



HAL
open science

Etude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques

Bettina Pedemonte

► **To cite this version:**

Bettina Pedemonte. Etude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2002. Français. NNT: . tel-00004579

HAL Id: tel-00004579

<https://theses.hal.science/tel-00004579>

Submitted on 7 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER-GRENOBLE I

Science, Technologie, Médecine



UNIVERSITÀ DE GENOVA

Siège administratif du Doctorat en Mathématiques du Consortium des Universités de Genova, de Torino et du Politecnico di Torino

*Etude didactique et cognitive des rapports de
l'argumentation et de la démonstration dans
l'apprentissage des mathématiques*

Thèse en co-tutelle

Bettina Pedemonte

Présentée le 19 juin 2002 pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier – Grenoble 1

UFR : Informatique – Mathématiques Appliquées

Specialité : Didactique des Mathématiques

et

Dottore di Ricerca in Matematica dell'Università de Genova

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Président : **Colette Laborde**, Professeur à l'IUFM de Grenoble
Rapporteurs **Marc Rogalski** Professeur à l'Université de Paris
Paolo Boero, Professore all'Università di Genova
Examineurs : **Nicolas Balacheff**, Directeur de Recherche au CNRS, Directeur de thèse
Maria Alessandra Mariotti, Professore all'Università di Pisa, Directeur de thèse
Christian Plantin Professeur à l'Université de Lyon
Mariolina Bartolini Bussi, Professore all'Università di Modena

Merci...

... A mes directeurs de thèse, Nicolas Balacheff et Maria Alessandra Mariotti car ils m'ont encadrée dans cette recherche de façon très professionnelle et complémentaire. Merci à Nicolas pour les corrections très ponctuelles et pour les suggestions données au bon moment. Merci à Maria Alessandra pour m'avoir aidée à expliciter mes idées et m'avoir permis d'avoir toujours une vision d'ensemble de la thèse. L'enrichissement que j'ai reçu en travaillant avec eux est précieux. J'ai appris à travailler et apprécier la différence entre deux encadrements de recherche différents, l'italien et le français, l'effort nécessaire pour passer d'une recherche à un autre a été fait par moi autant que par Nicolas et par Maria Alessandra. Cela m'a permis d'explicitier mes idées de façon très libre et en même temps bien guidée.

... A mes rapporteurs Marc Rogalski et Paolo Boero. Merci à Marc pour l'énorme travail fait pour corriger cette thèse. Les suggestions données, très ponctuelles et pertinentes, m'ont permis d'avancer dans la recherche même au terme de la rédaction du manuscrit. Merci à Paolo pour le plaisir qu'il a exprimé en lisant la thèse, et pour les suggestions données au cours de ma recherche.

Mais je tiens à remercier Paolo en particulier car il a toujours cru en mes capacités, il m'a toujours encouragée et en premier il m'a transmis son amour pour la recherche en didactique. C'est sûrement grâce à lui si je suis partie pour la France.

... Aux autres membres du jury, Christian Plantin, Mariolina Bartolini Bussi, Colette Laborde. Merci à Christian pour le temps dédié aux clarifications linguistiques à propos de l'argumentation. Merci à Mariolina pour avoir accepté avec enthousiasme de faire partie de mon jury. Merci à Colette pour m'avoir accueillie au sein du laboratoire il y a quatre ans malgré le manque de connaissance de la langue française, et pour m'avoir toujours encouragée au cours de ma présence en France.

... Au laboratoire Leibniz et en particulier à l'équipe Did@Tic. Je tiens à remercier tous les thésards pour leurs précieux conseils, donnés au cours de nos rencontres, qui m'ont permis d'avancer dans la recherche. Merci en particulier à Nathalie Gaudin pour les corrections de français apporté au manuscrit.

... A Betta pour avoir partagé avec moi les bons moments et ceux difficiles de cette « aventure française ». Les difficultés rencontrées la première année ont été beaucoup moins lourdes avec elle.

... A tous mes copains italiens et français pour m'avoir encouragée et soutenue. En particulier merci à Paolo Decreti pour m'avoir poussée à partir quand j'ai pris la décision de monter en France pour étudier la didactique.

... Aux professeurs Bernard Capponi, Domingo Paola, Tiziana Venturi, Maria Pia Galli, qui m'ont permis de travailler avec leurs classes en apportant une contribution fondamentale au dispositif expérimental.

... à Giampaolo Chiappini et Maria Rosa Bottino pour m'avoir consenti de monter à Grenoble toutes les fois que cela était nécessaire.

...à ma famille. La rédaction de cette thèse a demandé un gros effort qui n'est pas seulement lié à la recherche en didactique. Une bonne dose de courage, la confiance en moi, et capacité de faire face aux difficultés m'ont permis de commencer et de terminer la rédaction de cette thèse. Pour cela je remercie mon père Santo, ma mère Norina et mon petit frère Matteo. Je remercie toute ma famille, Giannina, Milvio, Valentina, Monica, Mattia, Barbara, Germano pour la sérénité et l'encouragement qu'ils m'ont toujours apporté.

... Merci à Eric Bainville, ma famille future, non seulement pour les corrections de français, pour le soutien et l'accueil montrés pendant ces années. C'est grâce à lui si je ne me suis pas sentie étranger en France, si j'ai appris non seulement à apprécier mais aussi à aimer les différences de ce pays par rapport à l'Italie.

C'est donc à eux, à ma famille présente et future que je dédie cette thèse.

Sommaire

Introduction 1

Chapitre 1

Argumentation et démonstration en mathématiques

Introduction	9
1 La démonstration en didactique des mathématiques	11
1.1 Comportement des élèves face à une démonstration	11
1.2 Apprentissage de la démonstration	14
2 Analyse cognitive des rapports entre argumentation et démonstration en vue d'une analyse	16
2.1 Duval : une approche cognitive de l'argumentation	17
2.1.1 Analyse fonctionnelle et analyse structurale du raisonnement	18
2.1.1.1 Analyse fonctionnelle du raisonnement	18
2.1.1.2 Analyse structurale du raisonnement	20
2.1.1.2.1 Structure d'un pas de raisonnement	20
2.1.1.2.2 Structure de l'enchaînement des pas de raisonnement	22
2.1.2 Conséquences de l'analyse présentée	22
3 L'argumentation en mathématique	23
3.1 Développement d'une théorie de l'argumentation	24
3.2 L'argumentation en mathématique à la suite des théories linguistiques contemporaines	28
3.2.1 La fonctionnalité de l'argumentation en mathématique	29
3.2.1.1 L'argumentation en mathématique est une justification rationnelle	29
3.2.1.2 L'argumentation en mathématique a toujours un objectif : la recherche de la vérité	30
3.2.1.3 L'argumentation en mathématique est convaincante	30
3.2.1.4 Le champ de l'argumentation	32
3.2.2 La structure de l'argumentation	34
3.2.2.1 Les connecteurs pragmatiques	35
3.2.2.2 Caractérisation de la structure de l'argumentation : schéma ternaire	36
4 Démonstration	40
4.1 Développement d'une théorie de la démonstration	41
4.2 La démonstration selon les voix des linguistes	43
4.2.1 La fonctionnalité de la démonstration	44
4.2.1.1 La démonstration a un objectif : valider	44
4.2.1.2 La démonstration est convaincante et elle s'adresse à un auditoire universel	45
4.2.1.3 Le champ de la démonstration	45
4.2.2 La structure du pas de démonstration	46
Conclusion	46

Chapitre 2

Unité et rupture cognitive entre argumentation et démonstration

Introduction	49
1 Unité cognitive	50
1.1 Unité cognitive entre production de la conjecture et construction de la démonstration	50
1.2 Unité cognitive entre argumentation et démonstration	52
1.3 Ecart entre argumentation et démonstration	53
1.3.1 Ecart culturel, écart du système de référence, écart structurel	55
1.3.2 Comment identifier les écarts ?	56
1.3.3 Symptômes de l'écart : rupture cognitive ?	57
2 Structure de l'argumentation et de la démonstration	60
2.1 Structure de la démonstration	61
2.1.1 La démonstration déductive	62
2.1.2 La démonstration par récurrence	63
2.2 Quelques structures de l'argumentation	64
2.2.1 Argumentation déductive	66
2.2.2 Argumentation abductive	67
2.2.3 Argumentation inductive	70
3 Retour sur l'unité ou rupture cognitive entre argumentation et démonstration	74
3.1 Continuité ou écart entre structures	74
3.1.1 Le cas particulier de l'argumentation inductive	76
3.2 Unité ou rupture cognitive du système de référence et structurelle entre argumentation et	78
Conclusion	80

Chapitre 3

Le modèle de Toulmin : un outil méthodologique

Introduction	81
1 Comment traiter les argumentations et les démonstrations des élèves ?	82
1.1 Conjecture et théorème	82
1.1.1 Argumentation constructive ou structurante ?	83
1.1.2 Théorème ou énoncé prouvé ?	84
2 Le modèle de Toulmin : un outil méthodologique	86
2.1 Découpage de l'argumentation dans le modèle de Toulmin	86
2.2 ... pour analyser les structures entre argumentation et démonstration	87
2.3 ... pour analyser le système de référence	89
2.3.1 Les conceptions dans le modèle de Toulmin	90
2.3.2 Passage de la conception à la théorie	93
2.3.3 La restriction comme rétroaction afin d'invalidier les contrôles erronés	94
2.3.4 Restriction : rétroaction d'un milieu afin de réfuter une conception	96
2.3.5 Changement de cadre pour activer une restriction à un permis d'inférer erroné	98
2.3.6 Le système de représentation : élément pivot entre cadre et conception	99
2.3.7 Changement de cadre pour valider un permis d'inférer	101
2.3.8 Construction d'une démonstration	102
2.3.9 Le cadre et le champ.	103
2.3.10 Des conceptions à la détermination du système de référence (conceptions, cadres)	104
2.4 Limites du modèle de Toulmin	105
2.4.1 Problématique de l'identification d'une structure d'argumentation dans le modèle	106
Conclusion	109

Chapitre 4

Analyse a priori de la situation expérimentale

Introduction	111
1 Justification du dispositif expérimental par rapport à notre problématique	112
1.1 Questions et hypothèses de recherche	112
1.2 Mise en place du dispositif expérimental	113
1.2.1 Choix des problèmes	115
1.2.2 Dévolution de la situation expérimentale	116
1.2.3 Justification de l'utilisation de Cabri-géomètre pendant les expérimentations	117
1.2.4 Milieu de la situation expérimentale	118
1.2.5 Choix des élèves à analyser	119
2 Analyse a priori des situations proposées	119
2.1 Situation expérimentale 1	119
2.1.1 Pourquoi ce problème ?	120
2.1.2 Structures attendues d'argumentation à partir de quelques procédures de résolution	121
2.1.2.1 Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires	122
2.1.2.2 Méthode trigonométrique pour comparer les aires	126
2.1.2.3 Exploration sur les cas particuliers de triangle ABC	127
2.1.2.4 Rotation d'un triangle extérieur	134
2.1.2.5 Stratégie de construction du parallélogramme	138
2.1.2.6 Stratégie du théorème des médianes et des hauteurs	140
2.1.3 Conceptions mobilisables pendant la résolution du problème	143
2.1.3.1 Conceptions mobilisables relatives à la notion d'aire	143
2.1.4 Unité ou rupture cognitive structurelle et du système de référence	145
2.2 Situation expérimentale 2	149
2.2.1 Pourquoi ce problème ?	150
2.2.2 Analyse des solutions possibles	151
2.2.3 Structures de l'argumentation	151
2.2.4 Conceptions mobilisables concernant le cas limite	156
2.2.5 Unité ou rupture cognitive structurelle et du système de référence	157
2.3 Situation expérimentale 3	159
2.3.1 Pourquoi ce problème ?	159
2.3.2 Structures attendues d'argumentation à partir des quelques procédures de résolution	160
2.3.2.1 Ajout d'un côté au polygone à partir du même sommet	162
2.3.2.2 Ajout d'un côté au polygone à partir d'un sommet quelconque	166
2.3.2.3 Considération d'un polygone comme exemple générique (Balacheff 1988)	167
2.3.3 Conceptions mobilisées	169
2.3.4 Unité et rupture cognitive structurelle et du système de référence	170
Conclusion	172

Chapitre 5

Mise en place de la situation expérimentale: analyse a posteriori

Introduction	175
1 Considérations générales	175
1.1 France et Italie : différences entre expérimentations	176
2 Analyse a posteriori des situations proposées	176
2.1 Situation expérimentale 1	178
2.1.1 Structures d'argumentations construites par les élèves à partir des procédures de résolution	182
2.1.1.1 Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires	183
2.1.1.2 Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC	194
2.1.1.3 Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC + construction de la hauteur	197
2.1.1.4 Méthode trigonométrique pour comparer les aires	208

2.1.2	Analyse du système de référence	211
2.1.2.1	Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires	211
2.1.2.2	Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC	216
2.1.2.3	Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC + construction de la hauteur	223
2.1.2.4	Méthode trigonométrique pour comparer les aires	227
2.1.2.5	Stratégie du théorème des médianes et des hauteurs	227
2.1.2.6	La possibilité de mesurer les aires avec l'outil de la mesure de Cabri-géomètre	229
2.1.3	Discussion des résultats	231
2.1.3.1	Unité ou rupture cognitive structurelle et du système de référence.	231
2.2	Situation expérimentale 2	233
2.2.1	Structures d'argumentations construites par les élèves à partir des procédures de résolution	236
2.2.1.1	Stratégie empirique	236
2.2.1.2	Généralisation au cas n	238
2.2.1.3	Quasi-induction	244
2.2.1.4	Récurrence	246
2.2.2	Analyse du système de référence de l'argumentation et de la preuve	249
2.2.2.1	Conceptions mobilisées concernant le cas limite	250
2.2.3	La restriction dans le modèle de Toulmin	257
2.2.4	Discussion des résultats	261
2.3	Situation expérimentale 3	263
2.3.1	Structures d'argumentations construites par les élèves à partir des procédures de résolution	266
2.3.1.1	Stratégie empirique et généralisation à partir de celle-ci	266
2.3.1.2	Stratégie d'insertion d'un côté à un polygone à partir du même sommet	271
2.3.1.3	Stratégie d'insertion d'un côté au polygone à partir de sommets différents	276
2.3.2	Analyse du système de référence	280
2.3.2.1	La démonstration par récurrence	281
2.3.2.2	Polygones non simples	282
2.3.3	Discussion des résultats	285
	Conclusions	286
	<i>Conclusions</i>	289
	<i>Références bibliographiques</i>	297
	<i>Annexes</i>	303
	Annexe 1. Fiches des problèmes proposés en France et en Italie	303
	Annexe 2. Fiches des dialogues et des copies des élèves relatives au problème 1	309
	Annexe 3. Fiches des dialogues et des copies des élèves relatives au problème 2	377
	Annexe 4. Fiches des dialogues et des copies des élèves relatives au problème 3	397

Introduction

*Capire una dimostrazione è il momento
della verità per la matematica¹*

G. Lolli

L'apprentissage de la démonstration demande un changement de vision des mathématiques, progressant au-delà de la vérification expérimentale et de l'intuition pour adopter une démarche conforme à une théorie mathématique. Il ne s'agit pas d'apprendre des techniques mais de savoir les situer dans la théorie. L'objectif de la démonstration est d'établir la validité d'un résultat à l'intérieur d'un système théorique. Cet objectif est difficile à comprendre, et il est encore plus difficile de le faire comprendre. Mais on ne peut pas enseigner les mathématiques sans introduire la démonstration (Mariotti, 2001). Ceci explique les nombreuses recherches en didactique des mathématiques concernant la démonstration.

En tant que chercheurs, notre hypothèse est que la problématique de la démonstration doit s'inscrire dans une problématique plus vaste. En effet, la démonstration d'un énoncé répond à un problème de validité, mais une question sur la validité est posée avant la démonstration : souvent on démontre un énoncé dont on suppose la vérité. Et cette question ne peut pas se situer simplement au niveau de la démonstration. La démonstration est liée à une théorie mathématique, mais il y a souvent un processus précédant la démonstration, qui, au moyen des connaissances, non nécessairement théoriques, permet de construire les éléments de base pour la mise en place d'une démonstration.

¹ *Comprendre une démonstration est le moment de vérité pour les mathématiques*

Si l'on pouvait avoir accès aux connaissances des élèves au moment d'aborder une démonstration, l'identification des difficultés qui peuvent empêcher la transformation des connaissances en théorie mathématique, et les remèdes nécessaires pour les dépasser, seraient peut-être plus accessibles.

La détermination de ces connaissances n'est possible qu'au travers des observables que l'élève fournit pendant son activité.

Le psychologue et le maître peuvent se former une image des connaissances et représentations des élèves à partir des observables dont ils disposent, c'est-à-dire des actions du sujet en situation et des témoignages symboliques que le sujet fournit de son activité : formulations verbales, dessins, schémas, écritures... (Vergnaud, 1981, p. 220).

Mais quels sont les observables qui permettent de déterminer les connaissances des élèves au moment de construire une démonstration ?

La démonstration, par nature, ne permet pas de visualiser l'ensemble des connaissances qui ont permis sa construction. Les connaissances sont occultées par une exigence théorique qui ne laisse pas transparaître le processus qui a permis la construction de la démonstration.

C'est pourquoi la démonstration, comme objet d'étude de la didactique en mathématique, doit élargir sa problématique à un univers qui échappe aux « règles rigides » auxquelles elle est au contraire soumise. Balacheff, dans la Lettre de la preuve de Mai/Juin 1999, a proposé une problématique de l'argumentation.

Comprendre la démonstration c'est d'abord construire un rapport particulier à la connaissance en tant qu'enjeu d'une construction théorique, et donc c'est renoncer à la liberté que l'on pouvait se donner, en tant que personne, dans le jeu d'une argumentation. Parce que ce mouvement vers la rationalité mathématique ne peut être accompli qu'en prenant effectivement conscience de la nature de la validation dans cette discipline, il provoquera la double construction de l'argumentation et de la démonstration (Balacheff, 1999).

L'argumentation, en tant que processus moins contraint que la démonstration, permet d'avoir accès à des connaissances des élèves qui dans la démonstration ne sont pas nécessairement explicitées. Le problème de la vérité d'un énoncé se trouve finalement séparé du problème de sa validité. L'accès authentique à une problématique de la vérité et de la preuve se situe dans l'argumentation. C'est donc dans une problématique de l'argumentation que peut s'expliquer une problématique de la démonstration.

C'est ici que notre travail trouve son point de départ.

Objet d'étude et problématique

Les recherches didactiques qui s'intéressent aux rapports entre argumentation et démonstration sont nombreuses, et diffèrent radicalement les unes avec les autres. Le désaccord entre les recherches existantes s'appuie en particulier sur le rapport entre les suggestions didactiques pour l'apprentissage de la démonstration et l'analyse des aspects cognitifs qui interviennent pendant sa construction. Les deux points de vue auxquels nous faisons référence dans ce manuscrit sont les recherches sur l'*unité cognitive* (Boero, Garuti, Mariotti, 1996) et celles sur les rapports de l'argumentation et la démonstration (Duval, 1995).

La liaison entre argumentation et démonstration a été mise en évidence dans le cas de problèmes demandant la construction d'un théorème, et donc la construction d'une conjecture et de sa démonstration. Certaines recherches prennent appui sur la présence d'une *unité cognitive* (Boero, Garuti, Mariotti, 1996) entre l'argumentation qui conduit à l'explicitation d'une conjecture, et sa démonstration. L'hypothèse de l'unité cognitive énonce que pendant la construction d'une conjecture l'élève peut produire une activité argumentative dans laquelle il justifie la plausibilité des choix qu'il fait. Pendant la phase ultérieure de preuve, cet élève peut s'appuyer sur ce processus de façon cohérente en organisant les arguments déjà produits suivant une chaîne déductive.

Le sujet qui construit une démonstration à partir d'une argumentation fait intervenir ses propres connaissances. En conséquence, nous pensons qu'une analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration peut révéler des aspects significatifs pour l'apprentissage de la démonstration.

Plusieurs recherches expérimentales (Boero, Garuti, Mariotti, 1996 ; Garuti, Boero, Lemut, 1998; Mariotti, 2001) ont montré que l'accès à la démonstration à partir d'un processus de construction d'une conjecture est plus accessible à l'élève que dans un enseignement fondé sur l'apprentissage de démonstrations étrangères au sujet.

Une conséquence de cette étude, qui a une profonde signification didactique, est que l'unité cognitive peut être utilisée comme outil pour prédire et analyser certaines difficultés rencontrées par les élèves lors de leurs premières démonstrations. Une seconde conséquence est qu'une bonne façon d'initier les élèves à la démonstration est de leur proposer des problèmes ouverts (Arsac & al., 1991) qui demandent la construction d'une conjecture. En fait, dans le modèle de l'unité cognitive proposé par l'école italienne, l'argumentation devrait favoriser la construction d'une démonstration.

L'analyse de l'interaction sociale avait, au contraire, suggéré une hétérogénéité entre argumentation et démonstration d'ordre épistémologique (Balacheff, 1988), c'est-à-dire liée à un rapport à la connaissance, au passage du pragmatique au théorique dont les valeurs épistémiques et opératoires sont la signature cognitive. L'étude de ces rapports dans une problématique cognitive et linguistique (Duval, 1995), a encore conforté l'idée d'une distinction forte entre argumentation et démonstration.

A partir d'une analyse fonctionnelle et d'une analyse structurelle de l'argumentation et de la démonstration Duval décrit leurs processus cognitifs sous-jacents. La double distinction entre valeur épistémique² et valeur de vérité d'une proposition d'une part, et entre contenu et statut d'une proposition d'autre part, constitue la clé d'une analyse fonctionnelle. Dans la démonstration, la valeur épistémique d'une proposition dépend du statut théorique, alors que dans l'argumentation elle serait complètement liée au contenu des propositions.

L'analyse structurelle prend en compte les structures d'argumentation et de démonstration. La démonstration peut être décrite par une structure ternaire : données, conclusion et énoncés. Ses pas sont connectés selon un processus de recyclage : la conclusion du premier pas devient le début du pas suivant. Au contraire, dans l'argumentation les inférences sont reliées par connexion intrinsèque, c'est-à-dire qu'elles sont connectées en prenant en considération le seul contenu. En conséquence, Duval soutient qu'il y a une distance cognitive entre argumentation et démonstration, qui n'est pas seulement logique mais elle est aussi cognitive.

... Il est important de voir que cette hétérogénéité (dans le cas d'un pas de déduction et dans le cas d'un pas d'argumentation) n'est pas seulement « logique » mais qu'elle est aussi cognitive, c'est-à-dire relative à des modes d'appréhension par un sujet (Duval, 1992–1993). Les conséquences didactiques sont opposées par rapport à celles

tirées à partir d'une hypothèse de l'*unité cognitive*. Duval soutient que les règles de construction d'un pas déductif doivent être enseignées et centrées sur le statut des propositions et pas sur le contenu. C'est pourquoi il propose un enseignement de la démonstration centré sur les graphes propositionnels.

Avec l'objectif de déterminer des solutions didactiques pour l'apprentissage de la démonstration, nous nous sommes proposée de répondre à une question clé :

y a-t-il continuité ou distance cognitive entre argumentation et démonstration ?

La difficulté que nous avons rencontrée pour donner une réponse à cette question nous a poussée à aller plus loin. Nous nous sommes posée deux autres questions :

² La valeur épistémique est le degré de certitude ou de conviction attachée à une proposition (Duval, 1991)

qu'est-ce qu'une argumentation ?

Et en particulier : qu'est-ce qu'une argumentation en mathématiques ?

Et quel est son rapport avec une démonstration ?

Les « outils » fournis par les recherches didactiques existantes n'étaient pas suffisants pour fournir une réponse à ces questions. En particulier, nous avons besoin d'un outil méthodologique pour l'analyse de l'argumentation et de la démonstration, tel que la comparaison entre les deux processus puisse être non seulement possible, mais également bien fondée.

L'objectif principal de ce manuscrit est de proposer cet outil méthodologique.

Cet outil doit répondre à certaines exigences. Il doit nous permettre de modéliser l'argumentation et la démonstration des élèves afin d'identifier une structure dans l'argumentation comparable avec celle de la démonstration. En particulier, nous voulons pouvoir modéliser l'argumentation comme une chaîne de pas argumentatifs, chacun pouvant être comparé avec les pas correspondants de la démonstration. L'hypothèse est que cette comparaison peut permettre de mettre en évidence des aspects cognitifs dans les éléments constituant les structures de l'argumentation et la démonstration.

Le champ mathématique que nous considérons pour accomplir cette étude est celui de la géométrie. Le niveau scolaire est restreint à celui du lycée.

Argumentation en mathématiques et démonstration

Dans un premier temps, nous avons essayé de caractériser et comparer une argumentation en mathématique, et une démonstration. C'est l'objectif du Chapitre 1, au moyen d'une analyse fonctionnelle et d'une analyse structurelle du raisonnement (Duval, 1995). Les caractéristiques fonctionnelles déterminent la finalité de l'argumentation, son utilité, son rôle à l'intérieur d'un discours. Les caractéristiques structurelles permettent d'identifier une argumentation et de définir sa structure. La première théorie de l'argumentation se développe avec Aristote (384 - 322 avant J.-C.), comme théorie « fonctionnelle » car elle répond à un besoin : décrire l'*art de la persuasion* face à un auditoire. Elle se développe aussi comme théorie « structurelle » car elle répond à un deuxième besoin : caractériser la structure de trois domaines où s'exerce l'*art du discours* : rhétorique, dialectique et analytique. C'est dans le domaine de la dialectique que nous avons reconnu les premières caractéristiques d'une argumentation en mathématiques, de la même façon que dans le domaine de l'analytique nous avons reconnu des caractéristiques de la démonstration. En même temps, Aristote, avec le

syllogisme, nous fournit une analyse structurelle de la dialectique et de l'analytique sans les distinguer, mais au contraire en les rapprochant.

En suivant cette façon d'analyser, nous avons déterminé les caractéristiques fonctionnelles et structurelles d'une argumentation en mathématique et de la démonstration à partir des théories linguistiques contemporaines. Nous permettant ainsi d'éclairer l'idée que l'argumentation puisse être à la fois un point d'appui et un obstacle épistémologique à l'apprentissage de la démonstration (Balacheff, La lettre de la preuve Mai/Juin 1999).

Aspects cognitifs

La séparation des caractéristiques fonctionnelles, de caractéristiques structurelles, dans l'analyse de l'argumentation et de la démonstration, nous a amenée à penser que même au niveau cognitif une séparation pouvait être présente. De plus, les recherches didactiques existantes sur ce sujet semblaient conduire une analyse à partir de points de vue différents. L'hypothèse de distance cognitive entre argumentation et démonstration soutenue par Duval se base plutôt sur une analyse fonctionnelle et structurelle. En revanche, l'*unité cognitive* (Boero, Garuti, Mariotti, 1996) entre argumentation et démonstration est analysée en considérant les aspects conceptuels (Vergnaud, 1990), les « cadres » (Douady, 1986), les expressions verbales, les heuristiques de l'argumentation et de la démonstration, en bref ce que nous appellerons « système de référence ».

C'est pourquoi, au Chapitre 2, nous proposons la distinction entre une analyse cognitive du système de référence de l'argumentation et de la démonstration et une analyse structurelle de l'argumentation et de la démonstration. En particulier, nous distinguons les trois types classiques de structure argumentative : la déduction, l'abduction et l'induction. Nous mettrons en relation ces trois structures argumentatives avec les structures démonstratives de la déduction et de la récurrence. Nous en analysons les continuités et les écarts structurels afin d'accomplir une analyse cognitive structurelle.

L'outil méthodologique

L'outil méthodologique qui nous a permis de réaliser une analyse cognitive structurelle et du système de référence de l'argumentation et de la démonstration, est le modèle de l'argument de Toulmin (Toulmin, 1958). Nous décrirons ce modèle dans le Chapitre 1.

Un argument dans le modèle de Toulmin a une structure ternaire : l'énoncé ou conclusion qu'apporte l'interlocuteur (*claim*), un certain nombre de données justifiant l'énoncé (*data*), le permis d'inférer qui fournit une règle, un principe général capable de servir de fondement à cette inférence (*warrant*). Ainsi, si l'on suit Toulmin, l'argument a une structure comparable

à celle du pas démonstratif. Et ce n'est pas seulement la structure de l'argumentation et de la démonstration qui peuvent être comparées. La comparaison entre la nature du permis d'inférer dans l'argumentation et dans la démonstration montre clairement que le permis d'inférer d'une démonstration est un théorème, alors que dans l'argumentation il ne l'est pas nécessairement. L'analyse de la nature du permis d'inférer nous permettra de faire la liaison avec le système de référence. En particulier, le permis d'inférer dans une argumentation pourra être reconnu en tant qu'opérateur d'une conception (Balacheff, 1995).

Le fonctionnement du modèle de Toulmin comme outil d'analyse du système de référence et de la structure d'argumentation et de démonstration est décrit au Chapitre 3.

Au Chapitre 4, nous exposons l'enjeu du dispositif expérimental. Nous explicitons les choix qui nous ont permis de le réaliser et les objectifs que nous nous sommes proposée d'atteindre. Nous avons choisi trois situations expérimentales dans le domaine de la géométrie. En particulier, nous avons construit une séance expérimentale pour analyser la relation entre une argumentation abductive et/ou déductive et la démonstration déductive, et deux autres séances pour analyser la relation entre une argumentation inductive et la démonstration par récurrence. Le chapitre 5 présente les résultats et les analyses des trois expérimentations proposées. Nous montrerons comment analyser les argumentations et les preuves des élèves avec le modèle de Toulmin. La comparaison entre argumentation et preuve permettra d'analyser les continuités/écarts structurels et du système de référence de l'argumentation et de la preuve des élèves. A partir de cela nous proposerons notre analyse cognitive.

Nous remarquons que l'analyse didactique et cognitive des rapports entre l'argumentation et la démonstration que nous apportons dans le manuscrit est relative à la géométrie et restreinte au niveau du lycée.

Chapitre 1

Argumentation et démonstration en mathématiques

*Ο τοῖς φανερωτάτοις ἀπόδειξιν
προσάγων οὐ βεβαιοῖ τὴν περὶ
αὐτῶν ἀλήθειαν*

*Celui qui apporte une
démonstration aux choses les plus
évidentes ne consolide pas la
vérité à leur égard*

Proclus (Les axiomes)

Introduction

L'idéal mathématique est celui d'un univers apodictique¹ dans lequel la validité d'un énoncé dérive par une chaîne de raisonnements déductifs d'un petit nombre de propositions acceptées. Dans cette vision des mathématiques, ce qui est démontré est nécessaire et irréfutable. Ce caractère de nécessité s'exprime aussi dans le langage mathématique, dont l'idéal formaliste est garant de validité. Cependant, il est peut-être un peu réducteur de penser que les mathématiques n'appartiennent qu'à un univers idéal complètement intellectuel. Les mathématiques avancent dans une dialectique entre construction qui associe étroitement forme et perception (Otte, 1994). La connaissance mathématique porte sur des objets qui ne peuvent pas s'appuyer complètement sur une description formelle. La démonstration ne peut pas échapper à cette vision. Si la démonstration se réduit au pur formalisme, on risque de tomber dans le « *paradoxe de la démonstration* », paradoxe classique rappelé par Otte (Otte, 1994, p. 304) : Comment une démonstration peut conduire à des connaissances nouvelles si elle se réduit à une simple tautologie ? Dans ce cas, les conclusions seraient déjà incluses dans les prémisses.

¹ « Apodictique: d'une évidence irréfutable, absolue » (dictionnaire encyclopédique Le Petit Larousse)

Il faut bien distinguer démonstration de dérivation : une démonstration est liée à des aspects conceptuels, elle possède un contenu sémantique lorsqu'une dérivation est un objet syntaxique de quelque système formel (Arzarello, à paraître).

La dérivation concerne le formalisme syntaxique, c'est-à-dire que les propositions mathématiques sont des objets syntaxiques indépendants du contexte intertextuel². Un exemple en est le syllogisme d'Aristote : les propositions sont reliées entre elles à partir de leur forme syntaxique.

La démonstration concerne le formalisme logique (Arzarello à paraître). C'est une concaténation d'énoncés déterminée par des règles logiques. Cependant, le problème de sa validité n'est pas résolu. Une concaténation logique peut bien être fausse. L'objectif d'une démonstration est alors de rentrer de façon perspicace dans les « raisons formelles » qui expliquent pourquoi une conséquence logique est valide (Arzarello, à paraître). Elle est valide si les principes dont elle part et les règles logiques sont vraies. C'est pourquoi la démonstration ne peut pas s'éloigner de la théorie mathématique (Mariotti, 1997). La validité d'une démonstration est garantie par la déduction à condition qu'elle soit appliquée à l'intérieur d'une théorie mathématique de référence, c'est-à-dire d'un système de règles de déduction et de principes communément admis.

D'une certaine façon, la démonstration prend en compte l'aspect sémantique, lié au signifié. Elle est tellement reliée aux signifiés que quand on s'immerge dans la théorie pour construire une démonstration on a souvent besoin de construire des nouveaux concepts (Lakatos, 1976).

Les concepts dont la démonstration s'occupe sont des objets théoriques, construits cependant comme abstractions d'objets réels. Les mathématiques, et en conséquence les démonstrations, sont, d'une certaine façon, fermées à l'intérieur d'un domaine spécifique constitué par les concepts et les règles propres aux mathématiques. Cependant, il n'y a pas une nette séparation entre théorie mathématique et pratique réelle des mathématiques (Otte, 1994, p. 311).

Cette « mathématique » est le produit final d'un long travail de préparation. Les mathématiques en phase de gestation ressemblent à toute autre connaissance humaine au même stade de développement ; il faut imaginer un théorème avant de le démontrer. Selon Polya, « *le résultat du travail créateur du mathématicien est un raisonnement démonstratif, une preuve ; mais la preuve est découverte par un raisonnement plausible, elle est d'abord devinée* » (Polya, 1958, préface de l'auteur)

² Intertextuel : relatif à l'ensemble des relations qu'un texte entretient avec un autre ou avec d'autres, tant au plan de sa création, qu'au plan de sa lecture et de sa compréhension, par les rapprochements qu'opère le lecteur (Le petit Larousse).

Tout ce que nous apprenons de neuf sur ce monde implique le raisonnement plausible. Dans le raisonnement plausible l'essentiel est de distinguer une présomption (supposition qui n'est fondée que sur des signes de vraisemblance) d'une autre : une présomption plus raisonnable qu'une autre qui l'est moins.

Le travail qui précède une démonstration, c'est-à-dire le processus qui recueille les raisonnements plausibles, est une argumentation. Elle est l'expression d'un raisonnement possible.

Au cours de ce chapitre, nous présentons la problématique de la démonstration en didactique des mathématiques et son rapport avec l'argumentation.

La première section situe la démonstration au cœur des recherches en didactique des mathématiques : nous dégagions la problématique des rapports entre argumentation et démonstration. La deuxième section place ce rapport dans une problématique cognitive : nous analysons le point de vue de Duval qui essaie de relier l'aspect didactique à l'aspect cognitif. La critique de ce point de vue nous amène à caractériser l'argumentation en mathématique et la démonstration. C'est pourquoi la troisième section veut répondre aux questions « Qu'est qu'une argumentation en mathématique ? Et quel est son rapport avec une démonstration ? ». Nous présentons une partie historique et quelques théories linguistiques. A partir de ces dernières nous caractérisons l'argumentation et la démonstration en mathématiques.

1 La démonstration en didactique des mathématiques

Le thème de la démonstration est souvent sujet de débat dans le monde didactique. Plusieurs approches différentes ont traité le problème de l'apprentissage d'une démonstration : études épistémologiques pour caractériser une démonstration en mathématique, analyses des difficultés des élèves pour comprendre sa nature et son utilité, analyses des approches à la démonstration du côté de l'enseignant et de l'institution scolaire.

1.1 Comportement des élèves face à une démonstration

L'opposition entre l'objectif réel d'une démonstration et la mauvaise interprétation de cet objectif par élèves et enseignants est à la base d'une problématique didactique. L'objectif de la démonstration est de rendre valide un énoncé à l'intérieur d'un système théorique. La démonstration établit la validité d'un résultat, et pour n'importe quel mathématicien elle doit être établie de façon rigoureuse. D'une part, la validité est garantie par des règles et des axiomes supposés vrais qui sont donnés à priori. La démonstration se construit comme chaîne

déductive à partir des énoncés vrais. Néanmoins, les mêmes mathématiciens préfèrent des démonstrations qui favorisent la compréhension de la raison de la vérité (pourquoi cet énoncé est vrai ?) par rapport à l'adéquation formelle.

The surveyability of a proof, the holistic conveyance of its ideas in a way that makes them intelligible and convincing, is of much more importance than its formal adequacy (Hanna, 1991, p. 59).

L'irréfutabilité de la démonstration, son caractère de validité, sa nécessité doivent être compris et assimilés. Autrement, elle perd sa raison d'être. Il est inutile qu'elle soit valide si on ne comprend pas pourquoi elle est valide.

D'autre part, les élèves cherchent dans une démonstration une explication, ils s'efforcent de lire la démonstration comme outil pour convaincre soi-même et les autres. Cet effort est souvent demandé (explicitement ou implicitement) par les enseignants, sans donner aux élèves les outils pour y parvenir.

Néanmoins, comme De Villiers, nous croyons qu'une démonstration n'est pas un pré-requis de la conviction, au contraire c'est plutôt la conviction qui peut aider à la construction d'une démonstration.

Proof is not necessarily a prerequisite for conviction – to the contrary, conviction is probably far more frequently a prerequisite for the finding of a proof (de Villiers, 1990, p. 18).

Les élèves manifestent clairement des difficultés à distinguer démonstration et argumentation (Martin & Harel, 1989). La démonstration n'apparaît pas évidente lorsque l'évidence est souvent « démonstration » (Chazan, 1993).

Hanna (Hanna, 1989) fait une distinction entre les démonstrations qui montrent la vérité d'un théorème (*proofs that prove*) et les démonstrations qui expliquent (*proofs that explain*). Le rôle d'une démonstration n'est pas seulement de montrer la validité d'un théorème mais aussi de montrer les raisons de cette validité. Une démonstration devrait permettre de comprendre le théorème, pas seulement de dire qu'il est vrai mais aussi pourquoi il est vrai.

Souvent les élèves ont besoin de faire des essais, des vérifications empiriques, après une démonstration parce que la démonstration ne les convainc pas (Healy & Hoyles, 2000). Pourtant, nous croyons que, dans un contexte didactique, le rôle explicatif de la démonstration, sa compréhension, apparaît plus important que l'acceptation de la validité d'un théorème. « *While in mathematical practice the main function of proof is justification and verification, its main function in mathematics education is surely that of explanation* » (Hanna, 1995, p. 47)

En conséquence, une démonstration doit encourager la compréhension et prendre en compte le contexte de la classe et le vécu des élèves. « *A good proof, however, must not only be*

correct and explanatory, it must also take into account, especially in its level of detail, the classroom context and the experience of the students » (Hanna, 1995, p. 48).

C'est là qu'intervient l'importance d'un problème et de sa dévolution. Le problème doit être significatif pour l'élève.

Harel propose le principe de nécessité (*necessity principle*), c'est-à-dire le principe selon lequel l'élève doit voir la nécessité d'apprendre ce que l'enseignant veut lui enseigner « *For students to learn they must see the need of what we intend to teach them, where by 'need' it is meant intellectual need as opposed to social or economic need* » (Harel & Sowder, 1998, p. 266).

L'*intellectual need* se manifeste quand l'élève rencontre un problème qui ne peut pas être résolu par ses seules connaissances. Il est alors incité à apprendre un nouveau concept.

Cependant, Harel & Sowder ne distinguent pas la démonstration des autres argumentations, et dans ce contexte le principe de nécessité joue un rôle particulier. Nous pensons que le principe de nécessité peut aider à la construction d'une argumentation, mais pas nécessairement à celle d'une démonstration. Les élèves face à un nouveau problème ne seront sûrement pas capables de construire d'emblée une démonstration. Néanmoins, le principe de nécessité souligne l'importance de rendre significative une démonstration, en particulier quand les démonstrations ne sont pas construites par les élèves mais présentées par les enseignants. La démonstration doit pouvoir répondre aux doutes des élèves.

A proof is only meaningful when it answers the student's doubts, when it proves what is not obvious (Kline, 1973, p. 151).

Les élèves face à une démonstration déjà construite restent souvent sceptiques, ils ne réussissent pas à comprendre la garantie qu'une démonstration donne par rapport à une argumentation (Chazan, 1993; Healy & Hoyles, 2000). Les interviews de Healy & Hoyles (Healy & Hoyles, 2000, p. 425) montrent très bien, que les élèves préfèrent les argumentations narratives (c'est-à-dire les argumentations où les relations mathématiques et les raisonnements sont décrit en langage commun) qui utilisent des diagrammes, des exemples, parce qu'elles sont plus proches de leur façon d'exprimer une justification.

Il serait plus efficace que les élèves construisent eux-même les démonstrations au lieu qu'on les leur montre pour qu'ils puissent accomplir cet apprentissage. En effet, si les élèves construisent par eux-mêmes la démonstration, probablement ils doivent d'abord se convaincre. La construction de la démonstration devient alors un moyen pour se convaincre (Lakatos, 1976). La conviction ne passe pas par une démonstration mais par une argumentation. Pourtant, le problème se déplace : il ne s'agit plus de présenter des

démonstrations significatives, comme nous l'avons dit ci-dessus, mais d'apprendre aux élèves à construire des démonstrations à partir de leurs argumentations.

1.2 Apprentissage de la démonstration

Balacheff (Balacheff, 1988), s'appuyant sur la théorie des situations didactiques, suggérait de s'appuyer sur le rôle moteur de l'interaction sociale pour favoriser le développement des processus de validation (Balacheff, 1988, p.36). La démonstration a une dimension sociale lorsqu'elle est un moyen pour s'adresser à un individu que l'on veut convaincre, elle se rapproche alors de façon évidente de l'argumentation. L'individu s'engage dans la construction d'une démonstration lorsqu'il a pris une décision à propos de la vérité d'un énoncé, ce qui relève d'une démarche argumentative. L'interaction sociale permet de prendre cette décision, et donc de passer à la validation de l'énoncé en jeu. « *L'argumentation est ainsi constitutive des processus de validation engagés dans un contexte social* » (Balacheff, 1988, p. 574). Cependant, Balacheff distingue l'argumentation de la démonstration reprenant l'idée commune que l'objectif de l'argumentation est d'obtenir l'adhésion de l'interlocuteur sans poser nécessairement le problème de la vérité de l'énoncé (Balacheff, 1988, p. 574). Les travaux récents contredisent cette position, c'est ce que nous explorons dans notre travail ; Mais il nous faut pour cela préciser ce que sont les rapports entre argumentation et démonstration.

Dans ces premiers travaux, la démonstration, contrairement à l'argumentation, est un type de preuve (Balacheff, 1988). Une distinction essentielle est proposée entre preuves pragmatiques et preuves intellectuelles. Les preuves pragmatiques recourent à l'action effective ou à l'ostension³, alors que les preuves intellectuelles se détachent de l'action et reposent sur les propriétés d'entités et leurs relations (Balacheff, 1988, p. 45). Parmi ces preuves, on distingue quatre principaux types : l'empirisme naïf, l'expérience cruciale, l'exemple générique, l'expérience mentale.

Selon Balacheff, il y a une rupture entre d'une part l'empirisme naïf et l'expérience cruciale et d'autre part l'exemple générique et l'expérience mentale. Pour les deux premiers types de preuves, la vérité est fondée sur une constatation alors que pour les deux derniers elle est fondée sur la raison. Il y a un changement dans la façon d'envisager le problème de la validité d'une assertion. Pour l'exemple générique et l'expérience mentale, il ne s'agit pas de montrer la vérité de la proposition en question, « *mais d'établir le caractère nécessaire de sa validité*

en dégageant des raisons » (Balacheff, 1988, p. 55). Seuls ces deux derniers types de preuve permettent de se rapprocher d'une problématique de la validation.

Les types de preuve sont distingués par le besoin de généralité et le niveau de connaissances requis (Balacheff, 1988, p. 56). Ces types de preuve se retrouvent mêlés les uns avec les autres dans les productions des élèves, ils ne sont donc pas caractéristiques des élèves, mais d'une économie de leur activité dans un contexte donné. Reste à comprendre comment se fait le passage d'un type de preuve à un autre, les travaux de l'époque ne répondent pas à cette question.

Harel & Sowder (Harel & Sowder, 1998) introduisent l'idée de démonstration à partir de l'observation empirique des activités d'étudiants. Le point de vue et l'analyse sont complètement différents de ceux de Balacheff. Ils ne soulignent jamais de différences entre une « preuve déductive » et des « preuves empiriques » : le nom « Proof » est utilisé à la fois pour indiquer les démonstrations deductives et formalisées, et donc acceptées dans la communauté mathématique, et pour de simples argumentations.

Selon Harel & Sowder, n'importe quel processus de justification qu'ils observent est considéré comme un processus de démonstration. Dédutions, évidences empiriques, intuitions, croyances personnelles, toutes ces manifestations peuvent être considérées comme recevables pour établir la validité d'une assertion.

A partir de résultats d'expérimentations conduites dans plusieurs classes, Harel & Sowder développent une classification fine des *proofs schemes*. Ils proposent trois catégories de *proof schemes* classées selon différents niveaux :

- *External conviction proof schemes*. Ces schémas s'appuient sur une justification « rituelle » (c'est-à-dire que l'élève suit un processus de résolution déjà utilisé) ou sur l'autorité (par exemple de l'enseignant) ou sur l'utilisation d'un langage symbolique sans pour autant véritablement le comprendre.
- *Empirical proof schemes*. Ces schémas s'appuient sur l'expérience ou sur des faits. Ils se basent sur des mesures, sur des perceptions, sur des exemples. Par exemple le raisonnement inductif, est un type de *empirical proof scheme*.
- *Analytical proof schemes*. Ces schémas s'appuient sur une validation qui utilise des déductions logiques. C'est dans cet ensemble de schémas que l'on retrouve la

³ Ostensive : se dit d'une procédure de définition ou de vérification qui consiste à expliquer le sens d'un mot ou à justifier une assertion sans utiliser d'autres mots ou assertions, mais par une indication extralinguistique (Le Petit Larousse)

démonstration déductive : *axiomatic proof scheme*. Il y a trois niveaux d'*axiomatic proof scheme* : intuitif (*intuitive*), structural (*structural*) et axiomatique (*axiomatizing*).

Malgré le danger d'un aplatissement de la démonstration sur les autres types de preuves, les *proof schemes* sont retenus pour une description des productions d'une démonstration par un élève. L'hypothèse d'Harel & Sawder est que, pour produire une démonstration axiomatique, l'élève doit passer graduellement par les autres types de preuve. Même si cela n'est pas toujours le cas, cette hypothèse prend en compte la nécessité de passages graduels ayant comme objectifs la construction d'une démonstration.

C'est à partir de ces recherches que nous avons senti la nécessité de distinguer argumentation et démonstration et d'en étudier les rapports afin d'analyser les difficultés que les élèves peuvent rencontrer dans le passage de l'une à l'autre.

Nous considérons d'abord le point de vue de Duval.

2 Analyse cognitive des rapports entre argumentation et démonstration en vue d'une analyse didactique

Duval affirme qu'une analyse didactique sur les rapports entre argumentation et démonstration en mathématique nécessite une analyse cognitive. En particulier, parce qu'une analyse cognitive pourrait permettre l'identification des caractéristiques communes, ou au contraire opposées, de l'argumentation et de la démonstration.

Un apprentissage qui rende accessible aux élèves le fonctionnement d'un raisonnement valide doit, selon Duval, prendre en compte des contraintes spécifiques qui d'habitude ne sont pas considérées dans l'enseignement de la démonstration. L'hypothèse est la suivante :

Un apprentissage qui s'en tient aux aspects de surface de l'expression du raisonnement déductif ou à ses aspects heuristiques est voué à l'échec, parce qu'il méconnaît la complexité du fonctionnement cognitif sous-jacent au raisonnement (Duval, 1995, p. 303).

Dans la classe, l'apprentissage de la démonstration semble relever d'une activité cognitive spécifique, tandis que l'argumentation semble utiliser les règles de la communication. L'objectif de Duval est de montrer les différences sous-jacentes communes à ces deux processus afin de déterminer et comprendre les difficultés que les élèves rencontrent quand ils abordent une activité démonstrative.

L'analyse de Duval révèle une telle distance entre argumentation et démonstration, et son point de vue didactique apparaît tout à fait radical : les approches didactiques doivent tenir compte de la différence entre valeur épistémique théorique et valeur épistémique sémantique

d'une proposition, entre énoncé-tiers d'un pas d'argumentation et énoncé tiers d'un pas déductif, entre les enchaînements des pas de raisonnement dans l'argumentation et dans la démonstration. Il propose un enseignement de la démonstration qui prenne en compte les graphes propositionnels. L'enseignement des règles de construction d'un pas déductif doit être centré, insiste-t-il, sur le statut des propositions.

Les conséquences didactiques dégagées par Duval sont parfaitement en accord avec son analyse cognitive. Cependant nous croyons que le caractère radical de son analyse n'est pas dû à son point de vue didactique mais à l'analyse cognitive qu'il propose. Nous allons développer plus en détail ces considérations.

2.1 Duval : une approche cognitive de l'argumentation

L'analyse de Duval sur l'argumentation veut montrer la différence entre argumentation et toute autre activité discursive, et son rapport avec la déduction mathématique. D'après Duval, l'argumentation et la déduction sont deux formes de raisonnement qui mobilisent des propositions.

Le raisonnement est la démarche d'une inférence explicite qui dérive l'affirmation d'une proposition à partir d'une ou plusieurs propositions données (ibid. p. 209).

Le raisonnement est « *orienté vers un énoncé cible, c'est-à-dire vers la proposition à justifier* » et il est « *centré sur la valeur, logique ou épistémique, de cette proposition et pas sur son contenu* » (ibid. p. 217).

La distinction entre argumentation et déduction porte sur deux analyses : l'analyse fonctionnelle et l'analyse structurelle du raisonnement. L'objectif de ces analyses est de montrer de façon approfondie la distance entre argumentation et démonstration. Cette distance peut expliquer du point de vue didactique l'impuissance apparente de l'enseignant à réduire la difficulté que les élèves rencontrent dans l'apprentissage de la démonstration.

2.1.1 Analyse fonctionnelle et analyse structurelle du raisonnement

Les analyses fonctionnelle et structurelle du raisonnement, présentées par Duval, veulent montrer la distance entre raisonnement argumentatif et raisonnement déductif.

L'analyse fonctionnelle porte sur la nature du raisonnement ; l'analyse structurelle caractérise ses diverses formes.

2.1.1.1 Analyse fonctionnelle du raisonnement

L'analyse fonctionnelle, apportée par Duval, prend en compte la double distinction entre valeur épistémique et valeur de vérité⁴ d'une proposition et entre son statut et son contenu (ibid. p. 215).

Selon Duval une proposition peut avoir une valeur logique : vraie, fausse ou indéterminée ; et une valeur épistémique : évidente, incertaine, absurde etc. Nous reprenons à notre compte cette idée. De plus, la validité d'un raisonnement n'implique pas une croyance. Une proposition peut être fausse mais celui qui l'énonce peut « croire » qu'elle soit vraie. Cette « croyance » est la valeur épistémique. Elle dépend des connaissances du sujet, elle est complètement subjective, et peut changer selon les interlocuteurs.

La valeur épistémique est le degré de fiabilité que possède ce qui est énoncé dans la proposition. Dans l'instant même de son appréhension, [...] le contenu d'une proposition apparaît évident, ou certain ou seulement vraisemblable, ou plausible ou simplement possible, ou impossible, ou encore absurde [...] Naturellement, une même proposition n'a pas nécessairement la même valeur épistémique pour deux personnes différentes (ibid. pp. 218 - 219).

La valeur logique est la valeur de vérité de la proposition. Cette valeur peut être soit vraie soit fausse soit indéterminée. Elle ne dépend pas du sujet et de la compréhension de son contenu, elle « résulte de procédures spécifiques de vérification ou de preuve » (ibid. p. 219)

La distinction entre la valeur épistémique d'une proposition et sa valeur logique réside dans des processus différents de détermination : la valeur épistémique est liée au contenu alors que la valeur logique est liée à des procédures externes à la compréhension du contenu.

Une proposition énoncée n'est pas seulement caractérisée par ses valeurs épistémique et logique, elle a aussi un statut qui dépend du contexte. « *Le statut d'une proposition est ce qui détermine sa place dans l'organisation discursive d'un ensemble de propositions* » (ibid. p. 223). Dans un pas de raisonnement, Duval distingue deux statuts : le statut théorique et le statut opératoire. Le statut théorique détermine l'organisation et la possibilité de développement d'une proposition à l'intérieur d'un cadre théorique ; elle peut avoir le statut de définition, d'axiome, de règle, etc.

En revanche, le statut opératoire détermine l'organisation interne et la possibilité du fonctionnement d'une proposition ; elle peut avoir le statut de prémisse, de conclusion, d'énoncé-tiers.

⁴ Nous l'appellerons plutôt valeur de validité pour distinguer la vérité sémantique de la validité formelle (conséquence logique). Cependant, dans cette partie de la thèse, nous avons respecté le vocabulaire de l'auteur.

A partir de ce cadre, Duval soutient que si le contexte d'énonciation de la proposition est théorique, le double statut, théorique et opératoire, est prioritaire par rapport au contenu de la proposition. Autrement dit, « *lorsqu'une proposition est énoncée dans un cadre théorique, la valeur épistémique théorique, supplante, ou refoule, la valeur épistémique sémantique* » (ibid. p. 225). De plus, il soutient que le « *statut théorique détermine le statut opératoire des propositions et leur valeur épistémique théorique* » (ibid. p. 227).

En conséquence, il soutient que dans l'argumentation, la valeur épistémique est strictement liée au contenu des propositions, alors que dans un contexte théorique (comme celui de la démonstration), la valeur épistémique dépend du statut de la proposition et non de son contenu. Cette position est tout à fait radicale : la séparation ainsi décrite est trop nette. En classe, une démonstration peut ne pas convaincre les élèves. Le statut des propositions ne correspond pas nécessairement à leur valeur épistémique. La démonstration donne la validité d'un énoncé, mais cela n'implique pas que l'élève « voit » la vérité de l'énoncé. Une démonstration peut être trop loin de la compréhension de l'élève.

Les argumentations scientifiques, et même les juridiques, ne s'appuient pas seulement sur des valeurs épistémiques. Nous sommes d'accord avec le fait qu'il n'est pas nécessaire pour l'argumentation de disposer d'un cadre théorique de référence, mais ce cadre peut exister. On peut trouver des argumentations, même au dehors des mathématiques, qui disposent d'un cadre de référence : les argumentations juridiques sont strictement liées avec les principes de la loi ; les avocats suivent des « schémas linguistiques » précis — voire formalisés — pour convaincre le jury.

Duval a une vision « formaliste » de la démonstration mais il est très difficile que les élèves, face à un problème de démonstration produisent d'emblée une démonstration au sens formel.

Le caractère d'apodicticité n'est pas présent dans la classe : il est vrai qu'une proposition démontrée est une proposition vraie, mais dans la classe il y a des énoncés vrais qui ne sont pas des théorèmes. Un théorème est un énoncé vrai institutionnalisé, c'est à dire auquel l'enseignant ajoute en quelque sorte une valeur épistémique liée à son autorité.

Duval soutient qu'un pas de raisonnement valide confère à la conclusion une valeur épistémique spécifique, l'apodicticité : « *Pour qu'un pas de raisonnement soit valide il faut qu'à partir des prémisses il n'y ait qu'une seule conclusion possible.* » (ibid. p. 269). Et cela, comme nous l'avons déjà remarqué, n'est pas toujours vrai. La validité d'un énoncé est assurée par une démonstration, mais cela n'est pas toujours évident pour l'élève. Une proposition valide est sûrement vraie mais les élèves ne s'aperçoivent souvent pas de cette validité. En revanche, nous croyons que l'argumentation, plus voisine au langage de l'élève,

peut l'aider à voir la vérité de l'énoncé. Et cette vision qu'apporte l'argumentation est au fond un préalable à l'entrée dans une pratique de la démonstration.

2.1.1.2 Analyse structurale du raisonnement

L'analyse structurale du raisonnement présentée par Duval, relève de deux niveaux : l'organisation et la structure d'un pas de raisonnement, et « l'enchaînement » des pas de raisonnement.

2.1.1.2.1 Structure d'un pas de raisonnement

D'après Duval le schéma d'un pas de raisonnement dans une argumentation peut être une inférence discursive, une inférence sémantique, un syllogisme. Nous présenterons notre point de vue à partir de ce découpage.

Les inférences discursives sont celles qui utilisent un énoncé-tiers, mais, selon Duval, elles n'ont pas de statut opératoire. Elles fonctionnent par « *subsumption d'un cas particulier sous une règle générale, par inférence sémantique, par énumération de cas particuliers, par choix privilégiant soit les relations intentionnelles soit les relations extensionnelles entre les expressions prédicatives* » (Duval, 1992-93, p. 53). C'est-à-dire que ces inférences s'appuient sur l'énoncé-tiers comme dans un pas de déduction, mais dans l'argumentation elles dépendent du contenu, et l'énoncé tiers est souvent implicite et pas toujours explicitable.

Au contraire, selon Duval, le pas d'un raisonnement déductif a une structure ternaire, les propositions ont un statut opératoire et l'énoncé-tiers est toujours présent. « *Les contraintes d'organisation propres au fonctionnement du raisonnement déductif ne sont liées à aucune forme linguistique particulière. En effet, ces contraintes portent sur le statut opératoire des propositions et pas sur leur contenu.* » (Duval, 1995, p. 255).

Pourtant, depuis Toulmin (Toulmin, 1958) on peut reconnaître aux propositions un statut opératoire (voir le paragraphe 3.2.2.2) en reconstruisant un schéma ternaire qui est en général non explicite mais nécessaire à l'activité argumentative ; en effet, nous pouvons distinguer dans un argument la prémisse, la conclusion et le permis d'inférer (Toulmin, 1958). L'énoncé tiers, c'est à dire le permis d'inférer, permet de passer d'une prémisse à sa conclusion.

De plus, nous relevons que l'énoncé tiers peut être implicite même dans un pas de déduction d'une démonstration. En particulier dans la classe il y a souvent des élèves qui déduisent une conclusion à partir d'une prémisse sans rappeler le théorème qui garantit ce passage. Les inférences dans l'argumentation s'appuient principalement sur les contenus, mais même dans un pas déductif on peut montrer que les propositions ne s'éloignent pas du contenu.

Une inférence sémantique est de la forme [prémisse→conclusion]. Elle est « *liée à la compréhension d'une langue : pas de statut opératoire et pas d'énoncé tiers* » (Duval, 1995, p. 238)

L'exemple fourni par Duval est celui utilisé par Ducrot :

Prémisse : Il ne prend plus de caviar

Conclusion : Il prenait du caviar

Le passage de prémisse à conclusion est fait au niveau sémantique ; ce type d'inférence « *dépend de l'organisation sémantique du lexique de la langue* » (Duval, 1995, p. 242)

La locution « ne... plus » exprime une fonctionnalité au sens d'Ascombe et Ducrot (Ascombe et Ducrot, 1983) ; implicitement elle garantit que la conclusion est déjà dans la prémisse. C'est ici qu'il faut rechercher un permis d'inférer implicite déterminé par une locution linguistique : « ne... plus » implique qu'avant « il y avait ».

De la même façon nous sommes en contradiction avec Duval à propos du syllogisme. Les propositions du syllogisme ont, selon Duval, un statut opératoire, pourtant il n'y a pas d'énoncé tiers :

Les syllogismes classiques, ou de forme aristotélicienne, présentent deux différences qui les distinguent de la déduction mathématique. La première est que le passage des prémisses à la conclusion se fait directement et non par un énoncé tiers. La seconde est que les prémisses ne peuvent pas être indépendantes l'une de l'autre, elles doivent avoir un terme commun pour qu'un pas de raisonnement soit possible (Duval, 1995, p. 240).

Il se peut, comme le remarque Duval, que le syllogisme n'ait pas d'énoncé tiers, pourtant l'une des prémisses peut être considérée comme un permis d'inférer au sens de Toulmin (Toulmin, 1958). Considérons le syllogisme suivant.

P₁ : Tous les hommes sont mortels

P₂ : Socrate est un homme

C : Socrate est mortel

Nous pouvons considérer la première prémisse P₁ comme énoncé tiers en ce qu'elle constitue le permis d'inférer. Ce syllogisme a la structure homologue d'un pas ternaire : la deuxième prémisse P₂ comme donnée et la conclusion.

Les syllogismes ne sont pas loin des pas de déduction qui s'effectuent par un énoncé-tiers. Au contraire, du point de vue structurel le syllogisme est comparable avec une déduction.

D'ailleurs, Aristote même a inventé le syllogisme comme forme structurale d'un raisonnement heuristique (argumentation) et analytique (démonstration).

En conséquence, nous ne reprenons pas la thèse de Duval à propos du manque de correspondance entre argumentation et démonstration. En revanche, en nous appuyant sur Toulmin (Toulmin, 1958), comme nous le verrons plus loin, nous soutenons la thèse selon laquelle argumentation et démonstration ont la même structure : une structure ternaire.

2.1.1.2 Structure de l'enchaînement des pas de raisonnement

L'organisation interne d'un pas de raisonnement vise la modification de la valeur épistémique de la conclusion qui l'établit, lorsque l'organisation de plusieurs pas a pour but la continuité entre les pas différents, « *l'enchaînement des pas doit donc obéir à des critères de cohérence discursive* » (Duval, 1995, p. 246).

Selon Duval, les pas dans l'argumentation sont reliés par connexion extrinsèque : « *Les inférences sémantiques et les inférences discursives articulent les propositions en fonction de leurs relations de contenu et non en fonction de leur statut* » (ibid. p. 248). L'inférence est une sorte de réinterprétation : « *Les arguments s'ajoutent les uns aux autres... Les propositions admises ne sont pas recyclées mais réinterprétées sous des points de vue différents...* » (ibid. p. 241).

D'après Toulmin, comme nous le verrons dans la suite, l'enchaînement des pas dans l'argumentation non seulement est possible mais les propositions qui le constituent assument un statut bien précis dans l'argumentation.

2.1.2 Conséquences de l'analyse présentée

L'objectif de Duval, est de mettre en évidence l'hétérogénéité entre argumentation et démonstration et en conséquence les différents traitements cognitifs sous-jacents aux deux raisonnements.

... Il est important de voir que cette hétérogénéité (dans le cas d'un pas de déduction et dans le cas d'un pas d'argumentation) n'est pas seulement « logique » mais qu'elle est aussi cognitive, c'est-à-dire relative à des modes d'appréhension par un sujet (Duval, 1992-93, p. 47).

Comme nous l'avons dit, nous sommes en désaccord avec la nette distinction entre argumentation et démonstration et avec les conséquences didactiques qui en découlent.

Avant d'aborder une analyse cognitive entre argumentation et démonstration nous voulons caractériser une argumentation en mathématique et une démonstration pour considérer leurs rapports.

3 L'argumentation en mathématique

Malgré notre désaccord sur la nette séparation entre argumentation et démonstration, proposée par Duval, nous reconnaissons que l'un des mérites de son analyse est de fournir une caractérisation de l'argumentation. C'est à partir de celle-ci que nous nous proposons de caractériser une argumentation en mathématique. Notre objectif est d'élargir la caractérisation de l'argumentation de Duval pour qu'une argumentation en mathématique puisse en faire partie.

Selon Duval, les raisonnements en mathématiques sont des démonstrations. Au contraire, nous pensons que dans les pratiques mathématiques les raisonnements argumentatifs sont plus fréquents que les raisonnements démonstratifs.

Le besoin de parler d'argumentation en mathématique dérive du besoin de caractériser les processus déployés pendant la résolution d'un problème, c'est-à-dire les processus de découverte, les processus qui construisent une conjecture et ceux qui l'explorent. Ces processus ne sont pas des démonstrations. Les processus qui justifient un énoncé ne proviennent pas toujours d'une démonstration. Souvent les justifications en mathématique sont des argumentations. Cela ne veut pas dire que toutes les justifications mathématiques sont des argumentations mathématiques mais qu'une particularité de l'argumentation en mathématique est son caractère justificatif. Nous nous éloignons de Yackel (Yackel, 2001) qui considère argumentation et justification détachées en mathématique. La « justification » argumentative n'est pas simplement l'établissement d'un bien fondé pour l'admission d'une affirmation. Ce caractère de justification s'exprime dans le raisonnement.

Le raisonnement est la démarche d'une inférence explicite qui dérive l'affirmation d'une proposition à partir d'une ou plusieurs propositions données (Duval, 1995, p. 209). Comme Duval nous croyons que l'argumentation est un raisonnement, et l'argumentation en mathématique est également un raisonnement.

En fait, les raisonnements mathématiques ne peuvent pas être réduits aux raisonnements démonstratifs qui permettent de déduire des conclusions à partir de prémisses données par le moyen de règles d'inférence explicitées à l'avance. Il y a des raisonnements mathématiques, spécifiques à l'argumentation qui veulent simplement donner des « raisons » de l'acceptation ou de la réfutation de certaines propositions. Les « raisons » permettent l'explicitation d'une

argumentation à partir d'un raisonnement. Comme nous le verrons plus loin, d'après Toulmin, l'argumentation a une structure ternaire, composée par des données, une conclusion et un permis d'inférer. Les « raisons » sont tous les permis d'inférer possibles qui composent l'argumentation.

C'est à partir de ces considérations que nous affirmons que l'argumentation en mathématique est avant tout une justification rationnelle.

Nous remarquons que l'argumentation en mathématique se détache de l'explication. L'argumentation ne peut pas échapper à la rationalité comme le peut l'explication. L'explication en mathématique vise à faire comprendre, à clarifier des aspects de la pensée qui pourraient ne pas apparaître évidentes aux autres (Yackel, 2001). L'argumentation ne se contente pas de la compréhension, elle veut convaincre.

Dans la suite, nous présentons une première partie qui concerne le développement d'une théorie de l'argumentation. En particulier, nous examinons les conditions sociales qui ont permis la naissance d'une théorie de l'argumentation, puis nous voyons dans quelle mesure ces conditions sont encore d'actualité.

Dans la deuxième partie, à partir de quelques recherches linguistiques sur l'argumentation, nous essayons de dégager et développer les caractéristiques d'une argumentation en mathématique ; comme Duval nous distinguons entre caractéristiques fonctionnelles et caractéristiques structurelles. Les travaux sur l'argumentation sont nombreux et profondément différents les uns des autres. Nous considérons ceux qui nous permettent de déterminer les propriétés spécifiques d'une argumentation en mathématique.

3.1 Développement d'une théorie de l'argumentation

L'apparition des premières théories de l'argumentation est attestée autour des années 450 avant J.-C. à Syracuse. La cité, restée longtemps aux mains de tyrans, a connu sous l'influence grecque, une révolution démocratique. Cette révolution « *se traduit immédiatement par une extraordinaire prééminence de la parole sur tous les autres instruments de pouvoir* » (Breton et Gauthier, 2000, p. 11). La parole devient un outil politique, fondamental pour communiquer ses propres opinions et pour persuader les autres de ses propres idées. Cette attention à la parole s'exprime dans la communication et dans ses modes de transmission, de livraison et d'échange. C'est dans une société démocratique, où les discussions, les débats, les désaccords, peuvent vivre, qu'une activité de communication, comme l'argumentation, peut se développer. Elle ne peut pas s'exercer dans un système

dictatorial ou totalitaire, où la liberté de communication est fortement limitée. Son développement est la réponse à un besoin particulier : susciter l'adhésion d'un interlocuteur à une opinion. Elle naît donc avec une finalité persuasive intrinsèque, celle de convaincre.

Un des traits caractéristiques de la société grecque, même archaïque, est 'l'agon', la rivalité, le combat dont les concours olympiques sont une forme pacifique. L'homme grec aime susciter des situations conflictuelles et s'opposer à des forces concurrentes ; il cherche un adversaire qui lui permet de s'affirmer et de consolider ses opinions. Afin de défier l'autre il est capable de défendre des opinions extrêmes. On reconnaît ce même esprit dans la prédilection des Grecs pour les joutes oratoires et dans leur habilité à perfectionner les techniques rhétoriques. La civilisation grecque classique est une civilisation de la parole, dans laquelle les systèmes d'explication d'un monde, ne pouvant plus s'exprimer dans le langage de mythes, se présentent comme problèmes soumis à la discussion, susceptibles de réponses affirmatives ou négatives (Dahan-Dalmedico, Peiffer, 1986, p. 45).

Dans une telle société une théorie de l'argumentation devient nécessaire ; des techniques oratoires se développent. Le domaine qui rassemble les théories de l'argumentation prend rapidement le nom grec de 'techné rhétoriké', l'art rhétorique.

La rhétorique est initialement l'art de convaincre dans des situations concrètes et ayant le but de persuader un auditoire.

L'argumentation se développe comme théorie «fonctionnelle» : elle répond à un besoin, celui de persuader un auditoire. Aristote a été le premier à construire une théorie systématique de la rhétorique, dont la technique, indifférente à la morale, est définie comme « *la faculté de découvrir spéculativement ce qui, dans chaque cas, peut être propre à persuader* » (Rhétorique, livre I, 2, 1355b). C'est une technique d'argumentation de la vraisemblance et non de la vérité. Le but « *est de trouver une méthode qui nous mette en mesure d'argumenter sur tout problème proposé, en partant de prémisses probables* » (Topiques, I, 100a, 18).

Cependant, la rhétorique n'est pas la seule technique disponible pour persuader un auditoire.

Aristote distingue trois domaines où s'exerce l'art du discours : *rhétorique*, *dialectique* et *analytique* (appelée ensuite logique). Dans sa classification il fait voisiner rhétorique et dialectique parce qu'elles portent sur des questions communes à tous les hommes et ne relèvent pas de la science. Par contre, l'analytique est une argumentation scientifique.

Rhétorique et dialectique sont deux formes de rationalité non scientifique. Elles sont des formes d'argumentation dialogique, c'est-à-dire adressées à un public. Cependant, la dialectique s'adressait à un interlocuteur bien conscient du sujet de l'argumentation, et capable de répondre aux questions ou de réfuter les arguments de celui qui argumente. En

revanche, la rhétorique s'adressait à un auditoire plutôt silencieux et composé par plusieurs personnes ; celui qui argumentait pouvait utiliser n'importe quelle méthode, n'importe quelle stratégie à fin de persuader ses auditoires.

Les argumentations rhétorique et dialectique n'amènent pas nécessairement à de vraies conclusions car les principes de départ ne sont pas nécessairement vrais. Cependant, celui qui fait de la dialectique part de principes ("endoxa") qu'il croit être vrais, alors que celui qui fait de la rhétorique n'est pas nécessairement convaincu de la vérité des affirmations qu'il défend.

L'analytique est une forme de rationalité scientifique qui n'est pas nécessairement destinée à un public, c'est une forme d'argumentation monologue. Elle est l'outil (*organon*) qui doit rendre possibles les raisonnements corrects dans les environnements scientifiques.

Cette classification nous permet de situer l'argumentation en mathématique. D'une certaine façon, l'analytique correspond à la démonstration qui construit des raisonnements corrects en mathématiques. La dialectique, qui n'amène pas nécessairement à de vraies conclusions mais qui part des principes vrais pour celui qui argumente, correspondrait à l'argumentation en mathématique.

Quand les mathématiques sont en construction, quand on est en train de se demander si un énoncé mathématique est vrai, quand on cherche une solution pour un problème, l'argumentation utilisée est la dialectique. Elle n'est pas analytique parce que les prémisses ne sont pas nécessairement vraies. Elle n'est pas non plus rhétorique parce que celui qui fait une argumentation en mathématique croit que les principes dont il part sont vrais.

Cependant, par rapport à Aristote, nous croyons que la distinction cruciale n'est pas entre analytique et dialectique/rhétorique, mais plutôt entre rhétorique et dialectique/analytique. En effet dialectique et analytique ont une finalité commune : déterminer la vérité. L'objectif d'une argumentation rhétorique est au contraire de persuader l'interlocuteur sans nécessairement entrer dans une problématique de la vérité, en s'appuyant par exemple sur les sentiments de l'auditoire. Les mathématiques, dans leur nature, se basent sur le vrai. En conséquence, les argumentations doivent « avoir » la recherche de la vérité comme fonctionnalité principale.

Néanmoins, à côté d'une « théorie fonctionnelle » de l'argumentation, dans laquelle Aristote éloigne les trois formes du discours, il développe une « théorie structurelle », dans laquelle rhétorique, dialectique et analytique sont caractérisées par la même structure.

Aristote identifie le syllogisme comme structure commune aux trois formes du discours. Le syllogisme est défini comme “*un discours dans lequel certaines choses étant posées, une autre chose différente d’elles en résulte nécessairement*” (Topiques, 100a 25)

Le découpage du discours en ses éléments premiers permet de faire une analyse de sa structure formelle. Dans l’élaboration de l’*Organon*, Aristote considère des types différents de discours pour déterminer les règles avec lesquelles on peut prendre un point de vue formel, sans même prendre en compte le contenu.

La doctrine du syllogisme étudie la façon correcte selon laquelle les propositions sont mutuellement en rapport. Un syllogisme est composé de trois propositions : deux prémisses et une conclusion qui relie les deux prémisses. La position des termes à l’intérieur des propositions détermine la figure du syllogisme. Il y a trois figures différentes:

la première figure est celle dans laquelle le terme moyen est sujet de la prémisses majeure et prédicat dans la prémisses mineure ;

la deuxième figure est celle dans laquelle le terme moyen est prédicat dans les deux prémisses ;

la troisième figure est celle dans laquelle le terme moyen est sujet dans les deux prémisses⁵.

A partir de cette classification Aristote identifie les syllogismes valides, c’est-à-dire toutes les combinaisons possibles, où prémisses et conclusions forment une inférence correcte.

Cependant Aristote est bien conscient que la validité du syllogisme n’implique pas sa vérité : le syllogisme peut être logiquement correct mais partir de prémisses fausses, et conduire à une proposition fausse.

Au syllogisme dialectique (“*épichérème*”), qui “*conclut des prémisses probables*” (Topiques, 100a, 25), correspond le syllogisme rhétorique (“*enthymème*”), qui ne “*conclut qu’en apparence de prémisses probables ou paraissant probables*” (Topiques, 100a, 25).

A notre avis, il y a deux idées de base à retenir de la théorie du syllogisme :

- Le syllogisme représente la première tentative de définir une structure d’argumentation composée par trois propositions.
- Le syllogisme fait de l’argumentation l’expression d’un raisonnement nécessaire. Dans le syllogisme, chaque proposition est nécessairement déduite à partir de deux prémisses, qu’elles soient universelles ou particulières.

⁵ On appelle *majeure* la prémisses qui contient le *grand extrême*, c’est-à-dire le terme qui devient prédicat dans la conclusion. On appelle *mineure* la prémisses qui contient le *petit extrême*, c’est-à-dire le terme qui devient sujet dans la conclusion. La majeure s’écrit avant la mineure. Le *moyen terme* apparaît dans chacune des prémisses, mais pas dans la conclusion.

Nous sommes intéressée à la théorie aristotélicienne parce qu'elle nous a permis de focaliser deux caractéristiques de l'argumentation en mathématique : l'une fonctionnelle et l'autre structurelle. Dans la dialectique, nous avons identifié certaines caractéristiques de l'argumentation en mathématique. Comme la dialectique, l'argumentation en mathématique a une finalité : convaincre. Elle doit partir de prémisses que l'on croit être vraies et à partir de celles-ci amener à une conclusion. En outre, le syllogisme fournit un schéma pour décrire la structure de l'argumentation. Cette structure représentera l'élément de liaison entre argumentation et démonstration. C'est donc à partir d'Aristote que, d'une certaine façon, argumentation et démonstration ne sont pas aussi éloignées qu'elles le paraissent souvent.

Le passage direct des théories anciennes aux modernes est justifié par le fait que les théories sur l'argumentation ont eu une longue période de latence jusqu'à l'époque contemporaine :

L'argumentation a une histoire théorique sinueuse. Pleinement reconnue comme objet de recherche dès l'aube de la civilisation gréco-romaine, elle traverse ensuite une longue période de latence relative entrecoupée de quelques soubresauts pour connaître une renaissance à l'époque contemporaine (Breton et Gauthier, 2000, p. 3).

3.2 L'argumentation en mathématique à la suite des théories linguistiques contemporaines

Nous voulons caractériser l'argumentation en mathématique à partir des considérations développées par des théories linguistiques contemporaines (Plantin, 1990 ; Toulmin, 1958 ; Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958; Ascombe et Ducrot, 1983). Nous découpons en deux branches la caractérisation de l'argumentation :

- Caractéristiques fonctionnelles de l'argumentation,
- Caractéristiques structurelles de l'argumentation.

Les caractéristiques fonctionnelles déterminent la finalité de l'argumentation, son utilité, son rôle à l'intérieur d'un discours. Les caractéristiques structurelles permettent de définir sa structure.

3.2.1 La fonctionnalité de l'argumentation en mathématique

L'argumentation est un processus de transmission des contenus, des idées, des valeurs épistémiques. Ce sont des éléments évolutifs qui caractérisent la finalité d'une argumentation. Elle a toujours un objectif qui détermine son orientation. Lorsqu'une argumentation se construit, les contenus changent, les idées prennent forme, les valeurs épistémiques évoluent,

progressent ou décroissent ; une « direction » vient à se définir, et en conséquence sa fonctionnalité apparaît.

Nous voulons remarquer que la fonctionnalité dont nous parlons, ne s'exprime pas par la fonction « intentionnelle » qu'Ascombe et Ducrot (Ascombe et Ducrot, 1983) reconnaissent à l'argumentation. Selon la *sémantique intentionnelle* la finalité d'une argumentation est exprimer les intentions du locuteur.

Ascombe et Ducrot opposent la sémantique intentionnelle à la sémantique vériconditionnelle qui assimile le sens d'un énoncé à l'ensemble de ses conditions de vérité [...]. La sémantique intentionnelle définit le sens d'un énoncé en référence aux intentions affichées ouvertement (linguistiquement) par le locuteur (Plantin, 1990, p. 37).

Nous sommes d'accord avec le fait que « l'activité d'argumentation est coextensive à l'activité de parole. Argumenter c'est parler... » (Anscombe et Ducrot, 1983, p. 38).

L'argumentation se sert de la langue naturelle comme outil de communication entre celui qui argumente et son interlocuteur. L'argumentation en mathématique a une direction, mais le sens d'un énoncé n'est pas réduit à la visée intentionnelle de son locuteur. La détermination des structures intentionnelles dans le discours n'est pas suffisante pour la compréhension du sens d'un énoncé. Pourtant, nous croyons qu'une argumentation en mathématique doit s'éloigner de la *sémantique intentionnelle* où le risque est celui de tomber dans la rhétorique. Une argumentation en mathématique doit « faire la place » à la *sémantique vericonditionnelle*, à la recherche de la vérité.

3.2.1.1 L'argumentation en mathématique est une justification rationnelle

Nous avons déjà anticipé que l'argumentation en mathématique est une justification rationnelle. Le caractère justificatif s'exprime dans sa forme : le raisonnement. La rationalité concerne l'inférence qui relie la suite des propositions d'un raisonnement.

C'est pourquoi nous nous rapprochons de Toulmin ; il considère la rationalité comme caractéristique fondamentale de toute argumentation.

La raison est procédurale et se définit par une démarche d'un certain style dont les grands traits sont indépendants du domaine considéré. La rationalité, caractéristique fondamentale dans les argumentations juridiques (sur lesquelles s'appuie beaucoup Toulmin), doit être retrouvée dans toute argumentation. Les « raisons » exprimés dans une argumentation, permettent l'acceptation ou la réfutation de certaines propositions, et en conséquence elles en sont une justification.

La fonction justificatrice est fonction première dans l'argumentation.

...c'est là, la fonction première des arguments, et que leurs autres utilisations, les autres fonctions que nous leurs prêtons, sont d'une certaine manière secondaires et parasites de leur rôle justificatif qui, lui, est primordial (Toulmin, 1993, p. 14).

L'argumentation en mathématique est une tentative de justifier un énoncé ou un ensemble d'énoncés. C'est pourquoi nous affirmons que l'argumentation en mathématique est une justification rationnelle.

3.2.1.2 L'argumentation en mathématique a toujours un objectif : la recherche de la vérité

Le paradigme de la rationalité se retrouve notamment dans les modèles juridiques. Le langage du tribunal fournit le paradigme de la rationalité qui se substitue au paradigme logique dans l'analyse des raisonnements quotidiens (Plantin, 1990, p. 12). Les argumentations en tribunal visent à obtenir que la justice soit rendue.

Le modèle juridique peut représenter un modèle pour l'argumentation. Cette approche est suivie par Perelman et Olbrechts-Tyteca dans le « Traité de l'argumentation - La nouvelle rhétorique » (Perelman et Olbrechts-Tyteca, 1958) et par Toulmin dans « The uses of arguments » (Toulmin, 1958). Cependant il y a des différences profondes entre ces deux approches théoriques. Dans la suite nous essayerons de donner une idée de l'importance de la prise en compte de cette diversité. Mais déjà, nous pouvons annoncer que notre position sera voisine de celle de Toulmin.

D'ailleurs, l'objectif principal de l'argumentation en mathématique est la recherche de la vérité. En mathématique on argumente quand on veut convaincre quelqu'un (soi même ou un interlocuteur) de la vérité d'un énoncé. L'argumentation est alors un discours construit avec l'objectif de rechercher le « vrai ».

3.2.1.3 L'argumentation en mathématique est convaincante et elle s'adresse à un auditoire universel

L'acceptation d'un modèle d'argumentation nous renvoie au concept d'auditoire. L'acceptabilité de la rationalité de toute argumentation fait appel à un auditoire implicite qui détermine les lois de cette acceptabilité. L'auditoire universel et la rationalité nous poussent à retrouver chez Toulmin la dialectique aristotélicienne qui a les caractéristiques de l'argumentation en mathématique.

Or, nous savons que l'argumentation adressée à un auditoire peut avoir une double finalité : conviction et persuasion. Ce sont deux caractéristiques bien distinctes. La conviction vise à modifier les opinions, les croyances en faisant appel aux « raisons ». Elle doit tenir compte

d'autrui. Une argumentation est convaincante dans le sens où elle s'adresse à un auditoire universel à fin de lui faire reconnaître la vérité d'un fait ou sa nécessité (dialectique aristotélicienne). En revanche, la persuasion vise à obtenir l'adhésion sans faire nécessairement appel à la raison et sans prendre en compte autrui. Une argumentation est persuasive dans le sens où elle s'adresse à un auditoire particulier, soit un individu soit un petit groupe à fin de l'amener à croire, à faire, ou à vouloir quelque chose, par tous les moyens possibles (rhétorique aristotélicienne).

Convaincre implique persuader et non le contraire. Argumenter en mathématique, c'est convaincre ; c'est modifier les opinions en recourant à la rationalité. La persuasion n'est pas suffisante, elle ne serait même pas légitime.

C'est justement ce caractère de « conviction » qui donne sa légitimité à l'argumentation. On argumente lorsqu'on veut amener l'interlocuteur à reconnaître la vérité d'un énoncé. En mathématique, l'interlocuteur est la communauté mathématique, la classe ou celui qui argumente. Dans tous les cas il s'agit d'un interlocuteur universel et non particulier, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un auditoire rationnel qui peut être en accord ou en désaccord avec celui qui argumente, mais dans tous les cas il est apte à répondre.

Nous nous éloignons de Perelman et Olbrechts-Tyteca qui, selon Plantin, définissent l'argumentation sans recours à la notion de vérité. Perelman soutient que la visée argumentative n'est pas d'approcher une vérité préétablie mais d'influencer un auditoire (Plantin, 1990, p.16)

Perelman ne propose aucun critère direct de la force d'un argument ou de sa validité. Le problème de l'évaluation se trouve ainsi déplacé, et ne porte plus sur les arguments mais sur les auditoires qui les acceptent (Plantin, 1990, p. 19).

La théorie de l'argumentation selon Perelman et Olbrechts-Tyteca est un renouvellement de la rhétorique aristotélicienne. Les arguments peuvent avoir une structure modelée par une situation rhétorique définie par la présence d'un auditoire. « *En effet, comme l'argumentation vise à obtenir l'adhésion de ceux auxquels elle s'adresse, elle est tout entière relative à l'auditoire qu'elle cherche à influencer* » (Perelman, 1992, p. 24).

L'argumentation de Perelman et Olbrechts-Tyteca ne fait pas appel à la rationalité, elle est une argumentation persuasive adressée à un auditoire particulier.

Néanmoins, Perelman propose de faire intervenir la « règle de justice » dans la détermination de la force d'un argument. « *La règle de justice exige l'application d'un traitement identique à des êtres ou à des situations que l'on intègre à une même catégorie* » (Perelman, 1992, p. 294). Ce qui a pu, dans une certaine situation, persuader, pourra persuader dans une situation

semblable. « *La force des arguments dépend donc largement d'un contexte traditionnel* » (Perelman, 1992, p. 616)

D'après Perelman un argument est d'autant plus fort qu'il peut se prévaloir de précédents.

La règle de justice est utilisée dans l'argumentation en mathématique. Elle exige l'application d'un traitement identique à des situations qui appartiennent à une même catégorie. Les situations mathématiques sont les plus appropriées pour l'application de cette règle parce qu'elles peuvent effectivement présenter des caractéristiques identiques alors que les situations concrètes sont difficilement comparables entre elles et, même quand on peut les comparer, il y a toujours des différences. Si on pense par exemple au tribunal, il est très difficile de retrouver les mêmes situations. Les argumentations juridiques utilisent souvent la règle de justice mais celui qui argumente doit accomplir un grand effort pour trouver une situation analogue à celle qui est en train de traiter. Au contraire, les mathématiques fournissent le meilleur contexte pour l'application de cette règle.

3.2.1.4 Le *champ* de l'argumentation

Les assertions qu'il est possible de produire pour soutenir une argumentation sont variées, les raisons qui peuvent servir à justifier les assertions et les chemins que peuvent emprunter les raisonnements justificatifs sont différents.

Ducrot et Anscombe rejettent l'idée qu'une phrase se suffit à elle-même, qu'elle se donne son sens, au contraire elle possède une relation au contexte et ne peut pas être isolée. « *La description linguistique d'une phrase implique que le sens de ses énoncés soit différent selon la situation de discours, et même qu'il y ait de multiples lectures possibles pour un énoncé donné* » (Ducrot et al., 1979, p. 17). Les mots ne peuvent pas garantir une compréhension correcte, il faut chercher dans la phrase, dans le contexte, les informations supplémentaires qui permettent de réduire les malentendus et de comprendre l'argument.

Le caractère multiforme de l'argumentation nous oblige à prendre en compte la notion fondamentale de *champ* introduite par Toulmin. Le champ est le contexte particulier à toute argumentation.

On dira que deux arguments appartiennent au même champ lorsque les données et les conclusions constituant chacun de ces deux arguments sont respectivement du même type logique⁶ ; on dira qu'ils participent à des champs différents lorsque les fondements ou les conclusions ne sont pas du même type logique. Les preuves figurant

⁶ Toulmin ne donne pas une définition de type logique, il écrit: « *La formulation de nos assertions, et l'énonciation des faits destinés à les étayer, correspondent, en termes philosophiques, à des « types logiques » très variés – relations d'événements passés et présents, prédictions, verdicts de culpabilité, éloges esthétiques, axiomes géométriques, etc* » (Toulmin, 1993, p. 16)

dans les Eléments d'Euclide appartiennent à un champ, tandis que les calculs sous-tendant une édition de l'Almanach nautique relèvent d'un autre (Toulmin, 1993, p. 17).

Evidemment, les mathématiques ne constituent pas un champ unique, ce sont plutôt les différents champs des mathématiques qui nous permettent de caractériser l'argumentation en mathématique. Une argumentation en géométrie n'appartient pas au même champ qu'une argumentation en algèbre, par exemple. Néanmoins, nous ne pouvons pas conclure que des argumentations appartenant à différents champs ne sont pas comparables.

Toulmin analyse des arguments dans des circonstances particulières, dans des champs particuliers de recherche, mais il pose la question de la dépendance (et indépendance) des arguments par rapport à leur champ. Les arguments peuvent avoir des caractéristiques dépendantes de leur champ (*field-dependant*) sous certains aspects et indépendant du leur champ sous d'autres aspects (*field-invariant*). Par exemple, l'évaluation des arguments est dépendante du champ même si les termes d'évaluation ne varient pas en fonction du champ. Le sens du terme « possible » ou « impossible » est indépendant du champ, mais les critères de possibilité ou impossibilité en sont par contre dépendants. Ne pas pouvoir fumer dans un compartiment d'un train et le fait que 2 ne puisse pas avoir une racine carrée rationnelle indiquent deux impossibilités mais les critères utilisés pour juger l'impossibilité sont différents dans les deux champs (Toulmin, 1993, p. 36-42).

Donc nous pouvons dire que l'argumentation en mathématique théorique et l'argumentation fournie pour la construction d'une conjecture peuvent avoir la même force pour celui qui argumente (il peut être convaincu de la validité des deux) même si les critères pour l'évaluer ne sont pas du tout les mêmes dans les deux cas.

Comme Toulmin, nous voulons trouver dans quelle mesure il existe des critères communs pouvant servir à juger des arguments relevant de champs différents.

Le parallèle entre la procédure utilisée au tribunal et le processus rationnel par lequel les arguments sont construits permet d'articuler les phases de l'argumentation. Face à un problème, on va admettre qu'il existe un certain nombre de suggestions dignes d'être envisagées, on va choisir une de ces suggestions selon la qualification qu'on lui a donné, on va éliminer les conclusions qui ne peuvent pas être vraies, etc. Ces étapes sont communes à des arguments relevant d'une grande variété de champs. Ces phases de l'argumentation peuvent être comparées à celles du discours juridique afin d'en déterminer les similitudes. A ce propos Toulmin dit :

Dans l'argumentation tant extra juridique que juridique, ces similitudes fondamentales de la procédure sont valables dans un large éventail de champs ; et dans la mesure ou la forme de l'argument que

nous présentons reflète ces similitudes de procédure, la forme des arguments de différents champs sera elle aussi similaire (Toulmin, 1993, p. 26).

L'intérêt de Toulmin est d'analyser l'argumentation au moyen d'un modèle qui soit utilisable dans tous les champs. Ce modèle sera analysé dans la partie suivante ; il permet de caractériser la structure de toute argumentation et d'explicitier les critères d'acceptabilité de l'argumentation.

3.2.2 La structure de l'argumentation

L'argumentation est étroitement liée au raisonnement et en conséquence à la science qui s'occupe de celui-ci : la logique. Il ne s'agit pas là de la logique formelle. Toulmin propose un schéma méthodologique en rupture avec la logique comme discipline mathématique. Son but est de donner une extension de la logique jusqu'à l'assimiler à une méthodologie rationnelle capable d'exprimer les processus par lequel s'accroissent nos connaissances en général. Nous reprenons l'opinion de Toulmin selon laquelle l'argumentation n'est pas rejetée hors de la logique mais au contraire en fait partie. La théorie de l'argumentation est alors une sorte de renouvellement de la logique, « *plus précisément, Toulmin préconise une transformation de la logique qui la ferait passer d'une science formelle à une science pratique* » (Breton et Gauthier, 2000, p. 55).

Le point de vue de Grize est, sous certaines aspects, similaire à celui de Toulmin. L'argumentation, est pour Grize, la manifestation de la logique naturelle. La logique naturelle « *cherche à décrire des opérations de pensée, opérations qui servent à constituer et à organiser des contenus et dont elle cherche les traces dans des discours* » (Grize, 1996, p. 114).

Cependant, à la suite de Toulmin, si la logique naturelle est une extension de la logique formelle, cela n'est pas le point de vue de Grize. Il s'oppose à la restriction de la logique à la seule logique mathématique : « *il conteste la prétention de la logique mathématique à régenter le savoir* » (Breton et Gauthier, 2000, p. 97). A la suite de Grize la logique naturelle et la logique formelle sont complètement détachées. La différence est non seulement dans la forme mais aussi dans les contenus. En fait, la logique formelle s'occuperait des relations entre concepts tandis que la logique naturelle se proposerait de mettre en évidence la construction des concepts et leurs liens (Grize, 1996, p. 81).

C'est ici que nous nous éloignons de Grize et de la logique naturelle. L'argumentation en mathématique n'est pas nécessairement liée à la logique formelle ; la plus grande partie des argumentations en mathématiques utilise la langue naturelle. Cependant, il ne s'agit pas

d'appeler argumentation n'importe quelle activité discursive en mathématique. La logique naturelle est la logique du discours, d'un discours qui peut être argumentatif mais également rhétorique, descriptif, explicatif etc. La logique naturelle est trop vaste pour décrire l'argumentation en mathématique.

L'argumentation mathématique est alors un raisonnement logique, qui peut être décomposé en parties afin d'en faire émerger sa structure. En particulier, comme nous le verrons plus loin, chaque partie de l'argumentation est un pas composé par au moins trois éléments : des données, une conclusion et un permis d'inférer (Toulmin, 1958). Nous appelons *argument* chacun de ces pas.

Nous pouvons caractériser la structure de l'argumentation à deux niveaux : une macro-structure et une micro-structure. Le premier nous permet une analyse en termes d'arguments. Le second nous permet une analyse en termes de mots. Nous sommes intéressée à la première analyse ; il se peut qu'une analyse des mots soit trop fine en vue d'une comparaison avec la démonstration. Cependant, malgré la distance prise avec la *sémantique intentionnelle* pour les raisons citées ci-dessus, nous croyons que certaines considérations sur les *connecteurs pragmatiques* (décrits ci-dessous) méritent d'être prises en compte.

3.2.2.1 Les connecteurs pragmatiques

Dans une activité argumentative, il y a des indicateurs, les connecteurs pragmatiques, qui permettent de repérer le sens impliqué dans la phrase et de le distinguer du sens littéral.

Les connecteurs pragmatiques sont des mots de liaison et d'orientation qui articulent les informations et les argumentations d'un texte. Ils mettent les informations contenues dans un texte au service de son intention argumentative globale (Plantin, 1990, p. 39).

Nous sommes d'accord avec le fait que les connecteurs pragmatiques sont bien différents des connecteurs logiques. Les connecteurs pragmatiques, utilisés dans la langue naturelle, relient des contenus sémantiques et ils prennent en compte le sens et les intentions des énoncés. Par contre, les connecteurs logiques, utilisés dans les langues formalisées, opèrent sur des énoncés de la langue formelle et ils ont caractère vérifonctionnel.

Les connecteurs « ou », « et », « non », « mais », ont une fonction argumentative qui permet d'identifier la force des propositions en question. On considère l'exemple suivant, donné (directement) par Ducrot, relatif au connecteur « mais » :

*Lorsqu'on coordonne par **mais** deux propositions p et q , on ajoute à p et à q les deux idées suivantes. D'abord qu'une certaine conclusion r , que l'on a précisément dans l'esprit, et que le destinataire peut retrouver, serait suggérée par p et infirmée par q : autrement dit, p et q ont par rapport à r , des orientations argumentatives opposées.*

*Ensuite, que q a plus de force contre r que p n'en a en sa faveur : de sorte que l'ensemble 'P mais Q' va dans le sens de non-r. [...] Si l'on trouve, marqué dans un mot aussi fondamental que **mais**, un appel à prolonger la parole au-delà d'elle-même, on est amené à penser qu'il ne s'agit pas là d'un usage second mais d'une fonction primitive de la langue (Ducrot, 1980, p. 12).*

L'argumentation en mathématique même si situable dans une sémantique vériconditionnelle, est exprimable par la langue naturelle. En conséquence, elle utilise évidemment les connecteurs pragmatiques qui, pour leur nature, expriment une intention. Cela nous oblige à considérer la double nature qu'un mot peut assumer : il peut exprimer la vericonditionnalité et/ou l'intentionnalité du locuteur. Néanmoins, les mots, dans l'argumentation en mathématiques peuvent être outils intentionnels et en même temps fonctionnels à la recherche d'une vérité. Mais si l'intentionnalité est souvent manquante, la recherche de la vérité est une condition essentielle pour parler d'argumentation en mathématique.

3.2.2.2 Caractérisation de la structure de l'argumentation : schéma ternaire

Dans la suite, nous allons présenter quelques théories qui essaient d'attribuer à l'argumentation un modèle structurel. En réalité, ces théories fournissent plutôt un modèle pour une partie de l'argumentation : l'*argument*, c'est-à-dire un pas dans l'argumentation.

La théorie d'Aristote a présenté le syllogisme comme un modèle structurel de l'argument. Evidemment, ceci ne peut pas être accepté aujourd'hui comme modèle descriptif général des arguments : le syllogisme ne prend en compte que des arguments déductifs, l'énoncé conclusion est finalement déduit à partir des deux prémisses. Il n'est pas exhaustif, tous les arguments ne sont pas nécessairement des syllogismes. Plantin affirme que la caractéristique du syllogisme est de ne faire avancer aucune connaissance parce que la conclusion doit être contenue dans les prémisses.

Le propre de l'argumentation, nous l'avons vu, est d'avancer une conclusion qui dépasse ce qu'autorise strictement l'argument : en cela elle ouvre à la polémique et laisse place à l'objection et à la réfutation. Par contre la conclusion d'un syllogisme ne fait que développer strictement le contenu des prémisses : on peut donc soutenir que cette conclusion ne contribue aucunement à l'accroissement de nos connaissances (Plantin, 1990, p. 173).

En plus, le syllogisme, même s'il est valide logiquement, peut amener à conclusions erronées parce qu'il ne prend pas en compte le contenu des propositions ; il est construit indépendamment du contexte. Malgré ces considérations, nous sommes intéressée à la théorie du syllogisme car elle a été la première à donner un modèle à la structure de l'argumentation et cette structure était composée par trois termes : les deux prémisses et la conclusion.

Aujourd'hui, Toulmin propose un modèle de l'argumentation qui prend en compte la structure ternaire déjà considérée par Aristote. Cependant, par rapport au syllogisme d'Aristote, ce modèle de l'argument est tout à fait original. Avant tout, l'objectif de Toulmin est celui de capter la "forme logique" d'un discours rationnel.

L'analogie entre l'évaluation rationnelle et la pratique du droit nous offre un modèle concurrent pour réfléchir à l'idée de forme logique. Il apparaît maintenant que les raisonnements ne doivent pas simplement présenter une forme particulière mais également être exposés et présentés selon une série d'étapes conformes à certaines règles fondamentales de procédures (Toulmin, 1993, p.52).

Un argument dans le modèle de Toulmin est composé par un schéma ternaire :

E (claim) l'énoncé ou conclusion qu'apporte l'interlocuteur,
D (data) un certain nombre de données justifiant l'énoncé E,
P (warrant) le permis d'inférer qui fournit une règle, un principe général capable de servir de fondement à cette inférence, de jeter un pont entre D et E.

Le premier pas dans l'argument est l'expression d'un point de vue, c'est la conclusion, le but de l'argument. Cette affirmation doit être soutenue par l'argumentation. Nous appelons énoncé E ("claim", Toulmin 1958, p. 97) la conclusion de chaque argument.

Cette conclusion se base sur un certain nombre de données D ("data", Toulmin 1958, p. 97) qui sont produites pour soutenir l'énoncé. Les données sont significatives parce qu'elles sont le point de départ de chaque argument. Les données peuvent être constituées par des évidences, des faits, des informations, des exemples. C'est sur les données que l'énoncé conclusion s'appuie.

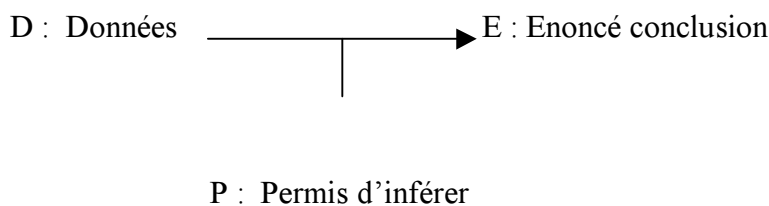
Pour passer des données à l'énoncé conclusion une "autorisation" qui légitime ce passage est nécessaire. Une règle, un principe général, un permis d'inférer P ("warrant", Toulmin 1958, p. 98) permet de jeter un pont entre données et énoncé conclusion.

Ce permis d'inférer est la partie de l'argument qui établit la connexion logique entre les données et l'énoncé conclusion. C'est la « raison » de l'acceptation ou de la réfutation de l'argument. C'est le point qui peut être réfuté par l'auditoire. Si l'argument n'est pas accepté, c'est justement le permis d'inférer qui est sous la critique.

The data we cite if a claim is challenged depend on the warrants we are prepared to operate with in that field, and the warrants to which we commit ourselves are in the particular steps from data to claims we are prepared to take and to admit (Toulmin, 1958, p. 100).

Les données que nous citons lorsqu'on conteste une des nos affirmations dépendent des garanties que nous sommes prêts à utiliser dans ce champ, et les garanties auxquelles nous souscrivons sont implicites dans le passage des données aux affirmations que nous sommes disposés à émettre et à admettre (Toulmin, 1958, trad. fr. 1993, p. 123).

Le schéma ternaire peut être schématisé ainsi :



Ce schéma élémentaire n'est pas complet. L'articulation générale du discours peut être plus complexe et nécessiter trois étapes auxiliaires :

- F (qualifier) l'indicateur de force de l'argument ;
- R (rebuttal) la réfutation potentielle de l'énoncé conclusion ;
- B (backing) le support du permis d'inférer.

En général, les règles et les données ne permettent pas d'inférer avec un degré absolu de certitude. C'est pourquoi, on utilise un indicateur de force F ("qualifier", Toulmin 1958, p. 102) qui précise avec quelle force le couplage des données à la loi permet d'atteindre l'énoncé. L'indicateur de force de l'argument peut ne pas être explicite, mais l'argument est toujours qualifié comme "vrai", "probablement vrai", "probable", etc. L'adverbe qui le qualifie représente la force de l'argument. Toulmin écrit :

Some warrants authorise us to accept a claim unequivocally, given the appropriate data-these warrants entitle us in suitable cases to qualify our conclusion with the adverb «necessarily» (Toulmin, 1958, p. 100).

Certaines garanties (permis d'inférer) nous autorisent à accepter une affirmation sans équivoque, à supposer que les données appropriés soient rassemblées - ces garanties nous habilitent dans des cas propices à qualifier notre conclusion au moyen de l'adverbe « nécessairement » (Toulmin, 1958, trad. Fr. 1993, p. 123).

Il se peut que certaines circonstances particulières suspendent l'application du permis d'inférer au domaine des données. Le schéma argumentatif prévoit une place pour la restriction R de son énoncé. S'il y a des exceptions à l'énoncé la force du permis d'inférer est affaiblie. Les conditions des exceptions ou réfutations potentielles R ("rebuttal", Toulmin 1958, p. 102) sont alors prises en considération. Ces réfutations potentielles, ou restrictions, apportent un commentaire sur le rapport entre le permis d'inférer et la légitimité du passage des données à la conclusion ; elles signalent les circonstances dans lesquelles il faudra annuler l'autorité du permis d'inférer.

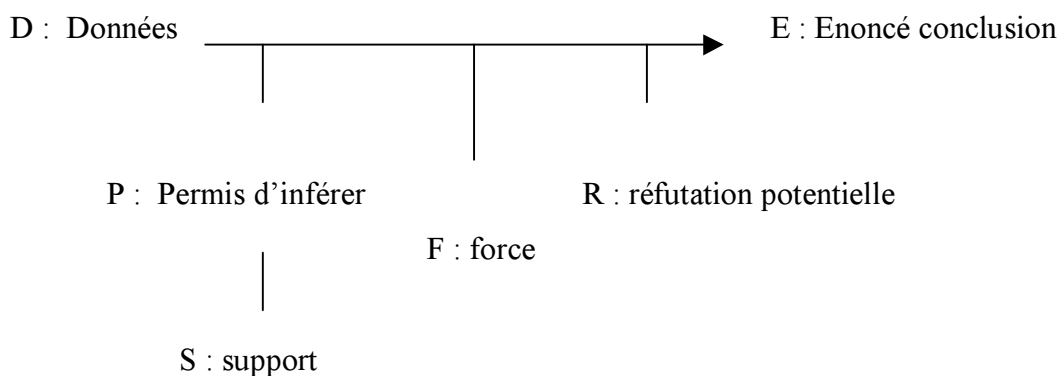
En conséquence, le permis d'inférer peut être mis en question. Il faut donc l'épauler, l'étayer d'un certain nombre de justificatifs, le support S ("backing", Toulmin 1958, p. 103).

L'existence d'un permis d'inférer entre donnée et conclusion est justifiée par la légitimité de la question « Dans quelles conditions y a-t-il une relation entre données et énoncé conclusion ? ». Cependant, une autre question peut se poser : « Pourquoi y a-t-il une relation entre données et énoncé conclusion ? »

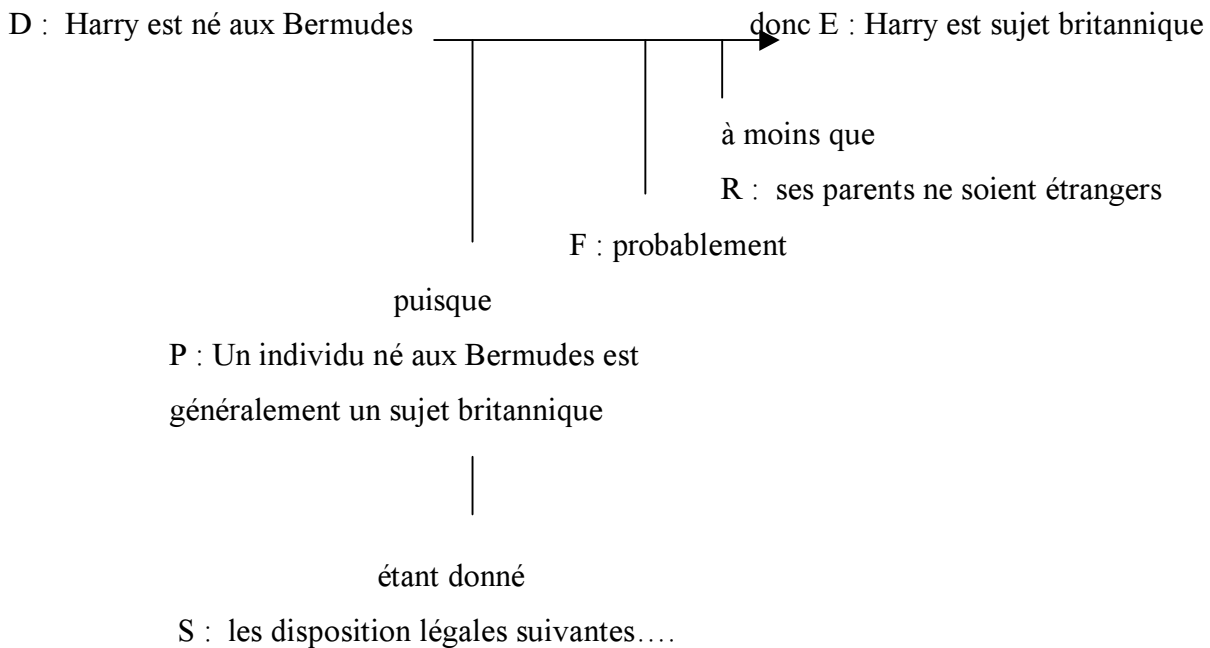
En plus de la question de savoir si, ou dans quelles conditions, une garantie peut s'appliquer dans un cas particulier, on peut nous demander pourquoi il faudrait, en général, accepter que cette garantie fait autorité (Toulmin, 1993, p. 126).

C'est pourquoi un support peut être nécessaire dans la schématisation de l'argument. Si l'autorité du permis d'inférer n'est pas acceptée, un support au permis peut être demandé. Le support peut aider l'auditoire à comprendre le permis d'inférer ; sans le support il se peut que le permis ne soit pas accepté.

Le schéma complet est le suivant :



Toulmin donne l'exemple suivant :



Un tel modèle de l'argumentation nous permet un découpage de l'argumentation en ses arguments et en même temps nous permet de visualiser leur concaténation (comme nous le verrons au cours du chapitre 3). Cela, comme nous le verrons plus loin, est très utile pour déterminer le type de raisonnement (déductif, inductif, abductif etc.) sous-jacent l'argumentation.

4 Démonstration

Les caractéristiques fonctionnelles et structurelles de l'argumentation, décrites ci-dessus, nous amènent à regarder la démonstration sous un angle nouveau. La question que nous nous posons est la suivante : « Quel est le rapport entre une démonstration et une argumentation en mathématique? ».

La démonstration, comme l'argumentation, est un raisonnement (Duval, 1995). Les « raisons » de l'acceptation ou de la réfutation de certaines propositions sont à rechercher dans les théorèmes qui permettent l'explicitation d'une démonstration à partir d'un raisonnement. La démonstration est construite pour valider un énoncé, elle a donc, par nature, un caractère justificatif.

Comme nous l'avons fait pour l'argumentation nous pouvons affirmer que la démonstration est une justification rationnelle.

Dans la suite, nous analysons la démonstration comme nous l'avons fait pour l'argumentation. D'abord nous présentons une partie historique. Ensuite nous revenons aux réponses des

linguistes à propos des rapports entre argumentation et démonstration afin de déterminer les caractéristiques fonctionnelles et structurelles d'une démonstration. La comparaison entre caractéristiques d'argumentation et caractéristiques de démonstration nous permet de formuler et appuyer notre hypothèse.

4.1 Développement d'une théorie de la démonstration

Le développement d'une théorie de la démonstration répond à un double besoin : d'un côté la description d'un savoir et de l'autre l'acceptabilité de celui-ci.

Comme nous l'avons déjà souligné, c'est Aristote qui le premier a donné une théorie de la « forme » de la démonstration : la logique formelle, ainsi nommée car elle porte sur la « forme » du raisonnement, et non sur son « contenu ».

Le mérite d'Aristote est sa mise en forme des règles de la déduction par le syllogisme scientifique, c'est-à-dire le syllogisme qui part des prémisses vraies et premières.

« C'est une démonstration quand le syllogisme part de prémisses vraies et premières ou encore de prémisses telles que la connaissance que nous en avons prend elle-même son origine dans des prémisses premières et vraies » (Topiques, 100a, 25). Les prémisses sont vraies et premières quand elles *« tirent leur certitude non pas d'autres choses mais d'elles-mêmes »* (Topiques, 100a, 30).

Le syllogisme assume un rôle décisif dans la constitution d'une pensée rigoureuse. Nous pouvons retrouver chez Aristote le caractère d'apodicticité de la démonstration, qui lui permet, comme Duval l'écrit, *« de distinguer, parmi toutes les variétés de syllogisme possibles, celles qui sont des raisonnements valides et celles qui ne le sont pas »* (Duval, p. 269).

L'idéal d'Aristote est celui d'une déduction absolue, le même que poursuivaient dans le même temps les mathématiciens dont les travaux aboutiront quelques décennies plus tard à la systématisation d'Euclide. Après ses *Eléments*, la géométrie deviendra la première science déductive.

Le début de la géométrie est attribué aux Egyptiens qui ont inventé la mesure qui *« leur était nécessaire à cause de la crue du Nil qui faisait disparaître les bornes appartenant à chacun »* (Proclus de Lycie, trad. fr. 1948, p. 55) La géométrie est née avec un but utilitaire dans l'architecture, l'agriculture et le commerce. C'est seulement avec les Grecs qu'elle devient science théorique.

D'après Proclus, le cheminement de la naissance d'une science nécessite des étapes nombreuses et variées.

« *Thales fut le premier qui, ayant été en Egypte, en rapporte la théorie dans l'Hellade* » (Proclus de Lycie, trad. fr. 1948, p. 55-56). Il fit connaître les principes de cette science. Après lui, d'autres se sont occupés de la géométrie. Nous citons directement Proclus de Lycie :

Pythagore transporta la doctrine de celle-ci dans la forme d'une éducation libre : il examina de haut les principes de la géométrie et en rechercha les théorèmes d'une manière immatérielle et intellectuelle. [...] Après eux Hyppocrate de Chios, inventeur de la quadrature de la lunule et Theodore de Cirene devinrent célèbres en s'appliquant à la géométrie, car Hyppocrate est le premier parmi ceux que l'on mentionne avoir composé des Elements. [...] Eudoxe de Cnide [...] fut le premier à augmenter le nombre des théorèmes dits généraux... (Proclus, de Lycie, trad. fr. 1948, pp. 56-69).

Euclide reprend tous ces travaux qui deviennent les *Eléments* de son œuvre.

Euclide élabore une théorie mathématique qui se distingue de tout ce qui a été fait auparavant par son caractère démonstratif et déductif. A partir de quelques définitions, axiomes et postulats, il déduit des propositions de plus en plus complexes et construit ainsi une théorie formelle et consistante en respectant scrupuleusement des règles de raisonnement et de logique.

Il n'a pas admis tous les Eléments qu'il pouvait recueillir, mais bien tous ceux qui étaient susceptibles d'instruire dans les premiers principes de la géométrie. On admirera en plus ses modes variés de raisonnements qui font foi tantôt en partant des causes, tantôt en émanant de preuves, mais qui sont tous incontestables, exacts appropriés à la science (Proclus de Lycie, trad. fr. 1948, p. 62-63).

De plus, comme les axiomes et les postulats apparaissent comme des vérités mathématiques adaptées à la description du monde, les résultats qui en découlent sont eux-mêmes aussi en accord avec la réalité. Pour Euclide, la vérité en mathématiques est donc à la fois matérielle et théorique. Elle est matérielle parce que le contenu du discours est conforme à la réalité. Elle est théorique car elle respecte le critère de cohérence et de non-contradiction selon lequel le raisonnement suit les règles de la logique et de la pensée formulées depuis Aristote.

La description d'un savoir et la recherche d'une rigueur sont les caractéristiques essentielles et encore actuelles d'une théorie de la démonstration.

4.2 La démonstration selon les voix des linguistes

Les positions des linguistes par rapport à la démonstration sont différentes les unes des autres. Certains considèrent que la démonstration a des caractéristiques particulières et souvent bien différentes de celles de l'argumentation. Nous sommes en désaccord.

Nous croyons que les caractéristiques de la démonstration ne sont pas différentes de celles de l'argumentation, mais au contraire qu'elles en sont un cas particulier.

Notre hypothèse est la suivante :

La démonstration est une argumentation particulière

Vignaux soutient que « *La déduction est au cœur de l'argumentation quotidienne, dans la mesure où partant de principes donnés, elle vise à des conclusions d'apparence rigoureuse* » (Vignaux, 1999, p. 41). Il considère l'argumentation comme le moteur commun à toute activité rationnelle pour casser d'une certaine façon l'antagonisme existant entre d'une part la rhétorique et la dialectique et d'autre part l'analytique. La démonstration comme l'argumentation est « *l'art d'organiser nos discours en vue de réguler nos pensées, d'ajuster l'expression à la pensée, de construire nos connaissances, et surtout de mieux la transmettre* » (Vignaux, 1999, p. 78).

Toulmin, comme Vignaux, n'introduit pas de distance entre la démonstration et l'argumentation.

L'argument mathématique est assez particulier par rapport aux autres arguments.

Le problème mathématique n'est pas un dilemme ; la validité de sa solution n'est pas limitée dans le temps, il n'implique aucun passage matériel. Il peut être d'une séduisante élégance en tant qu'argument modèle susceptible d'être analysé par les logiciens formels, mais on pourrait difficilement trouver un argument moins représentatif (Toulmin, 1993, p. 156).

La démonstration est alors une argumentation mais une argumentation particulière. Elle ne peut pas représenter toutes les autres argumentations parce que ses caractéristiques sont trop spécifiques pour pouvoir les généraliser à toute argumentation.

Grize, quoiqu'il parte des mêmes considérations que Toulmin, arrive néanmoins à des conclusions tout à fait différentes. Il constate les limites de la logique formelle dans le développement de la connaissance scientifique, la logique naturelle est la logique du quotidien qui porte sur des faits et pas sur des symboles, qui donne lieu à des opérations originales et pas seulement mécaniques et qui a une fonction de communication, de dialogue. D'où la distinction entre argumentation et démonstration.

L'argumentation est une activité essentiellement discursive, d'où il résulte qu'elle est faite d'énoncés et non pas, comme la démonstration, de propositions. Elle est toujours personnalisée en ce sens qu'elle est destinée à des auditoires situés et que, au-delà de la définition des termes dont elle use, elle renvoie aux vécus des interlocuteurs. Elle vise à les persuader et pas seulement à les convaincre (Grize, 1996, p. 26).

Cependant, la position de Grize est différente de la notre : l'explication ou la rhétorique, peuvent faire partie de cette définition de l'argumentation. C'est donc compréhensible que dans ce cadre, la démonstration ne trouve pas une place.

De même, la démonstration ne rentre pas complètement dans le cadre d'Anscombe et Ducrot (1983). Selon leur point de vue, l'argumentation est d'abord une activité langagière. La démonstration semble ne pas pouvoir rentrer dans ce schéma. Cependant, dans la pratique la démonstration n'est pas nécessairement formalisée ; elle est bien une activité langagière. En classe les démonstrations construites par les élèves et même celles présentées par les enseignants utilisent souvent le langage naturel. De plus, les règles de la démonstration et son langage sont des outils finalisés : ils sont utilisés afin de valider un énoncé.

4.2.1 La fonctionnalité de la démonstration

Cette section a pour objectif de déterminer les caractéristiques fonctionnelles de la démonstration. De cette façon, la comparaison entre les caractéristiques de l'argumentation en mathématique, qui ont été précédemment décrites, et celle de la démonstration permet d'appuyer notre hypothèse.

4.2.1.1 La démonstration a un objectif : valider

La démonstration a un objectif bien particulier : valider un énoncé. En mathématique, valider un énoncé signifie en attester la vérité à l'intérieur d'une théorie mathématique. D'une certaine façon, la démonstration, comme l'argumentation, a comme objectif la recherche des raisons du « vrai ». Son but n'est pas seulement « *de provoquer ou d'accroître l'adhésion des esprits aux thèses qu'on présente à leur assentiment* » (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958, p. 5). Une démonstration, par nature, a le but de valider une certaine thèse. Selon Perelman, l'argumentation s'oppose à la nécessité et à l'évidence, son domaine est celui de la vraisemblance, du plausible, du probable.

Au contraire, la démonstration d'une proposition, est obtenue à partir d'un système axiomatique.

Quand il s'agit de démontrer une proposition il suffit d'indiquer à l'aide de quels procédés elle peut être obtenue comme dernière expression d'une suite déductive dont les premiers éléments sont fournis par celui qui a construit le système d'axiomatique à l'intérieur duquel on effectue la démonstration (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958, p. 18).

Ce système axiomatique prive la démonstration de toute ambiguïté : « *La seule obligation qui s'impose au constructeur de systèmes axiomatiques formalisés et qui rend les démonstrations*

contraignantes, est de choisir signes et règles de façon à éviter doute et ambiguïté » (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958, p. 17).

Selon Perelman, argumentation et démonstration ne sont donc pas de la même nature :

« Il est de bonne méthode de ne pas confondre, au départ, les aspects du raisonnement relatifs à la vérité et ceux qui sont relatifs à l'adhésion, mais les étudier séparément » (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958, p. 5).

Nous avons déjà amplement discuté sur le caractère d'apodicticité de la démonstration. Nous croyons que pour construire une démonstration il n'est pas du tout suffisant de choisir un langage et des règles opportunes. La construction de la démonstration nécessite un raisonnement qui s'explique par un langage et des règles particulières. Cependant, ce raisonnement est de la même nature que le raisonnement argumentatif et comme ce dernier il est garant du caractère de justification de l'argumentation et de la démonstration. La seule différence est que la démonstration apporte une justification à l'intérieur d'un domaine théorique, alors que l'argumentation n'y est pas obligée.

