\infty)} \left(\frac{\theta_1(u + u_\infty)}{\theta_1(u - u_\infty)} \right)^{n-N}$$

où C_n et λ_0 sont choisis de façon à ce que $P_n(\lambda)$ se comporte en λ^n pour λ grand.

Ceci est le résultat dans le cas où λ se trouve en dehors des coupures : $\lambda \notin [a, b] \cup [c, d]$.

Si λ se trouve sur les coupures, cependant, la méthode du col met en évidence l'existence de 2 cols qui contribuent au même ordre dans le résultat.

$P_n(\lambda)$ est alors donné par une somme de 2 termes :

$$P_n(\lambda) = C\sqrt{u'}[p_n(u)e^{-iN\pi\int_d^\lambda \rho(z)dz} + iP_n(-u)e^{iN\pi\int_d^\lambda \rho(z)dz}]e^{\frac{N}{2}V(\lambda)}$$

avec

$$C = d^N e^{-\frac{N}{2}V(d)} e^{-N\int_d^\infty (\omega(z) - \frac{1}{z})dz}$$

Relation de récurrence

Les polynômes orthogonaux doivent vérifier la relation de récurrence :

$$-\lambda P_n(\lambda) + P_{n+1}(\lambda) + \beta_n P_n(\lambda) + \alpha_n P_{n-1}(\lambda) = 0$$

En divisant l'équation ci-dessus par P_n , et en ajustant les pôles dans le membre de gauche afin d'obtenir une fonction bi-périodique sans pôle, donc une constante, on obtient la valeur de α_n . Enfin, on ajuste aussi β_n de façon à ce que cette constante vaille bien 0.

On obtient :

$$\alpha_n = \frac{1}{16} \left(((d-a) - (c-b))^2 + 4(d-a)(c-b)(1-m) \frac{\operatorname{sn}^2 x_n}{\operatorname{dn}^2 x_n} \right)$$

et

$$\beta_n = \frac{(a+d) - (c-b)}{2} + \frac{d-b}{1 + \frac{d-c}{c-b} \frac{\operatorname{dn}^2(x_n - u_\infty)}{(1-m)\operatorname{sn}^2(x_n - u_\infty)}}$$

avec

$$x_n = Nx_c + 2(N - n)u_\infty$$

On voit que, dans le cas général, α_n et β_n oscillent en fonction de x_n . Les extrema des courbes sur lesquelles ils oscillent sont :

$$\frac{d - a - c + b}{4} \leq \sqrt{\alpha_n} \leq \frac{d - a + c - b}{4}$$

$$\frac{d + a}{2} - \frac{c - b}{2} \leq \beta_n \leq \frac{d + a}{2} + \frac{c - b}{2}$$

Dans le cas d'une distribution à une coupure, $\sqrt{\alpha_n}$ est la longueur de la distribution de valeurs propres, tandis que β_n en est le centre.

On retrouve ici des résultats similaires, puisque la borne inférieure de α_n est la taille de la distribution, et β_n est centré sur $\frac{d+a}{2}$.

Noyau $K(\lambda, \mu)$ et fonction de corrélation de valeurs propres

On déduit des polynômes orthogonaux l'expression du noyau $K(\lambda, \mu)$ défini par

$$K(\lambda, \mu) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n(\lambda) \psi_n(\mu)$$

et à partir duquel on peut obtenir toutes les fonctions de corrélation des valeurs propres par

$$R_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{N^N}{N!} \det |K(\lambda_i, \lambda_j)|$$

On a, avec $u = u(\lambda) = \int^\lambda \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ et $v = u(\mu)$, en supposant que λ et μ appartiennent à $[a, b] \cup [c, d]$:

$$K(\lambda, \mu) = f(u, v) \sum_{\epsilon, \eta, \kappa = \pm 1} \kappa \sqrt{\epsilon \eta} \frac{\theta_3(Nx_c + \epsilon u - \kappa u_\infty) \theta_3(Nx_c + \eta v + \kappa u_\infty)}{\theta_1(\epsilon u - \kappa u_\infty) \theta_1(\eta v + \kappa u_\infty)} e^{-Ni\pi(\epsilon\zeta(\lambda) + \eta\zeta(\mu))}$$

avec

$$f(u, v) = \frac{\sqrt{u'v'} \theta_1(u - u_\infty) \theta_1(u + u_\infty) \theta_1(v - u_\infty) \theta_1(v + u_\infty)}{N \theta_1(u - v) \theta_1(u + v)}$$

et

$$\zeta(\lambda) = \int_d^\lambda \rho(z) dz$$

On retrouve, dans le cas où $\lambda - \mu$ est d'ordre 1, le régime des corrélations à longue distance entre valeurs propres $\rho(\lambda, \mu)$ trouvé précédemment, à condition de "lisser" les oscillations.

Quand au régime courte distance : $|\lambda - \mu| \sim O(\frac{1}{N})$, on trouve la fonction de corrélation universelle bien connue

$$R_2(\lambda, \mu) \sim \rho(\lambda)\rho(\mu) \left(1 - \left(\frac{\sin N\pi\rho(\lambda)(\lambda - \mu)}{N\pi\rho(\lambda)(\lambda - \mu)} \right)^2 \right)$$

6.3 Cas à plus de deux coupures

Le calcul de la fonction de partition du modèle dans le cas d'une distribution de valeurs propres à k coupures se fait selon les mêmes principes que précédemment.

On a un support $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_k$ et on définit, cette fois-ci, les variables $x_1, \dots, x_{k-1}, x_k$ avec $x_1 + \dots + x_k = 1$ caractérisant les proportions de valeurs propres présentes sur chaque coupure. On introduit aussi le vecteur $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_k$. L'énergie libre admet à $\mathbf{x}$ fixé, comme précédemment, un développement topologique en puissances de $\frac{1}{N}$. Pour obtenir l'énergie libre totale, on somme sur le vecteur $\mathbf{n} = N\mathbf{x}$ et on a :

$$Z \propto \sum_{\mathbf{n}} e^{-N^2 F_0(V, \vec{n}) - F_1(V, \mathbf{n})}$$

soit, en notant $x_1^c, \dots, x_{k-1}^c$ les valeurs au col des $x_1, \dots, x_k$,

$$F = F_0(V, \mathbf{x}^c) + \frac{1}{N^2} (F_1(V, \mathbf{x}^c) - \ln(\theta(N\mathbf{x}^c, \tau))) + O(\frac{1}{N^4})$$

où θ est la fonction theta de Riemann en genre $k - 1$ définie par :

$$\theta(\mathbf{z}, \tau) = \sum_{\mathbf{n}} e^{-\frac{N^2}{2}(\mathbf{n}-\mathbf{z})\tau^{-1}(\mathbf{n}-\mathbf{z})} = \sum_{\mathbf{n}} e^{i\pi\mathbf{n}\tau\mathbf{n}} e^{-2i\pi\mathbf{n}\mathbf{u}}$$

τ est la matrice $(k - 1) \times (k - 1)$ définie par :

$$\tau_{ij}^{-1} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^c}$$

Les fonctions de corrélation générales et les expressions des polynômes orthogonaux se déduisent, comme dans le cas à 2 coupures, de la valeur de l'énergie libre F .

Ce dernier travail met en lumière un certain nombre de subtilités apparaissant, dans la limite $N \rightarrow \infty$, dans le cas des modèles à support de valeurs propres non-connexe. Nous avons montré comment on peut calculer l'énergie libre d'un tel modèle, et en déduire les polynômes orthogonaux ainsi que les fonctions de corrélation de valeurs propres.

Notre méthode met en particulier en évidence le rôle du caractère discret des valeurs propres dans l'absence, à N grand, d'un développement topologique en puissances de $\frac{1}{N}$. On trouve en effet une dépendance quasi-périodique en N , où le résultat ne dépend, dans le modèle à deux coupures, que de la partie fractionnaire de Nx_c (x_c = proportion de valeurs propres au col dans une des coupures). Nos résultats se généralisent aux cas à un nombre quelconque de coupures ainsi qu'au cas des potentiels complexes. On espère pouvoir les appliquer aussi dans le cas d'autres modèles plus généraux encore, comme les ensembles symplectiques ou orthogonaux ou les modèles à plusieurs matrices.

Chapitre 7

Conclusion

À travers cette thèse, nous avons avancé dans la compréhension des modèles de matrices dans la limite planaire ($N \rightarrow \infty$).

Sachant que, par l'étude des flots de groupe de renormalisation, on espère mieux comprendre pourquoi aucun des modèles de matrices résolus jusqu'à présent ne correspond à une théorie de gravité quantique avec de la matière de charge centrale conforme supérieure à 1, nous avons tout d'abord travaillé à améliorer les techniques de groupe de renormalisation. Nous avons ainsi réussi à diviser par plus de 50 l'incertitude sur la position du point critique du modèle cubique, et à assurer la convergence de même qu'une bonne précision sur les exposants critiques. Nous avons aussi travaillé sur le modèle d'Ising et obtenu, là encore, une meilleure précision que les travaux précédents. L'étude des flots de groupe de renormalisation que nous avons obtenus jusqu'à présent concorde en outre avec l'hypothèse décrivant l'évolution des modèles de matrices avec la valeur de la charge centrale conforme, et selon laquelle on ne pourrait pas retrouver un véritable modèle de gravité avec matière à $c > 1$ à partir d'un modèle de matrices. Il devrait être possible, en continuant les travaux sur la méthode de groupe de renormalisation, et en particulier en l'appliquant à des suites de modèles de charge centrale conforme $c \rightarrow 1$, de finir de vérifier cette hypothèse.

Nous avons aussi montré comment, par la méthode des boucles, on peut résoudre totalement les modèles de Potts- q sur réseau aléatoire, bien que les matrices soient alors couplées de façon complexe. Nous avons ainsi généralisé les résultats obtenus précédemment pour $q = 1, 2, 3$ et 4. Outre l'intérêt en soi de ces modèles (en particulier, la charge centrale conforme tend vers 1 quand $q \rightarrow 4$), les techniques utilisées ouvrent la voie à la résolution d'autres modèles de matrices non couplées en chaîne.

Enfin, nous nous sommes intéressés aux calculs des fonctions de corrélation de niveaux d'énergie des modèles de matrices. Nous avons étudié plus particulièrement le cas d'un support non-connexe de valeurs propres et montré que la contradiction entre un traitement "naïf" de la limite $N \rightarrow \infty$ et la solution obtenue par des méthodes de polynômes orthogonaux vient du caractère discret des valeurs propres. Nous avons montré comment on peut obtenir les expressions de l'énergie libre, des polynômes orthogonaux, et des fonctions de corrélation, par une méthode simple et physiquement parlante. Nous espérons enfin pouvoir généraliser tous ces résultats à des ensembles de matrices différents, comme les ensembles symplectique ou orthogonal.

Chapitre 8

Articles

Nuclear Physics B 6166 (1999) 1–99

Renormalization group for matrix models with branching interactions

Gabrielle Bonnet^{1,2}, François David^{3,4}

CEA/Saclay, Service de Physique Théorique, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Received 26 November 1998; revised 19 February 1999; accepted 29 March 1999

Abstract

We develop a method to obtain the large- N renormalization group flows for matrix models of two-dimensional gravity plus branched polymers. This method gives precise results for the critical points and exponents for one-matrix models. We show that it can be generalized to two-matrix models and we recover the Ising critical points. © 1999 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

PACS: 11.10.-z; 11.10.Hi; 11.15.Pg; 11.25.Pm

Keywords: Non-critical strings; 2D gravity; Random matrices; Large- N renormalization group

1. Introduction

Random matrices are useful for a wide range of physical problems. In particular, by the means of Feynman rules, random matrices can be interpreted in term of two-dimensional surfaces, which themselves are related to two-dimensional quantum gravity [1]. 2D quantum gravity models can be coupled to matter fields, with a non-zero central charge C . In term of matrices, this leads to consider multi-matrix models, which, studied near their critical points, in the scaling limit, allow one to recover a continuous theory.

Some of the random matrices models have been solved exactly [2] and the continuous limit one recovers in the neighbourhood of their critical points has been related to $C \leq 1$ quantum gravity models. Although the behaviour of $C \leq 1$ models is well understood,

¹ AMN

² E-mail: gabonnet@spht.saclay.cea.fr

³ Physique Théorique CNRS

⁴ E-mail: david@spht.saclay.cea.fr

exact methods have not been able to solve $C > 1$ models yet. There is a “ $C = 1$ barrier”, which prevents us from using $C > 1$ matrix models as a tool to understand $C > 1$ two-dimensional quantum gravity.

Whereas exact technics are unable to deal with $C > 1$ models, an approximate method is likely to succeed better. In 1992, Brezin and Zinn-Justin [3] introduced a new method to solve random matrices models: the large- N renormalization group (RG), where the rescaling parameter N is the size of the matrices. Integrating over part of the matrices to reduce N one obtains a RG flow in the space of actions. Fixed points should correspond to critical points of matrix models in the large- N limit and the scaling dimensions of operators give the corresponding critical exponents. For instance, the scaling dimension λ_0 of the most relevant operator is related to the “string exponent” γ_s by the relation $\gamma_s = 2 - 2/\lambda_0$.

While the large- N renormalization group method was introduced to study directly $C > 1$ models, its application to already solved (by exact methods) $C \leq 1$ models is also useful. Indeed, in [4] it was argued by one of the authors that the understanding of the behaviour of the flows for $C \leq 1$ models would throw light on what happens at $C > 1$: taking into account “branching interactions” in matrix models, it is expected that in addition to the gravity fixed point there is another fixed point (corresponding to the “branching” transition between 2D gravity and branched polymer behaviour). The value of the critical exponents when $C \rightarrow 1$ (known from the exact solutions and KPZ scaling) support the conjecture of [4] that at $C = 1$ these two fixed points would merge, and that there would be generically no gravity fixed point for $C > 1$ models.

In this paper we develop the large- N RG method in order to study precisely matrix models for 2D gravity + branched polymers. We shall describe first in Section 2 the renormalization group method as it was introduced by Brezin and Zinn-Justin, and the improvements made by Higuchi et al. [5], using the equation of motions. Then we explain why these methods are not sufficient to study our class of models. We show in Section 3 that the linear approximation of [5] is not sufficient and we propose a method to go further, and we apply it to the one-matrix model. The method still requires numerical analysis, which is performed in Section 4, where the resulting RG flow equations are analysed and the results of the method are compared to the previous results of [5] and to the exact results. Finally in Section 5 we shall consider the generalizations of our method, in particular to the Ising plus branched polymer two-matrix model.

2. The renormalization group for matrix model

2.1. General idea

We shall consider a matrix model for gravity plus branched polymers. The partition function is

$$Z = \int d\Phi e^{-N^2 V(\Phi)}, \quad \Phi \text{ hermitian matrix } N \times N, \quad (1)$$

where

$$V(\Phi) = T_2 + gT_4 + \frac{h}{2}T_2^2, \quad T_n = \frac{1}{N} \text{tr} \left[\frac{\Phi^n}{n} \right]. \quad (2)$$

In Eq. (2) g is the gravity coupling constant and h is the branched polymer coupling constant. This model can be solved exactly, thus it should be a good test of renormalization group methods. When h is equal to zero, it is the pure gravity model that was considered by Brezin and Zinn-Justin in [3] when they first tested their renormalization group (RG) method. The general idea of RG is to start from the potential $V(\Phi')$ for a $N' \times N'$ matrix Φ' with $N' = N + 1$, and to integrate over the last row and the last column of the matrix, leading to an effective action V' for the $N \times N$ remaining matrix Φ . Performing a linear rescaling of Φ (wave-function renormalization) to keep the $\text{tr}(\Phi^2)$ term unchanged one obtains the renormalized action $V(\Phi) + N^{-1} \Delta V(\Phi)$ and the RG flow equation in the space of action $N \frac{\partial}{\partial N} V = \Delta V$.

In [3] it was shown that at order g^3 the action (2) (with $h = 0$) stayed closed (up to a additive shift corresponding to a $\text{tr}(\mathbf{1})$ operator), i.e. no new operators were generated by the RG. The corresponding beta-function for g was found to have a zero for $g < 0$, corresponding to the critical coupling where pure gravity scaling is recovered. However, at that order the first numerical result of [3] were only very qualitative, since the error on the critical coupling itself is of order 100%. This method was then developed further by several authors [6].

Shortly after, Higuchi, Itoi, Nishigaki and Sakai [5] improved the RG method by using the equations of motion of the matrix model (the so-called loop equations) to eliminate some of the new operators which appear in the RG transformation at higher orders in g . They first considered the pure gravity model with cubic action

$$V(\Phi) = T_2 + gT_3 \quad (3)$$

and showed that in the planar limit, the RG equation for the free energy $F(g)$ can be written as

$$N \frac{\partial F}{\partial N} + 2F = G(g, \partial F / \partial g), \quad (4)$$

where G is a non-linear function of g , the gravity coupling constant, and of $\partial F / \partial g = \langle T_3 \rangle$. This is a non-linear differential equation, at variance with the standard RG equations which should be linear and of the generic form given in [3]

$$N \frac{\partial F}{\partial N} - \beta(g) \frac{\partial F}{\partial g} + \gamma(g) F = r(g) \quad (5)$$

(where $\gamma(g)$ and $r(g)$ are regular functions in g). In order to obtain a standard renormalization group equation the authors of [5] truncated $G(g, \partial F / \partial g)$ to the first-order in $\partial F / \partial g$. For this problem this approximation is in fact quite good. The results they obtained for the cubic action (3) are a 0.2% error for the value of the critical coupling

and a 2.5% error for the eigenvalue corresponding to the string critical exponent γ . Moreover, they have generalized this method to a one-matrix model with two couplings: $g_3 T_3 + g_4 T_4 + T_2$ and also to the Ising two-matrix model, with in both cases results quite close to the exact results. In particular for the quartic action ($g_3 = 0$) the relative errors on the coupling and the eigenvalue are 1% and 5%.

Nevertheless, the linear approximation method has only been applied up to now to gravity models without branching interactions. The case of gravity plus branched polymers, which are the models one has to consider if one wants to verify the scenario of [4], would be more difficult to treat. One would have to introduce $\partial F / \partial h$, partial derivative of F with respect to h , and linearly develop the equations in $\partial F / \partial h$ and $\partial F / \partial g$. Moreover, the success of the linear approximation method of [5] may be attributed to the fact that the value of the critical coupling for pure gravity, $g_c \simeq -0.22$, is in fact quite small, since the corrections to the linear approximation turn out to be of order g^3 , and are therefore small. For branching interactions, we expect that this will not be the case. Already for the pure branched polymer model ($g = 0$, $x < 0$) the critical point is $h_c = -0.5$, thus we can guess that the estimates for the general critical points would be far less precise than those for the pure gravity critical point.

2.2. Equations of motion

Since in this paper we shall also use the equations of motion to write RG equations for matrix models with branching interactions, let us briefly recall the general idea. If one starts from a simple action V such as (2) (which depends only on the two operators T_2 and T_4) one obtains a variation ΔV which is a function of all the T_{2n} for any n . To take all these terms into account, one can try to write the action of the renormalization group on the most general partition function. This leads to expressions with an infinite number of terms which must be truncated in some way. However, we know no general and natural truncation scheme, and the simplest truncations lead to a very slow convergence for the value of critical points, while the estimates for the critical exponents do not converge at all! This can be shown explicitly on the simple example of the pure branched polymer model with action $V(\Phi) = T_2 + \frac{h}{2} T_2^2$ (which is in fact a vector model) as discussed in Appendix A.

Nevertheless one must realize that not all the operators are independent. One is free (in perturbation theory) to include in the RG transformation a non-linear reparametrization of the field variable (i.e. the matrix Φ) in the partition function, of the form

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon(\Phi), \quad \epsilon(\Phi) = N^{-1} \sum_k A_k[\{T_j\}] \Phi^k. \quad (6)$$

This induces an additional variation in the effective action of the form

$$\delta V = \epsilon(\Phi) \cdot \frac{\partial V}{\partial \Phi} - \frac{\partial \epsilon(\Phi)}{\partial \Phi}. \quad (7)$$

This variation does not change the physical content of the RG equations, since $\langle \delta V \rangle = 0$ where $\langle \dots \rangle$ denotes the “vacuum expectation value” (v.e.v.) $Z^{-1} \int d\Phi(\dots) e^{-N^2 V(\Phi)}$;

these are the quantum equations of motion of the model, which express the relations between the v.e.v. of the traces. This (unphysical) arbitrariness in the RG equations is known as the problem of the “redundant operators” [7]. The idea is that one should use the equation of motion to simplify the expression of the RG equations and to reduce the number of operators and of coupling constants involved in the RG flows. This is what has been done in [5] to reduce the RG equation to the form of Eq. (4). In Appendix A we show how the method applies to the simple branched polymer model.

We are now going to introduce our method, which aims at calculating the renormalization flows of gravity plus branched polymer models.

3. Our method

3.1. The action of the renormalization group

We are now going to explain our method on the example of the one-matrix model: $V(\Phi) = gT_4 + T_2 + \frac{h}{2}T_2^2$ (More general cases as the Ising plus branched polymer model will be considered in Section 5 and we shall discuss then the generalization of our method). As the use of the equations of motion does not allow us to put the renormalized action exactly in the same form as the action we would like to study, we are going to consider a slightly more general model:

$$V(\Phi) = \psi(T_2) + gT_4, \quad (8)$$

where ψ is of the form

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(j-1)} h_j T_2^j \quad (9)$$

with $h_1 = 1$ and $h_2 = h$. We are going to show that when the renormalization group acts on this model, the renormalized action can be put in the same form, with a renormalized ψ and a renormalized g , and h_1 always equal to one.

In the following we denote U the derivative of ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial T_2} = U(T_2). \quad (10)$$

We start from

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \Phi & v \\ v^* & \alpha \end{pmatrix}$$

an $(N+1) \times (N+1)$ hermitian matrix, Φ is an $N \times N$ hermitian matrix, v is a vertical vector, and α a real number.

$$Z_{N+1} = \int d\Phi' \exp \left[-(N+1)^2 \left(g \frac{\text{tr} \Phi'^4}{4(N+1)} + \psi \left(\frac{\text{tr} \Phi'^2}{2(N+1)} \right) \right) \right] \quad (11)$$

6

G. Bonnet, F. David/Nuclear Physics B 6166 (1999) 1-99

can be rewritten, to the first-order in $1/N$, separating the variables Φ , v , v^* and α , as

$$\int d\Phi dv dv^* d\alpha \exp \left[-N^2 \left(V(\Phi) + \frac{1}{N} \Delta V(\Phi) \right) \right]$$

with

$$\Delta V = gT_4 + 2\psi - T_2U + g\frac{\alpha^4}{4} + U\frac{\alpha^2}{2} + v^*(U + g\alpha^2 + g\alpha\Phi + g\Phi^2)v + g\frac{(v^*v)^2}{2}. \quad (12)$$

Let us introduce first the auxiliary field σ and rewrite the part of the integral containing the variables v and v^* as:

$$I = \int dv dv^* \exp \left[-N \left(v^*(U + g\alpha^2 + g\alpha\Phi + g\Phi^2 + g\sigma)v - g\frac{\sigma^2}{2} \right) \right]. \quad (13)$$

By integrating over v and v^* , we obtain

$$I = \exp \left[-N \left(-g\frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{N} \text{tr} [\ln(U + g\alpha^2 + g\alpha\Phi + g\Phi^2 + g\sigma)] \right) \right]. \quad (14)$$

We then can use a saddle point method and minimize this expression with respect to σ . We find an implicit equation for the value σ_s of σ :

$$g\sigma_s = (1/N) \text{tr} \left[\frac{g}{U + g\sigma_s + g\Phi^2 + g\alpha\Phi + g\alpha^2} \right]. \quad (15)$$

We now have to integrate over α . This can also be done by using the saddle point method. The $d\sigma_s/d\alpha_s$ terms disappear thanks to Eq. (15), and the saddle point α_s verifies

$$g\alpha_s^3 + U\alpha_s + \frac{1}{N} \text{tr} \left[\frac{2g\alpha_s + g\Phi}{U + g\alpha_s^2 + g\alpha_s\Phi + g\sigma_s} \right] = 0. \quad (16)$$

Then we can rewrite, where $\langle \dots \rangle$ means that the average is done over Φ ,

$$\frac{Z_{N+1}}{Z_N} = \left\langle \exp \left[-N \left(gT_4 + 2\psi - T_2U + g\frac{\alpha_s^4}{4} + g\frac{\alpha_s^2}{2} + A - g\frac{\sigma_s^2}{2} \right) \right] \right\rangle \quad (17)$$

with

$$A = (1/N) \text{tr} [\ln(U + g\alpha_s^2 + g\alpha_s\Phi + g\Phi^2 + g\sigma_s)] \quad (18)$$

and use the factorization property which is valid in the large- N limit $\langle AB \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle + O(N^{-2})$ to express the variation of V :

$$\begin{aligned} \left\langle N \frac{\partial V}{\partial N} \right\rangle = & \left\langle gT_4 + 2\psi - T_2U + g\frac{\langle \alpha_s \rangle^4}{4} + g\frac{\langle \alpha_s \rangle^2}{2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{N} \text{tr} [\ln(U + g\langle \alpha_s \rangle^2 + g\langle \alpha_s \rangle \Phi + g\Phi^2 + g\langle \sigma_s \rangle)] - g\frac{\langle \sigma_s \rangle^2}{2} \right\rangle. \quad (19) \end{aligned}$$

From the saddle point equation on α_s , and the parity of the action which leads to $\langle \text{tr} \Phi \rangle = 0$ we immediately see that $\langle \alpha_s \rangle = 0$ is a solution of the averaged saddle point equation.

