



**HAL**  
open science

## Modélisation et assimilation de données en océanographie

Eric Blayo

► **To cite this version:**

Eric Blayo. Modélisation et assimilation de données en océanographie. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2002. tel-00004379

**HAL Id: tel-00004379**

**<https://theses.hal.science/tel-00004379>**

Submitted on 29 Jan 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation numérique et assimilation de données en océanographie

Mémoire en vue de l'obtention  
du Diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches  
de l'Université Joseph Fourier (Grenoble 1)

Spécialité : Mathématiques appliquées

Eric Blayo

1<sup>er</sup> juillet 2002



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction</b>   | <b>3</b>  |
| <b>1 Du modèle au système de modélisation</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1 Cadre général . . . . .   | 7         |
| 1.1.1 Les limitations du modèle “unique” . . . . .  | 7         |
| 1.1.2 Formalisation du problème . . . . .   | 8         |
| 1.2 Raffinement (adaptatif) de maillage . . . . .   | 10        |
| 1.2.1 L’approche “classique” des modèles emboîtés : travaux<br>antérieurs et discussion . . . . . | 10        |
| 1.2.2 Adaptativité - Algorithme de Berger et Olinger . . . . .                                    | 12        |
| 1.2.3 Analyse numérique de l’algorithme de Berger-Olinger . . . . .                               | 15        |
| 1.2.4 Quelques résultats numériques . . . . .   | 16        |
| 1.2.5 Aspects informatiques . . . . .   | 22        |
| 1.2.6 Conclusion sur le raffinement adaptatif de maillage . . . . .                               | 23        |
| 1.3 Vers le couplage de modèles océaniques . . . . .  | 24        |
| 1.3.1 Cadre général : les méthodes de Schwarz . . . . .   | 24        |
| 1.3.2 Couplages océanographiques usuels et méthodes de Schwarz . . . . .                          | 26        |
| 1.3.3 Le projet COMODO . . . . .  | 29        |
| 1.4 Bibliographie du chapitre 1 . . . . .   | 34        |
| <b>2 Schémas numériques et modèles d’océan</b>  | <b>37</b> |
| 2.1 Modèles numériques d’océan . . . . .  | 37        |
| 2.2 Opérateurs aux différences finies usuels<br>en océanographie . . . . .                        | 39        |
| 2.3 Evaluation de la qualité d’un schéma . . . . .  | 41        |
| 2.3.1 Démarche générale . . . . .   | 41        |
| 2.3.2 Processus océaniques fondamentaux . . . . .   | 42        |
| 2.3.3 Quelques tests numériques “standard” . . . . .  | 45        |
| 2.4 Une première application : les schémas compacts . . . . .                                     | 46        |
| 2.4.1 Schémas compacts : présentation générale . . . . .  | 46        |
| 2.4.2 Schémas compacts et processus océaniques fondamentaux . . . . .                             | 48        |
| 2.4.3 Tests dans un modèle shallow-water . . . . .  | 53        |
| 2.4.4 Aspects informatiques . . . . .   | 55        |
| 2.4.5 Synthèse concernant les schémas compacts . . . . .  | 56        |
| 2.5 Quelques pistes à explorer . . . . .  | 58        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.6      | Bibliographie du chapitre 2 . . . . .                               | 59        |
| <b>3</b> | <b>Assimilation de données et réduction d'ordre</b>                 | <b>61</b> |
| 3.1      | Assimilation de données en océanographie . . . . .                  | 61        |
| 3.2      | Vecteurs de variabilité maximale . . . . .                          | 64        |
| 3.2.1    | Toute direction n'est pas bonne à suivre . . . . .                  | 64        |
| 3.2.2    | Une taxinomie de vecteurs . . . . .                                 | 65        |
| 3.2.3    | Un exemple . . . . .  | 67        |
| 3.3      | Applications en assimilation de données . . . . .                   | 70        |
| 3.3.1    | Contrôle de la condition initiale en espace réduit . . . . .        | 70        |
| 3.3.2    | Contrôle de l'erreur modèle . . . . .                               | 74        |
| 3.3.3    | Vecteurs caractéristiques pour le filtrage de rang réduit . . . . . | 76        |
| 3.4      | Perspectives . . . . .  | 77        |
| 3.4.1    | Réduction d'ordre . . . . .   | 78        |
| 3.4.2    | Comparaison et hybridation des méthodes . . . . .                   | 78        |
| 3.4.3    | Multi-résolution et assimilation de données . . . . .               | 79        |
| 3.5      | Bibliographie du chapitre 3 . . . . .                               | 79        |
|          | <b>En guise de conclusion</b>                                       | <b>83</b> |

# Introduction

Ce mémoire présente un ensemble de travaux en mathématiques appliquées, consacrés à la modélisation de la circulation générale océanique et à l'assimilation des observations dans ces modèles.

## *Pourquoi étudier la circulation océanique ?*

La connaissance des circulations dans les océans est d'une importance toute particulière dans le contexte actuel où la prévision à court ou moyen terme de l'évolution du système climatique (global et local), et des systèmes naturels en général, devient un enjeu majeur pour la société. De nombreux programmes nationaux et internationaux sont menés pour la compréhension et la prévision de l'évolution du climat. Citons par exemple le World Climate Research Programme qui coordonne des dizaines d'équipes de recherche dans le monde, ou encore le gigantesque projet japonais "Earth Simulator" qui est en train de voir le jour.

On assiste également à un fort développement de l'océanographie côtière, dans une optique notamment d'aménagement du littoral et de connaissance et de contrôle des écosystèmes. De plus émerge ces dernières années ce qu'il est convenu d'appeler l'océanographie opérationnelle, c'est à dire la prévision à court terme et en temps réel du "temps océanique" à l'instar de la météorologie. On souhaite ainsi répondre à des demandes liées à la navigation, la pêche, la prévision météorologique, la défense, la lutte contre la pollution... Les efforts en ce sens sont structurés en France autour du projet "Mercator" qui vise à mettre en place à échéance de quelques années un centre de prévision opérationnelle.

## *Modèles, observations et assimilation de données*

Les outils principalement utilisés pour accéder à cette connaissance des circulations océaniques sont, comme en météorologie, les modèles physiques et numériques, les observations, et les techniques d'assimilation de données.

Les modèles actuels sont basés pour la plupart sur le système des équations primitives, c'est à dire les équations de conservation de la quantité de mouvement, de la masse, de la chaleur et du sel, sous les hypothèses hydrostatique et de Boussinesq, et auxquelles on

ajoute une équation d'état pour fermer le système. Celui-ci s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla u - D_u - fv + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla v - D_v + fu + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \\ \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T = K_T \Delta T \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla S = K_S \Delta S \\ \rho = \rho(T, S, p) \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $\mathbf{U} = (u, v, w)$  est la vitesse,  $p$  la pression,  $T$  la température,  $S$  la salinité et  $\rho$  la densité.  $D_u, D_v$  désignent des termes de diffusion,  $K_T$  et  $K_S$  des coefficients de diffusivité,  $g$  la gravité, et  $f$  le paramètre de Coriolis. Ces équations sont forcées à la surface des océans par le frottement du vent et les flux de chaleur et d'eau douce.

Ce système (1) est ensuite approximé, soit par des considérations physiques afin d'aboutir à des équations simplifiées permettant notamment l'étude de processus fondamentaux, soit numériquement pour simuler en particulier des cas réalistes. Un des problèmes majeurs liés à ce type d'applications est le coût de calcul, souvent extrêmement élevé. En effet les échelles caractéristiques spatiales et temporelles des écoulements océaniques sont telles qu'elles conduisent à l'intégration sur des milliers, voire des millions, de pas de temps de variables d'état de taille typique  $10^6$ — $10^8$ . La puissance informatique est donc, et pour encore de nombreuses années, un facteur limitant pour les modèles numériques réalistes d'océan.

Les observations de la circulation océanique étaient extrêmement rares jusqu'au milieu des années 80. Réalisées in situ par des bouées, des navires océanographiques ou des navires de commerce, leur coût était très élevé et leur caractère ponctuel rendait difficile une vision synoptique de la circulation générale. L'avènement de "l'océanographie spatiale", c'est à dire l'observation des océans depuis l'espace, a totalement bouleversé cette situation. Le développement de l'altimétrie satellitaire a été très spectaculaire, avec le satellite Geosat à la fin des années 80, et surtout depuis le début des années 90 avec le satellite franco-américain Topex/Poseidon (lancé en août 1992 et toujours en activité), son successeur Jason-1, et les satellites européens ERS-1, ERS-2 et Envisat. Cette technique permet de mesurer la dénivellation de surface libre de l'océan mondial (signature des courants de surface) avec un assez bon échantillonnage spatio-temporel. De nombreux progrès ont pu être réalisés récemment grâce à ces mesures dans la connaissance de la circulation

générale océanique. De plus, d'autres mesures, notamment de température de surface, sont également réalisées par satellite. Il faut insister toutefois sur le fait que ces mesures satellitaires ne renseignent que sur l'océan de surface, et que seules les mesures in situ ont accès directement à la structure verticale de l'écoulement.

Ces deux sources d'information, modèles et observations, sont très complémentaires. En effet, les modèles proposent des lois d'évolution approchées de la circulation générale, cohérentes en espace et en temps, tandis que les observations renseignent sur la physique réelle de l'océan, mais sans cette cohérence spatio-temporelle. Il est assez naturel de chercher à fusionner ces deux types d'informations afin d'obtenir une meilleure vision de l'océan réel : c'est la problématique de l'assimilation de données.

Les méthodes d'assimilation sont classées usuellement en deux familles : d'une part les techniques basées sur la théorie du contrôle optimal, qui cherchent le meilleur contrôle du modèle (par exemple son meilleur état initial) afin que sa trajectoire passe au plus près des observations; d'autre part les méthodes de filtrage stochastique, qui fournissent quant à elles la meilleure estimation de l'état de l'océan, étant données une prévision du modèle et des observations passées et présentes. La mise en oeuvre de ces méthodes est très complexe, du fait notamment des fortes non-linéarités de la physique océanique et de la grande taille des systèmes traités. De plus, elles peuvent accroître énormément le coût des modèles, d'un facteur de l'ordre de 10 à 100 typiquement.

### *Et les mathématiques appliquées ?*

Les mathématiques appliquées interviennent sur de multiples aspects entrevus au travers des lignes qui précèdent :

- L'océan est un système dynamique non linéaire chaotique. De ce fait, les outils de la théorie des systèmes dynamiques sont utiles pour l'étudier (régimes, stabilité...).
- Une abondante littérature, notamment française, concerne l'analyse mathématique des équations primitives et de différents systèmes simplifiés, *i.e.* les problèmes d'existence et d'unicité de solutions, la dérivation de modèles asymptotiques et les problèmes de convergence associés...
- Les modèles numériques de circulation océanique posent de nombreux problèmes relevant des méthodes numériques (schémas, décomposition de domaine...) et du calcul scientifique (parallélisme, metacomputing...)
- Les méthodes d'assimilation de données, comme nous l'avons dit plus haut, reposent sur les outils du contrôle optimal et du filtrage stochastique.

Mon travail de recherche s'inscrit dans ce contexte général. Centré sur des aspects de mathématiques appliquées et de calcul scientifique, il vise essentiellement à construire des méthodes efficaces, adaptées aux équations de l'océanographie, et adressant des problèmes concrets. Comme on le verra, ce travail est mené le plus souvent en collaboration avec des physiciens océanographes, car il me paraît essentiel de garder la physique au premier plan pour parvenir à ces objectifs. J'essaie notamment, après les phases indispensables de recherche et de mise au point sur des modèles souvent très simplifiés, d'aller jusqu'à des validations dans des contextes assez réalistes, ce qui permet souvent de mettre en



évidence des difficultés nouvelles, occultées par les simplifications initiales. De plus, les modèles numériques d'océan étant des outils lourds et complexes, ce travail vise toujours à réaliser une implémentation informatique efficace, de structure modulaire, et aussi externe aux modèles que possible.

Ce document résume l'essentiel de mes travaux de recherche de ces 5 à 6 dernières années. J'ai essayé d'y faire ressortir les nombreuses collaborations qui ont permis ces travaux : c'est pour moi un aspect essentiel (et très plaisant) de mon activité. Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Le premier décrit des aspects relatifs au raffinement local de maillage, et à son extension naturelle vers le couplage de modèles. Le chapitre 2 est consacré à une réflexion sur les qualités des schémas numériques utilisés dans les modèles d'océan, et présente quelques résultats concernant des familles de schémas compacts d'ordre élevé. Enfin le chapitre 3 s'intéresse au problème de la réduction d'ordre dans les méthodes d'assimilation de données, par projection sur des bases pertinentes de vecteurs de cardinal faible.

# Chapitre 1

## Du modèle au système de modélisation

Ce chapitre est consacré à des aspects liés à la multi-résolution et, plus généralement, au couplage de modèles. Nous présenterons tout d’abord les motivations qui inspirent ce travail, et le cadre mathématique général dans lequel on se situe. La seconde partie sera consacrée au raffinement de maillage, et résumera essentiellement des réalisations en collaboration avec Laurent Debreu (en grande partie lors de sa thèse). Enfin, la troisième partie, plus prospective, élargira le champ de travail au couplage et/ou à l’imbrication de modèles en océanographie. Nous décrirons les méthodes actuelles, avec leurs avantages et inconvénients, dans une optique ”décomposition de domaine”, et présenterons nos perspectives de travail sur ce sujet pour les années à venir.

### 1.1 Cadre général

#### 1.1.1 Les limitations du modèle “unique”

La grande majorité des modèles de circulation générale océanique utilisent à l’heure actuelle une physique “homogène horizontalement” — c’est à dire identique en tout point  $(x, y)$  du domaine —, et ceci sur une grille de calcul régulière (isotrope le plus souvent, ou éventuellement légèrement déformée du fait de l’utilisation par exemple de coordonnées curvilignes orthogonales). Une telle régularité devrait logiquement présupposer un comportement des circulations lui-aussi “homogène horizontalement”. Or il n’en est rien. La circulation océanique est notablement hétérogène, à la fois dans l’espace et dans le temps. Il existe ainsi par exemple des zones de fronts marqués, contrastant avec d’autres régions nettement plus isotropes. De même, les observations et les simulations numériques mettent clairement en évidence une forte activité tourbillonnaire de méso-échelle, et qui présente une grande variabilité spatio-temporelle.

Par ailleurs, il se produit en certaines zones d’emprise géographique parfois très limitée des processus primordiaux pour la dynamique globale océanique, et qui mettent en jeu une physique particulière. Citons à titre d’illustration la dynamique des grands courants de bord Ouest (Gulf Stream, Kuroshio...), les zones de remontée (*upwelling*) ou de plongée (*downwelling*) d’eaux profondes (en mer du Labrador, mer de Weddel, golfe de

Guinée...), ou encore les écoulements au-dessus des seuils topographiques (sortie de la mer de Norvège, détroit de Gibraltar...). Ces phénomènes impliquent des situations physiques non-standards (pentes de topographie importantes, vitesses verticales élevées, fortes accélérations, aspects non hydrostatiques...) et dont la représentation par les modèles physiques et numériques habituels (aux équations primitives) peut être difficile, voire impossible.

Enfin, le développement actuel de l’océanographie opérationnelle et de l’océanographie côtière (*cf* introduction de ce document) a fortement accru les demandes envers la simulation à très haute résolution de circulations locales.

Dans ce contexte, il paraît naturel de songer à adapter localement la physique et la résolution des modèles numériques, c’est à dire d’aller vers un **système de modélisation**, *i.e.* le fonctionnement simultané et coordonné de plusieurs **composants**.

### 1.1.2 Formalisation du problème

On peut tenter une formalisation de l’approche généraliste évoquée ci-dessus en définissant plus précisément la notion de composant. Pour nous, un **composant du système de modélisation** sera un modèle numérique, caractérisé par 4 aspects :

- la **physique** qu’il simule (*i.e.* les équations avant discrétisation)
- les **techniques numériques** utilisées (méthodes, schémas, solveurs...)
- le **maillage** et sa résolution
- la **zone géographique** couverte

Le cas le plus simple, mais peut-être aussi le plus fréquent, sera celui où chaque composant est en fait une configuration particulière, avec un choix propre d’options et de paramétrisations, d’un même modèle de départ.

La plupart des cadres d’expérience numérique peuvent être insérés dans ce “moule” général. Ainsi par exemple :

- l’exploitation de modèles numériques d’océan sur calculateurs parallèles a lieu en utilisant un parallélisme de données. On fait appel aux méthodes de décomposition de domaine classiques, ce qui peut être vu comme un système de composants à la physique, au numérique, et éventuellement à la résolution identiques, mais appliqués à des zones géographiques différentes.
- les modèles emboîtés (*nested models*), et plus généralement les expériences de raffinement de maillage, correspondent à un système dont les composants ont même physique et même numérique, mais des résolutions et des implantations géographiques différentes.
- le couplage de modèles, dans son acception la plus générale (par exemple couplage d’un modèle hauturier à basse résolution, hydrostatique à toit rigide, avec un modèle côtier à haute résolution, non-hydrostatique à surface libre) correspond à un système de modélisation dont les composants diffèrent par les quatre aspects cités plus haut (et donc notamment par la physique).

La mise en œuvre d'un tel système est subordonnée à quelques points-clés. Pour les exposer, restreignons-nous au cas de deux composants  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . On notera  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  les domaines géographiques couverts par  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  (cf figure 1.1), et  $\Gamma$  leur interface ( $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  peuvent aussi éventuellement se recouvrir, partiellement ou totalement). Notons  $\partial\Omega_i^{\text{ext}}$  la frontière extérieure de  $\Omega_i$ . On a donc  $\partial\Omega_i = \partial\Omega_i^{\text{ext}} \cup \Gamma$  ( $i = 1, 2$ ). Les composants  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  résolvent numériquement

$$\begin{cases} L_1 u_1 = f_1 & \text{dans } \Omega_1 \times [0, T] \\ u_1 \text{ donnée} & \text{à } t = 0 \\ B_1 u_1 = g_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{\text{ext}} \times [0, T] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} L_2 u_2 = f_2 & \text{dans } \Omega_2 \times [0, T] \\ u_2 \text{ donnée} & \text{à } t = 0 \\ B_2 u_2 = g_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{\text{ext}} \times [0, T] \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $L_1, L_2, B_1, B_2$  sont les opérateurs aux dérivées partielles décrivant la physique de chaque composante (équations internes et conditions aux limites externes) et  $[0, T]$  l'intervalle de temps de simulation.

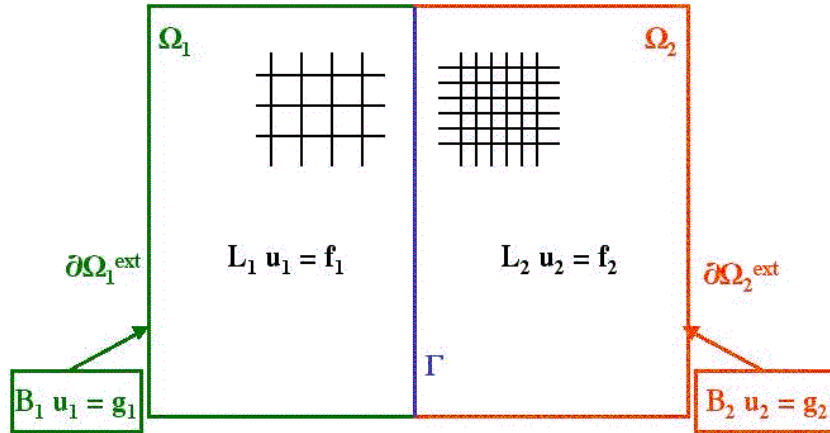


FIG. 1.1 – *Décomposition en deux sous-domaines sans recouvrement*

Les points-clés pour le fonctionnement simultané de ces deux composants sont alors :

- la définition d'un **critère de consistance entre  $u_1$  et  $u_2$**  au niveau du raccord de ces deux solutions (par exemple imposer la continuité et la dérivabilité à travers  $\Gamma$ ).
- la mise au point de **méthodes numériques efficaces** permettant d'obtenir que ce critère de consistance soit vérifié, si possible à moindre coût (par exemple des méthodes itératives de type décomposition de domaine, avec couplage de  $u_1$  et  $u_2$  via des conditions aux limites appropriées sur  $\Gamma$ ). L'intégration temporelle simultanée des composants est gérée également à ce niveau.
- si le système de modélisation comporte un caractère adaptatif (par exemple raffinement adaptatif du maillage), le choix des **règles d'adaptation** est évidemment crucial.

Nous avons choisi d’aborder les difficultés liées à la mise en œuvre d’un tel système de façon progressive. Ainsi, nous nous sommes limités dans un premier temps au cas du raffinement — fixe ou adaptatif — du maillage. Puis, plus récemment, nous avons commencé à aborder le problème plus général et plus difficile du couplage de modèles. Nous allons exposer ces deux étapes dans la suite de ce chapitre.

## 1.2 Raffinement (adaptatif) de maillage

*Les résultats présentés dans ce paragraphe ont été obtenus en collaboration avec L. Debreu, essentiellement lors de sa thèse. Ces travaux ont fait l’objet de contrats avec le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM), qui ont permis le financement d’un post-doc d’un an (H. Knochel) et ont suscité des collaborations avec T. Pichevin et C. Grit (SHOM Brest), et F. Dumas et M. Jouan (IFREMER, Brest). Des collaborations sont également en cours avec B. Barnier (LEGI, Grenoble), et avec P. Marchesiello et J. McWilliams (département d’océanographie, UCLA, Los Angeles).*

### 1.2.1 L’approche “classique” des modèles emboîtés : travaux antérieurs et discussion

Les applications océanographiques liées au raffinement de maillage ont quasiment toutes été menées jusque très récemment dans le cadre de “modèles emboîtés” (*nested models*). Dans cette approche, un modèle local à haute résolution couvrant une zone d’intérêt particulier est “immergé” dans un modèle régional ou global à plus basse résolution. Les deux modèles évoluent simultanément, le modèle global fournissant à chaque instant les conditions aux limites du modèle local (emboîtement simple, ou *one-way nesting*). De plus, la solution du modèle local peut éventuellement être utilisée (à la fin de chaque pas de temps, ou moins fréquemment) pour corriger la solution du modèle global. On parle alors d’emboîtement avec rétroaction (*two-way nesting*). Cet algorithme simple est résumé sur la figure 1.2.

Plusieurs études de ce type ont été menées, tant d’un point de vue méthodologique sur des cas-tests académiques que sous un angle plus océanographique dans le cadre d’expériences réalistes. Citons notamment Spall and Holland (1991) sur deux problèmes admettant une solution analytique (le modon barotrope et un vortex anticyclonique); Oey and Chen (1992) pour une simulation du courant de Norvège; Fox and Maskell (1995, 1996) pour une simulation du front Islande-Farøe; Ginis *et al.* (1998) pour une étude de la réponse océanique à un cyclone tropical. Par ailleurs, d’autres travaux concernant les modèles emboîtés avaient auparavant été réalisés en météorologie (*e.g.* Ley and Elsberry, 1976; Jones, 1977; Kurihara *et al.*, 1979; Zhang *et al.*, 1986; Falkovich, 1986).

Dans cette approche, les interactions entre les deux modèles, *i.e.* d’une part le calcul des conditions aux limites du modèle local, et d’autre part la modification (ou mise à jour, *update*) de la solution du modèle global par celle du modèle local, jouent évidemment un rôle essentiel. Ces interactions sont le plus souvent réalisées à l’aide d’opérateurs très simples : interpolation linéaire spatio-temporelle pour le calcul de conditions aux limites

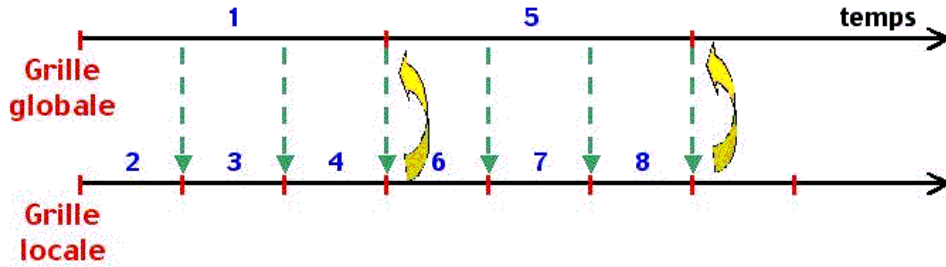


FIG. 1.2 – *Algorithme d’intégration temporelle pour l’approche usuelle des modèles emboîtés. Les flèches vertes symbolisent le passage de conditions aux limites (calculées par interpolation) du modèle global vers le modèle local, et les flèches jaunes la mise à jour éventuelle de la solution globale grâce à la solution locale. Le pas de temps du modèle local peut éventuellement, pour des raisons de stabilité numérique, être plus petit que celui du modèle global (ici d’un facteur 3). Les numéros indiquent l’ordre dans lequel sont réalisés les pas de temps sur les grilles.*

de Dirichlet, copie simple ou moyenne spatiale pour la mise à jour. On est alors toutefois rapidement confronté à un certain nombre de lacunes de la méthode, au premier rang desquelles se trouve la non-conservation des quantités physiques. C’est pourquoi la plupart des auteurs ont ajouté lors de la mise à jour un procédé plus ou moins empirique d’équilibrage des flux au travers de l’interface local/global. Perkins *et al.* (1997) et Perkins and Smedstad (1998) notamment ont ainsi illustré l’importance de ces conditions d’interaction pour des simulations réalistes.

Cette approche, devenue assez classique, des modèles emboîtés comporte plusieurs avantages importants. Elle est tout d’abord d’une implémentation simple : il suffit en effet de configurer les deux modèles (local et global), et d’écrire un module d’interfaçage externe aux modèles. Les modifications dans les modèles proprement dits sont alors minimales. De plus, le coût du système de modélisation est simplement égal aux coûts cumulés des deux modèles, le surcoût de l’interfaçage étant généralement quasi-négligeable. En contrepartie, cette approche n’assure qu’une consistance assez faible entre les solutions locale et globale. En effet, si dans le formalisme du §1.1.2 la spécification des conditions aux limites de Dirichlet du modèle local par le modèle global peut être interprétée comme l’imposition de la continuité entre  $u_1$  et  $u_2$  au travers de  $\Gamma$ , l’utilisation d’une procédure de correction pour la conservation des flux modifie  $u_1$  et/ou  $u_2$ , et fait perdre cette continuité. Par ailleurs, cette correction revient certes à imposer une continuité de la dérivée normale au travers de  $\Gamma$ , mais pour des quantités  $u_1$  et  $u_2$  modifiées qui ne sont donc plus exactement solutions des équations des modèles.

Dans le contexte océanographique, seuls Laugier *et al.* (1996) et Holstad and Lie (1999) ont véritablement mis en avant cette faiblesse. Laugier *et al.* ont comparé différents algorithmes permettant d’obtenir une meilleure régularité (continuité forte de  $u_1$  et  $u_2$ , et continuité faible de la dérivée normale), en se plaçant dans le cadre formel des méthodes localement multigrilles et des méthodes de décomposition de domaine de type “éléments joints” (Bernardi *et al.*, 1994). La contrepartie du gain en régularité se situe alors au niveau du coût de calcul. En effet, les méthodes utilisées sont itératives, chaque itération corres-

pendant à une simulation des deux modèles. Le coût de ce système de modélisation est donc multiplié, par rapport à celui de l’approche traditionnelle, par le nombre d’itérations. Si les expériences de Laugier *et al.* peuvent laisser espérer que ce nombre d’itérations soit assez faible (de l’ordre de 1 à 3 en général), ils n’ont cependant mis en oeuvre ces méthodes que sur des cas très académiques, en l’occurrence les mêmes que ceux de Spall and Holland (1991) cités plus haut. Notons enfin que l’approche classique des modèles emboîtés peut elle-aussi être interprétée dans ce cadre des algorithmes localement multigrilles, et qu’elle correspond au cas particulier d’une itération unique (donc sans recherche de convergence) de la méthode FIC (*Flux Interface Correction*) proposée par Laugier *et al.*

Le passage à des cas plus réalistes fait cependant apparaître des aspects spécifiques à la modélisation océanique, absents des cas-tests de Laugier *et al.*, et qui amènent des nuances importantes par rapport à cette vision multi-résolution “classique”. En effet, l’approche multigrille usuelle vise à résoudre une équation donnée sur un domaine fixé. Or, comme nous l’avons vu dans l’introduction de ce document, les équations des modèles océaniques comportent des termes dissipatifs paramétrisant les phénomènes non-résolus explicitement. Le fait d’augmenter la résolution pour le modèle numérique local va donc amener le plus souvent le physicien océanographe à baisser la valeur de cette dissipation artificielle par rapport à celle du modèle global, c’est à dire en quelque sorte à **changer localement les équations** du modèle. Par ailleurs, la bathymétrie réelle de l’océan étant par endroits très irrégulière, la forme du domaine de calcul (et donc son volume) peut changer de façon non négligeable suivant le niveau de résolution auquel on se place. Si ce problème est également rencontré dans d’autres applications des méthodes multigrilles, il est particulièrement flagrant en océanographie, et notamment au niveau de la conservation de la masse. Tout autant qu’une vision multigrille, c’est donc aussi, comme nous l’avons introduit au §1.1.2, une vision “couplage de modèles” qui convient.

## 1.2.2 Adaptativité - Algorithme de Berger et Olinger

Nous avons évoqué dans la présentation de ce chapitre que nous souhaitions de plus aborder l’aspect adaptatif du raffinement de maillage. A notre connaissance, aucune étude en ce sens n’avait été réalisée en modélisation de la circulation générale océanique au début de ce travail. Depuis lors un système de modèles emboîtés a été développé par Rowley and Ginis (1999), dont la (ou les) grille(s) locale(s) peuvent se déplacer. Le nombre et les tailles de ces grilles sont toutefois choisis au départ par l’utilisateur et ne peuvent pas varier au cours du temps.

Nous avons choisi de nous placer, tout au moins dans un premier temps, dans le cadre algorithmique proposé par Berger and Olinger (1984) pour le raffinement adaptatif de maillages structurés. Cet algorithme généralise simplement celui des modèles emboîtés présenté précédemment, en l’étendant à un nombre quelconque de niveaux de résolution, et à un nombre quelconque de grilles à chaque niveau. Nous allons ici le décrire rapidement (pour une description plus précise, voir par exemple Berger and Olinger, 1984; Berger and Collela, 1989; Blayo and Debreu, 1999).

Cet algorithme gère une hiérarchie de grilles emboîtées, à différents niveaux de résolutions. Une grille racine unique  $G_0$ , à basse résolution  $h_0$ , couvre l’ensemble du domaine

de calcul. Elle recouvre un ensemble de  $n_1$  grilles locales plus fines  $G_{1,i}$  ( $i = 1, \dots, n_1$ ) de résolution  $h_1$ , formant le niveau 1. Cet emboîtement est récursif, chaque grille à un niveau  $l$  pouvant éventuellement recouvrir quelques grilles plus fines de niveau  $l + 1$  (cf figure 1.3). Un nombre maximal  $L_{\max}$  de niveaux est évidemment défini au préalable.

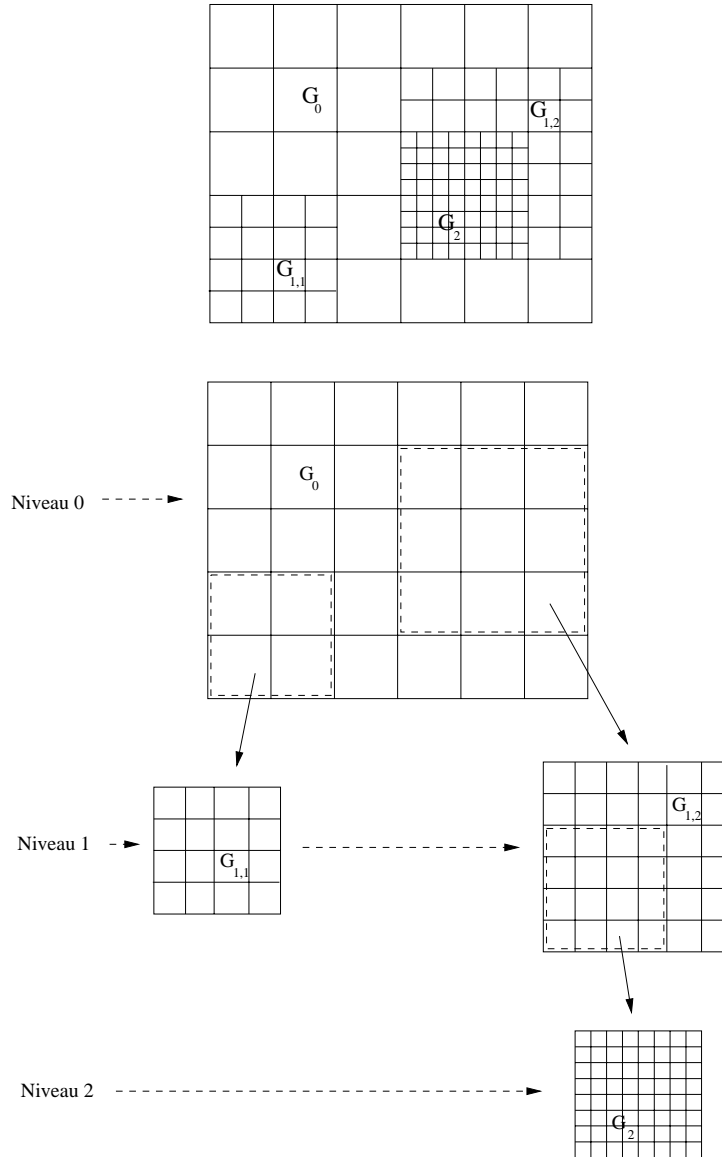


FIG. 1.3 – Un exemple de hiérarchie de grilles

Le “ratio de raffinement”  $h_l/h_{l+1}$  est un nombre entier fixé  $r$  (typiquement de 2 à 5). Le pas de temps  $k_l$  au niveau  $l$  est fixé de façon à respecter des critères de stabilité. Pour la modélisation océanique, un critère CFL est en général approprié. On imposera donc  $k_l/k_{l+1} = r$ , ce qui assure que le quotient  $h_l/k_l$  soit constant et indépendant du niveau de résolution. L’intégration temporelle de la hiérarchie de grilles (figure 1.4) se fait suivant une généralisation du principe des modèles emboîtés décrit au §1.2.1: pour avancer d’un pas de temps  $k_0$  (de l’instant  $T$  à l’instant  $T + k_0$ ), on commence par intégrer



la grille racine  $G_0$  d'un pas de temps  $k_0$ . Par interpolation spatio-temporelle des solutions sur cette grille aux instants  $T$  et  $T + k_0$ , on calcule des conditions aux limites pour les grilles de niveau 1 aux instants  $T, T + k_1, \dots, T + rk_1 = T + k_0$ . On peut ensuite intégrer les grilles de niveau 1 sur  $r$  pas de temps  $k_1$ . Cette procédure est récursive, et les grilles aux niveaux de résolution plus fins sont intégrées de façon similaire. Enfin, pour chaque niveau de résolution  $l$  excepté le plus fin, les solutions sur les différentes grilles sont mises à jour à la fin de chaque pas de temps en utilisant les solutions au même instant sur les grilles plus fines de niveau  $l + 1$  qu'elles recouvrent. Notons que, dans le vocabulaire des méthodes multigrilles, cet algorithme pourrait être défini comme la mise en œuvre au cours de chaque pas de temps grossier  $k_0$  d'un (et un seul) V-cycle.