4.2.1.2 La démonstration est convaincante et elle s'adresse à un auditoire universel

La démonstration veut valider, l'argumentation veut convaincre ; mais valider et plus que convaincre. La démonstration veut justifier à l'intérieur d'un domaine théorique.

Nous remarquons ici qu'il faut faire attention à ne pas confondre ce que nous sommes en train d'écrire ici et ce que nous avons dit à propos des théories didactiques. Il est vrai que la démonstration peut ne pas être convaincante. Si la démonstration n'est pas comprise, elle est difficilement convaincante. Mais ce que nous voulons souligner ici est différent. Le caractère de conviction est spécifique à la démonstration, c'est-à-dire qu'elle est construite avec l'objectif de rendre irréfutable ce qu'elle affirme. La démonstration s'adresse à un interlocuteur universel, qui est représenté par la communauté mathématique dans son ensemble. Et comme telle cette communauté reconnaît la valeur de validation et donc de conviction en droit de la démonstration.

4.2.1.3 Le champ de la démonstration

La démonstration est relative à un champ, un champ théorique qui en détermine les critères d'acceptabilité. Toulmin accepte la démonstration en tant qu'argumentation.

D'après Toulmin, un pas de démonstration est un argument ; les arguments mathématiques sont les arguments les plus analytiques qui soient.

« Étudiés pour eux-mêmes, en tant que mathématiques pures, les arguments qui s'inscrivent dans nos calculs systématiques sont analytiques : tout ce que leur demande le mathématicien, c'est qu'ils

évitent les contradictions internes, et répondent aux normes de cohérence et de preuve dans toutes leurs relations internes (Toulmin, 1993, p. 258).

En effet, Toulmin fait la distinction entre arguments analytiques et arguments matériels. Un argument est analytique si la conclusion est en quelque sorte déjà comprise implicitement ou explicitement dans les prémisses. Il donne comme exemple le syllogisme. Au contraire, un argument est matériel si les raisons ne comprennent pas l'information présentée dans la proposition. La distinction fondamentale entre les arguments analytiques et les arguments matériels se trouve dans la notion de *champ*. En fait, c'est dans une théorie qu'à partir des axiomes et principes déterminés à l'avance, que les autres conclusions peuvent être avancées. En ce sens les conclusions font partie des prémisses.

4.2.2 La structure du pas de démonstration

Depuis Toulmin, grâce à la structure ternaire, l'argumentation prend une place nouvelle. Elle nous permet de comparer argumentation et démonstration sur le plan structurel. En fait, la démonstration est une chaîne déductive de pas constitués par trois termes : les données, un énoncé conclusion, un théorème qui permet le passage des données à la conclusion. A partir des axiomes et des principes premiers, par le moyen d'une démonstration un nouvel énoncé peut être construit.

C'est pourquoi la démonstration comme l'argumentation est analysable avec le modèle de Toulmin. Le permis d'inférer dans la démonstration est un théorème.

Les caractéristiques structurelles et fonctionnelles de la démonstration sont des cas particuliers des caractéristiques que nous avons rappelées pour l'argumentation en nous appuyant sur les travaux qui lui sont spécifiquement dédiés. Finalement, la démonstration semble se révéler comme une argumentation particulière.

Conclusion

Nous avons présenté la problématique de la démonstration en didactique des mathématiques à partir des recherches existantes. Pour la compréhension d'une démonstration, il semble être important que les élèves construisent eux-mêmes les démonstrations. C'est un point de départ consensuel auquel nous allons donner une nouvelle dimension en permettant de réconcilier argumentation et démonstration et donc de concevoir des processus didactiques qui s'appuient sur la capacité des élèves à argumenter. Cependant cela ne sera pas si simple, car il est bien possible que l'argumentation soit à la fois un point d'appui et un obstacle à l'apprentissage de

la démonstration (obstacle épistémologique) (Balacheff 1999). C'est à partir de là qu'une étude sur les rapports entre argumentation et démonstration devient nécessaire.

L'analyse proposée par Duval a soutenu, d'une façon radicale, l'existence d'une distance cognitive entre argumentation et démonstration. Nous discuterons ce point de vue. Pour cela nous avons d'abord reconnu la nécessité de comprendre ce qu'est une argumentation en mathématique et quel est son rapport avec la démonstration. Certaines recherches linguistiques nous ont permis de répondre à ces questions.

Au cours de ce chapitre nous avons caractérisé l'argumentation en mathématique et la démonstration, et nous avons formulé l'hypothèse que l'une est partie de l'autre : la démonstration n'est qu'une argumentation particulière.

Cette hypothèse de continuité entre argumentation et démonstration nous amène à reconsidérer l'aspect cognitif entre les deux. Dans le chapitre suivant nous analysons les recherches didactiques qui soutiennent l'existence d'une continuité cognitive entre argumentation et démonstration.

Chapitre 2

Unité et rupture cognitive entre argumentation et démonstration

*Les mathématiciens n'étudient pas des objets,
mais des relations entre les objets ;
il leur est donc indifférent de remplacer
ces objets par d'autres, pourvu que
les relations ne changent pas.
La matière ne leur importe pas,
la forme seule les intéresse.*

Poincaré

Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons présenté la problématique du passage de l'argumentation à la démonstration en mathématiques. Nous avons dégagé les caractéristiques sous-jacentes à ces deux processus afin d'en faire apparaître les similitudes et les différences linguistiques, structurelles et didactiques.

L'analyse de Duval nous a permis de déterminer plusieurs raisons pour expliquer les difficultés que les élèves rencontrent quand ils abordent une activité démonstrative. Néanmoins, nous voulons souligner l'existence de recherches didactiques prenant appui sur la présence d'une *unité cognitive* entre l'argumentation, qui conduit à l'explicitation d'une conjecture, et la démonstration. Même si le passage de l'argumentation à la démonstration est difficile pour l'élève, souvent nous pouvons observer quelques types de « continuité » entre ces deux processus. Ces « continuités » sont analysées dans le langage, dans les expressions utilisées, dans les heuristiques, etc.; nous pourrions dire dans le « système de référence » de l'argumentation et de la démonstration.

Au cours de ce chapitre nous présentons notre position par rapport à ces recherches didactiques. Nous voulons développer une analyse structurelle du rapport entre argumentation et démonstration pour déterminer des continuités et des écarts existants entre les deux structures.

En particulier, nous voulons distinguer les continuités ou les écarts liés au système de référence de l'argumentation et de la démonstration (langage, expressions, heuristique, etc.), de ceux liés à leur structure.

Nous analysons des structures particulières et classiques ; nous présentons l'argumentation déductive, abductive, inductive et la démonstration déductive et par récurrence.

Ce faisant, nous essayons de fournir une analyse cognitive structurelle des rapports entre argumentation et démonstration.

L'hypothèse, explicitée au chapitre précédent, de considérer une démonstration comme une argumentation particulière est très utile pour réaliser cette analyse.

1 Unité cognitive

Dans cette section nous nous sommes intéressée à l'aspect cognitif du rapport entre argumentation et démonstration. « Cognitif » est relatif à la cognition, à l'acte intellectuel par lequel on acquiert une connaissance (Dictionnaire Universel Francophone). Le sujet qui construit une démonstration à partir d'une argumentation fait intervenir ses propres connaissances. En conséquence, nous pensons qu'une analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration peut révéler des aspects significatifs.

Dans cette section nous présentons l'unité cognitive et notre point de vue à propos de celle-ci. Nous analysons des écarts et des continuités observables entre argumentation et démonstration. En particulier, nous développons une analyse des écarts structurels afin de construire des hypothèses sur leurs effets cognitifs possibles.

1.1 Unité cognitive entre production de la conjecture et construction de la démonstration

La relation entre production d'une conjecture et construction de sa démonstration a été un objet d'étude dans une perspective cognitive. Des recherches récentes montrent qu'il peut exister une continuité entre les deux processus. En particulier un groupe italien de recherche (Boero et al. 1996, Garuti & al. 1996, Mariotti et al. 1997, Garuti et al. 1998) a élaboré une entité théorique pour décrire cette continuité : l'*unité cognitive*. L'hypothèse de départ était que pendant la construction de la conjecture l'élève produit une activité argumentative dans laquelle il justifie la plausibilité des choix qu'il fait. Pendant la phase suivante de preuve, cet élève peut s'appuyer sur ce processus de façon cohérente en organisant les arguments déjà produits suivant une chaîne logique.

During the production of the conjecture, the student progressively works out his/her statement through an intensive argumentative activity functionally intermingled with the justification of the plausibility of his/her choices. During the subsequent statement-proving stage, the student links up with this process in a coherent way, organising some of previously produced arguments according to a logical chain (Boero, Garuti, Mariotti, 1996).

Dans les productions des élèves, il est possible reconnaître l'unité cognitive si on peut identifier quelques types de continuité.

En particulier, les continuités suivantes ont été sélectionnées (Pedemonte 1998) :

- Continuité du langage. On observe comment les expressions verbales, les expressions algébriques, les dessins géométriques se maintiennent ou évoluent en passant d'un processus à l'autre. Cette continuité est observable à partir des mots, des expressions, des phrases utilisés pendant l'argumentation et pendant la construction de la démonstration.
- Continuité conceptuelle. On peut regarder si par exemple des *concepts-en-acte*¹ (Vergnaud, 1990) apparaissant pendant l'argumentation peuvent venir à être explicités pendant la construction de la démonstration. Cette continuité est observable à partir du discours. Par exemple, pendant l'argumentation le sujet peut utiliser des mots référents à un théorème, sans pour autant l'expliciter. Si en phase de démonstration ce théorème est utilisé, on peut conclure à une continuité conceptuelle entre les deux phases.
- Continuité de « cadre »² (Douady, 1986). On peut regarder si la conjecture et la démonstration sont construites dans le même « cadre ». Cette continuité est observable à partir du référent théorique que le sujet utilise dans les deux phases. Si par exemple il produit la conjecture par moyen de la géométrie synthétique et il produit la démonstration en utilisant la géométrie analytique, il n'y a pas continuité de cadre entre les deux processus.
- Continuité heuristique. On peut observer si les éléments désignés comme variables (que l'on fait varier) et ceux qui sont maintenus fixes sont les mêmes dans les deux phases. Cette continuité est observable à partir du discours du sujet et de sa manipulation du dessin (en particulier dans Cabri-géomètre). En fait, les éléments qui jouent un rôle de

¹ «On désigne par les expressions "concept-en-acte" et "théorème-en-acte" les connaissances contenues dans les schèmes : on peut aussi les désigner par l'expression plus globale d' "invariants opératoires". (Vergnaud, 1990, p. 139) . « Appelons "schème" l'organisation invariante de la conduite pour une classe des situations données. C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire » (Vergnaud, 1990, p.136).

² « Le mot "cadre" est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique... , mais aussi cadre qualitatif ou cadre algorithmique. Disons qu'un **cadre** est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations» (Douady, 1986, p. 11).

variables pendant un processus de résolution peuvent être liés au seul discours, ou au contraire déterminés à partir de la manipulation du dessin. Par exemple pendant la manipulation de la figure d'un triangle on peut décider de maintenir un côté fixe et faire varier les deux autres. On peut observer une continuité heuristique si pendant l'argumentation et pendant la démonstration cette manipulation est décrite par le sujet.

- Continuités dans les dynamiques mentales. On peut observer que pendant la résolution d'un problème on est mentalement actif, mobilisant des images dynamiques : intuition de liens entre variables etc. Ces dynamiques peuvent être spatiales (le sujet imagine l'objet à considérer sous différents points de vue), temporelles (le sujet s'imagine dans le temps de la solution trouvée, l'explore et cherche à remonter aux conditions qui permettent de la réaliser) (Arzarello, Bartolini Bussi, à paraître), relationnelles (entre images préfigurées mentalement et images représentées sur l'écran ou la feuille, entre propriétés connues et traits caractéristiques des objets géométriques) etc. Ce type de continuité n'est pas facilement observable, il reste souvent implicite.

Les types de continuités présentés font référence à un système, que nous appelons **système de référence**, qui prend en compte les systèmes de représentations expressives (en particulier le langage, les heuristiques sur le dessin, etc.) et les systèmes des connaissances (*cadre*, *concepts-en-acte*, etc.) qui sont en jeu pendant la construction d'une conjecture et la mise en place de sa démonstration.³

1.2 Unité cognitive entre argumentation et démonstration

Le processus de résolution d'un problème géométrique qui demande la production d'une conjecture peut être décomposé en quatre parties :

1. Phase argumentative de production de la conjecture,
2. Phase de stabilisation de la formulation de la conjecture,
3. Phase de construction de la démonstration,
4. Phase de la stabilisation de la rédaction de la démonstration.

³ C'est à partir de l'analyse des copies des élèves que nous avons ressenti la nécessité de définir le système de référence. La démonstration fait référence à une théorie mathématique. Le système de référence représente une tentative d'organiser certains éléments qui interviennent pendant l'argumentation pour pouvoir les rapprocher et les comparer avec la théorie mathématique qui intervient pendant la démonstration.

L'unité cognitive a été définie entre le processus argumentatif développé pendant la construction de la conjecture (phase 1) et le processus de construction de la démonstration (phase 3)⁴.

Néanmoins, même en supposant que le problème soit résolu (avec la production d'une démonstration), la décomposition en quatre parties du processus de résolution n'est pas si évidente ; pour plusieurs raisons :

- L'explicitation des quatre phases n'est pas une condition nécessaire à la résolution du problème. Il se peut que certaines phases restent implicites.
- Chaque phase n'est pas indispensable. Il se peut que la conjecture soit produite sans aucune production d'argumentation ; c'est le cas, par exemple, quand elle est construite directement à partir d'une intuition ou d'une perception. Il peut manquer aussi la phase de construction de la démonstration, si par exemple le sujet construit la démonstration directement à partir de l'argumentation produite en phase de conjecture.
- L'identification des quatre phases n'est pas toujours possible. Nous pouvons identifier le début du processus de résolution du problème suivi par un ensemble d'énoncés qui sont reliés entre eux. Il y a une organisation qui est construite et au dernier moment il apparaît éventuellement qu'il s'agit de la démonstration. La séparation entre les phases n'est pas toujours visible ; la dynamique est beaucoup plus mêlée.

A la suite de ces considérations, nous avons choisi de relier la nature du produit terminal – la démonstration – avec l'ensemble du processus qui la précède dans la résolution du problème.

En particulier, l'argumentation que nous prenons en considération est liée à la conjecture. Elle est engagée dans la phase de sa construction, mais elle est aussi présente dans la phase suivante de sa justification. L'argumentation dont nous nous occupons doit être justificative de la conjecture, elle doit légitimer sa plausibilité. Nous étudions l'unité cognitive entre cette argumentation et la démonstration (cf. chapitre 3).

1.3 Ecart entre argumentation et démonstration

L'unité cognitive a été élaborée pour interpréter et prédire le comportement des élèves lorsqu'ils s'intéressent aux théorèmes. Elle peut être utilisée comme indicateur de leurs difficultés quand ils abordent la démonstration et comme outil de prévision de ces difficultés.

⁴ La définition d'« unité cognitive » a été donnée entre argumentation et démonstration en tant que processus. Cependant, elle a été souvent analysée en comparant argumentation et démonstration comme produits (Boero, Garuti, 1998) ; en particulier quand le processus de démonstration manquait dans la résolution du problème.

La recherche du groupe italien (Garuti, Boero, Lemut, 1998) a souligné l'existence d'un écart possible entre la production d'une conjecture et la construction de sa démonstration. Cet écart a été nommé « gap », nous importons directement cet anglicisme dans la rédaction qui suit.

Le **gap** entre argumentation et démonstration en tant que processus, est l'écart entre les arguments produits pour la plausibilité de la conjecture, et les arguments qui sont utilisés pendant la construction de la démonstration.

We defined as gap between the exploration of the statement and the proving process the distance between the arguments for the plausibility of conjecture, producing during the exploration of the statement, and the arguments which can be exploited during the proving process (Garuti, Boero, Lemut, 1998).

L'hypothèse formulée était la suivante : plus l'écart est grand plus est grande la difficulté de l'élève à construire une démonstration.

The greater the gap between the exploration needed to appropriate the statement and the proving process, the greater the difficulty of the proving process (Garuti, Boero, Lemut, 1998).⁵

L'analyse de l'unité cognitive se base sur la continuité du système de référence entre argumentation et démonstration. La présence de la continuité du système de référence garantit l'unité cognitive. De la même façon, l'écart a été considéré du point de vue du système de référence. Un écart qui n'est pas géré par l'élève peut être une cause de rupture cognitive.

Nous définissons « **rupture cognitive** » comme l'absence de l'unité cognitive.

Une analyse de l'écart du système de référence entre argumentation et démonstration permet de déterminer quelques difficultés que les élèves pourraient rencontrer au moment de construire une démonstration.

Cependant, le travail expérimental nous a amenée à penser qu'une telle analyse peut ne pas être suffisante pour assurer une analyse cognitive complète.

Nous voulons indiquer un autre type d'écart pouvant exister entre argumentation et démonstration : l'**écart structurel**. La démonstration construite habituellement selon une chaîne déductive a le plus souvent une structure bien éloignée de celle de l'argumentation. L'argumentation, comme nous l'avons présentée au premier chapitre, suit la logique du discours ; elle n'est pas limitée par des contraintes structurelles.

Les difficultés que l'élève doit dépasser lorsqu'il construit une démonstration sont nombreuses et de nature différente les unes des autres. C'est à partir de la nature de l'écart

⁵ Le "gap" a été défini entre processus d'argumentation et processus de démonstration. Nous le considérons entre argumentation et démonstration comme nous l'avons fait pour l'unité cognitive.

qu'on peut déterminer la nature des difficultés. Dans le paragraphe suivant nous identifions quelques difficultés et les écarts auxquels elles sont liées.

1.3.1 Ecart culturel, écart du système de référence, écart structurel

Nous avons indiqué trois types d'écarts qui peuvent être cause de difficultés dans la construction d'une démonstration. Il s'agit de l'écart culturel, de l'écart du système de référence et de l'écart structurel.

L'écart culturel est particulier : il empêche la construction de la démonstration parce que le sujet ne comprend pas le caractère de nécessité de la démonstration.

Par contre, l'écart du système de référence et l'écart structurel peuvent être cause de difficultés même si le sujet est conscient de devoir démontrer. Simplement, il ne réussit pas à construire la démonstration. Le passage à la construction de la démonstration est cause de difficultés pour des raisons internes au passage même.

Ecart culturel

Un écart culturel peut se vérifier si le sujet n'a pas appris à démontrer. Un enseignement, un apprentissage spécifique est nécessaire pour s'approprier la démonstration. Elle ne se développe pas de façon naturelle dans le discours quotidien. Son utilisation exige la connaissance de règles particulières et surtout la compréhension de sa nécessité qui est consubstantielle des mathématiques. Il faut entrer dans une problématique de la rigueur et pas seulement dans une problématique de la preuve.

La construction d'une démonstration, suite à la production d'une argumentation, demande l'appropriation des raisons légitimant ce passage, qui fait que la démonstration n'apparaît pas superflue. Si cette compréhension manque, la démonstration peut ne pas être recherchée. L'impression d'avoir déjà fourni une explication de la validité de la conjecture, avec l'argumentation, peut occulter l'exigence de construire une démonstration.

Dans ce cas, l'écart entre argumentation et démonstration est de nature culturelle : le sujet n'a pas conscience de l'utilité de la démonstration.

Ecart du système de référence

Les écarts du système de référence correspondent aux continuités du système de référence présentées dans la section 1.1. Ce sont :

- Ecart dans le langage,
- Ecart conceptuel,
- Ecart de « cadre »,

- Ecart heuristique,
- Ecart dans les dynamiques mentales.

Les écarts sont opposés aux continuités dont on a déjà parlé, mais parfaitement analogues. Considérons un exemple.

On suppose qu'une conception (Balacheff, 1994-1995) est utilisée dans l'argumentation. Lors de la construction de la démonstration, un théorème peut être remplacé par un énoncé relevant de cette conception. Cependant, il se peut que cette substitution ne soit pas possible, si par exemple le théorème n'est pas rappelé ou bien s'il n'existe pas de théorème correspondant à l'énoncé en question (en particulier si cet énoncé est faux au sens des mathématiques). Dans ce cas, l'écart pour passer de l'argumentation à la démonstration est relatif au système de référence ; en particulier il s'agit d'un écart conceptuel et/ou d'un écart de « cadre ».

Ecart structurel

L'écart structurel est lié à la structure de l'argumentation et de la démonstration. Il est pourtant très difficile qu'argumentation et démonstration aient la même structure. L'écart structurel est facilement observable.

Supposons qu'il s'agisse de construire une démonstration à partir d'une argumentation abductive (cf. 2.2.2). La construction d'une démonstration dans cette circonstance demande un changement de structure ; le changement de chaîne abductive en chaîne déductive représente un écart de structure.

Si au contraire, l'abduction n'est pas transformée en chaîne déductive, et la démonstration présente encore des traces d'abduction, il y a continuité structurelle. L'écart structurel à réduire pour une construction correcte de la démonstration n'a été pas géré par le sujet.

1.3.2 Comment identifier les écarts ?

Les écarts peuvent être observés à partir de l'analyse de l'argumentation et de la démonstration construite par le sujet. Mais les difficultés qu'il peut rencontrer sont observables à partir du comportement du sujet au moment de construire une démonstration. Ce sont l'activité du sujet, ses actions, ses mots, ses gestes, etc., qui nous permettent d'identifier ces difficultés.

Nous pourrions dire que plus l'écart est grand, plus sa présence peut se manifester de façon symptomatique dans l'activité du sujet.

S'il réussit à résoudre le problème sans montrer aucune difficulté dans le passage de l'argumentation à la démonstration, alors on n'observe pas la présence de symptômes de

rupture dans son activité, l'écart éventuellement présent entre les deux processus est géré par le sujet.

En revanche, si dans l'activité du sujet nous pouvons déterminer la présence de symptômes comme l'arrêt de la progression, le blocage, la présence d'erreurs, la durée excessive du temps qu'il dédie à l'argumentation, etc., alors nous pouvons supputer la présence effective d'une rupture.

Nous pouvons nous demander quels sont les symptômes que nous pouvons attendre et comment les distinguer dans les différents types d'écarts.

1.3.3 Symptômes de l'écart : rupture cognitive ?

Tout écart, soit culturel, soit du système de référence, soit structurel peut déterminer des effets sur l'activité du sujet. Ces effets, que nous avons appelé symptômes, sont des indices des difficultés que le sujet rencontre. Nous allons les préciser pour les différents types d'écart.

Un écart culturel, s'il n'est pas géré, ne permet pas la production de la démonstration.

Le sujet justifie la conjecture par le moyen d'une argumentation et il s'arrête. Dans ce cas les solutions sont, en partie, du côté du contrat didactique qui établit les attentes de l'enseignant et les règles pour les satisfaire. Si l'enseignant exige une démonstration, l'élève est obligé d'apprendre la démonstration. Evidemment, expliciter quel est le comportement attendu n'est pas suffisant, il faut aussi assurer une médiation des modèles de comportement attendu ; c'est-à-dire que le modèle de la démonstration doit être fourni à l'élève si on veut qu'il soit capable de le reproduire.

Un écart du système de référence ou un écart structurel est beaucoup plus complexe. La médiation de l'enseignant peut ne pas être suffisante pour le gérer. Un tel écart peut conduire à une rupture cognitive.

La continuité entre argumentation et démonstration permet de déterminer l'unité cognitive, et l'écart entre les deux peut être cause de rupture cognitive.

Le dynamisme de la pensée activée pendant la phase d'exploration du problème peut conduire à la construction d'une argumentation basée sur des conceptions. Pour passer de l'argumentation à la démonstration, l'énoncé relevant d'une conception (i.e. valide au sens de cette conception) doit trouver un théorème correspondant dans la théorie mathématique. On peut construire la démonstration si les éléments de l'argumentation sont systématisables dans une théorie institutionnalisée. Si la théorie manque, la continuité est brisée. Il se peut que le

théorème, qui pourrait correspondre à l'énoncé relevant de la conception, ne soit pas connu par le sujet ou bien qu'il ne s'en souvienne pas. Il se peut aussi qu'il n'ait pas l'habitude de l'utiliser, et quand le théorème est nécessaire pour la résolution d'un problème, il est inaccessible dans sa mémoire. Dans ce cas, l'écart du système de référence, qui n'est pas géré par le sujet, se traduit par une rupture cognitive. Les difficultés observables pendant l'activité de résolution sont des symptômes de la rupture cognitive (l'arrêt de la progression, le blocage, etc.).

Si au contraire, pour la construction de la démonstration, un théorème peut être remplacé par un énoncé relevant d'une conception sous-jacente à la construction de la conjecture, sans la manifestation des symptômes de difficultés dans l'activité du sujet, alors nous considérons qu'il y a continuité entre argumentation et démonstration, qui correspond à une unité cognitive.

Nous remarquons que la production d'une démonstration n'implique pas nécessairement l'unité cognitive ; celle-ci est présente si on peut observer une continuité entre les éléments produits pendant la construction de la conjecture et ceux produits pendant la construction de la démonstration.

Si la démonstration est construite en changeant le « cadre » utilisé pendant l'argumentation on a une rupture cognitive, même si l'écart est dépassé. Il y a une rupture entre les deux processus si par exemple l'argumentation est construite à partir de la géométrie synthétique et la phase démonstrative de la géométrie analytique. Dans ce cas, la rupture cognitive peut être présente sans qu'il y ait un symptôme de difficulté dans l'activité du sujet.

Le passage de l'argumentation à la démonstration peut être également difficile du point de vue structurel.

Nous avons vu qu'un écart du système de référence peut être une cause de rupture cognitive. Nous pouvons nous demander si un écart structurel peut être une cause de rupture cognitive structurelle.

Nous définissons l'**unité cognitive structurelle** comme une unité cognitive due à une continuité structurelle. La rupture cognitive structurelle est la négation d'unité cognitive structurelle.

Pouvons-nous affirmer que le changement de structure est naturel pour l'élève ? L'intuition suggère bien le contraire. D'ailleurs, si un écart du système de référence peut amener à une

rupture cognitive, ne pouvons-nous pas penser qu'un écart structurel peut conduire à une rupture cognitive structurelle ?

Nous avançons l'hypothèse que l'écart structurel peut être cause de rupture cognitive structurelle si nous observons la présence de symptômes révélant la difficulté dans le passage à la démonstration.

Si le sujet ne réussit pas à construire une chaîne déductive avec les arguments produits pendant la mise en place de la conjecture, l'écart peut être structurel. Dans ce cas, le système de référence nécessaire pour construire la démonstration est disponible, mais sa systématisation sous forme de démonstration est problématique. L'écart structurel, qui n'est pas géré, ne permet pas la production de la démonstration. On observera une rupture cognitive structurelle.

Au contraire, si dans l'activité de l'élève nous ne trouvons pas de symptômes de difficulté dans le passage d'une structure argumentative en une structure déductive, l'éventuel écart structurel entre argumentation et démonstration est géré par l'élève. Il n'est pas cause de rupture cognitive structurelle.

Dans le tableau 2.1, nous résumons les considérations faites ci-dessus.

Une continuité culturelle permet la construction d'une démonstration alors qu'à l'écart culturel correspond l'absence de production de démonstration.

S'il y a continuité du système de référence (SR) entre argumentation et démonstration nous ne pouvons pas conclure avec certitude qu'il y a unité cognitive, parce qu'il se peut qu'un écart structurel soit la cause d'une rupture cognitive structurelle. Au contraire, un écart du système de référence (SR) entre argumentation et démonstration est cause de rupture cognitive.

Une continuité structurelle n'est pas suffisante pour affirmer qu'il y a unité cognitive parce que cela dépend du système de référence (SR).

Un écart structurel ne nous permet pas de conclure à une rupture cognitive structurelle. Au contraire, s'il est géré par le sujet, l'unité cognitive est facilement construite.

CONTINUITÉ	CULTURELLE → PRODUCTION DE LA DÉMONSTRATION	
	SR	UNITÉ COGNITIVE ?
	STRUCTURELLE	UNITÉ COGNITIVE ?
ÉCART	CULTUREL → ABSENCE DE PRODUCTION DE LA DÉMONSTRATION	
	SR	RUPTURE COGNITIVE
	STRUCTUREL	UNITÉ OU RUPTURE COGNITIVE ?

Tableau 2.1. Effets de la continuité et de l'écart entre argumentation et démonstration

Il est difficile d'obtenir une continuité structurelle entre argumentation et démonstration ; les structures respectives sont souvent différentes. Dans la section suivante nous proposons quelques structures possibles de l'argumentation et de la démonstration afin d'analyser plus précisément l'écart et la continuité. Ensuite, nous présentons une analyse de l'unité cognitive sur des études de cas.

2 Structure de l'argumentation et de la démonstration

Il se peut que la méthode déductive soit la seule caractéristique essentielle par laquelle les mathématiques se distinguent des autres sciences (et probablement, non seulement toute discipline mathématique est une théorie déductive, mais même, inversement, toute théorie déductive est une discipline mathématique). Depuis toujours les mathématiques nous sont présentées comme une science bien construite et ordonnée même structurellement. Cependant, la déduction n'est pas la méthode la plus souvent employée pour sa construction : pour construire une connaissance nouvelle, la déduction n'est pas suffisante. Polya, dans la préface de son livre (1958), soutient qu'aucun raisonnement démonstratif n'est capable de conduire à des connaissances nouvelles « *sur le monde qui nous entoure* ».

Le raisonnement démonstratif pénètre les sciences aussi profondément que le font les mathématiques mais il est incapable, par lui-même (comme les mathématiques) de conduire à des connaissances essentiellement nouvelles sur le monde qui nous entoure. Tout ce que nous apprenons de neuf sur ce monde implique l'intervention du

raisonnement plausible, seul type de raisonnement dont nous faisons usage dans la vie courant. (Polya, 1958, préface de l'auteur).

Les connaissances nouvelles sont des hypothèses qui sont justifiées par des raisonnements plausibles. « *Le raisonnement plausible est hasardeux, il peut être controversé, et il est provisoire* » (Polya, 1958, préface de l'auteur).

Bien que la position de Polya peut paraître radicale, nous pensons que l'argumentation, qui conforte une conjecture, est souvent produite par des raisonnements plausibles. La déduction n'est pas suffisante pour exprimer tous les raisonnements qui sont faits en mathématiques.

Dans cette section, nous analysons quelques structures de l'argumentation et de la démonstration.

La section suivante nous permettra de les comparer pour fournir une analyse de l'unité cognitive en termes de structure. Nous pensons que le passage de l'une à l'autre n'est pas une opération naturelle pour l'élève lorsqu'il apprend à démontrer. Au contraire, il se peut que dans le changement de structure réside une des difficultés que les élèves rencontrent lorsqu'ils construisent une démonstration. Notre but est donner les outils afin de percevoir finalement les contrastes et les contradictions entre structures.

2.1 Structure de la démonstration

En mathématiques, la démonstration est construite selon la méthode axiomatique qui se base sur la formalisation du langage, sur la formulation des axiomes primitifs et des postulats, sur la cohérence et la complétude de la théorie développée. La structure de la démonstration est rigide, et restrictive. C'est une chaîne déductive : à partir des principes et des définitions on déduit comme conséquence ce que l'on veut démontrer.

Cependant, les "opinions" sur la démonstration ne sont pas unanimes. Tout le monde n'est pas d'accord sur ce que l'on peut considérer comme démonstration.

Au sein des mathématiques elles-mêmes, la démonstration peut prendre des formes multiples. Plus encore, il y a des théories qui acceptent des structures démonstratives particulières : par exemple la logique des « tableaux » considère l'abduction comme démonstration (Cialdea Mayer & Pirri, 1993).

Les mathématiques scolaires font apparaître des différences substantielles. Le contrat didactique joue un rôle central : c'est l'enseignant qui décide ce qui peut être considéré comme une démonstration et comment la construire. Il se peut qu'une argumentation soit acceptée comme démonstration. Ou au contraire, le manque de formalisme peut être un motif de rejet d'une démonstration

Dans la suite nous considérerons deux types de démonstration :

- la démonstration déductive,
- la démonstration par récurrence.

En fait, nous nous intéressons au passage de l'argumentation à la démonstration pour pouvoir analyser la comparaison en termes cognitifs. Un des objectifs de l'unité cognitive est l'analyse des difficultés que pourraient rencontrer les élèves au moment de l'introduction de la notion de théorème. La structure de la chaîne déductive est alors l'une des premières caractéristiques de la démonstration que l'élève doit apprendre.

La récurrence a été choisie parce que nous souhaitons la comparer avec l'argumentation inductive.

2.1.1 La démonstration déductive

La déduction mathématique peut être schématisée de la façon suivante :

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

$A \Rightarrow B$ est un théorème,

A est une proposition d'entrée ou donnée,

B est la conclusion.

Le pas déductif d'une démonstration est le *modus ponens* de la logique. Une démonstration déductive enchaîne les déductions par « recyclage » des conclusions comme le formule Duval (Duval, 1995).

Le syllogisme scientifique d'Aristote est une déduction : la conclusion dérive directement des deux prémisses. La déduction s'occupe des arguments qui appuient la nécessité d'une conclusion sur une ou plusieurs prémisses : les prémisses étant vraies, la conclusion doit l'être aussi.

Pour comprendre la nature d'un pas de démonstration on est obligé de s'intéresser aux statuts des propositions. Toute proposition a un statut particulier : donnée, conclusion, théorème, etc. La même proposition, ayant donc le même contenu, peut avoir des statuts différents dans deux pas différents (Duval, 1995). Ainsi, la liaison entre deux pas de déduction est telle que la conclusion du premier pas devient prémisses dans le pas ultérieur.

La déduction est une sorte de « mécanisme » que l'élève doit apprendre afin de construire des démonstrations. Elle ne se développe pas spontanément dans son activité. Au contraire, elle peut apparaître artificielle et compliquée.

2.1.2 La démonstration par récurrence

La démonstration par récurrence est basée sur l'axiome d'induction. Il s'agit d'un principe qui permet d'établir la validité d'un ensemble dénombrable de propositions $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ pour toutes les valeurs de n (entier naturel) à partir de la validité de la première proposition, et du fait que la validité d'une proposition entraîne celle de la suivante. Il se formalise ainsi :

$$\frac{P_1 \quad \forall n (P_n \Rightarrow P_{n+1})}{\forall n P_n}$$

La logique des propositions, très proche de la façon de raisonner des élèves, nous permet d'affirmer que la récurrence montre la validité d'un ensemble infini de propositions. Cependant, d'un point de vue mathématique-épistémologique, la logique en vigueur, la logique des prédicats soutient que la récurrence ne prouve pas une infinité d'énoncés, mais un seul avec quantificateur : $\forall n P(n)$. D'un point de vue didactique, l'introduction du quantificateur est presque toujours cachée pendant la scolarité (en particulier dans la pratique de la géométrie euclidienne élémentaire). En fait, l'une des difficultés de l'apprentissage du raisonnement par récurrence est liée à la compréhension et à la démonstration d'une implication universellement quantifiée (Durand-Guerrier & al. 2000).

Une démonstration par récurrence est une démonstration mettant en œuvre l'axiome d'induction. L'axiome d'induction introduit l'infini de la même façon qu'il est introduit dans la construction des entiers naturels :

0 est un naturel

Si x est un naturel, $S.x$ est un naturel

D'après Lolli, l'axiome d'induction est strictement lié à l'infini. Leurs définitions sont tellement voisines qu'elles se font mutuellement référence.

*L'assioma d'induzione sembra un modo per dominare l'infinito in un modo finito, un trucco, e per questo la sua giustificazione deve andare di conserva con quella dell'infinito*⁶ (Lolli, 1996, p. 150).

Dans l'histoire des mathématiques l'induction a fait des apparitions sporadiques (Lolli, 1996, p. 150 et suiv.). Lolli résume en quelques pages le développement de la démonstration par récurrence. L'induction mathématique de Bernoulli (1686) est une sorte d'induction expérimentale (le passage de n à $n+1$) ; Gauss parle d'une induction rigoureuse mais il ne

⁶ L'axiome d'induction semble être un moyen pour maîtriser l'infini de façon finie, une astuce, et pour cela sa justification doit aller avec celle de l'infini.

décrit pas la méthode. Le premier à utiliser de façon systématique l'induction est Grassmann (1861), mais c'est avec Dedekind (1870) que l'axiome d'induction est défini. Le développement de la récurrence n'a pas été facile. Les mathématiciens ont eu beaucoup de difficultés à la définir et à l'utiliser.

Ces difficultés de construction et l'idée d'infini incorporée dans la récurrence rendent ardue sa compréhension. Si la déduction peut apparaître artificielle aux yeux des élèves, l'apprentissage de la démonstration par récurrence est encore plus pénible (Harel, 2001). Elle n'est pas intuitive. Si elle n'a pas été explicitement introduite par l'enseignant, et si elle n'est pas bien maîtrisée, elle est très difficile à utiliser pour quiconque.

2.2 Quelques structures de l'argumentation

Selon Duval, les pas dans l'argumentation sont reliés en considérant la signification des propositions, et non leur statut théorique (Duval, 1995). Par rapport à la démonstration, l'argumentation semble ne pas suivre de règles particulières ; elle peut apparaître comme constituée par plusieurs arguments qui ont des structures différentes et parfois non descriptibles. La structure ternaire attribuée à l'argumentation par le modèle de Toulmin nous permet de mettre de l'ordre dans ce désordre apparent par opposition à la thèse de Duval. Avant d'aborder l'analyse des argumentations dans le modèle de Toulmin (nous traitons cette partie au chapitre suivant), nous présentons les trois types d'argumentation que nous allons considérer :

- l'argumentation déductive,
- l'argumentation abductive,
- l'argumentation inductive.

Nous avons restreint l'analyse à ces argumentations parce que l'étude de l'argumentation en termes déductifs, abductifs et inductifs est tout à fait classique (Aristote ; Peirce, 1960 ; Polya, 1958, 1962)

Aristote a été le premier à déterminer ces trois figures (Premiers Analytiques II). Il appelle respectivement *enthymème*, la déduction, *enthymème par indice* (ou *syllogisme heuristique*), l'abduction et *enthymème par exemple* l'induction.

L'enthymème conclut à partir de l'antécédent. L'enthymème par indice infère à partir du conséquent. L'enthymème par exemple conclut avec une généralisation sur un certain nombre d'exemples.

Cependant, Aristote ne parle jamais d'abduction. Nous sommes obligée de revenir à Peirce pour cette définition. Peirce est le premier à avoir défini l'abduction et c'est à lui que se réfèrent la majorité des auteurs.

D'après Peirce, un argument, qui « *est un signe qui représente spécifiquement un Interprétant, appelé la Conclusion, qu'il est amené à déterminer* »⁷ (Peirce, 1960, 2.96), peut être de trois types : déductif, inductif et abductif.

Il distingue deux types d'inférence : inférences explicatives (déductives) et inférences ampliatives (abductives et inductives). Dans les inférences explicatives, la conclusion suit nécessairement des prémisses, alors que dans les inférences ampliatives la conclusion ne suit pas des prémisses avec nécessité. La conclusion introduit des connaissances nouvelles.

La déduction, qui est une inférence explicative est une concaténation tel que le résultat est tiré d'une règle générale et d'un cas particulier. L'abduction (ou *hypothèses*) est une inférence ampliative d'un cas à partir d'un résultat et d'une règle. L'induction est une inférence ampliative d'une règle à partir d'un cas et d'un résultat (Peirce, 1960).

Il donne les trois exemples suivants pour distinguer les trois inférences : déductive, inductive et abductive :

DEDUCTION

Rule. – All the beans from this bag are white

Case. – These beans are from this bag

∴Result. – These beans are white

INDUCTION

Case. – These beans are from this bag

Result. – These beans are white

∴Rule. – All the beans from this bag are white

HYPOTHESIS

Rule. – All the beans from this bag are white

Result. – These beans are white

*∴Case. – These beans are from this bag*⁸ (Pierce, 1960, 2.263)

⁷ *Argument is of three kinds: Deduction, Induction, and Abduction (usually called adopting a hypothesis).* (Peirce, 1960, 2.96) ou *An argument is a sign which distinctly represents the Interpretant, called its Conclusion, which it is intended to determine* (Peirce, 1960, 2.95).

⁸ DEDUCTION

Règle. - Les haricots de ce sac sont blancs

Cas. - Ces haricots viennent de ce sac

∴ Résultat. - Ces haricots sont blancs

INDUCTION

Cas. - Ces haricots viennent de ce sac

Résultat. - Ces haricots sont blancs

∴ Règle. - Les haricots de ce sac sont blancs

HYPOTHESIS

Règle. - Les haricots de ce sac sont blancs

Résultat. - Ces haricots sont blanc

C'est à partir de cette idée de déduction, abduction et induction que nous allons développer l'analyse sur la structure de l'argumentation.

2.2.1 Argumentation déductive

Comme nous l'avons déjà souligné plusieurs fois, la construction d'une solution possible à un problème donné a difficilement (voire jamais) une structure déductive. Cependant, nous ne pouvons pas l'exclure a priori car elle est la structure principale de la démonstration et parce que notre but est justement une comparaison entre argumentation et démonstration en termes de structure. En outre, il se peut que des pas déductifs soient quand même présents dans n'importe quel processus d'argumentation.

L'argumentation déductive a la même forme que la démonstration déductive mais elles ont cependant des aspects différents. La déduction dans une démonstration utilise souvent des objets formalisés, et elle s'appuie toujours sur une théorie mathématique. En revanche, l'argumentation déductive utilise la langue naturelle et elle peut ne pas être étayée par une théorie mathématique. C'est pourquoi une déduction dans l'argumentation peut être sémantiquement fausse.

Dans l'argumentation déductive, nous prenons en considération les déductions qui peuvent être fausses, mais non les déductions qui sont privées du sens. On considère par exemple le syllogisme classique suivant :

Paul est un apôtre

Les apôtres sont douzes

Paul est douze

Le syllogisme est correct formellement mais la proposition qui suit nécessairement des prémisses n'a aucun sens. En effet, il s'agit d'un sophisme, c'est-à-dire d'un argument faux malgré une apparence de vérité.

Nous ne considérons pas non plus les déductions rhétoriques. Ryan distingue les argumentations logiques des syllogismes rhétoriques. Nous reportons la citation de Plantin à ce propos.

Les enthymèmes rhétoriques forment une catégorie distincte des argumentations logiques. Le problème de leur évaluation est spécifique, et on ne peut pas le traiter en terme de validité, même redéfinie comme une catégorie modale, ou restreinte à un champ spécifique comme le propose Toulmin. Il faut trancher et non pas tenter de concilier validité logique et force persuasive (Plantin, 1990, p. 104).

Nous ne sommes pas intéressée par ces déductions rhétoriques. Les argumentations que nous considérons n'ont pas en soit de fin de persuasion, mais elles procèdent d'une quête sincère de la vérité. Nous ne prenons en considération que les déductions qui ont du sens pour celui qui les construit.

2.2.2 Argumentation abductive

L'abduction a été introduite par Peirce (Peirce, 1960) comme modèle des inférences utilisées dans les processus de découverte. Elle est ampliative parce que sa conclusion introduit des connaissances nouvelles. La recherche de la solution d'un problème se construit souvent en partant de la conclusion, c'est-à-dire de ce qui est demandé de trouver. On observe des faits (*résultats*) et par le moyen d'un processus ascendant on remonte au cas d'une règle qui peut expliquer les faits.

Selon Peirce (1960) l'abduction est le premier pas de toute enquête (Peirce, 1960, 6.469).

Elle est aussi l'essence de l'histoire. Les faits historiques sont des hypothèses ; nous pensons aux faits parce que nous observons leurs effets⁹ (Peirce, 1960, 2.714).

Les écrits de Peirce sont fragmentaires, et le concept d'abduction est traité plusieurs fois avec des définitions toujours différentes. Néanmoins, on peut observer un développement temporel dans sa pensée (Fann, 1970). Dans la suite nous ferons référence au livre de K. T. Fann (1970) pour avoir une trace qui nous aide à identifier les moments principaux de la théorie de Peirce.

Dans un premier temps Peirce désignait l'abduction par le mot « hypothèse ».

*A hypothesis is something, which looks as if it might be true and were true and which is capable of verification or refutation by comparison with facts*¹⁰ (Peirce, 1960, 1.120).

Dans un deuxième temps cette définition a été affinée : l'hypothèse est un cas particulier d'une certaine règle, supposé à partir d'un fait observé.

*Hypothesis is where we find some very curious circumstance, which would be explained by the supposition that it was a case of a certain general rule, and thereupon adopt that supposition*¹¹ (Peirce, 1960, 2.624).

L'abduction concerne les raisons pour lesquelles adopter une hypothèse, elle est constituée par un processus explicatif. A partir d'un fait observé (un *résultat*) et d'une règle particulière,

⁹ ... any historical fact... is a hypothesis; we believe the fact, because its effects – I mean current tradition, the histories, the monuments, etc. – are observed. (Peirce, 1960, 2.714)

¹⁰ Une hypothèse est quelque chose qui apparaît comme si elle pouvait être vraie et comme si elle était vraie, et qu'il est possible de vérifier ou réfuter par comparaison avec des faits.

¹¹ Une hypothèse, c'est quand nous nous trouvons dans une circonstance très étrange, qui pourrait être expliquée en supposant que c'est un cas particulier d'une certaine règle générale, et pour laquelle nous adoptons donc cette supposition.

on est amené à supposer le donné de la règle (le *cas*). Finalement, l'abduction est une inférence dont la forme logique est la suivante.

*The surprising fact C is observed,
But if A were true, C would be a matter of course;
Hence, there is reason to suspect that A is true*¹² (Peirce, 1960, 5.189).

A partir d'un fait observé on suppose la vérité d'une règle dont l'hypothèse devient plus crédible. L'inférence donne une valeur épistémique à l'hypothèse ; elle est conclusion d'une forme logique qui lui donne une valeur de plausibilité.

*An hypothesis in every sense is an inference, because it is adopted for a reason, good or bad, and that reason, in being regarded as such, is regarded as lending the hypothesis some plausibility*¹³ (Peirce, 1960, 2.511n.).

C'est justement cette idée de plausibilité qui nous renvoie à l'œuvre de Polya (1962). Polya ne l'appelle pas « abduction ». Cependant, on peut facilement la reconnaître dans ce qu'il appelle *syllogisme heuristique*, qu'il considère comme le modèle le plus simple du *raisonnement plausible* (Polya, 1962, p. 107). Le raisonnement plausible a les caractéristiques de ne pas offrir la certitude d'une démonstration rigoureuse et d'être utile à l'acquisition des connaissances nouvelles (Polya, 1962, p. 207). L'abduction ou *syllogisme heuristique* est un type de raisonnement plausible, qui peut être modélisé de la façon suivante :

*Si A est vrai, B est également vrai, comme nous le savons.
Or, il advient que B est vrai.
Donc A devient plus croyable.*

Plus brièvement encore,

*Si A donc B
B vrai*

A plus croyable (Polya, 1962, p. 107).

Les deux premières propositions (au dessus de la ligne de séparation) sont les prémisses du *syllogisme heuristique*, la troisième (en dessous) est la conclusion. Il ne s'agit pas d'un *syllogisme scientifique* ; la conclusion du *syllogisme heuristique* est tout à fait particulière : elle a à la fois une direction et une force. Nous citons directement Polya :

La conclusion du syllogisme démonstratif, de même nature logique que les prémisses, est exprimée complètement et se trouve entièrement supportée par celles-ci [...] Au contraire, la conclusion du syllogisme heuristique diffère des prémisses dans sa nature logique ; elle est plus

¹² *Le fait surprenant C est observé*

*Mais si A était vrai alors C devrait l'être évidemment
Ainsi, il est raisonnable de suggérer que A soit vrai*

¹³ *Une hypothèse, dans tous les sens de ce terme, est une inférence, car adoptée pour une raison quelconque, bonne ou mauvaise, et que cette raison, prise comme telle, est considérée comme donnant à l'hypothèse une certaine plausibilité.*

vague, moins décisive, moins complètement exprimée. Cette conclusion est comparable à une force ; elle a en effet à la fois une direction dans laquelle elle nous pousse « A devient plus croyable » et une certaine ampleur « A peut devenir beaucoup plus, ou seulement légèrement plus croyable ». La conclusion n'est pas complètement exprimée ; elle n'est pas entièrement supportée par les prémisses. La direction est exprimée et impliquée par les prémisses, l'ampleur ne l'est pas. (Polya, 1962, pp. 108-109).

A partir de ces considérations nous pouvons construire le schéma d'abduction, de façon à pouvoir le comparer avec le schéma de la déduction déjà décrit.

$$\begin{array}{r} A \Rightarrow B \\ B \\ \hline A \end{array}$$

$A \Rightarrow B$ est une règle (un théorème par exemple),

B est le fait observé,

A est la conclusion qui devient plus probable.

L'abduction consiste à dériver les meilleures explications ou les plus plausibles pour un ensemble de faits donnés. Le problème de plausibilité est lié au caractère putatif de l'abduction mais il peut être aussi lié à l'incertitude, l'incomplétude et l'imprécision sur la règle. L'objectif de celui qui fait l'abduction est de déterminer les informations incomplètes, imprécises, incertaines et de les utiliser pour expliquer les faits observés.

Or, il se peut que les faits soient les seules informations dont on dispose, il se peut que la règle ne soit pas connue. Il faut alors la supposer ; dans l'ensemble des règles du domaine on cherche celle qui apparaît la plus appropriée pour construire la conclusion.

Il s'agit dans ce cas d'une forme d'abduction particulière : *l'abduction créative* (Peirce, 1960 ; Magnani, 2001). *L'abduction créative* est une forme d'inférence où l'on cherche à trouver une règle telle que, si le fait à expliquer était un cas particulier de cette règle, ce fait ne serait plus surprenant. La particularité de l'abduction créative est que la règle n'est pas donnée, mais elle doit être cherchée et supposée.

Considérons l'exemple d'abduction donné par Peirce :

Règle. - Les haricots de ce sac sont blancs

Résultat. - Ces haricots sont blancs

∴ Cas - Ces haricots viennent de ce sac (Pierce, 1960, 2.263).

L'abduction créative est :

Résultat. - Ces haricots sont blancs

∴ Règle. - Les haricots de ce sac sont blancs

∴ Cas - Ces haricots viennent de ce sac

L'abduction créative procède sans informations sur la règle et sur le cas. On connaît seulement un fait, et à partir de là on construit la règle et le cas. On adopte d'abord une règle de base, une hypothèse théorique, et on procède en espérant trouver le cas qui vérifie la règle.

Si nous voulons construire notre schéma :

$$\frac{B}{A \Rightarrow B}$$

A

B est le fait observé,

$A \Rightarrow B$ est une règle supposée (un théorème par exemple),

A est la conclusion qui devient plus probable.

L'abduction créative peut probablement être mise en relation avec l'inférence par indice de Aristote (Premiers Analytiques II 27, 70a-b). On peut remonter d'un indice I à ce qu'il indique. On peut inférer une cause à partir de la présence d'un effet I.

Nous pourrions dire : un fait observé peut être conséquence d'une certaine règle, dont la conclusion peut être décomposée en indices. Le fait observé est l'un de ces indices.

On pourrait donner le schéma suivant :

$$\frac{I_i}{A \Rightarrow I_1, I_2, I_3, \dots, I_n}$$

A

Nous avons choisi de relier l'enthymème par indice avec l'abduction créative même si en général, chez Aristote elle est plus souvent rapprochée de l'abduction. Cela parce que les exemples cités par Aristote sont strictement liés au quotidien : on cherche un argument pour expliquer un fait observé à partir d'une règle ($A \Rightarrow I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$), dont l'antécédent (A) a une forte probabilité de s'être réalisé dans les circonstances données (Eggs, 1994, p. 51) En particulier dans le quotidien, la règle $A \Rightarrow I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ reste souvent implicite, il est donc difficile de savoir si elle est supposée ou si au contraire elle est donnée.

De la même façon, la différence entre abduction et abduction créative peut ne pas être toujours évidente.

2.2.3 Argumentation inductive

L'induction est une inférence ampliative qui conduit à la construction de connaissances nouvelles à partir de l'observation de cas particuliers que l'on généralise à un ensemble plus

vaste de cas. L'induction est l'inférence d'une règle à partir d'un cas (ou d'un ensemble des cas). Fann résume l'induction selon l'idée de Peirce dans la façon suivante.

For in induction we generalize from a number of cases of which something is true and infer that the same thing is probably true of a whole class [...] Thus induction may be said to be an inference from a sample to whole, or from particulars to a general law¹⁴ (Fann, 1970, p. 10)

Au contraire de la déduction qui part du général pour conclure aux cas particuliers, le processus inductif part de l'observation ou de la cueillette de certains faits ou données pour conclure une règle. Elle s'éloigne même de l'abduction : les données recueillies ou les faits observés sont comparés entre eux afin de déterminer leurs relations mutuelles et de pouvoir finalement abstraire une règle générale. Néanmoins, l'induction, comme l'abduction, est un cas particulier du raisonnement plausible (Polya, 1958, préface de l'auteur) ; elle ne peut pas inférer avec certitude une conclusion qui est construite par une généralisation des éléments d'un ensemble de cas particuliers.

D'après Peirce, l'induction « *infère l'existence de phénomènes semblables à ceux observés dans les cas similaires* »¹⁵ (Peirce, 1960, 2.640)

Aristote appelle *exemple* l'argumentation inductive. L'exemple s'appuie sur « *plusieurs cas semblables pour montrer qu'il est ainsi* » (Aristote, Rhétorique I, 2-1356b 14). On a un exemple quand « *partant d'un ou des plusieurs cas semblables, on prend le général et on conclut au particulier* » (Aristote, Rhétorique II, 25-1402b 16). Analogie, généralisation et particularisation apparaissent nécessaires pour construire une argumentation inductive. La comparaison entre cas semblables est faite par analogie. L'abstraction de la règle est faite à partir d'une généralisation sur un ou plusieurs cas. La particularisation permet de vérifier la règle sur un cas particulier.

Même Polya soutient que les outils de l'induction sont la généralisation, la particularisation et l'analogie.

L'induction essaie de découvrir derrière l'observation la régularité et la cohérence; ses instruments les plus visibles sont la généralisation, la particularisation, l'analogie. Une tentative de généralisation part d'un effort pour comprendre les faits observés ; elle est fondée sur l'analogie et vérifiée par des nouveaux cas particuliers. (Polya, 1962, p. 112)

¹⁴ *Dans l'induction nous généralisons à partir de la vérification d'un fait pour un certain nombre de cas particuliers, et inférons que ce fait est probablement vrai pour toute une classe [...] Ainsi, on peut voir l'induction comme une inférence de la partie au tout, ou de cas particuliers à une loi générale.*

¹⁵ « *infers l'existence of phenomena such as we have observed in cases that are similar* » (Peirce, 1960, 2.640)

« L'analogie est une sorte de similarité » (Polya, 1962, p. 45). Elle permet de cueillir les rapports similaires entre les éléments d'objets analogues (Polya, 1962, p. 45).

Généraliser, c'est passer de la considération d'un ensemble donné d'objets à celle d'un ensemble plus vaste, contenant l'ensemble donné (Polya, 1962, p. 91). Particulariser, c'est passer de la considération d'un ensemble d'objets donné, à celle d'un ensemble plus petit, ou même d'un seul objet, contenu dans l'ensemble donné (Polya, 1962, p. 137).

A partir de l'analogie, de la généralisation et de la particularisation nous pouvons distinguer trois types d'argumentation inductive :

- Argumentation inductive par généralisation ;
- Argumentation inductive par passage « à la limite » ;
- Argumentation inductive par récurrence.

Nous pouvons les distinguer en analysant comment les processus d'analogie de généralisation et de particularisation interviennent dans les trois argumentations.

Argumentation inductive par généralisation

L'induction par généralisation est une inférence pratique qui procède en considérant des cas particuliers jusqu'à déterminer une loi générale. Le processus permet d'abstraire une propriété de l'analyse de plusieurs cas différents.

Néanmoins, ce processus peut amener à deux généralisations différentes :

- Une généralisation des énoncés tirés sur des cas particuliers, ce que Harel appelle *result pattern generalisation* (Harel, 2001, p. 191). C'est le cas lorsque le sujet voit un motif dans les énoncés qui sont déduits à partir de chaque cas. Les cas peuvent être dissociés les uns des autres, ils ne suivent pas nécessairement un ordre particulier.
- Une généralisation sur le processus qui amène aux énoncés, tirés de cas particuliers, ce que Harel appelle *process pattern generalisation* (Harel, 2001, p. 191). C'est le cas lorsque le sujet voit la régularité dans le processus qui conduit au résultat. Il commence à voir la chaîne qui relie les énoncés. Deux ou plusieurs cas spécifiques et ordonnés sont considérés et reliés entre eux.

Dans le premier cas la généralisation peut être ainsi schématisée : P(1), P(2), P(3), ...

P est la propriété qui est généralisée sur les cas 1, 2, 3 etc..

Dans le second cas la généralisation est : P(1)⇒P(2), P(2)⇒P(3), P(3) ⇒P(4), ...

Cette fois ci, la généralisation est faite sur l'inférence qui permet de passer de la propriété sur un cas à la propriété sur le suivant.

L'analogie permet la comparaison entre les cas considérés. La généralisation consent l'abstraction d'une propriété ou de l'inférence entre propriétés, sur plusieurs cas.

Ensuite on peut examiner d'autres cas particuliers pour chercher à vérifier la propriété trouvée ou l'inférence entre propriétés, ce qui est un processus de particularisation.

Argumentation inductive par passage « à la limite »

Le cas limite peut être un des cas considérés dans l'argumentation inductive par généralisation. Il est d'habitude le cas considéré pour vérifier la propriété déjà tirée d'autres cas. Il peut être considéré comme cas extrême : si la propriété est vraie dans ce cas là, on est amenés à penser qu'elle peut être vraie également dans les cas précédents. D'une certaine façon le cas limite peut fonctionner comme expérience cruciale (Balacheff, 1988). Dans ce cas, c'est un processus de particularisation qui est fait sur le cas limite. La propriété déjà généralisée sur les autres cas est ensuite considérée dans ce cas particulier.

Le cas limite peut être considéré comme le cas qui est relié à tous les cas précédents et non seulement au cas qui le précède. En fait, le cas immédiatement précédent le cas limite n'est pas explicitable. C'est pourquoi la prise en compte du cas limite peut induire à considérer une généralisation sur le processus, une sorte d'induction par récurrence « encore en formation ».

Argumentation inductive par récurrence

L'argumentation inductive par récurrence se base sur une généralisation sur n . A partir d'une propriété vraie sur un cas $P(1)$, et la découverte d'une relation récurrente entre deux cas successifs, on relie $P(n)$ et $P(n+1)$. La conclusion du raisonnement est que la règle $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

L'explicitation de la règle $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est le produit d'une généralisation sur le processus.

Les deux cas suivent un ordre particulier ; ils ne sont pas considérés par hasard. La généralisation sur le processus est donc à la base d'une argumentation inductive par récurrence. De plus, sans la généralisation sur le processus il n'y a pas d'argumentation déductive par récurrence.

L'argumentation par récurrence est ce que Harel appelle *quasi-induction* (Harel 2001, p. 195).

La quasi-induction, est caractérisée par : la découverte d'une relation récurrente (*Discovering a recursive relation*), l'utilisation de cette relation sur des cas bien ordonnés, reliés entre eux, par exemple dérivation de $P(2)$ de $P(1)$, $P(3)$ de $P(2)$ etc. (*Establishing the first few inferences*), l'utilisation de la *méthode de montée et de descente* (*using the method of ascent*

or descent). Dans la *méthode de montée*, on commence à établir $P(1)$ et ensuite on montre comment dériver $P(2)$ de $P(1)$, $P(3)$ de $P(2)$, etc. Finalement on déclare que le raisonnement peut être fait sur toute la séquence. Dans la *méthode de descente*, on dérive $P(n+1)$ de $P(n)$ et on déclare que le raisonnement peut être fait sur la séquence entière en commençant de $P(1)$, qui est établi séparément. (Harel, 2001, p. 197)

3 Retour sur l'unité ou rupture cognitive entre argumentation et démonstration

L'étude présentée dans la section précédente, nous permet d'avancer des hypothèses à propos de l'unité cognitive structurelle entre argumentation et démonstration. La comparaison entre une structure d'argumentation et la structure correspondant dans la démonstration, nous permet d'analyser les continuités et les écarts possibles entre structures. Cette analyse de comparaison sera ensuite analysée en termes d'unité cognitive.

L'analyse structurelle entre argumentation et démonstration suppose une continuité du système de référence. En effet, s'il y a un écart des systèmes de référence entre argumentation et démonstration, une analyse structurelle perd son sens, car probablement on est déjà dans le cas d'une rupture cognitive.

3.1 Continuité ou écart entre structures

L'analyse se déroule en considérant d'abord les structures de l'argumentation. Pour chaque structure nous considérons les structures possibles de la démonstration afin d'en déterminer les continuités ou les écarts.

Argumentation déductive

Si l'argumentation est déductive la démonstration est facilement une déduction. Dans ce cas une continuité structurelle entre argumentation et démonstration est attendue. De plus, si l'argumentation est déductive, il est possible qu'elle soit déjà une démonstration.

Argumentation abductive

Si l'argumentation est abductive, un écart structurel permet la construction d'une démonstration. La démonstration ne peut pas être abductive. L'écart doit être comblé pour construire une démonstration. En revanche, une continuité structurelle amène à la construction d'une preuve encore abductive.

Argumentation inductive

Nous considérons séparément les trois argumentations inductives que nous avons analysées afin de les comparer avec la démonstration par récurrence.

Argumentation inductive par généralisation

Il faut distinguer entre argumentation inductive par généralisation sur les énoncés et argumentation inductive par généralisation sur le processus.

Si l'argumentation est une induction par généralisation sur les énoncés, seulement un écart structurel peut amener à la construction d'une récurrence. Une continuité structurelle peut amener à la construction d'une preuve inductive, c'est-à-dire d'une preuve basée sur une généralisation sur les énoncés.

Au contraire, une généralisation sur le processus pourrait permettre la construction d'une démonstration par récurrence. Dans ce cas il s'agit d'une continuité structurelle entre argumentation et démonstration car c'est à partir d'une généralisation sur le processus qu'une démonstration par récurrence peut être construite. La liaison entre deux pas successifs permet de passer du cas n au cas $n+1$. On suppose devoir calculer la somme des n premiers nombres impairs. On peut par exemple déterminer la loi à partir d'un certain nombre d'exemples numériques. Dans ce cas la généralisation accomplie pour la détermination de la loi est une généralisation sur les énoncés. Si au contraire, on considère la liaison entre un pas n et le successeur $n+1$, par exemple en considérant un carré de côté n auquel on ajoute une « équerre » de $2n+1$ petits carrés pour le transformer en un carré de côté $n+1$, la généralisation est une généralisation sur le processus. Le passage à la construction d'une démonstration par récurrence à partir d'une argumentation inductive par généralisation sur le processus a alors un caractère de continuité car la loi que la récurrence permet de démontrer est celle qui relie un pas n au pas suivant $n+1$. La généralisation sur les énoncés ne permet pas de visualiser la liaison entre un pas et le suivant.

Argumentation inductive « à la limite »

L'argumentation inductive par passage « à la limite » peut évoluer en démonstration par récurrence si le cas limite est considéré comme un cas d'une généralisation sur le processus. Il s'agit alors d'une continuité structurelle. Si le cas limite est au contraire considéré comme cas d'une généralisation sur les énoncés, un écart structurel est nécessaire pour construire la démonstration par récurrence.

Argumentation inductive par récurrence

Une argumentation inductive par récurrence est peut-être facilement transformée en une démonstration par récurrence. Dans ce cas une continuité structurelle entre argumentation et démonstration est attendue.

Dans le tableau, nous représentons les considérations faites.

Argumentation	Démonstration/Preuve	Continuité (C) / Ecart (E)
Déductive	Démonstration déductive	C
	Autre	E
Abductive	Preuve Abductive	C
	Démonstration déductive	E
	Autre	E
Inductive par récurrence		
Inductive par généralisation sur le processus	Démonstration par récurrence	C
Inductive par passage « à la limite » comme cas d'une généralisation sur le processus	Autre	E
Inductive par généralisation sur les énoncés.	Preuve inductive	C
	Démonstration par récurrence	E
	Autre	E

Tableau 2.2

De la synthèse réalisée dans ce tableau, nous pouvons suggérer que pour construire une démonstration correcte il est souvent nécessaire de combler un écart structurel. Les argumentations abductives et certaines argumentations inductives ne peuvent pas rester telles quelles dans la démonstration.

3.1.1 Le cas particulier de l'argumentation inductive

Par rapport aux autres types d'argumentations l'induction mérite une analyse particulière.

En fait, d'après Polya, nous dirons que la recherche inductive peut suggérer la démonstration.

On peut remarquer, néanmoins, que la recherche inductive peut être utile en mathématique [...] L'observation attentive des cas

particuliers qui conduisent à un résultat mathématique général peut aussi suggérer la preuve elle-même. (Polya, 1958, p. 37)

Pendant une argumentation inductive, on réunit des observations appropriées (cas particuliers), on les examine et on les compare, on remarque des régularités partielles, on hésite, on se trompe, et finalement on parvient à réunir les éléments épars en un ensemble apparemment significatif. On construit une hypothèse. On cherche des conséquences accessibles de celle-ci, par exemple on cherche à la vérifier dans des cas particuliers, dont on puisse montrer la vérité ou la fausseté. La vérité de l'hypothèse sur un cas particulier augmente la confiance qu'on peut lui accorder, et peut suggérer une voie de démonstration.

Mais de quel type de démonstration il s'agit-il ?

Il faut faire une distinction entre démonstration déductive et démonstration par récurrence.

En effet, l'induction peut suggérer la déduction et le cas particulier peut suggérer la démonstration (Polya, 1958, p. 36). L'argumentation inductive par généralisation sur les énoncés peut amener à la production d'une preuve déductive. Les observations et les régularités partielles que le sujet remarque dans tous les cas particuliers, peuvent finalement se conjuguer sur un cas spécifique qui représente la généralisation de toutes les considérations faites sur les autres cas. Ce cas est, pour le sujet, un exemple générique (Balacheff, 1988).

L'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individu (Balacheff, 1988, p. 57)

C'est à partir de ce cas spécifique que l'on peut avoir la vision d'ensemble, la généralisation. Cela peut être le début d'une démonstration déductive.

La continuité entre argumentation et démonstration correspond, peut-être, à une continuité entre démonstration et l'exemple générique considéré dans l'argumentation inductive.

Au contraire, comme nous l'avons remarqué dans le paragraphe précédent, la construction d'une démonstration par récurrence à partir d'une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés est très difficile à faire. C'est une argumentation inductive par généralisation sur le processus ou une argumentation par récurrence qui peut amener à une démonstration par récurrence. Selon Harel, cependant, même dans ce cas, il faut prendre en compte l'écart cognitif qui peut exister entre les deux processus d'argumentation par récurrence (quasi-induction) et démonstration par récurrence (*mathematical induction*). A ce propos nous citons directement G. Harel :

...the cognitive gap between the quasi induction and MI should not be underestimated. While both are instantiations of the transformational proof scheme, the latter is an abstraction of the former. [...] In quasi

induction the student's conviction that $P(n)$ is true for any given natural number n stems from her or his ability to imagine starting from $P(1)$ and going through the inference steps, $P(1) \rightarrow P(2)$, $P(2) \rightarrow P(3)$, ... $P(n-1) \rightarrow P(n)$. This does not mean that the student actually runs through many steps, but that he or she is convinced that in principle this can be done for any given natural number n . Of particular importance is that in quasi induction the student views $P(n-1) \rightarrow P(n)$ just as one of the inference steps, the last step, in a sequence of inference that leads to $P(n)$. In MI on the other hand, the student views $P(n) \rightarrow P(n+1)$ as a variable inference form, a placeholder for the entire sequence of inferences¹⁶. (Harel, 2001, p. 201).

Nous n'appuyons pas cette position ; la considération de l'inférence $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ vue comme un des pas d'inférence est différente par rapport à la même inférence vue comme variable d'une forme d'inférence, mais il ne s'agit pas d'un écart. Nous pensons qu'il s'agit plutôt d'une continuité : si le sujet voit la liaison entre deux pas successifs, la généralisation de ce pas peut être facilement accomplie. Les raisons des échecs que nous trouvons dans la construction de la récurrence sont plutôt à rechercher, à notre avis, dans l'écart qui peut exister entre une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés et une argumentation inductive par généralisation sur le processus. C'est la « vision » de l'inférence d'un pas au successeur qui permet de passer à la démonstration par récurrence par continuité. Une généralisation faite au contraire à partir des énoncés n'est pas suffisante.

En outre, la démonstration par récurrence est problématique en soi. Parfois les élèves n'arrivent pas à la construire, car elle est apprise comme un schéma de démonstration sans vraiment comprendre sa nature et sa nécessité.

3.2 Unité ou rupture cognitive du système de référence et structurelle entre argumentation et démonstration

En termes d'unité ou rupture cognitive, l'analyse devient beaucoup plus complexe. De l'analyse précédente, il ressort que les situations dans lesquelles système de référence et

¹⁶ ...l'écart cognitif entre la quasi-induction et la récurrence ne doit pas être sous-estimé. Ce sont toutes les deux des instances du schéma de preuve transformationnelle, mais la seconde est une abstraction de la première. [...] Dans la quasi-induction, la conviction de l'étudiant que $P(n)$ est vrai pour tout entier n donné vient de sa capacité à s'imaginer partant de $P(1)$ et parcourant les étapes d'inférence $P(1) \rightarrow P(2)$, $P(2) \rightarrow P(3)$, ... $P(n-1) \rightarrow P(n)$. Cela ne signifie pas que l'étudiant effectue vraiment toutes les étapes, mais qu'il est convaincu que cela peut être fait en principe pour n'importe quelle valeur de n donnée. En particulier, il est important de noter que dans la quasi-induction, l'étudiant considère $P(n-1) \rightarrow P(n)$ seulement comme un pas d'inférence, le dernier, dans une séquence aboutissant à $P(n)$. Au contraire, dans la récurrence, l'étudiant voit $P(n) \rightarrow P(n+1)$ comme une forme d'inférence variable, un moule pour la totalité de la séquence d'inférences.

structure n'ont pas le même attribut de continuité ou d'écart (continuité du système de référence et écart entre structure par exemple) sont problématiques en termes d'unité cognitive. Il est donc nécessaire de conduire une analyse particulière de l'unité cognitive, qui considère de façon détachée le système de référence et la structure.

En particulier, les hypothèses que nous avançons sont les suivantes.

S'il y a un écart du système de référence entre argumentation et démonstration nous pouvons conclure qu'il y a rupture cognitive ; l'analyse structurelle perd de l'intérêt parce que les objets qui constituent les structures sont différents.

Par contre si on suppose une continuité du système de référence entre argumentation et démonstration, nous ne pouvons pas conclure avec certitude qu'il y a unité cognitive.

Si les structures d'argumentation et de démonstration sont les mêmes, il y aura unité cognitive. Néanmoins, la preuve pourrait ne pas être une démonstration (argumentation et preuve abductives par exemple).

Au contraire, s'il y a un écart entre structures d'argumentation et de démonstration deux possibilités peuvent être dégagées. Si l'écart structurel ne se manifeste pas de façon symptomatique dans l'activité du sujet, c'est-à-dire le passage entre structures n'apparaît pas problématique pour le sujet, alors on peut dire que l'unité cognitive se maintient. Par contre, si l'écart structurel se manifeste dans l'activité du sujet, nous nous trouvons en présence de rupture cognitive structurelle.

Ces hypothèses sont présentées dans le tableau suivant : Tableau 2.3.

SR	Structure	UC/ RC ?
Ecart	Continuité / Ecart	RC
Continuité	Continuité	UC
	Ecart	UC Si l'écart structurel ne se manifeste pas dans l'activité du sujet (C'est en particulier le cas si la preuve est fausse mais n'est pas vue comme telle par le sujet)
		RCS Si l'écart structurel se manifeste comme difficulté dans l'activité du sujet

Tableau 2.3

Si on considère le rapport entre argumentation et démonstration sous les deux points de vue du système de référence et de la structure, l'analyse de l'unité cognitive semble être plus complète.

Néanmoins, pour une analyse exhaustive en termes cognitifs il faudrait considérer tous les implicites (connaissances antérieures, images mentales, etc.) qui restent cachés aux yeux de l'analyste. Nous n'avons pas les outils pour l'analyser, mais nous ne pouvons pas non plus nier leur existence. Nous avons simplement essayé de construire un cadre à partir des éléments observables d'une analyse d'argumentation et de démonstration.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons essayé d'analyser le rapport entre argumentation et démonstration du point de vue cognitif. L'analyse s'est déroulée en prenant en considération principalement la structure de l'argumentation et de la démonstration. La continuité ou l'écart entre structures a permis une analyse en termes de difficultés structurelles qui peuvent être rencontrées dans le passage de l'une à l'autre. C'est à partir de cette dernière analyse que l'on a pu fournir une analyse cognitive structurelle. En particulier, nous avons distingué les difficultés cognitives qui sont liées au système de référence de l'argumentation et de la démonstration, de celles plutôt liées à leur structure.

La continuité et l'écart des systèmes de référence sont analysables quand argumentation et démonstration sont données. Au contraire, à partir de la production de l'argumentation une analyse a priori sur la structure possible de la démonstration peut être faite. Cette analyse peut anticiper des difficultés structurelles que l'élève peut rencontrer dans la construction de la démonstration.

Dans la suite nous présentons un outil méthodologique permettant de comparer les continuités et les écarts structurels et du système de référence de l'argumentation et de la démonstration. En conséquence, l'analyse cognitive entre argumentation et démonstration peut s'appuyer sur cet outil qui permet à la fois une analyse cognitive du système de référence et une analyse cognitive structurelle.

Chapitre 3

Le modèle de Toulmin : un outil méthodologique

*La forme même d'un outil d'apparence insignifiante
peut avoir des répercussions presque à l'infini*

Junchiro Tanizaki (extrait d'Eloge de l'ombre)

Introduction

Nous présentons, dans ce chapitre, le modèle de Toulmin comme outil méthodologique pour analyser une argumentation en mathématique et sa démonstration.

La structure ternaire de l'argumentation, explicitée par ce modèle, légitime la comparaison entre structure d'une argumentation et d'une démonstration. Le modèle est à la fois un moyen d'expression d'une argumentation et d'une démonstration (dans la mesure où nous considérons la démonstration comme une argumentation particulière) et un outil méthodologique puissant pour leur comparaison.

Dans de ce chapitre, nous voulons étudier comment analyser les argumentations et les preuves des élèves en utilisant ce modèle. Nous parlons de preuve au lieu de démonstration, dans la mesure où bien souvent ces preuves ne sont pas des démonstrations.

L'étude comparative entre argumentation et preuve permet de réaliser une analyse cognitive dont la complexité a été montrée au cours du chapitre 2. Comme nous l'avons dit plusieurs fois, nous voulons étudier le rapport entre argumentation et démonstration sous deux points de vue : le système de référence et la structure.

Ainsi, nous voulons ici répondre à la question suivante :

Comment analyser les continuités ou les écarts entre le système de référence et la structure d'une argumentation et d'une démonstration ?

Nous présentons d'abord comment traiter les productions des élèves : le découpage des argumentations et des démonstrations et leur reprise dans le modèle.

Ensuite, nous montrons comment mener une analyse du système de référence et de la structure d'argumentation et de démonstration à partir du modèle de Toulmin. Nous terminons avec la présentation des limites d'une analyse faite avec le modèle : les analyses que le modèle ne nous permet pas d'accomplir.

1 Comment traiter les argumentations et les démonstrations des élèves ?

La séparation entre argumentation et démonstration, à partir des productions des élèves, n'est pas toujours facile à déterminer. Comme nous l'avons déjà dit au cours du chapitre précédent, la distinction entre les deux processus peut ne pas être faisable, et elle est parfois déterminée par le choix personnel de celui qui analyse. Nous désignons par « argumentation » tout le processus qui est relié à la conjecture et par « démonstration » le processus final qui valide l'énoncé de la conjecture. Cependant, nous avons besoin de distinguer les démonstrations des argumentations qui sont considérées comme telles par les élèves mais pas par la communauté des mathématiciens. A la suite de Balacheff, nous pourrions dire que ces dernières sont des preuves (Balacheff, 1988).

Nous avons alors besoin d'un vocabulaire bien précis qui prenne en compte ces distinctions. En particulier nous avons besoin de distinguer la conjecture de sa validation et de ce qui pour l'élève représente sa validation.

Nous définissons « conjecture » à partir de la définition de « théorème » donné par Mariotti & al. (Mariotti & al., 1997).

1.1 Conjecture et théorème

L'argumentation et la démonstration sont en relation, comme le sont la conjecture et sa validation, le théorème.

D'après Balacheff « *l'argumentation est à la conjecture ce que la démonstration est au théorème* » (Balacheff, lettre de la Preuve 99 mai/juin). Ainsi, la distinction entre argumentation et démonstration dans les productions des élèves peut être faite à partir de l'identification du théorème et de la conjecture.

Mariotti & al (1997) a défini le « théorème mathématique » comme un ensemble composé par un énoncé, une démonstration et une théorie mathématique. Le théorème existe parce qu'il y a

une théorie mathématique de référence, c'est-à-dire un système de règles de déduction et de principes communément admis, nécessaires pour construire une démonstration.

The existence of a reference theory as a system of shared principles and deduction rules is needed if we are to speak of proof in a mathematical sense. Principles and deduction rules are intimately interrelated so that what characterises a mathematical theorem is the system of statement, proof and theory (Mariotti & al., 1997, p. 182).

Le théorème est institutionnalisé par la communauté des mathématiciens.

Néanmoins, il y a des énoncés mathématiques qui ne figurent pas dans le manuel scolaire et qui ne sont pas donnés par l'enseignant. Ces énoncés sont les théorèmes construits directement par les élèves à l'occasion d'activités de résolution de problèmes. Nous sommes intéressée par ces théorèmes construits dans la classe.

A partir de la définition de théorème (Mariotti & al., 1997), nous pouvons définir la *conjecture* comme l'ensemble d'un énoncé, d'une argumentation et d'un ensemble des conceptions. Nous faisons ici référence à la définition de conception donnée par le modèle cK ϕ ¹ (Balacheff, 1995). La conjecture est potentiellement vraie parce que les conceptions du sujet ont permis la construction d'une argumentation qui la « justifie ».

Théorème	Conjecture
Énoncé	Énoncé
Démonstration	Argumentation
Théorie mathématique	Conceptions (modèle cK ϕ)

1.1.1 Argumentation constructive ou structurante?

L'argumentation qui est attachée à la conjecture n'a pas une place temporelle déterminée, c'est-à-dire qu'elle n'est pas nécessairement antérieure à la conjecture. Il y a des conjectures qui sont développées directement à partir de l'observation d'un dessin, d'une mesure ou bien d'une intuition. Dans ce cas, il y a deux possibilités :

- Il n'y a pas d'argumentation liée à la conjecture ; on construit directement sa démonstration (c'est-à-dire que la démonstration est trouvée d'emblée). Dans ce cas la conjecture est ce que nous avons appelé « fait ».

¹ La caractérisation d'une conception est rendue possible par la prise en compte d'un quadruplet : une sphère de pratique ou un ensemble (P) de problèmes; un ensemble (R) d'opérateurs qui permettent le traitement des problèmes; un système de représentation (L) qui permet la représentation des problèmes et des opérateurs; une structure de contrôle (Σ) qui donne et organise les fonctions de décision, de choix, de jugement de validité et d'adéquation de l'action (Balacheff, 1995, p. 223).

– L'argumentation suit la formulation de la conjecture.

Nous ne sommes pas intéressée par le premier cas dans la mesure où notre objectif de recherche est la comparaison entre argumentation et démonstration. Donc, nous prenons en considération le cas où une argumentation liée à la conjecture est effectivement construite.

L'argumentation, comme nous l'avons caractérisée au cours du premier chapitre, est justificative. Néanmoins, elle peut être une argumentation constructive de la conjecture ou structurante de la conjecture. Dans les deux cas le caractère de justification se maintient, même si la position des argumentations, par rapport à la conjecture, est différente. L'argumentation constructive a comme objectif la construction de la conjecture et en conséquence elle l'anticipe. Le caractère de justification se construit pendant l'argumentation. L'argumentation structurante a comme objectif la justification de la conjecture déterminée sans argumentation et en conséquence elle la suit.

En revanche, les deux argumentations, constructive et structurante diffèrent par la valeur épistémique attachée à la conjecture ; c'est cette valeur qui détermine l'objectif de l'argumentation. Si la conjecture dérive d'un fait observé, l'objectif de l'argumentation est de justifier son énoncé, considéré, en quelque sorte, a priori comme vraie (de facto); si au contraire la conjecture dérive d'une argumentation, l'objectif de l'argumentation est la construction de son énoncé. Les deux types d'argumentation ont une particularité fondamentale en commun : elles sont attachées à la conjecture ; elle en est le référent principal.

Nous remarquons que la présence d'un type d'argumentation n'exclut pas la présence de l'autre ; il est possible qu'une conjecture soit liée aux deux types d'argumentation.

1.1.2 Théorème ou énoncé prouvé ?

Dès que la conjecture a été énoncée et son argumentation explicitée, une démonstration doit être construite. C'est le sujet qui décide si et quand construire une démonstration. Et c'est toujours le sujet qui attribue le statut de démonstration à l'une des argumentations qu'il construit pendant la résolution d'un problème.

Comme nous l'avons dit au cours du premier chapitre, les élèves peuvent attribuer une valeur de certitude à des argumentations qui ne sont liées à aucun système théorique. En conséquence, il y a des argumentations que les élèves considèrent comme des démonstrations, même si elles ne le sont pas. Nous avons besoin de distinguer les démonstrations de celles qui sont considérées comme telles par les élèves mais non par la communauté mathématique. C'est

pourquoi nous devons distinguer les théorèmes de ceux que les élèves pensent qu'ils sont théorèmes même s'ils ne le sont pas.

Pour cette raison nous avons besoin d'introduire un nouvel énoncé entre conjecture et théorème : *l'énoncé prouvé*.

Nous entendons par *énoncé prouvé* l'ensemble d'un énoncé, d'une preuve et d'un ensemble des conceptions. La preuve, comme la démonstration, est une argumentation particulière.

L'énoncé prouvé est un énoncé considéré valide par celui qui le construit puisqu'il en a construit une preuve à partir de ses conceptions.

Enoncé prouvé
Énoncé
Preuve
Conceptions (modèle cK ϕ)

Une différence substantielle entre théorème et énoncé prouvé est le système de référence. Le théorème fait référence à une théorie mathématique alors que l'énoncé prouvé est lié encore aux conceptions du sujet. Cependant, ces conceptions sont particulières par rapport à celles utilisées pendant la mise en place de la conjecture. D'une certaine façon, elles représentent le système de référence d'une preuve afin que celle-ci soit acceptée par le sujet comme une démonstration. Mais il ne s'agit pas nécessairement d'une théorie mathématique. D'ailleurs, ce n'est presque jamais la théorie qui est considéré par les élèves, mais la théorie naïve au sens de Bourbaki, c'est-à-dire une expression de la preuve dans un formalisme naïf.

En conséquence, le processus de résolution d'un problème demandant la construction d'une conjecture et d'une démonstration, peut être représentée par le tableau 3.1. Nous avons deux phases déterminées par la conjecture et par le théorème ou énoncé prouvé. L'argumentation est relative à la conjecture, et la démonstration ou preuve est l'argumentation relative ou au théorème ou à l'énoncé prouvé.

<u>Processus de résolution</u>	<u>Référence mobilisée</u>
Argumentation constructive <i>Conjecture</i> Argumentation structurante	Conceptions
Démonstration ou preuve <i>Théorème ou énoncé prouvé</i>	Théorie mathématique ou conceptions

Tableau 3.1

A partir de ces considérations, nous voulons analyser le fonctionnement du modèle de Toulmin comme outil d'analyse de l'argumentation.

2 Le modèle de Toulmin : un outil méthodologique

L'objectif de cette section est d'analyser comment modéliser la structure et le système de référence d'une argumentation avec le modèle de Toulmin. La première partie fournit un parcours par étapes avec l'objectif d'expliquer comment représenter une argumentation dans le modèle. La deuxième partie présente comment repérer la structure des arguments élémentaires. La troisième partie fournit les outils pour localiser les éléments de certaines conceptions mobilisées pendant l'argumentation. A partir de cette troisième analyse, nous montrerons comment conduire une analyse du système de référence. Nous présenterons aussi une partie concernant les limites de l'utilisation du modèle de Toulmin.

2.1 Découpage de l'argumentation dans le modèle de Toulmin

Afin d'insérer argumentation et démonstration dans le modèle de Toulmin, le découpage en arguments est nécessaire. D'abord, il est utile de localiser la conjecture et le théorème (ou l'énoncé prouvé selon que l'élève a construit une démonstration ou une preuve de la conjecture). C'est surtout à partir de ces énoncés que l'argumentation et la démonstration (ou preuve) sont repérables. L'argumentation est liée à la conjecture et la démonstration au théorème. En outre, le début de la démonstration est souvent annoncé par l'élève lui-même.

Un premier découpage du processus de résolution de l'élève en argumentation et démonstration (ou preuve) est fondamentale pour leur analyse comparative. Il se peut cependant, comme nous l'avons dit au chapitre précédent, que ce type de découpage ne soit pas clair. Les étapes que nous proposons ci-dessous peuvent aider à clarifier la distinction entre ces deux processus.

Dans la suite nous montrerons le découpage en arguments du processus de résolution de l'élève.

A partir d'une argumentation, le placement des arguments dans le modèle de Toulmin peut se faire par étapes. Nous allons les expliciter :

1. Repérage des énoncés conclusions.
2. Distinction entre énoncés reliés à un argument et énoncés qui dérivent directement d'un fait. Pour tous les énoncés qui sont reliés à un argument on passe aux pas suivants, autrement on s'arrête à l'explicitation de l'énoncé.
3. Recherche du permis d'inférer et des données ;
4. Recherches de la force et de l'éventuelle restriction, et du support.

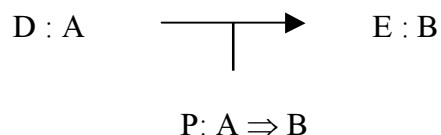
Si le schéma est bien construit les concaténations entre les arguments sont visibles. Par exemple dans le cas d'une démonstration déductive la conclusion du premier pas deviendra prémisse dans le pas suivant. En revanche, dans le cas d'une argumentation quelconque, la concaténation permettra (comme nous le verrons au paragraphe 2.2) d'identifier la structure abductive, déductive ou inductive de l'argumentation.

Une fois que l'argumentation est modélisée, il est possible d'analyser sa structure et son système de référence. Dans la suite nous analyserons la façon d'accomplir cette analyse.

2.2 ... pour analyser les structures entre argumentation et démonstration

La comparaison entre structure de l'argumentation et de la démonstration peut se faire directement à partir du modèle. Le modèle doit nous permettre d'identifier les structures de l'argumentation : déduction, abduction et induction. Contrairement à la structure de la déduction, qui apparaît entrer naturellement dans le modèle, l'abduction et l'induction, nécessitent quelques précisions.

La représentation d'un pas déductif dans le modèle de Toulmin est la suivante :



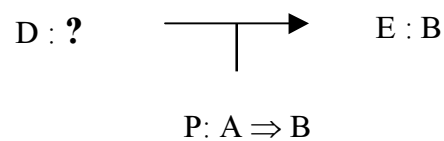
$A \Rightarrow B$ est la règle (ou le théorème) ;

A est une proposition d'entrée ou donnée ;

B est la conclusion

L'énoncé conclusion est déduit à partir des données et du permis d'inférer qui sont déterminés à l'avance. La règle d'inférence du « modus ponens » est cohérente avec le modèle.

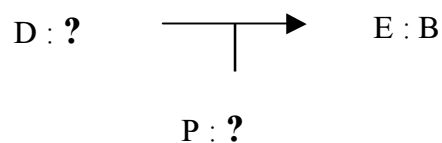
L'abduction, au contraire, est un raisonnement qui part des conclusions et monte aux prémisses. L'énoncé conclusion et le permis d'inférer sont donnés, en revanche les données sont à chercher ; nous proposons la représentation d'un pas abductif dans le modèle de Toulmin de la façon suivante :



Le point d'interrogation, au lieu des données, signifie que le sujet est en train de chercher les données afin de les relier à l'énoncé conclusion par le permis d'inférer ; énoncé conclusion et permis d'inférer sont disponibles. La flèche de l'argument est toujours dirigée vers l'énoncé conclusion parce que le sujet est conscient que la détermination des données permettra l'application du permis d'inférer aux données afin de justifier la conclusion.

Au pas suivant le schéma sera peut-être complété, c'est-à-dire que le point d'interrogation sera remplacé par l'explicitation des données finalement déterminées².

Dans le cas d'une abduction créative, et les données et le permis d'inférer sont à chercher. En conséquence le schéma se présentera de la façon suivante :



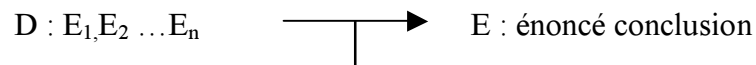
Les points d'interrogation, au lieu des données et du permis d'inférer signifient leur absence dans l'argument et leur recherche par le sujet. La flèche est dirigée vers l'énoncé conclusion parce que celui-ci reste l'objectif du pas : la détermination des données et du permis d'inférer permettra la justification de l'énoncé conclusion.

Aux pas suivants il se peut que l'argumentation soit complétée.

² Dans le cas de la déduction, le point d'interrogation peut se situer au lieu des conclusions. Nous ne l'avons pas explicité pour question de simplicité. En fait, la cohérence entre le modèle et la déduction ne rendait pas nécessaire cette spécification.

Le déroulement de l'induction est différent par rapport à celui de la déduction et de l'abduction. L'induction se construit par généralisation des énoncés ou arguments précédents déjà observés ou étudiés. Cette particularité doit être visible dans l'argument.

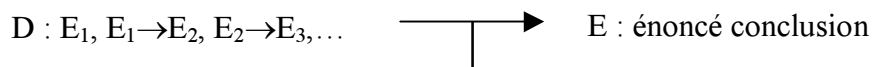
Nous proposons le schéma suivant pour une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés :



P: généralisation sur les énoncés

$E_1, E_2 \dots E_n$ sont les conclusions des pas précédents ou sont les cas observés. Ils deviennent les données du dernier pas, celui qui amène au cas général. Le permis d'inférer est une généralisation sur les énoncés.

En revanche, une argumentation inductive par généralisation sur le processus peut être ainsi schématisée :



P: généralisation sur le processus

Les données $E_1, E_1 \rightarrow E_2, E_2 \rightarrow E_3, \dots$ représentent les arguments précédents qui relient les énoncés. Ils deviennent les données du dernier pas, celui qui amène au cas général. Le permis d'inférer est une généralisation sur le processus.

L'induction, mais aussi l'abduction et l'abduction créative, peuvent être représentés par le modèle, si on considère une concaténation des pas de l'argumentation et non un pas isolé. Un argument élémentaire peut perdre toute signification s'il n'est pas vu dans la structure globale du raisonnement dans lequel il prend place. Ainsi, le dernier pas de l'induction doit être relié à ceux qui le précèdent. Le pas abductif exprimé avec le point d'interrogation anticipe les pas suivants au terme desquels le point d'interrogation peut être finalement substitué par les données ou le permis d'inférer.

2.3 ...pour analyser le système de référence

L'objectif de cette section est l'étude du système de référence dans le modèle de Toulmin. Nous voulons analyser comment il est possible de repérer les éléments qui constituent le système de référence (le langage, les cadres, les concepts, l'heuristique etc.) et leur évolution, à partir du modèle.

Le langage et l'heuristique sont observables pendant toute l'argumentation ; l'évolution des expressions verbales, des expressions algébriques, des dessins géométriques peuvent apparaître dans les données, dans la conclusion, dans le permis d'inférer, et même hors de l'argumentation ; par exemple quand les élèves produisent des affirmations, quand ils regardent le dessin en prononçant des mots isolés, etc.

Au contraire, les champs conceptuels (Vergnaud, 1991), et les « cadres » (Douady, 1986) sont observables à partir du modèle de l'argumentation. La liaison entre l'analyse de ces éléments du système de référence et la modélisation de l'argumentation est possible par le moyen du modèle cKç (Balacheff, 1995).

Nous appuyons l'hypothèse suivante :

Une conception intervient dans la construction de l'argument

Nous analyserons en détail comment les conceptions interviennent dans le modèle de Toulmin. Ensuite, nous essayerons de faire le lien entre cette étude des conceptions et l'analyse en termes du système de référence.

2.3.1 Les conceptions dans le modèle de Toulmin

Nous utilisons le mot *conception* au sens du modèle cKç (Balacheff, 1995) : une conception est « *une structure mentale attribuée à un sujet, par un observateur de son comportement, dont on exige qu'elle apparaisse cohérente et efficace dans une sphère de pratique* » (Balacheff, 2001)

Par *sphère de pratique* on entend un ensemble de tâches ou de situations où la conception est opératoire. (Balacheff, 2001, il s'agit de la reprise d'un concept introduit par Pierre Bourdieu) Balacheff (1995) propose une caractérisation formelle d'une conception sous la forme d'un quadruplet constitué de:

- Un ensemble (P) de problèmes (sphère de pratique de la conception);
- Un ensemble (R) d'opérateurs (qui permettent le traitement des problèmes);
- Un système de représentations (L) (qui permet la représentation des problèmes et des opérateurs);
- Une structure de contrôle (Σ) (qui donne et organise les fonctions de décision, de choix, de jugement de validité et d'adéquation de l'action)

Ce quadruplet permet de décrire les conceptions des élèves qui interviennent dans la résolution d'un problème (voir par exemple Vadcard 2000, Sangaré 2000, Balacheff et Gaudin 2002 ; Miyakawa 2002).

Nous croyons que pendant la construction d'une argumentation les conceptions ont un rôle fondamental : elles interviennent dans sa mise en place, en particulier elles déterminent les choix des élèves quand ils doivent résoudre une tâche. Notre intérêt à les repérer avec le modèle de Toulmin est justifié par au moins trois raisons.

- Les conceptions semblent être à la base de la construction d'une argumentation.
- La détermination des conceptions dans le modèle de Toulmin, permet une analyse comparative entre conceptions utilisées en phase d'argumentation et théorèmes utilisés en phase de démonstration.
- L'analyse de l'unité cognitive en termes de système de référence s'appuie sur cette étude : le modèle permet une analyse locale de l'argumentation et de la démonstration.

Cependant, les conceptions restent souvent implicites, leur détermination nécessite l'identification des quatre éléments qui les caractérisent. Fréquemment tous les éléments ne sont pas explicités par l'élève, ce qui peut amener à les supposer. Malgré cela, nous croyons que l'interaction entre le modèle de Toulmin et la caractérisation formelle des conceptions, le modèle cK ϕ , peut nous aider à leur détermination.

Le permis d'inférer est une règle, un principe qui, comme nous l'avons dit, permet de relier les données à la conclusion. Ce permis d'inférer peut s'expliciter dans la forme « si... alors ». Nous croyons pouvoir identifier dans le permis d'inférer un des éléments de l'ensemble (R) des opérateurs d'une conception. « *Les opérateurs permettent la manipulation des éléments de L, et donc la transformation des problèmes* » (Balacheff, 2001). Les opérateurs, comme le permis d'inférer, permettent l'évolution de l'argumentation : la concaténation des arguments est déterminée par le permis d'inférer de chaque argument. En fait, le permis d'inférer établit la connexion entre données et conclusion et il légitime ce passage (Toulmin, 1958, p. 98).

La structure de contrôle assure la non contradiction de la conception ; « *elle contient les outils de décision sur la légitimité de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état d'un problème* » (Balacheff, 2001). La structure de contrôle peut être repérée dans le support. En fait, le support n'est que la conception. Le rôle du support est de garantir la légitimité du permis d'inférer. Il permet de répondre aux questions : Pourquoi le permis d'inférer est pertinent ? Pourquoi est-il correct ? Pourquoi est-il adéquat ?

Dans le cas d'une démonstration le permis d'inférer est un théorème. Et ce qui garantit sa légitimité est la théorie mathématique. Le support dans un pas de démonstration est donc la

théorie. Dans l'argumentation la légitimité du permis d'inférer est donnée par la conception, c'est-à-dire par un ensemble d'éléments qui permettent d'affirmer que le permis d'inférer est vrai. Cependant, nous trouvons difficilement les quatre éléments qui caractérisent les conceptions explicités. Nous pouvons supposer la conception à partir des éléments explicités pendant l'argumentation.

Considérons l'exemple suivant tiré de notre étude (chapitre 5).

2.3.1.1 Exemple

L'élève doit résoudre la tâche suivante : comparer les aires de trois triangles d'une figure. Deux des trois triangles sont égaux et le troisième est d'une forme différente mais a la même aire que les autres.

Voici une partie de l'argumentation d'un élève.³

« Il y a deux triangles égaux. Leurs aires sont égales parce que les triangles sont égaux. Au contraire le troisième triangle est différent par rapport aux autres et donc son aire est différente des deux autres aires »

Il y a deux énoncés conclusion que nous appelons E_1 , E_2 :

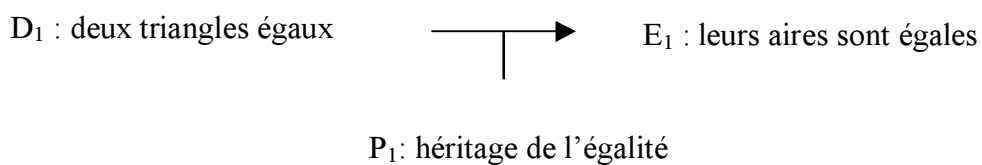
E_1 : les aires de deux triangles égaux sont égales,

E_2 : l'aire du troisième triangle est différente des autres aires.

Le permis d'inférer P_1 est implicite. Néanmoins, l'élève nous donne une indication : il dit que les aires sont égales parce que les triangles sont égaux. Nous pouvons expliciter le permis d'inférer avec une bonne approximation : « Si deux objets sont égaux, leurs aires sont égales ». Nous appelons ce principe « héritage de l'égalité ». La donnée D_1 est l'égalité des deux triangles.

Le permis d'inférer P_2 semble être au contraire fourni par le principe suivant : « Si deux objets sont différents, leurs aires sont différentes ». Nous appelons ce principe « héritage de l'inégalité ».

L'argumentation peut être représentée dans le modèle de Toulmin de la façon suivante:



³ L'argumentation supposée est un prototype des argumentations présentées par les élèves pendant la résolution d'un des problèmes utilisés pour la phase expérimentale de cette recherche (voir chapitre 5).

D_2 : deux triangles différents $\xrightarrow{\quad}$ E_2 : leurs aires sont différentes

P_2 : héritage de l'inégalité

Nous pouvons peut-être identifier la présence d'une conception, dont deux opérateurs sont les permis d'inférer P_1 , P_2 . Déterminer l'égalité ou l'inégalité entre aires de triangles, ou d'autres objets géométriques, est l'un des problèmes appartenant à la sphère de pratique ; le système de représentation est composé du langage verbal, du dessin etc. Le contrôle est complètement implicite. Il pourrait être perceptif, lié donc à ce que les élèves voient sur la figure. Il pourrait être lié à la formule de l'aire : « si les deux triangles sont égaux leurs bases et hauteurs sont égales et donc ils ont la même aire », « s'ils sont différents, les bases et les hauteurs sont différents et donc ils ont des aires différentes ». Nous n'avons pas les moyens de déterminer le contrôle. Si l'élève avait ajouté dans l'argumentation une phrase du type « Je vois dans la figure que les triangles sont égaux et donc que leurs aires sont égales », nous pourrions caractériser la perception comme un élément du contrôle. Dans ce cas, un des éléments du support du premier argument, S_1 , serait lié à des aspects perceptifs.

2.3.2 Passage de la conception à la théorie

L'identification de la conception, ou au moins de certains de ses éléments, est important pour l'analyse de l'argumentation parce qu'elle permet de déterminer (et peut-être d'anticiper) des difficultés possibles pour le passage à la démonstration. Si, par exemple, le permis d'inférer (qui correspond à un opérateur de la conception mobilisée) n'est pas un théorème de la classe de mathématiques, on peut penser que l'élève arrivera difficilement à construire une démonstration acceptable à partir de celle-ci. D'autre part, le permis d'inférer faux ne peut pas être substitué par un théorème.

En revanche, si le permis d'inférer (un opérateur de la conception mobilisée) est correct, il existe un théorème qui peut se substituer au permis d'inférer de l'argumentation. Cela est fondamental pour le passage à la démonstration. Il est aussi nécessaire que l'élève le connaisse, et qu'il s'en souvienne.

Considérons l'exemple suivant.

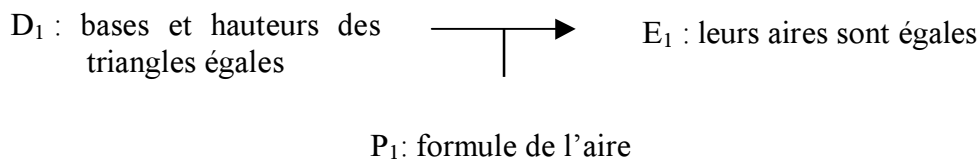
2.3.2.1 Exemple

L'élève doit construire une démonstration à partir de l'exemple d'argumentation présenté ci-dessus (paragraphe 2.3.1.1). Il peut démontrer le premier pas d'argumentation mais pas le deuxième.

Par exemple, il peut construire la démonstration suivante pour le premier pas.

« Deux triangles égaux ont la même aire parce que les hauteurs et les bases sont égales et, en conséquence, les aires aussi ». La formule de l'aire peut lui permettre de substituer le permis d'inférer de l'argumentation avec un permis d'inférer « théorique ».

Le premier pas de l'argumentation est transformée en pas de démonstration :



En revanche, l'élève ne peut pas réussir à substituer le deuxième permis d'inférer (à moins qu'il ne construise une déduction erronée appuyant sur une conception, la même ou une autre).

2.3.3 La restriction comme rétroaction afin d'invalider les contrôles erronés

Si l'opérateur de la conception, explicité par le permis d'inférer, est erroné, l'élève ne peut pas construire une démonstration à partir de l'argument contenant ce permis d'inférer (il peut construire une preuve).

En conséquence, afin de construire une démonstration il est obligé de revenir à l'argument et réexaminer son raisonnement pour autant qu'il ait conscience de cette incorrection. Dans ce cas, il peut faire appel à une restriction. La restriction, prend en considération le rapport entre le permis d'inférer et le support ; elle signale les circonstances dans lesquelles l'autorité du permis d'inférer est remise en question. Afin d'invalider un permis d'inférer erroné, une restriction est nécessaire.

L'efficacité d'une restriction dépend de la force de l'argument, c'est-à-dire de la force avec laquelle le couplage des données au permis permet d'atteindre l'énoncé conclusion. La force du permis d'inférer est dépendante de l'opérateur de la conception correspondante. Afin d'invalider le permis d'inférer, la restriction doit miner le système de contrôle de la conception, c'est-à-dire une partie du support de l'argument. C'est le cas lorsque l'argument peut être substitué par un autre argument.

En cas contraire, la restriction n'est pas suffisamment puissante pour invalider la structure de contrôle de la conception. Au contraire, un élément du support au permis d'inférer peut être explicité par l'élève. Ce support donne plus de force à l'argument déjà construit en empêchant ultérieurement la construction d'une démonstration.

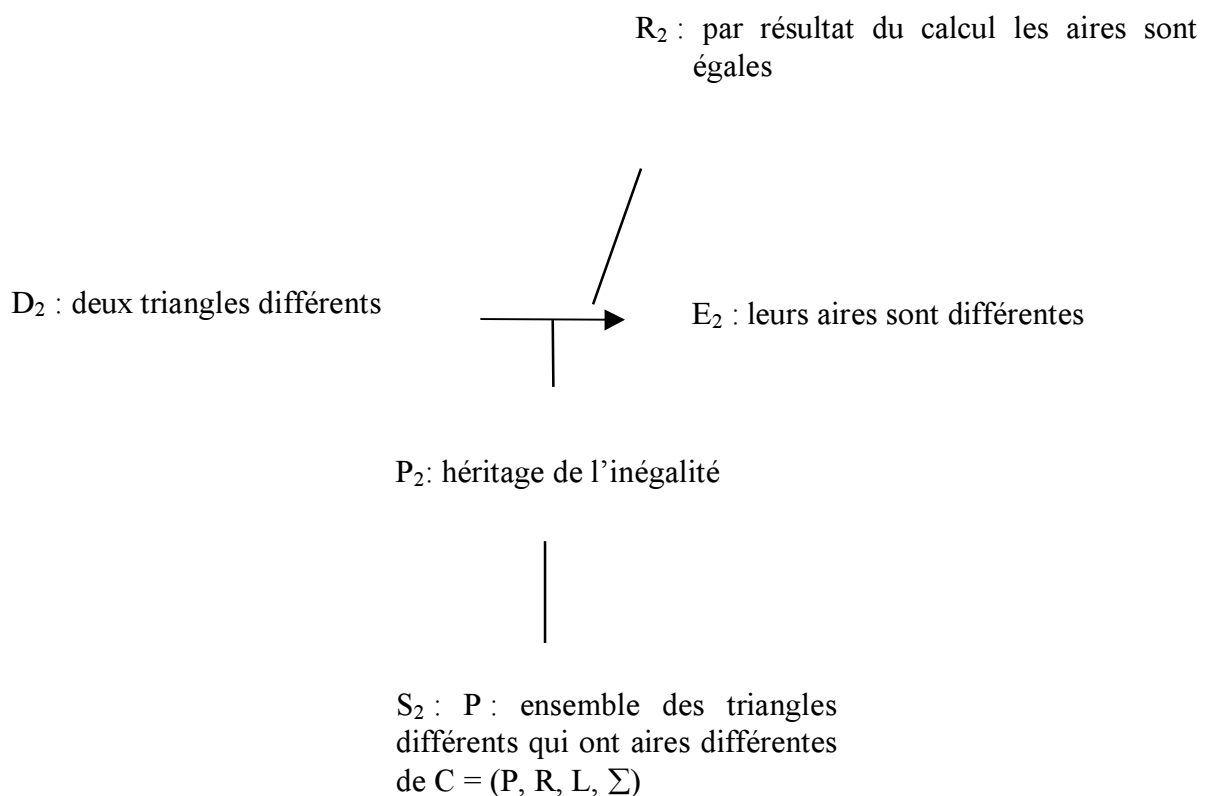
Considérons l'exemple suivant.

2.3.3.1 Exemple

Considérons encore l'argumentation des exemples discutés ci-dessus (paragraphe 2.3.1.1, 2.3.2.1). Nous supposons que l'élève qui a construit l'argumentation, calcule les aires des trois triangles. Nous présumons qu'il fait les mesures et les calculs correctement et qu'il trouve, en conséquence, que les trois triangles ont la même aire, comme nous l'avons supposé au départ. Cela constitue une restriction au permis d'inférer, P_2 puisque il y a deux triangles différents qui ont des aires égales.

Si le système de contrôle de la conception de l'élève est très fort, il peut par exemple penser que le résultat du calcul est dû à un cas particulier de triangles différents ayant la même aire. En conséquence, la propriété « deux triangles différents ont des aires différentes » peut ne pas être remise en question. Par exemple, un des éléments du support peut être lié à la sphère de pratique de la conception, c'est-à-dire à l'ensemble des problèmes déjà résolus où des triangles différents ont effectivement des aires différentes.

Dans ce cas l'argumentation est représentée de la façon suivante.



Au contraire, la restriction peut effectivement remettre en question le système de contrôle de la conception de l'élève. Par exemple, il peut répéter plusieurs fois le calcul et accepter le résultat comme une invalidation à son permis d'inférer. D'ailleurs, le calcul est souvent utilisé par les élèves comme outil de vérification et ils ont confiance dans les résultats de calculs. En conséquence, si la restriction invalide le support, l'élève peut construire un nouvel énoncé, par exemple E_3 .

E_3 : les aires de ces deux triangles différents peuvent être égales.

Dans ce cas, cet énoncé n'est pas l'énoncé conclusion d'un nouvel argument. L'énoncé E_3 explicite un fait, dont la valeur épistémique est liée à la confiance dans le résultat d'un calcul. Pour construire un nouvel argument qui justifie l'énoncé E_3 , l'élève doit déterminer un nouveau permis d'inférer, et peut-être, doit-il trouver une nouvelle stratégie de résolution (par exemple il peut décider de comparer les bases et les hauteurs des triangles).

2.3.4 Restriction : rétroaction d'un milieu afin de réfuter une conception

La restriction est la prise en compte d'une réfutation potentielle à l'énoncé conclusion de l'argument. Elle est une exception possible au permis d'inférer. Cette limitation du permis d'inférer peut être soulevée soit par celui qui argumente soit par un interlocuteur.

En fait, le modèle de Toulmin est un modèle dialogique, c'est-à-dire qui permet de modéliser l'argumentation d'un individu. Cependant, nous l'utilisons comme modèle dialogal, c'est-à-dire qu'il peut modéliser l'argumentation des deux individus. La restriction peut alors avoir deux rôles différents : elle peut être considérée directement du locuteur et donc elle est intérieure à l'argument ou elle peut provenir de l'extérieur, par exemple du camarade ou de l'enseignant.

Dans ce dernière cas, la restriction peut être considérée comme le résultat d'une rétroaction du milieu (Brousseau, 1986). Considérons le milieu comme le système antagoniste du sujet dans une situation (Brousseau, 1990, p. 320).

Le système antagoniste [le milieu] du joueur[le sujet] dans une situation est pour le joueur comme pour l'observateur, une modélisation de la partie de l'univers à laquelle se réfère la connaissance en jeu et les interactions qu'elle détermine (Brousseau, 1990, p. 320-321).

La restriction agit sur le système sujet-milieu comme une perturbation. L'état d'équilibre du système est récupéré seulement au moment où le sujet choisit entre restriction et permis d'inférer. Cette prise de décision détermine un nouvel état d'équilibre du système. En fait, à la suite d'une perturbation le système sujet-milieu doit être capable de retrouver l'équilibre, c'est-à-dire de construire une nouvelle connaissance. La conclusion de l'argument peut être

acceptée malgré la présence de la restriction ou au contraire elle peut être rejetée. De toute façon, le sujet doit prendre une décision, c'est-à-dire qu'un nouvel état d'équilibre doit être reconstruit.

L'exemple ci-dessus (2.3.3.1), montre que si une restriction est avérée pour l'élève, celui-ci peut être conduit à abandonner ou non le permis d'inférer. Ceci nous amène à poser la question d'un degré de confiance dans l'adéquation d'une conception.

Les adéquations d'une conception sont différentes selon le problème dans lequel elle est engagée. Le degré d'adéquation ne porte pas sur la conception, mais sur la plausibilité de sa pertinence dans une situation donnée. Si, dans la situation, la confiance dans l'adéquation d'une conception est faible, l'élève peut chercher un autre permis d'inférer sans nécessairement modifier sa conception. Il se peut que l'élève mobilise la conception dans une situation à venir. Si au contraire l'adéquation est forte, c'est plus difficile pour l'élève d'accepter la réfutation potentielle. Dans ce cas le support est éventuellement modifié de façon qu'il puisse ultérieurement étayer le permis d'inférer mis en discussion par la réfutation. Dans tous les cas, nous ne pouvons pas facilement décider si une conception est rejetée au cours d'une argumentation. La restriction peut réfuter le permis d'inférer, et en conséquence un opérateur d'une conception dans la situation particulière considérée. Une conception est réfutable mais elle a prouvé sa robustesse dans assez de situations, sans quoi elle ne pourrait pas être considérée comme une conception, c'est-à-dire qu'une conception possède une sphère de pratique avérée.

C'est plutôt la recherche d'équilibre du système sujet-milieu qui oblige à choisir entre restriction et permis d'inférer. Néanmoins, cet équilibre est relatif à la situation et à la façon dont la conception est mobilisée.

La restriction d'un permis d'inférer peut être déterminée par l'intervention d'un autre élève, par l'intervention d'un enseignant, par la rétroaction d'un logiciel etc., c'est-à-dire par des rétroactions du milieu. Le milieu peut susciter un doute sur la vérité du permis d'inférer. Ce doute peut avoir des origines différentes. Nous avons identifié deux possibilités :

- La restriction peut correspondre à un opérateur d'une nouvelle conception. C'est le cas où les opérateurs de deux conceptions différents s'opposent. Cette situation se vérifie en particulier quand deux élèves sont en interaction et qu'ils mobilisent deux conceptions différentes. L'un des opérateurs d'une conception intervient comme restriction dans l'argument du deuxième élève. Le permis d'inférer de cet argument est l'opérateur de la conception du deuxième élève.

- La restriction est activée par un changement de cadre (Douady, 1984); nous l'expliquerons dans le paragraphe suivant.

Mais d'abord remarquons que ces deux moyens d'activer une restriction ne s'excluent pas. C'est notamment le cas lorsque l'opérateur de la nouvelle conception agit dans un cadre différent.

2.3.5 Changement de cadre pour activer une restriction à un permis d'inférer erroné

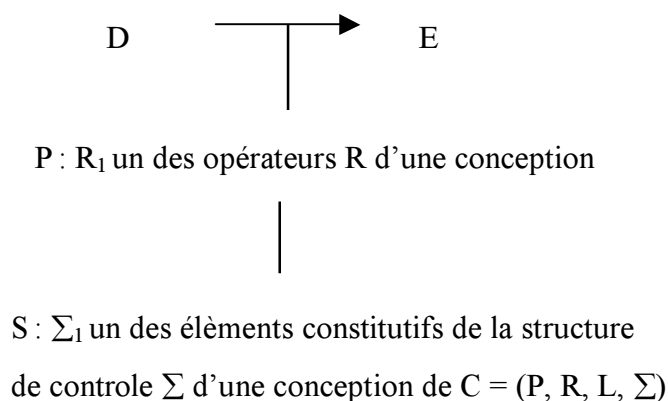
Selon Douady, « le *changement de cadre est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation* » (Douady, 1986, p. 11).

Comme nous l'avons anticipé ci-dessus, nous croyons qu'un changement de cadre (Douady, 1984) correspond à l'activation d'une restriction dans le modèle.

Nous faisons l'hypothèse suivante :

Un changement de cadre peut activer une restriction au permis d'inférer en maintenant son support. De façon parallèle nous pouvons dire que le changement de cadre peut agir sur l'opérateur d'une conception en invalidant son contrôle.

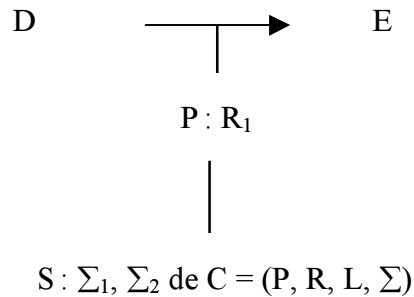
Considérons le pas d'argumentation suivante.



P correspond à un des opérateurs d'une conception que nous appelons R_1 ; S, le support du permis d'inférer contient un élément du contrôle que nous appelons Σ_1 . Supposons un changement de cadre en maintenant l'argument.

Nous avons deux possibilités :

- *Dans le nouveau cadre la conception se maintient.* C'est-à-dire que le sujet trouve un nouvel élément de contrôle Σ_2 de la conception tel que le permis d'inférer reste valide. Dans ce cas, les données, la conclusion, le permis d'inférer peuvent rester les mêmes, et Σ_2 est ajouté dans le support. La forme de l'argument peut devenir la suivante.



- *Dans le nouveau cadre le permis d'inférer peut ne plus être valide.* L'élève ne réussit pas à déterminer un nouveau contrôle Σ_2 dans le système de contrôle Σ de la conception C , tel que le permis d'inférer reste valide dans le nouveau cadre. L'argument n'a pas de suite ; il peut être substitué par un nouvel énoncé et éventuellement par un nouvel argument.

Considérons les exemples suivants.

2.3.5.1 Exemples

Cas où dans le nouveau cadre la conception se maintient

Considérons encore l'exemple précédent (paragraphe 2.3.3.1). Si l'élève avait, par exemple, trouvé une différence dans les valeurs des aires des deux triangles par un résultat erroné du calcul, le permis d'inférer aurait été validé une deuxième fois. Le contrôle Σ_2 est ajouté au support dans le nouvel argument. Σ_2 est le résultat du calcul (même s'il est erroné).

Cas où dans le nouveau cadre le permis d'inférer peut ne plus être valide.

Dans l'exemple précédent (paragraphe 2.3.3.1) le cadre géométrico-perceptif a été remplacé par le cadre arithmético-symbolique des calculs. Le permis d'inférer « deux triangles différents ont des aires différentes » peut être invalidé dans le nouveau cadre par le résultat du calcul (cette fois-ci correct). Σ_2 est toujours le résultat du calcul.

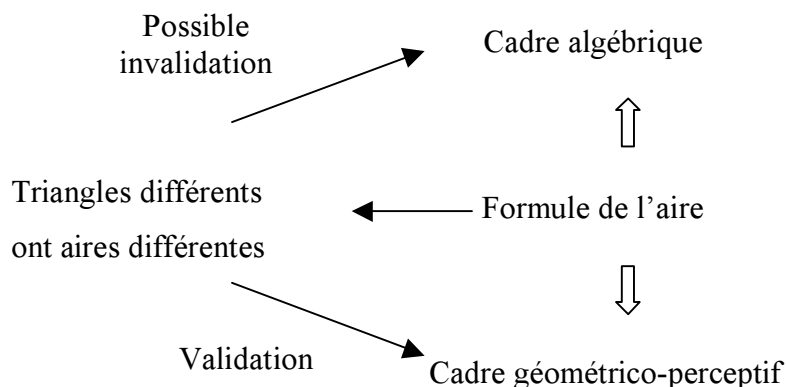
2.3.6 Le système de représentation : élément pivot entre cadre et conception

Selon Balacheff (2001) les cadres sont étroitement liés aux conceptions. La caractérisation d'un cadre, comme la caractérisation d'une conception, passe par le système de représentations, qui peut constituer l'élément pivot.

Le système de représentations d'une conception permet de formuler les problèmes, ainsi que ses opérateurs et moyens de contrôle (Balacheff, 2001)

Par exemple, on considère les écritures littérales de type algébrique, qui permettent l'expression de la formule de l'aire d'un triangle, comme un système de représentation. L'interprétation de la formule dans le cadre algébrique est différente de l'interprétation de la formule dans le cadre géométrique. Dans le cadre algébrique, la formule, dont les variables ont été substitués par des nombres, est un nombre qui dérive des résultats des calculs. Dans le cadre géométrique la formule peut représenter la base et la hauteur d'un triangle. La formule permet de passer de l'objet algébrique à l'objet géométrique et vice-versa. Les segments qui représentent la base et la hauteur d'un triangle, correspondent aux lettres de la formule, et les lettres correspondent aussi aux nombres à utiliser pour le calcul. C'est pourquoi les représentations permettent la circulation entre cadres. Pas seulement entre cadres ; « *Les représentations permettent, en quelque sorte, la circulation entre cadre et conception* » (Balacheff, 2001). En effet, changer de cadre peut amener à mobiliser un autre contrôle tel que soit il consolide le contrôle mobilisé dans l'ancien cadre, soit il rentre éventuellement en conflit. Le système de contrôle est dépendant du cadre. Deux triangles différents ont des aires différentes dans le cadre géométrico-perceptif. Au contraire, deux triangles différents peuvent avoir la même aire dans le cadre algébrique.

Transposons notre exemple dans le schéma de Balacheff (2001) utilisé pour représenter la circulation entre cadre et conceptions.



Les éléments du contrôle d'une conception changent selon le cadre où agit l'interprétation du système de représentation en jeu. Par exemple, la formule de l'aire considéré dans le cadre géométrique permet difficilement d'invalider l'opérateur de la conception « Deux triangles différents ont des aires différents ». Dans le cadre algébrique cette invalidation est au contraire possible. Interpréter la représentation dans un cadre différent, peut invalider le

contrôle d'une conception. Si le but est de miner le permis d'inférer, c'est-à-dire l'un des opérateurs de la conception, une « action » sur le support, et en conséquence sur l'un des éléments du contrôle de la conception, peut être essentielle. Le changement de cadre peut provoquer une modification du contrôle associé au système de représentation en jeu, qui peut invalider le support du permis d'inférer.

