



**HAL**  
open science

# Étude approfondie de la structure interne du Soleil: héliosismologie et modèles fins incluant la ségrégation détaillée des éléments et les processus de transport

Olivier Richard

► **To cite this version:**

Olivier Richard. Étude approfondie de la structure interne du Soleil: héliosismologie et modèles fins incluant la ségrégation détaillée des éléments et les processus de transport. Astrophysique [astro-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1999. Français. NNT: . tel-00004294

**HAL Id: tel-00004294**

**<https://theses.hal.science/tel-00004294>**

Submitted on 23 Jan 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'université Paris 6  
(spécialité Astrophysique)

Présentée par

Olivier RICHARD

pour obtenir le grade de docteur de l'université Paris 6

Étude approfondie de la structure  
interne du Soleil : héliosismologie et  
modèles fins incluant la ségrégation  
détaillée des éléments et les processus  
de transport

Soutenue le 18 Mai 1999 devant la commission d'examen :

Jørgen Christensen-Dalsgaard	
Werner Däppen	<i>Invité</i>
Wojciech Dziembowski	
Pierre Encrenaz	<i>Président</i>
Georges Michaud	
Janine Provost	<i>Rapporteur</i>
Sylvaine Turck-Chièze	<i>Invitée</i>
Sylvie Vauclair	<i>Directeur de thèse</i>
Jean-Paul Zahn	<i>Rapporteur</i>



Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Ne voulant oublier personnes, j'utiliserai donc la forme minimaliste pour de sincères remerciements :

**Merci!!!!**

**TSVP**

Pourtant comme Cesar je vais tout de même me lancer dans l'accumulation :

Merci à ma famille  
Merci à mes amis  
Merci à Josiane  
Merci à Dominique  
Merci à Anne-Marie  
Merci à José et à Nora (Félicitation !!)  
Merci à Gerard  
Merci à Danièle  
Merci à Malvina  
Merci à Jean-Claude et à Laurence  
Merci à Elodie et à Anne-Isabelle  
Merci à Alison et à Oliver  
Merci à Christophe M.  
Merci à tous ceux que je vais oublier  
Merci au Ministère des affaires étrangères  
Merci à Christophe R.  
Merci au CAMK  
Merci à Maria Pia  
Merci à Katrina  
Merci au jumelage France-Pologne  
Merci à Agatha  
Merci à Jean-Luc  
Merci à J.L. VIDAL  
Merci à J. GASIOT  
Merci à Marie-Pascale  
Merci à Valéry  
Merci à Cyril  
Merci aux SC  
Merci à Anne  
Merci à Geneviève  
Merci à Jeanine  
Merci à Pierre  
Merci à Astrid et Greg  
Merci à Pedro

# Résumé

Au cours de cette thèse nous avons étudié différents aspects de la modélisation de la structure interne du Soleil. La précision atteinte avec l'héliosismologie permet de fortement contraindre les modèles solaires. Les meilleurs modèles standards (où la convection et la diffusion microscopique sont les seuls processus de transport pris en compte) reproduisent la vitesse du son du modèle sismique (obtenu par inversion des modes sismiques) avec un très bon accord (meilleur que 1%).

Nous avons testé dans ce cadre l'influence d'une variation des grandeurs utilisées pour la calibration des modèles, compte-tenu de leur incertitude actuelle. Nous avons constaté que ces variations entraînent des modifications négligeables dans la comparaison avec le modèle sismique.

Nous avons aussi étudié les effets du changement de l'équation d'état, des opacités, des taux de réactions nucléaires et de la composition chimique initiale dans les modèles. Pour notre meilleur modèle, calculé avec les données les plus récentes, l'écart avec la vitesse du son du modèle sismique est inférieur à 0.3%. Nous avons étudié la précision obtenue dans la détermination héliosismique de la fraction de masse d'hélium 4 dans la zone convective du Soleil.

Nous avons aussi étudié les processus de transport susceptibles d'expliquer les abondances observées des éléments légers. Le mélange induit par la rotation permet de reproduire les contraintes chimiques tout en améliorant l'accord avec le modèle sismique.

Dans tous ces modèles les flux de neutrinos obtenus sont plus importants que ceux observés. Nous avons testé l'effet d'un mélange dans le cœur du Soleil : les flux de neutrinos sont diminués mais l'accord avec le modèle sismique est dégradé. Cette étude tend à montrer que la solution au problème des neutrinos solaires se trouve plutôt en physique des particules.

**Mots-clés:** Abondances — Diffusion — Évolution stellaire — Héliosismologie — Processus de transport — Soleil — Structure interne

# Abstract

In this thesis we have studied different aspects of modelling the solar internal structure. The accuracy of Helioseismology gives strong constraints on the structure of solar models. The best standard models (models where convection and microscopic diffusion are the only transport processes taken into account) reproduce the sound speed of the seismic Sun (obtained by inversion of seismic modes) with a deviation smaller than 1%.

With such an accuracy we tested the effects on the models of variations in the quantities used for their calibration, inside their error bars. We have noted that these variations give negligible changes in the comparison with the sound speed of the seismic Sun. We have studied the accuracy on the helioseismic determination of the solar helium abundance.

We also have studied the effects of modifications in the input physics (equation of state, opacities, nuclear reaction rates and initial mixture) on the structure of models. Our best model, obtained with the most recent data, reproduces the sound velocity of the seismic Sun within 0.3%.

We have studied several physical processes able to reproduce the helioseismic and chemical constraints: mass loss, mixing processes and temperature fluctuations that could occur at the bottom of the convective zone. We have shown that the rotation-induced mixing could reproduce the chemical constraints while improving the agreement with the seismic Sun.

All the models predict neutrino fluxes more important than those observed. We have tested a mixing that could occur in the solar core and reduce the neutrino fluxes: it destroys the agreement with the seismic Sun. These results seem to show that the solution of the solar neutrino problem is in particle physics.

**Keywords:** Abundances — Diffusion — Helioseismology — Internal structure — Stellar evolution — Sun — Transport processes

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Héliosismologie</b>	<b>5</b>
1.1 Propriétés des oscillations solaires . . . . .	5
1.1.1 Équations de base . . . . .	5
1.1.2 Linéarisation des équations . . . . .	6
1.1.3 Nature des modes . . . . .	8
1.1.4 Forme variationnelle . . . . .	9
1.1.5 Forme asymptotique . . . . .	10
1.2 Le problème inverse . . . . .	10
1.2.1 Inversion asymptotique . . . . .	10
1.2.2 Inversion non asymptotique . . . . .	12
1.2.3 Inversion développée par Dziembowski et al. (1990) . . . . .	12
1.2.4 Précision dans la détermination de la fraction de masse d'hélium 4 dans la zone convective par inversion et article publié dans A&A 338 . . . . .	13
<b>2 Contraintes sur les modèles solaires</b>	<b>21</b>
2.1 Calibration . . . . .	21
2.2 Contraintes Chimiques . . . . .	24
2.3 Contraintes héliosismiques . . . . .	25
2.4 Contraintes nucléaires . . . . .	27
<b>3 Modélisation de la structure interne des étoiles</b>	<b>29</b>
3.1 Équations de base de l'évolution stellaire . . . . .	30
3.2 Diffusion . . . . .	31
3.2.1 Équation de diffusion . . . . .	31



3.2.2	Vitesse de diffusion . . . . .	32
3.3	Forces radiatives . . . . .	32
3.4	Taux de production d'énergie . . . . .	33
3.4.1	Section efficace non résonante entre 2 particules chargées . . . . .	33
3.4.2	Écrantage . . . . .	34
3.4.3	Détermination des sections efficaces de réaction . . . . .	35
3.5	Équation d'état . . . . .	36
3.5.1	Équation d'état MHD . . . . .	36
3.5.2	Équation d'état OPAL . . . . .	36
3.5.3	Effet de l'équation d'état sur la structure interne . . . . .	37
3.6	Opacités . . . . .	38
3.6.1	Effet du changement d'opacité . . . . .	38
3.6.2	L'hélium 3 et les opacités . . . . .	39
3.7	Convection . . . . .	41
3.8	Composition chimique initiale . . . . .	42
3.9	Ionisation partielle des éléments . . . . .	45
3.9.1	Calcul du degré d'ionisation . . . . .	45
3.9.2	Calcul de la vitesse de diffusion microscopique . . . . .	49
3.10	Article soumis à A&A: « Solar model calibrations. I « Standard » input physics » . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Processus de transport et physique non « standard »</b>	<b>63</b>
4.1	Processus de mélange au cœur et flux de neutrino, et article publié dans A&A 322 . . . . .	64
4.2	Processus de transport dans les régions supérieures de la zone radia- tive et diminution du lithium . . . . .	68
4.2.1	Turbulence induite par la rotation . . . . .	68
4.2.2	Circulation méridienne . . . . .	69
4.2.3	Évaluation du coefficient de diffusion effectif . . . . .	70
4.2.4	Gradient de poids moléculaire, article publié dans A&A 312 et contribution orale présentée au workshop GONG 98 / SOHO 6	71
4.2.5	Convection pénétrative et tachocline . . . . .	91
4.3	Perte de masse . . . . .	92
4.4	Inhomogénéités de température à la base de la zone convective . . . . .	93

<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>97</b>
<b>Annexes</b>	<b>101</b>
<b>A Quelques valeurs numériques concernant les modèles solaires</b>	<b>101</b>
<b>B Article publié dans Science 272</b>	<b>103</b>
<b>C Article paru dans Solar Physics 182</b>	<b>127</b>
<b>D Liste de publications</b>	<b>143</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>145</b>



# Introduction

Déjà au début du siècle, avant même que la source d'énergie des étoiles soit connue, de nombreux processus physiques ont été étudiés dans les intérieurs stellaires, tels que: la diffusion microscopique (Chapman 1917), les forces radiatives (Eddington 1926), les effets de la rotation (Von Zeipel 1924; Vogt 1925). En 1928 Gamow découvre l'effet tunnel et permet de trancher définitivement en faveur des réactions nucléaires comme source d'énergie des étoiles. Avec les travaux de Rosseland et de Kramers sur les opacités les modèles polytropiques sont en bon accord avec les observations.

Pendant plusieurs dizaines d'années les scientifiques ont pensé que les effets de la diffusion microscopique n'étaient pas vus à la surface des étoiles à cause de la circulation méridienne, et seuls quelques astrophysiciens s'intéressèrent encore à l'étudier (Wildt 1936, 1937; Chapman 1958 pour la diffusion thermique; Schatzman 1944, 1945, 1958 pour le triage gravitationnel dans les naines blanches).

Avec l'informatique la physique stellaire a pu bénéficier de nombreuses améliorations, tant par le développement de codes d'évolution stellaire que par le raffinement de la physique elle-même, telle que les opacités et les équations d'état. C'est seulement vers 1970, après que de fortes anomalies chimiques aient été observées dans les étoiles de la séquence principale, que l'idée vint d'expliquer ces anomalies par des processus de diffusion (Praderie 1967; Michaud 1970; Watson 1970, 1971). Cette idée fut confortée par le fait que les anomalies apparaissaient dans des étoiles en rotation lente, donc a priori plus stables que les autres.

Plus récemment de nombreuses observations d'étoiles très variées (âge, masse, stade évolutif, ...) ont permis de révéler l'existence de nombreuses anomalies d'abondance. Ces anomalies nécessitent la prise en compte de processus de transport de matière dans la zone radiative des étoiles (mélange induit par la rotation, perte de masse, ...) pour être reproduites par les modèles. Dans le cas particulier du lithium il faut des processus permettant de le transporter de la base de la zone convective dans la région où la température atteint sa température de destruction nucléaire.

En parallèle à ces améliorations de la physique stellaire, l'oscillation photosphérique solaire à 5 minutes fut découverte par Leighton en 1960. Environ dix ans plus tard, Ulrich puis Stein et Leibacher suggérèrent que ces oscillations résultaient de l'interférence entre un grand nombre de modes propres piégés dans une cavité localisée entre la surface et différentes profondeurs de réflexion. Deubner obtint les

premiers spectres de puissance bidimensionnels (fonction de l'espace et du temps) en 1975, ce qui prouva l'existence des modes propres. Les observations se multiplièrent et augmentèrent le nombre et la précision des modes. Les bases de l'héliosismologie étaient posées.

Avec le développement des techniques d'inversion, la course à la précision commença et permit à l'héliosismologie de fournir des instruments de diagnostic de la structure du Soleil. C'est alors que des réseaux d'observation au sol répartis sur toute la surface du globe furent développés (IRIS <sup>1</sup>, BISON <sup>2</sup>, GONG <sup>3</sup>) afin d'obtenir des observations sans interruption temporelle. C'est en 1995 qu'eut lieu le dernier grand événement instrumental de l'héliosismologie de ces dernières années, avec l'envoi de la sonde SOHO <sup>4</sup>.

Les premières observations des flux de neutrinos, par l'expérience développée par Davis, publiées en 1968 ont montré que les flux théoriques prédits par les modèles étaient plus importants que ceux observés. Ce qui a été confirmé plus tard par trois autres expériences : Kamiokande, GALLEX et SAGE. Cet écart entre flux prédits et observés a conduit les chercheurs à améliorer les déterminations des taux de réactions nucléaires ainsi que les effets de l'écrantage électronique. Cependant les flux observés ne sont toujours pas reproduit par les modèles actuels ; une solution astrophysique à ce problème semble de plus en plus difficile à trouver et on s'oriente vers une solution de la physique des particules.

Tous ces progrès récents concernant le Soleil montrent que certaines approximations faites jusqu'à présent ne sont plus justifiées avec la précision actuelle. Par exemple les effets de la diffusion microscopique dans les modèles solaires ne peuvent plus être négligés (Bahcall & Pinsonneault 1992, 1995; Christensen-Dalsgaard et al. 1996; Richard et al. 1996; Ciaccio et al. 1997; Gabriel 1997; Morel et al. 1997; Brun et al. 1998a; Elliott 1998; Turcotte et al. 1998).

Dans cette thèse nous avons fait une étude détaillée de la structure interne du Soleil compte-tenu des nouveaux résultats de l'héliosismologie.

Tout d'abord nous avons, grâce aux techniques d'inversion de Varsovie, étudié les incertitudes sur la fraction de masse d'hélium 4 dans la zone convective obtenue par les inversions héliosismiques, en particulier pour tenter de mieux contraindre les processus de transport dans la zone radiative (section 1).

Nous avons aussi fait le point sur les différentes contraintes observationnelles (chimiques, héliosismiques et nucléaires) qui peuvent être utilisées pour améliorer les modèles (section 2). De même nous nous sommes intéressés aux quantités généralement utilisées pour la calibration des modèles solaires (rayon, luminosité et âge solaire). De nouvelles valeurs pour ces quantités ont récemment été publiées. Nous avons testé les effets que ces changements pouvaient entraîner dans la structure des modèles. Nous avons fait de même, dans la section 3, en ce qui concerne la physique « standard » introduite dans les modèles solaires (l'équation d'état, les opacités, la diffusion microscopique, ...). Pour ces deux études nous avons comparé nos modèles

---

1. International Research Interior Sun
2. Birmingham Solar Oscillations Network
3. Global Oscillation Network Group
4. Solar and Heliospheric Observatory

solaires avec le modèle sismique de Varsovie (Dziembowski et al. 1994). Dans toutes ces comparaisons les modèles sont en bon accord avec le modèle sismique. Cependant cet accord fait apparaître un écart à la base de la zone convective, faible mais significatif, qui met en évidence l'existence de processus physiques non « standard » (tels que la perte de masse, le mélange, ...) dans la zone radiative. De plus les modèles n'utilisant que la physique « standard » (même avec la diffusion microscopique) ne reproduisent pas l'abondance photosphérique observée du lithium qui est environ 140 fois plus faible que l'abondance météoritique. C'est pourquoi nous avons étudié certains processus de transport comme le mélange induit par la rotation ou la perte de masse (section 4). Nous avons aussi étudié les effets de fluctuations éventuelles de température à la base de la zone convective susceptibles de produire une diminution du lithium.

Nous avons aussi montré que la perte de masse, fortement contrainte par l'héliosismologie, ne permettait pas de reproduire les variations temporelles du lithium déterminées à partir des observations des étoiles de types solaires des amas. De même nous avons montré que des fluctuations de température à la base de la zone convective permettant de reproduire l'abondance de lithium photosphérique sont trop importantes pour être réalistes. Par contre le mélange induit par la rotation permet à la fois de reproduire toutes les contraintes apportées par le lithium tout en améliorant l'accord avec le modèle sismique.

Nous nous sommes aussi intéressés à l'écart qui subsiste encore au cœur du Soleil. Pour cela nous avons testé les effets d'un mélange de type Gaussien dans la région où se produit la réaction  $pp$ . Nous avons ainsi montré qu'un tel mélange ne pouvait pas à la fois reproduire les flux de neutrinos observés et rester en accord avec le modèle sismique.



# Chapitre 1

## Héliosismologie

### Sommaire

---

<b>1.1 Propriétés des oscillations solaires</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1.1 Équations de base . . . . .	5
1.1.2 Linéarisation des équations . . . . .	6
1.1.3 Nature des modes . . . . .	8
1.1.4 Forme variationnelle . . . . .	9
1.1.5 Forme asymptotique . . . . .	10
<b>1.2 Le problème inverse</b> . . . . .	<b>10</b>
1.2.1 Inversion asymptotique . . . . .	10
1.2.2 Inversion non asymptotique . . . . .	12
1.2.3 Inversion développée par Dziembowski et al. (1990) . . . .	12
1.2.4 Précision dans la détermination de la fraction de masse d'hélium 4 dans la zone convective par inversion et article publié dans A&A 338 . . . . .	13

---

Ce chapitre présente rapidement les propriétés des oscillations solaires dans la section 1.1 ainsi que diverses formulations du problème inverse qui permet de déterminer la structure interne du Soleil (section 1.2). La formulation du problème inverse de Dziembowski et al. (1990) est décrite dans la section 1.2.3 et a été utilisée pour étudier la précision dans la détermination par les inversions de la fraction de masse d'hélium 4 dans la zone convective du Soleil (section 1.2.4). Les propriétés des oscillations et les inversions sont décrites de façon plus détaillée dans Unno et al. (1989), Christensen-Dalsgaard & Berthomieu (1991), Berthomieu & Gonczi (1997) et Christensen-Dalsgaard (1998).

## 1.1 Propriétés des oscillations solaires

### 1.1.1 Équations de base

Les équations de base de l'héliosismologie sont :



l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \quad (1.2)$$

l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho \quad (1.3)$$

et l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{f}$  représentent respectivement la vitesse des éléments de matière et la force s'exerçant sur ces éléments,  $\frac{dq}{dt}$  le taux d'énergie reçu ou perdu,  $E$  l'énergie interne et  $\Phi$  le potentiel gravitationnel.

L'équation de conservation de l'énergie apporte des complications importantes dans le calcul des oscillations stellaires par son terme de chauffage. Les effets dissipatifs du transport radiatif et les effets du transport convectif c'est à dire le terme de chauffage étant faible on peut utiliser l'approximation adiabatique, qui consiste à négliger le terme de chauffage. On obtient alors pour l'équation d'énergie :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (1.5)$$

où  $\Gamma_1$  est l'exposant adiabatique.

### 1.1.2 Linéarisation des équations

Les oscillations étant de faible amplitude comparées aux échelles caractéristiques du Soleil, elles peuvent être traitées comme des perturbations de l'état d'équilibre.

#### Structure à l'équilibre

A l'équilibre statique les dérivées temporelles peuvent être négligées et l'équation du mouvement devient l'équation de l'équilibre hydrostatique :

$$0 = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \quad \text{avec } \mathbf{f} = \nabla \Phi \quad (1.6)$$

ce qui donne :

$$\nabla p = \rho \nabla \Phi \quad (1.7)$$

avec en intégrant l'équation de Poisson :

$$\nabla \Phi = -\frac{Gm_r}{r^2} = -\frac{G}{r^2} \int_0^r 4\pi \rho r'^2 dr' \quad (1.8)$$

On obtient donc une relation entre  $p$  et  $\rho$ . Ce qui fait que des trois quantités ( $p$ ,  $\rho$  et  $\Gamma_1$ ) des équations de base, la connaissance de la structure du modèle ne dépend plus que de deux d'entre elles, par exemple :  $p$  et  $\Gamma_1$ ,  $\rho$  et  $\Gamma_1$ ,  $\rho$  et  $c^2 = \Gamma_1 p / \rho$ ,  $u = p / \rho$  et  $\Gamma_1$ .

## Perturbation

Les quantités s'écrivent, en utilisant de faibles perturbations autour de l'équilibre :

$$X(\mathbf{r}, t) = X_0(\mathbf{r}) + X'(\mathbf{r}, t) \quad (1.9)$$

où  $X'(\mathbf{r}, t)$  est la perturbation Eulérienne (i.e. à un point donné). La perturbation Lagrangienne s'écrit, pour un mouvement du fluide entre  $\mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}$  :

$$\delta X(\mathbf{r}, t) = X'(\mathbf{r}, t) + \delta\mathbf{r}\nabla X_0(r) \quad (1.10)$$

En remplaçant dans les équations de base les quantités par leur expression perturbative, on obtient le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \nabla\rho_0\mathbf{v} = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \rho'\frac{\nabla p_0}{\rho_0^2} - \nabla\Phi' \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{\Gamma_{1,0}p_0}\frac{dp'}{dt} = \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho'}{dt} \quad (1.13)$$

$$\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho' \quad (1.14)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} \quad (1.15)$$

Le modèle d'équilibre étant statique et à symétrie sphérique on utilise un développement en fonction sphérique dans l'espace et en transformée de Fourier dans le temps pour le déplacement et pour les perturbations des quantités :

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r} = \sqrt{4\pi} \Re\{ & \left[ \xi_{l,n,m}^r(r)Y_l^m(\theta, \phi)\mathbf{u}_r + \xi_{l,n,m}^h(r)\frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\partial\theta}\mathbf{u}_\theta \right. \\ & \left. + \xi_{l,n,m}^h(r)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\partial\phi}\mathbf{u}_\phi \right] \exp(-i\omega t)\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

et

$$X'(r, \theta, \phi, t) = \sqrt{4\pi}\Re\left[\tilde{X}'(r)Y_l^m(\theta, \phi)\exp(-i\omega t)\right] \quad (1.17)$$

où  $\xi_{l,n,m}^r(r)$  et  $\xi_{l,n,m}^h(r)$  sont respectivement la composante radiale et horizontale du déplacement ;  $\mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{u}_\theta$ , et  $\mathbf{u}_\phi$  sont les vecteurs unitaires dans les directions  $r$ ,  $\theta$ , et  $\phi$  ;  $Y_l^m(\theta, \phi)$  est l'harmonique sphérique de degré  $l$  et d'ordre  $m$ , et  $\omega$  est la pulsation du mode.

Le système d'équations différentielles s'écrit alors :

$$\omega^2 \left[ \tilde{\rho}' + \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\rho_0\xi_{l,n,m}^r(r)) \right] = \frac{l(l+1)}{r^2}(\tilde{\rho}' - \rho_0\tilde{\Phi}') \quad (1.18)$$

$$-\omega^2\rho_0\xi_{l,n,m}^r(r) = -\frac{d\tilde{p}'}{dr} - \tilde{p}'g_0 + \rho_0\frac{d\tilde{\Phi}'}{dr} \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\tilde{\Phi}'}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \tilde{\Phi}' = -4\pi G \tilde{\rho}' \quad (1.20)$$

$$\left( \delta\tilde{p} - \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \delta\tilde{\rho} \right) = \rho_0 (\Gamma_{3,0} - 1) \delta\tilde{q} \quad (1.21)$$

où  $\Gamma_3 - 1 = (\partial \ln T / \partial \ln \rho)_{ad}$ .

L'équation 1.18 devient en utilisant la fréquence de Lamb,  $S_l^2 = \frac{l(l+1)}{r^2} c^2$ :

$$\frac{d\xi_{l,n,m}^r(r)}{dr} = - \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} \right) \xi_{l,n,m}^r(r) + \frac{1}{\rho c^2} \left( \frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right) p' - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2} \Phi' \quad (1.22)$$

l'équation 1.19 donne :

$$\frac{dp'}{dr} = \rho (\omega^2 - N^2) \xi_{l,n,m}^r(r) + \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} p' + \rho' \frac{d\Phi'}{dr} \quad (1.23)$$

avec  $N$  la fréquence de Brunt-Väisälä :

$$N^2 = g \left( \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) \quad (1.24)$$

et l'équation 1.21 devient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) = -4\pi G \left( \frac{p'}{c^2} + \frac{\rho \xi_{l,n,m}^r(r)}{g} N^2 \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \Phi' \quad (1.25)$$

Les équations 1.22, 1.23 et 1.25 constituent un système du quatrième ordre d'équations différentielles pour les quatres variables  $\xi_{l,n,m}^r(r)$ ,  $p'$ ,  $\Phi'$  et  $\frac{d\Phi'}{dr}$ . En se fixant des conditions aux limites :

- de régularités au centre, c'est à dire que toutes les quantités ont des valeurs finis :  $\Phi' \propto r^l$ ,  $\xi_{l,n,m}^r \propto r^{l-1}$  et  $p' \propto r^l$ .
- à la surface, sur la perturbation de pression et sur  $\Phi'$  qui doit être continue (la condition sur la perturbation de la pression dépend du traitement de l'atmosphère).

Le résultat est un spectre discret de valeurs propres  $\omega_{l,n}^2$  où  $n$  est l'ordre radial du mode (Unno et al. 1989).

### 1.1.3 Nature des modes

Pour étudier la nature des modes on peut utiliser l'approximation de Cowling, qui consiste à négliger la perturbation du potentiel gravitationnel. Le système d'équations est alors réduit à un système du second ordre :

$$\frac{d\xi_{l,n,m}^r(r)}{dr} = - \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} \right) \xi_{l,n,m}^r(r) + \frac{1}{\rho c^2} \left( \frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right) p' \quad (1.26)$$

$$\frac{dp'}{dr} = \rho (\omega^2 - N^2) \xi_{l,n,m}^r(r) + \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} p' \quad (1.27)$$

pour les modes d'ordre radial élevé les fonctions propres varient beaucoup plus rapidement que les quantités à l'équilibre, ce qui permet de simplifier les deux équations précédentes :

$$\frac{d\xi_{l,n,m}^r(r)}{dr} = \frac{1}{\rho c^2} \left( \frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right) p' \quad (1.28)$$

$$\frac{dp'}{dr} = \rho (\omega^2 - N^2) \xi_{l,n,m}^r(r) \quad (1.29)$$

En combinant ces deux équations on obtient une équation du second ordre :

$$\frac{d^2 \xi_{l,n,m}^r(r)}{dr^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \left( \frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right) \xi_{l,n,m}^r(r) = -K(r) \xi_{l,n,m}^r(r) \quad (1.30)$$

La solution de cette équation dépend du signe de  $K(r)$ , quand  $K(r)$  est positif  $\xi_{l,n,m}^r(r)$  est localement une fonction oscillante de  $r$ , et quand  $K(r)$  est négatif la solution est une fonction exponentielle croissante ou décroissante de  $r$ . Le point de retournement des ondes est obtenu pour  $K(r) = 0$ .

Parmi les modes oscillants ( $K(r) < 0$ ) :

- les modes correspondant aux solutions avec  $|\omega| > |N|$  et  $|\omega| > S_l$  sont les modes de hautes fréquences piégés entre la surface et le point de retournement  $r = r_t$  pour lequel  $S_l(r_t) = \omega$  et typiquement  $\omega \gg N$ . La dynamique de ces modes est dominée par la pression, c'est pourquoi ces modes sont appelés modes p.
- les modes correspondant aux solutions avec  $|\omega| < |N|$  et  $|\omega| < S_l$  sont les modes de basses fréquences piégés entre le centre et le point de retournement où  $N = \omega$ , typiquement  $\omega^2 \ll S_l^2$ . La dynamique de ces modes est dominée par la force de gravité, ils sont appelés modes g.

#### 1.1.4 Forme variationnelle

Chandrasekhar (1964) a montré que les valeurs propres des oscillations adiabatiques non-radiales obéissent au principe variationnel. En utilisant les équations 1.5, 1.11 et la solution formelle de l'équation de Poisson qui est :

$$\Phi'(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho'(\mathbf{r}') dV}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad (1.31)$$

l'équation du mouvement 1.12 peut s'écrire :

$$\omega^2 \delta \mathbf{r} = \mathcal{L}(\delta \mathbf{r}) \quad (1.32)$$

où  $\mathcal{L}(\delta \mathbf{r})$  est un opérateur linéaire hermitien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\delta \mathbf{r}) = & \frac{1}{\rho_0^2} (\nabla p_0) \nabla (p_0 \delta \mathbf{r}) - \frac{1}{\rho_0} \nabla (\delta \mathbf{r} \nabla p_0) \\ & - \frac{1}{\rho_0} \nabla (c_0^2 \rho_0 \nabla \delta \mathbf{r}) + \nabla \left\{ G \int_V \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} [\rho_0(\mathbf{r}') \delta \mathbf{r}(\mathbf{r}')] dV}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right\} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Les fréquences propres sont réelles et les vecteurs propres orthogonaux. La valeur propre  $\omega^2$  est un extremum de l'expression obtenue en multipliant par le complexe conjugué de  $\delta\mathbf{r}$  ( $\delta\mathbf{r}^*$ ) et en intégrant sur tout le volume :

$$\omega^2 \int_V \delta\mathbf{r}^* \delta\mathbf{r} dV = \int_V \delta\mathbf{r}^* \mathcal{L}(\delta\mathbf{r}) dV \quad (1.34)$$

### 1.1.5 Forme asymptotique

Pour les modes de degré intermédiaire,  $K(r)$  varie peu, on peut appliquer l'analyse JWKB à l'équation 1.30, on obtient l'expression des fréquences propres :

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} K(r)^2 dr &= \omega \int_{r_1}^{r_2} \left[ 1 - \frac{\omega_c}{\omega} - \frac{L^2 c^2}{r^2 \omega^2} \left( 1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \right]^{1/2} \frac{dr}{c} \\ &\sim \pi (n + \alpha) \end{aligned} \quad (1.35)$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont les limites de la cavité résonante du mode,  $L^2 = l(l+1)$ ,  $\alpha = 1/2$  et où  $\omega_c$  est la fréquence de coupure acoustique :

$$\begin{aligned} \omega_c^2 &= \frac{c^2}{4H^2} \left( 1 - 2 \frac{dH}{dr} \right) \\ H &= - \left( \frac{d \ln \rho}{dr} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Cette expression redonne la loi de Duvall (1982) si l'on néglige  $\frac{N^2}{\omega^2}$  (valable dans le cas des modes p) et en incluant  $\omega_c$  dans le terme de phase :

$$\frac{n + \alpha}{\omega} \pi = \int_{r_t}^{R_\odot} \left[ 1 - \frac{c^2}{\left( \frac{\omega}{L} \right)^2 r^2} \right]^{1/2} \frac{dr}{c} = F \left( \frac{\omega}{L} \right) \quad (1.36)$$

## 1.2 Le problème inverse

Comme nous l'avons vu dans la section précédente les fréquences d'un modèle solaire s'expriment comme des fonctionnelles de deux grandeurs physiques. Dans le problème inverse on veut, à partir d'un ensemble de fréquences, pouvoir remonter aux valeurs des grandeurs physiques.

### 1.2.1 Inversion asymptotique

#### direct

La formulation asymptotique permet une inversion directe qui conduit à une détermination de la vitesse du son sans faire appel à un modèle (Christensen-Dalsgaard et al. 1985). Cette technique consiste à déterminer à partir des observations la quantité  $F \left( \frac{\omega}{L} \right)$  puis à inverser la relation 1.36. Pour ce faire on dérive les deux membres

de l'équation 1.36 par rapport à  $W = \omega/L$ , en multipliant par  $(a^2 - W^2)^{-1/2} dW^2$  où  $a = c_0(r)/r$  et en intégrant on obtient :

$$\int \frac{dF(W)}{dW} W^2 (a^2 - W^2)^{-1/2} dW^2 = \int (a^2 - W^2)^{-1/2} dW^2 \int_W^{a(R_\odot)} (W^2 - a'^2)^{-1/2} \frac{d \ln r}{da'} da' \quad (1.37)$$

En inversant l'ordre des intégrations et en utilisant la relation :

$$\int_a^b [(y - a)(b - y)]^{-1/2} dy = \pi \quad (1.38)$$

on obtient :

$$\ln(r) = -\frac{2}{\pi} \int \frac{dF(W)}{dW} W^3 (a^2 - W^2)^{-1/2} dW \quad (1.39)$$

Cette méthode dépend de façon cruciale de la bonne détermination de la fonction  $F\left(\frac{\omega}{L}\right)$ .

### linéarisée

Afin d'éliminer les erreurs systématiques liées aux hypothèses pour la détermination de  $F\left(\frac{\omega}{L}\right)$ . Christensen-Dalsgaard et al. (1989) ont développé une technique de linéarisation de la relation 1.36 :

$$T_{n,l} \frac{\delta \omega_{n,l}}{\omega_{n,l}} = H_1\left(\frac{\omega_{n,l}}{L}\right) + H_2(\omega_{n,l}) \quad (1.40)$$

avec

$$T_{n,l} = \int_{r_t}^{R_\odot} \left(1 - \frac{c^2 L^2}{r^2 \omega_{n,l}^2}\right)^{-1/2} \frac{dr}{c} - \pi \frac{d\alpha}{d\omega} \quad (1.41)$$

$$H_1\left(\frac{\omega_{n,l}}{L}\right) = \int_{r_t}^{R_\odot} \left(1 - \frac{c^2 L^2}{r^2 \omega_{n,l}^2}\right) \frac{\delta_r c}{c} \frac{dr}{c} \quad (1.42)$$

et

$$H_2(\omega_{n,l}) = \frac{\pi}{\omega_{n,l}} \delta \alpha(\omega) \quad (1.43)$$

Les contributions de  $H_1$  et  $H_2$  sont développées sur des splines cubiques respectivement par rapport aux variables  $W$  et  $\omega$ , les coefficients du développement sont obtenus par la méthode des moindres carrés. En utilisant la méthode décrite dans la section précédente, l'inversion de la fonction  $H_1$  nous donne :

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{2c_0}{\pi r} \frac{d}{d \ln r} \int_{c_0(R_\odot)/R_\odot}^{c_0(r)/r} \left(\frac{c_0^2}{r^2} - W^2\right)^{-1/2} H_1(W) dW \quad (1.44)$$

Cette méthode n'est pas indépendante des modèles mais apporte une grande amélioration par rapport aux inversions asymptotiques directes (Christensen-Dalsgaard et al. 1989).

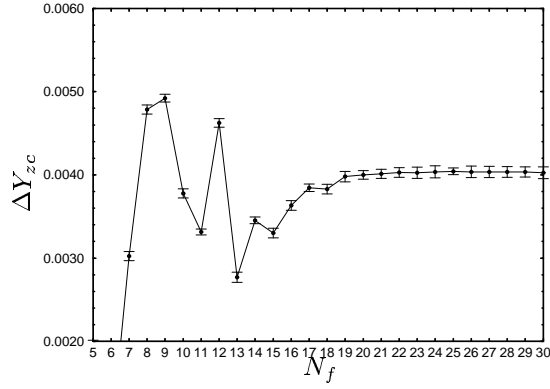


FIG. 1.1 – Effet du nombre de terme  $N_f$  dans le développement de  $F(\nu)$  sur la détermination de la fraction de masse d'hélium 4

## 1.2.2 Inversion non asymptotique

Cette méthode d'inversion utilise un modèle de référence pour linéariser l'équation variationnelle 1.34. Comme nous l'avons vu dans la section 1.1.2 la structure du modèle ne dépend que de deux grandeurs. Dans le cas du couple  $(c, \rho)$  on obtient pour la différence entre les pulsations observées et celles du modèle  $(\delta\omega_{n,l})$ , l'expression suivante :

$$\frac{\delta\omega_{n,l}}{\omega_{n,l}} = \int_0^{R_\odot} \mathcal{K}_{c,\rho}^{n,l}(X_0, \delta\mathbf{r}) \frac{\delta c}{c_0} dr + \int_0^{R_\odot} \mathcal{K}_{\rho,c}^{n,l}(X_0, \delta\mathbf{r}) \frac{\delta\rho}{\rho_0} dr + \frac{F(\omega_{n,l})}{Q_{n,l}} \quad (1.45)$$

où  $X_0$  représente la structure du modèle,  $\frac{\delta c}{c_0}$  et  $\frac{\delta\rho}{\rho_0}$  représentent les différences relatives entre le Soleil et le modèle respectivement pour la vitesse du son et pour la densité,  $\mathcal{K}_{c,\rho}^{n,l}(X_0, \delta\mathbf{r})$ ,  $\mathcal{K}_{\rho,c}^{n,l}(X_0, \delta\mathbf{r})$  sont les noyaux associés au mode  $(n, l)$  dont l'amplitude est concentrée dans la cavité résonante de ce mode, le facteur  $Q_{n,l} = E_{n,l}/\bar{E}_{n,l=0}$  avec  $E_{n,l}$  l'inertie du mode et  $\bar{E}_{n,l=0}$  l'inertie du mode  $l = 0$  interpolée à la pulsation  $\omega_{n,l}$ , et où la fonction  $F(\omega_{n,l})$  décrit les différences systématiques entre les fréquences observées et calculées.

Pour inverser cette équation on peut utiliser soit la méthode des moindres carrés avec régularisation ou la méthode de moyenne localisée (Voir Berthomieu & Gonczy 1997). Après inversion on obtient les profils du couple de grandeurs dans le Soleil.

## 1.2.3 Inversion développée par Dziembowski et al. (1990)

Dziembowski et al. (1990) ont développé une méthode d'inversion non asymptotique. Pour cela ils utilisent un modèle de référence. Les variations  $\Delta$  correspondent à la différence (valeur pour le Soleil) – (valeur pour le modèle de référence). Plusieurs hypothèses sont nécessaires :

- équilibre mécanique entre les forces de gravité et de pression ;

- modèle de référence proche du « vrai » Soleil ;
- oscillations adiabatiques ;
- l'exposant adiabatique  $\Gamma_1$  est une fonction de  $p$ ,  $\rho$ , et  $Y$  dans l'enveloppe ; dans l'intérieur les écarts de  $\Gamma_1$  entre le modèle et le « vrai » Soleil sont négligeables.

La quantité  $u(r) = \frac{p}{\rho}$  est choisie comme quantité directement déterminée par l'inversion. En exprimant  $p$  et  $m_r$  en fonction de  $u$ , en résolvant l'équation linéarisée de l'équilibre hydrostatique par l'utilisation de fonction de Green, puis en remplaçant le vecteur déplacement  $\delta \mathbf{r}$  et le gradient de la perturbation du potentiel gravitationnel par leurs expressions données par les équations 1.16 et 1.17, et en utilisant la divergence du déplacement dans l'expression variationnelle, Dziembowski et al. (1990) obtiennent l'expression suivante pour la différence de fréquence observée et calculée :

$$\left( \frac{\Delta \nu}{\nu} \right)_i = \int_0^1 \mathcal{K}_{u,i} \frac{\Delta u}{u} dx + \mathcal{J}_i \Delta Y_{zc} - 1.5 \frac{\Delta R}{R} + \frac{F(\nu)}{I_i} \quad (1.46)$$

où  $i \equiv (l, n)$  identifie le mode,  $\nu_i$  est la fréquence du mode  $(l, n)$ ,  $x = r/R_\odot$  et  $\Delta Y_{zc}$  est la différence d'abondance d'hélium 4 dans la zone convective entre le Soleil et le modèle. Le terme  $1.5\Delta R/R$  est un terme correctif qui permet de prendre en compte l'écart en rayon entre le modèle et le Soleil. Le terme  $F(\nu)/I_i$ , où  $I_i$  est l'inertie du mode  $i$ , décrit les erreurs systématiques entre les fréquences calculées et observées qui sont essentiellement dues au mauvais traitement des couches les plus externes. Les noyaux  $\mathcal{K}_{u,i}$  et  $\mathcal{J}_i$  sont donnés dans Dziembowski et al. (1990).

$\Delta u/u$  est développé sur 42 fonctions splines cubiques régulièrement espacés et  $F(\nu)$  est traité comme une série de puissance de polynôme de Legendre. L'amplitude des fonctions splines, les coefficients du développement de  $F(\nu)$  et  $\Delta Y_{zc}$  sont déterminés en utilisant une méthode des moindres carrés avec régularisation. Pour cela on minimise la quantité  $\chi_{mod}$  :

$$\chi_{mod}^2 = \chi^2 + \lambda \int_0^1 \left( \frac{d^2}{dx^2} \frac{\Delta u}{u} \right)^2 dx \quad (1.47)$$

$$\chi^2 = \sum_i \left( \frac{\Delta \nu_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (1.48)$$

où  $\sigma_i$  est l'erreur sur la fréquence du mode  $i$  et  $\lambda$  est le paramètre de régularisation.

Le paramètre de régularisation permet de réduire les oscillations de la solution et est choisi de façon à supprimer les oscillations tout en étant le plus petit possible.

## 1.2.4 Précision dans la détermination de la fraction de masse d'hélium 4 dans la zone convective par inversion et article publié dans A&A 338

Nous nous sommes intéressés à la précision sur la détermination de l'abondance d'hélium 4 dans la zone convective à partir des inversions, afin de savoir si une telle



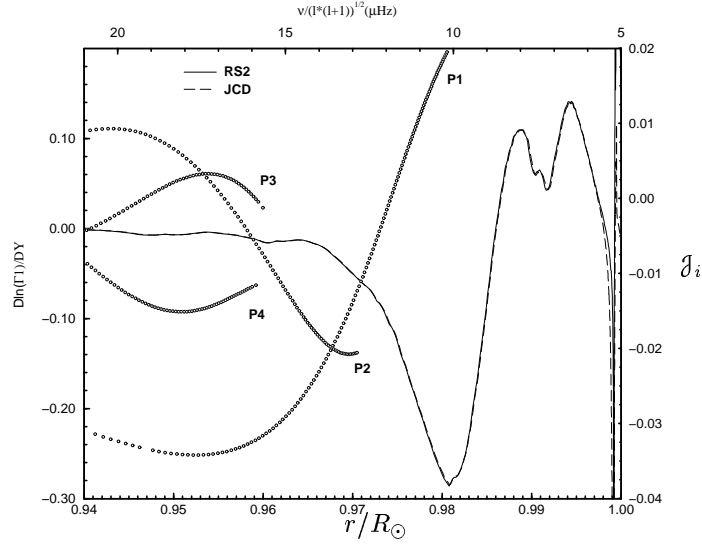


FIG. 1.2 – Variation de  $D\ln(\Gamma_1)/DY$  (intervenant dans le calcul du noyau  $\mathcal{J}$ ) dans les couches superficielles de deux modèles Solaire (Richard et al. 1998a) en trait plein et pointillé, et valeur du noyau  $\mathcal{J}$  (axe des ordonnées de droite) pour les modes  $P1$  (modes ayant pour ordre radial  $n = 1$ ),  $P2$  ( $n = 2$ ),  $P3$  ( $n = 3$ ) et  $P4$  ( $n = 4$ ) où chaque point représente un mode  $p$  : son abscisse correspond au point de retournement et son ordonnée représente la valeur du noyau  $\mathcal{J}$  pour ce mode.

détermination permettait d’apporter une contrainte supplémentaire sur les processus de transport dans la zone radiative du Soleil (Richard et al. 1998a,b).

Pour cela nous avons déterminé les différentes sources d’erreurs provenant :

- des paramètres utilisés dans la méthode d’inversion ;
- des données utilisées ;
- de l’utilisation de différents modèles de références.

La figure 1.1 illustre l’effet du nombre de terme dans le développement de  $F(\nu)$  sur l’écart en hélium dans la zone convective entre le Soleil et le modèle  $\Delta Y_{zc}$ . On voit clairement que lorsque le nombre de terme est suffisant pour décrire  $F(\nu)$ , c’est à dire quand  $N_f > 20$ ,  $\Delta Y_{zc}$  n’est pratiquement plus sensible à  $N_f$ . La figure 1.2 nous montre la variation de  $d\ln(\Gamma_1)/dY$  (qui intervient dans le calcul du noyau  $\mathcal{J}$ ) pour deux modèles solaire. Cette figure donne aussi la valeur du noyau  $\mathcal{J}$  pour les différents modes et nous montre que si l’on supprime des modes de hautes fréquences on perd la sensibilité à  $\Delta Y_{zc}$ . On voit clairement que les modes qui se réfléchissent près de la surface ont un noyau  $\mathcal{J}$  important, il faut donc faire un compromis entre la description de  $F(\nu)$  et les modes utilisés dans l’inversion.

La figure 1.3 montre l’effet du paramètre de régularisation  $\lambda$  dans la détermination de la fonction  $u$  et de l’écart en hélium dans la zone convective entre le Soleil et le modèle.

Il est apparu dans cet étude que l’incertitude due à l’utilisation de différent mo-

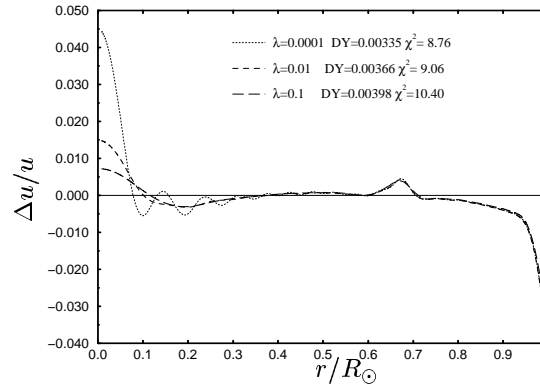


FIG. 1.3 – *Effet du paramètre de régularisation sur la détermination de la fonction  $u$  et de la fraction de masse d'hélium 4 (noté  $DY$  dans cette figure)*

dèle de référence était dominante ( $1.5 \times 10^{-3}$ ) par rapport à celle due au paramètre de l'inversion  $\lambda$  et  $N_f$  ( $2 \times 10^{-4}$ ). L'incertitude due à l'utilisation de données différentes est estimé à  $5 \times 10^{-4}$ .

Nous avons obtenu  $Y_{\odot} = 0.248$ , proche de la valeur obtenue par Basu (1998) qui est de 0.2488, en utilisant l'équation d'état OPAL. L'incertitude que nous avons sur cette détermination est de 0.002 et est dominée par les incertitudes dans les inversions. En utilisant l'équation d'état MHD nous trouvons une valeur de 0.242 alors que Basu (1998) obtient 0.246.

Cet écart important entre les déterminations obtenues avec l'équation d'état OPAL et MHD ne nous permet pas de contraindre de manière satisfaisante les modèles et nécessite d'être clarifié.

**Article publié dans A&A 338 : « On the accuracy of helioseismic determination of the solar helium abundance »**

**Traduction du résumé :**

L'abondance d'hélium 4 dans l'enveloppe solaire est une des plus importantes observables sismiques. Nous avons étudié la précision de sa détermination en tenant compte des incertitudes dans les données et dans la procédure d'inversion. Notre meilleure valeur de l'abondance d'hélium 4 dans la photosphère est  $Y_{\odot} = 0.248$ . L'incertitude estimée de 0.002 est dominée par l'incertitude dans la procédure d'inversion. Cette estimation ne prend pas en compte l'effet possible de grandes imprécisions dans les données thermodynamiques.

## On the accuracy of helioseismic determination of solar helium abundance

O. Richard<sup>1,2</sup>, W.A. Dziembowski<sup>2,3</sup>, R. Sienkiewicz<sup>2</sup>, and Philip R. Goode<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Observatoire Midi-Pyrénées, Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse, 14 Avenue E. Belin, F-31400 Toulouse, France

<sup>2</sup> N. Copernicus Astronomical Center, Polish Academy of Sciences, Bartycka 18, PL-00-716 Warszawa, Poland

<sup>3</sup> Warsaw University Observatory, Al. Ujazdowskie 4, PL-00-478 Warszawa, Poland

<sup>4</sup> Big Bear Solar Observatory, New Jersey Institute of Technology, Big Bear City CA 92314-9672, USA

Received 21 April 1998 / Accepted 10 July 1998

**Abstract.** The Helium abundance in the solar envelope is one of the most important seismic observables. We investigate the accuracy of its determination taking into account uncertainties in the data and in the inversion procedure. Our best value for the helium abundance in the photosphere is  $Y_{\odot} = 0.248$ . The estimated uncertainty of 0.002 is dominated by uncertainties in the inversion. This does not account for possibly larger inaccuracies in the thermodynamical data.

**Key words:** Sun: oscillations – Sun: abundances

### 1. Introduction

A long time ago, Gough (1984) noted that the strong sensitivity of p-modes frequencies to the value of the adiabatic exponent,  $\Gamma_1$ , in HeII ionization zone should allow a seismic determination of the helium abundance in outer layers of the Sun,  $Y_{\odot}$ . It took few years before the first suitable data became available (Libbrecht et al., 1990). Shortly afterwards, the first seismic values of  $Y_{\odot}$  were published (Christensen-Dalsgaard and Pérez Hernández, 1991; Dziembowski, et al., 1991; Vorontsov et al., 1991; Kosovichev et al., 1992). The reported values were in the range 0.23 - 0.25 which was significantly less than the initial abundance  $Y_0$  inferred by means of the Standard Solar Model construction. Dziembowski et al. (1991) pointed out that the difference was in rough agreement with that expected from gravitational settling as calculated by Cox et al. (1989).

The importance of a seismic determination of  $Y_{\odot}$  with properly assessed errors follows from the fact that we cannot use spectroscopy to accurately measure the photospheric He abundance. There are abundance data from the study of the solar wind, the corona, and flares. These values, however, are discrepant and subject to large errors. Their accuracy may eventually improve. Still, in these latter environments a complicated element stratification takes place, they will never yield true photospheric value of the helium abundance.

The most valuable application of  $Y_{\odot}$  is in testing models of the Sun's internal structure. For the radiative interior, helio-

seismology yields the value of squared sound-speed, which to a very good approximation, is proportional to the ratio of the temperature to the mean molecular weight,  $T/\mu$ . Unfortunately, in this way, we still cannot obtain separate information on  $T$  and  $\mu$ . Consequently, we cannot disentangle from the difference between the true solar and model sound speeds which effects are due to opacity errors and which are due to an inadequate treatment of the chemical evolution. Information about  $Y_{\odot}$  does not solve this problem but it does provide an important constraint.

Our aim here is to assess the overall uncertainty in the seismic value of  $Y_{\odot}$  arising from various sources. This is not a new problem. Partial discussions of it were given in the papers presenting the first determination of  $Y_{\odot}$ . More recently, the accuracy of the determination was discussed by Dell'Innocenti et al. (1997) and by Basu (1998). We believe that the discussion here is more comprehensive. Most of the results presented here is based on frequency data from the SOHO/MDI instrument (Rhodes et al., 1998)

### 2. Inverse problem with adjustable radius

Recently, it has been discovered (Schou et al., 1997; Antia, 1998) that fitting the f-mode frequencies requires a re-scaling of the solar radius to a value significantly below that implied by the uncertainty in photometric measurements. Basu (1998) showed that the radius change has important consequences for helioseismic inferences from the p-mode frequencies.

Dziembowski et al. (1990) formulated the inverse problem for structure in which the value of  $Y_{\odot}$  is a directly inferred quantity. Here we follow that method with a modification consisting of allowing an adjustment in the radius,  $R$ . Our basic structural variable is now a dimensionless quantity  $u = \frac{P}{\rho} \frac{R}{GM}$  and the inverse problem equation is posed by

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_i = \int_0^1 \mathcal{K}_{u,i} \frac{\Delta u}{u} dx + \mathcal{J}_i \Delta Y_{cz} - 1.5 \frac{\Delta R}{R} + \frac{F(\nu)}{I_i}, \quad (1)$$

where  $i \equiv (\ell, n)$  identifies the mode,  $x = r/R$ , and  $\Delta Y_{cz}$  denote the difference between solar and model helium abundance in the convective zone. The equation is equivalent to Eq. (7) of Dziembowski et al. (1990) if  $\Delta R \equiv 0$ . The explicit forms of

*Send offprint requests to:* O. Richard

**Table 1.** Parameter of solar models

Model	R 6.96Mm	$Y_{cz}$	Diffusion	Convection	Opacity OPAL	EOS
JCD	1.00068	0.24467	Yes	MLT(std)	Older	OPAL
RS0	1.00016	0.28266	No	Canuto	Oldest	MHD
RS1	1.00009	0.24281	Yes	MLT(std)	Newer	OPAL
RS2	0.99987	0.24319	Yes	MLT(extreme)	Newer	OPAL
RS3	1.00119	0.24280	Yes	CM	Newer	OPAL
RS4	0.99995	0.25022	Yes	CM	Older	OPAL
RS5	1.00002	0.26391	No	CM	Newer	OPAL

$\mathcal{K}_{u,i}$  and  $\mathcal{J}_i$  were given in the same paper. Also, the  $F(\nu)/I_i$  term, where  $I_i$  denotes mode inertia, has the same meaning. The free  $F(\nu)$  functions allows one to eliminate various *the near surface uncertainties*, mostly due to the effects of vigorous nonadiabatic convection which cannot be reliably calculated.

Let us recall that the integrand of  $\mathcal{J}_i$  contains the  $\frac{\partial \Gamma}{\partial Y}$  factor. It is the most important thermodynamic parameter in our problem. Note that its evaluation requires the second derivatives of the gas pressure and energy. Thus, there is a high requirement on the precision of the equation of state calculation, as well as a source of uncertainty that is difficult to estimate.

The coefficient  $-1.5$  at  $\Delta R/R$  is only an approximation. A small mode-dependent contribution arising from the derivatives of  $\Gamma_1$  with respect to  $P$  and  $\rho$  was ignored. We also omitted a small term involving  $\Delta M/M$ , which arises in the same way. In fact, it is regrettable that the coefficient the  $\Delta M/M$  term is very small because this means that helioseismology cannot contribute to the determination of the universal gravitational constant  $G$ .

$\Delta Y_{cz}$  is determined simultaneously with a large number of other parameters from inverting Eq. (1). In the standard inversion, we use 42 cubic splines to represent  $\Delta u/u$  and 20 Legendre polynomials to represent  $F(\nu)$ . There is a coupling between the parameters we determine. In our present application, the most important one is that among the parameters determining  $\Delta u/u$  in the HeII ionization zone. There is also a role for coupling to the  $F(\nu)$  parameters as well as  $\Delta R$ . In fact we will see that we cannot determine this latter quantity from the p-mode frequencies we have. We will use here results with and without the  $\Delta R$  term to assess the consequences of the uncertainty in radius.

### 3. Reference models

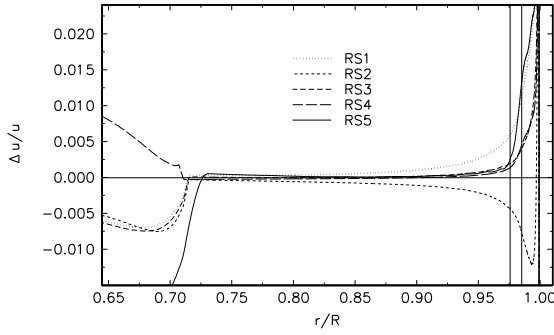
In order to investigate cross-talk between the determination of  $Y_{\odot}$  and  $\Delta u$ , we constructed a number of standard solar models (RS1-RS5) which were subsequently used as the reference models in the inversions described in previous section. Some characteristics of the models are given in Table 1.

The radius,  $R$ , is understood there as the distance between the center and the temperature minimum, and it is measured in units of 6.96 Mm and  $Y_{cz}$  denotes present helium abundance in the convective envelope. The main difference between the models is in the treatment of the convection. In addition to the standard mixing-length theory, MLT(std), we use a new theory

proposed by Canuto and Mazzitelli (1991), CM, as well as our own modification of MLT, MLT(extreme). Of the two formulations of CM, we chose the one with the standard expression for the mixing length. Our modification of the standard MLT was aimed at reproducing CM results for the superadiabatic temperature gradient in the subphotospheric layers by an *ad hoc* change of the numerical coefficients. The model selected by us is extreme in the sense that the maximum value of the gradient is the highest (3.78). By comparison, standard MLT yields 0.95 and CM used here 1.76. There is also a model (RS4) calculated with an older version of OPAL opacities and a model (RS5) calculated ignoring elemental settling. More data and information about these models may be obtained on request from R. Sienkiewicz (rs@camk.edu.pl). In Table 1, we also provide data on the model (JCD) of Christensen-Dalsgaard et al. (1996) which has been used as a reference model in most recent frequency inversions, as well as a model named RS0 (Dziembowski et al., 1994) used in our earlier works. In the latter model, an approximate treatment of convective transport developed by Canuto (1990) was used.

