



HAL
open science

Simulation numérique de l'endommagement ductile en formage de pièces massives

Jean-François Mariage

► **To cite this version:**

Jean-François Mariage. Simulation numérique de l'endommagement ductile en formage de pièces massives. Autre. Université de Technologie de Troyes, 2003. Français. NNT : . tel-00004667v2

HAL Id: tel-00004667

<https://theses.hal.science/tel-00004667v2>

Submitted on 1 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SIMULATION NUMÉRIQUE DE
L'ENDOMMAGEMENT DUCTILE EN FORMAGE DE
PIÈCES MASSIVES

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 29 janvier 2003

En vue de l'obtention du titre de Docteur de L'Université de Technologie de Troyes en
SCIENCES MÉCANIQUES POUR L'INGÉNIEUR

Par

Jean-François MARIAGE

Composition du jury

Président : Saïd AHZI, Professeur des Universités, LPST Strasbourg

Rapporteurs : Laurent DUBAR, Professeur des Universités,
Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis
Philippe PICART, Professeur des Universités,
Université de Franche-Comte, Besançon

Examineurs : Abdelhakim CHEROUAT, Maître de Conférences HDR, UTT
Michel CRISTESCU, Ingénieur de recherche, CETIM St Etienne
Ludovic LAZZAROTTO, Ingénieur de recherche, CETIM St Etienne
Philippe POUBANNE, Ingénieur de recherche, SNECMA Gennevilliers

Directeur de thèse : Khémaïs SAANOUNI, Professeur des Universités, UTT

Remerciements

Le présent travail a été réalisé au Laboratoire des Systèmes Mécaniques et d'Ingénierie Simultanée (LASMIS) de l'Université de Technologie de Troyes (UTT). Je tiens à remercier Jian Lu pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

Toute ma gratitude et mes plus vifs remerciements vont naturellement à mon directeur de thèse, Khemaïs Saanouni, professeur des Universités, pour m'avoir fait partager son goût de la recherche et pour son encadrement dynamique, sa disponibilité et sa gentillesse. Je ne peux que le remercier d'avoir placé sa confiance en moi.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur Philippe Picart, professeur à l'Université de Franche-Comte qui a accepté d'être rapporteur. Je le remercie d'avoir examiné ce travail avec tant d'intérêt et d'attention.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Laurent Dubar, professeur à l'Université de Valenciennes pour avoir accepté la responsabilité de rapporter mon mémoire, ainsi que pour avoir apporté ses remarques constructives.

Je remercie Monsieur Said Ahzi, professeur à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, pour m'avoir fait le plaisir de présider ce jury de thèse.

Mes remerciements vont à Michel Cristescu et Ludovic Lazzarotto du CETIM St Etienne pour m'avoir fait l'honneur d'être membres de mon jury de thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Philippe Poubanne de la SNECMA pour avoir fait partie de mon jury.

Merci à Hakim Cherouat d'avoir participé à ce jury de thèse, je lui exprime également ma reconnaissance pour ses multiples conseils et sa disponibilité au cours de ces trois années.

J'exprime mes remerciements à Monsieur Pierre Ravassard pour m'avoir accueilli et conseillé au sein du « service forgeage et simulation » du CETIM de St Etienne. Je remercie également toute l'équipe « forgeage » du CETIM pour leur dévouement, leur gentillesse et leurs conseils durant mes séjours à St-Etienne.

Le pôle mécanique et matériau de Champagne Ardenne (PMMC) co-financé par le conseil régional et l'état (DRRT) a permis à ce projet de voir le jour, en partenariat avec le CETIM et à l'ANRT dans le cadre d'une convention CIFRE. Je leur exprime toute ma gratitude.

Je tiens aussi à remercier tous les industriels qui ont pris la peine de m'accueillir au sein de leurs entreprises et surtout fourni des cas directement exploitables dans ce travail.

Patrice Lasne et Stéphane Marie de Transvalor ont toujours pris de leur temps pour me conseiller lors de mes déplacements à Sophia-Antipolis, je leur en suis très reconnaissant.

Merci également à tous mes amis thésards et docteurs de l'UTT, Philou le dérivateur, Oliv, la petite Céline, David, Juju, Guiton, Anne, Bruno, Fahed, Nabil, Mohamed, Mourad... Merci à vous de m'avoir aidé ainsi que d'avoir rendu, à votre manière, ce travail plus sympathique et agréable.

Enfin je remercie ma femme, Virginie, pour son soutien permanent, sa confiance sans faille et surtout pour sa patience infinie durant ces trois années, cela n'a pas de prix.

Merci à mes parents d'avoir pu en arriver là.

A mon grand-père.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1 FORMULATION DU COUPLAGE COMPORTEMENT-ENDOMMAGEMENT: ASPECTS THÉORIQUES	5
1.1 PROBLÉMATIQUE DU SUJET	5
1.2 ENDOMMAGEMENT	6
1.2.1 Mécanismes	6
1.2.1.1 L'endommagement instantané	6
1.2.1.1.a Endommagement fragile	6
1.2.1.1.b Endommagement ductile	7
1.2.1.2 Endommagements différés	12
1.2.1.2.a Endommagement par fatigue	12
1.2.1.2.b Endommagement par fluage	12
1.2.1.3 Notion de forgeabilité	12
1.2.2 Représentations mathématiques du dommage ductile	13
1.2.2.1 Représentation de l'endommagement ductile par des cavités	13
1.2.2.2 Représentation phénoménologique par des variables d'état	15
1.2.2.2.a Variables d'endommagement	15
1.2.2.2.b Notion de variables effectives	16
1.2.2.2.c Critère et loi d'évolution de l'endommagement	18
1.3 MODÈLE D'ÉVOLUTION DE L'ENDOMMAGEMENT ET COUPLAGE COMPORTEMENT-ENDOMMAGEMENT	22
1.3.1 Rappel thermodynamique	22
1.3.2 Méthodologie de couplage comportement-endommagement dans Forge2 [®] -3 [®]	24
1.3.3 Cas du comportement thermo-élasto-plastique	24
1.3.3.1 Comportement thermo-élasto-plastique	24
1.3.3.2 Cas isotherme	29
1.3.4 Cas du comportement thermo-élasto-viscoplastique	30
1.3.4.1 Cas sans dommage de fluage	30
1.3.4.2 Cumul de l'endommagement de plasticité et de fluage	32
1.3.5 Cas particulier du couplage faible dans Forge2 [®] et Forge3 [®]	33
1.4 MODÈLES DE FROTTEMENT	34
1.4.1 Introduction	34
1.4.1.1 Cas du contact unilatéral	35
1.4.1.2 Cas du contact bilatéral	36
1.4.2 Les lois de frottement usuelles	36
1.4.2.1 Modèle de frottement de Coulomb	36
1.4.2.2 Modèle de Tresca	37

1.4.2.3	Modèle de type viscoplastique	38
1.5	CONCLUSION	39
2	FORMULATION DU COUPLAGE COMPORTEMENT-ENDOMMAGEMENT: ASPECTS NUMÉRIQUES	41
2.1	POSE DU PROBLÈME D'ÉVOLUTION.....	41
2.2	DISCRÉTISATION SPATIALE.....	45
2.2.1	Principe de la méthode	45
2.2.2	Formulation classique à un champ (vitesse).....	46
2.2.3	Formulation mixte à deux champs (vitesse/pression).....	48
2.2.4	Résolution du système global par la méthode de Newton-Raphson.....	50
2.3	DISCRÉTISATION TEMPORELLE.....	52
2.3.1	Méthode numérique d'intégration des équations de Prandtl-Reuss.....	52
2.3.2	Intégration locale des équations de Prandtl-Reuss couplées à l'endommagement	54
2.3.2.1	Couplage fort comportement-endommagement	54
2.3.2.2	Couplage faible comportement/endommagement	61
2.3.3	Opérateurs tangents discrets	62
2.3.3.1	Cas du couplage fort.....	62
2.3.3.2	Cas du couplage faible.....	67
2.3.4	Gestion numérique du contact	67
2.3.5	Cas des logiciels Forge2 [®] et Forge3 [®]	71
2.4	MAILLAGE, REMAILLAGE ET TRAITEMENT DES ÉLÉMENTS ENDOMMAGÉS	71
2.4.1	Maillage dans Forge2 [®] et 3 [®]	71
2.4.2	Remaillage dans Forge2 [®] et 3 [®]	72
2.4.3	Traitement des éléments endommagés	73
2.5	CONCLUSION	74
3	IDENTIFICATION ET VALIDATION DE LA MÉTHODOLOGIE	77
3.1	INTRODUCTION.....	77
3.2	IDENTIFICATION ET VALIDATION DU MODÈLE COUPLÉ.....	78
3.2.1	Méthodologie d'identification	78
3.2.2	Etude paramétrique sur des matériaux virtuels.....	79
3.3	VALIDATION SUR DES EXEMPLES SIMPLES	91
3.3.1	Exemples de mise en forme à froid	91
3.3.1.1	Cas de la plaque en traction (2D)	91
3.3.1.1.a	Etude de convergence	91
3.3.1.2	Cas de l'éprouvette cylindrique(2D/3D)	96
3.3.1.3	Ecrasement d'un barreau cylindrique infiniment long.....	99
3.3.2	Exemples de validation numérique du couplage thermomécanique	103
3.3.2.1	Essai de traction avec prise en compte de la température.....	103
3.3.2.2	Exemples de validation en (élasto)viscoplasticité isotherme.....	106
3.4	IDENTIFICATION SUR DES MATÉRIAUX RÉELS	108
3.5	CONCLUSION	110
4	APPLICATION A DES PROCÉDÉS INDUSTRIELS	113
4.1	INTRODUCTION.....	113
4.2	CAS DE L'ÉCRASEMENT D'UN CYLINDRE CREUX (BAGUE (2D/3D))	114

4.3	PROCÉDÉ DE DÉCOUPAGE DE TÔLE (2D)	118
4.3.1	Description du procédé.....	118
4.3.2	Influence de l'usure des outils	119
4.3.3	Effet du jeu relatif entre le poinçon et la matrice	123
4.3.4	Etude de l'interface poinçon/tôle/matrice.....	125
4.4	PROCÉDÉ DE POINÇONNAGE ET D'ÉBAVURAGE D'UNE ROUE	126
4.5	PROCÉDÉ DE MISE EN FORME D'UN ÉCROU SIX PANS	132
4.6	PROCÉDÉ DE FORGEAGE DE CROISILLONS	136
4.6.1	Description du procédé.....	136
4.6.2	Procédé d'estampage ou forgeage libre	136
4.6.3	Procédé de forgeage par extrusion latérale.....	139
4.7	PROCÉDÉ DE FILAGE AVANT AVEC FORMATION DE CHEVRONS (2D).....	143
4.7.1	Description du procédé.....	143
4.7.2	Simulation numérique du filage avant.....	144
4.7.3	Influence de la réduction du diamètre et de l'angle de la filière.....	149
4.7.4	Etude de l'influence du maillage sur la formation des chevrons	152
4.7.5	Influence du diamètre initial du lopin.....	153
4.7.6	Influence de la ductilité et du coefficient de frottement	155
4.7.6.1	Influence de la ductilité	155
4.7.6.2	Influence du coefficient de frottement.....	156
4.8	PROCÉDÉ D'USINAGE ORTHOGONAL PAR ENLÈVEMENT DE COPEAUX	157
4.9	CONCLUSION	159
5	CONCLUSION.....	161
	RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	169

NOTATIONS

\underline{X}	Champ vectoriel
$\underline{\underline{X}}, X_{ij}$	Champ tensoriel supérieur d'ordre deux
$\underline{\underline{\underline{X}}}, X_{ijkl}$	Champ tensoriel supérieur d'ordre quatre
$\underline{\underline{X}}\underline{\underline{Y}}, X_{ij} Y_{ij}$	Produit simplement contracté de deux tenseurs d'ordre deux
$\underline{\underline{X}} : \underline{\underline{Y}}, X_{ij} Y_{ij}$	Produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre deux
$\underline{\underline{X}} : \underline{\underline{Y}}, X_{ij} Y_{ijpq}$	Produit contacté d'un tenseur d'ordre deux et d'un tenseur d'ordre quatre
$\underline{\underline{\underline{X}}} : \underline{\underline{\underline{Y}}}, X_{ijpq} Y_{pqkl}$	Produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre quatre
$tr(\underline{\underline{X}}), X_{ii}$	Trace d'un tenseur
X_H	Partie hydrostatique d'un tenseur avec $X_H = \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{X}})$
$J_2(\underline{\underline{X}})$	Second invariant d'un tenseur $J_2(\underline{\underline{X}}) = X_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{X}}^d : \underline{\underline{X}}^d}$
$\underline{\underline{X}} \otimes \underline{\underline{Y}}, X_{ij} Y_{pq}$	Produit tensoriel des tenseurs d'ordre deux
$\underline{\underline{X}}^T$	Transposée d'un tenseur
$\underline{\underline{X}}^{-1}$	Inverse d'un tenseur
$\underline{\underline{X}}^{-T}$	Inverse d'un tenseur $\underline{\underline{X}}^T$
$\det A$	Déterminant d'une matrice

INTRODUCTION GENERALE

De nos jours les besoins industriels dans des domaines très diversifiés tels que l'aéronautique, le nucléaire et l'automobile imposent des contraintes et des performances de plus en plus élevées afin de diminuer les coûts de fabrication et d'augmenter la fiabilité des pièces. La maîtrise de la prévision du comportement et de la rupture des structures mécaniques est devenue primordiale. Pour cette raison la simulation numérique occupe une place de plus en plus prépondérante dans certains domaines de l'industrie. Le secteur de la Forge ne déroge pas à la règle. On assiste actuellement à un réel développement et à une utilisation systématique de méthodes numériques à chaque étape de la réalisation d'un produit (conception, fabrication, validations, essais, etc..) afin d'en optimiser le procédé de fabrication. Il est bien évident que l'utilisation du formage « virtuel » minimise les coûts engendrés par le choix des presses à utiliser, en calculant les efforts nécessaires durant la gamme de réalisation du produit, par le choix du process de fabrication approprié et par l'optimisation des géométries des matrices...

Les mutations industrielles ont considérablement accru l'utilisation du formage virtuel ces deux dernières décennies. En effet, les entreprises de forgeage ont en partie cessé d'être les fabricants attitrés des mêmes pièces pour le compte des mêmes donneurs d'ordre, pour devenir de véritables prestataires de service. Afin de pouvoir remporter des marchés, ces mêmes entreprises doivent être capables de répondre rapidement et au juste coût, à n'importe

quel appel d'offre pour la fabrication de pièces de plus en plus complexes. Cela impose donc l'utilisation de la simulation numérique afin de pouvoir mettre au point les procédés de forgeage et d'en estimer le coût de fabrication au plus juste.

Ces dernières années ont vu la croissance et le développement de nouveaux outils numériques de plus en plus fiables et rapides dû à l'augmentation exponentielle des puissances de calcul des ordinateurs. De plus, la multiplication de manifestations scientifiques dédiées au formage virtuel comme Esaform, Numisheet, Numiform, montre l'intérêt grandissant lié à cette discipline.

Parmi ces logiciels, les codes de calcul par éléments finis Forge2[®] et Forge3[®], développés par Transvalor S.A. conjointement avec le CEMEF/ENSMP de Sophia Antipolis répondent en partie aux attentes des industriels des métiers de la Forge. Ces logiciels permettent de rendre compte d'un certain nombre de phénomènes rencontrés lors d'un procédé de mise en forme, comme :

- Le contact et frottement
- Les petites déformations élastiques
- Les grandes déformations plastiques
- Le comportement thermo-mécanique
- Le comportement plastique et viscoplastique
- Les contraintes dans les outillages
- Les contraintes résiduelles à l'intérieur de la pièce après la mise en forme
- ...

La modélisation de ces phénomènes permet de simuler correctement la mise en forme d'un matériau, et ainsi de jouer sur certains paramètres (géométriques, rhéologiques...) afin d'en optimiser le procédé. L'ingénieur dispose alors d'outils numériques puissants lui permettant de simuler entièrement un procédé de mise en forme et de l'optimiser s'il y a lieu.

Cependant, les très grandes déformations plastiques subies par le matériau en cours de forgeage engendrent souvent des microdéfauts (cavités, fissures) qui se développent et aboutissent à la naissance de fissures macroscopiques rendant inutilisable la pièce forgée. Lors d'opération de forgeage de pièces massives, ces microdéfauts se développent essentiellement par les mécanismes de la rupture ductile gouvernés par la germination, la croissance et la coalescence de micro cavités ou d'inclusions (précipités secondes phases, ...). La simulation de l'endommagement dans les procédés de mise en forme a pour but de prédire **où** et **quand** un endommagement significatif apparaît. Deux cas seront alors envisagés :

- L'ingénieur cherchera à éviter l'apparition de l'endommagement et ainsi la ruine de la pièce formée, en modifiant certains paramètres (rhéologie, presse, gamme..).
- L'ingénieur cherchera à favoriser l'apparition de l'endommagement dans des cas bien spécifiques comme en découpage, poinçonnage, ébavurage, usinage...

Ceci constitue la principale thématique de recherche développée depuis 1996 au sein de notre laboratoire. L'objectif étant de développer des modèles théoriques, numériques et géométriques permettant de prévenir la formation de défauts au cours du formage de pièces minces ou massives par grandes déformations irréversibles. Une attention particulière est accordée à la modélisation des couplages entre les différents phénomènes. Deux approches distinctes mais complémentaires sont développées. La première approche, qualifiée de « simplifiée », utilise des modèles délibérément simplifiés afin de faciliter la méthodologie et de l'adapter aux contraintes de l'utilisation industrielle courante. La deuxième approche, qualifiée d'approche « avancée » cherche à utiliser des modèles représentant au mieux la physique des phénomènes ainsi que leurs différents couplages. L'objectif étant de ne « rien » négliger des principaux phénomènes et de leurs interactions lors de la simulation d'un procédé afin de tendre vers une « réalité virtuelle » en formage des matériaux par un procédé donné. Il va de soi que cette deuxième approche est beaucoup plus fastidieuse et coûteuse à mettre en œuvre pour être couramment utilisée au niveau industriel. Néanmoins, elle peut être utilisée pour « optimiser » un procédé final qui aura été sélectionné par le biais de l'utilisation de l'approche simplifiée.

Le travail développé dans cette thèse, à finalité industrielle clairement affichée, s'inscrit naturellement dans le cadre de l'approche simplifiée. Notre ambition est de proposer aux industriels un outil de simulation numérique capable de répondre à leurs attentes en leur permettant d'optimiser tout type de procédés de formage de pièces massives en regard de l'endommagement ductile.

Dans **un premier chapitre** on présentera le principe de la Mécanique de l'Endommagement Continu (M.E.C.). Une précision sur la nature mathématique des variables d'endommagement sera faite puis, afin de relier l'endommagement au comportement élasto(visco) plastique, la notion de variables effectives sera introduite.

Nous nous placerons dans le cadre d'un modèle à isotropie totale où l'on introduira un modèle thermo-élasto(visco)plastique endommageable basé sur le modèle de Prandtl-Reuss utilisé dans les logiciels Forge2[®] et Forge3[®]. Enfin une brève présentation des problèmes de contact-frottement, particulièrement important en mise en forme, sera présentée.

Le **deuxième chapitre** sera consacré à la résolution numérique d'un problème de mise en forme faisant intervenir les relations couplées de comportement développées précédemment. La formulation variationnelle classique en vitesse ainsi qu'une formulation mixte en vitesse/pression seront présentées. Nous discuterons la discrétisation temporelle et spatiale du problème par la méthode des éléments finis afin de résoudre un système d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites et initiales. Le schéma statique implicite de résolution de l'équilibre global au sens de Forge2[®] et Forge3[®] sera discuté. Nous présenterons ensuite le calcul de la matrice tangente consistante. Le traitement numérique du contact et du frottement, ainsi que les problèmes de maillage et de gestion des éléments totalement endommagés seront ensuite exposés.

Dans le **troisième chapitre** nous nous efforcerons de valider la méthodologie développée précédemment ainsi que l'algorithme d'intégration du modèle de comportement. Une identification des modèles pour des matériaux industriels sera effectuée afin de comparer les résultats de la simulation numérique de cas dits « simples » avec des essais expérimentaux et ainsi de valider les modèles utilisés.

Le quatrième chapitre sera l'aboutissement de ce travail, c'est-à-dire la validation de nos modèles sur des cas rencontrés dans l'industrie. Des partenariats avec des industriels des métiers de la Forge ont permis de balayer un éventail assez représentatif de procédés de formage. Une comparaison entre la simulation numérique et l'expérimentation mettra en évidence de manière très claire l'utilité de ce travail. On pourra ainsi « optimiser » des procédés de mise en forme en modifiant certains paramètres technologiques (CAO, rhéologie, gamme), et ce afin d'éviter l'apparition d'endommagement dans le cadre d'opération de forgeage ou au contraire de favoriser son apparition typiquement lors des opérations de poinçonnage, d'ébavurage et de découpage.

Les conclusions ainsi que les perspectives de ce travail seront présentées en fin de ce mémoire.

CHAPITRE 1 :

FORMULATION DU COUPLAGE COMPORTEMENT-ENDOMMAGEMENT : ASPECTS THÉORIQUES

1.1 PROBLÉMATIQUE DU SUJET

Les codes de calcul Forge2[®] et Forge3[®] ont été développés dans le but de modéliser le forgeage des pièces à froid (élastoplastique) et à chaud (élasto-viscoplastique). Afin de décrire la complexité de la modélisation du forgeage, une modélisation des principaux phénomènes physiques caractéristiques du comportement d'un matériau subissant de grandes déformations est nécessaire. Il sera alors possible d'exploiter au mieux les résultats tirés des simulations numériques. Il est évident que plus on essaiera de décrire l'ensemble des phénomènes physiques plus les temps de calculs seront conséquents.

Des développements considérables ont été effectués dans la modélisation des phénomènes thermomécaniques et physico-chimiques caractérisant le comportement des matériaux et des structures. La grande majorité de ces modèles est développée dans le cadre de la mécanique des milieux continus [GERMAIN73, TRUESDEL65]. La thermodynamique des processus irréversibles [GERMAIN73, LEMAITRE85] a permis la construction de modèles tridimensionnels thermodynamiquement admissibles (vérifiant l'inégalité fondamentale obtenue par combinaison entre le premier et le second principe). Notons que l'on voit de plus en plus le développement de modèles basés sur les mécanismes physiques proposant des approches de type micro-macromécanique [BERVEILLER79, BERVEILLER80, SUQUET81, CAILLETAUD87, ZAOUI90, ABDUL-LATIF94, ABDUL-LATIF96, MOLINARI96, LEMARCHAND99] pour ne citer que certains travaux français en mécanique des matériaux.

Nous ne rendrons compte dans ce chapitre que des modèles phénoménologiques macroscopiques afin de retranscrire les principaux phénomènes rencontrés lors de procédés de mise en forme (l'écrouissage isotrope, le frottement, l'endommagement ductile et de fluage, la (visco)plasticité).

1.2 ENDOMMAGEMENT

Les déformations élastiques et plastiques qui se situent au niveau des plans cristallins et des atomes respectent la cohésion de la matière. La fissuration détruit cette cohésion pour former au sein de la matière des micro discontinuités pouvant être volumiques ou surfaciques. Lorsque la taille de ces fissures atteint des dimensions de l'ordre du micron, on parlera de microfissures. Le terme « fissure » sera surtout utilisé à l'échelle des structures mécaniques mesurée en millimètre ou centimètre.

On parle de matériau vierge s'il est dépourvu de cavités ou de fissures à l'échelle microscopique. Un matériau est dit non endommagé si son comportement à la déformation est celui du matériau élaboré dans les meilleures conditions. Dans ce cas on supposera que l'endommagement est nul dans la configuration initiale.

Aussi au début des sollicitations, on négligera l'endommagement. On parle de stade final d'endommagement lors de la rupture de l'élément de volume représentatif (EVR), ou plus précisément dès l'apparition de fissure dont la taille varie en général entre 0.1 et 1 mm pour les métaux. On parle dans ce cas de fissure macroscopique.

1.2.1 Mécanismes

Le but de ce paragraphe n'est pas de faire une typologie détaillée des mécanismes d'endommagement, mais juste de différencier les deux grandes familles d'endommagement à savoir l'endommagement instantané et l'endommagement différé. Il faut savoir que la rupture peut apparaître au cours d'un chargement statique ou après une propagation de défauts sous chargement cyclique en atteignant une dimension critique.

1.2.1.1 L'endommagement instantané

Ici on se place dans le cadre des chargements monotones, les propriétés mécaniques des matériaux sont affaiblies localement ou globalement par des mécanismes physiques d'endommagement.

1.2.1.1.a Endommagement fragile

La rupture dite « fragile » est caractérisée par des ruptures de liaisons interatomiques, les microdéfauts se propageant brutalement sans déformations plastiques appréciables. Le dommage passe brusquement dans ce cas de la valeur zéro à sa valeur critique de rupture finale d'une manière quasi instantanée.

1.2.1.1.b Endommagement ductile

En formage de pièces par grandes déformations plastiques, le principal mécanisme de rupture est celui de la rupture ductile. Ce mécanisme de rupture a beaucoup été étudié dans la littérature aussi bien du point de vue métallurgique que du point de vue modélisation. La littérature concernant cette question est trop large pour faire des citations exhaustives. Nous nous contenterons de citer le premier chapitre du livre écrit par François, Pineau et Zaoui auquel le lecteur pourra se référer [FRANCOIS93].

La photo de la Figure 1.1 montre le faciès typique d'une rupture ductile dans un aluminium.

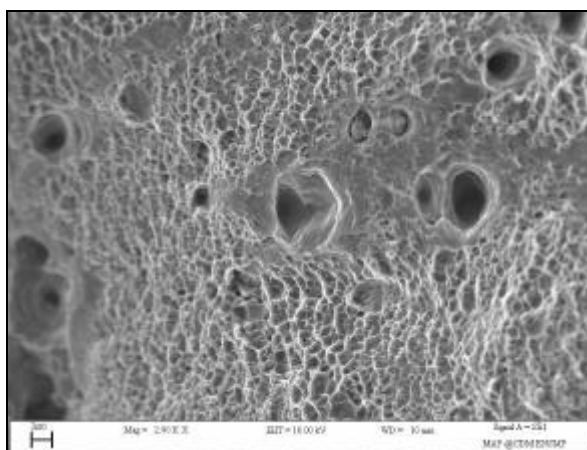


Figure 1.1 : *Faciès de rupture ductile d'un aluminium [HABRAKEN01]*

Sur cette image on observe clairement la formation de cavités autour des inclusions. Il est maintenant bien admis que le mécanisme de rupture ductile se décompose en trois étapes essentielles qui sont :

- La nucléation ou germination de cavités de petites tailles,
- La croissance de ces cavités,
- La coalescence des cavités jusqu'à l'amorçage d'une fissure macroscopique.

Dans ce qui suit nous allons résumer le principe de chaque mécanisme. Pour cela nous utilisons le schéma de la Figure 1.2 qui présente un métal contenant de nombreuses inclusions de différentes tailles, formes et phases (Figure 1.2 (a)). Pour illustrer notre propos, nous isolons un EVR contenant deux inclusions, l'une sphérique et l'autre elliptique distantes d'une longueur l_0 l'une de l'autre (Figure 1.2 (b)). Cet EVR est supposé soumis à une traction uniaxiale selon l'axe vertical.

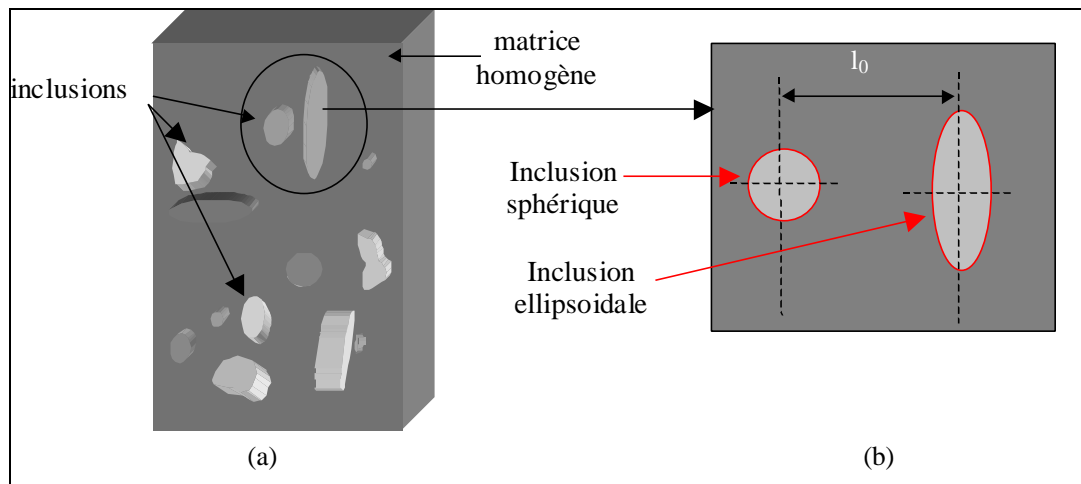


Figure 1.2 : Schématisation d'un métal contenant diverses inclusions

-Nucléation ou germination

Les matériaux métalliques sont des milieux fortement hétérogènes (au moins localement), constitués d'une matrice élasto-plastique et de particules de seconde phase ou inclusions quasi-rigides. Dans les aciers ces inclusions sont principalement: des oxydes, des sulfures ou encore plus complexes des oxysulfures et des nitrures. Ces inclusions interviennent dans la germination par le biais de leur interface qui présente de faibles propriétés mécaniques et spécialement en adhérence.

Dans un état non sollicité, les particules sont solidaires de la matrice. Cependant la différence de rigidité au niveau des interfaces matrice/inclusion donne localement une concentration de contraintes. L'application d'une sollicitation mécanique, donc d'une déformation, engendre la décohésion des inclusions (Figure 1.3 (b)) de la matrice, ou la rupture de l'inclusion (Figure 1.3 (a)). Le vide créé entre la matrice et les inclusions, ou entre les deux parties de l'inclusion rompue, est usuellement appelé une cavité (Figure 1.3).

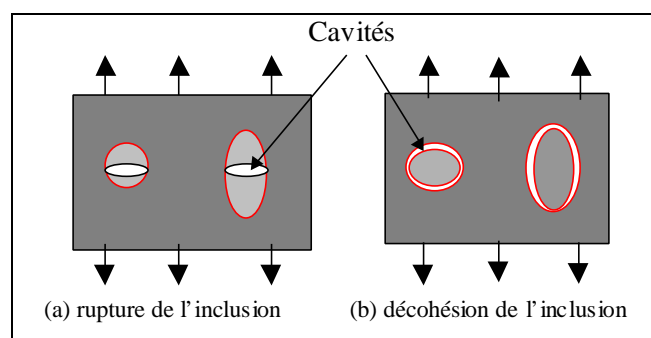


Figure 1.3 : Schématisation du mécanisme de germination des cavités

L'ensemble inclusion-cavité se comporte en général, comme un trou et a fortiori comme un défaut dont la taille et la forme initiale sont peu différentes de celle de l'inclusion elle-même. Ce mécanisme de naissance de micro-cavités est appelé le stade de nucléation ou de germination qui est à l'origine de la rupture ductile. Toutefois la germination peut également s'effectuer par un endommagement de la matrice même au voisinage immédiat d'une particule, ce qui est difficilement observable expérimentalement lorsque la matrice est

homogène. Notons que pendant ce stade de germination les cavités sont tellement petites qu'elles ne modifient pas la réponse macroscopique. En d'autres termes nous supposons que pendant le stade de nucléation des cavités, ni les propriétés élastiques ni les propriétés plastiques ne sont affectées.

-Croissance des cavités

Une cavité, générée durant le stade de la germination, croît selon un état de contrainte donné. Cette croissance est pilotée par un écoulement plastique traduisant un écrouissage de la matière autour des cavités. En toute rigueur, la croissance commence avant que la germination ne soit achevée. Cet écoulement n'est pas uniforme et dépend beaucoup de l'état de contrainte et de la forme de la cavité (Figure 1.4 (a)).

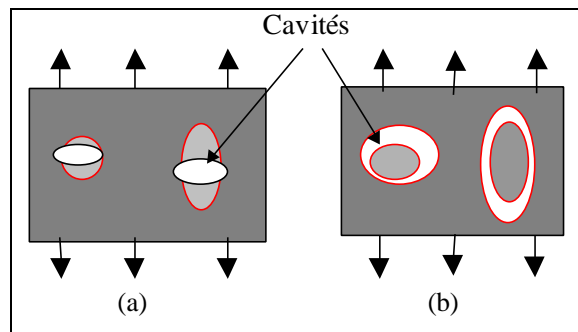


Figure 1.4 : Croissance des cavités

Ces cavités se comportent comme des micro fissures, et les inclusions situées à l'intérieur ne jouent plus un rôle prépondérant si la décohésion est totale, dans le cas de la décohésion matrice/inclusion (Figure 1.4 (b)). Néanmoins il importe dans certains cas d'en tenir compte. En effet, si la décohésion entre la particule et la matrice n'est pas complète, le volume des cavités créées est très inférieur à celui de la particule qui lui a donné naissance. Dans cette phase l'interaction entre les cavités et la plasticité écouissable de la matrice est essentielle. On doit donc tenir compte de l'effet des cavités non seulement sur la plasticité mais aussi sur l'élasticité.

-La coalescence des cavités

Quand le ligament restant entre les deux cavités est suffisamment faible, l'interaction directe entre les deux cavités devient essentielle et ne peut plus être négligée. L'écoulement plastique localise alors dans le ligament et provoque sa rupture par cisaillement plastique (instabilité). Ceci est montré schématiquement sur la Figure 1.5 (a) et (b) et expérimentalement sur la Figure 1.5 (c) tirée de Benzerga [BENZERGA00].

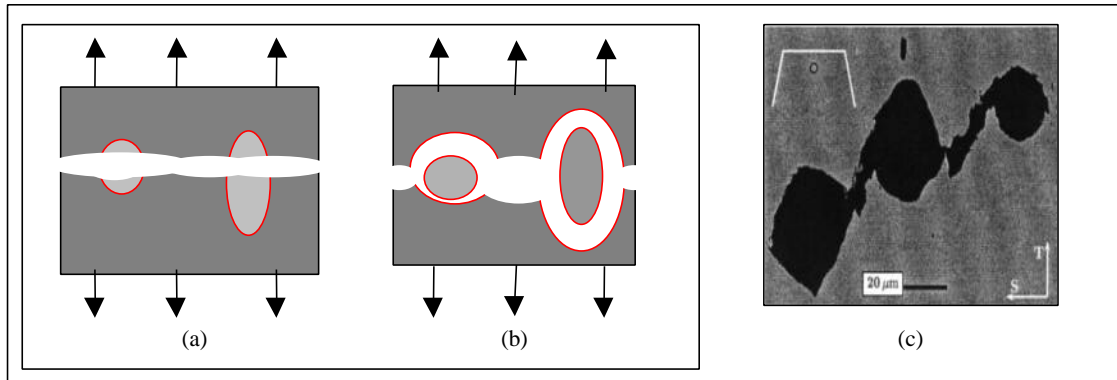


Figure 1.5 : Fin du stade de coalescence conduisant à la rupture totale de l'EVR

L'achèvement du stade de coalescence des cavités est supposé définir l'amorçage d'une fissure macroscopique de quelques millimètres carrés de superficie. La propagation de la fissure macroscopique est alors une succession d'étapes de coalescence se produisant dans la structure jusqu'à la rupture finale de cette dernière.

Examinons à présent ce scénario de rupture ductile sur une éprouvette de traction axisymétrique (barreau cylindrique). Sur la Figure 1.6 nous reportons la réponse force/déplacement décomposée en domaines que nous relierons aux trois stades de la rupture ductile.

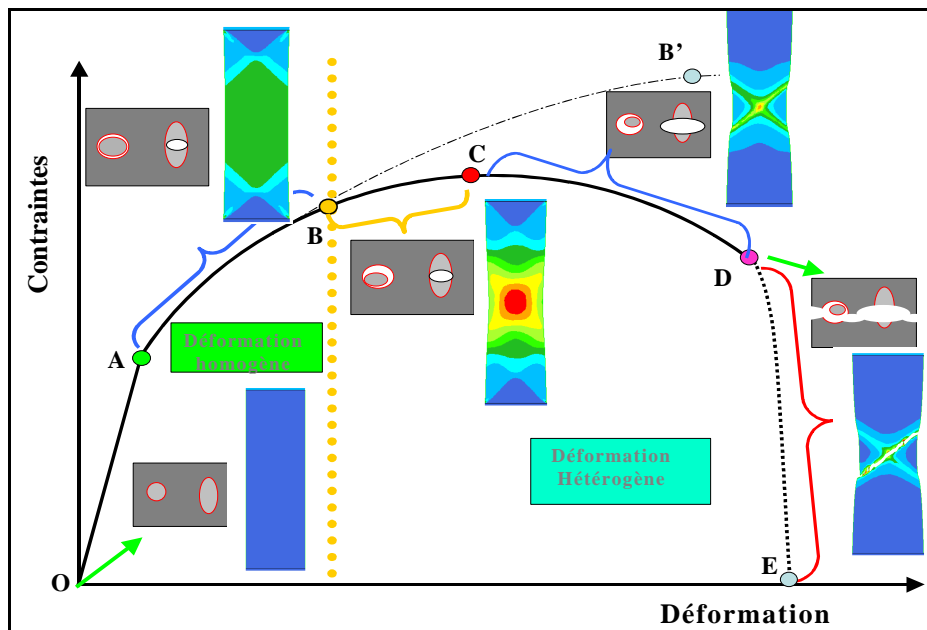


Figure 1.6 : Réponse schématique d'une éprouvette en traction simple

OA : Déformation élastique linéaire homogène de l'éprouvette

AB : Déformation plastique homogène de l'éprouvette. C'est le stade de nucléation des microcavités de tailles suffisamment petites pour ne pas modifier la réponse plastique. Si on procède à une décharge élastique avant le point **B** alors on vérifiera que le module d'élasticité reste inchangé. La courbe **ABB'** est la réponse homogène qu'aurait l'éprouvette si aucun défaut ne se développait.

BC : Les cavités croissent et leur effet commence progressivement à se faire sentir sur la réponse plastique et élastique du matériau. Les contraintes internes commencent à diminuer induisant indubitablement l'accélération de la chute du module tangent qui atteint zéro au point **C**. C'est le stade de croissance des cavités pendant lequel le couplage comportement-endommagement ne peut plus être négligé. Notons toutefois qu'à partir du point **B** la déformation de l'éprouvette cesse d'être homogène et on assiste à la production d'une striction diffuse.

CD : Le mécanisme de coalescence des cavités commence au point **C**, avec le début de la striction dite localisée. En fait la distance entre les cavités est tellement faible qu'une localisation de l'écoulement plastique se produit dans les ligaments provoquant des zones de cisaillement intense. Ceci conduit à la rupture de ces ligaments par instabilité plastique reliant ainsi les cavités entre elles pour former une fissure macroscopique au point **D**. Pendant ce stade de coalescence des cavités, on observe un adoucissement ou un écrouissage négatif avec un module tangent négatif.

DE : Ce stade correspond à la propagation de la fissure macroscopique conduisant à la rupture finale de l'éprouvette. Pendant ce stade l'éprouvette devient une véritable structure mécanique contenant une fissure macroscopique en propagation.

Pour clore cette discussion phénoménologique sur la rupture ductile, notons que durant le stade de coalescence (i.e. quelque part entre les points **CD**) on remarque la présence d'un point de bifurcation au-delà duquel la réponse expérimentale de plusieurs éprouvettes identiques n'est plus la même (c.f. Figure 1.7). Ce point de perte d'unicité de la réponse expérimentale traduit l'influence de la microstructure du matériau sur « l'amorçage » de la fissure macroscopique. En effet il est évident que les cavités qui se rejoignent pour aboutir à l'amorçage de la fissure macroscopique, n'ont ni la même orientation, ni le même nombre, ni la même morphologie, etc...

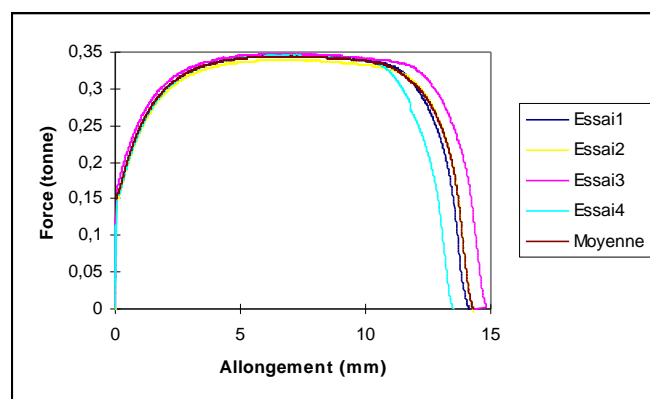


Figure 1.7 : Réponse expérimentale de quatre éprouvettes sollicitées en traction

On retient donc la perte d'unicité de la réponse expérimentale observée sur les matériaux courants au-delà du point C, maximum de la courbe de traction. Dans ce cas on se contente de déterminer la courbe moyenne pour le calage entre la modélisation et l'expérience.

1.2.1.2 Endommagements différés

1.2.1.2.a Endommagement par fatigue

Sous sollicitations cycliques, la déformation se concentre dans des bandes de glissement persistantes. Elle fait apparaître des intrusions et, petit à petit, des fissures suivent les bandes de glissement. C'est le premier stade de la fatigue, on parle alors de phénomène d'endommagement superficiel.

En mise en forme des matériaux, un lopin ne subit pas de sollicitations cycliques (ou périodiques). La rupture par fatigue du lopin formé est alors inexistante. Par contre les outillages (matrices) sont souvent le siège de sollicitations cycliques mécaniques (nombre de frappes) et/ou thermiques (forgeage à chaud). Dans ce cas l'endommagement par fatigue des outillages doit être pris en considération. Cet aspect est hors des objectifs de notre travail, néanmoins l'extension de notre méthodologie pour traiter la rupture par fatigue thermomécanique des outillages ne pose pas de difficultés majeures.

1.2.1.2.b Endommagement par fluage

A haute température où le fluage intervient, les joints de grains constituent les sites privilégiés pour l'apparition des cavités. Ces cavités croissent en taille et en nombre sous l'effet de la déformation plastique et de la diffusion des lacunes. On observe alors une rupture finale qui est intergranulaire. En mise en forme, les sollicitations sont tellement rapides qu'il est très rare d'observer des ruptures intergranulaires (par fluage) des pièces formées. Ceci dit, nous proposerons dans notre modélisation, la possibilité de cumul entre un endommagement plastique ductile, et un endommagement de fluage.

Notons que sous sollicitations cycliques à haute température, on observe une interaction entre les phénomènes de fatigue et de fluage dans la rupture des outillages.

1.2.1.3 Notion de forgeabilité

La forgeabilité exprime la facilité (ou la difficulté) de mise en forme du matériau sans apparition de défauts microscopiques ou macroscopiques, de fissures, ou de replis. Elle constitue donc une limitation à la mise en forme et par conséquent un obstacle à son développement et à l'amélioration de ses performances.

Les défauts en mise en forme peuvent être regroupés en trois classes principales distinctes :

- les défauts de type surfacique qui donnent des altérations de la surface du matériau (phénomène pouvant être assez visible ou très peu suivant que la fissure soit ouverte ou fermée).
- les défauts de type volumique qui conduisent à une altération des propriétés mécaniques et par voie de conséquence à l'intégrité de la pièce.
- les défauts d'écoulement qui correspondent à une perturbation locale souvent importante du champ de déplacement.

Toutes ces classes de défauts sont rencontrées avec des conditions particulières à chaque cas dans presque tous les procédés de mise en forme (estampage, matriçage, extrusion, laminage...).

1.2.2 Représentations mathématiques du dommage ductile

Comme pour la modélisation du comportement de n'importe quel milieu continu déformable, la modélisation de l'endommagement peut se faire suivant deux approches différentes. L'une repose sur une démarche micro-mécanique alors que l'autre utilise une démarche macroscopique phénoménologique.

L'approche micromécanique utilise la méthode de localisation-homogénéisation qui permet de descendre à des échelles inférieures de la structure (grain, système de glissement). Cela afin de décrire les mécanismes élémentaires de l'endommagement. Pour cet aspect micromécanique, des mécanismes sont à mettre en œuvre afin de déterminer les grandeurs recherchées. Par exemple, le processus d'homogénéisation consiste à déterminer les grandeurs macroscopiques de l'élément de volume représentatif (EVR) à partir de celles de cellules élémentaires en prenant des moyennes appropriées. Bien que très complète et ce malgré son intérêt physique une telle approche est difficilement réalisable pour le calcul de structures métalliques où l'EVR est un agrégat de grains. Les temps de calcul sont alors extrêmement longs du fait du nombre considérables d'équations.

L'autre approche de modélisation est purement phénoménologique. Elle est fondée sur l'introduction de variables d'état associées aux différents phénomènes révélés par l'expérimentation. Ces phénomènes sont décrits dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles [GERMAIN83]. Là encore deux approches peuvent être soulignées. L'une d'inspiration physique, [RICE69, GURSON77, ROUSSELIER81, GELIN85, BENNANI93, PICART98,...], l'autre d'inspiration plus phénoménologique et macroscopique [KACHANOV58, RABOTNOV69, CHABOCHE78, LEMAITRE85]. L'approche physique est basée sur un taux de croissance des cavités à l'intérieur d'une matrice au comportement élastoplastique [RICE69]. Par construction, cette théorie suppose l'isotropie de l'endommagement et utilise une variable scalaire pour décrire la fraction volumique des cavités. Cependant l'anisotropie peut être prise en compte en introduisant des facteurs de changement de forme des cavités en fonction de la sollicitation appliquée [GOLOGANU95].

1.2.2.1 Représentation de l'endommagement ductile par des cavités

Pour décrire le taux de croissance des cavités, un critère de type Von Mises (défini à partir du second invariant du tenseur déviateur des contraintes) est insuffisant. L'approche faite par Gurson [GURSON77], pour ce qui est des matériaux poreux (matériaux métalliques frittés, les sols, les roches...), décrit un modèle de plasticité dans lequel le critère de plasticité et le potentiel plastique dépendent de la contrainte macroscopique et de la fraction volumique f des cavités. Le premier invariant a été introduit pour tenir compte de la dilatation plastique d'un

milieu soumis à des grandes déformations jusqu'à la rupture ductile. L'évolution de la fraction volumique détermine la croissance des cavités présentes dans la matrice.

L'écoulement plastique avec cavitation proposé par Gurson découle d'un potentiel plastique de la forme [GURSON77]:

$$F(\sigma_{\text{eq}}, \sigma_0, f) = \left(\frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left(\frac{3 P_H}{2 \sigma_0} \right) - (1 + f^2) \quad (1.1)$$

Où σ_{eq} est la contrainte équivalente de Von Mises calculée à partir de la partie déviatrice du tenseur des contraintes de Cauchy \underline{S} , P_H correspond à la partie hydrostatique de $\underline{\sigma}$.

$$P_H = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = J_1(\underline{\sigma}) \quad (1.2)$$

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{S} : \underline{S}} = J_2(\underline{\sigma}) \quad (1.3)$$

σ_0 étant la contrainte d'écoulement en traction simple. Si la fraction volumique des cavités f est définie comme étant le rapport du volume des cavités $V_c = V_t - V_0$, par le volume de la matrice V_t à l'instant t , alors on a :

$$f = \frac{V_t - V_0}{V_t} = 1 - \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{J - 1}{J} \quad (1.4)$$

$$J = \det \underline{\mathbb{F}} = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V_t}{V_0} \quad (1.5)$$

On note bien qu'à l'origine si le volume V_0 ne contient aucune cavité $V_t = V_0 \Rightarrow f = 0$ et à rupture totale on a $\rho \rightarrow 0$ et $f \rightarrow 1$.

Notons que si la fraction volumique de cavités f vaut 0, on retrouve le modèle de plasticité de Von Mises pour un matériau sain i.e. non endommagé.

La vitesse de déformation plastique est obtenue à l'aide de la règle de normalité, en dérivant le potentiel plastique F , par rapport au tenseur des contraintes au sens de Cauchy :

$$\dot{\underline{\epsilon}}_{\text{pl}} = \dot{\lambda}_{\text{pl}} \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \quad (1.6)$$

L'évolution dans le temps de la fraction volumique découle de la conservation de la masse:

$$\dot{f} = (1 - f) \text{tr} \underline{D} \quad (1.7)$$

Où \underline{D} est le tenseur des taux de déformation totale, à partir de (1.4) on tire:

$$\dot{f} = \frac{\dot{\rho}}{\rho_0} = \frac{\dot{J}}{J^2} \quad (1.8)$$

La variation de volume est donc clairement induite par la croissance des cavités.

Dans la pratique plusieurs auteurs utilisent ce type de modélisation en décomposant l'évolution de la fraction volumique des cavités \dot{f} en trois parties correspondant chacune à un mécanisme d'évolution des cavités allant de la formation d'une cavité jusqu'à la formation d'une fissure macroscopique.

$$\dot{f} = \dot{f}_{\text{ger}} + \dot{f}_{\text{croiss}} + \dot{f}_{\text{coal}} \quad (1.9)$$

1.2.2.2 Représentation phénoménologique par des variables d'état

1.2.2.2.a Variables d'endommagement

Dans cette formulation l'endommagement est décrit par des variables scalaires ou tensorielles. Il faut savoir que les variables d'endommagement les plus simples à introduire sont bien évidemment les variables scalaires. Cependant les défauts qui caractérisent l'endommagement (cavités, décohésions d'interface, microfissures) sont le plus souvent orientés par le chargement qui les crée même si le matériau est initialement isotrope. On doit alors avoir recours à des variables tensorielles afin d'éviter la configuration particulière de l'isotropie du dommage.

Soit un EVR soumis à une sollicitation dans le domaine plastique. On considère qu'à un instant donné, il y a création d'une distribution de microdéfauts dans une section de l'EVR de normale \vec{n} . Afin de définir le caractère directionnel du dommage dans l'EVR de volume V on utilise une fonction scalaire à support vectoriel. Une densité de microdéfauts $\rho(\vec{n})$ est associée à toute direction \vec{n} de l'espace.

Variable scalaire : Si la distribution des défauts est isotrope, alors la densité des microdéfauts ne dépend pas de l'orientation du vecteur normal \vec{n} au plan en un point matériel :

$$\rho(\vec{n}) = \rho \quad \forall \vec{n} \quad (1.10)$$

Cette expression peut être utilisée pour approcher une distribution presque isotrope. La densité moyenne des microdéfauts est alors calculée en intégrant l'équation ci-dessus suivant toutes les directions :

$$\int_{4\pi} \rho(\vec{n}) d\Omega = 4\pi\rho \quad (1.11)$$

d'où

$$\rho = \frac{\rho_0}{4\pi} \quad (1.12)$$

avec ρ_0 la densité de l'ensemble des défauts à l'intérieur de l'EVR.

$$\rho_0 = \frac{1}{V} \int_V \rho(\vec{n}) dV \quad (1.13)$$

L'endommagement est défini comme une simple variable scalaire, et n'a donc pas d'incidence sur les symétries initiales de la matière. Notons que la variable scalaire d'endommagement a été utilisée de nombreuses fois dans la littérature du fait de sa simplicité. Aussi, il n'est pas rare d'employer plusieurs variables scalaires associées à des directions matérielles prédéfinies, ou le plus souvent, à des mécanismes physiques différents.

Bien que la nature initiale du matériau soit isotrope ou anisotrope, la naissance et la coalescence des cavités sont souvent anisotropes. La théorie de la MEC (Mécanique de l'Endommagement Continu) permet de décrire cette anisotropie en utilisant des vecteurs ou des tenseurs d'ordre deux ou quatre.

Tenseur d'ordre deux : on utilise le plus souvent cette variable afin de définir l'anisotropie induite par l'endommagement dans un matériau isotrope à l'origine, dont l'anisotropie est gouvernée par le chargement.

L'expression de la densité des défauts à l'intérieur des plans de vecteur normal \vec{n} est :

$$\rho(\vec{n}) = \rho n_i n_j \quad (1.14)$$

Avec ρ défini comme étant le tenseur densité de défauts du second ordre. On pourra donc définir la forme du tenseur d'endommagement d'ordre deux :

$$\underline{D} = \frac{1}{V} \int_V \rho(\vec{n}) \vec{n} \otimes \vec{n} dV \quad (1.15)$$

Il faut souligner qu'un tenseur d'ordre deux à lui seul ne suffit pas à décrire l'anisotropie induite par l'endommagement sur le comportement élastique [CHABOCHE78]. On introduit alors des tenseurs d'effet de dommage (tenseurs d'ordre quatre) à partir du tenseur d'ordre deux.

Tenseur d'ordre quatre : C'est l'ordre le plus petit que l'on peut utiliser afin de décrire une détérioration et une anisotropie induite par l'endommagement dans un matériau isotrope ou non à l'état initial. Cette variable d'endommagement d'ordre quatre a été introduite au travers de la notion de contrainte effective dans le cadre de l'hypothèse de l'équivalence en déformation [CHABOCHE78]. Dans ce cas la variable de dommage (tenseur d'ordre quatre) est utilisée directement à la place du tenseur d'effet du dommage.

On pourra donc donner la forme du tenseur d'endommagement d'ordre quatre comme suit:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{V} \int_V \rho(\vec{n}) \vec{n} \otimes \vec{n} \otimes \vec{n} \otimes \vec{n} dV \quad (1.16)$$

Dans la littérature on trouve de nombreuses théories utilisant le tenseur d'élasticité comme variable d'état du dommage [ORTIZ86, SIMO87].

1.2.2.2.b Notion de variables effectives

L'endommagement n'étant pas directement mesurable, il est possible de le mesurer à partir de son effet sur le comportement thermomécanique. En mécanique des milieux continus ils existent des formulations pour les contraintes dites effectives : la notion de contraintes nettes

[MURAKAMI80] et la notion de contraintes effectives [CHABOCHE77, LEMAITRE85], c'est d'ailleurs cette dernière que nous utiliserons pour notre étude.

Tenseur des contraintes effectives

Pour tenir compte des effets de concentration de contraintes dus aux micro défauts, une hypothèse d'équivalence en déformation a été introduite par Chaboche [CHABOCHE77]. Le but est d'obtenir la même déformation dans un EVR vierge avec le tenseur des contraintes effectives, que dans un EVR endommagé avec le tenseur des contraintes actuelles. En élasticité la relation exprimant la déformation en fonction de la contrainte dans un milieu sain s'exprime par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (1.17)$$

dans un milieu endommagé on aura :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\Lambda}}(D) : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (1.18)$$

avec $\underline{\underline{\Lambda}}$ et $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}$ les tenseurs de rigidité d'ordre quatre en milieu sain et endommagé. On peut aisément obtenir la relation suivante entre contraintes effectives et actuelles :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{où} \quad \underline{\underline{\mathbf{M}}} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}^{-1} \quad (1.19)$$

$\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ étant l'opérateur d'effet du dommage (d'ordre quatre) liant contraintes effectives et contraintes actuelles. Afin de retrouver une formulation sans endommagement on pose $\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$.

L'hypothèse de l'équivalence en déformation conduit à un opérateur d'élasticité non symétrique :

$$\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} : \underline{\underline{\Lambda}} \quad (1.20)$$

on pourra le symétriser par :

$$\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}^s = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{M}}} : \underline{\underline{\Lambda}} + \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\mathbf{M}}}^T) \quad (1.21)$$

Une autre hypothèse consiste à utiliser l'équivalence en énergie élastique qui donne suivant la démarche de Cordebois et al. [CORDEBOIS79]:

$$W_e = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{1}{2} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} : \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^e \quad (1.22)$$

Mais il paraît évident, dans le cas élastoplastique endommageable, que des variables autre que la déformation et la contrainte sont affectées par le dommage. Afin de définir ces variables effectives Saanouni et al. [SAANOUNI94] ont proposé l'hypothèse d'équivalence en énergie totale (énergie élastique et énergie dissipée dans l'écroutissement).

Hypothèse d'équivalence en énergie totale : Cas d'un écrouissage purement isotrope présenté par le couple (r, R)

A un élément de volume représentatif endommagé, occupant une configuration déformée, et dont l'état mécanique est défini par les couples de variables $(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}^e), (r, R), (D, Y)$, on associe un milieu fictif sain occupant une nouvelle configuration, représentée par les couples de variables effectives $(\underline{\tilde{\varepsilon}}^e, \underline{\tilde{\sigma}}), (\tilde{r}, \tilde{R})$ tel que les énergies totales dans ces deux configurations soient les mêmes.

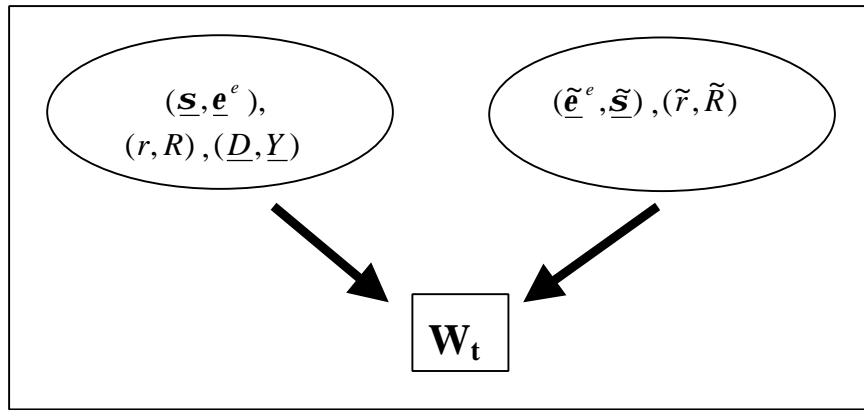


Figure 1.8 : Equivalence en énergie totale

L'énergie totale W_t étant la somme de l'énergie élastique W_e et de l'énergie anélastique W_{an} (ou énergie des phénomènes dissipatifs) :

$$W_t = W_e + W_{an} \quad (1.23)$$

Le principe de l'équivalence en énergie élastique donne suivant la démarche de Cordebois [CORDEBOIS79]:

$$W_e = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} \underline{\tilde{\sigma}} : \underline{\tilde{\varepsilon}}^e \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\underline{M}}^{-1} : \underline{\sigma} \\ \underline{\tilde{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{M}}^T : \underline{\varepsilon}^e \end{cases} \quad (1.24)$$

En appliquant ce même principe à l'énergie dissipée dans l'écrouissage isotrope cela conduit à :

$$W_{an} = \frac{1}{2} r \cdot R = \frac{1}{2} \tilde{r} \cdot \tilde{R} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{R} = L^{-1}[D] : R \\ \tilde{r} = L[D] : r \end{cases} \quad (1.25)$$

1.2.2.2.c Critère et loi d'évolution de l'endommagement

Dans le cadre de ce travail, nous nous plaçons dans le cas d'un endommagement isotrope, si bien que les variables internes décrivant l'endommagement sont les scalaires (D, Y) . Cette hypothèse peut être considérée comme raisonnable pour la mise en forme des structures massives avec des matériaux métalliques.

Le concept de matériau endommageable peut être défini maintenant de façon générale. En effet, un élément de volume étant préalablement considéré comme vierge, commence par s'endommager jusqu'à atteindre la rupture complète. Afin de caractériser correctement un tel matériau, il faut apporter certaines précisions en plus de la loi de comportement:

- le critère de multiaxialité de l'endommagement (effet du trajet de chargement, effet de la triaxialité).
- une équation d'évolution du dommage ductile dans le cadre d'une formulation unifiée (un seul multiplicateur), soit dans le cadre d'une formulation à deux critères (deux multiplicateurs, un multiplicateur plastique et un multiplicateur d'endommagement) [HAMMI00, SAANOUNI02].
- Un critère de rupture local.
- Une méthodologie d'évolution de la zone endommagée (propagation).

Le critère de multiaxialité de l'endommagement

Ce critère traduit l'effet de la forme du trajet de chargement sur l'initiation et la croissance de l'endommagement jusqu'à l'amorçage d'une fissure macroscopique. Dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, la variable d'endommagement D représente une variable d'état interne, à laquelle est associée une variable force Y . Cette dernière est directement liée à l'énergie élastique du matériau, elle fait intervenir à la fois l'énergie de distorsion d'où provient le critère de plasticité de Mises (les déformations plastiques ayant le glissement pour mécanisme essentiel) et l'énergie de dilatation (la croissance des cavités et des fissures étant des mécanismes très sensibles à la contrainte hydrostatique). L'expression de la variable force Y sera donnée par [LEMAITRE85]:

$$Y = \frac{\sigma^{*2}}{2E(1-D)^2} \quad (1.26)$$

avec :

$$\sigma^* = \sigma_{eq} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{P_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \quad (1.27)$$

On pourra définir σ^* comme étant la contrainte équivalente d'endommagement par analogie avec la contrainte équivalente σ_{eq} pour la plasticité. Notons que cette nouvelle contrainte fait intervenir le rapport de triaxialité des contraintes (P_H/σ_{eq}) qui joue un rôle crucial dans la croissance des cavités en rupture ductile.

Par analogie avec la mécanique de la rupture, on postulera que, l'évolution de la variable D est pilotée par Y (taux de restitution d'énergie), la rupture sera alors obtenue pour une valeur critique de cette énergie.

$$Y = Y_C \quad (1.28)$$

Y_C est l'énergie critique de rupture déterminée à partir de la contrainte de rupture en traction. D'autre part, il est fréquent de remarquer, en mise en forme de pièces massives, que des zones endommagées peuvent évoluer d'un état de traction (fissures ouvertes) vers un état de compression tendant à refermer ces microfissures. Ceci engendre la fermeture partielle ou totale des microfissures et empêche ainsi l'endommagement de croître (dommage inactif). Cela a pour conséquence de supprimer son effet sur le comportement. Afin de rendre compte de ce phénomène d'une manière particulière mais simple, nous proposons de modifier l'expression de σ^* de façon à bloquer l'évolution du dommage en compression. On considère que l'endommagement n'évolue pas pour les chargements où la pression hydrostatique P_H est négative.

$$\sigma^* = \sigma_{eq} \left[\frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\langle P_H \rangle}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \quad (1.29)$$

où $\langle P_H \rangle$ désigne la partie strictement positive de P_H . On pourra aussi remplacer la variable force Y par une combinaison linéaire des trois invariants.

$$Y = (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \sigma_{eq} + \alpha_1 \langle P_H \rangle + \alpha_2 \langle \sigma_{max} \rangle \quad (1.30)$$

Equation d'évolution du dommage ductile

Conformément à la thermodynamique des phénomènes irréversibles, l'équation d'évolution du dommage ductile dérive d'une fonction de charge éventuellement associée à un potentiel de dissipation. Pour analyser les phénomènes irréversibles (plasticité, endommagement) se produisant dans un procédé de mise en forme, deux approches sont envisageables :

Dans une première approche [CHABOCHE78, SAANOUNI88, BENALLAL89 et SAANOUNI94], on ne considère qu'un seul mécanisme gouverné par la plasticité avec une seule fonction de charge correspondante au critère d'écoulement plastique et un seul multiplicateur de Lagrange ou multiplicateur plastique. Le dommage est gouverné par l'écoulement plastique, car l'on suppose que lors de la rupture ductile des métaux, l'endommagement est directement lié à l'apparition de zones plastiques. Ce choix demeure raisonnable quand on s'intéresse à l'endommagement ductile en grandes déformations plastiques.

La deuxième approche consiste à considérer deux mécanismes et deux fonctions de charge gouvernant « séparément » les évolutions de la plasticité et de l'endommagement [CHOW92, CHABOCHE97, CHABOCHE99, HAMMI00, SAANOUNI02]. On a donc deux fonctions f_p et f_d indépendantes, ainsi que deux multiplicateurs de Lagrange indépendants (un d'endommagement et un de plasticité). Cela signifie que malgré la présence de déformations plastiques importantes, il n'y a pas forcément de dommage ou très peu. De même on peut observer de l'endommagement sans déformations plastiques significatives au moins au niveau

macroscopique (c'est le cas par exemple dans les composites, en particulier, les composites à matrice métallique).

Dans notre travail, c'est la première approche qui est adoptée pour sa cohérence avec le logiciel Forge2[®]. L'évolution de l'endommagement est alors liée à la valeur de sa variable associée Y , et également fonction de l'accroissement de la déformation plastique. Nous choisissons le modèle proposé par Lemaitre [LEMAITRE86] :

$$\dot{D} = \frac{1}{(1-D)^b} \left(\frac{Y - Y_C(D)}{S} \right)^s \dot{p} \quad (1.31)$$

où Y_C désigne un seuil d'endommagement, susceptible d'évoluer au cours de la dégradation du matériau. Avec ce type d'expression, le matériau ne peut s'endommager que dans les phases de chargement où la force Y excède le seuil Y_C .

Critère de rupture locale :

Ce critère revient à définir l'amorçage d'une fissure macroscopique comme étant la rupture d'un EVR. En fonction du comportement du matériau considéré et du type de rupture envisagée, le critère peut avoir des formes différentes. Une forme classique, très utilisée en pratique est dans le cas de l'endommagement isotrope représenté par une valeur critique de la variable scalaire D :

$$D = D_{cr} \quad (1.32)$$

Dans la pratique la valeur de D_{cr} varie entre 0.3 et 0.7 selon le degré de « fragilité » des matériaux métalliques. Du point de vue numérique D_{cr} doit être très proche de 1 afin d'éviter des variations brusques ou saut de la solution [SAANOUNI88].

Evolution de la zone endommagée (propagation des fissures):

Nous avons étudié jusqu'à présent l'endommagement jusqu'à la phase d'amorçage d'une fissure macroscopique. Si le chargement de la structure continu, il convient de modéliser la propagation de cette fissure au gré de la sollicitation imposée éventuellement jusqu'à la ruine totale de la structure. Ceci ne va pas sans poser des problèmes sur le plan numérique liés au contrôle des variables internes aux points d'intégration des éléments totalement endommagés. Lors d'un trajet de chargement, la zone endommagée peut être définie comme l'ensemble des points de Gauss où l'endommagement a atteint la valeur critique de l'endommagement (D_{cr}). Pour approcher la propagation, deux voies sont envisageables : la première consiste à éliminer de la discrétisation les éléments totalement endommagés (éléments pour lesquels tous les points de Gauss ont atteint le seuil critique). Ceci revient à compacter la matrice de rigidité globale ou à remailler complètement la structure. La seconde consiste à introduire une pénalisation dans la matrice de rigidité lorsqu'un nœud n'appartient plus qu'à des éléments

complètement endommagés. Cette voie peut conduire, au fur et à mesure de l'endommagement, à un mauvais conditionnement de la matrice de rigidité.

