



**HAL**  
open science

# Noyau et métrique de Bergman dans des formules de représentations pour les convexes de type fini et applications

Mathieu Fructus

► **To cite this version:**

Mathieu Fructus. Noyau et métrique de Bergman dans des formules de représentations pour les convexes de type fini et applications. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2003. Français. NNT: . tel-00004225

**HAL Id: tel-00004225**

**<https://theses.hal.science/tel-00004225>**

Submitted on 20 Jan 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

présentée en vue de l'obtention du  
Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse

Spécialité : Mathématiques Pures

par

**Mathieu FRUCTUS**

NOYAU ET MÉTRIQUE DE BERGMAN DANS DES  
FORMULES DE REPRÉSENTATION POUR LES CONVEXES  
DE TYPE FINI ET APPLICATIONS

Soutenue le 18 Décembre 2003

devant le jury composé de :

<b>P. Bonneau</b>	Docteur d'Etat,	Université de Toulouse III	Examineur
<b>J. Bruna</b>	Professeur,	Université Autonome de Barcelone	Rapporteur
<b>P. Charpentier</b>	Professeur,	Université de Bordeaux I	Rapporteur
<b>A. Cumenge</b>	Professeur,	Université de Toulouse III	Directrice
<b>J. Michel</b>	Professeur,	Université du Littoral	Président
<b>P. Thomas</b>	Professeur,	Université de Toulouse III	Examineur

Laboratoire Emile Picard, UMR 5580, UFR MIG, Université Paul Sabatier  
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France.



*Cette thèse est dédiée à ma compagne et à notre enfant.*



## Remerciements

Je tiens à remercier vivement Anne Cumenge pour m'avoir soutenu tout au long de ce travail, pour le temps qu'elle m'a accordé et pour ce qu'elle m'a appris sur ce sujet. Sa disponibilité et surtout sa très grande patience devant mes errements mathématiques et moraux m'ont été très précieux.

Ce travail doit beaucoup à un séjour à l'UAB où j'ai bénéficié d'excellentes conditions de travail. C'est un grand plaisir de remercier Joaquim Bruna d'avoir bien voulu rapporter sur cette thèse.

Je suis très honoré que Philippe Charpentier ait accepté d'écrire un rapport sur ce travail et de participer au jury.

J'exprime ma plus vive reconnaissance à Joachim Michel pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour avoir accepté d'être président du jury.

Je remercie chaleureusement Pascal Thomas et Pierre Bonneau de m'honorer de leur présence dans le jury. Je remercie aussi Pascal Thomas d'être si actif pour favoriser la mobilité des jeunes, en particulier vers Barcelone.

De nombreux thésards ont participé sous diverses formes à ma formation mathématiques, et donc d'une certaine manière à l'élaboration de ce travail. Je dois remercier les compagnons d'analyse complexe Nico Marco, Nico N'Guyen et Tof Dupont pour leurs explications et encouragements. Arnaud Hilion et Manu Opshtein ont aussi grandement contribué à ma culture mathématiques en organisant les GDTE. Guy Casale, Julien Keller, Guillaume Rond se sont beaucoup impliqués pour dynamiser les thésards du labo, je les en remercie. Je dois à Mathias Séguy l'apprentissage du pragmatisme : merci beaucoup, c'est utile. J'ai une pensée particulière pour les "Noeuds-noeuds du Goulag" pour l'extraordinaire effervescence qu'ils savaient créer. Je souhaite aussi remercier les thésards barcelonnais pour leur chaleureux accueil qui restera gravé dans ma mémoire.

Je dois remercier les amis proches de leur soutien constant et de m'avoir offert des pauses salutaires : merci à David, Flo, Fabrice, Sandra, Marc, Karyne, Willy, ...

Je remercie enfin ma famille, celle dont je viens et celle qui se crée pour leurs encouragements constants et sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. A Stouf, avec tout mon amour...



# Introduction

Dans un domaine d'holomorphie  $D$ , les groupes de cohomologie  $\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(D)$  s'annulent pour  $p = 0, \dots, n$  et  $q = 1, \dots, n$ . Les formules de représentations intégrales ont permis, dès les années 70, de résoudre dans les domaines strictement pseudoconvexes à bord suffisamment régulier l'équation :

$$\bar{\partial}u = f. \tag{0.0.1}$$

Elles ont permis d'obtenir des estimées pour  $u$  dans des espaces variés : espaces de Lebesgue  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , espaces de Hölder. Nous rappelons quelques résultats que notre travail généralise. Dans le cas des domaines strictement pseudoconvexes, S. G. Krantz [18] a obtenu une estimation höldérienne  $\Lambda^{\frac{1}{2}}$  de la solution de Henkin pour  $f$  une  $(0, 1)$ -forme à coefficients bornés (estimation optimale dans l'échelle des espaces de Lipschitz  $\Lambda^\alpha$ ). Il raffine ainsi le résultat antérieur de G. M. Henkin et A. Romanov [16] qui donnait, sous les mêmes hypothèses, une solution dans l'espace  $\Lambda^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ). Plus récemment, A. Cumenge [4] d'une part et K. Diederich, B. Fischer et J. Fornæss [10] d'autre part ont généralisé ce résultat dans le cas des convexes de type fini  $m$ , autrement dit des domaines convexes à bord  $\mathcal{C}^\infty$  dont l'ordre de contact en tout point du bord et avec toute droite complexe est majoré par  $m$  (nous définirons plus précisément le type et les propriétés associées dans le premier chapitre). Ils obtiennent un opérateur  $T$  qui résout l'équation de Cauchy-Riemann et qui est continu de  $L_{(0,q)}^\infty$  dans  $\Lambda^{\frac{1}{m}}$ .

En fait, A. Cumenge [4] et B. Fischer [11] ont également obtenu des estimations pour  $u$  quand la donnée appartient à l'espace  $L_{(0,q)}^p$ . De plus, même si notre travail ne porte pas sur ce type de problème, nous souhaitons signaler que les estimations  $C^k$  dans les domaines strictement pseudoconvexes obtenues par I. Lieb et M. Range [21] viennent d'être généralisées par W. Alexandre [1] dans les domaines convexes de type fini.

S. G. Krantz a aussi montré que la solution de (0.0.1) pour une donnée  $f$   $\bar{\partial}$ -fermée de bidegré  $(0, 1)$  à coefficients bornés dans les domaines strictement pseudoconvexes, appartient à l'espace anisotrope  $\Lambda^{\frac{1}{2}, \tilde{1}}$  (i.e. presque dans  $\Lambda^{\frac{1}{2}, 1}$ ). Ce résultat a ensuite été amélioré par P. Greiner et E. M. Stein [13] qui ont obtenu sous les mêmes hypothèses une solution dans  $\Lambda^{\frac{1}{2}, 1}$ . Ces résultats indiquent qu'une meilleure régularité de la solution est attendue dans les directions tangentes complexes.

Notre travail consiste alors à obtenir les estimations lipschitziennes optimales des

solutions de (0.0.1) dans les domaines bornés convexes de type fini à bord lisse. Pour cela, nous utilisons des formules de représentations intégrales qui tiennent compte de la géométrie de ces domaines. En effet, les travaux de Berndtsson et Andersson [2] donnent une construction de noyaux à poids très généraux pour résoudre (0.0.1). Reprenant une idée d'A. Cumenge [5], nous introduisons la métrique de Bergman dans ces noyaux afin de refléter aussi fidèlement que possible leur géométrie. Elle est bien définie car, dans les domaines bornés, la métrique de Bergman est donnée par une matrice définie positive. Rappelons que, à moins d'avoir un domaine très symétrique, le noyau de Bergman ne peut presque jamais être calculé explicitement. Nous avons pourtant besoin de connaître son comportement ainsi que celui de la métrique pour valider les formules d'homotopie. Pour cela, nous nous servons très largement des résultats de J. McNeal [23] [24] qui a obtenu des estimations fines dans les convexes de type fini pour le noyau et pour la métrique de Bergman.

Dans la première partie de notre travail, nous reprenons la formule de représentation intégrale construite par A. Cumenge avec des noyaux de type Berndtsson-Andersson où le poids dépend du noyau de Bergman. Elle est "semi-géométrique" dans le sens où le noyau est construit en partie à l'aide du noyau de Bochner-Martinelli qui, bien qu'universel, ne nous permettra pas a priori d'exploiter toute la géométrie du domaine pour les résultats les plus fins. Dans tous les résultats précités sur les estimations de la solution de (0.0.1), la donnée  $f$  est dans l'espace  $L^\infty$ . C'est ainsi la solution qui porte l'anisotropie induite par la géométrie des strictement pseudoconvexes ou des convexes de type fini. Il nous a semblé intéressant de donner aussi une approche où la donnée appartient à un espace anisotrope. Pour cela, nous utilisons la norme

$$\|f\|_\kappa := \sup_{z \in \Omega} \|f(z)\|_\kappa$$

où  $\|f(z)\|_\kappa$  est une norme ponctuelle définie à partir d'une norme de type Kobayashi pour les vecteurs introduite dans [3]. La solution appartient alors à l'espace de Zygmund isotrope

$$\Lambda^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \text{ t. q. } \exists C, |u(z+h) + u(z-h) - 2u(z)| \leq C|h|, z, z \pm h \in \Omega\}.$$

Pour montrer les techniques usuelles de résolution, et les difficultés d'approche pour les estimations de la partie euclidienne du noyau résolvant, nous donnons aussi un résultat où la donnée appartient à l'espace des  $(0, 1)$ -formes  $L^\infty$ . Ce résultat n'est pas optimal et nous l'améliorons dans la troisième partie.

La seconde partie donne la construction d'un noyau entièrement géométrique. Il ne fait plus intervenir que le noyau et la métrique de Bergman et nous pouvons espérer être donc à même de l'exploiter pour obtenir les résultats les plus fins. Cette construction est de type Berndtsson-Andersson [2] en choisissant une section du fibré de Cauchy-Leray basée sur la métrique de Bergman et un poids en termes du noyau de Bergman. Ce noyau permet d'obtenir une formule de représentation valable pour les  $(p, q)$ -formes en général et nous l'énoncerons sous cette forme. Le choix du poids, dans le même état d'esprit que dans [5], permet l'annulation du terme d'intégration

sur le bord qui apparaît dans les formules d’homotopie. Enfin, nous voulons souligner l’intérêt pour notre travail de choisir des formules de représentations : elles sont universelles et permettent d’espérer, si apparaissent des résultats nouveaux sur la métrique de Bergman dans des domaines faiblement pseudoconvexes plus généraux, une extension de nos méthodes à ces domaines.

Dans la troisième partie, nous donnons un premier résultat qui utilise ce noyau en améliorant le second résultat du premier chapitre. Nous obtenons un résultat optimal : pour une donnée dans  $L^\infty(\Omega)$ , nous montrons que la solution de (0.0.1) est dans l’espace de fonctions anisotropes  $\Gamma_{\frac{1}{\rho}}^{\frac{1}{m}}$  introduit par McNeal et Stein [25]. C’est un espace de type Lipschitz  $\frac{1}{m}$  pour une métrique faisant intervenir la pseudométrie de McNeal, donc adapté à la géométrie. Dans [25], seule une définition localisée sous forme d’une décomposition discrète des fonctions est donnée. Nous avons alors introduit une définition directe, dans l’état d’esprit de celle de Zygmund.

Bien que plus fin, le noyau plus géométrique que nous avons introduit ne simplifie pas l’étude du terme qui porte la singularité maximale, car il n’est plus possible d’utiliser des techniques du type Hardy-Littlewood. L’étude directe de ce terme se révèle bien plus technique que celle d’un noyau de Bochner-Martinelli standard. Les autres termes du noyau, eux, à la fois très géométriques et moins singuliers, sont très simples à estimer et donnent l’estimation optimale souhaitée.

Enfin, nous terminons par une seconde application : nous retrouvons le théorème de Greiner et Stein [13] : pour une  $(0, 1)$ -forme  $\bar{\partial}$  fermée à coefficients bornés, il existe une solution  $u$  de l’équation (0.0.1) qui appartient à l’espace  $\Lambda^{\frac{1}{2}, 1}$  dans les domaines strictement pseudoconvexes. Il est assez naturel de pouvoir y arriver puisque notre objectif est de dominer, à travers notre solution de (0.0.1), les aspects géométriques des domaines. Nous pouvons ainsi illustrer que, même dans ce cadre, notre noyau permet d’obtenir les résultats optimaux et sans utiliser toute la technicité liée aux groupes de Heisenberg.

## Enoncé des résultats et esquisse des démonstrations

**Théorème 1.** *Soit  $\Omega$  un domaine convexe borné, à bord lisse et de type fini  $m$ , et  $f$  une  $(0, 1)$ -forme  $\bar{\partial}$  fermée telle que  $\|f\|_\kappa < +\infty$ . Alors il existe  $u \in \Lambda^1(\Omega)$  telle que  $\bar{\partial}u = f$ .*

Nous considérons un noyau de type Berndtsson-Andersson, avec une section de Bochner-Martinelli mais un poids “géométrique” comme dans [5] pour obtenir notre solution de l’équation (0.0.1). Cette solution se décompose en une somme de  $n$  termes et l’on peut se restreindre à l’étude de trois de ces termes seulement. Le premier fait l’objet d’une étude directe ; il s’agit en fait de montrer que  $\int_\Omega [\text{BM}](\zeta, z)$  appartient à  $\Lambda^1$ , où [BM] est le noyau de Bochner-Martinelli. Pour les deux autres termes, nous utilisons un lemme standard de Hardy-Littlewood [19]. C’est-à-dire que nous dérivons ces termes pour vérifier le comportement de leur dérivée seconde en fonction de la distance au bord  $d(z)$ . Si la dérivée seconde d’une application explose moins vite

que  $(\frac{1}{d(z)})^2$  dans un voisinage du bord, nous savons que cette application appartient à l'espace de Lipschitz  $\Lambda^1$ . Pour cela, nous devons nous placer sur des couronnes géométriques  $P(z, 2^\ell d(z)) \setminus \text{cste}P(z, 2^{\ell-1}d(z))$ . Il est ainsi nécessaire de connaître le comportement des différents termes du noyau après dérivation. Les estimations de McNeal [23] sont cruciales à cette étape.

**Théorème 2.** *Soit  $\Omega$  un domaine convexe borné, à bord lisse et de type fini  $m$ , et  $f$  une  $(0,1)$ -forme  $\bar{\partial}$ -fermée telle que  $\|f\|_{L^\infty} < +\infty$ . Alors, pour tout  $0 < \alpha < \frac{1}{m}$ , il existe  $u \in \Gamma_\rho^\alpha(\Omega)$  telle que  $\bar{\partial}u = f$ .*

Nous démontrons ce théorème avec le même type de techniques. Comme nous n'obtenons pas le résultat optimal, nous n'avons besoin que d'un critère de type Hardy-Littlewood d'ordre 1, c'est-à-dire ne faisant intervenir que des dérivées premières. Il faut adapter ce lemme de Hardy-Littlewood à une situation anisotrope. En effet, comparer le comportement de la dérivée près du bord à celui de  $\frac{1}{d(z)}$  ne permet pas d'appréhender la géométrie. Nous introduisons pour cela un critère de comparaison entre des dérivées directionnelles et les  $v$ -rayons  $\sigma(z, v, d(z))$  introduits par McNeal. Ces  $v$ -rayons sont une sorte de métrique de Kobayashi directionnelle au point  $z$ , elles sont donc un bon reflet des phénomènes géométriques. Nous tenons à signaler qu'un résultat du même type a été obtenu par B. Fischer [12] à l'aide de la fonction support de Diederich-Fornaess, mais qu'il n'est pas optimal non plus.

**Remarque 1.** *Nous pouvons raffiner l'estimation du théorème 2 et prouver que, pour toute  $(0,1)$ -forme  $f$   $\bar{\partial}$ -fermée dans  $\Omega$ , il existe une solution  $u$  de l'équation  $\bar{\partial}u = f$  telle que :*

$$\forall \zeta, z \in \Omega, |u(\zeta) - u(z)| \lesssim \|f\|_\infty \rho(\zeta, z)^{\frac{1}{m}} (\ln \rho(\zeta, z))^2 \quad (0.0.2)$$

*Cela n'est cependant pas satisfaisant puisqu'il n'y a pas d'interprétation géométrique de ce logarithme, c'est pourquoi nous préférons énoncer le théorème sous sa première forme.*

Nous montrons en fait dans la preuve de ces deux théorèmes l'existence d'un opérateur intégral  $T$  tel que :  $\bar{\partial}Tf = f$  pour  $f$  une  $(0,1)$ -forme  $\bar{\partial}$ -fermée à coefficients bornés dans  $\Omega$ ,  $T$  est continu de  $L_{(0,1), \|\cdot\|_{\text{eucl}}}^\infty(\Omega)$  dans  $\Gamma_\rho^\alpha(\Omega)$ ,  $0 < \alpha < \frac{1}{m}$  et de  $L_{(0,1), \|\cdot\|_\kappa}^\infty(\Omega)$  dans  $\Lambda^1(\Omega)$ .

**Remarque 2.** *Le projecteur de Bergman de  $\Omega$  étant continu de l'espace  $\Lambda^1(\Omega)$  dans lui-même et également de tout espace  $\Gamma_\rho^\alpha(\Omega)$  dans lui-même d'après [25], la solution canonique  $v$  de Kohn de l'équation  $\bar{\partial}u = f$  dans  $\Omega$  satisfait les mêmes estimations que celles données ici pour  $u = Tf$ .*

Dans les estimations de la partie euclidienne du noyau de l'opérateur  $T$ , l'apparition des  $v$ -rayons n'est pas naturelle lors des dérivations. Cela semble expliquer que nous n'arrivons pas à obtenir les estimations optimales via cet opérateur. On

se rend alors compte de l'intérêt d'introduire la métrique de Bergman. En effet, les termes qui sont construits à partir de cette métrique sont très faciles à estimer dans ce contexte. Notre approche va consister à chercher un autre noyau et c'est ce que nous faisons dans le chapitre 2, où l'on construit  $K(\zeta, z)$  tel que :

**Théorème 3.** *Pour toute  $(p, q)$ -forme  $f$  sur  $\Omega$ , on a :*

$$f(z) = (-1)^{p+q+1} \left( \int_{\zeta \in \Omega} \bar{\partial}_{\zeta} f(\zeta) \wedge K_{p,q}(\zeta, z) + \bar{\partial}_z \int_{\zeta \in \Omega} f(\zeta) \wedge K_{p,q-1}(\zeta, z) \right) \quad (0.0.3)$$

pour  $q > 0$  et

$$f(z) = (-1)^{p+1} \left( \int_{\zeta \in \Omega} \bar{\partial}_{\zeta} f(\zeta) \wedge K_{p,0}(\zeta, z) + \int_{\zeta \in \Omega} f(\zeta) \wedge P_{p,0}(\zeta, z) \right) \quad (0.0.4)$$

pour  $q = 0$ .  $K_{p,q}$  est le terme de  $K$  de bidegré  $(p, q)$  en  $z$  et  $(n - p, n - q - 1)$  en  $\zeta$ . Il en est de même pour  $P = dK$ .

De manière très naturelle, en utilisant une formule de Stokes, on peut démontrer des formules de représentation intégrale. Pour éliminer le terme au bord, on utilise un poids qui tend vers 0 quand on se rapproche du bord. Nous ne pouvons pas appliquer directement le résultat de Berndtsson-Andersson. Nous démontrons le résultat en suivant leur démonstration. Nous avons donc besoin d'utiliser les hypothèses sur le domaine afin de pouvoir estimer le comportement du noyau près du bord. Cela nous permet, même si  $s$  ne vérifie pas les conditions satisfaites par les sections du fibré de Cauchy-Leray utilisées d'ordinaire dans les noyaux de type Berndtsson-Andersson, de faire converger les intégrales intervenant dans le noyau. Nous pouvons alors appliquer ce résultat afin d'obtenir :

**Théorème 4.** *Soit  $\Omega$  un domaine convexe borné, à bord lisse et de type fini  $m$ , et  $f$  une  $(0,1)$ -forme  $\bar{\partial}$ -fermée telle que  $\|f\|_{L^\infty} < +\infty$ . Alors, il existe  $u \in \Gamma_{\rho}^{\frac{1}{m}}(\Omega)$  telle que  $\bar{\partial}u = f$ .*

Il s'agit ici d'utiliser un critère de type Hardy-Littlewood d'ordre 2. Cela signifie que, comme pour le théorème 1, nous devons dériver deux fois pour obtenir le résultat optimal. De plus, comme dans le théorème 2, nous devons l'adapter à des situations anisotropes en faisant intervenir des  $v$ -rayons et des dérivations directionnelles. Seul le terme du noyau contenant la singularité maximale pose problème puisqu'on ne peut pas le dériver en gardant un noyau intégrable. Nous devons donc trouver un critère direct pour ce terme et pour cela nous définissons  $\Gamma_{\rho}^{\frac{1}{m}}$ . Il existait déjà une définition de cet espace dans l'article de McNeal et Stein [25], mais elle n'était pas appropriée. En effet, elle était basée sur une décomposition de type

$$f \in \Gamma_{\rho}^{\frac{1}{m}} \iff f = b_k + g_k$$

où  $b_k$  et  $g_k$  doivent vérifier de bonnes propriétés. Or, ce type de définition ne permet guère de faire des vérifications directes. Nous montrons l'équivalence des deux définitions et nous avons besoin pour cela de fabriquer une approximation de l'unité dont le support est adapté à la géométrie des domaines convexes de type fini. La majeure partie du travail restant est de montrer que  $u^0$  vérifie cette définition. En effet, le reste du noyau est complètement géométrique et son comportement est bien adapté pour les dérivations. Tout se démontre alors très naturellement pour ces termes là, ce qui était le but.

Enfin, dans le cas des domaines strictement pseudoconvexes, cela nous permet de retrouver le résultat de Greiner et Stein :

**Théorème 5.** *Soit  $\Omega$  un domaine strictement pseudoconvexe borné à bord lisse et  $f$  une  $(0,1)$ -forme  $\bar{\partial}$ -fermée telle que  $\|f\|_{L^\infty} < +\infty$ . Alors, il existe  $u \in \Lambda^{\frac{1}{2},1}$  telle que  $\bar{\partial}u = f$ .*

Le schéma de la démonstration est le même que précédemment, il faut cependant adapter encore une fois un lemme de Hardy-Littlewood à la décomposition de l'espace tangent  $T_z(\Omega)$ , puis estimer le premier terme séparément.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>i</b>
Énoncé des résultats et esquisse des démonstrations . . . . .	iii
<b>Notations et Rappels</b>	<b>3</b>
0.1 Notations . . . . .	3
0.2 Géométrie des convexes de type fini . . . . .	3
0.2.1 Définitions . . . . .	3
0.2.2 Géométrie des convexes de type fini . . . . .	5
0.2.3 Propriétés des $\varepsilon$ -bases extrémales . . . . .	6
0.3 Métrique de Bergman . . . . .	9
0.3.1 Rappels . . . . .	9
0.3.2 Spécificité dans les convexes de type fini . . . . .	9
0.4 Noyaux à poids de type Berndtsson-Andersson . . . . .	10
<b>1 Estimations Höldériennes pour l'équation de Cauchy-Riemann</b>	<b>13</b>
1.1 Préliminaires : noyaux résolvants et estimations élémentaires . . . . .	13
1.1.1 Noyau résolvant . . . . .	13
1.1.2 Étude des termes élémentaires . . . . .	14
1.2 Résultat optimal en norme Kappa . . . . .	17
1.2.1 Notations-définitions . . . . .	17
1.2.2 Étude du terme $u^0$ . . . . .	17
1.2.3 Étude du terme $u^1$ . . . . .	20
1.2.4 Étude du terme $u^{n-1}$ . . . . .	21
1.3 Preuve du Théorème 2 . . . . .	24
1.3.1 Une condition suffisante . . . . .	24
1.3.2 Estimation de $u$ . . . . .	26
<b>2 Formule de représentation intégrale en métrique de Bergman</b>	<b>31</b>
2.1 Formule de type Koppelman-Berndtsson-Andersson . . . . .	31
2.2 Changement de coordonnées . . . . .	37
<b>3 Application 1 : Estimée anisotrope optimale</b>	<b>39</b>
3.1 Une définition équivalente de $\Gamma_{\rho}^{\frac{1}{m}}$ . . . . .	39

---

3.2	Estimations . . . . .	45
3.2.1	Rappel des estimations des termes élémentaires . . . . .	45
3.2.2	Estimations de $u^1$ et $u^{n-1}$ . . . . .	46
3.2.3	$u^0$ sur $P(z, d(z))$ , cas $\rho(z, z+h) =  h $ : . . . . .	50
3.2.4	$u^0$ sur $P(z, d(z))$ , cas $\rho(z, z+h) = \varepsilon(z, z+h)$ : . . . . .	54
3.2.5	Estimation de $u^0$ “en dehors de $P(z, d(z))$ ” . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Application 2 : autre preuve d’un résultat de Greiner et Stein</b>	<b>57</b>
4.1	Petit rappel du contexte . . . . .	57
4.2	Un autre lemme de type Hardy-Littlewood : . . . . .	58
4.3	Etude de $u^1(z)$ et $u^{n-1}(z)$ : . . . . .	60
4.4	Etude de $u^0(z)$ : . . . . .	60
4.4.1	Etude à l’intérieur de $P(z, d(z))$ , cas $ h ^2 \leq d(z)$ : . . . . .	60
4.4.2	Etude à l’intérieur de $P(z, d(z))$ , cas $d(z) \leq  h ^2$ : . . . . .	63
4.4.3	Etude à l’extérieur de $P(z, d(z))$ : . . . . .	63



# Notations et Rappels

## 0.1 Notations

- Pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , nous posons :

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

et

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

• Soient  $\varepsilon > 0$  et  $z$  un point de  $\mathbb{C}^n$ . Nous notons  $B(z, \varepsilon) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n, |\zeta - z| < \varepsilon\}$ . La sphère unité est notée  $S^n$ .

• Soient  $i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_{k'}$  des entiers de  $\{1, \dots, n\}$ . Les formes différentielles  $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k}$  et  $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{k'}}$  de  $\mathbb{C}^n$  sont respectivement notées  $dz_I$  et  $d\bar{z}_J$  où  $I = (i_1, \dots, i_k)$  et  $J = (j_1, \dots, j_{k'})$ .

- Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ . Son bord est noté  $\partial\Omega$ .

• Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ ,  $p, q \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k$  un entier  $\geq 0$ . Nous notons  $\mathcal{C}_{p,q}^k(\mathcal{U})$  l'ensemble des  $(p, q)$ -formes  $f = \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$  où les  $I$  et  $J$  sont supposés ordonnés, telles que tous les  $f_{IJ}$  soient de régularité  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$ . Pour  $z \in \mathcal{U}$ , nous posons :

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \Omega} \left( \sup_{|I|=p, |J|=q} |f_{IJ}(z)| \right)$$

• Nous notons  $T_z\Omega$  l'espace tangent réel à  $\Omega$  au point  $z \in \Omega$ . L'espace tangent complexe est noté  $T_z^{\mathbb{C}}\Omega$ .

• Pour  $k = (k_1, \dots, k_q) \in \mathbb{N}^q$  et  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ , où  $\lambda_j \in S^n$  ( $j = 1, \dots, q$ ), nous notons  $D_\Lambda^k$  l'opérateur différentiel  $(D_{\lambda_1})^{k_1} \dots (D_{\lambda_q})^{k_q}$ .

- Pour  $\zeta$  et  $z$  dans  $\Omega$ , on pose  $\langle z, \zeta \rangle = \sum z_i \zeta_i$

## 0.2 Géométrie des convexes de type fini

### 0.2.1 Définitions

Nous supposons dans tout ce travail que le domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{C}^n$  est un domaine borné, à bord lisse et convexe de type fini. Précisons ce que nous entendons par là :

**Définition 6.** Soit  $\Omega \in \mathbb{C}^n$  un domaine. Nous dirons que  $\Omega$  a un bord différentiable de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k > 0$  éventuellement infini, si, pour tout point  $p$  de  $\partial\Omega$ , il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $p$  et une fonction à valeurs réelles  $r \in \mathcal{C}^k$  tels que :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \cap \Omega &= \{x \in \Omega, r(x) < 0\}, \\ \text{grad}(r(x)) &\neq 0 \text{ pour tout } x \in \mathcal{U} \cap \partial\Omega. \end{aligned} \quad (0.2.1)$$

La fonction  $r$  est appelée fonction définissante locale en  $p$ . Si  $\mathcal{U}$  est un voisinage de  $\bar{\Omega}$ , on dit que  $r$  est une fonction définissante. Nous rappelons le résultat suivant :

**Proposition 7.** Soit  $\Omega$  un domaine borné et convexe à bord  $\mathcal{C}^k$ . Alors il existe une fonction  $r$  définissante de classe  $\mathcal{C}^k$ , convexe et définie sur  $\mathbb{C}^n$  tout entier.