2.3.7 Changement de cadre pour valider un permis d'inférer

Ci-dessus nous avons analysé le fonctionnement de l'argument lorsqu'un changement de cadre permet d'invalider le contrôle d'une conception. Dans ce cas, le changement de cadre active une restriction qui peut miner le support de l'argument et en conséquence son permis d'inférer.

Cependant, la restriction peut n'être pas suffisamment forte pour annuler l'autorité du permis d'inférer.

C'est le cas où la restriction, activée par le moyen d'un changement de cadre, valide une deuxième fois l'opérateur d'une conception : le permis d'inférer reste vrai dans le nouveau cadre. Un nouvel argument se construit tel que le nouveau support au permis d'inférer est constitué par un nouveau contrôle de la conception. Ce nouveau support donne plus de force au permis d'inférer de l'argument et en conséquence à l'opérateur de la conception. Il y a deux validations différentes pour le même permis d'inférer.

2.3.7.1 Exemple

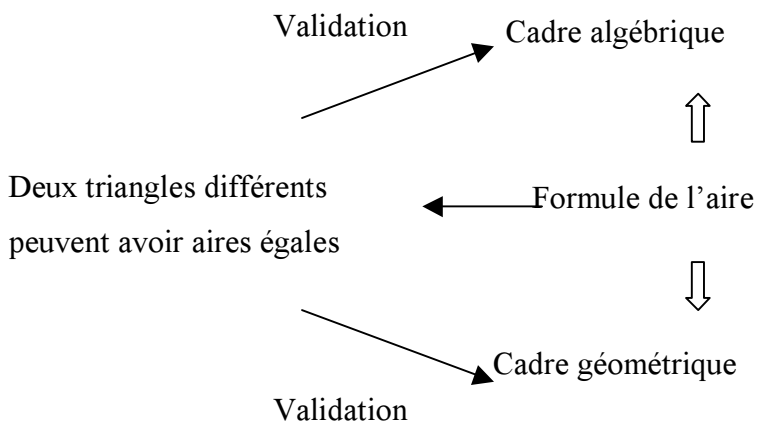
Supposons qu'un élève doive résoudre la tâche suivante : « Comparer les aires de deux triangles différents ayant un côté en commun et le troisième sommet sur une droite parallèle à ce côté ».

Les triangles sont différents, mais ils ont un côté en commun et les hauteurs sur ce côté sont égales, et donc leurs aires sont égales.

Ici, l'opérateur « deux triangles différents peuvent avoir la même aire » peut être validé soit dans le cadre algébrique soit dans le cadre géométrique. En fait, la validation peut être issue respectivement d'un calcul (base par hauteur divisée par deux) dans le cadre algébrique ou bien de considérations géométriques (les hauteurs des deux triangles sont égales parce qu'entre deux droites parallèles les segments perpendiculaires sont égaux etc.) dans le cadre géométrique.

La représentation de l'aire au moyen de la formule, permet la circulation entre les deux cadres, et, entre les cadres et la conception dont l'opérateur est « deux triangles différents peuvent avoir la même aire ».

Comme illustré dans la figure ci-dessous, les deux contrôles de la conception sont valides dans deux cadres différents : l'algébrique et le géométrico-perceptif.



Les deux validations donnent plus de force à l'opérateur de la conception et en conséquence au permis d'inférer de l'argument. Nous pouvons penser que plus le nombre de cadres dans lesquels l'un des contrôles de la conception fonctionne est grand, plus la probabilité que l'opérateur de la conception soit vrai augmente. Dans ce cas, on peut se demander s'il existe un théorème qui peut substituer le permis d'inférer. C'est le cas où le pas d'argumentation peut se transformer en pas de démonstration.

2.3.8 Construction d'une démonstration

Dans le modèle de Toulmin, le permis d'inférer dans une démonstration est un théorème et le support est constitué par la théorie de référence. La théorie de référence est un système de règles et de principes de déduction (Mariotti & al., 1997, p. 182).

Le pas d'argumentation peut être transformé en pas de démonstration si :

- Il existe un théorème correspondant à l'opérateur R de la conception ;
- Il existe une théorie mathématique qui peut être substituée à la conception.

Cependant, la théorie est une réalité épistémique chez les mathématiciens. Dans une activité de résolution d'un problème, celui qui argumente, et qui construit une démonstration est un sujet rationnel qu'il fait fonctionner très localement la théorie, il n'utilise presque jamais la totalité de la théorie, mais plutôt une partie de celle-ci (d'où l'idée de Douady d'introduire la notion de fenêtre conceptuelle).

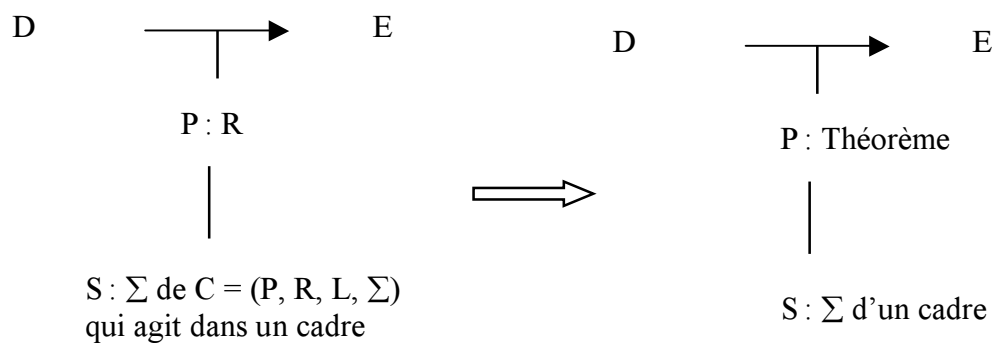
C'est pourquoi nous croyons qu'il est plus pertinent de parler de cadre plutôt que de théorie lorsqu'il s'agit d'analyser une activité expérimentale. Un cadre exprime des relations entre

objets d'une branche des mathématiques, une théorie exprime toutes les relations entre objets d'une branche des mathématiques.

En conséquence, les conditions minimales pour construire un pas de démonstration à partir d'un pas d'argumentation sont les suivantes :

- Il existe un théorème correspondant à l'opérateur R de la conception ;
- Il existe un cadre qui, peut être substitué à la conception présente dans le support de l'argumentation.

En particulier, c'est le système de contrôle de cette conception qui joue un rôle fondamental. Si le système de contrôle de la conception utilisée dans l'argumentation agit dans un cadre, celui-ci peut devenir le support du permis d'inférer dans la démonstration.



Le contrôle peut être difficile à déterminer, mais le cadre où il agit peut être plus facilement supposé. Si le contrôle agit dans un cadre déjà mathématique (algébrique, géométrique, fonctionnel, etc.) celui-ci devient probablement le support dans la démonstration. Au contraire, si le support n'est pas dans un cadre (dans le perceptif, dans le spatio-graphique, etc), le cadre pour construire la démonstration n'est pas encore disponible pendant l'argumentation.

2.3.9 Le cadre et le *champ*.

Le champ, comme nous l'avons décrit au cours du premier chapitre, est le contexte particulier à toute argumentation. Il détermine les critères d'acceptabilité d'une argumentation. Il se peut que le permis d'inférer soit le même pour des *champs* différents, mais le support sur lequel s'appuie un permis d'inférer est spécifique dans chaque *champ* d'argumentation.

Le type de fondement [le support S] qu'il nous faut indiquer si nous voulons établir son autorité variera nettement d'un champ d'argumentation à l'autre (Toulmin, 1993, p. 128).

Une démonstration et une argumentation fournies pour la construction d'une conjecture peuvent avoir la même force pour celui qui argumente (il peut être convaincu de la validité des deux) même si les critères pour les évaluer ne sont pas du tout les mêmes dans les deux cas. Les critères d'acceptabilité pour un théorème sont à chercher dans une théorie, *champ* spécifique des mathématiques.

Une question se pose alors : Quel est le rapport entre cadre et *champ* ?

Nous croyons qu'il n'y a pas de différence substantielle entre les deux.

Le mot « cadre » est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique..., mais aussi cadre qualitatif ou cadre algorithmique. Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses (Douady, 1986, pp. 10-11).

Nous pouvons dire que le cadre est une partie du *champ* en mathématique.

2.3.10 Des conceptions à la détermination du système de référence (conceptions, cadres)

L'analyse de la modélisation de l'argumentation en termes de conceptions, nous permet une analyse du système de référence de l'argumentation et de la démonstration.

Dans la suite nous analyserons l'utilité ou la non-utilité du modèle de Toulmin comme outil d'analyse des éléments qui constituent le système de référence. Nous expliciterons l'analyse en considérant chaque point du système de référence (cfr. Chapitre 2).

- Langage. L'évolution des expressions verbales, des expressions algébriques, est observable simplement en analysant l'argumentation et la démonstration. Le modèle de Toulmin peut nous aider à localiser où exactement, dans l'argumentation (données, conclusion, permis d'inférer etc.), une certaine expression a été utilisée et à la comparer à l'argument correspondant dans la démonstration.
- Heuristique. L'analyse de l'évolution des éléments désignés comme variables (que l'on fait varier) et les autres qui sont tenus fixes dans les deux phases d'argumentation et de démonstration est observable à partir de toute l'argumentation. Cependant, les heuristiques liées aux dessins peuvent ne pas trouver une place dans l'argumentation et donc dans le modèle. Les heuristiques liées au discours au contraire peuvent apparaître dans l'argumentation. Comme dans le cas précédent, le modèle peut aider à localiser où, dans l'argumentation, elles peuvent changer ou au contraire se maintenir.
- « Cadres » (Douady, 1986). Nous avons vu comme les cadres interviennent dans le modèle. En particulier, ils sont observables à partir de la restriction ou du support de

chaque argument. Les éventuels changements de cadre de l'argumentation à la démonstration sont facilement repérables avec le modèle.

- Concepts. C'est la partie plus difficile à examiner parce que complètement liée aux conceptions. Comme nous l'avons montré dans les paragraphes précédents, c'est à partir du permis d'inférer, du support, et même de la restriction qu'une conception peut apparaître. Le modèle de Toulmin apparaît donc particulièrement important et efficace. Les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte (Vergnaud, 1990) se situent dans le support et parfois dans le permis d'inférer (quand celui-ci reste implicite). Douady écrit :

Ses conceptions [de l'élève] lui permettent d'engager une procédure dont la justification fait référence à des notions qu'il ne sait pas formuler ou qu'il exprime seulement en termes d'actions dans un contexte particulier ; dans ce cas du point de vue du sujet, G. Vergnaud parle de théorème-en-acte (Douady, 1986, p.10).

Evidemment, ces outils, implicites dans l'argumentation, peuvent devenir explicites dans la démonstration. En ce cas, le support d'un pas d'argumentation, constitué par un théorème-en-acte devient théorème dans le permis d'inférer du pas de la démonstration correspondante.

Le modèle de Toulmin est un outil important pour le repérage du système de référence dans l'argumentation parce qu'il permet la localisation des éléments du système de référence. La comparaison entre arguments (d'argumentation et de démonstration) apparaît plus facile et plus précise. En fait, le modèle permet une analyse globale de l'argumentation et de la démonstration à partir d'une analyse locale : la comparaison entre les arguments de l'un et de l'autre. La continuité ou discontinuité du système de référence est observée très localement, elle s'appuie sur les éléments des arguments. Le modèle est alors un outil légitimité pour l'analyse de l'unité cognitive entre argumentation et démonstration.

2.4 Limites du modèle de Toulmin

Le modèle de Toulmin est un outil puissant pour analyser les argumentations des élèves et pour comparer argumentation et démonstration. Cependant, nous souhaitons ici de prendre en compte les limites liées à son utilisation.

Le modèle peut représenter les « explicites » d'une argumentation, il peut suggérer certaines conceptions que les élèves utilisent pendant la résolution d'un problème et nous permet, des fois, de faire des hypothèses locales à propos des implicites. Mais pour une analyse cognitive, certains éléments que nous n'avons pas pris en compte peuvent se révéler être importants. Les images mentales, les heuristiques sur le dessin, les implicites engagés dans l'argumentation,

etc., (qui sont à la base d'un raisonnement, et qui peuvent être observables à partir de la résolution d'un problème) restent caché à cette analyse.

En conséquence, nous voulons aborder le problème de l'exhaustivité et de la complétude du modèle. En particulier, dans le paragraphe suivant nous voulons répondre aux questions suivantes :

Le modèle de Toulmin permet-il de modéliser complètement l'argumentation?

Y a-t-il des éléments de l'argumentation qui restent inaccessibles au modèle?.

Eggs⁴, par exemple soutient que dans le modèle il n'y a pas de place pour les *topoi communs* (*Rhétorique*, Aristote) qui jouent un rôle important dans l'argumentation. Une partie des *topoi* fait référence aux structures de l'argumentation. Nous considérons ce point de vue et nous essayons de donner notre avis.

2.4.1 Problématique de l'identification d'une structure d'argumentation dans le modèle de Toulmin : Aristote et sa ré-interprétation dans le modèle à la suite d'Eggs

Eggs essaie de réinterpréter la théorie d'Aristote pour l'analyser à l'intérieur d'un cadre inférentiel et argumentatif. L'originalité de Eggs dans cette réinterprétation est l'introduction des « topoi ». Les topoi ont été définis par Aristote (*Rhétorique* I,2 – 1358a 11). Le topos est une sorte de *principe d'argumentation* (Eggs, 1994, p. 30), qui peut être spécifique à l'argument ou au contraire commun à tous les arguments ; selon la distinction d'Aristote : les communs et les spécifiques. Les topoi communs peuvent s'appliquer à plusieurs disciplines même si elles appartiennent à des domaines très différents les uns des autres. Par exemple le topos du plus ou moins (« S'il n'y a pas le plus, il n'y a pas le moins »⁵) est un topos commun, « car on pourra en faire un syllogisme ou dire un enthymème sur le droit, la physique ou sur de telles disciplines » (*Rhétorique* I,2 – 1358a 1). En revanche, sont spécifiques les topoi « qui se fondent sur des propositions propres à chaque genre ; ainsi, il y a des propositions sur la physique, dont on ne pourra former ni enthymème ni syllogisme sur l'éthique » (*Rhétorique* I,2 – 1358a 11).

⁴ Ekkehard Eggs est professeur à l'Université de Hanovre, Institut d'Etudes Romanes.

⁵ Un exemple du topos du plus ou du moins est le suivant :

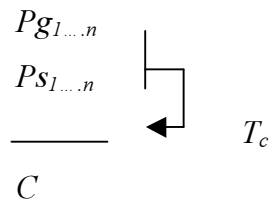
P_g: « Les dieux savent tout » est plus vraisemblable que « les hommes savent tout »

P_s: Les dieux ne savent pas tout

C : donc les hommes ne peuvent pas tout savoir

Certaines règles d'inférence, comme la déduction, l'abduction et l'induction sont des topoi communs parce qu'elles sont utilisables dans toutes les disciplines (sauf que l'abduction n'a pas de légitimité en mathématique et la légitimité de l'induction est limitée au cas de la récurrence). En revanche, les principes particuliers à chaque discipline qui permettent d'inférer une conclusion à partir d'une donnée, sont des topoi spécifiques.

A la suite de Eggs, une argumentation déductive a la forme suivante⁶ :



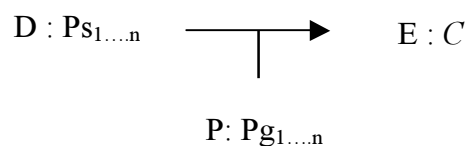
$Pg_{1\dots n}$ sont les prémisses génériques que peuvent être représentées, dans le modèle de Toulmin, par le permis d'inférer ;

$Ps_{1\dots n}$ les prémisses singulières qui peuvent être représentées, dans le modèle de Toulmin, par les donnés;

C est la conclusion.

Le topos spécifique est le garant du passage d'une prémisses à la conclusion dans un argument. Le topos spécifique est donc constitué par les prémisses génériques.

Dans le modèle de Toulmin cette représentation devient :



Selon Eggs, le topos commun, qui est le garant du passage de toutes les prémisses à la conclusion, semble ne pas être présent dans le modèle de Toulmin même s'il représente le principe qui légitime le passage des prémisses à la conclusion (Eggs, 1994, pp. 32-33). Nous citons directement Eggs :

...il faut donc, dans toute argumentation déductive, bien distinguer le topos spécifique, qui forme la prémisses générique, du topos communs qui garantit et légitime la conclusion à partir des prémisses. (Eggs, 1994, pp. 32-33).

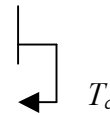
⁶ La structure de la déduction à la suite d'Eggs, est strictement liée à la structure du syllogisme. En effet, il a essayé de relier la théorie des topoi à la théorie du syllogisme (Eggs, 1994).

T_c est les topoi commun, c'est-à-dire la règle ou le principe d'inférence qui permet, à partir d'un ou de plusieurs faits singuliers et d'une hypothèse générique de conclure sur l'existence d'un autre fait singulier.

Considérons l'exemple suivant :

P_g : Un triangle ayant deux côtés égaux est un triangle isocèle

P_s : ABC est un triangle tel que AB est égale à AC



C : ABC est isocèle

Le topos spécifique correspond à la prémisse générique et le topos commun est la règle du modus ponens.

Même si Aristote n'a jamais corrélé de cette façon les topoi communs et les spécifiques, il a bien distingué, dans la Rhétorique et les Topiques, les règles applicables à tous domaines du savoir des règles applicables à des domaines spécifiques. Notre intérêt pour cette analyse est justifié par le fait que d'après Eggs, le modèle de Toulmin semble ne pas être exhaustif. Eggs soutient que le topos commun est un grand absent dans la théorie de l'argumentation de Toulmin (Eggs, 1994, p. 34). Il ne trouve pas une place propre dans le modèle, lorsque le topos spécifique est effectivement représenté par le permis d'inférer. En revanche, comme nous l'avons montré dans la section 2.2, certains topoi communs comme la déduction, l'abduction et l'induction peuvent être représentés par le modèle.

Néanmoins, Eggs distingue trois groupes des topoi communs :

(A) *les lieux ou principes qui se réfèrent à l'interaction et au comportement humain*

(B) *les lieux qui expriment des principes linguistiques, logiques ou quasi-logiques*

(C) *les lieux qui formulent les principes de la production du savoir et de la recherche scientifique* (Eggs, 1994, p. 110).

Dans le premier groupe nous trouvons des topoi relatifs à la rhétorique. Le modus ponens, le modus tollens, les inférences logiques mais aussi les inférences du type « s'il y a le plus alors il y a aussi le moins » ou de la même façon « s'il n'y a pas le plus alors il n'y a pas le moins » appartiennent au deuxième groupe. Dans le troisième groupe nous trouvons les principes, de l'induction, de l'abduction, ou de l'analogie, et un principe du type « s'il y a une cause alors il y a un effet ».

Nous situons dans le premier group les aspects liés au contrat didactique dans la résolution d'un problème. Un exemple peut être le suivant : « ce théorème doit sûrement être utilisé parce qu'il est l'essentiel du cours qui a précédé cette preuve ». Ces topoi peuvent être ignorés pour autant que l'on fait l'hypothèse d'une résolution qui est adidactique.

De la même façon, nous ne nous intéressons pas aux topoi liés à des aspects rhétoriques, présents dans le premier groupe, et aussi dans les autres groupes, car nous sommes intéressée par l'argumentation en mathématique, et comme nous l'avons caractérisé au cours du premier chapitre, elle échappe aux aspects rhétoriques. Certains topoi du deuxième et troisième groupe peuvent être, à notre avis, identifiés à un niveau différent par rapport aux topoi spécifiques, repérables dans le permis d'inférer de l'argument.

La structure du raisonnement n'est pas prise en compte dans l'argument élémentaire, mais elle est cependant repérable à partir de la concaténation des arguments qui forment l'argumentation. Dans la section 2.2, avons montré comment il est possible représenter certaines structures. Nous avons considéré la déduction, l'abduction et l'induction, mais il se peut que d'autres formes logiques du raisonnement puissent être représentées par la concaténation.

Les topoi de la généralisation peut être représentés dans le modèle comme permis d'inférer. Dans le cas d'une argumentation inductive, par exemple, le principe de généralisation est le permis d'inférer du dernier pas, celui qui conduit au cas général (2.2.).

Le manque de certains topoi dans le modèle est plutôt lié au fait que ces principes restent souvent implicites pendant l'argumentation. Ils sont souvent utilisés sans que le sujet en soit conscient. Le modèle de Toulmin permet de bien représenter les constituants explicites d'une argumentation. Les topoi communs, comme l'analogie, la particularisation ou le principe de cause et effet, ne sont presque jamais explicités car ils font plutôt partie de l'activité de la pensée.

Conclusion

A partir du modèle de Toulmin, nous avons construit une méthode pour modéliser et comparer argumentation et démonstration. Cet outil nous permet de construire une analyse précise en termes de structure et du système de référence.

Les structures d'abduction, de déduction, d'induction peuvent être représentées dans le modèle. Du point de vue cognitif, il est possible de localiser les écarts structurels entre argumentation et démonstration et en conséquence les difficultés éventuelles auxquelles les élèves doivent faire face dans le passage à une démonstration.

Nous avons montré comment il est possible, au moyen de ce modèle, de prendre en compte les conceptions que l'élève mobilise pendant la construction d'une argumentation. La prise en compte de ces conceptions nous permet une analyse fine en termes de système de référence. Le fonctionnement du permis d'inférer (corrélé à un des opérateurs de la conception), du support (corrélé à une conception) et de la restriction nous conduisent à deux résultats :

- La localisation des conceptions des élèves mobilisées pendant l'argumentation
- Une analyse de l'unité cognitive du système de référence qui se base, finalement, sur une analyse concrète et locale : la comparaison des éléments constituant chaque argument.

En conséquence, l'analyse de l'unité cognitive entre argumentation et démonstration peut s'appuyer sur cet outil, même si une prise en compte des limites du modèle semble être nécessaire.

Le modèle de Toulmin nous permet à la fois de résoudre le paradoxe d'une continuité nécessaire entre argumentation et démonstration du point de vue du système de référence, et d'un écart également nécessaire du point de vue structurel.

Dans le chapitre suivant nous montrons comment nous avons construit une situation expérimentale dans ce cadre théorique pour valider ou réfuter les hypothèses faites.

Chapitre 4

Analyse a priori de la situation expérimentale

*Il ne suffit pas de « voir » un objet jusque-là invisible
pour le transformer en objet d'analyse.
Il faut encore qu'une théorie soit prête à l'accueillir.*

François Jacob

Extrait de la logique du vivant

Introduction

Au cours du chapitre précédent, nous avons présenté le modèle de Toulmin comme outil méthodologique pour analyser une argumentation et une démonstration.

En particulier, nous avons fait l'hypothèse que ce modèle peut permettre une analyse de l'unité cognitive entre argumentation et démonstration du point de vue du système de référence et du point de vue de la structure. Le modèle permet de reconnaître la structure des arguments élémentaires et de préciser le rôle des conceptions qui sont mobilisées pendant l'argumentation. La comparaison entre pas d'argumentation et pas de démonstration devrait apporter les résultats nécessaires à une analyse cognitive.

Au cours de ce chapitre nous présentons l'analyse a priori des situations expérimentales et les choix qui ont permis leur mise en place en fonction de nos objectifs. Le dispositif expérimental, pensons-nous, nous permet à la fois, de vérifier cette hypothèse d'utilité du modèle et de répondre à certaines questions que nous avons posées.

Ce chapitre est composé de deux sections. La première présente la méthodologie utilisée pour construire le dispositif expérimental. La seconde fournit une analyse a priori des trois situations expérimentales choisies. En particulier, nous présentons une étude des solutions des problèmes sélectionnés pour analyser les structures d'argumentation possibles, et les conceptions attendues.

Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) En particulier, nous utilisons les concepts de milieu, de contrat didactique et de dévolution d'une situation.

1 Justification du dispositif expérimental par rapport à notre problématique

L'objectif de cette section est de montrer la mise en place d'un dispositif expérimental et de justifier les choix qui ont permis sa construction.

La problématique de notre recherche, que nous avons amplement discutée au cours des chapitres précédents, porte sur deux questions fondamentales :

- La relation entre l'argumentation et la démonstration ;
- L'analyse de l'unité ou de la rupture cognitive.

Nous présentons d'abord les questions de recherche auxquelles nous nous proposons de répondre par le moyen de l'expérimentation. Nous reprenons aussi les hypothèses que nous voulons valider.

1.1 Questions et hypothèses de recherche

Selon l'hypothèse de l'unité cognitive, la démonstration est souvent construite en reliant en chaîne déductive les pas de l'argumentation utilisée pour construire et soutenir la conjecture. Ainsi, la continuité entre argumentation et démonstration favoriserait la construction d'une démonstration.

Deux questions ont été soulevées :

1. Quels sont les éléments observables de l'argumentation et de la démonstration permettant de conduire une analyse de l'unité cognitive ?
2. Quels instruments peuvent nous aider à réaliser une telle analyse ?

Comme nous l'avons dit au cours du deuxième chapitre, l'unité cognitive doit prendre en compte le système de référence et la structure d'une argumentation et d'une démonstration.

C'est pourquoi une troisième et quatrième question viennent se poser :

3. Les difficultés auxquelles les élèves ont à faire face au moment de construire une démonstration, sont-elles seulement relatives à des problèmes conceptuels, ou peuvent-elles être aussi liées à des problèmes de structures ?
4. Et dans ce cas, les hypothèses de continuité entre argumentation et démonstration sont-elles valables aussi pour la structure ?

Ces questions nous ont amenée à construire un cadre théorique, à partir duquel des hypothèses de recherche ont été construites.

L'argumentation en mathématique, comme nous l'avons caractérisée au cours du premier chapitre, est proche de la démonstration. La finalité justificative, le caractère de rationalité, la nature convaincante (et non persuasive) de l'argumentation en mathématique, l'auditoire universel auquel elle s'adresse, la structure ternaire qui la caractérise, nous ont amenée à soutenir l'hypothèse suivante.

HP 1 : La démonstration est une argumentation particulière en mathématique.

Cette hypothèse porte en particulier sur la pertinence du modèle de Toulmin comme outil de comparaison entre argumentation et démonstration. L'argument est décrit dans le modèle comme constitué par au moins trois termes. Chacun d'entre eux a un statut précis dans l'argumentation. Cela permet une comparaison avec la démonstration car elle aussi a une structure ternaire.

L'hypothèse suivante relative à l'unité cognitive devient centrale dans notre recherche.

HP 2 : Le modèle de Toulmin est un outil d'analyse de l'argumentation et de la démonstration. Il permet à la fois de conduire une analyse comparative de l'argumentation et de la démonstration en termes de continuité/écart de structure et de continuité/écart du système de référence.

Nous affirmons que pour réaliser une analyse cognitive complète, la relation entre structure de l'argumentation et de la démonstration doit être prise en compte.

Notre troisième hypothèse est alors la suivante.

HP 3 : L'analyse de l'unité cognitive doit se faire en considérant et la structure et le système de référence de l'argumentation et de la démonstration.

La mise en place du dispositif expérimental doit permettre de donner une réponse à nos questions et de valider ou réfuter nos hypothèses. Cet objectif détermine nos choix pour la mise en place des situations expérimentales.

1.2 Mise en place du dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est conçu avec des situations problèmes qui demandent, implicitement ou explicitement, la construction d'une conjecture, et en conséquence, la mise en place d'une argumentation et d'une démonstration éventuelle.

Nous avons choisi la géométrie comme domaine mathématique. En fait, les premières confrontations entre argumentation et démonstration ont lieu pour les élèves dans le contexte de la géométrie qui est le domaine dans lequel, traditionnellement, la démonstration est

introduite en France et en Italie. En outre, le choix de la géométrie est aussi guidé par notre souhait d'utiliser le logiciel Cabri-géomètre pour les raisons que nous expliquons ci-dessous (1.2.3).

Nous avons choisi de faire des expérimentations en France et en Italie. L'institution française est très différente de l'institution italienne. En France, la théorie de référence, la géométrie enseignée à l'école secondaire, est la géométrie des transformations, alors qu'en Italie la géométrie est enseignée à travers un approche axiomatique déductive (théorèmes d'égalité et de similitude entre triangles).

Evaluer les expérimentations dans les deux institutions permet de tester nos hypothèses de façon plus approfondie :

- Le passage de l'argumentation à la démonstration est influencé par les conceptions mobilisables. Ces conceptions peuvent être très différentes pour les élèves des deux pays. Il est possible que certaines conceptions soient communes à un certain nombre d'élèves d'une même institution, et qu'au contraire elles n'apparaissent pas parmi les conceptions mobilisables par les élèves de l'autre institution. En conséquence, par rapport au même problème, l'analyse de la continuité/écart du système de référence de l'argumentation et de la démonstration peut apparaître très différente selon l'institution observée.
- De la même façon, l'analyse de la continuité/écart de structure de l'argumentation et de la démonstration peut révéler des aspects particuliers et dépendants de l'institution considérée.

Nous avons décidé de faire travailler les élèves en binôme pour favoriser l'apparition d'une activité argumentative ; le manque d'argumentation nous empêcherait une analyse comparative avec la preuve. L'interaction sociale doit être productive entre les élèves. Si les élèves ne réussissent pas à établir une interaction suffisamment riche, celle-ci peut ne pas pouvoir être prise en compte pour notre analyse.

Les séances expérimentales ont lieu en classe, même si nous analysons seulement les interactions de quelques binômes. Le fait de se placer dans une classe et pendant le temps scolaire permet :

- De rendre légitime assez simplement l'attente d'une démonstration. Nous avons choisi des élèves qui ont déjà abordé des activités démonstratives. Les élèves doivent

accomplir la tâche en tenant compte des attentes de l'enseignant qui est présent pendant l'expérimentation ; en particulier ils doivent construire une démonstration (finalité qu'ils pourraient plus difficilement accepter hors de la classe).

- D'ajuster a priori plus facilement la complexité du problème qui est proposé. La résolution du problème dépend du niveau de la classe. Les élèves pourraient ne pas réussir à résoudre le problème simplement parce qu'il serait trop difficile relativement à leur niveau scolaire.

Pendant l'activité, l'enseignant et un ou plusieurs observateurs sont présents, mais n'interviennent pas. L'enseignant peut cependant répondre aux questions des élèves relatives à un manque éventuel de compréhension du texte ou à une incapacité d'utiliser certains outils du logiciel Cabri-géomètre. Les binômes ne peuvent pas interagir entre eux. Ils doivent travailler sans interférer avec les autres binômes.

La durée de l'expérimentation joue un rôle important dans l'interaction sociale. elle doit être suffisamment longue pour permettre aux élèves d'engager une activité argumentative intense et de construire une démonstration. L'interaction entre les élèves met du temps à s'établir. Si le temps est trop court, les élèves risquent de ne pas réussir à créer un lien suffisant pour aboutir à une argumentation.

L'échange discursif entre les binômes est observé et enregistré avec un magnétophone. Nous disposons donc des enregistrements du travail complet des binômes, de la rédaction écrite de la démonstration, et quelque fois de la rédaction écrite d'une partie de l'argumentation.

1.2.1 Choix des problèmes

La situation que nous voulons proposer aux élèves est une situation problème. Il s'agit de problèmes ouverts (Arsac & al., 1991). En fait, nous voulons que la solution ne soit pas construite de façon immédiate. Nous voulons accentuer les difficultés des élèves pour construire une conjecture afin d'assurer une forte interaction entre eux. Si le problème est standard, l'argumentation menant à la mise en place de la conjecture risque de rester à un niveau implicite. Une contrainte essentielle sur le choix des problèmes est donc la non familiarité des élèves avec les problèmes proposés.

Le choix des problèmes est influencé par la théorie mathématique nécessaire pour les résoudre. Les élèves doivent pouvoir construire une démonstration pour établir la solution des problèmes que nous proposons. C'est pourquoi ces problèmes doivent pouvoir être résolus avec les connaissances dont les élèves disposent.

La comparaison entre structure de l'argumentation et de la démonstration nous oblige à choisir des problèmes autorisant la construction d'une argumentation déductive, abductive ou inductive. Les trois types d'argumentation inductive (par récurrence, par généralisation, par passage à la limite) doivent également être possibles. La totalité des situations expérimentales que nous considérons doit prendre en compte toutes les structures d'argumentation que nous avons précédemment analysées.

1.2.2 Dévolution de la situation expérimentale

La consigne introduisant les problèmes doit permettre aux élèves de comprendre tout de suite qu'ils se trouvent dans une situation de résolution de problème. Ils doivent entrer très rapidement dans sa résolution. Afin de réaliser l'expérimentation pendant la totalité du temps établi, l'enseignant doit prévoir avec la classe la venue du ou des observateurs, et anticiper la situation expérimentale. Le problème est présenté au moment de l'expérimentation.

Les élèves sont constitués en binômes, ils ont devant eux un ordinateur dont l'écran présente une page du logiciel Cabri contenant éventuellement une figure déjà construite (cela dépend de la situation expérimentale). Une feuille est présentée à chaque binôme. Nous avons choisi de donner une seule feuille par binôme pour favoriser un travail commun. Sur la feuille est présent le texte du problème et un espace en blanc pour permettre d'écrire la démonstration et éventuellement des parties de l'argumentation. Nous disons aux élèves qu'ils peuvent avoir d'autres feuilles blanches, si celles que nous avons données ne suffisent pas. Il s'agit de les encourager à écrire des argumentations et pas seulement la démonstration ; dans le cas contraire, ils pourraient penser que la feuille donnée n'est pas suffisante pour écrire à la fois la démonstration et l'argumentation.

Nous voulons aussi informer les élèves que leurs travaux ne seront pas évalués. De cette façon, nous voulons les laisser libres d'écrire et de dire ce qu'ils veulent.

Nous annonçons qu'à la fin du temps établi, les élèves doivent rendre la feuille utilisée pendant la résolution du problème. Nous insistons aussi sur le fait que nous aimerions avoir une démonstration écrite du problème. En fait, même si les élèves savent qu'ils doivent démontrer, il y a peut-être un risque qu'ils ne prennent pas en compte cette obligation contractuelle parce que les copies ne sont pas évaluées par l'enseignant. Nous voulons être

certains que le manque éventuel d'une démonstration est dû à une incapacité de la construire et pas à un choix des élèves.

1.2.3 Justification de l'utilisation de Cabri-géomètre pendant les expérimentations

Cabri-géomètre est un logiciel de géométrie dynamique. Il permet de construire des figures géométriques (Cabri signifie « cahier de brouillon informatique »). On dispose ainsi d'outils pour tracer des droites, des segments, des cercles, et également d'instruments de mesure de longueurs, d'aires, et d'angles. Le logiciel a une fonctionnalité qui n'est pas disponible dans l'environnement papier-crayon : la manipulation directe. Les éléments de base de la figure peuvent être déplacés librement sur la feuille virtuelle, et la construction est mise à jour automatiquement.

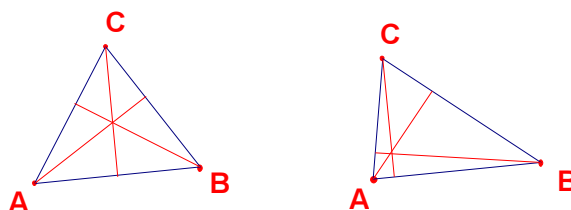


Figure 4.1

Par exemple, après avoir construit un triangle ABC et ses trois hauteurs (à gauche), on peut déplacer librement certains points (ici C à droite), et le logiciel recalcule automatiquement les trois hauteurs. On a ainsi une vérification immédiate et visuelle du fait que les trois hauteurs du triangle sont concourantes. Le logiciel permet aux propriétés géométriques de la construction (perpendicularité, parallélisme etc.) de se maintenir pendant le déplacement.

Nous utilisons ce logiciel dans nos expérimentations pour plusieurs raisons :

- Sa facilité d'utilisation permet d'aborder des problèmes plus complexes et de façon plus attractive que ce que l'on pourrait faire sur une feuille de papier.
- La manipulation directe permet d'expérimenter les constructions : observer des propriétés d'une figure (invariantes par déplacement), et valider ou invalider des constructions. L'élève peut alors explorer librement différentes approches du problème, et produire plus facilement des conjectures à partir de l'observation et de la manipulation de la figure.

- Un outil (règle, compas,...) implémente naturellement des propriétés géométriques (points alignés, équidistance,...). L'élève cherchant une propriété géométrique sera ainsi guidé vers l'outil correspondant. Inversement, l'utilisation d'un outil donné fournit à l'élève des propriétés géométriques qu'il peut exploiter dans une démonstration.

1.2.4 Milieu de la situation expérimentale

Le milieu, en tant que système antagoniste du sujet dans une situation (Brousseau, 1990, p.320-321), doit être construit avec un objectif particulier : il doit favoriser l'activité argumentative entre les élèves.

Le milieu doit perturber l'élève afin de favoriser la construction d'une argumentation. Néanmoins, il doit aussi garantir l'équilibre du système afin de permettre à l'élève de construire la conjecture et sa démonstration.

Les conceptions des élèves doivent pouvoir s'engager et évoluer pendant la résolution des problèmes proposés. En particulier, les opérateurs des conceptions mobilisées pendant l'argumentation doivent éventuellement pouvoir être transformés en théorèmes pendant la démonstration. Ce passage est probablement encouragé si deux élèves travaillent ensemble. En effet, les conceptions d'un élève doivent être acceptées par le camarade afin de favoriser une solution commune. Le camarade fait donc partie du système antagoniste du sujet : le camarade fournit des rétroactions aux conceptions du sujet, en fonction de ses propres conceptions

Le logiciel Cabri-géomètre, comme le camarade, fait aussi partie du système antagoniste. Cabri-géomètre permet une visualisation dynamique de la figure d'un problème. La visualisation de plusieurs figures du problème et leur manipulation permet d'aider les élèves à localiser les propriétés géométriques invariantes nécessaires pour construire une démonstration. Le logiciel fournit des rétroactions qui peuvent agir sur les processus de résolution du problème. Par exemple, la dynamique de la figure fournit des rétroactions qui peuvent aider à désamorcer un blocage pendant la résolution.

Les deux élèves d'un binôme se trouvent avec une seule feuille : l'écran de Cabri (en plus de la feuille de la consigne). Ils sont obligés de créer une interaction sociale afin de construire une argumentation. D'une certaine façon, le rôle de Cabri-géomètre (CG) dans le milieu est particulier. Il y a deux élèves A et B. Ainsi les deux systèmes $[A \leftrightarrow (B, CG)]$ et $[(A, CG) \leftrightarrow B]$, CG ne sont pas les mêmes dans la mesure où on peut estimer qu'ils dépendent chacun des conceptions engagées par celui qui utilise le logiciel. En fait, on a un système $[(A \leftrightarrow CG) \leftrightarrow (B \leftrightarrow CG)]$, avec une superposition factuelle mais non phénoménologique des deux

CG qui apparaissent dans ces deux schémas ; les deux élèves peuvent investir chacun son « CG » dans l'interaction.

1.2.5 Choix des élèves à analyser

Le choix des élèves que nous avons observés, doit répondre à trois exigences :

- Les élèves doivent appartenir à une classe où le contrat didactique contient l'exigence d'une démonstration dans la réponse à un problème proposé.
- Le niveau des connaissances de la classe doit permettre aux élèves de construire une démonstration pour la solution des problèmes proposés.
- La maîtrise des élèves du logiciel Cabri-géomètre. Une bonne maîtrise de l'utilisation du logiciel de la part des élèves est nécessaire afin d'assurer une bonne gestion de la situation expérimentale.

Nous avons donc choisi de réaliser les expérimentations dans des classes à partir de la 3^e, car à ce niveau, l'apprentissage de la démonstration a été introduit et est déjà un peu avancé.

2 Analyse a priori des situations proposées

Dans la suite nous présentons les situations expérimentales que nous avons proposées pour conduire notre analyse. Chaque situation est présentée de la façon suivante :

- Présentation du problème ;
- Analyse a priori des stratégies de résolution attendues et des structures argumentatives qui peuvent être développées ;
- Analyse des conceptions que les élèves peuvent mobiliser pendant la résolution du problème ;
- Prévision des continuités et/ou écarts entre argumentation et démonstration et en conséquence étude de l'unité ou de la rupture cognitive.

2.1 Situation expérimentale 1

Nous avons choisi de réaliser cette expérimentation dans les classes suivantes :

- En France dans une classe de seconde.
- En Italie dans
 - deux classes de 2^e année du lycée (15/16 ans, seconde en France),
 - une classe de 3^e année du lycée (16/17 ans, première en France),
 - une classe de 4^e année du lycée (17/18 ans, terminale en France).

Nous avons observé aussi deux binômes de 5^e année du lycée (18/19 ans, en France les élèves terminent le lycée une année plus tôt que les élèves italiens).

Les élèves travaillent en binôme avec Cabri-géomètre. Ils ont à leur disposition l'énoncé du problème et une feuille de réponse. La durée de la session est de 1h.30.

Le problème proposé est le suivant:

Problème. ABC est un triangle quelconque. A l'extérieur du triangle, trois carrés ont été construits sur chacun des trois côtés. On construit trois nouveaux triangles en reliant les sommets libres des carrés. Comparer l'aire de chacun des trois triangles avec l'aire du triangle ABC.

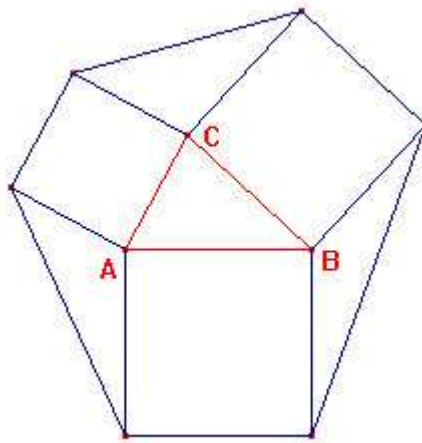


Figure 4.2

Afin de permettre aux binômes d'avoir le temps suffisant d'argumenter et de construire une démonstration, nous avons choisi dans certains cas de donner la construction de la figure sur Cabri-géomètre.

La figure associée au problème (Figure 4.2) est présentée aux élèves sur Cabri-géomètre, dans les cas où l'expérience de la classe avec le logiciel est limitée. Ce choix a été fait en raison du temps qui n'apparaît pas suffisant pour, à la fois, construire une figure sans une bonne pratique de Cabri-Géomètre et résoudre le problème.

2.1.1 Pourquoi ce problème ?

Nous voulons présenter les raisons qui nous ont poussée à choisir un tel problème.

- Facilité d'engager un processus d'argumentation.

La résolution du problème n'est pas immédiate, le problème n'est pas un problème standard pour les élèves. Notre hypothèse est que cette difficulté peut les obliger à communiquer et à collaborer.

- Possibilité de produire une argumentation déductive, inductive ou abductive. Le problème peut être résolu en utilisant les structures argumentatives que nous avons considérées dans le cadre théorique. Dans le paragraphe 2.1.2 nous fournirons l'analyse a priori des structures d'argumentation à partir des stratégies de résolution les plus attendues.
- La réponse peut être démontrée par les élèves avec les connaissances dont ils disposent. Les élèves ont à disposition la théorie mathématique nécessaire pour résoudre le problème.
Les différences entre les institutions scolaires française et italienne peuvent induire une différence observable entre la théorie mathématique utilisée par les élèves français et celle utilisée par les élèves italiens. En Italie, les élèves utiliseront les théorèmes sur l'égalité des triangles, alors qu'en France ils utiliseront plutôt la géométrie des transformations et en particulier les rotations.
- Possibilité de mobiliser des conceptions.
Comme nous l'avons dit plus haut, le problème n'est pas un problème standard pour les élèves, ainsi la recherche d'une solution sera probablement de longue durée. Nous faisons l'hypothèse que les conceptions mobilisées pendant l'argumentation peuvent facilement apparaître. Dans la section 2.1.3 nous développerons l'analyse a priori des conceptions les plus attendues.

2.1.2 Structures attendues d'argumentation à partir de quelques procédures de résolution du problème

La réponse à la question posée par le problème est que l'aire du triangle ABC et celles des trois triangles extérieurs sont égales entre elles. Dans la suite nous considérons certaines solutions possibles.

A partir de ces procédures de résolution nous dégageons une analyse a priori des structures d'argumentation les plus attendues. La structure de l'argumentation, peut nous permettre de prévoir une structure possible de preuve. L'analyse a priori sur la continuité /écart structurel entre argumentation et démonstration se base sur la comparaison entre les deux structures anticipées. Nous pouvons ainsi pronostiquer une analyse cognitive qui peut être validée par l'expérimentation.

2.1.2.1 Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires

Une solution possible est la suivante. On construit les hauteurs des deux triangles qui ont des bases égales, par exemple la hauteur du triangle $\triangle ABC$ et la hauteur d'un triangle extérieur comme cela est représenté par la figure ci-dessous.

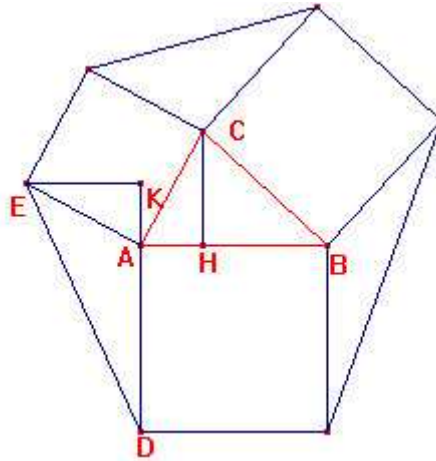


Figure 4.3

On compare bases et hauteurs des deux triangles. AB , base du triangle $\triangle ABC$ est égale à AD , base du triangle $\triangle ADE$.

La hauteur CH du triangle $\triangle ABC$ est égale à la hauteur EK du triangle $\triangle ADE$. En fait les deux petits triangles $\triangle AHC$ et $\triangle AKE$ sont égaux. Cela peut être démontré de plusieurs façon. Nous pensons plausibles les deux suivantes :

1. On peut considérer la rotation du triangle $\triangle AKE$, de centre A et d'angle 90° . Cette rotation superpose le triangle $\triangle AKE$ sur le triangle $\triangle AHC$.
2. On peut appliquer le théorème d'égalité aux deux triangles : AE est égal à AC parce qu'ils sont côtés du même carré. L'angle $\angle AHC$ est égal à l'angle $\angle AKE$; ce sont deux angles de 90° parce que formés par les hauteurs. Les angles $\angle KAE$ et $\angle HAC$ sont égaux parce qu'ils sont complémentaires d'un même angle.

En particulier, nous avons prévu que les élèves français utiliseront la première stratégie de résolution et les élèves italiens la seconde. Cette prévision se base sur l'institution d'appartenance des élèves que nous allons considérer.

Cette solution peut être produite au terme :

- D'une argumentation abductive,
- D'une argumentation déductive.

Ci dessous, nous présenterons en détails ces argumentations.

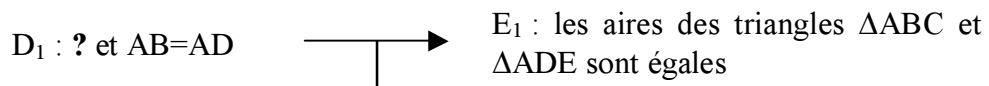
La plus plausible argumentation pour la résolution de ce problème est l'argumentation abductive.

En fait, c'est probablement la recherche des aires des triangles qui déplace l'attention sur leurs hauteurs. De la même façon, puisque les bases des triangles sont égales, on peut supposer que les triangles ont la même aire. Pour prouver l'égalité des hauteurs on compare les petits triangles construits sur celles-ci.

Exemple d'argumentation abductive

On considère dans la figure 4.2, le triangle ΔABC de départ et un des triangles extérieurs, par exemple le triangle ΔADE . On peut supposer que les aires des deux triangles sont égales parce que les bases des deux triangles sont perceptivement égales (elles sont les côtés du même carré). C'est pourquoi, les hauteurs des deux triangles doivent être égales si les aires des deux triangles sont égales. En effet, l'aire d'un triangle peut être calculée en multipliant la base par la hauteur et en divisant par deux.

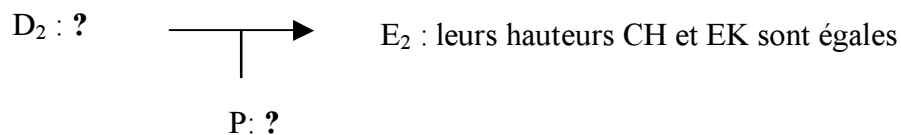
Dans le modèle de Toulmin, cette argumentation abductive peut être modélisée de la façon suivante.



P: formule de l'aire


Le point d'interrogation indique que la donnée, nécessaire pour tirer la conclusion à partir du permis d'inférer P_1 est à chercher. Cette donnée est l'égalité entre les hauteurs des triangles ΔABC et ΔADE . Dans le pas d'argumentation suivant cette prémisse est la conclusion, c'est-à-dire qu'il faut vérifier si les hauteurs sont égales.

Cela peut être représenté par une structure abductive.



Le donné D_2 n'est pas disponible, ainsi que le permis d'inférer P_2 . Il faut les construire. Afin de dire que les hauteurs CH et EK sont égales on peut par exemple considérer les deux petits triangles ΔAKE et ΔAHC : s'ils sont égaux leurs hauteurs sont égales. Il y a alors une seconde

abduction : la donnée D_2 : « les deux triangles $\triangle AKE$ et $\triangle AHC$ sont égaux » est conclusion E_3 dans le pas suivant. Le permis d'inférer P_3 peut être par exemple le théorème d'égalité entre triangles (en Italie) ou bien la rotation (en France). Il faut alors trouver les données D_3 afin d'appliquer le théorème qui permet de conclure que les deux triangles $\triangle AKE$ et $\triangle AHC$ sont égaux.

$D_3 : ?$  $E_3 : \text{les triangles } \triangle AKE \text{ et } \triangle AHC \text{ sont égaux}$

P : théorème d'égalité entre triangles (Italie)

P' : isométrie de la rotation (France)

Les pas décrits sont des arguments abductifs. Les données sont à chercher. Elles peuvent peut-être apparaître dans les pas suivants.

HP : A partir de cette argumentation les élèves peuvent construire une démonstration si les pas abductifs sont transformés en pas déductif. Le comblement d'un écart structurel est alors nécessaire. Nous faisons l'hypothèse que pour les élèves qui ont le plus d'expérience dans la démonstration ce passage pourra être facilement réalisé. Au contraire, lors des expérimentations avec les élèves de quatrième, nous pouvons peut-être trouver la présence de symptômes manifestant des difficultés à réaliser ce passage. Par exemple la formulation des preuves pourrait porter encore des traces d'abduction.

Exemple d'argumentation déductive.

On considère dans la figure 4.2, le triangle $\triangle ABC$ de départ et un des triangles extérieurs, par exemple le triangle $\triangle ADE$. L'aire d'un triangle peut être calculée en multipliant base par hauteur divisée par deux. Les bases des deux triangles sont égales. On construit les hauteurs des deux triangles. Les hauteurs sont égales car les deux petits triangles sont égaux. En conséquence, les aires des deux triangles sont égales.

Dans ce cas, l'égalité entre les deux hauteurs est déduite à partir de l'égalité entre les deux triangles précédemment déterminée. Dans le modèle de Toulmin, cette argumentation déductive peut être modélisée de la façon suivante :

$D_1 : AE=AC ; \angle AHC = \angle AKE ; \angle KAE = \angle HAC ;$
 $D_1 : \text{Rotation de centre A et angle } 90^\circ$

 \longrightarrow
 $E_1 : \Delta AHC \text{ et } \Delta AKE$
sont égales

P : théorème d'égalité entre triangles (Italie)
 P : Propriété de l'isométrie pour la rotation (France)

$D_2 : E_1$

 \longrightarrow
 $E_2 : \text{leurs hauteurs CH et EK sont égales}$

P: héritage de l'égalité

$D_3 : E_2 , AB=AD$

 \longrightarrow
 $E_3 : \text{les aires des triangles } \Delta ABC \text{ et } \Delta ADE \text{ sont égales}$

P: formule de l'aire

Comme le souligne Duval pour la démonstration, la conclusion du premier argument est recyclée comme prémisse dans l'argument suivant.

HP : Si l'argumentation est déductive, la continuité structurelle est presque assurée : la démonstration dérive directement de l'argumentation. Dans ce cas l'élève ne devrait pas rencontrer de difficulté dans la résolution du problème. Cependant nous croyons très difficile de construire une argumentation d'emblée déductive. En effet, on peut imaginer que c'est facilement l'attention portée aux hauteurs qui toujours conduit à la considération pour les petits triangles. De plus, si on note assez « vite » l'égalité des petits triangles alors on peut ne pas avoir la perception de la transition abductive même si elle peut être présente (en tant que back tracking).

Le tableau suivant montre les prévisions de construction d'une démonstration pour ce problème à partir de la stratégie de résolution décrite : construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires. Cette prévision porte exclusivement sur la structure de l'argumentation. Elle ne prend pas en compte le système de référence.

Procédure de résolution : Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires			
Structure de l'argumentation	Structure de la preuve	Continuité / écart structurel	Prévision sur la construction d'une démonstration
Argumentation déductive	Preuve déductive	Continuité structurelle	La démonstration peut être facilement construite
Argumentation abductive	Preuve déductive	Ecart structurel	La démonstration peut être construite
	Preuve abductive	Continuité structurelle	La démonstration est hors de portée

Tableau procédure 1.1

Les argumentations jusqu'ici décrites, associées à cette stratégie de résolution, sont l'abduction et la déduction. Néanmoins, on remarque que d'autres types de structure argumentative seraient possibles. Par exemple, une argumentation « mixte », c'est-à-dire avec des pas déductifs et des pas abductifs. Dans ce cas, la prévision que la preuve construite soit une démonstration, est probablement en relation avec le nombre des pas déductifs et abductifs, présents dans l'argumentation. Plus il y a de pas déductifs dans l'argumentation, plus la plausibilité de la construction d'une démonstration augmente.

2.1.2.2 Méthode trigonométrique pour comparer les aires

On peut appliquer la formule trigonométrique de l'aire d'un triangle, aux triangles $\triangle ABC$ et $\triangle ADE$. L'aire du triangle $\triangle ABC$ est $\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin(\angle CAB)$ et l'aire du triangle $\triangle ADE$ est $\frac{1}{2}AD \cdot AE \cdot \sin(\angle DAE)$. Ces aires sont égales parce que les côtés AB et AD sont égaux ainsi que les côtés AC et AE . En effet, ce sont des côtés d'un même carré. Les angles $\angle CAB$ et $\angle DAE$ sont supplémentaires et donc leurs sinus sont égaux.

Cette solution est attendue chez les élèves de 4^e année du lycée (17/18 ans, terminale en France). En effet la trigonométrie fait partie des programmes scolaires à partir de la 4^e.

L'argumentation la plus attendue est l'argumentation déductive car la vision des côtés égaux, peut amener à considérer la formule, et en conséquence l'égalité des aires.

Exemple d'argumentation déductive

On considère dans la figure 4.2, le triangle $\triangle ABC$ de départ et un des triangles extérieurs, par exemple $\triangle ADE$.

L'aire du triangle $\triangle ABC$ est $\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\angle CAB)$ et l'aire du triangle extérieur $\triangle ADE$ est $\frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin(\angle DAE)$. Comme on l'a montré ci-dessus, ces aires sont égales.

Ce type d'argumentation, dans le modèle de Toulmin, peut être modélisé dans la façon suivante.

$$D_1 : AB=AD ; AC = AE ; \angle CAB = \angle DAE ; \quad \longrightarrow \quad E_1 : \text{aire } \Delta ABC = \text{aire } \Delta ADE$$

P: Formule trigonométrique de l'aire

HP : La démonstration peut être construite directement à partir de l'argumentation.

Donc, la continuité structurelle entre argumentation et démonstration est attendue.

Le tableau montre notre prévision pour la construction de la démonstration du problème si la stratégie de résolution est trigonométrique.

Cette prévision, comme la précédente, porte exclusivement sur une analyse de la structure de l'argumentation. Elle ne prend pas en compte le système de référence.

Procédure de résolution Méthode trigonométrique			
Structure de l'argumentation	Structure attendue de la preuve	Continuité / écart structurel	Prévision sur la construction de la démonstration
Argumentation déductive	Preuve déductive	Continuité structurelle	La démonstration peut être facilement construite

Tableau procédure 1.2

2.1.2.3 Exploration sur les cas particuliers de triangle ABC

La figure associée au problème construite sur Cabri-géomètre a trois degrés de liberté : les trois sommets du triangle ΔABC . Cela signifie que (à partir d'une construction correcte de la figure du problème) le sujet peut déplacer les trois sommets du triangle ΔABC et pas les autres points, ni les autres segments. C'est pourquoi, une exploration du problème qui prenne en compte certaines configurations du triangle ΔABC est envisageable.

La résolution du problème en considérant des cas particuliers du triangle ΔABC peut amener à chercher des triangles égaux pour obtenir les triangles ayants des aires égales. Dans ce cas, le problème de comparaison entre aires des triangles peut se transformer en problème de comparaison entre triangles. Si les triangles sont égaux, leurs aires sont égales (rappelons, par contre, que si les triangles sont différents, les aires ne sont pas nécessairement différentes).

Comme la figure 4.4 le montre, si par exemple le triangle $\triangle ABC$ est rectangle, le triangle extérieur qui a comme sommet le point A est égal au triangle $\triangle ABC$, leurs aires sont donc égales. Si le triangle $\triangle ABC$ est isocèle deux des triangles extérieurs sont égaux. Si le triangle $\triangle ABC$ est équilatéral les trois triangles extérieurs sont égaux.

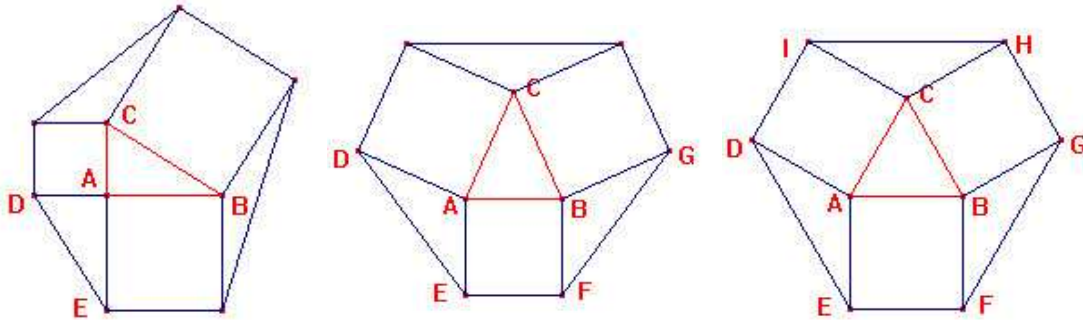


Figure 4.4

L'argumentation qui peut être construite à partir de cette exploration est l'argumentation déductive par cas. Cette argumentation peut devenir partie d'une argumentation inductive par cas si le triangle équilatéral assume le rôle d'exemple générique. Une argumentation inductive par passage à la limite peut également être possible.

Ci dessous, nous présentons en détails ces trois argumentations.

Exemple d'argumentation déductive par cas

On suppose que le problème a été exploré dans des cas particuliers (figure 4.4) : par exemple en considérant le triangle $\triangle ABC$ rectangle ou isocèle ou équilatéral.

La considération de plusieurs cas particuliers du triangle $\triangle ABC$ amène à la construction d'une argumentation déductive. Cette argumentation est construite à partir d'une exploration guidée par la propriété « Deux triangles égaux ont des aires égales ».

Dans le modèle de Toulmin la structure associée à ce type d'argumentation est la suivante.

Cas où $\triangle ABC$ est un triangle rectangle.

$$\begin{array}{l}
 D_1 : AB=AE ; AC = AD ; \angle CAB = \angle DAE \\
 D_1' : \triangle ABC \text{ et } \triangle ADE \text{ symétriques par rapport} \\
 \text{à la diagonale des carrés qui passe par A}
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 E_1 : \triangle ABC = \triangle ADE$$

P : théorème d'égalité entre triangles (Italie)

P' : Propriété de l'isométrie pour la symétrie (France)

$D_2 : E_1 \quad \longrightarrow \quad E_2 : \text{leurs aires sont égales}$

P : héritage de l'égalité

Cas où ΔABC est un triangle isocèle.

$D_3 : AD=BG ; AE = BF ; \angle DAE = \angle FBG$
 $D_3 : \Delta ADE$ et ΔBFG symétriques par rapport à la médiatrice de AB $\longrightarrow E_3 : \Delta ADE = \Delta BFG$

P : théorème d'égalité entre triangles (Italie)

P' : Propriété de l'isométrie pour la symétrie (France)

$D_4 : E_3 \quad \longrightarrow \quad E_4 : \text{leurs aires sont égales}$

P : héritage de l'égalité

Cas où ΔABC est un triangle équilatéral.

$D_5 : AD=AE=BF=BG=CH=CI ; \angle DAE = \angle FBG = \angle ICH$
 $D_5 : \Delta ADE$ et ΔBFG symétriques par rapport à la médiatrice de AB ; ΔADE et ΔCIH symétriques par rapport à la médiatrice de AC $\longrightarrow E_5 : \Delta ICH = \Delta ADE = \Delta BFG$

P : théorème d'égalité entre triangles (Italie)

P' : propriété de l'isométrie pour la symétrie

$D_6 : E_5 \quad \longrightarrow \quad E_6 : \text{leurs aires sont égales}$

P : héritage de l'égalité

On remarque que cette stratégie de résolution ne prend pas en compte les triangles différents, probablement en raison de la présence implicite de la propriété erronée : « Deux triangles différents ont des aires différentes ».

La propriété qui guide l'exploration, « Deux triangles égaux ont la même aire », est un invariant qui apparaît comme un permis d'inférer dans tous les cas considérés (héritage de l'égalité).

Le cas où le triangle ΔABC est un triangle équilatéral, est particulier par rapport aux autres cas car il peut fonctionner comme exemple générique¹ (Balacheff, 1988). En fait, dans ce cas la conjecture peut être plus facilement construite. Et à partir de ce cas, on peut généraliser l'égalité des aires même dans le cas où ΔABC est un triangle quelconque.

Considérons ce cas ci-dessous.

Exemple d'argumentation inductive par cas : le cas de ABC triangle équilatéral comme exemple générique

Comparons le triangle ΔABC et le triangle extérieur ΔICH , de la figure 4.5. Chacun des deux triangles sont composés de deux petits triangles qui sont égaux entre eux.

On observe que le triangle ΔAMC (qui est la moitié du triangle ΔABC) et le triangle ΔINC (qui est la moitié du triangle ΔICH) sont égaux.

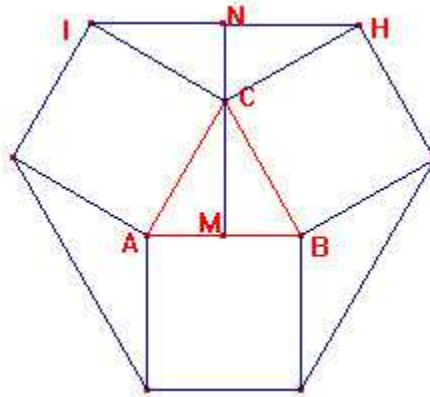


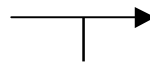
Figure 4.5

En conséquence les aires des deux triangles ΔABC et ΔICH sont égales car constituées par des aires égales.

Dans le modèle de Toulmin ce type d'argumentation est le suivant :

D_7 : $AC=IC$; $\angle AMC=\angle INC$; $\angle CAM=\angle ICN$

D_7' : Rotation de centre le milieu de AI et angle $\pi/2$ du triangle ΔAMC



E_7 : $\Delta AMC=\Delta ICN$

P : théorème d'égalité entre triangles

P' : propriété de l'isométrie sur la rotation

¹ « L'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même mais en tant que représentant

D_8 : $CB=CH$; $\angle BMC=\angle HNC$; $\angle CBM=\angle HCN$
 D_8 : Rotation de centre le milieu de BH et angle $\pi/2$ du triangle ΔBMC

\longrightarrow E_8 : $\Delta BCM=\Delta CNH$

P : théorème d'égalité entre triangles
 P' : propriété de l'isométrie sur la rotation

D_9 : E_7, E_8 \longrightarrow E_9 : $\Delta ABC=\Delta ICH$

P : somme des triangles égaux

En fait, comme nous l'avons dit, le triangle ΔABC est composé par deux triangles ΔAMC et ΔBMC qui sont égaux aux deux triangles ΔICN et ΔCNH constituant le triangle ΔICH .
 Donc, le triangle ΔABC est égal au triangle ΔICH .

D_{10} : E_9 : $\Delta ABC=\Delta ICH$ \longrightarrow E_{10} : leurs aires sont égales

P : héritage de l'égalité

Les deux triangles ΔABC et ΔICH ont la même aire.

Ce cas peut fonctionner comme exemple générique car il permet de déterminer et de justifier l'égalité des toutes les aires. La conjecture dans le cas où ABC est un triangle quelconque, peut être déterminée par une généralisation des énoncés précédemment établis.

D_{11} : E_2, E_4, E_6, E_{10} \longrightarrow E_{11} : les aires des triangles sont égales dans le cas où ΔABC est quelconque

P : généralisation des énoncés

Cependant, si l'énoncé de la conjecture peut être généralisé, cela n'est pas le cas du processus qui a permis de le justifier. En fait, la résolution dans le cas où ΔABC est un triangle quelconque, ne peut pas être obtenue comme décomposition de surfaces. La généralisation éventuelle qui transforme une argumentation déductive par cas en une argumentation inductive est une généralisation sur les énoncés, dans ce cas l'énoncé de la conjecture. Le cas où le triangle ABC est équilatéral peut être considéré exemple générique car c'est à partir de lui que la conjecture, dans le cas où ABC est un triangle quelconque, peut être construite. En

outre, même si le processus qui justifie les énoncés ne peut pas être généralisé, des parties de ce processus peuvent lier le cas où ABC est un triangle équilatéral au cas où ABC est un triangle quelconque. Les petits triangles qui découpent en deux moitiés le triangle ABC dans le cas équilatéral, sont « analogues » aux petits triangles construits par les hauteurs dans le cas où ABC est un triangle quelconque. La considération des petits triangles peut déplacer l'attention de celui qui résout le problème sur la considération des hauteurs. Cela peut amener à considérer la formule de l'aire et à résoudre le problème en utilisant la stratégie des hauteurs décrite plus haut (2.1.2.1).

Le passage à la considération des petits triangles demande un écart du système de référence (induit par le changement de stratégie) ensuite suivi d'un écart structurel.

HP : La structure de chaque argument dans chaque cas particulier est déductive. La démonstration peut être construite sur chaque cas et donc on observera probablement une continuité structurelle. Dans ce cas le problème n'est pas démontré dans le cas général.

La globalité de l'argumentation peut devenir inductive si le cas où ΔABC est triangle équilatéral fonctionne comme exemple générique. Si une preuve est construite dans le cas où ABC est un triangle quelconque, on observera un écart du système de référence (induit par le changement de stratégie) ensuite suivi d'un écart structurel. En revanche, si la preuve est construite sur chaque cas sans considérer le cas ABC triangle quelconque, on est encore dans la situation précédente : les argumentations et les preuves sont deductives et donc on observera une continuité structurelle.

Exemple d'argumentation inductive par passage à la limite

Ce type d'argumentation se base sur la perception visuelle : la considération du cas limite. Les aires des triangles sont égales parce que, quand le triangle ABC est aplati sur le segment AB les autres triangles sont aplatis aussi et donc toutes les aires sont nulles. La manipulation directe possible par Cabri-géomètre permet de visualiser les différentes formes du triangle ABC alors que le triangle s'aplatit sur le segment AB. La figure 4.6 montre ce cas limite.

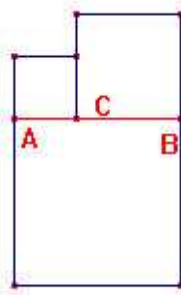


Figure 4.6

Si le triangle ABC est aplati tous les autres triangles sont aplatis. Quand l'aire du triangle ABC est nulle, les aires des autres triangles sont nulles aussi.

La généralisation qui permet de tirer une conclusion se base sur la continuité des figures que Cabri-géomètre permet de visualiser. Dans l'argumentation inductive par cas, la conjecture peut être généralisée sur des cas discrets (triangles particuliers). Dans l'argumentation inductive par passage à la limite, la généralisation se base sur la relation de « continuité » entre les figures possibles jusqu'à la considération du cas limite.

Dans le modèle de Toulmin ce type d'argumentation est modélisé de la façon suivante.

D_7 : l'aire des quatre triangles est nulle quand les triangles sont dégénérés \longrightarrow E_7 : leurs aires sont égales

P' : généralisation par passage à la limite

Nous avons pris en considération ce type d'argumentation, parce que les argumentations des élèves souvent se basent sur des aspects perceptifs. De plus, l'utilisation du logiciel Cabri-géomètre permet de visualiser le cas limite et tout l'ensemble des figures qui le précèdent en séquence. C'est cette continuité jusqu'au cas limite qui permet de construire la conjecture dans le cadre de cette argumentation.

HP : Notre hypothèse est qu'à partir de cette argumentation inductive par passage à la limite, la construction d'une démonstration, demande un écart structurel sans lequel l'élève ne peut pas résoudre le problème dans le cas général.

Le tableau résume les analyses que nous avons formulées à propos de l'exploration des cas particuliers du triangle ABC. L'argumentation associée à cette stratégie de résolution est l'argumentation déductive par cas ou l'argumentation inductive par cas, ou l'argumentation inductive par passage à la limite.

Procédure de résolution			
Exploration sur des cas particuliers du triangle ABC			
Structure de l'argumentation	Structure de la preuve produite	Continuité / écart structurel	Prévision sur la construction de la démonstration
Argumentation déductive par cas	Preuve déductive	Continuité structurelle	La démonstration est hors de portée (dans le cas où le triangle ABC est quelconque)
Argumentation inductive par cas : le cas de ABC triangle équilatéral comme exemple générique	Preuve déductive dans tous les cas	Continuité structurelle	La démonstration est hors de portée (dans le cas où le triangle ABC est quelconque)
	Preuve dans le cas où ABC est un triangle quelconque	Ecart du système de référence suivi d'un écart structurel	La démonstration peut être construite
Argumentation inductive par passage à la « limite »	Preuve déductive	Ecart structurel	La démonstration peut être construite
	Preuve inductive	Continuité structurelle	La démonstration est hors de portée

Tableau procédure 1.3

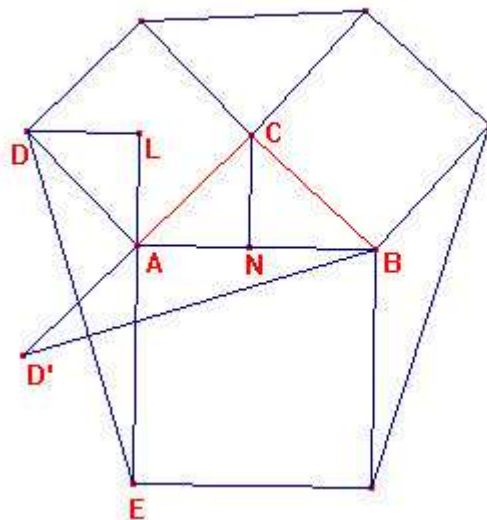
On remarque qu'il est possible que l'argumentation inductive construite à partir de l'exemple générique et l'argumentation inductive par passage à la limite se trouvent ensemble dans la même argumentation. Dans ce cas, le cas limite représente un des cas possibles. Le cas limite peut être aussi considéré pour vérifier des considérations déjà tirées sur les autres cas.

De la même façon, le cas limite peut être un des cas d'une argumentation déductive par cas.

2.1.2.4 Rotation d'un triangle extérieur

On considère le triangle ABC et un des triangles extérieurs, par exemple le triangle ADE.

On applique la rotation de centre A et angle 90° , qui amène E sur B et D sur D'.



90

Alors D' est sur la droite AC et $AD' = AD = AC$. Donc A est le milieu de CD' et BA est la médiane du triangle CBD'.

En conséquence,

L'aire du triangle ABC est égale à l'aire du triangle ABD' car la médiane partage le triangle en deux triangles ayant la même aire.

L'aire du triangle ABD' est égale à l'aire du triangle DEA par rotation, car la rotation conserve les aires.

Cette stratégie est probablement la plus élégante des solutions. Cependant, nous nous attendons la rencontrer que très rarement dans les copies des élèves. La rotation initiale du triangle ADE n'est pas justifiée. Pourquoi faire une rotation ? On fait la rotation si « on voit » que BA dévient médiane du triangle CBD' et si on connaît le théorème qui énonce que la médiane d'un triangle partage le triangle en deux triangles ayant la même aire. Cela n'est pas évident pour les élèves que nous considérons. En outre, l'utilisation des transformations est rare et fait en général preuve d'une connaissance avancée de la géométrie ce qui n'est pas le cas des débutants

De plus, l'utilisation de Cabri-géomètre ne pousse pas vers la mise en place de cette stratégie. En effet, faire une rotation sur Cabri demande une série d'opérations qui peuvent ne pas être immédiates pour les élèves. Il ne suffit pas de sélectionner l'icône relative à la rotation. Il faut d'abord entrer l'angle de rotation. Cette opération ne peut être faite que si on connaît bien le logiciel. C'est l'outil « Nombre » qui permet d'entrer la mesure d'angle de rotation qui peut enfin être effectuée après avoir sélectionné le triangle, l'angle et le centre de rotation.

Cette solution peut être produite au terme

- D'une argumentation abductive
- D'une argumentation déductive

Ci-dessous nous présentons ces argumentations.

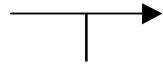
Exemple d'argumentation abductive

La comparaison entre l'aire du triangle ABC et l'aire d'un triangle extérieur ADE peut se ramener à la comparaison entre l'aire du triangle ABC et l'aire du triangle ABD' qui correspond à la rotation du triangle ADE. En fait la rotation est une isométrie et donc elle conserve les longueurs et les aires. Le sujet peut s'apercevoir que le nouveau triangle ABD' et le triangle ABC ont la même base AB. Il peut supposer que les aires sont égales si les triangles ont la même hauteur. Le côté AB peut alors être considéré comme médiane du triangle CBD'.

Considérons ce raisonnement dans le modèle de Toulmin :

S'interroger sur la relation entre le triangle ABC et le triangle ABD permet de donner une réponse à la relation entre le triangle ABC et le triangle ADE :

? D₁ : Comparaison entre
Aire ΔABC, Aire ΔABD'

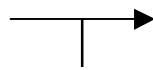


? E₁ : Comparaison entre
Aire ΔABC, Aire ΔADE

P : la rotation est une isométrie

Le sujet peut comparer les deux triangles ABC et ABD'. Il remarque que les bases des deux triangles sont égales, il peut supposer que les aires sont égales et donc il peut vérifier que les hauteurs sont égales. On a ainsi l'abduction :

D₂ : AC=AD'
? h₁= h₂

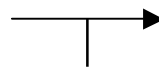


E₂ : Aire ΔABC=Aire ΔABD'

P : formule de l'aire

Les hauteurs peuvent être considérées comme égales car AB est la médiane du triangle CBD'. De plus, si AB est médiane du triangle, les aires des deux triangles ABC et ABD' sont égales

D₃ : AB est médiane du
triangle CBD'



E₃ = E₂ :
Aire ΔABC=Aire ΔABD'

P : la médiane partage le triangle en deux
triangles ayant la même aire

Le deuxième pas est abductif. Il doit être transformé en pas déductif pour construire la démonstration. De la même façon, le premier pas doit être transformé en pas déductif. Il ne s'agit pas d'une abduction mais d'un raisonnement par condition suffisante.²

² Le raisonnement abductif et le raisonnement par condition suffisante sont différentes :

Abduction : On connaît un fait B et une règle $A \Rightarrow B$. Donc A devient plus plausible.

Raisonnement par condition suffisante. Si on veut connaître B puisque la règle $A \Rightarrow B$ est connue c'est suffit de montrer A.

Les deux raisonnements peuvent être analysés avec le modèle de Toulmin, mais il ne s'agit pas du même raisonnement. Le raisonnement par condition suffisante peut être représenté de la façon suivante :

?A → ?B

$A \Rightarrow B$

En fait, on montre A afin de connaître B mais on dit pas que B est vraie. Au contraire dans l'abduction B est un fait.

HP : A partir de cette argumentation les élèves peuvent construire une démonstration si les pas de l'argumentation sont transformés en pas déductifs. Le franchissement d'un écart structurel est alors nécessaire.

Exemple d'argumentation déductive

L'argumentation se développe à partir de la rotation du triangle ADE. La rotation est une isométrie et donc elle conserve les longueurs. Cela peut pousser le sujet à considérer la rotation. On remarque que les bases sont égales et donc que BA est médiane du triangle CBD'. Alors les aires des deux triangles ABC et ABD' sont égales par le théorème sur la médiane d'un triangle.

Considérons le raisonnement dans le modèle de Toulmin :

D_1 : Rotation de centre A et angle 90° , qui amène E sur B et D sur D' \longrightarrow E_1 : $AD' (=AD) = AC$,
Aire $\triangle ADE =$ Aire $\triangle ABD'$ ecc.

P : la rotation est une isométrie

D_2 : E_1 : $AD' (=AD) = AC$, \longrightarrow E_2 : BA médiane du triangle $\triangle CBD'$

P : définition de médiane

D_3 : $E_2 =$ BA médiane du triangle $\triangle CBD'$ \longrightarrow E_3 : Aire $\triangle ABC =$ Aire $\triangle ABD'$

P : la médiane partage le triangle en deux triangles ayant la même aire

D_4 : E_1, E_3 \longrightarrow E_4 : Aire $\triangle ABC =$ Aire $\triangle ADE$

P : propriété transitive

HP : La démonstration peut être construite directement à partir de l'argumentation. Donc la continuité structurelle entre argumentation et démonstration est attendue.

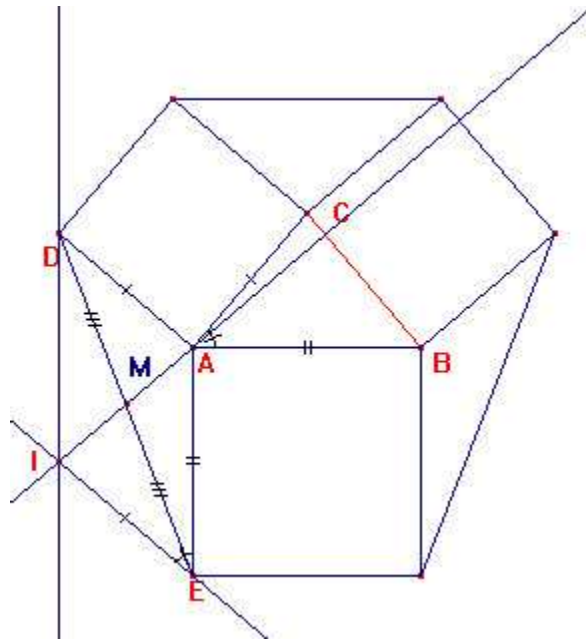
Le tableau résume les analyses formulées à propos de la stratégie « Rotation d'un triangle extérieur ». L'argumentation associée à cette stratégie de résolution est l'argumentation abductive ou l'argumentation déductive.

Procédure de résolution Rotation d'un triangle extérieur			
Structure de l'argumentation	Structure de la preuve produite	Continuité / écart structurel	Prévision sur la construction de la démonstration
Argumentation abductive	Preuve déductive	Ecart structurel	La démonstration peut être construite
Argumentation déductive	Preuve déductive	Continuité structurelle	La démonstration peut être facilement construite

Tableau procédure 1.4

2.1.2.5 Stratégie de construction du parallélogramme

On considère le triangle ABC et un des triangles extérieurs, par exemple le triangle ADE. On complète le triangle ADE pour obtenir le parallélogramme ADEI (voir figure).



Alors les deux triangles AEI et ABC sont égaux car :

$AB=AE$ (côtés du même carré),

$IE=AC$ par transitivité car $AC=AD$ (côtés du même carré) et $IE=AD$ (côtés opposés d'un parallélogramme),

$\angle IEA = \angle CAB$ car $AE \perp AB$ et $AD \perp AC$ ($IE \parallel AD$)

Donc Aire AEI = Aire ABC

Et Aire ABC = $\frac{1}{2}$ aire AIED = aire ADE

Plus rapidement on peut dire que si AI est hauteur de ABC alors les côtés du triangle AEI sont respectivement perpendiculaires aux trois côtés du triangle ABC. On conclut en suivant la stratégie décrite. Cette dernière procédure de résolution peut être très utile pour les élèves qui savent que la hauteur de ABC sur le côté BC est la médiane AI du triangle ADE, c'est-à-dire pour les élèves qui connaissent le théorème des médianes et des hauteurs : Les médianes du triangle ABC sont les hauteurs des triangles extérieurs et vice-versa, les hauteurs du triangle ABC sont les médianes des triangles extérieurs. En fait, à partir de ce théorème les élèves peuvent penser à construire I.

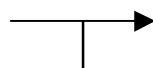
Néanmoins, la construction d'un parallélogramme n'apparaît pas évidente pour les élèves. La pratique qu'ont les élèves de la géométrie est trop limitée pour espérer qu'ils produisent une telle preuve. De plus, le logiciel n'aide pas dans ce cas : l'exploration sur Cabri permet d'explorer une situation mais il ne pousse pas nécessairement à ajouter des constructions à la figure construite. En Italie les élèves ne connaissent pas le théorème de la médiane et de la hauteur. La construction du parallélogramme n'est pas justifiée initialement. Construire les hauteurs est différent, car on construit les hauteurs pour comparer les aires. En revanche, il n'y a pas de raison a priori pour construire le parallélogramme.

Cependant, si les élèves essayent de construire le parallélogramme, l'argumentation attendue est déductive.

Exemple d'argumentation déductive

En fait, une fois que le parallélogramme est construit on peut observer que les côtés AB et AE sont égaux, IE et AC sont égaux, etc. Les deux triangles ABC et AEI sont égaux et donc leurs aires sont égales.

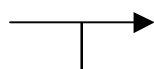
$D_1 : AB = AE$
 $IE = AC$
 $\angle IEA = \angle CAB$



$E_1 : \Delta ABC = \Delta AEI$

P : théorème d'égalité

$D_2 : E_1 : \Delta ABC = \Delta AEI$

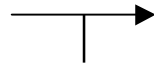


$E_2 : \text{Aire } \Delta ABC = \text{Aire } \Delta AEI$

P : héritage de l'égalité

Le triangle AEI est la moitié du parallélogramme, donc l'aire du triangle ABC est la moitié de l'aire du parallélogramme.

$D_3 : E_2$

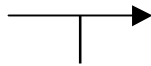


$E_3 : \text{Aire } \Delta ABC = \frac{1}{2} \text{ aire AIED}$

P : propriété du parallélogramme

L'aire du triangle ABC est alors égale à l'aire du triangle ADE.

$D_4 : E_3$



$E_4 : \text{Aire } \Delta ABC = \text{Aire } \Delta ADE$

P : propriété du parallélogramme

HP : La démonstration peut être construite directement à partir de l'argumentation. Donc la continuité structurelle entre argumentation et démonstration est attendue.

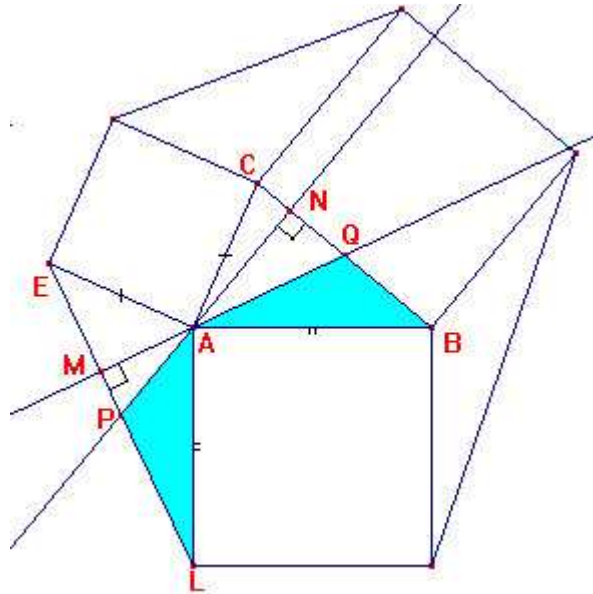
Le tableau résume les analyses formulées à propos de la stratégie « Construction du parallélogramme ». L'argumentation associée à cette stratégie de résolution est l'argumentation déductive.

Procédure de résolution Construction du parallélogramme			
Structure de l'argumentation	Structure de la preuve produite	Continuité / écart structurel	Prévision sur la construction de la démonstration
Argumentation déductive	Preuve déductive	Continuité structurelle	La démonstration peut être facilement construite

Tableau procédure 1.5

2.1.2.6 Stratégie du théorème des médianes et des hauteurs

On considère le théorème des médianes et des hauteurs : Les médianes du triangle ABC sont les hauteurs des triangles extérieurs et vice-versa, les hauteurs du triangle ABC sont les médianes des triangles extérieurs. A partir de ce théorème on peut découper les triangles comme dans la figure suivante.



Le triangle APE est égal au triangle ACQ. En fait ils ont les côtés perpendiculaires 2 à 2 (la médiane de l'un est hauteur de l'autre) et un côté égal.

Pour la même raison le triangle APL est égal au triangle AQB.

Les aires des triangles ABC et AEL sont donc égales.

Cette stratégie est probablement très difficile à utiliser pour les élèves. Nous la prenons en considération parce que certains élèves ont étudié le théorème des hauteurs et des médianes. Si les élèves considèrent cette stratégie, la structure attendue de l'argumentation est la déduction.

Exemple d'argumentation déductive

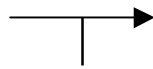
Les élèves peuvent se demander si le théorème des médianes et des hauteurs peut être utilisé pour résoudre le problème. Le premier pas est alors le suivant :

$$D_1 : ? \quad \longrightarrow \quad E_1 : \Delta ABC = \text{Aire } \Delta AEL$$

P : théorème d'égalité

A partir du dessin ils peuvent s'apercevoir que le théorème permet de conclure que les aires des deux petits triangles APE et ACQ sont égales. Le raisonnement par condition suffisant est abandonné. Nous remarquons qu'il ne s'agit pas d'un pas abductif, et c'est probablement pour cela que les pas deviennent déductifs.

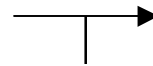
$D_1 : AC=AE$
 $AP \perp CQ$ et $AQ \perp EP$



$E_1 : \Delta APE = \text{Aire } \Delta ACQ$

P : théorème d'égalité

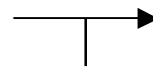
$D_2 : E_1$



$E_2 : \Delta APL = \text{Aire } \Delta ABQ$

P : répétition du raisonnement

$D_3 : E_1, E_2$



$E_3 : \Delta ABC = \text{Aire } \Delta AEL$

P : somme des aires égales

Nous considérons cette argumentation comme déductive car le premier pas, qui est un raisonnement par condition suffisante, est utile pour débiter l'argumentation mais il ne doit pas être transformé en pas déductif pour la démonstration.

HP : La démonstration peut être construite directement à partir de l'argumentation.

Donc la continuité structurelle entre argumentation et démonstration est attendue.

Le tableau résume les analyses formulées à propos de la stratégie « Stratégie du théorème des médianes et des hauteurs ». L'argumentation associée à cette stratégie de résolution est l'argumentation déductive.

Procédure de résolution Stratégie du théorème des médianes et des hauteurs			
Structure de l'argumentation	Structure de la preuve produite	Continuité / écart structurel	Prévision sur la construction de la démonstration
Argumentation déductive	Preuve déductive	Continuité structurelle	La démonstration est facilement produite

Tableau procédure 1.6

2.1.3 Conceptions mobilisables pendant la résolution du problème

Le choix du problème a été déterminé aussi par une analyse a priori des conceptions possibles pouvant être mobilisées pendant sa résolution. La détermination des conceptions mobilisées

pendant l'argumentation permet une analyse en termes de continuité/écart du système de référence, et en conséquence une analyse de l'unité cognitive du système de référence.

Les conceptions que les élèves engagent dans la résolution du problème peuvent être nombreuses et très différentes les unes par rapport autres. Non seulement les contrôles, mais aussi les sphères de pratique sont propres à chaque sujet ; elles ne dépendent pas seulement de l'institution ou de la classe. Des différences substantielles peuvent émerger entre les conceptions mobilisées par deux élèves appartenant à la même classe. Cela peut expliquer pourquoi nous avons choisi de prendre en compte seulement certaines conceptions possibles dans l'analyse du problème.

En particulier, nous pensons observer la mobilisation de conceptions relatives à la notion d'aire car le problème demande une comparaison entre les aires des triangles. La conception d'aire qui est mobilisée peut alors engager une stratégie particulière de résolution.

2.1.3.1 Conceptions mobilisables relatives à la notion d'aire

Le problème proposé fait appel à la notion d'aire, il est donc susceptible d'être résolu comme un problème de mesure (ce qui en fait un problème de géométrie particulier). D'une certaine façon, l'introduction de la notion d'aire peut être la cause de difficultés dans la construction de la démonstration. [En effet, la théorie de la mesure ne fait pas partie des connaissances des élèves que nous prenons en considération. Ils peuvent calculer les aires à partir de la formule]. Néanmoins, la notion d'aire d'un triangle peut s'exprimer dans plusieurs cadres : elle peut être considérée comme formule dans le cadre algébrique, comme nombre dans le cadre arithmétique et spatial (le triangle comme forme physique ayant une mesure de son encombrement), et enfin comme surface d'une figure dans le cadre géométrique. Dans Cabri-géomètre des représentations de chacun des cadres sont possibles : les segments qui représentent la base et la hauteur d'un triangle peuvent représenter des nombres, ou bien des segments, jusqu'à devenir segments variables. La variété des cadres dans lesquels la notion d'aire peut s'exprimer peuvent rendre plus accessibles les conceptions de l'aire mobilisées par les élèves à notre analyse. En fait, le cadre, comme nous l'avons dit au cours du chapitre 3, est un moyen au sein des mathématiques de rendre compte d'une conception. La possibilité d'exprimer une conception en référence à des cadres partiellement différents rend plus facile son explicitation, et pour nous sa détermination.

La comparaison entre aires des triangles peut être faite à, au moins, trois niveaux différents :

1. Comparaison qui se base sur une conception d'aire en tant que mesure. Cette conception peut s'exprimer dans le cadre arithmétique.

2. Comparaison qui se base sur une conception d'aire en tant que formule qui l'exprime. Cette conception peut s'exprimer dans le cadre arithmétique, dans le cadre algébrique, dans le cadre géométrique.
3. Comparaison qui se base sur une conception d'aire comme recherche de surfaces égales. Cette conception peut s'exprimer dans le cadre géométrico-perceptif.

La première conception est, d'une certaine façon, « enfermée » dans le cadre arithmétique. Les élèves qui utilisent la mesure pour calculer les aires, auront des difficultés à justifier la conjecture éventuellement trouvée. Le logiciel affiche une représentation graphique et une représentation numérique de grandeurs telles que la longueur d'un segment ou l'aire d'un triangle. Pour l'élève, le segment et sa longueur deviennent alors visuellement équivalents, et il peut raisonner de la même façon sur les deux représentations, et donc associer des arguments numériques et géométriques. En conséquence, il peut construire une conjecture sans recours à une argumentation raisonnée, mais en s'en tenant à l'observation d'un fait : les nombres affichés par le logiciel ; il n'y a plus alors argumentation mais *constat* de l'égalité.

La conception d'aire en tant que formule, peut conduire à la stratégie de construction des hauteurs pour comparer les aires. Cette conception peut s'exprimer dans trois cadres : algébrique, géométrique et arithmétique. Dans le cadre algébrique la formule est constituée par des variables qui représentent les bases et les hauteurs des triangles. Dans le cadre géométrique ces variables algébriques sont substituées par les segments qui représentent les bases et les hauteurs des triangles. Dans le cadre arithmétique les variables deviennent constantes numériques. D'une certaine façon, la formule qui exprime l'aire des triangles permet la circulation entre cadres, qui est aussi favorisée par l'utilisation de Cabri-géomètre. De plus, le logiciel peut favoriser un éventuel changement de cadre : la base et la hauteur d'un triangle peuvent être représentés dans Cabri-géomètre comme des nombres, comme des segments, et même comme des segments variables, ce qui permet le passage avec l'algèbre.

La validation de la formule dans des cadres différents peut favoriser la résolution du problème. D'une certaine façon, la stratégie de construction des hauteurs pour comparer les aires, est privilégiée par rapport aux autres car elle amène plus facilement à la résolution du problème.

La conception d'aire comme recherche de figures égales, peut conduire à la stratégie d'exploration sur les cas particuliers du triangle ABC. La perception joue ici un rôle central.

Une différence visible entre deux triangles peut très facilement amener à penser que les aires des deux triangles sont différentes. La manipulation de la figure sur le logiciel n'aide pas à invalider cette considération. En utilisant la définition de « figural concept » de Fishbein (Fishbein, 1993, p. 143), nous pourrions dire que les propriétés spatiales de la figure, dans ce cas les formes différentes des triangles, prévaut sur l'aspect conceptuel d'aire d'un triangle. L'aire des triangles devient un « figural concept » quand l'aspect figural et l'aspect conceptuel interagissent de façon que la comparaison entre aires des triangles est faite à partir de leurs bases et leurs hauteurs, c'est-à-dire quand la figure du triangle permet d'évaluer l'aire conformément à sa définition. Dans le cas contraire, nous faisons l'hypothèse que deux conceptions particulières peuvent être mobilisées par les élèves ; nous pourrions probablement observer les opérateurs qui les constituent.

Les opérateurs que nous pouvons peut-être anticiper sont les suivants:

R_1 : Egalité des triangles \Rightarrow Egalité des aires

R_2 : Egalité des triangles \Leftrightarrow Egalité des aires

L'opérateur faible R_1 peut s'exprimer dans la forme « Deux triangles égaux ont la même aire ». L'opérateur fort R_2 prend en compte aussi les triangles différents : « Deux triangles égaux ont la même aire et deux triangles différents ont des aires différentes ». Les éléments du contrôle sont probablement liés à des aspects perceptifs.

Cependant, si l'élève calcule les aires en utilisant les instruments de mesure de Cabri-géomètre, il peut constater que des aires sont égales. Dans ce cas, le changement de cadre peut invalider son contrôle et en conséquence il peut l'amener à changer de stratégie de résolution. Il se peut aussi que l'élève n'accepte pas le résultat du calcul comme correct, refuse donc cette invalidation et continue selon la stratégie utilisée.

Il n'existe clairement pas de théorème qui puisse se substituer à l'opérateur R_2 . C'est pourquoi dans ce cas il peut être plus difficile de construire une démonstration.

Au contraire les cas liés à l'opérateur R_1 aboutiront facilement à une démonstration de l'élève.

2.1.4 Unité ou rupture cognitive structurelle et du système de référence

Faire une analyse a priori de l'unité ou de la rupture cognitive entre argumentation et démonstration pour ce problème n'est pas du tout facile. Nous avons essayé de déterminer les continuités/écarts structurels et du système de référence sans cependant prendre en compte leurs possibles interrelations. L'étude de l'interaction entre une analyse cognitive structurelle et une analyse cognitive du système de référence, ne peut pas être anticipée de façon exhaustive. La mobilisation d'une conception peut dépendre de la structure argumentative

utilisée de la même façon que l'utilisation d'une structure argumentative peut favoriser la mobilisation d'une conception. Cependant cela n'est pas toujours le cas. En particulier, l'analyse à priori de ce problème, contient trop de variables qui dépendent du problème (variété de stratégies de résolution), du niveau des classes (élèves appartenant à des classes différentes), et des institutions (italienne et français) qu'il faut considérer. En conséquence, dans la suite, nous présentons quelques exemples d'unité et rupture cognitive à partir de certaines des stratégies de résolution considérées précédemment, mais nous n'avons pas la prétention de considérer cette analyse comme étant exhaustive.

Le problème permet de trouver les trois types d'unité ou de rupture cognitive, que nous avons considéré au cours du deuxième chapitre : Unité cognitive du système de référence et unité cognitive structurelle, unité cognitive du système de référence et rupture cognitive structurelle, rupture cognitive du système de référence. Nous considérons quelque exemple pour chacun entre eux.

- Unité cognitive du système de référence et unité cognitive structurelle. Nous pouvons l'observer quand la stratégie de résolution utilisée par les élèves pour comparer les aires, est la méthode trigonométrique. La structure attendue est déductive et le théorème trigonométrique peut être déjà un permis d'inférer pendant l'argumentation. Dans ce cas, argumentation et démonstration peuvent être très similaires, tellement similaire qu'on peut risquer de ne réussir pas à les distinguer. De la même façon si on considère la stratégie de construction du parallélogramme et la stratégie qui utilise le théorème des médianes et des hauteurs, on trouvera facilement l'unité cognitive du système de référence et l'unité cognitive structurelle. Dans les deux cas, le système de référence est dominant par rapport à la structure : le dessin du parallélogramme pousse à identifier ses propriétés en permettant de construire du début une chaîne déductive. De la même façon, le théorème des médianes et des hauteurs appliqué au problème, amène à déterminer les conséquences du théorème et donc permet de construire une argumentation d'emblée déductive.

L'unité cognitive du système de référence et l'unité cognitive structurelle peut être aussi observable si la stratégie de résolution est l'exploration sur des cas particuliers du triangle ABC. L'argumentation déductive par cas et la mobilisation de la conception identifiée par l'opérateur R_2 peut amener à une continuité structurelle et une continuité du système de référence même si les élèves ne résolvent pas complètement le problème. Ils peuvent par exemple démontrer seulement les cas considérés pendant l'argumentation, c'est-à-dire que, pour chaque cas particulier du triangle ABC, ils

prouvent l'égalité de deux triangles égaux sans considérer les triangles différents. On observera une unité cognitive qui ne permet pas aux élèves de résoudre complètement le problème.

- Unité cognitive du système de référence et rupture cognitive structurelle. Nous pouvons l'observer quand la stratégie de résolution utilisée par les élèves pour comparer les aires, est la construction des hauteurs des triangles. Si l'argumentation est abductive et même si l'élève a tous les éléments pour transformer les conceptions en théorèmes, un écart structurel est nécessaire pour construire la démonstration. L'écart structurel peut être cause de rupture cognitive structurelle si nous observons la présence de symptômes tels que l'arrêt de la progression, le blocage, la durée excessive du temps pour construire la démonstration une fois que les éléments théoriques ont été déterminés, etc. La présence de ces symptômes nous permet de conclure qu'il y a rupture cognitive structurelle, même si il y a unité cognitive du système de référence.
- Rupture cognitive du système de référence. Ce type de rupture ne dépend pas de la structure utilisée. Si nous reconnaissons la présence d'une rupture cognitive structurelle, comme nous l'avons dit au cours du chapitre 2, les considérations sur la continuité/écart structurel perdent du sens. Si l'élève ne réussit pas à trouver un théorème qui se substitue à un opérateur erroné, par exemple l'opérateur R_2 , alors à l'écart du système de référence correspond probablement une rupture cognitive du système de référence.

Selon l'hypothèse de l'unité cognitive, il est « naturel » de construire la démonstration en utilisant l'argumentation construite précédemment. Au chapitre 2, nous avons fait l'hypothèse qu'il est aussi probablement assez naturel de reprendre dans la démonstration la même structure que celle utilisée pendant l'argumentation.

A partir des stratégies de résolution considérées, des conceptions et des structures d'argumentation pouvant intervenir pour chaque stratégie, nous avons considéré les preuves les plus probables selon une hypothèse de continuité du système de référence et de la structure.

Dans le tableau nous avons représenté nos anticipations d'une analyse en terme d'unité ou rupture cognitive. Nous montrons dans le tableau que la construction d'une démonstration correcte, et en conséquence la résolution du problème, est dépendante de cette analyse.

Stratégie de résolution utilisée	Système de référence de l'argumentation	Structure de l'argumentation	Structure de preuve attendue	Unité ou rupture cognitive structurelle et du système de référence attendue
Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires	Utilisation de conceptions relatives à l'aire en tant que formule qui l'exprime	Argumentation déductive	Preuve déductive	UC du système de référence UC structurelle Construction de la démonstration
		Argumentation abductive	Preuve abductive	UC du système de référence UC structurelle La démonstration est hors de portée
			Preuve déductive	UC du système de référence RC structurelle Construction de la démonstration
Méthode trigonométrique	Théorème trigonométrique pour calculer les aires des triangles	Argumentation déductive	Preuve déductive	UC du système de référence UC structurelle Construction de la démonstration
Exploration sur cas particulier du triangle ABC	Utilisation de conceptions relatives à l'aire comme recherche de triangles égaux	Argumentation déductive	Preuve déductive	UC du système de référence UC structurelle La démonstration est hors de portée
		Argumentation inductive : le cas de ABC triangle équilatéral comme exemple générique	Preuve déductive pour chaque cas	UC du système de référence UC structurelle La démonstration est hors de portée
			Preuve dans le cas général	RC du système de référence Construction de la démonstration
		Argumentation inductive par passage à la « limite »	Preuve inductive	UC du système de référence UC structurelle La démonstration est hors de portée
Rotation d'un triangle extérieur	Théorème sur la rotation comme isométrie	Argumentation abductive	Preuve déductive	UC du système de référence UC structurelle Construction de la démonstration
		Argumentation déductive	Preuve déductive	UC du système de référence UC structurelle Construction de la démonstration
Construction d'un parallélogramme	Propriétés du parallélogramme	Argumentation déductive	Preuve déductive	UC du système de référence UC structurelle Construction de la démonstration
Stratégie du théorème des médianes et des hauteurs	Théorème des médianes et des hauteurs	Argumentation déductive	Preuve déductive	UC du système de référence UC structurelle Construction de la démonstration

UC : unité cognitive, RC: rupture cognitive

2.2 Situation expérimentale 2

Nous avons choisi de réaliser cette expérimentation dans les classes suivantes :

- En France dans une classe de seconde.
- En Italie dans une classe de 4^e année du lycée (17/18 ans, terminale en France).

Les élèves travaillent en binôme avec Cabri-géomètre. Ils ont à disposition l'énoncé du problème et une feuille de réponse. La durée de la session est de 50 min.

Le problème proposé est le suivant :

Problème. Soit un segment AB et C son milieu. On construit le cercle de centre C et de diamètre AB. On recommence cette construction avec le segment AC et son milieu, le segment CB et son milieu. On obtient deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB. On continue à découper les segments résultants en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments.

Comment évolue la longueur totale des périmètres d'une subdivision à l'autre?

Comment évolue l'aire totale des cercles d'une subdivision à l'autre?

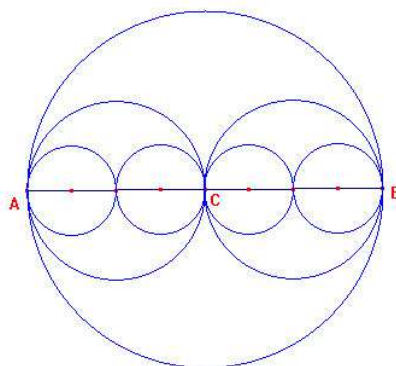


Figure 4.7

Sur Cabri-géomètre, la figure associée au problème est présentée aux élèves jusqu'au troisième niveau (Figure 4.7). La construction des cercles successifs peut être réalisée par les élèves.

Nous avons choisi de présenter la figure parce que le texte du problème, long et un peu difficile, peut créer problèmes de compréhension que nous ne sommes pas intéressée à analyser. De plus, la construction de la figure peut exiger du temps si la compréhension du texte n'est pas claire. Par contre, la construction de la figure, le découpage du segment en son milieu et la construction des cercles correspondant peuvent favoriser la détermination des

théorèmes géométriques nécessaires pour résoudre le problème (Mariotti, 2001). C'est pourquoi dans la figure nous avons arrêté la construction à la troisième courbe. Nous voulons laisser la possibilité aux élèves de construire la quatrième courbe et éventuellement les successives.

2.2.1 Pourquoi ce problème ?

Nous voulons présenter les raisons qui nous ont poussée à choisir un tel problème.

- Favorisation de l'engagement d'un processus d'argumentation. Le problème, même si plus facile à résoudre par rapport au problème précédent, n'est pas un problème standard pour les élèves. La difficulté est celle d'imaginer les configurations, jusqu'au cas limite, qui ne peuvent être complètement représentées. Cela peut favoriser l'activité argumentative, qui peut devenir très intéressante si les élèves associent au cas limite des images mentales différentes.
- Possibilité de produire une argumentation inductive par généralisation, par passage « à la limite » et par récurrence.

La raison principale qui nous a poussée à prendre en considération ce problème est le fait que tous les types d'argumentation inductive, que nous avons considéré, peuvent être construits. Dans le problème précédent l'argumentation inductive attendue est particulière (argumentation inductive par cas) : l'énoncé de la conjecture peut être généralisé, mais non le processus qui a permis de le justifier.

Au contraire, ce problème peut amener à considérer deux cas successifs. Il permet de généraliser la propriété qui émerge d'une recherche inductive à partir des deux courbes successives et génériques. La généralisation peut être faite sur les énoncés ou sur le processus qui a permis de déterminer les énoncés. Une argumentation inductive par généralisation ou par récurrence ou par passage à la limite est donc possible.

- Démontrable par les élèves avec les connaissances dont ils disposent le plus probablement. Les élèves connaissent la formule de la circonférence et de l'aire d'un cercle, nécessaires pour construire la démonstration. Les élèves que nous prenons en considération, en France et en Italie, connaissent la démonstration par récurrence. Cependant, ils n'ont pas trop d'expérience dans son utilisation.
- Possibilité de mobiliser des conceptions. L'évolution de la longueur totale des périmètres et des aires souligne la liaison entre une courbe et celle qui lui succède (et pas entre une courbe et une autre quelconque), jusqu'à s'arrêter à la considération de la courbe finale, le cas limite, qui peut apparaître comme le diamètre du premier cercle.

Comme nous l'expliquerons dans le paragraphe 2.2.4 nous pensons que certaines conceptions, spécifiques au cas limite peuvent être mobilisées.

2.2.2 Analyse des solutions possibles

La longueur des périmètres d'une subdivision à l'autre reste constante ; l'aire tend vers zéro.

Nous anticipons une solution possible, la seule que nous attendons.

Cette solution se base sur les formules de l'aire et du périmètre d'un cercle.

Le périmètre d'un cercle est $2\pi r$ où r est le rayon du cercle. D'une subdivision à l'autre, le rayon est divisé par deux, mais le nombre des cercles est le double du précédent. Donc le périmètre reste constant.

L'aire du cercle est πr^2 . D'une subdivision à l'autre, l'aire totale de cercles est la moitié de la précédente car le rayon est divisé par deux à chaque subdivision ; en conséquence, l'aire est plus petit d'un facteur qui est égal au nombre des cercles présents dans la subdivision. A la limite l'aire tend vers zéro.

2.2.3 Structures de l'argumentation

Le problème, par sa nature, amène à la construction d'une argumentation inductive.

Trois types d'argumentations inductives sont possibles : argumentation inductive par généralisation, argumentation inductive par passage « à la limite » et argumentation inductive par récurrence. Ci-dessous, nous fournissons quelques exemples. D'abord, nous voulons souligner le fait que ces types d'argumentation ne sont pas exclusifs les uns des autres. Au contraire, une argumentation par récurrence est probablement précédée par une argumentation par généralisation et/ou une argumentation par passage au cas limite.

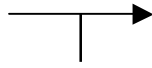
Exemple d'argumentation inductive par généralisation

Les élèves considèrent probablement le premier cercle et calculent son aire et son périmètre. Ils font la même opération pour la deuxième courbe, pour la troisième etc. Ils généralisent probablement le calcul au cas d'une courbe n . La formule de la mesure de la circonférence et de l'aire du cercle est le permis d'inférer qui permet de calculer l'aire et le périmètre des courbes pour chaque subdivision.

L'argumentation peut être modélisée ainsi :

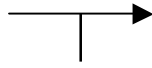
$$D_1 : \text{Première courbe} \quad \xrightarrow{\quad} \quad E_1 : \begin{array}{l} \text{Périmètre} = 2\pi r \\ \text{Aire} = \pi r^2 \end{array}$$

P: Formule du périmètre et de l'aire du cercle

D₂ : Deuxième courbe

E₂ : Périmètre = $2(2\pi r/2) = 2\pi r$
 Aire = $2\pi(r/2)^2 = \pi r^2/2$

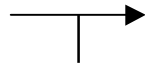
P: Formule du périmètre et de l'aire du cercle

D₃ : Troisième courbe

E₃ : Périmètre = $4(2\pi r/4) = 2\pi r$
 Aire = $4\pi(r/4)^2 = \pi r^2/4$

P: Formule du périmètre et de l'aire du cercle

Déjà, à partir, de ces exemples on remarque que le périmètre est constant, alors que l'aire est toujours la moitié de la précédente. Si on généralise à la courbe n, dans le modèle de Toulmin, l'argument pourra être schématisé de deux façons différentes selon la généralisation retenue. Si la généralisation est faite à partir des énoncés et non du processus qui relie les énoncés l'argument pourra être schématisé ainsi :

D₄ : E₁, E₂, E₃

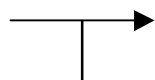
E₄ : le périmètre est constant et l'aire est à chaque fois divisé par 2

P : généralisation sur les énoncés

Dans ce cas, le sujet voit les résultats qui sont déduits par les arguments précédents et non la concaténation des arguments.

En revanche, si le sujet « voit » le processus qui permet de passer d'un énoncé à l'énoncé suivant, la généralisation ne se base pas sur les seuls énoncés, mais sur le processus qui lie les énoncés. Il peut alors considérer une courbe quelconque et la suivante (ou la précédente). Les deux cas suivent un ordre particulier ; ils ne sont pas considérés par hasard. De plus ils sont considérés comme des cas génériques qui permettent de voir le processus en entier.

Dans le modèle de Toulmin, l'argument pourra être schématisé dans la façon suivante :

D₄ : E₁, E₁→E₂, E₂→E₃, ...

E₄ : le périmètre est constant et l'aire est à chaque fois divisée par 2

P : généralisation sur le processus

Les données $E_1 \rightarrow E_2$, $E_2 \rightarrow E_3$, ...représentent les arguments qui relient les énoncés. En particulier dans le modèle ils peuvent être schématisés ainsi :

E_1 : Périmètre de la première courbe est $2\pi r$; l'aire est πr^2 \longrightarrow E_2 : Périmètre de la deuxième courbe est $2\pi r$; l'aire est $\pi r^2/2$

P : le rayon est divisé par 2 et le nombre des courbes est double

E_2 : Périmètre de la deuxième courbe est $2\pi r$; l'aire est $\pi r^2/2$ \longrightarrow E_3 : Périmètre de la troisième courbe est $2\pi r$; l'aire est $\pi r^2/4$

P : le rayon est divisé par 2 et le nombre des courbes est double

Etcetera...

La donnée de l'argument 4 peut contenir un seul élément (par exemple $E_1 \rightarrow E_2$), qui représente l'exemple générique de tout le processus.

La généralisation sur le processus se base sur la considération qu'à partir d'une courbe générique le nombre des cercles est double par rapport au nombre des cercles de la courbe précédente et chacun de ces cercles a un rayon qui est la moitié du rayon des cercles précédents. Donc le périmètre est constant et l'aire est la moitié de la précédente.

Une argumentation inductive, si elle s'appuie sur une généralisation du processus permet de construire plus facilement une démonstration par récurrence. Au contraire, si l'argumentation inductive est construite sur une généralisation des énoncés, la construction d'une démonstration nécessite de combler un écart structurel.

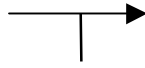
HP : Si la généralisation est sur les énoncés les élèves pourront produire une preuve mais elle n'aura très probablement pas la forme d'une démonstration (ce sera probablement une preuve de type pragmatique) En effet, un écart structurel doit être comblé pour construire une démonstration par récurrence. Si les élèves utilisent une argumentation inductive fondée sur la généralisation du processus alors on observera probablement une continuité structurelle et la preuve pourra être une démonstration.

Exemple d'argumentation inductive par passage à la limite

Cette argumentation peut suivre la précédente, c'est-à-dire que le cas limite peut être le dernier cas d'un certain nombre de cas considérés. C'est pourquoi il peut être pris en considération comme une vérification des conclusions tirées des autres cas.

La modélisation de l'argument peut être la suivante :

D_5 : Cas limite



E_5 : A la limite le périmètre est $2\pi r$
et l'aire est 0

P : opérateur d'une conception relative à la notion de la « limite »

Le permis d'inférer est différent par rapport à celui utilisé dans les autres cas (le rayon est divisé par 2 et le nombre des courbes est doublé). C'est la mobilisation d'une conception relative au cas limite qui intervient probablement ici. Cette conception peut être liée à des aspects perceptifs, ou au contraire elle peut s'appuyer sur une théorie de référence.

HP : Si les élèves utilisent le cas limite comme un cas de l'argumentation inductive par généralisation, les hypothèses sont les mêmes que celles explicitées dans le cas d'une argumentation inductive par généralisation.

Exemple d'argumentation inductive par récurrence

Ce type d'argumentation probablement peut se développer à la suite d'une argumentation inductive par généralisation sur le processus. Le sujet considère des courbes particulières (courbe 1, courbe 2, courbe 3, etc.). Il observe la régularité entre une courbe particulière et sa successive (par exemple entre la courbe 2 et la courbe 3), et il généralise. La généralisation sur le processus permet de passer à l'argumentation inductive par récurrence. La liaison entre deux pas successifs devient une donnée nécessaire pour appliquer l'axiome de la récurrence, qui permet de conclure que le périmètre est constant et l'aire est à chaque fois la moitié de la précédente.

Dans le modèle de Toulmin la représentation de l'argumentation est la suivante :

D_5 : E_n : Périmètre de la courbe $n = 2^n (2\pi r/2^n) = 2\pi r$
Aire de la courbe $n = 2^n \pi (r/2^n)^2 = \pi r^2/2^n$

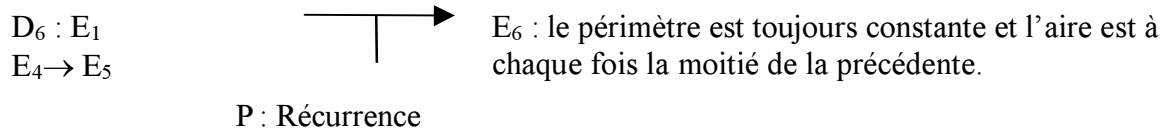


E_5 : E_{n+1} : Périmètre de la courbe $n+1 = 2^{n+1} (2\pi r/2^{n+1}) = 2\pi r$
Aire de la courbe $n+1 = 2^{n+1} \pi (r/2^{n+1})^2 = \pi r^2/2^n$

P : le rayon est divisé par 2 et le nombre des courbes est double

Le permis d'inférer qui permet de passer de la courbe n à la courbe n+1 est le permis d'inférer utilisé dans le cas de l'induction par généralisation sur le processus, qui a permis d'explicitier la concaténation entre les énoncés. D'ailleurs, l'argument précédent est une généralisation des arguments de l'induction par généralisation sur le processus.

L'argument 5 qui relie le périmètre et l'aire de la courbe n et, le périmètre et l'aire de la courbe n+1, devient une donnée de l'argument suivant.



Le passage d'une argumentation par récurrence à la démonstration par récurrence est immédiat.

HP : Si les élèves utilisent une argumentation par récurrence on observera probablement continuité structurelle et la preuve peut être une démonstration.

Le tableau montre un résumé des considérations faites à propos de l'exploration inductive qui se base sur la formule de l'aire et du périmètre du cercle.

Procédure de résolution			
Recherche inductive basée sur la formule de l'aire et du périmètre du cercle			
Structure de l'argumentation inductive	Structures attendues de la preuve	Continuité / écart structurel	Prévision sur la construction de la démonstration
Argumentation inductive par généralisation sur les énoncés (+ argumentation inductive par passage à la limite)	Preuve inductive	Continuité structurelle	La démonstration est hors de portée
	Preuve par récurrence	Ecart structurel	La démonstration peut être construite
Argumentation inductive par récurrence ou argumentation inductive par généralisation sur le processus (+ argumentation inductive par passage à la limite)	Preuve par récurrence	Continuité structurelle	La démonstration peut être facilement construite

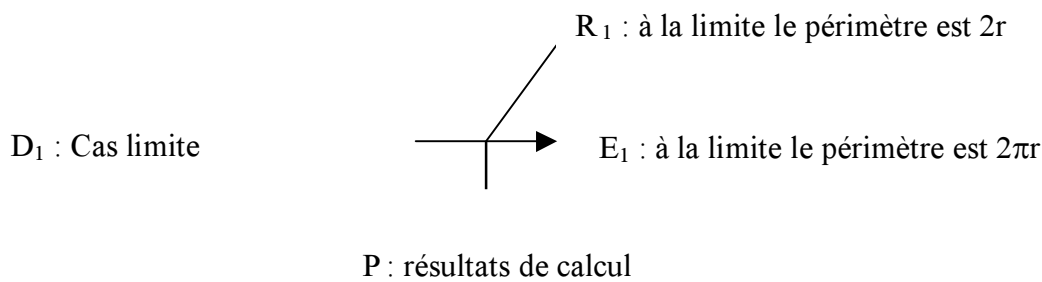
Tableau procédure 2.1

Evidemment, à partir de ce problème, des argumentations mixtes sont possibles. Par exemple, une argumentation par récurrence est facilement précédée par une argumentation par généralisation sur le processus et elle peut être précédée par une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés.

2.2.4 Conceptions mobilisables concernant le cas limite

Un calcul algébrique sur les aires des cercles et sur les périmètres permet de déterminer facilement la solution du problème. Pourtant, l'observation des conceptions mobilisées par les élèves peut être limitée. Néanmoins, cela peut ne pas être le cas si les élèves considèrent le cas limite. En fait, le résultat du calcul garantit que le périmètre est invariant pour toutes les courbes et l'aire est à chaque fois la moitié de la précédente, c'est-à-dire qu'elle tend vers zéro. Mais si on essaye de se donner une raison de cette limite en s'appuyant sur le dessin, une exception peut apparaître. Les cercles à la limite peuvent être vus comme tellement petits qu'ils se confondent avec le diamètre du premier cercle. Dans ce cas, le périmètre n'a plus la même valeur car sa mesure est égale à la longueur du diamètre. Donc une restriction peut se développer : le périmètre est $2\pi r$ à l'exception du cas limite.

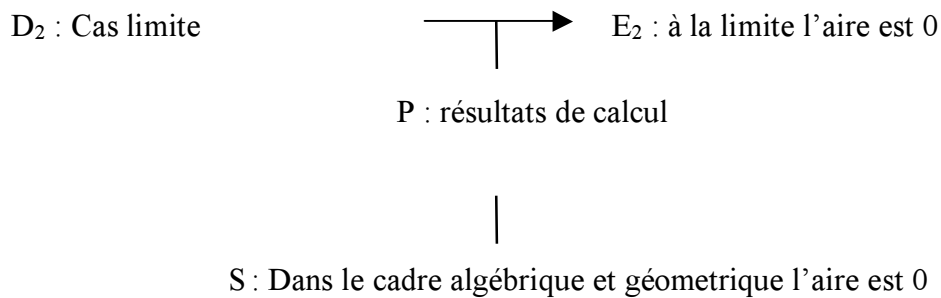
Dans le modèle de Toulmin l'argumentation est alors la suivante :



Dans l'argument on trouve une restriction au permis d'inférer. Si la restriction est tolérée, la conclusion de l'argument est acceptée, mais si la restriction n'est pas tolérée, l'argument sera remplacé.

C'est un changement de cadre qui permet à la conception d'apparaître. Le raisonnement à la limite dans le cadre géométrique, peut amener à une exception par rapport au raisonnement basé sur le calcul dans le cadre algébrique.

