



HAL
open science

Etude des phenomenes critiques a l'aide des theories des champs conformes: des systemes desordonnes aux theories parafermioniques

Raoul Santachiara

► **To cite this version:**

Raoul Santachiara. Etude des phenomenes critiques a l'aide des theories des champs conformes: des systemes desordonnes aux theories parafermioniques. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2003. Français. NNT : . tel-00004302

HAL Id: tel-00004302

<https://theses.hal.science/tel-00004302>

Submitted on 25 Jan 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE PARIS VI

THESE

Spécialité : Physique théorique

Présentée

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SCIENCES

de **L'UNIVERSITE Paris VI**

par

Raoul Santachiara

**Étude des phénomènes critiques à l'aide des théories des champs
conformes : des systèmes désordonnés aux théories
parafermioniques.**

Soutenue le 20 novembre 2003 devant la Commission d'examen :

MM.	Al. Comtet	Examineur
	Vi. Dotsenko	Directeur de thèse
	G. Mussardo	Rapporteur
	P. Pujol	Examineur
	H. Saleur	Rapporteur
	K. Schoutens	Examineur
	J-B. Zuber	Examineur

Ad Andrès e Hilary

Remerciements

Le jour où Vladimir Dotsenko a accepté de diriger cette thèse représente pour moi le début d'une expérience exceptionnelle. Je veux lui exprimer toute ma gratitude pour m'avoir suivi pas à pas pendant ma thèse et pour avoir eu la patience de répondre à toutes mes questions. Ses connaissances et son soutien quotidien ont été inestimables.

Le projet de recherche entrepris avec Volodia a grandement profité de la collaboration de Jesper L. Jacobsen avec qui la plus grande partie du travail présenté en cette thèse a été effectué. C'était pour moi un vrai plaisir d'avoir pu travailler avec Jesper dont l'enthousiasme pour la recherche est contagieux.

Mes pensées vont aussi à Xuan Son Nguyen avec lequel (et grâce auquel !) j'ai commencé cet aventure.

Un grand merci spécial à Marco Picco qui a très gentiment accepté de relire cette copie. Je lui exprime ma gratitude pour les nombreux conseils et les corrections apportées.

Je suis gré à Alain Comtet, Jean-Bernard Zuber, Pierre Pujol, Karelíjan Schoutens et Jean-Bernard Zuber pour avoir accepté de faire partie du jury. Je tiens à remercier en particulier Giuseppe Mussardo et Hubert Saleur qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Je remercie enfin l'ensemble des membres du L.P.T.H.E et L.Baulieu, son directeur, qui m'a accueilli au sein de ce labo. Je veux profiter ici pour dire merci à Marie-Christine Lévy, Sylvie Dalla-Foglia et Annie Richard pour s'être montrées toujours disponibles à résoudre mes problèmes administratifs et à Denis Bernia qui m'a aidé pour le tirage des copies.

Ringraziamentissimi

Come già in occasione della mia laurea, ho qui l'opportunità di dire ad Erina e Gilli, alias mamma e papà, quanto sia importante per me saper di poter contare sul loro continuo appoggio e quanto sia fiero della loro stima. Hmmm, lo so che le frasi precedenti suonano un po' formalotte, vorrei usare ben altri toni ma, ...lo sapete che non mi piace fare il mammone in pubblico!

A questo punto diamo "a Cesare cio' che e' di Cesare" (so quanto si irrita quando lo dico!..) ! A parte gli scherzi, Bene, posso semplicemente dirti che la cosa piu' bella di questi miei ultimi anni e' stata quella di condiverli con te.

E' un po' di anni che ci si vede molto raramente, ma non posso dimenticarmi qui di Mirko, di fatto un punto fermo della mia vita (ta', d'altronde se non ne parlavo, si sarebbe incupito...).

Questa tesi rappresenta la conclusione di uno dei pi intensi capitoli della mia vita : quello parigino. In questi anni ho avuto l'immensa fortuna di avere due inestimabili amici, mie stelle polari nel mio cammino professionale e anche di vita.

Alberto. E' stato seguendo le sue orme che sono approdato a Parigi. Lo potrei ringraziare per un'infinita' di cose : qui basti dire che dietro a qualsiasi cosa (e non esagero!) che ho combinato in questi quattro anni ci sono, in qualche forma, i suoi preziosi e saggi consigli. L'esempio piu' recente e' la redazione di questa tesi per cui mi ha dato, insieme a Iacopo, un aiuto fondamentale .

Iak, appunto. Se non fosse per la totale assenza di attrazione sessuale, potrebbe essere il mio compagno ideale. Non ci sono parole per riassumere tutte le emozioni, gioie e dolori della nostra convivenza : le nostre cene, gli immancabili ospiti-futon, i litigi col croato, e tutte le piccole cose della nostra quotidianità. Suona un po' come una dichiarazione, in realtà questa per me l'occasione per ricordarti, Yak, che sei davvero una persona speciale.

Ringrazio Silvana, per l'affettuosità e l'entusiasmo con cui mi ha sempre dimostrato la sua amicizia ; il mitico Markus per le nostre serate e nottate ! foriere di preziosi suggerimenti ; Pedro, avec lequel j'ai partagé les moments difficiles mais aussi heureux du DEA et de la thèse. J'espere bien de garder longtemps cette amitié pour moi si important. Giuseppe che tutti noi abbiamo "adottato" e a cui auguro di trovarsi bene quanto me nella casa-porto

di mare e Claudia, che ultimamente sembra aver superato il periodo “ non so se vengo, comunque se non vengo non aspettatemi.”

E cosa dire di Marellina che, anche dopo un bel po' che non ci si vedeva, e' stata sempre la prima a cercarmi per coinvolgermi in qualcosa di carino e divertente (oltretutto con amiche molto carine..)!

Vorrei poi ringraziare i miei amici e colleghi di laboratorio : Alessandro, Giuseppe e Kevin per le nostre rilassanti pause lavoro e Nicolas,avec qui j'ai partag le bureau pour tous ces annés.

Table des matières

Présentation de la thèse	11
1 Introduction aux théories conformes.	15
1.1 Transitions de phase du deuxième ordre et invariance conforme au point critique.	15
1.2 Opérateurs primaires, identités de Wards et algèbre de Virasoro.	18
1.2.1 Invariance conforme et transformation des opérateurs.	18
1.2.2 Lois de conservation et tenseur d'énergie-impulsion.	18
1.2.3 Identité de Ward conforme.	19
1.2.4 Algèbre de Virasoro et charge centrale.	21
1.3 Représentation de l'algèbre de Virasoro.	22
1.3.1 Modules de Verma.	22
1.3.2 Opérateur d'identité.	23
1.3.3 Opérateurs d'énergie fondamentaux.	24
1.3.4 Formule de Kac.	24
1.4 Modèles minimaux.	25
1.5 Méthode du gaz de Coulomb.	29
1.5.1 Réalisation de la théorie conforme avec $c = 1$	29
1.5.2 Déformation de la théorie $c = 1$	31
1.5.3 Opérateurs d'écrans et résolution de Felder pour la théorie minimale. .	34
1.6 Théories conformes étendues.	37
1.6.1 Algèbre W_3	38
2 Systèmes désordonnés et théories conformes perturbées.	41
2.1 Désordre gelé et méthode des répliques.	41
2.2 Théories conformes perturbées et groupe de renormalisation.	42
2.3 Calcul RG avec un développement en ϵ : premier ordre.	43
2.4 Théorème c de Zamolodchikov.	45

3	Théories $WD_3^{(p)}$ désordonnés et modèles couplés.	47
3.1	Brève introduction aux théories W	47
3.2	Théories $WD_3^{(p)}$ et gaz de Coulomb.	49
3.3	Calcul de groupe de renormalisation au premier ordre.	52
3.3.1	Action perturbée.	52
3.3.2	La fusion énergie-énergie.	53
3.4	Renormalisation des constantes de couplage.	55
3.5	Point fixes et flot du groupe de renormalisation.	56
3.5.1	$WD_3^{(p)}$ désordonné.	56
3.5.2	N modèles $WD_3^{(p)}$ couplés.	58
3.5.3	Renormalisation des opérateurs d'énergie.	60
3.5.4	Détermination des charges centrales.	61
3.6	Calcul des constantes de structure $D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi$ et $D_{\phi\phi}^\phi$ pour le modèle $WD_n^{(p)}$	64
3.7	Discussion.	65
4	Théories parafermioniques avec symétrie Z_5.	69
4.1	Introduction aux théories parafermioniques.	70
4.1.1	Forme générale de l'algèbre parafermionique.	70
4.1.2	Une première condition d'associativité.	71
4.2	Théories parafermioniques de Fateev-Zamolodchikov.	72
4.2.1	Opérateurs de spin et auto dualité.	72
4.2.2	Algèbre parafermionique et spectre de la théorie.	73
4.2.3	Un exemple significatif : le modèle de Potts à trois états.	75
4.3	Deuxième solution pour l'algèbre chirale.	76
4.4	Opérateurs chiraux et espace de représentation pour $N = 5$	77
4.5	Les modules des singlets et des doublets.	79
4.6	Dégénérescences des modules.	84
4.6.1	Doublet 1.	84
4.6.2	Doublet 2.	87
4.6.3	Singlet.	89
4.7	Le secteur des opérateurs de désordre R_a	90
4.7.1	Structure des modules.	90
4.7.2	Dégénérescences des modules.	92
4.8	Formule de Kac.	94
4.9	Théorie générale.	96

4.9.1	Réflexions et règles de fusion dans le tableau de Kac.	96
4.9.2	Tableau de Kac fini pour la théorie unitaire.	100
4.10	Équations caractéristiques.	101
4.10.1	Formule générale pour les valeurs propres dans le secteur de désordre.	105
4.11	Discussion	106
5	Théories parafermioniques avec symétrie Z_N	109
5.1	Espace de représentation.	110
5.2	Secteurs de singlet et de doublet.	110
5.2.1	Structure des modules	110
5.2.2	Algèbre des modes.	113
5.3	Le secteur de désordre.	115
5.4	Théories parafermioniques Z_N , N impair.	116
5.4.1	Opérateur d'identité.	116
5.4.2	Doublet 1 fondamental de la théorie $N = 7$	116
5.4.3	Doublet $(N - 1)/2$ fondamental.	117
5.4.4	Opérateurs de désordre fondamentaux.	119
5.4.5	Formule de Kac.	120
5.4.6	Théories unitaires : tableau de Kac fini.	124
5.4.7	Théorie triviale : $c = 0$	125
5.4.8	Position des opérateurs fondamentaux dans la cellule élémentaire.	126
5.4.9	Dérivation alternative des termes de bord.	129
5.4.10	Remplissage du tableau de Kac.	130
5.5	Théories parafermioniques Z_N , N pair.	134
5.5.1	Tableau de Kac fini et cellule élémentaire.	136
5.5.2	Termes de bord.	137
5.5.3	Doublets $\Phi^{\pm \frac{q}{2}}$ avec charge demi entière.	139
5.5.4	Dégénérescences des modules.	140
5.5.5	Redéfinition des charges Z_N et auto dualité.	141
5.5.6	Résumé.	142
5.6	Discussion.	144
6	Conclusion générale.	147
A	Models WD_n in the presence of disorder and the coupled models	155

B	Parafermionic theory with the symmetry Z_5	157
C	Parafermionic theory with the symmetry Z_N, for N odd	159
D	Parafermionic theory with the symmetry Z_N, for N even	161
E	Conformal field theories with Z_N and Lie algebra symmetries	163

Présentation de la thèse

L'étude des phénomènes critiques a produit une avalanche de résultats et de nouvelles idées qui se retrouvent maintenant dans tous les domaines de la physique, de la physique hautes énergies à la physique de la matière condensée. L'explication physique de tels phénomènes a été possible grâce, notamment, à l'introduction de nouveaux concepts théoriques, au centre desquels se trouvent le groupe de renormalisation (RG) et l'invariance conforme au point critique [1, 2, 3, 4].

Les systèmes réels présentent toujours des défauts de types variés qui tendent à les désordonner. Il est alors important d'examiner comment le comportement critique d'un système pur est modifié par la présence du désordre. Le désordre peut se présenter soit comme un champ aléatoire qui se couple au paramètre d'ordre local, par exemple un champ magnétique aléatoire dans un système de spins en interaction, soit au niveau des couplages d'interaction.

Dans la première situation les effets du désordre sont généralement plus évidents. Un tel désordre peut en fait éliminer les transitions de phase dans les systèmes à basse dimension ou simplement changer les valeurs des exposants critiques [5]. Dans ce contexte, un modèle très étudié est le "random field Ising Model" (RFIM) dont la dimension critique inférieure est 2 [6].

Dans cette thèse nous nous intéressons plutôt à la deuxième situation en étudiant des modèles avec un faible désordre couplé à la densité d'énergie. Dans ce cas, il y a un critère, dit de Harris, qui permet d'estimer si un faible désordre modifie le comportement critique du système pur : le désordre est pertinent (non pertinent) si l'exposant α_{pur} , qui caractérise la divergence de la chaleur spécifique du système pur, est positif (négatif) [7]. Naturellement, si le désordre est pertinent, la question est de savoir comment le comportement critique du système pur est modifié.

Les modèles bidimensionnels de spins constituent un bon terrain d'essai pour répondre à cette question car ils ont des comportements critiques non triviaux. En plus, la structure très

riche de la symétrie conforme à cette dimension fournit des outils puissants qui ont permis d'expliquer une bonne partie des propriétés de ces systèmes.

Le problème d'un modèle avec un désordre couplé à la densité d'énergie est strictement lié par la méthode des répliques à celui de N répliques du même modèle qui interagissent entre eux à travers un couplage du type énergie-énergie. Les calculs perturbatifs du RG [8, 9, 10, 11] ainsi que les observations numériques basées sur les simulations Monte-Carlo et sur la diagonalisation des matrices de transfert [12, 13, 14, 15, 16] ont mis en évidence que les systèmes de N modèles couplés flottent, sous l'action du groupe de renormalisation, vers des nouveaux points fixes où la symétrie de permutation S_N des répliques se réalise de façon non triviale.

Bien qu'il y ait eu pendant plusieurs années une intense activité en physique mathématique et physique statistique sur ces problèmes, les théories conformes associées à ces points restent inconnues. Naturellement, la connaissance de telles théories serait très importante pour la compréhension non seulement des modèles désordonnés mais aussi de la physique des modèles couplés.

La recherche que nous avons conduit ces trois dernières années a été motivée par l'intérêt pour l'identification de ces théories conformes. Dans cette thèse je vais présenter les nouveaux résultats obtenus principalement dans deux directions de recherche.

Nous avons d'abord considéré un modèle théorique, appelé modèle WD_3 , où les effets du désordre sont non triviaux mais peuvent être déterminés analytiquement. En utilisant un calcul de groupe de renormalisation, nous avons déterminé la limite infrarouge du modèle désordonné. Puis, nous avons mis en évidence que le problème des N modèles WD_3 couplés présente deux nouveaux points multi-critiques où la symétrie des répliques est restaurée de façon non triviale [17, 18]. Nous avons montré que ces points ne peuvent être identifiés avec aucune théorie conforme connue et nous avons réussi à donner un développement analytique de la charge centrale correspondante.

Nous avons ensuite tourné notre attention vers des modèles avec des symétries discrètes qui s'ajoutent à la symétrie conforme. Les théories qui décrivent ces modèles sont appelées parafermioniques car elles contiennent des courants conservés, dits parafermions, avec un spin fractionnaire. Les valeurs de spin des parafermions, qui engendrent la symétrie cyclique Z_N , sont fixées par la condition d'associativité de l'algèbre chirale associée (algèbre parafermionique) [19].

Nous pensons que les théories parafermioniques représentent des bons candidats pour décrire les systèmes critiques où la symétrie permutatonelle est pleinement réalisée.

Contrairement à la plupart des théories conformes étendues, la compréhension des théories

parafermioniques est encore limitée. Cela est due manifestement à la structure compliquée des algèbres parafermioniques dont la formulation en termes des modes des parafermions implique des sommes infinies. Fateev et Zamolodchikov ont étudié les représentations de l'algèbre chirale où les spins des parafermions prennent les valeurs les plus petites parmi celles permises par l'associativité [19, 20]. Les théories qu'ils ont construit décrivent les points critiques auto duaux des généralisations Z_N du modèle d'Ising. Après ce travail fondamental, la recherche théorique s'est concentrée sur ces théories [21, 22, 23] (et leurs généralisations [24]) qui ont été en suite utilisées en matière condensée [25], en physique statistique [26, 27] et en théorie des cordes [28]. Mais on a négligé les autres solutions associatives possibles. En fait, Fateev et Zamolodchikov ont introduit une deuxième solution associative pour l'algèbre parafermionique Z_N où les spins des parafermions sont deux fois plus grands que ceux de la première solution. A part le cas de l'algèbre Z_3 [29], la théorie de représentation correspondante était inconnue.

Nous avons construit les représentations de ces deuxièmes algèbres Z_N [30, 31, 32]. L'hypothèse la plus naturelle est que ces théories sont associées aux points multi-critiques auto duaux des systèmes de spins avec symétrie Z_N . Pour obtenir ce résultat, nous avons fait appel à plusieurs techniques, qui vont du calcul explicite de dégénérescence des modules de représentation à l'utilisation des propriétés du gaz de Coulomb. Cet étude, qui met particulièrement en évidence le rôle joué par les symétries, nous a permis d'acquérir une connaissance approfondie des théories parafermioniques.

Dans le premier chapitre je vais présenter les notions essentielles de théories conformes dont nous aurons besoin par la suite. Dans le deuxième chapitre je montre comment le problème d'un modèle désordonné peut être étudié dans l'approche des théories conformes perturbées. Les résultats concernant le modèle $WD_3^{(p)}$ sont présentés dans le troisième chapitre. Les principales méthodes utilisées dans la construction de la nouvelle série des théories parafermioniques sont discutées dans le quatrième chapitre pour la théorie Z_5 . Dans le cinquième chapitre je présente la généralisation de ces résultats pour la théorie Z_N , N arbitraire.

Chapitre 1

Introduction aux théories conformes.

1.1 Transitions de phase du deuxième ordre et invariance conforme au point critique.

Un modèle statistique défini sur un réseau est généralement caractérisé par deux échelles : le pas du réseau a et la longueur de corrélation ξ qui mesure la distance typique sur laquelle les fluctuations sont significativement corrélées.

Les modèles qui présentent une transition de phase du deuxième ordre voient la longueur de corrélation ξ diverger au point critique. Les systèmes critiques sont donc très fortement corrélés et cela rend l'étude de cette classe de phénomènes intrinsèquement compliquée. Des exemples bien connus de transitions de phase continues ont lieu à la température de Curie d'un aimant et au point critique de transition gaz-liquide d'un fluide.

En général, au point de transition ou en proximité de celui-ci (avec $\xi \gg a$), on s'intéresse aux fonctions de corrélation entre opérateurs situés à une distance R telle que $a \ll R \ll \xi$. Du moment qu'on s'attend que les quantités thermodynamiques ne dépendent pas du réseau, on considère usuellement la limite continue où les modèles statistiques peuvent être étudiés à l'aide de la théorie des champs. La théorie de Landau-Ginzburg, basée sur une description lagrangienne effective des fluctuations critiques, a été longtemps la seule approche pour étudier les phénomènes critiques.

La longueur de corrélation et les autres quantités thermodynamiques varient typiquement selon des lois de puissance par rapport à la distance du point critique. Les exposants sont

appelés exposants critiques.

L'hypothèse de *scaling* des quantités thermodynamiques, étudiée par Kadanoff et Widom [33, 34] et la méthode du groupe de renormalisation reformulée par Wilson [35, 36] ont permis des énormes progrès dans la compréhension des transitions de phase du deuxième ordre. En particulier, ces considérations donnent une explication naturelle au phénomène d'universalité pour lequel beaucoup des propriétés d'un système critique sont indépendantes des détails microscopiques. Il se trouve que le comportement critique des systèmes physiques est décrit par un ensemble discret de classes d'universalité, chacune caractérisée par un ensemble d'exposants.

L'image physique d'un système critique est celle d'une structure autosimilaire qui reste inchangée lorsqu'elle est regardée à des échelles différentes. Au point critique, les fluctuations s'étendent à toutes les échelles et la théorie critique correspondante, ne possédant aucune longueur caractéristique, est invariante sous la transformation d'échelle :

$$x \rightarrow \lambda x, \quad (1.1)$$

où les $x \equiv x^\mu$ sont les coordonnées dans un espace de dimension D , $\mu = 1, \dots, D$, et λ est un facteur de dilatation. Cette invariance d'échelle d'un système statistique au point critique est la propriété clé à l'origine de toutes les considérations qui suivent.

Une théorie critique est caractérisée par des opérateurs locaux $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$ qui se transforment sous la dilatation (1.1) dans la façon suivante :

$$\Phi_i(x) \rightarrow \tilde{\Phi}_i(x) = (\lambda)^{\Delta_i^p} \Phi_i(\lambda x), \quad (1.2)$$

où Δ_i^p est la dimensions physiques du champ Φ_i . L'ensemble des valeurs $\{\Delta_i^p\}$ est directement lié aux exposants critiques et définit la classe d'universalité du système statistique.

Les fonctions de corrélations sont les objets centraux de toute étude théorique ou expérimentale des phénomènes critiques : la connaissance de ces fonctions donne une information complète sur les fluctuations critiques.

On dit qu'une théorie possède la symétrie d'échelle si les fonctions de corrélation des champs Φ_i restent inchangées sous une dilatation (1.1). Pour une fonction générale à n -points la condition de symétrie est :

$$\langle \Phi_i(x_1) \Phi_j(x_2) \cdots \Phi_k(x_n) \rangle = \langle \tilde{\Phi}_i(x_1) \tilde{\Phi}_j(x_2) \cdots \tilde{\Phi}_k(x_n) \rangle, \quad (1.3)$$

Il est facile de vérifier que la seule forme de la fonction à deux points $\langle \Phi_i(x_1) \Phi_i(x_2) \rangle$ qui satisfait la condition (1.3) est la suivante :

$$\langle \Phi_i(x_1) \Phi_i(x_2) \rangle = \frac{1}{|x_1 - x_2|^{2\Delta_i^p}}. \quad (1.4)$$

La symétrie d'échelle fixe la forme des fonctions à deux points, mais pas celle des fonctions à trois points ou plus.

Il est naturel de penser que l'invariance globale (1.1) soit en fait la manifestation d'une invariance locale, évidemment beaucoup plus restrictive, où le facteur de dilatation λ varie dans l'espace et a des valeurs différentes dans des points différents. On considère donc les conséquences les plus générales de l'invariance sous une transformation d'espace

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu(x), \quad (1.5)$$

telle que

$$(dx^\mu)^2 \rightarrow (d\tilde{x}^\mu)^2 = \lambda^2(x)(dx^\mu)^2. \quad (1.6)$$

Une transformation qui satisfait cette condition est dite conforme.

Dans un espace de dimension $D \geq 3$, le groupe conforme est engendré par quatre types de transformations : les translations, les rotations, les dilatations et les transformations conformes spéciales, formées par la composition d'une inversion spatiale et d'une translation. Pour $D \geq 3$, cette symétrie n'impose qu'un nombre fini de contraintes et la symétrie seule ne suffit pas pour déterminer complètement la théorie mais arrive à fixer seulement les fonctions à deux et à trois points [37, 38, 39].

La situation est radicalement différente en dimension $D = 2$: dans ce cas, le groupe conforme est constitué par toutes les transformations analytiques d'un plan bidimensionnel. Dans un espace avec une métrique euclidienne, il est utile de passer aux coordonnées complexes $z = x^1 + ix^2$ et $\bar{z} = x^1 - ix^2$. Les transformations conformes sont donc simplement les transformations analytiques et anti-analytiques :

$$z \rightarrow z'(z) = f(z) \quad , \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z}'(\bar{z}) = \overline{f(z)}. \quad (1.7)$$

Le groupe conforme est donc de dimension infinie ce qui permet d'imposer une infinité de contraintes sur la théorie. L'idée est donc de construire des solutions exactes pour des théories conformes bidimensionnelles en profitant du fait que la symétrie conforme et les possibles symétries additionnelles suffisent pour fixer la forme des fonctions de corrélations. Dans cette approche, le but principal de l'étude des transitions du deuxième ordre, voire la classification complète des classes d'universalités, se traduit dans le problème de trouver les solutions conformes de la théorie quantique des champs bidimensionnelles[40].

La théorie des champs conformes vit ses bases jetées en 1984 par Belavin, Polyakov et Zamolodchikov [41]. Les prochaines sections vont fixer quelques notations et montrer des techniques qui seront de grande importance pour la suite. On renvoie pour une introduction exhaustive de la théorie conforme à des références plus détaillées [38, 42].

1.2 Opérateurs primaires, identités de Wards et algèbre de Virasoro.

1.2.1 Invariance conforme et transformation des opérateurs.

Les opérateurs d'une théorie conforme bidimensionnelle se transforment sous la transformation conforme (1.7) selon :

$$\Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}) \rightarrow \tilde{\Phi}(z, \bar{z}) = \left(\frac{df(z)}{dz} \right)^{\Delta} \left(\frac{d\bar{f}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^{\bar{\Delta}} \Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(f(z), \bar{f}(\bar{z})). \quad (1.8)$$

Les dimensions, dites conformes, Δ et $\bar{\Delta}$ sont liées à la dimension physique Δ^p (cfr. éq.(1.2)) et au spin s du champ $\Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z})$. Sous une rotation $z \rightarrow e^{i\theta}z$, un opérateur de spin s se transforme par un facteur $e^{is\theta}$. Si on choisit dans l'éq. (1.8) $f(z) = e^{i\theta}z$ et $\bar{f}(\bar{z}) = \lambda\bar{z}$, la variation du champ $\Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z})$ est respectivement :

$$\begin{aligned} \Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}) &\rightarrow e^{i\Theta(\Delta - \bar{\Delta})} \Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(e^{i\theta}z, e^{-i\theta}\bar{z}), \\ \Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}) &\rightarrow (\lambda)^{(\Delta + \bar{\Delta})} \Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(\lambda z, \lambda \bar{z}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Par ces équations, on a donc les relations suivantes :

$$\Delta - \bar{\Delta} = s, \quad \Delta + \bar{\Delta} = \Delta^p. \quad (1.10)$$

La variation d'un champ $\Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z})$ sous la transformation infinitésimale $z \rightarrow z + \alpha(z)$, $\bar{z} \rightarrow \bar{z} + \overline{\alpha(z)}$ avec $|\alpha(z)| \ll 1$, prend, selon l'éq. (1.8), la forme :

$$\delta \Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}) = (\Delta \alpha'(z) + \alpha(z) \partial_z + \bar{\Delta} \overline{\alpha'(z)} + \overline{\alpha'(z)} \partial_{\bar{z}}) \Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}). \quad (1.11)$$

Les opérateurs de la théorie conforme qui se transforment selon la relation (1.11) sont appelés opérateurs primaires (par rapport à l'algèbre conforme).

1.2.2 Lois de conservation et tenseur d'énergie-impulsion.

Il est bien connu, par le théorème de Noëther, que chaque symétrie est associée à un courant conservé. Les lois de conservation correspondantes à la translation et à la dilatation peuvent s'écrire sous la forme :

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz}(z, \bar{z}) = 0, \quad \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad (1.12)$$

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0, \quad (1.13)$$

où $T_{zz}, T_{\bar{z}\bar{z}}, T_{z\bar{z}}$, et $T_{\bar{z}z}$ sont les composantes du tenseur d'énergie-impulsion dans les coordonnées complexes, la relation entre les composantes euclidiennes $T_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2$ et complexes étant :

$$T_{zz} = T_{11} - T_{22} - 2iT_{12} \quad (1.14)$$

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = T_{11} - T_{22} + 2iT_{12} \quad (1.15)$$

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = T_{11} + T_{22}. \quad (1.16)$$

Les composantes T_{zz} et $T_{\bar{z}\bar{z}}$ sont, par les lois de conservation (1.12), des champs holomorphes et antiholomorphes,

$$T_{zz} \equiv T(z), \quad T_{\bar{z}\bar{z}} \equiv \bar{T}(\bar{z}). \quad (1.17)$$

La condition de trace nulle de l'opérateur d'énergie-impulsion $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0$, propriété bien connue pour les théories invariantes sous dilatations, assure le découplage de la théorie dans sa partie holomorphe et antiholomorphe. Comme on voit à partir de l'éq.(1.7), le groupe conforme se décompose en le produit direct des groupes des transformations analytiques des variables z et \bar{z} , respectivement ; les transformations $z \rightarrow f(z)$ sont engendrées par la composante $T(z)$ tandis que celles $\bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z})$ par $\bar{T}(\bar{z})$ (voir ci dessous). Dorénavant, on se limite à considérer seulement la partie holomorphe de la théorie, sachant que tout ce qui est montré dans la suite peut être directement étendu à la partie antiholomorphe.

1.2.3 Identité de Ward conforme.

Les fonctions de corrélation d'une théorie critique bidimensionnelle sont invariantes (comme défini en (1.3)) sous le sous ensemble des transformations conformes constitué par les translations, les rotations, les dilatations et les transformations conformes spéciales :

$$z \rightarrow f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.18)$$

avec a, b, c, d complexes et $ad - bc = 1$.

Les conséquences de la symétrie sous une transformation générale, et donc pour une fonction $f(z)$ analytique quelconque, peuvent être exprimées à travers les identités de Ward, qui rendent explicite la réalisation de cette symétrie au niveau des fonctions de corrélation[38].

Sans donner les détails de sa dérivation, l'identité de Ward exprimant la variation d'une fonction de corrélation à N points, $\delta_{\alpha(z)} \langle \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_N \rangle$, sous une transformation infinitésimale $z \rightarrow z + \alpha(z)$ est la suivante :

$$\delta_{\alpha(z)} \langle \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_N \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \alpha(z) \langle T(z) \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_N \rangle, \quad (1.19)$$

où C est un contour entourant tous les opérateurs dans la fonction de corrélation. En utilisant l'éq.(1.11)

$$\delta_{\alpha(z)} \langle \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_N \rangle = \sum_{i=1}^N (\Delta_i \partial \alpha(z_i) + \alpha(z_i) \partial_{z_i}) \langle \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_N \rangle \quad (1.20)$$

et en comparant cette expression avec l'éq.(1.19), l'identité de Ward peut être considérée comme la définition de l'effet d'une transformation conforme sur un champ local dans une fonction de corrélation. Il est naturel que l'opérateur d'énergie-impulsion $T(z)$ joue le rôle du générateur des transformations conformes.

Après quelques manipulations avec les intégrales de contour dans le plan complexe, on peut extraire la forme locale de la (1.19) :

$$\langle T(z) \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_N \rangle = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\Delta_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i} \partial_i \right) \langle \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_N \rangle. \quad (1.21)$$

En développant en série par rapport à $(z - z_i)$ la partie droite de cette équation, il est facile d'extraire le développement du produit des opérateur $T(z)\Phi_i(z_i)$:

$$T(z)\Phi_i(z_i) = \frac{\Delta_i}{(z - z_i)^2} \Phi_i(z_i) + \frac{1}{z - z_i} \partial \Phi_i(z_i) + \Phi_i^{(-2)}(z_i) + (z - z_i) \Phi_i^{(-3)}(z_i) + \dots, \quad (1.22)$$

où les opérateurs $\{\Phi_i^{(-2)}\}$ sont donnés par les termes du développement de l'identité (1.21). L'action de $T(z)$ sur un opérateur primaire Φ_i produit encore Φ_i dans le terme le plus singulier, et puis une suite infinie d'opérateurs, descendants de Φ_i par rapport à $T(z)$.

Il est alors utile d'exprimer l'action de l'opérateur $T(z)$ sur un opérateur quelconque comme une somme infinie de modes L_n :

$$T(z)\Phi(z') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - z')^{2+n}} L_n \Phi(z'). \quad (1.23)$$

En comparant ce développement avec celui de (1.22), on déduit :

$$L_n \Phi_i = 0 \quad n > 0 \quad (1.24)$$

$$L_0 \Phi_i = \Delta_i \Phi_i \quad (1.25)$$

$$L_{-1} \Phi_i = \partial \Phi_i \quad (1.26)$$

$$L_{-n} \Phi_i = \Phi_i^{(-n)}. \quad (1.27)$$

L'équation (1.24) dérive directement du fait que Φ_i est un opérateur primaire. Dans le sens inverse, on peut utiliser la relation (1.24) comme la définition d'un opérateur primaire. Clairement on peut appliquer à un opérateur Φ une suite de modes $L_{-n_1} L_{-n_2} L_{-n_3} \dots$ en obtenant ainsi un autre opérateur descendant :

$$\Phi^{(-n_1, -n_2, -n_3, \dots)} = L_{-n_1} L_{-n_2} L_{-n_3} \dots \Phi \quad (1.28)$$

1.2.4 Algèbre de Virasoro et charge centrale.

Pour classer la suite infinie d'opérateurs $\Phi^{(-n_1, -n_2, -n_3, \dots)}$, on a besoin de déterminer les règles de commutations entre les modes L_n . Pour cela, il est utile d'inverser l'éq.(1.23) et d'exprimer l'application de L_n en termes d'une intégrale de contour :

$$L_n \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_z} d\xi \xi^{n+1} T(\xi) \Phi(z), \quad (1.29)$$

où C_z entoure le point z .

La commutation $[L_n, L_m]\Phi(0)$ s'écrit, après avoir déformé opportunément les contours d'intégration [38], de la façon suivante :

$$[L_n, L_m]\Phi(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\xi_1}} d\xi_2 \oint_{C_0} d\xi_1 \xi_2^{n+1} \xi_1^{m+1} T(\xi_2) T(\xi_1) \Phi(0). \quad (1.30)$$

Pour calculer cette expression, il faut déterminer les termes singuliers dans le développement du produit $T(z')T(z)$. Pour cela, il est important de réaliser que le tenseur d'énergie-impulsion n'est pas un opérateur primaire. En fait, le développement du produit $T(z')T(z)$ doit être de la forme :

$$T(z')T(z) = \frac{c/2}{(z' - z)^4} + \frac{2}{(z' - z)^2} T(z) + \frac{1}{z' - z} \partial T(z) + O(1). \quad (1.31)$$

Le coefficient du terme $(z' - z)^{-2}$ vient du fait que l'opérateur d'énergie-impulsion $T(z)$ a une dimension 2. Le terme en $(z' - z)^{-3}$ est absent par la symétrie $z \rightarrow -z$ alors que le terme en $(z' - z)^{-4}$ doit être présent pour que la fonction de corrélation $\langle T(z')T(z) \rangle \propto (z' - z)^{-4}$ soit non nulle.

Le développement (1.31) permet d'introduire le nombre c , appelé charge centrale, qui représente une quantité très significative et dépend de la théorie spécifique.

En tenant compte du produit (1.31) on trouve :

$$[L_n, L_m]\Phi = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0}. \quad (1.32)$$

Ces règles de commutation définissent l'algèbre de Virasoro [43]. L'étude de ces représentations joue un rôle fondamental dans la construction des théories conformes.

On considère la transformation de paramétrisation d'une fonction scalaire :

$$f(z) \rightarrow \tilde{f}(z) = f(z + \alpha(z))$$

$$\alpha(z) = \sum_n a_n z^{n+1}.$$

Il est immédiat de vérifier que l'algèbre classique des modes $l_n \equiv -z^{n+1}d/dz$ définissant la variation d'une fonction $f(z)$,

$$\delta f(z) = \alpha(z)\partial_z f(z) = \sum_n a_n l_n f(z), \quad (1.33)$$

correspond à l'algèbre de Virasoro avec $c = 0$.

La charge centrale revêt donc un rôle purement quantique, étant une sorte d'énergie de point zéro engendrée par les fluctuations quantiques. Son importance en mécanique statistique peut être mieux comprise en considérant un système défini sur une bande de largeur L et de longueur infinie avec des conditions de bord ciclyques : l'énergie libre $f(L)$ par unité de longueur est donnée par [44, 45] :

$$f(L) = f(\infty) - \frac{c\pi}{6L} + O(L^{-2}), \quad (1.34)$$

où on suppose $\beta \propto 1/T = 1$. Cette relation, qui est l'analogie de l'effet Casimir en électrodynamique quantique, est très importante dans l'étude des effets de taille finie dans les systèmes statistiques et dans les simulations numériques.

1.3 Représentation de l'algèbre de Virasoro.

Dans la section précédente, on a dérivé la structure algébrique associée à l'invariance conforme d'une théorie bidimensionnelle. La recherche des solutions exactes pour ce type de théorie quantique des champs se traduit dans l'étude des représentations possibles de l'algèbre de Virasoro.

Je veux souligner que jusqu'ici on a supposé la présence de la seule invariance conforme. Dans la suite, on parlera des théories conformes qui possèdent des symétries additionnelles, c'est à dire des symétries qui s'ajoutent à la symétrie conforme. Dans ce cas la structure algébrique, qui contient comme sous structure la structure de Virasoro, est bien plus riche.

1.3.1 Modules de Verma.

Dans la section précédente on a montré que tous les opérateurs locaux qui apparaissent dans la théorie sont obtenus en appliquant les modes L_n , avec $n < 0$, aux champs primaires Φ_Δ . L'ensemble complet des champs locaux s'organise donc dans des "familles conformes" $[\Phi_\Delta]$, chacune contenant les champs de la forme $\Phi_\Delta^{(-n_1, -n_2, \dots, -n_l)} \equiv L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_l} \Phi_\Delta$. Comme :

$$\begin{aligned} L_0 \Phi_\Delta &= \Delta \Phi_\Delta \\ L_n \Phi_\Delta &= 0, \quad n > 0, \end{aligned} \quad (1.35)$$

l'ensemble des opérateurs $[\Phi_\Delta]$ constitue la représentation de plus haut poids Δ de l'algèbre de Virasoro, Φ_Δ étant le vecteur de plus haut poids. Il est facile de voir, en utilisant la règle

de commutation des modes L_n que l'opérateur descendant $\Phi_{\Delta}^{(-n_1, -n_2, \dots, -n_l)}$ est propre par rapport au mode L_0 :

$$\begin{aligned} L_0 \Phi_{\Delta}^{(-n_1, -n_2, \dots, -n_l)} &= (N + \Delta) \Phi_{\Delta}^{(-n_1, -n_2, \dots, -n_l)} \\ N &= \sum_{i=1}^l n_i. \end{aligned} \quad (1.36)$$

On dira que $\Phi_{\Delta}^{(-n_1, -n_2, \dots, -n_l)}$ est un état descendant qui apparaît au niveau N du module de Φ_{Δ} . Cette structure est appelée, dans le jargon de la théorie des représentations, le module de Verma de l'algèbre de Virasoro.

En général, pour des valeurs quelconques de Δ et c , tous les opérateurs dans le module sont indépendants et la représentation $[\Phi_{\Delta}]$ est irréductible. La question, centrale dans la théorie des représentations, est alors de comprendre sous quelles conditions les représentations deviennent réductibles. Comme on montre plus loin, cela signifie chercher pour quelles valeurs de Δ et c le module $[\Phi_{\Delta}]$ admet des dégénérescences. Les théories conformes construites à partir des représentations dégénérées décrivent les systèmes statistiques au point critique.

On dit que le module $[\Phi_{\Delta}]$ est dégénéré au niveau N s'il contient un état χ_N , $L_0 \chi_N = (N + \Delta) \chi_N$, obéissant à l'équation :

$$L_n \chi_N = 0, \quad n > 0. \quad (1.37)$$

L'état χ_N peut donc être considéré comme un opérateur primaire formant son propre module $[\chi_N]$ qui rend la représentation $[\Phi_{\Delta}]$ réductible. Pour obtenir une représentation irréductible, il faut annuler l'état singulier χ_N et le sous module correspondant $[\chi_N]$, $[\chi_N] \in [\Phi_{\Delta}]$; cette procédure est équivalente à quotienter $[\Phi_{\Delta}]$ par $[\chi_N]$.

On veut montrer ici des exemples explicites des calculs de dégénérescence pour les modules de Virasoro. Malgré leur simplicité, ils font appel à la même technique qui sera utilisée dans la suite dans les cas plus compliqués des théories parafermioniques qui constituent le corps central de cette thèse.

1.3.2 Opérateur d'identité.

Sur le niveau $N = 1$ d'un module de Verma $[\Phi_{\Delta}]$, on trouve seulement l'état $\chi_1 \equiv L_{-1} \Phi_{\Delta} = \partial_z \Phi_{\Delta}$. Si on suppose une dégénérescence à ce niveau, alors la condition (1.37) prend la forme :

$$L_n (L_{-1} \Phi_{\Delta}) = 0, \quad n > 0. \quad (1.38)$$

En utilisant (1.32) et le fait que Φ_Δ est primaire, il est immédiat de vérifier que ces conditions sont satisfaites si :

$$L_{+1}L_{-1}\Phi_\Delta = 2\Delta\Phi_\Delta = 0, \quad (1.39)$$

ce qui donne :

$$\Delta = 0. \quad (1.40)$$

Cette solution correspond à l'opérateur d'identité I qu'on doit retrouver dans toutes les théories.

1.3.3 Opérateurs d'énergie fondamentaux.

Au lieu d'imposer la dégénérescence au niveau $N = 1$, on l'impose au niveau suivant, $N = 2$. Sur ce niveau on a deux états indépendants :

$$L_{-1}^2\Phi_\Delta, \quad L_{-2}\Phi_\Delta. \quad (1.41)$$

On en cherche donc une combinaison linéaire,

$$\chi_2 \equiv L_{-1}^2\Phi_\Delta + aL_{-2}\Phi_\Delta, \quad (1.42)$$

avec a comme paramètre, qui obéisse aux conditions :

$$L_n\chi_2 = 0, \quad n > 0. \quad (1.43)$$

Par l'algèbre de Virasoro, il suffit que χ_2 soit annulé par L_{+1} et L_{+2} :

$$\begin{aligned} L_{+1}(L_{-1}^2\Phi_\Delta + aL_{-2}) &= 0 \\ L_{+2}(L_{-1}^2\Phi_\Delta + aL_{-2}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

En utilisant encore les commutations (1.32), on trouve deux solutions Δ_\pm pour le système d'équations ci-dessus :

$$\Delta_\pm = \frac{5-c}{16} \pm \frac{\sqrt{(c-1)(c-25)}}{16} \quad (1.45)$$

Ces solutions correspondent aux dimensions des opérateurs d'énergie fondamentaux, c'est à dire les opérateurs d'énergie qui présentent des états singuliers dans les niveaux les plus hauts.

1.3.4 Formule de Kac.

L'approche générale au problème des dégénérescences des modules de Virasoro a été analysée par Kac [46, 47] : la dimension d'un opérateur primaire dont le module est dégénéré

au niveau N est donnée par la formule :

$$\Delta_{m,n} = \frac{(\alpha_- m + \alpha_+ n)^2 - (\alpha_- + \alpha_+)^2}{4}, \quad (1.46)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm} &= \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}, & \alpha_- \alpha_+ &= -1 \\ c &= 1 - 24\alpha_0^2, \end{aligned} \quad (1.47)$$

et n, m sont des entiers positifs tels que $N = nm$. Pour simplifier la notation, on indique $\Phi_{\Delta_{m,n}} \equiv \Phi_{m,n}$. L'équation (1.46) est appelée formule de Kac. Pour $N = 1$ ($m = n = 1$) et pour $N = 2$ ($m = 2, n = 1$ et $m = 1, n = 2$) on retrouve respectivement l'opérateur d'identité et les résultats (1.45) où $\Delta_+ = \Delta_{1,2}$ et $\Delta_- = \Delta_{2,1}$.

1.4 Modèles minimaux.

Un des objectifs fondamentaux des théories conformes, nécessaire pour calculer les fonctions de corrélation de la théorie, est la connaissance de l'algèbre des opérateurs primaires. La forme générale de cette algèbre est donnée par le développement :

$$\Phi_1(z, \bar{z})\Phi_2(0, 0) = \sum_p \frac{D_{12}^p}{z^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_p}} \left[\Phi_p + z\beta_p^{(-1)}L_{-1}\Phi_p + z^2(\beta_p^{(-1,-1)}L_{-1}^2\Phi_p + \beta_p^{(-2)}L_{-2}\Phi_p) \dots \right] \quad (1.48)$$

où Δ_1, Δ_2 et Δ_p sont respectivement les dimensions des champs primaires Φ_1 et Φ_2 et Φ_p . Le produit de deux champs primaires se décompose dans une somme des blocs conformes associés aux contributions des champs du module irréductible $[\Phi_p]$. Tous les coefficients $\beta_p^{(\cdot)}$ dans chaque bloc conforme sont univoquement déterminés par l'invariance conforme [38]. Les seules quantités inconnues sont les coefficients numériques D_{12}^p qui déterminent le poids relatif avec lequel chaque bloc conforme est présent dans le développement du produit. Pour déterminer les coefficients D_{12}^p il faut faire appel à une réalisation spécifique de la théorie conforme pour laquelle on sait calculer les fonctions de corrélations. Comme on discutera dans les prochaines sections, la réalisation du gaz de Coulomb a permis les calculs de ces coefficients.

La construction de la première série de solutions exactes pour des modèles conformes est basée sur l'observation que pour

$$\alpha_+^2 = p'/p, \quad (1.49)$$

avec p, p' des entiers positifs, l'algèbre des opérateurs se ferme sur un nombre fini de représentations $[\Phi_{m,n}]$ appartenant au tableau fini :

$$1 \leq m \leq p' - 1, \quad 1 \leq n \leq p - 1. \quad (1.50)$$

Les opérateurs qui se trouvent au dehors de ce tableau ne participent pas à l'algèbre des opérateurs dans ce tableau car les coefficients de l'algèbre correspondante sont nuls. Ces opérateurs sont donc découplés et la théorie contient un nombre fini de modules. Les modèles caractérisés par une charge centrale

$$c = 1 - \frac{6(p' - p)^2}{p'p}, \quad (1.51)$$

sont appelés minimaux et sont usuellement indiqués comme $M(p', p)$.

En général, les théories minimales (1.51) ne sont pas unitaires et elles contiennent des états, primaires ou descendants, dont la norme est négative. Parmi les modèles minimaux on peut extraire une série principale de modèles unitaires [48] qui correspondent à une charge centrale donnée par $p' = p + 1$:

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}. \quad (1.52)$$

Les modèles minimaux unitaires de charge centrale donnée par (1.52) sont usuellement indiqués comme M_p .

Pour donner un exemple du contenu de ces modèles et de leur application à la physique statistique, on va reproduire ci-dessous le spectre des théories M_3 et M_5 qui ont été respectivement identifiés avec les points critiques du modèle d'Ising [41] et du modèle de Potts à trois états [49, 50].

Théorie M_3 : modèle d'Ising.

Le modèle d'Ising revêt encore aujourd'hui un rôle très important dans l'étude des modèles statistiques. En effet, d'une part il est utilisé dans de nombreux problèmes de physique statistique (gaz sur réseau, fluides binaires, β -verre, etc..), de l'autre c'est le modèle le plus simple pour étudier les phénomènes critiques. Il peut être considéré comme "l'atome d'hydrogène" des systèmes statistiques.

En associant à chaque site i d'un réseau carré une variable de spin σ_i qui peut prendre deux valeurs, $\sigma_i = \pm 1$, la fonction de partition du modèle est donnée par :

$$Z(\beta) = \sum_{\{\sigma = \pm 1\}} \exp(-\beta \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j), \quad (1.53)$$

avec $\beta = J/T$ défini comme le rapport entre la constante de couplage J des spins premiers voisins (indiqués avec la notation $\langle ij \rangle$) et la température T . La somme est faite sur toutes les configurations de spins $\{\sigma = \pm 1\}$.

Ce modèle présente une transition du deuxième ordre pour $\beta_c = 1/2 \ln(1 + \sqrt{2})$. Dans la limite continue, le modèle d'Ising critique est décrit par le modèle M_3 avec charge centrale $c = 1/2$.

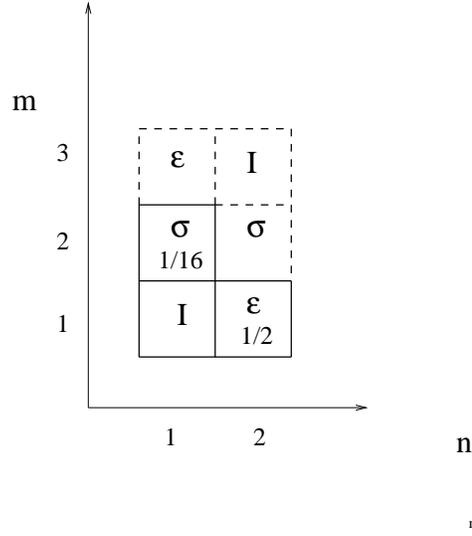


FIG. 1.1 – Grille conforme du modèle d’Ising. Les opérateurs associés par la transformation Z_2 , voir éq.(1.57), sont identiques.

La grille d’opérateurs avec leur dimensions est montrée en fig.(1.1). Elle ne contient que trois opérateurs : l’identité I , l’opérateur de spin $\sigma(x)$ (qui remplace le spin σ_i sur réseau) et l’opérateur de densité d’énergie ε (qui correspond au produit entre spins $\sigma_i\sigma_j$ premiers voisins sur le réseau). En utilisant les relations suivantes entre exposants critiques et dimensions des opérateurs :

$$\nu = \frac{1}{2 - 2\Delta_\varepsilon}; \quad \alpha = \frac{2 - 4\Delta_\varepsilon}{2 - 2\Delta_\varepsilon}; \quad \beta = \frac{2\Delta_\sigma}{2 - 2\Delta_\varepsilon}, \quad (1.54)$$

on trouve $\nu = 1$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1/8$, qui sont bien les exposants critiques calculés exactement par Onsager [51].

Les règles de fusion du modèle d’Ising sont données par :

$$\begin{aligned} \sigma \times \sigma &= I + \varepsilon \\ \sigma \times \varepsilon &= \sigma \\ \varepsilon \times \varepsilon &= I \end{aligned} \quad (1.55)$$

Modèle M_5 : modèle de Potts à trois états.