Bien qu'ayant donné les définitions précédentes dans  $\mathbb{C}^n$ , il s'agit en fait de notions réelles. Le type fini est par contre une notion spécifiquement complexe. Nous nous intéressons ici au type au sens de D'Angelo. Nous reprendrons donc [7].

**Définition 8.** Une courbe holomorphe est une application holomorphe

$$z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n .$$

où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ .

**Définition 9.** Considérons le germe en 0 d'une courbe lisse non triviale :

$$z : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) .$$

Puisque  $z$  est non constant, il existe un plus petit entier naturel  $v = v(z)$  pour lequel une dérivation de  $z$  ne s'annule pas en zéro. On appelle cet entier l'ordre de multiplicité de  $z$  en zéro.

**Définition 10.** Soient  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  un domaine à bord lisse,  $p$  un point de  $\partial\Omega$  et  $r$  une fonction définissante. Pour les germes  $z$  qui ont pour image  $p$ , si

$$\Delta_1(\Omega, p) = \sup_z \frac{v(z^*r)}{v(z)} < \infty,$$

on dit que le 1-type de  $\Omega$  est fini en  $p$ . On dira que  $\Omega$  est de type fini  $m$  si, pour tout point  $p$  de  $\partial\Omega$ ,  $\Delta_1(\Omega, p) \leq m$ .

Cette définition donne l'idée d'ordre de contact de  $\partial\Omega$  avec des variétés complexes de dimension 1. Dans cette logique, il est naturel d'introduire le type linéaire qui donne l'ordre de contact uniquement avec des droites complexes. On considère donc les germes linéaires, c'est-à-dire de la forme  $\{a\zeta + b, \zeta \in \mathbb{C}\}$ . J. McNeal a démontré dans [22] que ces deux définitions sont équivalentes pour les domaines convexes de type fini. Pour cela, il a introduit plusieurs outils géométriques que nous détaillons dans la section suivante.

### 0.2.2 Géométrie des convexes de type fini

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{C}^n$  convexe, de type fini  $m$  et  $r$  une fonction définissante globale de  $\Omega$ , de régularité  $\mathcal{C}^\infty$ , définie et convexe sur  $\mathbb{C}^n$  et de gradient non nul dans un voisinage borné  $\mathcal{U}$  de  $\partial\Omega$ . Plus précisément, nous prenons une fonction définissante  $r$  construite à l'aide de la jauge de  $\Omega$ , c'est-à-dire  $j(z) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \{z \in \lambda\Omega\}$ , en supposant bien sûr que 0 appartient à  $\Omega$ . Nous posons alors  $r(z) = j(z) - 1$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , nous notons  $\Omega_\lambda := \{\zeta \in \mathbb{C}^n, r(\zeta) < \lambda\}$  et  $\nu$  la normale extérieure unitaire en  $z \in \mathcal{U}$  à  $\partial\Omega_{r(z)}$ . Enfin, on peut choisir un voisinage  $\mathcal{U}$  et un  $\varepsilon > 0$  assez petits pour que, pour tout  $z \in \mathcal{U}$ ,  $\Omega_{r(z)+\varepsilon}$  soit toujours de type fini  $m$ . Pour une direction  $v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$ , on pose

$$\sigma(z, v, \varepsilon) = \sup\{c > 0 / r(z + \lambda v) - r(z) \leq \varepsilon, |\lambda| \leq c\}.$$

Nous appelons  $\varepsilon$  le rayon et  $\sigma(z, v, \varepsilon)$  le  $v$ -rayon. Les résultats de J. McNeal sont valables sur un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $\partial\Omega$  assez petit. Nous considérons ce voisinage fixé une fois pour toute. Soit un point  $z$  dans  $\mathcal{U}$ , nous allons construire par récurrence une  $\varepsilon$ -base extrémale de McNeal en  $z$ . Le premier vecteur  $v_1$  est simplement le vecteur unitaire dans la direction du gradient réel de la fonction définissante (en fait, il correspond à la direction normale puisque, pour un voisinage assez petit, on peut supposer que la projection  $\pi$  de  $z$  sur  $\partial\Omega$  est unique). On note alors  $p_1$  le point d'intersection de la droite réelle

$$\lambda \longrightarrow z + \lambda v_1, \lambda \in \mathbb{R}$$

avec la surface de niveau  $\Omega_{z,\varepsilon} = \{\zeta : r(\zeta) = r(z) + \varepsilon\}$ . On choisit alors un point  $p_2$  tel que le disque de centre  $z$  et de rayon  $|p_2 - z|$  soit inclus dans  $\overline{\Omega_{r(z)+\varepsilon}}$ . De plus,  $|p_2 - z|$  doit être maximal sous les conditions

$$r(p_2) = r(z) + \varepsilon \quad \text{et} \quad (p_2 - z) \perp \text{Vect}(v_1)$$

où l'orthogonalité est définie pour le produit hermitien standard de  $\mathbb{C}^n$ . Soit  $v_2$  le vecteur unitaire dans la direction  $p_2 - z$ . Alors  $v_2$  appartient à l'espace tangent complexe de  $\partial\Omega_z$  au point  $z$  et  $\sigma(z, v_2, \varepsilon)$  est maximal parmi tous les  $\sigma(z, w, \varepsilon)$  où  $w$  unitaire appartient au tangent complexe à  $\partial\Omega_z$  au point  $z$ . Ensuite nous choisissons un point  $p_3$  tel que le disque de centre  $z$  et de rayon  $|p_3 - z|$  soit inclus dans  $\overline{\Omega_{r(z)+\varepsilon}}$ . De plus,  $|p_3 - z|$  doit être maximal sous les conditions

$$r(p_3) = r(z) + \varepsilon \quad \text{et} \quad (p_3 - z) \perp \text{Vect}(v_1, v_2).$$

Soit  $w_3$  le vecteur unitaire dans la direction  $p_3 - z$ . On continue ce procédé jusqu'à obtenir une base  $v = (v_1, \dots, v_n)$  et  $n$  points extrémaux  $p_1, \dots, p_n$ . Les  $\varepsilon$ -coordonnées extrémales d'un point  $\zeta$  par rapport à  $z$  sont alors définies en choisissant une paramétrisation des droites complexes passant par  $z$  dans les directions  $v_j$  telle que  $\zeta_j = 0$  correspond au point  $z$  et que le point  $p_j$  correspond à  $(0, \dots, 0, |p_j - z|, 0, \dots, 0)$  sur l'axe réel du  $\zeta_j$ -plan.

**Remarque 3.** *La définition d'une telle base n'est pas unique. Dans le cas de la boule unité, par exemple, il existe une infinité de telles bases. De plus, quand  $\varepsilon$  ou  $z$  varie, elles peuvent changer très brusquement. Un exemple de ce genre de phénomène est donné dans [14].*

Nous noterons  $v_i$  les vecteurs d'une base extrémale sans référence au centre  $z$  ni au rayon  $\varepsilon$  lorsqu'ils seront clairs dans le contexte.

Nous définissons maintenant le polydisque de McNeal centré en  $z$  et de rayon  $\varepsilon$ .

**Définition 11.** *Pour  $z \in \mathcal{U}$  et  $\varepsilon > 0$ . Nous choisissons une  $\varepsilon$ -base extrémale de McNeal en  $z$  puis posons*

$$P(z, \varepsilon) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n, |\zeta_i| < \sigma(z, v_i, \varepsilon), i = 1, \dots, n\}$$

où les coordonnées sont prises dans la base extrémale.

De même que pour les bases extrémales, le comportement des polydisques est assez chaotique. Lorsqu'ils interviennent dans une démonstration, il est donc nécessaire de bien fixer leur centre et leur rayon. Ils possèdent cependant des propriétés utiles illustrées dans la section suivante.

### 0.2.3 Propriétés des $\varepsilon$ -bases extrémales

Nous allons donner un catalogue des différentes estimations que vérifient les polydisques et les bases extrémales. Elles dépendent de constantes universelles (c'est-à-dire ne dépendant ni de  $z$  ni de  $\varepsilon$ ) qu'il est habituel de ne pas écrire. Ainsi, pour  $A$  et  $B$  deux réels, s'il existe une constante  $C$  indépendante des paramètres utilisés dans les expressions de  $A$  et  $B$  telle que  $A \leq CB$ , nous noterons  $A \lesssim B$ . De même,  $A \approx B$  signifiera  $A \lesssim B$  et  $B \lesssim A$ . Les propriétés que nous allons énoncer sont données dans les articles de McNeal [23] [22] ou dans celui de Bruna-Charpentier-Dupain [3]. Enfin, récemment, T. Hefer [14] a montré que plusieurs constructions de pseudodistances de type McNeal-Yu [23] [28] sont équivalentes et ont des liens étroits avec le multitype de Catlin. Une propriété très importante est le contrôle des  $\sigma(z, v, d(z))$  pour tout  $v$  à l'aide d'une base extrémale :

**Proposition 12.** *Pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, pour tout  $z \in \mathcal{U}$  et pour  $v$  vecteur de  $\mathbb{C}^n$  de coordonnées  $(a_1, \dots, a_n)$  dans une  $\varepsilon$ -base extrémale en  $z$  nous avons :*

$$\frac{1}{\sigma(z, v, \varepsilon)} \approx \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|}{\sigma(z, v_i, \varepsilon)}.$$

*Preuve de la proposition 12.* – Il s'agit de la proposition 2.2 de [23]. □

Nous aurons parfois besoin de comparer les  $\sigma$  relatifs à des points distincts :

**Proposition 13.** *Soit  $z_0 \in \mathcal{U}$ . Pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, pour tout  $z \in P_\varepsilon(z_0)$  et pour  $v$  vecteur unitaire de  $\mathbb{C}^n$  nous avons :*

$$\sigma(z, v, \varepsilon) \approx \sigma(z_0, v, \varepsilon). \quad (0.2.2)$$

*Preuve de la proposition 13.* – Il s'agit de la proposition 2.3 de [23].  $\square$

Intuitivement, les  $v$ -rayons donnent la distance au bord dans chaque direction. Quantitativement, on peut en déduire :

**Proposition 14.** *Pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, pour tout  $z \in \mathcal{U}$  et pour  $v$  vecteur unitaire de  $\mathbb{C}^n$  nous avons :*

$$\varepsilon \lesssim \sigma(z, v, \varepsilon) \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{m}}. \quad (0.2.3)$$

*Si de plus  $v$  est un vecteur tangent complexe, c'est-à-dire  $v \in T_z^{\mathbb{C}}\partial\Omega_{r(z)}$ , alors*

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \lesssim \sigma(z, v, \varepsilon) \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{m}}.$$

*Si  $v$  est la normale en  $z$*

$$\sigma(z, v, \varepsilon) \approx \varepsilon.$$

*Preuve de la proposition 14.* – On peut consulter le lemme 2.1 et ses conséquences dans [3]. Pour des résultats plus précis qui relient les  $\sigma(z, v, \varepsilon)$  au multitype, on lira avec bonheur [14].  $\square$

Dans le même état d'esprit, nous rappelons aussi le résultat

**Proposition 15.** *Soit  $R_0$  suffisamment petit. Pour  $0 < r < R < R_0$  et pour tout vecteur  $v$  on a*

$$\left(\frac{r}{R}\right)\sigma(z, v, R) \lesssim \sigma(z, v, r) \lesssim \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{m}}\sigma(z, v, R).$$

*Si  $v \in T_z^{\mathbb{C}}(\{\zeta, r(\zeta) = r(z)\})$  on a*

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma(z, v, R) \lesssim \sigma(z, v, r).$$

Il est naturel de pouvoir relier les polydisques de McNeal et les  $v$ -rayons :

**Proposition 16.** *Pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, pour tout  $z \in \mathcal{U}$  et pour  $(v_i)_i$  une  $\varepsilon$ -base extrémale en  $z$ , nous avons :*

$$\prod_{i=1}^n (\sigma(z, v_i, \varepsilon))^2 \approx \text{Vol } P(z, \varepsilon). \quad (0.2.4)$$

*Preuve de la proposition 16.* – Voir le lemme 2.2 et ses conséquences dans [3].  $\square$

en tenant compte de la proposition 13, il en découle :

**Proposition 17.** *Pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit et pour tous  $z, \zeta \in \mathcal{U}$  nous avons uniformément en les variables  $z, \zeta, \varepsilon$  :*

$$P(z, \varepsilon) \cap P(\zeta, \varepsilon) \neq \emptyset \implies \text{Vol } P(z, \varepsilon) \approx \text{Vol } P(\zeta, \varepsilon).$$

Nous pouvons alors définir plusieurs pseudométriques qui vont refléter la géométrie du domaine

**Définition 18.** *Pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit et pour tous  $z, \zeta \in \mathcal{U}$  nous posons*

$$\mathcal{M}(z, \zeta) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \text{ t.q. } \zeta \in P(z, \varepsilon) \right\}.$$

*Nous aurons aussi besoin de pseudométriques qui fassent intervenir la distance au bord. En notant  $\pi$  une projection régulière sur  $\partial\Omega$ , nous posons :*

$$\varepsilon(z, \zeta) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \text{ t.q. } \zeta, z \in P(\pi(z), \varepsilon) \right\}.$$

Les estimations suivantes sont rappelées par exemple dans [25], [5] :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\zeta, z) &\approx \mathcal{M}(\zeta, z) + d(z) + d(\zeta), \\ &\approx \mathcal{M}(\zeta, z) + d(z), \\ &\approx \mathcal{M}(\zeta, z) + d(\zeta). \end{aligned} \tag{0.2.5}$$

Nous décomposerons souvent le domaine en couronnes afin de faire des estimations sur chacune d'entre elle. Ce sont des couronnes anisotropes définies par

**Définition 19.** *Pour  $z \in \mathcal{U}$  on pose*

$$\mathcal{C}^0 = \left\{ \zeta \in \Omega \cap \mathcal{U} \text{ t.q. } \mathcal{M}(z, \zeta) < d(z) \right\}$$

*et pour  $\ell \in \mathbb{N}^*$*

$$\mathcal{C}^\ell = \left\{ \zeta \in \Omega \cap \mathcal{U} / 2^{\ell-1}d(z) \leq \mathcal{M}(z, \zeta) < 2^\ell d(z) \right\}.$$

Enfin, nous donnons maintenant la définition de la pseudodistance introduite par McNeal et Stein ([25]) avec laquelle nous travaillerons

**Définition 20.** *Pour tous  $z, \zeta \in \overline{\Omega}$  nous posons*

$$\rho(\zeta, z) = \min \left\{ |\zeta - z|; \varepsilon(z, \zeta) \right\}.$$

Cela signifie moralement que  $\rho(\zeta, z)$  mesure la distance anisotrope quand on est près du bord, puis se comporte comme la métrique euclidienne en dehors de ce voisinage.

## 0.3 Métrique de Bergman

### 0.3.1 Rappels

Lorsque l'on considère un domaine  $D$  dans  $\mathbb{C}^n$ , la projection orthogonale de  $L^2(D)$  sur  $A^2(D) = L^2(D) \cap \mathcal{H}(D)$ ,  $\mathcal{H}(D)$  désignant l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $D$ , est appelée projection de Bergman. Pour  $f$  dans  $L^2(D)$ , le projeté de Bergman de  $f$  est donné par :

$$\mathcal{B}f(z) = \int_D \mathcal{B}(\zeta, z) f(\zeta) d\zeta, \quad z \in D,$$

où  $\mathcal{B}(\zeta, z)$  est le noyau de Bergman holomorphe en  $z$ , anti-holomorphe en  $\zeta$  et vérifie  $\mathcal{B}(\zeta, z) = \overline{\mathcal{B}(z, \zeta)}$ .

Pour  $D$  borné, la métrique de Bergman est une métrique hermitienne [17] sur  $D$  définie par la matrice :

$$(g_{i,j}(z))_{i,j} = \left( \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \ln \mathcal{B}(z, z), z \in D \right)_{i,j}$$

Cela signifie que le carré de la longueur d'un vecteur tangent  $w = (w_1, \dots, w_n)$  en un point  $z \in D$  est donné par

$$|w|_{B,z}^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(z) w_i \bar{w}_j.$$

Les définitions classiques de longueur de chemin puis de distance entre deux points s'ensuivent. Nous ne les rappelons pas.

De plus, l'hypothèse de pseudoconvexité et de frontière lisse permettent d'assurer qu'il s'agit d'une métrique complète [26].

### 0.3.2 Spécificité dans les convexes de type fini

Les travaux de McNeal [23] ont permis d'avoir des estimations précises sur la fonction et le noyau de Bergman. Nous les redonnons ici directement. Nous notons naturellement, pour  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ , où  $\lambda_j \in S^n$  ( $j = 1, \dots, q$ ) et pour  $k = (k_1, \dots, k_q) \in \mathbb{N}^q$ ,

$$\sigma(z, \Lambda, \eta)^k = \sigma(z, \lambda_1, \eta)^{k_1} \dots \sigma(z, \lambda_q, \eta)^{k_q}.$$

Tout  $p \in \partial\Omega$  possède un voisinage ouvert  $\mathcal{U}(p)$  tel que, si  $z, \zeta \in \mathcal{U}(p) \cap \Omega$ , on ait pour tous multi-indices  $k$  et  $s$ , tous multi-vecteurs  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  :

$$|\overline{D}_\Lambda^k D_{\Lambda'}^s \mathcal{B}(\zeta, z)| \leq \frac{C(k, s) \sigma(\zeta, \Lambda, \varepsilon(\zeta, z))^{-k} \sigma(\zeta, \Lambda', \varepsilon(\zeta, z))^{-s}}{\text{Vol } P(\zeta, \varepsilon(\zeta, z))}. \quad (0.3.1)$$

Pour la fonction de Bergman, le résultat est très précis :

$$\mathcal{B}(\zeta, \zeta) \approx \frac{1}{\text{Vol } P(\zeta, d(\zeta))}. \quad (0.3.2)$$

On vérifie aisément (cf [5]) l'estimation ci-dessous

$$\frac{|\mathcal{B}(\zeta, z)|}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \lesssim \frac{\text{Vol } P(\zeta, d(\zeta))}{\text{Vol } P(\zeta, \varepsilon(\zeta, z))} \lesssim \frac{d(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)}. \quad (0.3.3)$$

Nous tenons à faire remarquer que, vu les hypothèses sur le domaine, le noyau de Bergman  $\mathcal{B}(\zeta, z)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \Delta_{\partial\Omega}$  où  $\Delta_{\partial\Omega}$  est la diagonale du bord.

Les estimations précédentes permettent aussi d'obtenir des résultats sur les  $g_{i,j}(\zeta)$  pour  $\zeta$  près de  $\partial\Omega$ . Pour  $(v_i)_i$  une  $d(\zeta)$ -base extrémale en  $\zeta$ , on a :

$$|g_{i,j}(\zeta)| \lesssim \frac{1}{(\sigma(\zeta, v_i, d(\zeta)))(\sigma(\zeta, v_j, d(\zeta)))}. \quad (0.3.4)$$

Enfin, nous rappelons un résultat très important :

**Théorème.** (*J. McNeal [24] 2001*) Pour  $\zeta \in \mathcal{U}$ ,  $(v_i)_i$  une  $d(\zeta)$ -base extrémale associée et pour  $w$  dans  $\mathbb{C}^n$ ,  $w = \sum_{i=1}^n w_i v_i$  on a :

$$\left( \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(\zeta) w_i \overline{w_j} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \sum_{i=1}^n \frac{|w_i|}{\sigma(\zeta, v_i, d(\zeta))}. \quad (0.3.5)$$

## 0.4 Noyaux à poids de type Berndtsson-Andersson

Nous allons donner quelques rappels sur la construction des noyaux à poids de type Berndtsson-Andersson. En effet, nous allons utiliser directement leurs résultats dans le premier chapitre, et la construction de notre noyau dans le second chapitre, même si elle n'est pas une application directe de leurs travaux, est similaire. Plus précisément, considérons un domaine  $D$  de  $\mathbb{C}^n$  et notons  $(\zeta, z)$  les coordonnées sur  $\overline{D} \times \overline{D}$ . On considère trois applications,  $Q$ ,  $s$  et  $F$ , qui vérifient :

- $Q : \overline{D} \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}^n$  est une application  $\mathcal{C}^1$ , holomorphe en la variable  $z$  à  $\zeta$  fixé.
- $s : \overline{D} \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}^n$  est telle que, pour un compact  $K$  de  $\Omega$ , on a uniformément en  $\zeta \in \overline{\Omega}$  et  $z \in K$  :

$$|s(\zeta, z)| \leq C|\zeta - z| \text{ et } |\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle| \geq c|\zeta - z|^2. \quad (0.4.1)$$

- $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe telle que  $F(1) = 1$ .

Nous faisons les identifications suivantes

$$Q : \bar{D} \times \bar{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

vue comme application dont les composantes sont les  $Q_j$  et

$$Q = \sum_{j=1}^n Q_j d(\zeta_j - z_j).$$

et de même pour  $s$ . Sous ces conditions, on définit le noyau :

$$K(\zeta, z) = c_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} F^{(k)}(\langle Q(\zeta, z), z - \zeta \rangle + 1) \frac{s(\zeta, z) \wedge (dQ)^k \wedge (ds)^{n-1-k}}{\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle^{n-k}} \quad (0.4.2)$$

où  $c_n = \frac{(-1)^{\binom{n(n-1)}{2} + 1}}{(n-1)!}$ .

Nous notons enfin  $dK = P$ .

**Théorème.** (Berndtsson-Andersson [2], (1982)) *Pour toute  $(p, q)$ -forme  $f$  sur  $D$ , on a :*

$$f(z) = (-1)^{p+q} \left( \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge K_{p,q}(\zeta, z) - \left( \int_{\zeta \in D} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge K_{p,q}(\zeta, z) + \bar{\partial}_z \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge K_{p,q-1}(\zeta, z) \right) \right)$$

pour  $q > 0$  et

$$f(z) = (-1)^p \left( \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge K_{p,0}(\zeta, z) - \left( \int_{\zeta \in D} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge K_{p,0}(\zeta, z) + \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge P_{p,0}(\zeta, z) \right) \right)$$

pour  $q = 0$ . Les termes  $K_{p,q}$  signifient de bidegré  $(p, q)$  en  $z$  et  $(n-p, n-q-1)$  en  $\zeta$ . Il en est de même pour  $P$ .

Normalement, il devrait y avoir un terme supplémentaire dans le second membre de la première formule : en effet, l'application du théorème de Stokes impose un terme supplémentaire en  $\int_D f(\zeta) \wedge P_{p,q}(\zeta, z)$ . Cependant, le choix d'introduire un poids holomorphe en la variable  $z$  assure que  $P_{p,q} = 0$  si  $q \geq 1$ .

Dans les deux formules de représentations intégrales que nous considérons, nous choisissons de plus un poids qui s'annule au bord, ou plus exactement qui, à  $z \in K$  compact fixé, tend vers 0 quand  $\zeta$  se rapproche du bord. Cela nous permet d'annuler le terme d'intégration sur le bord. Rigoureusement, nous devons d'abord appliquer le théorème de Berndtsson-Andersson sur  $D_\eta = \{z \in D, r(z) < -\eta\}$  puis montrer que l'intégrale  $\int_{\partial D_\eta}$  tend vers 0 quand  $\eta$  tend vers 0.



# Chapitre 1

## Estimations Höldériennes pour l'équation de Cauchy-Riemann

### 1.1 Préliminaires : noyaux résolvants et estimations élémentaires

#### 1.1.1 Noyau résolvant

Nous considérons le noyau suivant :

$$\begin{aligned}
 K(\zeta, z) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-k} \frac{\partial_{\zeta} |\zeta - z|^2 \wedge (\bar{\partial}_{\zeta} \tilde{Q})^k \wedge (d\partial_{\zeta} |\zeta - z|^2)^{n-k-1}}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \\
 &:= \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} K^{(k)}(\zeta, z)
 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

où  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N$  suffisamment grand,

$$c_{k,n} = (-1)^{\binom{n(n-1)}{2} + 1} \binom{N}{k} \text{ et } \tilde{Q}(\zeta, z) = \frac{1}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \int_0^1 (1-t)^{-1} \partial_{\zeta} (\mathcal{B}(\zeta, \zeta + t(z - \zeta))) dt.$$

Il s'agit d'un noyau à poids de type Berndtsson-Andersson. En effet, le choix de  $\tilde{Q}(\zeta, z)$  est tel que :

$$\langle \tilde{Q}(\zeta, z), z - \zeta \rangle + 1 = \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}$$

Le choix des autres termes est clair  $F : w \mapsto w^N$  et  $s(\zeta, z) = \overline{\zeta - z}$ .

Pour  $f$  une  $(0, 1)$ -forme  $\bar{\partial}$ -fermée à coefficients bornés dans  $\Omega$ , on a alors  $\bar{\partial} T f = f$ , où (cf. [5]),

$$T f(z) = \int_{\Omega} f(\zeta) K(\zeta, z)$$

En fait l'expression considérée par A. Cumenge dans [5] pour  $\mathcal{B}(\zeta, \zeta) \tilde{Q}$  est  $\int_0^1 t^{-1} \partial_z (\mathcal{B}(\zeta, \zeta + t(z - \zeta))) dt$  et l'équation  $\bar{\partial} u = f$  y est résolue pour  $f$  une  $(n, 1)$ -

forme ; le choix légèrement différent effectué ici donne de manière strictement analogue une solution de l'équation  $\bar{\partial}u = f$  pour les  $(0, 1)$ -formes et est sans incidence sur la preuve d'estimations de [5] que nous utiliserons.

De plus, on notera  $u^{(k)}(z) := \int_{\Omega} f(\zeta) \wedge K^{(k)}(\zeta, z)$ . On gardera éventuellement cette même notation si on intègre sur  $\mathcal{C}^{\ell}$  et non sur  $\Omega$  tout entier.

### 1.1.2 Etude des termes élémentaires

Dans les preuves des théorèmes 1 et 2, le terme  $u^0$  sera étudié "à la main" et nous ne le dériverons pas. Nous aurons par contre à considérer pour  $k = 1, \dots, n - 1$  des dérivées  $D^{\theta}u^{(k)}$  d'ordre  $\theta = 1$  ou  $2$  et allons estimer  $D_z^{\theta}K^{(k)}$ . Plus précisément nous considérerons, en vue de la preuve du théorème 2, et sans perte de généralité,  $D_{z,v}^{\theta_1}D^{\theta_2}K^{(k)}(\zeta, z)$ , où  $\theta_1, \theta_2 \in \{0, 1\}$  et  $D_{z,v}$  désigne une dérivation en  $z$  dans la direction d'un vecteur unitaire donné  $v$ .

**Remarque 4.** *Dans la preuve du théorème 1, nous n'aurons pas besoin de fixer a priori une direction  $v$  de dérivation ; aussi utiliserons-nous systématiquement l'estimation  $\sigma(z, v, \eta) \gtrsim \eta$  (où, suivant les occurrences,  $\eta = d(\zeta)$ ,  $\eta = \varepsilon(\zeta, z)$ ...). Le cas  $\theta_1 = \theta_2 = 1$  n'interviendra par ailleurs que dans la preuve du théorème 1.*

Un point  $z = z_0$  (toujours noté  $z$  pour alléger) étant fixé dans  $\Omega \cap \mathcal{U}$ , nous placerons en fait, pour obtenir des estimées précises, dans le polydisque  $\mathcal{C}^0$  ou une "couronne"  $\mathcal{C}^{\ell}$  ; sauf autre indication, les estimations données ci-dessous sont valables pour  $z \in \Omega \cap \mathcal{U}$ ,  $\zeta \in \mathcal{C}^{\ell}(z)$ .

Soit  $(e_j^{(\ell)}(z))_j$  une  $\gamma 2^{\ell}d(z)$ -base extrémale en  $z$ , où  $\gamma$  est une constante absolue telle que l'on ait pour  $a_0 > 0$  suffisamment petit :

$$\mathcal{M}(\zeta, z) \leq a \leq a_0 \implies \zeta \in P(z, \gamma a).$$

Les coordonnées de  $\zeta$  dans cette base seront notées  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  (on évite  $\beta_j^{\ell}$  pour alléger les notations), les dérivations anti-holomorphes en  $\zeta$  notées  $\frac{\partial}{\partial \beta_j}$ , etc. Et pour  $z$  l'analogue avec les lettres latines  $(b_1, \dots, b_n)$ . Nous soulignons que le changement de base est unitaire et nous ne préciserons donc pas les coefficients de la matrice de passage.

Les formes différentielles intervenant, après dérivation en  $z$ , dans les termes  $D_{z,v}K^{(k)}(\zeta, z)$  et  $D_z^2K^{(k)}(\zeta, z)$ ,  $k \geq 1$ , seront toutes exprimées relativement à cette nouvelle base  $(e_j^{(\ell)}(z))_j$ .