Cette exception apparaît seulement dans le cas du périmètre. En fait, l'aire à la limite, est zéro dans les deux cadres. Donc le changement de cadre dans le cas du périmètre amène à une restriction du permis d'inférer, alors que dans le cas de l'aire il va apparaître comme élément du support du permis d'inférer, comme montré dans le modèle ci-dessous.



La formule du périmètre et de l'aire est la représentation qui permet la circulation entre cadre algébrique et géométrique.

2.2.5 Unité ou rupture cognitive structurelle et du système de référence

Les élèves connaissent la démonstration par récurrence mais ils n'ont pas trop d'expérience de son utilisation. Le passage d'une argumentation inductive par généralisation à une démonstration par récurrence peut ne pas être facile pour l'élève. En particulier s'il s'agit d'une généralisation sur les énoncés et non sur le processus.

Si à partir d'une argumentation par généralisation sur les énoncés, l'élève construit une démonstration par récurrence, nous observons probablement une rupture cognitive structurelle car la récurrence est cherchée afin de rendre rigoureuse l'argumentation qui a été faite. Pour construire une démonstration par récurrence, à partir d'une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés, les élèves doivent être conscients du fait que l'argumentation inductive n'est pas suffisante pour être acceptée comme structure démonstrative.

Une démonstration par récurrence est beaucoup plus probable si l'argumentation est déjà une argumentation par récurrence ou au moins une argumentation inductive par généralisation sur le processus. Néanmoins, l'argumentation par récurrence est difficilement construite sans l'anticipation d'une argumentation inductive par généralisation. C'est pourquoi nous observons probablement une unité cognitive structurelle entre l'argumentation par généralisation sur le processus et la démonstration par récurrence.

Au contraire l'unité cognitive du système de référence est presque garantie parce que la nature du problème renvoi à utiliser les formules de l'aire et du périmètre dans l'argumentation. Le permis d'inférer utilisé pendant l'argumentation est déjà un permis d'inférer théorique. Par conséquent, nous observerons difficilement une rupture cognitive du système de référence. En revanche, les élèves qui considèrent le cas limite comme courbe confondue avec le diamètre du premier cercle, doivent justifier cette exception, en particulier dans la preuve. Ils peuvent choisir de laisser tomber ce cas comme s'il n'était pas pris en considération ou, au contraire

ils peuvent peut-être essayer de le justifier. Cela peut s'avérer très difficile pour les élèves car certains d'entre eux n'ont pas les moyens théoriques pour le résoudre.

Dans le tableau ci-dessous nous avons représenté les résultats d'une analyse en terme d'unité ou rupture cognitive structurelle et du système de référence.

Structure de l'argumentation inductive	Système de référence de l'argumentation	Structure attendue de la preuve	Unité ou rupture cognitive structurelle et du système de référence attendues
Argumentation inductive par généralisation sur les énoncés	Utilisation de la formule de l'aire et du périmètre du cercle	Preuve inductive	UC du système de référence UC structurelle La démonstration est hors de portée
		Preuve par récurrence	UC du système de référence RC structurelle Construction de la démonstration
Argumentation inductive par passage « à la limite »	Mobilisation de la conception dans le cadre arithmétique et dans le cadre géométrique	Preuve inductive	RC du système de référence UC structurelle La démonstration est hors de portée
		Preuve par récurrence	RC du système de référence RC structurelle Construction de la démonstration
Argumentation inductive par récurrence ou Argumentation inductive par généralisation sur le processus	Utilisation de la formule de l'aire et du périmètre du cercle	Preuve par récurrence	UC du système de référence UC structurelle Construction de la démonstration

UC : unité cognitive
RC: rupture cognitive

2.3 Situation expérimentale 3

Nous avons choisi de réaliser cette expérimentation dans les classes suivantes :

- En France dans une classe de seconde.
- En Italie dans une classe de 4^{ème} année du lycée (17/18 ans, terminale en France).

Les élèves travaillent en binôme avec Cabri-géomètre. Ils ont à disposition l'énoncé du problème et une feuille de réponse. La durée de la session est de 50 min.

Le problème proposé est le suivant :

Problème

On considère un polygone quelconque à n côtés.

Peut-on donner une loi pour trouver la somme des angles intérieurs du polygone en fonction du nombre des côtés ?

Aucune figure du problème n'a été présentée sur Cabri-géomètre.

2.3.1 Pourquoi ce problème ?

Nous présentons les raisons qui nous ont poussée à choisir un tel problème.

- Favorisation de l'engagement d'un processus d'argumentation. Ce n'est pas un problème standard, ni facile pour les élèves que nous allons considérer. De plus, la construction d'une figure sur Cabri-géomètre, qui doit être acceptées par les deux élèves peut favoriser la communication entre eux. Nous nous attendons à ce qu'une activité argumentative soit développée.
- Possibilité de produire une argumentation inductive par récurrence.
Par rapport au problème présenté dans la situation 2, ce problème amène plus facilement l'élève vers une argumentation inductive par récurrence. Les polygones peuvent être considérés l'un après l'autre en ajoutant un côté au précédent ; cela peut favoriser une argumentation inductive par généralisation sur le processus et donc une démonstration par récurrence. Les argumentations que nous attendons sont de type inductif, et en particulier des argumentations inductives par récurrence. La raison principale qui nous a poussées à prendre en considération ce problème est le fait que, dans ce cas, l'argumentation inductive par récurrence peut-être construite, alors que dans le cas

précédent, comme nous l'avons écrit, il peut être plus facile pour les élèves d'utiliser une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés. Néanmoins, c'est aussi possible de résoudre le problème avec une déduction.

- Démontrable par les élèves avec les connaissances dont probablement ils disposent. Les élèves que nous observons connaissent la démonstration par récurrence. Ils connaissent la notion d'angle et le théorème sur la somme des angles intérieurs d'un triangle.
- Possibilité de mobiliser des conceptions. Par rapport aux autres problèmes que nous avons analysés, celui-ci présente une différence substantielle : la construction d'une figure est laissée dans les mains des élèves. Les élèves sont deux et celui qui lit le dessin construit par l'autre peut avoir une interprétation complètement différente du camarade (Laborde et Capponi, 1994). Les deux ensembles de conceptions (qui sont des connaissances) peuvent interagir entre eux et être discordants : les conceptions de l'élève qui construit le dessin et celles du camarade qui lit le dessin. Comme nous le verrons ci-dessous (2.3.3), le dessin, en tant qu'élément de représentation permet la circulation entre cadres. C'est à partir des interactions sur le dessin que les conceptions mobilisables peuvent apparaître.

2.3.2 Structures attendues d'argumentation à partir des quelques procédures de résolution du problème

La difficulté du problème dépend fortement de la définition de polygone qu'on suppose. Le problème, présenté dans Cabri-géomètre, nous permet de choisir la définition de polygone donnée par le logiciel. Dans Cabri-géomètre, un polygone est une ligne brisée fermée de n segments $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$. Il est alors évident que le polygone dans Cabri-géomètre peut être croisé.

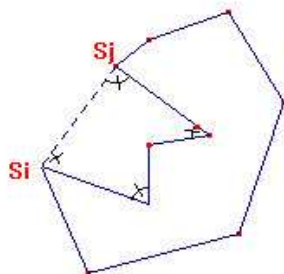
Cependant, la définition de polygone donnée par le logiciel, et les outils fournis, guident vers une solution simple (par exemple, le logiciel ne permet pas de découper un polygone en deux au moyen d'une droite). Donc, si d'un côté le logiciel pousse vers une solution simple, de l'autre côté, il faut espérer que les élèves ne tombent pas dans des cas où les polygones sont croisés.

La loi donnant la somme des angles intérieurs d'un polygone est $180 \cdot (n-2)$ où n est le nombre des côtés du polygone.

Dans le cas d'un polygone non croisé une démonstration peut être la suivante.

Si le polygone est convexe la formule est évidente sans utiliser la récurrence en triangulant à partir d'un sommet ou d'un point intérieur.

Si le polygone n'est pas convexe, il faut utiliser la non convexité pour prouver qu'il existe un couple de sommets S_i, S_j tels que le segment (S_i, S_j) est extérieur au polygone (pas tout à fait immédiat). Il s'agit d'un raisonnement par l'absurde.



Cela détermine 2 polygones non croisés inclus l'un dans l'autre ayant le côté (S_i, S_j) en commun. Chacun a p et q côtés où $p < n$ et $q < n$.

On peut alors vérifier la formule pour les deux polygones $P(p)$ et $P(q)$.

On trouvera les hypothèses d'une récurrence complète³

$$\sum \alpha_k = \pi(p-2)$$

$$\sum \beta_k = \pi(q-2)$$

Où $\sum \alpha_k$ et $\sum \beta_k$ représentent la somme des angles intérieurs de chaque polygone.

Un calcul simple permet de retrouver $P(n)$.

Dans la suite nous considérerons les stratégies de résolution attendues des élèves que nous allons considérer.

Une stratégie possible de résolution est la construction de plusieurs polygones en suivant un ordre : on commence à considérer des polygones avec un nombre petit de cotés et ensuite on ajoute des côtés. C'est-à-dire que d'abord on considère un triangle, ensuite un quadrilatère, ensuite un polygone à cinq côtés etcetera. Nous avons sélectionné deux stratégies de résolution possibles : on peut rajouter le côté au polygone à partir du même sommet, on peut ajouter le côté sur un sommet différent du précédent.

Une autre stratégie possible consiste à considérer des polygones au hasard et à essayer de compter la somme des angles intérieurs. On peut par exemple découper le polygone en triangles.

Nous considérons séparément ces trois stratégies.

³ Récurrence complète : $P(3)$ est vrai, $\forall n$, si $\forall k=1,2,\dots, n-1$, $P(k)$ est vrai, alors $P(k+1)$ est vrai
 $\Rightarrow \forall n$ $P(n)$ est vraie

2.3.2.1 Ajout d'un côté au polygone à partir du même sommet

Chaque fois qu'on construit un nouveau polygone on rajoute un côté au précédent. Supposons que l'ajout d'un côté au polygone précédent se fasse toujours à partir du même sommet.

On peut s'apercevoir que chaque fois qu'on rajoute un côté on rajoute un triangle et donc 180° à la somme des angles intérieurs.

En fait, pour le triangle, la somme des angles intérieurs est 180° .

Pour le quadrilatère, la somme est $180^\circ + 180^\circ = 180^\circ * 2$.

Pour le polygone à cinq côtés la somme est $180^\circ * 2 + 180^\circ = 180^\circ * 3$

Pour un polygone à n côtés la somme est $180^\circ * (n-2) + 180^\circ = 180^\circ * (n-1)$

La figure 4.8 montre qu'en rajoutant un côté au polygone on obtient un polygone avec un triangle en plus.

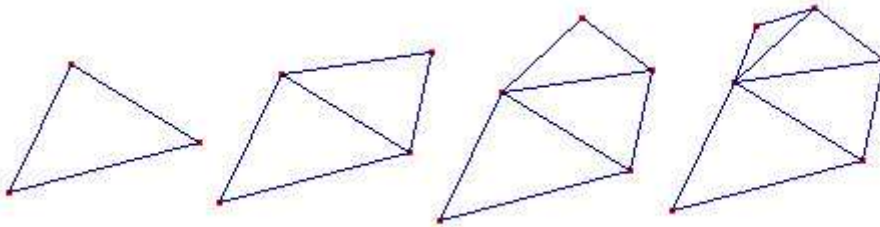


Figure 4.8

A partir de cette stratégie de résolution on peut mettre en œuvre une argumentation inductive par généralisation ou une argumentation inductive par récurrence.

Exemple d'argumentation inductive par généralisation

On considère un triangle, la somme des angles intérieurs est 180° .

On considère un quadrilatère comme composé de deux triangles. La somme est alors $180^\circ * 2$.

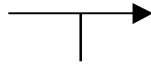
On considère un polygone à cinq côtés comme composé de trois triangles. On peut poursuivre le raisonnement jusqu'à la considération d'un polygone à n côtés.

Comme dans le cas précédent, l'argumentation inductive par généralisation peut être construite à partir des énoncés ou à partir du processus. Dans le cas d'une généralisation sur les énoncés, l'argumentation peut être représentée dans le modèle de Toulmin de la façon suivante :

E_1 : la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°

E_1 est un théorème qui les élèves connaissent.

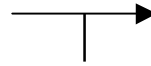
D₂ : Quadrilatère



E₂ : la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est $180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$.

P: Décomposition du polygone en triangle et E₁

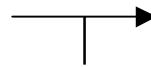
D₃ : Polygone à cinq côtés



E₃ : la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est $180^\circ \cdot 3$

P: Décomposition du polygone en triangle et E₁

D₄ : Polygone à n côtés



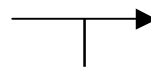
E₄ : la somme des angles intérieurs du polygone est $180^\circ \cdot (n-2)$

P : Generalisation sur les énoncés

La généralisation se base sur les énoncés, le processus qui relie les énoncés n'est pas pris en compte. La généralisation consiste à dégager une forme (pattern) générale de l'énoncé (on remplace par exemple « 3 » par « n », la preuve qui suit peut alors d'un type pragmatique quelconque)

En revanche, une argumentation inductive par généralisation sur le processus s'appuie sur la concaténation des énoncés : on peut remarquer que chaque fois qu'on ajoute un côté, on ajoute aussi un triangle. C'est pourquoi, chaque fois qu'on ajoute un triangle, la somme des angles intérieurs est augmentée de 180° . Dans le modèle de Toulmin, l'argument peut être schématisé ainsi :

D₄ : E₁, E₁→E₂, E₂→E₃, ...

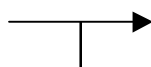


E₄ : la somme des angles intérieurs d'un polygone est $180^\circ \cdot (n-2)$

P: Generalisation sur le processus

Les données E₁, E₁→E₂, E₂→E₃, ... représentent les arguments qui relient les énoncés. Ils sont les suivants :

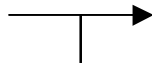
E₁ : la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°



E₂ : la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ = 180^\circ \cdot 2$

P: Si on ajoute un côté, on ajoute un triangle et donc 180° à la somme des angles intérieurs du polygone

E_2 : la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est $180^\circ \times 2$



E_3 : la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est $360^\circ + 180^\circ = 180^\circ \times 3$

P: Si on ajoute un côté, on ajoute un triangle et donc 180° à la somme des angles intérieurs du polygone

Etcetera ...

La généralisation prend en compte le processus et pas seulement les énoncés.

Dans ce cas, le passage à une argumentation par récurrence est plus facilement accessible.

HP : A partir d'une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés, un écart structurel doit être comblé pour construire une démonstration par récurrence. En revanche si l'argumentation inductive est construite par une généralisation sur le processus on observera probablement une continuité structurelle avec la démonstration par récurrence.

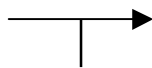
Exemple d'argumentation inductive par récurrence

On considère un triangle, la somme des angles intérieurs est 180° . C'est le premier pas de la récurrence.

Le pas de la récurrence est l'argument qui permet de passer d'un polygone à n côtés à un polygone à $n+1$ côtés. Si la somme des angles intérieurs d'un polygone est $180^\circ \times (n-2)$, la somme des angles intérieurs du polygone de $n+1$ côtés est $180^\circ \times (n-2) + 180^\circ$. En fait, si on ajoute un côté, on ajoute un triangle et en conséquence on ajout 180° à la somme des angles intérieurs du polygone à n côtés.

Dans le modèle de Toulmin cette argumentation peut être représentée de la façon suivante:

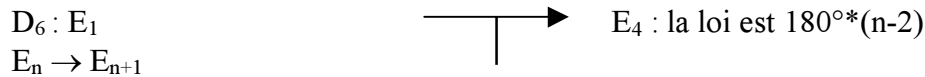
D_5 : E_n : la somme des angles intérieurs d'un polygone à n côté est $180^\circ \times (n-2)$



E_5 : E_{n+1} : la somme des angles intérieurs d'un polygone à $n+1$ côté est $180^\circ \times (n-2) + 180$

P : Si on ajoute un côté, on ajout un triangle et donc 180° à la somme des angles intérieurs du polygone

Le permis d’inférer de l’argument 5 est le même que le permis d’inférer utilisé pour relier les énoncés dans l’argumentation inductive par généralisation sur le processus. L’argument 5 permet de construire la récurrence.



P : Schéma de Récurrence

Le passage d’une argumentation par récurrence à la démonstration par récurrence est immédiat.

HP : Si les élèves utilisent une argumentation par récurrence on observera probablement une continuité structurelle et la preuve peut être une démonstration.

Le tableau ci-dessous montre un résumé des considérations faites à propos de la procédure de résolution : Ajout d’un côté au polygone à partir du même sommet.

Procédure de résolution			
Ajout d’un côté au polygone à partir du même sommet			
Structure de l’argumentation	Structure attendue de la preuve	Continuité / écart structurel	Prévision sur la construction de la démonstration
Argumentation inductive par généralisation sur les énoncés	Preuve inductive	Continuité structurelle	La démonstration est hors de portée
	Preuve par récurrence	Ecart structurel	La démonstration peut être construite
Argumentation inductive par récurrence	Preuve par récurrence	Continuité structurelle	La démonstration peut être construite

Tableau procédure 3.1

2.3.2.2 Ajout d’un côté au polygone à partir d’un sommet quelconque

Chaque fois qu’on construit un nouveau polygone on rajoute un côté au précédent. Supposons que cet ajout au polygone précédent est fait à partir d’un sommet quelconque, comme montré dans la figure 4.9

On peut s’apercevoir que chaque fois qu’on rajoute un côté on rajoute un triangle et donc 180° à la somme des angles intérieurs. La figure 4.8 montre qu’en rajoutant un côté au polygone on obtient un polygone avec un triangle en plus.

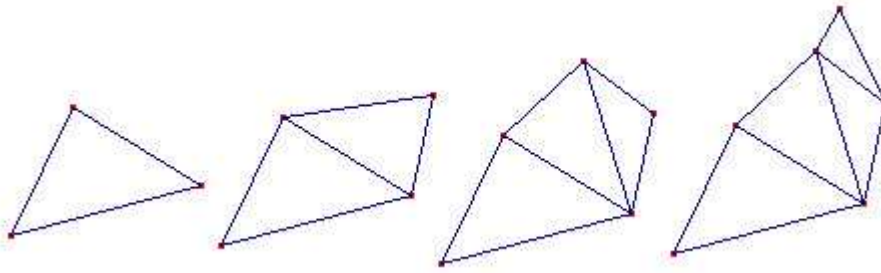


Figure 4.9

La stratégie de résolution est similaire à la précédente. Cependant, dans ce cas on peut construire une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés mais on pourra difficilement construire une argumentation inductive par généralisation sur le processus ou une argumentation par récurrence. En fait, les cas ne sont pas liés selon un ordre particulier. La relation qui relie deux pas successifs, c'est-à-dire en rajoutant un côté à un polygone on rajoute toujours un triangle, peut rester cachée. La propriété qui permet de résoudre le problème est moins visible dans ce cas.

On considère un exemple d'argumentation par généralisation sur les énoncés.

Exemple d'argumentation inductive par généralisation sur les énoncés

On considère un triangle, la somme des angles intérieurs de 180° .

On considère les polygones en suivant un ordre particulier ou par hasard. On peut observer qu'un quadrilatère est par exemple composé des deux triangles. La somme est alors $180^\circ \cdot 2$.

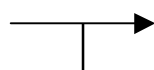
On peut observer que la somme des angles intérieurs d'un polygone à cinq côtés est $180^\circ \cdot 3$ parce qu'il est composé par trois triangles. Cependant, la généralisation au polygone de n côtés, est plus difficile à expliciter. La généralisation sur le processus ne peut pas être faite. C'est pourquoi une argumentation par récurrence à partir de cette stratégie de résolution n'est pas prévue.

Dans le modèle de Toulmin cette argumentation peut être représentée de la façon suivante:

E_1 : la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180° .

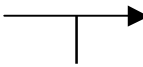
E_1 est un théorème qui les élèves connaissent.

D_2 : Quadrilatère



E_2 : la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est $180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$.

P : Décomposition du polygone en triangle et E_1

D_3 : Polygone à cinq côtés  E_3 : la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est $180^\circ \cdot 3$

P : Décomposition du polygone en triangle et E_1

Etcetera.....

HP : A partir de cette argumentation les élèves peuvent construire une preuve inductive. Au contraire, il leur est très difficile, pour les raisons expliquées, de réussir à construire une argumentation par récurrence. La généralisation sur le processus reste cachée dans cette stratégie. On ne peut pas lier un cas au suivant. Nous attendons alors une continuité structurelle entre argumentation inductive par généralisation sur les énoncés et preuve. Pour construire une démonstration par récurrence, un écart structurel est nécessaire.

Procédure de résolution			
Ajout d'un côté au polygone à partir d'un sommet quelconque			
Structure de l'argumentation	Structure attendue de la preuve	Continuité / écart structurel	Prévision sur la construction de la démonstration
Argumentation inductive par généralisation sur les énoncés	Preuve inductive	Continuité structurelle	La démonstration est hors de portée
	Preuve par récurrence	Ecart structurel	La démonstration peut être construite

Tableau procédure 3.2

2.3.2.3 Considération d'un polygone comme exemple générique (Balacheff 1988)

On considère n'importe quel polygone et on le découpe en triangles pour déterminer la somme des angles intérieurs. Les élèves savent que la somme des angles intérieur d'un triangle est 180° . Nous croyons que cette propriété peut le guider vers la stratégie de résolution que nous allons considérer. Le découpage du polygone peut être faite en trois façons :

- A partir de plusieurs sommets. Dans ce cas on peut trouver la somme des angles intérieurs dans le cas spécifique du polygone considéré. Si cette stratégie est appliquée sur plusieurs polygones on peut revenir à la stratégie de résolution « Ajout d'un côté au polygone à partir d'un sommet quelconque » déjà décrite ci-dessus (2.3.2.2).
- A partir du même sommet. Comme dans le cas précédent, on peut trouver la somme des angles intérieurs dans le cas spécifique du polygone considéré. Si cette stratégie est

appliquée sur plusieurs polygones on peut revenir à la stratégie de résolution « Ajout d'un côté au polygone à partir du même sommet » déjà décrite ci-dessus (2.3.2.1).

- A partir d'un point intérieur au polygone. Si les élèves découpent le polygone en triangles à partir d'un point intérieur, ils peuvent facilement déterminer la loi. Le nombre des triangles est le même que le nombre des côtés, Donc les angles sont $180^\circ * n$ où n est le nombre des côtés (ou des triangles). Il faut cependant enlever 360° qui représente la somme des angles des triangles situés au centre du polygone. La figure 4.10 montre un exemple sur un polygone de 8 cotées.

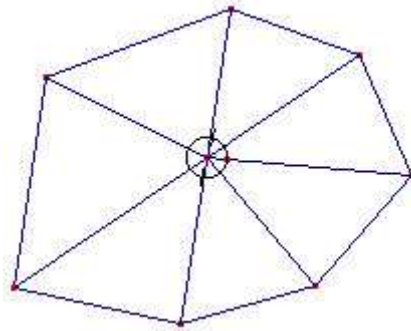


Figure 4.10

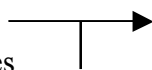
Dans ce cas l'argumentation est différente par rapport aux autres : le polygone est un exemple générique (Balacheff, 1988) dans le sens qu'il est un représentant de la classe de tous les polygones. A partir de cet exemple une généralisation de la loi sur tous les polygones est possible. L'argumentation qui peut se développer est une argumentation déductive.

Exemple d'argumentation déductive basé sur un exemple générique (Balacheff, 1988)

On considère un polygone de n côtés, on construit n triangles qui ont un sommet en commun à l'intérieur du polygone et qui recouvrent toute la surface du polygone. La somme des angles intérieurs du polygone est $(180^\circ * n) - 360^\circ$. Au moyen d'un simple calcul on peut déterminer la loi.

Dans le modèle de Toulmin l'argumentation est :

D_1 : Décomposition d'un polygone à n côtés en n triangles



E_1 : la somme des angles des triangles intérieurs au polygone est $180^\circ * n$

P : Propriété des angles intérieurs d'un triangle

L'exemple générique est le support de l'argument précédent car il permet d'étayer le permis d'inférer.

$$D_2 : E_1 \quad \xrightarrow{\quad} \quad E_2 : \text{la somme des angles intérieurs d'un polygone est } 180^\circ \cdot n - 360^\circ$$

P: Somme et différence entre angles

HP : A partir de cette argumentation les élèves peuvent construire une preuve déductive qui est aussi une démonstration.

Procédure de résolution			
Considération d'un polygone comme exemple générique (Balacheff 1988)			
Structure de l'argumentation	Structure attendue de la preuve	Continuité / écart structurel	Prévision sur la construction de la démonstration
Argumentation déductive	Preuve déductive	Continuité structurelle	La démonstration peut être construite

Tableau procédure 3.3

2.3.3 Conceptions mobilisées

Les conceptions mobilisables dans ce problème sont liées à l'interprétation du dessin. La consigne du problème ne demande pas la construction d'une figure, mais celle-ci est nécessaire pour résoudre le problème. Pendant l'argumentation, l'élève construit probablement certains polygones avec l'objectif de déterminer une loi à propos de la somme des angles intérieurs. Le processus de construction de la figure interagit avec la mobilisation des conceptions : l'opérateur d'une conception peut être guide dans la construction d'une figure, et vice versa, une figure peut évoquer la mobilisation d'un opérateur d'une conception. De plus, la figure peut rappeler un référent théorique pour la construction de la preuve (Fishbein, 1993, Laborde et Capponi, 1994, Mariotti, 2001).

Néanmoins, les propriétés spatiales du dessin ne sont pas toutes interprétables de façon cohérente avec des propriétés géométriques (de la théorie). Cela parce que souvent elles peuvent rester implicites ou parce qu'elles n'ont pas été formalisées. Dans ces cas, l'interprétation du dessin peut ne pas être contrôlée par un référent théorique, mais au contraire elle peut rester attachée à la conception qui a permis la lecture du dessin. La figure peut assumer le rôle de représentation qui permet la circulation entre cadres : elle peut être lue

dans un cadre spatio-graphique, ou au contraire elle peut être considérée dans un cadre géométrique. C'est pourquoi, nous pensons que certaines conceptions peuvent apparaître à l'analyse.

Les élèves travaillent en binôme. La construction du dessin est faite par un des deux élèves. Les conceptions de celui qui construit le dessin peuvent être très différentes de celui qui lit le dessin. « ...*L'interprétation est dépendant de la théorie avec laquelle le lecteur choisit de lire le dessin ainsi que des connaissances de ce lecteur* » (Laborde et Capponi, 1994, p.169). Les élèves doivent interagir pour trouver un point commun afin de construire une démonstration. Les conceptions peuvent intervenir pendant cette interaction ; s'il y a un conflit entre les élèves, leurs conceptions peuvent être explicitées. Dans ce cas il est plus facile pour nous de les déterminer.

2.3.4 Unité et rupture cognitive structurelle et du système de référence

Nous nous attendons à l'unité cognitive du système de référence et à l'unité cognitive structurelle.

Comme nous l'avons explicité ci-dessus, la construction de la figure amène la mobilisation de conceptions qui peuvent s'appuyer sur le dessin. Ces conceptions peuvent rester implicites dans la démonstration. Au contraire, les propriétés théoriques, même celles liées à la figure, seront explicitées. Néanmoins, le seul théorème nécessaire pour construire la démonstration, le théorème de la somme des angles intérieurs des triangles, est déjà utilisé pendant l'argumentation. C'est pourquoi nous pensons observer une unité cognitive du système de référence.

Le problème peut favoriser la construction d'une démonstration. En fait, une argumentation par récurrence est possible. Les élèves ont la possibilité de construire la preuve à partir directement de cette structure. De même, si les élèves utilisent la stratégie qui permet de construire une argumentation déductive, la démonstration déductive est presque garantie. En conséquence, l'unité cognitive structurelle est attendue autant que la construction d'une démonstration (et pas seulement d'une preuve).

Dans le tableau nous avons représenté les résultats d'une analyse en terme d'unité ou rupture cognitive. Nous montrons dans le tableau que la construction d'une démonstration correcte, et en conséquence la résolution du problème, est dépendante de cette analyse.

Le système de référence n'est pas explicité dans le tableau car la distinction du système de référence pour chaque stratégie n'est pas possible ; le système de référence peut être le même pour toutes les stratégies de résolution.

Stratégie de résolution utilisée	Structure de l'argumentation	Structure de preuve attendue	Unité ou rupture cognitive structurelle et du système de référence attendue
Ajoute d'un côté au polygone à partir du même sommet	Argumentation inductive par généralisation sur les énoncés	Preuve inductive par généralisation sur les énoncés	UC du système de référence UC structurelle Construction de la démonstration
		Preuve par récurrence	UC du système de référence RC structurelle Construction de la démonstration
	Argumentation inductive par généralisation sur le processus ou argumentation inductive par récurrence	Preuve par récurrence	UC du système de référence UC structurelle Construction de la démonstration
Ajoute d'un côté au polygone à partir d'un sommet quelconque	Argumentation inductive par généralisation sur les énoncés	Preuve inductive par généralisation sur les énoncés	UC du système de référence UC structurelle Construction de la démonstration
		Preuve par récurrence	UC du système de référence RC structurelle Construction de la démonstration
Considération d'un polygone comme exemple générique	Argumentation déductive	Preuve déductive	UC du système de référence UC structurelle Construction de la démonstration e

UC : unité cognitive RC: rupture cognitive

Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons présenté le dispositif expérimental de notre recherche et l'analyse a priori des situations que nous proposons.

Pour chacun des trois problèmes, nous avons présenté une analyse a priori des stratégies de résolution attendues. Le modèle de Toulmin a permis de montrer comment repérer les arguments abductifs, déductifs et inductifs pour chaque stratégie de solution.

Des cas de continuité structurelle et des cas d'écart structurel peuvent être observables. Par exemple on voit très bien dans la première situation expérimentale que la stratégie « Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires » amène facilement à une argumentation abductive (2.1.2.1). En revanche, la stratégie « Exploration sur les cas particuliers de triangle ABC » amène à une exploration inductive par cas (2.1.2.3). Les deux dernières situations permettent d'analyser les argumentations inductives par généralisation sur les énoncés et par généralisation sur le processus. La troisième situation expérimentale peut amener plus facilement que la deuxième situation, à une argumentation inductive par récurrence.

D'autre part l'analyse en termes de conceptions, en relation au modèle de Toulmin, nous a aussi permis d'identifier des cas de continuité et des cas d'écart du système de référence. Nous avons observé comment la mobilisation d'une conception peut induire une stratégie de résolution. Par exemple dans la première situation expérimentale ; la mobilisation des conceptions dont l'opérateur peut s'exprimer dans la forme « Deux triangles égaux ont la même aire » (ou « Deux triangles égaux ont la même aire et deux triangles différents ont des aires différentes ») peut induire la stratégie « Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC » (2.1.3.1). Dans la deuxième situation expérimentale la mobilisation de conceptions relatives au cas limite peut être observée (2.1.3.1). Dans la troisième situation, nous observerons probablement la mobilisation des conceptions relatives à la figure que les élèves construisent pour résoudre le problème.

Dans le chapitre suivant nous reportons les résultats des observations et nous les discutons selon les hypothèses faites. En particulier nous voulons analyser les continuités et les écarts effectifs entre argumentation et démonstration à partir des situations expérimentales conduites dans les classes.

L'analyse a posteriori sera comparée avec celle présentée ici. Les tableaux que nous avons construits au cours de ce chapitre seront comparés avec des tableaux similaires construits dans les deux chapitres suivants.

C'est à partir de cette comparaison que nos résultats de recherche et nos conclusions seront formulées.

Chapitre 5

Mise en place de la situation expérimentale : analyse a posteriori

N'admettez rien à priori si vous pouvez le vérifier

Rudyard Kipling

Introduction

Au cours du chapitre précédent, nous avons présenté le dispositif expérimental. Nous avons posé des questions de recherche et sélectionné certaines hypothèses qui nous ont permis de construire les trois situations expérimentales dont les résultats sont analysés ici. Ce chapitre suivra l'organisation du précédent afin de faciliter la comparaison entre hypothèses et résultats de recherche.

Ce chapitre a deux objectifs. D'abord nous voulons montrer comment analyser les productions des élèves (argumentations et preuves) avec l'outil méthodologique du modèle de Toulmin. Nous montrerons les potentialités et les difficultés de son utilisation.

En deuxième lieu, nous voulons exposer les résultats des expérimentations afin de répondre aux questions que nous avons soulevées à propos de l'unité/rupture cognitive du système de référence et structurelle entre une argumentation et une démonstration.

Le modèle de Toulmin a permis de modéliser les argumentations et les preuves des élèves à l'intérieur d'un schéma ternaire. La comparaison entre schéma d'argumentation et schéma de preuve a permis une analyse des continuités/écarts du système de référence et de la structure entre argumentation et preuve. L'étude de l'unité ou rupture cognitive s'appuie sur cette analyse.

1 Considérations générales

La dévolution des situations expérimentales a eu lieu comme prévu dans l'analyse a priori. Les élèves sont bien rentrés dans les situations problèmes que nous avons proposées. Ils ont argumenté et ils ont essayé de construire une démonstration.

La plupart des élèves analysés ont de l'expérience dans la démonstration. Certains élèves des classes italiennes, qui font partie d'un projet qui prend en compte l'apprentissage de la démonstration, ont suivi des activités spécifiques à propos de la rigueur de la démonstration.

Même dans les cas où la démonstration est une obligation contractuelle, les copies des élèves ont montré le caractère « sincère » de la démonstration proposée. Il n'y a pas d'élèves qui ont cherché à satisfaire à tout prix cette obligation, au risque de construire n'importe quel type de preuve.

Dans les classes où les preuves non déductives ne sont pas acceptées par l'enseignant, les copies des élèves qui n'ont pas réussi à construire la déduction ne contiennent pas de preuve.

Les élèves que nous avons analysés connaissent Cabri-géomètre. Nous n'avons pas remarqué aucune difficulté liée à son utilisation.

Comme prévu, les enseignants ne sont pas intervenus pendant les expérimentations.

1.1 France et Italie : différences entre expérimentations

Nous avons remarqué une différence substantielle entre les expérimentations déroulées en France et les expérimentations déroulées en Italie. En France, nous avons à disposition du matériel technique : un magnétophone pour chaque binôme ; une salle informatique qui permettait de regarder à partir d'un ordinateur les ordinateurs de toute la classe ; la salle était insonorisée de façon à ce que tous les enregistrements aient eu lieu sans difficulté. En Italie, par contre, nous avons eu la possibilité d'enregistrer seulement trois binômes par classe. Nous avons à disposition seulement trois magnétophones et les classes souvent trop hautes et trop grandes ne permettaient pas d'enregistrer clairement deux binômes travaillant côté-à-côté.

Néanmoins, les expérimentations qui se sont déroulées en Italie ont été plus déterminantes que les expérimentations françaises. La raison est probablement de nature culturelle. Les élèves italiens ont construit des argumentations beaucoup plus riches que les élèves français. Les dialogues enregistrés en Italie, sont plus longs que ceux enregistrés en France. Les argumentations françaises ont été souvent difficiles à analyser car trop d'implicites étaient présents. Cela a été observé pour les trois expérimentations.

Au contraire, les copies des élèves sont plus ou moins équivalentes les unes avec les autres.

2 Analyse a posteriori des situations proposées

L'analyse a posteriori se déroule en suivant les pas de l'analyse a priori (présentée au cours du chapitre 4), cela afin de rendre plus rapide la comparaison entre les deux analyses.

Dans la suite nous présentons les trois situations expérimentales.

Pour chaque situation nous fournissons :

- Le nombre d'élèves ayant participé à l'expérimentation et le « champion » que nous avons décidé d'analyser.
- Quelques résultats généraux de l'expérimentation en comparaison avec l'analyse à priori.
- La classification des copies par rapport aux stratégies de résolution (considérées en partie au cours du chapitre précédent).
- La classification des argumentations selon leurs structures. La comparaison entre structures d'argumentation et de preuve permettra une analyse des continuités/écarts structurels et éventuellement une analyse cognitive structurelle pour chaque cas pris en considération.
- La classification des argumentations selon leur système de référence. La comparaison entre les conceptions mobilisées par les élèves pendant l'argumentation et la théorie utilisée pendant la preuve permettra une analyse des continuités/écarts du système de référence. Eventuellement, nous fournirons une analyse cognitive du système de référence pour chaque cas considéré.
- La discussion des résultats à propos de l'unité ou rupture cognitive.

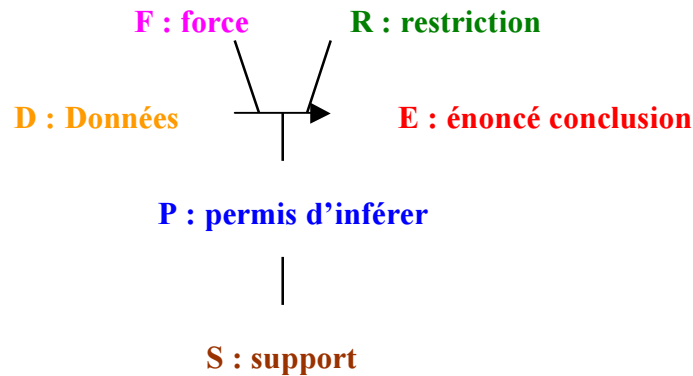
Nous ne présentons pas les analyses détaillées de tous les binômes analysés. Pour chaque stratégie de résolution utilisée, nous considérons d'abord les structures et ensuite les systèmes de référence des argumentations et des preuves. Pour chaque cas nous fournissons un exemple d'analyse par moyen de la production d'un binôme « champion » particulièrement représentatif.

Nous considérons une partie d'argumentation et de preuve, celle qui est intéressante pour notre analyse. Le dialogue complet et les copies se trouvent en annexe. Pour les analyses italiennes nous avons fait une traduction des argumentations et des copies ; les originaux sont présentés en annexe.

Les analyses sont présentées dans un tableau en deux colonnes. Dans la partie gauche nous transcrivons la partie significative du discours des élèves et la preuve construite.

La partie droite du tableau est réservée à l'analyse. Pour les analyses nous avons utilisé le modèle de Toulmin. Donc nous avons sélectionné les arguments des élèves, et nous avons construit le modèle de l'argumentation correspondant. Nous avons également ajouté nos commentaires.

Pour rendre plus claire la lecture nous avons décidé de préfixer les éléments du modèle de Toulmin (**D** : pour les données, **E** : pour l'énoncé conclusion, **P** : pour le permis d'inférer, **F** : pour la force, **R** : pour la restriction, **S** : pour le support) et de les représenter de la façon suivante :



Chaque pas de l'argumentation et de la preuve des élèves est identifiée par un nombre : l'indice des éléments du pas. Ce nombre permet de localiser le pas à l'intérieur de l'argumentation.

2.1 Situation expérimentale 1

L'expérimentation a eu lieu dans plusieurs classes. Nous avons recueilli 43 copies : 35 en Italie (correspondant à 30 binômes et 5 trinômes), et 8 en France.

Nous avons enregistré les argumentations de 12 binômes en Italie et de 8 binômes en France. Seulement 5 binômes français ont produit des copies et des argumentations analysables. Les élèves n'étaient pas trop motivés et probablement ils étaient aussi très fatigués. En fait, la séance de l'expérimentation a eu lieu pendant les dernières heures de la matinée.

10 copies (7 italiens et 3 français) ne sont pas analysables car le matériel que nous avons à disposition n'est pas suffisant pour accomplir l'analyse (certaines copies ne contiennent que des énoncés sans liaisons les uns avec les autres, certaines ne présentent que des calculs, etc.).

En conséquence nous avons à disposition 33 copies dont 28 italiennes et 5 françaises.

Nous avons également à disposition les transcriptions des dialogues des binômes suivants :

- 5 binômes en France dans une classe de seconde.
- 9 binômes en Italie :
 - 2 binômes et 1 trinôme de deux classes de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France) : Giulia et Luisa ; Giacomo et Uros, Massimiliano, Marco et Alessandro.

- 3 binômes d'une classe de 3^e année du lycée (16/17 ans, Première en France) : Nicola et Christian, Sara et Lorenzo, Federico et Stefano.
- 1 binôme d'une classe de 4^e année du lycée (17/18 ans, Terminale en France) : Valentina et Michela.
- 2 binômes de 5^e année du lycée (18/19 ans, en France les élèves terminent le lycée une année avant les élèves italiens) : Irene et Federico, Lorena et Andrea. Ces deux binômes n'ont pas été analysés dans une situation de classe.

Tous les élèves avaient à disposition 1h30 à exception de la classe 4^e qui a eu seulement une heure pour l'expérimentation. Un des binômes enregistrés et un autre binôme (Paolo et Jacopo) ont réussi à construire une preuve. Les autres ont construit une argumentation.

Même si nous avons à notre disposition 12 transcriptions (9 italiens et 3 français) nous avons utilisé la totalité des copies analysables (33). La plupart d'entre elles contenaient une partie d'argumentation écrite et une preuve.

Nous avons eu besoin de la totalité des copies pour plusieurs raisons :

- La prise en compte du contexte dans lequel les binômes analysés ont travaillé : les dialogues éventuels et les suggestions entre binômes, etc.
- L'analyse plus complète des stratégies de résolution utilisées. Presque toutes les copies révèlent clairement les stratégies utilisées pour résoudre le problème. Certaines permettent aussi de comprendre la structure de l'argumentation associée. De plus, les copies peuvent présenter des stratégies de résolution que nous n'avions pas prises en considération au cours de l'analyse a priori.
- L'analyse plus complète des démonstrations construites. D'abord elles ont permis de comprendre le degré de difficulté du problème pour les élèves d'une classe spécifique. En outre, à partir des preuves consignées par les élèves d'une classe, nous avons pu comprendre les règles du contrat didactique relatives à la démonstration et certaines conceptions de démonstration présentes dans la classe. Dans certaines classes la rédaction de la démonstration a été un objet d'étude approfondi. Par exemple, dans une classe de 2^e année du lycée, les élèves n'ont écrit que des preuves déductives, erronées pour certaines. Cela parce que l'enseignant a appris aux élèves que la rigueur est très importante en mathématique. Elle empêchait les élèves d'écrire des affirmations qui n'étaient pas rigoureusement démontrées.

Nous avons fait une analyse transversale de toutes les copies recueillies et considérées analysables (34) afin de déterminer toutes les stratégies utilisées pour la résolution du problème. Nous avons sélectionné les stratégies suivantes :

- Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires. Les binômes qui ont utilisé cette stratégie ont construit des argumentations abductives. Afin de calculer les aires ils ont construit les hauteurs des triangles. Ils ont considéré comme bases des triangles deux côtés du même carré. Les aires sont alors complètement dépendantes des hauteurs. L'égalité des petits triangles construits sur les hauteurs permet de conclure que les hauteurs sont égales (cette stratégie est bien expliquée dans le paragraphe 2.1.2.1 du chapitre précédent). Aucun élève n'a utilisé une argumentation déductive. On remarque que souvent les élèves supposent déjà au départ que les aires sont égales. Des fois, ils ont utilisé l'outil de la mesure de Cabri-géomètre pour calculer les aires. D'autres fois, ils ont utilisé le « déplacement » sur le logiciel. Lorsqu'un point du triangle ABC est déplacé sur l'écran de Cabri-géomètre, les aires des quatre triangles changent simultanément. Ce déplacement de la figure permet de visualiser des « phénomènes de compensation » qui peuvent conduire à penser à l'égalité entre les aires. Si l'égalité entre les aires est supposée a priori, l'argumentation est structurante, c'est-à-dire qu'elle justifie la conjecture dérivée d'un fait.
- Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC. Les opérateurs R_1 : « Egalité entre triangles \Rightarrow Egalité entre aires » ou R_2 : « Egalité entre triangles \Leftrightarrow Egalité entre aires », ont permis la mise en place de cette stratégie. L'exploration est une recherche des triangles égaux. L'argumentation associée à cette stratégie est l'argumentation déductive. Il s'agit d'une argumentation constructive, c'est-à-dire qu'elle est utilisée avec l'objectif de déterminer une conjecture. Cette stratégie a été très utilisée en Italie (23 binômes sur 33). Par contre en France aucun élève n'a considéré des cas particuliers du triangle ABC.
- Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC + mesure + construction des hauteurs pour comparer les aires. Il s'agit d'une argumentation mixte, composée des deux précédentes. L'argumentation sur les cas particuliers est une argumentation constructive pour déterminer la conjecture. Cependant, elle est abandonnée. Les élèves calculent les aires. Donc la conjecture est déterminée comme un fait. Ensuite il y a une argumentation structurante qui a pour but de justifier la conjecture. Les élèves construisent les hauteurs. La structure de cette argumentation est une abduction.

- Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC + construction des hauteurs pour comparer les aires. Il s'agit encore d'une argumentation mixte, mais ici, les élèves ont utilisé le triangle équilatéral comme exemple générique pour résoudre le problème dans le cas général. L'argumentation associée à cette stratégie est une argumentation mixte composée par une argumentation inductive par cas et une argumentation abductive. L'argumentation inductive par cas est constructive, lors que l'argumentation abductive est structurante.
- Méthode trigonométrique. L'argumentation utilisée a été la déduction. L'argumentation associée est une déduction constructive et structurante. De plus, la conjecture se développe comme théorème. Seulement deux binômes ont utilisé cette méthode.
- Stratégie du théorème des médianes et des hauteurs. En France, trois binômes ont considéré ce théorème : les hauteurs du triangle ABC sont médianes des triangles extérieurs et vice-versa les médianes du triangle ABC sont hauteurs des triangles extérieurs. Les élèves ont essayé d'appliquer le théorème sans résultat.

Le tableau montre la classification des stratégies utilisées par les élèves.

Argumentation						
Nombre Binômes ou trinômes	Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires	Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC	Exploration sur les cas particuliers + mesure + Construction hauteurs	Exploration sur les cas particuliers + Construction hauteurs	Méthode trigonométrique	Stratégie du théorème des médianes et des hauteurs
Italiens	3 dont: 3 (c. II)	17 dont: 5 (c. II) 6 (c. II) 2 (c. III) 4 (c. IV)	2 dont: 2 (c. III)	4 dont: 2 (c. II) 1 (c. III) 1 (c. IV)	2 dont: 2 (c. V)	
Français	2					3
Total	5	17	2	4	2	3

A partir de ce tableau nous avons sélectionné les élèves qui ont construit une preuve. Nous avons distingué les preuves des argumentations selon la décision des élèves, c'est-à-dire que nous avons reconnu comme preuves celles qui ont été signalées par les élèves comme telles.

Preuve						
Nombre Binômes ou trinômes	Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires	Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC	Exploration sur les cas particuliers + mesure + Construction hauteurs	Exploration sur les cas particuliers + Construction hauteurs	Méthode trigonométrique	Stratégie du théorème des médianes et des hauteurs
Italiens	3 dont: 3 (c. II)	13 dont: 2 (c. II) 6 (c. II) 2 (c. III) 3 (c. IV)	2 dont: 2 (c. III)	4 dont: 2 (c. II) 1 (c. III) 1 (c. IV)	2 dont: 2 (c. V)	0
Français	2					
Total	5	13	2	4	2	0

Tous les élèves considérés ont construit une argumentation. La plupart ont construit une preuve mais seulement une petite partie a construit une démonstration en résolvant correctement le problème.

Les élèves ont utilisé tout le temps qu'ils avaient à leur disposition, 1h30, à l'exception des élèves de 5^e année du lycée qui ont résolu le problème en 13 minutes. Ils ont utilisé la méthode trigonométrique (2.1.1.4).

Nous avons observé une grande variété dans les argumentations produites : nous avons trouvé des argumentations déductives, inductives par cas et abductives et en particulier des argumentations mixtes.

Comme nous l'avons prévu, les élèves italiens ont utilisé les théorèmes sur l'égalité des triangles pour construire une démonstration, alors qu'en France les élèves ont utilisé la géométrie des transformations et en particulier les rotations.

2.1.1 Structures d'argumentations construites par les élèves à partir des procédures de résolution utilisées

Dans la suite, nous considérerons pour chaque stratégie décrite les argumentations qui ont été développées par les élèves et les preuves correspondantes pour analyser leurs structures.

Nous considérons la stratégie « Exploration des cas particuliers du triangle ABC + mesure + construction des hauteurs pour comparer les aires » avec la stratégie « Construction des hauteurs pour comparer les aires ». En fait, l'argumentation déductive par cas de la première stratégie a été complètement abandonnée par les élèves. La preuve que les élèves ont construit est à mettre en relation avec l'argumentation abductive de la construction des hauteurs pour comparer les aires.

Nous ne prenons pas en compte la stratégie où les élèves ont utilisé le théorème de la médiane car la preuve n'a pas été construite. La seule argumentation ne permet pas une analyse sur la continuité/écart structurel entre argumentation et preuve.

En résumant nous considérons les argumentations des quatre types des stratégies :

- Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires (et Exploration des cas particuliers du triangle ABC + mesure + construction des hauteurs pour comparer les aires).
- Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC.
- Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC + construction de la hauteur pour comparer les aires.
- Méthode trigonométrique.

2.1.1.1 Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires

Dans cette section nous prenons en considérations les binômes qui ont utilisé les stratégies suivantes :

- « Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires ». Il s'agit de 3 binômes italiens et de 2 binômes français.
- « Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC + mesure + construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires » Il s'agit de 2 binômes italiens. Evidemment ici nous prenons en compte la partie « Mesure + Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires ».

Au total il s'agit de 7 binômes.

La plupart des pas des argumentations observées sont abductifs. C'est pourquoi nous avons classé comme abductives toutes les argumentations analysées. Nous n'avons aucun exemple d'argumentation déductive à partir de ces stratégies de résolution.

Tous les binômes qui ont utilisé ces stratégies ont construit une preuve.

Dans la suite, nous présentons trois exemples d'analyse d'argumentation et de preuve pour en étudier les continuités ou les écarts structurels.

En particulier, nous fournissons trois exemples d'analyse :

1. Continuité structurelle : Argumentation abductive et preuve en partie encore abductive ; unité cognitive structurelle.
2. Ecart structurel : Argumentation abductive et preuve déductive mais sans symptôme de rupture cognitive structurelle.

3. Ecart structurel : Argumentation abductive, preuve déductive avec la présence de symptômes de rupture cognitive structurelle.

Continuité structurelle : Argumentation abductive et preuve en part encore abductive

Binôme : Nicola (N), Christian (C), classe de 3^e année du lycée (16/17 ans, Première en France).

L'argumentation et la démonstration est traduite de l'italien au français (dans l'annexe 2.1 on trouve l'argumentation originale et la copie des élèves)

Nous débutons l'analyse par l'énoncé E_6 où les élèves ont explicité la conjecture au moyen de l'outil « mesure » du logiciel. Les énoncés précédents sont relatifs à l'exploration sur les cas particuliers du triangle ABC. Les élèves ont abandonné cette stratégie en calculant les aires dans le cas où ABC est un triangle quelconque.

En ce moment, les élèves comparent les aires du triangle ABC et d'un des triangles extérieurs : le triangle ECL (dans la figure ci-dessous). Ils calculent les aires et ils s'aperçoivent qu'elles sont égales. L'énoncé E_6 est un fait dont la valeur épistémique est liée à un résultat de calcul. Les élèves doivent chercher un rapport entre bases et hauteurs qui conserve l'aire.

L'argumentation qui suit est structurante, car l'énoncé de la conjecture a été déterminé comme fait.

Argumentation des élèves	Analyse
<p><i>Les élèves calculent les aires des triangles</i></p> <p>103. C : les aires sont toujours égales entre elles... avec la calculatrice les calculs marchent</p> <p>104. N : maintenant nous devons démontrer</p> <p>105. C : il faut trouver comment la base change avec la hauteur ... s'il y a un rapport qui garde l'aire constante...</p> <p>106. N : il faut trouver une liaison avec le triangle intérieur... en changeant celui-là les aires restent constantes</p> <p>107. C : l'aire est constante... mais je n'arrive pas à voir... alors nous devons trouver base par hauteur égal à base par hauteur de l'autre triangle.</p> <p>108. N : nous pourrions garder les bases constantes et faire varier les hauteurs.</p>	<div data-bbox="826 1391 1177 1760" data-label="Image"> </div> <p>E_6 : Les aires des triangles sont égales <i>L'énoncé est un fait.</i></p> <p><i>Pour justifier ce fait, les élèves cherchent un rapport entre bases et hauteurs qui garde l'aire constante.</i> <i>Le pas d'argumentation est une abduction:</i></p>

<p>115. C : mais pourquoi les hauteurs sont égales ? 116. N : nous avons.... nous avons la même base et Oui c'est vrai, nous devons prouver qu'ils ont la même hauteur..... mais nous avons que ce côté est égal à ce côté de ABC... 117. C : alors le petit triangle est égal à l'autre petit triangle... 118. N : attends attends...oui c'est vrai, les deux côtés sont égaux, ensuite 119. C : ensuite il y a l'angle de 90° 120. N : il faut un autre côté ou un autre angle... par exemple cet angle est pareil à celui-là parce que</p>	<p>? D₆ : rapport $\xrightarrow{\quad}$ E₆ : les triangles ont la même aire qui garde l'aire constante</p> <p>P: formule de l'aire</p> <p><i>Si les rapports doivent être constants, les hauteurs doivent être égales car les bases sont égales. Le pas d'argumentation est encore une abduction :</i></p> <p>D₇ : bases égales $\xrightarrow{\quad}$ E₇ : D₆ ? hauteurs égales</p> <p>P: transitivité de l'égalité</p> <p><i>Les élèves doivent justifier pourquoi les hauteurs sont égales. C'est pourquoi ils doivent considérer les petits triangles $\triangle ANC$ et $\triangle DEC$ construits sur les hauteurs. S'ils sont égaux, les hauteurs sont égales.</i></p> <p>? D₈ : deux petits triangles égaux $\xrightarrow{\quad}$ E₈ : D₇</p> <p>P: héritage l'égalité</p> <p><i>L'égalité des deux petits triangles peut être justifiée par le théorème d'égalité. Il est nécessaire de trouver les données pour appliquer le théorème. Le pas argumentatif est encore une abduction.</i></p> <p>? D₉ $\xrightarrow{\quad}$ E₉ : D₈</p> <p>P: théorème d'égalité entre triangles</p> <p><i>Comme dans l'exemple précédent les élèves cherchent les données pour appliquer le théorème d'égalité et justifier l'égalité des deux petits triangles.</i></p>
---	--

La structure de l'argumentation est abductive. D'après le calcul, les élèves sont conscients que les aires des deux triangles sont égales. Donc ils cherchent un rapport entre bases et hauteurs des triangles qui soit constant (argument 6). La comparaison entre hauteurs renvoie, cette fois-ci explicitement, à une comparaison des petits triangles ANC et EDC construits sur les hauteurs. Les triangles sont égaux si on peut appliquer un des théorèmes d'égalité. Donc les élèves cherchent les données pour appliquer le théorème d'égalité (argument 8 et argument 9). La preuve construite par les élèves contient des traces d'abduction.

Preuve des élèves	Analyse
<p>Les élèves considèrent les triangles ABC et ELC</p> <p>Nous savons que la base est égale à celle du triangle ABC par construction. Maintenant <u>il faut prouver</u> que les hauteurs sont égales. On a pu vérifier ça avec l'égalité entre triangles qui est démontrée sur la feuille avec le dessin.</p> <p>Sur la feuille avec le dessin: Le triangle ANC = triangle EDC EC=AC EDC=ANC=90° ACN=ECD car ACE=90°, DCN=90° et si on soustrait l'angle DCA aux deux angles on obtient le même angle.</p>	<p>La structure de la démonstration présente encore des traces d'abduction.</p> <p>D₆ : bases égales ? hauteurs égales → E₆ : les triangles ont la même aire</p> <p>P: formule de l'aire</p> <p>D₈ : $\triangle ANC = \triangle EDC$ → E₈ : hauteurs égales</p> <p>P: héritage d'égalité</p> <p>D₉ : EC=AC $\angle EDC = \angle ANC = 90^\circ$ $\angle ACN = \angle ECD$ → E₉ : $\triangle ANC = \triangle EDC$</p> <p>P: théorème d'égalité entre triangles</p>

La rédaction de la preuve décrit le raisonnement abductif fait par les élèves. Un écart structurel est nécessaire pour passer de l'argumentation abductive à la preuve déductive. Cet écart n'a pas été complètement couvert par les élèves : l'argument 6 est encore un pas abductif. Nous pouvons observer une unité cognitive structurelle entre argumentation et démonstration. Les règles contractuelles sur la démonstration ne sont pas trop rigides dans cette classe (3^e année du lycée). Aux élèves est demandé de construire une preuve déductive, mais la plupart d'entre eux a fourni des preuves encore abductives.

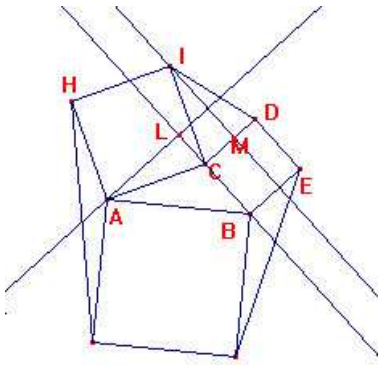
Ecart structurel : Argumentation abductive et preuve déductive

Binôme : Giulia (G), Luisa (L), classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

L'argumentation et la démonstration sont traduites de l'italien au français (dans l'annexe 2.2 on trouve l'argumentation originale et la copie des élèves).

Nous débutons l'analyse à partir de l'argument E₆ où les élèves décident de comparer les bases et les hauteurs des triangles pour en comparer les aires. À ce moment, les élèves comparent les aires du triangle ABC et d'un des triangles extérieurs : le triangle IDC (dans la figure ci-dessous). Elles construiront les hauteurs des deux triangles afin de comparer leurs aires. En fait, elles remarquent que les bases BC et CD sont égales. Et en conséquence pour comparer les aires des deux triangles elles doivent comparer leurs hauteurs.

On remarque que l'argumentation est constructive, c'est-à-dire que les élèves essaient de déterminer la conjecture.

Argumentation des élèves	Analyse
<p><i>L bouge la figure sur Cabri: le triangle sur l'écran est un triangle quelconque.</i></p> <p>21. G: mais si on considère les bases des triangles les deux côtés qui sont égaux...</p> <p>22. L: les deux côtés du carré?</p> <p>23. G: oui et si on construit les hauteurs, on peut comparer les seules hauteurs afin de comparer les aires</p> <p>24. L: oui, je comprends, tu veux dire de comparer les hauteurs pour comparer les aires parce que les bases sont égales.</p> <p>...Les élèves construisent les hauteurs des triangles $\triangle ABC$ et $\triangle IDC$</p> <p>31. L : Je suis en train de prolonger la droite, oui, la droite sur ce segment... qu'est-ce que je dois faire ?</p> <p>32. G : la droite par les points B et C</p> <p>33. L : ah c'est vrai !</p> <p>34. G : puis il faut faire la perpendiculaire à celle-là</p> <p>35. L : ah voilà, mais tu sais qu'elles semblent être presque...</p> <p>36. G : presque pareilles !</p> <p>37. L : non, plus qu'égales : elles semblent être perpendiculaires, je l'avais déjà observé tout à l'heure.</p> <p>50. Élèves ensemble : eh ces deux triangles sont égaux !</p> <p>51. L : c'est vrai, $\triangle ALC$ et $\triangle ICM$ alors ces deux triangles qu'est ce qu'ils ont ?</p> <p>52. G : Nous considérons... alors AC est égal à IC parce qu'ils sont côtés du même carré</p> <p>53. L : attends !</p> <p>54. G : AC est égal à IC parce qu'ils sont côtés du carré, puis</p> <p>55. L : LC...</p> <p>56. G : il est égal à CM, pourquoi ?</p> <p>57. L : Alors ... Pourquoi il est égal à CM ? ... Selon moi c'est mieux de prouver... non attends cet angle est droit et cet angle aussi est droit</p> <p>58. G : Pourquoi ?</p> <p>59. L : Parce que ce sont les hauteurs n'est-ce pas ?</p> <p>60. G : donc elles sont perpendiculaires et puis il faut un</p>	<p>Les élèves observent que les bases CB et CD des deux triangles sont égales. Donc, pour la formule de l'aire, la comparaison entre aires peut être déterminée à partir de la comparaison entre hauteurs.</p> <p>On modélise le discours des élèves avec le modèle de Toulmin. La structure de l'argument est une abduction (les élèves semblent supposer l'égalité des aires comme cela apparaît dans l'int. 37).</p> <p style="text-align: center;"> $D_6 = ?$ \longrightarrow E_6 : comparaison entre aires P: formule de l'aire </p> <p>Afin de construire la donnée D_6 les élèves construisent les hauteurs. L'explicitation de la donnée D_6 permettra de donner une réponse à la question des aires.</p>  <p>E₇: les hauteurs (AL et IM) semblent être égales E₈: les hauteurs (AL et IM) semblent être perpendiculaires</p> <p>Les énoncés E₇, E₈ décrivent les "faits" dont la valeur épistémique est liée à la perception de la figure dans Cabri.</p> <p>Le « drag » de Cabri permet aux élèves de voir les deux petits triangles ($\triangle ALC$ et $\triangle ICM$) égaux. Les élèves s'aperçoivent que les hauteurs font partie des deux triangles égaux. L'énoncé explicite encore un "fait".</p> <p>E₉ : les triangles ($\triangle ALC$ et $\triangle ICM$) sont égaux</p> <p>La nécessité de justifier l'égalité entre triangles, amène les élèves à chercher des côtés et des angles égaux pour appliquer le théorème d'égalité.</p> <p>La structure argumentative est encore une abduction:</p> <p style="text-align: center;"> $D_9 = ?$ \longrightarrow E_9 P: théorème d'égalité </p>

<p>côté ou un angle, il faut trouver un autre angle ou on est obligé de trouver un autre côté</p> <p>61. L : par le deuxième théorème d'égalité n'est-ce pas ? 62. G : eh oui 63. L : mais alors on peut trouver un autre angle 64. G : alors l'angle... 65. L : celle-ci et celle-là ou bien celle-ci et celle-là 66. G : ces deux angles ne sont pas complémentaires ou supplémentaires à cet angle ? 67. L : non 68. G : si, si, cet angle est droit, ACI est droit, il est l'angle droit du carré, alors l'angle ACL + LCI est 90° et MCI + ICL est 90° donc ils sont complémentaires 69. L : oui, oui, ils sont complémentaires 70. G : alors ça va, ils sont égaux</p>	<p><i>Les élèves considèrent un côté, l'angle droit et un deuxième angle.</i></p> <p>D₉ : AC = IC E₉ : les triangles <ALC = <IMC ΔALC et ΔICM sont ? <ACL = <ICM égaux</p> <p>P: théorème d'égalité</p> <p><i>Les élèves doivent prouver que les angles sont égaux. Ils n'ont pas à disposition ni les données ni le permis d'inférer. Il s'agit d'un autre pas abductif (abduction créative) :</i></p> <p>D₉ : = ? E₉ : <ACL = <ICM P: ?</p> <p><i>Les deux angles sont complémentaires du même angle. Le permis d'inférer et les données sont finalement trouvées.</i></p> <p>D₉ : E₉ : <ACL = <ICM <ACL + <LCI = 90° <MCI + <ICL = 90°</p> <p>P: angles complémentaires sont égaux</p>
---	--

La structure de l'argumentation est une abduction, en particulier trois abductions sont construites. Les élèves observent que les bases des deux triangles ABC et IDC sont égales. Donc pour comparer les aires il faut comparer les hauteurs (argument 6). La comparaison entre hauteurs renvoie implicitement à une comparaison des petits triangles ALC et ICM ; ils sont égaux. Les élèves cherchent les données pour conclure ce fait (argument 9). La troisième abduction est la recherche de la troisième donnée pour appliquer le théorème d'égalité qui permet de conclure que les triangles ALC et ICM sont égaux (argument 9').

La preuve construite par les élèves est une déduction ; tous les pas abductifs sont transformés en pas déductifs.

Preuve des élèves	Analyse
<p>Je considère le triangle ABC et le triangle ICD. D'abord je considère les triangles ALC et ICM et je démontre qu'ils sont égaux par le deuxième théorème d'égalité parce qu'ils ont: - AC = IC parce que côtés du même carré - ALC = IMC parce que droits (angles formés par l'intersection entre le côté et la hauteur) - ACL = ICM parce que complémentaires d'un même angle (LCI)</p>	<p><i>La structure de la preuve est une déduction :</i></p> <p>D₉ : AC = IC E₉ : les triangles <ALC = <IMC ΔALC et ΔICM sont <ACL = <ICM égaux</p> <p>P: théorème d'égalité</p>

<p>angle (LCI) En particulier $IM = AL$. Donc les triangles ABC et ICD ont la même base (parce que côtés du même carré) et même hauteurs, donc ils ont la même aire.</p>	<p><i>Si les triangles sont égaux on peut conclure que les hauteurs sont égales et donc les aires, car les bases sont égales.</i></p> <p>$D_{10} : E_9$ \longrightarrow $E_{10} : \text{les hauteurs sont égales}$</p> <p>P: héritage d'égalité</p> <p>$D_{11} : E_{10}$ et égalité des bases \longrightarrow $E_{11} : \text{les aires des triangles } \triangle ABC \text{ et } \triangle ICD \text{ sont égales}$</p> <p>P: formule de l'aire</p>
---	---

La preuve des élèves est une preuve déductive. Un écart structurel a été nécessaire pour passer de l'argumentation abductive à la preuve déductive. L'analyse n'a pas relevé de symptômes de difficulté pour accomplir ce passage. En conséquence, même s'il y a un écart entre structure d'argumentation et structure de preuve, il n'y a pas rupture cognitive structurelle.

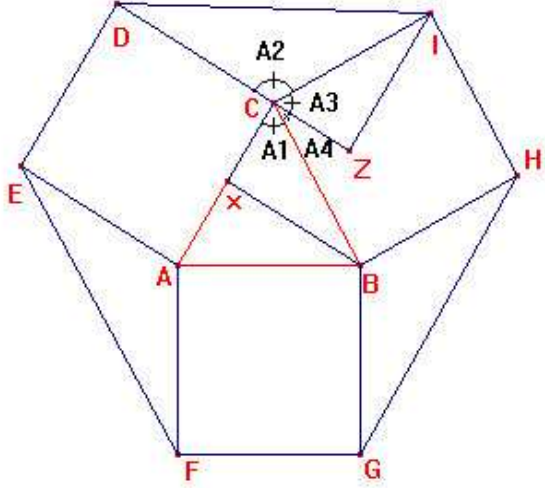
Cependant, les élèves considérées ici font partie d'une classe où le contrat didactique stipule que les preuves non déductives ne sont pas acceptées comme valides. Aucun binôme de la classe n'a consigné une preuve encore abductive. Certains élèves de cette classe ont construit des argumentations correctes qu'ils n'ont pas écrites comme preuves car probablement ils n'ont pas eu le temps de l'écrire dans une forme rigoureuse (ils ont eu seulement 1h). De plus, aucun de ces binômes n'a utilisé la mesure pour calculer les aires. Dans le contrat didactique de la classe, la démonstration ne peut pas s'appuyer sur l'outil « mesure ».

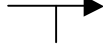
Écart structurel : Argumentation abductive et preuve déductive

Binôme : Julien (J), Cyril (C), classe Seconde en France.

L'argumentation et la démonstration sont en français (dans l'annexe 2.3 on trouve le dialogue et la copie des élèves).

Nous débutons l'analyse presque au début de l'expérimentation. Les élèves calculent les aires et ils découvrent qu'elles sont égales. L'argumentation qui suit est alors une argumentation structurante. Les élèves décident de construire les hauteurs pour comparer les aires. On trouve tout de suite une première abduction : pour comparer les aires des deux triangles les élèves doivent comparer leurs hauteurs. Considérons l'analyse suivante.

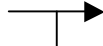
Argumentation des élèves	Analyse
<p>Les élèves calculent les aires des triangles et ils découvrent qu'elles sont égales.</p> <p>13. C : alors, il faut comparer les aires de chacun des trois triangles avec l'aire du triangle ABC</p> <p>....</p> <p>16. J : et oui, c'est dur ici, ah d'accord les aires sont égales</p> <p>....</p> <p>18. J : Ah mon avis il faut dire pourquoi elles sont égales</p> <p>....</p> <p>23. C : de toute façon il faut trouver des égalités quelconques</p> <p>24. J : ils ont un côté en commun et ça c'est la même longueur...</p> <p>25. C : les deux triangles ont un côté en commun, maintenant il faut trouver une hauteur en commun et on sera content</p>	<p>L'énoncé est un fait. C'est l'oracle de la mesure de Cabri qui permet aux élèves de trouver tout de suite la réponse au problème.</p> <p>E₁ : les triangles ont la même aire</p> <p>Après une brève exploration, les élèves construisent le premier pas de l'argumentation.</p> <p>Dans le modèle de Toulmin il peut être ainsi modélisé :</p> <p>? D₁ : hauteurs égales E₁ : Les aires de deux triangles sont égales</p> <p>Bases égales</p> <p>P: formule de l'aire</p> <p>Le pas est abductif: les hauteurs doivent être égales parce que les aires et les bases des triangles sont égales.</p> <p>Ils doivent trouver pourquoi les hauteurs sont égales. On trouve une deuxième abduction.</p>
<p>Les élèves reprennent les considérations faites:</p> <p>64. C : regarde, ici la hauteur c'est... la hauteur de ce triangle (la hauteur IZ) c'est une droite qui passe par là, un segment je veux dire</p> <p>65. J : donc a priori c'est la même longueur que cette hauteur avec cette base là, a priori</p> <p>66. C : par contre il faut démontrer...</p> <p>67. J : oui, voilà</p> <p>68. C : et comme ils ont la même aire, ils ont une base et une hauteur en commun, c'est obligé</p>	<p>? D₂ E₂ : Hauteurs égales</p> <p>P: ?</p> <p>Dans ce cas les élèves doivent chercher les données et le permis d'inférer pour prouver que les hauteurs sont égales (abduction créative).</p> <p>La manipulation sur Cabri-géomètre permet de visualiser l'égalité entre les deux petits triangles ΔCZI et ΔCXB (dans la figure à côté).</p> <p>Les élèves voient que les angles A_1 et A_3 sont égaux. Ils affirment que les deux petits triangles sont égaux.</p>
	<p>D₃ : <A₁ = <A₃ E₃ = D₂ : les deux petits triangles sont égaux</p> <p>P</p> <p>Le permis d'inférer est implicite de la même façon que des autres données.</p> <p>Facilement, les élèves pensent aux propriétés du cosinus et du sinus, car plus loin dans le dialogue ils vont l'expliciter. En fait, les élèves peuvent voir sur la figure que les deux triangles ont un côté en commun, et les trois angles égaux.</p> <p>Cependant, une autre interprétation peut être que le permis d'inférer soit l'héritage d'égalité. En fait si les</p>

<p>101.J : attends, il faudrait que maintenant il faut faire... mais on est des idiots, attends regarde, alors ça c'est la hauteur d'accord ?</p> <p>102.C : oui, c'est la hauteur</p> <p>103.J : ... Il faut prouver que ce machin c'est égal à, on est des idiots on est vraiment des idiots, alors si cet angle là est A_1, donc c'est l'angle 1 d'accord ? Alors cet angle là est 180 moins A_1 et alors ça c'est quoi dans ce cas là ? C'est 180 moins A_1, donc de coup ce machin c'est ça, donc ce triangle c'est exactement celui-ci qui a la même hauteur.</p> <p>C : Ah, d'accord</p>	<p><i>triangles ont les angles égaux et les côtés égaux, on peut penser que les triangles sont égaux, même si les élèves ne connaissent pas les théorèmes d'égalité entre triangles.</i></p> <p><i>Si les triangles sont égaux leurs hauteurs sont égales aussi.</i></p> <p><i>C'est une déduction qui va apparaître ici, mais elle est l'inversion de l'argument 2 qui était une abduction.</i></p> <p>$D_2 : E_3$  $E_2 : \text{les hauteurs sont égales}$</p> <p>P: héritage de l'égalité</p>
---	--

L'analyse de l'argumentation n'est pas facile car les élèves laissent beaucoup d'implicites. Le discours des élèves n'est pas trop long ; les élèves français communiquent moins que les élèves italiens.

Cependant nous retrouvons ici les pas abductifs que nous avons déterminé dans les autres cas. Le calcul permet aux élèves d'explicitier la conjecture. Ils cherchent l'égalité entre hauteurs pour justifier l'égalité des aires (argument 1). Et finalement ils essayent de justifier l'égalité des petits triangles pour justifier l'égalité entre hauteurs (argument 2).

La preuve construite par Julien et Cyril, suit les pas de l'argumentation faite. Les pas sont écrits en chaîne déductive. Cependant, ils les ont découpés en morceaux dans la copie (annexe 2.3). De plus, même si les abductions sont transformées en déductions, il y a dans la preuve des pas qui ne sont pas justifiés.

Preuve des élèves	Analyse
<p>On démontre que $\angle A_1$ est égal à $\angle A_3$</p> <p>$\angle A_4 + \angle A_1 = 90^\circ$</p> <p>$\angle A_1 = 180^\circ - \angle A_2$</p> <p>$\angle A_3 = 180^\circ - \angle A_2$</p> <p>$\angle A_2 = 180^\circ - \angle A_3$</p> <p>$\angle A_1 = 180 - 180 + \angle A_3$</p> <p>$\angle A_1 = \angle A_3$</p> <p>On démontre que $ZI = XB$ (ZI hauteur de DCI et XB hauteur de ABC) Donc $ICZ = BCX$ car $CB = CI$ et $I = B$ car $I = 180 - A_3 - 90$ et $B = 180 - A_1 - 90$</p>	<p><i>L'ensemble d'énoncés est tiré par la figure que les élèves ont construite.</i></p> <p>$E_4 : \angle A_4 + \angle A_1 = 90^\circ$</p> <p>$\angle A_1 = 180^\circ - \angle A_2$</p> <p>$\angle A_3 = 180^\circ - \angle A_2$</p> <p>$\angle A_2 = 180^\circ - \angle A_3$</p> <p>$D_5 : E_4$  $E_5 : \angle A_1 = \angle A_3$</p> <p>P : somme et différence entre angles</p> <p><i>A partir des angles égaux les élèves prouvent que les hauteurs sont égales. Cependant, pour appliquer la règle du cosinus il est suffisant de prouver l'égalité des deux hypoténuses ($CI = CB$) et des angles entre les hypoténuses et les côtés en question ($\angle I = \angle B$). Les données utilisées pour l'inférence sont en surnombre comme montré dans la modélisation.</i></p>

liée à un écart du système de référence (dans le sens que la propriété du cosinus ne semble pas être bien connue par les élèves) et à un écart structurel. En fait, bien que la preuve soit déductive, ses pas sont écrit séparément l'un de l'autre (voir l'annexe 2.3). De plus, l'enchaînement des pas n'est pas fait de façon « nette » (la conclusion d'un pas n'est pas toujours prémisses dans le pas suivant, des fois les données sont trop par rapport au nécessaire, etc.). Ce découpage en morceaux, qu'on peut observer dans la rédaction de la preuve, est un symptôme de rupture cognitive structurelle. Probablement les difficultés pour couvrir cet écart structurel dépendent de l'expérience que les élèves ont avec la démonstration.

Comparaison avec les hypothèses

Les élèves qui ont utilisé cette stratégie (7 binômes) ont construit une preuve. Nous avons construit un tableau résumant les continuités/écarts structurels révélés par notre analyse.

Le tableau montre les nombres d'élèves ayant utilisé cette stratégie de résolution : construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires (compris la stratégie « Explorations sur les cas du triangle ABC + Mesure + Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires »).

Tous les élèves ont construit une argumentation abductive et 5 élèves sur 7 ont construit une preuve contenant encore des traces d'abduction.

Procédure de résolution : Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires				
Structure de l'argumentation	Structure de la preuve	Continuité/ Ecart structurel	Unité ou rupture cognitive structurelle	Construction d'une démonstration
Argumentation déductive 0 Binômes	/	/	/	/
Argumentation abductive 7 Binômes dont : 5 italiens 2 français	Preuve déductive 2 binômes dont : 1 italien 1 français	Ecart structurel	1 non RC structurel (italien) 1 possible RC structurelle (français)*	La démonstration a été construite
	Preuve abductive 5 binômes dont : 4 italiens 1 français	Continuité structurelle	UC structurelle	Le problème a été prouvé mais la preuve n'est pas une démonstration

*Possible rupture cognitive structurelle due à l'enchaînement des pas.

Comme prévu, la plupart des élèves analysés ont construit une preuve contenant encore des traces d'abduction. De plus, les élèves qui ont réussi à construire une preuve déductive sont :

- Luisa et Giulia, appartenant à une classe où la démonstration et sa rédaction ont été enseignées rigide-ment. Le contrat didactique très fort a empêché la consigne des preuves non déductives de la part des élèves les plus faibles.
- Julien et Cyril appartiennent à une classe de Seconde habituée à la démonstration. L'analyse a révélé la présence de difficultés pour la construction de la démonstration, ce qui nous a permis de supposer qu'une rupture cognitive structurelle est intervenue.

2.1.1.2 Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC

Presque tous les binômes italiens ont utilisé au moins en partie cette stratégie de résolution. Ils ont exploré le problème sur quelques cas spécifiques du triangle ABC, conduits par les opérateurs :

R_1 : Egalité entre triangles \Rightarrow Egalité entre aires

R_2 : Egalité entre triangles \Leftrightarrow Egalité entre aires

Au contraire, aucun élève français n'a utilisé cette stratégie de résolution.

Parmi les 28 binômes italiens, 23 binômes considèrent le problème réduit à des cas particuliers du triangle ABC. Entre eux, 2 abandonnent la stratégie pour construire les hauteurs des triangles afin de comparer les aires (nous les avons analysés à la section précédente 2.1.1.1) ; 4 utilisent le triangle équilatéral comme exemple générique (nous les analysons à la section suivante 2.1.1.3). Parmi les 17 binômes qui restent, 13 construisent une preuve déductive (pour chaque cas du triangle ABC) à partir de l'argumentation déductive par cas. Les autres écrivent des énoncés à propos des cas particuliers sans les justifier. Pour ceux qui ont construit une preuve nous avons observé une continuité structurelle. Nous présenterons un exemple d'analyse à la section suivante : le trinôme Massimiliano, Marco et Alessandro.

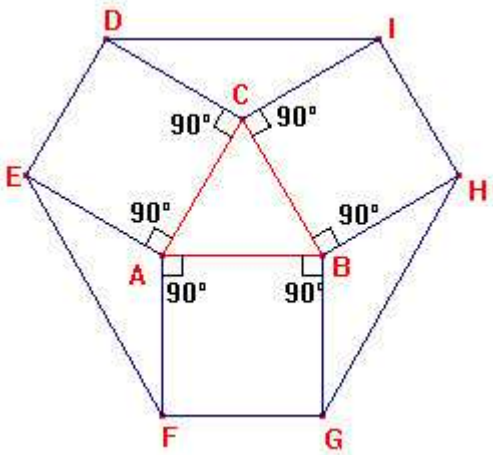
Ici nous voulons considérer un binôme qui a analysé le cas limite comme un des cas particuliers. Le cas limite est un cas à l'intérieur d'une argumentation déductive par cas. Nous présentons l'analyse de cet exemple.

Exemple d'argumentation par passage à la limite

Binôme : Silvia (S), Francesca (F), classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

L'argumentation et la preuve qui sont écrites sur la copie des élèves ont été traduites de l'italien au français (dans l'annexe 2.4 on trouve la copie originale des élèves).

Les élèves commencent la résolution du problème en considérant le cas limite comme cas particulier du triangle ABC. Le cas limite est un cas à l'intérieur d'une argumentation déductive par cas. Nous considérons directement la copie des élèves.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>En bougeant la figure et en déplaçant le point C sur le côté AB nous avons observé que le triangle ABC est aligné avec le côté AB, les trois autres triangles, formés par les extrémités libres des carrés, vont s'aplatir aussi.</p>  <p>Maintenant on veut démontrer que si on bouge le point C sur le côté AB de façon que le triangle ABC soit une ligne, alors aussi les trois autres triangles sont plats.</p>	<p>Le premier énoncé construit par les élèves est le suivant :</p> <p>E₁ : quand le triangle ΔABC est aligné avec le côté AB les autres triangles vont s'aplatir aussi.</p> <p>L'énoncé explicite un fait dont la valeur épistémique est donnée par la perception sur Cabri-géomètre.</p> <p>Les élèves essayent de justifier ce fait. La structure est la suivante :</p> <p>D₁ : le triangle ΔABC est aligné avec le côté AB \xrightarrow{P} E₁ : Les autres triangles sont aplatis aussi</p> <p>Le permis d'inférer est implicite.</p>

Il s'agit d'une argumentation à la limite située à l'intérieur d'une argumentation déductive (cf. l'annexe 2.4). Les élèves essayent de démontrer l'énoncé E₁.

Preuve des élèves	Analyse
<p>Par la propriété des triangles qui affirme que la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°, et si le triangle ABC est plat, l'angle en A est 0, et les deux côtés des deux carrés forment 180°, alors les triangles extérieurs sont plats.</p>	<p>« Si le triangle est plat, l'angle en A est nul ». Ici, le permis d'inférer est implicite. Il est possible qu'il soit lié au fait que l'angle entre deux droites superposées est nul, étayé évidemment par des aspects perceptifs.</p> <p>D₂ : le triangle ΔABC est aligné avec le côté AB \xrightarrow{P} E₂ : l'angle en A est = à 0</p> <p>P : angle entre deux lignes superposées est 0</p> <p>Quand ΔABC est « aplati » sur le côté AB, l'angle en A est nul et les angles droits des carrés restent constants. En conséquence l'angle du triangle extérieur mesure 180°.</p>

	<p><i>Le permis d'inférer trouvé est le théorème relatif à la somme des angles intérieurs d'un triangle. En fait, il permet aux élèves de prouver l'énoncé E_1.</i></p> <p>$D_3 : E_2$ → $E_3 : \text{l'angle extérieur est } 180^\circ$</p> <p>P : la somme des angles intérieurs du triangle est 180°</p> <p>$D_4 : E_3$ → $E_4 : E_1 : \text{Les triangles extérieurs sont plats}$</p> <p>P : la somme des angles intérieurs du triangle est 180°</p> <p><i>Evidemment, ce permis d'inférer ne peut pas fonctionner dans les autres cas, c'est-à-dire qu'il ne permet pas la généralisation.</i></p>
--	--

Si le triangle ABC est aplati, alors tous les autres triangles sont plats. Quand l'aire du triangle ABC est nulle, les aires des autres triangles sont nulles également. Les élèves ont prouvé cela au moyen du théorème sur les angles intérieurs d'un triangle.

Ensuite les élèves considèrent les cas où ABC est un triangle équilatéral, puis un triangle isocèle. Evidemment, nous avons observé un écart au niveau du système de référence entre la propriété utilisée au cas limite et la propriété utilisée dans les cas qui suivent. En fait, la propriété sous-jacente à l'exploration dans les autres cas est l'opérateur R_2 : Egalité entre triangles \Leftrightarrow Egalité entre aires.

L'argumentation reste une argumentation déductive par cas même si le système de référence n'est pas le même partout. D'une certaine façon, contrairement à nos hypothèses de départ, il est possible d'avoir une continuité structurelle même si un écart du système de référence est présent.

Comparaison avec les hypothèses

17 élèves ont utilisé cette stratégie ; dont 13 ont construit une preuve.

Le tableau montre un résumé des considérations faites à propos de l'exploration sur des cas particuliers du triangle ABC. L'argumentation associée à cette stratégie de résolution est l'argumentation déductive.

On a observé une continuité structurelle.

Procédure de résolution				
Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC				
Structure de l'argumentation	Structure attendue de la preuve	Continuité / écart structurel	Unité ou rupture cognitive structurelle	Construction de la démonstration
Argumentation déductive 17 binômes	Aucune preuve 4 binômes			
	Preuve déductive 13 binômes	Continuité structurelle	UC structurelle	La démonstration n'est pas construite
Argumentation déductive par cas + passage à la « limite » 1 binôme	Preuve déductive par cas + preuve du passage à la « limite » 1 binôme	Continuité structurelle	UC structurelle	La démonstration n'est pas construite

L'argumentation déductive par cas et l'argumentation déductive à la limite se trouvent ensemble dans la même argumentation. Dans ce cas, le cas limite est un des cas possibles envisageables par les élèves. L'opérateur qui marche dans le cas limite ne marche pas dans les autres cas. Cependant la structure de l'argumentation et de la preuve reste une argumentation déductive par cas.

Contrairement à ce à quoi nous nous attendions, aucun binôme n'a utilisé le cas limite comme vérification des considérations déjà faites dans les autres cas.

2.1.1.3 Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC + construction de la hauteur pour comparer les aires

Quatre binômes ont utilisé cette stratégie. D'abord, ils ont considéré des cas particuliers du triangle ABC. Ils ont cherché dans tous les cas les triangles égaux conduits par les opérateurs :

R_1 : Egalité entre triangles \Rightarrow Egalité entre aires

R_2 : Egalité entre triangles \Leftrightarrow Egalité entre aires

L'exploration sur le triangle équilatéral a permis le passage d'une argumentation déductive par cas à une argumentation inductive par cas. Le cas où ABC est un triangle équilatéral est l'exemple générique qui permet de généraliser la conjecture au cas où ABC est un triangle quelconque et permet aux élèves de s'éloigner de l'opérateur R_1 ou R_2 , pour considérer les petits triangles construits sur les hauteurs. Dans le cas où le triangle ABC est équilatéral, la moitié du triangle ABC est équivalente à la moitié d'un des triangles extérieurs. Les aires des quatre triangles sont égales. Cela amène les élèves à penser que dans le cas où ABC est un triangle quelconque les aires sont probablement égales. L'exploration des élèves change : ils ne cherchent plus des triangles égaux pour déterminer les aires égales. Dans le cas où ABC est équilatéral, leur attention se déplace sur les petits triangles qui composent le triangle ABC et un des triangles extérieurs. La considération des petits triangles est reprise dans le cas où

ABC est un triangle quelconque. L'égalité des petits triangles construits sur les hauteurs permet d'inférer que les hauteurs sont égales et donc, par la formule de l'aire, que leurs aires sont égales (les bases sont égales car côtés du même carré). La stratégie utilisée est la construction des hauteurs pour comparer les aires. L'argumentation change encore : elle devient une abduction (comme nous l'avons décrit dans la section 2.1.1.1)

Nous avons remarqué que seulement deux binômes (Giacomo et Uros, Michela et Valentina) ont fourni une preuve dans le cas où le triangle ABC est quelconque. Ils ont construit une argumentation inductive par cas (exploration sur les cas particuliers du triangle ABC), une argumentation abductive (construction des hauteurs pour comparer les aires), une preuve déductive dans le cas général.

Un binôme (Federico et Stefano) et un trinôme (Massimiliano Marco et Alessandro) ont construit une preuve pour le cas particulier du triangle ABC équilatéral et ils ont généralisé avec une argumentation, au cas où ABC est un triangle quelconque. Ils ont fourni une argumentation inductive par cas (exploration sur les cas particuliers du triangle ABC), une preuve inductive par cas (pour les cas particuliers du triangle ABC), une argumentation abductive sur le cas général (construction des hauteurs pour comparer les aires). Les argumentations et les preuves inductives par cas sont composées d'argumentations et de preuves deductives (comme nous l'avons prévu au cours de l'analyse a priori).

Le trinôme (Massimiliano, Marco et Alessandro) a construit une preuve déductive pour tout les cas du triangle ABC (à exception du triangle générique).

Ces derniers élèves n'ont probablement pas eu le temps de construire une démonstration dans le cas où ABC est un triangle quelconque. En fait, ils ont construit les autres preuves en chaîne déductive. C'est pourquoi nous n'avons pas de raisons de croire qu'ils auraient eu des difficultés à construire une preuve déductive dans le cas générique. De plus, tous les éléments théoriques nécessaires pour la démonstration ont été déterminés.

Du point de vue de la continuité/écart structurel, nous avons observé deux types d'écarts :

- Écart structurel entre argumentation abductive et preuve déductive. Les élèves qui ont construit une argumentation inductive par cas, une argumentation abductive et une preuve déductive sur le cas général ont dû faire face à deux écarts structurels : un écart entre argumentation inductive par cas et argumentation abductive et un écart entre argumentation abductive et preuve déductive. L'écart en question est évidemment le même que celui décrit dans la section 2.1.1.1.

- Ecart structurel entre argumentation (et preuve) inductive par cas et argumentation abductive. Pour les élèves qui ont construit une argumentation inductive par cas, une preuve inductive par cas et une argumentation abductive, nous avons observé une continuité entre argumentation et preuve inductive par cas, et un écart entre preuve inductive par cas et argumentation abductive. Nous pensons que les raisons de l'absence de démonstration doivent être recherchées dans le manque de temps.

Pour les deux premiers binômes, nous avons seulement à notre disposition les copies et une partie d'enregistrement pour un des deux binômes (Giacomo et Uros). L'analyse du passage de l'argumentation à la preuve est analogue à celle décrite dans le paragraphe précédent.

Dans la suite nous présentons un exemple d'analyse d'écart structurel entre preuve inductive par cas et argumentation abductive. Nous présentons la copie et l'argumentation du trinôme.

Ecart structurel entre argumentation (et preuve) inductive par cas et argumentation abductive.

Trinôme : Massimiliano (Mas), Marco (Mar) et Alessandro (A), classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

L'argumentation et la démonstration sont traduites de l'italien au français (dans l'annexe 2.5 on trouve l'argumentation et la copie originale des élèves).

Dans la suite nous avons sélectionné une partie d'argumentation et nous avons transcrit la preuve fournie par les élèves. Par rapport à l'analyse des autres copies, nous n'avons pas divisé l'argumentation de la preuve parce que nous avons choisi de les transcrire en suivant le parcours chronologique choisi par les élèves.

Les élèves considèrent d'abord le cas où ABC est un triangle rectangle, ensuite le cas où ABC est un triangle isocèle et enfin le cas où ABC est un triangle équilatéral. L'exploration est conduite par la recherche des triangles égaux. L'opérateur R_1 (Egalité entre triangles \Rightarrow Egalité entre aires) conduit l'exploration. Pour chaque cas les élèves fournissent une preuve.

L'argumentation est brève ; trois énoncés peuvent être sélectionnés, un pour chaque cas.

Par contre la preuve est beaucoup plus longue.

Argumentation des élèves	Analyse
<p><i>Mar est en train de bouger la figure sur Cabri. Il cherche à trouver un triangle particulier.</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Mar : si le triangle est rectangle ? 2. Mas : Mais c'est pas nécessairement rectangle 3. Mar : oui mais s'il était rectangle... 4. A : attends attends... attends attends ... celui-ci 	<p><i>Les élèves considèrent d'abord $\triangle ABC$ triangle rectangle : ils observent que si $\triangle ABC$ est rectangle les deux triangles opposés sont égaux et donc ils ont la même aire :</i></p> <p>E_1 : Si le triangle est rectangle les deux triangles opposés sont égaux</p>

<p>est égal à celui-là, n'est-ce pas ? Il est en train de montrer un côté du triangle Parce qu'il a deux cotés égaux et un angle égal...</p> <p>5. Mas : ... et oui, déplace ici...</p> <p>Mar bouge le point A du triangle ...</p> <p>.....</p> <p>9. A : alors, oui ils sont égaux parce qu'ils ont deux cotés égaux, ehm... deux cotés et un angle égal, dans ce cas oui ...</p> <p>.....</p> <p>20. Mas : Alors, nous pouvons écrire... Qu'est ce qu'on va écrire ? Alors, si le triangle est rectangle...</p> <p>Alessandro commence à écrire pendant que Massimiliano dicte. Au contraire Marco bouge les points ABC. Il s'arrête quand il trouve le triangle ABC isocèle :</p> <p>67. Mar : si le triangle est isocèle, les triangles opposés aux cotés de base sont égaux</p> <p>68. Mas : quand il est isocèle ?</p> <p>69. Mar : quand il est isocèle il y a ces deux triangles égaux, les angles à la base sont égaux et ensuite il y a celui là (le coté)</p> <p>70. A : mais tous ensemble ils ne sont jamais égaux</p> <p>71. Mar : quand le triangle est équilatéral</p> <p>72. Mas : quand il est équilatéral... trois triangles égaux.</p> <p>Ensuite les élèves écrivent la démonstration</p>	<p>D'abord l'énoncé est un fait donné par Cabri-géomètre (4). On pourrait penser qu'il y a une abduction ici car on a la conclusion et on cherche les données pour justifier l'énoncé avec le théorème d'égalité. Cependant, la construction de la déduction est immédiate : Alessandro justifie l'énoncé tout de suite en utilisant le théorème d'égalité.</p> <p>D₁ : deux côtés égaux et l'angle opposé égal → E₁ : les deux triangles opposés sont égaux</p> <p>P: théorème d'égalité (SAS)</p> <p>Si le triangle est isocèle les élèves voient deux triangles égaux. Le théorème d'égalité est le permis d'inférer.</p> <p>E₂ : Si le triangle est isocèle les deux triangles extérieurs sont égaux</p> <p>D₂ : deux côtés égaux et l'angle opposé égal → E₂ : les deux triangles extérieurs sont égaux</p> <p>P: théorème d'égalité (SAS)</p> <p>De la même façon les élèves considèrent le triangle ΔABC équilatéral. L'énoncé reste un fait.</p> <p>E₃ : les trois triangles extérieurs sont égaux</p>
---	---

Les élèves construisent la preuve des énoncés relatifs aux cas de ABC triangle rectangle et aux cas de ABC triangle isocèle. Les preuves comme montré ci-dessous sont déductives et par rapport à l'argumentation précédente les élèves, explicitent tous les permis d'inférer.

Preuve des élèves	Analyse
	<p>Pendant la démonstration les élèves rendent plus fine l'argumentation : ils justifient les passages intermédiaires. La preuve est écrite selon une forme déductive. La modélisation de la preuve dans le modèle permet de voir tous les enchaînements.</p> <p>D'abord les élèves prouvent que l'angle $\sphericalangle A'CB''$ est de 90°. Donc ils considèrent les deux angles des carrés et l'angle droit du triangle ΔABC et pour différence des angles ils concluent.</p> <p>D₄: A'CAC' carré → E₄: A'CA=90°</p> <p>P: propriété du carré</p>

Dans le cas de ABC triangle rectangle, les élèves dessinent la figure (FIG. 1) et ils écrivent :

Démonstration

$\hat{A}'CA = 90^\circ$ parce qu'il est un angle de carré
 $\hat{B}'''CB = 90^\circ$ parce qu'il est un angle de carré
 $\hat{ACB} = 90^\circ$ par construction
 $\hat{A}'CA + \hat{B}'''CB + \hat{ACB} = 270^\circ$
 $360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$
 $\hat{A}'CB''' = 90^\circ$
 $A'C = AC$ parce que cotés du même carré
 $CB = CB'''$ parce que coté du même carré
 $\hat{A}'CB''' = \hat{ACB}$ par le théorème de congruence (SAS)

D_5 : $CBC'''B'''$ carré \rightarrow E_5 : $B'''CB = 90^\circ$

P: propriété du carré

D_6 : ACB triangle rectangle \rightarrow E_6 : $\hat{ACB} = 90^\circ$

P: propriété du triangle rectangle

D_7 : $E_4, E_5, E_6 \rightarrow E_7$: $\hat{A}'CA + \hat{B}'''CB + \hat{ACB} = 270^\circ$

P: somme entre angles

D_8 : $E_7 \rightarrow E_8$: $\hat{A}'CB''' = 90^\circ$

P: différence entre angles

Les élèves prouvent maintenant que les cotés des deux triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'CB'''$ sont égaux.

D_9 : D_4 : $A'CAC'$ carré \rightarrow E_9 : $A'C = AC$

P: propriété du carré

D_{10} : D_5 : $CBC'''B'''$ carré \rightarrow E_{10} : $CB = CB'''$

P: propriété du carré

Donc les élèves peuvent conclure:

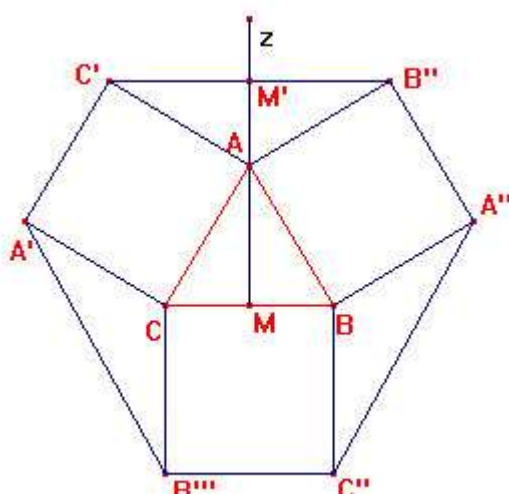
D_1 : $E_6, E_8, E_9, E_{10} \rightarrow E_1$: les deux triangles opposés sont égaux



P: théorème d'égalité (SAS)

Les élèves poursuivent la démonstration en considérant le cas de $\triangle ABC$ triangle isocèle.



Nous ne présentons pas cette partie de l'analyse, car elle est similaire à la précédente. La preuve est une déduction et tous les pas sont justifiés avec un permis d'inférer théorique.





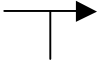


La continuité entre argumentation et démonstration est évidente pour tous les cas. Les preuves dans chaque cas sont déductives. Ensuite, les élèves considèrent le cas où le triangle ABC est équilatéral. Les élèves ont vu que dans ce cas les triangles extérieurs sont égaux. Ils n'ont pas prouvé les égalités entre les triangles extérieurs mais ils disent que la démonstration est semblable à celle utilisée pour les autres cas. Par contre, ils sont intéressés au triangle intérieur. Ils font des considérations sur les angles et ils construisent la hauteur.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>Les élèves considèrent le cas où le triangle ABC est équilatéral.</p> <p>177.A: et le triangle intérieur? Il est équilatéral 178.Mar: il n'est pas égal aux autres... 179.A: les angles mesurent 60 et les angles de l'autre (AC'B'').... celui opposé à l'angle de 60 est ... est 120 180.Mar: et les autres mesurent 30 181.A: mais si on dessine la hauteur même dans l'autre triangle</p> <p>Les élèves dessinent la figure suivante:</p>  <p>182.Mar: il me semble de ne rien voir 183.A: attends, ces deux petits triangles... cette moitié et cette moitié là sont égales 184.Mar: pourquoi ? 185.A: parce qu'il y a un côté en commun qui est celui là (AC et AC'), l'angle droit ($\angle AMC$ et $\angle AM'C'$)... 186.Mar: dans un triangle équilatéral la hauteur est</p>	<p>Les élèves considèrent le cas $\triangle ABC$ équilatéral. D'abord ils regardent les angles. Si $\triangle ABC$ est triangle équilatéral les angles mesurent 60°, les angles des triangles extérieurs mesurent alors 120° et 30°.</p> <p>D₂₄: ABC triangle équilatéral \rightarrow E₂₄: les angles intérieurs mesurent 60°</p> <p>P: propriété du triangle équilatéral</p> <p>D₂₅: E₂₄ \rightarrow E₂₅: l'angle opposé est de 120°</p> <p>P: différence d'angles</p> <p>D₂₆: E₂₅ \rightarrow E₂₆: les autres angles mesurent 30°</p> <p>P: propriété des angles intérieurs d'un triangle</p> <p>La construction des hauteurs déplace l'attention des élèves sur les petits triangles $\triangle AMC$ et $\triangle AMB$ qui constituent le triangle $\triangle ABC$ et les deux petits triangles $\triangle C'AM'$ et $\triangle B''AM'$ qui sont les deux moitiés d'un des triangles extérieurs.</p> <p>E₂₇: les deux petits triangles ACM et AC'M' sont égaux</p> <p>L'énoncé E₂₇ est un fait au début, mais la justification est immédiate, l'égalité entre les angles est explicitée.</p> <p>D₂₇: $AC = AC'$ $\angle AMC = \angle AM'C'$ $\angle ACM = \angle C'AM'$ \rightarrow E₂₇</p> <p>P: théorème d'égalité entre triangles</p>

<p>bissectrice... 187.A: oui mais alors... 188.Mas: les angles sont ... 189.A: celui mesure 120, donc la moitié mesure 60 c'est pareil à l'autre. 190.Mar: alors les triangles sont égaux 191.Mas: même les deux autre (ΔAMB et $\Delta AM'B''$) sont égaux et la somme des aires égales est une aire égale 192.Mar. Alors, écris.</p>	<p><i>Par « répétition » du raisonnement on peut déduire que les autres petits triangles sont égaux. Alors le triangle ΔABC et un des triangles extérieurs ont la même aire par somme des aires égales</i></p> <p>D₂₈ : E₂₇  E₂₈ : $\Delta AMB = \Delta AM'B''$</p> <p>P: « répétition »</p> <p>D₂₉ : E₂₇, E₂₈  E₂₉ : $\Delta ACB = \Delta AC'B''$</p> <p>P : somme des aires égales</p> <p><i>A ce moment les élèves écrivent la preuve.</i></p>
--	--

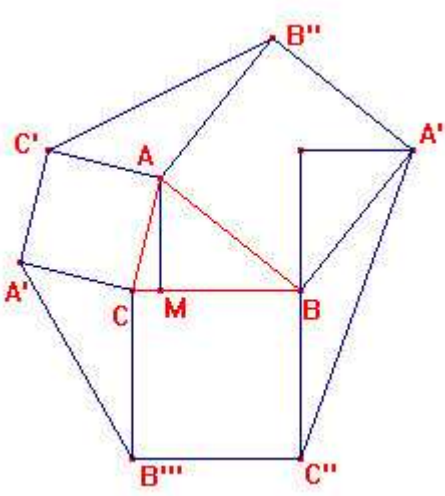
Comme dans les cas précédents, les élèves construisent la preuve de l'argumentation faite. Il y a encore continuité structurelle.
 Les élèves démontrent l'égalité des aires pour les quatre triangles dans le cas où ABC est un triangle équilatéral. Comme dans les cas précédents, la preuve est construite de façon très fine.



Preuve des élèves	Analyse
<p>Démonstration</p> <p>$\Delta CAM = \Delta C'AM'$ parce qu'ils ont un côté en commun, un angle de 90° formé par la perpendiculaire z, et l'angle de 60°</p> <p>$360 - (CAB + C'AC + B''AB) = C'AB''$ $360 - (60 + 90 + 90) = C'AB''$ $C'AB'' = 120$ par substitution</p> <p>$AC = C'A$ $AB = B''A$ Alors $C'A = B''A$ $\Delta C'AB''$ triangle isocèle</p>	<p><i>Les élèves démontrent l'égalité entre les deux petits triangles ΔCAM et $\Delta C'AM'$ pour pouvoir démontrer l'égalité des aires du triangle ΔABC et d'un triangle extérieur $\Delta AB'C'$ comme somme des aires égales.</i></p> <p>D₂₇ : AC = AC'  E₂₇ : $\angle AMC = \angle AM'C'$ $\angle ACM = \angle C'AM'$ $\Delta CAM = \Delta C'AM'$</p> <p>P: théorème d'égalité</p> <p><i>La démonstration est plus fine que l'argumentation. D'abord ils prouvent que l'angle $\angle C'AB''$ est de 120° Ils reprennent les arguments 24, 25 et 26 Ensuite les élèves montrent que le triangle $\Delta C'AB''$ est isocèle.</i></p> <p>D₃₀ : AC = A'C  E₃₀ : $\Delta C'AB''$ est isocèle.</p> <p>P: définition de triangle isocèle</p> <p><i>Si le triangle $\Delta C'AB''$ est isocèle la bissectrice est aussi médiane et alors les angles $\angle C'AM'$ et $\angle M'AB''$ sont égaux et de 60°.</i></p>

<p>M'A médiane parce que si le triangle est isocèle la médiane est bissectrice. $\angle C'AM' = \angle M'AB''$ parce qu'angles de bissectrice $\angle C'AM' = 60^\circ$</p> <p>$\angle CMA = 90^\circ$ parce qu'il est un angle de la médiane AM $\angle AM'C' = 90^\circ$ parce qu'il est un angle de la médiane AM' $\angle CMA = \angle AM'C'$ par substitution</p> <p>$\angle ACM = 60^\circ$ parce qu'il est un angle à la base de triangle équilatéral $\angle ACM = \angle C'AM'$ par substitution $\triangle ACM = \triangle C'M'A$ propriété des triangles rectangles $\triangle AMB = \triangle B'M'A$ par la même démonstration $\triangle ACM + \triangle ABM = \triangle C'M'A + \triangle AM'B''$ par somme des aires</p>	<p>D₃₁: E₃₀  E₃₁: M'A médiane et bissectrice</p> <p>P: propriété du triangle isocèle</p> <p>D₃₂: E₃₁  E₃₂: $\angle C'AM' = \angle M'AB'' = 60^\circ$</p> <p>P: définition de bissectrice d'un angle de 120°</p> <p><i>La médiane est aussi hauteur dans un triangle équilatéral, et donc :</i></p> <p>D₃₃: AM médiane  E₃₃: $\angle CMA = 90^\circ$</p> <p>P: médiane est hauteur dans un triangle équilatéral</p> <p>D₃₄: AM' médiane  E₃₄: $\angle AM'C' = 90^\circ$</p> <p>P: médiane est hauteur dans un triangle équilatéral</p> <p>D₃₅: E₃₃ E₃₄  E₃₅: $\angle CMA = \angle AM'C'$</p> <p>P: loi de substitution</p> <p><i>Le permis d'inférer est la transitivité identifiée par les élèves comme une loi de substitution.</i></p> <p><i>Finalement, les élèves prouvent que le triangle $\triangle ABC$ et le triangle $\triangle C'AB''$ sont équivalents. En fait les deux petits triangles $\triangle CMA$ et $\triangle AC'M'$ sont égaux car ils ont un angle droit, un angle de 60° et un côté en commun (argument 27). De la même façon les autres deux petits triangles sont égaux. Donc les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle AC'B''$ sont égaux par somme des aires égales.</i></p> <p>D₃₆: E₂₇  E₃₆: $\triangle AMB = \triangle B'M'A$</p> <p>P: « répétition »</p> <p><i>Les élèves ont identifié la correspondance entre les éléments des deux petits triangles.</i></p> <p>D₃₇: E₂₇ E₃₆  E₃₇: $\triangle ACM + \triangle ABM = \triangle C'M'A + \triangle AM'B''$</p> <p>P: somme des aires égales</p> <p><i>Les aires des deux triangles sont égales parce qu'elles sont sommes d'aires égales. Et les aires sont égales parce que les triangles sont égaux.</i></p>
---	--

Nous avons observé une continuité structurelle rendue encore plus visible par le fait qu'après chaque argumentation (une pour chaque cas du triangle ABC) les élèves ont construit la preuve correspondante. Il s'agit d'argumentations et de preuves déductives. La globalité de l'argumentation peut être considérée comme inductive par cas car l'énoncé de la conjecture (même si implicite) est tiré à partir des autres cas et en particulier à partir du cas où le triangle ABC est un triangle équilatéral.

D'une certaine façon, la résolution du problème dans ce cas a fonctionné comme exemple générique (Balacheff, 1988). A partir des cas démontrés, les élèves généralisent l'égalité des aires des triangles. De plus, le cas où ABC est équilatéral permet aux élèves de déplacer l'attention sur les petits triangles construits sur les hauteurs. La preuve ne peut pas être complètement généralisée, mais certains éléments de la preuve ont favorisé le passage de la stratégie « Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC » à la stratégie de la construction des hauteurs. La structure de l'argumentation change, elle devient une abduction. L'argumentation inductive par cas était une argumentation constructive de la conjecture, lorsque l'argumentation abductive est structurante.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>Pendant que les élèves écrivaient la démonstration, Marco a continué à bouger dans Cabri.</p> <p>236.Mar : si le triangle est générique ?... par exemple on peut comparer ces deux triangles (CBA e A"BC") On peut considérer les bases et les hauteurs ?</p> <p>237.A : Si on considère CB comme base et celle-là comme hauteur</p> <p>238.Mar : et dans l'autre triangle celle-là est la base qui est égale à l'autre, mais la hauteur ...</p> <p>239.A : il faut la dessiner</p> <p>240.Mar : ok je le fais</p> <p>Marco dessine la hauteur AM</p> 	<p>Les élèves pensent tout de suite à la formule de l'aire, ils fixent les bases et ils comparent les hauteurs.</p> <p>Dans le modèle de Toulmin l'argument est ainsi représenté :</p> <p>? D₄₁ : comparaison entre hauteurs → E₄₁ : comparaison entre aire</p> <p>P: formule de l'aire</p> <p>Les élèves construisent la hauteur. Ils sont conscients de devoir prouver que les hauteurs sont égales (int. 246-247) pour pouvoir démontrer que les triangles ont la même aire. Ils changent de stratégie : ils cherchent des aires égales même si les triangles sont différents. L'argument précédent devient:</p> <p>? D₄₁ : égalité entre hauteurs → E₄₁ : égalité entre les aires ABC et A''BC''</p> <p>P: formule de l'aire</p> <p>Il y a un raisonnement abductif : il suffit prouver que les hauteurs sont égales pour prouver que les aires sont égales.</p> <p>Le pas suivant est:</p>

<p>.A : Pratiquement il faut dire que ces hauteurs sont égales 247.Mas : bien sûr, base égale, hauteur égale, aire égale aussi.</p> <p><i>Ils pensent. Marco bouge la figure</i></p> <p>248.Mar : ces deux côtés sont toujours perpendiculaires 249.A : ces deux triangles... 250.Io : Les deux triangles sont égaux? 251.A : alors... ils ont 252.Mar : l'angle droit 253.A : ce côté 254.Mas : il manque l'angle 255.A : mais ces deux sont égaux 256.A : je ne sais pas pourquoi mais ça se voit <i>Ils pensent</i></p> <p>257.Mas : celui là mesure 90° parce qu'angle de carré 258.A : et celui là est ... 259.Mar : celui là est droit 260.A : ces angles sont droits... donc si j'enlève ce petit morceau de cet angle ou de celui là il ne change pas, donc les deux angles sont égaux 261.Mar : je n'ai pas compris 262.A : Par différence d'angles égaux ils sont égaux</p> <p><i>Les élèves écrivent:</i> Nous avons vu et démontré que même si le triangle est générique il y a un triangle extérieur égal au triangle ABC.</p>	<p>D₄₂ : ? les deux petits triangles sont égaux </p> <p>E₄₂ : D₄₁</p> <p>P: héritage de l'égalité</p> <p><i>Donc les élèves essayent de justifier l'égalité des deux petits triangles construits sur les hauteurs. On retrouve encore une abduction :</i></p> <p>D₄₃ : angle de 90° (int. 252) côté égal (int. 253) et ? </p> <p>E₄₃ : D₄₂</p> <p>P: théorème d'égalité entre triangles</p> <p><i>Les élèves observent que deux autres angles sont égaux par différences d'angles égaux, donc ils écrivent que les deux triangles considérés ont la même aire. Ils ne rédigent pas la démonstration dans ce cas, probablement ils n'ont pas eu le temps.</i></p>
---	--

La globalité de l'argumentation constructive de la conjecture peut être considérée comme une argumentation inductive par cas car le cas ABC équilatéral peut être considéré comme exemple générique.

Le cas où ABC est quelconque a demandé un écart du système de référence mais aussi un écart structurel par rapport à l'argumentation inductive par cas. La structure de l'argumentation dans le cas où ABC est un triangle quelconque est une abduction lorsque la structure utilisée pendant l'argumentation constructive est inductive par cas. Considérer le triangle ABC comme un exemple générique permet d'identifier l'argumentation constructive de la conjecture à une argumentation inductive par cas. Les caractéristiques de cette argumentation sont la généralisation de la conjecture au cas où ABC est un triangle quelconque et la généralisation de certains éléments réutilisés dans l'argumentation abductive (les petits triangles). L'écart structurel n'est pas seulement nécessaire entre argumentation et preuve (argumentation abductive et preuve déductive), mais aussi entre les deux argumentations : celle relative à l'examen sur plusieurs cas (argumentation inductive par cas) et celle relative à l'examen du cas général (argumentation abductive).

Il est difficile ici d'établir s'il y a eu une rupture cognitive structurelle ou si la rupture était seulement dans le système de référence. De toute façon, pour les élèves, la résolution du problème a demandé un gros effort.

Comparaison avec les hypothèses

Tous les élèves qui ont utilisé cette stratégie (4 binômes) ont construit une preuve. Nous avons construit le tableau pour résumer les continuités/écarts structurels que notre analyse a révélés.

En particulier deux binômes ont utilisé une argumentation inductive par cas, une preuve inductive par cas et une argumentation abductive. Deux autres binômes ont par contre construit une argumentation inductive par cas, une argumentation abductive et une preuve déductive.

Le tableau montre un résumé des considérations faites à propos d'une argumentation construite à partir de la stratégie « Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC + construction des hauteurs pour comparer les aires ». Le passage d'une stratégie à l'autre a été possible grâce à la considération du cas où le triangle ABC est équilatéral.

Procédure de résolution :				
Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC + construction des hauteurs pour comparer les aires				
Structure de l'argumentation	Structure de la preuve	Continuité/Ecart structurel	Unité ou rupture cognitive	Construction d'une démonstration
Argumentation inductive par cas + argumentation abductive 4 Binômes italiens	Preuve pour chaque cas Aucune preuve dans le cas où ABC est un triangle quelconque 2 binômes	Ecart structurel entre argumentation constructive et preuve non construite dans le cas où ABC est quelconque	?	Le problème n'a pas été démontré
	Preuve déductive pour le cas où ABC est un triangle quelconque 2 binômes	Ecart structurel entre argumentation constructive et preuve construite dans le cas où ABC est quelconque	?	Le problème n'a pas été démontré

Pour les élèves qui n'ont pas construit la preuve, nous ne pouvons rien conclure sur l'unité ou la rupture cognitive structurelle.

De la même façon, pour les élèves qui ont construit une preuve déductive à partir de l'argumentation abductive, nous ne sommes pas capables de tirer des considérations sur l'unité ou la rupture cognitive structurelle. En fait, nous n'avons pas une transcription

complète du dialogue des élèves, et les copies ne sont pas suffisantes pour une analyse cognitive structurelle.

2.1.1.4 Méthode trigonométrique pour comparer les aires

Deux binômes italiens ont utilisé cette stratégie de résolution.

Comme nous l'avions prévu dans l'analyse a priori, les deux argumentations que nous avons observées sont des argumentations déductives.

Les deux binômes ont travaillé au même endroit, mais ils n'ont pas interagit. Les deux ont terminé la tâche après 13 minutes.

L'argumentation et la preuve ne se distinguent pas, ainsi que la conjecture et l'énoncé du théorème correspondant. En fait les élèves ont utilisé tout de suite des formules trigonométriques.

Dans la suite nous présentons l'exemple de l'argumentation et de la preuve d'un binôme : Federico et Irene.

Continuité structurelle: Argumentation et preuve déductives

Binôme : Federico (F), Irene (I), classe de 5^e année du lycée (18/19 ans).

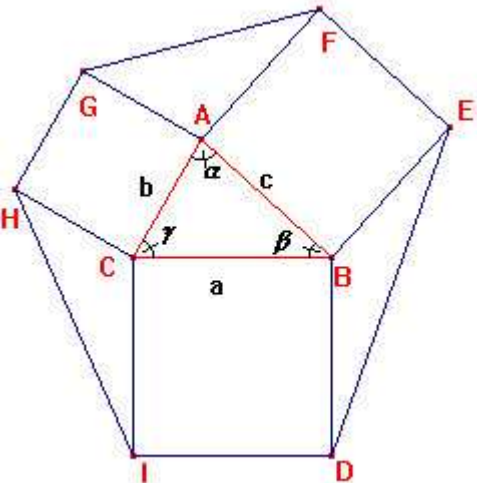
L'argumentation et la démonstration sont traduites de l'Italien au français (dans l'annexe 2.6 on trouve l'argumentation et la copie originale des élèves).






Dans la suite nous avons sélectionné une partie d'argumentation et nous avons transcrit la preuve fournie par les élèves. Par rapport à l'analyse des autres copies, nous n'avons pas divisé l'argumentation de la preuve parce que nous avons choisi de les transcrire en suivant le parcours chronologique choisi par les élèves.

L'utilisation des formules trigonométriques pour calculer les aires est à rechercher dans le programme scolaire. Cette séance a eu lieu quelques semaines après que la formule ait été présentée. C'est donc évidemment la raison qui a poussé les élèves à l'utiliser. De plus, les deux binômes considérés ici sont les seuls à avoir utilisé cette formule.

Au début, les élèves explorent la figure sur Cabri-géomètre, mais sans choisir une forme particulière du triangle ABC. En fait, ils pensent tout de suite à la formule trigonométrique pour calculer l'aire d'un triangle.

Une fois que les élèves déterminent les aires des quatre triangles à partir de la formule, ils ne considèrent plus la figure sur le logiciel.

