



**HAL**  
open science

# Filtres de Kalman réduits et efficaces pour l'assimilation de données en océanographie

Ibrahim Hoteit

► **To cite this version:**

Ibrahim Hoteit. Filtres de Kalman réduits et efficaces pour l'assimilation de données en océanographie. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2001. Français. NNT: . tel-00004682

**HAL Id: tel-00004682**

**<https://theses.hal.science/tel-00004682v1>**

Submitted on 16 Feb 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Filtres de Kalman Réduits et Efficaces pour l'Assimilation de Données en Océanographie

Hoteit Ibrahim



Thèse effectuée au sein du Laboratoire Modélisation et Calcul  
Tour IRMA, 51 Rue des Mathématiques, 38100 Grenoble



# Filtres de Kalman Réduits et Efficaces pour l'Assimilation de Données en Océanographie

Thèse présentée par  
**Ibrahim Hoteit**

pour obtenir le titre de<sup>1</sup>  
**Docteur de l'Université de Joseph Fourier - Grenoble I**

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Thèse soutenue le 8 Janvier 2001 devant la commission

<i>M. D.T. Pham</i>	Directeur
<i>M. J. Blum</i>	Directeur
<i>M. M. Sorine</i>	Rapporteur
<i>M. O. Talagrand</i>	Rapporteur
<i>M. E. Blayo</i>	Examineur
<i>M. J. Verron</i>	Examineur

Thèse effectuée au sein du Laboratoire Modélisation et Calcul  
Projet IDOPT (INRIA/CNRS/UJF/INPG)

---

1. Arrêtés ministériels du 5 Juillet 2000.



*A mes parents*

*A mon frère "al-abeh"*



# Remerciements

Toute ma gratitude à mon directeur de thèse, *Dinh-Tuan Pham*. Je le remercie pour avoir dirigé et suivi cette thèse, pour ses conseils très précieux, pour son aide et aussi sa disponibilité.

Je voudrai également témoigner toute ma gratitude envers *Jacques Blum*, mon co-directeur de thèse, pour son soutien et ses remarques.

Je tiens à remercier *Eric Blayo*, “le plus océanographe des matheux”, pour son aide aussi bien que sa gentillesse.

J’aimerais bien souligner que cette thèse n’aurait jamais existé sans “mon prof d’info” *Laurent Debreu*. Je le remercie beaucoup pour son aide.

Mes remerciements s’adressent également aux *membres du jury* qui m’ont honoré par leurs participations.

Merci à mes compagnons de route *Sophie et Jef*, à mes “correcteurs” *Sophie, Alexandre et Fabrice* et à tous les *thésards du laboratoire LMC*.

Merci beaucoup à *mon oncle Salim* pour tout ce qu’il a fait pour moi.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur l'assimilation de données en océanographie</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction à l'assimilation de données	5
1.1.1 Définition	5
1.1.2 Historique	5
1.1.3 Applications et objectifs	6
1.2 Cadre général	7
1.2.1 Les modèles océaniques	7
1.2.2 Les observations	8
1.3 Formulation du problème de l'assimilation	9
1.3.1 Assimilation tridimensionnelle (3D)	9
1.3.2 Assimilation quadridimensionnelle (4D)	10
1.4 Méthodes de l'assimilation-4D	11
1.4.1 Méthodes séquentielles	12
1.4.2 Méthodes variationnelles	13
1.5 Discussion	14
<b>2 Cadre de nos expériences</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction	17
2.2 Le modèle OPA	17
2.2.1 Hypothèses et équations	17
2.2.2 Discrétisation et grille	20
2.2.3 Conditions aux limites	21
2.2.4 Intégration temporelle du modèle	21
2.2.5 Configuration pour l'océan Pacifique tropical	22
2.3 Les observations	23
2.3.1 Données TOPEX/POSEIDON	23
2.3.2 Données TAO	23
2.4 Choix du vecteur d'état	25
2.5 Construction d'un ensemble de données historique	26
2.6 Validation de nos schémas d'assimilation	26
2.6.1 Construction des expériences jumelles	26
2.6.2 Mesure de l'erreur de filtrage	27

<b>3</b>	<b>Filtre de Kalman</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	29
3.2	Régime permanent . . . . .	31
3.3	Extensions aux modèles non-linéaires . . . . .	31
3.4	Rôle du facteur d'oubli . . . . .	33
3.5	Mise en oeuvre en océanographie . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Filtre de Kalman étendu singulier évolutif - Filtre SEEK</b>	<b>37</b>
4.1	Introduction . . . . .	37
4.2	Formulation pour un modèle parfait . . . . .	37
4.2.1	Algorithme . . . . .	38
4.2.2	Initialisation . . . . .	39
4.2.3	Implémentation pratique . . . . .	40
4.3	Etude de la stabilité . . . . .	40
4.4	Version avec facteur d'oubli . . . . .	42
4.5	Statistiques des erreurs . . . . .	42
4.5.1	Erreur d'observation . . . . .	42
4.5.2	Erreur du modèle . . . . .	42
4.6	Lien du filtre SEEK avec l'approche variationnelle . . . . .	45
4.7	Application au modèle OPA . . . . .	46
4.8	Discussion . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Filtre SEIK - La version interpolée du filtre SEEK</b>	<b>49</b>
5.1	Introduction . . . . .	49
5.2	Algorithme pour un modèle parfait . . . . .	49
5.3	Statistiques des erreurs . . . . .	54
5.3.1	Erreur d'observation . . . . .	54
5.3.2	Erreur du modèle . . . . .	54
5.4	Applications au modèle OPA . . . . .	58
5.4.1	Performances du filtre SEIK face au filtre SEEK . . . . .	58
5.4.2	Filtre SEIK avec erreur du modèle . . . . .	58
5.5	Discussion . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Réduction des coûts des filtres SEEK et SEIK</b>	<b>63</b>
6.1	Introduction . . . . .	63
6.2	Filtre de Kalman singulier à base fixe . . . . .	63
6.3	Filtre de Kalman singulier à base asymptotique . . . . .	66
6.4	Filtre de Kalman singulier à base évolutive par intermittence . . . . .	66
6.5	Evolution de la base sur une grille grossière . . . . .	67
6.6	Filtres de Kalman singulier à base semi-évolutive . . . . .	67
6.6.1	Première version . . . . .	67
6.6.2	Deuxième version . . . . .	68
6.7	Doublement de la base de correction . . . . .	71
6.7.1	Etude préliminaire . . . . .	72
6.7.2	Dans le cadre du filtre SEEK . . . . .	73
6.7.3	Dans le cadre du filtre SEIK . . . . .	74
6.8	Applications au modèle OPA . . . . .	76
6.8.1	Performances des variantes du filtre SEEK . . . . .	77

6.8.2	Comparaison entre les variantes du filtre SEIK . . . . .	84
6.8.3	Sensibilité par rapport aux systèmes d'observation . . . . .	84
6.9	Conclusions . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Filtre semi-évolutif avec une base partiellement locale</b>	<b>91</b>
7.1	Introduction . . . . .	91
7.2	Analyse EOFs (globale) . . . . .	92
7.2.1	Formulation et solution . . . . .	92
7.2.2	Reconstitution (approchée) des données de départ . . . . .	95
7.3	Analyse EOFs locale . . . . .	96
7.3.1	L'intérêt d'une analyse locale . . . . .	96
7.3.2	Construction de la base EOFs locale . . . . .	97
7.3.3	Choix des sous-domaines . . . . .	98
7.4	Analyse EOFs mixte . . . . .	98
7.4.1	L'intérêt d'une analyse mixte . . . . .	98
7.4.2	Construction de la base EOFs mixte . . . . .	99
7.5	Bases EOFs et filtres SEEK . . . . .	100
7.5.1	Base de correction initiale . . . . .	100
7.5.2	Filtre semi-évolutif avec une base partiellement locale . . . . .	100
7.6	Applications au modèle OPA . . . . .	102
7.6.1	Résultats des analyses EOFs . . . . .	102
7.6.2	Etude de la représentativité des différentes bases EOFs . . . . .	103
7.6.3	Filtre SEPLEK versus filtre SEIK . . . . .	105
7.7	Conclusions . . . . .	105
<b>8</b>	<b>Réglage adaptatif des paramètres des filtres SEEK</b>	<b>109</b>
8.1	Introduction . . . . .	109
8.2	Adaptativité et vecteur d'innovation . . . . .	109
8.2.1	Tester l'optimalité d'un filtre de type Kalman . . . . .	110
8.2.2	Calibration du système d'innovation . . . . .	110
8.2.3	Réglage des paramètres selon l'état du filtre ou du modèle . . . . .	112
8.3	Adaptation du facteur d'oubli . . . . .	114
8.3.1	Selon le système d'innovation . . . . .	114
8.3.2	Selon la performance du filtre . . . . .	116
8.3.3	Selon l'état du modèle . . . . .	117
8.4	Adaptation de l'évolution de la base . . . . .	117
8.5	Adaptation de la dimension de la base . . . . .	117
8.6	Applications au modèle OPA . . . . .	118
8.6.1	Adaptation du facteur d'oubli . . . . .	118
8.6.2	Adaptation de l'évolution de la base de correction . . . . .	122
8.6.3	Adaptation de la dimension de la base de correction . . . . .	125
8.6.4	Simulations réalistes avec le filtre SEIK . . . . .	125
8.7	Conclusions . . . . .	125
<b>9</b>	<b>Filtre de Kalman étendu d'ordre réduit - Filtre ROEK</b>	<b>131</b>
9.1	Introduction . . . . .	131
9.2	Filtre ROEK . . . . .	131
9.3	Comparaison entre les filtres SEEK et ROEK . . . . .	133

9.4	Réduction du coût du filtre ROEK - Filtre ROAEK . . . . .	134
9.5	Applications au modèle OPA . . . . .	135
9.5.1	Comparaison entre les filtres SEEK et ROEK . . . . .	135
9.5.2	Filtre ROEK avec la base EOFs mixte . . . . .	135
9.5.3	Filtre ROAEK . . . . .	137
9.6	Conclusions . . . . .	137
<b>Conclusions et Perspectives</b>		<b>141</b>
<b>A Tirage aléatoire d'une matrice orthogonale</b>		<b>145</b>
<b>B Construction d'une base orthonormée orthogonale aux colonnes d'une matrice</b>		<b>147</b>
<b>C Champ des états de référence et estimés par les filtres SEEK</b>		<b>149</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>159</b>

# Table des figures

2.1	Discrétisation horizontale et verticale . . . . .	20
2.2	Traces du satellite T/P avec une période orbitale de 9 jours . . . . .	24
2.3	Réseau TAO du Pacifique tropical . . . . .	25
2.4	Variation relative du vecteur d'état dans l'intervalle d'assimilation . . . . .	26
2.5	Evolution dans le temps de la $VAR(t_k) = \frac{\ X^t(t_k) - \bar{X}\ }{\bar{\sigma}(X^t)}$ . . . . .	28
3.1	Les étapes du filtre de Kalman . . . . .	30
4.1	Les directions de la base deviennent tangentes à l'attracteur . . . . .	41
4.2	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre SEEK sur toute la grille du modèle, sur les couches de surface (moyennes des 5 premières) et sur les couches de fond (moyennes des 5 dernières) . . . . .	47
5.1	Etapes de l'algorithme du filtre SEIK . . . . .	50
5.2	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> des filtres SEIK et SEEK . . . . .	59
5.3	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre SEIK avec et sans erreur du modèle . . . . .	61
6.1	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> des filtres SEIK et SFEK avec 30 et 35 EOFs . . . . .	78
6.2	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre SFEK sans et avec (10 et 20 vecteurs de la base de l') erreur du modèle . . . . .	79
6.3	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> des filtres SEIK et SAIK avec une base fixe après 50 et 125 pas d'initialisation avec le filtre SEIK . . . . .	81
6.4	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> des filtres SEIK et SIEIK avec évolution de la base 1 pas tous les 2 et 5 pas de temps . . . . .	82
6.5	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> des filtres SEIK et SSEIK avec évolution de 1 et 3 vecteurs de la base . . . . .	83
6.6	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> des filtres SEIK, SEEK1 avec 1 et 3 vecteurs de la base qui évoluent et SSEEK2 avec 1 vecteur qui évolue . . . . .	85
6.7	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> des filtres SEIK et SDEIK . . . . .	86
6.8	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> des filtres SEIK, SFEK, SSEIK et SIEIK . . . . .	87
6.9	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre SFEK avec des observations satellitaires sur toute la surface et sur les traces T/P, de la température aux points TAO et par combinaison des données T/P-TAO . . . . .	89
7.1	Un exemple de décomposition du domaine de l'océan Pacifique tropical . . . . .	96
7.2	Pourcentage de l'inertie en fonction du nombre des EOFs retenues . . . . .	102

7.3	Les fonctions tensorielles unidimensionnelles $\{\chi_X^{(j)}(x), j = 1, \dots, 3\}$ et la partition de l'unité par des fonctions bidimensionnelles $\{\chi^{(j)}(x, y) = \chi_X^{(j)}(x), j = 1, \dots, 3\}$ . . . . .	103
7.4	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre SFEK avec la base EOFs globale, locale et mixte . . . . .	104
7.5	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> des filtres SFEK (avec la base EOFs mixte), SEPLEK et SEIK avec un facteur d'oubli de 0.8 . . . . .	106
8.1	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre SFEK avec différentes valeurs du facteur d'oubli et avec un facteur d'oubli variable (adapté selon la performance du filtre) . . . . .	119
8.2	Evolution dans le temps du facteur d'oubli (courbe continue) pour le filtre SFEK selon la performance du filtre (gauche), l'état du modèle (milieu) et le système d'innovation (droite) et variation relative du vecteur d'état (courbe pointillée) . . . . .	120
8.3	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre SFEK avec un facteur d'oubli variable adapté selon la performance du filtre, l'état du modèle et selon le système d'innovation . . . . .	121
8.4	Evolution dans le temps du facteur d'oubli (courbe continue) pour le filtre SEIK selon la performance du filtre (gauche) et le système d'innovation (droite) et variation relative du vecteur d'état (courbe pointillée) . . . . .	122
8.5	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre SEIK avec un facteur d'oubli fixe (= 0.8) et variable adapté selon la performance du filtre et le système d'innovation . . . . .	123
8.6	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre SEIK et du filtre SSEIK avec et sans adaptation (selon la performance du filtre) du facteur d'oubli . . . . .	124
8.7	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre SEIK et du filtre SIEIK avec et sans schémas adaptatifs (selon la performance du filtre) de l'évolution de la base de correction et du facteur d'oubli . . . . .	126
8.8	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre SEIK et du filtre SDEIK avec et sans schémas adaptatifs (selon la performance du filtre) de l'évolution de la base de correction et du facteur d'oubli . . . . .	127
8.9	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre SEIK et du filtre SFEK avec une base EOFs de dimension fixe 30 et 35 et de dimension variable (selon la performance du filtre) . . . . .	128
8.10	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre SEIK avec un facteur d'oubli fixe et des observations sur toute la surface et avec un facteur d'oubli variable (selon la performance du filtre) et des observations T/P et combinaison T/P-TAO	129
9.1	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> des filtres SEEK, ROEK et SFEK . . . . .	136
9.2	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> du filtre ROEK avec la base EOFs mixte et le filtre SEPLEK . . . . .	138
9.3	Evolution dans le temps de la <i>RRMS</i> des filtres ROAEK et SFEK . . . . .	139
C.1	Vitesse horizontale dans la 1 <sup>ère</sup> couche . . . . .	150
C.2	Vitesse horizontale dans la 17 <sup>ème</sup> couche . . . . .	151
C.3	Salinité dans la 1 <sup>ère</sup> couche . . . . .	152
C.4	Salinité dans la 17 <sup>ème</sup> couche . . . . .	153

C.5	Température dans la 1 <sup>ère</sup> couche . . . . .	154
C.6	Température dans la 17 <sup>ème</sup> couche . . . . .	155
C.7	Pression de surface dans la 1 <sup>ère</sup> couche . . . . .	156
C.8	La 1 <sup>ère</sup> EOFs de la vitesse horizontale dans la 1 <sup>ère</sup> couche . . . . .	157
C.9	La 1 <sup>ère</sup> EOFs de la salinité dans la 1 <sup>ère</sup> couche . . . . .	158





# Introduction

Mieux connaître la terre, c'est étudier les océans. Cette immensité, qui représente 70% de la surface du globe, joue un rôle fondamental dans le maintien sur terre d'un climat propice à la vie. C'est savoir que les océans transportent et échangent avec l'atmosphère de colossales quantités de matière (gaz carbonique, vapeur d'eau...) ou d'énergie (chaleur, quantité de mouvement) selon des systèmes de circulation à très grande échelle. La reconnaissance accrue du rôle de l'océan dans notre environnement a été consacrée par de nombreux projets internationaux comme par exemple WCRP (World Climate Research program), WOCE (World Ocean Circulation Experiment), TOGA (Tropical Ocean Global Atmosphere) et bien d'autres. Ces programmes visent à la préservation et à la gestion des ressources marines, des besoins en matière de protection et de gestion des environnements côtiers et littoraux; ils s'intéressent à l'impact de l'océan sur le climat global de notre planète, à l'approfondissement des connaissances scientifiques sur les phénomènes associés au changement climatique, et surtout à l'impact de l'activité humaine. Un des enjeux majeurs à moyen terme pour l'océanographie est de mettre en place un système de prévision opérationnel au même titre que la météorologie. La construction d'un tel système passe par deux outils : la modélisation numérique et les systèmes d'observation.

Dans ce cadre, les simulations numériques réalistes de circulations océaniques ont connus un développement incessant ces dernières années. Cela est dû à l'amélioration des algorithmes numériques, et surtout à la disponibilité des calculateurs de plus en plus puissants. Cependant, un modèle océanique ne contient que l'information sur l'interaction des processus physiques pris en compte dans les équations du modèle. De plus, les solutions d'un tel modèle sont en général déterminées à partir d'une condition initiale, des conditions de bord et des termes de forçage assez mal connus. La prévision des modèles océaniques peut donc être assez loin de la réalité, d'autant plus que ces modèles sont en général chaotiques dans le sens où une erreur initiale peut se propager rapidement dans le temps.

De ce fait, l'observation de l'océan paraît indispensable, d'une part pour mieux comprendre l'état de l'océan, et d'autre part pour valider les résultats des modèles océaniques. Jusque récemment, les observations se faisaient in-situ, c'est à dire par des mouillages d'appareils, des flotteurs dérivant ou par des navires. Mais observer l'océan est difficile : il s'agit d'un milieu très vaste, d'accès malaisé, souvent très hostile. Dans ce cadre, l'utilisation des satellites constitue un outil d'observation irremplaçable. On a donc pu assister ces dernières années au lancement de plusieurs missions satellitaires comme GEOSAT (1985-1989), ERS-1 (1991-...), TOPEX/POSEIDON (1992-...) et ERS-2 (1995-...) et plusieurs autres sont planifiées pour les années à venir. Aujourd'hui, on peut dire que le seul système d'observation global fournissant un ensemble de données suffisant et fiable est le système d'observation satellitaire.

Cependant, les observations ne se suffisent pas à elle même pour bien estimer l'état de

l’océan surtout parce qu’elles sont très dispersées en temps et en espace. Pour déterminer la “meilleure” estimation de l’état de l’océan il faut utiliser de manière efficace, et si possible optimale, toutes les informations dont nous disposons i.e. le modèle et les observations; ce mécanisme s’appelle l’*assimilation de données*. Grossièrement, les données “guident” le modèle sur une trajectoire réaliste, tandis que le modèle fournit une interpolation spatio-temporelle dynamique des mesures.

Cette technique qui s’est montrée très efficace, que ce soit pour tester les modélisations des processus physiques ou pour déterminer et surtout prévoir l’état de l’océan, a pris une importance croissante ces dernières années dans la quasi-totalité des branches scientifiques. Il existe actuellement deux grandes approches d’assimilation de données.

- *Approche variationnelle*: Basée sur la théorie du contrôle optimal de *J.L. Lions* [64], cette approche consiste à déterminer la trajectoire du modèle de prévision qui minimise la somme d’une distance aux observations sur une période temporelle donnée et d’une distance a priori de la condition initiale de la trajectoire optimale. Le prototype de cette classe de méthode est la méthode adjointe qui a été introduite dans le contexte météorologique par *Penenko and Obraztsov* [74].
- *Approche séquentielle*: Basée sur la théorie de l’estimation statistique optimale, on cherche dans cette approche à corriger la prévision du modèle numérique au fur et à mesure qu’une nouvelle observation est disponible. Les principales techniques séquentielles sont le filtre de Kalman et ses différentes variantes, appelés aussi filtres de Kalman sous-optimaux et dont font partie notamment l’interpolation optimal, le filtre de Kalman étendu singulier évolutif (SEEK) et sa version interpolée (SEIK) de *Pham et al.* [78, 79], le filtre de Kalman d’ordre réduit (ROEK) de *Cane et al.* [17], le filtre de Kalman ensemble d’*Evensen* [33], etc. C’est dans le cadre de cette deuxième approche et plus précisément celle du filtre SEEK que se fera notre travail.

La grande difficulté pour appliquer le filtre de Kalman en assimilation de données en océanographie provient de la taille énorme de l’état du système, ce qui conduit à un coût de calcul prohibitif. Par conséquent, plusieurs variantes du filtre de Kalman, qui consistent principalement à réduire la dimension du système à travers une sorte de projection sur un sous-espace de dimension faible, ont été proposées [17, 28, 33, 43, 49], etc.

Dans le même but, le filtre SEEK a été proposé par *Pham et al.* [78] comme une approche pour réduire le coût du filtre de Kalman. Il consiste essentiellement à approcher la matrice de covariance de l’erreur d’estimation par une matrice de rang faible qui conduit à ne faire des corrections que dans les directions pour lesquelles l’erreur d’estimation n’a pas été atténuée par la dynamique du système. Pour mieux traiter la non-linéarité des modèles, *Pham* [79] a ensuite proposé de remplacer la linéarisation utilisée dans le filtre SEEK par une interpolation linéaire. On obtient ainsi un nouveau filtre, appelé filtre SEIK. Les filtres SEEK et SEIK ont déjà été implémentés et testés avec succès dans plusieurs configurations océaniques réalistes [14, 48, 78, 91] et des résultats satisfaisants ont été obtenus. Cependant, ces filtres restent chers pour une assimilation opérationnelle. Ceci est dû en grande partie au coût d’évolution de leurs bases de correction.

*L’objectif principal de cette thèse est de*

- Réduire les coûts des filtres *SEEK* et *SEIK*. Nous serons alors amenés à construire des variantes du filtre *SEEK* dans lesquelles on simplifie l'évolution de la base de correction de ces deux filtres puisque c'est le seul moyen qui nous permet de réduire significativement leurs coûts.
- Proposer et étudier des améliorations et des alternatives aux filtres *SEEK* et *SEIK* : pour mieux traiter l'erreur du modèle, augmenter la représentativité de leurs bases de correction et leur conférer une certaine adaptativité (en ce qui concerne la base de correction et le facteur d'oubli).
- Implémenter tous ces nouveaux filtres dans une configuration réaliste du modèle *OPA* dans l'océan Pacifique tropical pour tester leurs performances.

## Plan de la thèse

Le contenu de cette thèse peut être divisé en deux parties : la première introductive et une deuxième dans laquelle sont présentés nos résultats.

Nous commencerons alors par rappeler quelques généralités sur l'assimilation de données en océanographie (chapitre 1) et sur le filtre de Kalman (chapitre 3). Nous décrirons ensuite le cadre général de nos expériences (le modèle et les systèmes d'observations disponibles) dans le chapitre 2 : il s'agit d'une configuration réaliste du modèle *OPA* dans le Pacifique tropical. Dans les chapitres 4 et 5 nous reviendrons largement sur les aspects théoriques et pratiques des filtres *SEEK* et *SEIK*. Nous présenterons aussi des nouvelles méthodes pour tenir compte plus explicitement de l'erreur du modèle avec ces deux filtres.

Dans la deuxième partie nous nous intéresserons d'abord à la réduction des coûts d'implémentation des filtres *SEEK* et *SEIK*. Dans ce but, nous construirons d'abord des nouvelles variantes des filtres *SEEK* et *SEIK* moins chers mais aussi performants dans le chapitre 6. Nous introduirons ensuite les notions d'analyse EOFs "locale" et "locale-globale ou mixte" dans le chapitre 7. Ces analyses nous permettront aussi d'augmenter sensiblement la représentativité de la base EOFs. Dans le chapitre 8, nous présenterons des schémas de réglage adaptatif des paramètres des filtres *SEEK* et *SEIK*, comme le facteur d'oubli et le rang de la base de correction, pour améliorer les performances de nos filtres durant les périodes instables du modèle. Nous considérerons finalement le filtre *ROEK* de *Cane et al.* [17] dans le chapitre 9, d'une part, pour compenser le caractère non évolutif de la base EOFs local, et d'autre part, pour comparer les performances de ce filtre avec celles du filtre *SEEK* dans le but de montrer l'intérêt de l'évolution de la base de correction.



# Chapitre 1

## Généralités sur l'assimilation de données en océanographie

### 1.1 Introduction à l'assimilation de données

#### 1.1.1 Définition

L'étude des circulations océaniques passe par la solution d'un modèle dynamique traduisant les interactions physiques entre les variables de l'océan. Bien que nos connaissances sur ces interactions ne sont pas "parfaites", l'état de l'océan, qui est en théorie solution du modèle, peut être en principe déterminée à partir d'un état initial et des conditions de bord. Cependant, ces grandeurs sont assez mal connues en pratique. De ce fait, la détermination de l'état de l'océan à partir de ces modèles est entachée d'erreurs. Parallèlement, on possède des observations qui sont assez précises mais très dispersées en temps et en espace pour qu'elles puissent être interpolées avec précision sur tout le domaine du modèle. Nous disposons alors de deux sources d'informations, le modèle et les observations, qui ne permettent pas séparément d'estimer avec précision l'état de l'océan.

Ces deux sources d'informations sont par ailleurs complémentaires. Un modèle numérique est en général capable de reconstruire les circulations océaniques à grande échelle à condition de spécifier avec précision ces paramètres et ces conditions de bords. Contrairement au modèle numérique qui couvre tout le domaine spatial et temporel, les observations sont trop éparées. Cependant, la qualité des nouveaux instruments de mesure nous permet de connaître avec une bonne précision l'état de l'océan dans les zones observées. Ainsi, il semble logique de combiner ces deux sources d'informations afin d'appréhender de manière synthétique le système océanique. Il s'agit de *l'assimilation de données*. Grossièrement, les observations "guident" le modèle sur une trajectoire réaliste, tandis que le modèle fournit une interpolation spatio-temporelle dynamique des observations.

#### 1.1.2 Historique

L'assimilation de données n'est pas une technique récente. Loin de là et plus précisément en 1922, *Richardson* fut le premier à assimiler directement les observations dans un modèle météorologique pour faire de la prévision. Toutefois, les recherches de Richardson furent abandonnées pour plus de vingt ans faute de moyens de calcul, et on a dû attendre l'année 1946, date d'apparition du premier ordinateur scientifique, pour voir en 1949 *Panofsky* ajuster les

observations sur toute la grille du domaine en utilisant un algorithme de moindres carrés. Cependant, la précision de cette nouvelle machine était si mauvaise que leurs résultats étaient différents suivant l'algorithme utilisé. Malgré cela et grâce aux progrès continus, ces calculateurs ont ouvert un nouvel horizon dans l'application des méthodes d'assimilation de données en météorologie, en offrant de plus en plus des moyens rapides et précis pour le calcul scientifique.

A partir des années cinquantes, les choses se sont accélérées. *Gilchrist et Cressman* ont d'abord proposé d'utiliser la prévision ultérieure comme une estimation a "priori" de l'état initial. Leurs travaux ont été ensuite repris par *Bergthorson et Doos* et *Eliassen* qui ont utilisé des équations très proches de la formule de correction de la méthode d'*Interpolation Optimale* pour assimiler les observations. Durant les années soixantes, l'assimilation de données a connu une nouvelle dimension grâce aux progrès continus des calculateurs scientifiques. Par conséquence, on a pu appliquer plusieurs formes réduites de la méthode d'*Interpolation Optimale* sur certaines modèles atmosphériques. Pendant ce temps, plus les calculateurs devenaient puissants, plus l'ambition d'appliquer des méthodes d'assimilation de données "sophistiquées" sur des modèles "réalistes" grandissait. Ainsi, on a vu la réapparition des modèles aux équations primitives et surtout les premières utilisations des nouvelles méthodes d'assimilation comme le *filtre de Kalman* et les *méthodes variationnelles*, au milieu des années soixante-dix.

Jusqu'alors, le domaine de la météorologie était le seul champ d'application de l'assimilation de données. L'intérêt d'investir les méthodes d'assimilation en océanographie était presque inexistant bien que la dynamique océanique soit soumise à des lois physiques similaires à celles de l'atmosphère (mais à des échelles spatio-temporelles bien différentes). Cela peut être expliqué d'une part, par le manque cruel d'observations et d'autre part, par les enjeux moins immédiats de sa connaissance que pour la prévision météorologique. Le vrai développement dans ce domaine n'a commencé qu'après l'apparition des nouvelles techniques d'observation avec le premier satellite GEOS3 en 1975 – 1978 qui se sont traduites par une grande quantité de mesures altimétriques très précises.

Après cinquante ans de recherche dans ce domaine, beaucoup de points ont été clarifiés mais beaucoup reste à faire. Et malgré le progrès incessant des calculateurs scientifiques, les coûts de calcul restent le problème majeur qui nous empêche d'appliquer "proprement" les méthodes d'assimilation sur les modèles océaniques réalistes.