Toutefois nous continuerons à noter par exemple  $|\zeta - z|$  et non  $|\beta - b|$  pour une meilleure lisibilité.

-  $T_0 = |f(\zeta) \cdot e_{j_1}(z)| \leq \frac{\|f\|_{\kappa} d(\zeta)}{\sigma(\zeta, e_{j_1}^{(\ell)}(z), d(\zeta))}$  simplement d'après les définitions données plus loin (cf. § 1.2.1).

- Soit  $T_{1,k} = D_{z,v}^{\theta_1} D^{\theta_2} \left[ \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-k} \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \right]$ .
- S'il n'y a aucune dérivation, nous utiliserons juste la majoration (0.3.3) pour estimer  $T_{1,k}$  (à laquelle il sera également fait appel pour les autres cas).
- Nous déduisons immédiatement de (0.3.1), (0.3.2) et (0.3.3)

$$\left| D_{z,v} \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right| \lesssim \frac{1}{\sigma(z, v, \varepsilon(\zeta, z))}, \quad \zeta, z \in \Omega \cap \mathcal{U}. \quad (1.1.2)$$

Plus généralement, si  $\theta_1 = 1$ ,  $\theta_2 = 0$ , pour  $\zeta, z \in \Omega \cap \mathcal{U}$  :

$$\begin{aligned} |T_{1,k}| &\lesssim \left( \frac{|\mathcal{B}(\zeta, z)|}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-k-1} \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \cdot \left| \frac{D_{z,v} \mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} - \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \cdot \frac{D_{z,v} |\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^2} \right| \\ &\lesssim \left( \frac{d(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)} \right)^{N-k} \cdot \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \times \left( \frac{1}{\sigma(z, v, \varepsilon(\zeta, z))} + \frac{1}{|\zeta - z|} \right), \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

- Lorsque  $\theta_1 = \theta_2 = 1$ , nous obtenons après les deux dérivations, en tenant compte de l'estimation  $\sigma(z, v, \varepsilon(\zeta, z)) \gtrsim \varepsilon(\zeta, z)$ , pour  $\zeta, z \in \Omega \cap \mathcal{U}$  :

$$|T_{1,k}| \lesssim \left( \frac{d(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)} \right)^{N-k} \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \left[ \frac{1}{\varepsilon(\zeta, z) \cdot |\zeta - z|} + \frac{1}{\varepsilon(\zeta, z)^2} + \frac{1}{|\zeta - z|^2} \right], \quad (1.1.4)$$

- Pour le terme  $T_2 = \partial_\zeta [D_{z,v}^{\theta_1} |\zeta - z|^2]$ , il est clair que  $|T_2| \lesssim |\zeta - z|^{1-\theta_1}$ .
- Etude du terme  $T_{3,k} = D_{z,v}^{\theta_1} D_z^{\theta_2} (\bar{\partial} \tilde{Q})^k$ ,  $k \geq 1$ .

$$\bar{\partial} \tilde{Q} = \frac{-\bar{\partial}_\zeta \mathcal{B}(\zeta, \zeta)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)^2} \wedge \tilde{R} + \frac{\bar{\partial}_\zeta \tilde{R}}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)},$$

où  $\tilde{R} = \int_0^1 (1-t)^{-1} \partial_\zeta (\mathcal{B}(\zeta, z_t)) dt$ ,  $z_t = \zeta + t(z - \zeta)$ .

$$D_{z,v}^{\theta_1} D_z^{\theta_2} \tilde{R} = \int_0^1 (1-t)^{-1} \partial_\zeta (D_{z,v}^{\theta_1} D_z^{\theta_2} \mathcal{B}(\zeta, z_t)) dt.$$

Considérant donc, en particulier pour l'écriture des formes différentielles, la base  $(e_j^{(\ell)})_j$ , nous obtenons par exemple, en tenant compte des conventions de notations précisées au début de ce paragraphe :

$$D_{z,v} \tilde{R} = \sum_{i=1}^n \int_0^1 t \left( \frac{\partial}{\partial \beta_i} D_{z,v} (\mathcal{B}) \right) (\zeta, z_t) dt d\beta_i$$

où  $D_Z$  signifie que l'on dérive par rapport à la seconde variable.

Puisque

$$\inf_{0 \leq t \leq 1} \varepsilon(\zeta, z_t) \gtrsim d(\zeta) \text{ et } \inf_{0 \leq t \leq 1} \text{Vol } P(\zeta, \varepsilon(\zeta, z_t)) \gtrsim \text{Vol } P(\zeta, d(\zeta)),$$

nous déduisons de (0.3.1), (0.2.4)

$$D_{z,v}\tilde{R} = \frac{1}{\sigma(\zeta, v, d(\zeta))} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{O(1) d\beta_i}{\text{Vol } P(\zeta, d(\zeta)) \sigma(\zeta, e_i^{(\ell)}, d(\zeta))}.$$

Nous pouvons écrire également (en vue de la preuve du théorème 1), en tenant compte de (0.3.2) et de la remarque 4

$$\frac{D_{z,v}\tilde{R}}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} = \sum_{i=1}^n \frac{O(1) d\beta_i}{\sigma(\zeta, e_i^{(\ell)}, d(\zeta))} \int_0^1 \frac{t dt}{\varepsilon(\zeta, z_t)}.$$

On rappelle (cf [5]) que, uniformément en  $t \in [0, 1]$ ,  $z, \zeta \in \mathcal{U} \cap \Omega$  où  $\mathcal{U}$  est comme en (0.3.1)

$$\varepsilon(\zeta, z_t) \gtrsim d(\zeta) + t(|r(z)| + |r(z) - r(\zeta)|) \gtrsim d(\zeta) + t(d(z) + d(\zeta) + |r(z) - r(\zeta)|).$$

Par suite

$$\frac{D_{z,v}^{\theta_1} D_z^{\theta_2} \tilde{R}}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} = \sum_{i=1}^n \frac{O(1) d\beta_i}{\sigma(\zeta, e_i^{(\ell)}, d(\zeta)) \cdot [d(z) + d(\zeta) + |r(z) - r(\zeta)|]^{\theta_1 + \theta_2}}.$$

Suivant une démarche analogue pour estimer

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_\zeta \int_0^1 (1-t)^{-1} \partial_\zeta (D_{z,v}^{\theta_1} D_z^{\theta_2} \mathcal{B}(\zeta, z_t)) dt = \\ \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 t^{\theta_1 + \theta_2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta_i \partial \beta_j} D_{z,v}^{\theta_1} D_z^{\theta_2} \mathcal{B} \right) (\zeta, z_t) dt d\beta_i \wedge d\bar{\beta}_j, \end{aligned}$$

nous obtenons en fin de compte :

$$T_{3,k} = \sum_{|I|=|J|=k} \mathcal{E}_{I,J} d\beta_I \wedge d\bar{\beta}_J \quad , I = (i_1, \dots, i_k), J = (j_1, \dots, j_k) \text{ avec}$$

$$|\mathcal{E}_{I,J}| \lesssim \frac{1}{\sigma(\zeta, v, d(\zeta))} \prod_{p=1}^k \frac{1}{\sigma(\zeta, e_{i_p}^{(\ell)}, d(\zeta)) \sigma(\zeta, e_{j_p}^{(\ell)}, d(\zeta))} \text{ si } \theta_1 = 1 \text{ et } \theta_2 = 0 \quad (1.1.5)$$

$$|\mathcal{E}_{I,J}| \lesssim \frac{1}{(d(z) + d(\zeta) + |r(z) - r(\zeta)|)^{\theta_1 + \theta_2}} \prod_{p=1}^k \frac{1}{\sigma(\zeta, e_{i_p}^{(\ell)}, d(\zeta)) \sigma(\zeta, e_{j_p}^{(\ell)}, d(\zeta))} \quad (1.1.6)$$

dans les autres cas.

**Remarque :** en fait l'estimation de  $\int_0^1 t/\varepsilon(\zeta, z_t) dt$  n'est pas indispensable car la présence du poids dans le noyau  $K$  nous permet d'écrire en utilisant (0.3.3) et la minoration  $\inf_{0 \leq t \leq 1} \varepsilon(\zeta, z_t) \gtrsim d(\zeta)$ , pour  $\theta_1, \theta_2 \in \{0, 1\}$  :

$$\left( \frac{|\mathcal{B}(\zeta, z)|}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{\theta_1 + \theta_2} |\mathcal{E}_{I,J}| \lesssim \frac{1}{\varepsilon(\zeta, z)^{\theta_1 + \theta_2}} \prod_{p=1}^k \frac{1}{\sigma(\zeta, e_{i_p}^{(\ell)}, d(\zeta)) \sigma(\zeta, e_{j_p}^{(\ell)}, d(\zeta))}. \quad (1.1.7)$$

## 1.2 Résultat optimal en norme Kappa

Dans cette partie, nous démontrons le Théorème 1.

**Théorème.** *Soient  $\Omega$  un domaine convexe borné, à bord lisse et de type fini  $m$ , et  $f$  une  $(0,1)$ -forme  $\bar{\partial}$  fermée telle que  $|||f|||_\kappa < +\infty$ . Alors il existe  $u \in \Lambda^1(\Omega)$  telle que  $\bar{\partial}u = f$ .*

### 1.2.1 Notations-définitions

**Définition 21.** (cf. [3]) *Pour  $\zeta \in \Omega$ ,  $v$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{C}^n$  et  $\varepsilon$  un réel  $> 0$ , on définit la norme :  $\kappa(\zeta, v, \varepsilon) = \frac{d(\zeta)}{\sigma(\zeta, v, \varepsilon)}$ .*

Si  $\varepsilon$  est de l'ordre de  $d(\zeta)$ , on notera simplement  $\kappa(\zeta, v)$ .

**Définition 22.** (cf. [3]) *Pour  $f$   $(0,1)$ -forme sur  $\Omega$  on pose :*

- $||f(\zeta)||_\kappa = \sup_{v \neq 0} \left( \frac{|f(\zeta)(v)|}{\kappa(\zeta, v)} \right)$
- $|||f|||_\kappa = \sup_{\zeta \in \Omega} (||f(\zeta)||_\kappa)$

**Définition 23.** *Soit  $u$  une fonction bornée définie sur  $\Omega$ , on dit que  $u \in \Lambda^1(\Omega)$  s'il existe une constante  $C$  telle que l'on ait :  $\forall z \in \Omega, \forall h \in \mathbb{C}^n$  tels que  $z \pm h \in \Omega$ ,  $|u(z+h) + u(z-h) - 2u(z)| \leq C|h|$ .  
 $||u||_{\Lambda^1(\Omega)} := ||u||_\infty + \sup\{|u(z+h) + u(z-h) - 2u(z)|/|h|, z, z \pm h \in \Omega, h \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}$*

La démarche de la démonstration sera la suivante :

- Des arguments standards de convexité (cf [18], théorème 4.6) permettent de ne considérer que les termes  $u^0, u^1$  et  $u^{n-1}$ .
- Le terme  $u^0$  est traité directement à partir de la définition de  $\Lambda^1$ .
- Pour  $u^1$  et  $u^{n-1}$ , on se sert d'un lemme d'Hardy-Littlewood. En effet,  $|D_z^2(u(z))| \lesssim \frac{1}{d(z)}$  implique que  $u \in \Lambda^1$  (cf [27]; [19] page 405).

### 1.2.2 Etude du terme $u^0$

Rappelons que  $u^0(z) = \int_\Omega f(\zeta) \wedge K^{(0)}(\zeta, z)$  et notons  $[BM]$  le noyau de Bochner-Martinelli. Nous allons montrer que pour  $z \in \Omega$ ,  $0 < h \ll 1$  avec  $z+h$  et  $z-h \in \Omega$  :

$$|u^0(z+h) + u^0(z-h) - 2u^0(z)| \lesssim ||f||_\infty |h| \leq |||f|||_\kappa |h|. \quad (1.2.1)$$

Si  $|\zeta - z| \lesssim |h|$ , alors  $|\zeta - z \pm h| \lesssim |h|$ . Ecrivons :

$$\int_\Omega = \underbrace{\int_{\Omega_1 = \{\zeta / |\zeta - z| < 3|h|\}}}_I + \underbrace{\int_{\Omega_2 = \{\zeta / |\zeta - z| > 3|h|\}}}_II.$$

- étude de I : notons  $u_1^{(0)}$  pour les intégrales sur  $\Omega_1$ , et majorons directement chacun

des termes  $|u_1^{(0)}(z)|, |u_1^{(0)}(z \pm h)|$ . Puisque  $\frac{|\mathcal{B}(\zeta, z \pm h)|}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \lesssim 1$ , nous obtenons, par exemple pour le terme  $u_1^{(0)}(z + h)$  :

$$\begin{aligned} |u_1^{(0)}(z + h)| &= \left| \int_{\Omega_1} \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z + h)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^N f(\zeta) \wedge [BM](\zeta, z + h) d\lambda(\zeta) \right| \\ &\lesssim \|f\|_\infty \int_{\Omega_1} \frac{1}{|\zeta - z - h|^{2n-1}} d\lambda(\zeta) \\ &\lesssim \|f\|_\infty |h| \lesssim \|f\|_\kappa |h| \end{aligned}$$

• étude de II : Par convexité et régularité du bord du domaine  $\Omega$ , on peut considérer localement un système de coordonnées complexes  $w_1 = \zeta_1 - z_1, \dots, w_n = \zeta_n - z_n$  tel que  $\mathcal{R}e w_1 = r(\zeta) - r(z)$  (l'axe des  $w_1$  correspondant à la direction complexe normale en  $z$  à  $\{\zeta, r(\zeta) = r(z)\}$ ); nous avons alors  $\varepsilon(\zeta, z) \gtrsim d(z) + |w_1|$ . Nous notons  $w = (w_1, w') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ . On va alors poser :

$$\begin{aligned} \{w/1 > |w| > 3|h|\} &= \Omega_3 \cup \Omega_4 \text{ où} \\ \Omega_3 &= \{|w| > 3|h| \text{ et } |w_1| < |h|\} \text{ et } \Omega_4 = \{|w| > 3|h| \text{ et } |w_1| > |h|\}. \end{aligned}$$

Notant ici pour alléger  $u^0$  les intégrales sur  $\Omega_3$ , on majore :

$$|u^0(z + h) + u^0(z - h) - 2u^0(z)| \leq |u^0(z + h) - u^0(z)| + |u^0(z - h) - u^0(z)|.$$

Afin de ne pas alourdir la présentation des calculs, nous gardons par abus la variable  $\zeta$  dans les premières étapes des estimations. Nous devons donc étudier (l'autre terme se traitant de manière identique) :

$$J = \left| \int_{\Omega_3} f(\zeta) \left( \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z + h)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^N [BM](\zeta, z + h) d\lambda(\zeta) - \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^N [BM](\zeta, z) \right) d\lambda(\zeta) \right|$$

Puisque la fonction poids  $\frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}$  est uniformément bornée, nous avons

$$\begin{aligned} J &\lesssim \|f\|_\infty \int_{\Omega_3} \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta, z + h) - \mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right| \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|\mathcal{B}(\zeta, z + h)|^k |\mathcal{B}(\zeta, z)|^{N-1-k}}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)^{N-1}} \cdot \frac{d\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-1}} \\ &+ \|f\|_\infty \int_{\substack{|\zeta_1 - z_1| < |h| \\ |\zeta - z| > 3|h|}} \left( \frac{1}{|\zeta - z - h|^{2n-1}} + \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-1}} \right) d\lambda(\zeta) \\ &:= \|f\|_\infty (J_1 + J_2). \end{aligned}$$

• Pour estimer  $J_1$ , remarquons simplement que :

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{B}(\zeta, z + h) - \mathcal{B}(\zeta, z)|}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} &\lesssim \frac{|h|}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \int_0^1 \frac{dt}{\varepsilon(\zeta, z + th) \text{Vol } P(\zeta, z + th)} \\ &\lesssim \frac{|h|}{d(\zeta)}. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

puisque l'on a, uniformément en  $t, z, \zeta$  :

$$\mathcal{B}(\zeta, \zeta) \text{Vol } P(\zeta, z + th) \gtrsim 1 \text{ et } \varepsilon(\zeta, z + th) \gtrsim d(\zeta).$$

Comme apparaît dans l'intégrande de  $J_1$  au moins un terme  $|\mathcal{B}(\zeta, z)|/|\mathcal{B}(\zeta, \zeta)|$  ou un terme  $|\mathcal{B}(\zeta, z + h)|/|\mathcal{B}(\zeta, \zeta)|$ , nous avons en tenant compte de (0.3.3) :

$$\begin{aligned} J_1 &\lesssim |h| \int_{\Omega_3} \frac{d\lambda(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z) |\zeta - z|^{2n-1}} \\ &\quad + |h| \int_{\Omega_3} \frac{d\lambda(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z + h) |\zeta - z|^{2n-1}}. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} &|h| \int_{\Omega_3} \frac{d\zeta}{\varepsilon(\zeta, z) |\zeta - z|^{2n-1}} \\ &\leq |h| \int_{\substack{|w_1| < |h| \\ |w'| > |h|}} \frac{d\lambda(w)}{(d(z) + |w_1|)(|w_1| + |w'|)^{2n-1}} \\ &\lesssim |h| \int_{\substack{\rho_1 < |h| \\ \rho' > |h|}} d\rho_1 \frac{d\rho'}{(\rho')^2} \lesssim |h|. \end{aligned}$$

Nous obtenons le même résultat pour  $|h| \int_{\Omega_3} \frac{d\zeta}{\varepsilon(\zeta, z+h) |\zeta - z|^{2n-1}}$ . L'estimation  $J_2 \lesssim |h|$  est immédiate.

• Étude de  $\int_{\Omega_4} f(\zeta) \wedge K^{(0)}(\zeta, z)$  :

$$f(\zeta) \wedge \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^N [BM](\zeta, z) = \sum_{j=1}^n c_{ste}(j, n) f_j(\zeta) \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^N \frac{\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}} \prod_{i=1}^n d\zeta_i d\bar{\zeta}_i.$$

Posons pour tout  $j = 1, \dots, n$ ,  $\Phi_j(\zeta, z) = \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^N \frac{\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}}$ .

Supposons  $|\zeta - z| > 3|h|$ ,  $h \neq 0$  fixé, avec  $z \pm h \in \Omega$ ; nous avons d'après la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} \Phi_j(\zeta, z + h) + \Phi_j(\zeta, z - h) - 2\Phi_j(\zeta, z) &= \int_0^1 (1-t) d_z^2 \Phi_j(\zeta, z + th) \cdot h^{(2)} dt \\ &\quad + \int_0^1 (1-t) d_z^2 \Phi_j(\zeta, z - th) \cdot h^{(2)} dt. \end{aligned}$$

Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $w = \zeta - z \in \Omega_4$ , nous avons d'après (0.3.1), (0.2.4), uniformément en  $w = \zeta - z \in \Omega_4$ ,  $t, z \in \Omega \cap \mathcal{U}$ ,  $h, |h| < 1$ , pour toute dérivation  $D_z^p$  d'ordre  $p$  en  $z$  :

$$\begin{aligned} \left| D_z^p \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right|_{z \pm th} &\lesssim \frac{\text{Vol } P(\zeta, d(\zeta))}{\text{Vol } P(\zeta, \varepsilon(\zeta, z \pm th)) \cdot (\varepsilon(\zeta, z \pm th))^p} \\ &\lesssim \frac{1}{(\varepsilon(\zeta, z \pm th))^p} \lesssim \frac{1}{(|\zeta_1 - z_1| + |h|)^p}. \end{aligned}$$

Par suite, en tenant toujours compte de la majoration  $|\mathcal{B}(\zeta, z \pm th)|/\mathcal{B}(\zeta, \zeta) \lesssim 1$  :

$$|d_z^2 \Phi_j(\zeta, z \pm th) \cdot h^{(2)}| \lesssim \frac{|h|^2}{|\zeta - z|^{2n-1}} \left[ \frac{1}{|\zeta - z|^2} + \frac{1}{|\zeta - z|(|\zeta_1 - z_1| + |h|)} + \frac{1}{(|\zeta_1 - z_1| + |h|)^2} \right].$$

Par des calculs immédiats

$$\begin{aligned} |h|^2 \int_{C > |w_1| > |h|} \frac{d\lambda(w)}{|w|^{2n+1}} &\lesssim |h| \\ |h|^2 \int_{|w_1| > |h|} \frac{d\lambda(w)}{|w|^{2n-1}(|w_1| + |h|)^2} &\lesssim |h|^2 \int_{\rho_1 > |h|} \frac{d\rho_1}{\rho_1^2} \lesssim |h|. \end{aligned}$$

□

### 1.2.3 Etude du terme $u^1$

Nous supposons dans ce paragraphe et les suivants que  $z \in \Omega \cap \frac{1}{2}\mathcal{U}$  et considérons seulement les intégrales  $\int_{\Omega \cap \mathcal{U} = \cup c^\ell}$ .

Pour  $\zeta \in \mathcal{C}^\ell$ , nous avons en tenant compte de (1.1.1), (0.3.3) et du paragraphe 1.1.2 (en particulier des estimations (1.1.3), (1.1.4) et (1.1.7)) :

$$\begin{aligned} |D_z^2 f(\zeta) \wedge K^{(1)}(\zeta, z)| &\lesssim \|f\|_\kappa \sum_{\substack{i,j,p=1 \\ j \neq p}}^n \left( \frac{d(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)} \right)^{N-3} \frac{d(\zeta)}{\sigma(\zeta, e_j^{(\ell)}(z), d(\zeta))} \\ &\times \frac{(ED)}{\sigma(\zeta, e_i^{(\ell)}(z), d(\zeta)) \sigma(\zeta, e_p^{(\ell)}(z), d(\zeta)) |\zeta - z|^{2n-3}} \end{aligned}$$

où

$$(ED) = \frac{1}{|\zeta - z|^2} \text{ ou } \frac{1}{|\zeta - z| \varepsilon(\zeta, z)} \text{ ou } \frac{1}{\varepsilon(\zeta, z)^2}. \quad (1.2.3)$$

Supposons par exemple  $j < p$ . Rappelons les estimations suivantes, valables pour  $\zeta \in \mathcal{C}^\ell \subset P(z, \gamma 2^\ell d(z))$  :

$$\begin{aligned} \frac{d(\zeta)}{\sigma(\zeta, e_i^{(\ell)}(z), d(\zeta))} &= O(1) \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \frac{d(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z) \sigma(\zeta, e_j^{(\ell)}(z), d(\zeta))} &\lesssim \frac{1}{\varepsilon(\zeta, z)} \lesssim \frac{1}{2^\ell d(z)}, \\ \sigma(\zeta, e_p^{(\ell)}(z), d(\zeta)) &\gtrsim \frac{d(\zeta)}{2^\ell d(z)} \sigma(\zeta, e_p^{(\ell)}(z), \gamma 2^\ell d(z)) \approx \frac{d(\zeta)}{2^\ell d(z)} \sigma(z, e_p^{(\ell)}(z), \gamma 2^\ell d(z)). \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\int_{\mathcal{C}^\ell} |f(\zeta) \wedge D_z^2 K^{(1)}(\zeta, z)| \lesssim \frac{\|f\|_\kappa}{2^\ell d(z)} \sum_{p \geq 2} \frac{1}{\sigma(z, e_p^{(\ell)}(z), 2^\ell d(z))} \int_{\mathcal{C}^\ell} (ED) \cdot \frac{(d(\zeta))^2 d\lambda(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)^2 |\zeta - z|^{2n-3}}.$$

En provenance de  $(ED)$ , considérons par exemple le terme  $\varepsilon(\zeta, z)^{-2}$  ; posons pour tout  $i$ ,  $|\zeta_i - z_i|$  ou plutôt  $|\beta_i - b_i| = r_i$  et notons pour alléger  $\sigma_i$  pour  $\sigma(z, e_i^{(\ell)}(z), \gamma 2^\ell d(z))$  ; nous pouvons écrire puisque  $p \geq 2$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{(d(\zeta))^2 d\lambda(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)^4 |\zeta - z|^{2n-3}} &\lesssim \frac{1}{(2^\ell d(z))^2} \int_{\substack{r_1 < \sigma_1 \\ r_p < \sigma_p}} r_1 dr_1 dr_p \\ &\lesssim \sigma_p. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

(Nous avons utilisé  $\sigma_1 = \sigma(z, e_1^{(\ell)}(z), \gamma 2^\ell d(z)) \approx 2^\ell d(z)$  pour la dernière inégalité).

L'intégrale faisant intervenir un terme en  $(|\zeta - z| \varepsilon(\zeta, z))^{-1}$  se traite de même, avec une estimation finale analogue.

Avec toujours les mêmes notations :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{(d(\zeta))^2 d\lambda(\zeta)}{(\varepsilon(\zeta, z))^2 |\zeta - z|^{2n-1}} &\lesssim \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{d\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-1}} \lesssim \int_{r_p < \sigma_p} dr_p \\ &\lesssim \sigma_p. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Nous déduisons de (1.2.4), (1.2.4), (1.2.5) et de la définition de  $u^1$  :

$$|D_z^2(u^1)| \lesssim \|f\|_\kappa (d(z))^{-1} \quad (1.2.6)$$

par suite  $u^1 \in \Lambda^1(\Omega)$ .

## 1.2.4 Etude du terme $u^{n-1}$

Bien sûr, dans ce cas, on suppose  $n \geq 3$ . On va donc examiner le terme suivant :

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= D_z^2 u^{n-1}(z) \\ &= D_z^2 \int_{\Omega} f(\zeta) \wedge \frac{(\partial_\zeta |\zeta - z|^2) \wedge (\bar{\partial}_\zeta \tilde{Q})^{n-1}}{|\zeta - z|^2} \cdot \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-n+1}. \end{aligned}$$

Les dérivations en  $z$  (celles notées  $D^{\theta_j(\ell_k)}$  ci-dessous) peuvent porter sur différents facteurs du noyau  $K^{(n-1)}$  ; nous allons encore intégrer sur chaque "couronne"  $\mathcal{C}^{(\ell)}$ . Suivant la démarche indiquée dans la section 1.1.2, nous sommes amenés à estimer des intégrales des types suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{n-1}^\ell &= \sum_{\substack{|I|=n \\ |J|=n}} \int_{\mathcal{C}^\ell} D^{\theta_1(\ell_0)} D^{\theta_2(\ell_0)} \left[ \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-n+1} \frac{1}{|\zeta - z|^2} \right] \times \frac{\partial}{\partial \beta_{i_1}} [D^{\theta_1(\ell_1)} |\zeta - z|^2] \\
&\times \frac{[f(\zeta) \cdot e_{j_1}(z)]}{(\mathcal{B}(\zeta, \zeta))^{n-1}} \prod_{k=2}^n \int_0^1 (1-t)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \beta_{i_k} \partial \bar{\beta}_{j_k}} [D^{\theta_1(\ell_k)} D^{\theta_2(\ell_k)} \mathcal{B}(\zeta, z_t)] dt \cdot d\beta_I \wedge d\bar{\beta}_J \\
\mathcal{J}_{n-1}^\ell &= \sum_{\substack{|I|=n \\ |J|=n}} \int_{\mathcal{C}^\ell} D^{\theta_1(\ell_0)} D^{\theta_2(\ell_0)} \left[ \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-n+1} \frac{1}{|\zeta - z|^2} \right] \frac{\partial}{\partial \beta_{i_1}} [D^{\theta_1(\ell_1)} |\zeta - z|^2] \\
&\times \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}_{j_2}} \left( \frac{1}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right) \int_0^1 (1-t)^{-1} \frac{\partial}{\partial \beta_{i_2}} [D^{\theta_1(\ell_2)} D^{\theta_2(\ell_2)} \mathcal{B}(\zeta, z_t)] dt \\
&\times \frac{[f(\zeta) \cdot e_{j_1}(z)]}{(\mathcal{B}(\zeta, \zeta))^{n-2}} \prod_{k=3}^n \int_0^1 (1-t)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \beta_{i_k} \partial \bar{\beta}_{j_k}} D^{\theta_1(\ell_k)} D^{\theta_2(\ell_k)} [\mathcal{B}(\zeta, z_t)] dt \cdot d\beta_I \wedge d\bar{\beta}_J
\end{aligned}$$

avec les  $\theta_1(\ell_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  tous nuls, sauf un et un seul, qui est égal à 1 et la même condition vérifiée pour les  $\theta_2(\ell_k)$ ,  $k = 0, 2, \dots, n$ ;  $I = (i_1, \dots, i_n)$ ,  $J = (j_1, \dots, j_n)$ ,  $d\beta_I = d\beta_{i_1} \wedge \dots \wedge d\beta_{i_n}$ ,  $d\bar{\beta}_J = d\bar{\beta}_{j_1} \dots d\bar{\beta}_{j_n}$ .

**Remarque 5.**

Les estimations de la seconde intégrale  $\mathcal{J}_{n-1}^\ell$  seront les mêmes que celles de  $\mathcal{I}_{n-1}^\ell$ , nous n'étudierons que la première intégrale.