1.3 MODÈLE D'ÉVOLUTION DE L'ENDOMMAGEMENT ET COUPLAGE COMPORTEMENT-ENDOMMAGEMENT

Cette interaction que l'on appellera couplage, revêt à nos yeux, une importance capitale dans la prévision de la rupture par endommagement. Elle influence d'une façon décisive la redistribution des champs thermomécaniques qui prédit où et quand s'amorcent les fissures et comment elles évoluent. C'est ce dont nous allons discuter ci-dessous.

1.3.1 Rappel thermodynamique

Après avoir défini la variable d'endommagement ainsi que son évolution par un mécanisme de rupture ductile, il reste à décrire son interaction avec les autres champs thermo-mécaniques présents dans la structure.

La déformation plastique d'un matériau provoque presque toujours des effets d'écrouissage qui se caractérisent par l'augmentation de la limite d'élasticité au cours de l'écoulement (on remarque très facilement que lors d'essais de traction avec décharges successives la limite élastique augmente). A l'échelle microscopique, l'écrouissage est caractérisé par une augmentation du nombre des dislocations au sein du matériau. Si la densité des dislocations augmente, ces dernières perdent leurs mobilités. Pour permettre de rendre compte des phénomènes d'écrouissage, on définit un domaine d'élasticité et on étudie son évolution en fonction de la déformation. L'évolution de ce domaine peut être représentée par une combinaison d'une dilatation, d'une rotation, d'une translation et d'une distorsion.

Dans le cas d'une isotropie totale on se limitera à la combinaison d'une dilatation, représentée par l'écrouissage isotrope, et d'une translation, caractérisée par l'écrouissage cinématique. L'écrouissage isotrope est caractérisé par un gonflement homothétique. A la fin de la phase de plastification le domaine initial Ω_e a évolué en un nouveau domaine Ω'_e de même centre que Ω_e initial, mais la surface de ce nouveau domaine a augmenté. En absence de distorsion et en partant d'une surface circulaire (isotropie), l'écrouissage isotrope est alors représenté par le couple de scalaires (r, R) .

L'écrouissage cinématique est lui caractérisé par la translation du centre du domaine élastique représenté par le couple de variables internes tensorielles (α, \underline{X}) . Une représentation graphique de ces deux écrouissages est donnée en Figure 1.9.

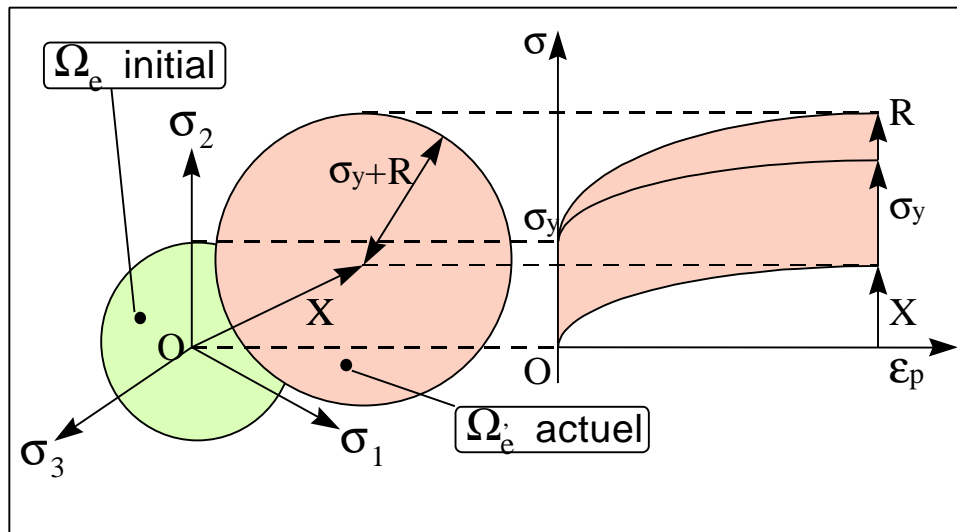


Figure 1.9 : Evolution du domaine d'élasticité en présence des écrouissements cinématiques et isotropes

Supposons maintenant qu'un endommagement significatif apparaisse « brusquement » après un certain taux d'écrouissage. Son effet sur les contraintes se manifeste par une chute de toutes les contraintes régnant dans le matériau (Figure 1.10). Ainsi au fur et à mesure que D approche D_{cr} le domaine d'élasticité « retourne » à l'origine de l'espace des contraintes et tend vers un point géométrique ($\underline{X} = 0, R = 0$ et $(1 - D)\sigma_y = 0$).

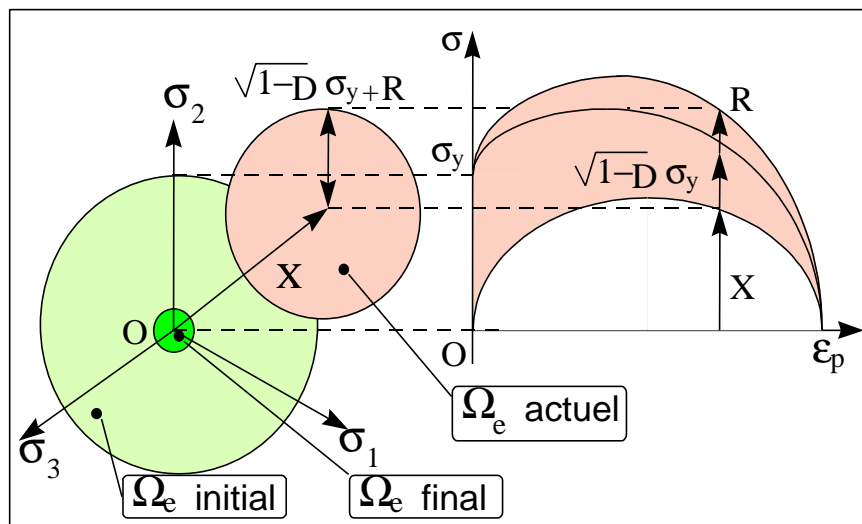


Figure 1.10 : Evolution du domaine d'élasticité en présence des écrouissements cinématique et isotrope et en présence de l'endommagement

Afin de modéliser ces phénomènes de couplage nous établirons une formulation décrivant le couplage comportement-endommagement telle qu'elle a été introduite dans les logiciels Forge2[®] et Forge3[®]. Plus particulièrement, l'écrouissage isotrope sera représenté par une fonction puissance sans variable interne associée et l'écrouissage cinématique sera totalement négligé.

1.3.2 Méthodologie de couplage comportement-endommagement dans Forge2^â-3^â

Dans l'esprit d'une modélisation simplifiée (à la base du succès industriel de Forge2[®] et Forge3[®]) nous nous limiterons à la plasticité de Prandtl-Reuss avec écrouissage isotrope non linéaire. Les hypothèses suivantes seront adoptées.

- 1) En premier lieu, nous postulerons l'hypothèse des petites perturbations (petites déformations, petits déplacements et petites rotations), bien que le forgeage mette en cause des grandes déformations. Ce choix adopté dans les codes Forge2[®] et Forge3[®] peut se justifier par l'utilisation de petits incréments de calcul imposés par l'algorithme de contact-frottement,
- 2) On utilisera une décomposition additive de la déformation totale en une partie élastique et plastique,
- 3) On supposera l'incompressibilité plastique, la déformation plastique n'engendrant pas de variation de volume; dans les matériaux non endommagés les déformations plastiques ayant pour mécanisme essentiel le glissement. En première approximation nous négligerons toute compressibilité induite par les porosités,
- 4) On admettra l'existence d'un domaine élastique. Il a été démontré qu'il est raisonnable de définir un domaine dans l'espace des contraintes où les déformations plastiques sont quasi-inexistantes,
- 5) On appliquera la normalité de la vitesse des déformations plastiques. Des procédés expérimentaux montrent que les incréments de déformation plastique sont normaux à la surface d'écoulement pour des trajets de chargement relativement complexe.
- 6) Le matériau utilisé sera initialement isotrope.
- 7) La plasticité et l'endommagement seront également supposés isotropes.

Lors de procédés de mise en forme à haute température, afin de décrire le comportement visqueux du matériau la loi de Norton-Hoff sera préconisée. Comme nous le verrons plus loin la différence principale avec la plasticité est la sensibilité à la vitesse de déformation.

L'endommagement affectera aussi bien les propriétés élastiques du matériau que ses propriétés plastiques. Nous décrirons alors le modèle tel qu'on l'a défini dans Forge2[®], puis nous poursuivrons par la description des équations constitutives relatives au couplage comportement-endommagement.

1.3.3 Cas du comportement thermo-élasto-plastique

1.3.3.1 Comportement thermo-élasto-plastique

De nombreux procédés de mise en forme faisant intervenir des phénomènes thermiques, il apparaissait nécessaire d'inclure ces phénomènes dans nos modèles afin de pouvoir simuler une large gamme de procédés de formage à froid et à chaud.

Ayant postulé l'existence d'un domaine élastique à l'intérieur duquel aucune déformation plastique n'est possible, il peut se définir comme une fonction dépendant de la contrainte de Cauchy, de la déformation plastique cumulée, de l'endommagement, et de la température :

$$f(\underline{\sigma}, p, D, T) \leq 0 \quad (1.33)$$

Afin de définir cette fonction, il convient de déterminer le type d'évolution envisagée pour la surface de charge en fonction de la déformation subie par le matériau. Le critère de Von Mises avec un écrouissage isotrope sera alors retenu avec effet de l'endommagement.

$$f(\underline{\sigma}, p, D, T) = \sigma_{eq} - \sigma_0(p, T)(1 - D) \leq 0 \quad (1.34)$$

où $\sigma_0(p, T)$ représente la contrainte d'écoulement du matériau (rayon actuel du domaine d'élasticité) essentiellement dépendante de la déformation plastique cumulée et de la température. Cette fonction peut être définie comme une loi linéaire puissance combinée à une loi d'Arrhénius pour la température.

$$\sigma_0(p, T) = \sqrt{3}K_0(1 + ap^n) \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \quad (1.35)$$

K_0 est la consistance initiale, a un terme de régularisation de l'écrouissage, n le coefficient de sensibilité à l'écrouissage et β le coefficient thermique.

Afin d'enrichir les codes de calcul Forge2[®] et Forge3[®] il est tout à fait possible d'intégrer de nouvelles lois pour définir cette contrainte d'écoulement. Le lecteur pourra par ailleurs se référer au manuel d'utilisateur de Forge2[®]-3[®] pour la description de ces différentes lois à écrouissage isotrope déjà introduites.

Le fait que la partie plastique de la déformation soit incompressible, donc indépendante de la pression, autorise alors à exprimer le critère de Von Mises en fonction du déviateur de la contrainte de Cauchy.

On aboutit alors à un critère de type Mises sensible à l'endommagement $\bar{f}(\underline{S}, p, D, T)$:

$$\bar{f}(\underline{S}, p, D, T) = \underline{S} : \underline{S} - \frac{2}{3} \sigma_0^2(p, T)(1 - D)^2 = 0 \quad (1.36)$$

Notons simplement qu'en cas de désactivation du dommage ($D=0$), on retrouve le critère initial de Mises tel qu'il a été préalablement défini dans les codes Forge2[®] et Forge3[®].

Lorsque l'on se trouve dans le domaine élastique c'est-à-dire $\bar{f}(\underline{S}, p, D, T) < 0$ alors le comportement est bien élastique et la contrainte de Cauchy est donnée par la loi de Hooke :

$$\underline{\sigma} = (1 - D) \left[\lambda \text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}^e \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}^e - 3\kappa \alpha (T - T_0) \underline{\underline{1}} \right] \quad \kappa = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (1.37)$$

κ étant défini comme le module de compression hydrostatique, λ et μ étant les coefficients de Lamé, α le coefficient de dilatation et T_0 la température de référence.

En découplant pression hydrostatique et déviateur on obtient :

$$\underline{S} = 2\mu(1 - D)\underline{e}^e \quad (1.38)$$

$$P_H = 3\kappa(1 - D)\left[\varepsilon_H^e - \alpha(T - T_0)\right] \quad (1.39)$$

avec

$$\underline{S} = \underline{\sigma} - P_H \underline{1}, \quad P_H = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma}, \quad \underline{e}^e = \underline{\varepsilon}^e - \varepsilon_H^e \underline{1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_H^e = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\varepsilon}^e \quad (1.40)$$

De plus la linéarité de la relation $\dot{\underline{\varepsilon}} = \dot{\underline{\varepsilon}}^e + \dot{\underline{\varepsilon}}^{\text{pl}}$ (hypothèse des petites perturbations) permet dans les équations de Prandtl-Reuss de décomposer le tenseur des vitesses de déformation en partie volumique et déviatorique:

Le comportement déviatorique sera donné par les équations suivantes:

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}}^e + \dot{\underline{e}}^{\text{pl}} \quad \dot{\underline{e}}^e = \dot{\underline{\varepsilon}}^e - \dot{\varepsilon}_H^e \underline{1} \quad \dot{\underline{e}}^{\text{pl}} = \dot{\underline{\varepsilon}}^{\text{pl}} \quad (1.41)$$

$$\dot{\underline{e}}^{\text{pl}} = \dot{\delta} \frac{\partial \bar{f}(\underline{S}, p, D, T)}{\partial \underline{S}} = 2\dot{\delta} \underline{S} \quad (1.42)$$

$\dot{\underline{e}}^{\text{pl}}$ caractérise l'écoulement plastique dans la direction normale à la surface de charge. Le multiplicateur plastique $\dot{\delta}$ sera déduit de la condition de consistance $\dot{\bar{f}} = 0$ si $\bar{f} = 0$.

$$\dot{\bar{f}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \underline{S}} : \dot{\underline{S}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial D} \dot{D} = 0 \quad (1.43)$$

avec

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_0} = -\frac{4}{3} \sigma_0(p, T)(1 - D)^2 \quad (1.44)$$

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{e}}^{\text{pl}} : \dot{\underline{e}}^{\text{pl}}} = \frac{4}{3} \sigma_0(p, T) \dot{\delta}(1 - D) \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial D} = \frac{4}{3} \sigma_0^2(p, T)(1 - D) = -\frac{\sigma_0(p, T)}{(1 - D)} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_0} \quad (1.46)$$

L'évolution de la variable d'endommagement est donnée par l'équation (1.31) :

$$\dot{D} = \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^s \frac{\dot{p}}{(1 - D)^b} = \frac{4}{3} \hat{Y} \dot{\delta} \sigma_0(p, T)(1 - D) = \hat{Y} \dot{p} \quad \text{avec} \quad \hat{Y} = \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^s \frac{1}{(1 - D)^b} \quad (1.47)$$

et:

$$Y = \frac{\sigma_{\text{eq}}^2}{2E(1 - D)^2} \left[\frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{P_H}{\sigma_{\text{eq}}} \right)^2 \right] - \frac{9}{2} \kappa \alpha^2 (T - T_0)^2 \quad (1.48)$$

Par combinaison des équations (1.38), (1.41), (1.42) et à l'aide de l'équation (1.37) on obtient le système différentiel suivant:

$$\underline{\dot{S}} = 2\mu(1-D)\underline{\dot{e}} - \left[4\mu(1-D)\underline{\dot{\delta}} + \frac{\underline{\dot{D}}}{(1-D)} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \underline{\dot{T}} \right] \underline{S} \quad (1.49)$$

En remplaçant l'ensemble de ces termes dans l'équation (1.43) on aboutit à :

$$\underline{\dot{f}} = \begin{cases} 4\mu(1-D)\underline{S} : \underline{\dot{e}} - 8\mu(1-D)\underline{S} : \underline{\dot{S}} - 2 \frac{\underline{\dot{D}}}{(1-D)} \underline{S} : \underline{S} + 2 \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \underline{\dot{T}} \underline{S} : \underline{S} \\ + \frac{4}{3} \sigma_0^2(p,T)(1-D)\underline{\dot{D}} - \frac{16}{9} \sigma_0^2(p,T)(1-D)^3 \underline{\dot{\delta}} \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} - \frac{4}{3} (1-D)^2 \sigma_0 \frac{\partial \sigma_0}{\partial T} \underline{\dot{T}} = 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

avec tiré de l'équation (1.36) :

$$\underline{S} : \underline{S} = \frac{2}{3} \sigma_0^2 (1-D)^2 \quad (1.51)$$

On obtient en remplaçant (1.47) et (1.51) dans (1.50), l'expression du multiplicateur plastique $\underline{\dot{\delta}}$:

$$\underline{\dot{\delta}} = \frac{1}{H_{dp}} \langle \underline{S} : \underline{\dot{e}} - H_{pT} \underline{\dot{T}} \rangle \quad (1.52)$$

où H_{dp} est défini comme le module tangent plastique et H_{pT} la contribution thermique:

$$H_{dp} = \frac{4}{3} \sigma_0^2(p,T)(1-D)^2 \left[1 + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \right] \quad (1.53)$$

$$H_{pT} = \frac{(1-D)\sigma_0}{3\mu} \left[\frac{\partial \sigma_0(p,T)}{\partial T} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \sigma_0(p,T) \right] \quad (1.54)$$

En remplaçant l'expression du multiplicateur plastique $\underline{\dot{\delta}}$ dans l'équation (1.49) et à l'aide de (1.47), on aboutit à la forme différentielle suivante :

$$\underline{\dot{S}} = 2\mu(1-D)\underline{\dot{e}} - \frac{4}{H_{dp}} \left[\mu(1-D) + \frac{\sigma_0}{3} \hat{Y} \right] \left[\underline{S} : \underline{\dot{e}} - H_{pT} \underline{\dot{T}} \right] \underline{S} \quad (1.55)$$

soit

$$\underline{\dot{S}} = \underline{\underline{L}}_s : \underline{\dot{e}} + \underline{\underline{L}}_T \underline{\dot{T}} \quad (1.56)$$

avec

$$\underline{\underline{L}}_s = 2\mu(1-D)\underline{\underline{1}} - \frac{4}{H_{dp}} \left(\mu(1-D) + \frac{\sigma_0}{3} \hat{Y} \right) \underline{S} \otimes \underline{S} \quad (1.57)$$

$$\underline{L}_T = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \underline{S} + \frac{4H_{pT}}{H_{dp}} \left(\mu(1-D) + \frac{\sigma_0}{3} \hat{Y} \right) \underline{S} \quad (1.58)$$

Où \underline{L}_s est un opérateur d'ordre quatre représentant le module tangent continu et \underline{L}_T un opérateur d'ordre deux définissant la contribution thermique à ce module tangent. Notons que si l'endommagement est nul ($D=0$, $\hat{Y} = 0$) alors on retrouve le même module tangent continu tel qu'il est introduit dans la version d'origine de Forge2[®] et Forge3[®] [CHENOT94].

Le comportement sphérique sera donné par \dot{P}_H tiré de l'équation (1.39):

$$\dot{P}_H = \kappa(1-D) \text{tr} \underline{\dot{\varepsilon}}^e - \frac{P_H}{1-D} \dot{D} + \frac{\partial \kappa}{\partial T} \frac{P_H}{\kappa} \dot{T} - 3\kappa(1-D) \left\{ (T - T_0) \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \right\} \dot{T} \quad (1.59)$$

avec l'évolution du dommage donnée par (1.47):

$$\dot{D} = \frac{4}{3} \hat{Y} \sigma_0(p, T) (1-D) \left[\frac{1}{H_{dp}} \langle \underline{S} : \underline{\dot{\varepsilon}} - H_{pT} \dot{T} \rangle \right] \quad (1.60)$$

On peut alors exprimer la vitesse de la pression hydrostatique par :

$$\dot{P}_H = \underline{L}_p : \underline{\dot{\varepsilon}} + L_T \dot{T} \quad (1.61)$$

avec

$$\underline{L}_p = \kappa \left[(1-D) \underline{1} - \frac{4}{3} \frac{P_H \sigma_0(p, T) \hat{Y}}{H_{pd}} \underline{S} \right] \quad (1.62)$$

et

$$L_T = \left[P_H \frac{\partial \kappa}{\partial T} - 3\kappa(1-D) \left\{ (T - T_0) \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \right\} + \frac{4}{3} P_H \sigma_0(p, T) \hat{Y} \frac{H_{pT}}{H_{pd}} \right] \quad (1.63)$$

Où \underline{L}_p est un opérateur d'ordre deux représentant le module tangent hydrostatique continu et L_T un scalaire définissant la contribution thermique.

En résumé on obtient le système d'équations différentielles caractérisant le comportement thermo-élasto-plastique couplé à l'endommagement, décomposé en partie déviatorique et hydrostatique, avec la loi d'évolution du dommage.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\underline{S}} = 2\mu(1-D)\dot{\underline{\epsilon}} - \left[\mu(1-D)4\dot{\delta} + \frac{\dot{D}}{(1-D)} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \dot{T} \right] \underline{S} \\
\dot{\delta} = \frac{1}{\frac{4}{3} \sigma_0^2(p,T)(1-D)^2 \left[1 + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \right]} \left\langle \underline{S} : \dot{\underline{\epsilon}} - \frac{(1-D)\sigma_0}{3\mu} \left[\frac{\partial \sigma_0(p,T)}{\partial T} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \sigma_0(p,T) \right] \dot{T} \right\rangle \\
\dot{p} = \frac{1}{\sigma_0(p,T)(1-D) \left[1 + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \right]} \left\langle \underline{S} : \dot{\underline{\epsilon}} - \frac{(1-D)\sigma_0}{3\mu} \left[\frac{\partial \sigma_0(p,T)}{\partial T} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \sigma_0(p,T) \right] \dot{T} \right\rangle \\
\dot{P}_H = \kappa(1-D)\text{tr}\dot{\underline{\epsilon}}^e - \frac{P_H}{1-D} \dot{D} + \frac{\partial \kappa}{\partial T} \frac{P_H}{\kappa} \dot{T} - 3\kappa(1-D) \left\{ (T - T_0) \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \right\} \dot{T} \\
\dot{D} = \left(\frac{Y}{S} \right)^s \frac{\dot{p}}{(1-D)^b}
\end{array} \right. \quad (1.64)$$

Pour ce qui est du calcul de l'évolution de la température, il faut à chaque pas de temps résoudre l'équation de la chaleur donnée par la loi de Fourier modifiée par l'endommagement comme suit [SAANOUNI94, LESTRIEZ01]:

$$\rho C_V \dot{T} = \text{div}(\overline{k \text{grad}(T)}) + \underline{\sigma} : \dot{\underline{\epsilon}}^p - Y\dot{D} \quad (1.65)$$

k étant le coefficient de conduction, C_V la chaleur massique du matériau, $\underline{\sigma} : \dot{\underline{\epsilon}}^p$ déterminant la puissance produite par la déformation irréversible de la matière, ρ étant la masse volumique du matériau. La conduction de la chaleur donnée par le terme $\text{div}(\overline{k \text{grad}(T)})$ et la dissipation interne $\underline{\sigma} : \dot{\underline{\epsilon}}^p$ vont déterminer la vitesse d'évolution de la température.

Le terme $Y\dot{D}$ représente la puissance dissipée dans le processus d'endommagement. On remarque nettement l'effet de l'endommagement sur le comportement thermique du matériau avec le terme $Y\dot{D}$ dans le second membre et le facteur $(1-D)$ dans le premier membre. Notons, comme pour la partie mécanique, que lorsque l'endommagement est nul $D = \dot{D} = 0$ alors on retrouve l'équation classique de la chaleur. Par contre lorsque le milieu est totalement endommagé (i.e. $D = 1$, $\underline{\sigma} = 0$, $\dot{\underline{\epsilon}}^{pl} = \dot{D} = 0$), l'équation de la chaleur se réduit au terme stationnaire :

$$\text{div}(\overline{k \text{grad}(T)}) = 0 \quad (1.66)$$

1.3.3.2 Cas isotherme

Afin de caractériser le forgeage des matériaux à froid, il n'est pas nécessaire de faire intervenir les différents aspects thermiques liés au procédé. Il n'est donc pas nécessaire de résoudre l'équation de la chaleur. Ici, on se place donc dans le cadre d'une modélisation

isotherme et isotrope (isotropie du dommage, de la plasticité et de l'élasticité). On aura alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{S}} = 2\mu(1-D) \left[\dot{\underline{\varepsilon}} + \underline{S} \frac{1}{\frac{2}{3}\sigma_0^2(p,T)(1-D)^2 \left[1 + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \right]} \underline{S} : \dot{\underline{\varepsilon}} + \frac{\dot{D}}{2\mu(1-D)^2} \underline{S} \right] \\ \dot{\delta} = \frac{1}{\frac{4}{3}\sigma_0^2(p,T)(1-D)^2 \left[1 + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \right]} \langle \underline{S} : \dot{\underline{\varepsilon}} \rangle \\ \dot{p} = \frac{1}{\sigma_0(p,T)(1-D) \left[1 + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \right]} \langle \underline{S} : \dot{\underline{\varepsilon}} \rangle \\ \dot{P}_H = \kappa(1-D) \text{tr} \dot{\underline{\varepsilon}}^e - \frac{P_H}{1-D} \dot{D} \\ \dot{D} = \left(\frac{Y}{S} \right)^s \frac{\dot{p}}{(1-D)^b} \end{array} \right. \quad (1.67)$$

1.3.4 Cas du comportement thermo-élasto-viscoplastique

1.3.4.1 Cas sans dommage de fluage

Afin de modéliser le comportement à chaud des matériaux, il faut bien souvent introduire la notion de viscoplasticité. Un comportement viscoplastique sera dépendant de la vitesse de déformation. Les phénomènes viscoplastiques sont généralement observés lorsque la température du matériau dépasse le tiers de la température absolue de fusion, exprimée en Kelvin. Cette règle étant purement indicative, elle ne s'applique pas à tous les matériaux. En effet, certains alliages sont sensibles à la vitesse de déformation pour des températures ambiantes (300 K) bien que leurs températures de fusion soient assez élevées (1400 K).

La Figure 1.11 montre l'influence de la vitesse de déformation sur le matériau lors d'un essai de traction.

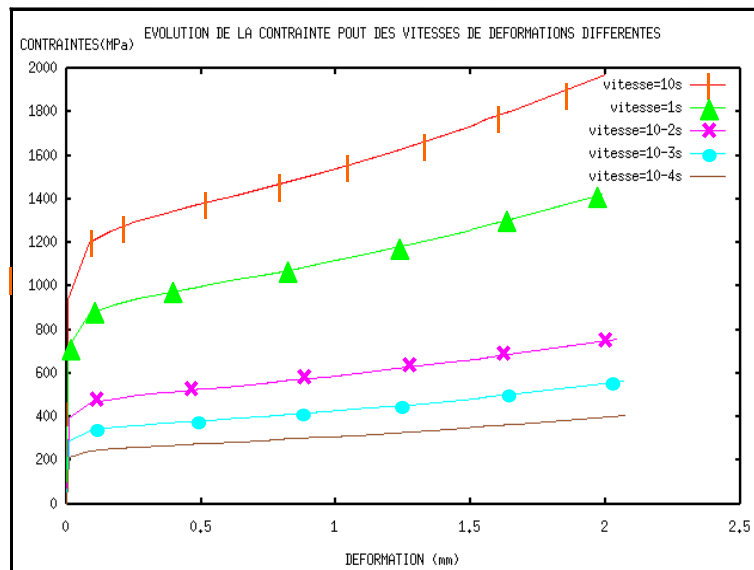


Figure 1.11 : Evolution de la contrainte pour différentes vitesses de déformation en traction

Afin de décrire le comportement visqueux d'un matériau, lors d'un procédé de mise en forme à chaud, la notion de vitesse de déformation sera alors introduite dans la loi d'écoulement du matériau (rayon du domaine élastique). Celle-ci sera alors non seulement dépendante de la déformation plastique cumulée et de la température mais aussi de la vitesse de déformation.

Afin de montrer l'effet de la vitesse sur la loi d'écoulement du matériau, nous utiliserons ici une loi linéaire puissance couplée à une loi d'Arrhenius en température telle qu'elle est décrite au paragraphe (1.3.3) en y ajoutant la dépendance vis-à-vis de la vitesse de déformation plastique:

$$\sigma_0(T, p, \dot{p}) = \sqrt{3}K_0(1 + ap^n) \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \dot{p}^m \quad (1.68)$$

où \dot{p} est la vitesse de déformation plastique cumulée et m l'exposant un terme de sensibilité à la vitesse de déformation. Le lecteur pourra également se référer au guide d'utilisation des logiciels Forge2[®] et Forge3[®] afin de voir l'ensemble des modèles qui y sont implémentés.

Afin de modéliser le couplage comportement-endommagement avec l'influence de la vitesse de déformation, nous présenterons ci-après des résultats tirés de simulations qui montrent clairement que pour un même matériau, plus la vitesse de déformation sera élevée et plus l'endommagement apparaîtra rapidement (Figure 1.12).

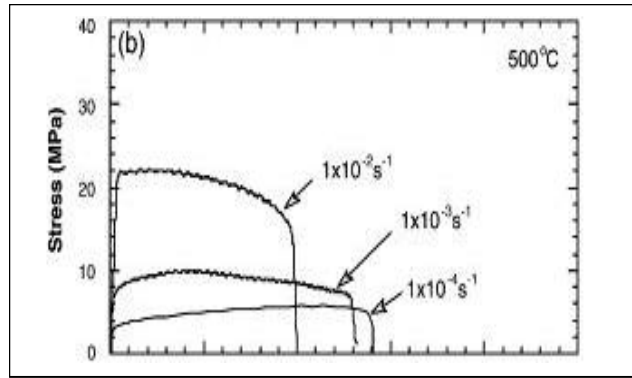


Figure 1.12 :Traction à vitesses de déformation différentes

1.3.4.2 Cumul de l'endommagement de plasticité et de fluage

Afin de décrire l'endommagement de fluage de nombreux auteurs ont développé des modèles capables de prendre en compte ce type d'évolution [HAYHURST72, CHABOCHE78, LEMAITRE85, SAANOUNI88]. Le critère que nous utiliserons pour modéliser l'endommagement de fluage est le modèle d'Hayhurst qui est basé sur le modèle de Rabotnov [RABOTNOV69], mais faisant intervenir une combinaison des trois invariants élémentaires.

La loi d'évolution du dommage de fluage sera donc donnée par :

$$\dot{D}_f = \left\langle \frac{\chi(\underline{\sigma})}{A} \right\rangle^r (1 - D_f)^{-k_f} \quad (1.69)$$

A, r et k_f sont définis comme des coefficients caractéristiques de l'endommagement de fluage pour chaque matériau. La fonction $\chi(\underline{\sigma})$ définit le critère de fluage comme la combinaison des trois invariants élémentaires et sera de la forme :

$$\chi(\underline{\sigma}) = \alpha_a \sigma_{\max} + 3\alpha_b P_H + (1 - \alpha_a - \alpha_b) \sigma_{eq} \quad (1.70)$$

où σ_{\max} représente la contrainte principale maximum, α_a et α_b étant des paramètres matériau.

Pour permettre à l'utilisateur de tenir compte de l'endommagement de fluage lors de la simulation d'un procédé, nous avons introduit la possibilité d'un cumul entre le dommage de plasticité D_p et le dommage de fluage D_f , par :

$$\dot{D} = \dot{D}_f + \dot{D}_p \quad (1.71)$$

où \dot{D}_p est donné par (1.31) et \dot{D}_f par (1.69). En fait, sur chaque pas de temps nous écrivons le cumul des incréments de dommage.

$$\Delta D = \Delta D_f + \Delta D_p \quad (1.72)$$

Ce modèle a donc été implémenté dans les codes de calcul Forge2[®] et Forge3[®] afin de permettre à l'ingénieur de sélectionner un modèle d'endommagement qui correspondra au mieux au procédé de mise en forme rencontré. Ceci dit, il est rare de constater des ruptures

par fluage en mise en forme compte tenu de la rapidité et à la brièveté d'applications des efforts.

1.3.5 Cas particulier du couplage faible dans Forge2^â et Forge3^â

Le couplage comportement-endommagement tel qu'il a été présenté, nécessite beaucoup de modifications dans le code de calcul Forge2[®]. Les routines utilisateurs (ouvertes aux modifications) telles qu'elles sont définies dans ce code ne sont pas suffisantes pour établir correctement le couplage entre l'endommagement et le comportement du matériau (modification des équations de Prandtl-Reuss ainsi que l'équation de la chaleur).

Néanmoins il est tout à fait possible à partir des routines utilisateurs (versions industrielles en somme) d'établir un couplage « faible » entre le comportement et l'endommagement. Les équations de Prandtl-Reuss utilisées ici seront celles disponibles dans la version standard de Forge2[®]. Le calcul de l'endommagement se fera indépendamment du calcul de la vitesse de déformation plastique cumulée, et l'influence de l'endommagement sur la plasticité se fera directement via la contrainte d'écoulement du matériau $\sigma_0(p, D, T)$ (rayon du domaine élastique). L'influence de l'endommagement sur les propriétés élastiques du matériau se fera par l'intermédiaire du module d'Young. Ce type de couplage est ainsi nommé « couplage faible » au sens où l'endommagement n'influence pas le critère de plasticité au cours des itérations. En effet, le fait de ne pas modifier les équations de Prandtl-Reuss réduit nettement les temps de calculs. Nous verrons par la suite que résoudre deux équations à deux inconnues numériquement par la méthode de Newton-Raphson en lieu et place d'une seule équation à une inconnue (Forge2[®] standard) revient à augmenter sensiblement les temps de calculs CPU. En ce qui concerne le couplage comportement-endommagement les équations constitutives en plus des équations de Prandtl-Reuss standard seront :

$$\sigma_0(p, \dot{p}, D, T) = \sqrt{3}K_0(1-D)(1+ap^n) \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \dot{p}^m \quad (1.73)$$

$$\frac{\partial \sigma_0(p, \dot{p}, D, T)}{\partial p} = \sqrt{3}K_0 n(1-D)(ap^{n-1}) \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \dot{p}^m + \underbrace{\frac{\partial \sigma_0}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial p} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial \dot{p}} \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}}_{(A)} \quad (1.74)$$

$$\tilde{E} = (1-D)E, \tilde{\lambda} = \lambda(1-D), \tilde{\mu} = \mu(1-D) \quad (1.75)$$

avec :

$$\begin{cases}
\dot{\underline{S}} = 2\bar{\mu}\dot{\underline{\varepsilon}} - \left[\bar{\mu}4\dot{\delta} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \dot{T} \right] \underline{S} \\
\dot{\delta} = \frac{1}{\frac{4}{3}\sigma_0^2(p, D, T) \left[1 + \frac{1}{3\bar{\mu}} \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \right]} \left\langle \underline{S} : \dot{\underline{\varepsilon}} - \frac{\sigma_0}{3\bar{\mu}} \left[\frac{\partial \sigma_0(p, D, T)}{\partial T} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \sigma_0(p, D, T) \right] \dot{T} \right\rangle \\
\dot{p} = \frac{1}{\sigma_0(p, D, T) \left[1 + \frac{1}{3\bar{\mu}} \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \right]} \left\langle \underline{S} : \dot{\underline{\varepsilon}} - \frac{\sigma_0}{3\bar{\mu}} \left[\frac{\partial \sigma_0(p, D, T)}{\partial T} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \sigma_0(p, D, T) \right] \dot{T} \right\rangle \\
\dot{P}_H = \kappa(1-D)\text{tr}\dot{\underline{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \kappa}{\partial T} \frac{P_H}{\kappa} \dot{T} - 3\kappa(1-D) \left\{ (T - T_0) \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \right\} \dot{T} \\
\dot{D} = \left(\frac{Y}{S} \right)^s \frac{\dot{p}}{(1-D)^b}
\end{cases} \quad (1.76)$$

Aussi on notera que par soucis de simplification nous négligerons les termes (A) de l'équation (1.74) dans la dérivée de la consistance.

En résumé, le couplage fort nécessite des modifications conséquentes dans de nombreuses routines non accessibles aux utilisateurs, cela reste un handicap majeur. Dans ce cas, le couplage faible est plus simple à implémenter, moins coûteux et donc finalement plus compatible avec l'environnement « industriel » des codes Forge2[®] et Forge3[®].

En outre, afin de rendre compte des différences entre ces deux couplages nous procéderons à une comparaison de ces deux couplages sur la version Forge2[®]P2-P0. Le couplage fort n'ayant pu être implémenté dans le code Forge3[®] (version industrielle), nous nous contenterons du couplage faible pour tous les procédés 3D.

1.4 MODÈLES DE FROTTEMENT

1.4.1 Introduction

Le frottement intervient à tous les niveaux de la mise en forme. En effet, la géométrie finale du produit formé dépend du frottement, les forces et couples mis en jeu augmentent avec le frottement, l'état de surface du produit est intimement lié au frottement. Il existe par ailleurs de nombreux travaux concernant ces aspects très importants en mise en forme [DUBOIS96, LAZZAROTTO97,...]. En règle générale on s'accorde à dire que plus le rapport entre la surface de contact et le volume en déformation plastique est grand, plus le frottement jouera un rôle important. Notons enfin, que dans ce travail, nous nous contentons exclusivement de décrire les différents modèles de frottement disponibles dans Forge2[®] et Forge3[®].

Modèles de frottement :

On appelle ainsi toute relation permettant de calculer le vecteur contrainte tangentielle en fonction des très nombreux paramètres du contact :

- les variables σ_n (contraintes normales), V_g (vitesse de glissement), T
- les propriétés physiques du comportement de ces surfaces (E, ν, \dots)
- les états de surface (rugosité ...)
- la nature des lubrifiants

Comme on l'a vu précédemment, et compte tenu du nombre élevé de paramètres, il est très difficile de construire des modèles de contact-frottement tenant compte de tous ces phénomènes. On se contente en fait d'isoler un petit nombre de variables (1 ou 2) jugées primordiales que l'on va intégrer dans la relation de frottement. Cette relation fera intervenir une constante sans dimension qui est le coefficient de frottement.

Les autres variables seront prises en compte implicitement lors de la détermination des coefficients de frottement.

1.4.1.1 Cas du contact unilatéral

Soit un solide S qui occupe un domaine Ω de frontière $\partial\Omega = \partial\Omega_C \cup \partial\Omega_F \cup \partial\Omega_D$, où $\partial\Omega_C$ est la partie du solide en contact avec l'autre solide.

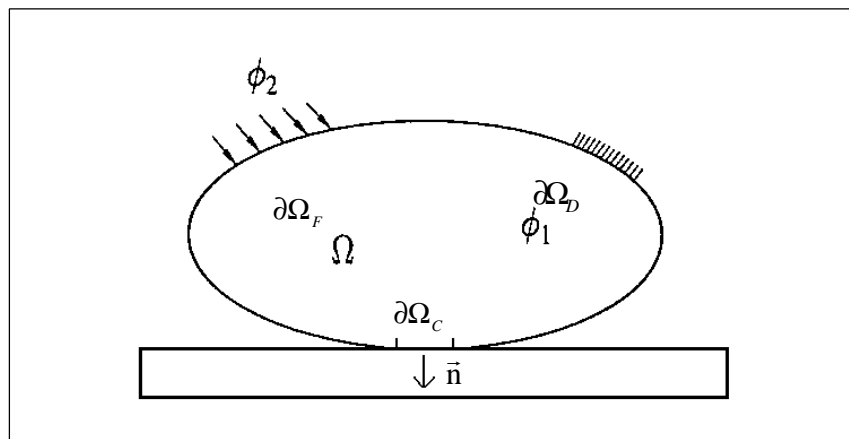


Figure 1.13 : Schématisation du contact

Sur la frontière $\partial\Omega_C$ le déplacement et les forces de contact seront donnés par :

$$\bar{u} = \bar{u}_N n + \bar{u}_T \quad (1.77)$$

$$\bar{F} = \bar{F}_N n + \bar{F}_T \quad (1.78)$$

\bar{u}_N et \bar{F}_N sont des mesures algébriques suivant la direction normale, \bar{u}_T et \bar{F}_T étant des vecteurs appartenant au plan tangent.

Les conditions de contact unilatéral sont :

1) non pénétration du solide dans l'obstacle : $\bar{u}_N \leq 0$

2) la force normale exercée par l'autre solide sur le solide S est bien une compression : $\bar{F}_N \leq 0$:

3) la relation de complémentarité : $\bar{u}_N \bar{F}_N \leq 0$ qui décrit deux cas possibles.

-contact ($\bar{u}_N = 0$) avec $\bar{F}_N \leq 0$

-décollement ($\bar{u}_N < 0$) avec $\bar{F}_N = 0$

1.4.1.2 Cas du contact bilatéral

Le contact bilatéral (ou contact persistant), signifie que le contact normal est maintenu en laissant le déplacement tangentiel relatif libre.

La scission de contact est donnée par :

$$\tau = \sqrt{(\tau_1)^2 + (\tau_2)^2} \quad (1.79)$$

avec comme vecteur contrainte tangentielle :

$$\bar{F}_t = \bar{F} - \sigma_N \cdot \bar{n} = (\bar{F} \cdot \bar{t}) \cdot \bar{t} \quad (1.80)$$

$\sigma_N = \bar{F} \cdot \bar{n}$ étant la contrainte normale à la surface de contact.

Pour ce qui est du frottement proprement dit, il existe plusieurs lois (Tresca, Coulomb, Coulomb-Orowan, Shaw) mais nous ne présenterons que les lois les plus fréquemment utilisées dans les codes de calculs d'éléments finis Forge2[®] et Forge3[®] à savoir les lois de Coulomb, Tresca et Shaw. En fait, pour généraliser le problème, on pourra classer ces modèles en deux catégories, des modèles de type plasticité indépendante du temps (Coulomb, Tresca) et des modèles de type viscoplastique (Type Norton-Hoff).

Définissons la notion de seuil de glissement entre deux solides S_1 et S_2 en un point P. Il existe une force de traction tangentielle minimale à appliquer pour qu'il y ait l'apparition d'un glissement significatif.

On aura alors deux configurations:

Un contact dit collant $\tau < \tau_{crit} \Rightarrow V_g = 0$

Un contact dit glissant $\tau > \tau_{crit} \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, V_g = -\lambda \tau$

1.4.2 Les lois de frottement usuelles

1.4.2.1 Modèle de frottement de Coulomb

C'est la plus ancienne et la plus utilisée des lois de frottement. Cette loi intègre la notion de seuil et se caractérise par l'intervention de la pression de contact p_c :

$\tau \leq \mu p_c$ avec :

si $\tau < \mu p_c$ alors $v_g = 0$

si $\tau = \mu p_c$ alors $v_g = -\lambda \tau$ quel que soit $\lambda \geq 0$

μ étant un coefficient de frottement moyen, macroscopique et isotrope (sa valeur est souvent comprise entre 0.01 (lubrification en films épais) et 0.5 (sans lubrification)).

On notera que la loi de Coulomb est particulièrement bien adaptée pour des problèmes où les pressions de contact ne sont pas trop élevées par rapport à la contrainte d'écoulement du matériau $\sigma_0(p, D, T)$ (rayon du domaine élastique).

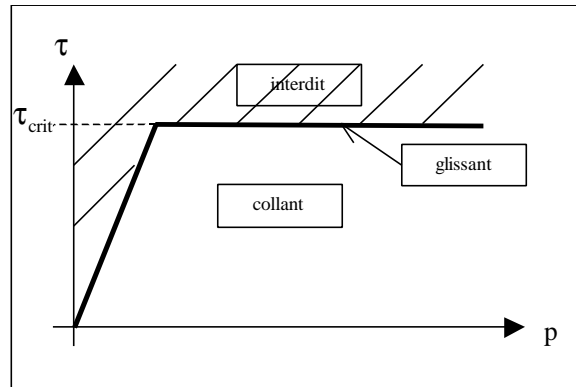


Figure 1.14 : Schématisation du modèle de Coulomb tronqué

1.4.2.2 Modèle de Tresca

C'est une loi à seuil fixe τ_{crit} . Ce nom vient de l'analogie faite avec le critère de Tresca en plasticité.

On pose :

$$\tau_{crit} = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad \text{avec } 0 \leq m \leq 1$$

ce qui donnera :

$$\tau \leq \tau_{crit} \quad \text{avec}$$

$$\text{si } \tau < \tau_{crit} \quad \text{alors } v_g = 0$$

$$\text{si } \tau = \tau_{crit} \quad \text{alors } v_g = -\lambda \tau \quad \text{quelque soit } \lambda \geq 0$$

La limite de glissement ne dépendant pas de la contrainte normale, ce qui est d'un point de vue mécanique très limitatif. Mais si cette contrainte normale est connue, cette forme pourra être utile.

Notons par ailleurs que cette loi ne pourra pas être simplement couplée avec un modèle de contact unilatéral car il faudrait imposer à la composante V_g d'être nulle sur la partie décollée mais celle-ci est l'une des inconnues du problème.

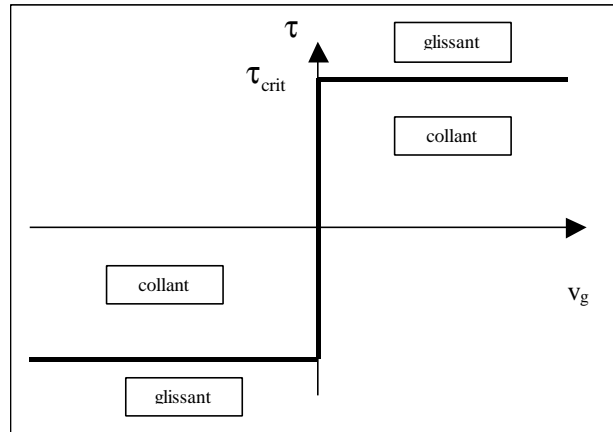


Figure 1.15 : Schématisation du modèle de Tresca

1.4.2.3 Modèle de type viscoplastique

Un formalisme de type viscoplastique est nécessaire afin d'éviter les discontinuités découlant de la notion de seuil. Ce modèle repose donc sur un critère d'écoulement de type fonction puissance sans introduire la notion de seuil à l'image du modèle de fluage de type Norton-Hoff. On aura alors si:

$$\tau < \tau_{\text{crit}} \Rightarrow v_g = 0$$

$$\tau > \tau_{\text{crit}} \Rightarrow \tau - \tau_{\text{crit}} = \alpha \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\frac{\|v_g\|}{v_{\text{ref}}} \right)$$

Les termes v_{ref} et $\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$ sont donnés afin de rendre le coefficient α adimensionnel. On

remarquera que pour ce type de critère il n'existe pas de domaine interdit, la notion de seuil est donnée implicitement.

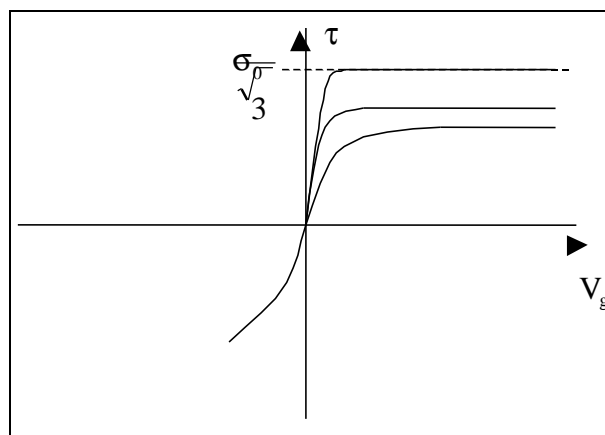


Figure 1.16 : Schématisation du modèle de Norton-Hoff

1.5 CONCLUSION

Après avoir effectué un rappel sur les modèles d'endommagement qui existent, ainsi que les différents phénomènes physiques qui interviennent lors des procédés de mise en forme, nous avons présenté un modèle simple décrivant ces phénomènes. Un travail particulièrement soigné a été effectué afin d'établir un modèle général couplant comportement et endommagement dans la limite des hypothèses adoptées.

Une formulation du couplage comportement-endommagement a été réalisée en adoptant un couplage fort ou faible.

Ce type de couplage affectant aussi bien les propriétés élastiques que plastiques du matériau, a été enrichi afin de pouvoir tenir compte des effets visqueux (modèle élasto-viscoplastique) et thermiques (modification de l'équation de la chaleur), ceci dans le but de disposer d'un modèle de comportement-endommagement suffisamment riche susceptible de pouvoir simuler une très large gamme de procédés de mise en forme.

Enfin, le contact frottement a été présenté en mettant bien entendu l'accent sur les différents modèles proposés dans les codes de calculs Forge2[®] et Forge3[®].

Dans le chapitre suivant, nous présenterons les aspects numériques liés aux modèles présentés dans le présent chapitre, ainsi que la méthodologie de résolution numérique du problème de formage de structures métalliques massives.

CHAPITRE 2 :

FORMULATION DU COUPLAGE COMPORTEMENT-ENDOMMAGEMENT : ASPECTS NUMÉRIQUES

2.1 POSE DU PROBLÈME D'ÉVOLUTION

Après avoir présenté, dans le premier chapitre, une partie des modèles essayant de représenter et décrire les principaux phénomènes macroscopiques rencontrés dans les procédés de forgeage, nous allons présenter l'implémentation de ces différents modèles dans les codes de calcul par éléments finis Forge2[®] et Forge3[®]. Les aspects numériques liés à l'utilisation de modèles élastoplastiques dans les codes de calcul par éléments finis sont largement rapportés dans la littérature. Nous ne citerons ici que quelques ouvrages didactiques liés à cette question [ODEN72, OWEN80, BATHE81, HUGHES87, ZIENKIEWICZ94, BONNET97, SIMO98, BELYTSCHKO00]. Concernant les modèles de couplage comportement-endommagement, de nombreux travaux ont été publiés ces deux dernières décennies ([SAANOUNI02] et toutes les références qui se trouvent dans ce recueil). De cette littérature abondante nous pouvons affirmer que la plus grande difficulté rencontrée pour la résolution des problèmes de couplage comportement-endommagement réside dans la dépendance de la solution vis-à-vis de la discrétisation spatiale et temporelle. En effet, l'adoucissement (écrouissage négatif) induit par le couplage comportement-endommagement rend le problème aux valeurs initiales et aux limites mal posé. Plusieurs techniques de régularisation sont alors proposées [BAZANT84, PIJAUDIER87, SAANOUNI89, BORST96, COMI96]. Ces techniques de régularisation cherchent à introduire une longueur interne pour assurer la convergence de la solution et obtenir ainsi des zones localisées d'épaisseur finie. Pour les modèles basés sur la MEC la

régularisation par des modèles non-locaux ou utilisant des gradients d'ordre supérieur sont les plus utilisés [SHEN02]. Cette question est laissée complètement de côté dans ce travail, et nous nous limiterons à des modèles tout à fait locaux.

De part l'utilisation des codes Forge2[®] et Forge3[®], nous allons utiliser des formulations variationnelles en déplacement ou mixte (vitesse-pression). Le lecteur intéressé est invité à consulter les travaux du CEMEF pour de plus amples détails [CHENOT94, GAY95, PERCHAT00].

Soit une structure S , de volume initial V_0 occupant à un instant t le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. La position de chaque particule (ou EVR) de S est repérée dans le repère cartésien R_0 associé au domaine initial par X, Y, Z et dans R_t associé à la configuration déformée par x, y, z . Cette structure est soumise à :

- Une densité volumique de force \vec{f} dans Ω
 - Une densité surfacique d'efforts \vec{t} sur une partie $\delta\Omega_F$ de $\delta\Omega$
 - Des efforts de contacts (avec un autre solide) \vec{t}_c sur une partie $\delta\Omega_c$ de $\delta\Omega$
 - Une vitesse imposée \underline{v} sur une partie $\delta\Omega_v$ de $\delta\Omega$ avec :
- $$\delta\Omega = \delta\Omega_F \cup \delta\Omega_c \cup \delta\Omega_v \quad \text{et} \quad \delta\Omega_F \cap \delta\Omega_c \cap \delta\Omega_v = \emptyset.$$

Dans le cadre d'une formulation Lagrangienne actualisée, la configuration de référence est actualisée au cours de la déformation et prise égale à la dernière configuration statiquement et plastiquement admissible. Le problème posé est le suivant : connaissant l'état initial de la structure S , on se propose de déterminer à tout instant t de la durée du chargement $[0, T]$, les champs mécaniques suivants pour chaque EVR de S :

- Le vecteur position $\vec{x}(t)$
- Le champ de contraintes $\underline{\sigma}(\vec{x}, t)$ ou d'une manière équivalente $\underline{S}(\vec{x}, t)$ et $P_H(\vec{x}, t)$
- Les variables internes $p(\vec{x}, t), D(\vec{x}, t)$

Ces inconnues sont reliées par les équations suivantes :

- Equation d'équilibre (en régime quasi-statique) :

$$\overline{\text{div}} \underline{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1)$$

En mise en forme, nous négligerons les forces volumiques ($\vec{f} = \vec{0}$) telles que le poids de la pièce à former ainsi que les effets d'inertie ($\vec{\gamma} = \vec{0}$), l'équation d'équilibre devient :

$$\overline{\text{div}} \underline{\sigma} = \vec{0} \quad (2.2)$$

- Les relations de comportement couplées :

$$\begin{cases}
 \dot{\underline{S}} = 2\mu(1-D)\dot{\underline{\epsilon}} - \left[\mu(1-D)4\dot{\delta} + \frac{\dot{D}}{(1-D)} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \dot{T} \right] \underline{S} \\
 \dot{\delta} = \frac{1}{\frac{4}{3} \sigma_0^2(p,T)(1-D)^2 \left[1 + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \right]} \left\langle \underline{S} : \dot{\underline{\epsilon}} - \frac{(1-D)\sigma_0}{3\mu} \left[\frac{\partial \sigma_0(p,T)}{\partial T} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \sigma_0(p,T) \right] \dot{T} \right\rangle \\
 \dot{p} = \frac{1}{\sigma_0(p,T)(1-D) \left[1 + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \right]} \left\langle \underline{S} : \dot{\underline{\epsilon}} - \frac{(1-D)\sigma_0}{3\mu} \left[\frac{\partial \sigma_0(p,T)}{\partial T} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \sigma_0(p,T) \right] \dot{T} \right\rangle \\
 \dot{P}_H = \kappa(1-D)\text{tr}\dot{\underline{\epsilon}}^e - \frac{P_H}{1-D} \dot{D} + \frac{\partial \kappa}{\partial T} \frac{P_H}{\kappa} \dot{T} - 3\kappa(1-D) \left\{ (T-T_0) \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \right\} \dot{T} \\
 \dot{D} = \left(\frac{Y}{S} \right)^s \frac{\dot{p}}{(1-D)^b}
 \end{cases} \quad (2.3)$$

- Les équations de compatibilité cinématique :

$$\underline{\dot{v}} = \frac{\partial \underline{\bar{x}}}{\partial t} \quad \underline{D} = \frac{1}{2} \left[\underline{\text{grad}} \underline{\dot{v}} + (\underline{\text{grad}} \underline{\dot{v}})^T \right] \quad (2.4)$$

- Les conditions aux limites

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{\bar{n}} = \underline{\bar{t}} \text{ sur } \delta\Omega_F \quad (2.5)$$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{\bar{n}} = \underline{\bar{t}}_c \text{ sur } \delta\Omega_c \quad (2.6)$$

$$(\underline{\dot{v}} - \underline{\dot{v}}_{\text{out}}) \cdot \underline{\bar{n}} = 0 \text{ sur } \delta\Omega_c \quad (2.7)$$

$$\underline{\dot{v}} = \underline{\dot{v}} \text{ sur } \delta\Omega_v \quad (2.8)$$

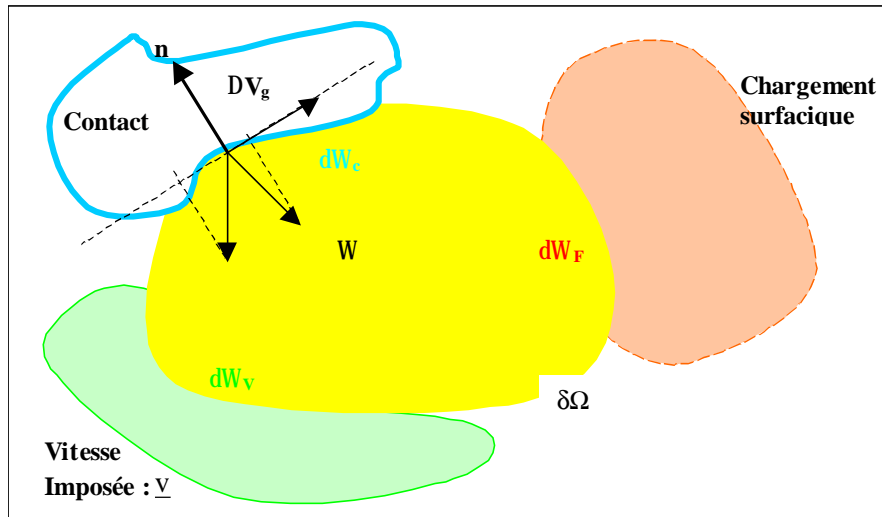


Figure 2.1 : Conditions aux limites du problème mécanique

- Les conditions initiales :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}(X, 0) = \underline{\sigma}^0(X) \\ v(X, 0) = v^0(X) \\ p(X, 0) = p^0(X) \\ D(X, 0) = D^0(X) \\ T(X, 0) = T^0(X) \end{cases} \quad (2.9)$$

- Equation de la chaleur pour le problème thermique

Les problèmes de mise en forme nécessitent souvent la prise en compte de l'évolution de la température au cours du temps, il faut donc résoudre le problème d'équilibre thermique. Comme pour la partie mécanique, on considère le même solide S de volume V_0 et de masse volumique ρ . Celui-ci sera soumis à chaque instant t à :

-un flux de chaleur \bar{q} sur une partie de la frontière $\delta\Omega_q$ de $\delta\Omega$

-un champ de température \underline{T} sur une partie $\delta\Omega_T$ de $\delta\Omega$ avec $\delta\Omega_q \cap \delta\Omega_T = \emptyset$.

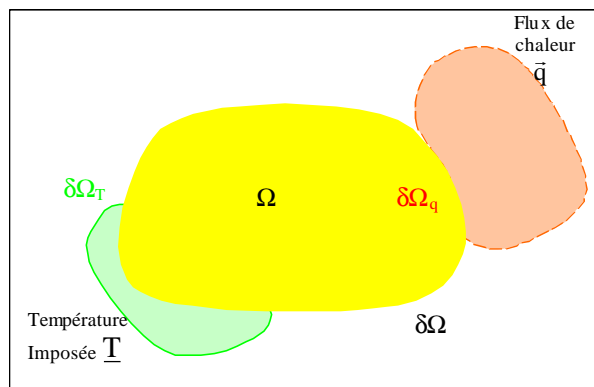


Figure 2.2 : Conditions aux limites du problème thermique

Sous forme locale l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\rho C_v \dot{T} = \text{div}(\overrightarrow{k \text{ grad}(T)}) + \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^p + Y\dot{D} \quad (2.10)$$

- Les conditions aux limites pour ce problème :

Un flux de chaleur q_f correspondant au champ de température sur la surface $\delta\Omega_f$ donné conformément à la loi de Fourier.

Une condition aux limites de type Dirichlet (température imposée \underline{T}) sur la surface $\delta\Omega_T$.

Trois conditions aux limites de type Neumann :

1. une condition de flux de chaleur imposé sur $\delta\Omega_q$ ($\bar{q} = q_s$).
2. une condition de convection tel que le flux de chaleur imposé sur $\delta\Omega_q$ est régi par l'équation : $q_c = h(T - T_e)$ où h représente le coefficient d'échange convectif de $\delta\Omega_q$ et T_e la température extérieure

3. une condition de rayonnement telle que le flux de chaleur d'origine radiative émis par cette zone est donné par la loi de Stephan-Boltzmann : $q_r = \xi\varphi(T^4 - T_e^4)$ où φ représente le facteur d'émission et ξ la constante de Stephan.

On posera par la suite : $\bar{q} = q_c + q_r + q_s$ sur $\delta\Omega_{\bar{q}}$.

L'ensemble des équations locales précédentes définit complètement le problème d'évolution aux valeurs initiales et aux limites associé à un problème de mise en forme. Les formes variationnelles faibles associées à ce problème thermomécanique sont très classiques et s'écrivent :

Pour la partie mécanique :

$$-\int_{\Omega} \underline{S} : \underline{D}^* dV + \int_{\Omega} P_H \underline{I} : \underline{D}^* dV + \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v}^* dV + \int_{\delta\Omega_F} \vec{t} \cdot \vec{v}^* dS + \int_{\delta\Omega_c} \vec{t}_c \cdot \vec{v}^* dS = 0 \quad \forall \delta V \text{ ou } v^* \text{ C.A. (2.11)}$$

Pour la partie thermique :

$$\int_{\Omega} T^* \rho(1-D) C_v \dot{T} dV - \int_{\Omega} T^* \wp_m^v dV - \int_{\partial\Omega} T^* q_r dS + \int_{\Omega} \nabla T^* (k \nabla T) dV + \int_{\partial\Omega_{\bar{q}}} T^* \bar{q} dS = 0 \quad \forall T^* \text{ C.A. (2.12)}$$

\wp_m^v est la dissipation intrinsèque volumique :

$$\wp_m^v = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^p + Y\dot{D} \quad (2.13)$$

Pour ces fonctionnelles le tenseur \underline{S} , la pression hydrostatique P_H , la variable d'érouissage p , le dommage D et le tenseur des taux de déformations $\underline{D} = \underline{\dot{\epsilon}}^e + \underline{\dot{\epsilon}}^{pl}$ sont solutions du système d'équations différentielles (2.3).

Le système représenté par les équations (2.11) et (2.12) est fortement non linéaire et sera résolu incrémentalement par l'intermédiaire d'une discrétisation spatiale (E.F) de la pièce et par une discrétisation temporelle de l'intervalle de temps $[0, T]$ d'application du chargement.

2.2 DISCRÉTISATION SPATIALE

2.2.1 Principe de la méthode

La discrétisation spatiale revient en fait à subdiviser le domaine Ω , en sous domaines Ω_e de volume V_e [DHATT85, ZIENKIEWICZ94]. Chaque sous domaine ou élément fini est caractérisé par un certain nombre de nœud en relation avec le degré des polynômes d'interpolation géométrique $\bar{N}(x, y, z)$ utilisés. A chaque nœud sont rattachées les variables nodales qui sont, dans ce cas, les trois composantes du vecteur vitesse de déplacement, la pression hydrostatique, et la température. Ces champs physiques sont eux-mêmes définis à

l'intérieur de chaque élément fini (Ω_e) par des polynômes $N(x, y, z)$ ou fonctions de forme de degré donné. On se limite dans cette étude à l'usage d'éléments finis dit isoparamétriques pour lesquels $\bar{N}(x, y, z) = N(x, y, z)$. Le domaine Ω est donc discrétisé spatialement de manière approchée par un maillage défini par ses nœuds.

Dans le cadre de ce travail nous nous sommes intéressés à deux types d'éléments proposés dans Forge2[®]. Le premier concerne l'élément à 6 nœuds P2-P0 ce qui signifie que la vitesse est définie par des polynômes d'ordre deux et la pression constante sur l'élément. L'autre élément utilisé est l'élément à 3 nœuds P1-P1 [ARNOLD84], pour lequel la pression est linéaire et continue et la vitesse se décompose en une partie linéaire v , et une partie dite « bulle ». Cet élément a donc l'interpolation de la vitesse enrichie d'un degré de liberté interne (bulle) qui s'annule sur la frontière. Cette composante bulle sert essentiellement à contrôler la condition d'incompressibilité. Nous présenterons par la suite les deux discrétisations spatiales résultantes de l'utilisation de ces deux éléments (formulation simple en vitesse et formulation mixte en vitesse/pression).

2.2.2 Formulation classique à un champ (vitesse)

En utilisant une formulation en déplacement, la discrétisation consiste à décomposer le domaine ou volume V en sous domaines :

$$V = \bigcup_{\text{elts}} V_e \quad (2.14)$$

où \bigcup_{elts} désigne l'opérateur de sommation sur l'ensemble des éléments (assemblage).

Dans chaque sous domaine, l'approximation nodale du champ de déplacement \mathbf{u} et du champ de température est définie par :

$$U_j^{(e)} = \sum_k N_k U_j^k \quad (2.15)$$

$$T^{(e)} = \sum_k N_k^* T^k \quad (2.16)$$

où N_k et N_k^* représentent les fonctions d'interpolation des déplacements $U_j^{(e)}$ et des températures $T^{(e)}$ aux nœuds k , elles ne sont fonction que des coordonnées spatiales de l'élément (e) et sont donc indépendantes du temps.

Par dérivation, les champs des vitesses, de déplacement, et de température sont :

$$\dot{U}_j^{(e)} = \sum_k N_k \dot{U}_j^k \quad (2.17)$$

$$\dot{T}^{(e)} = \sum_k N_k^* \dot{T}^k \quad (2.18)$$

En utilisant ces approximations, les formes faibles mécaniques (2.11) et thermiques (2.12) s'écrivent alors sous la forme discrétisée suivante :

$$\mathbf{R}_V = F_{\text{ext}} - F_{\text{int}} = -\int_{\Omega} [\mathbf{B}]^T \underline{\mathbf{S}} dV + \int_{\Omega} [\mathbf{B}]^T \underline{\mathbf{P}}_H dV + \int_{\Omega} [\mathbf{N}]^T \vec{f} dV + \int_{\partial\Omega_F} [\mathbf{N}]^T \vec{t} dS_F + \int_{\partial\Omega_C} [\mathbf{N}]^T \vec{t}_c dS_C = 0 \quad (2.19)$$

$$\mathbf{R}_T = \left[\int_{\Omega} [\mathbf{N}^*]^T \rho(1-D)C_v [\mathbf{N}^*] dV \right] \dot{T} - \int_{\Omega} [\mathbf{N}]^T \varphi_m^v dV + \int_{\partial\Omega_q} [\mathbf{N}^*]^T \bar{q} dS - \int_{\partial\Omega_T} [\mathbf{N}^*] q_f dS + \int_{\Omega} [\mathbf{B}^*]^T (kT) [\mathbf{B}^*] dV = 0 \quad (2.20)$$

où \mathbf{B} et \mathbf{B}^* sont les matrices des dérivées spatiales des fonctions de forme \mathbf{N} et \mathbf{N}^* .