### 1.1.3 Applications et objectifs

Ces dernières années, l'assimilation de données a pris une importance croissante en océanographie. Comme en météorologie, l'assimilation est utilisée en océanographie pour

- *constituer un ensemble fiable de données*: en raison des défauts des modèles numériques, l'assimilation de données est utilisée pour corriger les sorties du modèle à l'aide des observations. Ces données seront ensuite utilisées pour valider les modèles et pour augmenter nos connaissances de la dynamique océanique à travers l'étude de la variabilité de ces données.
- *améliorer les modèles numériques*: l'utilisation des observations pour estimer les paramètres inconnus des modèles numériques entre aussi dans le domaine de l'assimilation de données. Ces techniques, dites de contrôle, constituent un outil très intéressant pour

améliorer le comportement des modèles.

- *faire des prévisions*: c'est le but principal de l'assimilation de données. L'intérêt pour les prévisions océanographiques a sensiblement augmenté ces dernières années pour l'étude du changement climatique et aussi pour l'amélioration des prévisions météorologiques à long terme. Actuellement, un des enjeux majeurs de l'océanographie est de mettre en place une océanographie opérationnelle comme c'est le cas depuis longtemps déjà en météorologie.
- *optimiser les systèmes d'observation*: en raison des coûts économiques prohibitifs pour l'observation de l'océan, l'optimisation des systèmes d'observation est devenue une étape nécessaire avant leur mise en place. Aujourd'hui des techniques d'assimilation sont utilisées pour simuler la performance et la sensibilité des prévisions par rapport aux systèmes d'observation.

## 1.2 Cadre général

Nous présentons maintenant brièvement les deux composantes principales de l'assimilation en océanographie : les modèles numériques et les observations.

### 1.2.1 Les modèles océaniques

Un effort important a été fourni depuis une vingtaine d'années pour développer des modèles numériques de la circulation générale océanique. Ces modèles, qui visent principalement à aider à la compréhension du système climatique terrestre ou à des objectifs opérationnels comme la prévision à court et moyen terme, sont de plus en plus utilisés pour représenter des configurations aussi réalistes que possible des phénomènes océaniques.

Les modèles de circulation générale océanique s'appuient sur les équations de la dynamique des fluides qui expriment la conservation des grandeurs physiques du fluide étudié, en présence de la rotation terrestre. Ainsi, le mouvement d'une particule de fluide est régi par les équations traduisant

- la conservation de la quantité de mouvement (ou équation de Navier-Stokes) : qui régie l'évolution de la vitesse  $V$  du fluide de densité  $\rho$  soumis à un champ de pression  $p$  selon<sup>1</sup>

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + g - 2\Omega \wedge V + D \quad (1.1)$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur,  $\Omega$  le vecteur rotation de la terre et  $D$  représente les forces de dissipations et les sources de quantité de mouvement.

- la conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot V = 0. \quad (1.2)$$

---

1.  $\frac{D\cdot}{dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + (V\nabla)\cdot$  est la dérivée totale



On ajoute à cela l'équation d'état qui relie la densité  $\rho$  avec les différents paramètres du fluide (comme la température et la salinité) et les équations transportant ces nouveaux paramètres comme l'équation de conservation de la salinité

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\nabla \cdot (SV) + D^S, \quad (1.3)$$

et de l'énergie pour la température

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (TV) + D^T \quad (1.4)$$

où  $D^T$  et  $D^S$  désignent les paramétrisations des effets sous-maille pour la température et la salinité, incluant aussi les termes de forçages en surface.

Ces équations sont connues depuis longtemps mais, comme elles ne sont pas linéaires, elles mélangent les échelles de temps et d'espace et ne peuvent être résolues de manière analytique. Le recours à l'ordinateur est donc indispensable, et n'a pu être envisagé que récemment. A cet égard, les progrès considérables de la modélisation de l'océan au cours de ces deux dernières décennies sont moins le reflet de connaissances physiques nouvelles que d'une augmentation extraordinaire de la puissance des calculateurs. Sans entrer dans les détails, la modélisation numérique de ces équations recouvre l'ensemble des méthodes utilisées dans le domaine des équations aux dérivées partielles plus le traitement de certains points particuliers comme la prise en compte des frontières ouvertes, de la topographie du fond, etc.

Différents types de modèles ont été développés, qui comportent des hypothèses simplificatrices plus ou moins importantes dans les deux premières équations. La "gamme" s'étend des modèles linéaires aux modèles aux *équations primitives* (désignent la modélisation physique et thermodynamique "complètes"), en passant par les modèles *Shallow water* pour les "eaux peu profondes" et les modèles *quasi-géostrophiques* qui négligent les phénomènes thermodynamiques. Les coûts de calcul induits par ces modèles sont évidemment relatifs à la complexité de la physique représentée, et aussi à la résolution utilisée. Les simulations effectuées avec les modèles aux équations primitives à l'échelle de bassins océaniques requièrent des dizaines voir des centaines d'heures CPU sur des super-calculateurs. Grâce à l'augmentation extraordinaire de la puissance de calcul, l'évolution actuelle des modèles va dans le sens de l'utilisation d'une physique aussi complète que possible (équations primitives), avec une haute résolution spatiale, nécessaire pour une représentation correcte de la dynamique tourbillonnaire intense de l'océan.

### 1.2.2 Les observations

Jusque récemment, les données d'observation disponibles étaient des mesures in situ, le plus souvent très ponctuelles dans le temps et l'espace, réalisées par des mouillages d'appareils, des flotteurs dérivant, ou par des navires. Ce type de données convient mieux à des modèles locaux. Cependant, sa faible densité ne suffirait sans doute pas pour des modèles de bassin.

Depuis 1982, au jeu de mesures in situ s'ajoutent les données altimétriques (dénivellation de la surface libre de l'océan) des satellites, indispensables pour obtenir une image globale de l'évolution climatique. L'étape phare de ces dernières années correspond au lancement des satellites dédiés à l'océanographie comme les satellites ERS1-2 et TOPEX-POSEIDON qui

mesurent aussi les vents soufflant à la surface des océans et la température de surface. Plusieurs autres missions sont aussi planifiées pour les années à venir.

L'intérêt de mesurer l'altimétrie vient du fait que cette donnée est directement liée au champ de vitesse et plus précisément à la fonction courant. Dans les régions tropicales par exemple, une élévation du niveau de la mer correspond à une position profonde de la thermocline et, par conséquent, à des anomalies chaudes dans les couches de surface. A contrario, un abaissement va de pair avec des anomalies froides, etc. La variation du niveau de la mer est de l'ordre du mètre, alors que l'erreur d'observation de cette dernière est de quelques centimètres. Cette nouvelle source d'observation est donc fiable et de plus directement "assimilable" dans presque tous les types des modèles océaniques. Cependant, les satellites fournissant uniquement des informations sur la surface de l'océan, se pose donc le problème de propager ces informations dans les couches du fond. A noter aussi l'intérêt des mesures in situ pour apporter des compléments d'informations, notamment par l'exploitation du profil des différentes variables dans le fond.

### 1.3 Formulation du problème de l'assimilation

Ce paragraphe est consacré à la formulation du problème de l'assimilation de données. Nous commençons par présenter le problème de l'assimilation tridimensionnelle, qui consiste en l'estimation d'un vecteur d'état statique à partir d'une observation, avant d'introduire la dimension temporelle pour obtenir ce qu'on appelle l'assimilation quadridimensionnelle. Les notations proposées par *Ide et al.* [50] sont adoptées.

#### 1.3.1 Assimilation tridimensionnelle (3D)

Soit  $X^t$  l'état réel à un instant donné du système à étudier. Supposons qu'on possède une observation  $Y^o$  de  $X^t$  obtenu par le système d'observation

$$Y^o = H X^t + \varepsilon, \quad (1.5)$$

où  $H$  est un opérateur de l'espace d'état dans l'espace d'observation, appelé opérateur d'observation, permettant de calculer l'équivalent-modèle  $H X^t$  des observations et  $\varepsilon$  est un vecteur aléatoire de moyenne nulle et de matrice de covariance  $R$  modélisant un bruit d'observation (erreur de mesure plus erreur de représentativité).

L'estimateur optimal  $X^a$  de l'état  $X^t$ , appelé l'état analysé, est obtenu en maximisant la fonction de vraisemblance (consulter [65, 88] pour plus de détails) de l'état, ce qui revient à minimiser la somme d'une distance aux observations et d'une distance à une estimation a priori  $X^f$  (souvent une prévision) de l'état, i.e.

$$J(X) = \frac{1}{2}[X - X^f]^T (P^f)^{-1} [X - X^f] + \frac{1}{2}[Y^o - HX]^T R^{-1} [Y^o - HX]. \quad (1.6)$$

où  $P^f$  désigne la matrice de covariance de l'erreur commise sur l'estimation de  $X^t$  par  $X^f$ .

Sous certaines hypothèses (comme l'indépendance des erreurs d'observation et de prévision), le meilleur état analysé est (voir *Lorenc* [65])

$$X^a = X^f + P^f H^T [H P^f H^T + R]^{-1} [Y^o - H X^f]. \quad (1.7)$$

dont la matrice de covariance de l'erreur associée est donnée par

$$P^a = P^f - P^f H^T [H P^f H^T + R]^{-1} H P^f. \quad (1.8)$$

L'état analysé est donc une fonction des informations contenues dans le système d'observation  $(Y^o, R)$  et des connaissances a priori de l'état présentées par le couple  $(X^f, P^f)$ .

Malgré sa forme simple, le calcul numérique de l'état analysé  $X^a$  à partir de l'équation (1.7) est très coûteux en raison de l'énorme dimension du vecteur d'état. Différentes méthodes, comportant des hypothèses simplificatrices plus au moins importantes, ont été développées. Selon *Cohn et al.* [18], ces méthodes peuvent être regroupées selon deux grandes catégories

- *les méthodes statistiques*: l'état analysé  $X^a$  est calculé directement à partir de la formule (1.7) mais sous certaines hypothèses statistiques sur la forme de  $P^f$  et les observations pour diminuer la taille du problème. La méthode la plus connue dans ce domaine est l'*Interpolation Optimale*.
- *les méthodes variationnelles*: ces méthodes consistent à utiliser directement un algorithme de minimisation sur  $J$  pour calculer  $X^a$ . L'inconvénient de ce type de méthodes est que la matrice de covariance de l'erreur d'analyse  $P^a$  ne peut pas être facilement déterminée.

### 1.3.2 Assimilation quadridimensionnelle (4D)

Jusqu'à maintenant nous avons considéré l'état d'un système qu'à un instant fixé. Or, dans les situations réalistes on a affaire à un système qui évolue dans le temps pour lequel on dispose des observations temporelles aussi bien que spatiales. L'assimilation-4D est une technique spécialement adaptée pour cela qui généralise l'assimilation-3D. On utilisera alors le modèle pour propager les informations en temps et en espace et les observations pour corriger la trajectoire du modèle.

Soit  $X^t(t)$  le vecteur décrivant le "vrai" état de l'océan à l'instant  $t$ . Après discrétisation en espace, le système d'équations gouvernant l'état de l'océan peut être présenté sous la forme

$$X^t(t_k) = M(t_k, t_{k-1}) X^t(t_{k-1}) \quad (1.9)$$

où  $X^t(t)$  est un vecteur de dimension  $n$  décrivant le "vrai" état de l'océan à l'instant  $t$ ,  $n$  étant le nombre de variables du modèle multipliés par le nombre de points de grille de la discrétisation et  $M(t, s)$  est l'opérateur dynamique de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  décrivant l'opérateur de transition entre deux instants  $s$  et  $t$ .

Pour faire de l'assimilation de données on a aussi besoin de la relation qui relie les variables du modèle aux observations. Celle-ci s'écrit

$$Y_k^o = H_k X^t(t_k) \quad (1.10)$$

où  $Y_k^o$  est un vecteur de dimension  $p_k$  contenant toutes les mesures effectuées au temps  $t_k$  et  $H_k$  est l'opérateur d'observation, c'est une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{p_k}$  reliant l'espace d'état à l'espace d'observation.

Cependant, les modèles océaniques ne sont jamais parfaits. En effet, des phénomènes locaux par leur taille réduite ou leur comportement ne pourront être correctement reconstitués par le modèle. Des erreurs dans les conditions initiales ou les conditions de bords empêchent aussi les modèles d'avoir des bons comportements. Les discrétisations forment aussi une source d'erreur. Les observations ne sont pas non plus exemptes d'erreurs. Différentes sortes d'erreurs peuvent s'introduire durant le programme de mesure et la réception des données. L'incapacité de déterminer ces erreurs nous emmène à les représenter comme des processus stochastiques (voir *Jazwinski* [52]). Le bruit blanc gaussien est le plus utilisée pour décrire un processus stochastique. On rajoute alors une partie stochastique au modèle déterministe précédent pour obtenir le modèle général le plus utilisé en assimilation, à savoir

$$X^t(t_k) = M(t_k, t_{k-1})X^t(t_{k-1}) + \eta(t_k) \quad (1.11)$$

$$Y_k^o = H_k X^t(t_k) + \varepsilon_k \quad (1.12)$$

où  $\varepsilon_k$  et  $\eta(k)$  sont de bruit blanc gaussien indépendants de dimension  $n$  et  $p_k$  et de matrice de covariance  $R_k$  et  $Q(t_k)$  respectivement.

Le problème de l'estimation de l'état du modèle (1.11) connaissant les observations fournies par le système (1.12) peut être formulé selon deux approches qui diffèrent suivant la manière dont on utilise les observations: *au fur et à mesures qu'elles sont disponibles* ou *de façon globale sur une période de temps*. On distinguera alors entre

- *l'approche séquentielle*: elle consiste à corriger la trajectoire de prévision de l'état qui minimise la fonctionnelle  $J$  à chaque fois qu'une nouvelle observation est disponible.
- *l'approche variationnelle*: elle consiste à déterminer la trajectoire du modèle de prévision qui minimise la somme d'une distance aux observations sur un intervalle de temps donné et d'une distance à une estimation a priori de la condition initiale de la trajectoire optimale.

Cependant, ces deux approches ne sont utilisables sous leur forme originale que dans un nombre d'applications assez restreint, et ceci pour plusieurs raisons :

- leurs propriétés d'optimalité ne sont en général vérifiées que dans le cas de systèmes linéaires;
- les paramètres statistiques nécessaires à la calibration de ces schémas sont souvent mal connus en pratique;
- le coût de calcul numérique à effectuer devient vite prohibitif pour les problèmes réalistes.

En vue d'applications opérationnelles, il est donc nécessaire de dégrader ces schémas d'assimilation, théoriquement exacts, tout en conservant, dans la mesure du possible, les propriétés d'optimalité des solutions assimilées. Nous présenterons brièvement dans le paragraphe suivant quelques méthodes d'assimilation-4D. Une synthèse de ces méthodes est disponible dans *Ghil and Malanotte Rizzoli* [46].

## 1.4 Méthodes de l'assimilation-4D

Jusque récemment, les méthodes d'assimilation-3D étaient les plus utilisées. Depuis peu, le progrès des calculateurs scientifiques a permis aux chercheurs de mettre en oeuvre et tester dif-

férentes méthodes d'assimilation-4D. Ces méthodes se rangent naturellement selon l'approche utilisée : séquentielle ou variationnelle.

### 1.4.1 Méthodes séquentielles

Basées sur la théorie d'estimation, ces méthodes utilisent les observations au fur et à mesure qu'elles sont disponibles. Ainsi, on corrige la trajectoire de prévision du modèle à chaque fois qu'une nouvelle observation est disponible en minimisant le critère d'optimalité  $J$  de l'assimilation tridimensionnelle et qui est donnée par (1.6). A noter que toutes les méthodes séquentielles peuvent être dérivées du filtre de Kalman qui résout d'une manière exacte le problème de l'assimilation pour un modèle linéaire.

#### Filtre de Kalman

Le *Filtre de Kalman* résout de façon récursive le problème de l'assimilation-4D dans le cas d'un système dynamique stochastique linéaire (voir [54]). Il fournit à chaque instant, non seulement l'estimateur optimal de l'état connaissant les observations jusqu'à cet instant, mais aussi la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. Ce filtre opère en deux étapes : une étape de prévision par le modèle et une étape de correction de la prévision à l'aide de la nouvelle observation. Le filtre de Kalman sera présenté en détails au chapitre 3.

Le filtre de Kalman est optimal pour les modèles linéaires. Pour pouvoir l'appliquer aux systèmes non-linéaires, on est alors amené à linéariser les équations du modèle autour de l'estimation courante de l'état pour obtenir le fameux *filtre de Kalman étendu* (voir [52] pour plus de détails). Bien que la linéarisation fasse perdre au filtre de Kalman son caractère optimal, l'expérience montre que le filtre de Kalman étendu fournit des résultats satisfaisants dans le cas des systèmes faiblement non-linéaires.

Cependant, l'application du filtre de Kalman à des modèles fortement non-linéaires nécessite encore de nombreux développements. En effet, plusieurs études, comme celles d'*Evensen* [34], *Gauthier et al.* [44] et *Kushner* [57], montrent clairement que le filtre de Kalman étendu peut présenter de fortes instabilités et parfois diverge complètement dans ce cas. Une nouvelle voie d'investigation est en train de se développer actuellement. Elle consiste à utiliser des méthodes de type Monte-Carlo pour estimer l'évolution de la matrice de covariance de l'erreur à l'aide d'un nuage de vecteurs centrés autour de l'état courant et dont la matrice de covariance empirique est celle de la matrice considérée. *Evensen* [33] est l'initiateur de cette démarche, en océanographie et en météorologie, avec son *filtre de Kalman d'ensemble*. Le lecteur est renvoyé à *Pham* [75] pour une discussion approfondie et détaillée de ce type de méthodes.

#### Filtres de Kalman dégradés

L'algorithme du filtre de Kalman nécessite la connaissance de la matrice de covariance des erreurs d'estimation. La taille de cette matrice devient considérable dès lors que l'on aborde des modèles réalistes vu la dimension de leur vecteur d'état, de l'ordre de  $10^6$ . Une implémentation directe du filtre de Kalman (étendu) n'est donc pas possible et le recours à des approximations est donc inévitable.

- *Interpolation optimale* : Cette méthode a déjà été évoquée dans le paragraphe 1.3.1. Ici nous voulons juste insister sur le fait que c'est une variante dérivée du filtre de Kalman.

En effet, sous réserve de connaître l'état de prévision et la matrice de covariance de l'erreur de prévision à un instant fixé, cette méthode utilise l'équation de correction du filtre de Kalman pour corriger cette prévision. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne tient pas vraiment compte de la dynamique du modèle dans l'évolution temporelle des matrices de covariances des erreurs mais utilise des formules empiriques (voir *Cohn et al.* [18]).

- *Nudging* : Introduite par *Anthes* [2], cette méthode consiste à rajouter un terme de rappel vers les observations dans le second membre de l'équation du modèle. Son algorithme peut être obtenu directement à partir des équations du filtre de Kalman en supposant que la seule information disponible sur l'état analysé et sur les observations est une mesure caractéristique de son ordre de grandeur et que l'information des différentes observations est non-corrélée (voir *Poy* [80]).
- *Filtres de Kalman de rang réduit* : L'utilisation du filtre de Kalman en assimilation de données réelle ne peut se faire sans une approximation de rang réduit sur les matrices de covariance de l'erreur. L'utilisation de ce type d'hypothèses, qui découle de la réduction d'ordre sur la structure de ces erreurs, dans le filtre de Kalman aboutit à des formes dégradées de ce dernier. Parmi ces filtres, on peut citer le filtre SEEK de *Pham et al.* [78], le filtre ROEK de *Cane et al.* [17], le filtre RRSQRT de *Verlaan and Heemink* [90], etc.

Néanmoins, l'évolution temporelle des matrices de covariance de ces filtres a encore un coût de calcul non négligeable :  $r$  fois le coût d'intégration du modèle si le rang réduit de l'approximation est  $r$ . On peut donc espérer beaucoup des propriétés asymptotiques des matrices de covariance de l'erreur de filtrage (*Gourdeau et al.* [48], *Fukumori et al.* [42] et récemment *Brasseur et al.* [14]) ou de l'utilisation d'une grille à faible résolution pour faire évoluer ces matrices comme dans *Fukumori* [43].

### 1.4.2 Méthodes variationnelles

Basées sur la *théorie du contrôle optimal*, ces méthodes ont été introduites dans le contexte de l'assimilation de données au milieu des années soixante-dix. Le principe de ces méthodes est simple et se résume à la recherche de la trajectoire du modèle qui minimise la somme d'une distance aux observations sur un intervalle de temps donné et d'une distance à une estimation a priori de l'état initial de la trajectoire optimale.

Dans sa formulation générale [84], le modèle peut contenir des erreurs, on parlera alors du problème d'assimilation variationnelle avec contrainte faible. La fonction coût à minimiser est alors

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(X(t_0), \dots, X(t_N), \eta(t_1), \dots, \eta(t_N)) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [Y_k^o - H_k X(t_k)]^T R_k^{-1} [Y_k^o - H_k X(t_k)] \\ &+ \frac{1}{2} [X(t_0) - X^f(t_0)]^T [P^f(t_0)]^{-1} [X(t_0) - X^f(t_0)] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \eta^T(t_k) Q(t_k) \eta(t_k) \end{aligned}$$

sous la contrainte (1.11). Cependant, la complexité de tenir compte de l'erreur du modèle reste l'un des points critiques de l'assimilation variationnelle [70] car la dimension du vecteur

de contrôle  $(X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_N), \eta(t_1), \dots, \eta(t_N))$  est alors prohibitive. L'introduction de l'hypothèse d'un modèle parfait, ou assimilation avec contrainte forte, paraît donc nécessaire non seulement pour réduire la taille du problème, mais aussi pour rendre le problème de minimisation sans contraintes. En effet, dans ce cas ce problème sera réduit à la recherche des conditions initiales seulement et non de tous les états successifs du modèle. Pour obtenir ces derniers, il suffit alors d'intégrer le modèle en partant de la condition initiale optimale.

La solution de l'approche variationnelle avec contrainte faible est optimale pour un modèle linéaire car elle coïncide avec celle du filtre de Kalman à la fin de l'intervalle d'assimilation [31, 70]. L'adaptation de cette approche à des modèles non-linéaires fait perdre à la fonction coût la propriété de convexité et donc l'unicité du minimum global.

Dès lors qu'une méthode est disponible pour calculer le gradient de la *fonction coût*  $\mathbf{J}$  par rapport aux conditions initiales, le point de  $\mathbf{J}$  minimum peut être déterminé, en théorie, par un algorithme de minimisation comme les algorithmes de descente [6]. En pratique, la seule méthode acceptable bien que de coût élevé, est la *méthode adjointe* elle consiste à exprimer le gradient de  $\mathbf{J}$  comme la solution rétrograde (à l'instant initial) d'un modèle (adjoint) qui génère une variable (dite adjointe) qu'on utilise pour exhiber la relation linéaire de  $\mathbf{J}$  par rapport aux conditions initiales [59, 88, 72]. Outre que l'écriture du code adjoint devient vite complexe lorsqu'on aborde des modélisations réalistes, une telle démarche peut être très coûteuse car elle requiert l'intégration du modèle direct et du modèle adjoint à chaque itération de minimisation.

Dans le cadre d'une utilisation opérationnelle de l'assimilation variationnelle en océanographie, une réduction de coût de calcul est nécessaire dans la minimisation de la fonction coût. Dans ce but, plusieurs approximations pour réduire la taille de l'espace de contrôle ont été introduites. Parmi ces approches on trouve la *méthode des représentants* qui consiste en la projection de la trajectoire optimale sur un espace affine passant par la trajectoire issue de l'estimation a priori de l'état initiale et de dimension le nombre des observations recueillies durant la période d'assimilation. L'application de cette méthode sur un modèle quasi-géostrophique a donné des résultats fort prometteurs [7]. On peut citer aussi la *méthode incrémentale de Courtier* [21], qui consiste à réécrire les conditions initiales comme fonction de l'écart (à faible résolution) des connaissances a priori de ces dernières, ou récemment l'isolation des modes principaux de la circulation océanique par des méthodes statistiques comme dans *Blayo et al.* [11].

## 1.5 Discussion

L'implémentation des méthodes d'assimilation avec les modèles océanographiques réalistes est donc très loin d'être triviale. Malgré le progrès continu de la puissance des calculateurs, le problème majeur reste leur coût extrêmement élevé qui est dû à l'énorme dimension de l'état du modèle (de l'ordre de  $10^6$  en pratique). Cela empêche d'utiliser "proprement" les méthodes d'assimilation optimales comme le filtre de Kalman ou la méthode adjointe. La non-linéarité des modèles océanographiques et leur forte sensibilité par rapport aux conditions initiales, la manque et la qualité limitée des observations ainsi que les difficultés de déterminer les paramètres du modèle (comme l'erreur dynamique et les erreurs d'observation) viennent s'ajouter au coût pour constituer les problèmes à résoudre en assimilation de données.

Traditionnellement, l'approche séquentielle, et surtout la méthode d'interpolation optimale, ont été les plus utilisées en assimilation de données. Depuis les années 80 et grâce aux progrès spectaculaires des calculateurs scientifiques on a vu l'apparition de l'approche variationnelle dans ce domaine. Malgré leur équivalence dans le cas d'un modèle linéaire parfait, les chercheurs sont partagés entre l'approche à suivre. En effet, chacune des deux approches comportent ses propres avantages et ses propres inconvénients et une étude théorique ne permettra en aucun cas de trancher d'autant que leurs performances dépendent aussi bien du modèle sur lequel elles sont appliquées que du type des observations assimilées [31, 51, 82]. Cependant, l'expérience montre que les méthodes séquentielles se prêtent mieux aux besoins actuels de l'assimilation de données pré-opérationnelle et ce pour plusieurs raisons :

- les méthodes séquentielles admettent différents degrés de dégradation qui peuvent être mise en oeuvre selon une démarche progressive, de sorte que le schéma d'assimilation peut être adapté à une application particulière en fonction de la disponibilité des ressources informatiques, humaines, etc.
- la méthode adjointe nécessite l'écriture d'un code adjoint en relation étroite avec le modèle direct, ce qui n'est pas le cas du filtre de Kalman qui permet une implémentation modulaire indépendante du code numérique.
- la décorrélation temporelle rapide des processus qui caractérise la turbulence géophysique enlève une partie de son sens au problème variationnelle, de sorte qu'il est nécessaire d'adopter une stratégie de "découpage séquentiel" pour améliorer une assimilation variationnelle (voir Luong [66]).





# Chapitre 2

## Cadre de nos expériences

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la description du cadre général de nos expériences, i.e. le modèle OPA du Pacifique tropical et les observations, que nous avons utilisé pour tester les performances de tous nos schémas d'assimilation de données. Nous discutons aussi notre choix du vecteur d'état du modèle et de l'intervalle d'assimilation considéré. Les résultats d'assimilation seront alors présentés à la fin des chapitres suivants.

### 2.2 Le modèle OPA

Nous présentons brièvement une configuration réaliste du modèle OPA dans l'océan Pacifique tropical. Pour plus de détails, le lecteur est prié de consulter *Madec et al.* [67].

#### 2.2.1 Hypothèses et équations

Le modèle OPA (pour Ocean PARallélisé) est un modèle de circulation océanique générale qui a été développé au Laboratoire d'Océanographie Dynamique et de Climatologie (LODYC, Paris VI) dans les années quatre-vingt pour étudier les circulations océaniques à grandes échelles et leurs interactions avec l'atmosphère. Il résout un système aux équations primitives dérivé par les équations de Navier-Stokes traduisant le principe fondamental de la dynamique pour un fluide, à savoir la somme des forces appliquées au système est égale au produit de la masse du système et de son accélération, et par les hypothèses suivantes

- *hypothèse de la terre sphérique*: la surface géopotentielle de la terre est supposée sphérique, la gravité est alors parallèle au rayon de la terre.
- *hypothèse de Couche mince*: la profondeur de l'océan est négligeable devant le rayon de la terre.
- *hypothèse de fermeture turbulente*: le paramétrage des processus sous-mailles se fait par un schéma de diffusion et de dissipation du second-ordre (laplacien) sur la verticale (Blanke and Delecluse [10]). Sur l'horizontale, les opérateurs de viscosité et de diffusivité peuvent être laplaciens ou biharmoniques (quatrième-ordre).
- *hypothèse de Boussinesq*: la variation de la masse volumique aux alentours d'une valeur de référence reste négligeable au cours du temps.

- *hypothèse hydrostatique ou domaine peu profond* : cette hypothèse conduit à une équation d'équilibre entre le gradient de la pression verticale et la force de "buoyancy".
- *hypothèse de fluide incompressible* : la divergence tridimensionnelle de la vitesse est nulle.

On fera, de plus, l'hypothèse de toit rigide qui s'oppose à toute déformation géométrique de l'interface air-mer. Cela nous permet de filtrer les ondes de gravité se propageant à la surface trop rapidement pour pouvoir être résolues correctement par un pas de temps raisonnable pour le modèle.