In Fig. 1 we show the relative differences in  $u(x)$  between the models. The large differences in the outermost layers between the model calculated with a different treatment of convection are forgotten in the lower convective zone. For determination of  $Y_{\odot}$  the HeII ionization zone is essential. Its localization is marked in Fig. 1 with two vertical lines. We can see that the differences in  $u$  among the models with different treatments of convection remain large. However, the adiabatic approximation applies in the HeII ionization zone and therefore the values of  $u$  are determined by a single parameter e.g. the specific entropy in the adiabatic part of the convective zone. The HeI and H ionization zones are located in layers where seismic probing is unreliable. The reason is that the effect of differences in  $u$  and  $Y$  in the outermost layers between the Sun and models of it on the frequency difference has the same  $F(\nu)/I$  dependence as other near surface effects. The extent of these layers depends on the modes used for probing. For the data sets used in this work, it is less than  $0.01R$  from the outer boundary.

The three models with significant different  $u$  in the radiative interior are those calculated with different opacities or the one ignoring gravitational settling (RS5) of elements. However, we do not know enough of the technical details in the JCD model to comment on all the differences between it and the models of RS series.



**Fig. 1.** Relative differences in  $u$  between various models and JCD model in outer layers. The vertical lines marked the position of the HeII ionization zone, where the value of  $\frac{\partial \Gamma}{\partial Y}$  is greater than 0.1.

#### 4. Choice of the parameters for the inversion

We use here the least square regularization method of the inversion. There is some freedom in choosing parameters for the method which leads to uncertainty in the results. This problem has been already discussed in some detail by Dell’Innocenti et al. (1997). Here, we just want to provide an assessment of the uncertainty of  $\Delta Y_{cz}$  resulting from this freedom.

Our choice is second derivative smoothing, that is we determine spline amplitudes in the representation of  $\Delta u/u$ ,  $\Delta Y_{cz}$ , and other parameters by means of minimizing

$$\chi_{\text{mod}}^2 = \chi^2 + \lambda \int_0^1 \left( \frac{d^2}{dx^2} \frac{\Delta u}{u} \right)^2 dx, \quad (2)$$

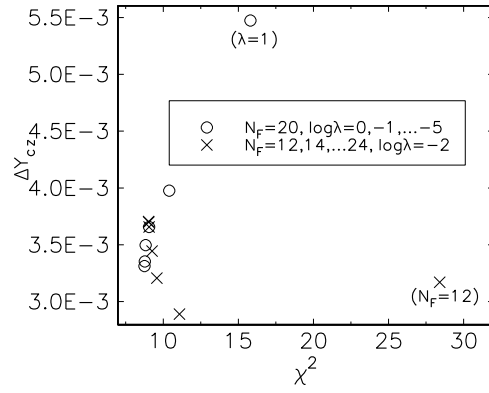
where

$$\chi^2 = \sum_i \left( \frac{\Delta \nu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

and  $\sigma_i$  are errors in the frequencies. Other options for regularization exist (see e.g. Dziembowski et al., 1994). There is also freedom in the discretization of  $\Delta u/u$ . However, all of it reduces, in fact, to a freedom in the degree of smoothing; therefore studying the effect in terms of a single parameter  $\lambda$  is sufficient. Naturally, an increase in  $\lambda$  implies a deterioration of the fit i.e. higher  $\chi^2$ , but as long as the effect is small we should regard the resulting values of  $\Delta Y_{cz}$  as acceptable.

Next, there is a freedom in representation of the  $F(\nu)$  function. An adequate representation is in terms of a series of  $N_F$  consecutive Legendre polynomials. An initial increase of  $N_F$  leads to a dramatic improvement of the fit, but at certain point the improvement ceases to be of consequence.

In Fig. 2, the effects of  $\lambda$  and  $N_F$  on the values of  $\chi^2$  and  $\Delta Y_{cz}$  are shown. The results were obtained by inverting the frequency data obtained with the SOHO/MDI instrument (Rhodes et al., 1998). The set contains frequencies for p-modes with  $\ell$  from 0 to 194. It is the basic data set in this work and it is denoted S194. Alternative sets will be considered in Sect. 7. The reference model used in these inversions is JCD. We see in this figure that with decrease of  $\lambda$  and increase of  $N_F$  the values of



**Fig. 2.** Dependence of  $\Delta Y_{cz}$  and  $\chi^2$  on the regularization parameter,  $\lambda$ , and number of terms in representation of the  $F(\nu)$  function,  $N_F$ . Decreasing value of  $\lambda$  from unity causes a large initial decrease of  $\chi^2$ , but beginning with  $\lambda = 0.01$  the effect ceases to be significant. There is also very little difference in  $\Delta Y_{cz}$  obtained with any  $\lambda \leq 0.01$ . A qualitatively similar effect is caused by an increase in  $N_F$ . There is a significant improvement in the fit when  $N_F$  is increased from 12 to 20. Further, increases beyond 20 has only a small effect both on  $\chi^2$  and  $\Delta Y_{cz}$ .

$\Delta Y_{cz}$  and  $\chi^2$  stabilize simultaneously. Our subjective estimate of the uncertainty based on this figure is  $2 \times 10^{-4}$ .

#### 5. Dependence of seismic $Y_{\odot}$ on the reference model

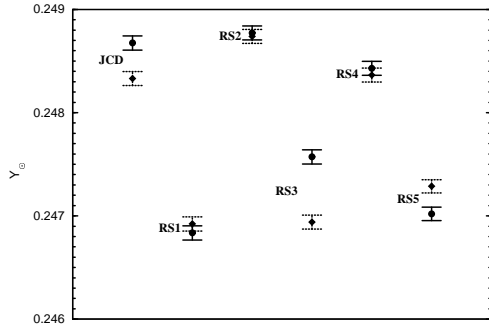
In Fig. 3, we summarize the results of the inversions made with different reference models.

The plot shows that the nominal observational errors contribute to very little to the uncertainty in the seismic  $Y_{\odot}$  — much less than the inversion procedure. This uncertainty is best revealed in the relatively large sensitivity of the result to the choice of reference model. We also see that the uncertainty in the radius contributes to the uncertainty in  $Y_{\odot}$ .

The mean value of those shown in Fig. 3 is  $Y_{\odot} = 0.2475$ . As the estimate of the uncertainty due to inversion at this point, we use the spread around the mean, which is  $15 \times 10^{-4}$ . The contributions from the freedom in  $\lambda$  and in  $N_F$ , which we discussed in the previous section, may be neglected if they are treated as being independent of those considered here, that is if we add the squares of the uncertainties.

#### 6. How reliable is the EOS

It is most difficult to assess the consequences of errors and inadequacies in the thermodynamical parameters. The value obtained with RS0 as the references model, which uses the MHD EOS (Däppen et al., 1988) is  $Y_{\odot} = 0.242$  which is well below the lower limit according to our previous estimate. The difference, which is about 0.006, cannot be regarded as the measure of the uncertainty. The approach adopted in the OPAL opacity calculations (Rogers et al., 1996) is certainly more sound. Furthermore, there is also a seismic evidence that it is more accurate.



**Fig. 3.** Influence of the reference model and radius uncertainty on the seismic  $Y$  from SOHO/MDI data. The error bars shown represent the dispersion of the results obtained by means random numbers simulation of the observational errors. The two values shown for each model correspond to width to the inversions with the  $\Delta R/R$  term (solid circle, solid error bar caps) and without it.

Helioseismology provides a clean test of the equation of state in the adiabatic part of the convective zone (Dziembowski et al., 1992; Christensen-Dalsgaard and Däppen 1992). Indeed, assuming an adiabatic stratification, we may evaluate  $(\Delta\Gamma_1)_{\text{ad.eq.}}(x)$  in terms of  $\Delta u(x)$  and  $\Delta P(x)$  which we determine from helioseismic inversion. The explicit integral expression for  $\Delta P$  in terms  $\Delta u$  was given by Dziembowski et al. (1990). From a linearized condition of mechanical equilibrium, we get

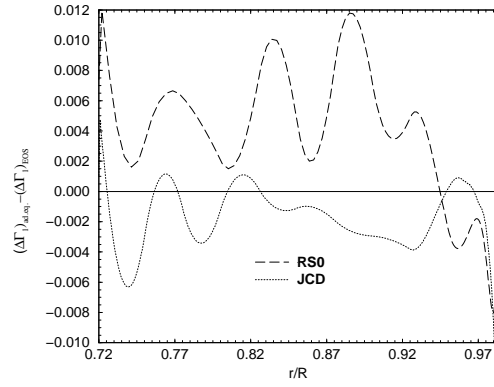
$$\left(\frac{\Delta\Gamma_1}{\Gamma_1}\right)_{\text{ad.eq.}} = \Gamma_1 \frac{d \ln x}{d \ln P} \left[ \frac{d}{d \ln x} \left( \frac{\Delta u}{u} \right) - \left( 1 - \frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right) \frac{d}{d \ln x} \left( \frac{\Delta P}{P} \right) \right], \quad (3)$$

On the other hand, from tables with the EOS data, we have  $\Gamma_1(\rho, P, Y)$ , hence we may evaluate  $(\Delta\Gamma_1)_{\text{EOS}}$  using again the seismic determinations of  $\Delta u$ ,  $\Delta P$  and, in addition,  $\Delta Y_{\text{cz}}$ .

The difference between the values of  $(\Delta\Gamma_1)$  tests the EOS. In Fig. 4, we show the results for the models RS0 (MHD EOS) and JCD (OPAL EOS). One may see that difference for JCD model is on average about one half of that for RS0. Thus, the OPAL EOS passed the test better but still not perfectly. We are reluctant to assign a specific number for the uncertainty in  $Y_{\odot}$  that could be attributed to the EOS. It well may be greater than all the remaining uncertainties be combined.

## 7. Use of different data sets

In Fig. 3, we have seen that the quoted measurement errors contribute relatively little to the uncertainty of the inferred helium abundance. However, the  $\chi^2$  values shown in Fig. 2 suggest this contribution may be underestimated. To see what maybe the real uncertainty that could be attributed to the data, we studied the effect of using different data sets. The results are summarized in Table 2. For sake of comparison, we also included in the table some other seismically inferred quantities.



**Fig. 4.** The difference  $(\Delta\Gamma_1)_{\text{ad.eq.}} - (\Delta\Gamma_1)_{\text{EOS}}$  evaluated on the basis of the inversion of the SOHO/MDI frequency data with the use of the two reference models employing different thermodynamical data.

The differences among the  $\Delta Y_{\text{cz}}$  inferred from different sets are significantly larger than the formal errors. We use the spread in these,  $\pm 0.001$ , as the measure of the uncertainty attributed to data sets. However, it seems likely that most the spread in the results obtained with different sets may not reflect real observational errors, but rather limitation of the inversion method. In particular, for high degree, low-frequency modes, the approximation, by the  $F(\nu)/I_s$ , of the difference in the near surface layers between the Sun and models of it term may be inadequate at the precision of  $10^{-3}$ . The changes in  $\Delta Y_{\text{cz}}$  with  $\ell_{\text{max}}$  support this. Since the mean value determined in the previous section was obtained for our basic data set (S194) and we have more trust in the value for the truncated sets, we adopt a value which is less by 0.005.

Decreasing  $\ell_{\text{max}}$  below 120 leads again to discrepant values of  $\Delta Y_{\text{cz}}$ . This is caused by the cross-talk between the  $\Delta Y_{\text{cz}}$  and  $F(\nu)$  terms. The stability of the 5.E-3 against variations of  $\ell_{\text{max}}$  is in fact the main argument for our choice of  $\Delta Y_{\text{cz}}$ .

Including the uncertainties discussed here and in Sect. 3, we give as a final value,

$$Y_{\odot} = 0.248 \pm 0.002,$$

where the error does not include effects from the EOS.

Let us note the large variations in the inferred values of  $\Delta R$ . Only for a complete set of p-mode data from SOHO/MDI is the value similar to that inferred from the f-mode frequencies which was  $(-4.7 \pm 0.5) \times 10^{-4}$ . We cannot determine the radius of the Sun at the  $10^{-4}$  accuracy level from p-mode frequencies. We actually are not sure that the radius is well defined at such a level. A consequence of the uncertainty in radius is the uncertainty in  $\Delta u$ . It should be noted, however that the differences between  $\Delta u$  at various points are nearly constant which means that they are, along with the  $\Delta Y_{\text{cz}}$ , robust observables.

## 8. Conclusions

Our best value for the photospheric helium abundance, is  $Y_{\odot} = 0.248$ . It is very close to the value of 0.2488 inferred by Basu

**Table 2.** Results of inversions of different frequency sets

SET	NUMBER	$\Delta Y_{cz}$	$\Delta R$	$\frac{\Delta u}{u}(0.2)$	$\frac{\Delta u}{u}(0.67)$	$\frac{\Delta u}{u}(0.72)$	$\chi^2$
S120	1586	5.1E-03	3.1E-04	-2.4E-3	5.1E-3	1.3E-4	6.3
S140	1709	5.1E-03	-4.7E-06	-3.2E-3	4.2E-3	-1.0E-3	7.6
S160	1809	5.0E-03	-1.1E-04	-3.5E-3	3.9E-3	-1.3E-3	7.6
S194	1889	4.0E-03	-5.7E-04	-3.5E-3	3.9E-3	-1.3E-3	8.7
B150	2253	5.7E-03	4.4E-04	-0.1E-4	5.6E-3	6.3E-4	2.6

The S\*\*\* denote the SOHO/MDI sets truncated at  $\ell = \ell_{\max}$  values given by the number; B150 is a combination of the BBSO (Libbrecht et al., 1990) and BISON (Elsworth et al., 1994) data sets.

(1998) from the same SOHO/MDI data and with models using OPAL opacities. The difference is within our estimate of the uncertainty of the inversion. The uncertainty Basu gives is 0.001 reflects the spread of the results obtained with use of different data. Here again we agree. There, however, also remarkable differences.

Firstly, our value for B150 set (see comment in Table 2) is by 1.7E-3 higher than that for S194 set, whereas, the difference Basu finds is -1.2E-3. This supports the point made in the previous section that the difference obtained for different sets reflects, at least partially, inadequacies of the inversion method. Secondly, we find  $Y_{\odot} = 0.242$  using a model calculated with the MHD EOS which is by 0.006 less than for models calculated with the OPAL EOS. The corresponding difference according to Basu is -0.004. We do not know why we have very good agreement only if we use OPAL and MDI data. Is this only an accident or rather evidence for a superiority of the SOHO/MDI and the OPAL EOS. This has to be clarified. There is certainly a need for further work to improve the methodology of inversion, since in our view, it is the most important source of the uncertainty in helioseismic determination of helium abundance. Perhaps, it would be useful to reconsider the alternative approach to  $\Delta Y_{cz}$  determination which relies on the frequency dependence of the near surface contribution to  $\Delta \nu$  (Christensen-Dalsgaard and Pérez Hernández, 1991; Vorontsov et al., 1991).

There is evidence that solar models calculated with uninhibited gravitational settling have a lower photospheric helium abundance than the Sun. The difference is most likely in the range 0.004-0.006. To explain Li depletion, Richard et al. (1996) include rotation-induced mixing below the convective zone. They found that the effect leads to the  $Y_{\odot}$  reduction by about 0.007 and improves also the agreement in the sound-speed in the outer layers of the radiative interior.

The cause of the mixing is a rotation-induced turbulence, which is not a well understood phenomenon. Thus, constraints from helioseismology are very much needed. With current accuracy the value  $Y_{\odot}$  is at the verge of yielding such a constraint. We believe that there is a chance to improve it.

*Acknowledgements.* We are grateful to the SOHO/MDI team for providing us the data prior to publication. During his stay in Warsaw O.R. was a recipient of Polish Ministry of Education Fellowship obtained by the Ministère des Affaires Etrangères – Formation des Français à l'étranger – and in part was supported by the Jumelage program "Astronomie France-Pologne". W.A.D., R.S. and P.R.G. were supported by KBN-2P304-013-07 NSF-AST-93-14803 and NSF-INT-93-14820.

## References

- Antia, H.M., 1998, A&A, 330, 336  
 Basu, S., 1998, MNRAS, submitted  
 Canuto, V., 1990, A&A, 227, 282  
 Canuto, V., Mazzitelli, 1991, A&A, 370, 295  
 Christensen-Dalsgaard, J., Däppen, W., 1992, *Astron.Astrophys.Rev.*, 4, 267  
 Christensen-Dalsgaard, J., Pérez Hernández, F., 1991, In: *Challenges to theories of the structure of moderate-mass stars*, 43, Eds. Gough, D.O. & Toomre, J., Springer, Heidelberg  
 Christensen-Dalsgaard, J. et al., 1996, *Science*, 272, 1286  
 Cox, A.N., Guzik, J.A., Kidman, R.B., 1989, ApJ, 231, 798  
 Däppen, W., Mihalas, D., Hummer, D.G. and Mihalas, B., 1988, ApJ, 332, 261  
 Degl'Innocenti, Dziembowski, W.A., Fiorentini, G., and Ricci, B., 1997, *Astroparticle Phys.*, 7, 77.  
 Dziembowski, W.A., Pamyatnykh, A.A., Sienkiewicz, 1990, MNRAS, 244, 542  
 Dziembowski, W.A., Pamyatnykh, A.A., Sienkiewicz, 1991, MNRAS, 249, 602  
 Dziembowski, W.A., Pamyatnykh, A.A. and Sienkiewicz, R., 1992, *Acta Astronomica*, 42, 5  
 Dziembowski, W.A., Goode, P.R., Pamyatnykh, A.A., Sienkiewicz, R., 1994, ApJ, 432, 417  
 Elsworth, Y., Howe, R., Isaak, G.R., 1994, ApJ, 434, 801  
 Gough, D.O., 1984, *Mem.Soc.Astron.Ital.*, 55, 13  
 Kosovichev, A.G., Christensen-Dalsgaard, J., Dziembowski, W.A., 1992, MNRAS, 259, 536  
 Libbrecht, K.G., Woodard, M.F., Kaufman, J.M., 1990, ApJS, 74, 1129  
 Rhodes, E.J., Kosovichev, A.G., Schou, J., 1998, *Solar Phys.*, 175  
 Richard, O., Vauclair, S., Charbonnel, C., Dziembowski, W.A., 1996, A&A, 312, 1000  
 Rogers, F.J., Swenson, F.J. and Iglesias, C.A., 1996, ApJ, 456, 902  
 Schou, J., Kosovichev, A.G., Goode, P.R., Dziembowski, W.A., 1997, ApJ, 489L, 197  
 Vorontsov, S.V., Baturin, V.A., Pamyatnykh, A.A., 1991, *Nature*, 349, 49

# Chapitre 2

## Contraintes sur les modèles solaires

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Calibration</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Contraintes Chimiques</b>	<b>24</b>
<b>2.3</b>	<b>Contraintes héliosismiques</b>	<b>25</b>
<b>2.4</b>	<b>Contraintes nucléaires</b>	<b>27</b>

---

L'avantage d'étudier le Soleil vient du fait qu'étant l'étoile la plus proche de nous, nous avons à son sujet beaucoup d'informations. La calibration consiste à obtenir un modèle d'une masse solaire reproduisant précisément le rayon et la luminosité solaire à l'âge du soleil (section 2.1). Grâce aux observations spectroscopiques comparées aux météorites on obtient les abondances des éléments qui constituent les contraintes chimiques (section 2.2). L'héliosismologie apporte des contraintes précises sur diverses grandeurs (section 2.3). Un dernier type de contrainte vient des neutrinos (contraintes nucléaires, section 2.4).

### 2.1 Calibration

La calibration est une étape importante dans le calcul des modèles solaires car elle permet de contraindre les deux paramètres libres des modèles que sont la fraction de masse d'hélium 4,  $Y$ , et le paramètre de la convection  $\alpha$  (section 3.7). Les grandeurs utilisées pour la calibration sont l'âge  $t_{\odot}$ , la luminosité  $L_{\odot}$  et le rayon  $R_{\odot}$ .

La luminosité solaire est obtenue à partir des mesures satellites de la constante solaire. Elle varie avec l'activité solaire. Deux valeurs moyennes différentes ont été obtenues par les missions ERS sur *Nimbus 7* et ACRIM sur *SMM*. En utilisant ces deux missions on obtient une valeur de  $3.8515 \pm 0.0055 \times 10^{33}$  ergs.s<sup>-1</sup> (Guenther et al. 1992). Bahcall & Pinsonneault (1992) et Bahcall & Pinsonneault (1995) ont utilisé des valeurs respectivement plus importante ( $3.86 \times 10^{33}$  ergs.s<sup>-1</sup>) et plus faible ( $3.844 \times 10^{33}$  ergs.s<sup>-1</sup>) qui correspondent aux valeurs obtenues par chaque mission.

Récemment plusieurs articles concernant la détermination du rayon solaire ont été publiés et montrent que la valeur de Allen (1976) ( $6.9599 \pm 0.0007 \times 10^{10}$  cm)



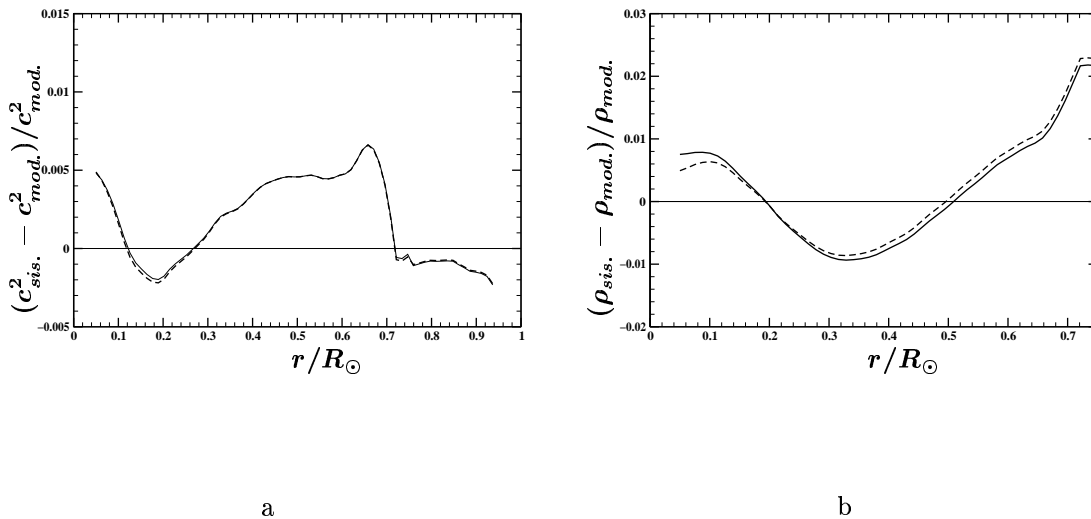


FIG. 2.1 – Effet de la luminosité utilisé pour la calibration (a) dans la comparaison de la vitesse de son  $c$  entre le modèle sismique ( $c_{sis}^2$ ) et nos modèles ( $c_{mod}^2$ ): trait plein fin pour le modèle  $L_{min}$  et tiret épais pour le modèle  $L_{max}$  (b) même comparaison que dans la figure (a) mais pour la densité.

est surestimée. Deux techniques différentes ont conduit à des valeurs plus faibles du rayon. La première utilise les modes f observés et ceux calculés pour les modèles. Antia (1998) et Schou et al. (1997) ont respectivement obtenu  $6.9578 \times 10^{10}$  cm et  $(6.9568 \pm 0.0003) \times 10^{10}$  cm. La seconde technique utilise les observations du diamètre angulaire du Soleil et des modèles d’atmosphère. Brown & Christensen-Dalsgaard (1998) ont obtenu une valeur encore plus petite de  $(6.95508 \pm 0.00026) \times 10^{10}$  cm.

TAB. 2.1 – Valeur récente pour la calibration des modèles

$M_{\odot}$	$(1.9891 \pm 0.0004) \times 10^{33}$ g
$R_{\odot}$	$(6.95749 \pm 0.00241) \times 10^{10}$ cm
$L_{\odot}$	$(3.8515 \pm 0.0055) \times 10^{33}$ ergs.s <sup>-1</sup>
$t_{\odot}$	$(4.57 \pm 0.02)$ Gyr

Plusieurs déterminations de l’âge du Soleil ont aussi été effectuées. Les déterminations météoritiques de Guenther et al. (1992) et de Wasserburg (voir l’appendice de Bahcall & Pinsonneault 1995) ont respectivement estimé l’âge du Soleil à  $4.52 \pm 0.04 \times 10^9$  ans et à  $4.57 \pm 0.02 \times 10^9$  ans. Utilisant l’héliosismologie Guenther & Demarque (1997) ont trouvé  $4.5 \pm 0.1 \times 10^9$  ans et Dziembowski et al. (1999) obtiennent  $4.66 \pm 0.11 \times 10^9$  ans. Ces déterminations héliosismiques de l’âge donnent donc des résultats compatibles avec l’âge météoritique mais avec de plus grandes barres d’erreurs.

Le tableau 2.1 résume les valeurs utilisées pour la construction des modèles.

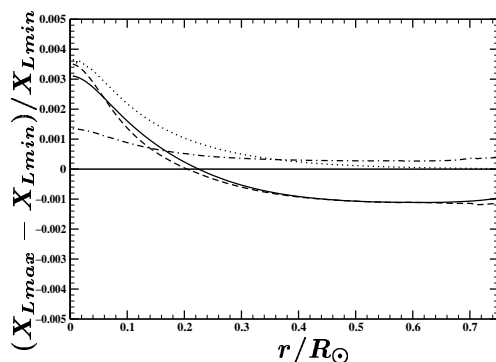


FIG. 2.2 – *Effet de la luminosité utilisé pour la calibration sur la structure des modèles (entre le modèle noté  $L_{max}$  qui correspond au modèle avec une luminosité de  $3.8589 \times 10^{33} \text{ ergs.s}^{-1}$  et le modèle ayant une luminosité de  $3.84408 \times 10^{33} \text{ ergs.s}^{-1}$  noté  $L_{min}$ ). La grandeur  $X$  représente successivement la pression (trait plein), la densité (tiret), la température (tiret-point) et la masse (pointillé).*

Afin de tester les effets de la calibration nous avons calculé différents modèles incluant la diffusion microscopique et utilisant la même physique (section 3). Ces modèles ont été calibrés avec les valeurs présentées dans le tableau 2.1 excepté pour la grandeur physique ( $L_{\odot}$ ,  $R_{\odot}$  ou  $t_{\odot}$ ) dont on étudie l'effet.

Nous avons donc calculé deux modèles  $L_{min}$  et  $L_{max}$  ayant respectivement une luminosité finale de  $3.84408 \times 10^{33} \text{ ergs.s}^{-1}$  et de  $3.8589 \times 10^{33} \text{ ergs.s}^{-1}$ . Les figures 2.1a et 2.1b montrent que les changements de luminosité ne sont pas assez importants pour affecter la comparaison avec le modèle sismique. On voit sur la figure 2.2 une légère augmentation de la température centrale accompagnée d'une augmentation de la pression et de la densité (car le rayon reste constant) qui entraîne une augmentation de la masse dans les zones centrales. La masse des couches extérieures diminue ce qui entraîne une diminution de la pression et de la densité.

Pour tester l'effet du rayon dans la calibration nous avons calculé les modèles  $R_{min}$  et  $R_{max}$  qui ont respectivement un rayon final de  $6.95484 \times 10^{10} \text{ cm}$  et  $6.95980 \times 10^{10} \text{ cm}$ . Les figures 2.3a et 2.3b illustrent les effets du rayon sur la comparaison avec le modèle sismique. On remarque une plus grande sensibilité des modèles au rayon utilisé pour la calibration qu'à la luminosité. Les changements des grandeurs physiques sont présentés dans la figure 2.4.

Dans le cas de l'âge nous avons calculé trois modèles  $t_{min}$ ,  $t_{moy}$  et  $t_{max}$  d'âge respectif 4.5, 4.6 et 4.7 milliards d'années (voir aussi Morel et al. 1998; Turck-Chièze et al. 1998). La comparaison de la fonction  $u$  des trois modèles avec celle du modèle sismique est présentée dans la figure 2.5a et la comparaison de la densité des deux modèles d'âge extrême dans la figure 2.5b. On constate une grande influence de l'âge dans ces comparaisons, due essentiellement à l'enfoncement de la base de la zone convective avec l'âge ( $0.7158R_{\odot}$  pour  $t_{min}$ ,  $0.7150R_{\odot}$  pour  $t_{moy}$  et  $0.7127R_{\odot}$  pour

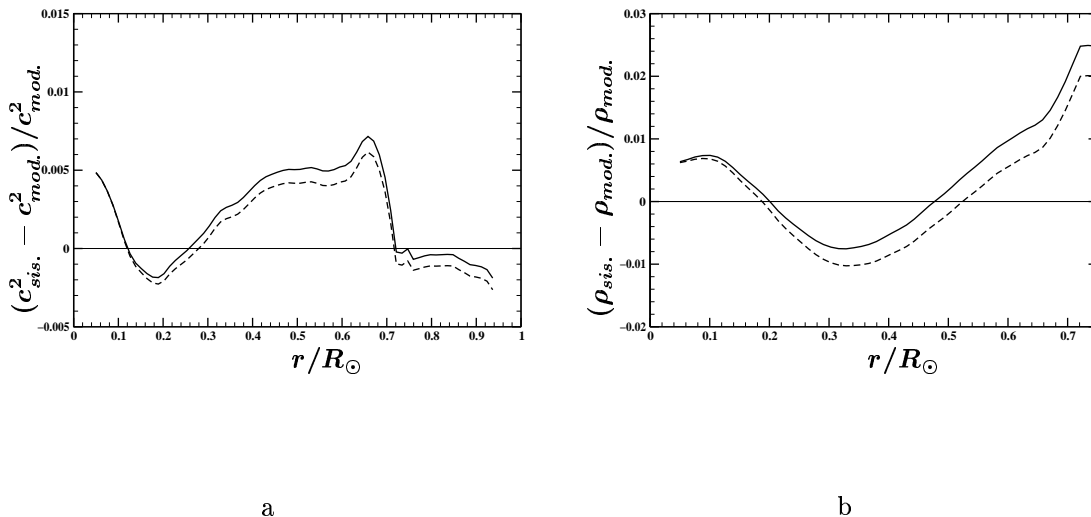


FIG. 2.3 – *Effet du rayon utilisé pour la calibration (a) dans la comparaison de la vitesse du son  $c$  entre le modèle sismique ( $c_{sis}^2$ ) et nos modèles ( $c_{mod}^2$ ): trait plein pour le modèle  $R_{max}$  et tiret pour le modèle  $R_{min}$  (b) même comparaison que dans la figure (a) mais pour la densité.*

$t_{max}$ ). Dans la figure 2.6 l'augmentation centrale de la température, de la pression, de la densité et de la masse à un rayon constant est due à l'augmentation d'hélium 4 et donc de l'opacité.

## 2.2 Contraintes Chimiques

Les abondances photosphériques, déterminées par Grevesse (1991) et plus récemment par Grevesse & Noels (1993), nous apportent une contrainte importante (section 3.8) pour les modèles incluant des processus de transport (diffusion microscopique, mélange induit par la rotation, ...).

Les abondances des éléments légers apportent de fortes contraintes sur les processus de transport qui peuvent avoir lieu dans la zone radiative.

L'abondance de lithium mesurée dans la photosphère est environ 140 fois plus faible que le lithium météoritique. Bien que sa température de destruction soit basse ( $2.5 \cdot 10^6$  K) la théorie standard de l'évolution ne permet pas de reproduire cette diminution. Elle nécessite la prise en compte d'autres processus tels que le transport dans la zone convective ou la perte de masse (section 4.2).

Les observations des amas galactiques nous apportent des informations supplémentaires. Elles ont permis la détermination précise de l'âge, de la métallicité et de l'abondance de lithium en fonction de la température effective. En utilisant les étoiles de type solaire des différents amas et en supposant que le Soleil s'est comporté de la même manière on obtient des informations sur la variation temporelle du lithium

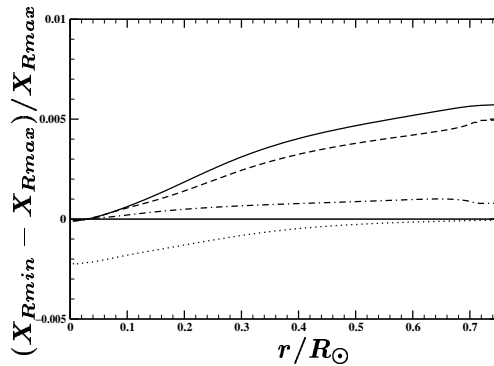


FIG. 2.4 – *Effet du rayon utilisé pour la calibration sur la structure des modèles (entre le modèle noté  $R_{max}$  qui correspond au modèle avec un rayon de  $6.9598 \times 10^{10}$  cm et le modèle ayant un rayon de  $6.95484 \times 10^{10}$  cm noté  $R_{min}$ ). La grandeur  $X$  représente successivement la pression (trait plein), la densité (tiret), la température (tiret-point) et la masse (pointillé).*

dans le Soleil. Les résultats d'observation concernant les amas sont présentés dans le tableau 2.2. Les observations du lithium correspondent pour  $\alpha$  Per à la détermination de Balachandran et al. (1996), pour les Pléiades à Soderblom et al. (1993), pour Hyades à Thorburn et al. (1993) et pour NGC752 à Balachandran (1995).

Geiss & Gloeckler (1998) ont montré, à partir d'observations du vent solaire et des roches lunaires, que le rapport  $^3\text{He}/^4\text{He}$  en surface du Soleil a varié de moins de 10% au cours des trois derniers milliards d'années. Une autre contrainte importante nous est donnée par la nouvelle détermination de l'abondance de beryllium qui est détruit aux environs de  $3.5 \cdot 10^6$  K. En effet Balachandran & Bell (1997) ont trouvé une erreur dans les opacités UV utilisées pour déterminer l'abondance de beryllium dans le Soleil. Ils trouvent que le beryllium n'a pas été détruit au cours de l'évolution du Soleil.

L'hélium 4 n'est pas observable dans la photosphère, ce qui rend difficile la détermination de son abondance. Des mesures ont été faites en utilisant les protubérances solaires, mais les résultats sont très imprécis. L'héliosismologie permet la détermination de la fraction de masse de l'hélium 4 dans la zone convective avec une précision supérieure (section 2.3).

Le tableau 2.3 résume l'ensemble des contraintes chimiques.

## 2.3 Contraintes héliosismiques

Comme nous l'avons vu dans la partie concernant les inversions (section 1.2) il est possible de déterminer le profil de vitesse du son  $c$  ou la fonction  $u = p/\rho$  du Soleil, la précision de ces profils diminue avec la profondeur. C'est une contrainte très importante puisqu'elle permet d'avoir une résolution radiale dans les comparaisons

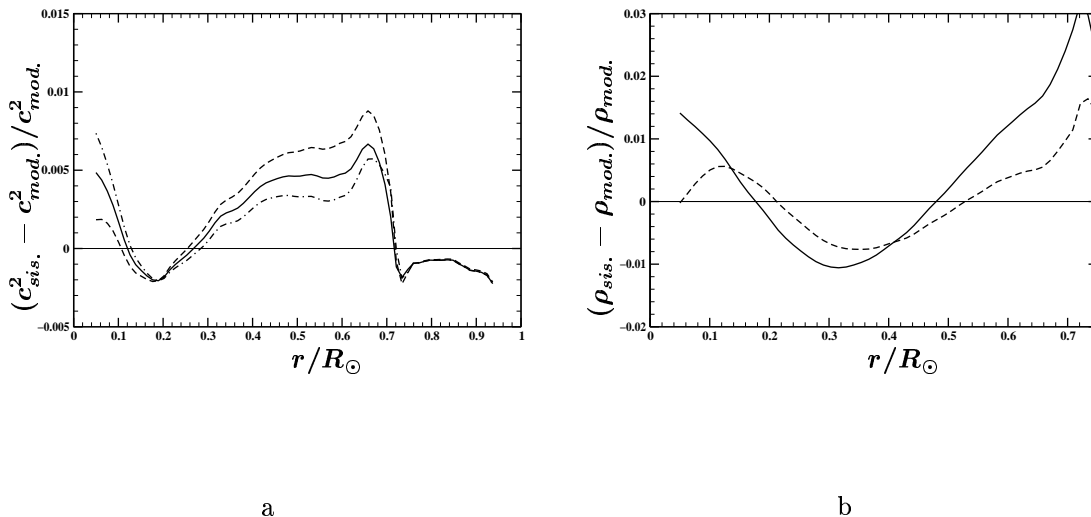


FIG. 2.5 – Effet de l’âge utilisé pour la calibration **(a)** dans la comparaison de la vitesse du son  $c$  entre le modèle sismique ( $c_{sis}^2$ ) et nos modèles ( $c_{mod}^2$ ): tiret pour le modèle  $t_{min}$ , trait plein pour le modèle  $t_{moy}$  et tiret-point pour le modèle  $t_{max}$  **(b)** même comparaison que dans la figure (a) mais pour la densité: trait plein pour le modèle  $t_{min}$  et tiret pour le modèle  $t_{max}$ .

entre les modèles solaires et le soleil sismique. Il en va de même pour les fréquences qui apportent aussi des contraintes sur les modèles.

Le rayon à la base de la zone convective peut aussi être obtenu à partir de l’héliosismologie. En effet la transition entre la zone convective et la zone radiative (section 3.1) entraîne un changement dans le gradient de température et donne une signature claire dans la vitesse du son. Une première valeur précise a été déterminée par Christensen-Dalsgaard et al. (1991), qui obtiennent  $0.713 \pm 0.003 R_{\odot}$ . Plus récemment Basu & Antia (1997) ont confirmé cette valeur avec toutefois des barres d’erreurs plus faibles ( $0.713 \pm 0.001 R_{\odot}$ ) en n’utilisant que les modèles ayant un profil de composition chimique doux à la base de la zone convective (Basu & Antia 1994; Basu 1997).

Comme nous l’avons vu dans la section 1.2.4 les inversions sismiques permettent aussi de déterminer l’abondance d’hélium 4 dans la zone convective grâce aux variations de  $\Gamma_1$  dans la zone d’ionisation de l’hélium. Basu & Antia (1997) et Richard et al. (1998a) obtiennent une valeur identique ( $0.249 \pm 0.002$ ) en utilisant l’équation d’état OPAL (section 3.5) alors qu’avec l’équation d’état MHD les résultats diffèrent sensiblement ( $0.246$  pour Basu & Antia (1997) et  $0.242$  pour Richard et al. (1998a)).

En prenant en compte les effets de la rotation sur les modes p, l’héliosismologie permet aussi d’obtenir le profil de rotation du Soleil (Thompson et al. 1996; Corbard et al. 1998). Les profils obtenus montrent que la rotation entre la base de la zone convective et  $0.2R_{\odot}$  est quasiment rigide. Les résultats dans le cœur ne permettent pas encore de déterminer sa vitesse de rotation.

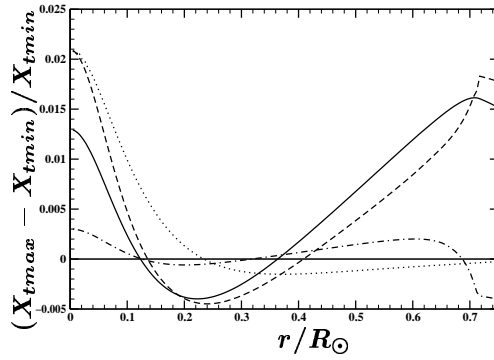


FIG. 2.6 – Effet de l'âge utilisé pour la calibration sur la structure des modèles (entre le modèle noté  $t_{max}$  qui correspond au modèle d'âge  $4.7 \times 10^9$  ans et le modèle ayant un âge de  $4.5 \times 10^9$  ans noté  $t_{min}$ ). La grandeur  $X$  représente successivement la pression (trait plein), la densité (tiret), la température (tiret-point) et la masse (pointillé). : trait plein pour la pression, tiret pour la densité, tiret-point pour la température, et pointillé pour la masse.

Le tableau 2.4 résume l'ensemble des contraintes héliosismiques que nous utilisons.

## 2.4 Contraintes nucléaires

Ces contraintes nous sont apportées par les flux de neutrinos observés. Ils nous viennent directement du cœur du Soleil. Plusieurs expériences ont mesuré ces flux en utilisant différents types de détecteurs. Les détecteurs à l'eau lourde, Kamiokande et SuperKamiokande, utilisent l'effet Cherenkov et permettent de connaître la direction d'arrivée des neutrinos. Ils ont une énergie de seuil importante, respectivement de 7.5 MeV et de 6.5 MeV, qui leur permet de détecter uniquement les neutrinos  ${}^8\text{B}$  et  ${}^{\text{hep}}$ . Le détecteur au chlore Homestake, qui utilise la réaction  ${}^{37}\text{Cl} + \nu_e \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$  et mesure la décroissance radioactive de l'argon, permet grâce à son énergie de seuil de 0.814 MeV de détecter aussi les neutrinos  ${}^p\text{p}$ ,  ${}^7\text{Be}$ ,  ${}^{13}\text{N}$ ,  ${}^{15}\text{O}$  et  ${}^{17}\text{F}$  mais pas ceux de la réaction  ${}^p\text{p}$ . Le dernier type de détecteur utilise le gallium pour capturer les neutrinos par la réaction  ${}^{71}\text{Ga} + \nu_e \rightarrow {}^{71}\text{Ge} + e^-$  et compte ensuite le nombre d'atomes de Germanium obtenu en utilisant sa décroissance radioactive. Les expériences au gallium GALLEX et SAGE ont une énergie de seuil de 0.233 MeV rendant possible la détection des neutrinos  ${}^p\text{p}$ . Les flux de neutrinos observés par ces différentes expériences sont présentés dans le tableau 2.5.

Ces flux ne sont pas reproduits par les modèles. Il est nécessaire d'ajouter des processus physiques à la fois en astrophysique (section 4.1) et en physique des particules (oscillation des neutrinos).

TAB. 2.2 – Paramètre utilisé pour les amas

Amas	âge <sup>a</sup> (Gyr)	[Fe/H] <sup>a,b</sup>	log( $N_{\text{Li}}$ ) <sup>c</sup>
$\alpha$ Persei	$0.0425 \pm 0.075$	$0.05 \pm 0.12$	$3.2 \pm 0.3$
Pleiades	$0.1 \pm 0.03$	$0.025 \pm 0.10$	$2.9 \pm 0.3$
Hyades	$0.65 \pm 0.05$	$0.12 \pm 0.04$	$2.5 \pm 0.3$
NGC 752	$1.7 \pm 0.7$	$0.05 \pm 0.25$	$1.7 \pm 0.5$

(a) : Cayrel De Strobel (1990) — (b) :  $[\text{Fe}/\text{H}] = \log(\text{Fe}/\text{H})_* - \log(\text{Fe}/\text{H})_{\odot}$  — (c) :  $\log(N_{\text{Li}}) = \log(^7\text{Li}/\text{H}) + 12$   
(voir références à la section 2.2)

TAB. 2.3 – Résumé des contraintes chimiques

$Li_{\text{phot}}(t_{\odot})/Li_{\text{phot}}(t_0)$	1/140
$Be_{\text{surf}}(t_{\odot})/Be_{\text{surf}}(t_0)$	1
$^3\text{He} / ^4\text{He}$ (1.6 Gyr $\rightsquigarrow$ 4.6 Gyr)	$\leq 10 \%$
$Li_{\text{surf}}(t_0 \rightsquigarrow t_{\odot})$	Amas (tableau 2.2)
Mélange Photosphérique	$\left\{ \begin{array}{l} \text{G91}^a \text{ (OPAL92}^c) \\ \text{GN93}^b \text{ (OPAL96}^c) \end{array} \right.$

(a) : Grevesse (1991) — (b) : Grevesse & Noels (1993) — (c) : section 3.6

TAB. 2.4 – Résumé des contraintes héliosismiques

$u(r) = P(r)/\rho(r)$	Dziembowski et al. (1994)
$c(r)^2$	Basu et al. (1997)
$R_{\text{bcz}}/R_{\odot}$	$0.713 \pm 0.003$
$Y_{\odot, \text{surf}}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0.249 \pm 0.002 \text{ (EOS OPAL)} \\ 0.242 \div 0.246 \text{ (EOS MHD)} \end{array} \right.$

TAB. 2.5 – Flux de neutrinos observés

Expérience	Résultat
Kamiokande <sup>b</sup>	$2.80 \pm 0.19 \text{ (stat.)} \pm 0.33 \text{ (syst.)} \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$
SuperKamiokande <sup>c</sup>	$2.44 \begin{smallmatrix} +0.06 \\ -0.05 \end{smallmatrix} \text{ (stat.)} \begin{smallmatrix} +0.09 \\ -0.07 \end{smallmatrix} \text{ (syst.)} \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$
Homestake <sup>d</sup>	$2.56 \pm 0.16 \text{ (stat.)} \pm 0.16 \text{ (syst.) SNU}$
GALLEX <sup>e</sup>	$76.4 \pm 6.3 \text{ (stat.)} \begin{smallmatrix} +4.5 \\ -4.9 \end{smallmatrix} \text{ (syst.) SNU}$
SAGE <sup>d</sup>	$70 \pm 6.3 \text{ (stat.)} \begin{smallmatrix} +4.5 \\ -4.9 \end{smallmatrix} \text{ (syst.) SNU}$

1 SNU =  $10^{-36}$  neutrino capturé par atome cible par seconde — (a) : Cleveland et al. (1998) — (b) : Fukuda (1996) — (c) : Suzuki (1998) — (d) : Gravin (1998) — (e) : Kirsten (1998)

# Chapitre 3

## Modélisation de la structure interne des étoiles

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Équations de base de l'évolution stellaire</b>	<b>30</b>
<b>3.2</b>	<b>Diffusion</b>	<b>31</b>
3.2.1	Équation de diffusion	31
3.2.2	Vitesse de diffusion	32
<b>3.3</b>	<b>Forces radiatives</b>	<b>32</b>
<b>3.4</b>	<b>Taux de production d'énergie</b>	<b>33</b>
3.4.1	Section efficace non résonante entre 2 particules chargées	33
3.4.2	Écrantage	34
3.4.3	Détermination des sections efficaces de réaction	35
<b>3.5</b>	<b>Équation d'état</b>	<b>36</b>
3.5.1	Équation d'état MHD	36
3.5.2	Équation d'état OPAL	36
3.5.3	Effet de l'équation d'état sur la structure interne	37
<b>3.6</b>	<b>Opacités</b>	<b>38</b>
3.6.1	Effet du changement d'opacité	38
3.6.2	L'hélium 3 et les opacités	39
<b>3.7</b>	<b>Convection</b>	<b>41</b>
<b>3.8</b>	<b>Composition chimique initiale</b>	<b>42</b>
<b>3.9</b>	<b>Ionisation partielle des éléments</b>	<b>45</b>
3.9.1	Calcul du degré d'ionisation	45
3.9.2	Calcul de la vitesse de diffusion microscopique	49
<b>3.10</b>	<b>Article soumis à A&amp;A : « Solar model calibrations. I « Standard » input physics »</b>	<b>49</b>

---

Ce chapitre décrit les équations de base ainsi que la physique utilisée dans les calculs d'évolution stellaire. La physique la plus utilisée dans les modèles solaires est présentée pour les taux de réactions nucléaires, les équations d'état et les opacités. Les effets de la modification de cette physique sur les modèles sont discutés. Le choix de la composition chimique initiale est aussi abordé ainsi que l'ionisation partielle.



### 3.1 Équations de base de l'évolution stellaire

Les équations de base de l'évolution stellaire en supposant l'étoile de symétrie sphérique, sans champ magnétique et sans rotation s'écrivent en coordonnées Lagrangienne :

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (3.1)$$

Équilibre hydrostatique :

$$\frac{\partial p}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (3.2)$$

Conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \varepsilon_n - \varepsilon_\nu - c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.3)$$

Transport de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 p} \nabla \quad (3.4)$$

Variation de la composition chimique due aux réactions nucléaires :

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left( \sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

Dans l'équation 3.3,  $\varepsilon_n$  et  $\varepsilon_\nu$  sont respectivement l'énergie produite par les réactions nucléaires et l'énergie emportée par les neutrinos, et  $\delta = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_p$ . Dans l'équation 3.4,  $\nabla = (d \ln T / d \ln P)$  sera calculé différemment dans la zone radiative et dans la zone convective (section 3.7). Pour les équations 3.5,  $r_{ji}$  et  $r_{ik}$  sont respectivement les taux de production et de destruction de l'élément  $i$ . Il y a en fait une équation par élément intervenant dans les réactions thermonucléaires.

Ces équations de base nécessitent l'utilisation de la physique « standard » telle que :

- les taux de réactions nucléaires  $r_{ij}$  qui permettent de calculer  $\varepsilon_n$  et  $\varepsilon_\nu$  (section 3.4) ;
- l'équation d'état pour déterminer  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\delta$  et  $\nabla_{ad}$  (section 3.5) ;
- l'opacité pour calculer  $\nabla_{rad}$  (section 3.6) ;
- le traitement de la convection pour obtenir le flux convectif et  $\nabla_{conv}$  (section 3.7).

Dans les modèles avec diffusion microscopique il faut ajouter l'équation 3.6 qui donne la variation de composition chimique due à la diffusion (section 3.2). Cette équation permet aussi de prendre en compte différents processus de transport.

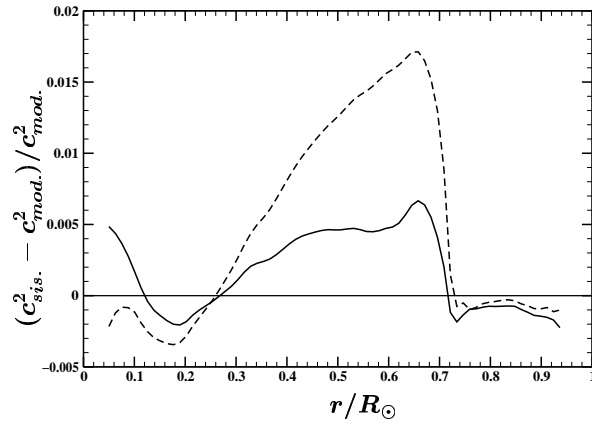


FIG. 3.1 – *Effet de la diffusion microscopique dans la comparaison de la vitesse du son  $c$  entre le modèle sismique ( $c_{sis}^2$ ) et nos modèles ( $c_{mod}^2$ ): tiret pour le modèle sans diffusion et trait plein pour le modèle avec diffusion microscopique.*

## 3.2 Diffusion

Pendant longtemps la diffusion microscopique des éléments a été négligée dans les modèles solaires. Mais ces dernières années l'héliosismologie a fortement changé notre vision du Soleil et a permis de montrer que la diffusion microscopique est un processus important (Bahcall & Pinsonneault 1995; Christensen-Dalsgaard et al. 1996; Richard et al. 1996; Ciacio et al. 1997; Morel et al. 1997; Brun et al. 1998a; Elliott 1998; Turcotte et al. 1998). Le figure 3.1 illustre l'effet de la diffusion microscopique dans la comparaison des modèles avec le modèle sismique.

Dans le code d'évolution stellaire de Toulouse-Genève les variations de composition chimique dues aux réactions nucléaires et à la diffusion sont découplées.

### 3.2.1 Équation de diffusion

L'équation de diffusion est obtenue à partir de l'équation de conservation de la matière et permet de calculer la variation de concentration d'un élément due à la diffusion microscopique, aux mouvements macroscopiques et à la production nucléaire.

L'équation de diffusion pour chaque élément  $i$  s'écrit :

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = D'_{1i} \frac{\partial^2 c_i}{\partial m_r^2} + \left( \frac{\partial D'_{1i}}{\partial m_r} - V'_{1i} \right) \frac{\partial c_i}{\partial m_r} - \left( \frac{\partial V'_{1i}}{\partial m_r} + \lambda_i \right) c_i \quad (3.6)$$

où  $\lambda_i$  est le taux de destruction nucléaire de l'élément  $i$  et  $c_i$  sa concentration.

$$D'_{1i} = (4\pi\rho r^2)^2 (D_{eff} + D_{1i}) \quad (3.7)$$

où  $D_{eff}$  représente le coefficient de diffusion effectif dû aux mouvements macroscopiques (section 4) et  $D_{1i}$  est le coefficient de diffusion de l'élément  $i$  par rapport à l'espèce de référence 1. Le coefficient de diffusion microscopique  $D_{1i}$  est calculé en utilisant le formalisme de Paquette et al. (1986) pour un état d'ionisation donné de l'élément  $i$ .

$$V'_{1i} = (4\pi\rho r^2) V_{1i} \quad (3.8)$$

$V_{1i}$  est la vitesse de diffusion microscopique sans la partie due au gradient de concentration (équation 3.9).

### 3.2.2 Vitesse de diffusion

Plusieurs termes différents interviennent dans la vitesse de diffusion microscopique et sont dus au gradient de concentration, au gradient de pression, au gradient de température et aux forces extérieures qui agissent sur les particules.

Lorsque l'abondance de l'élément diffusant est négligeable, la vitesse de diffusion s'écrit :

$$V_{1i} = -D_{1i} \left\{ \nabla \ln c_i + k_p \nabla \ln p + \alpha_{1i} \ln T + \frac{mF}{kT} \right\} \quad (3.9)$$

où  $\alpha_{1i}$  est le coefficient de diffusion thermique calculé en utilisant Paquette et al. (1986). En tenant compte du champ électrique dû à la séparation des ions et des électrons le terme de triage gravitationnel s'écrit :

$$k_p \nabla \ln p = \left( A_i - \frac{Z_i}{2} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{m_p}{kT} \frac{Gm_r}{r^2} \right) \quad (3.10)$$

Le terme  $mF/kT$  représente la diffusion due aux forces extérieures qui s'appliquent à l'élément diffusant, par exemple les forces radiatives (section 3.3), n'est pas pris en compte dans nos calculs.

## 3.3 Forces radiatives

Les forces radiatives sont dues à un transfert de quantité de moment entre le rayonnement et l'élément. La force par intervalle de fréquence  $d\nu$  par gramme d'élément  $i$  s'écrit (Michaud et al. 1976) :

$$F_{\nu,i} d\nu = 0.727 \frac{R^2 T_{eff4}^4}{r^2} \frac{\kappa_{\nu,i}}{X_i} \frac{\bar{\kappa}}{\kappa_\nu} P(u) du \quad (3.11)$$

où  $T_{eff4} = T_{eff}/10000$  K,  $\bar{\kappa}$  est l'opacité moyenne de Rosseland,  $\kappa_\nu$  est l'opacité totale à la fréquence  $\nu$ ,  $\kappa_{\nu,i}$  est la contribution de l'élément  $i$  à  $\kappa_\nu$ ,  $R$  est le rayon de l'étoile et où  $P(u)du$  caractérise le transfert de rayonnement (Michaud et al. 1976).

Récemment Richer et al. (1998) et Turcotte et al. (1998) ont étudié l'effet des forces radiatives dans les calculs d'évolution stellaire et plus particulièrement dans les modèles solaires. Turcotte et al. (1998) ont montré que l'accélération radiative

à la base de la zone convective ne représente que 4% de la gravité pour le carbone, l'azote et l'oxygène à l'âge du Soleil. On peut donc négliger les forces radiatives dans les modèles solaires.

### 3.4 Taux de production d'énergie

Le taux de réaction nucléaire entre 2 particules  $i$  et  $j$  s'écrit :

$$r_{ij} = N_i N_j \langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle \frac{1}{1 + \delta_{ij}} \text{ (réaction.cm}^{-3}.\text{s}^{-1}\text{)} \quad (3.12)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de kronecker,  $N_i$  et  $N_j$  sont respectivement les densités numériques de l'espèce  $i$  et de l'espèce  $j$ ,  $\sigma_{ij}$  est la section efficace de la réaction et  $v_{ij}$  est la vitesse relative des deux particules.