En utilisant la notion d'élément paramétré dans l'espace de référence (ξ, η, ζ) ce système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_V = -\int_{\Omega_0} [\mathbf{B}]^T \underline{\mathbf{S}} J dV_0 + \int_{\Omega_0} [\mathbf{B}]^T \underline{\mathbf{P}}_H J dV_0 + \int_{\Omega_0} [\mathbf{N}]^T \vec{f} J dV_0 + \int_{\partial\Omega_{0F}} [\mathbf{N}]^T \vec{t}_s dS_{0F} + \int_{\partial\Omega_{0C}} [\mathbf{N}]^T \vec{t}_c J_s dS_{0C} = 0 \\ \mathbf{R}_T = \left[\int_{\Omega_0} [\mathbf{N}^*]^T \rho(1-D)C_v [\mathbf{N}^*] J dV_0 \right] \dot{T} - \int_{\Omega_0} [\mathbf{N}]^T \varphi_m^v J dV_0 + \int_{\partial\Omega_{0q}} [\mathbf{N}^*]^T \bar{q} J dS_0 \\ \quad + \int_{\partial\Omega_{0T}} [\mathbf{N}^*] q_f J_s dS_0 + \int_{\Omega_0} [\mathbf{B}^*]^T (kT) [\mathbf{B}^*] J dV_0 = 0 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

où J et J_s sont les déterminants des matrices Jacobiennes volumiques et surfaciques, ou encore passage d'un élément réel à un élément de référence.

Le système (2.21) est fortement non linéaire avec des non linéarités matérielles ($\underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{P}}_H, D, \varphi_m^v, \dots$) et des non linéarités géométriques venant du fait que les forces appliquées ($\vec{f}, \vec{t}, \vec{t}_c, \bar{q}, q_f$) ainsi que les Jacobiens J et J_s ne sont pas forcément constants du fait des grandes déformations.

Ce système est donc linéarisé autour d'une solution par le biais d'un schéma itératif de Newton-Raphson :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vV} & \mathbf{K}_{vT} \\ \mathbf{K}_{Tv} & \mathbf{K}_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_V \\ \mathbf{R}_T \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

où

$$\mathbf{K}_{vV} = \int_{\Omega_0} [\mathbf{B}]^T \frac{\partial \underline{\mathbf{S}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} [\mathbf{B}] J dV_0 + \int_{\Omega_0} [\mathbf{B}]^T \underline{\mathbf{I}} \frac{\partial \underline{\mathbf{P}}_H}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} [\mathbf{B}] J dV_0 + \int_{\Omega_0} [\mathbf{N}]^T \frac{\partial \vec{f}}{\partial v} J dV_0 + \int_{\partial\Omega_{0F}} [\mathbf{N}]^T \frac{\partial \vec{t}}{\partial v} J_s dS_{0F} + \int_{\Omega_0} [\mathbf{N}]^T \frac{\partial \vec{t}_c}{\partial v} J_s dS_0 + \dots \quad (2.23)$$

$$\mathbf{K}_{vT} = \int_{\Omega_0} [\mathbf{B}]^T \frac{\partial \underline{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{J} dV_0 + \dots \quad (2.24)$$

$$\mathbf{K}_{Tv} = \int_{\Omega_0} [\mathbf{N}]^T \frac{\partial \varphi_m^v}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{J} dV_0 + \dots \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{TT}] = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} = & \left[\int_{V_0} [\mathbf{N}]^T \frac{\rho(1-D)\mathbf{C}_v}{\Delta t} [\mathbf{N}] \mathbf{J} dV_0 \right] - \int_{V_0} [\mathbf{N}]^T \left[\frac{\partial \varphi_m^v}{\partial \mathbf{T}} \right] \mathbf{J} dV_0 \\ & - \int_{S_{T0}} [\mathbf{N}] \left[\frac{\partial \mathbf{q}_f}{\partial \mathbf{T}} \right] \mathbf{J}_s dS_0 + \int_{S_{q0}} [\mathbf{N}] \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{T}} \right] \mathbf{J}_s dS_0 + \dots \quad (2.26) \end{aligned}$$

Dans la pratique on suppose petits les incréments de charge, de sorte que l'on néglige la variation de \mathbf{J} et de \mathbf{J}_s . De plus les forces appliquées sur la frontière sont supposées constantes (forces suiveuses). De ce fait il ne reste plus dans les termes \mathbf{K}_{vv} , \mathbf{K}_{vT} et \mathbf{K}_{TT} que les termes issus des non linéarités matérielles.

Si la température est négligée il ne reste plus que le problème mécanique défini par le système suivant :

$$\left[\int_{\Omega_0} [\mathbf{B}]^T \frac{\partial \underline{\mathbf{S}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} [\mathbf{B}] \mathbf{J} dV_0 + \int_{\Omega_0} [\mathbf{B}]^T \mathbf{I} \frac{\partial \underline{\mathbf{P}}_H}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} [\mathbf{B}] \mathbf{J} dV_0 \right] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_v \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Dans ce système algébrique les opérateurs $\frac{\partial \Delta \underline{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ (ordre 4) et $\frac{\partial \Delta \underline{\mathbf{P}}_H}{\partial \Delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ (ordre 2) sont les contributions de la contrainte déviatrice et de la pression hydrostatique à la matrice tangente. Ils doivent être cohérents avec la discrétisation temporelle pour l'intégration du modèle de comportement (Eq. (2.3)). Ceci assure une vitesse de convergence quadratique au schéma global de N-R. [SIMO85]. Le calcul de la matrice tangente est donné au paragraphe 2.3.3.

2.2.3 Formulation mixte à deux champs (vitesse/pression)

La formulation variationnelle présentée ci-dessus ne permet pas de vérifier aisément l'incompressibilité plastique. On a souvent recouru à une formulation mixte en vitesse et pression [HERMANN65, PERCHAT00, GAY95] appelée formulation à deux champs.

La formulation à deux champs retenue ici est de type Hermann [HERMANN65]. Cette formulation bien qu'utilisée pour les problèmes d'élasticité incompressible peut naturellement être étendue aux problèmes élastoplastiques [PERCHAT00, GAY95]. Dans cette formulation la vitesse et la pression sont deux variables totalement indépendantes. En laissant de côté

l'équation thermique pour simplifier les notations, le principe des travaux virtuels s'écrira alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\int_{\Omega} \underline{S} : \underline{D}^* dV + \int_{\Omega} P_H \underline{I} : \underline{D}^* dV + \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v}^* dV + \int_{\partial\Omega_F} \vec{t} \cdot \vec{v}^* dS + \int_{\partial\Omega_c} \vec{t}_c \cdot \vec{v}^* dS = 0 \\ \int_{\Omega} (\dot{P}_H + \kappa \text{tr} \dot{\underline{\epsilon}}) P_H^* dV = 0 \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Dans chaque sous domaine, l'approximation nodale du champ de vitesse \vec{v} et de la pression P_H est définie par :

$$v_j = \sum_k N_k v_j^k \quad (2.29)$$

$$P_{Hj} = \sum_k \bar{N}_k P_{Hj}^k \quad (2.30)$$

où N_k et \bar{N}_k représentent les fonctions d'interpolation des vitesses v_j (suivant les trois axes d'un repère orthonormé) et des pressions aux nœuds k . Les équations (2.28) conduisent alors au système non linéaire suivant écrit sur l'élément de référence :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\int_{\Omega_0} [\underline{B}]^T \underline{S} J dV_0 + \int_{\Omega_0} [\underline{B}]^T \underline{I} [\bar{\underline{N}}] J dV_0 P_H + \int_{\Omega_0} [\underline{N}]^T \vec{f} J dV_0 + \int_{\partial\Omega_{0F}} [\underline{N}]^T \vec{t} J_S dS_0 \\ + \int_{\partial\Omega_{0c}} [\underline{N}]^T \vec{t}_c J_S dS_0 = 0 \\ \int_{\Omega_0} [\bar{\underline{N}}] \underline{I}^T [\underline{B}] J dV_0 v + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega_0} [\bar{\underline{N}}]^T [\bar{\underline{N}}] J dV_0 \dot{P}_H = 0 \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Après linéarisation comme précédemment on arrive à :

$$\left[\begin{array}{cc} -\int_{\Omega_0} [\underline{B}]^T \frac{\partial \underline{S}}{\partial \underline{\epsilon}} J dV_0 & \int_{\Omega_0} [\underline{B}]^T \underline{I} [\bar{\underline{N}}] J dV_0 \\ \int_{\Omega_0} [\bar{\underline{N}}] \underline{I}^T [\underline{B}] J dV_0 & \frac{1}{\kappa \Delta t} \int_{\Omega_0} [\bar{\underline{N}}]^T [\bar{\underline{N}}] J dV_0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta P_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_v \\ -R_{P_H} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Cette formulation à deux champs peut être utilisée avec un élément quadratique (pression linéaire et vitesse quadratique). Pour des problèmes de maillage et de remaillage adaptatif, il est préférable d'utiliser des éléments linéaires. Hermann [HERMANN65] avait proposé une pression constante pour l'élément ainsi qu'une interpolation linéaire de la vitesse. Cet élément n'étant pas satisfaisant du point de vue de la compatibilité entre l'espace des vitesses et l'espace des pressions, le recours à l'élément P1+P1 (mini élément) a donc été utilisé [PERCHAT00, GAY95]. Cet élément introduit par Arnold [ARNOLD84] pour le calcul des

1. Connaissant v_{n-1} à l'incrément $n-1$
 - On pose alors $v_n = v_{n-1} + \Delta v_n$
 - On développe au premier ordre $R(v_n) = R(v_{n-1}) + \frac{\partial R(v_{n-1})}{\partial v} \Delta v_n$
 - On définit la matrice de raideur (ou matrice Hessienne) à l'itération $n-1$

$$K(v_{n-1}) = \frac{\partial R(v_{n-1})}{\partial v}$$
 - Sachant que $R(v_n)=0$, alors on peut obtenir Δv_n en résolvant :

$$-R(v_{n-1}) = K_{n-1} \Delta v_n$$
2. A l'incrément n on détermine $v_n = v_{n-1} + \Delta v_n$

Figure 2.3 : Schéma de résolution du problème en vitesse par un schéma de Newton-Raphson

Comme on peut le remarquer sur l'organigramme précédent, une étape importante de ce schéma réside dans le calcul de la matrice tangente K (voir §2.2.3). Le calcul passe par la connaissance des contraintes et des autres variables à la fin du pas. Ces quantités sont obtenues par intégration numérique des équations de comportement (2.3) sur l'intervalle de temps t_n et $t_{n+1}=t_n+\Delta t$. Pour la formulation à deux champs (vitesse, pression) une procédure identique est appliquée.

La sommation de toutes les expressions élémentaires du principe des puissances virtuelles (sur chaque élément) permet d'obtenir le principe des puissances virtuelles discrétisé sur tout le domaine de résolution. On obtient alors un système discret d'équations non linéaires qui dépend de la valeur du déviateur des contraintes (fonctions des déplacements \bar{u} de la structure), des pressions hydrostatiques, ainsi que de la position de chaque point de Gauss. Ce système est donné par:

$$\begin{cases} \{R(\underline{v})\} = \sum_{e=1}^{Nbe} \{R^e(\underline{v})\} = 0 \\ \{R(\underline{P}_H)\} = \sum_{e=1}^{Nbe} \{R^e(\underline{P}_H)\} = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Le schéma de Newton consiste à déterminer une suite $\{\delta v_{t+\Delta t}^k\}$ et $\{\delta P_{Ht+\Delta t}^k\}$ convergente selon la règle:

$$\begin{cases} \left[K_T(v_t^k, v_t^k) \right] \{\delta v_{t+\Delta t}^k\} + \left[K_T(v_t^k, P_{Ht}^k) \right] \{\delta P_{Ht+\Delta t}^k\} = \{R(v_t^k)\} \\ \left[K_T(P_{Ht}^k, v_t^k) \right] \{\delta v_{t+\Delta t}^k\} + \left[K_T(P_{Ht}^k, P_{Ht}^k) \right] \{\delta P_{Ht+\Delta t}^k\} = \{R(P_{Ht}^k)\} \end{cases} \quad (2.36)$$

où $\{\delta v_{t+\Delta t}^k\}$ représente la correction des déplacements nodaux à l'incrément $[t, t+\Delta t]$, $\{\delta P_{Ht+\Delta t}^k\}$ la correction des pressions nodales à l'incrément $[t, t+\Delta t]$, $\{R(v_t^k)\}$ et $\{R(P_{Ht}^k)\}$ sont les résidus globaux calculés à la $k^{\text{ième}}$ itération, obtenus par l'assemblage des résidus élémentaires. $[K_t(\dots)]$ est la matrice tangente du schéma de Newton-Raphson, obtenue également par assemblage des matrices de rigidité tangentes élémentaires:

$$[K_t(v_t^k v_t^k)] = \sum_{e=1}^{Nbe} [K_t^e(v_t^k v_t^k)] = \sum_{e=1}^{Nbe} \left[\frac{\partial R^e(v)}{\partial v} \right] \quad (2.37)$$

$$[K_t(v_t^k P_{Ht}^k)] = \sum_{e=1}^{Nbe} [K_t^e(v_t^k P_{Ht}^k)] = \sum_{e=1}^{Nbe} \left[\frac{\partial R^e(v)}{\partial P_H} \right] = \sum_{e=1}^{Nbe} [B]^T I [\bar{N}] J_e \quad (2.38)$$

$$[K_t(P_{Ht}^k v_t^k)] = \sum_{e=1}^{Nbe} [K_t^e(P_{Ht}^k v_t^k)] = \sum_{e=1}^{Nbe} \left[\frac{\partial R^e(P_H)}{\partial v} \right] = \sum_{e=1}^{Nbe} [\bar{N}] I^T [B] J_e \quad (2.39)$$

$$[K_t(P_{Ht}^k P_{Ht}^k)] = \sum_{e=1}^{Nbe} [K_t^e(P_{Ht}^k P_{Ht}^k)] = \sum_{e=1}^{Nbe} \left[\frac{\partial R^e(P_H)}{\partial P_H} \right] = \sum_{e=1}^{Nbe} \frac{1}{\Delta t \kappa} [\bar{N}]^T [\bar{N}] J_e \quad (2.40)$$

Les déplacements nodaux ainsi que les pressions hydrostatiques sont réactualisés selon la formule:

$$\{v_{t+\Delta t}^{k+1}\} = \{v_{t+\Delta t}^k\} + \{\delta v_{t+\Delta t}^k\} \quad (2.41)$$

$$\{P_{Ht+\Delta t}^{k+1}\} = \{P_{Ht+\Delta t}^k\} + \{\delta P_{Ht+\Delta t}^k\} \quad (2.42)$$

Lorsque les normes infinies du résidu et des accroissements de déplacement au cours des itérations deviennent inférieures ou égales à une certaine tolérance, on estime que l'équilibre est satisfait et donc passer à l'incrément suivant.

2.3 DISCRÉTISATION TEMPORELLE

2.3.1 Méthode numérique d'intégration des équations de Prandtl-Reuss

Il existe une multitude de méthodes d'intégration des équations différentielles, les pionniers dans ce domaine ont été Marcal avec la méthode du retour radial tangent [MARCAL65] et Wilkins [WILKINS64] avec la méthode du prédicteur élastique-retour radial.

Plusieurs ouvrages d'analyse numérique [DAUTREY84] ou de mécanique numérique [DHATT85] donnent une présentation détaillée de ces méthodes. On se limite ici à la présentation d'une méthode itérative implicite de prédiction élastique et de correction plastique par retour radial. Cette méthode largement utilisée dans la littérature [YODER79, ORTIZ85, BRAUDEL86] a été proposée par Wilkins [WILKINS64].

Elle consiste en une prédiction élastique du déviateur des contraintes \underline{S} en supposant que les valeurs de l'ensemble des variables internes du modèle resteront figées à leurs valeurs au début du pas. S'en suit une correction plastique, en projetant le déviateur des contraintes (issu

de la prédiction élastique) sur la surface de charge, selon une direction parallèle à la normale de la surface de charge. Celle-ci est évaluée à l'instant $t + \theta\Delta t$.

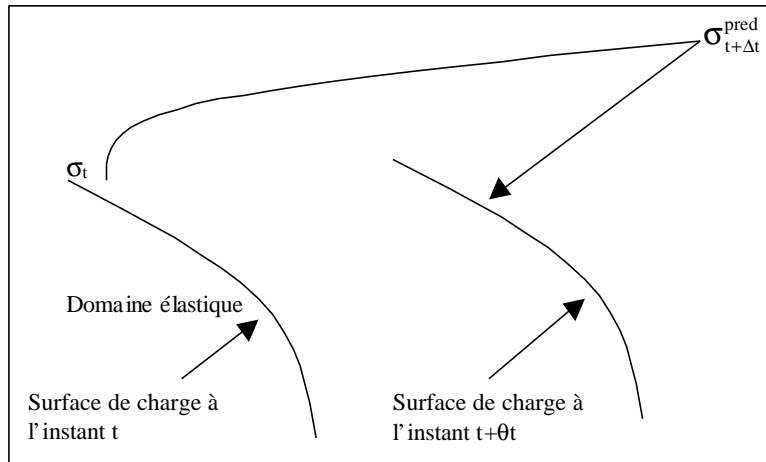


Figure 2.4 : Méthode des trapèzes généralisés

Le schéma des trapèzes généralisés à l'équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$\dot{Y} = F(t, Y) \quad (2.43)$$

S'écrit :

$$Y_{n+1} = Y_n + [(1 - \theta)\dot{F}(t_n, Y_n) + \theta\dot{F}(t_{n+1}, Y_{n+1})]\Delta t \quad (2.44)$$

Le schéma du point milieu généralisé s'écrira :

$$Y_{n+\theta} = (1 - \theta)Y_n + \theta Y_{n+1} \quad (2.45)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + F(t_{n+\theta}, Y_{n+\theta})\Delta t \quad (2.46)$$

θ étant un paramètre variant de 0 à 1. Notons que lorsque $\theta = 0$, alors nous retrouvons la méthode explicite d'Euler, la solution à l'instant $t + \Delta t$ est dépendante de la solution à l'instant t . Elle est alors immédiate. Par contre lorsque $\theta \neq 0$ alors la solution dépend non seulement des valeurs à l'instant t mais aussi des valeurs à l'instant $t + \theta\Delta t$. Un schéma itératif est alors nécessaire pour résoudre le problème. Quand $\theta = 1$ nous avons alors un schéma purement implicite (ou Euler arrière).

Lorsque $\theta = \frac{1}{2}$ on obtient un schéma semi-implicite, Ortiz et Popov [ORTIZ85] ont démontré que ce schéma est du deuxième ordre, et qu'il est inconditionnellement stable dans le cas du critère de Von Mises pour $\theta \geq \frac{1}{2}$. Si $\theta \leq \frac{1}{2}$ le schéma est conditionnellement stable en fonction du pas Δt . La convergence est quadratique pour $\theta = 0.5$, linéaire pour $\theta = 1$ mais moins rapide lorsque $\theta \geq \frac{1}{2}$.

Le nombre d'équations différentielles (non linéaires) qui composent le système décrivant le comportement élasto-viscoplastique (2.3) couplé à l'endommagement étant assez important, il est nécessaire d'optimiser et de diminuer ce nombre d'équations en exploitant certaines propriétés numériques.

On privilégiera les méthodes implicites, inconditionnellement stables. La thêta-méthode avec $\theta = 1$ sera utilisée ici (dans des cas où l'on rencontre $\theta \neq 1$ il faut prendre en compte la transition entre déformation élastique et déformation élasto-(visco)plastique ce qui augmente alors les temps de calcul). Dans notre cas, connaissant \underline{S}_n , \underline{p}_n , \underline{x}_n , $\underline{\dot{e}}_n$ à l'instant t_n , on se proposera de déterminer \underline{S}_{n+1} et \underline{p}_{n+1} , supposant connu \underline{v}_{n+1} à l'instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Cela revient à écrire :

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + \Delta t \underline{\dot{x}}_{n+1} \quad (2.47)$$

$$\underline{S}_{n+1} = \underline{S}_n + \Delta t \underline{\dot{S}}_{n+1} \quad (2.48)$$

$$\underline{p}_{n+1} = \underline{p}_n + \Delta t \underline{\dot{p}}_{n+1} \quad (2.49)$$

$$\underline{D}_{n+1} = \underline{D}_n + \Delta t \underline{\dot{D}}_{n+1} \quad (2.50)$$

2.3.2 Intégration locale des équations de Prandtl-Reuss couplées à l'endommagement

2.3.2.1 Couplage fort comportement-endommagement

L'approche retenue pour intégrer les équations constitutives d'élasto-(visco)plasticité est donc une méthode qui décomposera les problèmes en deux parties. Une étape où il s'agira d'une prédiction élastique, on supposera alors un comportement purement élastique endommagé, puis une seconde étape caractérisée par une correction plastique. Dans cette deuxième étape les résultats issus de la prédiction élastique seront utilisés comme conditions initiales lors de la correction plastique. La résolution du système d'équations non linéaires résultant de cette correction plastique sera obtenue par la méthode itérative de Newton-Raphson.

1^{ère} étape : Prédiction élastique :

On pourra écrire le tenseur des contraintes, sous forme incrémentale, décomposé en partie sphérique et déviatorique :

$$\Delta \underline{P}_H = - \frac{3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{3} \text{tr}(\Delta \underline{e}) \quad (2.51)$$

$$\Delta \underline{S} = 2\tilde{\mu} \Delta \underline{e} \quad (2.52)$$

Ces relations sont obtenues en remplaçant l'écriture différentielle sous forme incrémentale dans les équations (2.3) (en isotherme pour simplifier). La partie hydrostatique ou sphérique de la contrainte n'ayant pas d'effet sur la plasticité, la prédiction élastique sera vérifiée sur le déviateur de la contrainte $\underline{S}^{\text{pred}}$:

$$\underline{S}^{\text{pred}} = \underline{S}_n + 2\tilde{\mu}\Delta\mathbf{e} \quad (2.53)$$

$$p_{n+1} = p_n \quad (2.54)$$

$$D_{n+1} = D_n \quad (2.55)$$

Cette valeur a pour but de caractériser la charge ou la décharge en calculant la valeur $f(\underline{S}^{\text{pred}}, p, D)$ de la fonction seuil en fin de pas. Dans le cas où $f < 0$, alors le comportement est élastique, l'intégration est donc terminée sur l'incrément présent. Par contre dans le cas où $f \geq 0$, une correction plastique est nécessaire. On cherche alors l'instant de contact t_c compris entre t_i et t_f , pour lequel la fonction seuil s'annule. Cet instant est racine de l'équation:

$$f(\underline{S}_n + 2\xi\tilde{\mu}\Delta\mathbf{e}, p) = 0 \quad (2.56)$$

où:

$$\xi = \frac{(t_c - t_i)}{\Delta t} \quad (2.57)$$

La relation (2.56) est une équation non linéaire en ξ , celle-ci permet de déterminer ξ ainsi que la contrainte de contact \underline{S}^c donnée par:

$$\underline{S}^c = \underline{S}_n + 2\xi\tilde{\mu}\Delta\mathbf{e} \quad (2.58)$$

à l'instant de contact t_c :

$$t_c = t_i + \xi(t_f - t_i) \quad (2.59)$$

aussi, le comportement entre les instants t_i et t_f est nécessairement élasto-(visco)-plastique couplé à l'endommagement. Lorsque $0 < \xi < 1$, l'incrément de déformation totale $\Delta\mathbf{e}$ se décompose en une partie élastique $\Delta\mathbf{e}^e = \xi\Delta\mathbf{e}$ et une partie plastique $\Delta\mathbf{e}^p = (1 - \xi)\Delta\mathbf{e}$. La correction plastique revient donc à résoudre le problème sur l'intervalle $[t_c, t_f]$.

2^{ième} étape : Correction plastique

Si l'on se place dans le cadre de la résolution d'équations de comportement du modèle élasto-visco-plastique couplé à l'endommagement on se rend compte que le système d'équation à intégrer est un système (8*8) (dans le cas avec couplage comportement-endommagement), ce qui engendrera certainement des temps de calcul élevés par la méthode de Newton-Raphson.

On est alors amené à modifier ces équations de telle sorte que l'on se ramène à un système de deux équations non linéaires à deux inconnues, où l'on fera apparaître des variables connues au début du pas de temps.

$$\Delta\mathbf{e} = \Delta\mathbf{e}^e + \Delta\mathbf{e}^{pl} \quad (2.60)$$

$$\Delta \underline{e}^e = \frac{1}{2\tilde{\mu}} \Delta \underline{S} + \frac{\Delta D}{2\tilde{\mu}(1 - D_{n+1})} \underline{S}_{n+1} \quad (2.61)$$

$$\Delta \underline{e}^{pl} = \Delta \delta \frac{\partial f}{\partial \underline{S}} = 2\Delta \delta (\underline{S}_n + \Delta \underline{S}) \quad (2.62)$$

avec:

$$\Delta \delta = \frac{3}{4} \frac{1}{(1 - D_{n+1})} \frac{\Delta p}{\sigma_0(p_n + \Delta p)} \quad (2.63)$$

l'incrément de la partie déviatrice de la contrainte $\Delta \underline{S}$, est obtenu par les relations (2.60), (2.61), (2.62) :

$$\Delta \underline{S} = \frac{\Delta \underline{e} - \frac{\Delta D}{2\tilde{\mu}(1 - D_{n+1})} \underline{S}_n - 2\Delta \delta \underline{S}_n}{\frac{1}{2\tilde{\mu}} + \frac{\Delta D}{2\tilde{\mu}(1 - D_{n+1})} + 2\Delta \delta} \quad (2.64)$$

donc:

$$\underline{S}_{n+1} = \underline{S}_n + \Delta \underline{S} = \frac{\Delta \underline{e} + \frac{\underline{S}_n}{2\tilde{\mu}}}{\frac{1}{2\tilde{\mu}} + \frac{\Delta D}{2\tilde{\mu}(1 - D_{n+1})} + 2\Delta \delta} \quad (2.65)$$

et

$$f(\underline{S}_n, p_n, D_n) = \underline{S}_n : \underline{S}_n - \frac{2}{3} (1 - D_n)^2 \sigma_0^2(p_n) = 0 \quad (2.66)$$

où $f(\underline{S}_n, p_n)$ est la fonction de charge au début de l'incrément, en fin d'incrément on aura :

$$f(\underline{S}_{n+1}, p_{n+1}, D_{n+1}) = \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1} - \frac{2}{3} (1 - D_{n+1})^2 \sigma_0^2(p_{n+1}) = 0 \quad (2.67)$$

ou encore :

$$f(\underline{S}_n + \Delta \underline{S}, p_n + \Delta p, D_n + \Delta D) = (\underline{S}_n + \Delta \underline{S}) : (\underline{S}_n + \Delta \underline{S}) - \frac{2}{3} (1 - (D_n + \Delta D))^2 \sigma_0^2(p_n + \Delta p) = 0 \quad (2.68)$$

où: $\underline{S}_{n+1} = \underline{S}_n + \Delta \underline{S}$, $D_{n+1} = D_n + \Delta D$ et $p_{n+1} = p_n + \Delta p$, et en remplaçant l'expression (2.65) dans l'expression (2.68) on obtient :

$$f(\underline{S}_n + \Delta \underline{S}, p_n + \Delta p, D_n + \Delta D) = \left(\frac{\Delta \underline{e} + \frac{\underline{S}_n}{2\tilde{\mu}}}{\frac{1}{2\tilde{\mu}} + \frac{\Delta D}{2\tilde{\mu}(1-D_{n+1})} + 2\Delta\delta} \right) : \left(\frac{\Delta \underline{e} + \frac{\underline{S}_n}{2\tilde{\mu}}}{\frac{1}{2\tilde{\mu}} + \frac{\Delta D}{2\tilde{\mu}(1-D_{n+1})} + 2\Delta\delta} \right) - \frac{2}{3}(1-D_{n+1})^2 \sigma_0^2(p_n + \Delta p) = 0 \quad (2.69)$$

On aura alors :

$$\left(\frac{\Delta \underline{e} : \Delta \underline{e} + \Delta \underline{e} : \frac{\underline{S}_n}{2\tilde{\mu}} + \frac{1}{4\tilde{\mu}^2} \underline{S}_n : \underline{S}_n}{\left(\frac{1}{2\tilde{\mu}} + \frac{\Delta D}{2\tilde{\mu}(1-D_{n+1})} + 2\Delta\delta \right)^2} \right) - \frac{2}{3}(1-D_{n+1})^2 \sigma_0^2(p_n + \Delta p) = 0 \quad (2.70)$$

La deuxième équation est directement donnée par le modèle d'endommagement discrétisé. On obtient alors le système de deux équations à deux inconnues Δp et ΔD :

on obtient après simplification :

$$\begin{cases} (1-D_n)\sigma_0(p_n + \Delta p) + 3\tilde{\mu}\Delta p - \sqrt{6\tilde{\mu}^2 \Delta \underline{e} : \Delta \underline{e} + 6\tilde{\mu} \underline{S}_n : \Delta \underline{e} + \frac{3}{2} \underline{S}_n : \underline{S}_n} = 0 \\ \Delta D - \Delta p \frac{1}{(1-D_{n+1})^b} \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^s = 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

Un schéma itératif de Newton-Raphson permettra alors de linéariser et résoudre ce système. Une fois les variables connues il sera aisé de calculer toutes les grandeurs recherchées. L'algorithme énoncé ci dessus procède de la manière suivante, soit:

$$f_i(x_j) = 0 \quad (2.72)$$

où: $i=1,2$ (nombres d'inconnues) et x_j est le "vecteur" des variables inconnues.

Si on suppose x_j^k la solution du système (2.72) à l'itération k , alors la vraie valeur de la solution de ce système s'écrit:

$$x_j = x_j^k + \delta x_j^k \quad (2.73)$$

avec: δx_j^k définissant la quantité qui différencie la vraie valeur de celle de la solution itérée.

En remplaçant la relation (2.73) dans (2.72) et en utilisant un développement en série de Taylor à l'ordre un (linéarisation), on a:

$$f_i(x_j) = f_i(x_j^k + \delta x_j^k) = f_i(x_j^k) + \frac{\partial f_i(x_j^k)}{\partial x_j^k} \delta x_j^k = 0 \quad (2.74)$$

On aboutit ainsi au système linéarisé d'équations suivant:

$$P_{ij} \delta x_j^k = -f_i(x_j^k) \quad (2.75)$$

avec:

$$P_{ij} = -\frac{\partial f_i(x_j^k)}{\partial x_j} \quad (2.76)$$

P_{ij} étant la matrice Jacobienne matérielle. Les composantes P_{ij} sont calculées analytiquement et données par les équations (2.78) à (2.82).

Par souci de simplification des notations désormais nous omettrons l'indice $n+1$ correspondant aux valeurs des variables à l'instant t_{n+1} .

Le système (2.71) devient alors :

$$\begin{cases} f_1 = (1 - D_n) \sigma_0(p_n + \Delta p) + 3\tilde{\mu} \Delta p - \sqrt{6\tilde{\mu}^2 \Delta e : \Delta e + 6\tilde{\mu} \underline{s}_n : \Delta e + \frac{3}{2} \underline{s}_n : \underline{s}_n} = 0 \\ f_2 = \Delta D - \Delta p \frac{1}{(1-D)^b} \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^s = 0 \end{cases} \quad (2.77)$$

$$P_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta p} = (1 - D + \Delta D) \frac{\partial \sigma_0}{\partial \Delta p} + 3\tilde{\mu} \quad (2.78)$$

$$P_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta D} = -3\tilde{\mu} \Delta p + \frac{(6\tilde{\mu}^2 (1-D) \Delta e : \Delta e + 3\tilde{\mu} \underline{s}_n : \Delta e)}{\text{RACINE}} \quad (2.79)$$

où :

$$\text{RACINE} = \sqrt{6\tilde{\mu}^2 \Delta e : \Delta e + 6\tilde{\mu} \underline{s}_n : \Delta e + \frac{3}{2} \underline{s}_n : \underline{s}_n} \quad (2.80)$$

$$P_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta p} = -\frac{1}{(1-D)^b} \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^s - \frac{s}{S} \Delta p \frac{1}{(1-D)^b} \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^{s-1} \frac{\partial Y}{\partial \Delta p} \quad (2.81)$$

$$P_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta D} = 1 - b \Delta p \frac{1}{(1-D)^{b+1}} \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^s - \frac{s}{S} \Delta p \frac{1}{(1-D)^b} \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^{s-1} \frac{\partial Y}{\partial \Delta D} \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \Delta p} = \frac{2S \frac{\partial S}{\partial \Delta p} (1+v)}{2E(1-D)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial \Delta p} = \frac{\partial S}{\partial \Delta \delta} * \frac{\partial \Delta \delta}{\partial \Delta p} \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta \delta} = -\frac{2 \left(\Delta e + \frac{\underline{s}_n}{2\tilde{\mu}} \right)}{\left(\frac{1}{2\tilde{\mu}} + \frac{\Delta D}{2\tilde{\mu}(1-D)} + 2\Delta \delta \right)^2} = \frac{-2S}{\frac{1}{2\tilde{\mu}} + \frac{\Delta D}{2\tilde{\mu}(1-D)} + 2\Delta \delta} \quad (2.84)$$

on pose alors :

$$\text{DENOM} = \frac{1}{2\bar{\mu}} + \frac{\Delta D}{2\bar{\mu}(1-D)} + 2\Delta\delta \text{ et } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.85)$$

donc :

$$\frac{\partial Y}{\partial \Delta p} = -\frac{1}{\mu(1-D)^2 \text{DENOM}} \underline{S} : \underline{S} \frac{\partial \Delta \delta}{\partial \Delta p} \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \Delta D} = -\frac{(1-D+\Delta D)}{2\mu(1-D)^3 \text{DENOM}} \underline{S} : \underline{S} \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial \Delta \delta}{\partial \Delta p} = \frac{3}{4} \frac{1}{(1-D)\sigma_0} \left(1 - \frac{\Delta p}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \Delta p}\right) \quad (2.88)$$

La résolution du système (2.75) permet de corriger la valeur du vecteur solution du système (2.72) par la relation suivante :

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \delta x_j^k \quad (2.89)$$

Les itérations sont poursuivies jusqu'à atteindre la convergence du schéma (sauf si le nombre d'itérations est trop important, dans ce cas il n'y a pas convergence et l'on arrête le calcul). La solution est jugée satisfaisante si la norme Euclidienne de f_i est inférieure ou égale à une certaine tolérance ($10^{-10} \sigma_0$).

On peut alors résumer l'organigramme de résolution des équations constitutives par l'organigramme de la Figure 2.5:

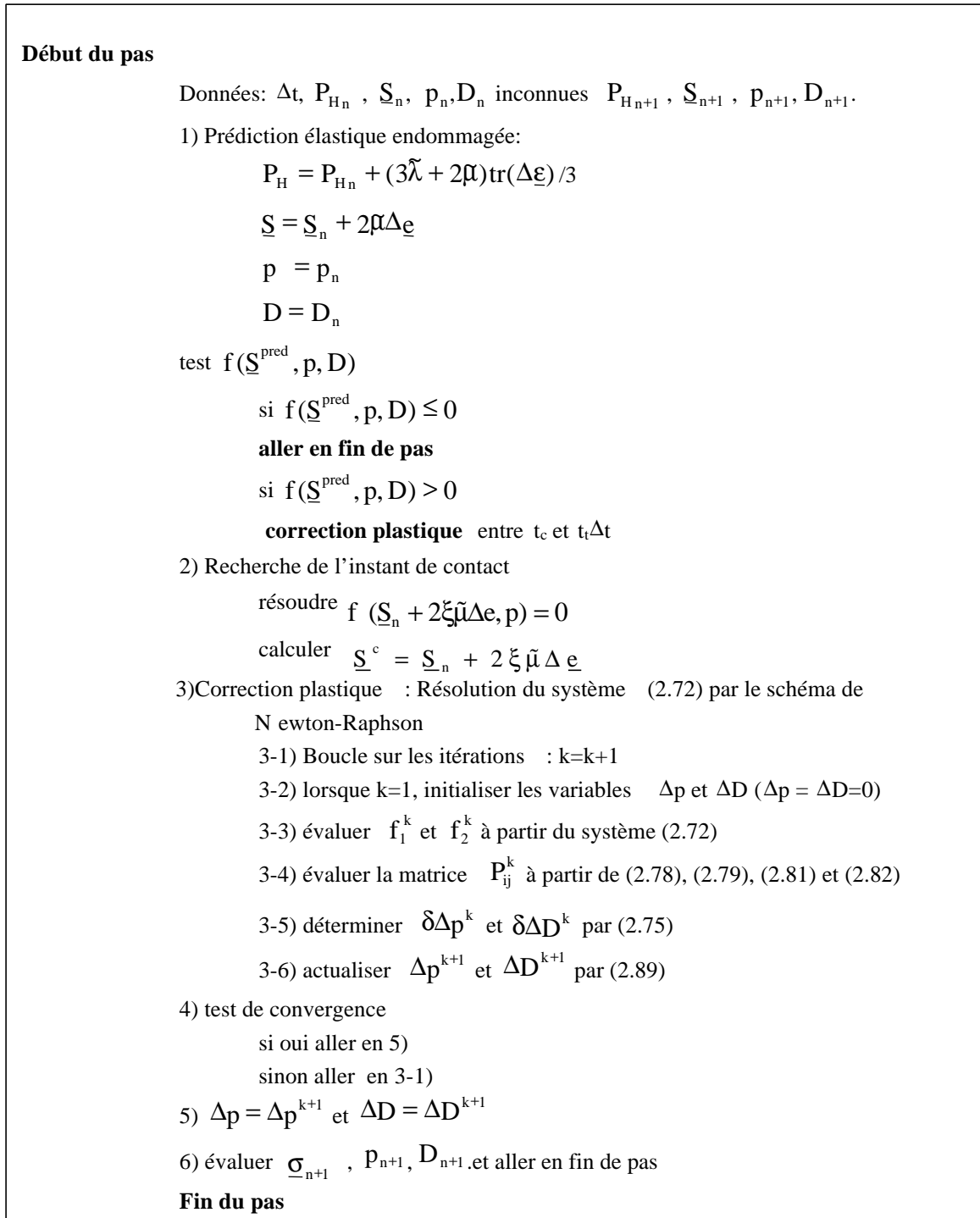


Figure 2.5 : Organigramme de l'intégration locale

On remarque que pour la formulation en vitesse (version P2-P0) la pression étant constante sur l'élément, elle est donnée directement à partir du tenseur des déformations, alors que pour la version P1-P1 celle-ci est une inconnue nodale.

Cette formulation du couplage fort a été implémentée dans les premières versions de Forge2[®] P2-P0 (1999) et P1-P1 (2000). Cette implémentation a été rendue possible par la mise à notre disposition des sources nécessaires afin d'effectuer ce travail. Par contre pour la version 2001

de Forge2[®] P1-P1 et de la même manière pour Forge3[®] nous n'avons pu utiliser que le couplage faible faute de pouvoir disposer des sources nécessaires au couplage fort.

2.3.2.2 Couplage faible comportement/endommagement

Comme on vient de le voir, le couplage fort induit une modification importante de l'intégration locale. Dans les logiciels Forge2[®] et Forge3[®] l'utilisateur ne peut pas intervenir au niveau de l'intégration numérique du modèle de comportement. Il peut par contre modifier à sa convenance :

- Le rayon de la surface de charge en définissant la fonction $\sigma_0(T, p, \dot{p})$ (Eq.(1.68)) qui décrit l'érouissage isotrope.

- Le module d'élasticité en définissant sa variation par rapport à la température ou à toute autre variable.

- le coefficient de Poisson, ...

Pour tenir compte de ces limitations, nous avons alors proposé un couplage « approximatif » que nous qualifions de faible au sens où l'endommagement n'affecte le critère de plasticité que via la fonction d'érouissage $\sigma_0(T, p, \dot{p}, D)$. L'endommagement affecte également le module d'élasticité $E(T, D)$.

A chaque pas de temps et après convergence de l'algorithme de Newton-Raphson sur le seul critère de plasticité on obtient l'incrément $\Delta\delta$ ou dans notre cas, l'incrément de déformation plastique cumulée Δp . L'expression incrémentale du dommage permet de calculer immédiatement l'incrément ΔD qui en découle sur le même pas de temps. On calcule alors $D_{n+1} = D_n + \Delta D$ pour obtenir la valeur de l'endommagement D_{n+1} à la fin de l'incrément qui servira à affecter $\sigma_0(T, p, \dot{p}, D)$ et $E(T, D)$ comme on le verra plus loin.

C'est cette méthodologie qui a été implémentée dans Forge2[®] et Forge3[®] version P1+P1 que nous allons décrire en détails.

Rappelons d'abord que l'incrément de déformation totale est décomposé de façon additive en partie élastique et plastique et s'écrit :

$$\Delta \underline{e} = \Delta \underline{e}^e + \Delta \underline{e}^{pl} \quad (2.90)$$

$$\Delta \underline{e}^e = \frac{1}{2\tilde{\mu}} \Delta \underline{S} \quad (2.91)$$

$$\Delta \underline{e}^{pl} = \Delta \delta \frac{\partial f}{\partial \underline{S}} = 2\Delta \delta (\underline{S}_n + \Delta \underline{S}) \quad (2.92)$$

avec:

$$\Delta \delta = \frac{3}{4} \frac{\Delta p}{\tilde{\sigma}_0(p_n + \Delta p)} \quad (2.93)$$

En combinant les équations (2.90), (2.91), (2.92) on obtient alors:

$$\underline{\Delta S} = \frac{\underline{\Delta e} - 2\Delta\delta\underline{S}_n}{\frac{1}{2\tilde{\mu}} + 2\Delta\delta} \quad (2.94)$$

donc:

$$\underline{S}_{n+1} = \underline{S}_n + \underline{\Delta S} = \frac{\underline{\Delta e} + \frac{\underline{S}_n}{2\tilde{\mu}}}{\frac{1}{2\tilde{\mu}} + 2\Delta\delta} \quad (2.95)$$

Le critère de plasticité s'écrit alors :

$$f(\underline{S}_n, p_n) = \underline{S}_n : \underline{S}_n - \frac{2}{3} \tilde{\sigma}_0^2(p_n, D_n) = 0 \quad (2.96)$$

où $f(\underline{S}_n, p_n)$ est la fonction de charge au début de l'incrément. En fin d'incrément on aura :

$$f(\underline{S}_{n+1}, p_{n+1}) = \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1} - \frac{2}{3} \tilde{\sigma}_0^2(p_{n+1}, D_n) = 0 \quad (2.97)$$

en remplaçant (2.95) dans (2.97) on aboutit à :

$$\tilde{\sigma}_0(p_n + \Delta p) + 3\tilde{\mu}\Delta p - \sqrt{6\tilde{\mu}^2 \underline{\Delta e} : \underline{\Delta e} + 6\tilde{\mu}\underline{s}_n : \underline{\Delta e} + \frac{3}{2} \underline{S}_n : \underline{S}_n} = 0 \quad (2.98)$$

La solution de cette équation est donnée directement par la méthode itérative de Newton-Raphson pour obtenir la seule inconnue Δp . L'incrément de dommage ΔD découle immédiatement sous la forme (c.f. (1.31)):

$$\Delta D = \Delta p \frac{1}{(1-D)^b} \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^s \quad (2.99)$$

Rappelons que la taille de la surface d'écoulement est donnée par (1.73) et que sa dérivée par rapport à p est :

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_0(p, \dot{p}, D, T)}{\partial p} = \sqrt{3} K_0 n (1-D) (ap^{n-1}) \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \dot{\epsilon}^m \quad (2.100)$$

On remarquera qu'ici on ne prend pas en compte les dérivées temporelles ou les dérivées partielles du dommage, c'est pour cette raison que l'on qualifie ce couplage de faible.

2.3.3 Opérateurs tangents discrets

2.3.3.1 Cas du couplage fort

Comme on l'a vu précédemment, le calcul de la matrice tangente est obtenu par la dérivée de Gateaux $[D_u R^e]$ du résidu $\{R^e\}$:

$$[D_u R^e(\underline{u})] = \left[\frac{d(R^e(\underline{u} + \zeta \underline{h}))}{d\zeta} \Big|_{\lambda=0} \right] \quad (2.101)$$

où \underline{h} est la direction de la dérivation et ζ la variable de dérivation. Cette dérivation se réduit pour les déplacements à la dérivation du déviateur de la contrainte par rapport au déplacement qui est la seule variable fonction de u_i . La matrice tangente élémentaire s'écrit alors (en omettant les forces de frottement):

$$[\mathbf{K}_T^e(u_t^k u_t^k)] = \sum_{g=1}^{Nbg} [\mathbf{B}]_g^T \left[\frac{\partial \underline{S}}{\partial \underline{\varepsilon}} \right] [\mathbf{B}]_g \mathbf{J}_g W_g \quad (2.102)$$

où W_g est le poids associé au point de Gauss (d'intégration).

Le terme :

$$[\mathbf{C}_T] = \left[\frac{\partial \underline{S}}{\partial \underline{\varepsilon}} \right] = \left[\frac{\partial \Delta \underline{S}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} \right] \quad (2.103)$$

n'est autre que la matrice Jacobienne tangente reliant l'incrément de contrainte à l'incrément des déformations totales. On a alors :

$$\{\Delta \underline{S}\} = [\mathbf{C}_T] \{\Delta \underline{\varepsilon}\} \quad (2.104)$$

C'est l'équivalent du module tangent continu $[\mathbf{K}_T]$ reliant $\dot{\underline{S}}$ à $\dot{\underline{\varepsilon}}$ donné par les équations (1.55) et (1.64). En toute rigueur nous avons :

$$\lim_{\Delta \varepsilon \rightarrow 0} [\mathbf{C}_T] = \mathbf{K}_T \quad (2.105)$$

L'utilisation de \mathbf{C}_T permet d'assurer une vitesse de convergence quadratique au schéma de Newton-Raphson [NAGTEGAAL82, SIMO85].

Le calcul de la matrice tangente consistante dépend non seulement de la forme explicite des relations de comportement, mais également du schéma de discrétisation temporelle utilisé. La dérivation de la matrice tangente consistante dans Forge2[®] par rapport à la vitesse se fait indépendamment sur la partie déviatrice et sphérique du tenseur de la contrainte:

$$\underline{S} = \underline{S}_t + \Delta \underline{S} = \frac{\Delta \underline{\varepsilon} + \frac{\underline{S}_t}{2\tilde{\mu}}}{\frac{1}{2\tilde{\mu}} + \frac{\Delta D}{2\tilde{\mu}(1-D)} + 2\Delta\delta} \quad (2.106)$$

Le traitement du déviateur se fait en dérivant l'expression (2.106) par rapport à la déformation. On obtient :

$$\frac{\partial \underline{S}}{\partial \underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \underline{S}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} \frac{\partial \Delta \underline{\varepsilon}}{\partial \underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \underline{S}}{\partial \Delta p} \frac{\partial \Delta p}{\partial \underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \underline{S}}{\partial \Delta D} \frac{\partial \Delta D}{\partial \underline{\varepsilon}} \quad (2.107)$$

avec :

$$\frac{\partial \underline{S}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} = \frac{1}{\text{DENOM}} \quad (2.108)$$

$$\frac{\partial \underline{S}}{\partial \Delta p} = \frac{\partial \underline{S}}{\partial \Delta \delta} \frac{\partial \Delta \delta}{\partial \Delta p} = \frac{-2\underline{S}}{\text{DENOM}} \frac{\partial \Delta \delta}{\partial \Delta p} \quad (2.109)$$

$$\frac{\partial \underline{S}}{\partial \Delta D} = \frac{\underline{S}_t}{2\tilde{\mu}(1-D)\text{DENOM}} - \frac{1-D+\Delta D}{\tilde{\mu}(1-D)^2} \frac{\underline{S}}{\text{DENOM}} \quad (2.110)$$

Les autres termes correspondant aux dérivées de la déformation plastique cumulée et de l'endommagement sont obtenus par dérivation des équations du système (2.72) par la déformation :

$$\frac{df_1}{d\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} \frac{\partial \Delta \underline{\varepsilon}}{\partial \underline{\varepsilon}} + \frac{\partial f_1}{\partial \Delta p} \frac{\partial \Delta p}{\partial \underline{\varepsilon}} + \frac{\partial f_1}{\partial \Delta D} \frac{\partial \Delta D}{\partial \underline{\varepsilon}} = 0 \quad (2.111)$$

$$\frac{df_2}{d\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} \frac{\partial \Delta \underline{\varepsilon}}{\partial \underline{\varepsilon}} + \frac{\partial f_2}{\partial \Delta p} \frac{\partial \Delta p}{\partial \underline{\varepsilon}} + \frac{\partial f_2}{\partial \Delta D} \frac{\partial \Delta D}{\partial \underline{\varepsilon}} = 0 \quad (2.112)$$

avec :

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta p} = (1-D+\Delta D) \frac{\partial \sigma_0}{\partial \Delta p} + 3\tilde{\mu} \quad (2.113)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta D} = -3\tilde{\mu} \Delta p + \frac{(6\tilde{\mu}^2(1-D)\Delta \underline{\varepsilon} : \Delta \underline{\varepsilon} + 3\tilde{\mu} \underline{S}_t : \Delta \underline{\varepsilon})}{\text{RACINE}} \quad (2.114)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} = -\frac{6\tilde{\mu}^2 \Delta \underline{\varepsilon} + 3\tilde{\mu} \underline{S}_t}{\text{RACINE}} \quad (2.115)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \Delta p} = -\frac{1}{(1-D)^\beta} \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^s - \frac{s}{S} \Delta p \frac{1}{(1-D)^\beta} \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^{s-1} \frac{\partial Y}{\partial \Delta p} \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \Delta D} = 1 - \beta \Delta p \frac{1}{(1-D)^{\beta+1}} \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^s - \frac{s}{S} \Delta p \frac{1}{(1-D)^\beta} \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^{s-1} \frac{\partial Y}{\partial \Delta D} \quad (2.117)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} = -\frac{s}{S} \Delta p \frac{1}{(1-D)^\beta} \left(\frac{Y - Y_c(D)}{S} \right)^{s-1} \frac{\partial Y}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} \quad (2.118)$$

où :

$$\frac{\partial Y}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} = \frac{\underline{S} : \underline{S}}{2\mu(1-D)^2 \text{DENOM}} + \frac{3(1-2\nu)}{E(1-D)^2} P_H \frac{\partial P_H}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} \quad (2.119)$$

La résolution du système formé par les deux équations (2.111) et (2.112) donne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Delta p} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta D} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Delta p} & \frac{\partial f_2}{\partial \Delta D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta p}{\partial \underline{\varepsilon}} \\ \frac{\partial \Delta D}{\partial \underline{\varepsilon}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} * \frac{\partial \Delta \underline{\varepsilon}}{\partial \underline{\varepsilon}} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} * \frac{\partial \Delta \underline{\varepsilon}}{\partial \underline{\varepsilon}} \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

où

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \underline{\varepsilon}} = \frac{1}{\text{DESCRIM}} \left(-\frac{\partial f_1}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} \frac{\partial f_2}{\partial \Delta D} + \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} \frac{\partial f_1}{\partial \Delta D} \right) \quad (2.121)$$

$$\frac{\partial \Delta D}{\partial \underline{\varepsilon}} = \frac{1}{\text{DESCRIM}} \left(-\frac{\partial f_2}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} \frac{\partial f_1}{\partial \Delta p} + \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} \frac{\partial f_2}{\partial \Delta p} \right) \quad (2.122)$$

où :

$$\text{DESCRIM} = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta p} \frac{\partial f_2}{\partial \Delta D} - \frac{\partial f_1}{\partial \Delta D} \frac{\partial f_2}{\partial \Delta p} \quad (2.123)$$

Le traitement du déviateur de la contrainte ayant été effectué, il reste à établir l'assemblage de la matrice tangente élémentaire afin de pouvoir calculer la pression et le déplacement à l'incrément suivant.

L'organigramme général de la résolution de l'équilibre dans Forge2[®], pour un pas de chargement donné est explicité sur la Figure 2.6 complétée par la Figure 2.7 expliquant le calcul des résidus et de la matrice de rigidité:

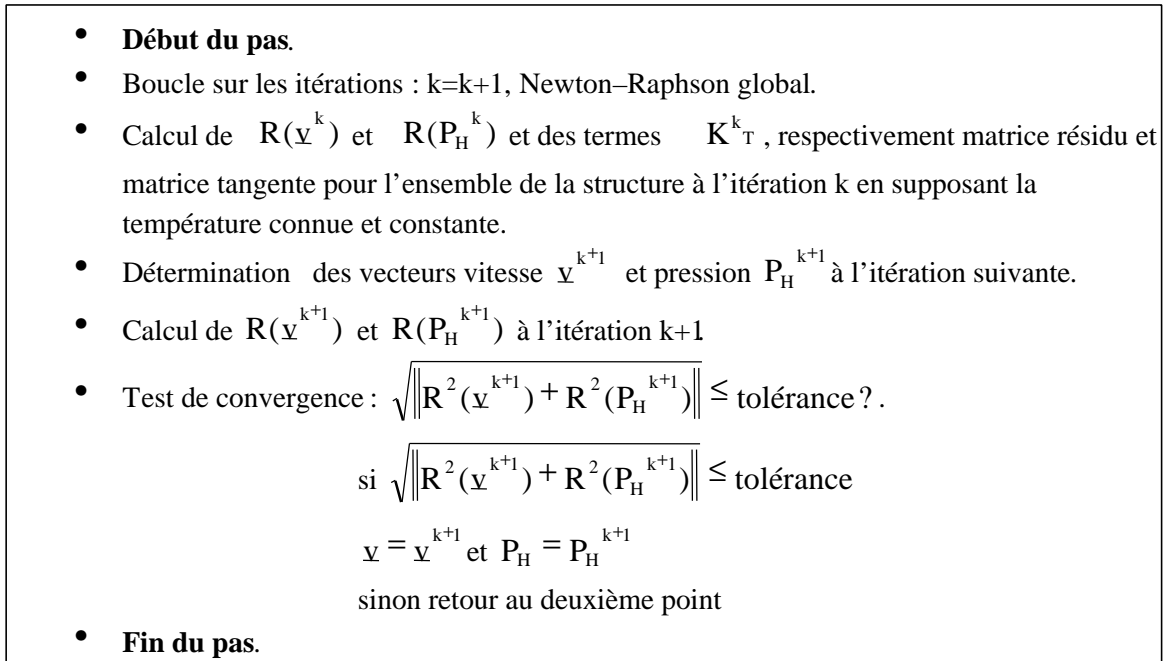


Figure 2.6 : Schéma de résolution globale du problème d'équilibre

- Boucle sur les éléments :
- Boucle sur les points de Gauss de l'élément e .
- Calcul de l'incrément de déformation total $\Delta \underline{\epsilon}$.
- User_lambda_et_mu : calcul des coefficients de Lamé.
- Calcul de la contrainte déviatorique \underline{S} en utilisant l'organigramme du tableau (2.5).
- Calcul de la contribution de \underline{S} au résidu local élémentaire.
- Calcul de la contribution de \underline{S} à la matrice tangente élémentaire.
- Assemblage des tableaux élémentaires.

Figure 2.7 : Organigramme du sous programme de détermination du résidu et de la matrice tangente

Si l'on prend en compte le couplage thermo-mécanique l'algorithme de la Figure 2.6 devient :

- **Début du pas.**
- Boucle sur les itérations : $k=k+1$, Newton-Raphson global.
- Calcul de $R(\underline{v}^k)$ et $R(P_H^k)$ et des termes K_T^k , respectivement matrice résidu et matrice tangente pour l'ensemble de la structure à l'itération k en supposant la température connue et constante.
- Détermination des vecteurs vitesse \underline{v}^{k+1} et pression P_H^{k+1} à l'itération suivante .
- Calcul de $R(\underline{v}^{k+1})$ et $R(P_H^{k+1})$ à l'itération k+1
- Test de convergence : $\sqrt{\|R^2(\underline{v}^{k+1}) + R^2(P_H^{k+1})\|} \leq \text{tolérance} ?$
 si $\sqrt{\|R^2(\underline{v}^{k+1}) + R^2(P_H^{k+1})\|} \leq \text{tolérance}$
 $\underline{v} = \underline{v}^{k+1}$ et $P_H = P_H^{k+1}$
 sinon retour au deuxième point
- Calcul de $R(T^k)$ et des termes K_T^k , à l'itération k en supposant la valeur de v connue et constante et égale à la valeur calculée précédemment.
- Détermination des vecteurs T^{k+1} à l'itération suivante.
- Calcul de $R(T^{k+1})$ à l'itération k+1.
- **Fin du pas.**

Figure 2.8 : Schéma de résolution globale en thermique

2.3.3.2 Cas du couplage faible

Pour le cas du couplage faible, la formulation de l'opérateur tangent discret est beaucoup plus simple. En effet, l'endommagement affectant directement la contrainte d'écoulement via les routines utilisateurs, on ne le retrouve pas explicitement dans l'équation de Prandtl-Reuss où l'unique inconnue est l'incrément de déformation plastique cumulée.

De ce fait la procédure de résolution de l'opérateur tangent passe par le traitement du déviateur en dérivant l'expression (2.106) par rapport à la déformation. On obtient :

$$\frac{\partial \underline{S}}{\partial \Delta \underline{\epsilon}} = \frac{\partial \underline{S}}{\partial \Delta \underline{\epsilon}} \frac{\partial \Delta \underline{\epsilon}}{\partial \Delta \underline{\epsilon}} + \frac{\partial \underline{S}}{\partial \Delta p} \frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta \underline{\epsilon}} \quad (2.124)$$

Nous ne détaillerons pas ces calculs pour des raisons de brièveté et nous renverrons le lecteur aux guides d'utilisation de Forge2[®] et Forge3[®]. En fait, il suffit d'annuler les termes d'endommagement dans le calcul ci-dessus pour obtenir les expressions classiques disponibles dans la formulation d'origine.

2.3.4 Gestion numérique du contact

Le traitement numérique et la gestion du contact sont d'une réelle importance dans la modélisation numérique des procédés de forgeage. Il va de soi qu'aux interfaces de contact les outils et le lopin ne peuvent s'interpénétrer. Les contraintes aux interfaces de contact sont compressives et doivent vérifier les équations de frottement en même temps que les équations de comportement. Aussi les conditions aux limites étant souvent inconnues comme la distribution des forces de contact, cela rend le problème fortement non-linéaire et accroît les difficultés d'un point de vue numérique. De nombreuses techniques de résolution associées à ces problèmes sont disponibles dans la littérature [HUGHES76, ODEN83, HALLQUIST85, CHEN86, TAYLOR91], nous nous contenterons d'un bref descriptif de ces méthodes telles qu'elles sont implémentées dans les versions commerciales des codes utilisés.

Soient deux solides S_1 et S_2 de frontières Γ_1 et Γ_2 . Ces deux solides tendent à entrer en contact l'un par rapport à l'autre. Le premier solide S_1 sera défini comme étant l'outil, celui-ci pouvant être soit indéformable (rigide), dans ce cas il sera défini par l'équation de sa surface, soit déformable et dans ce cas il sera discrétisé par éléments finis. Le deuxième solide représentant la pièce est défini comme déformable et donc discrétisé par élément finis.

Dans le cas général la condition cinématique de non pénétration s'écrit pour un point du solide S_1

$$g = (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \cdot \underline{n} \geq 0 \quad (2.125)$$

On se met bien évidemment dans le cas d'un contact unilatéral, ce qui correspond à la possibilité que possède un nœud sur la frontière Γ_2 du solide S_2 de pouvoir se détacher du solide S_1 .

- Dans le cas d'un contact unilatéral avec deux points initialement en contact (Figure 2.9), si le solide S_1 est fixe et rigide la condition cinématique devient :

$$g = u_2 \cdot n \geq 0 \quad (2.126)$$

deux cas de figure se pose alors :

- Il y a contact entre les solides S_1 et S_2 on aura alors $u_2 \cdot n = 0$
- Il y a décollement entre S_1 et S_2 ce qui aura pour conséquence $u_2 \cdot n > 0$

Pour un contact entre deux solides déformables la condition cinématique sera exprimée par :

$$g = (u_2 - u_1) \cdot n \geq 0 \quad \text{où} \quad \begin{cases} (u_2 - u_1) \cdot n = 0 & \text{s'il y a contact} \\ (u_2 - u_1) \cdot n > 0 & \text{s'il y a décollement} \end{cases}$$

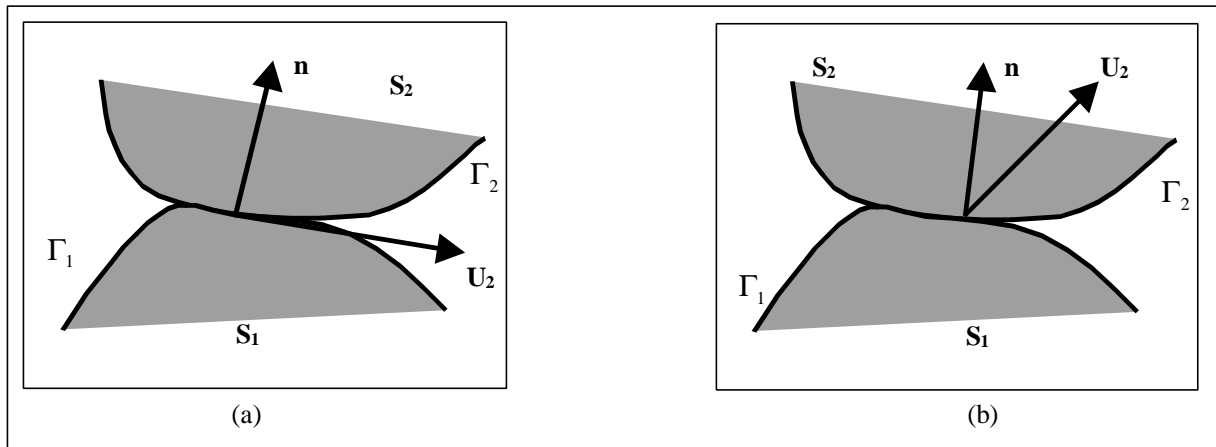


Figure 2.9 : Contact (a) et décollement (b)

- Dans le cas d'un contact unilatéral avec une distance initiale appelée communément fonction gap, la condition cinématique de non pénétration s'exprime par :

$$g = (u_2 - u_1) \cdot n - g_0 \geq 0 \quad (2.127)$$

avec u_1 le déplacement du point de coordonnées initiales x_1 qui est la projection du point x_2 sur la frontière Γ_1 du solide S_1 avec comme distance initiale selon la norme:

$$g_0 = (x_2 - x_1) \cdot n \quad (2.128)$$

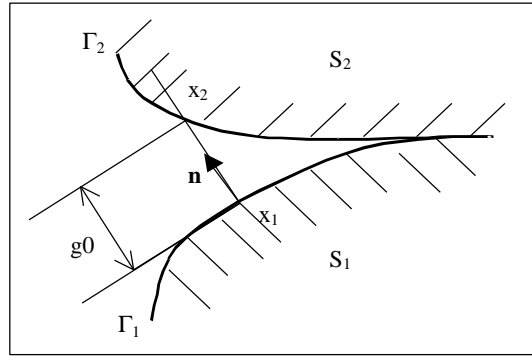


Figure 2.10 : Contact avec distance initiale

Le traitement numérique du contact consiste à écrire en chaque point la condition de non-pénétration (Eq (2.127)), d'où une difficulté importante du problème lors du repérage et du suivi des surfaces de contact afin de pouvoir définir les contraintes en tenant compte des lois de frottement à chaque pas de temps. Ceci entraînera une difficulté supplémentaire lors de la résolution numérique du problème d'évolution sur chaque incrément de charge.

Deux cas peuvent alors être rencontrés lors du suivi et du repérage des surfaces :

Soient les frontières Γ_1 et Γ_2 des solides S_1 et S_2 sont connues à l'avance, ce qui permet lors d'un maillage compatible entre les deux solides, où les nœuds de ces deux solides correspondent et ont les mêmes normales, d'avoir autant d'inégalités que de couples de nœuds. Lorsque le maillage entre les deux solides est incompatible, la notion d'élément ou de nœud maître et esclave doit être introduite, et dans ce cas une projection des nœuds de la surface esclave selon sa normale sur la surface maître doit être effectuée. De plus la condition de non pénétration devra être formulée afin de pouvoir répartir les efforts de contact du nœud projeté sur la surface maître du solide. Ceci à la condition que les glissements relatifs entre les deux frontières des deux solides soient infinitésimaux, ce afin de garantir les petites variations des vecteurs normaux.

Soient les frontières Γ_1 et Γ_2 des solides S_1 et S_2 ne sont pas connues, comme c'est le cas en mise en forme où les pièces complexes ne permettent pas de définir avec exactitude les parties de surfaces pouvant être en contact, il faut alors postuler que tous les éléments du solide déformable S_2 peuvent entrer en contact soit avec la frontière Γ_1 (connue à chaque instant) de l'outil rigide S_1 soit avec d'autres parties du solide S_2 (ce cas est assez complexe à gérer).

Aussi, en plus des problèmes de gestion du contact il faut tenir compte des phénomènes de frottement entre les différents solides, qui sont présentés et modélisés au paragraphe §1.4 du chapitre 1.

L'objectif des méthodes de prise en compte du contact associées au problème classique de mécanique est de minimiser la forme variationnelle faible en respectant la condition d'interpénétrabilité.

Pour simplifier, illustrons ce problème dans le cas d'un contact entre solides élastiques linéaires.

L'énergie potentielle est donnée par :

$$E_p(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\epsilon} dV - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot u dV - \int_{\partial\Omega_t} \vec{t} \cdot u dS \quad (2.129)$$

Après discrétisation par E.F. et assemblage cette énergie s'écrit :

$$E_p(u) = \frac{1}{2} u_n^T K u_n - u_n^T F \quad (2.130)$$

Où :

$$K = \sum_{\text{elt}} \left(\int_{\Omega_e} B^T D B dV \right) \quad (2.131)$$

$$F = \sum_{\text{elt}} \left(\int_{\Omega_e} N^T f dV + \int_{\partial\Omega_e^t} N^T t dS \right) \quad (2.132)$$

K étant la matrice de rigidité, B est la matrice d'interpolation des déformations et F étant le second membre global. u_n représentant l'ensemble des degrés de liberté de la structure.

La condition de contact est écrite en chaque nœud i de la zone de contact (condition linéaire de contact) :

$$u_i n_i = 0 \quad (2.133)$$

On peut mettre cette condition pour l'ensemble des m nœuds en contact sous une forme matricielle:

$$g = G^T u_n = 0 \quad (2.134)$$

Le problème du contact est de minimiser (2.130) sous la contrainte de (2.134). Pour cela il existe plusieurs méthodes parmi les plus utilisées on trouve :

- La méthode de pénalité : c'est la plus utilisée des méthodes, de part sa simplicité de mise en œuvre, elle consiste à rajouter un terme de pénalisation à l'énergie potentielle. La taille du problème à résoudre reste la même, même si la solution dépendant du facteur de pénalisation.
- La méthode des multiplicateurs de Lagrange : la taille du problème à résoudre est augmentée, de plus certaines précautions sont à prendre d'un point de vue numérique dû à la présence de zéro sur la diagonale.
- La méthode du Lagrangien perturbé : c'est une extension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange où l'on cherche à supprimer les termes nuls sur la diagonale de la méthode précédente.
- La méthode du Lagrangien augmenté : les méthodes précédentes présentent des inconvénients (solutions dépendantes du terme de pénalisation, augmentation de la taille du problème..), cette méthode minimise ces inconvénients tout en restant une méthode assez simple.