L'analyse dimensionnelle complète des équations de Navier-stokes et les approximations ci-dessus conduisent au système d'équations suivant

- Equations de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t} = +(\xi + f)v - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_s}{\partial x} + D_u^U, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(\xi + f)u - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_s}{\partial y} + D_v^U, \quad (2.2)$$

où

$$B = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{P_h}{\rho_0}, \quad (2.3)$$

- Equation d'équilibre hydrostatique

$$\frac{\partial P_h}{\partial z} = -\rho g. \quad (2.4)$$

- Equation d'incompressibilité (ou de continuité)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

- Equation de conservation de l'énergie pour la température

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial(Tu)}{\partial x} - \frac{\partial(Tv)}{\partial y} - \frac{\partial(Tw)}{\partial z} + D^T. \quad (2.6)$$

- Equation de conservation de la salinité

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial(Su)}{\partial x} - \frac{\partial(Sv)}{\partial y} - \frac{\partial(Sw)}{\partial z} + D^S. \quad (2.7)$$

- Equation d'état

$$\rho = \rho(T, S, P_s), \quad (2.8)$$

avec

- \*  $U_h = (u, v)$  est le vecteur vitesse horizontale et  $w$  est la vitesse verticale,
- \*  $S$  est la salinité et  $T$  est la température,

- \*  $\rho$  est la densité et  $\rho_0$  est la densité de référence,
- \*  $P_s$  est la pression de surface et  $P_h$  est la pression hydrostatique,
- \*  $f$  est le facteur de Coriolis et  $g$  est l'accélération de la pesanteur,
- \*  $D^U, D^T$  et  $D^S$  désignent les paramétrisations des effets sous-maille pour la vitesse, la température et la salinité, incluant aussi les termes de forçages en surface.

Afin de pouvoir raffiner le maillage en certaines régions où l'océan a un comportement très complexe, ou afin de permettre à la grille de suivre une côte irrégulière, ou tout simplement pour tenir compte de la sphéricité de la terre, le modèle OPA est formulé en termes de coordonnées curvilignes sur l'horizontale et en coordonnée  $z$  sur la verticale.

### Traitement de la pression de surface

Le traitement de la pression de surface  $P_s$  est particulièrement intéressant car elle est liée, grâce à l'hypothèse d'équilibre hydrostatique, à l'élévation de la surface libre de l'océan (la variable observée par les satellites), appelée aussi dénivellation et notée  $\eta_s$ , selon

$$P_s = \rho_0 g \eta_s. \quad (2.9)$$

Dans ce but, décomposons le champs de vitesse horizontal  $U_h$  selon ses parties barotrope  $\bar{U}_h$  et barocline  $\hat{U}_h$ ,

$$U_h = \bar{U}_h + \hat{U}_h \quad \text{et} \quad \bar{U}_h = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 U_h dz, \quad (2.10)$$

où  $H = H(x, y)$  représente la profondeur en chaque point du domaine. En intégrant l'équation de continuité (2.5) sur la verticale, on peut exprimer, sous l'hypothèse du toit rigide, l'équation de continuité comme la non divergence du transport barotrope

$$\nabla_h \cdot (H \bar{U}_h) = 0, \quad (2.11)$$

où  $\nabla_h$  désigne l'opérateur de divergence horizontal. Le terme  $H \bar{U}_h$  dérive donc d'une fonction de transport (ou de courant barotrope)  $\Psi$  vérifiant

$$H \bar{U}_h = \vec{k} \wedge \nabla \Psi \quad (2.12)$$

où  $k$  est le vecteur unitaire dans la direction verticale (vers le haut). La substitution de cette dernière équation dans les équations de conservation de la quantité de mouvement (2.1) et (2.2) intégrées sur la verticale et dont on a pris le rotationnel conduit à exprimer la fonction courant  $\Psi$  comme solution du système d'équations de type elliptique suivant

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_s}{\partial x} = \bar{M}_u + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right), \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_s}{\partial y} = \bar{M}_v - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right). \quad (2.14)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, les hypothèses de vitesses normales nulles sur les frontières solides se traduisent par le fait que les lignes de côtes sont des lignes de courant. On prend alors  $\partial \Psi / \partial t$  nul sur le continent.

## 2.2.2 Discrétisation et grille

### Discrétisation temporelle

Le modèle OPA utilise un schéma temporel de saute-mouton (leapfrog) qui pour un système différentiel

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t), t), \quad (2.15)$$

l'état  $X$  est estimé à l'instant  $t_{k+1} = (k + 1)\delta$  (où  $\delta$  est le pas de temps du modèle) par

$$X(t_{k+1}) = X(t_{k-1}) + 2\delta F(X(t_k), t_k). \quad (2.16)$$

Pour éviter un bruit de haute fréquence associé au schéma de saute-mouton, on applique à chaque pas de temps le filtre d'Asselin qui consiste à calculer la variable filtrée  $X_f$  de  $X$  selon<sup>1</sup>

$$X_f(t_k) = X(t_k) + \gamma[X_f(t_{k-1}) - 2X(t_k) + X(t_{k+1})]. \quad (2.17)$$

Au premier pas de temps, le modèle démarre par un pas d'Euler, à savoir

$$X(t_1) = X(t_0) + \delta F(X(t_0), t_0). \quad (2.18)$$

### Discrétisation spatiale

Le schéma de discrétisation spatiale est un schéma aux différences finies centrées d'ordre deux classique. Les variables sont réparties sur l'horizontale selon la grille décalée dite "grille-C d'Arkawa" (voir *Arakawa* [3] pour plus de détails). Dans ce schéma, les variables scalaires et vectorielles sont calculées au centre de la cellule et au centre de la face de la maille respectivement. La surface et le fond sont des points de calcul de la vitesse verticale  $w$  (voir FIG. 2.1).

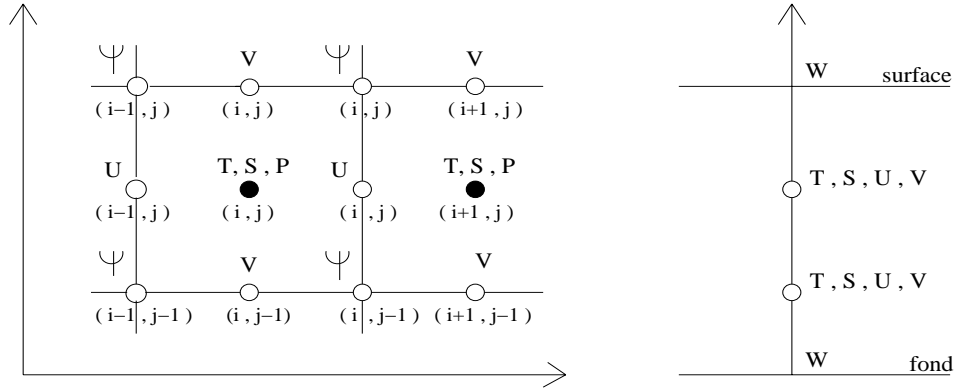


FIG. 2.1 – Discrétisation horizontale et verticale

1. Dans notre code numérique, le coefficient  $\gamma$  est égale à 0.1.

### 2.2.3 Conditions aux limites

#### Conditions latérales et au fond

Pour les deux composantes de la vitesse, on applique sur les côtes une condition aux limites latérales de non-glissement qui se traduit par

$$u = v = 0. \quad (2.19)$$

En ce qui concerne les flux de chaleur et de sel à travers les parois et le fond de l'océan, on met une condition dite de non-flux pour les traceurs  $S$  et  $T$ , qui consiste tout simplement à négliger ces flux. Le terme  $D^U$  contient également un terme de friction au fond de l'océan.

#### Conditions en surface

L'hypothèse de toit rigide impose une vitesse verticale nulle à la surface. La tension du vent est prise en compte dans les termes de quantité de mouvement  $D^U$ .

Pour les traceurs, sont spécifiés les flux d'évaporation moins précipitation pour la salinité et les flux de chaleur pour la température. Existe également un terme représentant la pénétration des radiations solaires dans les premiers mètres de la surface de l'océan.

### 2.2.4 Intégration temporelle du modèle

Nous présentons ici les différentes étapes qui constituent un pas de temps de l'intégration du code numérique du modèle OPA. Celles-ci s'organisent comme suit.

1. Calcul des termes

$$M_u = +(\xi + f)v - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} + D_u^U, \quad (2.20)$$

$$M_v = -(\xi + f)u - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial y} + D_v^U. \quad (2.21)$$

2. Calcul du second membre pour les traceurs  $S$  et  $T$ .
3. Calcul des moyennes verticales de  $M_u$  et  $M_v$  définies par

$$\bar{M}_u = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 M_u dz \quad \text{et} \quad \bar{M}_v = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 M_v dz \quad (2.22)$$

4. Détermination de la tendance de la fonction de courant barotrope  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  par résolution de l'équation de vorticité barotrope

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \right] = \frac{\partial \bar{M}_v}{\partial x} - \frac{\partial \bar{M}_u}{\partial y}. \quad (2.23)$$

5. Calcul du gradient de pression et ajout au second membre

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_s}{\partial x} = \bar{M}_u + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right), \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_s}{\partial y} = \bar{M}_v - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right). \quad (2.25)$$

6. Schéma temporel pour le calcul de  $u$  et  $v$  au temps suivant.
7. Schéma temporel pour le calcul de  $S$  et  $T$  au temps suivant.
8. Calcul de la divergence horizontale, de la vitesse verticale et de la densité correspondant aux nouvelles données

$$w(-z) = - \int_{-z}^0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz, \quad (2.26)$$

$$\rho = \rho(T, S, -\rho_0 g z). \quad (2.27)$$

### 2.2.5 Configuration pour l'océan Pacifique tropical

Le domaine de notre modèle couvre tout le bassin de l'océan Pacifique tropical dans son extension zonale, s'étendant approximativement de  $70^\circ O$  à  $120^\circ E$  et de  $33^\circ S$  à  $33^\circ N$ . Au nord et au sud du domaine existent des zones "tampon" au delà de  $20^\circ N$  et  $20^\circ S$  dans lesquelles les champs de salinité et de température sont rappelés vers leurs valeurs climatologiques. La profondeur du domaine varie de  $0m$  à la surface de la mer jusqu'à  $4000m$ .

Les équations du modèle sont résolues sur une grille horizontale isotrope. La résolution méridienne est de  $1/2^\circ$  à l'équateur et décroît en latitude, pour atteindre  $2^\circ$  aux frontières nord et sud. La résolution zonale est de  $1^\circ$ . Le nombre de points de grille est  $171 \times 59$ . La résolution verticale compte 25 niveaux, variant de  $5m$  en surface jusqu'à  $1000m$  pour la couche de fond. La bathymétrie est relativement grossière. Elle a été interpolée du mask des données de l'atlas de Levitus [63]. Le modèle est intégré avec un pas de temps de 1 *heure*.

Les champs de forçages sont interpolés des données d'analyses ECMWF (European Center for Medium-range Weather Forecasts). Le vent utilisé a une variabilité mensuelle. Le flux de chaleur  $Q$  introduit réellement dans le modèle utilise la formulation de *Barnier et al.* [5]. Il se décompose en deux termes selon

$$Q = Q_{clim} + Q_{cor}(T_{clim} - T) \quad (2.28)$$

représentant le flux de chaleur climatologique corrigé par un terme de rappel qui dépend de la différence entre la température de surface climatologique et celle du modèle ( $Q_{cor}$  est un coefficient de rétroaction négative dont la valeur est fixée à  $-40W/m^2/K$ ). Le bilan d'eau douce est réalisé de la même manière, en additionnant un terme de rétroaction (rappel de la salinité de surface du modèle à la salinité climatologique) au flux d'eau douce des données ECMWF.

En ce qui concerne les schémas de friction et de diffusion pour la quantité de mouvement et les traceurs, nous avons utilisé des coefficients laplaciens de  $2000m^2/s$  dans la bande  $10^\circ N - 10^\circ S$  et croissent en latitude, pour atteindre  $10000m^2/s$  aux frontières nord et sud. Les instabilités statiques sont résolues par un schéma de fermeture turbulente.

L'état initial du modèle est le repos (i.e. avec un champs de vitesse nul). La salinité et la température potentielle du modèle sont initialisées avec des données hydrologiques saisonnières provenant de l'atlas de Levitus [63].

## 2.3 Les observations

Il existe deux systèmes d'observation dans l'océan Pacifique tropical : les observations issues de l'altimétrie par le satellite TOPEX/POSEIDON (T/P) et celles issues des bouées du réseau Tropical Atmosphere Ocean (TAO). On notera que nous avons toujours travaillé avec des pseudo-observations qui ont été simulées par le code numérique du modèle (expériences jumelles).

### 2.3.1 Données TOPEX/POSEIDON

Les satellites mesurent la hauteur libre de la surface de l'océan, notée  $\eta_s$ . La relation simple (2.9) qui relie cette variable à la pression de surface  $P_s$  doit nous permettre, en principe, d'assimiler facilement les observations satellitaires dans le modèle OPA dans lequel la  $P_s$  est une variable diagnostique. Cependant, la détermination de l'opérateur d'observation  $H$ , indispensable pour tout schéma d'assimilation, qui relie les observations au vecteur d'état du modèle passe bien évidemment par l'inversion des deux équations différentielles complexes et surtout non-linéaires (2.13) et (2.14). La complexité liée à l'inversion de ces deux équations traduit toute la difficulté de l'assimilation des données altimétriques dans un modèle aux équations primitives à toit rigide, ce qui est le cas du modèle OPA.

Dans nos expériences, nous supposons le plus souvent que la  $\eta_s$  est observée en tout point de la surface. Nous utiliserons aussi des observations échantillonnées conformément aux traces réelles du satellite T/P. La période orbitale du satellite T/P est de 9.8 jours et l'on effectue une assimilation tous les 3 jours. Pour construire ces traces (voir FIG. 2.2), nous avons fabriqué 3 masks avec un écart temporel de 3 jours et nous les avons utilisés les uns après les autres dans nos expériences d'assimilation. La période des observations ainsi obtenues est bien évidemment de  $3 * 3 = 9$  jours, et donc différente de la vraie période du T/P. Mais cela ne change pas vraiment les résultats puisque nous travaillons avec des expériences jumelles.

### 2.3.2 Données TAO

Le réseau TAO est un ensemble de bouées dans le Pacifique tropical réparti entre les îles Galapagos et la Nouvelle-Guinée (voir FIG. 2.3). Il consiste en quelques 70 bouées qui mesurent la vitesse et la direction du vent, la température et l'humidité de l'air, et la température de l'océan en surface et jusqu'à 500m au-dessous de la surface. La position des bouées et les observations sont ensuite transmises par satellite aux scientifiques tous les jours. Dans nos expériences, nous simulerons des observations de la température aux points géographiques des mouillages pour le réseau TAO.

Bien que le nombre de mesures fourni par le réseau TAO est relativement faible devant le nombre de mesures satellitaires, ces données apportent des nouvelles informations sur la température de surface et surtout sous-surface. Ici, nous comparerons les résultats d'assimilation de ces deux sources de mesure. Nous nous intéresserons aussi à l'assimilation conjointe de ces deux systèmes d'observation pour voir si cela peut améliorer les performances de nos schémas d'assimilation et pour mesurer aussi le degré de complémentarité de ces deux sources d'informations. En pratique, on peut également utiliser ces données pour valider les méthodes d'assimilation basées sur les données satellitaires. Pour cela, il suffit d'assimiler l'altimétrie et comparer ensuite le champ de la température assimilé avec celui observé par les bouées.



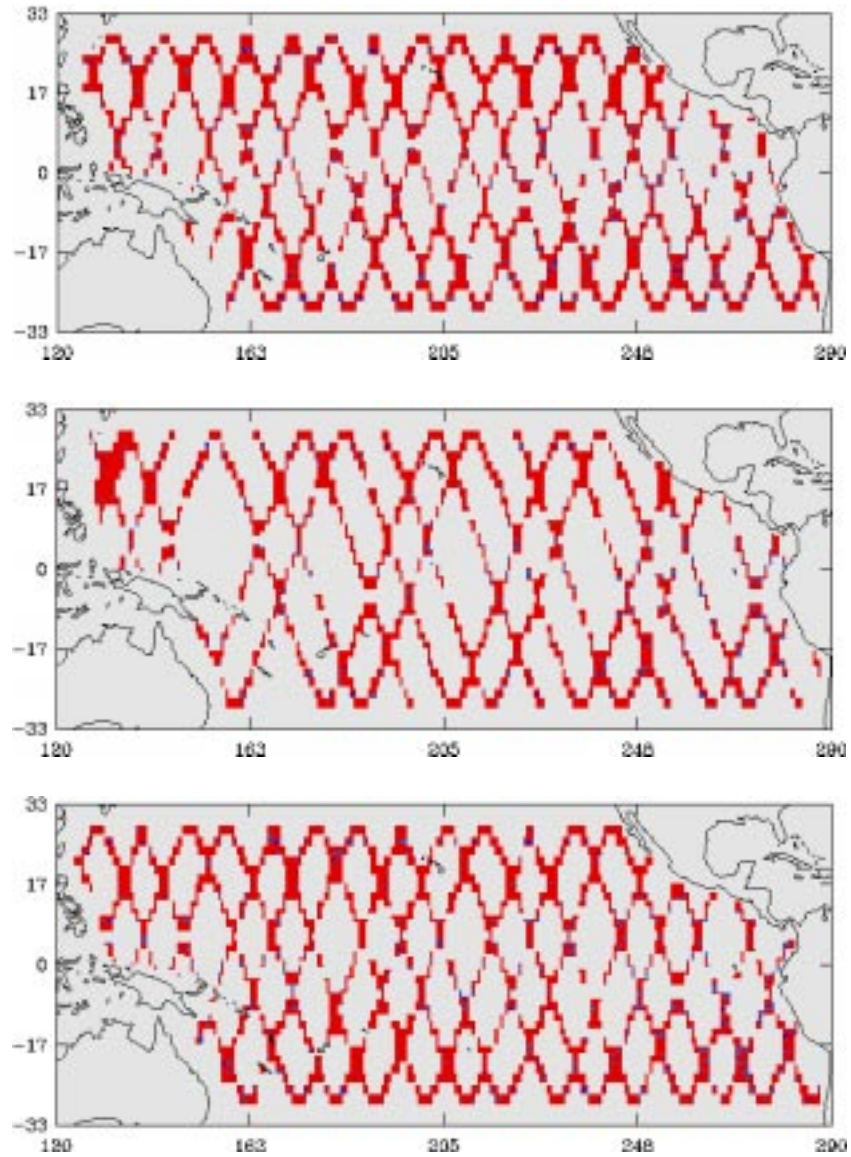


FIG. 2.2 – *Traces du satellite T/P avec une période orbitale de 9 jours*

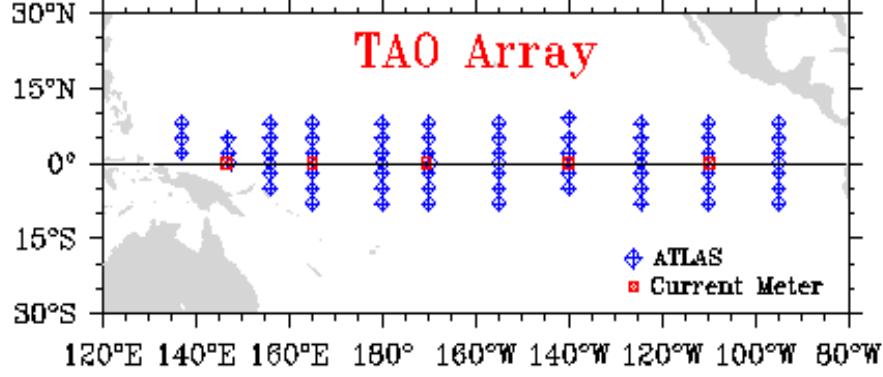


FIG. 2.3 – Réseau TAO du Pacifique tropical

## 2.4 Choix du vecteur d'état

Le vecteur d'état est l'ensemble des variables “pronostiques” du modèle qui doivent être initialisées indépendamment et à partir desquelles on peut déterminer toutes les autres variables, appelées variables diagnostiques. Comme les variables pronostiques du modèle OPA sont la vitesse horizontale  $U_h$ , la salinité  $S$  et la température  $T$ , on doit alors considérer le vecteur d'état

$$X^t = ( U_h , S , T )^T. \quad (2.29)$$

Cependant, comme on l'a déjà dit, la variable observée par les satellites, qui est la dénivellation de la surface de l'océan  $\eta_s$ , est une variable prognostique calculée à partir de la vitesse barotrope par un système d'équations différentielles non-linéaires et complexes (2.13) et (2.14). Si on considère  $X^t$  comme dans (2.29), la détermination de  $H$  passe par l'inversion de ces deux équations et ceci peut être coûteux. De plus, un tel choix de  $X^t$  rend l'opérateur d'observation non-linéaire. Pour contourner ces difficultés, nous allons considérer un pseudo-vecteur d'état dans nos expériences contenant le “vrai” vecteur d'état augmenté par la variable observée  $\eta_s$ , i.e.

$$X^t = ( U_h , S , T , \eta_s )^T. \quad (2.30)$$

Selon ce choix, l'opérateur d'observation  $H$  devient linéaire et sera tout simplement réduit à une matrice de la forme<sup>2</sup>

$$\left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ I_d \end{array} \right]. \quad (2.31)$$

Il est évident que cela va augmenter la dimension du vecteur d'état, mais ceci peut être négligeable puisque la dénivellation n'est calculée que sur la surface de l'océan ( $\dim(U_h, S, T) = 4 * 25 * \dim(\eta_s)$ ). Plus précisément, le nombre des variables d'état est maintenant égal à  $4 * 171 * 59 * 25 + 171 * 59 = 1018989$  au lieu de  $4 * 171 * 59 * 25 = 1008900$ .

Finalement, puisque les variables qui constituent le vecteur d'état  $U_h, S, T$  et  $\eta_s$  ont des unités de mesure différentes, nous définissons une métrique  $\mathcal{M}$  dans l'espace d'état pour rendre

<sup>2</sup>  $I_d$  est la matrice identité.

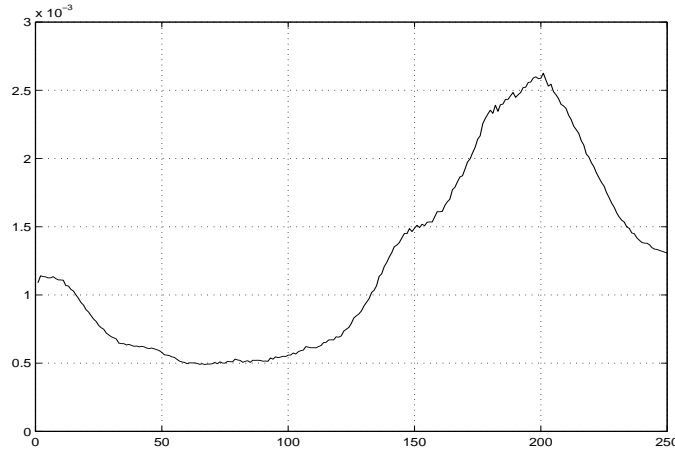


FIG. 2.4 – Variation relative du vecteur d'état dans l'intervalle d'assimilation

la distance entre les vecteurs d'état indépendante des unités de mesure. Dans nos expériences, nous considérerons pour  $\mathcal{M}$  la matrice diagonale contenant la variance spatiale de chaque variables moyennée sur les points de la grille.

## 2.5 Construction d'un ensemble de données historique

Pour étudier la variabilité des vecteurs d'état du modèle ou pour initialiser nos schémas d'assimilation, nous avons construit un ensemble historique de vecteurs d'état par une simulation du modèle. Dans cette étude, les observations que nous avons utilisées dans nos schémas d'assimilation ont été elles aussi simulées par le modèle mais d'une manière indépendante de la simulation présente.

Par conséquent, nous avons intégré le modèle dans une première expérience pendant 7 ans entre 1980 à 1986, dans le but d'atteindre un régime de turbulence sous-échelle statistiquement stable. Ensuite, une autre intégration du modèle de 4 ans a été effectuée de 1987 à 1990 pour générer un ensemble historique  $H_S$  de réalisations du modèle. Un ensemble de 480 vecteurs d'état a été retenu en stockant 1 vecteur d'état tous les 3 jours pour réduire les coûts, les états successifs étant semblables.

## 2.6 Validation de nos schémas d'assimilation

### 2.6.1 Construction des expériences jumelles

Des expériences jumelles ont été conduites pour mesurer les performances et les capacités de nos schémas d'assimilation. Une expérience a été effectuée pour construire l'état de référence qui va jouer le rôle de l'état réel de l'océan qui sera ensuite comparé aux champs produits par nos expériences d'assimilation. Plus précisément, une suite de 250 vecteurs d'états a été retenue tous les jours durant la période 1<sup>er</sup> mars 1991 au 10 novembre 1991.

Ainsi, pour nos expériences d'assimilation des pseudo-observations, nous avons extrait dans de l'expérience de référence  $\eta_s$  sur toute la première couche et sur les traces du satellite,

et  $T$  aux points géographiques des mouillages TAO. L'erreur d'observation est simulée comme un bruit aléatoire Gaussien et sera ajouté aux pseudo-observations. Il est important de noter que dans cet intervalle d'assimilation, une période de très forte instabilité a été enregistrée entre juillet et septembre (voir FIG. 2.4).

### 2.6.2 Mesure de l'erreur de filtrage

Un schéma d'assimilation sera validé si la comparaison entre le champ produit par ce schéma et l'état de référence est jugée "acceptable". Dans notre étude, nous évaluons la performance de nos schémas d'assimilation par la racine carrée de l'erreur relative quadratique moyenne ( $RRMS$ ) pour chaque variable d'état dans chaque couche ou sur tout le domaine du modèle. La  $RRMS$  à l'instant  $t_k$  est définie par

$$RRMS(t_k) = \frac{\|X^t(t_k) - X^a(t_k)\|}{\|X^t(t_k) - \bar{X}\|}, \quad (2.32)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne et  $\bar{X}$  et  $X^a(t_k)$  représentent respectivement l'état moyen de l'échantillon  $H_S$  et l'état produit par le schéma d'assimilation. Notez que cette erreur est relative à l'erreur en mode libre puisque le dénominateur représente l'erreur lorsqu'on dispose pas d'observations et que l'état moyen est utilisé comme l'état analysé  $X^a(t_k)$ .

Une autre façon d'évaluer la performance de nos schémas d'assimilation serait aussi de calculer l'évolution dans le temps de la quantité<sup>3</sup>

$$RRMS'(t_k) = \frac{\|X^t(t_k) - X^a(t_k)\|}{\bar{\sigma}(X^t)} \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma}(X^t) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \|X^t(t_k) - \bar{X}\|^2} \quad (2.33)$$

qui mesure l'erreur d'estimation d'une variable par rapport à sa variabilité. Néanmoins, pour éviter de tracer à chaque fois deux courbes pour présenter les résultats d'assimilation, nous avons tracé dans la figure FIG. 2.5 l'évolution dans le temps de la quantité

$$VAR(t_k) = \frac{\|X^t(t_k) - \bar{X}\|}{\bar{\sigma}(X^t)} \quad (2.34)$$

pour chaque variable d'état. Ainsi, pour avoir l'évolution dans le temps de la  $RRMS'$ , il suffit de multiplier la courbe qui représente l'évolution de la  $RRMS$  par celle de la  $VAR(t_k)$ .

---

3.  $N$  est le nombre de vecteurs de l'ensemble de données historique  $H_S$ .

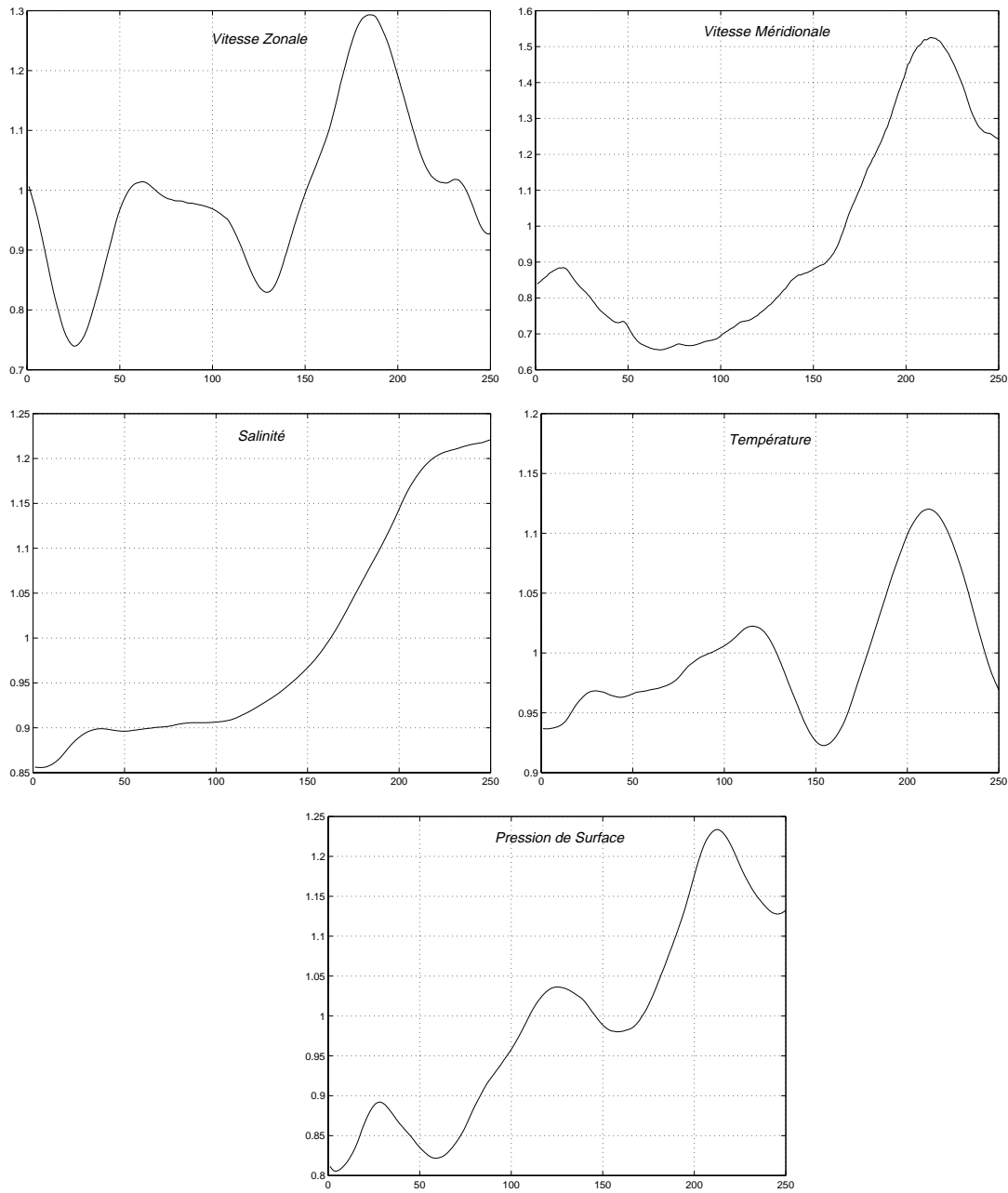


FIG. 2.5 – Evolution dans le temps de la  $VAR(t_k) = \frac{\|X^t(t_k) - \bar{X}\|}{\bar{\sigma}(X^t)}$

# Chapitre 3

## Filtre de Kalman

### 3.1 Introduction

Le filtre de Kalman est l'outil de base de l'approche séquentielle pour le problème de l'assimilation de données dans les modèles numériques. Cette technique, de type stochastique, se justifie par le fait que la dynamique du système étudié est chaotique et ressemble donc à un système aléatoire. De plus, l'état initial, étant inconnu, peut être commodément modélisé par un vecteur aléatoire et on peut prendre en compte l'imperfection du modèle par l'introduction d'un terme de bruit aléatoire. Le but du filtre de Kalman est de déterminer la meilleure estimation de l'état du système au vu des données observées.