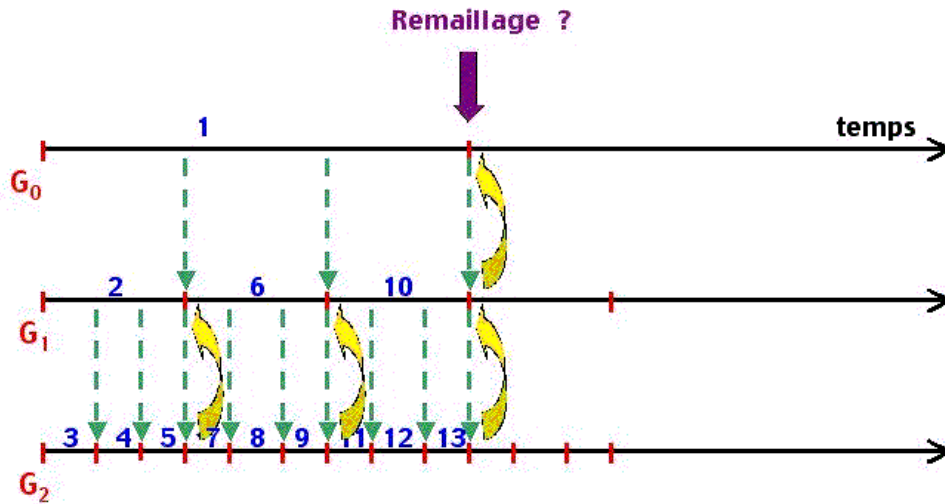


FIG. 1.4 – Algorithme d'intégration temporelle de la hiérarchie de grilles. Les flèches ont la même signification que dans la figure 1.2. Un remaillage peut éventuellement être réalisé périodiquement.

Le nombre, la taille et la position des différentes grilles peuvent être fixes, ou bien évoluer au cours de la simulation. Dans ce dernier cas, un critère est appliqué à intervalles réguliers (tous les  $N$  pas de temps  $k_0$ ) en chaque point de chaque grille, afin de détecter si une résolution plus fine est nécessaire, ou au contraire si la résolution existante peut être relaxée. Différentes considérations peuvent guider le choix du critère de raffinement : estimations d'erreur a posteriori (comme par exemple le critère de Richardson utilisé dans les expériences de Berger and Olinger), aspects physiques (*e.g.* indicateurs de turbulence), etc. Ce choix est évidemment crucial, et nous illustrerons ce point plus loin. Comme ce critère détecte seulement un ensemble de points, ceux-ci doivent ensuite être rassemblés en sous-grilles rectangulaires (procédure de *clustering*). Une heuristique efficace pour ce faire a par exemple été proposée par Berger and Rigoutsos (1991).

Pour terminer, il est à noter que lorsque le nombre de niveaux de grille est égal à 2 et que les grilles sont fixes, cet algorithme se réduit à l'approche classique des modèles emboîtés.

Une application de cet algorithme de raffinement adaptatif à un cas météorologique a été réalisée par Skamarock *et al.* (1989).

### 1.2.3 Analyse numérique de l’algorithme de Berger-Oliger

Si l’analyse numérique de méthodes multigrilles pour la résolution des équations aux dérivées partielles a été menée dans différents contextes (voir par exemple Trottenberg *et al.*, 2000), il n’existe pas à notre connaissance dans la littérature d’analyse dans le cas localement multigrille pour une équation d’évolution, ni donc a fortiori dans le cas de l’algorithme de Berger-Oliger. Nous avons donc souhaité mener une telle analyse, tout au moins pour commencer dans un cas simplifié. Cette analyse est décrite en détail dans Debreu (2000) et Debreu (2002). Nous n’en donnerons ici qu’un très bref canevas.

On considère l’équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f \quad \text{sur } \Omega \times [0, T] \quad (1.2)$$

où  $L$  est un opérateur linéaire aux dérivées partielles. On se restreint au cas d’une discrétisation sur deux niveaux de grilles ( $L_{\max} = 2$ ), de résolutions respectives  $H$  et  $h$ , et on notera  $\Omega_H$  et  $\Omega_h$  des maillages de  $\Omega$  de pas respectifs  $H$  et  $h$ . De plus, on suppose que la discrétisation temporelle est réalisée à l’aide d’un schéma décentré amont d’ordre 1 (*schéma d’Euler amont*).

Notons  $E_H$  et  $E_h$  les espaces vectoriels des fonctions de grille sur  $\Omega_H$  et  $\Omega_h$ , et  $I_h^H$  l’opérateur linéaire de restriction de  $E_h$  dans  $E_H$  utilisé lors des phases de mise à jour dans l’algorithme. L’analyse est basée sur une décomposition de  $E_h$  classique dans le contexte multigrille (*e.g.* Madel *et al.*, 1987) sous la forme :

$$E_h = \text{Ker } I_h^H \oplus \text{Im } (I_h^H)^T \quad (1.3)$$

qui peut être ré-écrite

$$E_h = \text{Ker } I_h^H \oplus \text{Im } I_H^h \quad (1.4)$$

en définissant  $I_H^h$  comme l’opérateur d’interpolation adjoint de  $I_h^H$ . Cette décomposition est en fait une séparation des petites et des grandes échelles, puisque qu’elle indique que toute fonction  $u_h$  de  $E_h$  peut s’écrire comme la somme d’une fonction  $v_h$  de  $\text{Ker } I_h^H$  (*i.e.* de petites échelles invisibles sur  $E_H$  car  $I_h^H v_h = 0$ ) et d’une fonction  $w_h$  de  $\text{Im } I_H^h$  (*i.e.* de grandes échelles entièrement représentables sur  $E_H$ , car  $w_h = I_H^h w_H$  avec  $w_H \in E_H$ ).

On applique alors l’algorithme de Berger-Oliger à l’équation-modèle (1.2) en écrivant  $u_h^n$ , solution approchée sur  $\Omega_h$  au pas de temps  $n$ , sous la forme  $u_h^n = v_h^n + I_H^h w_H^n$  avec  $I_h^H v_h^n = 0$ . Ceci amène un certain nombre de simplifications, et permet d’obtenir une inégalité du type

$$\begin{pmatrix} \|u_H^{n+1}\| \\ \|v_h^{n+1}\| \end{pmatrix} \leq A \begin{pmatrix} \|u_H^n\| \\ \|v_h^n\| \end{pmatrix} + G \quad (1.5)$$

$G$  étant un vecteur lié uniquement au terme de forçage  $f$  de (1.2).

Les conditions de stabilité, déduites de l’analyse de la matrice  $A$ , portent essentiellement sur la “qualité” de l’opérateur de restriction, et sur la consistance entre les discrétisations de l’opérateur  $L$  sur les grilles fine et grossière et les opérateurs d’interpolation et de restriction. L’adaptation éventuelle du maillage amène une condition

supplémentaire, portant sur la fréquence des remaillages et sur l'opérateur d'interpolation utilisé pour initialiser la solution sur les grilles fines.

Ce travail a été complété par une estimation d'erreur en fonction des ordres de discrétisation des différents opérateurs.

Bien que réalisée sur un cas simplifié, cette analyse nous aura permis de mettre clairement en évidence l'effet des petites échelles sur la stabilité de la méthode, et l'importance des opérateurs de transferts inter-grilles à cet égard.

### 1.2.4 Quelques résultats numériques

Afin d'appréhender le comportement numérique et l'intérêt potentiel du raffinement, éventuellement adaptatif, du maillage dans le contexte des modèles de circulation océanique, nous avons réalisé un certain nombre d'expériences numériques avec différents modèles. Pour toutes ces applications, le maillage est raffiné uniquement horizontalement.

De premières applications ont été menées avec des modèles simplifiés (modon barotrope, modèle quasi-géostrophique multi-couches, modèle shallow-water), essentiellement pour aborder certains aspects physiques et numériques essentiels (hypothèse du toit rigide, propriétés de conservation, grilles décalées...), avoir une première évaluation des performances d'une telle méthode, réaliser et valider les développements informatiques nécessaires (*cf* §1.2.5), et ce tout en limitant les difficultés par rapport à une application totalement réaliste. Ces expériences sont décrites pour la plupart dans Blayo and Debreu (1999) et Debreu (2000).

Les principaux enseignements que nous en avons tirés sont les suivants :

- D'une façon générale, le raffinement adaptatif permet bien d'obtenir à moindre coût des solutions numériques très proches de la solution de référence obtenue avec un maillage uniformément fin (à quelques pour-cent près sur les divers diagnostics examinés). Le gain est effectif à la fois en termes de temps de calcul et d'encombrement mémoire. Il est typiquement de l'ordre d'un facteur 3 à 4. La qualité des résultats dépend cependant évidemment du critère de raffinement utilisé, qui doit être adapté au cas traité.
- La conservation des flux au travers des interfaces entre grilles fines et grossières est une propriété essentielle, qui doit être assurée lors des procédures d'interaction entre grilles. Si ce n'est pas le cas, les résultats numériques peuvent dériver assez rapidement, notamment dans les modèles à surface libre.
- Par rapport à l'approche classique des modèles emboîtés, l'adaptation du maillage apporte —comme c'était prévisible— un surcroît de précision à coût de calcul identique. C'est le cas évidemment au niveau de la solution globale sur la grille grossière, qui est mieux "reconditionnée" par des grilles fines adaptatives. Mais, et cela peut peut-être sembler moins évident, c'est également le cas au niveau des résultats locaux : on obtient localement une solution de meilleure qualité dans le cas adaptatif, même si la zone d'intérêt n'est jamais raffinée lors de la simulation, que dans le cas d'un zoom fixe centré sur cette zone. Ceci illustre simplement le fait que la qualité

de la solution sur un zoom fixe dépend fortement de la qualité des conditions aux limites fournies par le modèle grossier, et qu'il peut donc être plus intéressant de favoriser la recherche de la qualité de la solution globale.

- Enfin, ces expériences ont permis d'identifier les aspects-clés d'une implémentation informatique de cet algorithme et d'en réaliser une maquette logicielle (*cf* §1.2.5)

Une illustration de ces expériences en contexte simplifié est donnée sur la figure 1.5, pour le cas de l'adaptation de maillage dans un modèle shallow-water.

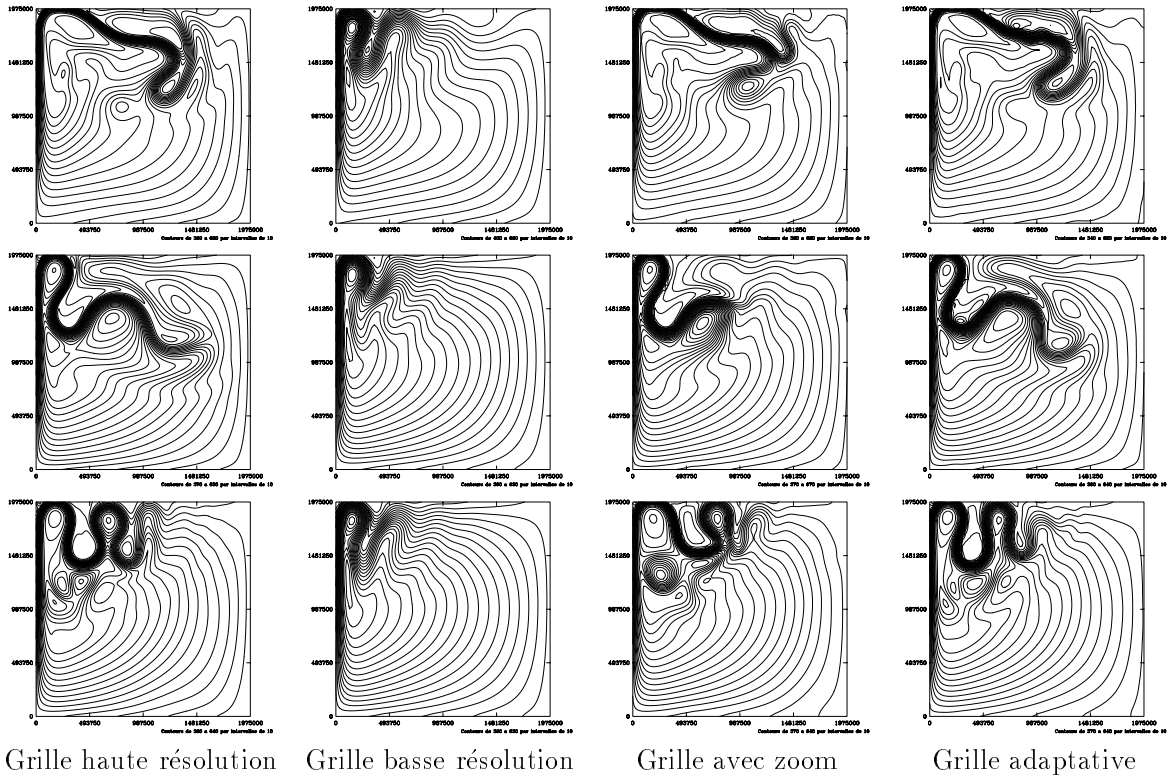


FIG. 1.5 – Tests dans un modèle shallow-water avec deux niveaux de résolution (25km et 8.33 km). Hauteurs instantanées à  $t = 1.5$  an (haut),  $t = 3$  ans (milieu) et  $t = 4,5$  ans (bas). Colonne 1: simulation de référence à haute résolution; colonne 2: simulation à basse résolution; colonne 3: simulation basse résolution avec un zoom fixe à haute résolution localisé sur la trajectoire du jet; colonne 4: simulation basse résolution avec adaptation de maillage à haute résolution. Dans ces deux derniers cas, les grilles fines couvrent environ 40% de la surface du domaine. (Debreu, 2000)

La généralisation de ces conclusions à un cadre de simulation océanique réaliste était toutefois loin d'être évident, notamment du fait d'une physique plus complexe et de la présence de forts effets locaux liés à la bathymétrie ou aux forçages. Divers travaux complémentaires ont donc été menés, avec plusieurs modèles aux équations primitives :

- modèle de circulation générale OPA du LODYC (*e.g.* Madec *et al.*, 1999), dans sa version en coordonnée  $z$  et à toit rigide, dans une configuration Atlantique Nord

à 2 niveaux de grilles (Debreu, 2000; Blayo *et al.*, 2002) et dans une configuration régionale du détroit de Gibraltar à 2, 3 et 4 niveaux de zooms fixes (Blayo *et al.*, 2000; Debreu *et al.*, 2001).

- modèle côtier MARS de l'IFREMER et du SHOM (coordonnée sigma, surface libre), dans une configuration idéalisée à 2 niveaux de zooms fixes (collaboration avec T. Pichevin et C. Grit) et sur une configuration régionale de la zone Sud-Bretagne (collaboration avec F. Dumas et M. Jouan).
- modèle régional ROMS de UCLA (coordonnée sigma, surface libre), dans une configuration à 3 niveaux de zooms fixes sans rétroaction de la baie de Californie du Sud (collaboration de L. Debreu avec P. Marchesiello et J. Mc Williams, *cf* Mc Williams *et al.*, 2001).

Deux illustrations sont données à titre d'exemple sur les figures 1.6 et 1.7.

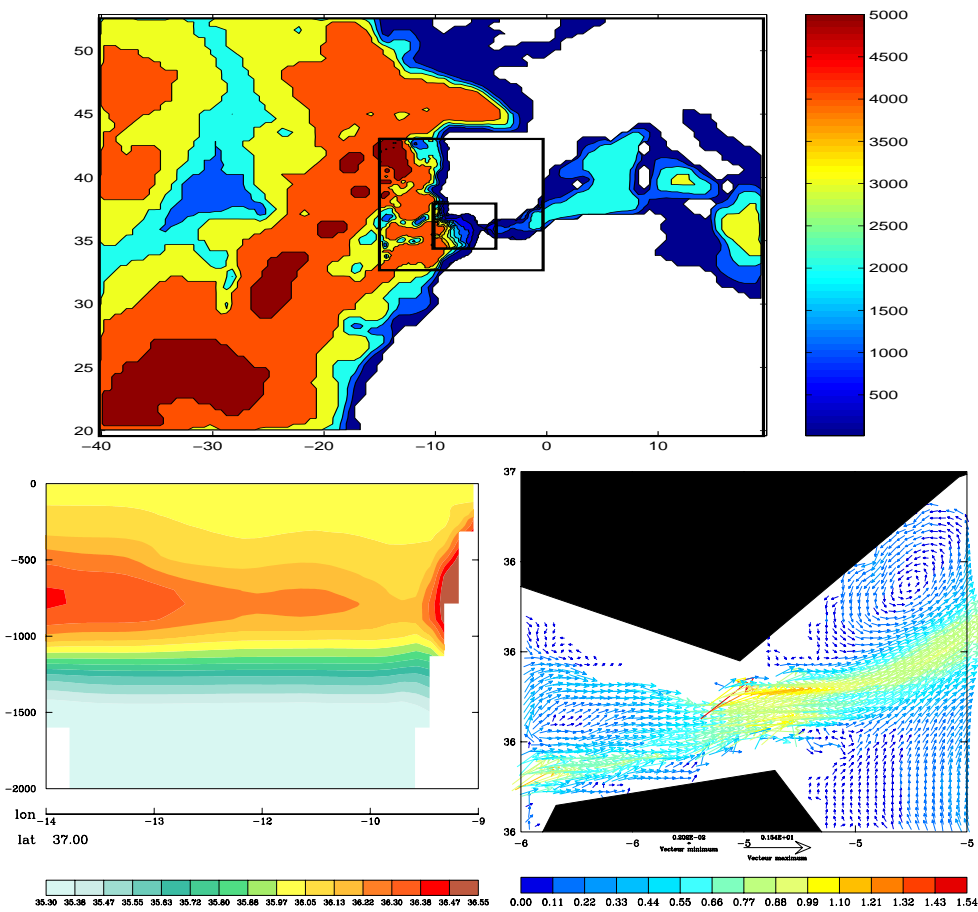


FIG. 1.6 – *Simulation de la circulation dans le détroit de Gibraltar, réalisée avec le modèle OPA. En haut: zone modélisée, avec indication de la position des zooms successifs et superposition de la bathymétrie. En bas à gauche: coupe de salinité à 37°N (remarquer la langue d'eau méditerranéenne plus salée); à droite: champ de vitesse en surface dans le détroit sur la grille la plus fine (1.7 km de résolution).*

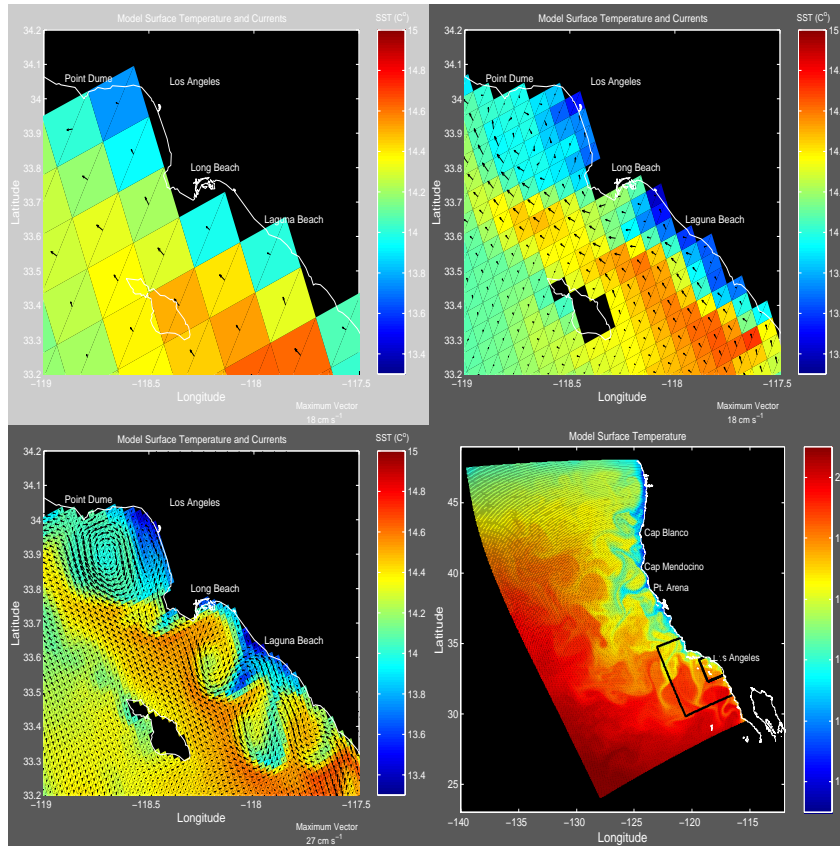


FIG. 1.7 – *Simulation de la circulation dans la baie de Los Angeles : solution locale sur les trois niveaux de zoom aux résolutions successives de 18 km (en haut à gauche), 6 km (en haut à droite) et 2 km (en bas à gauche), et emprise géographique des trois modèles emboîtés (en bas à droite). Simulation réalisée avec le modèle ROMS (UCLA) - collaboration de L. Debreu avec P. Marchesiello et J. Mc Williams.*

La diversité de ces modèles nous a permis d’être confrontés à un panel sans doute assez complet des difficultés nouvelles associées au raffinement de maillage en contexte réaliste. Nous pouvons tenter de les regrouper en trois catégories principales :

- les difficultés liées au contexte physique et numérique plus complexe — Citons par exemple la nécessité de préserver numériquement la non-divergence du transport barotrope dans le modèle à toit rigide OPA, sous peine de créer artificiellement des ondes de gravité, trop rapides pour être représentées correctement par le modèle, et qui peuvent rapidement provoquer une explosion numérique. De même, l’utilisation de la coordonnée verticale sigma pose des problèmes spécifiques pour les opérateurs d’interpolation et de restriction, les points de grille voisins devant interopérer étant situés à différentes cotes verticales  $z$ .
- les difficultés liées à la configuration réaliste du domaine de calcul — Le principal problème provient du fait que la bathymétrie réelle possède de hautes fréquences spatiales, et est donc différente suivant le niveau de résolution. Ceci provoque trois

types de difficultés : d’une part au niveau de la définition des traits de côtes; d’autre part, pour un modèle en coordonnée  $z$ , la profondeur peut par exemple admettre un maximum local sur la grille haute résolution à l’intérieur d’une maille basse résolution, auquel cas il peut exister des points de grille fins à certains niveaux de profondeur n’admettant pas de voisins sur la grille grossière; enfin, le volume d’une zone géographique peut différer suivant le niveau de résolution auquel elle est vue, ce qui doit évidemment être géré convenablement pour satisfaire les contraintes de conservation. Citons aussi le problème de la gestion des îles, ou encore des forçages qui, eux aussi, peuvent comporter des hautes fréquences spatiales et temporelles.

- les difficultés liées au choix du critère de raffinement — Il s’agit là d’un problème sans “solution miracle”. Les possibilités sont nombreuses, dépendent des aspects que l’on souhaite privilégier dans la simulation, et nous n’en avons exploré que quelques-unes. Dans notre contexte océanique, l’utilisation de critères basés sur la physique nous a paru plus pertinente que des critères essentiellement mathématiques comme l’estimateur de Richardson. Ils menaient d’ailleurs à des résultats plus satisfaisants sur les cas-tests où nous les avons comparés. Pour des modèles de circulation générale ou régionale, le critère de raffinement nous semble devoir être basé en premier lieu sur la dynamique horizontale. Il peut ensuite favoriser tel ou tel aspect de cette dynamique, ce qui peut mener à des résultats très différents.

A titre d’illustration, la figure 1.8 compare, pour trois critères de raffinement, les pourcentages de temps de simulation pendant lesquels les points de la grille grossière sont raffinés. Si on note  $V = (u, v)$  un vecteur vitesse horizontal, définissons les quantités  $Q_1 = \|V\| = (u^2 + v^2)^{1/2}$  (norme de  $V$ ),  $Q_2 = |\text{Rot}V| = |\partial_x v - \partial_y u|$  (valeur absolue de la vorticité), et  $Q_3 = \partial_x u \partial_y v - \partial_x v \partial_y u$ .  $Q_3$  est l’expression dans le cas 2-D de la différence des normes des parties antisymétrique et symétrique du tenseur des vitesses de déformation. Cette quantité, proposée par Hunt *et al.* (1988) et utilisée en simulation de la turbulence (*e.g.* Delcayre, 1999) peut être interprétée comme une balance entre vorticité et cisaillement de l’écoulement. Il est à noter que  $Q_3$  est une quantité signée, contrairement à  $Q_1$  et  $Q_2$ . Les trois critères comparés ici sont donc finalement : raffinement des points  $(x, y)$  tels que  $Q_i(x, y) \geq s_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), où les  $s_i$  sont des valeurs-seuils. Pour pouvoir comparer les critères sur la figure 1.8, nous avons imposé le fait que la proportion de domaine raffinée soit du même ordre (15%) dans les trois cas. Nous avons utilisé ici pour  $V$  la vitesse barotrope (*i.e.* moyennée verticalement). Comme on peut le voir, le critère  $Q_1$  ne détecte quasiment que les régions du Gulf Stream et du courant Nord-Brésil.  $Q_2$  ajoute la détection des régions de seuil (Groënland-Islande-Ecosse), mais détecte fréquemment, de façon surprenante, une zone au large de la Norvège à l’extrémité Nord-Est du domaine de calcul. Il s’agit probablement d’un artefact lié au rappel en température et salinité utilisé par le modèle sur une bande de quelques degrés au Nord du domaine. Enfin, le critère  $Q_3$  reprend les zones dynamiquement importantes citées précédemment, y ajoute la zone du Labrador, et élimine le problème du critère  $Q_2$  mentionné ci-dessus. Les résultats de simulation sont également assez différents, notamment par exemple dans le gyre subpolaire, comme on peut le voir sur la figure 1.9. Sans les commenter en détail, indiquons toutefois que le critère  $Q_3$  a conduit assez systématiquement aux meilleurs résultats.

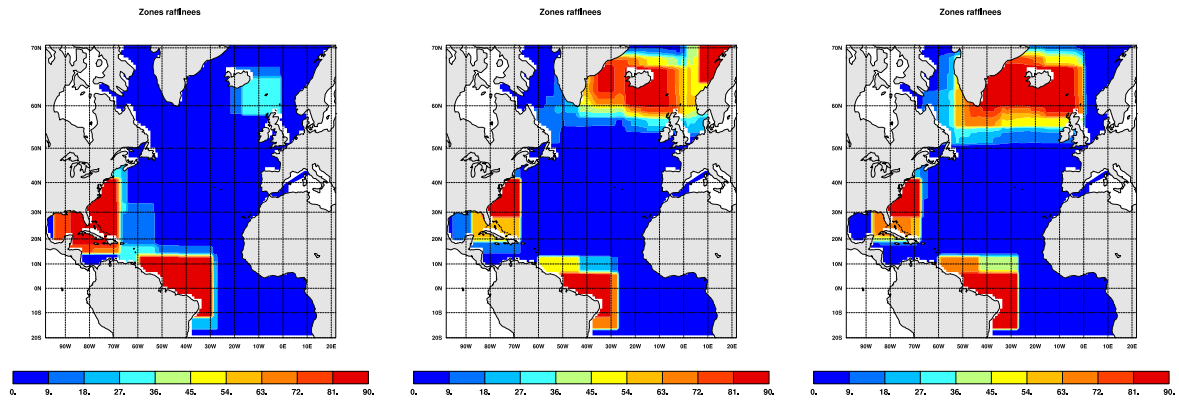


FIG. 1.8 – *Statistiques sur la position des zones raffinées. Simulation d'un an avec le modèle OPA, avec remaillage tous les 4 jours. La palette va du bleu (zones presque jamais raffinées) au rouge (zones raffinées presque en permanence). A gauche: critère de vitesse barotrope; au milieu: critère de vorticité barotrope; à droite: critère de Hunt. (Debreu, 2000)*

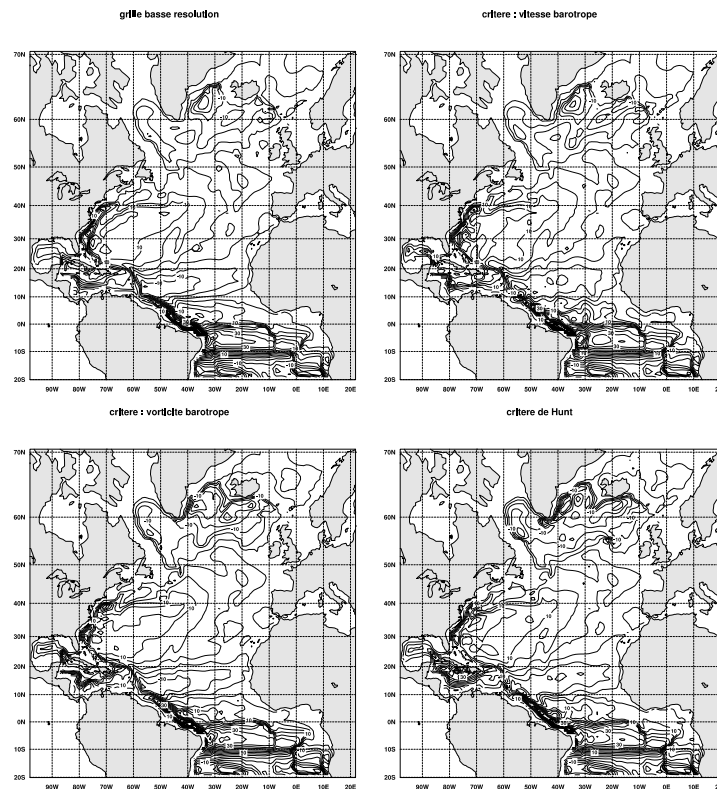


FIG. 1.9 – *Fonction de courant barotrope moyennée sur un an sur la grille basse résolution, en fonction du critère de raffinement. En haut à gauche : simulation basse résolution; en haut à droite : critère de vitesse barotrope; en bas à gauche : critère de vorticité barotrope; en bas à droite : critère de Hunt. Intervalle entre isocontours:  $4 \text{ Sv}$  ( $=4 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ) (Debreu, 2000)*



Ces diverses expériences menées avec des modèles réalistes nous conduisent globalement à des conclusions confirmant les résultats des cas idéalisés. L'adaptation de maillage permet, pour un coût de calcul divisé typiquement d'un facteur 3 à 5 en temps et place mémoire, d'obtenir des résultats proches de ceux d'un modèle à résolution uniformément fine. Elle présente également une supériorité (et aussi une complémentarité) par rapport à l'approche classique en zoom fixe. La physique complète océanique étant très riche, de nombreuses investigations complémentaires sont toutefois encore à mener pour acquérir une bonne expertise des possibilités offertes par ce type de méthode.

### 1.2.5 Aspects informatiques

Nous avons mentionné en introduction de ce document l'importance que nous attachons à l'implémentation informatique des méthodes numériques. Celle-ci doit être évidemment propre et efficace. De plus, elle doit autant que possible être modulaire, de façon à rendre les méthodes aisément utilisables quasiment sans modification des modèles numériques. Ce dernier point est particulièrement important dans le contexte océanographique, où les modèles sont des outils lourds, dont les modifications peuvent être complexes à effectuer et à valider.

La méthodologie du raffinement adaptatif de maillage décrite ci-dessus pouvant s'appliquer a priori à une très grande variété de modèles à maillage structuré, nous avons souhaité écrire un certain nombre de fonctionnalités génériques facilitant son implémentation. Par rapport aux quelques packages informatiques existants et qui adressent ce problème (*e.g.* AMRCLAW, DAGH, PARAMESH), nous nous sommes fixés essentiellement deux contraintes fortes supplémentaires : d'une part travailler en Fortran 90, afin d'avoir la possibilité d'une approche orientée objet et d'être en même temps directement compatible avec la très grande majorité des modèles océaniques (et donc d'éviter toute interfaçage du type C++/Fortran 90 par exemple); et d'autre part avoir autant que possible une approche "boîte noire" vis à vis du modèle, *i.e.* éviter au maximum d'avoir à modifier le modèle.