L'énergie produite par les réactions thermonucléaires s'écrit :

$$\varepsilon_n = \sum_{ij} \frac{r_{ij}}{\rho} Q_{ij} \text{ (ergs.g}^{-1}.\text{s}^{-1}\text{)} \quad (3.13)$$

où  $Q_{ij}$  est l'énergie de la réaction en ergs et la sommation se fait sur l'ensemble des réactions nucléaires. L'énergie emportée par les neutrinos s'exprime de la même manière en remplaçant  $Q_{ij}$  par l'énergie moyenne des neutrinos émis par la réaction.

Une des difficultés majeures pour la détermination du taux de réaction vient du fait que dans les étoiles les réactions nucléaires se produisent entre particules de basse énergie, alors que les sections efficaces ne peuvent être mesurées au laboratoire que pour des hautes énergies. Pour permettre les extrapolations aux basses énergies, on utilise le facteur astrophysique  $S(E)$  qui varie très peu avec l'énergie pour les réactions non résonantes.

#### 3.4.1 Section efficace non résonante entre 2 particules chargées

Dans le cas d'une réaction non résonante entre 2 particules chargées on peut écrire :

$$\langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle = \left( \frac{8}{\pi M (kT)^3} \right)^{1/2} \int S(E) \exp \left[ - \left( \frac{E}{kT} \right) \right] \exp \left[ - \left( \frac{E_G}{E} \right)^{1/2} \right] dE \quad (3.14)$$

où  $E_G$  est l'énergie de Gamow,  $M = \frac{A_i A_j}{A_i + A_j}$  est la masse réduite en unité de masse atomique.

Le produit des deux exponentielles peut être considéré comme une Gaussienne, et en utilisant le développement en série de Taylor autour de zéro pour  $S(E)$ ,  $S(E) = S(0) + S'(0)E + S''(0)E^2/2 + \dots$ ,  $\langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle$  devient après intégration (Caughlan & Fowler 1962; Bahcall 1966) :

$$\langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle = \left( \frac{2}{M} \right)^{1/2} \frac{\Delta E_0}{(kT)^{3/2}} S_{eff} \exp(-\tau) \text{ (cm}^3.\text{s}^{-1}\text{)} \quad (3.15)$$

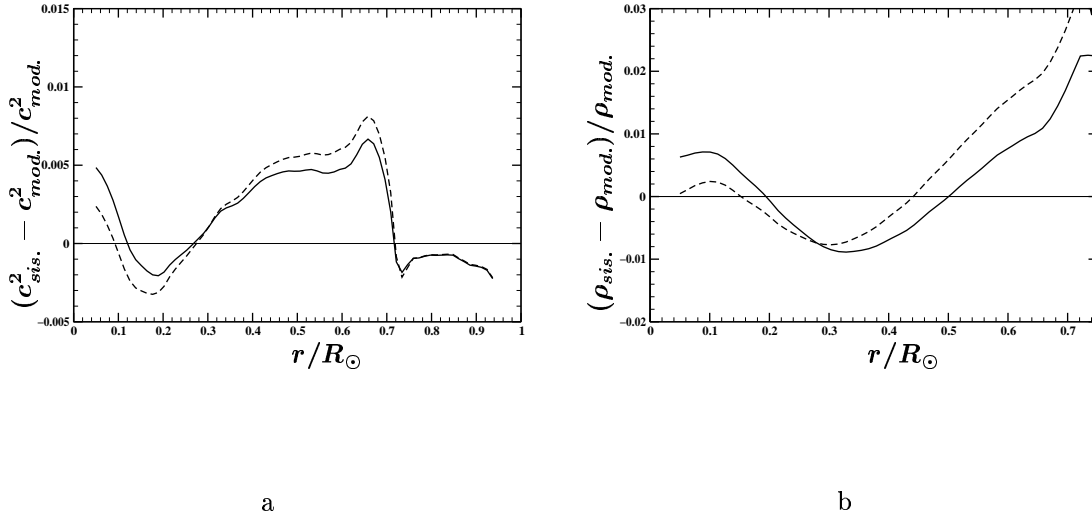


FIG. 3.2 – *Effet d'un changement de taux de réactions nucléaires (a) dans la comparaison de la vitesse du son  $c$  entre le modèle sismique ( $c_{sis.}^2$ ) et nos modèles ( $c_{mod.}^2$ ) : trait plein pour le modèle CF88 et tiret pour le modèle Ad98 (b) Même comparaison que dans la figure (a) mais pour la densité.*

où  $\tau = \frac{3E_0}{kT}$  et  $\Delta E_0 = 4 \left( \frac{E_0 kT}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$ . L'énergie du maximum s'écrit :

$$E_0 = \left[ \pi \frac{e^2}{\hbar c} Z_1 Z_2 kT \left( \frac{Mc^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (\text{MeV}) \quad (3.16)$$

et  $S_{eff}$  est donné par :

$$S_{eff} = S(0) \left[ 1 + \frac{5}{12\tau} + \frac{S'(0)}{S(0)} \left( E_0 + \frac{35}{36} kT \right) + \frac{1}{2} \frac{S''(0)}{S(0)} \left( E_0^2 + \frac{89}{36} E_0 kT \right) \right] \quad (\text{MeV.barn}) \quad (3.17)$$

où  $S(0)$ ,  $S'(0)$  et  $S''(0)$  sont des constantes (Fowler et al. 1967) déterminées à partir des expériences en laboratoire.

### 3.4.2 Écrantage

L'expression de la section efficace de réaction présentée dans la section précédente ne prend pas en compte les effets du plasma environnant. Il faut pour cela ajouter un facteur d'écrantage dans l'expression de  $\langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle$ . Ce facteur peut s'écrire, pour une réaction de fusion dans le Soleil, dans l'approximation de l'écrantage faible :

$$f = \exp \left( \frac{Z_i Z_j e^2}{kT \lambda_d} \right) \quad (3.18)$$

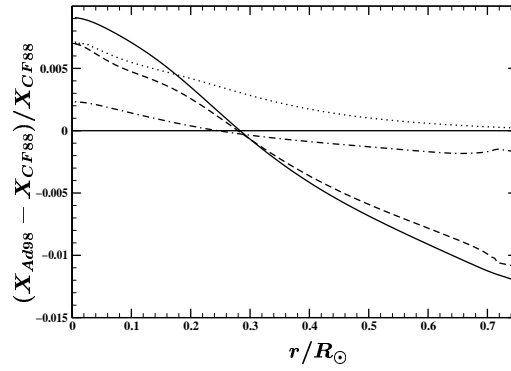


FIG. 3.3 – Effet d’un changement des taux de réactions nucléaires sur la structure des modèles (entre le modèle noté CF88 qui correspond au modèle utilisant les taux de Caughlan & Fowler (1988) et le modèle utilisant ceux de Adelberger et al. (1998) noté Ad98). La grandeur  $X$  représente successivement la pression (trait plein), la densité (tiret), la température (tiret-point) et la masse (pointillé).

où  $Z_i$  et  $Z_j$  sont respectivement les charges des particules  $i$  et  $j$ ,  $e$  la charge de l’électron et  $\lambda_d$  le rayon de Debye :

$$\lambda_d = \left( \frac{kT}{4\pi e^2 (\sum_i N_i Z_i^2 + N_e)} \right)^{1/2} \quad (3.19)$$

où  $N_e$  est la densité électronique.

Cette équation d’écrantage faible est valable tant que  $kT\lambda_d \gg Z_i Z_j e^2$  (Gruzinov & Bahcall 1998). D’autres formulations ont été proposées dans le cas de l’écrantage intermédiaire (voir Dzitko et al. 1995).

### 3.4.3 Détermination des sections efficaces de réaction

De nombreuses études ont été menées pour améliorer les taux de réactions nucléaires qui sont à la base de la production de l’énergie du Soleil et des neutrinos. Elles nous donnent soit l’expression complète des taux de réactions ou les valeurs de  $S(0)$ ,  $S'(0)$ ,  $S''(0)$ , ainsi que les éventuelles résonances. Dans nos modèles nous utilisons les taux de Caughlan & Fowler (1988) (noté CF88). Nous avons testé l’effet d’un changement de taux de réactions nucléaires sur la structure des modèles en utilisant les taux de Adelberger et al. (1998) (noté Ad98) pour les réactions des chaînes pp. Dans les deux modèles nous avons utilisé l’écrantage faible (Salpeter 1954), les effets d’un changement de prescription pour l’écrantage entraîne de faible changement dans la structure des modèles (Brun et al. 1998a; Morel et al. 1998). Les figures 3.2a et 3.2b montrent une légère détérioration dans les comparaisons avec les résultats des inversions sismiques du modèle Ad98 par rapport au modèle CF88 (Morel et al. 1998). La figure 3.3 illustre les changements dans les paramètres

physiques entre les deux modèles. On remarque que la température centrale du modèle Ad98 est plus importante que celle du modèle CF88 pour compenser la perte d'énergie due à la légère diminution des taux de réactions dans le modèle Ad98 par rapport à ceux du modèle CF88 et obtenir la même luminosité. De plus comme le rayon doit rester constant la pression et la densité augmentent au centre, ce qui augmente aussi la masse contenue dans ces régions. Cette augmentation de masse au centre s'accompagne d'une diminution de masse dans les zones externes qui entraîne une diminution de pression et de densité.

## 3.5 Équation d'état

L'équation d'état permet à partir de deux des trois paramètres physiques ( $p$ ,  $T$ ,  $\rho$ ) de déterminer, pour un mélange donné, le troisième paramètre physique (dans le code de Toulouse nous utilisons  $p$  et  $T$ ) ainsi que les grandeurs thermodynamiques nécessaires au calcul des modèles ( $\nabla_{ad}$ ,  $\delta$ ,  $c_p$ ,  $\Gamma_1$ , ...).

Il existe plusieurs équations d'état pour les modèles stellaires. Dans ce paragraphe je discute les deux équations d'état les plus utilisées ces dernières années dans les modèles solaires. Elles se présentent toutes les deux sous forme de tables pour les différentes valeurs de la fraction de masse d'hydrogène, d'hélium, de la température, et de la densité ou de la pression. La difficulté principale dans le développement de ces équations d'état vient du fait que l'on est en présence d'un plasma partiellement ionisé.

Récemment Elliott & Kosovichev (1998) ont montré qu'avec la précision actuelle de l'héliosismologie les effets relativistes au cœur du soleil ne pouvaient plus être négligés. Actuellement aucune des deux équations les plus utilisées dans la construction des modèles solaires ne prend en compte ces effets.

### 3.5.1 Équation d'état MHD

Cette équation a été développée il y a une dizaine d'années par Däppen et al. (1988), Hummer & Mihalas (1988), et Mihalas et al. (1988). Elle utilise le schéma *chimique* qui prend en compte les atomes et les ions et qui considère l'ionisation comme une réaction chimique. Elle est basée sur une minimisation de l'énergie libre dans laquelle les états des atomes sont calculés de façon heuristique et intuitive par une probabilité d'occupation qui prend en compte le plasma environnant. Cette probabilité d'occupation des états tient compte des particules neutres et ionisées du plasma (section 3.9 et Hummer & Mihalas 1988) et permet de rendre convergente la fonction de partition.

### 3.5.2 Équation d'état OPAL

Cette équation d'état récemment développée par Rogers et al. (1996) suit le schéma *physique*. L'approche *physique* utilise l'ensemble grand canonique et fait intervenir les électrons et les noyaux comme constituants fondamentaux du plasma.

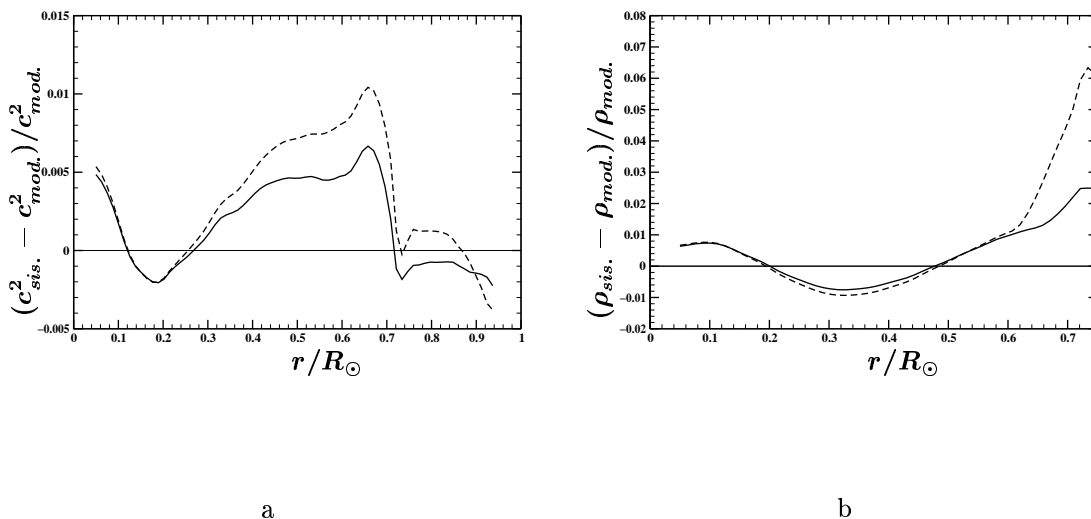


FIG. 3.4 – Effet d’un changement d’équation d’état **(a)** dans la comparaison de la vitesse du son  $c$  entre le modèle sismique ( $c_{sis}^2$ ) et nos modèles ( $c_{mod}^2$ ): trait plein pour le modèle OPAL et tiret pour le modèle MHD **(b)** même comparaison que dans la figure (a) mais pour la densité.

Aucune minimisation de l’énergie libre n’est nécessaire puisque l’équilibre d’ionisation est naturellement inclus dans l’ensemble grand canonique. Les effets du plasma sont aussi directement obtenus par l’analyse statistique. La fonction de partition est développée en puissance de l’activité pour faire apparaître les termes d’interaction à 2 corps, 3 corps, ... . Ensuite en réexprimant le développement en termes de fonction de Mayer (Mayer 1950) puis en factorisant et en réorganisant les termes dus aux états liés on supprime la divergence de la fonction de partition.

### 3.5.3 Effet de l’équation d’état sur la structure interne

Pour tester les effets d’un changement d’équation d’état sur la structure interne nous avons utilisé deux modèles solaires, l’un avec l’équation MHD, l’autre avec l’équation OPAL. Les figures 3.4a et 3.4b nous montrent un meilleur accord avec le modèle sismique pour le modèle OPAL que pour le modèle MHD dans la partie comprise entre  $0.3R_{\odot}$  et la base de la zone convective. Dans la zone superficielle du soleil (au dessus de  $0.97R_{\odot}$ ) il apparaît que l’équation d’état MHD devient meilleure que l’équation OPAL (Basu et al. 1999). Les variations des grandeurs physiques entre les modèles sont présentées dans la figure 3.5. On voit que l’écart pour la pression et la densité augmente entre  $0.4R_{\odot}$  et la base de la zone convective, ce qui est certainement dû à l’ionisation partielle des éléments.



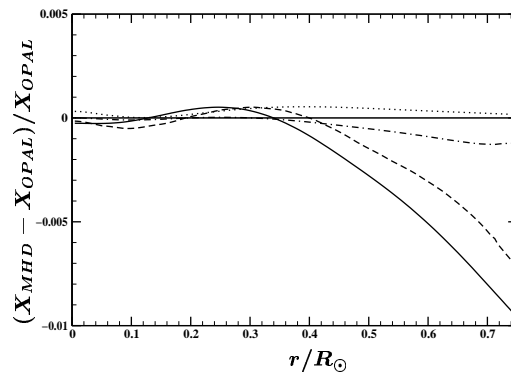


FIG. 3.5 – *Effet d'un changement d'équation d'état sur la structure du modèle (entre le modèle noté MHD qui correspond au modèle utilisant l'équation d'état MHD et le modèle utilisant l'équation d'état OPAL noté OPAL). La grandeur  $X$  représente successivement la pression (trait plein), la densité (tiret), la température (tiret-point) et la masse (pointillé).*

## 3.6 Opacités

Les opacités permettent de calculer le transport d'énergie par transfert radiatif ainsi que l'énergie déposée dans chaque couche en déterminant l'opacité de la couche  $\kappa$ . Elle permet alors d'obtenir le gradient radiatif :

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa L_r p}{m T^4} \quad (3.20)$$

Deux groupes utilisant des approches sensiblement différentes ont vu le jour, les groupes OPAL et Opacity Project. Ils obtiennent des résultats assez identiques (Seaton et al. 1994; Iglesias & Rogers 1995). Les calculs d'opacités ont aussi bénéficié de l'amélioration des équations d'état nécessaire à la connaissance de l'équilibre d'ionisation. Elles sont calculées pour un mélange de composition métallique donnée et nécessite la prise en compte de nombreuses données atomiques. Ces opacités se présentent, comme pour l'équation d'état, sous forme de tables pour différentes fraction de masse d'hydrogène, d'hélium, température et pression.

### 3.6.1 Effet du changement d'opacité

Nous avons utilisé les opacités OPAL92 (Iglesias et al. 1992) complétées par les opacités à basse température de Kurucz (Kurucz 1991) et les nouvelles opacités OPAL96 (Iglesias & Rogers 1996), avec les opacités à basse température de Alexander & Ferguson (1994). Ces opacités ont été calculées pour une composition chimique correspondant respectivement aux abondances photosphériques déterminées par Grevesse (1991) et par Grevesse & Noels (1993).

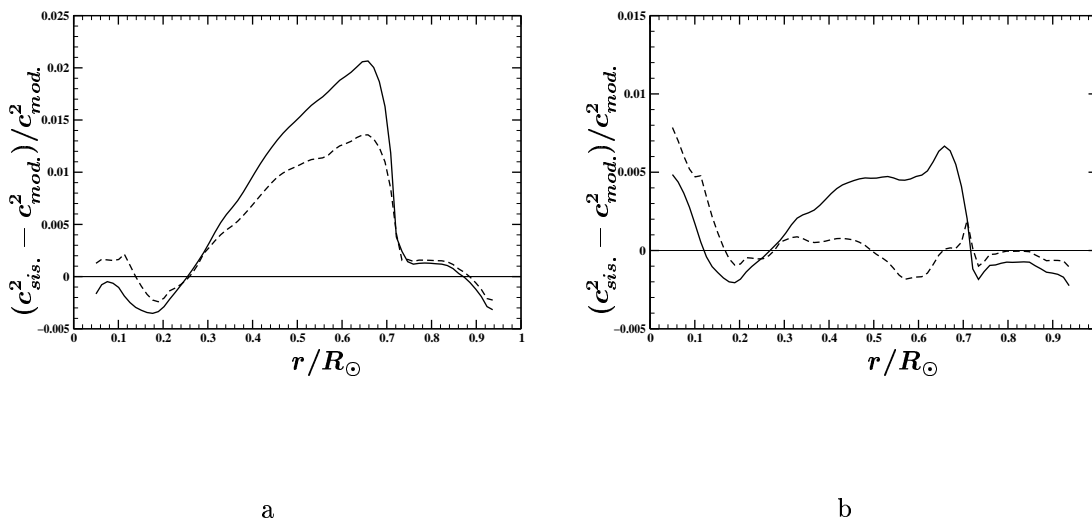


FIG. 3.6 – *Effet d'un changement de version des opacités OPAL dans la comparaison de la vitesse du son  $c$  entre le modèle sismique ( $c_{\text{sis.}}^2$ ) et nos modèles ( $c_{\text{mod.}}^2$ ). (a) Pour les modèles sans diffusion : trait plein pour le modèle OPAL96 et tiret pour le modèle OPAL92 (b) Pour les modèles avec diffusion : trait plein pour le modèle OPAL96 et tiret pour le modèle OPAL92.*

Dans les modèles présentés dans la figure 3.6 nous avons utilisé comme composition chimique initiale celle pour laquelle les tables d'opacités ont été calculées. Dans le cas des modèles sans diffusion, la composition chimique dans la zone convective ne varie pas au cours du temps et reste compatible avec les déterminations photosphériques. Par contre dans le cas des modèles avec diffusion les abondances finales ne reproduisent pas les abondances photosphériques. Les figures 3.6a et 3.6b montrent que dans les deux cas les opacités OPAL96 détériorent l'accord avec l'héliosismologie, comparé aux modèles utilisant les opacités OPAL92. Ce qui est essentiellement dû à la base de la zone convective qui, dans les modèles avec diffusion, se trouve à  $0.7084R_{\odot}$  pour le modèle OPAL92 et à  $0.7151R_{\odot}$  pour le modèle OPAL96 (section 2.3). Les figures 3.7a et 3.7b illustrent les effets du changement d'opacité dans les modèles avec diffusion respectivement dans la comparaison avec la densité du modèle sismique et dans la comparaison des grandeurs physiques des deux modèles.

Nous présentons dans la section 3.8 notre meilleur modèle, calculé avec les opacités OPAL96 et avec une composition chimique initiale modifiée, pour laquelle les abondances obtenues à l'âge du Soleil correspondent aux abondances observées.

### 3.6.2 L'hélium 3 et les opacités

Comme nous l'avons vu précédemment les tables d'opacités ont été calculées pour une composition chimique en métaux donnée, c'est à dire que l'on tient compte de la fraction de masse de l'hydrogène  $X_{\text{H}}$ , de l'hélium  $X_{\text{He}}$  et des métaux  $Z=1-X_{\text{H}}-X_{\text{He}}$ .

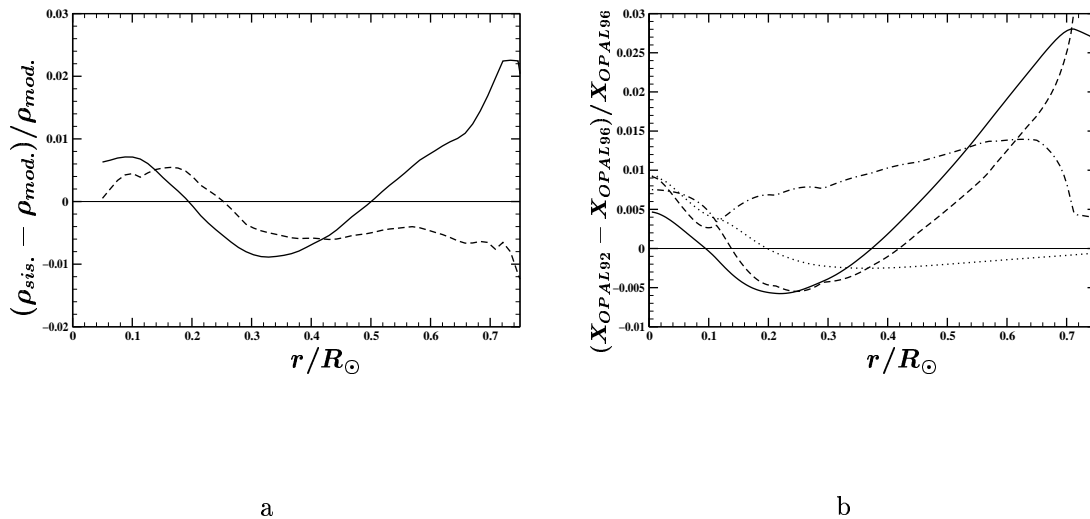


FIG. 3.7 – *Effet d'un changement de version des opacités OPAL dans les modèles (entre le modèle noté OPAL92 qui correspond au modèle utilisant les opacités OPAL92 et le modèle utilisant les opacités OPAL96 noté OPAL96) avec diffusion sur la comparaison (a) de la densité entre le modèle sismique ( $\rho_{sis.}$ ) et nos modèles ( $\rho_{mod.}$ ): trait plein pour le modèle OPAL96 et tiret pour le modèle OPAL92 (b) de la grandeur  $X$  qui représente successivement la pression (trait plein), la densité (tiret), la température (tiret-point) et la masse (pointillé)*

Dans les modèles la fraction de masse de l'hélium 3 est très faible devant celle de l'hélium 4 — moins de 1% de la fraction de masse de l'hélium 4 vers  $0.3 R_{\odot}$  où elle atteint son maximum. C'est pourquoi dans le code, l'hélium 3 était négligé dans le calcul de l'opacité due à l'hélium. Or par défaut tous les éléments qui ne sont pas pris en compte avec l'hydrogène et l'hélium sont considérés comme des métaux ; la fraction de masse de l'hélium 3 augmentait donc celle des métaux dont elle représente environ 20% à son maximum et par conséquent augmentait l'opacité. Cet effet sur l'opacité totale devient visible dans la comparaison au modèle sismique (Morel et al. 1997). Il a été corrigé dans les modèles récents.

Dans le modèle SHE3 la contribution de l'hélium 3 dans l'opacité était considérée comme celle des métaux. Pour le modèle HE3 la part de l'opacité due à l'hélium 3 est considérée correctement (figures 3.8a et 3.8b). On voit clairement sur ces figures que l'écart au modèle sismique, aux environs de  $0.25R_{\odot}$ , est dû à l'hélium 3 et correspond au pic de sa fraction de masse (entre  $0.2$  et  $0.4 R_{\odot}$ ). On remarque aussi que l'écart est réduit jusque sous la base de la zone convective. Ceci vient du fait que cette modification de l'opacité a changé le flux radiatif traversant les couches au dessus de  $0.25R_{\odot}$ . Sur la figure 3.9 on voit aussi clairement les changements dans les grandeurs physiques aux environs du pic d'hélium 3.

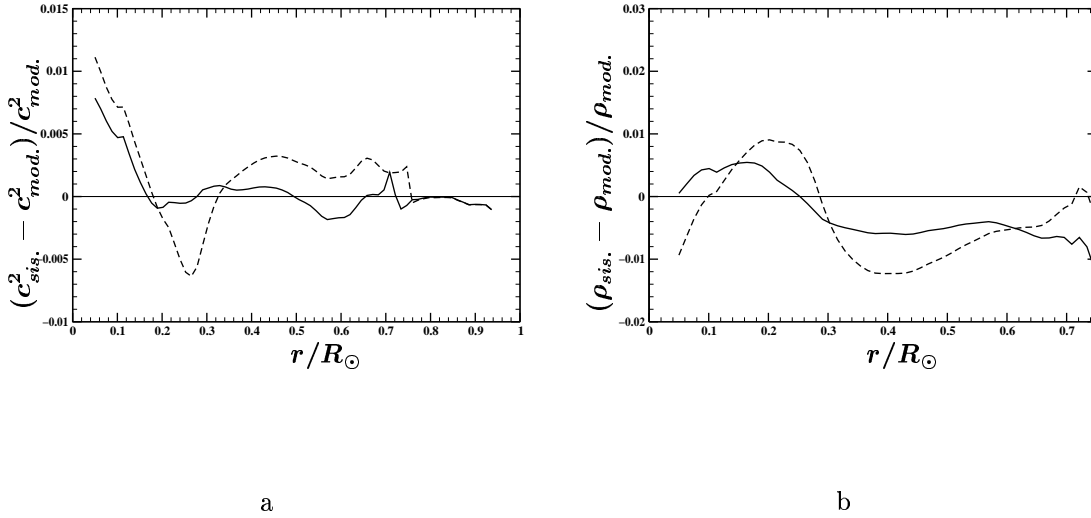


FIG. 3.8 – *Effet de la prise en compte de l'hélium 3 dans les opacités sur la comparaison (a) de la vitesse du son  $c$  entre le modèle sismique ( $c_{sis}^2$ ) et nos modèles ( $c_{mod}^2$ ) : trait plein pour le modèle HE3 et tiret pour le modèle SHE3 (b) même comparaison que dans la figure (a) mais pour la densité.*

### 3.7 Convection

Le traitement de la convection nous permet de calculer le transfert d'énergie dans la zone convective ainsi que le gradient de température. Pour déterminer la stabilité de la couche nous utilisons le critère de Schwarzschild. La couche est donc convective si :

$$\nabla_{rad} \geq \nabla_{ad} \quad (3.21)$$

Lorsque l'on est en présence d'une zone convective dans l'enveloppe nous utilisons la théorie de la longueur de mélange (généralement noté MLT) qui remonte à Prandtl (1925). Elle fait l'analogie entre la convection et le transfert de chaleur moléculaire en remplaçant les molécules par des éléments macroscopiques de masse dont le libre parcours moyen est la longueur de mélange  $l$ .

L'énergie totale vaut :

$$F_{tot} = \frac{4acG}{3} \frac{T^4 m}{\kappa \rho r^2} \nabla_{rad} = F_{rad} + F_{conv} \quad (3.22)$$

où  $F_{rad}$  est le flux radiatif local et  $F_{conv}$  est le flux convectif local.

Le flux radiatif de la couche s'écrit :

$$F_{rad} = \frac{4acG}{3} \frac{T^4 m}{\kappa \rho r^2} \nabla \quad (3.23)$$

où  $\nabla$  est le gradient thermique de la couche que l'on veut calculer.

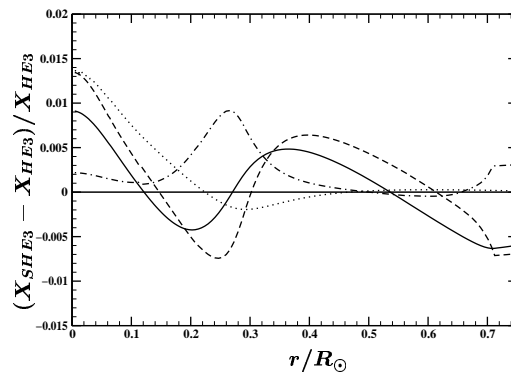


FIG. 3.9 – *Effet sur la structure du modèle de la prise en compte de l'hélium 3 dans l'opacité (entre le modèle noté SHE3 où la contribution de l'hélium 3 dans les opacités est prise en compte comme celle des métaux et le modèle où l'hélium 3 est pris en compte dans l'opacité de l'hélium noté HE3). La grandeur  $X$  représente successivement la pression (trait plein), la densité (tiret), la température (tiret-point) et la masse (pointillé).*

Le flux convectif d'un élément, dont l'excès de température par rapport au milieu environnant est  $DT$ , qui se déplace verticalement à la vitesse  $v$  et dont la pression reste en équilibre avec le milieu s'exprime de la façon suivante :

$$F_{conv} = \rho v c_p DT \quad (3.24)$$

En utilisant la longueur de mélange pour exprimer  $v$  et  $DT$ , et en se donnant le paramètre de forme de l'élément  $A/V$ , où  $A$  est l'aire de l'élément convectif et  $V$  son volume, on peut calculer le flux convectif puis le gradient de température dans la couche.

Dans les modèles le paramètre  $\alpha = l/H_p$  ( $H_p$  étant l'échelle de hauteur de pression) et donc la longueur de mélange nous est donné par la calibration.

### 3.8 Composition chimique initiale

Le calcul de la composition chimique initiale se fait à partir de la fraction de masse d'hélium 4 qui nous est donnée par la calibration de chaque modèle.

Dans le cas des modèles solaires sans diffusion les abondances initiales correspondent aux abondances photosphériques utilisées dans le calcul des opacités, c'est à dire Grevesse (1991) ou Grevesse & Noels (1993) pour les opacités OPAL92 ou OPAL96. La composition chimique ne varie pas dans la zone convective et reproduit donc les abondances photosphériques observées (Grevesse 1991; Grevesse & Noels 1993).

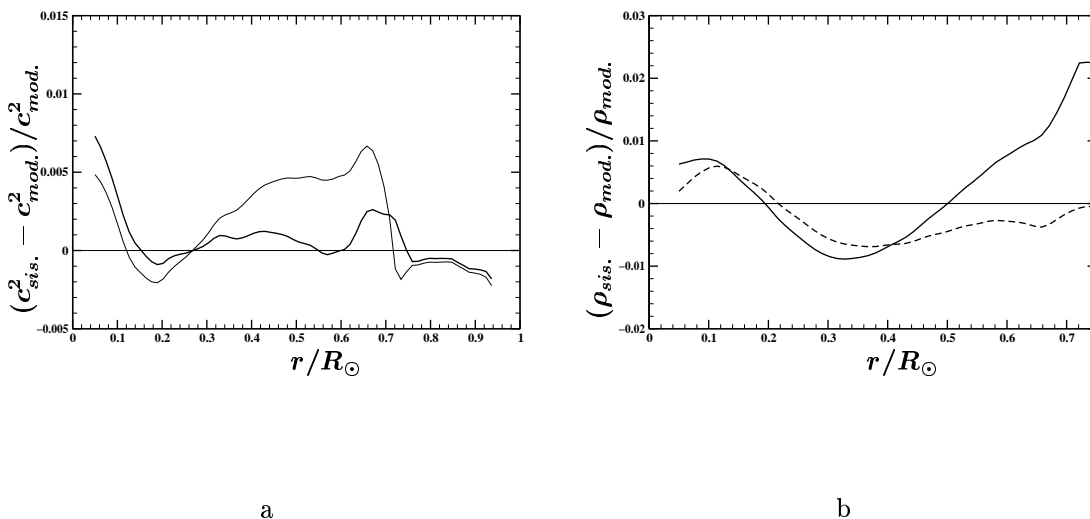


FIG. 3.10 – *Effet d'un changement de composition chimique initiale sur la comparaison (a) de la vitesse du son  $c$  entre le modèle sismique ( $c_{sis}^2$ ) et nos modèles ( $c_{mod}^2$ ): Trait fin pour le modèle GN93 et trait épais pour le modèle MOD93 (b) même comparaison que dans la figure (a) mais pour la densité: trait plein pour le modèle GN93 et tiret pour le modèle MOD93.*

Dans les modèles avec diffusion microscopique, quand la composition chimique initiale est prise identique à la composition chimique photosphérique (Grevesse 1991; Grevesse & Noels 1993), on obtient à l'âge du soleil une composition différente. Afin d'obtenir un modèle cohérent avec les observations d'abondance photosphérique il faut modifier la composition chimique initiale. Pour cela on utilise un premier modèle calculé avec la composition photosphérique comme composition initiale (noté GN93 pour celui utilisant la détermination de Grevesse & Noels (1993)). Une fois ces modèles obtenus on calcule l'écart entre l'abondance d'hydrogène finale  $X_s$  et celle correspondant à l'abondance photosphérique  $X_{phot, Y_s}$  calculée pour la fraction de masse finale d'hélium 4  $Y_s$ , qui s'écrit :

$$dX = \frac{X_s - X_{phot, Y_s}}{X_s} \quad (3.25)$$

Ensuite pour calculer la composition chimique initiale modifiée (notée MOD93 pour la détermination photosphérique de Grevesse & Noels (1993)) on utilise la fraction de masse initiale d'hélium 4 donnée par la calibration  $Y_0$ , et on calcule celle de l'hydrogène de la façon suivante :

$$X_0 = X_{phot, Y_0} (1 - dX) \quad (3.26)$$

où  $X_{phot, Y_0}$  est la fraction de masse d'hydrogène pour la composition chimique photosphérique ayant pour fraction de masse d'hélium 4  $Y_0$ .

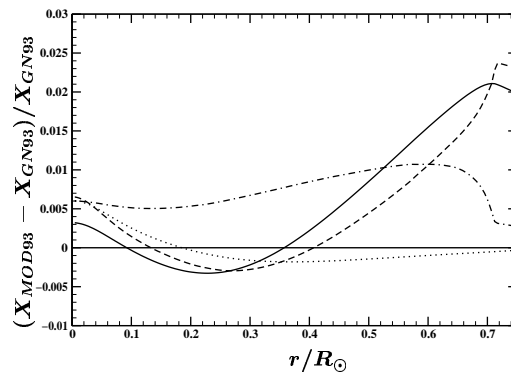


FIG. 3.11 – *Effet d'un changement de composition chimique initiale sur la structure du modèle (entre le modèle noté MOD93 qui correspond au modèle ayant une composition chimique initiale modifiée et le modèle utilisant comme composition chimique initiale la composition chimique de Grevesse & Noels (1993) noté GN93). La grandeur  $X$  représente successivement la pression (trait plein), la densité (tiret), la température (tiret-point) et la masse (pointillé).*

Nous ne faisons pas le même calcul pour les métaux car ils sont pris en compte de façon globale dans les opacités (section 3.6). Toutefois le fait de modifier la fraction de masse initiale d'hydrogène change celle des métaux car nous avons  $X + Y + Z = 1$ . Ce qui donne pour la valeur initiale des métaux :

$$\left(\frac{Z}{X}\right)_0 = \frac{\left(\frac{Z}{X}\right)_{phot} - dX}{1 - dX} \quad (3.27)$$

La modification de la composition chimique initiale permet d'obtenir un modèle, à l'âge du soleil, plus cohérent avec les observations des abondances photosphériques. Elle correspond à une calibration en  $Z/X$ . Toutefois au cours de l'évolution d'un tel modèle la composition chimique ne correspond pas à celle pour laquelle les opacités ont été calculées. Pour pleinement prendre en compte les effets de la composition chimique sur les opacités il faut utiliser les opacités monochromatiques (Turcotte et al. 1998).

Pour étudier les effets d'un changement de composition chimique initiale afin d'obtenir un modèle reproduisant les abondances photosphériques, nous avons calculé un modèle MOD93 avec une composition initiale modifiée et un modèle GN93 avec comme composition initiale la composition photosphérique. Ces modèles prennent en compte la diffusion des éléments. Les figures 3.10a et 3.10b montrent une nette amélioration au dessus de  $0.3R_\odot$  pour le modèle avec la composition chimique initiale modifiée. La figure 3.11 illustre les variations des grandeurs physiques entre les deux modèles. Cette amélioration est en partie due à la variation de la base de la zone convective qui est de  $0.7150R_\odot$  pour le modèle GN93 et de  $0.7116R_\odot$  pour le

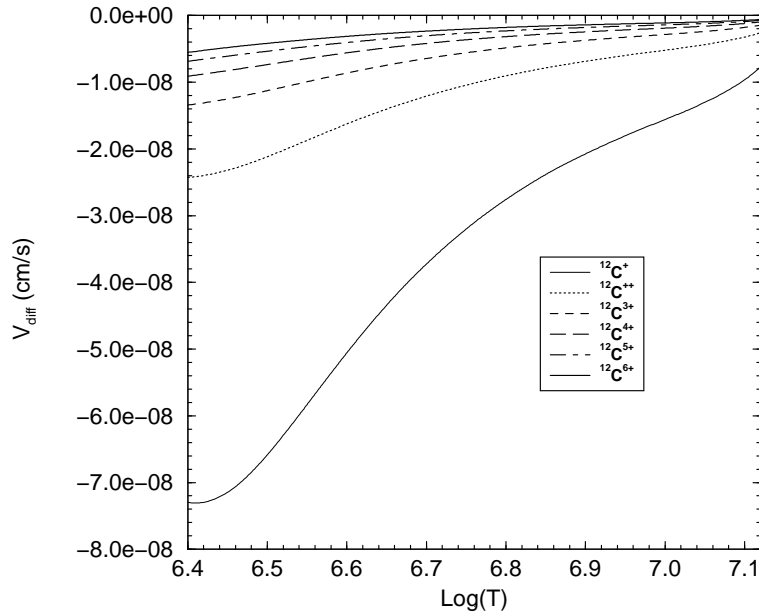


FIG. 3.12 – Effet du degré d'ionisation sur la vitesse de diffusion du carbone

modèle MOD93. On remarquera aussi une forte similitude dans les effets du changement de la composition chimique initiale et du changement d'opacité, qui, lui aussi, introduit un changement de composition initiale.

### 3.9 Ionisation partielle des éléments

Comme nous l'avons vu dans la section 3.2 sur la diffusion, le coefficient de diffusion microscopique d'une particule dépend de son degré d'ionisation. La figure 3.12 présente la vitesse de diffusion des différents ions du  $^{12}\text{C}$ .

Dans cette partie nous allons examiner les différentes alternatives pour calculer le degré d'ionisation des éléments que l'on fait diffuser dans les modèles. Nous verrons ensuite comment prendre en considération l'équilibre qui existe entre les ions d'une même espèce chimique et les vitesses différentes de ces ions, pour calculer une vitesse de diffusion pour cette espèce chimique.

#### 3.9.1 Calcul du degré d'ionisation

##### Équation de Saha

Le degré d'ionisation d'un élément peut être calculé en utilisant l'équation de Saha :

$$\frac{N_{r+1}N_e}{N_r} = 2 \frac{U_{r+1}}{U_r} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{x_r}{kT}} \quad (3.28)$$



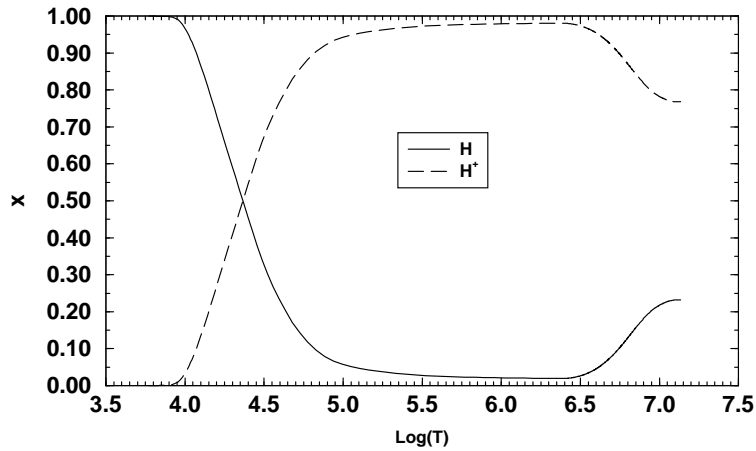


FIG. 3.13 – Degrés d'ionisation de l'hydrogène obtenus avec l'équation de Saha en utilisant uniquement l'état fondamental des particules.

où  $N_r$  est la densité de l'élément ionisé  $r$  fois,  $N_e$  la densité électronique,  $U_r$  la fonction de partition de l'élément ionisé  $r$  fois,  $m_e$  la masse de l'électron et  $\chi_r$  l'énergie d'ionisation.

La fonction de partition est donnée par :

$$U_r = \sum_{n=1, \infty} g_n e^{-\frac{E_{r,n}}{kT}} \quad (3.29)$$

avec  $g_n$  le poids statistique du niveau  $n$  et  $E_{r,n}$  l'énergie d'excitation du niveau  $n$  de la particule  $r$  fois ionisées. Cette fonction de partition est divergente.

La technique la plus simple pour supprimer la divergence de la fonction de partition est celle qui ne prend en considération que le niveau fondamental des atomes et des ions.

Avec cette méthode on obtient 30% d'hydrogène neutre au centre du Soleil (figure 3.13). Cet hydrogène neutre est dû à la recombinaison par pression car on ne prend pas en compte l'effet des atomes et ions voisins sur les niveaux excités.

L'équation de Saha et la fonction de partition sous cette forme ne tiennent pas compte de l'environnement de la particule. Les effets du plasma environnant doivent être pris en compte pour supprimer la divergence de la fonction de partition, et dans l'abaissement du potentiel d'ionisation. Différentes approximations de ces effets ont été proposées.

### Modèle de Unsöld

Unsöld (1948) a considéré que l'atome dans un plasma était affecté par les perturbations électrostatiques du plus proche voisin tandis que celles des autres particules du plasma étaient négligeables.

Dans ce cas l'énergie d'ionisation qui intervient dans l'équation de Saha devient :

$$\chi_r \rightarrow \chi_r - \Delta\chi_r$$

avec, pour un plasma contenant plusieurs espèces,

$$\Delta\chi_r = 3(r+1)^{2/3} e^2 \left( \frac{4\pi N_e}{3} \right)^{1/3} \quad (3.30)$$

$r$  étant le degré d'ionisation de la particule.

La sommation des états dans le calcul de la fonction de partition s'effectuant sur les niveaux de nombre quantique principale :

$$n^2 \leq \frac{e^2(r+1)^2}{2a_0\Delta\chi_r} \quad (3.31)$$

où  $a_0$  est le rayon de Bohr.

### Modèle de Coulomb écranté

Une autre approximation consiste à prendre un potentiel de Coulomb écranté pour la particule, suivant le théorie de Debye. Cette approximation est valable si des particules chargées se trouvent dans la sphère de Debye.

Griem (1962) obtient, si  $N_e + \sum_i N_i \leq \frac{1}{8\pi\lambda_d^3}$  :

$$\chi_r \rightarrow \chi_r - \Delta\chi_r$$

avec

$$\Delta\chi_r = \frac{(r+1)e^2}{\lambda_d} \quad (3.32)$$

où  $\lambda_d$  est la longueur de Debye (équation 3.19).

### Approche « chimique »

Un autre formalisme a été introduit par Hummer & Mihalas (1988), lors du développement de équation d'état MHD (section 3.5.1), qui est basé sur le calcul de la fonction de partition en ajoutant une probabilité d'occupation des niveaux qui tient compte de l'environnement des particules.

Le nombre d'occupation du niveau  $i$  de l'ion  $j$  de l'espèce  $k$  est donné par :

$$\frac{n_{ij}}{n_j} = \frac{w_{ij} e^{-\frac{\chi_{ij}}{kT}}}{Z_{ij}^{partition}} \quad (3.33)$$

où  $w_{ij}$  est la probabilité d'occupation du niveau  $i$  de l'ion  $j$ ,  $\chi_{ij}$  l'énergie d'ionisation et  $Z_{ij}^{partition}$  la nouvelle fonction de partition, qui s'écrit :

$$Z_{ij}^{partition} = \sum_i w_{ij} g_{ij} e^{-\frac{E_{ij} - E_{1j}}{kT}} \quad (3.34)$$

où  $g_{ij}$  est le poids statistique du niveau  $i$  de l'ion  $j$ ,  $E_{ij}$  l'énergie du niveau  $i$  et  $E_{1j}$  l'énergie du niveau fondamental.

La probabilité d'occupation prenant en compte les perturbations des particules neutres et chargées, s'exprime sous la forme :

$$\ln(w_{ij}) = - \left( \frac{4\pi}{3V} \right) \left\{ \sum_{\nu} N_{\nu} (R_{ij} + R_{i\nu})^3 + 16 \left[ \frac{(r+1)e^2}{\chi_{ij} k_{ij}^{1/2}} \right]^3 \sum_{\alpha \neq e} N_{\alpha} Z_{\alpha}^{3/2} \right\} \quad (3.35)$$

avec  $R_{ij}$  étant le rayon caractéristique de l'ion  $j$  dans l'état  $i$  et  $\chi_{ij}$  l'énergie d'ionisation de l'ion  $j$  dans l'état  $i$ . La sommation d'indice  $\nu$  s'effectuant sur les particules neutres et correspond aux interactions avec ces dernières, dans le cadre du modèle des sphères dures. L'autre sommation d'indice  $\alpha$  se faisant sur les particules chargées à l'exception des électrons, pour prendre en compte les interactions des particules chargées. Le facteur  $K_{ij}$  est donné par :

$$K_{ij} = 1, \text{ si } n \leq 3 \quad (3.36a)$$

$$K_{ij} = \frac{16}{3} \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \frac{n+7/6}{n^2+n+1/2}, \text{ si } n \geq 3 \quad (3.36b)$$

$n$  étant le nombre quantique correspondant au niveau  $i$  de la particule  $j$ .  $w_{ij}$  est une fonction suffisamment décroissante pour assurer la convergence de la fonction de partition.

### Approche « physique »

Cette approche a été utilisée pour le développement de l'équation d'état OPAL (section 3.5.2). Elle ne fait pas intervenir de façon explicite des nombres d'occupation mais il est possible d'obtenir une équation du type Saha, dans la limite des faibles densités. Cette équation s'écrit, dans le cas de l'hydrogène :

$$\frac{N_p N_e}{N_H} = 2V \frac{\lambda_H^3}{\lambda_e^3 \lambda_p^3} \frac{e^{\frac{Z e^2}{kT \lambda_d}}}{Z_{PL}} \quad (3.37)$$

où  $N_H = V \rho_H$ ,  $Z = 1$ ,  $p$  indice les valeurs correspondant aux protons et  $\lambda_d$  est la longueur de Debye.  $\lambda_p$ ,  $\lambda_H$  et  $\lambda_e$  sont les longueurs d'onde thermique de De Broglie du proton, de l'hydrogène et de l'électron :

$$\lambda_i = \frac{h}{(2\pi m_i kT)^{1/2}} \quad (3.38)$$

$Z_{PL}$  est la fonction de partition de Planck-Larkin :

$$Z_{PL} = \sum_{n,l} (2l+1) \left( e^{-\frac{E_{nl}}{kT}} - 1 + \frac{E_{nl}}{kT} \right) \quad (3.39)$$

### 3.9.2 Calcul de la vitesse de diffusion microscopique

Dans le cas de l'ionisation partielle des éléments on ne peut plus calculer une vitesse de diffusion pour chaque particule, puis résoudre l'équation de diffusion (équation 3.6). En effet si l'on fait diffuser chaque ion de façon indépendante, alors l'équilibre d'ionisation ne sera plus respecté.

Il faut donc tenir compte de l'équilibre d'ionisation lors du calcul de la diffusion. Cet équilibre étant dynamique et calculé pour un ensemble de particules de chaque espèce, nous devons résoudre l'équation de diffusion pour l'espèce en considérant une seule vitesse de diffusion.

Si l'on tient compte de l'ionisation partielle des éléments la vitesse de diffusion de l'espèce  $i$  sera calculé comme étant la moyenne des vitesses de l'élément  $i$  dans les différents états d'ionisation pondérée par les fractions d'ionisation :

$$V_{1i} = \sum_r x_{ir} v_{1ir} \quad (3.40)$$

où  $V_{1i}$  est la vitesse de diffusion microscopique de l'espèce  $i$  par rapport à l'espèce de référence (l'hydrogène dans notre cas),  $x_{ir}$  la fraction de l'espèce  $i$  dans l'état d'ionisation  $r$  et  $v_{1ir}$  la vitesse de diffusion microscopique de l'élément  $i$  ionisé  $r$  fois (équation 3.9). Les fractions d'ionisation des différents éléments n'étant pas disponible à partir des équations d'état actuelles aucun modèle n'a encore été calculé en utilisant l'ionisation partielle. Nous envisageons toutefois de calculer un tel modèle grâce aux tables qui nous ont récemment été fournies par W. Däppen.

## 3.10 Article soumis à A&A : « Solar model calibrations. I « Standard » input physics »

### Traduction du résumé :

Nous avons étudié l'influence sur la structure des modèles des incertitudes actuelles sur les quantités habituellement utilisées pour leur calibration ( $R_{\odot}$ ,  $L_{\odot}$  et  $t_{\odot}$ ), ainsi que les effets dus à un changement de la physique des modèles. Pour les comparaisons nous avons utilisé le modèle sismique de Basu et al. (1997) et différents modèles calculés avec le code d'évolution stellaire de Toulouse. Nous avons tout d'abord montré que les faibles incertitudes sur les quantités utilisées pour la calibration affectaient faiblement les comparaisons entre les modèles et le modèle sismique. Pour la physique introduite dans le calcul des modèles nous avons montré que l'équation d'état OPAL donne de meilleurs résultats que l'équation d'état MHD, et pour les taux de réactions nucléaires que les valeurs de Caughlan & Fowler (1988) donnent de meilleurs résultats que celles de Adelberger et al. (1998). Nous trouvons que les opacités OPAL96 donnent un très bon accord avec les résultats des inversions sismiques quand le modèle reproduit, à l'âge solaire, la composition chimique photosphérique observée. Notre meilleur modèle présente un accord avec le modèle sismique meilleur que 0.3% dans la zone radiative, sauf dans les couches

les plus centrales. Ce modèle a été calculé avec la diffusion microscopique, l'équation d'état OPAL, les opacités OPAL96 et les taux de réactions nucléaires de Caughlan & Fowler (1988). Toutefois un écart significatif reste entre ce meilleur modèle et le modèle sismique dans la partie supérieure de la zone radiative. Ce qui est probablement dû à des processus de mélanges (Richard et al. 1996). De tels processus « non-standard » seront présentés dans Richard et al. (1999) (Article II).

A&A manuscript no. (will be inserted by hand later)
--

Your thesaurus codes are: 02.04.2, 06.01.1, 06.05.1, 06.09.1
---

ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS
----------------------------------

## Solar model calibrations. I “Standard” input physics.

O. Richard, S. Vauclair, and C. Charbonnel

Observatoire Midi-Pyrénées, UMR 5572, 14. Av. E. Belin, 31400 Toulouse, France

Received April 12 1999/Accepted

**Abstract.** We have investigated the influence of the current uncertainties of the usual quantities used for the calibration of solar models ( $R_{\odot}$ ,  $L_{\odot}$ ,  $t_{\odot}$ ) on the model structure, as well as the effects induced by changing the input physics. For the comparisons we have used the helioseismic model of Basu et al. (1997) and various models computed with the Toulouse evolutionary code. We first have shown that the small uncertainties on the calibration quantities only weakly affect the comparison between our models and the seismic model, except for the age if we use the error bars given by the helioseismic determination. For the input physics we have seen that the OPAL equation of state gives better results than the MHD one, and for the nuclear reaction rates that the Caughlan & Fowler (1988) values give better results than the Adelberger et al. (1998) ones. We find that the OPAL96 opacities give a very good agreement with the results of the helioseismic inversion when the model reproduces, at the solar age, the observed photospheric mixture (which needs a different initial mixture). Our best model presents an agreement with the seismic Sun better than 0.3% in the radiative zone, except in the central layers. This model (O10) includes diffusion and is computed with the OPAL equation of state, the OPAL96 opacities and the Caughlan & Fowler (1988) nuclear reaction rates. A significant discrepancy remains however between this best model and the seismic Sun in the upper part of the radiative zone. This is probably due to some mixing process (Richard et al. 1996). Such “non-standard” input physics will be presented in Richard et al. (1999) (Paper II).

**Key words:** Diffusion – Sun: abundances – Sun: evolution – Sun: interior

### 1. Introduction

For a long time the effects of microscopic diffusion were neglected in the construction of solar models. In the last few years helioseismology have strongly constrained our view

*Send offprint requests to:* O. Richard  
*Correspondence to:* richard@obs-mip.fr

of the Sun and the importance of microscopic diffusion has been demonstrated (Bahcall & Pinsonneault 1995; Christensen-Dalsgaard et al. 1996; Richard et al. 1996 – hereafter RVCD; Ciacio et al. 1997; Morel et al. 1997; Brun et al. 1998a; Elliott 1998; Turcotte et al. 1998).

However, even though microscopic diffusion improves the description of the solar interior, some significant differences remain between the helioseismic and theoretical models in the region below the convective zone (see the review papers by Gough et al. 1996 and Guzik 1998). The persistence of this discrepancy has led various authors to test different solutions like opacity changes (Tripathy et al. 1998) or turbulent mixing (Brun et al. 1998b; Morel et al. 1998). Including mixing below the convective zone can also explain the lithium depletion in the Sun (Chaboyer et al. 1995, RVCD). Mass loss could also reproduce the photospheric lithium abundance (Guzik & Cox 1995; Morel et al. 1997) but it would be in contradiction with the lithium observations in galactic clusters (Richard et al. 1999 - hereafter Paper II) .

In the inner part of the Sun also there is a discrepancy between the models and the helioseismic inversions which is not reduced by diffusion, and could be related to the neutrino problem. Different solutions have been tested such as mixing (Bahcall et al. 1997; Richard & Vauclair 1997; Brun et al. 1998a; Degl’Innocenti & Ricci 1998) or changes of the nuclear reaction rates (Turck-Chièze & Lopes 1993; Brun et al. 1998a; Takata & Shibahashi 1998) but none of them could reduce the neutrino fluxes while keeping the agreement with the helioseismic Sun.

In this paper we present new models computed with the Toulouse evolutionary code, originally from Geneva (Charbonnel et al. 1992), all of them including microscopic diffusion. The observational constraints (chemical, seismic, and nuclear) are described in Sect. 2. We test the sensitivity of the models to the classical quantities used for the calibration ( $R_{\odot}$ ,  $L_{\odot}$ ,  $t_{\odot}$ ; Sects. 2.1, and 3.2.1) and to the input physics (Sects. 3.1 and 3.2.2). Finally we discuss the remaining problems on the basis of our best solar models (Sects. 3.2.3 and 4).