Thus

$$\left\langle -N \frac{\partial V}{\partial N} = gT_4 + 2\psi - T_2 U + \frac{1}{N} \text{tr} [\ln(U + g\sigma_s + g\Phi^2)] - g \frac{\sigma_s^2}{2} \right\rangle \quad (20)$$

with

$$\langle \sigma_s \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr}(U + g\sigma_s + g\Phi^2)^{-1} \right\rangle. \quad (21)$$

3.2. Equations of motion

As discussed in Section 2.2, one should use the equation of motion and the freedom to add redundant operators to the RG transformation to simplify the flows. We now express the equations of motion. The change in variables $\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon \Phi^{2n+1}$, $n \geq 0$ leads to the equation of motion

$$\left\langle (n+2) g T_{2(n+2)} + (n+1) U T_{2(n+1)} - 2 \sum_{i=0}^n i(n-i) T_{2i} T_{2(n-i)} \right\rangle = 0, \quad (22)$$

where the T_n are defined as in Eq. (2),

$$nT_n = \frac{1}{N} \text{tr}(\Phi^n). \quad (23)$$

We introduce the function $f(z)$ which is the generating function of the $\langle T_{2n} \rangle$, $f(z) = \frac{1}{N} \langle \text{tr} \frac{1}{1-z\Phi^2} \rangle$ (this function f is almost the resolvent of the model). Using Eq. (22) $f(z)$ can be rewritten

$$f(z) = \left\langle \frac{(g + Uz) + \sqrt{(g + Uz)^2 - 4z^2(g + Uz + 2gT_2z)}}{2z^2} \right\rangle. \quad (24)$$

Noting that

$$\langle \sigma_s \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr} [(U + g\sigma_s + g\Phi^2)^{-1}] \right\rangle = \frac{1}{\langle U + g\sigma_s \rangle} f\left(\frac{-g}{U + g\sigma_s}\right) \quad (25)$$

we immediately find that the solution of the above equation is

$$\langle \sigma_s \rangle = 2\langle T_2 \rangle. \quad (26)$$

Integrating f , we also have

$$\left\langle \frac{1}{N} \text{tr} [\ln(U + g\sigma_s + g\Phi^2)] \right\rangle = \left\langle \ln(U + g\sigma_s) + \int_0^{-g/(U+g\sigma_s)} \frac{f(z) - 1}{z} dz \right\rangle. \quad (27)$$

Finally, denoting

$$\rho = -\frac{g}{\langle U^2 \rangle}, \quad x = \langle 2T_2 U \rangle \quad (28)$$

we obtain

$$\left\langle -N \frac{\partial V}{\partial N} = gT_4 + 2\psi + \ln U - \frac{x}{2} + \ln(1 - \rho x) + \rho \frac{x^2}{2} \right. \\ \left. + \int_0^{\frac{\rho}{1-\rho x}} dz \frac{z - \rho - 2z^2 + \sqrt{(z - \rho)^2 - 4z^2(z - \rho - \rho zx)}}{-2z^3} \right\rangle. \quad (29)$$

This expression, if expanded in powers of T_2 , contains a linear term in T_2 : $N\partial h_1/\partial N$ (we recall that $\psi(T_2) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{1-j} h_j T_2^j$). We would like to keep h_1 equal to one. This is possible if one subtracts the coefficient of T_2 , multiplied by the expression appearing in the first equation of motion: $4gT_4 + 2T_2U - 1$. Then we finally obtain a renormalized action exactly in the same form as the original action.

Beyond this point, we shall suppress, for simplicity reasons, the $\langle \dots \rangle$ in all our expressions. Indeed, Eq. (29) means that if we replace $N\partial V/\partial N$ in Z_{N+1} by the right-hand part of our equation, the result will be the same.

4. Numerical analysis

4.1. Expansion of the integral

We now have obtained a renormalization group equation containing only linear terms in T_4 and powers of T_2 . So, starting from the action $gT_4 + \psi(T_2)$ (with $\psi(T_2) = T_2 + \frac{h}{2}T_2^2 + \dots$), we can write (at least in principle) the equations for $N\partial g/\partial N$ and $N\partial\psi/\partial N$: we just have to expand the above expression in powers of T_2 . This method, however, leads to very complicated expressions with many non-trivial integrals depending on the parameter g . To be able to treat our expression easily, it is better to expand it first in powers of ρ (ρ is of order g , as $U = 1 + hT_2 + \dots$ is of order one). The last integral in Eq. (29) is then also expanded in powers of x , and it remains to expand $\rho = -g/U^2$ in powers of T_2 , which is easy.

One should notice that the expansion in ρ is *not* trivial: one cannot simply expand the integrand and the bounds of integration, as this would lead to divergent expressions. In fact, the integral can be expressed as an expansion in ρ^n and $\rho^n \ln \rho$. What one has to do to expand the last integral properly is to treat separately the integral between 0 and $x\rho^{3/2}(1 - \rho x)^{-1}$, and between $x\rho^{3/2}(1 - \rho x)^{-1}$ and $\rho(1 - \rho x)^{-1}$. Let us briefly describe these operations: the last integral can be expressed as a sum of two integrals,

$$I = \int_0^{\rho/(1-\rho x)} \frac{z - \rho - 2z^2 + \sqrt{(z - \rho)^2 - 4z^2(z - \rho - \rho zx)}}{-2z^3} dz = I_1 + I_2. \quad (30)$$

The first one given by

$$I_1 = \int_0^{1/\sqrt{\rho}} x B_1 du \quad \text{with} \quad z = \frac{\rho^2 x}{1 - \rho x} u \quad \text{and} \quad (31)$$

$$B_1 = \rho x \frac{-2(1 - \rho x u)^2 + x(1 - \rho x) \left((1 - u) + \sqrt{(1 - u)^2 + 4u(1 - \rho x)^2/x} \right)}{-2(1 - \rho x u)^3}, \quad (32)$$

and the second one given by

$$I_2 = \int_{x\sqrt{\rho}}^1 B_2 da \quad \text{with} \quad z = \frac{\rho}{1 - \rho x} a, \quad (33)$$

$$B_2 = \frac{-2\rho(1 - a)^2 + (1 - \rho x) \left((\rho x - a) + \sqrt{(\rho x - a)^2 + 4\rho a(1 - a)^2} \right)}{-2(1 - a)^3 \rho}. \quad (34)$$

Before expanding the integrand in powers of ρ , up to the order ρ^{2n} , we have to notice that, when ρ tends to zero, the bounds of integration in I_1 and I_2 tend respectively to ∞ and 0. Let us take I_2 as an example. For $u \sim 1/\sqrt{\rho}$ large, the terms in the expansion of the integrand are of the form $\rho^{2n+1}u^{2n}$. This implies that the integration leads to a term of order ρ^n . Thus, the terms in the expression are really of increasing powers of ρ , which justifies our expansion, keeping in mind that expanding the integrand up to order ρ^{2n} amounts to expand the integral up to order ρ^n .

Moreover, when expanding the integrand B_1 , we obtain expressions of the form $P(u) \left((1 - u)^2 + 4u/x \right)^{-m/2}$, where $P(u)$ is a polynomial. The primitives of such terms lead to logarithmic expressions, and we finally obtain a ρ^n and $\rho^n \ln \rho$ expansion, that is to say, in term of the coupling g , we have an expansion in g^n and $g^n \ln(g)$. We would not have realized the existence of these logarithmic terms if we had used a finite number of equations of motion; they appear here because, by the use of the $f(z)$ function, we have used an infinite number of equations of motion, and expanded *properly* only after. This phenomenon should not come as a surprise, it was already observed in [9].

Once the expansion in g has been done, we expand U in powers of T_2 and, finally, we obtain a quite simple expression with two orders of expansion: X in g and Y in T_2 .

After development in ρ at order $X=4$ in ρ , for example, the expression of the integral $I = I_1 + I_2$ is

$$\begin{aligned} I = & \rho \left(-\frac{3}{2} + x - \ln(\rho) \right) + \rho^2 \left(-12 + 8x - 6 \ln(\rho) + 4x \ln(\rho) \right) \\ & + \rho^3 \left(-\frac{665}{6} + 84x - \frac{19}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - 50 \ln(\rho) + 36x \ln(\rho) - 3x^2 \ln(\rho) \right) \end{aligned}$$

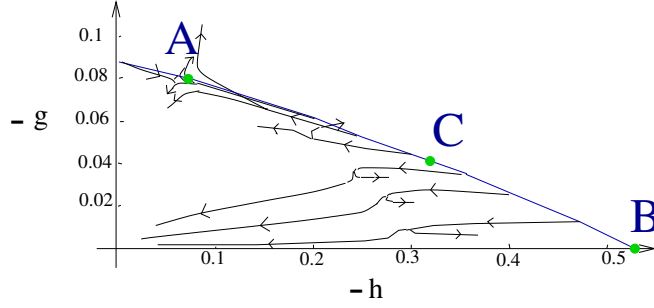


Fig. 1. Renormalization flows, where $-h$ is in abscissa and $-g$ in ordinate. Trajectories may seem to bifurcate: in fact, these are two distinct trajectories originating from two points near each other but separated by the critical line.

$$\begin{aligned}
 & +\rho^4 \left(-\frac{3437}{3} + \frac{2960}{3}x - 174x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - 490 \ln(\rho) \right. \\
 & \left. + 400x \ln(\rho) - 60x^2 \ln(\rho) \right) + o(\rho^4). \quad (35)
 \end{aligned}$$

Inserting the expansion for I in Eq. (29) we obtain the RG flow equations for the couplings g and h_j ($j \leq Y$). These flow equations can easily be integrated numerically.

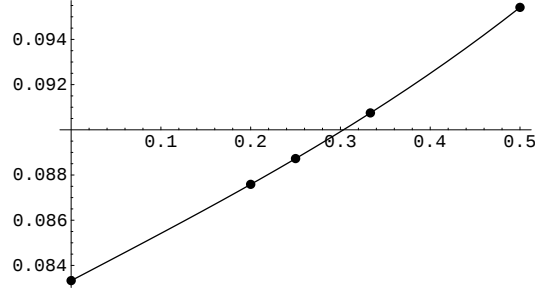
4.2. The shape of the RG flows

In Fig. 1 we show the results obtained at orders $X=5$ and $Y=6$. The axes represented correspond to the two couplings that interest us: the gravity coupling g and the branched polymer coupling $h = h_2$. Of course, there are $Y-2$ ($=4$) other couplings which are not represented there. The RG flows represented here correspond to the initial condition $h_j = 0$, for all $j > 2$, i.e. we study the evolution of the model with initial action $V = gT_4 + T_2 + \frac{h}{2}T_2^2$ as in Eq. (2). It is easy to find the critical line in the (g, h) plane: it separates the domain where one flows towards the Gaussian fixed point ($g \rightarrow 0, h \rightarrow 0$) from the domain where g and h diverge. We have chosen here to show only the flows for (g, h) near the critical line, on both sides of it. Since under the RG flows the h_j 's becomes non-zero, and since we project the flows on the (g, h) plane the flows may seem to cross; of course, this is unphysical and a projection of what happens in higher dimensions.

First one recovers the correct phase diagram and critical line (with an average 5% relative error at this order). The critical line is separated into two parts by a multicritical point **C**. Starting from the rightmost part of the critical line the flows are driven towards a fixed point **B'** which lies on the $g = 0$ plane. Starting from the leftmost part of the critical line the flows are driven towards a fixed point **A'** (with $g, h, h_3, \dots \neq 0$). We have represented in Fig. 1 the “pull-back” **A** of **A'**, i.e. the point on the critical line which flows in the fastest way towards **A'** (this is equivalent to saying that the leading subdominant corrections to scaling vanish at **A**). Both fixed points **B'** and **A'** have one unstable direction. Thus **B'** corresponds to branched polymers and **A'** is the fixed point

G. Bonnet, F. David/*Nuclear Physics B* 6166 (1999) 1-99

11

Fig. 2. Extrapolating the $h=0$ critical point $-g_c$ as a function of $1/X$.

corresponding to pure gravity. Starting from the point **C** one flows towards a fixed point **C'** (also with $g, h, h_3, \dots \neq 0$) with two unstable directions, which should therefore correspond to the “branching transition” between pure gravity and branched polymer scaling behaviour. These features of the RG flows are in full agreement with the picture proposed in Ref. [4]. This agreement is confirmed by studying the numerical results more precisely.

4.3. Quantitative results

At this order of approximation ($X=5, Y=5$), we obtain for the critical point g_c located on the axis $h=0$ a precision which is smaller than the one obtained by Higuchi et al. Our computations, however, can be performed for several values of X and Y , and the results can be extrapolated to obtain a very good precision. For example, for g_c , the critical value of g for $h=0$, we have

X	g_c
2	-0.095415(5)
3	-0.090745(5)
4	-0.088725(5)
5	-0.087585(5)
∞	-0.083325(5)

We then extrapolate these results by a polynomial of degree 3 in X^{-1} . Fig. 2 shows that this extrapolation behaves almost as a straight line: the value of g_c converges as $1/X$. The extrapolated value for $X=\infty$ is $-0.083325(5)$, while the exact value of g_c is $-\frac{1}{12} \simeq -0.083333(5)$. We have thus obtained a 0.016% relative error, to be compared with the 0.9% relative error of Ref. [5].

By the same method, we can obtain the whole critical line in the plane (g, h) , which was not obtained in Ref. [5]. On the pure branched polymer line ($g=0$), we obtain for the branched polymer critical point $h_c \simeq -0.50037$ instead of the exact value $h_c = -0.5$, i.e. a 0.07% relative error. For the position of the multicritical point **C** we obtain for h_c and g_c relative errors of 0.02% and 0.5%, respectively.

Linearizing the RG flow equations in the vicinity of the fixed points, we obtain also good results for the critical exponents. For instance, studying the multicritical fixed point $\mathbf{C}'$, we obtain for the largest eigenvalue $\lambda_0 = 1.185$, i.e. a 1.25% relative error when compared to the exact result $6/5 = 1.2$!

It is not surprising that the critical exponents converge less rapidly than the positions of the critical points. Better but more tedious calculations could be done, for we can go in principle to any orders X and Y , and the limit $X \rightarrow \infty$ and $Y \rightarrow \infty$ should give the exact result, but this is not our purpose here.

5. Multimatrix models

Our method can be generalized to a two-matrix model which describes the Ising plus branched polymer model:

$$V_0 = g \frac{\text{tr}(A^3 + B^3)}{3N} + \frac{\text{tr}(A^2 + B^2)}{2N} + \frac{h}{2} \left(\frac{\text{tr}(A^2 + B^2)}{2N} \right)^2 + c_0 \frac{\text{tr} AB}{N}. \quad (36)$$

A and B are two $N \times N$ hermitian matrices, g is the gravity coupling constant, h the branched polymer coupling constant and c corresponds to the temperature of the Ising model. For simplicity reasons, we have not introduced a external field, which would have broken the symmetry in A and B .

As previously, we are led to studying a more general model: if we take

$$\Phi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \delta_0 = \text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

the model we are going to study can be expressed as

$$V = g \frac{\text{tr}(\Phi^3)}{3N} + \psi \left(\frac{\text{tr}(\Phi^2)}{2N}, \frac{\text{tr}(\Phi \delta_1 \Phi \delta_1)}{2N} \right), \quad (37)$$

where ψ is, as in the case of one-matrix models, a function of the quadratic terms in Φ .

If

$$T_n = \frac{\text{tr}(\Phi^n)}{nN} = \frac{\text{tr}(A^n + B^n)}{nN} \quad \text{and} \quad T_{AB} = \frac{\text{tr}(\Phi \delta_1 \Phi \delta_1)}{2N} = \frac{\text{tr}(AB)}{N},$$

we note that

$$\frac{\partial \psi}{\partial T_2} = U \quad \text{and} \quad \frac{\partial \psi}{\partial T_{AB}} = c.$$

Here c is a series in T_{AB} and T_2 , with constant coefficient c_0 . The renormalization group equation reads

$$\begin{aligned} -N \frac{\partial V}{\partial N} = & g T_3 + 2\psi - T_2 U - c T_{AB} + g \frac{\alpha^3}{3} + (U + 2c) \frac{\alpha^2}{2} \\ & + \text{tr} \ln((U + g\alpha) \delta_0 + c \delta_1 + g\Phi), \end{aligned} \quad (38)$$

where $\alpha = T_1$.

To simplify this expression, we have to use the equations of motion. Similarly to what was done in [5], we can express, by introducing $\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon \delta_{i_1} \dots \Phi \delta_{i_1} (z \delta_0 + \frac{c}{g} \delta_1 + \Phi)^{-1}$ changes in variables,

$$W_0 = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr} \left[z \delta_0 + \frac{c}{g} \delta_1 + \Phi \right]^{-1} \right\rangle$$

as the solution of a quartic polynomial:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{W_0}{2} - \left(z + \frac{c}{g} \right) (U - gz) \right) \left(-\frac{c}{2g} (U + 2c - gz) W_0^2 + \left(2 \frac{c^2}{g^2} + c \frac{U}{g^2} - c \frac{z}{g} \right) \right. \\ & \quad \times (c + gz) (U - gz) W_0 + c(U - gz) 2T_2 + gcT_{AB} \left. \right) - \left(\frac{W_0^2}{4} - (z(U - gz) \right. \\ & \quad \left. + \frac{c}{2g} (U + gz)) W_0 - c + \frac{z}{g} (U + 2c - gz) (c + gz) (U - gz) \right) \\ & \quad \times \left(\frac{W_0^2}{2} - (U - gz) \left(z + \frac{c}{g} \right) W_0 + 2gT_2 + 2(U - gz) \right) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

We then have to integrate

$$\int_{\frac{U}{g} + \alpha}^{\infty} \left[\frac{2}{z} - \frac{W_0}{z} \left(\frac{z}{g} \right) \right] dz.$$

Without going through all the details of the procedure, let us note that, to expand W_0 , we have to be cautious. Indeed, as for the one-matrix model, the integral will have to be cut into two parts, as $U - gz$ can be large ($z \sim \infty$) or small ($z \sim U/g$). This will lead to two different changes of variables in the integral and, once more, to logarithmic terms in g and in $-c_0$.

Let us also stress that one has to expand the integral both in powers of g and of c_0 . The easiest way to do so is to expand simultaneously I in powers of g and c_0 , with $g^2 \sim c_0$. Then, we can compute approximate flows for this model.

Fig. 3 shows approximate RG flows, at $x=0$, at order $X=6$ in g (i.e. three in c_0) and $Y=2$ in T_2 , where g is in abscissa and c_0 in ordinate.

Here, we recover the pure gravity ($c_0 = 0$, $x = 0$) critical point at $g_c \simeq 0.262$, i.e. with 19.5% error (the exact critical point is $432^{-1/4} \simeq 0.219$). By extrapolating the two first results at $X=2$ and $X=3$, however, we obtain an extrapolated $g_c \simeq 0.222$, that is to say only a 1.2% error! Moreover, we can see in Fig. 3 that we recover the Ising bicritical point **C** at $c_0 \simeq -0.14$ (the exact value is 0.15), and the shape of the critical line.

All these results show that we can compute good approximations of the flows, not only for one-matrix models, but also for multimatrix models. This way we can theoretically compute the flows of an open chain of k matrices with nearest neighbour coupling, for $k = 1, 2$ (Ising), $3 \dots$. This series of models is all the more interesting as we know that

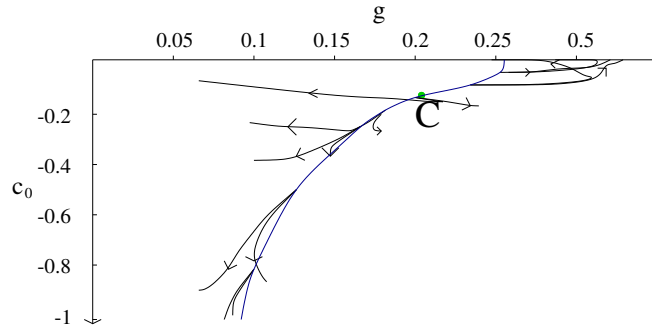


Fig. 3. Approximation of the flows for the Ising model. g is in abscissa, c_0 in ordinate.

when $k \rightarrow \infty$, the central charge of the model $C \rightarrow 1$. These models could thus allow us to verify the evolution of the flows with C and their shape when C is equal to one.

This leads us, however, to a practical problem: though the initial model (the open chain) has the same coupling constants for all the matrices of the chain, the action of the renormalization group leads to almost as many coupling constants as matrices. This comes from the fact that the roles of the matrices of the open chain are not symmetric. Thus, we do not know if it is practically manageable to study, for example, a $k = 10$ matrices open chain, or if it leads to too long computations. A solution is to study a symmetric problem: the closed chain, for example (we do not know its exact solution), or the k -matrix Potts model, where all matrices are coupled. The study of the latter model could indeed be very interesting: when $k > 4$, then $C > 1$ and we would thus enter the $C > 1$ domain.

6. Conclusion

In this paper we have developed the large- N renormalization group method to study matrix models containing interaction terms corresponding to branched polymer interactions. We have shown the analytical basis and the successes of our method. It can deal with models containing branched polymers, it gives us the shape of the flows, and also good approximations of the position of the critical points and critical exponents of the models. We have applied our method to the case of pure gravity plus the branched polymer one-matrix model, and to the case of the Ising two-matrix model. Our method is an approximation method: the exact expressions must be truncated to a certain order to be numerically manageable (the ideal case of the infinite chain being the exact solution). However, the extrapolation of the first-orders gives good results without taking high computation times. But, when studying models with a growing complexity (k -matrix open chains), we may reach for large k the practical limits of the method, and thus it would be a good thing to find more technical simplifications. We also plan to study k -matrix Potts models, which are very symmetric models (so technically simpler) but which would allow us to cross the $C > 1$ barrier for $k > 4$, and are thus theoretically more complex models.

Acknowledgements

We thank J. Zinn-Justin for his interest and his careful reading of the manuscript. This work has partial support from European contract TMR ERBFMRXCT960012.

Appendix A. The vector model

The large- N RG method has already been applied to the (very) simple case of the vector model in [8]. This model corresponds to the limit $g = 0$ of the matrix model with action (8), since then the $U(N)$ -matrix model becomes an $O(N^2)$ vector model. The authors of [8] found that if one does not use the equations of motion (i.e. if no non-linear reparametrization of the fields is performed) the RG flow equation seems to lead to strange results, with the apparent existence of a one-parameter family of fixed points. However, they showed that when using the equations of motion one can reduce the RG flows to much simpler flows in a finite-dimensional space of couplings. Moreover, in that case the flows can be easily calculated exactly and it is found that one recovers the exact critical points and critical exponents.

The purpose of this appendix is just to present the results of a simple exercise: how do the results of the RG method change if one does not use the equations of motion, or if one uses the equations of motion in an approximate way?

We start from the action (8) with $g = 0$ for a $N \times N$ Hermitian matrix

$$\psi(T_2) = \sum_j \frac{h_j}{2^{j-1}} T_2^j, \quad T_2 = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{\Phi^2}{2} \right). \quad (\text{A.1})$$

Since we can rewrite $T_2 = |\boldsymbol{\Phi}|^2$ where $\boldsymbol{\Phi}$ is the N^2 -dimensional real vector whose components are the real and imaginary parts of the matrix elements Φ_{ij} of Φ , the model reduces to the vector model studied in [8]. The RG flow equation for the potential ψ can be written exactly, either by integrating explicitly over some components of $\boldsymbol{\Phi}$, or by computing exactly the effective potential at large N and studying its variation with N . Both methods yield, to first order in $1/N$,

$$N \frac{\partial}{\partial N} \psi = 2\psi - 2T_2 \psi' + \ln[\psi']. \quad (\text{A.2})$$

This simple RG equation becomes even simpler if we consider instead of ψ its derivative $U = \psi'$ and if we invert the function $U(T_2)$ and consider instead the function $X = U^{-1}$ defined as $T_2 = X(U)$ (this is at least possible for T_2 small). The RG flow equation becomes linear for the function X

$$N \frac{\partial}{\partial N} X = 2X - \frac{1}{U} \quad (\text{A.3})$$

and is trivial to solve. If we start at N_0 from the initial potential ψ_0 , i.e. from the initial function X_0 with $X_0 = U_0^{-1} = \psi'_0{}^{-1}$ we get at $N = \lambda N_0$

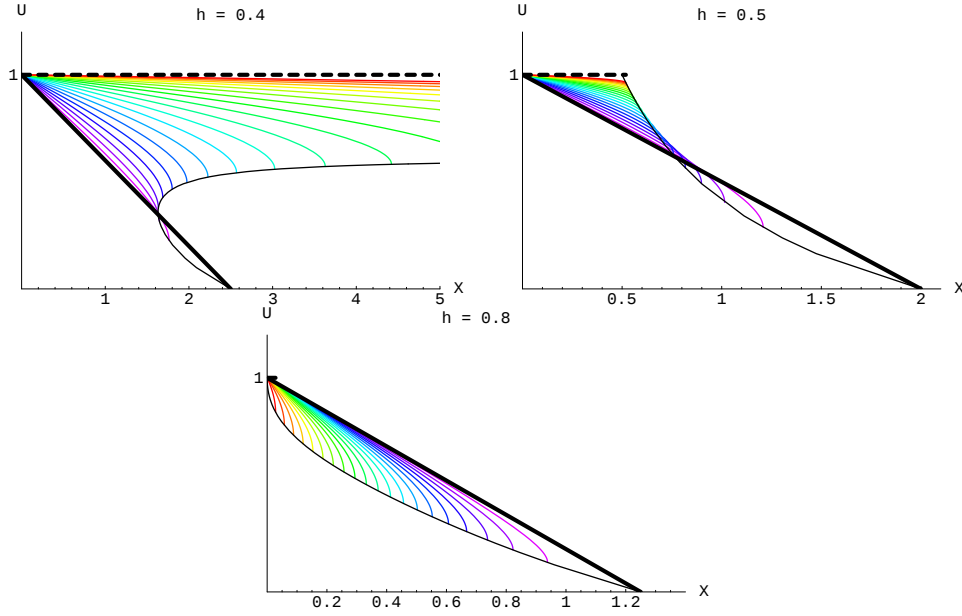


Fig. A.1. RG flows of $U = \psi'$ as a function of h . The initial function U_0 is the thick black line, the large- N limit is the thick dashed line. For $\Lambda > 1$ U develops a singularity which moves with Λ along the thin black curve. The renormalized U are depicted by the thin (colour) curves, from the UV with Λ small (blue) to the IR with Λ large (red). for $h < h_c$ the singularity goes to ∞ and $U \rightarrow 1$ goes to the Gaussian fixed point. For $h = h_c = 1/2$ U goes to the non-trivial fixed point. For $h > h_c$ the singularity hits the origin and the RG flows diverge in a finite time.

$$X(U; N) = \frac{1 - \Lambda^2}{2U} + \Lambda^2 X_0(U) \quad (\text{A.4})$$

and inverting again $T_2 = X(U)$ we obtain the renormalized derivative of the potential $U(T_2, N) = \frac{\partial}{\partial T_2} \psi(T_2, N)$. Performing a linear rescaling $\Phi \rightarrow Z^{-1/2} \Phi$ to keep the coefficient h_1 of the T_2 term fixed amounts to changing $X_0(U) \rightarrow ZX_0(ZU)$ in Eq. (A.4), with $Z = Z(\Lambda)$ a linear rescaling factor fine tuned such that the constraint $\psi'(0) = h_1$ (i.e. $X(h_1) = 0$) is kept for $N \neq 1$.

First let us study the exact flows if one starts from the quartic potential $\psi_0 = T_2 - \frac{h}{2} T_2^2$, i.e. from the initial function $X_0 = (1 - U)/h$. For $\Lambda > 1$ small, the function U remains analytic around the origin, but it develops a square root singularity at a finite $X = X_s(\Lambda)$, which starts for $\Lambda = 1$ at the zero $X = h^{-1}$ of U_0 , i.e. at the critical point of ψ_0 . Of course the flow can be studied analytically but they are better depicted graphically (see Fig. A.1)

- If $0 < h < h_c = 1/2$, the singularity $X_s(N)$ goes to infinity as $N \rightarrow \infty$ and the function $U(X, N)$ tends towards the constant function $U(X) = 1$, which corresponds to the Gaussian potential $\psi = T_2$ (Gaussian fixed point) (Fig. A.1a).
- At the critical value $h_c = 1/2$ the singularity X_s tends toward a *finite value* $X^* = 1/2$, so that the function U tends toward a non-analytic fixed point (Fig. A.1b)

$$U^*(X) = \begin{cases} 1 & \text{if } X \leq X^* \\ \text{undefined} & \text{if } X > X^* \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

- For $h > h_c = 1/2$, the singularity $X_s(N)$ reaches the origin $X=0$ in a *finite* RG time $\Lambda_s = 2h/(2h-1)$, the potential ψ becomes singular at the origin and the RG flow thus diverges in a finite time and reaches no fixed point (Fig. A.1c).