Nous utilisons les estimations élémentaires obtenues dans la section 1.1.2, ce qui donne la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
\left| \mathcal{I}_{n-1}^\ell \right| &\lesssim \|f\|_k \left| \int_{\mathcal{C}^\ell} \left( \frac{d(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)} \right)^{N-n+1} \cdot \frac{1}{|\zeta - z|} \cdot \frac{d(\zeta)}{\sigma(\zeta, e_{j_1}^{(\ell)}(z), d(\zeta))} \right. \\
&\times \left. \prod_{k=2}^n \frac{1}{\sigma(\zeta, e_{j_k}^{(\ell)}(z), d(\zeta))} \cdot \prod_{k=2}^n \frac{1}{\sigma(\zeta, e_{i_k}^{(\ell)}(z), d(\zeta))} \cdot (ED) \cdot d\beta_I \wedge d\bar{\beta}_J \right|
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

où  $(ED)$  est défini en (1.2.3).

On va utiliser (0.2.4) avec  $R = \gamma 2^\ell d(z)$  et  $r = d(\zeta)$ . Le poids sert à compenser les facteurs  $\frac{2^\ell d(z)}{d(\zeta)}$  qui apparaissent, puisque  $\forall \ell \geq 0$ ,  $\varepsilon(\zeta, z) \gtrsim 2^\ell d(z)$  si  $\zeta \in \mathcal{C}^\ell$ . Nous omettrons en fait souvent (sans préjudice) d'écrire la constante  $\gamma$ . L'intégrande se majore alors par des termes de la forme suivante :

$$A = \frac{d(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)} \prod_{k=2}^n \frac{1}{\sigma(\zeta, e_{j_k}^{(\ell)}(z), 2^\ell d(z)) \cdot \sigma(\zeta, e_{i_k}^{(\ell)}(z), 2^\ell d(z))} \times \frac{d(\zeta)}{\sigma(\zeta, e_{j_1}^{(\ell)}(z), 2^\ell d(z))} \cdot \frac{(ED)}{|\zeta - z|}$$

où  $\{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$  et  $i_2, \dots, i_n$  sont deux à deux distincts.

Soit  $i_1$  tel que  $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$ ; nous obtenons pour  $\zeta \in \mathcal{C}^\ell \subset P(z, \gamma 2^\ell d(z))$ , en tenant compte de (0.2.2), (0.2.3) et (0.2.4) :

$$A \lesssim \frac{\sigma(z, e_{i_1}, 2^\ell d(z))}{\text{Vol } P(z, 2^\ell d(z))} \cdot \frac{(ED)}{|\zeta - z|} \cdot \frac{d(\zeta)^2}{2^\ell d(z)}.$$

Suivant le terme en provenance de  $(ED)$  intervenant dans l'intégrande  $A$ , nous devons estimer :

$$\frac{\sigma(z, e_{i_1}, 2^\ell d(z))}{\text{Vol } P(z, 2^\ell d(z))} \cdot \frac{1}{2^\ell d(z)} \times \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{d(\zeta)^2 d\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|^3} \quad (1.2.8)$$

$$\frac{\sigma(z, e_{i_1}, 2^\ell d(z))}{\text{Vol } P(z, 2^\ell d(z))} \cdot \frac{1}{2^\ell d(z)} \times \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{d(\zeta) d\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|^2} \quad (1.2.9)$$

$$\frac{\sigma(z, e_{i_1}, 2^\ell d(z))}{\text{Vol } P(z, 2^\ell d(z))} \cdot \frac{1}{2^\ell d(z)} \times \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{d\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|} \quad (1.2.10)$$

Comme (1.2.8) et (1.2.9) se traitent de manière similaire, nous n'étudierons que (1.2.8). Enfin, comme les calculs se ramèneront en partie à l'étude de (1.2.10), nous commencerons par cette dernière :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{d\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|} &\lesssim \int_{|w_i| < \sigma(z, e_i, 2^\ell d(z))} \frac{d\lambda(w)}{|w_1| + \dots + |w_n|} \\ &\lesssim \int_{\rho_i < \sigma(z, e_i, 2^\ell d(z))} \frac{\rho_1 d\rho_1 \dots \rho_n d\rho_n}{\rho_{i_1}} \\ &\lesssim \frac{\text{Vol } P(z, 2^\ell d(z))}{\sigma(z, e_{i_1}, 2^\ell d(z))}. \end{aligned}$$

Pour l'étude du terme (1.2.8), écrivons

$$\int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{d(\zeta)^2 d\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|^3} = \int_{\mathcal{C}^\ell \cap \{d(\zeta) \geq 2c_1 d(z)\}} (\dots) + \int_{\mathcal{C}^\ell \cap \{d(\zeta) \leq 2c_1 d(z)\}} (\dots),$$

où  $c_1 \geq 1$  est une constante telle que l'on ait pour  $d(\zeta), d(z) \leq \eta_0$ , ( $\eta_0$  pouvant être choisi tel que  $0 < \eta_0 < 1$ ) :  $d(\zeta) \leq c_1 (d(z) + |r(\zeta) - r(z)|)$ .

- Si  $d(z) \leq d(\zeta)/2c_1$ , alors  $d(\zeta)/|\zeta - z| = O(1)$  d'où la première intégrale ci-dessus se ramène à celle de (1.2.10).

- Pour estimer la seconde intégrale, supposons sans perte de généralité que  $i_1 \neq n$ ,  $n - 1$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^\ell \cap \{d(\zeta) < 2c_1 d(z)\}} \frac{d(\zeta)^2 d\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|^3} &\lesssim d(z)^2 \int_{\rho_i < \sigma(z, e_i, 2^\ell d(z))} \frac{\rho_1 d\rho_1 \dots \rho_{n-2} d\rho_{n-2} d\rho_{n-1} d\rho_n}{\rho_{i_1}} \\ &\lesssim \frac{d(z)^2}{\sigma(z, e_{n-1}, 2^\ell d(z)) \sigma(z, e_n, 2^\ell d(z))} \cdot \frac{\text{Vol } P(z, 2^\ell d(z))}{\sigma(z, e_{i_1}, 2^\ell d(z))}. \end{aligned}$$

Or  $d(z) \leq 2^\ell d(z) \approx \sigma(z, e_1, 2^\ell d(z)) \leq \sigma(z, e_i, 2^\ell d(z))$ ,  $\forall i$ . D'où l'estimation souhaitée pour (1.2.8).

On a montré ainsi que, pour tout  $\ell$  :  $\left| D_z^2 \int_{\mathcal{C}^\ell} f(\zeta) \wedge K^{(n-1)} \right| \lesssim \|f\|_\kappa (2^\ell d(z))^{-1}$ .  
Par suite

$$\|u^{n-1}\|_{\Lambda^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_\kappa. \quad (1.2.11)$$

□

## 1.3 Preuve du Théorème 2

Nous le rappelons pour la commodité du lecteur :

**Théorème (2).** *Soit  $\Omega$  un domaine convexe borné à bord lisse de type fini  $m$  et  $f$  une  $(0,1)$ -forme  $\bar{\partial}$ -fermée telle que  $\|f\|_{L^\infty} < +\infty$ . Alors, pour tout  $0 < \alpha < \frac{1}{m}$ , il existe  $u \in \Gamma_\rho^\alpha(\Omega)$  telle que  $\bar{\partial}u = f$ .*

### 1.3.1 Une condition suffisante

**Définition 24.** *Pour  $0 < \alpha < \frac{1}{m}$ , on dit que  $u \in \Gamma_\rho^\alpha(\Omega)$  s'il existe une constante  $C$  telle que pour  $z, \zeta \in \Omega$ ,*

$$|u(z) - u(\zeta)| \leq C(\rho(z, \zeta))^\alpha.$$

McNeal et Stein donnent dans [25] une caractérisation "localisée" en termes de conditions discrètes pour les fonctions de  $\Gamma_\rho^\alpha(\Omega)$  lorsque  $0 < \alpha < 1/m$ . Pour prouver que ces conditions impliquent l'appartenance à l'espace  $\Gamma_\rho^\alpha(\Omega)$  (espace noté  $\tilde{\Gamma}_\alpha(\Omega)$  dans [25]), les auteurs utilisent en fait seulement des estimations sur les dérivées directionnelles d'ordre un. La preuve du résultat ci-dessous est contenue implicitement dans [25], mais nous en redonnons les éléments de démonstration afin de faciliter la lecture.

**Proposition 25.** *Soit  $0 < \alpha < 1/m$  et  $u$  est une fonction bornée, de classe  $C^1$  sur  $\Omega$  telle que*

$$|\nabla u(z)| \lesssim d(z)^{-1+\alpha} \quad \text{et } \forall v \in \mathbb{C}^n, \|v\| = 1, |D_v u(z)| \lesssim \frac{d(z)^\alpha}{\sigma(z, v, d(z))}.$$

*Alors  $u$  appartient à  $\Gamma_\rho^\alpha(\Omega)$ .*

**Lemme 26.** ([25])

*Soit  $0 < \alpha < 1/m$  et  $u$  une fonction définie sur  $\Omega$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u = b_k + g_k$  avec :*

- (i)  $\|b_k\|_\infty \lesssim 2^{-k\alpha}$
- (ii) *Si  $|r(z)| < 2^{-k}$ ,  $v \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|v\| = 1$  :  $|D_v g_k(z)| \lesssim \sigma(z, v, 2^{-k})^{-1} \cdot 2^{-k\alpha}$*
- (iii) *Si  $|r(z)| \geq 2^{-k}$ ,  $|\nabla g_k(z)| \lesssim 2^k \cdot 2^{-k\alpha}$ .*

*Alors  $u$  appartient à l'espace  $\Gamma_\rho^\alpha(\Omega)$ .*

*Preuve du lemme 26.* – Soit  $k$  tel que  $\rho(\zeta, z) \approx 2^{-k}$ . On suppose que  $\rho(\zeta, z) = \varepsilon(\zeta, z)$ . Donc  $|r(\zeta)| \lesssim 2^{-k}$  et  $|r(z)| \lesssim 2^{-k}$ . Soit  $\lambda$  le vecteur unitaire de direction  $\zeta - z$ , i.e.  $\lambda = \frac{\zeta - z}{|\zeta - z|}$ ,

$$\begin{aligned} |u(\zeta) - u(z)| &\leq |b_k(\zeta)| + |b_k(z)| + |g_k(\zeta) - g_k(z)| \\ &\lesssim 2^{-k\alpha} + |D_\lambda g_k(\eta)| |\zeta - z| \end{aligned}$$

pour un  $\eta$  dans le segment  $[\zeta, z]$  d'après l'inégalité de la moyenne. Donc,

$$|u(\zeta) - u(z)| \lesssim 2^{-k\alpha} + 2^{-k\alpha} (\sigma(\eta, \lambda, 2^{-k}))^{-1} \sigma(x, \lambda, 2^{-k}),$$

puisque  $|\zeta - z| \leq \sigma(\eta, \lambda, 2^{-k})$ . De plus, d'après la proposition 13,  $\sigma(\eta, \lambda, 2^{-k}) \approx \sigma(x, \lambda, 2^{-k})$  puisque  $\eta$  appartient au polydisque  $P(z, 2^{-k})$ . Notre choix de  $k$  implique donc que

$$|u(\zeta) - u(z)| \lesssim \rho(\zeta, z)^\alpha.$$

Dans le cas où  $\rho(\zeta, z) = |\zeta - z|$ , on suit exactement le même schéma de démonstration pour conclure.  $\square$

*Preuve de la proposition 25.* – nous allons vérifier que  $u$  satisfait les conditions du lemme 26.

Soient  $(U_j, p_j)_{1 \leq j \leq s}$  une famille finie telle que, pour tout  $j$ ,  $U_j$  est voisinage ouvert de  $p_j \in b\Omega$ , les  $p_j$  sont deux à deux distincts, la réunion  $V$  des  $U_j$  est un voisinage de  $b\Omega$  sur lequel est définie une projection régulière  $\pi$  sur  $b\Omega$  et est tel que  $|r(z)| < \eta_1$  où  $0 < \eta_1 \ll 1$  pour tout  $z$  de  $V$ ; on peut supposer l'existence d'une constante  $a > 0$  telle que, pour  $1 \leq j \leq s$ , si  $\nu_j$  désigne la normale intérieure en  $p_j$  à  $b\Omega$ , alors pour tout  $z$  de  $U_j$ ,  $0 \leq t \leq a$ ,  $d(z + t\nu_j) \gtrsim t$  et si  $z \in \frac{1}{2}U_j$  et  $0 \leq t \leq a$  alors  $z + t\nu_j \in U_j$ ; si  $z$  et  $\zeta \in U_j \cap \Omega$ ,  $\mathcal{M}(z, \zeta) \approx |z_1 - \zeta_1| + \dots$  où les composantes de  $z$  et  $\zeta$  sont écrites dans une  $\gamma d(z)$ -base extrémale de McNeal au point  $z$  ( $\gamma$  est défini § 1.1.2).

Soit  $k$  fixé dans  $\mathbb{N}$ . Suivant [25], posons pour  $z \in \frac{1}{2}V$  en notant pour simplifier  $\nu = \nu_j$  si  $z \in U_j$  :

$$\begin{aligned} u(z) = b_k + g_k \quad \text{avec} \quad b_k &= - \int_0^{2^{-k}} \frac{d}{dt} (u(z + t\nu)) dt \quad \text{et} \\ g_k &= u(z + 2^{-k}\nu). \end{aligned}$$

L'hypothèse sur  $\nabla u$  et la condition  $d(z + t\nu) \gtrsim t$  impliquent immédiatement la condition voulue (i) du lemme 26 sur  $b_k$ .

Supposons  $|r(z)| < 2^{-k}$ ; alors pour  $v$  vecteur unitaire de  $\mathbb{C}^n$  :

$$|D_v g_k(z)| \lesssim \frac{(d(z + 2^{-k}\nu))^\alpha}{\sigma(z + 2^{-k}\nu, v, d(z + 2^{-k}\nu))} \lesssim \frac{2^{-k\alpha}}{\sigma(z + 2^{-k}\nu, v, d(z + 2^{-k}\nu))}.$$

Comme  $z + 2^{-k}\nu \in P(z, d(z + 2^{-k}\nu))$ ,

$\sigma(z + 2^{-k}\nu, v, d(z + 2^{-k}\nu)) \approx \sigma(z, v, d(z + 2^{-k}\nu)) \gtrsim \sigma(z, v, 2^{-k})$   
 et l'estimation (ii) du lemme 26 est montrée.

Supposons  $|r(z)| \geq 2^{-k}$  ; nous avons

$$|\nabla g_k(z)| \lesssim [d(z + 2^{-k}\nu)]^{-1+\alpha} \lesssim d(z)^{-1+\alpha} \lesssim 2^{k(1-\alpha)}.$$

□

### 1.3.2 Estimation de $u$

Dans cette partie nous montrerons donc que la solution  $u$  de l'équation  $\bar{\partial}u = f$  qui est la balayée de  $f$  par le noyau  $K$  (cf (1.1.1)) appartient à des espaces de Lipschitz anisotropes  $\Gamma_\rho^\alpha$  lorsque  $f$  est à coefficients bornés.

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)} \quad \text{où } u^{(k)}(z) = \int_{\Omega} f(\zeta) \wedge K^{(k)}(\zeta, z).$$

L'estimation de  $u^0$  est immédiate ; rappelons en effet que pour  $|h| \ll 1$  et  $z$  près du bord :  $|h|^m \lesssim \mathcal{M}(z, z+h) \lesssim \varepsilon(z, z+h)$ . Nous avons en fait montré en (1.2.1) l'estimation  $\|u^0\|_{\Lambda^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_\infty (\leq \|f\|_\kappa)$ . Par des calculs classiques (analogues à ceux effectués au début de la section 1.2.2), en utilisant (1.2.2) et l'estimation  $\int_{\Omega} |[BM](\zeta, z+h) - [BM](\zeta, z)| d\zeta \lesssim |h| |\ln |h||$ , nous obtenons :

$$|u^0(z+h) - u^0(z)| \lesssim \|f\|_\infty \cdot |h| |\ln |h|| \quad \text{pour } z, z+h \in \Omega.$$

Pour l'étude des autres termes, nous utiliserons la proposition 25. Les  $u^{(k)}$  pour  $k = 0, \dots, n-1$  sont bornés sur  $\Omega$  et, si  $k = 1, \dots, n-1$ ,  $|\nabla u^{(k)}(z)| \lesssim d(z)^{-1+1/m}$  (voir [5] pour les détails de calculs concernant ces résultats).

Nous allons démontrer dans ce paragraphe la proposition suivante, ce qui conclura la preuve du théorème 2.

#### Proposition 27.

$$|D_{z,v}u^{(k)}(z)| \lesssim \|f\|_{L^\infty} \frac{d(z)^\alpha}{\sigma(z, v, d(z))} \quad , \quad \forall \alpha, 0 < \alpha < \frac{1}{m}, \forall k = 1, \dots, n-1.$$

*Preuve de la proposition 27.* – Il suffit de prouver l'estimation de la proposition pour  $k = 1$  et  $k = n-1$ .

$D_{z,v}K^{(n-1)}(\zeta, z) = A_1 + A_2 + A_3$ , avec :

$$A_1 = \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-n+1} \frac{(\partial_\zeta |\zeta - z|^2)}{|\zeta - z|^2} \wedge D_{z,v} \left( (\bar{\partial}_\zeta \tilde{Q})^{n-1} \right)$$

$$A_2 = \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-n+1} \cdot D_{z,v} \left( \frac{\partial_\zeta |\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge (\bar{\partial}_\zeta \tilde{Q})^{n-1}$$

$$A_3 = D_{z,v} \left( \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-n+1} \right) \cdot \frac{(\partial_\zeta |\zeta - z|^2)}{|\zeta - z|^2} \wedge (\bar{\partial}_\zeta \tilde{Q})^{n-1}.$$

Il suffit d'étudier, toujours pour  $z \in \Omega \cap \frac{1}{2}\mathcal{U}$ ,  $\int_{\Omega \cap \mathcal{U}} f(\zeta) \wedge A_j(\zeta, z)$  pour  $j = 1, 2$ . En effet (1.1.2), (1.1.5), (1.1.7) - avec  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  - et (0.3.3) prouvent que

$$A_s = \sum_{|I|=|J|=n-1} \mathcal{A}_{I,J}^{(s)} d\beta_I \wedge d\bar{\beta}_J, \quad s = 1, 2, 3 \quad \text{avec}$$

pour  $I = (i_1, \dots, i_{n-1})$ ,  $J = (j_1, \dots, j_{n-1})$  :

$$|\mathcal{A}_{I,J}^{(1)}| \lesssim \left( \frac{d(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)} \right)^{N-n+1} \cdot \frac{1}{\sigma(\zeta, v, d(\zeta))} \cdot \frac{1}{|\zeta - z|} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma(\zeta, e_{i_p}^{(\ell)}, d(\zeta)) \sigma(\zeta, e_{j_p}^{(\ell)}, d(\zeta))}$$

$$|\mathcal{A}_{I,J}^{(3)}| \lesssim \left( \frac{d(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)} \right)^{N-n} \cdot \frac{1}{\sigma(z, v, \varepsilon(\zeta, z))} \cdot \frac{1}{|\zeta - z|} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma(\zeta, e_{i_p}^{(\ell)}, d(\zeta)) \sigma(\zeta, e_{j_p}^{(\ell)}, d(\zeta))}$$

$$|\mathcal{A}_{I,J}^{(2)}| \lesssim \left( \frac{d(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)} \right)^{N-n+1} \cdot \frac{1}{|\zeta - z|^2} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma(\zeta, e_{i_p}^{(\ell)}, d(\zeta)) \sigma(\zeta, e_{j_p}^{(\ell)}, d(\zeta))}.$$

Comme  $d(\zeta) \lesssim \varepsilon(\zeta, z)$  et, pour  $\zeta \in \mathcal{C}^\ell \subset P(z, \gamma 2^\ell d(z))$ , on a :

$$\sigma(z, v, \varepsilon(\zeta, z)) \approx \sigma(\zeta, v, \varepsilon(\zeta, z)) \gtrsim \sigma(\zeta, v, d(\zeta)),$$

il est inutile de considérer  $A_3$ .

Nous avons (cf. (0.2.4)),  $\sigma(\zeta, v, d(\zeta)) \gtrsim (d(\zeta)/2^\ell d(z)) \sigma(\zeta, v, \gamma 2^\ell d(z))$  et, pour  $\zeta$  dans  $\mathcal{C}^\ell$ , on a

$$\sigma(\zeta, v, \gamma 2^\ell d(z)) \approx \sigma(z, v, \gamma 2^\ell d(z)) \gtrsim 2^{\ell/m} \sigma(z, v, d(z)).$$

Utilisant (0.2.4) comme dans la section 1.2.4, nous obtenons en notant toujours  $\sigma_j(z, 2^\ell d(z))$  ou même  $\sigma_j$  pour  $\sigma(z, e_j^{(\ell)}, \gamma 2^\ell d(z))$  :

$$|\mathcal{A}_{I,J}^{(1)}| \lesssim \frac{1}{2^{\ell/m} \sigma(z, v, d(z))} \frac{1}{|\zeta - z|} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{i_p}(z, 2^\ell d(z)) \sigma_{j_p}(z, 2^\ell d(z))}, \quad z \in \Omega \cap \frac{1}{2}\mathcal{U}, \zeta \in \mathcal{C}^\ell$$

$$|\mathcal{A}_{I,J}^{(2)}| \lesssim \frac{1}{|\zeta - z|^2} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{i_p}(z, 2^\ell d(z)) \sigma_{j_p}(z, 2^\ell d(z))}, \quad z \in \Omega \cap \frac{1}{2}\mathcal{U}, \zeta \in \mathcal{C}^\ell \quad (1.3.1)$$

où  $1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq n$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-1} \leq n$ .

• Soient, pour  $I, J$  donnés,  $i_n, j_n$  tels que  $\{i_1, \dots, i_n\} = \{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$ . Posons  $\rho_j = |\beta_j - b_j|$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$  (avec les notations du paragraphe 1.1.2).

Si  $i_n = j_n$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^0} |\mathcal{A}_{I,J}^{(1)}| &\lesssim \frac{1}{\sigma(z, v, d(z))} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{i_p}(z, d(z))^2} \int_{\rho_j < \sigma_j} \prod_{p=1}^{n-1} \rho_{i_p} d\rho_{i_p} \cdot d\rho_{i_n} \\ &\lesssim \frac{\sigma_{i_n}(z, d(z))}{\sigma(z, v, d(z))} \lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z, v, d(z))}. \end{aligned}$$

Si  $i_n \neq j_n$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^0} |\mathcal{A}_{I,J}^{(1)}| &\lesssim \frac{1}{\sigma(z, v, d(z))} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{i_p} \sigma_{j_p}} \int_{\rho_j < \sigma_j} \prod_{k \neq i_n, j_n} \rho_k d\rho_k \cdot \rho_{i_n} d\rho_{i_n} d\rho_{j_n} \\ &\lesssim \frac{\sigma_{i_n}(z, d(z))}{\sigma(z, v, d(z))} \lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z, v, d(z))}. \end{aligned}$$

Par suite

$$I_1^{(0)} := \left| \int_{\mathcal{C}^0} f(\zeta) \wedge A_1(\zeta, z) \right| \lesssim \|f\|_\infty \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z, v, d(z))}. \quad (1.3.2)$$

Dans l'estimation de  $I_1^{(\ell)} := \left| \int_{\mathcal{C}^{(\ell)}} f(\zeta) \wedge A_1(\zeta, z) \right|$ , nous allons accepter une perte en  $d(z)^{-\eta}$ ,  $\eta$  arbitrairement petit, afin d'assurer la convergence de la série  $\sum I_1^\ell$ .

Puisque  $\Omega$  est borné, et que  $|\zeta - z| \approx |\zeta - z| + 2^\ell d(z)$  si  $\zeta \in \mathcal{C}^\ell$ ,  $\ell \geq 1$ , nous obtenons, en supposant  $i_n = j_n$  par exemple :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^\ell} |\mathcal{A}_{I,J}^{(1)}| &\lesssim \frac{1}{2^{\ell/m} \sigma(z, v, d(z))} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(\sigma_{i_p}(z, 2^\ell d(z)))^2} \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{|\zeta - z|^\eta d\lambda(\zeta)}{(|\zeta - z| + 2^\ell d(z))^{1+\eta}} \\ &\lesssim \frac{1}{2^{\ell/m} \sigma(z, v, d(z))} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(\sigma_{i_p}(z, 2^\ell d(z)))^2} \cdot \frac{1}{(2^\ell d(z))^\eta} \int_{\rho_j < \sigma_j} \prod_{p=1}^{n-1} \rho_{i_p} d\rho_{i_p} \cdot d\rho_{i_n} \\ &\lesssim \frac{\sigma_{i_n}(z, 2^\ell d(z))}{2^{\ell/m} \sigma(z, v, d(z)) (2^\ell d(z))^\eta} \lesssim \frac{d(z)^{\frac{1}{m} - \eta}}{2^{\ell\eta} \sigma(z, v, d(z))}. \end{aligned}$$

Les calculs sont analogues si  $i_n \neq j_n$ , en sorte que

$$I_1^{(\ell)} \lesssim \|f\|_\infty \frac{d(z)^{\frac{1}{m} - \eta}}{2^{\ell\eta} \sigma(z, v, d(z))}, \quad \eta > 0, \quad \text{arbitrairement petit.} \quad (1.3.3)$$

• Pour l'étude de  $I_2 := \int_{\Omega \cap \mathcal{U}} f(\zeta) \wedge A_2(\zeta, z)$ , les dérivations portent sur la partie isotrope (i.e. sur le terme  $|\zeta - z|$  qui représente la distance euclidienne dans  $\mathbb{C}^n$ ), donc l'exploitation de la géométrie a peu de chance d'être optimale pour ce terme. Nous pourrions faire apparaître de manière naturelle le terme  $\sigma(z, v, d(z))$  dans nos calculs en écrivant  $|\zeta - z|$  dans une  $d(z)$ -base extrémale. Dans ce cas,

$$|D_{z,v}(|z - \zeta|^2)| \leq \sum_{i=1}^n |v_i| |\zeta_i - z_i|.$$

Alors, comme  $\frac{v_i}{\sigma_i(z, d(z))} \lesssim \frac{1}{\sigma(z, v, d(z))}$  on obtient

$$|D_{z,v}(|z - \zeta|^2)| \lesssim \frac{1}{\sigma(z, v, d(z))} \sum_{i=1}^n \frac{|\zeta_i - z_i|}{\sigma_i(z, d(z))}.$$

Cela ne permet cependant pas d'obtenir une meilleure estimation. Pour simplifier la preuve, nous allons donc introduire artificiellement le terme  $\sigma(z, v, d(z))$  dans nos calculs : nous utilisons (1.3.1) et la majoration  $\sigma(z, v, d(z)) \lesssim d(z)^{1/m}$  et nous écrivons, pour  $I, J$  tels que  $i_n = j_n$  par exemple :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^0} |\mathcal{A}_{I,J}^{(2)}| &\lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z, v, d(z))} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(\sigma_{i_p})^2} \int_{\rho_j < \sigma_j} \prod_{p=1}^{n-1} \rho_{i_p} d\rho_{i_p} \cdot \frac{d\rho_{i_n}}{\rho_{i_1} + \rho_{i_n}} \\ &\lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z, v, d(z))} \cdot \frac{1}{\sigma_{i_1}} \int_{\substack{\rho_{i_1} < \sigma_{i_1} \\ \rho_{i_n} < \sigma_{i_n}}} d\rho_{i_1} \frac{d\rho_{i_n}}{\rho_{i_1} + \rho_{i_n}} \\ &\lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z, v, d(z))} \cdot \frac{1}{\sigma_{i_1}} \int_{\rho_{i_1} < \sigma_{i_1}} (-\ln(\rho_{i_1})) d\rho_{i_1} \\ &\lesssim \frac{d(z)^{1/m} |\ln d(z)|}{\sigma(z, v, d(z))}. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

(Si  $i_n \neq j_n$  ou bien si  $i_n = j_n$  mais  $\sigma_{i_n} \leq \max_{1 \leq p \leq n-1} \sigma_{i_p}$ , nous obtenons une estimation en :  $O(1)d(z)^{1/m}/\sigma(z, v, d(z))$ ).