Le modèle de Potts à trois états est défini par l’hamiltonien réduit :

$$H[\sigma_i] = -J \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i \sigma_j} \quad J > 0 \quad (1.56)$$

où les variables de spin σ_i , placées sur le i -ème vertex d’un réseau carré, prennent les valeurs $\sigma_i = 0, 1, 2$. Le modèle de Potts à trois états a une transition de phase du deuxième ordre à

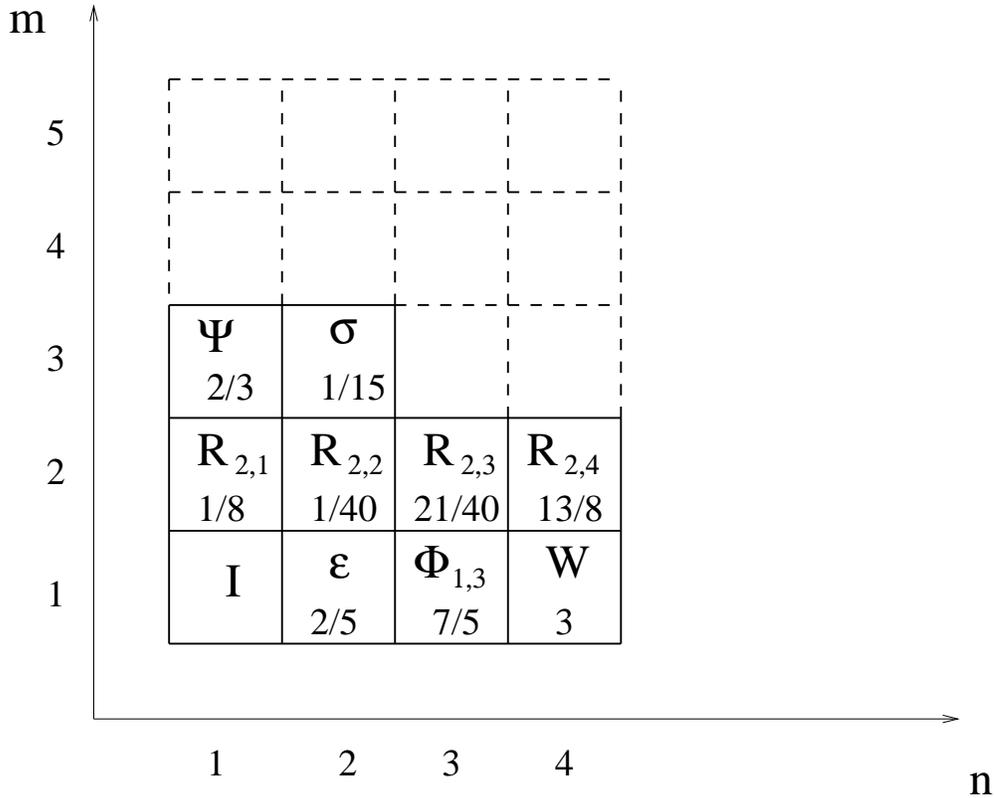


FIG. 1.2 – On montre une partie de la grille conforme du modèle de Potts, l'autre partie étant obtenue par réflexion Z_2 1.57. Dans cette grille on trouve, à part l'opérateur d'énergie ε et de spin σ , les opérateur de désordre R (cfr. section 4.2.3), les champs chiraux W et Ψ qui engendrent respectivement la symétrie W_3 (cfr. section 1.6.1) et Z_3 (cfr. section 4.2.3)

la température critique T_c donnée par $e^{J/T_c} = 1 + \sqrt{3}$ [52]. Le point critique correspondant a été identifié avec le modèle minimal M_5 de charge centrale $c = 4/5$ [49, 50].

Le tableau d'opérateurs, avec leur dimensions, est montré en fig.(1.2). Les opérateurs $\Phi_{1,1}$, $\Phi_{1,2}$ et $\Phi_{3,2}$ correspondent respectivement aux opérateurs d'identité I , d'énergie ε et de spin σ . En utilisant les éqs.(1.54), on obtient les exposants de la chaleur spécifique et de la magnétisation :

$$\alpha = \frac{1}{3} \quad \beta = \frac{1}{8}.$$

Ces valeurs sont bien en accord avec celles trouvées par Baxter en résolvant le modèle des hexagones durs [53] qui appartient à la même classe d'universalité du modèle de Potts.

En plus de ε et σ , on trouve d'autres opérateurs, montrés dans la fig.(1.2), dont l'interprétation n'est pas aussi immédiate. Ils correspondent à des opérateurs non locaux dont la réalisation sur le réseau a été introduite par Kadanoff [54, 55]. On peut mieux comprendre

le rôle joué par ces opérateurs dans le contexte d'une théorie parafermionique. Une discussion détaillée sur ce point sera abordée dans le chapitre quatre.

Pour le moment on se limite à souligner que le modèle critique de Potts à trois états est très particulier. En fait, la théorie critique qui le décrit correspond à un point de croisement entre trois séries différentes de théories conformes : la série de modèles minimaux qu'on vient d'introduire, la série de théorie parafermionique Z_3 de Fateev et Zamolodchikov (voir section 4.2.3) et la série de théories $[WA_2]$ (définie en section 3.1).

Les opérateurs affichés dans le tableau (1.2) sont primaires par rapport à l'algèbre de Virasoro. Mais on peut montrer que le spectre de la théorie peut être réorganisé selon la représentation de l'algèbre WA_2 (présentée à la fin de ce chapitre) ou d'une algèbre, dite parafermionique, qui réalise de façon explicite la symétrie globale Z_3 du modèle. Dans la section (4.2.3) on discutera mieux la classification des champs basée sur la représentation de l'algèbre parafermionique. Par exemple, on trouve que l'opérateur d'énergie ε , primaire de Virasoro, est un descendant par rapport à l'algèbre parafermionique de l'opérateur de spin σ .

Comme dernière observation, on remarque que les tableaux de Kac (1.1) et (1.2) possèdent une symétrie Z_2 . En générale, pour les modèles minimaux M_p , on identifie les champs $\Phi_{m,n}$ et $\Phi_{m',n'}$ tels que :

$$n' = p - n \quad m' = p + 1 - m. \quad (1.57)$$

1.5 Méthode du gaz de Coulomb.

Pour avoir une information complète d'une théorie il ne suffit pas de déterminer son spectre, c'est à dire l'ensemble des dimensions des opérateurs primaires qu'elle contient, mais il faut aussi calculer les fonctions de corrélation et déterminer les valeurs des constantes $D_{1,2}^p$ de l'algèbre des opérateurs (*cfr.* éq. (1.48)).

La théorie conforme minimale admet une représentation des champs conformes en termes d'opérateurs construits à partir d'un champ libre $\varphi(z, \bar{z})$. Cette représentation se révèle très efficace pour calculer les fonctions de corrélation des modèles minimaux.

La méthode pour calculer les fonctions de corrélation qui se base sur la représentation des champs libres est usuellement indiquée comme la méthode du gaz de Coulomb (l'origine de cette terminologie sera expliquée dans la suite).

1.5.1 Réalisation de la théorie conforme avec $c = 1$.

On considère d'abord le gaz de Coulomb pour la théorie avec $c = 1$.

L'action $A[\varphi]$ de la théorie bidimensionnelle d'un champ libre est :

$$A[\varphi] = \frac{1}{4\pi} \int dz d\bar{z} \partial_z \varphi \partial_{\bar{z}} \varphi, \quad (1.58)$$

et la fonction de corrélation $\langle \varphi(z, \bar{z}) \varphi(0, 0) \rangle$, définie en terme d'une intégrale fonctionnelle :

$$\langle \varphi(z, \bar{z}) \varphi(0, 0) \rangle = \frac{\int [d\varphi] e^{A[\varphi]} \varphi(z, \bar{z}) \varphi(0, 0)}{\int [d\varphi] e^{A[\varphi]}}, \quad (1.59)$$

est de la forme :

$$\langle \varphi(z, \bar{z}) \varphi(0, 0) \rangle = 2 \ln \frac{L}{|z|^2}, \quad (1.60)$$

où L est un régulateur des divergences infrarouges qui peut être identifié, par exemple, avec la taille finie du système. La fonction de corrélation (1.60) ressemble au potentiel électrique entre deux charges dans un espace bidimensionnel. On peut donc tracer une analogie entre la représentation du champ libre et la théorie du gaz de Coulomb bidimensionnel (et cela explique l'emploi du terme "gaz de Coulomb" pour indiquer cette représentation).

Dans une théorie bidimensionnelle de masse nulle, il y a aussi des divergences ultraviolettes quand deux opérateurs s'approchent entre eux; il faut donc rajouter aussi un régulateur a à très courtes distances. La fonction de corrélation de deux champs au même point, $\langle \varphi^2(z, \bar{z}) \rangle$ prend la forme [38] :

$$\langle \varphi^2(z, \bar{z}) \rangle = 2 \ln \frac{L}{a^2}. \quad (1.61)$$

Dans la représentation d'un champ libre, aux opérateurs primaires sont associés des exponentiels de $\varphi(z, \bar{z})$:

$$\Phi_{\Delta_\alpha} \sim V_\alpha(z, \bar{z}) =: e^{i\alpha\varphi(z, \bar{z})} : \quad (1.62)$$

où on utilise la notation $::$ pour indiquer l'ordre normal. On peut montrer que l'ordre normal dans la définition des opérateurs de vertex permet de supprimer l'apparition du régulateur a dans les fonctions de corrélation de ces opérateurs [38, 42].

Dans l'analogie avec le gaz de Coulomb, l'opérateur de vertex $V_\alpha(z, \bar{z})$ dévient la source d'une charge α au point (z, \bar{z}) .

Avec la définition (1.62), on trouve pour la fonction à deux points :

$$\langle V_\alpha(z, \bar{z}) V_{\alpha'}(0, 0) \rangle = \frac{\delta_{\alpha, -\alpha'}}{|z|^{4\alpha^2}}. \quad (1.63)$$

Plus généralement, la fonction à N points devient :

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_{\alpha_N}(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \prod_{i < j} \frac{\delta_{\sum_i \alpha_i, 0}}{|z_i - z_j|^{4\alpha_i \alpha_j}}. \quad (1.64)$$

Le fait que la fonction de corrélation soit non nulle seulement si $\sum_i^N \alpha_i = 0$ (condition de neutralité des charges) peut être facilement expliqué en considérant l'invariance de l'action sous la transformation du champ $\varphi \rightarrow \varphi + \text{const}$, avec const une constante quelconque. Du moment que sous une telle opération la fonction de corrélation acquiert une phase $e^{i \text{const} \sum_i^N \alpha_i}$, la condition de neutralité assure l'invariance des fonctions de corrélations par rapport à cette transformation.

En comparant le résultat ci-dessus avec l'éq. (1.4), on a :

$$\Delta_\alpha = \Delta_{-\alpha} = \alpha^2. \quad (1.65)$$

On peut remarquer que, dans la représentation du champ libre, chaque opérateur Φ_{Δ_α} est associé à deux opérateurs de vertex, V_α et son conjugué $V_{-\alpha}$:

$$\Phi_{\Delta_\alpha} \sim V_\alpha \text{ et } V_{-\alpha}. \quad (1.66)$$

Le fait que le même opérateur peut être représenté par deux vertex différents signifie que les fonctions de corrélation admettent plusieurs représentations équivalentes. Ce point sera mieux expliqué dans la suite quand on va présenter en détail la méthode du calcul des fonctions de corrélation dans le contexte d'une théorie plus générale. Pour l'instant on se limite à dire que la représentation la plus simple pour la fonction à deux points $\langle \Phi_{\Delta_\alpha} \Phi_{\Delta_\alpha} \rangle$ est celle donnée par la fonction $\langle V_\alpha V_{-\alpha} \rangle$.

La partie holomorphe $T(z)$ de l'opérateur d'énergie-impulsion s'écrit :

$$T(z) = -\frac{1}{4} : \partial_z \varphi \partial_z \varphi : . \quad (1.67)$$

Il est facile de vérifier, en faisant appel au théorème de Wick, que le développement du produit $T(z)V_\alpha(0,0)$ a la forme :

$$T(z)V_\alpha(0,0) = \left(\frac{\Delta_\alpha}{z^2} + \frac{1}{z} \partial_z \right) V_\alpha(0,0) + O(1). \quad (1.68)$$

Ce développement confirme le fait que l'opérateur de vertex V_α est primaire.

En utilisant encore le théorème de Wick, on trouve que :

$$\langle T(z)T(0) \rangle = \frac{1/2}{z^4}. \quad (1.69)$$

En comparant ce résultat avec le développement (1.31) (on rappelle que $\langle T \rangle = \langle \partial T \rangle = 0$), on trouve que la charge centrale est $c = 1$.

1.5.2 Déformation de la théorie $c = 1$.

La représentation de champ libre, qu'on vient d'exposer, peut être opportunément déformée pour décrire des théories conformes avec une charge $c \leq 1$.

On considère la théorie bosonique de tenseur d'énergie-impulsion :

$$T(z) = -\frac{1}{4} : \partial\varphi\partial\varphi : + i\alpha_0 : \partial^2\varphi : . \quad (1.70)$$

Cette forme de $T(z)$ suit de la modification des conditions aux bords de la théorie de champ libre, c'est à dire du changement du comportement asymptotique du champ $\varphi(z, \bar{z})$ pour $(z, \bar{z}) \rightarrow \infty$ [42].

Comme on a juste rajouté des termes de bord, la forme de la fonction à deux points (1.60) ne change pas, ce qui implique :

$$\langle T(z)T(0) \rangle = \frac{1 - 24\alpha_0^2}{z^4}. \quad (1.71)$$

La charge centrale est donc :

$$c = 1 - 24\alpha_0^2. \quad (1.72)$$

On peut également se convaincre que l'opérateur de vertex V_α demeure un champs primaire de la théorie avec dimension :

$$\Delta_\alpha = \alpha^2 - 2\alpha_0\alpha. \quad (1.73)$$

Au lieu de l'invariance des valeurs des dimensions sous la conjugation $\alpha \rightarrow -\alpha$, $\Delta_\alpha = \Delta_{-\alpha}$, on trouve la symétrie $\Delta_\alpha = \Delta_{2\alpha_0 - \alpha}$. Dans la théorie conforme modifiée, ce sont les deux opérateurs de vertex V_α et $V_{2\alpha_0 - \alpha}$ qui représentent l'opérateur primaire Φ_Δ . Pour la fonction de corrélation à deux point, on a

$$\langle \Phi_{\Delta_\alpha}(z, \bar{z})\Phi_{\Delta_\alpha}(0, 0) \rangle = \langle V_\alpha(z, \bar{z})V_{2\alpha_0 - \alpha}(0, 0) \rangle = \frac{1}{|z|^{4(\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha)}}. \quad (1.74)$$

On peut facilement remarquer que la condition de neutralité de charge n'est pas respectée pour la fonction $\langle V_\alpha(z, \bar{z})V_{2\alpha_0 - \alpha}(0, 0) \rangle$; cela s'explique en observant que la théorie du champ libre modifiée, dont le tenseur d'énergie-impulsion a la forme (1.70), correspond à un gaz de Coulomb avec une charge de l'état de vide $-2\alpha_0$ placée à l'infini.

Les fonctions de corrélation à N points :

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_{\alpha_N}(z_N, \bar{z}_N) \rangle \quad (1.75)$$

sont non nulles seulement si les charges des opérateurs satisfont la condition :

$$\sum_i^N \alpha_i = 2\alpha_0. \quad (1.76)$$

Il suit de l'éq. (1.73) que les opérateurs de vertex $V_\pm \equiv e^{i\alpha_\pm\varphi}$ avec $\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}$ ont un poids conforme $\Delta_\pm = 1$. Ces opérateurs sont très importants dans la technique pour

calculer les fonctions de corrélation. Leur importance vient du fait que, à cause de leur dimension, si on rajoute à l'action libre les termes :

$$A[\varphi] \rightarrow \tilde{A}[\varphi] = A[\varphi] + \int d^2z (\mu_+ V_+ + \mu_- V_-), \quad (1.77)$$

on préserve l'invariance conforme de la théorie. L'action $\tilde{A}[\varphi]$ est donc une action conforme plus générale de $A[\varphi]$ et permet de calculer à priori toutes les fonctions de corrélation de la théorie conforme minimale.

Les fonctions de corrélation de N opérateurs physiques

$$\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle \quad (1.78)$$

admettent la représentation suivante :

$$\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle \propto \langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_{\alpha_N}(z_N, \bar{z}_N) e^{\int d^2z (\mu_+ V_+ + \mu_- V_-)} \rangle. \quad (1.79)$$

En développant l'exponentiel dans la fonction de corrélation on obtient :

$$\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle \propto \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (\mu_+)^k (\mu_-)^l \langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_{\alpha_N}(z_N, \bar{z}_N) (Q_+)^k (Q_-)^l \rangle, \quad (1.80)$$

où les opérateurs Q_{\pm} , appelés opérateurs d'écran, sont définis par :

$$Q_{\pm} = \int d^2z V_{\pm}(z, \bar{z}). \quad (1.81)$$

Dans (1.80), seulement les termes avec l et k tels que :

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i + k\alpha_+ + l\alpha_- = 2\alpha_0. \quad (1.82)$$

satisfont la condition de neutralité.

L'insertion des opérateurs d'écran permet de rajouter des charges dans la fonction de corrélation sans altérer ses propriétés conformes. Ceci explique la possibilité d'avoir plusieurs représentations pour une même fonction de corrélation. Par exemple, la fonction $\langle \Phi_{\Delta_\alpha} \Phi_{\Delta_\alpha} \rangle$, admet deux représentations équivalentes : celle donnée en (1.74) et celle de la forme :

$$\langle \Phi_{\Delta_\alpha}(z, \bar{z}) \Phi_{\Delta_\alpha}(0, 0) \rangle = \langle V_\alpha(z, \bar{z}) V_\alpha(0, 0) (Q_+)^n (Q_-)^m \rangle, \quad (1.83)$$

avec des entiers m et n qui respectent la condition :

$$2\alpha + m\alpha_+ + n\alpha_- = 2\alpha_0. \quad (1.84)$$

La fonction à deux points $\langle \Phi_\Delta \Phi_\Delta \rangle$, qui calcule la projection d'un opérateur Φ_Δ sur lui même, est non nulle. La condition (1.84) donne une quantification des valeurs de α :

$$\alpha \equiv \alpha_{n,m} = \frac{1}{2}(1-n)\alpha_+ + \frac{1}{2}(1-m)\alpha_-. \quad (1.85)$$

En utilisant l'éq.(1.73), on retrouve la formule de Kac (1.46) pour les modèles minimaux :

$$\Delta_{\alpha_{n,m}} \equiv \Delta_{n,m} = \frac{(\alpha_+ n + \alpha_- m)^2 - (\alpha_- + \alpha_+)}{4}. \quad (1.86)$$

1.5.3 Opérateurs d'écrans et résolution de Felder pour la théorie minimale.

Dans cette section on va montrer en bref comment le résultat (1.85) peut être obtenu de façon alternative.

En considérant toujours une réalisation du gaz de Coulomb, on impose que les modules de Verma associés aux vertex V_α (champs primaires) possèdent des sous espaces invariants.

On s'intéresse pour cela à la partie holomorphe de la théorie. Comme les fonctions de corrélation :

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_{\alpha_N}(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{4\alpha_i \alpha_j} \quad (1.87)$$

se factorisent en une partie holomorphe et une partie antiholomorphe :

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_{\alpha_N}(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2\alpha_i \alpha_j} \prod_{i < j} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^{2\alpha_i \alpha_j}, \quad (1.88)$$

on peut considérer seulement la partie holomorphe, par exemple, en posant formellement :

$$\begin{aligned} V_\alpha(z, \bar{z}) &\rightarrow V_\alpha(z) \\ \langle V_{\alpha_1}(z_1) \cdots V_{\alpha_N}(z_N) \rangle &= \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2\alpha_i \alpha_j}. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Dans cette approche, les opérateurs d'écran sont définis par les intégrales de contour :

$$Q_\pm = \oint_C dz V_\pm(z). \quad (1.90)$$

On peut montrer que les opérateurs Q_\pm , $\Delta_{Q_\pm} \equiv \Delta_\pm = 1$, sont invariants sous des transformations conformes et commutent avec le générateur des transformations conformes $T(z)$:

$$[T(z), Q_\pm] = 0. \quad (1.91)$$

L'application de Q_\pm sur un opérateur V_α est définie de la façon suivante :

$$Q_\pm V_\alpha(0) \equiv \oint_{C_0} dz V_\pm(z) V_\alpha(0). \quad (1.92)$$

On applique maintenant n fois l'opérateur Q_+ au vertex $V_{\alpha-n\alpha_+}$ en choisissant opportunément les n contours pour qu'ils se ferment dans le plan complexe. L'état ainsi obtenu, $V \equiv (Q_+)^n V_{\alpha-n\alpha_+}(0)$, est par l'éq.(1.91) un opérateur primaire et appartient au module de

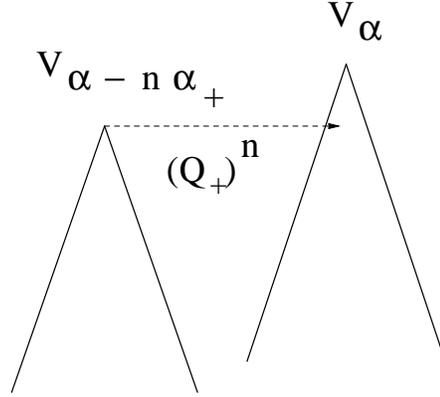


FIG. 1.3 – L'application de l'opérateur d'écran Q_+^n fait projeter l'état $V_{\alpha-n\alpha_+}$ dans le module $[V]$

l'opérateur de vertex V_{α} , $V \in [V_{\alpha}]$. Dans la fig.(1.3), on montre comment l'état $V_{\alpha-n\alpha_+}$ est projeté dans le module $[V_{\alpha}(0)]$ par l'action des écrans.

Si

$$\Delta_{\alpha-n\alpha_+} - \Delta_{\alpha} = N \quad (1.93)$$

avec N entier, l'état V indique alors un état singulier dans le module de V_{α} . Il en suit la condition générale pour que le module d'un vertex V_{α} soit dégénéré :

$$\Delta_{\alpha-n\alpha_+-m\alpha_-} - \Delta_{\alpha} = N. \quad (1.94)$$

En utilisant l'éq.(1.73), il est immédiat de vérifier que cette condition est satisfaite si α est de la forme (1.85) et $N = nm$. Le module de l'opérateur primaire $\Phi_{n,m}$, représenté par le vertex $V_{\alpha_{n,m}}$ est donc dégénéré au niveau $N = nm$, ce qui confirme le résultat déjà obtenu par Kac (1.3.4).

Cette construction, connue sous le nom de résolution de Felder pour la théorie minimale [56], est réalisé assez simplement sur le réseau de Kac.

On reproduit dans la fig.(1.4) le tableau de Kac formé par les opérateurs $\Phi_{m,n}$ du modèle M_5 . Dans cette figure on montre les différents domaines : le domaine physique est celui qui contient l'opérateur d'identité, tandis que les autres sont formés par des opérateurs qui ne participent pas à l'algèbre des opérateurs physiques (comme on a déjà mentionné avant, les constantes de structure de l'algèbre sont nulles). Ces derniers opérateurs se découpent de la théorie physique et dans ce sens ils peuvent être considéré comme des "fantômes".

Les réflexions, indiquées dans la figure par des flèches, lient un opérateur dans le domaine

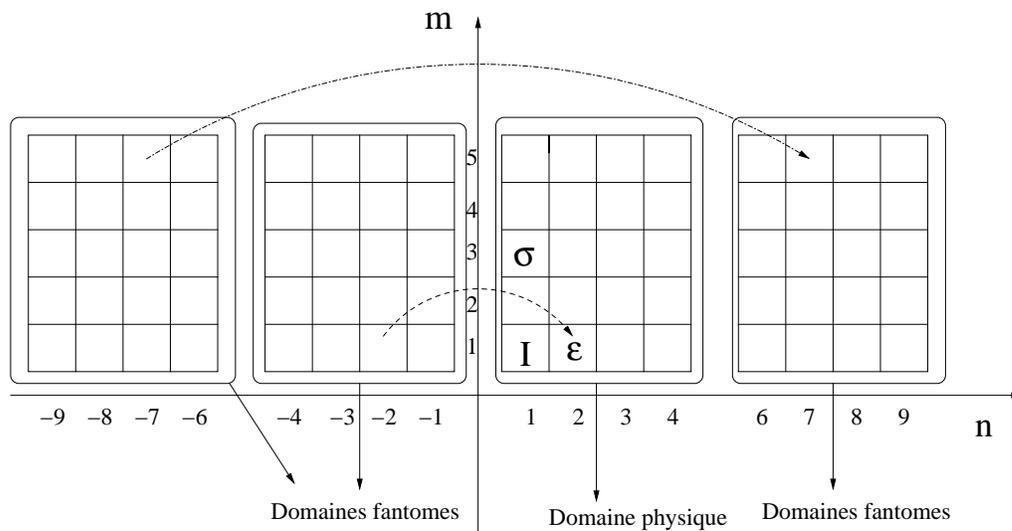


FIG. 1.4 – On montre les différents domaines de la théorie M_5 et la position des opérateurs d'identité I , d'énergie ε et de spin σ . Les réflexions sur le tableau de Kac sont indiquées par des flèches.

physique $\Phi_{n,m}$ ($1 \leq n \leq p-1$ et $1 \leq m \leq p$) au fantôme $\Phi_{n,-m}$ ^(a). Le module $[\Phi_{n,-m}]$ représente le sous espace invariant qui a été factorisé dans le module $[\Phi_{n,m}]$. Il est immédiat de vérifier que :

$$\Delta_{n,-m} - \Delta_{n,m} = nm, \quad (1.95)$$

ce qui est consistant avec le fait que l'opérateur $\Phi_{n,m}$ est dégénéré au niveau $N = nm$.

L'opérateur $\Phi_{1,-m}$ présente, à son tour, des vecteurs singuliers dans son module. En fait, en utilisant l'identification $\Phi_{1,-m} \equiv \Phi_{p-1,p+1+m}$ (cfr. éq. (1.57)), on sait qu'il est dégénéré au niveau $N = (p-1)(p+1+m)$, ce qui est confirmé encore une fois par la méthode des réflexions :

$$\Delta_{p-1,-p-1-m} - \Delta_{p-1,p+1+m} = (p-1)(p+1-m). \quad (1.96)$$

En général donc, chaque module des modèles minimales est à l'origine d'une série infinie d'inclusions de sous espace invariante (voir fig. (1.5)).

Dans le quatrième et cinquième chapitre, nous ferons souvent appel à ces propriétés du gaz de Coulomb pour déterminer la forme complète de la formule de Kac pour une nouvelle série de théories conformes.

^(a)On se limite à considérer les réflexions du côté α_- . Les propriétés qu'on présente ici sont les mêmes lorsqu'on échange les index relatifs à la partie α_- avec ceux relatifs à la partie α_+ . Les considérations qui suivent s'appliquent également aux opérateurs $\Phi_{n,m}$ et $\Phi_{m,n}$ (par exemple les deux sont également dégénérés au niveau $N = nm$).

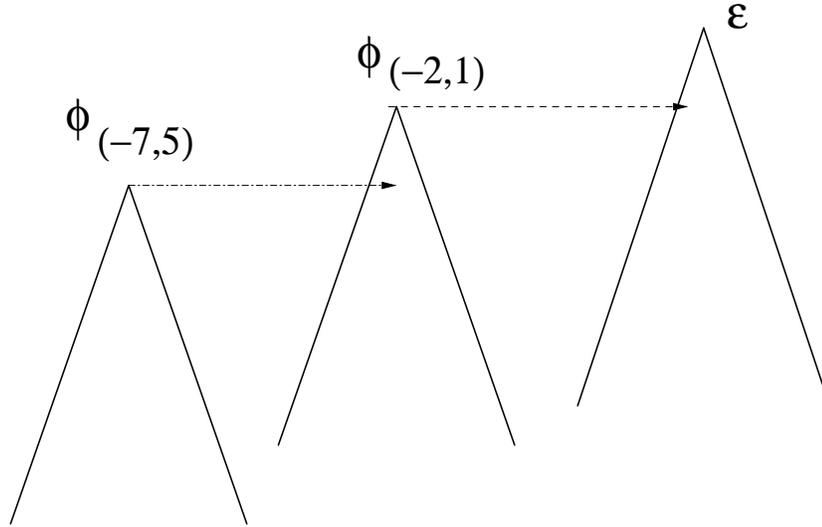


FIG. 1.5 – On montre la chaîne des inclusions correspondant aux réflexions de la fig.(1.4).

1.6 Théories conformes étendues.

Les modèles minimaux ne décrivent pas toutes les classes d'universalités des systèmes statistiques bidimensionnelles. On peut construire des solutions conformes différentes des celles qu'on vient d'exposer. Elles possèdent, en plus de l'invariance conforme, des symétries additionnelles engendrées par d'autres courants conservés[57]. Les théories conformes qu'on connaît aujourd'hui peuvent se classer de la façon suivante :

- Modèles de Wess, Zumino, Witten, Nobikov [58, 59, 60] : théories conformes qui possèdent une symétrie de Lie G . Elles sont construites sur des algèbres chirales, dites de Kac-Moody, formées par des courants conservés J^a , $a = 1, \dots, \dim(G)$, de dimension $\Delta_J = 1$.
- Théories superconformes :
 - $N = 1$: L'algèbre chirale contient, en plus de l'opérateur d'énergie-impulsion $T(z)$, un opérateur chiral $G(z)$ de dimension $3/2$ [61, 62, 63]. Cette algèbre réalise la symétrie discrète Z_2 .
 - $N = 2$ [20, 64, 65, 66] : La symétrie est engendrée par quatre opérateurs locaux qui sont le tenseur d'énergie-impulsion $T(z)$ et les courants $S(z)$, $S^+(z)$ et $J(z)$ de dimension respective $\Delta_S = \Delta_{S^+} = 3/2$ et $\Delta_J = 1$.
- Théories parafermioniques[19] : elles sont basées sur des algèbres de courants non-locaux qui réalisent les symétries discrètes Z_N (nous discuterons en détail ces théories dans le quatrième chapitre).

- Théories W [67] : Elles possèdent, en plus de la symétrie conforme (associée à l'opérateur $T(z)$, de dimension 2), les symétries engendrées par des courants conservés $W_a(z)$ de spin $\Delta_a = 3, 4, \dots$ plus grand que 2. Dans le troisième chapitre, on considère une série particulière de ces modèles; ci-dessous on donne un exemple de ces algèbres.

On veut montrer un exemple explicite d'algèbre chirale sur laquelle on peut baser une théorie conforme étendue. On a choisi de présenter ici l'algèbre W_3 car cet exemple non seulement donne une idée de la structure des algèbres étendues mais aussi est assez représentatif des algèbres W dont nous allons considérer dans le troisième chapitre une série particulière .

1.6.1 Algèbre W_3 .

L'opérateur d'énergie-impulsion $T(z)$ et le champ chiral $W(z)$ de dimension $\Delta_W = 3$ sont les générateurs de symétrie.

L'algèbre est complètement définie en donnant les parties singuliers du développement des produits des opérateurs suivants :

$$T(z)T(z') = \frac{c/2}{(z-z')^4} + \frac{2}{(z-z')^2}T(z') + \frac{1}{(z-z')}T'(z') + O(1) \quad (1.97)$$

$$T(z)W(z') = \frac{3}{(z-z')^2}W(z') + \frac{1}{(z-z')}(\partial W)(z') + O(1) \quad (1.98)$$

$$\begin{aligned} W(z)W(z') &= \frac{c/3}{(z-z')^6} + \frac{2}{(z-z')^4}T(z') + \frac{1}{(z-z')^3}(\partial T)(z') + \\ &+ \frac{1}{(z-z')^2} \left(\frac{3}{10}(\partial^2 T)(z') + 2b^2\Lambda(z') \right) + \\ &+ \frac{1}{(z-z')} \left(\frac{1}{15}(\partial^3 T)(z') + b^2(\partial\Lambda)(z') \right). \end{aligned} \quad (1.99)$$

Dans toutes ces équations, c est la charge centrale de l'algèbre de Virasoro (1.97) et b est défini par :

$$b = \frac{16}{22 + 5c}.$$

Enfin, le champ $\Lambda(z)$ correspond au carré régularisé de $T(z)$:

$$\Lambda(z) \equiv: T^2(z) := T^2(z) - \frac{3}{10}(\partial^2 T)(z).$$

Le développement (1.98) viens du fait que le champ $W(z)$ est primaire par rapport à l'algèbre de Virasoro. En effet, si l'opérateur $W(z)$ était le descendant d'un autre opérateur, alors ce dernier devrait lui aussi participer à l'algèbre chirale.

Enfin, on peut remarquer qu'il n'y a pas d'autres champs, à part les descendants de l'identité, qui apparaissent dans le développement (1.99). Donc l'algèbre se ferme.

Un point très important est que l'algèbre (1.97)-(1.99) est associative pour chaque valeur de la charge centrale. De façon pareille au cas de Virasoro, cette algèbre est à l'origine d'une

série unitaire de modèles dont le spectre est déterminé en imposant la dégénérescence des représentations.

Dans le chapitre prochain je vais introduire le problème des système désordonnés et expliquer comment on peut les étudier à l'aide des théories conformes perturbées. En plus je présente de façon générale les techniques (calcul de groupe de renormalisation, théorème c de Zamolodchikov,...) que nous avons utilisé pour traiter le problème d'un modèle WD_3 désordonné.

Chapitre 2

Systemes désordonnés et théories conformes perturbées.

2.1 Désordre gelé et méthode des répliques.

Dans la plupart des situations physiques, les défauts ont un temps de relaxation beaucoup plus grande que celui des degrés de liberté du système pur. En considérant un réseau de spin avec des impuretés non magnétiques, les positions spatiales des impuretés peuvent être considérées comme gelées par rapport aux orientations des spins. La fonction de partition d'un système de spins, pour une distribution $\{m\}$ des impuretés donnée, est donc :

$$Z(\{m\}) = \sum_{\{s\}} e^{-H(\{s\}, \{m\})}$$

où la somme est faite sur les configurations de spins $\{s\}$ et $H(\{s\}, \{m\})$ est l'hamiltonien qui définit le modèle.

On suppose maintenant que ce système est suffisamment grand pour être divisé en plusieurs sous-systèmes macroscopiques, chacun caractérisé par une certaine distribution $\{m\}$. En négligeant les effets de surface, l'énergie libre totale est la somme des énergies libres de chaque sous système : il est facile ainsi de comprendre que, dans la limite thermodynamique, l'énergie libre est obtenue en moyennant sur le désordre[68] :

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \sum_{\{m\}} P(\{m\}) F(\{m\}) \\ F(\{m\}) &= -\ln(Z(\{m\})), \end{aligned}$$

où $P(\{m\})$ est la distribution de probabilité associée à une certaine configuration $\{m\}$.

Il s'avère qu'un calcul direct de \overline{F} est hors de portée. Une méthode très utilisée pour traiter ce problème est basée sur l'identité mathématique :

$$\ln Z = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{\overline{Z^N} - 1}{N}.$$

L'idée est celle de moyenner sur le désordre le système des N répliques, $\overline{Z^N}$, et considérer ensuite la limite $N \rightarrow 0$ [69].

Cette méthode, appelée méthode des répliques, peut donner des pathologies dans la limite $N \rightarrow 0$ où une brisure spontanée de la symétrie des répliques peut apparaître. La question de l'applicabilité de cette méthode est donc très délicate. Ici je me limite de dire que, au moins pour les modèles désordonnés qu'on va considérer, la brisure de symétrie des répliques ne se produit pas et la limite $N \rightarrow 0$ donne des résultats corrects. Je mentionne à ce propos l'article [70] où le modèle de Potts désordonné a été étudié à travers un calcul du groupe de renormalisation dans les hypothèses d'une brisure spontanée ou d'une conservation de la symétrie des répliques. La comparaison entre les prédictions analytiques ainsi obtenues et les résultats d'une simulation numérique ont permis d'exclure le scénario d'une brisure de la symétrie des répliques.

2.2 Théories conformes perturbées et groupe de renormalisation.

On suppose que le point critique d'un système pur soit décrit par une certaine théorie conforme décrite par une action A_0 . L'introduction d'un désordre couplé à la densité d'énergie $\varepsilon(z)$ peut s'exprimer par l'action :

$$A = A_0 + A_{des} = A_0 + \int d^2x \tau(x) \varepsilon(x), \quad (2.1)$$

où $\tau(x) \sim J(x) - J_0$ est la déviation aléatoire par rapport au couplage J_0 qui caractérise le système pur. On se restreint au cas où $\tau(x)$ est associé à une distribution gaussienne :

$$\begin{aligned} \overline{\tau(x)} &= \tau_0 \\ \overline{(\tau(x) - \tau_0)(\tau(x') - \tau_0)} &= g_0 \delta^{(2)}(x' - x). \end{aligned} \quad (2.2)$$

La fonction de partition du système a donc la forme :

$$Z = \text{Tr} \exp\{-A_0 - \int d^2x \tau(x) \varepsilon(x)\}. \quad (2.3)$$

Pour calculer l'énergie libre on considère le système des N répliques décrit par l'action Z^N :

$$Z^n = \text{Tr} \exp\left\{-\sum_{a=1}^n A_0^{(a)} - \int d^2x \tau(x) \sum_{a=1}^n \varepsilon_a(x)\right\}, \quad (2.4)$$

a étant l'indice des répliques. Il est facile de montrer que la moyenne sur le désordre $\overline{Z^n}$ prend la forme :

$$\overline{Z^n} = \text{Tr} \exp\left\{\sum_{a=1}^n A_0^{(a)} + g_0 \sum_{a \neq b=1}^n \int d^2x \varepsilon_a(x) \varepsilon_b(x) - \tau_0 \int d^2x \sum_{a=1}^n \varepsilon_a(x)\right\}. \quad (2.5)$$

Le terme proportionnel à τ_0 peut être absorbé à l'aide d'une redéfinition de la température.

On vient donc de montrer que le problème d'un système désordonné peut être rapporté à celui de N théories conformes couplées par leur opérateur d'énergie, avec une constante de couplage g_0 correspondante à la largeur de la distribution du désordre :

$$S_{int} = -g_0 \int d^2x \sum_{a \neq b}^n \varepsilon_a(x) \varepsilon_b(x). \quad (2.6)$$

L'évolution de la constante de couplage g_0 sous une transformation du groupe de renormalisation (RG) et le comportement des fonctions de corrélation peuvent être analysés à l'aide des techniques déjà développées pour traiter les théories conformes perturbées.

En particulier si l'interaction $\sim \varepsilon\varepsilon$ est très peu pertinente, c'est à dire si $1/2 - \Delta_\varepsilon \ll 1$, alors un calcul de RG est possible en faisant un développement en ϵ . Ici on présente cette technique dans un cas général [71].

2.3 Calcul RG avec un développement en ϵ : premier ordre.

On considère une théorie conforme dont l'action A_0 est perturbée par des opérateurs $\phi_i(x)$:

$$A_{pert} = \sum_i \frac{2g_0^i}{\pi} \int d^2x \phi_i(x). \quad (2.7)$$

On suppose que les opérateurs $\phi_i(x)$ ont une dimension conforme $\Delta_{\phi_i} = 1 - \epsilon_i$, avec $\epsilon_i \ll 1$. On veut déterminer la renormalisation des constantes de couplage g^i en faisant un calcul perturbatif. Comme d'habitude on développe le terme d'interaction :

$$e^{-A_{pert}} = 1 - \sum_i \frac{2g_0^i}{\pi} \int d^2x \phi(x) + \sum_{ij} \frac{2g_0^i g_0^j}{\pi^2} \int d^2x_1 \int d^2x_2 \phi_i(x_1) \phi_j(x_2) + \dots \quad (2.8)$$

Une transformation du RG est composée de deux étapes :

- On intègre les fluctuations sur une distance d telle que $a < d < a'$, où a et a' sont les régulateurs à courte distance respectivement avant et après l'intégration, $a' = sa$ avec $s > 1$.
- On revient au régulateur du départ a avec une transformation d'échelle $x \rightarrow x/s$.

Les équations du RG sont encodées dans les fonctions $\beta_i(\{g_k\})$ définies comme :

$$\beta_i(\{g^k\}) \equiv \frac{\partial g^i}{\partial \ln s}. \quad (2.9)$$

Les termes d'ordre zéro des fonctions $\beta_i(\{g_k\})$ correspondent aux valeurs propres de la transformation du RG. Par analyse dimensionnelle, on peut montrer que leur valeurs sont égales aux dimensions des constantes g_0^i , $[g_0^i] = 2 - 2\Delta_{\phi_i} = 2\epsilon_i$. Les fonctions $\beta_i(\{g_k\})$ à l'ordre zéro ont alors la forme :

$$\beta_i(\{g^k\}) = 2\epsilon_i g^i \quad (2.10)$$

Cette équation nous dit que les ϕ_i sont des opérateurs (très peu) pertinents. A l'ordre suivant, il faut considérer le terme :

$$\frac{2 g_0^i g_0^j}{\pi^2} \int d^2 x_1 \int_{a < |x_2 - x_1| < a'} d^2 x_2 \phi_i(x_1) \phi_j(x_2). \quad (2.11)$$

Cette intégrale est dominée par la divergence pour $|x_1 - x_2| \rightarrow 0$. Cette divergence est décrite par l'algèbre des opérateurs ϕ_i :

$$\phi_i(x_1) \phi_j(x_2) = \sum_k \frac{D_{ij}^p}{|x_1 - x_2|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_p}} \phi_p(x_2), \quad (2.12)$$

où les coefficients D_{ij}^p sont les constantes de l'algèbre (*cf.* éq(1.48)).

En supposant que tous les opérateurs pertinents ϕ_p ont une dimension $\Delta_p = 1 - \epsilon_p$, l'intégrale (2.11) donne, par l'éq.(2.12), la contribution :

$$\frac{4}{\pi} D_{ij}^p g_0^i g_0^j \ln(a'/a) \int d^2 x_1 \phi_p(x_1). \quad (2.13)$$

Les champs ϕ_p qui participent à l'algèbre des opérateurs de perturbation sont donc produits par la procédure RG. Parmi ces champs, seul ceux qui sont pertinents, c'est à dire tel que $\Delta_k < 1$, vont modifier les équations du RG (ceci explique pourquoi on a négligé les descendants dans le développement (2.12)). Chaque opérateur pertinent ϕ_p qui n'apparaît pas parmi les opérateurs de perturbation, doit être rajouté à l'action A_{pert} . Ensuite, il faut s'assurer que l'algèbre de l'ensemble élargi des opérateurs de perturbation ne contient pas d'autres opérateurs pertinents. Ce mécanisme va se produire dans le cas des modèles $WD_3^{(p)}$ désordonnés qui sont l'objet du chapitre prochain.

Il est maintenant immédiat de calculer les fonctions $\beta_p(g)$ à une boucle :

$$\beta_p(\{g^k\}) = 2\epsilon_p g_p + \sum_{i,j} D_{ij}^p g^i g^j + 0(g^3, \epsilon g^2, \dots). \quad (2.14)$$

Comme on peut le remarquer en observant ce résultat, le calcul de RG à une boucle dépend uniquement des dimensions des opérateurs de perturbation et des constantes de l'algèbre D_{ij}^p .

2.4 Théorème c de Zamolodchikov.

On peut facilement se convaincre que les équations du flux (2.14) admettent un point fixe $(\{g_*^k\})$, $\beta(\{g_*^k\}) = 0$, à une distance de l'ordre ϵ de l'origine $(0, \dots, 0)$, $g_*^k \sim \epsilon$. Naturellement, on suppose que les corrections à l'ordre suivant ne modifient pas significativement les résultats obtenus à l'ordre d'une boucle.

On est alors dans le cas d'un flux de renormalisation caractérisé par un point fixe ultraviolet UV en $(0, \dots, 0)$, et un point fixe infrarouge IR en $(\{g_*^k\})$. Tous les deux correspondent à des théories conformes. La question qu'on se pose est alors de savoir si la théorie qui décrit le point fixe UV peut fournir des informations sur la théorie associée au point IR et *viceversa*.

Un important résultat dans cette direction est le théorème de Zamolodchikov [72], appelé aussi théorème c. Ce théorème permet de déterminer une fonction des constantes de couplages $c(\{g^k\})$ qui est non décroissante le long de la trajectoire du flux de renormalisation. Les valeurs de cette fonction aux points fixes, $c(\{g_*^k\})$, correspondent aux charges centrales des théories conformes associées.

On peut montrer que la fonction $c(\{g^k\})$ est univoquement déterminée par l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{dc(\{g^k\})}{d \ln s} &= -24 < \Theta(1, 1) \Theta(0, 0) > \\ c(0, \dots, 0) &= c_0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

où s est toujours le paramètre du flux du RG (*cfr.* éq.(2.9)), c_0 est la charge centrale associée à la théorie critique du point fixe $(0, \dots, 0)$ et $\Theta(z, \bar{z})$ est la trace du tenseur d'énergie-impulsion. La trace $\Theta(z, \bar{z})$, qui pour une action conforme est nulle, s'exprime en fonction des champs de perturbation. Pour la perturbation (2.7), on a :

$$\Theta(z, \bar{z}) = \sum_i \beta_i(\{g^k\}) \phi_i(z, \bar{z}). \quad (2.16)$$

En utilisant l'éq.(2.16) et le fait que $< \phi_i(1, 1) \phi_j(0, 0) > = \delta_{i,j}$, il est facile de résoudre le système (2.15). On obtient ainsi la fonction $c(\{g^k\})$ à l'ordre d'une boucle :

$$c(\{g^k\}) = c_0 - \sum_k 2\epsilon_k (g^k)^2 - \sum_{i,j,k} D_{i,j}^k g^k g^j g^i + \dots \quad (2.17)$$

On peut facilement constater que la charge centrale $c(\{g_*^k\})$ au point fixe IR diffère de celle du point fixe UV c_0 , par une correction négative $-A(\{\epsilon_k\})$ de l'ordre de ϵ^3 , $c(\{g_*^k\}) = c_0 - A(\{\epsilon_k\})$. Le fait que $c(\{g_*^k\}) < c_0$ s'explique en observant que l'intégration sur les fluctuations à courtes distances cause une perte d'information. Dans la procédure RG, qui est irréversible, il y a une réduction de nombre du degré de libertés dont la valeur de la charge centrale dépend.

Chapitre 3

Théories $WD_3^{(p)}$ désordonnés et modèles couplés.

Dans ce chapitre je considère le problème de modèles $WD_3^{(p)}$ désordonnés et le problème annexe de N modèles $WD_3^{(p)}$ couplés par leur opérateur d'énergie.

Après une brève introduction à la classe des théories conformes dites théories W , je présente la représentation de gaz du Coulomb (*cfr.* section (1.5)) qui réalise la théorie $WD_3^{(p)}$. Dans cette représentation je montre que l'opérateur d'énergie ε a une dimension conforme $\Delta_\varepsilon = 1/2 - 5/2\epsilon$, où $\epsilon = 1/p$.

Dans la limite $p \gg 1$, le problème des modèles $WD_3^{(p)}$ avec un désordre couplé à la densité d'énergie peut être analysé en utilisant un calcul du groupe de renormalisation (RG) avec un développement en ϵ . Je détermine la limite infrarouge du modèle désordonné et je montre l'existence de deux nouveaux points multicritiques dans le problème de N théories couplées. L'intérêt pour ces nouveaux points fixes vient du fait que les théories conformes correspondantes, inconnues, réalisent de façon non triviale la symétrie permutative.

Je détermine ensuite la renormalisation des opérateurs d'énergies et je fais appel au théorème de Zamolodchikov (*cfr.* section 2.4) pour fixer le développement analytique au premier ordre de la valeur de la charge centrale aux nouveaux points critiques.

3.1 Brève introduction aux théories W

Dans la section (1.6) nous avons vu que les théories conformes étendues, *i.e.* celles possédant des symétries qui s'ajoutent à la symétrie conforme, sont basées sur des algèbres qui englobent celle de Virasoro comme sous algèbre. Parmi ces algèbres on retrouve l'algèbre

superconforme [61, 62, 63], son $N = 2$ extension [20, 64, 65, 66], les algèbres parafermioniques (que nous considérerons plus en détail dans les chapitres prochains) et l'algèbre de Kac-Moody [58, 59, 60].

Une classe de modèles [73, 74, 67, 75] possèdent des symétries, dites symétries W , engendrées par des courants locaux $\{W_k(z)\}$ de spin $S_k = k$, avec $k \geq 2$ ($W_2(z) \equiv T(z)$), qu' on va mieux spécifier ci-dessous. Les représentations irréductibles des algèbres W sont associées aux algèbres simples de Lie A_{n-1} , B_n et D_n et sont usuellement indiquées comme théories $[WX]$, ou $X \equiv A_{n-1}, B_n, D_n$ [67]. La théorie WA_{n-1} contient $n - 1$ champs chiraux $\{W_k(z)\}_{k=2, \dots, n}$ alors que l'algèbre WD_n (WB_n) est constituée par la série de courants $\{W_{2k}(z), f_n(z)\}_{k=1, \dots, n}$, où $f_n(z)$ est un champ chiral de dimension $\Delta_f = n$ ($\Delta_f = (2n + 1)/2$). Les représentations unitaires seront indiquées comme modèles $[WX^{(p)}]$, p étant l'indice de la série unitaire des modèles minimaux.

Les symétries W ne correspondent à aucune symétrie classique, *i.e.* elles n'apparaissent pas au niveau du lagrangien. Cela se reflète par les relations de commutations entre les modes de Laurent des courants qui ne sont pas linéaires. C'est probablement pour cette raison que la recherche de modèles statistiques dont le comportement critique est décrit par les théories $[WX^{(p)}]$ reste en générale ouverte. Je mentionne ici la série de systèmes statistiques qui a été construite par les mathématiciens Date, Jimbo, Miwa et Okado [76, 77]. Les dimensions des opérateurs et la valeur de la charge centrale aux points critiques de ces systèmes correspondent à celles des modèles $[WX^{(p)}]$. De plus, certains modèles $[WX^{(p)}]$ peuvent être associés aux points fixes des systèmes statistiques bien connus. Les théories $[WA_{n-1}^{2n+1}]$, par exemple, coïncident avec les théories parafermioniques $[Z_n]$ de Fateev et Zamolodchikov (voir section (4.2)). De même, les modèles $WD_n^{(2n)}$ et $WB_n^{(2n+1)}$ peuvent être reliés respectivement aux théories $[Z_{4n}]$ et $[Z_{4n+2}]$. Les modèles $WD_n^{(2n-1)}$ et $WB_n^{(2n)}$ de charge centrale $c = 1$ décrivent des cas particuliers du comportement critique du modèle d'Ashkin-Teller [78]. Enfin, la théorie de Toda affine associée à l'algèbre de Lie X peut être considérée comme une théorie conforme $[WX]$ perturbée.