This analysis can be extended to general initial potentials. We thus recover (without using the equations of motion) a sensible picture of the RG flows: the attraction domain of the Gaussian fixed point ($h < h_c$) is separated from the domain where RG flows diverge by a critical (unstable) manifold where one is driven towards the non-trivial fixed point U^* (which corresponds to branched polymers). The only subtle point is that the non-trivial fixed point is non-analytic and cannot be distinguished by a local analysis around the origin ($T_2 = 0$) from the Gaussian fixed point. This explains the apparent paradoxes of [8].

Let us mention that if instead of using the potential $U(X)$ one uses the inverse function $Y(U) = X(U) - 1/2U$, the RG flow is very simple: $Y(U) \rightarrow \Lambda^2 Y(U)$. The structure of the flow is described by the expansion of the function $Y(U)$ around the largest zero U^* such that $Y(U^*) = 0$, and the (only) relevant scaling field t_0 corresponds to the first derivative $Y'(U^*)$ of Y (since the critical manifold corresponds to $t_0 = 0$). This t_0 scales with Λ as Λ^2 , therefore has scaling dimension 2. However, the mapping $U(X) \rightarrow t_0$ is highly non-linear, and becomes singular along the critical manifold $t_0 = 0$. Therefore this does not contradict the fact that the real scaling dimension of the relevant operator is $4/3$.

One can try to truncate the RG flow equation (A.2) in the most naive way: we keep only the couplings h_j with dimension $j \leq K$ in ψ , then expand the $\ln[\psi']$ in powers of T_2 and *truncate this expansion at order K in T_2* . We thus obtain for fixed K approximate RG flow equations for the K couplings h_j , which are of the standard form $N \frac{\partial}{\partial N} h_j = \beta_j[h]$, with the β functions polynomials of order K in the h_j 's. At a given truncation order K the explicit form of these functions is not especially illuminating and will not be given here. Using computing software the approximate fixed points can be found exactly and the structure of the RG flows studied. We find indeed a non-trivial fixed point ψ^* with one unstable direction, which should correspond to the branched polymer fixed point.

The derivative $U^* = \psi^{*'} is depicted in Fig. A.2 as a function of the order of truncation K (U is a polynomial of degree $K-1$). One sees that as K increases the approximated fixed points converge towards the exact (but singular) fixed point. However, a more precise analysis (that we do not reproduce here) shows that the convergence is very slow, typically as $1/K$. The finite K estimates for the critical coupling h_c (if all higher order couplings h_j , $j > 2$ are set to zero) converge towards the exact value $1/2$ at the same rate.$

This very slow convergence is insufficient to obtain good estimates for the critical exponents. It turns out that within this approximation scheme, the scaling dimension λ_i^{appr} of the scaling fields at the approximate fixed point are independent of the truncation

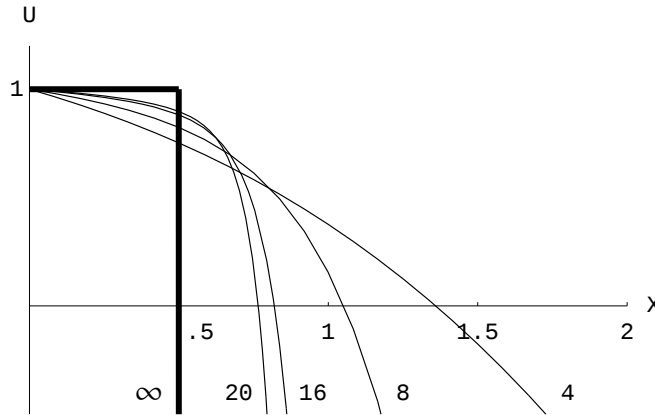


Fig. A.2.

order $K!$ Indeed they are found to be integers $(1, -1, -2, -3, \dots)$. The $+1$ dimension should correspond to the dimension λ_0 of the relevant perturbation, which is known to be $4/3$. Thus, although the estimates for the critical points converge towards the correct result as $K \rightarrow \infty$, the estimates for the scaling exponents do not! A procedure to accelerate the convergence is required. This is precisely what the equation of motions are doing.

References

- [1] For general reviews and more references see for instance: F. David, Simplicial quantum gravity and random lattices, *in* Gravitation and Quantizations, Les Houches 1992, Session LVII, ed. B. Julia and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1995);
E. Brézin, Matrix models of two-dimensional gravity, *in* Gravitation and Quantizations, Les Houches 1992, Session LVII, ed. B. Julia and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1995);
The Large- N Expansion in Quantum Field Theory and Statistical Physics, from Spin Systems to 2-Dimensional Gravity, ed. E. Brézin and S.R. Wadia (World Scientific, Singapore, 1993).
- [2] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi and J.B. Zuber, Commun. Math. Phys. 59 (1978) 35.
- [3] E. Brézin and J. Zinn-Justin, Phys. Lett. B 288 (1992) 54.
- [4] F. David, Nucl. Phys. B 487 [FS] (1997) 633.
- [5] S. Higuchi, C. Itoi, S. Nishigaki and N. Sakai, Phys. Lett. B 318 (1993) 63; Nucl. Phys. B 434 (1995) 283; Phys. Lett. B 398 (97) 123.
- [6] J. Alfaro and P. Damgaard, Phys. Lett. B 289 (1992) 342;
C. Ayala, Phys. Lett. B 311 (1993) 55;
Y. Itoh, Mod. Phys. Lett. A 8 (1993) 3273.
- [7] F.J. Wegner, The Critical State, General Aspects, *in* Phase Transitions and Critical Phenomena Vol. 6, ed. C. Domb and M.S. Green (Academic Press, London, 1976).
- [8] S. Higuchi, C. Itoi and N. Sakai, Phys. Lett. B 312 (1993) 88.
- [9] S. Hikami, Prog. Theor. Phys. 92 (1994) 479.

hep-th/9904058
Saclay T99/020

Solution of Potts-3 and Potts- ∞ Matrix Models with the Equations of Motion Method

Gabrielle Bonnet^{1 2}

CEA/Saclay, Service de Physique Théorique
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Abstract

In this letter, we show how one can solve easily the Potts-3 + branching interactions and Potts- ∞ matrix models, by the means of the equations of motion (loop equations). We give an algebraic equation for the resolvents of these models, and their scaling behaviour. This shows that the equations of motion can be a useful tool for solving such models.

¹AMN

²gabonnet@spht.saclay.cea.fr

1 Introduction :

Random matrices are useful for a wide range of physical problems. In particular, they can be related to two-dimensional quantum gravity coupled to matter fields with a non-zero central charge C [1]. While $C \leq 1$ models are relatively well understood, the $C > 1$ domain remains almost totally unknown : there is a $C = 1$ “barrier”. When studying $C \neq 0$ models, we are led to consider multi-matrix models [2, 3] which are often non-trivial. One class of difficult matrix models corresponds to the q -state Potts model (in short: Potts- q) on a random surface. This model is a q -matrix model where all the matrices are coupled to each other, thus making difficult the use of usual techniques such as the saddle point or the orthogonal polynomials method. Moreover, the $q \rightarrow 4$ limit corresponds to $C \rightarrow 1$, thus, by solving Potts- q models, we shall gain a new understanding of the $C = 1$ barrier.

In this letter, we show that, contrary to what was previously thought, one can use the loop equations to solve the Potts-3 random matrix model, and we find that the resolvent (which generates many of the operators of the problem) obeys an algebraic equation that we write explicitly.

We also show that this method applies when one adds branching interactions (gluing of surfaces, also called “branched polymers”) [4] and we derive the critical line of this extended model. The extension to the model with branching interactions and the study of its phase diagram is necessary to verify [5]’s conjecture about the $C = 1$ transition.

Finally, we apply the method to the Potts- ∞ matrix model, which corresponds to $C = \infty$.

As this work was approaching its completion, a paper appeared on the dilute Potts model [6], which partially overlaps our present work. In this article, the author also has an algebraic equation for the conventional Potts-3 model. Here, we go further as we consider the Potts-3 + branching interactions model. Moreover, his method is quite different : while he uses analytical considerations on the resolvents and large- N techniques, we solve our model by the loop equations method, which can be extended to finite N problems and is also more adapted to the use of renormalization group techniques [7, 8].

2 The Potts-3 + branching interactions model :

Let us define :

$$Z = \int d\Phi e^{-N^2 V(\Phi)} \quad (1)$$

$$V(\Phi) = g \frac{\text{tr} \Phi^3}{3N} + \psi \left(\frac{\text{tr} \Phi^2}{2N}, \frac{\text{tr} \Phi \delta \Phi \delta}{2N} \right) \quad (2)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_3 \end{pmatrix}, \delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \delta_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$\delta = \delta_1 + \delta_{-1}$. We shall also use later the notation $\delta_0 = Id$.

Φ , δ_0 , δ_1 and δ_{-1} are $(3N) \times (3N)$ and Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 $N \times N$ hermitean matrices. ψ is a general two-variable function, and will mainly appear through its partial derivatives U and c with respect to $\frac{\text{tr}\Phi^2}{2N}$ and $\frac{\text{tr}\Phi\delta\Phi\delta}{2N}$ respectively. If these are constants, then we recover the conventional Potts-3 model (no branching interactions). This model was given partial solution by J.M. Daul [9], by considering the analytic structure of the resolvents. He had its critical point and its associated critical exponent. He did not know, however, if the resolvent obeyed an algebraic equation. We shall give here the expression of this equation for the conventional and extended Potts-3 model. We also derive the critical line of the extended model and check it corresponds to Daul's result in the particular case of the conventional model.

Let us note, for convenience :

$$t_{i_1 i_2 \dots i_n \Phi^k} = \frac{1}{3N} \langle \text{tr} \delta_{i_1} \Phi \delta_{i_2} \Phi \dots \delta_{i_n} \Phi^k \rangle \quad (4)$$

where $i_1, \dots, i_n$ can be $+1, -1$ or 0 . This trace is non-zero if and only if $i_1 + \dots + i_n \equiv 0 \pmod{3}$. $\langle \dots \rangle$ is the expectation value of $(\dots)$:

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{Z} \int d\Phi (\dots) e^{-N^2 V(\Phi)} \quad (5)$$

A trace will be said to be “of degree m ” if there are m matrices Φ in it. For example, the above trace is of degree $k + n - 1$.

Let us now use the method of the equations of motion (or loop equations). If we make the infinitesimal change of variables in Z :

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon \delta_{i_1} \Phi \delta_{i_2} \dots \Phi \delta_{i_n} \quad (6)$$

with

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n \equiv 0 \pmod{3}$$

then we obtain the expression of the general equations of motion :

$$g t_{i_1 \dots i_n \Phi^2} + U t_{i_1 \dots i_n \Phi} + c (t_{(i_1+1)i_2 \dots (i_n-1)\Phi} + t_{(i_1-1)i_2 \dots (i_n+1)\Phi}) - \sum_{j=1}^{n-1} t_{i_1 \dots i_j} t_{i_{j+1} \dots i_n} = 0 \quad (7)$$

The first three terms come from the transformation of $V(\Phi)$, and the last one, from the jacobian of the transformation.

Eq. (7) relates any expectation value of trace containing a quadratic term (i.e. a Φ^2 term) to expectation values of traces of lower degrees. The problem is that we do not have any recursion relation for more general expectation values like $t_{i_1 \dots i_n \Phi}$ where all the $i_k \neq 0$. Moreover, when one wants to compute even a very simple trace : for example t_{Φ^n}

by using Eq. (7), one obtains, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ steps later, a $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ degree complicated trace which does not contain quadratic terms any more. Thus, the recursion stops there. In fact, this problem can be overcome by a very simple idea : one uses the invariance of traces by cyclic permutations to get rid of the $n + 1$ degree term in Eq. (7). Then, one obtains relations between general traces, and it is thus possible to compute the expectation values of any trace in function of the first ones.

Let us see now how this idea applies to the computation of the resolvent. We denote :

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{1}{3N} \langle \text{tr} \delta_{i_1} \Phi \delta_{i_2} \Phi \dots \delta_{i_n} \frac{1}{z - \Phi} \rangle \quad (8)$$

$\omega_0 = \omega$ is the usual resolvent. Using the change of variables :

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon \frac{1}{z - \Phi} \quad (9)$$

we obtain the equation :

$$z(U + gz)\omega - U - gz - g t_\Phi - \omega^2 + 2c\omega_{1-1} = 0 \quad (10)$$

Similarly,

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon \delta_1 \Phi \delta_{-1} \frac{1}{z - \Phi} \quad (11)$$

yields :

$$z(U + gz)\omega_{1-1} - (U + gz)t_\Phi - g t_{1-1\Phi} - \omega\omega_{1-1} + c\omega_{1\ 0-1} + c\omega_{-1-1-1} = 0 \quad (12)$$

and, by the means of similar changes in variables, we have the equations :

$$z(U + gz)\omega_{-1-1-1} - (U + gz)t_{1-1\Phi} - g t_{-1-1-1\Phi} + c\omega_{-1\ 0-1-1} + c\omega_{1\ 1-1-1} - \omega\omega_{-1-1-1} = 0 \quad (13)$$

$$z(U + gz)\omega_{1\ 1-1-1} - (U + gz)t_{-1-1-1\Phi} - g t_{1\ 1-1-1\Phi} + c\omega_{1\ 0\ 1-1-1} + c\omega_{-1-1\ 1-1-1} - \omega\omega_{1\ 1-1-1} = 0 \quad (14)$$

These equations alone are not sufficient to compute $\omega(z)$. Indeed, if we intend to calculate $\omega(z)$, we generate the function $\omega_{1-1}(z)$ (Eq. (10)). Then, in turn, we generate the function $\omega_{-1-1-1}(z)$ (Eq. (12)) and so on.

As for ω functions containing a 0 (i.e. a Φ^2 term) such as $\omega_{1\ 0-1}$, they are easy to deal with : we know how to compute traces containing Φ^2 . $\omega_{1\ 0-1} = \frac{1}{3N} \text{tr} \delta_1 \Phi^2 \delta_{-1} \frac{1}{z - \Phi}$, will be seen as $\frac{1}{3N} \text{tr} \Phi^2 \delta_{-1} \frac{1}{z - \Phi} \delta_1$. Then the change in variables :

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon \delta_{-1} \frac{1}{z - \Phi} \delta_1 \quad (15)$$

yields ($\omega_{1-1} = \omega_{-1\ 1}$ for symmetry reasons)

$$g\omega_{10-1} + (U + c)\omega_{1-1} + cz\omega - c = 0 \quad (16)$$

and similar changes in variables lead to the equations :

$$g\omega_{-1\ 0\ -1\ -1} + U\omega_{-1\ -1\ -1} + c\omega_{1\ 0\ -1} + cz\omega_{1\ -1} - ct_\Phi\omega = 0 \quad (17)$$

$$g\omega_{1\ 0\ 1\ -1\ -1} + U\omega_{1\ 1\ -1\ -1} + cz\omega_{-1\ -1\ -1} - ct_{1\ -1\ \Phi} + c\omega_{-1\ 0\ -1\ -1} - t_\Phi\omega = 0 \quad (18)$$

But, to compute $\omega_{-1\ -1\ 1\ -1\ -1}$, as mentionned in the comments to Eq. (7), we have to substract two different changes in variables and use cyclicity of traces :

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon[\Phi\delta_{-1}\Phi\delta_{-1}(z - \Phi)^{-1}\delta_{-1}\Phi - \delta_{-1}\Phi\delta_{-1}(z - \Phi)^{-1}\delta_{-1}\Phi^2] \quad (19)$$

yields :

$$c(\omega_{-1\ -1\ 1\ -1\ -1} + \omega_{-1\ 1\ -1\ -1\ -1} - \omega_{-1\ -1\ 0\ -1} - \omega_{-1\ 0\ 1\ 1\ -1}) - \omega_{-1\ -1\ -1} + t_\Phi\omega_{1\ -1} = 0 \quad (20)$$

This equation, as we know how to compute $\omega_{1\ -1}$, $\omega_{-1\ -1\ -1}$, $\omega_{-1\ -1\ 0\ -1}$ and $\omega_{-1\ 0\ 1\ 1\ -1}$, relates $\omega_{-1\ -1\ 1\ -1\ -1}$ to $\omega_{-1\ 1\ -1\ -1\ -1}$.

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon(\Phi\delta_{-1}\Phi\delta_{-1}\Phi\delta_{-1}(z - \Phi)^{-1}\Phi - \delta_{-1}\Phi\delta_{-1}\Phi\delta_{-1}(z - \Phi)^{-1}\Phi^2)$$

allows us to relate similarly $\omega_{-1\ 1\ -1\ -1\ -1}$ to $\omega_{1\ -1\ -1\ -1\ -1}$. Then

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon(\Phi\delta_{-1}(z - \Phi)^{-1}\delta_1\Phi\delta_{-1}\Phi\delta_1 - \delta_{-1}(z - \Phi)^{-1}\delta_1\Phi\delta_{-1}\Phi\delta_1\Phi) \quad (21)$$

allows us to relate $\omega_{1\ -1\ -1\ -1\ -1}$ to $\omega_{1\ -1\ 1\ 1\ 1}$, and we have $\omega_{1\ -1\ 1\ 1\ 1} = \omega_{-1\ 1\ -1\ -1\ -1}$ as the roles of δ_1 and δ_{-1} are completely symmetric.

Finally, as a result of these operations, we have :

$$\omega_{-1\ 1\ -1\ -1\ -1} + \omega_{-1\ 1\ -1\ -1\ -1} = K(z) \quad (22)$$

where $K(z)$ only contains easy to compute ω functions. We can then write an equation for $\omega_{-1\ 1\ -1\ -1\ -1}$ and thus for $\omega_{-1\ -1\ 1\ -1\ -1}$ which only involves ω functions that we either already know or are able to compute similarly as was done during the two first steps of the procedure.

That way, our set of equations is closed, and we obtain a degree five algebraic equation for $\omega(z)$. This expression applies to general expressions of U and c . For the exact expression of this equation see Appendix A. The equation only contains four unknown parameters :

$$t_\Phi = \frac{1}{N}\langle\text{tr}\Phi_1\rangle, t_{1\ -1\ \Phi} = \frac{1}{N}\langle\text{tr}\Phi_1\Phi_2\rangle, t_{1\ 1\ 1\ \Phi} = \frac{1}{N}\langle\text{tr}\Phi_1\Phi_2\Phi_3\rangle, t_{1\ 1\ -1\ -1\ \Phi} = \frac{1}{N}\langle\text{tr}\Phi_1\Phi_2\Phi_1\Phi_3\rangle \quad (23)$$

These parameters are also those that would be involved if we used the renormalisation group method [10, 7, 8] to compute the Potts-3 model. The renormalization group flows would relate the conventional Potts-3 to the Potts-3 + branching interactions model, with arbitrary U and c ; but the presence of $t_{1\ 1\ 1\ \Phi}$ shows us it would also be related to the dilute Potts-3 model, where one has a $\frac{1}{N}\text{tr}(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)^3$ term. Finally, the $t_{1\ 1\ -1\ -1\ \Phi}$ term shows

us it may also be related to more complicated quartic models.

We are now going to derive from our equation the critical behaviour and critical line of the model when $U = 1 + h \text{tr} \Phi^2 / 6$ and c is a constant. This is the most common type of extension of a matrix model to branching interactions. The values of the unknown parameters given in Eq. (23) are fixed by the physical constraint that the resolvent has only one physical cut which corresponds to the support of the eigenvalues of Φ . Then, one can study the critical behaviour of the model.

It is easy to look for the Potts critical line. Indeed, the scaling behaviour of the resolvent is then, if we denote the physical cut of ω as $[a, b]$:

$$\omega(z) \sim (z - a)^{\frac{1}{2}} \text{ when } z \sim a \text{ and } \omega(z) \sim (z - b)^{\frac{6}{5}} \text{ when } z \sim b \quad (24)$$

The corresponding exponent γ_s is $-\frac{1}{5}$, which corresponds to the $C = \frac{4}{5}$ central charge of the model.

Rather than looking for the resolvent for any values of the coupling constants, it is easier to search for the resolvent only on this critical line where the presence of the $\frac{6}{5}$ exponent leads to simple conditions on the derivatives of the algebraic equation.

We obtain :

$$\begin{aligned} 105 c^3 + 4 g^2 &= 0 \\ 2480625 c^2 (-1 - 4c + 43c^2) + 296100 c (15 + 113c) h - 692968 h^2 &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Let us note here that, when $h = 0$ (no branching interactions) we recover the Potts-3 bicritical point which agrees with Daul's result [9] :

$$c = \frac{2 - \sqrt{47}}{43}, \quad g = \frac{\sqrt{105}}{2} \left(\frac{-3 + \sqrt{47}}{41 - \sqrt{47}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Thus, we have shown that the resolvent for the model of Potts-3 plus branching interactions obeys a degree five algebraic equation. We have found the critical line and exponent of this extended model. This extends the results of Daul [9] who had only derived the position of the critical point and exponent of the conventional model. Finally, let us recall that, in a recent paper [6], P. Zinn-Justin obtains independently algebraic equations for similar problems. His method, though, does not involve loop equations, and is rather in the spirit of [9]. Moreover, it does not address the problem of branching interactions and thus overlaps our results only in the case of the conventional Potts-3 model.

3 The Potts- ∞ model :

We are now going to briefly derive the solution for the Potts- ∞ model, from the equations of motion point of view. The purpose of this part is mainly to show the efficiency of our method on this $c = \infty$ model. This model was previously studied by Wexler in [11].

Let us denote $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Phi_q \end{pmatrix}$, and $X = \frac{(\Phi_1 + \dots + \Phi_q)}{N} \otimes \mathbf{1}_{q \times q}$.

We shall define the Potts- q partition function as

$$Z = \int d\Phi e^{-N V(\Phi)} \quad \text{where} \quad V(\Phi) = g \frac{\text{tr} \Phi^3}{3N} + U \frac{\text{tr} \Phi^2}{2N} + c \frac{\text{tr} X^2}{2N} \quad (26)$$

$V(\Phi)$ is of order q when $q \rightarrow \infty$. First, let us use the equations of motion to relate

$$a(x) = \frac{1}{qN} \langle \text{tr} \frac{1}{x - \Phi} \rangle \quad \text{to} \quad b(y) = \frac{1}{qN} \langle \text{tr} \frac{1}{y - X} \rangle \quad (27)$$

Let us also denote :

$$d(x, y) = \frac{1}{qN} \langle \text{tr} \frac{1}{x - \Phi} \frac{1}{y - X} \rangle \quad (28)$$

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon \frac{1}{x - \Phi} \frac{1}{y - X} \quad \text{yields}$$

$$(x(gx + U) + cy - a(x) - \frac{b(y)}{q}) d(x, y) + g - gyb(y) - ca(x) - b(y)(gx + U) = 0 \quad (29)$$

We can get rid of $d(x, y)$ since, when $x(gx + U) + cy - a(x) - \frac{b(y)}{q} = 0$, $d(x, y)$ remains finite, thus $g - gyb(y) - ca(x) - b(y)(gx + U) = 0$. This is sufficient to relate $a(x)$ to $b(y)$. Moreover, the value of $b(y)$ is easy to compute when $q = \infty$.

Let us briefly summarize this computation : we calculate the value of $\langle \text{tr} X^n \rangle$ in the $q \rightarrow \infty$ limit.

First :

$$\langle \text{tr} X^n \rangle = \langle \text{tr} \Phi_1 \dots \Phi_n \rangle + O\left(\frac{1}{q}\right) \quad (30)$$

(recall that all the Φ_i play the same role).

If we now separate the first n matrices from the remaining $q - n$ (with $q \gg n$), and suppose there is a saddle point for the eigenvalues of $\frac{\Phi_{n+1} + \dots + \Phi_q}{q}$, then this saddle point is (in the $q \rightarrow \infty$ limit) independent from the matrices $\Phi_1, \dots, \Phi_n$. Then, in this limit, up to a change in variables : $\tilde{\Phi}_k = U \Phi_k U^{-1}$, we have n independent matrices $\tilde{\Phi}_1 \dots \tilde{\Phi}_n$. Each of them has the partition function

$$Z_{\Lambda_C} = \int d\tilde{\Phi}_k e^{-N(\frac{g}{3} \text{tr} \tilde{\Phi}_k^3 + \frac{U}{2} \text{tr} \tilde{\Phi}_k^2 + c \text{tr} \tilde{\Phi}_k \Lambda_C)} \quad (31)$$

As $\text{tr} \Phi_1 \dots \Phi_n = \text{tr} \tilde{\Phi}_1 \dots \tilde{\Phi}_n$, we have $\langle \text{tr} X^n \rangle = \text{tr} \langle \tilde{\Phi}_1 \rangle_{\Lambda_C} \dots \langle \tilde{\Phi}_n \rangle_{\Lambda_C}$ where $\langle \dots \rangle_{\Lambda_C}$ is the expectation value obtained with the partition function Z_{Λ_C} (cf Eq. (31)).

The matrices $\tilde{\Phi}_k$, $k = 1, \dots, n$ all play the same part, and $\langle \text{tr} X^n \rangle = \text{tr} \Lambda_C^n$, thus

$$\text{tr} \Lambda_C^n = \text{tr} \langle \tilde{\Phi}_1 \rangle^n \quad (32)$$

This must give us Λ_C , provided we calculate $\langle \tilde{\Phi}_1 \rangle_{\Lambda_C}$ in function of Λ_C . This is a solvable problem, but it is much faster to note that

$$\Lambda_C = t_\Phi \mathbf{1}_{qN \times qN} \quad (33)$$

is solution. Thus, $\frac{1}{qN} \langle \text{tr} X^n \rangle = (t_\Phi)^n$, and $b(y)$ is simply $(y - t_\Phi)^{-1}$.

This gives us immediately the solution for $a(x)$: it obeys a second order equation and reads :

$$a(x) = \frac{1}{2} (x(U + gx) + c t_\Phi - \sqrt{(x(U + gx) + c t_\Phi)^2 - 4(U + gx + g t_\Phi)}) \quad (34)$$

The Potts- ∞ plus branched polymers model is thus very similar to an ordinary pure gravity model. As previously, we compute the parameter t_Φ by imposing that the resolvent $a(x)$ has only one physical cut. The model is critical when $a(x)$ behaves as $(x - x_0)^{\frac{3}{2}}$, x_0 being a constant, and the critical point verifies (as in [11]) :

$$g_c = \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \text{and} \quad c_c = -\frac{1}{2} \quad (35)$$

Let us note finally that the loop equations method used here is appropriate for the renormalization group method of [10, 7, 8].