Considérons le modèle général de l'assimilation de donnée du paragraphe 1.3.2 et en supposant de plus qu'il est linéaire. Il peut alors être décrit par le système stochastique

$$X^t(t_k) = A_k X^t(t_{k-1}) + \eta(t_k), \quad (3.1)$$

$$Y_k^o = H_k X^t(t_k) + \varepsilon_k \quad (3.2)$$

avec maintenant  $A_k$  et  $H_k$  sont des matrices  $n \times n$  et  $n \times p_k$  respectivement (où  $n$  et  $p_k$  sont les dimensions de  $X^t$  et  $Y_k$ ). Supposons de plus de que l'état initial  $X^t(t_0)$  soit un vecteur aléatoire gaussien. Sous l'hypothèse de bruits blancs gaussiens et indépendants, *Kalman* et *Bucy* [54] ont proposé un filtre, dit de Kalman, qui fournit le meilleur estimateur  $X^a$  (appelé état analysé) de l'état du système  $X^t$  fonction des observations antérieures qui soit le plus proche de  $X^t$  au sens de l'erreur moyenne quadratique.

Cependant, l'hypothèse gaussienne peut être irréaliste en pratique. Heureusement, cette hypothèse peut être abandonnée si on se contente du meilleur estimateur linéaire de l'état.

Le filtre de Kalman opère en deux étapes d'une manière récursive, après une étape d'initialisation : une étape de prévision par le modèle et une étape de correction de la prévision à chaque fois qu'une nouvelle observation est disponible (selon FIG. 3.1). Les équations de ce filtre peuvent être résumées comme suit.

– *Initialisation* :

$$X^a(t_0) = m_0, \quad (3.3)$$

$$P^a(t_0) = P_0. \quad (3.4)$$

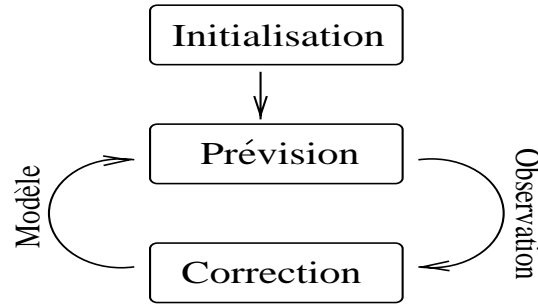


FIG. 3.1 – Les étapes du filtre de Kalman

où  $m_0$  et  $P_0$  sont respectivement la moyenne et la matrice de covariance du vecteur d'état initial  $X^t(t_0)$ .

### 1- Etape de prévision :

$$X^f(t_k) = A_k X^a(t_{k-1}), \quad (3.5)$$

$$P^f(t_k) = A_k P^a(t_{k-1}) A_k^T + Q(t_k). \quad (3.6)$$

$X^f$  est l'état prévu et  $P^a$  et  $P^f$  désignent les matrices de covariance de l'erreur d'analyse et de prévision respectivement.

### 2- Etape de correction :

$$X^a(t_k) = X^f(t_k) + K_k [Y_k^o - H_k X^f(t_k)], \quad (3.7)$$

$$K_k = P^f(t_k) H_k^T [H_k P^f(t_k) H_k^T + R_k]^{-1}, \quad (3.8)$$

$$P^a(t_k) = P^f(t_k) - K_k H_k P^f(t_k). \quad (3.9)$$

Bien que le filtre de Kalman puisse, en principe, être utilisé pour résoudre les problèmes de l'assimilation de données, son implémentation est loin d'être triviale en pratique. En effet, ce filtre, théoriquement stable, peut diverger lors de sa mise en oeuvre numérique à cause du caractère non-symétrique de l'équation (3.9). De plus, il a été reconnu que l'algorithme du filtre de Kalman est très sensible aux erreurs numériques [58]. Plusieurs algorithmes algébriques théoriquement équivalents mais plus stable numériquement ont été proposés pour résoudre ce problème, comme par exemple les algorithmes "racines carrées" [58].

Pour les applications en océanographie, l'utilisation du filtre de Kalman rencontre deux difficultés majeures. La première est due à la très grande dimension de l'état du système (de l'ordre de  $10^6$ ) qui conduit à des coûts de calcul prohibitifs. Cette grande taille pose en outre le problème de la spécification adéquate des statistiques des erreurs du modèle et des observations. L'utilisation des formes dégradées de ce filtre est donc inévitable. La deuxième difficulté est le caractère non-linéaire des modèles océaniques, qui a conduit à l'utilisation d'un filtre sous-optimal dit de Kalman étendu dans lequel on linéarise les équations au voisinage de l'estimation courante de l'état. Malheureusement, ce filtre peut être instable et parfois diverger complètement en présence de fortes non-linéarités [34, 44, 57].

Le but de ce chapitre est de proposer une revue des aspects théoriques et pratiques du filtre de Kalman ainsi que des difficultés et des issues possibles pour une utilisation efficace dans les modèles océaniques.

## 3.2 Régime permanent

A partir de la structure de l'algorithme du filtre de Kalman, on peut voir que sa matrice de gain  $K$  ne dépend pas des observations. On peut donc calculer cette matrice avant que toute observation soit prise. Par ailleurs, si le modèle est autonome (les opérateurs de transition  $A$  et d'observation  $H$  et les matrices  $R$  et  $Q$  ne dépendent pas du temps), observable et contrôlable, on peut montrer que le filtre de Kalman possède un régime permanent unique (le lecteur est invité à consulter [45] pour plus de détails). Les matrices de gain  $K$  et de covariance de l'erreur d'analyse  $P^a$  convergent alors vers des valeurs limites  $K_\infty$  et  $P_\infty$ . Lorsque la matrice  $K_\infty$  est utilisée pour toutes les observations, l'estimateur obtenu converge exponentiellement dans le temps vers l'état analysé  $X^a$ .

Malheureusement, un modèle de très grande dimension qui découle d'une discrétisation d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles, comme c'est le cas des modèles océaniques, peut être peu observable avec un petit nombre d'observations. En pratique, il est donc très difficile de montrer la convergence du filtre vers le régime permanent par avance. Cependant, les conditions mentionnées ci-dessus sont seulement suffisantes et pas nécessaires, elles n'impliquent donc en aucun cas que le filtre de Kalman ne va pas converger vers un régime permanent. En général, on examine la convergence en implémentant le filtre de Kalman dans un modèle simplifié et on vérifie la convergence en suivant ses résultats. On notera que l'observabilité et la contrôlabilité peuvent être plus facilement étudiées en temps continu [23], mais le problème c'est que l'observabilité peut être perdue après discrétisation du modèle, ce qui est le cas en pratique (voir [19]).

Plusieurs algorithmes ont été proposés pour calculer la matrice de gain dans le régime permanent. On peut citer par exemple l'algorithme de doublement [1] et les algorithmes proposés par [73]. Cependant, le fait de supposer l'existence de ce régime ne suffit pas pour rendre le filtre de Kalman implémentable dans les modèles réalistes, et il faut encore considérer d'autres hypothèses simplificatrices pour réduire la taille des matrices de covariance d'erreur.

En pratique, des approximations de cette approche asymptotique ont été implémentées et testées dans plusieurs modèles océaniques réduits. *Fu. et al.* [40] ont montré l'utilité de cette approche en comparant ses performances avec un filtre de Kalman complet dans un modèle réduit. *Fukumori et al.* [43] et *Fukumori* [41] ont aussi appliqué une réduction d'ordre en plus de l'hypothèse d'un régime permanent. Un inconvénient de cette approche est qu'elle ne peut pas être utilisée dans plusieurs applications à cause de la forte non-linéarité de certains modèles ou de la distribution spatio-temporelle irrégulière des observations.

## 3.3 Extensions aux modèles non-linéaires

Le filtre de Kalman est a été conçu pour des modèles linéaires. Cependant, les modèles océaniques sont non-linéaires. On doit donc envisager une extension du filtre de Kalman à ces modèles, ce qui complique sérieusement l'estimation de l'état et surtout fait perdre à cette



dernière son caractère optimal.

Le principal avantage de l'utilisation d'un modèle linéaire avec des bruits gaussiens pour dériver les équations du filtre de Kalman est que l'état du système devient lui aussi gaussien. Comme une distribution gaussienne est entièrement déterminée à partir de sa moyenne et sa matrice de covariance, le filtre de Kalman ne possède que des équations pour les moments d'ordre 1 (moyenne) et d'ordre 2 (matrice de covariance de l'erreur).

Mais si le modèle est non-linéaire, l'état n'est plus gaussien et l'estimateur de l'état ne pourra être déterminé qu'à partir de sa loi (densité) de probabilité. Les moments d'ordre supérieurs à 2 doivent donc être considérés dans les équations du filtre de Kalman. Ce problème, connu sous le nom de *filtrage non-linéaire optimal*, peut être exactement résolu à l'aide des équations de Kolmogorov [52]. Cependant, sa mise en oeuvre rencontre toujours beaucoup de difficultés lorsque la dimension de l'état est grande.

Plusieurs solutions approchées consistant essentiellement à tronquer les moments d'ordre supérieur à un certain seuil ont été développées. Les filtres obtenus de cette manière ne sont plus optimaux et leurs coûts deviennent prohibitifs même pour des modèles de dimension raisonnable. Le plus célèbre de ces filtres est bien évidemment la version tronquée à l'ordre 2, appelée aussi le *filtre de Kalman étendu*. Les équations de ce filtre peuvent être aussi obtenues en linéarisant les équations du modèle autour de l'estimation courante de l'état de la manière suivante :

Considérons le modèle dynamique du paragraphe 3.1 mais avec des opérateurs de transition  $M(s, t)$  et d'observation  $H$  non-linéaires

$$X^t(t_k) = M(t_k, t_{k-1})X^t(t_{k-1}) + \eta(t_k), \quad (3.10)$$

$$Y_k^o = H_k X^t(t_k) + \varepsilon_k. \quad (3.11)$$

A chaque instant  $t_k$ , on linéarise ce système autour de l'état analysé  $X^a(t_{k-1})$

$$X^t(t_k) - X^f(t_k) = \mathbf{M}(t_k, t_{k-1})[X^t(t_{k-1}) - X^a(t_{k-1})] + \eta(t_k), \quad (3.12)$$

$$Y_k^o - H_k X^f(t_k) = \mathbf{H}_k [X^t(t_k) - X^f(t_k)] + \varepsilon_k. \quad (3.13)$$

où  $\mathbf{M}(t_k, t_{k-1})$  et  $\mathbf{H}_k$  désignent les gradients de  $M(t_k, t_{k-1})$  et de  $H_k$  calculés aux points  $X^a(t_{k-1})$  et  $X^f(t_k)$  respectivement. En appliquant le filtre de Kalman à ce nouveau modèle linéaire, dont l'état est  $X^t(t_k) - X^f(t_k)$ , on obtient les équations du filtre de Kalman étendu (EK) qui peuvent être résumées comme suit.

– *Initialisation :*

$$X^a(t_0) = m_0, \quad (3.14)$$

$$P^a(t_0) = P_0. \quad (3.15)$$

**1- Etape de prévision :**

$$X^f(t_k) = M(t_k, t_{k-1})X^a(t_{k-1}), \quad (3.16)$$

$$P^f(t_k) = \mathbf{M}(t_k, t_{k-1})P^a(t_{k-1})\mathbf{M}(t_k, t_{k-1})^T + Q(t_k). \quad (3.17)$$

## 2- Etape de correction :

$$X^a(t_k) = X^f(t_k) + K_k[Y_k^o - H_k X^f(t_k)], \quad (3.18)$$

$$P^a(t_k) = P^f(t_k) - K_k \mathbf{H}_k P^f(t_k), \quad (3.19)$$

$$K_k = P^f(t_k) \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k P^f(t_k) \mathbf{H}_k^T + R_k]^{-1}. \quad (3.20)$$

Bien que la linéarisation fasse perdre au filtre de Kalman son caractère optimal, l'expérience montre que le filtre EK fournit des résultats satisfaisants lorsqu'il est appliqué à des modèles faiblement non-linéaires. Ce filtre a déjà été implémenté et testé avec succès dans plusieurs modèles [12, 13], etc.

Cependant, ce filtre peut présenter des instabilités et parfois diverge complètement en présence de fortes non-linéarités [34, 44, 57]. L'utilisation d'autres filtres à un ordre supérieur peut être dans ce cas envisagée. En océanographie, ceci est impossible du moment où la dimension des modèles est de l'ordre de  $10^6$ . Une nouvelle voie d'investigation est en train de se développer actuellement. Elle consiste à utiliser des méthodes stochastiques de type Monte Carlo pour estimer l'évolution de la matrice de covariance de l'erreur de filtrage par un nuage d'états centrés autour de l'état courant et dont la matrice de covariance empirique est celle de la matrice considérée. Cette approche, introduite en océanographie par *Evensen* [33] avec son *filtre de Kalman d'ensemble*, est actuellement l'un des meilleurs moyens pour traiter les modèles fortement non-linéaires. De plus, le fait de faire évoluer l'erreur par un nuage de points permet d'éviter la linéarisation du modèle et assure en même temps un suivi "naturel" des erreurs. Cela dit, le principe étant l'utilisation d'un estimateur statistique de la matrice de covariance des erreurs, on peut vite se heurter au problème de coût pour les modèles de grande dimension en raison de la taille de l'échantillon à considérer (dans les expériences d'Evensen, il est de l'ordre  $\mathcal{O}(100)$ ). Récemment, *Pham* [79] a proposé une variante de ce type de méthode, appelé filtre SEIK, dans lequel la taille de l'échantillon est minimale. Ce filtre sera présenté en détails au chapitre 5. Pour une discussion détaillée sur l'ensemble de ces méthodes le lecteur est invité à se référer à *Pham* [75].

## 3.4 Rôle du facteur d'oubli

*Pour avancer il faut oublier le passé*

Les erreurs dans les modèles sont l'une des causes les plus importantes de la divergence du filtre de Kalman [58]. En océanographie, ces erreurs sont très mal connues et proviennent de sources différentes comme par exemple les conditions de bord, les termes de forçage, les phénomènes d'échelles sous-maille, la discrétisation etc. Les modèles océaniques sont donc, en général, erronés et de plus on connaît très mal les statistiques de ces erreurs.

La non-linéarité peut aussi dégrader sérieusement le comportement du filtre de Kalman [34]. En effet, la linéarisation du modèle ou l'utilisation d'un estimateur statistique d'ensemble pour pouvoir faire évoluer la matrice de covariances de l'erreur de filtrage font que cette dernière n'est qu'une approximation de la "vraie" matrice de covariance. De plus, l'utilisation du filtre de Kalman dans des configurations réalistes nécessite aussi des approximations portant sur la covariance de l'erreur d'estimation. Ces erreurs se propagent avec le temps et provoquent parfois la divergence de l'algorithme du filtre.

Un autre problème que rencontre le filtre de Kalman en pratique est le phénomène de *blow up* de sa matrice de covariance de l'erreur de filtrage [4]. Il résulte de l'incapacité du filtre de Kalman à s'adapter à de variations éventuelles du régime du modèle. D'une part, parce qu'il attache beaucoup de confiance aux anciennes observations qui ne contiennent pas des informations sur le nouveau régime et d'autre part, parce que la matrice de gain à tendance à décroître dans le temps ce qui implique qu'au bout d'un certain temps, la correction du filtre devient insignifiante.

Un remède à ces problèmes consiste à limiter la mémoire du filtre de Kalman en introduisant l'utilisation du facteur d'oubli (c'est un réel compris entre 0 et 1, très souvent utilisé dans les algorithmes adaptatifs, voir *Jazwinski* [52]) pour diminuer le poids des anciennes observations exponentiellement dans le temps [4, 36]. Pour un modèle linéaire parfait, cela est équivalent au problème de l'assimilation variationnel avec une fonction coût

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(X(t_0), \dots, X(t_N), \eta(t_1), \dots, \eta(t_N)) &= \frac{1}{2} \rho^N [X(t_0) - X^f(t_0)]^T [P^f(t_0)]^{-1} [X(t_0) - X^f(t_0)] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \rho^{N-k} [Y_k^o - H_k X(t_k)]^T R_k^{-1} [Y_k^o - H_k X(t_k)] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \eta^T(t_k) Q(t_k) \eta(t_k). \end{aligned}$$

On peut alors montrer que dans ces conditions, seule l'équation d'évolution de la matrice de covariance de l'erreur de prévision du filtre de Kalman change et elle devient

$$P^f(t_k) = \frac{1}{\rho} \mathbf{M}(t_k, t_{k-1}) P^a(t_{k-1}) \mathbf{M}^T(t_k, t_{k-1}) + Q(t_k). \quad (3.21)$$

Lorsque  $\rho = 1$  toutes les observations ont le même poids et on retrouve la formulation classique. Mais avec  $\rho < 1$ , les récentes observations auront un poids supérieur aux anciennes données. L'intérêt du facteur d'oubli est double : premièrement il limite la mémoire du filtre en oubliant les anciennes observations, et deuxièmement il améliore la capacité d'adaptation du filtre en "gonflant" la matrice de covariance de l'erreur de prévision (et donc la matrice de gain) et cela est d'un intérêt tout particulier pendant la période d'initialisation et après un changement du régime du modèle.

Cependant, l'utilisation d'un facteur d'oubli constant revient à supposer que les variations du modèle sont uniformes en temps (et en espace) et ceci n'est pas toujours vrai. Ce problème qui peut être résolu en utilisant un facteur d'oubli variable (ou une matrice de facteurs d'oubli) sera discuté dans le chapitre 8.

### 3.5 Mise en oeuvre en océanographie

En théorie, le filtre de Kalman peut être utilisé pour résoudre le problème de l'assimilation de données en océanographie du moment où il fournit l'estimateur optimal de l'état connaissant les observations. Cependant, sa mise en oeuvre dans les modèles océaniques rencontre plusieurs difficultés.

La non-linéarité des modèles océaniques est le problème le plus visible. En effet, le filtre de Kalman a été conçu uniquement pour des modèles linéaires. Comme les modèles océaniques sont en général non-linéaires, on est donc ramené à utiliser une de ses extensions. La matrice de covariance de l'erreur n'est plus qu'une approximation ce qui signifie une nouvelle source d'erreur très difficile à évaluer. De plus, on perd la propriété de stabilité du filtre de Kalman

qui est valable pour les modèles linéaires seulement.

Une autre difficulté bien plus sérieuse est le coût d'implémentation prohibitif de l'algorithme du filtre dans des configurations réalistes. En effet, la mise en oeuvre du filtre de Kalman exige la manipulation des matrices de covariance de l'erreur d'analyse  $P^a(t_k)$  et de prévision  $P^f(t_k)$  de taille  $n \times n$ , où  $n$  est la dimension du système qui est de l'ordre de  $10^6$ . Le seul moyen pour appliquer le filtre de Kalman aux modèles réalistes est donc d'utiliser des approximations pour réduire la taille et simplifier l'évolution de ces matrices. L'inconvénient d'un tel choix est que le filtre dérivé s'éloigne de plus en plus de l'optimalité mais c'est malheureusement le prix à payer pour pouvoir appliquer le filtre de Kalman aux modèles océaniques.

Par ailleurs, même si on possède les moyens pour l'implémenter, le filtre de Kalman est loin d'être optimal du moment où les covariances des erreurs statistiques du modèle  $Q(t_k)$  et  $R_k$  sont très mal connues en pratique. L'estimation de  $Q(t_k)$  passe par l'estimation de ces  $\frac{n(n+1)}{2}$  coefficients, ce qui est considérable. La spécification de  $Q(t_k)$  demande donc une énorme quantité d'information qui n'est disponible en pratique. De plus, *Mehra* [69] a montré, dans les hypothèses les plus favorables, qu'on peut estimer au plus  $np$  coefficients de la matrice de covariance de l'erreur du modèle  $Q(t_k)$  à partir d'une série infinie de  $p$  observations à chaque pas de temps. La seule solution est donc de paramétriser  $Q(t_k)$  pour diminuer le nombre de paramètres à estimer. La matrice de covariance de l'erreur d'observation  $R_k$  est plus accessible mais ce n'est pas pour autant qu'elle est connue avec précision.

L'idée d'appliquer directement et proprement le filtre de Kalman sur les modèles océaniques est alors très ambitieuse et elle n'est pas réalisable. Il faut donc abandonner la propriété d'optimalité et se contenter de construire une variante stable du filtre de Kalman, au sens où l'erreur reste bornée, et surtout de coût d'implémentation plus raisonnable. Pour juger de la performance d'un tel schéma, il faut alors comparer ses estimations de l'état et le coût de son implémentation avec ceux du filtre de Kalman "complet".

Dans ce but, plusieurs formes dégradées du filtre de Kalman ont été proposées pour assimiler les données en océanographie, la plupart d'entre elle ayant déjà été développés en météorologie. Ces schémas consistent essentiellement à diminuer la taille du vecteur d'état du modèle à travers certaines formes de projection sur un sous-espace de dimension faible [17, 34, 41, 48, 49]. La justification d'une telle approximation repose en général sur le fait que l'océan est fondamentalement un système dynamique forcé dissipatif admettant un attracteur. Cela signifie qu'après un certain temps, l'état du modèle va appartenir à une variété de dimension bien plus faible que l'espace d'état, appelé attracteur.

Dans le même état d'esprit, *Pham et al* [78] ont développé un nouveau filtre de type Kalman, appelé filtre de Kalman singulier évolutif (SEEK). Ce filtre consiste à approcher la matrice de covariance de l'erreur d'estimation initiale par une matrice de rang faible, qui conduit à n'appliquer la correction du filtre de Kalman que dans les directions d'amplification de l'erreur. L'originalité de ce filtre réside dans son équation de mise à jour de ces directions de correction avec la dynamique du modèle. De plus, le fait de corriger l'état dans certaines directions seulement permet de réduire sensiblement les coûts d'implémentation du filtre de Kalman et de plus conserve, en un certain sens, sa propriété de stabilité. Le filtre SEEK sera présenté en détails au chapitre suivant.

Malgré les difficultés de mise en oeuvre qui peuvent apparaître dans les modèles océaniques, le filtre de Kalman reste un outil simple et fondamental pour l'assimilation de données en océanographie. Sur le plan théorique, il offre bien sûr la solution optimale (pour les modèles linéaires). Sur le plan pratique, sa structure récurrente et "robuste" lui permet d'intégrer la connaissance a priori du système et de faire la distinction entre les grandeurs déterministes et les grandeurs aléatoires et donc de leur donner des poids différents. Cela lui permet aussi de réaliser sa propre projection statistique pour transmettre les informations de surface vers les couches de fond. Par ailleurs, son implémentation dans des modèles avec une résolution spatiale très grossière a donné entière satisfaction [40, 71].

## Chapitre 4

# Filtre de Kalman étendu singulier évolutif - Filtre SEEK

### 4.1 Introduction

Une implémentation directe du filtre de Kalman dans les modèles océaniques n'est pas envisageable étant donnée la taille du vecteur d'état de ces modèles ( $n \sim 10^6$ ) car l'algorithme nécessite la manipulation des matrices (de covariance de l'erreur) de taille  $n \times n$ . Il est indispensable d'utiliser des approximations permettant de réduire la taille et l'équation d'évolution de cette matrice pour pouvoir appliquer le filtre de Kalman au problème de l'assimilation de données en océanographie. Pour construire une variante efficace du filtre de Kalman, on doit réaliser un compromis entre deux propriétés principales : coût raisonnable et stabilité.

Plusieurs variantes du filtre de Kalman ont été donc proposées pour rendre le coût de ce dernier abordable (*De Mey* [30] passe en revue les différentes approximations). Dans le même but, *Pham et al.* [78] ont proposé un nouveau filtre de type Kalman pour l'assimilation des données en océanographie, appelé filtre de Kalman singulier évolutif (SEEK). L'idée de ce filtre consiste essentiellement à approcher la matrice de covariance des erreurs de filtrage par une matrice singulière de rang faible. Cela conduit à appliquer les corrections du filtre de Kalman (étendu) seulement dans les directions où les erreurs de filtrage n'ont pas été assez atténuées par le système, et à laisser ces erreurs diminuer avec la dynamique du modèle dans les autres directions. L'originalité de ce filtre réside dans ses "directions de correction" qui évoluent dans le temps selon la dynamique du modèle, ce qui confère au filtre son caractère évolutif. Les aspects théoriques et pratiques du filtre SEEK feront l'objet de ce chapitre.

### 4.2 Formulation pour un modèle parfait

L'océan constitue fondamentalement un système dynamique forcé dissipatif qui admet un attracteur [91]. Cela signifie qu'après une période de transition, la trajectoire du modèle est attirée vers une variété de dimension beaucoup plus faible que l'espace d'état, appelé attracteur. Au voisinage de cette région, toute perturbation "perpendiculaire" à l'attracteur est naturellement atténuée avec la dynamique du système. On peut donc, en théorie, renoncer à corriger les erreurs dans ces directions. En revanche, toute perturbation "tangente" à l'attracteur s'amplifie rapidement du fait de la structure chaotique de l'attracteur. Il est donc crucial de corriger les erreurs dans ces directions.

Cette idée de “sélectionner” les directions de correction de l’erreur est à la base de la construction du filtre SEEK. On verra dans les paragraphes ci-dessous que cela peut se réaliser par la simple utilisation d’une matrice de covariance de l’erreur de rang faible. Cette hypothèse est justifiée car une telle matrice constitue une bonne approximation de la “vraie” matrice de covariance de l’erreur du fait de l’existence de l’attracteur. En effet, comme l’état du modèle se trouve assez proche de l’attracteur, le rang de la matrice de covariance des vecteurs d’état est peu différente de la dimension de l’attracteur. Ceci est d’autant plus vrai pour la matrice de covariance de l’erreur d’analyse qui est, en principe, de rang inférieur ou égale au rang de la matrice précédente.

Nous allons tout d’abord présenter les équations du filtre SEEK dans un modèle parfait (covariance de l’erreur du modèle  $Q$  nulle) puis discuter en détails le cas général avec erreur du modèle, dans le paragraphe 4.5.2.

#### 4.2.1 Algorithme

Considérons le modèle dynamique parfait

$$X^t(t_k) = M(t_k, t_{k-1})X^t(t_{k-1}), \quad (4.1)$$

$$Y_k^o = H_k X^t(t_k) + \varepsilon_k. \quad (4.2)$$

Les équation du filtre SEEK s’obtiennent à partir de celles du filtre de Kalman étendu, en initialisant tout simplement ce dernier par une matrice de covariance de l’erreur initiale  $P^f(t_0)$  de rang faible  $r$ . Sous cette hypothèse, *Pham et al.* [78] ont montré que les matrices de covariance de l’erreur d’analyse  $P^a(t_k)$  et de prévision  $P^f(t_k)$  seront toujours de rang  $r$ . En effet, en factorisant  $P^a(t_0)$  sous la forme

$$P^a(t_0) = L_0 U_0 L_0^T, \quad (4.3)$$

où  $L_0$  et  $U_0$  sont des matrices de dimension  $n \times r$  et  $r \times r$  respectivement, on peut représenter l’équation d’évolution de la matrice de covariance de l’erreur  $P^a(t_k)$  du filtre de Kalman étendu comme

$$P^a(t_k) = L_k U_k L_k^T \quad (4.4)$$

avec

$$L_k = \mathbf{M}(t_k, t_{k-1})L_{k-1}, \quad (4.5)$$

$$U_k^{-1} = U_{k-1}^{-1} + L_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1} \mathbf{H}_k L_k. \quad (4.6)$$

où  $\mathbf{M}(t_k, t_{k-1})$  et  $\mathbf{H}_k$  désignent les gradients de  $M(t_k, t_{k-1})$  et de  $H_k$  au point  $X^a(t_{k-1})$  respectivement. Plus précisément, en considérant l’hypothèse de rang dans les équations du filtre de Kalman étendu, on obtient l’algorithme du filtre SEEK qui opère en deux étapes, après une étape d’initialisation, comme le filtre de Kalman (voir *Pham et al.* [78] pour plus de détails).