Pour des raisons qui seront expliquées plus tard, les modèles $[WD_3^{(p)}] \equiv [WA_3^{(p)}]$ se révèlent être des bons "laboratoires" où considérer les effets d'un désordre présent dans les couplages d'interaction. Cette théorie sera présentée en détail.

3.2 Théories $WD_3^{(p)}$ et gaz de Coulomb.

On introduit un champ de Bose $\vec{\varphi}(z, \bar{z}) = \vec{\varphi}(z) + \vec{\varphi}(\bar{z})$ à trois composantes, $\vec{\varphi}(z) = \{\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z)\}$, dont les fonctions de corrélations sont normalisées de façon suivante :

$$\langle \varphi_a(z, \bar{z}) \varphi_b(z', \bar{z}') \rangle = 2 \log \frac{1}{|z - z'|^2} \delta_{ab}$$

L'opérateur d'énergie-impulsion $T(z)$ dans la représentation du gaz de Coulomb a la forme :

$$T(z) = -\frac{1}{4} : \partial \vec{\varphi}(z) \partial \vec{\varphi}(z) : + i \vec{\alpha}_0 \partial^2 \vec{\varphi}. \quad (3.1)$$

Dorénavant, la dépendance en \bar{z} de $\vec{\varphi}(z, \bar{z})$ sera considérée implicite.

Le vecteur $\vec{\alpha}_0$ dans (3.1) est lié à la présence d'un opérateur de charge $V_{-2\vec{\alpha}_0}(R)$, placé à l'infini, $R \rightarrow \infty$.

En plus de l'opérateur $T(z)$ le modèle contient dans son algèbre chirale deux autres opérateurs : $W_3(z)$, $W_4(z)$. Ces champs chiraux peuvent être exprimés en termes de polynômes des dérivées des champs $\{\varphi_a(z)\}$. Le point important est que $W_3(z)$ et $W_4(z)$ vont classer tous les opérateurs du modèle en termes de primaires ou descendants de l'algèbre chirale. En utilisant les méthodes usuelles et la représentation du gaz de Coulomb, les dimensions des opérateurs primaires et les fonctions de corrélation correspondantes peuvent être déterminées. Dans ce sens, la théorie conforme $WD_3^{(p)}$ est définie univoquement.

Dans la représentation du gaz de Coulomb du modèle $WD_3^{(p)}$, il y a trois opérateurs d'écran de type + et trois de type - :

$$\begin{aligned} V_a^+(z) \equiv V_{\vec{\alpha}_a^+}(z) &= e^{i \vec{\alpha}_a^+ \vec{\varphi}(z)} \\ V_a^-(z) \equiv V_{\vec{\alpha}_a^-}(z) &= e^{i \vec{\alpha}_a^- \vec{\varphi}(z)} \\ \vec{\alpha}_a^\pm &= \alpha_\pm \vec{e}_a, \quad (\vec{e}_a)^2 = 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

La "longueur" des opérateurs d'écran α_\pm est fixée en imposant que la dimension de $V_a^\pm(z)$ soit égale à 1. En général, pour un opérateur de vertex

$$V_{\vec{\alpha}}(z) = e^{i \vec{\alpha} \vec{\varphi}} \quad (3.3)$$

la dimension conforme est donnée par :

$$\Delta_{\vec{\alpha}} \equiv \Delta(V_{\vec{\alpha}}) = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \vec{\alpha}_0 = \alpha^2 - 2\alpha \alpha_0 \cos \theta \quad (3.4)$$

Ici, Θ est l'angle entre $\vec{\alpha}_0$ et $\vec{\alpha}$. La géométrie des écrans de $WD_3^{(p)}$ est telle que l'angle entre $\{\vec{\alpha}_a\}$ et $\vec{\alpha}_0$ est le même, fig. (3.1). En imposant la condition $\Delta(V_a^\pm) = 1$, on a :

$$\alpha_a^2 - 2\alpha_a \alpha_0 \cos \Theta = 1 \quad (3.5)$$

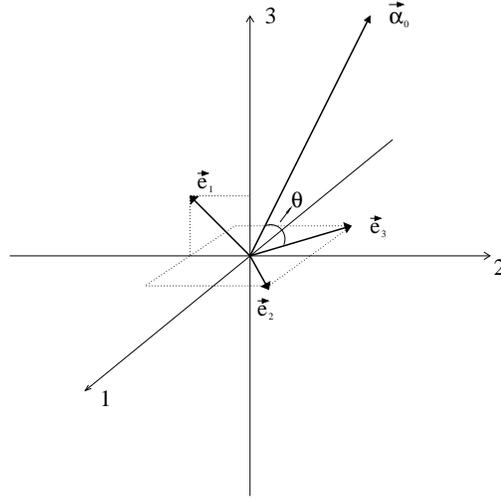


FIG. 3.1 – On montre la géométrie des racines simples de l'algèbre de Lie classique D_3 .

$$(\alpha_a)_{1,2} \equiv \alpha_{\pm} = \alpha_0 \cos \Theta \pm \sqrt{\alpha_0^2 \cos \Theta + 1}. \quad (3.6)$$

Les vecteurs unitaires $\{\vec{e}_a\}$, montré dans la fig.(3.1), correspondent aux racines simples de l'algèbre de Lie classique D_3 . L'angle Θ est fixé par la géométrie. On trouve :

$$\cos \Theta = \frac{1}{\sqrt{10}}. \quad (3.7)$$

La formule (3.6) fixe donc les longueurs α_{\pm} des écrans en fonction de α_0 seulement. Cela implique que, dans le modèle $WD_3^{(p)}$, l'orientation des écrans est donnée, et la longueur du vecteur $\vec{\alpha}_0$ reste l'unique paramètre libre.

Comme généralisation directe de ce qu'on a vu pour le gaz de Coulomb (*cf.* section 1.5), les opérateurs primaires du modèle sont représentés par les opérateurs de vertex :

$$V_{\vec{\beta}}(z) = e^{i\vec{\beta}\vec{\varphi}(z)}. \quad (3.8)$$

Les vecteurs $\vec{\beta}$ permis sont déterminés par les conditions de dégénérescence de $V_{\vec{\beta}}(z)$ par rapport à l'algèbre chirale. En utilisant la méthode qu'on a mentionné en section (1.5.3), on trouve que :

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}_{(n'_1, n_1)(n'_2, n_2)(n'_3, n_3)} = \sum_{a=1}^3 \left(\frac{1-n'_a}{2} \alpha_- + \frac{1-n_a}{2} \alpha_+ \right) \vec{\omega}_a, \quad (3.9)$$

où les vecteurs $\{\vec{\omega}_a\}$ sont définis par :

$$(\vec{\omega}_a, \vec{e}_b) = \delta_{ab}. \quad (3.10)$$

En utilisant la formule générale (3.4) pour les dimensions des opérateurs de vertex et l'éq.(3.9), on obtient la formule de Kac qui permet de déterminer les dimensions des opérateurs primaires $\phi_{(n'_1, n_1)(n'_2, n_2)(n'_3, n_3)}(z) \propto V_{\vec{\beta}_{(n'_1, n_1)(n'_2, n_2)(n'_3, n_3)}}(z)$:

$$\begin{aligned} \Delta_{(n'_1, n_1)(n'_2, n_2)(n'_3, n_3)} &= \sum_a u^2(n'_a, n_a) \frac{(\vec{\omega}_a)^2}{4} + 2 \sum_{a < b} u(n'_a, n_a) u(n'_b, n_b) \frac{(\vec{\omega}_a, \vec{\omega}_b)}{4} - \\ &\quad - (\alpha_+ + \alpha_-) \sum_{a, b} u(n'_a, n_a) \frac{(\vec{\omega}_a, \vec{\omega}_b)}{2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dans l'équation précédente, on a défini :

$$u(n'_a, n_a) = (1 - n'_a)\alpha_- + (1 - n_a)\alpha_+. \quad (3.12)$$

Dans une base orthonormale, les vecteurs unitaires $\{\vec{e}_a\}$ prennent la forme :

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 2). \quad (3.13)$$

Les vecteurs duaux $\{\vec{\omega}_a\}$ (*cf.* éq.(3.10)), ont comme composantes :

$$\vec{\omega}_1 = \sqrt{2}(0, 0, 1), \quad \vec{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 1), \quad \vec{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 1). \quad (3.14)$$

En particulier, on peut en déduire les produits scalaires qui apparaissent dans l'éq. (3.11) :

$$(\vec{\omega}_a, \vec{\omega}_b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Comme déjà mentionné, ce modèle a un seul paramètre libre qui peut être soit la longueur α_0 , soit la charge centrale c , donnée par :

$$c = 3 - 24\alpha_0^2. \quad (3.16)$$

On peut aussi observer que les longueurs α_+ et α_- respectivement pour les écrans "+" et les écrans "-", α_+ sont liées entre elles par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_+ + \alpha_- &= 2\alpha_0 \cos \Theta \\ \alpha_+ \alpha_- &= -1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Comme dans le cas des théories conformes M_p , on trouve une série de modèles unitaires si le paramètre $(\alpha_+)^2$ prend les valeurs discrètes :

$$(\alpha_+)^2 = \frac{p+1}{p}, \quad (3.18)$$

et donc, pour l'éq.(3.17),

$$(\alpha_-)^2 = \frac{p}{p+1}, \quad (3.19)$$

où $p = 5, 6, \dots$. Dans la suite, nous considérerons seulement la série unitaire $WD_3^{(p)}$.

On peut facilement vérifier que la formule de Kac pour les dimensions des opérateurs primaires est invariante sous la permutation des indices 2 et 3. Cette propriété peut aussi être remarquée en observant dans la fig.(3.1) la symétrie sous la réflexion Z_2 de la géométrie des vecteurs d'écran $\{\vec{\epsilon}_a\}$. Cette considération permet de repérer le secteur de singlet comme le sous ensemble des opérateurs dont les dimensions ne sont pas Z_2 dégénérées. Par exemple, les opérateurs $\{\phi_{(n_1', n_1)(1,1)(1,1)}\}$ sont des singlets. L'opérateur de dimension la plus petite, exclusion faite de l'opérateur d'identité $I = \phi_{(1,1)(1,1)(1,1)}(\Delta_{(1,1)(1,1)(1,1)} = 0)$, est :

$$\phi_{(2,1)(1,1)(1,1)}(x). \quad (3.20)$$

Il est alors naturel d'identifier l'opérateur d'énergie $\varepsilon(x)$ du modèle à $\phi_{(2,1)(1,1)(1,1)}(x)$:

$$\varepsilon(x) = \phi_{(2,1)(1,1)(1,1)}(x) \quad (3.21)$$

Dans le cas limite $p \rightarrow \infty$, la formule de Kac (3.11) donne :

$$\Delta_\varepsilon(p \rightarrow \infty) = \frac{1}{2}. \quad (3.22)$$

Si on définit :

$$\epsilon = \frac{1}{p+1} \quad (3.23)$$

on trouve finalement pour p fini :

$$\Delta_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\epsilon. \quad (3.24)$$

3.3 Calcul de groupe de renormalisation au premier ordre.

3.3.1 Action perturbée.

Le point de départ est l'étude de l'effet d'un désordre couplé à la densité d'énergie $\varepsilon(x)$ pour le modèle $WD_3^{(p)}$.

Comme nous l'avons appris dans la section (2.2), ce problème peut être rapporté, *via* la méthode des répliques, à celui de N modèles couplés par leur opérateur d'énergie. L'action que nous considérons est donc la suivante :

$$A = \sum_a^N A_0^{(a)} + g_0 \sum_{a \neq b}^N \int d^2x \varepsilon_a(x) \varepsilon_b(x), \quad (3.25)$$

où g_0 est la constante de couplage et $A_0^{(a)}$ est l'action conforme qui décrit la copie a -ème du modèle $WD_3^{(p)}$. Dans la représentation de champ libre, section (3.2), nous avons :

$$A_0 = \int d^2x \{ \partial \vec{\phi}(x) \bar{\partial} \vec{\phi}(x) + \sum_{a=1}^3 (e^{i\vec{\alpha}_a^+ \vec{\phi}(x)} + e^{i\vec{\alpha}_a^- \vec{\phi}(x)}) \}. \quad (3.26)$$

L'étude de l'action (3.25) permet non seulement d'obtenir des résultats analytiques concernant les systèmes désordonnés, mais aussi d'aborder le problème, également important, de N modèles couplés.

Nous avons montré que l'opérateur d'énergie $\varepsilon(x)$ a une dimension $\Delta_\varepsilon = 1/2 - 5/2\epsilon$. Pour $\epsilon \ll 1$ (ou $p \gg 1$) la perturbation $\int d^2x (\varepsilon \varepsilon)(x)$ est très peu pertinente : nous pouvons donc appliquer la technique exposée en section (2.3). Il faut d'abord considérer l'algèbre des opérateurs de perturbation qui, comme nous l'avons vu, fixe complètement les résultats du calcul de groupe de renormalisation (RG) au premier ordre.

3.3.2 La fusion énergie-énergie.

L'analyse des règles de fusion est largement simplifiée si on dispose de la représentation du gaz de Coulomb. La fusion entre deux opérateurs :

$$\phi_{(n_1, n'_1)(n_2, n'_2)(n_3, n'_3)} \phi_{(m_1, m'_1)(m_2, m'_2)(m_3, m'_3)} \quad (3.27)$$

produit, selon les règles du gaz de Coulomb, un opérateur $\phi_{(l_1, l'_1)(l_2, l'_2)(l_3, l'_3)}$ dans le canal principal tel que :

$$\vec{\beta}_{(l_1, l'_1)(l_2, l'_2)(l_3, l'_3)} = \vec{\beta}_{(n_1, n'_1)(n_2, n'_2)(n_3, n'_3)} + \vec{\beta}_{(m_1, m'_1)(m_2, m'_2)(m_3, m'_3)}. \quad (3.28)$$

Les autres canaux suivent le principal par des translations réalisées par une combinaison linéaire des écrans $\vec{\alpha}_a^{(\pm)}$, $a = 1, 2, 3$.

Cette propriété sera beaucoup exploitée aussi dans le cas des théories parafermioniques. Ici nous la justifions pour le cas particulier du produit $\varepsilon(x)\varepsilon(0)$.

Nous étudions la fonction de corrélation à quatre points $G(x) \equiv \langle \varepsilon(0)\varepsilon(x)\varepsilon(1)\varepsilon(\infty) \rangle$, qui peut être décomposée sur la somme des canaux correspondants aux insertions des différents opérateurs.

Nous définissons, pour simplicité, $\vec{\beta}_{(2,1)(1,1)(1,1)} \equiv \vec{\beta}_\varepsilon$, $2\vec{\alpha}_0 - \vec{\beta}_{(2,1)(1,1)(1,1)} \equiv \vec{\beta}_\varepsilon$, $\vec{\beta}_{(1,1)(2,1)(2,1)} \equiv \vec{\beta}_\phi$, et $2\vec{\alpha}_0 - \vec{\beta}_{(1,1)(2,1)(2,1)} \equiv \vec{\beta}_{\bar{\phi}}$. Nous pouvons alors écrire, en termes du gaz du Coulomb, que :

$$G(x) \propto \int \dots \int \langle V_{\vec{\beta}_\varepsilon}^-(0) V_{\vec{\beta}_\varepsilon}^-(x) V_{\vec{\beta}_\varepsilon}^-(1) V_{\vec{\beta}_\varepsilon}^-(\infty) V_1^-(\mu_1) V_1^-(\mu_2) V_2^-(\xi) V_3^-(\nu) \rangle d^2\mu_1 d^2\mu_2 d^2\xi d^2\nu, \quad (3.29)$$

où les écrans V_a^- , définis par les éqs. (3.2), sont intégrés sur le plan et leur nombre est fixé par la condition de neutralité de la charge :

$$2\vec{\beta}_\varepsilon + \alpha_- (m_1\vec{e}_1 + m_2\vec{e}_2 + m_3\vec{e}_3) = 0, \quad (3.30)$$

qui est satisfaite pour $m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 1$.

Chaque terme dominant dans la représentation intégrale (3.29) est associé au nombre particulier q_a d'écrans V_a^- (pour l'éq.(3.30) $q_1 \leq 2, q_2 \leq 1, q_3 \leq 1$) qui approchent l'origine. Dans cette limite,

$$V_{\vec{\beta}_\varepsilon}(x)V_{\vec{\beta}_\varepsilon}(0) \prod_a (V_a^-)^{q_a} \rightarrow V_{2\vec{\beta}_\varepsilon + \alpha_- \sum_a q_a \vec{e}_a}(0) + \dots, \quad (3.31)$$

l'état intermédiaire du vertex $V_{2\vec{\beta}_\varepsilon + \alpha_- \sum_a q_a \vec{e}_a}$ correspond à un champ primaire qui appartient à l'algèbre des opérateur d'énergie.

Parmi les vecteurs $\{2\vec{\beta}_\varepsilon + \alpha_- \sum_{a=1}^3 q_a \vec{e}_a\}$, avec $q_1 = 0, 1, 2, q_2 = 0, 1$, et $q_3 = 0, 1$, nous cherchons ceux qui se décomposent dans un nombre positif de $\{\alpha_- \frac{\vec{\omega}_a}{2}\}$:

$$\begin{aligned} 2\vec{\beta}_\varepsilon + \alpha_- \sum_{a=1}^3 q_a \vec{e}_a &= \alpha_- \sum_{a=1}^3 \frac{1-n'_a}{2} \vec{\omega}_a \\ n'_a &\geq 1. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dans ce cas l'opérateur de vertex $V_{2\vec{\beta}_\varepsilon + \alpha_- \sum_{a=1}^3 q_a \vec{e}_a}$ appartient au secteur physique du tableau de Kac et le opérateur primaire correspondant $\phi_{(n'_1,1)(n'_2,1)(n'_3,1)}$ apparaît dans la fusion $\varepsilon\varepsilon$. En prenant compte les propriétés de l'algèbre de Lie $D_3 \equiv A_3$, la condition (3.32) est équivalente à :

$$\begin{aligned} n'_1 &= 3 - 2q_1 + q_3 + q_2 \\ n'_2 &= 1 - 2q_2 + q_1 \\ n'_3 &= 1 - 2q_3 + q_1. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Le système (3.33) admet seulement trois solutions qui correspondent à l'opérateur d'identité (pour $q_1 = 2, q_3 = 1, q_2 = 1$), à l'opérateur $\phi \equiv \phi_{(1,1)(2,1)(2,1)}$ (pour $q_1 = 1, q_3 = 0, q_2 = 0$) et à l'opérateur $\phi_{(3,1)(1,1)(1,1)}$ (pour $q_1 = q_2 = q_3 = 0$).

Comme nous verrons en détail plus loin, le schéma RG demande que tous les termes pertinents, produits par l'interaction énergie-énergie, soient ajoutés à l'action de départ (3.25). Ensuite, il faut s'assurer que l'algèbre de l'ensemble élargi des champs de perturbation ne contient pas d'autres opérateurs pertinents.

En se servant de la formule de Kac (3.11), nous trouvons $\Delta_{(1,1)(2,1)(2,1)} = 1 - 4\epsilon$ et $\Delta_{(3,1)(1,1)(1,1)} = 2$: les opérateurs pertinents dans l'algèbre des opérateurs d'énergie sont

donc l'identité ($\Delta_{(1,1)(1,1)(1,1)} = 0$) et ϕ . Le développement du produit $\varepsilon(x)\varepsilon(0)$, à part les termes non pertinents, est donc :

$$\varepsilon(x)\varepsilon(0) = \frac{I}{|x|^{4\Delta_\varepsilon}} + \frac{D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi}{|x|^{4\Delta_\varepsilon - 2\Delta_\phi}}\phi + \dots, \quad (3.34)$$

où $D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi$ est la constante de structure associée.

3.4 Renormalisation des constantes de couplage.

Nous venons de montrer que le développement du produit (O.P.E.) $\varepsilon(x)\varepsilon(0)$ contient, en plus de l'identité, un opérateur pertinent, $\phi_{(1,1)(2,1)(2,1)} \equiv \phi$, de dimension $\Delta_\phi = 1 - 4\varepsilon$. Dans le calcul perturbatif au premier ordre, les diagrammes à considérer correspondent donc aux contractions suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{a \neq b}^N (\varepsilon_a \varepsilon_b)(x) \sum_{c \neq d}^N (\varepsilon_c \varepsilon_d)(y) &\rightarrow 4(N-2)|x-y|^{-4\Delta_\varepsilon} \sum_{a \neq b}^N (\varepsilon_a \varepsilon_b)(y) + \\ &+ 4(N-1)D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi |x-y|^{4\Delta_\varepsilon - 2\Delta_\phi} \sum_{a=1}^N \phi_a(y) + \dots \end{aligned} \quad (3.35)$$

Par conséquent, le terme pertinent :

$$\sum_a^N \int d^2x \phi_a(x) \quad (3.36)$$

est produit dans le flot du RG. Ceci implique que il faut considérer l'action plus générale :

$$A = \sum_a^N A_0^{(a)} + g_0 \sum_{a \neq b}^N \int d^2x \varepsilon_a(x) \varepsilon_b(x) + \lambda_0 \sum_a^N \int d^2x \phi_a(x), \quad (3.37)$$

où λ_0 est la nouvelle constante de couplage.

Le problème d'un modèle $WD_3^{(p)}$ perturbé seulement par ϕ ($g_0 = 0$ en (3.37)) a été déjà considéré [67]. Le comportement de ce modèle à basses énergies est décrit par la théorie $WD_3^{(p-1)}$.

En répétant l'analyse du produit des opérateurs $\varepsilon\varepsilon$, nous avons vérifié que il n'y a pas d'autres opérateurs pertinents qui sont produits par la procédure RG. Exclusion faite des termes non pertinents, la structure complète de l'algèbre des opérateurs de perturbation est donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon(x)\varepsilon(0) &= \frac{I}{|x|^{4\Delta_\varepsilon}} + \frac{D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi}{|x|^{4\Delta_\varepsilon - 2\Delta_\phi}}\phi(0) + \dots \\ \phi(x)\phi(0) &= \frac{I}{|x|^{4\Delta_\phi}} + \frac{D_{\phi\phi}^\phi}{|x|^{2\Delta_\phi}}\phi(0) + \dots \\ \phi(x)\varepsilon(0) &= \frac{D_{\varepsilon\phi}^\varepsilon}{|x|^{2\Delta_\phi}}\varepsilon(0) + \dots \end{aligned} \quad (3.38)$$

A la fin de ce chapitre, nous montrerons comment déterminer les constantes de structure $D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi$ et $D_{\phi\phi}^\phi$ en utilisant encore une fois le gaz de Coulomb. Pour le moment, nous donnons les valeurs que nous avons calculées :

$$D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi = \sqrt{\frac{5}{3}} + 0(\varepsilon), \quad D_{\phi\phi}^\phi = \frac{8}{\sqrt{15}} + 0(\varepsilon). \quad (3.39)$$

Dans la suite, nous nous servons principalement du développement (3.35) et de ceux suivants :

$$\begin{aligned} \sum_{a \neq b}^N (\varepsilon_a \varepsilon_b)(x) \sum_{a=1}^N \phi_a(y) &\rightarrow 2D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi |x-y|^{-2\Delta_\phi} \sum_{a \neq b}^N (\varepsilon_a \varepsilon_b)(y) + \dots \\ \sum_{a=1}^N \phi_a(x) \sum_{b=1}^N \phi_b(y) &\rightarrow D_{\phi\phi}^\phi |x-y|^{-2\Delta_\phi} \sum_{a=1}^N \phi_a(y) + \dots \end{aligned} \quad (3.40)$$

La renormalisation des constantes $g(r)$ et $\lambda(r)$, r étant le régulateur à courtes distances, est encodée dans les fonctions β correspondantes. Ces fonctions peuvent être déterminées facilement à l'aide de la méthode que nous avons présenté dans le chapitre précédent (*cfr.* section (2.3)). A partir des éqs.(3.35)-(3.40), nous trouvons :

$$\begin{aligned} \beta_g &\equiv \frac{\partial g(r)}{\partial \ln(r)} = (2 - 4\Delta_\varepsilon)g - (N-2)g^2 - 4D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi \lambda g \\ \beta_\lambda &\equiv \frac{\partial \lambda(r)}{\partial \ln(r)} = (2 - 2\Delta_\phi)\lambda - \frac{D_{\phi\phi}^\phi}{2} \lambda^2 - \frac{N-1}{2} D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi g^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Dans l'équation ci-dessus, les constantes de couplages ont été redéfinies, $g \rightarrow g/4\pi$ et $\lambda \rightarrow \lambda/2\pi$.

3.5 Point fixes et flot du groupe de renormalisation.

3.5.1 $WD_3^{(p)}$ désordonné.

Nous allons d'abord étudier les propriétés des éqs.(3.41) pour $N \rightarrow 0$, *i.e.* dans le cas d'un système désordonné.

Dans cette limite, la fonction β devient :

$$\begin{aligned} \beta_g &= 10\varepsilon g + 2g^2 - 2\sqrt{\frac{5}{3}}\lambda g \\ \beta_\lambda &= 8\varepsilon\lambda - \frac{4}{\sqrt{15}}\lambda^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}g^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Le flot de renormalisation, qui est engendré par le système des éqs. (3.42), possède deux points stationnaires (g_*, λ_*) , tels que $\beta_g(g_*, \lambda_*) = \beta_\lambda(g_*, \lambda_*) = 0$:

- le point trivial $(0, 0)$, qui représente le modèle $WD_3^{(p)}$ pur.

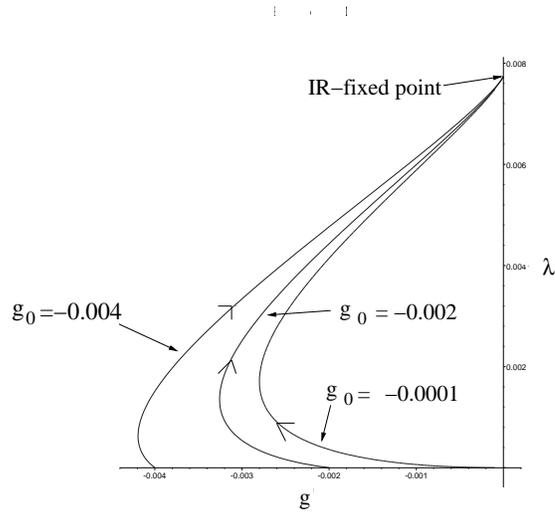


FIG. 3.2 – On montre le flot de la constante de couplage pour le modèle WD_3 désordonné.

– le point

$$\lambda_d = 2\sqrt{15}\epsilon, \quad g_d = 0, \quad (3.43)$$

qui a déjà été étudié en [67]. La théorie conforme associée à ce point est décrite par le modèle $WD_3^{(p-1)}$ pur.

Il est facile de vérifier que l'origine $(0, 0)$ est un point répulsif pour le flot alors que le point (3.43) est stable dans toutes les directions.

Nous considérons maintenant, comme conditions initiales (c.i.), $\lambda_0 = 0$ et $-1 \ll g_0 < 0$. Ces c.i. correspondent justement au modèle $WD_3^{(p)}$ faiblement désordonné : on rappelle en effet que la valeur $-g_0$ est proportionnelle à la largeur de la distribution associée au désordre.

En supposant que les corrections d'ordres suivants ne modifient pas le comportement du flot près des points fixes, le système est alors conduit vers le point (3.43), comme il apparaît dans les simulations numériques montrées en figure (3.2).

Nous pouvons ainsi conclure que l'addition d'un faible désordre couplé à la densité d'énergie mène le modèle $WD_3^{(p)}$ vers le modèle $WD_3^{(p-1)}$ pur.

3.5.2 N modèles $WD_3^{(p)}$ couplés.

Nous considérons maintenant le cas $N \geq 2$. Les fonctions β ont la forme :

$$\begin{aligned}\beta_g &= 10\epsilon g - (N-2)g^2 - 2\sqrt{\frac{5}{3}}\lambda g \\ \beta_\lambda &= 8\epsilon\lambda - \frac{4}{\sqrt{15}}\lambda^2 - \frac{N-1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}g^2.\end{aligned}\quad (3.44)$$

En plus du point (3.43), qui reste un point d'attraction du flot du RG car les valeurs propres correspondantes ne dépendent pas de N , deux nouveaux points fixes apparaissent :

$$\lambda_*^{(1)} = \sqrt{15} \left(1 - (N-2) \sqrt{\frac{6}{N-1+6N^2}} \right) \epsilon, \quad g_*^{(1)} = 10 \sqrt{\frac{6}{N-1+6N^2}} \epsilon \quad (3.45)$$

$$\lambda_*^{(2)} = \sqrt{15} \left(1 + (N-2) \sqrt{\frac{6}{N-1+6N^2}} \right) \epsilon, \quad g_*^{(2)} = -10 \sqrt{\frac{6}{N-1+6N^2}} \epsilon. \quad (3.46)$$

Les points stationnaires (3.45) et (3.46) constituent des nœuds du flot et ils peuvent être atteints seulement si on choisit correctement les conditions initiales.

Les principales caractéristiques du flot du RG sont montrées dans la fig. (3.3).

Pour $\lambda_0 = 0$ et $g_0 \neq 0$, le système s'éloigne des points fixes vers un régime massif ou vers un autre point fixe qui ne peut pas être repéré par un calcul perturbatif.

Nous ouvrons ici une brève parenthèse. Les cas particulier $N = 2$, avec $\lambda_0 = 0$ et $g_0 \neq 0$, a été déjà considéré en [79]. Les auteurs de cet article ont prouvé que la théorie $WD_n^{(p)}$ perturbée par le terme $\int \varepsilon \varepsilon$ est intégrable. Pourtant, nous voulons souligner que, selon notre analyse RG, il faut ajouter le terme $\int \phi$ pour rendre la théorie renormalisable. La question est alors de savoir si la présence de la deuxième perturbation modifie ou pas l'intégrabilité de la théorie. Ce mécanisme ne se produit pas, par exemple, si on couple deux modèles M_p : ce modèle, étudié en détail dans [80], se révèle être aussi intégrable [79]. Dans ce cas, l'action originale avec la perturbation $\int \varepsilon \varepsilon$ est stable par rapport à la transformation sous le RG.

En revenant à l'étude du flot du RG dans la région $\lambda > 0$ et à l'ordre ϵ , $\lambda \sim \epsilon$, le système (3.44) admet deux solutions, $g_+(\lambda) > 0$ et $g_-(\lambda) < 0$, qui sont attirées respectivement par les nœuds (3.45) et (3.46); si $\lambda_0 > 0$ et $g_-(\lambda_0) < g_0 < g_+(\lambda_0)$, les valeurs des couplages sont menées au point (3.43) et la théorie est donc décrite dans la limite infrarouge par N modèles $WD_3^{(p-1)}$ découplés.

Comme on peut remarquer dans la fig.(3.3), le flot n'est pas symétrique par rapport à l'axe λ , d'où la différence entre les valeurs de la charge centrale aux points (3.45) et (3.46) que nous déterminons plus loin. Cela est dû au fait que, pour $g < 0$, le système de N modèles peut choisir une configuration "ferromagnétique" alors que, pour $g > 0$, le couplage entre

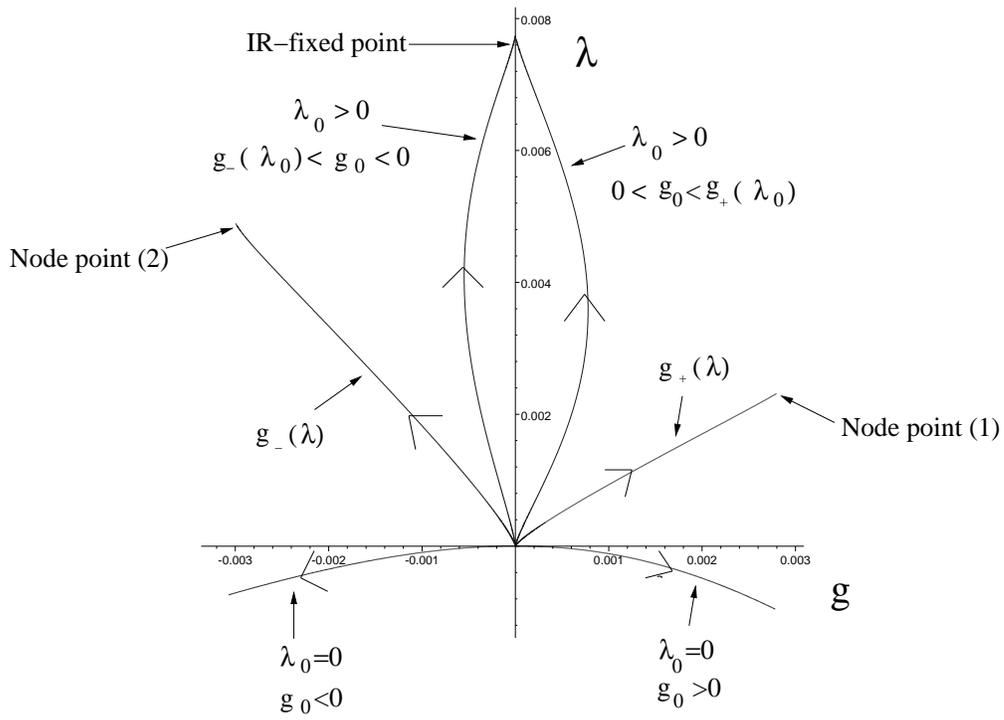


FIG. 3.3 – Flot de renormalisation pour le système de N théories WD_3 couplées.

les modèles est toujours frustré. Pour $N = 2$, quand il n'y a pas de frustration, on retrouve la symétrie $g \rightarrow -g$.

Nous nous concentrons maintenant sur l'importance des points fixes (3.45) et (3.46), pour lesquels $g_* \neq 0$: dans ces points, les N modèles restent couplés. Nous nous attendons alors à ce que les théorie conformes correspondantes réalisent la symétrie de permutation de façon non triviale. Cette symétrie doit se manifester au niveau des fonctions de corrélations ou bien au niveau du spectre de la théorie.

Dans les prochaines sections nous allons déterminer, par calcul perturbatif, la renormalisation des opérateurs d'énergie aux nouveaux points fixes. Les résultats que nous obtenons confirment le fait que les opérateurs des nouvelles théories conformes s'organisent selon les représentations de la symétrie permutationnelle.

Comme déjà discuté dans l'introduction, le modèle $WD_3^{(p)}$ permet d'avoir accès au développement analytique en ϵ des dimensions des opérateurs d'énergie de ces théories ainsi qu'à la charge centrale .

3.5.3 Renormalisation des opérateurs d'énergie.

Pour déterminer l'effet de la perturbation sur les opérateurs d'énergie, nous avons besoin d'étudier les opérateurs d'énergie renormalisés ε'_a , qu'on peut exprimer via la matrice $N \times N$ $[Z_\epsilon]_{ab}$:

$$\varepsilon'_a = \sum_b [Z_\epsilon]_{ab} \varepsilon_b. \quad (3.47)$$

Comme d'habitude, nous suivons la procédure du RG : nous prenons en compte les contributions des différents diagrammes et écrivons les quantités "nues" en termes de celles renormalisées. Pour déterminer à l'ordre d'une boucle la matrice $\gamma_{ab} \equiv d \ln [Z]_{ab} / d \ln(r)$, il est suffisant de considérer les développements suivants :

$$\begin{aligned} \sum_{a \neq b}^N (\varepsilon_a \varepsilon_b)(x) \varepsilon_c(y) &\rightarrow 2|x-y|^{-2+2(2n-1)\epsilon} \sum_{a \neq c}^N \varepsilon_a(y) + \dots \\ \sum_a^N \phi_a(x) \varepsilon_c(y) &\rightarrow D_{\epsilon\epsilon}^\phi |x-y|^{-2+2(n-1)\epsilon} \varepsilon_c(y) + \dots \end{aligned} \quad (3.48)$$

Les exposants critiques associés aux points fixes (g_*, λ_*) sont donnés par les valeurs propres

de la matrice de dimension $\Delta_{ab} \equiv \Delta_\varepsilon \delta_{ab} - \gamma_{ab}(g_*, \lambda_*)$ qui a la forme :

$$\Delta_{ab} = \begin{pmatrix} \Delta_{\varepsilon_1} + D_{\varepsilon_\phi}^\phi \lambda_* & g_* & g_* & \cdot & \cdot & g_* \\ g_* & \Delta_{\varepsilon_2} + D_{\varepsilon_\phi}^\phi \lambda_* & g_* & \cdot & \cdot & g_* \\ g_* & g_* & \Delta_{\varepsilon_3} + D_{\varepsilon_\phi}^\phi \lambda_* & g_* & \cdot & g_* \\ \cdot & \cdot & g_* & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_* & g_* & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta_{\varepsilon_N} + D_{\varepsilon_\phi}^\phi \lambda_* \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

La combinaison symétrique $\varepsilon_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_N$ et celle antisymétrique $\varepsilon_{a_1} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_{a_2} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \dots$ représentent les vecteurs propres de la matrice (3.49). Les dimensions correspondantes sont :

$$\begin{aligned} \Delta_{\varepsilon_s}(g_*, \lambda_*) &= \Delta_\varepsilon + D_{\varepsilon_\phi}^\varepsilon \lambda_* + (N-1)g_* \\ \Delta_{\varepsilon_{a_1}}(g_*, \lambda_*) &= \Delta_{\varepsilon_{a_2}} = \dots = \Delta_\varepsilon + D_{\varepsilon_\phi}^\varepsilon \lambda_* - g_*. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Aux points fixes (3.45) et (3.46), qu'on indique comme $(g_*^{(1)}, \lambda_*^{(1)})$ et $(g_*^{(2)}, \lambda_*^{(2)})$, on a :

$$\Delta_{\varepsilon_s}^{(1),(2)} = \Delta_\varepsilon + 5 \left(1 \pm N \sqrt{\frac{6}{N-1+6N^2}} \right) \epsilon \quad (3.51)$$

$$\Delta_{\varepsilon_a}^{(1),(2)} = \Delta_\varepsilon + 5 \left(1 \mp N \sqrt{\frac{6}{N-1+6N^2}} \right) \epsilon, \quad (3.52)$$

où $\Delta_{\varepsilon_{s,a}}^{(1)} \equiv \Delta_{\varepsilon_{s,a}}(g_*^{(1)}, \lambda_*^{(1)})$ et $\Delta_{\varepsilon_{s,a}}^{(2)} \equiv \Delta_{\varepsilon_{s,a}}(g_*^{(2)}, \lambda_*^{(2)})$.

Le spectre des dimensions, dans le secteur d'énergie, se décompose donc dans la représentation de singlet, ε_s , et de doublet, ε_a , par rapport à la symétrie de permutation. Ce résultat confirme l'hypothèse que les théories conformes décrivant les points critiques (3.45) et (3.46) sont des représentations non triviales du groupe de permutation.

3.5.4 Détermination des charges centrales.

Dans la section précédente, nous avons montré que le flot du RG, associé au système désordonné ($N=0$) et aux systèmes couplés ($N \geq 2$), admet des points fixes non triviaux.

Nous allons calculer les charges centrales relatives à l'aide du théorème *c*, que j'ai énoncé en section (2.4) : je rappelle ici que ce théorème permet d'écrire la fonction des constantes de couplage, $c(g, \lambda)$, dont les valeurs $c(g_*, \lambda_*)$ sont égales à celles des charges centrales des théories correspondant aux points fixes (g_*, λ_*) .

La trace $\Theta(x)$ du tenseur d'énergie-impulsion est proportionnelle aux termes de perturbation de la théorie. À partir de l'action (3.37), nous trouvons :

$$\Theta(x) = \frac{\beta g}{8} \sum_{a \neq b}^N \varepsilon_a(x) \varepsilon_b(x) + \frac{\beta \lambda}{4} \sum_c^N \phi_c(x). \quad (3.53)$$

Dans (3.53), nous avons pris en compte le changement de la normalisation des couplages $g \rightarrow g/4\pi$ et $\lambda \rightarrow \lambda/2\pi$.

En indiquant comme c_{pur} et $\langle \Theta(0)\Theta(1) \rangle$ la charge centrale du modèle non perturbé et la fonction de corrélation à deux points du champ Θ , la fonction $c(g, \lambda)$ est univoquement déterminée par les équations [72] :

$$\begin{aligned} \beta_g \frac{\partial c(g, \lambda)}{\partial g} + \beta_\lambda \frac{\partial c(g, \lambda)}{\partial \lambda} &= -24 \langle \Theta(0)\Theta(1) \rangle \\ c(0, 0) &= c_{pure} \end{aligned} \quad (3.54)$$

En utilisant les relations

$$\begin{aligned} \sum_{a \neq b}^N \sum_{c \neq d}^N \langle \varepsilon_a(1)\varepsilon_b(1)\varepsilon_c(0)\varepsilon_d(0) \rangle &= 2N(N-1) \\ \sum_{c \neq d}^N \sum_{a=1}^N \langle \varepsilon_c(0)\varepsilon_d(0)\phi_a(1) \rangle &= 0 \\ \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \langle \phi_a(1)\phi_b(0) \rangle &= N, \end{aligned} \quad (3.55)$$

dans l'équation (3.54), il est facile de vérifier que la fonction :

$$c(g, \lambda) = c_{pure} - N \left(\frac{3}{2} \Delta_\varepsilon \varepsilon g^2 + 3 \Delta_\phi \varepsilon \lambda^2 - \frac{(N-1)(N-2)}{4} g^3 - \frac{D_\phi^\phi}{4} \lambda^3 - \frac{3}{4} (N-1) D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi g^2 \lambda \right) \quad (3.56)$$

est solution du système (3.54).

La fonction (3.56) a été obtenue pour un système de N modèles $WD_3^{(p)}$. En définissant $c(WD_3^{(p)})$ la charge centrale du modèle $WD_3^{(p)}$ [67] :

$$c(WD_3^{(p)}) = 3 \left(1 - \frac{20}{p(p+1)} \right), \quad (3.57)$$

nous avons alors $c_{pur} = Nc(WD_3^{(p)})$.

Modèle $WD_3^{(p)}$ désordonné.

Nous pouvons nous servir de l'éq.(3.56) pour calculer la charge centrale c_{des} du modèle désordonné au point fixe infrarouge. Pour faire cela, nous normalisons d'abord la fonction $c(g, \lambda)$ par N et puis nous considérons la limite $N \rightarrow 0$. En termes des répliques, en effet, ceci est la façon de faire la limite pour obtenir l'énergie libre.

En utilisant les valeurs des constantes (3.39), la valeur de la charge centrale c_{des} que nous obtenons vaut :

$$c_{des} = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{c(0, 2\sqrt{15}\varepsilon)}{N} = c(WD_3^{(p)}) - 120\varepsilon^3 \approx c(WD_3^{(p-1)}) \quad (3.58)$$

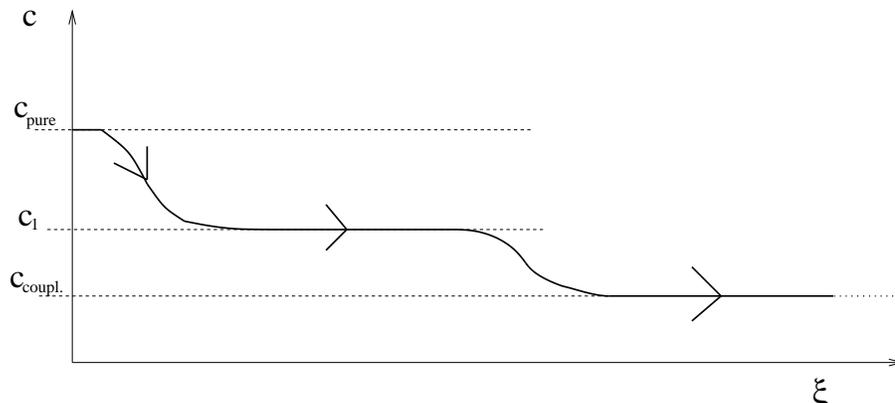


FIG. 3.4 – Variation de la fonction $c(g(\xi), \lambda(\xi))$, définie dans l'éq. (3.56), le long d'un flot de renormalisation qui passe à côté du point (3.45).

Ce résultat confirme ce que nous avons déjà annoncé dans la section précédente : le comportement critique du modèle $WD_3^{(p)}$ auquel on a rajouté un désordre couplé à la densité d'énergie est décrit par un modèle $WD_3^{(p-1)}$ pur.

N modèles $WD_3^{(p)}$ couplés.

La charge centrale c_{coupl} au point fixe (3.43) est $c_{coupl} = c(0, 2\sqrt{15}\epsilon) = Nc(WD_3^{(p-1)})$, c'est à dire la théorie critique IR est formée par N modèles $WD_3^{(p-1)}$ découplés.

Plus intéressant est le calcul des charges centrale c_1 et c_2 aux nouveaux point fixes (3.45)-(3.46) :

$$c_{1,2} \simeq Nc(WD_3^{(p)}) - N \left[60 \left(1 \mp (N-2) \sqrt{\frac{6}{N-1+6N^2}} \right) \right] \epsilon^3. \quad (3.59)$$

Dans la fig.(3.4), nous avons montré comme la fonction $c(g, \lambda)$ (*cfr.* éq. (3.56)) varie le long d'un flot de renormalisation qui passe à côté du point (3.45). La fonction $c(\xi) \equiv c(g(\xi), \lambda(\xi))$ a comme asymptote la valeur c_{coupl} . Le plateau qu'on peut remarquer dans la figure correspond à la valeur c_1 de la charge centrale de la théorie au point fixe (3.45).

Les résultats analytiques (3.51)-(3.52) et (3.59) sont les premiers qui concernent une nouvelle série de théories conformes qui présentent une représentation non triviale de la symétrie de permutation.

3.6 Calcul des constantes de structure $D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi$ et $D_{\phi\phi}^\phi$ pour le modèle $WD_n^{(p)}$.

Nous calculons ici les constantes de structure qui apparaissent dans l'analyse RG. Bien que ceci soit un sujet un peu technique, nous estimons intéressant de montrer comme on peut utiliser la représentation du gaz de Coulomb pour extraire des informations sur le modèle $WD_3^{(p)}$. La méthode que nous allons présenter est, en effet, tout à fait générale.

Les constantes de structure $D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi$ et $D_{\phi\phi}^\phi$ peuvent être déterminées à partir des fonctions à trois points du modèle $WD_3^{(p)}$ non perturbé :

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi &= \langle \varepsilon(0)\varepsilon(1)\phi(\infty) \rangle \\ D_{\phi\phi}^\phi &= \langle \phi(0)\phi(1)\phi(\infty) \rangle \end{aligned} \quad (3.60)$$

Pour se servir du gaz de Coulomb, nous devons tenir en compte que les opérateurs de vertex $V_{\vec{\beta}_\varepsilon}$, $V_{\vec{\beta}_\varepsilon}$, $V_{\vec{\beta}_\phi}$ et $V_{\vec{\beta}_{\bar{\phi}}}$ peuvent acquérir des facteurs non triviaux N_ε , $N_{\bar{\varepsilon}}$, N_ϕ et $N_{\bar{\phi}}$ tels que [49, 50, 38] :

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= N_\varepsilon^{-1} V_{\vec{\beta}_\varepsilon}(x) = N_{\bar{\varepsilon}}^{-1} V_{\vec{\beta}_{\bar{\varepsilon}}}(x) \\ \phi(x) &= N_\phi^{-1} V_{\vec{\beta}_\phi}(x) = N_{\bar{\phi}}^{-1} V_{\vec{\beta}_{\bar{\phi}}}(x) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Après avoir fixé les normalisations des champs : $\langle \varepsilon(1)\varepsilon(0) \rangle = N_\varepsilon N_{\bar{\varepsilon}} = 1$ et $\langle \phi(1)\phi(0) \rangle = N_\phi N_{\bar{\phi}} = 1$, il faut calculer les quatre intégrales :

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \prod_i^3 \frac{(-)^{m_i^{(1)}}}{m_i^{(1)}!} \int \dots \int \langle V_{\vec{\beta}_\varepsilon}(0) V_{\vec{\beta}_\phi}(1) V_{\vec{\beta}_{\bar{\varepsilon}}}(\infty) \underbrace{V_1 \dots V_1}_{m_1^{(1)} \text{ fois}} \dots \underbrace{V_3 \dots V_3}_{m_3^{(1)} \text{ fois}} \rangle = N_\phi D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi \\ I_2 &\equiv \prod_i^3 \frac{(-)^{m_i^{(2)}}}{m_i^{(2)}!} \int \dots \int \langle V_{\vec{\beta}_\varepsilon}(0) V_{\vec{\beta}_\phi}(1) V_{\vec{\beta}_{\bar{\phi}}}(\infty) \underbrace{V_1 \dots V_1}_{m_1^{(2)} \text{ fois}} \dots \underbrace{V_3 \dots V_3}_{m_3^{(2)} \text{ fois}} \rangle = N_\varepsilon^2 N_\phi^{-1} D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi \\ I_3 &\equiv \prod_i^3 \frac{(-)^{m_i^{(3)}}}{m_i^{(3)}!} \int \dots \int \langle V_{\vec{\beta}_{\bar{\phi}}}(0) V_{\vec{\beta}_\phi}(1) V_{\vec{\beta}_\varepsilon}(\infty) \underbrace{V_1 \dots V_1}_{m_1^{(3)} \text{ fois}} \dots \underbrace{V_n \dots V_n}_{m_3^{(3)} \text{ fois}} \rangle = N_\phi D_{\phi\phi}^\phi \\ I_4 &\equiv \prod_i^3 \frac{(-)^{m_i^{(4)}}}{m_i^{(4)}!} \int \dots \int \langle V_{\vec{\beta}_\varepsilon}(0) V_{\vec{\beta}_\varepsilon}(1) V_{\vec{\beta}_{2\bar{\alpha}_0}}(\infty) \underbrace{V_1 \dots V_1}_{m_1^{(4)} \text{ fois}} \dots \underbrace{V_3 \dots V_3}_{m_3^{(4)} \text{ fois}} \rangle = N_\varepsilon^2, \end{aligned}$$

où l'intégration est faite dans le plan 2D et le nombre des écrans est fixé par la condition de neutralité de charge. L'opérateur de vertex $V_{\vec{\beta}_{2\bar{\alpha}_0}}$ correspond à l'identité I avec constante de normalisation : $N_{\vec{\beta}_{2\bar{\alpha}_0}} = N_I = 1$.