4 Conclusion

In this letter, we have shown that it is possible to solve the Potts-3 and Potts- ∞ models on two-dimensional random lattices through the method of the equations of motion. We have obtained a closed set of loop equations for the Potts-3 model, which was thought to be impossible. We have shown that the Potts-3 resolvent obeys an order five equation, and this new knowledge opens the door to the calculation of expectation values of the operators of the model. We have extended the Potts-3 conventional model to Potts-3 plus branching interactions, and given the general algebraic equation and the Potts critical line of this model. Finally, we have shown our method also applies successfully to another Potts model : the Potts- ∞ model. We hope to generalize soon our method to more general Potts- q models, in particular for large- q Potts + branching interactions models.

A The equation for the Potts-3 resolvent :

Here is the degree five equation for the resolvent of this model, where $\mathbf{W}(x)$ is related to $\omega(x)$ by $\mathbf{W}(x) = \omega(x) - gx^2 - Ux$.

$$\begin{aligned} & -24c^7 + 4c^4g^2 - 16t_{+-\phi}c^5g^2 - 12t_{111\phi}c^4g^3 - 4t_{1-1\phi}c^2g^4 + 8t_{11-1-1\phi}c^3g^4 + 68c^6gt_\phi + \\ & 2c^3g^3t_\phi + 3c^2g^4t_\phi^2 + 60c^6U + 2c^3g^2U - 52t_{1-1\phi}c^4g^2U + 20t_{111\phi}c^3g^3U - 20c^5gt_\phi U - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4c^2g^3t_\phi U - 36c^5U^2 - 3c^2g^2U^2 + 36t_{1-1\phi}c^3g^2U^2 - 36c^4gt_\phi U^2 - 12c^4U^3 + 36c^3gt_\phi U^3 + \\
& 12c^3U^4 + 28c^6gx + 2c^3g^3x - 12t_{1-1\phi}c^4g^3x + 8t_{111\phi}c^3g^4x - 36c^5g^2t_\phi x - 2c^2g^4t_\phi x - \\
& 52c^5gUx - 4c^2g^3Ux + 36t_{1-1\phi}c^3g^3Ux - 18c^4g^2t_\phi Ux + 2c^4gU^2x + 54c^3g^2t_\phi U^2x + \\
& 22c^3gU^3x - 24c^5g^2x^2 - c^2g^4x^2 + 8t_{1-1\phi}c^3g^4x^2 + 2c^4g^3t_\phi x^2 + 24c^7Ux^2 + 20c^4g^2Ux^2 + \\
& 26c^3g^3t_\phi Ux^2 - 48c^6U^2x^2 + 12c^3g^2U^2x^2 + 24c^5U^3x^2 + 24c^7gx^3 + 6c^4g^3x^3 + 4c^3g^4t_\phi x^3 - \\
& 64c^6gUx^3 + 2c^3g^3Ux^3 + 44c^5gU^2x^3 - 16c^6g^2x^4 + 24c^5g^2Ux^4 + 4c^5g^3x^5 + (24c^5g - \\
& 12t_{1-1\phi}c^3g^3 + 8t_{111\phi}c^2g^4 - 36c^4g^2t_\phi - 2c^4g^4t_\phi - 40c^4gU - 2c^3g^3U + 36t_{1-1\phi}c^2g^3U - \\
& 18c^3g^2t_\phi U - 10c^3gU^2 + 54c^2g^2t_\phi U^2 + 26c^2gU^3 + 24c^7x - 24c^4g^2x - 2c^4g^4x + 16t_{1-1\phi}c^2g^4x + \\
& 4c^3g^3t_\phi x - 36c^6Ux + 4c^3g^2Ux + 52c^2g^3t_\phi Ux + 12c^5U^2x + 36c^2g^2U^2x - 12c^4U^3x + \\
& 12c^3U^4x - 4c^6gx^2 + 14c^3g^3x^2 + 12c^2g^4t_\phi x^2 - 36c^5gUx^2 + 10c^2g^3Ux^2 + 30c^4gU^2x^2 + \\
& 22c^3gU^3x^2 - 40c^5g^2x^3 + 60c^4g^2Ux^3 + 12c^3g^2U^2x^3 + 18c^4g^3x^4 + 2c^3g^3Ux^4) \mathbf{W}(x) + \\
& (12c^6 - 6c^3g^2 + 8t_{1-1\phi}c^4g^4 + 2c^2g^3t_\phi - 12c^5U - 4c^2g^2U + 26c^3g^3t_\phi U - 12c^4U^2 + 18c^2g^2U^2 + \\
& 12c^3U^3 - 44c^5gx - 2c^2g^3x + 12c^4g^4t_\phi x + 30c^4gUx + 20c^3g^3Ux + 26c^2gU^3x + 6c^4g^2x^2 + \\
& 2c^4g^4x^2 + 12c^3g^2Ux^2 + 39c^2g^2U^2x^2 + 20c^3g^3x^3 + 14c^2g^3Ux^3 + c^2g^4x^4) \mathbf{W}(x)^2 + (- \\
& 12c^4g - 2c^3g^3 + 4g^4t_\phi - 10c^3gU + 4g^3U + 26c^2gU^2 + 20c^3g^2x + 4g^4x + 12c^2g^2Ux + \\
& 18c^2g^2U^2x + 22c^3g^3Ux^2 + 4c^4g^4x^3) \mathbf{W}(x)^3 + (- (c^2g^2) + 18c^2g^2U + 4c^3g^3x + 4g^3Ux + \\
& 4g^4x^2) \mathbf{W}(x)^4 + 4g^3\mathbf{W}(x)^5 = 0
\end{aligned}$$

Note that U and c may depend, in the most general case, on $t_{1-1\Phi}$ and t_{Φ^2} , the latter being related to t_Φ through the equation of motion : $gt_{\Phi^2} + (U + 2c)t_\Phi = 0$. In this article, we have computed explicitly the critical line for the particular case of c constant and $U = 1 + \frac{h}{2}t_{\Phi^2}$.

B Acknowledgments :

We thank P. Zinn-Justin for discussing his ideas with us, and we are grateful to F. David and J.-B. Zuber for useful discussions and careful reading of the manuscript.

References

- [1] For general reviews and more references see for instance:
The large N Expansion in Quantum Field Theory and Statistical Physics, from Spin Systems to 2-Dimensional Gravity, E. Brézin and S. R. Wadia Eds. (World Scientific, Singapore, 1993).
- [2] M. Staudacher, Phys. Lett. B305 (1993) 332-338
- [3] B. Eynard, cond-mat/9801075
- [4] S.R. Das, A. Dhar, A.M. Sengupta, S.R. Wadia, Mod. Phys. Lett. A5 (1990) 1041.
- [5] F. David, Nucl. Phys. B487 [FS] (1997) 633-649.

- [6] P. Zinn-Justin, cond-mat/9903385.
- [7] S. Higuchi, C. Itoi, S. Nishigaki and N. Sakai, Phys. Lett. B 318 (1993) 63, Nucl. Phys. B434 (1995) 283-318, and Phys. Lett. B398 (1997) 123.
- [8] G. Bonnet and F. David, Nucl. Phys. B6166 (1999) 1-99
- [9] J.M. Daul hep-th/9502014.
- [10] E. Brézin and J. Zinn-Justin, Phys. Lett. B 288 (1992) 54-58.
- [11] M. Wexler, Nucl. Phys. B410 (1993) 377, J. Ambjorn, G. Thorleifsson, M. Wexler, Nucl. Phys. B439 (1995) 187-204.

hep-th/9906130
 Saclay T99/060

The Potts- q random matrix model : loop equations, critical exponents, and rational case

B. Eynard ¹ † ‡ and G. Bonnet ² ‡

† Department of Physics and Astronomy, University of British Columbia 6224
 Agricultural Road, Vancouver, British Columbia, V6T 1Z1

‡ CEA/Saclay, Service de Physique Théorique, F-91191, Gif-sur-Yvette Cedex, France

Abstract

In this article, we study the q -state Potts random matrix models extended to branched polymers, by the equations of motion method. We obtain a set of loop equations valid for any arbitrary value of q . We show that, for $q = 2 - 2 \cos \frac{l}{r} \pi$ (l, r mutually prime integers with $l < r$), the resolvent satisfies an algebraic equation of degree $2r - 1$ if $l + r$ is odd and $r - 1$ if $l + r$ is even. This generalizes the presently-known cases of $q = 1, 2, 3$. We then derive for any $0 \leq q \leq 4$ the Potts- q critical exponents and string susceptibility.

1 Introduction

Random matrix models [1] have proven to be a powerful mathematical tool for the study of statistical physics systems on a fluctuating two dimensional lattice [2]. In particular, the Potts model [3] on a random lattice [4], which was first partially solved by Daul [5], has received a recent renewed interest [6, 7] due to new approaches to the problem. It is a q -matrices model where all the matrices are coupled to each other, which prevents one from using the formula [8, 9] to integrate out the relative angles between the matrices (they no longer are independent variables) and deal with the eigenvalues only. In this paper we use the equations of motion method which does not involve integration over angular variables. We obtain non-trivial loop equations relating even moments to odd moments of a single matrix M_i , and we show how to extend these relations to the case of Potts- q plus branched polymers (gluing of surfaces). Such relations (which could not be obtained by previous methods [5, 6]) are needed to apply the renormalization group method [10] to Potts- q models with added branching interactions, which is hoped to provide an understanding of the $c = 1$ ($q = 4$) barrier.

We obtain an $O(n)$ -like equation, the solution of which is known [11] and involves elliptical functions [12]. What was the resolvent in the $O(n)$ model, however, is now (up to some transformations) the functional inverse of the Potts- q resolvent, with n replaced by $2 - q$. When $q = 2 - 2\cos(\nu\pi)$ with ν rational, the general elliptic solution degenerates into an algebraic function. It has already been observed [6, 7] that for the particular cases of $q = 1, 2$ or 3 , the resolvent obeys an algebraic equation of degree 2, 3, 5 respectively. In this article, we will derive from the value of ν , for any “rational q ”, the degree of the algebraic equation obeyed by the Potts- q resolvent. We will also derive the Potts- q critical exponent for general values of q , which agrees with Daul’s [5] expression.

2 The Potts- q matrix model

The Potts- q model with branching interactions (which appear if one wants to apply the renormalization group method) is defined by the partition function:

$$Z = \int dM_1 \dots dM_q e^{-N^2 \sum_i \frac{q}{3N} \text{tr} M_i^3 + \psi(\frac{1}{2N} \text{tr} M_i^2, \frac{1}{N} \text{tr} \sum_{j \neq i} M_i M_j)} \quad (2.1)$$

with M_i hermitian matrices $N \times N$.

The partial derivatives of ψ with respect to $\text{tr} M_i^2/(2N)$ and $\text{tr} \sum_{j \neq i} M_i M_j/N$ are $\tilde{U}$ and $\tilde{c}/2$ respectively, and their expectation values (which are numbers) U and c . When $\tilde{U} = 1$ and $\tilde{c}$ is a constant, this reduces to the ordinary Potts- q model.

We will also define the following functions:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{z - M_i} \right\rangle \\ \tilde{W}(z) &= \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{z - M_i} M_j \right\rangle \\ F(z, z') &= \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{z - M_i} \frac{1}{z' - M_j} \right\rangle \\ \tilde{F}(z, z') &= \frac{1}{N} \left[\frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{z - M_i} \frac{1}{z' - M_j} M_k \right\rangle + \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{z - M_i} \frac{1}{z' - M_j} M_k \right\rangle \right] \end{aligned}$$

(2.2)

which do not depend on the indices provided $i \neq j \neq k$. The function $F(z, z')$ and $\tilde{F}(z, z')$ are thus symmetric:

$$F(z, z') = F(z', z) \quad , \quad \tilde{F}(z, z') = \tilde{F}(z', z) \quad (2.3)$$

We will also define:

$$f(z) = W(z) - gz^2 + (c - U)z \quad (2.4)$$

Recall that U and c can be general functions of the numbers $\langle \text{tr } M_i^2 \rangle$ and $\langle \text{tr } M_i M_j \rangle$.

The moments t_k of the resolvent $W(z)$ are defined by the large z expansion:

$$W(z) \sim \frac{1}{z} + \frac{t_1}{z^2} + \dots + \frac{t_k}{z^{k+1}} + \dots \quad \text{when } z \rightarrow \infty$$

and we define:

$$u = \frac{c - U}{g}$$

3 Equations of motion

We are going to work in the large N (planar) limit, where we have the factorization property: $\langle \text{tr } A \text{ tr } B \rangle = \langle \text{tr } A \rangle \langle \text{tr } B \rangle$ [13]. The following changes of variables in Eq. (2.1) then give the following equations:

- $\delta M_1 = \frac{1}{z - M_1}$:

$$g(z^2 W(z) - z - t_1) + U(zW(z) - 1) + c(q - 1)\tilde{W}(z) = W^2(z) \quad (3.1)$$

- $\delta M_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z - M_1} \frac{1}{z' - M_2} + \frac{1}{z' - M_2} \frac{1}{z - M_1} \right]$:

$$\begin{aligned} & g \left(z'^2 F(z, z') - z' W(z) - \tilde{W}(z) \right) \\ & + U(z' F(z, z') - W(z)) \\ & + c(z F(z, z') - W(z')) \\ & + c(q - 2)\tilde{F}(z, z') = W(z') F(z, z') \end{aligned} \quad (3.2)$$

Subtracting Eq. (3.2) with $(z \leftrightarrow z')$, and using Eq. (2.3) we can get rid of $\tilde{F}$ in Eq. (3.2):

$$(f(z) - f(z'))F(z, z') = g \left(z' W(z) - z W(z') + \tilde{W}(z) - \tilde{W}(z') - uW(z) + uW(z') \right) \quad (3.3)$$

In particular, if we choose z' such that $f(z') = f(z)$ and $z' \neq z$, then we have:

$$(z' - u)W(z) - (z - u)W(z') + \tilde{W}(z) - \tilde{W}(z') = 0 \quad (3.4)$$

Eq. (3.1) allows us to eliminate $\tilde{W}$, and we then have an equation involving only W or equivalently f :

$$\begin{cases} f(z') = f(z) \\ \frac{1}{c}(z + z' - u - q\frac{c}{g})f(z) = (z + z')^2 - qzz' - (2 - q)u(z + z') + (1 - q)u^2 - \frac{1}{c} \end{cases} \quad (3.5)$$

This seemingly difficult non-local equation is sufficient to compute $f(z)$.

Let us first study it perturbatively. When $z \rightarrow \infty$, we have $f(z) \sim -gz^2$, thus $z' \sim -z$. If we expand $z'(z)$ in powers of z by solving $f(z) = f(z')$ perturbatively, then insert this expansion into the second equation of Eq. (3.5), we obtain a set of equations of motion, the first of which are:

$$\begin{aligned} gt_2 + (cq - gu)t_1 &= 0 \\ g^2t_4 + g(cq - 2gu)t_3 - gu(cq - 2gu)t_2 - g(gu^3 + 2)t_1 + c(1 - q) + gu &= 0 \\ \dots & \end{aligned} \quad (3.6)$$

with $t_k = \langle \text{tr } M_i^k / N \rangle$. Let us recall that, in the general case, u and c are functions of t_2 and $t_{1,1} = \text{tr } M_i M_j / N$. However, we can compute $t_{1,1}$ thanks to Eq. (3.1) in function of the t_k 's:

$$c(q - 1)t_{1,1} + gt_3 + Ut_2 - 1 = 0$$

Finally, our equations, contrary to ordinary equations of motion, allow us to relate even traces of a given matrix M_i to odd traces of the same matrix.

Only even traces appear as the higher order traces in these equations. Let us explain why. If we write the expansion of $f(z)$ as: $f(z) = -gz(z - u) + 1/z + \sum_2^\infty t_{i-1}/z^i$, the z^{-i} coefficient of the $f(z') - f(z) = 0$ equation reads, as $z' = -z + u + \dots$:

$$((-1)^i - 1)t_{i-1} + (-1)^{i-1}(i-1)t_{i-2}u + \dots = 0$$

Thus, our loop equations give us a relation between the even and odd parts of $f(z)$, and $f(z)$ can be completely determined by the requirement that it has only one cut in the physical sheet (i.e. $f(-z)$ is regular along this cut).

Finally, let us stress that these equations of motion, which are valid for branched polymers, are a precious tool whenever one wants to study Potts- q models by the renormalization group method [10].

4 Correspondence with the $O(n)$ model

Let us now see how to deal with a non-local equation such as Eq. (3.5).

The function $z'(z)$ defined above maps one solution of the equation $f(z) = y$ on another. It is involutive in the sense of multivaluated functions. We have:

$$z'(z'(z)) = z$$

Let z_0 be a fixed point:

$$z'(z_0) = z_0$$

and $f_0 = f(z_0)$.

Then let us set

$$\zeta = \sqrt{f_0 - f}$$

and consider z as a function of ζ . Then we have $z' = z(-\zeta)$ and $z(\zeta)$ is regular at $\zeta = 0$. Let us set

$$\omega(\zeta) = z(\zeta) + \frac{1}{c} \frac{1}{4 - q} (\zeta^2 - f_0 - (2 - q)cu)$$

Eq. (3.5) rewritten in term of $\omega(\zeta)$ is now an $O(n)$ -like quadratic equation:

$$\omega^2(\zeta) + \omega^2(-\zeta) + (2 - q)\omega(\zeta)\omega(-\zeta) = R(\zeta) \quad (4.1)$$

where the right-hand side of the equation is an even polynomial of degree 4. The similarity between Potts- q and the $O(n)$ model had already been noted [5, 6], but it had always been said to be unphysical. We shall show here how one can relate the results for the $O(n)$ model to those for Potts- q .

Eq. (4.1) can be solved exactly, as in the case of the $O(n)$ model [11]. Here, we will assume for simplicity that $\omega(\zeta)$ has only one physical cut $[a, b]$ with $ab > 0$. Let us denote $q = 2 - 2\cos(\nu\pi)$, with $0 \leq \nu \leq 1$. Then we have, by writing $R(\zeta + i0) - R(\zeta - i0) = 0$:

$$(\omega(\zeta + i0) - \omega(\zeta - i0))(\omega(\zeta + i0) + \omega(\zeta - i0) + 2\cos(\nu\pi)\omega(-\zeta)) = 0 \quad \text{for } a \leq \zeta \leq b$$

Thus we have the linear equation:

$$\omega(\zeta + i0) + \omega(\zeta - i0) + 2\cos(\nu\pi)\omega(-\zeta) = 0 \quad (4.2)$$

The general solution for $\omega(\zeta)$ is known and can be expressed with elliptical functions. It degenerates, in the rational case (i.e. when ν is rational), into the solution of an algebraic equation. However, $\omega(\zeta)$ is not the resolvent of the model as it is in the $O(n)$ model. Indeed, it is rather the functional inverse of the resolvent for the Potts- q model, up to some transformations. Thus, the phase diagrams and critical exponents of Potts- q , as expected, are not the same as for the $O(n)$ model.

5 Rational case

Here we will assume that ν is rational: $\nu = l/r$ where l and r are relatively prime integers. We first recall how to obtain Eq. (5.4), which is an algebraic equation for $\omega(\zeta)$ [11].

If we denote $\omega_+(\zeta) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} \omega(\zeta) + e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \omega(-\zeta)$ and $\omega_-(\zeta) = \omega_+(-\zeta)$, then Eq. (4.1) reads

$$\omega_+(\zeta)\omega_-(\zeta) = R(\zeta) \quad (5.1)$$

and Eq. (4.2) becomes:

$$\omega_+(\zeta + i0) = -e^{i\nu\pi} \omega_-(\zeta - i0) \quad \omega_-(\zeta + i0) = -e^{-i\nu\pi} \omega_+(\zeta - i0) \quad (5.2)$$

If $\phi(\zeta)$ is defined by:

$$\omega_+ = \sqrt{R} e^{i(\phi - \frac{(\nu+1)\pi}{2})} \quad \text{then we have} \quad \omega_- = \sqrt{R} e^{-i(\phi - \frac{(\nu+1)\pi}{2})}$$

and

$$\omega(\zeta) = -\frac{\sqrt{R} \cos(\phi)}{\sin \nu\pi}$$

Eq. (5.2) shows that

$$S(\zeta) = \frac{1}{2}(\omega_+^r + (-1)^{r+l}\omega_-^r) \quad (5.3)$$

has no cut, and behaves as a polynomial at infinity (as does $\omega(\zeta)$), i.e. it is a polynomial. We thus have the algebraic equation for $\omega(z)$:

$$S(\zeta) = R(\zeta)^{\frac{r}{2}} e^{-\frac{i(r+l)\pi}{2}} T_r\left(-\frac{\omega(\zeta) \sin(\nu\pi)}{\sqrt{R(\zeta)}}\right) \quad (5.4)$$

where T_r is the order r Chebychev polynomial: $T_r(\cos \phi) = \cos r\phi$.

Let us now examine the degree of this equation. It is polynomial in ω and ζ , but we have to keep in mind that the resolvent of our problem is not $\omega(\zeta)$, but $W(z) = f(z) + gz(z-u)$, with $\zeta = \sqrt{f_0 - f}$ and $\omega = z - \frac{1}{c(4-q)}(f + (2-q)cu)$.

The right-hand side of Eq. (5.4), seen as a polynomial in ζ and z , is even and of order $2r$ in ζ , thus it is also a polynomial in f .

As for the left-hand side of the equation, $S(\zeta)$ verifies $S(-\zeta) = (-1)^{r+l} S(\zeta)$, thus, when $r+l$ is odd, we have to take the square of Eq. (5.4) to have our final algebraic equation for f which should be of degree $2r$. When $r+l$ is even, however, Eq. (5.4) is already polynomial in f , and the degree of the equation should be r .

Moreover, it is easy to check that the order $2r$ terms on both sides of Eq. (5.4) are the same. Finally, the degree d in $f(z)$ of the final equation is:

$$\begin{aligned} d &= 2r - 1 \quad \text{if } r+l \text{ is odd} \\ d &= r - 1 \quad \text{if } r+l \text{ is even} \end{aligned} \quad (5.5)$$

while it is of degree $d+1$ in z .

This formula generalizes the presently known results [6, 7]:

$$\begin{aligned} &\text{for } \nu = 1/3, \quad q = 1, \quad \text{and } d = 2 \\ &\text{for } \nu = 1/2, \quad q = 2, \quad \text{and } d = 3 \\ &\text{for } \nu = 2/3, \quad q = 3, \quad \text{and } d = 5 \end{aligned} \quad (5.6)$$

In [6], the author investigated the dilute Potts-1,2,3, and 4 cases by the saddle point method. These models coincide, when there is no dilution, with the particular case of our models with no branching interactions. This gave rise to algebraic equations when $q \neq 4$ which correspond to our results. However, no general result was given. In [7], the

author used the equations of motion to solve Potts-3 with branching interactions, as well as for the resolution of Potts- ∞ . But, there again, there was no general expression.

We are now going to derive the general Potts- q exponent from Eq. (4.1). If, when $\omega(\zeta)$ is singular (i.e. ζ is close to one of the bounds of the physical cut of ω), $\omega(-\zeta)$ is not, then ω cannot have more complex singularities than half-integer exponents. Thus, whereas in the generic case the physical cut $[a, b]$ verifies $ab > 0$, when the model is at the Potts critical point, a (or b) is equal to zero. This means that the bound of the unphysical semi-infinite cut we have suppressed by changing variables from f to $\zeta = \sqrt{f_0 - f}$ coincides in that case with the physical cut.

Let us express: $\omega(\zeta) = C(-\zeta)^\alpha + \text{regular part}$ Eq. (4.1) shows immediately that the regular part is equal to zero, and that

$$e^{2i\pi\alpha} + 1 + 2\cos(\nu\pi)e^{i\pi\alpha} = 0 \quad \text{i.e.} \quad 2 - 2\cos(\nu\pi) = q = 2 + 2\cos(\alpha\pi)$$

thus

$$\alpha = \pm\nu + 1 + 2p \quad \omega(\zeta) \sim (f_0 - f)^{\frac{\pm\nu+1+2p}{2}} \quad p \in \mathbb{Z}$$

and

$$f \sim (z - \text{const})^{\frac{2}{\pm\nu+1+2p}}$$

As we expect the exponent for f to be greater than one, we have the exponent $\frac{2}{\pm\nu+1}$ for f and the string exponent, using [14]'s formula, is:

$$\gamma_s = 1 - \frac{2}{\pm\nu + 1} = -\frac{(1 \pm \nu)}{(1 - \pm\nu)}$$

6 Conclusion

In this article, we have obtained general loop equations for the Potts- q model extended to branched polymers, which allow us to relate the even and odd parts of the resolvent. This relation is then equivalent to an $O(n)$ -like equation, from which we derived the Potts critical exponents and the degree of the algebraic equation which appears in the rational case. This last result generalizes the known results for $q = 1, 2$ and 3 [6, 7] to any $q = 2 - 2\cos(l/r\pi)$ with $l < r$ integers. Moreover, such loop equations as we have obtained are necessary when one wishes to apply the renormalization group techniques to Potts- q . The study of the renormalization group flows near $q = 4$ may then provide us with useful information about the $C = 1$ transition.

Let us also stress that the equations of motion method may be used when N is finite i.e. on non-planar surfaces, in contrast to the saddle point method. Furthermore, they are also less dependent on the analytic structure of the resolvent than the saddle point method of [5, 6]. Finally, as we know how to solve the $O(n)$ model exactly for general values of n , we hope to be soon able to obtain the general expression of the Potts- q free energy and operators for any value of q .

7 Acknowledgments

We are grateful to R. MacKenzie and I. Kostov for careful reading of the manuscript and F. David for useful discussions, moreover, one of the authors is grateful to the University of British Columbia Physics and Astronomy Department, and in particular to G. Semenoff. This work was partly supported by a senior scientist research NATO grant, and by the NSERC.