– *Initialisation*:

$$X^a(t_0) = m_0, \quad (4.7)$$

$$P^a(t_0) = L_0 U_0 L_0^T. \quad (4.8)$$

**1- Etape de prévision :**

$$X^f(t_k) = M(t_k, t_{k-1})X^a(t_{k-1}), \quad (4.9)$$

$$L_k = \mathbf{M}(t_k, t_{k-1})L_{k-1}, \quad (4.10)$$

$$P^f(t_k) = L_k U_{k-1} L_k^T. \quad (4.11)$$

**2- Etape de correction :**

$$X^a(t_k) = X^f(t_k) + K_k [Y_k - H_k X^f(t_k)], \quad (4.12)$$

$$K_k = L_k U_k L_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1}, \quad (4.13)$$

$$P^a(t_k) = L_k U_k L_k^T, \quad (4.14)$$

$$U_k^{-1} = U_{k-1}^{-1} + L_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1} \mathbf{H}_k L_k. \quad (4.15)$$

Sachant que les équations de mise à jour des matrices de covariance des erreurs d'analyse et de prévision (4.14) et (4.11) ne sont incluses que pour l'interprétation des résultats, le coût du filtre de Kalman se trouve considérablement diminué. En effet, le calcul de  $X^a(t_k)$  par l'algorithme du filtre SEEK nécessite uniquement le calcul des matrices  $L_k$  et  $U_k$  qui sont de taille  $n \times r$  et  $r \times r$  respectivement.

**4.2.2 Initialisation**

Comme pour le filtre de Kalman, l'initialisation du filtre SEEK passe par la connaissance de l'état initial  $X_0$  et de l'erreur commise sur son estimation  $P_0$ . Faute de ne pas pouvoir connaître le comportement global de l'océan, au même titre que celui du modèle, on doit avoir recours à des informations d'origine empirique. On prend en général comme  $X_0$  l'état moyen  $m_0$  d'un ensemble empirique de vecteurs d'état et comme  $P_0$  la matrice de covariance empirique de ces vecteurs. On applique ensuite une analyse EOFs (Empirical Orthogonal Functions) sur l'ensemble de vecteurs précédent pour calculer une approximation de  $P_0$  par une matrice de rang  $r$  selon  $L_0 U_{-1} L_0^T$  où  $L_0$  est la base EOFs (L'analyse EOFs sera présentée dans le chapitre 7).

Pour diminuer l'erreur initiale, on peut également faire démarrer le filtre SEEK par un pas de correction dans les directions de  $L_0$  selon la méthode dite "analyse objective". Basée sur la première observation  $Y_0^o$ , le vecteur d'état initial est alors

$$X^a(t_0) = X_0 + L_0 U_0 L_0^T \mathbf{H}_0^T R_0^{-1} (Y_0^o - H_0 X_0) \quad (4.16)$$

avec

$$U_0 = [L_0^T \mathbf{H}_0^T R_0^{-1} \mathbf{H}_0 L_0]^{-1}. \quad (4.17)$$

Selon ce choix, on peut prendre comme matrice de covariance de l'erreur d'analyse initiale

$$P^a(t_0) = L_0 U_0 L_0^T. \quad (4.18)$$

A noter que nous avons utilisé la première observation pour l'initialisation, l'algorithme du filtre SEEK commence alors à partir de l'observation suivante.

Le choix de la base de correction initiale  $L_0$  se justifie par le fait que lorsque le nombre de vecteurs d'état à partir desquels elle a été construite est assez grand, la matrice empirique des



états  $P_0$  contient, en un certain sens, la plupart de la variabilité du modèle. En effet, l'analyse EOFs est une méthode statistique qui fournit une bonne approximation de l'attracteur par un sous-espace linéaire de l'espace d'état (voir [76]) du moment que ce sous-espace, engendré par les colonnes de  $L_0$ , soit "le plus proche" des vecteurs d'état. Ainsi, on peut s'attendre à ce que la première correction soit assez efficace. A noter que le choix de la dimension de la base de correction  $L_0$ , qui est aussi égale au rang  $r$  de la matrice de covariance de l'erreur du filtre SEEK, se fait d'une manière empirique en fonction de l'inertie absorbée par  $L_0$  (chapitre 7).

### 4.2.3 Implémentation pratique

L'un des avantages du filtre SEEK est la simplicité de son implémentation qui se fait indépendamment du code numérique du modèle. Ce dernier est alors uniquement utilisé pour calculer l'état prévu à partir de l'état analysé et pour faire évoluer la base de correction. Après l'étape d'initialisation par une analyse EOFs, l'implémentation du filtre SEEK se fait en deux étapes, en partant de  $X^a(t_{k-1})$  et de  $P^a(t_{k-1}) = L_{k-1}U_{k-1}L_{k-1}^T$  à l'instant  $t_{k-1}$ .

- *étape de prévision*: la prévision de l'état  $X^f(t_k)$  à l'instant  $t_k$  est obtenue par une intégration directe du code numérique en partant de  $X^a(t_{k-1})$ . L'évolution des vecteurs  $\{L_{k,j}, j = 1, \dots, r\}$  de la base de correction  $L_k$  se fait aussi à partir du modèle en utilisant le développement de Taylor classique à l'ordre 1, à savoir la formule approchée

$$L_{k,j} \approx \frac{1}{\alpha} \left[ M(t_k, t_{k-1})(X^a(t_{k-1}) + \alpha L_{k-1,j}) - M(t_k, t_{k-1})X^a(t_{k-1}) \right], \quad (4.19)$$

où  $\alpha$  est une constante positive adéquatement choisit.

- *étape de correction*: le calcul de  $X^a(t_k)$  peut se faire en 4 étapes.
  - On calcule tout d'abord la matrice  $U_k^{-1}$  à partir de  $U_{k-1}^{-1}$  par (4.15).
  - On calcule ensuite le vecteur  $y_k = L_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1} [Y_k - H_k X^f(t_k)]$ .
  - A l'aide de la résolution de Cholesky d'un système linéaire, on détermine le vecteur  $x_k$  solution du système linéaire  $U_k^{-1} x_k = y_k$ .
  - L'état d'analyse  $X^a(t_k)$  est alors obtenu par

$$X^a(t_k) = X^f(t_k) + L_k x_k. \quad (4.20)$$

## 4.3 Etude de la stabilité

Discutons tout d'abord le fait que le filtre SEEK revient à corriger (approximativement) l'état de prévu dans les directions d'amplification de l'erreur uniquement. Cela assure au filtre SEEK une certaine stabilité au sens où l'erreur d'estimation reste bornée.

Considérons pour cela un modèle dynamique quelconque admettant un attracteur, notons  $M$  son opérateur de transition et cherchons à déterminer les directions de ce modèle dans lesquelles une erreur initiale s'amplifie. Soit alors un vecteur d'état  $X$  et un autre vecteur  $X + \alpha l$  assez proche de  $X$ , où  $\alpha$  est un réel strictement positif et  $l$  est une direction de l'espace d'état. On sait qu'après une période de transition, les vecteurs d'état  $M(X)$  et  $M(X + \alpha l)$  vont être attirés par l'attracteur. Ainsi, pour  $\alpha$  suffisamment petit, le vecteur  $M(X + \alpha l) - M(X)$

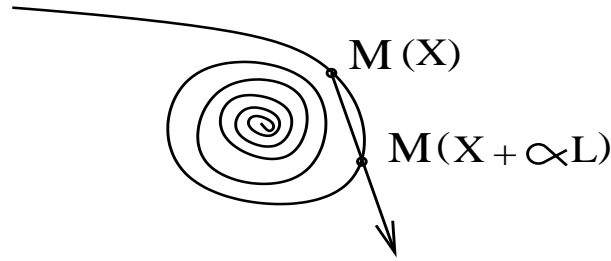


FIG. 4.1 – *Les directions de la base deviennent tangentes à l'attracteur*

va approcher une direction tangente à l'attracteur au point  $X$  (voir FIG. 4.1). Cependant, pour un tel  $\alpha$ , on a l'approximation

$$M(X + \alpha l) - M(X) \simeq \alpha \mathbf{M}l, \quad (4.21)$$

où  $\mathbf{M}$  est le gradient de  $M$  au point  $X$ . On peut donc estimer que  $l_{k+1} = \mathbf{M}(t_{k+1}, t_k)l_k$  approche bien une direction tangente à l'attracteur au point  $X$ . On retrouve alors le principe de l'évolution de la base de correction  $L_k$  du filtre SEEK qui se fait selon l'équation (4.10). Ceci montre que les colonnes de  $L_k$  deviennent à partir d'un certain temps tangentes à l'attracteur, donc parallèle (par définition) aux directions d'amplification de l'erreur. En remarquant que la correction du filtre SEEK se fait dans les directions de  $L_k$  (d'où son nom base de correction) selon l'équation (4.12), on peut dire que le filtre SEEK corrige l'état prévu uniquement dans les directions où les erreurs ne sont pas assez atténuées par le système et laisse ces erreurs diminuer avec la dynamique du modèle dans les autres directions.

Si on suppose maintenant que le gradient de l'opérateur de transition du modèle  $\mathbf{M}(t_{k+1}, t_k)$ , l'opérateur d'observation  $H_k$  et la matrice de covariance des erreurs d'observation  $R_k$  sont indépendants du temps et donc égales à des matrices constantes  $\mathbf{M}$ ,  $R$  et  $H$  respectivement, on peut voir facilement qu'un filtre de type Kalman est stable si la suite des matrices de gain  $K_k$  converge vers une matrice  $K$  de telle sorte que  $(I_d - HK)\mathbf{M}$  soit stable. Dans ces conditions, *Pham et al* [78] ont montré les résultats suivants :

*Le filtre SEEK est stable si et seulement si le nombre des valeurs propres de module strictement supérieur à 1 du gradient de la matrice de transition est inférieur à la dimension de l'espace de correction initiale  $L_0$ .*

A noter que le nombre des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{M}(t_{k+1}, t_k)$  de module strictement supérieur à 1 correspond au nombre des directions explosives du système dynamique  $M(t_{k+1}, t_k)$ .

Les hypothèses précédentes ne sont pas contraignantes en océanographie et elles sont assez proches de la réalité. En effet, la dynamique des modèles océaniques est assez lente et faiblement non-linéaire, on peut donc supposer que  $\mathbf{M}(t_{k+1}, t_k)$  est constant sur une période de temps assez large. De plus,  $R_k$  est en général considéré constant et l'opérateur d'observation  $H_k$  est au plus périodique (pour suivre la trace du satellite). Pour se ramener au cas où  $H_k$  est constant, il suffit tout simplement d'augmenter le vecteur d'état.

## 4.4 Version avec facteur d'oubli

La matrice de covariance de l'erreur du filtre SEEK n'est qu'une approximation de la vraie matrice de covariance. L'erreur dans cette approximation peut provenir de trois sources différentes : l'hypothèse de rang faible, la méconnaissance des erreurs du modèle et l'erreur due à la linéarisation des équations du modèle. Toutes ces erreurs peuvent s'accumuler dans le temps pour provoquer parfois la divergence de l'algorithme du filtre SEEK. Cela peut être encore plus dangereux d'autant que les modèles océaniques sont très sensibles aux conditions initiales. De ce fait, l'introduction du facteur d'oubli dans l'algorithme du filtre SEEK peut être très important pour garder la stabilité numérique de ce filtre. Outre son objectif de stopper la propagation des erreurs par limitation de la mémoire du filtre, le facteur d'oubli améliore aussi la capacité du filtre SEEK à s'adapter aux changements de régimes du modèle au même titre que le filtre de Kalman (voir paragraphe 3.4). De plus, son coût d'implémentation presque négligeable le rend particulièrement intéressant. En effet, on montre que les équations du filtre SEEK avec facteur d'oubli restent inchangées, seule l'équation (4.15) est remplacée par

$$U_k^{-1} = \rho U_{k-1}^{-1} + L_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1} \mathbf{H}_k L_k. \quad (4.22)$$

## 4.5 Statistiques des erreurs

Le procédé simple proposé par *Pham et al.* [78] consistant à projeter l'erreur du modèle sur la base de correction et à ignorer la composante orthogonale à cette base, n'est pas forcément la meilleure démarche et nécessite toujours la connaissance de la matrice de l'erreur du modèle qui est de taille prohibitive. Ici, nous étudierons l'impact de cette erreur sur l'algorithme du filtre SEEK. Parallèlement nous essaierons de construire une base de représentation simple de cette erreur (voir chapitre 5). Auparavant, nous discutons brièvement d'une méthode qui nous permet d'éviter l'estimation de l'erreur d'observation.

### 4.5.1 Erreur d'observation

L'erreur d'observation est traitée par le filtre SEEK exactement comme dans le filtre de Kalman. Ainsi, on pourra alors l'estimer ou l'adapter avec les méthodes déjà utilisées dans le cadre de ce dernier (voir [25, 68]). Cependant, on peut encore simplifier les équations du filtre SEEK sous l'hypothèse  $R_k = \sigma_{obs}^2 \tilde{R}$  où  $\tilde{R}$  est une matrice connue et  $\sigma_{obs}^2$  peut être inconnue. En effet, il est facile de voir que dans ce cas, on peut représenter les équations (4.15) et (4.13) selon

$$K_k = L_k (U_k / \sigma_{obs}^2) L_k^T \mathbf{H}_k^T \tilde{R}^{-1}, \quad (4.23)$$

$$\sigma_{obs}^2 U_k^{-1} = \sigma_{obs}^2 U_{k-1}^{-1} + L_k^T \mathbf{H}_k^T \tilde{R}^{-1} \mathbf{H}_k L_k. \quad (4.24)$$

En tenant compte de cette remarque, seul  $U_k / \sigma_{obs}^2$  entre dans l'algorithme du SEEK. Par ailleurs,  $U_0$  est en général largement supérieure à  $\sigma_{obs}^2$ , puisque  $X^f(t_0)$  a été choisi en quelque sorte arbitrairement, il sera toujours utile de considérer  $\sigma_{obs}^2 U_0^{-1} \approx 0$ . Cela nous permettra en effet d'éviter de spécifier la valeur du paramètre  $\sigma_{obs}^2$ .

### 4.5.2 Erreur du modèle

La prise en compte des erreurs du modèle dans le filtre SEEK est un problème assez difficile. D'une part, parce qu'on connaît très mal les caractéristiques statistiques de celles-ci

qui sont de très grandes tailles (cette même difficulté se présente dans le filtre de Kalman), et d'autre part, il est clair que, lorsque le modèle est imparfait, la matrice de covariance de l'erreur de prévision du filtre de Kalman

$$P^f(t_k) = \mathbf{M}(t_k, t_{k-1})P^a(t_{k-1})\mathbf{M}(t_k, t_{k-1})^T + Q(t_k) \quad (4.25)$$

ne sera pas de rang faible  $r$  même si on initialise ce dernier par une matrice  $P^f(t_0)$  de rang  $r$ . Toutefois d'après nos discussions précédentes sur l'existence d'un attracteur (voir paragraphe 4.2), on peut s'attendre à ce qu'une matrice de rang faible constitue toujours une bonne approximation de  $P^f(t_k)$ ; d'autant qu'il a été reconnu que l'erreur du modèle possède un nombre limité de modes dominants (voir Lermusiaux [61]).

Supposons alors qu'on a déjà déterminé une base de représentation  $N_k$  de dimension  $r'$  de l'erreur du modèle à l'instant  $t_k$ , on peut alors paramétrer l'erreur du modèle selon

$$\eta(t_k) = N_k \eta_s(t_k), \quad (4.26)$$

où  $\eta_s(t_k)$  est un vecteur aléatoire de dimension  $r'$  et de matrice de covariance  $B_k$ . A l'instant  $t_{k-1}$ , la matrice de covariance de l'erreur d'analyse  $P^a(t_{k-1})$  du filtre SEEK a été approchée par une matrice de rang  $r$ , on peut alors décomposer l'erreur d'analyse comme

$$e^a(t_{k-1}) = L_k e_r^a(t_{k-1}) \quad (4.27)$$

où  $e_r^a(t_{k-1})$  est un vecteur aléatoire de dimension  $r$  et de matrice de covariance  $U_k$ . Sous ces notations, on peut représenter l'erreur de prévision comme

$$e^f(t_k) = \tilde{L}_k e_r^f(t_k), \quad (4.28)$$

avec

$$\tilde{L}_k = \begin{bmatrix} L_k \\ N_k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad e_r^f(t_k) = \begin{bmatrix} e_r^a(t_{k-1}) \\ \eta_s(t_k) \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

On est donc obligé d'augmenter la dimension du sous-espace de correction afin de tenir compte de l'erreur prévision et de l'erreur du modèle.

Sous ces conditions, la matrice de covariance de l'erreur de prévision à l'instant  $t_k$  est donnée par

$$P^f(t_k) = \tilde{L}_k \tilde{U}_k \tilde{L}_k^T \quad (4.30)$$

avec

$$\tilde{U}_k = \begin{bmatrix} U_{k-1} & cov[e_r^a(t_{k-1}), \eta_s(t_k)] \\ cov[e_r^a(t_{k-1}), \eta_s(t_k)] & B_k \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Si on suppose maintenant que  $e_r^a(t_{k-1})$  et  $\eta_s(t_k)$  sont décorrélées, on obtient

$$\tilde{U}_k = \begin{bmatrix} U_{k-1} & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

qui est une matrice de rang  $r + r'$ .

Cependant, une telle démarche ne peut pas être utilisée en pratique car elle augmente à chaque pas de filtrage la dimension de la nouvelle base de correction  $\tilde{L}_k$  et ceci sans aucune limite. Le coût du filtre SEEK devient donc vite prohibitif et ceci après quelque pas de filtrage seulement. Pour remédier à ce problème nous distinguerons deux approches :

## 1- Projection de l'erreur du modèle sur la base de correction

*Pham et al.* [78] ont proposé de projeter l'erreur du modèle  $\eta(t_k)$  sur la base de correction  $L_k$  du filtre SEEK et de négliger sa composante orthogonale à cette base. En effet on peut s'attendre à ce que les modes dominants du modèle, représentés par  $L_k$ , contiennent ceux de l'erreur du modèle  $\eta(t_k)$  du moment où la prédictibilité du modèle dépend de  $\eta(t_k)$ . Après tout, la partie de  $\eta(t_k)$  orthogonale à la base va être atténuée par la dynamique du modèle.

Une telle démarche nous permet de simplifier considérablement le problème précédent car dans ce cas et toujours sous l'hypothèse  $e_r^a(t_{k-1})$  et  $\eta_s(t_k)$  non-corrélées, la matrice de covariance de l'erreur de prévision sera donnée par

$$P^f(t_k) = L_k[U_{k-1} + (L_k^T L_k)^{-1} L_k^T Q(t_k) L_k (L_k^T L_k)^{-1}] L_k^T, \quad (4.33)$$

qui est une matrice de rang constant égal à  $r$ . Ainsi, l'algorithme du filtre SEEK se trouve inchangé. Seule l'équation (4.15) de mise à jour de la matrice  $U_k$  change et elle devient

$$U_k^{-1} = [U_{k-1} + (L_k^T L_k)^{-1} L_k^T Q(t_k) L_k (L_k^T L_k)^{-1}]^{-1} + L_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1} \mathbf{H}_k L_k. \quad (4.34)$$

Ce procédé simple proposé par *Pham et al.* [78] n'est pas nécessairement la meilleure démarche et nécessite toujours la connaissance de la matrice de l'erreur du modèle qui est de taille prohibitive. En effet, il peut être mis en défaut si l'erreur du modèle n'était pas négligeable dans les directions orthogonales à  $L_k$  car cette erreur ne sera jamais corrigée. Celle-ci peut alors se propager dans le temps pour provoquer parfois la divergence du filtre SEEK. D'où le rôle important que joue le facteur d'oubli pour garder la stabilité du filtre SEEK (voir paragraphe 4.4).

## 2- Ré-approximation de la matrice de covariance de l'erreur de prévision par une matrice de rang $r$

Un autre moyen pour résoudre le problème précédent revient à réapprocher, à chaque pas de filtrage, la matrice de covariance de l'erreur de prévision par une matrice de rang  $r$ . Pour cela, réécrivons  $P^f(t_k)$  sous la forme

$$P^f(t_k) = \bar{L}_k \bar{L}_k^T \quad (4.35)$$

avec<sup>1</sup>

$$\bar{L}_k = \left[ L_k U_k^{\frac{1}{2}} \quad : \quad N_k B_k^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.36)$$

Par diagonalisation de la matrice  $\mathcal{R}_k = \bar{L}_k^T \bar{L}_k$ , on détermine une matrice  $\mathcal{U}_k$  dont les colonnes sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+s}$  de  $\mathcal{R}_k$  rangées dans l'ordre décroissant et une matrice diagonale  $\mathcal{D}_k$  contenant les  $\lambda_i$  sur sa diagonale, telles que

$$\mathcal{R}_k \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k \mathcal{D}_k. \quad (4.37)$$

On peut alors écrire

$$P^f(t_k) = \mathcal{L}_k \mathcal{L}_k^T \quad (4.38)$$

---

1.  $A^{\frac{1}{2}}$  désigne la décomposition de Cholesky de la matrice  $A$ .

où

$$\mathcal{L}_k = \bar{L}_k \mathcal{U}_k \quad (4.39)$$

On peut facilement vérifier que  $\mathcal{L}_k \mathcal{L}_k^T = \mathcal{D}_k$ , ce qui est équivalent à dire que les colonnes de  $\mathcal{L}_k$  sont orthogonales et de normes égales aux valeurs propres associées.

Maintenant, si on juge que les  $r'$  dernières valeurs propres  $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{r+s}$  sont négligeables, on peut écrire

$$P^f(t_k) \approx \mathcal{L}_k^r (\mathcal{L}_k^r)^T \quad (4.40)$$

où  $\mathcal{L}_k^r$  est une matrice  $n \times r$  dont les  $r$  colonnes sont les vecteurs propres associés aux  $r$  premières valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ . On retrouve ainsi la décomposition de  $P^f(t_k)$  sous la forme

$$P^f(t_k) = L_k U_k L_k^T \quad (4.41)$$

avec  $U_k = I_d$  et  $L_k = \mathcal{L}_k$  ce qui nous permet d'enchaîner à un nouveau pas de correction par le filtre SEEK.

On note finalement qu'on peut toujours corriger l'erreur de prévision avec la base complète  $\bar{L}_k$  car cela ne coûte pas cher. En revanche, on est obligé de faire évoluer la base de correction via la matrice approchée  $\mathcal{L}_k$  pour garder les coûts de calcul raisonnables.

## 4.6 Lien du filtre SEEK avec l'approche variationnelle

L'algorithme du filtre SEEK a été obtenue à partir des équations du filtre de Kalman sous l'hypothèse d'une matrice de covariance de l'erreur initiale de rang réduit. Cette hypothèse revient à dire que l'erreur d'estimation initiale appartient à l'espace affine passant par  $X^f(t_0)$  et parallèle à  $L_0$ . Par ailleurs, on a vu que le filtre de Kalman et le problème variationnel qui consiste à contrôler le modèle par l'état initial (voir paragraphe 1.4.2) fournissent la même estimation de l'état à la fin de l'intervalle d'assimilation dans le cas d'un modèle linéaire parfait. Par analogie, on peut montrer (voir *Pham et al.* [78] pour plus de détails) que l'état estimé par le filtre SEEK à l'instant  $t_N$  coïncide avec la solution du problème variationnel consistant à trouver l'état initial qui minimise la somme d'une distance aux observations sur l'intervalle de temps  $[t_1, t_N]$ , et d'une distance à une estimation a priori de l'état initial de la trajectoire optimale, sous la contrainte que cet état appartient à l'espace affine passant par  $X^a(t_0)$  et parallèle à  $L_0$ . Sous la condition d'un modèle parfait, cela revient à trouver  $\delta^*$  dans  $\mathbb{R}^r$  qui réalise le minimum de la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(\delta) = \delta^T U_0^{-1} \delta + \sum_{k=1}^N [Y_k - H_k X(t_k)]^T R_k^{-1} [Y_k - H_k X(t_k)], \quad (4.42)$$

où  $X(t, k)$  présente l'état du modèle à l'instant  $t_k$  en partant de  $X^f(t_0) + L_0 \delta$  à l'instant initial, à savoir

$$X(t_k) = M(t_k, t_{k-1}) \circ \dots \circ M(t_2, t_1) (X^f(t_0) + L_0 \delta). \quad (4.43)$$

Dans le cas d'un modèle non-linéaire, cette propriété ne sera plus valide, mais on peut toujours s'attendre à ce que le filtre SEEK reste approximativement équivalent à ce problème

variationnel lorsque la linéarité du modèle n'est pas trop forte. On retrouve alors l'un des points de différence essentiel entre le filtre de Kalman et le problème variationnel. En effet, dans le premier on linéarise les équations du modèle et dans le deuxième la linéarisation se situe au niveau de la minimisation de  $\mathcal{J}$  seulement. Le Problème variationnel précédent a déjà été implémenté et testé avec succès par *Blayo et al.* [11], et il serait toujours intéressant de comparer les performances de ces deux méthodes.

L'avantage du filtre SEEK sur ce problème variationnel réside dans l'évolution temporelle de sa base de correction qui reste fixe dans la formulation variationnelle. Ainsi, le filtre SEEK utilise une nouvelle base de correction à l'instant  $t_{N+1}$  qui a été mise à jour par son équation d'évolution de la base (4.10). En revanche, dans le problème variationnel, on doit toujours utiliser la base initiale  $L_0$ . De plus, on peut remarquer que l'utilisation d'un modèle imparfait complique considérablement le problème variationnel précédent car dans ce cas, on doit minimiser la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  par rapport à toute la trajectoire du modèle. Cependant, l'introduction de l'erreur du modèle pourra être prise en compte plus ou moins facilement avec le filtre SEEK (voir paragraphe précédent). Un objectif très intéressant à long terme serait de combiner ces deux approches : on utilisera alors la première sur des périodes de temps courtes et on se sert des idées du filtre SEEK pour propager les erreurs et faire évoluer la base de correction d'une période à l'autre.

## 4.7 Application au modèle OPA

FIG. 7.2 montre le pourcentage de la variabilité (ou l'inertie) en fonction du nombre des EOFs calculées à partir de l'échantillon  $H_S$ , que nous avons construit dans le paragraphe 2.5. Nous avons alors retenu  $r = 30$  EOFs car d'une part, elles expliquent 85% de la variabilité de l'échantillon et d'autre part, ce pourcentage n'augmente que peu pour des plus grandes valeurs de  $r$  (voir chapitre 7 pour plus de détails).

Nous présentons ici les résultats d'assimilation du filtre SEEK avec un facteur d'oubli  $\rho = 0.8$  de la hauteur libre de la surface de l'océan qui a été supposée observée sur toute la surface. A noter que cette valeur de  $\rho$  a été choisie après avoir testé plusieurs valeurs avec le filtre à base fixe (pour économiser de temps de calcul, voir paragraphe 6.2). On peut voir à partir de FIG. 4.2 (et les figures de l'Annexe C) que le filtre SEEK se comporte aussi bien dans les premières couches que les dernières couches. Cela montre que ce filtre transmet d'une manière efficace les informations de surface au fond de l'océan. Bien que ces performances semblent se dégrader un peu durant la période instable du modèle, on peut dire que ce filtre se comporte aussi de manière satisfaisante durant cette période. On peut aussi penser que la vitesse méridionale n'a pas été suffisamment bien assimilée car son erreur d'assimilation n'a été réduite qu'à la moitié. Mais il est important de remarquer que, du moment où le champs de vitesse de l'océan Pacifique tropical est surtout zonal, la vitesse méridionale est généralement, et plus particulièrement le champs initial du 01/03/1991 que nous avons considéré dans nos expériences, est bien proche de la moyenne de la vitesse méridionale. Puisque cette moyenne a été prise comme état initial, l'erreur initiale a donc était déjà faible, il est alors très difficile de la réduire encore.