Argumentation et preuve des élèves	Analyse
<p>Federico nomme les sommets et les angles de la figure et il commence à écrire pendant qu'il parle.</p>  <p>Le dialogue est le suivant:</p> <ol style="list-style-type: none"> 6. F : l'aire de ABC est un sur deux ac 7. I : quoi? 8. F : celui-ci est le côté a, celui-là est le côté c donc un sur deux ac sinβ 9. I : ah oui. <p>Les élèves écrivent la formule trigonométrique des aires pour tous les triangles. Dans la copie :</p> <p>Aire $\triangle ABC = \frac{1}{2} ac \sin \beta$ Aire $\triangle DBE = \frac{1}{2} ac \sin(180^\circ - \beta)$ Aire $\triangle HIC = \frac{1}{2} ab \sin(180^\circ - \gamma)$ Aire $\triangle GAF = \frac{1}{2} bc \sin(180^\circ - \alpha)$</p> <p>Pendant qu'ils parlent ils écrivent aussi</p> <ol style="list-style-type: none"> 31. F : alors, de la trigonométrie $\sin(180^\circ - \beta) = \sin 180^\circ \cos \beta - \sin \beta \cos 180^\circ$. Le cosinus de 180° est zéro, le sinus est un donc le résultat est égal à $\sin \beta$... 	<p>Après une brève exploration les élèves déduisent quatre énoncés qui dérivent directement de la formule trigonométrique de l'aire.</p> <p>$D_1 : \triangle ABC \rightarrow E_1 : \text{Aire } \triangle ABC = \frac{1}{2} ac \sin \beta$</p> <p>P : formule trigonométrique de l'aire</p> <p>$D_2 : \triangle DBE \rightarrow E_2 : \text{Aire } \triangle DBE = \frac{1}{2} ac \sin(180^\circ - \beta)$</p> <p>P : formule trigonométrique de l'aire</p> <p>$D_3 : \triangle HIC \rightarrow E_3 : \text{Aire } \triangle HIC = \frac{1}{2} ab \sin(180^\circ - \gamma)$</p> <p>P : formule trigonométrique de l'aire</p> <p>$D_4 : \triangle GAF \rightarrow E_4 : \text{Aire } \triangle GAF = \frac{1}{2} bc \sin(180^\circ - \alpha)$</p> <p>P : formule trigonométrique de l'aire</p> <p>Evidemment les structures des pas décrites sont des déductions. Les aires sont déduites directement à partir de la formule trigonométrique de l'aire.</p> <p>Ensuite les élèves comparent les aires des quatre triangles. Ils comparent tous les triangle extérieurs avec le triangle ABC.</p> <p>D'abord Federico explicite la propriété trigonométrique qu'il va utiliser.</p> <p>$D_5 : E_1, E_2 \rightarrow E_5 : \text{Aire } \triangle ABC = \text{Aire } \triangle DBE$</p> <p>P : formule trigonométrique $\sin(180^\circ - \beta) = \sin 180^\circ \cos \beta - \sin \beta \cos 180^\circ = \sin \beta$</p> <p>Pour appliquer la formule aux autres triangles ($\triangle HIC$ et $\triangle GAF$) l'aire du triangle $\triangle ABC$ doit être écrite de façon à pouvoir être comparée avec les aires des autres triangles. Il y a donc peut-être une abduction sous-entendue :</p> <p>« Comment est-il possible d'écrire l'aire du triangle $\triangle ABC$ de façon qu'elle puisse être comparée avec les aires des triangles $\triangle HIC$ et $\triangle GAF$ explicitées dans les énoncés E_3 et E_4 ? ».</p> <p>Dans le modèle de Toulmin cet argument est le</p>

<p>Les élèves utilisent la même formule pour les autres angles:</p> $\sin(180^\circ-\beta)=\sin 180^\circ \cos \beta - \sin \beta \cos 180^\circ=\sin \beta$ $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin \alpha$ $\sin(180^\circ-\gamma)=\sin \gamma$ <p>37. F : Par exemple, ces deux triangles ont les côtés égaux mais l'angle différent</p> <p>38. I: oui mais ici le côté change</p> <p>39. F: bon on continue. Celui-ci peut être...au lieu de ac on peut mettre ab et donc on trouve que l'aire du triangle DBE</p> <p>40. I: l'aire du triangle DBE est un sur deux ac sinβ et donc elle est égale à l'aire du triangle ABC.</p> <p>41. F: ça, j'ai écrit. Maintenant, l'aire de ABC est égale à un sur deux</p> <p>42. I: pour sinγ qui est pareil</p> <p>43. F: attends, qui est pareil</p> <p>44. I: à l'aire du triangle HIC</p> <p>...</p> <p>Les élèves continuent ce raisonnement et ils écrivent:</p> $\text{Aire } \triangle DBE = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \text{Aire } \triangle ABC$ $\text{Aire } \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \text{Aire } \triangle HIC$ $\text{Aire } \triangle ABC = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \text{Aire } \triangle GAF$ <p>48. I:Donc les aires sont égales entre elles et égales aussi à l'aire du triangle intérieur.</p> <p>49. F: alors pour la propriété transitive les aires sont égales. Ici j'écris....</p> <p>...</p> <p>Les élèves finissent en écrivant:</p> <p>Pour la propriété transitive, les quatre aires sont égales:</p> $\text{Aire } \triangle ABC = \text{Aire } \triangle DBE = \text{Aire } \triangle HIC = \text{Aire } \triangle GAF$	<p>suivant :</p> <p>D₆ : ? et E₃, E₄  E₆ : Aire ΔABC = Aire ΔHIC = Aire ΔGAF</p> <p>P : formule trigonométrique $\sin(180^\circ-\beta)=\sin 180^\circ \cos \beta - \sin \beta \cos 180^\circ = \sin \beta$</p> <p>Si une telle abduction existe, elle est quand même explicitée par les élèves de façon déductive dans les trois pas suivants:</p> <p>D₁ : ΔABC  E₁ : Aire ΔABC = ½ ab * sinγ = ½ bc * sinα</p> <p>P: formule trigonométrique de l'aire</p> <p>D₇ : E₃, E₁,  E₇ : Aire ΔABC = Aire ΔHIC</p> <p>P: formule trigonométrique $\sin(180^\circ-\beta)=\sin 180^\circ \cos \beta - \sin \beta \cos 180^\circ = \sin \beta$</p> <p>D₈ : E₄, E₁,  E₈ : Aire ΔABC = Aire ΔGAF</p> <p>P: formule trigonométrique $\sin(180^\circ-\beta)=\sin 180^\circ \cos \beta - \sin \beta \cos 180^\circ = \sin \beta$</p> <p>Le dernier pas est encore une déduction :</p> <p>D₉ : E₅, E₇, E₈  E₉ : Aire ΔABC = Aire ΔDBE = Aire ΔHIC = Aire ΔGAF</p> <p>P: propriété transitive</p>
--	--

La preuve et l'argumentation des élèves sont déductives. Comme prévu, on a observé une continuité structurelle. Elle est tellement évidente que les élèves argumentent et prouvent presque simultanément. Cependant, la stratégie de résolution est particulière : la formule trigonométrique de l'aire conduit tous les processus. La déduction dépend ici fortement de la théorie mathématique utilisée. Les élèves sont capables de démontrer : à partir d'une théorie

de référence, ils peuvent construire une chaîne déductive. Nous n'avons pas relevé des symptômes des difficultés pendant la résolution du problème. Au contraire, la déduction semble être ici naturelle. Nous pouvons donc conclure qu'il y a une unité cognitive structurelle.

Comparaison avec les hypothèses

Le tableau montre les nombres d'élèves ayant utilisé cette stratégie de résolution : méthode trigonométrique. Tous les élèves ont construit une argumentation déductive et une preuve déductive. Il y a donc continuité structurelle, et dans ce cas nous pourrions dire aussi unité cognitive structurelle. Le problème a été démontré.

Procédure de résolution Méthode trigonométrique				
Structure de l'argumentation	Structure attendue de la preuve	Continuité / écart structurel	Unité ou rupture cognitive structurelle	Construction de la démonstration
Argumentation déductive 2 binômes	Preuve déductive 2 binômes	Continuité structurelle	UC structurelle	Le problème a été démontré

2.1.2 Analyse du système de référence

A partir des stratégies de résolution considérées, nous proposons une analyse sur le système de référence.

Nous analysons certaines conceptions mobilisées par les élèves pendant la résolution du problème, en particulier celles qui ont créé des difficultés ou empêché la construction d'une preuve.

Nous ne présentons pas les argumentations des élèves déjà construites avec des référents théoriques (théorèmes ou définitions) explicites, car du point de vue du système de référence elles ne sont pas intéressantes. En fait, dans ce cas, nous avons observé une continuité du système de référence entre argumentation et démonstration, et une unité cognitive du système de référence.

2.1.2.1 Construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires

Tous les binômes qui ont construit les hauteurs des triangles pour comparer les aires ont construit une preuve.

Nous avons observé une continuité du système de référence entre argumentation et preuve. Cependant, des écarts ont été observés à l'intérieur de l'argumentation. La conjecture dérive d'une évaluation directe (perception) ou de l'oracle de la mesure de Cabri-géomètre.

L'argumentation structurante (justificative de la conjecture) est composée par des arguments détachés les uns des autres. Les élèves cherchent des éléments théoriques pour justifier la conjecture. Evidemment, si les élèves trouvent tout de suite un théorème ou bien une propriété qui permet de résoudre le problème, nous observons une continuité du système de référence. Au contraire si les élèves ne déterminent pas un théorème qui peut les aider dans la résolution du problème, l'analyse montre des écarts du système de référence chaque fois que le théorème ou la propriété prise en considération ne fonctionne pas. C'est surtout ici que nous avons remarqué la mobilisation des conceptions qui ont ralenti la résolution du problème.

Dans la suite nous analysons quelques argumentations et quelques copies. En particulier nous fournissons trois exemples, les suivants :

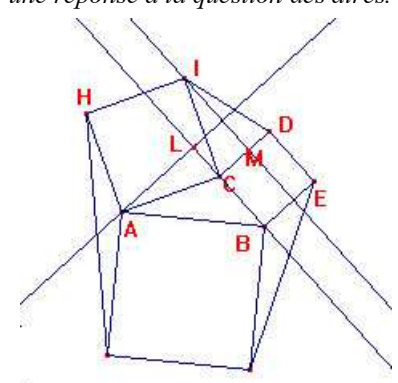
- Continuité du système de référence,
- Ecart structurel du système de référence causé par des conceptions sur la rotation,
- Continuité du système de référence avec l'utilisation de la rotation.


Continuité du système de référence

Binôme : Giulia (G), Luisa (L), classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

Nous avons considéré ce binôme pour l'analyse structurelle (2.1.1.1).

La conjecture se développe à partir de la formule de l'aire. Les élèves considèrent deux triangles, le triangle ABC et un des triangles extérieurs, le triangle IDC. Elles observent que les bases des deux triangles sont égales. Pour comparer les aires elles doivent comparer les hauteurs.

Argumentation des élèves	Analyse
<p><i>L bouge la figure sur Cabri: le triangle sur l'écran est un triangle quelconque.</i></p> <p>25. G : mais si on considère les bases des triangles les deux côtés qui sont égaux...</p> <p>26. L : les deux côtés du carré?</p> <p>27. G : oui et si on construit les hauteurs, on peut comparer les seules hauteurs afin de comparer les aires</p> <p>28. L : oui, je comprends, tu veux dire de comparer les hauteurs pour comparer les aires parce que les bases sont égales.</p> <p>... Les élèves construisent les hauteurs des triangles $\triangle ABC$ et $\triangle IDC$</p> <p>31. L : Je suis en train de prolonger la droite, oui, la droite sur ce segment... qu'est-ce que je dois faire ?</p> <p>32. G : la droite par les points B et C</p>	<p>Le permis d'inférer est donné par la formule de l'aire. Donc il est théorique.</p> <p>$D_6 = ?$ \longrightarrow E6: comparaison entre aires</p> <p>P: formule de l'aire</p> <p>La réponse à la comparaison entre hauteurs permettra de donner une réponse à la question des aires.</p> 

<p>33. L : ah c'est vrai ! 34. G : puis il faut faire la perpendiculaire à celle-là 35. L : ah voilà, mais tu sais qu'elles semblent être presque... 36. G : presque pareilles ! 37. L : non, plus qu'égales : elles semblent être perpendiculaires, je l'avais déjà observé tout à l'heure.</p> <p>50. Élèves ensemble : eh ces deux triangles sont égaux ! 51. L : c'est vrai, ALC et ICM alors ces deux triangles qu'est ce qu'ils ont ?</p> <p>52. G : Nous considérons... alors AC est égal a IC parce qu'ils sont côtés du même carré 53. L : attends ! 54. G : AC est égal à IC parce qu'ils sont côtés du carré, puis </p> <p><i>Une fois déterminée l'égalité entre deux angles et un côté, les élèves terminent l'argumentation.</i></p>	<p>E7: les hauteurs (AL et IM) semblent être égales Eg: les hauteurs (AL et IM) semblent être perpendiculaires</p> <p><i>Comme nous l'avons observé ci-dessus, les énoncés E7, E8 et E9 décrivent les "faits" dont la valeur épistémique est liée à la perception de la figure dans Cabri.</i></p> <p>E9 : les triangles ($\triangle ALC$ et $\triangle ICM$) sont égaux</p> <p><i>La nécessité de justifier l'égalité entre triangles, amène les élèves à chercher des côtés et des angles égaux pour appliquer le théorème d'égalité. Encore une fois, le permis d'inférer est théorique. De plus, le théorème est pertinent et permet de résoudre le problème:</i></p> <div style="text-align: center;"> <p>D9 = ?  E9</p> <p>P: théorème d'égalité</p> </div> <p><i>Les élèves doivent chercher les données pour appliquer le théorème. Une fois déterminées, le système de référence nécessaire pour construire la démonstration est disponible aux élèves.</i></p>
---	--

Les permis d'inférer utilisés pendant l'argumentation sont des théorèmes. C'est pourquoi la preuve construite par les élèves (2.1.1.1) utilise les mêmes permis d'inférer que l'argumentation. La continuité du système de référence entre argumentation et démonstration nous permet de conclure que la copie des élèves est un exemple d'unité cognitive du système de référence.

Écart structurel du système de référence causé par des conceptions sur la rotation

Binôme : Sara (S), Lorenzo (L), classe 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

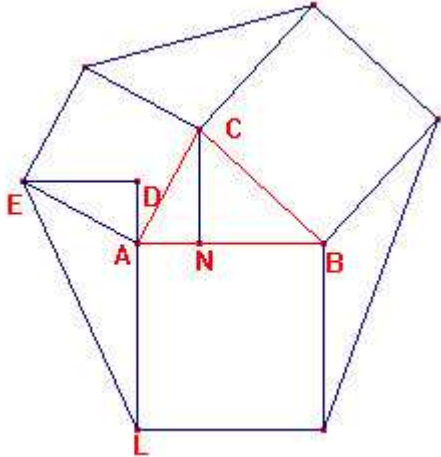
L'argumentation et la démonstration sont traduites de l'italien au français (dans l'annexe 2.7 on trouve l'argumentation et la copie originale des élèves).


Nous prenons comme exemple Sara et Lorenzo car il est intéressant d'observer comment la recherche du permis d'inférer pour affirmer que les aires sont égales permet d'observer la mobilisation des conceptions relatives à la rotation.

Les élèves ont mesuré les aires avec Cabri-géomètre. Ils ont vu que les aires étaient égales. Ils considèrent deux triangles de bases égales car côtés du même carré. Ils doivent prouver que les hauteurs sont égales. Donc en ce moment ils essaient de trouver un permis d'inférer et des

données pour affirmer que les aires sont égales. Les élèves pensent à la rotation. Mais ils n'ont pas étudié la rotation au lycée. Leur souvenir est probablement lié à l'enseignement du collège.

La rotation est donc présente non comme concept institutionnalisé mais comme opérateur d'une conception et cet opérateur ne peut pas être remplacé par un permis d'inférer théorique. Nous analysons directement le dialogue des élèves, au moment où ils essayent de justifier les égalités entre les hauteurs ED et CN.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>133.L : alors maintenant le problème se déplace, il faut dire pourquoi les hauteurs sont égales</p>  <p>136.L : excuse-moi, mais celui-ci est un carré, si avec le compas toi tu mets le centre là (en A), tu pars exactement de là (E) et tu arrives exactement ici (C) parce que c'est un arc... donc si nous faisons une <u>rotation</u> de celui ci, il n'arrive pas là ?</p> <p>137.S: oui</p> <p><i>Ils appellent l'observateur</i></p> <p>142.L: on a trouvé quelque chose, nous voulions prouver que les hauteurs sont égales</p> <p>143.Observateur: oui</p> <p>144.L: alors si nous arrivons à faire voir que celui-ci est un carré</p> <p>145.Observateur: celui ci?</p> <p>146.L: oui, avec une rotation les deux hauteurs vont se superposer</p> <p>147.Observateur: pourquoi vous avez besoin du carré?</p> <p>148.L: parce que le carré avec une rotation te donne le côté, bon enfin, même avec la circonférence</p> <p>149.S: mais la rotation est définie comment?</p> <p>150.L: c'est-à-dire, nous n'avons pas encore étudié la rotation, nous ne l'avons pas étudié bien je veux dire... la rotation est définie comment ?</p> <p>151.S: moi je ne sais pas</p> <p>152.L: oui mais on a quand même fait quelque chose...</p>	<p>E₁ : les hauteurs sont égales</p> <p><i>Il faut trouver le permis d'inférer et les données pour affirmer l'énoncé.</i></p> <p>D₁ ? E₁</p> <p style="text-align: center;">→</p> <p>P : ?</p> <p><i>Les élèves pensent à la rotation.</i></p> <p><i>Il est intéressant d'observer la conception relative à la rotation. En fait la rotation pouvait être un bon permis d'inférer pour déduire l'énoncé. Néanmoins, les élèves ne connaissent pas la théorie relative à la rotation.</i></p> <p><i>Le concept est présent seulement au niveau de conception et pas encore au niveau de connaissance institutionnalisée.</i></p> <p><i>Au début Lorenzo considère la rotation de centre A de AE sur AC. La rotation est vue à l'intérieur du carré (int. 146-148).</i></p> <p><i>L'opérateur R de la conception est la rotation de centre A du segment AE sur le segment AC. L'angle de rotation n'est pas pris en compte. Le contrôle est donné par les côtés AE et AC en tant que côtés d'un carré. Ils se correspondent par une rotation de centre A et angle 90°.</i></p> <p>P : R : rotation de centre A du segment AE sur le segment AC</p> <p>S : Σ : les côtés du carré se correspondent par une rotation de centre le point A et d'angle 90°</p> <p><i>Les élèves affirment de ne pas trop connaître la rotation (int. 150-152) et ils sont obligés de chercher ailleurs pour démontrer l'énoncé.</i></p> <p><i>C'est un des théorèmes d'égalité qui est pris en considération par les élèves comme nouveau permis d'inférer. Lorenzo observe les deux petits triangles construits sur les hauteurs. Les deux triangles sont</i></p>

<p>alors la rotation est définie par un centre donc je fais la rotation de centre...pfff ce côté est égal à ce côté, la hauteur coïncide...</p> <p>153.S: no, celui là est à démontrer</p> <p>154.L: ah, alors on a un côté...l'angle droit et....</p> <p>155.S: nous devrions trouver un autre angle ou un autre côté</p> <p>156.L: par exemple l'angle...</p> <p>157.S: alors, comme ça nous le prouvons avec les théorèmes d'égalité</p> <p>158.L: oui, mais il faut trouver encore un angle</p> <p>.....</p> <p>172 L: si on trouve ça, c'est suffit, on a fini, il manque seulement cette condition, alors côté égal à côté, angle droit, et angle égal pourquoi?</p>	<p>égaux.</p> <p>Comme dans l'exemple précédent, les élèves considèrent le théorème d'égalité entre triangles et finalement ils terminent l'argumentation.</p> <p>D₁: côtés égaux, angle droits et?</p>  <p>E₁</p> <p>P : théorème d'égalité</p> <p>À ce moment ils peuvent écrire la démonstration.</p>
--	--

Evidemment pour ces élèves un écart du système de référence a été nécessaire pour construire la preuve. En fait, le permis d'inférer de la rotation, même si correct, ne pouvait pas être remplacé par un théorème parce que les élèves ne l'avaient pas à disposition comme théorème. Ils ne s'en souvenaient pas. Cependant, cet écart n'est pas entre argumentation et preuve mais à l'intérieur de l'argumentation.

Entre argumentation structurante et preuve nous pouvons conclure qu'il y a une unité cognitive du système de référence car les derniers pas de l'argumentation sont ceux qui sont utilisés pour construire la preuve.

- Continuité du système de référence avec l'utilisation de la rotation.

Binômes : Yael (Y), Gregory (G), classe Seconde en France.

L'argumentation et la démonstration sont en français (dans l'annexe 2.8 on trouve le dialogue et la copie des élèves).

Contrairement aux élèves précédents, les élèves français connaissent la rotation.



Ici, elle est utilisée pour construire la preuve.

Les élèves ont déterminé l'égalité des hauteurs de deux triangles avec la mesure de Cabri-géomètre. Leur dialogue est privé d'intérêt car ils rient, ils parlent d'autre chose etc.

Nous considérons un morceau d'argumentation où Yael, aidé par l'enseignant, devient conscient que la rotation lui permet de justifier cette égalité.

La rotation est un permis d'inférer théorique qui permet la construction de la démonstration.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>111.Enseignant : Alors ça va ?</p> <p>112.Y : nous avons vu qu'ils ont la même base, mais on n'arrive pas à dire qu'ils ont la même</p>	<p>E₁ : les hauteurs sont égales</p> <p><i>Il faut trouver le permis d'inférer et les données pour</i></p>

<p>hauteur... celui-là c'est le même que celui-ci, mais autour du point, il a tourné autour du point</p> <p>113.Enseignant : il a tourné ?</p> <p>114.Y : oui, il a tourné de ... il a tourné de 90°, c'est une rotation</p> <p>115.Enseignant : mais bon, et alors, les rotations ça conserve quoi ?</p> <p>116.Y : Les angles et... ah oui, les longueurs</p> <p><i>Les élèves écrivent :</i> ...</p> <p>On voit que les triangles sont égaux car le triangle (2) a tourné autour de A par une rotation de 90°. Comme la rotation conserve les angles et les longueurs alors les deux triangles sont égaux, donc ils ont (la même base) et la même hauteur. Donc les deux triangles précédemment cités (ABC et l'autre) ont la même hauteur et la même base et donc leurs aires sont égales.</p>	<p><i>affirmer l'énoncé.</i></p> <p>D₁ ?  E₁</p> <p>P: ?</p> <p><i>Les élèves, grâce à l'aide de l'enseignant pensent à utiliser la rotation comme permis d'inférer théorique. La rotation est institutionnalisée. Les élèves peuvent l'utiliser comme permis d'inférer dans la preuve. La rotation est utilisée comme permis d'inférer théorique.</i></p> <p>D₁: rotation de centre A et angle 90° d'un petit triangle  E₁ : Les triangles sont égaux</p> <p>P: la rotation conserve les longueurs</p> <p><i>Alors si les triangles sont égaux leurs hauteurs sont égales et les aires des triangles ABC et du triangle extérieur considéré sont égales</i></p>
--	--

Entre argumentation et preuve nous avons observé continuité du système de référence et unité cognitive du système de référence.

Pour Résumer

Pour tous les élèves qui ont utilisé cette stratégie (7 binômes) nous avons observé une unité cognitive du système de référence entre argumentation et preuve. Les écarts du système de référence que nous avons observés étaient à l'intérieur de l'argumentation.

2.1.2.2 Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC

Comme nous l'avons prévu, tous ceux qui ont utilisé cette stratégie ont été guidés par les opérateurs:

R₁ : Egalité entre triangles \Rightarrow Egalité entre aires

R₂ : Egalité entre triangles \Leftrightarrow Egalité entre aires

Les élèves qui n'ont pas pris en considération les triangles différents peuvent avoir mobilisé la conception liée à l'opérateur R₁, ou bien de façon implicite la conception liée à l'opérateur R₂. La distinction entre les deux opérateurs n'a pas toujours été possible. Néanmoins, il y a des cas où les élèves explicitent l'opérateur R₂; un binôme a même essayé de le justifier théoriquement.

Dans cette section nous présentons les analyses des exemples suivants :

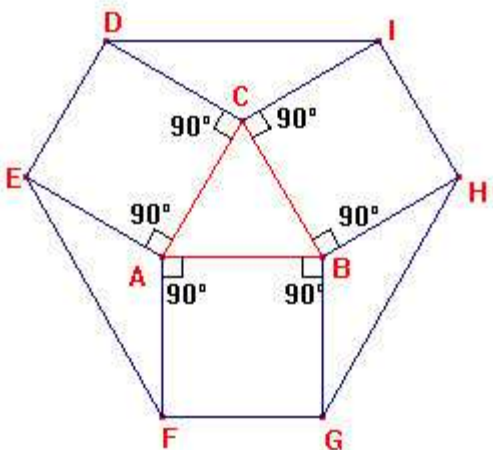
- Continuité du système de référence qui amène à la construction d'une preuve erronée.
- Ecart du système de référence comme cause de non-construction d'une preuve.
- Ecart du système de référence lié à deux exemples de mobilisation de conceptions relatives au cas limite.



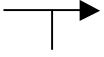
Continuité du système de référence qui amène à la construction d'une preuve erronée

Binômes : Silvia (S) et Francesca (F), classe de 2^e année du lycée (16/17 ans, Première en France).

Nous avons déjà analysé ce binôme précédemment (2.1.1.1).

Les élèves ont commencé à considérer le cas limite. Ensuite elles considèrent le cas de ABC triangle équilatéral et elles disent que les aires des trois triangles extérieurs sont égales parce que les trois triangles sont égaux. Considérons l'analyse suivante.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>Si le triangle est équilatère, les aires des trois triangles EAF, DIC, HGB (les aires des triangles extérieurs) sont égales parce que les triangles sont égaux.</p>  <p>Je peux dire que les triangles sont égaux par le premier théorème d'égalité entre triangles parce qu'ils ont deux côtés isométriques, parce que côtés de carré, et l'angle entre eux a la même mesure par la différence entre angles.</p> <p>.....</p> <p>Si le triangle ABC est isocèle les côtés AC et BC sont égaux et les aires des triangles extérieurs EAF et HBG sont égales parce que les triangles sont égaux d'après ce qu'on a dit tout à l'heure. Par contre le triangle extérieur DIC a une aire plus grande parce qu'il a un</p>	<p>D'abord les élèves écrivent l'énoncé qui a été probablement déduit par une évaluation perceptive.</p> <p>E₅ : si le triangle ABC est équilatéral les aires des trois triangles extérieurs sont égales</p> <p>Ensuite elles justifient l'énoncé avec le théorème d'égalité.</p> <p>Dans le modèle de Toulmin nous pouvons modéliser l'argument :</p> <p>D₅ = Deux côtés égaux et l'angle entre les côtés égal E₅</p> <p style="text-align: center;">→</p> <p>P : premier théorème d'égalité</p> <p>Les élèves disent qu'elles vont démontrer.</p> <p>Le permis d'inférer qui était déjà théorique reste le même. Les élèves essaient de mieux justifier l'égalité des côtés et l'égalité des angles.</p> <p>Quand $\triangle ABC$ est isocèle il y a deux triangles égaux. Les élèves formulent le deuxième énoncé :</p> <p>E₆ : si le triangle ABC est isocèle les aires des deux triangles extérieurs sont égales.</p> <p>Elles disent que la démonstration est similaire à celle utilisée pour le triangle équilatéral. Donc implicitement l'argument peut être modélisé de la façon suivante :</p>

<p>côté plus long.</p> <p>Si le triangle est quelconque il n'y a aucun triangle qui a la même aire parce que les triangles n'ont pas les côtés de même longueur et les angles non plus, en fait le triangle ABC n'a pas les côtés égaux, alors les carrés des côtés sont différents.</p>	<p>D₆ : deux côtés égaux et un angle égal  E₆</p> <p>P: théorème d'égalité</p> <p><i>Néanmoins, les élèves explicitent un autre argument : « si le triangle ABC est isocèle le triangle extérieur a une aire plus grande parce qu'il a le côté plus long »</i></p> <p><i>Dans le modèle de Toulmin l'argument est modélisé de la façon suivante :</i></p> <p>D₇ : le triangle extérieur a un côté plus long que le côté du triangle ABC  E₇: le triangle extérieur a une aire plus grande</p> <p>P : héritage de l'inégalité</p> <p><i>Le permis d'inférer est l'opérateur d'une conception qui peut être décrite avec l'opérateur et le contrôle suivant :</i></p> <p>P : R : héritage de l'inégalité : Si un triangle a un côté plus long par rapport à un autre, l'aire du premier est plus grande.</p> <p>Σ : « l'inverse » du théorème d'égalité</p> <p><i>Ce que les élèves voient sur la figure est contrôlé par une sorte « d'inversion » du théorème de l'égalité comme nous le verrons ci-dessous.</i></p> <p><i>Il n'y a aucun théorème qui peut remplacer cet opérateur. C'est pourquoi les élèves ne peuvent pas transformer l'argument en pas de démonstration.</i></p> <p><i>Cependant ils essayent de trouver un référent théorique qui puisse remplacer ce permis d'inférer. Nous pouvons le voir dans l'argument suivant.</i></p> <p><i>Les élèves considèrent ΔABC triangle quelconque. Elles disent: « Si le triangle est quelconque il n'y a aucun triangle qui a la même aire »</i></p> <p><i>La modélisation de l'argument est la suivante :</i></p> <p>D₈ : les quatre triangles sont différents  E₈: les triangles ont les aires différentes</p> <p>P: héritage de l'inégalité</p> <p><i>Elles essayent de le justifier de la façon suivante : Elles substituent ce permis d'inférer avec une sorte de « théorème de l'inégalité ». Comme côtés égaux et angles égaux sont hypothèses d'un théorème dont l'énoncé conclusion est que les triangles sont égaux, alors côtés et angles différents deviennent hypothèses d'un faux théorème dont l'énoncé conclusion est que les triangles sont différents.</i></p>
--	---

	<p>D₉ : les côtés et les angles sont tous différents \longrightarrow E₉ : les triangles ont les aires différentes</p> <p>P: « théorème de l'inégalité »</p> <p><i>L'opérateur de la conception est ici :</i></p> <p>P :R : Théorème de l'inégalité : Si deux triangles ont les côtés et les angles différent ils ont différents</p> <p>Σ : théorème de l'égalité</p> <p><i>Le contrôle est le théorème de l'égalité entre triangles.</i></p>
--	--

La conception mobilisée par les élèves est explicitée par l'opérateur R_2 . Les éléments du contrôle de la conception sont une sorte d'« inverse » du théorème de l'égalité entre triangles, ce que nous avons appelé théorème de l'inégalité. En fait, si $A \Rightarrow B$ alors les élèves pensent que $\neg A \Rightarrow \neg B$. Aucune restriction qui invalide cette conception erronée n'est explicitée par les élèves.

La conception permet de contrôler la manipulation de la figure sur Cabri-géomètre. La conception est assez forte car elle ne permet pas de refuser l'opérateur R_2 . Au contraire, les élèves cherchent un théorème qui puisse le valider. Le *figural concept* (Fishbein, 1993, p. 143) des élèves est associé à la perception de la figure de triangles différents contrôlée par la conception. La lecture de l'opérateur sur la figure amène les élèves à inventer un référent théorique faux.

Evidemment, là nous observons la continuité du système de référence, et de plus l'unité cognitive du système de référence.

Ecart du système de référence

Binômes : Matteo, Sara, classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

L'argumentation est traduite de l'italien au français (dans l'annexe 2.9 on trouve la copie originale des élèves).

Nous présentons l'argumentation écrite par les élèves. Nous l'appelons argumentation même si la structure argumentative manque complètement dans la copie des élèves. Nous faisons l'hypothèse que certains permis d'inférer sont présents au niveau implicite. En fait, nous n'avons pas l'enregistrement du dialogue, mais leur copie semble être suffisante pour l'analyse que nous voulons accomplir. Les élèves considèrent des cas particuliers du triangle ABC et ils construisent des énoncés à partir de la perception de la figure sur le logiciel.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>1 Si on transforme le triangle central en triangle équilatère, les trois aires des triangles ayant comme base le côté extérieur qui relie les carrés, sont égales, de même pour les périmètres</p> <p>2 Si on transforme le triangle central en triangle isocèle, les triangles ayant comme côté un côté du carré, formé sur le côté le plus petit du triangle intérieur sont égaux, et le troisième triangle devient isocèle.</p> <p>3 Si le triangle est quelconque les trois aires sont différentes.</p> <p>4- Si le triangle central est rectangle avec les deux côtés différents entre eux, il se forme un autre triangle rectangle égal au triangle intérieur, mais opposé à l'angle de 90°.</p> <p>5 si les deux côtés sont égaux, il se forme encore un triangle rectangle égal au triangle intérieur et opposé à l'angle droit, et les triangles extérieurs ayant un côté égal qui appartient au carré construit sur l'hypoténuse, sont égaux entre eux.</p> <p>[...] Les énoncés explicités ensuite par les élèves sont encore des faits.</p>	<p><i>D'abord les élèves écrivent 5 énoncés. On remarque qu'il n'y a ici aucun argument. Tous les énoncés sont des faits, liés à la perception de la figure sur Cabri.</i></p> <p>E₁ : si le triangle ABC est équilatéral, les aires (et les périmètres) des trois triangles extérieurs sont égales</p> <p>E₂ : si le triangle ABC est isocèle, deux triangles extérieurs sont égaux et le troisième triangle est isocèle.</p> <p>E₃ : si le triangle ABC est quelconque, les aires sont différentes</p> <p>E₄ : si le triangle ABC est rectangle, il est égal au triangle opposé à l'angle droit.</p> <p>E₅ : si le triangle ABC est rectangle et isocèle, le triangle opposé à l'angle droit est égal au triangle central et les autres triangles sont égaux entre eux.</p> <p><i>Les élèves explicitent les considérations qui sont évidentes en regardant le dessin. L'appréhension perceptive de la figure (Duval, 1995) guidée par la recherche des triangles égaux permet aux élèves d'explicitier les cinq énoncés.</i></p> <p><i>Encore plus clairement on peut observer ici la présence de l'opérateur « Deux triangles égaux ont la même aire et deux triangles différents ont des aires différentes ». Les élèves cherchent des triangles égaux et non des triangles ayant des aires égales.</i></p>

Les élèves n'essayent pas de construire une preuve. Les justifications des énoncés explicités restent au niveau implicite. Probablement, les élèves utilisent le théorème d'égalité entre triangles ; la recherche des triangles égaux semble appuyer cette hypothèse. Ils cherchent des triangles égaux en perdant de vue le vrai objectif du problème : déterminer les aires des triangles. Néanmoins, le théorème d'égalité entre triangles n'est jamais explicité. L'écart qui a empêché la construction de la preuve semble être à chercher dans un manque du système de référence.

Ecart du système de référence lié à la mobilisation de conceptions relatives au cas limite

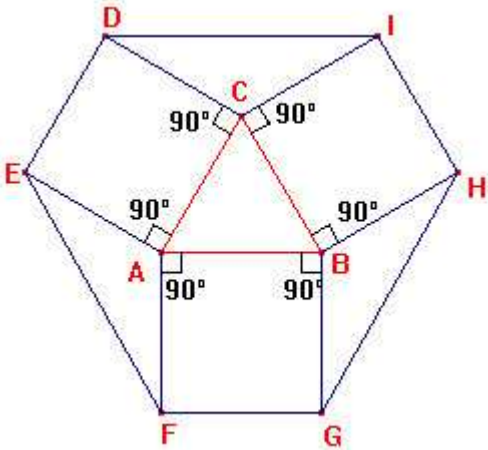
Premier exemple

Binôme : Silvia (S), Francesca (F), classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

Nous avons déjà analysé ce binôme précédemment (2.1.1.1).



Les élèves considèrent quelques cas particuliers du triangle ABC. Elles commencent la résolution du problème en considérant le cas limite.

Nous considérons directement la copie des élèves.

Argumentation des élèves	Analyse
 <p>En bougeant la figure et en déplaçant le point C sur le côté AB nous avons observé que le triangle ABC est aligné avec le côté AB, les trois autres triangles, formés par les extrémités libres des carrés, vont aussi s'aplatir.</p> <p>Maintenant on veut démontrer que si on bouge le point C sur le côté AB de façon que le triangle ABC soit une ligne, alors aussi les trois autres triangles sont plats.</p>	<p>L'énoncé suivant explicite un fait dont la valeur épistémique est donnée par la perception sur Cabri-géomètre.</p> <p>E₁ : le triangle ABC est aligné avec le côté AB. Les autres triangles vont s'aplatir aussi.</p> <p>Les élèves cherchent à montrer que quand ΔABC est plat les autres triangles aussi sont plats.</p> <p>D₁ : le triangle ABC est aligné avec le côté AB \longrightarrow E₁ : Les autres triangles aussi sont plats</p> <p>P</p> <p>Le permis d'inférer est implicite pendant l'argumentation.</p>

Le permis d'inférer est à chercher pour construire la preuve. D'abord il est lié à des aspects perceptifs, ensuite il est remplacé par le théorème de la somme des angles intérieurs d'un triangle. Dans la copie, est évidente la recherche d'un référent théorique qui justifie l'énoncé et qui permette de construire une preuve.

Preuve des élèves	Analyse
<p>Par la propriété des triangles qui affirme que la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°, et si le triangle ABC est plat, l'angle en A est 0, et les deux côtés des deux carrés forment 180°, alors les triangles extérieurs sont plats.</p>	<p>D₂ : le triangle ABC est aligné avec le côté AB \longrightarrow E₂ : l'angle en A est = à 0</p> <p>P : angle entre deux lignes superposées est 0</p> <p>Quand ΔABC est « aplati » sur le côté AB, l'angle en A est nul et les angles droits des carrés restent constants. En conséquence l'angle du triangle extérieur mesure 180°.</p>

	 <p>D₃ : E₂</p> <p>E₃ : l'angle extérieur est 180°</p> <p>P : la somme des angles intérieurs du triangle est 180°</p>  <p>D₄ : E₃</p> <p>E₄ : E₁ : Les triangles extérieurs sont plats</p> <p>P : la somme des angles intérieurs du triangle est 180°</p> <p><i>Les élèves cherchent à prouver ce qu'elles ont vu. Néanmoins, le permis d'inférer de cette preuve est à chercher dans un univers qui n'est pas nécessairement celui de la géométrie, bien que des énoncés semblent appartenir à la géométrie. Les élèves essayent de relier une causalité de la géométrie dynamique avec une inférence de la géométrie théorique.</i></p>
--	---

Le changement de cadre, de la géométrie dynamique à la géométrie théorique, est voulu par les élèves : ils utilisent la somme des angles intérieurs des triangles comme permis d'inférer théorique qui puisse remplacer le permis d'inférer perceptif.


Il y a une continuité du système de référence entre argumentation et preuve au cas limite. Néanmoins, il y a un écart du système de référence entre l'argumentation et la preuve du cas limite et les argumentations et les preuves dans les autres cas (ABC équilatéral, isocèle etc.), même si l'argumentation est une argumentation déductive par cas.

Deuxième exemple

Binômes : Maria, Luisa, classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

L'argumentation est traduite de l'italien au français (dans l'annexe 2.10 on trouve la copie originale des élèves).

Les élèves utilisent le cas limite pour construire la conjecture. Mais elles ne réussissent pas à résoudre le problème.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>Par moyen du dragging, nous faisons une hypothèse. En faisant une rotation de la figure (<i>On ne comprend pas de quelle rotation il s'agit ici</i>), nous avons fait coïncider les bases des trois triangles avec deux côtés des carrés posés sur la même droite (<i>elles ont construit le cas limite</i>). Nous avons remarqué que les aires vont s'annuler et donc a notre avis les quatre triangles ont la même aire</p>	<p>E₁ : les aires des triangles vont s'annuler dans le cas limite</p> <p><i>L'énoncé est un fait, qui permet de construire la conjecture. L'argument est le suivant :</i></p> <p>D₂ : E₁  E₁ : les aires des triangles sont égales</p> <p>P : si les aires sont nulles au cas limite, alors les aires sont égales</p>

La conjecture se base sur la continuité des figures que Cabri-géomètre permet de visualiser. Le cas limite n'est pas vu comme un cas « discret » (un triangle particulier). L'argumentation par passage à la limite est ici fondée sur le « continu » des figures possibles que le logiciel permet de visualiser, jusqu'à la considération du cas limite. L'opérateur de la conception, le permis d'inférer de l'argument, a comme support l'ensemble des figures de Cabri-géomètre. C'est probablement à partir de celles-ci que la conjecture peut être construite. Les élèves n'arrivent pas à construire une preuve. L'écart du système de référence est même ici dû à l'absence d'un référent théorique qui puisse remplacer le permis d'inférer de l'argumentation.

Pour résumer

Pour les élèves qui ont construit une preuve, nous avons observé une continuité entre argumentation et démonstration. Les élèves ont utilisé les mêmes permis d'inférer utilisés pendant l'argumentation. Dans certains cas, ils ont même utilisé un permis d'inférer faux (Silvia et Francesca). Dans ce cas nous avons observé une unité cognitive du système de référence.

Pour les élèves qui n'ont pas construit une preuve, nous ne pouvons pas affirmer avec certitude qu'il s'agit d'un écart du système de référence. Plusieurs raisons peuvent intervenir. Nous avons observé que parfois il s'agit de rupture cognitive du système de référence. Un théorème est nécessaire pour construire une démonstration ; s'il manque, la démonstration ne peut pas être construite avec l'opérateur erroné d'une conception.

2.1.2.3 Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC + construction de la hauteur pour comparer les aires

L'exploration sur les cas particuliers du triangle ABC a été conduite par l'opérateur R₁ ou implicitement par l'opérateur R₂.

Dans chaque cas particulier observé, les élèves ont pris en considération seulement les triangles égaux : si le triangle ABC est rectangle il y a un triangle égal et donc ayant la même aire; si le triangle ABC est isocèle, il y a deux triangles égaux et si le triangle est équilatéral il y a trois triangles égaux. Dans ce dernier cas, certains élèves considèrent aussi le triangle intérieur (différent par rapport aux autres triangles) et ils montrent que tous les triangles ont la même aire. Le triangle équilatéral représente le cas qui permet aux élèves de se détacher de l'opérateur erroné R_2 , et de considérer les hauteurs des triangles pour en comparer les aires.

Dans la suite nous fournissons un exemple d'analyse. Le cas considéré est le suivant :

- Continuité et écart du système de référence entre argumentation et preuve

Continuité et écart du système de référence entre argumentation et preuve

Binôme: Giacomo (G), Uros (U), classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

Nous construisons l'analyse à partir d'un extrait d'argumentation orale et de la copie.

L'argumentation est traduite de l'italien au français (dans l'annexe 2.11 on trouve la copie originale des élèves).

Les élèves ont considéré le cas où ABC est triangle rectangle. Ensuite ils ont considéré les cas de ABC triangle équilatéral. Enfin ils considèrent le cas où ABC est un triangle quelconque.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>Les élèves ont considéré les cas $\triangle ABC$ triangle équilatéral. Dans la copie, ils ont écrit l'argumentation suivante :</p> <p>Si le triangle intérieur est équilatéral et si on le découpe suivant la hauteur, on peut observer que sa moitié est égale à la moitié d'un triangle extérieur. Parce qu'ils ont un côté égal (celui qui est aussi côté du carré) un angle de 90° et les deux autres angles sont de 60° et 30°. Ils sont égaux par le 2^e théorème d'égalité.</p>	<p>Les élèves écrivent l'argument qui a permis de résoudre le problème dans le cas où $\triangle ABC$ est un triangle équilatéral. Ils ont déjà remarqué que les trois aires extérieures sont égales.</p> <p>D₁: Côté égal Angle de 90° Angle de 60° Angle de 30°</p> <p>→ E₁ : La moitié d'un triangle $\triangle ABC$ est égale à la moitié d'un triangle extérieur</p> <p>P: le 2^e théorème d'égalité</p>
<p>Maintenant les élèves considèrent le cas où ABC est un triangle quelconque :</p> <p>9. G : les aires sont égales 10. U : oui bien sûr, la base... 11. G : l'aire est base par hauteur. Ce côté est égal à ce côté et ce côté est égal à ce côté....Mais ce ne sont pas des triangles égaux... 12. U : Si nous construisons les hauteurs? 13. G : si nous construisons les hauteurs...attend on va le faire ...</p>	<p>Les élèves considèrent le cas de ABC triangle quelconque. Les élèves explicitent la conjecture qui est tiré par la perception de la figure sur Cabri-géomètre.</p> <p>E₂ : Les aires des deux triangles ($\triangle ABC$ et un triangle extérieur) sont égales.</p> <p>Ils essayent de comparer les triangles pour appliquer le théorème d'égalité. En même temps ils évoquent la formule de l'aire (int. 3). Le permis d'inférer est à chercher. Ils décident de construire la hauteur FD. La figure est la suivante :</p>

Les élèves construisent les hauteurs

14. G : si nous avons la hauteur ...

15. U : peut-être...

16. G : attends, cela n'est pas égal à cette partie ? Cet angle est égal à celui-ci, celui-là idem et celui-là aussi... je suis un génie... nous pouvons démontrer.

Les élèves s'aperçoivent que les deux petits triangles $\triangle FDB$ et $\triangle ABG$ sont égaux. L'argument est le suivant :

D₃ : AB=BF
 $\angle ABG = \angle FDB$
 $\angle AGB = \angle FBD$

→

E₃ : les deux petits triangles sont égaux

P : le 2^e théorème d'égalité

La résolution du problème dans le cas où ABC est un triangle équilatéral a permis de changer la stratégie de résolution : d'une exploration sur les cas particuliers du triangle ABC à la construction des hauteurs. En conséquence les permis d'inférer sont aussi changés : l'opérateur R₁ est abandonnée pour laisser la place à la formule de l'aire (que nous voyons ci-dessous à l'argument 5). En revanche, le théorème d'égalité est utilisé dans les deux stratégies mais avec des objectifs différents : dans le premier cas il est utilisé pour déterminer des triangles égaux et dans le deuxième cas pour vérifier que les hauteurs des deux triangles sont égales et en conséquence les aires. La construction de la preuve suit les pas de la deuxième partie de l'argumentation.

Preuve des élèves	Analyse
<p>Nous avons démontré que la hauteur du triangle intérieur est égale à la hauteur du côté correspondant du triangle extérieur.</p> <p>$\angle AGB = \angle FDB = 90^\circ$ AB=BF parce que côté d'un carré $\angle GBD = \angle ABF = 90^\circ$ car angles des carrés $\angle CBA + \angle ABD = \angle ABD + \angle DBF$ $\angle CBA - \angle ABD = \angle DBF - \angle ABD$ $\angle CBA = \angle DBF$ $\triangle AGB = \triangle DBF$ par le théorème d'égalité d'un triangle rectangle</p>	<p><i>Les élèves utilisent le théorème d'égalité utilisé dans l'argumentation et ils construisent la preuve dans le cas général.</i></p> <p>D₃ : AB=BF $\angle AGB = \angle FDB = 90^\circ$ $\angle CBA = \angle DBF$</p> <p style="text-align: center;">→</p> <p>E₃ : $\triangle AGB = \triangle DBF$</p> <p>P : le 2^{ème} théorème d'égalité</p>

<p>AG=DF parce que côtés correspondants des triangles Les hauteurs des triangles $\triangle ACB$ et $\triangle FBH$ sont égales AG=FD</p> <p><i>Les élèves m'appellent car le temps n'est pas suffisant pour terminer. Ils m'expliquent comment ils ont déterminé que les aires des triangles sont égales.</i></p> <p>30. G : ...nous avons prouvé que les deux triangles AGB et DBF sont égaux 31. Observateur : oui 32. U : S'ils sont égaux, leurs hauteurs sont égales et donc les deux aires des triangles ABC et FBM sont égales</p>	<div style="text-align: center;"> <p>D₄: E₃ \dashv E₄: AG=FD</p> <p>P : héritage d'égalité</p> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> <p>D₅: E₄ CB=BM \dashv E₅: les aires des deux triangles ABC et FBM sont égales</p> <p>P : formule de l'aire</p> </div> <p><i>Les élèves prouvent seulement dans le cas où ABC est un triangle quelconque.</i></p>
--	--

Il est très difficile d'établir s'il y a continuité ou écart du système de référence entre argumentation et preuve.

Si on considère comme argumentation, l'argumentation constructive de la conjecture (argumentation inductive par cas) il y a évidemment un écart du système de référence. En fait les stratégies utilisées sont différentes ; les opérateurs R_1 ou R_2 sont abandonnés dans la preuve pour laisser la place aux théorèmes d'égalités utilisés pour prouver l'égalité des petits triangles.

En revanche, si on considère comme argumentation l'argumentation structurante de la conjecture (argumentation abductive), il y a continuité du système de référence entre argumentation et preuve. D'une certaine façon, nous avons observé une continuité du système de référence entre la deuxième partie de l'argumentation et la preuve.

Pour résumer

Nous avons observé une unité cognitive du système de référence entre l'argumentation structurante et la preuve. Nous ne pouvons pas conclure si l'écart du système de référence entre argumentation constructive et preuve a représenté une rupture cognitive du système de référence car nous n'avons pas de matériel suffisant pour l'analyse.

Pour les autres binômes qui n'ont pas construit de preuve (comme Massimiliano, Marco et Alessandro) nous pouvons conclure qu'il y a eu une unité cognitive du système de référence entre l'argumentation inductive par cas et la preuve inductive par cas (construite dans le cas de ABC triangle équilatéral). Par rapport à l'argumentation construite dans le cas général, il y a un écart du système de référence avec l'argumentation (et la preuve) inductive par cas.

2.1.2.4 Méthode trigonométrique pour comparer les aires

Les deux binômes qui ont utilisé la théorie trigonométrique ont construit la preuve. Nous avons observé une unité cognitive du système de référence. En fait, les permis d'inférer sont déjà théoriques dans l'argumentation. C'est pourquoi la démonstration est directement construite à partir de celle-ci. Nous ne considérons pas d'exemples car ces analyses sur le système de référence sont triviales.

2.1.2.5 Stratégie du théorème des médianes et des hauteurs

Les trois binômes qui ont utilisé ce théorème, n'ont pas réussi à résoudre le problème. De plus, ils ont été bloqués par ce théorème.

Dans ces cas nous avons observé une rupture cognitive du système de référence. En fait, le théorème n'a pas permis de construire la conjecture, déterminée ensuite par la possibilité de mesurer dans Cabri-géomètre. Les élèves ont essayé de justifier la conjecture en utilisant le théorème mais sans succès. Nous donnons ci-dessous un exemple.

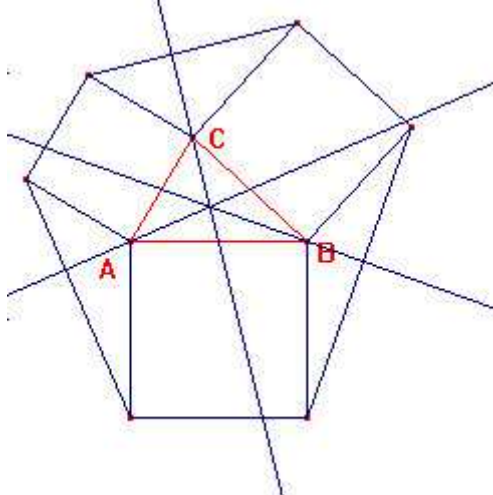
Ecart du système de référence : conception relative à la médiane

Binôme : Nathalie (N), Anna (A), classe Seconde en France.

L'argumentation et la démonstration sont en français (dans l'annexe 2.12 on trouve le dialogue et la copie des élèves).

Dans la suite nous avons sélectionné une partie d'argumentation. La preuve n'a pas été construite. Les élèves ont perdu trop de temps avec une exploration guidée par le théorème : « Les médianes du triangle ABC sont les hauteurs des triangles extérieurs et vice-versa, les hauteurs du triangle ABC sont les médianes des triangles extérieurs ». Elles pensaient que le théorème pouvait être utile pour déterminer la conjecture. Néanmoins, elles n'ont pas réussi à l'utiliser.

Argumentation des élèves	Analyse
<p><i>Les élèves ont construit les hauteurs des triangles extérieurs. Elles ont remarqué que ce sont les médianes du triangle ABC.</i></p> <p>...</p> <p>12. A : ok, là on a mis des hauteurs</p> <p>13. N : Mais ça c'est les médiatrices, elles passent au milieu des côtés</p> <p>14. A : Mais tu as raison, regarde ce segment...</p> <p>15. N : le segment ça passe par les sommets et par le milieu de..</p> <p>16. A : attends il faut remarquer le point, on va mettre B', ça c'est A' et ça c'est C', tu es d'accord</p>	

<p>17. N : oui 18. A : là on va faire des petits segments 19. N : alors, qu'est ce qui se passe ? 20. A : si tu déplace la figure regarde, regarde... 21. N : Il faut réfléchir, je ne comprends pas du tout ! 26. A : ah tu marques ? 27. N : oui 28. A : alors tu dis que les hauteurs sont les médianes de ce triangle 29. N : oui</p> <p><i>Elles parlent avec les camarades, elles rigolent</i></p> <p>30. A : alors, tu as dis que ce sont les médianes, no ? 31. N : oui 32. A : qu'est-ce qu'il faut faire ? Le problème s'est quoi ? Alors, comparer les aires... 33. N : Donc qu'est ce qu'on va faire ? On peut vérifier déjà...</p> <p><i>Elles vérifient les calculs des aires et elles découvrent qu'elles sont effectivement égales.</i></p> <p>40. A : et voilà, déjà on sait que les aires sont pareilles.... 41. N : et bon, ce coté du triangle c'est le même que celui là 42. A : ah bien sûr 43. N : et cette hauteur c'est égale à celle-là 44. A : mais non, c'est pas la hauteur celle-là ! 45. N : C'est la médiane alors 46. A : oui, c'est la hauteur de ce triangle là, et la médiane du triangle ABC</p> <p>....silence [...]</p> <p>52. A : mais juste avec cette propriété comment on peut faire ? </p>	 <p>E₁ : les hauteurs des triangles extérieurs sont les médianes du triangle ABC.</p> <p><i>L'énoncé est un fait. Cependant cette construction a été probablement faite parce que les élèves connaissent quelques théorèmes sur les médianes d'un triangle. Par exemple le théorème : « Une médiane découpe un triangle en deux triangles équivalents (triangles qui ont aires égales) » ou « les trois médianes découpent un triangle en six triangles équivalents ».</i></p> <p><i>Les élèves supposent probablement que les triangles ont les aires égales car ils disent qu'elles vont le vérifier (int. 18). La valeur épistémique de la conjecture devient de certitude après la mesure.</i></p> <p>E₂ : les aires des triangles sont égales</p> <p><i>En ce moment les élèves ont à disposition la conjecture E₂ et l'énoncé E₁ qui peut devenir permis d'inférer.</i></p> <p style="text-align: center;"> D₂ ? \longrightarrow E₂ : les aires des triangles sont égales P: E₁ </p> <p><i>Les élèves ne réussissent pas à résoudre le problème.</i></p> <p><i>Dans la suite, les élèves essayent encore d'appliquer le théorème mais sans résultat. Elles sont complètement bloquées.</i></p>
---	--

Les élèves n'ont pas réussi à prouver. Le théorème a empêché l'évolution de l'argumentation. Il s'agit là d'une rupture du système de référence.

Comme on l'a prévu au cours de l'analyse a priori, la stratégie qui utilise le théorème des médianes et des hauteurs est trop difficile pour les élèves. Ce théorème pouvait amener les élèves à utiliser aussi la stratégie de construction du parallélogramme. Cependant aucun

binôme n'a pensé à résoudre le problème en utilisant cette stratégie. Nous confirmons aussi que dans ce cas, l'utilisation du logiciel n'a pas aidé à la résolution du problème : l'exploration sur Cabri permet d'explorer une situation mais il ne pousse pas nécessairement à ajouter des constructions à la figure construite.

2.1.2.6 La possibilité de mesurer les aires avec l'outil de la mesure de Cabri-géomètre a-t-elle influencé la construction de la conjecture ?

Plus de la moitié des binômes analysés ont utilisé l'oracle de la mesure disponible sur Cabri-géomètre. Il y avait deux façons de calculer les aires : la multiplication entre base et hauteurs ou bien le calcul direct de l'aire. Tous les binômes ont mesuré les segments et ils ont fait les calculs.

Au premier regard, il peut sembler que l'outil « mesure » a empêché l'argumentation constructive car la conjecture a été déterminée comme un fait par l'outil « mesure ». C'est peut-être le cas. Néanmoins, les élèves que nous avons analysés sont conscients que pour valider un énoncé une démonstration est nécessaire. Les obligations contractuelles à propos de la démonstration poussent les élèves à construire une démonstration même s'ils sont sûrs de la vérité de la conjecture. De cette façon, une argumentation structurante peut être nécessaire afin de déterminer les éléments théoriques pour la mise en place de la démonstration. En conséquence, une argumentation constructive ou structurante a été construite par la presque totalité des élèves.

De plus, puisque l'aire était calculée en mesurant les segments, souvent les calculs des aires des triangles livraient des résultats différents. Les élèves doutaient des résultats comme on le voit dans l'exemple suivant :

Binôme : Federico (F), Stefano (S), classe de 3^e année du lycée (16/17 ans, Première en France).

On observe que les élèves n'ont pas confiance dans la mesure.

Il y a deux cadres : le géométrique, où les aires semblent différentes, et l'arithmétique, où les aires sont égales.

Argumentation des élèves	Analyse
Aire ABC = 6,96 19,4 Aire ADE = 7,11 19,4 Aire CNM = 6,96 19,3 Même résultat Aire BLG = 6,93 19,3	<i>Les élèves calculent les aires sur Cabri : ils mesurent les côtés des triangles et avec la calculatrice en déterminent la valeur des aires.</i> E₁ : Aire ABC = 6,96 Aire ADE = 7,11 Aire CNM = 6,96 Aire BLG = 6,93

<p>F : alors on a que les aires sont exactement égales S : oui, mais il y a une petite différence</p> <p>Erreurs de Cabri</p> <p>A₁ 23,36 0,7% + 0,8% = 1,5% A₂ 22,925 0,3% + 1,4 % = 1,7% Erreurs A₃ 23,37 1,2% + 0,4% = 1,6% relatifs A₄ 22,935 0,4% + 1,5 % = 1,9%</p> <p>EA₁ = 0,35 EA₂ = 0,39 Erreurs absolus EA₃ = 0,34 EA₄ = 0,44</p> <p>En considérant que I est un intervalle dans lequel les aires sont égales, nous tirons l'hypothèse que les aires des triangles sont égales</p>	<p><i>L'énoncé est un fait dont la valeur épistémique est liée à l'oracle de la mesure de Cabri.</i></p> <p>E₂ : Aire ABC = 19,4 Aire ADE = 19,4 Aire CNM = 19,3 Aire BLG = 19,3</p> <p><i>Les résultats des calculs sont donnés par une calculatrice et par le logiciel : les élèves donnent des données (entrées) et ils reçoivent des résultats. Le permis d'inférer est donné par des réponses qui sont des résultats de machines. Probablement, ces résultats sont perçus par les élèves comme des « réponses d'oracle ». Néanmoins, contrairement à ce qu'on est amenés à penser d'habitude, les élèves n'ont pas trop confiance dans la mesure. La valeur épistémique n'est pas une certitude.</i></p> <p><i>Les résultats de calculs, qui ne sont pas corrects, poussent les élèves à calculer les erreurs relatives et absolues. L'argument est le suivant :</i></p> <p>R : à moins que les erreurs relatives et absolues aient des valeurs trop élevés</p> <p>F : probablement</p> <div style="text-align: center;"> <pre> graph TD D3["D₃: E₁, E₂"] --> P["P: résultat de calcul"] E3["E₃: Les aires sont égales"] --> P </pre> </div>
<p>F : ça y est ! On peut écrire ça en considérant que I est un intervalle dans lequel les aires sont égales on peut alors faire l'hypothèse que les aires sont égales. Alors, maintenant il faut le démontrer pour le savoir avec certitude...</p>	<p><i>Le schéma argumentatif prévoit alors une place pour la réfutation potentielle : seulement si les erreurs sont petites on peut affirmer que les aires sont effectivement égales</i></p> <p><i>Evidemment si les résultats des erreurs relatives et absolues ne sont pas élevés, ils deviennent un support de l'argument.</i></p> <p><i>On observe que pour les élèves l'indicateur de force F n'a pas encore la valeur de certitude : ils disent que pour savoir avec certitude que la conjecture est correcte il faut la démontrer.</i></p> <p><i>Nous ne pensons pas que les élèves aient besoin de démontrer « pour savoir avec certitude ». La nécessité de construire une démonstration dépend plus probablement des obligations contractuelles.</i></p>

La conjecture est ici un fait empiriquement établi par la mesure. Cependant, il y a une longue discussion à propos des résultats de calculs. Les élèves calculent les erreurs. Apparemment les élèves n'ont pas confiance dans les calculs, sans doute parce qu'ils trouvent des valeurs différentes des aires. C'est pourquoi ils vont calculer les erreurs. Néanmoins, il se peut que la

recherche des erreurs de mesure soit un effet du contrat didactique. La mesure n'est pas acceptée comme outil de démonstration. Le calcul des erreurs relatives et absolues semble être fait pour justifier l'utilisation de l'instrument « mesure » face à l'enseignant plutôt que pour vérifier la vérité de la conjecture.

2.1.3 Discussion des résultats

Cette expérimentation nous a permis en particulier de voir que les difficultés du passage de l'argumentation à la preuve peuvent être de nature structurelle et/ou du système de référence. Les écarts structurels sont difficiles à gérer quand l'argumentation est abductive. Nous avons remarqué que la plupart des élèves construisent des preuves qui contiennent encore des traces abductives. En revanche, si l'argumentation est déjà déductive (comme dans le cas des élèves qui ont utilisé la méthode trigonométrique), la preuve est construite en suivant les pas de la déduction précédemment construite. Dans les cas de l'argumentation inductive par cas, nous avons observé que les écarts structurels et les écarts du système de référence ne sont pas facilement gérés par les élèves.

Comme prévu, nous avons aussi remarqué que la cause d'un écart du système de référence est généralement le manque d'un théorème qui puisse remplacer l'opérateur d'une conception utilisée pendant l'argumentation.

2.1.3.1 Unité ou rupture cognitive structurelle et du système de référence.

L'analyse des solutions du problème a permis d'observer les trois types d'unité ou rupture cognitive considérés au cours du deuxième chapitre : unité cognitive du système de référence et unité cognitive structurelle, unité cognitive du système de référence et rupture cognitive structurelle, rupture cognitive du système de référence.

Nous avons observé l'unité cognitive du système de référence et l'unité cognitive structurelle dans le cas où le problème a été résolu avec la construction d'une démonstration. Par exemple les élèves qui ont utilisé la stratégie trigonométrique. Ils ont construit l'argumentation en chaîne déductive avec des permis d'inférer théoriques.

Nous avons observé également l'unité cognitive du système de référence et l'unité cognitive structurelle dans le cas où les élèves ont utilisé la stratégie de « construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires », ou bien la stratégie « Exploration sur les cas particuliers ». Dans le premier cas, la preuve contient encore des traces d'abduction, dans le deuxième cas, la preuve est une chaîne déductive pour chaque configuration du triangle ABC considéré. Malheureusement, dans ces deux cas les élèves ne résolvent pas le problème.

L'unité cognitive du système de référence et la rupture cognitive structurelle a été observée quand les élèves ont résolu le problème et construit une démonstration même si un écart structurel a été nécessaire. C'est le cas où la stratégie utilisée est « construction des hauteurs des triangles pour comparer les aires » (Giulia et Luisa). L'argumentation abductive a été transformée en preuve déductive.

La rupture cognitive du système de référence a été surtout observée quand les élèves bloqués par leurs conceptions n'ont pas réussi à déterminer un référent théorique pour construire la preuve. C'est le cas des binômes français qui ont considéré le théorème relatif à la médiane. C'est également le cas des élèves qui n'ont pas réussi à se détacher de la stratégie « Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC ». Les cas de rupture cognitive du système de référence que nous avons observé sont liés au cas où les élèves n'ont pas construit de preuve.

Deux binômes sur les quatre, qui ont utilisé la stratégie « Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC + construction des hauteurs » ont résolu le problème grâce au cas où le triangle ABC est équilatéral. Cependant, nous n'avons pas les données pour analyser l'unité ou la rupture cognitive structurelle, car nous n'avons pas l'argumentation complète des élèves.

Le tableau ci-dessous montre un résumé des considérations faites. Il peut être comparé avec le tableau présenté dans l'analyse à priori.

	Construction des hauteurs pour comparer les aires	Exploration sur les cas particuliers du triangle ABC	Exploration sur les cas particuliers + mesure + Construction hauteurs	Exploration sur les cas particuliers + Construction hauteurs	Méthode concernant la trigonométrie	Stratégie du théorème des médianes et des hauteurs
Structure	UC 4 binôme RC 1 binôme	UC 13 binômes	UC 2 binômes	?	UC 2 binômes	
Système de référence	UC 5 binômes	UC 13 binômes	UC 2 binômes	?	UC 2 binômes	
Construction de la démonstration	1 binôme sur 5	0 binômes sur 13	0 binômes sur 2	2 binômes sur 4	2 binômes sur 2	
Total	5	13	2	4	2	

UC : unité cognitive
RC: rupture cognitive

2.2 Situation expérimentale 2

L'expérimentation a eu lieu dans deux classes italiennes et dans une partie d'une classe française. Nous avons recueilli 16 copies, 12 en Italie et 4 en France.

Nous avons enregistré les argumentations de 8 binômes : 5 binômes en Italie et 3 binômes en France.

Contrairement à la situation expérimentale 1, cette situation a permis de développer une analyse intéressante grâce en particulier aux élèves français. Probablement parce qu'ils ont participé à l'expérimentation volontairement. En fait, la séance a eu lieu en dehors des heures de classe. Nous avons demandé aux élèves de rester une heure en plus à la fin de la matinée. Les binômes qui ont accepté de faire l'expérimentation étaient donc intéressés.

Nous avons à disposition les copies des binômes suivants :

- Production de 3 binômes d'une classe de Première en France ; les 3 transcriptions de leurs dialogues.
- Production de 4 binômes d'une classe de 3^e année du lycée (Première en France) en Italie ; 3 transcriptions de leurs dialogues.
- Production de 8 binômes d'une classe de 4^e année du lycée (Terminale en France) en Italie ; 3 transcriptions de leurs dialogues.

Nous avons à notre disposition seulement une partie des transcriptions des argumentations des binômes analysés, cependant la plupart des copies que nous avons à disposition contient une partie de l'argumentation écrite et la preuve. Nous pouvons reconnaître la preuve dans les copies car la plupart des élèves la nomment : ils écrivent « Démonstration », ils disent « Maintenant nous démontrons », etc.. Quand cela n'est pas possible nous signalons cette difficulté.

Tous les binômes ont donné une réponse au problème. Une partie (7 binômes) a construit une preuve et seulement un binôme a construit une démonstration par récurrence.

Tous les élèves avaient à leur disposition 50 minutes. Néanmoins, la durée de l'expérimentation a nécessité un temps inférieur.

Nous avons fait une analyse transversale de toutes les copies recueillis et nous en avons considéré quinze à analyser afin de prendre en compte toutes les stratégies utilisées pour la résolution du problème. Nous avons sélectionné les stratégies suivantes :

- Stratégie empirique. Les élèves qui ont utilisé cette stratégie ont considéré quelques courbes particulières et ils ont fait les calculs pour en déterminer le périmètre et l'aire (généralement ils ont fait les calculs jusqu'à la troisième courbe). Ils ont considéré des exemples numériques. Ils ont choisi un rayon d'une certaine longueur et ils ont calculé l'aire et le périmètre pour quelques courbes. Certains élèves ont substitué la valeur 3,14 à π . La conjecture a été construite à partir d'une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés basée sur des cas numériques. Les binômes observent la régularité dans les résultats de calcul. Les binômes qui ont utilisé cette stratégie de résolution n'ont pas construit une preuve. Leurs copies ne contiennent que des argumentations.
- Généralisation au cas n. Les élèves qui ont utilisé cette stratégie ont considéré quelques courbes (d'habitude les trois premières) pour en déterminer les aires et les périmètres. Les calculs ne s'appuient pas seulement sur des exemples numériques comme dans la stratégie précédente. Les élèves considèrent un rayon r générique pour la première courbe et ils calculent les périmètres et les aires des courbes en considérant le changement du rayon dans chaque subdivision. Ils généralisent à une courbe n. Deux types d'argumentation ont été construits à partir de cette généralisation : une généralisation sur les énoncés (*result pattern generalisation*, Harel, 2001, p. 191) et une généralisation sur le processus (*process pattern generalisation*, Harel, 2001, p.191). Cette dernière généralisation est différente par rapport à la première : les élèves voient la régularité dans le processus qui conduit aux énoncés, c'est-à-dire dans l'enchaînement des pas. C'est une sorte de quasi-induction mais encore au niveau implicite. Considérons l'exemple suivant :

...Nous observons comment la longueur des circonférences est directement proportionnelle au rayon. En fait, la construction, à partir de n circonférences nous donne un nombre 2n des circonférences ayant toutes, le rayon qui est la moitié du rayon de la circonférence qui la précède. Pour cela nous avons chaque fois $2\pi r = 2n(2\pi r/2n)$ où n est le nombre des circonférences qui constituent la longueur de la courbe qui est obtenue comme contours des cercles dessinés chaque fois (Ferruggia, Mieres, classe 4^e année du lycée)

Les élèves voient la relation entre la courbe n et la courbe n+1. Celle-ci est constituée par 2n circonférences ayant comme rayon la moitié du rayon des circonférences constituant la courbe n. Il ne s'agit pas donc d'une généralisation

sur les seuls résultats mais d'une généralisation sur le processus qui conduit aux résultats.

Les élèves qui ont utilisé cette stratégie, ont construit une preuve.

- Quasi-induction. (Harel, 2001, p. 195). La généralisation est faite à partir du processus. Néanmoins, par rapport au cas précédent, elle est explicite. En fait, il s'agit plutôt d'une récurrence implicite. Les élèves qui ont utilisé cette stratégie, ont construit une preuve.
- Récurrence. Les élèves qui ont utilisé cette stratégie ont construit une formule récursive à partir d'un certain nombre des cas. Ils ont construit une preuve par récurrence.

Le tableau montre la classification des stratégies utilisées par les élèves.

Argumentation et preuve				
Nombre Binômes ou trinômes	Stratégie empirique	Généralisation au cas n	Quasi induction	Récurrence
Italiens Classe 3 ^e 4 binômes	2	1		1*
Italiens Classe 4 ^e 8 binômes	6	2		
Français Classe 1 ^e 3 binômes		2	1	
Total	8	5	1	1

*Nous n'avons pas la transcription du dialogue des élèves (Elena, Elena) mais la copie du binôme contient la démonstration par récurrence.

Sept binômes sur 15 ont construit une preuve. Il s'agit des ceux qui ont utilisé une des trois dernières stratégies. Les binômes qui ont utilisé la stratégie empirique ont construit des argumentations, sans construire de preuve.

Nous avons observé que le caractère de généralisation change selon les stratégies utilisées. C'est la généralisation qui détermine la structure de l'argumentation et la possibilité de construire une preuve à partir de celle-ci.

Les élèves qui ont généralisé à partir des énoncés et qui ont utilisé la stratégie empirique n'ont pas réussi à construire de preuve. En revanche ceux qui ont utilisé la même

généralisation mais à partir de la stratégie « généralisation au cas n » ont construit une preuve. Les élèves qui ont utilisé la quasi-induction ont compris que quand les subdivisions augmentent, le rayon diminue d'un facteur 2^n , où n est le nombre des cercles qui constituent la courbe, alors que les courbes augmentent du même facteur. La généralisation dans ce cas s'appuie sur le processus. De la même façon les élèves qui ont construit une démonstration par récurrence ont fait d'abord une généralisation sur le processus.

Comme prévu, les conceptions mobilisées par les élèves, que nous avons observées au cours de l'expérimentation, concernent le cas limite.

A partir des stratégies de résolution du problème nous construirons une analyse structurelle et une analyse du système de référence pour déterminer les continuités et les écarts entre argumentation et preuve. Ensuite nous fournirons aussi une analyse en terme d'unité ou rupture cognitive structurelle et du système de référence.

2.2.1 Structures d'argumentations construites par les élèves à partir des procédures de résolution utilisées

Dans la suite, nous considérons pour chaque stratégie décrite les argumentations qui ont été développées par les élèves. Nous comparons ces argumentations avec les preuves correspondantes (si elles existent) pour analyser les continuités et les écarts de structure. Finalement pour chaque copie analysée nous étudierons l'unité ou la rupture cognitive structurelle.

En particulier, nous considérerons les trois argumentations suivantes:

- Induction empirique.
- Généralisation au cas n
- Quasi-induction

Pour la récurrence, nous considérerons la démonstration construite par les élèves. Nous n'avons pas la transcription de l'argumentation des élèves, mais nous avons une partie d'argumentation écrite. Cela est suffisant pour l'analyse que nous voulons faire.

2.2.1.1 Stratégie empirique

Les binômes qui ont construit une argumentation inductive empirique n'ont pas construit de preuve. Nous pouvons faire l'hypothèse que l'absence d'une preuve est à chercher dans la rupture cognitive structurelle. En fait, la généralisation est faite à partir

des quelques énoncés. De plus, les énoncés s'appuient sur des exemples numériques. La généralisation sur le processus semble ne pas être accessible à ces élèves.

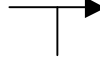
Nous considérons un seul exemple, celui du binôme composé par les élèves Nicola et Stefano.

Binôme : Nicola (N), Stefano (S), classe de 4^e année du lycée en Italie (17/18 ans, Terminale en France)

L'argumentation et la démonstration sont traduites de l'italien au français (dans l'annexe 3.1 on trouve l'argumentation originale et la copie des élèves).

Les élèves utilisent la formule de l'aire du cercle pour déterminer l'aire des trois premières courbes. Ils explicitent la conjecture. Néanmoins, ils ont besoin d'une vérification numérique pour la renforcer. Considérons le dialogue et la copie des élèves.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>6. N : ...l'aire est π au carré, donc</p> <p>7. S : l'aire</p> <p>8. N : oui mais ici elle devient la moitié... la somme des quatre cercles...c'est-à-dire que la somme de ces deux cercles est égal à celle-ci (<i>il signale sur la figure la partie de plan limitée par la deuxième courbe</i>), la somme de ces quatre cercles est égale à celle-la (<i>il signale sur la figure la partie de plan limitée par la troisième courbe</i>)...c'est le rayon, oui l'aire est la moitié, nous avons découpé le diamètre de la première courbe en deux et donc le diamètre d'une des deux circonférences est la moitié du diamètre de la première... et en conséquence l'aire est la moitié, non la somme des deux est la moitié.</p> <p>9. S : oui parce que</p> <p>10. N : parce que la somme du rayon de la première et du rayon de la deuxième est égal au rayon de la première grande et donc l'aire de ces deux circonférences ici, est la moitié de la première circonférence.</p> <p>11. S : oui d'accord on peut écrire...</p> <p><i>Nicola commence à écrire mais d'abord il dit :</i></p> <p>16. N : attends un moment qu'on va les mesurer les aires</p> <p><i>Les élèves mesurent le diamètre AB avec Cabri-géomètre. Le diamètre est $AB=8,9$. Ils calculent les aires des cercles à partir du rayon $AC=4,45$</i></p> <p><i>Ils écrivent :</i> 1^o cas : $\pi AC^2=62,21$</p>	<p><i>Les élèves considèrent la formule de l'aire pour la première courbe.</i></p> <p>D₁ : cercle \longrightarrow E₁ : l'aire est πr^2</p> <p>P: formule de l'aire du cercle</p> <p><i>Ils considèrent la deuxième courbe. Nicola voit sur la figure que le rayon d'un des cercles de la deuxième courbe est la moitié du rayon de la première courbe.</i></p> <p>E₂ : les rayons des deux cercles appartenant à la deuxième courbe sont la moitié du rayon de la première courbe</p> <p><i>L'aire est alors la moitié de la précédente :</i></p> <p>D₃ : E₂ \longrightarrow E₃ : l'aire est la moitié de la précédente</p> <p>P: formule de l'aire du cercle</p> <p><i>Les élèves semblent construire une généralisation sur le processus. Cependant, ils n'ont pas encore explicité complètement la relation qui permet de passer d'une courbe à la successive. De plus, ils mesurent le diamètre et calculent l'aire pour les trois courbes. Ils font de calculs pour être certains des résultats trouvés.</i></p> <p>E₄ : l'aire pour la première courbe est 62,21</p>

<p>2° cas : $\pi (AC/2)^2 = 15,62$ 3° cas : $\pi (AC/4)^2 = \dots$ Pour chaque courbe ils écrivent les résultats des expériences numériques. En fin ils écrivent la conclusion :</p> <p>Chaque fois que le rayon est la moitié du précédent, la somme des aires des circonférences obtenues est toujours $\frac{1}{2}$ de la somme des aires des circonférences obtenues au pas précédent.</p> <p>Ensuite les élèves considèrent le périmètre</p> <p>36. N : ...la courbe est celle-ci, donc il y a cette circonférence plus cette circonférence 37. S : lorsque l'autre est la circonférence petite pour quatre fois 38. N : donc ça sera $2\pi \dots$ donc c'est la première 2π et la deuxième 2π pour r sur deux ... attends qu'on va l'écrire</p> <p>Comme ils l'ont fait pour l'aire, les élèves vont écrire les formules des périmètres pour les trois premières courbes. Ensuite ils vont faire le calculs pour être sûrs de résultats trouvés. Finalement ils écrivent:</p> <p>La longueur des périmètres pour chaque subdivision est égale à la circonférence de départ ayant pour diamètre AB.</p>	<p>E_5 : l'aire pour la deuxième courbe est 15,62</p> <p>Ensuite ils déduisent l'énoncé E_3 par une généralisation sur les énoncés.</p> <p>$D_3 : E_4, E_5 \dots$  E_3 : l'aire est à chaque fois la moitié de la précédente</p> <p>P: généralisation sur les énoncés</p> <p>La conclusion est tirée par les énoncés précédents, mais surtout par l'outil de la mesure de Cabri-géomètre.</p> <p>Par rapport à l'énoncé précédent les élèves disent « chaque fois ». Ici ils ont généralisé implicitement au cas n. Cependant il s'agit d'une généralisation sur les énoncés. Les élèves ne semblent pas comprendre le processus.</p> <p>La valeur épistémique de l'énoncé emprunté comme un fait, par l'oracle de la mesure de Cabri-géomètre, augmente la force de l'argument associé au même énoncé. Les élèves ont besoin de cette valeur pour être convaincus de la conjecture.</p> <p>Les élèves considèrent le périmètre de la même façon que l'aire. Nous ne répétons pas l'analyse car elle est similaire à celle que nous avons décrite.</p>
---	--

Les élèves n'ont pas construit de preuve. Tout ce qu'ils ont fourni c'est un énoncé pour répondre à la question du problème et quelques calculs sur les trois premières courbes. Probablement il y a là une rupture cognitive structurelle. L'écart entre une généralisation sur les résultats et une généralisation sur les processus n'est pas pris en charge par les élèves. L'utilisation de la mesure pour calculer les aires confirme notre hypothèse : l'aire calculée sur des exemples numériques permet aux élèves de vérifier la conjecture construite sur la base d'un calcul algébrique.

2.2.1.2 Généralisation au cas n

Deux procédures de résolution ont été accomplies pour une généralisation au cas de la courbe n. Certains élèves ont construit une argumentation inductive empirique et ensuite ils ont généralisé au cas de la courbe n avec une généralisation sur les énoncés.

Au contraire certaines binômes ont considéré la liaison entre la courbe et le rayon et ils ont donc déterminé la loi générale à partir d'une analyse entre une courbe et la courbe suivante. Il s'agit ici d'une généralisation sur le processus.

2 binômes sur 5 ont utilisé la première généralisation et les 3 binômes restants ont utilisé la seconde.

Dans la suite nous fournirons deux exemples :

- Généralisation sur les résultats
- Généralisation sur le processus

Généralisation sur les résultats

Binôme : Christophe (C), Ibrahim (I), classe Première en France.

L'argumentation et la démonstration sont en français (dans l'annexe 3.2 on trouve le dialogue et la copie des élèves).

Le binôme construit une argumentation en même temps que la preuve. En fait, la conjecture est construite comme un fait : les élèves utilisent l'outil de la mesure de Cabri-géomètre et une calculette pour la déterminer. Dans la première partie du dialogue il n'y a pas d'argumentation, les énoncés sont des faits. La deuxième partie du dialogue et la copie sont similaires car la preuve est construite à mesure que l'argumentation se construit.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>7. I : bon on va mesurer... je vais calculer la longueur des périmètres avec le truc...</p> <p><i>Ibrahim mesure la longueur des cercles et avec la calculette de Cabri, calcule les périmètres totaux.</i></p> <p>8. C : alors ça donne quoi ?</p> <p>9. I : ils sont tous pareils... les périmètres sont égaux... la longueur c'est la même...maintenant il faut faire l'aire</p> <p><i>Ibrahim mesure l'aire des cercles et avec la calculette de Cabri calcule les aires totales.</i></p> <p>10. C : les aires ne sont pas égales ?</p> <p>11. I : non...mais maintenant je fais le rapport entre les aires ?</p> <p>12. C : le rapport entre les aires ?</p> <p><i>Ibrahim calcule le rapport entre l'aire de la première courbe et l'aire de la deuxième courbe et le rapport entre l'aire de la première courbe et l'aire de la troisième courbe.</i></p> <p>13. I : oui, tu vois... à chaque fois l'aire est divisée par deux</p> <p>14. C : ah oui !!</p>	<p><i>Les énoncés sont des faits donnés par l'oracle de la mesure de Cabri-géomètre.</i></p> <p>E₁ : les périmètres sont égaux E₂ : l'aire est à chaque fois la moitié de la précédente</p> <p><i>Ensuite les élèves annoncent de devoir démontrer.</i></p>

Les deux conjectures ont été construites somme des faits donnés par l'oracle de la mesure. Pendant la preuve les élèves construisent des calculs algébriques. Ensuite ils considèrent une courbe n . Cependant elle apparaît comme un cas parmi d'autres. Elle n'est pas reliée à la courbe précédente ou à la courbe suivante, mais simplement elle représente la courbe générique.

L'argumentation et la preuve sont concomitantes. C'est pourquoi elles sont pratiquement égales. C'est pourquoi nous les considérons ensemble. La preuve a été reconnue comme telle car les élèves déclarent qu'ils écrivent afin de construire une démonstration.

Preuve des élèves	Analyse
<p>Périmètre Si on divise le rayon par 2</p> <p>Alors $2 \times \frac{1}{2} \times 2\pi r = 2\pi r$ Alors $4 \times \frac{1}{4} \times 2\pi r = 2\pi r$</p> <p>En ce moment Ibrahim dit :</p> <p>37. I : en <u>général</u> on peut dire qu'il est n fois par un sur n fois $2\pi r$ donc ça sera toujours $2\pi r$.</p> <p>Christophe écrit :</p> $n \times \frac{1}{n} \times 2\pi r = 2\pi r$ <p>Aire $2 \times (\frac{1}{2})^2 \times \pi r^2 = \pi r^2 / 2$ $4 \times (\frac{1}{4})^2 \times \pi r^2 = \pi r^2 / 4$</p> <p>Ibrahim dit :</p> <p>41. I : ah ok... donc ok un sur deux πr au carré... pour la troisième ça fait... 4 fois par un sur quatre... donc ça fait un sur quatre πr au carré et finalement la généralité ça fait n fois par un sur n au carré πr au carré... donc un sur n πr au carré...</p> <p>Christophe écrit :</p> $n \times (\frac{1}{n})^2 \times \pi r^2 = \pi r^2 / n$	<p>Les élèves font des calculs algébriques pour calculer le périmètre de la première courbe et de la deuxième. Ensuite ils généralisent à la courbe n.</p> <p>E₃ : le périmètre pour la première courbe est $2\pi r$ E₄ : le périmètre pour la deuxième courbe est $2\pi r$ E₅ : le périmètre pour la courbe n est $2\pi r$</p> <p>D₁ : E₃, E₄, E₅ → E₁ : les périmètres sont égaux</p> <p>P : généralisation sur les énoncés</p> <p>De la même façon, ils calculent les aires pour les deux premières courbes et ils généralisent le résultat à la courbe n.</p> <p>E₆ : l'aire pour la première courbe est $\pi r^2/2$ E₇ : l'aire pour la deuxième courbe est $\pi r^2/4$ E₈ : l'aire pour la courbe n est $\pi r^2/n$</p> <p>D₂ : E₆, E₇, E₈ → E₂ : l'aire est à chaque fois la moitié de la précédente</p> <p>P : généralisation sur les énoncés</p> <p>C'est un résultat de calcul littéral qui permet de passer d'une subdivision à l'autre.</p>

Nous avons observé une continuité structurelle : les élèves construisent l'argumentation et la preuve ensemble. Ils écrivent la preuve pendant qu'ils argumentent et d'une certaine façon, les résultats de calcul littéral déterminent leur argumentation. Il y a donc unité cognitive structurelle entre argumentation structurante de la conjecture et preuve.

Généralisation sur le processus

Binôme : Vincent (V), Ludovic (L), classe Première en France.

L'argumentation et la démonstration sont en français (dans l'annexe 3.3 on trouve le dialogue et la copie des élèves).




Contrairement au cas précédent, les élèves construisent la conjecture à partir d'un calcul tout de suite algébrique. Les élèves ne prennent pas en compte des exemples numériques. La généralisation au cas de la courbe n est probablement faite à partir du processus mais cette généralisation reste encore implicite. Les élèves semblent considérer deux courbes successives.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>9. V : le périmètre c'est $2\pi r$ et l'aire c'est πr au carré</p> <p>10. L : oui</p> <p>11. V : mais comment évolue le rayon déjà ? r est divisé par deux ?</p> <p>12. L : oui, le premier périmètre est $2\pi r$ et le deuxième est $2\pi r$ sur deux plus $2\pi r$ sur deux et donc ... ça va être le même</p> <p>13. V : et oui...</p> <p>14. L : et ça va à être toujours le même parce que... regarde... on va appeler r au premier, r est le rayon du premier, le premier cercle a le périmètre....</p> <p>15. V : $2\pi r$</p> <p>16. L : $2\pi r$ et la somme des deuxièmes est $2\pi r$ sur deux</p> <p>17. V : plus $2\pi r$ sur deux donc $2\pi r$... et cetera. l'autre est $2\pi r$ sur 4 mais pour 4 fois</p> <p>18. L : donc la somme est toujours $2\pi r$</p> <p>19. V : c'est toujours le même périmètre....</p>	<p><i>D'abord les élèves considèrent la première courbe et ils calculent l'aire et le périmètre à partir d'un rayon générique r.</i></p> <p>D₁: cercle \longrightarrow E₁: le périmètre est $2\pi r$ et l'aire est πr^2</p> <p>P: formule de la circonférence et de l'aire du cercle</p> <p><i>Les élèves se posent la question de l'« évolution » du rayon d'une subdivision à l'autre.</i></p> <p><i>Ils disent que le rayon est divisé par deux mais ils ne disent pas s'ils considèrent ça pour toutes les subdivisions. Nous pouvons le supposer car le mot « évolue » (int. 11) semble donner un sens de continuité.</i></p> <p>E₂ : le rayon est divisé par deux (dans chaque subdivision)</p> <p><i>L'énoncé explicite un fait : il est emprunté à Cabri-Géomètre.</i></p> <p><i>La généralisation est faite à partir des résultats des calculs. Cependant il semble que les élèves considèrent deux cas attachés l'un à l'autre. L'énoncé E₂ permet de comprendre le changement du rayon d'une subdivision à l'autre. D'une certaine façon le rayon est finalement lié à la</i></p>

<p>20. L : oui, par contre l'aire... l'aire c'est πr au carré</p> <p>21. V : là on va avoir ...</p> <p>22. L : hem.... Ça va être divisé par deux à chaque fois</p> <p>23. V : Oui, πr sur deux au carré plus πr sur deux au carré est égal à</p> <p>24. L : est égal à ... πr carré sur deux</p> <p>25. V : oui c'est comme ça en divisant par deux</p> <p>26. L : oui, et donc c'est toujours la moitié de la précédente</p> <p>31. V: l'aire est à chaque fois divisée par deux....</p>	<p><i>courbe. En outre le mot « mais » est une locution qui indique une affirmation qui a été déjà faite, une affirmation attendue : la multiplication du périmètre d'un cercle pour les nombres des cercles présents dans la courbe.</i></p> <p><i>L'argument semble être le suivante :</i></p> <p>D₃: le périmètre de la deuxième courbe est $2\pi r$ → E₃: le périmètre de la troisième courbe est $2\pi r/4$ pour 4 fois</p> <p>P: le rayon est la moitié du précédent et le nombre des courbes est double</p> <p>D₄: argument 3 → E₄: le périmètre est toujours le même</p> <p>P: généralisation sur le processus</p> <p><i>Pour l'aire les élèves utilisent la même stratégie : ils font les calculs sur les deux premiers cas et ensuite ils généralisent.</i></p> <p>D₅: l'aire de la première courbe est πr^2 → E₅: l'aire de la deuxième courbe est $\pi(r/2)^2$ pour 2 fois</p> <p>P: le rayon est la moitié du précédent et le nombre des courbes est double</p> <p>D₆: argument 5 → E₆: l'aire c'est toujours la moitié de la précédente</p> <p>P: généralisation sur le processus</p>
--	--

Les élèves construisent la preuve en suivant les pas de l'argumentation. Ils considèrent les courbes jusqu'à la courbe n. Ils écrivent tous les passages des calculs. C'est le processus qui est généralisé et non les énoncés.

Preuve des élèves	Analyse
<p>Notons R le premier rayon ($R=AB$)</p> <p>1) Soit P_1, P_2, P_4, \dots les périmètres respectifs du premier cercle, des deux seconds des quatre troisièmes,...</p> <p>$P_1=2\pi R$</p> <p>$P_2=2\pi R/2 + 2\pi R/2=2\pi R$</p> <p>$P_4=2\pi R/4+2\pi R/4+2\pi R/4+2\pi R/4=2\pi R, \dots$</p>	<p><i>Les élèves calculent le périmètre pour la première courbe</i></p> <p>D₁: cercle → E₁: $P_1=2\pi R$</p> <p>P: formule du périmètre du cercle</p>

<p>$P_n = 2\pi R/n + 2\pi R/n + 2\pi R/n + \dots + 2\pi R/n = 2\pi R$ n fois, donc le périmètre est constant</p> <p>2) Soit A_1, A_2, A_4, \dots les aires respectives du premier cercle, des deux seconds des quatre troisièmes,...</p> <p>$A_1 = \pi R^2$ $A_2 = \pi R^2/4 + \pi R^2/4 = \pi R^2/2 = A_1/2$ $A_4 = \pi R^2/16 + \pi R^2/16 + \pi R^2/16 + \pi R^2/16 = \pi R^2/4 = A_1/4 \dots$ $A_n = \pi R^2/n^2 + \pi R^2/n^2 + \dots + \pi R^2/n^2 = \pi R^2/n^2 * n = \pi R^2/n = A_1/n$ donc l'aire tend vers zéro quand n augmente</p>	<p><i>Les élèves calculent le périmètre pour la deuxième et la troisième courbe, enfin ils généralisent pour la courbe n..</i></p> <p>D₄: P₁, P₁ → P₂ P₂ → P₃...  E₄: le périmètre est constant</p> <p>P: généralisation sur le processus</p> <p><i>Les élèves écrivent « pour n fois » quand ils font les calculs pour la courbe n ; n représente le nombre des cercles dans la courbe et en même temps la subdivision du rayon d'un cercle de la courbe n.</i></p> <p><i>Pour l'aire, la structure est la même : d'abord ils calculent l'aire pour le premier cercle. Ensuite ils généralisent à la courbe n.</i></p> <p>D₁: cercle  E₁: l'aire est πR²</p> <p>P: formule de l'aire du cercle</p> <p>D₃: A₁, A₁ → A₂ A₂ → A₃...  E₃: A₂ = A₁/2 ... A_n = A₁/n</p> <p>P: généralisation sur le processus</p>
---	--

Cette analyse révèle une continuité structurelle entre argumentation et preuve et une unité cognitive structurelle.

La structure inductive de l'argumentation se maintient dans la preuve construite par l'élève.

La liaison entre le rayon et la courbe nous permet d'appuyer l'hypothèse que la généralisation a été faite sur le processus et non sur les résultats de calcul.

C'est la relation entre le nombre des cercles dans une courbe et le rayon de chacun d'eux qui permet de voir la généralité sur le processus.

Dans tous les exemples analysés de généralisation sur le processus, nous avons observé unité cognitive structurelle.

2.2.1.3 Quasi-induction

Un binôme a utilisé la quasi-induction pendant la preuve. Nous ne pouvons pas encore parler de récurrence car elle est présente à un niveau implicite. Nous présentons l'argumentation et la preuve des élèves.

Binôme : Adrien (A), Jean Philippe (J), classe Première en France.





L'argumentation et la démonstration sont en français (dans l'annexe 3.4 on trouve le dialogue et la copie des élèves).

Le binôme construit une argumentation en même temps que la preuve. En fait, la conjecture est construite comme un fait : les élèves utilisent l'outil de la mesure de Cabri-géomètre et une calculatrice pour la déterminer. Dans la première partie du dialogue il n'y a pas d'argumentation, les énoncés sont des faits. En revanche, la deuxième partie est constituée d'une argumentation structurante. Cette argumentation et la preuve correspondante sont similaires car la démonstration est construite en même temps que l'argumentation.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>4. A: donc au début on a que le périmètre est π pour AB... attends que j'écris</p> <p>5. J: oui, ensuite on a que le périmètre est π et le demi de AB</p> <p>6. A: donc on prend les deux</p> <p>7. J: et donc on prend encore π pour le demi de AB... donc on a exactement la même chose</p> <p>8. A: oui, on a bien remarqué un truc remarquable</p> <p>9. J: à la troisième subdivision on a encore la même chose</p> <p>10. A: donc le périmètre est π un quart de AB plus π un quart de AB plus π un quart de AB plus π un quart de AB ... et donc π AB.</p> <p>11. J: je suppose qu'il faut démontrer</p> <p>12. A: et oui</p>	<p><i>Les élèves considèrent la première courbe.</i></p> <p>D₁ : cercle \longrightarrow E₁ : le périmètre est πAB</p> <p>P : formule du périmètre du cercle</p> <p><i>A la deuxième courbe le périmètre est le même. Par un résultat de calcul ($\pi AB/2 + \pi AB/2 = \pi AB$) les élèves construisent le deuxième énoncé.</i></p> <p><i>Les élèves peuvent généraliser:</i></p> <p>D₃ : résultat de calcul \longrightarrow E₃ : le périmètre est toujours le même</p> <p>P : généralisation sur les énoncés</p>

Les élèves savent qu'ils doivent démontrer. La preuve se détache de l'argumentation lorsque les élèves considèrent la courbe n. D'abord ils cherchent à comprendre

comment exprimer le nombre de cercles et le diamètre de chaque cercle pour la courbe n. Ensuite ils font tous les calculs sur le cas générique.

Preuve des élèves	Analyse
<p><u>Nombre des cercles à la division n</u> A chaque division on double le nombre des cercles Sans division on a 1 cercle Donc à la n ième division on a 2^n cercles</p>	<p><i>Les élèves considèrent le nombre de cercles dans deux courbes successives.</i></p> <p>D₄ : courbe ayant n cercles  E₄ : la courbe suivante a 2n cercles</p> <p>P : généralisation sur le processus</p> <p><i>Ils considèrent aussi le nombre de cercles dans la première courbe.</i></p> <p>E₅ : la première courbe a un cercle</p> <p><i>La généralisation sur le processus permet de construire la récurrence. Les élèves considèrent deux courbes successives, ainsi que la première courbe, conditions nécessaires pour avoir la récurrence.</i></p> <p>D₆ : E₅ argument 4  E₆ : le nombre des cercles est 2^n</p> <p>P : schéma de récurrence</p>
<p><u>Diamètre de chaque cercle à la division n</u> On prend toujours le milieu du diamètre du cercle précédent. A chaque division le diamètre des cercles est divisé par deux Sans division le diamètre est égal à AB Donc à la division n le diamètre de chaque cercle est égal à $AB/2^n$</p> <p>Donc à la division n on a 2^n cercles chacun de diamètre $AB/2^n$</p> <p>Donc $P_{total} = 2^n (\pi AB/2^n) = \pi AB$ Donc le périmètre ne dépend pas du nombre de division. Le périmètre est constant.</p>	<p><i>Pour le diamètre, les élèves procèdent exactement de la même façon. Ils considèrent deux courbes successives et la première courbe.</i></p> <p>D₇ : courbe ayant diamètre d  E₇ : le diamètre de la courbe successive est divisé par deux</p> <p>P : généralisation sur le processus</p> <p>E₈ : la première courbe a pour diamètre AB</p> <p><i>La généralisation sur le processus amène à la construction d'une récurrence.</i></p> <p>D₉ : E₈ Argument 7  E₉ : le diamètre de chaque cercle est $AB/2^n$</p> <p>P : schéma de récurrence</p> <p><i>Les élèves dans les pas suivantes utilisent la chaîne déductive. Au moyen des calculs et des arguments précédents ils prouvent que le périmètre est</i></p>

$A_{\text{total}} = 2^n (\pi (\text{diamètre}/2)^2) = 2^n \pi (AB/2^{n+2})^2$ $= 2^n \pi (AB^2/2^{2n+4}) = \pi AB^2/2^{n+2}$ <p>Où 2^n nombre des cercles $\pi (\text{diamètre}/2)^2$ aire d'un cercle</p>	<p>toujours le même et que l'aire est toujours la moitié de la précédente. C'est une déduction ce qui suit.</p> <p>D_3: courbe n \rightarrow E_3: le périmètre est constant</p> <p>P: E_4 et E_9</p> <p>Pour l'aire la structure est la même.</p> <p>D_{10}: courbe n \rightarrow E_{10}: $A_n = \pi AB^2/2^{n+2}$</p> <p>P: E_4 et E_9</p>
--	---

L'analyse révèle la présence de la récurrence implicite. Les élèves comprennent la relation entre une courbe et sa successive. Il s'agit donc d'une généralisation sur le processus. De plus, les énoncés E_5 , E_8 écrits à côté des lois de généralisation, nous permettent d'affirmer qu'il y a une récurrence implicite. Elle n'est pas encore explicite : les élèves ne la nomment jamais. On remarque que la récurrence n'est pas utilisée pour démontrer directement la formule du périmètre et de l'aire des cercles, mais pour déterminer la liaison entre le nombre des cercles d'une subdivision à l'autre et la relation entre les diamètres des cercles d'une subdivision à l'autre. Il ne s'agit pas de l'application d'une règle (la récurrence) afin de construire une démonstration. La généralisation est vraiment cherchée par les élèves afin de comprendre la liaison avec un pas et son successif. C'est probablement de façon inconsciente que les élèves utilisent la récurrence. C'est pourquoi nous la considérons comme une quasi-induction. Les élèves ont géré l'écart entre l'argumentation s'appuyant sur une généralisation des énoncés et l'argumentation (et preuve) fondée sur le schéma de récurrence. Le passage à une démonstration par récurrence implicite et par déduction, semble révéler un écart structurel qui n'a pas cependant causé de rupture cognitive structurelle.

2.2.1.4 Récurrence

Un seul binôme a utilisé la récurrence comme processus de preuve. Nous n'avons pas le dialogue des élèves. Cependant, nous présenterons la copie car une partie de l'argumentation est écrite.

Dans les annexes la copie originale des élèves est présentée.

Binôme : Elena, Elena, classe de 3^e année du lycée en Italie (16/17 ans, première en France)

La copie est traduite de l'italien au français (dans l'annexe 3.5 on trouve la copie originale des élèves).

Argumentation des élèves	Analyse
<p> $a_1=2\pi r$ $a_2=2(2\pi r/2)= 2\pi r$ $a_3=4(2\pi r/4)= 2\pi r$ $a_4=8(2\pi r/8)= 2\pi r$ Il est toujours $2\pi r$: constant Ensuite les élèves écrivent : $\begin{cases} a_1=2\pi r \\ a_n=2^{n-1} (a_{n-1} / 2^{n-1}) \end{cases}$ Formule récursive Les parts dont AB est divisé sont toujours pairs parce qu'elles sont les puissances de 2. </p>	<p> <i>Les élèves font les calculs pour les quatre premières courbes. Ensuite elles généralisent à la courbe n. La généralisation semble être faite sur les résultats.</i> </p> <p> D_1: cercle \longrightarrow E_1: le périmètre est πAB P: formule du périmètre du cercle </p> <p> D_2: résultats des calculs \longrightarrow E_2: le périmètre est toujours constant P: généralisation sur les résultats </p> <p> <i>Ensuite les élèves écrivent une formule récursive. Ils essayent de généraliser d'une façon formelle. Ils pensent probablement à démontrer. La formule récursive exprime la liaison entre le rayon et le nombre de cercles constituant une courbe. De plus les élèves relient explicitement une courbe n à la précédente : a_n et a_{n-1}. La formule récursive provient clairement d'une généralisation sur le processus. Une généralisation sur le processus a probablement été faite oralement.</i> </p> <p> D_3: \longrightarrow E_3: formule récursive P: généralisation sur le processus </p> <p> <i>Nous ne connaissons pas les hypothèses du troisième argument. Elles peuvent être : l'énoncé E_3 ou, probablement, des conclusions des autres énoncés qui ne sont pas explicités dans la copie.</i> </p>

La démonstration est construite avec une récurrence explicite. Nous analysons la copie des élèves.

Preuve des élèves	Analyse
<p>Principe d'induction</p> <p>$a_2=2^1 (2\pi/2^1)= 2\pi$ ok</p> <p><u>Hp</u> : $a_n=2^{n-1} (2\pi /2^{n-1})$</p> <p><u>Ts</u> : $a_{n+1}=2^n (2\pi /2^n)$</p> <p><u>Dim</u> :</p> <p>$a_{n+1}=a_n 2/2$</p> <p>$a_{n+1}=2^{n-1} (2\pi /2^{n-1}) 2/2= 2^n (2\pi /2^n)$</p> <p>pour le principe d'induction c'est vrai pour tous les $n \geq 2$</p> <p>Ensuite les élèves font la même démonstration pour l'aire.</p>	<p>Les élèves considèrent la deuxième courbe comme premier pas de la récurrence.</p> <p>Par un résultat de calcul, le périmètre est constant.</p> <p>E₄ : pour la deuxième courbe le périmètre est 2π</p> <p>L'initialisation de la récurrence est satisfaite.</p> <p>Les élèves prouvent la loi :</p> <p>D₅ : $a_n=2^{n-1} (2\pi /2^{n-1})$ $\xrightarrow{\quad}$ E₅ : $a_{n+1}=2^n (2\pi /2^n)$</p> <p>P: calculs</p> <p>La deuxième partie de la récurrence est vérifiée.</p> <p>Donc par récurrence (ou principe d'induction) la formule récursive est vraie.</p> <p>D₆ : E₄ et l'argument 5 $\xrightarrow{\quad}$ E₆ : E₃</p> <p>P: schéma de récurrence</p> <p>Les élèves de la même façon prouvent que l'aire vaut à chaque fois la moitié de la précédente.</p> <p>Nous n'analysons pas cette partie car il n'y a pas d'argumentation et la démonstration est similaire à celle construite pour le périmètre.</p>

La généralisation dans l'argumentation comme dans la démonstration est faite sur le processus et non sur les résultats de calcul. Même si nous n'avons pas l'argumentation orale des élèves, à partir de l'analyse de la copie, nous pouvons supposer une unité cognitive entre argumentation et démonstration. Au moment de l'argumentation, les élèves pensaient probablement déjà à la récurrence. Il n'y a aucun élément dans la copie des élèves qui amène à penser à un écart structurel.

Pour résumer

Nous avons fait l'hypothèse que les élèves qui ont utilisé une argumentation inductive empirique n'ont pas réussi à construire une preuve parce qu'une rupture cognitive structurelle est intervenue.

Tous les élèves qui ont utilisé une généralisation sur n , ont construit une preuve. Parmi eux et pour ceux qui ont fait une généralisation sur les énoncés, la preuve est un calcul

algébrique sur un certain nombre de cas comprenant celui de la courbe n (voir le binôme Christophe et Ibrahim). Les élèves qui ont généralisé sur les processus ont construit une preuve qui est plus proche de la preuve par récurrence.

Dans les deux cas décrits pour la généralisation sur n , nous avons observé une unité cognitive structurelle entre argumentation et preuve.

Les élèves qui ont construit une quasi-induction ont révélé une unité cognitive structurelle ainsi que les élèves qui ont utilisé la récurrence. Néanmoins, dans le cas de la quasi-induction, nous avons remarqué la présence d'un écart structurel entre argumentation constructive et argumentation structurante. Au contraire il y a continuité entre l'argumentation structurante et la preuve. En fait, l'analyse de la continuité ou de l'écart structurel, est intéressante si on considère les types de généralisation qui sont utilisés : la généralisation sur le processus permet le passage vers la récurrence. Puisque les deux généralisations ne correspondent pas nécessairement l'une à l'argumentation et l'autre à la preuve, certaines analyses ont été accomplies à l'intérieur de la même argumentation (ou de la même preuve) et non nécessairement entre argumentation et preuve.

Pour conclure l'analyse structurelle, nous présentons le tableau suivant.

Argumentation	Construction d'une preuve	Continuité /Ecart structurel	Unité rupture cognitive structurelle	Construction de la démonstration
Induction empirique 8 binômes	Non	?	Rupture cognitive structurelle	La démonstration n'est pas construite
Généralisation au cas n 5 binômes	Oui	Continuité structurelle	Unité cognitive structurelle	La démonstration n'est pas construite
Quasi-induction 1 binôme	Oui	Continuité structurelle entre argumentation structurante et preuve	Unité cognitive structurelle entre argumentation structurante et preuve	La démonstration est presque construite
Récurrence 1 binôme	Oui	Continuité structurelle	Unité cognitive structurelle	La démonstration est construite

Les preuves qui sont des démonstrations sont la quasi-induction et la récurrence.

2.2.2 Analyse du système de référence de l'argumentation et de la preuve

Du point de vue du système de référence, nous avons toujours observé une continuité entre argumentation et preuve. D'ailleurs, comme nous l'avons observé au cours de

l'analyse a priori, ce problème appelle une résolution basée sur le calcul. Les formules du périmètre et de l'aire du cercle ont été évoquées par tous les élèves depuis le début du problème. La résolution a en particulier demandé des calculs. Le système de référence est d'une certaine façon choisi à l'avance. C'est pourquoi, nous avons observé unité cognitive du système de référence dans tous les cas analysés.

Une section particulière est dédiée aux argumentations et aux preuves construites par les élèves concernant le cas limite.

2.2.2.1 Conceptions mobilisées concernant le cas limite

Comme cela a été prévu, certaines conceptions relatives au cas limite, ont été mobilisées par les élèves.

L'interprétation du cas limite dans le cadre numérique permet de s'appuyer sur une théorie de référence, alors qu'une interprétation dans le cadre géométrico-perceptif, est facilement destinée à l'échec car les variations des éléments n'ont pas les moyens d'être formalisés dans le cadre géométrique. On peut imaginer le périmètre au cas limite coïncidant avec le diamètre du cercle. Les élèves qui considèrent le cas limite dans le cadre géométrico-perceptif, interprètent donc la figure sur la base de leurs conceptions sans référence théorique. En revanche, ceux qui considèrent la limite dans le cadre numérique peuvent contrôler leurs conceptions avec une théorie de référence. Ils calculent les périmètres et les aires des courbes, et ils peuvent considérer la limite de la succession des courbes quand n varie. La difficulté apparaît lors de la comparaison entre la figure limite et la limite de la succession des courbes (c'est le cas de Vincent et Ludovic décrit ci-dessous).

Nous avons aussi observé la mobilisation de conceptions concernant la limite de l'aire, même si son interprétation dans le cadre géométrico-perceptif et dans le cadre numérique n'est pas contradictoire. Certains élèves ne connaissent pas la notion de limite. Nous avons alors observé la mobilisation de conceptions car les élèves essaient de remplacer la théorie de référence manquante.




Considérons quelques exemples.

La limite en tant que segment

Binôme : Ludovic (L), Vincent (V), classe Première en France.

L'argumentation et la démonstration sont en français (dans l'annexe 3.3 on trouve le dialogue et la copie des élèves).

Les élèves considèrent l'aire et le périmètre au cas limite. Ils se trouvent en désaccord pour la limite du périmètre. La conception de Ludovic est mobilisée dans le cadre numérique : le périmètre au cas limite est constant car quand n tend vers l'infini, la formule $(2\pi r)$ reste invariant. La conception de Vincent est mobilisée dans le cadre géométrico-perceptif : le périmètre au cas limite est le diamètre de la première courbe. Considérons la copie et le discours des élèves.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>31. V : l'aire est à chaque fois divisée par deux...et à la limite? A la limite c'est une droite, confondue avec le segment de départ ...</p> <p>32. L : mais l'aire est divisée par deux à chaque fois</p> <p>33. V : oui, mais à la limite arrive à zéro</p> <p>34. L : oui c'est vrai que si on continue...</p> <p>35. V : elle tend vers zéro</p> <p>36. L : oui elle tend vers zéro l'aire</p>	<p><i>Vincent voit le cas limite sur la figure. L'énoncé est un fait construit à partir de la perception de la figure sur Cabri-géomètre.</i></p> <p>E_{6V} : l'aire à la limite est une droite confondue avec le segment de départ</p> <p><i>De ce fait, il conclut qu'à la limite l'aire est zéro.</i></p> <p>D_{6V} : E₅  E_{6V} : à la limite l'aire est zéro</p> <p>P_v : l'aire d'un segment est zéro</p> <p><i>En revanche, pour Ludovic, le cas limite est construit à partir de la formule.</i></p> <p>D_{6L} : E₄ : l'aire est toujours la moitié de la précédente  E_{6V} : à la limite l'aire est zéro</p> <p>P_L : conception numérique de « limite »</p>
<p>37. V : oui mais alors le périmètre ?</p> <p>38. L : non, le périmètre est toujours le même</p> <p>39. V : au pire le périmètre il tombe jusqu'à deux fois le segment</p> <p>40. L : comment ?</p> <p>41. V : ça tombe sur le segment... si les cercles sont tellement petits</p> <p>42. L : hem... mais ce sera toujours $2\pi r$</p> <p>43. V : oui mais quand l'aire tend à zéro ça sera presque égal...</p> <p>44. L : non, je pense non</p> <p>45. V : si on fait tendre à zéro l'aire on fait tendre le périmètre aussi... je ne sais pas...</p> <p>46. L : Je finis la première démonstration</p> <p><i>Silence... Ludovic continue à écrire la première démonstration</i></p> <p>47. V : mais si on fait tendre l'aire vers zéro on pourrait faire tendre le périmètre vers deux fois le... Au diamètre du premier</p> <p>48. L : c'est différent, le périmètre est constant</p>	<p><i>Puisque la conclusion des deux raisonnements est la même, les élèves ne se rendent pas trop compte de la divergence de leurs raisonnements.</i></p> <p><i>Par contre, pour ce qui concerne le périmètre, les élèves se trouvent en désaccord. Vincent est encore lié à la perception de la figure sur Cabri-géomètre, alors que Ludovic pense en termes numériques.</i></p> <p><i>Pour Ludovic :</i></p> <p>D_{7L} : E₃ : le périmètre est toujours le même  E_{7L} : à la limite le périmètre est toujours le même</p> <p>P_L : résultat de calcul</p> <p><i>Pour Vincent :</i></p>

49. V : ah d'accord...	<p>E_{7V} : à la limite le périmètre est le diamètre</p> <p><i>L'énoncé explicite un fait qui s'appuie sur la figure de Cabri-géomètre</i></p>
------------------------	---

C'est évident qu'ici il y a deux conceptions différentes. La conception de Ludovic s'appuie sur un contrôle numérique, alors que celui de Vincent s'appuie sur un contrôle géométrico-perceptif. Les deux cadres différents permettent de rendre compte des différences de conceptions. La formule de l'aire et du périmètre permet la circulation entre cadres et la circulation entre conceptions (Balacheff, article à paraître).

Nous avons observé une unité cognitive du système de référence (concernant la limite) entre argumentation et preuve pour Ludovic et une rupture cognitive pour Vincent.

La limite en tant que point



Binôme : Adam (A), Ludovica (L), classe de 3^e année du lycée en Italie (16/17 ans, première en France).

L'argumentation et la démonstration sont traduites de l'italien au français (dans l'annexe 3.6 on trouve le dialogue et la copie des élèves).

Les élèves considèrent l'aire au cas limite. Ludovica explique que l'aire à la limite est tellement petite qu'elle devient « sans dimension ». Puisque le point est sans dimension, à la limite l'aire est un point. Adam contrairement à l'exemple précédent, n'est pas en opposition avec cette conception. Il essaye de la justifier de façon différente : l'aire est un ensemble de points qui correspondent à tous les cercles du cas limite.

Considérons le dialogue et la copie des élèves.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>37. L : donc, lorsque les subdivisions augmentent, l'aire est la moitié de la précédant... toujours plus... jusqu'à quand elle devient tellement petite que... qu'elle sera réduite à un point.</p> <p>38. A : quoi, à un point?</p> <p>39. L : oui, oui elle est la moitié, toujours plus jusqu'à devenir <u>sans dimension</u>, elle devient un point de AB</p> <p>40. A : oui, tu veux dire que les circonférences se réduiront à devenir des points parce qu'elles deviennent toujours plus petites</p> <p>41. L : oui, en pratique c'est comme ça... plus on continue, plus on trouvera des points</p> <p>42. A : de cette façon tu veux dire que l'aire tendra</p>	<p><i>Ludovica soutient que l'aire à la limite est un point car elle est sans dimension. Dans le modèle de Toulmin nous pouvons représenter l'argument de la façon suivante :</i></p> <p>D_{IL} : l'aire est toujours la moitié de la précédente → E_{IL} : à la limite l'aire est sans dimension</p> <p>P: lorsque l'aire diminue, la « dimension » diminue</p> <p><i>Le permis d'inférer (l'opérateur de la conception) est lié à une conception d'aire en</i></p>

<p>à devenir zéro</p> <p>43. L : oui, juste parce que les points n'ont pas d'aire</p> <p>44. A : d'accord, j'écris ça et on consigne</p> <p><i>Les élèves écrivent :</i></p> <p>Lorsque les subdivisions augmentent, l'aire de chaque cercle se réduit à un point appartenant au diamètre de AB, c'est-à-dire <u>sans dimension</u>. Cela veut dire que la somme de toutes les aires tendra vers zéro, juste parce que les points n'ont pas d'aire.</p>	<p><i>tant que dimension (int. 39). Cette conception dérive du fait que l'aire devient toujours plus petite jusqu'à être nulle.</i></p> <p><i>Nous pouvons supposer que le contrôle de la conception est lié à une considération de l'aire en tant que grandeur qui détermine une dimension :</i></p> <p>$\Sigma = S$: l'aire en tant que grandeur qui détermine une dimension</p> <p><i>Dans le cas limite cette dimension n'est plus présente. Ludovica affirme que l'aire est un point (int. 37). Le point est un objet géométrique qui n'a pas de dimension.</i></p> <p>$D_{2E} : E_1$ $E_{2L} : A$ la limite l'aire est zéro</p> <p style="text-align: center;">  </p> <p>P_L : à la limite l'aire est un point</p> <p><i>Le contrôle de la conception dans ce cas est probablement la définition du point.</i></p> <p>$\Sigma = S$: le point est sans dimension</p> <p><i>Adam accepte cette conception, il l'adapte à son contrôle, qui est perceptif. L'aire n'est pas un point mais un ensemble de points car les cercles toujours plus petits deviennent des points au cas limite. L'argument d'Adam est donc le suivant:</i></p> <p>E_{1A} : à la limite l'aire est un ensemble des points</p> <p><i>L'énoncé explicite un fait suggéré par Ludovica et adapté à ce que Adam perçoit de la figure.</i></p> <p>$D_{2A} : E_{1A}$ $E_{2A} : à la limite l'aire est zéro$</p> <p style="text-align: center;">  </p> <p>P : le point est sans dimension</p> <p><i>Imaginer la limite des courbes sur la figure permet la circulation entre les deux conceptions. Ludovica « voit » l'aire diminuer jusqu'à devenir sans dimension et donc se réduire à un point. Adam interprète « l'aire en tant que point » dans la figure Il « voit » les cercles à la limite réduit à un ensemble de points. Et donc l'aire est nulle car les points n'ont pas de dimension.</i></p>
---	---

La conception de Ludovica a été acceptée par Adam qui n'avait pas mis en œuvre de conception propre. En fait, les élèves ne connaissaient pas la notion de limite. C'est probablement pourquoi, Adam accepte ce que propose Ludovica. Le contrôle de la conception de Ludovica (« le point est sans dimension »), devient opérateur d'une

conception pour Adam. Il l'adapte à son propre contrôle (l'ensemble des cercles qui deviennent des points au cas limite).

Les élèves sont en train de construire un permis d'inférer qui mette en accord le résultat du calcul avec la figure qu'on imagine au cas limite. Le permis d'inférer théorique manque dans le cadre géométrico-perceptif. C'est pourquoi les élèves ont besoin d'en construire un.

Nous observons unité cognitive du système de référence (concernant la limite) entre argumentation et preuve.

Le limite est un concept théorique

Binôme: Christophe et Ibrahim, classe: Première en France.

L'argumentation et la démonstration sont en français (dans l'annexe 3.2 on trouve le dialogue et la copie des élèves).

En ce moment les élèves se demandent quel est le comportement de l'aire et du périmètre au cas limite. Les élèves considèrent les deux formules et à partir de celles-ci, ils font varier n jusqu'à l'infini. C'est donc la notion de limite dans le cadre numérique que les élèves font intervenir dans leur réponse.

Argumentation et preuve des élèves	Analyse
42. C : alors on a fini... on peut juste regarder qu'est ce que ça passe à la limite 43. I : ah, à la limite... plus n il sera grand et plus l'aire se rapprochera à zéro et donc l'aire se rapprochera à zero et le périmètre 44. C : le périmètre 45. I : plus n sera élevé 46. C : mais attends, il n'y a pas de n 47. I : il sera toujours constant... il n'y a pas de n dans la formule 48. C : on a fini donc... 49. I : oui, attends j'écris ça et on a fini. <i>Les élèves écrivent :</i> Le périmètre sera toujours équivalent à $2\pi r$ donc le nombre des subdivisions des cercles n'influencera pas la valeur du périmètre Pour l'aire elle est déterminée par $\pi r^2 / n$, donc plus il y aura de subdivisions et plus l'aire tendra vers 0 car $\lim 1/n = 0$ pour $n \rightarrow \infty$	<p><i>C'est la formule de l'aire et du périmètre pour la courbe n (que les élèves ont précédemment déterminée) qui permet aux élèves de déterminer l'aire et le périmètre au cas limite.</i></p> <p>$D_3 : n \rightarrow \infty$ \longrightarrow $E_3 : \text{à la limite l'aire est zéro}$</p> <p>P: notion de « limite »</p> <p>$D_4 : n \rightarrow \infty$ \longrightarrow $E_3 : \text{à la limite le périmètre est constant}$</p> <p>P: notion de « limite »</p> <p><i>La preuve qu'ils fournissent suit l'argumentation. Pour la détermination de l'aire au cas limite, les élèves utilisent la formule de la limite.</i></p>

Nous pouvons observer une unité cognitive du système de référence entre argumentation et démonstration. La continuité est déterminée par la théorie de référence

sur la notion de limite. Les élèves utilisent la formule, qu'ils ont précédemment déterminé avec une généralisation sur n , pour calculer la limite de l'aire et du périmètre. Nous observons une unité cognitive du système de référence (concernant la limite) entre argumentation et preuve.

Limite comme proportionnalité inverse

Binôme: Adrien (A), Jean Philippe (J), classe Première en France.

L'argumentation et la démonstration sont en français (dans l'annexe 3.4 on trouve le dialogue et la copie des élèves).

Les élèves considèrent la formule de l'aire et sa dépendance à n . Quand n augmente l'aire diminue. Le cas limite est déterminé à partir de cette relation.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>46. J: Donc voilà... l'aire totale dépende de n et quand n augmente l'aire diminue 47. A: il faut dire dans quel rapport 48. J: mais on l'a 49. A: oui mais il faudra faire sortir le... 50. J: mais on a le rapport, c'est ce qu'on a trouvé 51. A: bon d'accord 52. J: on peut dire qu'à la limite l'aire est nulle ... quand n devient très grande l'aire tend à devenir zéro 53. A: ah oui, quand n devient très grand et donc n tend vers infini, l'aire tend vers zéro 54. J: on a fini 55. A: oui on a fini</p>	<p><i>Les élèves avaient trouvé la formule de l'aire dans le cas d'une courbe n :</i></p> <p>D₁₀ : résultat de calcul → E₁₀ : $A_n = n AB^2/2^{n+2}$</p> <p>P : généralisation sur les résultats</p> <p><i>A partir de la formule qu'ils ont précédemment trouvée, les élèves explicitent la relation entre l'aire et n.</i></p> <p>D₁₁ : E₁₀ → E₁₁ : quand n augment, l'aire diminue</p> <p>P : proportionnalité inverse</p> <p><i>Le permis d'inférer est donné par la loi de la proportionnalité inverse. Adrien cherche le rapport de proportionnalité. Il s'appuie sur la formule. Les élèves disent que l'aire est nulle car lorsque n augmente, l'aire s'approche de zéro.</i></p> <p>D₁₂ : n augment → E₁₂ : à la limite l'aire est 0</p> <p>P : E₁₁</p>

Les élèves pensent probablement à la proportionnalité inverse car quand ils construisent la preuve pour le cas limite, ils substituent dans la formule ∞ au dénominateur au lieu de

n. De plus, l'écriture de $1/n \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$, qui renvoie à une proportionnalité inverse, est très fréquente dans les textes.

Considérons la copie des élèves.

Preuve des élèves	Analyse
<p>Donc l'aire dépend de n, et quand n augmente l'aire diminue</p> <p>Quand n devient très grande : $n \rightarrow \infty$ Alors $A \rightarrow \pi AB^2/\infty$ soit $A \rightarrow 0$</p>	<p><i>Les pas sont les même de ceux utilisés pendant l'argumentation.</i></p> <p>D₁₁: E₁₀ \longrightarrow E₁₁: quand n augment, l'aire diminue</p> <p>P: inversion de la proportionnalité</p> <p><i>L'argument 12 est découpé en deux sous arguments dans la preuve. D'abord les élèves substituent à n le symbole d'infini. Ensuite ils disent que l'aire est nulle.</i></p> <p>D₁₂: $n \rightarrow \infty$ \longrightarrow E₁₂: à la limite l'aire est $\pi AB^2/\infty$</p> <p>P: substitution</p> <p>D₁₂: E₁₂ \longrightarrow E₁₂: à la limite l'aire est 0</p> <p>P: conception de « limite »</p> <p><i>La conception de « limite » est liée à l'écriture $1/\infty=0$ qui exprime à la fois le concept de limite et la proportionnalité inverse.</i></p>

Les élèves utilisent l'écriture erronée de la limite : $1/\infty=0$. C'est probablement cette écriture que leur permet de retrouver la loi de la proportionnalité inverse utilisée pendant l'argumentation. D'une certaine façon, cette écriture est une représentation qui permet la circulation entre deux cadres : l'analytique (cadres de limites) et l'arithmétique (cadre de la proportionnalité).