## 2. The Constraints

### 2.1. Calibration

The solar luminosity  $L_{\odot}$ , radius  $R_{\odot}$ , and age  $t_{\odot}$  allow to constrain the only two free parameters of the model, namely the mixing length convective parameter  $\alpha$  and the initial helium abundance  $Y_0$ . We shall see in Sect. 3.2.1 how the uncertainties on these quantities affect the comparison with helioseismology.

The luminosity  $L_{\odot}$  is obtained from the solar constant measured by satellite and varies with the solar activity. We take  $3.8515 \times 10^{33}$  ergs.s<sup>-1</sup> (Guenther et al. 1992), which is the mean value between the results of the two space missions ERS on *Nimbus 7* and ACRIM on *SMM*. The slightly greater value used by Bahcall & Pinsonneault (1992) and the smaller value used by Bahcall & Pinsonneault (1995) lie inside the error bars (see Table 1).

Some recent papers have shown that the solar radius value of  $(6.9599 \pm 0.0007) \times 10^{10}$  cm (Allen 1976) was overestimated. Two different techniques now lead to a smaller value for the radius. The first one uses solar f-modes: Antia (1998) and Schou et al. (1997) have respectively obtained  $6.9578 \times 10^{10}$  cm and  $(6.9568 \pm 0.0003) \times 10^{10}$  cm. The second technique uses the observation of the angular diameter of the Sun and atmosphere models. Brown & Christensen-Dalsgaard (1998) have found a smaller radius of  $(6.95508 \pm 0.00026) \times 10^{10}$  cm. For the calibration of our best model we take the mean observed value  $(6.95749 \pm 0.00241) \times 10^{10}$  cm, which is very close to the helioseismic value obtained with the f-modes.

The last parameter used in the calibration is the solar age. Few determinations of the solar age have been done. The meteoritic determination obtained by Guenther et al. (1992) and by Wasserburg (See Appendix of Bahcall & Pinsonneault 1995) is respectively  $4.52 \pm 0.04$  Gyr and  $4.57 \pm 0.02$ . Using the helioseismic frequencies Guenther & Demarque (1997) find  $4.5 \pm 0.1$  Gyr and Dziembowski et al. (1999) obtain  $4.66 \pm 0.11$  Gyr.

Table 1 summaries the values used to calibrate our models.

**Table 1.** Solar physical quantities used for the reference calibration

$M_{\odot}$	$(1.9891 \pm 0.0004) \times 10^{33}$ g
$R_{\odot}$	$(6.95749 \pm 0.00241) \times 10^{10}$ cm
$L_{\odot}$	$(3.8515 \pm 0.0055) \times 10^{33}$ erg.s <sup>-1</sup>
$t_{\odot}$	$(4.57 \pm 0.02)$ Gyr

### 2.2. Helioseismic constraints

The strongest helioseismic constraint on solar models is the profile of the seismic sound speed  $c$  (Bahcall et al.

1997) or of the  $u = P/\rho$  function. To obtain these profiles no assumption on the physics of the Sun is needed, but the data reduction and the inversion techniques introduce uncertainties. Our comparisons with the sound speed profile are made using the seismic model of Basu et al. (1997).

The precise radius at the bottom of the convective zone is also given by the seismic sound speed profile. Christensen-Dalsgaard et al. (1991) found  $0.713 \pm 0.003$ . This value was confirmed by Basu & Antia (1997) with a smaller uncertainty; they gave :  $0.713 \pm 0.001$ , when they used only their models with a smooth composition profile at the bottom of the convective zone.

The helioseismic inversion can also give the helium abundance in the convective zone (Dziembowski et al. 1991; Kosovichev 1995; Basu & Antia 1997; Richard et al. 1998). The most important uncertainty on the determination comes from the equation of state. With the OPAL equation of state (Rogers et al. 1996) the typical value obtained for the helium mass fraction  $Y$  is  $0.249 \pm 0.002$ ; with the MHD equation of state (Däppen et al. 1988; Hummer & Mihalas 1988; Mihalas et al. 1988) the results differ more from author to author ( $0.246$  for Basu & Antia 1997,  $0.242$  for Richard et al. 1998) due to different inversion method. Basu et al. (1998) have recently studied the equation of state on the upper convective zone. They have found a better agreement for the MHD equation of state than for the OPAL one on the helium ionization zone. However more detailed studies need to be done to reduce these uncertainties.

Table 2 gives the helioseismic constraints used in this paper.

**Table 2.** Helioseismic constraints

$c^2(r)$	Basu et al. (1997)
$R_{bcz}/R_{\odot}$	$0.713 \pm 0.003$
$Y_{\odot, surf}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0.249 \pm 0.002 \text{ (EOS OPAL)} \\ 0.242 \div 0.246 \text{ (EOS MHD)} \end{array} \right.$

### 2.3. Nuclear constraints

The neutrino fluxes give direct information on the physical conditions in the solar core. Some experiments have measured the solar neutrino fluxes using different types of detector. The water detectors, Kamiokande and SuperKamiokande, have threshold energies of respectively 7.5 Mev and 6.5 Mev, and can only detect the <sup>8</sup>B and the *hep* neutrinos. The chlorine detector Homestake has a smaller threshold energy of 0.814 Mev, which allows the detection of *pep*, <sup>7</sup>Be, <sup>13</sup>N, <sup>15</sup>O, and <sup>17</sup>F neutrinos but not of the *pp* neutrinos. For the gallium experiments, GALLEX and SAGE, the 0.233 Mev threshold energy makes the detection of the *pp* neutrinos possible. Table 3

gives the observed fluxes. They are not reproduced by the models. Some additional physics is still needed, either in astrophysics or in particle physics (neutrino oscillations). In the present paper we discuss only the modifications induced by changing the nuclear reaction rates (see Sect. 3.2.2).

**Table 3.** Observed neutrino fluxes

Experiment	Results
Homestake <sup>a</sup>	$2.56 \pm 0.16$ (stat.) $\pm 0.16$ (syst.) SNU
Kamiokande <sup>b</sup>	$2.80 \pm 0.19$ (stat.) $\pm 0.33$ (syst.) $\times 10^6$ cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup>
SuperKamiokande <sup>c</sup>	$2.44$ $^{+0.06}_{-0.05}$ (stat.) $^{+0.09}_{-0.07}$ (syst.) $\times 10^6$ cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup>
SAGE <sup>d</sup>	$70 \pm 6.3$ (stat.) $^{+4.5}_{-4.0}$ (syst.) SNU
GALLEX <sup>e</sup>	$76.4 \pm 6.3$ (stat.) $^{+4.5}_{-4.0}$ (syst.) SNU

1 SNU =  $10^{-36}$  neutrino capture by target atom per second  
 (a): Cleveland et al. (1998) — (b): Fukuda (1996) — (c): Suzuki (1998)  
 — (d): Gravin (1998) — (e): Kirsten (1998)

#### 2.4. Chemical constraints

The photospheric abundances of heavier elements as determined by Grevesse (1991) and more recently by Grevesse & Noels (1993) will be extensively used as constraints on our standard model including microscopic diffusion.

Also the light element abundances in stars provide strong constraints on the transport processes which may occur in the radiative zones. In the solar photosphere, there is a lithium depletion of 140 compared to the meteoritic value while the beryllium abundance seems normal (Balachandran & Bell 1997). Another constraint is given by the <sup>3</sup>He/<sup>4</sup>He ratio, which has not varied by more than 10% over the last 3 Gyr (Geiss & Gloeckler 1998, see Table 4). These constraints on transport processes other than microscopic diffusion will not be treated in the present paper, which is devoted to the new standard solar model. They will be the subject of Paper II.

**Table 4.** Chemical constraints

$L_{i\text{phot}}(t_{\odot})/L_{i\text{phot}}(t_0)$	1/140
$Be_{\text{surf}}(t_{\odot})/Be_{\text{surf}}(t_0)$	1
<sup>3</sup> He / <sup>4</sup> He (1.6 Gyr $\sim$ 4.6 Gyr)	$\leq 10$ %
Photospheric mixture	$\left\{ \begin{array}{l} \text{G91}^a \text{ (OPAL92}^c) \\ \text{GN93}^b \text{ (OPAL96}^c) \end{array} \right.$

(a): Grevesse (1991) — (b): Grevesse & Noels (1993) — (c): see Sect. 3.1.2

### 3. The best standard solar models

#### 3.1. Input physics

##### 3.1.1. Equation of state

We use two different equations of state:

- the MHD equation of state (Däppen et al. 1988; Hummer & Mihalas 1988; Mihalas et al. 1988) computed for  $Z = 0.02$ , which includes the effect of the surrounding plasma, on an intuitive manner, on the atomic state by an occupation probability.
- the OPAL equation of state (Rogers et al. 1996) computed for the initial value of  $Z$ , which was obtained using the grand canonical ensemble of the statistic mechanic analysis; no assumption on the atomic states is needed.

Recently Elliott & Kosovichev (1998) have shown that the relativistic effects in the solar core need to be included in the equation of state. However no equation of state computed with these effects is yet available.

##### 3.1.2. Opacity and initial mixture

We use the latest OPAL opacities (Iglesias & Rogers 1996) completed by the Alexander & Ferguson (1994) low temperature opacities (hereafter OPAL96). For comparison, we present a model computed with the older opacities of Iglesias et al. (1992) completed by the Kurucz (1991) low temperature opacities (hereafter OPAL92).

The opacity tables are computed for a particular mixture which cannot be changed. Only in the case of more sophisticated treatments using monochromatic opacities can the mixture be varied in the computations (Turcotte et al. 1998). As microscopic diffusion changes the abundances with time in the convective zone and below, the use of opacity tables is not fully consistent. Models are generally computed with an initial mixture consistent with the opacities. We will see (Sect. 3.2.3) that a better model is obtained with the final mixture (at the solar age) consistent with the opacities and the observed spectrum. For consistency, models with OPAL92 opacities use the Grevesse (1991) mixture (hereafter G91) while models with OPAL96 opacities use the Grevesse & Noels (1993) mixture (hereafter GN93).

##### 3.1.3. Nuclear reaction rates

For the pp-chains we use two different determinations of the thermonuclear reaction rates. The first one is the Caughlan & Fowler (1988) (hereafter CF88) that we used previously (RVCD). The other one is the new determination of Adelberger et al. (1998) (hereafter Ad98). For the CNO tri-cycle we keep the Caughlan & Fowler (1988) rates. The screening factors are computed in the weak screening limits (Salpeter 1954); the recent correction of



Salpeter formula (Dzitzko et al. 1995) is not tested in this paper (see Brun et al. 1998a).

### 3.1.4. Convection

For the treatment of convection we use the formulation of the standard mixing length theory (MLT), which gives the convective flux and the temperature gradient. The convective zone is determined using the Schwarzschild's criterium. The  $\alpha = l/H_p$  parameter of the MLT is given by the calibration. The Canuto & Mazzitelli (1991) treatment of convection is not studied in the present paper; its difference with the MLT treatment is important only in the superadiabatic region (Christensen-Dalsgaard 1997), which is out of the scope of the present paper.

### 3.1.5. Microscopic diffusion

The present models are all computed including microscopic diffusion:

- the diffusion coefficients are computed with Paquette et al. (1986) prescription
- the elements taken into account in the diffusion computations are: H, He, C, N, O, Ne, Mg
- we include diffusion due to the concentration gradient, gravity, and thermal gradient
- the radiative acceleration is neglected as it only slightly affects the structure of the models (Turcotte et al. 1998).

We use the approximation of completely ionized elements to compute the diffusion velocity, which is satisfied by hydrogen and helium. For carbon, nitrogen, and oxygen this approximation could explain the slight difference noticed by Turcotte et al. (1998) in their surface abundance variations between various published models.

### 3.2. The results

We have computed a first model (O1) calibrated with the mean values of the observed parameters as given in Table 1. To test the calibration we have also computed various models with the same input physics but using the most extreme values for each of the observed parameters, while keeping the mean values for the others. Model O1 is also used to test the effects of changing the input physics: equation of state, opacities, and nuclear reaction rates. Our best model O10 is computed with a modified initial mixture adjusted to obtain a final mixture consistent with the observations and the opacities (see Sect. 3.2.3). Table 5 summarizes the input physics of our models. Their physical and chemical characteristics are shown in Table 6 as well as the predicted neutrino fluxes.

### 3.2.1. Influence of the calibration uncertainties on the models

To infer the effect of the uncertainties on the luminosity of solar models, we have computed two models (O2 and O3) with the extreme luminosity values. The differences are shown in Fig. 1. Varying  $L$  in the uncertainty range has no effect on the sound speed profile. A small increase of the luminosity results in a slight increase of the central temperature and consequently of the neutrino fluxes. Meanwhile the pressure and density increase in the central regions and decrease in the upper layers (see Fig. 1c) due to the constraint on the solar radius.

We have computed two solar models which reproduce the extreme values of  $R_\odot$  (models O4 and O5). The comparison with the helioseismic Sun is shown in Figs. 2a and b. The sound speed is more sensitive to the radius than to the luminosity; this is due to a small change in the radius at the bottom of the convective zone. The physical conditions are not affected at the center while slight modifications appear, more and more important toward the bottom of the convective zone (see Fig. 2c).

Fig. 3 shows the effect of the solar age (see also Morel et al. 1998; Turck-Chièze et al. 1998). The main differences between the models concern the radius at the bottom of the convective zone which decreases with age —  $0.7158R_\odot$  at 4.5 Gyr (model O6),  $0.7150R_\odot$  at 4.6 Gyr (model O1), and  $0.7127R_\odot$  at 4.7 Gyr (model O7). The central increase of temperature, pressure, density, and mass at constant radius is due to the increase of helium in the model of older age (see Fig. 3c). Like Turck-Chièze et al. (1998) we find an important sensitivity to the age.

### 3.2.2. Consequences of the modification of the physics introduced in the models

We have tested the effects of the opacity changes (models O1 and O8) on the structure of the models. Figs. 4a and b respectively show the differences in the sound speed and in the density profiles. The results obtained with OPAL96 are not as good as those obtained with OPAL92, if we use as initial mixture the one for which they have been computed (which is in agreement with Brun et al. 1998a and Turcotte et al. 1998). However such a model does not reproduce the photospheric abundances (see Sect. 2.4) because of the elements settling. To obtain these observed photospheric abundances at the solar age we need to modify the initial mixture (see Sect. 3.2.3). The effects of the opacity changes on the physical quantities of the models are shown in Fig. 4c. We can see an increase of the temperature in model O8, computed with the older opacities OPAL92, due to the higher metallicity.

Model O9 is similar to model 2 of RVCD, in which the  $^3\text{He}$  abundance was not taken into account in the helium opacity because its mass fraction is negligible compare to the  $^4\text{He}$  mass fraction (noted HE3-92 in table 5, see ap-

pendix B of Morel et al. 1997). As the opacity of the models is computed with the hydrogen  $X$ , helium  $X_{He}$ , and heavy elements  $Z = 1 - X - X_{He}$  mass fraction, the  $^3\text{He}$  mass fraction, in model O9, is implicitly taken into account in the heavy element mass fraction. As the  $^3\text{He}$  mass fraction at the  $^3\text{He}$  peak represents about 20% of the total heavy element mass fraction, it affects the opacity and the model structure; this is the reason for the bump at  $0.25R_\odot$  which was found in RVCD (see Figs. 5a and b). The pressure, density, and temperature changes are illustrated in Fig. 5c.

Models O1 and M1 have been computed to show the impact of the equation of state. Fig. 6a shows the sound speed and Fig. 6b the density, for two similar models computed respectively with the MHD and OPAL equations of state, compared to the helioseismic profiles. The improvement given by the OPAL equation of state between  $0.3R_\odot$  and the convective zone is clearly visible. The changes on individual physical parameters of the models are shown in Fig. 6c.

Figs. 7a and b illustrate the effect of the new nuclear reaction rates (model O11). We see a slight deterioration of the sound speed profile as found by Morel et al. (1998), due to an increase of the central temperature (Fig. 7c); the patterns are similar to those obtain for luminosity changes with higher amplitude, except for the temperature in the upper layers.

### 3.2.3. Our best model

We now use a different initial mixture (hereafter MOD93) to obtain a model which correctly reproduces the observed photospheric abundances at the solar age. As only the hydrogen and global metal changes can be taken into account in the equation of state and in the opacity, we adjust the initial hydrogen abundance  $X_0$ , to obtain at the solar age the Grevesse & Noels (1993) photospheric hydrogen abundance  $X_{GN93,Y_s}$ , which corresponds to the helium 4 abundance  $Y_s$ .

We derive the new initial mixture in the following way: we first compute a model with the Grevesse & Noels (1993) initial mixture, which gives the final hydrogen abundance  $X_s$ . We use this model to compute the deviation between the hydrogen abundance  $X_{GN93,Y_s}$ , corresponding to a final helium abundance  $Y_s$  in the Grevesse & Noels (1993) mixture, and the final hydrogen abundance  $X_s$ . This deviation is:

$$dX = \frac{X_s - X_{GN93,Y_s}}{X_s} \quad (1)$$

The initial hydrogen abundance can be computed with the initial helium 4 abundance  $Y_0$ , given by the calibration:

$$X_0 = X_{GN93,Y_0} (1 - dX) \quad (2)$$

where  $X_{GN93,Y_0}$  is the hydrogen abundance of the Grevesse & Noels (1993) mixture computed for  $Y_0$ .

For models with diffusion  $dX$  is positive so the initial hydrogen abundance of models computed with the initial mixture MOD93 is reduced compared to those of models computed with the Grevesse & Noels (1993) initial mixture.

This decrease in the initial hydrogen abundance leads to an increase of the initial global metal abundance, due to the normalization condition  $X + Y + Z = 1$ . The ratio  $(Z/X)_0$  also increases (see table 6):

$$\left(\frac{Z}{X}\right)_0 = \frac{\left(\frac{Z}{X}\right)_{GN93} - dX}{1 - dX} \quad (3)$$

where  $\left(\frac{Z}{X}\right)_{GN93} = 0.0245$ .

Figs. 8a and b show the effect of such changes in the initial mixture used in the models. A great improvement is obtained if we use the modified initial mixture MOD93 which modifies the opacity and gives a consistent final surface mixture. We can also notice the very close results between models O8 and O10 (see also Table 6). These two models use different opacities but similar  $\left(\frac{Z}{X}\right)_0$ , and show some close changes on the physical parameters (see Figs. 8c and 4c).

Model O10 is our best model, compared to the helioseismic constraints, including microscopic diffusion and reproducing the photospheric mixture of Grevesse & Noels (1993).

## 4. Conclusion

We have tested in this paper the effects of the current uncertainties on the quantities  $(R_\odot, L_\odot, t_\odot)$  used for the calibration. We have seen that the small remaining uncertainties on the luminosity and radius have almost no impact on the comparison with the results of the helioseismology. We also have shown that the effect of the age, which affects the chemical composition, is more important. However we need to keep in mind that the largest effect is due to the uncertainties given by the helioseismic determination of the age (0.1 Gyr) compared to the meteoritic one (0.04 Gyr). It is reasonable to use the meteoritic determination of the age which is more accurate.

We have seen that the OPAL equation of state gives better results than the MHD one and that the reaction rates from Caughlan & Fowler (1988) improve the comparison with respect to the Adelberger et al. (1998) rates.

The situation for the opacities is complicate due to the inconsistency of the mixture in the model and that for which the opacity tables have been computed. So we have tested two alternatives:

- 1) we have computed a model with the initial mixture consistent with the opacities but, due to settling, the final model does not reproduce the photospheric abundances. In such models the opacities OPAL92 give better results than OPAL96 opacities. However these models are inconsistent with the observed photospheric abundances and also with the opacities.

2) we have also computed a model with a different initial mixture for reproducing the observed photospheric mixture at the solar age. In this case the OPAL96 model is in very good agreement with the helioseismic model except at the bottom of the convective zone. Such a model is consistent with the observed photospheric mixture and the opacities at the solar age. This is our best standard model O10.

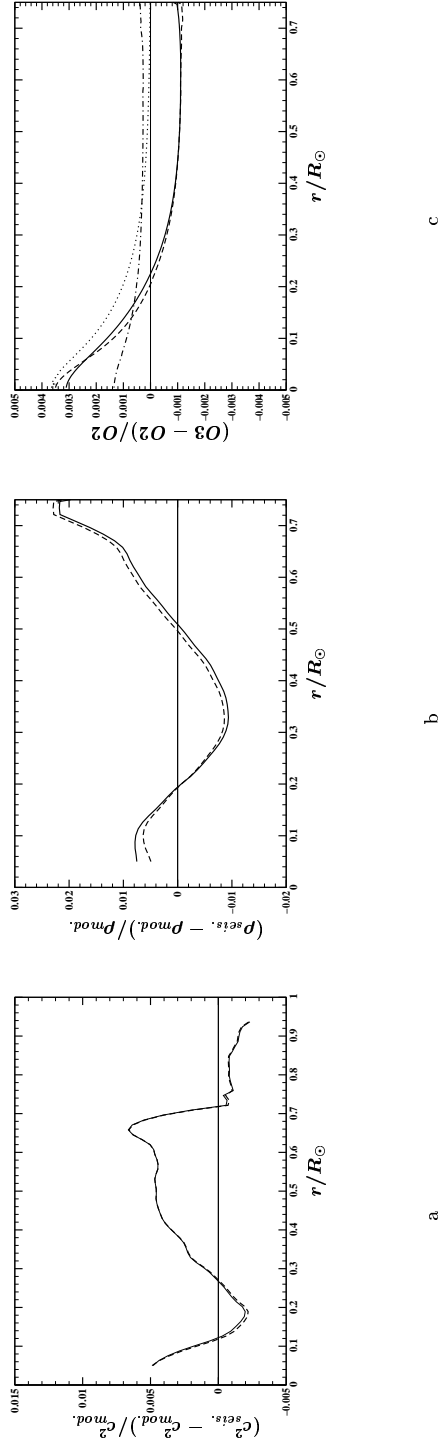
It includes diffusion, OPAL equation of state, OPAL96 opacities, and reproduces the observed photospheric mixture at the solar age. This model shows a very good agreement with the helioseismic model except at the bottom of the convective zone where a bump of 0.3% subsist. Such a significant feature could indicate that some macroscopic motions, which are not taken into account in the present models, take place in the upper part of the radiative zone.

To take into account the chemical constraints, briefly presented in this paper, we have investigated various types of transport processes which will be presented in Paper II.

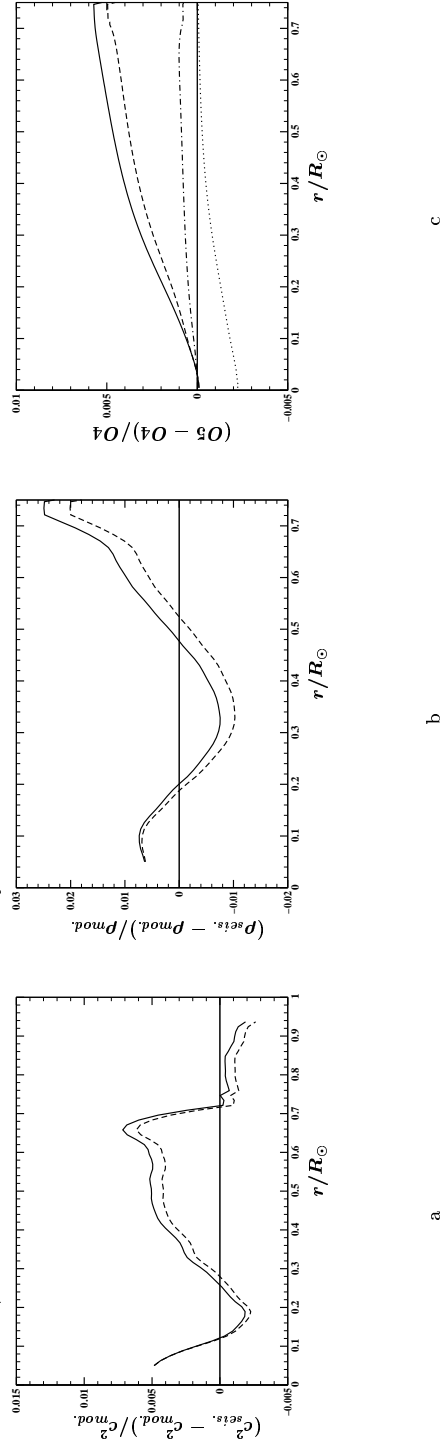
### References

- Adelberger, E. G., Austin, S. M., Bahcall, J. N., Balantekin, A. B., Bogaert, G., Brown, L. S., Buchmann, L., Cecil, F. E., Champagne, A. E., de Braeckelee, L., Duba, C. A., Elliott, S. R., Freedman, S. J., Gai, M., Goldring, G., Gould, C. R., Guzinov, A., Haxton, W. C., Heeger, K. M., Henley, E., Johnson, C. W., Kamionkowski, M., Kavanagh, R. W., Koonin, S. E., Kubodera, K., Langanke, K., Motobayashi, T., Pandharipande, V., Parker, P., Robertson, R. G. H., Rolfs, C., Sawyer, R. F., Shaviv, N., Shoppa, T. D., Snover, K. A., Swanson, E., Tribble, R. E., Turck-Chièze, S., Wilkerson, J. F., 1998, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 1265
- Alexander, D. R., Ferguson, J. W., 1994, *ApJ* **437**, 879
- Allen, C. W., 1976, *Astrophysical Quantities*, 3<sup>rd</sup> ed.; London: Atholone Press
- Antia, H. M., 1998, *A&A* **330**, 336
- Bahcall, J. N., Pinsonneault, M. H., 1992, *Rev. Mod. Phys.* **64**(4), 885
- Bahcall, J. N., Pinsonneault, M. H., 1995, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 781
- Bahcall, J. N., Pinsonneault, M. H., Basu, S., Christensen-Dalsgaard, J., 1997, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 171
- Balachandran, S. C., Bell, R. A., 1997, *American Astronomical Society Meeting* **191**, 7408
- Basu, S., Antia, H. M., 1997, *MNRAS* **287**, 189
- Basu, S., Christensen-Dalsgaard, J., Chaplin, W. J., Elsworth, Y., Isaak, G. R., New, R., Schou, J., Thompson, M. J., Tomczyk, S., 1997, *MNRAS* **292**, 243
- Basu, S., Däppen, W., Nayfonov, A., 1998, in *A Half Century of Stellar Pulsation Interpretation: A Tribute to Arthur N. Cox*, edited by Paul A. Bradley and Joyce A. Guzik, *Proceedings of a Conference held in Los Alamos, NM 16-20 June 1997, ASP Conference Series #135*, p. 71., 435
- Brown, T. M., Christensen-Dalsgaard, J., 1998, *Astrophys. J., Lett.* **500**, L195
- Brun, A. S., Turck-Chièze, S., Morel, P., 1998a, *ApJ* **506**, 913
- Brun, A. S., Turck-Chièze, S., Zahn, J. P., 1998b, in *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*, ESA Publications Division, SP-418, 439
- Canuto, V., Mazzitelli, I., 1991, *ApJ* **370**, 295
- Caughlan, G. R., Fowler, W. A., 1988, *Atomic Data Nuc. Data Tables* **40**, 283
- Chaboyer, B., Demarque, P., Pinsonneault, M. H., 1995, *ApJ* **441**, 865
- Charbonnel, C., Vauclair, S., Zahn, J. P., 1992, *A&A* **255**, 191
- Christensen-Dalsgaard, J., 1997, in *SCORE'96 : Solar Convection and Oscillations and their Relationship*, 3
- Christensen-Dalsgaard, J., Däppen, W., Ajukov, S. V., Anderson, E. R., Antia, H. M., Basu, S., Baturin, V. A., Berthomieu, G., Chaboyer, B., Chitre, S. M., Cox, A. N., Demarque, P., Donatowicz, J., Dziembowski, W. A., Gabriel, M., Gough, D. O., Guenther, D. B., Guzik, J. A., Harvey, J. W., Hill, F., Houdek, G., Iglesias, C. A., Kosovichev, A. G., Leibacher, J. W., Morel, P., Proffitt, C. R., Provost, J., Reiter, J., Rhodes Jr., E. J., Rogers, F. J., Roxburgh, I. W., Thompson, M. J., Ulrich, R. K., 1996, *Sci* **272**, 1286
- Christensen-Dalsgaard, J., Gough, D. O., Thompson, M. J., 1991, *ApJ* **378**, 413
- Ciacio, F., Degl'Innocenti, S., Ricci, B., 1997, *A&AS* **123**, 449
- Cleveland, B. T., Daily, T., Davis, R., J., Distel, J. R., Lande, K., Lee, C. K., Wildenhain, P. S., Ullman, J., 1998, *ApJ* **496**, 505
- Däppen, W., Mihalas, D., Hummer, D. G., Mihalas, B. W., 1988, *ApJ* **332**, 261
- Degl'Innocenti, S., Ricci, B., 1998, *Astroparticle Physics* **8**, 293
- Dziembowski, W. A., Fiorentini, G., Ricci, B., Sienkiewicz, R., 1999, *A&A* **343**, 990
- Dziembowski, W. A., Pamyatnykh, A. A., Sienkiewicz, R., 1991, *MNRAS* **249**, 602
- Dzitko, H., Turck-Chièze, S., Delbourgo-Salvador, P., Lagrange, C., 1995, *ApJ* **447**, 428
- Elliott, J. R., 1998, *A&A* **334**, 703
- Elliott, J. R., Kosovichev, A. G., 1998, *Astrophys. J., Lett.* **500**, L199
- Fukuda, Y., 1996, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1683
- Geiss, J., Gloeckler, G., 1998, *Space Science Reviews* **84**, 239
- Gough, D. O., Kosovichev, A. G., Toomre, J., Anderson, E., Antia, H. M., Basu, S., Chaboyer, B., Chitre, S. M., Christensen-Dalsgaard, J., Dziembowski, W. A., Eff-Darwich, A., Elliott, J. R., Giles, P. M., Goode, P. R., Guzik, J. A., Harvey, J. W., Hill, F., Leibacher, J. W., Monteiro, M. J. P. F. G., Richard, O., Sekii, T., Shibahashi, H., Takata, M., Thompson, M. J., Vauclair, S.,

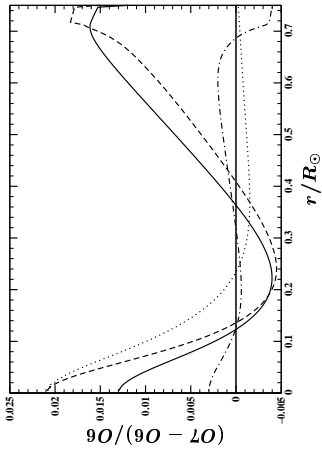
- Vorontsov, S. V., 1996, *Sci* **272**, 1296
- Gravin, V., 1998, in *Neutrino 98, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*
- Grevesse, N., 1991, *A&A* **242**, 488
- Grevesse, N., Noels, A., 1993, in *Origin and Evolution of the Elements*, Prantzos N., Vangioni-Flam E., Cassé M. (eds.), Cambridge Univ. Press, 15
- Guenther, D. B., Demarque, P., 1997, *ApJ* **484**, 937
- Guenther, D. B., Demarque, P., Kim, Y. C., Pinsonneault, M. H., 1992, *ApJ* **387**, 372
- Guzik, J. A., 1998, in *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*, ESA Publications Division, SP-418, 417
- Guzik, J. A., Cox, A. N., 1995, *ApJ* **448**, 905
- Hummer, D. G., Mihalas, D., 1988, *ApJ* **331**, 794
- Iglesias, C. A., Rogers, F. J., 1996, *ApJ* **464**, 943
- Iglesias, C. A., Rogers, F. J., Wilson, B. G., 1992, *ApJ* **397**, 717
- Kirsten, T., 1998, in *Neutrino 98, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*
- Kosovichev, A. G., 1995, *Adv. Space Res.* **15(7)**, 795
- Kurucz, R. L., 1991, in *Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models*, Crivellari L., Hubeny I., Hummer D. G. (eds.), NATO ASI Series C, Vol.341
- Mihalas, D., Däppen, W., Hummer, D. G., 1988, *ApJ* **331**, 815
- Morel, P., Provost, J., Berthomieu, G., 1997, *A&A* **327**, 349
- Morel, P., Provost, J., Berthomieu, G., 1998, in *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*, ESA Publications Division, SP-418, 499
- Paquette, C., Pelletier, C., Fontaine, G., Michaud, G., 1986, *ApJ* **61**, 177
- Richard, O., Dziembowski, W. A., Sienkiewicz, R., Goode, P. R., 1998, *A&A* **338**, 756
- Richard, O., Vauclair, S., 1997, *A&A* **322**, 671
- Richard, O., Vauclair, S., Charbonnel, C., 1999, *In preparation*
- Richard, O., Vauclair, S., Charbonnel, C., Dziembowski, W. A., 1996, *A&A* **312**, 1000
- Rogers, F. J., Swenson, F. J., Iglesias, C. A., 1996, *ApJ* **456**, 902
- Salpeter, E. E., 1954, *Aust. J. Phys.* **7**, 373
- Schou, J., Kosovichev, A. G., Goode, P. R., Dziembowski, W. A., 1997, *Astrophys. J., Lett.* **489**, L197
- Suzuki, Y., 1998, in *Neutrino 98, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*
- Takata, M., Shibahashi, H., 1998, *ApJ* **504**, 1035
- Tripathy, S. C., Basu, S., Christensen-Dalsgaard, J., 1998, in *Sounding Solar and Stellar Interiors, Poster Volume*, Provost J., Schmider F. (eds.), IAU Symp. 181, 129
- Turck-Chièze, S., Basu, S., Berthomieu, G., Bonanno, A., Brun, A. S., Christensen-Dalsgaard, J., Gabriel, M., Morel, P., Provost, J., Turcotte, S., The Golf Team, 1998, in *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*, ESA Publications Division, SP-



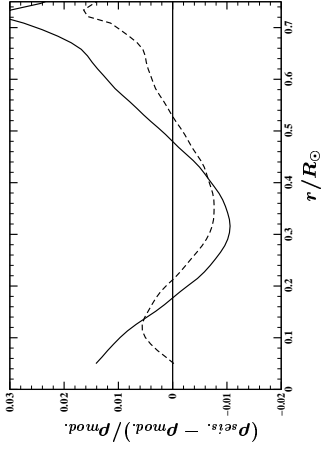
**Fig. 1.** Effect of the luminosity used for the calibration. **a** Comparison of the seismic sound speed ( $c_{seis}^2$ ) and that of the model ( $c_{mod}^2$ ). The thin full line and the thick dashed line correspond respectively to the model with the smaller ( $3.84408 \times 10^{33} \text{ ergs.s}^{-1}$ , model O2) and higher ( $3.85898 \times 10^{33} \text{ ergs.s}^{-1}$ , model O3) luminosity. **b** Comparison of the seismic density ( $\rho_{seis}$ ) and that of the model ( $\rho_{mod}$ ). The full line and the dashed line correspond respectively to the model O2 and O3. **c** Difference on the physical quantities between the model O2 and the model O3. The full line for the pressure, the dashed line for the density, the dot-dashed line for the temperature, and the dotted line for the mass under the layer.



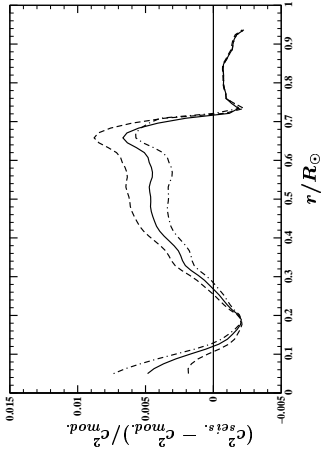
**Fig. 2.** Influence of the adopted radius on the sound speed, the full line and the dashed line correspond respectively to the models with the higher ( $6.95980 \times 10^{10} \text{ cm}$ , model O4), and the smaller ( $6.95484 \times 10^{10} \text{ cm}$ , model O5) value of the radius, **b** on the density, the full line for the model O4 and the dashed line for the model O5. **c** Same as Fig. 1c for the model O4 and the model O5.



a

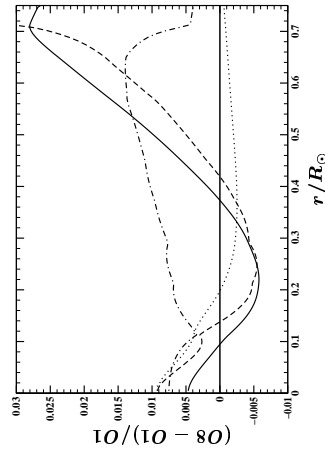


b

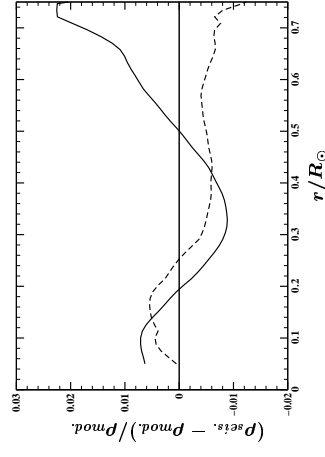


c

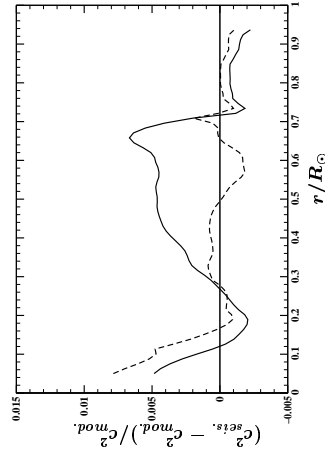
**Fig. 3.** Effect of the age: **a** on the sound speed, the dot-dashed line, the dashed line correspond respectively to the model with the higher (4.7 Gyr, model O7), the mean (4.6 Gyr, model O1), and the smaller (4.5 Gyr, model O6) value of the age, **b** on the density, **c** on the seismic density, the full line for the model O6 and the dashed line for the model O7. **c** Like Fig. 1c for the model O6 and the model O7.



a

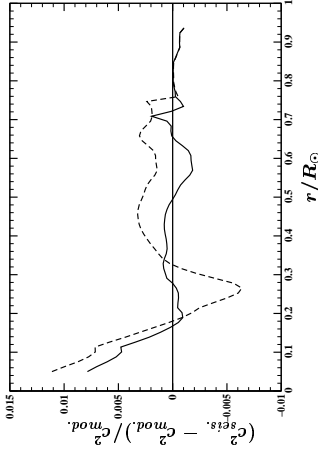
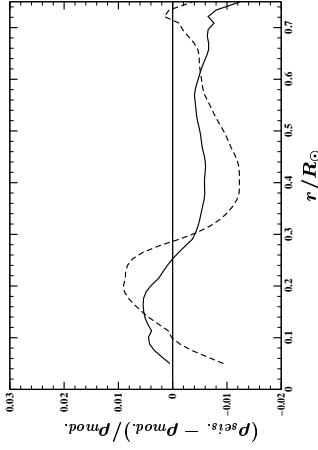
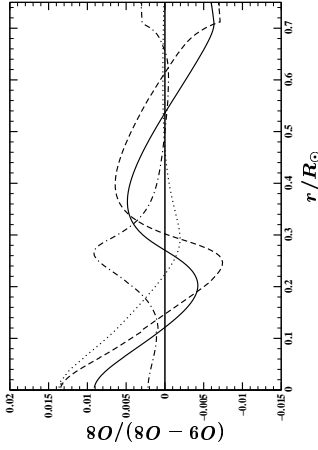


b



c

**Fig. 4.** Effect of the opacities: **a** Comparison with the seismic sound speed, the full line correspond to the model with the OPAL96 opacities (model O1), and the dashed line to the model with the OPAL92 opacities (model O8). **b** Comparison with the seismic density, the full line for model O1 and the dashed line for model O8. **c** Same as Fig. 1c for the model O1 and the model O8.

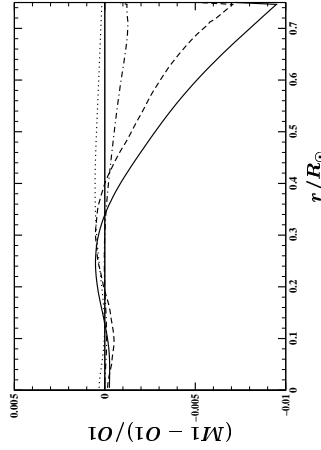
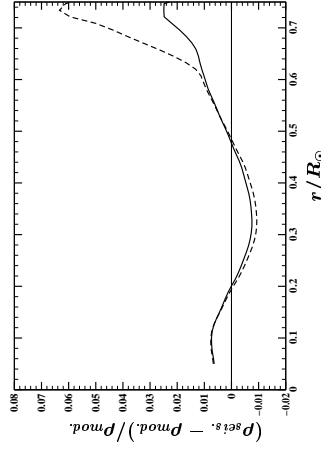
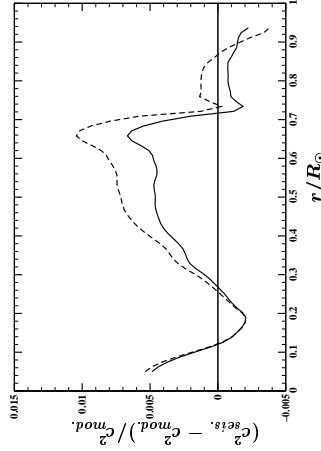


a

b

c

**Fig. 5.** Effect of the  $^3\text{He}$  in the opacity. **a** Comparison with the seismic sound speed, the full line correspond to the model with the OPAL92 opacities (model O8) and the dashed line to the model with the HE3-92 opacities (model O9). **b** Comparison with the seismic density, the full line for model O8 and the dashed line for model O9. **c** Same as Fig. 1c between the model O8 and the model O9.

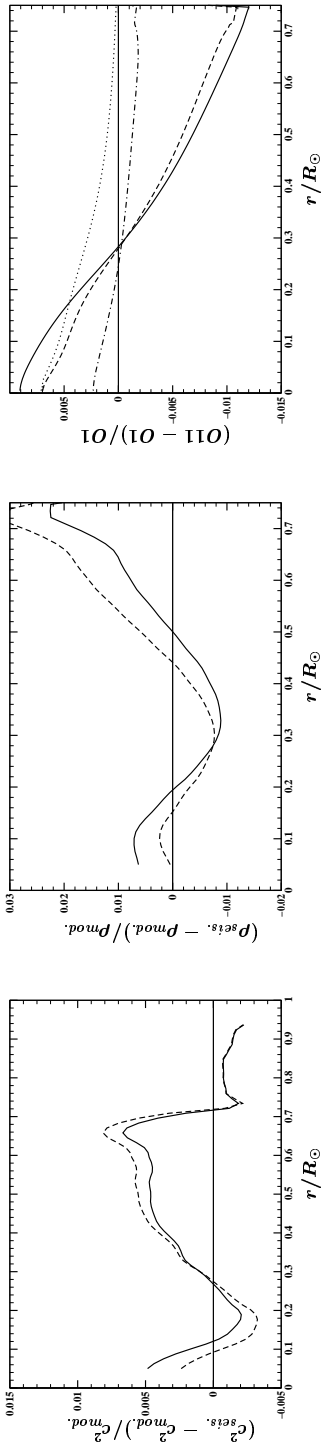


a

b

c

**Fig. 6.** Effect of the equation of state: **a** on the sound speed, the full line correspond to the model with the OPAL equation of state (model O1) and the dashed line to the model with the MHD equation of state (model M1). **b** on the density, full line for model O4 and dashed line for model M1. **c** Same as Fig. 1c between the model O1 and the model M1.

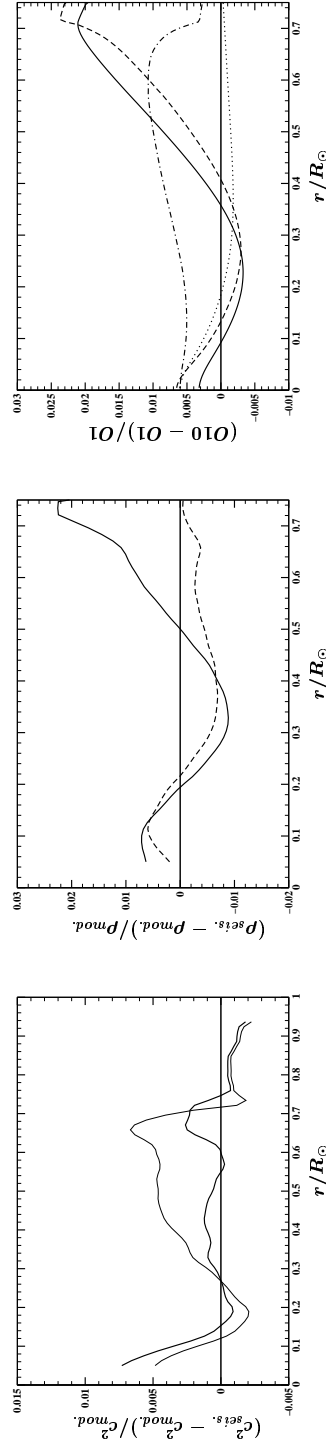


c

b

a

**Fig. 7.** Influence of the nuclear reaction rates: **a** on the sound speed, the full line correspond to the model with the Caughlan & Fowler (1988) rates (model O1) and the dashed line to the model with the Adelberger et al. (1998) rates (model O11), **b** on the density, the full line for model O1 and the dashed line for model O11. **c** Same as Fig. 1c for the model O1 and the model O11.



c

b

a

**Fig. 8.** Effect of the initial mixture. **a** Comparison with the seismic sound speed, the full line correspond to the model with the modified initial mixture MOD93 (see Sect. 3.1.2, model O10) and the dashed line to the model with the Grevesse & Noels (1993) initial mixture (model O1). **b** Comparison with the seismic density, the full line for model O1 and the dashed line for model O10. **c** Same as Fig. 1c for model O1 and the model O10.



**Table 5.** Input physics used in the solar models

Model	Initial	$L$ ( $10^{33}$ ergs.s $^{-1}$ )	$R$ ( $10^{10}$ cm)	Age (Gyr)	Opacities <sup>a</sup>	Equation <sup>b</sup> of state	Nuclear <sup>c</sup> reaction rate	Initial <sup>d</sup> mixture
O1	ZAMS	3.85153	6.95794	4.6	OPAL96	OPAL	CF88	GN93
O2	ZAMS	3.84408	6.95698	4.6	OPAL96	OPAL	CF88	GN93
O3	ZAMS	3.85898	6.95730	4.6	OPAL96	OPAL	CF88	GN93
O4	ZAMS	3.85160	6.95980	4.6	OPAL96	OPAL	CF88	GN93
O5	ZAMS	3.85154	6.95484	4.6	OPAL96	OPAL	CF88	GN93
O6	ZAMS	3.85142	6.95759	4.5	OPAL96	OPAL	CF88	GN93
O7	ZAMS	3.85131	6.95738	4.7	OPAL96	OPAL	CF88	GN93
O8	ZAMS	3.85146	6.95777	4.6	OPAL92	OPAL	CF88	G91
O9	ZAMS	3.85166	6.95757	4.6	HE3-92 <sup>e</sup>	OPAL	CF88	G91
O10	ZAMS	3.85193	6.95627	4.6	OPAL96	OPAL	CF88	MOD93
O11	ZAMS	3.85152	6.95769	4.6	OPAL96	OPAL	Ad98	GN93
M1	ZAMS	3.85138	6.95847	4.6	OPAL96	MHD	CF88	GN93

(a): see Sect. 3.1.2 — (b): see Sect. 3.1.1 — (c): see Sect. 3.1.3 — (d): see Sects. 3.1.2 and 3.2.3 — (e): see Sect. 3.2.2

**Table 6.** Properties of the solar models

Model	$\alpha$	$Y_0$	$Z_0$ Initial	$(\frac{Z}{X})_0$	$Y_s$	$Z_s$ Final	$(\frac{Z}{X})_s$	$r_{bcz}$ ( $R_\odot$ )	$T_{bcz}$ ( $10^6$ K)
O1	1.7710	0.2649	0.0176	0.0245	0.2367	0.0167	0.0224	0.7150	2.1589
O2	1.7679	0.2647	0.0176	0.0245	0.2366	0.0167	0.0224	0.7150	2.1588
O3	1.7744	0.2651	0.0176	0.0245	0.2369	0.0167	0.0223	0.7150	2.1593
O4	1.7681	0.2649	0.0176	0.0245	0.2367	0.0167	0.0223	0.7151	2.1574
O5	1.7736	0.2649	0.0176	0.0245	0.2367	0.0167	0.0224	0.7149	2.1608
O6	1.7602	0.2659	0.0176	0.0245	0.2379	0.0167	0.0224	0.7158	2.1501
O7	1.7768	0.2641	0.0176	0.0245	0.2357	0.0167	0.0223	0.7127	2.1746
O8	1.8423	0.2726	0.0195	0.0275	0.2445	0.0185	0.0252	0.7084	2.2392
O9	1.8194	0.2766	0.0194	0.0275	0.2476	0.0184	0.0251	0.7104	2.2239
O10	1.7949	0.2714	0.0189	0.0267	0.2429	0.0181	0.0244	0.7107	2.2115
O11	1.7645	0.2645	0.0176	0.0245	0.2361	0.0167	0.0223	0.7154	2.1515
M1	1.7613	0.2650	0.0176	0.0245	0.2367	0.0167	0.0223	0.7150	2.1560

Model	$T_c$ ( $10^8$ K)	$\rho_c$ ( $g.cm^{-3}$ )	$P_c$ ( $10^{17}$ dyn.cm $^{-2}$ )	$X_c$	$Y_c$	$(\Phi\sigma)_{3\tau_{Cl}}$ (SNU)	$(\Phi\sigma)_{7\tau_{Ga}}$ (SNU)	$\Phi(^8B)$ ( $10^{10}$ cm $^{-2}.s^{-1}$ )
O1	1.5493	151.78	2.3112	0.3447	0.6367	6.94	124.98	0.00051
O2	1.5484	151.53	2.3084	0.3455	0.6359	6.86	124.41	0.00050
O3	1.5504	152.06	2.3156	0.3438	0.6376	7.04	125.61	0.00052
O4	1.5494	151.79	2.3120	0.3447	0.6367	6.94	124.99	0.00051
O5	1.5493	151.77	2.3118	0.3447	0.6367	6.94	124.97	0.00051
O6	1.5468	150.07	2.2956	0.3504	0.6311	6.76	124.02	0.00049
O7	1.5514	153.21	2.3254	0.3400	0.6401	7.09	125.76	0.00052
O8	1.5610	153.17	2.3226	0.3338	0.6456	7.88	129.81	0.00058
O9	1.5644	155.24	2.3438	0.3277	0.6518	8.20	131.42	0.00061
O10	1.5586	152.77	2.3193	0.3362	0.6438	7.67	128.40	0.00057
O11	1.5529	152.84	2.4055	0.3444	0.6370	7.22	126.20	0.00053
M1	1.5494	151.76	2.3112	0.3450	0.6364	6.94	124.94	0.00051

# Chapitre 4

## Processus de transport et physique non « standard »

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Processus de mélange au cœur et flux de neutrino, et article publié dans A&amp;A 322 . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>4.2</b>	<b>Processus de transport dans les régions supérieures de la zone radiative et diminution du lithium . . . . .</b>	<b>68</b>
4.2.1	Turbulence induite par la rotation . . . . .	68
4.2.2	Circulation méridienne . . . . .	69
4.2.3	Évaluation du coefficient de diffusion effectif . . . . .	70
4.2.4	Gradient de poids moléculaire, article publié dans A&A 312 et contribution orale présentée au workshop GONG 98 / SOHO 6 . . . . .	71
4.2.5	Convection pénétrative et tachocline . . . . .	91
<b>4.3</b>	<b>Perte de masse . . . . .</b>	<b>92</b>
<b>4.4</b>	<b>Inhomogénéités de température à la base de la zone convective . . . . .</b>	<b>93</b>

---

Ce chapitre présente différents types de mélange que nous avons utilisés dans nos modèles ainsi que différents processus physiques non « standard ». Dans la première partie je présente un mélange localisé au cœur du Soleil pour essayer de reproduire les flux de neutrinos observé. La deuxième partie présente le mélange à la base de la zone convective que nous avons utilisé pour reproduire la diminution du lithium. Dans la troisième partie nous abordons la perte de masse. Et dans la dernière section nous présentons l'étude que nous avons menée sur les fluctuations de température à la base de la zone convective.

## 4.1 Processus de mélange au cœur et flux de neutrino, et article publié dans A&A 322

Comme nous l’avons vu dans la partie concernant la diffusion (équation 3.7) le coefficient de diffusion effectif  $D_{eff}$  permet de prendre en compte les mouvements macroscopiques.

Afin d’essayer de reproduire les flux de neutrinos observés nous avons ajouté un mélange localisé au bord du cœur de combustion nucléaire du Soleil (Richard & Vauclair 1998). Ce mélange pourrait être engendré par les ondes internes stochastiques (Morel & Schatzman 1996). Pour ce faire nous avons utilisé une paramétrisation Gaussienne du coefficient de diffusion effectif :

$$D_{eff} = D_0 \exp \left[ - \left( \frac{r - r_c}{2\Delta} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

où  $D_0$  est le maximum,  $r_c$  le rayon au maximum et  $\Delta$  la largeur a mi-hauteur.

Un tel mélange permet de réduire les flux de neutrinos car il amène de l’hélium 3 vers le centre du soleil ce qui augmente le taux de la réaction  ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$  alors qu’il diminue la réaction  ${}^3\text{He}({}^4\text{He}, \alpha){}^7\text{Be}$ . L’énergie produite par les modèles est donc modifié ce qui conduit après la calibration à un effet visible dans tout le modèle quand le mélange est important (voir l’article dans cette section).

D’autres modèles incluant un mélange localisé au cœur ont été présentés (Bahcall et al. 1997; Brun et al. 1998a; Degl’Innocenti & Ricci 1998) et conduisent aux mêmes résultats.

Il apparaît donc très difficile, grâce aux contraintes apportées par l’héliosismologie, de trouver une solution purement astrophysique au problème des neutrinos solaire. Il faut maintenant se tourner vers la physique des particules qui prévoit une oscillation des neutrinos. Plusieurs solutions sont actuellement possibles et ce sont les modèles solaires qui permettront de départager ces solutions. C’est pourquoi il est encore important d’étudier les effets de processus physiques de faible importance, dans le cœur du Soleil, sur les flux de neutrinos.

**Article publié dans A&A 322 : « Local mixing near the solar core, neutrino fluxes and helioseismology »**

**Traduction du résumé :**

Nous avons calculé des modèles solaires similaires à ceux publiés dans Richard et al. (1996), dans lesquels nous avons ajouté un mélange localisé au cœur du Soleil afin de diminuer la production de neutrino. Les résultats montrent que les flux de neutrinos diminuent comme on s’y attendait (bien qu’ils ne reproduisent pas les valeurs observées), mais les modèles obtenus sont incompatibles avec les inversions des modes héliosismiques. Nous avons plus particulièrement testé la paramétrisation du mélange proposé par Morel & Schatzman (1996). Les modèles solaires obtenus sont très loin du modèle sismique et donc irréalistes.

Research Note

Local mixing near the solar core, neutrino fluxes and helioseismology

Olivier Richard and Sylvie Vauclair

Observatoire Midi-Pyrénées 14, avenue Edouard Belin, F-31400 Toulouse, France

Received 10 October 1996 / Accepted 18 November 1996

**Abstract.** We have computed solar models similar to those published in Richard, Vauclair, Charbonnel, Dziembowski (1996), in which we have added local mixing near the solar core in order to decrease the neutrino production. The results show that the neutrino fluxes are reduced as expected (although not enough to account for the observed values), but the obtained models are incompatible with the inversion of the helioseismic modes. We have specially tested the parametrized mixing proposed by Morel and Schatzman (1996). The resulting solar models are far from the seismic model and thus unrealistic.

**Key words:** diffusion – Sun: abundances; interior; rotation; oscillations

We have computed new solar models using the same stellar evolution code as described in Charbonnel, Vauclair and Zahn (1992). This code, originating from Geneva, now includes the computation of element segregation for helium and 12 heavier isotopes. It may also include any type of mixing of the stellar gas, provided this mixing may be parametrised with an effective diffusion coefficient as a function of radius.