Les constantes (3.60) s'écrivent en termes des intégrales ci-dessus de la façon suivante :

$$\begin{aligned} D_{\phi\phi}^\phi &= I_3 \sqrt{\frac{I_2}{I_1 I_4}} \\ D_{\varepsilon\varepsilon}^\phi &= \sqrt{\frac{I_1 I_2}{I_4}}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

En utilisant la forme générale de la fonction de corrélation de N opérateurs de vertex $V_{\vec{\beta}_i}$:

$$\langle V_{\vec{\beta}_1}(\xi_1) \cdots V_{\vec{\beta}_N}(\xi_N) \rangle = \prod_{i < j} |\xi_i - \xi_j|^{4\vec{\beta}_i \vec{\beta}_j}, \quad (3.63)$$

et les formules

$$\begin{aligned} C(\alpha, \beta) &= \int d^2\xi |\xi|^{2\alpha} |\xi - 1|^{2\beta} \\ &= \pi \frac{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)\Gamma(-1 - \alpha - \beta)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)\Gamma(2 + \alpha + \beta)} \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} K(\alpha, \rho) &= \int d^2\xi d^2\zeta |\xi|^{2\alpha} |\xi - 1|^{2\alpha} |\zeta|^{2\alpha} |\zeta - 1|^{2\alpha} |\zeta - \xi|^{4\rho} \\ &= 2\pi^2 \frac{\Gamma(2\rho)\Gamma(1 - \rho)}{\Gamma(\rho)\Gamma(1 - 2\rho)} \prod_{i=0}^1 \frac{\Gamma^2(1 + \alpha + i\rho)\Gamma(-1 - 2\alpha - (1 + i)\rho)}{\Gamma^2(-\alpha - i\rho)\Gamma(2 + 2\alpha + (1 + i)\rho)} \end{aligned} \quad (3.65)$$

les intégrales I_a , $a = 1, \dots, 4$ peuvent être facilement calculées. Nous retrouvons, *via* l'éq. (3.62), les résultats (3.39). Dans les équations (3.64) et (3.65), $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma habituelle.

3.7 Discussion.

La théorie $WD_3^{(p)}$ contient un opérateur d'énergie $\varepsilon(x)$ qui a dimension :

$$\Delta_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\varepsilon,$$

avec $\varepsilon = 1/(p + 1)$. Cela implique que le système de N théories $WD_3^{(p)}$ perturbé par le terme :

$$g \sum_{a \neq b}^N \int d^2x \varepsilon_a(x) \varepsilon_b(x),$$

peut être étudié, pour $\varepsilon \ll 1$ ($p \gg 1$), avec la méthode du RG avec un développement en ε . Cette approche a permis d'obtenir des résultats exacts pour le modèle $WD_3^{(p)}$ désordonné ($N \rightarrow 0$) et N modèles $WD_3^{(p)}$ couplés ($N \geq 2$).

L'observation que le terme pertinent :

$$\lambda \int d^2x \phi(x)$$

est produit par le transformation RG nous a mené à considérer l'action plus générale (3.37). Cette action a été étudiée en utilisant un calcul perturbatif au premier ordre.

Pour ce qui concerne la théorie $WD_3^{(p)}$ avec désordre, nous avons conclu que le comportement critique à la limite infrarouge est décrit par le modèle $WD_3^{(p-1)}$ pur.

La structure du flot du RG devient beaucoup plus riche si on s'intéresse aux modèles couplés, $N \geq 2$. Dans ce cas, nous avons montré que le système avec $g_0 \neq 0$ et $\lambda_0 = 0$ s'éloigne du régime perturbatif ($\lambda, g \sim \epsilon$) en acquérant probablement une masse. L'intégrabilité de ce modèle reste une question ouverte.

Au contraire, pour $\lambda_0 > 0$ et $g_-(\lambda_0) < g_0 < g_+(\lambda_0)$, fig. (3.2), la théorie est attirée vers le point critique (3.43), décrit par N modèles $WD_3^{(p-1)}$ non interagissants (voir fig.3.3).

Nous avons aussi établi que le flot du RG admet deux nouveaux points fixes, (3.45)-(3.46), auxquels les N modèles restent couplés. Du moment que la valeur de ϵ , $\epsilon = 1/(p+1)$, est associée à la théorie unitaire $WD_3^{(p)}$, la théorie conforme qui correspond à ces points doit être unitaire. Cela implique l'existence d'une nouvelle série unitaire des théories conformes qui s'accumulent pour $p \rightarrow \infty$, p étant l'indice qui indique le modèle minimal de la série.

Ces nouvelles théories, qui sont à présent inconnues, doivent incorporer la symétrie de permutation S_N , $N = 2, 3, \dots$ de façon non triviale, comme nous avons montré en calculant la renormalisation des opérateurs d'énergie, (3.51) et (3.52).

En générale on s'attend à ce que la charge centrale prenne des valeurs rationnelles pour p entier. La fonction $c(p)$ peut être écrite dans la forme $c(p) = Q(p)/P(p)$, où $Q(p), P(p)$ sont deux polynômes de p avec coefficients rational. En particulier, les coefficients du développement en $1/p$ de la charge centrale sont rationaux. Pour $N \geq 3$, lorsque le group S_N est non abélien, la correction à la charge centrale déterminée par l'éq.(3.59) est irrationnelle. Il faut ici mentionner l'éventualité que le développement perturbatif en $\epsilon \sim 1/p$ ne soit pas convergent mais représente une série asymptotique, comme c'est assez fréquent en théorie des champs. Dans ce cas nous ne pouvons rien dire sur la rationalité de la charge centrale. Autrement, nous devons admettre que ces théories sont caractérisées par une charge centrale irrationnelle, ce qui est assez étrange.

Les résultats que nous avons montré dans ce chapitre pour les modèles WD_3^p se généralisent assez directement à la famille entière des modèles $WD_n^{(p)}$, $n > 3$ [16].

La construction des théories conformes qui réalisent pleinement la symétrie permutative reste un défi théorique. Les résultats de type perturbatif que nous venons de présenter donnent des informations trop générales pour qu'ils nous aident à deviner la structure d'une solution conforme avec symétrie de permutation. Cela est la raison qui nous a mené à considérer la classe des théories parafermioniques qui possèdent des symétries discrètes qui

s'ajoutent à la symétrie conforme. Le but est d'acquérir une connaissance plus profonde des représentations des algèbres parafermioniques.

Chapitre 4

Théories parafermioniques avec symétrie Z_5 .

Le travail présenté dans ce chapitre fait l'objet d'une publication très longue [30]. Nous nous contentons ici d'en donner un résumé en essayant de fournir les points principaux de cet étude. Pour les détails nous renvoyons souvent à la publication reproduite en annexe B.

Nous allons montrer une nouvelle série de solutions pour des théories critiques bidimensionnelles invariantes sous les transformations du group dihédral D_5 . Nous avons construit cette série en étudiant les représentations dégénérées de la deuxième solution associative pour l'algèbre parafermionique[19].

Nous donnons d'abord la forme générale des algèbres parafermioniques qui réalisent la symétrie cyclique Z_N et présentons comme exemple la série des théories parafermioniques étudiée par Fateev et Zamolodchikov [19, 20] en soulignant les points commun avec la série que nous avons construite.

Après avoir donné la forme de l'algèbre chirale qui correspond à la deuxième solution associative, nous établissons quels types d'opérateurs forment l'espace de représentation. Nous fixons dans la suite la structure des modules des représentations et déterminons l'action des modes chiraux sur chacun de ces modules. Les règles de commutation des modes parafermioniques permettent de faire des calculs explicites de dégénérescence pour les représentations de chaque secteur.

Les dimensions conformes ainsi obtenues et les niveaux de dégénérescence servent comme conditions initiales pour déterminer la formule de Kac de la théorie. Le problème de fixer les termes de bord qui caractérisent chaque secteur est résolu en faisant appel aux propriétés du gaz de Coulomb qui réalise la théorie. Une vérification partielle des résultats ainsi obtenus

est possible grâce aux équations caractéristiques que nous avons déterminé en considérant les fonctions à trois points.

4.1 Introduction aux théories parafermioniques.

L'objectif des théories parafermioniques est de construire des solutions exactes pour les systèmes statistiques bidimensionnels qui possèdent, en plus de la symétrie conforme, une symétrie globale Z_N . En théorie conforme, ce problème se traduit dans l'étude des représentations des algèbres chirales qui réalisent ces symétries.

4.1.1 Forme générale de l'algèbre parafermionique.

Dans cette section je discute la forme générale des algèbres parafermioniques. Pour raison de clarté, je présente d'abord les cas d'une théorie conforme avec symétrie Z_3 .

En indiquant les rotations d'un angle $2\pi/3$ et $-2\pi/3$ respectivement comme Ω et Ω^{-1} , les lois de multiplication qui définissent les group Z_3 sont :

$$\begin{aligned}\Omega \Omega &= \Omega^{-1} \\ \Omega^{-1} \Omega^{-1} &= \Omega \\ \Omega \Omega^{-1} &= 1\end{aligned}\tag{4.1}$$

où 1 représente la transformation d'identité.

En théorie conforme des champs, les lois de multiplication (4.1) sont reproduites par les fusions des opérateurs chiraux $\Psi^1(z)$ et $\Psi^{-1}(z)$ qui correspondent respectivement aux éléments Ω et Ω^{-1} .

Les champs chiraux $\Psi^1(z)$ et $\Psi^{-1}(z)$ sont usuellement appelés courants parafermioniques, or plus brièvement parafermions, car leur spin se révèle être fractionnaire.

En supposant que $\Delta_1 = \Delta_{-1}$, où $\Delta_{\pm 1}$ est la dimension conforme de $\Psi^{\pm 1}(z)$, la forme générale de l'algèbre parafermionique est donc la suivante :

$$\Psi^1(z')\Psi^1(z) = \frac{\lambda}{(z' - z)^{\Delta_1}} [\Psi^{-1}(z)]\tag{4.2}$$

$$\Psi^{-1}(z')\Psi^{-1}(z) = \frac{\lambda}{(z' - z)^{\Delta_1}} [\Psi^1(z)]\tag{4.3}$$

$$\Psi^1(z')\Psi^{-1}(z) = \frac{1}{(z' - z)^{2\Delta_1}} [I],\tag{4.4}$$

où λ est la constante de structure de l'algèbre et I est l'opérateur d'identité. Dans les (4.3)-(4.4), on a utilisé la notation $[\Phi]$ pour indiquer la famille conforme Φ , c'est à dire l'opérateur Φ et ses descendants de Virasoro.

L'opérateur d'énergie-impulsion $T(z)$ qui réalise la symétrie conforme apparaît au deuxième niveau du module d'identité. Le développement (4.4) s'écrit alors :

$$\Psi^1(z')\Psi^{-1}(z) = \frac{1}{(z' - z)^{2\Delta_1}} \left(1 + (z' - z)^2 \frac{2\Delta_1}{c} T(z) + \dots \right). \quad (4.5)$$

L'éq. (4.5) assure que l'algèbre parafermionique contient l'algèbre de Virasoro, avec charge centrale c , comme sous algèbre.

Dans la fusion (4.5) on écarte la possibilité d'avoir un courant de dimension 1 dans le module d'identité car la présence d'un tel courant signifierait imposer dès le début une symétrie continue additionnelle. Mais cela n'empêche pas que dans le module d'identité apparaissent des courants de spin $3, 4, 5 \dots$ supérieur à 2. En fait, il est assez probable que cela arrive. Par exemple, la théorie parafermionique de Fateev Zamolodchikov avec symétrie Z_3 (voir la section suivante) coïncide avec le modèle minimal de Virasoro M_5 (cfr. section (1.4)); le spectre de cette théorie contient un courant de spin 3 qui apparaît dans le développement (4.5) et qui forme, avec l'opérateur $T(z)$, l'algèbre WA_2 (cfr. section 1.6.1 et fig.(1.2)).

La forme de l'algèbre (4.2)-(4.5) est directement généralisable aux cas $Z_N, N > 3$:

$$\begin{aligned} \Psi^k(z)\Psi^l(z') &= \frac{\lambda_{k+l}^{k,l}}{(z - z')^{\Delta_k + \Delta_l - \Delta_{k+l}}} [\Psi^{k+l}] \quad k \neq l \\ \Psi^k(z)\Psi^{-k}(z') &= \frac{1}{(z - z')^{2\Delta_k}} \left(1 + \frac{2\Delta_k}{c} T(z) + \dots \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

où les Δ_k et les $\lambda_{k+l}^{k,l}$ sont respectivement les dimensions des parafermions Ψ^k et les constantes de structure de l'algèbre.

Dans les fusions des opérateurs (4.6), les Z_N charges $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm[N/2]$ ($[x]$ étant la partie entier de x) et leurs sommes $k + l$ sont définies modulo N . En particulier on a :

$$\Psi^{N-k} \equiv \Psi^{-k} \equiv (\Psi^k)^\dagger; \quad \Delta_k = \Delta_{-k} = \Delta_{N-k}. \quad (4.7)$$

À côté de $\Psi^{\pm k}(z)$ et $T(z)$, on doit aussi admettre les courants $\overline{\Psi}^{\pm k}(\bar{z})$ et $\overline{T}(\bar{z})$, qui agissent sur la partie antiholomorphe (\bar{z}) de la théorie. Du moment que l'algèbre formée par les courants $\{ \overline{\Psi}^{\pm k}(\bar{z}), \overline{T}(\bar{z}) \}$ commute avec celle définie en éq.(4.6), la théorie possède une symétrie $Z_N \otimes \overline{Z}_N$.

Dorénavant nous nous concentrerons sur l'algèbre (4.6) : toutes les considérations qui suivent sont aussi valables pour la partie antiholomorphe de la théorie.

4.1.2 Une première condition d'associativité.

Je vais montrer que les valeurs possibles des spins Δ_k sont fortement limitées par une première contrainte d'associativité de l'algèbre (4.6). Je considère à ce propos la fonction de

correlation à quatre points :

$$\langle \Psi^{-n-m-l}(\infty) \Psi^l(z) \Psi^m(1) \Psi^n(0) \rangle = \frac{P_j(z)}{(z-1)^{\Delta_l + \Delta_m - \Delta_{m+l}} z^{\Delta_l + \Delta_n - \Delta_{l+n}}}, \quad (4.8)$$

où $P_j(z)$ est un polynôme de degré j . En faisant la limite $z \rightarrow \infty$ dans la partie droite de l'éq.(4.8), nous avons :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P_j(z)}{(z-1)^{\Delta_l + \Delta_m - \Delta_{m+l}} z^{\Delta_l + \Delta_n - \Delta_{l+n}}} \approx z^{j + \Delta_{l+n} + \Delta_{l+m} - 2\Delta_l - \Delta_m - \Delta_n}. \quad (4.9)$$

Je utilise maintenant l'algèbre des parafermions dans la fonction de corrélation (partie gauche de l'éq.(4.8)) pour déterminer la même limite :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \langle \Psi^{-n-m-l}(\infty) \Psi^l(z) \Psi^m(1) \Psi^n(0) \rangle &\approx \langle \Psi^{-n-m-l}(\infty) \Psi^l(z) \Psi^{m+n}(0) \rangle \\ &\approx z^{-\Delta_l - \Delta_{m+n} + \Delta_{l+m+n}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

En comparant ce résultat avec l'éq.(4.9), on obtient la condition suivante :

$$\Delta_l + \Delta_m + \Delta_n - \Delta_{l+m} - \Delta_{l+n} - \Delta_{m+n} + \Delta_{l+m+n} = 0 \pmod{1}, \quad (4.11)$$

où on a tenu compte que j est un entier ($j = 0 \pmod{1}$). En utilisant la relation (4.7), on trouve que les valeurs permises de Δ_k par la condition (4.11) se trouvent parmi celles données par la formule :

$$\Delta_k = p \frac{k(N-k)}{N} + M_k, \quad (4.12)$$

où p et M_k sont des entiers et $M_k = M_{-k}$.

Il faut souligner que l'éq.(4.12) est une condition nécessaire mais pas suffisante pour assurer l'associativité de l'algèbre parafermionique.

4.2 Théories parafermioniques de Fateev-Zamolodchikov.

Dans cette section nous présentons brièvement les théories parafermioniques qui ont été introduites par Fateev et Zamolodchikov[19, 20]. Il est utile de considérer ces théories, sans doute les plus connues et couramment utilisées, car elles ont des propriétés en commun (par exemple le nombre de secteurs dans le spectre) avec la série des théories parafermioniques qui constituent l'objet de la présente recherche.

4.2.1 Opérateurs de spin et auto dualité.

Dans leur travaux, Fateev et Zamolodchikov ont trouvé une solution exacte pour une système statistique conforme qui est invariante sous les transformations cycliques Z_N et qui possède la symétrie ordre-désordre (symétrie Kramers-Wannier)[81, 82, 83, 54].

La théorie qu'ils ont construit (que dans la suite nous indiquerons comme théorie F.Z.) décrit les points critiques auto duaux des généralisations Z_N du modèle d'Ising [82, 84, 83, 85, 86].

Les champs conformes de spin de ces modèles se transforment en accord avec les représentations du groupe Z_N . On indique comme σ_k le champ de spin avec une charge k et une dimension Δ_{σ_k} .

Dans les systèmes duaux, toutes les fonctions de corrélation sont invariantes sous le changement $\sigma_k \leftrightarrow \mu_k$, où μ_k , dual au champ σ_k , a la même dimension que σ_k , $\Delta_{\mu_k} = \Delta_{\sigma_k}$. Le champ μ_l se transforme sous le groupe dual \tilde{Z}_N avec une charge l .

La théorie contient en général des champs $\phi_{(k,l)}$ caractérisés par les charges (k,l) . Dans cette notation les champs σ_k et μ_l sont respectivement de type $\phi_{(k,0)}$ et $\phi_{(0,l)}$.

Dans un modèle possédant la symétrie ordre-désordre, le champ parafermionique Ψ^k est produit par la fusion :

$$\sigma_k(z, \bar{z})\mu_k(0, 0) = \frac{1}{|z|^{4\Delta_{\sigma_k} - \Delta_k}} [\Psi^k(0) + \dots]. \quad (4.13)$$

Les parafermions Ψ^k sont donc des champs du type $\phi_{(k,k)}$.

Fateev et Zamolodchikov ont montré [19] que il est utile d'exprimer les charges (k,l) en utilisant la notation $[Q, \bar{Q}] \equiv [k+l, k-l]$. Les charges Q, \bar{Q} sont définies modulo $2N$ et prennent des valeurs entières arbitraire telles que $Q + \bar{Q}$ soit pair. Dans cette notation, le parafermion Ψ^k a une charge $K = 2k$ et $\bar{K} = 0$.

Cette convention s'est aussi imposée dans le contexte de la série des théories conformes basées sur la deuxième solution pour l'algèbre parafermionique. Comme nous discuterons en section (5.5), ceci constitue une indication forte pour que ces nouvelles théories possèdent une symétrie ordre-désordre.

4.2.2 Algèbre parafermionique et spectre de la théorie.

La théorie F.Z. est basée sur l'algèbre associative :

$$\begin{aligned} \Psi^k(z)\Psi^l(z') &= \frac{\lambda_{k+l}^{k,l}}{(z-z')^{\Delta_k+\Delta_l-\Delta_{k+l}}} (\Psi^{k+l} + \dots) \quad k \neq l \\ \Psi^k(z)\Psi^{-k}(z') &= \frac{1}{(z-z')^{2\Delta_k}} \left(1 + \frac{2\Delta_k}{c} T(z) + \dots \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

où les dimensions des parafermions Ψ^k sont données par :

$$\Delta_k = \frac{k(N-k)}{N}. \quad (4.15)$$

Les dimensions Δ_k prennent les valeurs minimales ($p = 1$ et $M_k = 0$ en éq.(4.12)) parmi celles permises par l'associativité de l'algèbre chirale. Dans ce sens on peut dire que l'algèbre (4.14) représente la solution associative la plus simple.

Les contraintes d'associativité fixent aussi les valeurs de la charge centrale c et des constantes de structure $\lambda_{k+l}^{k,l}$ en fonction de N :

$$(\lambda_{k+l}^{k,l})^2 = \frac{\Gamma(k+l+1)\Gamma(N-k+1)\Gamma(N-l+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l+1)\Gamma(N-k-l+1)\Gamma(N+1)} \quad (4.16)$$

$$c = 2\frac{N-1}{N+2}. \quad (4.17)$$

Pour chaque valeur de N , il y a alors une seule théorie conforme.

L'espace de représentation, formé par les opérateurs primaires de l'algèbre parafermionique, contient $[N/2] + 1$ opérateurs de spins σ_q de dimension Δ_{σ_q} :

$$\Delta_{\sigma_q} = \frac{q(N-q)}{2N(N+2)} \quad q = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.18)$$

Parmi les descendants des opérateurs de spin, par rapport l'algèbre (4.14), on trouve $[N/2]$ opérateurs de singlet $\varepsilon^{(j)}$ avec dimension $\Delta_S^{(j)}$:

$$\Delta_S^{(j)} = \frac{j(j+1)}{N+2} \quad j = 1, 2, \dots, \leq [N/2]. \quad (4.19)$$

Les $\varepsilon^{(j)}$, primaires de l'algèbre de Virasoro, correspondent aux opérateurs d'énergie de la théorie. L'équation (4.19) permet alors de déterminer les exposants thermiques du système critique associé.

Puisque les formules (4.15) et (4.16) sont invariantes sous la transformation de conjugation de charge, $q \rightarrow N - q$, la théorie possède en fait une symétrie plus grande, la symétrie diédral D_N , qui inclut celle cyclique Z_N . Ceci implique que, à côté des opérateurs σ_q qui constituent les représentations du groupe Z_N , on trouve aussi les N -plets $\{R_a(z, \bar{z})\}$, $a = 1, \dots, N$, associés aux N réflexions du groupe D_N . Les opérateurs R seront indiqués dans la suite comme opérateurs de désordre.

Dans les secteur du désordre on trouve $[N/2] + 1$ opérateurs $R^{(s)}$, $s = 0, 1, \dots, \leq [N/2]$ dont les dimensions $\Delta_{(s)}$ sont données par :

$$\Delta_{(s)} = \frac{N-2 + (N-2s)^2}{16(N+2)} \quad s = 0, 1, \dots, \leq [N/2]. \quad (4.20)$$

Nous auront l'occasion de discuter plus en détail le rôle des opérateurs R_a dans le contexte d'une nouvelle série de théories parafermioniques invariantes aussi sous le groupe D_N . Nous allons présenter ces théories dans les sections prochaines.

Pour $N = 2, 3$ la théorie F.Z. décrit respectivement les points critiques auto duaux du modèle d'Ising (Z_2) et du modèle de Potts à trois états (Z_3). On veut ci-dessous présenter

brèvement la réalisation sur le réseau du cas particulier $N = 3$ (modèle de Potts) car cela permet de mieux comprendre la nature des différents secteurs de la théorie parafermionique F.Z.

4.2.3 Un exemple significatif : le modèle de Potts à trois états.

Le modèle de Potts à trois états a été défini en section (1.5.2) où nous avons déjà mentionné que son point critique possède une symétrie ordre-désordre et il est décrit par la théorie parafermionique de F.Z. avec $N = 3$.

En utilisant les formules pour les dimensions (4.18), (4.19) et (4.20), on peut classer les opérateurs primaires des Virasoro de cette théorie (voire fig.(1.2)) :

– *secteur* $q \pm 1$:

opérateurs σ_1, σ_{-1} avec :

$$\Delta_{\sigma_1} = \Delta_{\sigma_{-1}} = \frac{1}{15}. \quad (4.21)$$

– *secteur* $q = 0$:

identité I et opérateur d'énergie ε avec

$$\Delta_{\varepsilon} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}. \quad (4.22)$$

L'opérateur d'énergie ε est un descendant par rapport à l'algèbre parafermionique de l'opérateur de spin σ .

– *secteur de désordre* :

opérateurs $R^{(0)}$ et $R^{(1)}$, primaires de l'algèbre parafermionique, avec :

$$\Delta_{(0)} = \frac{1}{8} \quad \Delta_{(1)} = \frac{1}{40}, \quad (4.23)$$

et leurs descendants, $R_{3/2}^{(0)}$ et $R_{1/2}^{(1)}$, de dimensions :

$$\Delta_{R_{3/2}^{(0)}} = \Delta_{(0)} + \frac{3}{2} = \frac{13}{8}; \quad \Delta_{R_{1/2}^{(1)}} = \Delta_{(1)} + \frac{1}{2} = \frac{21}{40}. \quad (4.24)$$

Notez que dans la fig.(1.2) j'ai indiqué les opérateurs $R^{(0)}$, $R^{(1)}$, $R_{3/2}^{(0)}$ et $R_{1/2}^{(1)}$ respectivement comme $R_{2,1}$, $R_{2,2}$, $R_{2,4}$ et $R_{3,4}$. Le fait que les dimensions de ces descendants sont décalées par un demi entier dépend de la structure des modules dans ce secteur. Nous renvoyons à la section (4.7) où les propriétés générales des opérateurs de désordre sont discutées.

Pour donner une idée plus claire des rapports entre les différents secteurs et les éléments du groupe de symétrie de la théorie, nous pouvons mentionner le fait suivant.

On considère le modèle critique sur un réseau défini sur un bande de largeur L et de longueur M (en unité du réseau). On indique la fonction de partition correspondante comme

$Z_\alpha(L, M)$, α étant la configuration de spin dans la M -ème colonne. La matrice de transfert est l'opérateur linéaire $T_{\alpha\beta}$ qui agit sur $Z_\beta(L, M)$ pour donner la fonction de partition $Z_\alpha(L, M + 1)$ du modèle avec longueur $M + 1$:

$$Z_\alpha = \sum_{\beta} T_{\alpha,\beta} Z_\beta \quad (4.25)$$

. Il est bien connu [45] que les valeurs propres $E_i(L)$ de la matrice de transfert sont liées aux dimensions physiques des opérateurs Δ_i^p de la théorie par la loi d'échelle :

$$E_i(L) - E_0(L) = \frac{2\pi\Delta_i^p}{L^2} + \dots \quad (4.26)$$

où $E_0(L)$ est la valeur propre la plus petite.

Les valeurs propres de la matrice de transfert avec conditions cycliques au bord où les spins $\sigma(L)$ et $\sigma(1)$ sont liés par un transformation de Z_3 , $\sigma(L) = \sigma(1) + 1 \pmod{3}$, sont associées aux opérateurs de doublet.

On considère maintenant le cas où les spins aux bords diffèrent par une des trois transformations τ_a , $a = 1, 2, 3$: $\sigma(L) = \tau_a \sigma(1)$. Les transformations τ_a correspondent aux trois réflexions Z_2 des D_3 , par exemple $\tau_1 0 \rightarrow 0$, $\tau_1 1 \rightarrow 2$ et $\tau_1 2 \rightarrow 1$. Les dimensions qu'on trouve à partir des valeurs propres de la matrice de transfert, en imposant ces conditions aux bords, sont justement celles des opérateurs de désordre.

4.3 Deuxième solution pour l'algèbre chirale.

Fateev et Zamolodchikov ont introduit aussi une deuxième algèbre chirale associative qui réalise la symétrie Z_N [19]. Les développements des produits des champs chiraux correspondants prennent la forme :

$$\begin{aligned} \Psi^k(z)\Psi^{k'}(z') &= \frac{\lambda_{k+k'}^{k,k'}}{(z-z')^{\Delta_k+\Delta_{k'}-\Delta_{k+k'}}} \\ &\times \left\{ \Psi^{k+k'}(z') + (z-z') \frac{\Delta_{k+k'} + \Delta_k - \Delta_{k'}}{2\Delta_{k+k'}} \partial_{z'} \Psi^{k+k'}(z') + \dots \right\}, \quad k+k' \neq 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\Psi^k(z)\Psi^{-k}(z') = \frac{1}{(z-z')^{2\Delta_k}} \left\{ 1 + (z-z')^2 \frac{2\Delta_k}{c} T(z') + \dots \right\} \quad (4.28)$$

Les constantes de structure $\lambda_{k+k'}^{k,k'}$ et la charge centrale c (de l'algèbre de Virasoro) sont déterminées par les formules :

$$\begin{aligned} (\lambda_{k+k'}^{k,k'})^2 &= \frac{\Gamma(k+k'+1)\Gamma(N-k+1)\Gamma(N-k'+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k'+1)\Gamma(N-k-k'+1)\Gamma(N+1)} \\ &\times \frac{\Gamma(k+k'+v)\Gamma(N+v-k)\Gamma(N+v-k')\Gamma(v)}{\Gamma(N+v-k-k')\Gamma(k+v)\Gamma(k'+v)\Gamma(N+v)}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$c = \frac{4(N-1)(N+v-1)v}{(N+2v)(N+2v-2)}. \quad (4.30)$$

Les dimensions des parafermions $\{\Psi^k(z)\}$ sont données par l'équation (4.12) avec $p = 2$ et $M_k = 0$:

$$\Delta_k = \Delta_{N-k} = \frac{2k(N-k)}{N}. \quad (4.31)$$

Dans les expressions (4.29)–(4.30), v est un paramètre libre et la valeur de la charge centrale reste libre pour chaque N .

Pour $N = 3$, la théorie basée sur l'algèbre (4.27)–(4.28) a été complètement développée par Fateev et Zamolodchikov [29]. Ces auteurs ont montré l'existence d'une série infinie de théories conformes sélectionnée par les conditions de dégénérescence des représentations, de la même façon que dans le cas des modèles minimaux de la théorie conforme non étendue. Cette série de théories conformes décrit véritablement les points multi-critiques des systèmes critiques avec symétrie Z_3 . Par exemple, la première théorie de cette série (celle avec la valeur de la charge centrale la plus petite) est associée au modèle de Potts tricritique.

Les théories conformes qui sont basées sur la deuxième solution associative de l'algèbre parafermionique n'ont pas été encore étudiées en détail pour $N > 3$. Le but de la présente recherche est de construire complètement cette classe de théories parafermioniques.

La théorie avec $N = 4$ est triviale dans le sens qu'elle se factorise dans deux théories superconformes, avec des champs chiraux de dimension 2 et $3/2$.

La première nouvelle théorie est donc celle avec $N = 5$. Cette théorie se révèle tellement riche et aussi représentative de l'entière classe (en étant au même temps la plus simple) que j'ai estimé de la présenter ici dans tous les détails. Le chapitre suivant sera dédié aux généralisations pour $N > 5$ des résultats concernant les cas $N = 5$.

4.4 Opérateurs chiraux et espace de représentation pour $N = 5$.

Les charge Z_5 prennent les valeurs $0, \pm 1, \pm 2$. Les champs chiraux :

$$\Psi^{\pm 1}(z), \quad \Psi^{\pm 2}(z), \quad (4.32)$$

forment avec l'opérateur d'énergie-impulsion $T(z)$ l'algèbre (4.27)–(4.28). A partir de l'équation (4.31), les dimensions des parafermions (4.32) sont :

$$\Delta_1 = \frac{8}{5}, \quad \Delta_2 = \frac{12}{5}. \quad (4.33)$$

Parmi les champs de représentation, primaires de l'algèbre parafermionique, nous attendons de trouver les opérateurs de singlet

$$\Phi^0(z, \bar{z}) \quad (q = 0), \quad (4.34)$$

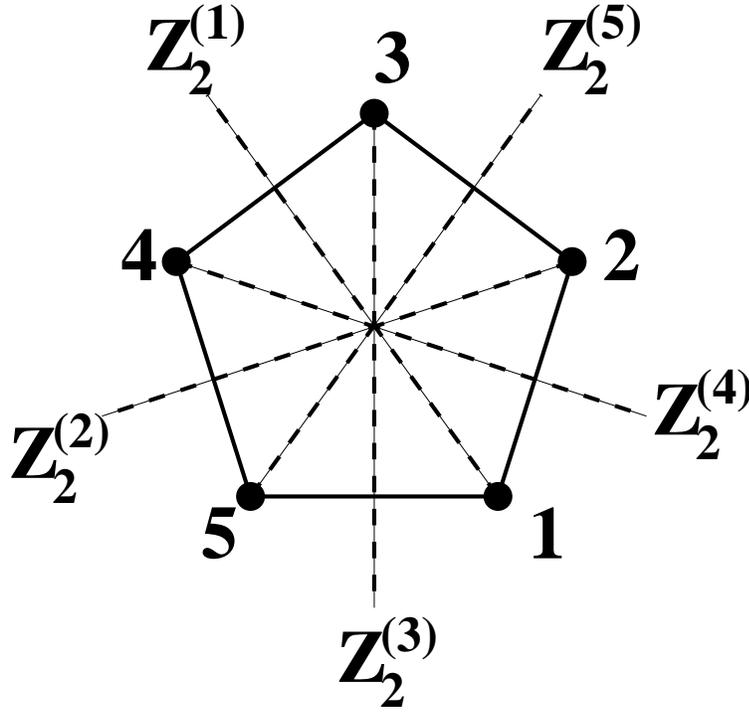


FIG. 4.1 – L'action de courant parafermionique Ψ_k peut être présentée comme une rotation de $2\pi k/5$ d'un pentagone. Les opérateurs de correspondent aux Z_2 réflexions par rapport aux axes qui passent par les vertex du pentagone.

les opérateurs de doublet avec $q = \pm 1$:

$$\Phi^{\pm 1}(z, \bar{z}) \quad (q = \pm 1) \quad (4.35)$$

et ceux avec charge $q = \pm 2$:

$$\Phi^{\pm 2}(z, \bar{z}) \quad (q = \pm 2). \quad (4.36)$$

La théorie que nous sommes en train de considérer est invariante sous le groupe diédral D_5 qui inclut, en plus de Z_5 , les réflexions par rapport aux cinq axes montrés en fig. (4.1). De la même façon que dans les théories F.Z., la symétrie D_N dérive de l'invariance des expressions (4.27)–(4.31) sous la conjugation de charge Z_N , $q \rightarrow N - q$.

Le spectre de la théorie va contenir en plus des opérateurs de singlet et de doublet, qui forment les représentations du groupe Z_5 , les opérateurs :

$$\{R^a(z, \bar{z}), \quad a = 1, 2, 3, 4, 5\}. \quad (4.37)$$

Nous avons déjà vu que les opérateurs de désordre apparaissent dans le spectre de la théorie

$F.Z.$, dont nous avons parlé dans la section précédente. Ce type d'opérateur est aussi présent dans la théorie Z_3 , deuxième solution [29].

Les champs de désordre $\{R_a(z, \bar{z})\}$ jouent un rôle particulier parmi les champs de représentation. Plus précisément, les $\{R_a(z, \bar{z})\}$ complètent le groupe cyclique Z_5 (engendré par $1 = \Psi^0(z)$, $\Psi^{\pm 1}(z)$ et $\Psi^{\pm 2}(z)$) dans le groupe D_5 .

Il y a une différence cruciale entre les champs Ψ et R : les champs Ψ sont des courants holomorphes alors que les R ne sont pas des opérateurs chiraux ainsi que le reste des opérateurs des représentations. Bien que la symétrie de la théorie soit celle diédrale, les éléments du groupe D_5 qui sont représentés dans l'algèbre chirale sont seulement ceux qui appartiennent au plus grand sous groupe abélien du D_5 , c'est à dire le groupe Z_5 . Les autres éléments trouvent leur place dans l'espace des représentations comme opérateurs de désordre.

En résumant, nous attendons que les représentations de l'algèbre Z_5 vont classer les singlet, doublet 1, doublet 2, et les opérateurs de désordre, cf. Eqs. (4.34)–(4.37).

Il est désormais bien établi que le spectre d'une algèbre chirale avec un paramètre libre est défini par les conditions de dégénérescence des ses représentations. Ceci peut être expliqué de plusieurs façon, par exemple en imposant la fermeture de l'algèbre des opérateurs primaires (physiques).

Comme d'habitude, il suffit d'analyser les dégénérescences des premiers niveaux des modules de Verma. Les opérateurs physiques définis de cette façon deviennent les opérateurs fondamentaux du tableau de Kac. En utilisant nos connaissances sur les opérateurs fondamentaux, nous sommes arrivé à déterminer tous les opérateurs physiques avec leurs dimensions.

4.5 Les modules des singlets et des doublets.

La structure des niveaux des modules des singlets et des doublets peut être définie de la façon suivante. D'abord nous positionnons les parafermions, $\Psi^{\pm 1}(z)$ et $\Psi^{\pm 2}(z)$, dans le module d'identité. Les niveaux des différents parafermions dans ce module correspondent aux dimensions conformes $\Delta_{\pm 1} = 8/5$ et $\Delta_{\pm 2} = 12/5$. Le module d'identité ainsi partialement rempli est montré dans la fig. (4.2). Pour mettre en évidence le rôle joué par la charge Z_5 , nous avons dessiné les modules en séparant horizontalement les différents secteurs de charge. Ensuite, l'espacement entre les niveaux à l'intérieur de chaque secteur (le long d'une ligne verticale sur la figure) est égal à 1 car la monodromie des champs Ψ est abélienne (cela n'est pas vrai pour le secteur de désordre, comme nous le montrerons plus loin). Nous pouvons donc compléter les niveaux de module d'identité dont la structure finale est montrée en fig.

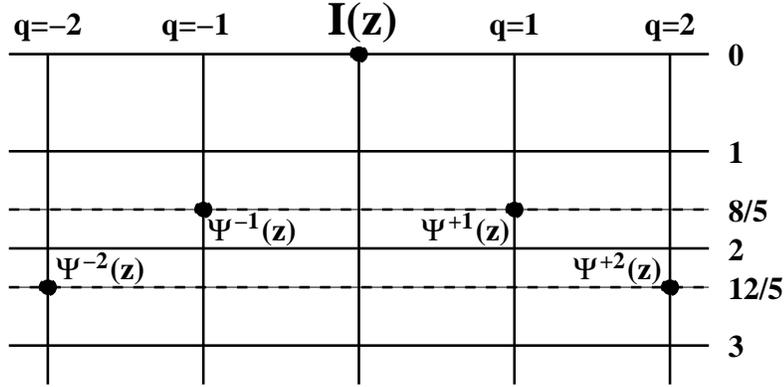


FIG. 4.2 – La position des courants parafermioniques dans le module d'identité. L'axe horizontal montre les charges Z_5 tandis que l'axe vertical donne le niveau d'un état par rapport à le vecteur de plus haut poids qui, dans ce cas, est l'opérateur d'identité.

(4.3). Les niveaux $2/5$, $3/5$ et $7/5$ sont en effet vides. Ils seront éventuellement occupés quand nous considérerons le module d'un singlet Φ^0 différent de l'identité. On peut maintenant lire sur la figure 4.3 la structure des niveaux du doublet 1 (avec $\Phi^{\pm 1}$ au sommet) et du doublet 2 (avec $\Phi^{\pm 2}$ au sommet) en regardant les sous modules correspondants. Par exemple, les deux états au niveau $3/5$ deviennent les sommets du module associé au doublet 1. Puis, tous les autres niveaux sont déplacés de $3/5$ par rapport à ceux de module de singlet. La structure des niveaux des opérateurs de doublet 1, doublet 2 et de singlet est montrée dans les figures (4.4), (4.5) et (4.6). La consistance de cette manipulation est assurée par l'associativité de l'algèbre chirale.

En accord avec la structure des modules, les développements locaux des champs chiraux Ψ dans la base des champs de représentation, Φ^0 , $\Phi^{\pm 1}$ et $\Phi^{\pm 2}$, prennent la forme donnée ci-dessous.

Dans la base de singlet nous avons :

$$\begin{aligned} \Psi^{\pm 1}(z)\Phi^0(0) &= \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_1 - \frac{3}{5} + n}} A_{-\frac{3}{5} + n}^{\pm 1} \Phi^0(0), \\ A_{-\frac{3}{5} + n}^{\pm 1} \Phi^0(0) &= 0, \quad n > 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \Psi^{\pm 2}(z)\Phi^0(0) &= \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_2 - \frac{2}{5} + n}} A_{-\frac{2}{5} + n}^{\pm 2} \Phi^0(0), \\ A_{-\frac{2}{5} + n}^{\pm 2} \Phi^0(0) &= 0, \quad n > 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Le fait que les modes des opérateurs avec un indice positif annulent $\Phi^0(0)$ correspond à la condition usuelle qui assure que le champ $\Phi^{(0)}$ est primaire par rapport à l'algèbre chirale.

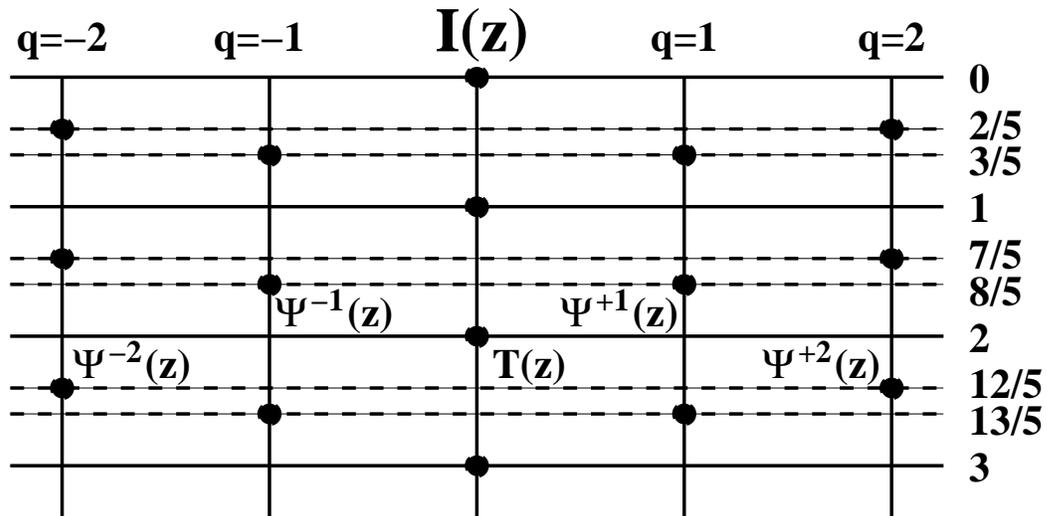


FIG. 4.3 – Module d'identité. Chaque état est indiqué avec des points

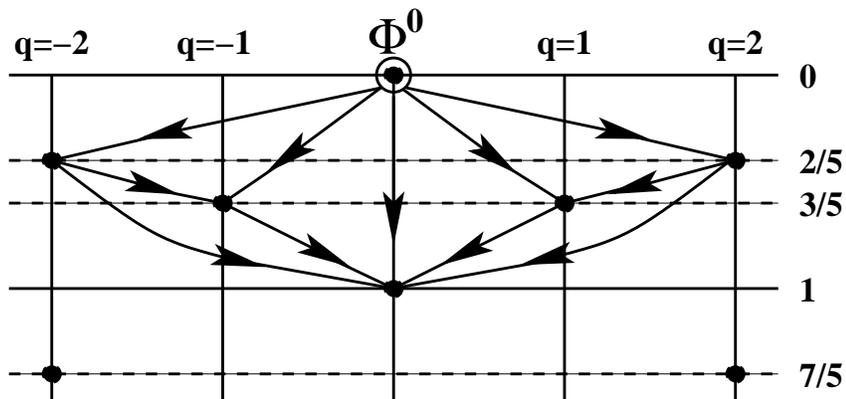


FIG. 4.4 – Modules de représentations d'un opérateur de singlet. Les flèches indiquent les actions des modes parafermioniques.

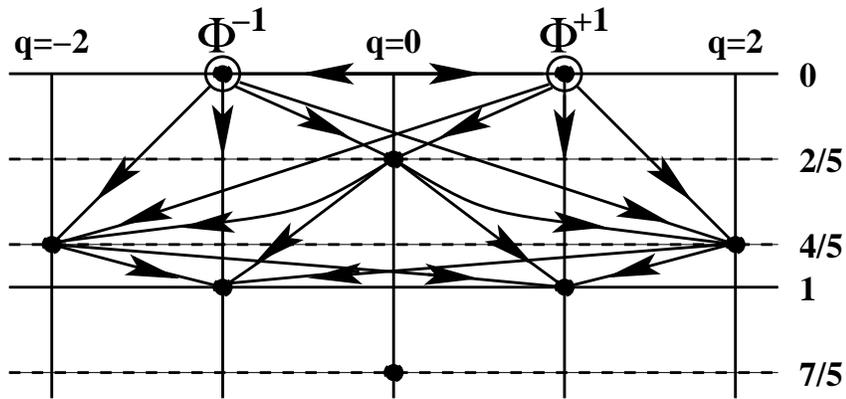


FIG. 4.5 – Module de représentation d'un doublet de charge $q = \pm 1$. On peut remarquer l'existence des deux états aux sommets du diagramme.

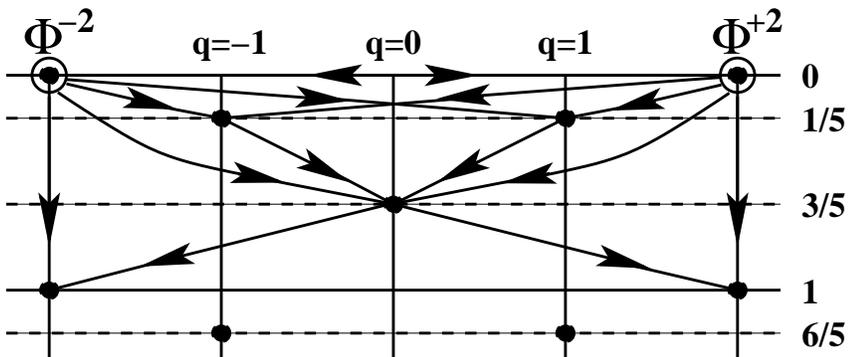


FIG. 4.6 – Module de représentation d'un doublet 2. Les deux états sont liés par un mode zéro.

En inversant les relations (4.38) et (4.39), nous obtenons :

$$A_{-\frac{3}{5}+n}^{\pm 1} \Phi^0(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz (z)^{\Delta_1 - \frac{3}{5} + n - 1} \Psi^{\pm 1}(z) \Phi^0(0), \quad (4.40)$$

$$A_{-\frac{2}{5}+n}^{\pm 2} \Phi^0(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz (z)^{\Delta_2 - \frac{2}{5} + n - 1} \Psi^{\pm 2}(z) \Phi^0(0). \quad (4.41)$$

Les flèches dans les figures (4.4) et (4.6) indiquent les actions des modes des opérateurs $A_{\mu}^{\pm 1}$ et $A_{\mu}^{\pm 2}$ et, en particulier, celles qui correspondent à l'action sur les états descendants. Les niveaux des premiers descendants se montrent dans les déplacements fractionnaires des indices des modes de $A_{\mu}^{\pm 1}$ et $A_{\mu}^{\pm 2}$ (par exemple, $\mu = -3/5 + n$ en (4.40)).

Pour le doublet 1, nous avons :

$$\Psi^{\pm 1}(z) \Phi^{\mp 1}(0) = \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_1 - \frac{2}{5} + n}} A_{-\frac{2}{5}+n}^{\pm 1} \Phi^{\mp 1}(0), \quad (4.42)$$

$$\Psi^{\pm 1}(z) \Phi^{\pm 1}(0) = \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_1 - \frac{4}{5} + n}} A_{-\frac{4}{5}+n}^{\pm 1} \Phi^{\pm 1}(0), \quad (4.43)$$

$$\Psi^{\pm 2}(z) \Phi^{\mp 1}(0) = \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_2 + n}} A_n^{\pm 2} \Phi^{\mp 1}(0), \quad (4.44)$$

$$\Psi^{\pm 2}(z) \Phi^{\pm 1}(0) = \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_2 - \frac{4}{5} + n}} A_{-\frac{4}{5}+n}^{\pm 2} \Phi^{\pm 1}(0). \quad (4.45)$$

Nous soulignons que l'action de $\Psi^{\pm 2}(z)$ sur $\Phi^{\mp 1}(0)$ en (4.44) inclut un mode zéro $A_0^{\pm 2}$, agissant entre les états $\Phi^{\pm 1}(0)$ au sommet.

$$A_0^{\mp 2} \Phi^{\pm 1}(0) = h_{2,1} \Phi^{\mp 1}(0) \quad (4.46)$$

L'indice de la valeur propre $h_{2,1}$ se réfère à ceux de A et Φ . Un autre mode zéro apparaît dans l'action de $\Psi^{\pm 1}(z)$ sur $\Phi^{\pm 2}(0)$:

$$A_0^{\pm 1} \Phi^{\pm 2}(0) = h_{1,2} \Phi^{\mp 2}(0) \quad (4.47)$$

(L'expansion correspondante, dans la base de $\Phi^{\pm 2}(0)$ est donné ci-dessous.)

Les valeurs propres h en (4.46)–(4.47) et les dimensions conformes des champs caractérisent les représentations $\Phi^{\pm 1}$, $\Phi^{\pm 2}$.

L'inverse des relations (4.42)–(4.45) prend la forme :

$$A_{-\frac{3}{5}+n}^{\pm 1} \Phi^{\mp 1}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz (z)^{\Delta_1 - \frac{3}{5} + n - 1} \Psi^{\pm 1}(z) \Phi^{\mp 1}(0), \quad (4.48)$$

$$A_{-\frac{4}{5}+n}^{\pm 1} \Phi^{\pm 1}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz (z)^{\Delta_1 - \frac{4}{5} + n - 1} \Psi^{\pm 1}(z) \Phi^{\pm 1}(0), \quad (4.49)$$

$$A_n^{\pm 2} \Phi^{\mp 1}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz (z)^{\Delta_2 + n - 1} \Psi^{\pm 2}(z) \Phi^{\mp 1}(0), \quad (4.50)$$

$$A_{-\frac{4}{5}+n}^{\pm 2} \Phi^{\pm 1}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz (z)^{\Delta_2 - \frac{4}{5} + n - 1} \Psi^{\pm 2}(z) \Phi^{\pm 1}(0). \quad (4.51)$$

Enfin, pour le doublet 2 nous avons les développements :

$$\Psi^{\pm 1}(z)\Phi^{\mp 2}(0) = \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_1 - \frac{1}{5} + n}} A_{-\frac{1}{5} + n}^{\pm 1} \Phi^{\mp 2}(0), \quad (4.52)$$

$$\Psi^{\pm 1}(z)\Phi^{\pm 2}(0) = \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_1 + n}} A_n^{\pm 1} \Phi^{\pm 2}(0), \quad (4.53)$$

$$\Psi^{\pm 2}(z)\Phi^{\mp 2}(0) = \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_2 - \frac{3}{5} + n}} A_{-\frac{3}{5} + n}^{\pm 2} \Phi^{\mp 2}(0), \quad (4.54)$$

$$\Psi^{\pm 2}(z)\Phi^{\pm 2}(0) = \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_2 - \frac{1}{5} + n}} A_{-\frac{1}{5} + n}^{\pm 2} \Phi^{\pm 2}(0), \quad (4.55)$$

la relation inverse étant :

$$A_{-\frac{1}{5} + n}^{\pm 1} \Phi^{\mp 2}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz (z)^{\Delta_1 - \frac{1}{5} + n - 1} \Psi^{\pm 1}(z)\Phi^{\mp 2}(0), \quad (4.56)$$

$$A_n^{\pm 1} \Phi^{\pm 2}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz (z)^{\Delta_1 + n - 1} \Psi^{\pm 1}(z)\Phi^{\pm 2}(0), \quad (4.57)$$

$$A_{-\frac{3}{5} + n}^{\pm 2} \Phi^{\mp 2}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz (z)^{\Delta_2 - \frac{3}{5} + n - 1} \Psi^{\pm 2}(z)\Phi^{\mp 2}(0), \quad (4.58)$$

$$A_{-\frac{1}{5} + n}^{\pm 2} \Phi^{\pm 2}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz (z)^{\Delta_2 - \frac{1}{5} + n - 1} \Psi^{\pm 2}(z)\Phi^{\pm 2}(0). \quad (4.59)$$

4.6 Dégénérescences des modules.

Après avoir défini les modes des opérateurs $A_\mu^{\pm 1}$ et $A_\mu^{\pm 2}$ nous allons aborder le problème des dégénérescences des modules.