Nous observons une unité cognitive du système de référence (concernant la limite) entre argumentation et preuve.

Pour résumer

Les analyses présentées, ont montré que certaines conceptions concernant la notion de limite ont été mobilisées par les élèves. Nous avons remarqué que ceux d'entre eux qui connaissaient la notion de limite du point de vue théorique, ont résolu le problème au

cas limite sans montrer difficulté. En revanche, les élèves qui n'avaient pas de théorie sur la limite disponible, ont essayé de justifier le cas limite en mobilisant leurs conceptions.

La plupart des élèves n'a pas considéré le cas limite (10). Deux d'entre eux ont écrit qu'à la limite l'aire tend vers zéro sans expliquer pourquoi. Cependant cela leur a été suggéré par les binômes voisins.

Les élèves qui ont considéré le cas limite sont ceux que nous avons présenté ici, à exception d'un binôme (Nicola et Stefano) que nous n'avons pas présenté, car la copie est similaire à celle de Ludovica et Adam.

Dans le tableau nous résumons nos résultats.

Conception de la limite dans l'argumentation	Nombre des binômes	Binômes et classe	Continuité /Ecart sur la limite	Unité rupture cognitive
Limites comme segment	1	Vincent (et Ludovic) (Terminale)	Continuité	Unité cognitive
Limite des cercles comme ensemble des points ou comme un point	2	Ludovica et Adam (3 ^e) Nicola et Stefano (4 ^e)	Continuité	Unité cognitive
Limite théorique	1	Ibrahim et (Terminale)	Continuité	Unité cognitive
Limite comme proportionnalité inverse	1	Adrien et Jean Philippe (4 ^e)	Continuité	Unité cognitive
Sans considération au cas limite	10	Elèves qui ont utilisé la stratégie empirique		

Nous remarquons que les élèves qui n'ont pas considéré le cas limite sont en partie des élèves qui ont utilisé une stratégie empirique, ainsi que les élèves qui ont utilisé la récurrence.

2.2.3 La restriction dans le modèle de Toulmin

Le modèle de Toulmin est un modèle construit pour modéliser l'argumentation d'un sujet, alors que nous l'utilisons pour modéliser l'argumentation de deux sujets. Les niveaux sont évidemment différents et la prise en compte de ces diversités est importante. Nous l'avons observé en particulier dans l'analyse des argumentations relatives à la résolution de ce problème.

Il est vrai que souvent les élèves sont d'accord entre eux, ou bien un des deux élèves du binôme assume le rôle de « leader ». Il construit tout seul la résolution et l'autre pose quelques questions ou il propose certains énoncés sans jamais prévaloir sur le camarade.

Cependant, il y a des cas où le désaccord entre élèves est évident. Dans ce cas les arguments qu'ils construisent sont évidemment différents.

De plus, un argument peut devenir la restriction de l'autre et inversement. Cela signifie que le statut de la restriction peut changer selon qu'elle provient du sujet qui argumente ou au contraire du camarade. Considérons deux exemples :

- Restriction interne à l'argument. Nous considérons le dialogue entre Nicola et Stefano au début de la résolution du problème.
- Restriction externe à l'argument. Nous considérons le dialogue entre Vincent et Ludovic à propos du cas limite.

Nous avons déjà présenté les deux copies, mais nous les considérons ici d'un point de vue différent.


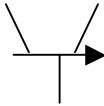
Restriction interne à l'argument

Binôme : Nicola et Stefano, classe de 4^e année du lycée en Italie (17/18 ans, terminale en France)

L'argumentation et la démonstration sont traduites de l'italien au français (dans l'annexe 3.1 on trouve le dialogue et la copie des élèves).

Dans l'argumentation suivante c'est plutôt Nicola qui parle. Il assume le rôle de leader. Stefano accepte complètement les décisions du camarade. A ce moment de la discussion les élèves sont en train d'argumenter sur l'aire des courbes.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>12. N : ...l'aire est πr au carré, donc 13. S : l'aire 14. N : oui mais ici elle devient la moitié... la somme des quatre cercles... c'est-à-dire que la somme de ces deux cercles est égale à celle-ci (il signale sur la figure la partie de plan limitée par la deuxième courbe), la somme de ces quatre cercles est égale à celle-la (il signale sur la figure la partie de plan limitée par la troisième courbe)... c'est le rayon, oui l'aire est la moitié, nous avons découpé le diamètre de la première courbe en deux et donc le diamètre des deux circonférence est la moitié du diamètre de la première... et en conséquence l'aire est la moitié, non la somme des deux est la moitié. 15. S : oui parce que 16. N : parce que la somme du rayon de la première et du rayon de la deuxième est égal au</p>	<p><i>Les élèves considèrent la formule de l'aire pour la première courbe.</i></p> <p style="text-align: center;"> D₁ : cercle \longrightarrow E₁ : l'aire est πr^2 </p> <p style="text-align: center;">P : formule de l'aire du cercle</p> <p><i>Ensuite ils regardent la figure et finalement Nicola comprend la relation entre le rayon et le nombre de courbes. Le rayon d'un des cercles de la deuxième courbe est la moitié du rayon de la première courbe.</i></p> <p>E₂ : les rayons des deux cercles appartenant à la deuxième courbe sont la moitié du rayon de la première courbe</p>

<p>rayon de la première, la grande, et donc l'aire de ces deux circonférences ici, est la moitié de la première circonférence.</p> <p>17. S : oui d'accord on peut écrire...</p> <p>Nicola commence à écrire mais d'abord il dit :</p> <p>17. N : attends un moment on va les mesurer les aires</p> <p>Les élèves mesurent les rayons et ils calculent les aires des cercles</p>	<div style="text-align: center;"> <p>$D_3 : E_2$ </p> <p>E₃ : l'aire est la moitié de la précédente</p> <p>P: formule de l'aire du cercle</p> <p><i>Il est intéressant d'observer que Nicola commence à écrire, mais ensuite il s'arrête car il n'est pas convaincu du raisonnement fait.</i></p> <p><i>Cela ça signifie qu'une restriction implicite est intervenue. Cette restriction est évidemment liée à la force de l'argument précédent. L'argument complet peut être ainsi modélisé :</i></p> <p>F : probablement R : A moins que les calculs ne donnent des résultats différents</p> <p>$D_3 : E_2$ </p> <p>E₃ : l'aire est la moitié de la précédente</p> <p>P: formule de l'aire du cercle</p> <p><i>Le résultat du calcul, confirmera la conclusion de l'argument. Il deviendra un support ultérieur de l'argument.</i></p> </div>
--	---

Dans ce cas la restriction est interne à l'argument. Stefano n'est pas intervenu pendant l'argumentation. Nicola a construit tout seul cet argument.

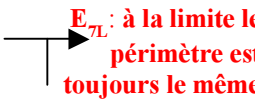
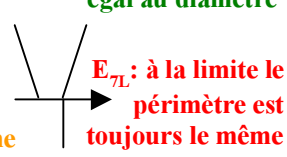
Restriction externe à l'argument

Binôme : Vincent (V), Ludovic (L), classe Première en France.

L'argumentation et la démonstration sont en français (dans l'annexe 3.3 on trouve le dialogue et la copie des élèves).

En ce moment, les élèves sont en train de considérer le cas limite.

Le cas de Vincent et Ludovic est complètement différent par rapport au précédent. En fait, comme nous l'avons déjà remarqué ci-dessus, les élèves ont deux conceptions différentes de la limite. La conception de Vincent est mobilisée dans le cadre géométrico-perceptif : il « voit le périmètre » à la limite se confondre avec le diamètre du cercle. La conception de Ludovic en revanche, est mobilisée dans le cadre numérique : à la limite le périmètre est $2\pi r$. Considérons l'argumentation des élèves.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>37. V : oui mais alors le périmètre ? 38. L : non, le périmètre est toujours le même 39. V : au pire le périmètre il tombe jusqu'à deux fois le segment 40. L : comment ? 41. V : ça tombe sur le segment... si les cercles sont tellement petits 42. L : hem... mais ce sera toujours $2\pi r$ 43. V : oui mais quand l'aire tend à zéro ça sera presque égal... 44. L : non, je pense que non 45. V : si on fait tendre vers zéro l'aire on fait tendre le périmètre aussi... je ne sais pas... 46. L : Je finis la première démonstration</p> <p><i>Silence... Ludovic continue à écrire la première démonstration</i></p> <p>47. V : mais si on fait tendre l'aire vers zéro on pourrait faire tendre le périmètre vers deux fois le... Au diamètre du premier 48. L : c'est différent, le périmètre est constant 49. V : ah d'accord...</p>	<p><i>Les élèves considèrent le périmètre au cas limite. Vincent est encore lié à la perception de la figure sur Cabri-géomètre, alors que Ludovic pense en termes numériques.</i></p> <p><i>Pour Ludovic :</i></p> <p>D_{7L} : E₃ : le périmètre est toujours le même E_{7L} : à la limite le périmètre est toujours le même</p>  <p>P_L : résultat de calcul</p> <p><i>Pour Vincent :</i></p> <p>E_{7V} : à la limite le périmètre est le diamètre</p> <p><i>L'énoncé explicite un fait qui s'appuie sur la figure de Cabri-géomètre</i></p> <p><i>Il y a un désaccord entre les élèves. L'argument de Ludovic est cependant plus fort que l'énoncé de Vincent. Le premier s'appuie sur un résultat de calcul, alors que l'énoncé de Vincent s'appuie sur des aspects perceptifs.</i></p> <p><i>C'est pourquoi l'énoncé de Vincent même s'il constitue potentiellement une restriction pour l'énoncé de Ludovic, il ne le touche pas vraiment. La force de l'argument se base sur des calculs qui donnent un statut de certitude à la conclusion.</i></p> <p><i>L'énoncé de Ludovic est donc :</i></p> <p>F : certainement R : E_{7V} : à la limite le périmètre est égal au diamètre</p> <p>D_{7L} : E₃ : le périmètre est toujours le même E_{7L} : à la limite le périmètre est toujours le même</p>  <p>P_L : calcul</p> <p>S : généralisation au sens d'une induction</p> <p><i>L'argument de Ludovic n'est pas conditionné par l'énoncé de Vincent. Néanmoins il peut représenter une restriction extérieure pour cet argument.</i></p> <p><i>En revanche, l'énoncé de Vincent qui se base sur une perception n'est pas suffisamment « forte » pour réagir à l'argument de Ludovic.</i></p>

La restriction de Vincent est trop faible pour changer l'argument de Ludovic. Le support de Ludovic est suffisant. Probablement pour ne pas être affaibli par l'argument de Vincent alors que, même s'il est convaincu, Vincent ne réussit pas à trouver un permis d'inférer qui puisse changer l'argument du camarade. La conception de Vincent se base sur des aspects perceptifs qui n'ont pas de référent théorique qui puisse les remplacer. Néanmoins, Ludovic n'arrive pas à le convaincre. Vincent finit l'argumentation en disant « ah d'accord » (int. 49), mais au fond il n'est pas d'accord. Il l'accepte, c'est tout. La valeur épistémique attaché à cette conception est forte, car à la limite le périmètre peut effectivement être observé comme le diamètre du cercle.

2.2.4 Discussion des résultats

L'analyse de comparaison entre structures d'argumentation et de démonstration n'a pas été facile. En fait, afin de construire une démonstration par récurrence une généralisation sur le processus est nécessaire. La généralisation sur les énoncés et la généralisation sur le processus peuvent avoir lieu indifféremment au sein de l'argumentation ou entre argumentation et preuve. Les écarts structurels que nous avons observés ne correspondaient pas toujours à un écart entre argumentation et preuve. Ceci a été la cause des difficultés rencontrées pendant l'analyse structurelle.

Si l'argumentation est inductive par généralisation sur les énoncés, les élèves doivent franchir l'écart structurel pour construire une démonstration par récurrence. Cet écart peut se situer au sein de l'argumentation (cfr. Elena, Elena 2.2.1.4) ou entre argumentation et preuve (cfr. Adrien et Jean-Philippe 2.2.1.3)

En revanche, si l'argumentation est une argumentation inductive par généralisation sur le processus il y a une continuité structurelle pour construire la démonstration.

Les élèves qui n'ont pas réussi à construire de preuve ont construit une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés. Ils représentent plus de la moitié des élèves (8 sur 15). Ils ne sont pas parvenus à construire l'argumentation inductive par généralisation sur le processus dont on a vu qu'elle est nécessaire à la construction d'une récurrence. Dans ce cas il y a une rupture cognitive structurelle. En revanche, les élèves qui sont parvenus à construire une démonstration par récurrence n'ont pas rencontré de difficultés. Dans ce cas, il y a continuité structurelle et nous avons observé une unité cognitive structurelle.

Comme nous l'avons prévu dans l'analyse a priori, nous avons observé pour tous les binômes une unité cognitive du système de référence. La nature du problème renvoie à l'utilisation de formules dans l'argumentation. Le permis d'inférer utilisé pendant l'argumentation est un permis d'inférer théorique : la formule de l'aire et du périmètre. Cela a influencé la construction de la preuve qui suit les traces de l'argumentation.

En revanche, nous avons observé un cas de rupture cognitive du système de référence quand les élèves ont essayé de régler le cas limite dans le cadre géométrico-perceptif, avec un passage à la limite dans le cadre numérique. Vincent a considéré le cas limite comme une courbe confondue avec le diamètre du premier cercle. Cela est en désaccord avec la formule du périmètre. La preuve est construite en utilisant la formule, selon une décision de Ludovic. Il y a donc rupture cognitive sur le cas limite pour Vincent qui accepte la formule même s'il ne la comprend pas vraiment.

Dans les autres cas nous avons observé une unité cognitive du système de référence entre argumentation et preuve, même pour les parties de l'argumentation relatives au cas limite.

2.3 Situation expérimentale 3

L'expérimentation a eu lieu dans deux classes italiennes et dans une classe française. Nous avons recueilli 18 copies, 15 en Italie et 3 en France.

Nous avons enregistré les argumentations de 8 binômes : 5 binômes en Italie et 3 binômes en France.

Nous avons recueilli les productions écrites des binômes suivants :

- 3 binômes en France dans une classe de terminale ; ainsi que les 3 transcriptions de leurs dialogues.
- 9 binômes en Italie dans une classe de 3^e année du lycée (16/17 ans, première en France) ; ainsi que les 3 transcriptions de leurs dialogues.
- 6 binômes en Italie dans une classe de 4^e année du lycée (17/18 ans, terminale en France) ; ainsi que 2 transcriptions de leurs dialogues.

Même si nous n'avons qu'une partie des transcriptions des binômes à notre disposition, la plupart des productions écrites contiennent une partie d'argumentation écrite et la preuve, et nous donnent ainsi accès à la preuve et à l'argumentation.

Tous les binômes ont résolu le problème. Une partie a construit une démonstration par récurrence (7 binômes) et une partie a essayé de la construire sans y parvenir (5 binômes). Des élèves (5 binômes) ont déterminé la somme des angles intérieurs en fonction des côtés sans construire de preuve. Seulement 1 binôme n'est pas classable.

Tous les élèves avaient à leur disposition 50 minutes. Mais la durée de la séance a nécessité un temps inférieur.

Nous avons fait une analyse transversale de toutes les copies analysables (17) afin de déterminer toutes les stratégies utilisées pour la résolution du problème. La classification des stratégies a été construite à partir des argumentations (écrites ou orales) des élèves.

Nous avons sélectionné les stratégies suivantes :

- Stratégie empirique et généralisation à partir de celle-ci. Les élèves ont utilisé la mesure d'angle de Cabri-géomètre et ont mesuré les angles de certains polygones. Ils ont considéré des polygones jusqu'à sept côtés maximum. Pour chaque

polygone ils ont déterminé la somme des angles intérieurs. Ils ont remarqué qu'elle est multiple de 180° . Au moyen d'une généralisation sur les énoncés (*Result pattern generalisation*, Harel, 2001, p. 191) ils ont déterminé la loi pour un polygone de n côtés.

- Stratégie d'insertion d'un côté à un polygone à partir du même sommet et/ou découpage d'un polygone convexe en triangles à partir du même sommet. Les élèves ont remarqué que l'insertion d'un côté à partir du même sommet correspond à l'insertion d'un triangle. La loi a été déterminée à partir d'une généralisation sur le processus (*process pattern generalisation*, Harel, 2001, p. 191).
- Stratégie d'insertion d'un côté à partir de sommets différents et/ou du découpage d'un polygone en triangles à partir de sommets différents. Pour cette stratégie, la généralisation ne peut qu'être faite à partir des énoncés (*Result pattern generalisation*, Harel, 2001, p. 191). Le processus qui permet de généraliser au cas d'un polygone à n côtés, reste au contraire inaccessible aux élèves. En effet, les élèves qui ont utilisé cette stratégie ont eu des difficultés à prouver la loi.

Le tableau montre la classification des stratégies utilisées par les élèves.

Nombre Binômes ou trinômes	Argumentation			
	Stratégie empirique	Stratégie de découpage d'un polygone en triangles à partir d'un sommet	Stratégie de découpage d'un polygone en triangles à partir des sommets différents	Non évaluables
Italiens Classe 4 ^e	3	1	1	1
Italiens Classe 3 ^e	5	4		
Français Classe 1 ^e 3 binômes		3		
Total	8	8	1	1

Les élèves qui ont construit une démonstration ont utilisé la récurrence. Une partie des élèves a déterminé la loi, mais sans construire la preuve. Ils n'ont construit qu'une argumentation.

Dans le tableau ci-dessous nous montrons le nombre des élèves ayant construit une preuve selon les stratégies.

Preuve			
Nombre Binômes ou trinômes	Stratégie empirique	Stratégie de découpage d'un polygone en triangles à partir d'un sommet	Stratégie de découpage d'un polygone en triangles à partir des sommets différents
Italiens Classe 4 ^e	0	0	0
Italiens Classe 3 ^e	5 dont 2 démonstrations par récurrence	4 dont 3 démonstrations par récurrence	
Français Classe 1 ^e		3 dont 2 démonstrations par récurrence	
Total	5/8	7/8	0/1

Le tableau montre que les élèves qui ont utilisé la stratégie de découpage d'un polygone en triangles à partir d'un sommet ont réussi à construire une preuve. Dans ce cas, comme nous le verrons dans les analyses des copies des élèves, c'est la généralisation faite sur le processus qui facilite la construction d'une preuve.

Comme dans le cas précédent, les argumentations que nous avons observées sont des argumentations inductives. Néanmoins, par rapport à la deuxième situation, nous avons remarqué la présence de plusieurs preuves par récurrence. La possibilité de prouver le problème au moyen de la récurrence est probablement plus évidente ici. D'ailleurs, dans certains curriculum ce problème est utilisé pour introduire la démonstration par récurrence. En outre, comme nous le verrons dans les analyses, la généralisation sur le processus semble être plus accessible dans ce problème que dans le précédent.

Comme nous l'avons prévu dans l'analyse à priori, nous avons observé la mobilisation de conceptions qui concernent les figures des polygones et leur interprétation.

En outre, des conceptions relatives à la démonstration par récurrence ont été mobilisées par les élèves. En fait, ils ont souvent une idée de celle-ci comme une procédure à appliquer pour valider leur conjecture. La compréhension de la récurrence semble échapper aux élèves. Cela a empêché une séparation nette entre l'analyse structurelle et l'analyse du système de référence car les écarts ne sont pas toujours classables en termes de structure ou de système de référence.

2.3.1 Structures d'argumentations construites par les élèves à partir des procédures de résolution utilisées

Dans la suite, nous considérerons pour chaque stratégie décrite les argumentations qui ont été développées par les élèves. Nous comparerons ces argumentations avec les preuves correspondantes (si elles existent) pour analyser les continuités et les écarts de structure. Finalement, pour chaque copie analysée nous étudierons l'unité ou la rupture cognitive structurelle.

2.3.1.1 Stratégie empirique et généralisation à partir de celle-ci

Les élèves ont construit une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés à partir d'une stratégie empirique. Au moyen de l'outil de la mesure des angles de Cabri-géomètre, les élèves ont déterminé leur conjecture en calculant la somme des angles intérieurs de quelques polygones. Une généralisation sur les énoncés construits à partir des résultats des calculs, a permis la construction d'une argumentation constructive de la conjecture.

Les élèves qui ont essayé de rédiger une preuve, ont été obligés de poursuivre le raisonnement. Seuls les élèves qui ont construit une argumentation structurante basée sur une généralisation sur le processus ont réussi à construire une démonstration par récurrence (2 binômes).

Dans la suite nous analyserons deux exemples :

- Ecart structurel entre argumentation inductive par généralisation sur les énoncés et récurrence. C'est le cas où les élèves ne réussissent pas à construire de preuve.
- Ecart structurel entre argumentation inductive par généralisation sur les énoncés et récurrence, géré au moyen d'une argumentation inductive par généralisation sur le processus. C'est le cas où les élèves construisent une démonstration.

Ecart structurel entre argumentation inductive par généralisation sur les énoncés et récurrence

Binôme : Alice (A), Luca (L), classe de 3^e année du lycée (16/17 ans, Première en France).

L'argumentation des élèves est traduite de l'italien au français (dans l'annexe 4.1 on trouve l'argumentation originale et la copie des élèves).

Les élèves construisent un tableau pour calculer la somme des angles intérieurs de certains polygones. Ils construisent la conjecture à partir du tableau par une

généralisation sur les énoncés. Ensuite ils essayent de construire une preuve au moyen d'une récurrence.

Argumentation des élèves	Analyse										
<p>Alice dessine un quadrilatère et elle mesure les angles.</p> <p>14. L : donc la mesure est.. 15. A : tu as calculé la somme? 16. L: oui (<i>il fait le calcul</i>) la somme est 360... avec quatre côtés 17. A: donc jusqu'ici 18. L: jusqu'ici nous avons découvert que si on rajoute un côté la somme des angles est double 19. A: la somme des angles intérieurs est double 20. L: ok, 21. A: maintenant on peut regarder avec 5</p> <p>Alice dessine un polygone avec 5 côtés et Luca fait les calculs de la somme des angles.</p> <p>22. L: la somme est 539 23. A: tu es sûr? 24. L: attends, attends, attends 25. A: on peut essayer à déplacer ou bien à rajouter un côté, il s'agit peut être d'une erreur minimum...</p> <p>Alice dessine un polygone à 6 côtés.</p> <p>26. L: ça fait 720 27. A: 720, alors on peut construire un petit tableau 28. L: ok 29. A: alors c'est... 360 est 180×2... 540 est 180×3 30. L: e 720 est 180×4</p> <p>Alice fait le tableau suivant :</p> <table border="1" data-bbox="274 1444 606 1608"> <thead> <tr> <th>N° côtés</th> <th>S(A)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>180°</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>360° $180^\circ \times 2$</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>540° $180^\circ \times 3$</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>720° $180^\circ \times 4$</td> </tr> </tbody> </table> <p>29. A: alors la loi devrait être 180 pour n moins deux 30. L: oui parce que n est le nombre des côtés 31. A: oui par rapport aux côtés la loi est celle-ci Maintenant il faut la démontrer 32. L: c'est suffisant d'utiliser la récurrence. 33. A: oui d'accord, alors on peut écrire... la base est pour n égale 3... 34. L: oui, c'est 180...</p>	N° côtés	S(A)	3	180°	4	360° $180^\circ \times 2$	5	540° $180^\circ \times 3$	6	720° $180^\circ \times 4$	<p>Les élèves mesurent les angles de quelques polygones. En particulier ils considèrent un polygone de quatre côtés.</p> <p>E₁ : la somme des angles intérieurs d'un polygone à quatre côtés est 360°</p> <p>Par rapport à la somme des angles intérieurs d'un triangle, la somme des angles intérieurs du polygone est double.</p> <p>Les élèves mesurent les angles d'un polygone de cinq côtés et d'un polygone de six côtés et s'attendent à trouver un multiple de 180°. En fait, dans le cas du polygone à cinq côtés les élèves s'aperçoivent avoir fait une erreur de calcul (int. 22-25).</p> <p>Les énoncés qui sont construits à partir de la mesure sont les suivants:</p> <p>E₂ : la somme des angles intérieurs d'un polygone à cinq côtés est 540°</p> <p>E₃ : la somme des angles intérieurs d'un polygone à six côtés est 720°</p> <p>Les élèves construisent un tableau avec ces données.</p> <p>Ils écrivent les résultats de la somme des angles comme produit de 180.</p> <p>C'est à partir de ce tableau que les élèves déterminent la loi pour le polygone à n côtés, au moyen d'une généralisation sur les énoncés.</p> <p>D₄ : E₁, E₂, E₃ \rightarrow E₄ : la somme d'un polygone de n côtés est $180^\circ(n-2)$</p> <p>P : Généralisation sur les énoncés</p> <p>Ils décident de prouver E₄ par récurrence.</p>
N° côtés	S(A)										
3	180°										
4	360° $180^\circ \times 2$										
5	540° $180^\circ \times 3$										
6	720° $180^\circ \times 4$										

Les élèves sont conscients de devoir démontrer leur conjecture par récurrence. Néanmoins ils n'y arrivent pas. L'écart structurel pour construire la récurrence, n'est pas dépassé par les élèves. Le passage d'un polygone à n côtés à un polygone à $n+1$ côtés n'est pas pris en charge. La généralisation, pendant l'argumentation constructive, provient des résultats de calcul écrit dans le tableau. Pour construire la récurrence, une généralisation sur le processus est indispensable. L'exploration des élèves basée sur la mesure, n'a pas permis de lier la somme des angles intérieurs d'un polygone à n côté avec la somme des angles intérieurs d'un polygone à $n+1$ côtés. L'ajout d'un triangle d'un polygone à l'autre reste invisible et les élèves n'arrivent pas à construire la preuve.

Preuve des élèves	Analyse
<p>Base pour $n=3$ $180^\circ(3-2)=180^\circ$</p> <p>Pas $H_p : 180^\circ(n-2)$ $T_s : 180^\circ(n-1)$</p> <p>$S(n)=180^\circ(n-2)=180n-360$ $S(n+1)=180(n+1)-360=180n+180-360=n+1-2=n-1 \rightarrow Th$ Nous avons démontré la thèse avec l'axiome de la récurrence.</p>	<p>Les élèves écrivent correctement le cas initial $n=3$; ils font le calcul et ils découvrent que la base est 180° donc elle est correcte:</p> <p>$D_5 : \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \end{array} \quad E_5 : \text{le cas initial est correct}$</p> <p>$S(3)=180^\circ$</p> <p>P : théorème sur la somme des angles intérieurs d'un triangle</p> <p>Ensuite ils doivent faire le pas $n \rightarrow n+1$. Ils écrivent correctement l'hypothèse et la thèse du pas et ils doivent chercher la loi qui permet de passer de l'un à l'autre.</p> <p>$D_6 : \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \end{array} \quad E_6 : S(n+1)=180(n-1)$</p> <p>$S(n)=180^\circ(n-2)$</p> <p>P : ?</p> <p>Les élèves n'arrivent pas à accomplir ce passage. Ils ont remplacé $n+1$ par n dans la formule $S(n)$. Ils ne réussissent pas à voir $S(n+1)$ comme $S(n)+180^\circ$ car ce passage demande la relation entre n et $n+1$ (ajout d'un triangle dont la somme des angles est 180°).</p>

Pendant l'argumentation, les élèves ont généralisé sur les résultats et non sur le processus. Pour cette raison les élèves n'arrivent pas à construire la preuve. Il s'agit ici d'une rupture cognitive structurelle car la généralisation faite sur les résultats du tableau empêche aux élèves de voir la liaison entre un pas et son successif. L'écart structurel amène les élèves à une rupture cognitive structurelle.

Ecart structurel entre argumentation inductive par généralisation sur les énoncés et récurrence, géré au moyen d'une argumentation inductive par généralisation sur le processus

Binôme : Marta (M), Lucia(L), classe de 3 année du lycée (16/17 ans, première en France).

L'argumentation des élèves est traduite de l'italien au français (dans l'annexe 4.2 on trouve l'argumentation originale et la copie des élèves).

Les élèves considèrent plusieurs polygones et elles mesurent les angles intérieurs. Elles découvrent la loi à partir de la stratégie empirique. Néanmoins, elles construisent une argumentation structurante dont la généralisation est faite sur le processus. C'est cela qui permet aux élèves de construire une preuve.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>66. M : si n est égal à 3, f(n) est égal à 180 pour 1... Ensuite si n égal à cinq, no quatre f(n) est égal à 360 qui est égal à 180 pour 2</p> <p>67. L : n égal 5 f(n) est égal à 540 qui est égal à 180 fois 3, si n égal 6, f(n) est 720 ... 180 fois 4... n égal 7</p> <p>68. M : f(n) est 900 donc 180 fois 5... donc ça veut dire qui est 180 fois n moins deux, n'est ce pas ?</p> <p>69. L : oui</p> <p>70. M : alors f(n) est égal à 180 fois n moins deux....</p> <p>71. L : ok, maintenant il faut le démontrer avec la récurrence</p>	<p><i>Les élèves mesurent les angles de quelques polygones. En particulier elles considèrent des polygones de trois côtés jusqu'à un polygone à sept côtés.</i></p> <p><i>Elles s'aperçoivent, que la somme des angles intérieurs des polygones est un multiple de 180. Donc elles déterminent la formule comme généralisation sur les énoncés.</i></p> <p><i>La donnée de l'argument est constituée par tous les énoncés qui expriment la somme des angles dans les cas particuliers.</i></p> <p>D₁ : énoncés précédents</p> <p style="text-align: center;">→</p> <p>E₁ : la somme d'un polygone de côtés n est 180*(n-2)</p> <p>P : généralisation sur les énoncés</p>
<p><i>Les élèves avant de démontrer construisent une argumentation structurante.</i></p> <p>72. M : oui, alors la formul est 180 fois n moins 2 ... Et elle doit être vraie pour n+1</p> <p>73. L : oui pour n égal à a n+1 ... f(n+1) doit être égal à 180 fois n-1</p> <p>74. M : oui mais je n'arrive pas... qu'est ce qu'il faut faire ?</p> <p>75. L : f(4) est égal a 180 plus f(3)... donc 180+180...</p> <p>76. M : oui donc f(5) est ... est f(4) plus180... Je veux dire que tu prends f(n) égal à f(n-1) plus 180</p> <p>77. L : tu rajoutes au précédant toujours 180</p> <p>78. M : donc nous pouvons écrire f(n+1) comme f(n) plus 180...</p>	<p><i>Les élèves pensent à la récurrence. En fait, elles disent que la formule est vraie pour n et qu'elles doivent la prouver pour n+1.</i></p> <p><i>Nous avons :</i></p> <p>D₂ : f(n)= 180*(n-2)</p> <p style="text-align: center;">→</p> <p>E₂ : f(n+1)=180*(n-1)</p> <p>P : ?</p> <p><i>Les élèves font une généralisation sur le processus :</i></p> <p>D₃ : Polygone à 4 côtés</p> <p style="text-align: center;">→</p> <p>E₃ : f(4)=180+f(3)</p> <p>P : ajout d'un triangle au polygone</p>
	<p><i>Bien que les élèves n'explicitent pas le permis d'inférer, nous pouvons supposer qu'elles sont conscientes de rajouter à chaque foi, un triangle, car pendant la preuve elles vont l'écrire.</i></p>

	<p>D₄ : Polygone à 5 côtés → E₄ : f(5)=180+f(4)</p> <p>P : ajout d'un triangle au polygone</p> <p>D₅ : Polygone à n côtés → E₅ : f(n+1)=180+f(n)</p> <p>P : généralisation sur le processus</p> <p><i>La généralisation sur le processus permet de construire la récurrence</i></p>
--	---

A partir de cette argumentation, les élèves peuvent construire une démonstration. La généralisation qui relie un cas au successif permet de construire la récurrence.

Preuve des élèves	Analyse
<p>Formule F(n)=180°(n-2)</p> <p>Base F(3)=180° (il n'est pas possible d'avoir un polygone de deux sommets)</p> <p>F(n+1)= 180°(n-1)</p> <p>F(n+1)=F(n)+180° Il faut sommer 180° à F(n) car si on ajoute un sommet au polygone, on ajoute aussi un triangle. La somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°.</p> <p>F(n+1) = 180°(n-2)+180° F(n+1) = 180°(n-2+1) F(n+1) = 180°(n-1)</p>	<p><i>Les élèves écrivent la formule. Ils substituent 3 à n et elles trouvent le cas initial.</i></p> <p>E₃ : f(3)=180°</p> <p><i>Ensuite elles écrivent la formule pour n+1 et elles prouvent.</i></p> <p>D₂ : → E₂ : f(n+1)=180*(n-1) f(n)= 180(n-2)</p> <p>P : généralisation sur le processus</p> <p><i>Les élèves prouvent avec la récurrence. Le dernier pas de la récurrence reste implicite.</i></p>

La généralisation sur le processus, permet aux élèves de construire une démonstration par récurrence. Entre argumentation constructive et argumentation structurante il y a un écart structurel qui est géré par les élèves, car ils sont conscients de devoir utiliser la récurrence. En revanche, entre argumentation structurante et démonstration il y a une continuité structurelle. Les élèves qui ont lié les deux polygones au moyen de l'ajout d'un triangle au polygone, ont les éléments pour construire une démonstration par récurrence. Nous avons ici un exemple d'unité cognitive structurelle entre argumentation structurante et preuve.

Pour résumer

Huit binômes ont utilisé la mesure pour construire la conjecture.

Une partie d'entre eux a trouvé la formule générale par généralisation sur les énoncés sans construire de preuve (3 binômes).

Une partie d'entre eux a essayé de construire la démonstration par récurrence mais sans y arriver (3 binômes).

Par contre, les élèves qui ont réussi à construire correctement la démonstration par récurrence (2 binômes) ont d'abord fait une généralisation sur le processus.

Dans le tableau nous résumons les résultats.

Argumentation : Induction empirique par généralisation sur les résultats, vers induction par généralisation sur le processus	Preuve	Continuité /Ecart structurel	Unité rupture cognitive structurelle
Généralisation sur les résultats 6 binômes	Aucune preuve 3 binômes	Ecart	Rupture cognitive structurelle
	Tentative de récurrence 3 binômes	Ecart	Rupture cognitive structurelle
Généralisation sur les résultats + Généralisation sur le processus 2 binômes	Récurrence	Continuité structurelle entre argumentation structurante et preuve	Unité cognitive structurelle entre argumentation structurante et preuve

2.3.1.2 Stratégie d'insertion d'un côté à un polygone à partir du même sommet et/ou du découpage d'un polygone en triangles à partir du même sommet

Les élèves qui ont construit une quasi-induction sont ceux qui ont construit une argumentation inductive par généralisation sur le processus depuis le début de la résolution. Cette induction est construite à partir de la stratégie de découpage du polygone en triangles à partir du même sommet. La plupart des élèves ont construit la démonstration par récurrence (5 binômes). Une partie des binômes a essayé sans y parvenir (3 binôme). Un binôme a construit la preuve comme induction par généralisation sur le processus, c'est-à-dire qu'argumentation et preuve ont la même structure.

Dans la suite nous présenterons un seul exemple d'analyse : continuité entre une argumentation inductive sur le processus et la démonstration par récurrence.

Les élèves qui ont essayé de construire une démonstration par récurrence mais qui ne sont pas arrivés à le faire n'étaient pas capables d'utiliser la récurrence, comme nous le verrons dans la suite.

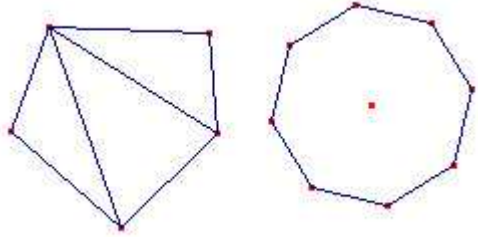
L'analyse du binôme qui a utilisé une argumentation comme preuve est sans intérêt car l'unité cognitive structurelle est banale.

Argumentation inductive par généralisation sur le processus et démonstration par récurrence

Binôme : Vincent (V), Ludovic (L), classe Terminale en France.

L'argumentation et la démonstration sont en français (dans l'annexe 4.3 on trouve le dialogue et la copie des élèves).

Au début les élèves essaient de mesurer les angles d'un polygone irrégulier à cinq côtés, qu'ils ont dessiné. Ils se trompent dans les calculs. Ils laissent tomber et ils dessinent un polygone à huit côtés, cette fois-ci régulier. Ils pensent décomposer le polygone en triangles. Donc ils dessinent les diagonales du polygone irrégulier pour le décomposer en triangles. C'est à partir d'ici que les élèves disent qu'en rajoutant un point on rajoute un triangle.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>16. L: si on considère un cas particulier, un polygone régulier</p> <p>17. V: on peut essayer</p> <p><i>Vincent dessine un polygone régulier à huit côtés</i></p> <p>18. L: alors là...</p> <p>19. V: peut-être on peut toujours décomposer en triangles</p> <p>20. L: oui, j'avais pensé même au début mais ...</p> <p><i>Vincent dessine les diagonales dans le polygone irrégulier</i></p> <p>21. V: voilà, voilà, voilà</p> <p>22. L: c'est vrai que si tu rajoute un point ça va te rajouter... ça va te rajouter ... je ne suis pas sûr mais... ça va te rajouter un triangle</p> <p>23. V: si tu rajoute un point ...</p> <p>24. L: oui on est obligé d'ajouter un triangle</p> <p>25. V: oui</p>	<div style="text-align: center;">  </div> <p><i>C'est le dessin du polygone régulier qui suggère de découper le polygone en triangles, même si le découpage est fait sur le polygone irrégulier. Le polygone à huit côtés a été probablement l'exemple générique qui a permis le passage à la considération des triangles dans le polygone.</i></p> <p><i>Ludovic comprend que si on "rajoute un point" c'est à dire si on rajoute un sommet au polygone, on rajoute un triangle :</i></p> <p>E₁ : si on rajoute un point on rajoute un triangle</p> <p><i>Cet énoncé est un fait car c'est la manipulation du polygone sur le logiciel qui a permis de le déterminer.</i></p>

<p>26. L: mais par contre il faudrait voir comment tu pars au début</p> <p>27. V: oui mais le début c'est</p> <p>28. L: Je pense que pour n égal trois ça va</p> <p>29. V: si on partage le polygone en triangles on a ...</p> <p>30. L: chaque fois que tu rajoutes un triangle tu rajoutes 180</p> <p>31. V: eh?</p> <p>32. L: chaque fois que tu rajoutes un point tu rajoutes un triangle, donc chaque fois tu rajoutes 180 mais ça dépend d'où tu pars... donc 180 par chaque côté</p> <p>33. V: chaque fois qu'on rajoute un côté on rajoute 180</p> <p>34. L: et donc la somme des angles ça fait 180 plus 180 n moins trois et donc 180 n moins deux... voilà c'est ça</p> <p>35. V: 180 n moins deux ?</p> <p>36. L: oui parce que tu penses à 180 et tu sais que tu rajoutes 1 après</p> <p>37. V: oui</p> <p>38. L: alors tu penses que pour quatre tu rajoutes 1, pour cinq tu rajoutes deux... donc ça fait n moins trois... non, ça fait 180 plus 180 n moins trois et donc 180 pour n moins deux... bon mais il faut le démontrer</p> <p>39. V: par récurrence c'est ça ? Tu as la somme des angles et tu as que pour n égal trois la somme est 180</p> <p>40. L: oui par récurrence</p> <p>Ludovic écrit la démonstration, Vincent dessine un autre polygone sur Cabri ; les élèves ne parlent plus.</p>	<p>En face de la figure du polygone découpé en triangles, les élèves imaginent rajouter un point et donc un sommet au polygone. De telle façon, le polygone a un côté en plus par rapport au polygone de départ. En ajoutant un point on rajoute clairement un triangle.</p> <p>Les élèves se demandent comme commencer (int.26). Probablement il y a l'idée de la récurrence ici. Il est probable qu'ils cherchent déjà le premier pas de la récurrence. Implicitement pour $n=3$ le polygone est un triangle. La somme de ses angles intérieurs est 180°.</p> <p>E₂ : le premier pas c'est pour n=3 (la somme des angles intérieurs d'un polygone à 3 côtés est 180°)</p> <p>Ensuite les élèves explicitent le fait que rajouter un triangle signifie rajouter 180° à la somme des angles et donc rajouter un côté au polygone signifie rajouter 180° à la somme de ses angles. Le schéma de l'argumentation devient :</p> <p>D₃ : E₁ $\xrightarrow{\quad}$ E₃ : on rajoute 180°</p> <p>P: propriété de la somme des angles d'un triangle</p> <p>L'argument précédent est le support de ce nouvel argument.</p> <p>Ensuite Ludovic construit la conjecture. A partir de la somme des angles intérieurs d'un triangle il imagine rajouter un côté au triangle. Il rajoute un triangle et donc 180°. Il obtient $180^\circ + 180^\circ \cdot 1$. En ajoutant encore un côté on a 180° plus ($180^\circ \cdot 2$) et donc $180^\circ \cdot (n-3)$ où n est le nombre des côtés du polygone et trois est le nombre qu'il faut enlever à chaque fois pour avoir le juste nombre de triangles qu'on rajoute au triangle de départ. La généralisation se base sur le processus. L'argument est le suivant:</p> <p>D₄ : E₂ : la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180° $\xrightarrow{\quad}$ E₄ : la somme des angles intérieurs d'un polygone à 4 côtés est $180^\circ + 180^\circ \cdot (n-3)$</p> <p>P: si on ajoute un côté au polygone alors on ajoute $180^\circ(n-3)$ à la somme des</p> <p>(n-3) est le nombre des triangles qu'il faut rajouter au triangle de départ pour obtenir un polygone de n côtés.</p>
--	---

	<p>D₅ : E₂ : la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180° → E₅ : la somme des angles intérieurs d'un polygone à 5 côtés est 180°+180°*(n-3)</p> <p>P: si on ajoute un côté au polygone alors on ajoute 180°(n-3) à la somme des</p> <p><i>Les élèves peuvent généraliser au cas d'un polygone quelconque :</i></p> <p>D₆ : E₂ → E₆ : la somme des angles intérieurs d'un polygone à n côtés est 180°+180°*(n-3) D₄→D₄ D₅→D₅</p> <p>P: généralisation sur le processus</p> <p><i>La conjecture est déterminée.</i></p> <p>E₆ : 180°+ 180° *(n-3)= 180° *(n-2)</p>
--	---

La conjecture est déterminée par une généralisation sur le processus. C'est probablement pourquoi les élèves réussissent à démontrer la conjecture au moyen d'une récurrence.

Preuve des élèves	Analyse
<p>Théorème Soit S_{An} la somme des angles intérieurs du polygone on peut montrer que $S_{An} = 180°*(n-2) = n(n-2)$ rad</p> <p>Démonstration par récurrence On considère des polygones à n côtés, donc $n \geq 3$</p> <p>Initialisation Pour $n=3$ on a un triangle donc $S_{A3} = 180° = 180°*(3-2)$</p> <p>Transmission Soit p tel que $p \geq 3$ On fait l'hypothèse que $S_{Ap} = 180°*(p-2)$ On veut vérifier que $S_{Ap+1} = 180°*(p+1-2)$ Donc $S_{Ap+1} = 180°*(p-2) + 180$ Quand on ajoute un côté on ajoute un sommet, donc on peut découper le polygone par un triangle de plus</p>	<p><i>Le premier pas est l'énoncé E₂ :</i></p> <p>E₂ : pour n= 3 on a S_{A3} = 180°=180°*(3-2)</p> <p><i>L'énoncé est le même que les élèves avaient donné pendant l'argumentation, là il est mieux explicité. Ensuite les élèves supposent la formule vraie pour p et la démontrent pour p+1 :</i></p> <p>D₇ : → E₇ : S_{Ap} = 180°*(p-2) → S_{Ap+1} = 180°*(p-2)+180 P: ?</p> <p><i>Le permis d'inférer est à déterminer.</i></p> <p>D₈ : polygone à n côtés → E₈ : le polygone à n+1 côtés a un triangle un plus du polygone à n côtés</p> <p>P: Si on ajoute un côté, on ajoute un triangle</p>

<p>On ajoute donc la somme des angles d'un triangle, soit 180. Donc $S_{A_{p+1}} = 180*(p-2)+180 = 180*(p+1-2)$</p> <p>Conclusion La propriété, vraie au rang $n_0=3$ est héréditaire et est vraie pour tout $n, n \geq 3$ Pour un polygone quelconque de n côtés, la somme des angles intérieurs du polygone est égale à $180*(n-2)$</p>	<p><i>Ils répètent l'argument 3 de l'argumentation et ils peuvent conclure.</i> <i>Le permis d'inférer qui permet de passer de S_{Ap} à $S_{A_{p+1}}$ est donc construit.</i></p> <p>D₇ : $S_{Ap} = 180*(p-2)$ $\xrightarrow{\quad}$ E₇ : $S_{A_{p+1}} = 180*(p-2)+180$</p> <p>P: si on ajoute un côté, on ajoute 180° à la somme des angles intérieur du polygone</p> <p><i>Les élèves concluent avec la récurrence.</i></p> <p>D₆ : E₂, et argument 7 $\xrightarrow{\quad}$ E₆ : $180*(n-2)$</p> <p>P: schéma de récurrence</p>
--	---

La démonstration par récurrence permet de valider l'énoncé que les élèves avaient trouvé avec une recherche inductive par généralisation sur le processus. On observe une unité cognitive structurelle.

Pour résumer

Cinq binômes sur huit ont construit la démonstration par récurrence à partir de la quasi-induction. Deux binômes ont essayé sans y parvenir et un binôme a simplement écrit comme preuve l'argumentation développée.

Dans le tableau nous résumons les résultats.

Argumentation : Quasi-induction	Preuve	Continuité /Ecart structurel	Unité rupture cognitive structurelle
Généralisation sur le processus 8 binômes	Généralisation sur le processus 1binômes	Continuité structurelle	Unité cognitive structurelle
	Tentative de récurrence 3 binômes	Continuité structurelle	Unité cognitive structurelle
	Récurrence 5 binômes	Continuité structurelle	Unité cognitive structurelle

Toutes les analyses sont des exemples d'unité cognitive structurelle. La différence entre les trois types de preuves est seulement que les élèves qui ont construit une preuve par récurrence ont démontré la loi trouvée.

2.3.1.3 Stratégie d'insertion d'un côté au polygone à partir de sommets différents et/ou du découpage d'un polygone en triangles à partir de sommets différents

Les élèves qui ont utilisé cette stratégie ont eu difficulté à déterminer la loi et surtout à la prouver. Décomposer le polygone en triangles à partir de sommets différents signifie déterminer la conjecture par une généralisation sur les énoncés et non sur le processus. En fait, les élèves comptent le nombre de triangles présents dans les polygones considérés, et à partir de ces exemples ils généralisent.

La preuve peut être construite à partir d'une généralisation sur le processus. Un écart structurel doit être comblé ; et en conséquence une décomposition du polygone en triangles à partir du même sommet semble inévitable. Un binôme (Sara et Cinzia) a construit une argumentation inductive sur les énoncés pour la construction de la conjecture et une argumentation inductive sur le processus pour construire une preuve. Nous analysons l'écart structurel.








Ecart structurel entre argumentation inductive par généralisation sur les résultats et preuve inductive par généralisation sur le processus

Binôme : Sara (S), Cinzia (C), classe de 4 année du lycée (16/17 ans, première en France).

L'argumentation des élèves est traduite de l'italien au français (dans l'annexe 4.4 on trouve l'argumentation originale et la copie des élèves).

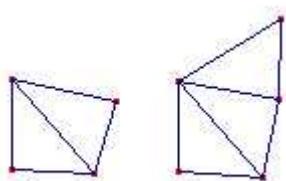
Les élèves considèrent un pentagone et elles le découpent en triangles. Ensuite elles dessinent d'autres polygones et ils les découpent en triangles. La conjecture est tirée d'une généralisation sur les énoncés.


Argumentation des élèves	Analyse
<p>8. C : Nous connaissons la somme des angles intérieurs d'un triangle...mais si nous découpons le polygone en triangles nous ne pouvons pas trouver...par exemple si nous construisons ici un triangle, ensuite un autre et ensuite un autre... nous avons trois triangles</p> <p>9. S : ah ainsi la somme est 180 pour trois fois... mais nous devons trouver la loi...</p> <p>10. C : eh oui... mais...</p> <p>11. S : découper le polygone en triangles effectivement peut nous aider... dans le cas d'un carré nous avons deux triangles et donc</p>	<p><i>Les élèves connaissent le théorème sur la somme des angles intérieur d'un triangle. Dans le cas d'un polygone à 5 côtés les élèves construisent trois triangles et donc la somme des angles intérieurs est 180° fois trois.</i></p> <p>D₁ : Polygone à 5 côtés → E₁: la somme des angles est 180×3</p> <p>P: théorème de la somme des angles intérieur du triangle</p> <p><i>Dans le cas d'un carré, il y a deux triangles et donc la somme est 180° fois deux.</i></p>

<p>la somme est 360° ...</p> <p>12. C : donc 180 plus 180</p> <p>Silence</p> <p>13. S : alors donc</p> <p>14. C : mais pourquoi la lois doit être en fonction des côtés ?</p> <p>15. S : et c'est ça, celui-ci ne dépend pas des côtés, il faut qu'il soit en fonction des côtés ...</p> <p>16. C : peut-être que les triangles sont en relations avec le nombre des côtés... alors...</p> <p>17. S : dans le cas de cinq côtés nous avons trois triangles et donc 3 fois 180 ...</p> <p>18. C : si on considère un polygone à six côtés nous avons... nous avons quatre triangles</p> <p>19. S : donc dans le cas de six côtes nous avons quatre triangles et donc 4 fois 180, peut être,</p> <p>20. C : donc selon le nombre des côtés combien des triangles se forment ??</p> <p>21. S : c'est une bonne question...</p> <p>22. C : il y aura une relation...</p> <p>Silence</p> <p>[...]</p> <p>28. C : alors quatre côtes et nous avons deux triangles, s'ils sont cinq nous avons trois triangles avec sis nous avons quatre triangles et donc il y a une différence de deux.</p> <p>29. S : si mais je ne voix pas la relation...</p> <p>30. C : bon, mais quand même nous pouvons commencer à écrire... ensuite nous verrons</p> <p>C écrit ce que les élèves ont dit jusqu'à maintenant.</p> <p>31. C : mais attends, la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°, donc celui-ci est déjà 180° fois quatre</p> <p>32. S : ah j'ai compris, la relation, il faut trouver</p> <p>33. C : oui une relation</p> <p>34. S : alors elle est... le nombre des côtés moins deux fois 180°...</p> <p>35. C : quoi ?</p> <p>36. S : eh oui, le nombre des côtés moins deux c'est le nombre des triangles fois 180° c'est la somme des angles intérieurs</p>	<div style="text-align: center;"> <p>D₂ : carré  E₂: la somme des angles est 180×2</p> <p>P: théorème de la somme des angles intérieur du triangle</p> </div> <p><i>Cinzia se pose une question : pourquoi la loi doit être en fonction des côtés (int. 14). C'est l'énoncé du problème qui conduit Cinzia à chercher une relation entre triangles et côtés pour trouver la loi. Nous avons une abduction.</i></p> <div style="text-align: center;"> <p>? D₃ : relation entre triangles et côtés  E₃: loi</p> <p>P: demande du problème</p> </div> <p><i>A partir de ce moment les élèves construisent des arguments différents : Cinzia cherche la relation entre côtés et triangles pour chaque polygone, alors que Silvia continue à calculer la somme des angles intérieurs pour chaque polygone.</i></p> <p><i>Dans le cas d'un polygone à six côtés, Cinzia dit qu'il y a 4 triangles. Elle cherche la relation qui relie les côtés avec le nombre de triangles.</i></p> <div style="text-align: center;"> <p>D₄ : polygone à 6 côtés  E₄: le polygone est composé par 4 triangles</p> <p>P: ?</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>D₅ : E₄  E₄: la somme des angles est 180×4</p> <p>P: théorème de la somme des angles intérieur du triangle</p> </div> <p><i>Cinzia considère des polygones à quatre, cinq et six côtés. Elle compte le nombre des côtés.</i></p> <div style="text-align: center;"> <p>D₅ : polygone à 4 côtés  E₅: le polygone à 4 côtés est composé de 2 triangles</p> <p>P: ?</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>D₆ : polygone à 5 côtés  E₆: le polygone à 5 côtés est composé de 3 triangles</p> <p>P: ?</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>D₄ : polygone à 6 côtés  E₄: le polygone à 6 côtés est composé de 4 triangles</p> <p>P: ?</p> </div> <p><i>Finalement Cinzia comprend la relation entre nombre des côtés et nombre des triangles par une généralisation sur les énoncés.</i></p>
---	---

<p>37. C : c'est vrai, c'est vrai...</p> <p>38. S : maintenant il faut le démontrer</p>	<p>$D_{C7} : E_{C5}, E_{C6}, E_{C4} \longrightarrow E_{C7}$: le polygone à n côtés a $n-2$ triangles</p> <p>P: généralisation sur les résultats</p> <p><i>Ensuite Cinzia considère encore le cas du polygone à six côtés (les arguments C4 et S4) et finalement elle comprend la relation.</i></p> <p>$D_{C3} : E_{C7} \longrightarrow E_{C3}$: $180^*(n-2)$</p> <p>P: théorème de la somme des angles intérieurs du triangle</p> <p><i>Le cas du polygone à six côtés est un exemple générique pour Cinzia.</i></p>
---	---

La conjecture a été construite par une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés à partir des résultats obtenus dans les autres arguments. Pour construire la preuve les élèves utilisent une induction sur le processus. Cela n'est pas facile car la relation entre triangles et côtés du polygone jusqu'à ce moment a été construite à partir de la perception de la figure, c'est à dire que le nombre des triangles dans le polygone est visible sur la figure. De plus, les élèves ont dessiné les triangles à partir des sommets différents du polygone.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>68. C : si nous avons un carré, par rapport au triangle nous rajoutons deux côtés, en effet nous en rajoutons un car l'autre est celui du triangle... si nous avons un polygone à cinq côtés nous rajoutons un triangle et donc deux côtés mais en effet on en rajoute un...</p>  <p>69. S : alors à partir d'un triangle on peut rajouter celui-ci (il montre le polygone à quatre côtés) et les côtés deviennent 4, 4 moins deux fait deux et les triangles sont deux et la relation est correcte, ensuite on rajoute un troisième et on a cinq côtés et les triangles sont 3... donc ok.</p> <p>70. C : Les côtés et les sommets sont pareils... donc si tu as une figure avec cinq sommets, un sommet va se relier avec les autres deux mais non avec les sommets adjacents, donc dans le</p>	<p><i>Les élèves cherchent à exprimer les triangles contenus dans le polygone en fonction des côtés du polygone.</i></p> <p><i>Cinzia explicite des faits qui dérivent de la perception de la figure sur Cabri-géomètre :</i></p> <p>E_8 : un carré est un triangle plus 2 côtés dont un est celui du carré</p> <p><i>Pour construire un polygone à cinq côtés il faut ajouter un triangle et donc deux côtés, mais en fait on rajoute un côté</i></p> <p>E_9 : le polygone à cinq côtés est le carré précédant plus un triangle, donc plus 2 côtés dont un est celui du carré</p> <p><i>Silvia reprend le raisonnement de Cinzia. L'argument se base sur la perception. Mais ici (69) Silvia considère encore la loi précédemment trouvée. Simplement elle la vérifie sur ces deux polygones.</i></p> <p><i>En revanche, Cinzia continue son raisonnement. Elle découvre que les sommets et les côtés d'un</i></p>

<p>non avec les sommets adjacents, donc dans le cas de cinq sommets on peut effectuer seulement deux liaisons qui permettent de construire trois triangles...</p> <p>71. S : par exemple ce polygone est découpé de façon erronée car ce triangle n'a rien à voir avec les autres...</p> <p>72. C : oui c'est vrai, autrement on considère des angles intérieurs qui n'ont rien à voir... il faut toujours relier un sommet avec les autres et exclure les deux sommets adjacents</p> <p>73. S : ici on a considéré plus de sommets et ça ne va pas...</p> <p>74. C : donc ce sommet doit être relié à tous les sommets non adjacents en constituant donc trois arrêtes mais quatre triangles...</p> <p>75. S : oui comme ça, ça marche ! !</p> <p>76. C : alors on écrit ça... on démontre comme ça</p> <p><i>Cinzia commence à écrire</i></p> <p>77. On peut dire que le nombre des triangles correspond au nombre des sommets non adjacents</p> <p>Nous avons remarqué qu'un polygone de n côtés peut être découpé en triangles à partir d'un sommet en le reliant avec les sommets non adjacents. En considérant le nombre de ces sommets avec le sommet de départ nous avons observé que ce nombre correspond au nombre des triangles formés.</p>	<p><i>polygone sont en nombre égal. C'est encore un fait perceptif</i></p> <p>E₁₀: le nombre des côtés et des sommets est le même dans un polygone.</p> <p>E₁₁: dans le cas d'un pentagone à partir d'un sommet on peut construire les arrêtes avec deux autres sommets, mais non avec les sommets adjacents.</p> <p><i>Le polygone à cinq côtés est probablement un exemple générique pour Cinzia. Le nombre des triangles est égal au nombre des côtés moins les deux côtés adjacents au sommet dont partent les diagonales qui découpent le polygone en triangles. L'énoncé est encore relié à des aspects perceptifs.</i></p> <p>E₁₂: dans le cas d'un pentagone on a 5 sommets moins les deux adjacents au sommet principal (dont les arrêtes partent) = 3 triangles</p> <p><i>Pour le cas d'un polygone à six côtés on peut relier les sommets avec les autres par trois arrêtes. Les triangles sont 4 c'est-à-dire six côtés moins les deux adjacents (int. 74).</i></p> <p>E₁₃: dans le cas d'un polygone à six côtés, 6 sommets moins les deux adjacents au sommet principal (dont les arrêtes partent) = 4 triangles</p> <p><i>Finalement les élèves explicitent la preuve en général.</i></p> <p>D₁₄: E₁₂, E₁₃  E₁₂: n sommets moins les deux adjacents au sommet principal (dont les arrêtes partent) = n-2 triangles</p> <p>P: généralisation sur le processus</p> <p><i>Cette généralisation se base sur des aspects perceptifs. Le découpage du polygone en triangles est fait sur la figure. Pour Cinzia, la généralisation a été faite sur le processus qui relie un sommet avec les sommets du polygone. Si on ajoute un sommet (et donc un côté) on ajout une arrête et donc un triangle.</i></p>
--	---

Le passage d'une induction sur les résultats à une induction sur le processus n'a pas été facile. Nous avons observé un écart structurel augmenté par l'écart du système de référence (voir ci-dessous) qui pousse les élèves à faire des raisonnements en s'appuyant sur des aspects perceptifs.

2.3.2 Analyse du système de référence

Les conceptions mobilisées par les élèves ne dépendent pas des stratégies utilisées pour construire la conjecture. C'est pourquoi nous ne présentons pas une classification du système de référence relativement aux stratégies décrites.

Nous avons observé deux types de conceptions mobilisées par les élèves pendant la résolution du problème : des conceptions intrinsèques à la démonstration par récurrence et des conceptions concernant les figures et l'interprétation de celles-ci.

Nous avons remarqué que la démonstration par récurrence a créé des difficultés qui ne sont pas seulement liées à des écarts structurels. Les élèves ont une « idée » de la récurrence, ils n'en possèdent pas le principe. Ils connaissent son schéma : l'initialisation et le pas ; nous pourrions dire le statut opératoire (Duval, 1996) de la récurrence. Néanmoins, la récurrence est souvent mal rédigée. Par exemple, ils oublient souvent de terminer la récurrence, c'est-à-dire de lier l'initialisation et le pas pour conclure la démonstration. Ils se rappellent de certains éléments que doit contenir une récurrence, ils peuvent relire les notes qu'ils ont prises à propos de la récurrence mais cela ne leur suffit pas à construire une preuve (comme nous le verrons dans l'exemple que nous proposons dans la suite).

La résolution du problème demande souvent de raisonner dans le perceptif. Souvent le référent théorique manque, non pas parce que les élèves l'ont oublié, mais parce que l'aspect perceptif est tellement fort que la théorie est complètement superflue. Prenons l'exemple de la construction des polygones par insertion d'un côté. Cette construction peut trouver sa justification seulement à un niveau perceptif : l'ajout d'un côté détermine l'ajout d'un triangle, mais la raison qui justifie ce passage n'est pas théorique, il est lié à une généralisation inductive qui s'appuie sur des aspects perceptifs. La dernière copie analysée, celui de Sara et Cinzia montre ce problème. En particulier, l'argumentation structurante est constituée par des énoncés qui sont des faits et par un seul argument, celui de la généralisation.

En outre, Cabri-géomètre permet de déplacer les sommets d'un polygone n'importe comment. Un polygone, dans le logiciel peut devenir un polygone croisé. Cela pose le problème de la définition d'un polygone. Les élèves peuvent se demander si la loi qui explicite la somme des angles intérieurs du polygone marche pour n'importe quel type de polygone. C'est le cas de Christophe et Ibrahim dont l'analyse est présentée ci-dessous.

2.3.2.1 La démonstration par récurrence

Par rapport à la déduction, la démonstration par récurrence se trouve à un niveau de difficulté de compréhension complètement différent (Harel, 2001). Malgré la simplicité apparente de la structure (initialisation, puis étape d'itération, et conclusion), le niveau conceptuel pour s'approprier un tel type de démonstration est élevé. Elle est apprise comme un schéma et elle est difficilement comprise. Les élèves sont capables de reconnaître un problème qui peut être démontré par récurrence, à partir de modèles de problèmes standard. Néanmoins comment l'appliquer n'est pas évident.

Considérons l'exemple des élèves ci-dessous :

Binôme : Christophe (C), Ibrahim (I), classe Terminale.

L'argumentation et la démonstration sont en français (dans l'annexe 4.5 on trouve le dialogue et la copie des élèves).

Les élèves ont déterminé la conjecture à partir d'une argumentation inductive par généralisation sur le processus. En ce moment, ils doivent démontrer. Ils veulent utiliser une démonstration par récurrence mais ils n'y arrivent pas.

Argumentation des élèves	Analyse
72. I : as-tu fini ?	
73. C : maintenant il faut écrire la démonstration... n désigne le nombre de côtés et la formule générale est n moins deux pour 180	<i>La loi trouvée par les élèves est : $180*(p-2)$</i>
74. I : <u>on utilise la récurrence pour démontrer</u> ?	<i>Les élèves veulent démontrer. Ils décident d'utiliser la récurrence, mais ils ne savent pas comment l'utiliser (int. 75). Ils sont en train de construire le pas de la récurrence mais sans résultat.</i>
75. C : <u>oui mais... comment</u> ?	
76. I : il faut faire l'initiation qui est pour n égal trois... ensuite tu montres que ta formule... elle est vraie	<i>Pour Ibrahim la récurrence est la composition des deux pas. Voyons la règle qui exprime la conception</i>
77. C : ça marcherait pas ça, ça il faut que tu puisses la déterminer en fonction de tout ce que tu as avant, <u>c'est ça qui est la récurrence</u> ... parce que la formule est correcte mais il faut l'écrire comme récurrence	R_I : pour la récurrence il faut : <ul style="list-style-type: none"> • Initialisation pour n=3 • Montrer que la formule est vraie (int.76)
78. I : alors là...	
79. C : <u>je cherche la récurrence sur le cahier</u>	<i>Pour Christophe, la récurrence est le résultat de pas précédents.</i>
<i>Silence</i>	R_C : pour la récurrence il faut : <ul style="list-style-type: none"> • Déterminer la formule en fonction de ce qu'il y a avant (int. 77)
80. I : qu'est ce que tu as trouvé ?	
81. C : et bon...U _n est égal à la formule et U ₃ est égal à p. Tu es d'accord ? U _n plus un c'est U _n plus p parce que par exemple tu as quatre côtés tu as 180 pour le triangle plus un triangle donc plus 180 d'accord ?	<i>Les élèves ne se rappellent pas comment appliquer la récurrence. C'est pourquoi ils vont chercher sur leur cahier.</i>
82. I : oui mais <u>c'est où la récurrence</u> ?	
83. C : et c'est ça non ?	
84. I : <u>bon moi je ne sais pas</u>	

Les contrôles des conceptions de la récurrence sont implicites. De plus, ils ne sont pas suffisamment forts pour appuyer les règles explicitées par les élèves. En fait, malgré la lecture du cahier, les élèves ne sont pas encore capables de construire une vraie démonstration comme nous le voyons ci-dessous.

Preuve des élèves	Analyse
$n \geq 3$ $U_3 = \pi$ $U_n = (n-2)\pi$ n désigne le nombre de côtés $U_{n+1} = (n-2)\pi + \pi$	<p><i>Ils écrivent l'initialisation, ils écrivent la formule pour U_n et à partir de celle-ci ils écrivent U_{n+1}.</i></p> <p>D₁ : $U_3 = \pi$ E₁ : $U_{n+1} = (n-2)\pi + \pi$</p> <p>P: conception de la récurrence</p> <p><i>L'opérateur de la conception de la récurrence reste implicite.</i></p>

Il est clair que la rupture cognitive est due à un manque de connaissance de la récurrence. Potentiellement les élèves savent devoir démontrer la formule par récurrence, mais ils ne la maîtrisent pas. Bien qu'ils aient cherché dans leur cahier la définition de la récurrence pour l'appliquer, ils n'y sont pas parvenus. L'écart n'est pas seulement dû à un écart structurel car les élèves essayent d'écrire les pas de la récurrence mais sans résultat. L'écart est aussi lié à un écart du système de référence car il n'y a pas d'appropriation théorique de la récurrence chez les élèves.

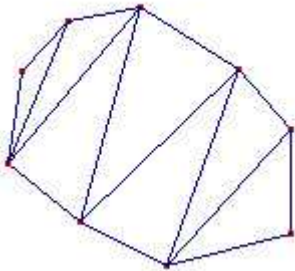
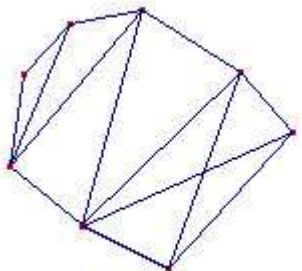
2.3.2.2 Polygones non simples¹

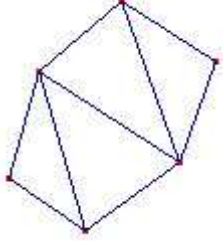
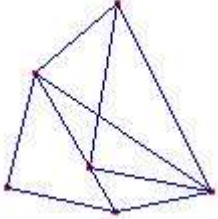
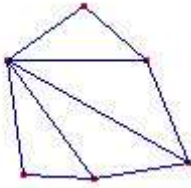
Le problème est posé sans distinguer les polygones simples des polygones non simples. Cela a créé des difficultés pour certains élèves. Considérons le binôme suivant.

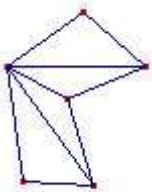
Binôme : Christophe (C), Ibrahim (I), classe Terminale.

Les élèves ont déterminé la conjecture. Christophe est en train d'écrire ce qu'ils ont dit lorsque Ibrahim est en train de bouger les points d'un polygone à six côtés, sur Cabri-géomètre. Il déplace un sommet du polygone vers sa partie intérieure. Le polygone n'est plus simple. Ibrahim a alors des doutes qu'il explicite à son camarade.

¹ Un polygone est simple si chaque sommet est adjacent à exactement deux arrêtes et les intérieurs des arrêtes sont disjointes.

Argumentation des élèves	Analyse
<p>La figure de départ est la suivante :</p> 	<p>La loi trouvée par les élèves est : $180*(p-2)$ L'argument était le suivant :</p> <p>$D_1 : \dots$ \rightarrow $E_1 : 180*(p-2)$</p> <p>P: généralisation sur le processus</p> <p>Les données D_1 sont composées des arguments précédents qui ont permis la généralisation sur le processus.</p>
<p>48. I : Mais après... les triangles... il faut qu'ils se croisent ou pas ? 49. C : mais même s'ils se croisent c'est pareil, vas-y, croise un juste pour voir...</p> <p>Ibrahim déplace un côté du polygone de façon qu'il se superpose au triangle. La figure devient :</p> 	<p>Si le polygone n'est plus simple la loi ne marche plus.</p> <p>Les élèves se trouvent en désaccord. Ibrahim soutient que la loi n'est pas correcte car si les triangles se croisent la loi n'est plus vraie. L'argument a une restriction :</p> <p>$D_1 : \dots$ \rightarrow $E_1 : 180*(p-2)$</p> <p>R₁ : si les triangles se croisent ...</p> <p>P: généralisation sur le processus</p>
<p>Un sommet a été superposé à un autre.</p> <p>50. I : là... 51. C : attends, laisse là comme ça... donc là on a combien des triangles ? 52. I : celui là se voit pas, il ne se voit plus, donc on a un deux trois, quatre, cinq, six, sept, huit triangles 53. C : si tu les vois quand même, il ne faut pas compter par rapport à ça 54. I : mais oui 55. C : mais non ça marche quand même... ils se forment des triangles intérieurs et là tu aurais des angles dont tu connais pas la mesure et qu'ils sont trop... alors tu es obligé de faire comme on a fait...</p>	<p>La restriction est interne à l'argument si on la considère comme argument de Ibrahim, mais elle est extérieure si on la considère comme argument de Christophe.</p> <p>A partir de ce moment les arguments des deux élèves sont différents. Pour Ibrahim la formule n'est plus vraie</p> <p>$D_{2I} : \dots$ \rightarrow $E_{2I} : \text{la formule } 180*(p-2) \text{ n'est plus vraie}$</p> <p>P: polygone croisé est un contrexemple</p>
<p>Silence, Ibrahim continu à regarder sur Cabri-géomètre alors que Christophe écrit.</p> <p>56. I : ça marche plus eh ! Il faut faire comme ça parce que ça marche ! 57. C : Mais non ! Tu as combien des côtés là ? Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit,</p>	<p>Pour Christophe l'argument reste vrai</p> <p>$D_{2C} : \dots$ \rightarrow $E_{2C} : 180*(p-2)$</p> <p>R₁ : si les triangles se croisent...</p> <p>P: généralisation sur le processus</p> <p>S : ?</p>

<p>neuf et tu as sept triangles...</p> <p>58. I : Tu n'as pas pris ...</p> <p><i>Ibrahim dessine un autre polygone à six côtés et il construit les quatre triangles intérieurs.</i></p>  <p>59. C : donc là il y a six côtés et quatre triangles... ça marche</p> <p>60. I : mais si tu croises le polygone ça donne deux triangles en plus</p>  <p>61. C : mais il faut faire les triangles intérieurs... autrement celui là n'est pas un polygone</p> <p>62. I : pourquoi il n'est pas un polygone ? Il a plusieurs côtés</p> <p>63. C : là ça fait... un polygone, un triangle et un polygone... tu n'as pas la même forme géométrique... tu croises et bon... tu as un polygone croisé</p> <p>64. I : mais bon tu peux aussi décomposer en plusieurs triangles</p> <p>65. C : ah alors là tu le décomposes en plusieurs... mais après les angles intérieurs</p> <p>66. I : le polygone il a n côtés et la somme des angles intérieurs est n moins deux fois 180, ça devrait marcher... mais ça marche pas dans ce cas là parce que là à l'intérieur du polygone il y a un côté</p> <p>67. C : mais si tu décomposes en partant du même sommet, je veux dire si tu décomposes en triangles mais en considérant le même sommet</p> <p>68. I : ah, là, peut être que si tu bouges ça marche...</p> <p><i>Il fait la décomposition du polygone, en construisant les triangles à partir du même sommet.</i></p>  <p>69. C : en effet là ça marche tout le temps</p>	<p><i>Le support de Christophe n'est pas clair. Probablement il pense que le polygone considéré par Ibrahim n'est pas un polygone (int. 61).</i></p> <p><i>Ibrahim n'est pas convaincu (int. 56). Il dessine un autre polygone à six côtés. Il croise le polygone et il invalide la loi. Cela constitue un support à son argument 2I.</i></p> <p><i>En revanche Christophe, dit qu'il ne s'agit pas d'un polygone mais d'un polygone croisé.</i></p> <p><i>Finalement Christophe trouve une solution : découper le polygone avec des arrêtes qui partent du même sommet. Cette affirmation est une restriction extérieure pour l'argument de Ibrahim et un support pour l'argument de Christophe.</i></p> <p><i>Cette fois-ci Ibrahim semble convaincu. Les arguments deviennent :</i></p> <div style="text-align: center;"> <p>R_C : si on découpe le polygone à partir du même sommet</p> <p>D_{2I} : ... → E_{2I} : la formule 180*(p-2) n'est plus vraie</p> <p>P : polygone croisé est un contrexemle</p> <p>↓</p> <p>S : perception</p> </div> <p><i>Le support de Ibrahim est un support perceptif, lié à ce qu'il voit sur la figure. En conséquence la restriction de Christophe est suffisante pour faire tomber son argument.</i></p> <p><i>Au contraire l'argument de Christophe est :</i></p> <div style="text-align: center;"> <p>R_I : si les triangles se croisent...</p> <p>D_{2C} : ... → E_{2C} : 180*(p-2)</p> <p>P : généralisation sur le processus</p> <p>↓</p> <p>S : on découpe le polygone à partir du même sommet</p> </div>
---	---

<p>70. I : oui, comme ça ca marche</p>  <p>71. C : Bon maintenant il faut écrire</p>	<p><i>C'est évidemment l'argument de Christophe qui a plus de force que l'argument de Ibrahim.</i></p>
---	--

L'exemple montre la difficulté causée par l'absence de définition d'un polygone. Nous remarquons aussi que beaucoup des éléments des arguments s'appuient sur des aspects perceptifs (le support de Ibrahim par exemples). En fait, les élèves ne connaissent pas de formalisation mathématique des notions liées au polygone, c'est pourquoi les arguments s'appuient sur des contrôles perceptifs, c'est-à-dire sur des conceptions intuitives qui n'ont pas de référent théorique.

2.3.3 Discussion des résultats

Comme nous venons de l'écrire, la résolution du problème est liée à des aspects perceptifs, extrêmement évidents, qui ne peuvent pas être remplacés par des permis d'inférer théoriques. La théorie de référence manque aux élèves.

En outre, nous avons demandé de déterminer la loi des angles intérieurs du polygone, sans spécifier l'hypothèse que le polygone est simple.

Malgré ces difficultés, l'expérimentation nous a permis de tirer des conclusions intéressantes.

En fait, les argumentations analysés sont inductives dans les deux séances et permettent de tirer de résultats semblables.

Néanmoins, par rapport au problème précédent, celui-ci semble avoir favorisé la construction d'une démonstration par récurrence. En fait, pratiquement la moitié des élèves ont construit une preuve par récurrence, alors que dans le cas précédant un seul binôme l'avait construite. Probablement dans ce problème, une généralisation sur le processus était peut être plus facile à accomplir. Nous avons confirmé l'hypothèse qu'une généralisation sur le processus peut amener à la construction de la récurrence, alors que la généralisation sur les énoncés n'est pas suffisante.

En outre, nous avons observé que la liaison entre structure de la récurrence et théorie de la récurrence semble échapper aux élèves. La récurrence est enseignée au lycée comme une règle de démonstration qui s'appuie sur des procédures spécifiques, et elle n'est pas vraiment comprise par les élèves. C'est son système opératoire qui est enseigné. Mais

cela, contrairement à ce qu'annonce Duval (1996), n'est pas suffisant. Dans la construction d'une récurrence la caractéristique fondamentale de traiter un ensemble dénombrable d'objets, échappe complètement aux élèves.

Conclusions

Ce chapitre avait deux objectifs : montrer comment analyser les argumentations et les preuves des élèves avec le modèle de Toulmin et proposer une analyse afin de répondre aux questions que nous avons posées à propos de l'unité et de la rupture cognitive.

Comme prévu, le modèle de Toulmin est un outil méthodologique puissant pour analyser les argumentations et les preuves des élèves. Il permet la comparaison entre les pas de l'argumentation et les pas de la preuve, en permettant une analyse claire des continuités ou des écarts structurels et du système de référence.

Nous avons montré que les continuités et les écarts peuvent être analysés entre argumentation constructive et preuve ou entre argumentation structurante et preuve. Souvent les écarts peuvent être observés à l'intérieur de la même argumentation et rendre difficile une analyse en termes d'unité ou rupture cognitive structurelle et du système de référence. C'est pourquoi, à notre avis, l'unité cognitive est à observer dans tout le processus de résolution du problème.

Néanmoins, nous avons montré la complexité d'une telle analyse. Le modèle de Toulmin nous permet d'analyser les continuités et les écarts du système de référence et de la structure entre une argumentation et une démonstration. Néanmoins, comme nous l'avons anticipé (chapitre 3), l'analyse de l'unité ou de la rupture cognitive du système de référence et de structure, ne s'appuie pas simplement sur une analyse des écarts ou des continuités.

Si l'unité cognitive du système de référence et structurelle peut être déterminée par l'observation d'une continuité structurelle ou du système de référence entre argumentation et preuve, cela n'est pas le cas pour la rupture cognitive. Un écart du système de référence n'est pas suffisant pour affirmer qu'il y a une rupture cognitive du système de référence, de la même façon qu'à un écart structurel, ne correspond pas nécessairement une rupture cognitive structurelle. C'est la présence de certains symptômes qui nous permet de conclure qu'à un écart structurel ou du système de référence entre argumentation et preuve correspond une rupture cognitive structurelle ou du système de référence.

Les symptômes peuvent être différents : l'arrêt de la progression, le blocage, la répétition de l'argument avec le permis d'inférer non théorique, la durée excessive du temps que l'élève dédie à l'argumentation, etc. Ces symptômes ne sont pas toujours analysables avec le modèle de Toulmin. Le modèle nous permet de localiser la présence des écarts et des continuités dans l'argumentation et dans la preuve, et à partir de celles-ci nous pouvons supposer une unité ou une rupture cognitive et sa nature (système de référence ou structure). La présence éventuelle des symptômes, nous permettra peut-être de confirmer nos suppositions.

Conclusions

Depuis quelques années, l'argumentation est un sujet d'étude dans la didactique des mathématiques. Très tôt est apparu que l'argumentation, en tant que constitutive des processus de validation engagés dans un contexte social, pouvait constituer un obstacle épistémologique à la construction de la démonstration (Balacheff 1988). Les travaux qui ont suivi, notamment ceux de Duval en France, Boero, Garuti et Mariotti en Italie et de Harel aux Etats-Unis, suggèrent de nuancer cette conjecture pour suggérer qu'« *il n'y aurait pas de continuité ni de rupture entre argumentation et démonstration, mais une relation complexe et constitutive du sens de chacune : l'argumentation se constitue en un obstacle épistémologique à l'apprentissage de la démonstration, et plus généralement de la preuve en mathématiques* » (Balacheff, 1999).

Selon Duval, qui a souligné, dans une problématique cognitive et linguistique, l'hétérogénéité entre argumentation et démonstration « *n'est pas seulement « logique » mais elle est aussi cognitive* » (Duval, 1992–93, p. 47 ; voir aussi 1995). Dans ce cadre, l'argumentation ne peut évidemment pas suggérer une voie pour la construction de la démonstration.

Cette distance cognitive entre argumentation et démonstration a été fortement contestée par les travaux sur l'*unité cognitive* (Boero, Garuti, Mariotti, 1996). L'hypothèse de l'*unité cognitive* est que la construction d'une argumentation pour la mise en place d'une conjecture peut favoriser la construction d'une démonstration. En conséquence, l'argumentation devient significative pour l'apprentissage de la démonstration.

Les résultats contrastés de ces recherches nous ont poussée à analyser les rapports entre argumentation et démonstration sous des points de vue différents. L'objectif de ce manuscrit, explicité dans l'introduction, était de donner une réponse à la question suivante : « Y a-t-il continuité ou distance cognitive entre argumentation et démonstration ? ».

Nous avons montré la complexité d'une analyse cognitive entre argumentation et démonstration. En particulier, l'étude que nous avons développée s'est déroulée en trois parties : d'abord nous avons donné une caractérisation de l'argumentation en mathématiques. Ensuite, nous avons adopté le modèle de Toulmin comme outil pour analyser argumentation et démonstration. En particulier cet outil a permis la recherche et l'analyse des continuités et des écarts entre argumentation et démonstration. C'est à partir de cette analyse que les conclusions que nous présentons sur les rapports cognitifs entre argumentation et démonstration ont été développées.

Caractérisation d'une argumentation en mathématiques

Cette caractérisation était nécessaire pour répondre à notre question initiale. En fait, si le mot « démonstration » exprime un concept amplement traité en didactique des mathématiques, cela n'est pas le cas pour le mot « argumentation ». Nous avons donc précisé ce qu'est une argumentation en mathématiques.

Les premières théories sur l'argumentation se sont développées dans la société grecque. En particulier, Aristote distingue trois domaines où s'exerce l'art du discours : rhétorique, dialectique et analytique. La rhétorique s'adressait à un auditoire plutôt silencieux ; celui qui argumentait pouvait utiliser n'importe quelle méthode, n'importe quelle stratégie afin de persuader l'interlocuteur. La dialectique s'adressait à un interlocuteur bien conscient du sujet de l'argumentation et capable de répondre aux questions ou de réfuter les arguments de l'orateur. Celui qui s'engage dans la dialectique part de principes qu'il croit être vrais, alors que celui qui fait de la rhétorique n'est pas nécessairement convaincu de la vérité des affirmations qu'il défend. L'analytique est une forme de rationalité scientifique qui n'est pas nécessairement destinée à un public. Elle est l'outil qui doit rendre possibles les raisonnements corrects dans un contexte scientifique. En outre, Aristote avait fourni un outil, le syllogisme, qui permettait de décrire du point de vue structurel la rhétorique, la dialectique et l'analytique.

A partir de ces travaux, nous avons proposé une caractérisation de l'argumentation en mathématiques. Nous avons rapproché l'argumentation en mathématiques de la dialectique, et la démonstration de l'analytique.

Nous avons caractérisé l'argumentation en mathématiques et la démonstration en explicitant leurs caractéristiques fonctionnelles et leurs caractéristiques structurelles. Les caractéristiques fonctionnelles déterminent la finalité de l'argumentation, son utilité, son rôle à l'intérieur d'un discours. Les caractéristiques structurelles permettent d'identifier une argumentation et de définir sa structure.

Nous nous sommes appuyée sur les théories linguistiques contemporaines (Plantin, 1990 ; Toulmin 1958, Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958, Ascombe et Ducrot, 1983).

L'argumentation en mathématiques a toujours une finalité, un objectif qui détermine son orientation. Au fur et à mesure qu'une argumentation se construit, les contenus changent, les idées prennent forme, les valeurs épistémiques se transforment ; une « direction » prend forme qui détermine la fonctionnalité de l'argumentation.

L'argumentation en mathématiques doit être justificative.

...c'est là, la fonction première des arguments, et que leurs autres utilisations, les autres fonctions que nous leur prêtons, sont d'une certaine manière secondaires et parasites de leur rôle justificatif qui, lui, est primordial (Toulmin, 1958, p. 14)

Le caractère justificatif de l'argumentation en mathématiques s'exprime dans sa forme : le raisonnement, qui est « *la démarche d'une inférence explicite qui dérive l'affirmation d'une proposition à partir d'une ou plusieurs propositions données* » (Duval, 1995, p. 209).

C'est pourquoi l'argumentation en mathématiques doit convaincre, et non persuader. Elle doit modifier les opinions en faisant appel à la raison. Elle doit être acceptée par un auditoire universel et non particulier. Une argumentation est convaincante dans le sens où elle s'adresse à un auditoire universel afin de lui faire reconnaître la vérité d'un fait ou sa nécessité (dialectique aristotélicienne).

Dans ce cadre, la démonstration trouve évidemment sa place. La démonstration a également un objectif, une finalité : fonder l'énoncé qu'elle valide. Elle est « justificative » de cet énoncé. Le but d'une démonstration est de valider (qui est plus que convaincre), et elle s'adresse à un auditoire universel (l'ensemble des mathématiciens). Finalement, la démonstration est une argumentation particulière.

Cette hypothèse a été de plus confortée par le fait que l'argumentation, comme la démonstration, a une structure ternaire. Elles sont analysables avec le même outil : le modèle de Toulmin.

Le modèle de Toulmin : un outil pour analyser l'argumentation et la démonstration

A partir du modèle de Toulmin sur l'argumentation, nous avons développé un cadre théorique qui a permis de construire les questionnements et les réponses éventuelles à propos des rapports entre argumentation et démonstration.

Dans ce cadre théorique, le modèle de Toulmin a été un outil qui a permis à la fois d'établir la relation entre argumentation et démonstration et de réaliser une analyse comparative en termes de continuité/écart de structure et continuité/écart du système de référence entre argumentation et démonstration.

L'analyse du système de référence s'appuie, en partie, sur le repérage des conceptions utilisées pour la mise en place d'une argumentation, et de les comparer avec les théorèmes utilisés pour la démonstration. Le permis d'inférer d'une argumentation, en tant qu'opérateur d'une conception, peut être comparé avec le théorème utilisé dans la démonstration. La conception, en tant que support de l'argumentation, peut être comparée avec la théorie mathématique utilisée dans la démonstration.

En conséquence, la transformation d'une conception en théorie mathématique et en particulier le passage d'un opérateur de la conception (permis d'inférer de l'argumentation) à un théorème (permis d'inférer de la démonstration) permet d'observer une continuité du système de référence. En revanche, c'est dans le manque d'évolution de l'opérateur de la conception en théorème que nous pouvons reconnaître un écart du système de référence.

L'analyse structurelle s'appuie sur la comparaison entre la structure de l'argumentation et celle de la démonstration. Nous avons montré comment la structure des arguments (déductive, abductive, inductive) peut être représentée avec le modèle de Toulmin.

Le modèle de Toulmin a permis de reconnaître des structures similaires et comparables dans l'argumentation et dans la démonstration, de façon à reconnaître une continuité structurelle si les structures sont les mêmes dans les deux cas. En revanche, nous observons un écart structurel si l'argumentation et la démonstration ont des structures différentes.

Ecart/Continuité entre une argumentation et la démonstration. Unité ou rupture cognitive ?

Du point de vue de l'analyse cognitive, notre position s'éloigne sensiblement de la position de Duval. Il n'y a pas toujours une distance cognitive entre argumentation et démonstration. Au contraire, nous avons souvent trouvé une unité cognitive non seulement du point de vue du système de référence mais aussi du point de vue de la structure.

Cela a été observé même quand cette continuité peut empêcher la construction d'une démonstration. Par exemple, les analyses des expérimentations ont montré qu'à partir d'une argumentation abductive, les élèves construisent fréquemment des preuves contenant encore des traces d'abduction. Cette thèse est ultérieurement étayée par le fait que certaines expérimentations déroulées en Italie ont été conduites dans des classes expérimentales d'un projet centré sur l'introduction des élèves à la démonstration. Ce projet prend en compte l'apprentissage de la démonstration d'une façon rigoureuse. Bien que ces élèves aient participé à des activités spécifiques sur la démonstration, les continuités structurelles et du système de référence entre argumentation et preuve ont également été observées.

La recherche sur l'*unité cognitive* (Boero, Garuti, Mariotti, 1996) s'est d'abord développée comme critique à la méthode traditionnelle des approches à la démonstration, en particulier quand les élèves abordent l'activité démonstrative.

Dans l'approche traditionnelle à la démonstration, l'enseignant demande souvent aux élèves de comprendre et répéter des démonstrations qui sont déjà construites. Il peut éventuellement demander de démontrer des énoncés qu'il propose alors lui-même. L'aspect important des recherches sur l'*unité cognitive* est de proposer des suggestions didactiques pour introduire les élèves à la démonstration en opposition avec les approches traditionnelles existantes. L'hypothèse de départ était que l'introduction des élèves à la démonstration devait être faite à partir des problèmes ouverts, c'est-à-dire avec des consignes qui demandent la construction d'une conjecture. La présence d'une argumentation préalable peut favoriser une activité argumentative qui peut se révéler très utile pour la construction d'une démonstration.

Nous appuyons cette hypothèse, confirmée par les résultats des expérimentations. La construction de l'argumentation semble avoir un rôle non négligeable pour la construction de la démonstration, même quand les élèves ont de l'expérience avec la démonstration. Nous avons observé que les élèves qui ne réussissent pas à construire des argumentations, ne réussissent pas non plus à construire des démonstrations. Nous n'avons pas d'exemples dans les expérimentations où les élèves ont construit une démonstration sans construire une argumentation. Le seul exemple où les argumentations et les démonstrations se confondent sont les cas des élèves qui ont utilisé la théorie trigonométrique pour résoudre le problème (Chapitre 5, § 2.1.1.4). Depuis le début ils avaient le référent théorique à disposition et la chaîne déductive a été construite directement à partir de celle-ci.

Dans le cas de la démonstration par récurrence, les élèves qui avaient construit une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés ont été obligés de construire une argumentation par généralisation sur le processus pour construire la récurrence. L'écart entre

argumentation inductive par généralisation sur les énoncés et démonstration par récurrence n'a pas été comblé sans la construction d'une argumentation inductive par généralisation sur le processus (chapitre 5, § 2.2.1.1 et § 2.3.1.1).

Néanmoins, l'hypothèse de l'*unité cognitive* (Boero, Garuti, Mariotti, 1996), comme elle a été avancée, ne prenait pas en compte le cas où les continuités structurelles ou du système de référence amènent à des preuves fausses. Dans ce cas une rupture cognitive est nécessaire pour la construction d'une démonstration. Et les élèves peuvent ne pas arriver à construire la démonstration justement à cause de la continuité « naturelle » entre argumentation et fausse démonstration.

En conséquence, si d'un côté penser en termes d'*unité cognitive* permet de comprendre les difficultés pour la construction d'une démonstration et localiser la source du problème éventuel, d'un autre côté, la considération que l'*unité cognitive* peut amener à la construction de preuves erronées doit être prise en compte.

Résultats à propos de l'unité ou rupture cognitive

Nous avons observé que la continuité du système de référence correspond à une unité cognitive du système de référence (de façon cohérente avec l'idée d'*unité cognitive* de Boero, Garuti, Mariotti, 1996)

Un écart du système de référence peut être la cause d'une rupture cognitive du système de référence. C'est le cas lorsqu'une conception erronée est support de l'argument. L'opérateur de la conception, le permis d'inférer de l'argument, ne peut alors pas être remplacé par un théorème (un exemple très clair dans nos résultats est donné par l'opérateur « Egalité entre triangles \Leftrightarrow Egalité entre aires »). L'absence de construction d'un pas de démonstration à partir de cet argument constitue une rupture cognitive du système de référence. Néanmoins, un écart du système de référence n'est pas toujours la cause d'une rupture cognitive du système de référence. L'élève peut gérer l'écart et construire une démonstration ou au contraire, il peut construire une preuve erronée en inventant un permis d'inférer faux, mais qu'il croit appartenir à une théorie mathématique (c'est le cas de Silvia et Francesca, chapitre 5, § 2.1.2.2). D'une certaine façon, cela confirme l'hypothèse de l'*unité cognitive* (Boero, Garuti, Mariotti, 1996) qui est que la continuité entre argumentation et démonstration semble être naturelle pour l'élève.

Cette hypothèse de continuité a été confirmée également du point de vue structurel. Une continuité structurelle correspond à une unité cognitive structurelle, alors qu'un écart structurel ne correspond pas nécessairement à une rupture cognitive structurelle.

En fait, à la suite des expérimentations faites, le passage d'une structure argumentative à une structure démonstrative n'est pas spontané pour les élèves. Les continuités que nous avons analysées entre les structures d'argumentation et celles de démonstration ont parfois conduit les élèves à la construction de preuves erronées. L'écart structurel, qu'il est souvent nécessaire de combler pour passer d'une argumentation à une démonstration, n'est pas géré par les élèves. Par exemple, certaines preuves analysées contiennent encore des pas abductifs qui ont été utilisés pendant l'argumentation (c'est par exemple le cas de Nicola et Christian, chapitre 5, § 2.1.1.1). De la même façon, une démonstration par récurrence est plus facilement construite si la généralisation dans l'argumentation est faite à partir du processus (c'est-à-dire qu'on prend en compte la liaison entre deux pas successifs). En revanche, si la généralisation se base sur les énoncés (c'est-à-dire qu'on prend en compte les résultats construits à partir de chaque cas de la chaîne inductive sans les relier les uns avec les autres), alors la réduction d'un écart structurel semble être nécessaire pour construire une démonstration par récurrence. Dans le cas où cet écart n'a pas été géré, nous avons observé une rupture cognitive structurelle (c'est par exemple le cas de Christophe et Ibrahim, chapitre 5, § 2.2.1.1, ou bien de Alice et Luca, chapitre 5, § 2.3.1.1.).

En conclusion, à une continuité du système de référence entre argumentation et démonstration correspond une unité cognitive du système de référence. À une continuité structurelle entre argumentation et démonstration correspond une unité cognitive structurelle. Néanmoins, contrairement à l'hypothèse de l'*unité cognitive*, il se peut que la preuve construite avec une unité cognitive du système de référence ou avec une unité cognitive structurelle soit fautive.

En revanche, à un écart du système de référence ne correspond pas nécessairement une rupture cognitive du système de référence, de la même façon qu'à un écart structurel ne correspond pas nécessairement une rupture cognitive structurelle. Dans ce cas comme dans le précédent on ne peut pas tirer de conclusions à propos de la preuve : elle peut être une preuve correcte.

Références bibliographiques

Une partie des références bibliographiques citées ici est extraite du site Internet de la Lettre de la Preuve (<http://www-didactique.imag.fr/preuve>)

Anscombe J. C. & Ducrot O. (1983) : *L'argumentation dans la langue*, Bruxelles : Mardaga.

Arsac G. & al. (1991) : Problème ouvert et situation-problème. Irem de Lyon.

Aristote : *Rhetorique*. Traduction française par Dufour M. et Wartelle A. Les belles lettres, 1991 pour le livre I et le livre II. Les belles lettres, 1980 pour le livre III.

Aristote : *Organon*. Traduction française par Tricot J. 1962. Paris : Librairie philosophique J. Vrin.

Aristote : *Les topiques : livres I-VIII*. Traduction française par Tricot J. 1974. Paris : Librairie philosophique J. Vrin.

Arzarello F. (à paraître) : *The proof in the 20th century : from Hilbert to automatic theorem proving*.

Arzarello F., Bartolini Bussi M. (à paraître) : Methodological problems in innovative research paradigms: notes on the time variable, in English L., Bartolini Bussi M., Jones G., Lesh R., Tirosh D. editors, *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Balacheff N. (1982) : Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol.3(3), 261-304, La pensée Sauvage (ed.), Grenoble.

Balacheff N. (1987) : Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18, 147-176, Ed : D. Reidel Publishing Company.

Balacheff N. (1988) : Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de Collège, Thèse d'état, Université Joseph Fourier, Grenoble .

Balacheff, N. (1988) : *Processus de preuve chez les élèves de collège*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Joseph Fourier (Grenoble I)

Balacheff N. (1995) : Conception, propriété du système sujet-milieu. In Noïrfalisse R., Perrin-Glorian M.-J. *Actes de la VII^e Ecole d'été de didactiques des mathématiques* Clermont-Ferrand IREM de Clermont-Ferrand, pp. 215-229

- Balacheff N. (1995) : Conception, connaissance et concept. In Grenier D. : *Séminaire didactique et technologies cognitives en mathématiques*, Grenoble IMAG, pp. 219-244.
- Balacheff N. (1999) : L'argumentation est-elle un obstacle ? Lettre de la preuve Mai/Juin 1999 ; URL : <http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990506.html>
- Balacheff N. (à paraître) : Cadre, conception, et autres registres. *Exposé présenté à la journée dédiée à R. Douady*.
- Balacheff N., Gaudin N. (2002) : Modeling students conceptions (the case of functions). *Mathematical Thinking and Learning*. (to appear).
- Boero, P., Garuti, R., Mariotti M. A. (1996) : « Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures » *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XX*, vol. 2, (pp. 121 – 128), Valencia.
- Breton P., Gauthier G. (2000) : *Histoire des théories de l'argumentation*, Ed. : La Découverte, Paris.
- Brousseau G. (1986) : Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 7, n° 2, pp. 33-115.
- Brousseau G. (1990) : Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 9, n° 3, pp. 309-336.
- Brousseau (1998) : *Théorie des situations didactiques des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage éditions.
- Chazan D. (1993) : High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 24, 359-387, Ed : Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Cialdea Mayer M., Pirri F. (1993) : First order abduction via tableau and sequent calculi *Bulletin of the Interest Group in Pure and Applied Logics (IGPL)*,1, 99-117.
- Dahan-Dalmedico A., Peiffer J. (1986) : *Une histoire des mathématiques*, Seuil (Collection Points, série sciences) (ed.), Paris.
- De Villiers M. (1990) : The role and function of proof in mathematics, adapted version of paper Proof in the mathematics curriculum presented at the National Subject Didactics Symposium, University of Stellenbosh.
- Douady, R. (1986) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.7, n°2, pp. 5-31 ; Ed : La pensée sauvage, Grenoble.
- Douady R. (1984) : *Jeux de cadres et Dialectique outil-objet*, Thèse d'Etat, Université Paris-VII.
- Ducrot O. et al. : (1979) : *Les mots du discours*, Ed. de Minuit, Paris.
- Ducrot O. (1980) : Analyses pragmatiques, *Communications n° 32*, Ed : Le Seuil, Paris.
- Durand-Guerrier & al. (2000) *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques. Eléments de réflexion pour les enseignants*. IREM de Lyon, Université Claude Bernard Lyon1.
- Duval, R. (1992–1993) : Argumenter démontrer expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit X n°31*, 37–61, IREM (ed.), Grenoble.
- Duval, R. (1995) : *Sémiosis et pensée humaine* Edition: Peter Lang, Suisse.
- Eggs E. (1994) : *Grammaire du discours argumentatif. Le topique, le générique, le figuré*. Ed. Kimé, Paris
- Fann K. T. (1970) : *Peirce's theory of abduction*. The Hague, Holland : Martinus Nijhoff.

- Fishbein E. (1993) : The theory of figural concepts *Educational Studies en mathematics* 24(2) 139-162
- Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. (1998) : Cognitive Unity of Theorems and Difficulty of Proof *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XXII*, Stellenbosch, vol. 2, pp. 345-352.
- Garuti, R.; Boero, P.; Lemut, E. & Mariotti, M. A. (1996) : Challenging the traditional school approach to theorems: ... *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XX*, Valencia, vol. 2, pp. 113-120.
- Grize J.-B. (1996) : *Logique naturelle et communications* Psychologie sociale, presses Universitaires de France.
- Hanna G. (1989) : Proofs that prove and proofs that explain. In Vergnaud G., Rogalski J., Artigue M. (ed.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, 45-51, Paris.
- Hanna G. (1991) : Mathematical Proof, In: Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht.
- Hanna G. (1995) : Challenges to the importance of Proof, *For the learning in Mathematics Thinking* Vol. 15(3), 42-49.
- Hanna G., Jahnke H. N. (1993) : Proof and Application, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 24(4) 421-438.
- Harel G., Sowder L. , (1998) : Students' proof schemes: Results from exploratory studies, In : Schoenfeld A. H., Kaput J., & Dubinsky E. (ed.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, Vol. 3, American Mathematical Society, 234-283.
- Harel, G. (2001). The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction. In S. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and Teaching Number Theory*. New Jersey, Ablex Publishing Corporation.
- Healy L., Hoyles C. (2000) : A study of proof Conceptions in Algebra, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 31, n. 4, 396-428.
- Kline M. (1973) : *Why Johnny can't add: the failure of the new mathematic*, St Martin's Press, New York.
- Krummheuer G. (1995) The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Laborde C., Capponi B. (1994) : Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherche en didactiques des mathématiques*, Vol. 14, n° 12, pp. 165-210
- Lakatos I. (1979) : *Proofs and refutations. The logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge 1976; Traduction italienne de Benelli D. *Dimostrazioni e confutazioni La logica della scoperta matematica* Feltrinelli, Milano.
- Lolli G. (1996) : *Capire la matematica* Editeur : Il Mulino, Bologna.
- Lolli G. (1988) : *Capire una dimostrazione. Il ruolo della logica nella matematica*. Editeur : Il Mulino, Bologna.
- Magnani, L. (2001) : *Abduction, Reason and Science. Processes of Discovery and Explanation*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Mariotti M. A., Bartolini Bussi M. G., Boero P., Ferri F., Garuti M. R. (1997) Approaching Geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. *Proceeding of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME 21*, Lahti, Finland. pp. 180-195.
- Mariotti M.A. (2000) Constructions en Géométrie et le problème de la preuve, *Actes de La X^e Ecole d'été de Didactique de Mathématiques*, Houlgate.

- Mariotti, M. A. (2001) Justifying and proving in the Cabri environment, *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, Dordrecht: Kluwer.
- Mariotti M.A. (2001) Introduction to proof : the mediation of a dynamic software environment, (Special issue) *Educational Studies in Mathematics* 44, Issues 1 & 2, Dordrecht: Kluwer, pp. 25-53.
- Mariotti M. A. (2001) : La preuve en mathématique. *La Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 437-458.
- Mariotti M. A. & Fischbein E. (1997) : Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.
- Martin W. G., Harel G. (1989) : Proof frames of preservice elementary teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 41-51,
- Miyakawa T. (2002) : Relation between proof and conception : the case of proof for the sum of two even numbers. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-26*, Norwich, 21-26 July 2002 (to appear)
- Otte M. (1994) : Mathematical Knowledge and the problem of proof, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 24(4), 299-321, Kluwer Academic Publishers (ed.), Netherlands.
- Pedemonte B. (1998) : *Modélisation, preuve et manipulation des variables de situation dans Cabri-géomètre* mémoire de DEA Grenoble; Université Joseph Fourier.
- Pedemonte B. (2001): Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics *Proc. of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25*, Editors: van den Heuvel-Panhuizen M., Utrecht (Olanda); vol. 4, 33-40.
- Pedemonte B. (2001): Relation between argumentation and proof in mathematics: cognitive unity or break? *Proceedings of the Second Conference of the European Research in Mathematics Education CERME 2*, Editor: J. Novotná, Mariánské Lázně, Czech Republic, vol. 1, 70-79.
- Perelman C., Olbrechts-Tyteca L. (1988) : *Traité de l'argumentation-La nouvelle rhétorique* Editions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles 1992 (5^{ème} édition).
- Plantin C. (1990) : *Essais sur l'argumentation*, Kimé (ed.), Paris.
- Polya G. (1954) : *Mathematics and plausible reasoning* Princeton University Press, London. Traduction française de Vallée R., *Les mathématiques et le raisonnement "plausible"*, Gauthier – Villars (ed.), Paris, 1958.
- Polya G. (1962) : *How to solve it ?* Princeton University Press, New York, Traduction française de Mesnage C. *Comment poser et résoudre un problème* Dunod (ed.), (deuxième édition), Paris, 1962.
- Proclus de Lycie : *Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide* ; Traduction française par Ver Eecke P., IREM de Lille, 1948.
- Rogalski M. : Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. *Exposé présenté à la journée dédiée à R. Douady*.
- Sangaré M. (2002) : *La rotation : approche cognitive et didactique. Une étude de cas au Mali*. Thèse de l'Université de Mali.
- Tahri S.(1993) *Modélisation de l'interaction didactique : un tuteur hybride sur Cabri-géomètre pour l'analyse de décisions didactiques*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- Toulmin S. E. (1993) : *The use of arguments*. Cambridge: University Press, 1958; Traduction française par De Brabanter P. *Les usages de l'argumentation*, Presse Universitaire de France.

-
- Vadcard L. (2000) : *Etude de la notion d'angle sous le point de vue des conceptions*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- Van Eemeren, F. H. & al. (1996) : *Fundamental of argumentation theory*. Mahwan N. J; Lawrence E., pp. 129–160, 1996.
- Vergnaud, G. (1991) : La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, n°2.3, pp. 133-170.
- Vignaux G. (1999) : *L'argumentation. Du discours à la pensée*, Hatier (ed.), Paris, 1999.
- Yackel E (2001) : Explanation, Justification and argumentation in mathematics classrooms, *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25*, Van den Heuvel-Panhuizen M. (ed.), vol. 4, 33-40, Utrecht (Olanda).
- Webber C., Pesty S., Balacheff N. (2002) : A multi-agent and emergent approach to learner modelling. *ECAI 2002-Proceedings of the 15th European Conference on Artificial Intelligence*. F. van Harmelen (Ed.), IOS Press, Amsterdam, 2002 (to appear).

Annexe 1

Fiches des problèmes proposés en France et en Italie

Problème 1

NOM ET PRENOM

Problème

ABC est un triangle quelconque. A l'extérieur du triangle, trois carrés ont été construits sur chacun des trois côtés. On construit trois nouveaux triangles en reliant les sommets libres des carrés. Comparer l'aire de chacun des trois triangles avec l'aire du triangle ABC.

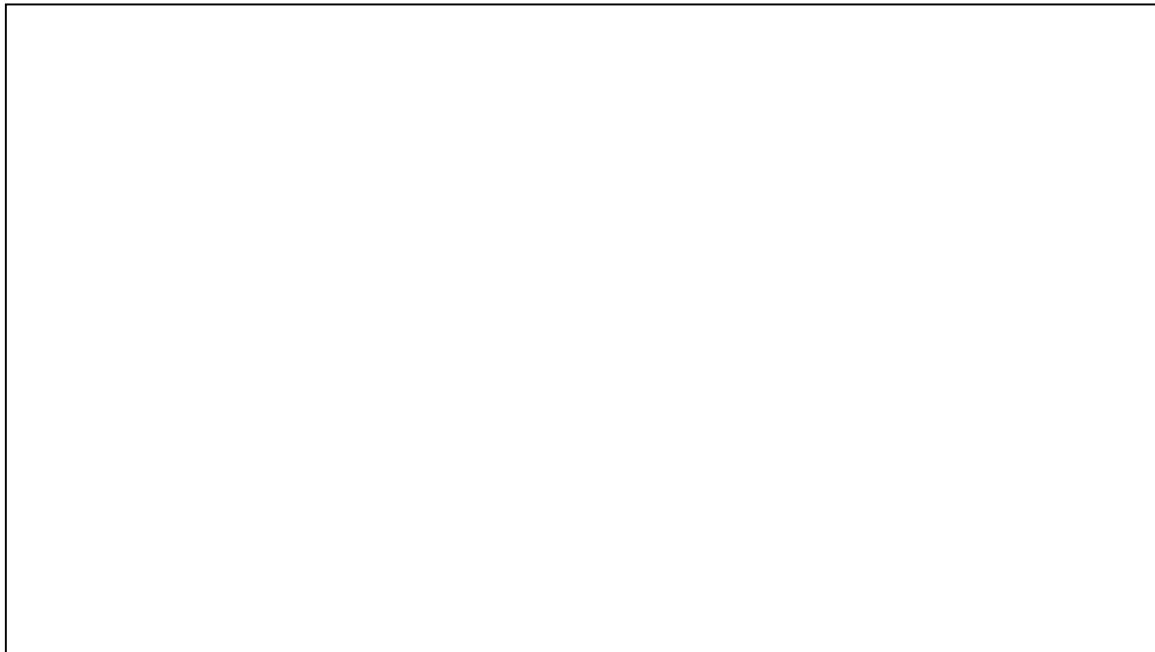


NOME E COGNOME

Problema

ABC è un triangolo qualunque. All'esterno dei tre lati del triangolo sono stati costruiti tre quadrati. Congiungendo le estremità libere dei quadrati sono stati costruiti tre nuovi triangoli

Confrontare l'area di ciascuno di questi tre triangoli con quella del triangolo ABC



Problème 2

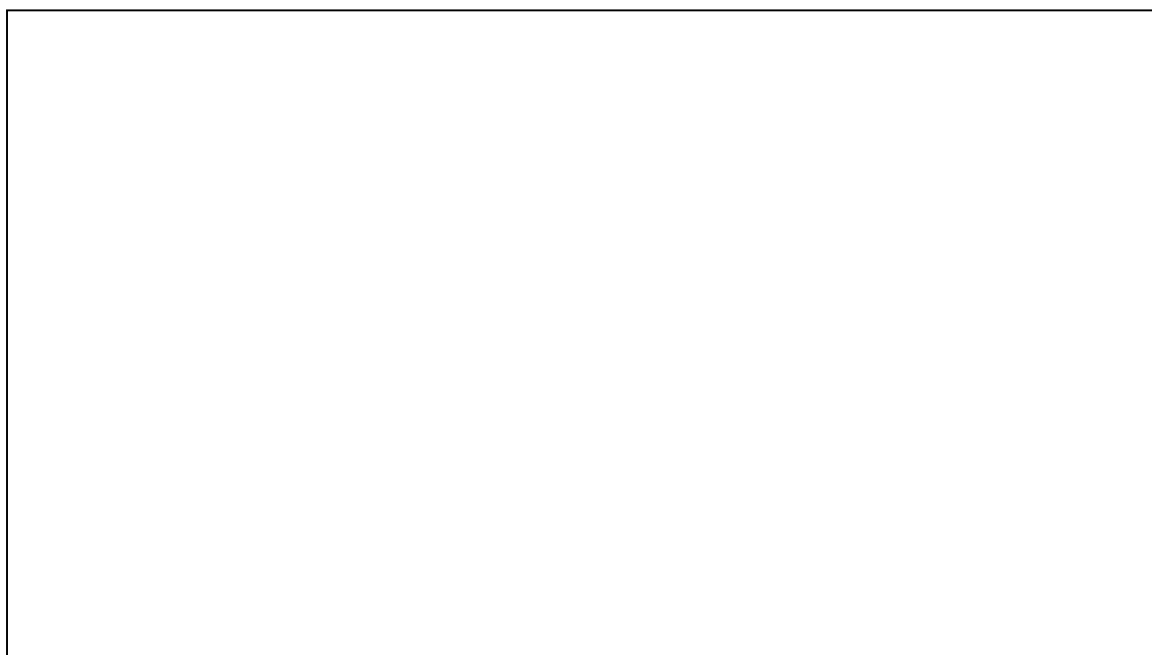
NOM ET PRENOM

Description de la figure

Soit un segment AB et C son milieu. On construit le cercle de centre C et de diamètre AB . On recommence cette construction avec le segment AC et son milieu, le segment CB et son milieu. On obtient deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB . On continue à découper les segments résultants en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments.

Problème

Comment évolue la longueur totale des périmètres d'une subdivision à l'autre?
Comment évolue l'aire totale des cercles d'une subdivision à l'autre?



NOME E COGNOME

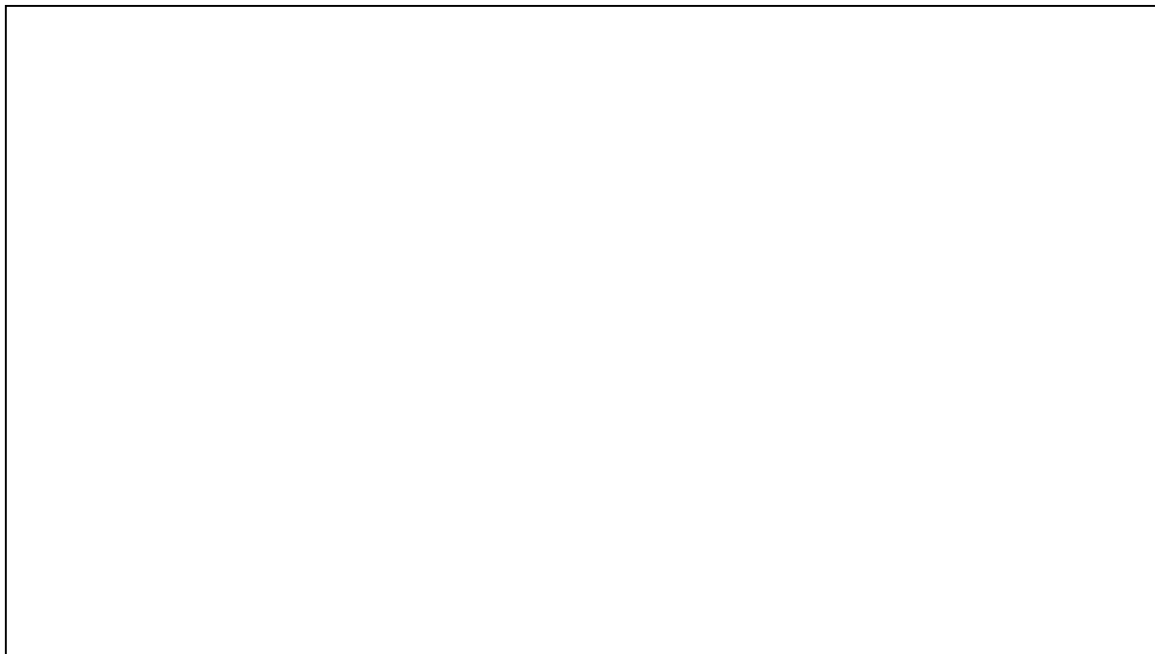
Descrizione della figura

Su un segmento AB si costruisca un cerchio avente AB come diametro. Diviso AB in due parti uguali AC e CB , si costruiscano altri due cerchi aventi rispettivamente diametro AC e CB . Si continui a dividere i segmenti risultanti in due parti uguali, e si costruisca su tali parti, cerchi aventi per diametro detti segmenti.

Problema

Che cosa accade alla lunghezza della linea curva, che si ottiene come contorno dei cerchi disegnati ogni volta, man mano che aumentano le suddivisioni?

Che cosa accade alla somma delle aree dei cerchi man mano che aumentano le suddivisioni?



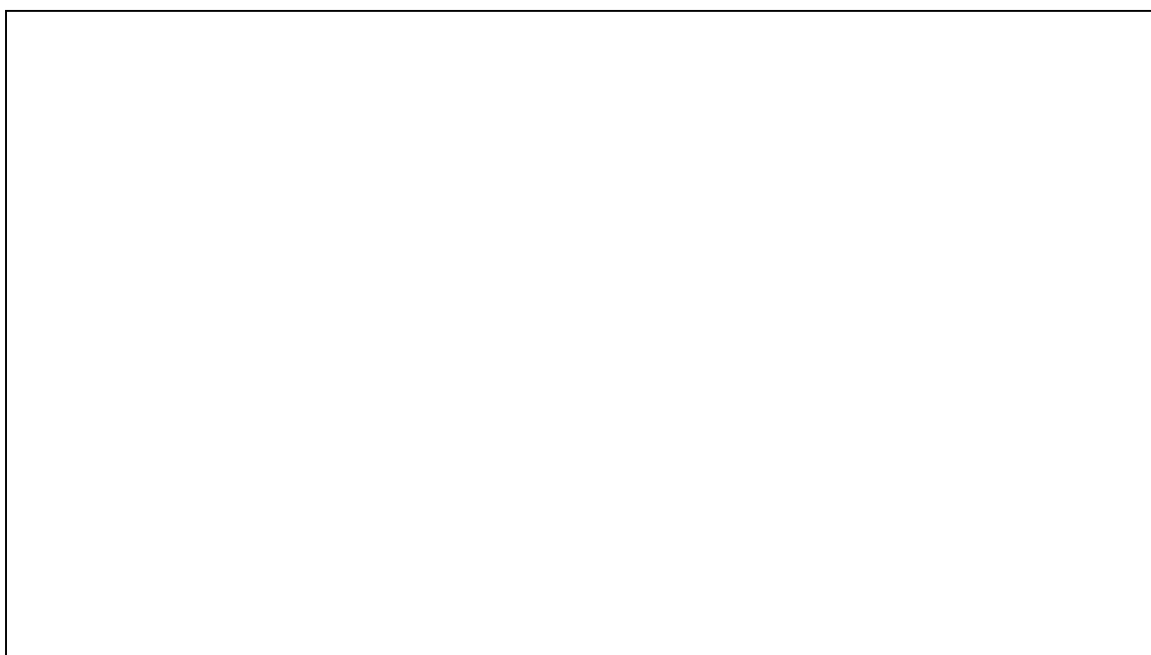
Problème 3

NOM ET PRENOM

On considère un polygone quelconque à n côtés.

Problème

Peut-on donner une loi pour trouver la somme des angles intérieurs du polygone en fonction du nombre des côtés ?




NOME E COGNOME

Si consideri un poligono di n lati.

Problema

Si può dare una legge per trovare la somma degli angoli interni in funzione dei lati ?



Annexe 2

Fiches des dialogues et des copies des élèves relatives au problème 1

Annexe 2.1 : Binôme : Nicola (N), Christian (C), classe de 3^e année du lycée (16/17 ans, Première en France)

1. N : Allora ABC è triangolo qualunque. All'esterno dei tre lati ...sono costruiti tre quadrati...congiungendo le estremità libere dei quadrati sono stati trovati tre nuovi triangoli. Confrontare l'area di ciascuno di questi tre triangoli con quella del triangolo ABC
2. C : il triangolo è un triangolo qualunque ?
3. N : si
4. C : allora coloriamoli un po' questi tre triangoli... vai su aspetto degli oggetti
5. N : i triangoli sono tutti e tre scaleni
6. C : si, noi i lati non li sappiamo, noi sappiamo che questi quadrati hanno un lato che poggia su un lato di questo triangolo
7. N : si, tutti i triangoli hanno tutti un lato uguale tra di loro ... tipo, questo è uguale a questo, questo è uguale a questo e questo è uguale a questo
8. C : aspetta un attimo noi abbiamo ...dai un po' i nomi ai segmenti... se noi abbiamo questo uguale a questo, quindi sono già due triangoli poi abbiamo questo lato che è uguale a questo quindi le misure dovrebbero essere... dai un po' anche le misure
9. N : va bhé ma le misure non servono..
10. C : si perché dovrebbero dare le basi uguali
11. N : le basi non possono essere uguali, il triangolo è diverso...non è mica equilatero !
12. C : anche i quadrati sono diversi la lunghezza dei lati..
13. N : ma questo qui non è mica uguale a questo
14. C : no, io dico questo
15. N : eh ! non può essere uguale, questo angolo è diverso da questo
16. C : la lunghezza... tu sai che questo lato è uguale a questo, ma quadrati differenti hanno lunghezze differenti...potrebbero avere...come questo varia di più rispetto a questo, questo varia di meno rispetto a questo
17. N : si ma bisogna fare in generale...
18. C : noi dobbiamo confrontare l'area dei triangoli
19. N : allora tanto cominciamo col tracciare le altezze
20. C : se noi facciamo in modo che questo triangolo sia equilatero...con una trasformazione
21. N : si ma il triangolo è qualunque
22. C : ma se fosse equilatero noi sappiamo che questi triangoli esterni sono uguali
23. N : si ma..
24. C : si è un caso particolare però....
25. N : tanto tracciamo le altezze, poi alle lunghezze ci pensiamo dopo

Les élèves tracent les hauteurs des quatre triangles

26. C : in fondo però già una cosa la sappiamo

27. N: cosa?
 28. C: se il triangolo è equilatero le aree dei tre triangoli esterni sono uguali, è ovvio perché i lati sono lati di quadrati che
 29. N: che sono tutti uguali
 30. C: aspetta che tanto scrivo questo

C écrit sur la feuille

31. N: volevo vedere...
 32. C: aspetta un attimo... aspetta un attimo... se noi facciamo ... noi abbiamo questa base che è uguale a questo lato del triangolo se noi troviamo come altezza l'altezza che ha questo lato qua del triangolo possiamo trovare... potremmo trovare il modo per

N bouge la figure

33. C: aspetta un attimo... lascia ABC rettangolo...
 34. N: si ma ne abbiamo solo uno rettangolo, gli altri due...
 35. C: si sono diversi ... prova a prendere un triangolo esterno equilatero e guardiamo se quello interno cambia
 36. N: non ci riesco, non si può cambiare quello esterno... provo a cambiare ABC in modo che quello esterno sia equilatero

N bouge encore la figure. Les élèves cherchent à faire un triangle extérieur équilatère en utilisant l'outil de la mesure

37. C: ma non è preciso... non è equilatero quello
 38. N: adesso è equilatero

 39. C: no, non funziona.... Prova a mettere un triangolo a caso
 40. N: eh ma se è a caso gli altri non rimangono uguali
 41. C: dici che è meglio provare con un caso particolare? Qui dice di confrontare l'area dei tre triangoli con quella del triangolo ABC
 42. N: allora...