References

- [1] Theory of random matrices *in* mesoscopic quantum physics, P. Mello, Les Houches 1994, E. akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard, J. Zinn-Justin *Ed* (North-Holland, 1995), I. Kostov Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 10A (1989) 295-322
- [2] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi, J.-B. Zuber, Comm. Math. Phys. 59 (1978) 35
- [3] R. B. Potts, Proc. Cambridge Philos. Soc. 48 (1952) 106
- [4] V.A. Kazakov, Modern Phys. Lett. 4A (1989) 1691, V.A. Kazakov Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 4 (1998) 93
- [5] J.M. Daul hep-th/9502014
- [6] P. Zinn-Justin, cond-mat/9903385
- [7] G. Bonnet, hep-th/9904058
- [8] C. Itzykson, J.-B. Zuber, J. Math. Phys. 21(1980) 411.
- [9] Harish Chandra, Amer. J. Math. 79 (1957), 87
- [10] G. Bonnet, F. David, hep-th/9811216, S. Higuchi, C. Itoi, S. Nishigaki, N. Sakai, Phys. Lett. B318 (1993) 63, Nucl. Phys. B434 (1995) 283-318, Phys. Lett. B398 (97) 123, F. David, Nucl. Phys. B487 [FS] (1997) 633-649, E. Brezin, J. Zinn-Justin, Phys. Lett. B288 (1992) 54-58
- [11] B. Eynard, C. Kristjansen, Nucl. Phys. B466 (1996) 463-487, Nucl. Phys. B455 (1995) 577, B. Eynard, J. Zinn-Justin, Nucl. Phys. B386 (1992) 558-591
- [12] Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, M. Abramovitz, I.A. Stegun, US Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series . 55 (1972)
- [13] Yu. M. Makeenko, A. Migdal, Phys. Lett. B88 (1979) 135, A. Migdal, Ann. Phys. 109 (1977) 365, Veneziano, Nucl. Phys. B117 (1976) 519, 't Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461
- [14] I. Kostov, Nucl. Phys. B376 (1992) 539

Breakdown of universality in multi-cut matrix models

*G. Bonnet*¹, *F. David*^{2 3}, *B. Eynard*⁴

Service de Physique Théorique de Saclay,
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

Abstract

We solve the puzzle of the disagreement between orthogonal polynomials methods and mean field calculations for random $N \times N$ matrices with a disconnected eigenvalue support. We show that the difference does not stem from a $\mathbb{Z}_2$ symmetry breaking, but from the discreteness of the number of eigenvalues. This leads to additional terms (quasiperiodic in N) which must be added to the naive mean field expressions. Our result invalidates the existence of a smooth topological large N expansion and some postulated universality properties of correlators. We derive the large N expansion of the free energy for the general 2-cut case. From it we rederive by a direct and easy mean-field-like method the 2-point correlators and the asymptotic orthogonal polynomials. We extend our results to any number of cuts and to non-real potentials.

¹E-mail: gabonnet@spht.saclay.cea.fr

²E-mail: david@spht.saclay.cea.fr

³Physique Théorique CNRS

⁴E-mail: eynard@spht.saclay.cea.fr

1 Introduction

Random Matrix Models have been introduced in order to give an approximate statistical description of quantum systems involving disorder, chaos, complexity or whatever prevents from solving the equations of motion exactly. Those models are described by a matrix (Hamiltonian, transfer matrix, or scattering matrix) of large size N , which is too complicated to be diagonalized exactly, and for which only statistical observations of the spectrum are available (see [1, 2] for a review on RMT).

Most of the quantities of interest and observables are related to the short range (in energy scale) behavior of the spectrum (indeed small energies correspond to long time evolution, i.e. to equilibrium thermodynamical properties). This is why the short range correlation functions are the most studied.

At first, the simplest models assumed a gaussian weight for the random matrix and gave good agreement with observations, provided that the ensemble of matrices (hermitian, orthogonal, quaternionic...) has the required symmetries (time reversibility,...) [2, 3].

It has been observed that the correlation functions of the spectrum possess universal properties at short range, which do not depend on the probability weight, gaussian or not. This universality has been proved for a wide range of models by several approaches [3, 4, 5, 6, 7], but a very general proof and the exact hypothesis which lead to it are still under investigations.

Moreover, the long range correlation functions appear to share also some universal properties, which depend on the probability weight only through a few parameters [8, 7]. The most striking example is the 2-point correlation function that we shall discuss below.

In the following we will restrict our attention to the so called Hermitian-One-Matrix-Model⁵ [2, 9] (hermiticity corresponds to a system with broken time reversibility, for instance in the presence of a magnetic field).

We consider a hermitian matrix M of size $N \times N$ with a probability law of the form:

$$\mathcal{P}(M) = e^{-N \operatorname{tr} V(M)}$$

where V is a polynomial potential bounded from below.

We wish to study the statistical properties of the eigenvalues $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ of M in the large N limit, in particular the density of eigenvalues $\rho(\lambda)$, and the correlation function $R(\lambda, \mu)$, which measures the probability that two of the eigenvalues take the values λ and μ .

⁵The other ensembles are of course worth considering, but this one is the simplest.

Roughly speaking, the eigenvalues tend to occupy a finite interval centered around the bottom of the potential well, and in the large N limit, the density of eigenvalues $\rho(\lambda)$ is a continuous function with a compact support.

The simplest case, where the support is connected, known as the “1-cut case”, has been extensively studied [2]. It is then found that the density $\rho(\lambda)$ is not universal, it depends on the details of the potential V , while the connected correlation function $R_c(\lambda, \mu)$ is universal in the short range regime ($|\lambda - \mu| \sim O(1/N)$), but also in the long range regime ($|\lambda - \mu| \sim O(1)$) once the short range oscillations (of period $\sim O(1/N)$) have been smoothed out.

What happens when the potential V possesses several wells, of approximatively the same depths? Then the density $\rho(\lambda)$ has a disconnected support, $[a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \dots \cup [a_s, b_s]$, each interval $[a_i, b_i]$ being centered around one well of the potential V . This case is known as the multicut (or multiband) case (here s cuts).

In the multicut case the density is still not universal, whereas the 2-point correlation function is universal in the short range regime and seems to have some universal properties in the long range regime after smoothing: in [10] an explicit form of the 2-point connected correlation function was given, and is claimed to be universal: indeed, according to the authors of [10] “it depends only on the number of connected components of the support and on the position of the endpoints, but not on the potential”. However, more recently several authors [11, 12, 13] have studied the two-cut case $s = 2$: they concentrated on the case of an even potential V (the two cuts are thus symmetric $[a, b]$ and $[-b, -a]$). Using an ansatz for the asymptotic expression of orthogonal polynomials in the large N limit, and rederiving the two-point function from this ansatz, they observed that the connected correlation function is still universal in the short distance regime (which was expected), but more surprisingly, that the smoothed connected correlation function in the long range regime depends on the parity of N (N being the size of the matrix). This seems to contradict the former result of [10] !

In this paper, we will solve this paradox.

We will show that the semi-classical method of [10] gives the 2-point connected correlation function only up to an additional non-universal term, which is already present in the free energy, but subdominant at large N in this case. We correct the semi-classical argument of [10], and give a simple (and physically appealing) derivation of the origin of the additional term, that we compute explicitly. This allows us to recover the results of [11, 13] for the symmetric case, and to generalize them to non symmetric potentials, without using orthogonal polynomials.

Using the same semi-classical argument, we are able to derive large N asymptotics for the orthogonal polynomials, recovering the results of [11, 13] as well as the general s cuts asymptotics which appeared recently in the mathematical literature [14], and to extend these results to the case of complex potentials.

The effect leading to the new term in the semi-classical calculation is simple enough to be explained briefly in this introductory section.

In [10], the free energy F of the matrix model is derived by a saddle point approximation. In particular, one has to extremize the action with respect to variations of the number n_i ($i = 1 \dots s$) of eigenvalues in each connected part of the support, or in other words with respect to the occupation ratio $x_i = n_i/N$:

$$F = F(x_c) \quad \text{where} \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_c} = 0 \quad (1.1)$$

However, one has here missed the crucial fact that $n_i = Nx_i$ are not real numbers but integers. When Nx_c is not an integer, the extremum of $F(x)$ is never reached, and the saddle point approximation has to be slightly modified. Roughly speaking the discrete sum cannot be approximated by an integral:

$$\sum_n e^{-g(n-Nx_c)^2} \neq \int dx e^{-N^2 g(x-x_c)^2} \quad (1.2)$$

The discrete sum actually depends on how far from an integer Nx_c is. For instance, in the symmetric case, we have $x_c = \frac{1}{2}$, and the result depends on the parity of N .

We will show that (as expected from Eq. (1.2)) in general the result involves elliptic theta functions depending on Nx_c , thus leading to a quasi-periodic dependence on N . This effect is of order N^{-2} for the free energy, but is of order 1 for the computation of the orthogonal polynomials and for the correlation functions. It implies in particular that there is **no regular large N topological expansion** (involving only power series in N^{-2}) for the 2-cut matrix model.

We will find out that the short range correlation function is universal, while the long range smoothed correlation depends on N quasi-periodically.

The paper is divided as follows: in section 2 we introduce the method and notations for the 2-cut model, and we compute the free energy. In section 3 we derive the 2-point correlation function, and we recover the expression of [11, 13, 14] in the symmetric case. In section 4, we give an asymptotic expression for the orthogonal polynomials, which we use to rederive the universal short range properties of the spectrum, as well as the smoothed long range 2-point correlation function.

The generalizations to a complex potential or to an arbitrary number of cuts are presented in Appendix B and C. Appendix A is a summary of some relationships between elliptical functions in case the reader is not familiar with them.

2 The free energy

2.1 Basics

We start from the standard Hermitian matrix model defined by the partition function

$$Z[V; N] = \int d_N[M] e^{-N \operatorname{tr} V(M)} \quad (2.1)$$

where N is the dimension of the matrix M , V is an analytic – in general polynomial – and for the moment real – function, and $d_N[M]$ is the standard $U(N)$ invariant measure over Hermitian matrices

$$d_N[M] = \prod_{i=1}^N dM_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq N} 2 d\operatorname{Re}(M_{ij}) d\operatorname{Im}(M_{ij}) \quad (2.2)$$

Integrating out the ”angular part” of M , Z can be rewritten as an integral over the N eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ of M [2]

$$Z[V; N] = \mathbf{C}_N \tilde{Z}[V; N] \quad (2.3)$$

$$\tilde{Z}[V; N] = \int \prod_{k=1}^N d\lambda_k e^{-N \sum_k V(\lambda_k)} \prod_{k < l} (\lambda_k - \lambda_l)^2 = \int \prod_{k=1}^N d\lambda_k e^{-N^2 S(\lambda_1, \dots, \lambda_N)} \quad (2.4)$$

with the measure factor

$$C_N = \operatorname{Vol} \left[\frac{U(N)}{U(1)^N \times \mathfrak{S}_N} \right] = \frac{1}{N!} \prod_{K=1}^N \frac{(2\pi)^{K-1}}{\Gamma(K)} \quad (2.5)$$

and with the action $S(\lambda_k)$:

$$S(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N V(\lambda_k) - \frac{1}{2N^2} \sum_{1 \leq k \neq l \leq N} \ln(\lambda_k - \lambda_l)^2 \quad (2.6)$$

In the simplest ”one cut” case, corresponding in particular to a concave potential, it is known [9] that the free energy F defined as ⁶

$$Z[V; N] = \left(\frac{2\pi}{N} \right)^{\frac{N^2}{2}} e^{-F[V; N]} \quad (2.7)$$

has a topological large N expansion

$$F = N^2 F_0 + F_1 + N^{-2} F_2 + \dots \quad (2.8)$$

⁶ Z is normalized here so that F is zero for the Gaussian model $V = \frac{1}{2}M^2$

obtained for instance by re-organizing the perturbative expansion according to the topology of the Feynman diagrams. The large N limit (planar limit) can be described by a "master field" configuration where the eigenvalues are described by a continuous density $\rho(\lambda)$ with a connected compact support $\mathcal{C} = [a, b]$, with the constraints

$$\int_{\mathcal{C}} d\lambda \rho(\lambda) = 1 \quad \text{and} \quad \rho(\lambda) \geq 0 \text{ if } \lambda \in \mathcal{C} \quad (2.9)$$

and the action 2.6 becomes

$$S[\rho] = \int_{\mathcal{C}} d\lambda V(\lambda) \rho(\lambda) - \int_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}} d\lambda d\mu \rho(\lambda) \rho(\mu) \ln |\lambda - \mu| \quad (2.10)$$

The leading term of the free energy F_0 can be obtained by the saddle point method: the effective action $S[\rho]$ is extremized for a continuous distribution ρ_c and we have simply

$$F_0 = S[\rho_c] \quad (2.11)$$

(up to an additive – potential independent – constant). To compute ρ_c we include the constraint 2.9 in the effective action by a Lagrange multiplier Γ

$$\bar{S}[\rho] = S[\rho] + \Gamma(1 - \int_{\mathcal{C}} \rho) \quad (2.12)$$

The saddle point equation for ρ reads:

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \rho(\lambda)} = V(\lambda) - 2 \int_{\mathcal{C}} d\mu \rho(\mu) \ln(|\lambda - \mu|) - \Gamma = 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{C} \quad (2.13)$$

which simply means that the real part of the effective potential

$$V_{\text{eff}}(\lambda) = V(\lambda) - 2 \int_{\mathcal{C}} d\mu \rho(\mu) \ln(\lambda - \mu) \quad (2.14)$$

is constant on the e.v. support $\mathcal{C}$, and equal to Γ . The derivative of 2.13 w.r.t. λ gives the well-known equation

$$\text{Re}(\omega_0(\lambda)) = \oint_{\mathcal{C}} d\mu \rho(\mu) \frac{1}{\lambda - \mu} = V'(\lambda)/2 \quad \forall \lambda \in \mathcal{C} \quad (2.15)$$

where ω_0 is the large N resolvent

$$\omega_0(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \left[\frac{1}{\lambda - M} \right] \right\rangle = \int_{\mathcal{C}} d\mu \frac{\rho(\mu)}{\lambda - \mu} \quad (2.16)$$

Finally let us recall that in the one-cut case $\mathcal{C} = [a, b]$, if the potential V is a polynomial of degree P , ω is of the form

$$\omega_0(\lambda) = \frac{V'(\lambda)}{2} - \frac{M(\lambda) \sqrt{\sigma(\lambda)}}{2} \quad \text{with} \quad \sigma(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b) \quad (2.17)$$

where $M(\lambda)$ is a polynomial with degree $P - 2$. a , b and M are entirely determined by the constraint that

$$\omega_0(\lambda) = \lambda^{-1} + \mathcal{O}(\lambda^{-2}) \quad \text{for} \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

The e.v. density is given by the discontinuity of ω

$$\rho(\lambda) = \frac{i}{2\pi} [\omega(\lambda + i0_+) - \omega(\lambda - i0_+)] = \frac{M(\lambda)\sqrt{|\sigma(\lambda)|}}{2\pi} \quad (2.19)$$

2.2 The 2-cut case

2.2.1 Mean field:

If the potential V is real but has more than one minimum, the large N limit may be described by an e.v. distribution on several disconnected intervals. For simplicity we shall first consider the case where there are two intervals

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \quad , \quad \mathcal{C}_1 = [a, b] \quad , \quad \mathcal{C}_2 = [c, d] \quad , \quad a < b < c < d \quad (2.20)$$

In this case, as we shall see, **there is no topological large N expansion**, even for the free energy F . As shown in [15, 16], to describe the large N limit, we have to consider as an additional variable the "average" proportion of eigenvalues $x_1 = n_1/N$ and $x_2 = n_2/N$ in each interval $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$, and introduce the associated Lagrange multipliers Γ_1 and Γ_2 for the constraints

$$x_\alpha = \int_{\mathcal{C}_\alpha} \rho(\lambda) d\lambda \quad , \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.21)$$

The effective action 2.12 now reads, with

$$x = x_1 \quad (2.22)$$

$$\bar{S}[\rho; x] = S[\rho] + \sum_{\alpha=1}^2 \Gamma_\alpha (x_\alpha - \int_{\mathcal{C}_\alpha} \rho(\lambda) d\lambda) \quad , \quad x_1 + x_2 = 1 \quad (2.23)$$

with $S[\rho]$ given by 2.10 as before. The saddle point equation w.r.t. $\rho(\lambda)$ gives as before the equation 2.13, which implies that the effective potential defined by 2.14 is constant on each interval

$$V_{\text{eff}}(\lambda) = \Gamma_\alpha \quad \text{when} \quad \lambda \in \mathcal{C}_\alpha \quad (2.24)$$

but the corresponding e.v. density $\rho_c(\lambda)$ and the effective action $\bar{S}_c$ still depend explicitly of the e.v. proportion x , since we have

$$\bar{S}_c[x] = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{C}} \rho_c(\lambda) V(\lambda) d\lambda + \sum_{\alpha} \Gamma_\alpha x_\alpha \right) \quad (2.25)$$

The saddle point equation w.r.t. x implies the equality of the effective potentials for each interval

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial x} = \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0 \quad (2.26)$$

This fixes the value of x , and it is known that with this last equation the e.v. density ρ_c is uniquely determined in the 2-cut case. The large N free energy is then given simply by

$$F_0 = \bar{S}[\rho_c; x_c] = \bar{S}_c[x_c] \quad (2.27)$$

For an explicit polynomial potential V of degree P , and for fixed x , the 2-cut mean field solution for the resolvent is

$$\omega_0(\lambda, x) = \frac{V'(\lambda)}{2} - \frac{M(\lambda)\sqrt{\sigma(\lambda)}}{2} \quad \text{with} \quad \sigma(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\lambda - d) \quad (2.28)$$

and $M(\lambda)$ a polynomial with degree $P - 3$. The e.v. density $\rho(\lambda, x)$ is still given by the discontinuity of ω_0 . The coefficients of M and the 4 end-points a, b, c, d are entirely determined by the constraint that $\omega_0(\lambda) \simeq \lambda^{-1}$ when $\lambda \rightarrow \infty$ and by the fact that x must be given by

$$x = \int_a^b \rho(\lambda, x) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_a^b |M(\lambda, x)| \sqrt{|\sigma(\lambda)|} d\lambda \quad (2.29)$$

Finally the equation 2.26 which fixes $x = x_c$ writes

$$0 = V_{\text{eff}}(b) - V_{\text{eff}}(c) = \int_b^c d\lambda (2\omega_0(\lambda, x) - V'(\lambda)) = - \int_b^c d\lambda M(\lambda, x) \sqrt{|\sigma(\lambda)|} \quad (2.30)$$

2.2.2 Discreteness of number of e.v.'s:

This is sufficient if one is interested in the leading term in the large N limit (planar approximation). However, in order to understand the structure of the subdominant terms of the large N expansion, it turns out that we cannot neglect the fact that the number of e.v. $n_\alpha = Nx_\alpha$ in each interval $\mathcal{C}_\alpha$ must be an integer.

Let us consider the simple case where the potential V has two separate minima z_1 and z_2 . What has to be done is first to fix the number of eigenvalues $n_1 = n$ (resp. $n_2 = N - n$) in the vicinity of z_1 (resp. z_2) in the partition function 2.5 by writing

$$\tilde{Z}[V; N] = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} \tilde{Z}[V; n, N-n] \quad (2.31)$$

where

$$\tilde{Z}[V; n, N-n] = \int_{-\infty}^E \prod_{i \leq n} d\lambda_i \int_E^{+\infty} \prod_{j > n} d\lambda_j e^{-N \sum_k V(\lambda_k)} \prod_{k < l} (\lambda_k - \lambda_l)^2 \quad (2.32)$$

with E a "frontier" $b < E < c$ between the two semi-classical cuts $[a, b]$ and $[c, d]$. We now claim that each term of this discrete sum has a well defined large N topological expansion. Indeed, we can rewrite 2.32 as a matrix integral over two separate matrices: a $n_1 \times n_1$ matrix M_1 with the $n_1 = n$ e.v. $< E$ and a $n_2 \times n_2$ matrix M_2 with the $n_2 = N - n$ e.v. $> E$, as

$$\tilde{Z}[V; n] = \frac{1}{C_n C_{N-n}} \int d_{n_1}[M_1] \int d_{n_2}[M_2] e^{-N \text{Tr}(V(M_1)) - N \text{Tr}(V(M_2)) + 2 \text{Tr}(\ln(M_1 \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes M_2))} \quad (2.33)$$

This last matrix integral has a topological large N expansion of the form 2.8 in the 't Hooft limit $N \rightarrow \infty$, $x = n/N$ fixed, obtained by doing a classical perturbative expansion around the smallest minimum z_1 of V for M_1 and around the largest minimum z_2 of V for M_2 , and by re-organizing the perturbative expansion according to the topology of the Feynman diagrams. Taking into account carefully the measure factors C_n and C_{N-n} , and using their large N asymptotics

$$C_N = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi}{N} \right)^{\frac{N^2}{2}} e^{\frac{3}{4}N^2} (2\pi)^{-N} N^{\frac{1}{12}} \text{cst} (1 + \mathcal{O}(N^{-1})) \text{ when } N \rightarrow \infty \quad (2.34)$$

(easily derived from Stirling formula), we obtain that

$$Z[V; N] = \left(\frac{2\pi}{N} \right)^{\frac{N^2}{2}} N^{-\frac{1}{12}} \sum_{n=0}^N e^{-F[V; N, x]} \quad (2.35)$$

where each $F[V; N, x]$ has a regular large N asymptotic expansion of the form

$$F[V; N, x] = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} F_h[V, x] \quad \text{where} \quad x = n/N \quad (2.36)$$

with each $F_h[V, x]$ a regular function of $x = n/N$. In particular, the leading large N term is given (up to an additive $-V$ and x independent - constant) by the classical effective action 2.27

$$F_0 = \bar{S}[\rho_c; x_c] = \bar{S}_c[x_c] \quad (2.37)$$

Finally, let us stress that although this decomposition depends on the arbitrary parameter E , since E is in the interval $]b, c[$ where the density of eigenvalues is exponentially small with N , the integral 2.32 depends on E only through exponentially small terms of order $e^{-\text{cst} \cdot N}$, which are "non-perturbative" in the topological expansion Eq. (2.36).

2.2.3 Beyond mean-field:

We can now easily calculate the subleading terms of order $\mathcal{O}(N^{-2})$ for the full partition function. In the large N limit we can approximate the sum 2.36 by

$$Z[V; N] \propto \sum_{n=0}^N e^{-N^2 F_0[V; x] - F_1[V; x] + \dots} \quad (2.38)$$

If x_c denotes the saddle point of $F_0[x]$ given by 2.26, the sum is dominated by the n 's such that

$$|n - Nx_c| = \mathcal{O}(1) \quad (2.39)$$

Thus we can still use a quadratic approximation for $F_0[x]$

$$Z[V; N] \propto e^{-\left(N^2 F_0[V; x_c] + F_1[V; x_c] + \dots\right)} \sum_n e^{-(n - Nx_c)^2 F_0''[V; x_c]/2} \quad (2.40)$$

where $F_0'' = \partial^2 F_0 / \partial x^2$ and where the $\dots$ represent terms of order $\mathcal{O}(N^{-2})$. The last sum over n gives simply an elliptic Jacobi theta function θ_3

$$\sum_n e^{-(n - Nx_c)^2 F_0''[V; x_c]/2} = (2\pi F_0''[V; x_c])^{-1/2} \theta_3(Nx_c | \tau) \quad (2.41)$$

with modular parameter τ given by

$$\tau = \frac{2i\pi}{F_0''[V; x_c]} \quad (2.42)$$

and where the theta function is defined as

$$\theta_3(z | \tau) = \theta_3(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} e^{2i\pi n z} \quad \text{with} \quad q = e^{i\pi \tau} \quad (2.43)$$

It obeys the periodicity relations

$$\theta_3(z + 1) = \theta_3(z) \quad , \quad \theta_3(z + \tau) = e^{-i\pi(2z + \tau)} \theta_3(z) \quad (2.44)$$

(For details on elliptic functions see e.g. Refs [24, 25, 23]). Eventually we have for the free energy

$$\begin{aligned} F[V; N] = & N^2 F_0[V, x_c] \\ & - \ln(\theta_3(Nx_c)) + F_1(V; x_c) + \frac{1}{2} \ln(2\pi F_0''[V; x_c]) \\ & + \mathcal{O}(N^{-2}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

where F_1 is the torus contribution in the topological expansion of 2.33. The next terms of this expansion can be calculated along the same line.

Let us stress that this is not a topological expansion, since the second term $\ln(\theta_3(Nx_c))$, seemingly $\mathcal{O}(1)$ and contributing at the torus order, is **not regular** in N . Indeed, it is periodic in x_c with period $1/N$. When computing some observables or quantities of the matrix model, one must take derivatives of F w.r.t. some parameters of the potential V . Since the saddle point x_c depends implicitly on V , every derivative will give a factor N , and this term may become of the same order than the first term $N^2 F_0[x_c]$ given by the planar limit. Note that the last two terms depend on x and not on Nx , and they will remain subdominant once we take derivatives of F .

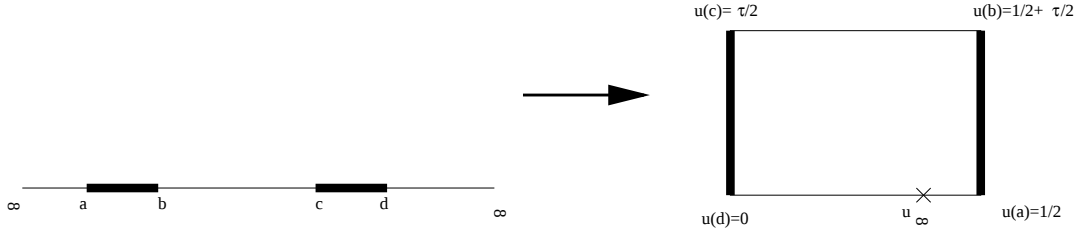


Figure 1: the upper half-plane is mapped onto a rectangle $(1/2, \tau/2)$

2.3 The modular parameter

Finally, we can express simply the modular parameter τ defined by Eq. (2.42) in term of the end-points a, b, c, d of the support of e.v. For this purpose, we introduce the function σ

$$\sigma(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\lambda - d) \quad (2.46)$$

and the function u

$$u(\lambda) = \frac{1}{2K} \int_d^\lambda \frac{dz}{\sqrt{\sigma(z)}} \quad (2.47)$$

where K is

$$K = \int_b^c \frac{dz}{\sqrt{|\sigma(z)|}} = \frac{2}{\sqrt{(c-a)(d-b)}} K[m] \quad \text{with} \quad m = \frac{(d-a)(c-b)}{(d-b)(c-a)} \quad (2.48)$$

$K[m]$ is the complete elliptic integral of the first kind. Similarly we define

$$K' = \int_a^b \frac{dz}{\sqrt{|\sigma(z)|}} = \frac{2}{\sqrt{(c-a)(d-b)}} K[m'] \quad \text{with} \quad m' = 1 - m \quad (2.49)$$

We shall show that the modular parameter τ of Eq. (2.42) coincides with the standard modular parameter of the torus associated to the mapping u , i.e. of the elliptic curve $y^2 = \sigma(z)$. Indeed, τ is simply given by

$$\tau = i \frac{K'}{K} = i \frac{K[1-m]}{K[m]} \quad (2.50)$$

So we have

$$u(d) = 0, \quad u(a) = \frac{1}{2}, \quad u(b) = \frac{1+\tau}{2}, \quad u(c) = \frac{\tau}{2}, \quad u(\infty) = u_\infty \quad (2.51)$$

and u maps the upper half λ -plane onto the half-periods rectangle $(1/2, \tau/2)$ and the double-sheeted complex λ -plane onto the period rectangle $(1, \tau)$.