Pour analyser ces dégénérescences nous exploitons de façon extensive les relations de commutation entre les modes dans les différents secteurs. Pour convenance, nous avons écrit l'ensemble complet de ces relations que nous avons obtenues par une méthode pareille à celle utilisée en autre travaux [19, 29].

4.6.1 Doublet 1.

Pour le module de doublet 1, montré en fig.(4.5), nous imposons d'abord la dégénérescence au niveau $2/5$. Nous voulons que la combinaison linéaire

$$\chi_{-\frac{2}{5}}^0 = aA_{-\frac{2}{5}}^1 \Phi^{-1} + bA_{-\frac{2}{5}}^{-1} \Phi^1, \quad (4.60)$$

soit un opérateur primaire, ou autrement dit, qu'il soit annulé par l'action des modes avec indice positif. Pour cela, il suffit de vérifier que :

$$A_{+\frac{2}{5}}^1 \chi_{-\frac{2}{5}}^0 = 0 \quad \text{et} \quad A_{+\frac{2}{5}}^{-1} \chi_{-\frac{2}{5}}^0 = 0. \quad (4.61)$$

Les conditions (4.61) pour l'état (4.60) peuvent être réécrites comme :

$$\begin{aligned} aA_{\frac{2}{5}}^1 A_{-\frac{2}{5}}^1 \Phi^{-1} + bA_{\frac{2}{5}}^1 A_{-\frac{2}{5}}^{-1} \Phi^1 &= 0 \\ aA_{\frac{2}{5}}^{-1} A_{-\frac{2}{5}}^1 \Phi^{-1} + bA_{\frac{2}{5}}^{-1} A_{-\frac{2}{5}}^{-1} \Phi^1 &= 0, \end{aligned} \quad (4.62)$$

où $A_{\frac{2}{5}}^1 A_{-\frac{2}{5}}^1 \Phi^{-1} \propto \Phi^1$ etc. Il est aussi utile de définir les éléments des matrice μ par

$$A_{\frac{2}{5}}^1 A_{-\frac{2}{5}}^1 \Phi^{-1} = \mu_{\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}}^{(1,1;-1)} \Phi^1, \quad (4.63)$$

$$A_{\frac{2}{5}}^1 A_{-\frac{2}{5}}^{-1} \Phi^1 = \mu_{\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}}^{(1,-1;1)} \Phi^1, \quad (4.64)$$

$$A_{\frac{2}{5}}^{-1} A_{-\frac{2}{5}}^1 \Phi^{-1} = \mu_{\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}}^{(-1,1;-1)} \Phi^{-1}, \quad (4.65)$$

$$A_{\frac{2}{5}}^{-1} A_{-\frac{2}{5}}^{-1} \Phi^1 = \mu_{\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}}^{(-1,-1;1)} \Phi^{-1}. \quad (4.66)$$

Par la symétrie sous la réflexion Z_2 ($q \leftrightarrow -q$), on a :

$$\mu^{(1,1;-1)} = \mu^{(-1,-1;1)}, \quad (4.67)$$

$$\mu^{(1,-1;1)} = \mu^{(-1,1;-1)}. \quad (4.68)$$

Pour calculer les deux éléments de matrice en (4.62) qui restent, on a besoin des commutations des modes de $A_{\mu}^{\pm 1}$. Dans [30] nous avons montré que :

$$\mu_{\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}}^{(1,1;-1)} = \lambda_2^{1,1} h_{2,1}, \quad (4.69)$$

$$\mu_{\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}}^{(1,-1;1)} = -\frac{2}{25} + \frac{2\Delta_1}{c} \Delta_{\Phi^1}. \quad (4.70)$$

Ici, $\lambda_2^{1,1}$ est une constante de structure (4.29) de l'algèbre chirale et $h_{2,1}$ est une valeur propre de $\Phi^{\mp 1}$ par rapport au mode zéro $A_0^{\pm 2}$, comme défini en éq. (4.46). Enfin, $\Delta_1 = 8/5$ est la dimension de $\Psi^{\pm 1}$, et Δ_{Φ^1} est la dimension, encore inconnue, de l'opérateur $\Phi^{\pm 1}$.

Il existe une solution non triviale du système (4.62) si :

$$\begin{vmatrix} \mu^{(1,1;-1)} & \mu^{(1,-1;1)} \\ \mu^{(-1,1;-1)} & \mu^{(-1,-1;1)} \end{vmatrix} = 0, \quad (4.71)$$

d'où on obtient :

$$\left(\lambda_2^{1,1} h_{2,1} \right)^2 = \left(-\frac{2}{25} + \frac{2}{5c} \Delta_{\Phi^1} \right)^2. \quad (4.72)$$

Nous rappelons que, pour un opérateur Φ^1 or Φ^{-1} , il faut déterminer soit la valeur propre $h_{2,1}$, soit la dimension Δ_{Φ^1} . En imposant la dégénérescence au niveau $2/5$, nous avons obtenu l'équation (4.72), qui fixe $h_{2,1}$ en fonction de Δ_{Φ^1} et c . La dégénérescence au niveau $2/5$ n'est pas suffisante pour déterminer Δ_{Φ^1} en fonction de c . Il faut donc imposer une autre condition.

Nous demandons qu'il existe un vecteur singulier aussi au niveau $4/5$. Nous imposons donc que l'état :

$$\chi_{-\frac{4}{5}}^2 = \tilde{a}A_{-\frac{4}{5}}^1\Phi^1 + \tilde{b}A_{-\frac{4}{5}}^{-2}\Phi^{-1}, \quad (4.73)$$

soit primaire.

Nous pouvons se limiter à la combinaison linéaire des deux états seulement grâce au fait que les autres états qui peuvent, à priori, apparaître à ce niveau sont linéairement dépendants des ceux de (4.73). C'est le cas, par exemple, de l'état qu'on obtient en descendant au niveau $4/5$ à travers celui qui est resté au niveau $2/5$ après avoir imposé la contrainte de dégénérescence. Plus précisément, en utilisant l'algèbre des modes nous trouvons que :

$$A_{-\frac{2}{5}}^2 A_{-\frac{2}{5}}^1 \Phi^{-1} = A_{-\frac{2}{5}}^2 A_{-\frac{2}{5}}^{-1} \Phi^1, \quad (4.74)$$

sont linéairement dépendant de :

$$A_{-\frac{4}{5}}^1 \Phi^1 \quad \text{et} \quad A_{\frac{4}{5}}^{-2} \Phi^{-1}. \quad (4.75)$$

La dégénérescence de l'état (4.73) se traduit dans l'équation :

$$\begin{vmatrix} \mu_{\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}}^{(-1,1;1)} & \mu_{\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}}^{(-1,-2;-1)} \\ \mu_{\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}}^{(2,1;1)} & \mu_{\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}}^{(2,-2,-1)} \end{vmatrix} = 0, \quad (4.76)$$

Ceci implique les relations suivantes :

$$A_{\frac{4}{5}}^{-1} A_{-\frac{4}{5}}^1 \Phi^1 = \left(\frac{3}{25} + \frac{2\Delta_1}{c} \Delta_{\Phi^1} \right) \Phi^1 \equiv \mu_{\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}}^{(-1,1;1)} \Phi^1, \quad (4.77)$$

$$A_{\frac{4}{5}}^{-1} A_{-\frac{4}{5}}^2 \Phi^1 = \lambda_{-2}^{21} h_{2,1} \Phi^1 \equiv \mu_{\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}}^{(-1,-2;-1)} \Phi^1, \quad (4.78)$$

$$A_{\frac{4}{5}}^2 A_{-\frac{4}{5}}^1 \Phi^1 = \lambda_{-2}^{21} h_{2,1} \Phi^1 \equiv \mu_{\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}}^{(-2,1;1)} \Phi^1, \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} A_{\frac{4}{5}}^2 A_{-\frac{4}{5}}^{-2} \Phi^1 &= \left(\frac{4}{(\lambda_2^{1,1})^2} \left[\frac{4}{5} y^2 - \frac{2\Delta_1}{c} (\Delta_{\Phi^1} + \frac{2}{5}) y \right] + \frac{9}{5(\lambda_2^{1,1})^2} y^2 + \frac{3}{2} y \right) \Phi^{-1} \\ &\equiv \mu_{\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}}^{(2,-2;-1)} \Phi^{-1}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

où

$$y = \lambda_2^{1,1} h_{2,1} = -\frac{2}{25} + \frac{2\Delta_1}{c} \Delta_{\Phi^1}. \quad (4.81)$$

Les solutions de (4.76), avec les conditions (4.77)–(4.80) et (4.72), sont assez simples. Elle peuvent être écrites sous la forme :

$$\Delta_{\Phi^1}^{(1)} = \frac{3}{5} \frac{p+5}{p}, \quad \Delta_{\Phi^1}^{(2)} = \frac{3}{5} \frac{p-3}{p+2}, \quad (4.82)$$

$$\Delta_{\Phi^1}^{(3)} = \frac{1}{10} \frac{p^2 + 2p - 15}{p(p+2)}, \quad (4.83)$$

où le paramètre p a été défini en (4.145). Pour $N = 5$

$$p = 3 + k. \quad (4.84)$$

Dans cette équation, k est le paramètre qu'on a utilisé dans la solution (4.27)-(4.31) de l'algèbre chirale.

En introduisant les paramètres

$$\alpha_+^2 = \frac{p+2}{p}, \quad \alpha_-^2 = \frac{p}{p+2} \quad (4.85)$$

les solutions pour les dimensions (4.82)-(4.84) prennent la forme :

$$\Delta_{\Phi^1}^{(1)} = \frac{3}{2}\alpha_+^2 - \frac{9}{10}, \quad \Delta_{\Phi^1}^{(2)} = \frac{3}{2}\alpha_-^2 - \frac{9}{10}, \quad (4.86)$$

$$\Delta_{\Phi^1}^{(3)} = -\frac{3}{8}(\alpha_+^2 + \alpha_-^2) + \frac{17}{20}. \quad (4.87)$$

Dans la prochaine section nous allons discuter la signification des solutions (4.86)-(4.87).

Le point important que nous avons appris est que l'imposition de deux états singuliers dans chaque module permet de calculer les dimensions de champs primaires en fonction de c .

4.6.2 Doublet 2.

Le module de $\Phi^{\pm 2}$ (montré en fig.(4.6)) a ses premiers descendants au niveau $1/5$, avec $q = \pm 1$. Nous pouvons se limiter à considérer le secteur $q = -1$ car ce que nous avons construit pour ce secteur est confirmé aussi pour $q = 1$ (toujours grâce à la symétrie $q \rightarrow -q$) par l'algèbre.

Au niveau $1/5$, il faut considérer deux états :

$$A_{-\frac{1}{5}}^1 \Phi^{-2} \quad \text{et} \quad A_{-\frac{1}{5}}^2 \Phi^2. \quad (4.88)$$

Ces deux états sont dépendants entre eux, comme on peut montrer à partir des règles de commutations $\{\Psi^1, \Psi^1\} \Phi^2$ avec $n = m = 0$:

$$\lambda_2^{1,1} A_{-\frac{1}{5}}^2 \Phi^2 = 2A_{-\frac{1}{5}}^1 A_0^1 \Phi^2 = 2A_{-\frac{1}{5}}^1 h_{1,2} \Phi^{-2}, \quad (4.89)$$

$$\lambda_2^{1,1} A_{-\frac{1}{5}}^2 \Phi^2 = 2h_{1,2} A_{-\frac{1}{5}}^1 \Phi^{-2}, \quad (4.90)$$

où la valeur $h_{1,2}$ correspond à la valeur propre du mode zéro.

Pour avoir la dégénérescence à ce niveau, il suffit d'imposer que l'état :

$$\chi_{-\frac{1}{5}}^{-1} = A_{-\frac{1}{5}}^1 \Phi^{-2} \quad (4.91)$$

soit primaire. La condition correspondante est alors que le mode $A_{+\frac{1}{5}}^{-1}$ annule l'état (4.91). Nous imposons alors que

$$A_{\frac{1}{5}}^{-1} A_{-\frac{1}{5}}^1 \Phi^{-2} = 0. \quad (4.92)$$

A partir des commutateurs $\{\Psi^1, \Psi^{-1}\} \Phi^{-2}$ avec $n = m = 0$, nous trouvons :

$$\left(A_0^1 A_0^{-1} + A_{\frac{1}{5}}^{-1} A_{-\frac{1}{5}}^1 \right) \Phi^{-2} = \left(-\frac{3}{25} + \frac{2\Delta_1}{c} \Delta_{\Phi^2} \right) \Phi^{-2}. \quad (4.93)$$

En utilisant la (4.92) et la (4.93) nous arrivons à :

$$(h_{1,2})^2 = -\frac{3}{25} + \frac{2\Delta_1}{c} \Delta_{\Phi^2}. \quad (4.94)$$

Si nous acceptons la condition (4.94), l'état (4.91) peut être annulé, en réduisant ainsi le module. Par la proportionnalité (4.90), le champ (4.88) est aussi nul : le niveau $1/5$ est donc complètement vide.

De façon pareille au cas du doublet 1, la contrainte (4.94) définit uniquement $(h_{1,2})^2$ en fonction de Δ_{Φ^2} et de c . Nous cherchons alors de trouver un autre état singulière dans le module.

Nous considérons le niveau successif $3/5$.

En posant $n = m = 0$ dans les relations $\{\Psi^1, \Psi^1\} \Phi^{-2}$, nous avons

$$2A_{-\frac{2}{5}}^1 A_{-\frac{1}{5}}^1 \Phi^{-2} = \lambda_2^{1,1} A_{-\frac{3}{5}}^2 \Phi^{-2}. \quad (4.95)$$

Du moment que $A_{-\frac{1}{5}}^1 \Phi^{-2} = 0$, à partir de la précédente condition de dégénérescence, nous obtenons :

$$A_{-\frac{3}{5}}^2 \Phi^{-2} = 0. \quad (4.96)$$

De façon similaire, comme $A_{-\frac{1}{5}}^{-1} \Phi^2 = 0$, nous pouvons dire que

$$A_{-\frac{3}{5}}^{-2} \Phi^2 = 0. \quad (4.97)$$

En conclusion, la dégénérescence complète au niveau $1/5$ implique que, un fois qu'on a annulé le sous module invariant, le niveau $3/5$ est vide.

Pour fixer Δ_{Φ^2} , nous sommes obligé alors d'examiner le niveau suivant, qui est le niveau 1. Il n'est pas difficile de se convaincre que à ce niveau il faut prendre en compte l'état :

$$\chi_{-1}^{-2} = aL_{-1} \Phi^{-2} + bA_{-1}^1 \Phi^2 \quad (4.98)$$

et demander que la condition suivante soit vérifiée :

$$L_{+1} \chi_{-1}^{-2} = 0, \quad A_{+1}^{-1} \chi_{-1}^{-2} = 0. \quad (4.99)$$

En termes des éléments de matrice μ_{ij} , définis par :

$$L_{+1}L_{-1}\Phi^{-2} = \mu_{11}\Phi^{-2}, \quad (4.100)$$

$$L_{+1}A_{-1}^1\Phi^2 = \mu_{12}\Phi^{-2}, \quad (4.101)$$

$$A_{+1}^{-1}L_{-1}\Phi^{-2} = \mu_{21}\Phi^2, \quad (4.102)$$

$$A_{+1}^{-1}A_{-1}^1\Phi^2 = \mu_{22}\Phi^2, \quad (4.103)$$

le critère de dégénérescence devient

$$\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21} = 0. \quad (4.104)$$

Les entrées de la matrice ci-dessus peuvent être calculées à partir de l'algèbre de Virasoro et des règles de commutation $\{\Psi^1, \Psi^{-1}\}\Phi^{-2}$ et $\{T, \Psi\}\Phi$:

$$\mu_{11} = 2\Delta_{\Phi^2}, \quad (4.105)$$

$$\mu_{12} = \frac{8}{5}h_{1,2}, \quad (4.106)$$

$$\mu_{21} = \frac{8}{5}h_{1,2}, \quad (4.107)$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{5}(h_{1,2})^2 + \frac{7}{25} + \frac{2\Delta_1}{c}\Delta_{\Phi^2}. \quad (4.108)$$

La condition de dégénérescence est donc :

$$2\Delta_{\Phi^2} \left(\frac{1}{5}(h_{1,2})^2 + \frac{7}{25} + 2\Delta_1 c \Delta_{\Phi^2} \right) - \frac{64}{25}(h_{1,2})^2 = 0. \quad (4.109)$$

En résolvant les (4.94)-(4.109) nous trouvons les solutions :

$$\Delta_{\Phi^2}^{(1)} = \alpha_+^2 - \frac{3}{5}, \quad \Delta_{\Phi^2}^{(2)} = \alpha_-^2 - \frac{3}{5} \quad (4.110)$$

avec α_{\pm}^2 défini en (4.85).

4.6.3 Singlet.

Pour le module de singlet, montré en fig.(4.4), les premiers descendants sont au niveau $2/5$ dans les secteurs $q = \pm 2$. Par la symétrie de conjugation de charge, il suffit d'examiner l'un des deux secteurs. Nous demandons donc que l'état

$$\chi_{-\frac{2}{5}}^2 = A_{-\frac{2}{5}}^2 \Phi^0, \quad (4.111)$$

respecte la contrainte :

$$A_{\frac{2}{5}}^{-2} \chi_{-\frac{2}{5}}^2 = 0. \quad (4.112)$$

Par les relations $\{\Psi^2, \Psi^{-2}\}\Phi^0$ avec $m = -1$ et $n = 0$, nous obtenons :

$$(A_{\frac{7}{5}}^2 A_{-\frac{7}{5}}^{-2} + A_{\frac{2}{5}}^{-2} A_{-\frac{2}{5}}^2)\Phi^0 = \frac{2\Delta_2}{c}\Delta_{\Phi^0}\Phi^0 \quad (4.113)$$

La (4.112) détermine l'élément de matrice sur le niveau plus bas :

$$(A_{\frac{7}{5}}^2 A_{-\frac{7}{5}}^{-2})\Phi^0 = \frac{2\Delta_2}{c}\Delta_{\Phi^0}\Phi^0 \quad (4.114)$$

Si nous acceptons la (4.112) et la (4.114), nous pouvons bien éliminer le seul état existant au niveau $2/5$:

$$A_{-\frac{2}{5}}^2\Phi^0 = 0. \quad (4.115)$$

Dans la suite, nous examinons le niveau $3/5$ dans le secteur $q = \pm 1$. Une fois que le niveau $2/5$ a été vidé, un seul opérateur reste sur ce niveau :

$$\chi_{-\frac{3}{5}}^1 = A_{-\frac{3}{5}}^1\Phi^0, \quad (4.116)$$

qui est sujet à la contrainte

$$A_{\frac{3}{5}}^{-1}\chi_{-\frac{3}{5}}^1 = 0. \quad (4.117)$$

En utilisant les règles des commutation $\{\Psi^{-1}, \Psi^1\}\Phi^0$, avec $n = 1$, $m = 0$, nous avons que :

$$A_{\frac{3}{5}}^1 A_{-\frac{3}{5}}^{-1}\Phi^0 = \frac{2\Delta_1}{c}\Delta_{\Phi^0}\Phi^0 \quad (4.118)$$

La contrainte (4.118) implique que :

$$\Delta_{\Phi^0} = 0. \quad (4.119)$$

Nous avons donc retrouvé la dimension (triviale) de l'opérateur d'identité.

4.7 Le secteur des opérateurs de désordre R_a .

4.7.1 Structure des modules.

L'opérateur de désordre $R_a(z, \bar{z})$ ($a = 1, 2, 3, 4, 5$), contrairement aux opérateurs de singlet et de doublet, a une monodromie non abélienne par rapport aux champs chiraux $\Psi^{\pm 1}(z), \Psi^{\pm 2}(z)$. Cette propriété se reflète dans le fait que les produits locaux $\Psi^{\pm 1}(z)R_a(0)$ et $\Psi^{\pm 2}(z)R_a(0)$ se décomposent en puissances demi entières de z :

$$\Psi^{+1}(z)R_a(0) = \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_1 + \frac{n}{2}}} A_{\frac{n}{2}}^1 R_a(0), \quad (4.120)$$

$$\Psi^{+2}(z)R_a(0) = \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_2 + \frac{n}{2}}} A_{\frac{n}{2}}^2 R_a(0). \quad (4.121)$$

L'expansion des produits $\Psi^{-1}(z)R_a(0)$ et $\Psi^{-2}(z)R_a(0)$ se relie à celle (4.120)–(4.121) par continuation analytique de z autour de 0 :

$$\Psi^{-1}(z)R_a(0) = \sum_n \frac{(-1)^n}{(z)^{\Delta_1 + \frac{n}{2}}} A_{\frac{n}{2}}^1 \mathbf{U} R_a(0), \quad (4.122)$$

$$\Psi^{-2}(z)R_a(0) = \sum_n \frac{(-1)^n}{(z)^{\Delta_2 + \frac{n}{2}}} A_{\frac{n}{2}}^2 (\mathbf{U})^2 R_a(0). \quad (4.123)$$

Dans cette équation, \mathbf{U} est une matrice 5×5 qui tourne les indices des champs de désordre de façon telle que : $\mathbf{U} R_a(0) = R_{a-1}(0)$.

La théorie des opérateurs de désordre a été complètement développée dans le contexte de la première théorie parafermionique [20] aussi bien que dans celui de la deuxième théorie avec symétrie Z_3 [29]. Pour ce qui concerne les propriétés générales (produits, continuations analytiques) des champs dans ce secteur, l'approche des réf. [29, 20] se généralise assez directement au cas présent. Les détails concernant la théorie Z_5 sont montrés dans l'appendice *C* de l'article reporté en annexe *B*. En particulier, nous expliquons l'origine des développements (4.120)–(4.123) et donnons les règles des commutation entre les modes $A_{\frac{n}{2}}^1$ et $A_{\frac{n}{2}}^2$.

Par rapport aux fig.(4.4)–(4.6), la structure de modules des opérateurs des désordre est simple : il y a seulement des niveaux entiers et demi entiers. Il existe aussi des modes zéro pour tous les opérateurs $\{\Psi^q\}$ qui agissent sur le cinquplet. En général nous avons :

$$A_0^1 R_a = h_1 (\mathbf{U})^2 R_a, \quad (4.124)$$

$$A_0^2 R_a = h_2 (\mathbf{U})^{-1} R_a. \quad (4.125)$$

Le matrices $(\mathbf{U})^2$ et $(\mathbf{U})^{-1}$ tournent les indices selon les règles de multiplication de D_5 : nous renvoyons le lecteur à l'annexe *B* pour les détails.

Les constants h_1 et h_2 sont les valeurs propres de R_a par rapport à A_0^1 et A_0^2 . De façon pareille au cas des doublets, ces valeurs propres fournissent une caractérisation supplémentaire des représentations dans ce secteur. En fait, il suffit de spécifier h_1 ou h_2 car les deux sont liées. En appliquant les règles de commutation des modes, nous avons que :

$$2A_0^1 A_0^1 R_a(0) = \lambda_2^{1,1} 2^{\Delta_2 - 3} A_0^2 R_a(0) + 2^{-\Delta_2 - 2} \left(\frac{-11}{10} + \frac{16\Delta_1}{c} \Delta_R \right) (\mathbf{U})^{-1} R_a(0). \quad (4.126)$$

En considérant les (4.124)–(4.125), nous trouvons alors :

$$2(h_1)^2 = \lambda_2^{1,1} 2^{\Delta_2 - 3} h_2 + 2^{-\Delta_2 - 2} \left(\kappa(0) + \frac{16\Delta_1}{c} \Delta_R \right). \quad (4.127)$$

4.7.2 Dégénérescences des modules.

Les premiers descendants pour un opérateur primaire se trouvent au niveau $1/2$. Pour un indice a donné, il y a deux états :

$$\left(\chi_a^{(1)}\right)_{-\frac{1}{2}} = A_{-\frac{1}{2}}^1 (U)^{-2} R_a = (U)^{-2} A_{\frac{1}{2}}^1 R_a, \quad (4.128)$$

$$\left(\chi_a^{(2)}\right)_{-\frac{1}{2}} = A_{-\frac{1}{2}}^2 U R_a = U A_{\frac{1}{2}}^2 R_a. \quad (4.129)$$

Les matrices $(U)^{-2}$ et U commutent avec l'action des modes, $A_{-\frac{1}{2}}^1$ et $A_{-\frac{1}{2}}^2$. Ces matrices compensent simplement la rotation des indices produite par l'action de $A_{-\frac{1}{2}}^1$ et de $A_{-\frac{1}{2}}^2$.

Comme nous avons fait pour le doublet 1, nous pourrions essayer de produire un primaire au niveau $1/2$ par combinaison linéaire des états (4.128)–(4.129). Cependant, nous n'allons pas suivre ce chemin. Plutôt, nous demandons que tous les deux états, (4.128) et (4.129), soient primaires. Après avoir annulés ces états, le niveau $1/2$ reste vide.

Nous remarquons que la procédure de chercher les dégénérescences dans les modules est arbitraire car il y a plusieurs façons d'imposer des états singuliers. Le point est que, parmi les différents choix possibles, les solutions correspondantes ne sont pas toutes compatibles avec la théorie que nous sommes en train de construire. Par exemple, si nous imposons que tous les états sur le niveau $2/5$ dans le module du doublet 1 sont primaires, nous obtiendrons, par les (4.69)–(4.70), les valeurs $h_{1,2} = 0$ et $\Delta_{\Phi^1} = c/40$; or cette solution doit être rejetée. Comme nous le verrons plus loin, les systèmes physiques sont décrits par une série de modèles minimaux (de l'algèbre parafermionique) où les dimensions des champs sont données par une formule qui n'est pas consistante avec la valeur $\Delta_{\Phi^1} = c/40$. Encore, parmi les trois solutions que nous avons trouvées pour le doublet 1, (4.86)–(4.87), les premières deux se révèlent être physiques, mais pas la troisième.

La distinction entre solutions physiques et non sera rendue plus claire dans la prochaine section : toutes les solutions que nous sommes en train de déterminer vont servir pour fixer la forme de la formule de Kac pour les dimensions et pour remplir le tableau de Kac en positionnant correctement les singlets, les doublets et les opérateurs de désordre ; dans cette analyse, il apparaît simplement que certaines solutions ne sont pas compatibles avec cette construction.

En revenant au cas des opérateurs de désordre, la raison pour annuler tous les états au niveau $1/2$, (4.128) et (4.129), est que la solution correspondante est consistante avec la formule de Kac que nous allons écrire plus avant.

En accord avec ces remarques, nous demandons que

$$A_{+\frac{1}{2}}^1 (\chi_a^{(1)})_{-\frac{1}{2}} = 0, \quad A_{+\frac{1}{2}}^2 (\chi_a^{(1)})_{-\frac{1}{2}} = 0, \quad (4.130)$$

$$A_{+\frac{1}{2}}^1(\chi_a^{(2)})_{-\frac{1}{2}} = 0, \quad A_{+\frac{1}{2}}^2(\chi_a^{(2)})_{-\frac{1}{2}} = 0. \quad (4.131)$$

Cela donne :

$$A_{\frac{1}{2}}^1 A_{-\frac{1}{2}}^1 R_a = 0, \quad A_{\frac{1}{2}}^2 A_{-\frac{1}{2}}^1 R_a = 0, \quad (4.132)$$

$$A_{+\frac{1}{2}}^1 A_{-\frac{1}{2}}^2 R_a = 0, \quad A_{\frac{1}{2}}^2 A_{-\frac{1}{2}}^2 R_a = 0. \quad (4.133)$$

Par l'algèbre des modes nous obtenons :

$$\left(A_{\frac{1}{2}}^1 A_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{2}{5} A_0^1 A_0^1 \right) R_a = \lambda_2^{1,1} (2)^{\Delta_2-3} A_0^2 R_a - 2^{-\Delta_2-2} \left(\kappa(1) + \frac{16\Delta_1}{c} \Delta_R \right) (U)^{-1} R_a \quad (4.134)$$

En imposant maintenant $A_{+\frac{1}{2}}^1 A_{-\frac{1}{2}}^1 R_a = 0$, et en remplaçant A_0^1, A_0^2 par la valeur propre correspondante, (4.124)-(4.125), nous trouvons la relation :

$$\frac{2}{5} (h_1)^2 = \lambda_2^{1,1} (2)^{\Delta_2-3} h_2 - 2^{-\Delta_2-2} \left(\frac{-1}{10} + \frac{16\Delta_1}{c} \Delta_R \right). \quad (4.135)$$

Toujours en utilisant les règles de commutation des modes nous avons :

$$A_{\frac{1}{2}}^1 A_{-\frac{1}{2}}^2 R_a = A_{\frac{1}{2}}^2 A_{-\frac{1}{2}}^1 R_a = \left(-\frac{4}{5} h_1 h_2 + (2)^{\Delta_2-\Delta_1-2} \lambda_{-2}^{2,1} h_2 - (2)^{\Delta_1-\Delta_2-2} \lambda_{-1}^{-2,1} h_1 \right) U R_a. \quad (4.136)$$

En utilisant encore (4.132)-(4.133), nous arrivons à la deuxième relation :

$$-\frac{4}{5} h_1 h_2 + (2)^{\Delta_2-\Delta_1-2} \lambda_{-2}^{2,1} h_2 - (2)^{\Delta_1-\Delta_2-2} \lambda_{-1}^{-2,1} h_1 = 0. \quad (4.137)$$

Après quelques manipulations algébriques nous trouvons :

$$\begin{aligned} A_{\frac{1}{2}}^2 A_{-\frac{1}{2}}^2 R_a &= \frac{2^{-\Delta_2+3}}{\lambda_{-2}^{1,1}} \left[\left(-\frac{4}{5} h_2 + \frac{1}{4} (2)^{\Delta_1-\Delta_2-2} \lambda_{-1}^{2,1} \right) A_{\frac{1}{2}}^1 A_{-\frac{1}{2}}^1 (U)^{-1} R_a \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{12}{5} h_1 - \frac{1}{3} (2)^{\Delta_2-\Delta_1-2} \lambda_{-2}^{2,1} \right) A_{\frac{1}{2}}^1 A_{-\frac{1}{2}}^2 (U)^2 R_a \right]. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Par conséquent, si les éléments de matrice $A_{\frac{1}{2}}^1 A_{-\frac{1}{2}}^1 R_a$ et $A_{\frac{1}{2}}^1 A_{-\frac{1}{2}}^2 R_a$ disparaissent, tous les éléments de matrice (4.132)-(4.133) sont nuls, comme demandé.

Résumons les résultats : les contraintes qui dérivent de la complète dégénérescence au niveau 1/2 dans le module de désordre R_a sont exprimées par les (4.135) et (4.137). En plus, les valeurs propres h_1 et h_2 sont liées par la (4.127). L'ensemble des trois équations permet de fixer h_1, h_2 et Δ_R en fonction de c , ou en fonction de paramètres, p ou α_+^2, α_-^2 définis en (4.84)-(4.85).

Si nous résolvons les (4.127), (4.135) et la (4.137), nous trouvons les solutions suivantes pour la dimension conforme Δ_R :

$$\Delta_R^{(1)} = \frac{1}{4} \frac{p+5}{p}, \quad \Delta_R^{(2)} = \frac{1}{4} \frac{p-3}{p+2}, \quad (4.139)$$

$$\Delta_R^{(3)} = \frac{1}{4} \frac{p^2 + 2p - 5}{p(p+2)}. \quad (4.140)$$

Il est utile d'exprimer ces résultats en termes des $\alpha_+^2 = (p+2)/p$ et $\alpha_-^2 = p/(p+2)$:

$$\Delta_R^{(1)} = \frac{5}{8}\alpha_+^2 - \frac{3}{8}, \quad \Delta_R^{(2)} = \frac{5}{8}\alpha_-^2 - \frac{3}{8}, \quad (4.141)$$

$$\Delta_R^{(3)} = -\frac{5}{16}(\alpha_+^2 + \alpha_-^2) + \frac{7}{8}. \quad (4.142)$$

4.8 Formule de Kac.

Goddard et Swimmer ont montré [87, 88, 89] que la théorie qui correspond à la deuxième solution associative pour l'algèbre chirale est décrite par le coset :

$$\frac{SO_k(N) \times SO_2(N)}{SO_{k+2}(N)}, \quad (4.143)$$

La correspondante charge centrale est

$$c = (N-1) \left(1 - \frac{N(N-2)}{p(p+2)} \right), \quad (4.144)$$

$$p = N - 2 + k, \quad (4.145)$$

La valeur de la charge centrale correspond bien à celle donnée par l'éq. 4.30 où on fait le remplacement $v \rightarrow k/2$.

Nous considérons donc une formule de Kac basée sur le réseau des poids de l'algèbre de Lie du groupe $SO(N)$: $B_{\frac{N-1}{2}}$ pour N impair et $D_{\frac{N}{2}}$ pour N pair.

Dans ce chapitre, nous traitons le cas B_2 .

Avec ces hypothèses, la formule de Kac prend la forme générale :

$$\Delta_{(n_1, n_2)(n'_1, n'_2)} = \left(\vec{\beta} - \vec{\alpha}_0 \right)^2 - \vec{\alpha}_0^2 + B, \quad (4.146)$$

où

$$\vec{\beta} \equiv \vec{\beta}_{(n_1, n_2)(n'_1, n'_2)} = \left(\frac{1-n_1}{2}\alpha_+ + \frac{1-n'_1}{2}\alpha_- \right) \vec{\omega}_1 + \left(\frac{1-n_2}{2}\alpha_+ + \frac{1-n'_2}{2}\alpha_- \right) \vec{\omega}_2. \quad (4.147)$$

Les $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ sont les poids fondamentaux pour les représentations de l'algèbre B_2 , les α_{\pm} et la charge $\vec{\alpha}_0$ sont définies par :

$$\alpha_+ = \sqrt{\frac{p+2}{p}}, \quad \alpha_- = -\sqrt{\frac{p}{p+2}} \quad (4.148)$$

$$\vec{\alpha}_0 = \frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2} (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2). \quad (4.149)$$

Dans l'éq. (4.146), B est le "terme de bord" qui est nul pour les singlets et qui doit être déterminé pour les secteurs de doublet 1, doublet 2 et de désordre.

En disant que les opérateurs sont associés à un réseau particulier, nous sommes en train d'assumer l'existence d'une réalisation en termes du gaz de Coulomb, avec les opérateurs

primaires qui sont représentés par des opérateurs de vertex. Cela explique la forme du gaz de Coulomb de l'équation (4.146) qui donne les dimensions $\Delta_{(n_1, n_2)(n'_1, n'_2)}$.

Dans les sections précédentes, nous avons directement calculé les dimensions des différents opérateurs ayant un module qui présente des états singuliers sur les premiers niveaux. Nous indiquons ces opérateurs comme fondamentaux. Les résultats de ces calculs sont résumés en (4.86)–(4.87), (4.110) et (4.141)–(4.142) respectivement pour le doublet 1, le doublet 2 et l'opérateur de désordre fondamentaux. Du moment que ces solutions sont les plus simples possibles, les dimensions correspondantes doivent être identifiées avec les valeurs des indices n, n' les plus petites dans le tableau des dimensions.

Nous identifions d'abord les opérateurs à travers les coefficients des α_{\pm}^2 et α_{\pm}^2 . Puis, nous déduisons le terme de bord par les termes qui sont indépendants de α_{\pm}^2 dans la formule de dimensions.

De cette façon nous avons établi que les dimensions (4.86) correspondent, respectivement, à :

$$\Delta_{(1,3)(1,1)} \quad \text{et} \quad \Delta_{(1,1)(1,3)}. \quad (4.150)$$

Les dimensions (4.110) pour le doublet 2 sont égales à celles données par

$$\Delta_{(2,1)(1,1)} \quad \text{et} \quad \Delta_{(1,1)(2,1)}. \quad (4.151)$$

et, en fin, les dimensions (4.141) de l'opérateur de désordre fondamental sont associées aux

$$\Delta_{(1,2)(1,1)} \quad \text{et} \quad \Delta_{(1,1)(1,2)}. \quad (4.152)$$

Les valeurs des termes de bord que nous avons trouvé sont les suivantes :

$$B_S = 0, \quad B_R = \frac{1}{8}, \quad B_{D^1} = \frac{1}{10}, \quad B_{D^2} = \frac{3}{20}, \quad (4.153)$$

où S, R, D^1 et D^2 indiquent, respectivement le singlet, l'opérateur de désordre, le doublet 1, et le doublet 2.

Les valeurs des produits scalaires $(\vec{\omega}_a, \vec{\omega}_b)$ sont en accord avec les produits scalaires formées par les poids fondamentaux de l'algèbre B_2 :

$$(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_1) = 1, \quad (\vec{\omega}_2, \vec{\omega}_2) = \frac{1}{2}, \quad (\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) = \frac{1}{2}. \quad (4.154)$$

Les dimensions conformes (4.87) pour le doublet 1 et (4.142) pour l'opérateur de désordre ne sont pas compatibles avec la formule (4.146). Plus précisément, la dimension (4.87) correspond à un opérateur hors du domaine physique du tableau de Kac (que nous allons spécifier dans la prochaine section). La dimension (4.142) ne peut pas être obtenue pour des valeurs entières des indices n, n' . on parle alors des solutions non physiques. Autrement

dit, les opérateurs avec ces dimensions n'apparaissent pas dans l'algèbre des opérateurs du domaine physique. Pour cette raison nous pouvons les négliger.

4.9 Théorie générale.

Dans les sections (4.6)-(4.7.2) nous avons fixé les positions dans le tableau de Kac des opérateurs fondamentaux dont les dimensions ont été déterminées par calcul direct de dégénérescence.

Après avoir identifié ces premiers opérateurs, il faut remplir les sites restantes du tableau de Kac. Autrement dit, nous devons déterminer les positions occupées par les singlets, les doublets 1, les doublets 2 et les opérateurs de désordre. Il faut donc assigner correctement le terme de bord à la formule de Kac, éqs. (4.146). Plus précisément, nous devons déterminer pour quelles valeurs des indices $(n_1, n_2)(n'_1, n'_2)$, le terme de bord B correspond à B_S , B_R , B_{D^1} or à B_{D^2} .

Comme nous avons dit dans la section précédente, la forme générale des dimensions (4.146) implique l'existence d'une réalisation du gaz de Coulomb. Dans cette thèse nous ne donnons pas la forme explicite des opérateurs dans cette représentation, mais nous en utilisons plutôt sa signification géométrique, qui se traduit dans certains mouvements permis sur le réseau. Ces mouvements sont liés aux opérateurs d'écran, qui sont les vecteurs des racines simples de l'algèbre B_2 .

Le tableau de Kac de la théorie Z_5 est montré en fig.(4.7) avec les vecteurs \vec{e}_1 , \vec{e}_2 qui représentent les opérateurs d'écran du gaz de Coulomb. Le tableau de Kac est quadridimensionnel car il est formé par les plans bidimensionnelles qui correspondent à les parties α_+ et α_- de l'éq. (4.146). Dans la figure nous montrons un plan. Le symbole sur chaque vertex indique la nature de l'opérateur respectif : singlet (S), doublet 1 (D^1), doublet 2 (D^2) et opérateur de désordre (R).

Le raisonnement que nous avons suivi pour déterminer le remplissage du tableau de Kac (4.7) est expliqué très en détail dans la section 4 de l'article reporté en annexe B. Ici nous mentionnons seulement les deux propriétés du gaz de Coulomb que nous avons utilisé : la méthode de réflexions et les règles de fusions.

4.9.1 Réflexions et règles de fusion dans le tableau de Kac.

Les réflexions, indiquées par des flèches en fig. (4.7), lient en générale deux opérateurs, qui appartient à domaines différents, à un opérateur du domaine physique (défini par $n_1, n_2 \geq 1$). Comme dans la résolution de Felder pour les modèle minimaux de l'algèbre

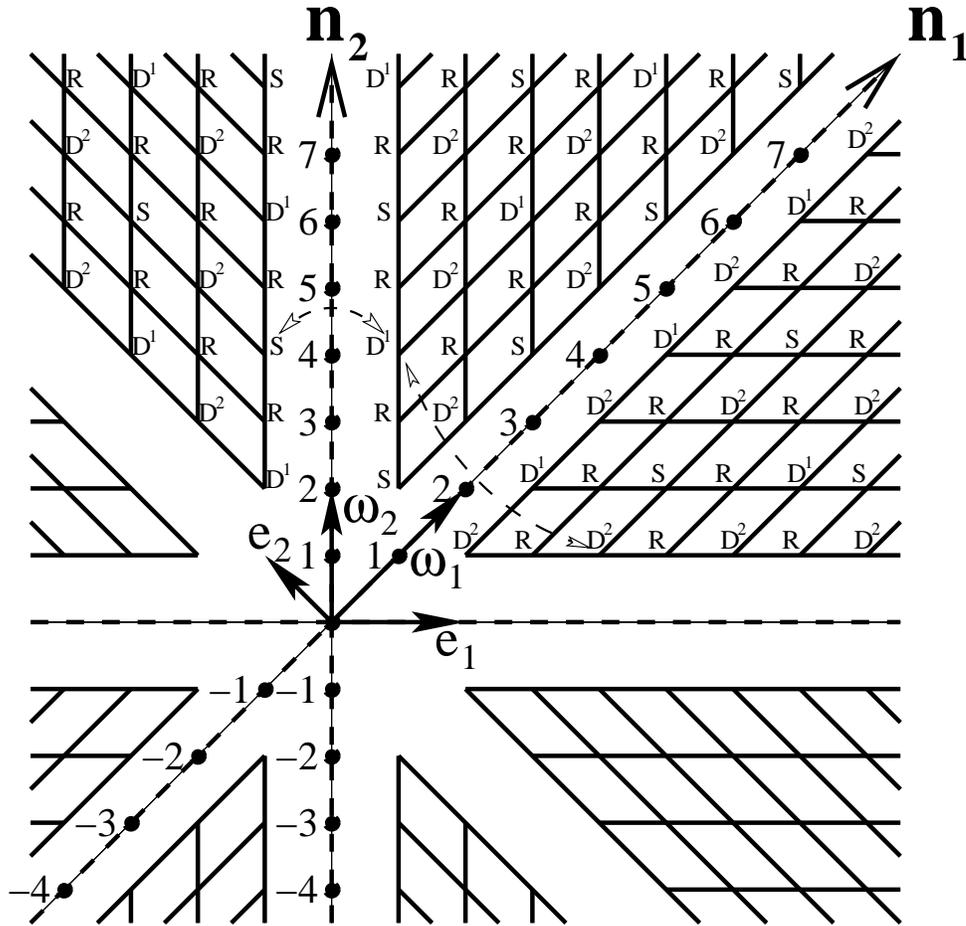


FIG. 4.7 – Grille conforme pour la théorie Z_5 basée sur le réseau de poids de l'algèbre B_2 . On montre ici la couche principale, c'est à dire cella avec $(n'_1, n'_2) = (1, 1)$. Chaque vertex du réseau est associé à un particulier opérateur (S, D^1, D^2, R). Le structure des opérateurs de singlets, de doublets et de désordre s'étend sur le réseau en façon périodique. Les flèches montrent des exemples d'opérateurs liés par une réflexion. Le domaine physique du tableau est limité par les axes n_1 et n_2 .

de Virasoro [56], que j'ai reproduite dans la section (1.5.3), ces réflexions indiquent les états singuliers (dégénérescence) dans le module des opérateurs physiques. Dans ce sens, les opérateurs dans les domaines adjacents sont des "fantômes" : ils se découplent de l'algèbre des opérateurs physiques. Comme d'habitude, on assume que les écrans commutent avec l'algèbre parafermionique.

Nous pouvons tester les hypothèses précédentes en regardant les opérateurs du tableau de Kac avec les indices plus petits. Pour tous les opérateurs fondamentaux, les niveaux de dégénérescence ont été déterminés en section (4.6) et en section (4.7.2) par calcul direct. Alternativement, nous pouvons trouver les niveaux de dégénérescence en prenant la différence des dimensions de deux opérateurs liés par une réflexion particuliers.

Pour l'opérateur R , positionné en $\Phi_{(1,2)(1,1)}$ ou en $\Phi_{(1,1)(1,2)}$, toutes les réflexions donnent comme résultat $1/2$ pour la différence des dimensions :

$$\Delta_{(1,1)(-1,4)} - \Delta_{(1,1)(1,2)} = \frac{1}{2} \quad (4.155)$$

$$\Delta_{(1,1)(3,-2)} - \Delta_{(1,1)(1,2)} = \frac{1}{2}. \quad (4.156)$$

Cela est en accord avec ce que nous avons trouvé dans la section (4.7.2) : les opérateurs de désordre sont doublement dégénérés au niveau $1/2$.

Ensuite, pour l'opérateur D^1 , associé au $\Phi_{(1,1)(1,3)}$ or au $\Phi_{(1,3)(1,1)}$, nous obtenons :

$$\Delta_{(1,1)(-1,5)} - \Delta_{(1,1)(1,3)} = \frac{2}{5} \quad (4.157)$$

$$\Delta_{(1,1)(4,-3)} - \Delta_{(1,1)(1,3)} = \frac{4}{5} \quad (4.158)$$

Cela confirme le fait que cet opérateur est dégénéré aux niveaux $2/5$ et $4/5$, comme nous avons vu en section (4.6.1).

De même, les deux réflexions pour l'opérateur D^2 , $\Phi_{(1,1)(2,1)}$ or $\Phi_{(1,2)(1,1)}$, sont bien en accord avec le calcul explicite de dégénérescence qui fixe les états singuliers au niveau $1/5$ et 1 . Enfin, pour l'opérateur d'identité, $\Phi_{(1,1)(1,1)} = I$, les deux réflexions donnent les différences $2/5$ et $3/5$ et reproduisent les résultats obtenus en section (4.6.3).

Il est important de remarquer que la détermination de la nature du fantôme (R , S , D^1 or D^2) pour chaque réflexion doit être compatible avec la nature du correspondant état singulier dans le module. Par exemple, dans le module de D^1 (fig.(4.5)) le niveau $2/5$ est occupé par un singlet et le niveau $4/5$ par un doublet 2. Les différences entre les dimensions (4.155)–(4.158), doivent être calculés avec les termes de bord appropriés.

En imposant que pour tous les opérateurs du tableau les niveaux de dégénérescence donnés par les réflexions soient compatibles avec la structure des modules, nous avons un nombre de contraintes sur les possibles remplissages du réseau.

Par exemple, dans la position $\Phi_{(1,1)(3,1)}$ nous ne pouvons pas placer un opérateur de doublet 1 : si nous considérons la réflexion qui lie l'opérateur $\Phi(1,1)(3,1)$ et l'opérateur $\Phi(1,1)(4,-1)$, il n'y a aucun choix de la nature du fantôme qui donne un niveau de dégénérescence compatible avec la structure du module du doublet 1.

Pour étudier la théorie générale de cette série de modèles parafermioniques, nous avons beaucoup exploité la méthode des réflexions dont nous venons de parler . En particulier, cette méthode se révèle très utile pour la construction des théories avec $N > 5$. La dimension du tableau de Kac, et donc la difficulté du remplissage, croît avec N . En plus, le calcul explicite des tous les opérateurs fondamentaux n'est pas possible. Pour $N > 5$, il est donc nécessaire de trouver une façon d'utiliser systématiquement la méthode des réflexions. Cela va être discuté dans le prochain chapitre, où nous allons présenter la généralisation pour $N > 5$.

L'autre propriété du gaz de Coulomb que nous avons utilisé est celle qui concerne la fusion entre deux opérateurs.

Considérons la multiplication (fusion) entre deux opérateurs dans la couche principale :

$$\Phi_{(1,\dots,1)(n'_1,n'_2)} \cdot \Phi_{(1,\dots,1)(m'_1,m'_2)}. \quad (4.159)$$

Selon les règles du gaz de Coulomb, cette multiplication produit dans le canal principal l'opérateur $\Phi_{(1,\dots,1)(l'_1,l'_2)}$ avec

$$\begin{aligned} \vec{\beta}_{(1,\dots,1)(l'_1,l'_2)} &= \vec{\beta}_{(1,\dots,1)(n'_1,n'_2)} + \vec{\beta}_{(1,\dots,1)(m'_1,m'_2)} \\ l'_i &= n'_i + m'_i - 1, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.160)$$

Les canaux secondaires suivent le principal à travers des translations réalisés par une combinaison linéaire des racines simples \vec{e}_i (avec $i = 1, 2$). Cette propriété a été déjà utilisée dans le troisième chapitre pour l'analyse de l'algèbre des opérateur d'énergie du modèle $WD_3^{(p)}$. Nous renvoyons à la section (3.3.2) où nous justifions cette propriété en discutant une fonction de corrélation particulière .

Cette règle est extrêmement utile pour fixer la distribution des opérateurs sur le réseau. Cependant, elle doit être utilisé très attentivement car l'amplitude du canal principal peut s'annuler. Cela arrive souvent pour le théories avec $N > 5$. Nous aurons l'occasion, dans le prochain chapitre, de spécifier mieux les cas où ce mécanisme se produit.

Nous examinons la fusion de l'opérateur fondamental de désordre $\Phi_{(1,1)(1,2)}$ avec le doublet 2 $\Phi_{(1,1)(2,1)}$. Le résultat de cette fusion est nécessairement un autre opérateur de désordre car, dans le groupe diédral, le produit entre d'une réflexion fois une rotation donne une autre réflexion. L'opérateur $\Phi_{(1,1)(2,2)}$ est alors, selon la règle du gaz de Coulomb, un opérateur de désordre. En itérant le raisonnement précédent, il est facile de vérifier que l'opérateur

$\Phi_{(1,1)(n'_1, n'_2)}$, avec $|n'_2 - 1|$ impair est un opérateur de désordre R .