Ceci a été réalisé dans le package AGRIF (Adaptive Grid Refinement In Fortran), que nous ne détaillerons pas ici (voir Debreu and Blayo, 2002). Indiquons simplement que ce package permet une mise en œuvre aisée d'un raffinement adaptatif de maillage dans tout modèle aux différences finies. La tâche de l'utilisateur consiste principalement à remplir un fichier de configuration dans lequel il décrit les paramétrages choisis pour le raffinement (interpolation, restriction, ratio de raffinement, etc) et quelques caractéristiques du modèle (nom des variables globales, position sur la maille, etc). Ce fichier est ensuite interprété afin de créer les routines correspondantes utiles à la méthode, qui, associées à d'autres routines indépendantes du modèle, vont former la librairie finale. Par ailleurs, l'utilisateur devra éventuellement apporter des modifications aux procédures d'entrées-sorties, afin qu'elles puissent aussi fonctionner sur les grilles fines.

Une première version de ce package, développée essentiellement lors des tests sur les modèles idéalisés, a permis une implémentation rapide de la méthode sur les différents modèles aux équations primitives cités au paragraphe précédent. Typiquement, on par-

vient à une mise en œuvre informatique en quelques jours de travail, contre sans doute plusieurs mois sans cela. De plus, le nombre et la variété des modèles testés ont assuré une bonne validation de cet outil.

Une seconde version est en cours de développement, avec le soutien de l'INRIA (poste d'ingénieur-associé de C. Vouland pour 2001-2002), et qui inclura diverses améliorations importantes (notamment la possibilité du raffinement sur la verticale et la parallélisation).

En complément à ce travail, nous avons réfléchi aux problèmes d'équilibrage de charge qui se poseront nécessairement lors de l'implémentation parallèle d'un tel raffinement adaptatif. En effet, le nombre et la taille des grilles étant amenés à varier au cours de la simulation, il nous faut disposer d'un algorithme efficace permettant l'affectation à chaque étape de remaillage des processeurs aux différentes sous-grilles. Ce problème a été abordé dans le cadre d'une collaboration avec le laboratoire ID-IMAG (G. Mounié, D. Trystram), et a abouti à la mise au point d'un algorithme de répartition, qui a été testé sur une maquette simplifiée (Mounié, 2000; Blayo *et al.*, 2000). L'approche développée est basée sur la notion de *tâche malléable* (*i.e.* une tâche élémentaire parallèle à laquelle on peut affecter un nombre quelconque de processeurs; ce sera typiquement un pas de temps d'une grille de calcul) et sur l'utilisation du *facteur d'inefficacité* (*i.e.* la connaissance, étalonnée a priori grâce au modèle sur grille uniforme, de la dégradation de l'efficacité de la parallélisation en fonction du nombre de processeurs et de la taille de la grille).

### 1.2.6 Conclusion sur le raffinement adaptatif de maillage

Ce travail mené sur le raffinement, éventuellement adaptatif, de maillage constituait la première phase de notre approche explicitée au §1.1, visant à aller vers une modélisation par composants.

D'un point de vue méthodologique, ce travail est maintenant relativement complet et validé, même si nous souhaitons encore évidemment travailler certains aspects : analyse numérique de problèmes plus complexes, raffinement vertical, parallélisation, et amélioration de la phase de mise à jour (*update*) pour permettre une meilleure régularité au niveau des interfaces entre grilles.

Il reste par contre à réellement valider ces outils du point de vue de la physique océanique. Les premières simulations que nous avons réalisées, seuls ou en collaboration avec des physiciens, vont en ce sens. D'autres travaux vont suivre, menés par des océanographes utilisant nos outils pour des études physiques : circulation dans la zone Sud-Bretagne (IFREMER-SHOM), baie de Californie (UCLA), zooms à très haute résolution dans le modèle Clipper de l'océan Atlantique (LEGI Grenoble et LPO Brest), ...

L'aspect adaptatif n'est par contre pour l'instant pas du tout "passé dans les mœurs" des physiciens océanographes, qui concentrent leur attention à des zooms fixes sur des zones d'intérêt particulier, ou sur des régions où leurs modèles ne donnent pas de bonnes solutions, par exemple à cause de paramétrisations sous-maille déficientes. Pour aller vers l'adaptation de maillage, des travaux supplémentaires sont nécessaires, qui devront être menés essentiellement par des physiciens, orientés d'une part vers la recherche et l'expertise sur les critères de raffinement, et d'autre part vers la validation poussée d'un point de vue physique des résultats obtenus.

## 1.3 Vers le couplage de modèles océaniques

Notre but à terme étant de travailler à la mise en oeuvre d'un système de modélisation par composants, nous allons nous attacher maintenant aux méthodes de couplage de modèles. Le raffinement de maillage était un cas particulier d'un tel couplage. En nous appuyant sur cette première expérience, nous souhaitons ici avoir une approche qui permette d'obtenir une meilleure consistance entre les variables d'état des modèles (nous avons vu que c'était là un point faible de l'algorithme classique de modèles emboîtés), et soit en même temps plus généraliste. Par ailleurs, nous attacherons comme toujours une importance toute particulière au coût des méthodes que nous envisagerons.

Nous allons, dans les pages qui suivent, présenter et motiver un projet de recherche pour les années à venir, focalisé sur ces aspects.

### 1.3.1 Cadre général: les méthodes de Schwarz

Poussées par l'avènement des calculateurs parallèles, les méthodes de décomposition de domaine ont connu un essor très important depuis une quinzaine d'années. L'objet ici n'est pas de faire une revue exhaustive des différentes méthodes développées (méthodes de Schwarz, avec ou sans recouvrement, méthodes de Schur, méthode des joints...), on pourra pour cela se rapporter à des ouvrages de référence (*e.g.* Valli and Quarteroni, 1999; Proceedings de la conférence annuelle Domain Decomposition Method, 1987-2001).

#### Présentation

Nous allons cependant rappeler le principe général des méthodes de Schwarz, celles-ci fournissant a priori un cadre théorique particulièrement intéressant pour nos problèmes de couplage. Reprenons pour cela les notations du §1.1, et du problème-modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 u_1 = f_1 \quad \text{dans } \Omega_1 \times [0, T] \\ u_1 \text{ donnée} \quad \text{à } t = 0 \\ B_1 u_1 = g_1 \quad \text{sur } \partial\Omega_1^{\text{ext}} \times [0, T] \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_2 u_2 = f_2 \quad \text{dans } \Omega_2 \times [0, T] \\ u_2 \text{ donnée} \quad \text{à } t = 0 \\ B_2 u_2 = g_2 \quad \text{sur } \partial\Omega_2^{\text{ext}} \times [0, T] \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Les modèles étant a priori différents, supposons ici que  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  ne se recouvrent pas (le cas avec recouvrement ne posant pas véritablement de difficultés supplémentaires). On note à nouveau  $\Gamma$  leur interface. On désigne sous le terme générique de **méthodes de Schwarz** les algorithmes itératifs du type :

- $u_1^0$  et  $u_2^0$  données sur  $\Gamma$
- Tant que l'on n'est pas à convergence, résoudre:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 u_1^{n+1} = f_1 \quad \text{dans } \Omega_1 \times [0, T] \\ u_1^{n+1} \text{ donnée} \quad \text{à } t = 0 \\ B_1 u_1^{n+1} = g_1 \quad \text{sur } \partial\Omega_1^{\text{ext}} \times [0, T] \\ C_1 u_1^{n+1} = C_1 u_2^n \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \end{array} \right. \quad (1.7)$$

$$\text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_2 u_2^{n+1} = f_2 \quad \text{dans } \Omega_2 \times [0, T] \\ u_2^{n+1} \text{ donnée} \quad \text{à } t = 0 \\ B_2 u_2^{n+1} = g_2 \quad \text{sur } \partial\Omega_2^{\text{ext}} \times [0, T] \\ C_2 u_2^{n+1} = C_2 u_1^n \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \end{array} \right. \quad (1.8)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des opérateurs aux dérivées partielles de couplage à définir. Cet algorithme est appelé algorithme de Schwarz additif. Si l'on remplace la condition d'interface  $C_2 u_2^{n+1} = C_2 u_1^n$  par  $C_2 u_2^{n+1} = C_2 u_1^{n+1}$ , on parle alors d'algorithme de Schwarz multiplicatif. Celui-ci converge a priori plus vite (en terme de nombre d'itérations) que la version additive, mais les deux systèmes (1.7) et (1.8) ne peuvent plus être résolus en parallèle à chaque itération (problème qui peut cependant être contourné quand il y a plus de deux sous-domaines).

### Consistance et vitesse de convergence

Nous avons vu au §1.1 qu'un point-clé du couplage de modèles réside dans la définition d'un critère de consistance entre  $u_1$  et  $u_2$ . Pour notre contexte océanique, on cherchera a priori la continuité et la dérivabilité du raccord entre  $u_1$  et  $u_2$  au travers de  $\Gamma$ , dans la mesure évidemment où une telle régularité sera compatible avec les équations des modèles (1.6).

Un second point-clé tient ensuite dans l'utilisation d'une méthode numérique permettant d'obtenir cette consistance. Les méthodes de Schwarz permettent a priori cela, la régularité du raccord étant spécifiée via les opérateurs de couplage  $C_1$  et  $C_2$ . Ainsi par exemple, pour obtenir un raccord  $\mathcal{C}^1$ , on peut choisir  $C_1 = Id$  et  $C_2 = \partial/\partial n$  (où  $n$  est une normale à  $\Gamma$ ), ou plus généralement tout couple  $C_1$  et  $C_2$  de combinaisons linéaires indépendantes de  $Id$  et  $\partial/\partial n$  :  $C_i = \partial/\partial n + r_i Id$ , avec  $r_1 \neq r_2$ .

L'algorithme étant itératif, et chaque itération mettant en jeu une intégration des deux modèles numériques, le coût total sera donc égal au nombre d'itérations que multiplie le coût des deux modèles. De ce fait, il peut s'avérer extrêmement élevé si la convergence de la méthode n'est pas rapide. Tout l'enjeu sera donc de trouver des opérateurs  $C_1$  et  $C_2$  assurant une bonne vitesse de convergence.

Pour illustrer l'importance de cet aspect, prenons un exemple simple de décomposition de domaine sur une équation stationnaire de réaction-advection-diffusion 1-D à coefficients constants :

$$cu + a \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad (a > 0, \nu > 0) \quad (1.9)$$

On a donc  $L_1 = L_2 = L = cId + a\partial_x - \nu\partial_{xx}$ . Choisissons une décomposition sans recouvrement de  $\Omega = \mathbb{R}$  en  $\Omega_1 = \mathbb{R}_-$  et  $\Omega_2 = \mathbb{R}_+$ , et cherchons à résoudre (1.9) par un algorithme de Schwarz en retrouvant la continuité et la dérivabilité de la solution au niveau de l'interface  $x = 0$ . L'algorithme "naïf" de Dirichlet-Neumann s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu_1^{n+1} = f \text{ pour } x < 0 \\ \frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial x}(0) = \frac{\partial u_2^n}{\partial x}(0) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} Lu_2^{n+1} = f \text{ pour } x > 0 \\ u_2^{n+1}(0) = u_1^n(0) \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Notons  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$  les deux racines du polynôme caractéristique  $c + aX - \nu X^2$ :

$$\lambda^+ = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} \quad \text{et} \quad \lambda^- = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} \quad (1.11)$$

On montre aisément que le taux de convergence<sup>1</sup> de l'algorithme (1.10) vaut :

$$\rho = \left| \frac{\lambda^-}{\lambda^+} \right| = \left| \frac{a - \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{a + \sqrt{a^2 + 4c\nu}} \right| \quad (1.12)$$

Il dépend donc des paramètres de l'équation, et si l'on est par exemple dans un cas où  $c\nu$  est grand devant  $a^2$ ,  $\rho$  sera alors proche de 1, ce qui signifie que l'algorithme ne va converger que très lentement.

Par contre, si l'on choisit maintenant les conditions a priori moins évidentes  $C_1 = \partial_x - \lambda^- Id$  et  $C_2 = \partial_x - \lambda^+ Id$ , on montre que  $\rho = 0$ , *i.e.* que l'algorithme va converger exactement en seulement deux itérations.

Le choix de  $C_1$  et  $C_2$  est donc primordial pour l'efficacité de la méthode.

### 1.3.2 Couplages océanographiques usuels et méthodes de Schwarz

Il nous a semblé intéressant, pour mettre ce projet de recherche en perspective, de replacer les réalisations océanographiques actuelles de type couplage dans cette optique des méthodes de Schwarz. Prenons ici quelques cas parmi les plus courants:

- **Couplage modèle côtier / modèle hauturier** — Un modèle régional ou global, à basse résolution, est couplé avec un modèle côtier local à haute résolution et à physique différente. On a un recouvrement total, et l'interaction est souvent sans rétroaction du modèle local vers le modèle global. Les équations sont donc du type:

$$\begin{cases} L_1 u_1 = f_1 & \text{dans } \Omega_1 \times [0, T] \\ u_1 \text{ donnée} & \text{à } t = 0 \\ B_1 u_1 = g_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{\text{ext}} \times [0, T] \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} L_2 u_2 = f_2 & \text{dans } \Omega_2 \times [0, T] \\ u_2 \text{ donnée} & \text{à } t = 0 \\ B_2 u_2 = g_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{\text{ext}} \times [0, T] \\ u_2 = u_1 & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \end{cases} \quad (1.13)$$

On voit ici qu'on réalise en fait une (et une seule) itération d'une méthode de Schwarz multiplicative, avec  $C_1 = 0$  et  $C_2 = Id$ .

A noter que le modèle 1 ne "voit" ici jamais le modèle 2. Le fait d'ajouter une rétroaction ne change cependant pas fondamentalement les choses du point de vue formel.

- **Raffinement de maillage** — On a vu au §1.1 que le raffinement de maillage peut être vu comme un cas particulier de couplage. Il s'agit en fait exactement du même cas que précédemment. On peut donc interpréter l'algorithme usuel du §1.2 comme une unique itération d'une méthode de Schwarz multiplicative avec recouvrement total.

La méthode FIC proposée par Laugier *et al.* (1996, *cf* §1.2.1) revient par contre à mener à convergence cette méthode de Schwarz.

---

1. On définit ici le taux de convergence par  $\rho = \left| \frac{u - u_1^{n+2}}{u - u_1^n} \right| = \left| \frac{u - u_2^{n+2}}{u - u_2^n} \right|$ , *i.e.* le taux de décroissance de l'erreur au cours des itérations. Il doit être plus petit que 1 pour que l'algorithme converge. Plus il est proche de 0 et plus l'algorithme convergera rapidement.

- **Couplage océan-atmosphère** — La méthode utilisée actuellement dans les modèles couplés océan-atmosphère consiste à découper la simulation en fenêtres temporelles  $[t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) de longueur constante  $T$  (typiquement de l'ordre de 24 heures), et à résoudre les deux modèles successivement sur chaque fenêtre en utilisant des conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann figées dans le temps, et calculées sur la fenêtre précédente. Ceci peut être écrit symboliquement :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_{\text{air}} u_{\text{air}} = f_{\text{air}} & \text{dans } \Omega_{\text{air}} \times [t_i, t_{i+1}] \\ B_{\text{air}} u_{\text{air}} = g_{\text{air}} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{air}}^{\text{ext}} \times [t_i, t_{i+1}] \\ u_{\text{air}}(z = 0, t) = u_{\text{océan}}(z = 0, t_i) & t \in [t_i, t_{i+1}] \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_{\text{océan}} u_{\text{océan}} = f_{\text{océan}} & \text{dans } \Omega_{\text{océan}} \times [t_i, t_{i+1}] \\ B_{\text{océan}} u_{\text{océan}} = g_{\text{océan}} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{océan}}^{\text{ext}} \times [t_i, t_{i+1}] \\ \frac{\partial}{\partial z} u_{\text{océan}}(z = 0, t) = \frac{\partial}{\partial z} u_{\text{air}}(z = 0, t_i) & t \in [t_i, t_{i+1}] \end{array} \right.$$

Un tel algorithme peut être vu comme une unique itération d'une méthode de Schwarz additive sans recouvrement, avec  $C_1 \simeq Id$  et  $C_2 \simeq \partial/\partial z = \partial/\partial n$ .

- **Le problème de frontière ouverte** — On est souvent amené en modélisation océanique, pour des raisons de coût de calcul, à tronquer le domaine de calcul par une frontière artificielle  $\Gamma$ , placée en plein océan. Se pose alors évidemment le problème de la spécification des conditions aux limites sur  $\Gamma$ , encore appelées conditions de frontière ouverte. Une abondante littérature a été (et continue d'être) écrite sur ce sujet. Pour des simulations réalistes, ces conditions cherchent non seulement à évacuer avec un minimum de réflexion les perturbations se présentant sur  $\Gamma$ , mais également à faire ressentir au modèle une "influence moyenne" de l'extérieur, connue en général de façon seulement très grossière par des données climatologiques.

Les conditions effectivement mises en œuvre dans les modèles réalistes existants sont le plus souvent extrêmement simples. Il peut s'agir par exemple d'imposer les données climatologiques aux frontières (condition de Dirichlet  $u = u_{\text{clim}}$  sur  $\Gamma$ ) ou bien d'utiliser une condition radiative avec rappel climatologique, du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{c}(u) \cdot \nabla u = - \frac{u - u_{\text{clim}}}{T_{\text{clim}}} \quad (1.15)$$

Là-encore, bien que ce soit a priori moins intuitif, on peut donc considérer qu'on a affaire à un couplage (sans rétroaction) du modèle numérique avec un modèle climatologique, réalisé par une itération unique d'une méthode de Schwarz.

### Une itération ne fait pas la convergence...

Les descriptions précédentes, qui interprètent les méthodes courantes actuelles comme les réalisations d'une première itération d'un algorithme a priori itératif, montrent bien que l'on ne peut pas espérer ainsi obtenir une "consistance complète" (au sens des critères de régularité choisis). Ces méthodes sont toutefois évidemment justifiées par le fait qu'elles imposent malgré tout une consistance "partielle", tout en n'entraînant aucun surcoût.

Une question se pose dès lors de façon immédiate : quelle est l'influence réelle de cette perte de consistance ? Se traduit-elle en particulier par une réelle perte de précision sur les solutions numériques ?

Faute de pouvoir donner une réponse générale, prenons deux exemples simples sur des équations d'évolution, exemples sur lesquels nous reviendrons par la suite. On considère dans les deux cas un couplage de type "océan-atmosphère" comme explicité précédemment dans l'équation (1.14), c'est à dire avec un découpage de la simulation en fenêtres temporelles de longueur  $T$  et des conditions d'interface entre sous-domaines de type Dirichlet-Neumann calculées lors des fenêtres précédentes.

Cet algorithme appliqué en 1-D sur  $\mathbb{R}$  avec un découpage en deux sous-domaines  $\mathbb{R}_-$  et  $\mathbb{R}_+$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu_1(x, t) = 0 \quad x < 0, t \in ]t_i, t_{i+1}] \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t_i) \quad t \in ]t_i, t_{i+1}] \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} Lu_2(x, t) = 0 \quad x > 0, t \in ]t_i, t_{i+1}] \\ u_2(0, t) = u_1(0, t_i) \quad t \in ]t_i, t_{i+1}] \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Choisissons une équation de diffusion ( $L = \partial_t - \nu \partial_{xx}$ ), avec une condition initiale gaussienne  $u_0(x) = G(x; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ . La solution exacte de  $Lu = 0$  sur  $\mathbb{R}$  est alors  $u(x, t) = G(x; \sigma^2 + 2\nu t)$ . On peut dans ce cas simple réaliser à la main les calculs correspondant aux premières fenêtres temporelles de l'algorithme (1.16), et obtenir ainsi une expression analytique de l'erreur. On constate alors par exemple que l'erreur relative à l'interface  $x = 0$  après seulement deux fenêtres vaut

$$\frac{u_1(0, 2T) - u(0, 2T)}{u(0, 2T)} = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{1 + 4\nu T/\sigma^2}}{1 + 2\nu T/\sigma^2} \quad (1.17)$$

qui peut valoir jusqu'à  $2/\pi \simeq 64\%$  si le rapport  $\nu T/\sigma^2$  est petit devant 1.

La figure 1.10 visualise l'évolution temporelle de l'erreur relative (en norme  $L_2$ ) lors d'une réalisation de cet algorithme.

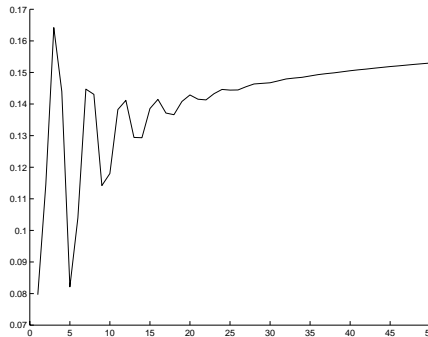


FIG. 1.10 – Résolution d'une équation de la chaleur 1-D sur  $\mathbb{R}$  décomposé en 2 sous-domaines  $\mathbb{R}_-$  et  $\mathbb{R}_+$ , par le couplage (1.16). Evolution temporelle de l'erreur relative (en norme  $L_2$ ) sur les 50 premières fenêtres temporelles. Le rapport  $\nu T/\sigma^2$  vaut ici 0.25

Considérons maintenant, dans un second exemple, une équation d’advection-diffusion 2-D :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \vec{\mathbf{a}} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (1.18)$$

traitée par V. Martin (Paris 13) dans son travail de thèse. On résout cette équation sur un domaine  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  à partir d’une condition initiale donnée. Par ailleurs, on résout de façon approchée cette équation en coupant  $\Omega$  en deux sous-domaines rectangulaires d’interface  $\Gamma = [x = 0.2]$ , et en utilisant l’algorithme de découpage en fenêtres temporelles précédent, avec des fenêtres de longueur égale à un pas de temps. Autrement dit, on réalise à chaque pas de temps une et une seule itération d’une méthode de Dirichlet-Neumann. On voit alors (figure 1.11a) que l’erreur croît régulièrement jusqu’à des niveaux de  $10^{-2} - 10^{-1}$  (alors qu’elle reste de l’ordre de  $10^{-10}$  avec une “vraie” méthode de décomposition de domaine), et que l’on commence à en voir distinctement les effets sur la solution au bout de quelques dizaines de pas de temps (figure 1.11b).

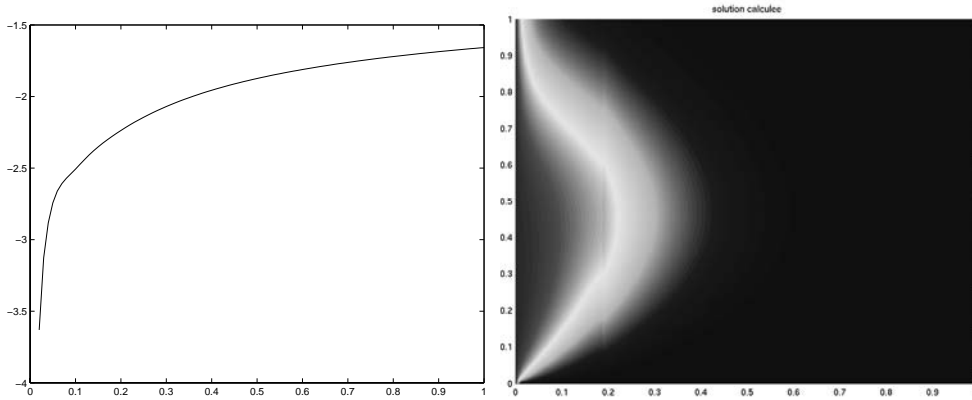


FIG. 1.11 – Résolution d’une équation d’advection-diffusion 2-D sur  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  avec un découpage en 2 sous-domaines (interface en  $x = 0.2$ ). On utilise un couplage réalisant une et une seule itération de Dirichlet-Neumann à chaque pas de temps. A gauche : évolution du logarithme de l’erreur en fonction du temps. A droite : solution à  $t = 1$ , après 100 pas de temps; l’erreur au niveau de l’interface commence à être visible. (d’après le travail de thèse de V. Martin)

Sans pouvoir évidemment tirer de ces cas très simples des enseignements valables pour des simulations océaniques réalistes, ces exemples montrent toutefois clairement que les méthodes de couplage actuellement utilisées dans les applications océanographiques usuelles sont susceptibles de conduire à des imprécisions importantes.

### 1.3.3 Le projet COMODO

Dans le contexte qui vient d’être décrit, nous avons mis en place en 2000-2001 un projet de recherche sur les 4 ans à venir. Ce projet COMODO (COuplage de MOdèles et Décomposition de domaine en Océanographie) regroupe des mathématiciens appliqués



(L. Halpern, C. Japhet, V. Martin - LAGA, Paris 13; E. Blayo, L. Debreu, V. Fedorenko - LMC, Grenoble) et des physiciens océanographes (B. Barnier, S. Cailleau - LEGI, Grenoble), et a reçu le soutien du SHOM et du programme national Mercator.

Nous viserons dans ce projet trois objectifs principaux :

- développer des méthodes de couplage performantes adaptées à la physique et aux modèles océaniques;
- mettre en œuvre une expérience de couplage de taille réelle, sur laquelle diverses méthodes pourront être testées;
- développer une approche informatique de type *metacomputing*, laissant autant que possible les modèles inchangés.

Reprenons maintenant ces objectifs un à un, en donnant quelques pistes de travail.

### Des méthodes de couplages performantes

Comme indiqué précédemment, le cadre formel dans lequel nous nous placerons sera a priori celui des méthodes de Schwarz. Pour déterminer des opérateurs d'interface efficaces, nous utiliserons les techniques de conditions aux limites artificielles exactes et approchées (*e.g.* Engquist and Majda, 1977; Halpern, 1986; Halpern and Schatzman, 1989; Nataf *et al.*, 1995; Lie, 2001) et de conditions optimisées (*e.g.* Japhet, 1998; Gander *et al.*, 1999). Afin d'illustrer rapidement les idées sous-jacentes, reprenons l'exemple de l'équation d'advection-diffusion 2-D (1.18).

Prenons pour simplifier  $\Omega = \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  les demi-plans  $x < 0$  et  $x > 0$  respectivement, et  $\mathbf{a} = (a, b)$  constant. On utilise l'algorithme de Schwarz (1.7)-(1.8). En notant  $e_1^n = u - u_1^n$  et  $e_2^n = u - u_2^n$  les erreurs sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  à l'itération  $n$ , on voit aisément qu'elles sont solutions des systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} Le_1^{n+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times [0, T] \\ e_1^{n+1} = 0 \quad \text{à } t = 0 \\ C_1 e_1^{n+1} = C_1 e_2^n \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} Le_2^{n+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \times [0, T] \\ e_2^{n+1} = 0 \quad \text{à } t = 0 \\ C_2 e_2^{n+1} = C_2 e_1^n \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \end{array} \right. \quad (1.19)$$

où  $L$  désigne l'opérateur d'advection-diffusion. Donc, si l'on parvient à choisir  $C_1$  et  $C_2$  tels que  $C_1 e_2^1 = 0$  et  $C_2 e_1^1 = 0$ ,  $e_1^2$  et  $e_2^2$  seront nuls, car solutions d'un problème homogène. L'algorithme aura donc convergé exactement en deux itérations. De telles conditions d'interface  $C_1$  et  $C_2$  seront appelées *conditions aux limites artificielles exactes*.

Dans le cas présent, on peut les déterminer aisément par transformée de Fourier en temps et en espace (dans la direction  $y$ ) de (1.19). On montre en effet que les transformées des erreurs sont de la forme :

$$\hat{e}_1^n = \alpha^n \exp(\lambda^+ x) \quad \text{et} \quad \hat{e}_2^n = \beta^n \exp(\lambda^- x) \quad (1.20)$$

avec

$$\lambda^+ = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4\nu(\omega + bk)i + 4\nu^2 k^2}}{2\nu} \quad \text{et} \quad \lambda^- = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4\nu(\omega + bk)i + 4\nu^2 k^2}}{2\nu} \quad (1.21)$$

$\omega$  et  $k$  étant respectivement les fréquences en temps et en  $y$ . On déduit de (1.20) que

$$\frac{\partial \hat{e}_1^n}{\partial x} - \lambda^+ \hat{e}_1^n = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{e}_2^n}{\partial x} - \lambda^- \hat{e}_2^n = 0 \quad (1.22)$$

En définissant les opérateurs  $\Lambda^-$  et  $\Lambda^+$  dont  $\lambda^-$  et  $\lambda^+$  sont les symboles, il suffit donc pour terminer de poser

$$C_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda^- \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda^+ \quad (1.23)$$

(c'est ce type de technique qui avait permis de déterminer les bonnes conditions d'interface pour l'équation (1.9) au §1.3.1).

Ces conditions d'interface exactes sont malheureusement inutilisables en pratique, car l'expression de  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$  rend la transformation de Fourier inverse de (1.22) difficile.  $\Lambda^+$  et  $\Lambda^-$  sont en l'occurrence des opérateurs non locaux en temps et en espace. On va donc plutôt tenter de les approcher par des opérateurs simples. On peut pour cela réaliser des développements de Taylor de  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$ . A l'ordre 1 par exemple, on obtient :

$$\lambda^- \simeq -\frac{1}{a}i\omega - \frac{b}{a}ik \quad \text{et} \quad \lambda^+ \simeq \frac{a}{\nu} + \frac{1}{a}i\omega + \frac{b}{a}ik \quad (1.24)$$

ce qui donne les *conditions approchées* :

$$C_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{b}{a} \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{a}{\nu} Id - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{b}{a} \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.25)$$

Les développements de Taylor n'étant valables qu'au voisinage de 0, les approximations (1.24) ne sont a priori valides que pour les basses fréquences. Les opérateurs (1.25) risquent donc de perdre de leur efficacité si la solution contient des hautes fréquences. Pour éviter cela, on peut rechercher d'autres approximations de  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$  en travaillant directement sur le taux de convergence  $\rho$  de la méthode et en cherchant à l'optimiser sur la gamme de fréquences "vues" par le maillage en temps et en espace. C'est le principe des *conditions optimisées*. Ainsi, on va choisir par exemple

$$C_1 = \partial_x - \lambda_{\text{opt}}^- Id \quad \text{et} \quad C_2 = \partial_x - \lambda_{\text{opt}}^+ Id \quad (1.26)$$

avec  $\lambda_{\text{opt}}^-$  et  $\lambda_{\text{opt}}^+$  qui minimisent  $\max_{k,\omega} \rho(k,\omega)$ .

Ces techniques, si elles sont très performantes, n'ont toutefois été pour l'instant réellement mises en oeuvre que sur des équations simples (EDP linéaires, le plus souvent à coefficients constants). Une des difficultés majeures du projet consistera à tenter de les étendre aux équations bien plus complexes de l'océanographie.

Par ailleurs, même si l'on obtient ainsi de bonnes conditions d'interface, permettant d'espérer une convergence rapide de l'algorithme, il est primordial de garder à l'esprit le fait que chaque itération correspond à une intégration complète des deux modèles

couplés. Le coût des modèles océaniques étant très lourd, la réalisation en moyenne ne serait-ce que de 4 ou 5 itérations peut donc s’avérer inacceptable. C’est pourquoi nous testerons également des stratégies “intermédiaires”, consistant à ne réaliser qu’une (voire deux) itérations de l’algorithme de Schwarz avec ces bonnes conditions d’interface. Pour un surcoût nul ou limité, on peut tout de même espérer apporter ainsi une amélioration sensible par rapport aux méthodes usuelles.

A titre d’illustration, les figures 1.12 et 1.13 reprennent les exemples déjà traités sur les figures 1.10 (équation de la chaleur 1-D) et 1.11 (advection-diffusion 2-D), en remplaçant uniquement les opérateurs  $Id$  et  $\partial/\partial x$  par des conditions de Robin optimisées du type (1.26), déterminées par les techniques que nous venons d’exposer. On voit que l’on réduit ainsi, dans les deux cas, sans aucun surcoût de calcul, l’erreur d’un à deux ordres de grandeur.

On constate également (figure 1.13) que le fait de réaliser deux itérations avec ces nouvelles conditions (ce qui double cette fois le coût de la modélisation) réduit encore l’erreur d’un ordre de grandeur supplémentaire.

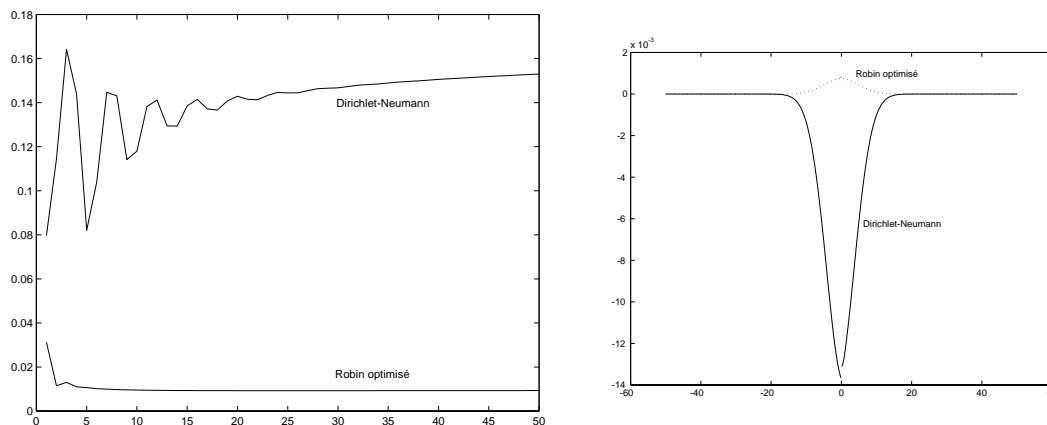


FIG. 1.12 – Même cas que pour la figure 1.10, mais avec des conditions de Robin optimisées. A gauche : Evolution temporelle de l’erreur relative (en norme  $L_2$ ) sur les 50 premières fenêtres temporelles. On a reporté la courbe de la figure 1.10, correspondant à des conditions de type Dirichlet-Neumann. A droite : Erreur par rapport à la solution exacte à la fin de la simulation, en fonction de  $x$ , pour les deux types de conditions.