Par des calculs analogues à ceux menant à (1.3.3), en tenant encore compte de :  $|\zeta - z| \approx |\zeta - z| + 2^\ell d(z)$  si  $\zeta \in \mathcal{C}^\ell$  lorsque  $\ell \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^\ell} |\mathcal{A}_{I,J}^{(2)}| &\lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z, v, d(z))} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(\sigma_{i_p}(z, 2^\ell d(z)))^2} \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{d\zeta}{(|\zeta - z| + 2^\ell d(z))^{2+\eta}} \\ &\lesssim \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z, v, d(z))} \frac{1}{(2^\ell d(z))^\eta} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma_{i_p}^2} \int_{\rho_j < \sigma_j = \sigma_j(z, 2^\ell d(z))} \prod_{p=1}^{n-1} \rho_{i_p} d\rho_{i_p} \cdot \frac{d\rho_{i_n}}{\rho_{i_1} + \rho_{i_n}} \\ &\lesssim \frac{d(z)^{\frac{1}{m} - \eta'}}{2^{\ell\eta} \sigma(z, v, d(z))}. \end{aligned}$$

Et un résultat analogue si  $i_n \neq j_n$ . D'où

$$I_2 \lesssim \|f\|_\infty \frac{d(z)^{\frac{1}{m} - \eta}}{\sigma(z, v, d(z))}, \quad \eta > 0 \text{ arbitrairement petit.} \tag{1.3.5}$$

Les calculs concernant  $D_{z,v}u^1$  conduisent à la même estimation pour

$$\left| \int_{\Omega \cap \mathcal{U}} f \wedge D_{z,v}K^{(1)} \right|,$$

ce qui achève la preuve de la proposition 27, et donc la preuve du théorème 2.  $\square$

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous avons en fait la possibilité d'améliorer ce résultat.

Le terme  $u^0$ , comme on l'a énoncé au paragraphe 1.3.2, vérifie une estimation meilleure que celle souhaitée.

Pour  $u^1$  et  $u^{(n-1)}$ , nous utilisons le résultat suivant :

**Proposition 28.** *Si  $u$  est une fonction bornée, de classe  $C^1$  sur  $\Omega$  telle que*

$$|\nabla u(z)| \lesssim d(z)^{-1+\frac{1}{m}} \quad \text{et } \forall v \in \mathbb{C}^n, |v| = 1, |D_v u(z)| \lesssim \frac{d(z)^{\frac{1}{m}} (\ln d(z))^2}{\sigma(z, v, d(z))}, \text{ alors}$$

$$|u(\zeta) - u(z)| \lesssim (\rho(\zeta, z))^{\frac{1}{m}} (\ln(\rho(\zeta, z)))^2, \quad \zeta, z \in \Omega .$$

pour démontrer cette proposition on adapte le lemme 26 avec, à la place des conditions (i), (ii), (iii) :

- (i')  $\|b_k\|_\infty \lesssim 2^{-k/m}$ ,
- (ii') si  $|r(z)| < 2^{-k}$ ,  $v \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|v\| = 1$  :  $|D_v g_k(z)| \lesssim k^2 \sigma(z, v, 2^{-k})^{-1} \cdot 2^{-k/m}$ ,
- (iii') si  $|r(z)| \geq 2^{-k}$ ,  $|\nabla g_k(z)| \lesssim 2^k \cdot 2^{-k/m}$ .

Maintenant, nous pouvons utiliser la proposition 28. Nous examinons donc les termes que nous avons étudiés dans la preuve de la proposition 27. Nous pouvons en fait introduire au numérateur et au dénominateur du  $\ln(|\zeta - z|)$  au lieu du  $|\zeta - z|$ . Dans ce cas, on obtient une expression en

$$\int_{\mathcal{C}^\ell} |\mathcal{A}_{I,J}^{(2)}| \lesssim \|f\|_\infty \frac{d(z)^{1/m}}{\sigma(z, v, d(z))} \frac{1}{|\ln(2^\ell d(z))|} \\ \times \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(\sigma_{i_p} \sigma_{j_p})} \int_{\rho_j < \sigma_j} \prod_{k \neq i_n, j_n} \rho_k d\rho_k \cdot d\rho_{j_n} \ln(\rho_{i_n}) d\rho_{i_n} .$$

De plus, puisqu'on s'est placé sur un voisinage du bord  $\mathcal{U}$  petit, on s'intéresse de fait aux  $\ell$  tels que  $2^\ell d(z) \leq 1$ . Donc la sommation en  $\ell$  de ces termes impose un  $|\ln(d(z))|$  de plus au numérateur et on obtient :

$$I_2 \lesssim \|f\|_\infty \frac{d(z)^{\frac{1}{m}}}{\sigma(z, v, d(z))} |\ln(|d(z)|)|^2 .$$

Le terme  $I_1$  se traite de la même manière et donne même une meilleure estimation. Nous démontrons ainsi le résultat (0.0.2) Cela n'est cependant pas satisfaisant puisqu'on n'obtient pas le résultat optimal, et la présence de ce logarithme apparaît ainsi plutôt comme une limite des possibilités de ce noyau.

## Chapitre 2

# Formule de représentation intégrale en métrique de Bergman

Nous allons donner une formule de représentation intégrale pour les  $(p, q)$ -formes. Elle sera construite sur le modèle de [2], c'est-à-dire une formule d'homotopie avec un noyau à poids. L'intérêt de ce noyau est qu'il est intrinsèque d'une part : nous pouvons utiliser n'importe quel choix de coordonnées pour l'estimer. Ce sera particulièrement utile lorsque nous utiliserons les  $\varepsilon$ -bases extrémales de J. McNeal. D'autre part, ce noyau est géométrique, donc approprié pour des estimations avec la pseudométrie  $\rho$ . Nous allons commencer par montrer qu'il nous permet d'obtenir les solutions de l'équation (0.0.1) :

### 2.1 Formule de type Koppelman-Berndtsson-Andersson

Nous définissons une section du fibré de Cauchy-Leray qui fait intervenir la métrique de Bergman :

**Définition 29.** *Pour  $\zeta, z \in \Omega$ , nous posons*

$$s(\zeta, z) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_{j,k}(\zeta) \overline{(\zeta_k - z_k)} d(\zeta_j - z_j). \quad (2.1.1)$$

C'est par ce choix de section que notre noyau diffère de celui du premier chapitre. Nous reprenons pour fonction  $Q$  :

$$Q(\zeta, z) = (Q_1, \dots, Q_n) \text{ où } Q_j = \frac{1}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \int_0^1 \partial_{Z_j} \mathcal{B}(\zeta, \zeta + t(z - \zeta)) dt.$$

Où la notation  $\partial_{Z_j}$  signifie que l'on dérive par rapport à la  $j^{\text{ième}}$  coordonnée de la seconde variable.

**Remarque 6.** *Nous faisons encore les identifications suivantes*

$$Q : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus \Delta_{\partial\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

vue comme application dont les composantes sont les  $Q_j$  et

$$Q = \sum_{j=1}^n Q_j d(\zeta_j - z_j).$$

Nous utilisons le même type d'identification pour  $s$ , on voit alors que  $\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle$  est une approximation à l'ordre 2 de la distance géodésique au carré pour la métrique de Bergman. En effet, on a :

$$\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(\zeta) (\zeta_i - z_i) \overline{(\zeta_j - z_j)}.$$

On peut interpréter cette formule comme la norme au carré du vecteur  $z - \zeta$  vu comme vecteur dans  $T_\zeta(\Omega)$ . Cette norme est une approximation à l'ordre deux de la longueur  $L$  au carré des chemins géodésiques. Plus précisément, si nous considérons le chemin géodésique  $\gamma$  démarrant en  $\zeta$ , de vecteur tangent  $z - \zeta$  en  $\zeta$ , alors, si nous le suivons durant un temps 1, on aura  $(L_\gamma)^2 = \langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle + o(\zeta - z)^2$  (cf [8]). C'est en fait une des raisons pour lesquelles nous avons choisi  $s$  sous cette forme. De plus, l'expression  $\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle$  est en fait le crochet de dualité  $\langle \sigma, \sigma^* \rangle$  pour la métrique infinitésimale sur  $T_\zeta(\Omega)$  où  $\sigma^*$  identifié à  $s$  est une section à valeurs dans le fibré cotangent des  $(1, 1)$ -formes ([15] [9]).

Notons que dans [20], I. Lieb et J. Michel ont choisi une section définie à l'aide d'une métrique hermitienne non nécessairement égale à la métrique usuelle de  $\mathbb{C}^n$  pour obtenir une formule généralisée de type Bochner-Martinelli-Koppelman. Nous posons :

$$\begin{aligned} K(\zeta, z) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-k} \left( \frac{s \wedge (dQ)^k \wedge (ds)^{n-k-1}}{\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle^{n-k}} \right) \quad (2.1.2) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} K^k(\zeta, z) \end{aligned}$$

où  $c_{k,n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+1} C_N^k$ .

On notera  $dK = P$ .

Dans toute la suite, nous considérons uniquement ce noyau pour résoudre l'équation de Cauchy-Riemann, c'est pourquoi nous gardons la même notation  $K$  pour le noyau. Nous tenons à préciser que, puisque la fonction de Bergman est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Omega$ , les coefficients  $g_{i,j}$  le sont aussi. Donc, à l'intérieur de  $\Omega$  et en dehors d'un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $\partial\Omega$  comme précisé dans la section 0.2.2, il existe  $\lambda$  et  $\mu$  réels  $> 0$  tels que,

pour tout  $\zeta$  dans  $\Omega \setminus \mathcal{U}$ , la matrice  $(g_{i,j}(\zeta))$  ait ses valeurs propres minorées par  $\lambda$  et majorées par  $\mu$ , i.e. uniformément en  $v = (v_1, \dots, v_n)$  dans  $\mathbb{C}^n$  et en  $\zeta$  dans  $\Omega \setminus \mathcal{U}$  :

$$\sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(\zeta) v_i \overline{v_j} \approx |v|_{\text{eucl}}^2 . \quad (2.1.3)$$

Cela signifie donc que notre section est comparable à l'intérieur du domaine à la section de Bochner-Martinelli.

Nous pouvons voir que ce noyau est très proche de celui donné au premier chapitre puisque le choix du poids est le même. Nous ne pouvons pas cependant appliquer directement les résultats de Berndtsson-Andersson. Ils donnent une condition suffisante que notre section  $s$  ne vérifie pas. Nous utilisons ici la métrique de Bergman qui explose quand on se rapproche du bord. Notre section  $s$  va donc vérifier la seconde condition de (0.4.1). En effet, si on se place en un point  $\zeta$  de  $\Omega \cap \mathcal{U}$  où  $\mathcal{U}$  est un voisinage de  $\partial\Omega$ , alors, d'après le théorème de J. McNeal (0.3.5), en prenant une  $d(\zeta)$ -base extrémale associée :

$$\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(\zeta) (\zeta_i - z_i) \overline{(\zeta_j - z_j)} \approx \left( \sum_{i=1}^n \frac{|\zeta_i - z_i|}{\sigma(\zeta, v_i, d(\zeta))} \right)^2 . \quad (2.1.4)$$

Puisque  $\frac{1}{(d(\zeta))^{\frac{1}{m}}} \lesssim \frac{1}{\sigma(\zeta, v_i, d(\zeta))} \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , la seconde condition de 0.4.1 est bien vérifiée. Nous avons plus précisément :

$$\exists c, \forall \zeta \in \Omega \cap \mathcal{U}, \forall z \in \Omega, |\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle| \geq c |\zeta - z|^2 . \quad (2.1.5)$$

Mais il n'y a aucune chance qu'on puisse obtenir la première condition de (0.4.1) puisque  $\frac{1}{(d(\zeta))}$  n'est pas bornée. Nous allons donc démontrer de manière directe le théorème 3 dont nous rappelons l'énoncé :

**Théorème (3).** *Nous reprenons les notations ci-dessus. Pour toute  $(p,q)$ -forme  $f$  sur  $\Omega$ , on a :*

$$f(z) = (-1)^{p+q+1} \left( \int_{\zeta \in \Omega} \bar{\partial}_{\zeta} f(\zeta) \wedge K_{p,q}(\zeta, z) + \bar{\partial}_z \int_{\zeta \in \Omega} f(\zeta) \wedge K_{p,q-1}(\zeta, z) \right) \quad (2.1.6)$$

pour  $q > 0$  et

$$f(z) = (-1)^{p+1} \left( \int_{\zeta \in \Omega} \bar{\partial}_{\zeta} f(\zeta) \wedge K_{p,0}(\zeta, z) + \int_{\zeta \in \Omega} f(\zeta) \wedge P_{p,0}(\zeta, z) \right) \quad (2.1.7)$$

pour  $q = 0$ . Les termes  $K_{p,q}$  signifient de bidegré  $(p, q)$  en  $z$  et  $(n-p, n-q-1)$  en  $\zeta$ . Il en est de même pour  $P$ .

*Preuve du théorème 3.* – Nous allons démontrer ce théorème de manière classique, i.e. en testant contre une forme test  $\phi$ , puis utiliser Stokes pour montrer que :

$$\int_{z \in \Omega} f \wedge \phi = \int_{z \in \Omega} \phi \wedge \left( \int_{\zeta \in \Omega} \bar{\partial} f \wedge K \right) + \int_{z \in \Omega} \phi \wedge \bar{\partial} \left( \int_{\zeta \in \Omega} f \wedge K \right).$$

Pour cela, il faut supposer en un premier temps que  $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  puis appliquer un schéma classique d'approximation. Soit  $\phi$  une  $(n-p, n-q)$ -forme à support compact dans  $\Omega$ . Pour un  $\eta$  fixé, on note  $\Omega_\eta = \{z \in \Omega, r(z) < -\eta\}$ . Nous choisissons  $\eta$  suffisamment petit pour que le support de  $\phi$  soit relativement compact dans  $\Omega_\eta$ . On pose alors :

$$G = \Omega_\eta \times \Omega_\eta \setminus \{(z, \zeta) / |\zeta - z| \leq \varepsilon\}.$$

$\varepsilon$  est choisi assez petit par rapport au support de  $\phi$ , de sorte que :

$$\partial G \cap (\text{supp} \phi \times \bar{\Omega}_\eta) = (\Omega_\eta \times \partial \Omega_\eta \cup \{|\zeta - z| = \varepsilon\}) \cap (\text{supp} \phi \times \bar{\Omega}_\eta).$$

Nous appliquons alors le théorème de Stokes à la forme différentielle  $f(\zeta) \wedge K(\zeta, z) \wedge \phi(z)$  sur l'ouvert  $G$ . D'où, en notant  $H(\zeta, z) = f(\zeta) \wedge K(\zeta, z) \wedge \phi(z)$  :

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{(z, \zeta) \in \Omega_\eta \times \partial \Omega_\eta} H(\zeta, z)}_I - \underbrace{\int_{\substack{|\zeta - z| = \varepsilon \\ (z, \zeta) \in \Omega_\eta \times \Omega_\eta}} H(\zeta, z)}_{II} &= \int_{(z, \zeta) \in G} d_{z, \zeta}(H(\zeta, z)) \\ &= \underbrace{\int_{(z, \zeta) \in G} (d_{z, \zeta} f(\zeta)) \wedge K(\zeta, z) \wedge \phi(z)}_{III} \\ &+ \underbrace{(-1)^{p+q} \int_{(z, \zeta) \in G} f(\zeta) \wedge (d_{z, \zeta} K(\zeta, z)) \wedge \phi(z)}_{IV} \\ &+ \underbrace{(-1)^{p+q+1} \int_{(z, \zeta) \in G} f(\zeta) \wedge K(\zeta, z) \wedge (d_z \phi(z))}_{V}. \end{aligned}$$

Pour prouver le résultat, nous devons donc montrer que :  $II$  tend vers  $\int_\Omega f \wedge \phi$ , que  $III$ ,  $IV$ ,  $V$  convergent quand  $\eta$  et  $\varepsilon$  tendent vers 0 et que  $I$  tend vers 0 quand  $\eta$  tend vers 0. Commençons par déterminer  $P$ . La condition (0.4.1) sert uniquement à faire converger les intégrales. Nous pouvons donc déduire directement des résultats de Berndtsson et Andersson le

**Lemme 30.**  $dK = P$  où  $P = c_{n,n} \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-n} (dQ)^n$ .

*Preuve du lemme 30.* – Voir [2], section 2, expression (18) avec  $F(w) = w^N$  où  $w \in \mathbb{C}$  puisque  $Q$  vérifie :  $\langle Q(\zeta, z), \zeta - z \rangle + 1 = \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}$ .  $\square$

Le vrai travail consiste donc à obtenir dans ces intégrales des singularités au dénominateur qui soient intégrables. Nous allons le montrer à l'aide des estimations de la métrique de Bergman dans les convexes de type fini.

**Lemme 31.** *Pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ;  $z \in L \subset\subset \Omega$ ,  $\zeta \in \Omega$  :*

$$K^{(k)}(\zeta, z) = \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-k} \left( \frac{s \wedge (dQ)^k \wedge (ds)^{n-1-k}}{\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle^{n-k}} \right) = O(|\zeta - z|^{1-2n}). \quad (2.1.8)$$

*Preuve du lemme 31.* – Les hypothèses 0.4.1 permettaient d'obtenir ce résultat. Même si la section  $s$  ne les vérifie plus, le contrôle de la métrique de Bergman par les  $v$ -rayons d'une part, et le contrôle du poids lorsqu'on s'approche du bord d'autre part vont permettre la majoration des termes du noyau. Nous savons d'après (0.2.3) que  $\frac{1}{\sigma(z, v, d(z))} \lesssim \frac{1}{d(z)}$ . En le combinant avec (0.3.4), nous obtenons

$$|g_{ij}(\zeta)| \lesssim \left( \frac{1}{d(\zeta)} \right)^2 \text{ et } |d_\zeta(g_{ij}(\zeta))| \lesssim \left( \frac{1}{d(\zeta)} \right)^3.$$

Ainsi, les termes de  $s$  font apparaître au dénominateur des termes de l'ordre de la distance au bord de  $\zeta$ . Cela empêche a priori l'intégrale de converger. La présence du poids est importante car il peut compenser ce type de terme quand  $\zeta \rightarrow \partial\Omega$ . En effet,  $z$  est dans un compact  $L$ , et on a :

$$\left( \frac{|\mathcal{B}(\zeta, z)|}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right) \lesssim \frac{d(\zeta)}{\varepsilon(\zeta, z)} \leq C d(\zeta).$$

où  $C$  ne dépend que de  $L$  et provient de la minoration de  $\varepsilon(\zeta, z)$  puisque  $z$  est dans  $L$  fixé.

Ainsi, on peut majorer en norme :

- $s$  par  $\frac{|\zeta - z|}{(d(\zeta))^2}$ ,
- $ds$  par  $\frac{|\zeta - z|}{(d(\zeta))^3}$  ou par  $\frac{1}{(d(\zeta))^2}$  suivant le terme sur lequel porte la dérivation,
- $dQ$  par  $\frac{1}{(d(\zeta))^2}$ . (Deux dérivations du noyau de Bergman interviennent dans  $dQ$ ).

On choisit alors  $N$  assez grand ( $N > 6n$  suffit) pour que le poids absorbe les facteurs en  $\frac{1}{(d(\zeta))^3}$ . Il faut alors tenir compte du dénominateur  $\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle^{n-k}$  où  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . D'après les résultats (2.1.3) et (2.1.5), nous savons qu'il est minoré à une constante près par  $|\zeta - z|^{2n-2k}$  et nous obtenons le résultat.  $\square$

Nous pouvons donc faire converger  $III$  et  $V$  en  $\varepsilon$  et considérer qu'il s'agit d'intégrales sur  $\Omega_\eta \times \Omega_\eta$ . Nous faisons alors converger en  $\eta$  et on obtient ainsi des intégrales sur  $\Omega \times \Omega$ . Montrons maintenant :

**Lemme 32.**

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{(z, \zeta) \in \Omega_\eta \times \partial\Omega_\eta} f(\zeta) \wedge K(\zeta, z) \wedge \phi(z) = 0$$

*Preuve du lemme 32.* – Comme nous venons de le voir, le noyau vérifie  $|K(\zeta, z)| < \frac{d(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n-1}}$ . On peut même mettre une puissance aussi grande que l'on veut en  $d(\zeta)$  en augmentant la valeur de  $N$ . Alors, puisque  $z \in L$  compact, il existe un  $\eta_0$  tel que, pour  $\eta < \eta_0$ , on ait

$$\sup_{\substack{z \in L \\ \zeta \in \partial\Omega_\eta}} |K(\zeta, z)| \leq C\eta.$$

On en déduit que  $I$  tend vers 0. □

$Q(\zeta, z)$  est holomorphe en  $z$ , donc, d'après le lemme 30,  $(dK)_{p,q} = 0$  pour  $q > 0$ . On obtient ainsi finalement que  $IV = 0$  pour  $q > 0$ . Par contre, on doit garder ce terme pour  $q = 0$ .

Pour l'étude de  $V$ , nous appliquons le théorème de Stokes par rapport à la variable  $z$  pour obtenir :

$$\int_{\Omega_\eta \times \Omega_\eta} d\phi \wedge f \wedge K = (-1)^{p+q+1} \int_{\Omega_\eta} \phi \wedge d_z \int_{\Omega_\eta} f \wedge K.$$

Nous pouvons alors faire tendre  $\eta$  vers 0 et obtenir des intégrales sur  $\Omega$ .

**Remarque 7.** *On sait d'après la définition du noyau 2.1.2 que  $f \wedge K(\zeta, z) \wedge \phi$  est de degré total  $n$  en  $d\zeta$  et  $dz$ . Pour des raisons de bidegré, il est donc possible de remplacer partout  $d$  par  $\bar{\partial}$ .*

En particulier, cette remarque implique que le terme  $V$  n'interviendra pas dans le second membre si  $q = 0$ .

Il reste enfin à considérer la limite de  $II$ . On a :

**Lemme 33.**

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{|\zeta-z|=\varepsilon \\ (z,\zeta) \in \Omega_\eta \times \Omega_\eta}} H(\zeta, z) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega_\eta} \phi \wedge f = \int_{\Omega} \phi \wedge f$$

*Preuve du lemme 33.* – Pour  $\varepsilon$  assez petit, la condition  $|\zeta - z| = \varepsilon$  implique qu'alors les hypothèses de [2] sont vérifiées dans ce cas. En effet,  $\zeta$  appartient à un voisinage de  $L$ , soit  $V_L$  que l'on peut supposer relativement compact dans  $\Omega$ , donc (0.4.1) est vérifié pour les domaines  $\Omega_\eta$ ,  $0 < \eta \ll 1$ . La limite est ainsi la même que dans [2], ce qui achève la démonstration du lemme. □

Il ne reste plus qu'à collecter tous les résultats ci-dessus en séparant les cas  $q = 0$  et  $q > 0$  pour obtenir le théorème. □

**Remarque 8.** *En toute rigueur, nous savons estimer le comportement de ce noyau uniquement lorsqu'on se trouve dans un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $\partial\Omega$  assez petit puisque les résultats de McNeal ne sont valables que dans ce voisinage. Cela ne pose pas de problème car l'obstruction pour obtenir les estimations Höldériennes se situent au bord du domaine : Pour les formes à support compact, on peut trouver une solution de l'équation (0.0.1) à l'aide d'un noyau de Bochner-Martinelli puisqu'il n'y a pas de terme au bord et on trouve une solution dans  $\Lambda^1$ . Une autre manière de régler ce problème est de considérer qu'en dehors du voisinage  $\mathcal{U}$ , la pseudométrie devient euclidienne, et les estimations sont de nouveau vérifiées, avec des constantes qui font intervenir le diamètre de  $\Omega$  et le maximum de la fonction de Bergman sur un compact de  $\Omega$ .*

## 2.2 Changement de coordonnées

Nous allons vérifier que l'expression  $s = \sum_{j,k=1}^n g_{jk}(\zeta) \overline{(\zeta_k - z_k)} d\zeta_j$  est invariante par changement unitaire de base. En effet, un moyen classique d'estimer une fonction est d'utiliser des critères de type Hardy-Littlewood en dérivant. Ici, pour utiliser pleinement les résultats géométriques de McNeal dans les convexes de type fini, nous avons besoin de nous placer successivement dans des  $2^\ell d(z)$ -bases de McNeal, et d'exprimer les dérivées et les formes différentielles par rapport à une de ces  $2^\ell d(z)$ -bases extrémales fixée. Nous allons nous assurer "à la main" que l'expression de  $s$  est bien intrinsèque.

Nous notons  $U$  le changement de coordonnées,  $\zeta_i$  et  $z_i$  sont les anciennes coordonnées,  $\tilde{\zeta}_i$  et  $\tilde{z}_i$  les nouvelles. Ainsi :

$$s = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k} \ln(\mathcal{B}(\zeta, \zeta)) \overline{\zeta_k - z_k} d\zeta_j \quad (2.2.1)$$

Le changement de coordonnées nous donne  $\zeta_k = \sum_{j=1}^n u_{jk}^* \tilde{\zeta}_j$ , ce qui entraîne :  $d\zeta_k = \sum_{h=1}^n u_{hk}^* d\tilde{\zeta}_h$  et  $\frac{\partial}{\partial \zeta_k} = \sum_{p=1}^n u_{kp} \frac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}_p}$ .

**Remarque 9.** *Puisque le déterminant de la matrice jacobienne associée au changement de coordonnées unitaire est égal à 1, nous avons :  $\mathcal{B}(\zeta, \zeta) = \mathcal{B}(\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta})$ .*

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} s &= \sum_{j,k} \left( \sum_{p,q} u_{jp} \overline{u_{kq}} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\zeta}_p \partial \tilde{\zeta}_q} \ln(\mathcal{B}(\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta})) (\langle \sum_{\ell} \overline{u_{\ell k}^* \tilde{\zeta}_\ell - \tilde{z}_\ell} \rangle) \left( \sum_h u_{hj}^* d\tilde{\zeta}_h \right) \right) \\ &= \sum_{j,k} \left( \sum_{p,q,h,\ell} (u_{jp} u_{hj}^*) (\overline{u_{kq} u_{\ell k}^*}) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\zeta}_p \partial \tilde{\zeta}_q} \ln(\mathcal{B}(\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta})) (\langle \overline{\tilde{\zeta}_\ell - \tilde{z}_\ell} \rangle) d\tilde{\zeta}_h \right) \\ &= \sum_{h,\ell} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\zeta}_h \partial \tilde{\zeta}_\ell} \ln(\mathcal{B}(\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta})) (\langle \overline{\tilde{\zeta}_\ell - \tilde{z}_\ell} \rangle) d\tilde{\zeta}_h. \end{aligned}$$

Nous avons bien une expression invariante par changement de coordonnées, et nous pourrions montrer de même que  $Q$  est invariant.

# Chapitre 3

## Application 1 : Estimée anisotrope optimale

Nous montrons dans ce chapitre comment utiliser le noyau du chapitre précédent, en particulier nous verrons à quel point il se comporte bien lors des dérivations et donc permet une estimation aisée des termes correspondants.

### 3.1 Une définition équivalente de $\Gamma_{\rho}^{\frac{1}{m}}$

Puisque nous avons muni  $\Omega$  d'une pseudométrie  $\rho(\zeta, z)$ , il est logique de considérer les espaces de Lipschitz associés. Nous rappelons la définition donnée par McNeal et Stein dans [25]. (La notation  $\sigma(z, \Lambda, \eta)^{\ell}$  est rappelée en (0.3.2)).

**Définition 34.** Une fonction  $u$  appartient à  $\Gamma_{\rho}^{\alpha}$ ,  $0 < \alpha < \infty$ , si, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe des fonctions  $b_k$  et  $g_k$  telles que

- (i)  $u = b_k + g_k$ ,
- (ii)  $\|b_k\|_{L^{\infty}} \lesssim 2^{-k\alpha}$ ,
- (iii) Si  $|r(z)| < 2^{-k}$ , pour  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  où  $\lambda_i \in S^n$  pour  $i = \{1, \dots, N\}$ , et pour  $l$  tel que  $|l| > m\alpha$

$$|D_{\Lambda}^l g_k(z)| \lesssim \sigma(z, \Lambda, 2^{-k})^{-l} \cdot 2^{-k\alpha}.$$

- (iv) Si  $|r(z)| \geq 2^{-k}$ ,

$$|D^l g_k(z)| \lesssim 2^{|l|k} \cdot 2^{-k\alpha}.$$

On appelle  $\Gamma_{\rho}^{\alpha}$  espace de Lipschitz anisotrope.

Cette définition est équivalente pour  $\alpha < \frac{1}{m}$  au critère naturel  $|u(\zeta) - u(z)| \lesssim (\rho(\zeta, z))^{\alpha}$  (cf [25]).

**Remarque 10.** On ne peut pas prendre  $\alpha = \frac{1}{m}$  dans cette seconde définition, sinon on imposerait une condition trop forte sur toute direction de droite de l'espace tangent  $T_z \mathbb{C}^n$  dont l'ordre de contact avec  $\partial\Omega_{r(z)}$  est maximum (i.e. là où le type est réalisé).