4.9.2 Tableau de Kac fini pour la théorie unitaire.

Toutes les discussions que nous avons fait sur le tableau de Kac sont valables en générale pour des valeurs des paramètres α_+ et $\alpha_- = -1/\alpha_+$ quelconques. Quand α_+^2 est rationnelle, le tableau de Kac devient fini. Nous trouvons la série unitaire pour $\alpha_+^2 = (p+2)/p$ avec p entier (l'unitarité est assuré par la construction coset (4.143)).

Le domaine physique du tableau de Kac est délimité par

$$\begin{aligned} 2 \leq n'_1 + n'_2 &\leq p + 1, \\ 2 \leq n_1 + n_2 &\leq p - 1. \end{aligned} \quad (4.161)$$

Cela est pareil au tableau de Kac de la théorie WB_2 . Les contenu des opérateurs de cette théorie conforme (WB_2) et de celle considérée dans la présente thèse (Z_5 , deuxième solution) sont complètement différents. Cependant, les deux utilisent le réseau des poids de l'algèbre B_2 pour les respectives représentations. En plus, les propriétés globales du réseau des représentations sont les mêmes.

Pour justifier les délimitations du tableau de Kac de la théorie Z_5 , données en éq. (4.161), nous considérons les réflexions dans la direction :

$$2\vec{e}_2 + \vec{e}_1. \quad (4.162)$$

En utilisant la (4.146) pour $\Delta_{(n_1, n_2)(n'_1, n'_2)}$, avec les termes de bord corrects, nous trouvons que les opérateurs au delà de la ligne :

$$n'_1 + n'_2 = p + 2 \quad (4.163)$$

sont tous des fantômes et ils se découpent de la théorie. Cela peut être vu du fait que leur dimension diffère de celle des opérateurs physiques auxquels sont liés pour des valeurs qui sont compatibles avec les niveaux de dégénérescence du correspondant module.

Enfin, la restante partie du tableau de Kac possède une autre symétrie. Il est facile de vérifier que $\Delta_{(n_1, n_2)(n'_1, n'_2)}$ est invariant sous la transformation :

$$\begin{cases} n'_1 \rightarrow p + 2 - n'_1 - n'_2, & n'_2 \rightarrow n'_2, \\ n_1 \rightarrow p - n_1 - n_2, & n_2 \rightarrow n_2, \end{cases} \quad (4.164)$$

Il est important de souligner que la (4.164) est aussi une symétrie de la théorie WB_2 . La symétrie (4.164) et la définition du domaine physique (4.161) ne sont pas brisés par la structure des S , D^1 , D^2 , R sur le réseau.

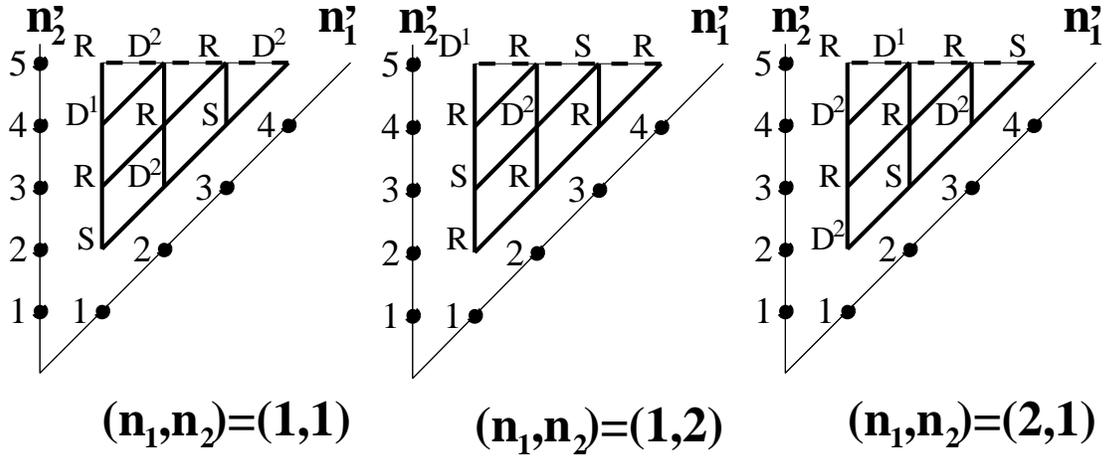


FIG. 4.8 – Tableau de Kac pour la théorie $p = 4$ avec $c = 3/2$. Il y a trois couches α_- , chacune correspondant à des valeurs données des indices α_+ (n_1, n_2) . La théorie contient 16 opérateurs primaires.

Nous donnons ici l'exemple le plus simple de la série de théories que nous avons construit. Selon la formule du coset (4.143)-(4.145), la première théorie non triviale avec symétrie Z_5 est celle avec $p = p_{\min} = 4$, qui a $c = 3/2$. Son tableau de Kac, formé par trois couches α_- , est montré en fig.(4.8).

La théorie avec $p = 3$ est triviale. Son tableau de Kac est constitué par une couche α_- seulement, avec tous les opérateurs qui ont une dimension conforme nulle, $\Delta = 0$. Cela pouvait être anticipée du fait que la charge centrale correspondante, selon l'éq. (4.144), est $c = 0$.

Dans le prochain chapitre, nous allons montrer comment utiliser la trivialisaton de la théorie pour $c = 0$ pour déterminer les termes de bords pour les théories parafermioniques avec symétrie Z_N , $N > 5$.

4.10 Équations caractéristiques.

Dans le raisonnement que nous avons fait jusqu'ici nous avons utilisé des arguments basés sur le gaz de Coulomb pour la construction de la formule de Kac et du tableau de Kac. L'existence du gaz de Coulomb a été supposée et nous n'avons pas construit le gaz de Coulomb de façon explicite.

Ces hypothèses (en particulier pour les règles de fusion) peuvent être supportées, au moins partiellement, en étudiant les équations caractéristiques pour les dimensions conformes

des opérateurs qui participent dans une fusion donnée. Ces équations sont obtenues à partir des équations différentiables pour les fonctions de corrélation à trois points.

Nous n'allons pas donner une liste complète des équations caractéristiques. Plutôt, les exemples que nous allons discuter constituent une confirmation générale de la consistance de l'approche suivi jusqu'ici.

Dans l'appendice C de l'article reporté en annexe B, la fonction de corrélation

$$\left\langle R^{(2)}(z_2)\Phi^q(z_3)R^{(1)}(z_1) \right\rangle \quad (4.165)$$

est analysée.

Ici $R^{(1)}(z_1)$ est un opérateur de désordre dont le module est complètement dégénéré au niveau $1/2$, et dont nous supposons que $R^{(1)}(z_1) = \Phi_{(1,2)(1,1)}(z_1)$ or $\Phi_{(1,1)(1,2)}(z_1)$. Nous indiquons comme $R^{(2)}(z_2)$ un opérateur de désordre générique et comme $\Phi^q(z_3)$, avec $q = 0, \pm 1$, un singlet or un opérateur de doublet 1.

La condition nécessaire pour que la fonction 4.165) soit non nulle est donnée par l'équation concernant les dimensions des opérateurs $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ et Φ^q :

$$\Delta_{R^{(2)}} - \Delta_{\Phi^q} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2q^2}{5} \right) \Delta_{R^{(1)}} = (-1)^q \frac{5}{4} \frac{h_1^{(2)}}{h_1^{(1)}} \Delta_{R^{(1)}}. \quad (4.166)$$

Ici, $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ et Φ^q sont les valeurs propres des modes zéro, définies en éq. (4.124).

Des résultats similaires ont été obtenus pour les fonctions données ci-dessous.

- $\left\langle \Phi_{(2)}^2 \Phi^0 \Phi_{(1)}^{-2} \right\rangle$. Nous supposons que le module de l'opérateur $\Phi_{(1)}^{-2}$ est dégénéré aux niveaux $1/5$ et 1, et donc $\Phi_{(1)}^{-2} = \Phi_{(2,1)(1,1)}$ or $\Phi_{(1,1)(2,1)}$. En tenant compte de cette dégénérescence nous obtenons la relation suivante :

$$\Delta_{\Phi^0} - \Delta_{\Phi_{(2)}^2} - \frac{1}{4} \Delta_{\Phi_{(1)}^2} = -\frac{5}{4} \frac{h_{1,2}^{(2)}}{h_{1,2}^{(1)}} \Delta_{\Phi_{(1)}^2}. \quad (4.167)$$

Les $h_{1,2}^{(2)}$ et $h_{1,2}^{(1)}$ sont les valeurs propres des opérateurs $\Phi_{(2)}^2$ et $\Phi_{(1)}^{-2}$ par rapport aux modes zéro A_0^1, A_0^{-1} (voir éq. (4.47))

- $\left\langle \Phi_{(2)}^2 \Phi^1 \Phi_{(1)}^2 \right\rangle$. Nous considérons le cas où $\Phi_{(1)}^2 = \Phi_{(2,1)(1,1)}$ or $\Phi_{(1,1)(2,1)}$. L'opérateur $\Phi_{(2)}^2$ est plus général car nous supposons seulement une dégénérescence à niveau $1/5$ alors que le deuxième niveau de dégénérescence n'est pas fixé. En utilisant les réflexions nous pouvons déduire que $\Phi_{(2)}^2$ appartient à la série :

$$\Phi_{(2)}^2 = \Phi_{(2k,1)(1,1)} \text{ ou } \Phi_{(1,1)(2k,1)}, \quad (4.168)$$

avec $k = 1, 2, 3, \dots$. Dans ce cas la fonction de corrélation $\left\langle \Phi_{(2)}^2 \Phi^1 \Phi_{(1)}^2 \right\rangle$ donne la relation suivante :

$$\Delta_{\Phi^1} = \Delta_{\Phi_{(2)}^2} + \frac{1}{2} \Delta_{\Phi_{(1)}^2}. \quad (4.169)$$

$$- \left\langle \Phi_{(3)}^1 \Phi_{(2)}^1 \Phi_{(1)}^{-2} \right\rangle.$$

De même, le module de l'opérateur $\Phi_{(1)}^{-2}$ est supposé être dégénéré aux niveaux $1/5$ et 1 .

Les opérateurs $\Phi_{(3)}^1$ et $\Phi_{(2)}^1$ sont généraux. La correspondante équation caractéristique se révèle être très simple. Cette fonction est non nulle si :

$$\Delta_{\Phi_{(2)}^1} = \Delta_{\Phi_{(3)}^1}. \quad (4.170)$$

Nous avons vérifié que les équations caractéristiques, données ci-dessus, sont en accord avec les arguments du gaz de Coulomb que nous avons exploité pour définir la structure S, D^1, D^2, R du tableau de Kac. Ces équations contiennent aussi quelques informations concrètes sur les règles de fusion de la théorie. Par exemple, si nous résolvons l'équation (4.169) nous arrivons à montrer que la fusion des opérateurs :

$$\Phi_{(1)}^2 = \Phi_{(1,1)(2,1)} \text{ et } \Phi_{(2)}^2 = \Phi_{(1,1)(2k,1)} \quad (4.171)$$

produit, en particulier, l'opérateur

$$\Phi^1 = \Phi_{(1,1)(2k-1,3)}. \quad (4.172)$$

Ce résultat est consistant avec le positionnement du doublet 1 dans la troisième ligne de la fig.(4.7). En plus, il est en accord avec l'addition des vecteurs, qui correspondent aux opérateurs dans la réalisation du gaz de Coulomb, et avec l'action des écrans. Une translation de $-\vec{e}_1$ doit être utilisée car le canal considéré n'est pas principal pour les fusions du gaz de Coulomb.

Les autres deux équations, (4.166) et (4.167), incluent, à part les dimensions des opérateurs, aussi les valeurs propres des modes zéro : $h_1^{(1)}$ et $h_1^{(2)}$ in Eq. (4.166) et $h_{1,2}^{(1)}$ et $h_{1,2}^{(2)}$ en Eq. (4.167).

Comme nous avons déjà souligné avant, les valeurs propres $(h_1, h_{2,1}, h_{1,2})$ caractérisent les opérateurs primaires et les représentations de l'algèbre parafermionique correspondantes, aussi bien que la dimension Δ (qui n' est rien d'autre que la valeur propre du mode zéro de Virasoro L_0). En particulier, la théorie possède des opérateurs primaires de la même nature, opérateurs de désordre par exemple, qui ont la même dimension Δ mais des valeurs de h_1 différentes. Tels opérateurs doivent être considérés comme différents. Ces exemples sont aussi présents dans la théorie Z_3 , étudiée par Fateev-Zamolodchikov [29] : l'égalité au niveau de Δ est brisée par des valeurs différents de h_1 , en particulier dans le secteur de désordre.

La présence de h_1 en éq. (4.166), et de $h_{1,2}$ in Eq. (4.167), complique l'analyse des correspondant règles de fusion.

Pour certains opérateurs, la correspondante valeur h_1 ou $h_{1,2}$ est connue. Ceci est le cas, par exemple, de $h_1^{(1)}$ de l'opérateur $R^{(1)}$ dans la fonction de corrélation $\langle R^{(2)} \Phi^q R^{(1)} \rangle$. Ou

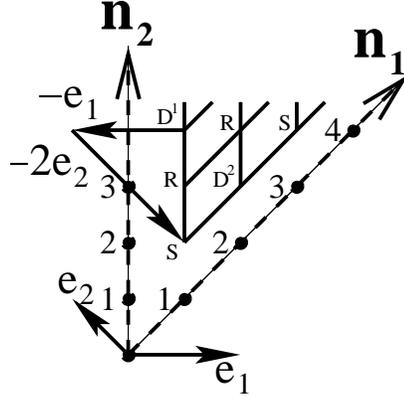


FIG. 4.9 – Le canal sous dominant dans le produit $\Phi_{(1,2)(1,1)} \cdot \Phi_{(1,2)(1,1)}$ est obtenu par l'action des écrans $-\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ sur le canal principal $\vec{\beta}_{(1,3)(1,1)}$.

$h_{1,2}^{(1)}$ de l'opérateur $\Phi_{(1)}^2$ dans les autres fonctions de corrélations, est connue par le calcul de dégénérescence au niveau $1/5$, réf. Eq. (4.94).

Pour ce qui concerne la fonction $\langle R^{(2)} \Phi^q R^{(1)} \rangle$, il y a deux canaux indépendants, $q = 0$ et $q = 1$. Si nous supposons $R^{(2)} = \Phi_{(1,2)(1,1)}$ or $R^{(2)} = \Phi_{(1,1)(1,2)}$, tous les h_1 en éq. (4.166) sont déterminés et les dimensions Δ_{Φ^q} peuvent être facilement calculées pour les deux canaux. Nous considérons alors la fonction :

– $\langle \Phi_{(1,2)(1,1)} \Phi^q \Phi_{(1,2)(1,1)} \rangle$. Pour le canal $q = 0$, nous obtenons par l'éq. (4.166) que

$$\Delta_{\Phi^0} = 0. \quad (4.173)$$

Ce résultat était attendu du moment que la fonction à deux points $\langle \Phi_{(1,2)(1,1)} \Phi_{(1,2)(1,1)} \rangle$ est non nulle. Plus intéressant est le canal $q = 1$: dans ce cas l'éq. (4.166) donne :

$$\Delta_{\Phi^1} = \Delta_{\Phi_{(1,3)(1,1)}}. \quad (4.174)$$

Ce résultat est en accord avec le fait que nous attendons que $\Phi_{(1,3)(1,1)}$ soit un doublet 1, et avec les règles du gaz de Coulomb. En effet, la multiplication $\Phi_{(1,2)(1,1)} \cdot \Phi_{(1,2)(1,1)}$ produit, dans le canal principal, l'opérateur associé à la position $\vec{\beta}_{(1,3)(1,1)} = \vec{\beta}_{(1,2)(1,1)} + \vec{\beta}_{(1,2)(1,1)}$; le canal $q = 0$ suit le principal par une translation $-\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, comme montré en fig.(4.9).

La correspondante équation caractéristique pour les deux canaux est résolue par :

$$\begin{aligned} \Delta_{\Phi^0} &= \Delta_{\Phi_{(1,2)(1,2)}}, \\ \Delta_{\Phi^1} &= \Delta_{\Phi_{(0,2)(1,2)}}. \end{aligned} \quad (4.175)$$

Encore une fois, le remplissage du réseau et les règles de fusion sont confirmées.

Il est intéressant de noter que l'opérateur $\Phi_{(0,2)(1,2)}$ n'est pas un opérateur physique mais il est également admis par l'éq. (4.166). Cela vient du fait que l'équation caractéristique ne fournit aucune information sur les constantes de structure de l'algèbre des opérateurs ; en particulier, ces constantes de structure peuvent s'annuler. Dans le cas que nous sommes en train de considérer, nous attendons que la fonction de corrélation $\langle \Phi_{(1,1)(1,2)} \Phi_{(0,2)(1,2)} \Phi_{(1,2)(1,1)} \rangle$ soit nulle.

4.10.1 Formule générale pour les valeurs propres dans le secteur de désordre

Différemment des cas particuliers que nous avons considérés ci-dessus, les valeurs propres h ne sont pas généralement connues. Le problème n'est donc pas seulement de fixer Δ , mais aussi les $h_1^{(2)}$ de $R^{(2)}$ in éq. (4.166) et $h_{1,2}^{(2)}$ de $\Phi_{(2)}^2$ en éq. (4.167).

Nous nous concentrons sur l'éq. (4.166). Un canal peut être utilisé pour déterminer $h_1^{(2)}$, en faisant l'hypothèse d'une valeur pour Δ_{Φ^0} choisie à une certaine position dans le tableau de Kac. L'autre canal avec Φ^1 (dans le quel on a le même $h_1^{(2)}$) peut servir pour tester la présence de Δ_{Φ^1} dans la position correcte sur le tableau de Kac, en ayant calculé sa valeur à partir de l'équation caractéristique. De cette façon il est possible de faire quelque progrès dans le remplissage du réseau, indépendamment de l'hypothèse du gaz de Coulomb.

Le problème peut être contourné. Si nous assumons les résultats de l'analyse basée sur le gaz de Coulomb, dans la quelle nous avons établi la formule de Kac, nous pouvons utiliser l'équation caractéristique pour déterminer la formule générale pour les valeurs propres de h .

Avec cette approche nous avons réussi à trouver une formule pour les opérateurs de désordre. Nous renvoyons à l'article en annexe B pour le détail de la procédure que nous avons suivi. La formule résultante est donnée ci-dessous.

Nous pouvons caractériser chaque opérateur de désordre selon sa position relative au singlet le plus proche. Comme montré en fig.(4.10), il y a quatre types d'opérateur de désordre : R_{\uparrow} , R_{\downarrow} , R_{\leftarrow} et R_{\rightarrow} . La formule générale des valeurs propres h_1^X pour un opérateur de désordre $\Phi_{(n_1, n_2)(n'_1, n'_2)}$ du type X prend la forme :

$$\begin{aligned}
 h_1^{\downarrow} &= A [4 (n_1 + n_2) p - 4 (n'_1 + n'_2)(p + 2) + p + 1], \\
 h_1^{\uparrow} &= A [-4 (n_1 + n_2) p + 4 (n'_1 + n'_2)(p + 2) + p + 1], \\
 h_1^{\leftarrow} &= A [4 n_1 p - 4 n'_1 (p + 2) + p + 1], \\
 h_1^{\rightarrow} &= A [-4 n_1 p + 4 n'_1 (p + 2) + p + 1],
 \end{aligned} \tag{4.176}$$

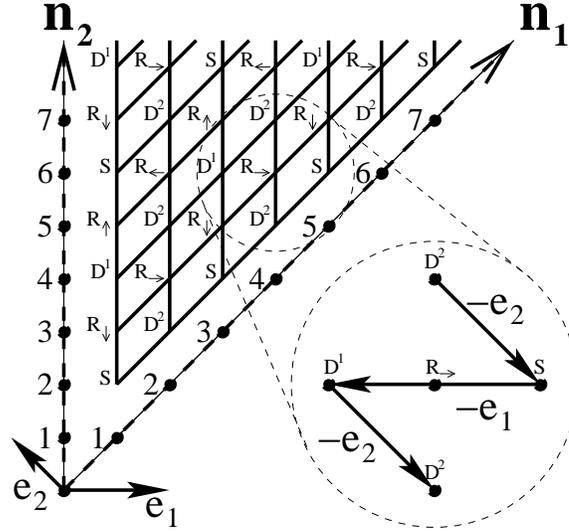


FIG. 4.10 – Chaque opérateur de désordre est entouré par trois doublets et un singlet. La flèche attachée à chaque opérateur R montre sa position par rapport à l'opérateur de singlet.

où

$$A = \frac{1}{80} \frac{\sqrt{5} 2^{\frac{4}{5}}}{\sqrt{p-3} \sqrt{p+5}}. \quad (4.177)$$

Nous soulignons que la symétrie (4.164) du tableau de Kac est aussi respectée par l'éq. (4.176).

Une vérification de cette formule (basée sur un calcul explicite de dégénérescence) est donnée dans l'article de l'annexe B.

4.11 Discussion

Dans ce chapitre nous avons construit et analysé en détail les théories parafermioniques avec symétrie Z_5 qui sont basées sur la deuxième solution associative de l'algèbre chirale.

Le résultat principal est la formule de Kac pour les dimensions des opérateurs primaires qui constituent les représentations de l'algèbre. Cette formule est donnée dans la forme (4.146). En particulier, à travers des calculs explicites de dégénérescence des modules des

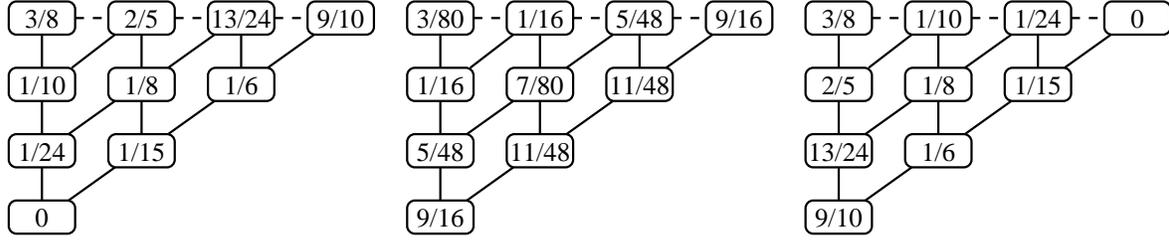


FIG. 4.11 – Dimensions conformes Δ des champs de la théorie Z_5 avec $p = 4$ et $c = 3/2$. Les conventions pour les indices $(n_1, n_2)(n'_1, n'_2)$ sont les mêmes de figure 4.7.

Verma, nous avons déterminé les termes de bord B de la théorie :

$$\begin{aligned}
 \text{Secteur de singlet : } & B_S = 0 & n'_1 - n_1 = 0 \pmod{2}, & n'_2 - n_2 = 0 \pmod{4} \\
 \text{Secteur de doublet 1 : } & B_{D^1} = \frac{1}{10} & n'_1 - n_1 = 0 \pmod{2}, & n'_2 - n_2 = 2 \pmod{4} \\
 \text{Secteur de doublet 2 : } & B_{D^2} = \frac{3}{20} & n'_1 - n_1 = 1 \pmod{2}, & n'_2 - n_2 = 0 \pmod{2} \\
 \text{Secteur du désordre : } & B_R = \frac{1}{8} & n'_1 - n_1 = 0 \pmod{1}, & n'_2 - n_2 = 1 \pmod{2}
 \end{aligned} \tag{4.178}$$

La distribution des opérateurs des différents secteurs est montrée en fig. (4.7) pour la couche principale $(1, 1)(n'_1, n'_2)$. Cette figure contient toute l'information du moment que les autres couches, avec $(n_1, n_2) \neq (1, 1)$, sont obtenues par translation.

De façon similaire au cas de la théorie Z_3 étudiée par Fateev et Zamolodchikov, nous faisons l'hypothèse que la série infinie des théories Z_5 , $p = 4, 5, 6$ étant l'indice du modèle minimal, décrit les points multi-critiques dans les modèles statistiques avec symétrie Z_5 .

Le premier et plus simple modèle de cette série est celui avec $p = 4$, avec charge centrale $c = \frac{3}{2}$. Les trois couches de son tableau de Kac sont montrés en fig.(4.8). Les valeurs explicites des dimensions conformes des primaires de l'algèbre parafermionique sont montrées en fig.(4.11). Ces opérateurs sont liés par la symétrie (4.164), que nous avons discuté dans la section (4.9.2). Nous remarquons aussi que les premiers et les deuxièmes descendants des opérateurs en fig.(4.11) restent des primaires de Virasoro. Leur dimension est obtenue à partir des celles de fig. (4.11) en sommant :

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{5} \text{ et } \frac{3}{5} & \text{ pour } S, \\
 \frac{2}{5} \text{ et } \frac{4}{5} & \text{ pour } D^1, \\
 \frac{1}{5} \text{ et } \frac{3}{5} & \text{ pour } D^2, \\
 \frac{1}{2} & \text{ pour } R,
 \end{aligned} \tag{4.179}$$

en accord avec la structure des modules, discutée en section(4.5). Les valeurs explicites sont montrées en fig. (4.12).

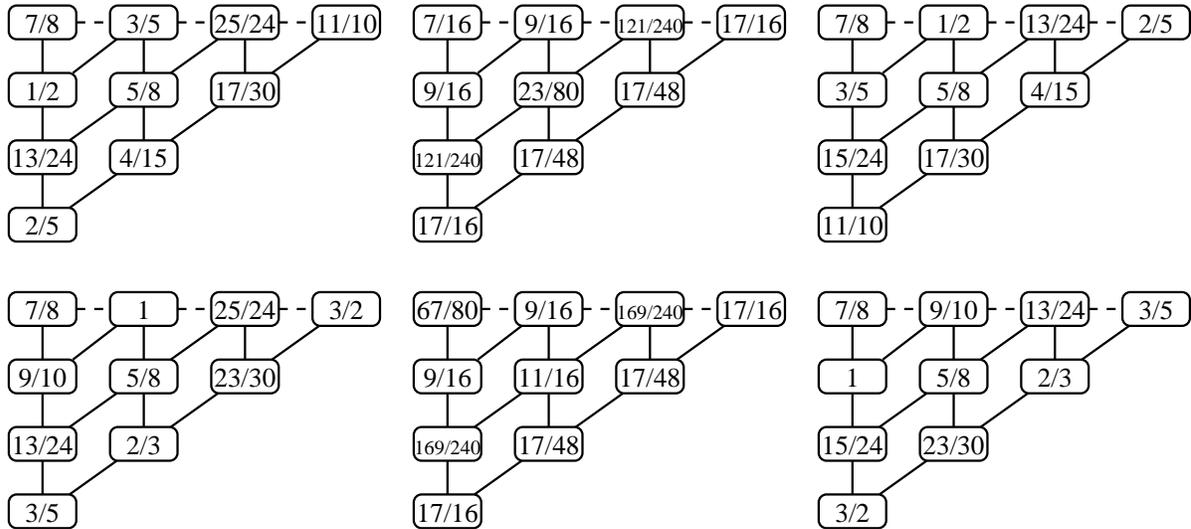


FIG. 4.12 – Dimensions conformes des champs qui sont primaires par rapport à l'algèbre de Virasoro .

Nous pouvons conjecturer que il est possible de modifier opportunément les systèmes statistiques sur réseau, décrits par la théorie de Fateev et Zamolodchikov pour les mener vers la multicriticalité en préservant au même temps la symétrie Z_N . Si ceci est vrai, alors le point tri-critique qui correspond à la théorie Z_5 avec $p = 4$ est l'exemple les plus simple à découvrir.

Dans le prochaine chapitre, nous allons discuter la généralisation, tout à fait non triviale, pour $N > 5$.

Chapitre 5

Théories parafermioniques avec symétrie Z_N

Les théories conformes associées à la deuxième solution associative de l'algèbre parafermionique Z_N (voir section (4.3)) sont décrites par le coset [87, 88] :

$$\frac{SO_n(N) \times SO_2(N)}{SO_{n+2}(N)}, \quad (5.1)$$

dont la charge centrale est :

$$c = (N-1) \left(1 - \frac{N(N-2)}{p(p+2)} \right), \quad (5.2)$$

$$p = N - 2 + n. \quad (5.3)$$

En particulier, la formule de Kac est basée sur le réseau des poids de l'algèbre de Lie du groupe $SO(N) : B_{\frac{N-1}{2}}$ pour $N = 2r + 1$ et $D_{\frac{N}{2}}$ pour $N = 2r$ (avec $r \geq 3$).

Dans le chapitre précédent nous avons considéré le cas particulier de la théorie Z_5 , basée sur l'algèbre de Lie B_2 . Afin de construire cette théorie, nous avons mis en œuvre une suite de méthodes différentes, du calcul explicite des dégénérescences à l'étude des équations caractéristiques.

Dans ce chapitre, nous complétons ce travail en présentant la classe entière des théories avec symétrie Z_N , $N > 5$. Comme nous allons la montrer, la généralisation des résultats concernant la théorie Z_5 n'est pas directe et elle nécessite une utilisation systématique des propriétés du gaz de Coulomb.

Nous allons suivre la même démarche du chapitre précédent. Après avoir fixé le contenu du spectre de la théorie, nous déterminons la structure des modules de représentation et les règles de commutation des modes parafermioniques pour N arbitraire. Nous allons ensuite

présenter séparément la construction de la théorie avec N impair, associée à l'algèbre de Lie $B_{(N-1)/2}$, et de la théorie avec N pair, associée à l'algèbre de Lie $D_{N/2}$.

5.1 Espace de représentation.

Comme dans le cas $N = 5$, nous attendons de trouver parmi les primaires de l'algèbre (4.27)–(4.28) les représentations usuelles du groupe Z_N . Pour N impair on aura les champs de singlet

$$\Phi^0(z, \bar{z}) \tag{5.4}$$

et les champs de doublet

$$\Phi^{\pm q}(z, \bar{z}), \quad q = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}, \tag{5.5}$$

où nous indiquons comme Φ^q le champ primaire avec charge q . Pour N pair, la question du spectre de la théorie devient en fait beaucoup plus délicate. Nous montrerons en section (5.5) que l'espace de représentation de cette théorie est caractérisé par deux types de singlet, Φ^0 et $\Phi^{N/2}$ et $N/2 - 2$ doublets Φ^q , $q = 1, \dots, N/2 - 1$.

Comme nous avons discuté dans le chapitre précédent, la théorie est invariante sous les transformations du groupe diédral D_N et elle contient les opérateurs associés aux N réflexions Z_2 du groupe D_N :

$$\{R_a(z, \bar{z}), \quad a = 1, \dots, N\}. \tag{5.6}$$

Nous renvoyons à la section (4.7) pour la discussion sur le rôle joué par ce type d'opérateurs.

Pour étudier les représentations dégénérées de l'algèbre (4.27)–(4.29) nous devons analyser la structure des modules pour N arbitraire.

5.2 Secteurs de singlet et de doublet.

5.2.1 Structure des modules

Nous positionnons d'abord les champs chiraux $\Psi^{\pm k}(z)$, $k = 1, 2, \dots, [N/2]$, et le tenseur d'énergie-impulsion $T(z)$ dans le module d'identité. Les niveaux des ces opérateurs correspondent aux dimensions conformes $\Delta_{\pm k}$ (*cfr.* éq.(4.31)).

Pour compléter le module d'identité avec les niveaux restants, il suffit d'observer que la monodromie abélienne des champs $\Psi^{\pm k}$ fixe à 1 l'espacement des niveaux dans chaque secteur.

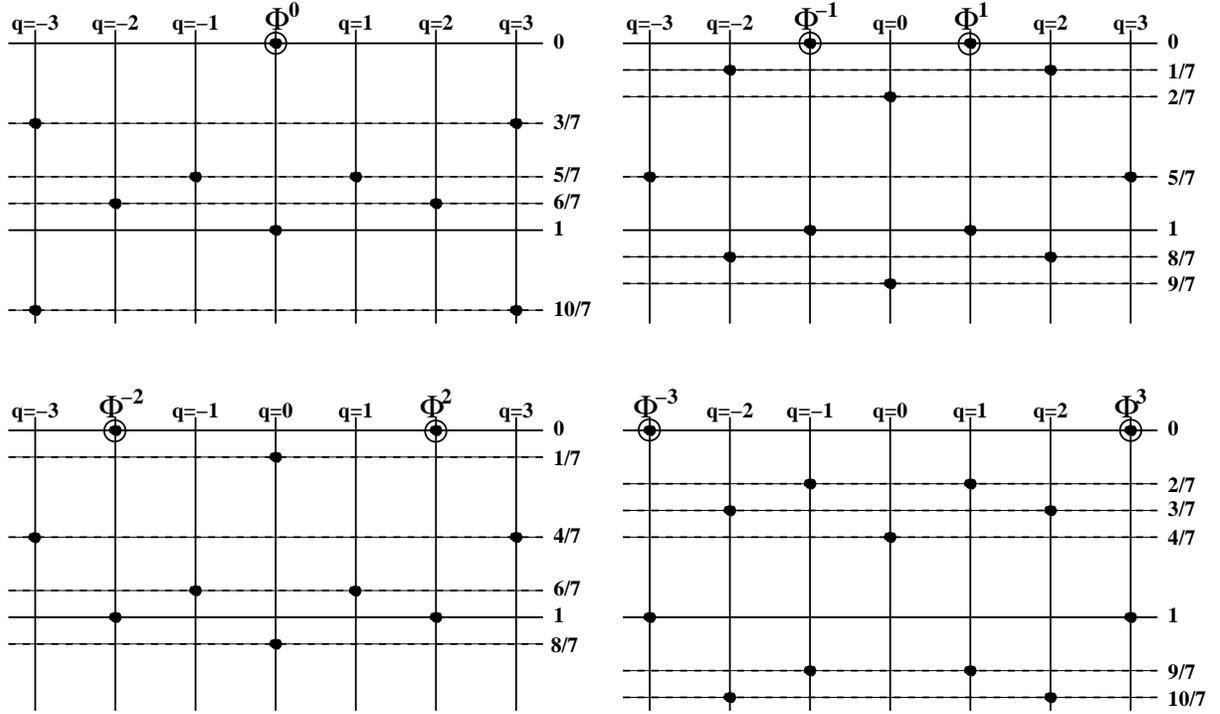


FIG. 5.1 – Modules de représentation pour $N = 7$. Nous montrons la structure des niveaux pour les modules de singlet (en haut à gauche), de doublet 1 (en haut à droite), de doublet 2 (en bas à gauche) et de doublet 3 (en bas à droite).

Dans le module d'identité il n'y a pas d'états sur les niveaux entre 0 et $\Delta_{\pm 1}$, mais cela n'est plus vrai pour un opérateur de singlet Φ^0 quelconque.

En indiquant comme δ_k^0 le premier niveau descendant du secteur de charge $\pm k$, nous obtenons par l'éq. (4.31) que :

$$\delta_k^0 = -\frac{2k^2}{N} \bmod 1. \quad (5.7)$$

Les valeurs δ_k^0 fixent complètement la structure des niveaux pour un module de singlet général. En figs (5.1) et (5.2) nous montrons le module de singlet pour $N = 7$ et $N = 6$.

La structure des modules des doublets est déduite en examinant les sous modules du module d'identité. Nous trouvons :

$$\delta_k^q = 2 \frac{(q^2 - k^2)}{N} \bmod 1, \quad (5.8)$$

où δ_k^q est le premier niveau dans le module du doublet q qui correspond au secteur de charge k . En fig.(5.1), nous montrons les trois possibles doublets pour $N = 7$.

On peut facilement observer en utilisant la relation (5.8) que $\delta_k^q = \delta_{N/2-k}^{N/2-q}$. Pour la théorie Z_6 , par exemple, cela implique que les structures des modules (Φ^{-1}, Φ^1) et (Φ^{-2}, Φ^2) sont

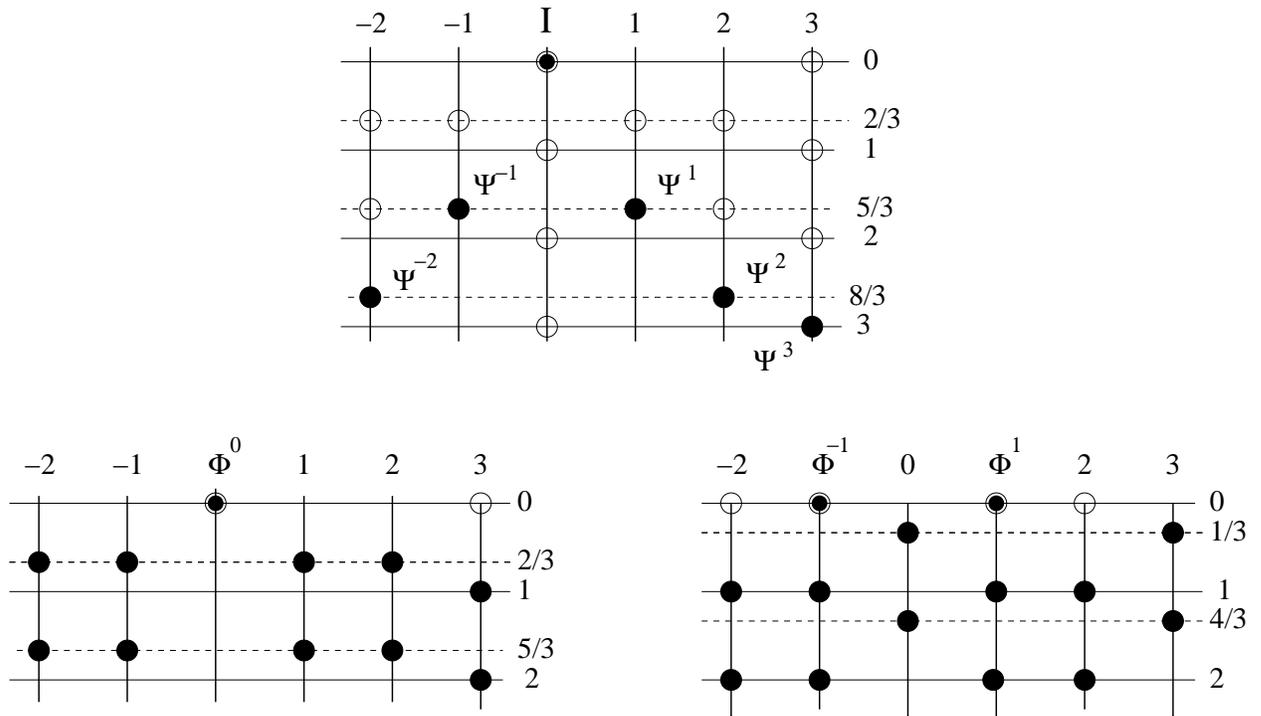


FIG. 5.2 – Modules de singlet et de doublet dérivés par la structure des sous modules de l'opérateur d'identité. Les niveaux vides sont indiqués avec des cercles vides

identiques. Dans ce cas, nous pouvons définir seulement un module du doublet, celui du doublet 1 par exemple, en lieu de deux (voir fig. (5.2)). La même observation vaut aussi pour les modules des opérateurs Φ^0 et Φ^3 . Pour N pair, nous pouvons définir les champs primaires $\Phi^{\pm q}$, avec ses propres modules, seulement pour $0 \leq q \leq [N/4]$. Nous allons retourner sur ce point quand nous traiterons plus en détail le cas de N pair.

5.2.2 Algèbre des modes.

En accord avec la structure des modules, les développements des champs chiraux dans chaque secteur pour N général prennent la forme :

$$\Psi^k(z)\Phi^q(0) = \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_k - \delta_{k+q}^q + n}} A_{-\delta_{k+q}^q + n}^k \Phi^q(0), \quad (5.9)$$

$$A_{-\delta_{k+q}^q + n}^k \Phi^q(0) = 0, \quad n > 0. \quad (5.10)$$

Nous rappelons ici que les sommes $k + q$ des charges Z_N sont toujours définies modulo N . L'éq. (5.10) est la condition habituelle pour que les champs de représentation soient primaires de l'algèbre parafermionique.

L'action des modes dans chaque secteur peut être donnée en termes des intégrales de contour :

$$A_{-\delta_{k+q}^q + n}^k \Phi^q(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz (z)^{\Delta_k - \delta_{k+q}^q + n - 1} \Psi^k(z)\Phi^q(0). \quad (5.11)$$

A partir de l'éq. (5.8), on peut voir que le niveau δ_{k+q}^q est nul pour $k = -2q$. Pour chaque doublet $\Phi^{\pm q}$ il y a alors un mode zéro $A_0^{\mp 2q}$ qui agit entre les deux états au sommet du module :

$$A_0^{\mp 2q} \Phi^{\pm q}(0) = h_q \Phi^{\mp q}(0). \quad (5.12)$$

Les valeurs propres h_q définies dans cette équation caractérisent avec les dimensions conformes les représentations de l'algèbre.

En utilisant la relation (5.11) nous avons calculé la forme générale des relations de commutation des modes. Je me contente ici d'en montrer les résultats car les techniques utilisées sont celles présentées en [19]. Je renvoie le lecteur à les appendices en annexe B, où nous donnons des exemples sur la dérivation de ces règles.

Nous définissons les coefficients D_α^l par le développement suivant :

$$(1-x)^\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} D_\alpha^l x^l. \quad (5.13)$$

A partir de l'éq. (4.27), on pourrait montrer que les modes Ψ^k et $\Psi^{k'}$ ($k, k' = \pm 1, 2, \dots, \pm [\frac{N}{2}]$)

et $k + k' \neq 0$) satisfont les relations :

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} D_{\alpha}^l \left(A_{-\delta_{k+k'+q}^{k'+q} + s(k, k', q) + n - l}^k A_{-\delta_{k'+q}^{k'+q} + m + l}^{k'} - A_{-\delta_{k'+k+q}^{k'+q} + s(k', k, q) + m - l}^{k'} A_{-\delta_{k+q}^k + n + l}^k \right) \Phi^q \\ &= \lambda_{k+k'}^{k, k'} \eta^{(k, k', q)}(n, m) A_{-\delta_{k+k'+q}^k + t(k, k', q) + n + m}^{k+k'} \Phi^q \quad (k + k' \neq 0) \end{aligned} \quad (5.14)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \Delta_k + \Delta_{k'} - \Delta_{k+k'} - 2 \quad (5.15) \\ \eta^{(k, k', q)}(n, m) &= \Delta_k - \delta_{k+q}^q + n - 1 - \frac{\Delta_{k+k'} + \Delta_k - \Delta_{k'}}{2\Delta_{k+k'}} \left(\Delta_{k+k'} - \delta_{k+k'+q}^q + t(k, k', q) + n + m \right). \end{aligned}$$

Dans l'éq. (5.14), les entiers $s(k, k', q)$ et $t(k, k', q)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} s(k, k', q) &= \delta_{k+k'+q}^{k'+q} - \delta_{k+q}^q + \alpha \\ t(k, k', q) &= \delta_{k+k'+q}^q - \delta_{k+q}^q - \delta_{k'+q}^q + \alpha \end{aligned} \quad (5.16)$$

Les autres règles de commutation entre les modes des parafermions Ψ^k et Ψ^{-k} ($k = 1, 2, \dots, [\frac{N}{2}]$) réalisent la connexion avec l'algèbre de Virasoro, comme on peut voir à partir de l'éq.(4.28). En définissant $u(k, q)$ comme :

$$u(k, q) = \delta_q^{-k+q} - \delta_{k+q}^q + \beta \quad (5.17)$$

nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} D_{\beta}^l \left(A_{-\delta_q^{-k+q} + u(k, q) + n - l}^k A_{-\delta_{-k+q}^{-k} + m + l}^{-k} + A_{-\delta_q^{-k+q} + u(-k, q) + m - l}^{-k} A_{-\delta_{k+q}^k + n + l}^k \right) \Phi^q \\ &= \left(\kappa(n) \delta_{n+m+u'(k, q), 0} + \frac{2\Delta_k}{c} L_{n+m+u'(k, q)} \right) \Phi^q \end{aligned} \quad (5.18)$$

avec

$$\begin{aligned} \beta &= 2\Delta_k - 3 \quad (5.19) \\ \kappa(n) &= \frac{1}{2} \left(\Delta_k - \delta_{k+q}^q + n - 1 \right) \left(\Delta_k - \delta_{k+q}^q + n - 2 \right). \end{aligned}$$

Dans l'éq. (5.18) nous définissons $u'(k, q) = -1 + u(k, q)$ pour $k \neq -2q$, ou $u'(k, q) = u(k, q)$ pour $k = -2q$.

Dans l'éq. (5.18), les L_n sont les générateurs des transformations conformes. Ils forment l'algèbre de Virasoro (1.32). Enfin, l'ensemble des relations des commutations dans les secteurs de doublet et de singlet est complété par les commutations entre les modes A^k et les L_n :

$$\left(A_{-\delta_{k+q}^k + m}^k L_n - L_n A_{-\delta_{k+q}^k + m}^k \right) \Phi^q = \left[(1 - \Delta_{\Psi^k})n + m - \delta_{k+q}^q \right] A_{-\delta_{k+q}^k + m + n}^k \Phi^q. \quad (5.20)$$

Nous ferons souvent référence à l'éq. (5.14) en utilisant la notation $\{\Psi^k, \Psi^{k'}\} \Phi^q$.

Les règles de commutation (5.14)-(5.20) permettent de déterminer plusieurs éléments de matrice qui interviennent dans l'analyse de dégénérescence des modules.

5.3 Le secteur de désordre.

Les propriétés principales de ce secteur ont été traitées dans la section (4.7). La généralisation des développements (4.120) et (4.121) est directe :

$$\Psi^k(z)R_a(0) = \sum_n \frac{1}{(z)^{\Delta_k + \frac{n}{2}}} A_{\frac{n}{2}}^k R_a(0), \quad k = 1, 2, \dots, \left[\frac{N}{2} \right]. \quad (5.21)$$

En faisant une continuation analytique de z autour de 0 sur les deux parties de l'éq.(5.21), nous obtenons le développement du produit $\Psi^{-k}(z)R_a(0)$:

$$\Psi^{-k}(z)R_a(0) = \sum_n \frac{(-1)^n}{(z)^{\Delta_k + \frac{n}{2}}} A_{\frac{n}{2}}^1 \mathbf{U}^k R_a(0), \quad k = 1, 2, \dots, \left[\frac{N}{2} \right], \quad (5.22)$$

où \mathbf{U} est une matrice $N \times N$ telle que $\mathbf{U}R_a(0) = R_{a-1}(0)$.

Les modes des opérateurs $A_{\frac{n}{2}}^k$ sont exprimés en termes des intégrales de contour

$$A_{\frac{n}{2}}^k R_a(0) = \frac{1}{4\pi i} \oint_{C_0} dz (z)^{\Delta_k + \frac{n}{2} - 1} \Psi^k(z)R_a(0), \quad (5.23)$$

où le parcours d'intégration tourne deux fois autour de l'opérateur à l'origine $R_a(0)$.

Dans les calculs de dégénérescence nous avons utilisé deux types de relation : celle entre les modes de deux champs chiraux Ψ^1 ,

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} D_{\alpha\beta}^l \left(A_{\frac{n-l}{2}}^1 A_{\frac{m+l}{2}}^1 + A_{\frac{m-l}{2}}^1 A_{\frac{n+l}{2}}^1 \right) R_a \\ &= \lambda_2^{1,1} 2^{\Delta_2 - 3} A_{\frac{n+m}{2}}^2 R_a + (-1)^n 2^{-\Delta_2 - 2} \left[\kappa(n) \delta_{n+m,0} + \frac{16\Delta_1}{c} L_{\frac{n+m}{2}} \right] \mathbf{U}^{-1} R_a, \end{aligned} \quad (5.24)$$

et celle entre les modes de Ψ^1 et de Ψ^k , avec $k = 2, 3, \dots, \left[\frac{N}{2} \right]$,

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} D_{\nu\mu}^l \left(A_{\frac{n-l}{2}}^k A_{\frac{m+l}{2}}^1 - A_{\frac{m-l}{2}}^1 A_{\frac{n+l}{2}}^k \right) R_a \\ &= (-1)^{n+m} 2^{\mu-\nu-2} \lambda_{k+1}^{k,1} \left[(2\Delta_k + n - 1) - \frac{\mu - \nu - 2}{2} - a_1(2\Delta_{k+1} + n + m) \right] A_{\frac{n+m}{2}}^{k+1} R_a \\ &+ (-1)^m 2^{\nu-\mu-2} \lambda_{1-k}^{-k,1} \left[(2\Delta_k + n - 1) - \frac{\nu - \mu - 2}{2} - a_2(2\Delta_{1-k} + n + m) \right] A_{\frac{n+m}{2}}^{1-k} \mathbf{U}^k R_a. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Les coefficients $D_{\nu\mu}^l$ sont définis par

$$(1-x)^\nu (1+x)^\mu = \sum_{l=0}^{\infty} D_{\nu\mu}^l x^l. \quad (5.26)$$

Dans l'éq. (5.24) nous avons utilisé les notations :

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\Delta_1 - \Delta_2 - 1, \\ \beta &= 2\Delta_1 - 3, \\ \kappa(n) &= (2\Delta_1 + n - 1)(2\Delta_1 + n - 2) - (2\Delta_1 + n - 1)(\Delta_2 + 1) + \frac{(\Delta_2 + 1)(\Delta_2 + 2)}{4}, \end{aligned}$$

et dans l'éq. (5.25) :

$$\begin{aligned}\mu &= \Delta_k + \Delta_1 - \Delta_{k+1} - 2, \\ \nu &= \Delta_{-k} + \Delta_1 - \Delta_{1-k} - 2, \\ a_1 &= \frac{\Delta_{k+1} + \Delta_k - \Delta_1}{2\Delta_{k+1}}, \\ a_2 &= \frac{\Delta_{1-k} + \Delta_k - \Delta_1}{2\Delta_{1-k}}.\end{aligned}$$

5.4 Théories parafermioniques Z_N , N impair.

Dans le chapitre précédent nous avons calculé les dimensions des opérateurs fondamentaux de la théorie Z_5 , c'est à dire le singlet, le doublet 1, le doublet 2 et le désordre.

Les calculs de dégénérescence sont de plus en plus compliqués en augmentant N et la détermination de la dimension des tous les opérateurs fondamentaux deviennent très difficile pour N grand.