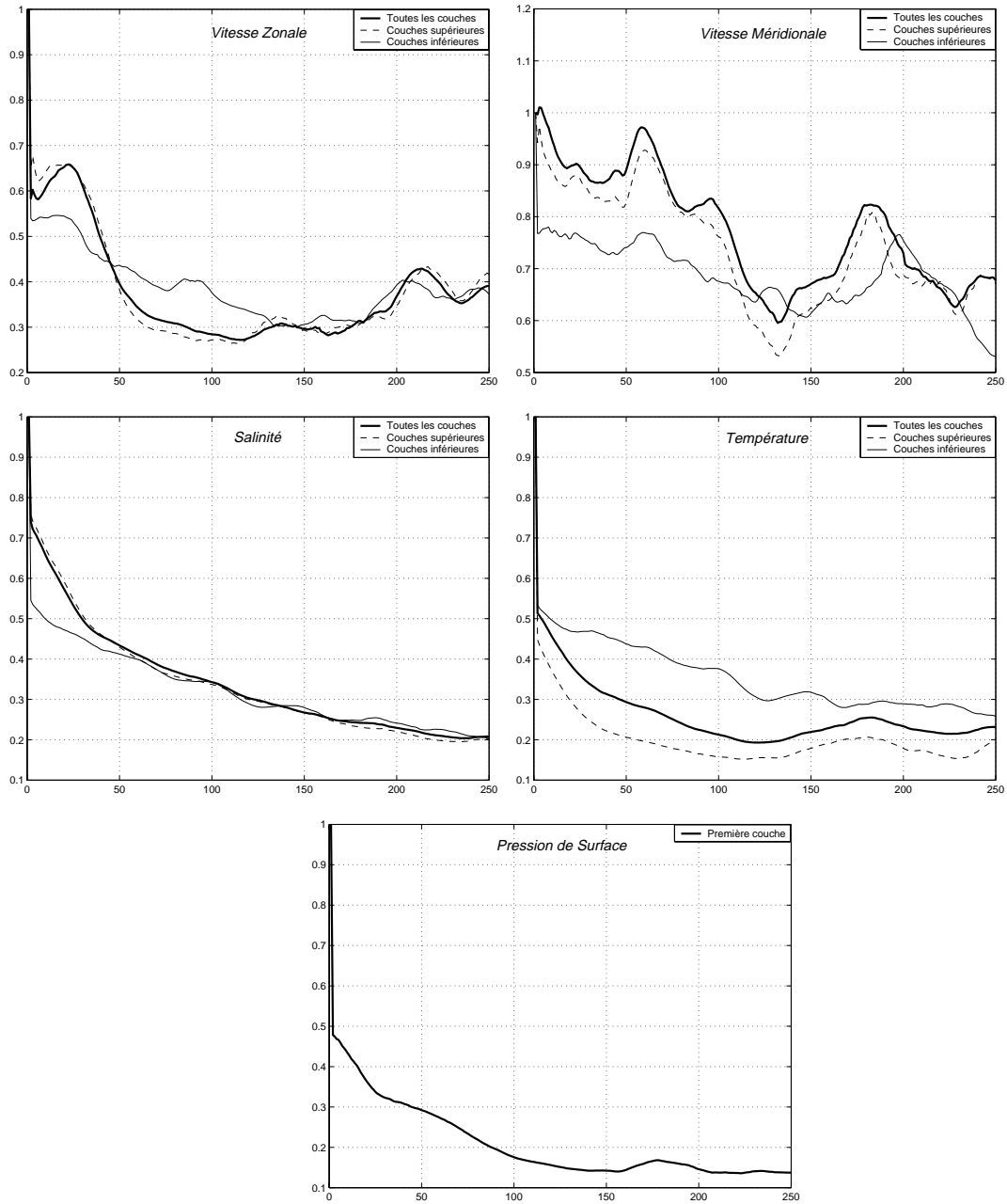


FIG. 4.2 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre SEEK sur toute la grille du modèle, sur les couches de surface (moyennes des 5 premières) et sur les couches de fond (moyennes des 5 dernières)



## 4.8 Discussion

On a vu que la performance du filtre SEEK se dégrade durant la période instable du modèle. Par ailleurs, il a été reconnu que l'interpolation résulte en moins d'erreur que la linéarisation lors des grandes déviations du modèle. Dans cet état d'esprit, *Pham* [79] a proposé de remplacer la linéarisation dans le filtre SEEK par une interpolation linéaire. Cela conduit à un nouveau filtre appelé filtre de Kalman singulier évolutif interpolé (SEIK) qui peut être plus stable que le filtre SEEK lors des grandes déviations du modèle. Ce filtre sera présenté dans le chapitre suivant.

## Chapitre 5

# Filtre SEIK - La version interpolée du filtre SEEK

### 5.1 Introduction

Le filtre de Kalman étendu peut présenter des instabilités et parfois diverger complètement en présence de fortes non-linéarités [34, 44, 57]. Une possibilité pour tenter de résoudre cette difficulté est de remplacer la linéarisation dans le filtre de Kalman étendu par un développement de Taylor d'ordre supérieur. Cependant, ceci est impossible en océanographie en raison de l'énorme dimension des modèles. Une nouvelle voie d'investigation est en train de se développer actuellement. Elle consiste essentiellement à utiliser des méthodes stochastiques de type Monte Carlo pour estimer l'évolution de la matrice de covariance de l'erreur de filtrage par un nuage d'états centrés autour de l'état courant et dont la matrice de covariance empirique est celle de la matrice considérée. Cette approche, introduite en océanographie par Evensen [33] avec son *filtre de Kalman d'ensemble*, est actuellement le meilleur moyen pour traiter les modèles fortement non-linéaires. De plus, le fait de faire évoluer l'erreur par un nuage de points permet d'éviter la linéarisation du modèle et assure en même temps un suivi "naturel" des erreurs. Cela dit, le principe étant l'utilisation d'un estimateur statistique de la matrice de covariance des erreurs, on peut vite se heurter au problème de la taille de l'échantillon à considérer (dans les expériences d'Evensen, il est de l'ordre de  $\mathcal{O}(100)$ ). Récemment, Pham [75] a proposé une variante du filtre SEEK, appelée filtre de Kalman singulier évolutif interpolé (SEIK), dans lequel la taille de l'échantillon est, en un certain sens, minimale. Cela revient à remplacer tout simplement la linéarisation utilisée dans le filtre SEEK par une interpolation linéaire. Ce filtre sera présenté dans ce chapitre.

### 5.2 Algorithme pour un modèle parfait

L'idée du filtre SEIK est de faire évoluer la matrice de covariance de l'erreur par un nuage de points de taille raisonnable. Dans ce but, Pham [79] a utilisé l'hypothèse de rang faible  $r$  de la matrice de covariance de l'erreur pour réduire la taille du nuage à  $r + 1$  points exactement. Une autre originalité dans ce filtre réside dans le choix des états d'interpolation qui sont tirés "au hasard" à chaque pas de filtrage pour ne pas privilégier certaines directions de l'espace d'état.

Partons de l'hypothèse de rang  $r$  de la matrice de covariance de l'erreur d'analyse  $P^a(t_{k-1})$ ,

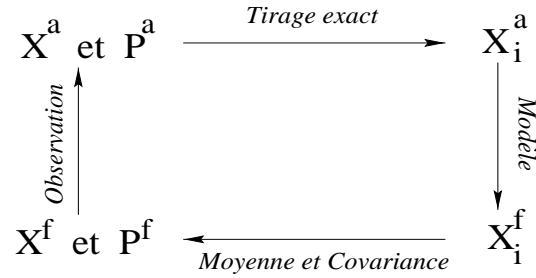


FIG. 5.1 – Etapes de l’algorithme du filtre SEIK

on représente l’état analysé et son erreur à l’instant  $t_k$  par un nuage de points (interpolés)  $X_1^a(t_{k-1}), \dots, X_{r+1}^a(t_{k-1})$ , centrés en l’état analysé  $X^a(t_{k-1})$  et de matrice de covariance empirique  $P^a(t_k)$ . Autrement dit, on va tirer les états interpolés au hasard de telle sorte que

$$X^a(t_{k-1}) = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} X_i^a(t_{k-1}), \quad (5.1)$$

$$P^a(t_{k-1}) = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} [X_i^a(t_{k-1}) - X^a(t_{k-1})][X_i^a(t_{k-1}) - X^a(t_{k-1})]^T. \quad (5.2)$$

On note ici que “ $r+1$ ” est le nombre minimum de points à considérer pour que leur matrice de covariance empirique puisse être de rang  $r$ . Ayant tiré les points interpolés  $X_i^a(t_{k-1})$  sous les deux contraintes précédentes, on utilise le modèle pour les faire se propager dans le temps. On obtient ainsi des nouveaux points d’interpolation à l’instant  $t_k$ , notés  $X_i^f(t_k)$ . On prendra alors comme état de prévision  $X^f(t_k)$  le barycentre des  $X_i^f(t_k)$ , et comme matrice de covariance de l’erreur commise sur cette estimation la matrice de covariance empirique des  $X_i^f(t_k)$ . Finalement, lorsqu’une nouvelle observation est disponible, on corrige  $X^f(t_k)$  par l’équation de correction du filtre de Kalman.

L’algorithme du filtre SEIK opère donc en trois étapes, après une étape d’initialisation, pour fournir  $X^a(t_k)$  et  $P^a(t_k)$  à l’instant  $t_k$  (voir FIG.5.1) en partant de  $X^a(t_{k-1})$  et  $P^a(t_{k-1})$  à l’instant  $t_{k-1}$ .

### 1- Tirage des états interpolés :

Le tirage des états interpolés se fait par la méthode dite de “tirage exact au second ordre” que l’on résume comme suit:

Sous l’hypothèse de rang  $r$ , on peut décomposer  $P^a(t_{k-1})$  selon

$$P^a(t_{k-1}) = L_{k-1} U_{k-1} L_{k-1}^T. \quad (5.3)$$

En utilisant la décomposition de Cholesky, on factorise  $U_{k-1}^{-1}$  selon  $C_{k-1} C_{k-1}^T$  avec  $C_{k-1}$  une matrice triangulaire supérieure. On peut alors écrire

$$P^a(t_{k-1}) = L_{k-1} (C_{k-1}^{-1})^T \Omega_{k-1}^T \Omega_{k-1} C_{k-1}^{-1} L_{k-1}^T \quad (5.4)$$

et ceci pour toute matrice aléatoire  $\Omega_{k-1}$  de dimension  $(r+1) \times r$  dont les colonnes sont orthonormées dans  $\mathbb{R}^{r+1}$  et orthogonales au vecteur  $(1, \dots, 1)^T$ . Pour construire

les matrices  $\Omega_{k-1}$  on peut utiliser *les matrices de Householder* (voir Annexe A). Avec ces notations, on peut vérifier que pour tirer les états interpolés  $X_i^a(t_{k-1})$  sous les contraintes (5.1) et (5.2), il suffit de prendre:

$$X_i^a(t_{k-1}) = X^a(t_{k-1}) + \sqrt{r+1} L_{k-1} (\Omega_{k-1, i} C_{k-1}^{-1})^T, \quad (5.5)$$

où  $\Omega_{k-1, i}$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $\Omega_{k-1}$ .

## 2- Etape de Prévion :

Il est naturel de prendre comme état de prévion à l'instant  $t_k$  le barycentre des états interpolés prévus  $X_i^f(t_k)$ , à savoir

$$X^f(t_k) = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} X_i^f(t_k), \quad (5.6)$$

où  $X_i^f(t_k)$  représente l'état du système à l'instant  $t_k$  en partant de  $X_i^a(t_{k-1})$  à l'instant  $t_{k-1}$ , c'est à dire

$$X_i^f(t_k) = M(t_k, t_{k-1}) X_i^a(t_{k-1}). \quad (5.7)$$

En faisant ce choix, la matrice de covariance de l'erreur de prévion peut être approchée par

$$P^f(t_k) \approx \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} [X_i^f(t_k) - X^f(t_k)][X_i^f(t_k) - X^f(t_k)]^T. \quad (5.8)$$

Notons que cette égalité est exacte dans le cas d'un modèle linéaire. Ignorant l'erreur d'approximation, l'équation précédente peut être réécrite comme

$$P^f(t_k) = \frac{1}{r+1} [X_1^f(t_k) \cdots X_{r+1}^f(t_k)] T (T^T T)^{-1} T^T \begin{bmatrix} X_1^f(t_k)^T \\ \vdots \\ X_{r+1}^f(t_k)^T \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

avec  $T$  est une matrice constante de  $r$  colonnes formant une base de l'espace des vecteurs de  $\mathbb{R}^{r+1}$  dont la somme de ses composantes est nulle. Par suite, on peut toujours décomposer la matrice  $P^f(t_k)$  selon

$$P^f(t_k) = L_k [(r+1) T^T T]^{-1} L_k^T, \quad (5.10)$$

avec

$$L_k = [X_1^f(t_k) \cdots X_{r+1}^f(t_k)] T. \quad (5.11)$$

On retrouve alors la décomposition de  $P^f(t_k)$  selon (4.11) du filtre SEEK.

Un choix convenable de la matrice  $T$  serait par exemple

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{r+1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Selon ce choix, la matrice  $(r+1) T^T T$  contient  $r$  sur la diagonale et  $-1$  ailleurs.

### 3- Etape de correction :

En suivant les mêmes étapes de calcul que dans le filtre SEEK, on montre que la formule de correction du filtre SEIK est donnée par

$$X^a(t_k) = X^f(t_k) + L_k U_k (HL)_k^T R_k^{-1} [Y_k^o - H_k X^f(t_k)], \quad (5.13)$$

avec une matrice de covariance d'erreur d'analyse

$$P^a(t_k) = L_k U_k L_k^T, \quad (5.14)$$

où

$$(HL)_k = [H_k L_{k,1} \cdots H_k L_{k,r}], \quad (5.15)$$

$L_{k,i}$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $L_k$  et la matrice  $U_k$  est solution de l'équation

$$U_k^{-1} = (r+1)T^T T + (HL)_k^T R_k^{-1} (HL)_k.$$

A noter que le terme  $(r+1)T^T T$  remplace  $U_{k-1}^{-1}$  dans l'équation (4.15) de mise à jour de  $U_k$  du filtre SEEK à cause de la nouvelle factorisation de  $P^f(t_k)$  selon (5.36).

### Initialisation du filtre SEIK

Comme dans le filtre SEEK, nous allons faire démarrer le filtre SEIK par un pas de correction. En partant alors à l'instant initial  $t_0$  de  $X_0$  et de  $P_0 = L_0 U_{-1} L_0^T$  et en supposant que l'on possède une observation  $Y_0^o$ , avec éventuellement une erreur d'observation de matrice de covariance  $R_0$ , on va corriger  $X_0$  par

$$X^a(t_0) = X_0 + L_0 U_0 L_0^T \mathbf{H}_0^T R_0^{-1} [Y_0^o - H_0 X_0]. \quad (5.16)$$

avec

$$U_0^{-1} = L_0^T \mathbf{H}_0^T R_0^{-1} \mathbf{H}_0 L_0. \quad (5.17)$$

Pour obtenir les points d'interpolation initiaux, nous utilisons alors l'équation (5.5) avec  $X^a(t_k) = X^a(t_0)$ ,  $L_k = L_0$  et  $C_k$  étant la matrice obtenue par la décomposition de Cholesky de la matrice  $U_0^{-1}$ .

### Version avec facteur d'oubli

La version du filtre SEIK avec un facteur d'oubli  $\rho$  est identique à celle du filtre SEEK. Seule l'équation de mise à jour de la matrice  $U_k$  change, et comme pour le filtre SEEK, elle sera remplacée par

$$U_k^{-1} = \rho(r+1)T^T T + (HL)_k^T R_k^{-1} (HL)_k. \quad (5.18)$$

### Pourquoi l'appelle-t-on filtre interpolé ?

Si l'erreur d'analyse  $e^a(t_{k-1}) = X^t(t_{k-1}) - X^a(t_{k-1})$  à l'instant  $t_{k-1}$  est réellement centrée et de matrice de covariance  $P^a(t_{k-1})$ , alors  $e^a(t_{k-1})$  doit se trouver dans le sous espace vectoriel image de  $P^a(t_{k-1})$ . Selon le choix des états interpolés  $X_i^a(t_{k-1})$ , l'erreur d'analyse est donc de la forme

$$e^a(t_{k-1}) = \sum_{i=1}^{r+1} \tilde{\xi}_i [X_i^a(t_{k-1}) - X^a(t_{k-1})]. \quad (5.19)$$

Comme  $X^a(t_{k-1})$  est le barycentre des  $X_i^a(t_{k-1})$  i.e.

$$\sum_{i=1}^{r+1} [X_i^a(t_{k-1}) - X^a(t_{k-1})] = 0, \quad (5.20)$$

on peut toujours choisir les coefficients  $\tilde{\xi}_i$  de telle sorte que leur somme soit nulle. On peut alors écrire

$$X^t(t_{k-1}) = \sum_{i=1}^{r+1} \xi_i X_i^a(t_{k-1}) \quad \text{avec} \quad \xi_i = \tilde{\xi}_i + \frac{1}{r+1}. \quad (5.21)$$

où les  $\xi_i = \tilde{\xi}_i + \frac{1}{r+1}$  vérifient

$$E[\xi_i] = \frac{1}{r+1}, \quad (5.22)$$

$$E \left[ (\xi_1 \cdots \xi_{r+1}) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{r+1} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{r+1} T(T^T T)^{-1} T \quad (5.23)$$

et  $T$  est une matrice dont les colonnes forment une base de l'espace vectoriel des vecteurs de  $\mathbb{R}^{r+1}$  ayant des composantes de somme nulles. Si maintenant on interpole l'opérateur de transition  $M(t_k, t_{k-1})$  basé sur les points d'interpolation  $X_i^a(t_{k-1})$ , on obtient

$$\begin{aligned} X^t(t_k) &= M(t_k, t_{k-1}) X^t(t_{k-1}) \\ &\approx \sum_{i=1}^{r+1} \xi_i M(t_k, t_{k-1}) X_i^a(t_{k-1}) = \sum_{i=1}^{r+1} \xi_i X_i^f(t_k). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Cette dernière formule montre aussi que l'erreur de prévision  $X^t(t_k) - X^f(t_k)$  est de moyenne nulle et de matrice de covariance  $P^f(t_k)$ .

On peut ainsi dire que le filtre SEIK est une variante du SEEK dans laquelle on remplace tout simplement la linéarisation par une interpolation linéaire. L'intérêt d'utiliser une interpolation est double:

- 1- Elle semble mieux tenir compte de la non-linéarité du modèle et opérer d'une manière plus robuste vis-à-vis d'elle que la linéarisation du filtre SEEK. En effet, il est possible que l'interpolation résultait en une erreur plus faible pour les grandes déviations que celle due à la linéarisation par le développement de Taylor au premier ordre (utilisée dans le filtre SEEK).
- 2- Elle nous permet d'éviter le calcul du gradient du modèle qui peut être assez complexe en pratique.

## 5.3 Statistiques des erreurs

### 5.3.1 Erreur d'observation

Nous allons supposer dans ce paragraphe que la matrice de covariance des erreurs d'observation est de la forme  $R_k = \sigma_{obs}^2 I_d$ . Dans ce cas, on peut voir facilement qu'on peut représenter la matrice de covariance de l'erreur d'analyse comme

$$P^a(t_k) = \sigma_{obs}^2 L_k \tilde{U}_k L_k^T, \quad (5.25)$$

sachant que la matrice  $\tilde{U}_k$  est maintenant solution de l'équation

$$\tilde{U}_k^{-1} = \rho \sigma_{obs}^2 (r+1) T^T T + (HL)_k^T (HL)_k. \quad (5.26)$$

Les états interpolés seront alors obtenus par la formule

$$X_j^a(t_k) = X^a(t_k) + \sigma_{obs} \sqrt{r+1} L_k (\Omega_{k,j} \tilde{C}_k^{-1})^T. \quad (5.27)$$

où  $\tilde{C}_k^{-1}$  est la décomposition de Cholesky de la matrice  $\tilde{U}_k$ .

*Estimation de  $\sigma_{obs}^2$*  : Le paramètre  $\sigma_{obs}^2$  est inconnu en pratique et il est bien entendu préférable de l'estimer et non de le spécifier comme dans le filtre SEEK. En effet, dans le cas du filtre SEEK, on n'a pas besoin de spécifier  $\sigma_{obs}^2$ , si on part d'une erreur initiale infinie (ou très grande). Pour le filtre SEIK, on a besoin de connaître  $\sigma_{obs}^2$  pour effectuer correctement les tirages des états interpolés. Nous calculons un estimateur de  $\sigma_{obs}^2$  selon le schéma suivant :

- A l'instant initial  $t_0$ , on estime l'erreur d'observation  $\sigma_{obs}^2$  par la moyenne de la somme des carrés des erreurs initiales, c'est-à-dire par la quantité  $e_0^2/n_0^o$ , où  $e_0 = \|Y_0^o - H_0 X^a(t_0)\|$  et  $n_0^o$  est le nombre des observations utilisées pour estimer  $X^a(t_0)$  (dimension de  $Y_0^o$ ).
- Ensuite, on réactualise l'estimation de  $\sigma_{obs}^2$  à chaque instant de filtrage  $t_k$  par la quantité

$$\sigma_k^2 = \sigma_{k-1}^2 + (1-\rho) \left( \frac{\|Y_k^o - H_k X^a(t_k)\|^2}{n_k^o} - \sigma_{k-1}^2 \right). \quad (5.28)$$

où  $n_k^o$  désigne le nombre des observations utilisées pour estimer  $X^a(t_k)$ .

### 5.3.2 Erreur du modèle

Les remarques que nous avons faites sur l'erreur du modèle dans le cadre du filtre SEEK (voir paragraphe 4.5.2) sont bien évidemment toujours valables pour le filtre SEIK.

#### Projeter l'erreur sur la base de correction

On peut alors projeter l'erreur du modèle sur la base de correction  $L_k$  comme dans le filtre SEEK. Dans ce cas, seule l'équation de mise à jour de la matrice  $U_k$  change et elle sera remplacée par

$$U_k^{-1} = \left[ [(r+1)T^T T]^{-1} + (L_k^T L_k)^{-1} L_k^T Q(t_k) L_k (L_k^T L_k)^{-1} \right]^{-1} \quad (5.29)$$

$$+ (HL)_k^T R_k^{-1} (HL)_k.$$

On peut aussi approcher à nouveau la matrice de covariance de l'erreur d'analyse de ce filtre par une matrice de rang  $r$  à chaque pas de filtrage.

Cependant, le principe du filtre SEIK qui consiste à présenter l'évolution de l'erreur de filtrage par un ensemble de points interpolés nous permet d'envisager deux nouvelles méthodes pour mieux tenir compte de l'erreur du modèle.

### Ajouter l'erreur aux états interpolés

L'étape de tirage des états interpolés du filtre SEIK consistait à calculer  $r + 1$  points interpolés  $X_i^a(t_{k-1})$  de centre  $X^a(t_{k-1})$  et de matrice de covariance empirique  $P^a(t_{k-1})$ . On prend alors comme état prévu  $X^f(t_k)$  à l'instant  $t_k$  le barycentre des états interpolés prévus

$$X_i^f(t_k) = M(t_k, t_{k-1})X_i^a(t_{k-1}). \quad (5.30)$$

Lorsque le modèle est imparfait, la matrice de covariance de l'erreur de prévision  $P^f(t_k)$  peut être approchée par la matrice

$$P^f(t_k) \approx \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} [X_i^f(t_k) - X^f(t_k)][X_i^f(t_k) - X^f(t_k)]^T + Q(t_k). \quad (5.31)$$

Supposons alors que l'on possède un ensemble de  $r + 1$  vecteurs  $\eta_1(t_k), \dots, \eta_{r+1}(t_k)$  de moyenne nulle et de matrice de covariance empirique  $Q(t_k)$  (ce point sera discuté à la fin de ce paragraphe), c'est-à-dire

$$\frac{1}{r+1} \sum_{j=1}^{r+1} \eta_j(t_k) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{r+1} \sum_{j=1}^{r+1} \eta_j(t_k) \eta_j^T(t_k) = Q(t_k), \quad (5.32)$$

et qui vérifient la condition

$$\sum_{j=1}^{r+1} \eta_j(t_{k+1}) [X_i^f(t_k) - X^f(t_k)]^T = 0. \quad (5.33)$$

Si on définit des nouveaux états d'interpolation prévus par

$$X_i^{f,\eta}(t_k) = M(t_k, t_{k-1})X_i^a(t_{k-1}) + \eta_i(t_{k+1}) = X_i^f(t_k) + \eta_i(t_k), \quad (5.34)$$

il est facile de voir que le barycentre des  $X_i^{f,\eta}(t_k)$  n'est autre que l'état prévu  $X^f(t_k)$  et leur matrice de covariance empirique approche la matrice de covariance de l'erreur de prévision  $P^f(t_k)$  dans (5.31). On peut alors écrire

$$P^f(t_k) \approx \frac{1}{r+1} \sum_{j=1}^{r+1} [X_j^{f,\eta}(t_k) - X^f(t_k)][X_j^{f,\eta}(t_k) - X^f(t_k)]^T \quad (5.35)$$

que l'on peut toujours représenter sous la forme

$$P^f(t_k) = L_k^\eta [(r+1)T^T T]^{-1} (L_k^\eta)^T, \quad (5.36)$$

où  $L_{k+1}^\eta$  est maintenant donnée par

$$L_k^\eta = [X_1^{f,\eta}(t_k) \cdots X_{r+1}^{f,\eta}(t_k)]^T \quad (5.37)$$



et  $T$  est comme dans le filtre SEIK (voir (5.12)). On retrouve alors la décomposition de  $P^f(t_k)$  selon (5.10) avec  $L_k^\eta$  à la place de  $L_k$  ce qui nous permet d'enchaîner à l'étape de correction du filtre SEIK.

Ainsi, les équations du filtre SEIK restent inchangées. Seule l'évolution de la base de correction sera représentée par les nouveaux états interpolés prévus "bruités"  $X_i^{f,\eta}(t_k)$  et non plus par les états  $X_i^f(t_k)$ .

• *Tirage des  $\eta_i(t_k)$* : Pham [75] a montré que le tirage des vecteurs  $\eta_i(t_k)$  selon les contraintes (5.32) et (5.33), appelé "tirage exact au second ordre sous une contrainte linéaire", est toujours possible si et seulement si le rang  $s$  de  $Q(t_k)$ , plus le rang  $r'$  de la matrice

$$C(t_k) = [X_1^f(t_k) - X^f(t_k) \cdots X_{r+1}^f(t_k) - X^f(t_k)] \quad (5.38)$$

n'excède par le nombre de colonnes  $r$  de  $L_k$ , c'est-à-dire

$$r' \leq r - s. \quad (5.39)$$

Ce tirage peut être résumé comme suit (pour plus de détails consulter Pham [75]):

Sous l'hypothèse de rang  $s$ , on peut décomposer  $Q(t_k)$  selon

$$Q(t_k) = N_k N_k^T. \quad (5.40)$$

où  $N_k$  est une matrice de  $s$  colonnes linéairement indépendantes. Comme  $C(t_k)$  est une matrice de rang  $r'$ , on peut construire une matrice  $V_k$  de dimension  $(r+1) \times (r-r')$  dont les colonnes forment une base orthonormée du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{r+1}$  orthogonal aux colonnes de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ C^T(t_k) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

de sorte que  $V_k^T V_k$  soit la matrice identité d'ordre  $r-r'$ . D'autre part, comme  $r-r' \geq s$ , il existe une matrice aléatoire orthogonale  $\Lambda_k$  de dimension  $(r-r') \times s$  de sorte que  $\Lambda_k^T \Lambda_k$  est la matrice identité d'ordre  $s$  (pour construire les matrices  $V_k$  et  $\Lambda_k$  on peut utiliser les matrices de Householder (voir Annexe A et B)). On peut donc écrire

$$Q(t_k) = N_k \Lambda_k^T V_k^T V_k \Lambda_k N_k^T. \quad (5.42)$$

On vérifie alors que sous ces notations, on peut définir les  $\eta_i(t_k)$  comme

$$\eta_i(t_k) = \sqrt{r+1} N_k (V_k \Lambda_{k,i})^T, \quad (5.43)$$

où  $\Lambda_{k,i}$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $\Lambda_k$ .

En pratique, la condition (5.39) sur les rangs n'est jamais remplie car la matrice  $C(t_k)$  est théoriquement de rang  $r$ . Pour ce faire, on est amené à approcher la matrice  $C(t_k)$  par une matrice de rang  $r-s$  en utilisant la méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD), et ceci à chaque pas de filtrage (bien sur, cela nécessite que  $s < r$  et préférablement  $s$  pas trop

proche de  $r$ , si ce n'est pas le cas, on doit encore approcher la matrice  $Q(t_k)$  par une matrice de rang plus faible). Cette méthode nous permet en effet de décomposer  $C(t_k)$  selon

$$C(t_k) = V(t_k)D(t_k)W(t_k)^T, \quad (5.44)$$

où  $V(t_k)$  et  $W(t_k)$  sont deux matrices orthogonales et  $D(t_k)$  est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières de  $C(t_k)$  sur sa diagonale. Une approximation de rang  $r - s$  de  $C(t_k)$  peut être alors obtenue en remplaçant les  $s$  derniers coefficients diagonaux de  $D(t_k)$  par 0. On retrouve alors le fait de réapprocher  $P^f(t_k)$  par une matrice de rang  $r$  comme dans le filtre SEEK. Seulement ici, cette approximation est utilisée uniquement pour le tirage des vecteurs  $\eta_i$  et la matrice de covariance de l'erreur d'analyse  $P^a(t_k)$  reste inchangée, ce qui n'était pas le cas dans le filtre SEEK.

Finalement, pour calculer les valeurs singulières de la matrice  $C(t_k)$ , on peut déterminer tout d'abord les valeurs propres de la matrice  $C^T(t_k)C(t_k)$  selon

$$C^T(t_k)C(t_k) = W(t_k)\Sigma(t_k)W^T(t_k) \quad (5.45)$$

où  $W(t_k)$  contient les vecteurs propres normés de  $C(t_k)^T C(t_k)$  rangés dans l'ordre croissant de leurs valeurs propres. On peut alors écrire

$$C(t_k) = [C(t_k)\Sigma^{-1/2}(t_k)W(t_k)]\Sigma^{1/2}(t_k)W^T(t_k), \quad (5.46)$$

ce qui veut dire qu'on peut prendre  $D(t_k) = \Sigma^{1/2}(t_k)$  et  $V(t_k) = C(t_k)\Sigma^{-1/2}(t_k)W(t_k)$ . On peut alors vérifier qu'une approximation de rang  $r - s$  de la matrice  $C(t_k)$  est alors donnée par la matrice

$$\tilde{C}(t_k) = C(t_k)\tilde{W}(t_k)\tilde{W}^T(t_k), \quad (5.47)$$

où  $\tilde{W}(t_k)$  est formée par les  $r - s$  premières colonnes de  $W(t_k)$ .