In the present computations, we have introduced in the solar model 4 of Richard et al (1996) (hereafter model T1) a parametrized mixing region located at the edge of the nuclear burning core. Such a mixing, which could be induced by Stochastic Internal Waves (Morel and Schatzman 1996), remains as an a priori possibility to decrease the solar neutrino flux. The basic reason is that it brings <sup>3</sup>He down towards the solar center (Fig. 1) and increases the rate of the <sup>3</sup>He (<sup>3</sup>He, 2p) <sup>4</sup>He nuclear reaction yield, while the <sup>3</sup>He (<sup>4</sup>He, α) <sup>7</sup>Be reaction is reduced.

Send offprint requests to: Sylvie Vauclair

**Table 1.** Main physical parameters of the three models, at the base of the convective zone and at the center.

model	$r_{cz}/R_{\odot}$	$T_{cz}$ (10 <sup>6</sup> K)	$\rho_{cz}$ (g.cm <sup>-3</sup> )	$Y_c$	$X_c$	$T_c$ (10 <sup>6</sup> K)	$\rho_c$ (g.cm <sup>-3</sup> )
T1	0.717	2.162	0.185	0.6431	0.3368	15.63	154.17
T2	0.724	2.060	0.156	0.5687	0.4113	14.96	127.05
T3	0.717	2.151	0.181	0.6337	0.3462	15.45	148.93

**Table 2.** Gaussian parameters and neutrino fluxes for the three models.

model	$r_c/R_{\odot}$	$\Delta/R_{\odot}$	$D_0$ (cm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	$\phi(^8\text{B})$ (10 <sup>6</sup> cm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	$(\phi\sigma)_{\text{Cl}}$ (SNU <sub>S</sub> )	$(\phi\sigma)_{\text{Ga}}$ (SNU <sub>S</sub> )
T1	-	-	-	6.06	8.14	130.84
T2	.20	.040	1000	2.60	3.90	108.75
T3	.15	.025	100	3.85	5.45	115.80

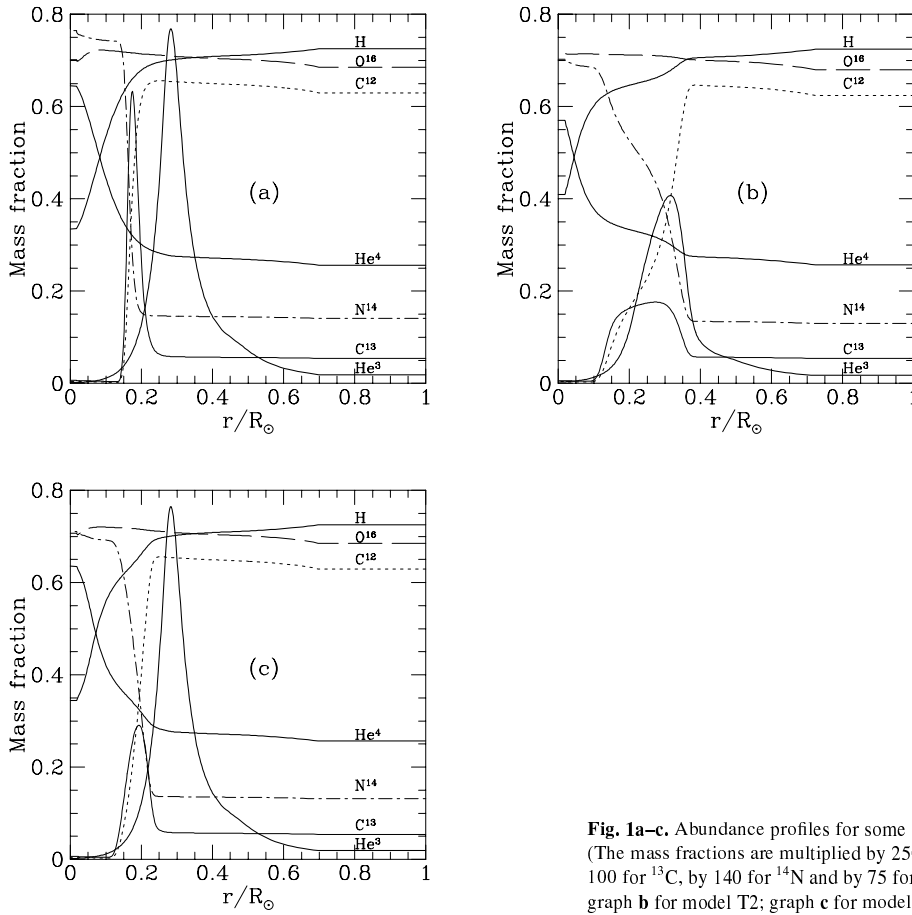
**Table 3.** Detected values of the solar neutrino fluxes (from Stolarczyk 1997).

	$\phi(^8\text{B}) = 2.80 \pm 0.19 \pm 0.33 \times 10^6 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$
	$(\phi\sigma)_{\text{Cl}} = 2.54 \pm 0.14 \pm 0.14 \text{ SNU}_S$
Sage:	$(\phi\sigma)_{\text{Ga}} = 72_{-10}^{+12+5} \text{ SNU}_S$
Galex:	$(\phi\sigma)_{\text{Ga}} = 69.7 \pm 6.7_{-4.5}^{+3.9} \text{ SNU}_S$

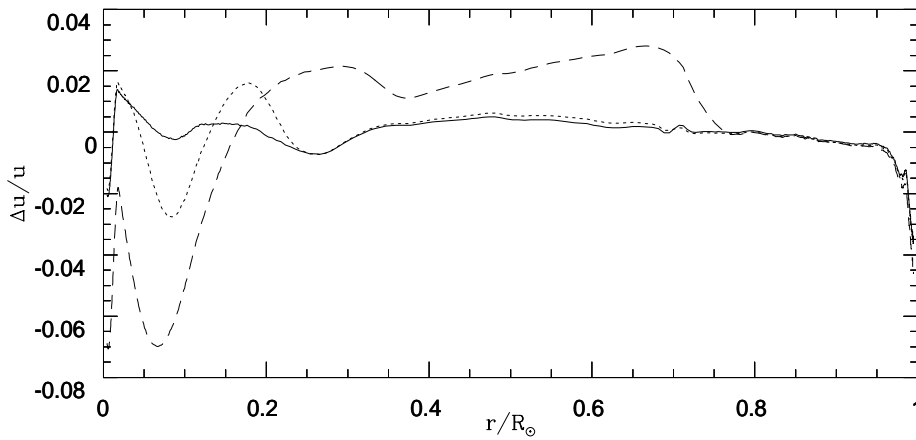
We have introduced this extra-mixing in the form of a gaussian, of the type:

$$D = D_0 \exp \left[ - \left( \frac{r - r_c}{2\Delta} \right)^2 \right]$$

The comparisons of the  $u = P/\rho$  function in these models and in the seismic Sun as a function of radius are unsatisfactory. The very good agreement obtained by Richard et al (1996) for the models including microscopic diffusion and a mild mixing below the convection zone is destroyed in most models which include the core mixing. It is possible to keep the good agree-



**Fig. 1a-c.** Abundance profiles for some elements in the three models (The mass fractions are multiplied by 250 for  $^3He$ , by 200 for  $^{12}C$ , by 100 for  $^{13}C$ , by 140 for  $^{14}N$  and by 75 for  $^{16}O$ ); graph **a** for model T1; graph **b** for model T2; graph **c** for model T3.



**Fig. 2.** Difference between the  $(u = \frac{P}{\rho})$  deduced from helioseismology and the computed one. The ordinates represents:  $\frac{\Delta u}{u} = \frac{u(\text{seismic}) - u(\text{model})}{u(\text{seismic})}$ . Solid line: model T1; dashed line: model T2; dotted line: model T3. These two last models, which include local mixing near the solar core, are not compatible with the helioseismic results.

ment in the outer parts of the Sun while perturbing only the central regions: for this a “cut-off” of the mixing effect must be introduced at a fractional radius of  $r/R_{\odot} = .4$ . However, even in this case, the  $u$  values in the core are incompatible with the seismic Sun (Fig. 2).

Here we show the results obtained for two different models, model T2 (similar to model 20431 in Morel and Schatzman 1996) with the following values for the gaussian parameters:

$$r_c/R_{\odot} = .2 \quad D_0 = 1000 \text{ cm}^2\text{s}^{-1} \quad \Delta/R_{\odot} = .04$$

and model T3 with the following values for the gaussian parameters:

$$r_c/R_{\odot} = .15 \quad D_0 = 100 \text{ cm}^2\text{s}^{-1} \quad \Delta/R_{\odot} = .025$$

with a cut-off of the gaussian function at  $r/R_{\odot} = .4$ . The main physical parameters of these models are given in Table 1.

In all cases we obtain a decrease of the neutrino fluxes, although they remain too large to be compatible with the detected values (Tables 2 and 3). The comparison with the helioseismological results (Richard et al. 1996) show however that these models are not realistic (Fig. 2).

In conclusion, although some local mixing inside the Sun may help reducing the neutrino fluxes, it cannot be reconciled with helioseismology. The helioseismic data prove to be a very powerful tool in constraining the remaining parameters of the solar structure. It will improve even more in the central parts when observations of gravity waves will be possible.

## References

- Charbonnel, C., Vauclair, S., Zahn, J.P., 1992, A&A 255, 191  
 Morel, P., Schatzman, E., 1996, A&A 310, 982  
 Richard, O., Vauclair, S., Charbonnel, C., Dziembowski, W.A., 1996, A&A 312, 1000  
 Stolarczyk, T., 1997, proceedings of the VIIIth Rencontres de Blois : “Neutrinos, Dark Matter and the Universe”, éd. Frontières, in press

## 4.2 Processus de transport dans les régions supérieures de la zone radiative et diminution du lithium

Comme nous l’avons vu dans la section sur les contraintes chimiques (2.2) il est nécessaire d’ajouter un processus de transport pour pouvoir reproduire la diminution du lithium.

### 4.2.1 Turbulence induite par la rotation

L’équation régissant le transport des espèces chimiques est déduite de l’équation de conservation de la masse, en présence d’un flux de matière à grande échelle et de diffusion, et est donnée par :

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + \nabla (\rho c \mathbf{u}) = \nabla (\rho D \nabla c)$$

où  $\mathbf{u}$  est la vitesse de l’écoulement à grande échelle et  $D$  la diffusivité, incluant tous les processus de diffusion. On supposera  $\rho$  et  $D$  uniquement fonction du rayon, et on ne s’intéressera qu’au cas d’une forte turbulence horizontale dominante dans  $D$ . Ce qui paraît raisonnable étant donné le faible écart à la symétrie sphérique et du fait que la turbulence verticale est stabilisée par le gradient de concentration.

Dans ce cas la vitesse s’exprime en fonctions sphériques :

$$u_r(r, \theta) = \sum_n U_n(r) P_n(\cos \theta)$$

où  $P_n(\cos \theta)$  est le polynôme de Legendre de degré  $n$ , et où  $\theta$  et  $r$  sont respectivement la latitude et la distance au centre du point auquel on calcule la vitesse. La dépendance en rayon de la vitesse entraîne un cisaillement vertical, alors que la dépendance en latitude entraîne un cisaillement horizontal.

En supposant que l’on a :

- une symétrie axiale pour les champs à grande échelle ;
- le gradient de concentration horizontal négligeable devant le gradient vertical ;
- la diffusivité horizontale plus importante que la diffusivité verticale ;

Chaboyer & Zahn (1992) ont montré que le transport de matière se comporte comme un processus de diffusion régi par l’équation :

$$\rho \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \rho (D_{eff} + D_v) \frac{\partial c}{\partial r} \right) \quad (4.2)$$

avec  $c$  la concentration moyennée sur une surface horizontale,  $D_v$  le coefficient de diffusivité verticale et le coefficient de diffusion effective qui s’écrit :

$$D_{eff} = \frac{r^2}{D_h} \sum_n \frac{U_n^2(r)}{n(n+1)(2n+1)} \quad (4.3)$$

$D_h$  étant le coefficient de diffusivité horizontale. En particulier dans le cas de la circulation d’Eddington-Sweet (n=2 seulement) :

$$D_{eff} = \frac{|rU_2(r)|^2}{30D_h} \quad (4.4)$$

## 4.2.2 Circulation méridienne

La circulation méridienne est due à la rotation et participe au transport des espèces chimiques dans la zone radiative. Dans toute la suite nous nous appuyerons sur la théorie développée par Zahn (1992), qui montre que la circulation méridienne et la turbulence qui lui est associée peuvent être assimilées à un processus de diffusion.

La rotation induit un aplatissement des équipotentielles dû à la force centrifuge. Cette rupture de la symétrie sphérique cause un déséquilibre thermique le long des équipotentielles et entraîne une circulation de matière à grande échelle entre les pôles et l’équateur, que l’on appelle circulation méridienne. L’étude de cette circulation repose sur le théorème de Von Zeipel (1924).

Pour déterminer la vitesse de circulation méridienne, on suppose que la vitesse de rotation est constante sur chaque surface horizontale, mais que les autres grandeurs physiques peuvent varier. On prendra une isobare comme surface de référence. On peut alors écrire chaque grandeur physique sous la forme :

$$\rho(P, \theta) = \bar{\rho}(P) + \tilde{\rho}(P)f(\theta) \quad (4.5)$$

On peut montrer que toutes les grandeurs sont caractérisées par une même fonction  $f(\theta) = P_2(\cos \theta)$ , le polynôme de Legendre de degré 2.

En écrivant la gravité sous la forme :

$$g(P, \theta) = \bar{g}(P) + \tilde{g}(P)f(\theta) \quad (4.6)$$

Zahn (1992) a montré que l’on avait au premier ordre :

$$\frac{\tilde{g}}{\bar{g}} \approx \frac{4}{3} \left( \frac{\Omega^2 r^3}{GM} \right) \quad (4.7)$$

Pour la divergence du flux radiatif, en utilisant l’équation d’état des gaz parfaits et en supposant que le transport turbulent de la chaleur est négligeable, on obtient l’équation suivante :

$$\nabla(\chi \nabla T) + \rho \varepsilon = \frac{\bar{\rho} L}{M} (E_\Omega + E_\mu) P_2(\cos \theta) \quad (4.8)$$

avec

- un terme dû à la force centrifuge :  $E_\Omega$  ;
- un terme dû aux inhomogénéités :  $E_\mu$  ;
- $\chi$  la conductivité thermique ;
- $\varepsilon$  le taux de production d’énergie.



L’amplitude de vitesse de la circulation méridienne devient alors :

$$U(r) = \frac{L}{Mg} \left( \frac{P}{C_p \rho T} \right) \frac{1}{\nabla_{ad} - \nabla} (E_\Omega + E_\mu) \quad (4.9)$$

dans le cas d’une rotation uniforme on retrouve l’expression de Sweet (1950) :

$$U(r) = 2 \frac{L}{Mg} \left( \frac{P}{C_p \rho T} \right) \frac{1}{\nabla_{ad} - \nabla} \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} - \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho} \right] \frac{\tilde{g}}{g} \quad (4.10)$$

avec  $\varepsilon_m(r) = \frac{L(r)}{M(r)}$ .

### 4.2.3 Évaluation du coefficient de diffusion effectif

Pour les étoiles de la séquence principale, dont l’évolution est lente, un régime asymptotique peut être atteint dans certaines parties de l’étoile, en supposant qu’elle est soumise à un vent modéré. Zahn suppose de plus que le flux transporté par viscosité turbulente est négligeable devant le flux advecté, ce qui lui permet d’obtenir, pour la région en régime asymptotique, la relation suivante :

$$-\frac{1}{5} \rho r^4 \Omega U \approx -\frac{3}{8\pi} \frac{dJ(R)}{dt} \quad (4.11)$$

où  $-\frac{dJ(R)}{dt}$  est le taux de perte de moment angulaire.

On peut alors exprimer la vitesse de circulation méridienne en fonction de la perte de moment angulaire :

$$U(r) = -\frac{15}{8\pi} \frac{1}{\rho r^4 \Omega} \frac{dJ(R)}{dt} \quad (4.12)$$

Avec l’équation 4.4 on obtient, après avoir estimé  $D_h$ , une expression du coefficient de diffusivité effective dépendant de la perte de moment angulaire :

$$D_{eff} = \frac{3C_h}{80\pi} \frac{1}{\alpha \rho r^3 \Omega} \left| \frac{dJ(R)}{dt} \right| \quad (4.13)$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{d \ln r^2 \Omega}{d \ln r}$$

Dans le cas du Soleil on sait que la rotation différentielle est faible et on pourra prendre en première approximation  $\alpha = 1$ . La figure 4.1 montre l’évolution du profil du coefficient de diffusion effectif dans le modèle 5 de Richard et al. (1996).

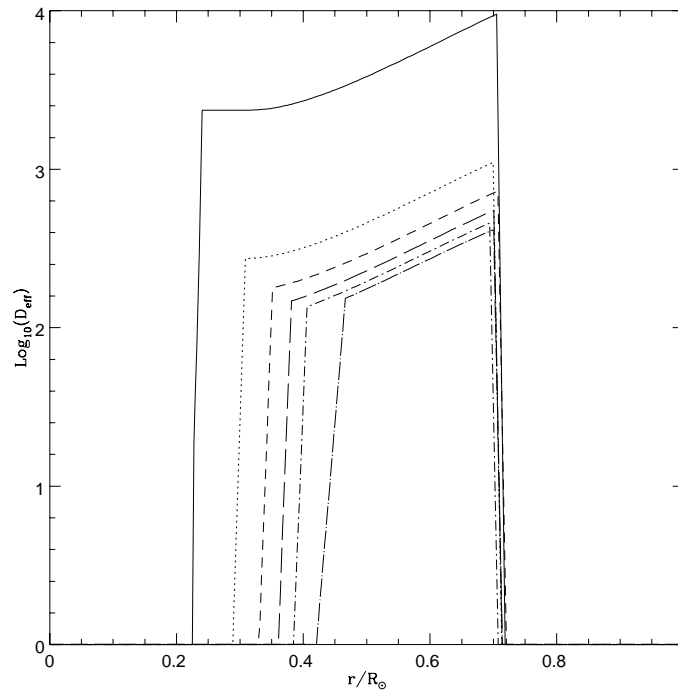


FIG. 4.1 – Profil du coefficient de diffusion effectif (en  $\text{cm}^2.\text{s}^{-1}$ ) du modèle 5 de Richard et al. (1996) pour différents âges : à  $220 \times 10^6$  ans (trait plein), à  $1220 \times 10^6$  ans (pointiller), à  $2020 \times 10^6$  ans (tiret court), à  $2820 \times 10^6$  ans (tiret long), à  $3620 \times 10^6$  ans (point-tiret court), à  $4600 \times 10^6$  ans (point-tiret long).

#### 4.2.4 Gradient de poids moléculaire, article publié dans A&A 312 et contribution orale présentée au workshop GONG 98 / SOHO 6

L'influence du gradient de poids moléculaire sur la circulation méridienne a été étudiée par plusieurs auteurs (Mestel 1965; Huppert & Spiegel 1977). Lorsque le gradient de poids moléculaire augmente rapidement quand le rayon diminue les processus de mélanges peuvent être stoppés. C'est le cas dans la zone de production d'énergie du Soleil où le gradient de poids moléculaire devient important. Dans nos modèles le gradient de poids moléculaire permettant de stopper les processus de mélange est un paramètre ajustable.

Le coefficient  $C_h$  et le gradient de poids moléculaire critique  $\nabla \ln \mu_c$  permettant de stopper le mélange sont choisis de telle façon que le modèle reproduise la diminution du lithium ainsi que son évolution temporelle obtenue à partir des observations des amas (section 2.2). De plus la variation du rapport  ${}^3\text{He}/{}^4\text{He}$  et l'absence de destruction du beryllium (section 2.2) apportent des contraintes supplémentaires dans la détermination de  $C_h$  et de  $\nabla \ln \mu_c$  (figure 4.2).

Dans les modèles présentés dans la contribution orale Vauclair & Richard (1998)

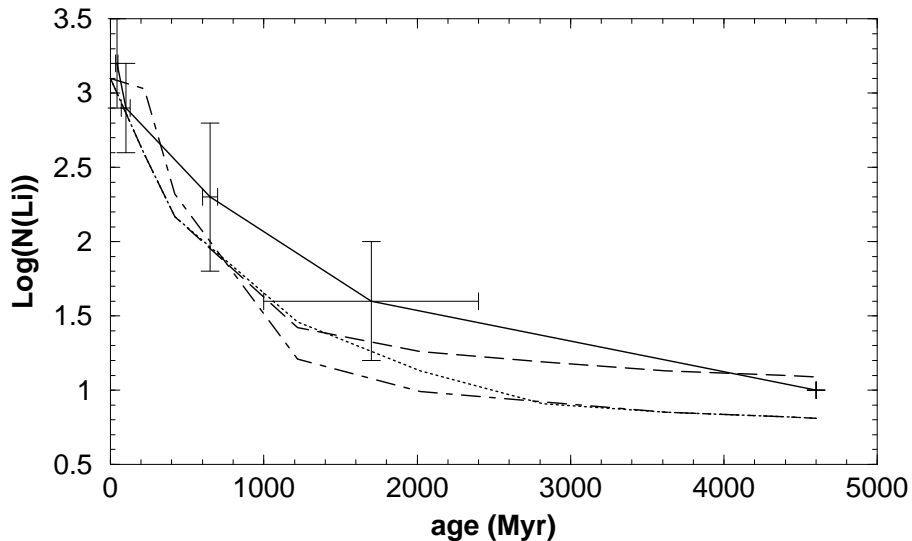


FIG. 4.2 – Variation temporelle du lithium observée dans les amas (trait plein) comparée à celle obtenue pour un modèle avec :  $|\nabla \ln \mu_c| = 1 \times 10^{-13}$  et  $C_h = 0.025$  (tiret),  $|\nabla \ln \mu_c| = 2 \times 10^{-13}$  et  $C_h = 0.025$  (pointiller),  $|\nabla \ln \mu_c| = 1 \times 10^{-13}$  et  $C_h = 0.05$  (point-tiret).

le beryllium est détruit d’un facteur allant de 1.3 à 1.6 pour  $\nabla \ln \mu_c$  variant de  $1 \times 10^{-13}$  à  $3 \times 10^{-13}$ , proche de la valeur obtenue par Balachandran & Bell (1997).

**Article publié dans A&A 312: « New solar models including helioseismological constraints and light-element depletion »**

Dans cette partie je présente une traduction du résumé de l’article que nous avons publié en 1996, et qui présentait nos meilleurs modèles. Nous y présentions aussi nos modèles avec une paramétrisation du mélange induit par la rotation et de la coupure due au gradient de poids moléculaire. Depuis la physique « standard » a été améliorée avec l’équation d’état OPAL et les opacités OPAL96, ce qui nous permet d’obtenir de meilleurs modèles (section 3.8). La paramétrisation du mélange présentée dans cet article reste valable pour ces nouveaux modèles.

**Traduction du résumé :**

Nous avons calculé de nouveaux modèles solaires en utilisant le même code d’évolution stellaire que celui décrit par Charbonnel et al. (1992). Ce code, originellement de Genève, inclus maintenant le calcul de la diffusion de l’hélium et de 12 isotopes métalliques. Il peut aussi prendre en compte tous les types de mélange, du moment que ce mélange est paramétrisé par un coefficient de diffusion effectif fonction du rayon. Ici nous introduisons le mélange induit par la rotation décrit par Zahn (1992). Nous présentons 5 modèles solaire : 1) le modèle standard, calculé avec les abondances de Grevesse (1991); 2) un modèle avec uniquement la diffusion mi-

croscopique des éléments (sans mélange hors de la zone convective) avec Grevesse (1991) comme composition chimique initiale; 3) le même modèle que dans (2) mais avec une composition chimique initiale modifiée pour obtenir comme composition chimique finale celle de Grevesse (1991); 4) un modèle avec à la fois la diffusion microscopique et le mélange induit par la rotation, conduisant à une diminution du lithium et du beryllium compatible avec les observations, avec Grevesse (1991) comme composition chimique initiale; 5) le même modèle que pour le (4) mais avec une composition chimique initiale modifiée pour obtenir comme composition chimique finale celle de Grevesse (1991). Le modèle 5 représente notre meilleur modèle actuel consistant avec les observations. La fonction  $u = p/\rho$  calculée comme une fonction du rayon dans ces modèles solaires est comparée à celle obtenue par l’héliosismologie (Dziembowski et al. 1994). L’amélioration de la physique des modèles conduit à un meilleur accord avec l’héliosismologie. Dans notre meilleur modèle (5), qui prends en compte la diffusion et le mélange, la différence relative de la fonction  $u$  entre le modèle et l’héliosismologie est inférieure à 0.5% à tous les rayons excepté au centre et à la surface. En même temps le lithium est diminué d’un facteur 155 et le beryllium d’un facteur 2.9, ce qui est consistant avec les observations. La base de la zone convective arrive à un rayon réduit de 0.716, consistant avec l’héliosismologie. Les flux de neutrinos ne sont réduits dans aucun des modèles. Les modèles prenant en compte la diffusion microscopique des éléments donnent une abondance actuelle en hélium,  $Y_{surf}$ , entre 0.248 et 0.258, en accord avec les valeurs obtenues par l’héliosismologie.

A&A manuscript no.  
(will be inserted by hand later)

Your thesaurus codes are:  
02.04.2; 06.01.1; 06.05.1; 06.09.1; 06.18.2

ASTRONOMY  
AND  
ASTROPHYSICS

## New Solar Models Including Helioseismological Constraints and Light-Element Depletion

O. Richard<sup>1</sup>, S. Vauclair<sup>1</sup>, C. Charbonnel<sup>1</sup>, and W.A. Dziembowski<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Observatoire Midi-Pyrénées 14, avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France

<sup>2</sup> Copernicus Astronomical Center, Warsaw, Poland

Received 20 December 1995 / Accepted 27 February 1996

**Abstract.** We have computed new solar models using the same stellar evolution code as described in Charbonnel, Vauclair and Zahn (1992). This code, originating from Geneva, now includes the computation of element segregation for helium and 12 heavier isotopes. It may also include any type of mixing of the stellar gas, provided this mixing can be parametrized with an effective diffusion coefficient as a function of radius. Here we introduced rotation-induced mixing as prescribed by Zahn (1992). We present five solar models: 1) the standard model, computed with heavy element abundances as given by Grevesse (1991); 2) a model including pure element segregation (no mixing outside the convective zone) with Grevesse (1991) as initial abundances; 3) same model as (2), but iterated so that the final abundances are those of Grevesse (1991); 4) a model with both element segregation and rotation-induced mixing, leading to lithium and beryllium depletion consistent with the observations, with Grevesse (1991) as initial abundances; 5) same model as (4) but iterated to obtain Grevesse (1991) as final abundances. This model (5) now represents our best new solar model consistent with the observations.

The  $u = \frac{P}{\rho}$  function computed as a function of radius in these new solar models are compared to the helioseismological results obtained for the same function by Dziembowski et al (1994). Improving the physics of the models leads to a better consistency with helioseismology. In our best model (5), which includes both segregation and mixing, the relative difference in the  $u$  function between the model and the helioseismological results is smaller than 0.5 per cent at all radii except at the center and the surface. Meanwhile lithium is depleted by a factor 155 and beryllium by a factor 2.9, which is consistent with the observations. The bottom of the convective zone lies at a fractional radius of 0.716, consistent with helioseismology. The neutrino fluxes are not decreased in any of these models.

The models including the computations of element segregation lead to a present surface helium abundance of:

$Y_{surf}$  between 0.248 and 0.258, which is in satisfactory agreement with the value derived from helioseismology.

**Key words:** Physical data and processes : diffusion – Sun : abundances - evolution - interior - rotation

### 1. Introduction

The Sun is by far the most well known of all the stars. Its mass, radius, luminosity and age have been determined with a high degree of precision (Table 1). The mass is obtained from the motion of planets, the radius from eclipses (the value given in table 1 is reduced to an optical depth  $\tau=2/3$ ), the luminosity from measurements of the solar constant above the earth's atmosphere. Some discussion remains about the solar age: it is generally taken as 4.6 billion years although Guenther (1989) and Demarque and Guenther (1991) suggest a smaller age consistent with the oldest meteorites. The photospheric solar element abun-

**Table 1.** Solar parameters

mass	$(1.9891 \pm 0.0004) \times 10^{33}$ g
radius	$(6.959 \pm 0.001) \times 10^{10}$ cm
luminosity	$(3.851 \pm 0.005) \times 10^{33}$ ergs.s <sup>-1</sup>
age	$4.6 \pm 0.15$ Gyr
mass loss	$2 \times 10^{-14}$ M <sub>⊙</sub> .yr <sup>-1</sup>

dances are now precisely known, after the studies by Anders and Grevesse (1989) modified by Grevesse (1991). See also Grevesse and Anders (1991). Lithium and beryllium are both depleted in the Sun with ratios :

$$Li/Li_o = 1/140 \quad ; \quad Be/Be_o = 1/2$$

with an relative uncertainty of 30% in both cases. Any consistent solar model must account for these depletion factors.

The study of the internal structure of the Sun entered a new age with the birth of helioseismology. Millions of solar

Send offprint requests to: S. Vauclair

p-modes have been detected (including the  $(2l + 1)$  multiplets). An inversion of the measured frequencies yields accurate and detailed information about such structural functions as pressure,  $p(r)$ , and density,  $\rho(r)$ , in the Sun's interior. A particularly high precision is achieved in the determination of  $u = \frac{z}{\rho}$  throughout the Sun, and in the localization of the bottom of the convective envelope. No assumption regarding the transport of energy and chemical elements is introduced at this stage of seismic sounding. The only essential assumption is that of mechanical equilibrium, which is partially testable by means of helioseismology.

Christensen-Dalsgaard et al. (1993) have shown that gravitational settling and element mixing processes significantly affect the calculated speed of sound near the bottom of the convective envelope. These processes lead to a lower surface helium abundance - a quantity which may also be directly inferred from helioseismic data if the equation of state is specified. The results of many independent inversions clearly demonstrate that helium settling must take place in the Sun. A question we ask in this paper is whether helioseismology provides useful constraints on the mixing processes.

An important result of helioseismology is the precise determination of the bottom of the solar convective zone:  $\frac{r_{cz}}{R_{\odot}} = 0.713 \pm 0.003$  (Christensen-Dalsgaard et al. 1993). This value corresponds to that obtained from the Schwarzschild criterium, leading to a strong constraint on overshooting (section 3). In the following we show that, contrary to a common idea generally spread among solar physicists, this constraint on overshooting is not a problem for the explanation of the lithium depletion in the Sun. In any case, explaining the lithium depletion in the Sun by overshooting would not be consistent with the lithium observations in other stars (e.g. galactic clusters).

Charbonnel, Vauclair and Zahn (1992) (CVZ) and Charbonnel et al. (1994) showed that the lithium deficiency in solar type stars can be accounted for by rotation-induced mixing. We will show here that such a mixing can also account for Li and Be depletion in the Sun, without destroying the consistency with helioseismology.

The recipe to construct solar models is well known and has been explained many times in the literature (Cox, Guzik and Kidman 1989, Bahcall and Pinsonneault 1992, Turck-Chieze and Lopes 1993, Proffitt 1994 etc.). We begin with a homogeneous  $1M_{\odot}$  model on the zero-age main sequence. Then the model is evolved step by step, by taking into account the modification of the chemical composition due to nuclear reactions. At the age of the Sun, it must reproduce the data given in table 1 within the observed uncertainties. To obtain such a high precision, two parameters are traditionally adjusted, with an iteration procedure: the  ${}^4\text{He}$  mass fraction  $Y$  and the ratio of the convective mixing length to the pressure scale height, generally referred to as  $\alpha$ .

The computation of the standard solar models includes the assumption that the stellar gas as a whole is in hydrostatic equilibrium. This fundamental “first equation” of the internal structure of stars assumes that a blob of stellar gas is in equilibrium due to the effect of gravity downwards and pressure gradient upwards, which is correct in first approximation. It does not take however into account the fact that the stellar gas is a mixture of many different species, which do not have the same weight. This is the problem of element segregation, which indeed is a fundamental process inherent to the stellar structure.

In this paper we present new solar models computed with a stellar evolution code including element segregation and mixing, as described in CVZ. The physics included in these computations is discussed in section 2, a discussion about helioseismology appears in section 3 and the results are given in section 4.

Five solar models will be discussed: 1) the best standard model 2) a model including pure element segregation (no mixing outside the convective zone) with initial abundances corresponding to the Grevesse (1991) mixture; 3) same model as (2), but iterated so that the final abundances are those of Grevesse (1991); 4) a model with both element segregation and rotation-induced mixing, leading to lithium and beryllium depletion consistent with the observations, with Grevesse (1991) as initial abundances; 5) same model as (4) but iterated to obtain Grevesse (1991) as final abundances. This model (5) now represents our best new solar model consistent with the observations.

All these models are compared to the helioseismological results obtained by Dziembowski et al (1994). It is very encouraging to see that improving the physics of the models leads to a very good consistency with helioseismology. In our best model (5), which includes both segregation and mixing, the relative difference in the  $u$  function between the model and the helioseismological results is smaller than 0.5 per cent at all radii except at the center and the surface. Meanwhile lithium is depleted by a factor 150 and beryllium by a factor 2.9, which is consistent with the observations. The bottom of the convective zone lies at a fractional radius of 0.716, consistent with helioseismology.

The computed neutrino fluxes will be presented in the tables of results for each models. They are not decreased in any of them. These results will be shortly discussed but a complete discussion of the solar neutrino problem is out of the scope of the present paper.

## 2. The computations

### 2.1. Input microphysics

- Equation of state : The present solar models are computed with the equation of state developed by Hummer & Mihalas (1988), Mihalas et al. (1988), Däppen et al. (1988), hereafter MHD. The MHD equation of state is

**Table 2.** Initial parameter and main physical surface parameter of solar models.

	$Y_0$	$\alpha$	$Y_{surface}$	$X_{surface}$	L ( $10^{34} \text{erg.s}^{-1}$ )	R ( $10^{11} \text{cm}$ )	Li/Li <sub>0</sub>	Be/Be <sub>0</sub>
Model 1	0.2782	1.652	0.2782	0.7028	0.385145	0.695976	1	1
Model 2	0.2762	1.776	0.2477	0.7341	0.385154	0.696368	1/2.89	1/1.17
Model 3	0.2798	1.789	0.2513	0.7297	0.385143	0.695982	1/3.50	1/1.17
Model 4	0.2770	1.761	0.2563	0.7252	0.385131	0.695980	1/124.58	1/2.88
Model 5	0.2793	1.768	0.2584	0.7226	0.384993	0.695849	1/155.03	1/2.91

**Table 3.** Main physical parameter of solar models at the base of the convective zone and at the center.

	$\frac{r_{cz}}{R_{\odot}}$	$T_{cz}$ ( $10^6 \text{K}$ )	$\rho_{cz}$ ( $\text{g.cm}^{-3}$ )	$Y_c$	$X_c$	$T_c$ ( $10^6 \text{K}$ )	$\rho_c$ ( $\text{g.cm}^{-3}$ )	$P_c$ ( $\text{dyn.cm}^{-2}$ )
Model 1	0.725	2.100	0.166	0.6346	0.3459	15.56	150.66	$2.303 \cdot 10^{17}$
Model 2	0.716	2.158	0.185	0.6416	0.3383	15.63	153.81	$2.344 \cdot 10^{17}$
Model 3	0.714	2.178	0.189	0.6464	0.3326	15.70	154.17	$2.345 \cdot 10^{17}$
Model 4	0.717	2.162	0.185	0.6431	0.3368	15.63	154.17	$2.350 \cdot 10^{17}$
Model 5	0.716	2.175	0.188	0.6465	0.3328	15.67	154.53	$2.350 \cdot 10^{17}$

based on the free-energy minimization method which implies that it is thermodynamically consistent. It treats pressure ionization carefully and takes into account non ideal effects such as Coulomb correction to pressure, pressure due to partially degenerate electrons and correction for size of particles. It also includes a large number of atomic, ionic and molecular species, with detailed partition functions, containing weighted occupation probabilities. As shown by Christensen-Dalsgaard et al. (1988), the MHD equation of state highly improves the solar models in the helioseismological context.

– Opacities : We use the OPAL radiative opacities by Iglesias et al. (1992) which include the spin-orbit interactions for Fe and relative metal abundances based on Grevesse (1991). These tables are complemented at low temperatures below 10 000K with the atomic and molecular opacities by Kurucz (1991).

– Nuclear reactions : For hydrogen-burning we consider the tree pp chains and the CNO tri-cycle. We use the thermonuclear reaction rates Caughlan & Fowler (1988). Screening factors for the reaction rates are taken into account according to the analytical prescription by Graboske et al. (1973).

The key reaction for the generation of high energy neutrinos and for the theoretical neutrino flux to be compared to the chlorine experiments results is  ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ . Caughlan & Fowler (1988) give a value of 0.0240 keV-barns for the corresponding low energy cross section factor,  $S_{17}(0)$ , which is extrapolated from experimentally measured reaction cross sections.

## 2.2. Element Segregation

The process of element segregation in stars (also referred to as “microscopic diffusion”) represents a basic physical process inherent to the stellar structure. As soon as the stars form out of gas clouds, they built density, pressure and temperature gradients throughout. Under such conditions, the various chemical species present in the stellar gas move with respect to one another, unless macroscopic motions force the chemical homogeneization.

Although recognized by the pioneers of the study of stellar structure (Eddington, 1916 and 1926, Chapman, 1917), this process was long forgotten in the computations of stellar models, except for white dwarfs (Schatzman, 1945). Only with the discovery of large abundance anomalies in main-sequence type stars (the so-called Ap and Am stars), which present characteristic variations of chemical elements with the effective temperature, was microscopic diffusion brought into light fifty years later (Michaud, 1970, see other references in Vauclair and Vauclair, 1982).

At that time, the effects of microscopic diffusion were supposed to be important only when the diffusion time scale was smaller than the stellar age. In the Vauclair and Vauclair (1982) review paper, Fig. 1 shows the regions in the HR diagram where microscopic diffusion could lead to “observable” abundance variations. The Sun was excluded, although at the border of the “permitted domain”. In the present days, due to helioseismology, abundance variations of the order of a few percent become indirectly detectable: we have entered a new area in this respect.

Several authors have computed the gravitational and thermal diffusion of helium and heavier elements in

**Table 4.** Initial abundances, final surface abundances, and Grevesse mixture in mass fraction.

	Model 2				Model 3			
	Initial mixture used (I2)	Grevesse (1991) with same Y than I2	Final mixture obtained (F2)	Grevesse (1991) with same Y than F2	Initial mixture used (I3)	Grevesse (1991) with same Y than I3	Final mixture obtained (F3)	Grevesse (1991) with same Y than F3
X	0.704800	0.704800	0.734103	0.733309	0.700428	0.701185	0.729746	0.729653
X <sub>He<sup>3</sup></sub>	0.000042	0.000042	0.000040	0.000044	0.000046	0.000042	0.000043	0.000044
Y	0.276200	0.276200	0.247691	0.247691	0.279815	0.279815	0.251347	0.251347
X <sub>C<sup>12</sup></sub>	0.003288	0.003288	0.003084	0.003421	0.003593	0.003271	0.003373	0.003404
X <sub>C<sup>13</sup></sub>	0.000057	0.000057	0.000053	0.000059	0.000063	0.000057	0.000059	0.000059
X <sub>N<sup>14</sup></sub>	0.000976	0.000976	0.000919	0.001015	0.001062	0.000971	0.001001	0.001010
X <sub>N<sup>15</sup></sub>	0.000004	0.000004	0.000004	0.000004	0.000004	0.000004	0.000004	0.000004
X <sub>O<sup>16</sup></sub>	0.009494	0.009494	0.008971	0.009878	0.010313	0.009445	0.009754	0.009828
X <sub>O<sup>17</sup></sub>	0.000007	0.000007	0.000007	0.000007	0.000007	0.000007	0.000007	0.000007
X <sub>O<sup>18</sup></sub>	0.000023	0.000023	0.000022	0.000024	0.000025	0.000023	0.000023	0.000024
X <sub>Ne<sup>20</sup></sub>	0.001603	0.001603	0.001603	0.001668	0.001657	0.001595	0.001657	0.001660
X <sub>Ne<sup>22</sup></sub>	0.000140	0.000140	0.000140	0.000146	0.000145	0.000140	0.000145	0.000145
X <sub>Mg<sup>24</sup></sub>	0.000497	0.000497	0.000497	0.000517	0.000514	0.000494	0.000514	0.000515
X <sub>Mg<sup>25</sup></sub>	0.000068	0.000068	0.000068	0.000071	0.000071	0.000068	0.000071	0.000071
X <sub>Mg<sup>26</sup></sub>	0.000081	0.000081	0.000081	0.000085	0.000084	0.000081	0.000084	0.000084
Z/X	0.026958	0.026958	0.024800	0.025910	0.028207	0.027097	0.025909	0.026040

	Model 4				Model 5			
	Initial mixture used (I2)	Grevesse (1991) with same Y than I2	Final mixture obtained (F2)	Grevesse (1991) with same Y than F2	Initial mixture used (I3)	Grevesse (1991) with same Y than I3	Final mixture obtained (F3)	Grevesse (1991) with same Y than F3
X	0.704016	0.704016	0.725216	0.724734	0.701229	0.701714	0.722576	0.722551
X <sub>He<sup>3</sup></sub>	0.000042	0.000042	0.000076	0.000043	0.000018	0.000042	0.000054	0.000043
Y	0.276984	0.276984	0.256266	0.256266	0.279286	0.279286	0.258449	0.258449
X <sub>C<sup>12</sup></sub>	0.003284	0.003284	0.003149	0.003381	0.003498	0.003273	0.003355	0.003371
X <sub>C<sup>13</sup></sub>	0.000057	0.000057	0.000054	0.000059	0.000062	0.000057	0.000059	0.000059
X <sub>N<sup>14</sup></sub>	0.000975	0.000975	0.000938	0.001003	0.001035	0.000971	0.000996	0.001000
X <sub>N<sup>15</sup></sub>	0.000004	0.000004	0.000004	0.000004	0.000004	0.000004	0.000004	0.000004
X <sub>O<sup>16</sup></sub>	0.009483	0.009483	0.009142	0.009762	0.010052	0.009452	0.009693	0.009733
X <sub>O<sup>17</sup></sub>	0.000007	0.000007	0.000007	0.000007	0.000007	0.000007	0.000007	0.000007
X <sub>O<sup>18</sup></sub>	0.000023	0.000023	0.000022	0.000024	0.000025	0.000023	0.000024	0.000024
X <sub>Ne<sup>20</sup></sub>	0.001602	0.001602	0.001602	0.001649	0.001641	0.001596	0.001641	0.001644
X <sub>Ne<sup>22</sup></sub>	0.000140	0.000140	0.000140	0.000144	0.000144	0.000140	0.000144	0.000144
X <sub>Mg<sup>24</sup></sub>	0.000496	0.000496	0.000496	0.000511	0.000510	0.000495	0.000510	0.000510
X <sub>Mg<sup>25</sup></sub>	0.000068	0.000068	0.000068	0.000070	0.000070	0.000068	0.000070	0.000070
X <sub>Mg<sup>26</sup></sub>	0.000081	0.000081	0.000081	0.000084	0.000084	0.000081	0.000084	0.000083
Z/X	0.026988	0.026988	0.025534	0.026217	0.027787	0.027077	0.026260	0.026296

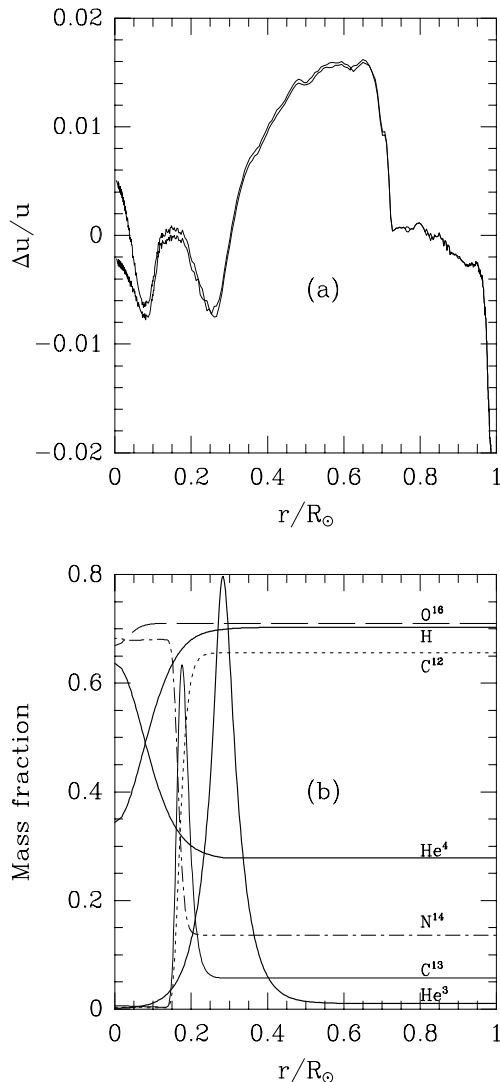
the Sun with various approximations (see references in Michaud and Vauclair, 1991). More recently the influence of diffusion on the solar oscillation modes and on the solar neutrino fluxes have been studied in various ways (Cox, Guzik, Kidman, 1989; Bahcall and Pinsonneault, 1992; Proffitt, 1994; Thoul, Bahcall and Loeb, 1994).

Element segregation represents in fact a competition between two kinds of processes. First the atoms move under the influence of external forces (due to gravity, ra-

diation, etc.), second they collide with other atoms and share the acquired momentum with them in a random way, which slows down their motion. This competition leads to element stratification and decreases the entropy.

The computations of microscopic diffusion are based on the Boltzmann equation for dilute collision-dominated plasmas. At equilibrium the solution of the equation is the maxwellian distribution function:  $f = f(0)$ . In stars the distribution is not maxwellian, but the deviations from





**Fig. 1.** Standard Solar model (model 1). The top graph represents the difference between the  $u$  function ( $u = \frac{P}{\rho}$ ) deduced from helioseismology and the computed one. The ordinates represents :  $\frac{\Delta u}{u} = \frac{u(\text{seismic}) - u(\text{model})}{u(\text{seismic})}$

The bottom graph shows the abundance profiles for some elements in the two models (The mass fractions are multiplied by 250 for  ${}^3\text{He}$ , by 200 for  ${}^{12}\text{C}$ , by 1000 for  ${}^{13}\text{C}$ , by 140 for  ${}^{14}\text{N}$  and by 75 for  ${}^{16}\text{O}$ ).

the maxwellian distribution are very small. Two different methods are developed to solve the Boltzmann equation in this framework. The first method relies on the Chapman-Enskog procedure (described in Chapman and Cowling, 1970), with convergent series of  $f$  computed with successive approximations. This method is used, for example, by Bahcall and Loeb (1990), Proffitt and Michaud (1991), Michaud and Vauclair (1991), Bahcall and Pinsonneault (1992) and CVZ, in which a complete description of the numerical schemes may be found.

The second method is that of Burgers (1969), in which separate flow and heat equations for each component of a multi-component mixture are solved simultaneously. Descriptions of this method may be found for example in Cox, Guzik and Kidman (1989), Proffitt and Vandenberg (1991), Thoul, Bahcall and Loeb (1994), Richer and Michaud (1993). This method does not include for the moment the problem of partial ionisation which has been studied within the framework of the Chapman and Cowling method (Montmerle and Michaud 1976; Vauclair, Hardorp, Peterson, 1979; Alecian and Vauclair, 1981).

In the present paper the first method has been used for the treatment of the Boltzmann equation, as described in CVZ. For collisions between charged ions, the Paquette et al. (1986) method has been introduced. The basic question concerns the divergence of the coulomb interaction cross sections. In the first computations of diffusion, the “Chapman and Cowling approximation” was used, assuming a cut-off of the cross section equal to the Debye shielding length. Paquette et al. (1986) proposed a more precise treatment of this problem, with a screened coulomb potential in which the characteristic length is taken as the largest of the Debye length and interionic distance. The Paquette et al. tables of collision integrals have been extensively used in the present paper.

The radiative acceleration on the elements are not included in these computations. From crude approximations, we suppose that they are negligible in solar type stars (Michaud et al., 1976), but this should be tested in the future, as more precise computations may lead to larger values (Michaud, 1987).

### 2.3. Rotation-induced mixing

We introduced in our computations the rotation-induced mixing as prescribed by Zahn (1992). In a rotating star, due to centrifugal effects, the gravity equipotentials are no more spherical, which induces a circulation of matter between polar and equatorial regions: the so-called meridional circulation. This circulation itself induces a transport of angular momentum, thereby creating shears which become unstable in the horizontal direction, while the vertical shears are stabilized by the density gradient. This large scale horizontal turbulence decays into small scales and becomes 3D when the turnover rate of the turbulence exceeds the angular velocity.

**Table 5.** Predicted neutrino flux in  $10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

	$\Phi(\text{pp})$	$\Phi(\text{pep})$	$\Phi(^7\text{Be})$	$\Phi(^8\text{B})$	$\Phi(^{13}\text{N})$	$\Phi(^{15}\text{O})$	$\Phi(^{17}\text{F})$
Model 1	6.00	$1.39 \cdot 10^{-2}$	0.45	$5.45 \cdot 10^{-4}$	$4.52 \cdot 10^{-2}$	$3.85 \cdot 10^{-2}$	$4.90 \cdot 10^{-4}$
Model 2	5.96	$1.39 \cdot 10^{-2}$	0.47	$5.98 \cdot 10^{-4}$	$5.05 \cdot 10^{-2}$	$4.31 \cdot 10^{-2}$	$5.53 \cdot 10^{-4}$
Model 3	5.94	$1.38 \cdot 10^{-2}$	0.48	$6.38 \cdot 10^{-4}$	$5.79 \cdot 10^{-2}$	$4.98 \cdot 10^{-2}$	$6.40 \cdot 10^{-4}$
Model 4	5.96	$1.39 \cdot 10^{-2}$	0.47	$6.06 \cdot 10^{-4}$	$5.09 \cdot 10^{-2}$	$4.35 \cdot 10^{-2}$	$5.60 \cdot 10^{-4}$
Model 5	5.94	$1.38 \cdot 10^{-2}$	0.48	$6.33 \cdot 10^{-4}$	$5.59 \cdot 10^{-2}$	$4.81 \cdot 10^{-2}$	$6.18 \cdot 10^{-4}$

**Table 6.** Predicted neutrino capture rates for the chlorine and gallium experiments in SNU.

Neutrino source	Model 1		Model 2		Model 3		Model 4		Model 5	
	$(\Phi\sigma)_{Cl}$	$(\Phi\sigma)_{Ga}$	$(\Phi\sigma)_{Cl}$	$(\Phi\sigma)_{Ga}$	$(\Phi\sigma)_{Cl}$	$(\Phi\sigma)_{Ga}$	$(\Phi\sigma)_{Cl}$	$(\Phi\sigma)_{Ga}$	$(\Phi\sigma)_{Cl}$	$(\Phi\sigma)_{Ga}$
pp	0	70.722	0	70.353	0	70.042	0	70.303	0	70.068
pep	0.223	2.992	0.223	2.992	0.221	2.965	0.223	2.993	0.221	2.973
$^7\text{Be}$	1.064	32.722	1.117	34.342	1.149	35.352	1.124	34.574	1.146	35.255
$^8\text{B}$	5.781	13.252	6.34	14.534	6.768	15.515	6.42	14.718	6.706	15.372
$^{13}\text{N}$	0.075	2.792	0.084	3.118	0.096	3.576	0.084	3.143	0.093	3.456
$^{15}\text{O}$	0.254	4.46	0.284	4.994	0.329	5.775	0.287	5.045	0.318	5.581
$^{17}\text{F}$	0.003	0.057	0.004	0.065	0.004	0.075	0.004	0.066	0.004	0.072
Total	7.4	126.997	8.052	130.398	8.567	133.3	8.142	130.842	8.488	132.769

Meanwhile the horizontal turbulence “cuts down” the effect of advection on the transport of the chemical species, as the elements which go up in the upward flow of matter can be transported into the downward flow by horizontal motions before reaching the top layers. The transport of angular momentum is more efficient than the transport of chemicals. In the limit of extremely large horizontal diffusivity, the chemical composition is constant along a level surface, and the transport of chemicals is negligible. The angular momentum behaves differently as, when the rotation velocity is constant along a level surface, the angular momentum is not, so that it is still transported.

The horizontal transport of angular momentum smoothes out the original meridional circulation. Taking this feedback effect into account, Zahn (1992) showed that the whole process is stopped within an Eddington-Sweet time-scale, unless angular momentum is extracted from the star due to a wind.

In case of a moderate wind which extracts angular momentum at the rate  $(\frac{dJ}{dt})$ , an asymptotic regime is reached with a circulation velocity as a function of radius given by (following Zahn (1992) eq.4.15):

$$U(r) = \frac{5}{\rho(r)} \frac{3}{r^4 \Omega} \frac{3}{8\pi} \left( \frac{dJ}{dt} \right) \quad (1)$$

where  $\rho$  is the local density, or:

$$U(r) = \frac{5}{2} \frac{1}{\Omega(r)} \frac{1}{r} \frac{\rho_m}{M(r)} \frac{\rho_m}{\rho(r)} \left( \frac{dJ}{dt} \right) \quad (2)$$

where  $\Omega(r)$  is the local angular velocity,  $M(r)$  the mass inside radius  $r$  and  $\rho_m$  the average density inside radius  $r$ .

The effective diffusion coefficient is then expressed by Zahn’s eq. 4.21 :

$$D_{eff} = \frac{C_h}{50} \frac{r|U(r)|}{\alpha} \quad (3)$$

where  $C_h$  is a parameter related to the horizontal viscosity ( $C_h \lesssim 1$ ) and  $\alpha$  is related to the differential rotation:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{d \ln(r^2 \Omega)}{d \ln r} \quad (4)$$

If the deviation of  $\Omega$  from solid rotation is neglected ( $\alpha = 1$ ), and if  $\Omega$  is supposed to decrease with time following a “Skumanich law” for which  $\Omega \propto t^{-\frac{1}{2}}$  we obtain:

$$\frac{dJ}{dt} \propto \Omega^3 \quad (5)$$

and the effective mixing coefficient is of the form:

$$D_{eff} \simeq r \cdot U(r) \propto \frac{\Omega^2}{\rho r^3} \quad (6)$$

Equation (3) has been used in the present computations with  $\alpha = 1$ . The proportionality factor  $C_h$  has been adjusted to obtain the right lithium depletion in the Sun (section 4).

#### 2.4. Stabilizing $\mu$ -gradients

Mixing processes in stars may be stabilized in the regions where the mean molecular weight rapidly decreases with increasing radius. This occurs specially in the nuclear burning core: we can thus infer that the rotation-induced

mixing becomes inefficient as soon as the  $\mu$ -gradient becomes larger than some critical value. This question has been discussed by several authors (Mestel (1965), Huppert and Spiegel (1977)). Although no precise value can be given for this critical  $\mu$ -gradient, an order of magnitude can be obtained from simple considerations.

Huppert and Spiegel (1977) suggest that mixing can penetrate the nuclear burning core within a scale height given by:

$$h \simeq r \frac{\Omega(r)}{N_\mu} \quad (7)$$

where  $r$  is the local radius,  $\Omega(r)$  the angular rotation velocity and  $N_\mu$  the buoyancy frequency due to the  $\mu$ -gradient.

$$N_\mu^2 \simeq \frac{GM(r)}{r^2} \left| \frac{d \ln \mu}{dr} \right| \quad (8)$$

From eq. (7) we can derive a critical  $\mu$ -gradient obtained by specifying that  $h$  must be a small fraction of  $r$  ( $h = \varepsilon r$ ):

$$(\nabla \ln \mu)_c \simeq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{r_c^2 \Omega^2(r_c)}{GM(r_c)} \quad (9)$$

where all the quantities should be computed at the place where the actual  $\nabla \ln \mu$  is equal to the critical one.