 43. C: guarda un po' ... prova a mettere isoscele... dovrebbe avere due lati uguali e quindi due triangoli uguali, ma gli altri due no... quest'altro resta isoscele e ha i lati uguali a quelli del triangolo ABC però non sono uguali i due triangoli
 44. N: allora questi due triangoli sono uguali e gli altri due hanno due lati uguali
 45. C: allora... prova un po' a vedere cosa succede quando la base del triangolo è uguale ai lati esterni
 46. N: abbiamo il triangolo equilatero, ABC è equilatero

 47. C: se però questo è rettangolo questo è uguale a questo perché hanno due lati uguali e l'angolo opposto
 48. N: non è opposto
 49. C: si è opposto
 50. N: si è opposto
 51. C: e l'angolo opposto al vertice di 90° è uguale. Allora possiamo scrivere quando ABC è rettangolo il triangolo avente vertice opposto all'angolo retto è uguale
 52. N: e quindi hanno area uguale
 53. N: Ora potremmo misurare le altezze e vedere cosa succede in generale
 54. C: ma le altezze le abbiamo già costruite prima, abbiamo già trovato le altezze
 55. N: aspetta un attimo riproviamoci

Les élèves construisent une autre fois les hauteurs

56. N: coloriamo di blu questa altezza così almeno l'abbiamo differente dalle altre...
 57. C: comunque coincide con quella di prima
 58. N: adesso facciamo tutti i segmenti e cancelliamo le rette... punto di intersezione...

59. C: misuriamo i segmenti... si va bene se il triangolo è rettangolo i triangoli sono uguali a due a due... (avec la calculette ils font les calculs) l'area di questo e l'area di questo è 3.111
60. N: quindi deve essere rettangolo e isoscele...
61. C: ma se hai un triangolo rettangolo qualunque.... Non possiamo usare Pitagora? L'area di questo quadrato più l'area di questo è uguale all'area di questo allora se noi ci vogliamo trovare l'ipotenusa possiamo farlo
62. N: se guardi abbiamo 2,5 come questo qui 4 e 2 come questo e 4 e 9 come questo ... i lati sono uguali
63. C: e allora?
64. N: allora se il triangolo è un triangolo qualunque rettangolo...
65. C: secondo me possiamo dire... possiamo usare Pitagora... possiamo usare Pitagora se conosciamo gli altri due cateti no? Quindi sarebbe l'area di questo quadrato qua più l'area di questo quadrato qua da... è uguale all'area del quadrato su questo lato
66. N: quindi sono uguali i triangoli è ovvio
67. C: con questi possiamo fare gli stessi ragionamenti
68. N: ma guarda che cambiano i quadrati... se tu vuoi trovare questo... usi questo quadrato e questo quadrato ma nell'altro triangolo i quadrati sono diversi, non sono uguali
69. C: scusa per trovare l'ipotenusa di questo triangolo fai l'area di questo e l'area di questo e per
70. N: ma per questo i quadrati sono diversi
71. C: sarebbe l'area di questo meno l'area di questo
72. N: a parte che non sono triangoli rettangoli e quindi non si può fare
73. C: va bhé ma si può fare se
74. N: proviamo a cambiare vertice e a mettere questo rettangolo... tu dicevi... adesso funziona... allora 1 e 9, 9 e 6
75. C: 4 e 2
76. N: prova a mettere... solo per vedere

Les élèves sont en train de faire des calculs avec la calculette

77. Io : avete scoperto qualcosa?
78. N: abbiamo scoperto che se il triangolo ABC è rettangolo il triangolo opposto all'angolo di 90 è uguale e gli altri due sono... sono uguali quando il triangolo è rettangolo isoscele... mentre adesso dovrebbero essere differenti
79. Io: e le aree?
80. N: le aree non le abbiamo ancora viste
81. C: quindi
82. N: come le troviamo le aree?
83. C: sto facendo i conti se mi fai finire... sono uguali le aree!!
84. N: si ma devi dire perché
85. C: perché con Pitagora!
86. N: con Pitagora trovi il lato
87. C: trovi il lato ma come trovi il lato puoi trovare le altezze
88. N: scusa un po' ma
-
89. C: allora allora... sono uguali le aree... c'è un errore
90. N: con Pitagora non può funzionare... con Pitagora trovi un lato
91. C: ma scusa, l'area di questo più l'area di questo è uguale all'area di questo quadrato e sotto radice ti da l'ipotenusa
92. N: d'accordo, ti puoi trovare il lato, però quello che non riesco a vedere qual è il rapporto che c'è tra le due aree dei triangoli e i lati che trovi con Pitagora... capito?
93. C: allora...bisogna vedere in che modo variano....
-
94. N: aspetta un attimo, dovrebbero anche essere qua uguali le aree
95. C: le aree dei tre triangoli?
96. N: si aspetta un po'

Ils font les calculs

97. N: allora 10.26.... aspetta anche questo fa 10 e 26 e questo ... 10 e 3

98. C: è diverso ma
 99. N: va bhé ci sarà un margine d'errore... non riesco a capire il rapporto tra
 100. C: aspetta che scrivo... le aree dei tre triangoli sono sempre uguali
 101. N: si ma scrivilo che lo abbiamo scoperto verificandolo con le misure però.... Non siamo ancora arrivati a dire perché... però...
 102. C: bisogna trovare... allora scusa un po' prova ancora una volta

Les élèves font les calculs des aires dans un autre cas

103. C: le aree sono sempre uguali fra di loro ... con la calcolatrice i conti vengono sempre
 104. N: ora dobbiamo dimostrare
 105. C: bisogna trovare come varia la base con l'altezza... se hanno un rapporto che mantenga costante l'area...
 106. N: bisogna trovare un legame col triangolo interno... al variare di esso le aree restano uguali
 107. C: l'area è costante... però non riesco a vedere... allora dobbiamo trovare base per altezza uguale a base per altezza dell'altro triangolo (*il écrit sur la feuille et il fait des calculs algébriques*) ... allora la base sarà la base e l'altezza dell'altro triangolo diviso l'altezza di questo... voglio vedere che rapporto c'è con... il rapporto tra le altezze è 6,4 (*il fait les calculs avec la calculette*)..... non si arriva a niente...
 108. N: potremmo tenere costanti le basi e far variare le altezze
 109. C: come?
 110. N: se manteniamo fisse le basi, le basi come lati di quadrati, vediamo come variano le altezze... lo avevamo già detto prima che i lati dei quadrati sono uguali, sai quando vedevamo variare perché possiamo vedere l'altezza come varia quando abbiamo le basi uguali
 111. C: prolunghiamo il lato e costruiamo l'altezza allora..

Les élèves construisent la hauteur sur la base coté du carré

C rédige ce qu'ils ont déjà écrit jusqu'à maintenant

112. N: allora... costruzione... adesso abbiamo la stessa base no?
 113. C: tanto scrivo... abbiamo provato a considerare come base un lato del quadrato e l'altezza del vertice opposto alla base
 114. N: aspetta un attimo che sto cercando di costruire l'altezza
 ...
 115. C: ma perché le altezze sono uguali?
 116. N: abbiamo.... Abbiamo la stessa base e.... è vero, dobbiamo provare che hanno le stesse altezze..... però abbiamo che questo lato è uguale a questo di ABC...
 117. C: quindi il triangolino piccolino è uguale a quell'altro piccolino...
 118. N: aspetta aspetta... è vero, i due lati sono uguali, poi
 119. C: poi c'è l'angolo di 90°
 120. N: ci vuole un lato o un angolo... per esempio questo angolo è uguale a questo perché ...
 121. C: ci sono delle rette parallele, forse con Talete
 122. N: con Talete?
 123. C: non so... ci sono rette parallele

 124. N: allora un lato, l'angolo retto e poi altri lati?
 125. C: non si riesce... però che questo angolo è uguale a questo forse lo riusciamo a dire.... tutte queste rette perpendicolari e parallele formano 90° ... questo angolo è di 90°
 126. N: aspetta, anche questo è di 90° e quindi questi due sono uguali perché toglì lo stesso pezzo da entrambe le parti
 127. C: è vero, questo di 90° , questo di 90° meno questo abbiamo lo stesso angolo
 128. N: quindi per il teorema abbiamo due angoli e un lato quindi i due triangoli sono uguali
 129. C: allora le altezze sono uguali e quindi le aree sono uguali
 130. N: quindi la stessa cosa si può fare per questo triangolo no?
 131. C: tanto scriviamo questo... allora facciamo una stampa

Ils impriment.

132. C: allora dimostrazione il triangolo ANC è uguale al triangolo EDC... EC è uguale a AC, l'angolo EDC e ANC

- 133.N: è uguale a 90°
134.C: e gli angoli ACN e ECD sono uguali perché ACE 90 DCN uguale uguale 90 sottraendo
135.N: ZCA
136.C: ZCA a entrambi si ottiene lo stesso angolo. Per gli altri?
137.N: Lo stesso metodo si può fare per gli altri. Però dobbiamo scriverlo...
138.C: Abbiamo la stessa altezza e quindi anche la stessa area... Per il triangolo ALI possiamo dire che ALI è uguale a ACB perché LA uguale AC IA uguale AB e gli angoli LAI uguale CAB perché opposti al vertice
139.N: non è il caso di dirlo, questo vale sempre... anche nel caso del triangolo generico... ah allora cancello e scriviamo che con la stessa dimostrazione si prova che anche le altre altezze sono uguali
140.N: si si
....
141.N: piuttosto dobbiamo scrivere che le basi sono uguali
142.C: dove?
143.N: prima prima, non lo avevamo detto
144.C: allora cosa devo scrivere qui?
145.N: allora abbiamo provato a considerare come base il lato del quadrato e l'altezza del vertice opposto alla base...poi le basi sono uguali per costruzione
...
146.C: Allora, sappiamo che la base è uguale a quella del triangolo ABC per costruzione
147.N: si, poi scrivi che dobbiamo dimostrare che le altezze sono uguali
....
148.C: Aspetta, ora dobbiamo dimostrare che l'altezza è uguale a quella del triangolo ABC
149.N: Ciò lo abbiamo potuto verificare con l'uguaglianza fra triangoli, che è dimostrato sul foglio col disegno
150.C: prendi un po' una penna che scriva bene per favore
151.N: aspetta un attimo....eccola
....
152.C: allora cosa devo scrivere?
153.N: che è dimostrato sul foglio con il disegno. Poi avendo base e altezze uguali al triangolo ABC l'area dei triangoli è uguale
154.C: ok ho finito, siamo a cavallo... prof abbiamo finito!

NILOLA

CHRISTIAN

NOME E COGNOME

Descrizione della figura

ABC è un triangolo qualunque. All'esterno dei tre lati del triangolo sono stati costruiti tre quadrati. Congiungendo le estremità libere dei quadrati sono stati trovati tre nuovi triangoli.

Problema

Confrontare l'area di ciascuno di questi tre triangoli con quella del triangolo ABC.

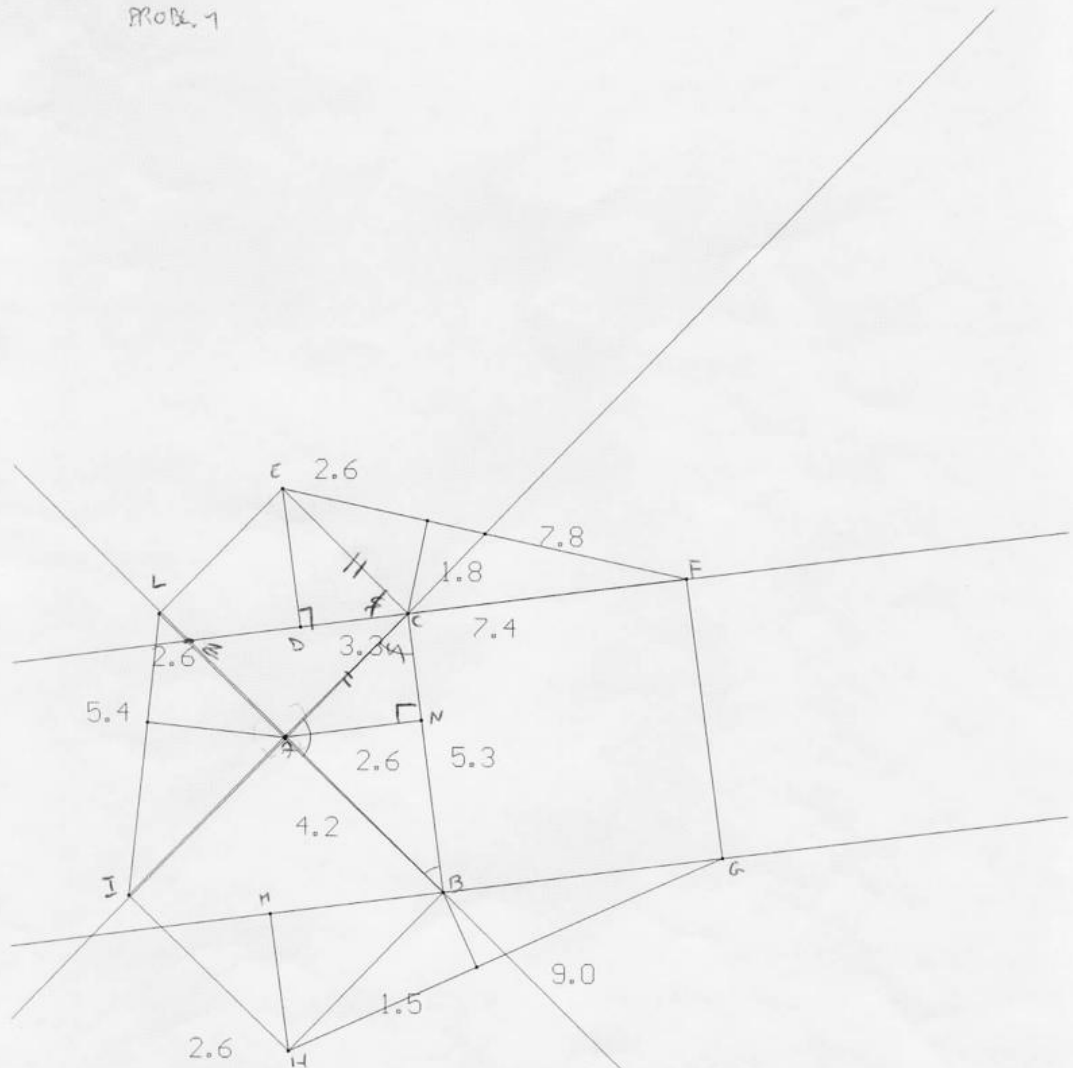
Dimostrazione

Abbiamo provato a considerare come base il lato del quadrato e l'altezza del vertice opposto alla base. Sappiamo che la base è uguale a quella del triangolo ABC, per costruzione. Ora dobbiamo dimostrare che l'altezza è uguale a quella del triangolo ABC. ~~Da~~ ciò lo abbiamo potuto verificare con l'uguaglianza tra triangoli, che è dimostrato sul foglio con il disegno.

Cabri, il Quaderno Interattivo di Geometria
 NC:\GEO\PROBL.FIG

10 settembre 1999 - 16:08
 (LaserJet HP 300 dpi)

PROBL. 1



X DIMOSTRAZIONE \rightarrow triangolo ANC = triangolo EDC

$EC = AC$

$\hat{C}DC = \hat{A}NC = 90^\circ$

$\hat{A}CN = \hat{E}CD$ perché $\hat{A}CE = 90^\circ$ e $\hat{D}CN = 90^\circ$
 sottraendo $\hat{E}CA$ a entrambi si ottiene lo stesso angolo

con la stessa dimostrazione
 dimostriamo che le altezze relative
 a quelle di ABC sono uguali

$\rightarrow \hat{A}LI = \hat{A}CB$
 $\hat{L}AI = \hat{C}AB$ perché opposti al vertice
 $\hat{L}AI = \hat{C}AB$ perché opposti al vertice

Annexe 2.2 : Binôme : Giulia (G), Luisa (L), classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

1. G : Allora, descrizione della figura, ABC è un triangolo qualunque. All'esterno dei tre lati del triangolo sono stati costruiti tre quadrati. Congiungendo le estremità libere dei quadrati sono stati costruiti tre nuovi triangoli... confrontare l'area di ciascuno di questi tre triangoli con quella del triangolo ABC
2. L: sulla figura ci sono tre quadrati, i tre quadrati fanno in modo che ogni triangolo abbia un lato uguale a quello di un altro triangolo
3. G: si è vero, questo è uguale a questo e anche questo lato è uguale a questo 4° quest'altro anche... in realtà ci sono due lati che sono uguali con un lato dei triangoli vicini... con cui formano il quadrato
4. L: noi dobbiamo confrontare i triangoli
5. G: le aree dei triangoli
6. L: allora se consideriamo i triangoli
7. G: quali triangoli?
8. L: i quattro triangoli... come facciamo a dire come sono le aree?
9. G: dobbiamo confrontare le basi e le altezze
10. L: si perché le aree si trovano base per altezza...
11. G: potremmo misurare i lati quindi
12. L: ma tanto poi dobbiamo dimostrare, quindi misurare non ci serve
13. G: è vero... prova un po' a spostare la figura...

L bouge la figure sur Cabri

14. L: non riesco a vedere che legame c'è tra le varie basi e le varie altezze
15. G: fermati un po' lì!... Se ABC è rettangolo quei due sono uguali
16. L: si hanno i lati uguali e l'angolo opposto al vertice è uguale..
17. G: si e in più i lati sono base e altezze dei triangoli, quindi hanno area uguale
18. L: se i triangoli però sono diversi l'angolo non è più opposto al vertice
19. G: e i triangoli non sono più uguali...
20. L: si è vero..

L bouge encore la figure sur Cabri

21. G :però se consideriamo come basi dei due triangoli i due lati uguali...
22. L: quelli che sono lati del quadrato?
23. G: si , e costruiamo le altezze possiamo confrontare solo le altezze per confrontare le aree
24. L: ah ho capito, tu dici di confrontare le altezze per confrontare le aree perché intanto le basi sono uguali
25. G: si, intanto dobbiamo costruirle le altezze
26. B : cosa avete fatto ?
27. L : Abbiamo costruito le altezze relative al triangolo di partenza su un lato che...
28. G : cioè, relative a un lato che è uguale anche all'altro
29. L: si e li abbiamo considerate entrambe come basi e vogliamo confrontare le due altezze le altezze
30. G: Allora l'altezza si costruisce sul prolungamento del lato, bisogna fare il prolungamento... aspetta che fai?

Ils construisent les hauteurs

31. L: sto facendo il prolungamento... retta... si retta su questo segmento...cosa devo fare?
32. G: la retta per i due punti B e C
33. L: ah si è vero!
34. G: poi devi fare la perpendicolare a questa
35. L: ah ecco, ma sai che sembrerebbero quasi...
36. G: quasi uguali...
37. L: e infatti, no, forse più che uguali sembrerebbero perpendicolari... lo avevo già notato prima
38. G: Perpendicolari? Guarda questo qui non ti sembra un quadrato?

39. L: si è un quadrato però prova un po' a trascinare qualcosa? ... Si resta sempre un quadrato.. va bene
40. G: allora sono perpendicolari
41. L: e allora va bhé, però a che serve? Prova un po' a trascinare se sono sempre uguali... questo costruendo un quadrilatero qui.. no niente scherzavo!... però, no ...
42. G: no aspetta fermati, allora sono uguali no, le altezze sono uguali nel caso particolare che avevamo già detto prima se i due triangoli sono due triangoli rettangoli quindi anche i triangoli sono uguali
43. L: si
44. G: però prova un po' a ritornare nel caso più generale?... Ecco fermati, dunque, se noi riportiamo questa altezza qui a partire da uno dei... come si dice aspetta...cioè se riportiamo l'altezza del triangolo quello che viene, cioè non quello dato quell'altro no? E a partire dall'incontro fra l'altezza fatta dal triangolo di partenza con il suo prolungamento, lo riportiamo sul prolungamento vediamo se viene un quadrato... Capito?
45. L: allora riporto l'altezza qui cioè IM su AL
46. G: si viene un quadrato MCL e il punto che verrà insomma
47. L: ma noi non abbiamo un compasso come facciamo a riportare
48. G: ma si, abbiamo la circonferenza anche
49. L: hai ragione.. circonferenza, centro di una circonferenza...va bhé ma dopo come faccio a vedere che è un quadrato? No, bisogna trovare il modo di dimostrare che questo è uguale a questo...comincia a trovare...
50. Alunne insieme: eh questi due triangoli
51. L : è vero, ALC e ICM allora quei due triangoli li cosa hanno?
52. G: Consideriamo... allora intanto AC è uguale a IC perché sono lati del quadrato
53. L: aspetta
54. G: AC è uguale a IC perché sono lati del quadrato, poi
55. L: LC...
56. G: perché è uguale a CM?
57. L: Allora... oddio, perché è uguale a CM?...Secondo me facciamo prima a provare...no aspetta questo è retto e questo è retto
58. G: perché?
59. L: perché sono le altezze no?
60. G: quindi sono perpendicolari e poi ci serve un lato o un angolo, dobbiamo trovare un altro angolo oppure siamo obbligate a trovare un altro lato
61. L: per il secondo criterio di generalizzazione no?
62. G: eh si,
63. L: ma allora troviamo un altro angolo
64. G: allora l'unico angolo...
65. L: questo e questo oppure questo e questo
66. G: questi due non sono complementari o supplementari a questo angolo?
67. L: no
68. G: si si, questo è retto no, ACI è retto, è l'angolo retto del quadrato, quindi l'angolo ACL + LCI da 90° lo stesso e MCI + ICL da 90° quindi sono complementari
69. L: si si, sono complementari
70. G: quindi va bene, sono uguali
71. L: quindi si può dire che questi due triangoli hanno la stessa base e la stessa altezza e quindi hanno area uguale
72. G: E su quello si è dimostrato e su quello siamo a posto no?
73. L: si, quindi dopo si vede che questo qui è maggiore di questo..
74. G: ah si hai ragione, però no aspetta... trascinando
75. L: no, ma no che dico? Non è maggiore, hanno a stessa base e la stessa
76. G: ma scusa alla fin fine hai dimostrato che base e altezza sono uguali e quindi hanno area uguale
77. L: si sono uguali i due triangoli
78. G: no che abbiano area uguale non vuol dire che siano uguali
79. L: confronta l'area di ciascuno di questi due triangoli!!!
80. G: va bhé ma non sono uguali
81. L: ma hanno aree uguali quindi si è risolto per questi due
82. G: si va bene, quelli sono a posto, te l'ho detto
83. L: ma io pensavo ti riferissi ai triangolini piccoli
84. G: no no dicevo gli altri
85. L: va bene, allora, adesso consideriamo gli altri...
86. G: ma per gli altri è uguale sai...

87. L: sì in fondo il triangolo ABC è generico, se prendevamo un qualsiasi altro triangolo la dimostrazione funzionava lo stesso
88. G: sì secondo me sì.
89. L: allora scriviamo?
90. G: Sì dai, io non ho carta, mi dai un foglio?
91. L: facciamo una stampa? Così abbiamo il disegno...
92. G: La stampante è collegata?
93. L: sì mi sembra di sì, dai facciamola...
94. G: c'è poco tempo, allora scrivo quello che abbiamo detto no?... Nella stampante ci sono le lettere?
95. L: sì sì, dai scrivi

Les élèves écrivent la démonstration même si l'heure est désormais passée.

96. G: Allora, considero il triangolo di partenza ABC e il triangolo ICD, no prima
97. L: scrivi: considero prima i triangoli ALC e ICM
98. G: Aspetta, considero prima i triangoli ALC e ICM e dimostro che sono uguali per il secondo criterio generalizzato perché hanno...
99. L: hanno AC uguale a IC
100.G: perché lati di un quadrato
101.L: l'angolo ALC uguale all'angolo IMC perché retti come angoli formati dall'intersezione tra il lato e la sua altezza
102.G: e ACL uguale a ICL perché complementari di un angolo retto
103.L: mettili tra parentesi, meno LCI
104.G: Quindi... in particolare IM è uguale a AL e allora i triangoli ABC e ICD hanno stessa base e stessa altezza e dunque la medesima area
105.L: metti tra parentesi che le basi sono uguali perché lati di uno stesso quadrato
106.G: ok... metti dentro anche la stampa, altrimenti non si capisce niente
107.L: Prof, abbiamo finito

Luisa e Giulia

NOME E COGNOME

Descrizione della figura

ABC è un triangolo qualunque. All'esterno dei tre lati del triangolo sono stati costruiti tre quadrati. Congiungendo le estremità libere dei quadrati sono stati trovati tre nuovi triangoli.

Problema

Confrontare l'area di ciascuno di questi tre triangoli con quella del triangolo ABC.

- DIMOSTRAZIONE -

Considero il triangolo di vertice \hat{A} e il quadrato $\hat{A}CD$.
 Considero inoltre il triangolo $\hat{A}EM$ e dimostro che sono uguali.
 Il 2° criterio di uguaglianza è quello che serve:

- $\overline{AC} = \overline{CD}$ che è lato di un quadrato
- $\hat{A}EM$ che è rettangolo (come angolo formato dall'intersezione di un lato e di un'altra estesa)
- $\hat{A}L = \hat{A}M$ che è complementare di un ~~angolo~~ angolo retto ($\hat{A}LC$)

In particolare $\overline{EM} = \overline{AL}$. Dunque i triangoli $\hat{A}EM$ e $\hat{A}CD$ hanno due lati (che sono di uno stesso quadrato) e sono altezze, dunque la loro area è uguale.

Annexe 2.3 : Binôme : Julien (J), Cyril (C), classe Seconde en France.

Le professeur fait ouvrir les fichiers et je distribue les feuilles du travail.

1. J : et voilà... monsieur, je ne veux plus travailler avec lui
2. C : c'est pas ma foute
3. J : Monsieur, ça marche pas la machine
4. Enseignant : elle est en panne ? ... ok, on change la machine

Les élèves changent d'ordinateur

5. J : alors on commence
6. C : merde !
7. J : monsieur, il vient encore de se planter !
8. C : c'est ma contamination !!
9. J : oui, je crois

L'enseignant s'occupe de la machine

10. J : alors, qu'est ce qu'ils ont construit
11. C : ils ont construit un carré, c'est tout
12. J : ah, oui , ils ont construit trois carrés, c'est facile, ok alors, ensuite
13. C : alors, il faut comparer les aires de chacun des trois triangles avec l'aire du triangle ABC
14. J : Alors le triangle vert est un triangle mais les autres ne sont pas construits comme triangles, donc voilà l'aire du triangle vert... qu'est-ce que c'est cette figure ?
15. C : maintenant si j'ai bon souvenir ... il faut tracer de même un triangle
16. J : et oui, c'est dur ici, ah d'accord les trois aires sont égales
17. C : Par contre, cela, le dernier n'est pas égal... mais bon c'est bon, on a résolu...
18. J : Ah mon avis il faut dire pourquoi elles sont égales
19. C : pourquoi elles sont égales, écris !

Ils rigolent

20. J : Attends on sait que le triangle qui est là, qui est un triangle droit il a les mêmes...ça et cela est égal à ça et ça
21. C : tu crois ? Ah, oui d'accord
22. J : et après tu fait pile
23. C : de tout façon il faut trouver des égalités quelconques
24. J : ils ont un côté en commun et ça c'est la même longueur...
25. C : les deux triangles ont un côté en commun, maintenant il faut trouver une hauteur en commun et on sera contents
26. J : oui
27. C : voyons...
28. Camarade à coté : il faut parler au micro
29. J : mais nous on a parlé
30. Camarade à coté : mais il faut dire tu mesures ça ça ça.
31. J : mais on l'a dit ! Ils ont la même aire.
32. Camarade à coté : il faut bien dire au micro... on sais jamais !!!

Ils rigolent

33. C : laisse comme ça c'est joli, si le triangle était équilatéral, ça nous arrangerait bien
34. J : ça n'est pas une bonne idée
35. C : bon il faut travailler, je crois que plus vite on trouve plus vite on sort
36. Camarade à coté : Bon, hem, ils ont la même base et la même hauteur
37. C : Comme ça la même hauteur ?
38. J : non mais ça veut rien dire
39. C : quel perspicacité
40. Camarade à coté : attends, regarde, ce triangle il y a quoi en commun ? ça avec ça parce que c'est un carré et ça avec ça parce que c'est un carré, pareil, tac et tac et après c'est pareil pour les autres, et après tu dis que c'est la même base et la même hauteur

41. C : Que c'est la même base et la même hauteur ?
42. J : tu viens démontrer deux bases différentes là, pas la hauteur.
43. Camarade à coté : Mais si, parce que si tu prends ça comme base et en partant de là et ça comme base en partant de là c'est la même hauteur
44. C : je ne sais pas, il dit des conneries
45. J : attends cet angle qui est là et cet angle qu'il est là ne sont pas complémentaires ?
46. C : non
47. J : non, je veux dire supplémentaires
48. C : non, c'est pas une droite
49. J : si
50. C : non, tu vois pas que c'est pas une droite ?
51. J : et alors ?
52. C : fais bouger, fais bouger ce truc
53. J : attends, cet angle là et cet angle là, sont supplémentaires
54. C : non
55. J : si, oh, si
56. C : non
57. J : si regarde ici c'est 360° ça devient déjà 180 pour les deux trucs pour les deux trucs machins, et alors ça c'est 180 pour les derniers
58. C : en fait tu dis qu'ils sont complémentaires quand tu a deux droites comme ça
59. J : non ils ne sont pas complémentaires quand tu a deux droites comme ça ... ils sont alternes internes
60. C : attends, il faut écrire
61. J : on peut écrire sur l'écran ?
62. C : pourquoi ?
63. J : c'est chouette
64. C : regarde, ici la hauteur c'est... la hauteur de ce triangle vert c'est une droite qui passe par là, un segment je veux dire
65. J : donc a priori c'est la même longueur que cette hauteur avec cette base là, a priori
66. C : par contre il faut démontrer...
67. J : oui, voilà
68. C : et comme ils ont la même aire, ils ont une base et une hauteur en commun, c'est obligé
69. J : oui, ils ont la même base d'accord ? Ici on a une hauteur qui passe par là
70. C : il faut la tracer
71. J : il ne faut pas la tracer, c'est un truc trop compliqué
72. C : mais oui, de toute façon tu fait la droite ici, le segment et après tu la caches

Ils parlent d'autres choses, ils rigolent

73. C : regarde quand tu a tracé la hauteur tu peut faire tailler le triangle, je ne sais pas si ça servira à quelque chose, mais...
74. J : mmm
75. C : pareil là c'est une droite, puis là c'est la perpendiculaire, tu comprends ?
76. J : non
77. C : alors, là elles sont parallèles
78. J : oui
79. C : mais pourquoi elles sont parallèles, a quoi ça sert ?
80. J : bonne question, mais pourquoi elles sont parallèles ?
81. C : parce qu'elles sont perpendiculaires à la même droite
82. J : ah, oui, mais, je ne sais pas
83. C : très joli le problème eh ?
84. J : On essaye de démontrer que ces droites sont perpendiculaires, que ça est égal à ça.
85. C : ça sert à rien ce que je dit
86. J : je crois aussi
87. C : ouf, ça sert à rien ce qu'on a fait
88. J : complètement
89. C : merde c'est encore planté

L'ordinateur des élèves s'est encore planté

90. J : Bon on va réfléchir sur le papier autrement on n'arrive pas

91. C : oui, alors il faut faire le dessin
92. J : attends on peut faire sortir sur l'imprimante
93. C : c'est pas grave je fais le dessin

Il fait le dessin

94. C : Joli mon dessin
95. J : oui
96. C : Bon alors, attends, ça est égal à ça, ça à ça, et ça à ça et à ça, tac, tac et tac
97. J : tu pouvait le faire encore plus petit

Il fait des signes sur les cotés de chaque carré pour faire voir qu'ils sont égaux.

98. C : Alors on sait que ici est perpendiculaire, ici est perpendiculaire et forcément ce machin et ce machin sont supplémentaires (*les angles opposés des deux triangles*) et voilà
99. J : ça nous dit quelque chose
100. C : ça dépend
101. J : attends, il faudrait que maintenant il faut faire... mais on est des idiots, attends regarde, alors ça c'est la hauteur d'accord ?
102. C : oui, c'est la hauteur
103. J : On appelle h_1 , h_2 , h_3 , et T_1 , T_2 , T_3 les triangles, il faut prouver que ce machin c'est égal à, on est des idiots on est vraiment des idiots, alors si cet angle là est A_1 , donc c'est l'angle 1 d'accord ? Alors cet angle là est 180 moins A_1 et alors ça c'est quoi dans ce cas là ? C'est 180 moins A_1 , donc de coup ce machin c'est ça, donc ce triangle c'est exactement celui-ci qui a la même hauteur.
104. C : ah d'accord
105. J : ça va ?
106. C : oui, maintenant il faut rédiger
107. J : eh oui, il faut écrire
108. C : il faut prendre la règle
109. J : qu'est ce que tu fais avec les couleurs
110. C : c'est juste décoratif

Ils parlent d'autres choses

111. C : la figure vas être un peu grande
112. J : c'est pas grave
113. C : Bon ok
114. J : J'ai faim
115. C : l'appel de l'estomac
116. J : Il y a une seule figure sur laquelle il faut travailler ou il en y a plusieurs
117. C : Une seule

C termine de faire le dessin

118. C : c'est qui à écrire ?
119. J : bon, tu sais comment j'écris
120. C : je sais comment tu formule surtout
121. J : alors c'est à toi d'écrire
122. C : On commence avec les caractéristiques des angles
123. J : tu a appelé comment les angles ?
124. C : A_2 égale à 90 moins A_1
125. J : non mais attends, le problème c'est que tu a fait des angles droits
126. C : non pas trop
127. J : mais comment tu appelle les angles déjà ?
128. C : Moi je les appelle avec A et un chapeau dessus
129. J : Bonne idée, donc ça s'appelle h_1 et écris que h_1 c'est la hauteur de T_1
130. C : il faut préciser que ça c'est base 1 aussi non ?
131. J : mais non, ça va.
132. C : Alors ici j'ai marqué h_v , comme triangle vert
133. J : oui bon d'accord

- 134.C : maintenant tu es sûr que ça marche
 135.J : oui ça marche ; alors ce triangle est forcément aussi celui-ci, ils ont les même angles ici, ça c'est démontrable, ils ont les mêmes...
 136.C : mais ça c'est pas forcément un angle droit
 137.J : comment ? ça c'est la hauteur et la hauteur c'est forcément avec un angle droit
 138.C : ah, c'est la hauteur, mais qui dit que la hauteur passe par là ?
 139.J : la hauteur est toujours perpendiculaire
 140.C : Peut-être on peut trouver un ordinateur qui marche.
 141.J : ne touche pas s'il te plaît
 142.C : oh merde, ok je ne touche plus

L'ordinateur se plante tout le temps

- 143.C : Alors, rédaction alors, mais c'est pas possible, il ne marche jamais, putain
 144.J : on peut plus rien faire, on est obligés de faire la figure sur la feuille

Ils font un autre dessin sur la feuille

- 145.J : il faut dessiner la hauteur perpendiculaire et c'est pas le milieu qu'il faut prendre
 146.C : oui je sais
 147.J : alors il faut dire aussi que c'est égal à ce machin, c'est toi qui t'occupes de ça, moi j'aime bien m'occuper de ça mais il faut...
 148.C : attends ici j'ai écrits...
 149.J : je sais je sais, on continue
 150.C : il faut démontrer que les triangles ont la même aire s'ils ont la même hauteur
 151.J : oui c'est ça qu'il faut démontrer
 152.C : ils ont la même aire et le même côté c'est pour ça qu'ils ont la même hauteur
 153.J : non il faut démontrer qu'ils ont la même aire. Attend ça est égal à ça, ça est égal à ça...
 154.C : ils ont le même angle
 155.J : attends il faut dire que cet angle est égal à cet angle, c'est facile ça. Alors, on démontre que A_1 est égal à A_3
 156.C : moi j'ai écrit que A_3 est 90 moins A_1 , et alors A_2 est égal à A_3
 157.J : non, non, attend ce machin plus ce machin fait 90° d'accord ?
 158.C : oui
 159.J : alors A_4 plus A_1 , est 90° mais A_1
 160.C : A_1 il faut dire qu'il est égal à A_3
 161.J : alors A_1 est égal à 180° moins A_2
 162.C : et A_3 est égal à 180° moins A_2
 163.J : et A_2 est égal à 180° moins A_3
 164.C : et tu veux démontrer quoi ?
 165.J : que tu es un canard
 166.C : Ta gueule, on est déjà dans la merde !
 167.J : Alors, A_1 est égal à 180 moins 180 plus A_3
 168.C : et donc on peut enlever 180 et on trouve A_1 égal A_3
 169.J : et alors il faut trouver démontrer quoi encore ?

Ils parlent avec les camarades

- 170.J : alors il faut dire que...
 171.C : attend regard, on a A_1 égal A_3 on a I égal B et on IC égal à CB et donc on sait que les angles ont la même longueur
 172.J : ok
 173.C : on sait qu'ils ont les même angles
 174.J : oui, on sait qu'ils ont les mêmes angles, mais après il faut dire que ça divisé par ça est égal à cosinus ou sinus, je ne sais pas, attends attends, ça c'est l'hypoténuse
 175.C : au cosinus
 176.J : oui cosinus
 177.C : alors attends que je mette des autre lettres. J'écris que CB égal CI
 178.J : oui attends, après tu écris que CB est égal à CI parce que
 179.C : oui parce que I est égal à 180 moins A_3 moins 90

180.J : oui et B est égal à 180 moins A_1 moins 90 et comme on sais que A_1 est égal à A_3 alors I et B c'est le même

181.C : d'accord, alors

182.J : alors ZI égal à XB, et au début écris qu'on démontre que ZI égal XB, qu'elles sont les hauteurs des triangles

183.C : ok

C écris ce que J dit.

184.J : Bon on a fini, comme ça on peut aller manger

185.C : excusez-nous, on a fini

186.Moi : oui, explique-moi

187.J : On a dit que cet angle là c'était le même que celui-ci, ensuite on a dit que ce côté était égal à ce côté, donc on a dit que par cosinus, ça était égale à ça, donc la hauteur de ce triangle est la même que la hauteur de ce triangle parce que ce côté est égal à ce côté, et alors on a appris que les trois autres triangles sont tous égaux.

188.Moi : ok, et est-ce que vous pouvez écrire ce que vous aviez ?

189.J : bien sûr

190.Moi : merci bien

191.C : nous on a pensé quoi ?

NOM ET PRENOM

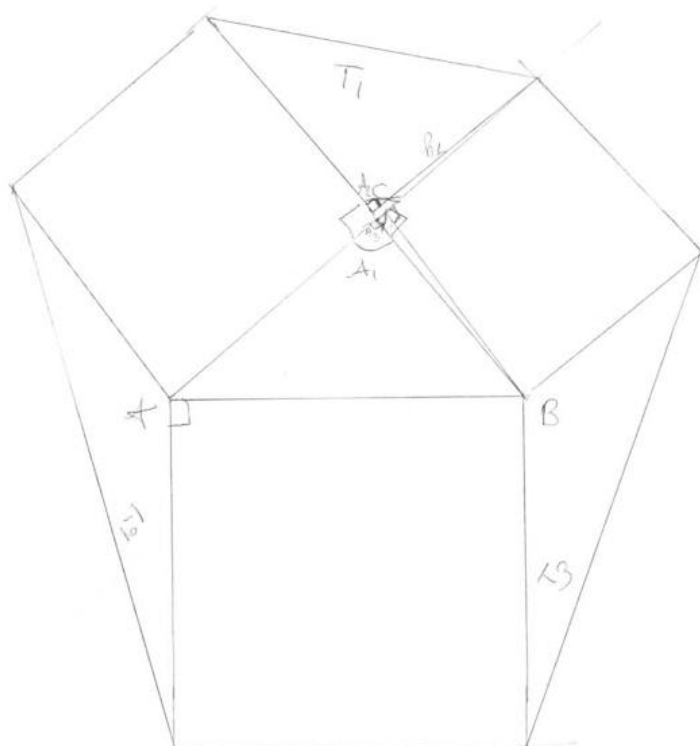
*Jules
Eymé*
RIB

Description de la figure

ABC est un triangle quelconque. A l'extérieur du triangle, trois carrés ont été construits sur chacun des trois côtés. On construit trois nouveaux triangles en reliant les sommets libres des carrés.

Problème

Comparer les aires de chacun des trois triangles avec l'aire du triangle ABC.



Julien
Cyril (RJT)

~~$\hat{A}_2 = 90^\circ - \hat{A}_1$~~
 ~~$\hat{A}_3 = 90^\circ - \hat{A}_1$~~
 On démontre que $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$\hat{A}_4 + \hat{A}_1 = 90^\circ$
 $\hat{A}_1 = 180 - \hat{A}_2$
 $\hat{A}_3 = 180 - \hat{A}_1$
 $\hat{A}_2 = 180 - \hat{A}_3$
 $\hat{A}_1 = 180 - 180 + \hat{A}_3$
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_3$

On démontre que $ZI = XB$
 (hauteur de DIC) et XB (hauteur de ABC)
 Donc $ICZ = CB$
 car $CB = CI$
 et $\hat{I} = \hat{B}$
 car $\hat{I} = 180 - \hat{A}_3 - 90$
 et $\hat{B} = 180 - \hat{A}_1 - 90$
 et $\hat{A}_3 = \hat{A}_1$
 $\hat{I} = \hat{B}$
 donc $ZI = XB$ par cosinus

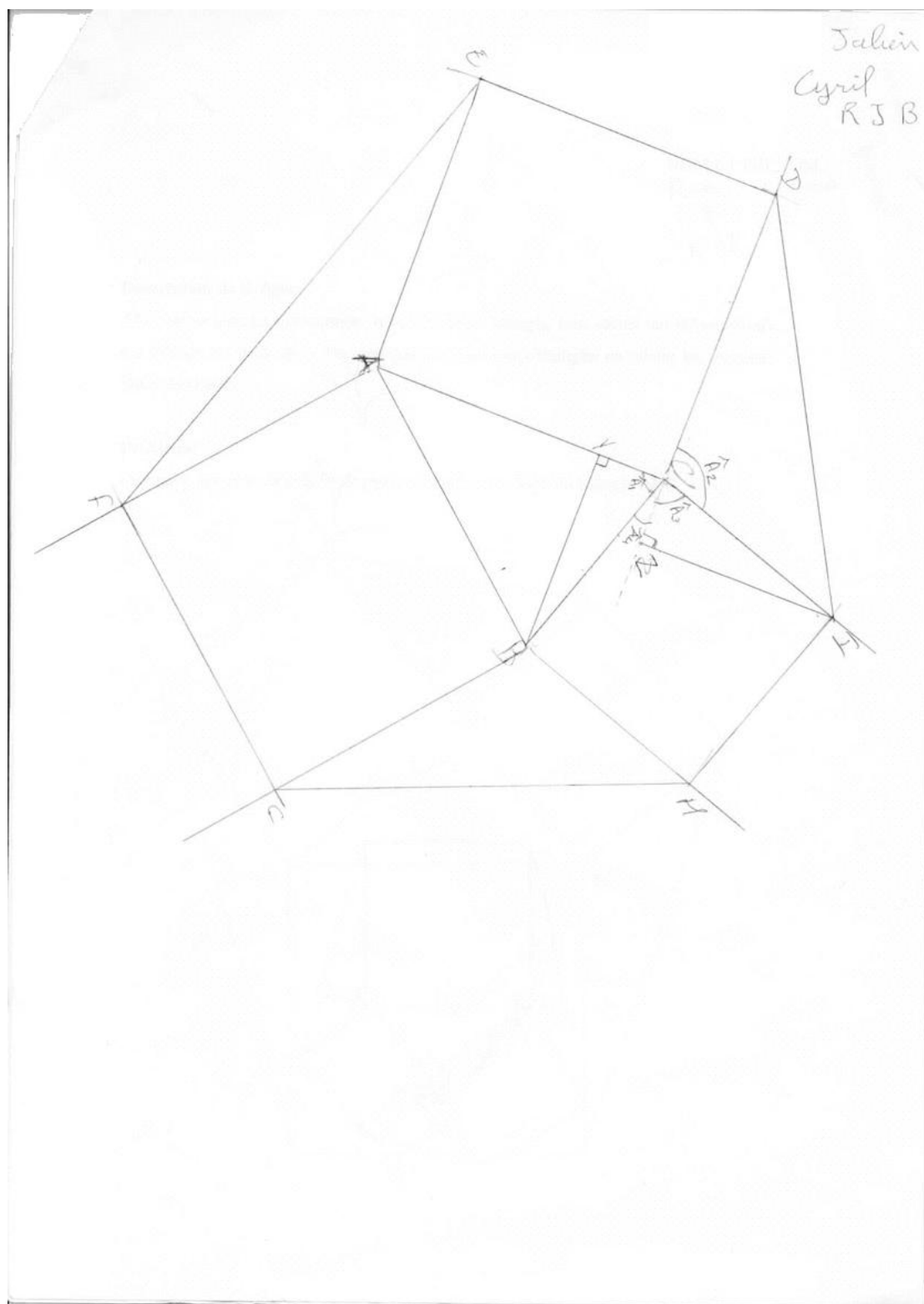
Comme $AC = CD$ et $ZI = XB$ alors
 $\frac{AC \times XB}{2} = \frac{DC \times ZI}{2}$ donc l'aire DIC = l'aire ABC

De même pour les triangles BCH et AFE

\rightarrow l'aire BCH = l'aire AFE = l'aire DIC = l'aire ABC

Et qu'en a pensé :

Ça avait l'air compliqué mais en fait de compte on a mis bien plus de temps (1h) pour faire reconnaître les conclusions (il a quand même planté 8 fois) que pour faire le problème lui-même.



Annexe 2.4 : Binôme : Silvia (S), Francesca (F), classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

NOME E COGNOME

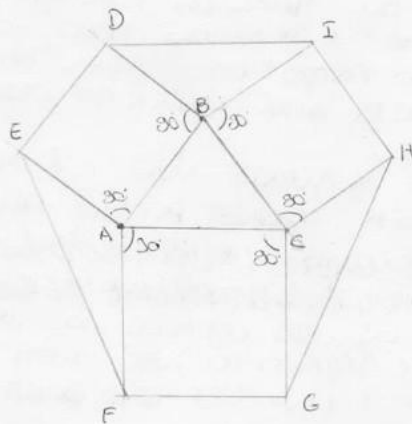
SILVIA
FRANCESCA

Descrizione della figura

ABC è un triangolo qualunque. All'esterno dei tre lati del triangolo sono stati costruiti tre quadrati. Congiungendo le estremità libere dei quadrati sono stati trovati tre nuovi triangoli.

Problema

Confrontare l'area di ciascuno di questi tre triangoli con quella del triangolo ABC.



HIOVENDO LA FIGURA E PORTANDO IL PUNTO C SUL LATO AB ABBIAMO OSSERVATO CHE IL TRIANGOLO ABC SI ALLINEA SUL LATO AB GLI ALTRI 3 TRIANGOLI CHE SI SONO FORMATI DALLE ESTREMITA' LIBERE DEL QUADRATO SI ALLINEANO.
ADESSO UGUANDO DIMOSTRARE CHE SE PORTIAMO IL PUNTO C SUL LATO AB ALLINEANDO IL TRIANGOLO ABC, ANCHE GLI ALTRI 3 TRIANGOLI SI ALLINEANO. PER LA PROPRIETA' DEI TRIANGOLI CHE LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI E' 180°, E SE ALLINEAMO IL TRIANGOLO ABC, L'ANGOLO A DIVENTA 0° PERCHE' DIVENTANO COINCIDENTI I 2 LATI DI 2 QUADRATI FORMANDO SUBITO 180°. PERGLI TRIANGOLI ESTERNI QUINDI SARANNO ALLINEATI.

- SE IL TRIANGOLO È EQUILATERO, LE AREE DEI 3 TRIANGOLI \widehat{EAF} , \widehat{DIB} , \widehat{HGC} SONO UGUALI, PERCHÉ I TRIANGOLI SONO UGUALI. QUESTI TRIANGOLI POSSO DIRE CHE SONO UGUALI PER IL CRITERIO DI UGUALIQUANZA DEI TRIANGOLI PERCHÉ HANNO 2 LATI ISOMETRICI, PERCHÉ LATI UGUALI NEI QUADRATI, E L'ANGOLO COMPRESO TRA ESSI, HA LA STESSA MISURA PER LA DIFFERENZA DI ANGOLI. INFATTI QUESTO SI PUÒ DIMOSTRARE PERCHÉ GLI ANGOLI INTERNI DEL TRIANGOLO ABC SONO UGUALI PERCHÉ DENTRO UN TRIANGOLO EQUILATERO, GLI ANGOLI INTERNI DEL QUADRATO SONO UGUALI PER LA PROPRIETÀ DEL QUADRATO E QUINDI SOTTRAENDO DALL'ANGOLO GIRO 2 ANGOLI RETTI E UN ANGOLO DI 60° TROVIAMO L'ANGOLO COMPRESO TRA I 2 LATI ISOMETRICI. QUINDI I LATI EF, GH, DI DEI TRIANGOLI SONO UGUALI PERCHÉ AD ANGOLI UGUALI SONO OPPOSTI LATI UGUALI.
- SE IL TRIANGOLO ABC È ISOSCELE E I LATI AB E BC SONO UGUALI L'AREA DEI TRIANGOLI ESTERNI EAF E HCG SONO UGUALI PERCHÉ I TRIANGOLI SONO UGUALI PER LA DIMOSTRAZIONE CHE HO FATTO POCO PRIMA. INVECE IL TRIANGOLO ESTERNO \widehat{DIB} AVRÀ L'AREA PIÙ GRANDE PERCHÉ HA UN LATO PIÙ LUNGO.
- SE IL TRIANGOLO È SCALENO NON C'È NESSUN TRIANGOLO CHE HA L'AREA UGUALE PERCHÉ NEI TRE TRIANGOLI
- ~~LA DIMOSTRAZIONE CHE HO FATTO POCO PRIMA PER IL TRIANGOLO EQUILATERO NON VALE PER IL TRIANGOLO ISOSCELE E PER IL TRIANGOLO SCALENO.~~
- NON C'È NESSUN LATO UGUALE NE UN ANGOLO UGUALE, INFATTI NEL TRIANGOLO ABC TUTTI I LATI SONO DIVERSI E QUINDI I LATI DEI QUADRATI SONO DIVERSI.

Annexe 2.5 : Trinôme : Massimiliano (Mas), Marco (Mar) et Alessandro (A), classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

Mar est en train de bouger la figure sur Cabri. Il cherche à trouver un triangle particulier

1. Mar : se il triangolo è rettangolo ?
2. Mas: Ma non è necessariamente rettangolo
3. Mar: Sì ma se fosse rettangolo...
4. A : Aspetta, aspetta... aspetta, aspetta ... questo è uguale a questo è ? *Il est en train de signer un côté du triangle* Perché ha due lati uguali e un angolo uguale...
5. Mas : ... e sì, rimetti un po più in qua

Mar bouge le point A du triangle ...

6. Mar: dimmi cosa pensavi

Ils rigolent, ils sont gênés par le magnétophone

7. Mas: qui registrano, registrano...eh, eh...
8. Mar: miaoooo
9. A : in questo caso si sono uguali, perché hanno due lati, ehm... due lati e un angolo uguale, in questo caso si...
10. Mas: mettilo in un modo...
11. Mas: ...pero se lo sposti qua... prova un pò.... e no, vedi non vale più. Però se lo metti qui va bene.
12. Mar : si puo spostare la figura ?
13. Mas: ma non lo puoi mettere come ti torna
14. Mar: Scusa, scusa, si può spostare la figura?
15. Io : Sì, certo che si può spostare
16. A: questo è uguale
17. Mar: è uguale è uguale!
18. Mas: è uguale a...ABC è uguale a questo grosso qui!
19. A: e porco cane!!
20. Mas : Allora, possiamo scrivere. Come scriviamo ? Allora, se il triangolo è rettangolo

Mas écrit

21. A : No aspetta, scriviamo... se modifichiamo gli altri due lati in modo da ottenere ABC triangolo rettangolo,
22. Mas : ci accorgiamo che
23. A : ci accorgiamo che no ... aspetta aspetta ... se modifichiamo il triangolo ABC in modo da ottenerlo rettangolo, la figura opposta all'angolo retto...
24. Mas : il triangolo opposto all'angolo retto
25. A : il triangolo opposto all'angolo rettangolo è uguale al triangolo di partenza.
26. Mas: quali sono i triangoli uguali?
27. Mar : Dagli un nome no!
28. Mas :Ah, è vero!... Allora, *il lit ce qu'il a écrit* Se modifichiamo il triangolo ABC in modo da ottenerlo rettangolo, ci accorgiamo che il triangolo opposto all'angolo retto è uguale al triangolo di partenza.
29. Mar: dobbiamo fare la dimostrazione?
30. A : bisogna fare la figura!
31. Mar: professoressa... professoressa..., se facciamo la dimostrazione bisogna fare la figura li sopra?
32. Prof: certo, se vuoi far capire a chi legge quello che scrivi è meglio fare la figura
33. Mas : mi serve il righello
34. A : righello ? righello ?
35. Mas : Lo devo fare io il disegno ?
36. A : Sì, scrivi così bene, su, bravo bravo, ecco il righello.

Mas dessine la figure

.....

37. Mar : devo mettere le misure

Mar cherche la mesure des côtés des triangles sur la figure de Cabri

38. A : Che misure ?

39. Mas : quali misure ?

40. Mar : tu fai la figura va !

41. Prof : come va ? Cosa state facendo ?

42. Mar : Metto le misure per... ehm... cerco di calcolare le aree in modo geometrico, ad esempio posso calcolare i lati...

43. Prof: ma per avere un'idea, quella non è una dimostrazione!

44. Mar: no, no ma per avere un'ipotesi

45. Prof: per avere un'ipotesi state dicendo un sacco di cosine, cercate di scrivere anche quelle, da bravi su!

46. Tutti: si si va bene

47. A: spariamo spariamo

A et Mas chantent et ils parlent en anglais pour rigoler

48. A : quanto ci metti a calcolare le aree, un mese e mezzo ?

49. Mas: c'è anche la pensione!!!!

Ils rigolent

50. A: Hai messo le misure ai lati ?

51. Mar : si ma ?

52. A : E allora ?

53. Mar : aspetta, bisogna andare su « Edizione », no aspetta, ecco qui, vedi, c'è "misura", poi clicchi il lato ed ecco la misura.

54. A: allora?

55. Mar: allora, questo è 6 e7, pero'...

56. Mas: Ma lascia perdere no

57. Mar: ohhh! Adesso cancello!

58. A : Lascia così, se vai avanti così ci metti tre anni e mezzo..

59. Mar : uffa

60. A : vai va

61. Mas : la, lalala lala...

62. A : Metti l'angolo retto va...dimostriamolo che è facile....Metti anche le lettere sul disegno, metti anche le altre A' B' C'.

63. Mas : qui metto C'....

64. Mar: ma come le metti le lettere?... va bhé, lo dimostriamo

65. A : guarda che dimostrarlo è facile, è ?

66. Mas : dove è la penna ? Allora, dimostrazione

Il écrit sur la feuille

67. Mar: se il triangolo è isoscele, i triangoli opposti ai lati di base sono uguali.

68. Mas: Ok, quando è isoscele?

69. Mar: quando è isoscele ci sono questi due triangoli uguali, gli angoli alla base sono uguali, poi c'è questo, insomma sono uguali.

70. A: però tutti assieme non viene mai uguale.

71. Mar: quando è equilatero...

72. Mas: quando è equilatero.... Tre triangoli uguali

73. Mar: Forza, scrivi. Facciamo la dimostrazione. Quando il triangolo è retto...

74. A: Quando è retto è facile, ha fatto la figura di là non vedi? Allora, spiegazione. Te scrivi.

75. Mas: Cosa scrivo?

76. A: Allora, quando il triangolo è retto CA, no prima il triangolo... l'angolo BCA uguale 90°

77. Mas: sei sicuro? Questo non è equilatero
78. Mar: no, è uguale è uguale
79. Mas: vai un po' più in su...., è uguale...
80. A: è uguale, è uguale...

Il y a un moment de distraction

81. A: Poi scrivi

Bruit

82. A: Poi scrivi $\angle ACB$ è angolo retto perché
83. Mar: Per costruzione
84. A: Per costruzione
85. Mar: dammi la calcolatrice
86. Mas: perché?
87. Mar: no, dammi la calcolatrice, non mi torna.
88. Mas: Questo qui è uguale a 270
89. Mar: 360 meno 270?
90. Mas: 90
91. Mar: $\angle CB''''$ uguale 90° ... $\angle C$ è uguale ad $\angle AC$ perché lati di quadrato
92. A: poi dici che BC è uguale a $B''''C$
93. Mar: perché lati dello stesso quadrato
94. Mas: ok, quindi $\angle CB''''$ è uguale ad $\angle ABC$ per
95. A: per lato angolo lato
96. Mar: potremmo anche avere $\angle B''''$ uguale... ah no
97. A: cosa vuol dire $\angle B''''$ uguale
98. Mar: allora ... quindi $\angle C'B''''$
99. Mas: che è?
100. Mar: è uguale ad $\angle ABC$, per lato angolo lato
101. Mas: per lato angolo lato.

Il écrit

102. A: Ora fai la figura
103. Mar: là, là, là!
104. A: disegna un triangolo isoscele
105. Mas: un altro foglio?
106. A: Che foglio?
107. Mas: e prendiamo un altro foglio di una pagina
108. A: Ora verde lui lo usa!
109. Mar: Lo usa verde.
110. Mas: Non si può? Va bhé dai lo prendo normale.
111. A: Dai, fai un triangolo isoscele
112. Mas: Allora, perché sono uguali?
113. Mar: è facilissimo
114. A: allora, questo in comune, questo in comune e l'angolo; è come prima!
115. Mas: non ce l'abbiamo come prima!!
116. Mar: Ma sì, questo è uguale, questo è uguale
117. A: questi due sono uguali perché è un triangolo isoscele questo è uguale a questo
118. Mas: ah, è vero. Ci sono due lati in comune, però non abbiamo il triangolo.
119. A: ma non così, così è equilatero, tira più su il punto
120. Mar: ah, devo mettere isoscele
121. A: ... evviva!!
122. Mas: allora ci risiamo
123. A: questo più questo più questo meno 360 fa questo e questa è la stessa cosa meno 360 che fa questo che è uguale a questo. Questo è uguale a questo.

Bruit

- 124.Mar: Dai scrivi
 125.A: Dai abbiamo osservato che se il triangolo
 126.Mas: il triangolo ABC
 127.A: Il triangolo ABC è isoscele,
 128.Mas: i triangoli opposti agli angoli alla base sono uguali,
 129. A: i triangoli opposti agli angoli alla base sono uguali.
 130.Mas: allora dimostrazione. Affermazioni
 131.Mar: AC uguale AB per ipotesi
 132.Mas: AC uguale ad AB per ipotesi di costruzione
 133.Mar: sono arrivato ad una conclusione: ACB come angolo è uguale a ABC come angolo...ad angoli uguali corrispondono triangoli uguali, aree di triangoli uguali...
 134.Mas: ora...
 135.Mar: eppure è così, è vero, ad angoli uguali corrispondono aree uguali
 136.Mas: e se questo qui viene...
 137.Mar: nel triangolo equilatero lati uguali, angoli uguali
 138.A: ma questo è equilatero
 139.Mas: quindi lati uguali e angoli uguali
 140.A: quindi se il triangolo è equilatero questi tre sono uguali
 141.Mas: Ora accorcia il lato
 142.Mar: è isoscele. Allora, scrivi... aspetta... $\angle A$ è... 90° ...per il teorema di Pitagora
 143.Mas: no, che Pitagora
 144.Mar: no, come si chiama? Quello che dice del quadrato, meno il quadrato, è uguale...
 145.Mas: è Euclide....Allora, io ho scritto che $\angle A$ come angolo uguale a 90° perché...se questo è passante per quello...
 146.A: è uguale a 90° perché angolo di quadrato. Poi, $\angle B$ uguale a 90° perché angolo di quadrato, $\angle C$ uguale a 90° e $\angle A$ uguale a 90°
 147.Mar: guarda che è un casino è...
 148.A: poi quello equilatero...
 149.Mas: allora questo più questo più questo allora... questo più questo più questo è uguale a questo più questo più questo

Il écrit

- 150.A: perché poi si potrebbe dividere il triangolo a metà... ma non serve a niente... dove siamo arrivati?
 151.Mas: che questo più questo più questo è uguale a questo più questo più questo
 152.A: perché
 153.Mas: per somma di angoli uguali : questi sono di 90° e questi due sono uguali
 154.Mar: se invece il triangolo è equilatero risultano uguali
 155.Mas: ora scrivo, 360 meno questo è uguale a $\angle C$ per...per differenza di angoli uguali
 156.Mar: lo stesso si fa per l'altro triangolo

Mas écrit

- 157.Mas: allora, $\angle C$ è uguale ad $\angle A$ e $\angle B$ è uguale ad $\angle A$ perché lati stesso quadrato. Allora $\angle C$ è uguale ad $\angle B$
 158.A: $\angle C$ è uguale a $\angle B$
 159.Mar: $\angle C$ e $\angle B$
 160.Mas: allora, $\angle C$ uguale a $\angle B$ uguale a $\angle B$ perché lati dello stesso quadrato. Allora $\angle C$ uguale a $\angle B$ per lato angolo lato.
 161.A: abbiamo dimostrato quello lì, prof?
 162.Prof: sì?
 163.A: noi abbiamo dimostrato che se il triangolo è equilatero..
 164.Mar: no, quello non lo abbiamo dimostrato
 165. A: no, abbiamo visto che i triangoli sono uguali fra loro
 166.Mas: abbiamo dimostrato che questi tre sono uguali,
 167.Prof: avete scritto?
 168.A: no, scriviamo. Scrivi: quando il triangolo è equilatero
 169.Mas: abbiamo osservato che se il triangolo ABC è equilatero
 170.A: i triangoli sono tutti e tre uguali.
 171.Mas: i triangoli esterni?

172.A: si

173.Mar: poi ci scrivi...

174.Mas: allora: se il triangolo è equilatero i triangoli opposti agli angoli sono tutti e tre uguali.

175. Mar poi ci scrivi che non riportiamo la dimostrazione perché è uguale a prima.

176.Mas: non riportiamo la dimostrazione perché è la medesima della precedente.

Mas écrit

177.A: e il triangolo interno? E equilatero

178.Mar: non è uguale agli altri...

179.A: gli angoli sono di 60 e gli angoli dell'altro sono.... quello opposto a quello di 60 sarà... sarà 120

180.Mar: e gli altri due saranno 30

....

181.A: però se disegniamo l'altezza anche nell'altro triangolo

Ils dessinent la hauteur

182.Mar: non mi sembra di vedere niente

183.A: aspetta, questi due triangolini piccoli... questa metà è questa metà qui sono uguali

184.Mar: perché?

185.A: perché ha in comune un lato che è questo, l'angolo retto e...

186.Mar: in un triangolo equilatero l'altezza è bisettrice...

187.A: si ma allora...

188.Mas: gli angoli sono ...

189.A: questo misura 120, quindi la metà misura 60 come l'altro.

190.Mar: allora i triangoli sono uguali

191.Mas: anche gli altri due sono uguali e per somma di aree uguali, hanno la stessa area

192.Mar: allora scrivi.

193.Mas: avevamo scritto che non riportiamo la dimostrazione perché è uguale alla precedente.

194.Mar: ecco, e ora fai questa figura qui

195.Mas: allora, *il lit* non riportiamo la dimostrazione perché è la medesima di quella precedente

196.Mar: si però siamo riusciti a dimostrare, lo abbiamo dimostrato

197.Mas: però siamo riusciti a dimostrare?

198.Mar: siamo riusciti a dimostrare che anche l'area del triangolo ABC è uguale a quella dei triangoli esterni per somma di area

199.Mas: aspetta che faccio il disegno, mi dai il righello?

200.Mar: è mio

201.A: c'è scritto il tuo nome?

Mas dessine la figure

202.Mar: ma che fai? Leonardo da Vinci?

203.Mas: mi date il compasso?

204.A: dai, ma che compasso!!!

205.Mas: mi serve il compasso!!!

206.Mar: ma smettila!!

Ils rigolent

207.A: cosa abbiamo scritto?

208.Mas: Abbiamo osservato che se il triangolo ABC è equilatero i triangoli opposti agli angoli sono uguali. Non riportiamo la dimostrazione perché è la medesima di quella precedente. Però siamo riusciti a dimostrare che anche l'area del triangolo ABC è uguale a quella dei triangoli esterni per somma di angoli.

209.A: per somma di angoli? No, cancella per somma di angoli e scrivi ... ora cerchiamo di dimostrarlo geometricamente

210.Mar: hai finito di stare con le gambe larghe?

211.Mas: uffa!

212.A: La sapete una cosa? CA è qui, questo rettangolino qui è uguale

213.Mas: Chiamiamo AM la mediana

214.A: Chiamiamo AM. Allora CAM è uguale a C'AM' perché hanno uguale un lato...

- 215.Mas: Allora, perché aspetta...
216.A: Allora sono uguali perché hanno in comune un lato, l'angolo di 90°
217.Mas: perché hanno in comune un lato?
218.A: Perché hanno in comune un lato, l'angolo di 90°
219.Mar: hanno in comune l'angolo il lato...
220.Mas: e il lato del quadrato
221.A: il lato del quadrato è questo qui, lo abbiamo già detto
222.Mas: lato, un angolo di 90 e la mediana?
223.A: no, aspetta...
224.Mar: l'altro angolo, allora, questo è di 60 , quello dall'altra parte è 120 e la metà è 60 , quindi hanno due angoli di 60° in comune
225.A: Allora, questo questo e questo

Bruit

- 226.Mas: quindi ha il lato in comune del quadrato, l'angolo di 90° ...
227.A: formato dalla perpendicolare, scrivicelo!! Perché r è perpendicolare
228.Mas: adesso dobbiamo trovare l'altro angolo.
229.Mar: allora, questo è uguale a questo
230.Mas: si è vero, perché è un triangolo rettangolo
231.A: è vero

Mas écrit

- 232.Mas: perché ha in comune un lato, un angolo di 90°
233.A: formato dalla perpendicolare, dagli un nome alla perpendicolare
234.Mas: aspetta ci metto z sulla figura
235.A: allora dalla perpendicolare z, dall'angolo di 60°

Mar bouge la figure sur l'écran

- 236.Mar: se il triangolo fosse generico?... per esempio potremmo confrontare questi (CBA e A'B'C''')
....Cosa consideriamo come base e come altezze?
237.A: Consideriamo CB come base e questa è l'altezza
238.Mar: e nell'altro triangolo questa è la base che è uguale all'altra, ma l'altezza...
239.A: bisogna disegnarla
240.Mar: ok la disegno

Mar dessine la hauteur

- 241.Mar: perpendicolare... Costruzione, retta perpendicolare, chiede per quale punto
242.A: per questo
243.Mar: e perpendicolare.. a quale retta?
244.A: a questo lato
245.Mar: ok. Ora dobbiamo prolungare il lato, quindi prendiamo la retta che passa per due punti. Quindi costruzione...mettiamo i segmenti e cancelliamo le rette....ecco fatto abbiamo l'altezza
246.A: Praticamente dobbiamo dire che queste altezze sono uguali
247.Mas: certo, uguale base, uguale altezza, uguale anche l'area

Ils pensent

Mar bouge la figure

- 248.Mar: questi due lati sono perpendicolari sempre
249.A: questi due triangoli...
250.Io: Sono congruenti i due triangoli?
251.A: dunque..hanno
252.Mar: l'angolo retto
253.A: questo lato
254.Mas. Manca l'angolo
255. A: però questi sono uguali
256.A: non so perché ma si vede

Ils pensent

- 257.Mas: questo qui è un angolo di 90° perché angolo di quadrato
258.A: e questo è...
259.Mar: quello è retto
260.A: Questi sono retti ma... quindi questo pezzettino qui se io tolgo da questo angolo oppure da questo non cambia, quindi i due angoli sono uguali
261.Mar: non ho capito
262.A: Per differenza di angoli congruenti questi sono uguali
263.Mar: ah.
264.A: si si vale anche in questo caso...Possiamo tornare al triangolo equilatero puoi scrivere
265.Mas: cosa scrivo?
266.A: Cosa hai scritto?
267.Mas: Ha in comune un lato, un angolo di 90° formato dalla perpendicolare z e l'angolo di 60°
268.Mar: allora abbiamo confrontato questo triangolo con questo, questo è uguale a questo, questo lato anche e l'angolo pure. Dobbiamo di che...
269. Mas: adesso stiamo considerando il triangolo equilatero
270.A: ma è uguale
271.Mar: allora questo è 60. Se da tutto
272.Mas: da 360
273.Mar: si se ci levo 90 più 90 più 60 resta 120
274.A: dai scrivi
275.Mas: allora 360 meno l'angolo CAB più $C'AC$ più $B''AB$ è uguale a $C'AB''$
276.Mar: quindi 360 meno 90 90 e 60 è uguale a 120.
277.Mas: le lettere le ho messe giuste?
278.Mar: si. Poi AC uguale $C'A$ e AB uguale $B''A$. Facci la graffa, facci la graffa. Quindi $C'A$ uguale $B''A$ Poi scrivi... che facciam vedere... $C'A B''$ isoscele
279.A: Poi basta far vedere che questo è uguale a questo
280.Mar: poi... $M'A$ è mediana
281.Mas: e bisettrice
282.Mar: e bisettrice perché...
283.Mas: perché in un triangolo isoscele la mediana è anche la bisettrice
284.Mar: allora $C'AM'$ scrivi , è uguale a MAB'' perché angoli di bisettrice
285.Mas: si
286.Mar: poi scrivi $C'AM$ uguale a 60° E CMA uguale 90 perché angolo di mediana
287.A: di mediana AM
288.Mar: $AM'C'$ uguale 90° perché
289.A: angolo di mediana AM'
290.Mas: quindi CMA uguale a $AM'C'$ per sostituzione.
291.Mar: Ti ho detto che ACM è uguale a $C'AM'$
292.Mas: no questo ancora no
293.Mar: allora ACM uguale a 60° perché angolo alla base
294.Mas: angolo alla base
295.Mar: angolo alla base di triangolo isoscele
296.Mas: di triangolo equilatero
297.Mar: si di triangolo equilatero, quindi ACM come angolo uguale $C'AM'$ per sostituzione
298.Mas: Alessandro tu hai finito di dormire?
299.A: Che rompi, io mi fido
300.Mar: non mi distrarre. Quindi i due triangoli ACM e $C'M'A$ per proprietà dei triangoli rettangoli.
301.Mas: Ho scritto
302.Mar: AMB uguale, triangolo, uguale a $B'M'A$ per medesima dimostrazione. Quindi ACM più ABM è uguale a $C'M'A$ più $AM'B''$ per somma di aree.
303.Mas: finito
304.Mar: Ora scrivici, aspetta, abbiamo visto e dimostrato che anche nel triangolo
305.Mas: aspetta, abbiamo visto e dimostrato che anche se il triangolo è generale...
306.A: generico
307.Mar: c'è comunque un triangolo esterno uguale punto
308.A: metti i nostri nomi. Prof abbiamo finito, si salva l'ultima figura?
309.Mar: dai consegnamo.

NOME E COGNOME
 NUNZI
 MONTEVERDI
 AUGGI.

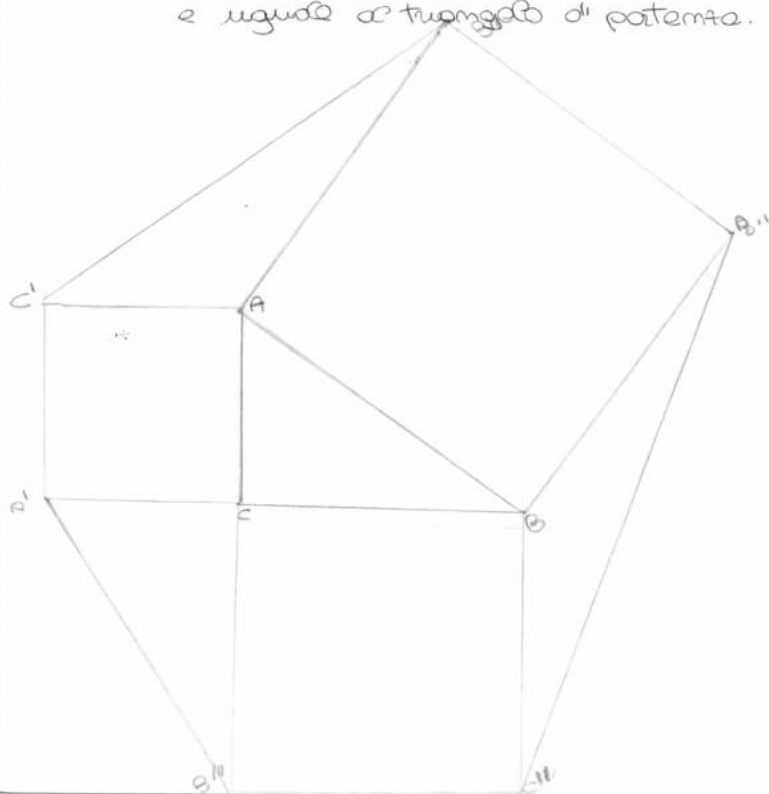
Descrizione della figura

ABC è un triangolo qualunque. All'esterno dei tre lati del triangolo sono stati costruiti tre quadrati. Congiungendo le estremità libere dei quadrati sono stati trovati tre nuovi triangoli.

Problema

Confrontare l'area di ciascuno di questi tre triangoli con quella del triangolo ABC.

Se modifichiamo il $\triangle ABC$ in modo da ottenere un rettangolo
 ed ci accorgiamo che il triangolo opposto all'angolo retto
 è uguale al triangolo di partenza.



DIMOSTRAZIONE

AFFERMAZIONI

$$\begin{aligned} \hat{A}CA &= 90^\circ \\ \hat{B}CB &= 90^\circ \\ \hat{A}CB &= 90^\circ \end{aligned}$$

$$\hat{A}CA + \hat{B}CB + \hat{A}CB = 270^\circ$$

$$360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$$

$$\hat{A}CB = 90^\circ$$

$$A'C = AC$$

$$CB = CB'''$$

$$\hat{A}CB''' = \hat{A}CB$$

GIUSTIFICAZIONI

perché angolo di ~~quadrato~~ quadrato

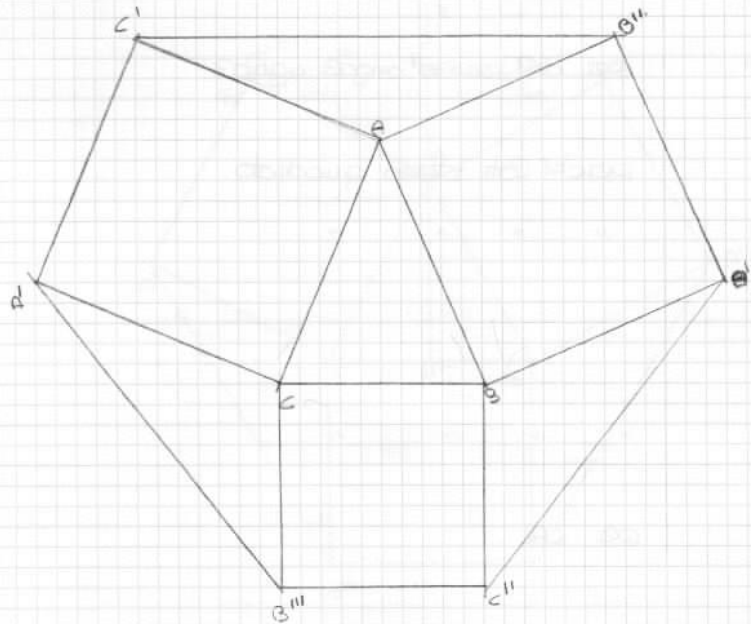
" " " " " " " " " " " "

perché lati dello stesso quadrato

" " " " " " " " " " " "

per $\angle A = (\text{lat}_1, \text{ang}_1, \text{lat}_2)$.

Abbiamo osservato che se il triangolo ABC è isoscele, i triangoli
opposti agli angoli della base sono uguali.



Dimostrazione

Affermazioni

$$AC = AB$$

$$\hat{A}CB = \hat{ABC}$$

$$\hat{A}CA' = 90^\circ$$

$$\hat{B}C'B'' = 90^\circ$$

$$\hat{C}B'C'' = 90^\circ$$

$$\hat{A}B'A'' = 90^\circ$$

$$\hat{A}CA' + \hat{A}CB + \hat{B}C'B'' =$$

$$\hat{B}C'B'' + \hat{C}B'A'' + \hat{A}B'A''$$

$$300 - (\hat{A}CA' + \hat{A}CB + \hat{B}C'B'') =$$

$$\hat{A}CB''$$

Giustificazione

per ipotesi di costruzione.

per ipotesi di costruzione.

perché angolo di quadrato

" " " "

" " " "

" " " "

per somma di angoli uguali.

per differenza di angoli

$$360 - (\hat{C} + \hat{B} + \hat{A}) =$$

$$\hat{C}'' + \hat{B}'' + \hat{A}''$$

$$C'' = A'' = B''$$

$$\begin{cases} AC = A''C \\ AB = A''B \end{cases}$$

∥∥

$$A''C = A''B$$

$$C''B'' = C''A'' = B''A''$$

$$\triangle A''B''C'' = \triangle C''A''B''$$

perché " " " "

perché tutti sono uguali.

perché tutti sono uguali

" " " "

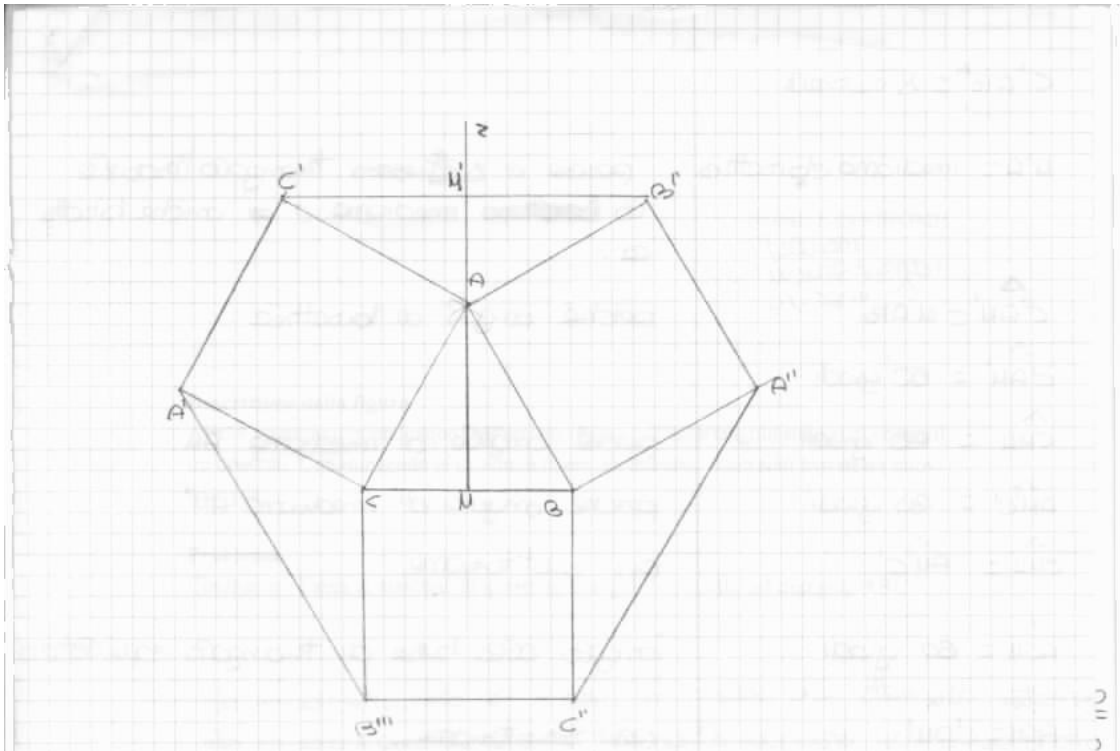
" " " "

per CA.

Abbiamo osservato che se $\triangle ABC$ è equilatero
i triangoli esterni agli angoli sono uguali.

Non ipotizziamo la dimostrazione perché $\triangle ABC$ è equilatero
sima di quello precedente.

Però non riusciti a dimostrare che anche l'angolo del $\triangle ABC$
è uguale a quello dei triangoli esterni. ~~per questo~~
~~non riusciamo a dimostrare~~, ed ora cerchiamo di dimostrare geometricamente.



DIMOSTRAZIONE

AFFERMAZIONI

$$\angle CAM = \angle C'A'M'$$

~~MADESSA~~

$$360 - (\hat{A}AB + \hat{C}'A'C + \hat{B}''A'B' + \hat{C}A'B'')$$

$$360 - (60 + 90 + 90) = \hat{C}A'B''$$

$$\hat{C}A'B'' = 180^\circ$$

$$\begin{cases} AC = C'A \\ AB = B''A \\ \Downarrow \\ C'A = B''A \end{cases}$$

GIUSTIFICAZIONI

perché ho un comune un lato, un angolo di 90° gradi ~~perché~~ quindi dalle perpe collineari 2, angolo di 90 gradi.

per sostituzione.

$C'AB'' = \Delta \text{isoscele}$	
$M'A = \text{mediama e bisettrice}$	<p>perché in Δ equilatero triangolo isoscele B è mediana e anche bisettrice.</p>
$\hat{C}'AM' = \hat{M}'AB''$	<p>perché angoli di bisettrice</p>
$\hat{C}'AM' = 60 \text{ gradi}$	
$\hat{C'MA} = 60 \text{ gradi}$	<p>perché angoli di mediana AM</p>
$\hat{AM'C'} = 90 \text{ gradi}$	<p>perché angoli di mediana AM'</p>
$\hat{C'MA} = \hat{AM'C'}$	<p>per sostituzione</p>
$\hat{ACM} = 60 \text{ gradi}$	<p>angoli alla base di triangolo equilatero</p>
$\hat{ACM} = \hat{C'AM'}$	<p>per sostituzione.</p>
$\hat{ACM} = \hat{C'UA}$	<p>proprietà dei triangoli rettangoli.</p>
$\hat{AMB} = \hat{B'M'A}$	<p>per med per medesima dimostrazione.</p>
$\hat{ACM} + \hat{AMB} = \hat{C'UA} + \hat{AM'B''}$	<p>per somma di ang.</p>

Abbiamo visto e dimostrato che anche se il triangolo è generico c'è comunque un triangolo esterno uguale

Annexe 2.6 : Binôme : Federico (F), Irene (I), classe de 5^e année du lycée (18/19 ans).

Irene est en train d'explorer sur Cabri

1. Irene : Allora...
2. Federico : son stanco
3. Irene: questo è uguale a questo si sa
4. Federico : i lati son tutti uguali perché questo è uguale a questo perché è un quadrato, questo idem
5. Irene : questo è uguale a questo....
6. Federico : quindi l'area di questo triangolo si trova un mezzo seno di alfa per questi due lati poi in questo questo angolo qui è uguale a questo e questo lato qui che è uguale a questo, no, l'angolo è diverso è maggiore...
7. Irene : questo è 180
8. Federico : no, questo non è 180
9. Irene : questo di qua si
10. Federico : come fa a essere 180 ?
11. Irene : no hai ragione, hai ragione
12. Federico : Ecco, 180 meno beta verrà...

Federico fait un dessin sur la feuille, et il commence à écrire (regarder le protocole)

13. Federico : area di ABC è un mezzo ac...
14. Irene : come ?
15. Federico : questo è il lato a questo è il lato c quindi un mezzo ac per il seno di alfa
16. Irene : Ah si
17. Federico : allora questo è ancora a, questo è c, questo è b..... questo è a', e questo b'... allora A, B, C, D, E, E, F, G, H, I. Quindi area ABC è un mezzo ac per il seno di beta
18. Irene : Ok
19. Federico : poi l'area di DBE è un mezzo ac per il seno di 180 meno beta, quindi 180 meno beta...
20. Irene : va bhé, tanto scrivi
21. Federico : il seno di 180 meno beta è il seno di 180 coseno di beta meno seno di beta coseno di 180 meno beta, va bhé, poi lo vediamo. Allora, area di HIC è un mezzo
22. Irene : ab
23. Federico : un mezzo per il seno di 180 meno gamma. Manca AGF
24. Irene : area di AGF
25. Federico. Area AGF è un mezzo bc seno di 180 meno alfa. Ecco, ora ...
26. Io : avete pensato qualcosa ?
27. Federico : si dalla trigonometria, abbiamo calcolato le aree con la formula.
28. Io : Avete qualche idea di ciò che dovete provare ?
29. Federico : no, non ancora
30. Io: Ok
31. Federico : allora il seno di 180 meno beta è il seno di 180 coseno beta meno seno beta coseno di 180. Il seno di 180 è zero, il coseno meno uno... quindi viene seno di beta...Gli altri verranno seno di 180 meno gamma verrà seno di gamma
32. Irene: seno di gamma ?
33. Federico : si è uguale : non vedi qui ho scritto seno di beta ma per gamma è lo stesso, si usa la stessa formula
34. Irene : e allora dai scrivi
35. Federico : allora seno di 180 meno gamma uguale a seno di gamma e seno di 180 meno alfa sarà seno di alfa.
36. Irene : però gli angoli sono diversi
37. Federico : per esempio questi due triangoli hanno i lati uguali ma l'angolo è diverso...
38. Irene : si ma qui il lato cambia...
39. Federico : va bhé continuiamo... Questo qui si può fare così ... si può fare invece di ac...ab e quindi viene. Allora scriviamo area DBE
40. Irene : area DBE uguale a un mezzo ac seno di beta quindi uguale all'area di ABC
41. Federico : ok, ho scritto. Ora area di ABC è anche uguale a un mezzo ba
42. Irene : per il seno di gamma che è uguale...
43. Federico : ... aspetta, che è uguale...
44. Irene : ... all'area di HIC

45. Federico : all'area di HIC.
46. Irene : L'area di ABC è anche uguale a
47. Federico : a un mezzo ca, no cb per il seno di alfa
48. Irene : che è uguale all'area di GAF. Quindi le aree son tutte e tre uguali e uguali al triangolo interno
49. Federico : allora per la proprietà transitiva le aree sono uguali. Allora qua ci metto...
50. Irene: Area ABC
51. Federico : aspetta le quattro aree
52. Irene : area ABC uguale all'area DBE uguale all'area HIC uguale all'area di GAF. Ok è finito
53. Federico : abbiamo finito. Occhio che è scritto un po' male
54. Io : Come avete pensato alla formula ?
55. Federico : l'abbiamo vista recentemente
56. Irene : ormai l'abbiamo imparata e quando ci si ritrova, la si usa
57. Io : ok, grazie potete andare

NOME E COGNOME

FEDERICA
IRENE

Descrizione della figura

ABC è un triangolo qualunque. All'esterno dei tre lati del triangolo sono stati costruiti tre quadrati. Congiungendo le estremità libere dei quadrati sono stati trovati tre nuovi triangoli.

Problema

Confrontare l'area di ciascuno di questi tre triangoli con quella del triangolo ABC.

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$A_{\triangle DBE} = \frac{1}{2} ac \sin (180 - B)$$

$$A_{\triangle HIC} = \frac{1}{2} ab \sin (180 - \beta)$$

$$A_{\triangle GAF} = \frac{1}{2} bc \sin (180 - \alpha)$$

$$\sin (180 - B) = \sin 180 \cdot \cos B - \cos 180 \cdot \sin B = \sin B$$

$$\sin (180 - \beta) = \sin \beta$$

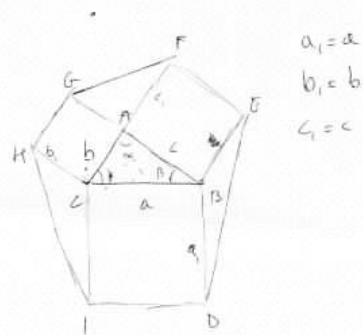
$$\sin (180 - \alpha) = \sin \alpha$$

...

$$A_{\triangle DBE} = \frac{1}{2} ac \sin B = A_{\triangle ABC}$$

$$A_{\triangle HIC} = \frac{1}{2} ba \sin \beta = A_{\triangle ABC}$$

$$A_{\triangle GAF} = \frac{1}{2} cb \sin \alpha = A_{\triangle ABC}$$



$a_1 = a$
 $b_1 = b$
 $c_1 = c$

=> Per la proprietà di similitudine
le aree sono uguali

$$(A_{\triangle HIC} = A_{\triangle DBE} = A_{\triangle GAF} = A_{\triangle ABC})$$

Annexe 2.7 : Binôme : Sara (S), Lorenzo (L), classe 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France.

1. L : Allora, ABC è un triangolo qualunque. All'esterno dei tre lati sono stati costruiti tre quadrati. Congiungendo le estremità libere dei quadrati sono stati trovati tre nuovi triangoli. Problema. Confrontare l'area di ciascuno di questi tre triangoli con quella del triangolo ABC.
2. S: si
3. L: allora i tre triangoli sono questo questo e questo... bisogna confrontarli con l'area di questo triangolo qui?
4. S: sì, le loro aree.
5. L: va a finire che sono uguali... allora come si fa a vedere? O per via analitica o per via sintetica...
6. S: cosa confronti?
7. L: questo con questo, tanto ne basta uno triangolo no? Allora prendiamo questo come se fosse rettangolo. Allora quest'altro è sicuramente rettangolo come questo
8. S: si
9. L: poi... questo è uguale a questo e questo è uguale a questo perché lati di quadrati
10. S: sì, quindi è lo stesso triangolo
11. L: aspetta, questo lato è ancora uguale a questo e questo anche
12. S: è la stessa cosa anche per l'altro triangolo
13. L: no, non sono uguali
14. S: ma scusa, questo è un quadrato e questo è un quadrato
15. L: sì ma questi due non sono uguali
16. S: va bene, questi due no ma questo lato e questo lato sono uguali...
17. L: quindi tu vorresti dire che ...
18. S: niente, era solo una considerazione.
- ...
19. L: tanto scriviamo, scrivi tu?
20. S: ok
21. L: allora scrivi triangolo particolare di 90° allora l'angolo opposto forma un triangolo uguale. Ok, ora se prendo... questo qua è un triangolo di che tipo?
22. S: aspetta, ferma lì... se prendi il triangolo equilatero?
23. L: allora col triangolo equilatero sarebbero tutti uguali
24. S: sì sono tutti uguali
25. L: Allora se il triangolo è equilatero gli angoli sono di 60 e i lati sono uguali, gli altri tre triangoli sono isosceli e hanno un angolo uguale quindi sono uguali
26. S: si
27. L: e se il triangolo è isoscele?

L. bouge la figure

28. S: si forma un triangolo uguale e gli altri sono diversi
29. L: sono diversi ma uguali tra loro
30. S: uguali tra loro?
31. L: si vedi questo qua è uguale a questo, però questo qua è uguale a questo.
32. S: aspetta che scrivo anche questo.

S'écrit

33. L: si ma in generale?
34. S: non lo so potremmo provare a disegnare le altezze dei triangoli, l'area si trova base per altezza diviso due, tanto per incominciare potremmo misurare le aree
35. L: si forse hai ragione

L dessine les hauteurs des trois triangles extérieurs et il mesure les cotés et les hauteurs des triangles et les élèves calculent l'aire avec la calculette

36. L: Le altezze dei triangoli si incontrano in un punto
37. S: è il baricentro

38. L: ci può dire qualcosa?
 39. S: non so ma intanto misuriamo
 40. L: d'accordo, allora 8,9 ... per 4,1 ... diviso due è 18,245, poi 13 per 2,8 diviso due... è 18,2
 41. S: sono uguali
 42. L: si e anche l'altra area viene uguale a questa più o meno.
 43. S: è anche uguale all'area del triangolo ABC.... Prova a cambiare un po' il triangolo e a fare di nuovo il calcolo

L bouge A et il fait encore les calculs

44. L: allora, proviamo così, dunque 4,8 per 6,5.... diviso due fa 15,6...l'altro triangolo allora...2,2 per 14,5 diviso... fa ancora 15,9
 45. S: più o meno sono uguali, l'area di ABC è 16
 46. L: vediamo ancora l'altro: 1,9 per 16,7 diviso due viene 15,3, sì, le aree sono uguali
 47. S: sì ma dobbiamo dimostrarlo...
 48. L: e sì... dunque, perché mai saranno uguali le aree?
 49. S: sempre peggio!
 50. L: Aspetta, forse i triangoli non sono uguali ma sono simili?
 51. S: perché ?
 52. L: i lati mi sembrano proporzionali, siccome sono tutti quadrati, i lati sono proporzionali
 53. S: ma non sono simili i triangoli, gli angoli sono diversi
 54. L: ho capito, siamo sulla cattiva strada... uffa, dobbiamo fare un ragionamento serio ...e se fosse Pitagora?... Sì ma Pitagora funziona per triangoli rettangoli... bhé, prendiamo un triangolo rettangolo... se prendiamo Pitagora, dice che il quadrato costruito sull'ipotenusa è...
 55. S: è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti... siamo sempre lì!
 56. L: quindi, se quello che dice Pitagora è vero... allora questo triangolo ABC che relazione ha con questi altri due triangoli per esempio? Questo qua è sicuramente la metà di questo... no non è vero... non lo so, non lo so
 57. S: scusa, ma qui non puoi usare Pitagora, questo angolo non è retto, e poi il triangolo ABC è generico
 58. L: allora non possiamo usare Pitagora, questo è solo un caso particolare...

....

59. L: Studia studia
 60. S: studio studio, ma è difficile
 61. L: come sono questi triangoli? Allora l'area si trova base per altezza diviso due
 62. S: aspetta un po', queste due basi non sono uguali?
 63. L: queste?
 64. S: le basi! Questa e questa
 65. L: sì queste due sono uguali ma... l'angolo compreso non è uguale
 66. S: sì ma queste sono uguali, queste sono ancora uguali perché questa e questa.
 67. L: no non sono uguali quelle
 68. S: sì
 69. L: no, non è un triangolo isoscele
 70. S: è vero... quanto misura questo segmento?
 71. L: 3, 9... Allora l'altezza è 2,7, l'altra è 3,2 e questa è 2,0 quella di ABC è 3... l'altezza... no i lati sono 9,7 poi 8,2 l'altro e 13,4 e quella di ABC è 6,7

S écrit les mesures sur la feuille

72. S: sì
 73. L: allora queste sono le altezze e queste sono le basi ... sono proporzionali
 74. S: si sembrano proporzionali
 75. L: sì perché più è grande l'altezza più è piccola la base e viceversa più è grande la base più è piccola l'altezza. Per forza perché se no le aree non sarebbero uguali. Quindi se facciamo 8.2 diviso 7.2 dovrebbe dare una costante
 76. S: sì ma fai il prodotto
 77. L: sì hai ragione, però sappiamo già che le aree sono uguali, quindi ... bisogna solo cercare di dimostrare
 78. S: avevamo visto che le altezze si incontrano nel baricentro, magari ci può aiutare-
 79. L: il baricentro è il punto di intersezione delle..

80. S: delle mediane

81. L: intersezione delle mediane... quindi...uffa dobbiamo arrivarci!

Il bouge la figure continuellement

82. S: noi sappiamo che questi due sono uguali e tutti e tre sono simmetrici

83. L: non sono uguali questi due triangoli, l'angolo non è uguale

84. S: sì l'angolo non è uguale

85. L: questo è un angolo di 90° quindi... prof, prof scusi

86. P: sì

87. L: scusi ma due lati uguali sono sufficienti per dire che due triangoli sono simili?

88. P: secondo te?

89. L: secondo me bastano, due lati bastano

90. P: sei sicuro?

91. S: no ci vuole un angolo anche

92. L: ci vuole un angolo? Quindi due lati e un angolo, l'angolo compreso

93. P: ma scusa, prendi una circonferenza, quanti triangoli puoi tracciare all'interno che hanno vertice nel centro?

94. L: infiniti...

95. P: e hanno tutti due lati uguali, e son simili?

96. L: no... ci vuole anche un angolo oltre ai due lati, è vero... quindi...

97. S: siamo da capo!

98. L: guardalo con occhi diversi

99. S: sì

.....

100.L: si può tirare fuori qualcosa con le diagonali? Hai finito di stare con le mani in mano a guardare?... Io comincio a non vedere più niente, aspetta che cancello qualcosa

101.S: toglie le misure, tanto non servono

.....

102.L: allora...non ho davvero idee

103.S: neppure io

.....

104.L: sappiamo che le aree sono uguali, ma come lo dimostriamo?

Les élèves n'arrivent pas, ils restent longtemps en silence

105.Io: avete scoperto qualcosa?

106.L: assolutamente niente, sappiamo solo che le aree sono uguali, ma non riusciamo a dimostrarlo

107.Io: cosa avete pensato:

108.L: Abbiamo pensato a fare... abbiamo pensato che ci doveva essere una relazione tra le basi e le altezze del triangolo

109.Io: quali basi e quali altezze avete considerato?

110.L: queste come basi e queste tracciate come altezze

111.Io: state considerando tutti i triangoli?

112.L: sì tutti i triangoli insieme

113.S: e se proviamo a considerare due soli triangoli?

114.L: quali?

115.S per esempio ABC e questo qui

116.L: se consideriamo questi abbiamo questi due lati uguali

.....

117.S: ma se consideriamo come base?

118.L: ah, tu dici di considerare questo lato come se fosse la base, allora bisogna costruire un'altra altezza

119.S: sì, decisamente

Il construit l'autre hauteur

120.L: disegnamola

- 121.S: disegnalala
122.L: allora se consideriamo questa come base e questa come altezza, allora questa base è uguale a questa ok?
123.S: si
124.L: allora se consideriamo questa come base questa altezza qua è uguale a questa altezza qua perché dobbiamo ottenere la stessa area
125.S: si
126.L: allora scriviamo... Considerando come base del triangolo ABC un lato del quadrato e il lato adiacente come base di un triangolo esterno le altezze risultano uguali così come ovviamente le basi
127.S: si ma non è una spiegazione
128.L: ma è un quadrato
129.S: questo si ma bisogna provare che le altezze sono uguali
130.L: già... questa altezza è uguale a questa

S bouge la figure

- 131.L: aspetta aspetta, considerando...
132.S: si?
133.L: allora adesso il problema si sposta a dire perché le altezze sono uguali
134.S: si
.....
135.L: sempre più difficile
.....
136.L: scusa ma questo è un quadrato, se con il compasso tu punti qua parti esattamente da qui e arrivi a qui perché è un arco... quindi se noi facciamo una rotazione di questo, non viene qua?
137.S: si
138.L: si se questo è un quadrato, ma questo viene un quadrato?
139.S: si ci sono quattro angoli retti... ma scrivi qualcosa
140.L: va bene ma cosa?...scusa?
141.Io: si?
142.L: abbiamo trovato qualcosa, volevamo provare a dire perché le altezze erano uguali
143.Io: si
144.L: allora se noi riusciamo a far vedere che questo è un quadrato
145.Io: quello?
146.L: si, con una rotazione le due altezze si vanno a sovrapporre
147.Io: perché ti serve il quadrato?
148.L: perché il quadrato con una rotazione ti da il lato, va bhé, anche con la circonferenza
149.S: ma la rotazione da cosa è definita?
150.L: cioè, noi la rotazione non è che l'abbiamo vista molto, non l'abbiamo fatta bene... la rotazione da cosa è definita?
151.S: non lo so
152.L: si ma qualcosa abbiamo fatto... allora la rotazione è definita da un centro quindi faccio una rotazione di centro...uffa questo lato è uguale a questo, l'altezza coincide...
153.S: no quello lo devi dimostrare
154.L: ah, allora abbiamo un lato... l'angolo retto e...
155.S: dovremmo trovare un altro lato o un altro angolo
156.L: per esempio l'angolo...
157.S: allora così lo proviamo con i criteri di uguaglianza
158.L: si, ma dobbiamo trovare ancora un angolo
159.S: proviamo a togliere un po' di cose dallo schermo, non si capisce più nulla
160.L: va bene, cancello tutto?
161.S: direi di no, va bhé, lascia perdere...

L supprime quelque chose sur l'écran

- 162.L: Abbiamo detto che l'angolo questo è rettangolo
163.S: il lato uguale, ci manca
164.L: ci manca questo angolo guarda...
.....
165.S: avevamo detto che il baricentro era il punto di incontro

166.L: si ma non ci serve

167.S: dunque..

168.L: Sono angoli opposti al vertice? Vedi questo è 180, abbiamo un angolo di 90° e di qua cosa abbiamo? Allora ci rimane fuori questo e questo, sono opposti al vertice

169.S: non sono opposti al vertice questi due

170.L: ah è vero

171.S: questo e questo sono uguali, ma perché?

....

172.L: basta solo questo e poi abbiamo finito, ci manca solo questa condizione, allora lato uguale a lato, angolo retto e angolo uguale perché?

...

173.S: se proviamo ancora a ragionare sulla somma degli angoli?

174.L: noi dobbiamo provare che questo è uguale a questo... questo angolo è retto

175.S: perché ?

176.L: perché questo è un quadrato

177.S: allora anche questo è retto...

...

178.S: aspetta, se tolgo da questo angolo retto questo pezzettino, e anche dall'altro tolgo il pezzettino, mi restano due angoli uguali

179.L: come come?

180.S: allora se tolgo lo stesso pezzettino, questo qui, da due angoli retti mi restano gli stessi angoli

181.L: è vero! Grande Sara

182.S: potremmo scrivere qualcosa adesso

183.L: si, ok, prendo un altro foglio

...

L écrit

184.L: Tesi, dimostrare altezze identiche, quali altezze? Allora altezza ...altezza KH è uguale ad altezza AW, poi WB è uguale a BK perché lati di quadrati di base BK e

185.S: no non sono questi i lati uguali, AB e BH sono uguali

186.L: Ah si il lato AB è uguale al lato BH perché lati del quadrato di base AB. Manca dimostrare che l'angolo ABC è uguale a KBH

187.S: perché dobbiamo dimostrare le altezze

188.L: allora ...

189.S: continua a scrivere, poiché l'angolo questo, come l'hai chiamato?

190.L: allora l'angolo WBK e ABH hanno una parte in comune

191.S: hanno una porzione di angolo in comune

192.L: ok, e

193.S: no di quali sono: CBA e HBK

194.L: allora CBA = HB

195.S: e HBK. Adesso siccome ciò che rimane è della stessa grandezza, quello che mi resta è uguale

196.L: allora essendo la parte in comune uguale.. giusto?

197.S: si, oppure meglio, cancella, sottraendo la parte in comune

198.L: allora sottraendo agli angoli retti l'intersezione dei due angoli, troviamo che le parti rimanenti

199.S: le parti rimanenti sono uguali per forza di cosa

200.L: sono uguali . Quindi viene dimostrata la tesi e perciò abbiamo

201.S: abbiamo dimostrato che le aree sono uguali

202.L: abbiamo dimostrato che essendo uguali le altezze e le basi l'area del triangolo esterno

203.S: l'area del triangolo esterno è uguale all'area del triangolo di partenza ABC

204.L: esterno è uguale al triangolo di partenza ABC

205.S: abbiamo finito.

206.L: Prof? Dobbiamo salvare?

207.P: no, riportate il disegno sul foglio

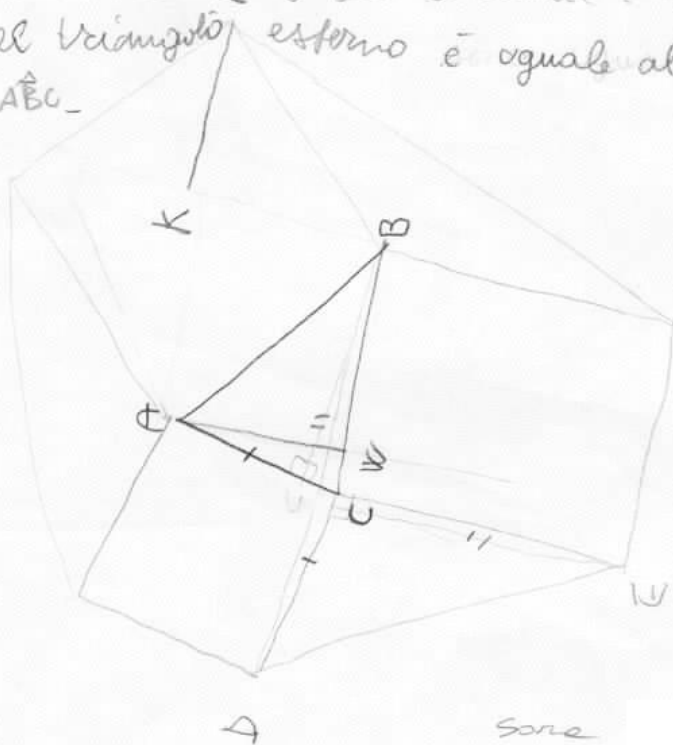
Ils font le dessin sur la feuille

TS dimostrare altezze identiche $KP = \overline{AW}$

$WB = BK$ perché lati del quadrato di base BK

$AB = BH$ perché lati del quadrato di base AB

Manca dimostrare che $\hat{A}BC = \hat{K}BM$, poiché $\hat{W}BK$ e \hat{ABH} hanno una porzione di angolo in comune ($\hat{C}BA = \hat{H}BK$), sottraendo agli angoli retti e' intersezione dei due angoli troviamo che le due parti rimanenti sono uguali. Quindi viene dimostrata la tesi e perciò abbiamo dimostrato che essendo uguali le altezze e le basi, e' area del triangolo esterno è uguale al triangolo di partenza $\hat{A}BC$.



Sore

Lorena

Annexe 2.8 : Binômes : Yael (Y), Gregory (G), classe Seconde en France.

L'enseignant fait ouvrir les fichés et moi je distribue les feuilles du travail.

1. Y : Regarde tous les constructions, quel bordel ! Alors, ABC est un triangle quelconque... bla bla bla... problème, comparer les aires de chacun des trois triangles avec l'aire du triangle ABC... donc...
2. G : il faut comparer celles des trois triangles
3. Y : arrête de dire de conneries

Ils rigolent

4. Y : putain, ça marche pas. Monsieur on peut pas mesurer les aires
5. Enseignant : tu peux bouger quoi sur la figure ?
6. Y : les sommets du triangle ABC ah mais c'est pour ça qu'on peut pas mesurer l'aire, parce qu'ils ne sont pas construits comme des triangles
7. Enseignant : oui, mais tu peux les construire comme des triangles
8. Y : et, oui.... et comme par hasard, nous constatons, tu vois, les aires sont égales
9. G : Elles sont égales
10. Y : bon alors ils ont dit de comparer les aires... les aires sont les mêmes
11. G : non, mais bon, il faut dire pourquoi aussi
12. Y : mais ça on peut le voir tout de suite
13. G : Tout de suite ?

Ils rigolent

14. Y : Bon, alors...

Y bouge la figure, les élèves ne parlent pas trop

15. Y : alignés parallèles perpendiculaires... mmm... bon mais alors, toi, tu n'a pas une idée ?
16. G : non, rien du tout
17. Y : On regarde les construction qu'ils ont fait, alors là apparemment ils ont fait un cercle, après ils ont pris ça et...
18. G : c'est quoi le rapport avec ce qu'on fait en ce moment ?
19. Y : mais arrête de dormir !... Bon mais ça m'énerve ! Tu sais qu'est ce qu'on fait ? On vas faire quoi ? On peut pas nous donner des indices ? ... Excusez moi ? Ne pouvez pas nous aider ?
20. Observateur : Mais, qu'est ce que vous voulez comme aide ?
21. Y : mais je ne sais pas, comment on pourrait commencer ? Il faut dire pourquoi les aires des triangles sont égales ?
22. Observateur : vous savez que les aires sont égales ?
23. Y : oui voilà
24. G : on les a mesurés
25. Observateur : ah bon et pourquoi alors les aires sont égales. En supposant que vous ne savez pas que les aires sont égales, comment vous faites ?
26. Y : ah bon, mais je ne savais pas avant d'ouvrir les yeux

On rigole

27. Y : alors tu vois ce triangle là et celui là, ils ont la même base
28. G : mais non
29. Y : mais si c'est un carré
30. G : mais c'est pas le même carré
31. Y : Mais si putain regarde, regarde là
32. G : Ah oui, d'accord
33. Y : celui là a la même base que celui là et celui là a la même base que celui là, et celui là aussi... mais s'ils ont la même base au niveau de la hauteur, bon alors si tu prends la hauteur, on va regarder la construction
34. G : la hauteur ?

35. Y : et oui l'aire est base par hauteur divisé par 2 ; qu'est ce que tu fais ?
36. G : Je réfléchis
37. Y : écris! Ils ont la même base, écris ! Il faut aller plus vite que ça.
38. G : alors c'est à toi d'écrire
39. Y : ouf, la même base.. attend je fais l'animation, ah putain merde...
40. G : ok ça va
41. Y : alors tu as réfléchi ?
42. G : j'ai réfléchi mais tu fais tourner la figure comment je fais à réfléchir
43. Y : il faut trouver la hauteur maintenant
44. G : mais la hauteur c'est pas la même !
45. Y : mais je te demande, mais leur rapport comment il est ? S'ils ont la même aire...
46. G : et oui, mais
47. Y : déjà il faut les tracer, alors, segment, oups
48. G : tu ne peux pas faire comme ça
49. Y : oh, alors elle est la médiatrice quand même
50. G : Mais la médiatrice ne dit pas grand-chose, pour faire la médiatrice tu peux faire le milieu
51. Y : non mais la hauteur ne passe pas par le milieu je suis désolé
52. G : mais non, mais la médiatrice non plus
53. Y : alors il faut faire la perpendiculaire et après on prend ça... et voilà... alors...
54. Observateur : ça va ?
55. Y : bon alors, ce triangle là et celui là ils ont la même base sur ce carré, donc celui-là a la même base sur celui- là sur ce carré et voilà et maintenant on va regarder les hauteurs, je ne sais pas...
56. Observateur : d'accord
57. Y : Voilà... voilà...
58. G : j'ai été obligé de me mettre avec toi
59. Y : alors segment, bon alors les hauteurs, oh merde !
60. G : qu'est ce que tu a fait là ?
61. Y : oh merde, attends, j'ai piqué ce que j'ai fait, c'est pas grave
62. G : mais tu fais quoi ?
63. Y : attends, on est bien parti avec ça, alors, les hauteurs, qu'est ce qu'on peut remarquer ?
64. G : arrête ce truc putain
65. Y : c'est pour regarder si la hauteur bouge... mais elle reste toujours la même... putain on a besoin d'aide... Hé on a besoin d'aide !
66. Moi : oui, dit moi
67. Y : on a construit les hauteurs pour comparer les triangles
68. Moi : lesquelles ?
69. Y : celui-là et celui-là par exemple, on a observé que les bases sont égales et... on a construit les... mais putain , je suis con moi, c'est pas la bonne hauteur
70. Moi : ah, alors voilà
71. Y : ah d'accord, bon, ça c'est la bonne hauteur, mais non j'ai pris cette base là pour faire la hauteur là, putain ! tu fais n'importe quoi
72. G : ueee, c'est toi qui fais tout ! Ne me cherche pas encore !
73. Y : il faut faire une droite perpendiculaire à ce segment, théoriquement ça va être par là parce que c'est l'orthocentre que...
74. G : ah oui, en effet je sais, alors la hauteur est là
75. Y : alors... c'est bon maintenant... qu'est ce qu'il faut faire ? Bon qu'est ce que tu m'avais dit tout à l'heure ?
76. G : non, mais rien
77. Y : alors la droite perpendiculaire à ce segment passe par là, et alors, merde, c'est tout planté, on est obligé de recommencer... alors la base elle est là...
78. G : mais non, c'est par celui-là qu'il faut faire le truc.. ;
79. Y : oui, on fait celui-là et on regarde celui-là
80. G : c'est pareil
81. Y : mais no, c'est pas pareil, si tu prends ça comme base et le machin perpendiculaire, je suis désolé, perpendiculaire
82. G : oui mais par là !
83. Y : Et bon, tu prolonges la droite et tu tombes par là... merde ça m'énerve...
84. G : c'est quoi cette merde ?
85. Y : et voilà la hauteur, elles sont les mêmes, mais c'est normal qu'elles sont les mêmes !
86. G : Et si tu vas mesurer ça va peut-être nous aider en effet !

...

87. Y : voilà ! Mais alors...le carré, oui il est bien là, la base elle est là et la hauteur elle est bien là, mais pourtant la base n'est pas la même, putain ça fait chier ! Mais on n'a pas fait la bonne base putain ! On est des cons !

Ils rigolent

88. Y : Putain, regarde il fallait la faire là

89. G : mais non

90. Y : mais oui, regarde... voilà on est arrivés... j'espère qu'elles seront les mêmes... et voilà, ok

91. G : oui, mais il faut le prouver

92. Y : oui, c'est vrai on a utilisé la mesure. comment on fait pour savoir si c'est le même ?

93. G : si on déplace les points...

94. Y : si on déplace les points on voit que les hauteurs sont toujours parallèles. Pourquoi ? On est bien partis !

95. G : si on va comparer la hauteur du triangle ABC à la place de cette hauteur et cette hauteur, ne sont pas parallèles

96. Y : alors attends je la construis... putain c'est merdique !

97. G : amène le dans une position plus normale le triangle

98. Y : voilà ça va mieux maintenant

99. G : voilà, mais où est ce qu'elle est allée ?

100. Y : putain elle a disparu, ah oui, c'est parce que ça je ne l'ai pas tracé parallèle

101. G : mais oui

102. Y : mais merde, attends attends parce que maintenant je ne vois plus le carré... théoriquement la base, donc cette base est la même de cela, ils ont la même base, ils ont une hauteur qui est la même, mais on peut pas mesurer, comment on peut le faire ? Alors ça c'est parallèle à ça...

103. G : c'est perpendiculaire

104. Y : ça là, ça c'est parallèle à ça et ça c'est bien perpendiculaire

...

105. Y : comment on peut le dire ? Je ne sais rien du tout ! Ouah là là... si on arrive à démontrer ça on a fini... parce que la base est la même parce qu'elles sont attachés au même carré, si on démontre qu'ils ont la même hauteur alors ils ont la même aire.

106. G : C'est dur !

107. Y : oh là là, je ne comprend rien !!!

108. G : ça fait chier

109. Y : Pourquoi ils ont la même hauteur ? Putain merde...

...

110. Y : ils ont la même base ils ont la même aire donc ils ont forcément la même hauteur !! Oh là là là, je n'arrive pas !

...

Silence (presque 6 minutes) : les élèves ne font plus rien.

111. Enseignant : Alors ça va ?

112. Y : nous avons vu qu'ils ont la même base, mais on n'arrive pas à dire qu'ils ont la même hauteur... celui-là c'est le même que celui-ci, mais autour du point, il a tourné autour du point

113. Enseignant : il a tourné ?

114. Y : oui, il a tourné de ... il a tourné de 90° , c'est une rotation

115. Enseignant : mais bon, et alors, les rotations ça conserve quoi ?

116. Y : Les angles et ... ah oui, les longueurs

117. Enseignant : et voilà, mais il faut expliciter qu'elle est une rotation ; comment tu sais qu'elle est une rotation ?

118. Y : parce que ça c'est parallèle à ça

119. G : mais ça, ça ne veut rien dire

120. Y : mais oui autrement comment tu fais pour savoir de combien ils ont tourné ? Mais bon écris

121. G : Alors, on a déjà écrit «On compare le triangles ABC et un des trois autres, ils ont la même base parce qu'ils sont les côtés contre même triangle et ils ont la même hauteur en mesurant »

122. Y : alors écris : on voit que le triangle formé par la base est identique à celui... est identique à celui formé par la hauteur dans le triangle

- 123.G : c'est mieux de mettre 2 pour le deuxième triangle.
- 124.Y : bon, on voit que les triangles ABC, non merde, le deux triangles sont égaux car le triangle 2 a tourné autour de A par une rotation de 90° . Conclusion, non, propriété, non, comme la rotation conserve les angles et les longueurs, alors les deux triangles sont égaux, donc ils ont la même base et la même hauteur. Donc les deux triangles précédemment cités
- 125.G : précédemment cités ?
- 126.Y : oui, précédemment cité ont la même hauteur
- 127.G : Mais tu l'a déjà démontré ça ?
- 128.Y : oui
- 129.G : ah oui la même hauteur oui
- 130.Y : oui, la même hauteur et la même base
- 131.G : Mais tu l'as démontré qu'ils ont la même base ?
- 132.Y : mais oui putain
- 133.G : tu a dis qu'elles sont égales mais tu n'a pas dit pourquoi
- 134.Y : mais oui, ils ont la même hauteur et la même base donc leurs aires sont égales
- 135.G : bon ok
- 136.Y : il faut encore écrire que pour les autre triangle est pareil, alors...
- 137.G : idem pour les autres triangles
- 138.Y : Donc les trois triangles ont la même aire que le triangle ABC
- 139.G : on a fini
- 140.Y : oui il faut appeler le monsieur.

- ~~On voit que~~
- ~~les~~
- * On compare le triangle ABC et un des 3 autres :
 - m^e base parce qu'ils sont ts les 2 contre le m^e triangle
 - m^e hauteur (en mesurant).
 - * On voit que triangle formé par la ~~hauteur~~ ^{hauteur} de ~~le~~ ^{triangle ABC} est identique à celui formé ⁽²⁾ par la hauteur de le triangle.
 - * On voit que les 2 triangles ~~ABC~~ sont égaux car le triangle (2) a tourné autour de A par une rotation de 90° .
 - ~~comme~~ ~~la~~ ~~rotation~~ ~~conserve~~ ~~les~~ ~~angles~~ ~~et~~ ~~les~~ ~~longueurs~~, alors les 2 triangles sont égaux donc ils ont (la m^e base) et la m^e hauteur.
 - * ~~Donc~~ Les 2 triangles précédemment cités ont la m^e hauteur ~~et~~ ^(ABC et l'autre) et la m^e base de leurs aires sont égales.
 - * ~~IDEM~~ pour les autres triangles. DONC les 3 triangles ont la m^e aire que le triangle ABC.

Annexe 2.9 : Matteo, Sara, classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

Sara
Matteo

II C

NOME E COGNOME

Descrizione della figura
 ABC è un triangolo qualunque. All'esterno dei tre lati del triangolo sono stati costruiti tre quadrati. Congiungendo le estremità libere dei quadrati sono stati trovati tre nuovi triangoli.

Problema
 Confrontare l'area di ciascuno di questi tre triangoli con quella del triangolo ABC.