To show Eq. (2.50), we use the fact that in the two-cut case, if we fix x (the e.v. ratio in the first cut) the semiclassical e.v. density (extrema of the effective action $\bar{S}$) is now a function $\rho(\lambda, x)$ of λ and x , and the end-points a, b, c, d depend on x . Therefore the large N resolvent ω_0 is of the form

$$\omega_0(\lambda, x) = \frac{V'(\lambda)}{2} - \frac{M(\lambda, x)\sqrt{\sigma(\lambda)}}{2} \quad (2.52)$$

with $M(\lambda, x)$ a polynomial with degree $P - 3$ in λ (P being the degree of V), entirely fixed by the constraints 2.18 and 2.29. Therefore the partial derivative of $\omega_0(\lambda, x)$ w.r.t. x is necessarily of the form

$$\frac{\partial \omega_0(\lambda, x)}{\partial x} = \frac{C}{\sqrt{\sigma(\lambda)}} \quad (2.53)$$

with $C = C(\lambda, x)$ a priori a polynomial in λ . Since 2.18 still holds independently of x we must have

$$\frac{\partial \omega_0(\lambda, x)}{\partial x} = \mathcal{O}(\lambda^{-2}) \quad \text{for} \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (2.54)$$

which implies that $C(\lambda, x)$ is of degree 0 in λ , i.e. is a constant (depending only on x)

$$C = C(x) \quad (2.55)$$

This constant can be easily determined by using that

$$x = \int_a^b \rho(\lambda, x) d\lambda = \int_{C'} \frac{d\lambda}{2i\pi} \omega_0(\lambda, x) \quad (2.56)$$

with C' a clockwise contour encircling the interval $[a, b]$. Therefore we have

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 = \int_{C'} \frac{d\lambda}{2i\pi} \frac{C}{\sqrt{\sigma(\lambda)}} = -\frac{CK'}{\pi} \Rightarrow C = -\frac{\pi}{K'} \quad (2.57)$$

with K' the half-period defined in Eq. (2.49). Now we use Eq. (2.26), Eq. (2.27) and the definition of the effective potential V_{eff} of Eq. (2.14) to write the derivative of the free energy w.r.t. x as

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = V_{\text{eff}}(b) - V_{\text{eff}}(c) = \int_b^c d\lambda (2\omega_0(\lambda) - V'(\lambda)) \quad (2.58)$$

Now we take the derivative w.r.t. x of this equation and obtain

$$F_0'' = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} = 2 \int_b^c d\lambda \frac{\partial \omega_0(\lambda)}{\partial x} = 2 \int_b^c d\lambda \frac{C}{\sqrt{\sigma(\lambda)}} = -2CK = \frac{2\pi K}{K'} \quad (2.59)$$

Using Eq. (2.42) we thus obtain the result 2.50.

3 2-points correlation function

3.1 The basic formula

As a first application we compute the large N smoothed connected two-point correlation function (first obtained by [11, 13, 14]), defined as

$$\omega^c(\lambda, \mu) = \langle \text{Tr} \left[\frac{1}{\lambda - M} \right] \text{Tr} \left[\frac{1}{\mu - M} \right] \rangle - \langle \text{Tr} \left[\frac{1}{\lambda - M} \right] \rangle \langle \text{Tr} \left[\frac{1}{\mu - M} \right] \rangle \quad (3.1)$$

Adding source terms to the potential of the form

$$V_{\epsilon_\lambda} = V(z) - \epsilon_\lambda \frac{1}{\lambda - z} \quad , \quad V_{\epsilon_\lambda, \epsilon_\mu}(z) = V(z) - \epsilon_\lambda \frac{1}{\lambda - z} - \epsilon_\mu \frac{1}{\mu - z} \quad (3.2)$$

we have

$$\omega^c(\lambda, \mu) = -\frac{1}{N^2} \frac{\partial}{\partial \epsilon_\lambda} \frac{\partial}{\partial \epsilon_\mu} F[V_{\epsilon_\lambda, \epsilon_\mu}, N] \Big|_{\epsilon_\lambda = \epsilon_\mu = 0} \quad (3.3)$$

and for the resolvent (one-point function)

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{N} \langle \text{Tr} \left[\frac{1}{\lambda - M} \right] \rangle = -\frac{1}{N^2} \frac{\partial}{\partial \epsilon_\lambda} F[V_{\epsilon_\lambda}, N] \Big|_{\epsilon_\lambda = 0} \quad (3.4)$$

If the ϵ_λ 's are small and the λ 's not too close to the cuts, the mean-field solution is still a two-cut e.v. distribution, with $x_c = x_c(\epsilon)$ an explicit function of the λ 's. So from Eq. (2.45) for the free energy we have for the two-point function

$$\omega^c(\lambda, \mu) = \left[-\frac{\partial}{\partial \epsilon_\lambda} \frac{\partial}{\partial \epsilon_\mu} F_0[V_{\epsilon_\lambda, \epsilon_\mu}] + \frac{\partial x_c}{\partial \epsilon_\lambda} \frac{\partial x_c}{\partial \epsilon_\mu} [\ln(\theta_3(Nx_c))]'' \right]_{\epsilon_\lambda = \epsilon_\mu = 0} + \mathcal{O}(N^{-1}) \quad (3.5)$$

The first term in the r.h.s. of 3.5 is the mean-field contribution already calculated in [17, 10], the second term involving a second derivative of an elliptic function, characterizes the multi-cut solution.

3.2 The mean-field contribution

For completeness let us first rederive the mean field contribution of [17, 10]. Taking the derivative with respect to ϵ_λ we obtain the mean-field resolvent for the potential V_{ϵ_μ}

$$-\frac{\partial}{\partial \epsilon_\lambda} F_0[V_{\epsilon_\lambda, \epsilon_\mu}] \Big|_{\epsilon_\lambda = 0} = \omega_0(\lambda; V_{\epsilon_\mu}) \quad (3.6)$$

which must be of the form

$$\omega_0(z; V_{\epsilon_\mu}) = \frac{1}{2} \left[V'(z) - \frac{\epsilon_\mu}{(z - \mu)^2} + \frac{M(z)\sqrt{\sigma(z)}}{(z - \mu)^2} \right] \quad (3.7)$$

with $M(z)$ a polynomial of degree $P - 1$ (here both the coefficients of M and of σ depend on μ and ϵ_μ). In addition to the $P - 2$ constraints (coming from 2.18 and 2.30) $\omega_0(z; V_{\epsilon_\mu})$ must be regular at $z = \mu$. This determines entirely M . Taking the derivative w.r.t. ϵ_μ and using the symmetry $\lambda \leftrightarrow \mu$ we get

$$\omega_0^c(\lambda, \mu) = -\frac{\partial}{\partial \epsilon_\lambda} \frac{\partial}{\partial \epsilon_\mu} F_0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{(\lambda - \mu)^2} \left[1 + \frac{Q(\lambda, \mu)}{\sqrt{\sigma(\lambda)}\sqrt{\sigma(\mu)}} \right] \quad (3.8)$$

with $Q(\lambda, \mu)$ a symmetric polynomial in λ and in μ . The constraints on ω_0^c are: (i) $\omega_0^c = \mathcal{O}(\lambda^{-2})$ as $\lambda \rightarrow \infty$ which implies that Q is of degree at most 2; (ii) ω_0^c is regular at $\lambda = \mu$ which implies that $Q(\lambda, \mu) = -\sigma((\lambda + \mu)/2) + \mathcal{O}((\lambda - \mu)^2)$; (iii) finally the equality of the effective potential on the two cuts implies that

$$\int_b^c \omega_0^c(\lambda, \mu) d\mu = 0 \quad (3.9)$$

Conditions (i) and (ii) fix uniquely Q

$$Q(\lambda, \mu) = -\frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} (\lambda - a)(\mu - b)(\mu - c)(\lambda - d) \\ + (\mu - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\mu - d) \end{array} \right] + S(\lambda - \mu)^2 \quad (3.10)$$

up to a constant S fixed by condition (iii), which is found to be

$$S = -\frac{1}{2}(c - a)(d - b) \frac{E[m]}{K[m]} \quad \text{with} \quad m = \frac{(c - b)(d - a)}{(c - a)(d - b)} \quad (3.11)$$

and where $K[m]$ and $E[m]$ are the standard elliptic integrals of the first and second kind.

3.3 The non-regular contribution

In order to compute the second contribution to 3.5, we simply need $\frac{\partial x_c}{\partial \epsilon_\lambda}$. Since x_c is fixed by the constraint $\frac{\partial F_0}{\partial x} = 0$ we can write

$$\frac{\partial x_c}{\partial \epsilon_\lambda} = -\frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial \epsilon_\lambda} \bigg/ \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} \quad (3.12)$$

Using the results of subsection 2.3 we have

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} = \frac{2\pi K}{K'} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial \epsilon_\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x} \omega_0(\lambda, x) = \frac{\pi}{K'} \frac{1}{\sqrt{\sigma(\lambda)}} \quad (3.13)$$

So we have eventually

$$\frac{\partial x_c}{\partial \epsilon_\lambda} = -\frac{1}{2K\sqrt{\sigma(\lambda)}} \quad (3.14)$$

and the second non-regular term is

$$\frac{\partial x_c}{\partial \epsilon_\lambda} \frac{\partial x_c}{\partial \epsilon_\mu} [\ln(\theta_3(Nx_c|\tau))]'' = \frac{1}{2K\sqrt{\sigma(\lambda)}} \frac{1}{2K\sqrt{\sigma(\mu)}} [\ln(\theta_3(Nx_c|\tau))]'' \quad (3.15)$$

with K defined by Eq. (2.48). Using standard relations on elliptic functions, this can be rewritten as

$$\frac{(c-a)(d-b)}{4\sqrt{\sigma(\lambda)}\sqrt{\sigma(\mu)}} \left[-\frac{E[m]}{K[m]} + \text{dn}^2(Nx_c + \tfrac{1}{2}) \right] \quad (3.16)$$

with

$$\text{dn}(u) = \text{dn}(2K[m]u|m) \quad (3.17)$$

where $\text{dn}(u|m)$ is the Jacobi elliptic function dn . Its periods are $2K[m]$ and $4iK[m']$, and $\text{dn}^2(z)$ has periods 1 and τ .

3.4 The final result

Combining 3.8, 3.10, 3.11 and 3.16 we obtain the final result for the 2-point correlation function

$$\begin{aligned} \omega^c(\lambda, \mu) = & -\frac{1}{4(\lambda - \mu)^2} \left[\left(1 - \sqrt{\frac{(\lambda - a)(\lambda - b)(\mu - c)(\mu - d)}{(\mu - a)(\mu - b)(\lambda - c)(\lambda - d)}} \right) + (\lambda \leftrightarrow \mu) \right] \\ & - \frac{(c-a)(d-b)}{4\sqrt{\sigma(\lambda)}\sqrt{\sigma(\mu)}} \text{sn}^2(Nx_c + \tfrac{1}{2}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

We have used the relation $\text{dn}^2(u) = 1 - m \text{sn}^2(u)$, where similarly to 3.17 we note

$$\text{sn}(u) = \text{sn}(2K[m]u|m) \quad (3.19)$$

Surprisingly, the ratio $E[m]/K[m]$ characteristic of the mean-field solution of [17, 10] has disappeared.

The smoothed 2-point connected density correlator $\rho^c(\lambda, \mu)$, defined as

$$\rho^c(\lambda, \mu) = \langle \text{Tr} [\delta(\lambda - M)] \text{Tr} [\delta(\mu - M)] \rangle - \langle \text{Tr} [\delta(\lambda - M)] \rangle \langle \text{Tr} [\delta(\mu - M)] \rangle \quad (3.20)$$

can be obtained easily from the discontinuity of $\omega^c(\lambda, \mu)$. One obtains in the large N limit, if λ and μ are on the support of e.v.

$$\begin{aligned} \rho^c(\lambda, \mu) = & -\frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{(\lambda - \mu)^2} \left(\sqrt{\left| \frac{(\lambda - a)(\lambda - b)(\mu - c)(\mu - d)}{(\mu - a)(\mu - b)(\lambda - c)(\lambda - d)} \right|} + \lambda \leftrightarrow \mu \right) \right. \\ & \left. + \varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu \frac{(c-a)(d-b)}{\sqrt{|\sigma(\lambda)|}\sqrt{|\sigma(\mu)|}} \text{sn}^2(Nx_c + \tfrac{1}{2}) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_\lambda = 1 \quad \text{if } \lambda \in [a, b] \quad , \quad -1 \quad \text{if } \lambda \in [c, d] \quad , \quad (3.22)$$

and zero otherwise.

The new non-regular term $\text{sn}^2(Nx_c + \frac{1}{2})$ is an even periodic function of Nx_c with period 1 which varies between 0 and 1. Therefore, as N varies, depending on the rationality or the irrationality of x_c , the two-point function will be varying with N in a periodic or quasiperiodic way.

3.5 The symmetric case

It is now very easy to recover the results of [11, 13] for a symmetric potential. Indeed, if the potential V is symmetric, the two cuts are also symmetric

$$a = -d \quad , \quad b = -c \quad (3.23)$$

and we have automatically

$$x_c = \frac{1}{2} \quad (3.24)$$

so that

$$\text{sn}^2(Nx_c + \frac{1}{2}) = \begin{cases} \text{sn}^2(\frac{1}{2}) = 1 & \text{if } N \text{ is even} \\ \text{sn}^2(0) = 0 & \text{if } N \text{ is odd} \end{cases} \quad (3.25)$$

Eq. (3.18) and Eq. (3.22) become

$$\omega^c(\lambda, \mu) = -\frac{1}{2(\lambda - \mu)^2} \left[1 - \frac{(a^2 - \lambda\mu)(b^2 - \lambda\mu)}{\sqrt{\sigma(\lambda)}\sqrt{\sigma(\mu)}} \right] - \frac{(-1)^N}{2} \frac{ab}{\sqrt{\sigma(\lambda)}\sqrt{\sigma(\mu)}} \quad (3.26)$$

$$\rho^c(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu}{\sqrt{|\sigma(\lambda)|}\sqrt{|\sigma(\mu)|}} \left(\frac{(a^2 - \lambda\mu)(b^2 - \lambda\mu)}{(\lambda - \mu)^2} - (-1)^N ab \right) \quad (3.27)$$

with $\sigma(\lambda) = (\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)$.

3.6 The two-point function as an elliptic function

It is interesting to consider the two-point correlator in terms of the elliptic coordinates defined by Eq. (2.47)

$$u = u(\lambda) \quad , \quad v = u(\mu) \quad (3.28)$$

Let us thus consider

$$\bar{\omega}^c(u, v) = \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} \omega^c(\lambda, \mu) = 2K\sqrt{\sigma(\lambda)} 2K\sqrt{\sigma(\mu)} \omega^c(\lambda, \mu) \quad (3.29)$$

It is easy to see (from the properties of ω^c) that $\bar{\omega}^c(u, v)$ satisfies:

1. $\bar{\omega}^c(u, v)$ is a doubly periodic function of u (and of v) with periods 1 and τ ;

2. $\bar{\omega}^c(u, v)$ is regular at u and $v = u(a), u(b), u(c), u(d)$ and u_∞ ;
3. $\bar{\omega}^c(u, v)$ is regular when $u = v$, but has a double pole at $u = -v$ (corresponding to the double pole of $\omega^c(\lambda, \mu)$ when $\lambda = \mu$ but with λ in the first sheet and μ in the second sheet), with residue 1.

This implies that $\bar{\omega}^c(u, v)$ is a Weierstrass elliptic function

$$\bar{\omega}^c(u, v) = \wp(u + v|\tau) + \text{constant} \quad (3.30)$$

where the constant depends on Nx_c ($\wp$ has periods 1 and τ). Using classical identities between the Weierstrass $\wp$ function and the Jacobi elliptic functions, it can be easily calculated. We find the remarkably simple result

$$\bar{\omega}^c(u, v) = \wp(u + v|\tau) - \wp(Nx_c + \frac{\tau}{2}|\tau) \quad (3.31)$$

or equivalently

$$\bar{\omega}^c(u, v) = - [\ln(\theta_1(u + v|\tau))]'' + [\ln(\theta_3(Nx_c|\tau))]'' \quad (3.32)$$

4 The orthogonal polynomials

Let us briefly recall some basic facts about the well-known method of orthogonal polynomials [18], which is a powerful tool for studying the spectral properties of random matrices [2]. Asymptotic expressions for the orthogonal polynomials have been obtained recently [14] in the mathematical literature, by solving a Riemann-Hilbert problem. Here we will derive them from the free energy directly.

Consider the partition function (2.4):

$$\tilde{Z} = \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N e^{-N \sum_i V(\lambda_i)} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (4.1)$$

The last term is a Vandermonde determinant [2]:

$$\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) = \det_{i,j} ((\lambda_i)^{j-1}) = \det_{i,j} (\mathcal{P}_{j-1}(\lambda_i)) \quad (4.2)$$

where the last equality is obtained by linearly mixing columns of the determinant, and holds for arbitrary monic polynomials $\mathcal{P}_n(\lambda)$ with leading coefficient $\mathcal{P}_n(\lambda) = \lambda^n + \dots$

The method of orthogonal polynomials consists in choosing a family of polynomials suitable for the computation of (4.1), namely, the family of polynomials orthogonal with respect to the weight $\exp -NV(\lambda)$:

$$\int d\lambda \mathcal{P}_n(\lambda) \mathcal{P}_m(\lambda) e^{-NV(\lambda)} = h_n \delta_{nm} \quad (4.3)$$

With this particular choice of polynomials, the integral (4.1) is merely:

$$\tilde{Z} = N! \prod_{n=0}^{N-1} h_n \quad (4.4)$$

and the joint probability density of all the eigenvalues takes the form of a Slater determinant:

$$R_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{N!} \left(\det_{\substack{0 \leq n < N \\ 1 \leq i \leq N}} [\psi_{n-1}(\lambda_i)] \right)^2 \quad (4.5)$$

where the wave functions $\psi_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{h_n}} \mathcal{P}_n(\lambda) e^{-\frac{N}{2} V(\lambda)}$ are orthonormal.

4.1 The Kernel $K(\lambda, \mu)$

The square of a determinant can be rewritten as the determinant of a product:

$$\left(\det_{n,i} (\psi_{n-1}(\lambda_i)) \right)^2 = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \psi_n(\lambda_i) \psi_n(\lambda_j) \right]$$

we are thus led to introduce the kernel $K(\lambda, \mu)$ [19]:

$$K(\lambda, \mu) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n(\lambda) \psi_n(\mu) \quad (4.6)$$

In terms of which the joint density of eigenvalues is now a determinant

$$R_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{N^N}{N!} \det [K(\lambda_i, \lambda_j)] \quad (4.7)$$

The orthonormality properties of the polynomials imply the projection relations

$$\int d\lambda K(\lambda, \lambda) = 1 \quad \text{and} \quad \int d\lambda K(\mu, \lambda) K(\lambda, \nu) = \frac{1}{N} K(\mu, \nu) \quad (4.8)$$

which make any partial integration of (4.7) easy to perform (theorem of Dyson [20]).

In particular, the integration over $N-1$ eigenvalues gives the density of eigenvalues

$$\rho(\lambda_1) = \int d\lambda_2 \dots d\lambda_N R_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = K(\lambda_1, \lambda_1)$$

and the integration over $N-2$ eigenvalues gives the correlation function:

$$\begin{aligned} R_2(\lambda_1, \lambda_2) &= \int d\lambda_3 \dots d\lambda_N R_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \\ &= \frac{N}{N-1} (K(\lambda_1, \lambda_1) K(\lambda_2, \lambda_2) - K(\lambda_1, \lambda_2) K(\lambda_2, \lambda_1)) \end{aligned}$$

In short:

$$\rho(\lambda) = K(\lambda, \lambda) \quad , \quad \rho(\lambda, \mu) = (K(\lambda, \lambda) K(\mu, \mu) - K(\lambda, \mu)^2) \quad (4.9)$$

In addition, the Darboux-Christoffel theorem [24, 21], asserts that

$$K(\lambda, \mu) = \frac{1}{Nh_{N-1}} \frac{\mathcal{P}_N(\lambda)\mathcal{P}_{N-1}(\mu) - \mathcal{P}_N(\mu)\mathcal{P}_{N-1}(\lambda)}{\lambda - \mu} e^{-\frac{N}{2}(V(\lambda)+V(\mu))} \quad (4.10)$$

which means that we need to evaluate $\mathcal{P}_n$ only for $n = N$ and $n = N - 1$.

Thus, we shall now aim at finding asymptotic expressions for the orthogonal polynomials $\mathcal{P}_n(\lambda)$, and the kernel $K(\lambda, \mu)$ in the large N limit, and n close to N . This has been done in the 1-cut case [7] and in the symmetric 2-cut case [11, 14, 12]. Here we will generalize it to the non-symmetric case, with the method used in [21].

4.2 WKB approximation for the orthogonal polynomials $\mathcal{P}_n(\lambda)$

The orthogonal polynomials have the following integral representation (see Appendix 1 of [21] or [18]):

$$\mathcal{P}_n(\lambda) = \frac{\int dM_{n \times n} \det(\lambda - M) e^{-N \operatorname{tr} V(M)}}{\int dM_{n \times n} e^{-N \operatorname{tr} V(M)}} \quad (4.11)$$

where the integral is restricted to hermitian matrices of size $n \times n$.

Thus the orthogonal polynomial is given by the ratio of two matrix integrals of the same type as the partition function 2.1:

$$\mathcal{P}_n(\lambda) = \frac{Z[V + \delta V_1 + \delta V_2; n]}{Z[V + \delta V_1; n]} = \frac{e^{-F[V + \delta V_1 + \delta V_2; n]}}{e^{-F[V + \delta V_1; n]}} \quad (4.12)$$

where

$$\delta V_1(z) = \frac{N-n}{n} V(z) \quad \text{and} \quad \delta V_2 = -\frac{1}{n} \ln(z - \lambda) \quad (4.13)$$

We have seen in the previous section (eq.2.45) that

$$F[V; n] = n^2 F_0[V; x_c] - \ln \theta_3(nx_c[V]) + \dots \quad (4.14)$$

We will use the fact that under a variation δV of the potential, the variation of F_0 is [21, 8]:

$$\delta F_0 = \frac{1}{2i\pi} \oint \omega(z) \delta V(z) dz \quad (4.15)$$

where the anti-clockwise contour encloses the support of the density of eigenvalues, and $\omega(z)$ is the resolvent (eq 3.4 and 2.28):

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \left(V'(z) - M(z) \sqrt{\sigma(z)} \right)$$

It is convenient to introduce two sources t_1 and t_2 for the variations δV_1 and δV_2 of the potential, and consider a generalized potential $\mathcal{V}(z)$:

$$\mathcal{V}(z) = V(z) + t_1 \delta V_1(z) + t_2 \delta V_2(z) = V(z) + t_1 V(z) + t_2 \ln |\lambda - z|$$

Since $t_1 = \frac{N-n}{n}$ and $t_2 = -\frac{1}{n}$ are both small of order $O(N^{-1})$, we will expand F in Taylor's series:

$$F[\mathcal{V}(z); n] = F[V(z); n] + t_1 \partial_1 F + t_2 \partial_2 F + \frac{t_1^2}{2} \partial_{11} F + t_1 t_2 \partial_{12} F + \frac{t_2^2}{2} \partial_{22} F + \dots$$

all the derivatives being taken at the point $t_1 = t_2 = 0$.

This will give

$$\mathcal{P}_n(\lambda) \sim e^{n\partial_2 F_0} e^{(N-n)\partial_{12} F_0} e^{-\frac{1}{2}\partial_{22} F_0} \frac{\theta_3(nx + (N-n)\partial_1 x - \partial_2 x)}{\theta_3(nx + (N-n)\partial_1 x)} (1 + O(N^{-1})) \quad (4.16)$$

Now, let us compute the derivatives of F_0 and $x = x_c$ with respect to t_1 and t_2 . The method proceeds similarly to section 3.1.

4.2.1 Derivatives of F_0 with respect to t_1 and t_2

using (4.15) with (4.13):

$$\frac{\partial F_0}{\partial t_2} = \frac{1}{2i\pi} \oint \omega(z) \ln(z - \lambda) dz$$

After integration by part, the pole in $(z - \lambda)$ picks a residue, and the result is a primitive of $\omega(\lambda)$:

$$\frac{\partial F_0}{\partial t_2} = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \omega(z) dz \quad (4.17)$$

The lower bound of integration λ_0 is to be chosen such that $e^{n\partial_2 F_0} \sim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n$. i.e.

$$\ln \lambda_0 = \int_{\lambda_0}^{\infty} \left(\omega(z) - \frac{1}{z} \right) dz \quad (4.18)$$

In order to compute the second derivatives $\partial_{12} F_0$ and $\partial_{22} F_0$, we will need to differentiate $\omega(z)$ with respect to t_1 and t_2 .