2.3.5 Cas des logiciels Forge2^â et Forge3^â

Dans le cadre d'une formulation Lagrangienne actualisée, l'algorithme itératif de contact est donné comme suit: la surface de l'outil est décrite par une fonctionnelle $g(x)$, telle que $g(x) > 0$ ce qui correspond à l'intérieur de l'outil. Si, à un instant donné un nœud n de coordonnées x_n^t (à l'instant t) n'est pas en contact ou $g(x_n^t) < 0$, alors l'état de contact sera caractérisé par :

$$g(x_n^t + \underline{u}) \leq 0 \quad (2.135)$$

Lorsque le nœud (n) pénètre dans l'outil durant le pas de temps Δt , il est alors reprojété sur la surface de l'outil à l'instant $t+\Delta t$. Afin de minimiser les variations de volume découlant de cette projection, le pas de temps peut être ajusté de telle manière que le nouveau nœud entrant en contact avec l'outil ne le pénètre pas. Néanmoins, ceci augmentera significativement le nombre de pas de temps. Aussi, si à l'instant t , le nœud est déjà en contact sur l'outil, deux cas peuvent être considérés:

- 1) la contrainte normale est compressive à l'instant t , et donc le nœud n reste toujours en contact. Par contre si l'outil présente une courbure au voisinage du nœud n , une reprojection sur l'outil sera alors nécessaire.
- 2) la contrainte normale n'est pas compressive, le nœud est alors autorisé à perdre son contact avec l'outil.

La conséquence la plus évidente est la distorsion engendrée par les grandes déformations sur les éléments finis. Cette distorsion aboutit la plupart du temps à une impossibilité de calcul du Jacobien et d'un arrêt de la procédure numérique.

Il faut bien entendu éviter ce genre d'incidents, et donc éviter ces blocages en faisant évoluer le maillage avec le processus de déformation : on parlera de **maillage adaptatif**. Dans le cas contraire, les éléments défectueux doivent être éliminés : on parlera alors de **remaillage**.

2.4 MAILLAGE, REMAILLAGE ET TRAITEMENT DES ÉLÉMENTS ENDOMMAGÉS

2.4.1 Maillage dans Forge2^â et 3^â

Le maillage est une étape essentielle lors d'un calcul par éléments finis, car il peut conditionner la précision des résultats obtenus. De ce fait le choix du mailleur est très important. Ce mailleur doit par ailleurs respecter certaines règles élémentaires.

1. Il doit être précis afin d'éviter des pertes de volume trop importantes, et ainsi coller au mieux au contour de la pièce à mailler.
2. Il doit être robuste afin de pouvoir mailler automatiquement n'importe quel type de géométries, aussi complexes soient-elles.

3. Il doit être souple d'utilisation afin de pouvoir mailler selon le choix de l'utilisateur (raffinement de zones par exemple).
4. La qualité des éléments générés par le mailleur doit être bonne et régulière.

Un mailleur respectant ces conditions a donc été utilisé pour les logiciels Forge2[®] et Forge3[®], celui-ci est basé sur la triangulation de Delaunay.

Pour mailler, on doit commencer par établir la discrétisation de la frontière de la pièce qui produira un nuage de points servant à la réalisation de la triangulation de Delaunay, cette étape sera suivie par la régularisation du maillage.

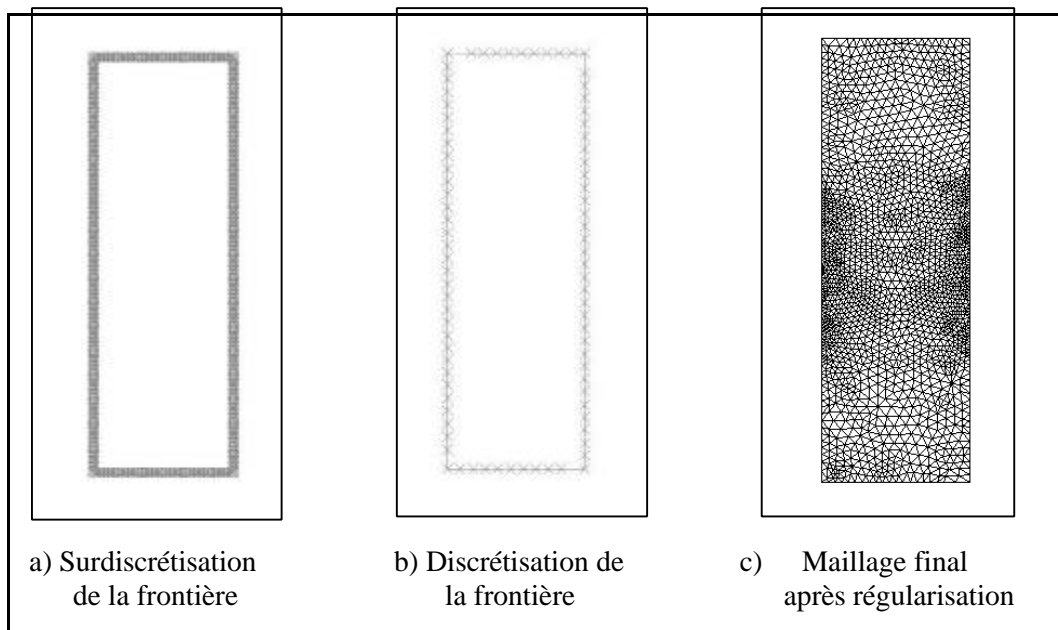


Figure 2.11 : Etapes de maillage

La triangulation de Delaunay est développée à partir de polygones de Voronoï, l'auteur intéressé pourra se référer à Borouchaki [BOROUCHAKI97] et Coupez [COUPEZ91] pour ce qui est de la formulation mathématique. La construction du maillage à partir du nuage de points sera obtenue de manière itérative. Aussi afin d'obtenir un maillage fin et régulier le mailleur procédera à la régularisation du maillage.

2.4.2 Remaillage dans Forge2^â et 3^â

Dans la simulation numérique des procédés de mise en forme, les structures subissent de très grandes déformations qui altèrent la qualité du maillage et empêchent la poursuite des calculs. Ainsi, des remaillages intermédiaires s'avèrent nécessaires pour remplacer les maillages distordus. Ceci est possible par une technique de remaillage. Dans le cadre de la mise en forme, les nœuds du maillage suivent l'évolution cinématique d'un point matériel. Ceci conduit à un maillage tout à fait déformé dû à la grande déformation du matériau. De plus, l'utilisation de la même topologie de maillage n'est pas commode en général pour le

processus entier, surtout si la topologie finale pour le maillage est considérablement différente de la topologie initiale. Pour ces raisons, le remaillage est obligatoire et devient fréquent dans certains exemples (jusqu'à plusieurs centaines de remaillage). Avec le développement actuel des codes de calcul, les remaillages peuvent être automatiquement générés. Ainsi, un nouveau maillage peut être généré dès qu'un des critères suivants est atteint :

- 1) Distorsion d'un élément fini ou d'un segment de la frontière.
- 2) Mauvaise description de l'interface pièce/outil (problème de contact).
- 3) La courbure d'un côté de la frontière dépasse la courbure maximum autorisée par l'ingénieur.
- 4) Détection d'un pli, par exemple, où un domaine rentre en contact avec lui-même. Lorsqu'un pli est détecté, le chevauchement d'une partie du domaine est supprimé et un remaillage est effectué (avec détection de mots clefs dans le fichier de données dans le logiciel Forge2[®], Forge3[®]).
- 5) Un domaine du solide rencontre un autre domaine d'un autre solide (création d'une interface).

Afin de respecter ces conditions, un remailleur automatique est alors utilisé pour générer un nouveau maillage.

Un ensemble de points frontières est généré à partir du maillage précédent. Puis à partir de ces points frontières (qui définissent bien le contour de la pièce et les interfaces entre les différents solides susceptibles d'être en contact), un nouveau maillage est alors généré de la même manière que le maillage d'origine (triangulation de Delaunay). Un transfert de toutes les variables de l'ancien maillage vers le nouveau doit être fait en utilisant des méthodes performantes de transport afin de ne pas modifier la solution finale.

A noter aussi que la procédure de remaillage est automatique et déclenchée par l'utilisateur via des mots clefs (qualité des triangles, fréquence de remaillage) figurant dans le fichier de données du calcul à effectuer.

2.4.3 Traitement des éléments endommagés

L'analyse d'une structure par le modèle couplé conduit à l'amorçage d'une fissure à un instant défini en un point de Gauss donné où l'endommagement aura atteint sa valeur critique D_c (égale à 1). A cet instant, la contrainte de Cauchy devient nulle et le point de Gauss en question n'intervient ni dans le calcul du résidu ni dans le calcul de la matrice tangente. Lorsque tous les points de Gauss d'un élément sont endommagés, l'élément ne contribuant plus à l'équilibre de la structure, le calcul dans Forge2[®] s'arrête en indiquant que l'élément est totalement endommagé. Le choix de l'arrêt du calcul lorsqu'un élément est totalement endommagé est nécessaire d'un point de vue numérique, si des termes diagonaux de la matrice deviennent nulles, ce qui a pour conséquence une divergence du schéma de résolution global.

Afin de contourner ce problème une première approche, avait été effectuée par Franqueville [FRANQUEVILLE99], où l'endommagement critique avait été fixé à $D_c=0.99$. Mais les dernières versions de Forge2[®] et Forge3[®] se sont dotées de nouveaux outils permettant à l'utilisateur de faire disparaître des éléments. Le déclenchement de ce module de destruction des éléments appelé « kill-element » est activé lorsque certains critères définis par l'utilisateur ont été vérifiés.

Ce module trouve toute sa justification pour nos développements car lorsqu'un élément totalement endommagé ne possède plus de rigidité, il ne possède plus de caractéristiques mécaniques et thermiques alors on peut le supprimer. Ceci permet alors de continuer les calculs lorsque des éléments totalement endommagés sont supprimés. Les problèmes numériques liés à l'endommagement quand celui-ci a atteint sa valeur critique ne se posent plus. Ceci aura donc pour conséquence directe l'utilisation de ce module pour effectuer des opérations où l'on cherchera à favoriser le dommage, typiquement pour des opérations de découpage, poinçonnage, d'ébavurage, de débouchage....

Ceci dit nous pensons que la suppression des éléments endommagés ne doit s'appliquer qu'en utilisant un maillage raisonnablement fin. Ceci impose de raffiner le maillage dès le début de l'analyse, dans les zones concernées par la rupture. Mieux encore l'utilisation d'un maillage adaptatif utilisant un estimateur d'erreur basé sur les champs d'endommagement paraît plus efficace comme cela a été présenté dans [BOROUCHAKI02]. Malheureusement une telle procédure n'est pas disponible dans Forge2[®] et Forge3[®]. Nous devons alors raffiner probablement le maillage comme on le verra plus loin.

2.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, les principaux aspects numériques liés à la simulation numérique des procédés de mise en forme ont été abordés. La discrétisation spatiale et temporelle du principe des travaux virtuels a été exposée.

Les formulations en vitesse et en vitesse/pression ont été étudiées et comparées.

Le système algébrique auquel on aboutit est un système de deux équations à deux inconnues qui sera résolu par un schéma itératif implicite de Newton-Raphson dans le cas du couplage « fort ». Dans le cas du couplage faible une seule équation à une inconnue sera à résoudre. L'intégration numérique des équations différentielles décrivant le modèle de comportement couplé à l'endommagement est décrit suivant deux cas :

Le premier cas correspond au couplage fort avec une formulation isotrope anisotherme dans un premier temps, puis isotherme pour simplifier les calculs, où l'on passe d'un système de 8 équations à un système de deux équations, où les inconnues du problème sont l'incrément de déformation plastique cumulée et l'incrément de dommage. Cet algorithme est composé d'une prédiction élastique et d'une correction plastique basée sur la prédiction élastique. L'algorithme utilise la thêta méthode (schéma implicite ($\theta=1$)) comme méthode de résolution. L'expression détaillée de la matrice tangente consistante a été exposée.

Le deuxième cas correspond à la même formulation mais dans le cas du couplage faible. On a expliqué l'avantage du couplage faible, ainsi que les modifications apportées aux routines. L'algorithme de résolution est le même que précédemment, mais la différence vient du fait que l'on a qu'une inconnue du problème : l'incrément de déformation plastique cumulée. Celui-ci obtenu après convergence du schéma d'intégration locale servira à calculer l'incrément de dommage. On remarque ici que le dommage sera constant au cours des itérations locales du schéma de Newton-Raphson, ce qui aura pour incidence directe une rapidité accrue des calculs.

Une comparaison de ces deux formulations sera effectuée lors de la validation sur des exemples simples.

Un rappel des possibilités offertes en matière de contact/frottement a été décrit sans trop de détails. Les possibilités de maillage et remaillage dans Forge2[®] et Forge3[®] ont été exposées, en mettant l'accent sur la procédure kill-element qui nous intéresse tout particulièrement pour éliminer les éléments endommagés. Cette procédure très utile permet de poursuivre les calculs jusqu'à leurs termes et ainsi pouvoir modéliser des procédés de découpage, ébavurage...

Dans le prochain chapitre ces outils numériques seront validés sur des exemples « académiques » relativement simples pour pouvoir ensuite simuler des procédés de mise en forme proprement dit pour des cas 2D et 3D.

CHAPITRE 3 :

IDENTIFICATION ET VALIDATION DE LA MÉTHODOLOGIE

3.1 INTRODUCTION

Cette partie est consacrée au calibrage et à la validation de la méthodologie que nous proposons pour prévoir l'endommagement dans les pièces « massives » obtenues par formage plastique. Pour cela nous traiterons des exemples simples visant à montrer les capacités de la méthodologie proposée. Les exemples de procédés industriels seront présentés ultérieurement (c.f. chapitre 4).

Avant toute application numérique, il faudra déterminer la valeur des constantes matérielles intervenant dans le modèle de comportement et d'endommagement. Cette étape cruciale se fait par minimisation d'une fonctionnelle coût, exprimant la différence entre des valeurs de référence (généralement obtenues par expérimentation) et des valeurs obtenues par intégration numérique du modèle utilisé. Le problème consiste alors à déterminer le meilleur jeu de coefficients donnant une réponse théorique très proche des réponses obtenues expérimentalement.

Résolution du problème inverse : cette question largement traitée dans la littérature, pose des difficultés théoriques (unicité de la solution) liées au grand nombre de constantes matérielles à déterminer et à la complexité de la fonctionnelle coût à minimiser (existence de multiples minimums locaux, etc..). Dans la suite nous allons exposer la méthodologie que nous utilisons

au LASMIS pour identifier nos modèles en laissant de côté les questions théoriques encore ouvertes concernant la résolution des problèmes inverses en général.

3.2 IDENTIFICATION ET VALIDATION DU MODÈLE COUPLÉ

3.2.1 Méthodologie d'identification

Pour identifier un modèle de comportement il faut convenir d'une méthodologie « efficace ». Au LASMIS, nous utilisons une méthodologie simple et réalisable en deux étapes :

Étape 1 : Identification du modèle complet en un point matériel en utilisant le logiciel SiDoLo [SIDOLO95]. On commence par identifier les constantes décrivant la rhéologie sans endommagement, puis on fixe les valeurs de ces constantes pour déterminer les constantes liées à l'endommagement.

Étape 2 : On utilise l'ensemble des constantes matérielles déterminées dans l'étape précédente pour simuler numériquement un véritable essai en se plaçant dans les mêmes conditions que celles utilisées expérimentalement (en respectant la géométrie de l'éprouvette utilisée). On corrige alors manuellement, le cas échéant, les constantes nécessaires afin que la courbe globale force/déplacement numérique coïncide le plus justement possible avec celle obtenue expérimentalement pour l'éprouvette. Pendant cette étape on détermine également la finesse du maillage ainsi que le meilleur pas de charge permettant de se rapprocher le plus possible de la réponse expérimentale dans la phase d'adoucissement de la courbe force/déplacement.

Cette procédure est systématiquement utilisée pour déterminer les modèles par identification avec une base de données expérimentales disponibles. En particulier pour la plasticité en grandes déformations sous sollicitations monotones, nous nous appuyons sur des essais de traction uniaxiaux menés jusqu'à rupture de l'éprouvette. La courbe globale force/déplacement présente alors un stade d'écrouissage positif, une saturation puis une phase d'adoucissement (écrouissage négatif) conduisant à la rupture finale de l'éprouvette.

Comme on a pu le signaler au premier chapitre (c.f. §1.2.1.1.b) les courbes de traction expérimentales obtenues sur plusieurs éprouvettes du même matériau, présentent inévitablement un point de bifurcation situé au début du stade d'adoucissement (CD) de la Figure 1.6. Ce point reflète le fait que la coalescence des cavités aboutissant à la formation d'une fissure macroscopique ne se passe jamais de la même manière dans chaque éprouvette toutes choses égales par ailleurs.

Pour une éprouvette de section rectangulaire (en déformation plane) on observe une localisation dans deux bandes de cisaillement faisant un angle de l'ordre de 45° avec l'axe

principal de la traction. La fissure macroscopique s'amorce alors à l'intersection des deux bandes en fonction de la coalescence des cavités.

Ce phénomène pose un problème quant au choix de la courbe expérimentale de référence qui doit servir à l'identification du modèle. Nous déterminerons alors une courbe moyenne en prenant le chemin moyen entre les points D et E ce qui permettra d'accéder à la valeur de la déformation plastique à la rupture (à contrainte nulle) qu'on nommera la ductilité.

Nous verrons par la suite que la non unicité de la réponse au-delà du point de bifurcation est également observée dans les simulations numériques mais pour d'autres raisons qui n'ont rien à voir avec la métallurgie.

Avant d'appliquer cette procédure d'identification à des matériaux réels (c.f. §3.4) nous allons procéder à une étude paramétrique de la modélisation proposée en choisissant des jeux de coefficients convenables définissant des matériaux virtuels.

3.2.2 Etude paramétrique sur des matériaux virtuels

Dans ce paragraphe nous allons illustrer cette méthodologie de prévision de l'endommagement sur des matériaux « virtuels » en fixant nous même les constantes matérielles afin de couvrir une large gamme de matériaux à rupture fragile ou ductile.

Les fonctions d'érouissage dans les cas élasto-(visco)plastiques avec effets thermiques et d'endommagement sont celles initialement disponibles dans Forge2[®] et Forge3[®] :

$$\sigma_0(p, \dot{p}, D, T) = (1 - D) \sqrt{3} K_0 (1 + a p^n) \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \dot{p}^m \quad (3.1)$$

Pour la rhéologie du matériau nous choisirons les valeurs suivantes :

$E=210000$ MPa, $\nu=0.3$, $K_0=170$ MPa

$n=0.354$, $a=0.629$, $\beta = 0$, $m = 0$

Pour le modèle d'endommagement ductile nous allons analyser les différences entre les critères de Lemaitre Eq.(1.29) et le critère linéaire Eq.(1.30). Pour cela nous choisirons les jeux de coefficients suivants :

*Matériaux **A** à faible ductilité, ($\epsilon_{rup}^p < 20\%$) :

Matériau A1 : Critère de Lemaitre :

$S=0.42$ MPa, $s=2.5$, $b=7.5$

Matériau A2 : Critère Linéaire :

$S=260$ MPa, $s=2.5$, $b=7.5$, $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.5$

*Matériaux **B** à forte ductilité, ($\epsilon_{rup}^p > 60\%$) :

Matériau B1 : Critère de Lemaitre :

$S=0.88$ MPa, $s=2.5$, $b=7.5$

Matériau B2 : Critère linéaire :

$S=500$ MPa, $s=2.5$, $b=7.5$, $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.5$

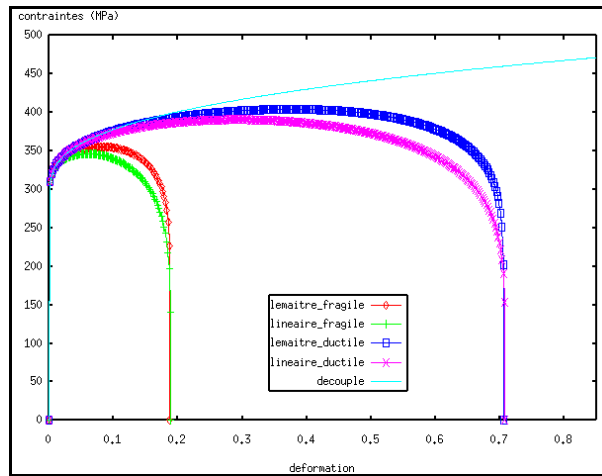


Figure 3.1 : Courbes Contrainte/Déformation, comparaison de deux matériaux suivant deux critères d'endommagement

La Figure 3.1 rassemble les réponses locales (contrainte équivalente en fonction de la déformation plastique cumulée) correspondant aux quatre matériaux **A1**, **A2**, **B1** et **B2**. On note qu'en comparaison avec la réponse non couplée, les contraintes chutent grâce à l'effet de l'endommagement dans les cas couplés :

Le matériau peu ductile se rompt à $\epsilon_{rup} \approx 18\%$ et atteint une contrainte maximale de :

$$-\sigma_{max} = 352 \text{ MPa pour } \mathbf{A1}$$

$$-\sigma_{max} = 346 \text{ MPa pour } \mathbf{A2}$$

Pour le matériau à forte ductilité la rupture intervient pour $\epsilon_{rup} \approx 71\%$ et atteint une contrainte maximale de :

$$-\sigma_{max} = 390 \text{ MPa pour } \mathbf{B1}$$

$$-\sigma_{max} = 405 \text{ MPa pour } \mathbf{B2}$$

En fait les deux critères diffèrent relativement peu par les contraintes maximales atteintes avant la rupture, tout en sachant que la vitesse d'évolution du dommage pour le critère linéaire est un peu plus élevée que dans le cas du critère de Lemaitre comme le montre la Figure 3.2.

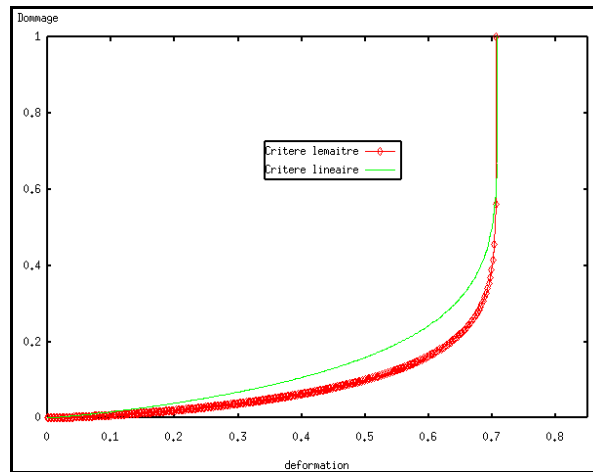


Figure 3.2 : Comparaison de l'endommagement en fonction de la déformation pour les deux critères de dommage

La première chose à étudier concerne la comparaison entre les résultats obtenus par un calcul couplé et un calcul non couplé, toute chose égale par ailleurs. Nous prenons pour cela le matériau **B2** et une éprouvette de traction (plaque) en déformation plane présentée sur la Figure 3.3, comportant 9807 éléments.

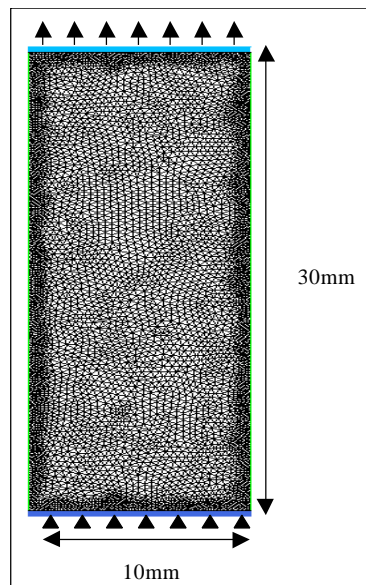


Figure 3.3 : Eprouvette de traction en déformation plane

La Figure 3.4 rassemble la redistribution des déformations plastiques et de l'endommagement.

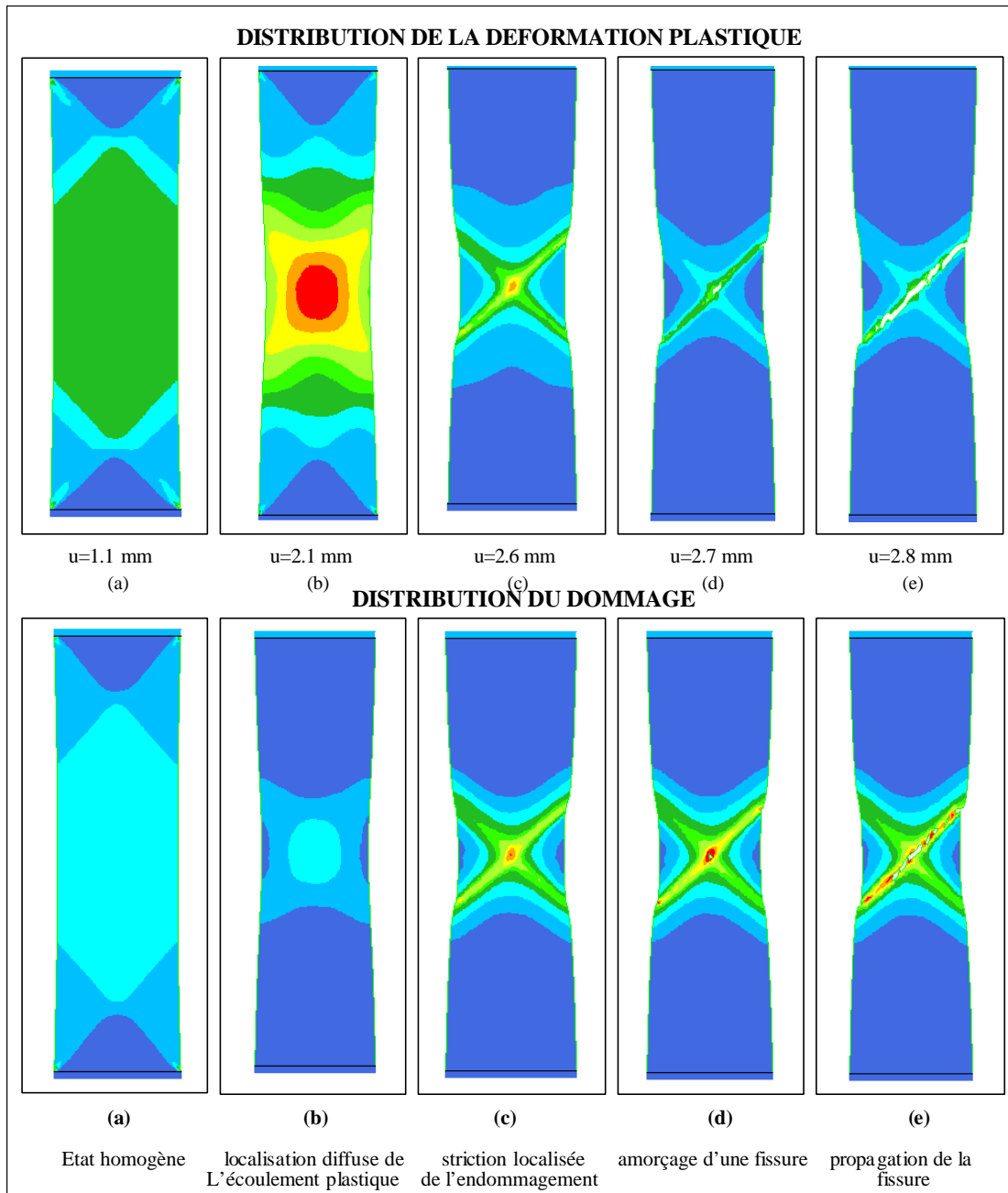


Figure 3.4 : Principales étapes d'évolution du dommage et de la déformation plastique dans une plaque en déformation plane

On note que ce calcul couplé reproduit fidèlement les différentes étapes de la rupture de l'éprouvette. En particulier l'état de déformation et d'endommagement commence par être très homogène dans la partie centrale de l'éprouvette (Figure 3.4 (a)) pour un déplacement $u=1.1$ mm. Ensuite pour un déplacement $u=2.1$ mm on observe le début de la striction diffuse (Figure 3.4 (b)). La striction localisée apparaît clairement sur la Figure 3.4 (c) où l'on remarque la localisation dans la bande de cisaillement suivant la première bissectrice pour un déplacement $u=2.6$ mm.

L'amorçage d'une fissure macroscopique apparaît à l'intersection des deux bandes de cisaillement pour $u=2.7$ mm (Figure 3.4 (d)). Celle-ci se propage dans les deux sens de la

même bande de cisaillement jusqu'à la rupture finale de l'éprouvette pour $u = 2.8$ mm (Figure 3.4 (e)).

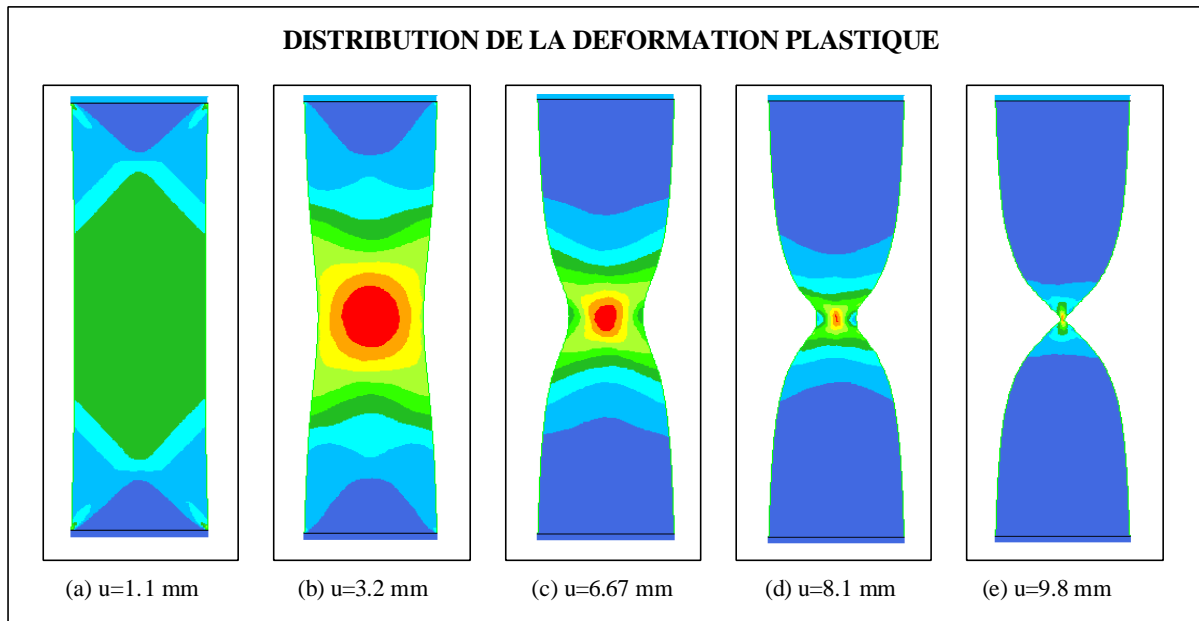


Figure 3.5 : Distribution de la déformation plastique lors d'un calcul découplé

Passons maintenant au calcul non couplé dont les résultats sont exposés sur la Figure 3.5 en terme d'isovaleurs des déformations plastiques. De cette figure on note clairement une différence notable avec le calcul couplé concernant la striction localisée ainsi que la rupture. En effet le calcul non couplé ne capte pas du tout les bandes de cisaillement (Figure 3.5 (c), (d) et (e)). La localisation est semblable à celle observée dans une éprouvette cylindrique ce qui n'est pas du tout acceptable pour ce cas de l'éprouvette en déformation plane. On en conclut donc que le couplage comportement-endommagement est capable de modéliser la localisation de la déformation et de l'endommagement dans une éprouvette et donc dans une structure mécanique quelconque.

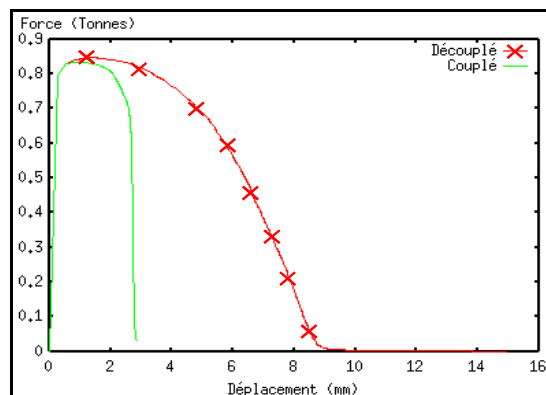


Figure 3.6 : Courbes globales Force/Déplacement calcul Couplé/Découplé

Sur la Figure 3.6 on peut observer que les deux courbes globales force/déplacement chutent ceci étant lié à la réduction de section, mais la chute est accentuée dans le cas d'un calcul

couplé dû au couplage avec l'endommagement. Dans le cas du calcul non couplé la force diminue doucement pour tendre vers zéro, ceci étant causé par la striction observée sur la Figure 3.5 (c), (d) et (e). Ceci est largement confirmé par les isovaleurs de l'endommagement présentées en Figure 3.7. Nous rappellerons qu'à l'intérieur de ces zones « endommagées » les contraintes sont maximales et la rigidité y est intacte.

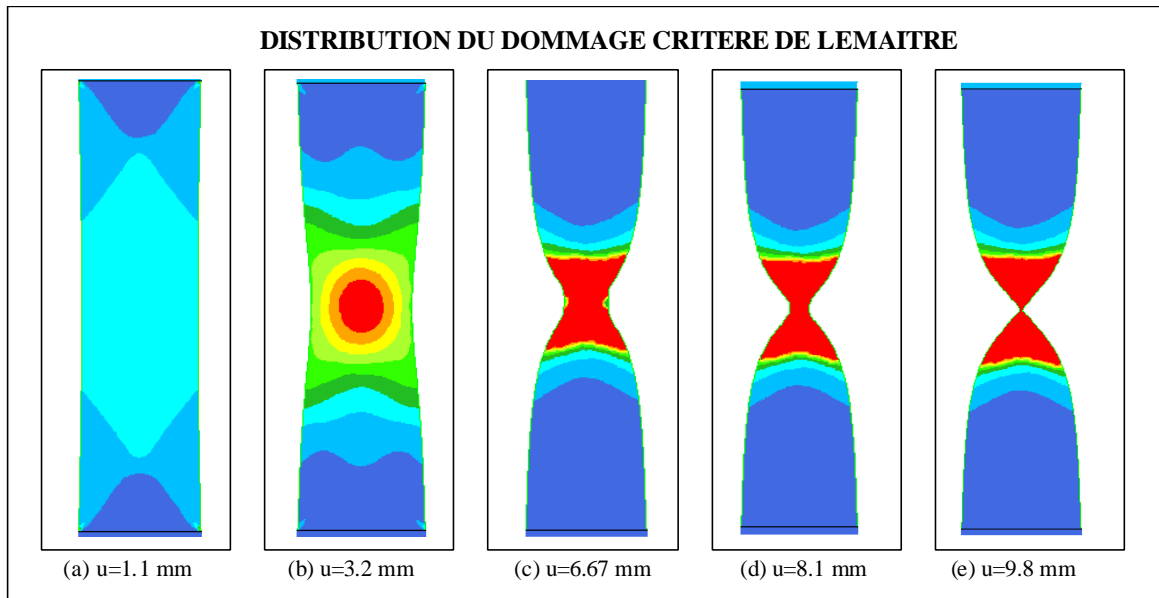


Figure 3.7 : Distribution du dommage lors d'un calcul découplé avec le critère de Lemaitre

Ceci prouve indiscutablement qu'un calcul découplé ne capte pas le bon mode de localisation et ne peut donc pas prétendre modéliser la rupture.

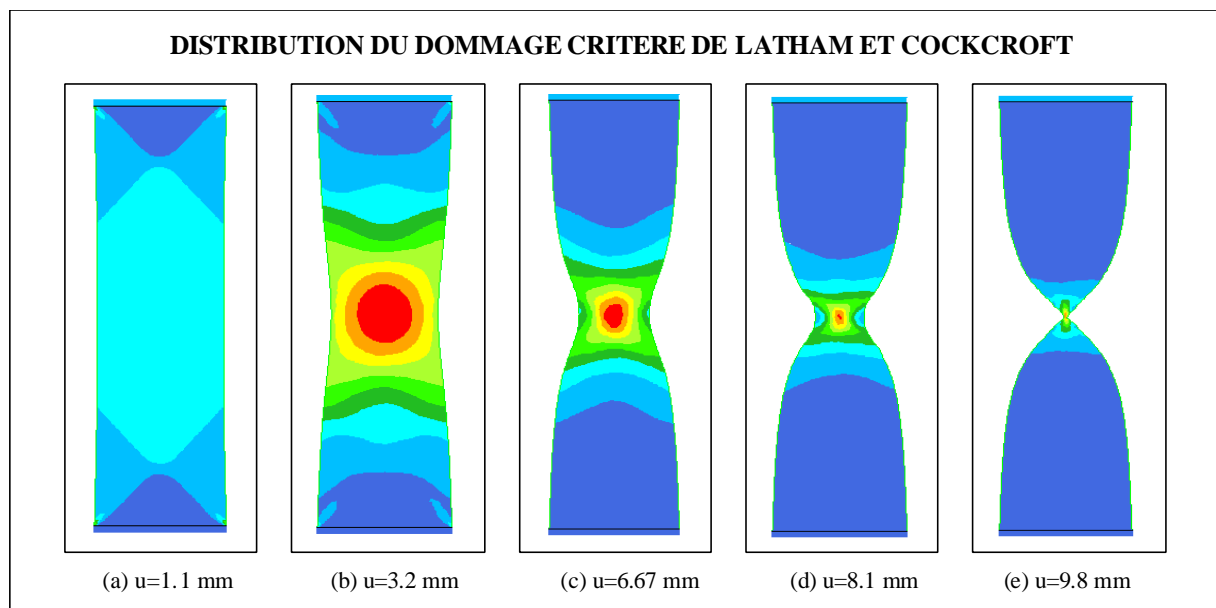


Figure 3.8 : Distribution du dommage lors d'un calcul découplé avec le critère de Latham et Cockcroft

Enfin nous avons voulu confronter les résultats de localisation de dommage obtenus avec un critère disponible dans les logiciels Forge2[®] et Forge3[®] à savoir le critère de Latham et Cockcroft [LATHAM68] qui définit l'endommagement sous la forme:

$$D_{\text{crit}} = \int_0^{\varepsilon_{\text{eq}}} \sigma_I d\varepsilon_{\text{eq}} \quad (3.2)$$

Cet endommagement est calculé en post-traitement sans couplage comportement-endommagement.

Sur la Figure 3.8, nous remarquons en premier lieu que la localisation du dommage avec ce critère, gouverné par la contrainte principale maximum et la déformation plastique cumulée, suit quasiment la déformation plastique. On obtient un résultat similaire à notre modèle en configuration non couplée (Figure 3.7). Cela nous conduit à éviter ce genre de modélisation qui néglige totalement les effets de l'endommagement sur les autres champs mécaniques. Ceci dit, nous garderons la possibilité de comparer notre modélisation en calcul couplé avec la modélisation en calcul non couplé à chaque fois qu'il sera utile de dénoncer le non réalisme de ces modèles non « rigoureusement » couplés. De ce fait nous utiliserons toujours un modèle couplé comportement-endommagement avec de temps à autre quelques calculs découplés pour montrer les différences fondamentales entre ces deux calculs.

Enfin nous allons étudier ce même essai de traction mais traité avec deux couplages comportement/endommagement, le couplage « fort » et le couplage « faible ». La formulation de ces approches ainsi que les différences majeures qui en résultent sont données et développées en détail aux chapitres 1 et 2.

L'éprouvette utilisée est celle de la Figure 3.3, le matériau utilisé étant le matériau **B** du §3.2.2.

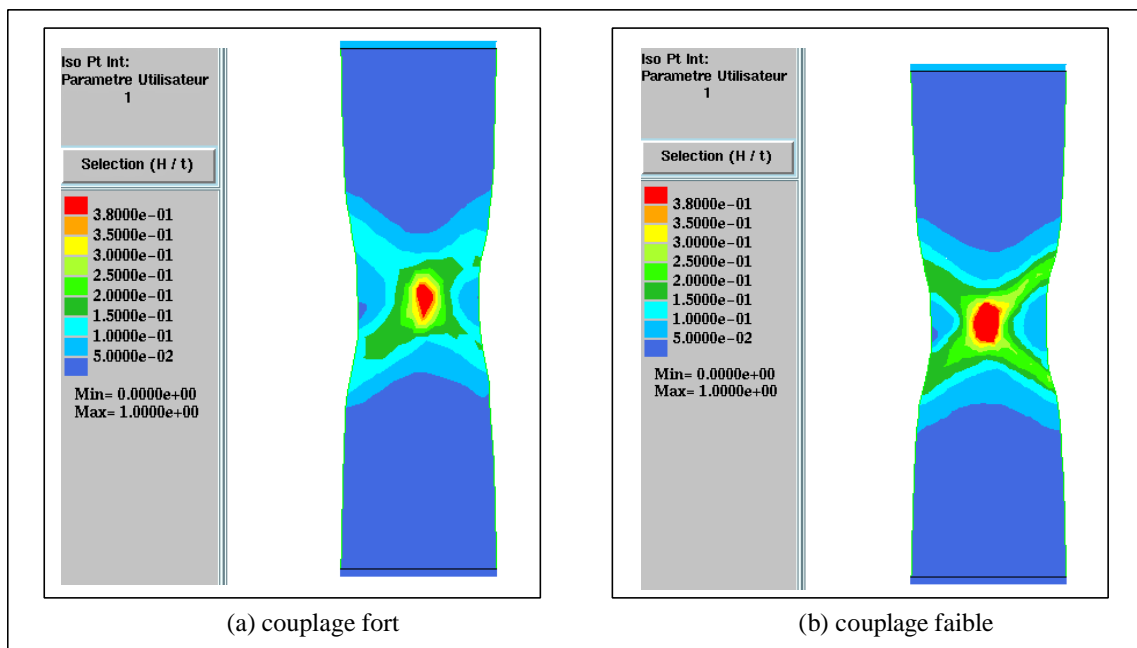


Figure 3.9 : Isovaleurs du dommage pour un couplage fort (a) et faible (b) à $u=2.8\text{mm}$

Les résultats obtenus sont exposés sur la Figure 3.9 en termes d'isovaleurs d'endommagement et sur la Figure 3.10 en terme d'évolution de la contrainte et de l'endommagement en fonction de la déformation plastique cumulée. La différence entre les deux types de couplage est très faible et se manifeste macroscopiquement dans le stade d'adoucissement i.e. après la localisation diffuse (c.f. Figure 3.9). On note également une différence sur les courbes contrainte/déformation et dommage/déformation (Figure 3.10). Cette différence est sensible pendant le stade d'adoucissement et conduit à une ductilité de 72% pour le couplage fort contre 78% pour le couplage faible. Ceci est confirmé par les courbes globales force/déplacement (Figure 3.11) qui montrent une petite différence dans le stade d'adoucissement.

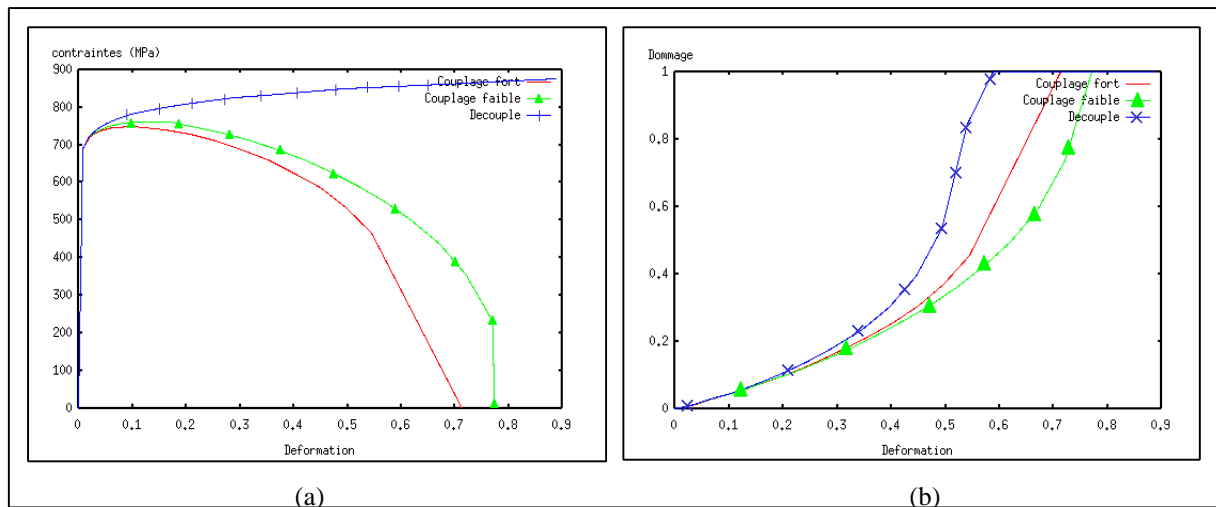


Figure 3.10 : Comparaison des réponses locales couplage fort, faible et découplé, Contraintes/Déformation (a), Endommagement/Déformation (b)

Nous concluons donc à une faible différence entre le couplage fort et le couplage faible [NESNAS00]. Cette différence se situe au niveau du stade « post-bifurcatoire » à l'endroit où l'unicité de la solution n'est de toute façon pas garantie avec toute formulation locale.

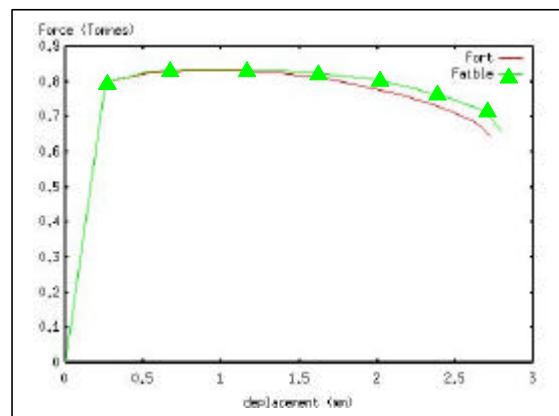


Figure 3.11 : Comparaison des réponses globales Force/Déplacement pour un calcul couplé et découplé

Nous allons maintenant étudier l'influence de la discrétisation géométrique sur la solution obtenue par éléments finis. Pour cela nous considérerons une éprouvette axisymétrique, le matériau utilisé est le matériau **B** du § 3.2.2, sa géométrie est donnée par la Figure 3.12.

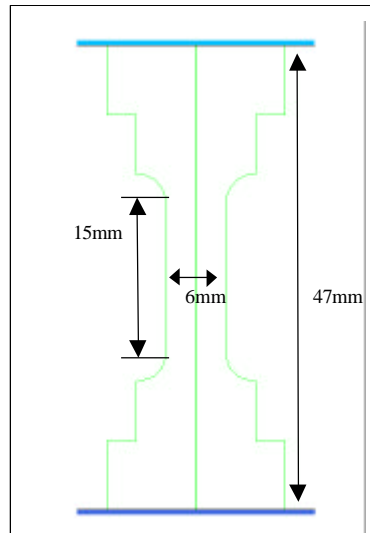


Figure 3.12 : Géométrie de l'éprouvette axisymétrique

La Figure 3.13 montre les cinq maillages (relativement réguliers) utilisés pour discrétiser régulièrement l'éprouvette axisymétrique avec $\Delta x = 1.3, 0.8, 0.7, 0.45$ et 0.28 mm pour le plus fin.

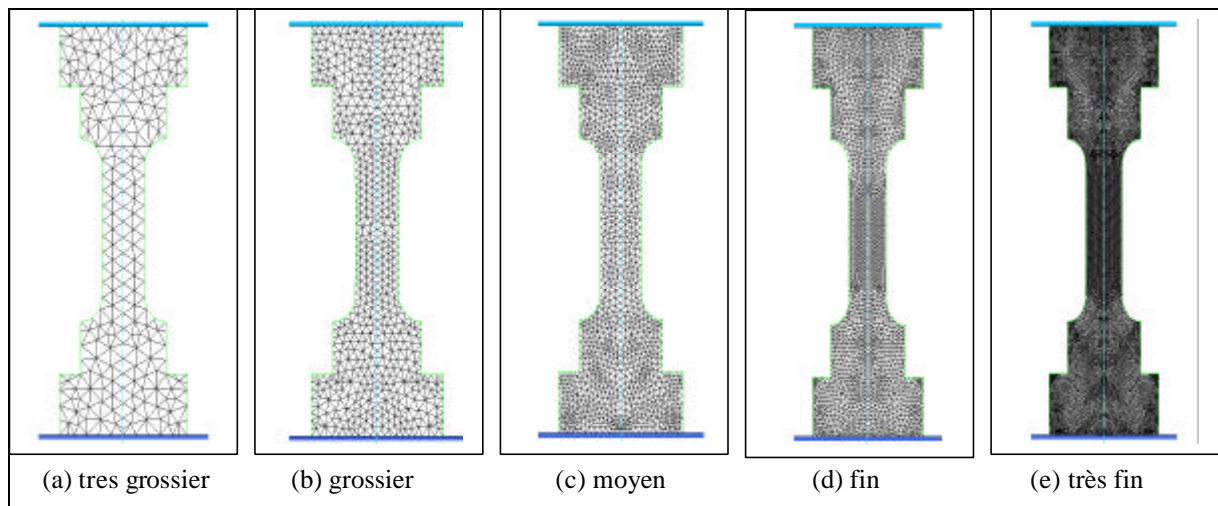


Figure 3.13 : Différents maillages utilisés

Les résultats sont exposés en Figure 3.14 et Figure 3.15 où l'on note clairement :

- Une indépendance de la solution vis-à-vis de la finesse du maillage pour les calculs non couplés.
- Une dépendance de la solution vis-à-vis du maillage dans la phase finale adoucissante par effet d'endommagement pour le cas couplé.

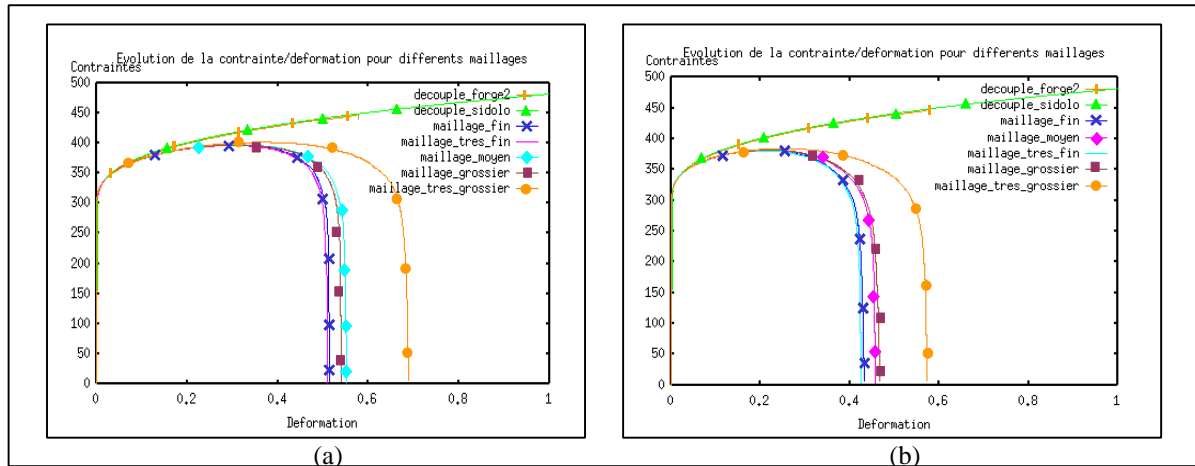


Figure 3.14 : Courbes Contrainte/Déformation pour différents maillages, modèle de Lemaitre (a) et linéaire (b)

Cette dépendance de la solution vis-à-vis du maillage, au-delà d'un point dit de « bifurcation », est pour le moins attendue et bien connue pour les problèmes de couplage comportement-endommagement. Elle est confirmée sur la réponse globale force/déplacement (Figure 3.15) où l'existence d'un point de bifurcation est clairement mise en évidence. On note que le point de bifurcation est obtenu pour un déplacement $u=2.4\text{mm}$ pour une force $F \approx 900\text{ Kg}$. Celui-ci est situé bien après le point maximum de la courbe ($u=1\text{ mm}$ et $F \approx 970\text{ Kg}$). Ces résultats ont été confirmés sur des éprouvettes de traction (déformation plane).

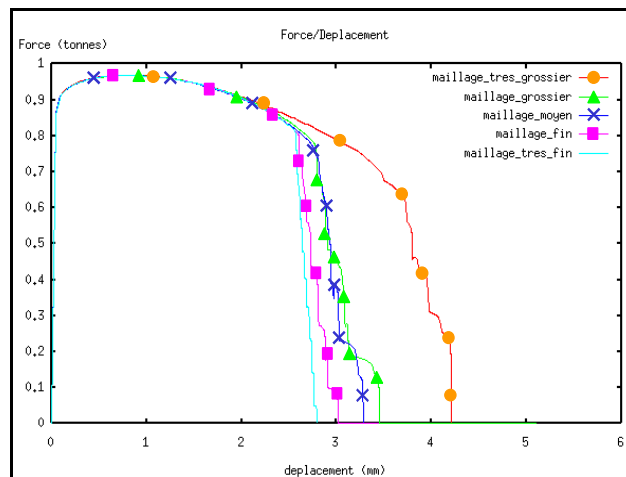


Figure 3.15 : Force/Déplacement pour différents maillages (matériau B1)

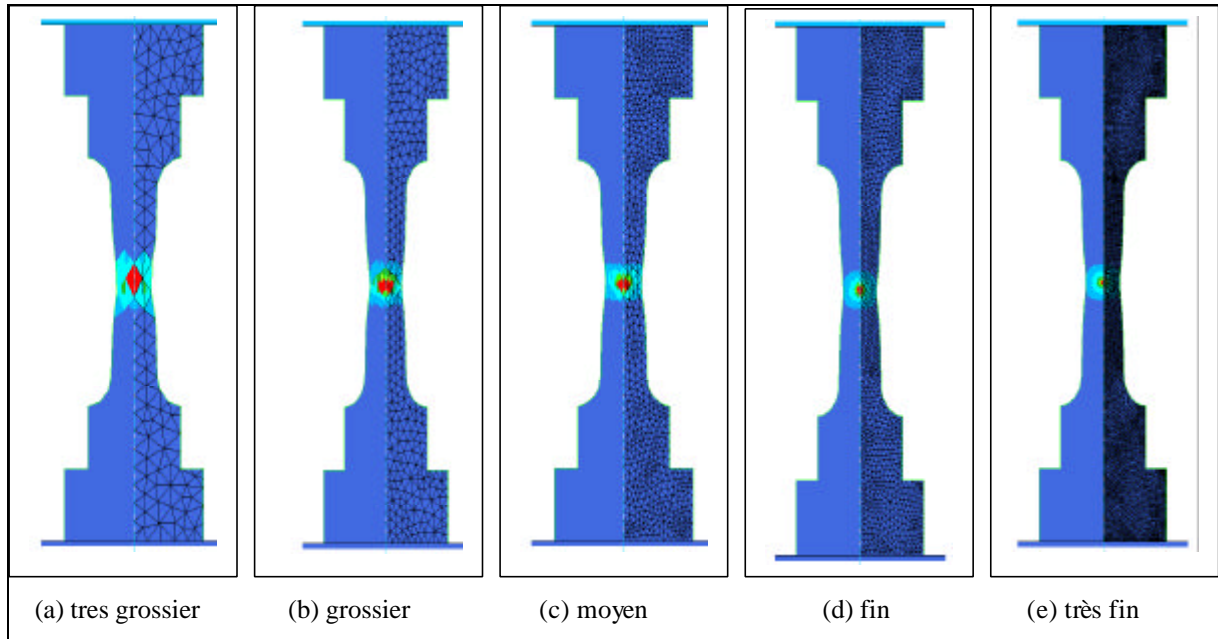


Figure 3.16 : Isovaleurs du dommage pour les différents maillages utilisés pour un déplacement $u=2.7\text{mm}$ mini

La Figure 3.16 montre l'influence du maillage sur la localisation de l'endommagement. On note que quel que soit le maillage, l'endommagement ainsi que l'amorçage de la « fissure » sont identiques. Cependant le volume de la zone totalement endommagée est d'autant plus petit que le maillage est fin. Ceci explique pourquoi au-delà du point de bifurcation la vitesse de l'endommagement est d'autant plus élevée que le maillage est fin. En fait la « fissure » ou la zone totalement endommagée localise toujours dans une rangée d'éléments pour toute formulation locale ([SAANOUNI88, SHEN02]).

Cette dépendance vis-à-vis du maillage est donc inhérente à toute formulation locale. La solution rigoureuse de ce problème passe par l'utilisation d'une formulation non locale ou du gradient supérieur (Shen et Sannouni [SHEN02]). Dans ce travail nous n'aborderons pas cet aspect et nous ne conserverons qu'une approche tout à fait locale mais en « calant » la taille moyenne du maillage pour chaque matériau sur la courbe force/déplacement d'un essai de traction comme on le verra un peu plus tard.

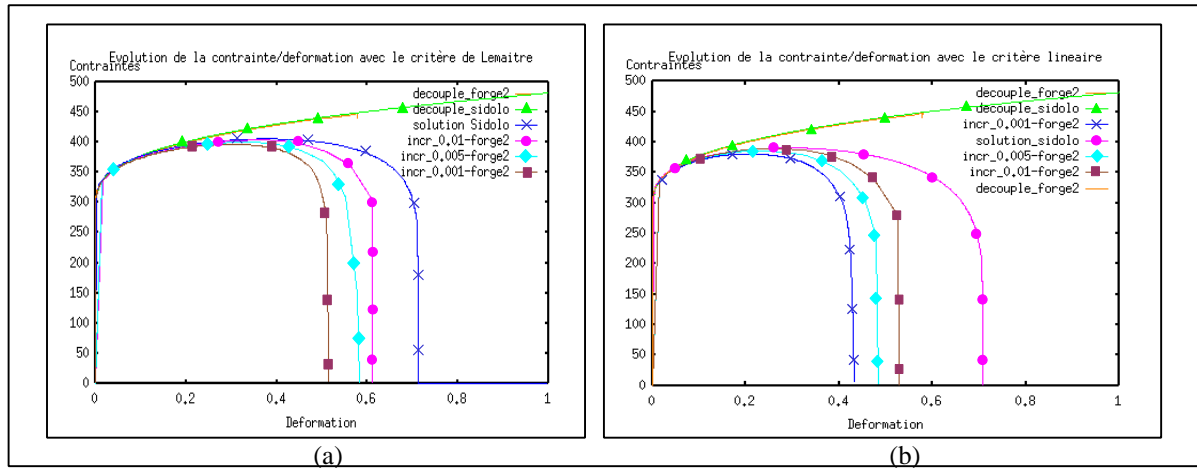


Figure 3.17 : Courbes Contrainte/Déformation pour différents incréments de déformation modèle de Lemaitre (a) et linéaire (b)

Pour compléter cette étude nous avons examiné, pour un même maillage, l'influence de la discrétisation temporelle sur la solution obtenue. La Figure 3.17 rassemble les résultats obtenus avec le matériau **B**, la Figure 3.18 rassemblant les résultats obtenus avec le matériau **A** moins ductile et ce pour les deux critères avec conjointement des calculs couplés et découplés. De ces figures on tire les conclusions suivantes :

- *Il n'y a pas d'influence de la discrétisation temporelle sur la solution des calculs non couplés.
- *Il existe bien un point de bifurcation au-delà duquel la solution est très dépendante de la taille du pas de charge (ou de temps). Contrairement à la discrétisation spatiale, ce point se situe un peu avant le maximum de la courbe de traction pour $\epsilon=8\%$ et $\sigma=350$ MPa concernant le matériau **A**, et $\epsilon=20\%$ avec $\sigma=390$ MPa concernant le matériau **B**.
- *Plus la ductilité est élevée plus la solution est influencée par la discrétisation temporelle.

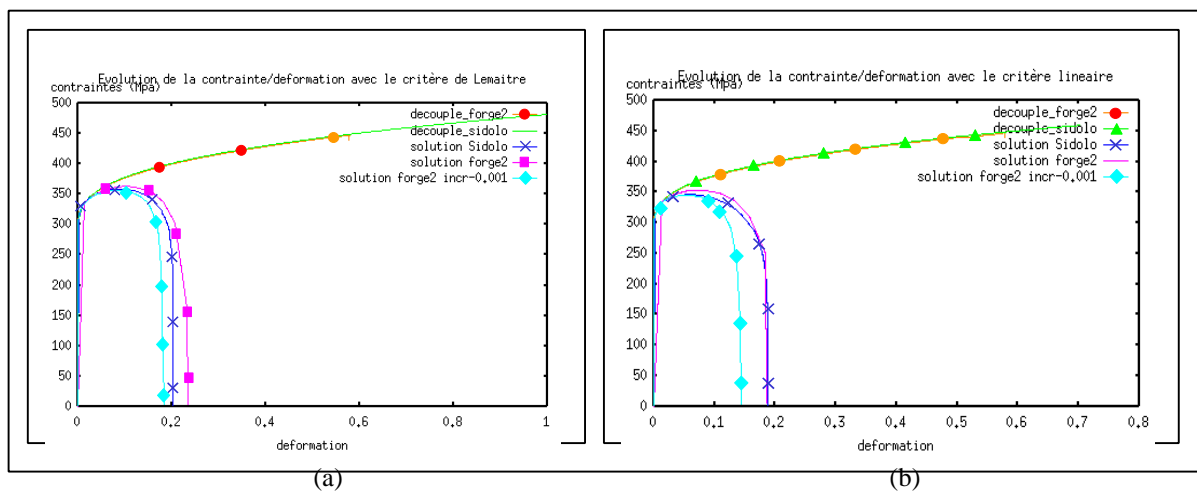


Figure 3.18 : Courbes Contrainte/Déformation pour le matériau peu ductile avec le modèle de Lemaitre (a) et linéaire (b)

3.3 VALIDATION SUR DES EXEMPLES SIMPLES

3.3.1 Exemples de mise en forme à froid

3.3.1.1 Cas de la plaque en traction (2D)

3.3.1.1.a Etude de convergence

On se propose maintenant de valider nos modèles de couplage comportement-endommagement, en comparant, pour un essai de traction plan, différents matériaux ayant des ductilités de 10, 20, 35, 50, 70, 85, 100% et ce pour les deux critères avec le même maillage. On pourra alors discuter des différentes réponses obtenues. La Figure 3.19 montre l'ensemble des réponses locales (courbes contraintes/déformations) pour les deux critères et pour divers « matériaux » qui diffèrent par leur ductilité. La géométrie de l'éprouvette ainsi que les conditions aux limites du problème sont référencées sur la Figure 3.3.