Spiegazione
 Abbiamo provato, tramite misurazione dei lati e cercando di calcolare le varie aree attraverso costruzione delle altezze, e abbiamo rilevato che:

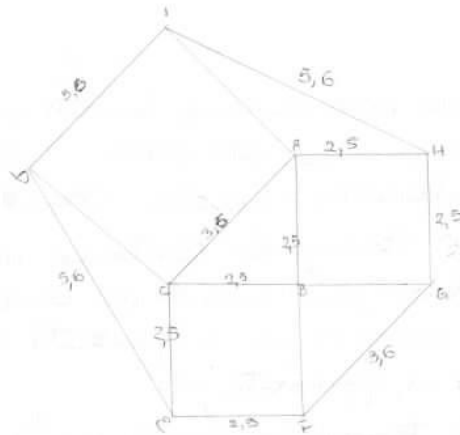
- 1- se trasformiamo il triangolo centrale in equilatero le tre aree dei triangoli aventi per base il lato esterno che congiunge i quadrati sono uguali, così come i perimetri; *
- 2- se trasformiamo il triangolo centrale in isoscele i triangoli aventi per cateto un lato del quadrato che si forma sul lato minore del triangolo interno sono uguali e il terzo triangolo diventa isoscele;
- 3- se il triangolo è scaleno le tre aree sono diverse; *
- 4- se il triangolo centrale è rettangolo con i due cateti diversi tra loro si forma un altro triangolo rettangolo uguale a quello interno, ma

opposto all'angolo di 90° ;
 e se i due cateti risultano uguali si forma ancora
 un triangolo rettangolo uguale a quello interno e
 opposto al suo angolo retto, mentre i triangoli
 esterni che hanno un lato uguale, che appartiene
 al quadrato costruito sull'ipotenusa, sono uguali
 tra loro.

Conclusione:

...modificando la figura di partenza e
 facendo assumere al triangolo centrale
 posizioni particolari i triangoli esterni si modificano
 di conseguenza.

Es.



$$\begin{aligned} DE &= IH \\ FG &= AC \\ \triangle ABC &= \triangle BCF \\ \triangle ACD &= \triangle DEH \end{aligned}$$

Se i cateti del triangolo interno sono uguali allora
 i triangoli aventi un solo cateto per lato sono equiva-
 lenti

Annexe 2.10 : Binômes : Maria, Luisa, classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

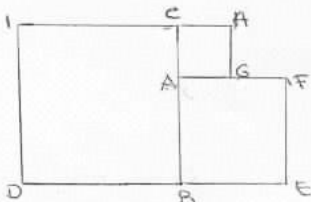
MARIA
LUISA

NOME E COGNOME

Descrizione della figura
ABC è un triangolo qualunque. All'esterno dei tre lati del triangolo sono stati costruiti tre quadrati. Congiungendo le estremità libere dei quadrati sono stati trovati tre nuovi triangoli.

Problema
Confrontare l'area di ciascuno di questi tre triangoli con quella del triangolo ABC.

PUNTO 1. Costruzione della figura utilizzando Cabri 1.
PUNTO 2. A occhio i 4 triangoli della figura sono equivalenti.
PUNTO 3. Utilizzando il dragging azzecciamo un'ipotesi (non ci uccide!). Ruotando la figura abbiamo fatto coincidere le basi dei 3 triangoli con 2 lati dei 3 quadrati posti sulla stessa retta. E abbiamo notato che le aree dei triangoli si sommano e perciò hanno, secondo noi, tutti e 4 la stessa area.



PUNTO 4. Con altre prove abbiamo fatto uccidere la prima ipotesi.
PUNTO 5. Abbiamo trovato un rapporto tra i lati dei triangoli. (V. FIGURA)
PUNTO 6. Abbiamo cercato di ipotizzare q.c. utilizzando i 3 principi di congruenza fra triangoli ma è tutto inutile.

Annexe 2.11 : Binôme: Giacomo (G), Uros (U), classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

1. Giacomo: avevi ragione te
2. Observateur: perché aveva ragione lui?
3. Giacomo: allora qui l'area è 28,7 e qui 28,8
4. Uros: la differenza è minima
5. Giacomo: e si, però....
6. Observateur: come avete fatto a calcolare le aree?
7. Giacomo: Per tutti i triangoli base per altezza diviso 2
8. Uros: le aree sono uguali, ci sarà un margine di errore

9. Giacomo: le aree sono uguali
10. Uros : si è ovvio, la base
11. Giacomo: l'area è base per altezza. Questo lato è uguale a questo e questo è uguale a questo.... Però non sono triangoli congruenti...
12. Uros: se tracciamo l'altezza?
13. Giacomo: se abbiamo l'altezza...aspetta le costruiamo

14. Giacomo: se noi abbiamo le altezze
15. Uros: forse
16. Giacomo: aspetta, non è uguale a questa questa parte? Questo è uguale a questo, questo idem e questo angolo anche... che genio

17. Giacomo: Abbiamo trovato che se il triangolo è equilatero questa metà è uguale a questa metà e quindi sono uguali anche le aree
18. Osservatore: e nel caso di un triangolo qualunque
19. Uros: nel caso del triangolo equilatero anche i perimetri dei tre triangoli esterni sono uguali
20. Giacomo: nel caso di un triangolo qualunque l'area rimane sempre uguale
21. Uros: questo è un caso limite. E quindi se muoviamo la figura anche se cambia tutto, sembra che ci sia una regolarità.
22. Osservatore: Siete riusciti a dimostrarlo?
23. Uros: No, ci pensiamo ancora un po'
24. Osservatore: va bene
- 25.
-

26. Giacomo: Abbiamo dimostrato per il triangolo equilatero
27. Osservatore: allora, questo lo avete dimostrato nel caso di un triangolo equilatero. E nel caso generico?
28. Giacomo: Allora, qui l'angolo è di 90 questo qua tra la riga blu e la riga rossa.
29. Osservatore: si
30. Giacomo: Poi abbiamo che questo è uguale a questo perché lato del quadrato e poi questo angolo per differenza è uguale a questo. Quindi hanno un lato e due angoli uguali e quindi sono congruenti
31. Osservatore: va bene
32. Uros: se sono congruenti hanno la stessa altezza e quindi i due triangoli hanno la stessa area
33. Osservatore: va bene, scrivete quello che avete detto per favore.

NOME E COGNOME

Giacomo

UROS

Descrizione della figura

ABC è un triangolo qualunque. All'esterno dei tre lati del triangolo sono stati costruiti tre quadrati. Congiungendo le estremità libere dei quadrati sono stati trovati tre nuovi triangoli.

Problema

Confrontare l'area di ciascuno di questi tre triangoli con quella del triangolo ABC.

Il triangolo centrale ha 2 lati uguali con ognuno dei triangoli esterni e ognuno di quelli esterni ha un lato uguale con gli altri (più precisamente con quello con cui condivide il quadrato).

Se il triangolo interno è rettangolo allora anche il triangolo esterno ^{con l'angolo} ^{di 90°} ^{di 90°} è rettangolo ed è uguale perché ha i 2 lati dei quadrati uguali e un angolo.

~~Ma se il triangolo interno è rettangolo allora anche il triangolo esterno è rettangolo ed è uguale perché ha i 2 lati dei quadrati uguali e un angolo.~~

~~Ma se il triangolo interno è rettangolo allora anche il triangolo esterno è rettangolo ed è uguale perché ha i 2 lati dei quadrati uguali e un angolo.~~

L'area del triangolo interno è uguale all'area degli angoli esterni e quindi l'area di tutti i triangoli è uguale.

Quando il triangolo centrale è equilatero, non solo l'area dei triangoli è uguale, ma anche il perimetro dei triangoli:

Se il triangolo interno è equilatero e lo dividiamo dall'altezza, notiamo che la sua metà è uguale a quella dell'altro triangolo esterno ~~che ha lo stesso lato~~.

Perché hanno un lato uguale (quello del quadrato) un angolo di 90° e quindi gli altri 2 angoli sono di 60° e di 30° . Sono uguali per il 2° criterio di uguaglianza ALA.

Abbiamo dimostrato che ~~il~~ ^{una} altezza ~~del~~ del triangolo interno è uguale all'altezza dello stesso lato corrispondente di un triangolo esterno.

$$\hat{A}GB = \hat{F}DB = 90^\circ$$

$AB = BF$ perché lati di un ~~triangolo~~ quadrato

$$\hat{G}BD = \hat{A}BF = 90^\circ \text{ perché angoli di quadrati}$$

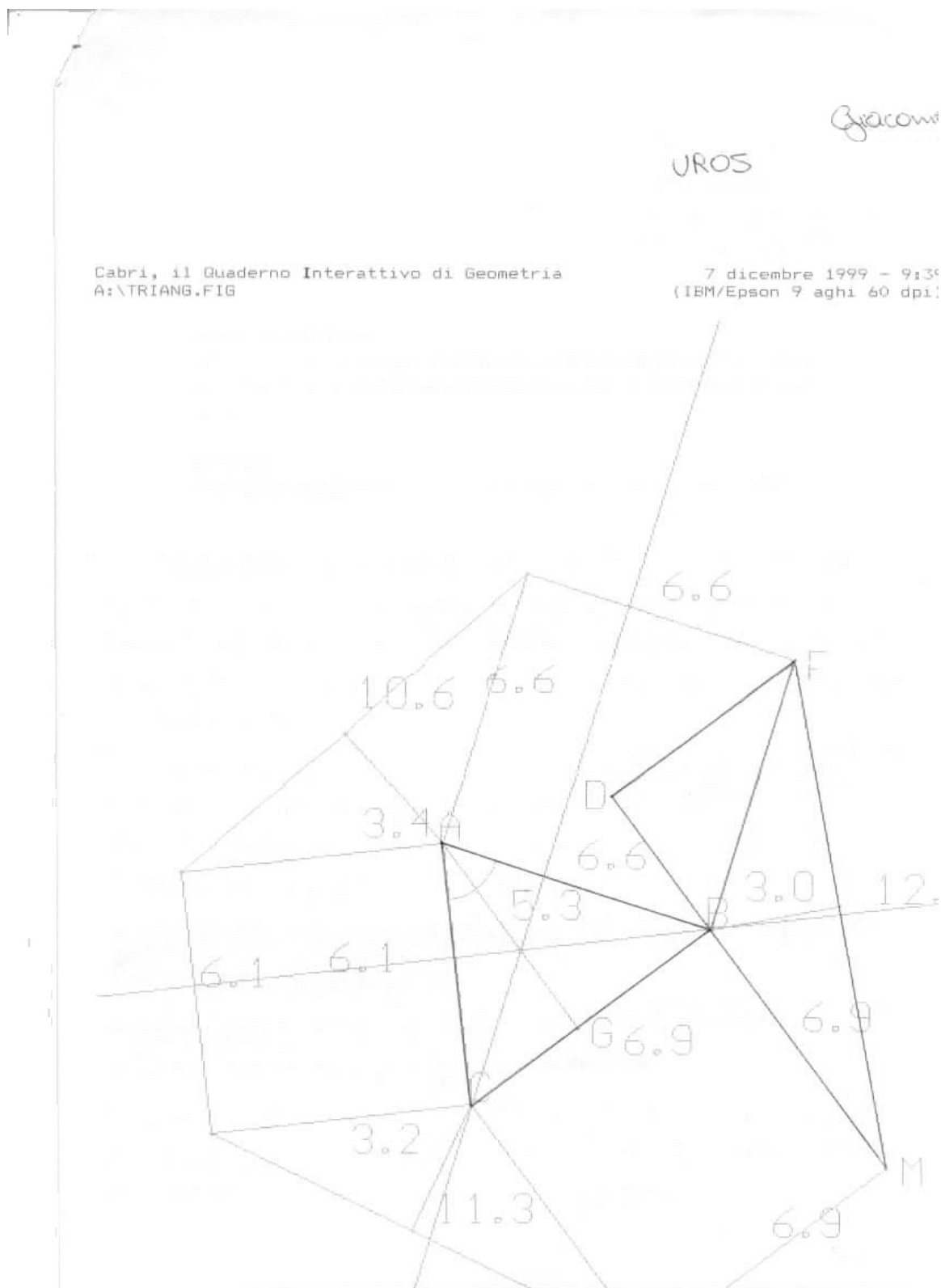
$$\hat{C}BA + \hat{A}BD = \hat{A}BD + \hat{D}BF$$

$$\hat{C}BA - \hat{A}BD = \hat{D}BF - \hat{A}BD$$

$$\hat{C}BA = \hat{D}BF$$

$\hat{A}GB = \hat{D}BF$ × il criterio di uguaglianza del triangolo rettangolo 2 angoli e un lato.

$AG = DF$ perché lati corrispondenti di triangoli =
le altezze dei triangoli $\hat{A}CB$ e $\hat{F}BM$ sono uguali
 $\hat{A}GB$ $\hat{F}D$



Annexe 2.12 : Binôme : Nathalie (N), Anna (A), classe Seconde en France.

L'enseignant fait ouvrir les fichiers et je distribue les feuilles du travail

1. A : Alors ABC est un triangle quelconque, a l'extérieur du triangle trois carrés ont été construits sur chacun des trois côtés. On construit trois nouveaux triangles en reliant les sommets libres des carrés. Comparer les aires de chacun des trois triangles avec l'aire du triangle ABC
2. N : Alors, calcul d'aire
3. A : tu arrive à calculer les aires
- 4.
5. N : non, regarde... le carré a tous les côtés égaux, donc ce côté du triangle c'est la même chose que ça.
6. A : oui, attends attends, tu veux que je te dise ce qu'on va faire ?...
7. N : Alors, on prend ça et ça, ça et ça et ça et ça, ... donc, moi je te dis qu'il faut faire les hauteurs. Tu es d'accord ? Parce que l'aire se trouve base par hauteur divisé par deux
8. A : oui, il faut écrire tout ce que je fais, c'est pour elle, pour Bettina
9. N : oui, c'est où les hauteurs ?
10. A : Comment ça ce fait une hauteur ?
11. N : droite perpendiculaire par ce point ... ok...
- ...
12. A : ok, là on a mis des hauteurs
13. N : Mais ça c'est les médiatrices, elles passent au milieu des côtés
14. A : Mais tu as raison, regarde ce segment...
15. N : le segment ça passe par les sommets et par le milieu de..
16. A : attends il faut remarquer le point, on va mettre B', ça c'est A' et ça c'est C', tu es d'accord
17. N : oui
18. A : là on va faire des petits segments
19. N : alors, qu'est ce qui se passe ?
20. A : si tu déplace la figure regarde, regarde...
21. N : Il faut réfléchir, je ne comprends pas du tout !
- ...
22. Moi : Ca va ?
23. N : on a pas fait grand-chose : on a cherché les longueurs pour calculer les aires
24. Moi : vous avez déjà découvert comment elles sont les aires ?
25. A : Mais oui, elles sont égales, mais il faut démontrer
- ...
26. A : ah tu marques ?
27. N : oui
28. A : alors tu dis que les hauteurs sont les médianes de ce triangle
29. N : oui

Elles parlent avec les camarades, elles rigolent

30. A : alors, tu as dit que ce sont les médianes non ?
31. N : oui
32. A : qu'est-ce qu'il faut faire ? Le problème c'est quoi ? Alors, comparer les aires...
33. N : Donc qu'est ce qu'on va faire ? On peut vérifier déjà... on va faire un segment d'ici à ici, un segment d'ici à ici et a partir de là on va faire la mesure en centimètres, donc la longueur de ce segment... alors calculatrice... ça multiplié par segment ça fait...
34. A : c'est 5,96, merde, on est dans la merde
35. N : quoi ? Quoi ?
36. A : mais non il faut diviser par deux, j'avais oublié, attends, où est ce que c'est les parenthèses ?... Voilà, c'est 2,98
37. N : donc...
38. A : on fait la même chose là, alors, ça multiplié par ça et divisé par deux... et voilà c'est encore 2,98... alors tu dis que les aires sont égales
39. N : attends, j'écris ce truc là

N écrit ce qu'elles ont trouvé

40. A : et voilà, déjà on sait que les aires sont pareilles... donc... à partir de là... et il faut prouver après, oh là là !
41. N : on va prouver
42. A : alors, on va faire une droite perpendiculaire et le segment... alors... toi tu as rien remarqué ?
43. N : et bon, ce côté du triangle c'est le même que celui là
44. A : ah bien sûr
45. N : et cette hauteur c'est égale à celle-là
46. A : mais non, c'est pas la hauteur celle-là !
47. N : C'est la médiane alors
48. A : oui c'est la hauteur de ce triangle là, et la médiane du triangle ABC
... *silence*
49. N : alors, qu'est ce qu'on peut dire ? Ca plus ça... non, ça sert à rien
... *silence*
50. A : c'est dur
51. N : Bon alors nous on a multiplié ça par ça et ça par ça
... *silence*
52. A : mais juste avec cette propriété comment on peut faire ?
53. N : je réfléchis mais en effet je suis déconcentrée
... *silence*
54. A : on prend celui-là et celui-là alors
55. N : la hauteur est par là,
... *silence... les élèves sont bloquées depuis longtemps. Elles m'appellent*
56. Moi : oui ? qu'est ce que vous avez trouvé ?
57. N : mais la hauteur multipliée par la base c'est égal à la hauteur multipliée par la base
58. Moi : quelles triangles vous considérez ?
59. N : celui-là et celui-là
60. Moi : ok et quelles bases vous avez comparées ?
61. N : celle-là et celle-là
62. Moi : donc les bases que vous avez comparées ne sont pas égales
63. N : non, mais quand tu multiplies cette base par la hauteur de ce triangle on trouve que les aires sont égales
64. Moi : oui, mais il est peut-être plus facile de comparer des bases égales
65. A : ah oui, d'accord, c'est vrai parce que ces deux bases sont égales
66. N : ah oui c'est vrai
67. A : donc déjà si on prend cette base et cette base, déjà les deux bases sont égales, donc en effet il faut comparer les hauteurs
68. N : il faut les construire sur ces bases
69. A : oui, on va prendre la droite perpendiculaire... et après on prend le point d'intersection... et voilà
70. N : Il faut comparer la base et la hauteur de ce triangle ABC et de ce triangle là
71. A : Comment on peut expliquer que ça c'est égal à ça ? Donc là tu as expliqué ce que j'ai fait, et tu dis qu'on n'a plus qu'à dire que la hauteur de ACB c'est la même que la hauteur de ce triangle là.

N écrit sur la copie

72. A : comment on peut comparer ça ? Peut-être Pythagore ?... Il ne reste qu'à prouver que ça c'est égal à ça... Pythagore ou un truc comme ça ?... Déjà ça c'est perpendiculaire à ça, comment on peut prouver que ça c'est égale à ça merde ?

... *silence*

73. A : je n'arrive pas..
74. N : alors...
75. A : on reste plus qu'à prouver que ça c'est égal à ça, ou si tu préfères que ça c'est égal à ça parce que par Pythagore
76. N : ah oui
77. A : comme tu veux, tu choisis ce que tu veux mais tu le fais !

78. N : il ne reste qu'à prouver que les hauteurs sont égales, ou bien que les côtés sont égaux, parce que par Pythagore aussi les hauteurs sont égales... bon mais comment ?

79. A : Je ne sais pas...les angles sont des angles droits et aussi les autres angles sont égaux, mais..

... *silence*

80. A : ça c'est égal à ça et ça c'est égal à ça

81. N : et oui, mais..

... *silence*

Les élèves n'arrivent pas à prouver que les segments sont égaux

82. A : Attends, il faut trouver un truc

83. N : mais si tu prend le cosinus.. il faut voir que les angles sont égaux

84. A : attends attends j'ai trouvé

85. N : ah oui ?

86. A : je ne suis pas sûre, alors ça c'est égal à ça, ça c'est égal à ça, donc sur cet angle de 360° reste plus que ça c'est égal à ça et que ça c'est égal à ça... bon mais non... je me suis trompée

87. Observateur : ça va ?

88. N : tu veux dire que ces angles sont égaux parce qu'ils sont opposés

89. A : oui, mais si on prouve que les angles opposés sont égaux ça sert à quoi ? Comment on peut dire que les hauteurs sont égales ?

90. N : Et bon si les côtés sont égaux et les angles sont égaux alors par une rotation

91. Moi : ça va ?

92. A : non, pas trop, on n'arrive pas à prouver que ce segment c'est égal à ce segment ou bien que ce côté là est égal à ce côté là

Les élèves ne terminent pas

NOM ET PRENOM

Mathias

Anna

MAB

Description de la figure

ABC est un triangle quelconque. A l'extérieur du triangle, trois carrés ont été construits sur chacun des trois côtés. On construit trois nouveaux triangles en reliant les sommets libres des carrés.

Problème

Comparer les aires de chacun des trois triangles avec l'aire du triangle ABC.

* Nous avons tracé les hauteurs des 3 triangles ayant chacun pour sommet un point du triangle ABC.
grâce aux mesures, nous constatons que les 3 hauteurs passent par les milieux des côtés du triangle ABC et par leurs sommets = ce sont des médianes.

⇒ Les hauteurs ayant pour sommets ceux du triangle ABC sont des médianes pour ce triangle.

* Grâce à l'outil "Longueur du segment", on mesure les côtés de chaque triangle et les hauteurs. Puis, on calcule l'aire de chaque triangle en faisant la formule $\frac{\text{côté} \times h}{2}$.

⇒ On remarque que chaque triangle a la même aire que le triangle ABC (2,35 cm²)

* On veut comparer 2 bases pour savoir s'ils ont la même aire. On prend le côté [AB] et qui est égale à un côté du carré opposé. Comme on sait que les 2 bases sont égales, il nous reste à prouver qu'ils ont la même hauteur.

* Si on fait une rotation et on constate que les 2 hauteurs ont même mesure et que les 2 angles qui interceptent le même point sont égaux.

Annexe 2.13 : Binôme : Federico (F), Stefano (S), classe de 3^e année du lycée (16/17 ans, Première en France).

1. S : allora, cosa dobbiamo fare ?
2. F : allora, dobbiamo confrontare le aree dei triangoli
3. S : Intanto possiamo dare un nome a tutto, altrimenti poi non ci capiamo niente
4. F : ok, allora questo punto lo chiamiamo D... questo E... L,M,N

F nomme les sommets qui ne sont pas encore nommés sur la figure de Cabri.

5. F : Dobbiamo costruire la retta perpendicolare
6. S : retta perpendicolare ?
7. F : sì per costruire l'altezza... allora retta perpendicolare... poi prendo il punto di intersezione e tracciamo il segmento

F dessine la hauteur du triangle ABC

8. S : Chiamiamolo H questo punto
9. F : ok, H, adesso facciamo la stessa cosa per gli altri ... cioè costruzione... retta perpendicolare, poi facciamo retta perpendicolare, poi andiamo su edizione ...intersezione di due punti, questo punto e poi segmento...nascondiamo la retta e facciamo la stessa cosa per gli altri...costruzione...

F construit les hauteurs de chaque triangle

10. F : adesso andiamo a vedere le misure ?
11. S : sì
12. F : allora per ora confrontiamo le misure dei lati e delle altezze...poi dovremo confrontare gli angoli.... per calcolare le aree abbiamo quindi i dati a nostra disposizione...hai la calcolatrice ? Così dovremmo riuscire a calcolare le aree
13. S : sì aspetta che la prendo

F cherche les mesures des segments sur Cabri pendant que S fait le calcul des aires sur la calculette

14. F : allora 4 e 8 per 2 e 9 diviso 2...aspetta la matita dove è ? Ecco così scrivo il risultato...area ABC
- ...
15. S : 6,96
16. F : 6,96, bene quindi ...
17. S : allora AD che è ...dunque il triangolo ADE ha area 7,11
18. F : allora area ADE 7,11
19. S : buono buono
20. F : abbiamo l'area ACN che è 5 e 8 e 4,4
21. S : sì, quindi viene 6,96
22. F : esattamente identica come area
23. S : sì sì però
24. F : sì lo so dobbiamo provarlo
25. S : sì ma gli angoli sono opposti al vertice
26. F : sicuro ?no ! Perché vedi che l'angolo tra altezza e base è più ampio ?no aspetta hai ragione sono opposti al vertice, sono due triangoli rettangoli
27. S : sono rettangoli ? no non è detto
28. F : hai ragione no, va behé poi ci pensiamo finiamo di calcolare le aree allora manca l'area di BLG
29. S : allora viene 6,93
30. F : dobbiamo scrivere tutto sul foglio... facciamo un disegno e scriviamo queste cose

F rédige sur la feuille les données que les élèves ont trouvé

31. F : allora abbiamo un'area che è esattamente uguale
32. S : sì ma c'è una differenza minima
33. F : guarda 7,11 meno 6,96 quanto è ?
34. S : 0,15

35. F : e 6,93 più 6,96
 36. S : 0,99
 37. F : ora fai la somma e dividi per tre
 38. S : la somma di cosa ?
 39. F : di 6,93 poi 6,96 e 7,11 dovrebbe venire circa 6,96
 40. S : si
 41. F : aspetta un attimo che controllo gli angoli, controllo le perpendicolarità. Sono triangoli
 42. S : questo angolo è uguale a questo perché questi sono quadrati
 43. F. si, questo angolo è uguale a questo, però se anche questo fosse uguale a questo, dovrebbero avere segmenti proporzionali perché sarebbero triangoli simili giusto ?
 44. S : no, non è detto
 45. F : no, è vero perché non sappiamo nulla sui lati... aspetta, allora... ABC è uguale a questo perché l'angolo è di 90° e questo lato è uguale a questo ovviamente...
 46. S : si però se questo è un angolo retto
 47. F : aspetta un attimo allora questi angoli sono opposti al vertice, qui sul punto C...ma come posso ricavarli gli angoli su Cabri ?
 48. S : vai su angoli
 49. F : aspetta un attimo...allora A...C...B è 90° e N...C...M 90°
 50. S : lo so ma
 51. F : aspetta, questi sono 90° , queste sono le altezze vorrei capire il rapporto che c'è con le aree..
 52. S : l'angolo non è opposto al vertice,
 53. F : va bene, l'angolo non è opposto al vertice, però però questo lato è uguale a questo perché quadrati... e se andassimo sulla formula di Erone ? Non la conosci ? e una formula per calcolare le aree
 54. S : va bhé ma...
 55. F : se noi riusciamo a provare... allora questo è uguale a questo per forza
 56. S : si
 57. F : questo è uguale a questo...siamo sicuri che la formula di Erone non ci serve ?
 58. S : questo rettangolo è comunque rettangolo...no, non è rettangolo, aspetta rifacciamo i conti 7,6 per 4 e 2 viene 14 e 4 e se facciamo questo per questo viene... 14.4
 59. F : viene esattamente lo stesso risultato
 60. S : quindi questo triangolo e questo hanno la stessa area... se faccio l'area di questo mi viene... 14 e 5
 61. F : ma scusa un attimo... L'approssimazione può essere a un decimo ? Questo approssimato viene praticamente uguale a questo
 62. S : Si però dobbiamo provare che sono uguali
 63. F : per il momento possiamo far vedere che la differenza è molto piccola...tanto c'è un doppio errore perché dividendo per due...
 64. S : si è vero
 65. F : allora facciamo un po' la somma dei risultati trovati e dividiamo per due per esempio 6,96 più 14,4 diviso due quanto fa ?
 66. S : ... allora...23,36
 67. F : aspetta che intanto scrivo
 68. S : poi l'altro fa 22,925 poi 23,37 e 22,935
 69. F : vedi l'errore mi sembra piccolo
 70. S : si, se calcoliamo l'errore relativo possiamo dire che le aree sono praticamente uguali...qui si passa da 22 e 9 a 23
 71. F : calcoliamo gli errori relativi
 72. S : dobbiamo fare la somma degli errori relativi
 73. F : calcoliamo gli errori relativi con l'area, l'errore relativo è l'errore fratto misura...diamo un errore di 0,05 ? Mi sembra ragionevole
 74. S : va bene, quindi qui facciamo 0,05 diviso 7,3 viene 0,007
 75. F : quindi il 7%
 76. S : poi facciamo 0,05 fratto 13 e 1 e viene 0,8
 77. F : quindi il totale è il 1,5%, non è tanto
 78. S : aspetta che li calcoliamo tutti

Les élèves calculent les erreurs relatives de chaque aire et ils les écrivent sur la feuille

79. F : allora gli errori sono compresi tra l'1,5 e l'1,9 per cento, allora... aspetta un attimo, calcolami l'1,5 per cento di 23,36

80. S : fa... 0,35
81. F : ecco, poi facciamo 22,925 per 1,7 per cento ?
82. S : fa 0,39
83. F : ancora, 23,37 per 1,6%
84. S : 0,34
85. F : e 22,935 per 1,9%
86. S : 0,44
87. F : questi sono gli errori assoluti, il che vuol dire che ci stiamo ampiamente... diciamo che è una tesi
88. S : Diciamo che potrebbero essere tutte uguali le aree
89. F : aspetta scriviamo questo.. tenendo conto che I è un intervallo in cui le aree sono uguali, ipotizziamo che le aree dei triangoli siano uguali. Allora a questo punto dobbiamo dimostrarlo per saperlo con certezza. Allora prendi un altro foglio di protocollo
90. S : scusa un attimo, tutti questi lati sono uguali perché questi sono quadrati
91. F : a me viene in mente Pitagora ma... il triangolo è qualunque ma se noi lo consideriamo rettangolo. diciamo che questo lato è uguale a questo, questo è ancora uguale a questo, ma
92. S : ogni triangolo ha un lato uguale a ogni altro
93. F : quindi diciamo che questo è uguale a questo ma è anche uguale a questo
94. S : idem per questo che è uguale a questo e uguale a questo
95. F : facciamo un attimo un disegno...

Il dessine la figure sur la feuille

96. F : allora abbiamo trovato che due lati sono uguali con i lati del triangolo ABC
97. S : si ha due lati uguali
98. F : a questo punto possiamo osservare le altezze per calcolare l'area oppure il terzo lato per la formula di Erone
99. S : si
100. F : scriviamo questo, abbiamo visto che 2 lati di ogni triangolo sono congruenti con quello del triangolo centrale.
101. S : e adesso ?
102. F : aspetta sono isoperimetrici questi due triangoli? Sono isoperimetrici mi ci giocherei le palle!
103. S : Aspetta 5 e 8 , 4 e 2 e però cambia la base. La base è 9 e 7. Fa 19 e 7
104. F : questi numeri..
105. S : l'altro viene 5 e 8 più 4 e due più... non viene uguale
106. F : allora non sono isoperimetrici... però aspetta forse possiamo dire che i tre lati sono in rapporto tra di loro
107. S : sono in rapporto tra di loro ?
108. F : no, non lo so vorrei vederlo... però non sono triangoli simili, però potrebbero esserlo... allora 4,6
109. S : ma allora, se qui c'è un triangolo rettangolo questi due
110. F : allora se abbiamo un triangolo rettangolo questo è di 90° , e i lati sono
111. S : i lati sono uguali perché lati di quadrati
112. F : quindi il triangolo che ha l'angolo opposto all'angolo retto è congruente perché due triangoli rettangoli che hanno due lati uguali sono uguali
113. S : e quindi hanno la stessa area
114. F : poi questo è uguale a questo
115. S : quest'altro lato è uguale a quest'altro perché lati di quadrati
116. F : aspetta quindi gli angoli
117. S : non sono uguali
118. F : allora questo era esattamente identico, ma questi
119. S : quelli non sono uguali

Les élèves dessinent les autres triangles sur la feuille en considerant toujours ABC rectangle

120. S : se il triangolo fosse equilatero
121. F : se fosse equilatero

Il considère la figure sur Cabri en considérant le triangle ABC équilatère

122. S : sarebbero tutti uguali i triangoli, dai si vede poi hanno due lati uguali e le basi anche, hanno le stesse misure, anche gli angoli comunque

- 123.F : aspetta i tre triangoli sarebbero tutti uguali perché ci sono due lati e l'angolo compreso ma rispetto al triangolo ABC
- 124.S : idea questo è angolo retto e questo è angolo retto e questi due hanno due angoli uguali, questi sono diventati due triangoli uguali.... Allora questo è retto questo è retto questo due
- 125.F: aspetta questo è retto, sì, questo triangolo è isoscele quindi questi due angoli alla base sono uguali e questo angolo divide in due parti l'altezza e i due triangolini sono uguali perché..... perché questo lato è in comune, questo è angolo retto questo angolo è uguale quindi anche l'altro lo sarà.
- 126.S: se il triangolo è isoscele
- 127.F: se il triangolo è isoscele, l'altezza è l'asse di simmetria e se è isoscele ha due lati uguali e due angoli uguali
- 128.S: si d'accordo, i due triangolini sono uguali
- 129.F: però scusa un attimo questo angolo è uguale a questo, l'altezza è diventata asse di simmetria quindi questo angolo è uguale a questo angolo
- 130.S: scusa ma
-
- 131.F: è uguale ad AC, si si perché questo è 90° questo 60 e questo 30, si si 90 60 e 30 quindi allora...
- 132.S: stai calmo, respira e cerca di spiegarmi...
- 133.F: allora sappiamo che questo è isoscele perché ha due lati uguali e due angoli congruenti, poi sappiamo che dato che questo è equilatero, i suoi angoli misurano 60 e questo esterno misura 120 che diviso dall'altezza diventa 60 e quindi gli altri sono 30.... per il teorema che gli angoli interni di un triangolo sono un angolo piatto, questo angolo misura 120 e siccome questo è un triangolo isoscele questi angoli alla base misurano 30
- 134.S: ah ok ci sono arrivato anch'io....ho capito ho capito....
- 135.F: Allora questo triangolo è ottusangolo....
- 136.S: si ma...
- 137.F: però anche in questo caso (*il regard le triangle ABC*) l'altezza divide a metà il triangolo...ma questi triangoli sono la metà di questo, ecco perché...questo triangolo è la dilatazione di questo
- 138.S: come dilatazione?
- 139.F: si la dilatazione questo è la metà di questo ma anche questo è la metà di questo...è la metà del triangolo equilatero
- 140.S: del triangolo equilatero?
- 141.F: si! Guarda, questo è 30 questo 60
- 142.S: allora 30... 60...90... poi
- 143.F: vedi? Questo corrisponde a questo e questo corrisponde a questo
- 144.S: ah si perché ...
- 145.F: vedi? Questi due lati sono uguali perché il triangolo è isoscele...questi due sono di 60 questi di 30 quindi sono congruenti...questi due anche perché il triangolo è equilatero e ha i lati congruenti... quindi vuol dire che questi quattro triangoli hanno la stessa identica area
- 146.S: si scriviamo qualcosa adesso
- 147.F: va bene, allora dimostrazione, nel caso di ..
- 148.S: nel caso in cui ABC sia equilatero HCM è uguale a 120
- 149.F: HCM?
- 150.S: no NCM è 120
- 151.F: Allora NCM uguale 120, in quanto su C vertono altri tre triangoli due retti e un triangolo equilatero
- 152.S: questo anche sugli altri tre
- 153.F: cosa?
- 154.S: Così anche sugli altri tre
- 155.F: ah si, poi... i tre triangoli sono quindi isosceli perché i lati corrispondono ai lati dei quadrati
- 156.S: che sono uguali
- 157.F: che sono congruenti fra loro e.... l'altezza è asse di simmetria quindi gli altri due angoli sono uguali
- 158.S: e di 30°
- 159.F: e di 30 quindi i tre triangoli sono uguali
- 160.S: mettici perché
- 161.F: hanno tre angoli e due lati congruenti
- 162.S: ora il triangolo ABC
- 163.F: il triangolo ABC è equivalente perché come si può notare dal disegno si può costruire con ognuno dei triangoli laterali
- 164.S: quindi le due aree sono uguali....

165.S: Allora triangolo uguale a quello centrale

166.F: E se il triangolo non è equilatero?

Les élèves regardent l'écran de l'ordinateur en considérant ABC quelconque

167.F: allora vediamo... allora

168.S: se prendi un triangolo non equilatero i lati non sono più uguali, però ci sono sempre due lati uguali con quello centrale

169.F: si abbiamo due lati in comune uguali

...

170.S: questi angoli sono uguali sempre o no? No no

171.F: no, gli angoli non possono aiutarci... allora i triangoli non sono uguali ma hanno due lati in comune...cioè sono due lati uguali a questi per esempio, ma non sono uguali fra loro...è già qualcosa....abbiamo qui un triangolo rettangolo (*un des triangles construits sur la hauteur du triangle ABC*) proviamo a vedere se riusciamo a tirare fuori qualcosa...

172.S: e Pitagora? Abbiamo i lati... I quadrati costruiti sui cateti sono uguali a...

173.F: i quadrati sui cateti sono uguali al quadrato costruito sull'ipotenusa! E vero!!

174.S: aspetta un attimo, come era più? La somma delle aree costruiti sui cateti era uguale a quella dell'ipotenusa? No

175.F: aspetta questa è l'ipotenusa, questa è l'ipotenusa..... aspetta un attimo questi sono i triangoli rettangoli costruiti dall'altezza (*du triangle ABC*), questo è il quadrato costruito sull'ipotenusa

176.S: quale

177.F: questo

178.S: si

179.F: questo lo è anche

180.S: si

181.F: questo però mette in crisi perché sarebbero i due cateti....

182.S: è troppo difficile

183.F: facciamo un attimo una stampa così ragioniamo sul foglio

184.S: abbiamo ancora mezz'ora

185.F: dobbiamo farcela

Les élèves impriment le dessin

186.S: con un pezzo di carta ragioniamo bene...tanto poi ci serve per scrivere

187.F: allora basta confrontare un triangolo col triangolo ABC, basterebbe che un triangolo ha area uguale a quella di ABC perché poi per gli altri è uguale.... Dobbiamo cercare un legame tra base e altezza...questi triangoli rettangoli costruiti sull'altezza.... Allora questa è l'area di un quadrato costruito sull'ipotenusa, questa qui è un'altra area di un quadrato costruito sull'ipotenusa però poi le aree dei quadrati costruiti sui cateti non mi dicono niente...allora dobbiamo provare che sono equivalenti....allora

188.S: dobbiamo considerare le basi e le altezze, se considerassimo la base opposta avremmo due basi uguali

189.F: se prendiamo questa come base l'altezza prolungando sarebbe questa

190.S: aspetta la costruiamo...retta perpendicolare....

191.F: prendi il punto di intersezione

192.S: aspetta, qui non ci capisco più niente

193.F: allora, bisogna prolungare la base

194.S: ecco fatto

195.F: aspetta un attimo, se misuri..... l'altezza è 3,9 mentre la base è 4 e 5 e base per altezza è 4 e 5 per 3 e 9

196.S: si

197.F: se riusciamo a dimostrare perché questa altezza è uguale a questa siamo a cavallo perché le basi sono le stesse.... Allora questo è un angolo retto, questo è No non è un angolo retto, però questo è di nuovo retto

198.S: aspetta, questi sono due triangoli

199.F: ah è vero, sono due triangoli che hanno un angolo retto, quindi se proviamo che hanno due lati uguali o due angoli e un lato siamo a posto.... allora questo essendo triangolo rettangolo, possiamo costruire un quadrato, possiamo costruirlo... retta perpendicolare

200.S: cioè vuoi costruire il quadrato?

- 201.F: allora segmento FB, misura ecco, si è un quadrato, è un quadrato!! Allora possiamo scrivere questo, dimostrazione.... con una piccola spinta dovremmo arrivarci almeno su un triangolo, poi con gli altri vedremo! Allora questo è un quadrato
- 202.S: si
- 203.F: queste due altezze 3 e 9, 3 e 9 corrispondono per un gioco di angoli
- 204.S: un gioco
- 205.F: si un gioco, poi vediamo, e poi abbiamo che questo lato corrisponde a questo perché questo qui è un quadrato quindi abbiamo due lati in un triangolo rettangolo quindi questi due triangoli sono equivalenti...l'altezza corrisponde
- 206.S: lo scriviamo?

F écrit sur la feuille

- 207.F: allora diciamo altezza corrisponde perché su Q vi è un angolo retto in quanto GBA è retto per costruzione LQ è parallela ad AB
- 208.S: mi spieghi come hai dimostrato che le altezze sono uguali?
- 209.F: LQ è parallelo ad AB?...QB è uguale a FB quindi i due triangoli sono congruenti e quindi avendo le basi la stessa lunghezza i triangoli sono equivalenti
- 210.S: AB e LQ sono paralleli perché perpendicolari alla stessa retta
- 211.F: ok perché perpendicolari alla stessa retta. Scriviamo poi che questa costruzione può essere fatta sugli altri triangoli
- 212.S: io non ho però ancora capito l'ultimo pezzo!
- 213.F: allora questi sono paralleli perché perpendicolari alla stessa retta no?
- 214.S: si d'accordo
- 215.F: poi qui abbiamo fatto un quadrato
- 216.S: eh, non ho capito questo, quello è il dubbio, perché QB è uguale a FB
- 217.F: perché....abbiamo costruito il quadrato
- 218.S: si ma...
- 219.F: dunque ricapitoliamo, abbiamo i due triangoli che hanno due angoli retti
- 220.S: abbiamo un lato uguale che è il lato del quadrato ... ci manca un lato o un angolo
- 221.F: allora questo lato se costruiamo un quadratino....
- 222.S: non arriviamo a niente, se consideriamo gli angoli?
- 223.F: aspetta, questo angolo e questo sono uguali perché qui c'è un angolo retto.... ma qui c'è ancora un angolo retto.... Perché sono quadrati.... Se tolgo da angoli uguali lo stesso angolo

La fin de l'heure sonne

- 224.S: è vero, sono congruenti, ok abbiamo finito, dobbiamo solo scrivere questo
- 225.F: due angoli su B sono uguali in quanto sono due angoli congruenti a cui viene tolto lo stesso angolo...vi è un angolo congruente e quindi i triangoli sono congruenti.



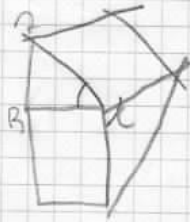
Area $\triangle ABC = 0,96$

Area $ADE = 7,11$

Area $CNM = 0,96$

Area $Bloj = 0,93$

19,4 }
 19,9 } stesso
 19,5 }
 19,5 }



Errore spuntata
 sopra

Et sono errori relativi

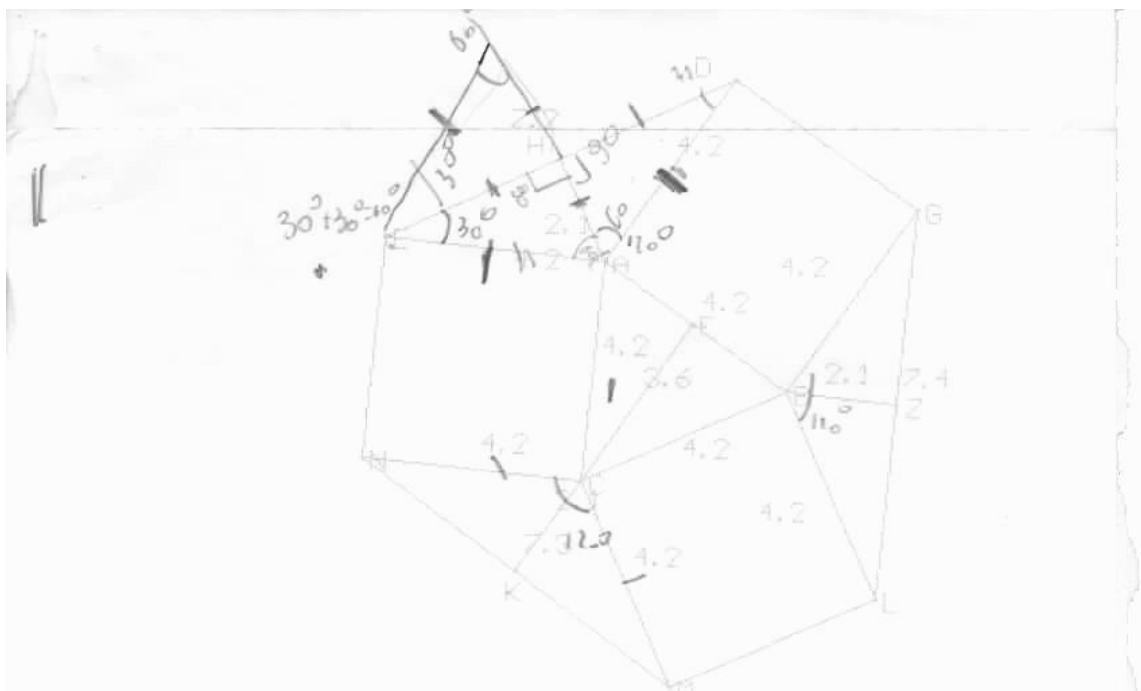
A1	23,36	5
A2	27,925	
A3	23,37	
A4	27,935	

$0,00 + 0,77 + 0,8 = 1,57$
 $0,03\% + 1,9\% = 1,93\%$
 $1,27\% + 0,9\% = 1,67\%$
 $0,9\% + 1,5\% = 1,95\%$

$EA_1 = 0,35$
 $EA_2 = 0,39$
 $EA_3 = 0,34$
 $EA_4 = 0,44$

Tenendo conto che gli \bar{a} è un intervallo in cui la area sono uguali, ipotizziamo che la area dei rettangoli sono uguali.

$E = 1,95\%$



Dimostrazione: nel caso in cui $\triangle ABC$ sia equilatero, $\hat{ACM} = 120^\circ$, in quanto su C vertono 30° angoli, 2 retti e 1 del triangolo equilatero. Così anche sugli altri due. I tre triangoli sono isosceli (i due lati corrispondono ai lati del quadrato, che sono congruenti tra loro) e l'altezza è asse di simmetria, gli altri due angoli sono quindi uguali e di 80° $\frac{180-120}{2}$.
 Due triangoli con 3 angoli e con 2 lati congruenti sono congruenti.

Il triangolo centrale $\triangle ABC$ è equilatero perché, come si può notare dal disegno, si può costruire con ognuno dei triangoli laterali un rettangolo uguale a quello

Annexe 3

Fiches des dialogues et des copies des élèves relatives au problème 2

Annexe 3.1 : Binôme : Nicola (N), Stefano (S), classe de 4^e année du lycée en Italie (17/18 ans, Terminale en France)

1. S: Allora, su un segmento AB si costruisca un cerchio avente AB come diametro. Diviso AB in due parti uguali, AC e CB, si costruiscano altri due cerchi aventi rispettivamente diametro AC e CB.
2. N: intanto dovremo fare il disegno

Nicola fait le dessin de la figure sur Cabri

3. S: Si continui a dividere i segmenti risultanti in due parti uguali, e si costruisca su tali parti, cerchi aventi per diametro detti segmenti.
4. N: aspetta che dobbiamo fare anche questa parte... poi cosa chiede ?
5. S: Che cosa accade alla lunghezza della linea curva, che si ottiene come contorno dei cerchi disegnati ogni volta, man mano che aumentano le suddivisioni? Che cosa accade alla somma delle aree dei cerchi man mano che aumentano le suddivisioni?
6. N : la somma delle aree ... l'area è Πr quadro... quindi
7. S : l'area
8. N : si ma qui si dimezza... la somma di quattro cerchi ... in pratica la somma di questi due è uguale a questa, la somma di questi quattro è uguale a questa... sarebbe il raggio ... si l'area si dimezza, abbiamo diviso il diametro della prima in due, quindi il diametro di una delle due circonferenze è la metà del primo e quindi l'area di conseguenza è la metà, no la somma delle due è la metà
9. S : si perché
10. N : perché la somma del raggio della prima e del raggio della seconda è uguale al raggio della prima grossa e quindi l'area delle due circonferenze qua è la metà della prima circonferenza
11. S : va bene, scriviamo questo
12. N : scrivo io ?
13. S : si

Nicola commence à écrire

14. N : è più difficile scriverlo che dirlo... allora sarebbe
15. S : allora la prima sarebbe ΠAC^2 la seconda sarebbe $\Pi (AC/2)^2$ e la terza $\Pi (AC/4)^2$
16. N : aspetta un attimo che proviamo a misurarle le aree..

Les élèves mesurent les rayons et calculent les aires des cercles

17. S : viene AB = 8.9, quindi la prima area è... 62.21
18. N : 62.24
19. S : la seconda area invece viene 15.62

20. N : e il raggio quanto vale ?
 21. S : AC era 4.45, mentre il raggio ancora più piccolo è 2.23 ...
 22. N : ma comunque la prima sarebbe ΠAC^2 la seconda sarebbe $\Pi (AC/2)^2$ per due e la terza $\Pi (AC/4)^2$ per quattro
 23. S : sì, prova a fare i calcoli
 24. N : allora la seconda viene la metà della prima

Nicola écrit sur la feuille et il fait les calculs des aires en général

25. S : e la terza ? Abbiamo detto un quarto della prima
 26. N : si va bene, viene esattamente un quarto della prima
 27. S : ok quindi l'area è fatta
 28. N : bisogna scrivere una conclusione...
 29. S : al dimezzare del raggio la somma delle aree delle circonferenze
 30. N : aspetta... al dimezzare del raggio la somma delle aree delle circonferenze
 31. S : ottenute è sempre un mezzo della somma delle aree delle circonferenze ottenute nel passaggio precedente.
 32. N : rispetto alla prima...
 33. S : rispetto alla prima è un mezzo, poi la seconda, cioè la terza rispetto alla seconda è un mezzo per un mezzo e la quarta rispetto alla terza è un mezzo per un mezzo per un mezzo
 34. N : si quindi un mezzo, un quarto e un ottavo eccetera
 35. S : ok, ora dobbiamo fare i perimetri
 36. N : Che cosa accade alla lunghezza della linea curva, che si ottiene come contorno dei cerchi disegnati ogni volta, man mano che aumentano le suddivisioni? Anche qui sarà sempre la metà della prima... la curva è questa, quindi sarà questa circonferenza più questa circonferenza
 37. S : mentre l'altra sarà la circonferenza piccola per quattro
 38. N : quindi sarà $2 \Pi r$... quindi sarebbe la prima $2 \Pi r$ e la seconda 2Π per r mezzi... aspetta che scriviamo
 39. S : si così seguiamo anche meglio..
 40. N : la prima sarebbe $2 \Pi AC$, la seconda sarebbe 2Π un mezzo AC per due... quindi sarebbe
 41. S : sarebbe $2 \Pi AC$
 42. N : si $2 \Pi AC$, e qui sarebbe 4 per $2 \Pi AC$ fratto quattro e quindi sarà quattro volte la prima... e no, è il doppio, no è la stessa
 43. S : proviamo a fare qualche calcolo con le misure per essere sicuri

Stefano commence à faire des calculs avec des mesures

44. N : va bhé, ma lascia perdere, così va bene... la lunghezza resta sempre la stessa.
 45. S : va bene, allora scriviamo la conclusione... la lunghezza della linea curva
 46. N : allora la lunghezza della linea curva che si ottiene come contorno dei cerchi disegnati ogni volta
 47. S : è uguale alla circonferenza ...
 48. N : è uguale alla circonferenza di partenza avente diametro AB
 49. S : si dai mi sembra che possa andare bene.

... silence Stefano regarde le dessin

50. S : pero' mano a mano che i raggi diminuiscono i cerchi sono sempre più piccoli, quindi l'area tenderà a zero
 51. N : se continua a dividersi, l'area tenderà ...
 52. S : se questi sono 4 questi sono 8 questi sono 16, eccetera, l'area tende
 53. N : tende a diventare un punto... tende a zero
 54. S : quindi continuando la suddivisione
 55. N : aspetta che scrivo... continuando la suddivisione , no continuando a dimezzare i raggi,
 56. S : essi tendono a diventare punti
 57. N : si ma non lo diventeranno mai
 58. S : d'accordo, ma..
 59. N : comunque la somma delle aree di tutte le circonferenze sarà uguale alla metà della somma delle aree ottenute nel passaggio precedente
 60. S : Percio' i raggi tenderanno a diventare AB e la somma delle aree tenderà a zero.

Nicola écrit

61. N : e per le lunghezze ?
62. S : no perché la lunghezza è sempre 2Π per il raggio..
63. N : allora in generale scriviamo... $2\Pi r$ la lunghezza, quindi n per $2\Pi r$ fratto n è sempre $2\Pi r$
64. S : si, dove n è il numero delle circonferenze
65. N : fine
66. S : si dai consegnamo

Les élèves rendent la copie

STEFANO

NICOLA

NOME E COGNOME

Descrizione della figura

Su un segmento AB si costruisca un cerchio avente AB come diametro. Diviso AB in due parti uguali, AC e CB, si costruiscano altri due cerchi aventi rispettivamente diametro AC e CB. Si continui a dividere i segmenti risultanti in due parti uguali, e si costruisca su tali parti, cerchi aventi per diametro detti segmenti.

Problema

- ① Che cosa accade alla lunghezza della linea curva, che si ottiene come contorno dei cerchi disegnati ogni volta, man mano che aumentano le suddivisioni?
- ② Che cosa accade alla somma delle aree dei cerchi man mano che aumentano le suddivisioni?

1° caso 2° caso 3° caso

$$\pi r^2 \quad \pi \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \quad \pi \left(\frac{AB}{4}\right)^2 \quad \dots$$

AB = 8,9 AC = 4,45 $r^{\text{caso}} = 2,23$

AREA 1° ~~30,5~~ 62,24 AREA 2° 15,62 $\frac{1}{4}$ DELLA PRIMA

AREA 2°

$$\pi AC^2 \quad 2 \left[\pi \left(\frac{AC}{2}\right)^2 \right] \quad 4 \left[\pi \left(\frac{AC}{4}\right)^2 \right]$$

$$2 \left(\pi \frac{AC^2}{4} \right) \quad 4 \left(\pi \frac{AC^2}{16} \right)$$

$$\cancel{2 \pi \frac{AC^2}{4}} \quad \pi \frac{AC^2}{2} \quad \pi \frac{AC^2}{4}$$

$$\frac{1}{2} \pi AC^2 \quad \frac{1}{4} \pi AC^2$$

$2 \pi AC$ ~~2~~ $(2 \pi \frac{1}{2} AC)$ $4 (2 \pi \frac{1}{4} AC)$

$2 \pi AC$ $2 \pi AC$ $2 \pi AC$

4,45 · 2π

27,92

CONCLUSIONE ②

All'aumentare del numero di cerchi la somma delle aree delle circonferenze ottenute è sempre $\frac{1}{2}$ della somma delle aree delle circonferenze ottenute nel passaggio precedente.

Rispetto al primo è $\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$
 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots$

CONCLUSIONE ①

La lunghezza della linea curva che si ottiene sommando di cerchi diseguali ogni volta è uguale alla circonferenza di partenza avente diametro AB.

Annexe 3.2 : Binôme : Christophe (C), Ibrahim (I), classe Première en France

Le professeur fait ouvrir Cabri et je distribue la feuille du travail

1. I : alors ... soit un segment AB et C son milieu. On construit le cercle de centre C et de diamètre AB. On recommence cette construction avec le segment AC et son milieu, le segment CB et son milieu. On obtient deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB. On continue à découper les segments résultants en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments.... Bon d'abord il faut le construire
2. C : oui je pense...

Ibrahim fait la construction jusqu'au troisième niveau

3. I : qu'est ce qu'il faut trouver ?
4. C : la question est... alors... comment évolue la longueur totale des périmètres d'une subdivision à l'autre et comment évolue l'aire totale des cercles d'une subdivision à l'autre
5. I : comment évolue la longueur totale des périmètres et l'aire totale ?
6. C : oui
7. I : bon on va mesurer... je vais calculer la longueur des périmètres avec le truc...

Ibrahim mesure la longueur des cercles et avec la calculatrice de Cabri, et calcule les périmètres totaux

8. C : alors ça donne quoi ?
9. I : ils sont tous pareils... les périmètres sont égaux... la longueur c'est la même...maintenant il faut faire l'aire

Ibrahim mesure l'aire des cercles et avec la calculatrice de Cabri, et calcule les aires totales

10. C : les aires ne sont pas égales ?
11. I : non...mais maintenant je fais le rapport entre les aires ?
12. C : le rapport entre les aires ?

Ibrahim calcule le rapport entre l'aire de la première courbe et l'aire de la deuxième courbe et le rapport entre l'aire de la première courbe et l'aire de la troisième courbe

13. I : oui, tu vois... à chaque fois l'aire est divisée par deux
14. C : ah oui !!!
15. I : et donc ?..
16. C : à la fin des subdivisions.... à la limite....
17. I : par rapport au nombre des cercles ?
18. C : non, je veux dire... si on continue à découper le segment AB les cercles augmentent et l'aire deviendra toujours plus petite... et à la fin elle s'annule
19. I : ah oui... après l'aire s'annule.. ; alors que le périmètre sera nul aussi... ah non... le périmètre sera
20. C : non, le périmètre sera la longueur de AB
21. I : oui, maintenant il faut démontrer... déjà l'aire est proportionnelle au diamètre...
22. C : l'aire est proportionnelle au diamètre ?
23. I : oui l'aire est proportionnelle au ... on a vu qu'on la calculée à partir du diamètre..
24. C : l'aire est fonction du diamètre
25. I : oui elle est fonction du diamètre... et donc
26. C : pour démontrer peut-être il faut connaître le périmètre et l'aire du cercle
27. I : alors le périmètre est $2\pi r$ et l'aire c'est πr au carré... donc... si on divise le rayon à moitié à chaque fois...bein l'aire sera divisée par deux
28. C : donc il faut écrire...

Ibrahim écrit

29. I : alors l'aire est πr au carré et le périmètre est $2\pi r$
30. C : alors le premier cercle est $2\pi r$

31. I : oui le premier cercle est $2\pi r$
32. C : le deuxième ?
33. I : le deuxième est le demi de $2\pi r$
34. C : oui
35. I : donc ça fait $2\pi r$... après... pour la troisième si on divise par quatre on a ... ça fait... quatre fois ... ça fait encore $2\pi r$...
36. C : oui
37. I : en général on peut dire qu'il est n fois par un sur n fois $2\pi r$ donc ça sera toujours $2\pi r$.
38. C : maintenant on passe à l'aire... alors la première c'est πr au carré... il faut faire la deuxième...
39. I : alors ça fait... 2 fois par un sur deux fois πr au carré... Elle vient pareil...
40. C : mais non, il faut faire au carré un sur deux parce que c'est le rayon
41. I : ah ok... donc ok un sur deux πr au carré... pour la troisième ça fait... 4 fois par un sur quatre... donc ça fait un sur quatre πr au carré et finalement la généralité ça fait n fois par un sur n au carré πr au carré... donc un sur n πr au carré...
42. C : alors on a fini... on peut juste regarder qu'est ce qui se passe à la limite
43. I : ah, à la limite... plus n il sera grand et plus l'aire se rapprochera de zéro et donc l'aire se rapprochera de zéro et le périmètre
44. C : le périmètre
45. I : plus n sera élevé
46. C : mais attends, il n'y a pas de n
47. I : il sera toujours constant... il n'y a pas de n dans la formule
48. C : on a fini donc...
49. I : oui, attend j'écris ça et on a fini.

NOM ET PRENOM

Goubuyuk
Dylan**Description de la figure**

Soit un segment AB et C son milieu. On construit le cercle de centre C et de diamètre AB. On recommence cette construction avec le segment AC et son milieu, le segment CB et son milieu. On obtient deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB. On continue à découper les segments résultant en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments.

Problème

Comment évolue la longueur totale des périmètres d'une subdivision à l'autre ?

Comment évolue l'aire totale des cercles d'une subdivision à l'autre ?

$$\text{Aire} = \pi R^2$$

$$\text{Périmètre} = 2\pi R$$

Périmètre \rightarrow si on divise le rayon par 2

$$\text{alors Aire } 2 \times \frac{1}{2} \times 2\pi R = 2\pi R$$

$$\text{alors } 4 \times \frac{1}{4} \times 2\pi R = 2\pi R$$

Alors

$$\left| n \times \frac{1}{n} \times 2\pi R = 2\pi R \right|$$

$$\text{Aire} \rightarrow 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi R^2 = \frac{1}{2} \pi R^2$$

$$4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi R^2$$

$$\text{par } n \text{ cercles } \left| n \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 \pi R^2 = \frac{1}{n} \pi R^2 \right|$$

Par le périmètre: il sera toujours équivalent à $2\pi R$ donc le nombre de subdivisions de cercle n'influera pas sur la valeur de périmètre.

Par l'aire: elle est déterminée par $\frac{1}{n} \pi R^2$, donc plus il y aura de

subdivisions et plus l'aire tendra vers 0. car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Annexe 3.3 : Binôme : Vincent (V), Ludovic (L), classe Première en France

Le professeur fait ouvrir Cabri et je distribue la feuille du travail

1. V: alors ... soit un segment AB et C son milieu. On construit le cercle de centre C et de diamètre AB. (*Vincent commence le dessin sur Cabri*). On recommence cette construction avec le segment AC et son milieu, le segment CB et son milieu. On obtient deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB. On continue à découper les segments résultant en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments.

Vincent fait la construction plusieurs fois

2. L: on peut reporter les cercles ou il faut les reconstruire à chaque fois ?
3. V: il faut faire toujours la même chose... il faut la faire des deux côtés en effet
4. L: il y a une symétrie
5. V: Oui il y a une symétrie des cercles
6. L: qu'est ce qu'on demande ? Comment évolue la longueur totale des périmètres d'une subdivision à l'autre et comment évolue l'aire totale des cercles d'une subdivision à l'autre ?
7. V: la longueur totale ... la longueur totale des périmètres mais quand on considère le deuxième il faut rajouter le premier ?
8. L: non, quand on fait la somme des ces deux là on n'ajoute pas celui là... comment évoluent les périmètres d'une subdivision à l'autre...
9. V: le périmètre c'est $2\pi r$ et l'aire c'est πr^2 au carré
10. L: oui
11. V: mais comment évolue le rayon déjà ? r est divisé par deux?
12. L: oui, le premier périmètre est $2\pi r$ et le deuxième est $2\pi r$ sur deux plus $2\pi r$ sur deux et donc ça va être le même
13. V: eh oui...
14. L: et ça va à être toujours le même parce que... regard on va appeler r au premier, r est le rayon du premier, le premier cercle a le périmètre...
15. V: $2\pi r$
16. L: $2\pi r$ et la somme des deuxièmes est $2\pi r$ sur deux
17. V: plus $2\pi r$ sur deux donc $2\pi r$... Et cetera... l'autre est $2\pi r$ sur quatre mais pour quatre fois
18. L: donc la somme est toujours $2\pi r$
19. V: c'est toujours le même périmètre....
20. L: oui, par contre l'aire... l'aire c'est πr^2 au carré
21. V: là on va avoir...
22. L: hem.... Ça va être divisé par deux à chaque fois
23. V: oui, πr^2 sur deux au carré plus πr^2 sur deux au carré est égal à
24. L: est égal à... πr^2 carré sur deux
25. V: oui c'est comme ça en divisant par deux
26. L: oui, et donc c'est toujours la moitié de la précédente
27. V: l'aire est à chaque fois divisée par deux...il faut démontrer maintenant
28. L: j'écris..... j'appelle p un, p deux, p trois...
29. V: oui

Les élèves commencent à écrire la démonstration

Silence...

30. V: Comme ça tu peux avoir le même périmètre mais pas la même aire

silence

31. V: l'aire est à chaque fois divisé par deux... et à la limite ? A la limite c'est une droite, confondue avec le segment de départ ...
32. L: mais l'aire est divisée par deux à chaque fois
33. V: oui, mais à la limite arrive à zéro

34. L: oui c'est vrai que si on continue...
35. V: elle tend vers zéro
36. L: oui elle tend vers zéro l'aire
37. V: oui mais alors le périmètre ?
38. L: non, le périmètre est toujours le même
39. V: au pire le périmètre il tombe jusqu'à deux fois le segment
40. L: comment ?
41. V: ça tombe sur le segment... si les cercles sont tellement petits
42. L: hem... mais ce sera toujours $2pr$
43. V: oui mais quand l'aire tend vers zéro ça sera presque égal...
44. L: non, je pense non
45. V: si on fait tendre vers zéro l'aire on fait tendre le périmètre aussi... je ne sais pas...
46. L: Je finis la première démonstration

Silence... Ludovic continue à écrire la première démonstration

47. V: mais si on fait tendre l'aire vers zéro on pourrait faire tendre le périmètre vers deux fois le... Au diamètre du premier
48. L: c'est différent, le périmètre est constant
49. V: ah d'accord...

Ludovic termine d'écrire la démonstration. Ils ne parlent plus. Ils ont fini en 20 minutes.

NOM ET PRENOM

Hébert
Léonard**Description de la figure**

Soit un segment AB et C son milieu. On construit le cercle de centre C et de diamètre AB. On recommence cette construction avec le segment AC et son milieu, le segment CB et son milieu. On obtient deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB. On continue à découper les segments résultant en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments.

Problème

1. Comment évolue la longueur totale des périmètres d'une subdivision à l'autre ?
2. Comment évolue l'aire totale des cercles d'une subdivision à l'autre ?

Notons R le premier rayon ($R = \frac{AB}{2}$)

1. Soit P_1, P_2, P_4, \dots les périmètres respectifs du premier cercle, des 2 seconds, des 4 troisièmes, ...

$$P_1 = 2\pi R$$

$$P_2 = 2\pi \frac{R}{2} + 2\pi \frac{R}{2} = 2\pi R$$

$$P_4 = 2\pi \frac{R}{4} + 2\pi \frac{R}{4} + 2\pi \frac{R}{4} + 2\pi \frac{R}{4} = 2\pi R$$

⋮

$$P_n = \underbrace{2\pi \frac{R}{n} + 2\pi \frac{R}{n} + \dots + 2\pi \frac{R}{n} + 2\pi \frac{R}{n}}_{n \text{ fois}} = 2\pi \frac{R}{n} \times n = 2\pi R$$

donc le périmètre est constant

2. Soit A_1, A_2, A_4, \dots les aires respectives du premier cercle, des 2 seconds, des 4 troisièmes

$$A_1 = \pi R^2$$

$$A_2 = \pi \frac{R^2}{4} + \pi \frac{R^2}{4} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{A_1}{2}$$

$$A_4 = \pi \frac{R^2}{16} + \pi \frac{R^2}{16} + \pi \frac{R^2}{16} + \pi \frac{R^2}{16} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{A_1}{4}$$

⋮

$$A_n = \underbrace{\pi \frac{R^2}{n^2} + \pi \frac{R^2}{n^2} + \dots + \pi \frac{R^2}{n^2} + \pi \frac{R^2}{n^2}}_{n \text{ fois}} = \frac{\pi R^2}{n^2} \times n = \frac{\pi R^2}{n} = \frac{A_1}{n}$$

donc l'aire tend vers 0 quand n augmente.

Annexe 3.4 : Binôme : Adrien (A), Jean Philippe (J), classe Première en France.

1. J: alors... soit un segment AB et C son milieu. On construit le cercle de centre C et de diamètre AB. On recommence cette construction avec le segment AC et son milieu, le segment CB et son milieu. On obtient deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB. On continue à découper les segments résultant en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments. Comment évolue la longueur totale des périmètres d'une subdivision à l'autre et comment évolue l'aire totale des cercles d'une subdivision à l'autre
2. A: attend j'ai rien compris
3. J: il faut faire le dessin

Jean Philippe fait le dessin sur Cabri au fur et à mesure que Adrien lit le texte

4. A: donc au début on a que le périmètre est π par AB... attends j'écris
5. J: oui, ensuite on a que le périmètre est π et le demi de AB
6. A: donc on prend les deux
7. J: et donc on prend encore π pour le demi de AB... donc on a exactement la même chose
8. A: oui, on a bien remarqué un truc remarquable
9. J: à la troisième subdivision on a encore la même chose
10. A: donc le périmètre est π un quart de AB plus π un quart de AB plus π un quart de AB plus π un quart de AB ... et donc π AB.
11. J: je suppose qu'il faut démontrer
12. A: et oui
13. J: alors on peut chercher à exprimer le diamètre des cercles...
14. A: donc on essaie de regarder le nombre des cercles par division et le diamètre des cercles
15. J: A chaque division on double le nombre des cercles
16. A: Sans division on a un cercle.... Et à la nième division on a 2^n cercles
17. J: ok et les diamètres ?
18. A: on prend toujours le milieu du diamètre du cercle précédent et à chaque division le diamètre est
19. J: le diamètre des cercles
20. A: le diamètre des cercles est divisé par deux
21. J: oui et sans division le diamètre est AB
22. A: oui d'accord mais attend que j'écrive

....

23. J: Alors à division n le diamètre de chaque cercle est....
24. A: est égal à AB divisé par 2^n
25. J: il faut écrire que le périmètre d'un cercle est égal à π pour le diamètre du cercle
26. A: ok
- 27.

A écrit

28. J: Donc à la division n on a 2^n cercles
29. A: chacun de diamètre AB sur 2^n
30. J: la somme des périmètres est égale
31. A: Donc le périmètre total est 2^n nombre des cercles par π AB sur 2^n et donc
32. J: et donc π AB
33. A: donc le périmètre ne dépend pas du nombre de divisions et le périmètre est constant
34. J: Maintenant il faut faire les aires
35. A: Ok, donc l'aire d'un cercle est πr^2
36. J: l'aire totale est encore 2^n
37. A: le nombre des cercles
38. J: pour π diamètre sur deux au carré
39. A: qui est l'aire d'un cercle
40. J: et donc ça doit être la même chose
41. A: et oui c'est pareil je crois
42. J: et non c'est pas la même chose

43. A: oui tu as raison

44. J: non, non parce qu'on a 2^n pour πAB au carré divisé par 2^n par 2

45. A: attends... Donc on a 2^n pour πAB au carré divisé par 2^n par 2, donc AB au carré divisé par 2^{n+2} donc finalement πAB au carré sur 2^{n+1}

46. J: Donc voilà... l'aire totale dépend de n et quand n augmente l'aire diminue

47. A: il faut dire dans quel rapport

48. J: mais on l'a

49. A: oui mais il faudra faire sortir le...

50. J: mais on a le rapport c'est ce qu'on a trouvé

51. A: bon d'accord

52. J: on peut dire qu'à la limite l'aire est nulle... quand n devient très grand l'aire tend vers zéro

53. A: ah oui, quand n devient très grand et donc n tend à infini, l'aire tend vers zéro

54. J: on a fini

55. A: oui on a fini

Adrien
Jean-Philippe
NOM ET PRENOM

Description de la figure

Soit un segment AB et C son milieu. On construit le cercle de centre C et de diamètre AB. On recommence cette construction avec le segment AC et son milieu, le segment CB et son milieu. On obtient deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB. On continue à découper les segments résultant en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments.

Problème

Comment évolue la longueur totale des périmètres d'une subdivision à l'autre ?

Comment évolue l'aire totale des cercles d'une subdivision à l'autre ?

$$0 \text{ division : } P = \pi AB$$

$$1 \text{ division : } P = \pi\left(\frac{1}{2}AB\right) + \pi\left(\frac{1}{2}AB\right) \\ = \pi AB$$

$$2 \text{ division : } P = \pi\left(\frac{1}{4}AB\right) + \pi\left(\frac{1}{4}AB\right) + \pi\left(\frac{1}{4}AB\right) + \pi\left(\frac{1}{4}AB\right) \\ = \pi AB.$$

nombre de cercle à la division n :

{ A chaque division on double le nombre de cercle.
{ Sans division on a 1 cercle

Donc à la n-ième division, on a 2^n cercle.

diamètre de chaque cercle à la division n

{ On prend toujours le milieu du diamètre du cercle précédent.
{ A chaque division, le diamètre des cercles est divisé par 2.
{ Sans division, le diamètre égale à AB.

Donc à division n, le diamètre de chaque cercle est égal à $\frac{AB}{2^n}$

Rappel : le périmètre d'un cercle est égal à $\pi \times \text{diamètre}$

Donc à la division n , on a 2^n cercles chacun de diamètre $\frac{AB}{2^n}$.

$$\text{Donc } P_{\text{total}} = 2^n \left(\frac{\pi AB}{2^n} \right)$$

nombre de cercle
perimètre d'un cercle

$$= \pi AB.$$

Donc le périmètre ne dépend du nombre de division.
Le périmètre est constant.

Rappel : Aire d'un cercle = πr^2 .

$$\begin{aligned} S_{\text{total}} &= 2^n \times \left(\frac{\pi (\text{diamètre})^2}{4} \right) \\ &= 2^n \times \left(\frac{\pi (AB)^2}{2^{2n} \times 4} \right) \\ &= 2^n \times \frac{\pi AB^2}{2^{2n+2}} \\ &= \frac{\pi AB^2}{2^{n+2}} \end{aligned}$$

↳ Aire dépend de n . Quand $n \nearrow$, $S \downarrow$.

Quand n devient très grand : $n \rightarrow +\infty$.

alors $S \rightarrow \frac{\pi AB^2}{+\infty}$ soit $S \rightarrow 0$.

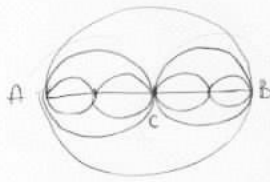
Annexe 3.5 : Binôme : Elena, Elena, classe de 3^e année du lycée en Italie (16/17 ans, première en France)

ELENA
ELENA

NOME E COGNOME

Descrizione della figura
Su un segmento AB si costruisca un cerchio avente AB come diametro. Diviso AB in due parti uguali, AC e CB, si costruiscano altri due cerchi aventi rispettivamente diametro AC e CB. Si continui a dividere i segmenti risultanti in due parti uguali, e si costruisca su tali parti, cerchi aventi per diametro detti segmenti.

Problema
Che cosa accade alla lunghezza della linea curva, che si ottiene come contorno dei cerchi disegnati ogni volta, man mano che aumentano le suddivisioni?
Che cosa accade alla somma delle aree dei cerchi man mano che aumentano le suddivisioni?



$a_1 = 2\pi r$
 $a_2 = 2\pi r$
 $a_3 = 2\pi r$
 $a_4 = 2\pi r$
 $a_5 = 2 \cdot \left(\frac{2\pi r}{2}\right) = 2\pi r$
 $a_6 = 4 \cdot \left(\frac{2\pi r}{4}\right) = 2\pi r$
 $a_7 = 8 \cdot \left(\frac{2\pi r}{8}\right) = 2\pi r$

è sempre $2\pi r$: costante

$$\begin{cases} a_1 = 2\pi r \\ a_n = 2^{n-1} \cdot \left(\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right) \end{cases} \text{ FORMULA RICORSIVA}$$

le parti in cui viene diviso AB sono sempre pari perché sono potenze di 2.

PRINCIPIO DI INDUZIONE:

$a_2 = 2 \cdot \left(\frac{2\pi r}{2}\right) = 2\pi r$ OK.
H₀:
 $a_n = 2^{n-1} \cdot \left(\frac{2\pi r}{2^{n-1}}\right)$
I₅:
 $a_{n+1} = 2^n \cdot \left(\frac{2\pi r}{2^n}\right) = 2\pi r$

Dim:

$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2}{2}$
 $a_{n+1} = 2^{n-1} \cdot \left(\frac{2\pi r}{2^{n-1}}\right) \cdot \frac{2}{2} = 2^n \cdot \left(\frac{2\pi r}{2^n}\right)$

per il p.d.i. vale per ogni $n \geq 2$

$$a_1 = \pi r^2$$

$$a_2 = 2\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \pi r^2$$

$$\begin{cases} a_1 = \pi r^2 \\ a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \text{ FORMULA RICORSIVA} \end{cases}$$

PER IL PRINCIPIO DI INDUZIONE:

$$a_3 = 2\pi r^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \pi r^2 \text{ OK}, a_3 = \pi r^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = \pi r^2 \cdot \frac{1}{4} \text{ OK}$$

$$\text{I}_n: \\ a_{n+1} = \pi r^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Hp

$$a_n = \pi r^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Ts:

$$a_{n+1} = \pi r^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Dim:

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = \pi r^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \pi r^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

per il principio di induzione vale per ogni $n \geq 3$

Annexe 3.6 : Binôme : Adam (A), Ludovica (L), classe de 3^e année du lycée en Italie (16/17 ans, première en France).

1. L: Allora, su un segmento AB si costruisca un cerchio avente AB come diametro. Diviso AB in due parti uguali, AC e CB, si costruiscano altri due cerchi aventi rispettivamente diametro AC e CB. Si continui a dividere i segmenti risultanti in due parti uguali, e si costruisca su tali parti, cerchi aventi per diametro detti segmenti.
2. A : si ho capito, puoi farla all'infinito..
3. L : si credo di si
4. A : e poi cosa chiede ?
5. L: Che cosa accade alla lunghezza della linea curva, che si ottiene come contorno dei cerchi disegnati ogni volta, man mano che aumentano le suddivisioni? Che cosa accade alla somma delle aree dei cerchi man mano che aumentano le suddivisioni?
6. A: perimetro e area dei cerchi
7. L: intanto costruiamo

Adam fait la construction sur Cabri

8. A : in poche parole si vuole sapere cosa accade alle circonferenze che circoscrivono i cerchi ogni volta
9. L : si praticamente la curva è il contorno dei cerchi ad ogni livello
10. A : ok, quindi... noi abbiamo AB che è il diametro ed è costante... ora la circonferenza è Πd

Adam écrit

11. L : si
12. A : poi abbiamo... questa circonferenza che ha il diametro AC che è la metà di quello di prima, quindi la circonferenza è 2 per Π un mezzo di d
13. L : si
14. A : quindi alla fine abbiamo (il fait le calcul) abbiamo Πd
15. L : si e quindi si ottiene sempre Πd ... perché questo proviamo..
16. A : AM è un quarto di AB
17. L : ma poi devi moltiplicare per quattro
18. A : si quindi viene 4 circonferenze che hanno come diametro un quarto di d e quindi viene di nuovo uguale
19. L : si viene uguale... se i segmenti fossero otto comunque si dovrebbe moltiplicare per otto circonferenze e quindi sarebbe uguale
20. A : si, ... quindi la lunghezza della curva man mano che le suddivisioni aumentano rimane invariata cioè uguale alla circonferenza di diametro AB
21. L : se riusciamo a generalizzare
22. A : si perché la formula sarebbe 2 alla n per Πd fratto 2 alla n e quindi Πd
23. L : si infatti.. scrivila e poi scrivi che il diametro viene diviso ogni volta a metà ma poi contemporaneamente si raddoppia il numero delle circonferenze.
24. A : aspetta che lo scrivo

Il écrit

25. L : poi ci sono le aree... allora
26. A : allora l'area del cerchio
27. L : del cerchio grande
28. A : è su AB è ΠAB fratto due al quadrato e quindi un quarto ΠAB al quadrato
29. L : aspetta pero', qui hai messo un mezzo qui un quarto... va bhé ma si capisce
30. A : poi l'area del cerchio su AC è 2 per Π per un mezzo per un mezzo AB tutto al quadrato... quindi facendo i conti... Π un ottavo AB al quadrato
31. L : allora generalizzando abbiamo 2 alla n Π
32. A : uno fratto 2 alla n AB al quadrato che viene uguale a Π per uno fratto 2 alla n AB al quadrato

33. L : quindi ..
34. A : ah pero' dobbiamo dire quante volte... è sempre uguale ...quattro perché ...no aspetta
35. L : si dimezza sempre rispetto alla precedente
36. A : si è vero viene la metà dell'area precedente
37. L : quindi man mano che aumentano le suddivisioni l'area si dimezza sempre più ... fino a che... diventa talmente piccolo che ... che si ridurrà ad un punto
38. A : come a un punto ?
39. L : si, si dimezza sempre più fino a diventare senza dimensione, diventa un punto di AB
40. A : si tu vuoi dire che le circonferenze si ridurranno ad essere dei punti perché diventano sempre più piccole
41. L : si praticamente più si va avanti più si troveranno dei punti
42. A : in questo modo vuoi dire che l'area tenderà a zero
43. L : si, proprio perché i punti non hanno area.
44. A : d'accordo, scrivo questo e consegnamo

Les élèves rendent la copie

NOME E COGNOME

LUDOVICA SI

Descrizione della figura

Su un segmento AB si costruisca un cerchio avente AB come diametro. Diviso AB in due parti uguali, AC e CB, si costruiscano altri due cerchi aventi rispettivamente diametro AC e CB. Si continui a dividere i segmenti risultanti in due parti uguali, e si costruisca su tali parti, cerchi aventi per diametro detti segmenti.

Problema

Che cosa accade alla lunghezza della linea curva, che si ottiene come contorno dei cerchi disegnati ogni volta, man mano che aumentano le suddivisioni?

Che cosa accade alla somma delle aree dei cerchi man mano che aumentano le suddivisioni?



$$AB = d \text{ (costante)} \rightarrow \pi d \text{ (circonferenza)}$$

$$AC = CB = \frac{1}{2}d \rightarrow 2 \cdot \left(\pi \cdot \frac{1}{2}d\right) = \pi d$$

$$AH = \frac{1}{4}d \rightarrow 4 \cdot \left(\pi \cdot \frac{1}{4}d\right) = \pi d$$

La lunghezza della curva, man mano che ^{le} suddivisioni aumentano, rimane invariata cioè uguale alla circonferenza di diametro AB (πd). ~~Questo perché~~

$$\left[2^h \left(\pi \frac{1}{2^h} d \right) \right] = \pi d$$

Quanto cresce il diametro si dimezza ogni volta ma contemporaneamente il numero delle circonferenze si raddoppia.

$$\text{Area cerchio su } AB = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} AB\right)^2 = \pi \frac{1}{4} AB^2$$

$$\text{Area cerchio su } \frac{1}{2} AB(A) = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB\right)^2 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{16} AB^2 = \frac{1}{8} \pi AB^2$$

Generalizzando otteniamo che =

$$2^n \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2^n} AB\right)^2 = 2^n \cdot \pi \cdot \frac{1}{2^{2n}} AB^2 = \pi \cdot \frac{1}{2^n} AB^2$$

Ma mano che le suddivisioni aumentano ~~l'area~~
~~la~~ l'area dei piccoli cerchi si riduce
 ed in più ^(appartiene al diametro AB) cioè fino al diametro. Questo vuol
 dire che la somma di tutte le aree tenderà a zero, proprio
 perché i punti non hanno area.

Annexe 4

Fiches des dialogues et des copies des élèves relatives au problème 3

Annexe 4.1 : Binôme : Alice (A), Luca (L), classe de 3 année du lycée (16/17 ans, Première en France).

1. A: Allora si consideri un poligono di n lati Si può dare una legge per trovare la somma degli angoli interni in funzione dei lati?
2. L: allora potremmo fare una tabella angoli e lati
3. A: aspetta, prima dobbiamo disegnare qualche poligono
4. L: si ok
5. A: allora quanti lati faccio?
6. L: disegna un triangolo

Alice fait le dessin d'un triangle et elle mesure les angles avec Cabri

7. A : allora
8. L : allora sono 107 più
9. A : cosa stai facendo ?
10. L : faccio la somma degli angoli no ? Viene 180, si ma potevo anche evitare di farla, in un triangolo la somma degli angoli interni è 180
11. A : si infatti. Poi
12. L : prendiamo quattro lati
13. A : aspetta..

Alice fait le dessin d'un quadrilatère et elle mesure les angles

14. L : dunque la misura viene
15. A : hai fatto la somma?
16. L: si (*il fait le calcul*) la somma viene 360... con quattro lati
17. A: quindi finora
18. L: finora abbiamo scoperto che aggiungendo un lato la somma degli angoli si raddoppia
19. A: la somma degli angoli interni si raddoppia
20. L: ok,
21. A: ora possiamo vedere se vale con 5

Alice fait le dessin d'un polygone avec 5 côtés et Luca fait le calcul de la somme des angles

22. L: la somma viene 539

23. A: sei sicuro
 24. L: aspetta, aspetta, aspetta
 25. A: proviamo a spostare anzi ad aggiungere un lato, magari si tratta di un errore minimo...

Alice fait le dessin d'un polygone à 6 côtés

26. L: viene 720
 27. A: 720, allora proviamo a fare la tabella
 28. L: ok
 29. A: allora dovrebbe essere... 360 è $180 \cdot 2$... 540 è $180 \cdot 3$
 30. L: e 720 è $180 \cdot 4$

Alice fait le tableau suivant :

N° lati	S(A)
3	180°
4	360° $180^\circ \cdot 2$
5	540° $180^\circ \cdot 3$
6	720° $180^\circ \cdot 4$

29. A: allora la legge dovrebbe essere 180 per *enne* meno due
 30. L: si perché *n* è il numero dei lati
 31. A: si rispetto ai lati la legge è questa. Ora dobbiamo dimostrarla
 32. L: basta usare il principio di induzione.
 33. A: si va bene, allora scriviamo... la base è per *n* uguale a tre...
 34. L: si, e viene 180...

Alice écrit

35. A: poi facciamo il passo, quindi dobbiamo dire che vale per *n* e dobbiamo provarla per *n*+1
 36. L: si
 37. A: allora la formula vale per *n*, per *n*+1 devo avere 180 per *n*+1-2 quindi 180 per *n*-1... questa è la tesi, quello che devo trovare.
 38. L: si però dovrebbe venire uguale... ad esempio nella somma di numeri naturali era facile perché la somma dei primi numeri faceva $1+2+\dots$ fino a *n* e poi si dimostrava col successivo a partire da ciò che si era trovato con *n*, quindi si aggiungeva +1, ma qui aggiungendo +1 viene una formula diversa, quindi come facciamo a far vedere che va bene?
 39. A: allora per un poligono a *n* lati si ha 180 per *n*-2 per il successivo di *n*... si ha
 40. L: si ha 180 per *n*-1... dobbiamo trovare un altro modo per far venire questa formula qui
 41. A: si
 42. L: dunque se *n* è 3 viene 180 per 3-2 quindi per 1 e quindi viene 180... se *n* è 4 viene 180 per 2 quindi 360...
 43. A: non capisco cosa vuoi fare
 44. L: sto cercando un altro modo per trovare questa formula...
 45. A: allora fammi provare 180 per *n*-2 è $180n - 360$... questa è la formula generale...
 46. L: quindi è come se avessimo *S* di *n* uguale a 180 per *n*-2 e *S* di *n*+1 che deve venire 180 per *n*-1
 47. A: aspetto che scrivo, allora *S* di *n* è 180 per *n*-2 quindi $180n - 360$
 48. L: si poi *S* di *n*+1 è $180n + 1 - 360$
 49. A: quindi possiamo scrivere $180n + 180 - 360$, quindi *n*+1-2 quindi *n*-1 che è la tesi
 50. L: che poi è la stessa cosa... *n*+1-2 è la stessa cosa che *n*-1... infatti avevamo la formula e l'abbiamo applicata al successivo e abbiamo trovato la tesi... abbiamo dimostrato
 51. A: si va bene, quindi aspetta che scrivo, abbiamo dimostrato col principio di induzione la tesi.
 52. L: si va bene, aspetta che chiamo il prof... prof? Abbiamo finito

NOME E COGNOME

ALICE

LUCA

Si consideri un poligono di n lati.

Problema

Si può dare una legge per trovare la somma degli angoli interni in funzione dei lati?

n° LATI	S(A)
3	180°
4	$360^\circ = 180 \cdot 2$
5	$540^\circ = 180 \cdot 3$
6	$720^\circ = 180 \cdot 4$

$180^\circ \cdot (n-2)$

BASE per $n=3$ $180^\circ(3-2) = 180^\circ$

PRIMO

Hip: $180^\circ \cdot (n-2)$

Th: $180^\circ \cdot (n-1)$

$180(3-2) \Rightarrow 180 \cdot 1$

$180(n-2)$

~~$180n - 360$~~

$S(n) 180 \cdot (n-2) = 180n - 360$

$S(n+1) 180(n+1) - 360$

$180 \cdot (n+1-2) = n-1 \Rightarrow 180(n-1)$ c.v.d

$S(n) = 180 \cdot (n-2) = 180n - 360$

$S(n+1) = 180(n+1) - 360$

$180n + 180 - 360 = n+1-2 = \boxed{n-1} \Rightarrow$ Th

Abbiamo dimostrato con il principio di induzione la tesi.

Annexe 4.2 : Binôme : Marta (M), Lucia(L), classe de 3 année du lycée (16/17 ans, première en France).

1. M: Allora si consideri un poligono di n lati
2. L: allora cosa facciamo? Proviamo a farne uno di quattro lati? Ma no prima proviamo con tre... allora creazione punto, creazione punto poi facciamo i segmenti e poi...

Lucia fait le dessin d'un triangle sur Cabri

3. M: la domanda chiede, si puo' dare una legge per trovare la somma degli angoli interni in funzione dei lati... quindi noi abbiamo che n è uguale a tre
4. L: quindi con n uguale a tre gli angoli interni sono tre, credo, direi..
5. M: si
6. L: se aggiungiamo un lato si aggiunge un angolo
7. M: quindi quattro lati sono quattro angoli
8. L: quindi ogni angolo è determinato dall'incrocio di due lati, quindi tre vertici tre angoli, quattro vertici, quattro angoli cinque vertici cinque angoli... n vertici, nlati...ma cosi' mi sembra una scemata!
9. M: ma aspetta, come somma qui intende la somma tipo un angolo o somma nel senso di misura?
10. L: si effettivamente il numero degli angoli sarebbe un po' un'idiozia

Les élèves rigolent

11. M: eh si perché un poligono di 20 lati avrà 20 angoli
12. L: ma siamo idiote eh!!... ok ricominciamo

Elles rigolent encore

13. M: allora per un triangolo la somma è 180
14. L: ok per n uguale a tre s è 180
15. M: per n uguale a quattro... misuriamo
16. L: tanto misuriamo gli angoli del triangoli e guardiamo che effettivamente la somma è 180

Les élèves mesurent les angles du triangle et elles font la somme avec la calculette

17. M : Si viene, 180, ok
18. L : allora abbiamo tre lati e 18 cosa potrebbe essere ?
19. M : bhé 6 per 3 18
20. L : si ma potrebbe anche essere 60 diviso tre fa venti poi diviso due 10 poi diviso due cinque poi 1 quindi è uguale a tre alla seconda per due alla seconda per cinque
21. M : facciamo la somma di questo 50 più 123 più 128 più 59
22. L : scusa un po' un quadrilatero è 90, 90, 90 e 90 quindi 360 guarda un po' se questa somma è 360 ?
23. M : aspetta che faccio il calcolo...viene 360
24. L : infatti 360 diviso 4 fa 90, quindi per n uguale a quattro la somma è 360 (elle écrit sur la feuille)... proviamo uno di cinque
25. M : ci deve essere pero' una cosa che lega questi perché vedi... 180 si puo' dividere per tre e 360 si puo' dividere per 4
26. L : pero' anche 180 si puo' dividere per quattro
27. M : va bene, proviamo con un poligono a cinque lati

Elles dessinent sur Cabri un polygone à cinq côtés et elles mesurent les angles

28. L : allora, aspetta che faccio la somma... viene 540... vediamo un po' ...
29. M : se scomponiamo 540... e anche 360
30. L :bhé 360 è 180 per due quindi basta aggiungere per due alla scomposizione di 180

Les élèves font la décomposition des nombres 360 et 540

31. M : c'è sempre due tre e cinque
32. L : e aumentano gli esponeti
33. M : secondo me pero' dovremmo contare più il tre... o no ?
34. L : aspetta un po' ... e sei ?
35. M : se spostiamo un punyto la somma degliangoli è sempre la stessa ?
36. L : vediamo
37. M : allora 111, 155, 34, 77, 163
38. L : si viene 540
39. M : e probabilmente con sei è...
40. L : c'è una cosa pero' ... 180... 360 che è il doppio di 180... prova a fare 180 per tre
41. M : viene 540
42. L : quindi potrebbe essere 180 per sei lati e la somma dovrebbe essere 180 per 4
43. M : quindi dovrebbe essere 72, 720 dovrebbe essere

Les élèves ajoutent un sommet au pentagone dessiné tout à l'heure, pour avoir un polygone à six côtés. Elles mesurent les angles.

44. L : dai dimmi un po'
45. M : 111, 155, 35, 154, 146 86
46. L : non viene ... proviamo a fare un cambio, magari c'è un piccolo errore..

Elles déplacent le polygone et elles font encore le calcul

47. M : 693... non viene più
48. L : pero' fino a cinque lati ci siamo
49. M : forse c'è un errore nella misura... bho' ... riproviamo... (*elle fait un autre fois le calcul mais le résultat n'est pas ce quelles cherchaient*)... non c'è molta differenza ma non viene...
50. L : e se fosse un esagono ?
51. M : dovrebbe venire 720... proviamo

Elles dessinent un polygone à six côtés sur Cabri et elles mesurent les angles

52. M : aspetta forse ho capito ! Ho sbagliato a prendere la misura di questo angolo. Allora c'è 114, 138, 106, 118, 120, 92
53. L : non viene
54. M : non è possibile
55. L : e se fosse con 7 ?
56. M : e proviamo con 7...
57. L : in pratica dovremmo trovare 900

Elles dessinent un polygone à sept côtés et elles mesurent les angles

58. M : allora... viene 900
59. L : davvero ? E venuto 900 ?
60. M : non ci credo !

Elles rigolent

61. L : dai allora va bene per tre, per quattro per cinque e per sette, per sei avremo fatto un errore
62. M :scusa, ma se lasciamo perdere le misure... e se provassimo a dimostrare il risultato ?
63. L : si potremmo provare... come ?
64. M :forse con l'induzione... dobbiamo fare una formula.. cioè come determinare la somma degli angoli interni in funzione di n.... che sarebbero i lati...
65. L :allora tanto scriviamo...

Marta commence à écrire sur un papier :

66. M : per n uguale a tre f(n) è uguale a 180 per 1.... Poi con n uguale a cinque, no quattro f(n) è uguale a 360 che sarebbe uguale a 180 per 2

67. L : n uguale 5 f(n) è uguale a 540 che è uguale a 180 per 3, per n uguale 6 f(n) è 720 ... 180 per 4... n uguale sette
68. M : f(n) è 900 quindi 180 per 5... quindi praticamente è 180 per n meno due giusto ?
69. L : si
70. M : allora f(n) è uguale a 180 per n meno due....
71. L : ok, adesso dobbiamo dimostrarlo con l'induzione
72. M : si allora la formula è 180 per n meno 2 Quindi dovrebbe valere per n + 1
73. L : si per n uguale a n+1 f(n+1) deve essere uguale a 180 per n meno 1
74. M : si ma non riesco... in pratica cosa fai ?
75. L : f(4) è uguale a 180 più f(3).. quindi 180+180...
76. M : si quindi f(5) è è f(4) più 180.... Voglio dire che prendi f(n) uguale a f(n-1) più 180
77. L : aggiungi al precedente sempre 180
78. M : quindi possiamo scrivere f(n+1) come f(n) più 180...
79. L : si ma dobbiamo dimostrarlo...forse possiamo scrivere f (n+1) uguale a f(n-1) + 180 + 180... così' abbiamo f(n-1)... no
80. M : aspetta... il problema è che f(n) e f(n+1) sono due f(n) diverse...in teoria dovrebbero dare lo stesso risultato... invece no
81. L : si pero' ...
82. M : ma qui c'è f(n+1) per 180 mentre qui c'è f(n-1) per 180
83. L : pero' questo dipende da n no ?

Les élèves n'arrivent pas à construire la démonstration

84. M : accidenti non riesco
85. L : senti scriviamo che lo diciamo a parole... abbandoniamo il metodo di induzione perché non riusciamo a venirne fuori

Lucia commence à écrire

86. M : ma no aspetta...
87. L : poi lo scriviamo a parole...
88. M : va bene... allora scrivi la formula è f (n+1) uguale a f(n) più 180
89. L : f(n+1) è uguale a f(n) più 180
90. M : si e scrivi anche che bisogna sommare a f(n) 180 perché aggiungendo un vertice al poligono si aggiunge 180
91. L : aspetta... perché aggiungendo un vertice al poligono è come se si aggiungessero tre lati
92. M : è come se si aggiungesse un triangolo e sappiamo che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180
93. L : sapendo sempre che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre 180
94. M : ma f(n) è questa qui.... quindi riscrivi al posto di f(n), 180 per n meno due...
95. L : come ?
96. M : scrivi al posto di f(n) 180 per n meno 2
97. L : quindi f(n+1) è 180 per n meno 2 più 180
98. M : quindi 180 raccolgo....per n meno 2 meno 1 e quindi 180 per n meno 1... che era quello che volevamo provare
99. L : è vero... mi sembrava che mancasse qualche cosa
- 100.M : anche a me...
- 101.L : così' viene... ma praticamente l'avevamo già dimostrata..
- 102.M : che nervoso ! Comunque ci siamo arrivate !
- 103.L : ok, abbiamo finito allora ?
- 104.M : direi di si !

Marta
Lucia

NOME E COGNOME

Si consideri un poligono di n lati.

Problema

Si può dare una legge per trovare la somma degli angoli interni in funzione dei lati?

$n = 3$

misura angoli = 180°



$n = 4$

misura angoli = 360°



$n = 5$

somma misura angoli 540°



$n = 6$

somma misura angoli 720°



$n = 7$

somma misura angoli 900°



Formula

$F(n) = 180^\circ(n-2)$

Base = $F(3) = 180^\circ \rightarrow$ non essendo possibile creare un poligono con soli 2 vertici

$F(n+1) = 180^\circ(n-1)$

~~Abbandoniamo il metodo dell'induzione perché non riusciamo a venire fuori.~~

A PAROLE

Le formule

$$F(n+1) = F(n) + 180$$

Bisogna sommare a $F(n)$ 180° perché aggiungendo un vertice al poligono è come se si aggiunge un triangolo sapendo sempre che la somma degli angoli interni di un Δ è sempre 180° .

$$F(n+1) = 180^\circ(n-2) + 180$$

$$F(n+1) = 180^\circ(n-2+1)$$

$$F(n+1) = 180^\circ(n-1)$$

Annexe 4.3 : Binôme : Vincent (V), Ludovic (L), classe Terminale en France.

L'enseignant fait ouvrir Cabri pendant que je distribue la feuille du travail

1. V : On considère un polygone quelconque à n côtés... peut-on donner une loi pour trouver la somme des angles intérieurs du polygone en fonction du nombre des côtés
2. L : alors d'abord on fait un polygone
3. V: oui, un polygone quelconque

Ludovic dessine un polygone quelconque à cinq côtés

4. L: si on bouge les points on obtient des polygones différents...
5. V: alors qu'est ce qu'on peut faire ? On peut mesurer les angles
6. L: on peut oui

Ludovic mesure les angles et Vincent fait la somme avec la calculette

7. V: alors la somme vient...
8. L: alors ça fait combien ?
9. V: attend 248 plus ... Donc

Ludovic bouge la figure

10. L: oh putain !!!
11. V: il faut que je fasse ce qu'on avait fait... attend

Vincent fait encore les calculs

12. L: il faut trouver une relation entre les nombres des côtés et la somme des angles
13. V: 492..
14. L: ça fait 492 ?
15. V: oui, mais...

*Silence, ils regardent la figure
Les élèves ne parlent pas trop*

16. L: si on considère un cas particulier, un polygone régulier
17. V: on peut essayer

Vincent dessine un polygone régulier à huit côtés

18. L: alors là...
19. V: peut-être on peut toujours décomposer en triangles
20. L: oui, j'avais pensé même au début mais ...

Vincent dessine les diagonales dans le polygone irrégulier

21. V: voilà, voilà, voilà
22. L: c'est vrai que si tu rajoute un point ça va te rajouter... ça va te rajouter ... je ne suis pas sûr mais... ça va te rajouter un triangle
23. V: si tu rajoute un point ...
24. L: oui on est obligé d'ajouter un triangle
25. V: oui
26. L: mais par contre il faudrait voir comment tu pars au début
27. V: oui mais le début c'est
28. L: Je pense que pour n égal 3 ça va
29. V: si on partage le polygone en triangles on a ...
30. L: chaque fois que tu rajoutes un triangle tu rajoutes 180
31. V: eh?

32. L: chaque fois que tu rajoute un point tu rajoutes un triangle, donc chaque fois tu rajoutes 180 mais ça dépend d'où tu pars... donc 180 pour chaque côté
33. V: chaque fois qu'on rajoute un côté on rajoute 180
34. L: et donc la somme des angles ça fait 180 plus 180 n moins trois et donc 180 n moins deux... voilà c'est ça
35. V: 180 n moins deux ?
36. L: oui parce que tu penses à 180 et tu sais que tu rajoutes 1 après
37. V: oui
38. L: alors tu penses que pour quatre tu rajoutes 1, pour cinq tu rajoutes deux.. donc ça fait n moins trois ... non, ça fait 180 plus 180 n moins trois et donc 180 pour n moins deux... bon mais il faut la démontrer
39. V: par récurrence c'est ça ? Tu as la somme des angles et tu as que pour n égal trois la somme est 180
40. L: oui par récurrence

Ludovic écrit la démonstration, Vincent dessine un autre polygone sur Cabri; les élèves ne parlent plus.

.....

41. V: Tu arrives à la faire ?
42. L: oui, pas de problème

Les élèves finissent en 30 minutes

NOM ET PRENOM

Nicolas
Ludovic

On considère un polygone quelconque à n côtés.

Problème.

Peut-on donner une loi pour trouver la somme des angles intérieurs du polygone en fonction du nombre des côtés ?

THÈME :

Soit ΣA_n la somme des angles intérieurs du polygone.
on peut noter que $\Sigma A_n = 180(n-2)^\circ = \pi(n-2) \text{ rad}$

DÉMONSTRATION PAR RÉCURSION

on considère un polygone à n côtés, donc $n \geq 3$

INITIATION :

pour $n = 3$, on a un triangle donc $\Sigma A_3 = 180^\circ = 180(3-2)$

TRANSITION :

Soit p tel que $p \geq 3$

on fait l'hypothèse que $\Sigma A_p = 180(p-2)$

on veut vérifier que $\Sigma A_{p+1} = 180(p+1-2)$

$$\text{donc } \Sigma A_{p+1} = 180(p-2) + 180$$

quand on ajoute un côté, on ajoute un sommet,
donc on peut découper le polygone par un triangle de plus :



on ajoute donc la somme des angles d'un triangle, soit 180°

$$\text{donc } \Sigma A_{p+1} = 180(p-2) + 180 = 180(p+1-2)$$

CONCLUSION :

La propriété, vraie au rang $n_0 = 3$ et héréditaire, se vérifie pour tout n , $n \geq 3$:

pour un polygone quelconque de n côtés, la somme des angles intérieurs du polygone est égale à $180(n-2)^\circ$

Annexe 4.4 : Binôme : Sara (S), Cinzia (C), classe de 4 année du lycée (16/17 ans, première en France).

1. S : allora... si consideri un poligono di n lati... e già non mi piace... problema, si puo' dare una legge per trovare la somma degli angoli interni in funzione dei lati?
2. C : non mi sembra tanto facile... comunque
3. S : tanto facciamo un disegno
4. C : d'accordo, prendiamo un poligono qualunque?
5. S : si dai disegna un poligono

Cinzia dessine un polygone à 5 côtés sur Cabri

6. C : dobbiamo trovare l'ampiezza degli angoli
7. S : si ma come fai a trovarla l'ampiezza degli angoli ?
8. C : come facciamo a trovare la somma degli angoli interni di un poligono?... Noi conosciamo la somma degli angoli interni di un triangolo... ma se noi riduciamo il poligono in triangoli non possiamo trovare... per esempio qui costruiamo un triangolo, poi qui facciamo un altro e qui un altro... quindi abbiamo tre triangoli
9. S : ah cosi' la somma è 180 per tre... pero' noi dobbiamo trovare la legge
10. C : e lo so... pero' ...
11. S : dividere il poligono in triangoli effettivamente ci potrebbe aiutare... nel caso di un quadrato avremmo due triangoli e quindi la somma sarebbe 360...
12. C : quindi 180 più 180

Silence...

13. S : allora dunque
14. C : ma perché deve essere rispetto ai lati
15. S : e appunto questo non dipende dai lati, bisogna che sia in funzione dei lati...
16. C : forse i triangoli sono in relazione con il numero dei lati...allora ...
17. S : nel caso di cinque lati abbiamo visto tre triangoli e quindi tre per 180 ...
18. C : se prendiamo un poligono a sei lati abbiamo... abbiamo quattro triangoli
19. S : quindi nel caso di sei lati ne abbiamo quattro di triangoli quindi 4 per 180, forse ...
20. C : quindi a seconda del numero dei lati quanti triangoli si formano ?
21. S : questa è una bella domanda...
22. C : ci sarà una relazione...

silence

23. S : allora, aspetta un attimo... qui abbiamo 5 lati che formano tre triangoli... potrebbero formarsene anche più di tre
24. C : no..
25. S : no anche se li collegassimo in maniera diversa... no avremmo tre triangoli
26. C : guarda un po', con quattro lo divido in due triangoli, e non posso dividerlo in più triangoli
27. S : certo, collegando i vertici
28. C : allora quattro lati e vengono due triangoli, se sono cinque lati ne vengono tre... no perché ... con sei lati ne avremmo quattro, quindi c'è una differenza di due
29. S : si ma non vedo la relazione...
30. C : va bhé intanto scriviamo questo, poi magari un senso lo troviamo

Cinzia écrit ce que les élèves ont dit jusqu'à maintenant

31. C : pero' aspetta, la somma degli angoli di un triangolo è 180, quindi questo sarebbe già 180 per quattro
32. S : ah ho capito, la relazione bisogna trovare
33. C : si una relazione
34. S : allora è... il numero di lati meno due per 180...
35. C : come ?
36. S : eh si, il numero dei lati meno due ti da i triangoli per 180 è la somma degli angoli interni

37. C : è vero, è vero...
38. S : ora dobbiamo dimostrarlo
39. C : ok proviamo a dimostrarlo

Silence...

40. S : allora... aspetta... se consideriamo i vertici del poligono... il lato del triangolo collega due vertici, ma due lati sono del poligono
41. C : Allora questo triangolo qui ha i due lati che sono del poligono più uno, che è in comune con questo che ha sempre due lati.... Ripeti un attimo quello che hai detto ?
42. S : allora ho detto che per formare un triangolo ci vogliono tre lati e questo lato e questo lato sono lati del poligono, mentre questo che è interno al poligono serve per formare un altro triangolo ... questo lato che è in comune non si conta per formare il poligono
43. C : si
44. S : si ma non ci serve...

Silence...

45. C : quindi come possiamo dimostrare che i triangoli sono effettivamente due di meno rispetto ai lati...
46. S : allora....
47. C : noi dobbiamo provare che la formula n meno due per 180 vale in generale...

... silence

48. S : secondo me la dimostrazione e la legge si riduce a dimostrare che il numero dei triangoli.... Cioè che il numero dei lati è maggiore di due rispetto ai triangoli insomma..
49. C : si ma
50. S : e lo so, ho capito, non è facile...
51. C : si collegano sempre dei vertici che non sono sullo stesso lato per forza di cose.... Sono perspicace è ?
52. S : allora..
53. C : si collegano quindi questi due punti... direi che ...
54. S : se si collegano due punti Questi sono due lati del poligono e questo è il lato che collega due vertici opposti diciamo...
55. C : ad esempio in questo poligono qua, c'è ad esempio questo triangolo qua che per quanto riguarda i lati non ci interessa minimamente, ma serve per la misura degli angoli e quindi...
56. S : cioè questo triangolo è formato da tre lati in comune con gli altri tre triangoli ?
57. C : si
58. S : si è vero che comunque non vengono considerati i suoi lati... si lo so ma rispetto alla legge cosa ci può servire ?
59. C : a niente...

Silence...

60. S : allora qui abbiamo uno due tre quattro cinque sei vertici.... Ogni due vertici c'è un triangolo... ogni due vertici si forma un triangolo
61. C : si ad esempio..
62. S : ad esempio questo abbiamo questa coppia che da origine a questo triangolo, questa coppia che da origine a questo e questa che da origine a quest'altro...
63. C : si ma...

Silence...

64. S : allora,
65. C : forse potremmo provare a ...
66. S : ogni vertice si collega con tre vertici... questo con due questo con due questo con due..... non so proprio come fare
67. C : neppure io...

Silence....

68. C : se abbiamo un quadrato, rispetto a un triangolo aggiungiamo due lati , in realtà ne aggiungiamo uno perché l'altro è quello del triangolo.. se abbiamo un poligono a cinque lati, aggiungiamo un triangolo, quindi due lati, ma in realtà ne aggiungiamo uno...
69. S : allora se parti da un triangolo ci aggiungi questo e i lati diventano 4, 4 meno due fa due e i triangoli sono due e la relazione è giusta, poi ci aggiungi questo terzo, quindi abbiamo cinque lati i triangoli sono tre... quindi ok...
70. C : il fatto è che i lati e i vertici sono uguali...perciò se hai una figura con cinque vertici questo vertice si collega coi due ma non con i vertici adiacenti, quindi nel caso di cinque vertici si potranno formare solo due collegamenti che danno origine a tre triangoli...
71. S : ad esempio questo poligono è suddiviso in maniera sbagliata perché questo triangolo non c'entra niente,...
72. C : è vero, altrimenti consideri angoli interni che non c'entrano niente... bisogna sempre collegare un vertice con gli altri ed escludere i due adiacenti
73. S : qui abbiamo considerato più vertici e non va bene...
74. C : quindi praticamente questo vertice deve essere collegato a tutti vertici non adiacenti formando quindi tre segmenti però di tre segmenti si formano quattro triangoli...
75. S : così funziona !!
76. C : allora scriviamo questo... dimostriamo così'...

Cinzia commence à écrire

77. S : possiamo dire che il numero dei triangoli corrisponde al numero dei vertici non adiacenti
78. C : si
79. S : allora abbiamo notato che un poligono di n lati può essere suddiviso in triangoli a partire da un vertice
80. C : a partire da un vertice
81. S : collegandolo con i vertici non adiacenti
82. C : poi... considerando il numero di tali vertici più il vertice di partenza, abbiamo notato che questo numero corrisponde al numero dei triangoli formati
83. S : prof, abbiamo fatto, più di così' non riusciamo...

NOME E COGNOME

Soro

Livia

Si consideri un poligono di n lati.

Problema

Si può dare una legge per trovare la somma degli angoli interni in funzione dei lati?

ABBIAMO CONSIDERATO UN POLIGONO IRREGOLARE DI 5 LATI. POICHÉ CONOSCIAMO IL VALORE DELLA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO E DI UN QUADRATO, ABBIAMO PENSATO DI RIDURRE TALE FIGURA IN TRIANGOLI PER RICONDURCI AD UN CASO PIÙ SEMPLICE DA CUI POSSIAMO RICAVARE LA SOMMA DEGLI ANGOLI.

ABBIAMO NOTATO CHE, INNANZITUTTO SI DEVONO CONSIDERARE SOLO I TRIANGOLI FORMATI COLLEGANDO I VERTICI POICHÉ ALTRIMENTI SI CONSIDERANO ANGOLI CHE NON INTERESSANO.

SE IL POLIGONO HA 4 LATI SI FORMANO SOLO 2 TRIANGOLI, SE NE HA 5 SI OTTEGGONO 3 TRIANGOLI E SE NE HA 6 SE NE OTTEGGONO 4. PERCIÒ RISPETTO AL NUMERO DI LATI (n) NOTIAMO CHE I TRIANGOLI FORMATI $(n-2)$. POICHÉ LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO È 180 LA RELAZIONE È $(n-2) \cdot 180^\circ$

ABBIAMO NOTATO CHE UN POLIGONO DI n LATI PUÒ ESSERE SUDDIVISO IN TRIANGOLI A PARTIRE DA UN VERTICE COLLEGANDOLO CON I VERTICI NON ADIACENTI, CONSIDERANDO IL NUMERO DI TALI VERTICI PIÙ IL VERTICE DI PARTENZA, ABBIAMO NOTATO →

CHE QUESTO NUMERO CORRISPONDE AL NUMERO DEI TRIANGOLI FORMATI.

Annexe 4.5 : Binôme : Christophe (C), Ibrahim (I), classe Terminale en France

L'enseignant fait ouvrir Cabri pendant que je distribue les feuilles du travail

1. C : On considère un polygone quelconque à n côtés, peut-on donner une loi pour trouver la somme des angles intérieurs du polygone en fonction du nombre des côtés ?
2. I : d'abord il faut dessiner un polygone
3. C : oui, c'est toi qui dessines ?
4. I : oui... un polygone... je ne sais pas si c'est mieux de prendre un polygone régulier ou...quelconque... on est pas obligés qu'il soit régulier en effet...

Christophe dessine sur Cabri un polygone quelconque à six côtés

5. C : combien de côtés là ?
6. I : six
7. C : déjà on sait que quand on a trois côtés c'est un triangle et la somme des angles est 180
8. I : ah, en effet ...
9. C : après attends
10. I : si on ajoute un côté ça fait 360
11. C : oui mais c'est régulier...pour un rectangle c'est pareil ça fait 360, après tu as un pentagone et... mais ils sont tous réguliers

... (silence)

Ils dessinent sur Cabri un polygone avec un angle obtus et ils le découpent en triangles.

12. I : quand tu fais un angle comme ça, tu as la même chose
13. C : mais si tu bouges un angle tu n'as plus la même valeur des angles, là le polygone c'est bizarre... non ?
14. I : eh oui...

Les élèves bougent un sommet du polygone en le déformant. Le polygone est découpé en triangles.

15. C : là quand tu bouges un point c'est comme si tu avais un triangle avec trois angles supplémentaires
16. I : donc forcément là ...quand tu bouges celui là la somme des angles ça va pas
17. C :après... tu as forcément 180 en plus
18. I : donc nous avons ça, ça et ça, mais quand on bouge on a un morceau en plus...
19. C : combien de côtés ? Deux , trois, quatre, cinq et six et si tu rajoutes un point qu'est ce que ça donne ? Tu rajoutes un triangle
20. I : oui ...si tu rajoutes un point dans ce polygone on a sept côtés et cinq triangles
21. C : oui mais si tu bouges, on n'a plus cinq triangles

...

22. I : alors six côtés tu as quatre triangles, si tu as cinq côtés trois triangles et quatre côtés tu as deux triangles trois côtés tu as un triangle
23. C : donc en effet ... superbe, regarde... tu sais que ça plus ça plus ça c'est égal à 180 et attends, je ne sais pas comment t'expliquer ça..
24. I : mais là tu as un deux trois quatre et donc 180 par quatre
25. C : oui il me semble que ça doit être ça mais je ne sais pas si c'est pareil
26. I : et en effet, ah ok regarde, tu as six côtés et quatre triangles, d'accord ? Bon pour un carré tu as deux triangles, pour trois côtés tu as un triangle, on a une forme de récurrence parce qu'à chaque fois
27. C : ouiiii
28. I : et après chaque fois qu'on rajoute un triangle on a 180 pour la somme des angles
29. C : donc il nous reste à trouver la récurrence là
30. I : non mais c'est bon, regarde, en général, tu as n côtés donc pour n égal 3 ... T égal un, la somme est 180, donc 1 c'est 3 moins 2... 4 est 6 moins 2, donc en effet les angles intérieurs c'est égal à n moins 2 par 180... n moins 2 par 180
31. C : oui c'est le résultat...
32. I : une seconde...

....

- 33. C : c'est bon on a fini
- 34. I : attends on va essayer... tu prends le segment
- 35. C : alors segment

Les élèves regardent le polygone construit sur Cabri et ils construisent les triangles à l'intérieur. Ils vérifient que la loi trouvée marche

- 36. I : c'est bon
- 37. C : alors tac, tac
- 38. I : mais c'est bon c'est bon
- 39. C : mais non, on a un problème, on n'a pas tous les points... il n'y a pas un triangle dans tous les points
- 40. I : oui parce que tous les sommets doivent correspondre... à un triangle... mais si, ils correspondent quand même à la somme d'un triangle, alors c'est bon.. ; là on a un deux trois quatre cinq six sept, sept triangles
- 41. C : on devrait avoir huit côtés
- 42. I : non, neuf
- 43. C : oui neuf... un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit neuf... c'est bon
- 44. I : ohhhh !
- 45. C : alors on rédige
- 46. I : voilà !!

Les élèves commencent à écrire

- 47. C : Alors, j'écris... expériences préalables... bon j'écris ce qu'on a fait...

Christophe écrit sans rien demander à Ibrahim

Silence pour 3 minutes environ

Ibrahim bouge les points sur Cabri

- 48. I : Mais après... les triangles... ils faut qu'ils se croisent ou pas ?
- 49. C : mais même s'ils se croisent c'est pareil, vas-y, croise un juste pour voir...

Ibrahim déplace un côté du polygone de façon qu'il se superpose au triangle

- 50. I : là...
- 51. C : attends, laisse là comme ça... donc là on a combien de triangles ?
- 52. I : celui là se voit pas, il ne se voit plus, donc on a un deux trois, quatre, cinq, six sept huit triangles
- 53. C : si tu le vois quand même, il ne faut pas compter par rapport à ça
- 54. I : mais oui
- 55. C : mais non ça marche quand même... ils se forment des triangles intérieurs et là tu aurais des angles dont tu connais pas la mesure et qu'ils sont trop... alors tu es obligé de faire comme on a fait...

Silence, Ibrahim continue à regarder sur Cabri alors que Christophe écrit

- 56. I : ça marche plus eh ! Il faut faire comme ça parce que ça marche !
- 57. C : Mais non ! Tu as combien de côtés là ? Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit neuf et tu as sept triangles..
- 58. I : Tu n'as pas pris

Ibrahim dessine un autre polygone à six côtés et il construit les quatre triangles intérieurs

- 59. C : donc là il y a six côtés et quatre triangles... ça marche
- 60. I : mais si tu croises le polygone ça donne deux triangles en plus
- 61. C : mais il faut faire le triangles intérieurs... autrement celui là n'est pas un polygone
- 62. I : pourquoi il n'est pas un polygone ? Il a plusieurs côtés
- 63. C : là ça fait... un polygone, un triangle et un polygone... tu n'as pas la même forme géométrique... tu croises et bon... tu as un polygone croisé
- 64. I : mais bon tu peux aussi décomposer en plusieurs triangles
- 65. C : ah alors là tu le décomposes en plusieurs... mais après les angles intérieurs

66. I : le polygone il a n côtés et la somme des angles intérieurs est n moins deux 180, ça devrait marcher... mais ça marche pas dans ce cas là parce que là à l'intérieur du polygone il y a un côté
67. C : mais si tu décomposes en partant du même sommet, je veux dire si tu décomposes en triangles mais en considérant le même sommet
68. I : ah, là, peut-être que si tu bouge ça marche...

Il fait la décomposition du polygone, en construisant les triangles à partir du même sommet.

69. C : en effet là ça marche tout le temps
70. I : oui, comme ça, ça marche
71. C : Bon maintenant il faut écrire

Christophe écrit
Silence

72. I : as-tu fini ?
73. C : maintenant il faut écrire la démonstration... n désigne le nombre des côtés et la formule générale est n moins deux pour 180
74. I : on utilise la récurrence pour démontrer ?
75. C : oui mais... Comment ?
76. I : il faut faire l'initiation qui est pour n égal trois... ensuite tu montres que ta formule elle est vraie
77. C : ça marcherait pas ça, ça il faut que tu la puisses déterminer en fonction de tout ce que tu as avant, c'est ça qui est la récurrence... parce que la formule est correcte mais il faut l'écrire comme récurrence
78. I : alors là...
79. C : je cherche la récurrence sur le cahier

silence

80. I : qu'est ce que tu as trouvé ?
81. C : et bon... u_n est égal à la formule et u_3 est égal à p . Tu es d'accord ? u_{n+1} c'est u_n plus π parce que si par exemple tu as quatre côtés tu as 180 pour le triangle plus un triangle donc plus 180 d'accord ?
82. I : oui mais c'est où la récurrence ?
83. C : et c'est ça non ?
84. I : bon moi je ne sais pas

Silence

85. C : voilà c'est suffit d'écrire comme ça à mon avis
86. I : bon d'accord.

Ils disent qu'ils ont fini

NOM ET PRENOM

Ibrahim
Christophe.On considère un polygone quelconque à n côtés.**Problème.**

Peut-on donner une loi pour trouver la somme des angles intérieurs du polygone en fonction du nombre des côtés ?

Expériences préalables :

- Un triangle quelconque donc la somme de ces angles est égal à 180°
- Un polygone à 3 côtés : Nous avons pensé que chaque polygone pourrait être décomposé en plusieurs triangles quelconques. Dans ce cas, il y en aurait 3 donc étant donné que la somme des angles intérieurs est égal à 180° on multiplie 180 par $3 = 540^\circ$
- De la même façon, avec un polygone à 4 côtés on trouve 2 triangles.
....
- Puis on a compris qu'il faut que tous les triangles aient un sommet commun car dans le cas contraire lorsque l'on coupe le polygone la somme des angles n'est plus la même.

Formule générale :

$$n \geq 3$$

$$U_3 = \pi \quad U_n = (n-2)\pi \quad n : \text{désigne le nombre de côtés.}$$

$$U_{n+1} = (n-2)\pi + \pi$$