## Une expérimentation en taille réelle

Un souci constant de nos travaux est leur applicabilité dans un contexte réel. Au-delà des cas idéalisés —absolument nécessaires dans un premier temps pour la mise au point des méthodes—, nous souhaitons donc également travailler sur des modèles réalistes. C’est pourquoi nous mènerons de front les deux aspects dans le projet COMODO. Nous réaliserons d’un côté le développement des techniques de détermination des conditions d’interface (thèse de V. Martin) sur des systèmes d’équations simplifiés, se rapprochant petit à petit des systèmes réalistes : advection-diffusion 2-D, modèle *shallow water* linéaire et non-linéaire, et enfin équations primitives. Et nous mettrons en place d’autre part un

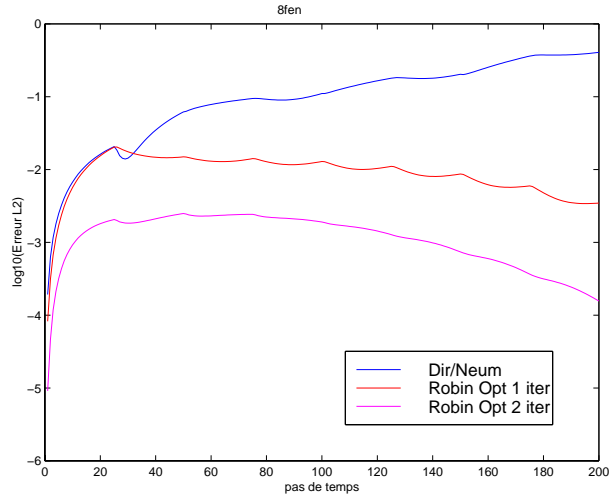


FIG. 1.13 – *Idem figure 1.11a. Les trois courbes (de haut en bas) représentent le logarithme de l’erreur lorsque le couplage a lieu via respectivement : une et une seule itération de Dirichlet-Neumann; une et une seule itération avec conditions de Robin optimisées; deux itérations avec conditions de Robin optimisées.*

couplage en vraie grandeur de deux modèles réalistes (thèse de S. Cailleau et travail post-doctoral de V. Fedorenko), sur lequel nous testerons diverses stratégies de couplage, avec pour commencer des méthodes simples usuelles pour aller petit à petit vers des méthodes plus performantes, du type de celles détaillées précédemment. Nous pourrons ainsi comparer les performances des diverses méthodes dans un cadre réellement océanographique, en nous attachant en particulier aux propriétés physiques des solutions (*e.g.* conservation).

Bien que les choix définitifs n’aient pas encore tous été faits, ce couplage réel mettra vraisemblablement en jeu un modèle au  $1/3^\circ$  ( $\simeq 30$  à  $35$  km) de l’océan Atlantique Nord et équatorial avec un modèle régional du Golfe de Gascogne à très haute résolution (de l’ordre de  $1/15^\circ \simeq 6$  à  $7$  km). Ces modèles différeront notamment par le traitement de la surface (toit rigide / surface libre), de la coordonnée verticale (coordonnée  $z$  / coordonnée  $\sigma$ ), et sans doute des paramétrisations sous-maille.

## Une approche “boîte noire” et metacomputing

Notre troisième et dernier objectif enfin consiste à avoir une approche informatique “propre”. Comme dans le cas du raffinement de maillage (*cf* §1.2), nous nous imposons donc a priori la contrainte de rester autant que possible indépendant des modèles, *i.e.* de séparer au niveau informatique les aspects indépendants des modèles des aspects dépendants des modèles, et de traiter ces derniers par le biais d’interfaces externes, sans modification des modèles proprement dits. De plus, nous souhaitons demeurer dans la mesure du possible indépendants des plate-formes de calcul qui seront utilisées.

Nous ne sommes évidemment pas les premiers à aborder ce type de problème informatique, et différents outils et projets existent déjà dans ce qu’il est convenu d’appeler le domaine du *metacomputing*. En termes d’outils, citons en premier lieu l’architecture

Corba, fondée sur le concept d'objets distribués, et qui permet la conception d'applications distribuées à l'aide d'objets répartis à l'échelle d'un réseau. Plusieurs *coupleurs* existent également, comme OASIS (bibliothèque d'interpolation et de communication développée au CERFACS Toulouse - contact : S. Valcke) ou encore MpCCI (coupleur plus généraliste développé en Allemagne au GMD-SCAI - contact : R. Redler). En termes de projets, une action liée au projet européen PRISM est en cours autour de la définition des interfaces pour le couplage de codes de climatologie à l'IPSL de Paris 6 (contact : M.A. Foujols, P. d'Anfray) et au CERFACS (contact: S. Valcke). Une autre action, plus axée sur le metacomputing et les outils Corba, Java et Unicore a débuté à l'IDRIS dans le cadre du projet européen EUROGRID (contact: D. Giroud). Par ailleurs une Action de Recherche Concertée "couplage" a été menée en 2000-2001 à l'INRIA (contact : T. Gautier, INRIA Rhône-Alpes).

Nous chercherons donc à tirer profit des résultats de ces nombreuses recherches pour nos propres applications.

## 1.4 Bibliographie du chapitre 1

### Références liées à des travaux personnels et en collaboration

- Blayo E. and L. Debreu, 1999: Adaptive mesh refinement for finite difference ocean models: first experiments. *J. Phys. Oceanogr.*, **29**,1239-1250.
- Blayo E., L. Debreu, G. Mounié and D. Trystram, 2000: Dynamic load balancing for ocean circulation model with adaptive meshing. *Engineering Simulation*, **22**, 8-24.
- Blayo E., L. Debreu et H. Knochel, 2000: Maillage adaptatif et méthodes de zoom : application au projet Clipper pour la zone du détroit de Gibraltar. *Rapport final de la convention EPSHOM 30/97*, janvier 2000.
- Blayo E., L. Debreu and B. Barnier, 2002: An adaptive multi-resolution approach to ocean modelling: experiments in a primitive equation model of the north Atlantic. En préparation.
- Debreu L., 2000: Raffinement adaptatif de maillage et méthodes de zoom - application aux modèles d'océan. *Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble 1*, janvier 2000.
- Debreu L., E. Blayo, et B. Barnier, 2001: Maillage adaptatif et méthodes de zoom : études complémentaires et transfert de compétence. *Rapport final de contrat EPSHOM*, octobre 2001.
- Debreu L. and E. Blayo, 2002: AGRIF: Adaptive Grid Refinement in Fortran. *Rapport technique INRIA RT-0262*.
- Debreu L., 2002: Numerical analysis of zoom methods for structured meshes. En préparation.

### Bibliographie générale

- Berger M. and J. Olinger, 1984: Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *J. Comp. Phys.*, **53**, 484-512.

- Berger M. and P. Colella, 1989: Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *J. Comp. Phys.*, **82**, 64-84.
- Berger M. and I. Rigoutsos, 1991: An algorithm for point clustering and grid generation. *IEEE Trans. on Systems Man and Cybernetics*, **21**, 1278-1286.
- Bernardi C., Y. Maday and A. Patera, 1994: A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method. In *Non linear partial differential equations and their applications*, J.-L. Lions and H. Brezis Eds, Séminaire du Collège de France, **11**, 13-51.
- Delcayre F., 1999: Etude par simulation des grandes échelles d'un écoulement décollé : la marche descendante. *Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble*, janvier 1999.
- Domain Decomposition Methods 1987-2001 (13 volumes). *Proceedings des conférences annuelles internationales*, SIAM Philadelphie et <http://www.ddm.org>.
- Engquist B. and A. Majda, 1977: Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, **31**, 629-651.
- Falkovich A.I., 1986: Nested grid scheme for predicting isolated vortex movement in a barotropic model of atmosphere. *Sov. Meteo. Hydro.*, **9**, 35-41.
- Fox A.D. and S.J. Maskell, 1995: Two-way interactive nesting of primitive equation ocean models with topography. *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 2977-2996.
- Fox A.D. and S.J. Maskell, 1996: A nested primitive equation model of the Iceland-Faeroe front. *J. Geophys. Res.*, **101**, 18259-18278.
- Gander M., L. Halpern and F. Nataf, 1999: Optimized Schwarz Methods. *Proceedings of the 12th International Conference on Domain Decomposition Methods*, Chiba, Japan.
- Ginis I., R. Richardson and L.M. Rothstein, 1998: Design of a multiply nested primitive equation ocean model. *Month. Weath. Rev.*, **126**, 1054-1079.
- Halpern L., 1986: Artificial boundary conditions for the advection-diffusion equations. *Math. Comp.*, **174**, 425-438.
- Halpern L. and M. Schatzman, 1989: Artificial boundary conditions for incompressible viscous flows. *SIAM J. Math. Anal.*, **20**, 309-353.
- Holstad A. and I. Lie, 1999: On transparent boundary conditions and nesting for ocean models. *Research report n° 91, Norwegian Meteorological Institute*.
- Hunt J.C.R., A.A. Wray, and P. Moin, 1988: Eddies, stream and convergence zones in turbulent flows. *Center for Turbulence Research report*, CTR-S88:193.
- Japhet C., 1998: Méthode de décomposition de domaine et conditions aux limites artificielles en mécanique des fluides : méthode optimisée d'ordre 2. *Thèse de l'université de Paris 13*, juillet 1998.
- Jones R.W., 1977: A nested grid for a three-dimensional model of a tropical cyclone. *J. Atmos. Sci.*, **34**, 1528-1553.
- Kurihara Y., G.J. Tripoli and M.A. Bender, 1979: Design of a movable nested-mesh primitive equation model. *Mon. Weath. Rev.*, **107**, 239-249.
- Laugier M., P. Angot and L. Mortier, 1996: Nested grid methods for an ocean model: a comparative study. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **23**, 1163-1195.
- Ley G.W. and R.L. Elsberry, 1976: Forecasts of typhoon Irma using a nested-grid model. *Mon. Weath. Rev.*, **104**, 1154-1161.
- Lie I., 2001: Well-posed transparent boundary conditions for the shallow water equations. *App. Num. Math.*, **38**, 445-474.

- Mc Williams J., L. Debreu, P. Marchesiello and P. Penven, 2001: ROMS embedded gridding - test and application for the simulation of the central upwelling of the Pacific coast of the United States. *2001 terrain-following coordinates ocean model users workshop*, Boulder, août 2001.
- Madec G., P. Delecluse, M. Imbard and C. Levy, 1999: OPA, release 8.1, Ocean General Circulation Model reference manual. Internal report, LODYC/IPSL, France.
- Madel J., S. Mc Cormick and R. Bank, 1987: Variational multigrid theory. In *multigrid methods*, Mc Cormick ed., SIAM Frontiers in Applied Mathematics, Philadelphia.
- Mounié G., 2000 : Ordonnancement efficace d'applications parallèles : les tâches malléables monotones. *Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble*, juin 2000.
- Nataf F., F. Rogier and E. de Sturler, 1995 : domain decomposition methods for fluid dynamics. In Sequeira, A. (ed.), *Navier-Stokes equations and related nonlinear problems*. Proceedings of the 3rd international conference, May 1994, Funchal, Portugal. Plenum Press. 367-376 (1995).
- Oey L.-Y. and P. Chen, 1992: A nested-grid ocean model with application to the simulation of meanders and eddies in the Norwegian coastal current. *J. Geophys. Res.*, **97**, 20063-20086.
- Perkins L., L.F. Smedstad, D.W. Blake, G.W. Heburn and A.J. Wallcraft, 1997: A new nested boundary condition for a primitive equation ocean model. *J. Geophys. Res.*, **102**, 3483-3500.
- Perkins L. and L.F. Smedstad, 1998: Scale-related aspects of nested finite difference ocean models. *Theoret. Comput. Fluid Dyn.*, **10**, 311-322.
- Rowley C. and I. Ginis, 1999: Implementation of a mesh movement scheme in a multiply nested ocean model and its application to air-sea interaction studies. *Month. Weath. Rev.*, **127**, 1879-1896.
- Skamarock, W.C., J. Oliger, and R.L. Street, 1989: Adaptive grid refinement for numerical weather prediction. *J. Comp. Phys.*, **80**, 27-60.
- Spall M.A. and W.R. Holland, 1991: A nested primitive equation model for oceanic applications. *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 205-220.
- Trottenberg U., C.W. Oosterlee and A. Schuller, 2000 : *Multigrid*. Academic Press, 615pp.
- Valli A. and A. Quarteroni, 1999 : *Domain decomposition methods for partial differential equations*. Oxford University Press.
- Zhang D.L., H.R. Chang, N.L. Seaman, T.T. Warner and J.M. Fritsch, 1986: A two-way interactive nesting procedure with variable terrain resolution. *Mon. Weath. Rev.*, **114**, 1330-1339.

# Chapitre 2

## Schémas numériques et modèles d'océan

Nous avons, dans le chapitre précédent, considéré les modèles océaniques comme des entités que nous avons utilisées sans les modifier, pour aller vers des systèmes plus complexes. Nous allons au contraire dans ce second chapitre entrer dans le coeur des modèles, et nous intéresser à leurs aspects numériques. Il s'agit là de travaux assez récents, et en tout état de cause beaucoup moins poussés que ceux décrits aux chapitres 1 et 3. Le but à terme ici est double : nous souhaitons d'une part réfléchir au problème d'une évaluation assez systématique des schémas numériques, adaptée au contexte de la modélisation océanique, et d'autre part mettre en oeuvre une telle évaluation pour différents schémas numériques.

Après une rapide description des principaux "ingrédients" des modèles océaniques usuels, nous introduirons un formalisme simple permettant de mettre plus facilement en évidence le rôle des schémas numériques dans les modèles. Nous donnerons ensuite quelques éléments de réflexion concernant leur évaluation, et présenterons à titre d'illustration un certain nombre de résultats obtenus en collaboration avec C. et E. Kazantsev avec des schémas compacts. Enfin, nous indiquerons quelques pistes de travail qu'il nous paraîtrait particulièrement intéressant de développer dans les années à venir.

### 2.1 Modèles numériques d'océan

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction de ce document, la grande majorité des modèles actuels de circulation générale océanique résolvent le système des équations primitives (1), qui traduisent la conservation de la quantité de mouvement, de la masse, de la chaleur et du sel, sous les approximations hydrostatique et de Boussinesq. Ces modèles utilisent quasiment tous une discrétisation par différences finies, sur un maillage structuré. Ils se différencient les uns des autres par un certain nombre de choix, numériques mais surtout physiques. Nous n'allons pas ici entrer dans tous les détails, on pourra pour cela consulter par exemple les ouvrages de Haidvogel and Beckmann (1999) et de Kantha and Clayson (2000), ou encore l'article de synthèse de Griffies *et al.* (2000), ainsi que les très nombreuses références qui y sont données.



Nous pouvons toutefois énumérer rapidement les points principaux :

- **Coordonnée verticale** — C'est sans doute le degré de liberté le plus important à choisir, car il a de nombreuses conséquences sur la formulation des équations et des paramétrisations. Trois types de coordonnées verticales sont actuellement très utilisées dans les modèles, sans qu'aucune ne s'impose véritablement : la coordonnée  $z$  "naturelle" (iso-gravité), variant de 0 à la profondeur locale  $H(x, y)$ ; la coordonnée  $\sigma$  épousant la forme de la topographie  $\sigma = z/H(x, y)$ ; et la coordonnée isopycnale  $\rho$ , *i.e.* la densité potentielle du fluide.
- **Coordonnées horizontales** — Les modèles utilisent le plus souvent un système de coordonnées orthogonales, ou curvilignes orthogonales, parfois plus ou moins généralisées grâce à des procédés de projection et de raccordements de grilles, pour permettre une certaine adaptation à la forme des côtes et un déplacement éventuel hors du domaine de calcul de la singularité associée au pôle nord.
- **Type de grilles horizontales** — Arakawa (1966) a proposé une classification des différents choix envisageables pour le positionnement des variables sur la grille de calcul (figure 2.1). Les avantages et inconvénients de ces grilles sont en général comparés dans la littérature du point de vue de la représentation des principales ondes océaniques (inertie-gravité, Rossby, Kelvin) et de la mise en œuvre des conditions aux limites le long des côtes. Les grilles "B" et "C" sont les plus utilisées en océanographie.
- **Surface libre / toit rigide** — La dynamique océanique peut être décomposée de façon un peu schématique en une dynamique barotrope (*i.e.* moyennée sur la verticale) bidimensionnelle rapide, et une dynamique barocline (*i.e.* dépendant de la profondeur) tridimensionnelle lente. Jusque récemment, la plupart des modèles adoptaient l'hypothèse du toit rigide, par laquelle la surface océanique est assimilée au plan  $z = 0$  et ne varie pas dans le temps. Ceci a notamment pour effet de filtrer les ondes de gravité barotropes, extrêmement rapides, et de rendre la dynamique barotrope non-divergente, et donc représentable par une fonction de courant. Cependant, les modèles tendent maintenant de plus en plus à représenter explicitement les variations temporelles de hauteur d'eau (surface libre), via l'introduction d'une nouvelle variable pronostique.
- **Schémas d'advection** — L'advection des traceurs, actifs ou passifs, est évidemment un processus majeur qui se doit d'être correctement représenté dans les modèles d'océan. Une très abondante littérature existe sur ce sujet en mécanique des fluides, bien au-delà du seul contexte océanographique, et de nombreux schémas numériques sont disponibles à cet effet. Malgré plusieurs études récentes, il ne semble pas se dégager pour l'instant de choix clair pour les modèles océaniques.
- **Modèle de couche de mélange** — La couche de mélange est la partie supérieure de l'océan qui interagit directement avec l'atmosphère et la glace de mer. Sa représentation est donc cruciale, notamment dans l'optique de simulations couplées océan-atmosphère. Cette couche est le lieu de phénomènes dynamiques et thermodynamiques complexes, et de nombreuses paramétrisations en ont été proposées.
- **Paramétrisation de la couche-limite de fond** — De façon analogue à la couche mélangée de surface, il existe à proximité du fond de l'océan une autre couche

mélangée, dont l'épaisseur (de l'ordre de quelques dizaines de mètres) dépend de la rugosité du fond et de la vitesse du fluide. Son effet peut là-aussi être paramétrisé par diverses méthodes.

- **Paramétrisation des phénomènes sous-mailles** — Un terme important dans les modèles numériques d'océan vise à simuler l'effet des phénomènes non représentés du fait de la limitation de la résolution. Cette paramétrisation intervient le plus souvent via un opérateur de friction latérale qui peut prendre différentes formes.

A la relecture de cette liste (non-exhaustive) de points-clés dans le *design* des modèles océaniques actuels, il est frappant de constater que la plupart concernent la représentation ou la paramétrisation de la physique océanique, mais bien peu finalement des aspects numériques, hormis le choix des grilles de calcul et de schémas d'advection. S'il est tout à fait logique de développer en premier lieu la physique de ces modèles afin de simuler avec un maximum de réalisme l'extrême complexité de la circulation océanique, l'orientation actuelle vers des expérimentations numériques très lourdes et à haute résolution doit cependant nous inciter également à envisager une révision du contenu numérique des modèles, hérité directement en grande majorité des premiers modèles des années 60. Ainsi par exemple, excepté pour le cas bien identifié des schémas d'advection, il est implicitement admis que les schémas numériques sont des schémas aux différences finies centrées d'ordre 2. Depuis l'époque de ces premiers modèles pourtant, de nombreuses recherches ont été menées, qui ont vu l'apparition de nouvelles méthodes de discrétisation et de nouveaux schémas, et dont certains pourraient sans doute être appropriés au contexte des modèles de circulation générale océanique.

C'est dans cet esprit que nous avons commencé à travailler depuis 1999 avec C. et E. Kazantsev, en essayant d'une part de mettre en place des éléments d'évaluation systématiques, adaptés à la physique océanique, et d'autre part en commençant à mettre en œuvre cette démarche d'évaluation sur des familles de schémas compacts.

## 2.2 Opérateurs aux différences finies usuels en océanographie

Nous allons dans ce paragraphe introduire un système de notations simple qui nous permettra par la suite de traiter de façon assez générale la discrétisation par différences finies de divers systèmes d'équations.

Les équations de l'océanographie, comme on peut le voir sur le système (1), font intervenir essentiellement des opérateurs de dérivation première et seconde, sauf éventuellement dans certains termes de paramétrisations qui peuvent être d'ordre plus élevé. Nous avons vu par ailleurs au §2.1 que la position des variables à l'intérieur d'une maille peut différer suivant la grille de calcul choisie (figure 2.1). Il suffit donc a priori simplement, pour construire entièrement un modèle numérique d'océan, de trois schémas 1-D, d'interpolation, de dérivée première et de dérivée seconde, que nous noterons respectivement  $S_0$ ,  $S_1$  et  $S_2$ . Pour la simplicité de l'exposé et des notations, nous considérerons dans la suite une grille de calcul horizontale régulière (*i.e.* de maille constante). Le cas d'une grille irrégulière

(comme c'est le cas de toute façon par exemple sur la verticale) n'apporte pas de réelle difficulté supplémentaire, ni ne modifie les idées qui seront développées.

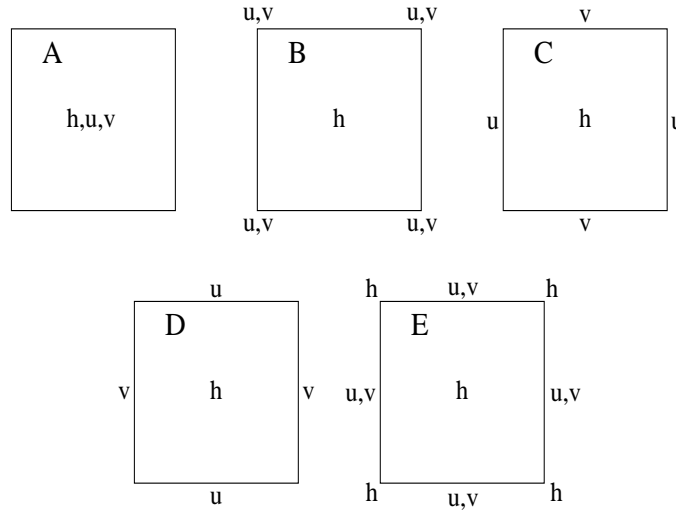


FIG. 2.1 – Grilles de calcul de type A à E suivant la classification d'Arakawa (1966). Noter que la taille des mailles est égale à  $d$  pour les grilles A-D, et à  $d\sqrt{2}$  pour la grille E, de façon à avoir la même distance entre points de grille associés à une même variable.  $u$  et  $v$  sont les composantes horizontales de la vitesse, et  $h$  est la hauteur d'eau (ou la pression, ou la fonction de courant barotrope, suivant la formulation des modèles).

Si l'on note  $(x_i)_{i \in N}$  une grille 1-D régulière de pas  $d$  sur laquelle on suppose connue les valeurs  $f_i$  d'une fonction  $f$ , ces schémas sont :

- $S_0$  : schéma d'interpolation donnant une estimation  $f_{i+1/2}$  de  $f$  au point  $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$
- $S_1$  : schéma de dérivée première, donnant une estimation  $f'_i$  de  $f'(x_i)$
- $S_2$  : schéma de dérivée seconde, donnant une estimation  $f''_i$  de  $f''(x_i)$

Si l'on utilise une grille décalée (*i.e.* autre que la grille A - cf figure 2.1), on aura également besoin de

- $S_{1/2}$  : schéma de dérivée première donnant une estimation  $f'_{i+1/2}$  de  $f'(x_{i+1/2})$

Tous les modèles numériques d'océan aux différences finies sont actuellement basés pour leur physique horizontale sur les classiques schémas centrés d'ordre 2, rappelés dans la table 2.2.

A partir de ces schémas 1-D, on construit par simples combinaisons tous les schémas 2-D nécessaires à l'approximation de la physique horizontale. On utilisera par exemple dans la suite les schémas ci-dessous (les notations  $u$ ,  $v$ ,  $h$  font référence à la figure 2.1):

- $\mathcal{S}_0$  pour approximer  $u$  sur un point  $v$  (et  $v$  sur un point  $u$ )
- $\mathcal{S}_x^u$  pour approximer  $\partial_x h$  sur un point  $u$  (et par symétrie  $\partial_x u$  sur un point  $h$ )
- et de même pour  $\mathcal{S}_x^v$ ,  $\mathcal{S}_y^u$  et  $\mathcal{S}_y^v$ .

|                   | A       | B                       | C                       | D                   | E           |
|-------------------|---------|-------------------------|-------------------------|---------------------|-------------|
| $\mathcal{S}_0$   | Id      | Id                      | $S_0^x \circ S_0^y$     | $S_0^x \circ S_0^y$ | Id          |
| $\mathcal{S}_x^u$ | $S_1^x$ | $S_{1/2}^x \circ S_0^y$ | $S_{1/2}^x$             | $S_1^x \circ S_0^y$ | $S_{1/2}^x$ |
| $\mathcal{S}_x^v$ | $S_1^x$ | $S_{1/2}^x \circ S_0^y$ | $S_1^x \circ S_0^y$     | $S_{1/2}^x$         | $S_{1/2}^x$ |
| $\mathcal{S}_y^u$ | $S_1^y$ | $S_{1/2}^y \circ S_0^x$ | $S_{1/2}^y \circ S_0^x$ | $S_{1/2}^y$         | $S_{1/2}^y$ |
| $\mathcal{S}_y^v$ | $S_1^y$ | $S_{1/2}^y \circ S_0^x$ | $S_{1/2}^y$             | $S_1^y \circ S_0^x$ | $S_{1/2}^y$ |

TAB. 2.1 – Schémas 2-D obtenus par combinaison de schémas 1-D, en fonction du type de grille. L'exposant  $x$  ou  $y$  sur les schémas 1-D indique la direction dans laquelle le schéma est appliqué.

Leur construction est indiquée dans la table 2.1.

## 2.3 Evaluation de la qualité d'un schéma

### 2.3.1 Démarche générale

La physique océanique étant très complexe, de nombreux aspects interviennent lorsque l'on souhaite évaluer des schémas numériques en vue de leur utilisation dans un modèle de circulation. En particulier, une simple comparaison des propriétés intrinsèques (ordre, troncature, fonction de transfert, stabilité, conservation), bien qu'indispensable, est insuffisante. Au delà de cette phase "académique", il nous paraît essentiel de comparer les comportements des schémas dans un cadre spécifiquement océanique.

Ce problème n'est évidemment pas nouveau pour les modélisateurs océanographes, qui mettent souvent en place des configurations spécifiques de modèles afin de tenter d'isoler les effets et de comparer divers choix numériques ou de paramétrisations. Il paraît évidemment raisonnable pour ce faire d'adopter une démarche très progressive. On peut dans un premier temps s'intéresser à un certain nombre de processus-clés (équilibre géostrophique, ondes de gravité et de Rossby, couche-limite de bord Ouest...) qui sous-tendent la dynamique océanique, et qui doivent être correctement représentés dans les modèles numériques. Ces processus sont représentables par des systèmes d'équations très simples, sur lesquels les comparaisons peuvent être menées analytiquement. Nous y reviendrons au §2.3.2.

Il faut ensuite passer dans un second temps à des tests numériques sur des modèles plus complexes, pour lesquels la validation sera plus difficile car on ne connaît pas en général la solution exacte. Il faudra alors définir une solution "de référence" par rapport à laquelle on évaluera les résultats. Nous citerons quelques exemples au §2.3.3.

La phase ultime de tests sera ensuite la réalisation de simulations réalistes avec un modèle aux équations primitives. On se heurtera alors au problème de la définition de critères précis, permettant d'évaluer les effets (positifs et négatifs) des schémas testés, et de dégager des recommandations quant à leur utilisation en fonction des objectifs de la simulation numérique. Il s'agit là d'un point qui doit évidemment être traité par des océanographes.

Enfin, le coût des modèles numériques étant en pratique un aspect limitant, il faudra s'attacher à l'efficacité de la mise en oeuvre informatique des schémas et à leur "rapport qualité-prix".

Nous allons maintenant revenir plus en détail sur quelques-uns des points précédents, avant de les illustrer au §2.4 sur le cas de schémas compacts.

## 2.3.2 Processus océaniques fondamentaux

### Géostrophie

L'équilibre géostrophique traduit la balance entre force de Coriolis et gradient horizontal de pression. Il peut être considéré comme un équilibre fondamental autour duquel oscillent les circulations atmosphériques et océaniques. Il s'écrit :

$$\begin{cases} g \partial_x h = f v \\ g \partial_y h = -f u \end{cases} \quad (2.1)$$

Cet équilibre intervient dans les équations de conservation de la quantité de mouvement horizontale, qui sont discrétisées dans les modèles numériques aux points  $u$  et  $v$ . L'équivalent discret du système (2.1) sera donc, avec les notations introduites au §2.2 :

$$\begin{cases} g \mathcal{S}_x^u(h) = f \mathcal{S}_0(v) \\ g \mathcal{S}_y^v(h) = -f \mathcal{S}_0(u) \end{cases} \quad (2.2)$$

Par transformation de Fourier en  $x$  et  $y$  :  $z(x, y) = \sum_{k,l} \hat{z}_{kl} e^{i(kx+ly)}$ , les systèmes exact et approché (2.1) et (2.2) deviennent respectivement

$$\begin{cases} \frac{f}{g} \frac{\hat{v}_{kl}}{\hat{h}_{kl}} = ik \\ \frac{f}{g} \frac{\hat{u}_{kl}}{\hat{h}_{kl}} = -il \end{cases} \quad \forall k, l \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{f}{g} \frac{\hat{v}_{kl}}{\hat{h}_{kl}} = \frac{\mathcal{T}_x^u(k, l)}{\mathcal{T}_0(k, l)} \\ \frac{f}{g} \frac{\hat{u}_{kl}}{\hat{h}_{kl}} = -\frac{\mathcal{T}_y^v(k, l)}{\mathcal{T}_0(k, l)} \end{cases} \quad \forall k, l \quad (2.3)$$

où les  $\mathcal{T}(k, l)$  sont les fonctions de transfert des schémas 2-D. Elles sont définies par  $\mathcal{S}(e^{i(kx+ly)}) = \mathcal{T}(k, l) e^{i(kx+ly)}$ , et leurs expressions se déduisent aisément des expressions des fonctions de transfert 1-D, par simple produit.

La qualité de la représentation de l'équilibre géostrophique dans un modèle dépendra donc de la proximité des rapports  $\mathcal{T}_x^u(k, l)/\mathcal{T}_0(k, l)$  et  $\mathcal{T}_y^v(k, l)/\mathcal{T}_0(k, l)$  aux fonctions exactes  $ik$  et  $il$ .

### Ondes d'inertie-gravité

Les ondes d'inertie-gravité correspondent aux phénomènes d'ajustement gravitationnel, et sont décrites par les équations shallow-water linéarisées sur le  $f$ -plan (*e.g.* Gill, 1982) :

$$\begin{cases} \partial_t u - f_0 v + g \partial_x h = 0 \\ \partial_t v + f_0 u + g \partial_y h = 0 \\ \partial_t h + H(\partial_x u + \partial_y v) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

où le paramètre de Coriolis  $f_0$  est supposé constant. En cherchant des solutions sous formes d'ondes progressives  $(u, v, h) = (U_0, V_0, H_0) e^{i(kx+ly-\omega t)}$ , on obtient la relation de dispersion bien connue caractérisant ces ondes :

$$\left(\frac{\omega}{f_0}\right)^2 = 1 + \lambda^2 (k^2 + l^2) \quad (2.5)$$

où  $\lambda = \sqrt{gH}/f_0$  est appelé rayon de Rossby.

Avec les notations précédentes, la version semi-discrétisée du système (2.4) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u - f_0 \mathcal{S}_0(v) + g \mathcal{S}_x^u(h) = 0 \\ \partial_t v + f_0 \mathcal{S}_0(u) + g \mathcal{S}_y^v(h) = 0 \\ \partial_t h + H [\mathcal{S}_x^u(u) + \mathcal{S}_y^v(v)] = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

et conduit à la relation de dispersion

$$\left(\frac{\omega}{f_0}\right)^2 = \mathcal{T}_0^2(k, l) - \lambda^2 [\mathcal{T}_x^u(k, l)^2 + \mathcal{T}_y^v(k, l)^2] \quad (2.7)$$

Etant donnée la forme de (2.7), il est clair que l'approximation de (2.5) sera d'autant meilleure que les fonctions de transfert des schémas seront proches des fonctions de transfert des opérateurs exacts. Par ailleurs, il est intéressant de calculer également la vitesse de groupe  $(\partial_k \omega, \partial_l \omega)$ , qui correspond au transport de l'énergie. Il est en effet connu que les approximations numériques peuvent conduire à des erreurs importantes localement, voire même à des inversions de signe.