La rhéologie des matériaux est celle utilisée pour les matériaux A et B du § 3.2.2. Les paramètres d'endommagement sont donnés par :

Les paramètres s et b sont communs à tous les matériaux pour les deux critères, à savoir :

$s=2.5$, $b=7.5$

On fera varier la ductilité du matériau en jouant sur le paramètre S :

-Matériau de ductilité 10% :

Critère linéaire $S=190$ MPa

Critère Lemaitre $S=0.28$ MPa,

-Matériau de ductilité 20% :

Critère linéaire $S=260$ MPa

Critère Lemaitre $S=0.42$ MPa,

-Matériau de ductilité 35% :

Critère linéaire $S=350$ MPa

Critère Lemaitre $S=0.57$ MPa,

-Matériau de ductilité 50% :

Critère linéaire $S=420$ MPa

Critère Lemaitre $S=0.71$ MPa,

-Matériau de ductilité 70% :

Critère linéaire $S=500$ MPa

Critère Lemaitre $S=0.88$ MPa,

-Matériau de ductilité 85% :

Critère linéaire $S=550$ MPa

Critère Lemaitre $S=0.983$ MPa,

-Matériau de ductilité 100% :

Critère linéaire $S=594$ MPa

Critère Lemaitre $S=1.076$ MPa,

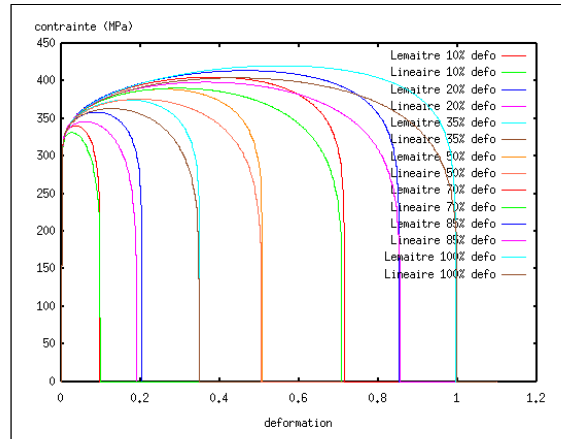


Figure 3.19 : Courbes Contrainte/Déformation : comparaison Lemaitre/Linéaire

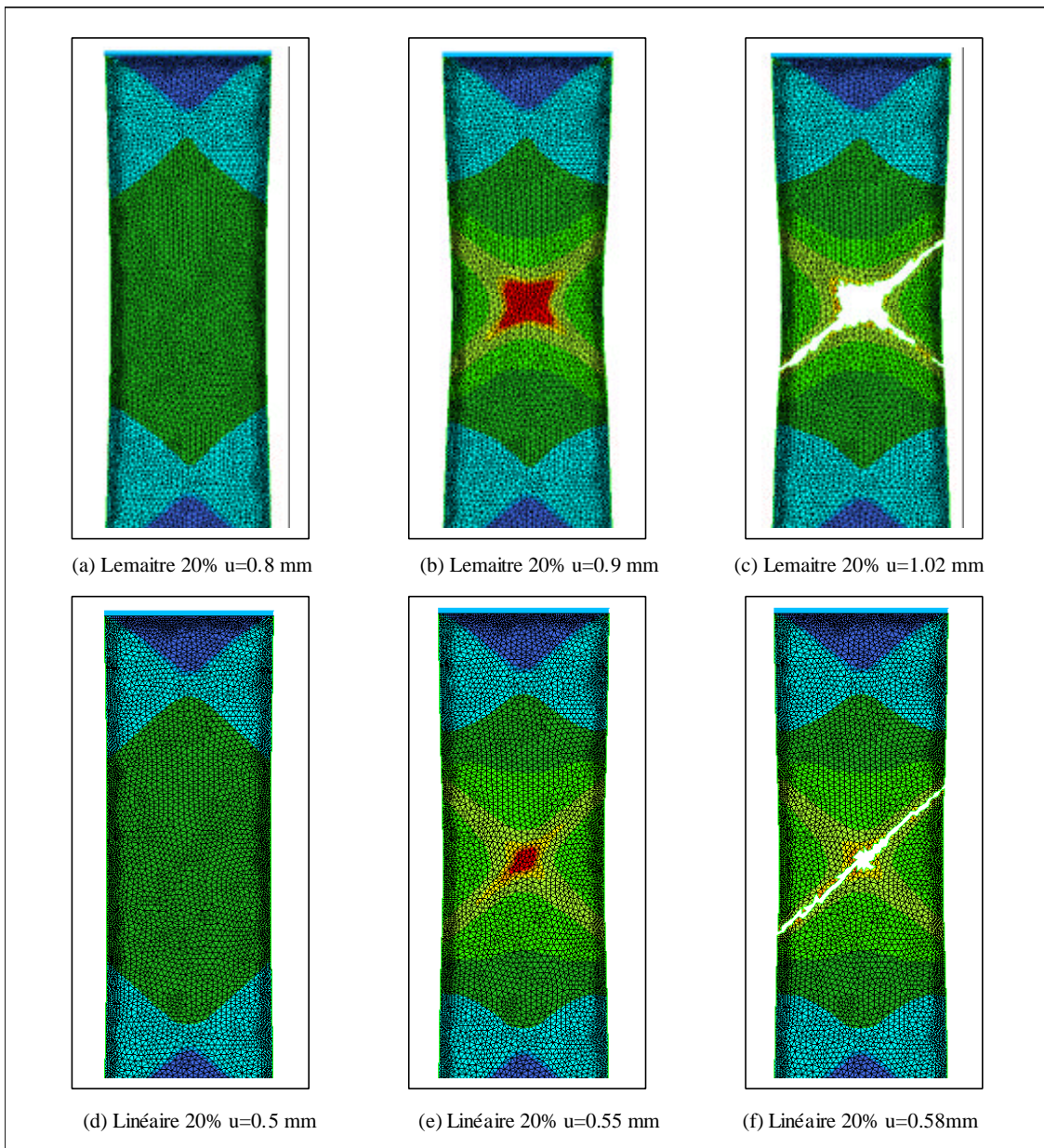


Figure 3.20 : Comparaison critère Lemaitre/Linéaire ductilité=20%

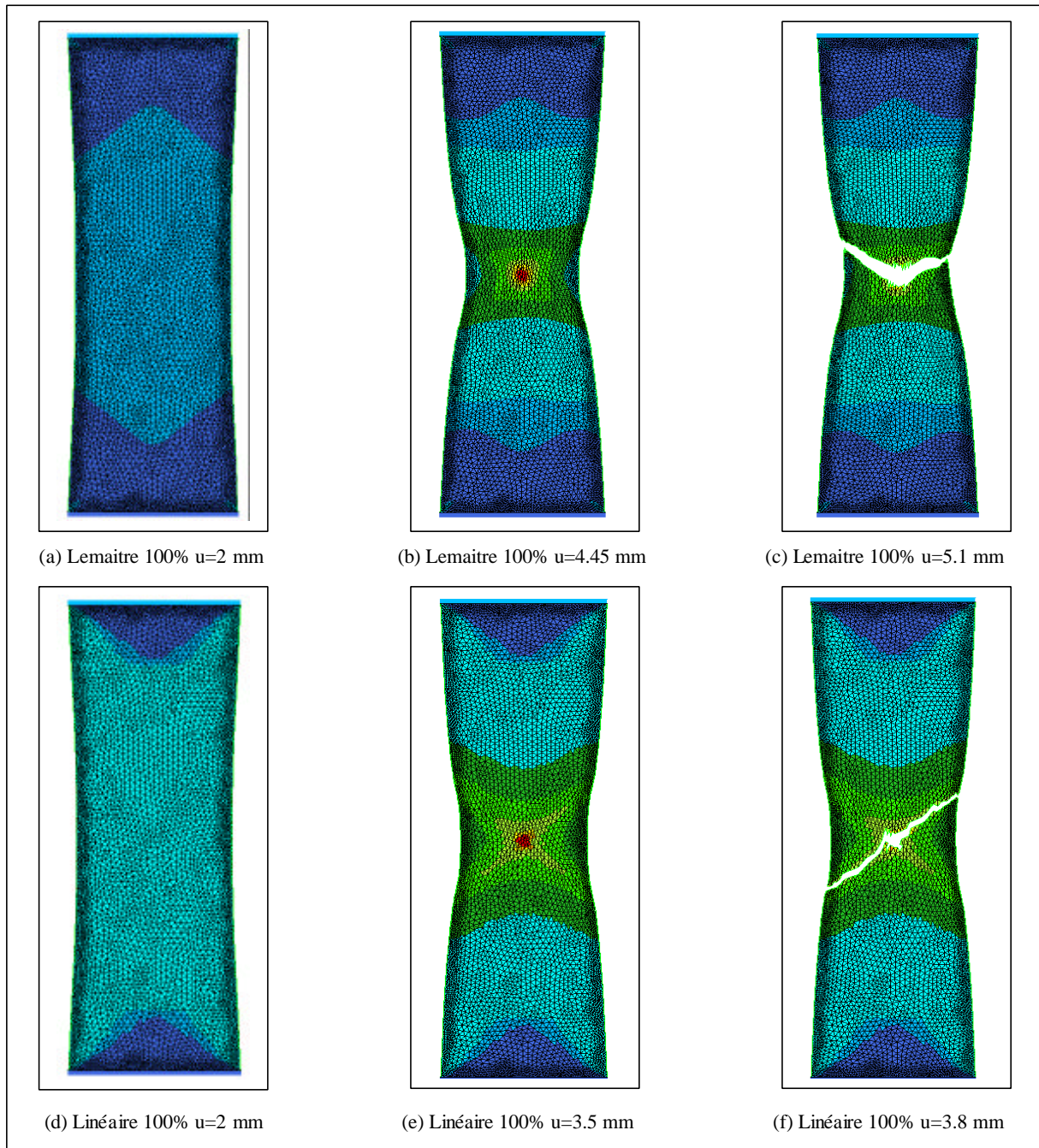


Figure 3.21 : Comparaison critère Lemaitre/Lineaire ductilité =100%

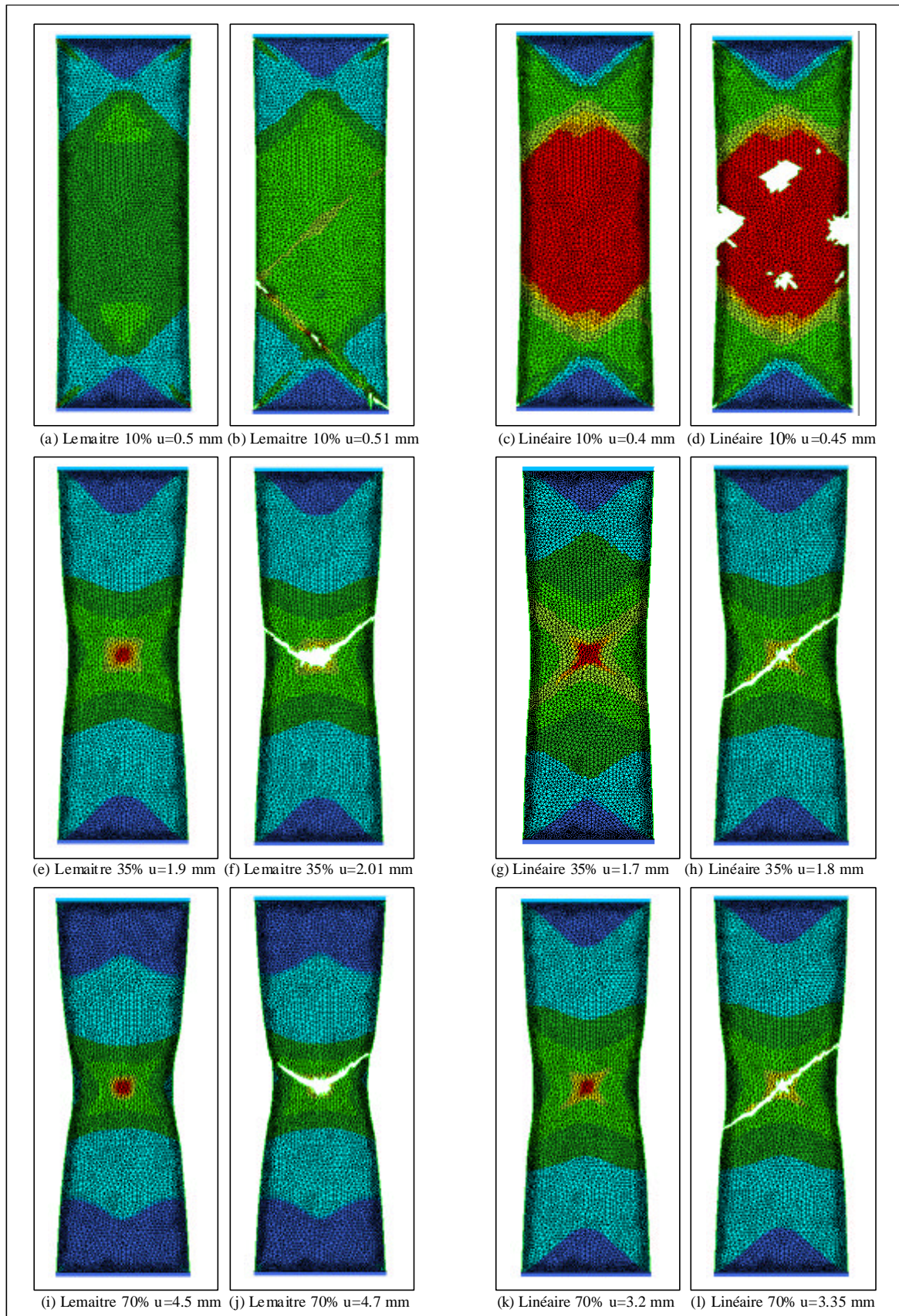


Figure 3.22 : Comparaison critère Lemaitre/Lineaire pour différentes ductilités

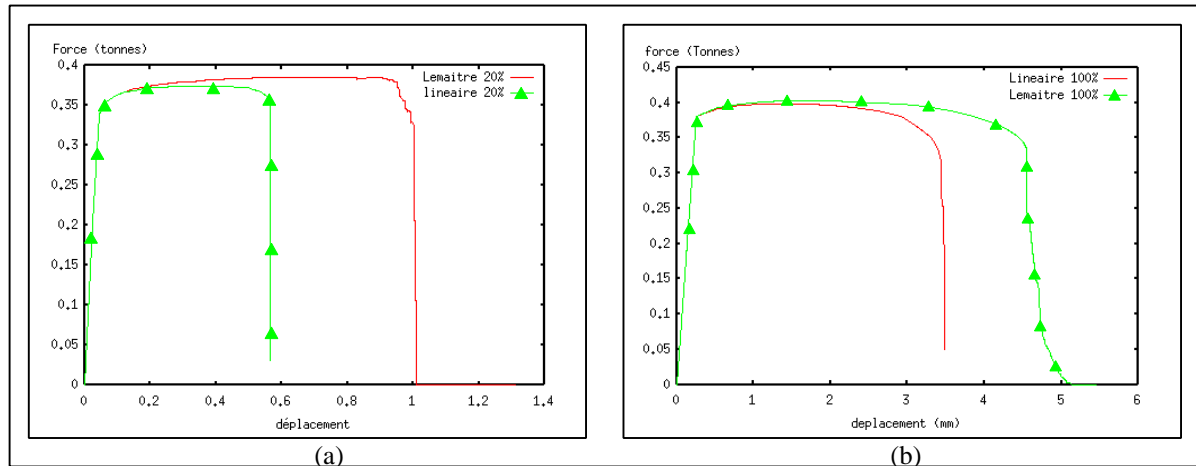


Figure 3.23 : Courbes réponses globales Force/Déplacement pour les deux critères ductilité=20% (a) et ductilité=100% (b)

Nous avons voulu comparer à travers ces différentes simulations, les similarités et les différences majeures qui subsistent entre les deux critères d'endommagement étudiés à savoir le critère de Lemaitre et le critère linéaire. Cette comparaison a été effectuée avec la même éprouvette, maillée exactement de la même manière pour tous les essais, le chargement étant identique afin de ne pas fausser nos interprétations. De plus nous avons étudié ces critères pour divers matériaux « virtuels » possédant la même rhéologie mais pas la même ductilité (celle-ci variant de 10% à 100%). La première constatation que l'on peut faire est que pour une ductilité faible (10%, Figure 3.22 (a, b, c, d)) nous obtenons une réponse sensiblement différente de celles obtenues avec les matériaux dont la ductilité dépasse 10% et cela quel que soit le critère utilisé. Pour le critère de Lemaitre la fissure s'initie au bord de l'éprouvette pour se propager sur une bande à 45° par rapport au sens de chargement, alors que pour le critère linéaire on observe une augmentation brutale de l'endommagement au cœur de l'éprouvette qui conduit à une destruction massive d'éléments amenant à la ruine de l'éprouvette. Ceci peut paraître logique tant la ductilité du matériau est faible, en effet ces critères étant des critères de rupture ductile, il n'est donc pas étonnant de constater qu'ils ne sont pas appropriés à ce type de matériau.

Si nous nous attardons sur la réponse obtenue pour les différentes ductilités nous distinguons que la localisation de l'endommagement est toujours caractérisée par une croix au centre de l'éprouvette, l'endommagement s'initiant toujours au centre puis se propageant vers les bords suivant des bandes de cisaillement à 45° environ et ce pour les deux critères étudiés. Nous avons voulu mettre l'accent sur la localisation de l'endommagement lors de l'incrément précédent la première destruction d'élément afin de montrer l'isotropie du dommage, et ainsi d'affirmer que la direction de propagation de l'endommagement suivant une direction ou une autre était surtout liée à des problèmes numériques, de maillage...

Il apparaît que pour le critère linéaire la propagation de fissure s'effectue toujours de la même façon et dans la même direction alors que pour le critère de Lemaitre la direction de propagation varie selon la ductilité du matériau. Afin de confirmer ces hypothèses nous avons modifié le maillage de l'éprouvette afin de prouver que pour le critère linéaire la réponse est

sensiblement la même en terme de propagation de fissure mais différente pour ce qui est du critère de Lemaitre. On peut donc affirmer pour cet essai de traction plan que la localisation de l'endommagement est la même pour les deux critères. Néanmoins on peut constater une différence entre les simulations pour deux critères venant de la direction de propagation de la fissure. On pourrait faire un parallèle avec la physique en postulant que des inclusions dans la matière gouvernant la direction de la fissure lors d'un essai de traction (ici les instabilités numériques) forcent une solution bien que le calcul soit totalement isotrope. on peut remarquer sur les courbes de la Figure 3.23 que quel que soit la ductilité utilisée la réponse globale en terme de force/déplacement est différente pour les deux critères. Lorsque l'on utilise le critère linéaire la rupture de l'éprouvette intervient toujours plus tôt qu'en utilisant le critère de Lemaitre. Ceci peut s'expliquer par le rôle de la contrainte principale maximum qui intervient dans le critère linéaire.

3.3.1.2 Cas de l'éprouvette cylindrique (2D/3D)

On se propose ici d'exposer le même essai que précédemment mais cette fois avec une éprouvette cylindrique que l'on traitera en axisymétrique en 2D puis en 3D. Le matériau utilisé ici est le matériau B1 du § 3.2.2, le maillage 2D utilisé ici est le maillage fin proposé sur la Figure 3.13 (d). Le maillage 3D est proposé sur la Figure 3.24, le nombre d'éléments relatif à cette éprouvette est de 48920. La géométrie de l'éprouvette est donnée par la Figure 3.12.

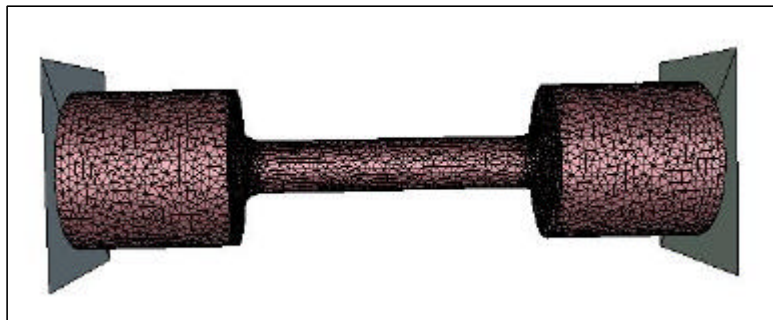


Figure 3.24 : Maillage 3D de l'éprouvette cylindrique

Il est à noter que la géométrie du cas 3D diffère un peu du cas 2D Axisymétrique mais la partie utile ainsi que le diamètre utile reste inchangé dans les deux cas.

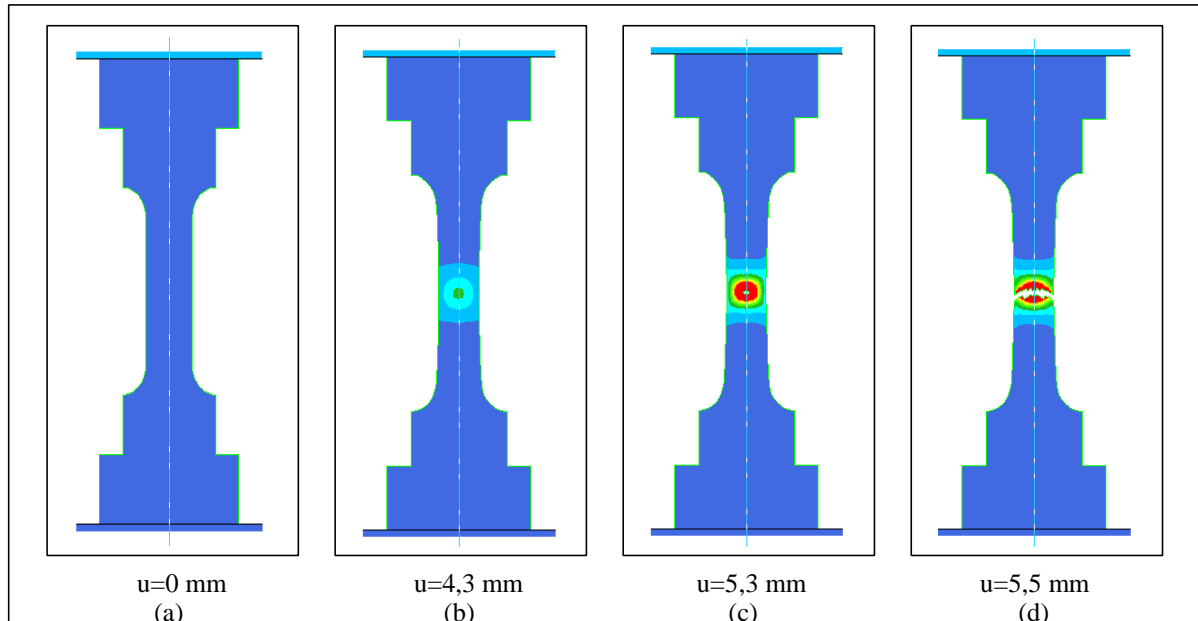


Figure 3.25 : Essai de traction 2D axisymétrique : rupture ductile

Sur la Figure 3.25 on peut remarquer que la distribution du dommage n'est pas du tout la même que pour un essai de traction plan couplé. En effet, le dommage s'initie au cœur de l'éprouvette puis se propage vers l'extérieur selon une direction orthogonale au sens de traction. On peut ajouter pour être complet qu'on peut apparenter la solution obtenue ci dessus avec l'essai de traction plan découplé au niveau de la localisation du dommage. Nous pouvons également faire les mêmes constatations en 3D :

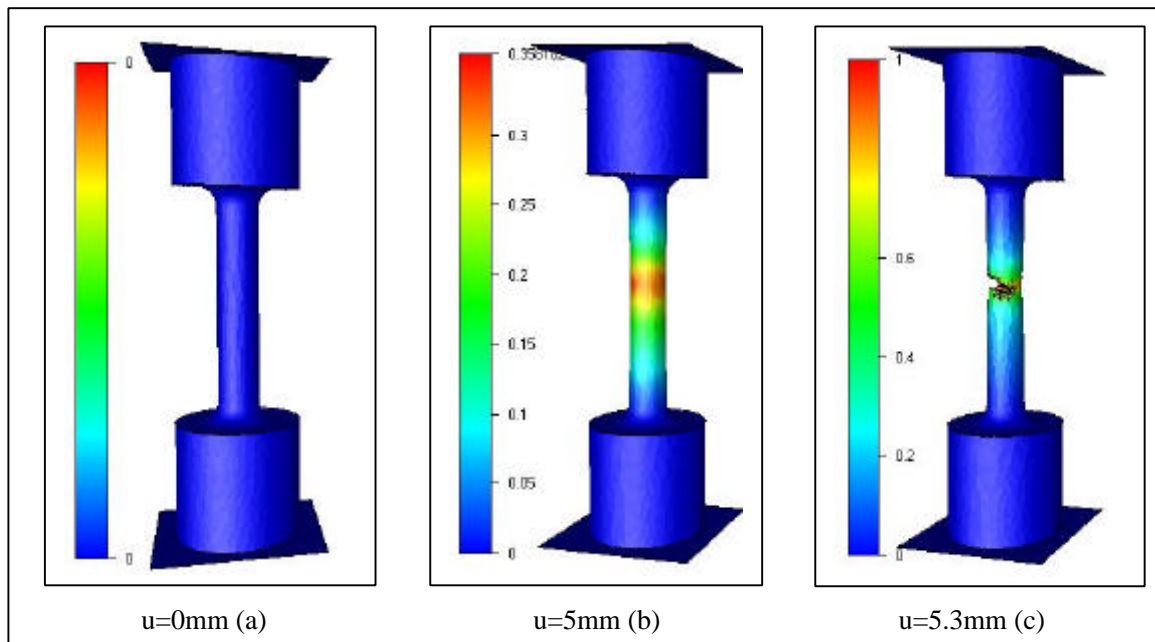


Figure 3.26 : Isovaleurs du dommage sur l'éprouvette en 3D calcul couplé

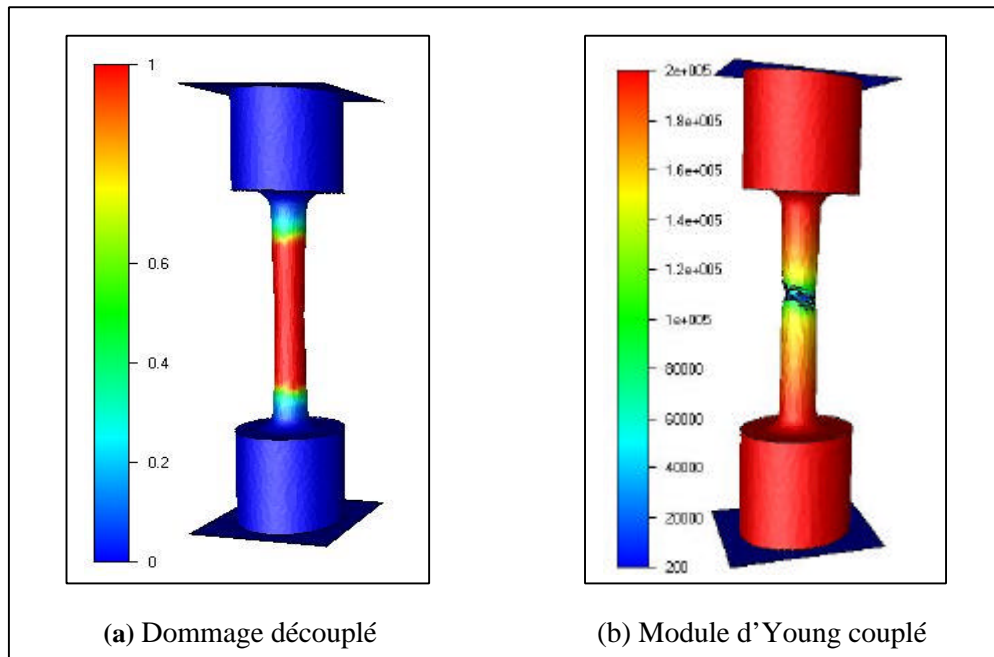


Figure 3.27 : Isovaleurs de dommage dans le cas découplé (a) et du module d'élasticité dans le cas couplé (b)

Comme dans le cas axisymétrique, nous pouvons constater qu'en 3D nous obtenons sensiblement la même distribution du dommage pour un calcul couplé (Figure 3.26). Les mêmes observations sur les propriétés élastiques (Figure 3.27 (b)) et plastiques en 3D et en axisymétrique peuvent être faites. Pour ce qui est de la distribution du dommage dans un calcul découplé on remarque une large bande de dommage (Figure 3.27 (a)) pour le cas 3D qui est aussi décrite pour le cas 2D (non présenté). Ceci montre très nettement l'intérêt et l'utilité du calcul couplé qui décrit correctement les phénomènes rencontrés.

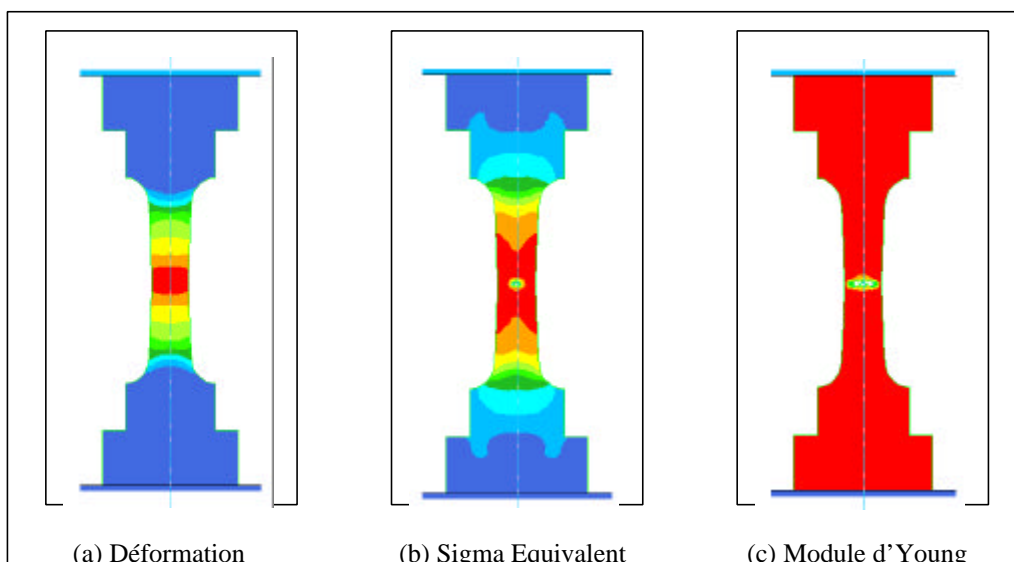


Figure 3.28 : Isovaleurs sur l'essai de traction en axisymétrie

Sur la Figure 3.28 on remarque bien que le dommage et la déformation plastique sont liés (Figure 3.28 (a)) et que la contrainte est nulle (Figure 3.28 (b)) quand le dommage est

maximum ($D=1$). Enfin on peut constater que les propriétés d'élasticité du matériau sont affectées par l'endommagement (Figure 3.28 (c)).

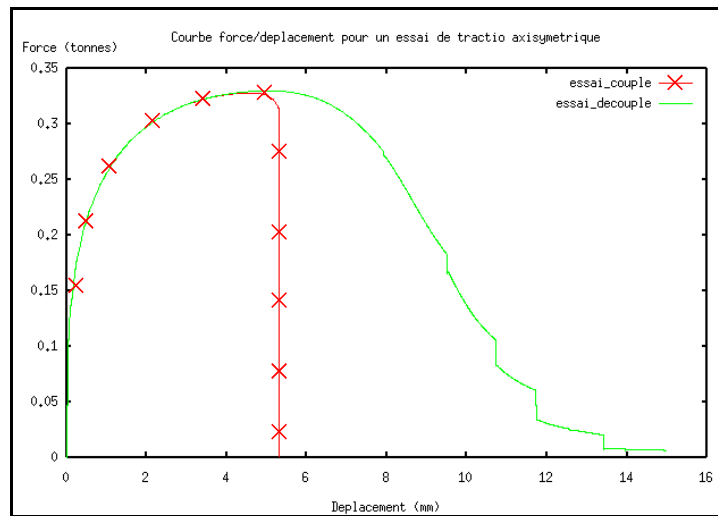


Figure 3.29 : Comparaison couplé/découplé de la réponse globale Force/Déplacement

Sur la Figure 3.29 on peut remarquer que pour un calcul couplé la rupture de l'éprouvette intervient beaucoup plus tôt ($u=6\text{mm}$) que pour le calcul découplé ($u=14\text{mm}$). La chute de la force de traction dans le cas couplé est essentiellement due aux effets de dommage. Pour le cas découplé la chute de la force de forgeage s'explique par la diminution de la section de l'éprouvette (striction).

3.3.1.3 Ecrasement d'un barreau cylindrique infiniment long

Cet exemple consiste en l'écrasement d'un barreau cylindrique infiniment long pressé entre deux plans rigides et parallèles (Figure 3.30 (b)). Nous traiterons également le même cylindre mais avec deux méplats de 30 mm symétriques (Figure 3.30 (a)). L'hypothèse des déformations planes est retenue pour les deux cas.

Le matériau utilisé ici est le matériau « virtuel » **B2** illustré au § 3.2.2. Le modèle de frottement utilisé ici est de type Coulomb avec $\mu=0.12$. Les outils sont supposés parfaitement rigide, l'outil inférieur est fixe et l'outil supérieur est animé d'une vitesse de 1mm/s. Les maillages sont donnés sur la Figure 3.31 (a1) et (b1). La taille de maille est de $\Delta x=0.8$. Le nombre d'éléments pour le cylindre plein est de 5328 et 11250 pour le cylindre avec méplats.

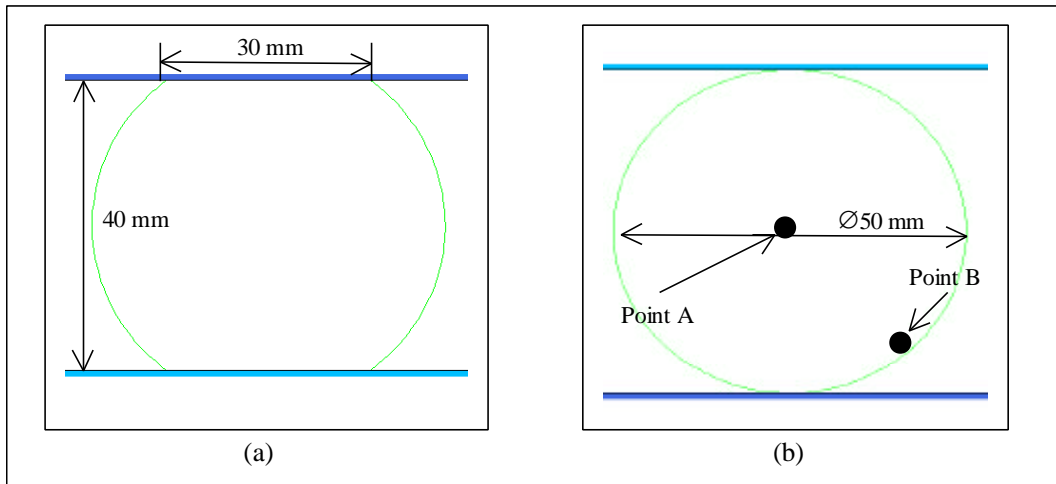


Figure 3.30 : Géométries du cylindre avec deux méplats (a) et du cylindre plein (b)

Les isovaleurs du dommage sont présentées sur la Figure 3.31. On remarque qu'il y a formation d'une croix appelée aussi croix du forgeron [MIELNIECK91] représentant la localisation de la zone plastique et de l'endommagement que ce soit pour le cylindre plein ou tronqué.

Pour ce qui est du cylindre plein on remarque une concentration et une initiation du dommage à l'intersection des deux bandes de cisaillement. La fissure va privilégier une de ces bandes pour se propager du centre du cylindre vers l'extérieur (Figure 3.31 (b3) et (b4)). Le choix d'une bande de prédilection est, dans le cadre d'une formulation locale comme celle utilisée ici, essentiellement lié aux aspects numériques. En effet un autre maillage aurait pu favoriser et propager le dommage dans l'autre bande de cisaillement.

Concernant le cylindre avec méplats, deux fissures s'amorcent sur la même bande près des méplats comme le montre la Figure 3.31 (a3). Ces deux fissures se propagent l'une vers l'autre le long de la bande de cisaillement jusqu'à la rupture finale (Figure 3.31 (a4)).

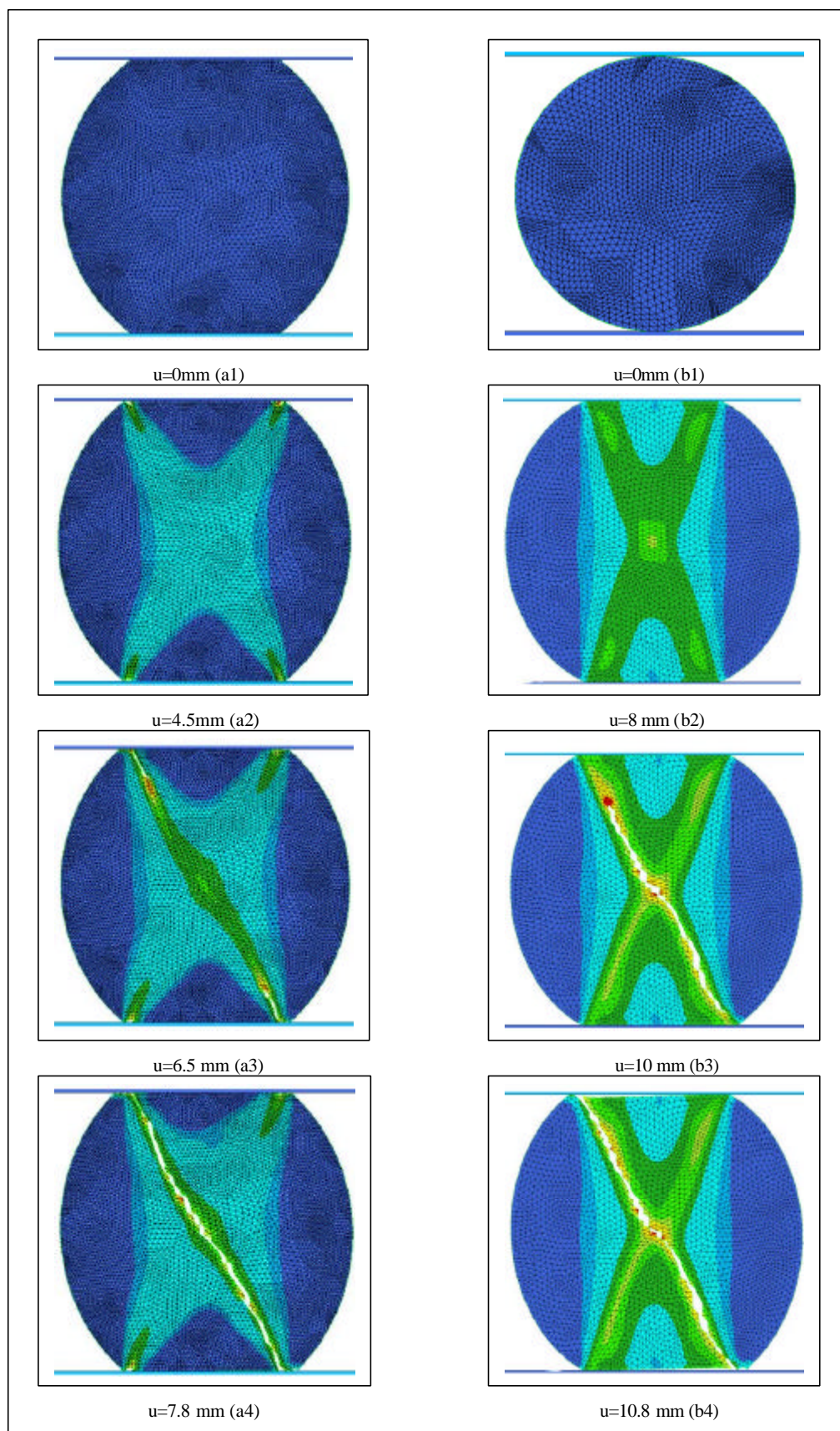


Figure 3.31 : Distribution de l'endommagement pour l'essai brésilien (tronqué (gauche) et plein (droite))

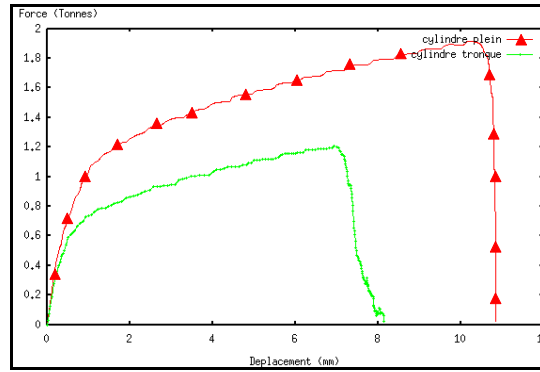


Figure 3.32 : Comparaison des forces globales pour un calcul avec le cylindre plein et le cylindre avec méplats

En examinant les courbes force/déplacement de la Figure 3.32 nous pouvons remarquer que la force nécessaire pour écraser le cylindre est plus importante dans le cas où le cylindre est plein que lorsqu'il est tronqué. En effet, pour le cylindre plein nous avons $F_{\max} = 1.89$ tonnes et la rupture totale est achevée après 10.9 mm de déplacement de l'outil. Pour le cylindre avec méplats nous avons $F_{\max} = 1.21$ tonnes soit 35% de moins et la rupture finale se produit après un déplacement de 8.1 mm soit 25% de moins que pour le cylindre plein.

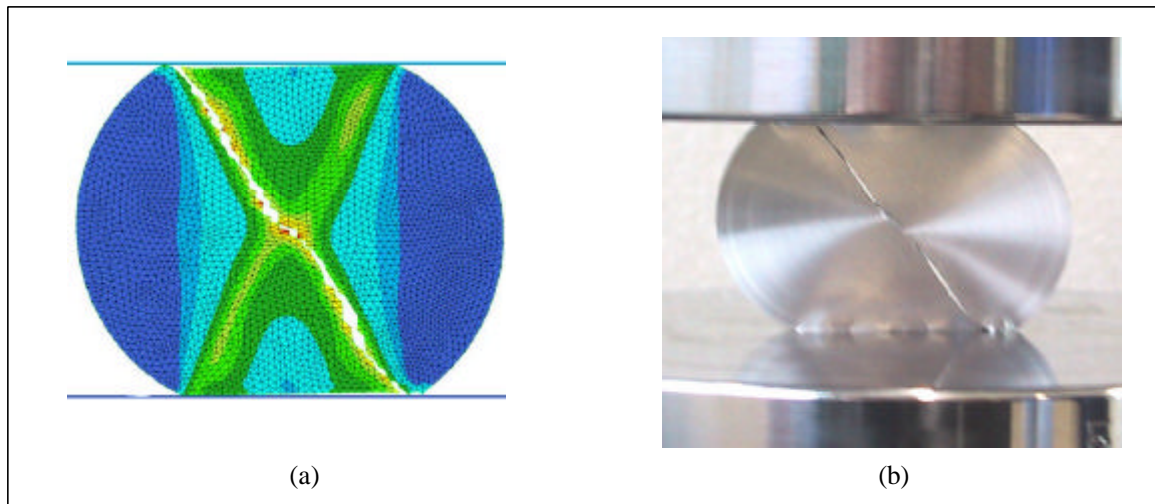


Figure 3.33 : Comparaison calcul (a) et expérience (b) pour le cylindre plein

Finalement sur la Figure 3.33 nous établissons une comparaison qualitative entre nos résultats numériques (Figure 3.33 (a)) et un résultat expérimental (Figure 3.33 (b) Source LASMIS ©) obtenu au Lasmis, où l'on remarque le même faciès de rupture. Cette comparaison qualitative n'a pas la prétention de comparer deux procédés faisant intervenir deux matériaux différents, mais simplement de montrer la pertinence de notre modèle d'endommagement en terme de localisation de la rupture.

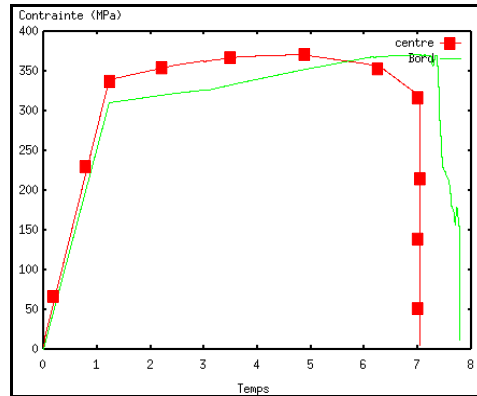


Figure 3.34 : Courbes contraintes/temps pour deux points de la structure

Enfin la Figure 3.34 montre la réponse en contrainte par rapport au temps sur deux points du cylindre plein (point central A et point extérieur B c.f. Figure 3.30). On peut remarquer que le point central s'endommage plus rapidement que le point extérieur. Ceci démontre bien l'initiation du dommage à l'intersection des deux bandes de cisaillement puis la propagation de celui-ci vers l'extrémité de l'une de ces bandes (Figure 3.31 (b2, b3 et b4)).

3.3.2 Exemples de validation numérique du couplage thermomécanique

3.3.2.1 Essai de traction avec prise en compte de la température

Pour valider le couplage thermomécanique en présence d'endommagement on doit résoudre le problème variationnel (2.21). Pour pouvoir introduire les termes d'endommagement dans l'équation de la chaleur nous avons utilisé la version P2-P0 de Forge2[®]. En effet la version P1-P1 de Forge2[®] ou de Forge3[®] ne nous permettait pas d'introduire ces termes. On se limitera à une validation sur l'exemple 2D de l'éprouvette en traction avec l'objectif d'étudier l'interaction entre le champ thermique et le champ d'endommagement dans Forge2[®] P2-P0.

On se propose de comparer les résultats obtenus en utilisant un couplage thermo-mécanique, avec et sans couplage avec l'endommagement. Le matériau utilisé est un acier, la loi de comportement associée est une loi linéaire puissance (1.35), ses paramètres rhéologiques, thermiques et d'endommagement sont donnés par :

$a=1.118$, $n=0.109$, $K=266$ MPa, $\rho=7.5e-06$ g/mm³, $C_{massique}=669$ J/kg K, $k=2.758e+04$ kg.s.K, $S=2$ MPa, $s=1$, $b=1$.

Ce matériau possède une ductilité d'environ 35%. La géométrie de l'éprouvette est donnée sur la Figure 3.3. Les conditions aux limites du problème thermique sont les suivantes :

- Coefficient de transfert global avec les outils $\alpha=2.e+03$ kg.s.K
- Température des outils : 20°C
- Effusivité $eff=9.88e+03$

Avec le milieu extérieur

- Coefficient de transfert global avec l'air $\alpha=8.00$ kg.s.K
- Température extérieure:20°C

-Emissivité du matériau $\text{emm}=9.88\text{e}+03$

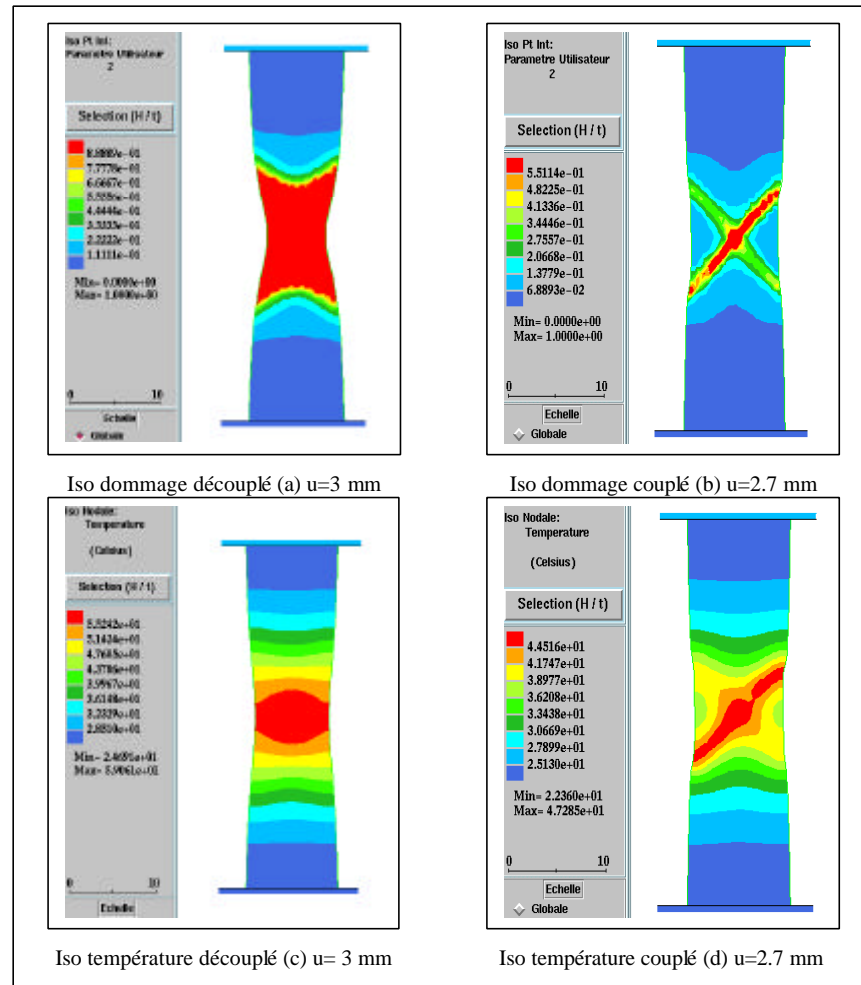


Figure 3.35 : Comparaison calcul couplé et découplé pour l'essai de traction plane

La Figure 3.35 compare les distributions de la température et de l'endommagement pour un déplacement de $u=3\text{ mm}$ pour un calcul couplé et non couplé avec l'endommagement. On observe une température monotone croissante au centre de l'éprouvette dans le cas non couplé avec l'endommagement (Figure 3.35 (a) et (c)), pour une température maximale $T=59^\circ\text{C}$. Pour le cas couplé avec l'endommagement, la température commence par augmenter dans la bande de cisaillement puis chute dès la rupture des premiers points au centre de l'éprouvette (Figure 3.35 (b) et (d)) ceci est bien confirmé par l'évolution de la température (Figure 3.36 (a)) et de l'endommagement au centre de l'éprouvette Figure 3.36 (b)).

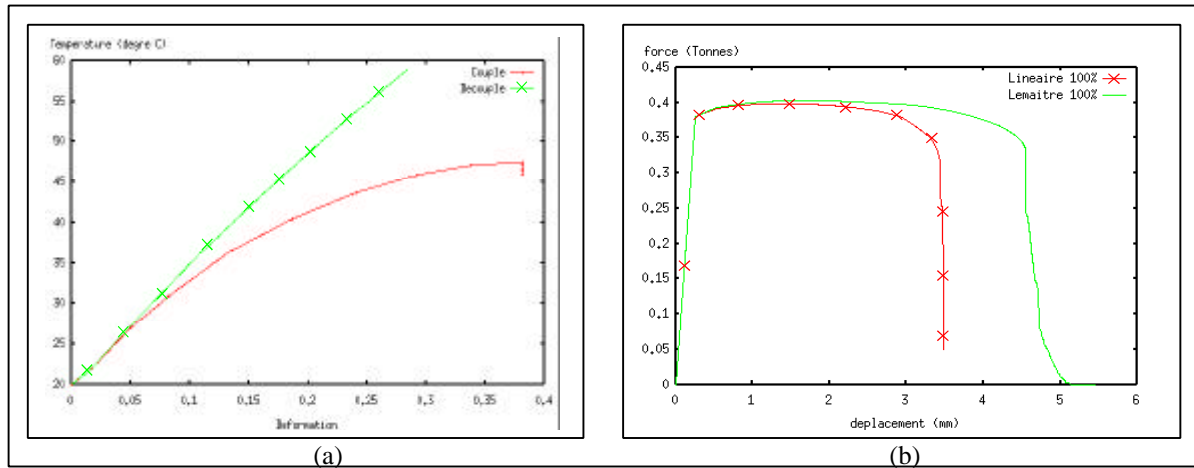


Figure 3.36 : Courbes Température/Déformation (a) et Dommage/Déformation (b) cas couplé et non couplé avec l'endommagement

Lorsqu'il y a rupture d'un point de Gauss, l'équation (2.10) montre alors que lorsque $D=1$, $\underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^{pl} = 0$ et $Y\dot{D} = 0$, l'équation de la chaleur se réduit donc au terme stationnaire :

$$\text{div}(\overline{k\text{grad}(T)}) = 0 \tag{3.3}$$

Cela explique la diminution de la température au point considéré.

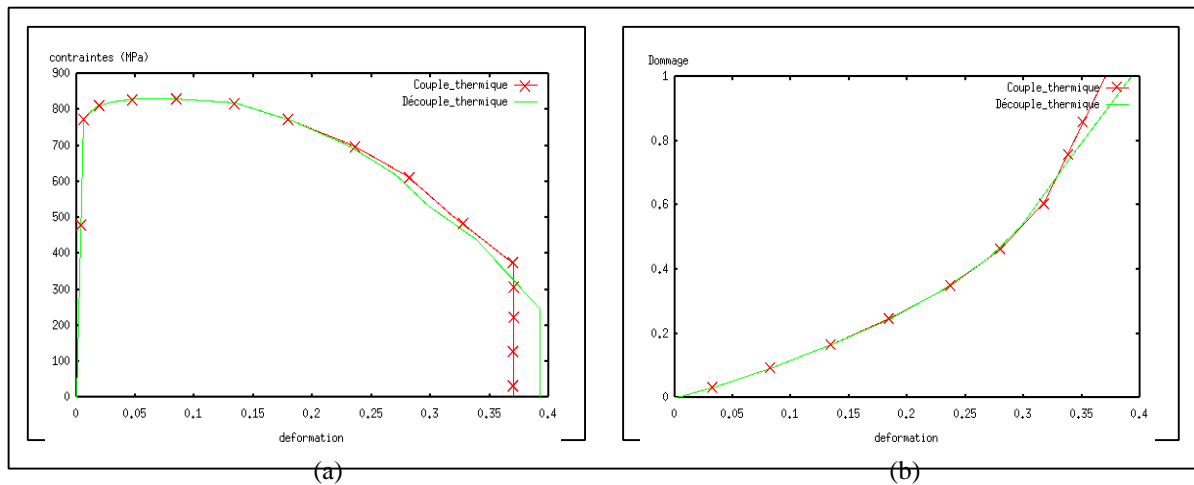


Figure 3.37 : Influence de la température sur les contraintes (a) et sur le dommage (b)

Enfin pour conclure ce paragraphe la Figure 3.37 montre l'influence de la température sur les contraintes et sur le dommage pour un calcul couplé mécaniquement pour les deux essais, mais en ne tenant pas compte des effets thermiques sur l'un d'eux. On note alors que l'influence de la température n'est pas négligeable. En effet le fait de prendre en compte le couplage thermo-mécanique fait que l'éprouvette casse plus tôt et que la température favorise l'endommagement. Ces résultats semblent conformes à l'observation expérimentale et montrent que le couplage thermo-mécanique peut influencer la rupture.

3.3.2.2 Exemples de validation en (élasto)viscoplasticité isotherme

Ayant validé un procédé en considérant les aspects thermiques, nous allons maintenant valider un essai de traction en viscoplasticité à température élevée mais constante sans couplage thermique. Le modèle utilisé est de type Norton-Hoff disponible dans Forge2[®]. La configuration initiale de l'éprouvette utilisée est donnée sur la Figure 3.39 (a). Les dimensions de cette éprouvette sont de 10mm de diamètre et 50mm de hauteur sur sa partie utile. Nous n'avons représenté que la partie utile de l'éprouvette, les têtes de l'éprouvette ne subissant pas de déformations nous les considérerons comme rigides.

Les caractéristiques rhéologiques données par la loi élasto-visco-plastique (Eq.(1.68)) et d'endommagement du matériau utilisé sont :

$E=70000$ MPa, $a=0.969$, $n=0.447$, $K_0=90.64$ MPa, $m=0.139$, $S=2$ MPa, $s=1$, $b=1$.

La température initiale et constante pour cet essai est de 1100°C.

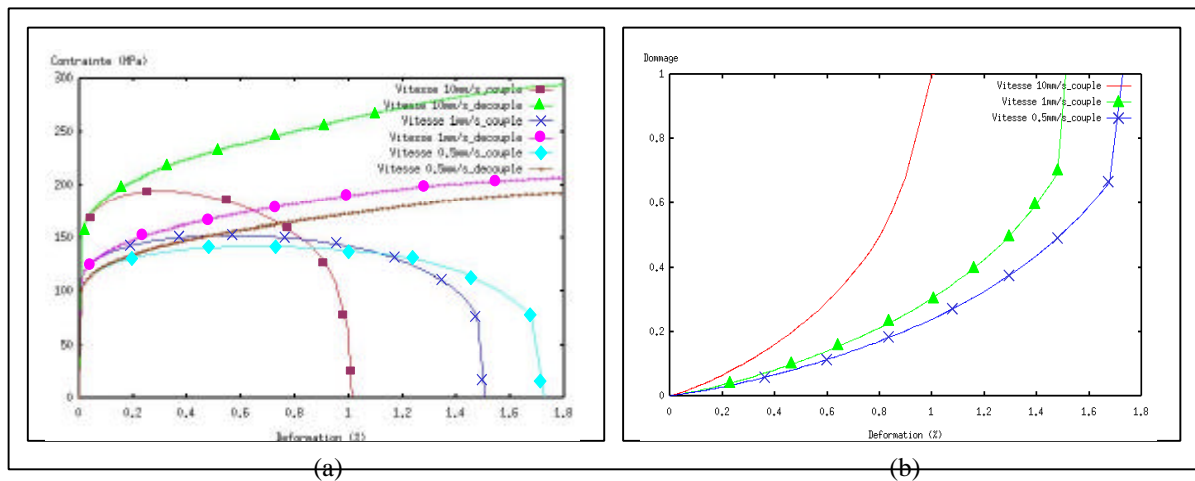


Figure 3.38 : Courbes Contrainte/Déformation (a) et Dommage/Déformation (b) pour un essai de traction à différentes vitesses d'outils

L'influence de la vitesse de sollicitation sur les courbes contraintes/déformations plastiques est montrée sur la Figure 3.38 (a) pour le cas couplé et non couplé. On note clairement que plus la vitesse de sollicitation augmente, plus la contrainte est élevée pour la même déformation plastique (effet visqueux). Par ailleurs on note que plus la vitesse de sollicitation est élevée plus la vitesse de l'endommagement est importante (Figure 3.38 (b)) provoquant alors un adoucissement et une rupture plus rapide (Figure 3.38 (a)).

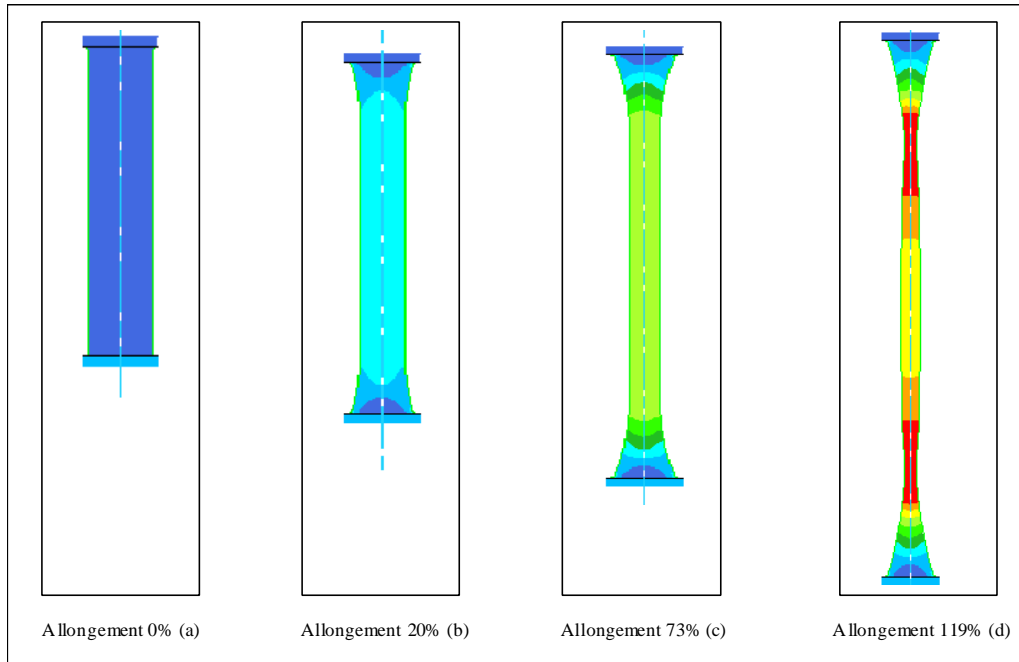


Figure 3.39 : Essai de traction vitesse de déformation de 1.10^{-2} s^{-1} , isovaleurs de l'endommagement

La Figure 3.39 et la Figure 3.40 montrent la distribution de l'endommagement dans l'éprouvette pour quatre allongements différents et ceci pour une vitesse de 10^{-2} s^{-1} (Figure 3.39) et 5.10^{-2} s^{-1} (Figure 3.40).

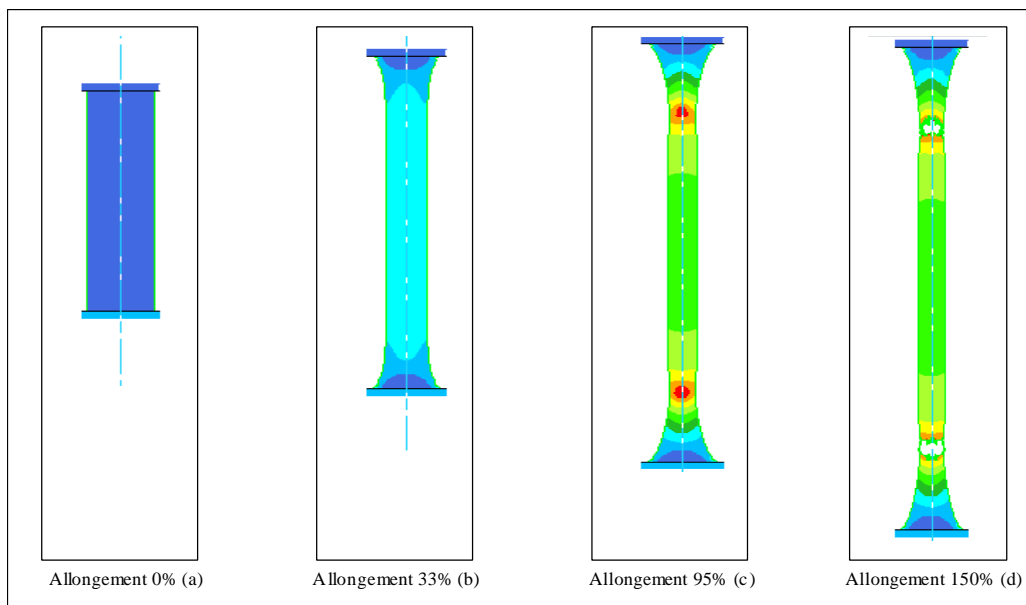


Figure 3.40: Essai de traction vitesse de déformation de 5.10^{-2} s^{-1} , isovaleurs de l'endommagement

Dans les deux cas (Figure 3.39 et Figure 3.40) on observe une localisation de l'endommagement en deux zones situées à l'intersection entre la partie utile et les rayons de congé de l'éprouvette. Une de ces zones est le lieu de la rupture finale de l'éprouvette.

3.4 IDENTIFICATION SUR DES MATÉRIAUX RÉELS

Pour simuler un procédé de formage avec endommagement on doit, au préalable, procéder à la détermination aussi bien des paramètres physiques du comportement et de l'endommagement que de Δx et $\Delta \underline{\epsilon}$ (taille des éléments et incrément de déformation) qui conviennent le mieux pour chaque matériau utilisé. La procédure que nous utilisons est la suivante :

1. Détermination des coefficients du modèle en utilisant une courbe expérimentale $\underline{\sigma} - \underline{\epsilon}^{pl}$ et une méthode inverse appliquée en un point matériel (Programme SiDoLo disponible au LASMIS).
2. Simulation de l'essai « réel » de traction en utilisant la géométrie exacte de l'éprouvette. On corrige alors si besoin est les coefficients pour obtenir une courbe F/u « numérique » la plus proche possible de la courbe expérimentale.
3. Toujours sur l'essai « réel » de traction de l'éprouvette, on se doit de réaliser une étude de convergence afin de déterminer les meilleures discrétisations spatiales (Δx) et temporelles ($\Delta \underline{\epsilon}$) qui donnent une courbe numérique très proche de celle obtenue expérimentalement.

Le premier matériau réel identifié est un acier Z12 CNDV 12. L'essai de traction a été réalisé à chaud et maintenu à une température constante ($T=950^{\circ}\text{C}$) avec une vitesse de déformation de 0.1s^{-1} .

L'identification avec SiDoLo donne pour la loi puissance, les paramètres suivants : $E=210000$ MPa, $\nu=0.3$, $K_0=170$ MPa, $n=1.23$, $a=0.629$, $\beta=50$, $m=0$, $S=0.42$ MPa, $s=2.5$, $b=7.5$.

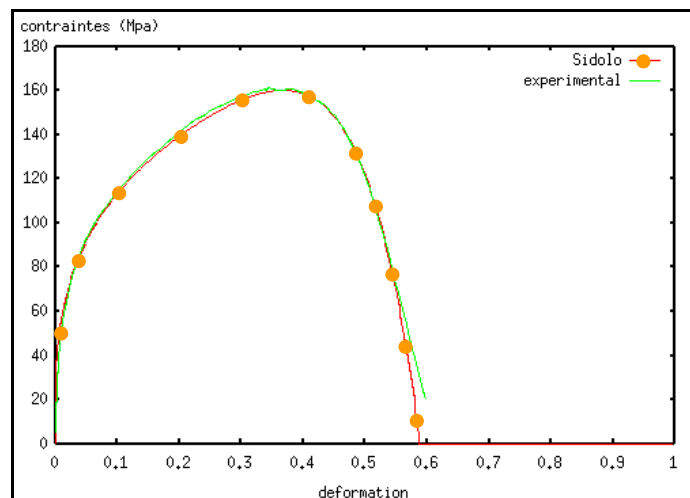


Figure 3.41 : Courbes Contrainte/Déformation comparaison Experience/SiDoLo

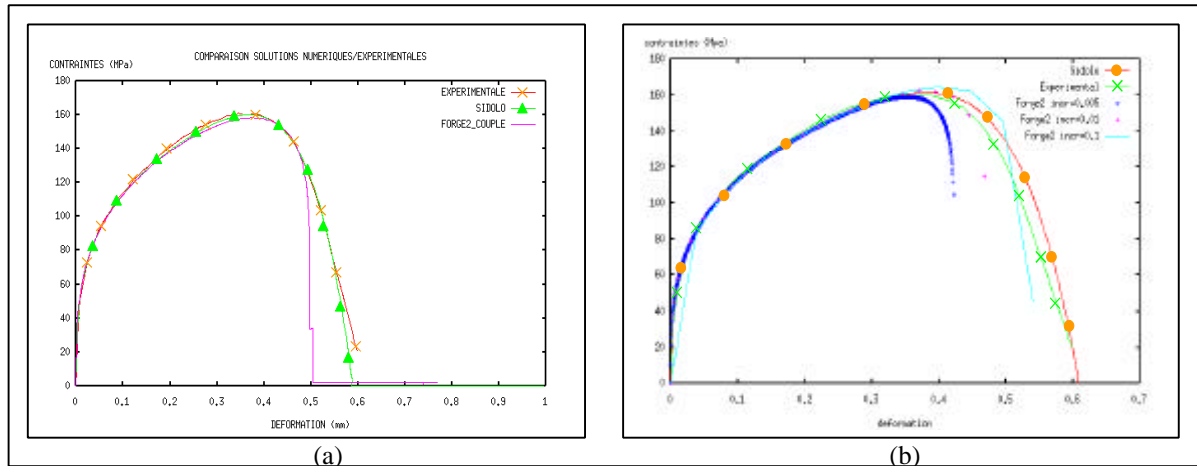


Figure 3.42 : Courbes Contrainte/Déformation comparaison Expérience/SiDoLo/Forge2 (a)
 Contrainte/Déformation pour divers incréments de déformation (b)

Il reste alors à comparer ces résultats avec ceux obtenus avec le code de calcul Forge2[®]. La réponse avec Forge2[®] est assez similaire aux réponses obtenues expérimentalement et avec SiDoLo, la différence se faisant dans la partie descendante de la courbe (adoucissement lié à l'endommagement). Ceci vient du fait que le logiciel SiDoLo ne prenne pas en compte toute la structure. Ensuite nous avons retenu une taille d'éléments $\Delta x=0.8\text{mm}$ et un incrément de déformation $\Delta \epsilon=0.01$ (Figure 3.42 (a), Figure 3.42 (b)).

On se propose maintenant d'identifier un matériau caractérisé à froid : Un acier Mb4 (Source FORMER S.A.). L'application de la procédure décrite ci-dessus nous a permis d'obtenir (Figure 3.43 et Figure 3.44) les paramètres suivants : $E=210000\text{ MPa}$, $\nu=0.33$, $a=0.629$, $n=0.324$, $K_0=320.6\text{ MPa}$, $S=1700\text{ MPa}$, $s=2.5$, $b=7.5$, $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.5$.

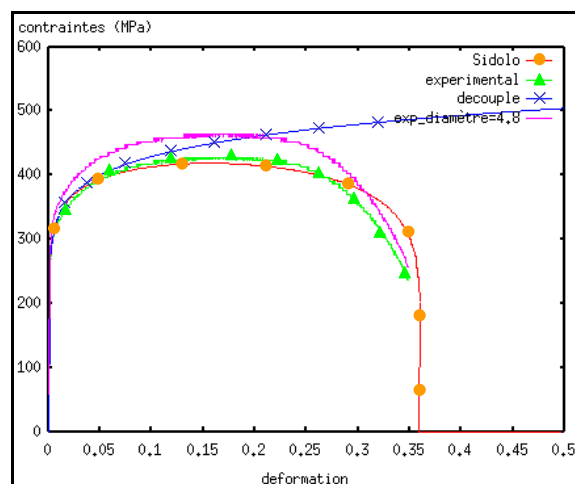


Figure 3.43 : Contrainte/Déformation comparaison Expérience/Forge2⁰

La taille maxi des éléments et du pas de chargement retenus sont : $\Delta x=1.2\text{mm}$ et $\Delta \epsilon=0.01$.