With values of  $r_c$  between  $0.1 R_\odot$  and  $0.2 R_\odot$  and values of  $\Omega$  between  $3 \times 10^{-6}$  ( $V_{R_\odot} \simeq 2 \text{ km.s}^{-1}$ ) and  $10^{-4}$  ( $V_{R_\odot} \simeq 70 \text{ km.s}^{-1}$ ) we find, for  $\varepsilon = 0.1$ :

$$4 \times 10^{-15} < (\nabla \ln \mu)_c < 4 \times 10^{-12}$$

Solar structure computations lead to stronger constraints on the critical  $\mu$ -gradient. With  $(\nabla \ln \mu)_c \lesssim 10^{-14}$  no mixing could occur in the Sun after 0.1 Gyr. With  $(\nabla \ln \mu)_c \gtrsim 10^{-12}$  too much mixing would occur in the core, and the consistency with helioseismology would be lost (Gaigé 1994). Our best model is obtained with  $(\nabla \ln \mu)_c = 4 \times 10^{-13}$  (section 4.3).

### 2.5. The diffusion routine

The stellar evolution code used in these computations is the Geneva code, described several times in the literature. The system of nuclear reactions and the abundance variations in the standard models are computed as in Maeder (1983). They are separately determined for 15 isotopes : H,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{14}\text{N}$ ,  $^{15}\text{N}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$ ,  $^{18}\text{O}$ ,  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{22}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{25}\text{Mg}$ ,  $^{26}\text{Mg}$ . The heavier elements are combined in a single mass fraction  $Z$ .

We have added in this code a diffusion routine for each isotope in a similar way as described in CVZ. The diffusion equations are written in lagrangian coordinates as :

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial m^2} + E_i \frac{\partial c_i}{\partial m^2} + F_i c_i \quad (10)$$

where  $c_i$  stands for the concentration of isotope  $i$ , and:

$$\begin{aligned} D_i &= (4\pi r^2 \rho)^2 (D_{eff} + D_s^i) \\ E_i &= (4\pi r^2 \rho)^2 \left( 4\pi \frac{\partial r^2 \rho (D_{eff} D_s^i)}{\partial m} - V_i \right) \\ F_i &= -\lambda_i - 4\pi \frac{\partial (r^2 \rho V_i)}{\partial m} \end{aligned} \quad (11)$$

Here  $D_{eff}$  is the effective mixing coefficient (the same for all the isotopes) while  $D_s^i$  is the segregation coefficient, computed for each isotope using Paquette et al. (1986) tables.  $V_i$  represents the segregation (microscopic) velocity. The nuclear destruction rate  $\lambda_i$  is only included in  $F_i$  for lithium and beryllium, which are treated separately from the network.

For the 15 isotopes included in the nuclear network, the computation procedure is the following:

- at each evolutionary step, equation (10) is solved separately for all the isotopes except hydrogen. The method is the same as described in CVZ: a Crank-Nicholson scheme with the inversion of a tridiagonal matrix including all the mesh points down to the center

- this diffusion routine is used with a smaller time step as the evolution time step, for a better precision. Typically 20 resolutions of the diffusion equation are done between two computations of a complete model

- the new mass fractions of each isotope are computed, taking into account the normalisation equation:

$$X_1 + \sum_{k \neq 1} X_k + Z = 1$$

Satisfying this equation needs a consistent resolution of the abundances of all the considered isotopes with the inversion of a  $(k+1)$  order matrix

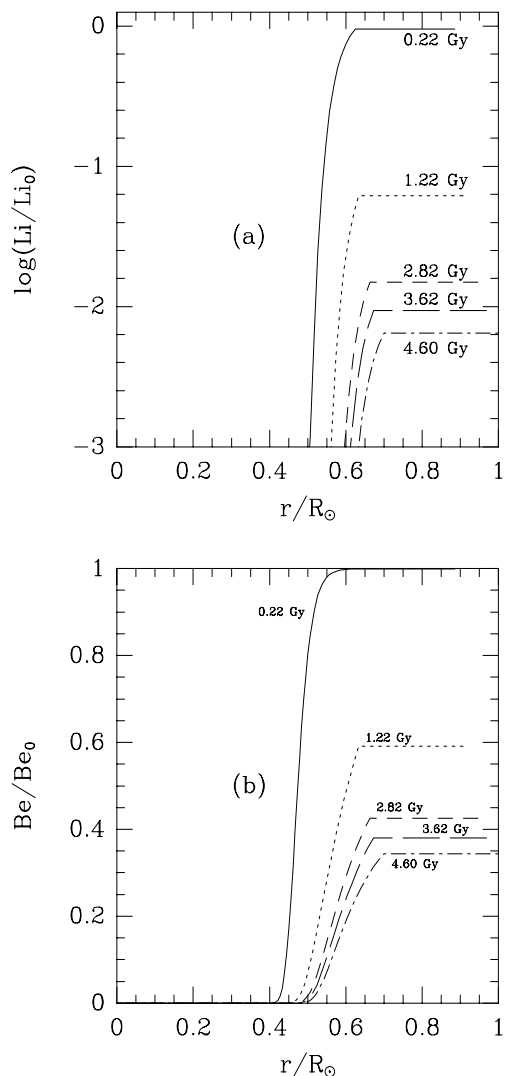
- the abundance variations due to the nuclear reactions are then computed.

### 3. Helioseismological constraints

We shall compare the  $u(r) = \frac{P(r)}{\rho(r)}$  function and the  $Y_{surf}$  quantity in our theoretical models with those in the seismic model derived from the observed p-mode frequencies with the method described by Dziembowski et al. (1994). The seismic model that we adopt here differs from the one presented in that paper in two respects. First we use new frequency data for  $\ell \leq 3$  degrees from BISON network (Elsworth et al., 1994). This has a most noticeable effect in  $u(r)$  in the core. The second is the use of OPAL rather than MHD equation of state (EOS) in the reference model adopted for the inversion (for consistency with the opacities), which does not change the  $u$  values in a significant way. The only important consequence of this change is a somewhat higher seismic value for  $Y_{surf}$ .

Within the adiabatic part of the convective zone the sound speed is determined solely by the value of the  $M$  to  $R$  ratio and by the value of adiabatic exponent,  $\Gamma_1$ . Comparison of the model and the seismic  $u(r)$  in this region provides therefore a test of the EOS. The situation in the radiative interior is more complicated. Let us note that approximately  $u \propto \frac{T}{\mu}$ , and therefore the radiative transport of energy and the element diffusion directly affect  $u(r)$  below the convective envelope.

In general, it is not possible to disentangle the uncertainty in the opacity and in the diffusion coefficients.



**Fig. 4.** Lithium (top) and beryllium (bottom) variations profiles in the best model 5 as a function of age. At the age of the Sun lithium is destroyed by 155 and beryllium by 2.9.

Only the convective overshooting leading to a discontinuity in  $\frac{du}{dr}$  leaves a signature in the sound speed which is seismically detectable. Monteiro et al. (1994) looked for it and came up with an upper limit on the extent of such overshooting, which is 0.07 of the local pressure distance

scale or  $0.006 R_{\odot}$ . In our models such overshooting has been ignored and the above results show that this is a good approximation. The bottom of the convective zone in such case may be determined quite accurately. In the seismic model used in this work  $r_{cz} = (0.7137 \pm 0.0002) R_{\odot}$ , which agrees very well with the first accurate helioseismic value  $r_{cz} = (0.713 \pm 0.003) R_{\odot}$  (Christensen-Dalsgaard et al., 1993).

There are still some uncertainties due to the opacities. Unfortunately, we do not have a good way to assess limits for the induced modifications. Alternative opacities (OP, Seaton et al. 1994) are by about 40 percent lower at temperature and density ranges of interest here. However, this large difference may perhaps be due to a neglect of the plasma effects on the atomic properties, in the OP calculations, and therefore may not serve as an estimate of the uncertainty.

In such a situation it is important to make use of the additional constraint which is the value of  $Y_{surf}$  determined by means of helioseismology. In this comparison the uncertainty in the opacity data is rather unimportant. The possibility of a seismic measure of helium abundance rests on a large value of the  $\Gamma_1$  derivative with respect to  $Y$  in the HeII ionization zone and obviously requires very accurate thermodynamical data. The seismic values obtained with Dziembowski et al. (1994) method of inversion for two versions of the EOS adopted in the reference model are

$$Y_{surf} = 0.2440 \pm 0.0003 \text{ for MHD}$$

$$Y_{surf} = 0.2505 \pm 0.0003 \text{ for OPAL}$$

The test of  $\Gamma_1$  in the lower convective zone points to OPAL data as more accurate, which should be expected as the OPAL EOS is obtained in a more fundamental way. We stress that the model values of  $Y_{surf}$  is quite insensitive to the choice of the EOS. The errors given above reflect only the frequency errors quoted by the observers. The actual uncertainty in the seismic values is much larger. For instance, Basu and Antia (1995) find 0.246 and 0.249 for the corresponding quantities. The results are indeed depended on the adopted method of inversion. In particular they depend on smoothing the  $\frac{\Delta u}{u}$  function which describes the relative differences between the solar and the model  $u(r)$ . Without smoothing, which is perhaps a better choice is the only goal is the determination of the He abundance, our method yields  $Y_{surf} = 0.2548$  for the OPAL EOS. (Pamyatnykh, private communication). The problem certainly requires further examination because, as we shall see, it is essential to reduce the uncertainty to the  $10^{-3}$  level.

#### 4. The results

Five solar models have been computed and compared to the helioseismological sun (Figures 1 to 3). The values of the characteristic parameters of the models, abundances and neutrino production are given in tables 2 to 6.

#### 4.1. The “standard” model

This model includes the physics as discussed in section 2-1, with no element segregation and no other mixing than inside the convection zone. The comparison with helioseismology is presented in figure 1a, and the fractional abundance of several interesting elements in figure 1b. The two curves in figure 1a correspond to the uncertainty in the helioseismological inversion.

A comparison of seismic values of  $r_{cz}$  and  $Y_{surf}$  with those for Model 1, given in Tables 2 and 3 reveals large differences. Also large differences are seen in the sound speed behavior throughout the whole interior as seen in Fig. 1. We do not pay attention to the differences in the outer part of the convective zone. They may be accounted for by inadequacies of the mixing length theory (outermost part) and in the MHD equation of state. Our main concern is the value  $\frac{\Delta u}{u}$  of about 0.015 in the outer part of the radiative interior, which is too large.

Of course lithium is not depleted in model 1, neither is beryllium, and the solar neutrino fluxes are too high compared with the results of the solar neutrino detectors (tables 5 and 6).

#### 4.2. Models with pure element segregation (no mixing)

– the first of these models (model 2) has been obtained with element segregation of helium and the initial abundances as given by Grevesse (1991).

We see at once, from figure 2a, that the discrepancy below the convective zone is considerably reduced compared to model 1, while figure 2b shows the influence of segregation on the fractional abundances of the elements. The basic reason for the improvement in the  $u$  value is due to helium diffusion, which leads to a diminution of the helium abundance of about 10% inside the convection zone and below, thereby decreasing the local mean molecular weight.

– model 2 is however inconsistent with the observed present element abundances due to the segregation. Model 3 is similar to model 2, but iterated so that the final abundances correspond to the values given by Grevesse (1991). Table 4 shows the final abundances obtained, compared to the observations. It is also interesting to compare figure 2d with figure 2b to see the difference in the fractional abundances of the elements.

There is a dramatic improvement in the agreement with the seismic model once the element segregation is introduced. In Model 3 the coincidence of  $r_{cz}$  and  $Y_{surf}$  with the seismic values is so perfect that, admittedly, it may be to some extent coincidental.

From tables 2 to 6 we check that models 2 and 3 are well calibrated, while the neutrino fluxes are not decreased, as expected.

We insist on the fact that these models are computed without any arbitrary parameters: element segregation is

a simple consequence of the stellar physics, with no special assumption added. They should not be considered as non-standard models, but as improved standard solar models.

Lithium and beryllium are not more depleted than helium in these models, as the depletion is only due to element segregation. It is necessary to introduce a mild mixing below the convection zone to account for the observed abundances of these elements.

#### 4.3. Models with element segregation and rotation-induced mixing

Rotation-induced mixing as described in section 2 have been added in the computations of models 4 and 5. Here a parameter has been adjusted (namely the  $C_h$  factor in Zahn’s prescription) so as to obtain a lithium depletion as observed. In consequence these two models must be considered as non-standard.

In both models the mixing coefficient has been cut off at the core for a  $\mu$ -gradient of  $4 \times 10^{-13}$ . Models with mixing down to the solar core lead to large discrepancies with helioseismology. On the other hand, in our models, the mixing is inefficient in the region of energy production in the Sun, and the consistency with helioseismology is even better than for models without mixing (see figures 3a and 3c).

Model 4 is obtained with initial abundances as in Grevesse (1991), while model 5 has been iterated so that the final abundances are those of Grevesse (1991) (see table 4). It is interesting to note that model 5 is still closer to the helioseismological Sun than model 4: in all cases improving the physics leads to better results compared to the observations, which is very encouraging.

While an inclusion of the element mixing somewhat improves the agreement in the  $u(r)$ , it slightly destroys the perfect coincidence in  $r_{cz}$  and  $Y_{surf}$ . We do not consider any of these differences as really significant. Let us note that the seismic value of  $Y_{surf}$  obtained without regularization, which we regard as more credible, is right in the middle of the values for model 3 and 5. The difference between the two models is 0.005. An accuracy of 0.001 in seismic  $Y_{surf}$  would thus yield an interesting constraint on the element mixing. The data certainly allow such accuracy. The problems lie in data analysis and in reliability of the EOS.

In model 5 lithium is depleted with a ratio 1/155 and beryllium with a ratio 1/2.9, which is very close to the observations. The lithium and beryllium abundance profiles for various times are given in figure 4.

The difference in  $\mu$ -values from models 1 and 5 is given in figure 5.

## 5. Conclusion

Model 5 is presently our best model. It is a well calibrated model, including element segregation and a parametrized

rotation-induced mixing. It leads to a very good fit between the computed  $u = \frac{P}{\rho}$  function and that deduced from helioseismology below the solar convection zone. The consistency is also very good inside the convection zone except at the surface where a better mixing treatment should be introduced. Lithium and beryllium are depleted as observed. The neutrino fluxes remain too high.

Below a radius of 0.4 of the solar radius a discrepancy remains in the  $u$  curves. Although the uncertainty on  $u$  is much larger in the core than at the surface, these features seem significant. This specific problem will be addressed in a forthcoming paper.

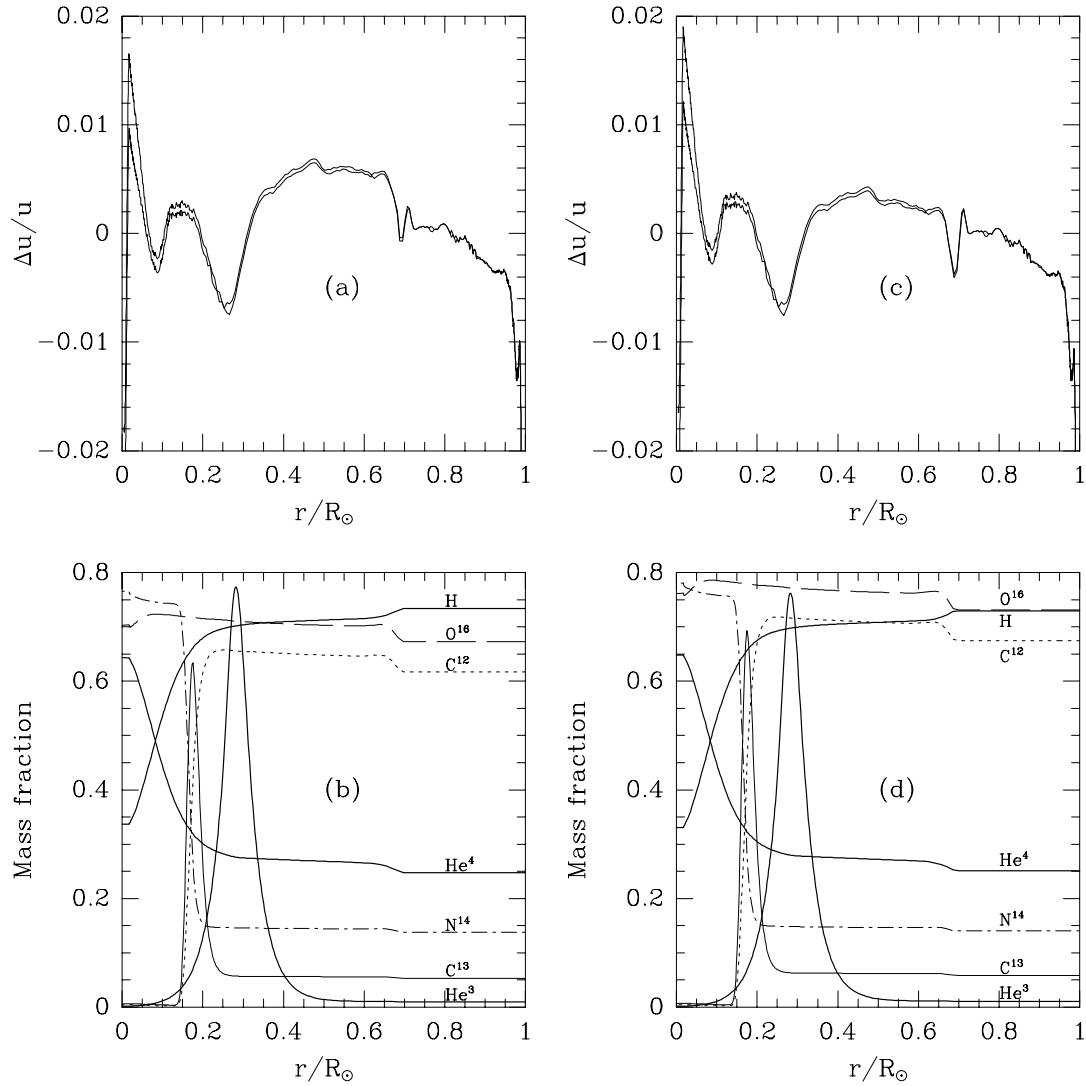
Element segregation certainly takes place in the Sun's interior. It involves nonstandard physics and its occurrence is fully confirmed by the results of helioseismic inversion. On the other hand the macroscopic mixing is a hypothetical effect which provides a natural explanation of the Li and Be deficit but demands convincing observational confirmations and constraints. At present stage we may only conclude that there is no conflict between models reproducing solar Li and Be abundances and helioseismic data. There are good prospects for obtaining stringent constraints on the hypothetical mixing processes from helioseismology. On the road to this goal we regard as most important to improve reliability and accuracy of the He abundance determination. Progress should also be made in assessing uncertainties in the opacity data, so that the information about the sound speed behavior may lead to a more direct probe of the He distribution in the outer part of the radiative interior.

*Note:* Model 5 is available on request by electronic mail at the address: richard@obs-mip.fr.

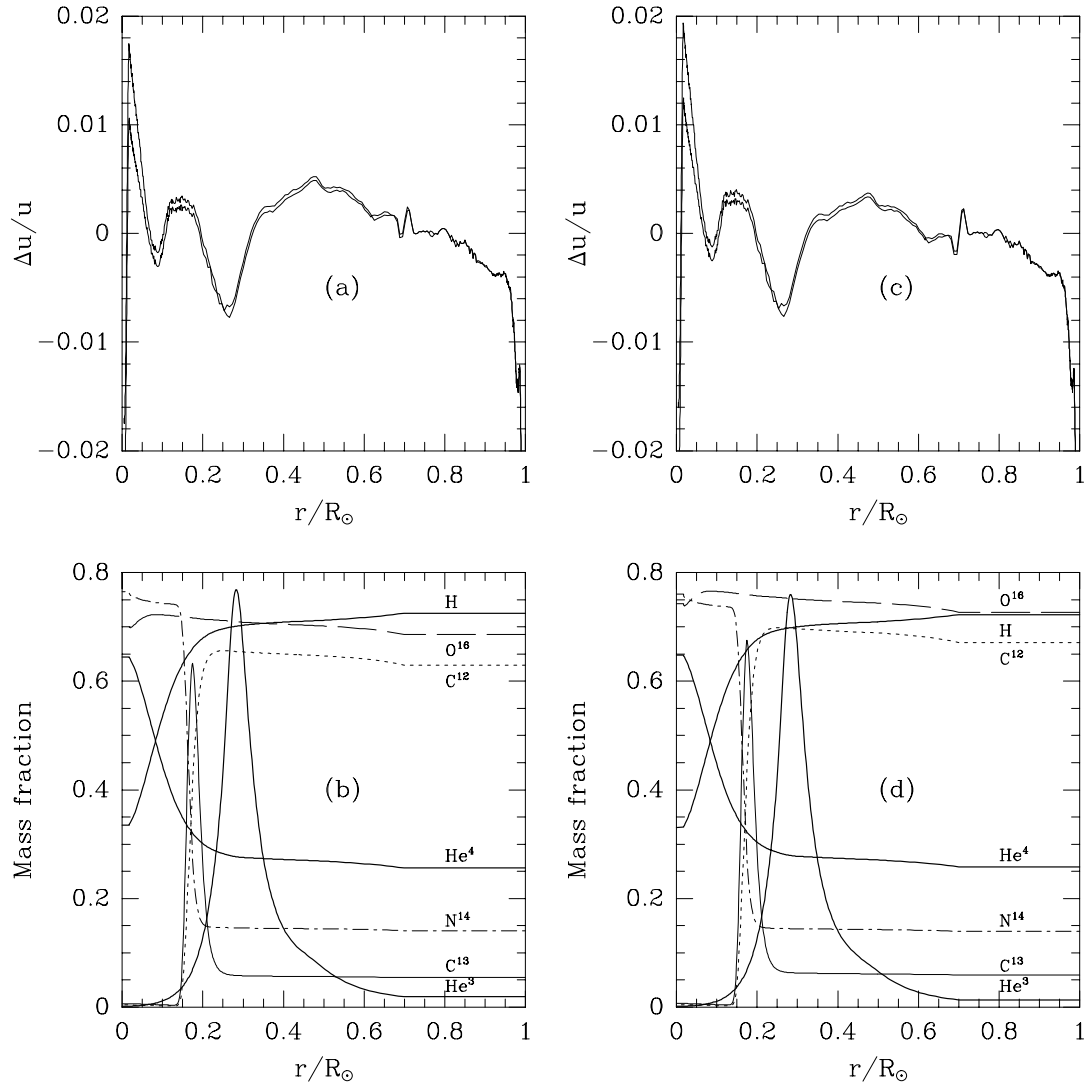
*Acknowledgements.* We thank Alosha Pamyatnykh for his collaboration on the new version of the seismic model and for a helpful discussion. The work was supported, in part, by PICS “France-Pologne”.

## References

- Alecian, G., Vauclair, S., 1981, A&A 101, 16  
 Bahcall, J.N., Loeb, A., 1990, ApJ 360,267  
 Bahcall, J.N., Pinsonneault, M.H., 1992, *Reviews of Modern Physics* 64,885  
 Basu, S. and Antia, H.M., 1995 in *Proceedings of 4th SOHO Workshop: Helioseismology*, ESA SP 376, ESTEC, Noordwijk, eds. J.T. Hoeksama, V. Domingo, B. Fleck  
 Burgers, J.M., 1969 *Flow Equations for Composite Gases*, New York: Academic Press  
 Caughlan G.R., Fowler W.A., 1988, *Atomic Data Nuc. Data Tables* 40, 283  
 Chapman, S., 1917, MNRAS 77,540  
 Chapman, S., Cowling, T.G., 1970, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, 3rd ed.  
 Charbonnel, C., Vauclair, S., Zahn, J.P. 1992, A&A 255, 191 (CVZ)  
 Charbonnel, C., Vauclair, S., Maeder, A., Meynet, G., Schaller, G. 1994, A&A 283, 155  
 Christensen-Dalsgaard J., Däppen W., Lebreton Y., 1988, Nat., 336, 634  
 Christensen-Dalsgaard, J., Proffitt, C.R., and Thompson, M.J., 1993, ApJL, 403, L75  
 Cox, A.N., Guzik, J.A., Kidman, R.B. 1989, ApJ 342, 1187  
 Däppen W., Mihalas D., Hummer D.G, Mihalas B.W., 1988, ApJ 332, 261  
 Demarque P., Guenther D.B., 1991 in *Solar Interior and Atmosphere* A.N. Cox, W.C. Livingston, M.S. Matthews ed., The University of Arizona Press, p. 1186  
 Dziembowski, W.Q., Goode, P.R., Pamyatnikh, A.A., Sienkiewicz, R., 1994, ApJ 432, 417  
 Eddington, A.S., 1916, MNRAS 77, 16  
 Eddington, A.S., 1926, *The Internal Constitution of Stars*, Dover Pub.  
 Elsworth, Y., Howe, R., Isaak, G.R., McLeod, C.P., New, R. 1994, ApJ, 434, 801  
 Gaigé, Y., 1994, Thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse  
 Graboske H.C., de Witt H.E., Grossman A.S., Cooper M.S., 1973, ApJ 181, 457  
 Grevesse, N., 1991, A&A 242, 488  
 Guenther D.B., 1989, ApJ 339, 1156  
 Hummer D.G, Mihalas D., 1988, ApJ 331,794  
 Huppert, H.E., Spiegel, E.A., 1977, ApJ 213, 157  
 Iglesias C.A., Rogers F.J., Wilson B.G., 1992, ApJ 397, 717  
 Kurucz R.L., 1991, in *Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models*, NATO ASI Series C, Vol. 341, Eds. L.Crivellari, I.Hubeny, D.G.Hummer  
 Maeder, A. 1983, A&A 120, 113  
 Mestel, L., 1965, *Stellar Structure*, in *Stars and Stellar Systems* vol. 8 (ed. G.P. Kuiper, B.M. Middlehurst; Univ. Chicago Press), 465  
 Michaud, G., 1970, ApJ 160, 641  
 Michaud, G., 1987, *Physica Scripta* 36, 112  
 Michaud, G., Charland, Y., Vauclair, S., Vauclair, G., 1976, ApJ 210, 447  
 Michaud, G., Vauclair, S., 1991, in *Solar Interior and Atmosphere* A.N. Cox, W.C. Livingston, M.S. Matthews ed., The University of Arizona Press, p. 304  
 Mihalas D., Hummer D.G., Däppen W., 1988, ApJ 331, 815  
 Monteiro, M.J.P.F.G., Christensen-Dalsgaard, J., and Thompson, M.J., 19.. A&A, 283, 247  
 Montmerle, T., Michaud, G., 1976, ApJS 31, 489  
 Paquette, C., Pelletier, C., Fontaine, G., Michaud, G., 1986, ApJS 61, 177  
 Proffitt, C.R., 1994, ApJ 425, 849  
 Proffitt, C.R., Michaud, G., 1991, ApJ 380, 238  
 Proffitt, C.R., VandenBerg, D.A., 1991, ApJS 77, 473  
 Seaton, M.J., Yu Yan, Mihalas, D. and Pradhan, A.K., 1994, MNRAS, 266, 805  
 Richer, J., Michaud, G., 1993, ApJ 416, 312  
 Schatzman, E., 1945, *Ann. d'Astr.* 8,143  
 Thoul, A.A, Bahcall, J.N., Loeb, A., 1994, ApJ 421, 828  
 Turck-Chieze, S., Lopes, I. 1993, ApJ 408, 347  
 Vauclair, S., Hardorp, J., Peterson, D.M. 1991, ApJ 227, 526  
 Vauclair, S., Vauclair, G., 1982, ARA&A 20, 37  
 Zahn J.P., 1992, A&A 265, 115

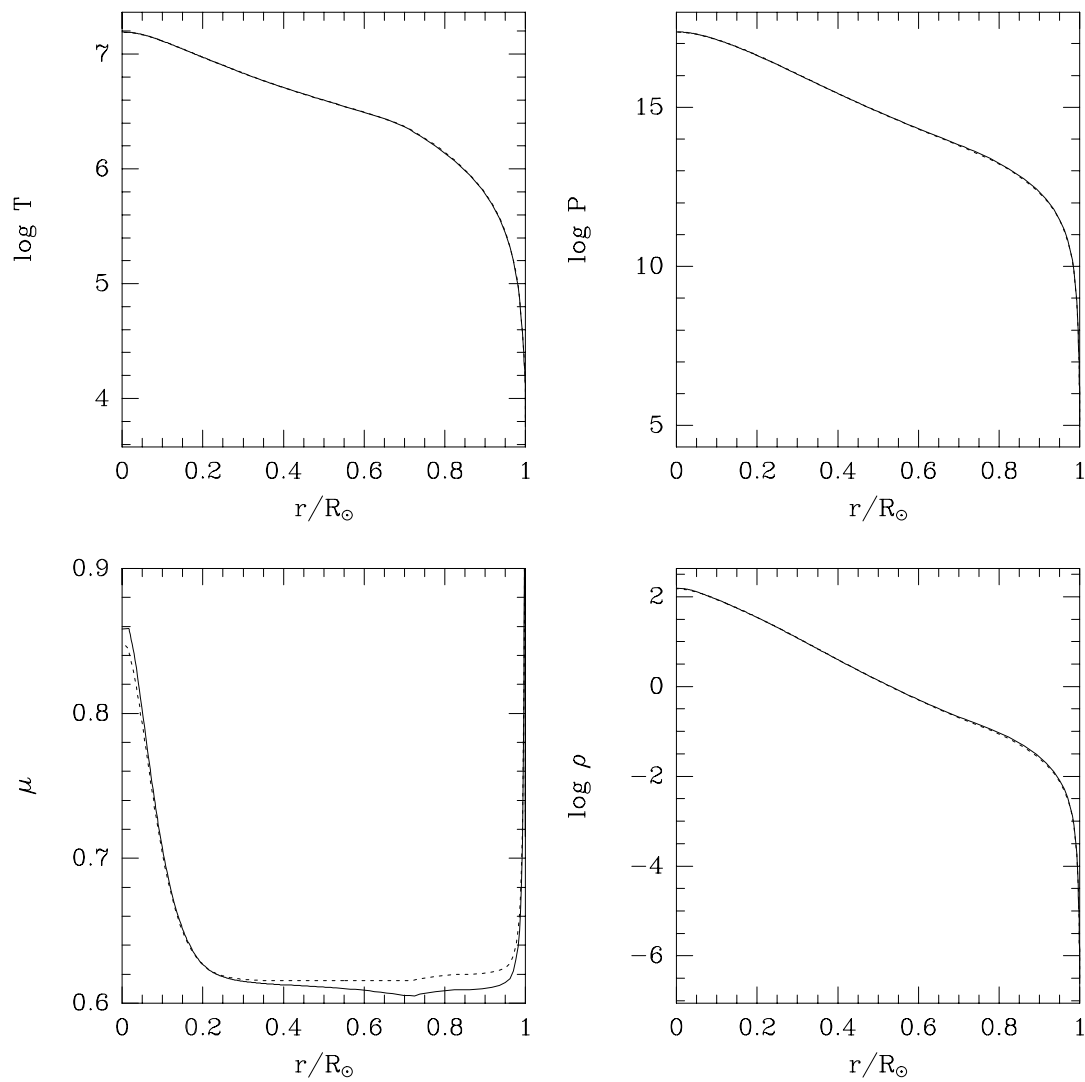


**Fig. 2.** Models with pure element segregation. The presentation is the same as in figure 1. The left graphs represent the model obtained with initial abundances as given by Grevesse (1991) (model 2). The right graphs represent an iterated model computed so that the final abundances are very close to Grevesse's observed ones (table 4). The  $\Delta u_s$  are clearly smaller for the iterated model. The abundance variations are shown in the bottom graphs. The relative abundance variations in the convective zone compared to the interior (depletion of all the elements except hydrogen) are the same in figures 2b and 2d, but the absolute values differ, so that in fig. 2d the outer values are close to those given in fig. 1b for all elements except helium 4, which is adjusted in the calibration of the model.



**Fig. 3.** Models with element segregation and rotation-induced mixing. The presentation is the same as in figures 1 and 2. The left graphs correspond to models computed with initial Grevesse (1991) abundances (model 4). The right graphs correspond to iterated models so that the final abundances are close to the observed Grevesse (1991) abundances (model 5). Here the parametrisation of the rotation-induced mixing is that proposed by Zahn (1992) in the asymptotic regime. The mixing efficiency is supposed annihilated when the  $\mu$ -gradient is larger than  $4 \times 10^{-13} \text{ cm}^{-1}$  (see text). This cut-off is very important as a deeper mixing inside the nuclear burning core destroys the consistency of the computed and observed  $u$  values. Here the  $\Delta u$  values are slightly smaller in figures 3a and 3c than in figures 2a and 2c. Meanwhile lithium and beryllium are destroyed as observed in the Sun (see figure 4).





**Fig. 5.** Comparison between the parameters  $\log T$ ,  $\log P$ ,  $\mu$  and  $\log \rho$  in our “best model” 5 (solid lines) and the standard model (dashed lines). While no clear difference can be seen at these scales for  $T$ ,  $P$  and  $\rho$ , the difference in  $\mu$  due to the element segregation is clearly visible. It is the basic reason for the better agreement of this model with the helioseismological sound speed, compared to the standard model.

**Contribution orale présentée au workshop GONG 98 / SOHO 6 :  
« Consistent solar models including the  $^7\text{Li}$  and  $^3\text{He}$  constraints »**

**Traduction du résumé :**

Les améliorations apportées par l'héliosismologie montrent que la diffusion microscopique ne peut pas être négligée dans les modèles solaires. Actuellement la diffusion de l'hélium et des métaux est généralement introduite dans les modèles. Toutefois elle ne permet pas d'expliquer la diminution du lithium observée. Des mouvements macroscopiques sont nécessaires pour amener la matière de la base de la zone convective à sa zone de destruction nucléaire. De tels mouvements conduisent aussi à un meilleur accord entre la vitesse du son des modèles et celle obtenue par les inversions des modes sismiques. D'autre part, ils ne doivent pas ramener trop d'hélium 3 vers la zone convective, comme nous savons maintenant que le rapport  $^3\text{He}/^4\text{He}$  n'a pas changé de plus de 10% durant les trois derniers milliard d'années dans la zone convective du Soleil. Nous présentons ici nos nouveaux modèles solaires qui satisfont la contrainte sur l'hélium 3. Le fait que l'hélium 3 reste constant alors que le lithium diminue apporte une forte contrainte sur le coefficient de diffusion effectif permis à la base de la zone convective.

CONSISTENT SOLAR MODELS INCLUDING THE  ${}^7\text{Li}$  AND  ${}^3\text{He}$  CONSTRAINTS

Sylvie Vauclair and Olivier Richard  
 Laboratoire d’Astrophysique, Observatoire Midi-Pyrénées  
 14, Av. E. Belin, 31400 TOULOUSE, FRANCE

## ABSTRACT

Improvements induced by helioseismology show that microscopic diffusion cannot be neglected in solar models. Helium and metal diffusion is now generally introduced in the computations. They cannot however explain the observed lithium depletion. Macroscopic motions are needed to bring up to the convection zone the nuclearly depleted matter. Such motions also lead to a better agreement between the sound velocity in the model and that deduced from the inversion of seismic modes. On the other hand, they must not bring up too much  ${}^3\text{He}$ , as we now know that the  ${}^3\text{He}/{}^4\text{He}$  ratio cannot have changed by more than 10 percent during these last 3 Gyr. Here we present new consistent solar models in which the  ${}^3\text{He}$  constraint is satisfied. The fact that  ${}^3\text{He}$  must remain constant while  ${}^7\text{Li}$  must be depleted leads to strong constraints on the effective macroscopic diffusion coefficient allowed below the solar convection zone.

Key words: Sun : abundances; helioseismology, diffusion processes

## 1. SETTLING AND MIXING

The importance of helium and heavy element settling inside the Sun is now widely recognized. Solar models computed in the old “standard” way, in which the element settling is totally neglected, do not agree with the inversion of the seismic modes. The discrepancy is much reduced when element settling is introduced. This result has been obtained by many authors, in different ways (see Gough et al. (1996) and references therein).

For the first time, Turcotte et al. (1998) have consistently computed the radiative accelerations on the elements included in the OPAL opacities. They have found that, contrary to current belief, the effect of radiation can, in some cases, be as large as  $\cong 40\%$  that of gravity below the solar convective zone. This is important only for metals however, and not for helium. When the radiative accelerations are neglected, the abundances of most metals change by about  $\cong 7.5\%$  if complete ionization is assumed below the convective zone, and by  $\cong 8.5\%$  if detailed ionization rates

are computed. When the radiative accelerations are introduced, with detailed ionization, the results lie in-between.

Although the introduction of pure element settling in the solar models considerably improve the consistency with the seismic Sun, some discrepancies do remain, particularly below the convective zone where a “spike” appears in the sound velocity (Guzik 1998, Turck-Chièze et al. 1998). It has been shown that this behavior may be due to the helium gradient which would be too strong in case of pure settling. Mild macroscopic motions below the convection zone slightly decrease this gradient and helps reducing the discrepancy (Richard et al. 1996 - RVCD, Corbard et al. 1998). The helium profiles directly obtained from helioseismology (Basu 1997, Antia and Chitre 1997) show indeed a helium gradient smoother than the gradient obtained with pure settling.

## 2. LIGHT ELEMENT ABUNDANCES

The abundance determinations in the solar photosphere show that lithium has been depleted by a factor of about 140 compared to the protosolar value while beryllium is generally believed to be depleted by a factor 2. These values have widely been used to constraint the solar models (e.g. RVCD). However, while the lithium depletion factor seems well established, the beryllium value is still being discussed. Balachandran and Bell (1998) argue that the beryllium depletion is not real because of insufficient inclusion of continuous opacity in the abundance determination. Their new treatment leads to a solar value identical to the meteoritic value.

Observations of the  ${}^3\text{He}/{}^4\text{He}$  ratio in the solar wind and in the lunar rocks (Geiss 1993, Gloecker and Geiss 1996, Geiss and Gloecker 1998) show that this ratio may not have increased by more than  $\cong 10\%$  since 3 Gyr in the Sun, which is in contradiction with the results of RVCD.

While the occurrence of some mild mixing below the solar convection zone is needed to explain the lithium depletion and helps for the conciliation of the models with helioseismological constraints, the  ${}^3\text{He}/{}^4\text{He}$  observations put a strict constraint on its efficiency. The solar chemical composition appears as a powerful tool in order to produce consistent solar models.

## 3. CONSTRAINTS ON THE MIXING BELOW THE CONVECTION ZONE

In RVCD, a mild mixing below the convection zone, attributed to rotation-induced shears (Zahn 1992), was introduced. This mixing was supposed to be stopped at some depth due to a stabilizing mu-gradient. Such an assumption is necessary to prevent mixing in the nuclear core regions, otherwise we do not obtain the right sound velocity (Richard and Vauclair, 1997; Bahcall et al., 1997; Degl’Innocenti and Ricci, 1998). The best model presented in RVCD was obtained assuming a critical mu-gradient of  $4.10^{-13} \text{ cm}^{-1}$ , compatible with the order of magnitude deduced from Huppert and Spiegel 1977. In this model, lithium was depleted by a factor 140 and beryllium by about 2. On the other hand the  $^3\text{He}$  abundance increased too much in the convection zone compared to the recent determinations.

We now know that there may be a lithium depletion by a factor 3 in the pre-main sequence evolution, and that beryllium may not be depleted at all, which relaxes the constraints. The most stringent constraint is now given by the  $^3\text{He}$  determinations.

We have tried several parametrizations of mixing below the solar convection zone, which could reproduce both the  $^7\text{Li}$  and the  $^3\text{He}$  constraints. The only way to obtain such a result is to postulate a mild mixing, which would be efficient down to the lithium nuclear burning region but not too far below, to preserve the original  $^3\text{He}$  abundance. A mixing effect decreasing with time, as obtained with the rotation-induced shear hypothesis, helps satisfying the constraints, as the  $^3\text{He}$  peak itself builds up during the solar life.

Here we present results obtained with a similar prescription as in RVCD (rotation-induced mixing) in which the critical mu-gradient ( $\nabla\mu_c$ ) was allowed to vary between  $1.10^{-13}$  and  $5.10^{-13} \text{ cm}^{-1}$ .

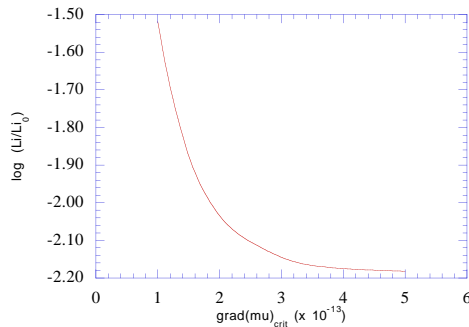


Figure 1. Lithium depletion at the solar age as a function of  $\nabla\mu_c$

Figure 1 shows the main-sequence lithium depletion obtained at the solar age as a function of  $\nabla\mu_c$ . If we take into account the depletion during the pre-main sequence, lithium has to be depleted by at least 30 during the main-sequence to account for the obser-

variations. From Figure 1,  $\nabla\mu_c$  must be larger than  $1.10^{-13} \text{ cm}^{-1}$ .

Figure 2 displays the  $^3\text{He}/^4\text{He}$  increase with time for several values of  $\nabla\mu_c$ . The observational constraints lead to  $\nabla\mu_c \leq 2.10^{-13} \text{ cm}^{-1}$ . We thus find that the observations of the light elements in the Sun may be accounted for with a rotation-induced mixing limited by a mu-gradient of  $(1.5 \pm 0.5).10^{-13} \text{ cm}^{-1}$ .

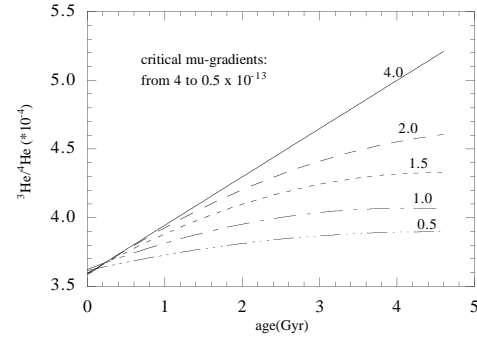


Figure 2.  $^3\text{He}/^4\text{He}$  variation with time for various  $\nabla\mu_c$  (in units of  $10^{-13} \text{ cm}^{-1}$ )

The corresponding shape of the effective diffusion coefficient is given in Figure 3. It is interesting to point out the similarity between this result and the order of magnitude of the diffusion coefficient needed to smooth out the spike in the sound velocity compared to the inversion of helioseismic modes (Morel et al., 1998).

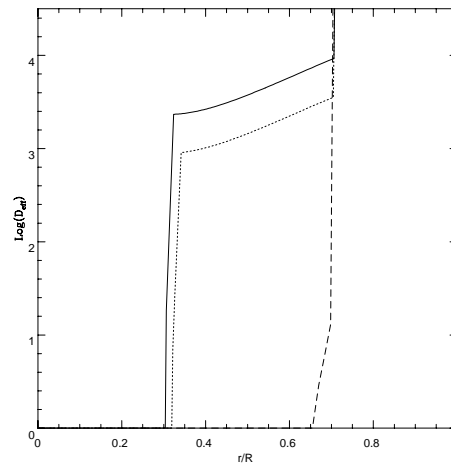


Figure 3. Effective diffusion coefficient at various ages for a model with  $\nabla\mu_c = 1.10^{-13}$ . The coefficient decreases rapidly with age (full line for .22 Gyr, short dashed line for .42 Gyr, and dashed line for 4.6 Gyr).

## 4. COMPARISON WITH OTHER STARS

The lithium abundance in the Sun may be compared to that observed in galactic clusters of known ages ( $\alpha$ Per: Balachandran et al., 1996; Pleiades: Soderblom et al., 1993a; UMaG: Soderblom et al., 1993b; Hyades: Thorburn et al., 1993; NGC752: Balachandran, 1995). Following the solar evolutionary track we may attribute an effective temperature and, from the observations, a lithium abundance for each age. Figure 4 displays the observed lithium variations with age and the theoretical ones obtained with  $\nabla\mu_c = 1$  and  $2.10^{-13} \text{ cm}^{-1}$ . We can see that the parametrization of the mixing below the convection zone, which best accounts for the solar light element abundances and helioseismology, also correctly reproduce the lithium abundance evolution with time.

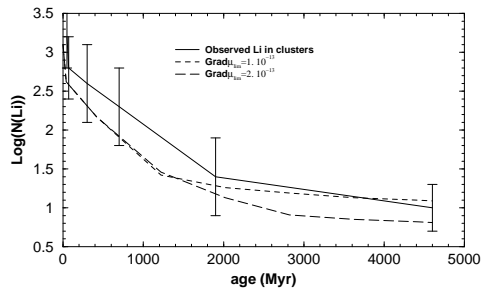


Figure 4. Lithium depletion with time in  $1M_{\odot}$  stars obtained from the observations of galactic clusters and comparison with the two theoretical models

## 5. SUMMARY

In summary the best solar models must include the effect of element settling, which represents an improvement on the physics, without any free parameter added. These models can be considered as the new “standard” models. They cannot however reproduce the  ${}^7\text{Li}$  depletion and they lead to a spike in the sound velocity, compared to the seismic Sun, just below the convective zone. These two observations suggest the presence of some mild mixing in this region of the internal Sun. Adding the constraint on the abundance of  ${}^3\text{He}$  as given by Geiss and Gloecker (1998) leads to a precise description of the allowed profile of the macroscopic diffusion coefficient below the convective zone. The result is consistent with the mixing needed to smooth out the spike in the sound velocity and it leads to a lithium abundance variation with time consistent with the observations of galactic clusters. This parametrized description can be taken as a challenge for the hydrodynamicists.

## REFERENCES

Antia, H.M., Chitre, S.M., 1997, *astro-ph/9710159*  
 Balachandran, S. 1995, *ApJ* **446**, 203

Balachandran, S., Lambert, D.L., Stauffer, J.R. 1996, *ApJ* **470**, 1243  
 Balachandran, S., Bell, R.A. 1998, preprint  
 Bahcall, J.N., Pinsonneault, M.H., Basu, S., Christensen-Dalsgaard, J. 1997, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 171  
 Basu, S. 1997, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **288**, 572  
 Corbard, T., Berthomieu, G., Provost, J., Blanc-Féraud, L. 1998, These Proceedings  
 Degl’Innocenti, S., Ricci, B. 1998, *Astroparticle Physics* **8**, 293  
 Geiss, J. 1993, *Origin and Evolution of the Elements*, ed. Prantzos, Vangioni-Flam & Cassé (Cambridge Univ. Press), **90**  
 Gloecker, G., Geiss, J. 1996, *Nature* **381**, 210  
 Geiss, J., Gloecker, G. 1998, *Space Sci. Rev.*, in press  
 Gough, D.O., Kosovichev, A.G., Toomre, J., Anderson, E., Antia, H.M., Basu, S., Chaboyer, B., Chitre, S.M., Christensen-Dalsgaard, J., Dziembowski, W.A., Eff-Darwich, A., Elliott, J.R., Giles, P.M., Goode, P.R., Guzik, J.A., Harvey, J.W., Hill, F., Leibacher, J.W., Monteiro, M.J.P.F.G., Richard, O., Sekii, T., Shibahashi, H., Takata, M., Thompson, M.J., Vauclair, S., Vorontsov, S.V. 1996, *Science* **272**, 1296  
 Guzik, J.A. 1998, These Proceedings  
 Hupper, H.E., Spiegel, E.A. 1977, *ApJ* **213**, 157  
 Morel, P., Provost, J., Berthomieu, G. 1998, These Proceedings  
 Richard, O., Vauclair, S., Charbonnel, C., Dziembowski, W.A. 1996, *A&A* **312**, 1000  
 Richard, O., Vauclair, S. 1997, *A&A* **322**, 671  
 Soderblom, D.R., Jones, B.F., Balachandran, S., Stauffer, J.R., Duncan, D.K., Fedele, S.B., Hudon, J.D. 1993a, *AJ* **106**, 1059  
 Soderblom, D.R., Pilachowski, C.A., Fedele, S.B., Jones, B.F. 1993b, *AJ* **105**, 2299  
 Thorburn, J.A., Hobbs, L.H., Deliyannis, C.P., Pinsonneault, M.H. 1993, *ApJ* **415**, 150  
 Turck-Chièze, S., Basu, S., Berthomieu, G., Bonanno, A., Brun, A.S., Christensen-Dalsgaard, J., Gabriel, M., Morel, P., Provost, J., Turcotte, S., and the GOLF team 1998, These Proceedings  
 Turcotte, S., Richer, J., Michaud, G., Iglesias, C.A., Rogers, F.J. 1998, *ApJ*, in press  
 Vauclair, S. 1998, *Space Sci. Rev.*, in press  
 Vauclair, S., Vauclair, G. 1982, *ARA&A* **20**, 37  
 Zahn, J.P. 1992, *A&A* **265**, 115

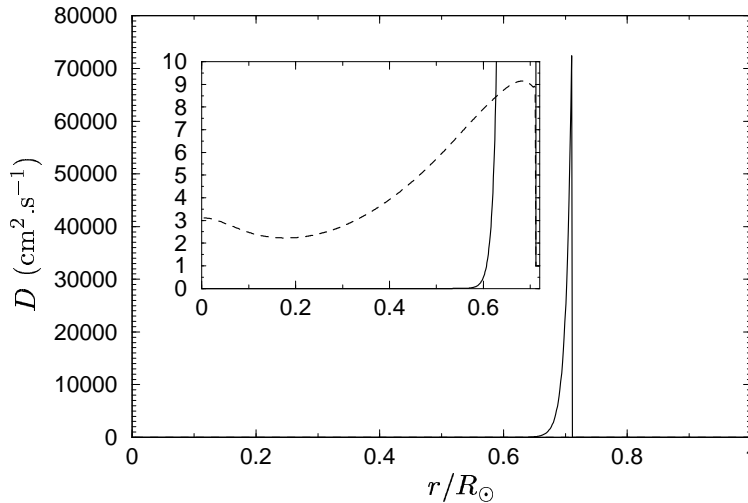


FIG. 4.3 – Profil des coefficients de diffusion effectif (trait plein) et de diffusion microscopique (tiret).

#### 4.2.5 Convection pénétrative et tachocline

D’autres processus de mélanges macroscopiques sont susceptibles de se produire à la base de la zone convective tels que la convection pénétrative ou le mélange dû à la tachocline (zone de transition entre les zones de rotation différentielle et de rotation rigide). Ces deux processus peuvent être représentés par un coefficient de diffusion effective de la même forme. En effet Freytag et al. (1996) ont utilisé des modèles hydrodynamiques de la convection stellaire pour étudier les effets de la convection pénétrative et obtiennent un coefficient de diffusion de type exponentiel pour reproduire la convection pénétrative résultant des simulations. Dans le cas du mélange induit par la tachocline (Spiegel & Zahn 1992), Brun et al. (1998b) obtiennent un coefficient de diffusion effectif de forme exponentielle.

Dans nos modèles nous avons étudié les effets d’un mélange de type exponentiel à la base de la zone convective. Le coefficient de diffusion effectif utilisé est de la forme :

$$D_{eff} = D_{bzc} \exp\left(\ln 2 \frac{r - r_{bzc}}{\Delta}\right) \quad (4.14)$$

où  $D_{bzc}$  est la valeur de  $D_{eff}$  à la base de la zone convective,  $r_{bzc}$  est le rayon à la base de la zone convective et  $\Delta$  est la largeur à mi-hauteur.

Comme précédemment pour contraindre les paramètres libres  $D_{bzc}$  et  $\Delta$  nous utilisons les contraintes chimiques et dans ce cas plus particulièrement la diminution du lithium. En tenant compte de la diminution d’un facteur 3 du lithium lors de la pré-séquence principale on peut reproduire la diminution du lithium dans le modèle avec  $D_{bzc} \simeq 72500 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\Delta \simeq 0.0065 R_{\odot}$  (figure 4.3). La figure 4.4 montre la comparaison entre ce modèle et le modèle sismique. La variation temporelle du lithium est illustré dans la figure 4.5. Il apparaît qu’un tel mélange permet de reproduire la diminution du lithium mais ne donne pas un accord satisfaisant dans la

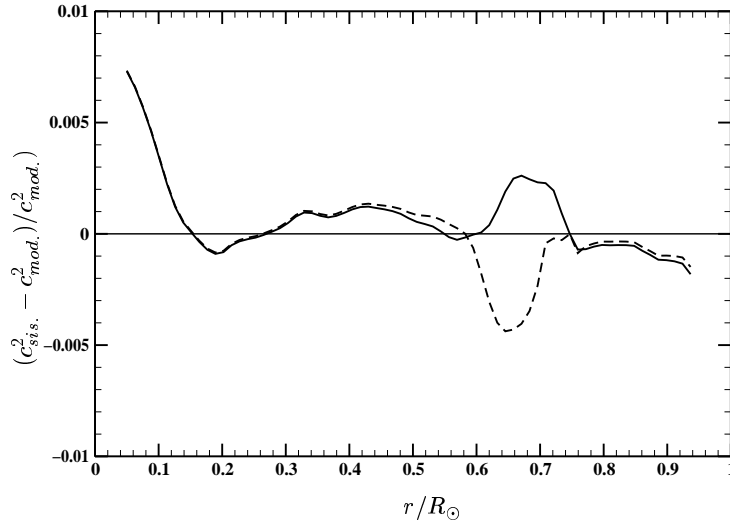


FIG. 4.4 – Comparaison entre la vitesse du son  $c$  du modèle sismique ( $c_{sis.}^2$ ) et celle de nos modèles ( $c_{mod.}^2$ ) : trait plein pour le modèle MOD93 (section 3.8) et tiret pour le modèle avec un mélange de type exponentiel à la base de la zone convective.

comparaison avec le modèle sismique.

### 4.3 Perte de masse

La perte de masse permet aussi d’obtenir une diminution du lithium car elle engendre à la fois un flux de matière et une restructuration de l’étoile due au changement de masse. Les effets de la perte de masse sur la structure interne du Soleil ont été testés par Guzik & Cox (1995) et par Morel et al. (1997). Il apparaît que pour garder l’accord avec l’héliosismologie la perte de masse doit se produire dans les premiers 200 millions d’années ce qui donne des taux de pertes de masse de l’ordre de  $5 \times 10^{-10} M_{\odot} \cdot \text{an}^{-1}$  pour une masse initiale de  $1.1 M_{\odot}$  (compatible avec les résultats de Whitmire et al. 1995).

Nous avons aussi testé l’effet de la perte de masse dans le Soleil en utilisant la paramétrisation de Guzik & Cox (1995) pour une forte perte de masse :

$$\begin{cases} \dot{M} = -5 \times 10^{-10} M_{\odot} \cdot \text{an}^{-1} & \text{si } t < 200 \times 10^6 \text{ ans} \\ \dot{M} = 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (4.15)$$

La figure 4.6 montre la variation du lithium au cours du temps pour le modèle avec la perte de masse. On voit clairement que le lithium est détruit pendant les 200 premier millions d’années puis qu’il n’est plus détruit lorsque la perte de masse s’arrête. Cette brusque diminution du lithium n’est pas compatible avec les résultats des observations dans les amas.

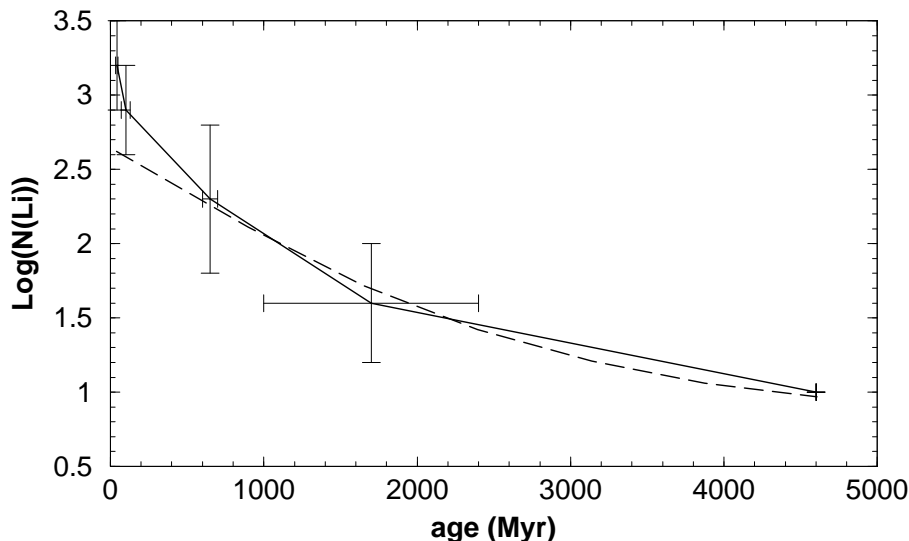


FIG. 4.5 – Variation temporelle du lithium dans le modèle avec le mélange exponentiel (tiret) et celle obtenue à partir des amas (trait plein).