## Ondes de Rossby

Les ondes de Rossby sont des ondes lentes correspondant aux processus d'ajustement géostrophique, et qui jouent un rôle majeur dans la circulation océanique de grande échelle. On peut étudier leur représentation par une démarche tout à fait analogue à ce qui vient d'être fait pour les ondes d'inertie-gravité. Sans rentrer dans les détails de calcul (*cf* Blayo, 2000), indiquons que le point principal est la prise en compte des variations suivant  $y$  du paramètre de Coriolis, qui introduit une non-linéarité dans les équations. La relation de dispersion exacte de ces ondes s'écrit

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{-\lambda^2 k}{1 + \lambda^2 (k^2 + l^2)} \quad (2.8)$$

tandis qu'on a montré que la relation de dispersion discrète est

$$\frac{\omega}{\beta} = i \lambda^2 \mathcal{T}_0(k, l) \frac{\mathcal{T}_x^u(k, l) \mathcal{R}_y^v(k, l) - \mathcal{T}_y^v(k, l) \mathcal{R}_x^u(k, l)}{\mathcal{T}_0(k, l)^2 - \lambda^2 [\mathcal{T}_x^u(k, l)^2 + \mathcal{T}_y^v(k, l)^2]} \quad (2.9)$$

On note ici l'apparition de nouvelles quantités  $\mathcal{R}$ , du fait de la dépendance en  $y$  du paramètre de Coriolis. Nous les avons nommées "fonctions de transfert d'ordre 1" des

schémas, définies par  $\mathcal{S}[(y - y_0)e^{i(kx+ly)}](x_0, y_0) = \mathcal{R}(k, l) e^{i(kx_0, ly_0)}$  pour tout  $(x_0, y_0)$ . Ces quantités s'expriment à partir des fonctions de transfert d'ordre 1 des schémas 1-D de base, définies par  $S[(x - x_0)e^{ikx}](x_0) = R(k) e^{ikx_0}$  pour tout  $x_0$ .

De cette expression (2.9), il ressort deux grandes différences par rapport au cas des ondes d'inertie-gravité: d'une part, la relation de dispersion étant sous forme de quotient, l'amélioration des approximations du numérateur et du dénominateur ne garantit pas celle du quotient; d'autre part, contrairement au cas des fonctions de transfert  $\mathcal{T}$ , la qualité des fonctions de transfert d'ordre 1  $\mathcal{R}$  a tendance à se dégrader lorsqu'on augmente l'ordre des schémas, particulièrement aux hautes fréquences (on illustrera ce point dans le cas des schémas compacts sur la figure 2.8). Le fait d'accroître l'ordre des schémas ne mènera donc sans doute pas systématiquement à une meilleure approximation des vitesses de phase (et a fortiori des vitesses de groupe) des ondes de Rossby.

### Couche-limite de Munk

Le modèle de Munk (1950) est un modèle simple de couche-limite de bord Ouest, exprimant l'équilibre local entre effet  $\beta$  et dissipation latérale. Il s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d^3v(x)}{dx^3} - \frac{1}{\delta^3} v(x) = 0 & x > 0 \\ v(0) = 0 & \text{(non-glissement à la côte)} \\ v(+\infty) = 0 & \text{(couche-limite d'épaisseur finie)} \end{cases} \quad (2.10)$$

où le paramètre  $\delta = \left(\frac{\nu}{\beta}\right)^{1/3}$  est une taille caractéristique ( $\nu$  est la viscosité latérale). La solution (non identiquement nulle) est connue analytiquement et est représentée sur la figure 2.2. La largeur de la couche limite est de l'ordre de  $2\pi\delta/\sqrt{3} \simeq 3.6\delta$ .

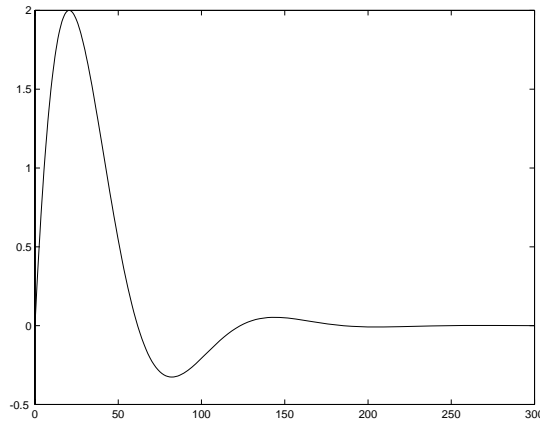


FIG. 2.2 – Allure du profil de vitesse dans la couche-limite de Munk, pour des valeurs typiques océaniques (abscisses en km, ordonnées en m/s,  $\delta = 17\text{km}$ )

Ce processus est un bon exemple d'un principe de base de la méthode des différences finies, à savoir l'importance de la notion d'échelle caractéristique dans l'utilisation de schémas numériques. En effet, le changement de variable  $\xi = x/\delta$ ,  $w(\xi) = v(x)$  transforme (2.10) en

$$\begin{cases} \frac{d^3 w(\xi)}{d\xi^3} - w(\xi) = 0 & \xi > 0 \\ w(0) = w(+\infty) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Ceci montre que la discrétisation de (2.10) par un schéma d'ordre  $p$  sur une grille de pas  $d$  donnera une erreur en  $\mathcal{O}(d^p/\delta^p)$ . Le fait de passer d'un schéma d'ordre  $p$  à un schéma d'ordre supérieur  $q$  fera passer typiquement le terme principal d'erreur de  $C_p \frac{d^p}{\delta^p}$  à  $C_q \frac{d^q}{\delta^q}$ ,

et ne sera donc bénéfique que dans la mesure où  $d \leq \delta \left(\frac{C_p}{C_q}\right)^{1/(q-p)}$ , *i.e.* si la couche-limite est correctement résolue par la grille de calcul. Dans le cas contraire, l'accroissement de l'ordre du schéma dégradera la solution numérique.

### 2.3.3 Quelques tests numériques “standard”

Comme nous l'avons indiqué précédemment, les modélisateurs océanographes ont depuis bien longtemps réfléchi au problème de la validation de leurs modèles, et ont mis au point de nombreuses configurations de tests, dont beaucoup peuvent certainement être reprises pour évaluer l'impact de schémas numériques. On peut, un peu arbitrairement, les répartir en trois groupes.

On a tout d'abord les tests de simulation de la propagation d'une structure cohérente dont l'expression analytique est connue. C'est par exemple le cas du modon barotrope (Flierl *et al.*, 1981) solution des équations quasi-géostrophiques barotropes sans vent ni dissipation, ou encore du soliton équatorial de Rossby (Boyd, 1980), solution asymptotique des équations shallow-water non-linéaires sans vent ni dissipation. Le comportement de ces solutions est notamment sensible aux erreurs sur la dispersion des ondes, et à la dissipation numérique.

On peut classer dans une seconde catégorie la simulation de systèmes d'équations simplifiés (quasi-géostrophiques ou shallow-water) dans un domaine de forme simple (rectangulaire le plus souvent) à fond plat, et avec un forçage de vent analytique simple. Le comportement des solutions de ce type de simulations a été très bien étudié et décrit dans de nombreux articles. On peut donc utiliser ce cadre pour tester de nouveaux schémas, en prenant comme référence les résultats “classiques” et leurs propriétés statistiques, ainsi que les résultats obtenus à très haute résolution.

Enfin, on peut regrouper dans une troisième catégorie les expériences de simulation de processus isolés assez complexes, comme par exemple les écoulements stratifiés autour d'une montagne sous-marine (test de la précision du calcul de gradient de pression), l'ajustement gravitationnel d'un front de densité (test du schéma d'advection) ou encore les écoulements d'eau dense. Citons d'ailleurs à cet égard l'initiative du projet DOME (Dynamics of Overflow Mixing and Entrainment), coordonnant un exercice d'intercomparaison de modèles sur une configuration commune, auquel participent de nombreuses équipes internationales.



## 2.4 Une première application: les schémas compacts

Nous allons maintenant donner dans ce paragraphe une illustration de la démarche générale qui vient d’être discutée, sur le cas de schémas compacts.

### 2.4.1 Schémas compacts : présentation générale

Nous avons indiqué précédemment que les modèles actuels utilisent quasiment uniquement la famille de schémas centrés d’ordre 2 (notés E2 dans la suite, *cf* table 2.2). Outre un “héritage historique”, les raisons en sont également les inconvénients inhérents aux schémas d’ordres supérieurs. En effet, dans la méthode de construction classique (*i.e.* explicite) des schémas, l’accroissement de l’ordre de précision (ordre 4 ou plus, typiquement) va impliquer des largeurs de schémas de plus en plus importantes (*i.e.* par exemple l’utilisation des points  $x_{i-2}$  à  $x_{i+2}$  pour l’ordre 4). Ceci rend ces schémas inutilisables au voisinage des frontières, où l’on doit mettre en oeuvre des schémas décentrés d’ordre élevé.

Une façon élégante d’éviter ces inconvénients consiste à écrire les schémas d’approximations non plus de façon directe comme précédemment, mais de façon indirecte, via une formule hermitienne implicite. Ceci permet d’obtenir un ordre élevé tout en limitant la largeur des schémas. Bien que relativement ancienne (*e.g.* Collatz, 1966), cette approche (dite “hermitienne” ou “compacte”) est restée encore assez confidentielle jusqu’au début des années 90, où elle a été popularisée notamment par le travail de Lele (1992).

Dans notre cadre de modèles océaniques, la qualité des approximations auprès des côtes nous a paru être un aspect particulièrement important, notamment du fait de l’existence de couches-limites, et nous avons donc fait le choix de nous restreindre à des schémas utilisant seulement les voisins immédiats (*i.e.* de largeur 1). Nous avons ainsi sélectionné deux familles de schémas compacts d’ordre 4 et d’ordre 6 (notées C4 et C6 dans la suite), qui sont présentées dans la table 2.2. On peut noter que les schémas  $S_1$  et  $S_2$  de la famille C6 sont obtenus conjointement par une formule compacte combinée (Chu and Fan, 1998) afin d’atteindre l’ordre 6 sans accroissement de la largeur des schémas.

Ces schémas compacts présentent de très bonnes qualités intrinsèques. Ainsi par exemple, leur terme principal de troncature est divisé d’un facteur typiquement de 2 à 10 par rapport aux schémas centrés explicites de même ordre. De même, ils permettent une très bonne approximation spectrale, comme on peut le voir sur la figure 2.3 qui représente leurs fonctions de transfert (on rappelle que la fonction de transfert  $T$  d’un schéma 1-D  $S$  est définie par  $S(e^{ikx}) = T(k) e^{ikx}$ ).

L’utilisation de ces schémas s’est développée ces dernières années, notamment dans le domaine de la modélisation de la turbulence ainsi qu’en aérodynamique. Dans le contexte météorologique, un modèle global sur la sphère a été développé par Tolstykh (1997). En océanographie par contre, seuls Chu and Fan (1998) se sont pour l’instant intéressés à ces schémas, mais pour un modèle extrêmement simplifié (modèle stationnaire de Stommel).

|           |             |  |
|-----------|-------------|--|
| <b>E2</b> | $S_0$       | $f_{i+1/2} = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1})$  |
|           | $S_{1/2}$   | $f'_{i+1/2} = \frac{f_{i+1} - f_i}{d}$   |
|           | $S_1$       | $f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2d}$  |
|           | $S_2$       | $f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{d^2}$   |
| <b>C4</b> | $S_0$       | $\frac{1}{6}f_{i-1/2} + f_{i+1/2} + \frac{1}{6}f_{i+3/2} = \frac{2}{3} (f_i + f_{i+1})$  |
|           | $S_{1/2}$   | $\frac{1}{22}f'_{i-1/2} + f'_{i+1/2} + \frac{1}{22}f'_{i+3/2} = \frac{12}{11} \frac{f_{i+1} - f_i}{d}$   |
|           | $S_1$       | $\frac{1}{4}f'_{i-1} + f'_i + \frac{1}{4}f'_{i+1} = \frac{3}{2} \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2d}$  |
|           | $S_2$       | $\frac{1}{10}f''_{i-1} + f''_i + \frac{1}{10}f''_{i+1} = \frac{6}{5} \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{d^2}$   |
| <b>C6</b> | $S_0$       | $\frac{3}{10}f_{i-1/2} + f_{i+1/2} + \frac{3}{10}f_{i+3/2} = \frac{3}{4} (f_i + f_{i+1}) + \frac{1}{20} (f_{i-1} + f_{i+2})$   |
|           | $S_{1/2}$   | $\frac{9}{62}f'_{i-1/2} + f'_{i+1/2} + \frac{9}{62}f'_{i+3/2} = \frac{63}{62} \frac{f_{i+1} - f_i}{d} + \frac{17}{62} \frac{f_{i+2} - f_{i-1}}{3d}$  |
|           | $S_1 - S_2$ | $\begin{cases} f'_i + \frac{7}{16} (f'_{i+1} + f'_{i-1}) - \frac{d}{16} (f''_{i+1} - f''_{i-1}) = \frac{15}{16d} (f_{i+1} - f_{i-1}) \\ f''_i - \frac{1}{8} (f''_{i+1} + f''_{i-1}) + \frac{9}{8d} (f'_{i+1} - f'_{i-1}) = \frac{3}{d^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \end{cases}$ |

TAB. 2.2 – Les trois familles de schémas E2, C4 et C6

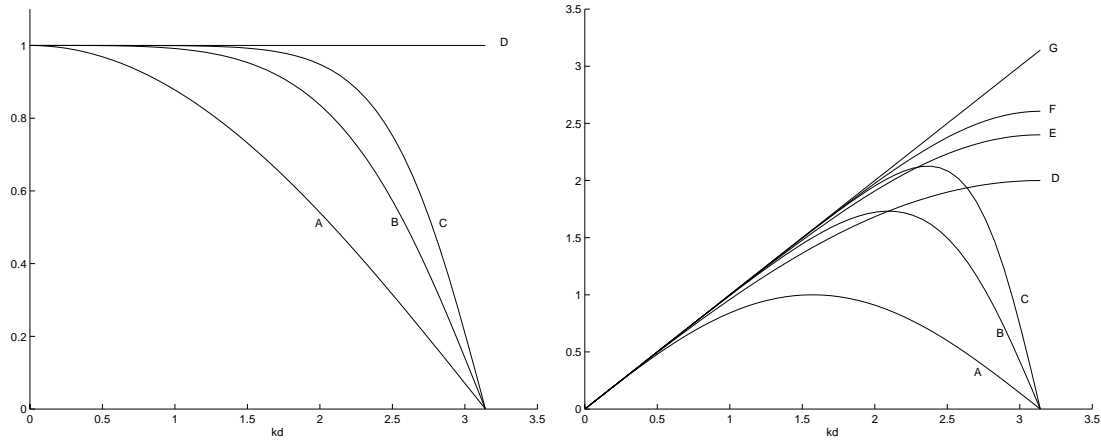


FIG. 2.3 – Fonctions de transfert. A gauche :  $T_0$  pour E2 (A), C4 (B), C6 (C) et l’opérateur d’interpolation exact (D). A droite :  $T_1$  pour E2 (A), C4 (B), C6 (C);  $T_{1/2}$  pour E2 (D), C4 (E), C6 (F), et opérateur de dérivation exact (G). En abscisse : le nombre d’onde  $k$ , adimensionné pour une maille de largeur 1.

## 2.4.2 Schémas compacts et processus océaniques fondamentaux

Examinons maintenant l’adéquation des schémas précédents pour la représentation de quelques processus particulièrement importants mentionnés au §2.3.2.

### Géostrophie

On a vu au §2.3.2 que la qualité de la représentation de l’équilibre géostrophique sera d’autant meilleure que les rapports  $\frac{\mathcal{T}_x^u(k, l)}{ik \mathcal{T}_0(k, l)}$  et  $\frac{\mathcal{T}_y^v(k, l)}{il \mathcal{T}_0(k, l)}$  seront proches de 1. Comme on peut le voir sur la figure 2.4, ces rapports sont nettement améliorés lorsque l’on passe des schémas E2 aux schémas compacts C4 et C6, ce qui n’avait a priori rien d’évident (l’amélioration des fonctions de transfert n’entraînant pas forcément l’amélioration du rapport).

On peut également noter, et cela nous semble important en pratique pour les modèles actuels, les erreurs assez fortes commises avec les schémas E2 (notamment en grille C) du fait de l’utilisation d’un schéma d’interpolation  $\mathcal{S}_0$  de qualité assez médiocre (*cf* figure 2.3). Nous reviendrons plus loin sur ce point.

### Ondes d’inertie-gravité

Comme nous l’avons mentionné au §2.3.2, la forme de l’équation (2.7) montre que l’utilisation des familles de schémas C4 et C6 devrait améliorer la représentation de ces ondes

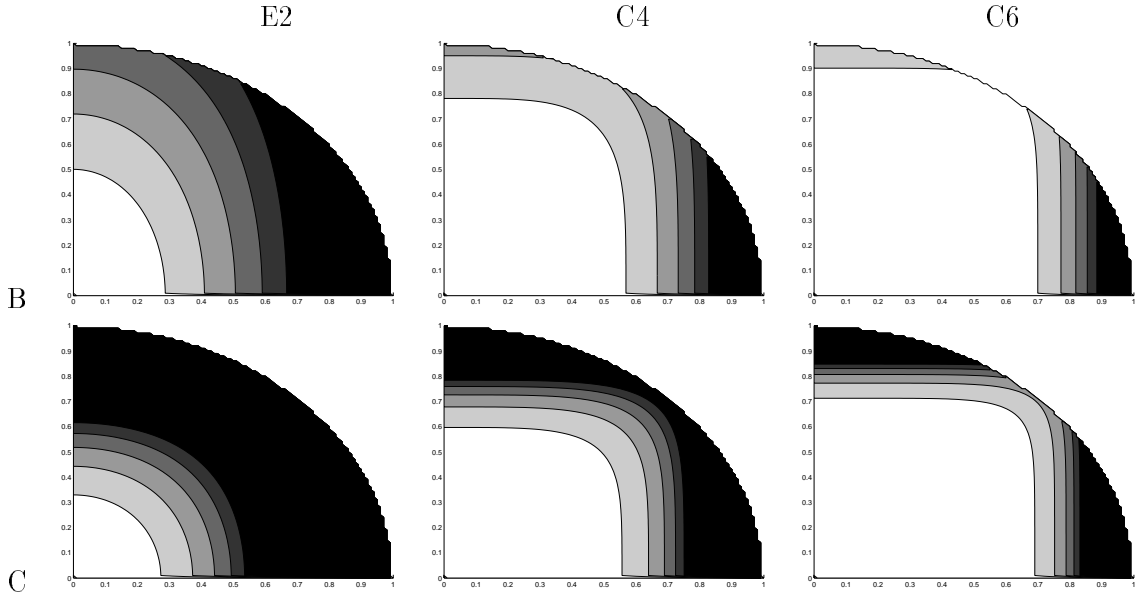


FIG. 2.4 – *Equilibre géostrophique : erreur relative  $\left| \frac{\mathcal{T}_x^u(k, l)}{ik \mathcal{T}_0(k, l)} - 1 \right|$  en fonction de  $kd/\pi$  et  $ld/\pi$  pour les grilles B et C, et les trois familles de schémas E2, C4 et C6. Isocontours : 10%, 20%, 30%, 40% et 50%, du blanc au noir.*

dans les modèles. Le gain obtenu est analysé en détail dans Blayo (2000). En résumé, indiquons que l'utilisation de ces schémas améliore de façon importante la précision des résultats, tant sur les vitesses de phase que sur les vitesses de groupe (voir à titre d'illustration les figures 2.5 et 2.6). Si les performances relatives des différentes grilles demeurent qualitativement identiques (les grilles B et C sont les meilleures, avec une préférence pour la grille B à basse résolution et C à haute résolution), l'amélioration obtenue avec C4 et C6 est telle que toutes les grilles (sauf peut-être la D) deviennent de bons choix.

## Ondes de Rossby

Comparons maintenant les qualités respectives des trois familles de schémas pour la représentation des ondes de Rossby. Nous avons indiqué au §2.3.2 que le gain n'était cette fois pas assuré, du fait de la forme de la relation de dispersion discrète (2.9). En effet, comme on peut le voir sur la figure 2.8, la fonction de transfert d'ordre 1  $R_0$  du schéma d'interpolation  $S_0$  se détériore lorsque l'ordre du schéma augmente. En ce qui concerne les schémas de dérivée première  $S_{1/2}$  et  $S_1$ ,  $R_{1/2}$  et  $R_1$  sont plutôt améliorés lorsqu'on passe de E2 à C4, mais se détériore si l'on utilise C6.

Sans rentrer dans les détails des résultats (*cf* Blayo, 2000), nous donnons un exemple de comparaison sur la figure 2.7. Indiquons simplement qu'au final les approximations sont globalement meilleures pour C4 que E2, notamment pour les grilles C et D. Par contre, l'utilisation d'un ordre plus élevé (famille C6) dégrade les résultats. La famille C4 apparaît donc comme un bon choix pour la représentation des ondes de Rossby.

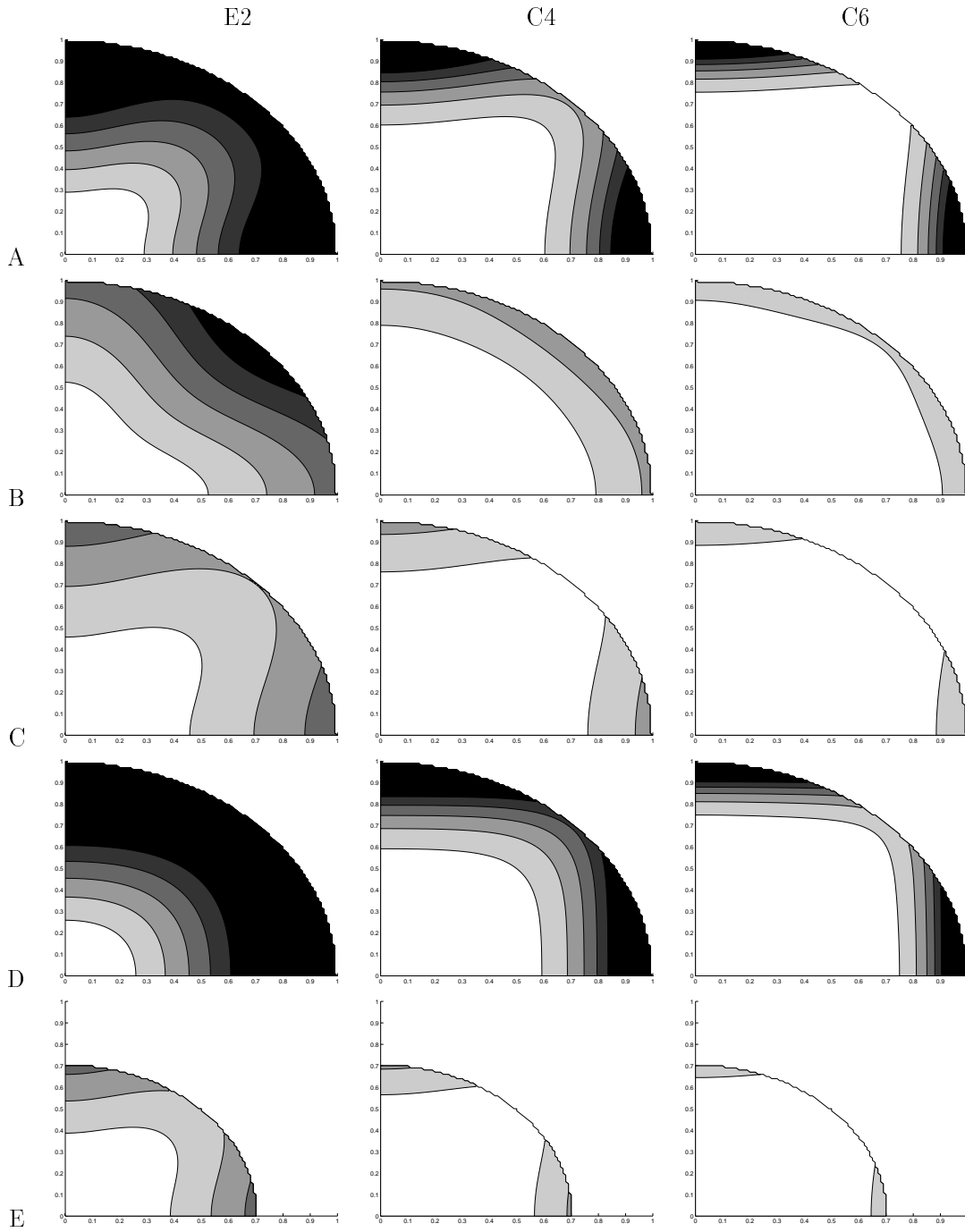


FIG. 2.5 – Ondes d’inertie-gravité : erreur rms relative sur  $\omega$  en fonction de  $kd/\pi$  et  $ld/\pi$  pour les grilles A à E et les trois familles de schémas E2, C4 et C6, dans le cas d’une grille à haute résolution ( $\lambda/d = 2$ ). Isocontours : 10%, 20%, 30%, 40% et 50%, du blanc au noir.

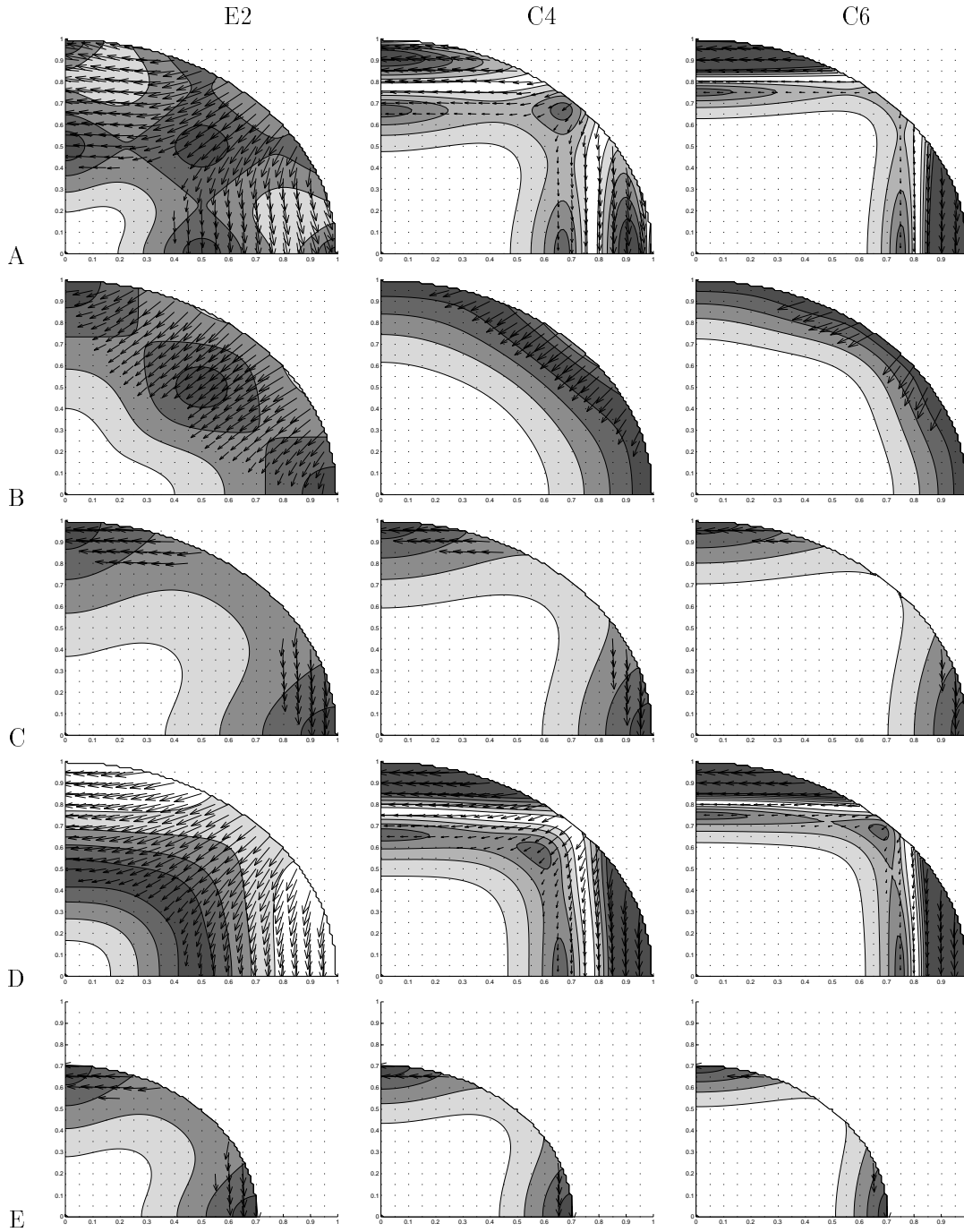


FIG. 2.6 – Erreur rms relative sur l'amplitude de la vitesse de groupe, dans le même cas que la figure 2.5. Isocontours: 20%, 40%, 60%, 80% et 100%. Les vecteurs d'erreur sont dessinés lorsque l'erreur angulaire est supérieure à  $30^\circ$ .

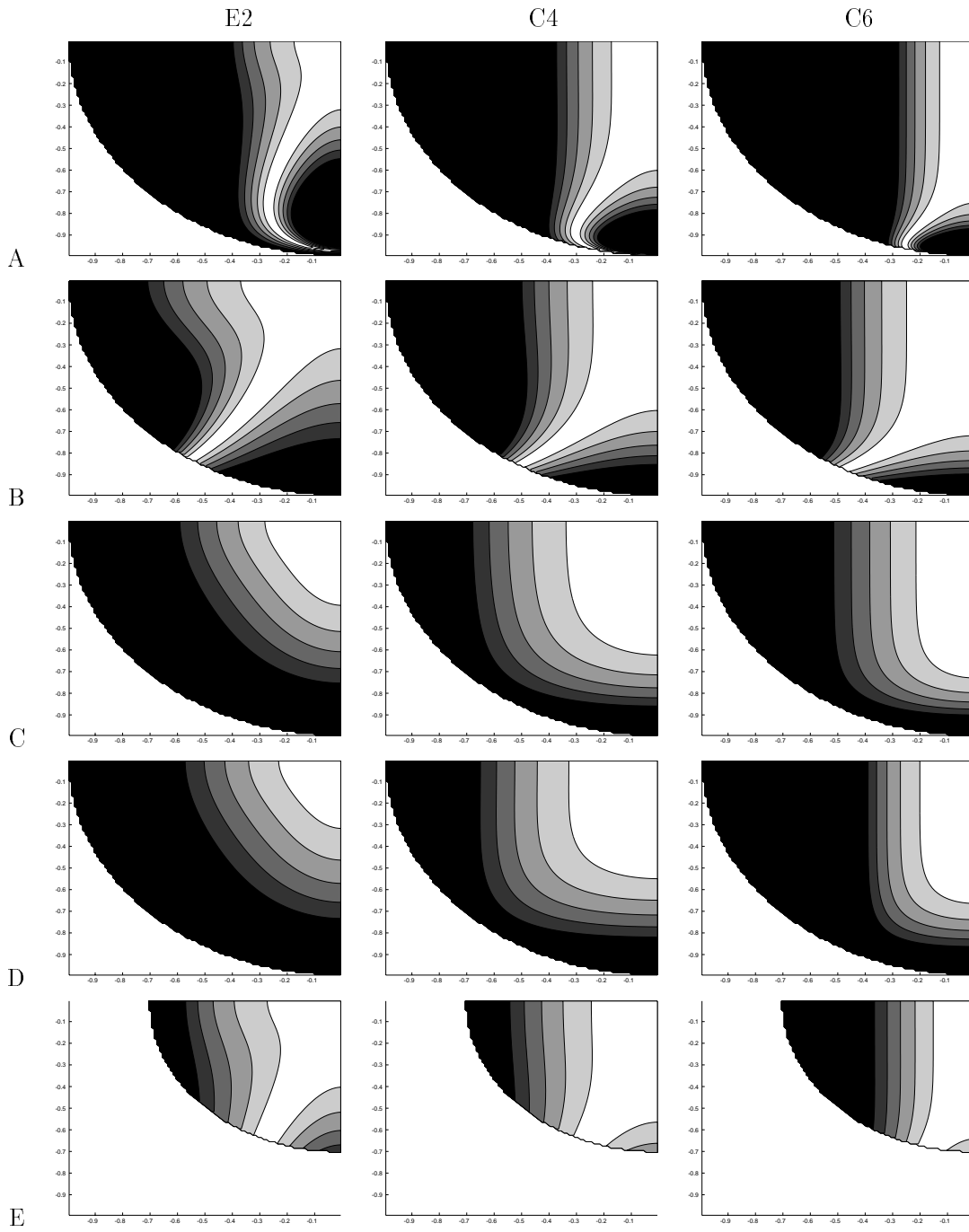


FIG. 2.7 – *Idem figure 2.5, mais pour les ondes de Rossby.*

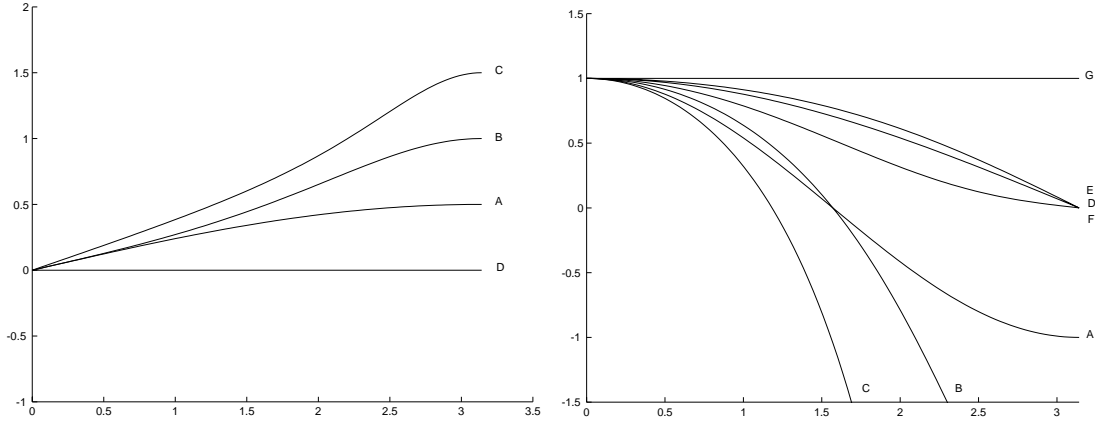


FIG. 2.8 – *Fonctions de transfert d'ordre 1. A gauche :  $R_0$  pour E2 (A),  $C_4$  (B),  $C_6$  (C) et l'opérateur d'interpolation exact (D). A droite :  $R_1$  pour E2 (A),  $C_4$  (B),  $C_6$  (C);  $R_{1/2}$  pour E2 (D),  $C_4$  (E),  $C_6$  (F), et opérateur de dérivation exact (G). En abscisse : le nombre d'onde  $k$ , adimensionné pour une maille de largeur 1.*

## Couche-limite de Munk

On a vu au §2.3.2 que l'utilisation de schémas d'ordre élevé devrait apporter une amélioration à l'approximation du modèle de Munk, à condition que la couche-limite soit correctement résolue par la grille de calcul. Ceci est illustré sur la figure 2.9, où l'on a mis en oeuvre les familles E2 et C4 pour la résolution de (2.10), et où l'on observe bien ce phénomène. Par ailleurs, C. Kazantsev (2000a) a analysé en détail les erreurs de discrétisation correspondant à cette expérience, et a mis en évidence l'importance de la condition limite à la côte.