Nous avons cependant besoin, pour  $\alpha = \frac{1}{m}$ , d'une définition plus directe sous la forme de différences d'ordre 2. En effet, le terme  $u^0$  de la solution de l'équation  $\bar{\partial}$  ne peut pas être dérivé, on obtiendrait sinon une intégrale divergente. Il est donc nécessaire de connaître une expression équivalente pour pouvoir faire le calcul directement. Par analogie avec les critères des espaces de Lipschitz usuels, où les définitions de  $\Lambda^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) et  $\Lambda^1$  font apparaître un passage de la différence d'ordre 1 à la différence d'ordre 2, nous posons :

**Définition 35.**  $u \in \Gamma^{\frac{1}{m}}$  si pour tout  $x, h$  tels que  $x, x+h, x-h \in \Omega$ ,

$$|u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)| \lesssim \rho(x, x+h)^{\frac{1}{m}}.$$

**Remarque 11.** Puisque les polydisques sont des domaines symétriques par rapport au centre, cela entraîne  $\mathcal{M}(x, x+h) = \mathcal{M}(x, x-h)$ . Ainsi,  $\rho(x, x+h) \approx \rho(x-h, x)$  (cf (0.2.5)), ce qui signifie que la définition posée est bien cohérente.

Cette définition permet d'éviter le problème indiqué dans la remarque 10, mais n'impose pas de nouvelles conditions pour les directions de droite de  $T_z\Omega$  dont l'ordre de contact avec  $\partial\Omega_{r(z)}$  n'est pas maximum.

Il est d'ailleurs bien connu dans le cas euclidien que, pour  $\alpha < 1$ , les deux résultats suivants sont équivalents (voir [29]) :

$$\begin{aligned} |u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)| &\lesssim |h|^\alpha \\ |u(x+h) - u(x)| &\lesssim |h|^\alpha \end{aligned}$$

Vérifions maintenant que cette nouvelle définition est bien équivalente à celle de McNeal et Stein :

**Proposition 36.**  $\Gamma_{\rho^{\frac{1}{m}}}^{\frac{1}{m}} = \Gamma^{\frac{1}{m}}$ .

*Preuve de la proposition 36.* –

•  $\subset$ ) : Soit  $k$  tel que  $2^{-k} \approx \rho(x, x+h)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} |u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)| &\leq |b_k(x+h) + b_k(x-h) - 2b_k(x)| \\ &\quad + |g_k(x+h) + g_k(x-h) - 2g_k(x)|. \end{aligned}$$

Supposons que  $\rho(x, x+h) = \varepsilon(x, x+h)$ . Alors,  $|r(x)| \lesssim 2^{-k}$ ,  $|r(x+h)| \lesssim 2^{-k}$  et  $|r(x-h)| \lesssim 2^{-k}$ . On peut supposer, sans perte de généralité que ces inégalités sont strictes (il s'agit d'un changement de variable  $k \mapsto k + k_0$ ). Posant  $\lambda = \frac{h}{\|h\|}$ , nous obtenons à l'aide du i) de la définition de  $\Gamma_{\rho^{\frac{1}{m}}}^{\frac{1}{m}}$  :

$$|b_k(x+h) + b_k(x-h) - 2b_k(x)| \leq 3.2^{-\frac{k}{m}}.$$

De plus, à l'aide des formules de Taylor :

$$|g_k(x+h) + g_k(x-h) - 2g_k(x)| \lesssim |D_\lambda^2 g_k(\gamma^+).h^{(2)}| + |D_\lambda^2 g_k(\gamma^-).h^{(2)}|.$$

où  $\gamma^{\pm} \in [x \pm h, x]$ . Le ii) de la définition permet d'écrire :

$$|u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)| \leq 2^{-\frac{k}{m}} + 2^{-\frac{k}{m}} \cdot |h|^2 \cdot \max(\sigma(\gamma^+, \lambda, 2^{-k})^{-2}, \sigma(\gamma^-, \lambda, 2^{-k})^{-2}).$$

Si nous montrons les deux estimations ci-dessous :

**Affirmation 1.**  $\sigma(\gamma^{\pm}, \lambda, 2^{-k}) \approx \sigma(x, \lambda, 2^{-k})$  et  $|h| \leq \sigma(x, \lambda, 2^{-k})$ .

nous obtenons le résultat souhaité :

$$|u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)| \lesssim 2^{-\frac{k}{m}}.$$

*Preuve de l'affirmation 1.* – Comme  $\rho(x, x+h) \lesssim 2^{-k}$ , on a  $\mathcal{M}(x, x \pm h) \lesssim 2^{-k}$  et donc  $x \pm h \in P(x, c2^{-k})$ . Soit :  $|h| \leq \sigma(x, \lambda, 2^{-k})$ , ce qui est la seconde affirmation. Par ailleurs,  $\gamma^{\pm} \in [x \pm h, x]$ , donc  $\mathcal{M}(x, \gamma) \lesssim 2^{-k}$ . Ainsi, d'après la proposition 13,  $\sigma(\gamma, \lambda, 2^{-k}) \approx \sigma(x, \lambda, 2^{-k})$ .  $\square$

Enfin, pour conclure la démonstration de l'inclusion  $\subset$ , nous devons considérer le cas où  $\rho(x, x+h) = |h|$ . Pour cela, nous suivons exactement la même démarche. L'estimation de  $|b_k(x+h) + b_k(x-h) - 2b_k(x)|$  est la même. Pour  $|g_k(x+h) + g_k(x-h) - 2g_k(x)|$ , si  $|r(x)| > 2^{-k}$  (cas *iv*)), le résultat est direct. Si  $|r(x)| < 2^{-k}$ , nous utilisons 14 et on se ramène ainsi au cas précédent.  $\square$

•  $\supset$ ) Une démonstration possible pour donner des propriétés discrètes des espaces de Lipschitz classiques  $\Lambda^1$  est d'utiliser une approximation de l'unité centrée en 0. Nous gardons ici le même état d'esprit, en plus technique : le caractère local est donné par une partition de l'unité sur les polydisques et la symétrie provient d'autres fonctions auxiliaires. Nous jouons alors sur ces deux paramètres pour obtenir le bon  $g_k$  candidat.

Soit  $k \in \mathbb{N}$ , considérons les recouvrements successifs de  $\Omega$  pour  $j \leq k$  :

- pour un voisinage du bord : Soit  $\mathcal{V}_j = \{z / -2 \cdot 2^{-j} < r(z) < 0\}$ . On choisit  $y_1, \dots, y_m \in \Omega$  tels que  $\mathcal{V}_j \subset \cup_{i=1}^m P(y_i, 2^{-j})$ . Les  $y_i$  dépendent bien sûr de  $j$ , mais nous ne le noterons pas de manière explicite pour éviter d'alourdir les notations. On peut supposer qu'il existe  $c$  tel que  $P(y_{i_1}, c2^{-j}) \cap P(y_{i_2}, c2^{-j}) = \emptyset$ . De plus, pour tout  $j$ , il n'y a qu'un nombre fini (indépendant de  $j$ ) de polydisques  $P(y_i, 2^{-j})$  qui contiennent un  $x \in \Omega$  donné.
- Le reste de  $\Omega$  est recouvert par des boules euclidiennes de rayon  $2^{-j}$  qui n'intersectent pas  $\frac{1}{2}\mathcal{V}_j$ .

Pour recouvrir  $\Omega$ , nous choisissons comme ouverts les intersections de ces polydisques pour  $j = 1, \dots, k$ . Nous notons  $\mathcal{U}_k$  ces ouverts. Comme nous nous plaçons sur un  $\mathcal{U}_k$  fixé, nous supposons que  $\mathcal{U}_k \subset P(y_i, 2^{-k})$  (Rigoureusement, il y a plusieurs  $\mathcal{U}_k$  qui sont inclus dans le même  $P(y_i, 2^{-k})$ ). Nous allons commencer par donner une partition de l'unité associée aux polydisques avec de bonnes propriétés :

**Lemme 37.** *Il existe  $\tilde{\Psi}_{i,k}$  une partition de l'unité associée aux  $P(y_i, 2^{-k})$  de McNeal telle que :*

$$|D_v \tilde{\Psi}_{i,k}(x)| \lesssim \sigma(x, v, 2^{-k})^{-1} \text{ et } |D_v^2 \tilde{\Psi}_{i,k}(x)| \lesssim \sigma(x, v, 2^{-k})^{-2}$$

avec des constantes indépendantes de  $k$ .

*Preuve du lemme 37.* – La conclusion signifie en fait que les fonctions de la partition doivent avoir un taux d'accroissement de l'ordre de la taille de l'ouvert (à des constantes indépendantes de  $k$  près). Nous l'interprétons intuitivement comme :

- le recouvrement est constitué d'ouverts qui ne se recouvrent pas trop (pas de passage de 0 à 1 très rapide car on part de 0 près du centre).
- le recouvrement est constitué d'ouverts qui ne se recouvrent pas trop peu (passage de 0 à 1 très rapide car on arrive à 1 très près du bord).

Nous savons qu'il existe  $c$  tel que  $P(y_{i_1}, c2^{-j}) \cap P(y_{i_2}, c2^{-j}) = \emptyset$ . Cela permet d'éviter la première obstruction.

Pour la seconde obstruction, il suffit d'ajouter des ouverts aux intersections trop petites. Ainsi, en rajoutant un ouvert, on évite une croissance trop rapide. De plus, la proposition 13 signifie que le recouvrement dans une direction est de l'ordre du  $v$ -rayon. Comme on recouvre ainsi par des ouverts similaires, cela signifie que le nombre d'ouverts que l'on rajoute est de l'ordre du nombre d'ouverts déjà présents d'une part et que le comportement des dérivées des fonctions définies dessus est le même d'autre part. Ainsi, la croissance de la dérivée est comparable au rayon divisé par le nombre d'ouverts qui se chevauchent et ce nombre est borné.  $\square$

Nous pouvons bien sûr effectuer une preuve complètement similaire pour  $\mathbb{C}^n$ . En fait, sur l'intérieur de  $\Omega$ , on recouvre par des boules euclidiennes. Il est clair qu'on peut recouvrir en vérifiant le même genre de propriété. (Par exemple dans  $\mathbb{R}^2$ , des boules de rayon 1 centrées sur les points du réseau  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ ). Enfin, nous sommes en fait intéressés par une partition de l'unité associée à des couronnes anisotropes. Nous obtenons ainsi :

**Lemme 38.** *Il existe  $\Psi_{i,k}$  une partition de l'unité associée aux  $\mathcal{U}_{i,k}$  telle que :*

- Si  $P(y_i, 2^{-k})$  est "de type McNeal" :

$$|D_v \Psi_{i,k}(x)| \lesssim \sigma(x, v, 2^{-k})^{-1} \text{ et } |D_v^2 \Psi_{i,k}(x)| \lesssim \sigma(x, v, 2^{-k})^{-2}$$

avec des constantes indépendantes de  $k$ ,

- Sur la partie euclidienne du recouvrement :

$$|D \Psi_{i,k}(x)| \lesssim 2^k \text{ et } |D^2 \Psi_{i,k}(x)| \lesssim 2^{2k}.$$

*Preuve du lemme 38.* – Nous construisons notre partition de l'unité sur les intersections successives par récurrence : pour  $(\mathcal{U}_k, \Psi_{i,k})$  et  $(P(y_i, 2^{-k-1}), \tilde{\Psi}_{i,k+1})$  deux partitions de l'unité associées aux recouvrements d'ouverts correspondants, alors les fonctions  $\Psi_{i,k} \times \tilde{\Psi}_{j,k+1}$  forment une partition de l'unité associée au recouvrement  $\mathcal{U}_{k+1}$ . En effet, pour obtenir une partition de l'unité sur les intersections, il suffit de multiplier les fonctions des partitions de l'unité associées à chacun des recouvrements. De plus, les hypothèses de dérivation sont assurées car  $(\Psi_{i,k} \times \tilde{\Psi}_{j,k+1})' = (\Psi_{i,k})' \times \tilde{\Psi}_{j,k+1} + \Psi_{i,k} \times (\tilde{\Psi}_{j,k+1})'$ . Or,  $(\Psi_{i,k})'$  vérifie une condition plus forte puisqu'on lui demandait de croître moins et  $(\tilde{\Psi}_{j,k+1})'$  vérifie exactement la bonne condition.  $\square$

Nous allons maintenant construire des fonctions auxiliaires symétriques :

**Lemme 39.** *Il existe  $\phi_{i,k}$  des fonctions associées aux  $\mathcal{U}_{i,k}$  telles que :*

- *i) le support de  $\phi_{i,k}$  est inclus dans  $P(y_i, 2^{-k})$ .*
- *ii)  $\phi_{i,k}(y_i - x) = \phi_{i,k}(y_i + x)$  (symétrie).*
- *iii)  $\phi_{i,k}(y_i) = 1$ .*
- *iv)  $\phi_{i,k}$  vérifie les mêmes conditions de dérivations que  $\Psi_{i,k}$ .*

*Preuve du lemme 39.* – Il s'agit en fait d'une propriété réelle. Nous affirmons simplement que l'on peut trouver des fonctions symétriques à support dans un polydisques, dont les dérivées directionnelles sont bornées par le rayon. Il est facile de voir que lisser des "cônes symétriques" donne le résultat souhaité. Nous allons juste expliciter dans  $\mathbb{R}^2$ . Le centre du polydisque est le point  $(y_1, y_2)$ . Les rayons respectifs sont notés  $r_1$  et  $r_2$ , les coordonnées sont  $(x_1, x_2)$ . Nous posons, pour  $x_1$  dans  $[y_1 - r_1, y_1]$ ,  $x_2$  dans  $[y_2 - r_2, y_2]$  :

$$z = \left( \frac{1}{r_1} x_1 + 1 - \frac{y_1}{r_1} \right) \cdot \left( \frac{1}{r_2} x_2 + 1 - \frac{y_2}{r_2} \right) .$$

Il faut prendre les symétriques correspondants pour  $x_1$  dans  $[y_1 - r_1]$ ,  $x_2$  dans  $[y_2, y_2 + r_2]$ , etc. Ainsi, cette fonction est notre candidat comme "cône symétrique". Enfin, nous lisons en faisant un produit de convolution avec la fonction :

$$F(x_1, x_2, \delta) = \begin{cases} \exp^{-\frac{\delta^2}{\delta^2 - x_1^2 - x_2^2}} & \text{pour } \|x\| < \delta, \\ 0 & \text{pour } \|x\| \geq \delta. \end{cases}$$

Pour  $\delta$  assez petit, on obtient une fonction avec les propriétés désirées. Il est facile de se convaincre qu'on peut faire de même sur  $\mathbb{C}^n$ , avec les  $P(y_i, 2^{-k})$  comme polydisques.  $\square$

Nous allons créer notre approximation de l'unité anisotrope avec ces fonctions. Pour cela, on pose :

- $\Phi_{i,k}(t) = \frac{\phi_{i,k}(t)}{\int \phi_{i,k}}$ . C'est-à-dire que l'on vient de se doter d'une fonction symétrique, d'intégrale 1, et dont le support diminuera quand  $k$  augmentera. C'est notre approximation de l'unité.

- Enfin, c'est maintenant que l'on va tenir compte du choix des intersections des polydisques comme  $\mathcal{U}_{i,k}$  : on pose  $\tilde{\Phi}_{i,\tilde{i},k}(x) = \Phi_{i,k}(x) - \Phi_{\tilde{i},k-1}(x)$ . C'est-à-dire qu'on fait vivre  $\tilde{\Phi}$  sur une intersection de polydisques. On notera  $\tilde{\Phi}_{i,k}(x)$  dans la suite.

Nous pouvons ainsi poser :  $u_{i,k} = u * \tilde{\Phi}_{i,k}$ . Nous allons alors fabriquer une fonction  $u_k$  globale à l'aide de la partition de l'unité. Les propriétés que doit vérifier  $u_k$  sont données par le lemme suivant :

**Lemme 40.** *La définition de  $\Gamma_\rho^\alpha$  est équivalente à :  $u = \sum_{k=0}^\infty u_k$  où  $u_k$  vérifie :*

- $\|u_k\| \lesssim 2^{-k\alpha}$ ,
- $\|D_\Lambda^l u_k\| \lesssim \frac{2^{-k\alpha}}{\sigma(x,\Lambda,2^{-k})^l}$  pour  $x \in P_{i,k} \subset \mathcal{V}_k$ ,
- $\|D^l u_k\| \lesssim 2^{l-k\alpha}$  sinon.

*Preuve du lemme 40.* – Il suffit de poser :  $g_k = \sum_{j=0}^k u_j$  et  $f_k = \sum_{j=k+1}^\infty u_j$ .  $\square$

Nous allons maintenant montrer que les  $u_k$  possèdent les bonnes propriétés. Sur un  $\mathcal{U}_{i,k}$ , on a :

$$\begin{aligned} \|u_{i,k}\| &\leq \left| \frac{1}{2} \int (u(x+t) + u(x-t))(\tilde{\Phi}_{i,k}(t)) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2} \int (-2u(x) + u(x+t) + u(x-t))(\tilde{\Phi}_{i,k}(t)) \right| \\ &\lesssim (2^{-k})^{\frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

En effet, nous avons utilisé la symétrie de  $\tilde{\Phi}_{i,k}$ , puis  $\int \tilde{\Phi}_{i,k} = 0$ . Enfin, comme  $t$  et  $x$  sont dans  $P(y_i, 2^{-k})$ ,  $\frac{x+t}{2}$  est dans  $P(y_i, 2^{-k})$ , d'où  $\mathcal{M}(x, x-t) \approx \mathcal{M}(x, x+t) \lesssim 2^{-k}$ . Si  $P$  est de type McNeal, la distance au bord de  $\Omega$  est inférieure à  $2^{-k}$ , et donc  $\varepsilon(x, x \pm t) \approx d(x) + \mathcal{M}(x, x \pm t) \lesssim 2^{-k}$ . Si  $P$  n'est pas de type McNeal, on majore naturellement par la distance euclidienne. De plus,

$$\begin{aligned} \|D_v^2 u_{i,k}\| &\leq \left| \frac{1}{2} \int (u(t))(D_v^2 \tilde{\Phi}_{i,k}(x-t)) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2} \int (u(x+t) + u(x-t))(D_v^2 \tilde{\Phi}_{i,k}(t)) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2} \int (-2u(x) + u(x+t) + u(x-t))(D_v^2 \tilde{\Phi}_{i,k}(t)) \right| \\ &\lesssim (2^{-k})^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{\sigma(x_i, v, 2^{-k})^2}. \end{aligned}$$

En effet, les hypothèses de dérivations sur  $\Phi_{i,k}$  et  $\Phi_{\tilde{i},k-1}$  impliquent les mêmes propriétés pour  $\tilde{\Phi}_{i,k}$ . (En faisant intervenir des constantes, on se ramène aux estimations de  $\Phi_{i,k}$ ).

Ces estimations sont bien sûr similaires si on considère deux vecteurs  $v$  et  $w$  distincts. De plus, avec des inégalités de type inégalité de Landau, (on peut voir par

exemple [19]) nous avons aussi la majoration suivante :  $\|D_v u_{i,k}\| \lesssim (2^{-k})^{\frac{1}{m}} \frac{1}{\sigma(x_i, v, 2^{-k})}$   
Cela nous permet alors de bien définir  $u_k$  avec la partition de l'unité :

$$u_k = \sum_{\mathcal{U}_{i,k}} \Psi_{i,k} u_{i,k}, \quad (3.1.1)$$

Nous avons construits  $\Psi_{i,k}$  et  $u_{i,k}$  pour qu'ils vérifient les bonnes conditions de dérivations, donc les  $u_k$  les vérifient aussi. Enfin, sur une intersection de polydisques, on a :  $u - \sum_{j=0}^k u_j = u(x) - \int u(t) \Phi_{i,k}(x-t) dt \lesssim 2^{\frac{-k}{m}}$ , donc la convergence est bien uniforme. Nous avons ainsi vérifié toutes les conditions du lemme et donc de la définition de  $\Gamma_{\frac{1}{\rho}}$ .  $\square$

## 3.2 Estimations

Suivant une technique habituelle, il suffit d'estimer seulement trois termes. Nous estimons ainsi  $u^1$  et  $u^{n-1}$  de manière similaire en dérivant. Nous utilisons la propriété suivante :

$$\text{Si } |D_v D_w u(z)| \lesssim \frac{d(z)^{\frac{1}{m}}}{\sigma(z, v, d(z)) \sigma(z, w, d(z))}, \text{ alors } u \in \Gamma_{\frac{1}{\rho}}.$$

C'est-à-dire qu'il s'agit d'une propriété de type Hardy-Littlewood directionnel. Par contre,  $u^0$  est estimé directement à l'aide de la définition 35, puisqu'on ne peut pas dériver. Cela explique le travail fourni pour trouver une définition directe.

### 3.2.1 Rappel des estimations des termes élémentaires

Soit  $v_j^{(\ell)}$  une  $\gamma 2^{\ell-1} d(z)$ -base extrémale en  $z$  où  $\gamma$  est une constante telle que :

$$(\mathcal{M}(\zeta, z) > 2^{\ell-1} d(z)) \implies \zeta \notin P(z, \gamma 2^{\ell-1} d(z)). \quad (3.2.1)$$

Pour  $\zeta$  dans  $\mathcal{C}^\ell$ , les termes élémentaires vont vérifier les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} - |s_j| &\lesssim \frac{1}{\sigma(\zeta, v_j^{(\ell)}, d(\zeta))}. \\ - |d_k s_j| &\lesssim \frac{1}{\sigma(\zeta, v_j^{(\ell)}, d(\zeta)) \sigma(\zeta, v_k^{(\ell)}, d(\zeta))}. \end{aligned}$$

- La majoration de  $|\bar{\partial} Q|$  donnée en (1.1.2) ne change pas, ni celle de ses dérivées. Enfin, la différence avec le noyau précédent est le dénominateur. Nous expliquons brièvement comment nous allons le traiter : il s'agit de minorer :  $\langle s, \zeta - z \rangle = \sum_{j,k} g_{jk}(\zeta) (\zeta_j - z_j) \overline{(\zeta_k - z_k)}$ . Pour cela on utilise le théorème de J. McNeal (0.3.5). Il faut considérer  $w_i$  une  $d(\zeta)$ -base extrémale et, dans cette base :

$$\sum_{j,k} g_{jk}(\zeta) (\zeta_j - z_j) \overline{(\zeta_k - z_k)} \approx \left( \sum_{i=1}^n \frac{|\zeta_i - z_i|}{\sigma(\zeta, w_i, d(\zeta))} \right)^2 \approx \sigma(\zeta, \zeta - z, d(\zeta))^{-2}$$

d'après la proposition (12). Nous pouvons alors changer le rayon  $d(\zeta)$  par du  $2^{\ell-1}d(z)$ , puisque cela conduit à une minoration. Nous utilisons de nouveau (12) et nous obtenons :

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{|\zeta_i - z_i|}{\sigma(\zeta, v_i^\ell, 2^{\ell-1}d(z))} \right)^2 \lesssim \sum_{j,k} g_{j,k}(\zeta)(\zeta_j - z_j)(\overline{\zeta_k - z_k}). \quad (3.2.2)$$

Pour  $\ell \geq 1$  et  $\zeta \in \mathcal{C}^\ell$ , nous minorons à l'aide de (3.2.1) par 1 et nous obtenons le résultat souhaité.

Pour  $\ell = 0$ , il faut étudier séparément les  $u^p$ , ( $p = 0, 1, n-1$ ) :

- pour  $p = 1$  ou  $p = n-1$ , on effectue le changement de variable suivant dans l'intégrale :  $t_i = \frac{|\zeta_i - z_i|}{\sigma_i}$ .
- pour  $p = 0$ , puisque nous nous intéressons ici aux  $(0, 1)$ -formes, nous écrivons au numérateur  $s$  sous la forme :

$$\sum_{j,k} g_{j,k}(\zeta)(\overline{\zeta_k - z_k})d\zeta_j = \sum_{j,k} g_{j,k}(\zeta)(\overline{\zeta_k - z_k})(\zeta_j - z_j) \frac{d\zeta_j}{\zeta_j - z_j}. \quad (3.2.3)$$

Nous pouvons majorer le facteur de  $d\zeta_j$  de  $s$  par  $\frac{\langle s, \zeta - z \rangle}{|\zeta_j - z_j|}$ .

### 3.2.2 Estimations de $u^1$ et $u^{n-1}$

Pour pouvoir démontrer que les termes  $u^1$  et  $u^{n-1}$  de notre solution  $u$  de l'équation  $\bar{\partial}u = f$  appartiennent bien à l'espace de Lipschitz anisotrope  $\Gamma_{\frac{1}{p}}$ , nous pourrions utiliser la définition que nous avons introduite. Nous nous baserons plutôt sur un lemme de type Hardy-Littlewood :

**Lemme 41.** *Si  $u$  est une fonction bornée, de classe  $C^1$  sur  $\Omega$  telle que*

$$|D^2u(z)| \lesssim d(z)^{-2+\frac{1}{m}} \text{ et } \forall v, w \in \mathbb{C}^n, \|v\| = \|w\| = 1, |D_v D_w u(z)| \lesssim \frac{d(z)^{\frac{1}{m}}}{\sigma(z, v, d(z))\sigma(z, w, d(z))},$$

alors  $u$  appartient à  $\Gamma_{\frac{1}{p}}(\Omega)$ .

*Preuve du lemme 41.* - Il s'agit ici d'un résultat similaire à la proposition 25 du premier chapitre. La construction que nous venons de réaliser dans la section précédente joue alors le rôle du lemme 26. Il nous suffit donc de décomposer  $u$  de la même manière pour obtenir le résultat.  $\square$

**Remarque 12.** *Nous ne montrerons pour  $u^1$  et  $u^{n-1}$  que le critère :*

$$|D_{v,w}^2 u^i| \lesssim \frac{d(z)^{\frac{1}{m}}}{\sigma(z,v,d(z))\sigma(z,w,d(z))} .$$

*En effet, d'après le résultat (0.2.3) sur les  $v$ -rayons, cela implique la première condition dans les hypothèses du lemme 41.*

Il s'agit d'utiliser les estimations de McNeal sur les dérivées de la fonction de Bergman (cf (0.3.1)) pour faire les majorations de

$$D_v^2(u^{(k)}(z)) = D_v^2 \left( \int_{\Omega} f(\zeta) \wedge K^{(k)}(\zeta, z) \right) .$$

Nous tenons à rappeler qu'il s'agit de dérivations en  $z$ , ainsi les termes  $g_{ij}(\zeta)$  ne seront pas affectés par ces dérivations. Nous nous plaçons sur les couronnes  $\mathcal{C}^\ell$ , les coordonnées sont celles d'une  $2^\ell d(z)$ -base extrémale de McNeal. Nous noterons par commodité  $\sigma_i(\varepsilon(\zeta, z))$  pour  $\sigma(z, v_i, \varepsilon(\zeta, z))$ .

**étude de  $u^1$  :**

On va bien évidemment se servir des estimations des termes élémentaires pour obtenir le résultat. On ne séparera pas le cas  $P(z, d(z))$  des  $P(z, 2^\ell d(z))$ . Il suffira de poser  $\ell = 0$  dans les calculs.

$$\mathcal{I}_\ell^1 := \int_{\mathcal{C}^\ell} D_{z,v} D_{z,w} \left[ \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-1} f(\zeta) \wedge \left( \frac{s \wedge (ds)^{n-2} \wedge \bar{\partial} \tilde{Q}}{\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle^{n-1}} \right) \right] .$$

On effectue la dérivation en  $D_{z,v}$ . Suivant le terme où porte la dérivation, il apparaît des facteurs en  $\frac{1}{\sigma(z,v,\varepsilon(\zeta,z))}$  ou en  $\frac{1}{\sigma(\zeta,v,d(\zeta))}$ . Il en est de même pour la dérivation en  $D_{z,w}$ . De plus, au pire, la puissance du terme  $\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle^{n-1}$  au dénominateur augmente finalement de 1 après compensations avec les termes qui sont apparus au numérateur.