### Traiter l'erreur par le modèle

L'inconvénient de la méthode précédente est son coût très élevé qui rend son implémentation assez délicate en pratique. Dans ce paragraphe, nous allons proposer une autre méthode qui va nous permettre de traiter l'erreur de notre modèle (OPA dans le tropical Pacifique) par le filtre SEIK mais avec un coût de calcul très raisonnable. L'idée ici consiste à utiliser le fait que l'erreur dynamique de ce modèle provient surtout des termes de forçage du vent, et donc agit uniquement sur la première couche. La dimension du vecteur qui modélise cette erreur est donc égale à celle de la première couche. Cela nous permet alors d'éviter le tirage des vecteurs  $\eta_i(t_k)$  en rajoutant une erreur aléatoire  $\tau_i(t_k)$  sur les termes de forçage du vent à chaque fois que l'on fait évoluer un état interpolé  $X_i^a(t_k)$ . Ceci peut être résumé par le schéma suivant

$$\begin{array}{ccc} X_i^a(t_k) & \xrightarrow{\text{modèle}(+\tau_i(t_k))} & X_i^f(t_k) \\ \uparrow & & \downarrow \\ X^a(t_k) & \longleftarrow & X^f(t_k) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{ccc} X_i^a(t_k) & \xrightarrow{\text{modèle}} & X_i^f(t_k) + (\eta_i(t_k)) \\ \uparrow & & \downarrow \\ X^a(t_k) & \longleftarrow & X^f(t_k) \end{array} \right.$$

*Deuxième méthode* *Première méthode*

Les  $r + 1$  vecteurs  $\tau_i(t_k)$  seront tirés au hasard de telle sorte à ce qu'ils vérifient les deux contraintes suivantes

$$\frac{1}{r+1} \sum_{j=1}^{r+1} \tau_j(t_k) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{r+1} \sum_{j=1}^{r+1} \tau_j(t_k) \tau_j(t_k)^T = Q_\tau(t_k), \quad (5.48)$$

où  $Q_\tau$  est la matrice de covariance des termes d'erreurs dans le modèle que l'on suppose de rang  $r$  (sinon on peut toujours l'approcher par une matrice de rang  $r$ ). Pour simuler ces vecteurs on pourra utiliser la méthode de "tirage exact au second ordre" déjà utilisée pour déterminer les états interpolés (voir Annexe A).

Outre la diminution du coût de calcul, cette méthode nous permet de traiter l'erreur dynamique directement par le modèle et donc de tenir compte plus explicitement de son caractère "non-linéaire".

## 5.4 Applications au modèle OPA

Nous nous sommes tout d'abord intéressés à la comparaison entre les performances des filtres SEIK et SEEK. Nous considérons ensuite l'erreur du modèle et nous la traitons avec les différentes méthodes que nous avons présentées dans le paragraphe 5.3.2.

Les résultats de nos expériences avec le filtre SEEK ont été présentés dans les couches supérieures et inférieures pour plus de précision (voir FIG. 4.2). Mais nous avons remarqué que la différence entre les résultats de tous les filtres, en terme de leurs *RRMS*, que nous allons présenter ultérieurement et le filtre SEEK est presque la même dans les couches supérieures et inférieures que dans toutes les couches. Par conséquent, nous présenterons dans la suite uniquement les résultats de la *RRMS* des filtres calculée sur toute la grille du modèle.

### 5.4.1 Performances du filtre SEIK face au filtre SEEK

Pour montrer l'intérêt de remplacer la linéarisation utilisée dans le filtre SEEK par une interpolation linéaire, nous avons implémenté le filtre SEIK dans les mêmes conditions que le filtre SEEK dont les résultats ont été présentés dans le chapitre précédent, i.e. avec un facteur d'oubli  $\rho = 0.8$  et des observations simulées sur toute la première couche. La figure FIG. 5.2 compare les résultats d'assimilation de ces deux filtres. Il est clair que le filtre SEIK est plus performant, particulièrement par rapport aux composantes de la vitesse horizontale  $U_h$ , dans la période instable du modèle. Le filtre SEIK semble donc être plus robuste que le filtre SEEK vis-à-vis de la non-linéarité, au sens où il peut mieux supporter que le modèle s'éloigne de la linéarité sans perdre ses performances.

### 5.4.2 Filtre SEIK avec erreur du modèle

Dans le modèle OPA de l'océan Pacifique tropical, on sait que la part prépondérante des erreurs du modèle provient des termes de forçage du champ de vent (voir *Miller et al.* [71]).

#### Estimation de la covariance de l'erreur de forçage du vent

Nous estimons la matrice de covariance de l'erreur de forçage du vent (qu'on a notée  $Q_{\tau_{au}}$ ) tout simplement par la matrice de covariance de tous les termes de forçage du vent que nous

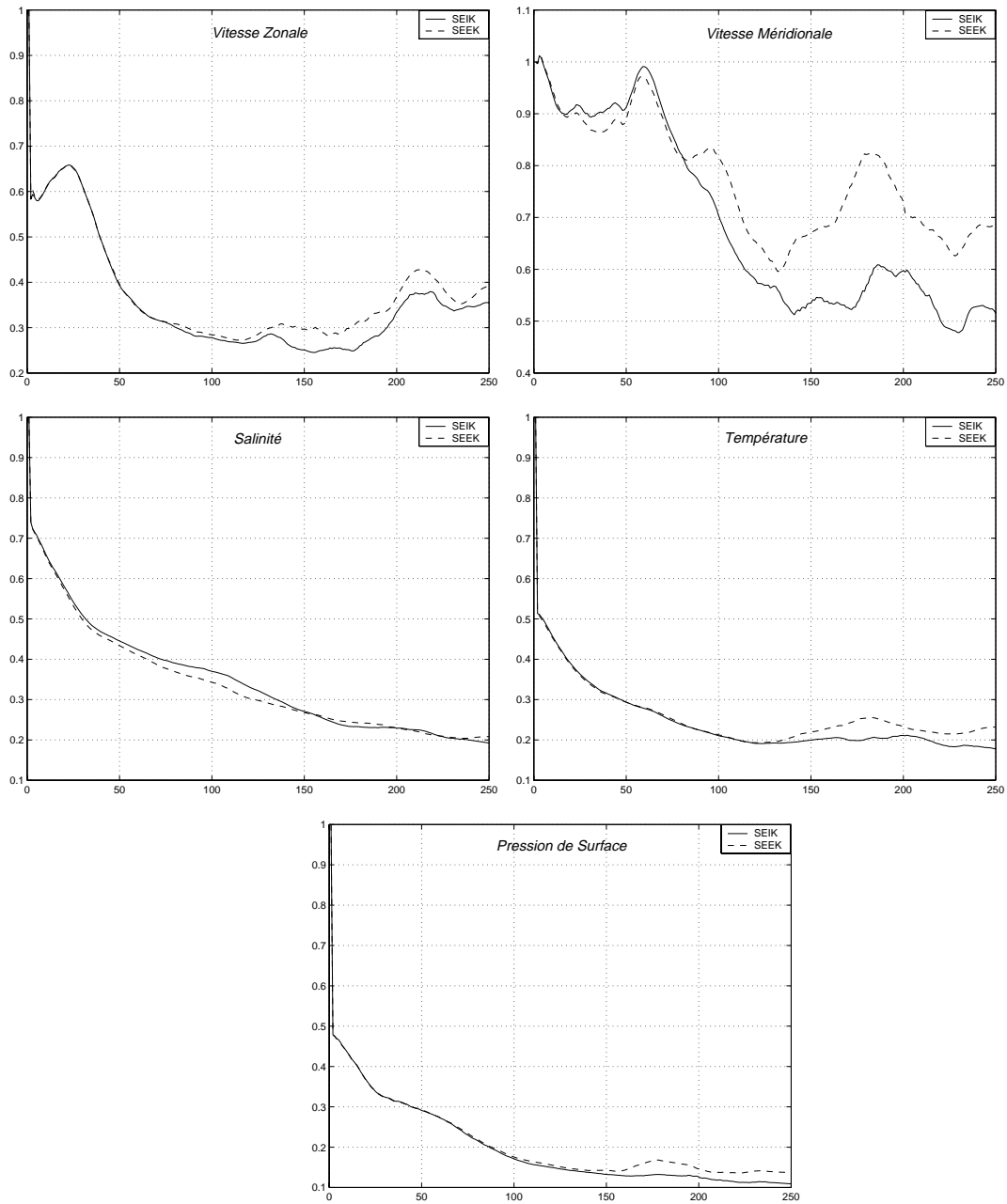


FIG. 5.2 – Evolution dans le temps de la RRMS des filtres SEIK et SEEK

avons utilisés dans notre modèle. La taille de ces derniers est égale à deux fois le nombre de points de la première couche (le forçage du vent opère dans les deux directions: zonale et méridionale). Pour calculer une approximation de rang  $r$  de  $Q_{tau}$ , nous appliquons une analyse EOFs (voir paragraphe 7.2.2) sur ces termes de forçage.

### Estimation de la matrice de covariance de l'erreur du modèle

Nous avons lancé le modèle entre 1987 à 1990 avec un champ de vent constant égal à la moyenne de tous les termes de forçage et nous avons stocké un vecteur d'état tous les 3 jours. Nous avons alors estimé la matrice de covariance de l'erreur du modèle  $Q$  (qu'on suppose constante dans le temps) par la matrice de covariance empirique des vecteurs différence entre ces derniers et les "vrais états" de l'ensemble historique  $H_S$  de données (construit dans le paragraphe 2.5). Comme précédemment, il reste à appliquer une analyse EOFs pour calculer la meilleure approximation de  $Q$  par une matrice de rang  $r$ .

### Expériences et résultats

Pour tenir compte de l'erreur du modèle OPA dans le filtre SEIK, nous avons considéré les trois méthodes que nous avons présentées dans le paragraphe 5.3.2 consistant à : (i) projeter l'erreur sur la base de correction, (ii) ajouter l'erreur aux états interpolés, et (iii) introduire l'erreur directement dans les équations du modèle. Comme dans les expériences précédentes, nous avons utilisé des observations altimétriques simulées sur toute la surface mais cette fois-ci à partir du modèle OPA dans lequel nous avons rajouté une erreur aléatoire sur les termes de forçage du champs de vent. Le facteur d'oubli est toujours fixe égale à  $\rho = 0.8$ . La dimension de la base de l'erreur du modèle a été choisie égale à 10 et le facteur d'oubli a été fixé à 0.8.

La figure FIG. 5.3 (voir Annexe C aussi) montre les résultats de ces expériences. On peut voir que la méthode originale (SEIK+Q1) qui consiste à projeter l'erreur du modèle sur la base de correction donne de bons résultats. Cependant, on ne peut pas en conclure pour autant que cette méthode est meilleure que les autres. En effet, la base de l'erreur du modèle que nous avons contruite a été parallèle à la base de correction du SEIK et c'est pour cette raison que le SEIK a pu bien corriger cette erreur. En revanche, les conditions d'utilisation de la deuxième méthode (SEIK+Q2), dans laquelle on ajoute l'erreur du modèle aux états interpolés, ont été bien plus réalistes que pour la première méthode. Ses mauvais résultats sont dus en grande partie à la mauvaise estimation de la matrice de covariance de l'erreur du modèle qui, rappelons-le, a été approchée par une matrice de rang 10. Finalement, on peut voir que le fait de rajouter une erreur aléatoire sur le forçage du vent directement dans le modèle dans la troisième méthode (SEIK+Q3) a été plus ou moins bien contrôlé par le filtre SEIK.

## 5.5 Discussion

Le filtre SEIK résoud partiellement le problème de la non linéarité du filtre SEEK. Outre sa plus grande stabilité, il est plus simple à implémenter car il ne nécessite pas le calcul complexe du gradient de l'opérateur de transition du modèle. Cependant, son coût est presque égal à celui du filtre SEEK car l'évolution de leurs bases de correction respectives requiert l'intégration du modèle  $r + 1$  fois pour faire évoluer les états interpolés du premier et les vecteurs de la base du deuxième. Ces deux filtres restent donc chers pour une océanographie

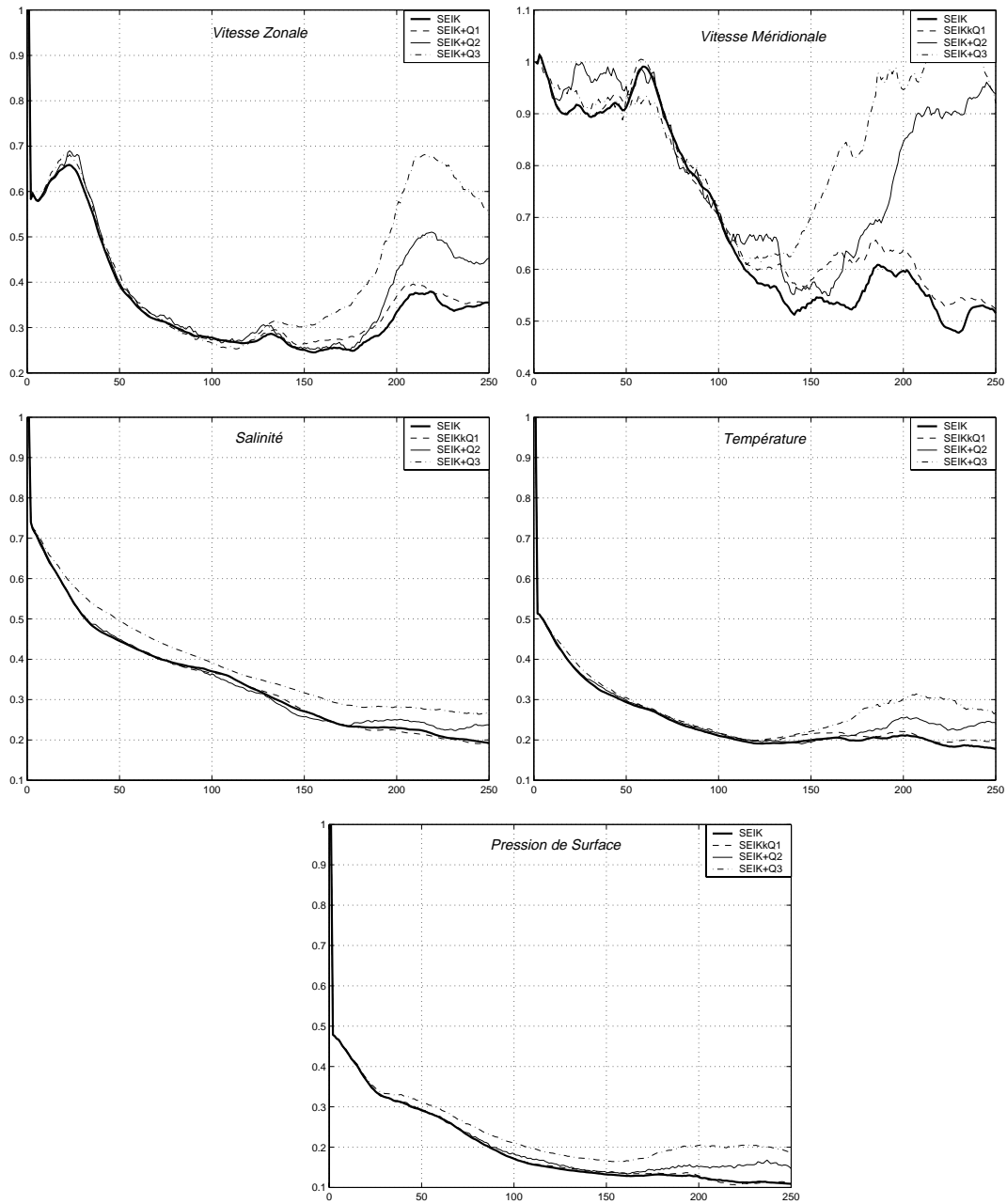


FIG. 5.3 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre SEIK avec et sans erreur du modèle

opérationnelle. La réduction des coûts de calcul des filtres SEEK et SEIK sera largement discutée dans le chapitre suivant.

Comme les résultats du filtre SEIK ont été supérieurs à ceux du filtre SEEK, nous considérerons dans la suite le filtre SEIK comme une référence pour comparer les performances de tous les nouveaux filtres que nous allons développer dans les chapitres suivants. Notre premier but est alors de construire des variantes du filtre SEEK ou SEIK aussi performantes que ce dernier mais avec un coût beaucoup plus faible.

## Chapitre 6

# Réduction des coûts des filtres SEEK et SEIK

### 6.1 Introduction

Les filtres SEEK et SEIK ont été implémentés et testés avec succès dans plusieurs configurations réalistes. Cependant, malgré la réduction considérable des coûts de calcul par rapport au filtre de Kalman, ces deux filtres restent relativement chers pour une océanographie opérationnelle. En effet, les coûts de ces deux filtres vérifient

$$\text{Coût } SEEK \approx \text{Coût } SEIK \gtrsim (r + 1) * \{\text{Coût modèle}\}. \quad (6.1)$$

Dans ce chapitre, nous allons développer plusieurs formes dégradées des filtres SEEK et SEIK qui sont moins coûteuses mais aussi performantes. Notre approche consiste essentiellement à simplifier l'évolution de leur base de correction, qui est bien évidemment le seul moyen qui nous permet de réduire sensiblement les coûts de ces deux filtres.

*Brasseur et al.* [14] ont été les premiers à suivre cette approche en proposant de garder la base de correction initiale du filtre SEEK, calculée par une analyse EOFs, fixe dans le temps. Cependant, nous avons remarqué dans nos expériences que le filtre ainsi obtenu peut présenter des instabilités lors du passage du modèle dans une période instable. En effet, les EOFs qui forment sa base de correction ne captent, en général, que la variabilité globale de l'état du modèle. Ainsi, comme ce filtre ne fait pas évoluer sa base de correction pour suivre la dynamique du modèle, sa correction ne sera plus efficace lors des instabilités du modèle. Ici, nous allons construire des variantes des filtres SEEK et SEIK dans lesquelles nous allons laisser la base de correction évoluer, d'une manière ou d'une autre, mais avec un coût raisonnable dans le temps, pour suivre la dynamique du modèle.

### 6.2 Filtre de Kalman singulier à base fixe

Après avoir remarqué dans les simulations numériques que l'erreur d'estimation initiale a été considérablement réduite après la première correction i.e., avant même que la base de correction ait évolué, *Brasseur et al.* [14] ont proposé de garder la base de correction du filtre SEEK fixe dans le temps. Le filtre ainsi obtenu, appelé filtre de Kalman singulier à base fixe (SFEK), consiste donc à appliquer la correction du filtre de Kalman uniquement dans les directions parallèles aux EOFs. Ce filtre peut être justifié par le fait que l'état de l'océan évolue



très lentement dans le temps, ceci nous permet de supposer que l'opérateur de transition du modèle est proche de l'identité et donc de considérer

$$\mathbf{M}(t_k, t_{k-1}) \approx I_d. \quad (6.2)$$

En reportant cette hypothèse dans l'équation d'évolution de la base de correction du filtre SEEK (4.10),  $L_k$  va rester fixe égale à  $L_0$ . Ce nouveau filtre opère donc en deux étapes, après une étape d'initialisation, exactement comme le filtre SEEK mais sans l'équation (4.10) d'évolution de la base de correction.

- 1- Étape de prévision :** La base de correction étant fixe, on utilise le modèle uniquement pour calculer la prévision de l'état

$$X^f(t_k) = M(t_k, t_{k-1})X^a(t_k). \quad (6.3)$$

- 2- Étape de correction :** La correction de l'état prévu se fait comme dans le filtre SEEK mais toujours dans les directions de  $L_0$  i.e.

$$X^a(t_k) = X^f(t_k) + L_0 U_k L_0^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1} [Y_k - H_k X^f(t_k)]. \quad (6.4)$$

La mise à jour de la matrice  $U_k$  est alors effectuée par la formule

$$U_k^{-1} = U_{k-1}^{-1} + L_0^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1} \mathbf{H}_k L_0. \quad (6.5)$$

Les résultats de ce filtre dépendent surtout de la représentativité de sa base de correction. Il donne des bons résultats si cette dernière représente suffisamment bien la variabilité du modèle. Cependant, les premières EOFs ne captent en général que la variabilité à longue portée du modèle. La performance de ce filtre peut donc se dégrader sérieusement durant les périodes instables du modèle.

Le coût d'implémentation du filtre SFEK, qui est bien évidemment  $r$  fois moins cher que celui du filtre SEEK, le rend particulièrement intéressant en pratique. Il constitue ainsi un très bon moyen pour mesurer la représentativité de la base des EOFs initiale. Il peut aussi être utilisé pour fixer les valeurs des paramètres du filtre SEEK comme la dimension  $r$  de la base de correction et le facteur d'oubli.

### Statistiques des erreurs

L'erreur d'observation peut être traitée exactement comme dans le filtre SEEK. En ce qui concerne l'erreur du modèle, on peut toujours la projeter sur la base de correction comme dans le filtre SEEK. Cependant, rien n'assure que la variabilité de l'erreur du modèle soit contenue dans les EOFs. Une façon de faire est d'appliquer une analyse EOFs sur un ensemble de vecteurs d'état entachés d'erreurs du modèle dans le but de résumer aussi la variabilité de l'erreur du modèle dans la base des EOFs.

Une autre façon de traiter l'erreur du modèle par le filtre SFEK, sous l'hypothèse que l'erreur du modèle admet une base de représentation  $N$  fixe de dimension  $r'$  i.e.  $Q(t_k) = N B_k N^T$  où  $N$  et  $B_k$  sont des matrices de taille  $n \times r'$  et  $r' \times r'$  respectivement (L'existence et le calcul

d'une telle base à été abordé par [25, 29, 61]), est de construire une base de correction résolvant la variabilité des erreurs d'estimation et du modèle.

En effet, sous cette hypothèse, on peut décomposer la matrice de covariance de l'erreur du modèle à l'instant  $t_1$  selon

$$Q(t_1) = NB_1N^T \quad (6.6)$$

où  $B_1$  est une matrice  $r' \times r'$ . Dans ce cas, la matrice de covariance de l'erreur de prévision du filtre SFEK à cet instant est donnée par

$$P^f(t_1) = L_0U_0L_0^T + NB_1N^T \quad (6.7)$$

qu'on peut toujours écrire sous la forme

$$P^f(t_1) = [L_0 \ N] \tilde{U}_1 \begin{bmatrix} L_0^T \\ N^T \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

avec

$$\tilde{U}_1 = \begin{bmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Après correction de l'état prévu dans les directions de la nouvelle base de correction  $[L_0 \ N]$ , la matrice de covariance de l'erreur d'analyse  $P^a(t_1)$  sera alors toujours de la forme

$$P^a(t_1) = [L_0 \ N] U_1 \begin{bmatrix} L_0^T \\ N^T \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

mais avec maintenant  $U_1$  une matrice  $(r + r') \times (r + r')$  calculée à partir de l'équation

$$U_1^{-1} = \tilde{U}_1^{-1} + \mathbf{H}_1^T \begin{bmatrix} L_0^T \\ N^T \end{bmatrix} R_1^{-1} \mathbf{H}_1 [L_0 \ N]. \quad (6.11)$$

L'erreur de prévision à l'instant  $t_2$  est alors donnée par

$$P^f(t_2) = [L_0 \ N] U_1 \begin{bmatrix} L_0^T \\ N^T \end{bmatrix} + NB_2N^T = [L_0 \ N] \tilde{U}_2 \begin{bmatrix} L_0^T \\ N^T \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

avec

$$\tilde{U}_2 = U_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

En procédant comme précédemment, on peut voir facilement que les matrices de covariance de l'erreur de prévision et d'analyse du filtre SFEK vont évoluer d'une manière récursive de la manière suivante

$$P^a(t_{k-1}) = [L_0 \ N] U_{k-1} \begin{bmatrix} L_0^T \\ N^T \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

$$U_{k-1}^{-1} = \tilde{U}_{k-1}^{-1} + \mathbf{H}_{k-1}^T \begin{bmatrix} L_0^T \\ N^T \end{bmatrix} R_{k-1}^{-1} \mathbf{H}_{k-1} [L_0 \ N], \quad (6.15)$$

$$P^f(t_k) = [L_0 \ N] \tilde{U}_k^{-1} \begin{bmatrix} L_0^T \\ N^T \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

$$\tilde{U}_k = U_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

On en déduit alors que les équations du filtre SFEK restent inchangées dans ce cas, seule l'équation de mise à jour de la matrice  $U_k$  change.

### 6.3 Filtre de Kalman singulier à base asymptotique

Un moyen efficace pour réduire les coûts des filtres SEEK et SEIK est d'utiliser la fameuse propriété de convergence du filtre de Kalman vers le régime permanent (voir paragraphe 3.2), à savoir : la matrice de covariance de l'erreur de filtrage  $P^a(t_k)$  converge très rapidement vers une matrice constante. Ainsi, on peut considérer qu'après un certain temps, la base de correction des filtres SEEK (ou SEIK) reste constante. On peut ainsi construire un nouveau filtre, appelé filtre de Kalman étendu (ou interpolé) singulier à base asymptotique et noté SAEK (ou SAIK), qui opère exactement comme le filtre SEEK (ou SEIK) durant les premiers pas de filtrage et comme le filtre SFEK après.

Cependant, cette propriété, valable dans le cas d'un modèle linéaire et autonome (voir paragraphe 3.2), ne peut pas être appliquée aux modèles océaniques qui sont en général non-linéaires. Cela dit, rien n'indique que le filtre de Kalman ne va pas converger vers un régime fixe, car ce n'est qu'une condition suffisante. Le seul moyen de vérifier la convergence est d'implémenter numériquement ce filtre et de comparer ses résultats à ceux du filtre SEEK (ou SEIK).

En ce qui concerne le coût, ce filtre peut être beaucoup moins coûteux que le filtre SEEK car sa base de correction reste fixe après une période d'initialisation (de 20 – 50 pas par exemple) avec ce dernier (ou avec le filtre SEIK) .

### 6.4 Filtre de Kalman singulier à base évolutive par intermittence

Dans le cas non-linéaire mais presque-linéaire (et toujours autonome), on peut s'attendre à ce que la matrice de covariance de l'erreur d'analyse  $P^a(t_k)$  tende très vite vers un régime "semi-fixe" dans lequel elle évolue lentement. Dans ce cas, la base de correction va aussi évoluer lentement. Nous proposons alors de faire évoluer cette base selon deux régimes, après une période d'initialisation avec le filtre SEEK (ou SEIK).

- **Régime fixe :** On garde les matrices  $L_k$  et  $U_k$  fixes dans le temps. Le tirage des états interpolés ne sera plus effectué. Les étapes de prévision et de correction se font alors exactement comme dans le filtre SFEK en utilisant les dernières valeurs de ces matrices.
- **Régime de rattrapage :** Après un certain temps dans le régime fixe (2 – 10 pas par exemple) les matrices  $L_k$  et  $U_k$  ne sont plus ce qu'elles devraient être pour une correction plus ou moins optimale. Il faut donc redémarrer le filtre SEEK (ou SEIK) pour ramener ces matrices au régime semi-fixe. Concrètement, on revient à l'étape de démarrage, en partant toutefois des dernières matrices  $L_k$  et  $U_k$ .

On obtient ainsi une nouvelle variante du filtre SEEK appelée filtre SIEEK (et SIEIK dans le cadre du filtre SEIK). Ce filtre peut être beaucoup moins coûteux que le filtre SEEK (ou SEIK) du moment où le régime de rattrapage peut être assez court (1 – 2 pas par exemple). Par exemple, si on laisse la base de correction évoluer une fois tous les  $K$  pas de temps, ce filtre est à peu près  $K$  fois plus rapide que le filtre SEEK (ou SEIK).

## 6.5 Evolution de la base sur une grille grossière

Une autre approche pour réduire les coûts des filtres SEEK et SEIK est de faire évoluer les vecteurs de la base de correction sur une grille plus grossière que celle du modèle. Cela réduit non seulement le temps de calcul mais aussi le coût de stockage de la base. L'estimation de l'état se fait toujours sur la grille d'origine.

Cette approche a déjà été testée avec succès pour faire évoluer la matrice de covariance de l'erreur d'estimation du filtre de Kalman par *Cohn and Tolding* [20] et *Fukumori and Malanotte-Rizzoli* [41]. De plus, *Curi et al.* [22] ont montré qu'on peut utiliser plusieurs discrétisations spatiales pour les différentes équations d'un système continu.

Une façon intéressante serait de considérer une grille adaptative (voir *Debreu* [26]). Nous pourrions aussi utiliser une approche multirésolution en adaptant le filtrage de Kalman sur les arbres pour propager les informations à travers les grilles de différentes résolutions [38, 39]. Cette approche n'a pas été étudiée dans cette thèse mais pourrait être envisagée dans un travail ultérieur.

## 6.6 Filtres de Kalman singulier à base semi-évolutive

L'idée principale de ce filtre consiste à ne faire évoluer qu'une partie de la base de correction et à garder l'autre partie fixe dans le temps. Nous présentons deux versions de ce filtre, appelé filtre SSEEK (et SSEIK dans le cadre du filtre SEIK) qui diffèrent selon le choix des vecteurs de base qu'on laisse évoluer. A noter que la première version sera uniquement construite dans le cadre du filtre SEEK faute de ne pas pouvoir la formuler dans le cadre du filtre SEIK.

Le coût de ce filtre dépend bien évidemment du choix du nombre des vecteurs de base qui évoluent. Si on désigne par  $r_1$  ce dernier, ce filtre peut être presque  $(r+1)/(r_1+1)$  fois plus rapide que les filtres SEEK et SEIK.

A noter que l'erreur d'observation peut être traitée exactement comme dans le SEEK (ou SEIK), tandis que le seul moyen de considérer l'erreur du modèle est de la projeter sur la base de correction.

### 6.6.1 Première version

On sait que les premières EOFs captent la plupart de la variabilité du modèle. Par ailleurs, la variabilité contenue dans les dernières EOFs peut être assez faible. On peut alors estimer que les premières EOFs sont bien plus stables que les dernières. D'où l'idée de ce filtre qui consiste à garder les  $r_0$  premières EOFs fixes dans le temps et à ne faire évoluer que les  $r_1 = r - r_0$  derniers vecteurs de la base.