### 2.4.3 Tests dans un modèle shallow-water

Nous allons maintenant présenter quelques résultats de simulation obtenus dans un cadre un peu plus complexe, avec un modèle shallow-water. Les équations, obtenues par intégration verticale des équations de Navier-Stokes, sont :

$$\begin{cases} \partial_t u - (f + \xi)v + \partial_x B &= \frac{\tau^{(x)}}{\rho_0 H} - ru + \nu \Delta u \\ \partial_t v + (f + \xi)u + \partial_y B &= \frac{\tau^{(y)}}{\rho_0 H} - rv + \nu \Delta v \\ \partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) &= 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

où  $\xi = \partial_x v - \partial_y u$  est la vorticité,  $B = g'h + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$  est le potentiel de Bernoulli, et  $\tau = (\tau^{(x)}, \tau^{(y)})$  est la tension du vent. On fait l'hypothèse du  $\beta$ -plan ( $f = f_0 + \beta y$ ),  $\rho_0$  est la densité de l'eau,  $g'$  la gravité réduite,  $H$  la profondeur moyenne au repos,  $r$  et  $\nu$  les coefficients de frottement et de dissipation.



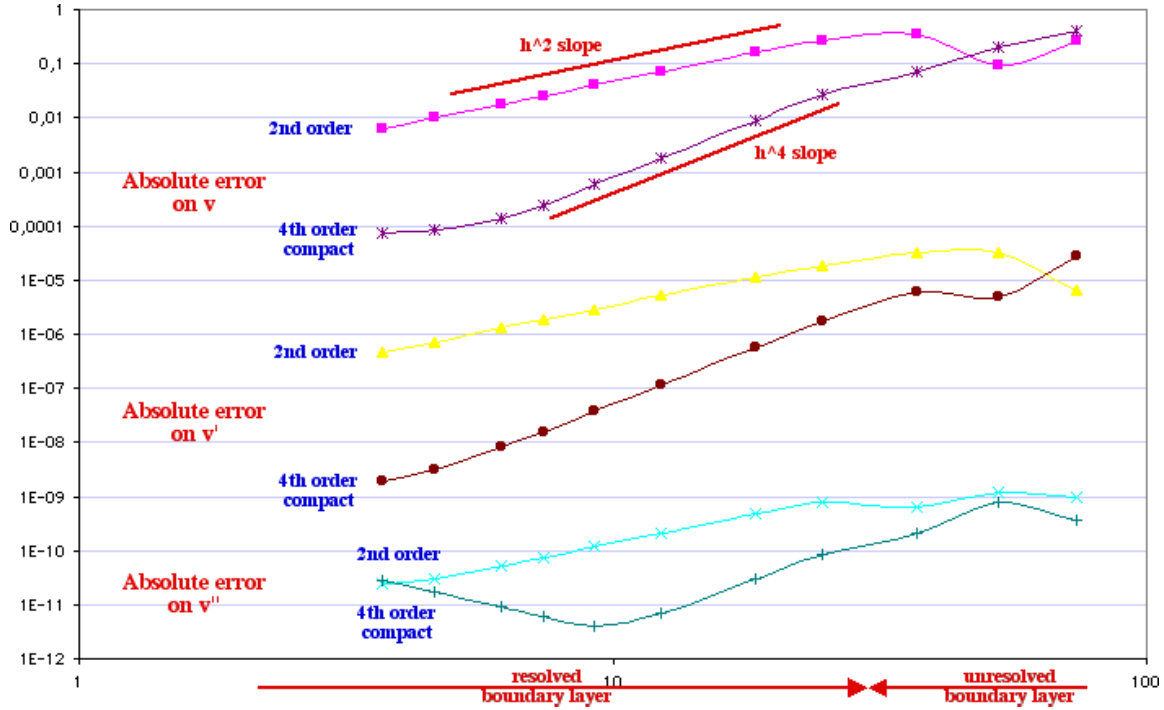


FIG. 2.9 – *Modèle de Munk : erreurs sur  $v$ ,  $v'$  et  $v''$  en fonction de la taille de la maille, pour les schémas E2 et C4. On a pris  $\delta = 17\text{km}$ , i.e. une largeur de couche-limite de  $60\text{km}$ .*

Le système (2.12) est discrétisé sur une grille C, selon la disposition de variables indiquée sur la figure 2.10 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \mathcal{S}_0^y(f + \xi)\mathcal{S}_0^{xy}(v) + \mathcal{S}_{1/2}^x(B) = \frac{\tau^{(x)}}{\rho_0 H} - ru + \nu(\mathcal{S}_2^x(u) + \mathcal{S}_2^y(u)) \\ \partial_t v + \mathcal{S}_0^x(f + \xi)\mathcal{S}_0^{xy}(u) + \mathcal{S}_{1/2}^y(B) = \frac{\tau^{(y)}}{\rho_0 H} - rv + \nu(\mathcal{S}_2^x(v) + \mathcal{S}_2^y(v)) \\ \partial_t h + \mathcal{S}_{1/2}^x(\mathcal{S}_0^x(h)u) + \mathcal{S}_{1/2}^y(\mathcal{S}_0^y(h)v) = 0 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Nous avons réalisé avec C. et E. Kazantsev quelques simulations à différentes résolutions, en utilisant les familles de schémas E2 et C4. Le domaine de calcul est un bassin océanique rectangulaire de taille  $2000 \times 2000 \text{ km}$ , forcé par un vent constant dans le temps, créant une circulation en double gyre. Les différents paramètres de simulation (y compris les coefficients de friction et de dissipation) sont rigoureusement identiques dans toutes les expériences; seules varient la résolution horizontale et la famille de schémas employés. Les enseignements principaux de ces simulations sont les suivants :

- Dès lors que la couche-limite de bord Ouest est correctement résolue (ce qui rejoint les remarques précédentes sur la couche-limite de Munk), les schémas C4 mènent avec une résolution horizontale deux fois moindre à des résultats quasi-identiques à ceux obtenus avec les schémas E2. Une illustration en est donnée sur la figure 2.11.
- A résolution égale, le surcoût dû à l'utilisation des schémas C4 par rapport aux schémas E2 est de l'ordre de 3. Si l'on se place par contre à résultats identiques, une

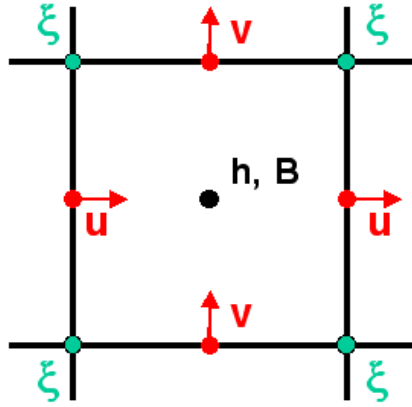


FIG. 2.10 – Position des variables du modèle shallow-water sur une maille de calcul

résolution deux fois moindre étant suffisante avec C4, les schémas C4 deviennent avec ce modèle 2 à 3 fois moins coûteux que les schémas E2.

- Nous avons signalé précédemment la médiocre qualité de la représentation de l'équilibre géostrophique avec les schémas E2 en grille C, du fait du schéma d'interpolation  $\mathcal{S}_0$ . Nous avons voulu en estimer les conséquences en réalisant une simulation utilisant les schémas E2, sauf  $\mathcal{S}_0$  pris d'ordre 4. On obtient alors des résultats bien différents de ceux obtenus avec la famille E2 seule, ce qui illustre l'importance de  $\mathcal{S}_0$  dans ce type de modèle. E. Kazantsev travaille d'ailleurs actuellement à la construction de nouveaux schémas d'interpolation d'ordre élevé, spécialement adaptés aux équations de la circulation océanique.

#### 2.4.4 Aspects informatiques

Les schémas compacts étant implicites, *i.e.* demandant la résolution de systèmes linéaires tridiagonaux (*cf* table 2.2), leur utilisation est évidemment plus complexe et plus coûteuse que celle des schémas usuels. Nous allons à titre d'exemple donner une évaluation de leur coût dans deux cas distincts.

Considérons dans un premier temps un domaine rectangulaire à fond plat couvert par un maillage régulier, uniforme horizontalement, de taille  $N_x \times N_y \times N_z$ . A chaque opérateur discret ( $S_0$ ,  $S_{1/2}$  ou  $S_1$ , ...) dans chaque direction ( $x$ ,  $y$  ou  $z$ ) est donc associée une (et une seule) matrice tridiagonale, que l'on peut en fait décomposer une fois pour toutes sous forme LU en produit de deux matrices bidiagonales. Le coût de cette décomposition est négligeable, vu le grand nombre de pas de temps que l'on aura à réaliser. Le coût de stockage sera alors de  $3N_s$  pour chaque opérateur dans la direction  $s$  ( $= x, y$  ou  $z$ ), auquel il faudra éventuellement ajouter le stockage des champs calculés, si ceux-ci doivent être réutilisés à plusieurs reprises à l'intérieur d'un même pas de temps. Le coût de calcul à chaque utilisation du schéma sera quant à lui de  $4N_s$ , contre  $N_s$  pour un schéma usuel de type E2.

Si l'on considère maintenant un domaine de forme quelconque maillé de façon irrégulière, les coefficients des schémas varient d'un point de grille à l'autre, et on doit les

stocker pour chaque point de grille. De plus, étant donnée la forme irrégulière du domaine, les tailles des matrices tridiagonales varient en fonction de la ligne de mailles sur laquelle on applique le schéma. Il est donc hors de question de stocker leur décomposition LU, ce qui fait passer le coût de calcul à  $6N_s$  à chaque utilisation. Une approche par méthode de capacité ou de domaine fictif pourrait toutefois peut-être permettre de s'affranchir de cette difficulté, en ramenant les calculs sur un domaine rectangulaire.

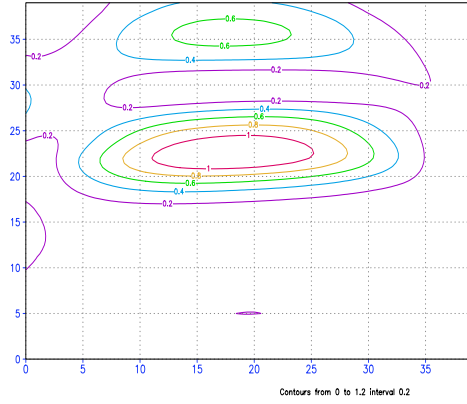
L'implémentation informatique de schémas compacts doit être réalisée soigneusement pour que les calculs soient efficaces. Citons par exemple l'algorithme proposé par Povitsky (1999) pour optimiser le nombre d'accès à la mémoire-cache. Par ailleurs, l'utilisation sur calculateurs parallèles pose des difficultés, du fait des nouvelles dépendances entre sous-domaines créées par les schémas compacts. Un travail de masquage des communications et d'optimisation doit donc être réalisé dans ce cas. Enfin, concernant l'utilisation sur calculateur vectoriel, les boucles de substitution lors des résolutions LU ne sont a priori pas vectorisables, et il faut donc veiller à imbriquer les calculs dans les différentes directions  $x$ ,  $y$ ,  $z$  afin de conserver les avantages de la vectorisation.

#### 2.4.5 Synthèse concernant les schémas compacts

Ce paragraphe sur les schémas compacts visait tout autant à illustrer une démarche d'évaluation de schémas pour les modèles de circulation océanique qu'à exposer quelques premiers résultats numériques. Ceux-ci sont évidemment encore partiels, et des tests complémentaires sont à mener. Nous envisageons notamment de réaliser des simulations en coopération avec les océanographes du LEGI (A. de Miranda, B. Barnier) avec le modèle aux équations primitives OPA dans la configuration standardisée du projet DOME (*cf* §2.3.3). Les schémas compacts pourraient notamment être testés sur les opérateurs verticaux, particulièrement importants dans ce problème d'écoulement d'eau dense.

Les qualités intrinsèques des schémas compacts, dues à leur ordre élevé et à leur faible largeur de bande, semblent améliorer grandement la représentation des principaux processus océaniques, notamment avec la famille C4. Toutefois, ces schémas posent deux problèmes: d'une part, leur stabilité, notamment en lien avec les conditions et schémas aux limites, pose des difficultés et doit être mieux étudiée (*cf* Carpenter *et al.*, 1993, 1994; Abarbanel *et al.*, 2000a,b); d'autre part, les difficultés liées aux applications réalistes doivent être mieux évaluées, comme par exemple le cas de grilles non-uniformes (*cf* Spatz and Carey, 1998; Gamet *et al.*, 1999). Il n'est pas clair en effet à l'heure actuelle de savoir si ces difficultés sont ou non rédhibitoires.

### Energie cinétique moyenne



### Energie cinétique turbulente

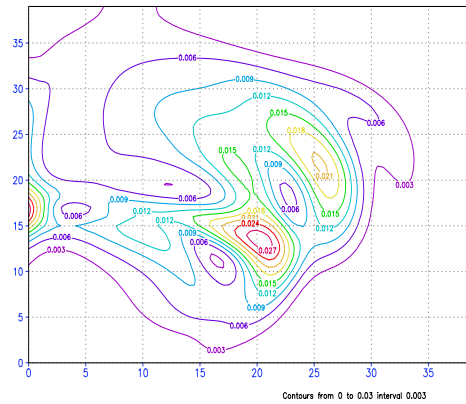
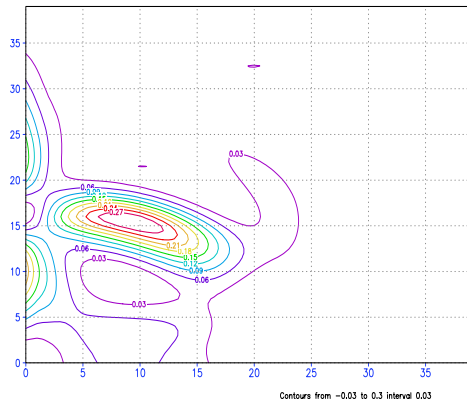
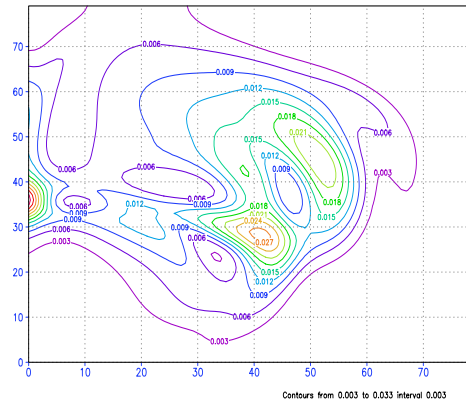
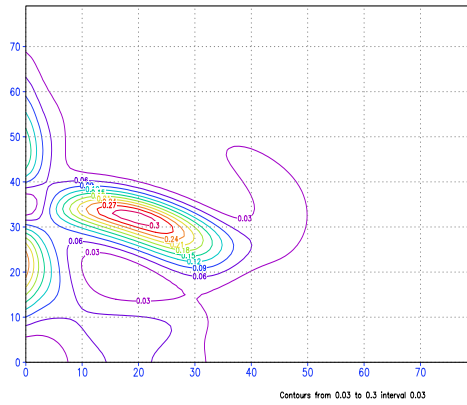
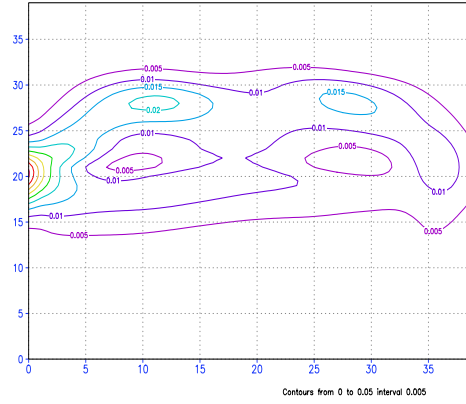


FIG. 2.11 – Cartes d'énergie cinétique moyenne (à gauche) et turbulente (à droite) obtenues sur 10 ans de simulation. En haut : schémas E2, résolution de 25 km; au milieu : schémas E2, résolution de 12.5 km; en bas : schémas C4, résolution de 25 km. On remarque que les schémas C4 mènent à des résultats très proches de ceux obtenus avec les schémas E2 et une résolution double. (unité :  $\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ )

## 2.5 Quelques pistes à explorer

Nous avons mentionné au début de ce chapitre qu'il nous paraît important dans le contexte actuel de mener une réflexion sur les aspects numériques des modèles de circulation océanique. Il n'existe pas à l'heure actuelle en France de recherche réellement structurée en ce domaine, contrairement à ce qui peut exister dans d'autres pays. Ce thème intéresse pourtant à l'évidence les équipes de recherche en océanographie, ainsi que les grands organismes de recherche, dont les appels d'offre comportent souvent des points liés aux méthodes numériques.

Les difficultés et limitations numériques majeures rencontrées en modélisation océanique proviennent essentiellement du fait que :

- la précision des méthodes utilisées est, comme nous l'avons déjà indiqué, généralement peu élevée (différences finies d'ordre 2, simples à mettre en oeuvre et d'exécution rapide), ce qui conduit notamment à utiliser des maillages très fins pour avoir une précision correcte, et donc aboutit à des problèmes de très grandes dimensions.
- l'intégration sur des temps longs, notamment dans l'optique climatique, demande d'utiliser des schémas ayant des propriétés particulières de stabilité en temps et de conservativité.

Nous souhaitons, avec C. et E. Kazantsev, développer dans les années à venir la réflexion amorcée dans ce chapitre sur les méthodes numériques en modélisation océanique. Sans trop entrer dans les détails, nous pouvons toutefois évoquer quelques points importants :

- Schémas d'ordre élevé : au-delà des quelques résultats présentés au §2.4, beaucoup reste à faire pour évaluer l'apport de schémas d'ordre élevé (compacts ou non), dont l'utilisation pourrait permettre un gain appréciable en coût et/ou en précision. On a vu que la complexité ainsi que les fortes non-linéarités de la physique océanique ne garantissent pas a priori leur efficacité, et que des études spécifiques sont donc nécessaires. A la lumière des résultats obtenus sur les schémas compacts, C. et E. Kazantsev travaillent à la construction de schémas explicites d'ordre élevé adaptés aux équations océaniques, qui allieraient de bonnes qualités intrinsèques et une plus grande facilité d'implémentation sur des cas réalistes.
- Méthodes de volumes finis : si la formulation par différences finies peut souvent s'apparenter à une formulation en volumes finis, notamment en grille C, ce n'est toutefois pas rigoureusement identique. L'utilisation d'une véritable approche par volumes finis permettrait sans doute de traiter de façon plus adéquate que cela n'est le cas actuellement un certain nombre de problèmes liés à la représentation de la ligne de côte et de la bathymétrie, tout en conservant une grande facilité d'écriture et d'implémentation. Il peut s'agir là, nous semble-t-il, d'un point important dans l'optique des applications réalistes des modèles.
- Intégration en temps long : les modèles océaniques sont souvent utilisés pour des simulations de longue durée. Les schémas couramment utilisés actuellement sont stables dans le sens où l'erreur par rapport à la solution exacte croît linéairement dans le temps (stabilité au sens de Lax, ou stabilité GKS pour Gustafsson, Kreiss and Sundström). Cependant, ceci devient insuffisant lorsqu'on doit intégrer sur des

temps longs. On peut alors envisager la construction de schémas “asymptotiquement stables”, dont la notion a été développée ces dernières années (Carpenter *et al.*, 1993, 1994; Abarbanel *et al.*, 2000a,b). Ces travaux n’ont cependant été menés que sur des cas simples, et la généralisation à des cas plus complexes reste à faire. De plus, la conservation de certaines quantités physiques est souvent un point crucial dans les simulations. Pour l’obtenir, il peut être nécessaire de prendre des schémas spécifiques, notamment aux limites du domaine, et l’on peut alors gagner en conservativité ce que l’on perd par exemple en précision. Par ailleurs, la conservation exacte simultanée de différentes quantités peut s’avérer numériquement impossible, alors qu’elle est physiquement souhaitable. L’étude de ces aspects constitue également un point intéressant. On peut noter à ce sujet que l’approche par volumes finis, conservative par essence, va en ce sens.

- “Hybridation” de méthodes : les avantages intrinsèques à une méthode peuvent se révéler capitaux pour la simulation de certains processus, et l’utilisation simultanée de différentes méthodes peut ainsi permettre d’augmenter la précision du calcul d’un processus particulier sans alourdir tout le code. C’est le cas notamment des méthodes particulaires (PIC - Particles In Cell) pour les termes d’advection, qui ont largement fait leurs preuves en dynamique des fluides (voir par exemple les travaux de G.-H. Cottet).

Toutes ces idées ne pourront être testées efficacement que si l’on dispose d’un outil adapté. C’est pourquoi il nous semblerait utile de développer, éventuellement à partir d’un modèle existant, un modèle numérique océanique ayant une structure totalement modulaire jusqu’au niveau des schémas de base, permettant ainsi aisément l’implémentation et l’inter-comparaison de méthodes numériques. Enfin, on sera en permanence confronté dans ce travail au problème abordé dans ce chapitre de l’évaluation des méthodes, et insistons encore à cet égard sur l’importance de disposer de configurations de tests standardisées, et de mener ces études en collaboration avec des modélisateurs océanographes.

## 2.6 Bibliographie du chapitre 2

### Références liées à des travaux personnels et en collaboration

- Blayo E., 2000: Compact finite difference for ocean models. Part 1: ocean waves. *J. Comp. Phys.*, **164**, 241-257.
- Kazantsev C., 2000a: Schémas compacts pour le modèle de Munk. *Rapport interne*.
- Kazantsev C., 2000b: Schémas compacts pour un modèle shallow-water. *Rapport interne*.

### Bibliographie générale

- Abarbanel S. S. and A.E. Chertock, 2000a: Strict stability of high-order compact implicit finite difference schemes: The role of boundary conditions for hyperbolic PDEs, I. *J. Comp. Phys.*, **160**, 42-66.
- Abarbanel S., A.E. Chertock and A. Yefet, 2000b: Strict stability of high-order compact implicit finite difference schemes: The role of boundary conditions for hyperbolic PDEs, II. *J. Comp. Phys.*, **160**, 67-87.

- Arakawa A., 1966: Computational design for long-term numerical integration of the equation of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. Part 1. *J. Comp. Phys.*, **1**, 119-143.
- Boyd J.P., 1980: Equatorial solitary waves. Part I: Rossby solitons. *J. Phys. Oceanogr.*, **10**, 1699-1717.
- Carpenter M. H., D. Gottlieb and S. S. Abarbanel, 1993: The stability of numerical boundary treatments for compact high-order finite difference schemes. *J. Comp. Phys.*, **108**, 272-295.
- Carpenter M. H., D. Gottlieb and S. S. Abarbanel, 1994: Time stable boundary conditions for finite difference schemes solving hyperbolic systems: Methodology and applications to high-order compact schemes. *J. Comp. Phys.*, **111**, 220-236.
- Collatz L., 1966: The numerical treatment of differential equations. *Springer-Verlag*, New York.
- Cottet G.-H. and P. Koumoutsakos, 2000: Vortex methods: theory and practice. *Cambridge University Press*.
- Chu P.C. and C. Fan, 1998: A three-point combined compact difference scheme. *J. Comp. Phys.*, **140**, 370-399.
- Flierl G.R., V.D. Larichev, J.C. McWilliams and G.M. Reznik, 1980: The dynamics of baroclinic and barotropic solitary eddies. *Dyn. Atmos. Oceans*, **5**, 1-41.
- Gamet L., F. Ducros, F. Nicoud and T. Poinso, 1999: Compact finite difference schemes on non-uniform meshes. Application to direct numerical simulations of compressible flows. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **29**, 159-191.
- Gill A.E., 1982: Atmosphere-ocean dynamics. Academic Press, San Diego, 496pp.
- Griffies S.M., C. Böning, F.O. Bryan, E.P. Chassignet, R. Gerdes, H. Hasumi, A. Hirst, A.-M. Tréguier and D. Webb, 2000: Developments in ocean climate modelling. *Ocean modelling*, **2**, 123-192.
- Haidvogel D.B. and A. Beckmann, 1999: Numerical ocean circulation modelling. *Series on environmental science and management, vol. 2*, Imperial College Press, London, 318pp.
- Kantha L.H. and C.A. Clayson, 2000: Numerical models of oceans and oceanic processes. *International Geophysics series, vol. 66*, Academic Press, New York, 936pp.
- Lele S.K., 1992: Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.*, **103**, 16-42.
- Munk W., 1950: On the wind-driven ocean circulation. *J. Meteorol*, **7**, 79-93.
- Povitsky A., 1999: Wavefront cache-friendly algorithm for compact numerical schemes. NASA/ICASE report 99-40.
- Spitz W.F. and G.F. Carey, 1998: Formulation and experiments with high-order compact schemes for nonuniform grids. *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, **8**, 288-303.
- Tolstykh M., 1997: Global semi-Lagrangian atmospheric model based on compact finite-differences and its implementation on a parallel computer. *Rapport de recherche INRIA RR-3080*.

# Chapitre 3

## Assimilation de données et réduction d'ordre

Après nous être intéressés dans les chapitres précédents à des aspects liés essentiellement à la modélisation, nous allons maintenant aborder le problème de l'assimilation de données dans les modèles, en nous centrant sur le développement de méthodes de rang réduit. Après un paragraphe d'introduction résumant rapidement les principales méthodes d'assimilation de données et les spécificités liées à leur application dans le contexte océanique, nous reviendrons sur la notion de “variabilité” du système océanique, et présenterons un petit bestiaire mathématique de vecteurs, caractéristiques chacun en un certain sens de cette variabilité. Nous proposerons ensuite quelques utilisations de ces vecteurs dans la construction de méthodes d'assimilation de rang réduit, en donnant des illustrations issues essentiellement du travail de thèse de Sophie Durbiano. Enfin, nous exposerons un certain nombre de pistes de recherche pour les prochaines années.

Je tiens à signaler ici que la plupart des idées originales présentes dans ce chapitre résultent de nombreux échanges avec mes collègues J. Blum, S. Durbiano, F.-X. Le Dimet, D.T. Pham, J. Verron et A. Vidard, qui en partagent donc pleinement la paternité.

### 3.1 Assimilation de données en océanographie

La connaissance de la dynamique océanique est basée sur les deux sources d'information que sont les modèles (physiques et numériques) et les observations. Ces visions sont complémentaires, chacune d'elle étant incomplète et entachée d'erreur. Ainsi les modèles proposent une interprétation spatialement et temporellement consistante de l'évolution du système; mais ils ne sont toutefois que des simplifications d'une réalité physique plus complexe. D'un autre côté, les observations apportent des informations sur la physique réelle, mais sans véritable cohérence dans le temps et l'espace du fait de leur caractère localisé. Dans ce cadre, les méthodes d'assimilation de données sont des techniques visant à combiner ces informations de façon optimale (en un sens à préciser).

On distingue généralement deux points de vue pour l'assimilation de données: le lissage et le filtrage. Le lissage s'inscrit dans une démarche de reconstruction et de compréhension du système, et consiste à rechercher une trajectoire globalement proche des observations.



Le filtrage quant à lui vise souvent à préparer une prévision de l'état futur du système, en cherchant à fournir la meilleure estimation de l'état présent au vu des observations passées et présentes.

Plusieurs programmes de grande envergure d'assimilation de données océaniques sont en cours ou en préparation actuellement. C'est le cas de GODAE (Global Ocean Data Assimilation Experiment), expérience coordonnée au niveau mondial, et dont l'objectif est de démontrer la faisabilité et l'intérêt de l'assimilation en temps réel et à l'échelle de l'océan global de toutes les données disponibles. Ce projet, dont le programme Mercator déjà cité à plusieurs reprises dans ce document est la composante française, est une étape de démonstration indispensable, en vue de la mise en place d'un système permanent d'observation et de prévision de l'océan mondial.

La quantité de mesures océanographiques disponibles s'est énormément accrue ces dix dernières années. On dispose ainsi d'une part de mesures in situ, réalisées par des bateaux et par des bouées, qui fournissent en différents points et à différentes profondeurs des valeurs de température, densité, et/ou vitesse. D'autre part, l'avènement de "l'océanographie spatiale" (*i.e.* l'observation de l'océan depuis l'espace) a permis un bond quantitatif et qualitatif considérable, avec la fourniture continue depuis une décennie de mesures synoptiques d'altimétrie de l'océan mondial (satellites Topex/Poseidon, ERS-1 et 2, et maintenant Jason-1 et Envisat), ainsi que de mesures de température de surface ou encore de "couleur" de l'océan (liée à la concentration en phytoplancton). Il est à noter que ces données satellitaires possèdent deux spécificités importantes, qui sont leur caractère superficiel (elles ne concernent que la surface de l'océan) et leur échantillonnage spatio-temporel très particulier, lié aux orbites des satellites.

Deux classes principales de méthodes mathématiques sont utilisées afin d'assimiler ces données dans les modèles, basées sur les théories du filtrage stochastique et du contrôle optimal. Notre propos n'est pas ici de présenter en détail ces méthodes et leurs nombreuses variantes; on pourra pour cela se reporter à plusieurs articles de référence (*e.g.* Ghil and Malanotte-Rizzoli, 1991; Bennett, 1992; Miller and Cane, 1996; De Mey, 1997; Talagrand, 1997; Bouttier and Courtier, 1999). Nous nous contenterons d'exposer les points qui nous paraissent essentiels pour la suite.

Soit un modèle d'océan discrétisé en espace sur une grille de calcul, et écrit sous la forme symbolique

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X, V), & t \in [0, T] \\ X(t=0) = U \end{cases} \quad (3.1)$$

Supposons que l'on dispose d'observations partielles  $Y^{\text{obs}}$ , reliées à la variable d'état  $X$  du modèle par un opérateur d'observation  $H : Y^{\text{obs}} = H(X^{\text{obs}})$  où  $X^{\text{obs}}$  est homogène à  $X$ . Les méthodes variationnelles consistent à définir une variable de contrôle  $(U, V)$  (typiquement la condition initiale, et/ou éventuellement des paramètres, des conditions aux limites ou des forçages du modèle), ainsi qu'une fonction coût  $J(U, V)$  mesurant un écart entre la trajectoire du modèle et les observations

$$J(U, V) = \frac{1}{2} \int_0^T \|H(X) - Y^{\text{obs}}\|^2 dt \quad (3.2)$$

et à chercher dans un espace  $\mathcal{U}_{ad}$  de contrôles admissibles le contrôle optimal  $(U^*, V^*)$  qui minimise  $J$ .

En pratique, on ajoute souvent à  $J$  un terme “d'ébauche” (ou *background*) représentant l'écart entre le contrôle et une première ébauche issue le plus souvent d'une prévision préalable. Le cas le plus courant en océanographie consiste à contrôler uniquement la condition initiale. Le problème s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X), & t \in [0, T] \\ X(t=0) = X_b + \delta X_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\text{Trouver } \delta X_0^* \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que } J(\delta X_0^*) = \inf_{\delta X_0 \in \mathcal{U}_{ad}} J(\delta X_0)$$

$$\text{avec } J(\delta X_0) = \frac{1}{2} \int_0^T \|H(X) - Y^{\text{obs}}\|_o^2 dt + \frac{1}{2} \|\delta X_0\|_b^2 \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T (H(X) - Y^{\text{obs}})^t R^{-1} (H(X) - Y^{\text{obs}}) dt + \frac{1}{2} \delta X_0^t B^{-1} \delta X_0 \quad (3.5)$$

La définition des normes  $\|\cdot\|_o$  et  $\|\cdot\|_b$ , *i.e.* des matrices de covariance d'erreur  $R$  et  $B$  sur les observations et l'ébauche, est évidemment très importante. La minimisation est réalisée par un algorithme de descente, le gradient de  $J$  étant évalué à chaque étape par une méthode adjointe (*i.e.* mettant en oeuvre à chaque itération le modèle direct et son adjoint — *cf* par exemple Le Dimet and Talagrand, 1986).