4.2.2 Derivatives of $\omega(z)$ with respect to t_1 and t_2

The resolvent $\omega(z)$ computed for the potential $\mathcal{V}(z)$ takes the form:

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{V}'(z) - M(z) \sqrt{\sigma(z)} \right) \quad (4.19)$$

where $M(z)$ is analytic. Notice that when $\mathcal{V}'(z)$ has a pole in $z = \lambda$, $M(z)$ may have a pole too. $\omega(z)$ obeys a linear equation:

$$\omega(z + i0) + \omega(z - i0) = \mathcal{V}'(z) \quad \text{for} \quad z \in [a, b] \cup [c, d] \quad (4.20)$$

Thus its derivatives obey linear equations as well:

$$\partial_1 \omega(z + i0) + \partial_1 \omega(z - i0) = \delta V_1'(z) = V'(z) \quad (4.21)$$

$$\partial_2 \omega(z + i0) + \partial_2 \omega(z - i0) = \delta V_2'(z) = \frac{1}{z - \lambda} \quad (4.22)$$

• $\partial \omega_1$: The solution of (4.21) is:

$$\partial_1 \omega(z) = \omega(z) - \frac{f(z)}{\sqrt{\sigma(z)}} \quad (4.23)$$

where $f(z)$ is analytic in z . The boundary conditions 2.18 imply that $f(z) \sim z$ when $z \rightarrow \infty$ and f has no pole, thus $f(z)$ is a polynomial of degree 1:

$$\frac{\partial \omega(z)}{\partial t_1} = \omega(z) - \frac{z - z_0}{\sqrt{\sigma(z)}} \quad (4.24)$$

z_0 is determined as a function of a, b, c, d by the derivative of 2.30 with respect to t_1 :

$$\int_b^c dz \frac{z - z_0}{\sqrt{\sigma(z)}} = 0 \quad (4.25)$$

It can be checked that in term of elliptic theta functions we have (see Appendix A, or [23]):

$$\frac{z - z_0}{\sqrt{\sigma(z)}} = \frac{d}{dz} \ln \frac{\theta_1(u(z) + u_\infty)}{\theta_1(u(z) - u_\infty)} \quad (4.26)$$

and thus:

$$\frac{\partial \omega(z)}{\partial t_1} = \omega(z) - \frac{d}{dz} \ln \frac{\theta_1(u(z) + u_\infty)}{\theta_1(u(z) - u_\infty)} \quad (4.27)$$

• $\partial \omega_2$: Note that the t_2 source-term is the primitive of the ϵ_λ source-term of 3.2, and that

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial \omega(z)}{\partial t_2} = \frac{\partial \omega(z)}{\partial \epsilon_\lambda} = -\frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon_z \partial \epsilon_\lambda} = \omega_c(z, \lambda) \quad (4.28)$$

so, $\partial \omega / \partial t_2$ has already been computed in 3.8. The second derivative $\partial_{22} F$ corresponds to $z = \lambda$.

$$\partial_{22} F_0 = \ln \sqrt{\sigma(\lambda)} + 2 \ln (\theta_1(u(\lambda) - u_\infty)) \quad (4.29)$$

4.2.3 Derivatives of x

Recall that

$$x = \int_a^b \rho(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b M(z) \sqrt{\sigma(z)} dz \quad (4.30)$$

using 4.27 we get:

$$\frac{\partial x}{\partial t_1} = x + \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{z - z_0}{\sqrt{\sigma(z)}} dz = x + 2u_\infty \quad (4.31)$$

Similarly, from 4.28 and 3.18 or 3.31 (or less tediously, taking the primitive of 3.14), we get:

$$\frac{\partial x}{\partial t_2} = -u(\lambda) + u_\infty \quad (4.32)$$

4.3 Final result

4.3.1 Case $\lambda \notin [a, b] \cup [c, d]$

Eventually, inserting 4.17, 4.27, 4.29, 4.31, 4.32 into 4.16 we get:

$$\mathcal{P}_n(\lambda)_{\lambda \notin [a, b] \cup [c, d]} = \sqrt{u'(\lambda)} p_n(u(\lambda)) e^{N \int_{\lambda_0}^{\lambda} \omega} \quad (4.33)$$

where

$$p_n(u) = C_n \frac{\theta_3(Nx + 2(N-n)u_\infty + u - u_\infty)\theta_1(2u_\infty)}{\theta_3(Nx + 2(N-n)u_\infty)\theta_1(u - u_\infty)} \left(\frac{\theta_1(u + u_\infty)}{\theta_1(u - u_\infty)} \right)^{n-N} \quad (4.34)$$

C_n is a normalization such that $\mathcal{P}_n \sim \lambda^n$ for $\lambda \rightarrow \infty$.

$$C_n = \sqrt{2K} A^{n-N+1} \quad \text{with} \quad A = -\frac{1}{2K} \frac{\theta_1'(0)}{\theta_1(2u_\infty)} \quad \text{and} \quad K = \int_c^b \frac{dz}{\sqrt{\sigma(z)}} \quad (4.35)$$

$$A = -\frac{1}{4} |d - a - c + b| \frac{\theta_3(0)}{\theta_3(2u_\infty)}$$

Note that 4.33 is unchanged under $u \rightarrow u + 1$ and $u \rightarrow u + \tau$. Indeed, a shift $u \rightarrow u + \tau$ amounts to a nontrivial circle around the cut $[c, d]$. Thus $\int \omega$ is shifted by $-2i\pi \int_c^d \rho = -2i\pi(1-x)$, and $e^{N \int \omega}$ receives a phase $e^{2i\pi Nx}$. In the same time, the θ functions receive phase factors: $\theta(v + \tau) = \theta(v)e^{-2i\pi(v+\tau/2)}$. One can easily check that the total phase shift is 0.

4.3.2 Case $\lambda \in [a, b] \cup [c, d]$

Expression 4.34 has been derived by a saddle point approximation of 4.12 when λ does not belong to $[a, b] \cup [c, d]$. When λ lies on the cut $[a, b] \cup [c, d]$, 4.12 actually has two saddle points, contributing to the same order. They correspond to the two determinations of the square root $\pm \sqrt{\sigma(\lambda)}$. The asymptotic expression for the orthogonal polynomial is then given by a sum of two terms:

$$\mathcal{P}_n(\lambda)_{\lambda \in [a, b] \cup [c, d]} = C \sqrt{u'} [p_n(u) e^{-iN\pi\zeta(\lambda)} + ip_n(-u) e^{iN\pi\zeta(\lambda)}] e^{\frac{N}{2}V(\lambda)} \quad (4.36)$$

where $\zeta(\lambda) = \int_a^\lambda \rho(z)dz$ and

$$C = e^{-\frac{N}{2}(V(\lambda_0) + \int_{\lambda_0}^d M(z)\sqrt{\sigma(z)}dz)} = d^N e^{-\frac{N}{2}V(d)} e^{-N \int_d^\infty (\omega(z) - \frac{1}{z})dz} \quad (4.37)$$

To summarize: When $\lambda \notin [a, b] \cup [c, d]$, the wave function $\psi_n(\lambda) = \mathcal{P}_n(\lambda)e^{-NV/2}$ decays exponentially, and within the support $[a, b] \cup [c, d]$, it oscillates at a frequency of order N .

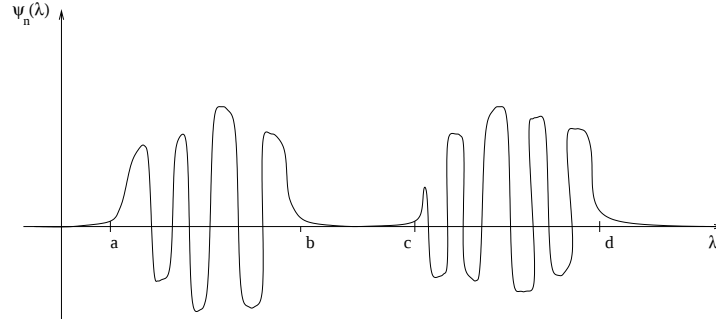


Figure 2: Typical behavior of the wave function

4.3.3 Check of the orthogonality

For completeness, let us check that the functions (4.33) are indeed orthogonal (at leading order in N^{-1}). Let us compute the integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \mathcal{P}_n(\lambda) \mathcal{P}_m(\lambda) e^{-NV(\lambda)}$$

The contributions of the integral along $]-\infty, a] \cup [b, c] \cup [d, \infty[$ are exponentially small and do not contribute at leading order.

Along $[a, b] \cup [c, d]$, we use expression 4.36, and get a sum of four terms:

$$C^2 \int d\lambda u'(\lambda) \begin{pmatrix} ip_n(u)p_m(-u) & +ip_n(-u)p_m(u) \\ +p_n(u)p_m(u)e^{-2iN\pi\zeta(\lambda)} & -p_n(-u)p_m(-u)e^{2iN\pi\zeta(\lambda)} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Since the two last terms have fast oscillations of frequency N , they are suppressed as $O(1/N)$.

The leading contribution is thus given by the two first terms of 4.38, which can be rewritten as integrals in the u plane along the contour depicted on fig.3.a:

$$\int \mathcal{P}_n \mathcal{P}_m e^{-NV} = ic_{nm} \int du \frac{\theta_3(x_n + u - u_\infty) \theta_3(x_m - u - u_\infty)}{\theta_3(x_n) \theta_3(x_m) \theta_1(u - u_\infty) \theta_1(u + u_\infty)} \left(\frac{\theta_1(u + u_\infty)}{\theta_1(u - u_\infty)} \right)^{n-m} + (u \rightarrow -u) \quad (4.39)$$

where x_n and c_{nm} are short notations for:

$$x_n = Nx + 2(N - n)u_\infty \quad \text{and} \quad c_{nm} = C^2 C_n C_m \theta_1^2(2u_\infty) \quad (4.40)$$

If $n > m$ we may deform the contour to a circle around the point $-u_\infty$ (fig.3.b), and the integral vanishes since there is no pole, while if $m > n$ we deform the contour to a circle around $+u_\infty$ (fig.3.c). Therefore, the integral vanishes for $n \neq m$.

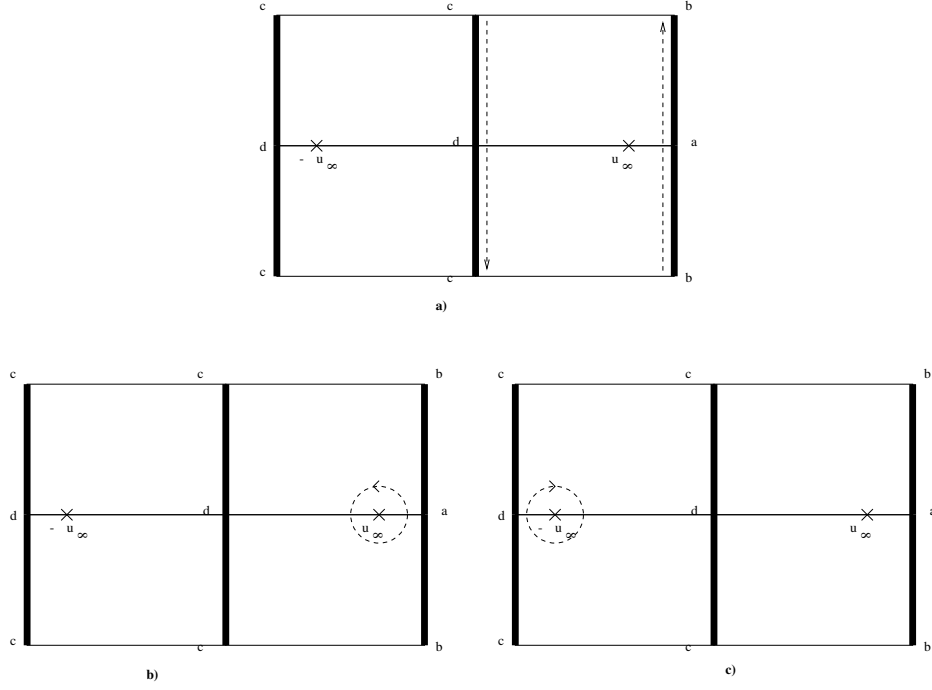


Figure 3: Deformation of the contour integral

When $n = m$, the integral picks a residue:

$$\int d\lambda \mathcal{P}_n \mathcal{P}_m e^{-NV(\lambda)} = h_n \delta_{nm} \quad (4.41)$$

with $(C, c_{nm}, A, x_n$ are defined in 4.35, 4.40, 4.37):

$$h_n = c_{nn} \frac{4\pi}{\theta_1(2u_\infty)\theta_1'(0)} \frac{\theta_3(x_{n+1})}{\theta_3(x_n)} = -4\pi C^2 \frac{\theta_3(x_{n+1})}{\theta_3(x_n)} A^{2(n-N+1/2)} \quad (4.42)$$

4.3.4 Recurrence equation

It is well known that the orthogonal polynomials satisfy a recurrence equation of the form [2, 18]:

$$\lambda \mathcal{P}_n(\lambda) = \mathcal{P}_{n+1}(\lambda) + \beta_n \mathcal{P}_n(\lambda) + \alpha_n \mathcal{P}_{n-1}(\lambda) \quad (4.43)$$

Here, we find that (divide 4.43 by $\mathcal{P}_n$, and match the poles on both sides):

$$\alpha_n = \frac{h_n}{h_{n-1}} = A^2 \frac{\theta_3(x_{n+1})\theta_3(x_{n-1})}{\theta_3^2(x_n)} \quad (4.44)$$

which can be rewritten more compactly as

$$\alpha_n = \frac{1}{16} \left(((d-a) - (c-b))^2 + 4(d-a)(c-b) \operatorname{cn}^2(x_n + 1/2) \right) \quad (4.45)$$

And by taking $u = 0$ in 4.43 we get β_n :

$$\beta_n - d = A \left[\frac{\theta_3(x_{n+3/2})\theta_3(x_n)}{\theta_3(x_{n+1})\theta_3(x_{n+1/2})} + \frac{\theta_3(x_{n+1})\theta_3(x_{n-1/2})}{\theta_3(x_n)\theta_3(x_{n+1/2})} \right] \quad (4.46)$$

which can be rewritten more compactly as:

$$\beta_n = \frac{a + d + (c - b)}{2} - (c - b) \frac{d - b}{c - b + \frac{d - c}{\text{cn}^2(x_n - u_\infty + 1/2)}} \quad (4.47)$$

The sequences α_n and β_n are thus quasi-periodic in n . It is interesting to recall that the behavior of these coefficients has been extensively studied (mainly by numerical methods) by several authors in the early 90's [22]. The general conclusion was that in the multi-cut case the general behavior of the recursion coefficients was “chaotic” in n (and regular or quasi-periodic only in some special cases). It is clear from our expressions that in the two-cut case the behavior is **always** periodic or quasi-periodic and never chaotic (in the mathematical sense). This is in fact true even if the number of cuts is larger than 2 (see appendix C).

In the symmetric case, $x = \frac{1}{2}$ and $u_\infty = \frac{1}{4}$, we have $x_n = n/2 \bmod 1$, so that we recover $\beta_n = 0$ and $\alpha_n = \frac{1}{4}(a - (-1)^n b)^2$.

In the general case, α_n and β_n vary along a periodic curve, between two extrema, given by:

$$\frac{(d - a - (c - b))^2}{16} \leq \alpha_n \leq \frac{(d - a + (c - b))^2}{16}$$

$$\frac{d + a}{2} - \frac{c - b}{2} \leq \beta_n \leq \frac{d + a}{2} + \frac{c - b}{2}$$

Similarly to the one-cut case, one may relate α_n to square width of the distribution of eigenvalues, and β_n to the center of the distribution.

4.4 The kernel $K(\lambda, \mu)$

We can now evaluate the kernel $K(\lambda, \mu)$ according to (4.10). Let us note $u = u(\lambda)$ and $v = u(\mu)$ and we assume $\lambda, \mu \in [a, b] \cup [c, d]$:

$$K(\lambda, \mu) \sim \frac{C^2 \sqrt{u'v'}}{N h_{N-1}} \sum_{\epsilon, \eta = \pm 1} \frac{\sqrt{\epsilon \eta} p_N(\epsilon u) p_{N-1}(\eta v) e^{-\epsilon N i \pi \zeta(\lambda)} e^{-\eta N i \pi \zeta(\mu)} - (u \rightarrow v)}{(\lambda - \mu)} \quad (4.48)$$

which can be rewritten as a sum of eight terms:

$$K(\lambda, \mu) = \sum_{\epsilon, \eta, \kappa = \pm 1} \kappa \sqrt{\epsilon \eta} \frac{c_{N, N-1}}{h_{N-1} \theta_3(x_N) \theta_3(x_{N-1})} \frac{\sqrt{u'v'}}{N(\lambda - \mu)} \times \frac{\theta_3(Nx + \epsilon u - \kappa u_\infty) \theta_3(Nx + \eta v + \kappa u_\infty)}{\theta_1(\epsilon u - \kappa u_\infty) \theta_1(\eta v + \kappa u_\infty)} e^{-N i \pi (\epsilon \zeta(\lambda) + \eta \zeta(\mu))} \quad (4.49)$$

We will see below that not all the terms contribute to the same order.

4.4.1 Regime $|\lambda - \mu| \sim O(1/N)$

The eight terms of (4.49) can be rewritten as four combinations of the type:

$$\sin(N\pi(\zeta(\lambda) \pm \zeta(\mu))) \frac{f(u, v) \mp f(v, u)}{N(\lambda - \mu)} \quad \text{and} \quad \cos(N\pi(\zeta(\lambda) \pm \zeta(\mu))) \frac{g(u, v) - g(v, u)}{N(\lambda - \mu)}$$

In the limit $|\lambda - \mu|$ small, i.e. $|u - v|$ small, the terms with a cosine will be proportional to derivatives of $g(u, v)$, and there will be an overall $\frac{1}{N}$ factor. Similarly, the term with a sine and a $+$ sign will be proportional to a derivative of $f(u, v)$ and will be of order $1/N$. Only the term proportional to $\sin N\pi \int_{\lambda}^{\mu} \rho(z) dz$ can balance the $1/N$ factor, and is dominant in the short range regime. After calculation we get:

$$K(\lambda, \mu) \underset{|\lambda - \mu| \sim O(1/N)}{\sim} \frac{\sin N\pi \int_{\lambda}^{\mu} \rho(z) dz}{N\pi(\lambda - \mu)} \quad (4.50)$$

As expected we have

$$K(\lambda, \lambda) = \rho(\lambda) \quad (4.51)$$

and we recover the universal short range correlation function:

$$\rho(\lambda, \mu) \sim \rho(\lambda)\rho(\mu) \left(1 - \left(\frac{\sin N\pi\rho(\lambda)(\lambda - \mu)}{N\pi\rho(\lambda)(\lambda - \mu)} \right)^2 \right) \quad (4.52)$$

4.4.2 Long range regime, smoothed oscillations

When $|\lambda - \mu| \sim O(1)$, $K(\lambda, \mu)$ has high frequency oscillations, and only a smoothed correlation function obtained by averaging the oscillations can be observed.

Recall that the connected 2-point correlation function is related to K^2 by (4.9):

$$\rho_{2c}(\lambda, \mu) = -K(\lambda, \mu)^2 \quad (4.53)$$

with $K(\lambda, \mu)$ given by 4.49.

Smoothing out the oscillations amounts to kill all terms containing some $e^{iN\pi\zeta}$ in the square of eq 4.49, we thus have:

$$\begin{aligned} \overline{K(\lambda, \mu)^2} &= \frac{-2u'v'c_{NN-1}^2}{h_{N-1}^2\theta_3^2(x_N)\theta_3^2(x_{N-1})N^2(\lambda - \mu)^2} \sum_{\epsilon, \eta, \kappa_1, \kappa_2 = \pm 1} \kappa_1 \kappa_2 \\ &\frac{\theta_3(Nx + \epsilon u - \kappa_1 u_{\infty})\theta_3(Nx - \epsilon u - \kappa_2 u_{\infty})\theta_3(Nx + \eta v + \kappa_1 u_{\infty})\theta_3(Nx - \eta v + \kappa_2 u_{\infty})}{\theta_1(\epsilon u - \kappa_1 u_{\infty})\theta_1(-\epsilon u - \kappa_2 u_{\infty})\theta_1(\eta v + \kappa_1 u_{\infty})\theta_1(-\eta v + \kappa_2 u_{\infty})} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Using that (see appendix A, and [23, 25, 24]):

$$\lambda - \mu = -2A \frac{\theta_1(u-v)\theta_1(u+v)\theta_1^2(2u_\infty)}{\theta_1(u-u_\infty)\theta_1(u+u_\infty)\theta_1(v-u_\infty)\theta_1(v+u_\infty)} \quad (4.55)$$

we get ($\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji} = \pm 1$):

$$\begin{aligned} \overline{K(\lambda, \mu)^2} &= \frac{2u'v'\theta_1'^2(0)}{N^2 4\pi^2 \theta_3^4(Nx)\theta_1^2(2u_\infty)} \\ &\left(\frac{\theta_1(u-u_\infty)\theta_1(u+u_\infty)\theta_1(v-u_\infty)\theta_1(v+u_\infty)}{\theta_1(u-v)\theta_1(u+v)} \right)^2 \sum_{i,j,k,l=\pm 1} (\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} + \epsilon_{il}\epsilon_{kj}) \quad (4.56) \\ &\frac{\theta_3(Nx+u-iu_\infty)\theta_3(Nx-u-ku_\infty)\theta_3(Nx+v-ju_\infty)\theta_3(Nx-v-lu_\infty)}{\theta_1(u-iu_\infty)\theta_1(-u-ku_\infty)\theta_1(v-ju_\infty)\theta_1(-v-lu_\infty)} \end{aligned}$$

We see that 4.56 has no pole when $u = \pm u_\infty$, it can have (double) poles only when $u = \pm v$. Thus, 4.56 can be rewritten in terms of Weierstrass functions of $u+v$ and $u-v$:

$$\overline{K(\lambda, \mu)^2} = -\frac{1}{2N^2\pi^2} u'v' (C_1\wp(u-v) + C_2\wp(u+v) - 2S)$$

Taking $u = v$ and $u = -v$ in 4.56, we find that the residues are $C_1 = C_2 = 1$, and taking a particular value of u and v , we find the constant S , equal to what we had in 3.31:

$$\overline{K(\lambda, \mu)^2} = -\frac{1}{2N^2\pi^2} u'v' \left(\wp(u-v) + \wp(u+v) - 2\wp(Nx + \frac{\tau}{2}) \right) \quad (4.57)$$

and we recover the result 3.31 found in section 3.6.

5 Conclusions

In this article, we have solved the puzzle raised by [11, 13] and understood why the naive mean-field method [10] and the orthogonal polynomial ansatz [11, 12] approach used in the symmetric case disagree.

We have proven here that this effect has nothing to do with a $\mathbb{Z}_2$ symmetry breaking, as it was sometimes assumed [11], it is general as soon as the support of the density is not connected.

The apparent paradox comes from the fact that when the support of eigenvalues is not connected, the free energy admits no large N expansion in powers of $1/N^2$ (topological expansion [9]). This means that the free energy in the multi-cut case is not given by a topological expansion, i.e. the sum of diagrams with a weight N^χ (χ =Euler Characteristic of the diagram).

The explanation lies in the discreteness of the number of eigenvalues. For instance in the symmetric 2-cut case, the classical approach assumes that the minimum of the free energy is reached when one half ($x = 1/2$) of the eigenvalues are in each cut. Obviously, this minimum is never reached when the total number of eigenvalues is odd, and in general, the result depends on the fractional part of Nx .

At leading order in N only, the free energy is correctly given by the classical saddle point limit [16, 10], but the first order in N is not sufficient to determine the 2-point (or higher) correlation function.

Here we have computed explicitly the two-point connected correlation function. It contains a universal part depending only on the number of cuts, which was obtained by [10], and contains in addition, a non universal term quasiperiodic in N [22, 14].

Let us stress that our calculation holds for any potential, not necessarily symmetric, and it can also be generalized to a potential with complex coefficients (appendix. B), and to an arbitrary number of cuts (appendix. C).

We have also reobtained directly the asymptotic expressions for the orthogonal polynomials [14], which allows in principle through the Darboux-Christoffel theorem (eq. 4.10) to compute any correlation function of any number of eigenvalues in the short or long range domain (and one can smooth it afterwards).

The orthogonal polynomial approach may in turn be used for other random matrix ensembles, and it would be interesting to apply our results to orthogonal or symplectic ensembles [2].

The authors are thankful to K. Mallick for useful discussions, and to the Eurogrid European Network HPRN-CT-1999-00161 for supporting part of the work. They also thank E. Kanzieper, O. Lechtenfeld and G. Akemann for their interest and for pointing some missing references.

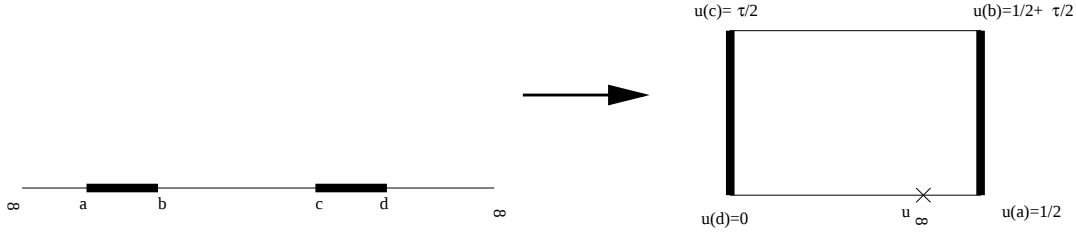
Appendix A A few useful identities on elliptic functions

Here we collect a few useful identities on elliptic functions used through the paper. For details see [23, 24, 25]. We start from

$$\sigma(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\lambda - d) \quad , \quad a < b < c < d \quad (\text{A.1})$$

and the map from the complex plane to the torus

$$u(\lambda) = \frac{1}{2K} \int_d^\lambda \frac{dz}{\sqrt{\sigma(z)}} \quad (\text{A.2})$$

Figure 4: the upper half-plane is mapped onto a rectangle $(1/2, \tau/2)$

where the half period K is

$$K = \int_b^c \frac{dz}{\sqrt{|\sigma(z)|}} = \frac{2}{\sqrt{(c-a)(d-b)}} K[m] = \frac{\pi \theta_3^2(0|\tau)}{\sqrt{(c-a)(d-b)}} \quad (\text{A.3})$$

$K[m]$ is the standard complete elliptic integral [23, 24, 25], with the modulus m equal to the biratio of the four points a, b, c, d :

$$m = \frac{(d-a)(c-b)}{(d-b)(c-a)} \quad (\text{A.4})$$

m is related to the modular parameter τ of the torus by:

$$m = e^{i\pi\tau} \frac{\theta_3^4(\frac{\tau}{2}|\tau)}{\theta_3^4(0|\tau)} \quad \text{and conversely} \quad \tau = i \frac{K[1-m]}{K[m]} \quad (\text{A.5})$$

where we have used the Jacobi theta functions:

$$\theta_1(z|\tau) = \theta_1(z) = -i \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} (-1)^r q^{r^2} e^{2i\pi r z} \quad \text{with} \quad q = e^{i\pi\tau} \quad (\text{A.6})$$

$$\text{and} \quad \theta_3(z|\tau) = \theta_3(z) = q^{\frac{1}{4}} e^{i\pi z} \theta_1(z + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}|\tau) \quad (\text{A.7})$$

With this mapping $u(\lambda)$ between the λ complex plane and the periodic rectangle of sides $(1, \tau)$, we have:

$$u(d) = 0 \quad , \quad u(a) = \frac{1}{2} \quad , \quad u(b) = \frac{1+\tau}{2} \quad , \quad u(c) = \frac{\tau}{2} \quad , \quad u(\infty) = u_\infty \quad (\text{A.8})$$

The inverse mapping can be written in terms of theta functions:

$$\lambda - d = -\frac{\theta_1'(0)}{2K} \frac{\theta_1^2(u)\theta_1(2u_\infty)}{\theta_1(u+u_\infty)\theta_1(u-u_\infty)\theta_1^2(u_\infty)} \quad (\text{A.9})$$

$$\sqrt{\sigma(\lambda)} = \frac{\theta_1^2(0)}{4K^2} \frac{\theta_1(2u)\theta_1(2u_\infty)}{\theta_1^2(u-u_\infty)\theta_1^2(u+u_\infty)} \quad (\text{A.10})$$

and in terms of the usual trigonometric elliptic functions sn , cn , dn [23, 24, 25] that we normalize to have periods 1 and τ , i.e.

$$\text{sn}(u) = \text{sn}(2K[m]u|m) \quad , \quad \text{dn}(u) = \text{dn}(2K[m]u|m) \quad , \quad \dots \quad (\text{A.11})$$

one has

$$\frac{\text{sn}^2(u)}{\text{sn}^2(u_\infty)} = \frac{\lambda - d}{\lambda - c} \quad , \quad \frac{\text{cn}^2(u)}{\text{cn}^2(u_\infty)} = \frac{\lambda - a}{\lambda - c} \quad , \quad \frac{\text{dn}^2(u)}{\text{dn}^2(u_\infty)} = \frac{\lambda - b}{\lambda - c} \quad (\text{A.12})$$

$$\lambda - c = (d - c) \frac{1}{1 - \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{sn}^2(u_\infty)}} \quad , \quad \lambda - b = (d - b) \frac{\text{dn}^2(u)}{1 - \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{sn}^2(u_\infty)}} \quad (\text{A.13})$$

$$\lambda - a = (d - a) \frac{\text{cn}^2(u)}{1 - \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{sn}^2(u_\infty)}} \quad , \quad \lambda - d = (d - c) \frac{d - a}{c - a} \frac{\text{sn}^2(u)}{1 - \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{sn}^2(u_\infty)}} \quad (\text{A.14})$$

$$\sqrt{\sigma(\lambda)} = (d - c)(d - a) \sqrt{\frac{d - b}{c - a}} \frac{\text{sn}(u) \text{cn}(u) \text{dn}(u)}{\left(1 - \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{sn}^2(u_\infty)}\right)^2} \quad (\text{A.15})$$

and u_∞ is related to a, b, c, d by any of the following relations:

$$\text{sn}^2(u_\infty) = \frac{c - a}{d - a} \quad , \quad \text{cn}^2(u_\infty) = \frac{d - c}{d - a} \quad , \quad \text{dn}^2(u_\infty) = \frac{d - c}{d - b} \quad (\text{A.16})$$

Appendix B Complex potentials

The case of complex potentials, that is to say of a polynomial potential $V(\lambda)$ with complex coefficients, is interesting for some applications of the matrix models to 2 dimensional gravity and when studying their connections with integrable hierarchies. In this case, the mean field large N solution is known to be given by a continuous distribution of the eigenvalues along arcs in the complex plane [26].