Nous pouvons considérer que seuls des facteurs en  $\frac{1}{\sigma(z,v_i,\varepsilon(\zeta,z))}$  (ou  $\frac{1}{\sigma(z,v,\varepsilon(\zeta,z))}$ , ...) vont intervenir dans les estimations. En effet, d'après (0.2.4), puisque nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\sigma(z,v,d(\zeta))} \lesssim \frac{1}{\sigma(\zeta,v,\varepsilon(\zeta,z))} \cdot \frac{\varepsilon(\zeta,z)}{d(\zeta)} .$$

Le poids permet d'absorber les facteurs  $\frac{\varepsilon(\zeta,z)}{d(\zeta)}$  qui apparaissent (cf. (0.3.3)). De plus, d'après la proposition (13) :

$$\sigma(\zeta, v, \varepsilon(\zeta, z)) \approx \sigma(z, v, \varepsilon(\zeta, z)) .$$

Nous pouvons donc considérer qu'interviennent partout des  $\sigma_i(\varepsilon(\zeta, z))$ . Par ailleurs, puisque  $\zeta \in \mathcal{C}^\ell$ ,  $2^\ell d(z) \lesssim \varepsilon(\zeta, z)$ . Nous pouvons ainsi effectuer les minoration correspondantes sur les  $v_i$ -rayons (ou les  $v$ -rayons, ...) au dénominateur. Indiquons les notations que nous prenons dans le calcul qui suit : puisque  $f$  est une  $(0, 1)$ -forme, il y a un indice qui n'apparaît qu'une fois lors des estimations. Nous notons cet indice  $M$ . Enfin, comme nous avons effectué la simplification (3.2.3) pour  $s$ , un autre terme n'apparaît pas non plus, que nous notons  $i$  : il s'agit de l'indice correspondant à  $\frac{1}{|\zeta_i - z_i|}$ . Enfin, dans le terme  $ds$ , la dérivation en  $\bar{\zeta}$  peut porter sur  $g_{i,j}$ . Dans ce cas, nous notons  $\frac{1}{\sigma_d}$  le  $v$ -rayon qui apparaît lors de cette dérivation. Nous obtenons une majoration de  $|\mathcal{I}_\ell^1|$  par des termes de la forme :

$$\int_{\mathcal{C}^\ell} |f(\zeta)| \frac{1}{\sigma(z, v, \varepsilon(\zeta, z)) \sigma(z, w, \varepsilon(\zeta, z))} \frac{\prod \frac{1}{\sigma_j \sigma_k(\varepsilon(\zeta, z))} \prod \frac{|\zeta_k - z_k|}{\sigma_j \sigma_k \sigma_d(\varepsilon(\zeta, z))} \frac{1}{|\zeta_j - z_j|}}{\left( \sum_\ell \frac{|\zeta_\ell - z_\ell|}{\sigma_\ell(\zeta, d(\zeta))} \right)^{2n-2}} d\lambda(\zeta)$$

Il faut préciser maintenant comment sont formés ces produits de  $v_i$ -rayons. En fait, comme nous avons une  $(n, n)$ -forme en  $\zeta$  pour l'intégration, chaque  $d\zeta_i$  ne peut apparaître qu'une fois. Donc, les  $v_i$ -rayons ne peuvent intervenir que deux fois dans les estimations : une fois pour  $d\zeta_i$  et une fois pour  $d\bar{\zeta}_i$ . Nous pouvons donc écrire :

$$|\mathcal{I}_\ell^1| \lesssim \|f\|_\infty \cdot \sum_{i, M} \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{1}{\sigma(z, v, 2^\ell d(z)) \sigma(z, w, 2^\ell d(z))} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq M, i}}^n \frac{1}{\sigma_j^2} \right) \\ \times \frac{1}{\sigma_i \sigma_M(z, 2^\ell d(z))} \frac{1}{|\zeta_i - z_i|} \frac{1}{\left( \sum_\ell \frac{|\zeta_\ell - z_\ell|}{\sigma_\ell(\zeta, d(\zeta))} \right)^{2n-2}} d\lambda(\zeta) .$$

Enfin, on se sert de l'inégalité  $d(\zeta) \lesssim 2^\ell d(z)$  pour minorer encore le dénominateur. Nous utilisons à nouveau la proposition (13) et pouvons poser  $u_k = \frac{|\zeta_k - z_k|}{\sigma_k(z, 2^\ell d(z))}$ . Si  $\ell \geq 1$ , les bornes de l'intégrales seront, à des constantes près (cf (0.2.4)),  $\frac{1}{2}$  et 1, et nous avons :

$$|\mathcal{I}_\ell^1| \lesssim \|f\|_\infty \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sigma_v(z, 2^\ell d(z)) \sigma_w(z, 2^\ell d(z))} \sigma_M(z, 2^\ell d(z)) \frac{du}{u_i \left( \sum_\ell u_\ell \right)^{2n-2}} \\ \lesssim \|f\|_\infty \left( \frac{1}{2^\ell} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{\sigma_v(z, d(z)) \sigma_w(z, d(z))} d(z)^{\frac{1}{m}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{du}{u_i \left( \sum_\ell u_\ell \right)^{2n-2}} .$$

Or, cette dernière intégrale converge évidemment et, de plus, en sommant sur  $\ell$ , nous obtenons pour l'intégrale de  $f(\zeta) \wedge K^1(\zeta, z)$  sur  $\Omega \setminus P(z, d(z))$  :

$$|\mathcal{I}^1| \lesssim \|f\|_\infty \frac{d(z)^{\frac{1}{m}}}{\sigma_v(z, d(z)) \sigma_w(z, d(z))} . \quad (3.2.4)$$

Maintenant, si  $\ell = 0$ , nous effectuons les mêmes calculs pour nous ramener à :

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_0^1| &\lesssim \|f\|_\infty \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma_v(z, d(z))\sigma_w(z, d(z))} \sigma_M(z, d(z)) \frac{du}{u_i(\sum_\ell u_\ell)^{2n-2}} \\ &\lesssim \|f\|_\infty \frac{1}{\sigma_v(z, d(z))\sigma_w(z, d(z))} d(z)^{\frac{1}{m}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u_i(\sum_\ell u_\ell)^{2n-2}}. \end{aligned}$$

La singularité est suffisamment faible pour assurer la convergence en zéro de cette dernière intégrale. Nous avons donc sur  $P(z, d(z))$  le résultat suivant :

$$|\mathcal{I}_0^1| \lesssim \frac{d(z)^{\frac{1}{m}}}{\sigma_v(z, d(z))\sigma_w(z, d(z))}. \quad (3.2.5)$$

Au final, en combinant les résultats (3.2.4) et (3.2.5) avec le lemme 41, nous obtenons :  $u^1(z) \in \Gamma_{\rho}^{\frac{1}{m}}$ .

**étude de  $u^{n-1}$  :**

Nous allons utiliser exactement le même schéma que précédemment. Nous avons le même phénomène que dans le premier chapitre : tous les termes, excepté  $u^0$ , se traitent de la même façon. Nous travaillons encore une fois sur des couronnes  $\mathcal{C}^\ell = P(z, 2^\ell d(z)) \setminus cste P(z, 2^{\ell-1} d(z))$ .

$$\mathcal{I}_\ell^{n-1} = \int_{\mathcal{C}^\ell} D_{z,v,w}^2 \left[ \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^{N-n+1} f(\zeta) \wedge \left( \frac{s \wedge (\bar{\partial}\tilde{Q})^{n-1}}{\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle} \right) \right]$$

Contrairement au cas précédent, nous n'avons même pas besoin de séparer les cas  $\ell > 0$  et  $\ell = 0$ . En effet, la puissance du dénominateur est suffisamment faible pour qu'on n'ait pas besoin de faire de l'analyse fine. En effectuant le même changement de variable, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_\ell^{n-1}| &\lesssim \|f\|_\infty \int_0^1 \frac{1}{\sigma_v(z, 2^\ell d(z))\sigma_w(z, 2^\ell d(z))} \sigma_M(z, 2^\ell d(z)) \frac{du}{u_i(\sum_\ell u_\ell)^2} \\ &\lesssim \|f\|_\infty \left( \frac{1}{2^\ell} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{\sigma_v(z, d(z))\sigma_w(z, d(z))} d(z)^{\frac{1}{m}} \int_0^1 \frac{du}{u_i(\sum_\ell u_\ell)^2} \\ &\lesssim \|f\|_\infty \left( \frac{1}{2^\ell} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{d(z)^{\frac{1}{m}}}{\sigma_v(z, d(z))\sigma_w(z, d(z))}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

L'appartenance de  $u^{n-1}(z)$  à  $\Gamma_{\rho}^{\frac{1}{m}}$  découle encore du lemme 41.

### 3.2.3 $u^0$ sur $P(z, d(z))$ , cas $\rho(z, z+h) = |h|$ :

Il s'agit de montrer que

$$|u^0(z+h) + u^0(z-h) - 2u^0(z)| \lesssim (\rho(z, z+h))^{\frac{1}{m}}.$$

On va devoir décomposer l'étude de  $u^0$  en plusieurs cas. De plus, nous allons découper  $\int_{\Omega}$  en  $\int_{P(z, d(z))} + \int_{\Omega \setminus P(z, d(z))}$ . En effet, il faut étudier directement sur  $P(z, d(z))$  et utiliser le critère de dérivation en dehors. On écrit ainsi  $\int_{\zeta \in \Omega} \dots = \int_{\zeta \in \Omega} \chi(\zeta) \dots + \int_{\zeta \in \Omega} (1 - \chi(\zeta)) \dots$  où  $\chi$  est à support compris entre  $P(z, d(z))$  et  $2P(z, d(z))$  et vaut 1 sur  $P(z, d(z))$ .

Par abus de notation, nous écrivons  $u^0$  pour  $\int_{\zeta \in \Omega} \chi(\zeta) \dots$  et  $\tilde{u}^0$  pour  $\int_{\zeta \in \Omega} (1 - \chi(\zeta)) \dots$ . L'étude directe est nécessaire car on ne peut se permettre de dériver le noyau : on obtiendrait une intégrale divergente. Comme nous travaillons à  $z$  et  $h$  fixés, il faudra bien entendu vérifier que le domaine d'étude directe contient les trois voisinages autour de  $z, z+h, z-h$ .

**Cas  $|h| \leq d(z)$ . Etude sur  $P(z, |h|)$  :**

$$\text{Nous posons } \int_{P(z, d(z))} = \underbrace{\int_{P(z, |h|)}}_{(I)} + \underbrace{\int_{P(z, d(z)) \setminus P(z, |h|)}}_{(II)}.$$

De plus, comme  $P(z, |h|)$  contient  $z+h$  et  $z-h$ , nous pouvons supposer que  $P(z+h, |h|) \subset \text{cste} P(z, |h|)$  (et idem pour  $z-h$ ). Ainsi, nous allons faire l'étude de  $u^0(z)$  sur  $P(z, |h|)$ , puis, pour les études de  $u^0(z+h)$  et  $u^0(z-h)$ , après un changement de variable du type  $z \mapsto z \pm h$ , nous nous ramenons à l'intégrale de  $u^0(z)$  sur un domaine plus petit, donc les estimations que nous allons obtenir pour  $u^0(z)$  sont valables pour les trois termes. Considérons alors des  $|h|$ -coordonnées de McNeal :

$$|u^0(z)| \lesssim \|f\|_{\infty} \cdot \int_{P(z, |h|)} \left( \frac{|\mathcal{B}(\zeta, z)|}{|\mathcal{B}(\zeta, \zeta)|} \right)^N \cdot \frac{\prod \frac{1}{\sigma_j \sigma_k(\zeta, d(\zeta))} \prod \frac{|\zeta_k - z_k|}{\sigma_j \sigma_k \sigma_d(\zeta, d(\zeta))} \frac{1}{|\zeta_j - z_j|}}{\left( \sum_{\ell} \frac{|\zeta_{\ell} - z_{\ell}|}{\sigma_{\ell}(\zeta, d(\zeta))} \right)^{2n-2}} d\lambda(\zeta).$$

Or,  $|\zeta_k - z_k| \leq \sigma(z, e_k, |h|) < \sigma(z, e_k, d(z))$ . De plus, on peut remplacer les  $\sigma(\zeta, d(\zeta))$  par des  $\sigma(\zeta, d(z))$  (le poids absorbe les  $\frac{d(z)}{d(\zeta)}$ ), puis par  $\sigma(z, d(z))$ . (En effet, puisque  $\zeta \in P(z, |h|) \subset \text{cste} P(z, d(z))$ ,  $d(\zeta) \lesssim d(z)$ .) Nous avons ainsi :

$$|u^0(z)| \lesssim \|f\|_{\infty} \cdot \int_{P(z, |h|)} \left( \prod_{j \neq M, i} \frac{1}{\sigma_j^2} \right) \frac{1}{\sigma_i \sigma_M(z, d(z))} \frac{1}{|\zeta_i - z_i|} \frac{1}{\left( \sum_{\ell} \frac{|\zeta_{\ell} - z_{\ell}|}{\sigma_{\ell}(\zeta, d(z))} \right)^{2n-2}} d\lambda(\zeta).$$

Nous allons alors effectuer le changement de variables suivant :  $k_\ell = \frac{|\zeta_\ell - z_\ell|}{\sigma_\ell(z, d(z))}$ .

$$|u^0(z)| \lesssim \|f\|_\infty \cdot \underbrace{\int_{D(0, \frac{\sigma_1(z, |h|)}{\sigma_1(z, d(z))})} \sigma_M(z, d(z)) \cdot \frac{1}{k_i} \cdot \frac{1}{(k_1 + \dots + k_n)^{2n-2}} dk}_{I_0}$$

$$\lesssim \|f\|_\infty \cdot \sigma_M(z, |h|) \tag{3.2.7}$$

$$\lesssim |h|^{\frac{1}{m}}. \tag{3.2.8}$$

Pour obtenir (3.2.7), on se ramène d'abord à deux variables après intégration, i.e. on a :

$$I_0 \lesssim \int_0^{\frac{\sigma_1(z, |h|)}{\sigma_1(z, d(z))}} \int_0^{\frac{\sigma_2(z, |h|)}{\sigma_2(z, d(z))}} \sigma_2(z, d(z)) \cdot \frac{1}{(\rho_1 + \rho_2)^3} \rho_1 d\rho_1 \rho_2 d\rho_2.$$

On effectue alors une intégration par partie pour  $\rho_1$  et on obtient :

$$I_0 \lesssim \int_0^{\frac{\sigma_2(z, |h|)}{\sigma_2(z, d(z))}} \frac{\sigma_2(z, d(z))}{\rho_2} \rho_2 d\rho_2$$

D'où le résultat.

**Cas  $|h| \leq d(z)$ . Etude sur les  $P(z, 2^\ell |h|)$  :**

Pour l'étude de (II), on fait d'abord un découpage en couronnes en introduisant des  $2^\ell |h|$ -bases de McNeal tant que l'on a  $2^\ell |h| \leq d(z)$ . Si on appliquait le même procédé que ci-dessus, on obtiendrait du  $(2^\ell |h|)^{\frac{1}{m}}$ . Pour pouvoir faire converger la série, nous allons regrouper les termes par deux. Nous effectuons l'étude sur  $|u^0(z+h) - u^0(z)|$ . Le terme  $|u^0(z-h) - u^0(z)|$  se traitant évidemment de la même façon. On simplifie les notations en écrivant  $u^0(z) = \int \left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}\right)^N \cdot u_K^{(0)}(\zeta, z)$ , où  $u_K^{(0)}(\zeta, z)$  est le terme  $f(\zeta) \wedge \frac{s \wedge (ds)^{n-1}}{(s(\zeta, z), \zeta - z)^n}$ . Ainsi :

$$|u^0(z+h) - u^0(z)| = \underbrace{\int \left| \left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, z+h)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}\right)^N - \left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}\right)^N \right| \cdot |u_K^{(0)}(\zeta, z)|}_{J_1}$$

$$+ \underbrace{\int \left(\frac{|\mathcal{B}(\zeta, z)|}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}\right)^N \cdot |u_K^{(0)}(\zeta, z+h) - u_K^{(0)}(\zeta, z)|}_{J_2}.$$

L'étude de  $J_1$  se fait en utilisant le fait que  $\left| \left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, z+h)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}\right)^N - \left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}\right)^N \right| \lesssim \frac{|h|}{\varepsilon(\zeta, z)}$ . On prend des  $2^\ell |h|$ -coordonnées de McNeal, on utilise le fait que  $d(\zeta) \lesssim d(z)$  pour

faire le même changement de variable que précédemment et des calculs analogues donnent :

$$\begin{aligned}
J_1 &\lesssim \|f\|_\infty \cdot |h| \cdot \int_0^{\frac{\sigma_1(z, 2^\ell |h|)}{\sigma_1(z, d(z))}} \int_0^{\frac{\sigma_2(z, 2^\ell |h|)}{\sigma_2(z, d(z))}} \frac{\sigma_2(z, d(z))}{\varepsilon(\zeta, z)} \cdot \frac{1}{(\rho_1 + \rho_2)^3} \rho_1 d\rho_1 \rho_2 d\rho_2 \\
&\lesssim \|f\|_\infty \cdot |h| \cdot \frac{\sigma_2(z, 2^\ell |h|)}{2^\ell |h|} \\
&\lesssim \|f\|_\infty \cdot (2^\ell)^{-1 + \frac{1}{m}} \cdot |h|^{\frac{1}{m}}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat pour  $J_1$ .

Il faut maintenant effectuer l'étude de  $J_2$  et considérer le terme :  $|u_K^{(0)}(\zeta, z+h) - u_K^{(0)}(\zeta, z)|$ . En donner une majoration revient à examiner ce qu'il se passe lorsque l'on dérive. Le pire qui puisse intervenir est l'apparition d'un terme  $\frac{1}{\sigma_i} \times \frac{1}{\sum \frac{|\zeta_i - z_i|}{\sigma_i}}$ . Comme d'habitude, on remplace les  $d(\zeta)$  par des  $d(z)$ . Nous avons ainsi la majoration suivante :

$$J_2 \lesssim \int_{P(z, 2^\ell |h|) \setminus \text{cste}P(z, 2^{\ell-1} |h|)} \left( \prod_{j \neq M} \frac{1}{\sigma_j^2} \right) \frac{|h|}{\sigma_D(z, d(z))} \frac{1}{\sigma_M(z, d(z))} \frac{1}{\left( \sum_\ell \frac{|\zeta_\ell - z_\ell|}{\sigma_\ell(\zeta, d(z))} \right)^{2n}} d\lambda(\zeta)$$

On effectue alors le changement de variable désormais usuel :  $u_i = \frac{|\zeta_i - z_i|}{\sigma_i(z, d(z))}$ . On peut passer de  $\sigma_i(\zeta, d(z))$  à  $\sigma_i(z, d(z))$  car, comme précédemment,  $\zeta \in P(z, 2^\ell |h|) \subset \text{cste}P(z, d(z))$  puisque  $2^\ell |h| \leq d(z)$  et nous majorons  $\frac{1}{\sigma_D(z, d(z))}$  par du  $\frac{1}{\sigma_D(z, 2^\ell |h|)}$ . Ainsi :

$$J_2 \lesssim \|f\|_\infty \int \cdots \int_{\frac{\sigma_n(2^{\ell-1} |h|)}{\sigma_n(d(z))}}^{\frac{\sigma_n(2^\ell |h|)}{\sigma_n(d(z))}} \frac{|h|}{\sigma_D(z, 2^\ell |h|)} \sigma_M(z, d(z)) \frac{du}{\left( \sum_\ell u_\ell \right)^{2n}}.$$

On minore  $\sigma_D(z, 2^\ell |h|)$  par  $2^\ell |h|$  et  $\sum_\ell u_\ell$  par  $\frac{1}{2}$  puisqu'au moins une des coordonnées le vérifie. Finalement, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
J_2 &\lesssim \|f\|_\infty \frac{|h|}{2^\ell |h|} \sigma_M(z, 2^\ell |h|) \\
&\lesssim \|f\|_\infty \frac{|h| (2^\ell |h|)^{\frac{1}{m}}}{2^\ell |h|} \\
&\lesssim \|f\|_\infty (2^\ell)^{-1 + \frac{1}{m}} |h|^{\frac{1}{m}}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat pour  $J_2$ .

Nous avons ainsi terminé l'étude du sous-cas  $\rho(z, z+h) = |h|$ , avec  $|h| \leq d(z)$  sur la partie  $P(z, d(z))$ . Avant d'effectuer l'étude de  $u^0$  à l'extérieur du polydisque  $P(z, d(z))$ , nous devons examiner le cas où  $\rho(z, z+h) = |h|$ , mais avec  $d(z) \leq |h|$ .

**Cas**  $d(z) \leq |h|$  :

Nous ne faisons pas cette fois d'étude avec des couronnes  $\mathcal{C}^\ell$ , mais juste l'étude directe sur le polydisque  $P(z, d(z))$ .

Il y a cependant un problème :  $P(z, d(z))$  ne contient pas forcément  $z + h$  et  $z - h$ . Comme nous devons estimer  $|u^0(z + h) + u^0(z - h) - 2u^0(z)|$ , nous allons estimer les 3 termes séparément. Des changements de variable du type  $z \mapsto z \pm h$  permettent de se ramener à l'étude de seulement deux termes :  $\int_{P(z, d(z))} |K^{(0)}(\zeta, z)|$  et  $\int_{P(z+h, d(z+h))} |K^{(0)}(\zeta, z)|$ . Nous prétendons enfin que :

**Affirmation 2.**

$$\int_{P(z+h, d(z+h))} |K^{(0)}(\zeta, z)| \lesssim \int_{P(z, d(z))} |K^{(0)}(\zeta, z)| .$$

Cela paraît logique puisque, en intégrant sur un domaine qui ne contient pas  $z$ , le terme  $\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle$  au dénominateur devient plus grand et permet de minorer l'intégrale. Dans la preuve que nous en donnerons, nous verrons cependant que nous utilisons aussi l'hypothèse de convexité. La preuve de cette affirmation sera donnée après l'étude de  $\int_{P(z, d(z))} K^{(0)}(\zeta, z)$  car nous nous en servons pour faire la comparaison.

Nous nous intéressons donc à  $I = \left| \int_{P(z, d(z))} K^{(0)}(\zeta, z) \right|$ . En prenant des  $d(z)$ - coordonnées de McNeal, on obtient :

$$I \lesssim \|f\|_\infty \cdot \int_{P(z, d(z))} \left( \frac{|\mathcal{B}(\zeta, z)|}{|\mathcal{B}(\zeta, \zeta)|} \right)^N \cdot \frac{\prod \frac{1}{\sigma_j \sigma_k(\zeta, d(\zeta))} \prod \frac{|\zeta_k - z_k|}{\sigma_j \sigma_k \sigma_d(\zeta, d(\zeta))} \frac{1}{|\zeta_j - z_j|}}{\left( \sum_\ell \frac{|\zeta_\ell - z_\ell|}{\sigma_\ell(\zeta, d(\zeta))} \right)^{2n-2}} d\lambda(\zeta) \quad (3.2.9)$$

Or,  $|\zeta_k - z_k| = \sigma(z, e_k, |h|) < \sigma(z, e_k, d(z))$ . De plus, on peut remplacer les  $\sigma(\zeta, d(\zeta))$  par des  $\sigma(\zeta, d(z))$  (le poids absorbe les  $\frac{d(z)}{d(\zeta)}$ ), puis par  $\sigma(z, d(z))$ . (En effet, on a  $\zeta \in P(z, d(z)) \implies d(\zeta) \lesssim d(z)$ ). On obtient ainsi :

$$I \lesssim \|f\|_\infty \cdot \int_{P(z, d(z))} \left( \prod_{j \neq M, i} \frac{1}{\sigma_j^2} \right) \frac{1}{\sigma_i \sigma_M(z, d(z))} \frac{1}{|\zeta_i - z_i|} \frac{1}{\left( \sum_\ell \frac{|\zeta_\ell - z_\ell|}{\sigma_\ell(\zeta, d(z))} \right)^{2n-2}} d\lambda(\zeta) .$$

Nous allons alors effectuer le changement de variables suivant :  $k_\ell = \frac{|\zeta_\ell - z_\ell|}{\sigma_\ell(z, d(z))}$ .

$$\begin{aligned} I &\lesssim \|f\|_\infty \cdot \left| \int_{D(0,1)} \sigma_M(z, d(z)) \cdot \frac{1}{k_i} \cdot \frac{1}{(k_1 + \dots + k_n)^{2n-2}} dk \right| \\ &\lesssim \|f\|_\infty \cdot \sigma_M(z, d(z)) \\ &\lesssim \sigma_M(z, |h|) \\ &\lesssim |h|^{\frac{1}{m}} . \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

C'est le résultat que nous désirions obtenir. Vérifions maintenant que l'affirmation 2 est vérifiée :

*Preuve de l'affirmation 2.* – Pour étudier  $\int_{P(z+h, d(z+h))} K^{(0)}(\zeta, z)$ , nous suivons le même schéma. On veut donc obtenir une majoration en  $\sigma_M(z+h, d(z+h))$  comme dans 3.2.10. Puisque  $d(z+h) \lesssim d(z) + |h| \lesssim |h|$  puisque l'on est dans le cas  $d(z) \lesssim |h|$ , nous pourrions conclure de la même manière. Pour suivre la même démonstration, il faut remplacer des  $\sigma_i(\zeta, d(\zeta))$  par des  $\sigma_i(z+h, d(z+h))$ . Le problème, c'est qu'on n'est plus sûr a priori que le poids puisse absorber les  $\frac{d(z+h)}{d(\zeta)}$ . Or,  $\Omega$  est convexe, et l'on veut que  $z, z-h$  et  $z+h$  soient dans  $\Omega$ . Cela impose bien sûr que  $d(z+h) \leq 2d(z)$ . Sinon,  $z-h$  sortirait du domaine. On peut donc faire la même étude. Il reste le terme

$$\frac{1}{\left(\sum_{\ell} \frac{|\zeta_{\ell} - z_{\ell}|}{\sigma_{\ell}(\zeta, d(z))}\right)^{2n-2}}$$

Comme  $\zeta$  appartient dans ce cas au polydisque  $P(z+h, d(z+h))$ , on peut minorer ce terme en se centrant en  $z$  au lieu de  $z+h$ . Finalement, on a majoré le dénominateur et traité de même les autres termes. Nous avons donc globalement majoré :

$$\int_{P(z+h, d(z+h))} |K^{(0)}(\zeta, z)| \lesssim \int_{P(z, d(z))} |K^{(0)}(\zeta, z)| .$$

□

### 3.2.4 $u^0$ sur $P(z, d(z))$ , cas $\rho(z, z+h) = \varepsilon(z, z+h)$ :

Nous procédons de manière totalement similaire : une étude sur  $P(z, d(z))$  avec la méthode directe. C'est-à-dire que l'on effectue exactement les mêmes calculs que pour le cas  $d(z) \leq |h|$  précédent puisque l'on fait le même découpage directement.

### 3.2.5 Estimation de $u^0$ “en dehors de $P(z, d(z))$ ”

Nous prenons le critère utilisé pour  $u^1$  : le lemme 41. Nous considérons le terme  $\tilde{u}^0$  et nous nous plaçons donc sur des couronnes de type :  $P(z, 2^{\ell}d(z)) \setminus cste P(z, 2^{\ell-1}d(z))$ .

$$\mathcal{I}_{\ell}^0 = \int_{c^{\ell}} D_{z,v,w}^2 \left[ \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, z)}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^N f(\zeta) \wedge \left( \frac{s \wedge (ds)^{n-1}}{\langle s(\zeta, z), \zeta - z \rangle^n} \right) \right]$$

Nous effectuons donc le même type de calcul : après dérivation en  $D_{z,v}$  et  $D_{z,w}$ , nous pouvons, à l'aide du poids et de la proposition (13), changer à la fois le centre et le

rayon des  $v$ -rayons pour obtenir une majoration par des termes de la forme :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_\ell^0| &\lesssim \int_{\mathcal{C}^\ell} |f(\zeta)| \frac{1}{\sigma(z, v, \varepsilon(\zeta, z)) \sigma(z, w, \varepsilon(\zeta, z))} \frac{\prod \frac{1}{\sigma_j \sigma_k(\zeta, \varepsilon(\zeta, z))} \prod \frac{|\zeta_k - z_k|}{\sigma_j \sigma_k \sigma_d(\zeta, \varepsilon(\zeta, z))} \frac{1}{|\zeta_j - z_j|}}{\left( \sum_\ell \frac{|\zeta_\ell - z_\ell|}{\sigma_\ell(\zeta, d(\zeta))} \right)^{2n}} d\lambda(\zeta) \\
&\lesssim \|f\|_\infty \cdot \int_{\mathcal{C}^\ell} \frac{1}{\sigma(z, v, 2^\ell d(z)) \sigma(z, w, 2^\ell d(z))} \left( \prod_{j \neq M, i} \frac{1}{\sigma_j^2} \right) \\
&\quad \times \frac{1}{\sigma_i \sigma_M(z, 2^\ell d(z))} \frac{1}{|\zeta_i - z_i|} \frac{1}{\left( \sum_\ell \frac{|\zeta_\ell - z_\ell|}{\sigma_\ell(\zeta, d(\zeta))} \right)^{2n}} d\lambda(\zeta) .
\end{aligned}$$

Nous posons alors  $u_k = \frac{|\zeta_k - z_k|}{\sigma_k(z, 2^\ell d(z))}$  qui varie ainsi entre  $\frac{1}{2}$  et 1 et nous obtenons pour  $\mathcal{I}_\ell^0$  la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}_\ell^0| &\lesssim \|f\|_\infty \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sigma_v(z, 2^\ell d(z)) \sigma_w(z, 2^\ell d(z))} \sigma_M(z, 2^\ell d(z)) \frac{du}{\left( \sum_\ell u_\ell \right)^{2n}} \\
&\lesssim \|f\|_\infty \left( \frac{1}{2^{\frac{\ell}{m}}} \right) \frac{1}{\sigma_v(z, d(z)) \sigma_w(z, d(z))} d(z)^{\frac{1}{m}} .
\end{aligned}$$

Nous sommions sur  $\ell$  pour obtenir sur  $\Omega \setminus P(z, d(z))$  le résultat suivant :

$$|D_{z,v} D_{z,w} \tilde{u}^0(z)| \lesssim \frac{d(z)^{\frac{1}{m}}}{\sigma_v(z, d(z)) \sigma_w(z, d(z))} . \quad (3.2.11)$$

Ce qui nous donne bien  $\tilde{u}^0(z) \in \Gamma_{\frac{1}{p}}$  d'après le lemme 41.