Les méthodes stochastiques d'assimilation de données sont elles basées sur le filtrage de Kalman. On considère alors l'évolution temporelle du modèle comme un processus aléatoire discret, et l'on corrige les prévisions du modèle en tenant compte des observations au fur et à mesure de leur disponibilité. Sous quelques hypothèses de normalité et de décorrélation, on obtient les équations suivantes pour le filtre de Kalman “étendu”, *i.e.* utilisable avec un modèle non-linéaire :

$$X_{n+1}^f = M_{n \rightarrow n+1}(X_n^f) \quad (3.6)$$

$$P_{n+1}^f = M_{n \rightarrow n+1}(X_n^a) P_n^a M_{n \rightarrow n+1}^T(X_n^a) + Q_n \quad (3.7)$$

$$X_{n+1}^a = X_{n+1}^f + K_{n+1}(Y_{n+1} - H_{n+1}(X_{n+1}^f)) \quad (3.8)$$

$$K_{n+1} = P_{n+1}^f H_{n+1}^T(X_{n+1}^f) [H_{n+1}(X_{n+1}^f) P_{n+1}^f H_{n+1}^T(X_{n+1}^f) + R_{n+1}]^{-1} \quad (3.9)$$

$$P_{n+1}^a = P_{n+1}^f - K_{n+1} H_{n+1}(X_{n+1}^f) P_{n+1}^f \quad (3.10)$$

où :

- les exposants  $f$  et  $a$  font respectivement référence aux états prévus (*forecast*) et filtrés (*analysis*),
- les indices  $n$  et  $n+1$  désignent les étapes du processus,
- $M$  et  $M$  désignent le modèle et son linéaire tangent, et  $H$  et  $H$  l'opérateur d'observation et son linéaire tangent,
- $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont les matrices de covariance d'erreur de l'état, du modèle, et des observations.

Ces deux approches, bien que basées sur des théories différentes, possèdent de nombreux traits communs. Ainsi, elles sont toutes deux optimales dans le cas d'un modèle linéaire (*i.e.* la fonctionnelle  $J$  est alors quadratique et admet donc un minimum unique, tandis que le filtre de Kalman fournit à chaque étape l'estimateur sans biais de variance minimale de l'état du système). On montre même que dans ce cas les deux approches conduisent au même état final à  $t = T$ .

Par ailleurs, les principales difficultés rencontrées lors de la mise en œuvre sont communes à ces deux méthodes. Il s'agit tout d'abord de la très grande dimension des problèmes, dont le corollaire est le coût. Nous avons indiqué que la taille  $m$  du vecteur d'état  $X$  pour un modèle réaliste est de l'ordre de  $10^6 - 10^7$ . Les méthodes de contrôle optimal opérant une minimisation dans un tel espace de dimension  $m$ , celle-ci est évidemment très coûteuse, et difficile à réaliser de façon efficace. Les méthodes de filtrage quant à elles doivent manipuler des matrices de covariance de taille  $m \times m$ , ce qui cette fois est impossible pour les calculateurs actuels.

Une seconde difficulté provient du fait que les modèles d'océan sont non-linéaires. Les méthodes d'assimilation perdent donc a priori leurs qualités d'optimalité, et l'on doit de plus se poser la question de la validité de l'hypothèse linéaire tangente lors de leur mise en œuvre.

Enfin, une troisième difficulté est liée à la méconnaissance des différentes erreurs intervenant dans le processus d'assimilation. Si l'on dispose en effet de quelques éléments pour espérer définir assez correctement les matrices de covariance d'erreur d'observation  $R$ , ce n'est plus le cas concernant l'erreur d'ébauche (matrice  $B$  de l'approche par contrôle, ou  $P_0^a$  de l'approche par filtrage), ni l'erreur du modèle (matrice  $Q$  du filtre, absente dans l'approche usuelle par contrôle qui suppose que le modèle est parfait).

La plupart des recherches actuelles concernent ces difficultés. Nous allons dans la suite résumer notre contribution de ces dernières années, en exposant pour l'essentiel des résultats issus de la thèse de Sophie Durbiano. Ce travail a bénéficié de diverses collaborations extérieures au LMC, notamment avec J. Verron (LEGI Grenoble) et A. Weaver (Cerfacs Toulouse), et a été réalisé avec le soutien du programme Mercator.

## 3.2 Vecteurs de variabilité maximale

### 3.2.1 Toute direction n'est pas bonne à suivre

L'océan est un système dynamique admettant un attracteur étrange, ce qui signifie que les trajectoires de ce système sont attirées vers une variété, a priori de dimension réduite (*e.g.* Dymnikov and Filatov, 1997). D'un point de vue physique, cette variété est sans doute proche de l'équilibre géostrophique.

Au voisinage de cet attracteur, les perturbations qui lui sont orthogonales seront amorties naturellement, alors que celles qui lui sont tangentes ne le seront pas forcément. Ces dernières peuvent même être fortement amplifiées en raison du caractère chaotique du système (le fameux "effet papillon").

Les perturbations autour d'un état donné du système peuvent donc être décomposées selon des modes stables et instables. Ceci a été vérifié sur divers modèles très simplifiés,

comme par exemple le modèle de Lorenz (*e.g.* Pires *et al.*, 1995) ou le modèle quasi-géostrophique barotrope (Kazantsev, 1999).

Cette propriété, vérifiée également par la dynamique atmosphérique, est exploitée par exemple dans les méthodes d'ensemble pour la prévision météorologique (*e.g.* Toth and Kalnay, 1993; Molteni *et al.*, 1996). On génère un certain nombre de perturbations “optimales” (*i.e.* correspondant aux directions les plus instables, qui sont a priori situées sur l'attracteur) d'un état initial donné, afin de réaliser différentes prévisions correspondant à ces différents états perturbés. L'analyse des résultats permet alors d'affiner la prévision et d'estimer ses statistiques d'erreur.

Cette propriété peut également être exploitée dans le contexte de l'assimilation de données. En effet, les méthodes d'assimilation consistent à déterminer la meilleure (ou tout au moins une bonne) correction à un état donné (l'ébauche  $X_b$  ou la prévision  $X_{n+1}^f$  pour les méthodes décrites au §3.1). Une idée naturelle consiste donc à ne chercher à effectuer cette correction que dans les directions les plus pertinentes, *i.e.* selon les modes les plus instables. C'est par exemple l'idée du filtre SEEK (Pham *et al.*, 1998; Brasseur *et al.*, 1999), les quelques modes instables utilisés étant estimés dans ce cas par un procédé statistique.

Partant de cette constatation, nous avons cherché à dresser un inventaire des vecteurs qui pourraient être candidats à décrire ces modes instables, *i.e.* des vecteurs caractéristiques, en un sens à préciser, d'une variabilité maximale du système.

### 3.2.2 Une taxinomie de vecteurs

La définition de tels vecteurs va dépendre étroitement de la définition choisie pour le terme “variabilité”, qui peut être interprété selon des points de vue très divers. On peut en effet adopter par exemple des approches par analyse statistique ou spectrale, par système dynamique, ou encore basées sur des considérations purement physiques. Nous avons choisi ici de nous focaliser d'une part sur les composantes principales (ou EOFs - *Empirical Orthogonal Functions*), déjà très utilisées en océanographie, et d'autre part sur différents vecteurs issus de la théorie des systèmes dynamiques. Les définitions de ces vecteurs, leurs principales propriétés et leurs procédures de calcul sont détaillées dans la thèse de S. Durbiano. Nous n'indiquerons ici que l'idée générale.

**Composantes principales :** on suppose connu un échantillon  $X = (X_1, \dots, X_p)$  d'états du système. L'analyse en composantes principales consiste à déterminer les axes principaux d'inertie du nuage de points associé cet échantillon, *i.e.* les directions de projection de variance maximale. Il s'agit en fait des vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres de la matrice de covariance  $(X - \bar{X})^T(X - \bar{X})$  où  $\bar{X}$  est la moyenne des  $X_i$ .

Les EOFs sont présentes dans diverses contextes en océanographie. Concernant l'assimilation de données, elles sont utilisées pour définir la base réduite initiale du filtre SEEK cité précédemment, et sur lequel nous reviendrons au §3.3.3.

**Vecteurs d'amplification maximale :** on considère une période de temps  $[t_1, t_2]$ , et un état du système  $X(t_1)$  à l'instant initial. Soit  $M_{t_1 \rightarrow t_2}$  le modèle entre  $t_1$  et  $t_2$ , et

$\|\cdot\|$  une norme sur l'espace des états du système. On définit le taux d'amplification d'une perturbation  $Z(t_1)$  par

$$\rho(Z(t_1)) = \frac{\|M_{t_1 \rightarrow t_2}(X(t_1) + Z(t_1)) - M_{t_1 \rightarrow t_2}(X(t_1))\|}{\|Z(t_1)\|} \quad (3.11)$$

La perturbation destinée à croître le plus sur la période  $[t_1, t_2]$  est donc celle qui maximisera ce rapport :

$$\rho(Z_1^*(t_1)) = \max_{Z(t_1)} \rho(Z(t_1)) \quad (3.12)$$

On peut de la même façon définir par récurrence d'autres vecteurs de grande variabilité par

$$\rho(Z_i^*(t_1)) = \max_{Z(t_1) \perp \text{Vect}(Z_1^*(t_1), \dots, Z_{i-1}^*(t_1))} \rho(Z(t_1)) \quad i \geq 2 \quad (3.13)$$

et construire ainsi une famille orthogonale de vecteurs "d'amplification maximale".

Plusieurs degrés de liberté interviennent dans cette définition : la période  $[t_1, t_2]$ , le modèle et la norme. De plus, on peut s'intéresser non plus aux perturbations à l'instant  $t_1$  qui vont croître le plus jusqu'à  $t_2$  (vecteurs directs), mais aux perturbations à l'instant  $t_2$  qui ont été le plus amplifiées depuis l'instant  $t_1$  (vecteurs rétrogrades). A ces différents choix correspondent diverses familles de vecteurs :

- **vecteurs singuliers** :  $[t_1, t_2]$  est de longueur finie et  $M$  est approximé par son linéaire tangent  $M$ . Ce sont en fait les vecteurs propres de  $M^*M$  (vecteurs directs) ou  $MM^*$  (vecteurs rétrogrades).  
Dans le contexte de la dynamique des fluides géophysiques, ces vecteurs ont été utilisés dans diverses études depuis une vingtaine d'années en météorologie (*e.g.* Farrell, 1982), et plus récemment en océanographie (*e.g.* Moore and Kleeman, 1996; Huck and Vallis, 2001).
- **vecteurs de Lyapunov** : ils correspondent aux limites des vecteurs singuliers pour des temps longs ( $t_2 \rightarrow +\infty$  pour les vecteurs directs,  $t_1 \rightarrow -\infty$  pour les vecteurs rétrogrades).
- **vecteurs singuliers non-linéaires** : ils correspondent aux vecteurs singuliers, mais sans approximation linéaire tangente. Seuls les vecteurs directs sont calculables relativement aisément. Ils n'ont été introduits que très récemment (Mu, 2001) et quasiment aucun résultat théorique n'a encore été établi à leur sujet.
- **vecteurs de "breeding"** : ils correspondent aux vecteurs de Lyapunov rétrogrades mais sans approximation linéaire tangente. Ils ont été introduits de façon purement algorithmique par Toth and Kalnay (1993, 1997) dans le contexte météorologique, et là encore ne font appel à aucune théorie mathématique.

Au delà des choix précédents, plusieurs autres familles de vecteurs auraient pu également être examinées :

- en considérant la variabilité en termes d'énergie : on peut définir des bases par analyse de Fourier ou par ondelettes.

- en se basant sur des critères purement physiques : Klein *et al.* (2000) ont mis par exemple en évidence dans le contexte quasi-géostrophique un critère analytique de dynamique de vortacité permettant d'identifier les vecteurs maximisant la croissance d'erreur.

- en se plaçant dans un contexte d’assimilation de données: l’inverse de la matrice hessienne à l’optimum est égale à la matrice de covariance d’erreur d’analyse à l’instant initial. Le calcul de ses premiers modes propres permet, par intégration par le modèle, d’obtenir une estimation de l’erreur d’analyse à l’instant final, *i.e.* de l’erreur d’ébauche pour la prochaine prévision (*e.g.* Barkmeijer *et al.*, 1998), et fournit donc sans doute une base de correction intéressante. D’autre part, des vecteurs basés sur des statistiques d’innovation et/ou de résidus d’innovation seraient également porteurs d’une information riche.

De nombreuses possibilités sont donc à explorer en ce domaine.

### 3.2.3 Un exemple

Quelques exemples de ces différents vecteurs, calculés pour un modèle shallow-water similaire à celui décrit au chapitre 2 par les équations (2.12), sont présentés sur la figure 3.1. La norme utilisée est celle de l’énergie totale:  $\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + gh$ , qui est la norme naturelle de ce modèle.

On y constate de nombreuses différences d’échelles et de localisation entre ces vecteurs, conséquences des différentes définitions. Ainsi par exemple, le premier vecteur singulier direct (b) est caractérisé par une structure située dans le courant de bord Ouest, et destinée à s’amplifier sur les 30 jours suivants. Au contraire, le premier vecteur singulier rétrograde (c) correspond à la perturbation finale ayant été la plus amplifiée sur ces 30 jours, *i.e.* à l’intégration par le modèle linéaire tangent du vecteur direct précédent (à une normalisation près), et comporte essentiellement des structures tourbillonnaires au niveau du jet central. L’influence de la longueur de la période considérée est illustrée ici par les différences entre le premier vecteur singulier rétrograde (c) (période de 30 jours) et le premier vecteur de Lyapunov rétrograde (d) (période infinie), pour lequel les perturbations sont beaucoup plus “étalées”, comme cela était prévisible. La prise en compte complète des non-linéarités est également un aspect important, comme on peut s’en apercevoir en comparant le premier vecteur singulier direct (b) avec le premier vecteur singulier non-linéaire (e), ou encore le premier vecteur de Lyapunov rétrograde (d) et le premier vecteur de breeding (g). Enfin, notons que l’approche statistique des EOFs (f) conduit à des vecteurs caractérisés par des échelles assez nettement plus petites que celles des vecteurs précédents obtenus par approche dynamique.

Au delà d’une comparaison directe de ces premiers vecteurs, il convient d’avoir une approche plus globale, et de comparer les sous-espaces vectoriels engendrés par un nombre fixé suffisamment élevé de vecteurs de chaque famille. C’est ce qui a été représenté sur la figure 3.2, pour les 180 premiers vecteurs de chaque type. On y constate clairement l’apport spécifique des non-linéarités, les EOFs et les vecteurs de breeding n’étant qu’une faible partie projetables sur les vecteurs obtenus par approximation linéaire tangente.

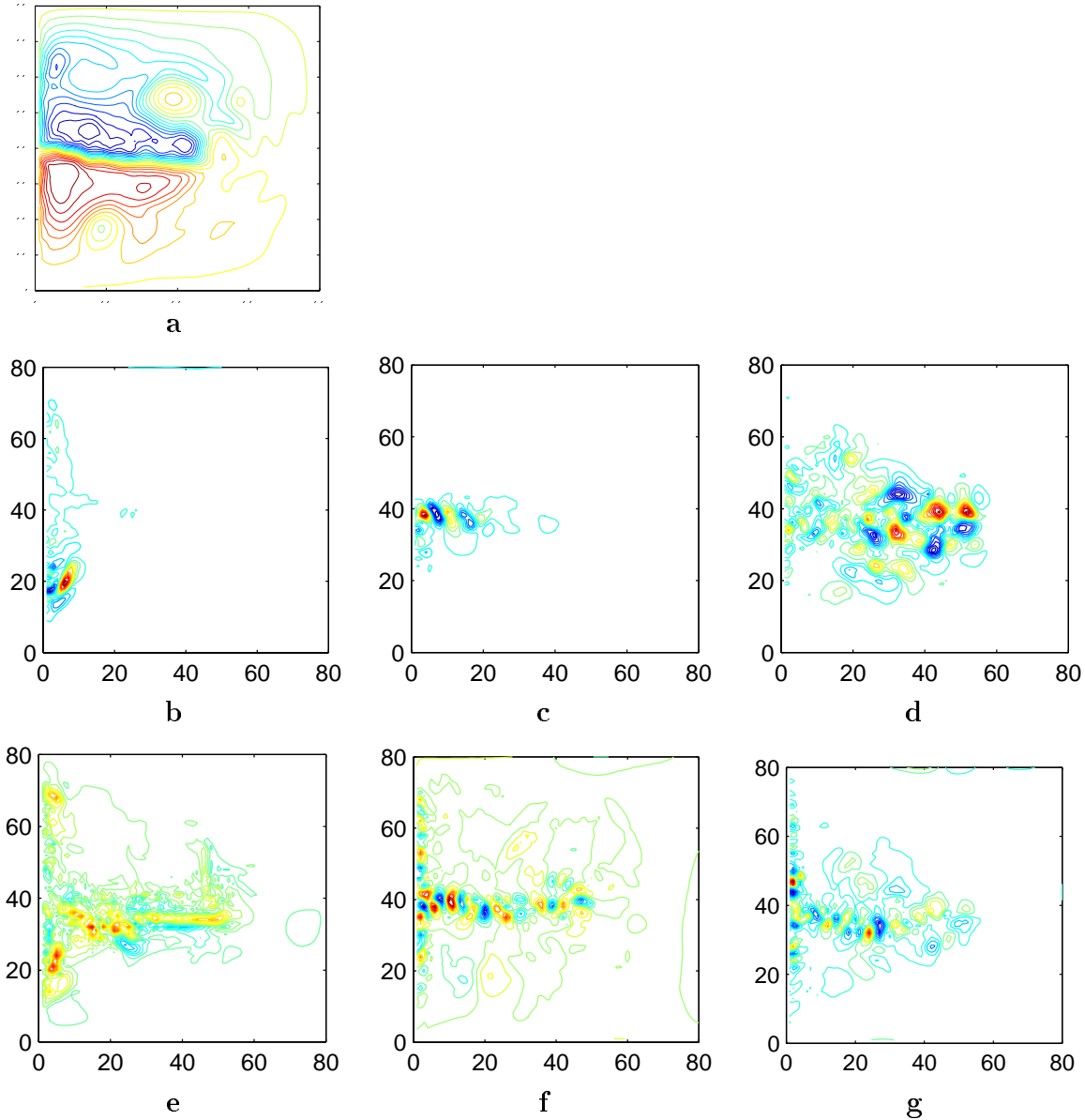


FIG. 3.1 – Différents vecteurs obtenus avec un modèle shallow-water sur une période  $[t_1, t_2]$  de 30 jours. On a représenté à chaque fois la hauteur d'eau  $h$ . (a) solution du modèle à l'instant  $t_1$ . (b) premier vecteur singulier direct à l'instant  $t_1$ . (c) premier vecteur singulier rétrograde à l'instant  $t_2$ . (d) premier vecteur de Lyapunov rétrograde à l'instant  $t_2$ . (e) premier vecteur singulier non-linéaire à l'instant  $t_1$ . (f) première EOF (calculée par échantillonnage à 3 jours d'une séquence de 600 jours du modèle). (g) premier vecteur de breeding à l'instant  $t_2$ . (d'après Durbiano, 2001)

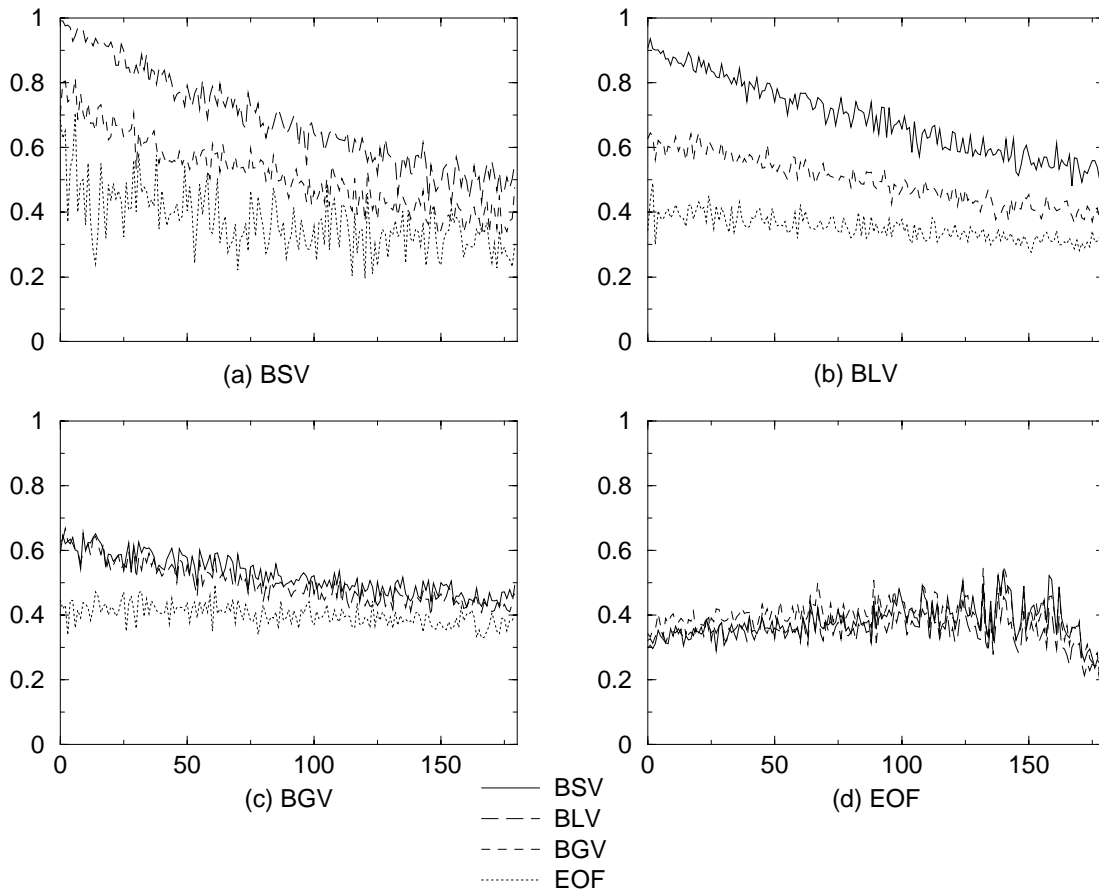


FIG. 3.2 – Taux de projection de chaque vecteur d’une base sur les autres bases. Le vecteur projeté, dont le rang est indiqué en abscisse de 1 à 180, est un (a) vecteur singulier rétrograde (BSV), (b) vecteur de Lyapunov rétrograde (BLV), (c) vecteur de breeding (BGV), (d) EOF (Durbiano, 2001)

Enfin, avant de tester l’utilisation de ces vecteurs dans les méthodes d’assimilation de données, nous avons voulu vérifier dans une certaine mesure si ces vecteurs sont bien représentatifs de la variabilité “naturelle” du système. L’idée pour cela était de modifier certains paramètres “naturellement” variables du modèle (des termes de dissipation et de forçage) et de projeter les écarts entre les trajectoires obtenues sur les différents sous-espaces engendrés. En séparant ces écarts  $e(\mathbf{x}, t)$  en une partie systématique  $\bar{e}(\mathbf{x})$  et une partie fluctuante  $e'(\mathbf{x}, t)$  de moyenne temporelle nulle, il apparaît que les vecteurs caractéristiques, et notamment les vecteurs rétrogrades, parviennent à reconstruire une part importante de  $e'(\mathbf{x}, t)$ , les meilleurs résultats étant obtenus dans notre cas avec les vecteurs de breeding. Le biais systématique  $\bar{e}(\mathbf{x})$  se projette par contre très mal sur les sous-espaces caractéristiques, ce qui est d’ailleurs assez aisément explicable pour plusieurs de ces types de vecteurs. Nous en tirerons des conséquences plus loin dans la mise en œuvre de méthodes d’assimilation.



### 3.3 Applications en assimilation de données

Nous allons maintenant décrire brièvement trois applications proposées pour ces vecteurs dans le contexte de l'assimilation de données, dans l'optique d'évaluer leur apport potentiel vis à vis des principales difficultés mentionnées au §3.1 : grande dimension, gestion des non-linéarités, méconnaissance de la structure des erreurs.

#### 3.3.1 Contrôle de la condition initiale en espace réduit

Rappelons la formulation classique de la méthode 4D-Var d'assimilation variationnelle :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X), & t \in [0, T] \\ X(t=0) = X_b + \delta X_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\text{Trouver } \delta X_0^* \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que } J(\delta X_0^*) = \inf_{\delta X_0 \in \mathcal{U}_{ad}} J(\delta X_0)$$

$$\text{avec } J(\delta X_0) = \frac{1}{2} \int_0^T (H(X) - Y^{\text{obs}})^T R^{-1} (H(X) - Y^{\text{obs}}) dt + \frac{1}{2} \delta X_0^T B^{-1} \delta X_0$$

Pour les modèles réalistes, la variable de contrôle  $\delta X_0$  est définie dans un espace de dimension typique  $m = 10^6 - 10^7$ , ce qui rend évidemment le processus de minimisation assez coûteux. Par ailleurs la qualité de la solution obtenue dépend assez fortement de la définition de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche  $B$  dont le rôle est notamment d'aider à transporter l'information fournie aux points de mesures sur les autres points d'espace et sur les autres variables. Cette matrice  $B$  est bien sûr mal connue, et divers travaux s'intéressent à sa modélisation (*e.g.* Weaver and Courtier, 2001).

Nous proposons ici d'écrire  $\delta X_0$  dans un espace de dimension  $p$  très petite par rapport à  $m$ , sous la forme

$$\delta X_0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i L_i \quad (3.15)$$

où les  $L_i$  sont des vecteurs caractéristiques. La fonctionnelle à minimiser est donc maintenant

$$J_1(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = J \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i L_i \right) \quad (3.16)$$

De plus, la définition même des  $L_i$  assurant une consistance physique à la correction  $\delta X_0$ , nous pouvons nous contenter d'utiliser dans ce cas une matrice  $B$  diagonale, ce qui est un avantage pratique important. Plusieurs expériences ont été réalisées par S. Durbiano avec le modèle shallow-water précédent, et ont montré clairement que les EOFs étaient les vecteurs les plus pertinents pour ce type d'application.

Un test plus réaliste a ensuite été mené avec le modèle OPA dans une configuration Pacifique équatorial. Il s'agissait d'expériences jumelles avec assimilation de données simulées de température à la localisation du réseau de bouées fixes TAO (*cf* Durbiano *et al.*, 2002). Nous avons comparé la méthode 4D-Var classique à une méthode de rang réduit, en décomposant  $\delta X_0$  sur  $p = 30$  EOFs (alors que la taille du vecteur d'état était  $m \simeq 10^6$ ). Ces 30 EOFs représentent 97% de l'inertie de l'échantillon qui a servi à les calculer. On

a indiqué à titre d'illustration sur la figure 3.3 le premier niveau vertical de la première EOF, où l'on distingue notamment la signature de la variabilité des courants équatoriaux, ainsi que l'oscillation nord-sud de la température.

Du point de vue du processus de minimisation, la méthode en espace réduit permet une convergence beaucoup plus rapide, typiquement d'un facteur 5 à 10. De plus, ce gain très important en temps calcul ne se fait pas au détriment de la qualité de la solution, bien au contraire. En effet, l'information physique apportée par l'utilisation des EOFs mène à des corrections plus pertinentes, ce qui se traduit par des erreurs plus faibles sur toutes les variables et à toutes les profondeurs (figures 3.4 et 3.5).

Ces résultats prometteurs sont toutefois à modérer, car ils ont été établis dans le contexte d'expériences jumelles, c'est à dire sans erreur-modèle. Des expériences complémentaires dans un contexte plus difficile (avec données réelles, ou avec des données simulées mais issues d'un modèle perturbé) montrent que la méthode en espace réduit avec EOFs ne fonctionne plus dans ce cas, car les vecteurs caractéristiques testés ne fournissent plus de directions de correction appropriées. Ainsi, il semble donc que le concept de "4D-Var réduit" puisse apporter d'importantes améliorations au 4D-Var classique, sous réserve que l'on soit capable de définir correctement l'espace réduit de correction. En présence d'erreur-modèle, cet espace ne peut être simplement engendré par les vecteurs caractéristiques précédents, mais on doit alors sans doute en imaginer d'autres plus pertinents. Une piste envisagée à l'heure actuelle serait de ne pas utiliser du tout la dynamique fautive du modèle pour définir la réduction d'ordre, mais de réaliser celle-ci par un contrôle multi-échelles, basé par exemple sur une décomposition en ondelettes (*cf* thèse de I. Paun, 2001). Une autre possibilité pourrait consister à utiliser des EOFs comme précédemment, mais en prenant explicitement en compte dans le contrôle un nouveau terme modélisant l'erreur du modèle (*cf* paragraphe suivant).

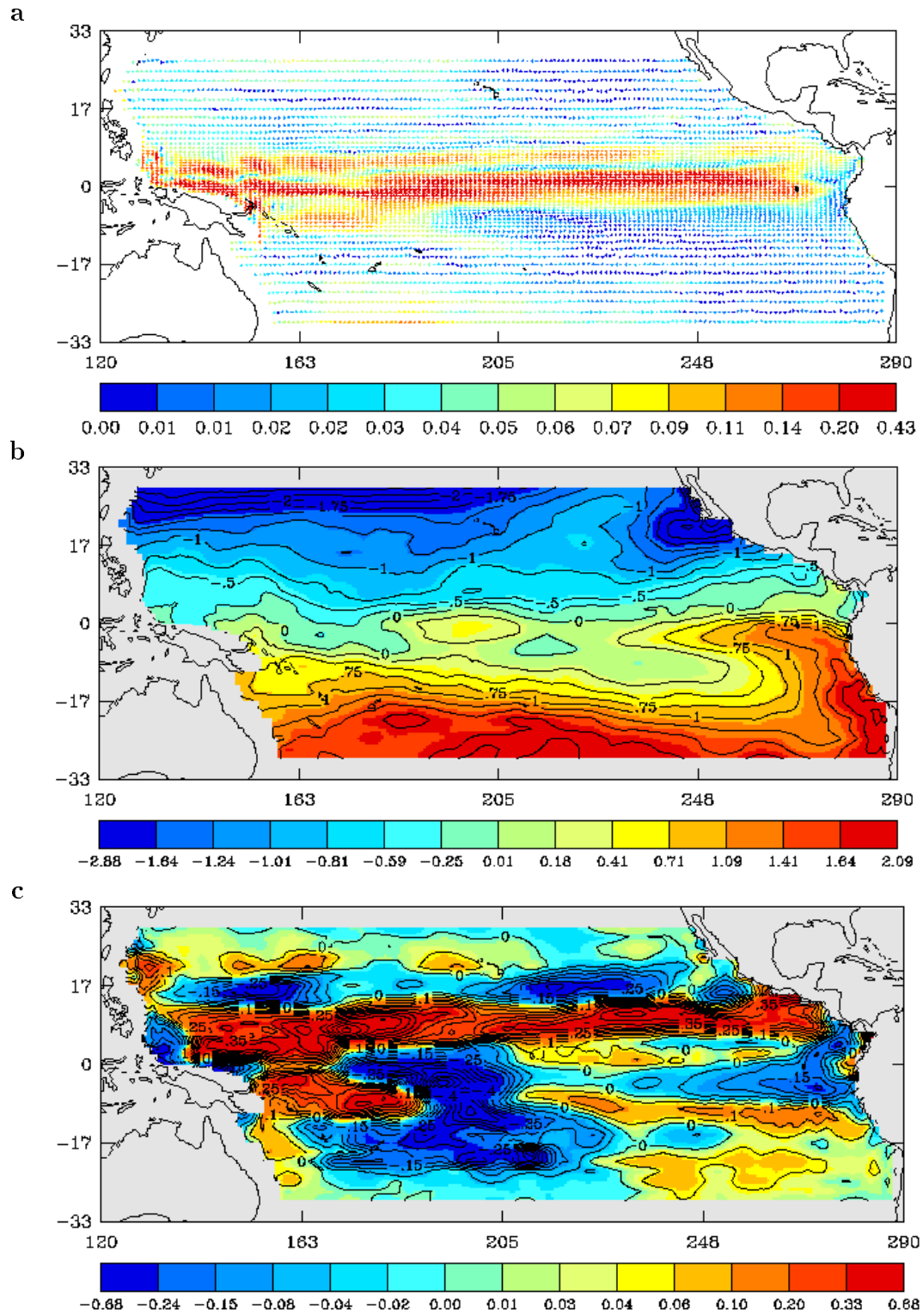


FIG. 3.3 – (a) Vitesse, (b) température et (c) salinité au premier niveau ( $z = 5m$ ) pour la première EOF (Durbiniano et al., 2002)