In this appendix we show that our results are only slightly modified in this case.

In the two-cut case, we can repeat the analysis of sect.2. We fix $x = n_1/N$ (the proportion of e.v. in the first cut). The resolvent is still of the form 2.28, with the polynomial M and the end points a, b, c, d determined by the constraints 2.18 and 2.29, but they are no more real in general, as well as the resulting mean-field free energy $F_0(x)$.

If we now repeat the calculation of sect.2.2.3 we cannot use a saddle-point approximation for the sum over n_1 by expanding $F_0(x)$ around the saddle point x_0 which is the true extremum of F_0 .

$$\frac{\partial F_0}{\partial x}(x_0) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Indeed this extremum is at a finite non-zero distance of the real axis, i.e. $\text{Im}(x_0) = \mathcal{O}(1)$, while the method of sect.2.2.3 is valid only if $\text{Im}(x_0) = \mathcal{O}(1/N)$. However, since N is integer, we can expand F_0 around any x_k , provided that

$$F'_0(x_k) = 2i\pi \frac{k}{N} \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.2})$$

since the dangerous oscillating term $e^{-N^2(x-x_k)F'_0(x_c)}$ is then a constant for $x = n/N$, $n \in \mathbb{Z}$.

Therefore, as in [26] we have to consider the *real pseudo saddle-point* x_c such that

$$\text{Re}(F'_0(x_c)) = 0 \quad \text{with} \quad \text{Im}(x_c) = 0 \quad (\text{B.3})$$

and denote

$$\Delta_c = \frac{1}{2i\pi} F'_0(x_c) = \frac{1}{2\pi} \text{Im}(F'_0(x_c)) \quad (\text{B.4})$$

We expand F_0 around some x_k defined by Eq. (B.2) and such that

$$x_k - x_c = \mathcal{O}(N^{-1}) \quad (\text{B.5})$$

and we get for the total free energy (by exactly the same calculation as in sect.2.2.3)

$$\begin{aligned} F &= N^2 F_0(x_k) - \ln(\theta_3(Nx_k)) \\ &\quad + F_1(x_c) + \frac{1}{2} \ln(2\pi F''_0(x_c)) + \mathcal{O}(N^{-2}) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

where θ_3 is the theta function with modular parameter

$$\tau = \frac{2i\pi}{F''_0(x_c)} \quad (\text{B.7})$$

Only the first two terms are important for calculating the two-point functions and the orthogonal polynomials in the large N limit. This leading term does not depend on k . Indeed we have

$$F'_0(x_k) - F'_0(x_c) = (x_k - x_c)F''_0(x_c) + \mathcal{O}(N^{-1}) \quad (\text{B.8})$$

hence

$$(x_k - x_c) = \frac{1}{N} \tau(k - N\Delta_c) + \mathcal{O}(N^{-2}) \quad (\text{B.9})$$

and using the periodicity relations of θ_3 we can rewrite the leading term for the free energy as

$$N^2 F_0(x_k) - \ln(\theta_3(Nx_k)) = N^2 F_0(n_c/N) - \frac{i\pi}{\tau} u_c^2 - \ln(\theta_3(u_c)) \quad (\text{B.10})$$

with

$$n_c = \text{E}[Nx_c] \quad , \quad u_c = [Nx_c] - \tau[N\Delta_c] \quad (\text{B.11})$$

where $E[u]$ is the integer part of u (largest integer smaller than u) and $[u] = u - E[u]$ is the fractional part of u . This does not depend on k up to negligible terms of order $\mathcal{O}(N^{-1})$ (provided that condition B.5 for k holds).

One can now repeat the calculation of sect.3 for the 2-point function. Nothing is changed but we simply have to replace x_c by x_k in the intermediate steps and to use Eq. (B.9) at the end of the calculation. This amounts to replace the x_c in the elliptic function sn^2 by $x_c - \tau\Delta_c$. The final result for the two-point resolvent is

$$\begin{aligned} \omega^c(\lambda, \mu) = & -\frac{1}{4(\lambda - \mu)^2} \left[\left(1 - \sqrt{\frac{(\lambda - a)(\lambda - b)(\mu - c)(\mu - d)}{(\mu - a)(\mu - b)(\lambda - c)(\lambda - d)}} \right) + (\lambda \leftrightarrow \mu) \right] \\ & - \frac{(c - a)(d - b)}{4\sqrt{\sigma(\lambda)}\sqrt{\sigma(\mu)}} \text{sn}^2(N(x_c - \tau\Delta_c) + \tfrac{1}{2}) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Similar results holds for the orthogonal polynomials. We simply have to consider the end-points a, b, c, d for the mean-field real parameter x_c and to make the replacement

$$Nx_c \rightarrow N(x_c + \tau\Delta_c) \quad (\text{B.13})$$

in the elliptic functions involving Nx_c . In any case these terms depend only on the fractional parts of Nx_c and of $N\Delta_c$.

A final interesting remark on the periodicity properties of the non-universal term $\text{sn}^2(N(x_c + \tau\Delta_c))$ can be made. From the definition B.4 Δ_c corresponds to a “phase shift” between the two arcs where the density of e.v. is non zero.

$$\Delta_c = \frac{1}{2i\pi} F'_0(x_c) = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2i\pi} \quad (\text{B.14})$$

where $N\Gamma_\alpha$ is the (constant) effective potential on the arc α . The two periods 1 and τ of the sn^2 function correspond respectively in term of eigenvalues to (i) transfer a single e.v. from the first arc to the second one ($\delta Nx = \pm 1$), (ii) or to shift the phase between the two arcs by 2π ($\delta N\Delta_c = \pm 1$).

Appendix C Multicut Case

Consider now a support of eigenvalues split into s intervals:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_s \quad (\text{C.1})$$

Let n_i be the number of eigenvalues in each $\mathcal{C}_i$, and $x_i = n_i/N$ the occupation ratio, which we denote collectively as a vector:

$$x_i = \int_{\mathcal{C}_i} d\lambda \rho(\lambda) \quad , \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_{s-1}) \quad (\text{C.2})$$

Note that only $s - 1$ of them are independent since $x_1 + \dots + x_s = 1$.

As in the two-cut case (eq. 2.36), the free energy at fixed $\vec{n}$ admits a topological large N expansion:

$$F[V; \vec{n}] = N^2 F_0[V; \vec{x}] + N^0 F_1[V; \vec{x}] + \mathcal{O}(1/N^2) \quad (\text{C.3})$$

and as in 2.38, the partition function can be written as a sum over $\vec{n}$:

$$Z = e^{-F} = \sum_{\vec{n}} e^{-F[V, \vec{n}]} \quad (\text{C.4})$$

The sum is dominated by the vicinity of the extremum $\vec{x}_c$ of $F_0[V; \vec{x}]$:

$$Z \sim \sum_{\vec{n}} e^{-N^2 \left(F_0[V, \vec{x}_c] + i\pi \left(\frac{\vec{n}}{N} - \vec{x}_c \right) \cdot \tau^{-1} \left(\frac{\vec{n}}{N} - \vec{x}_c \right) \right)} \quad \text{where} \quad \left. \frac{\partial}{\partial \vec{x}} F_0(\vec{x}) \right|_{\vec{x}=\vec{x}_c} = \vec{0} \quad (\text{C.5})$$

τ is the $s - 1 \times s - 1$ matrix defined by:

$$\tau_{ij}^{-1} = \frac{1}{2i\pi} \left. \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_c} \quad (\text{C.6})$$

Then, the summation over $\vec{n}$ yields:

$$Z \sim e^{-N^2 F_0[V, \vec{x}_c]} \theta(N \vec{x}_c | \tau) \quad (\text{C.7})$$

where $\theta(\vec{u} | \tau)$ is Riemann's theta function [27] in genus $s - 1$:

$$\theta(\vec{u} | \tau) = \theta(\vec{u}) = \sum_{\vec{n}} e^{-i\pi(\vec{n}-\vec{u}) \cdot \tau^{-1}(\vec{n}-\vec{u})} = \sum_{\vec{n}} e^{i\pi \vec{n} \cdot \tau \vec{n}} e^{-2i\pi \vec{n} \cdot \vec{u}} \quad (\text{C.8})$$

where τ is a $s - 1 \times s - 1$ matrix, $\vec{u}$ is a $s - 1$ component vector, and $\vec{n}$ is a vector with integer coordinates.

The θ function obeys the relations ($\vec{k}$ being an arbitrary integer vector):

$$\theta(\vec{u} + \vec{k}) = \theta(\vec{u}) \quad , \quad \theta(\vec{u} + \tau \vec{k}) = e^{-i\pi(2\vec{u} \cdot \vec{k} + \vec{k} \cdot \tau \vec{k})} \theta(\vec{u}) \quad , \quad \theta(-\vec{u}) = \theta(\vec{u}) \quad (\text{C.9})$$

Eventually the free energy at leading orders in N is:

$$F \sim N^2 \left[F_0[V, \vec{x}_c] - \frac{1}{N^2} \ln \theta(N \vec{x}_c | \tau) + \frac{1}{N^2} F_1(\vec{x}_c) + \dots \right] \quad (\text{C.10})$$

It is now straightforward but lengthy to rederive the 2-point correlation function and the orthogonal polynomials from C.10. One needs to differentiate C.10 with respect to variations of the potential as in 3.3 or 4.16, and express the hyperelliptical functions involved in the calculation through prime forms (hyperelliptical generalization of the θ_1 function) [27]. One should thus obtain expressions similar to those of [14].

References

- [1] T. Guhr, A. Müller-Groeling, H.A. Weidenmüller, cond-mat/9707301, P.A. Mello, *Theory of random matrices*, Les Houches Session LXI, E. Akkermans, G. Montambaux, J.L. Pichard, J. Zinn-Justin eds. (North-Holland, 1994).
- [2] M.L. Mehta, *Random matrices, second edition*, ed. by Academic Press inc (1991).
- [3] E.P. Wigner, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 47(1951) 790, reprinted in *C.E. Porter, Statistical theories of spectra: fluctuations* (Academic Press, New York, 1991).
- [4] H.S. Leff, *J. Math. Phys.* 5 (1964) 763
- [5] H.S. Camarda, *Phys.Rev.A*45 (1992) 579. G. Hacken, R. Werbin, J. Rainwater, *Phys.Rev.C*17 (1978)43; W.M. Wilson, E.G. Bilpuch, G.E. Mitchell, *Nucl.Phys.A*245(1975); R.U. Haq, A. Pandey, O. Bohigas, *Phys.Rev.Lett.*48(1982) 1086. .S. Camarda, P.D. Georgopoulos, *Phys.Rev.Lett.*50(1983) 492.
- [6] C.W.J. Beenakker, *Nucl. Phys. B*422 [FS] (1994) 515, P.J. Forrester, *Nucl. Phys. B*435 [FS] (1995) 421, and for numerical evidences T.S. Kobayakawa, Y. Hatsugai, M. Kohmoto, A. Zee, ISSP Tokyo preprint (1994).
- [7] E. Brézin and A. Zee, *Nucl. Phys. B*402 (1993), E. Brézin, A. Zee, *Nucl. Phys. B*453 (1995) 531, E. Brezin, A. Zee, *Phys. Rev. E*45 (1994) 2588.
- [8] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz and Y. Makeenko, *Phys.Lett. B*251 (1990) 517.
- [9] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi and J.-B. Zuber, *Comm. Math. Phys.* 59 (1978) 35; D. Bessis, C. Itzykson, and J.-B. Zuber, *Adv. Appl. Math.* 1 (1980) 109.
- [10] J. Ambjørn and G. Akemann, *J. Phys A*29 (1996) L555.
- [11] E. Kanzieper, V. Freilikher, *Phys. Re.v E* 57,(1998) 6604 (cond-mat/9709309); *Spectra of large random matrices: A method of study*, in *Diffuse Waves in Complex Media*, NATO ASI Series (Kluwer, Dordrecht, 1999), Vol. 531, 165 - 211, cond-mat/9809365.
- [12] Nivedita Deo, *Nucl. Phys. B*, Volume 504, 1997, pp. 609-620, cond-mat/9703136.
- [13] E. Brézin, N. Deo, *Phys. Rev. E* 59 (1999) 3901-3910, cond-mat/98050096.
- [14] P. Deift et al., *Communications on Pure and Applied Mathematics* 52 (1999) 1491-1552; *Ibid* 52 (1999) 1335-1425.

- [15] J. Jurkiewicz, Phys. Lett. 245B (1990) 178.
- [16] F. David, Nucl. Phys. B348, (1991) 507.
- [17] G. Akemann, Nucl. Phys. B482 (1996) 403-430, hep-th/9606004, and hep-th/9503185.
- [18] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials* American Mathematical Society, Providence, 1967.
- [19] See chap. 19 of [2] , and F.J. Dyson, Comm. Math. Phys. 19 (1970) 235. More recently, D.F. Fox, P.B. Kahn, Phys. Rev. 134B (1964) 1151, H.S. Leff, J. Math. Phys. 5 (1964) 763, B.V. Bronk, J. Math. Phys. 6 (1965) 228, P. Zinn-Justin, Nucl. Phys. B497 (1997) 725, cond-mat/9703033.
- [20] F.J. Dyson, Comm. Math. Phys. 19 (1970) 235-250.
- [21] Eynard B, Nucl. Phys. B506 633-664 (1997), cond-mat/9707005.
- [22] J. Jurkiewicz, Phys. Lett. B261 (1991) 260-268;
D. Senechal, Int. J. Mod. Phys. A7 (1992) 1491;
M. Sasaki and H. Suzuki, Phys. Rev. D 43 (1991) 4015;
O. Lechtenfeld, R. Ray and A. Ray, Int. J. Mod. Phys. A6 (1991) 4491; O. Lechtenfeld, Int. J. Mod. Phys. A7 (1992) 2335; O. Lechtenfeld, Int. J. Mod. Phys. A7 (1992) 7097, hep-th/9112045.
- [23] Special Functions, Wang Z.X., Guo D.R., World Scientific, 1989.
- [24] Higher Transcendental Functions, Bateman Manuscript Project, Vol. II, Ed. A. Erdélyi, McGraw-Hill 1953 (New-York).
- [25] Handbook of Mathematical Functions, Eds. M. Abramowitz and E. A. Stegun, NBS Applied Mathematics Series Vol. 55 (1955).
- [26] F. David, Phys. Lett. B302, 403-410 (1993), hep-th/9212106.
- [27] Theta Functions on Riemann Surfaces, Fay. J.D., Springer Verlag, 1973.

Bibliographie

- [1] G. Bonnet, F. David, Nucl. Phys. B552 (1999) 511-528, hep-th/9811216
- [2] G. Bonnet, Phys. Lett. B 459 (1999) 575, hep-th/9904058
- [3] B. Eynard, G. Bonnet Phys. Lett. B 453 (1999) 273, hep-th/9906130
- [4] G. Bonnet, F. David, B. Eynard, cond-mat/0003324
- [5] E.P. Wigner, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 47(1951) 790, reprinted in *C.E. Porter, Statistical theories of spectra : fluctuations* (Academic Press, New York, 1991).
- [6] D. Delande, Les Houches 1989, session LII *Chaos and Quantum Physics*, Giannoni, Voros, Zinn-Justin eds
- [7] T. Guhr, A. Müller-Groeling, et H. A. Weidenmüller, Phys. Rept. 299 (1998) 189-425.
- [8] B. Eynard, gravitation quantique bidimensionnelle et matrices aléatoires, thèse de doctorat de l'université Paris 6, 1995 ; F. David, Simplicial quantum gravity and random lattices, *in* Gravitation and Quantizations, Les Houches 1992, Session LVII, ed. B. Julia et J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1995) ; E. Brézin, Matrix models of two-dimensional gravity, *in* Gravitation and Quantizations, Les Houches 1992, Session LVII, ed. B. Julia et J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1995) ; J. Ambjørn, Quantization of geometry, *in* fluctuating geometries in statistical mechanics and field theory, Les Houches 1994, Session LXII, ed. F. David, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1996)
- [9] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461.
- [10] E. Brézin, V. A. Kazakov, Phys. Lett. B 236 (1990) 144 ; M. R. Douglas, S. H. Shenker, Nucl. Phys. B 335 (1990) 635 ; D. J. Gross, A. A. Migdal, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 127

- [11] J.J.M. Verbaarschot, T. Wettig, hep-ph/0003017, D. Toublan, J.J.M. Verbaarschot, hep-th/0001110, E. Shuryak, J. Verbaarschot, Nucl. Phys. A560 (1993) 306.
- [12] Y. Nambu Lectures at Copenhagen Symposium 1970; T. Goto, Relativistic quantum mechanics of a one-dimensional mechanical continuum and subsidiary condition of dual resonance model, Prog. Theor. Phys. 46 1560.
- [13] A. M. Polyakov, Phys. Lett. B103 (1981) 207; B103 211.
- [14] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi et J.-B. Zuber, *Comm. Math. Phys.* 59 (1978) 35; D. Bessis, C. Itzykson, and J.-B. Zuber, *Adv. Appl. Math.* 1 (1980) 109.
- [15] E. Brezin et J. Zinn-Justin, Phys. Lett. B 288 (1992) 54-58.
- [16] F. David, Nucl. Phys. B487 [FS] (1997) 633-649.
- [17] S. Higuchi, C. Itoi, S. Nishigaki et N. Sakai, Phys. Lett. B 318 (1993) 63, Nucl. Phys. B434 (1995) 283-318, et Phys. Lett. B398 (97) 123.
- [18] J. Alfaro, and P. Damgaard, Phys. Lett. B 289 (1992) 342, C. Ayala, Phys. Lett. B 311, (1993) 55, Y. Itoh, Mod. Phys. Lett. A8 (1993) 3273.
- [19] F. J. Wegner, The Critical State, General Aspects, *in* Phase Transitions and Critical Phenomena Vol. 6, ed. C. Domb and M. S. Green, (Academic Press, London, 1976).
- [20] S. Higuchi, C. Itoi and N. Sakai, Phys. Lett. B312 (1993) 88-96.
- [21] S. Hikami, Prog. Theor. Phys. 92 (1994) 479-500.
- [22] V. G. Knizhik, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. A3 (1988) 819, F. David, Mod. Phys. Lett A3 (1988) 1651, J. Distler, H. Kawai, Nucl. Phys. B321 (1989) 509.
- [23] T. Guhr, A. Müller-Groeling, H.A. Weidenmüller, Phys. Rept. 299 (1998) 189-425, P.A. Mello, *Theory of random matrices*, Les Houches Session LXI, E. Akkermans, G. Montambaux, J.L. Pichard, J. Zinn-Justin eds. (North-Holland, 1994).
- [24] M.L. Mehta, *Random matrices, second edition*, ed. by Academic Press inc (1991).
- [25] H.S. Leff, J. Math. Phys. 5 (1964) 763
- [26] H.S. Camarda, *Phys.Rev.A*45 (1992) 579. G. Hacken, R. Werbin, J. Rainwater, *Phys.Rev.C*17 (1978)43; W.M. Wilson, E.G. Bilpuch,

- G.E. Mitchell, *Nucl.Phys.*A245(1975); R.U. Haq, A. Pandey, O. Bohigas, *Phys.Rev.Lett.*48(1982) 1086. S. Camarda, P.D. Georgopoulos, *Phys.Rev.Lett.*50(1983) 492.
- [27] F. Y. Wu, *Rev. Mod. Phys.* 54 (1982) 235.
- [28] C.W.J. Beenakker, *Nucl. Phys.* B422 [FS] (1994) 515, P.J. Forrester, *Nucl. Phys.* B435 [FS] (1995) 421, and for numerical evidences T.S. Kobayakawa, Y. Hatsugai, M. Kohmoto, A. Zee, ISSP Tokyo preprint (1994).
- [29] E. Brézin and A. Zee, *Nucl. Phys.* B402 (1993), E. Brézin, A. Zee, *Nucl. Phys.* B453 (1995) 531, E. Brezin, A. Zee, *Phys. Rev.* E45 (1994) 2588.
- [30] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz and Y. Makeenko, *Phys.Lett.* B251 (1990) 517.
- [31] J. Ambjørn and G. Akemann, *J. Phys* A29 (1996) L555.
- [32] E. Kanzieper, V. Freilikher, *Phys. Rev. E* 57,(1998) 6604 (cond-mat/9709309); *Spectra of large random matrices : A method of study*, in *Diffuse Waves in Complex Media*, NATO ASI Series (Kluwer, Dordrecht, 1999), Vol. 531, 165 - 211, cond-mat/9809365.
- [33] Nivedita Deo, *Nucl. Phys. B*, Volume 504, 1997, pp. 609-620, cond-mat/9703136.
- [34] E. Brézin, N. Deo, *Phys. Rev. E* 59 (1999) 3901-3910, cond-mat/98050096.
- [35] P. Deift et al., *Communications on Pure and Applied Mathematics* 52 (1999) 1491-1552; *Ibid* 52 (1999) 1335-1425.
- [36] J. Jurkiewicz, *Phys. Lett.* 245B (1990) 178.
- [37] F. David, *Nucl. Phys.* B348, (1991) 507.
- [38] G. Akemann, *Nucl.Phys.* B482 (1996) 403-430, hep-th/9606004, and hep-th/9503185.
- [39] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials* American Mathematical Society, Providence, 1967.
- [40] See chap. 19 of [24] , and F.J. Dyson, *Comm. Math. Phys.* 19 (1970) 235. More recently, D.F. Fox, P.B. Kahn, *Phys. Rev.* 134B (1964) 1151, H.S. Leff, *J. Math. Phys.* 5 (1964) 763, B.V. Bronk, *J. Math. Phys.* 6 (1965) 228, P. Zinn-Justin, *Nucl. Phys.* B497 (1997) 725, cond-mat/9703033.
- [41] F.J. Dyson, *Comm. Math. Phys.* 19 (1970) 235-250.
- [42] Eynard B, *Nucl. Phys.* B506 633-664 (1997), cond-mat/9707005.

- [43] Special Functions, Wang Z.X., Guo D.R., World Scientific, 1989.
- [44] Higher Transcendental Functions, Bateman Manuscript Project, Vol. II, Ed. A. Erdélyi, McGraw-Hill 1953 (New-York).
- [45] Handbook of Mathematical Functions, Eds. M. Abramowitz and E. A. Stegun, NBS Applied Mathematics Series Vol. 55 (1955).
- [46] S. R. Das, A. Dhar, A. M. Sengupta, S. R. Wadia, Mod. Phys. Lett. A
- [47] F. David, Phys. Lett. B302, 403-410 (1993), hep-th/9212106.
- [48] C. Itzykson, J.B. Zuber, *J. Math. Phys.* 21 (1980) 411. Harish-Chandra, Amer. J. Math. 80 (1958) 241.
- [49] Theta Functions on Riemann Surfaces, Fay. J.D., Springer Verlag, 1973.
- [50] Richard C. Brower, Nivedita Deo, Sanjay Jain and Chung-I Tan, Nucl. Phys. B, Volume 405, Issue 1, 1993, pp. 166-187.
- [51] Theory of random matrices *in* mesoscopic quantum physics, P. Mello, Les Houches 1994, E. akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard, J. Zinn-Justin *Ed* (North-Holland, 1995), I. Kostov Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 10A (1989) 295-322
- [52] R. B. Potts, Proc. Cambridge Philos. Soc. 48 (1952) 106
- [53] V.A. Kazakov, Modern Phys. Lett. 4A (1989) 1691, V.A. Kazakov Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 4 (1998) 93
- [54] J.M. Daul hep-th/9502014
- [55] P. Zinn-Justin, cond-mat/9903385
- [56] Harish Chandra, Amer. J. Math. 79 (1957), 87
- [57] S. Higuchi, C. Itoi, S. Nishigaki, N. Sakai, Phys. Lett. B318 (1993) 63, Nucl. Phys. B434 (1995) 283-318, Phys. Lett. B398 (97) 123, F. David, Nucl. Phys. B487 [FS] (1997) 633-649, E. Brezin, J. Zinn-Justin, Phys. Lett. B288 (1992) 54-58
- [58] B. Eynard, C. Kristjansen, Nucl. Phys. B466 (1996) 463-487, Nucl. Phys. B455 (1995) 577, B. Eynard, J. Zinn-Justin, Nucl. Phys. B386 (1992) 558-591
- [59] Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, M. Abramovitz, I.A. Stegun, US Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series . 55 (1972)
- [60] Yu. M. Makeenko, A. Migdal, Phys. Lett. B88 (1979) 135, A. Migdal, Ann. Phys. 109 (1977) 365, Veneziano, Nucl. Phys. B117 (1976) 519, 't Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461

- [61] I. Kostov, Nucl. Phys. B376 (1992) 539
- [62] For general reviews and more references see for instance :
The large N Expansion in Quantum Field Theory and Statistical Physics, from Spin Systems to 2-Dimensional Gravity, E. Brézin and S. R. Wadia Eds. (World Scientific, Singapore, 1993).
- [63] M. Staudacher, Phys. Lett. B305 (1993) 332-338
- [64] J. Alfaro Phys. Rev. D47 (1993) 4714
- [65] B. Eynard, cond-mat/9801075
- [66] M. Wexler, Nucl. Phys. B410 (93) 377, J. Ambjorn, G. Thorleifsson, M. Wexler, Nucl. Phys. B439 (1995) 187-204.