# Chapitre 4

## Application 2 : autre preuve d'un résultat de Greiner et Stein

Nous allons donner dans ce chapitre une autre application de la formule de représentation que nous avons obtenue dans le second chapitre. Cette fois, nous nous plaçons dans le cadre des domaines strictement pseudoconvexes et nous retrouvons le résultat de Greiner et Stein [13]. D'une certaine manière, il s'agit de conforter l'intuition que la pseudométrie de McNeal et Stein reflète bien, dans chaque direction, l'ordre de contact correspondant. Les techniques seront donc très similaires à celles du chapitre précédent : un lemme de type Hardy-Littlewood euclidien tangentiel pour les termes que l'on peut dériver ( $u^1(z)$  et  $u^{n-1}(z)$ ) ; et l'estimation directe (et technique) du terme  $u^0(z)$ .

### 4.1 Petit rappel du contexte

Avant de retrouver les estimations en  $\Lambda^{\frac{1}{2},1}$ , nous allons définir dans quel type d'espace nous travaillons.

**Définition 42.** *On dit qu'une courbe  $\gamma$ ,  $k$  fois différentiable appartient à l'espace  $\mathcal{C}^k$  si, pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,  $|\gamma'(t)| \leq 1, \dots, |\gamma^{(k)}(t)| \leq 1$ .*

On considère un voisinage tubulaire du bord de  $\Omega$  de telle sorte que chaque  $z$  dans ce voisinage n'ait qu'une projection sur le bord, et que cette projection soit une rétraction  $\mathcal{C}^\infty$ . Nous avons en chaque point du bord de  $\Omega$  une décomposition  $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}\nu_P \oplus T_P^{\mathbb{C}}$  où  $\nu_P$  est la normale sortante en  $P$ . Nous pouvons supposer que l'application  $z \rightarrow \nu_z$  est  $\mathcal{C}^\infty$ . Cette décomposition s'étend au voisinage tubulaire et il est donc légitime de définir :

**Définition 43.** *Une courbe  $\gamma$  de  $\mathcal{C}^k$  appartient à  $\mathcal{C}_1^k$  si, pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,  $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}^{\mathbb{C}}$ .*

De plus, pour une fonction  $u$  au moins  $\mathcal{C}^1$ , nous notons  $D_T u$  une dérivation tangentielle complexe, c'est-à-dire une dérivation de  $u$  le long de vecteurs de  $T_P^{\mathbb{C}}$ .

Enfin, pour formaliser la notion intuitive d'appartenance à un espace de Lipschitz  $\Lambda^\alpha$  dans la direction normale et dans  $\Lambda^\beta$  dans toute direction tangente complexe, on pose :

**Définition 44.**  $u$  appartient à  $\Gamma^{\alpha,\beta}$  si  $\|u\|_{\Lambda^\alpha} + \|u \circ \gamma\|_{\Lambda^\beta} < \infty$  pour toute courbe  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \Omega$  qui appartient à  $\mathcal{C}_1^k$ .

Puisque nous faisons des études locales et près du bord, nous pouvons appliquer le lemme de Narashiman et considérer que nous travaillons dans un domaine borné, à bord lisse et convexe de type fini 2. Ainsi, les résultats des chapitres précédents s'appliquent. Ainsi, nous savons déjà que  $u(z)$  est dans  $\Lambda^{\frac{1}{2}}$  puisque ce résultat est plus faible qu'appartenir à  $\Gamma^{\frac{1}{p}}$ . Nous ne devons donc vérifier que les estimations tangentielles complexes. De plus, en effectuant une double dérivation tangentielle, il s'agit en fait d'une dérivation en  $D_{z,v}D_{z,w}$  où  $v$  et  $w$  sont des vecteurs tangents complexes. Puisqu'on se trouve ici dans le cadre d'un domaine strictement convexe, cela signifie que

$$\sigma(z, v, 2^\ell d(z)) \approx \sigma(z, w, 2^\ell d(z)) \approx (2^\ell d(z))^{\frac{1}{2}}.$$

## 4.2 Un autre lemme de type Hardy-Littlewood :

Pour  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $1 - \alpha \geq \beta \geq \alpha > 0$ , nous avons le résultat suivant :

**Lemme 45.** Soit  $u \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  telle que, pour tout  $z \in \Omega \cap \mathcal{U}$ , on ait :  $|Du(z)| \lesssim (d(z))^{-1+\alpha}$  et  $|D_T^2 u(z)| \lesssim (d(z))^{-1+\beta}$ . Alors :  $u \in \Gamma^{\alpha, \frac{2\alpha}{\alpha-\beta+1}}$ .

Nous devons donc démontrer que  $u$  vérifie les hypothèses de ce lemme pour  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ . En fait, dans notre noyau, nous pouvons dériver les termes  $u^1$ ,  $u^{n-1}$  d'une part et  $u^0$  à l'extérieur du polydisque  $P(z, d(z))$  d'autre part. Or, en appliquant les résultats du chapitre précédent, nous avons directement le résultat pour  $\alpha$  dans chacun de ces trois cas.

**Remarque 13.** Nous utilisons encore un critère de second ordre de dérivation car il s'agit du bon critère pour obtenir des espaces de type Zygmund  $\Lambda^1$  (i.e.  $|u(z+h) + u(z-h) - 2u(z)| \lesssim |h|$ ).

*Preuve du lemme 45.* – On adapte la démonstration du lemme 4.7 de S.G. Krantz [18]. Il est clair que la première condition implique l'appartenance à  $\Lambda^\alpha$ , le problème est en fait l'obtention de la condition tangentielle. Pour  $\frac{2\alpha}{\alpha-\beta+1} < 1$ , on peut simplifier la preuve en ne considérant que l'étude de  $|u \circ \gamma(h) - u \circ \gamma(0)|$ . Cependant, comme nous sommes intéressés par le résultat optimal, on va directement considérer  $|u \circ \gamma(h) + u \circ \gamma(-h) - 2u \circ \gamma(0)|$ . Nous notons  $z_t = \gamma(t)$  et nous posons, pour  $h$  que l'on peut choisir positif,  $w_t = z_t - h^\theta \nu_{z_t}$  où  $\nu_{z_t}$  est la normale unitaire sortante au

point  $\pi(z_t) \in \partial\Omega$ . Nous ne donnons pas de valeur à  $\theta$  a priori. C'est pour obtenir le meilleur résultat que l'on posera à la fin  $\theta = \frac{2}{\alpha-\beta+1}$ . On majore alors :

$$\begin{aligned} |u(z_h) + u(z_{-h}) - 2u(z_0)| &\leq \underbrace{|u(w_h) + u(w_{-h}) - 2u(w_0)|}_I \\ &+ \underbrace{|u(z_h) - u(w_h)|}_{II} + \underbrace{|u(z_{-h}) - u(w_{-h})|}_{III} + 2 \underbrace{|u(z_0) - u(w_0)|}_{IV}. \end{aligned}$$

Nous majorerons les termes  $I$  et  $II$  puisque  $III$  et  $IV$  se traitent exactement de la même manière que  $II$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} II &\leq \int_0^{h^\theta} |Du(z_h + t\nu_{z_h})| dt \\ &\leq \int_0^{h^\theta} Ct^{-1+\alpha} dt \\ &\lesssim h^{\theta\alpha}. \end{aligned}$$

Suivant S. G. Krantz, [18] et [19], nous pouvons considérer que le chemin  $\tilde{\gamma}(t) : t \rightarrow w_t$  est dans  $\mathcal{C}_1^\infty$ . Plus précisément, grâce à la rétraction, nous savons que le vecteur normal au point  $\tilde{\gamma}(t)$  est  $\nu_t$ . En particulier  $\mathbb{C}\nu_t$  est le même, donc l'espace tangent complexe aussi. Il s'agit ainsi de montrer que  $\langle \tilde{\gamma}'_t, \nu_t \rangle = 0$ . Pour cela, nous calculons  $|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|^2$  puis nous le dérivons :

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|^2 &= h^2 \langle \nu_t, \nu_t \rangle \\ \implies \langle (\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t))', \overline{(\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t))} \rangle &= 0 \\ \implies \langle (\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t))', \overline{h\nu_t} \rangle &= 0 \\ \implies \langle \tilde{\gamma}'(t), \overline{h\nu_t} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons bien  $\tilde{\gamma}'_t \in T_{\tilde{\gamma}_t}^{\mathbb{C}}$ . Ainsi, pour l'étude de  $I$ , grâce à la formule de Taylor nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} I &\leq h^2 \left( \sup_{-h < t < h} \left| \frac{d^2}{dt^2} u(w_t) \right| \right) \\ &\leq h^2 (|D_T^2 u(w_t)|) \\ &\lesssim h^2 (d(w_t)^{-1+\beta}) \\ &\lesssim h^{2+\theta(-1+\beta)} \\ &\lesssim h^{2+\theta(-1+\beta)}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à chercher le  $\theta$  tel que  $\min(\theta\alpha, 2 + \theta(-1 + \beta))$  soit aussi grand que possible ( $h$  est petit, et comme on cherche la meilleure majoration, il faut que l'exposant soit aussi grand que possible). Ces deux fonctions de  $\theta$  ont des sens de variation opposés, on obtient donc le maximum pour  $\theta\alpha = 2 + \theta(-1 + \beta)$ , c'est-à-dire pour  $\theta = \frac{2}{\alpha-\beta+1}$ .  $\square$

### 4.3 Etude de $u^1(z)$ et $u^{n-1}(z)$ :

Nous allons l'écrire pour  $u^1$  puisque les calculs sont similaires pour  $u^{n-1}$ . Nous notons  $\mathcal{I}_\ell^1$  l'intégrale sur  $\mathcal{C}^\ell$  après dérivation :

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_\ell^1| &\lesssim \|f\|_\infty \frac{\sigma_M(z, 2^\ell d(z))}{\sigma(z, v, 2^\ell d(z))\sigma(z, w, 2^\ell d(z))} \\ &\lesssim \|f\|_\infty \left(\frac{1}{2^\ell}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d(z)^{\frac{1}{2}}}{d(z)} \\ &\lesssim \left(\frac{1}{2^\ell}\right)^{\frac{1}{2}} d(z)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Nous sommions sur  $\ell$  et nous obtenons  $\beta = \frac{1}{2}$ .

### 4.4 Etude de $u^0(z)$ :

Nous allons procéder de la même manière que dans le chapitre précédent en considérant le critère direct sur le voisinage  $P(z, d(z))$  de  $z$ . Puis, en dehors de ce voisinage, nous utiliserons de nouveau le critère de dérivation. Pour le faire de manière rigoureuse, il faut considérer une fonction  $\chi$  à support compris entre  $P(z, d(z))$  et  $2P(z, d(z))$  et séparer en deux intégrales :  $\int_\Omega \chi(\zeta) \cdots + \int_\Omega (1 - \chi(\zeta)) \cdots$ . De manière générale, nous écrivons par abus de notation  $u^0$  dans chaque cas, le contexte étant clair.

Il s'agit de montrer que

$$|(u^0 \circ \gamma)(h) + (u^0 \circ \gamma)(-h) - 2(u^0 \circ \gamma)(0)| \lesssim |h|.$$

Nous posons  $z = (u^0 \circ \gamma)(0)$  et nous notons  $(u^0 \circ \gamma)$  pour  $u_\gamma^0$ .

#### 4.4.1 Etude à l'intérieur de $P(z, d(z))$ , cas $|h|^2 \leq d(z)$ :

Pour faire l'étude sur ce polydisque, on le décompose en couronnes du type  $P(z, 2^\ell |h|^2) \setminus \text{cste} P(z, 2^{\ell-1} |h|^2)$ . Il faut aussi faire l'étude sur le premier polydisque  $P(z, |h|^2)$ . On ne peut pas utiliser cette décomposition en couronnes pour remplir tout  $\Omega$  car nous avons besoin d'une comparaison entre  $d(\zeta)$  et  $d(z)$  au cours de la démonstration.

Pour  $|h|^2 \leq d(z)$ , on pose  $\int_\Omega = \underbrace{\int_{P(z, |h|^2)}}_{(I)} + \underbrace{\int_{P(z, d(z)) \setminus P(z, |h|^2)}}_{(II)} + \underbrace{\int_{\Omega \setminus P(z, d(z))}}_{(III)}$ .

L'étude de *III* ne concerne pas cette partie. Nous allons étudier *I* et *II* uniquement. Cependant, comme  $P(z, |h|^2)$  ne contient a priori ni  $z + h$ , ni  $z - h$ , il faudrait considérer, comme au chapitre précédent, trois termes a priori. C'est-à-dire effectuer

de plus faire intervenir  $P(z \pm h, |h|^2)$ . La même comparaison que dans l'affirmation 2 du chapitre précédent donne  $\int_{P(z+h, |h|^2)} |K^{(0)}(\zeta, z)| \lesssim \int_{P(z, |h|^2)} |K^{(0)}(\zeta, z)|$ . Nous n'avons donc qu'à estimer ce dernier terme.

**Le polydisque  $P(z, |h|^2)$  :**

Pour l'étude de (I), nous nous plaçons dans les  $|h|^2$ -coordonnées de McNeal, nous reprenons les notations du chapitre précédent (cf (3.2.2)) et nous obtenons :

$$|u^0| \lesssim \|f\|_\infty \cdot \int_{P(z, |h|^2)} \left( \frac{|\mathcal{B}(\zeta, z)|}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^N \cdot \frac{\prod \frac{1}{\sigma_j \sigma_k(\zeta, d(\zeta))} \prod \frac{|\zeta_k - z_k|}{\sigma_j \sigma_k \sigma_d(\zeta, d(\zeta))} \frac{1}{|\zeta_j - z_j|}}{\left( \sum_\ell \frac{|\zeta_\ell - z_\ell|}{\sigma_\ell(\zeta, d(\zeta))} \right)^{2n-2}} d\lambda(\zeta) .$$

Or  $|\zeta_k - z_k| \leq \sigma(z, e_k, |h|^2) < \sigma(z, e_k, d(z))$ . De plus, on peut remplacer les  $\sigma_j(\zeta, d(\zeta))$  par les  $\sigma_j(\zeta, d(z))$  (le poids absorbe les  $\frac{d(z)}{d(\zeta)}$ ), puis par  $\sigma_j(z, d(z))$ . (en effet, puisque  $\zeta \in P(z, |h|^2) \subset cP(z, d(z))$ ,  $d(\zeta)$  est majoré par  $d(z)$ ). Nous obtenons ainsi :

$$|u^0| \lesssim \|f\|_\infty \cdot \int_{P(z, |h|^2)} \left( \prod_{j \neq M, i} \frac{1}{\sigma_j^2} \right) \frac{1}{\sigma_i \sigma_M(z, d(z))} \frac{1}{|\zeta_i - z_i|} \frac{1}{\left( \sum_\ell \frac{|\zeta_\ell - z_\ell|}{\sigma_\ell(\zeta, d(z))} \right)^{2n-2}} d\lambda(\zeta) .$$

Nous allons alors effectuer, comme au chapitre précédent dont nous reprenons les notations, le changement de variables suivant :  $k_\ell = \frac{|\zeta_\ell - z_\ell|}{\sigma_\ell(z, d(z))}$ .

$$\begin{aligned} |u^0| &\lesssim \|f\|_\infty \cdot \int_{D(0, \frac{\sigma_\ell(z, |h|^2)}{\sigma_\ell(z, d(z))})} \sigma_M(z, d(z)) \cdot \frac{1}{k_i} \cdot \frac{1}{(k_1 + \dots + k_n)^{2n-2}} dk \\ &\lesssim \|f\|_\infty \cdot \sigma_M(z, |h|^2) \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

$$\lesssim (|h|^2)^{\frac{1}{2}} = |h| . \quad (4.4.2)$$

Nous obtenons donc le résultat voulu sur  $P(z, |h|^2)$ . Nous procédons de même sur  $P(z + h, |h|^2)$  et  $P(z - h, |h|^2)$ . Ainsi, nous avons la bonne majoration sur

$$(P(z + h, |h|^2) \cup P(z - h, |h|^2) \cup P(z, |h|^2)) .$$

Nous allons donc nous intéresser maintenant au reste du polydisque :

**Les couronnes  $P(z, 2^\ell |h|^2)$  :**

Pour le reste de l'étude de l'intégrale sur  $P(z, d(z))$ , c'est-à-dire le terme II, on se sert directement de la différence seconde.

$$\begin{aligned} II &= |u_\gamma^0(h) + u_\gamma^0(-h) - 2u_\gamma^0(0)| \\ &\lesssim |h|^2 \left| D_T^2 \int_{\tau \in [-h, +h]} \int_{\zeta \in \Omega} \left( \frac{\mathcal{B}(\zeta, \gamma(\tau))}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^N u_K^{(0)}(\zeta, \gamma(\tau)) \right| . \end{aligned}$$

Où la notation  $u_K^{(0)}$  correspond, comme dans le second cas du paragraphe (3.2.3), à  $f \wedge K^0$  privé du terme  $\left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, \gamma(\tau))}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}\right)^N$ . Nous considérons une dérivation tangentielle puisqu'on dérive le long de  $\gamma$ . Si on dérive le terme  $\left(\frac{\mathcal{B}(\zeta, \gamma(\tau))}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)}\right)^N$ , c'est plutôt bien, puisqu'on n'augmente pas l'exposant au dénominateur. Nous allons juste écrire ici ce qui se passe quand on dérive  $u_K^{(0)}(\zeta, \gamma(\tau))$ . Il apparaît deux termes en  $\sigma(\zeta, v, d(\zeta))$  ( $v$  tangent) au dénominateur et l'exposant du terme du dénominateur augmente de 2. C'est-à-dire que tous les calculs se passent exactement comme dans le chapitre précédent. Plus précisément, nous allons utiliser le critère direct sur des couronnes de type  $P(z, 2^\ell |h|^2) \setminus CP(z, 2^{\ell-1} |h|^2)$ . En appelant  $I_\ell$  l'intégrale correspondante :

$$I_\ell \lesssim |h|^2 \int_{c^\ell} \left( \frac{|\mathcal{B}(\zeta, \gamma(\tau))|}{\mathcal{B}(\zeta, \zeta)} \right)^N \cdot |f(\zeta)| \frac{1}{\sigma(\zeta, v, d(\zeta)) \sigma(\zeta, w, d(\zeta))} \\ \times \frac{\prod \frac{1}{\sigma_j \sigma_k(\zeta, d(\zeta))} \prod \frac{|\zeta_k - z_k|}{\sigma_j \sigma_k \sigma_d(\zeta, d(\zeta))} \frac{1}{|\zeta_j - z_j|}}{\left( \sum_\ell \frac{|\zeta_\ell - z_\ell|}{\sigma_\ell(\zeta, d(\zeta))} \right)^{2n}} d\lambda(\zeta) .$$

Ce type d'estimation est très proche de celle du paragraphe (3.2.5). Nous exploitons cette similitude en effectuant le même type de simplification. Puisque  $d(\zeta) \leq d(z)$ , et à l'aide du poids, on peut changer tous les  $\sigma_\ell(\zeta, d(\zeta))$  en  $\sigma_\ell(z, d(z))$ . Nous effectuons le maintenant classique changement de variable  $u_i = \frac{|\zeta_i - z_i|}{\sigma_i(z, d(z))}$  pour obtenir :

$$I_\ell \lesssim |h|^2 \|f\|_\infty \int_{\frac{\sigma_i(z, 2^{\ell-1} |h|^2)}{\sigma_i(z, d(z))}}^{\frac{\sigma_i(z, 2^\ell |h|^2)}{\sigma_i(z, d(z))}} \frac{\sigma_M(z, d(z))}{\sigma_v(z, d(z)) \sigma_w(z, d(z))} \frac{du}{\left( \sum_\ell u_\ell \right)^{2n+1}} .$$

Nous majorons simplement le terme  $\frac{\sigma_M(z, d(z))}{\sigma_v(z, d(z)) \sigma_w(z, d(z))}$  par  $(d(z))^{-\frac{1}{2}}$ . En effet, dans des domaines strictement convexes avec  $v$  et  $w$  tangents complexes, nous avons :

$$\sigma_v(z, d(z)) \approx \sigma_w(z, d(z)) \approx (d(z))^{\frac{1}{2}} \text{ et } \sigma_M(z, d(z)) \lesssim (d(z))^{\frac{1}{2}} .$$

Examinons maintenant comment majorer le reste de l'intégrale :

$$\int_{\frac{\sigma_i(z, 2^{\ell-1} |h|^2)}{\sigma_i(z, d(z))}}^{\frac{\sigma_i(z, 2^\ell |h|^2)}{\sigma_i(z, d(z))}} \left( \sum_\ell u_\ell \right)^{-2n-1} du \lesssim \int_{\frac{\sigma_n(z, 2^{\ell-1} |h|^2)}{\sigma_n(z, d(z))}}^{\frac{\sigma_n(z, 2^\ell |h|^2)}{\sigma_n(z, d(z))}} u_n^{-2} du_n \\ \lesssim \frac{\sigma_n(z, d(z))}{\sigma_n(z, 2^{\ell-1} |h|^2)} \\ \lesssim \left( \frac{d(z)}{2^\ell |h|^2} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Pour pouvoir obtenir ce résultat, nous avons choisi comme dernier paramètre d'intégration une direction dans le tangent complexe, ce qui est possible puisque nous

considérons  $n \geq 2$ , donc avec au moins une direction tangente complexe. Nous appliquons alors ces deux derniers résultats :

$$\begin{aligned} I_\ell &\lesssim \frac{|h|^2}{(d(z))^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{d(z)}{2^\ell |h|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \frac{|h|}{(2^\ell)^{\frac{1}{2}}} . \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Il ne reste plus qu'à sommer sur  $\ell$  pour faire converger et obtenir le résultat.

#### 4.4.2 Etude à l'intérieur de $P(z, d(z))$ , cas $d(z) \leq |h|^2$ :

Nous allons faire une étude sur  $P(z, d(z))$ . Nous appliquons les résultats du chapitre 3. Dans le paragraphe 3.2.3, on obtient le résultat suivant (avec ici  $m=2$ ) :

$$\int_{P(z, d(z))} |K^{(0)}(\zeta, z)| \lesssim \sigma_M(z, d(z)) \lesssim d(z)^{\frac{1}{2}} .$$

Enfin, puisqu'on est dans le cas où  $d(z) \lesssim |h|^2$ , on obtient :

$$\int_{P(z, d(z))} |K^{(0)}(\zeta, z)| \lesssim |h| .$$

C'est le résultat que l'on souhaitait démontrer.

#### 4.4.3 Etude à l'extérieur de $P(z, d(z))$ :

Nous effectuons exactement le même travail qu'au chapitre précédent. Plutôt que le reprendre, puisqu'on se sert du critère de double dérivation, on applique les résultats du chapitre précédent ( $m=2$ ) pour obtenir :

$$|D_{z,v,w}^2 u_\ell^0| \lesssim \|f\|_\infty \left( \frac{1}{2^\ell} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma_v(z, d(z)) \sigma_w(z, d(z))} d(z)^{\frac{1}{2}} .$$

Enfin, puisque  $v$  et  $w$  sont tangents complexes, nous obtenons :

$$|D_2^T u^0(z)| \lesssim d(z)^{-\frac{1}{2}} . \tag{4.4.4}$$

C'est-à-dire qu'on a  $\beta = \frac{1}{2}$  dans le critère Hardy-Littlewood tangentiel 45. On a bien au final  $u^0(z) \in \Lambda^{\frac{1}{2}, 1}$ , ce qui achève la démonstration du théorème 5.



# Bibliographie

- [1] W. ALEXANDRE, Estimées  $C^k$  pour les domaines convexes de type fini de  $\mathbb{C}^n$ . C.R.Acad.Sci Paris, **I 335**, 23–26 (2002).
- [2] B. BERNDTSON and M. ANDERSSON, Henkin-Ramirez formulas with weight factors, Ann. Inst. Fourier, **32(3)**, 91–110 (1983).
- [3] J. BRUNA, P. CHARPENTIER and Y. DUPAIN, Zero varieties for the Nevanlinna class in convex domains of finite type in  $C^n$ , Ann. Math, **147**, 391–415 (1998).
- [4] A. CUMENGE, Estimées Lipschitz optimales dans les convexes de type fini, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325**, 1077–1080 (1997).
- [5] A. CUMENGE, Sharp estimates for  $\bar{\partial}$  on convex domains of finite type, Ark. för mat. **39**, 1–25 (2001).
- [6] A. CUMENGE and M. FRUCTUS, Estimées anisotropes dans les domaines convexes de type fini, Bull. Sci. Math. **127**, 719–737 (2003).
- [7] J. P. D'ANGELO, Several Complex Variables and the Geometry of real Hypersurfaces, Studies in Advanced Mathematics CRC Press.
- [8] G. DE RHAM, Variétés Différentiables, Editions Hermann, 1955.
- [9] J. P. DEMAILLY and C. LAURENT-THIEBAULT, Formules intégrales pour les formes différentielles de type  $(p, q)$  dans les variétés de Stein, Ann. Sci. École Norm. Sup. **20(4)**, 579–598 (1987).
- [10] K. DIEDERICH, B. FISCHER, J. E. FORNAESS, Hölder estimates for convex domains of finite type, Math. Z. **232**, 43–61 (1999).
- [11] B. FISCHER,  $L^p$  estimates on convex domains of finite type, Math. Z. **236(2)**, 401–418 (2001).
- [12] B. FISCHER, Nonisotropic Hölder estimates on convex domains of finite type, A paraître dans Michigan Math. J.
- [13] P. GREINER and E. M. STEIN, Estimates for the  $\bar{\partial}$  Neumann problem, Princeton Univ. Press, Princeton, (1977).
- [14] T. HEFER, Extremal bases and Hölder estimates for  $\bar{\partial}$  on convex domains of finite type, A paraître dans Michigan Math J.
- [15] G. M. HENKIN and J. LEITERER, Theory of Functions on Complex Manifolds, Akademie-Verlag Berlin (1984).

- 
- [16] G. M. HENKIN and A. ROMANOV, Exact Hölder estimates of solutions of the  $\bar{\partial}$  equations, *Math. U.S.S.R. Sb.* **5**, 1180–1192 (1971).
  - [17] S. KOBAYASHI, The Geometry of Bounded Domains, *Trans. A.M.S.* **92**, 267–290 (1959).
  - [18] S. G. KRANTZ, Optimal Lipschitz and  $L^p$  regularity for the equation  $\bar{\partial}u = f$  on strongly pseudoconvex domains, *Math. Ann.* **219**, 233–260 (1976).
  - [19] S. G. KRANTZ, *Function Theory of Several Complex Variables*, Wadsworth & Brooks/Cole Math. Series, second edition, (1992).
  - [20] I. LIEB and J. MICHEL, *The Cauchy-Riemann Complex*, Vieweg Edition Coll. Aspect of Math (2002).
  - [21] I. LIEB and M. RANGE, Lösungsoperatoren für den Cauchy-Riemann-Komplex mit  $C^k$ -Abschätzungen, *Math. Ann.* **253**, 145–164 (1980).
  - [22] J. D. MCNEAL, Convex Domain of Finite Type, *J. Funct. Anal.* **108**, 361–373 (1992).
  - [23] J. D. MCNEAL, Estimates on the Bergman kernel of convex domains, *Advances in Math.* **109**, 108–139 (1994).
  - [24] J. D. MCNEAL, Invariant metric estimates for  $\bar{\partial}$  on some pseudoconvex domains, *Ark.för mat.* **39(1)**, 121–136 (2001).
  - [25] J. D. MCNEAL and E. M. STEIN, Mapping properties of the Bergman projection on convex domains of finite type, *Duke Math. J.* **73**, 177–199 (1994).
  - [26] T. OHSAWA, A remark on completeness of the Bergman metric, *Proc. Jap. Acad.* **57**, 238–240 (1981).
  - [27] E. M. STEIN, *Singular Integrals and Differentiability Properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1970).
  - [28] J. YU, Multitypes of convex domains, *Indiana Univ. Math.* **41(3)**, 837–849 (1992).
  - [29] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, (1968).