En premier lieu, nous pouvons remarquer que la réponse obtenue avec SiDoLo est assez semblable à celle obtenue expérimentalement. Comme d'habitude nous faisons figurer la courbe pour un calcul découplé afin de montrer l'incidence du dommage sur le comportement du matériau.

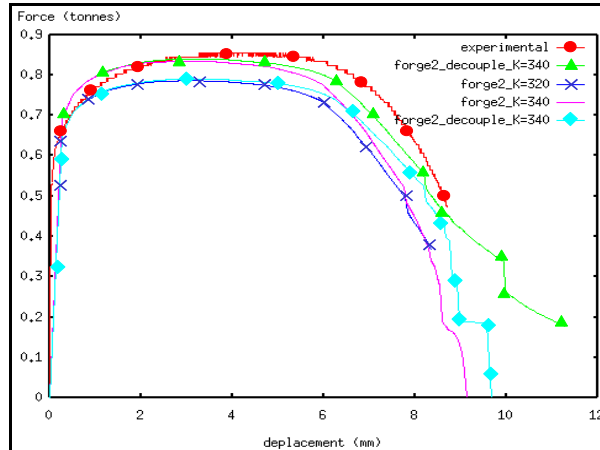


Figure 3.44 : Courbes Contrainte/Déformation comparaison Expérience /SiDoLo

Ici la courbe expérimentale globale force/déplacement (Figure 3.44) est située bien au-dessus de la courbe obtenue avec Forge2[®] avec les coefficients identifiés sur SiDoLo. Le fait de prendre en compte la structure peut influencer les résultats et comme le montre la Figure 3.43, il faut alors réajuster les coefficients pour caler la courbe Forge2[®] à la courbe expérimentale. Nous pouvons remarquer que sur la courbe correspondant à la réponse pour un calcul découplé, l'endommagement n'affecte pas les propriétés mécaniques. En effet, le calcul se poursuit jusqu'à son terme, la diminution de la force de traction s'explique pas la diminution de la section.

Ces deux matériaux seront utilisés au chapitre 4 pour simuler des procédés industriels.

3.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons décrit la procédure d'identification des coefficients intervenant dans les modèles élasto-viscoplastiques endommageables utilisés. En utilisant des coefficients « virtuels » nous avons étudié paramétriquement la modélisation proposée en insistant sur le rôle du couplage comportement-endommagement. Il en ressort que ce couplage comportement-endommagement joue un rôle central dans la redistribution des champs thermomécaniques dans la structure. Ces observations sont valables en présence ou non de couplage thermomécanique avec un comportement plastique ou viscoplastique. Enfin, nous avons procédé à l'identification des modèles pour deux matériaux réels. Ceux là vont être utilisés pour simuler différents procédés industriels de mise en forme dans le chapitre quatre.

CHAPITRE 4 :

APPLICATION À DES PROCÉDÉS INDUSTRIELS

4.1 INTRODUCTION

Ce chapitre est dédié à l'application des outils théoriques et numériques développés dans les chapitres précédents sur quelques procédés de mise en forme. Le but de ce chapitre est de présenter les résultats en terme de prévision de l'endommagement afin de pouvoir influencer différents paramètres (rhéologie, géométrie, gamme...) et ainsi optimiser ces procédés. Il sera alors possible soit de favoriser l'endommagement (découpage, usinage, ébavurage..), soit au contraire de repousser son apparition afin d'obtenir une pièce finale saine sans défauts (forgeage, emboutissage..). Nous nous efforcerons de comparer les différentes approches (couplée et non couplée), quand cela paraît pertinent sur des exemples tels que le découpage de tôles, l'écrasement de cylindre par forgeage grande vitesse, le filage inverse, etc... Ceci dans l'unique but de sensibiliser le lecteur concernant les différences majeures qui peuvent exister entre l'approche couplée et l'approche non couplée (disponible en post processeur dans bon nombre de codes de calcul par Eléments Finis). A chaque fois qu'il sera possible, un parallèle avec l'expérimental sera effectué lorsque nous disposons des données expérimentales fournies par nos collaborateurs industriels.

Nous commencerons par des simulations assimilables à des procédés 2D, et nous traiterons ensuite des exemples industriels sur lesquels nous disposons de peu d'informations expérimentales en dehors de l'existence ou non de fissures dans la pièce à la fin du procédé.

Le lecteur pourra se reporter à [MARIAGE02e, MARIAGE02f] pour de plus amples détails sur ces procédés.

Pour terminer la discussion des résultats pour les différentes simulations se fera sur la capacité prédictive de l'approche couplée aussi bien d'un point de vue quantitatif que qualitatif.

4.2 CAS DE L'ÉCRASEMENT D'UN CYLINDRE CREUX (BAGUE (2D/3D))

Cet essai simule l'écrasement d'un cylindre creux entre deux plans rigides et parallèles pour deux matériaux : un acier et un aluminium. Le cylindre creux étant infiniment long avec les caractéristiques géométriques $R_{\text{int}}=20$ mm et $R_{\text{ext}}=30$ mm, nous adoptons l'hypothèse des déformations planes pour ne traiter qu'une section quelconque d'épaisseur unité perpendiculaire à l'axe du cylindre définie par la Figure 4.1. Les outils sont symétriques par rapport à la bague. Les maillages 2D et 3D de la section de la bague sont donnés sur la Figure 4.2. Le nombre d'éléments est de 25620 pour le cas 3D et de 1624 pour le cas 2D. La taille maximale des éléments pour toutes les simulations est de $\Delta x= 0.6$ mm. Les deux outils (infiniment longs) sont supposés rigides indéformables. L'outil inférieur est maintenu fixe alors que l'outil supérieur est animé d'un déplacement vertical à vitesse constante (presse hydraulique) $v=1$ mm/s.

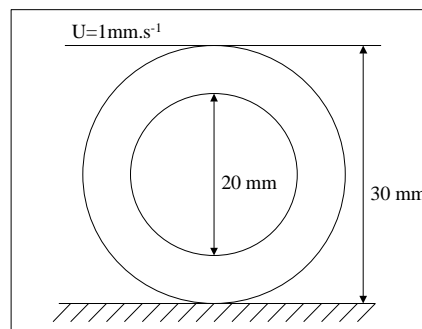


Figure 4.1 : Géométrie de la bague

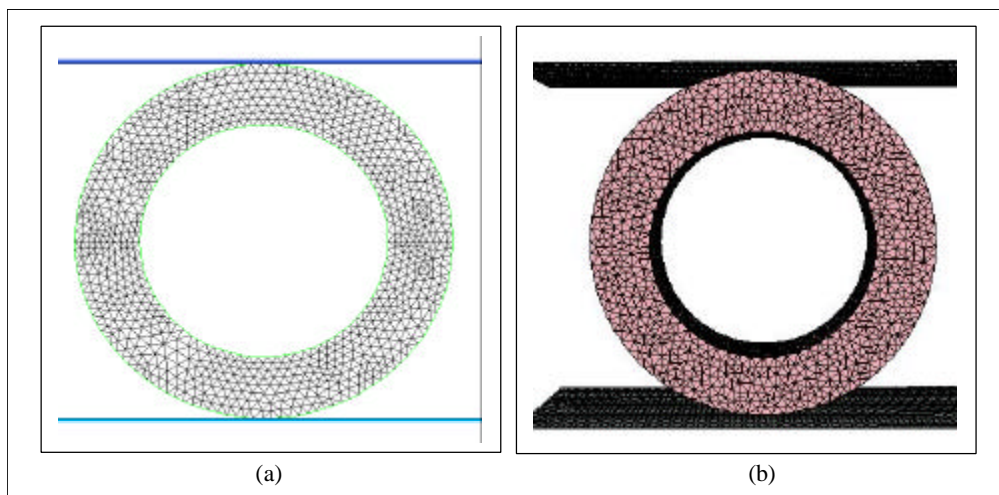


Figure 4.2 : Maillage 2D (a) et 3D (b) de la bague

Les caractéristiques rhéologiques et d'endommagement du matériau sont les suivantes:

Aluminium :

$K_0=45.5$ MPa, $a=1.4$, $n=0.45$, $S=0.413$ MPa, $s=10$, $b=15$, $E=35000$ MPa, $\nu=0.3$

Acier :

$K_0=266$ MPa, $n=0.3$, $eb_0=0.0001$, $S=4$ MPa, $s=0.99$, $b=1.1$, $E=210000$ MPa, $\nu=0.3$

La loi utilisée pour l'acier est une loi puissance :

$$\sigma_0(T, p, \dot{p}) = \sqrt{3}K_0(p_0 + p)^n \quad (4.1)$$

Les courbes contrainte/déformation de ces deux matériaux sont présentées sur la Figure 4.3 dans les deux cas : couplé et non couplé. On note que pour l'aluminium la contrainte maximum est de 120 MPa et qui a été atteinte pour $\epsilon_p = 15.5\%$ et la rupture se produit pour $\epsilon_p = 19.6\%$ (ductilité). Pour l'acier on a $\sigma_{\max} = 400$ MPa pour $\epsilon_p = 60\%$ et la ductilité est de 75% .

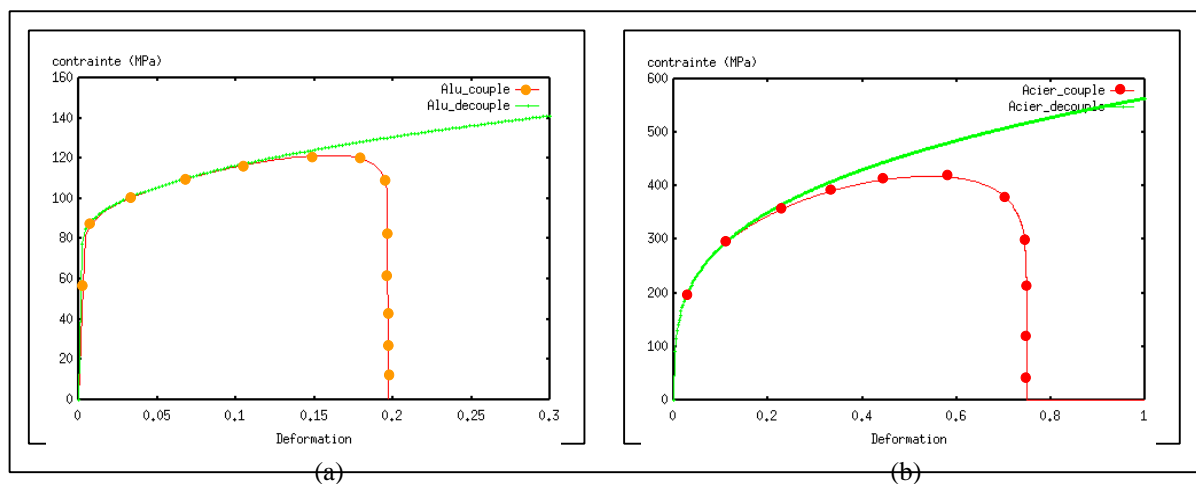


Figure 4.3 : Courbes locales Contrainte/Déformation pour l'Aluminium (a) et l'Acier (b)

Le modèle de frottement utilisé est celui de Coulomb avec $\mu=0.1$.

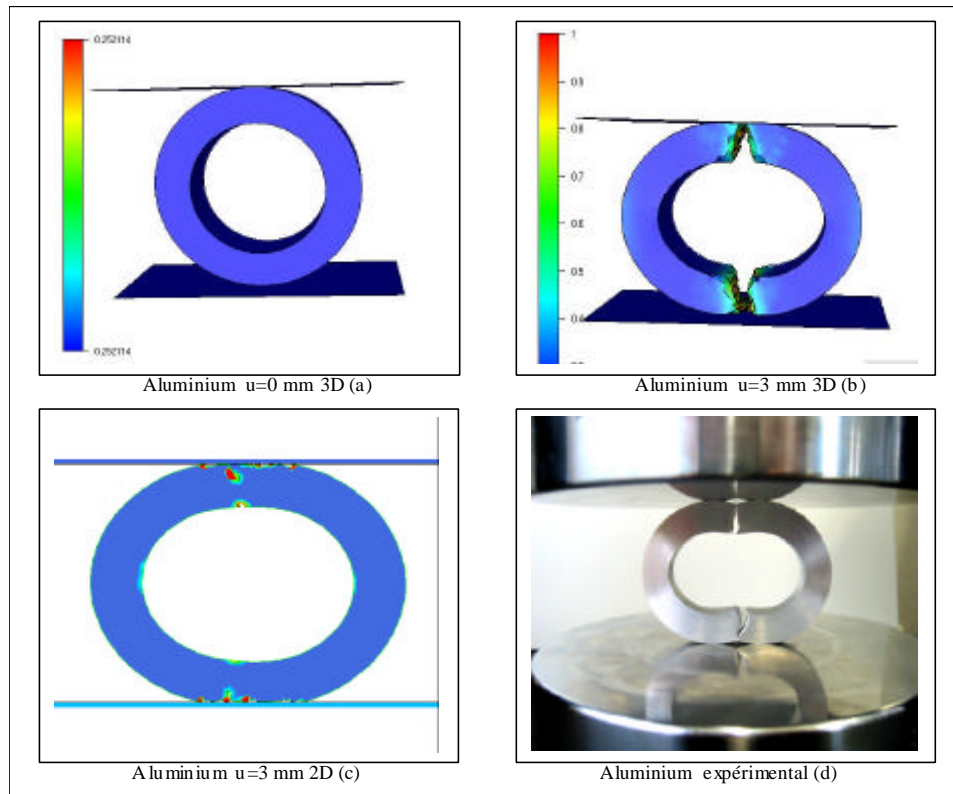


Figure 4.4 : Simulation de la compression d'un cylindre creux en aluminium (source expérimentale : LASMIS©)

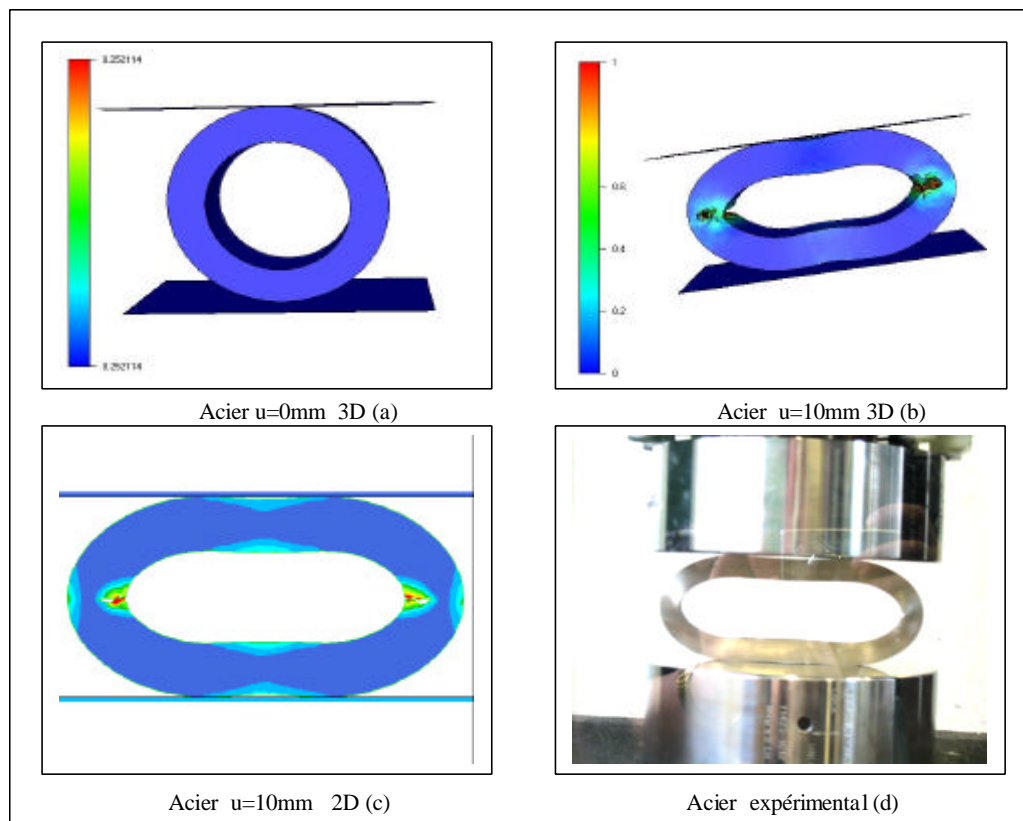


Figure 4.5 : Simulation de la compression d'un cylindre creux en acier (source expérimentale : LASMIS©)

Les résultats obtenus sont rassemblés sur la Figure 4.4 pour le cylindre en aluminium et sur la Figure 4.5 pour celui en acier. Pour le cylindre en aluminium, les fissures se développent au niveau des points de contact cylindre/outils (Figure 4.4 (b) pour le 3D et Figure 4.4 (c) pour le 2D) pour $u=3\text{ mm}$. Ceci est confirmé par l'expérience comme le montre la Figure 4.4 (d). Pour le cylindre en acier, les fissures s'amorcent et se propagent dans la direction horizontale pour $u=10\text{ mm}$ comme on peut le constater sur la Figure 4.5.

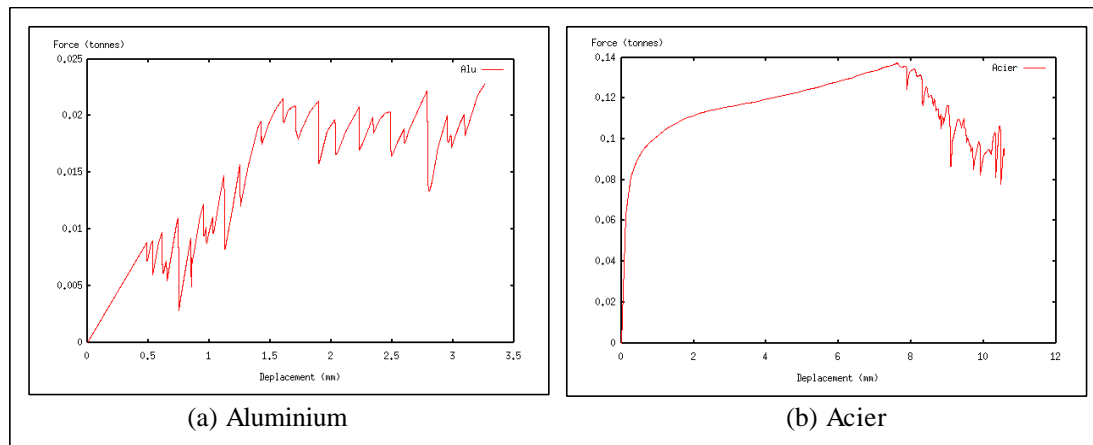


Figure 4.6 : Courbes globales Force/Déplacement (calcul 2D) pour l'aluminium (a) et l'acier (b)

Les courbes de chargement (force/déplacement) prédites par la simulation sont présentées sur la Figure 4.6 pour le calcul 2D. Les oscillations (saut de force) observées sur ces deux courbes sont générées par l'élimination des éléments totalement endommagés. Pour l'aluminium (à faible ductilité) la rupture du premier élément intervient très tôt i.e. pour un déplacement de l'outil de 0.5 mm. La force maximale atteinte (valeur en crête) est de l'ordre de 240 N pour un déplacement $u=3\text{ mm}$. On note que la force a tendance à stagner (en moyenne) entre $u=1.5$ et 3 mm sans chuter appréciablement (Figure 4.6 (a)). Ceci s'explique par le fait que comme les fissures se produisent au niveau des points de contact cylindre/outils (Figure 4.4 (b)), les deux moitiés du cylindre continuent à opposer une résistance au déplacement de l'outil.

Pour le cylindre en acier (à forte ductilité), la situation est sensiblement différente. La courbe force/déplacement ne présente de sauts qu'à partir de $u\approx 7.9\text{ mm}$ c'est-à-dire à la rupture du premier élément. Ceci se produit sur la partie décroissante de la force F , juste après le maximum de l'effort ($F_{\max}=1380\text{ N}$ pour $u=7.7\text{ mm}$). Cette chute de l'effort traduit l'effondrement de la rigidité du cylindre généré par les fissures transversales (Figure 4.5).

Pour finir, il est à noter que les résultats expérimentaux des Figure 4.4 et Figure 4.5 montrent les lieux de rupture des cylindres. C'est en fait la seule information expérimentale dont nous disposons.

4.3 PROCÉDÉ DE DÉCOUPAGE DE TÔLE (2D)

4.3.1 Description du procédé

Le poinçonnage de tôle plus ou moins mince est un procédé industriel très utilisé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En s'inspirant de la simulation de découpage réalisée dans notre laboratoire avec le code ABAQUS [CHEROUAT02], nous allons traiter ce procédé en étudiant l'influence de quelques paramètres.

Considérons le procédé de poinçonnage réalisé à l'aide d'une presse munie d'un poinçon de forme rectangulaire et d'une tôle, également de forme rectangulaire (longueur $l=8$ mm) et d'épaisseur $t=2.5$ mm (Figure 4.7). L'hypothèse des déformations planes est ici retenue. La découpe s'effectue suite au déplacement vertical du poinçon à vitesse constante (presse hydraulique) égale à $v=5$ mm/s. Un serre-flan retient la tôle par pincement contre la matrice sur lequel vient s'appliquer un effort.

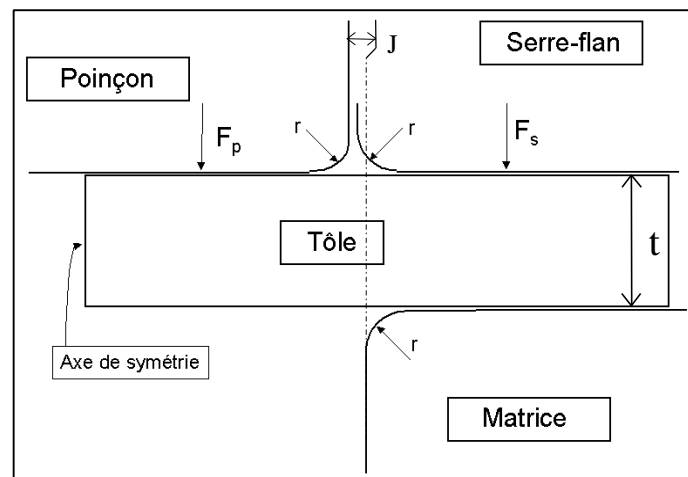


Figure 4.7 : Représentation schématique du procédé de découpage

Des études expérimentales de ce type de procédé ont été publiées [MAILLARD91]. Elles donnent une analyse phénoménologique du procédé à partir de la forme des courbes force/déplacement. Les paramètres influant sur la qualité de la pièce découpée (faciès et F_{max}) sont : le jeu entre le poinçon et la matrice, les caractéristiques mécaniques du matériau, l'épaisseur de la tôle, la géométrie de l'outillage, la vitesse du poinçon, ainsi que la nature du contact/frottement aux interfaces outils/tôle. Nous allons donc discuter de l'influence de certains paramètres jouant un rôle essentiel dans ce procédé de découpage.

Pratiquement, nous allons étudier trois paramètres particuliers qui sont :

- Le degré d'usure des outils : il est bien connu que la qualité de la surface découpée ainsi que le niveau des efforts de poinçonnage dépendent du degré d'usure des outils. Pour étudier ce phénomène, nous définissons le degré d'usure des outils comme étant proportionnel aux rayons (notés r sur la Figure 4.7) de la matrice, du poinçon et du serre-flan.

- Le jeu poinçon/matrice : nous définissons ce jeu relatif par le rapport (J/t) avec J le jeu et t l'épaisseur de la tôle (c.f. Figure 4.7).
- La nature du frottement outils/tôle : ce phénomène sera représenté par les valeurs du coefficient de frottement μ du modèle de Coulomb.

Avant d'entamer l'étude de ces paramètres, nous présentons sur la Figure 4.8 les maillages 2D initiaux de la tôle dans les cas : outils neufs et outils usés. Un raffinement préalable des maillages est réalisé dans la zone de découpage et à proximité des angles de découpe. Le maillage 2D (triangles P1-P1) est identique pour les deux cas et possède 3792 éléments. Pour cet exemple la tôle est supposée isotrope en matériau **B1** du § 3.2.2.

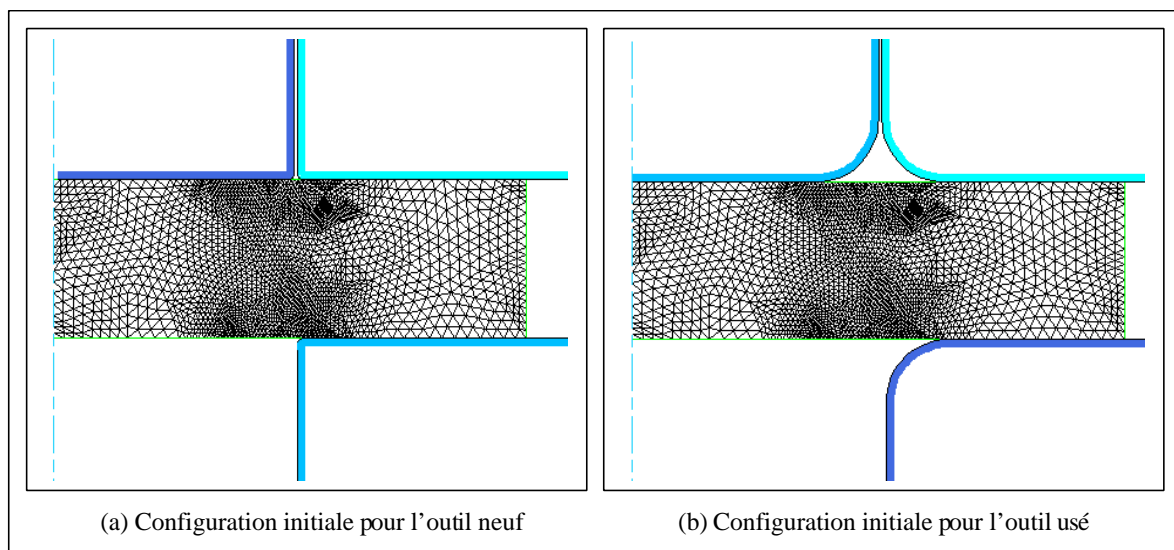


Figure 4.8 : Définition des configurations initiales dans les deux cas : outils neufs, outils usés.

4.3.2 Influence de l'usure des outils

On cherche à montrer l'influence d'une usure prononcée des outillages sur le découpage de la tôle et ainsi les conséquences négatives que cela engendre en terme de qualité de coupe et d'effort de découpage [CHEROUAT02, MARIAGE02a]. Nous prendrons un jeu nul entre le poinçon et la matrice ($J/t=0$). La vitesse de l'outil supérieur est de 5mm/s, la loi de frottement retenue est la loi de Coulomb avec $\mu=0.15$.

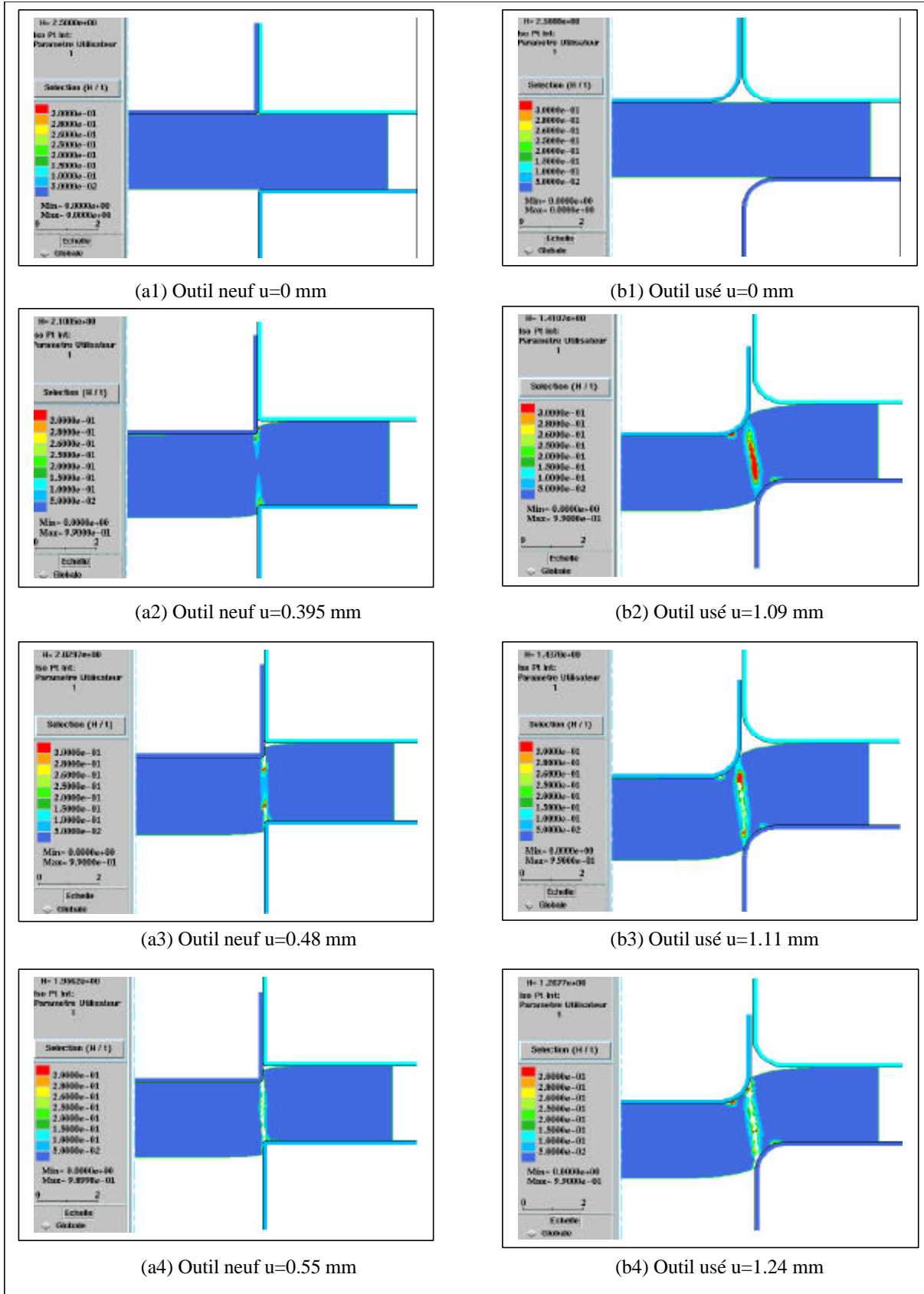


Figure 4.9 : Isovaleurs du dommage : comparaison outils neufs/outils usés

Sur la Figure 4.9 on peut noter la différence dans le découpage entre des outils neufs (Figure 4.9 (a1, a2, a3 et a4)) et des outils usés (Figure 4.9 (b1, b2, b3 et b4)). Avec les outils neufs, deux fissures s'amorcent à $u=0.4\text{mm}$ (Figure 4.9 (a2)) juste au niveau des angles de coupe du poinçon et de la matrice. Ces deux fissures se propagent l'une vers l'autre (Figure 4.9 (a3)) et finissent par achever la découpe dès qu'elles se rencontrent au centre de la tôle (Figure 4.9 (a4)) à $u=0.55\text{ mm}$. Avec les outils usés le scénario est complètement différent (Figure 4.9 (b2, b3 et b4)). Une seule fissure s'amorce au centre de l'épaisseur de la tôle (Figure 4.9 (b2)) à $u=1.09\text{ mm}$ et se propage dans les deux directions des angles de coupe du poinçon et de la matrice (Figure 4.9 (b3)). La découpe est achevée quand cette fissure débouche des deux cotés extérieurs de la tôle (Figure 4.9 (b4)) pour $u=1.24\text{ mm}$.

On note également que la fissure (zone endommagée) est plus « localisée » et plus verticale pour les outils neufs (Figure 4.9 (a3 et a4)), alors qu'avec les outils usés elle est plus diffuse et plus inclinée (Figure 4.9 (b3 et b4)). Enfin sur la Figure 4.10 nous comparons les courbes de découpage (force-déplacement) pour les outils neufs et usés.

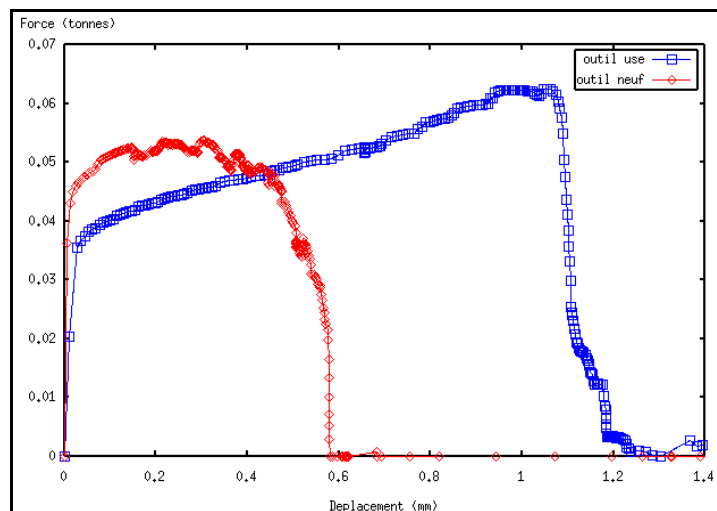


Figure 4.10 : Courbes Force/Déplacement pour les outils neufs et usés

Ces courbes confirment bien que le découpage se fait plus aisément avec les outils neufs qu'avec les outils usés. En effet avec les outils neufs, $F_{\max}=550\text{ N}$ et la découpe est achevée après un déplacement $u=0.55\text{ mm}$. Avec les outils usés $F_{\max}=620\text{ N}$ (soit 20% de plus) et la découpe intervient pour un déplacement $u=1.24\text{ mm}$ (soit 125% de plus). Ces résultats sont qualitativement conformes à ceux de la littérature comme ils sont exposés dans [MAILLARD91].

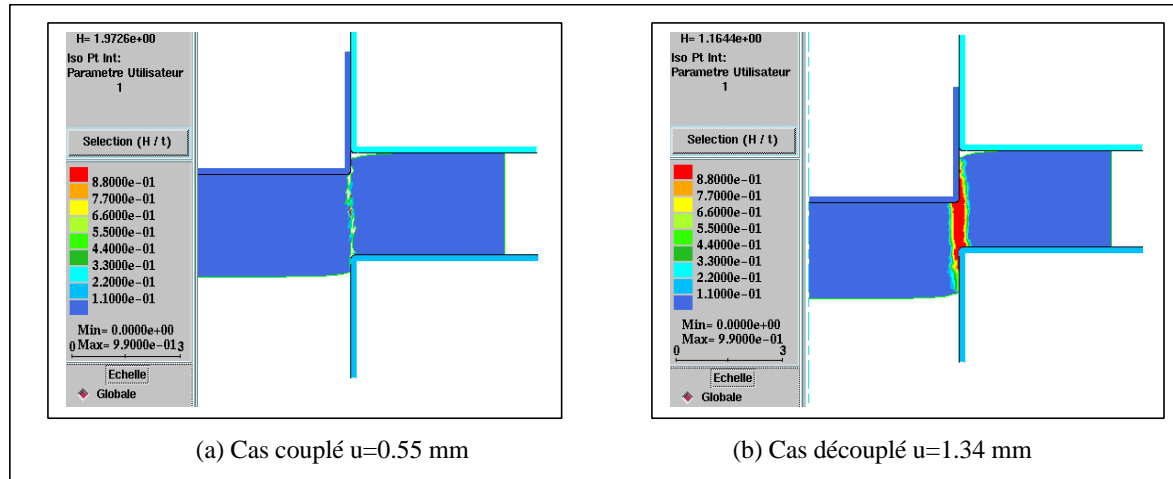


Figure 4.11 : Isovaleurs de l'endommagement pour un calcul couplé (a) et découplé (b) du découpage de la tôle

Comparons maintenant les prévisions d'un calcul couplé à celles d'un calcul non couplé uniquement avec des outils neufs. La Figure 4.11 montre la fissure à la rupture finale pour le cas couplé (Figure 4.11 (a)) et la zone « endommagée » pour $u=1.34$ mm dans un cas non couplé (Figure 4.11 (b)) toutes choses égales par ailleurs. Il est clair que, dans le cas non couplé, la zone où $D=1$ ne peut représenter la fissure car sa rigidité reste intacte et les contraintes restent maximum dans cette zone comme le montre la Figure 4.12 (b). Ceci est confirmé par les courbes force/déplacement de la Figure 4.13 où l'on remarque que la chute de la force globale est plus lente dans le cas découplé, et que la force n'atteint pas la valeur zéro en fin de « découpage » ($F_{\min}=100$ N).

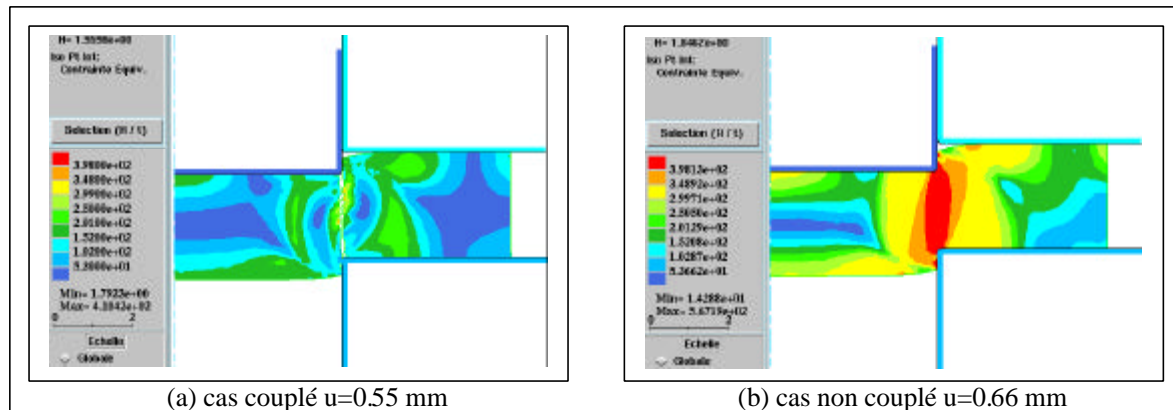


Figure 4.12 : Isovaleurs des contraintes équivalentes (a) cas couplé, (b) cas non couplé

De ce fait, il n'est donc pas raisonnable d'éliminer les éléments où le dommage a atteint sa valeur critique dans le cas non couplé. Notons toutefois, que dans la littérature la quasi-totalité des travaux sur ce sujet simulent le découpage par des approches non couplées.

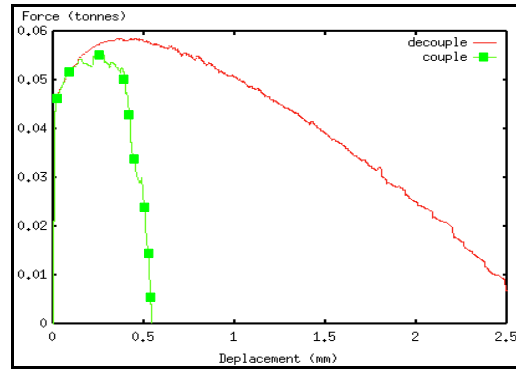


Figure 4.13 : Courbes Force/Déplacement pour un outil neuf, cas couplé et non couplé

En conclusion, nous pouvons affirmer que l'usure des outils joue un rôle important dans ce procédé de mise en forme. De plus, seul un calcul couplé permet de simuler ce procédé et de l'optimiser par rapport au phénomène d'usure des outillages.

4.3.3 Effet du jeu relatif entre le poinçon et la matrice

Après avoir étudié l'influence de l'usure des outils nous allons étudier l'influence sur le découpage du jeu relatif entre le poinçon et la matrice (c.f. Figure 4.7). En effet il est reconnu que le jeu entre le poinçon et la matrice a une conséquence directe sur le temps, la qualité de la découpe, ainsi que sur l'état de surface [FAURON98, CHEROUAT02]. Nous allons donc effectuer une étude comparative sur différents rapports entre le jeu poinçon/matrice et l'épaisseur de la tôle que sont , $J/t=0.0, 0.02, 0.1$ et 0.2 en utilisant uniquement des outils neufs.

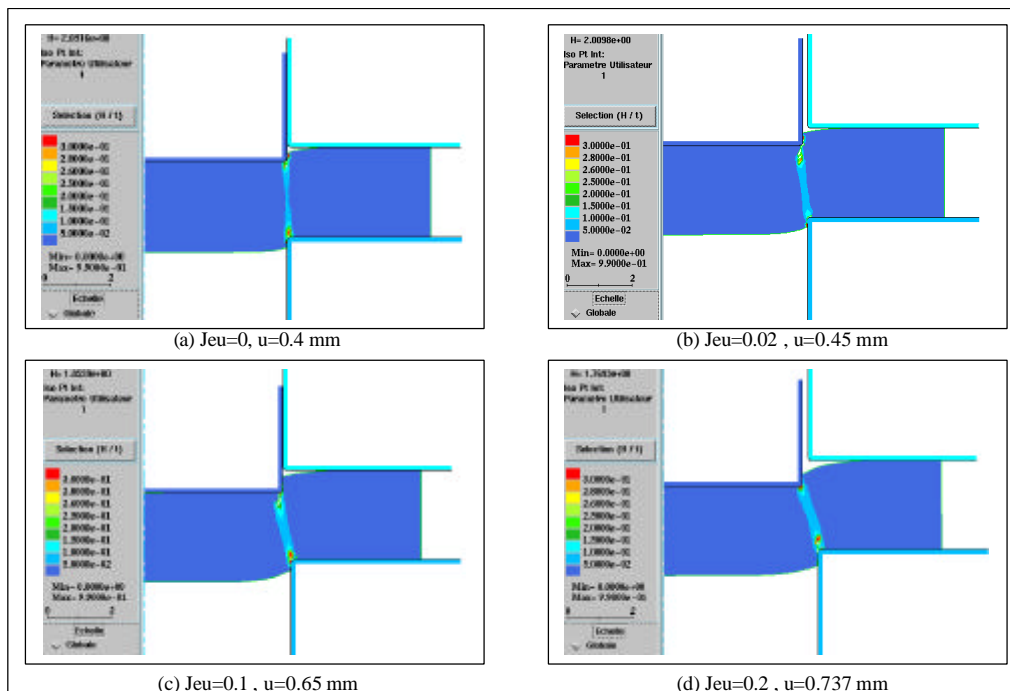


Figure 4.14 : Isovaleurs du dommage au moment de l'amorçage des fissures pour différents J/t

Sur la Figure 4.14 nous avons rassemblé les isovaleurs de l'endommagement au moment de la rupture du premier élément (amorçage des fissures) pour les 4 valeurs du jeu relatif. La même présentation est faite sur la Figure 4.15 mais à l'instant final i.e. découpage final de la tôle. Ces figures montrent clairement que plus le jeu relatif est grand, plus l'inclinaison de la découpe est importante. En effet, la découpe est presque perpendiculaire au plan longitudinal de la tôle pour $J/t=0$ (Figure 4.14 (a) et Figure 4.15 (a)) alors qu'elle fait un angle de plus de 20° par rapport à la verticale pour un jeu de 0.2 (20%) (Figure 4.14 (d) et Figure 4.15 (d)). On peut alors raisonnablement affirmer que la qualité de la découpe sera d'autant plus mauvaise lorsque le jeu sera grand.

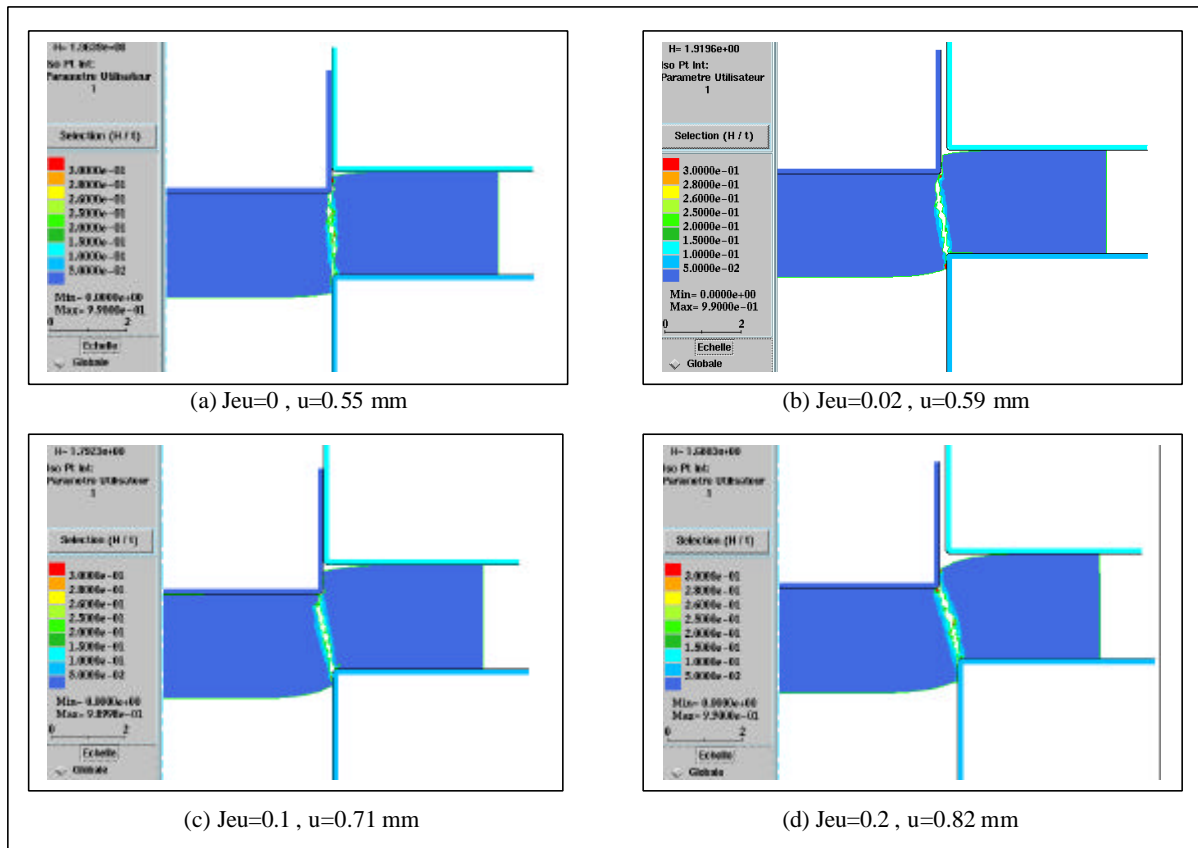


Figure 4.15 : Isovaleurs du dommage à la rupture finale pour différents rapports J/t .

Par ailleurs, sur la Figure 4.16 qui rassemble l'ensemble des courbes force/déplacement pour les différents J/t étudiés, on note que plus le jeu est faible, plus la découpe est rapide, et plus la force maximale est élevée (Tableau 4.1).

J/t	0.0	0.02	0.1	0.2
F_{\max} (N)	550	540	525	523
U_{rupture} (mm)	0.55	0.58	0.7	0.81

Tableau 4.1 : Influence du jeu sur les conditions de découpe

Ceci montre que l'influence du jeu sur la force maximale reste relativement faible (5%) mais exerce une influence non négligeable sur le déplacement à rupture (32%). On en conclut donc

que le jeu influence principalement la qualité de la surface de coupe ainsi que le déplacement à rupture du poinçon. On peut donc affirmer que plus le jeu est grand, plus mauvaise est la qualité de la surface de coupe.

Notons enfin que les mêmes conclusions sont observées avec les outils usés.

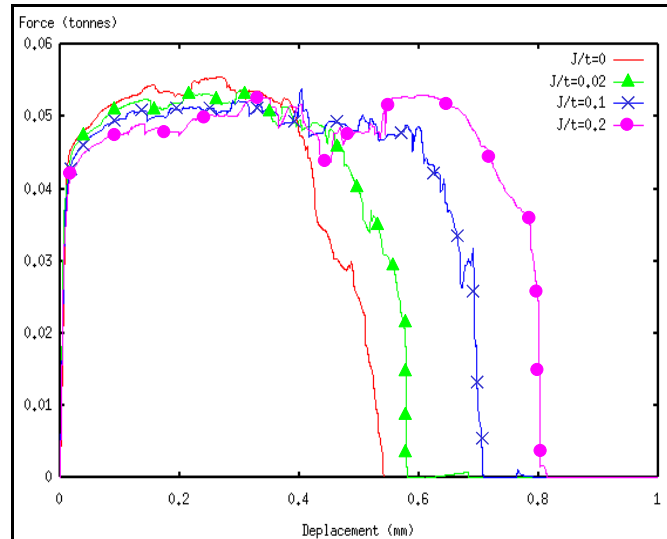


Figure 4.16 : Courbes Force/Déplacement pour différents jeux

4.3.4 Etude de l'interface poinçon/tôle/matrice

Le dernier paramètre que nous souhaitons explorer est la nature des interfaces outils/pièce. En effet, on peut suspecter que la nature du contact entre les outils (poinçon/matrice et serre-flan) et la tôle conditionne fortement les conditions de coupe. Pour cela nous allons faire varier le coefficient de frottement du modèle de Coulomb en lui donnant les valeurs suivantes :

$\mu=0.00$ \Rightarrow Contact parfaitement glissant ou lubrification idéale

$\mu=0.05$ \Rightarrow Contact modérément glissant ou lubrification normale

$\mu=0.20$ \Rightarrow Contact peu glissant ou lubrification médiocre

$\mu=0.30$ \Rightarrow Contact sec métal/métal glissement très faible ou quasi-inexistant.

Après avoir réalisé toutes les simulations pour des outils neufs et usés avec différentes valeurs de μ nous pouvons affirmer que le frottement a très peu d'influence sur le procédé de découpage (tout du moins pour la plage de valeurs explorées). Ceci est confirmé par la Figure 4.17 où l'on note que les courbes force/déplacement sont quasiment identiques pour tous les coefficients de frottement μ utilisés.

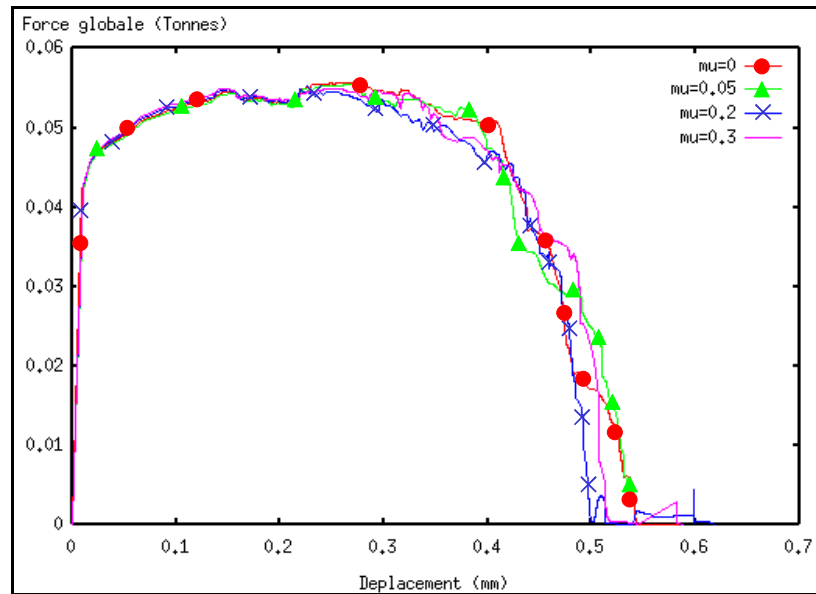


Figure 4.17 : Courbes Force/Déplacement pour différents valeurs du coefficient de frottement

Ceci dit, ces conclusions concernant l'influence du frottement nous paraissent limitées au cas où les outils sont supposés rigides indéformables. En effet, nous pouvons penser que si les outils avaient été supposés déformables alors le coefficient de frottement aurait eu plus d'influence [CHEROUAT02]. Ce phénomène n'a pas été étudié dans ce travail du fait des temps de calculs prohibitifs que cela engendre. Il fera l'objet de la suite naturelle de cette étude et en particulier pour simuler l'endommagement surfacique des outillages.

En conclusion, nous pouvons affirmer que la méthodologie de couplage comportement-endommagement que nous proposons est capable de simuler et « optimiser » tout procédé de poinçonnage de tôles minces isotropes.

4.4 PROCÉDÉ DE POINÇONNAGE ET D'ÉBAVURAGE D'UNE ROUE

Dans bon nombre de procédés de formage on constate la présence d'un surplus de matière appelé bavure, qu'il faut impérativement supprimer pour obtenir la pièce finale. Sur d'autres pièces massives il peut s'avérer économique de « percer » des pièces par poinçonnage. Ces opérations réalisées sous presses après l'obtention du brut de forgeage permettent indéniablement d'assurer des gains de productivité en comparaison avec des opérations d'usinage classique (fraisage, perçage...). Il ne reste donc plus qu'à réaliser les opérations de finition si nécessaire.

Dans ce paragraphe, nous allons simuler une opération de débouchage (par poinçonnage) suivie d'une opération d'ébavurage d'une roue massive présentée sur la Figure 4.18 [MARIAGE02c]. La roue est préalablement obtenue par forgeage à chaud. Elle est en acier courant caractérisé par les coefficients suivants :

$E= 210 \text{ GPa}$, $\nu=0.3$, $s=1$, $S=8 \text{ MPa}$, $\beta=1$. La fonction d'érouissage isotrope et isotherme est choisie telle que:

$$\sigma_y = \sqrt{3}K(1 + ap^n)$$

avec $n=0.41$, $a=1.75$ et $K= 198.3 \text{ MPa}$.

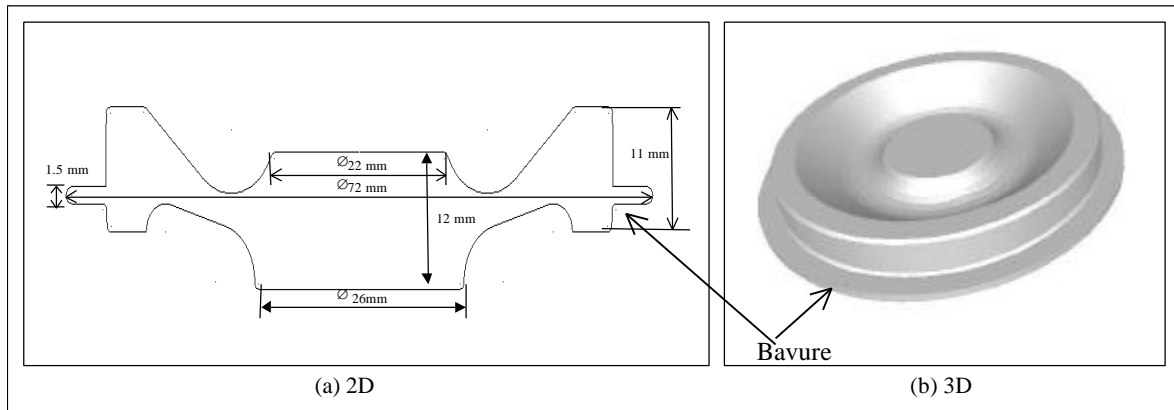


Figure 4.18 : Schématisation de la roue obtenue par forgeage 2D (a) et 3D (b)

Ce problème va être traité en 2D (axisymétrique) et en 3D. Pour le calcul 2D, les maillages de la roue sont donnés en Figure 4.19 (a) pour l'opération d'ébavurage avec 4312 éléments triangulaires P1-P1, et en Figure 4.19 (b) pour l'opération de débouchage avec 2492 éléments de même type. Pour ces deux maillages la taille minimum est $\Delta x= 0.4 \text{ mm}$ (boîte de maillage) et la taille maximum est $\Delta x= 1.2 \text{ mm}$.

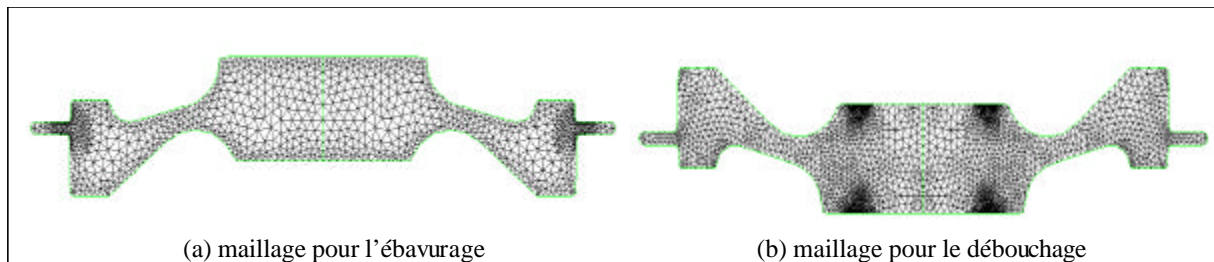


Figure 4.19 : Maillage initial de la roue pour l'opération d'ébavurage

Pour les calculs 3D, le maillage utilisant des tétraèdres P1-P1 présenté sur la Figure 4.20 possède 38410 éléments. La taille maximale est $\Delta x= 1 \text{ mm}$.

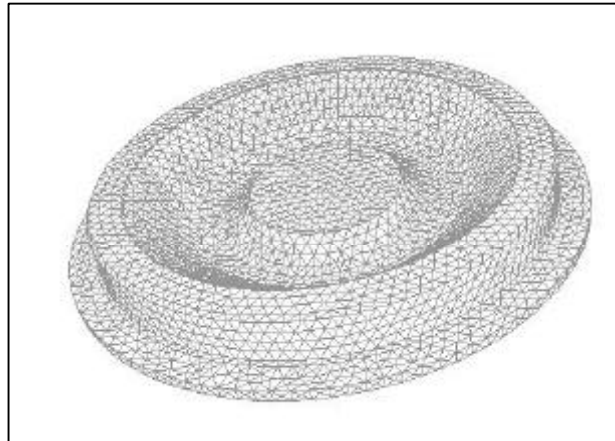


Figure 4.20 : Maillage initial 3D de la roue

Ces opérations de débouchage et d'ébavurage ont été réalisées expérimentalement avec l'utilisation d'une presse grande vitesse (PGV). Ces essais ont été réalisés au CETIM de St Etienne, et consistent à impacter la roue avec un poinçon d'une certaine masse, lâché à une certaine hauteur. Nous utiliserons donc une presse en énergie disponible dans le logiciel Forge2[®] pour caractériser cette presse. Notons simplement ici que sur le procédé d'ébavurage, c'est le lopin (en l'occurrence la roue) qui est l'objet mobile. Le poinçon lancé impacte la roue et engendre son déplacement provoquant ainsi l'ébavurage de celle-ci. Pour l'opération de débouchage c'est le poinçon lancé qui va déboucher la roue immobile lors de cette opération. Aussi les deux opérations sont réalisées séparément que ce soit expérimentalement ou numériquement.

Les résultats de simulation du procédé d'ébavurage sont rassemblés sur la Figure 4.21. La Figure 4.21 (a) montre la disposition initiale de la roue et des outils pour le calcul 2D. Les Figure 4.21 (c), Figure 4.21 (e) et (j) présentent un zoom sur la zone de découpage de la bavure 2D. On note clairement que le découpage (propagation de la fissure) se produit bien dans la continuité du diamètre extérieur de la roue. On note aussi le fort soulèvement de l'anneau découpé (bavure) sur les Figure 4.21 (e) et Figure 4.21 (g). Pour le calcul 3D les résultats sont présentés sur les Figure 4.21 (b), Figure 4.21 (d), (f) et Figure 4.21 (h). Cette simulation n'a pas pu être menée à son terme (c'est à dire jusqu'à l'ébavurage total) du fait de la procédure de suppression des éléments tétraédriques. En effet, quand plusieurs éléments sont supprimés en même temps, il arrive que quelques tétraèdres ne se trouvent connectés à leurs voisins non endommagés que par deux nœuds sur les quatre. Cela pose un problème au solveur probablement dû aux rotations de corps rigide de l'élément en question. Ne disposant pas des sources du code Forge3[®] nous n'avons pas pu remédier à ce problème. Le calcul s'arrête après un déplacement de 0.9 mm sans pouvoir réaliser entièrement l'opération d'ébavurage 3D.

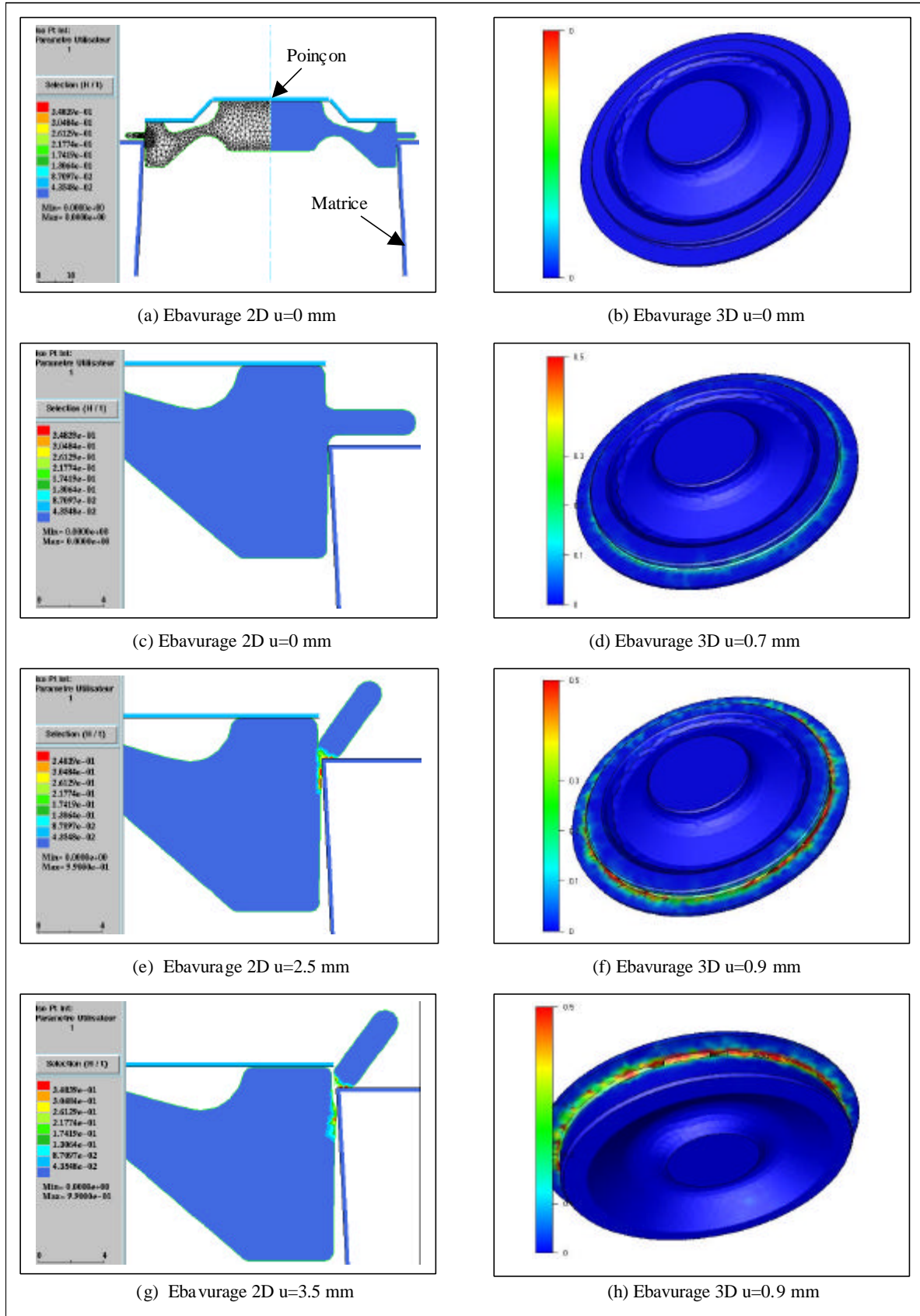


Figure 4.21 : Isovaleurs du dommage, procédé d'ébavurage de la roue 2D/3D

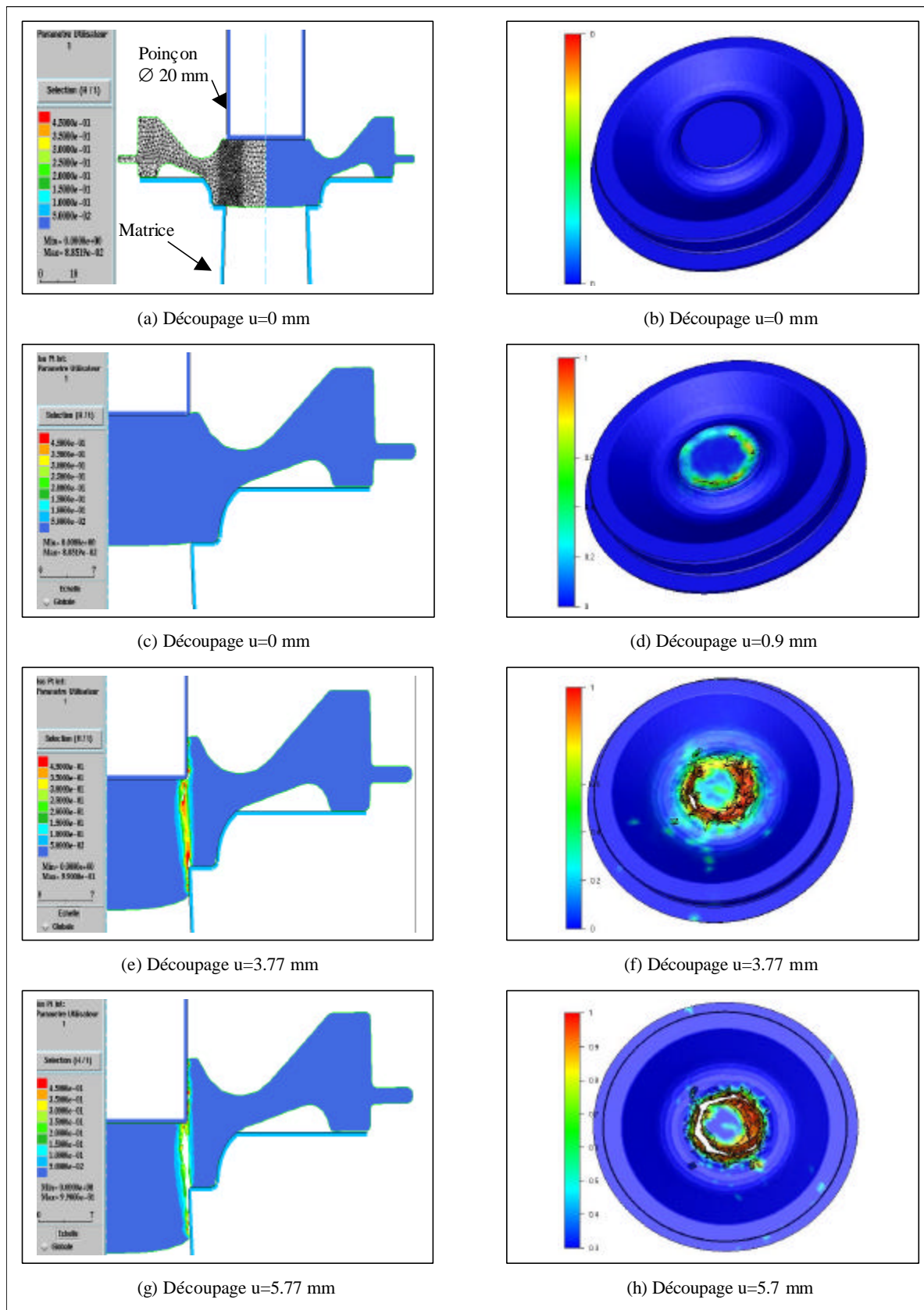


Figure 4.22 : Isovaleurs du dommage, procédé de débouchage de la roue 2D/3D

Pour le procédé de débouchage qui consiste à poinçonner la roue, les résultats sont rassemblés sur la Figure 4.22. Là aussi, si la simulation 2D ne pose aucun problème (Figure 4.22 (a), (c), (e) et (g)), il n'en va pas de même pour l'opération 3D qui s'arrête avant l'achèvement de l'opération. Néanmoins, elle va jusqu'à un déplacement de 5.7 mm (Figure 4.22 (h)). L'utilisation d'un maillage relativement grossier engendre une fissure « grossière et mal propre » (Figure 4.22 (b), (d), (f) et (h)). En toute rigueur, nous pensons que l'utilisation d'un maillage adaptatif nous permettrait de mener le calcul à son terme. Cette procédure d'adaptation de maillage vise à déterminer la taille des éléments en fonction du Hessien du champ d'endommagement. Ainsi, les éléments totalement endommagés auront une taille minimale. De plus, il faudra bien éviter qu'un tétraèdre ne se trouve connecté à ses voisins que par deux nœuds. Ces aspects sont en développement au LASMIS dans le cadre d'un couplage entre ABAQUS® et des maillages développés par notre équipe de recherche [BL2D-V2]. Pour Forge3® nous ne pouvons hélas rien faire sans une collaboration étroite avec les propriétaires de ces logiciels (CEMEF et TRANSVALOR S.A.).