En analysant les dégénérescences aux premiers niveaux, nous avons trouvé les dimensions conformes des opérateurs fondamentaux de singlet et de doublet 1 pour $N = 7$, de doublet $(N - 1)/2$ et de l'opérateur du désordre pour N impair. Ces calculs sont très similaires à ceux dans la section (4.6). Pour cette raison, nous avons choisi d'être concis et de discuter seulement les résultats. Je renvoie à l'article reporté en annexe C pour les détails.

5.4.1 Opérateur d'identité.

L'opérateur d'identité I , avec dimension $\Delta_{\Phi_0} = 0$, constitue le singlet fondamental, voire celui avec les niveaux de dégénérescence les plus bas possibles. Malgré la valeur triviale de sa dimension, il est importante d'analyser le module d'identité : les niveaux et les secteurs des sous modules dégénérés donnent des informations importantes pour la construction de la théorie générale.

Nous avons complété l'analyse du module de l'opérateur d'identité pour $N = 7$: ce module présente un doublet 3 singulier au niveau $3/7$, et deux doublets 1 singuliers au niveau $5/7$.

5.4.2 Doublet 1 fondamental de la théorie $N = 7$.

L'analyse complète des dégénérescences du module du doublet 1 fondamental a été possible pour $N = 7$.

En imposant un dégénérescence

- au niveau $1/7$ dans le secteur de charge $q = 2$,
- au niveau $2/7$ dans le secteur $q = 0$,
- au niveau 1 dans le secteur de charge $q = 1$,

nous trouvons trois solutions pour les dimensions conformes Δ_{Φ^1} du doublet $1 \Phi^1$ fondamental :

$$\Delta_{\Phi^1}^{(\pm)} = \frac{1}{42} \left(36 - c \pm \sqrt{(c-6)(c-216)} \right). \quad (5.27)$$

et

$$\Delta_{\Phi^1} = \frac{1}{84} \left(128 + 5c \pm \sqrt{25c^2 + 680c + 16384} \right). \quad (5.28)$$

Nous allons montrer que les solutions (5.27) sont consistantes avec la structure de la théorie que nous sommes en train de construire, alors que la (5.28) doit être refusée comme solution non physique. Pour cela il est utile de récrire les (5.27) en termes de la paramétrisation (5.3) :

$$\Delta_{\Phi^1}^{(+)} = \frac{5p+7}{7p}, \quad (5.29)$$

$$\Delta_{\Phi^1}^{(-)} = \frac{5p-5}{7p+2}. \quad (5.30)$$

5.4.3 Doublet $(N-1)/2$ fondamental.

En écrivant $N = 2r + 1$, le doublet avec la plus grande charge Z_N est le doublet r . Le fait que le doublet r a ses deux sommets adjacents facilite les calculs et nous avons réussi à déterminer la dimension conforme pour chaque valeur de r .

Nous considérons d'abord le cas $N = 7$ dont le doublet 3 est montré en fig.(5.1).

Le module du doublet 3 a un vecteur singulier :

- au niveau $2/7$ dans le secteur de charge $q = 1$,
- au niveau $3/7$ dans le secteur $q = 2$,
- au niveau 1 dans les secteur de charge $q = 3$

Nous avons deux solutions pour la dimension conforme Δ_{Φ^3} :

$$\Delta_{\Phi^3}^{(\pm)} = \frac{1}{70} \left(36 - c \pm \sqrt{(c-6)(c-216)} \right). \quad (5.31)$$

Ces solutions, si récrites en termes de la paramétrisation (5.3), prennent la forme :

$$\Delta_{\Phi^3}^{(+)} = \frac{3p+7}{7p}, \quad (5.32)$$

$$\Delta_{\Phi^3}^{(-)} = \frac{3p-5}{7p+2}. \quad (5.33)$$

En prenant en compte les similitudes entre le doublet fondamental $r = \frac{N-1}{2}$ pour $N = 5$ (voir section (4.6.2)) et $N = 7$ (voir annexe C), nous pouvons conjecturer la structure de ce

module dans le cas général. Nous cherchons r sous modules dégénères mais il se trouve que deux conditions de dégénérescence suffisent pour fixer la valeur propre h_r , définie en (5.12), et la dimension conforme Δ_{Φ^r} . Ces conditions sont obtenues en imposant respectivement :

1. la complète dégénérescence du niveau $\delta_{r-1}^r = 1 - 4/N$, éq. (5.8), dans le secteur de charge $r-1$. Nous assumons implicitement $r-2$ conditions, qui agissent entre le niveau 0 et δ_{r-1}^r , telles que ces niveaux deviennent vides après avoir annulé les correspondant état singuliers. Il restent alors deux façons de descendre au niveau δ_{r-1}^r :

$$A_{-\delta_{r-1}^r}^{-1} \Phi^r \quad \text{et} \quad A_{-\delta_{r-1}^r}^{-2} \Phi^{-r}. \quad (5.34)$$

Par la relation $\{\Psi^{-1}, \Psi^{-1}\} \Phi^{-r}$, avec $n = 1$ et $m = 0$, ces deux états sont proportionnels entre eux. Pour avoir une dégénérescence complète il suffit de demander que l'état :

$$\chi_{-\delta_{r-1}^r}^{r-1} \equiv A_{-\delta_{r-1}^r}^{-1} \Phi^r \quad (5.35)$$

soit primaire. Cette condition fixe la valeur propre h_r .

2. Une dégénérescence du doublet r au niveau 1. Ici nous supposons d'avoir $r-2$ conditions concernant les niveaux entre δ_{r-1}^r et 1. Après avoir annulé les correspondants états singuliers, ces niveaux restent vides. Dans ce cas, l'état au niveau 1 a la forme :

$$\chi_{-1}^r = aL_{-1} \Phi^r + bA_{-1}^{-1} \Phi^{-r}. \quad (5.36)$$

Si nous demandons que l'état (5.36) soit primaire, la dimension conforme Δ_{Φ^r} du doublet r est fixée.

Les $r-2$ conditions de dégénérescence déterminent les valeurs de certains éléments de matrice qui concernent les niveaux qui sont plus en bas.

Ce scénario a été vérifié explicitement dans le cas $N = 9$.

En suivant la procédure que nous venons d'exposer, nous trouvons comme solutions pour les dimensions conformes :

$$\Delta_{\Phi^r}^{(\pm)} = \frac{1}{2} + \frac{1-c}{2N(N-2)} \pm \frac{1}{2N(N-2)} \sqrt{(c-N+1)(c-(N-1)^3)}, \quad (5.37)$$

qui généralisent l'éq. (5.31).

Avec la paramétrisation (5.3) ces solutions deviennent

$$\Delta_{\Phi^r}^{(+)} = \frac{1}{2} \frac{(N-1)(N+p)}{Np}, \quad (5.38)$$

$$\Delta_{\Phi^r}^{(-)} = \frac{1}{2} \frac{(N-1)(p+2-N)}{(p+2)N}. \quad (5.39)$$

Nous soulignons que les hypothèses faites pour déterminer la dimension Δ_{Φ^r} pour r arbitraire vont être validées par l'accord entre les éqs. (5.38)–(5.39) et la formule de Kac que nous donnons dans les prochaines sections.

5.4.4 Opérateurs de désordre fondamentaux.

La structure du module d'un opérateur de désordre R_a ($a = 1, 2, \dots, N$) est, comme nous avons vu en section (4.7), relativement simple : chaque module a N sommets associés aux composants R_a et il y a seulement des niveaux entiers et demi entiers. Nous avons aussi $(N-1)/2$ modes zéro A_0^k (avec $k = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$), associés au parafermion Ψ^k qui agit entre les N sommets du module :

$$A_0^k R_a = h_k U^{2k} R_a. \quad (5.40)$$

Cette équation définit les valeurs propres h_k . Comme dans le cas $N = 5$, les valeurs propres h_1 et h_2 sont liées par une relation qui ne dépend pas des détails de la représentation. En posant $n = m = 0$ dans la (5.24), nous obtenons que :

$$2h_1^2 = \lambda_2^{1,1} 2^{\Delta_2-3} h_2 + 2^{-\Delta_2-2} \left[\kappa(0) + \frac{16\Delta_1}{c} \Delta_R \right]. \quad (5.41)$$

Nous concluons que chaque représentation R_a est caractérisée par sa dimension Δ_R et par $(N-3)/2$ valeurs propres h_k . Ces valeurs sont obtenues en étudiant les représentations dégénérées du secteur de désordre.

Nous trouvons les premiers descendants d'un opérateur R_a au niveau $1/2$. Pour chaque valeur de l'indice a il y a $(N-1)/2$ états :

$$\left(\chi_a^{(k)} \right)_{-\frac{1}{2}} = A_{-\frac{1}{2}}^k U^{-2k} R_a = U^{-2k} A_{-\frac{1}{2}}^k R_a, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}. \quad (5.42)$$

Nous rappelons que, dans le cas $N = 5$, nous avons deux états, $\left(\chi_a^{(1)} \right)_{-\frac{1}{2}}$ et $\left(\chi_a^{(2)} \right)_{-\frac{1}{2}}$. Dans la section (4.7.2), nous avons demandé que ces deux états soient primaires et ce choix s'est révélé être consistant avec la construction du gaz de Coulomb basée sur l'algèbre B_2 . La généralisation la plus naturelle est donc d'imposer que tous les états (5.42) soient primaires. La correspondante solution donne la dimension de l'opérateur de désordre fondamental, avec toutes les $(N-1)/2$ dégénérescences situées au niveau $1/2$.

Nous imposons donc que

$$A_{+\frac{1}{2}}^{k'} \left(\chi_a^{(k)} \right)_{-\frac{1}{2}} = 0 \quad (5.43)$$

pour tous $k, k' = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}$. En utilisant les (5.24)-(5.25), la condition de dégénérescence (5.43) se traduit dans un système de $(N-1)/2$ états indépendants qui permet de déterminer les $(N-1)/2$ variables inconnues, c'est à dire la dimension conforme Δ_R et les $(N-3)/2$ valeurs propres h_k .

Nous omettons ici toutes les manipulations algébriques car strictement analogues à celles présentées en section (4.7.2).

Seulement deux parmi les solutions pour la dimension conforme Δ_R admises par le système de $(N-1)/2$ équations représentent des solutions physiques :

$$\Delta_R^{(1)} = \frac{1}{16} \frac{(N-1)(p+N)}{p}, \quad \Delta_R^{(2)} = \frac{1}{16} \frac{(N-1)(p+2-N)}{p+2}. \quad (5.44)$$

5.4.5 Formule de Kac.

Structure de l'algèbre de Lie.

La théorie parafermionique basée sur l'algèbre (4.28) est décrite par le coset diagonal du groupe $SO(N)$. Les dimensions des opérateurs primaires sont données par la formule de Kac qui est connectée pour $N = 2r + 1$ impair à l'algèbre de Lie B_r . Les cas $r = 2$ a été traité en détail dans le chapitre précédent. Le but est de généraliser les résultats pour $r > 2$ arbitraire.

Si nous assumons une réalisation du gaz de Coulomb, chaque opérateur primaire Φ de la théorie est représenté par un opérateur de vertex associé à une position sur le réseau des poids de l'algèbre B_r :

$$\vec{\beta} \equiv \vec{\beta}_{(n_1, \dots, n_r)(n'_1, \dots, n'_r)} = \sum_{i=1}^r \left(\frac{1-n_i}{2} \alpha_+ + \frac{1-n'_i}{2} \alpha_- \right) \vec{\omega}_i. \quad (5.45)$$

Ici, les $\vec{\omega}_i$ sont les poids fondamentaux de l'algèbre B_r , et les α_{\pm} sont les paramètres du gaz de Coulomb. Leur forme

$$\alpha_+ = \sqrt{\frac{p+2}{p}}, \quad \alpha_- = -\sqrt{\frac{p}{p+2}} \quad (5.46)$$

est directement suggérée par la valeur de la charge centrale, *cfr.* éq. (5.2).

Nous utilisons la notation $\Phi_{(n_1, \dots, n_r)(n'_1, \dots, n'_r)}$ pour indiquer l'opérateur associé à la position $\vec{\beta}_{(n_1, \dots, n_r)(n'_1, \dots, n'_r)}$ sur le réseau. Les entiers $(n_1, \dots, n_r)(n'_1, \dots, n'_r)$ sont essentiellement les indices de Dynkin du poids $\vec{\beta}$. Les indices (n_1, \dots, n_r) sont associés à la partie α_+ de la théorie, et les (n'_1, \dots, n'_r) à celle α_- . La nature d'un opérateur primaire $\Phi_{(n_1, \dots, n_r)(n'_1, \dots, n'_r)}$, ou, autrement dit, ses propriétés de transformation sous Z_N , restent inchangées si on échange α_+ et α_- . En effet, ces propriétés dépendent des différences $n_i - n'_i$. Dorénavant, nous simplifions l'analyse en choisissant, pour la partie α_+ , $(n_1, \dots, n_r) = (1, \dots, 1)$.

La formule du gaz de Coulomb pour la dimension conforme de l'opérateur primaire $\Phi_{(n_1, \dots, n_r)(n'_1, \dots, n'_r)}$ est :

$$\Delta_{(n_1, \dots, n_r)(n'_1, \dots, n'_r)} \equiv \Delta_{(n_1, \dots, n_r)(n'_1, \dots, n'_r)}^{(0)} + B = \vec{\beta} \cdot (\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}_0) + B, \quad (5.47)$$

où la charge $\vec{\alpha}_0$ est donnée par :

$$\vec{\alpha}_0 = \left(\frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2} \right) \sum_{i=1}^r \vec{\omega}_i. \quad (5.48)$$

Dans l'éq. (5.47) nous avons écrit la dimension d'un opérateur primaire comme la somme des deux termes, $\Delta_{(n_1, \dots, n_r)(n'_1, \dots, n'_r)}^{(0)}$ et B . Le *terme coulombien* $\Delta_{(n_1, \dots, n_r)(n'_1, \dots, n'_r)}^{(0)}$ est une fonction des paramètres α_+^2 et α_-^2 alors que le *terme de bord* B est une constante qui caractérise le secteur auquel l'opérateur $\Phi_{(n_1, \dots, n_r)(n'_1, \dots, n'_r)}$ appartient.

L'opérateur identité I dans cette représentation est $I = \Phi_{(1, \dots, 1)(1, \dots, 1)}$. Du moment que $\Delta_I = 0$ et l'identité I est un singlet, nous avons nécessairement $B = 0$ pour chaque opérateur de singlet. Le problème est déterminer les valeurs de B pour les doublets q , $q = 1, \dots, (N-1)/2$, et pour les opérateurs de désordre. Ces valeurs et leur assignation aux différentes positions sur le réseau des poids constituent l'intérêt principal de la théorie.

Pour se servir de l'éq. (5.47) nous avons besoin des produits scalaires $\vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_j$ pour l'algèbre de Lie B_r :

$$\vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_j = i \text{ pour } i \leq j; \quad \vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_r = \frac{i}{2} \text{ pour } i < r; \quad \vec{\omega}_r \cdot \vec{\omega}_r = \frac{r}{4}. \quad (5.49)$$

Il est nécessaire à ce moment préciser les conventions de normalisation que nous avons utilisé. Les produits scalaires (5.49) fixent la normalisation des vecteurs $\{\vec{\omega}_a\}$. Nous assumons en plus que la relation entre $\{\vec{\omega}_a\}$ et $\{\vec{e}_a\}$ a la forme suivante :

$$(\vec{\omega}_a, \vec{e}_b) = |\vec{e}_b|^2 \delta_{ab}. \quad (5.50)$$

La normalisation des vecteurs $\{\vec{e}_a\}$ est donc fixée. Pour l'algèbre de Lie B_r nous avons :

$$\begin{aligned} |\vec{e}_a|^2 &= \frac{1}{2}, \quad a = 1, \dots, r-1 \\ |\vec{e}_a|^2 &= \frac{1}{4}, \quad a = r \end{aligned}$$

La décomposition des \vec{e}_a dans la base $\{\omega_b\}$ a la forme :

$$\vec{e}_a = \sum_{b=1}^r A_{ab} \frac{\vec{\omega}_b}{2} \quad (5.51)$$

où A_{ab} est la matrice de Cartan :

$$A_{ab} = \frac{2(\vec{e}_a, \vec{e}_b)}{|\vec{e}_b|^2}. \quad (5.52)$$

Comme annoncé dans la présentation de ce chapitre, nous cherchons un moyen pour exploiter systématiquement la méthode des réflexions. Nous avons expliqué cette méthode en section (4.9.1), où nous avons mentionné aussi quelques exemples explicites d'application.

Un rôle majeur dans cette direction est joué par les réflexions de Weyl. Le groupe de Weyl W est engendré par r réflexions simples $s_{\vec{e}_i}$, avec $i = 1, 2, \dots, r$, qui agissent sur les opérateurs de vertex de la façon suivante :

$$s_{\vec{e}_i}^{-1} \vec{\beta}_{(1, \dots, 1)(n'_1, \dots, n'_r)} = \vec{\beta}_{(1, \dots, 1)(n'_1, \dots, n'_r)} - n'_i \alpha_- \vec{e}_i. \quad (5.53)$$

Ici, les \vec{e}_i sont les racines simples de l'algèbre de Lie. Le nombre total des réflexions de Weyl est $|W| = 2^r r!$.

Chaque opérateur de vertex est associé à un opérateur appartenant à la chambre principale, où on trouve l'opérateur d'identité, par une seule réflexion de Weyl.

Nous rappelons que chaque réflexion simple appliquée à un opérateur physique indique un état singulier dans son module. Cet état singulier se découple de la théorie dans le sens qu'il ne participe pas à l'algèbre des opérateurs physiques.

Secteur de désordre.

Le terme de bord B_R est facilement accessible car nous avons calculé explicitement les dimensions conformes (5.44) des opérateurs fondamentaux. Après quelques manipulation algébriques et en utilisant les produits scalaires (5.49) dans la (5.47), il est facile de vérifier que les dimensions (5.44) des opérateurs fondamentaux de désordre correspondent respectivement à :

$$\Delta_{(1,\dots,1,2)(1,\dots,1)} \text{ et } \Delta_{(1,\dots,1)(1,\dots,1,2)} \quad (5.54)$$

avec le terme de bord donné par :

$$B_R = \frac{N-1}{32}. \quad (5.55)$$

Secteur de doublet pour la théorie $N = 7$.

L'identification des termes de bord B_{D^a} est plus compliquée du moment que le calcul directe des dimensions des opérateurs fondamentaux pour chaque r n'a pas été possible. Pour $r = 3$ ($N = 7$), nous avons obtenu des résultats explicites qui concernent les doublet 1 et le doublet 3. Avant de considérer les cas général, nous voulons nous concentrer sur le cas $r = 3$ pour montrer comment nous pouvons compléter la théorie en profitant des propriétés du gaz de Coulomb.

Les dimensions (5.29)-(5.30) correspondent, respectivement, à :

$$\Delta_{(1,2,1)(1,1,1)} \text{ et } \Delta_{(1,1,1)(1,2,1)} \quad (5.56)$$

avec le terme de bord

$$B_{D^1} = \frac{3}{14}. \quad (5.57)$$

De façon pareille, les dimensions des doublets 3 fondamentaux, éqs. (5.32)-(5.33), sont données par :

$$\Delta_{(2,1,1)(1,1,1)} \text{ et } \Delta_{(1,1,1)(2,1,1)}, \quad (5.58)$$

avec le terme de bord

$$B_{D^3} = \frac{5}{28}. \quad (5.59)$$

Pour déterminer le restant terme de bord B_{D^2} , nous allons utiliser un argument basé sur les réflexions de Weyl.

Nous considérons l'opérateur $\Phi_{(1,1,1)(1,2,1)}$, qui est un doublet 1. Dans ce cas nous avons trois réflexions principales :

$$\begin{aligned} s_{\vec{e}_1}^{-1} \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,2,1)} &= \vec{\beta}_{(1,1,1)(-1,3,1)} = \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,2,1)} - \alpha_- \vec{e}_1, \\ s_{\vec{e}_2}^{-1} \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,2,1)} &= \vec{\beta}_{(1,1,1)(3,-2,5)} = \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,2,1)} - 2\alpha_- \vec{e}_2, \\ s_{\vec{e}_3}^{-1} \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,2,1)} &= \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,3,-1)} = \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,2,1)} - \alpha_- \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (5.60)$$

(Dans cette expression et dans les suivantes, les réflexions agissent sur la partie α_- du réseau). Ces réflexions donnent les différences entre les parties coulombiennes des dimensions :

$$\Delta_{(1,1,1)(-1,3,1)}^{(0)} - \Delta_{(1,1,1)(1,2,1)}^{(0)} = \frac{1}{2}, \quad (5.61)$$

$$\Delta_{(1,1,1)(3,-2,5)}^{(0)} - \Delta_{(1,1,1)(1,2,1)}^{(0)} = 1, \quad (5.62)$$

$$\Delta_{(1,1,1)(1,3,-1)}^{(0)} - \Delta_{(1,1,1)(1,2,1)}^{(0)} = \frac{1}{4}. \quad (5.63)$$

Dans les équations ci-dessus il faut ajouter les corrects termes de bord pour obtenir les niveaux des dégénérescences de l'opérateur $\Phi_{(1,1,1)(1,2,1)}$. Il faut donc déterminer la nature des fantômes associés. Le point important est que l'identification de la nature du fantôme doit être consistante avec celle de l'état singulier correspondant dans le module du $\Phi_{(1,1,1)(1,2,1)}$.

Le module de l'opérateur $\Phi_{(1,1,1)(1,2,1)}$ contient trois états singuliers : un doublet 2 au niveau $1/7$, un singlet au niveau $2/7$, et un doublet 1 au niveau 1. Il est donc facile de vérifier que, en utilisant les éqs. (5.57), (5.59), (5.61)-(5.63), il y a seulement une choix correcte pour la nature des fantômes :

$$\begin{aligned} \Phi_{(1,1,1)(-1,3,1)} &\sim S, \\ \Phi_{(1,1,1)(3,-2,5)} &\sim D^1, \\ \Phi_{(1,1,1)(1,3,-1)} &\sim D^2. \end{aligned}$$

Le terme de bord B_{D^2} est alors fixé par la condition

$$\Delta_{(1,1,1)(1,3,-1)}^{(0)} + B_{D^2} - \Delta_{(1,1,1)(1,2,1)}^{(0)} - B_{D^1} = \frac{1}{7}, \quad (5.64)$$

qui, compte-tenu des éqs. (5.63) et (5.57), donne :

$$B_{D^2} = \frac{3}{28}. \quad (5.65)$$

En utilisant le même type de raisonnement, nous pouvons aussi établir le secteur de l'opérateur $\Phi_{(1,1,1)(1,1,3)}$:

$$\begin{aligned} s_{\vec{e}_1}^{-1} \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,1,3)} &= \vec{\beta}_{(1,1,1)(-1,2,3)} = \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,1,3)} - \alpha - \vec{e}_1 \\ s_{\vec{e}_2}^{-1} \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,1,3)} &= \vec{\beta}_{(1,1,1)(2,-1,5)} = \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,1,3)} - \alpha - \vec{e}_2 \\ s_{\vec{e}_3}^{-1} \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,1,3)} &= \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,4,-3)} = \vec{\beta}_{(1,1,1)(1,1,3)} - 3\alpha - \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (5.66)$$

En considérant les différences entre les dimensions, nous nous convainçons facilement que la seule configuration acceptable est :

$$\begin{aligned} \Phi_{(1,1,1)(1,1,3)} &\sim D^2, \\ \Phi_{(1,1,1)(-1,2,3)} &\sim \Phi_{(1,1,1)(2,-1,5)} \sim D^3, \\ \Phi_{(1,1,1)(1,4,-3)} &\sim D^1. \end{aligned} \quad (5.67)$$

A partir de l'analyse précédente nous pouvons déduire que le doublet $2 \Phi_{(1,1,1)(1,1,3)}$ a deux états singuliers de charge 3 au niveau $4/7$ et un état singulier de charge 1 au niveau $6/7$.

En somme, nous avons montré comment on peut déterminer le terme de bord B_{D^2} en exploitant les réflexions sur le réseau des poids sans avoir à disposition la dimension de l'opérateur fondamental D^2 .

5.4.6 Théories unitaires : tableau de Kac fini.

Le tableau de Kac dévient fini si $\alpha_+^2 = (p+2)/p$ prend des valeurs rationnelles. La théorie est unitaire quand p est entier, en accord avec la réalisation du coset (5.1)-(5.3).

La fermeture du tableau de Kac est déterminée en analysant les réflexions par rapport au plan :

$$n_1' + 2 \sum_{i=2}^{r-1} n_i' + n_r' = p + 2 \quad (5.68)$$

pour la partie α_- et au plan

$$n_1 + 2 \sum_{i=2}^{r-1} n_i + n_r = p \quad (5.69)$$

pour celle de α_+ . Cet hyperplan est orthogonal à la combinaison d'écrans :

$$\vec{e}_{r+1} \equiv \vec{e}_1 + 2 \sum_{i=2}^r \vec{e}_i. \quad (5.70)$$

De façon pareille au cas $N = 5$, les différences de dimension entre les opérateurs liés par cette réflexions sont en accord avec les niveaux du correspondant module. Nous attendons

alors que les opérateurs au-dessus du plan (5.68) se découpent de la théorie. Pour p entier, le domaine physique du tableau de Kac est délimité par :

$$\begin{aligned} 2(r-1) &\leq n'_1 + 2 \sum_{i=2}^{r-1} n'_i + n'_r \leq p+1, \\ 2(r-1) &\leq n_1 + 2 \sum_{i=2}^{r-1} n_i + n_r \leq p-1. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Le tableau de Kac fini que nous avons défini en (5.71) contient une symétrie additionnelle. Il est facile de vérifier que la partie coulombienne de la dimension conforme $\Delta_{(n_1, \dots, n_r)(n'_1, \dots, n'_r)}^{(0)}$ en éq. (5.47), est invariante sous l'opération

$$\begin{aligned} n'_1 &\rightarrow p+2 - n'_1 - 2 \sum_{i=2}^{r-1} n'_i - n'_r, & n'_i &\rightarrow n'_i \quad i = 2, 3, \dots, r \\ n_1 &\rightarrow p - n_1 - 2 \sum_{i=2}^{r-1} n_i - n_r, & n_i &\rightarrow n_i \quad i = 2, 3, \dots, r. \end{aligned} \quad (5.72)$$

La question est maintenant de savoir si l'addition des termes de bord brise ou non la symétrie (5.72). Nous allons montrer que la configuration des singlets, doublets et des opérateurs de désordre possède la même symétrie. Cela implique que cette configuration a un périodicité 2 dans la direction $-\vec{\omega}_1/2$.

5.4.7 Théorie triviale : $c = 0$.

Après avoir déterminé le tableau de Kac fini, nous faisons une observation importante. Compte-tenu de la formule (5.2), avec la paramétrisation (5.3), la charge centrale est nulle pour $p = N - 2$.

Pour $p = N - 2$, tous les opérateurs physiques ont des indices α_+ triviaux : $(n_1, \dots, n_r) = (1, \dots, 1)$. En plus, par la symétrie (5.72), les seules excitations dans la partie α_- sont :

$$\begin{aligned} \Phi_0 &\equiv \Phi_{(1, \dots, 1)(1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1, 1)}, \\ \Phi_k &\equiv \Phi_{(1, \dots, 1)(1, 1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1, 1)}, & 0 < k < r, \\ \Phi_r &\equiv \Phi_{(1, \dots, 1)(1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1, 3)}, \\ \Phi_R &\equiv \Phi_{(1, \dots, 1)(1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1, 2)}, \end{aligned} \quad (5.73)$$

où dans la deuxième ligne on a $n'_k = 2$. Les opérateurs Φ_0 et Φ_R sont, respectivement, l'opérateur d'identité et l'opérateur de désordre fondamental R .

Dans la suite nous ferons souvent allusion à la cellule élémentaire de la théorie Z_N . Nous définissons la cellule élémentaire comme la partie finie du tableau de Kac qui correspond au domaine physique de la théorie $c = 0$.

Pour toutes les théories Z_N (donc aussi pour N pair) nous ferons les assumptions suivantes :

1. La cellule élémentaire contient tous les types d'opérateur fondamentaux : les singlets, les doublets et les opérateurs de désordre.
2. Dans la théorie $c = 0$ qui est triviale les dimensions des opérateurs physiques sont nulles.

Ces hypothèses permettent de calculer les valeurs de tous les termes de bord :

$$\begin{aligned} B_R &= \frac{N-1}{32} \\ B_i &= \frac{i(N-2i)}{4N}, \quad i = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Dans cette équation, les B_R et B_k dénotent respectivement les termes de bord des opérateurs Φ_R et Φ_i , dont la position est définie en éq. (5.73). La valeur B_R confirme (5.55) (le terme de bord du secteur de désordre) en accord avec le fait que Φ_R est un opérateur de désordre. En outre le terme de bord de l'opérateur d'identité Φ_0 est $B_0 \equiv B_S = 0$.

Le problème de trouver les termes de bord B_{D^q} pour les doublets D^q s'est donc réduit à celui d'associer chaque valeur B_i au correct secteur de charge or, autrement dit, de déterminer la nature correcte des opérateurs Φ_i , $i = 1, 2, \dots, r$. Nous faisons l'hypothèse que, parmi les opérateurs en (5.73), chaque secteur de la théorie apparaît seulement une fois. Du moment que nous avons déjà placé le singlet et l'opérateur de désordre, les Φ_i ($i = 1, 2, \dots, r$) correspondent nécessairement à une permutation des doublets fondamentaux. Ci-dessous nous allons établir le bon placement pour r générale.

5.4.8 Position des opérateurs fondamentaux dans la cellule élémentaire.

Nous avons réussi à positionner les opérateurs fondamentaux pour $r = 3$. La structure générale de ces résultats se clarifie si nous introduisons une nouvelle notation Q pour la charges des secteurs du doublet :

$$Q = 2q \bmod N. \quad (5.75)$$

Nous allons distinguer les deux notations en plaçant une étoile après les indices dans la notation Q . Du moment que N est impair, les indices Q représentent simplement une permutation des indices q . Les résultats que nous avons obtenu sont réécrits sous la forme :

$$\begin{aligned} \Phi_{(1,1,1)(2,1,1)} &\sim D^3 \equiv D^{1*}, \\ \Phi_{(1,1,1)(1,2,1)} &\sim D^1 \equiv D^{2*}, \\ \Phi_{(1,1,1)(1,1,3)} &\sim D^2 \equiv D^{3*}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Si nous comparons le positionnement (5.76) avec l'éq.(5.74), nous obtenons les (5.57), (5.59), et (5.65).

Nous avons calculé les dimensions des doublet D^{1^*} fondamentaux pour chaque r . Par la formule de Kac (5.47), il est immédiat de vérifier que les dimensions (5.38)–(5.39) correspondent respectivement à :

$$\Delta_{(2,1,\dots,1)(1,\dots,1)} \text{ et } \Delta_{(1,\dots,1)(2,1,\dots,1)} \quad (5.77)$$

avec le terme de bord

$$B_{D^{1^*}} = \frac{N-2}{4N}. \quad (5.78)$$

Donc, $\Phi_1 \sim D^{1^*}$, et la valeur du terme B_1 confirme la (5.78).

Il est maintenant facile prévoir le positionnement des opérateurs Φ_i pour r quelconque :

$$\begin{aligned} \Phi_0 &\equiv \Phi_{(1,\dots,1)(1,1,\dots,1,1,1,\dots,1,1)} \sim S = I, \\ \Phi_k &\equiv \Phi_{(1,\dots,1)(1,1,\dots,1,2,1,\dots,1,1)} \sim D^{k^*}, \quad 0 < k < r, \\ \Phi_r &\equiv \Phi_{(1,\dots,1)(1,1,\dots,1,1,1,\dots,1,3)} \sim D^{r^*}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Nous allons donner une démonstration (partielle) de (5.79).

Nous considérons un opérateur général, $\Phi_{(1,\dots,1)(n'_1,\dots,n'_r)}$, pour le quel les r réflexions simples $s_{\vec{e}_i}$ donnent :

$$\begin{aligned} \Delta_{s_{\vec{e}_i}\vec{\beta}}^{(0)} - \Delta_{\vec{\beta}}^{(0)} &= \frac{n'_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1, \\ \Delta_{s_{\vec{e}_r}\vec{\beta}}^{(0)} - \Delta_{\vec{\beta}}^{(0)} &= \frac{n'_r}{4} \end{aligned}$$

avec $\vec{\beta} \equiv \vec{\beta}_{(1,\dots,1)(n'_1,\dots,n'_r)}$. Comme nous avons discuté plusieurs fois pendant ce chapitre et le précédent, le fantôme $\Phi_{s_{\vec{e}_i}\vec{\beta}}$ (charge q_2) indique un état singulier dans le module de $\Phi_{\vec{\beta}}$ (charge q_1). Les correspondants termes de bord $B_{D^{q_1}}$ et $B_{D^{q_2}}$ doivent satisfaire la relation :

$$B_{D^{q_2}} - B_{D^{q_1}} + \frac{\tilde{n}}{4} = \delta_{q_2}^{q_1} + k_{1,2}. \quad (5.80)$$

Ici, $\delta_{q_2}^{q_1}$ est définie en éq. (5.8), $k_{1,2}$ est un entière non négatif, et \tilde{n} est un entier positif. La membre à droite de l'éq. (5.80) représente le niveau de dégénérescence de $\Phi_{\vec{\beta}}$ par rapport à l'état singulier $\Phi_{s_{\vec{e}_i}\vec{\beta}}$.

La structure du module de singlet est donnée par la (5.7). Dans la notation Q , nous avons

$$\delta_Q^0 = \frac{Q(N-Q)}{2N} \text{ mod } 1. \quad (5.81)$$

(Notez que cela ne peut pas être obtenu en plaçant naïvement $Q = 2q$ en (5.75)). En choisissant un singlet, $q_1 = 0$ et $B_0 = 0$, la condition (5.80) fixe la forme générale du terme

de bord B_{DQ} :

$$B_{DQ} = \frac{Q(N-Q)}{2N} - \frac{k_Q}{4}, \quad (5.82)$$

où k_Q est un entière qui dépend du Q et qu'on pourrait déterminer en connaissant, par exemple, les niveaux de dégénérescence des opérateurs fondamentaux.

Si N est prime, il est facile de prouver, en comparant la (5.82) avec la (5.74), que $k_Q = Q$ et donc que :

$$B_{D^{q^*}} = B_{q^*}, \quad q^* = 0, 1, \dots, r. \quad (5.83)$$

Cela justifie le positionnement (5.79).

Si N n'est pas prime, quelques ambiguïtés restent. Nous considérons la quantité

$$\delta_{Q'}^0 - \delta_{Q''}^0 = \left(\frac{Q' - Q''}{2} - \frac{(Q' + Q'')(Q' - Q'')}{2N} \right) \bmod 1. \quad (5.84)$$

Si $|Q' \pm Q''| < N$, et N est prime, la partie droite de cette éq. s'annule seulement si $Q' = Q''$. Autrement, pour $N = st$ pour des entiers $s, t > 1$, la partie droite peut s'annuler aussi pour $Q' \neq Q''$ si $|Q' - Q''| = 0 \bmod s$ or $|Q' + Q''| = 0 \bmod t$ (or vice-versa). Dans ce cas on aurait $\delta_{Q'}^0 = \delta_{Q''}^0$ et l'argument qui est basé sur la structure des niveaux des modules et qui mène à (5.83) ne suffit plus : il ne peut pas distinguer parmi les secteurs Q' et Q'' . En particulier, à côté de la solution (5.83), nous pourrions aussi accepter :

$$\begin{aligned} B_{DQ} &= B_Q, & Q = 0, 1, \dots, r; & \quad Q \neq Q', Q'', \\ B_{DQ'} &= B_{Q'}, \\ B_{DQ''} &= B_{Q''} \end{aligned} \quad (5.85)$$

(a)

En résumant, nous avons prouvé que, pour $r \leq 6$, le positionnement (5.79) est le seul possible. Pour $r > 6$ nous n'avons pas des arguments rigoureux pour exclure des possibilités additionnelles, comme par exemple la (5.85). Cependant, nous trouvons naturel d'assumer que les théories que nous sommes en train de construire aient une structure similaire pour tous les r . Nous acceptons donc la solution (5.83) pour $r \geq 1$.

Nous pouvons maintenant écrire les résultats finaux pour les termes de bord :

$$\begin{aligned} B_R &= \frac{N-1}{32}, \\ B_S &= 0, \\ B_{DQ} &= \frac{Q(N-2Q)}{4N}, \quad Q = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

^(a)Pour $N = s^2$, nous avons $Q' = 0$ et $Q'' = s$. Dans ce cas il n'y a aucune ambiguïté car $B_0 = 0$. Le positionnement (5.79) des opérateurs fondamentaux est alors le seul acceptable.

5.4.9 Dérivation alternative des termes de bord.

Nous voulons montrer brièvement comme nous pouvons dériver les termes de bord sans utiliser la théorie avec $c = 0$. Dans ce deuxième raisonnement basé sur la méthode des réflexions, nous faisons deux hypothèses importantes :

- La position des opérateurs fondamentaux est donnée par la (5.79).
- Le niveau de dégénérescence δ d'un opérateur fondamental appartient à l'intervalle $0 < \delta \leq 1$.

Nous appliquons les r réflexions simples $s_{\vec{e}_i}$ à l'opérateur d'identité $I = \Phi_{(1,\dots,1)(1,\dots,1)}$. Nous avons les suivantes différences de dimensions :

$$\Delta_{(1,\dots,1)s_{\vec{e}_i}(1,\dots,1)}^{(0)} - \Delta_{(1,\dots,1)(1,\dots,1)} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1, \quad (5.87)$$

$$\Delta_{(1,\dots,1)s_{\vec{e}_r}(1,\dots,1)}^{(0)} - \Delta_{(1,\dots,1)(1,\dots,1)} = \frac{1}{4}, \quad (5.88)$$

avec $\Delta_{(1,\dots,1)(1,\dots,1)} = 0$. La seule configuration consistante avec les (5.87)–(5.88) est

$$\begin{aligned} \Phi_{(1,\dots,1)s_{\vec{e}_i}(1,\dots,1)} &\sim D^1, & i = 1, 2, \dots, r-1, \\ \Phi_{(1,\dots,1)s_{\vec{e}_r}(1,\dots,1)} &\sim D^r; \end{aligned} \quad (5.89)$$

nous en déduisons le terme de bord $B_{D^1} = \frac{N-4}{2N}$.

Le module d'identité a donc r états singulier au niveau $(N-1)/2N$ et $r-1$ doublets 1 singuliers au niveau $(N-2)/N$. Dans le cas spécial $N = 7$, le calcul explicite de dégénérescence a effectivement révélé que il y a plus qu'un doublet 1 singulier au même niveau dans le module d'identité.

Une fois le terme de bord B_{D^1} connu, nous considérons les réflexions qui concernent le doublet 1 $\Phi_{(1,\dots,1)(1,2,1,\dots,1)}$. En particulier, la réflexion $s_{\vec{e}_r}$ donnent un doublet r singulier qui, en accord avec la (5.8), doit se trouver au niveau $\delta_{r-1}^1 = (N-5)/2N$. Cela mène à l'équation :

$$\Delta_{(1,\dots,1)(1,2,1,\dots,1,2,-1)}^{(0)} + B_{D^{r-1}} - \Delta_{(1,\dots,1)(1,2,1,\dots,1)}^{(0)} - B_{D^1} = \frac{N-5}{2N}, \quad (5.90)$$

qui permet de déterminer $B_{D^{r-1}} = \frac{3(N-6)}{4N}$.

Nous pouvons maintenant considérer les réflexions sur le doublet fondamental $r-1$. En suivant cette procédure nous obtenons tous les termes de bord (5.86).

Après avoir fixé les positions des opérateurs fondamentaux et déterminé la valeur des termes de bord, le problème est maintenant de remplir les sites du tableau de Kac qui restent.

5.4.10 Remplissage du tableau de Kac.

Bien que le tableau de Kac de la théorie Z_N , avec $N = 2r + 1$, soit basé sur un réseau de dimension $2r$, il suffit de remplir la couche principale, de la partie α_- par exemple, dont les vertex sont repérés par les positions $\vec{\beta}_{(1,\dots,1)(n'_1,\dots,n'_r)}$.

La “coloration” des autres couches est obtenue en translatant celle de la couche principale. En effet, la nature de l’opérateur $\Phi_{(n_1,\dots,n_r)(n'_1,\dots,n'_r)}$ ne dépend que des différences $|n_i - n'_i|$.

L’autre propriété du gaz de Coulomb que nous allons utiliser est celle concernant les fusions entre opérateurs. Nous avons déjà parlé de cette propriété en section (4.9.1) à propos du cas $N = 5$: la multiplication dans la couche principale :

$$\Phi_{(1,\dots,1)(n'_1,\dots,n'_r)} \cdot \Phi_{(1,\dots,1)(m'_1,\dots,m'_r)} \quad (5.91)$$

produit, dans le canal principal, l’opérateur $\Phi_{(1,\dots,1)(l'_1,\dots,l'_r)}$ avec

$$\begin{aligned} \vec{\beta}_{(1,\dots,1)(l'_1,\dots,l'_r)} &= \vec{\beta}_{(1,\dots,1)(n'_1,\dots,n'_r)} + \vec{\beta}_{(1,\dots,1)(m'_1,\dots,m'_r)} \\ l'_i &= n'_i + m'_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Les autres canaux du développement sont obtenus par des translations réalisées avec des combinaison linaires des écrans \vec{e}_i (avec $i = 1, \dots, r$).

Cette règle est extrêmement utile pour fixer la distribution des opérateurs. Cependant, il ne faut pas lui faire complète confiance car l’amplitude du canal principal peut être nulle.

Opérateurs de désordre.

En oubliant pour le moment la possibilité des amplitudes nulles, nous considérons d’abord l’opérateur de désordre $\Phi_{(1,\dots,1)(1,\dots,1,2)}$ et le doublet r fondamental $\Phi_{(1,\dots,1)(2,1,\dots,1)}$. Le résultat est nécessairement un opérateur de désordre car, par les règles de composition du groupe dihédral, le produit entre une réflexion fois une rotation donne une réflexion. Il est facile alors de vérifier que l’opérateur $\Phi_{(1,\dots,1)(n'_1,\dots,n'_r)}$ avec $|n'_r - 1|$ impair est un opérateur de désordre. Plus en générale on a donc :

$$\Phi_{(n_1,\dots,n_r)(n'_1,\dots,n'_r)} \sim R, \text{ avec } |n_r - n'_r| \text{ impair.} \quad (5.93)$$

Nous avons donc rempli la moitié du réseau avec les opérateurs de désordre.

Une vérification indépendante du résultat ci-dessus peut être obtenue par la méthode des réflexions. D’abord, il n’est pas difficile constater que chaque réflexion de Weyl, appliquée à un opérateur $\Phi_{(1,\dots,1)(n'_1,\dots,n'_r)}$, conserve la parité de n'_r . Ensuite, si nous considérons les r réflexions simples sur $\Phi_{(1,\dots,1)(1,\dots,1,2)}$, il est immédiat de vérifier que ces réflexions lient cet

opérateur aux fantômes $\Phi_{(1,\dots,1)(m_1^{(i)},\dots,m_r^{(i)})}$, avec $i = 1, 2, \dots, r$. Les indices des fantômes sont :

$$\begin{aligned} m_j^{(i)} &= 1, \text{ for } j < i - 1 \text{ et } i + 1 < j < r; \\ m_{i-1}^{(i)} &= m_{i+1}^{(i)} = 2; \quad m_i^{(i)} = -1; \quad m_r^{(i)} = 2 \end{aligned}$$

pour $i < r$, tandis que pour $i = r$ on a

$$m_j^{(r)} = 1, \text{ pour } j < r - 1; \quad m_{r-1}^{(r)} = 3; \quad m_r^{(r)} = -2. \quad (5.94)$$

Toutes les r réflexions donnent $1/2$ comme différence entre les dimensions

$$\Delta_{(1,\dots,1)(m_1^{(i)},\dots,m_r^{(i)})}^{(0)} - \Delta_{(1,\dots,1)(1,\dots,1,2)}^{(0)} = \frac{1}{2}, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r. \quad (5.95)$$

Cela confirme d'un côté le fait que l'opérateur de désordre $\Phi_{(1,\dots,1)(1,\dots,1,2)}$ a r états singuliers au niveau $1/2$ et d'autre part que tous les fantômes $\Phi_{(1,\dots,1)(m_1^{(i)},\dots,m_r^{(i)})}$ sont des opérateurs de désordre.

Plus en général, il n'est pas compliqué de vérifier que la différence entre le terme coulombien de dimension d'un opérateur $\Phi_{(1,\dots,1)(n_1',\dots,n_r')}$ avec n_r' pair et celui des fantômes associés est toujours demi entière or entière. Cela supporte fortement le résultat (5.93).

Opérateurs de singlet et périodicité de la distribution.

Les opérateurs de singlet S forment une sous algèbre car les fusions entre deux singlet $S \cdot S$ produisent un autre singlet et la fusion $D^q \cdot S$ donne un autre doublet D^q . La position des premiers singlets non triviaux (différentes de l'identité) le long des axes principaux du réseau détermine alors la périodicité de la distribution.

Comme nous avons déjà remarqué avant, il peut arriver que les amplitudes des canaux principaux s'annulent. Mais, suite au rôle joué par les singlets en fixant la périodicité de la distribution, il est naturel d'écarter cette possibilité pour les fusions qui impliquent des singlets.

Nous remarquons aussi que la symétrie (5.72) du tableau fini implique une périodicité de période 2 dans la direction n_1' .

Opérateurs des doublets.

Pour positionner les opérateurs de doublet non fondamentaux, on a d'abord essayé d'utiliser la méthode des fusions. Si nous considérons, par exemple, la fusion du doublet D^{1*} avec soi même :

$$\Phi_{(1,\dots,1)(2,1,\dots,1)} \cdot \Phi_{(1,\dots,1)(2,1,\dots,1)} \sim \Phi_{(1,\dots,1)(3,1,\dots,1)}. \quad (5.96)$$

le résultat peut être soit un doublet D^{2*} soit un singlet S , car l'addition des charges $Q, (\pm 1) + (\pm 1)$ est ambigu. Plusieurs fusions peuvent être utilisées pour établir que il y a un nombre fini des possibles périodicités le long de chaque direction (en particulier, la périodicité n'est peut pas être supérieure à r), mais une réponse définitive n'émerge pas. En plus, l'application de la méthode des fusions donne lieu, pour $r > 2$, à un nombre des inconsistances avec les résultat des réflexions. Nous en concluons alors que la méthode le plus fiable est celui des réflexions.

L'observation est que le nombre des éléments du groupe de Weyl, $|W| = 2^r r!$, est très large. Donc, si on classifie $|W| - 1$ fantômes pour chaque opérateur fondamental—dont la position est supposée être déterminée par la (5.79)— on détermine la nature d'une grande nombre des sites. L'espoir est que cela permette d'obtenir la structure sous-jacente pour chaque r .

Nous avons essayé cette approche pour $r = 3$ et $r = 4$ en utilisant un ordinateur (pour plus de détail sur l'algorithme utilisé voire l'article an annexe C).

Pour $r = 3$, nous avons classifié $(r + 1)|W| = 192$ singlets et doublets et la configuration résultante a mis en évidence que la distribution a une période 2 dans la direction n'_i , pour $i = 1, 2, \dots, r - 1$, et une période 4 le long de l'axe n'_r . En particulier, les premiers singlets non triviaux sont situés dans les positions :

$$\begin{aligned} \Phi_{(1, \dots, 1)(1, 1, \dots, 1, 3, 1, \dots, 1, 1)} &\sim S, & 0 < k < r, \\ \Phi_{(1, \dots, 1)(1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1, 5)} &\sim S, \end{aligned} \quad (5.97)$$

où $n'_k = 3$. Par conséquent, le remplissage de la cellule hypercubique

$$\begin{aligned} 1 \leq n'_k \leq 2, & \quad 0 < k < r, \\ 1 \leq n'_r \leq 4, \end{aligned} \quad (5.98)$$

détermine, par translation, celle du tableau entier. Notez que les sites dans la cellule (5.98) avec $n'_r = 2, 4$ ont été classifiés comme opérateurs de désordre à partir de la (5.93).

Les résultats (5.97)–(5.98) sur la périodicité ont été confirmés dans le cas $r = 4$, où $(r + 1)|W| = 1920$ singlets et doublets ont été classifiés.

Nous donnons maintenant les résultats généraux pour le remplissage de la cellule (5.98). Encore une fois, la notation Q , cfr. (5.75), se révèle être très commode. En définissant :

$$\begin{aligned} x_i &= |n_i - n'_i| \bmod 2, & i = 1, 2, \dots, r - 1, \\ x_r &= \frac{|n_r - n'_r|}{2} \bmod 2, \end{aligned} \quad (5.99)$$

le doublet Q associé à la position $\vec{\beta}_{(n_1, \dots, n_r)(n'_1, \dots, n'_r)}$ est donné par la formule récursive

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, 1, 0, \dots, 0) = k - Q(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, 0, 0, \dots, 0), \quad (5.100)$$

avec les conditions initiales $Q(0, \dots, 0) = 0$. Par exemple, pour le cas $r = 3$, nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi_{(1,1,1)(1,1,1)} &\sim S, & \Phi_{(1,1,1)(1,2,1)} &\sim D^{2*}, & \Phi_{(1,1,1)(1,1,3)} &\sim D^{3*}, & \Phi_{(1,1,1)(1,2,3)} &\sim D^{1*}, \\ \Phi_{(1,1,1)(2,1,1)} &\sim D^{1*}, & \Phi_{(1,1,1)(2,2,1)} &\sim D^{1*}, & \Phi_{(1,1,1)(2,1,3)} &\sim D^{2*}, & \Phi_{(1,1,1)(2,2,3)} &\sim D^{2*}. \end{aligned}$$

Le point important est que la distribution (5.100) implique qu'il y a des fusions doublet-doublet dont l'amplitude associée au canal principal du développement s'annule. Pour $r = 3$, je mentionne, par exemple, le produit :

$$\Phi_{(1,1,1)(1,2,1)} \cdot \Phi_{(1,1,1)(2,1,3)} \rightarrow \Phi_{(1,1,1)(2,2,3)}. \quad (5.101)$$

Selon la (5.100), tous les opérateurs de l'expression ci-dessus sont des doublets D^{2*} . Mais, selon les règles de fusion, l'opérateur $\Phi_{(1,1,1)(2,2,3)}$ résultant doit être un singlet ou un doublet D^{3*} . Donc l'amplitude du canal principal est nulle.