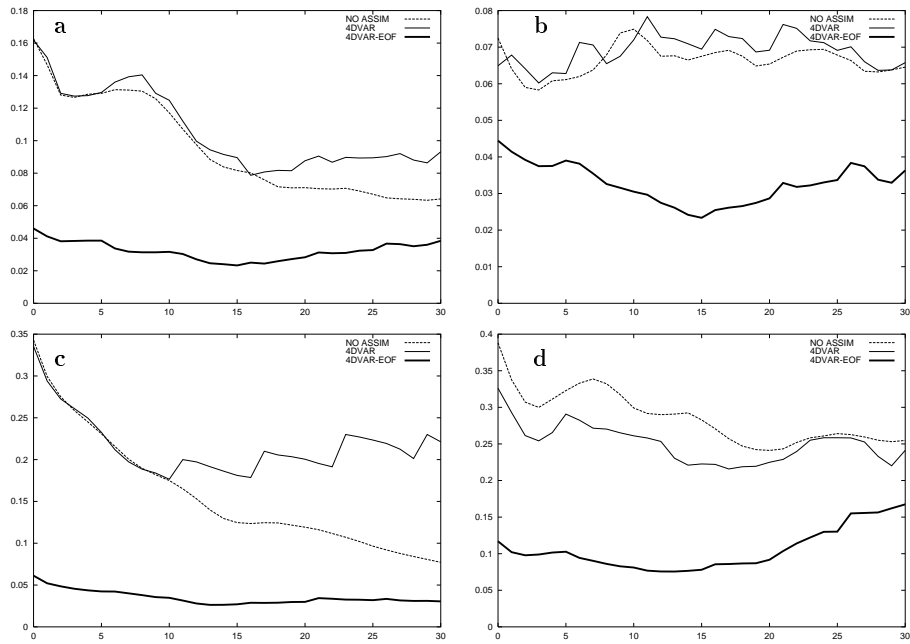


FIG. 3.4 – Evolution de l'erreur Rms par rapport à la solution exacte de référence au niveau 2 ( $z = 15$  m). En x : temps (de 0 à 6 mois). En y : (a)  $u$  ( $m.s^{-1}$ ), (b)  $v$  ( $m.s^{-1}$ ), (c)  $S$  ( $kg.m^{-3}$ ), (d)  $T$  ( $^{\circ}K$ ). Trait pointillé : solution du modèle sans assimilation; trait plein : solution obtenue par 4D-Var classique; trait gras : solution obtenue par 4D-Var en espace réduit. (Durbiano et al., 2002)

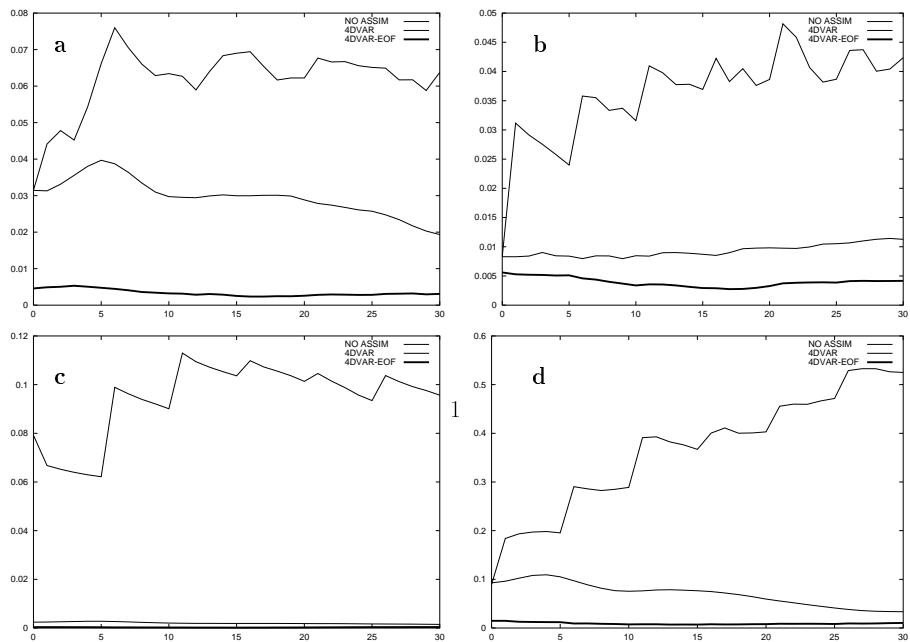


FIG. 3.5 – Idem Fig. 3.4, mais au niveau 20 ( $z = 750$  m). Les observations de température ne sont disponibles que jusqu'à 500m. (Durbiano et al., 2002)

### 3.3.2 Contrôle de l'erreur modèle

On a vu que le 4D-Var fournit une trajectoire optimale vérifiant les équations du modèle. Celui-ci est donc une contrainte forte de la méthode, ce qui peut être interprété en disant qu'il est supposé parfait. C'est pourquoi il est naturel de chercher des variantes du 4D-Var pour lesquelles on pourrait relâcher cette hypothèse. On écrit alors, en travaillant sur le modèle discrétisé pour des facilités d'écriture :

$$\begin{cases} X_{n+1} = M_{n \rightarrow n+1}(X_n) + e_{n+1} \\ X_0 = X_b + \delta X_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

où  $X_n \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'état à l'instant  $t_n$  et  $e_{n+1} \in \mathbb{R}^m$  est l'erreur du modèle. La fonctionnelle à minimiser est

$$\begin{aligned} J(\delta X_0, e_1, \dots, e_N) &= \frac{1}{2} \delta X_0^T B^{-1} \delta X_0 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (Y_n - H_n(X_n))^T R_n^{-1} (Y_n - H_n(X_n)) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N e_n^T Q^{-1} e_n \end{aligned} \quad (3.18)$$

Chaque  $e_i$  ayant la taille du vecteur d'état, et le nombre de pas de temps  $N$  pouvant être grand, l'espace de minimisation est alors de dimension gigantesque, et il n'est pas envisageable de traiter ce problème directement. La méthode de 4D-PSAS (Courtier, 1997; Louvel, 2001) contourne dans une certaine mesure ce problème, en travaillant sur une formulation duale qui mène à une minimisation dans un espace de dimension égale au nombre d'observations assimilées (ce qui reste toutefois élevé). Cette méthode est essentiellement équivalente à la méthode des représentateurs proposée par Bennett (1992).

Dans l'optique de notre travail sur les vecteurs caractéristiques, nous avons proposé de réduire plus drastiquement la taille de  $e_n$  en l'écrivant comme somme d'une erreur systématique et d'une erreur instantanée engendrée par les premiers vecteurs caractéristiques :

$$e_n = \bar{e} + \sum_{i=1}^p c_i^n L_i \quad (3.19)$$

(on a vu au §3.2.3 la motivation de cette décomposition qui traite  $\bar{e}$  à part). On contrôle alors  $\delta X_0$ ,  $\bar{e}$  et les  $c_i^n$ , dans un espace de minimisation de dimension  $2m + pN$ .

Une expérimentation très simple sur une équation d'advection-diffusion 1-D avait été réalisée par Vidard *et al.* (2000), et avait permis une première évaluation de cette approche. Dans un contexte plus océanique, S. Durbiano a mené des tests numériques par expériences jumelles avec le même modèle shallow water que précédemment, avec un modèle "vrai" de référence et un modèle "faux" comportant des termes de dissipation et de forçage perturbés. Les résultats obtenus semblent démontrer, tout au moins dans ce cas simple, la faisabilité et l'intérêt de cette méthode. En effet, on parvient à améliorer assez nettement l'identification, à la fois sur les variables observées et sur les variables non-observées. On constate ainsi sur la figure 3.6 un gain de l'ordre de 10% à 20% sur l'erreur rms. Les vecteurs de breeding semblent les plus intéressants à cet égard, avec les vecteurs singuliers rétrogrades mais qui sont eux beaucoup plus lourds à calculer. De plus, et c'est là un point particulièrement important, ces améliorations ne requièrent pas de moyens supplémentaires: les résultats présentés ici sont obtenus à coût constant.

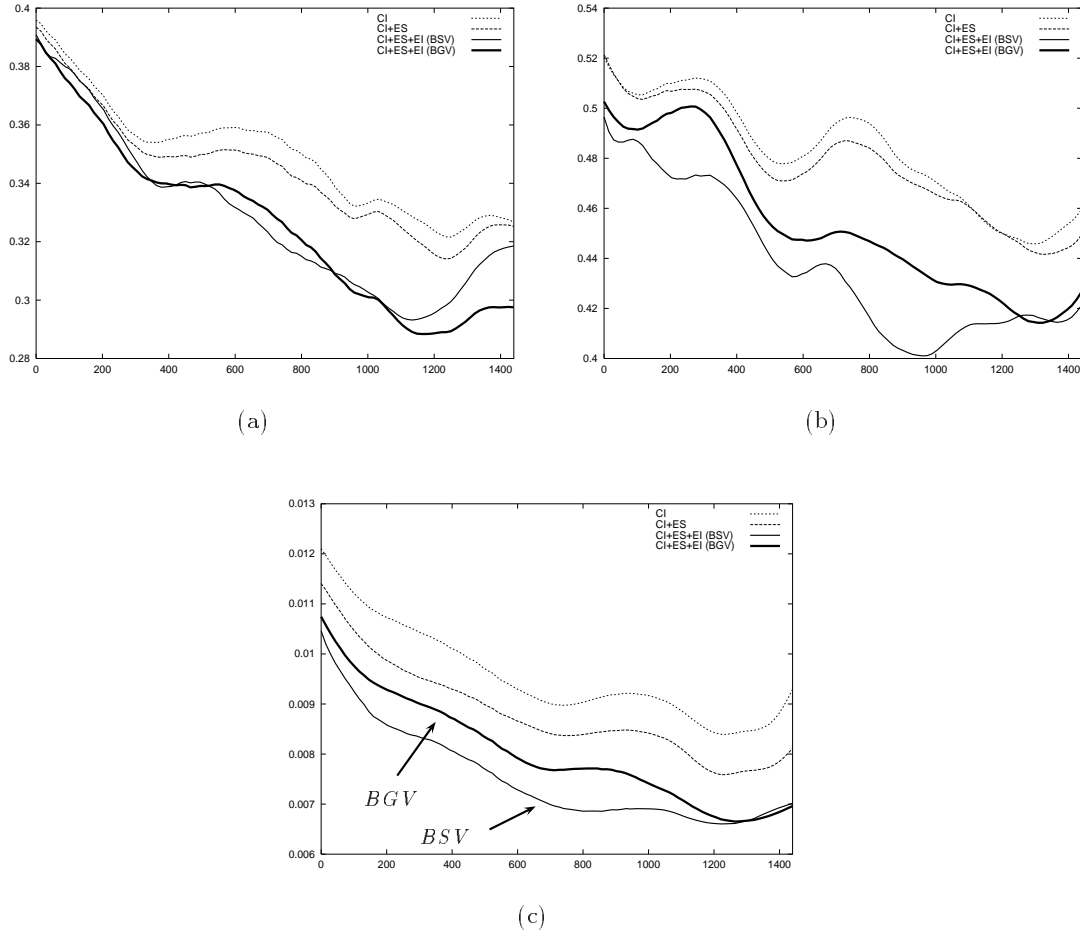


FIG. 3.6 – Comparaison 4D-Var classique (CI, trait pointillé fin), 4D-Var + erreur systématique  $\bar{e}$  (CI+ES, trait pointillé gras) et 4D-Var + erreur systématique + erreur instantanée (CI+ES+EI) décomposée sur 2 bases différentes : vecteurs singuliers rétrogrades (BSV, trait plein fin) et vecteurs de breeding (BGV, trait plein gras). Evolution de l'erreur relative rms sur (a)  $u$  ( $m.s^{-1}$ ) (b)  $v$  ( $m.s^{-1}$ ) (c)  $h$  (m) en fonction du nombre de pas de temps. (Durbiano, 2001)

Le passage à des modèles plus réalistes reste évidemment à réaliser, ce qui représente encore un travail important. Signalons cependant qu'A. Vidard (2001) a réalisé dans sa thèse une telle expérience en assimilant 5 ans de données réelles dans la configuration Pacifique équatorial du modèle OPA mentionnée précédemment, en contrôlant simultanément la condition initiale  $\delta X_0$  et la partie systématique  $\bar{e}$  de l'erreur. Il a ainsi démontré qu'à coût égal on améliorerait les résultats du 4D-Var classique, notamment là où celui-ci était particulièrement déficient. De plus, il a établi que l'estimation de  $\bar{e}$  pouvait être réutilisée efficacement pour corriger le modèle en phase de prévision, et améliorer ainsi ses performances de façon nette.

Pour terminer sur ce point, notons qu'une perspective particulièrement intéressante du contrôle de l'erreur du modèle consiste à tenter d'interpréter le contrôle optimal obtenu

en termes de déficiences du modèle, de façon à corriger celui-ci pour l'améliorer. De tout premiers tests avec le modèle shallow water semblent montrer que l'on peut effectivement corrélérer significativement cette erreur avec les termes des équations qui ont été perturbés.

### 3.3.3 Vecteurs caractéristiques pour le filtrage de rang réduit

La troisième et dernière application concerne cette fois le filtre SEEK (Pham *et al.*, 1998). Cette méthode de filtrage de rang réduit, de plus en plus utilisée dans la communauté océanographique, approche la matrice de covariance d'erreur d'analyse initiale  $P_0^a$  (cf équations (3.6)-(3.10)) par une matrice de rang faible  $p$ , qu'elle transporte ensuite lors de l'algorithme de filtrage en lui conservant son rang. Cette matrice  $P_0^a$ , qui décrit un sous-espace d'erreur initiale, est généralement définie par les  $p$  premiers modes de variabilité (EOFs) d'une analyse en composantes principales.

Notre démarche s'est ici bornée à constater que les autres vecteurs caractéristiques introduits au §3.2.2 pouvaient aussi être a priori de bons candidats pour définir  $P_0^a$ , et à réaliser différents tests numériques pour valider cette idée. Des expériences avec le modèle shallow-water ont montré que c'était effectivement le cas pour les vecteurs de breeding, qui semblent pouvoir apporter des améliorations significatives par rapport à l'usage habituel des EOFs. Ainsi, on a indiqué sur la figure 3.7 les courbes d'erreurs correspondant à des expériences jumelles avec erreur-modèle et données échantillonnées sur des pseudo traces-satellites. Sans entrer dans le détail des résultats, on peut simplement indiquer que l'usage des vecteurs de breeding permet de réduire de 10 à 30% les erreurs relatives sur les différentes variables par rapport à la méthode usuelle des EOFs, et ce pour le filtre SEEK complet ou pour sa variante moins coûteuse à base fixe. Ces bonnes performances des vecteurs de breeding (et des EOFs) soulignent au passage l'importance de la prise en compte des non-linéarités lors du calcul de la base réduite.

Un essai préliminaire du même type a été réalisé avec le modèle du Pacifique équatorial décrit plus haut, et semble confirmer ce bon comportement et les gains obtenus. Ceci demande cependant à être étudié beaucoup plus en détail, afin par exemple de mieux comprendre d'une part le contenu physique des vecteurs de breeding et d'autre part leur comportement dynamique dans l'algorithme de filtrage, notamment vis à vis des transitions rapides pouvant survenir dans le modèle.

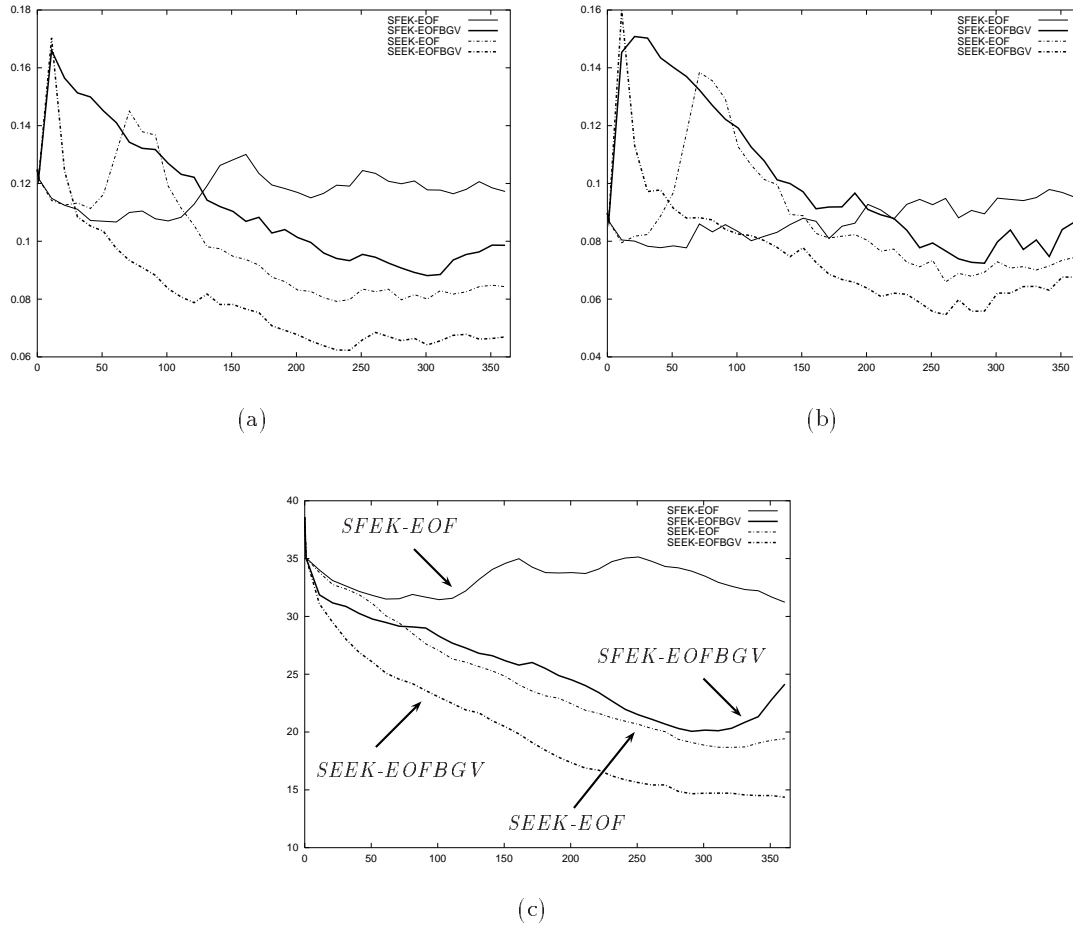


FIG. 3.7 – Comparaison des filtres fixes (SFEK, traits pleins) et évolutifs (SEEK, traits pointillés) pour des bases de correction formées d'EOFs (traits fins) et de vecteurs de breeding (traits gras) - Evolution temporelle de l'erreur relative pour (a)  $u$  ( $m.s^{-1}$ ) (b)  $v$  ( $m.s^{-1}$ ) (c)  $h$  (m) en fonction du temps (jours). (Durbiano, 2001)

### 3.4 Perspectives

Bien des questions, difficiles mathématiquement et liées à des aspects importants en pratique, sont encore ouvertes actuellement en assimilation de données. Citons par exemple les méthodes encore quasi-inexistantes pour l'assimilation de certains types de données (images satellites, données lagrangiennes...), ou encore le problème de la localisation optimale des mesures à réaliser en vue d'une prévision, étant donné un état du système. Sans vouloir aborder ce type de questions, je vais simplement donner ici quelques directions de travail plus directement reliées aux travaux qui viennent d'être présentés. Comme on le verra, ces développements nécessitent le plus souvent d'être réalisés en lien étroit avec les physiciens océanographes, car les solutions pertinentes mathématiquement sont sans doute intimement dépendantes de la physique des écoulements océaniques.



### 3.4.1 Réduction d'ordre

Les différentes applications qui viennent d'être décrites nous paraissent établir l'intérêt d'une approche par réduction d'ordre pour les méthodes d'assimilation de données. Au-delà de ces premiers travaux, il reste encore évidemment beaucoup à faire pour mieux comprendre et maîtriser cette approche, et envisager des applications opérationnelles.

Ainsi on a vu que les vecteurs de breeding sont particulièrement prometteurs pour représenter l'erreur-modèle, que ce soit par contrôle ou par filtrage. Cependant, ces vecteurs ne sont définis qu'empiriquement, par un algorithme très similaire à une méthode de la puissance itérée, utilisée pour le calcul des vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres d'une matrice. Il est maintenant nécessaire d'étayer ces outils par une description mathématique plus solide, à rechercher sans doute dans la théorie des systèmes dynamiques non-linéaires. Il serait d'ailleurs intéressant dans le même esprit de définir l'équivalent en temps fini de ces vecteurs de breeding, à savoir des vecteurs singuliers non-linéaires rétrogrades (et non plus directs), car il semble bien que ces deux caractéristiques soient primordiales pour une bonne efficacité pratique des vecteurs.

Parallèlement à cet aspect mathématique, on devra également s'attacher à mieux comprendre le contenu physique des vecteurs de breeding, et leur degré de dépendance aux différents régimes du modèle dont ils sont issus. A cet égard, l'adaptation des méthodes d'assimilation en fonction de la dynamique (stable ou instable) du modèle est d'ailleurs un point particulièrement intéressant (*e.g.* Cohn and Todling, 1996; Hoteit, 2001).

Enfin, il est évidemment nécessaire de mettre en œuvre et valider les idées présentées aux paragraphes précédents dans diverses applications réalistes et notamment dans des modèles de circulation aux latitudes moyennes, où les non-linéarités sont plus fortes qu'à l'équateur. Par ailleurs, l'extension du 4D-Var évoquée plus haut, dans laquelle on contrôle simultanément la condition initiale et l'erreur systématique  $\bar{\epsilon}$ , paraît particulièrement prometteuse, et un travail complémentaire autour de la modélisation de  $\bar{\epsilon}$ , soit par des considérations physiques, soit par une décomposition multi-échelles, pourrait permettre de rendre cette méthode opérante assez rapidement pour des applications réalistes.

### 3.4.2 Comparaison et hybridation des méthodes

Les développements en assimilation de données ont jusqu'à présent été menés assez parallèlement et indépendamment par les adeptes du contrôle optimal et ceux du filtrage stochastique. De nombreux progrès ont été réalisés pour chaque approche, et les difficultés qui subsistent de part et d'autre sont en fait le plus souvent liées aux mêmes aspects physiques sous-jacents. Le temps est sans doute venu maintenant de réfléchir à la construction de méthodes hybrides, tentant d'allier les principaux points forts des diverses approches. La communauté grenobloise (LMC et LEGI) est particulièrement bien placée à cet égard et affiche depuis quelques temps déjà une volonté d'aller en ce sens. De premiers travaux ont d'ailleurs été réalisés par F. Veersé *et al.* (2000), avec le développement d'une méthode variationnelle intégrant l'estimation de l'erreur d'analyse du SEEK.

Une première étape vers cet objectif d'hybridation consiste aussi sans doute à mener des comparaisons systématiques des méthodes existantes dans des cas applicatifs réalistes. Assez curieusement, un tel travail n'a encore jamais été réalisé à notre connaissance, même

sur des cas assez simples. Dans cette optique, la comparaison très détaillée des performances de méthodes 4D-Var, 4D-Var de rang réduit, et de filtres SEEK dans le modèle du Pacifique équatorial mentionné déjà à plusieurs reprises dans ce chapitre constituera la première partie du travail de thèse de C. Robert (en co-direction avec J. Verron, début en mai 2002). On espère ainsi alimenter une réflexion sur ce que pourrait être une réelle hybridation de méthodes variationnelles et stochastiques.

### 3.4.3 Multi-résolution et assimilation de données

Un troisième aspect que nous aimerions étudier, notamment avec L. Debreu, concerne l'apport des méthodes multi-résolutions pour l'assimilation de données. Du simple point de vue des applications pratiques, nous avons vu au chapitre 1 que les modèles côtiers et les systèmes de modélisation par grilles emboîtées sont en plein développement. Il commence donc à se poser le problème de l'assimilation dans de tels systèmes, qui requiert sans doute une certaine adaptation des méthodes usuelles.

Toutefois, au-delà de ces applications, on peut également réfléchir à l'intérêt d'une approche multi-résolution dans les méthodes elles-mêmes. Ceci pourrait être notamment une voie possible pour réduire significativement le coût de l'assimilation, en effectuant certains calculs à plus faible résolution. Cette idée a d'ailleurs été mise en œuvre et validée dans des applications météorologiques par 4D-Var, pour lesquelles les premières étapes de minimisation de la fonction coût étaient réalisées sur des grilles à basse résolution (Courtier *et al.*, 1994; Veersé and Thépaut, 1998).

En ce qui concerne le filtrage séquentiel, pour lequel la majeure partie des calculs concerne l'évolution de la matrice de covariance d'erreur de prévision, on peut de même envisager de ne réaliser qu'un calcul approché en dégradant la résolution pour cette partie de l'algorithme. Signalons que ceci a déjà été testé dans une certaine mesure par Fukumori *et al.* (1993) mais sans donner lieu à notre connaissance à des études ultérieures. En effet, la résolution était dans ce cas dégradée uniformément, ce qui ne permettait sans doute pas de capturer certains modes de variabilité importants et rendait l'assimilation moins efficace. De plus, la difficulté de l'implémentation informatique rendait cette méthode assez lourde. Toutefois, une approche localement multigrille et basée sur le package AGRIF (*cf* chapitre 1) pourrait peut-être lever l'essentiel de ces difficultés et permettre une investigation plus systématique des possibilités en ce sens. On peut ainsi envisager d'adapter la dégradation de la grille de calcul des covariances à la dynamique de la solution, en sélectionnant par des critères à déterminer les zones et les échelles pertinentes à cet égard.

Ces idées sont par ailleurs certainement à rapprocher et à confronter avec celles développées par l'équipe d'A. Willsky pour l'estimation de processus stochastiques multi-résolutions (Basseville *et al.*, 1992; Chou *et al.*, 1994; Ho, 1998).

## 3.5 Bibliographie du chapitre 3

### Références liées à des travaux personnels et en collaboration

Blayo E., J. Blum et J. Verron, 1998: Assimilation variationnelle de données en océanographie et réduction de la dimension de l'espace de contrôle. In *Equations aux Dérivées Partielles*

- et Applications*, p 199-219, Gauthier-Villars, 1998.
- Durbiano S., 2001: Vecteurs caractéristiques de modèles océaniques pour la réduction d'ordre en assimilation de données. *Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble 1*, décembre 2001.
- Durbiano S., E. Blayo, J. Verron, J. Blum and F.-X. Le Dimet, 2002: A reduced order strategy for 4D-Var ocean data assimilation. Soumis à *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*.
- Vidard P.A., E. Blayo, F.-X. Le Dimet and A. Piacentini, 2000: 4D-variational data analysis with imperfect model. Reduction of the size of the control. *J. Flow, Turbulence and Combustion*, **65**, 489-504, 2000.
- Vidard P. A., 2001: Vers une prise en compte des erreurs modèle en assimilation de données 4D variationnelle. Application à un modèle d'océan. *Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble 1*, décembre 2001.

## Bibliographie générale

- Barkmeijer J., M. Van Gijzen and F. Bouttier, 1998: Singular vectors and estimates of the analysis error covariance metric. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **124**, 1695-1713.
- Basseville M., A. Benveniste, K. Chou, S. Golden, R. Nikoukhah and A. Willsky, 1992: Modeling and estimation of multiresolution stochastic processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **38**, 766-784.
- Bennett A.F., 1992: *Inverse methods in physical oceanography*, Cambridge University Press.
- Bouttier F. and P. Courtier, 1999: Data assimilation concepts and methods. *Training course lecture notes*, ECMWF.
- Brasseur P., J. Ballabrera-Poy and J. Verron, 1999: Assimilation of altimetric data in the mid-latitude oceans using the Singular Evolutive Extended Kalman filter with an eddy-resolving primitive equation model. *J. Mar. Syst.*, **22**, 269-294.
- Chou K., A. Willsky and A. Benveniste, 1994: Multiscale recursive estimation, data fusion and regularization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**, 464-478.
- Cohn S. and R. Todling, 1996: Approximate data assimilation schemes for stable and unstable dynamics. *J. Meteor. Soc. Japan*.
- Courtier P., J.-N. Thépaut and A. Hollingsworth, 1994: A strategy for operational implementation of 4D-Var using an incremental approach. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **120**, 1367-1387.
- Courtier P., 1997: Dual formulation of four-dimensional variational assimilation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **123**, 2249-2461.
- De Mey P., 1997: Data assimilation at the oceanic mesoscale: a review. *J. Meteor. Soc. Jap.*, **75**, 415-427.
- Dymnikov V. and A. Filatov, 1997: *Mathematics of climate modeling*, Birkhauser, 346pp.
- Fukumori I., J. Benveniste, C. Wunsch and D. Haidvogel, 1993: Assimilation of sea surface topography into an ocean circulation model using a steady-state smoother. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1831-1855.
- Ghil M. and P. Malanotte-Rizzoli, 1991: Data assimilation in meteorology and oceanography. *Adv. Geophys.*, **23**, 141-266.
- Ho T., 1998: Multiscale modeling and estimation of large-scale dynamic systems. *PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology*, september 1998.

- Hoteit I., 2001: Filtres de Kalman réduits et efficaces pour l'assimilation de données en océanographie. *Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble 1*, janvier 2001.
- Huck T. and G. Vallis, 2001: linear stability analysis of the three-dimensional thermally-driven ocean circulation: application to interdecadal oscillations. *Tellus*, **53A**, 526-545.
- Kazantsev E., 1999: Local Lyapunov exponents of the quasi-geostrophic ocean dynamics. *Appl. Math. Comput.*, **104**, 217-257.
- Klein P., B.L. Hua and G. Lapeyre, 2000: Alignment of tracer gradient vectors in 2D turbulence. *Physica D*, **146**, 246-260.
- Le Dimet F.-X. and O. Talagrand, 1986: Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observation : theoretical aspects. *Tellus*, **38A**, 97-110.
- Louvel S., 2001: Implementation of a dual variational algorithm for assimilation of synthetic altimeter data in the oceanic primitive equation model MICOM. *J. Geophys. Res.*, **106**, 9199-9212.
- Miller and Cane, 1996: Tropical data assimilation: theoretical aspects. In P. Malanotte-Rizzoli (ed.), *Modern approaches to data assimilation in ocean modelling*, 207-233.
- Molteni F., R. Buizza, T. Palmer and T. Petroliaigis, 1996: The ECMWF Ensemble Prediction System: methodology and validation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **122**, 73-119.
- Moore A. and R. Kleeman, 1996: The dynamics of error growth and predictability in a coupled model of ENSO. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **122**, 1405-1446.
- Mu M., 2001: Nonlinear Singular Vectors and Nonlinear Singular Values. *Science in China*, **43D**, 375-385.
- Paun I., 2001: Sur quelques problèmes régis par des équations aux dérivées partielles en astrophysique et en océanographie. *Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble 1*, octobre 2001.
- Pires C., R. Vautard and O. Talagrand, 1995: On extending the limits of variational assimilation in nonlinear chaotic systems. *Tellus*, **47A**, 96-121.
- Pham D.T., J. Verron and M.-C. Roubaud, 1998: A singular evolutive extended Kalman filter for data assimilation in oceanography. *J. Mar. Syst.*, **16**, 323-340.
- Talagrand O., 1997: Assimilation of observations, an introduction. *J. Meteor. Soc. Jap.*, **75**, 191-209.
- Toth Z. and E. Kalnay, 1993: Ensemble forecasting at NMC: The generation of perturbations. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, **74**, 2317-2330.
- Toth Z. and E. Kalnay, 1997: Ensemble forecasting at NCEP: the breeding method. *Mon. Wea. Rev.*, **125**, 3297-3318.
- Veersé F. and J.-N. Thépaut, 1998: Multiple-truncation incremental approach for four-dimensional variational data assimilation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**, 1889-1908.
- Veersé F., D.T. Pham and J. Verron, 2000: 4D-Var/SEEK: a consistent hybrid variational-smoothing data assimilation method. *Rapport de recherche INRIA 3902*, mars 2000.
- Weaver A. T. and P. Courtier, 2001: Correlation modelling on the sphere using a generalized diffusion equation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **127**, 1815-1846.



# En guise de conclusion...

J'ai présenté dans ce mémoire un résumé de mes travaux de recherche de ces dernières années, qui portent sur le développement de méthodes numériques pour la modélisation et l'assimilation de données en océanographie. Comme on a pu le constater, ce travail est motivé par des applications réelles, et comporte à ce titre le plus souvent une part d'adaptation spécifique à la physique océanique, ainsi qu'un souci de développement informatique propre, modulaire, et aussi indépendant que possible des modèles.

Ce document est une photographie instantanée d'activités en cours, et j'ai dressé au fur et à mesure de chaque chapitre les perspectives de recherche pour les 3 à 5 ans à venir, dans la lignée des travaux précédents. A plus long terme, beaucoup d'autres aspects évidemment émergeront, souvent pluridisciplinaires, et qui apporteront leurs lots de difficultés mathématiques et numériques.

Au niveau des modèles eux-mêmes tout d'abord, un travail important est encore à réaliser afin d'améliorer les différentes paramétrisations : physique sous-maille, couches-limites de surface et de fond, couches-limites latérales. Il me semble notamment que ces aspects pourraient grandement bénéficier d'une approche par analyse mathématique, bien que n'étant pas du tout spécialiste de ce domaine.

J'ai évoqué au chapitre 1 la notion de système de modélisation, qui va je pense prendre de plus en plus d'importance dans les années à venir. Ainsi, on couplera aux modèles de circulation océanique nombre d'autres composants (transport sédimentaire, biologie, chimie...) afin d'aller vers une vision aussi complète que possible du milieu océanique. La plupart des principaux modèles d'océan sont d'ores et déjà sur cette voie. La problématique du couplage, avec ses volets mathématiques, numériques et informatiques, restera donc sans doute encore assez longtemps un sujet de recherche en mathématiques appliquées à l'océanographie.

On a vu de plus que les observations sont une source d'information complémentaire des modèles, et les systèmes de modélisation et prévision océaniques intègrent donc (ou intégreront) des méthodes d'assimilation de données. Là aussi beaucoup reste à faire. Sur les méthodes elles-mêmes tout d'abord : en termes de coût, d'optimalité, ou encore d'estimation d'erreurs. Mais aussi en se plaçant dans ce contexte de système intégré : comment par exemple adapter de façon optimale le maillage du modèle à l'état de l'océan et aux observations disponibles ? Ou comment adapter les réseaux d'observations de façon optimale en fonction de l'état de l'océan et des modèles numériques disponibles ? Une réponse mathématiquement correcte à ce type de questions est difficile et requiert des outils lourds et complexes.

De nombreux sujets passionnants, tant du point de vue des mathématiques appliquées que des applications elles-mêmes...