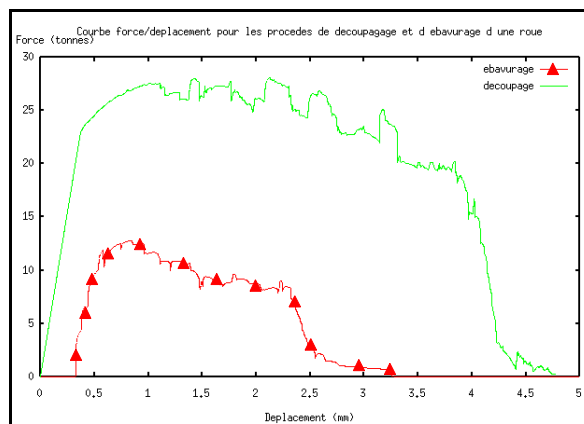


Figure 4.23 : Courbes Force/Déplacement globales pour l'ébavurage et le poinçonnage

Sur la Figure 4.23 nous avons reporté les courbes force/déplacement pour les deux procédés 2D. On note que l'opération d'ébavurage est plus aisée à réaliser car elle ne nécessite qu'un effort maxi $F_{\max}=125$ kN et se termine au bout de 3.3 mm de déplacement. L'opération de débouchage demande quant à elle une force $F_{\max}=280$ kN et un déplacement $u=4.8$ mm.



Figure 4.24 : Roue ébavurée et débouchée, essai expérimental (source CETIM©)

Pour des raisons de confidentialité industrielle, nous ne sommes pas autorisés à publier les courbes force/déplacement expérimentales, cependant nous sommes autorisés à montrer la photo de la Figure 4.24 montrant la roue débouchée et ébavurée avec les chutes de matière générées par ces deux opérations.

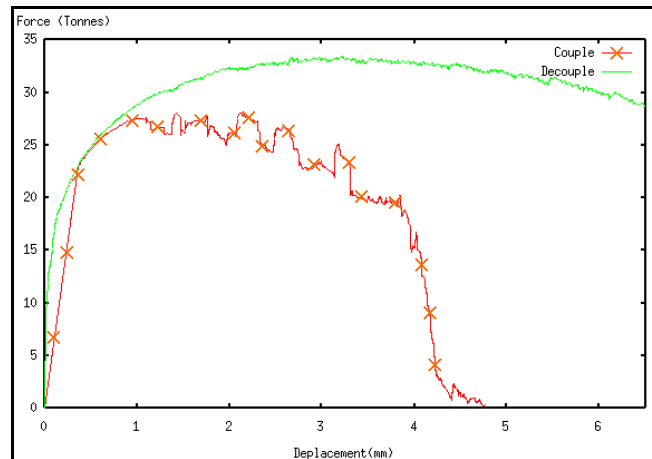


Figure 4.25 : Comparaison courbes Force/Déplacement globales couplée/découplée pour le débouchage

A titre indicatif nous avons réalisé une simulation de débouchage 2D avec un calcul non couplé. La Figure 4.25 montre une comparaison des courbes force/déplacement pour les deux calculs : couplé et non couplé. Il paraît clair que le calcul non couplé ne peut prédire des résultats acceptables. Il faudra donc être vigilant sur l'interprétation des résultats fournis par des modèles non couplés largement utilisés dans la littérature.

4.5 PROCÉDÉ DE MISE EN FORME D'UN ÉCROU SIX PANS

Nous nous proposons maintenant de former un écrou six-pans par forgeage à froid (Figure 4.26) [MARIAGE02d]. Cet écrou est en acier courant MB4 dont les caractéristiques rhéologiques et d'endommagement sont données au §3.4. Pour des raisons de confidentialité industrielle aucune caractéristique dimensionnelle ni d'information sur la gamme concernant ce procédé ne pourront être communiquées.

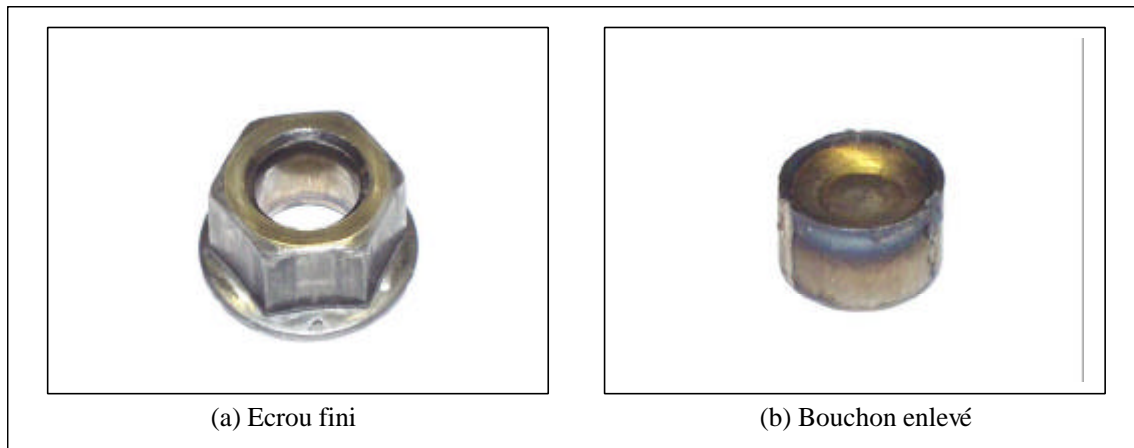


Figure 4.26 : Erou fini (a) et surplus de matière (b) dû au débouchage (Source Former S.A.)

Indiquons simplement que ce procédé de formage d'écrou six-pans est composé de cinq étapes ayant chacune des outillages différents. Les quatre premières opérations consistent à donner la forme pleine à l'écrou par forgeage à froid. La cinquième et dernière opération consiste à poinçonner l'écrou afin de réaliser l'alésage brut qui supportera le filetage définitif. La simulation numérique a été conduite en 2D (axisymétrique) et en 3D. Le but est de repousser l'endommagement dans les quatre premières opérations et au contraire de le favoriser dans la cinquième et dernière passe de débouchage.

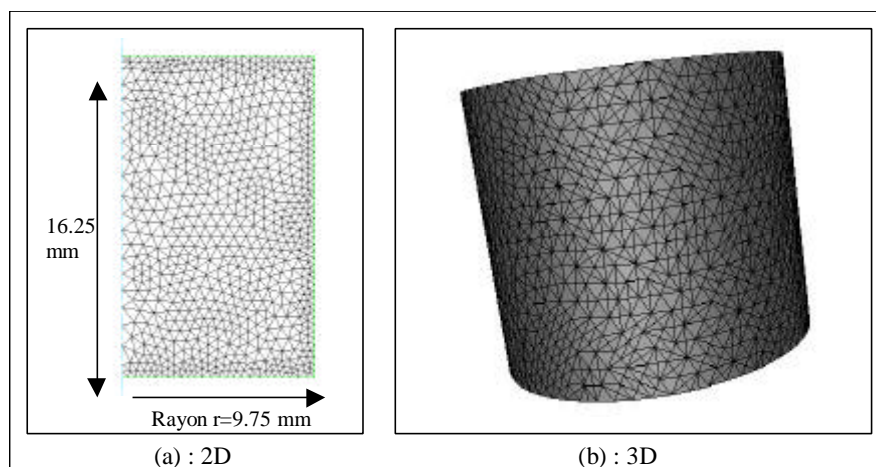


Figure 4.27 : Maillage initial du lopin

Le maillage initial des lopins (cylindrique) est donné en Figure 4.27.

*Pour le cas 2D : Maillage relativement homogène avec 1604 éléments P1-P1 triangulaires de taille moyenne 1.2 mm dans le cas axisymétrique.

*Pour le cas 3D : Maillage relativement homogène avec 37668 éléments P1-P1 tétraédriques de taille moyenne 1.2 mm. Ici aucune symétrie n'est prise en compte.

Les résultats de ces simulations sont rassemblés sur la Figure 4.28 en terme d'isovaleurs d'endommagement pour 5 valeurs différentes de déplacement des outils correspondant à la fin de chaque opération ou préforme.

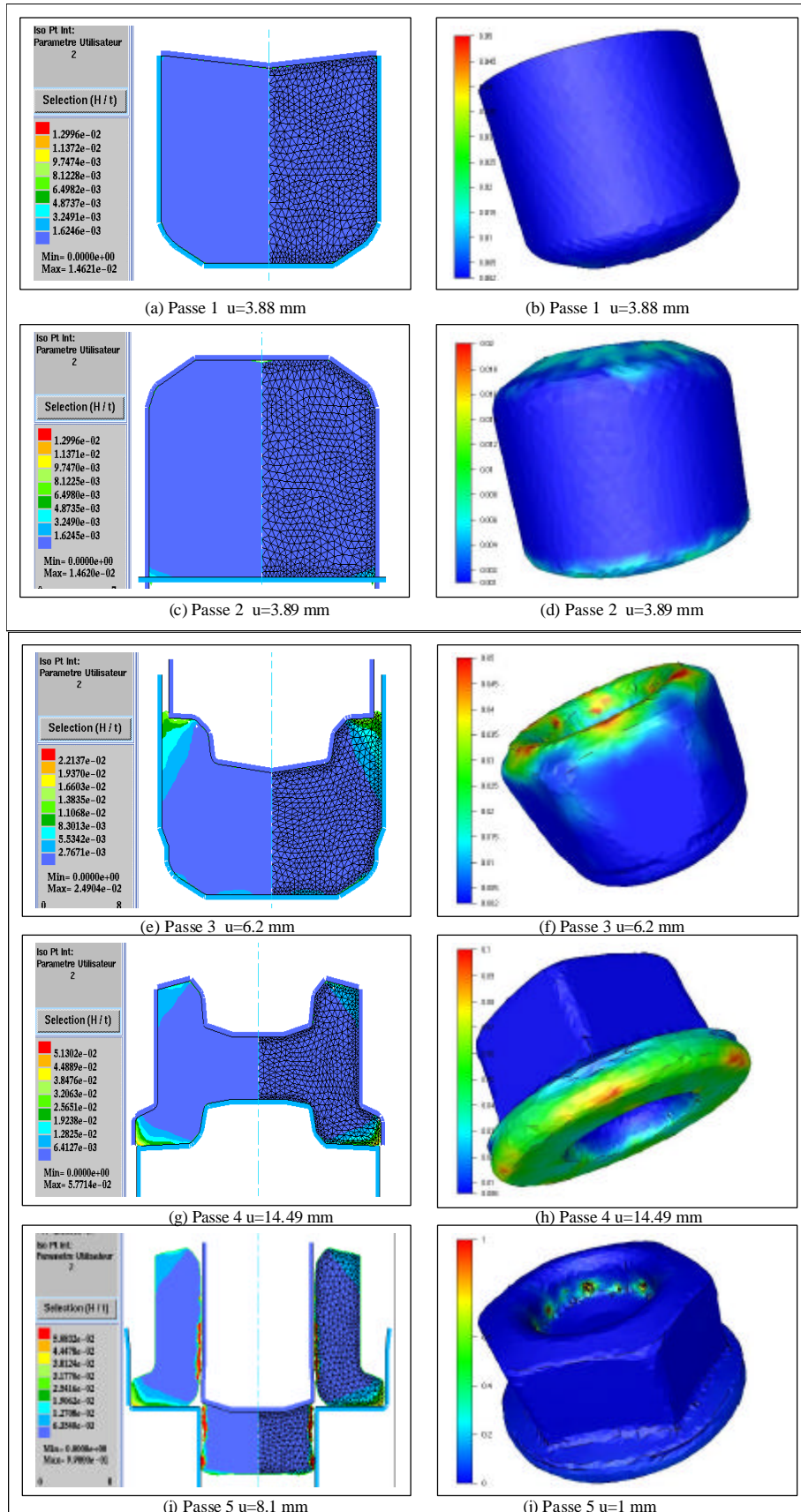


Figure 4.28 : Isovaleurs du dommage lors du procédé de formage de l'écrou à la fin de chaque opération en 2D et 3D

En premier lieu nous pouvons noter que si la simulation 2D ne pose aucun problème pour les cinq opérations, celle en 3D pose des difficultés sur l'opération de débouchage, essentiellement liées à l'élimination des éléments totalement endommagés. Par ailleurs, on peut constater que :

-Le maximum d'endommagement atteint à la fin de chacune des 4 premières opérations est le suivant :

Opération	1		2		3		4	
	2D	3D	2D	3D	2D	3D	2D	3D
Max Dom (%)	1.46	1.6	1.46	2.7	2.5	9.0	5.7	11

-Aussi bien en 2D qu'en 3D, l'emplacement de l'endommagement maximum est conforme aux constatations expérimentales.

-A la fin de la 4^{ème} opération (Figure 4.28 (g) et (h)) le niveau de l'endommagement maxi atteint en 3D (11%) est presque deux fois supérieur à celui atteint en 2D (5.8%).

Sur la Figure 4.29 nous donnons à titre indicatif la courbe de forgeage (force/déplacement) correspondant à l'opération de débouchage (5^{ème} opération) et ce en 2D (opération achevée) et en 3D (opération inachevée). On note bien qu'en 2D (Figure 4.29 (a)) on a $F_{\max} = 95$ kN et l'opération est terminée pour $u = 8.1$ mm. Pour le cas 3D (Figure 4.29 (b)), la force maxi est de $F_{\max} = 120$ kN, donc plus élevée que pour le 2D, avec une simulation interrompue pour un déplacement $u = 1$ mm (Notons ici que l'interprétation de la courbe se fait par rapport à la hauteur de pilotage, donc décroissante). La différence de force de forgeage peut s'expliquer par la nature de la géométrie. En effet, dans le cas 2D axisymétrique, nous ne tenons pas compte des six pans de l'écrou.

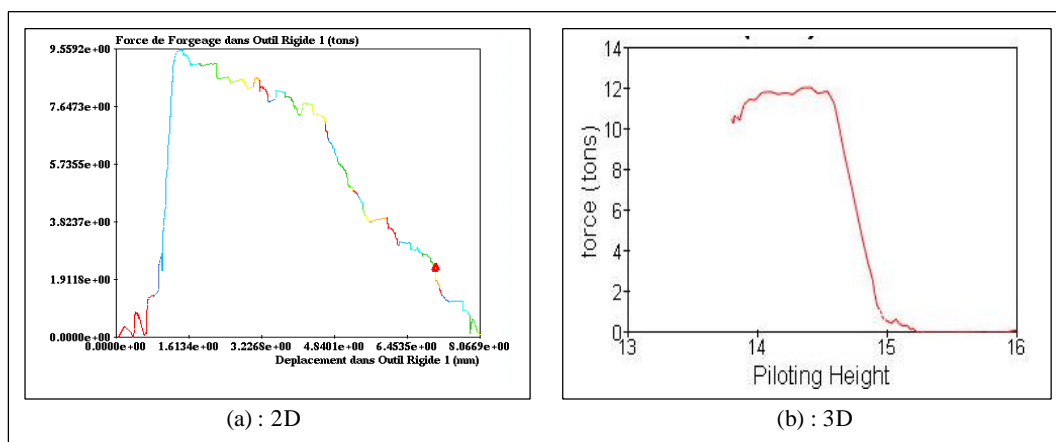


Figure 4.29 : Courbe globale Force/Déplacement pour l'opération de débouchage

Enfin, pour clore la discussion sur ce procédé, nous avons examiné l'effet d'une plus faible ductilité du matériau (18% au lieu de 36%) sur l'endommagement de l'écrou. La Figure 4.30

montre clairement l'endommagement total (rupture $D_{\max}=100\%$) de quelques éléments situés à la base de la collerette de l'écrou lors de la quatrième opération. Ceci prouve que le matériau choisi par l'entreprise pour fabriquer en grande série cet écrou convient parfaitement au procédé.

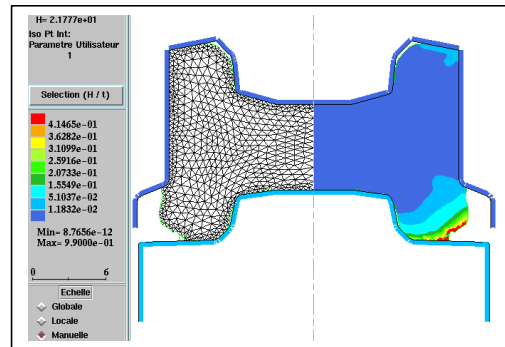


Figure 4.30 : Quatrième opération de formage, isovaleurs du dommage pour un matériau peu ductile

En conclusion, le modèle proposé permet de réaliser virtuellement une opération de formage complexe tout en prévoyant où et quand apparaît un endommagement indésirable. Ceci constitue un outil industriel mis à la disposition des ingénieurs de mise en forme afin de mettre au point leur gamme de fabrication à moindre coût.

4.6 PROCÉDÉ DE FORGEAGE DE CROISILLONS

4.6.1 Description du procédé

Dans le but d'élargir l'éventail des exemples de formage traités par la méthodologie numérique proposée, nous traitons dans ce paragraphe de la simulation du forgeage 3D d'un croisillon à partir d'un lopin cylindrique de diamètre $\varnothing 14$ mm et de longueur 38 mm. Deux procédés de forgeage à froid sensiblement différents seront simulés, à savoir : forgeage par estampage (frappe), et forgeage par extrusion. Ces exemples ont été traités dans notre laboratoire par des modèles plus élaborés [HAMMI00, SAANOUNI02, CHEROUAT02]. Le matériau utilisé est le matériau **A** du §3.2.2, en utilisant les coefficients d'endommagement $S=150$ MPa, $s=2.5$, $b=7.5$ donnant une ductilité de 20%. Le frottement entre les outils est un frottement acier/acier caractérisé par un coefficient de frottement de Coulomb avec $\mu=0.3$.

4.6.2 Procédé d'estampage ou forgeage libre

Ce procédé est schématisé sur la Figure 4.31. Les deux outils sont supposés rigides indéformables et leur géométrie est définie sur la Figure 4.32.

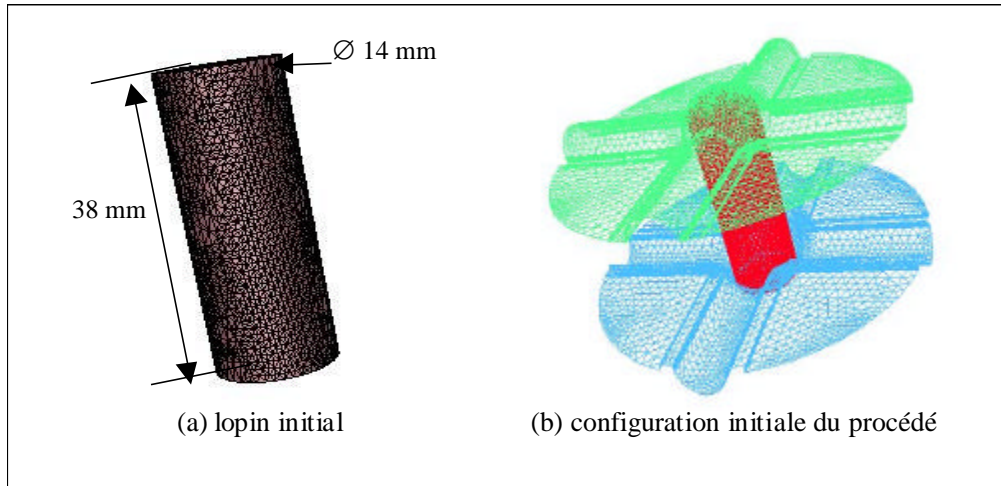


Figure 4.31 : Présentation schématique du procédé d'estampage du croisillon

Le maillage initial du lopin est relativement régulier et contient 45028 éléments tétraédriques P1-P1 de taille moyenne $\Delta x=1$ mm.

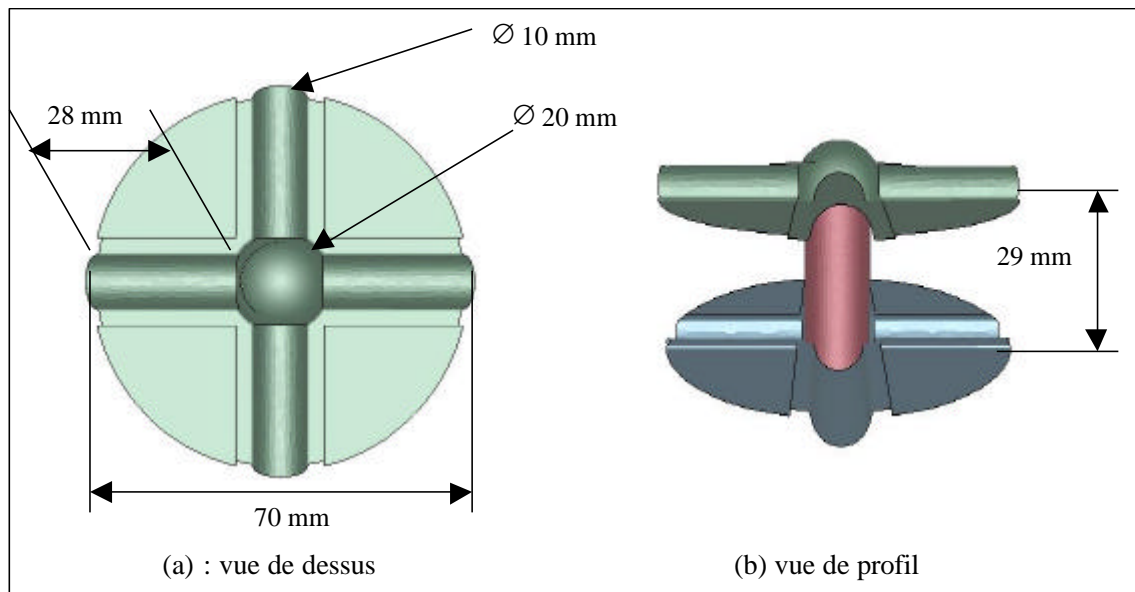


Figure 4.32 : Géométrie des outillages dans le cas du forgeage libre par estampage

La Figure 4.33 rassemble quelques images montrant la distribution de l'endommagement dans le croisillon à différents instants ou déplacements de la matrice mobile. On note que le dommage devient relativement important mais n'excède par 50% à la fin de l'opération (Figure 4.33 (d)). On remarque également que la distribution du dommage dans la pièce varie continuellement au cours du procédé. En effet au début ($u=10$ mm), un dommage ($D=9\%$) se localise au niveau des points de contact matrice/lopin ((Figure 4.33 (a)). Pour $u=20$ mm et $u=22.5$ mm il intervient toujours au niveau du contact matrice/lopin (Figure 4.33 (b) et (c)). Enfin, à la fin ((Figure 4.33 (d)) le dommage maxi se situe dans la bavure qui est destinée à être supprimée.

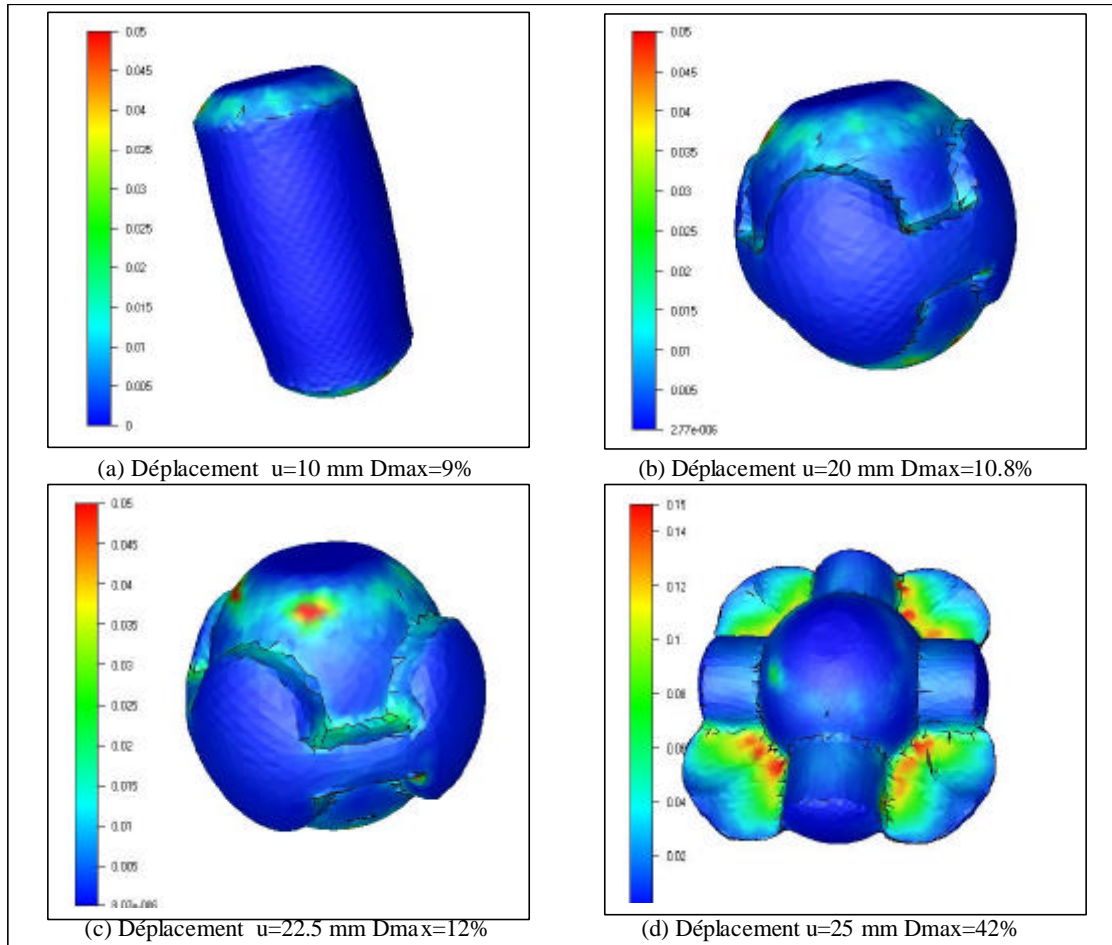


Figure 4.33 : Distribution du dommage dans le croisillon

Les isovalues des contraintes équivalentes (σ_{eq}) et des déformations plastiques cumulées (p) sont rassemblées dans la Figure 4.34.

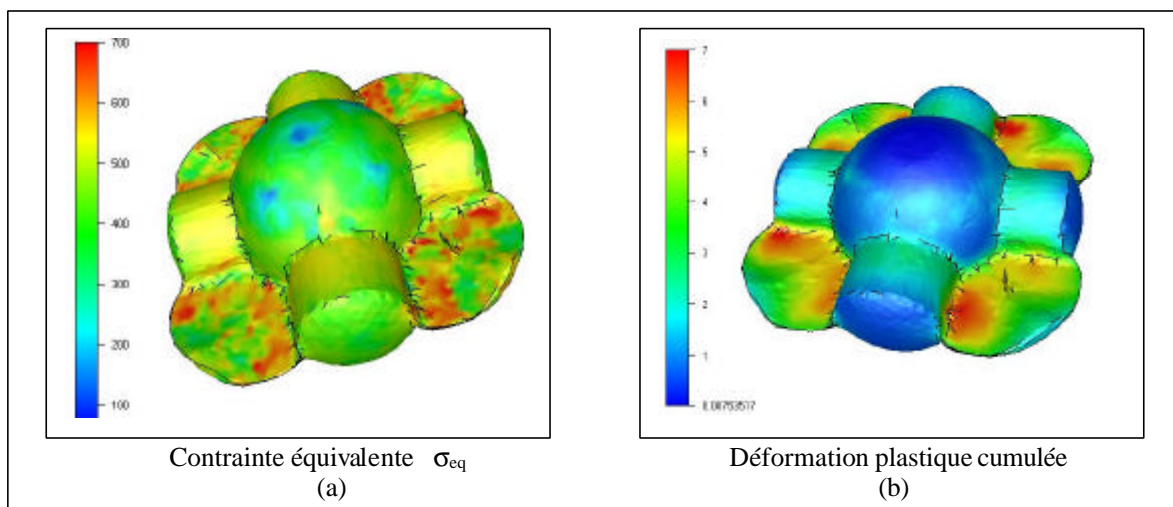


Figure 4.34 : Distribution de la contrainte équivalente (a) et de la déformation plastique cumulée (b) dans le croisillon en forgeage libre

On note que les valeurs maxi de la déformation plastique sont situées dans la bavure (Figure 4.34 (b)). On remarque également que les contraintes ne sont pas suffisamment relaxées, l'endommagement n'étant pas assez significatif (Figure 4.34 (a)). Pour ce procédé l'allure de la courbe de forgeage est illustrée sur la Figure 4.35.

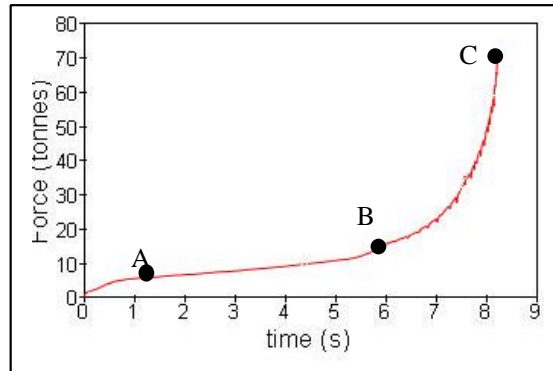


Figure 4.35 : Courbe Force/Déplacement globale, matriçage

On note clairement la présence de trois stades :

- OA** : Cette phase correspond à une augmentation de la force due à la compression du cylindre.
- AB** : Cette phase stationnaire correspond au remplissage des cavités de la matrice par écoulement plastique du métal.
- BC** : Cette phase correspond à une augmentation rapide de la force liée au remplissage total des cavités des matrices conduisant à une forte compression (compactage) de la matière.

Le dommage n'atteignant sa valeur maximale ($D_{\max}=40\%$) qu'en toute fin de process, et ne dépassant pas 15% le reste du temps, il n'influence donc pas la courbe globale de la Figure 4.35.

4.6.3 Procédé de forgeage par extrusion latérale

Ce procédé représente une autre façon d'obtenir le croisillon. Cela consiste à mettre un lopin cylindrique dans une matrice creuse ayant la forme finale du croisillon. Deux vérins viennent alors comprimer le cylindre obligeant la matière à remplir la cavité de la matrice par écoulement plastique. Ce procédé est représenté schématiquement sur la Figure 4.36. Par contre, nous avons dû modéliser la moitié de la pièce, en la symétrisant par rapport au plan médian qui nous semblait le plus judicieux d'adopter. Cette symétrie nous est imposée du fait de la lourdeur du calcul et des problèmes inhérents au couplage comportement-endommagement en 3D. De ce fait, le nombre d'éléments pour le lopin de hauteur 19 mm et de diamètre 14 mm est de 22130 pour une taille moyenne d'éléments de 1 mm.

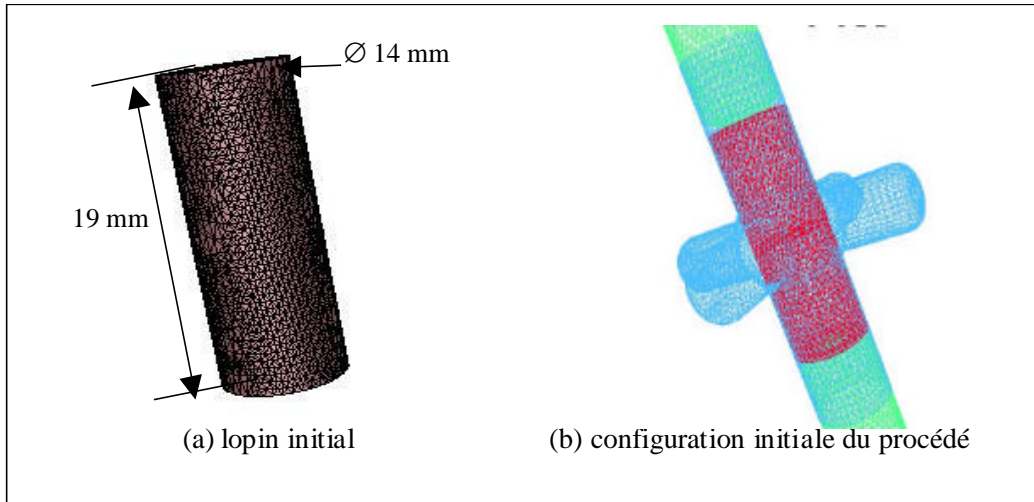


Figure 4.36 : Représentation schématique du procédé de forgeage par extrusion latérale

La matrice (creuse) est définie sur la Figure 4.37. Notons que la forme finale du croisillon sera légèrement différente de celle obtenue par forgeage libre comme on peut le voir en comparant la Figure 4.33 et la Figure 4.38.

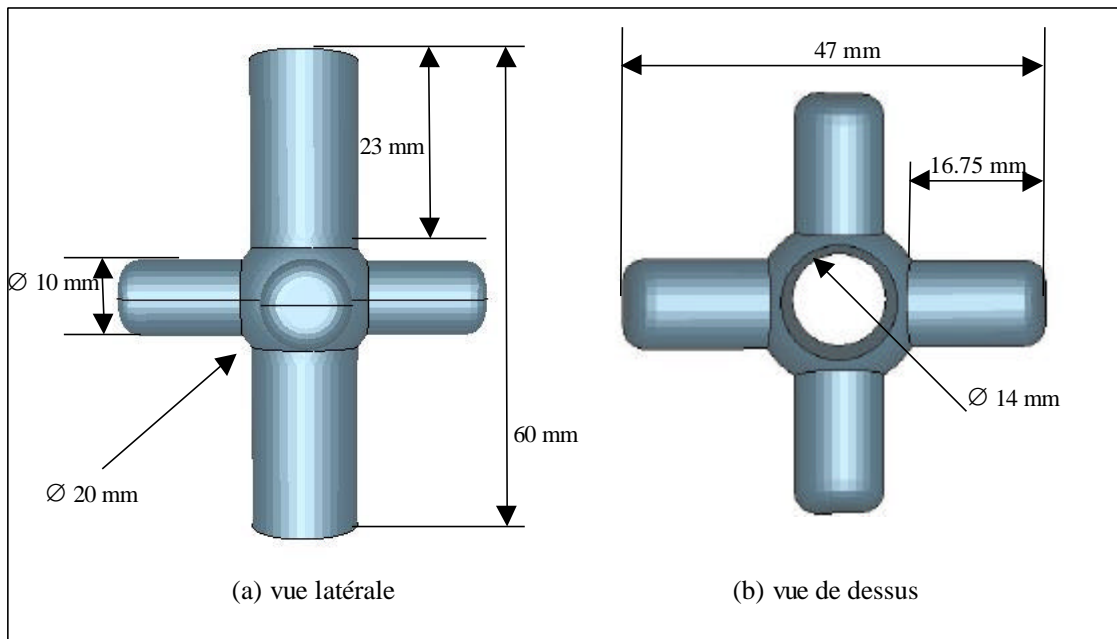


Figure 4.37 : Géométrie de la matrice dans le cas du forgeage libre par extrusion latérale

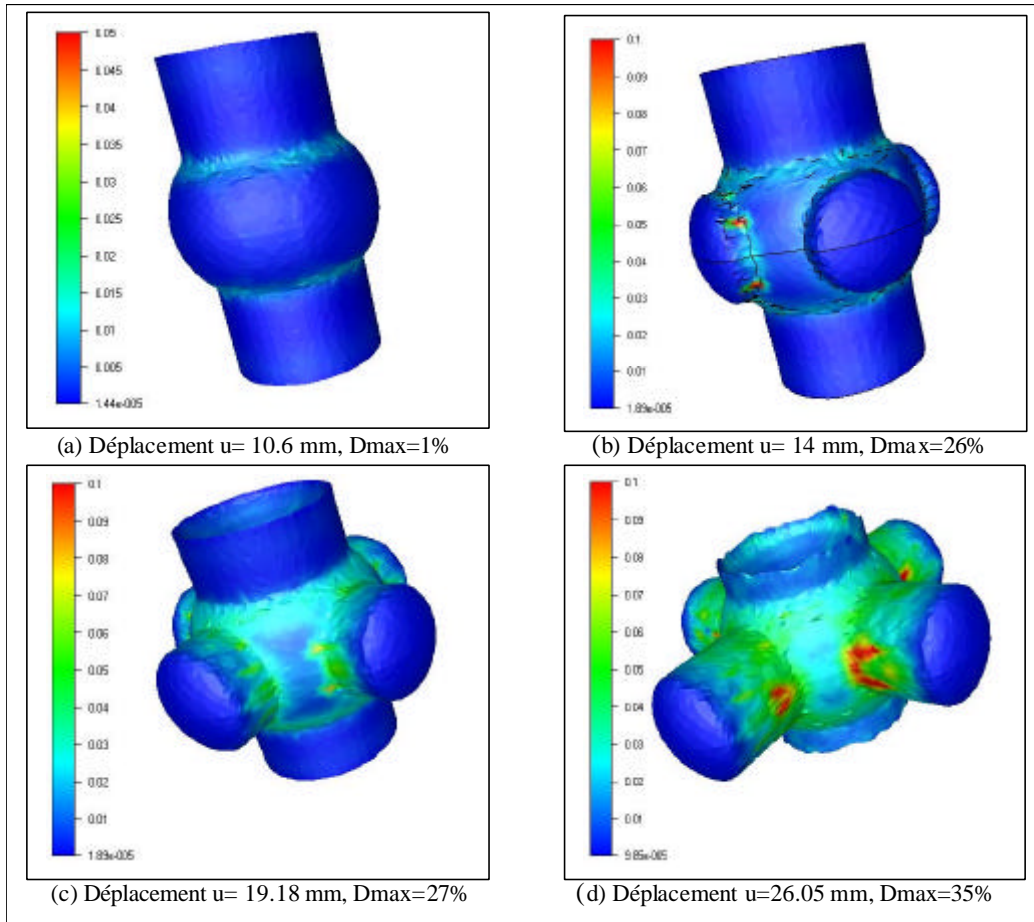


Figure 4.38 : Distribution du dommage dans le croisillon pour le procédé d'extrusion latérale

La Figure 4.38 montre la distribution de l'endommagement dans le croisillon pour différentes valeurs du déplacement des outils. En particulier on remarque que l'endommagement maxi ($D_{\max}=35\%$) se situe à l'intersection des cylindres avec la sphère centrale (Figure 4.38 (d)). On note comme pour le forgeage libre que l'endommagement croît continuellement au cours du déplacement des outils. Dans un premier temps l'endommagement croît doucement tout en restant négligeable ($D_{\max}=1\%$ pour $u=10$ mm) (Figure 4.38 (a)), puis augmente de façon plus importante dès la formation des cylindres (Figure 4.38 (b, c et d), $D_{\max}=35\%$ pour $u=26$ mm)). Néanmoins cet endommagement maxi est situé sur les cylindres et non sur la bavure comme précédemment. En effet, la Figure 4.39 montre les isovaleurs de la contrainte équivalente (Figure 4.39 (a)) et de la déformation plastique cumulée (Figure 4.39 (b)) à la fin du procédé. On note que la déformation plastique est localisée essentiellement sur les cylindres (Figure 4.39 (b)) et que la contrainte équivalente n'est pas suffisamment relaxée du fait d'un endommagement maxi de l'ordre de 35%.

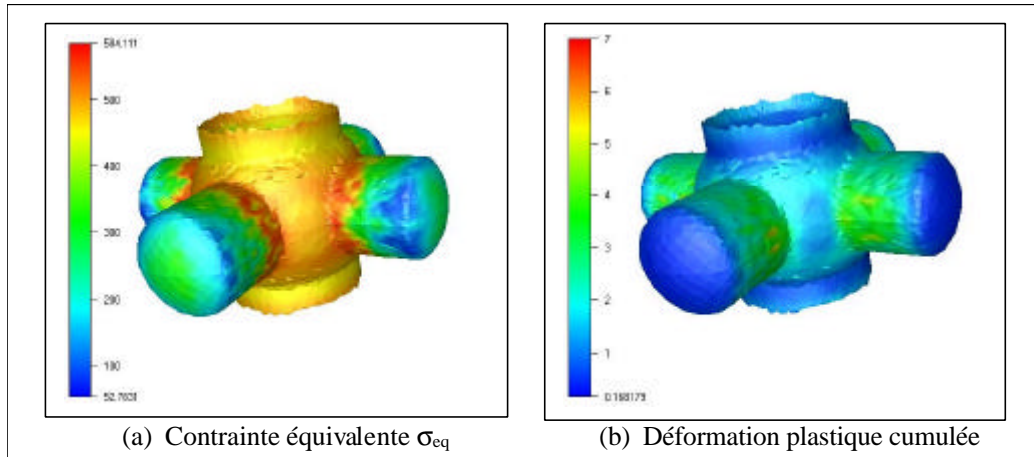


Figure 4.39 : Distribution de la contrainte équivalente (a) et de la déformation plastique cumulée (b) dans le croisillon pour le procédé d'extrusion latérale

La courbe de forgeage (ou force/déplacement) pour ce procédé est donnée sur la Figure 4.40. Là aussi trois phases sont clairement observées :

- AB** : Compression du cylindre initial, la matière remplit la sphère centrale.
- BC** : Compression de la matière dans la sphère centrale.
- CD** : Ecoulement de la matière à l'intérieur des quatre cavités cylindriques.

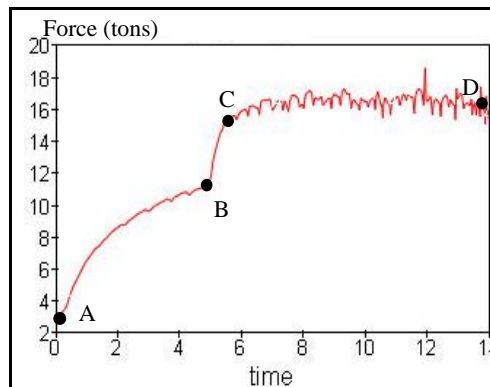


Figure 4.40 : Courbe Force/temps globale pour l'extrusion latérale

Il est à noter qu'en comparant avec la Figure 4.35 la courbe force/déplacement dans le cas d'extrusion latérale (Figure 4.40), il n'apparaît pas d'augmentation sensible de la force de forgeage lors de la troisième phase. Ceci s'explique simplement par les dimensions du lopin qui n'ont pas permis à la matière de s'écouler jusqu'à l'extrémité des cylindres de la matrice. Pour obtenir sensiblement les mêmes courbes, il aurait donc fallu raccourcir les cylindres de la matrice ou augmenter la hauteur du lopin.

Cette étude a permis d'obtenir la même pièce avec deux procédés sensiblement différents. Ceci permet ainsi à l'ingénieur de sélectionner un des deux procédés en sachant que le procédé d'extrusion possède l'avantage d'éviter une opération d'ébavurage mais possède l'inconvénient de localiser le dommage sur le croisillon. Le forgeage libre bien que

nécessitant une opération d'ébavurage, n'est pas affecté (ou très peu) par l'endommagement, celui-ci étant localisé majoritairement dans la bavure à ôter.

4.7 PROCÉDÉ DE FILAGE AVANT AVEC FORMATION DE CHEVRONS(2D)

4.7.1 Description du procédé

Le procédé de filage avant consiste à forcer un lopin cylindrique à passer dans une filière de forme conique afin d'en réduire le diamètre. La mise en œuvre de ce procédé, très utilisé dans l'industrie de la Forge, peut entraîner la formation de défauts caractéristiques sous forme de chevrons. En effet, il peut y avoir au centre du lopin une apparition de zones endommagées où plus tard se formeront ces chevrons. Ce type de défauts est particulièrement insidieux, car sa localisation au cœur de la matière le rend invisible en surface, tendant ainsi à fragiliser considérablement la pièce. Afin de déceler ces défauts, il faudrait soit réaliser des contrôles non destructifs par ultrasons ou des radiographies par rayon X, soit réaliser des tests destructifs par échantillonnage systématique.

Il existe dans la littérature quelques études expérimentales et numériques liées à ces problèmes (Aravas [ARAVAS85], Kim et Ko [KIM98], [MARIAGE02b]). Ces études tendent à montrer que l'apparition des chevrons est gouvernée directement par certains paramètres tels que:

- L'angle de filière
- Le taux de réduction de diamètre
- L'écoulement du matériau
- Les frottements entre le lopin et la matrice
- Le diamètre initial du lopin

De ces travaux, il semble se dégager le fait que la contrainte hydrostatique et la contrainte principale maximum sont les variables les plus influentes sur la formation des chevrons. Les travaux de Kim et Ko [KIM98], qui utilisent un critère d'évolution de l'endommagement basé sur la contrainte principale maximum (critère de Latham et Cockroft [LATHAM68]), arrivent à mettre en évidence une zone endommagée au cœur de l'éprouvette. Ce critère ne dépend pas de la contrainte hydrostatique et n'altère pas les propriétés mécaniques du matériau, c'est en fait un calcul dit découplé. Le critère que nous utilisons ici, avec une loi de comportement de type linéaire puissance, est une combinaison des trois invariants Eq. (1.30). Le matériau utilisé pour toutes nos simulations numériques est le matériau **A2** du § 3.2.2. Nous utiliserons néanmoins le matériau **B2** de ce même paragraphe pour caractériser un matériau très ductile (70%) afin d'étudier l'influence de la ductilité. La géométrie de la matrice ainsi que celle du lopin initial sont données sur la Figure 4.41.

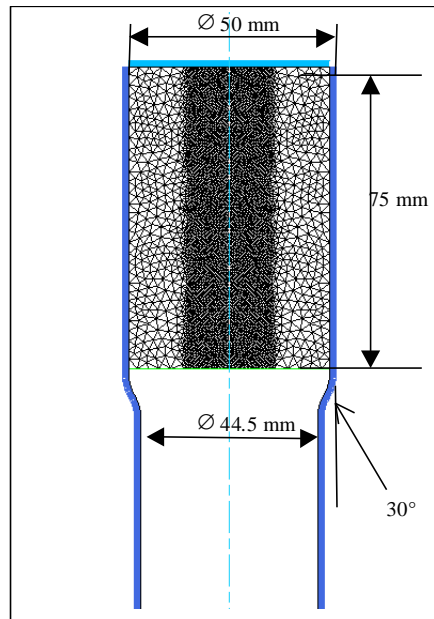


Figure 4.41 : Géométrie du procédé de filage dans le cas d'une réduction de diamètre de 11% et d'un angle de filière de 30°

On utilisera un maillage 2D constant sur le lopin ($\Delta x=1.2$ mm) avec utilisation d'une boîte de maillage au centre du lopin où la taille maximale des éléments est de $\Delta x=0.7$ mm. Le nombre d'éléments (triangle P1-P1) utilisé sera précisé pour chaque cas traité. La vitesse de l'outil supérieur est constante et fixée à 5mm/s. L'hypothèse d'axisymétrie a été retenue pour l'ensemble des cas traités.

Dans ce qui suit nous allons étudier l'influence d'un certain nombre de paramètres sur la formation des chevrons en filage avant.

4.7.2 Simulation numérique du filage avant

Nous commençons par simuler le procédé de filage avant défini sur la Figure 4.41. Le nombre exact d'éléments est de 4463. La Figure 4.42 présente des instants particuliers du procédé correspondant à $u=0$ (état initial), $u=23.8$ mm, $u=50.16$ mm et $u=70$ mm (état final). On constate la formation des chevrons lors du passage de la matière au niveau de la fin du cône de réduction de la matrice (Figure 4.42 (b) et (c)). On note également une périodicité spatiale des chevrons (Figure 4.42 (c) et (d)). Nous étudierons par la suite les facteurs mécaniques et/ou numériques qui influencent cette périodicité. Notons enfin la présence d'un faible endommagement au niveau de l'interface matrice/lopin i.e. sur la surface extérieure (Figure 4.42 (c) et (d)).

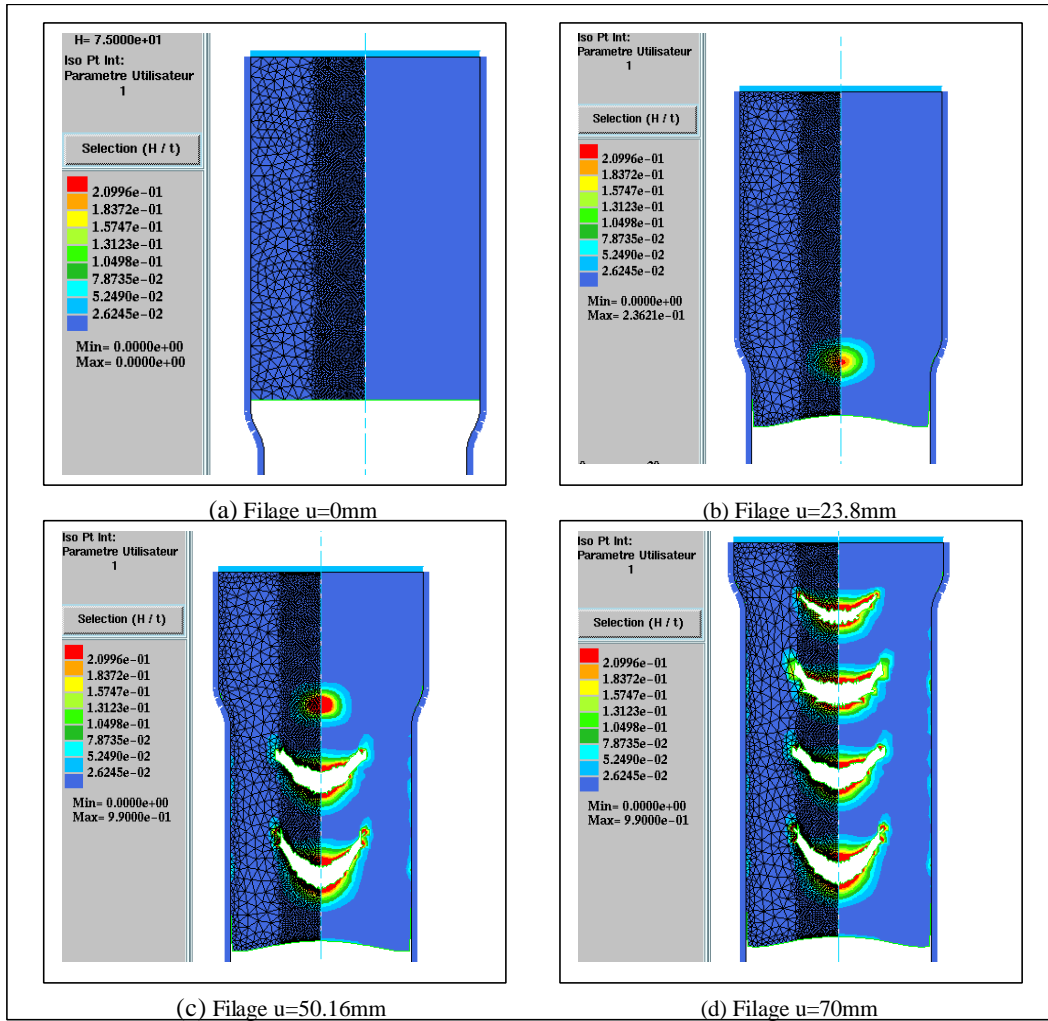


Figure 4.42 : Procédé de filage, réduction 11% angle 30°

Afin de mieux comprendre la formation de ces chevrons, nous allons analyser l'évolution des principaux invariants des contraintes dans la barre au cours de son filage. En particulier, nous examinerons ces grandeurs le long de l'axe du lopin et le long d'une génératrice extérieure au niveau du contact avec la filière. La Figure 4.43 montre les deux lignes en question.

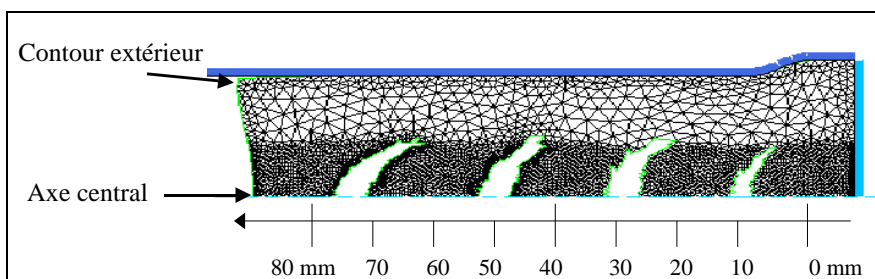


Figure 4.43 : Profil du lopin en fin de process : situation des deux lignes (axe central et génératrice extérieure)

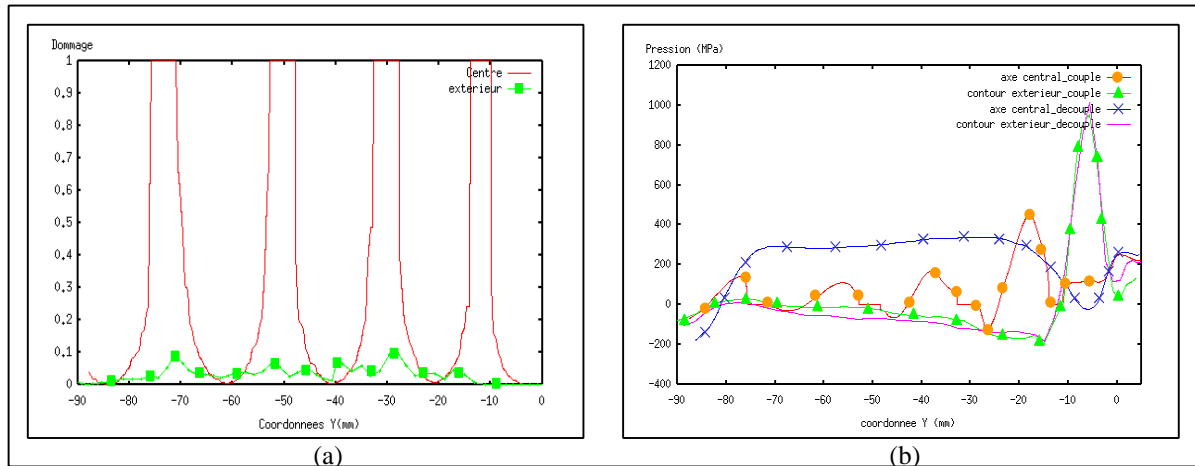


Figure 4.44 : Courbes d'évolution de l'endommagement (a) et de la pression hydrostatique (b) au cœur et à l'extérieur du lopin en fin de calcul couplé

La Figure 4.44 (a) représente l'évolution de l'endommagement le long des deux lignes. On note que le long de la ligne extérieure l'endommagement reste relativement faible et ne dépasse pas 10%. Sur l'axe du lopin le dommage est faible (<10%) entre les chevrons, et atteint sa valeur critique ($D=1$) au niveau des fissures. La distribution de P_H , σ_{eq} et σ_{max} le long des deux lignes est donnée sur les Figure 4.44 (b) et Figure 4.45 (c) et (d). Dans ce calcul couplé les remarques suivantes peuvent être faites concernant les contraintes :

*La contrainte hydrostatique sur la surface extérieure augmente rapidement au niveau du cône de réduction pour atteindre $P_{Hmax}=960$ MPa. Elle chute aussi rapidement et devient négative $P_H=-205$ MPa à la sortie du cône, puis augmente très lentement d'une façon monotone pour tendre vers zéro à l'extrémité de la barre du côté du diamètre réduit. Sur l'axe de la barre la situation de la pression hydrostatique est différente. Partant d'une valeur positive $P_H=200$ MPa, elle chute à environ 100 MPa au niveau du cône et reste constante le long de celui-ci. Elle est nulle au niveau du chevron et augmente rapidement dès la sortie de celui-ci pour atteindre environ 450 MPa au milieu du ligament de matière non endommagé entre les deux premiers chevrons. Ensuite, elle rechute de nouveau très rapidement, devient négative $P_H=-100$ MPa puis s'annule au niveau du deuxième chevron. Ce scénario est répété le long de l'axe mais avec un net amortissement des min-max comme on peut le constater sur la Figure 4.44 (b). Pour mieux expliquer ces variations nous avons reporté sur la même figure (Figure 4.44 (b)) l'évolution de la pression hydrostatique le long des deux mêmes lignes lors d'un calcul classique sans tenir compte de l'endommagement. Si l'on remarque peu de différences avec le calcul couplé sur la variation de P_H le long de la ligne extérieure, il n'en va pas de même le long de l'axe de la barre. En effet, on note pour le cas découplé que P_H passe de la même valeur positive que pour le cas couplé $P_H=200$ MPa (à l'extrémité de la barre, côté grand diamètre) pour tendre vers zéro au milieu du cône de réduction. Ensuite, elle augmente rapidement pour atteindre $P_H=350$ MPa en $y=-25$ mm, cette valeur reste relativement constante (une faible chute est cependant observée) jusqu'à $y=-75$ mm. A partir de ce point P_H chute rapidement passe par zéro pour atteindre $P_H=-200$ MPa à l'extrémité de la barre. On

explique alors les oscillations de P_H dans le cas couplé par le fait qu'entre les chevrons elle cherche à atteindre la valeur positive ($P_H=350$ MPa) relevée en absence d'endommagement (cas découplé), mais le couplage avec l'endommagement le ramène brutalement à zéro. Ce phénomène oscillatoire subit un amortissement d'autant plus grand que le nombre de chevrons est élevé.

*Concernant la contrainte équivalente de Mises, nous avons porté sa variation le long de la barre (Figure 4.45 (c)). En l'absence d'endommagement (calcul non couplé), σ_{eq} part d'une valeur de 350 MPa, chute légèrement au début de la filière et ré-augmente pour atteindre un maximum de 385 MPa au niveau du cône de réduction. Elle chute brutalement pour atteindre la valeur zéro en $y=-20$ mm, puis augmente de manière parabolique en atteignant sa valeur du début ($\sigma_{eq}=380$ MPa) pour ensuite rechuter doucement. Si le couplage comportement-endommagement est pris en compte (calcul couplé) la variation de σ_{eq} devient oscillatoire comme P_H et ce pour les mêmes raisons. Un second pic de σ_{eq} est observé après chaque chevron comme l'indique la (Figure 4.45 (c)).

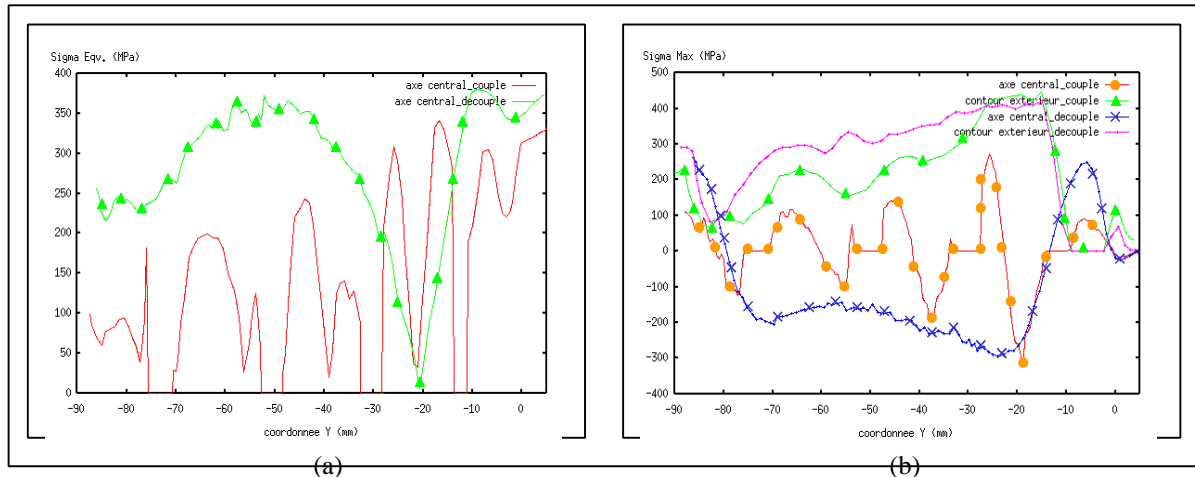


Figure 4.45 : Courbes d'évolution de la contrainte équivalente (a) et de la contrainte principale maximale (b) au cœur et à l'extérieur du lopin en fin de calcul (couplé/découplé)

*Enfin, concernant la plus grande contrainte principale maximum σ_{max} , son évolution est portée sur la Figure 4.45 (d). Le long de la génératrice extérieure, il n'existe pas de différence qualitative entre le calcul couplé et le calcul non couplé. σ_{max} augmente rapidement après le cône de réduction pour atteindre $\sigma_{max}=405$ MPa, puis chute doucement le long de l'axe. Cette chute est un peu plus prononcée dans le cas du calcul couplé. Sur l'axe central de la barre la situation est toute différente et ressemble à l'inverse des résultats obtenus avec P_H . En absence d'endommagement (calcul non couplé) σ_{max} part d'une valeur nulle en $y=0$ mm et reste nulle dans la partie cylindrique (grand diamètre de la filière). Ensuite, σ_{max} augmente pour atteindre une valeur de 250 MPa au milieu du cône de réduction. Elle chute ensuite (en passant par zéro) à la sortie du cône et atteint une valeur négative de -280 MPa en $y=-22.5$ mm. Puis elle reste approximativement constante le long de la barre jusqu'à $y=-70$ mm (une légère chute est observée avec $\sigma_{max}=-210$ MPa pour $y=-70$ mm). Elle tend alors vers une valeur positive

(passant par zéro) en $y=-80$ mm pour atteindre 300 MPa à l'extrémité de la barre. Pour le calcul couplé, σ_{\max} oscille au même titre que P_H et pour les mêmes raisons.

De cette étude de l'étude des invariants des contraintes, sans et avec effet de l'endommagement, nous concluons que la formation des chevrons dans ce procédé de filage est essentiellement contrôlée par P_H et σ_{\max} avec une très petite influence de σ_{eq} . De ce fait nous avons volontairement évité de faire intervenir la contrainte équivalente, cela nous a permis de choisir $\alpha_1=0.5$ et $\alpha_2=0.5$ dans le critère d'endommagement de l'équation (1.30) du chapitre 1.

Enfin, pour clore cette discussion, nous donnons l'évolution des zones endommagées (fissures sur la Figure 4.46 (a)) pour un calcul non couplé. Il est clair qu'un calcul non couplé (toute chose égale par ailleurs) ne permet pas de prédire la formation des chevrons. Il permet de prédire une zone « endommagée » continue sous forme de tunnel. Ceci est confirmé par l'évolution de l'endommagement le long de l'axe de la barre (Figure 4.46 (b)). On voit clairement que D atteint 1 dès l'amorçage de la première fissure ($y=-7.5$ mm) puis garde cette valeur jusqu'à l'emplacement du dernier chevron ($y=-75$ mm). Une fois de plus, nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que dans ce calcul non couplé, le dommage n'affecte pas le comportement du matériau. En conséquence, la zone « endommagée » de la Figure 4.46 (b) n'est en fait pas une fissure puisqu'elle garde intacte sa rigidité et donc les contraintes n'y sont pas nulles.

Ceci apporte donc une preuve supplémentaire que seul un couplage « fort » comportement-endommagement permet de décrire la fissuration des structures mécaniques.

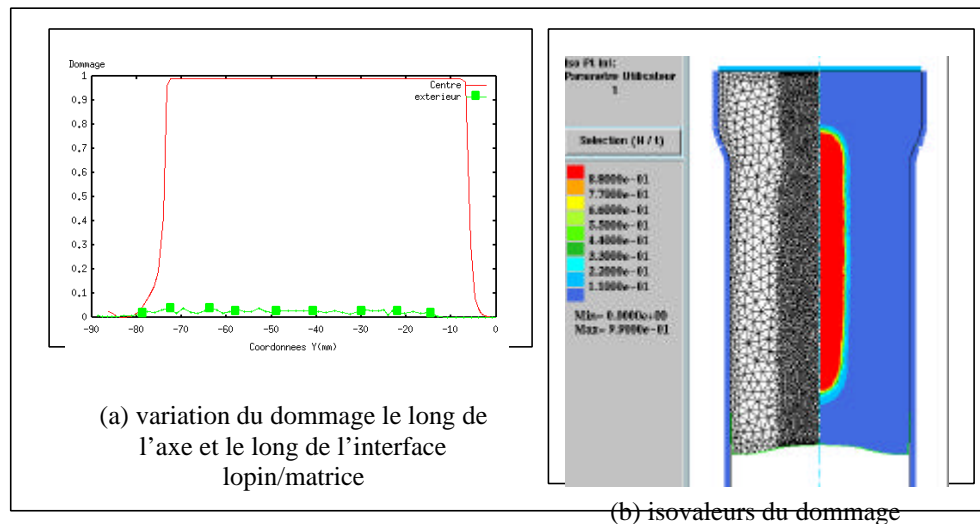


Figure 4.46 : Evolution de l'endommagement dans la barre pour un calcul découplé

En examinant les images de la Figure 4.42 on est en droit de se poser la question suivante :

-Le modèle de comportement, fut-il couplé à l'endommagement, étant un modèle continu, pourquoi est-il capable de donner une fissuration discontinue sous forme de chevrons ?