#### 4.4 Inhomogénéités de température à la base de la zone convective

Comme nous l’avons vu dans la section sur le mélange induit par la rotation, les modèles permettent de reproduire la diminution du lithium et restent en accord avec l’héliosismologie. Dans cette partie je présente l’étude que nous avons effectuée concernant l’influence d’inhomogénéités de température à la base de la zone convective sur l’abondance observée de lithium (Vauclair & Richard 1998).

Pour ce faire nous avons utilisé un modèle identique au modèle 3 de Richard et al. (1996) dans lequel nous avons supposé que la température à la base de la zone convective était la température moyenne alors que la température réelle pouvait subir des variations horizontales. La valeur relative des fluctuations de température  $\Delta T/T$  étant prise comme paramètre ajustable pour reproduire la diminution de lithium. Nous avons aussi supposé que ces fluctuations n’affectaient pas la structure du modèle. En effet les modifications qu’elles engendrent sur l’état d’ionisation affectent le poids moléculaire moyen et la vitesse du son de moins de  $10^{-6}$  en valeur relative.

Le seul effet important de ces fluctuations de température se produit sur les taux de réactions nucléaires, dû au variation non linéaire avec la température. Des fluctuations de  $\pm \Delta T$  autour de la valeur moyenne de la température entraînent de grandes variations du taux de réaction par rapport au taux obtenu pour la température moyenne.

Le taux de destruction du lithium  $\lambda(T)$  est défini comme :

$$\frac{dn(\text{Li})}{dt} = n(\text{Li}) n(\text{H}) \lambda(T) \quad (4.16)$$



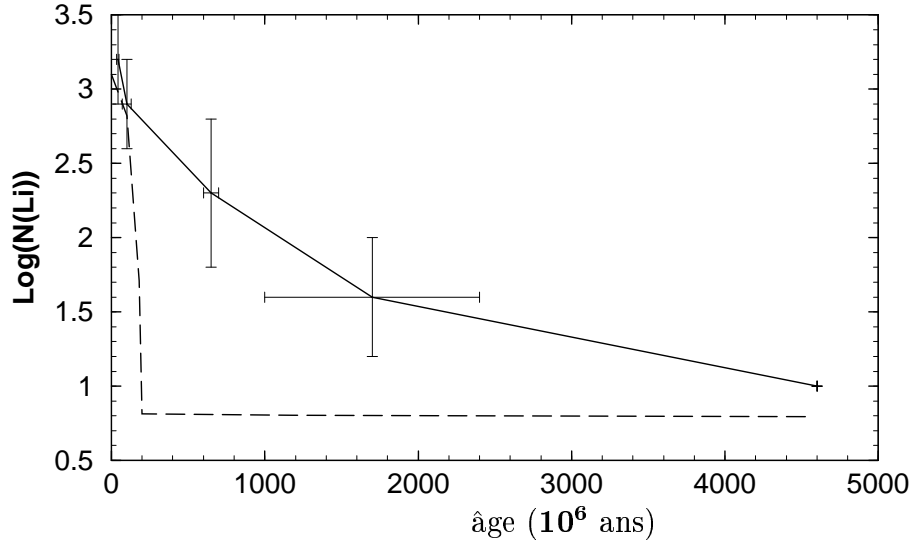


FIG. 4.6 – Variation de l’abondance en lithium dans les amas en trait plein (voir la section 2.2 et le tableau 2.2) et celle du modèle avec perte de masse en trait tiret

où  $n(\text{Li})$  et  $n(\text{H})$  sont respectivement la densité numérique du lithium et de l’hydrogène.

Comme dans Richard et al. (1996) nous avons :

$$\lambda(T) = \lambda_{71} - \lambda_{72} + \lambda_{73} \quad (4.17)$$

avec

$$\lambda_{71} = \frac{1.096 \cdot 10^9}{T_9^{2/3}} \exp\left(\frac{-8.472}{T_9^{1/3}}\right) \quad (4.18)$$

$$\lambda_{72} = \frac{4.83 \cdot 10^8}{T_9^{3/2}} \exp\left[\frac{-8.472}{T_9^{1/3}}(1 + 0.759 T_9)^{1/3}\right] \frac{T_9^{5/6}}{(1 + 0.759 T_9)^{5/6}} \quad (4.19)$$

$$\lambda_{73} = \frac{1.060 \cdot 10^{10}}{T_9^{3/2}} \exp\left(\frac{-30.442}{T_9}\right) \quad (4.20)$$

où  $T_9$  est la température exprimée en  $10^9$  K.

L’influence des fluctuations de température se produit dans les exponentielles des taux de réactions. Nous avons imité cet effet, en première approximation, en supposant que les fluctuations de température se comportent comme une fonction créneau, et nous avons moyenné le taux de réaction entre les deux valeurs extrêmes :

$$\langle \lambda(T) \rangle = \frac{\lambda(T + \Delta T) + \lambda(T - \Delta T)}{2} \quad (4.21)$$

De plus nous avons supposé que les fluctuations diminuaient linéairement sous la zone convective et devenaient nulles à une échelle de hauteur de pression :

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_r = \frac{1}{l} \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{bzc} (r - r_{bzc}) + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{bzc} \quad (4.22)$$

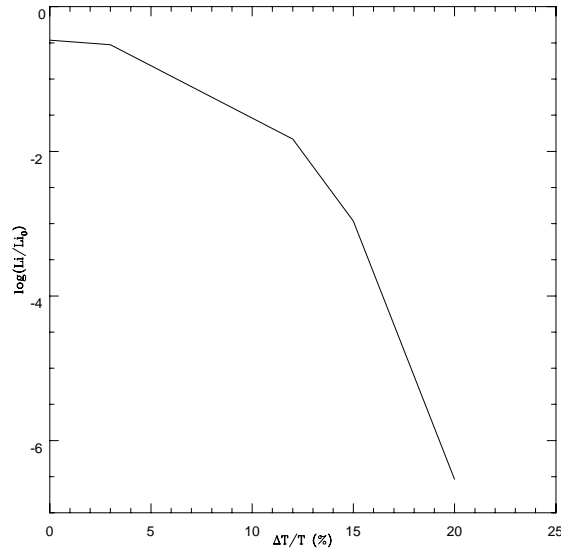


FIG. 4.7 – Diminution théorique du lithium tracée en une fonction de l’amplitude relative des inhomogénéités de température à la base de la zone convective

où  $(\frac{\Delta T}{T})_{bzc}$  représente la fluctuation de température à la base de la zone convective,  $r_{bzc}$  le rayon à la base de la zone convective,  $r$  le rayon de la couche de température  $T$  et  $l$  la longueur de mélange.

La diminution de lithium à la surface du Soleil est présentée dans la figure 4.7 en fonction de l’amplitude relative des fluctuations à la base de la zone convective  $(\frac{\Delta T}{T})_{bzc}$ . Le résultat est très sensible à l’amplitude des fluctuations. Le lithium est détruit de plus de deux ordres de grandeur si  $(\frac{\Delta T}{T})_{bzc}$  est plus grand que 10%.

La figure 4.8 montre les taux de réactions nucléaires pour la destruction du lithium en fonction du rayon pour différentes valeurs des fluctuations. On voit l’importante augmentation des taux dû aux fluctuations.

Sur la figure 4.9 sont représentés les profils d’abondance en lithium à différents âges pour des fluctuations de 12.5%. Dans ce cas le lithium est diminué par un facteur 240 dans le modèle solaire.

Le beryllium n’est pas affecté par ces fluctuations car elles n’atteignent pas sa zone de destruction nucléaire. L’accord avec l’héliosismologie n’est pas affecté et est donc identique au modèle 3.

Nous avons vu qu’il fallait des fluctuations de température supérieure à 10% pour reproduire l’abondance de lithium observé dans le Soleil. De telles fluctuations sont plus importantes que celles soupçonnées d’exister à la base de la zone convective solaire, en raison du mouvement des cellules convectives.

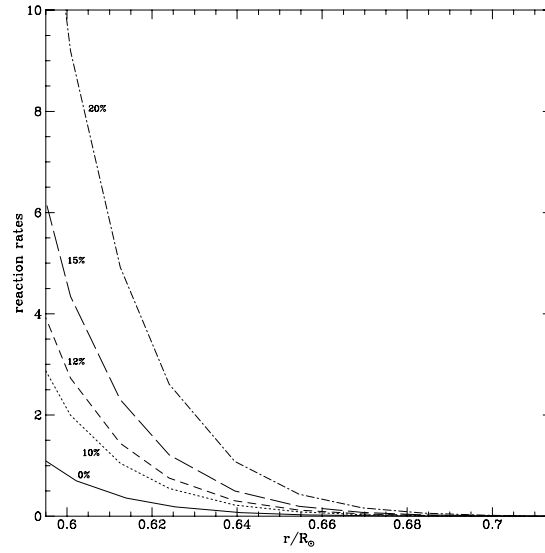


FIG. 4.8 – Taux de destruction ( $\lambda X_H \rho$  en  $10^{-15} \text{g.s}^{-1}$ ) du lithium en fonction du rayon, calculé pour différentes valeurs de l’amplitude des fluctuations de température

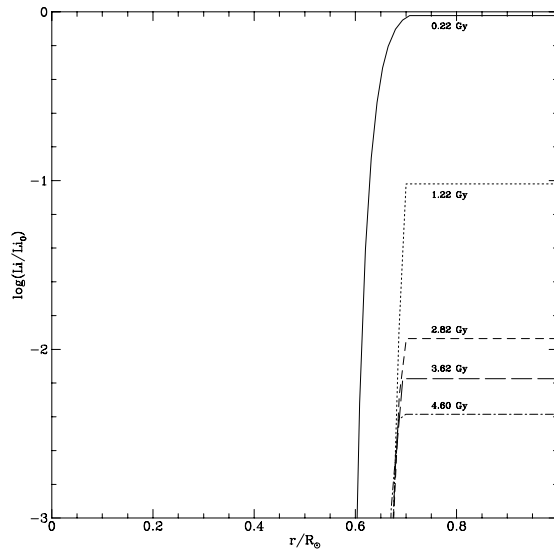


FIG. 4.9 – Profil d’abondance du lithium à différents âges, calculé pour le modèle avec des relatives fluctuations de 12.5%.

# Conclusions et perspectives

Nous avons étudié durant ces trois années de thèse la physique « standard » (équation d'état, diffusion microscopique, ...) et la physique non « standard » (perte de masse, mélange induit par la rotation, ...) afin d'obtenir des modèles solaires qui reproduisent au mieux les contraintes apportées par les observations. Plusieurs résultats importants ont été obtenus.

- ★ Dans un premier temps, nous avons étudié les effets du mélange induit par la rotation proposé par Zahn (1992) en tenant compte du fait qu'un tel mélange pouvait être arrêté par un gradient de poids moléculaire comme l'avaient proposés Huppert & Spiegel (1977). Nous avons ainsi montré, dans Richard et al. (1996), que ce mélange dans la zone radiative explique à la fois la diminution du lithium photosphérique observée et la variation temporelle du lithium obtenue à partir des observations des amas galactiques, tout en améliorant l'accord des modèles avec le modèle sismique. Ce qui a été confirmé par Basu (1997) puis par Antia & Chitre (1998).
- ★ Nous avons testé les effets de la perte de masse qui est contrainte par l'héliosismologie (Guzik & Cox 1995; Morel et al. 1997) mais aussi par des études menées par des planétologues (Whitmire et al. 1995). Ces contraintes convergentes nécessitent que la perte de masse se produise dans les premières centaines de millions d'années de vie du Soleil, ce qui entraîne une forte diminution du lithium, à cette période là, en contradiction avec les observations des amas galactiques.
- ★ Nous avons aussi testé l'influence que pourrait avoir des inhomogénéités de température à la base de la zone convective. Nous avons montré que les fluctuations de température devaient atteindre plus de 10% pour pouvoir expliquer la diminution du lithium. De telles fluctuations semblent irréalistes.
- ★ Un autre résultat important nous a été apporté par l'étude d'un mélange ce produisant au cœur du Soleil. Nous avons montré, dans Richard & Vauclair (1997), qu'un tel mélange de type Gaussien ne pouvait à la fois expliquer les flux de neutrinos observés et conserver l'accord avec le modèle sismique. Ce résultat a été aussi obtenu en parallèle par Bahcall et al. (1997).
- ★ L'étude que nous avons menée sur la précision dans la détermination héliosismique de la fraction de masse d'hélium 4 dans la zone convective du Soleil nous a permis d'obtenir les résultats suivant (Richard et al. 1998a):
  - \*  $Y_{\odot} = 0.248$ , proche de la valeur obtenue par Basu (1998) qui est de

0.2488, en utilisant l'équation d'état OPAL. L'incertitude que nous obtenons est de 0.002 et est due aux incertitudes dans les inversions (qui sont dominantes) et aux fréquences utilisées pour ces inversions.

★ En utilisant l'équation d'état MHD nous trouvons une valeur de 0.242 alors que Basu (1998) obtient 0.246.

★ D'autre part nous nous sommes intéressés aux incertitudes obtenues avec les nouvelles déterminations de la luminosité, du rayon et de l'âge du Soleil. Nous avons constaté que ces incertitudes ont une influence négligeable dans la comparaison des modèles avec le modèle sismique. Cependant l'incertitude sur la détermination de l'âge du Soleil en utilisant l'héliosismologie est très importante comparé à celle, très précise, obtenue à partir de l'âge météoritique.

★ Nous avons vu que l'héliosismologie nous permettait de contraindre la physique introduite dans les modèles (telle que l'équation d'état, les opacités, ...). Cependant il faut garder à l'esprit que l'on ne peut pas rejeter des améliorations de la physique à cause d'une détérioration de la comparaison entre le modèle et le modèle sismique. Nous avons aussi montré l'importance de la composition chimique initiale des modèles qui avec la physique récente permet d'obtenir un accord, entre les modèles et le modèle sismique, meilleur que 0.3% dans la zone radiative, pour ceux calculés en utilisant uniquement physique « standard ».

★ Nous avons aussi vu l'importance des contraintes (héliosismique, chimique et nucléaire) sur les modèles solaires.

Les contraintes nucléaires, données par les flux de neutrinos observés, nous apportent de précieuses informations sur le cœur du Soleil où il semble que l'écart entre les modèles et les observations proviennent essentiellement de la physique des particules.

De même les contraintes chimiques nous ont permis de montrer qu'un processus de mélange est présent dans la zone radiative du soleil.

Il apparaît que le meilleur modèle actuel est obtenu en utilisant l'équation d'état OPAL, les opacités OPAL96, les taux de réaction nucléaires de Caughlan & Fowler (1988), qu'il inclut la diffusion microscopique ainsi qu'un mélange faible dans la zone convective et qu'il reproduit à l'âge du Soleil la composition chimique photosphérique de Grevesse & Noels (1993). Toutefois ce modèle ne reproduit pas les flux de neutrinos observés.

Ces résultats illustrent bien la puissance de l'héliosismologie alliée à la modélisation stellaire.

Il reste encore beaucoup de travail pour améliorer notre vision cohérente du Soleil. Tout d'abord comme nous l'avons vu plusieurs phénomènes physiques non « standard » produisent une diminution du lithium. Nous savons qu'il y a une perte de masse faible dans la Soleil et que des processus de mélange sont aussi présent dans la zone radiative. La modélisation de ces processus de mélange doit encore être amélioré en tenant compte des contraintes chimiques.

De plus il faut aussi s'intéresser aux autres étoiles présentant des anomalies d'abondance car ces dernières nous apportent des contraintes supplémentaires et

permettent aussi de tester la validité des processus physiques.

Cependant une question reste toujours en suspend : le Soleil est-il une étoile comme les autres ou est-ce une étoile particulière ?

La réponse à cette question nous sera peut-être apportée par l'astérosismologie, qui se développe avec des projets spatiaux tels que COROT.

La physique stellaire est actuellement en plein essor grâce aux avancées de l'héliologie et de l'astérosismologie et aux progrès de la modélisation. Elle bénéficie de plus de la précision de plus en plus grande des abondances des éléments chimiques dans le Soleil et les étoiles. Cet essor va continuer dans les prochaines années avec l'amélioration de l'informatique, et par conséquent de la modélisation, et le développement des expériences spatiales.

Et pour ceux qui se demandent encore à quoi sert ce genre de travail : n'oubliez pas que la matière dont vous êtes constitués a été produite par les étoiles et que sans elles vous ne seriez pas ici à vous poser ces questions !



# Annexe A

## Quelques valeurs numériques concernant les modèles solaires

Le tableau suivant présente la physique de notre meilleur modèle standard incluant la diffusion microscopique, correspondant au modèle MOD93 comparé au modèle sismique dans la figure 3.10, et différentes valeurs concernant la composition chimique, les flux de neutrinos et les conditions physiques au centre et à la base de la zone convective.

Modèle	$L$	$R$	Âge	Opacités <sup>a</sup>
initial	( $10^{33}$ ergs.s <sup>-1</sup> )	( $10^{10}$ cm)	( $10^9$ ans)	
ZAMS	3.85193	6.95627	4.6	OPAL96

Équation <sup>b</sup> d'état	Taux de réactions <sup>c</sup> nucléaires	Composition chimique <sup>d</sup> initiale
OPAL	CF88	MOD93

(a) : voir section 3.6 — (b) : voir section 3.5 — (c) : voir section 3.4.3 — (d) : voir section 3.8

$\alpha$	$Y_0$	$Z_0$ Initial	$(\frac{Z}{X})_0$	$Y_s$	$Z_s$ Final	$(\frac{Z}{X})_s$	$r_{bcz}$ ( $R_\odot$ )	$T_{bcz}$ ( $10^6$ K)
1.7949	0.2714	0.0189	0.0267	0.2429	0.0181	0.0244	0.7107	2.2115

$T_c$ ( $10^8$ K)	$\rho_c$ (g.cm <sup>-3</sup> )	$P_c$ ( $10^{17}$ dyn.cm <sup>-2</sup> )	$X_c$	$Y_c$	$(\Phi\sigma)_{37Cl}$ (SNU)	$(\Phi\sigma)_{71Ga}$ (SNU)	$\Phi(^8B)$ ( $10^{10}$ cm <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> )
1.5586	152.77	2.3193	0.3362	0.6438	7.67	128.40	0.00057

- Une série évolutive comprend 318 modèles pour arriver à  $4.6 \times 10^9$  ans
- Pour chaque modèle on effectue environs 3 pas de temps nucléaire pour obtenir la structure du modèle
- On calcule alors les variations de composition chimique dues à la diffusion en effectuant environs 70 pas de temps de diffusion



## Annexe A. Quelques valeurs numériques concernant les modèles solaires

- Les modèles sont constitués d'environ 800 couches.

# Annexe B

## Article publié dans Science 272

« The seismic structure of the sun »

### **Traduction du résumé :**

Les données GONG (Global Oscillation Network Group) révèlent que la structure interne du Soleil peut être bien représentée par un modèle standard calibré. Cependant, immédiatement sous la zone convective et au bord du cœur nucléaire, la variation de la vitesse du son est un peu plus douce dans le Soleil que dans les modèles. Ceci pourrait être la conséquence d'une inhomogénéité chimique trop forte dans les modèles, peut être due à un manque de précision de la modélisation de la diffusion gravitationnelle ou à l'omission de mouvements macroscopiques qui seraient présent dans le Soleil. On peut inférer, à partir d'une connaissance précise de la structure du Soleil, la physique qui le contrôle ; par exemple, à travers l'opacité, ou l'équation d'état. Ces inférences peuvent être utilisées autre part en astrophysique.

THE SEISMIC STRUCTURE OF THE SUN

*D.O. Gough, A.G. Kosovichev, J. Toomre, E. Anderson, H.M. Antia, S. Basu, B. Chaboyer, S.M. Chitre, J. Christensen-Dalsgaard, W.A. Dziembowski, A. Eff-Darwich, J.R. Elliott, P.M. Giles, P.R. Goode, J.A. Guzik, J.W. Harvey, F. Hill, J.W. Leibacher, M.J.P.F.G. Monteiro, O. Richard, T. Sekii, H. Shibahashi, M. Takata, M.J. Thompson, S. Vauclair and S.V. Vorontsov*

*Abstract* – GONG data reveal that the internal structure of the Sun can be well represented by a calibrated standard model. However, immediately beneath the convection zone and at the edge of the energy-generating core the sound-speed variation is somewhat smoother in the Sun than it is in the model. This could be a consequence of chemical inhomogeneity being too severe in the model, owing perhaps to inaccurate modelling of gravitational settling or to neglected macroscopic motion that may be present in the Sun. Accurate knowledge of the Sun's structure enables inferences to be made about the physics that controls the Sun, for example through the opacity, the equation of state or wave motion. Those inferences can then be used elsewhere in astrophysics.

---

<sup>1</sup>D.O. Gough, J.R. Elliott, T. Sekii: Institute of Astronomy, University of Cambridge; A.G. Kosovichev, P. Giles: HEPL, Stanford University; J. Toomre: JILA, University of Colorado; E. Anderson, J.W. Harvey, F. Hill, J.W. Leibacher: National Solar Observatory, Tucson; H.M. Antia, S.M. Chitre: Tata Institute for Fundamental Research, Bombay; S. Basu, J. Christensen-Dalsgaard: Theoretical Astrophysics Centre, Aarhus University; B. Chaboyer: Canadian Institute for Theoretical Astrophysics, Toronto; W.A. Dziembowski, Copernicus Astronomical Center, Warsaw; A. Eff-Darwich: Instituto Astrofisico de Canarias, Tenerife; P.R. Goode: New Jersey Institute of Technology, Newark; J. Guzik: Los Alamos National Laboratory, New Mexico; M.J.P.F.G. Monteiro: University of Oporto; O. Richard, S. Vauclair: Observatoire Midi-Pyrenees; H. Shibahashi, M. Takata: Department of Astronomy, University of Tokyo; M.J. Thompson, S.V. Vorontsov: Queen Mary and Westfield College, University of London.

One of the principal purposes of the GONG project is to determine the internal structure of the Sun. Helioseismology is used to model the stratification of density  $\rho$ , the internal stress that supports the star, and the relation between them when they are adiabatically perturbed (1). In the absence of a magnetic field or small-scale turbulence, the stress is the gradient of the pressure  $p$ . Then perturbations of  $\rho$  and  $p$  are related via the adiabatic exponent  $\gamma_1$  (2). The variation of these quantities with position is determined by seismology, and constitutes what we call the seismic structure of the Sun. One must use properties of theoretical solar models for inferring other quantities such as temperature (2). Theoretical models also provide a reference against which to compare the seismic model.

The traditional manner of inferring the structure of the Sun is to calibrate a theoretical model: that is to say, to adjust a set of uncertain parameters which specify the model until a best fit with the data is obtained. Difficulty arises when the model cannot be adjusted to fit all the data within the estimated measurement errors, indicating a fundamental error in the model. Various techniques, known as inverse methods, consider a wider class of possible structures by relaxing some of the basic assumptions upon which the theoretical models are based (3). By so doing, one can come closer to explaining what the data might imply, and hence obtain a representation of the Sun that is in better accord with those data.

Many inverse methods seek differences between certain aspects of the Sun and a theoretical model. If the structure of the model is close to that of the Sun, the equations relating the two can be simplified by linearization. By a sequence of refinements it has been possible to produce a model which in many respects is very close to the Sun (4). That model now serves both as a reference with which to compare the Sun, and as a guide to interpreting the differences we find.

Analyzing the frequencies of modes of oscillation is one means whereby the structure of the Sun can be inferred. One can also study the shapes of the oscillating disturbances

– the so-called eigenfunctions – or one can investigate over a limited region of the Sun the propagation of the component waves which constitute those eigenfunctions (5). Such studies are best suited to the investigation of lateral inhomogeneity. Nevertheless, most of the inferences to date have been obtained from global mode frequencies, and it is accordingly to these that we restrict attention in this article.

### Seismic waves

Acoustic seismic waves propagate through the solar interior along ray paths almost in planes through the center of the Sun (Fig. 1). After reflection at the surface, the waves propagate downwards, to be refracted by the sound-speed gradient back to the surface where they are reflected again. Notice that the paths are not closed, so that after many reflections the waves sample essentially the entire region outside a central zone of avoidance, and therefore provide a global diagnostic of that region. Indeed, if there were no attenuation by dissipation, a single ray would fill the accessible space. The waves of particular interest are those whose frequencies are such that on neighboring paths the waves are essentially in phase. This leads to constructive interference, and the formation of a resonant mode of oscillation with a well defined frequency (6).

For a wave to be observed, the disturbance must pass from the interior of the Sun to the photosphere through the ill-understood surface layers which influence the oscillation frequencies in a significant but partly unknown way. That influence must be eliminated from the data.

The detailed geometry of the ray paths, and consequently the values of the resonant frequencies, are determined principally by the variation of the sound speed  $c$  through the Sun (7). Broadly speaking, the extent to which any given region of the Sun influences the resonant frequency is proportional to the time spent in that region by an imaginary point traveling with the wave (8). This is represented in Figs. 1A and 1B by the intensity of the brown and red shading. The shading is dense near the surface of the star, where the wave speed is low. It is also relatively dense near the edge of the zone of avoidance, for

although the wave speed is relatively high, the ray density is large: the imaginary point passes through the region many times. Indeed, the ray density is formally infinite at the boundary of the zone of avoidance, to which the rays are tangent. This boundary is called a caustic.

The difference between a measured oscillation frequency of the Sun and that of a corresponding mode of a theoretical model can be represented as an average of the difference between the solar and the model wave speeds (9). However, the implications of such averages are not easy to comprehend, because they are made up of contributions from many parts of the Sun. What we would prefer is to be told the actual sound-speed difference  $\delta c$  at each point, but that is not possible. What is possible, however, is to be given a sequence of averages each of which is localized in space. To understand how such an average is obtained, consider the difference between the frequencies of the modes in Fig. 1A and 1B: that provides an average of the sound-speed difference weighted with the difference between the corresponding weight functions (Fig. 1C). The new weight function is greatest in the vicinity of the caustics, there having been substantial cancellation elsewhere. Thus the frequency difference provides localized information about the sound speed. A sequence of such averages can be thought of as a blurred representation of the function  $\delta c$ . More highly localized averages can be obtained by taking appropriate combinations of a greater number of frequencies. With enough modes one can eliminate the contribution from the surface, whereas in Fig. 1C cancellation was far from complete. Some examples of well localized weight functions are displayed in Fig. 2A.

One can instead represent the sound-speed difference in terms of a predetermined set of functions, choosing the linear combination that best fits the data. Since emphasis here is on reproducing the data, the method is akin to the calibration of solar models, except that here the representation is not constrained to satisfy the equations that govern those models. Moreover, the number of adjustable parameters is typically much greater. Interestingly, when one has a wide range of modes such as those in the GONG dataset,

the value of the resulting function at any point is an average of the actual sound-speed difference which is usually localized in the vicinity of that point (10).

A third technique has the advantage of not relying on a reference model (Fig. 2B). If the structure of the Sun were known above the caustic of the shallower mode, the frequency of that mode could be calculated. The structure of the more deeply penetrating wave could be calculated above the caustic of the shallower mode, and its frequency would then be calculable in terms of the unknown sound speed in the thin region between the two caustics. A measurement of the frequency would therefore determine the sound speed averaged over this thin region. From the frequencies of a succession of modes that penetrate more and more deeply, it is evident that in principle one can build up a picture of the sound-speed variation (11).

### Inferences from GONG data

In Fig. 3 we plot the square of the sound speed in the Sun, obtained from GONG data, and also that in a reference model (12). The agreement is close. Only near the base of the convection zone and in the energy-generating core are there discrepancies. The former is evident in the enlargement of the vicinity of the base of the convection zone (inset Fig. 3).

The adiabatic stratification in the Sun appears to penetrate about  $0.002R$  more deeply than in the model (13) (here  $R$  is the radius of the Sun). Also, the values of  $u = p/\rho$ , and consequently  $c^2$  (2), converge quickly at greater depths (Fig. 4). Part of the difference in  $u$  between Sun and model could be associated simply with the fact that the model convection zone may be too shallow. However, the excess  $u$  caused by that property is of lesser magnitude than that in the figure, and extends more deeply (3). The small positive value of  $\delta u/u$  between  $0.3R$  and  $0.6R$  might therefore be accounted for in this way, but the relatively sharp bump between  $0.6R$  and  $0.7R$  cannot. The decrease in  $u$  locally may indicate that immediately beneath the convection zone the accumulation of helium, which augments the mean molecular mass  $\mu$  (2), has been overestimated in the reference model.

This is consistent with recent computations (14–17), some results of which are compared with the Sun in Fig. 5. The bump could in principle have been produced by an opacity error that drops abruptly to zero immediately beneath the base of the convection zone. However, such a fortuitous occurrence is unlikely.

The discrepancy in the core is the third prominent feature. Most secure is the negative region of  $\delta u/u$  between about  $0.1R$  and  $0.2R$ , which implies that the variation of  $u$  itself is flatter than in the model (cf Fig. 3). Once again this would be a symptom of there being too steep a composition gradient in the model, which here has been produced by nuclear reactions. The density inversion (Fig. 4) is consistent with this interpretation: the regions of relatively steep positive slope in  $\delta\rho/\rho$  in the core and immediately beneath the convection zone imply that the magnitude of the (negative) gradient of density is too high in the model (18).

A certain amount of turbulent mixing reduces the discrepancy immediately beneath the convection zone (Fig. 5A,B). We have constructed models with somewhat different helium redistribution which reduce the discrepancy further, yet that does not imply that mixing is necessarily the solution. A model which also well represents the Sun near the base of the convection zone (Fig. 5C) has no such mixing, but instead suffers mass loss during the course of its evolution. The upward flow of material into the convection zone, and subsequently out into the solar wind, counteracts the settling of helium, leaving a smaller helium concentration between  $0.6R$  and  $0.7R$ . We estimate the helium abundance to be  $0.248 \pm 0.005$  in the convection zone where the stratification is adiabatic. This value is similar to previous estimates (19).

Deviations from spherical symmetry split the degeneracy of the mode frequencies with respect to  $m$ . The component of the splitting that is odd in  $m$  is produced by those aspects of rotation that depend on odd powers of the angular velocity  $\Omega$ , the even component by everything else (including phenomena such as centrifugal force which depend on even powers of  $\Omega$ , and which cannot distinguish east from west). Here we consider only the



even splitting, leaving discussion of rotation to (20).

We determine the component of the deviation from spherical symmetry that is axisymmetric about the rotation axis. Only processes that produce a deviation in the wave propagation speed, or a distortion to the shape of the cavity within which the waves propagate, influence the frequencies of the modes. Wave speed can be modified by sound-speed deviations and by a magnetic field, or the wave can be advected by the component of large-scale material flow in meridional planes (21). Unfortunately one cannot distinguish between them by seismic frequency analysis alone (22). Therefore we simply express the outcome of our analysis as a scalar wave-speed variation. Inversions are carried out in a manner analogous to those for the spherically averaged structure, except that now the latitudinal dependence of the waves must be taken into account (23).

The only significant aspherical variation is confined to a shallow layer immediately beneath the solar surface (Fig. 6). This finding is consistent with previous inferences (24). Moreover, the variation of wave speed with latitude is very similar to the brightness temperature of the solar atmosphere, which confirms previous findings (24). The wave-speed variation (Fig. 7) is less well resolved than the spherically averaged sound speed (Figs. 3–5), and is therefore less reliable. The reason is that it depends on very small frequency differences, which are of order  $0.1\mu\text{Hz}$ , rather than on the full mode frequencies. As GONG runs for longer, the results will improve. However, the precision will be limited by the structural changes that the Sun will undergo in the course of the solar cycle.

There is no significant asphericity (Figs. 6 and 7) beneath  $r \simeq 0.9R$ . Therefore, we find no evidence for a deeply seated thermal perturbation or magnetic field. If there were a field concentrated in a layer of thickness  $0.1R$ , say, as some dynamo theorists have postulated (25), we could set an upper bound to its average intensity over that layer of a few tens Tesla. That bound is not inconsistent with dynamo models (25).

We have made two suggestions that might possibly account for the discrepancies in the sound speed: mass loss and material mixing. Both require that material now in the

convection zone has previously been at higher temperature. That could have caused the light chemical elements lithium and beryllium to have been partially destroyed by nuclear reactions. Both possibilities have been proposed before to explain the observed Li and Be deficiencies in the atmospheres of the Sun and other similar stars; now we have evidence that one of them might be correct. The model in Fig. 5C has lost 10% of its mass, most of it in the first  $10^9$  years., and it reproduces the observed lithium deficiency in the solar photosphere. However, there are also plausible mechanisms for material mixing, including weak convective overshooting (26), nonlinear wave transport (27), rotationally induced shear turbulence (28) and Ekman circulation (29). To distinguish the different possibilities will require a more highly resolved picture of the transition at the base of the convection zone (30), including the shear in the angular velocity (20).

The discrepancy in the energy-generating core might also be a symptom of macroscopic motion, which transports the products of the nuclear reactions from their sites of production. That would modify the neutrino emission rates, and thereby change the status of the solar neutrino problem, despite evidence that at least part of the problem lies in elementary-particle physics (32). It would also lengthen the life expectancy of the Sun, by replenishing spent hydrogen fuel. The implications are far reaching: for example, if other stars behave similarly, the conflict between the age estimates of globular clusters and some lesser age estimates of the Universe would be exacerbated. Such motion would also transport angular momentum. It would therefore leave a signature in the variation of angular velocity in the core.

## References and notes

1. Except in the very surface layers of the Sun, the characteristic cooling time is much longer than the periods of the seismic waves, so the wave motion is essentially adiabatic. Near the surface the Sun is highly turbulent, and is not well understood.
2. The adiabatic exponent  $\gamma_1$  is the thermodynamic quantity  $(\partial \ln p / \partial \ln \rho)_s$ , the partial derivative being taken at constant specific entropy  $s$ . It determines the so-called sound speed  $c$  according to  $c^2 = \gamma_1 u$ , where  $u = p/\rho$ . For a perfect gas, which provides a guide to the equation of state of solar material,  $u = T/\mu$ , where  $\mu$  is the mean ‘molecular’ mass of the material (i.e. mean mass per particle - atom or ion - measured in atomic units). Since chemical composition, and therefore  $\mu$ , are not well determined in the Sun, to infer  $T$  one must consider the balance of thermal energy production against energy transport, neither of which are reliably understood, particularly the latter. In Figs. 4 and 5 we display relative differences in  $u$ ; except in the ionization zones of hydrogen and helium near the surface of the Sun ( $r \gtrsim 0.95R$ ),  $\gamma_1 \simeq 5/3$ , and  $\delta u/u \simeq \delta c^2/c^2$ .
3. D.O. Gough, *Solar Phys.* **100**, 65 (1985); A.G. Kosovichev, *Bull. Crimean Astrophys. Obs.* **75**, 36 (1986); D.O. Gough, and A.G. Kosovichev, *Inside the Sun* (Proc. IAU Colloq. 121, G. Berthomieu and M. Cribier, eds. Kluwer, Dordrecht) p.327 (1990); D.O. Gough and M.J. Thompson, *Solar interior and atmosphere.* (A.N. Cox, W.C. Livingston and M. Matthews, eds. Tucson, AZ, University of Arizona Press), 519 (1991); W.A. Dziembowski, A.A. Pamjatnykh and R. Sienkiewicz, *Mon. Not. Roy. astron. Soc.* **249**, 602, (1991).
4. J. Christensen-Dalsgaard and W. Däppen *et al.*, 1996, *Science*, this issue
5. J. Patron, F. Hill, E.J. Rhodes, Jr., S.G. Korzennik and A. Cacciani, *Astrophys. J.* **455**, 746 (1995); T.L. Duvall, Jr., S. D’Silva, S.M. Jefferies, J.W. Harvey and J. Schou, *Nature* **379**, 235 (1996); A.G. Kosovichev, *Astrophys. J. Lett.* **461**, L55 (1996).

6. J.B. Keller and S.I. Rubinow, *Ann. Phys.* **9**, 24 (1960); D.O. Gough, *Astrophysical Fluid Dynamics*. (J.P. Zahn and J. Zinn-Justin, eds. North-Holland, Amsterdam), 399 (1993). In a sphere, like the Sun, the phases of waves on adjacent planes containing the center of the sphere must also be in appropriate relative phase for resonance to occur.
7. Frequencies depend also on the variation of density, but to a lesser extent than they do on sound speed (see note 9).
8. That time is inversely proportional to the magnitude of the group velocity and is directly proportional to the relative density of ray-path segments.
9. Because resonance results from constructive phase coherence, it is the phase speed that is relevant here. In a uniform fluid, the group and phase speeds have the same value,  $c$ , which satisfies  $c^2 = \gamma_1 p / \rho$ . But in a medium stratified under gravity, like the Sun, density gradients cause the two speeds to differ. A magnetic field would also contribute to the difference. Here the term ‘wave speed’ always means phase speed, which is higher than the magnitude of the group velocity. Except near the surface of the Sun, both the phase and the group speeds are almost the same, and accordingly in the text we shall often use the term ‘sound speed’ to denote phase speed, because it is more familiar. When comparing the Sun with models we use  $c^2$  or  $u = p/\rho$  rather than  $c$  because, being proportional to  $T/\mu$ , it is more readily comprehended.
10. J. Christensen-Dalsgaard, J. Schou, and M.J. Thompson, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **242**, 353 (1990).
11. This technique has been carried out only using asymptotic representations of the resonance conditions, e.g. J. Christensen-Dalsgaard *et al.*, *Nature* **315**, 378 (1985).
12. As discussed earlier in the text, what the seismic data give us are averages of the structure variables. The difference  $\delta\nu_i$  between the frequencies of a mode (labeled  $i$ ) of the Sun and of the reference model can be written  $\delta\nu_i = \int K_{c^2, \gamma_1}^i \delta \ln c^2 \, dr +$

$\int K_{\gamma_1, c^2}^i \delta \ln \gamma_1 dr$ . The data kernels  $K_{c^2, \gamma_1}^i$  and  $K_{\gamma_1, c^2}^i$  are functions of the eigenfunctions of oscillation, and examples of the former are represented in brown and red in Fig. 1. Localized averages of the relative differences in  $c^2$  are obtained from  $\int \mathcal{K}_{c^2, \gamma_1} \delta \ln c^2 dr = \Sigma \alpha_i \delta \nu_i - \int \mathcal{K}_{\gamma_1, c^2} \delta \ln \gamma_1 dr$  by neglecting the second term on the right-hand side, where the averaging kernel  $\mathcal{K}_{c^2, \gamma_1}(r; r_0) = \Sigma \alpha_i(r_0) K_{c^2, \gamma_1}^i$  is concentrated near  $r = r_0$  and  $\mathcal{K}_{\gamma_1, c^2} = \Sigma \alpha_i K_{\gamma_1, c^2}^i$  is everywhere small. References 3 explain how the coefficients  $\alpha_i$  are computed. Examples of averaging kernels are displayed in Fig. 2A. The subsidiary variable to  $c^2$ , here  $\gamma_1$ , could be any function of the seismic structure that is independent of  $c^2$ , such as  $\rho$ . We have carried out inversions for several different pairs of variables, to confirm the robustness of our inferences against contamination by the neglected integral of the second variable. The averaging kernels can be dangerously large very near the surface, where all the data kernels are large, particularly when least-squares frequency-fitting techniques are used to construct  $\alpha_i$ . Indeed, it is partly for this reason that naive fitting of raw frequencies can be misleading. To obviate contamination by surface effects one subtracts from all  $\delta \nu_i$  an arbitrary function of  $\nu_i$  divided by the modal inertia, which is the functional form of any surface uncertainty (see ref. 3).

13. That sets the radius of the base of the adiabatically stratified part of the convection zone at about  $0.709R$ . This value is somewhat less than the value  $0.713R$  obtained previously by J. Christensen-Dalsgaard, D.O. Gough and M.J. Thompson, *Astrophys. J.* **378**, 413 (1991), and by A.G. Kosovichev and A.V. Fedorova, *Sov. Astron.* **35**, 507 (1991). A study of the transition at the base of the convection zone (see note 30) is consistent with the new result, although a repeat of the analysis using reference models of Richard *et al.* (15) yields  $0.714R$ .
14. S. Basu and H.M. Antia, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **269**, 1137 (1995).
15. O. Richard *et al.*, *Astron. Astrophys.*, in press.
16. B. Chaboyer, P. Demarque and H.M. Pinsonneault, *Astrophys. J.* **441**, 865 (1995).

17. J.A. Guzik, A.N Cox, *Astrophys. J.* **448**, 905 (1995).
18. In the cores of solar models the values of  $p$  and  $T$  are more robust than  $\rho$  and  $\mu$ : the reason is that pressure supports the weight of the star, which is determined principally by the mass which is a known quantity, and the nuclear reaction rates, which are observationally constrained by the Sun's radiative luminosity, are sensitive to  $T$ . Therefore, since  $\gamma_1 \simeq 5/3$  in the essentially fully ionized core,  $\delta \ln c^2 \propto -\delta \ln \rho \propto -\delta \ln \mu$  : a local increase in  $c^2$  tends to be associated with corresponding relative decreases in  $\rho$  and  $\mu$ .
19. W.A. Dziembowski, A.A. Pamjatnykh and R. Sienkiewicz, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **249**, 602 (1991); W. Däppen *et al.*, *Challenges to theories of the structure of moderate-mass stars*, (D.O. Gough and J. Toomre, eds. Springer, Heidelberg), *Lecture Notes in Physics* **388**, 111 (1991); A.G. Kosovichev *et al.*, *Mon. Not. Roy. astron. Soc.* **259**, 536 (1992); H.M. Antia, S. and Basu, *Astrophys. J.* **426**, 801 (1994); A.G. Kosovichev, *Element Abundance Variations in the Sun and Heliosphere*. (The Thirtieth COSPAR Scientific Assembly, Hamburg, Germany) *Advances in Space Res.* **15**, no.7, p. 95 (1995).
20. M.J. Thompson and J. Toomre, *et al.*, 1996, *Science*, this issue
21. The wave is also advected by azimuthal flow, but the axisymmetric component of that is rotation, which is addressed in (20).
22. E.G. Zweibel and D.O Gough, in *Proc. Fourth SOHO Workshop: Helioseismology* (J.T. Hoeksema *et al.*, eds., ESA SP-379, Noordwijk) **2**, 37 (1995). Although one cannot distinguish between possible sources of asphericity by analyzing frequencies alone, the different anisotropies of the wave-speed perturbations from different sources renders it possible in principle to distinguish them by their eigenfunctions. That might become reality in future, using techniques such as time-distance seismology.
23. The averaging kernels in this case are quadratic in the horizontal structure of

the eigenfunctions. They are therefore even functions of latitude, and are sensitive only to the north-south symmetric component of the asphericity. It requires some knowledge of the form of the eigenfunctions to determine the asymmetric component.

24. D.O. Gough and M.J. Thompson, *Advances in helio- and asteroseismology*, J. Christensen-Dalsgaard and S. Frandsen, Eds. (Reidel, Dordrecht, 1988), pp. 175–180; J.R. Kuhn, *Astrophys. J. Lett.* **331**, L131 (1988); P.R. Goode and J.R. Kuhn, *Astrophys. J.* **356**, 310 (1990); K.G. Libbrecht and M.F. Woodard, *Astrophys. J.* **402**, L77 (1993).
25. E.A. Spiegel and N.O. Weiss, *Nature* **287**, 616 (1980); C.A. Morrow, P.A. Gilman and E.E. DeLuca, in *Seismology of the Sun and Sun-like stars* (ed V.Domingo and E.J. Rolfe, ESA SP-286, Noordwijk), p.109 (1988); S. Moreno-Insertis, in *Sunspots: Theory and Observation*, (ed. J.H. Thomas and N.O. Weiss, Kluwer, Dordrecht).
26. D.O. Gough and T. Sekii, *Astron. Soc. Pac. Conf. Ser.* **42**, 177 (1993); M.J.P.F.G. Monteiro, J. Christensen-Dalsgaard and M.J. Thompson, *ibid*, p.253; A.G. Kosovichev, *Advances in Solar Physics*, (G. Belvedere, M. Rodono and G.M. Simnett, eds. Proc. of the Seventh European Meeting on Solar Physics, Springer-Verlag), *Lecture Notes in Physics* **432**, 47 (1994); S. Basu and H.M. Antia, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **269**, 1137 (1995).
27. D.O. Gough, *Solar-terrestrial relationships and the Earth environment in the last millenia*, ( G. Castagnoli-Cini, ed., *Italiana Fisica*, Bologna), p.90 (1988); E. Knobloch and W.J. Merryfield, *Astrophys. J.* **401**, 196 (1992).
28. J.-P.Zahn, *Astron. Astrophys.* **265**, 115 (1992)
29. E.A. Spiegel and J.-P. Zahn, *Astron. Astrophys.* **265**, 106 (1992)
30. We have investigated the structure of the transition between the convection zone and the radiative interior by first considering how mode frequency varies with the phase difference between the surface of the Sun and the base of the convection zone,

after having filtered out surface effects, and then comparing it with theoretical models (31). The signature of the transition oscillates with phase, in step with the eigenfunctions, with an amplitude which is smaller than that of the reference model, confirming that, if spherical, the transition is smoother than that of the model. The apparent smoothness might have come about because what has been observed is actually the spherical average of an aspherical structure. We note that adiabatic convective overshooting is likely to increase the amplitude; therefore if such overshooting occurs in the Sun the physical discrepancy is actually greater than it appears at first sight. There is some indication that the amplitude of the oscillatory signal varies with the ratio  $m/l$  of azimuthal order to degree. This suggests that the structure of the lower boundary layer of the convection zone might vary with latitude. Although at present this is no more than a hint, it points to an exciting direction of research with further long-term seismic data.

31. M.J.P.F.G. Monteiro and M.J. Thompson, *Astron. Astrophys.* **283**, 247 (1994), J. Christensen-Dalsgaard, M.J.P.F.G. Monteiro and M.J. Thompson, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **276**, 283 (1995); I.W. Roxburgh and S.V. Vorontsov, *ibid.* **268**, 880 (1994); S. Basu, H.M. Antia and D. Narasimha, *ibid.* **267**, 207 (1994).
32. J.N. Bahcall and H.A. Bethe, *Phys. Rev.* **D47**, 1298 (1993)
33. This work utilizes data obtained by the Global Oscillation Network Group (GONG) project, managed by the National Solar Observatory, a Division of the National Optical Astronomy Observatories, which is operated by AURA, Inc. under a cooperative agreement with the National Science Foundation. The data were acquired by instruments operated by the Big Bear Solar Observatory, High Altitude Observatory, Learmonth Solar Observatory, Udaipur Solar Observatory, Instituto de Astrofísica de Canarias, and Cerro Tololo Interamerican Observatory. We acknowledge financial support from the UK Particle Physics and Astronomy Research Council, the National Science Foundation, the National Aeronautics and Space



Administration and Danmarks Grundforskningsfond.

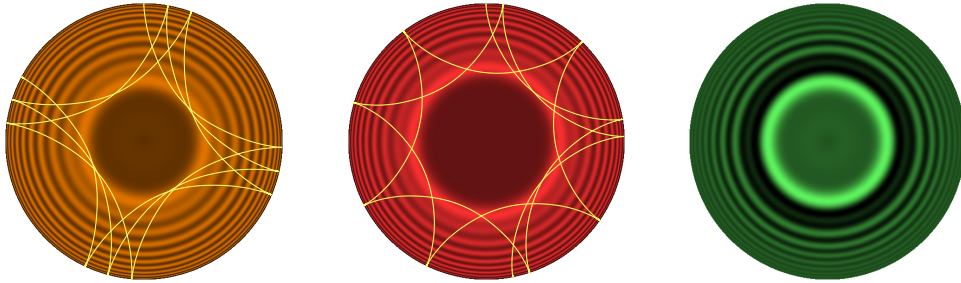


Figure 1: The first two images depict acoustic ray paths for modes with  $n = 20$ ,  $l = 1$  and  $n = 20$ ,  $l = 2$ , which have similar frequencies, but penetrate to different depths. The extent to which the structure of the Sun influences their frequencies is represented by the intensity of the brown and red shading. The third image is the result of subtracting the red from the brown, the green intensity representing the sensitivity to the frequency difference. Notice that the greatest intensity is in the region between the lower limits (caustics) the two ray paths in A and B.

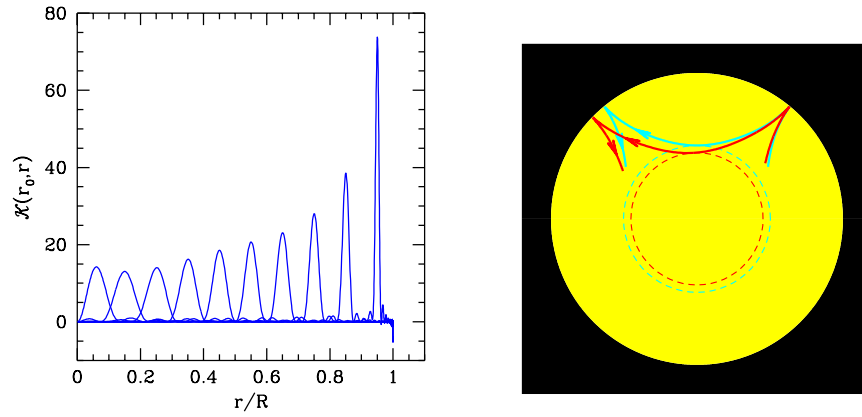


Figure 2: A Localized averaging kernels, which weight averages of sound-speed differences between the Sun and a theoretical reference model. B Portions of the ray paths depicted in Figs. 1 A (blue) and B (red). The dotted circles are the corresponding caustics.

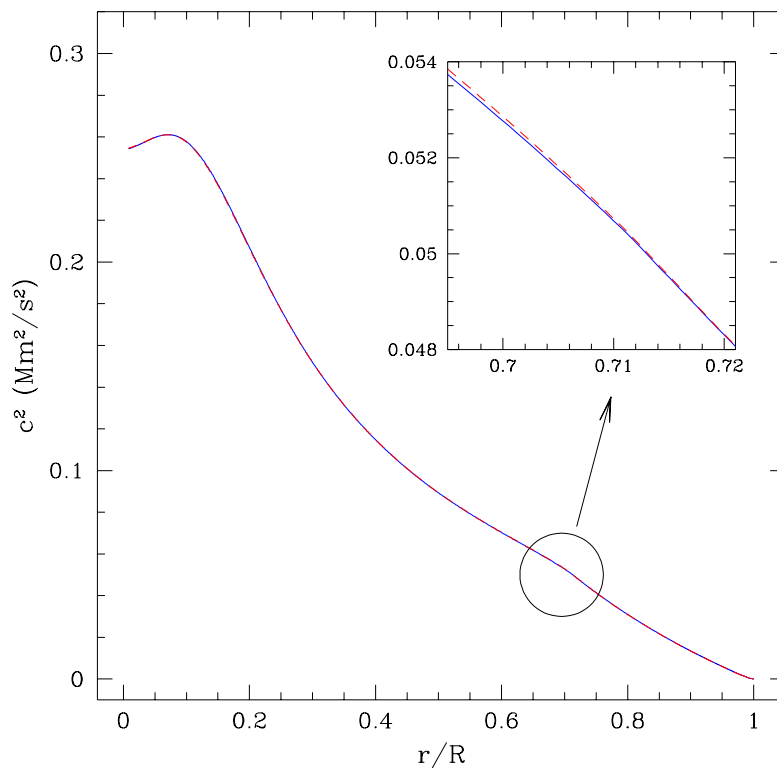


Figure 3: The dashed curve is the square of the spherically averaged sound speed in the Sun. The solid curve corresponds to a standard theoretical model. The magnitudes of the slopes of the curves are lower immediately beneath the convection zone, where the temperature gradient is too small to drive the instability. It is evident from the inset that the convectively unstable region of relatively high slope extends somewhat more deeply into the Sun than it does in the model.

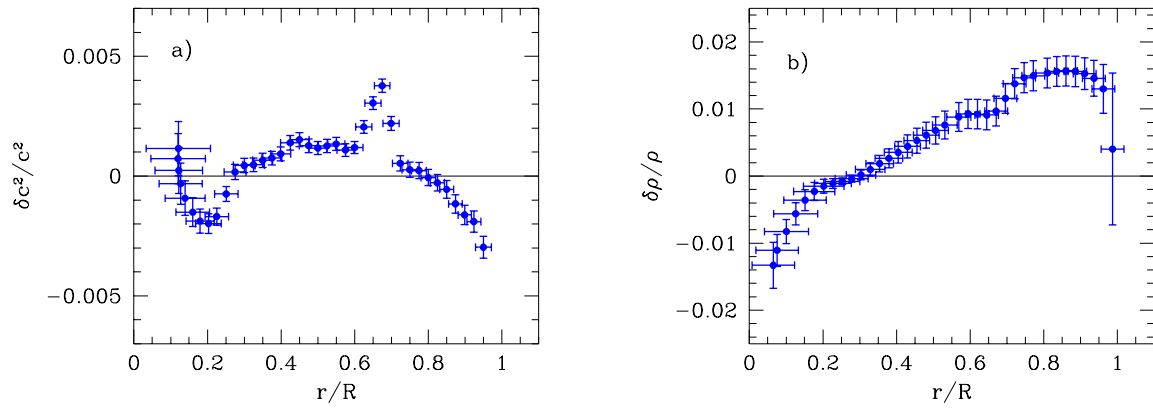


Figure 4: Relative differences  $\delta u/u$  and  $\delta \rho/\rho$  between  $u = p/\rho$  and the density in the Sun and the standard model with gravitational settling of helium and heavy elements (3).

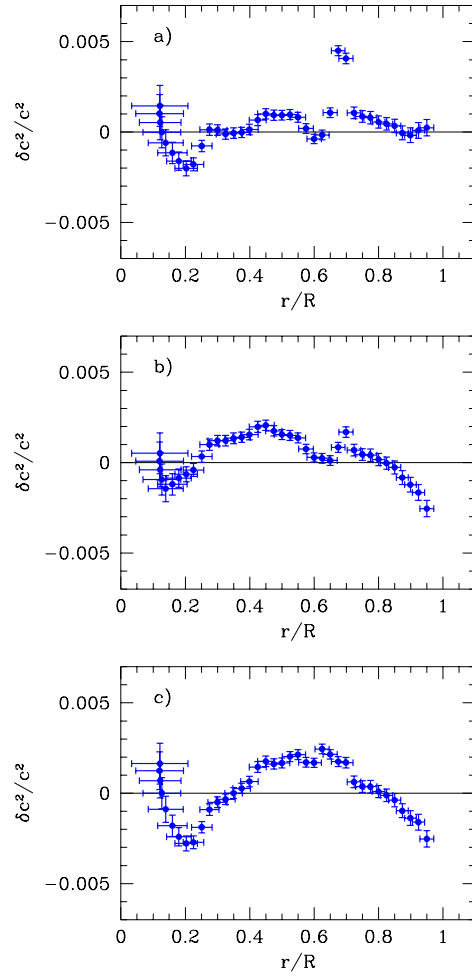


Figure 5: Relative differences  $\delta u/u$  between  $u$  in the Sun and in various theoretical models. The theoretical models are A a model with weak mixing (15), presumed to be generated by rotationally induced turbulence; B a similarly mixed model (16); C a model with mass loss (17); In order to produce a homogeneous comparison, the inversions are of the frequency differences:  $\nu_{\odot} - \nu_s - (\nu_m - \nu_0)$ , where  $\nu_{\odot}$  are solar frequencies,  $\nu_s$  are the frequencies of the standard solar model used in Fig. 4, and  $\nu_m$  and  $\nu_0$  are frequencies computed with the same computer code with and without mixing (or mass loss) respectively. Thus they represent the effect incorporating mixing (or mass loss) into the reference model used in Fig. 4.