Une vérification partielle mais indépendante des méthodes basées sur le gaz de Coulomb vient de l'étude des fonctions de corrélation à trois points. Les équations caractéristiques que nous avons dérivé et la correspondante analyse sont la généralisation directe de celles présentées en section (4.10). Nous renvoyons encore une fois à l'article en annexe C.

Théorie $c = 0$ et remplissage du réseau.

La méthode que nous venons de montrer pour résoudre le problème du remplissage du tableau de Kac est basée sur les réflexions de Weyl et sur la fusion entre les opérateurs de singlet et les autres opérateurs. Cette méthode peut être considérablement simplifiée en considérant la théorie avec $c = 0$.

L'avantage de la théorie $c = 0$ est que le domaine physique de cette théorie coïncide avec la cellule élémentaire. La nature des fantômes autour des opérateurs fondamentaux, les seuls opérateurs physiques dans la théorie $c = 0$, est fixé par les réflexions simples et les réflexions par rapport au plan qui limite le domaine physique. En utilisant l'identification des fantômes ainsi obtenue et les fusions avec les opérateurs de singlet, nous pouvons en suite déterminer univoquement le remplissage complet du réseau. La couche élémentaire bidimensionnelle de la théorie Z_5 se prête pour montrer la procédure dont nous venons de parler. En fig.(5.3) nous montrons l'identification des fantômes autour la cellule élémentaire obtenue en considérant les trois réflexions $s_{\vec{e}_1}$, $s_{\vec{e}_2}$ et $s_{\vec{e}_3}$.

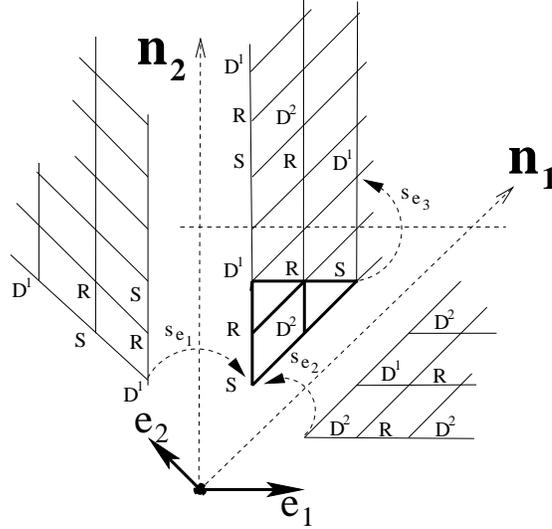


FIG. 5.3 – l'identification des fantômes autour la cellule élémentaire est obtenue en considérant les trois réflexions $s_{\vec{e}_1}$, $s_{\vec{e}_2}$ et $s_{\vec{e}_3}$. Puis, en utilisant les fusions avec les opérateurs de singlet S dans la figure, la couche entière peut être remplie.

Le résultat final de cette analyse peut être exprimé très facilement à travers des opérations géométriques sur le réseau comme je montre en fig.(5.4) : une fois que la disposition des opérateurs dans la cellule élémentaire est connue, on reproduit cette disposition en réfléchissant la cellule élémentaire par rapport à tous ses pans. En appliquant plusieurs fois cette opération on détermine le remplissage complet.

Nous faisons observer que la façon d'associer les valeurs des termes de bord aux sites du réseau à partir de la cellule élémentaire est déjà connue pour les théories conformes basées sur un coset diagonal [90, 89]. L'approche que nous avons présenté non seulement peut être considéré une dérivation indépendante de cette propriété mais se révèle aussi plus complet. En effet, nous allons voir que pour N pair chaque valeur du terme de bord est associée à deux secteurs différentes de charge (*cfr.* éqs.(5.109)-(5.111)) et dans ce cas la méthode basée sur le coset ne peut pas distinguer entre ces deux secteurs.

5.5 Théories parafermioniques Z_N , N pair.

Dans cette section nous allons compléter la construction des théories parafermioniques pour le cas N pair. Du moment que les méthodes (calculs des dégénérescences, réflexions sur le réseau, théorie $c = 0$) utilisées pour N impair s'appliquent également au cas N pair,

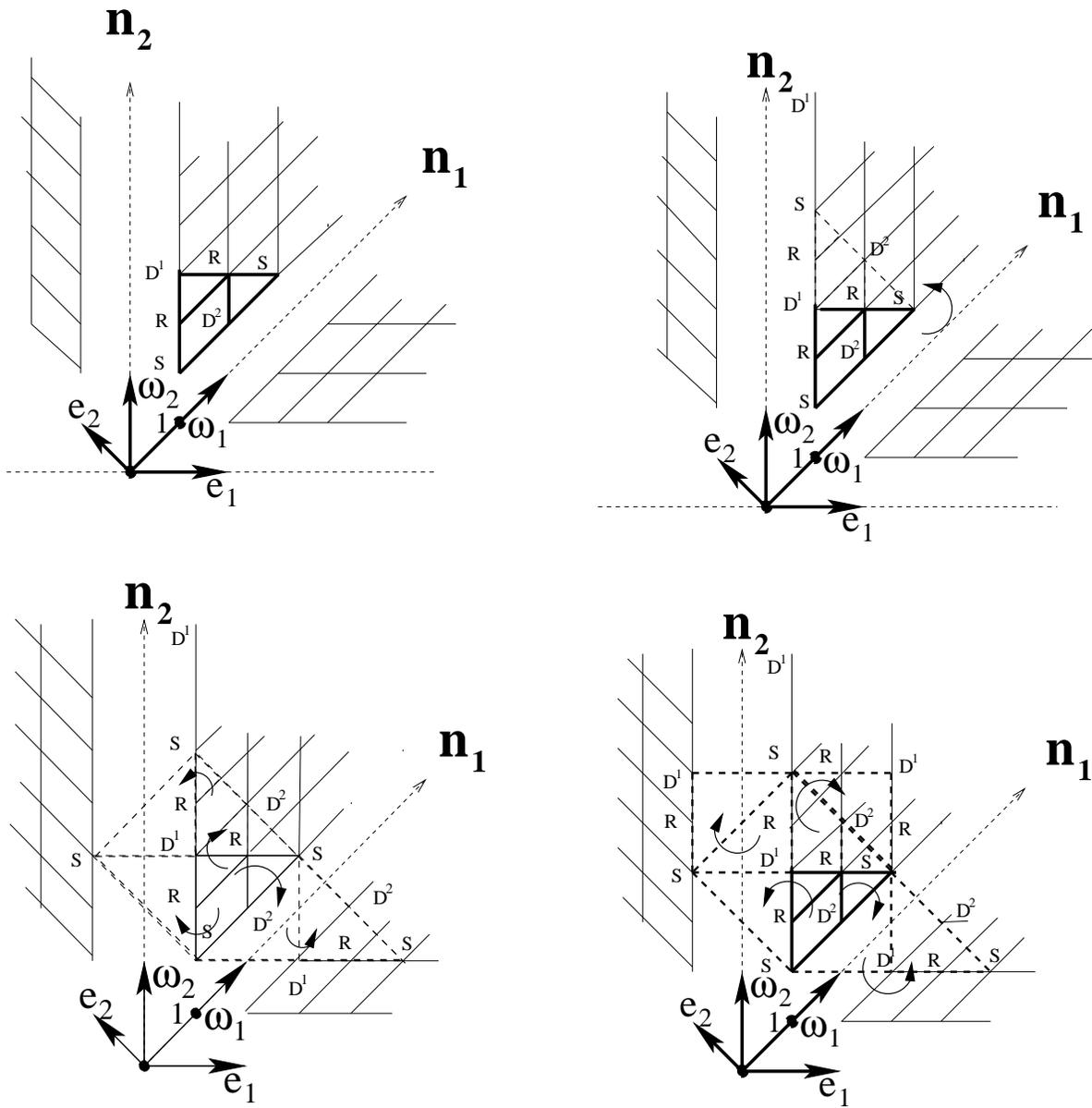


FIG. 5.4 – La méthode de remplir le réseau en réfléchissant la cellule élémentaire par rapport à tous ses pans est montrée pour la théorie Z_5 .

je me limite à énoncer les résultats principaux.

Formule de Kac.

Les dimensions conformes des opérateurs sont données par les équations (5.45)-(5.48) où les produits scalaires $\omega_{a,b} = (\vec{\omega}_a, \vec{\omega}_b)$ de l'algèbre de Lie D_r prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}\omega_{a,b} &= a, & a \leq b \leq r-2; \\ \omega_{a,r-1} = \omega_{a,r} &= \frac{a}{2}, & a \leq r-2; \\ \omega_{r,r} = \omega_{r-1,r-1} &= \frac{r}{4}; \\ \omega_{r-1,r} &= \frac{r-2}{4}\end{aligned}\tag{5.102}$$

Les conventions de normalisation sont celles introduites dans la section (5.4.5) où maintenant on a :

$$|\vec{e}_a|^2 = \frac{1}{2}, \quad a = 1, \dots, r.\tag{5.103}$$

Le terme de bord B en éq.(5.47) doit être défini et associé correctement aux sites du réseau des vecteurs $\vec{\beta}$ qui forment le tableau de Kac de la théorie. Comme nous avons vu dans les sections précédentes, il est suffisant à ce propos placer correctement les opérateurs fondamentaux de singlet, de doublet et de désordre. Le remplissage complet de la théorie est en fin obtenu en réfléchissant la cellule élémentaire.

5.5.1 Tableau de Kac fini et cellule élémentaire.

Pour une théorie Z_{2r} avec charge centrale (5.2) le domaine physique est délimité par :

$$\begin{aligned}2r-3 \leq n'_1 + 2 \sum_{a=2}^{r-2} n'_a + n'_{r-1} + n'_r &\leq p+1 \\ 2r-3 \leq n_1 + 2 \sum_{a=2}^{r-2} n_a + n_{r-1} + n_r &\leq p-1.\end{aligned}\tag{5.104}$$

Cette coupure du tableau est obtenue en analysant les réflexions par rapport au plan :

$$\begin{aligned}n'_1 + 2 \sum_{a=2}^{r-2} n'_a + n'_{r-1} + n'_r &= p+2 \\ n_1 + 2 \sum_{a=2}^{r-2} n_a + n_{r-1} + n_r &= p,\end{aligned}\tag{5.105}$$

orthogonal au vecteur \vec{e}_{r+1} :

$$\vec{e}_{r+1} = \vec{e}_{r+1} + 2 \sum_{a=2}^{r-2} \vec{e}_a + \vec{e}_{r-1} + \vec{e}_r.\tag{5.106}$$

La cellule élémentaire, définie en section (5.4.7), est délimitée par les inégalités :

$$2r - 3 \leq n'_1 + 2 \sum_{a=2}^{r-2} n'_a + n'_{r-1} + n'_r \leq N - 1 = 2r - 1. \quad (5.107)$$

L'analyse conduite sur la théorie N pair a permis de conclure que le domaine physique possède une symétrie $Z_2 \times Z_2$ réalisée par :

$$\begin{aligned} & \text{Premier } Z_2 \\ & n'_a \rightarrow n'_a, \quad n_a \rightarrow n_a, \quad a = 1, 2, \dots, r-2 \\ & n'_{r-1} \rightarrow n'_r, \quad n_{r-1} \rightarrow n_r \\ & n'_r \rightarrow n'_{r-1}, \quad n_r \rightarrow n_{r-1} \\ & \text{Deuxième } Z_2 \\ & n'_1 \rightarrow p + 2 - n'_1 - 2 \sum_{b=2}^{r-2} n'_b - n'_{r-1} - n'_r \\ & n_1 \rightarrow p - n_1 - 2 \sum_{b=2}^{r-2} n_b - n_{r-1} - n_r \\ & n'_a \rightarrow n'_a, \quad n_a \rightarrow n_a, \quad a = 2, 3, \dots, r. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Je montre comme exemple la cellule élémentaire de la théorie Z_6 en fig.(5.5) où les deux plans orthogonaux de symétrie sont mis en évidence . Dans cette figure les vecteurs $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ et $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ sont respectivement les poids fondamentaux et les racines simples de l'algèbre D_3 .

5.5.2 Termes de bord.

Les opérateur fondamentaux de la théorie Z_N occupent tous les sites de la cellule élémentaire du réseau de poids (voir sections (4.8) et (5.4.7)).

Les opérateurs appartenant à la cellule élémentaire (5.107) peuvent être ordonnés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_{(0)} &\equiv \Phi_{(1,1,1,\dots,1,1)} = I \\ \Phi_{(1)} &\equiv \Phi_{(2,1,1,\dots,1,1)} \\ \Phi_{(2)} &\equiv \Phi_{(1,2,1,\dots,1,1)} \\ &\text{etc.} \\ \Phi_{(r-2)} &\equiv \Phi_{(1,1,1,\dots,2,1,1)} \\ \Phi_{(r-1)} &\equiv \Phi_{(1,1,1,\dots,1,2,2)} \\ \Phi_{(r)} &\equiv \Phi_{(1,1,1,\dots,1,3,1)} \end{aligned} \quad (5.109)$$

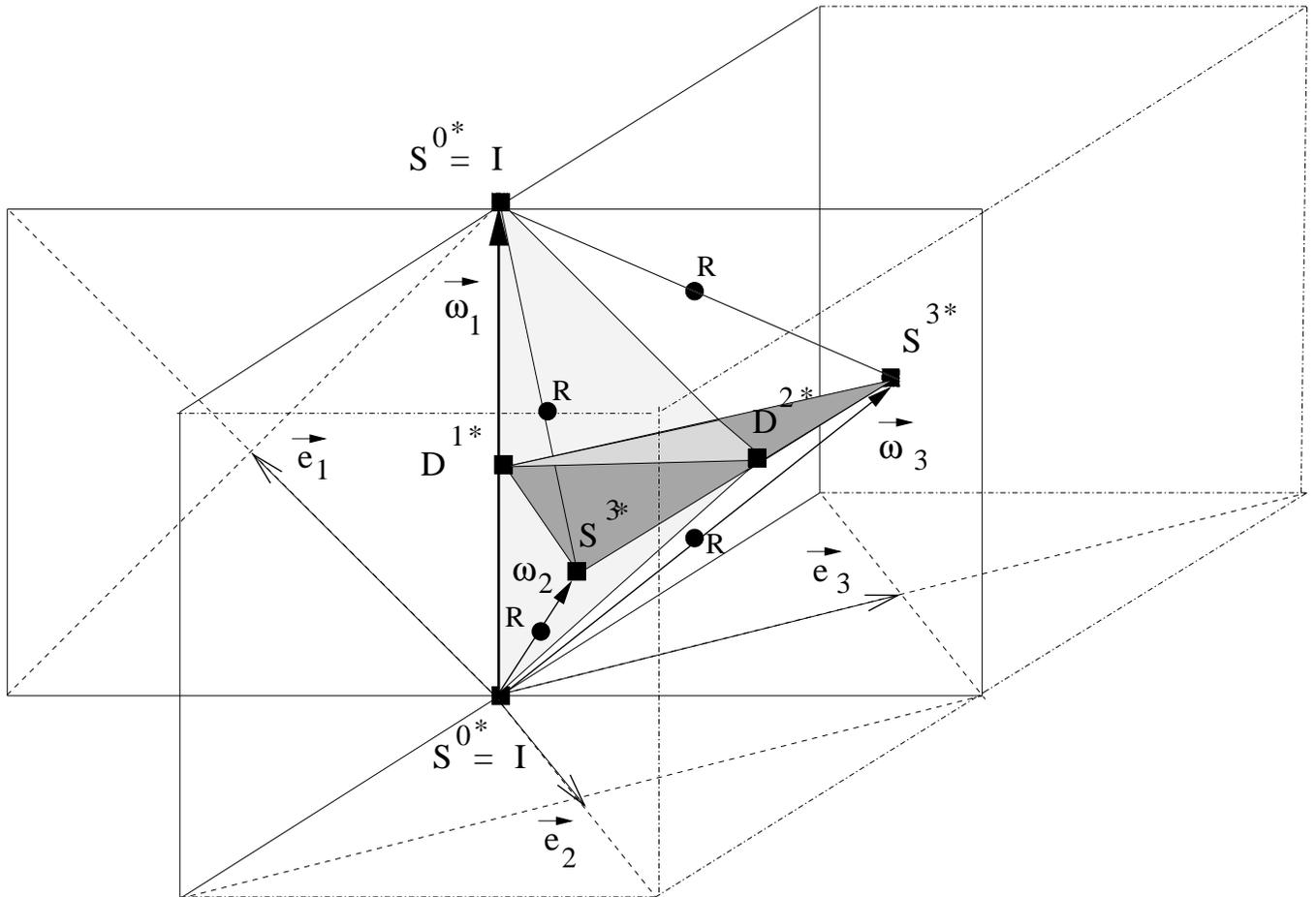


FIG. 5.5 – Cellule élémentaire de la théorie Z_6 . Les opérateurs fondamentaux, après avoir appliqué la symétrie $Z_2 \times Z_2$, sont : l'identité $S^{0*} = I = \Phi_{(1,1,1)}$, les doublets $D^{1*} = \Phi_{(1)} \equiv \Phi_{(2,1,1)}$, $D^{2*} = \Phi_{(2)} \equiv \Phi_{(1,2,2)}$, le singlet non trivial $S^{3*} = \Phi_{(3)} \equiv \Phi_{(1,3,1)}$, et l'opérateur de désordre $R = \Phi_{(1,2,1)}$.

plus l'opérateur

$$R = \Phi_{(1,1,1\dots 1,2,1)}. \quad (5.110)$$

qui nous montrerons être un opérateur de désordre.. Tous les autres opérateurs dans le domaine (5.107) sont liés à ceux en (5.110) par les symétries (5.108) (fig.(5.5)).

En supposant que les dimensions des opérateurs de la théorie $c = 0$ sont nulles, nous pouvons déterminer les valeurs B_a et B_R respectivement pour les opérateurs $\Phi_{(a)}$ et R en éq. (5.109) et en éq.(5.110) :

$$B_{(a)} = \frac{a(r-a)}{4r}, \quad a = 0, 1, 2, \dots, r \quad (5.111)$$

$$B_R = \frac{r-1}{16} \quad (5.112)$$

5.5.3 Doublets $\Phi^{\pm \frac{q}{2}}$ avec charge demi entière.

Avant d'utiliser la méthode des réflexions pour identifier la nature des opérateurs dans la cellule élémentaire (voir section (5.4.10)), nous devons résoudre le problème concernant les cas N pair dont nous avons discuté en section (5.2.1). Nous rappelons que la structure des modules correspondant à Φ^q et à Φ^{r-q} , $r = N/2$, sont identiques : nous pouvons donc reproduire seulement un nombre $[N/4] + 1$ des représentations différentes.

Le fait que aussi la formule (5.111) pour les termes de bord $B_{(a)}$ soit invariante sous le changement $a \rightarrow N/2 - a$, nous a conduit initialement à identifier les secteurs des opérateurs qui avaient le même terme de bord, en réduisant ainsi les nombres des secteurs de la théorie par un facteur 2. Cette réduction peut être obtenue en assumant une symétrie Z_4 de la cellule élémentaire au lieu de la symétrie $Z_2 \otimes Z_2$ présentée en éq.(5.108). Dans la fig.(5.5) cette symétrie serait engendrée par une rotation de $\pi/2$ autour de l'axe qui lie les sites D^{1*} et D^{2*} , suivie par une réflexion par rapport au plan perpendiculaire à cet axe.

Il est intéressant de comparer les symétries de la cellule élémentaire avec celles qui apparaissent dans les théories W (voir section (3.1)) qui sont basées sur la même algèbre de Lie. En section (5.4.6) nous avons vu que les symétries de la cellule élémentaire (ou, plus généralement, du domaine physique pour les théories avec $c > 0$) de la théorie Z_{2r+1} coïncident avec celles de la théorie WB_r . La cellule élémentaire de la théorie WD_r a une symétrie $Z_2 \otimes Z_2$ pour r pair et Z_4 pour r impair. Dans le cas particulier de la théorie Z_6 , la symétrie Z_4 correspondrait à celle de la théorie WD_3 .

Le seul problème avec ce scénario est que le nombre des représentations de la théorie ne correspond pas au nombre des représentations du groupe Z_N , ce qui ne serait pas naturel. Pour cette raison ce scénario a été abandonné.

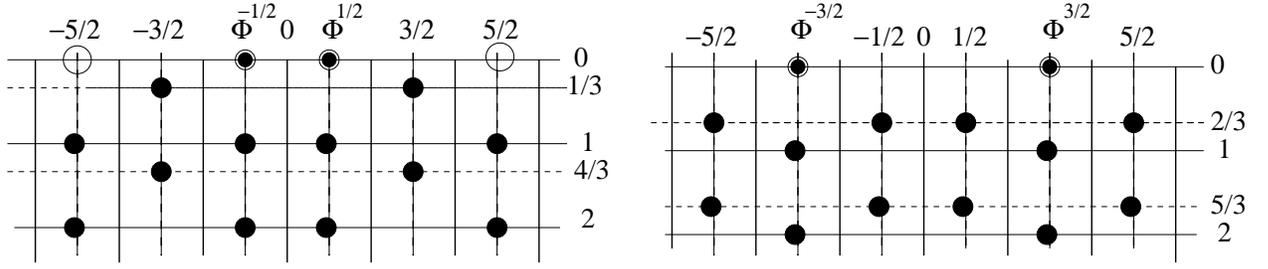


FIG. 5.6 – Modules $q = \pm\frac{1}{2}$ et $q = \pm\frac{3}{2}$ pour la théorie Z_6 .

En essayant de retrouver le nombre correct des représentations, nous avons considéré aussi les valeurs demi entières de q . Nous avons assumé les valeurs suivantes de q pour les champs **primaires** de représentation :

$$q = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots, \pm\frac{N}{4}. \quad (5.113)$$

Les niveaux dans les modules, pour q prenant des valeurs demi entières, peuvent être calculés avec la formule (5.8). En effet, cette formule peut alternativement être définie en considérant les conditions d'associativité de la fonction à quatre points :

$$\langle \Phi^{-q}(\infty)\Psi^{-k}(1)\Psi^k(z)\Phi^q(0) \rangle = \frac{P_l(z)}{(1-z)^{2\Delta_k}(z)^{\Delta_k - \delta_{k+q}^q}}, \quad (5.114)$$

où $P_l(z)$ est un polynôme de degré l , l étant défini par la condition que $\Phi^q(0)$ soit primaire par rapport au champ $\Psi^k(z)$. Il suffit de considérer la limite $z \rightarrow \infty$ et comparer le résultat ainsi obtenu par la forme analytique (partie droite de l'éq.(5.114)) avec celui obtenu en utilisant l'algèbre des opérateurs dans la fonction de corrélation (partie gauche de l'éq.(5.114)). Dans cette approche, on peut accepter que q prenne des valeurs demi entières pendant que les charges des parafermions k restent entières.

Comme exemple, je montre le module de $\Phi^{\pm\frac{1}{2}}$ et de $\Phi^{\pm\frac{3}{2}}$ pour la théorie Z_6 . Ils complètent avec les modules montrés en fig.(5.6) la liste des modules pour la théorie Z_6 .

5.5.4 Dégénérescences des modules.

Le calcul explicite des dégénérescences dans les premiers niveaux du module $(\Phi^{-\frac{1}{2}}, \Phi^{+\frac{1}{2}})$ donne des dimensions pour l'opérateur $\Phi^{\pm\frac{1}{2}}$ fondamental qui sont parfaitement en accord avec les dimensions des opérateurs $\Phi_{(1,\dots,1)(2,\dots,1)}$ et $\Phi_{(2,1,\dots,1)(1,\dots,1)}$ et avec la valeur du terme de bord $B_{(1)}$, éq. (5.111). En plus, les niveaux où les états singuliers apparaissent sont ceux prédits par la méthode des réflexions. Cette analyse est présentée dans l'appendice A de l'article en annexe D.

Également, nous avons retrouvé les dimensions de l'opérateur $\Phi_{(2)} \equiv \Phi_{(1,2,2)}$ et $\Phi_{(r)} \equiv \Phi_{(1,1,\dots,2,1)}$ en étudiant respectivement les dégénérescences du module du doublet 1 fondamental pour $N = 6$ et de l'opérateur de désordre fondamental pour N pair (voir appendice B et C de l'annexe D).

Nous faisons observer que les opérateurs $\Phi_{(a)}$ et $\Phi_{(r-a)}$ présentent le même terme de bord. Cependant, la structure de leurs modules est différente : ils représentent des secteurs différents de la théorie.

Nous avons aussi considéré l'opérateur $\Phi^{\pm \frac{3}{2}}$ de la théorie Z_6 . Dans ce cas un calcul direct de sa dimension n'a pas été possible car il faut imposer une dégénérescence au niveau $5/3$ où il y a un grand nombre des états à considérer. D'autre part, en comparant les prédictions des réflexions avec la structure des modules et le contenu de la cellule élémentaire, nous nous sommes aperçu que l'assignation de l'opérateur $\Phi_{(3)} = \Phi_{(1,3,1)}$ au doublet fondamental de charge $q \pm 3/2$ est la seule possible. Contrairement à les autres opérateurs qui ont une charge $q \neq 0$, le module de l'opérateur $\Phi_{(1,3,1)}$ est construit à partir d'un seul état $\Phi^{\frac{3}{2}}$ au sommet. Pour cette propriété, les opérateurs primaires qui appartiennent au même secteur que $\Phi_{(1,3,1)}$ représentent un autre type d'opérateur de singlet. Nous allons retourner sur ce point quand nous introduirons une notation plus naturelle pour les secteurs de charge.

La position des opérateurs fondamentaux de chaque type dans la cellule élémentaire pour la théorie Z_6 est montrée en fig. (5.5).

Avant de passer à une nouvelle notation pour les charges q , nous devons souligner que l'introduction des charges demi entières est strictement nécessaire pour $N = 2r$ et r pair. En fait, pour chaque r , le module (Φ^{-q}, Φ^q) est isomorphe au module $(\Phi^{N/4-q}, \Phi^{N/4+q})$ qui a les sommets centrés en $N/4$. Pour r pair, les charges des ces modules équivalents sont ou demi entières ou entières. Pour r impair en revanche, on pourrait éviter d'introduire des charges demi entières en prenant une moitié des doublets dont le module est centré en 0 et une moitié avec les modules centrés en $N/4$.

5.5.5 Redéfinition des charges Z_N et auto dualité.

L'introduction des charges demi entières nous a permis de retrouver tous les modules de représentation de Z_N . Mais, même si l'utilisation de ces charges est parfaitement consistante au niveau formel, nous en devons donner une explication physique. A ce propos, nous redéfinissons les charges initiales q en les multipliant par deux :

$$Q = 2q \pmod{2N}; \quad \Phi^{Q'} = \Phi^q. \quad (5.115)$$

Dans la notation (5.115) la structure des modules des champs Φ^Q et Φ^{N-Q} est identique. Les valeurs possibles des charges des champs primaires sont alors (*cfr.* éq.(5.113)) :

$$Q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm\left(\frac{N}{2} - 1\right), \frac{N}{2}. \quad (5.116)$$

Remarquez que nous avons utilisé la même notation que pour le cas N impair (*cfr.*(5.75)). Dans la suite, une étoile indique les charges dans la notation Q : par exemple, $\Phi^{1*} \equiv \Phi^{\frac{1}{2}}$.

Nous pouvons maintenant mieux justifier le fait que $\Phi_{(1,3,1)}$ soit un singlet. En effet, du moment que les charges Z_N des champs primaires doivent être définies modulo N (encore une fois pour être consistant avec le nombre des représentations du group Z_N), les charges $-N/2$ et $N/2$ sont égales. Dans le cas particulier de Z_6 , la charge maximale est celle du singlet $\Phi^{3*} \equiv S^{3*} \equiv \Phi^{\frac{3}{2}}$, montré en fig.(5.5).

Les parafermions sont aussi indiqués comme :

$$\Psi^{K*} = \Psi^K. \quad (5.117)$$

où K sont les charges dans la notation Q :

$$K = 2k \pmod{2N}. \quad (5.118)$$

Remarquez que les charges des parafermions et, donc, des secteurs des opérateurs **descendants** sont en fait définies modulo $2N$. On peut expliquer ces conventions assez simplement : de cette façon en effet, chaque module voit seulement N secteurs différents de charge occupés, comme montré en fig.(5.2) et en fig.(5.6). Ceci est en accord avec le fait que les modules constituent les représentations du groupe Z_N (et non du groupe Z_{2N}).

Comme nous avons vu dans la section (4.2.1), la notation (5.116)-(5.117) dévient naturelle en assumant que la **théorie soit auto duale**. Il est intéressant de remarquer que nous n'avons pas assumé du début l'auto dualité. En effet on n'a pas besoin d'un opérateur de spin $\sigma_k \equiv \Phi^k$ et de son dual $\mu_k \equiv \tilde{\Phi}^k$ pour produire les parafermions $\{\Psi^k\}$, comme en éq.(4.13), car les champs $\{\Psi^k\}$ peuvent en principe apparaître dans le produit entre deux champs de désordre R . Par exemple, les produits comme $\Psi^1(z)R_a(0) \sim R_{a-2}(0)$ ont été utilisés de façon extensive en [18] pour dériver les équations caractéristiques correspondantes (voir section (4.10)). Ces relations demandent la présence de Ψ^1 dans la fusion $R_{a-2}(z)R_a(0)$. La symétrie auto duale est suggérée par la consistance de la théorie.

5.5.6 Résumé.

Nous pouvons maintenant résumer les résultats concernant la théorie Z_N avec N pair, $N = 2r$.

Pour la théorie Z_6 nous avons établi l'identification des opérateurs dans la cellule élémentaire :

$$\begin{aligned}
\Phi_{(0)} &\equiv \Phi_{(1,1,1)} = I = S^{0*} \\
\Phi_{(1)} &\equiv \Phi_{(2,1,1)} = D^{1*} \\
\Phi_{(3)} &\equiv \Phi_{(1,3,1)} = D^{3*} \\
\Phi_{(1,2,1)} &= R,
\end{aligned} \tag{5.119}$$

comme montré en fig. (5.5). La construction de la cellule élémentaire pour la théorie Z_8 est similaire. Pour le cas Z_{10} quelques nouvelles ambiguïtés dans la méthode des réflexions apparaisse mais elles peuvent être résolues en utilisant le calcul direct des dégénérescences. En particulier, nous avons eu besoin des résultats explicites pour les doublets $q = \frac{1}{2}$ et $q = 1$ pour chaque N pair (*cf.* appendices B et C de l'annexe D).

Après les cas particuliers de Z_6 , Z_8 et Z_{10} , traités en détails, la généralisation de l'assignement (5.119) est assez directe :

$$\begin{aligned}
\Phi_{(0)} &\equiv \Phi_{(1,1,1,\dots,1,1)} = I = S^{0*} \\
\Phi_{(1)} &\equiv \Phi_{(2,1,1,\dots,1,1)} = D^{1*} \\
\Phi_{(2)} &\equiv \Phi_{(1,2,1,\dots,1,1)} = D^{2*} \\
&\text{etc.} \\
\Phi_{(r-2)} &\equiv \Phi_{(1,1,1,\dots,2,1,1)} = D^{r-2*} \\
\Phi_{(r-1)} &\equiv \Phi_{(1,1,1,\dots,1,2,2)} = D^{r-1*} \\
\Phi_{(r)} &\equiv \Phi_{(1,1,1,\dots,1,3,1)} = D^{r*} \\
\Phi_{(1,1,1,\dots,2,1)} &= R.
\end{aligned} \tag{5.120}$$

Les termes de bord correspondants sont donnés par les éqs. (5.111),(5.112).

En fin, le remplissage du réseau peut être facilement obtenu par l'assignement (5.120) en réfléchissant plusieurs fois la cellule élémentaire, comme nous avons vu en section (5.4.10). Le résultat peut être exprimé de façon similaire à celle du cas N impair (*cf.* éq.(5.100)). Un opérateur $\Phi_{(n_1,\dots,n_r)(n'_1,\dots,n'_r)}$ est un opérateur de désordre si $\tilde{n}_{r-1} + \tilde{n}_r$ est impair, où $\tilde{n}_a \equiv |n'_a - n_a|$. Pour les autres opérateurs, en définissant

$$\begin{aligned}
x_a &= \tilde{n}_a \bmod 2 \quad \text{for } a = 1, \dots, r-2 \\
x_{r-1} &= \tilde{n}_r \bmod 2 \\
x_r &= \frac{|\tilde{n}_r - \tilde{n}_{r-1}|}{2} \bmod 2,
\end{aligned} \tag{5.121}$$

la charge Q associée à la position $\vec{\beta}_{(n_1,\dots,n_r)(n'_1,\dots,n'_r)}$ est donné par la formule récursive :

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, 1, 0, \dots, 0) = k - Q(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, 0, 0, \dots, 0), \tag{5.122}$$

avec les conditions initiales $Q(0, \dots, 0) = 0$.

5.6 Discussion.

Dans ce chapitre, nous avons construit et analysé les deux séries des théories parafermioniques basées sur les algèbres de Lie B_r et D_r .

La recherche que nous avons conduite jusqu'ici a abouti à la formule pour les dimensions conformes des champs primaires de l'algèbre chirale Z_N , deuxième solution associative. Pour obtenir ce résultat nous avons calculé les termes de bord de la théorie, éq. (5.86) et éq. (5.111)-(5.112), et déterminé le secteur auquel associer chaque site du tableau de Kac.

D'un point de vue purement technique, il est important de remarquer que, pour $N > 5$, le calcul des dimensions des opérateurs fondamentaux n'est pas faisable que dans des cas particuliers. Nous avons montré que il est possible contourner ce problème en profitant des propriétés du gaz de Coulomb.

La construction des théories Z_{2r+1} , $N = 2r + 1$, n'a pas donné beaucoup des résultats nouveaux par rapport à la théorie Z_5 , $r = 2$. Il vaut la peine mentionner que, pour $r > 2$, nous avons identifié des fusions entre opérateurs dont l'amplitude associée au canal principal s'annulent, en obtenant ainsi des informations dynamiques sur la théorie.

La construction du spectre de la théorie Z_N avec N pair s'est révélée beaucoup plus délicate. En particulier, en étudiant la structure des modules de représentation, nous nous sommes aperçus qu'il y a des indications fortes pour que ces théories parafermioniques possèdent une symétrie auto duale. Cette symétrie, que nous n'avons pas supposé du début, est évoquée par la consistance de la théorie.

Les théories parafermioniques que nous venons de présenter offrent une vision approfondie du rôle de la symétrie Z_N , qui est notre objet d'étude. Je veux ouvrir ici une brève parenthèse. Bien que très efficace pour déterminer la valeur de la charge centrale ainsi que les dimensions des opérateurs primaires (et donc des termes de bord), la construction basée sur le coset est "aveugle" à l'action de la symétrie. Dans l'approche du coset, par exemple, on ne peut pas identifier les secteurs de charge de la théorie. Les résultats que nous venons de présenter mettent particulièrement en évidence ces limites. Je mentionne par exemple le cas de la théorie Z_N avec N pair qui présente des secteurs différents de charge qui ont la même valeur du terme de bord. D'autre part, la méthode du coset est basée sur des techniques plus générales et peut être appliquée dans un context plus général. La convergence des deux approches dans le cas particulier de la théorie Z_N est alors positive pour les deux. En particulier, dans l'avenir, une utilisation complémentaire des deux méthodes peut se révéler

très utile.

Comme dans le cas de la théorie $N = 5$, nous proposons que cette série infinie des théories unitaires Z_N avec $p = N - 2 + n$ et $n = 1, 2, \dots$ décrit les points multicritiques des systèmes statistiques avec symétrie Z_N .

Chapitre 6

Conclusion générale.

Les travaux présentés dans ce mémoire font partie d'un projet de recherche qui vise à trouver des théories conformes dont les champs forment des représentations non triviales de la symétrie permutatonnelle. La construction de telles théories permettrait en effet de mieux comprendre les comportements critiques de systèmes couplés ou avec désordre.

En premier lieu, nous avons étudié la série des modèles conformes $WD_3^{(p)}$ avec un faible désordre couplé à la densité d'énergie. Nous avons considéré le cas $p \gg 1$ et, en faisant un calcul RG au premier ordre, nous avons montré que la limite infra-rouge de cette théorie est décrite par le modèle $WD_3^{(p-1)}$ pur. De façon similaire nous avons aussi conclu que le système de N modèles $WD_3^{(p)}$ couplés flotte sous la transformation RG vers le point critique décrit par N modèles $WD_3^{(p-1)}$ non interagissants. Un point important est que le flux de renormalisation de N modèles $WD_3^{(p)}$ couplés présente deux nouveaux points fixes pour chaque p et que les champs des théories critiques correspondantes forment les représentations du groupe de permutation S_N . Nous avons vérifié que le secteur d'énergie de ces théories présente un opérateur de singlet et un opérateur de doublet du groupe S_N . Ces résultats montrent donc l'existence d'une série unitaire de théories conformes, à présent inconnues, où la symétrie permutatonnelle se réalise complètement. En utilisant le théorème c nous avons déterminé le développement à l'ordre $(1/p)^3$ des valeurs des charges centrales correspondantes. A notre connaissance, ceci est le premier résultat analytique sur des théories conformes avec symétrie permutatonnelle.

L'étude des modèles WD_3^p nous donne des informations trop générales pour qu'on puisse en déduire les structures qui caractérisent les théories conformes avec symétrie S_N . Par exemple, on ne connaît pas la forme de l'algèbre chirale qui engendre cette symétrie. C'est dans ce contexte que nous nous sommes intéressé aux algèbres parafermioniques qui réalisent

les symétries Z_N des systèmes statistiques.

Comme déjà mentionné dans la présentation de cette thèse, les théories parafermioniques de Fateev et Zamolodchikov, basées sur une première solution associative de l'algèbre chirale, sont certainement les théories parafermioniques les plus connues et elles ont trouvé de nombreuses applications dans des domaines différents.

Néanmoins, ils restent plusieurs raisons pour chercher des généralisations à ces théories. D'une part ces théories sont en fait "simples", dans le sens que la charge centrale $c_N = 2(N - 1)/(N + 2)$ est fixée par l'associativité. En particulier, il n'existe pas une série infinie de théories unitaires associées à cette algèbre. D'autre part, il est naturel de supposer que les modèles sur réseau avec symétrie Z_N admettent une série infinie de points multicritiques, comme dans le cas du modèle d'Ising. Nous avons donc considéré une deuxième solution associative pour l'algèbre chirale avec symétrie Z_N pour laquelle la valeur de la charge centrale n'est pas fixée par l'associativité. Ces autres théories parafermioniques représentent de bons candidats pour décrire les points multicritiques des systèmes avec symétrie Z_N . Jusqu'à présent, les représentations de ces algèbres parafermioniques étaient connues seulement pour le cas $N = 2$, correspondant à la série unitaire des théories superconformes $N = 1$, et pour le cas $N = 3$. Nous avons généralisé ces résultats pour les cas Z_N , $N > 3$. Pour construire ces théories nous avons déterminé la structure des modules des opérateurs primaires et déterminé les règles de commutation des modes parafermioniques pour chaque secteur. Les dimensions de certains opérateurs fondamentaux ont été ensuite calculées en imposant la dégénérescence des modules de représentation. En profitant du fait que ces théories sont décrites par le coset diagonale du groupe $SO(N)$, nous avons supposé une réalisation en termes de gaz de Coulomb basé sur le réseau de poids de l'algèbre de Lie du groupe $SO(N)$, c'est à dire B_r pour $N = 2r + 1$ et D_r pour $N = 2r$. En implementant les calculs explicites des dégénérescence avec les propriétés du gaz de Coulomb, nous avons réussi à donner une formule complète pour les dimensions des opérateurs primaires. Pour cela nous avons identifié le secteur auquel chaque opérateur appartient. Au contraire de la construction coset, l'approche que nous avons suivi est directement basée sur l'action de la symétrie Z_N et cela nous a permis d'étudier en détail les propriétés qui décodent une telle symétrie. Un problème très intéressant serait de trouver la série de modèles définis sur le réseau dont la limite continue est décrite par les théories conformes que nous avons construit. Enfin, nous avons vu que toute une nouvelle famille de théories conformes est réalisée par un gaz de Coulomb particulier. Il serait donc important de clarifier la relation entre les différents réseaux associés aux gaz du Coulomb et les théories conformes étendues. Cette recherche pourrait aboutir à une classification des théories conformes qui admettent

une réalisation en termes du gaz de Coulomb. Parmi ces théories, nous pensons trouver les théories associées aux points fixes obtenus lors de l'étude de N -modèles couplés.

Bibliographie

- [1] A. Amit, *Field Theory, the renormalization group and critical phenomena* (World scientific, Singapore) (1984).
- [2] M. L. Bellac, *Des phénomènes critiques aux champs de jauge* (Interedition, Paris) (1988).
- [3] G.Parisi, *Statistical field theory* (Addison-Wesley, Red-wood city,CA) (1988).
- [4] C. Itzykson and J.-M. Drouffe, *Statistical field theory* (Cambridge University Press) (1989).
- [5] A. Aharony, Phys.Rev.B. **18**, 3318 (1978).
- [6] Y. Imry and S.-K. Ma, Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975).
- [7] A. Harris, J. Phys. C **7**, 1671 (1974).
- [8] V. S. Dotsenko and V. Dotsenko, Sov. Phys. JETP. Lett **33**, 37 (1981).
- [9] V. S. Dotsenko and V. Dotsenko, J. Phys. A **17**, L301 (1984).
- [10] A.W.W.Ludwig, Nucl.Phys.B **285**, 97 (1987).
- [11] Vl.S.Dotsenko, M.Picco and P.Pujol, Phys. Lett.B **347**, 1990 (1995).
- [12] S. Chen, A. M. Ferrenberg and D.P.Landau, Phys. Rev. E **52**, 1337 (1995).
- [13] M.Picco, Phys. Rev. Lett. **79**, 2998 (1997).
- [14] J. Cardy and J. Jacobsen, Phys. Rev. Lett. **79**, 4063 (1997).
- [15] V. Dotsenko, J. Jacobsen and M. L. ans M. Picco, Nucl.Phys. B **546**, 505 (1999).
- [16] V. Dotsenko, J. Jacobsen, X. Nguyen and R. Santachiara, Nucl. Phys. **B631**, 426 (2002).
- [17] V. S. Dotsenko, X. S. Nguyen and R. Santachiara, Nato Advanced Research Workshop on Statistical Field Theories, Villa Olmo, Como (2001).
- [18] V. S. Dotsenko, X. S. Nguyen and R. Santachiara, Nucl. Phys. **B613**, 445 (2001).
- [19] V. Fateev and A. Zamolodchikov, Sov. Phys. JETP **62**, 215 (1985).

- [20] V. Fateev and A. Zamolodchikov, Sov. Phys. JETP **63**, 913 (1986).
- [21] D. Gepner and Z.-a. Qiu, Nucl. Phys. **B285**, 423 (1987).
- [22] J. Distler and Z.-a. Qiu, Nucl. Phys. **B336**, 533 (1990).
- [23] D.Nemeshansky, Nucl.Phys.B **363**, 665 (1989).
- [24] D. Gepner, Nucl. Phys. **B290**, 10 (1987).
- [25] N. Read and E. Rezayi, Phys. Rev.B **59**, 8084 (1999).
- [26] H. Saleur, Nucl. Phys. **B360**, 219 (1991).
- [27] H. Saleur, Commun. Math. Phys. **132**, 657 (1990).
- [28] J. M. Maldacena, G. W. Moore and N. Seiberg, JHEP **07**, 046 (2001).
- [29] V. Fateev and A. Zamolodchikov, Theor. Math. Phys. **71**, 451 (1987).
- [30] V. S. Dotsenko, J. L. Jacobsen and R. Santachiara, Nucl. Phys. **B656**, 259 (2003).
- [31] V. S. Dotsenko, J. L. Jacobsen and R. Santachiara, Nucl. Phys. **B664**, 477 (2003).
- [32] V. S. Dotsenko, J. L. Jacobsen and R. Santachiara, hep-th/0310131 (2003).
- [33] L. Kadanoff, Physics **2**, 263 (1966).
- [34] B. Widom, J. Chem. Phys. **48**, 3892 (1965).
- [35] K.G.Wilson and J. Kogut, Physics Report C **12**, 75 (1974).
- [36] K. Wilson, Rev.Mod. Phys. **47**, 773 (1975).
- [37] A. Polyakov, JETP Lett. **12**, 381 (1970).
- [38] V. S. Dotsenko, *Série de cours sur la théorie conforme*, sur le web. Voir le site du LPTHE, Université Pierre et Marie Curie .
- [39] J.-B. Itzykson, C. Zuber, *Quantum field theory* (McGraw-Hill, New York,USA) (1980).
- [40] C. Itzykson, H. Saleur and J.-B. Zuber, *Conformal invariance and applications to statistical mechanics* (World Scientific, Singapore) (1988).
- [41] A. Belavin, A. Polyakov and A. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **241**, 333 (1984).
- [42] P. DiFrancesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal Field Theorie* (Springer Verlag, New York) (1996).
- [43] M. A. Virasoro, Phys. Rev. D **1**, 2933 (1970).
- [44] J. Cardy, *Conformal invariance*, in *Phase transitions and critical phenomena*, edited by C. Domb and J. Lebowitz, vol. 11 (Academic Press, London) (1987).
- [45] J. Cardy, *Conformal invariance and statistical mechanics*, in *Fields, strings and critical phenomena*, edited by E. Brezin and J. Zinn-Justin, vol. 11 (North-Holland, Amsterdam) (1990).

-
- [46] V. Kac, Lectures Notes in Physics **94**, 441 (1979).
- [47] B. Feigin and D. Fuks, Funktz. Analyz **16**, 47 (1982).
- [48] D. Friedan, Z.Qiu and S. Shenker, Phys. Rev. Lett. **52**, 1575 (1984).
- [49] V. S. Dotsenko and V. Fateev, Nucl. Phys. B **240**, 312 (1984).
- [50] V. S. Dotsenko and V. Fateev, Nucl. Phys. B **251**, 691 (1985).
- [51] L. Onsanger, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).
- [52] R. Baxter, *Exactly Solvable Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, London) (1982).
- [53] R.J.Baxter, J.Phys. p. L61 (1980).
- [54] L. Kadanoff and H. Ceva, Phys. Rev. B **3**, 3918 (1971).
- [55] L. P. Kadanoff and M. Kohmoto, Nucl. Phys. pp. 671–680 (1981).
- [56] G. Felder, Nucl. Phys. B **317**, 215 (1989).
- [57] A. Zamolodchikov, Teor. Mat. Fiz. **99**, 108 (1985).
- [58] A. Polyakov and P.B.Wiegmann, Phys. Lett.B **131**, 121 (1983).
- [59] E. Witten, Commun. Math. Phys. **92**, 455 (1985).
- [60] V. Knizhnik and A. Zamolodchikov, Nucl.Phys. B **247**, 83 (1984).
- [61] H. Eichencerr, Phys. Lett. B **151**, 26 (1985).
- [62] M. Bersadski, V. Knizhnik and M. Teitelman, Phys. Lett. B **151**, 31 (1985).
- [63] D. Friedan, Z.Qiu and S. Shenker, Phys. Lett. B **151**, 37 (1984).
- [64] W. Friedan and A. Kent, Phys. Lett. B **172**, 316 (1986).
- [65] G. Mussardo, G. Sotkov and M. Stanishkov, Phys. Lett. **B218**, 191 (1989).
- [66] G. Mussardo, G. Sotkov and M. Stanishkov, Int. J. Mod. Phys. **A4**, 1135 (1989).
- [67] S. Lukyanov and V. A. Fateev, Sov. Sci. Rev. A. Phys. **15**, 1 (1990).
- [68] R. Stinchcombe, *Dilute magnetism*, in *Phase transitions and critical phenomena*, edited by C. Domb and J. Lebowitz, vol. 7 (Academic Press, London) (1983).
- [69] S. F. Edwards and P. Anderson, J. Phys. p. 965 (1975).
- [70] V. S. Dotsenko, V. S. Dotsenko and M. Picco, Nucl. Phys. **B520**, 633 (1998).
- [71] D. Bernard, *Low-dimensional applications of quantum field theory*, Nato Advanced Summer Institute : Low Dimensional Applications of Quantum Field Theory, Cargese, France, 11- 29 Jul 1995 ; Baulieu, L. (ed.) and Kazakov, V. (ed.) and Picco, M. (ed.) and Windey, Paul (ed.) .

- [72] A. Zamolodchikov, JETP Lett. **43**, 730 (1986).
- [73] V. Fateev and A. Zamolodchikov, Nucl.Phys. B **280**, 644 (1987).
- [74] V. Fateev and S. Luk'yanov, Int. J. Mod. Phys. p. 507 (1988).
- [75] P. Bouwknegt and K. Shoutens, Phys. Rept. **223**, 183 (1993).
- [76] E. Date, M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, Kyoto University Preprints RIMS **590** (1987).
- [77] M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, Kyoto University Preprints RIMS **600** (1987).
- [78] A. Zamolodchikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **90**, 1808 (1986).
- [79] G. M. A. Le Clair, A. Ludwig, Nucl. Phys. B **512**, 523 (1998).
- [80] I.Vaysburd, Nucl. Phys. B **446**, 387 (1995).
- [81] F. Wu and Y. Wang, J. Math. Phys. **17**, 439 (1976).
- [82] A. Zamolodchikov, Sov. Phys. JETP **48**, 168 (1978).
- [83] E. Fradkin and J. Kadanoff, Nucl. Phys. B **170**, FS. 1.1 (1980).
- [84] V. Dotsenko, Sov. Phys. JETP **48**, 546 (1978).
- [85] Y. Bashilov and S. Pokrovsky, Comm. Math. Phys. **84**, 103 (1982).
- [86] F. Alcaraz and R. Koberle, J. Phys. A **13**, L153 (1980).
- [87] P.Goddard and A. Schwimmer, Phys. Lett. B **206**, 259 (1988).
- [88] P. Furlan, R. Paunov and I. Todorov, Fortschr. Phys. **40**, 211 (1992).
- [89] P. Christie and F. Ravanini, Int. J. Mod. Phys. A **4**, 897 (1989).
- [90] J. Soda and H. Yoshii, Prog. Theor. Phys. **80**, 941 (1988).

Annexe A

Models WD_n in the presence of disorder and the coupled models

Annexe B

Parafermionic theory with the symmetry Z_5

Annexe C

Parafermionic theory with the symmetry Z_N , for N odd

Annexe D

Parafermionic theory with the symmetry Z_N , for N even

Annexe E

Conformal field theories with Z_N and Lie algebra symmetries