La réponse à cette question est fournie par la comparaison entre le calcul couplé (Figure 4.44 (a)) et le calcul découplé (Figure 4.46 (a)). En effet, la solution « fissure » est bien continue dans le calcul non couplé, alors qu'elle est discontinue dans le calcul couplé. C'est donc le

couplage comportement-endommagement et particulièrement le couplage élasticité-endommagement ($\tilde{E} = E(1 - D)$) qui est responsable de la discontinuité de la fissure donnant les chevrons. Ainsi, dès le passage de l'extrémité de la barre dans le cône, un fort gradient de dommage apparaît sur l'axe en sortie de réduction de filière (Figure 4.42 (b)). A cet endroit la rigidité des points concernés s'effondre du fait du couplage élasticité-endommagement, la même observation est faite pour les contraintes. Comme la matière continue à avancer, cet amorçage sur l'axe donne rapidement la forme du chevron dont l'inclinaison est conditionnée par l'angle du cône de la filière. Pendant ce temps, le ligament de matière se trouvant sur l'axe de la barre ne s'endommage plus jusqu'à ce que le premier chevron s'éloigne suffisamment du cône de la filière pour que les conditions mécaniques (invariants de σ_{ij}) soient de nouveau favorables à l'amorçage d'un nouveau chevron et ainsi de suite. Nous étudierons plus loin la périodicité spatiale de la formation des chevrons ainsi que l'influence de la discrétisation spatiale sur celui-ci.

4.7.3 Influence de la réduction du diamètre et de l'angle de la filière

Beaucoup d'études ont montré l'influence que pouvait avoir la géométrie de la filière sur un procédé de filage. On se propose alors, pour un même matériau, d'étudier plusieurs géométries d'outils pour pouvoir établir un lien entre la formation des chevrons et la combinaison angle/réduction de filière. Ces études effectuées, nous pourrions alors comparer ces résultats avec ceux observés expérimentalement. Pour cela, nous avons sélectionné les 6 cas suivants :

***Cas 1** : $D=29.5$ mm, $d=26.5$ mm, facteur de réduction $f_R=0.1$, angle de la filière $\alpha=30^\circ$, le maillage contient 7512 éléments, taille maxi des éléments $\Delta x=3.54$ mm et pour la boîte de maillage (centre du lopin) $\Delta x=0.8$ mm.

***Cas 2** : $D=29.5$ mm, $d=26.5$ mm, facteur de réduction $f_R=0.1$, angle de la filière $\alpha=20^\circ$, le maillage contient 7512 éléments, taille maxi des éléments $\Delta x=3.54$ mm et pour la boîte de maillage (centre du lopin) $\Delta x=0.8$ mm.

***Cas 3** : $D=29.5$ mm, $d=20.5$ mm, facteur de réduction $f_R=0.3$, angle de la filière $\alpha=18^\circ$, le maillage contient 7512 éléments, taille maxi des éléments $\Delta x=3.54$ mm et pour la boîte de maillage (centre du lopin) $\Delta x=0.8$ mm.

***Cas 4** : $D=29.5$ mm, $d=25$ mm, facteur de réduction $f_R=0.15$, angle de la filière $\alpha=10^\circ$, le maillage contient 5548 éléments, taille maxi des éléments $\Delta x=2.97$ mm et pour la boîte de maillage (centre du lopin) $\Delta x=0.8$ mm.

***Cas 5** : $D=29.5$ mm, $d=24.8$ mm, facteur de réduction $f_R=0.16$, angle de la filière $\alpha=4^\circ$, le maillage contient 5548 éléments, taille maxi des éléments $\Delta x=2.97$ mm et pour la boîte de maillage (centre du lopin) $\Delta x=0.8$ mm.

***Cas 6** : $D=29.5$ mm, $d=20.5$ mm, facteur de réduction $f_R=0.3$, angle de la filière $\alpha=15^\circ$, le maillage contient 7512 éléments, taille maxi des éléments $\Delta x=3.54$ mm et pour la boîte de maillage (centre du lopin) $\Delta x=0.8$ mm.

Les conditions aux limites sont les mêmes que celles décrites dans les simulations précédentes (voir §4.7.1). Les résultats obtenus sont :

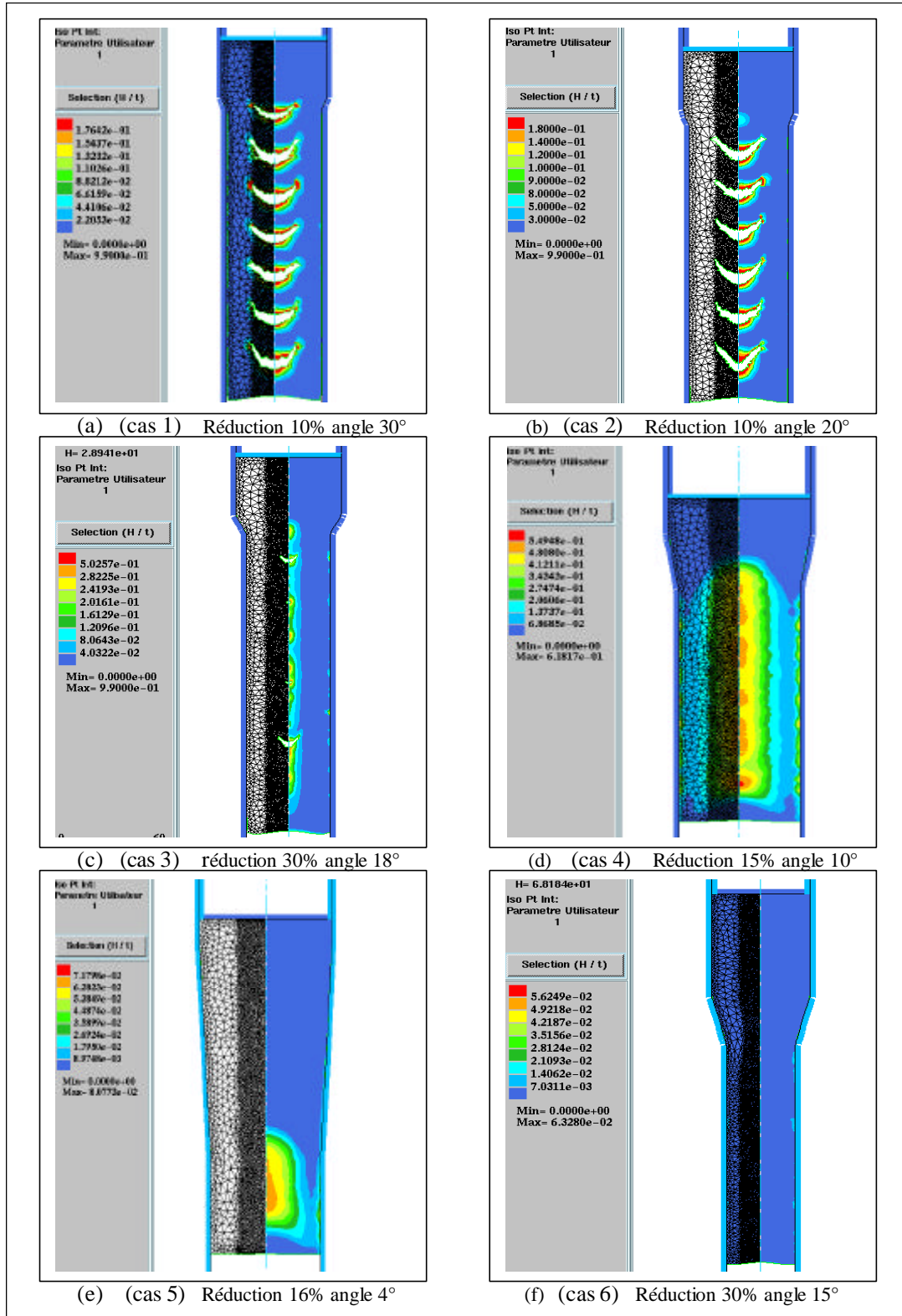


Figure 4.47 : Résultats des simulations du procédé de filage pour différents angles et réductions de diamètre

- Le cas 1 (Figure 4.47 (a)) a donné 7 chevrons avec une périodicité spatiale de $d=20$ mm entre les chevrons.
- Le cas 2 (Figure 4.47 (b)) a donné 6 chevrons avec une périodicité spatiale plus grande de $d=22$ mm entre les chevrons.
- Le cas 3 (Figure 4.47 (c)) a donné uniquement 2 petits chevrons distants de 68 mm.
- Le cas 4 (Figure 4.47 (d)) n'a pas donné de chevrons proprement dit, mais une zone endommagée axiale contenant des « îlots » de localisation du dommage ($D_{\max}=61\%$).
- Le cas 5 (Figure 4.47 (e)) n'a donné qu'une faible zone endommagée ($D_{\max}=8\%$).
- Le cas 6 (Figure 4.47 (f)) n'a pas donné de zone endommagée si ce n'est un endommagement très faible sur l'interface lopin/matrice ($D_{\max}=6\%$).

Il y a donc clairement des conditions géométriques (facteur f_R et angle α) plus favorables que d'autres pour la formation des chevrons en filage avant. De plus, ces conditions semblent influencer la périodicité des chevrons.

On peut donc comme l'a proposé Zimerman [ZIMERMAN70] construire un diagramme en portant sur l'axe des abscisses l'angle du cône de la filière et sur l'axe des ordonnées le facteur f_R de réduction du diamètre (Figure 4.48). Zimerman a remarqué qu'il existe une courbe partageant ce diagramme en deux zones :

- Une zone où il ne peut y avoir formation de chevrons. Elle est caractérisée par une grande réduction de diamètre et de faibles angles de filière.
- Une zone favorable à la formation de chevrons essentiellement caractérisée par de forts angles de filière et de faibles réductions de diamètre.

On remarque que nos résultats numériques vérifient assez bien le diagramme de Zimerman. En effet, les cas 1, 2 et 3 se trouvent bien dans la zone de formation des chevrons alors que les cas 5 et 6 sont bien dans la zone de sécurité et ne donnent pas de chevrons. Seul le cas 4 se trouve du mauvais coté de la courbe limite mais reste très proche de cette dernière. En effet, la Figure 4.47 (d) montre bien des zones de localisation de dommage avec $D_{\max}=60\%$.

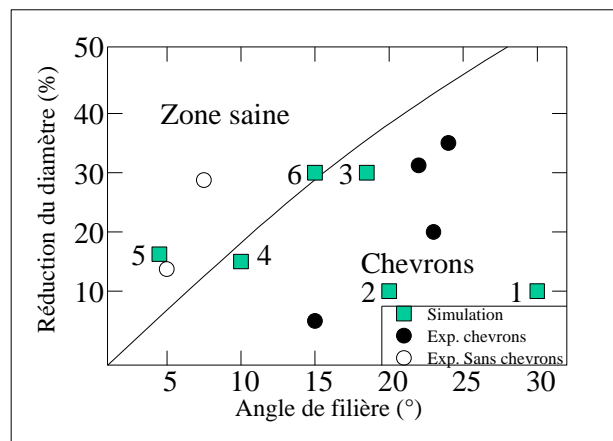


Figure 4.48 : Effet de la géométrie des outils sur l'apparition de chevrons (Source Zimerman, 1970)

4.7.4 Etude de l'influence du maillage sur la formation des chevrons

De par notre modélisation purement locale, nous savons que la solution « post-bifurcatoire » dépend de la finesse du maillage (voir chapitre3 §3.2.2). Il paraît donc indispensable d'étudier l'influence de la discrétisation géométrique sur la formation des chevrons et en particulier sur leur périodicité spatiale.

Pour cela nous proposons de faire 3 simulations du même procédé (même matériau **A2** du §3.2.2) et même géométrie (lopin de $\varnothing 70$ mm et de hauteur 75 mm)) mais en utilisant 3 maillages différents.

La géométrie de ce nouveau procédé a été choisie avec $D=70$ mm, $d=62$ mm, $f_R =0.11$ et $\alpha=30^\circ$, déterminés afin de favoriser la formation des chevrons.

La vitesse d'avance de l'outil supérieur est de 5mm/s. Les trois maillages choisis sont :

- Un maillage relativement régulier, dont la taille maxi des éléments est $\Delta x=3.07$ mm (maillage moyen) contenant 572 triangles P1-P1.
- Un maillage fin aussi régulier que le maillage précédent, dont la taille maxi des éléments est $\Delta x=2.07$ mm (maillage fin) contenant 1312 triangles P1-P1.
- Un maillage très fin, nous avons créé deux zones afin de réduire la taille du problème et donc le temps CPU. Ce maillage contient donc deux zones où la taille des éléments dans la zone moins fine vaut $\Delta x=2.56$ mm et $\Delta x=0.7$ mm dans la zone fine (centrale) avec un total de 6833 éléments P1-P1.

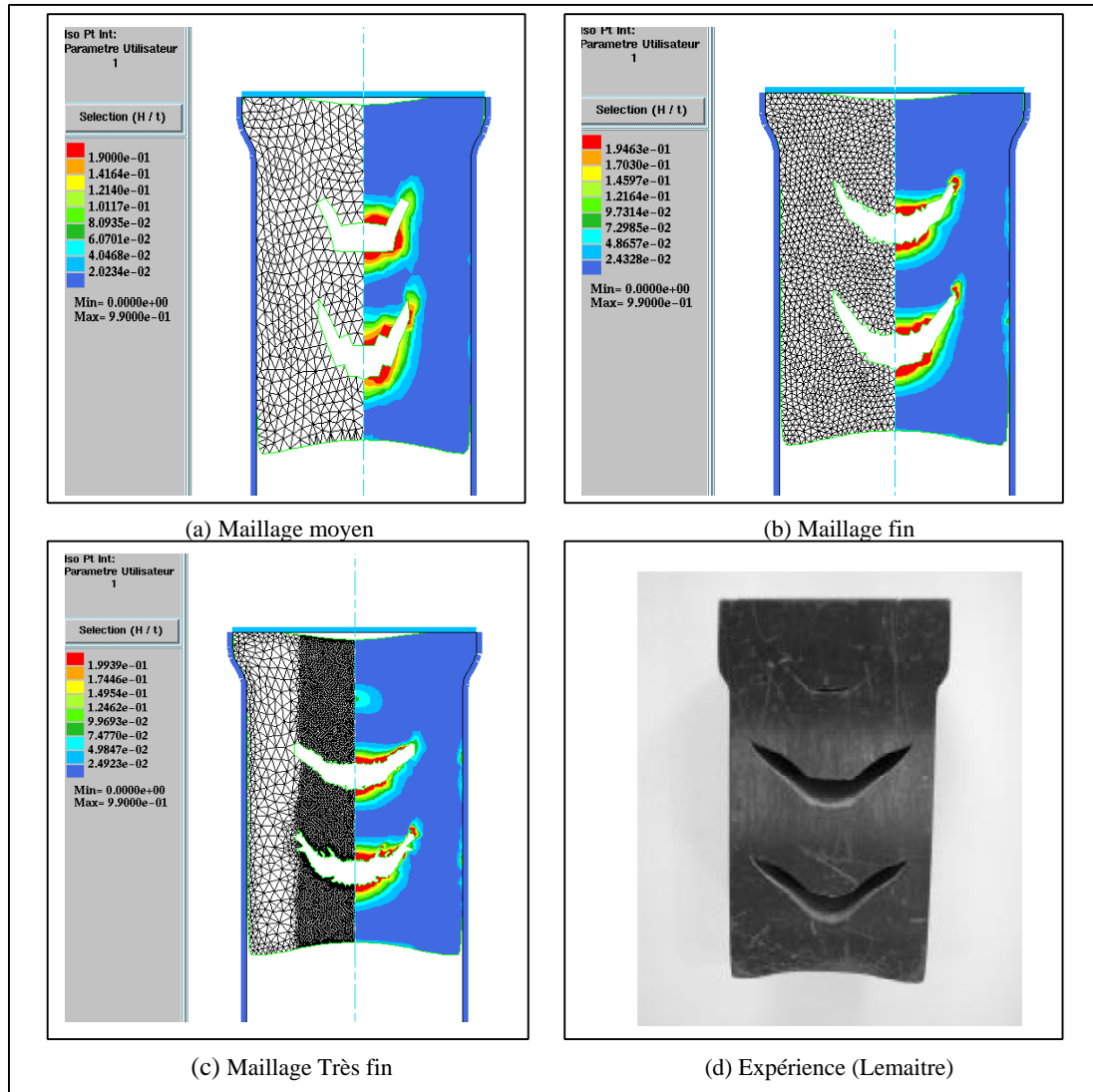


Figure 4.49 : Comparaison essai expérimental (source LMT Cachan [LEMAITRE02])/numérique pour différents maillages, réduction 11,42% angle 30°

La Figure 4.49 montre une comparaison entre la configuration finale obtenue avec chaque maillage et un résultat expérimental communiqué par J. Lemaitre [LEMAITRE02]. D'abord on note qu'il n'y a aucune influence significative du maillage ni sur le nombre des chevrons formés, ni sur la distance entre les chevrons. Par contre on constate une influence du maillage sur la géométrie des chevrons. On observe également d'étonnantes similitudes entre le résultat expérimental et ceux obtenus par la simulation numérique en couplage comportement-endommagement.

4.7.5 Influence du diamètre initial du lopin.

On s'intéresse ici à l'étude de l'influence du diamètre initial du lopin. On se propose, dans cette dernière étude, de simuler quatre filages où l'on fera varier le diamètre initial du lopin tout en conservant le même matériau, le même maillage et le même rapport angle/réduction ($30^\circ/11,42\%$). Bien évidemment le fait d'augmenter le diamètre nous oblige à augmenter la

hauteur du lopin (donc les volumes des lopins seront différents) ceci dans le souci de respecter une même longueur de filage ($d=80$ mm) et pouvoir ainsi en tirer des conclusions.

Nous avons donc sélectionné trois lopins :

-Un premier lopin de rayon $r=15$ mm, hauteur 75 mm, avec une taille d'éléments maxi sur la partie moins fine de 1.67 mm et de 0.8 mm sur la partie centrale. Le nombre d'éléments pour ce lopin est de 2704.

-Un deuxième lopin de rayon $r=25$ mm, hauteur 75 mm, avec une taille d'éléments maxi sur la partie moins fine de 2.16 mm et de 0.8 mm sur la partie centrale. Le nombre d'éléments pour ce lopin est de 4463.

-Un troisième et dernier lopin de rayon $r=60$ mm, hauteur 150 mm, avec une taille d'éléments maxi sur la partie moins fine de 4.74 mm et de 0.8 mm sur la partie centrale. Le nombre d'éléments pour ce lopin est de 8250.

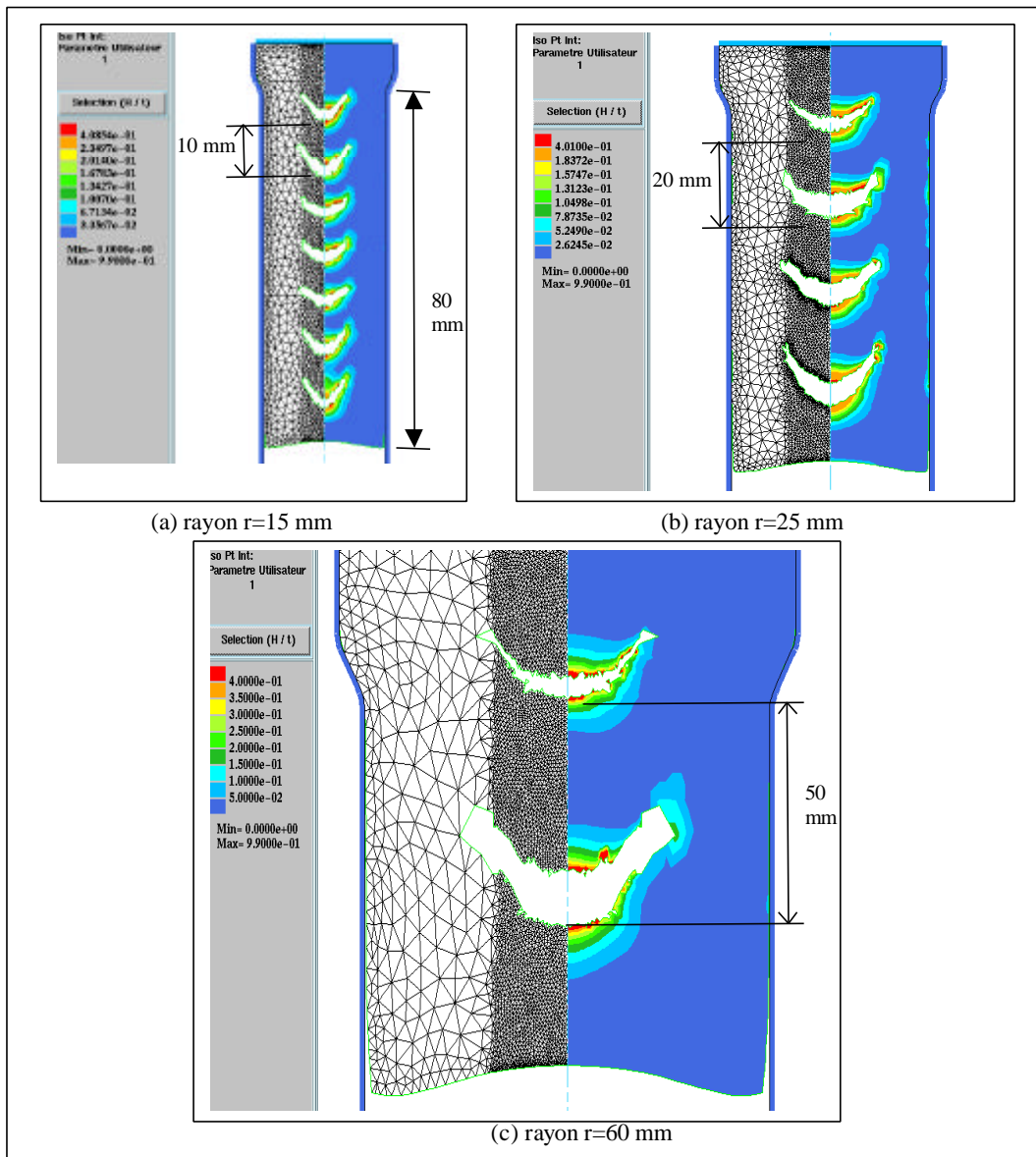


Figure 4.50 : Isovaleurs du dommage pour des simulations de filage pour différents diamètres initiaux des lopins

La Figure 4.50 montre qu'il existe un lien entre le nombre et la périodicité d'apparition des chevrons avec le diamètre initial du lopin. En effet, comme on peut le remarquer sur la figure précédente, plus le diamètre du lopin est grand, plus le nombre de chevrons formés sera faible et plus l'espacement entre ces chevrons sera grand, pour la même longueur filée. En effet nous avons :

- *Pour un diamètre $\varnothing 30$ mm on obtient 7 chevrons espacés de 10 mm (Figure 4.50 (a))
- *Pour un diamètre $\varnothing 50$ mm on obtient 4 chevrons espacés de 20 mm (Figure 4.50 (b))
- *Pour un diamètre $\varnothing 120$ mm on obtient 2 chevrons espacés de 50 mm (Figure 4.50 (c))

4.7.6 Influence de la ductilité et du coefficient de frottement

Pour finir l'étude du procédé de filage, nous nous proposons d'examiner l'influence de la ductilité du matériau ainsi que la nature du frottement entre la barre et la filière.

Pour cela nous considérons le procédé déjà utilisé au §4.7.4 avec $f_R=0.11$ et $\alpha=30^\circ$. Le matériau est celui utilisé pour toutes nos simulations à savoir le matériau **A2** du §3.2.2.

4.7.6.1 Influence de la ductilité

Nous effectuons deux simulations de ce procédé avec deux ductilités différentes, à savoir une ductilité de l'ordre de $\epsilon_{rup}^p = 20\%$ (Figure 4.51 (a)) et une très forte ductilité ($\epsilon_{rup}^p = 70\%$, Figure 4.51 b)) La Figure 4.51 tend à montrer qu'une forte ductilité tend à supprimer la formation des chevrons.

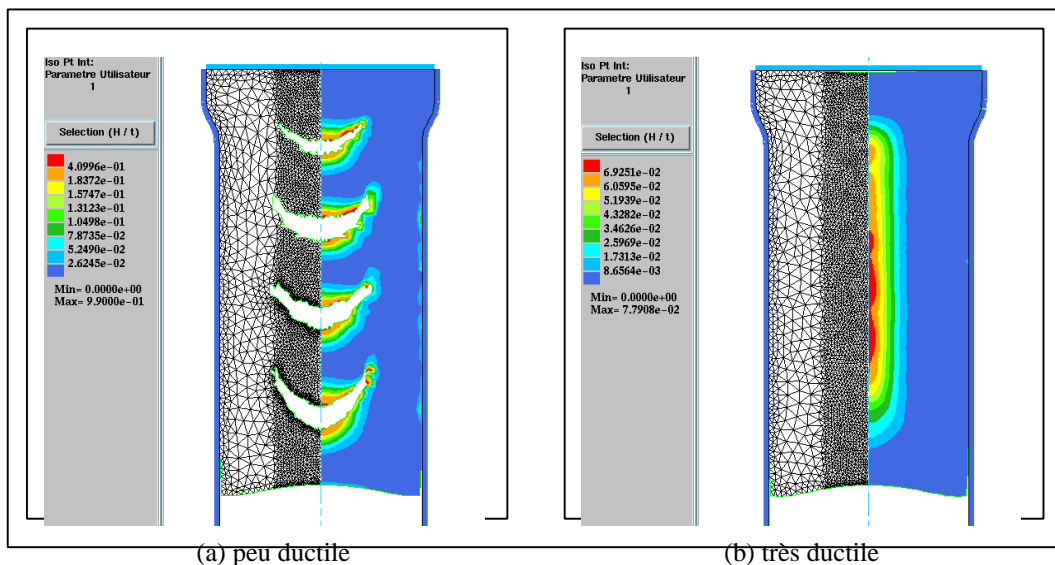


Figure 4.51 : Influence de la ductilité sur la formation de chevrons

4.7.6.2 Influence du coefficient de frottement

On considère exactement le même exemple que précédemment avec le matériau **A2** du §3.2.2 mais avec un coefficient de frottement variant de $\mu=0.05$ à $\mu=0.2$. La première constatation que l'on peut faire est que plus le coefficient de frottement est faible (interface très lubrifiée), plus le nombre de chevrons est important : 4 chevrons pour une interface outil/lopin très lubrifiée ($\mu=0.05$ Figure 4.52 (a)), 3 chevrons pour une interface moyennement lubrifiée ($\mu=0.1$ Figure 4.52 (b)), 3 chevrons (dont un petit) pour une interface relativement peu lubrifiée ($\mu=0.15$ Figure 4.52 (c)), et pas de chevrons pour une interface peu lubrifiée ($\mu=0.2$ Figure 4.52 (d)). Avec ce dernier coefficient de frottement ($\mu=0.2$ Figure 4.52 (d)) on note un endommagement peu important au cœur de la barre ($D_{\max}=12\%$) donc pas assez important pour initier un chevron. Par contre au niveau de l'interface lopin/outil l'endommagement a atteint sa valeur maximum ($D_{\max}=100\%$) provoquant la destruction d'éléments en surface. La simulation a montré qu'au-delà d'un certain coefficient de frottement ($\mu=0.18$) il apparaît des défauts surfaciques (où $D_{\max}=100\%$). De plus nous avons constaté sur d'autres simulations que plus le coefficient de frottement est important, plus diffuse est la zone endommagée en surface. Nous pouvons donc conclure que le frottement tient une place prépondérante sur la formation des chevrons au cœur de la barre et sur la formation de défauts surfaciques au niveau de l'interface extérieure lopin/matrice.

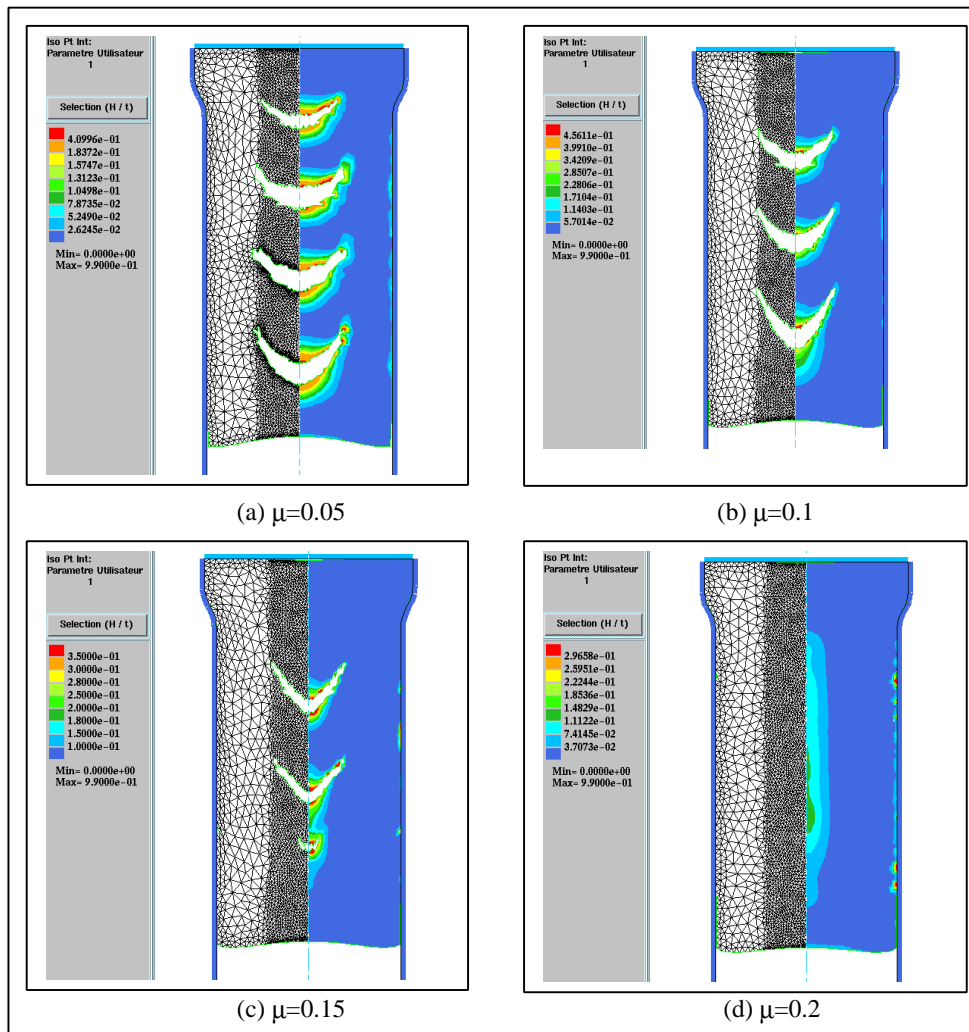


Figure 4.52 : Influence du coefficient de frottement sur la formation de chevrons

4.8 PROCÉDÉ D'USINAGE ORTHOGONAL PAR ENLÈVEMENT DE COPEAUX

Pour clôturer cette série d'applications, nous montrons un exemple de simulation numérique d'usinage orthogonal par enlèvement de copeaux. Bien sûr, il ne s'agit pas de reproduire fidèlement les mécanismes physiques associés à ce procédé. Il s'agit simplement de montrer que le couplage comportement-endommagement est une méthode de grandes potentialités prédictives. Bien évidemment, il reste à enrichir ce modèle pour améliorer le couplage thermomécanique ainsi que le contact/frottement afin de reproduire les phénomènes physiques qui gouvernent l'usinage des métaux par enlèvement de copeaux.

Considérons un bloc de matière de dimension $x=20$ mm de hauteur et $y=50$ mm de longueur. Ce bloc est encastré comme l'indique la Figure 4.53.

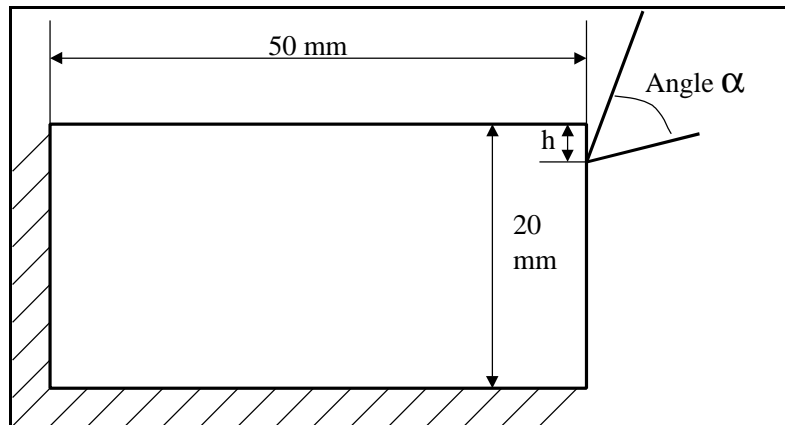


Figure 4.53 : Procédé d'usinage orthogonal

Ce bloc de matière est supposé en matériau **A1** du § 3.2.2. Le maillage initial est montré sur la Figure 4.54 (a) où la zone maillée finement concerne la profondeur de coupe ($h=2$ mm) pour une taille d'élément de 0.3 mm.

Nous allons réaliser trois simulations de cette opération de coupe avec un outil d'angle $\alpha=30^\circ$ (Figure 4.54 (b)), $\alpha=80^\circ$ (Figure 4.54 (c)) et $\alpha=90^\circ$ (Figure 4.54 (d)). La vitesse d'avance de l'outil est constante ($v=5$ mm/s). La Figure 4.54 montre les résultats obtenus. On note que pour l'outil à l'angle très aigu ($\alpha=30^\circ$) la simulation de l'usinage est très aisée et le copeau s'enroule en spirale. Par contre plus l'angle de coupe est grand, plus le copeau a tendance à se segmenter. Le calcul s'arrête alors dès la formation du premier segment. Nous renvoyons le lecteur aux références [BOROUCHAKI02] pour plus d'informations sur ce type de simulation.

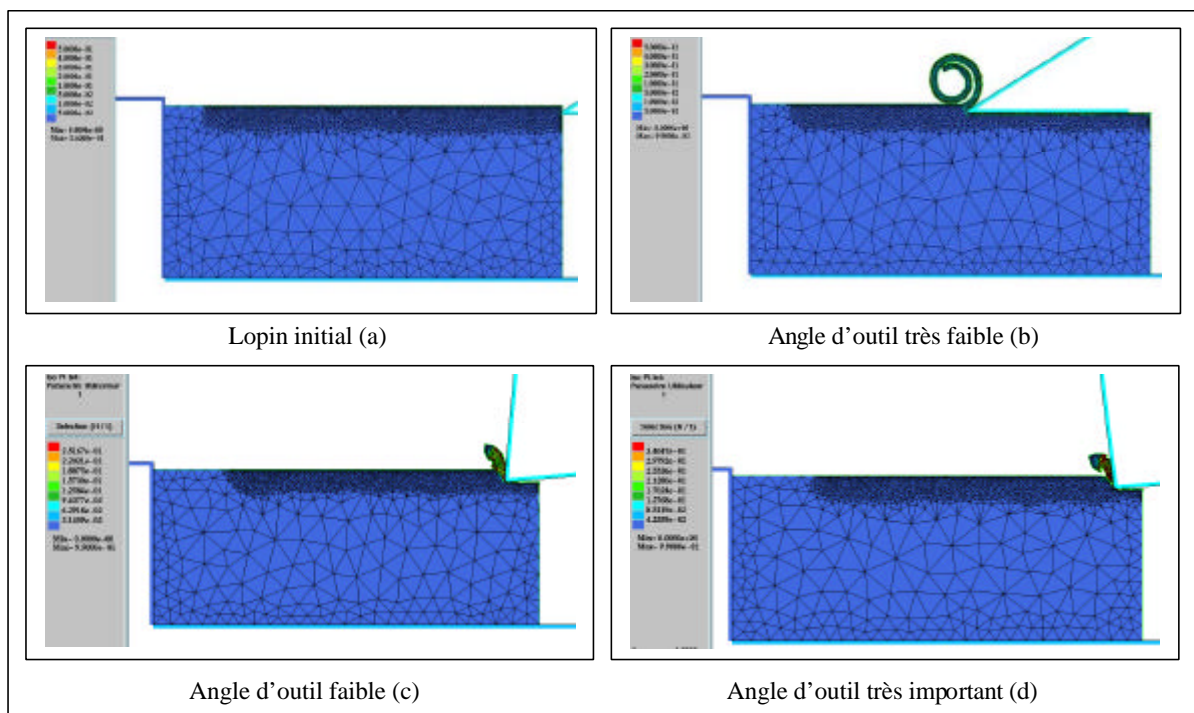


Figure 4.54 : Influence de l'angle d'outil sur la forme du copeau

4.9 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons mis en application la méthodologie de couplage comportement-endommagement développée aux chapitres 1 et 2 pour simuler divers procédés de mise en forme industriels. Les résultats obtenus confirment la capacité de la méthodologie à prévoir la naissance de l'endommagement dans les pièces massives formées par grandes déformations plastiques. En particulier, nous avons montré que cette méthodologie offre un outil puissant pour « optimiser » les procédés de mise en forme, afin d'éviter l'apparition de l'endommagement, ou bien au contraire de le favoriser pour simuler des opérations de coupe. Enfin, nous avons pu montrer que le couplage comportement-endommagement est capable de reproduire correctement, au moins d'un point de vue qualitatif, les phénomènes physiques liés à la rupture ductile en mise en forme.

CHAPITRE 5 :

CONCLUSION

L'objectif principal de ce travail a été de développer et de valider une méthodologie efficace à finalité industrielle, afin de simuler numériquement tout procédé de fabrication et de mise en forme. Ceci dans le but « d'optimiser » ces procédés vis-à-vis de l'apparition de zones endommagées (ou fissures). Pour cela, il a fallu caractériser les principaux phénomènes physiques intervenant dans le comportement des matériaux lors de la mise en forme, et en particulier l'endommagement, afin de pouvoir établir un couplage comportement-endommagement en thermo-élasto-(visco)plasticité. Les aspects théoriques et numériques ont alors été traités. Un soin particulier a été apporté à l'identification des paramètres rhéologiques et d'endommagement de différents matériaux afin de pouvoir valider et ainsi montrer la pertinence du couplage comportement-endommagement sur une série de procédés de fabrication des plus divers. Une attention particulière a été accordée à la mise en évidence des capacités d'une telle modélisation à prédire l'amorçage et l'évolution de zones endommagées en cours de procédé.

Dans un premier temps, la formulation du modèle comportement-endommagement a été présentée. Nous avons en premier lieu cherché à coupler l'endommagement au comportement du matériau. Deux approches ont ainsi été présentées. La première qualifiée de « couplage faible » n'apporte que peu de modifications par rapport à celle disponible dans Forge2[®] et Forge3[®], l'autre plus complexe nommée couplage « fort » où les modifications sont

importantes (intervention du dommage directement dans la fonction de charge, dans le calcul de la matrice tangente consistante...). Le modèle de base utilisé ici est un modèle thermo-élasto(visco)-plastique endommageable à isotropie totale basé sur la relation d'écoulement de Prandtl-Reuss.

Dans une deuxième partie, nous nous sommes intéressés aux aspects numériques de la discrétisation spatiale et temporelle du problème couplé. La méthode des éléments finis en vitesse, puis en vitesse/pression (imposée par l'évolution du logiciel au cours de ce travail) a été exposée pour la discrétisation spatiale du principe des puissances virtuelles. La méthode statique implicite de résolution de l'équilibre global telle qu'elle est implémentée dans les logiciels Forge2[®] et Forge3[®] a été discutée. Enfin, la méthode d'intégration des équations constitutives de comportement endommageable selon un schéma itératif a été discutée en détail. Le calcul analytique de la matrice tangente consistante a été développé dans le cas d'un couplage fort. Un point important a été consacré à la gestion numérique du contact ainsi qu'à la gestion des éléments totalement endommagés avec la procédure d'élimination de ces éléments afin de pouvoir simuler la propagation de fissures macroscopiques.

La procédure utilisée pour identifier les paramètres matériau intervenant dans le modèle couplé a été exposée en détail. Elle vise à déterminer ces paramètres par comparaison avec des résultats expérimentaux sur des éprouvettes de traction menées à la rupture. Pour cette formulation locale avec adoucissement, la procédure permet également de déterminer la taille moyenne des éléments Δx et du pas Δt par comparaison à la courbe force-déplacement dans le stade « post-bifurcatoire » (ou post-critique). Ceci est indispensable en attendant l'implémentation d'une formulation non locale capable d'assurer l'indépendance de la solution du problème couplé vis-à-vis des aspects numériques.

Avant d'identifier la méthodologie sur deux matériaux industriels, nous avons étudié les potentialités de la modélisation proposée sur des matériaux virtuels en choisissant des coefficients qui couvrent une large gamme de matériaux métalliques allant d'une faible ductilité (<20%) à une forte ductilité (>60%).

Dans une dernière partie, nous avons traité divers procédés de mise en forme en collaboration avec le CETIM de St Etienne et quelques autres industriels. En effet, il a fallu montrer l'utilité industrielle de la méthodologie proposée pour « optimiser » les procédés de mise en forme afin d'éviter l'apparition du dommage pour obtenir une pièce saine, soit au contraire « renforcer » le dommage pour des procédés de découpage de tôles ou de pièces massives. L'ingénieur dispose ainsi d'un outil rapide et efficace pour étudier l'influence des paramètres technologiques d'un procédé dans le but de définir la meilleure gamme possible pour produire une pièce donnée. L'ensemble des exemples traités prouve l'utilité d'une telle méthodologie qui permet de prévoir correctement l'apparition de l'endommagement dans les pièces formées, pourvu que le couplage comportement-endommagement ne soit pas négligé. En effet, l'enseignement principal que l'on peut tirer de cette étude est qu'il est indispensable

d'effectuer un couplage afin de pouvoir prévoir correctement l'endommagement et son influence sur la redistribution des champs thermomécaniques dans la pièce. Tous les modèles non couplés qui visent à calculer l'endommagement en post-processing ne peuvent prétendre à une prévision correcte de l'instant et du lieu où peuvent apparaître des fissures.

Nous estimons que les objectifs scientifiques et industriels ont été atteints. Les industriels disposent ainsi de nouvelles versions des codes Forge2[®] et Forge3[®] qui leur permettent de prévoir où et quand des fissures peuvent apparaître dans la pièce formée. Ils peuvent ainsi agir sur les paramètres technologiques pertinents afin de retarder ou au contraire de favoriser l'endommagement selon l'objectif recherché.

Néanmoins, il ne faut pas oublier que la méthodologie proposée entre dans le cadre des approches dites simplifiées (dans le but de favoriser leur utilisation industrielle). Ceci sous-entend que plusieurs hypothèses simplificatrices ont été délibérément retenues dans l'ensemble des modèles utilisés. Cela donne, comme on vient de le signaler, un outil industriel performant qui peut être efficacement utilisé au stade de la pré-conception des gammes (avant projet). En effet, pour préparer la gamme de fabrication d'une pièce complexe, l'ingénieur doit souvent choisir entre plusieurs solutions possibles. La méthodologie simplifiée que l'on propose permet, efficacement et à moindre coût, de réaliser plusieurs simulations afin d'étudier l'influence de tel ou tel paramètre et de ne retenir que les solutions convenables.

Cependant, pour affiner l'optimisation du procédé retenu, il est souvent utile d'utiliser des modèles « avancés » qui reproduisent le plus finement possible les mécanismes physiques de tous les phénomènes qui conditionnent le comportement de la pièce au cours de son formage. Pour cela des études en cours au LASMIS s'attachent à développer ce type de méthodologies « avancées » qui restent réservées à l'optimisation du procédé final retenu par la procédure simplifiée que nous proposons. En réalité, les perspectives du présent travail visent à :

1. Affiner la modélisation du couplage comportement-endommagement avec:
 - La prise en compte de l'érouissage mixte, isotrope et cinématique linéaire
 - L'anisotropie initiale (élasticité, plasticité non endommagée)
 - La formulation à deux surfaces : une pour la plasticité et une pour l'endommagement
 - L'utilisation de modèle micromécanique (plasticité polycristalline) pour rendre compte de l'évolution de la texture.
2. Etablir une formulation non locale ou du gradient supérieur afin d'assurer l'indépendance de la solution du problème couplé vis-à-vis des aspects numériques liés à la discrétisation spatio-temporelle.
3. Formuler un véritable problème d'optimisation vis-à-vis de l'endommagement en utilisant des algorithmes appropriés.
4. Utiliser un remaillage adaptatif en 3D.

Tout cela permettra d'aboutir, à terme, à une procédure d'optimisation automatique des procédés de mise en forme vis-à-vis de l'endommagement.

En espérant que ce travail ait contribué, si modestement soit-il, à la réalisation de cet objectif général.

BIBLIOGRAPHIE

- [**ABDUL-LATIF94**] Abdul-Latif, A, "*Approches multi-échelles pour la description de l'anélasticité cyclique avec endommagement*", Thèse de doctorat, UTC, 1994.
- [**ABDUL-LATIF96**] Abdul-Latif, A, Saanouni, K., "*Micromechanical modelling of low cycling fatigue under complex loading, part II, applications*", Int. J. Plasticity, vol.12, pp 1123-1149, 1996.
- [**ARAVAS85**] Aravas, N., "*The analysis of void growth that leads to central bursts during extrusion*" J.Mech.Phys.Solids Vol.34, No.1, pp55-79,1986.
- [**ARNOLD84**] Arnold, D.N., Brezzi, F., Fortin, M, "*A stable finite element for the Stokes equations*". Calcolo,21 ;1984.
- [**BATHE81**] Bathe, K.J. "*Finite element procedures in engineering analysis.*" Prentice Hall, 1981.
- [**BAZANT84**] Bazant, Z.P., Belytschko, T. and Chang, T.P., "Continuum theory for strain softening." J. Engrg. Mech. Div., 1984, 110, pp.1666-1692.
- [**BELYTSCHKO00**] Belytschko, T., Liu, W.K. and Moran, B., "*Nonlinear finite elements for continua and structures.*" John Wiley, New York, 2000.
- [**BENALLAL89**] Benallal, A., "*Thermoviscoplasticité et endommagement des structures*", Thèse de doctorat d'état, Paris VI, 1989.
- [**BENNANI93**] Bennani, B., Picart, P., Oudin, J., "*Some basic finite element analysis of micrvoid nucleation, growth and coalescence*" Engineering computation, Vol. 10, pp.409-421,1993.

- [BENHATIRA92] Benhatira, F., "*Modélisation de l'élastoplasticité endommageable en transformations finies*", Thèse de doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne, 1992.
- [BENZERGA00] Benzerga, A., "*Rupture ductile des tôles anisotropes, simulation de la propagation longitudinale dans une tôle pressurisée*", Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, Mars 2000.
- [BERVEILLER79] Berveiller, M. and Zaoui, A. "*An extension of the self consistent scheme to plasticity Flowing Polycrystals*", J.Mech.Phys.Solids Vol.26, p325, 1979.
- [BERVEILLER80] Berveiller, M. and Zaoui, A. "*Méthodes self-consistantes en mécanique des solides hétérogènes*", C.R. 13^{ième} colloque du G.F.R., Paris, 1980.
- [BL2D-V2] Laug, P., Borouchaki, H. "*Mailleur adaptatif bidimensionnel de domaine à frontière variable*" Description technique, INRIA, 2001.
- [BONNET97] J. Bonnet and R.D. Wood, "*Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*." Cambridge University Press, 1997.
- [BOROUCHAKI97] Borouchaki, H., Georges, P-L., "*Triangulation de Delaunay et maillage*", Hermès,1997.
- [BOROUCHAKI02] Borouchaki, H., Laug, P., Cherouat, A., Saanouni, K., "*Adaptive remeshing for ductile fracture prediction in metal forming*" C.R. Acad. Sci, Vol. 330 (10), pp 709-716, "Paris, 2002.
- [BORST96] De Borst, R., Benallal, A., and Heeres, O., "*A gradient-enhanced damage approach to fracture*," J. de Physique IV, 1996, 6, pp.491-502.
- [BRAUDEL86] Braudel, J.H., "*Modélisation numérique des grandes déformations élastoplastiques d'un solide isotrope par la méthode des éléments finis. Application à l'extrusion à froid des métaux*", Thèse de Docteur d'Etat ès Sciences, Université Claude Bernard, Lyon I, France, 1986.
- [CAILLETAUD87] Cailletaud, G., "*Une approche micromécanique phénoménologique du comportement inélastique des métaux*" Thèse de Docteur d'Etat, Université Paris VI, 1987.
- [CHABOCHE77] Chaboche, J.L., "*Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description de la viscoplasticité cyclique avec endommagement*" Problèmes non linéaires de mécanique, Cracovie. pages 137-159,. Symp Franco-Polonais de Rhéologie et Mécanique, 1977.
- [CHABOCHE78] Chaboche, J.L., "*Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement*", Thèse de Doctorat Es-Science, Paris VI,1978.
- [CHABOCHE93] Chaboche, J.L., "*Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage*", IJDM, 2: 311-329, 1993.
- [CHABOCHE96] Chaboche, J.L., Cailletaud, G., "*Integration methods for complex plastic constitutive equations*", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 133 (1996) 125-155, 1996.
- [CHABOCHE97] Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.L. et Forest, S., "*Mécanique non linéaire des matériaux : Comportement, Endommagement et méthodes numériques*", cours de l'IPSI, Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.L. et Forest S. (Septembre 1997) (chapitres 5 et 6),1997.
- [CHABOCHE99] Chaboche, J.L., "*Thermodynamically founded CDM models for Creep and others conditions*". CISM Courses and Lecture N° 399, International Centre for Mechanical Sciences. (1999), 209-283, 1999.

- [CHEN86] Chen, W.H., Tsai, P., "Finite element analysis of elastoplastic sliding contact problem with friction", *Comp. Struc.*, vol. 22, pp. 925-928, 1986.
- [CHENOT94] Chenot, J. L., Bellet, M., Fourment, L., Massoni, E., Montmitonnet, "Eléments finis et mise en forme des métaux", Séminaire de plasticité, ENSMP/CEMEF, Tome I, II, III, 1994.
- [CHEROUAT02] Cherouat, A., Saanouni, K., Borouchaki, H., Laug, P., "Remaillage en grandes déformations, applications à la mise en forme" *R. Europ. E.F.*, Vol. 11, n°1, pp 57-79, 2002.
- [CHOW92] Chow, C.L. and Ju., T.L., "A comparative study of continuum damage models for crack propagation under gross yielding", *Int. J. Frac.* 35, 43-75, 1992.
- [COMI96] Comi, C. and Perego, U., "A generalized variable formulation for gradient dependent softening plasticity". *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1996, 39, pp.3731-3755.
- [CORDEBOIS79] Cordebois, J.P., Sidoroff, F., "Anisotropie élastique induite par endommagement". *Col. Euromech 115*, Editions du CNRS, Grenoble, 1979.
- [CORDEBOIS82] Cordebois, J.P., Sidoroff, F., "Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité", *J. Méc. Théo. App.*, 45-60, Numéro spécial, 1982.
- [COUPEZ91] Coupez, T., "Grandes transformations et remaillage automatique" thèse , ENSMP, 1991.
- [DAUTREY84] Dautrey, R, Lions, J-L., "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques" , Masson, Paris, 1984.
- [DHATT85] Dhatt, G., Touzot, G ., " Une présentation de la méthode des éléments finis", collection UTC, Maloine, Paris, 1985.
- [DUBOIS96] Dubois, A., Picart, P., Dubar, L., Oudin, J., Cescotto, S., "Determination of the conditions of friction on steel specimen for the cold forging", *ESDA 1996*, Vol.3, ASME, pp.215-220, 1996.
- [FRANCOIS93] François, D., Pineau, A., Zaoui, A., "Comportement mécanique des matériaux", ISBN 2-86601-348-4, Hermès, 1993.
- [FRANQUEVILLE99] Franqueville, Y., "Couplage comportement-endommagement dans Forge2^â", Mémoire d'Ingénieur CNAM, 1998.
- [FORGE2] Forge2[®], Transvalor, "Guide d'utilisation du logiciel Forge2^â"
- [FAURON98] Fauron, F., Guvia, A. and Estrems, M., "Finite element analysis of optimum clearance in the blanking process" *J. Mat. Proc. Tech.*, 1998, 81, pp. 121-129.
- [GAY95] Gay C., "Contribution à la simulation numérique 3-D du forgeage à froid", Thèse de doctorat, ENSMP, Mars, 1995.
- [GEAR71] Gear, W., "Numerical initial value problems in ordinary differential equations", prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1971.
- [GELIN85] Gelin, J.C., Oudin J. and Ravalard Y., « An Imposed Finite Element Method for the Analysis of Damage and Ductile Fracture in Cold Metal Forming Processes », *Annals of the CIRP*, 34(1):209-213, 1985.
- [GERMAIN73] Germain, P., "Cours de mécaniques des milieux continus", Masson, Paris, Tome I, 1973.

- [GERMAIN83] Germain, P., Nguyen, Q.S., Suquet, S., "Continuum thermodynamics", J. Applied Mechanics, ASME, vol. 50, pp. 1010-1020, 1983.
- [GOLOGANU95] Gologanau, M., Leblond, J.B., Perrin, G., and Devoux, J., "Continuum micromechanical", ch recent extensions of gurson, Model for porous ductile metals, pp61-130 Springer-verlag, 1995.
- [GURSON77] Gurson, A.L., "Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - Yield criteria and flow rules for porous ductile media", J. Eng. Mat. Tech, vol. 99, 1997.
- [HABRAKEN01] Habraken, A.M., "Endommagement ductile" leçon publique, Liège 2001.
- [HAMMI00] Hammi, Y., "Simulation numérique de l'endommagement dans les procédés de mise en forme", Thèse de doctorat Université de Technologie de Troyes, 2000.
- [HALLQUIST85] Hallquist, J.O., Goudreau, G.L. and Benson, D.J., "Sliding interfaces with contact impact in large scale Lagrangian Computations", Comp. Meth. In Appl. Mech. Engng., vol. 51, pp 107-137, 1985.
- [HAYHURST72] Hayhurst, D.R., "Creep rupture under multiaxial state of stress", JMPS, 20(6): 381-390, 1972.
- [HERMANN65] Hermann, L.R., "Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem", AIAA J., 3, n°10, pp 1896-1900, 1965.
- [HUGHES76] Hughes, T.J.R., Taylor, R.L., Sackman, J.L., Curnier, A.C., Kanoknukuchai, W., "A finite element for a class of contact impact problem" Comp. Meth. Appl. Engng, vol. 8, pp. 249-276, 1976.
- [HUGHES87] Hughes, T.J.R., "The finite element method." Prentice Hall, 1987.
- [KACHANOV58] Kachanov, L.M., "Time of the rupture process under creep conditions", Z.v, Akad, Nauk., SSR, n°8, pp. 26, 1859.
- [KIM98] Kim, B., Ko, D-C., "The prediction of central burst defects in extrusion and wire drawing" journal of materials processing technology 102(2000) 19-24, 1998.
- [LADEVEZE84] Ladevèze, P., "Sur une théorie de l'endommagement anisotrope", Rapport interne n°34, LMT Cachan, 1984.
- [LADEVEZE84b] Ladevèze, J., Lemaitre, J., [1984] "Damage effective stress in quasi-unilateral conditions", IUTAM Conference, Lyngby, 1984.
- [LATHAM68] Latham, D.J., Cockcroft, M.G., "Ductility and the workability of metals", J.Inst.Met.96.33-39, 1968.
- [LAZZAROTTO97] Lazzarotto, L., Dubar, L., Dubois, A., Ravassard, P., Oudin, J., "Identification of Coulomb's friction coefficient in real contact conditions applied to a wire drawing process", Wear 211, pp54-63, 1997.
- [LEMAITRE85] Lemaitre, J., Chaboche, J.L., "Mécanique des matériaux solides", Dunod, Paris, 1985.
- [LEMAITRE86] Lemaitre, J., "Local approach of fracture", Eng. Fract. Mech., Vol 25, n° 5/6, p. 523, 1986.
- [LEMAITRE02] Lemaitre, J., Communication privée.

- [LEMARCHAND99] Lemarchand, C., "*De la dynamique des dislocations à la mécanique des milieux continus : Développement d'une simulation micro-macro*" Thèse de doctorat, Univ. Paris VI, 1999.
- [LESTRIEZ01] Lestriez, P., Cherouat, A., Mariage, J-F., Saanouni, K., "*Simulation numérique du couplage thermomécanique-endommagement : Application à la mise en forme*", Editions de physique, 2001.
- [MAILLARD91] Maillard, A., "*Etude expérimentale et théorie du découpage*", thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne., 1991.
- [MARCAL65] Marcal, P.V., "A stiffness method for elastic-plastic problems" Inr. J. Mec. Sci., 7, pp 229-238, 1965.
- [MARIAGE00] Mariage J-F, "*rapport ANRT de la première année de thèse*", 2000.
- [MARIAGE01] Mariage J-F, "*rapport ANRT de la deuxième année de thèse*", 2001.
- [MARIAGE02a] Mariage, J-F., Saanouni, K., "*Sheet metal cutting simulation by continuum damage mechanics*", 5th international ESAFORM Conference on Material Forming, Krakow, p575-578, 2002.
- [MARIAGE02b] Mariage, J-F., Saanouni, K., Lestriez, P., "*Numerical simulation of extrusion with central bursting prediction by continuum damage mechanics*" Proceeding of the 5th international ESAFORM Conference on Material Forming, Krakow, p475-478, 2002.
- [MARIAGE02c] Mariage, J-F., A. Cherouat, A., Saanouni, K., "*Simulation numérique d'un procédé de perçage/ébavurage d'une roue en plasticité avec endommagement*", Matériaux 2002, de la conception à la mise en œuvre, Tours, oct. 2002.
- [MARIAGE02d] Mariage, J-F., Saanouni, K., Lestriez, P., Cherouat A, "*Simulation numérique du forgeage d'un écrou six pans avec prise en compte du couplage comportement-endommagement dans Forge2^â et Forge3^â*" Les quatrièmes journées scientifiques et techniques en mécanique et matériaux JSTMM'02, Monastir, pp 95-102, oct 2002.
- [MARIAGE02e] Mariage, J-F., Saanouni, K., Lestriez, P., Cherouat A, "*Numerical simulation of damage in metal forming processes*", International Journal of forming process, part I, IJFP, ISBN : 2-7462-542-4, Vol 5, No 2-3-4 pp363-376, 2002.
- [MARIAGE02f] Mariage, J-F., Saanouni, K., Lestriez, P., Cherouat A, "*Numerical simulation of damage in metal forming processes*", International Journal of forming process, part II, IJFP, ISBN : 2-7462-542-4, Vol 5, No 2-3-4 pp377-390, 2002.
- [MIELNIECK91] Mielnieck, E.D., "*Metal working science and engineering*", Mc graw-hill, inc, 1991.
- [MURAKAMI80] Murakami, S., Ohno, N., " *A continuum theory of creep and creep damage*" Creep in Structures. 3rd IUTAM Symp., Leicester, 1980.
- [MOLINARI96] Molinari, A., Ahzi, S. and Kouddane, R., "*On the self consistent modeling of elastic-plastic behavior of polycrystals*" Mech. of Materials, vol. 26, n°97, pp. 43-62, 1996.
- [NAGTEGAAL82] Nagtegaal, J., "On the implementation of inelastic constitutive equations with special référence to large deformation problems", Comp. Meth. Appl. Engng. 33, 469-484, 1982.
- [NESNAS00] Nesnas, K., "*Simulation numérique de l'endommagement dans les procédés de mise en forme 2D*", Post-doc, UTT, 2000.
- [ODEN72] Oden, J.T., "*Finite elements of nonlinear continua.*" McGraw-Hill, New York, 1972.

- [ODEN83] Oden, J.T., Pires, E., "Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity" J.A.Mech.50, p67-73, 1983.
- [ORTIZ85] Ortiz, M., Popov, E.P., "Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol 21, pp. 1561-1576, 1985.
- [ORTIZ86] Ortiz, M., Simo, J.C., "An analysis of a new class of integration Algorithms for elastoplastic constitutive relations", Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol 23, pp. 353-366, 1986.
- [OWEN80] Owen, D.R.J., and Hinton, "Finite elements in plasticity, Theory and practice." Pineridge Press, Swansea, 1980.
- [PERCHAT00] Perchat, E., "Mini élément et factorisations incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au forgeage" Thèse de doctorat, ENSMP, 2000.
- [PICART98] Picart, P., Gouati, O., Gelin J.C., "Optimisation of metal forming process parameters with damage minimization", J. of Mat. Processing Tech., 80-1, pp 597-601, 1998.
- [PIJAUDIER87] Pijaudier; G., Cabot and Bazant, Z. P., Nonlocal damage theory. J. Engrg. Mech., 1987, 113, pp.1512-1533.
- [RABOTNOV69] Rabotnov, Y.N., "Creep problems in structural members" North-Holland, 1969.
- [RICE69] Rice and Tracey, " On the enlargement of voids in triaxial stress field", J. Mech-phys, vol 17, pp201-217, 1969.
- [ROUSSELIER81] Rousselier, G., "Three dimensionnal constitutive relations and ductile fracture" IUTAM Symp. On three dimensionnal constitutive relations and fraction, pp. 197-226, Dourdan, 1981.
- [SAANOUNI88] Saanouni, K., " Sur l'analyse de la fissuration des milieux élasto-viscoplastiques par la théorie de l'endommagement continu", Thèse d'Etat és-Sciences, UTC, 1988.
- [SAANOUNI89] Saanouni, K., Chaboche, J-L. and Lesne, P.M., "On the creep crack-growth prediction by a non local damage formulation", Euro. J. Mech., A/Solids, 1989, 8(6), pp.437-459.
- [SAANOUNI94] Saanouni, K., Forster, C. and BenHatira, F., " On the inelastic flow with damage", Int. J. of Damage Mechanic 3, 140-169, 1994.
- [SAANOUNI00a] Saanouni K., Nesnas K. and Hammi Y. ; « Damage modelling in metal forming processes », Int. J. of Damage Mechanics, Vol 9, N° :3, pp :196-240, July 2000.
- [SAANOUNI00b] Saanouni K., Hammi Y., « Numerical simulation of damage in metal forming processes », in *Continuous Damage and Fracture*, Editor A. Benallal, Elsevier, ISBN. 2-84299-247-4, pp :353-363, 2000.
- [SAANOUNI01] Saanouni K., Cherouat A. and Hammi Y., "Numerical aspects of finite elastoplasticity with isotropic ductile damage for metal forming", Revue Européenne des Eléments Finis, 2-3-4, pp. 327-351, 2001.
- [SAANOUNI02] Saanouni K and Chaboche J.L. « Computational Damage Mechanics. Application to Metal Forming », Chapter 7 of the Volume 3: 'Numerical and Computational methods' (Editors: R. de Borst, H. A. Mang), in 'Comprehencive Structural Integrity', Edited by I. Milne, R.O. Ritchie and B. Karihaloo, ISBN: 0-08-043749-4, 2003.

- [SHEN02] Shen, , Saanouni, K., «gradient-dependent nonlocal constitutive formulation for thermo-elastoplasticity coupled with isotropic damage », rapport de post-doc, Lasmis, Pd2002-1, 2002.
- [SIDOLO95] Notice d'utilisation du logiciel SiDoLo.
- [SIMO85] Simo J.C., Taylor R., "Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity", Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 48, pp.101-118, 1985.
- [SIMO86] Simo J.C., Taylor, R.L., " A return mapping algorithm for plane stress Elastoplasticity", Inter. J. Num. Methods. Eng., 22, 649-670, 1986.
- [SIMO87] Simo J.C., Ju J.W., " Stress and Strain Based continuum Damage Models. Part I: Formulation. Part II: Computational Aspects," Int. J. Solids Struc., 23(7):821-864, 1987.
- [SIMO98] Simo J.C., Taylor, R.L., " Computational inelasticity" Springer New York, 1998.
- [SUQUET81] Suquet, P., "Approche par homogénéisation d'une forme endommageable" CRAS serie II, Tome 292.
- [TAYLOR91] Taylor, R.L., Papadopoulos, P., "A finite element method for dynamic contact problems", finite element in 90's, Eds By E;Onate, J.Periaux, A.Samuelson, Springer, Barcelona, 1991.
- [TOUZOT93] Touzot G., Dabounou J., " Intégration numérique de lois de comportement élastoplastique", Revue Européenne des éléments finis, vol. 2, p. 465-492, 1993.
- [TRUESDELL65] Truesdell, C., and Noll, W., the non linear fields theories of mechanics, springer, Berlin, Germany, Encyclopeda of Physics 3.
- [WALKER87] Walker, K.P., " A uniformly valid asymptotic integration algorithm for unified viscoplastic constitutive models ", in: S. Nakazawa et al., eds. Advances in Inelastic Analysis. AMD. Vol. 88 1 PED. Vol. 28 (ASME, 1987) 13-27, 1987.
- [WILKINS64] Wilkins, M.L., "Calculation of elastic-plastic flow" Methods of computational physics, 3, Academic press, N.Y., 1964.
- [YODER79] Yoder, P..J., Kulak, R.L., Kramer, J.M, "Accurate numerical solutions for elastic plastic models" J.PR. Vessel. Techn., ASME, 101, 1977.
- [ZAOUI90] Zaoui, A., "Comportement global des polycristaux, Passage du polycristal au monocristal", Phy. Et mécanique de la mise en forme des métaux, Presse du CNRS-IRSID, p337, 1990.
- [ZIENKIEWICZ94] Zienkiewicz, O., and Taylor R., "The finite element method." McGraw-Hill, 4th edition, Volumes 1 and 2, 1994.
- [ZIMERMAN70] Zimerman, Z., Avitzur, B., ASME 92, Series B. J. Engng Ind. 135, 1970.