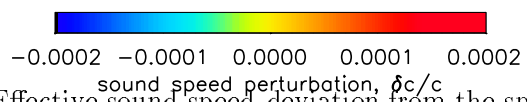
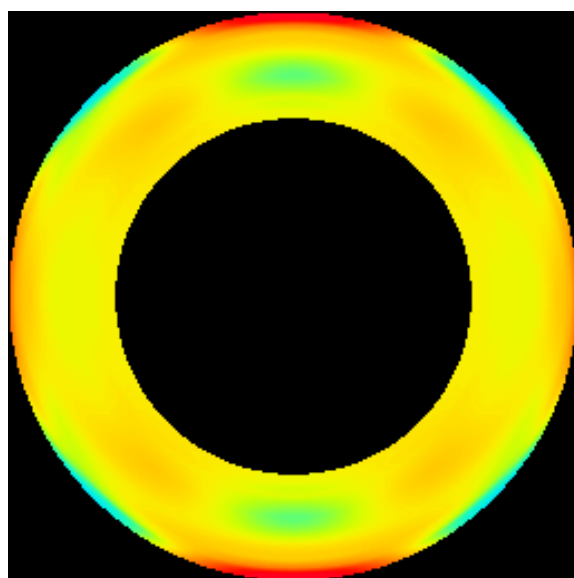


Figure 6: Effective sound-speed deviation from the spherical average.

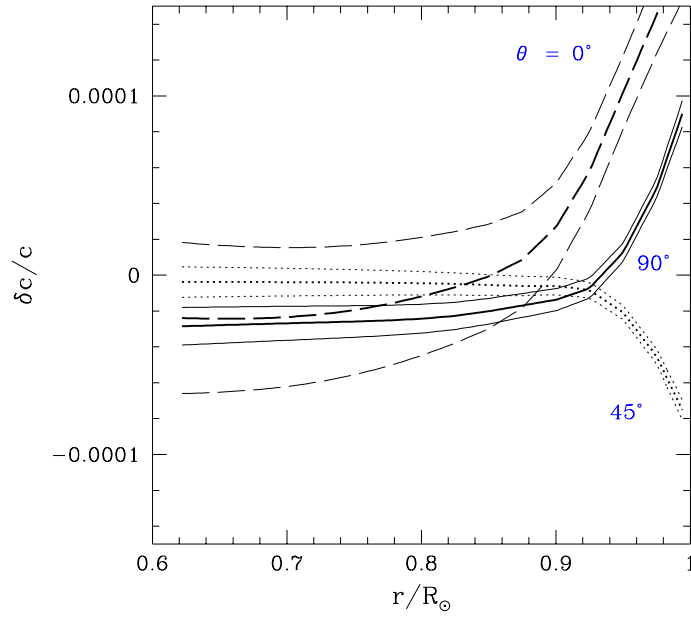


Figure 7: Relative sound-speed deviation from the spherical average, plotted against radius, at the equator (continuous curve), latitude  $45^\circ$  (dotted) and the poles (dashed).





# Annexe C

## Article paru dans Solar Physics 182

« On the prediction of maximum amplitude for solar cycles using geomagnetic precursors »

La prévision de l'activité solaire permet dans le cas de la prévision journalière d'estimer différents indices géomagnétiques (qui reflètent les perturbations qu'engendre l'activité solaire sur le champs magnétique terrestre) ainsi que le flux solaire à 10 cm. Ces estimations et les données collectées sont ensuite utilisées pour le calcul d'orbites des satellites d'observation de la terre dans les centres de maintient à poste mais aussi dans certains cas pour la validation de données scientifiques, lors de lancement de satellite ou pour la recherche d'anomalies à bord de satellite. La prévision de l'amplitude du cycle solaire suivant est utilisés dans le cadre de la programmation d'envoi de sonde spatiale. J'ai pu travailler dans le domaine de l'activité solaire pendant mon séjour au sein de l'équipe du centre de prévision de l'activité solaire et géomagnétique de l'observatoire de Paris-Meudon.

### **Traduction du résumé :**

Les méthodes utilisant les précurseurs pour la prévision de l'amplitude du cycle solaire fournissent la plus fiable indication de la taille du cycle suivant, des années à l'avance. Dans cet article, nous évaluons plusieurs des méthodes utilisant les précurseurs géomagnétiques déjà développées et quelques nouvelles avec des régressions à variable simple et à variables multiples. La nouvelle méthode utilisant les précurseurs est basée sur l'amplitude maximum des indices géomagnétiques qui depuis le cycle 12 a toujours eu lieu durant la portion déclinante du cycle, d'habitude plusieurs années avant le minimum du cycle. Ces différentes techniques des précurseurs sont appliquées au cycle 23, conduisant à une prévision de son amplitude maximum d'environ  $168 \pm 15$ (rms) vers 1999-2000.

# ON THE PREDICTION OF MAXIMUM AMPLITUDE FOR SOLAR CYCLES USING GEOMAGNETIC PRECURSORS

P. LANTOS and O. RICHARD<sup>†</sup>

*Observatoire de Paris-Meudon, 92195 Meudon, France*

(Received August 1997, revised March 1998)

## **Abstract.**

Precursor methods for the prediction of maximum amplitude of the solar cycle have previously been found to provide the most reliable indication for the size of the following cycle, years in advance. In this paper, we evaluate several of the previously used geomagnetic precursor methods and some new ones, both as single-variate and multivariate regressions. The newer precursor methods are based on the size of the geomagnetic index maximum, which, since cycle 12, has always occurred during the declining portion of the solar cycle, usually several years before subsequent cycle minimum. These various precursor techniques are then applied to cycle 23, yielding the prediction that its maximum amplitude should be about  $168 \pm 15$  (rms), peaking sometime in 1999-2000

## **1. Introduction**

In 1966, Ohl noticed a high correlation to exist between the geomagnetic activity cycle minimum and the maximum amplitude of the following sunspot cycle (Ohl, 1966). This behaviour suggests the existence of a “precursor” relationship active in sunspot cycles. Furthermore, a few years later, he showed that the level of geomagnetic activity during the last years of a sunspot cycle also is well correlated against the amplitude of the following cycle (Ohl, 1968, 1971, 1976, Ohl and Ohl, 1986). During the last years of a cycle, the geomagnetic activity results from recurrent storms, fast solar winds, and coronal holes (Ohl, 1971, Svalgaard, 1977, Legrand and Simon, 1981). Ohl’s results have been interpreted as suggesting the notion of the “extended cycle” (e.g. Wilson, 1994), a concept now widely accepted, in which the sunspot cycle actually begins several years before new cycle minimum, near maximum of the old cycle.

In addition to methods to extrapolate the evolution of the current cycle (e.g. McNish and Lincoln, 1949, Waldmeier, 1968, Wilson, 1990b, Lantos, 1990, Macpherson, 1993, Fessant et al., 1996), many authors have proposed methods for the prediction of size of the next sunspot

---

<sup>†</sup> Now at Observatoire de Midi-Pyrénées, UMR 5572, 31400 Toulouse, France



cycle (see comprehensive analysis by Denkmayr, 1993 and summaries for cycle 23 by Obridko, 1995 and Kane, 1997). Comparisons (Brown and Simon, 1986; Kunches, 1993) for the two last cycles (21 and 22) show those methods based on observed precursors to perform globally the best and they are the methods retained for operational purpose (Jocelyn et al., 1997). In addition to geomagnetic activity, a number of direct precursors have been tested (Schatten et al., 1978, Layden et al., 1991, Schatten and Pesnell, 1993, Schatten, Myers and Sofia, 1996 and Bravo and Stewart, 1997), but, possibly due to difficulties of precise measurements, their correlation with  $RI_{max}$  is lower than with geomagnetic precursors (Layden et al., 1991). In addition to linear regression analysis, neural networks have been used to predict the next solar cycle (Calvo et al., 1995, Tian, 1996).

The purpose of this study is to compare various methods for the prediction of maximum amplitude of the solar cycle, especially those based on geomagnetic activity indices. This last group of methods, despite wide differences of epoch taken into account, gives highly coherent results. We are using these techniques to estimate the likely size of cycle 23. Our analyse indicates that cycle 23 will have a maximum amplitude (in terms of smoothed monthly mean sunspot number) that will be larger than average, very likely, comparable or larger than that seen for cycle 22. Specifically, our analysis yields the prediction that cycle 23 should have a maximum amplitude measuring about  $168 \pm 15$  (rms) and that it should peak sometime in 1999-2000.

## 2. Methods for Predicting Maximum Amplitude

The current methods of geomagnetic precursor prediction differ from that originally proposed by Ohl, although they closely follow from his results. Many associate the size of the cycle in terms of maximum sunspot number with geomagnetic precursors observed during the minimum of the cycle. They include minimums of geomagnetic data (Gonzalez and Schatten, 1987, Kane, 1987, 1989, Wilson, 1990a, and Layden et al., 1991), number of Anomalous Quiet Days (-AQD- see Brown and Williams, 1969, Brown, 1979) and number of Disturbed Days (-NDD- see Wilson, 1990a). During minimum of the cycle, bivariate analysis with minimums of geomagnetic indices and minimums of sunspot numbers have been proposed by Sargent (1978), Wilson (1988a, 1988b, 1990a) and Kane (1989).

During the declining phase of the cycle, authors have proposed techniques to separate geomagnetic activity related to sunspot activity from the recurrent geomagnetic activity. Some prediction methods use

estimates of the geomagnetic activity obtained by identification of individual recurrent storms (Legrand and Simon, 1981, Thompson, 1985), other methods subtract a component proportional to sunspot numbers (Ohl, 1968, Kataja, 1986, Li, 1997). Indeed, Feynman (1982) showed that the geomagnetic activity could be separated into two components, one being proportional to sunspot number and the other being the residual. Kataja (1986) showed that the residuals correlate with the size of the following cycle amplitude. By counting the number of disturbed days (NDD) with  $Ap \leq 25$  over a cycle,  $N_c$ , Thompson (1993) found that it is possible to predict the maximum of the next sunspot cycle  $RI_n$  after subtraction of the last sunspot maximum  $RI_c$ . Indeed Thompson showed a correlation between  $N_c$  and  $RI_c + RI_n$  (same weight for  $RI_c$  and  $RI_n$ ). Bivariate analysis of  $N_c$  versus  $RI_c$  and  $RI_n$  separately gives the same result at the precision available.

When only the last years of the solar cycle are considered, separation of geomagnetic activity due to active regions from recurrent storm activity is not necessary because recurrent activity is dominant during this period (Legrand and Simon, 1981, Hedeman and Dodson-Prince, 1986). Average values of the geomagnetic indices over the last years of the cycle have been used as precursors of the following cycle maximum by Ohl (1976), Wilson (1990a), Denkmayr and Cugnon (1996), Bounar et al. (1997) and Jain (1997).

A rather simple method involving the late maximum of geomagnetic activity (noted  $aa_{max}^*$  for the aa indices) is proposed here. We have chosen aa indices, rather than Ap indices because of the longer observations of the former. As the late maximum occurs during the last years of the cycle, we are not subtracting sunspot numbers. That is the main difference with the methods used by Kataja (1986) or Li (1997). Li (1997) has used Ap index with a linear regression over five cycles to predict cycle 23. Unlike us he introduced a supplementary 35-month running average to smooth the late maximum of Ap index. Ohl (1971) recognized that the size of the following cycle was statistically associated with the size of the recurrent maximum. Simon (1979) has also proposed using the late maximum of geomagnetic activity, but his method assumes that this maximum will be at the same level as the geomagnetic activity during sunspot maximum (which is only true as a first approximation). In Figure 1 we compare temporal profiles of geomagnetic activity (in terms of smoothed values) to sunspot numbers, for cycles 11 to 22. The late maximum of geomagnetic activity for each sunspot cycle (indicated by the asterisk) is found to correlate with the maximum amplitude for the next cycle; i.e. it was lower in November 1963, before cycle 20 ( $RI_{max} = 110.6$ ) than in September 1974, before cycle 21 ( $RI_{max} = 164.5$ ) or in September 1984 before cycle 22 ( $RI_{max}$

Table I. Sizes and dates of late aa maximums and dates of RI and aa minimums

Cycle	$aa_{\max}^*$	$aa_{\max}^*$ date	$RI_{\min}$ date	$aa_{\min}$ date
12	20.90	Aug 1886	Mar 1890	Jul 1890
13	15.24	Dec 1898	Jan 1902	Dec 1900
14	19.40	Jan 1911	Jul 1913	Sep 1913
15	19.60	May 1922	Aug 1923	Oct 1924
16	21.53	Dec 1931	Sep 1933	Jun 1934
17	26.70	Oct 1943	Feb 1944	Apr 1945
18	31.82	Dec 1951	Apr 1954	Oct 1954
19	22.51	Nov 1963	Oct 1964	May 1965
20	30.90	Sep 1974	Mar 1976	Dec 1976
21	29.07	Jul 1984	Sep 1986	Dec 1986
22	29.80	May 1994	May 1996	Jun 1997

= 158.5). Figure 1 shows that the maximum value  $aa_{\max}^*$  for cycle 23 is similar to the amplitude of both cycles 21 and 22. Note nevertheless that, over 12 cycles the late maximum is missing during one cycle : Figure 1 shows that no maximum is detected during the five last years of cycle 11. Table I gives dates and amplitudes of  $aa_{\max}^*$  for cycles 12 to 22, as well as dates of minimums of  $RI_{12}$  and  $aa_{12}$ , for comparison.

Figure 2 displays the scatter plot and regression coefficient,  $r$ , for the aa index of the late maximum amplitude,  $aa_{\max}^*$ , versus the maximum sunspot number of the next cycle  $RI_{\max}$  (on the left side of the figure). For comparison the figure displays the same diagram for the minimum aa index,  $aa_{\min}$  (on the right side of the figure), which is one of the frequently used geomagnetic precursors. Figure 2 shows that the  $aa_{\max}^*$  geomagnetic precursor, in terms of linear regression, performs better than  $aa_{\min}$ , with a regression coefficient  $r$  equal to 0.961, instead of 0.891 for  $aa_{\min}$ , when cycles 13 to 22 are taken into account.

### 3. Evaluation of the Methods

The comparison of only one cycle prediction, as Brown and Simon (1986) and Kunches (1993) have done for the cycles 21 and 22, is not

sufficient to evaluate the individual methods because of uncertainty of a single prediction, including the dependence upon the cycles taken into account to compute the linear regression. Thus, the predictions for the sample of past cycles have to be more systematically tested.

To compare the level of skill of different methods in predicting maximum sunspot number, it is also necessary to apply the methods on data as homogeneous as possible. Thus we are using for  $RI_{max}$  and for all geomagnetic precursors smoothed monthly values  $A_{12}$  obtained from the monthly averages  $A_m$  according to the following (Waldmeier, 1961):

$$A_{12} = \frac{1}{12} \left( \sum_{m=-5}^{m=+5} A_m + \frac{A_{-6}}{2} + \frac{A_{+6}}{2} \right) \quad (1)$$

We use the smoothed monthly values rather than annual values, frequently used in the past literature, because the latter suffers for a selection effect related to calendar and, in our opinion, its use is justified only if monthly data are not available.

The geomagnetic indices used here are on one hand the aa antipodal indices, available since 1868 (Mayaud, 1980), and computed for the recent decades by the ISES Paris Warning Center on behalf of the International Service of Geomagnetic Indices, and on the other hand, the Ap planetary indices (Bartels, 1949) computed by Institut für Geophysik Göttingen and GeoForschungsZentrum Potsdam.

In this section we consider predictions of the same cycles, from 13 to 22, for all the methods. Note that regression coefficients could be compared only if the number of points is the same. As Ap geomagnetic indices are available since 1932 only, an extrapolation is done to the past, using a non-linear regression from Ap versus aa index, as suggested by Mayaud (1980). The regression law found here on smoothed monthly values and with the data from 1932 to 1995, is

$$\hat{A}_p = 0.00222 \text{ aa}^2 + 0.6814 \text{ aa} - 2.27,$$

with a regression coefficient of 0.9625, a mean difference between estimation and actual index of 0.36 and a standard error of 1.59.

For some of the methods mentioned in the previous section, the data updated up to cycle 22 are not available. This is the case for the methods proposed by Brown and Williams (1969), by Legrand and Simon (1981) and by Thompson (1985). The method involving number of disturbed days during minimum of the cycle (Wilson, 1990a) corresponds, according to the author, to significantly lower regression coefficient than for the other methods he tested.

Thus we are comparing here the precursor  $aa_{max}^*$ , the late maximum of geomagnetic activity, to six other precursors, namely :

$aa_{min}$  and  $Ap_{min}$ , minimum values of the geomagnetic indices,

$aa_{36}$  and  $Ap_{36}$ , average value of the indices over the last three years of the cycle,

$aa_F$ , corresponding to the aa index after subtraction of the sunspot cycle related component studied by Feynman (1982) :

$$aa_F = aa - 0.12 RI_{12} - 5.4$$

to predict the maximum of the next cycle  $RI_{max}$ , and finally NDD, number of disturbed days ( $Ap \geq 25$ ) over the entire cycle (Thompson, 1993) to predict  $RI_c + RI_n$ , the sum of the current and of the next cycle maximum sunspot numbers. Here the counts of days with  $Ap \geq 25$  are extended to the end of cycle 22.

Figure 3 shows, on the left side, the histograms of the regression coefficients obtained with single variate analysis for the prediction of the past cycles (i.e. removing the precursor in turn for each cycle to be predicted). With  $RI_{min}$  as a second independent variable, the bivariate analysis gives the histograms shown on the right side, from the best average regression coefficient at the top to the lowest at the bottom. In most cases, the bivariate analysis significantly improves the prediction method. The best method at this level is found to be with bivariate analysis with  $aa_{max}^*$  and  $RI_{min}$  as precursors, with an average regression coefficient of 0.970. Improvement of predictions with bivariate analysis has been already shown by Wilson (1988a, 1988b, 1990a) and Kane (1989) for the methods involving  $aa_{min}$  and  $Ap_{min}$  as precursors.

Figure 4 shows similar histograms obtained when three variables, different in nature or involving different epochs of the cycle, are used. On the top the variables are  $aa_{max}^*$ ,  $aa_{min}$  and  $RI_{min}$  (method hereafter called Mult1) and at the bottom they are  $aa_{max}^*$ ,  $Ap_{min}$  and  $RI_{min}$  (hereafter called Mult2). In both cases, regression coefficients greater than 0.975 are obtained showing that the methods with three variables perform the best with respect to this criterion. For the methods coupling three precursors, the histograms of the difference between prediction of  $RI_{max}$  and observation is given for each cycle from 13 to 22, on the right side of Figure 4.

Indeed the distribution of regression coefficients given on Figures 3 and 4 provides a rather general criterion to estimate the skill of methods: it shows how robust the method is. Nevertheless this criterion alone is not sufficient: it is also useful to compare the errors made when the different methods are applied to the “prediction” of past cycles, despite the limited number of available cycles.

Table II summarises, for all the methods studied here, the average errors of the prediction, as well as maximum errors, in addition to the average regression coefficients, all for cycles from 13 to 22. As pointed out above, the method with NDD as precursor has, compared with other methods, a different dependent variable ( $RI_c + RI_n$ ) instead of



$RI_{max}$  of the next cycle. Its regression coefficient is among the highest but it is one of the less efficient in terms of error of the prediction.

If we now consider the other methods, all with  $RI_{max}$  as dependent variable, we see from Table II that the situation is different for single variate analysis and for multivariate analysis. In the first case, the rank of the methods is almost similar with both criterions, either the average regression coefficient or the average prediction error. With single variate analysis, we could see from Table II that the method involving  $aa_{max}^*$  performs the best, followed by methods using Ap indices and finally those using aa indices.

With bivariate analysis, the ranks according to both criterions differ, but, as shown on Figure 3, the regression coefficients remain quite close for the different methods. With bivariate analysis, the methods could be separated into three groups :  $aa_{max}^*$  appears to be the best precursor, then four methods with  $aa_{min}$ ,  $Ap_{min}$ ,  $aa_{36}$  and  $Ap_{36}$  give very close results and finally  $aa_F$  is less efficient.

Multiple regression with three variables improves slightly the results when Ap is used in addition to  $aa_{max}^*$  and  $RI_{min}$ . Note that in this case, as well as with bivariate analysis with  $aa_{max}^*$  and  $RI_{min}$ , the maximum error on predicted  $RI_{max}$  for cycle 13 to 22 is lower than 20.

From the comparison of methods involving late maximum of geomagnetic indices, namely the method proposed here with  $aa_{max}^*$  as precursor, and the method ( $aa_F$ ) derived by Kataja (1986) from Feynman (1982) results, it appears unambiguously that the subtraction of a component proportional to sunspot number does not improve the predictions. For operational purposes, in addition to the skill of the methods, the regular availability of the precursors as well as the precedence of the prediction are also to be taken into account. Minimums of geomagnetic indices are generally delayed about half a year, compared to  $RI_{12}$  minimum of a cycle. Thus methods with  $aa_{min}$  and  $Ap_{min}$  are available later than when  $aa_{36}$ ,  $Ap_{36}$  or NDD are used. On the other hand, methods with late geomagnetic activity maximum ( $aa_{max}^*$  and  $aa_F$ ) give the prediction two years, in average, before the end of each cycle (see Table I), provided they are applied only with single variate analysis.

#### 4. Results for the Prediction of Maximum Amplitude for cycle 23

According to its conventional definition, cycle began in May 1996 and its maximum will be in 1999, as predicted with duration of ascending phases of the similar cycles 21 (42 months) and 22 (34 months), or in

2000 according to many authors. The minimum of geomagnetic activity was observed in November 1996 for  $aa_{12}$  and in October 1996 for  $Ap_{12}$ . In the case of single variate analysis, Table III summarises for each of the methods (with cycles 12 to 22, except for  $aa_{max}^*$ ), the intercept, the slope of the regression line, the correlation coefficient and the standard error, as well as the value of the specific indicator from cycle 22 and the resulting prediction of the maximum sunspot index  $RI_{12}$  for cycle 23. Methods are given according to decreasing order of the regression coefficient. Table IV does the same in the case of bivariate regression analysis.

When three variables are used in multivariate analysis, the  $RI_{max}$  is obtained with:

$$RI_{max} = -53.20 + 3.015 aa_{min} + 6.765 aa_{max}^* - 3.710 RI_{min}, \text{ (Mult1)}$$

with a regression coefficient  $r = 0.978$  and standard error of estimate s.e. = 9.11, and

$$RI_{max} = -43.86 + 3.899 Ap_{min} + 6.754 aa_{max}^* - 3.260 RI_{min}, \text{ (Mult2)}$$

with a regression coefficient  $r = 0.978$  and standard error of estimate s.e. = 8.99.

The predictions obtained with both formulas are :  $RI_{max}(23) = 168.0$  with  $aa_{min}$  as

$$\text{precursor and } RI_{max}(23) = 163.6 \text{ with } Ap_{min} \text{ as precursor.}$$

Comparison of tables III and IV shows that, for each precursor, predictions with single variate and with bivariate analysis are extremely close from each other (this is not a general rule for other cycles). Thus it is sufficient, as in Figure 5, to compare the various predictions obtained with multivariate (2 and 3 variables) analysis. Figure 5 shows that the predictions obtained with the methods involving geomagnetic precursors are very close to each other : all are within a range from 140.8 to 169.8 (i.e.  $\pm 12\%$  around their average value). As results are shown in decreasing order of the correlation coefficient, from left to right, we may consider as the best-guess, those methods located at the left of the figure. The result of the first three methods suggests a predicted value of  $RI_{12}$  for cycle 23 of  $168 \pm 15$  (rms).

## 5. Discussion and Conclusion

Wilson (1990a) tested three methods studied here : those with smoothed monthly values of  $aa_{min}$ ,  $Ap_{min}$  and  $Ap_{36}$  as precursors, with single variate and bivariate analysis. Kane (1989) compared methods with  $aa_{min}$  for both single variate and bivariate analysis. They founded, in agreement with our results for other methods, improvement of the regression coefficient when bivariate analysis is used.

Denkmayr and Cugnon (1996), Kane (1997) and Li (1997) have given predictions of maximum of cycle 23 with different methods involving geomagnetic precursors. The first two used only provisional precursors, in advance to the end of the cycle 22. Nevertheless the predictions are in agreement with our results, as shown on Figure 6. For example Kane (1997) uses an  $aa_{\min}$  provisional value of 17.9, instead of 16.7 now observed, and thus his prediction with single variate analysis would be now 159.5 instead of 170. On this figure the predictions based on geomagnetic precursors are given with bins in black. The bins numbered from 1 to 9 are the results obtained here, as detailed in the figure caption. All published predictions based on geomagnetic precursors (except a very low prediction by Obridko, 1996) are within the range 137-177, which represents only  $\pm 13\%$  around their average value equal to 157. Predictions for  $RI_{max}$  of cycle 23 with other precursors are indicated on Figure 6 with hatched bins. They are very close to the previous ones, except the prediction by Bravo and Stewart (1997) which is based on coronal hole observations. On the left part of the diagram, it should be noted that the predicted low  $RI_{max}$  are frequently obtained with time series analysis. On the right side of the diagram, many of the predictions with high  $RI_{max}$  involved the even-odd empirical 'rule' predicting higher maximums for the odd numbered cycles. It should be recalled that this rule has, in the past, suffered two exceptions over the ten couples of observed cycles.

We have studied the skill of methods involving geomagnetic precursors to predict size of the next cycle. The precursors are :  $aa_{\max}^*$ , the late maximum of geomagnetic activity occurring within the last four years of the cycle,  $aa_{\min}$  and  $Ap_{\min}$ , minimum values of the geomagnetic indices,  $aa_{36}$  and  $Ap_{36}$ , average values of the indices over the last three years of the cycle,  $aa_F$ ,  $aa$  index after subtraction of the sunspot cycle as proposed by Feynman (1982) and NDD, number of disturbed days ( $Ap \geq 25$ ) over the entire cycle. The precursors for past cycles have regression coefficients against the maximum of sunspot number, ranging between 0.90 and 0.97. We have shown that most of the methods are improved when bivariate analysis with minimum of sunspot number is used as a second independent variable, as shown for  $aa_{\min}$  and  $Ap_{\min}$  by previous authors. All regression coefficients, but one, rise to the range 0.94 to 0.97. Finally, with three independent variables, even higher coefficients, close to 0.975, are obtained. According to our tests, the late maximum of  $aa$  index  $aa_{\max}^*$ , appears as one of the best precursors with single variate as well as with multivariate analysis, and thus, it is not useful to subtract from geomagnetic indices a component proportional to sunspot numbers. This method has the further advantage to predict the size of the sunspot cycle two years in average before its beginning.

The level of the regression coefficients and the coherency between predictions obtained with different precursors show the relevancy of the concept of extended cycle. Although geomagnetic precursors appear as the best for prediction purposes, solar precursors measurements are essential for a better understanding of the solar cycle. This is true for those measured during minimum of the cycle (like polar magnetic fields and high latitude faculas), but even more important for those measured during the declining phase of the sunspot cycle (coronal holes and large scale magnetic fields), because they are basic data for the revision of the classical concept of the solar cycle, which appears now more complex than the sunspot cycle alone.

### References

- Note: STPW is for Solar-Terrestrial Prediction Workshops.
- Bartels J., 1949, IATME Bull. 12b, 97, IUGG Publication Office, Paris.
- Bouvar K.H., Cliver E.W., Boriakoff V., 1997, *Solar Physics* 176, 211.
- Bravo S. and Stewart G.A., 1997, *Solar Phys.* 173, 193.
- Brown G.M. and Williams W.R., 1969, *Planetary Space Sci.* 17, 455.
- Brown G.M., 1979, in Donnelly (ed), S-TPW-I, NOAA and AFGL, USA.
- Brown G.M. and Simon P.A., 1986, in P.A. Simon, G. Heckman and M.A. Shea (eds), STPW-II, NOAA and AFGL, USA.
- Calvo R.A., Ceccato H.A. and Piacentini R.D., 1995, *Astrophys. J.* 444, 916.
- Denkmayr K., 1993, *On Long-Term Predictions of Solar Activity*, Thesis, Universität Linz, Austria.
- Denkmayr K. and Cugnon P., STPW-V, Hitachi, Japan, January 1996, in press.
- Fessant F., Pierret C. and Lantos P., 1996, *Solar Physics* 168, 423.
- Feynman J., 1982, *J. Geophys. Res.* 87 (A8), 6153.
- Gonzalez E. and Schatten K.H., 1987, *Solar Physics* 114, 189.
- Hedeman E.R. and Dodson-Prince H., 1986, in P.A. Simon, G. Heckman and M.A. Shea (eds), S-TPW-II, NOAA and AFGL, USA.
- Jain R., 1997, *Solar Physics* 176, 431.
- Jocelyn J.A. and 11 coauthors, 1997, *EOS*, Trans. AGU 18, 205.
- Kane R.P., 1987, *Solar Physics* 108, 415.
- Kane R.P., 1989, *Solar Physics* 122, 175.
- Kane R.P., 1997, *Geophys. Research Letters* 24, 1899.
- Kataja E., 1986, in P.A. Simon, G. Heckman and M.A. Shea (eds), STPW-II, NOAA and AFGL, USA.
- Kuklin G.V., 1993, *Soln. Dann.* 6, 61.
- Kunches, 1993, in J.Hruska, M.A. Shea, D.F. Smart and G. Heckman (eds), STPW-IV, NOAA and AFGL, USA.
- Lantos, 1990, in R.J. Thompson, D.G. Cole, P.J. Wilkinson, M.A. Shea, D.F. Smart and G. Heckman (eds), STPW-III, NOAA and AFGL, USA.
- Layden A.C., Fox P.A., Howard J.M., Sarajedini A., Schatten K.H. and Sofia S., 1991, *Solar Physics* 132, 1.
- Legrand J.P. and Simon P.A., 1981, *Solar Phys.* 70, 173.
- Letfus V., 1994, *Solar Phys.* 149, 405.

- Li Y., 1997, *Solar Phys.* 170, 437.
- Mayaud P.N., 1980, *Derivation, Meaning and Use of Geomagnetic Indices*, Geophysical Monograph 22, American Geophysical Union, Washington DC.
- MacNish and Lincoln, 1949, *Transactions American Geophysical Union* 30, 673.
- Macpherson K., 1993, *Proceedings of International Workshop on Artificial Intelligence Applications in Solar-Terrestrial Physics*, Lund, 1993, NOAA, Boulder.
- Obridko V.N., 1995, *Solar Phys.* 156, 179.
- Ohl A.I., 1966, *Soln. Dann.* 12, 84.
- Ohl, A.I., 1968, *Problemy Arktiki i Antarktiki* 28, 137.
- Ohl, A.I., 1971, *Geomagn. Aeronomy* 11, 549.
- Ohl A.I., 1976, *Soln. Dann.* 9, 73.
- Ohl A.I. and Ohl G.I., 1986, in P.A. Simon, G. Heckman and M.A. Shea (eds), *STPW-II*, NOAA and AFGL, USA.
- Sargent H.H., 1978, in 20th IEEE Vehicular Technology Conference, IEEE Inc., NY, p 490.
- Schatten K.H., Scherrer P.H., Svalgaard L. and Wilcox J.M., 1978, *Geophys. Research Letters* 5, 411
- Schatten K.H. and Pesnell W.D., 1993, *Geophys. Research Letters* 20, 2275.
- Schatten K.H., Myers D.J. and S. Sofia, 1996, *Geophys. Research Letters* 23, 605.
- Simon P.A., 1979, *Solar Physics* 63, 399.
- Svalgaard L., 1977, in J.B. Zirker (ed) *Coronal Holes and High Speed Wind Streams*, Colorado Assoc. Univ. Press.
- Thompson R., 1985, *Recurrent Geomagnetic Disturbances in 53 Years of Ap Indices*, IPS Technical Report 85-06, IPS, Australia.
- Thompson R., 1993, *Solar Phys.* 148, 383.
- Tian J., 1996, S-TPW-V, Hitachi, Japan, January 1996, in press.
- Waldmeier M., 1961, *The Sunspot Activity in the Years 1610-1960*, Schulthess, Zürich.
- Waldmeier M., 1968, *Astron. Mitt. der Eidgenossischen Sternwarte Zürich* 286,1.
- Wilson P.R., 1994, *Solar and Stellar Activity Cycles*, Cambridge Univ. Press.
- Wilson R.M., 1988a, *Geophys. Res. Letters* 15, 125.
- Wilson R.M., 1988b, *J. Geophys. Res.* 93, 10011.
- Wilson R.M., 1990a, *Solar Phys.* 125, 143.
- Wilson R.M., 1990b, *Solar Phys.* 127, 199.

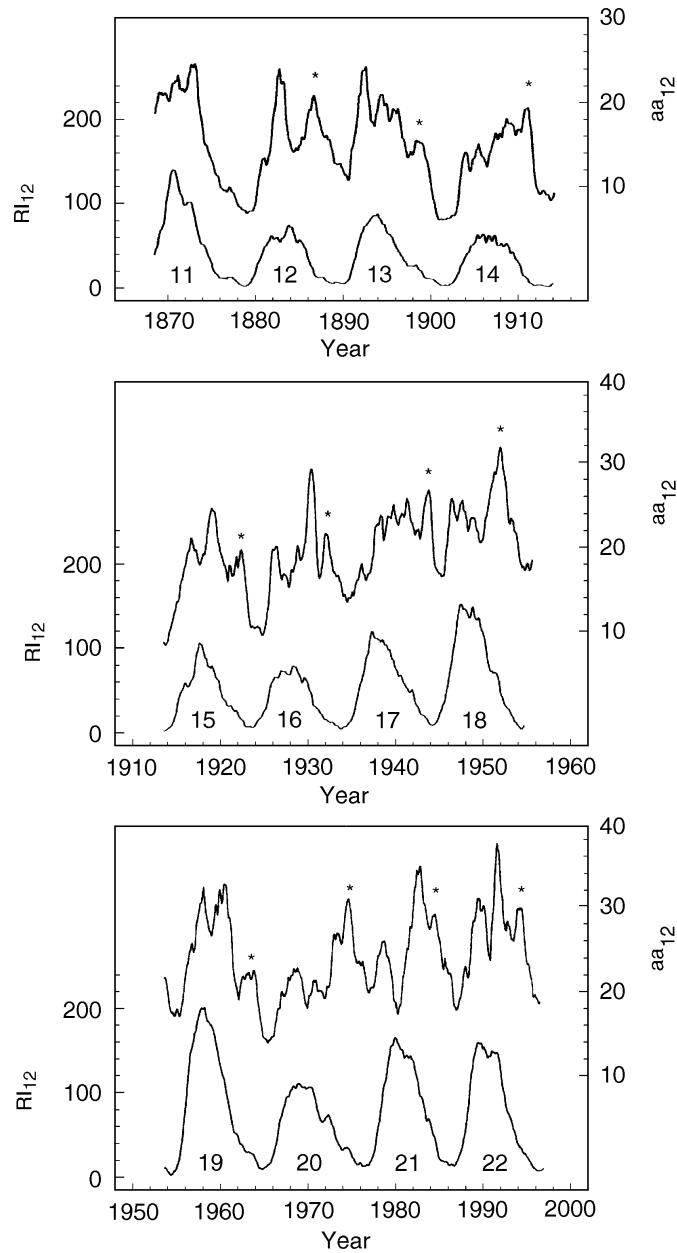


Figure 1. Comparison of the geomagnetic aa cycles (upper curves) with the sunspot number cycles (lower curves) from 1868 to 1996. Late maximum precursors  $aa_{\max}^*$  are indicated with asterisks.

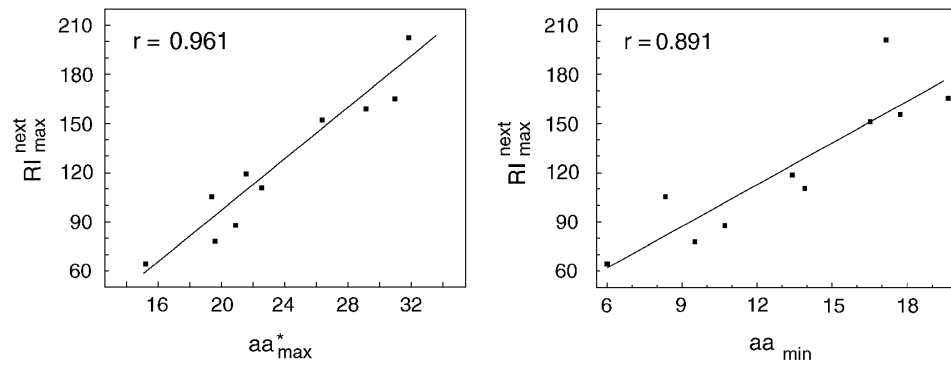


Figure 2. Linear regression for prediction of  $RI_{max}$  of the next cycle with  $aa_{max}^*$  (on the left) and with  $aa_{min}$  (on the right).

Table II. Skill of prediction methods:

Single variate analysis

Precursor	Average regression coefficient	Rank	Average error	Rank	Maximum error	Rank
$aa_{\max}^*$	0.957	2	13.34	1	24.46	1
$aa_{\min}$	0.906	7	17.60	6	53.88	7
$Ap_{\min}$	0.930	4	16.18	3	43.10	3
$aa_{36}$	0.910	6	16.95	4	46.87	5
$Ap_{36}$	0.942	3	13.91	2	32.79	2
$aa_F$	0.924	5	17.16	5	44.67	4
NDD	0.967	1	18.06	7	48.54	6

## Bivariate analysis

Precursor in addition to $RI_{\min}$	Average regression coefficient	Rank	Average error	Rank	Maximum error	Rank
$aa_{\max}^*$	0.970	1	9.29	1	17.16	1
$aa_{\min}$	0.954	3	15.29	4	34.14	5
$Ap_{\min}$	0.950	4	17.23	5	31.48	3
$aa_{36}$	0.946	5	14.37	3	27.43	2
$Ap_{36}$	0.945	6	12.24	2	32.15	4
$aa_F$	0.907	7	20.53	6	57.60	7
NDD	0.959	2	21.66	7	55.32	6

## Three variable analysis

Precursor in addition to $aa_{\max}^*$ and $RI_{\min}$	Average regression coefficient	Rank	Average error	Rank	Maximum error	Rank
$aa_{\min}$	0.976	1	11.23	2	28.22	2
$Ap_{\min}$	0.975	2	8.01	1	16.52	1





# Annexe D

## Liste de publications

### Publications dans des revues à comité de lecture :

- **The Seismic Structure of the Sun**, D.O. Gough, A.G. Kosovichev, J. Toomre, E. Anderson, H.M. Antia, S. Basu, B. Chaboyer, S.M. Chitre, J. Christensen-Dalsgaard, W.A. Dziembowski, A. Eff-Darwich, J.R. Elliott, P. Giles, P.R. Goode, J.A. Guzik, J.W. Harvey, F. Hill, J.W. Leibacher, M.J.P.F.G. Monteiro, O. Richard, T. Sekii, H. Shibahashi, M. Takata, M.J. Thompson, S. Vauclair and S.V. Vorontsov, 1996, *Science*, Vol. 272, 5266, 1296-1300
- **New Solar Models Including Helioseismological Constraints and Light-Element Depletion**, O. Richard, S. Vauclair, C. Charbonnel, W.A. Dziembowski, 1996, *A&A* 312, 1000
- **Local Mixing near the Solar Core, Neutrino Fluxes and Helioseismology**, O. Richard and S. Vauclair, 1997, *A&A* 322, 671
- **On the accuracy of helioseismic determination of solar helium abundance**, O. Richard, W.A. Dziembowski, R. Sienkiewicz, and P.R. Goode, 1998, *A&A* 338, 756
- **On The Prediction Of Maximum Amplitude For Solar Cycles Using Geomagnetic Precursors**, P. Lantos and O. Richard, 1998, *Solar Physics*, 182, 231
- **Solar model calibrations. I « Standard » input physics**, O. Richard, S. Vauclair, C. Charbonnel, soumis à *A&A*

### Publications dans des congrès :

- **New Solar Models Including Element Segregation and Rotation-Induced Mixing**, O. Richard, S. Vauclair, C. Charbonnel, 1995, 9th Cambridge Workshop, Cool stars, stellar systems and the Sun, Florence

- **New Solar Models**, S. Vauclair and O. Richard, 1996, *The Sun and Beyond*, ed. Frontières
- **Solar models including mixing near the solar core**, O. Richard and S. Vauclair, 1997, IAU Symp. 181, Poster Volume, p. 119
- **Temperature inhomogeneities at the bottom of the solar convective zone : an alternative solution to the lithium depletion**, S. Vauclair and O. Richard, 1997, IAU Symp. 181, Poster Volume, p. 133
- **The Toulouse Solar Models : New Results**, S. Vauclair and O. Richard, 1998, in *A Half Century of Stellar Pulsation Interpretations: A Tribute to Arthur N. Cox*, Ed. P.A. Bradley and J.A. Guzik, ASP Conference Series, 135, p. 71
- **Precise determination of the solar helium abundance by helioseismology**, O. Richard, W.A. Dziembowski, R. Sienkiewicz, and P.R. Goode, 1998, In *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*, Ed. S.G. Korzennik and A. Wilson, ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, p. 517
- **Consistent solar models including the  ${}^7\text{Li}$  and  ${}^3\text{He}$  constraints**, S. Vauclair and O. Richard, 1998, In *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*, Ed. S.G. Korzennik and A. Wilson, ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, p. 427
- **On the prediction of maximum amplitude for solar cycles using geomagnetic precursors**, P. Lantos and O. Richard, 1998, ESA Workshop on space weather, ESTEC, Noordwijk

## Publications en préparation :

- **Solar model calibrations. II « Non-standard » input physics**, O. Richard, S. Vauclair, and C. Charbonnel

# Bibliographie

- Adelberger, E. G., Austin, S. M., Bahcall, J. N., Balantekin, A. B., Bogaert, G., Brown, L. S., Buchmann, L., Cecil, F. E., Champagne, A. E., de Braekeleer, L., Duba, C. A., Elliott, S. R., Freedman, S. J., Gai, M., Goldring, G., Gould, C. R., Gruzinov, A., Haxton, W. C., Heeger, K. M., Henley, E., Johnson, C. W., Kamionkowski, M., Kavanagh, R. W., Koonin, S. E., Kubodera, K., Langanke, K., Motobayashi, T., Pandharipande, V., Parker, P., Robertson, R. G. H., Rolfs, C., Sawyer, R. F., Shaviv, N., Shoppa, T. D., Snover, K. A., Swanson, E., Tribble, R. E., Turck-Chièze, S., Wilkerson, J. F., 1998, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 1265
- Alexander, D. R., Ferguson, J. W., 1994, *Astrophys. J.* **437**, 879
- Allen, C. W., 1976, *Astrophysical Quantities*, 3<sup>rd</sup> ed.; London: Atholone Press
- Antia, H. M., 1998, *Astron. Astrophys.* **330**, 336
- Antia, H. M., Chitre, S. M., 1998, *Astron. Astrophys.* **339**, 239
- Bahcall, J. N., 1966, *Astrophys. J.* 259
- Bahcall, J. N., Pinsonneault, M. H., 1992, *Rev. Mod. Phys.* **64(4)**, 885
- Bahcall, J. N., Pinsonneault, M. H., 1995, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 781
- Bahcall, J. N., Pinsonneault, M. H., Basu, S., Christensen-Dalsgaard, J., 1997, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 171
- Balachandran, S., 1995, *Astrophys. J.* **446**, 203
- Balachandran, S., Lambert, D. L., Stauffer, J. R., 1996, *Astrophys. J.* **470**, 1243
- Balachandran, S. C., Bell, R. A., 1997, *American Astronomical Society Meeting* **191**, 7408
- Basu, S., 1997, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **288**, 572
- Basu, S., 1998, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **298**, 719
- Basu, S., Antia, H. M., 1994, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **269**, 1137
- Basu, S., Antia, H. M., 1997, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **287**, 189
- Basu, S., Christensen-Dalsgaard, J., Chaplin, W. J., Elsworth, Y., Isaak, G. R., New, R., Schou, J., Thompson, M. J., Tomczyk, S., 1997, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **292**, 243
- Basu, S., Däppen, W., Nayfonov, A., 1999, *Astrophys. J.* In press
- Berthomieu, G., Gonczi, G., 1997, *Cours de Structure Interne, AUSSOIS*, Chapt.IV
- Brown, T. M., Christensen-Dalsgaard, J., 1998, *Astrophys. J., Lett.* **500**, L195
- Brun, A. S., Turck-Chièze, S., Morel, P., 1998a, *Astrophys. J.* **506**, 913

- Brun, A. S., Turck-Chièze, S., Zahn, J. P., 1998b, in *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*, ESA Publications Division, SP-418, 439
- Caughlan, G. R., Fowler, W. A., 1962, *Astrophys. J.* **136**, 453
- Caughlan, G. R., Fowler, W. A., 1988, *Atomic Data Nuc. Data Tables* **40**, 283
- Cayrel De Strobel, G., 1990, *Mem. Soc. Astron. Ital.* **61**, 613
- Chaboyer, B., Zahn, J. P., 1992, *Astron. Astrophys.* **253**, 173
- Chandrasekhar, S., 1964, *Astrophys. J.* **139**, 664
- Chapman, S., 1917, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **77**, 540
- Chapman, S., 1958, *Transport Properties of Gases*, Northwestern Univ. Press
- Charbonnel, C., Vauclair, S., Zahn, J. P., 1992, *Astron. Astrophys.* **255**, 191
- Christensen-Dalsgaard, J., 1998, *Lecture Notes on Stellar Oscillations, 4th Edition*, <http://www.obs.aau.dk/jcd/oscilnotes/>
- Christensen-Dalsgaard, J., Berthomieu, G., 1991, in *Solar interior and atmosphere*, Cox A. N., Livingston W. C., Matthews M. S. (eds.), University Arizona Press, 401
- Christensen-Dalsgaard, J., Däppen, W., Ajukov, S. V., Anderson, E. R., Antia, H. M., Basu, S., Baturin, V. A., Berthomieu, G., Chaboyer, B., Chitre, S. M., Cox, A. N., Demarque, P., Donatowicz, J., Dziembowski, W. A., Gabriel, M., Gough, D. O., Guenther, D. B., Guzik, J. A., Harvey, J. W., Hill, F., Houdek, G., Iglesias, C. A., Kosovichev, A. G., Leibacher, J. W., Morel, P., Proffitt, C. R., Provost, J., Reiter, J., Rhodes Jr., E. J., Rogers, F. J., Roxburgh, I. W., Thompson, M. J., Ulrich, R. K., 1996, *Science* **272**, 1286
- Christensen-Dalsgaard, J., Duvall, T. L. J., Gough, D. O., Harvey, J. W., Rhodes, E. J. J., 1985, *Nature* **315**, 378
- Christensen-Dalsgaard, J., Gough, D. O., Thompson, M. J., 1989, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **238**, 481
- Christensen-Dalsgaard, J., Gough, D. O., Thompson, M. J., 1991, *Astrophys. J.* **378**, 413
- Ciacio, F., Degl'Innocenti, S., Ricci, B., 1997, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **123**, 449
- Cleveland, B. T., Daily, T., Davis, R., J., Distel, J. R., Lande, K., Lee, C. K., Wildenhain, P. S., Ullman, J., 1998, *Astrophys. J.* **496**, 505
- Corbard, T., Berthomieu, G., Provost, J., Morel, P., 1998, *Astron. Astrophys.* **330**, 1149
- Däppen, W., Mihalas, D., Hummer, D. G., Mihalas, B. W., 1988, *Astrophys. J.* **332**, 261
- Degl'Innocenti, S., Ricci, B., 1998, *Astroparticle Physics* **8**, 293
- Duvall, T. L. J., 1982, *Nature* **300**, 242
- Dziembowski, W. A., Fiorentini, G., Ricci, B., Sienkiewicz, R., 1999, *Astron. Astrophys.* **343**, 990
- Dziembowski, W. A., Goode, P. R., Pamyatnykh, A. A., Sienkiewicz, R., 1994, *Astrophys. J.* **432**, 417

- Dziembowski, W. A., Pamyatnykh, A. A., Sienkiewicz, R., 1990, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **244**, 542
- Dzitko, H., Turck-Chieze, S., Delbourgo-Salvador, P., Lagrange, C., 1995, *Astrophys. J.* **447**, 428
- Eddington, A. S., 1926, *The Internal Constitution of the Stars*, repr 1959 Dover, New York
- Elliott, J. R., 1998, *Astron. Astrophys.* **334**, 703
- Elliott, J. R., Kosovichev, A. G., 1998, *Astrophys. J., Lett.* **500**, L199
- Fowler, W. A., Caughlan, G. R., Zimmerman, B. A., 1967, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **5**, 525
- Freytag, B., Ludwig, H., Steffen, M., 1996, *Astron. Astrophys.* **313**, 497
- Fukuda, Y., 1996, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1683
- Gabriel, M., 1997, *Astron. Astrophys.* **327**, 771
- Geiss, J., Gloeckler, G., 1998, *Space Science Reviews* **84**, 239
- Gravin, V., 1998, in *Neutrino 98, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*
- Grevesse, N., 1991, *Astron. Astrophys.* **242**, 488
- Grevesse, N., Noels, A., 1993, in *Origin and Evolution of the Elements*, Prantzos N., Vangioni-Flam E., Cassé M. (eds.), Cambridge Univ. Press, 15
- Griem, H., 1962, *Phys. Rev.* **128**, 997
- Gruzinov, A. V., Bahcall, J. N., 1998, *Astrophys. J.* **504**, 996
- Guenther, D. B., Demarque, P., 1997, *Astrophys. J.* **484**, 937
- Guenther, D. B., Demarque, P., Kim, Y. C., Pinsonneault, M. H., 1992, *Astrophys. J.* **387**, 372
- Guzik, J. A., Cox, A. N., 1995, *Astrophys. J.* **448**, 905
- Hummer, D. G., Mihalas, D., 1988, *Astrophys. J.* **331**, 794
- Huppert, H. E., Spiegel, E. A., 1977, *Astrophys. J.* **213**, 157
- Iglesias, C. A., Rogers, F. J., 1995, *Astrophys. J.* **443**, 460
- Iglesias, C. A., Rogers, F. J., 1996, *Astrophys. J.* **464**, 943
- Iglesias, C. A., Rogers, F. J., Wilson, B. G., 1992, *Astrophys. J.* **397**, 717
- Kirsten, T., 1998, in *Neutrino 98, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*
- Kurucz, R. L., 1991, in *Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models*, Crivellari L., Hubeny I., Hummer D. G. (eds.), NATO ASI Series C, Vol.341
- Mayer, 1950, *J. Chem. Phys.* **18**, 1426
- Mestel, L., 1965, in *Stars and Stellar Systems*, Kuiper G. P., Middlehurst B. M. (eds.), Univ. Chicago Press, Vol. Vol. 8, 465
- Michaud, G., 1970, *Astrophys. J.* **160**, 641
- Michaud, G., Charland, Y., Vauclair, S., Vauclair, G., 1976, *Astrophys. J.* **210**, 447
- Mihalas, D., Däppen, W., Hummer, D. G., 1988, *Astrophys. J.* **331**, 815
- Morel, P., Provost, J., Berthomieu, G., 1997, *Astron. Astrophys.* **327**, 349
- Morel, P., Provost, J., Berthomieu, G., 1998, in *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*, ESA Publications Division, SP-418, 499

- Morel, P., Schatzman, E., 1996, *Astron. Astrophys.* **310**, 982
- Paquette, C., Pelletier, C., Fontaine, G., Michaud, G., 1986, *Astrophys. J.* **61**, 177
- Praderie, F., 1967, *Ph.D. thesis*, Paris Univ.
- Prandtl, L., 1925, *Z. Angew. Math. Phys.* **5**, 136
- Richard, O., Dziembowski, W. A., Sienkiewicz, R., Goode, P. R., 1998a, *Astron. Astrophys.* **338**, 756
- Richard, O., Dziembowski, W. A., Sienkiewicz, R., Goode, P. R., 1998b, in *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*, ESA Publications Division, SP-418, 517
- Richard, O., Vauclair, S., 1997, *Astron. Astrophys.* **322**, 671
- Richard, O., Vauclair, S., 1998, in *IAU Symp. 181, Poster Volume*, Provost J., Schmider F. (eds.), 119
- Richard, O., Vauclair, S., Charbonnel, C., 1999, *In preparation*
- Richard, O., Vauclair, S., Charbonnel, C., Dziembowski, W. A., 1996, *Astron. Astrophys.* **312**, 1000
- Richer, J., Michaud, G., Rogers, F., Iglesias, C., Turcotte, S., Leblanc, F., 1998, *Astrophys. J.* **492**, 833
- Rogers, F. J., Swenson, F. J., Iglesias, C. A., 1996, *Astrophys. J.* **456**, 902
- Salpeter, E. E., 1954, *Aust. J. Phys.* **7**, 373
- Schatzman, E., 1944, *CRAS* **219**, 478
- Schatzman, E., 1945, *Ann. d'astr.* **8**, 143
- Schatzman, E., 1958, *White Dwarfs*, North Holland Publ. Comp., Amsterdam
- Schou, J., Kosovichev, A. G., Goode, P. R., Dziembowski, W. A., 1997, *Astrophys. J., Lett.* **489**, L197
- Seaton, M. J., Yan, Y., Mihalas, D., Pradhan, A. K., 1994, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **266**, 805
- Soderblom, D. R., Jones, B. F., Balachandran, S., Stauffer, J. R., Duncan, D. K., Fedele, S. B., Hudon, J. D., 1993, *Astron. J.* **106**, 1059
- Spiegel, E., Zahn, J. P., 1992, *Astron. Astrophys.* **265**, 106
- Suzuki, Y., 1998, in *Neutrino 98, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*
- Sweet, P. A., 1950, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **110**, 548
- Thompson, M. J., Toomre, J., Anderson, E. R., Antia, H. M., Berthomieu, G., Burtonclay, D., Chitre, S. M., Christensen-Dalsgaard, J., Corbard, T., DeRosa, M., Genovese, C. R., Gough, D. O., Haber, D. A., Harvey, J. W., Hill, F., Howe, R., Korzennik, S. G., Kosovichev, A. G., Leibacher, J. W., Pijpers, F. P., Provost, J., Rhodes Jr., E. J., Schou, J., Sekii, T., Stark, P. B., Wilson, P. R., 1996, *Science* **272**, 1300
- Thorburn, J. A., Hobbs, L. M., Deliyannis, C. P., Pinsonneault, M. H., 1993, *Astrophys. J.* **415**, 150
- Turck-Chièze, S., Basu, S., Berthomieu, G., Bonanno, A., Brun, A. S., Christensen-Dalsgaard, J., Gabriel, M., Morel, P., Provost, J., Turcotte, S., The Golf Team,

- 1998, in *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*, ESA Publications Division, SP-418, 555
- Turcotte, S., Richer, J., Michaud, G., Iglesias, C. A., Rogers, F. J., 1998, *Astrophys. J.* **504**, 539
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., Shibahashi, H., 1989, *Nonradial Oscillation of stars*, 2nd edition, University of Tokyo Press, Tokyo
- Unsöld, A., 1948, *ZS. Astrophysik.* **24**, 355
- Vauclair, S., Richard, O., 1998, in *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*, ESA Publications Division, SP-418, 427
- Vauclair, S., Richard, O., 1998, in *IAU Symp. 181, Poster Volume*, Provost J., Schmider F. (eds.), 133
- Vogt, H., 1925, *Astron. Nachr.* **224**, 229
- Von Zeipel, 1924, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **84**, 665
- Watson, W. D., 1970, *Astrophys. J., Lett.* **162**, L45
- Watson, W. D., 1971, *Astron. Astrophys.* **13**, 263
- Whitmire, D. P., Doyle, L. R., Reynolds, R. T., Matese, J. J., 1995, *J. Geophys. Res.* **100(E3)**, 5457
- Wildt, R., 1936, *Astrophys. J.* **83**, 202
- Wildt, R., 1937, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **97**, 225
- Zahn, J. P., 1992, *Astron. Astrophys.* **265**, 115