Le filtre ainsi obtenu opère en deux étapes, après une étape d'initialisation, comme le filtre SEEK. Cependant et pour des raisons de stabilité numérique, nous proposons de normaliser, à chaque pas de filtrage, les vecteurs de la base qui évoluent pour éviter que leurs normes ne deviennent trop grandes par rapport à celles des vecteurs qui restent fixes. Pour cela, il faut diviser les vecteurs qui évoluent par une constante appropriée, et à chaque fois qu'on fait

cela, on doit diviser la ligne et la colonne de  $U_k$  de même indice que ces vecteurs par la même constante. Le but de cette manoeuvre est de garder la décomposition de  $P^a(t_k)$  sous la forme  $L_k U_k L_k^T$ .

**1- Etape de prévision :** On utilise le modèle (3.1) pour prévoir l'état du système

$$X^f(t_k) = M(t_k, t_{k-1})X^a(t_{k-1}) \quad (6.18)$$

et pour mettre à jour la partie qui évolue de la base de correction i.e.

$$L_k = [L_0^{r_0} \quad \vdots \quad \mathbf{M}(t_k, t_{k-1})L_{k-1}^{r_1}], \quad (6.19)$$

où  $L_0^{r_0}$  et  $L_{k-1}^{r_1}$  contiennent les premières  $r_0$  EOFs et les dernières  $r_1$  colonnes de  $L_{k-1}$  respectivement.

Finalement, pour normaliser les vecteurs de base qui évoluent pour que leurs normes soient égales à une constante donnée  $c$ , on remplace le  $j^{\text{ème}}$  vecteur de  $L_k^{r_1}$  par le vecteur  $(c/\|L_k^{r_1, j}\|)L_k^{r_1, j}$  et on multiplie ensuite la  $j^{\text{ème}}$  colonne et la  $j^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $U_{k-1}$  par  $c/\|L_k^{r_1, j}\|$ .

**2- Etape de correction :** La nouvelle observation  $Y_k^o$  à l'instant  $t_k$  est utilisée pour corriger l'état prévu selon

$$X^a(t_k) = X^f(t_k) + G_k[Y_k^o - H_k X^f(t_k)], \quad (6.20)$$

où  $G_k$  est la matrice de gain donnée par

$$G_k = L_k U_k L_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1}, \quad (6.21)$$

et la matrice  $U_k$  est toujours calculée à partir de la formule

$$U_k^{-1} = U_{k-1}^{-1} + L_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1} \mathbf{H}_k L_k. \quad (6.22)$$

En ce qui concerne le choix de la norme des vecteurs qui évoluent, on peut la moduler en fonction des erreurs de filtrage. A cet égard, nous estimons que la racine carrée de la moyenne des normes des EOFs (qui sont égales aux valeurs propres associées) constitue un bon choix.

### 6.6.2 Deuxième version

L'idée de ce filtre consiste essentiellement à garder fixe la partie de la base qui contribue le moins à la représentation de l'erreur, dans le but de réduire l'effet de la garder fixe. Pour cela, partons de la décomposition de la matrice de covariance de l'erreur d'analyse à l'instant  $t_k$  sous la forme

$$P^a(t_{k-1}) = L_{k-1} U_{k-1} L_{k-1}^T. \quad (6.23)$$

En décomposant  $U_{k-1}^{-1}$  par la méthode de Cholesky selon  $C_{k-1} C_{k-1}^T$ , on peut représenter  $P^a(t_{k-1})$  comme

$$P^a(t_{k-1}) = L_{k-1} (C_{k-1}^{-1})^T \Theta_{k-1} \Theta_{k-1}^T C_{k-1}^{-1} L_{k-1}^T = \tilde{L}_{k-1} \tilde{L}_{k-1}^T, \quad (6.24)$$

où la nouvelle base de correction  $\tilde{L}_{k-1}$  est définie par

$$\tilde{L}_{k-1} = L_{k-1}(C_{k-1}^{-1})^T \Theta_{k-1} \quad (6.25)$$

et ceci pour toute matrice carrée orthogonale  $\Theta_{k-1}$ .

Cette décomposition est valable pour toute matrice orthogonale  $\Theta_{k-1}$ , on peut alors choisir  $\Theta_{k-1}$  de manière à ce que les colonnes de  $\tilde{L}_{k-1}$  soient orthogonales et rangées dans l'ordre croissant de leurs normes, et ceci selon une métrique donnée  $\mathcal{M}$  dans l'espace d'état. On peut donc décomposer la matrice de covariance de l'erreur d'analyse en deux parties

$$P^a(t_{k-1}) = \tilde{L}_{k-1}^{r_0} \tilde{L}_{k-1}^{r_0 T} + \tilde{L}_{k-1}^{r_1} \tilde{L}_{k-1}^{r_1 T} \quad (6.26)$$

où  $\tilde{L}_{k-1}^{r_0}$  et  $\tilde{L}_{k-1}^{r_1}$  contiennent les premières  $r_0$  et dernières  $r_1 = r - r_0$  colonnes de la base  $\tilde{L}_{k-1}$ . Nous proposons alors de faire évoluer uniquement la deuxième partie de la matrice de covariance de l'erreur, à savoir  $\tilde{L}_{k-1}^{r_1} \tilde{L}_{k-1}^{r_1 T}$ , avec l'équation d'évolution de la base du filtre SEEK (ou SEIK).

Reste à trouver une matrice  $\Theta_{k-1}$  qui vérifie les conditions précédentes, à savoir les colonnes de la matrice  $\tilde{L}_{k-1}$  sont orthogonales entre elles et rangées dans l'ordre croissant de leurs normes selon une métrique  $\mathcal{M}$ . Pour cela, il suffit de prendre comme  $\Theta_{k-1}$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de la matrice

$$[C_{k-1}^{-1} L_{k-1}^T] \mathcal{M} [C_{k-1}^{-1} L_{k-1}^T]^T \quad (6.27)$$

rangés dans l'ordre croissant selon leurs valeurs propres. En effet, si on choisit  $\Theta_{k-1}$  comme précédemment, il existe une matrice diagonale  $\Lambda$  contenant les valeurs propres de la matrice  $[C_{k-1}^{-1} L_{k-1}^T] \mathcal{M} [C_{k-1}^{-1} L_{k-1}^T]^T$  rangées dans l'ordre croissant sur sa diagonale qui vérifie

$$\Theta_{k-1}^T [C_{k-1}^{-1} L_{k-1}^T] \mathcal{M} [C_{k-1}^{-1} L_{k-1}^T]^T \Theta_{k-1} = \Lambda. \quad (6.28)$$

Puis, par définition de  $\tilde{L}_{k-1}$ , on peut écrire

$$\tilde{L}_{k-1}^T \mathcal{M} \tilde{L}_{k-1} = \Lambda, \quad (6.29)$$

ce qui montre que les colonnes de  $\tilde{L}_{k-1}$  sont  $\mathcal{M}$ -orthogonales entre elles et de normes égales aux valeurs propres de la matrice  $[C_{k-1}^{-1} L_{k-1}^T] \mathcal{M} [C_{k-1}^{-1} L_{k-1}^T]^T$  qui ont été, par définition, rangées dans l'ordre croissant.

#### • Dans le cadre du filtre SEEK

Ce filtre opère en deux étapes après une étape d'initialisation, comme suit.

- 1- **Étape de prévision :** Comme dans le filtre SEEK, on utilise le modèle pour calculer l'état prévu à l'instant  $t_k$ . D'après notre discussion précédente, on va faire évoluer uniquement les  $r_1$  derniers vecteurs de la nouvelle base  $\tilde{L}_k$  par l'équation du SEEK i.e.

$$L_{k,j} = \begin{cases} \tilde{L}_{k-1,j} & \text{pour } j = 1, \dots, r_0 \\ \mathbf{M}(t_k, t_{k-1}) \tilde{L}_{k-1,j} & \text{pour } j = r_0 + 1, \dots, r. \end{cases} \quad (6.30)$$

**1- Etape de correction :** L'étape de correction de ce filtre se fait alors comme dans le filtre SEEK par

$$X^a(t_k) = X^f(t_k) + G_k[Y_k^o - H_k X^f(t_k)], \quad (6.31)$$

où  $G_k$  est la matrice de gain donnée par

$$G_k = L_k U_k L_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1}, \quad (6.32)$$

mais la matrice  $U_k$  est maintenant mise à jour par la formule

$$U_k^{-1} = I_d + L_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1} \mathbf{H}_k L_k. \quad (6.33)$$

Cette formule est due à la nouvelle factorisation de  $P^a(t_k)$  selon (6.24).

• **Dans le cadre du filtre SEIK**

On considère la matrice  $\tilde{L}_k$  comme précédemment, c'est à dire de sorte que

$$P^a(t_{k-1}) = \tilde{L}_{k-1}^{r_0} \tilde{L}_{k-1}^{r_0 T} + \tilde{L}_{k-1}^{r_1} \tilde{L}_{k-1}^{r_1 T} \quad (6.34)$$

Le but étant de faire évoluer uniquement la partie  $\tilde{L}_k^{r_1} \tilde{L}_k^{r_1 T}$  de la base de correction comme dans le filtre SEIK, on va tirer seulement  $r_1 + 1$  états interpolés  $X_j^a(t_k)$  qui vérifient

$$X^a(t_{k-1}) = \frac{1}{r_1 + 1} \sum_{j=1}^{r_1+1} X_j^a(t_{k-1}), \quad (6.35)$$

$$\tilde{L}_{k-1}^{r_1} \tilde{L}_{k-1}^{r_1 T} = \frac{1}{r_1 + 1} \sum_{j=1}^{r_1+1} [X_j^a(t_{k-1}) - X^a(t_{k-1})][X_j^a(t_{k-1}) - X^a(t_{k-1})]^T. \quad (6.36)$$

Selon ce choix, l'implémentation de ce filtre dans le cadre du filtre SEIK se fait toujours en trois étapes après un étape d'initialisation, comme suit.

**1- Tirage des états interpolés :** Après avoir tiré une matrice aléatoire  $\Omega_{k-1}$  de dimension  $(r_1 + 1) \times r_1$  dont les colonnes sont des vecteurs orthonormés dans  $\mathbb{R}^{r_1+1}$  orthogonaux au vecteurs  $(1, \dots, 1)^T$ , on construit les  $r_1$  états interpolés  $X_j^a(t_{k-1})$  de ce filtre comme dans le filtre SEIK. Seules les matrices  $L_{k-1}$  et  $C_{k-1}$  sont remplacées par  $\tilde{L}_{k-1}^{r_1}$  et la matrice identité respectivement i.e.

$$X_j^a(t_{k-1}) = X^a(t_{k-1}) + \sqrt{r_1 + 1} \tilde{L}_{k-1}^{r_1} \Omega_{k-1,j}^T \quad \text{pour } j = 1, \dots, r_1 + 1 \quad (6.37)$$

où  $\Omega_{k-1,j}$  désigne la  $j^{\text{ème}}$  ligne de  $\Omega_{k-1}$ .

Si on pose maintenant

$$\check{L}_k = \left[ \tilde{L}_{k,1} \cdots \tilde{L}_{k,r_0}, [X_1^a(t_k) \cdots X_{r_1+1}^a(t_k)]^T \right], \quad (6.38)$$

où  $T$  est la même matrice que dans le SEIK donnée par (5.12) mais avec  $r_1$  à la place de  $r$ , la matrice de covariance de l'erreur d'analyse peut s'écrire comme

$$P^a(t_k) = \check{L}_k \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & (r_1 + 1)T^T T \end{bmatrix}^{-1} \check{L}_k^T. \quad (6.39)$$

A noter que la matrice  $(r_1 + 1)T^T T$  contient  $r_1 + 1$  sur sa diagonale et  $-1$  ailleurs.

**2- Etape de prévision :** On applique l'opérateur de transition  $M(t_k, t_{k-1})$  sur les états interpolés  $X_j^a(t_{k-1})$  pour les ramener aux états  $X_j^f(t_k)$  à l'instant  $t_k$ , c'est à dire

$$X_j^f(t_k) = M(t_k, t_{k-1})X_j^a(t_{k-1}) \quad \text{pour } j = 1, \dots, r_1 + 1. \quad (6.40)$$

On prend alors comme état prévu  $X^f(t_k)$  le barycentre des états interpolés prévus  $X_j^f(t_k)$  et on approche la matrice de covariance de l'erreur de prévision par la matrice

$$P^f(t_k) \approx \tilde{L}_k^{r_0} \tilde{L}_k^{r_0 T} + \frac{1}{r_1 + 1} \sum_{j=1}^{r_1+1} [X_j^f(t_k) - X^f(t_k)][X_j^f(t_k) - X^f(t_k)]^T \quad (6.41)$$

qu'on peut toujours représenter sous la forme

$$P^f(t_k) = L_k \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & (r_1 + 1)T^T T \end{bmatrix}^{-1} L_k^T \quad (6.42)$$

avec la nouvelle base de correction

$$L_k = \left[ \tilde{L}_{k-1,1} \cdots \tilde{L}_{k-1,r_0}, [X_1^f(t_k) \cdots X_{r_1+1}^f(t_k)]T \right]. \quad (6.43)$$

**3- Etape de correction :** D'après la nouvelle forme de  $P^f(t_k)$ , la mise à jour de la matrice  $U_k$  se fait par la formule

$$U_k^{-1} = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & (r_1 + 1)T^T T \end{bmatrix} + (HL)_k^T R_k^{-1} (HL)_k, \quad (6.44)$$

où

$$(HL)_k = \left[ H_k \tilde{L}_{k-1,1} \cdots H_k \tilde{L}_{k-1,r_0}, [H_k X_1^f(t_k) \cdots H_k X_{r_1+1}^f(t_k)]T \right]. \quad (6.45)$$

Reste à corriger le vecteur de prévision par la même formule de correction que le filtre SEIK, à savoir

$$X^a(t_k) = X^f(t_k) + L_k U_k (HL)_k^T R_k^{-1} [Y_k^o - H_k X^f(t_k)]. \quad (6.46)$$

La matrice de covariance des erreurs d'analyse est alors donnée par

$$P^a(t_k) = L_k U_k^{-1} L_k^T, \quad (6.47)$$

ce qui nous permet d'enchaîner à l'étape de tirage suivante.

On note finalement que les formules (6.39), (6.42) et (6.47) servent uniquement à justifier les calculs précédents et que l'algorithme du filtre ne nécessite en aucun cas le calcul de  $P^a(t_k)$  et  $P^f(t_k)$ .

## 6.7 Doublement de la base de correction

Dans ce paragraphe, nous allons présenter une nouvelle méthode qui va nous permettre de "doubler" la dimension de la base de correction  $r$  des filtres SEEK et SEIK sans vraiment augmenter leurs coûts de calcul. Notre idée consiste à ajouter à la base de correction les vecteurs vitesse des trajectoires du système.



### 6.7.1 Etude préliminaire

Plaçons-nous tout d'abord dans un cadre général. Considérons alors un vecteur d'état  $X(t)$  régi par un système différentiel

$$\frac{dX}{dt} = F(X(t), t). \quad (6.48)$$

qu'on suppose quasi-autonome au sens où le gradient de  $F(\cdot, t)$ , noté  $\mathbf{F}(\cdot)$ , est indépendant de  $t$  (ce qui est équivalent à dire que  $F(X(t), t)$  est la somme d'une fonction de  $X$  et d'une fonction de  $t$ ). On note aussi par  $M(t_k, t_{k-1})$  l'opérateur de transition du système précédent de l'instant  $t_{k-1}$  à  $t_k$ .

Rappelons que le  $j^{\text{ème}}$  vecteur  $L_{k,j}$  de la base de correction  $L_k$  du filtre SEEK évolue selon la formule

$$L_{k,j} = \mathbf{M}(t_k, t_{k-1})L_{k-1,j} \quad (6.49)$$

où  $\mathbf{M}(t_k, t_{k-1})$  désigne le gradient de  $M(t_k, t_{k-1})$  évalué au point  $X^a(t_k)$ . Ce gradient est tel que la fonction vectorielle  $v$  définie par

$$v(t) = \mathbf{M}(t, t_{k-1})L_{k-1,j}, \quad (6.50)$$

est solution du système différentiel

$$\begin{cases} dv/dt &= \mathbf{F}(X^a(t_{k-1}))v(t) \\ v(t_{k-1}) &= L_{k-1,j}. \end{cases} \quad (6.51)$$

On pose maintenant  $v_h(t) = v(t+h)$ , on a

$$d\left(\frac{v_h - v}{h}\right)/dt = \frac{\mathbf{F}(X^a(t+h)) - \mathbf{F}(X^a(t))}{h}v_h(t) + \mathbf{F}(X^a(t))\frac{v_h(t) - v(t)}{h}. \quad (6.52)$$

Si le modèle est presque linéaire, cela signifie que le terme  $\mathbf{F}(X^a(t_{k-1}))$  varie très peu avec  $t$ . On peut alors estimer que le premier terme de l'équation (6.52) est négligeable par rapport au deuxième pour des valeurs de  $h$  assez petites. On peut donc écrire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(v_h - v)/h}{dt} \approx \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{F}(X^a(t_{k-1}))\frac{v_h(t) - v(t)}{h}, \quad (6.53)$$

ce qui est équivalent à dire que la limite  $\mathbf{v}$  de  $(v_h - v)/h$  quand  $h$  tend vers zéro est solution du système

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx \mathbf{F}(X^a(t_{k-1}))\mathbf{v}. \quad (6.54)$$

Il s'en suit

$$\mathbf{v}(t_k) \approx \mathbf{M}(t_k, t_{k-1})\mathbf{v}(t_{k-1}). \quad (6.55)$$

Comme, par construction,  $\mathbf{v}(t_{k-1})$  et  $\mathbf{v}(t_k)$  ne sont autres que  $\mathbf{F}(X^a(t_{k-1}))L_{k-1,j}$  et  $\mathbf{F}(X^a(t_k))L_{k,j}$  respectivement, l'équation précédente est donc équivalente à

$$\mathbf{F}(X^a(t_k))L_{k,j} \approx \mathbf{M}(t_k, t_{k-1})\mathbf{F}(X^a(t_{k-1}))L_{k-1,j}. \quad (6.56)$$

On reconnaît dans la dernière équation la formule l'équation d'évolution de la base de correction du filtre SEEK mais avec  $\mathbf{F}(X^a(t))L_{.,i}$  à la place de  $L_{.,i}$ . Ainsi, si  $\mathbf{F}(X^a(t_{k-1}))L_{k-1,j}$  était un vecteur de la base de correction à l'instant  $t_{k-1}$  alors  $\mathbf{F}(X^a(t_k))L_{k,j}$  le serait aussi à l'instant  $t_k$ . Cette remarque va nous permettre de "doubler" la dimension de la base de correction des filtres SEEK et SEIK sans vraiment augmenter leurs coûts de calcul. En effet, si on initialise la base de correction des ces filtres par la matrice

$$\bar{L}_0 = \left[ L_{0,1} \cdots L_{0,r}, \mathbf{F}(X^a(t_0))L_{0,1} \cdots \mathbf{F}(X^a(t_0))L_{0,r} \right], \quad (6.57)$$

la base de correction à l'instant  $t_k$  peut être approchée par la matrice

$$\bar{L}_k = \left[ L_{k,1} \cdots L_{k,r}, \mathbf{F}(X^a(t_k))L_{k,1} \cdots \mathbf{F}(X^a(t_k))L_{k,r} \right] \quad (6.58)$$

où  $L_0$  est la base des EOFs et  $L_k$  évoluent récursivement comme dans les filtres SEEK et SEIK. Donc, pour calculer la base de correction à l'instant  $t_k$ , on a seulement à calculer ses  $r$  premières colonnes et ensuite à déduire ses  $r$  dernières colonnes à partir des dernières via la multiplication par la matrice  $\mathbf{F}(X^a(t_k))$ .

Comme dans les paragraphes précédents, on va commencer par présenter ce nouveau filtre, appelé filtre de Kalman singulier à base double, dans le cadre du filtre SEEK, appelé SDEEK, avant de développer sa version interpolée appelée SDEIK.

### 6.7.2 Dans le cadre du filtre SEEK

Le filtre SDEEK opère en deux étapes, après une étape d'initialisation, comme le filtre SEEK. Seule l'évolution de la deuxième moitié de la base de correction  $L_k$  change et elle sera remplacée par (6.56). A noter que la dimension de la base de correction, après l'avoir doublée, devient égale à  $2r$ .

- *Initialisation* : On suppose qu'on possède une estimation  $X_0$  de l'état à l'instant initial  $t_0$  et la matrice de covariance de l'erreur associée  $P_0$  approchée, à l'aide d'une analyse EOFs, par une matrice de rang  $r$  selon  $P_0 = L_0 U_{-1} L_0^T$  (où  $L_0$  est de taille  $n \times r$ ). On double tout d'abord la matrice  $L_0$  en lui rajoutant, pour  $j = 1, \dots, r$ , les vecteurs  $\mathbf{F}(X^a(t_0))L_{0,j}$  afin d'obtenir la matrice  $\bar{L}_0$  de taille  $n \times 2r$ . La première correction se fait alors par une analyse objective comme dans le filtre SEEK, à savoir par l'équation

$$X^a(t_0) = X_0 + \bar{L}_0 \bar{U}_0 \bar{L}_0^T \mathbf{H}_0^T R_0^{-1} [Y_0^o - H_0 X_0] \quad (6.59)$$

où

$$\bar{U}_0^{-1} = \bar{L}_0^T \mathbf{H}_0^T R_0^{-1} \mathbf{H}_0 \bar{L}_0. \quad (6.60)$$

Selon ce choix, on peut prendre la matrice de covariance de l'erreur d'analyse initiale comme

$$P^a(t_0) = \bar{L}_0 \bar{U}_0 \bar{L}_0^T. \quad (6.61)$$

**1- Etape de prévision** : On utilise le modèle pour calculer l'état prévu

$$X^f(t_k) = M(t_k, t_{k-1}) X^a(t_{k-1}) \quad (6.62)$$

et faire évoluer les  $r$  premiers vecteurs de la base de correction  $L_k$  selon

$$\bar{L}_{k,j} = \mathbf{M}(t_k, t_{k-1}) \bar{L}_{k-1,j} \quad \text{pour } j = 1, \dots, r. \quad (6.63)$$

Ensuite, on calcule la deuxième moitié de la base à partir de la première par la formule

$$\bar{L}_{k,r+j} = \mathbf{F}(X^a(t_{k-1})) L_{k,j} \quad \text{pour } j = 1, \dots, r. \quad (6.64)$$

**1- Etape de correction :** L'étape de correction de ce filtre est identique à celle du filtre SEEK. Ainsi,

$$X^a(t_k) = X^f(t_k) + G_k [Y_k^o - H_k X^f(t_k)], \quad (6.65)$$

où  $G_k$  est la matrice de gain donnée par

$$G_k = \bar{L}_k \bar{U}_k \bar{L}_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1} \quad (6.66)$$

et la matrice  $\bar{U}_k$  toujours mise à jour par la formule

$$\bar{U}_k^{-1} = \bar{U}_{k-1}^{-1} + \bar{L}_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1} \mathbf{H}_k \bar{L}_k. \quad (6.67)$$

En pratique, on calcule  $\mathbf{F}(X^a(t_k)) L_{k,j}$  par la formule approchée

$$\mathbf{F}(X(t_k)) L_{k,j} = \frac{1}{\alpha} \left[ F(X(t_k) + \alpha L_{k,j}, t_k) - F(X(t_k), t_k) \right], \quad (6.68)$$

où  $\alpha$  est une constante adéquatement choisie. Par ailleurs,  $F(X(t_k), t_k)$  peut être obtenu à partir de la discrétisation temporelle du système (6.48) selon le schéma d'Euler, à savoir

$$F(X(t), t) = \frac{1}{\delta} \left[ M(t + \delta, t) X(t) - X(t) \right], \quad (6.69)$$

où  $\delta$  est le pas de temps du code numérique.

### 6.7.3 Dans le cadre du filtre SEIK

Nous allons présenter maintenant la version interpolée de ce filtre, appelée filtre SDEIK. Elle consiste en trois étapes comme dans le filtre SEIK à la suite d'une étape d'initialisation.

– *Initialisation :* Comme précédemment, on démarre à l'instant initial  $t_0$  de  $X_0$  et  $P_0 = L_0 U_{-1} L_0^T$ . Le tirage des  $r$  premiers états interpolés se fait habituellement par la formule

$$X_j^a(t_0) = X_0 + \sqrt{r+1} L_0 (\Omega_{0,j} C_{-1}^{-1})^T, \quad \text{pour } j = 1, \dots, r+1 \quad (6.70)$$

$\Omega_0$  est une matrice aléatoire de  $r$  colonnes orthonormées dans  $\mathbb{R}^{r+1}$  et orthogonales au vecteur  $(1, \dots, 1)^T$  et  $\Omega_{0,j}$  désigne la  $j^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $\Omega_0$  et  $C_{-1}$  est la décomposition de Cholesky de  $U_{-1}^{-1}$ . Le nombre des états interpolés sera ensuite "doublé" en considérant les nouveaux états interpolés

$$\dot{X}_j^a(t_0) = F(X_j^a(t_0), t_0) \quad \text{pour } j = 1, \dots, r+1. \quad (6.71)$$

La base de correction initiale est alors supposée égale à

$$\bar{L}_0 = \left[ [X_d^f(t_0) \cdots X_{r+1}^a(t_0)]^T, [\dot{X}_1^a(t_0) \cdots \dot{X}_{r+1}^a(t_0)]^T \right]. \quad (6.72)$$

où  $T$  est comme dans le filtre SEIK. La première correction se fait alors exactement comme dans le filtre SDEEK.

**1- Tirage des états interpolés :** Nous démontrerons dans la suite qu'au début du  $(k - 1)^{\text{ème}}$  pas, on possède une décomposition de la matrice de covariance de l'erreur d'analyse sous la forme

$$P^a(t_{k-1}) = \bar{L}_{k-1} \bar{U}_{k-1} \bar{L}_{k-1}^T, \quad (6.73)$$

où la nouvelle base de correction  $\bar{L}_k$  est donnée par

$$\bar{L}_{k-1} = \left[ [X_1^f(t_{k-1}) \cdots X_{r+1}^f(t_{k-1})]T, [\dot{X}_1^f(t_{k-1}) \cdots \dot{X}_{r+1}^f(t_{k-1})]T \right], \quad (6.74)$$

avec

$$\dot{X}_j^f(t_{k-1}) = F(X_j^f(t_{k-1}), t_{k-1}) \quad (6.75)$$

et  $\bar{U}_{k-1}$  est une matrice de taille  $2r \times 2r$  à déterminer. De plus, l'état d'analyse  $X^a(t_{k-1})$  est une combinaison linéaire des états interpolés  $X_j^f(t_{k-1})$  dont la somme des coefficients est égale à 1.

Décomposons tout d'abord le bloc  $r \times r$  du coin supérieur gauche de  $\bar{U}_{k-1}^{-1}$  de la matrice  $\bar{U}_{k-1}^{-1}$  par la méthode de Cholesky en  $C_k C_k^T$  et considérons une matrice aléatoire  $\Omega_{k-1}$  de  $r$  colonnes orthonormées dans  $\mathbb{R}^{r+1}$  et orthogonales au vecteur  $(1, \dots, 1)^T$ . On peut alors représenter  $P^a(t_{k-1})$  comme

$$P^a(t_{k-1}) = \bar{L}_{k-1} \begin{bmatrix} (\Omega_{k-1} C_{k-1}^{-1})^T T & 0 \\ 0 & (\Omega_{k-1} C_{k-1}^{-1})^T T \end{bmatrix} (r+1) \tilde{U}_{k-1} \begin{bmatrix} T^T (\Omega_k C_{k-1}^{-1}) & 0 \\ 0 & T^T (\Omega_k C_{k-1}^{-1}) \end{bmatrix} \bar{L}_{k-1}^T \quad (6.76)$$

où

$$\tilde{U}_{k-1}^{-1} = (r+1) \begin{bmatrix} T^T (\Omega_k C_{k-1}^{-1}) & 0 \\ 0 & T^T (\Omega_k C_{k-1}^{-1}) \end{bmatrix} \bar{U}_{k-1}^{-1} \begin{bmatrix} (\Omega_{k-1} C_{k-1}^{-1})^T T & 0 \\ 0 & (\Omega_{k-1} C_{k-1}^{-1})^T T \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

En remarquant que par construction, le bloc  $r \times r$  du coin supérieur gauche de  $\tilde{U}_{k-1}$  est la matrice  $(r+1)T^T T$  (qui a pour terme diagonaux  $r$  et non diagonaux  $-1$ ), on construit les  $(r+1)$  états interpolés comme dans le filtre SEIK, à savoir

$$X_j^a(t_{k-1}) = X^a(t_{k-1}) + \sqrt{r+1} L_{k-1} (\Omega_{k-1}^j C_{k-1}^{-1})^T, \quad (6.78)$$

où  $L_{k-1}$  est la matrice formée par les  $r$  premières colonnes de  $\bar{L}_{k-1}$  et  $\Omega_{k-1}^j$  désigne la  $j^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $\Omega_{k-1}$ .

Comme  $L_{k-1} (\Omega_{k-1} C_{k-1}^{-1})^T = [X_1^f(t_{k-1}) \cdots X_{r+1}^f(t_{k-1})]T (\Omega_{k-1} C_{k-1}^{-1})^T$ , la formule (6.78) montre que  $X_j^a(t_{k-1})$  est une combinaison linéaire de  $X_1^f(t_{k-1}), \dots, X_{r+1}^f(t_{k-1})$ . De plus, comme la somme des composantes de chaque colonne de la matrice  $T$  est égale à zero, les coefficients de cette combinaison linéaire ont pour somme égale à 1. En assimilant la fonction  $F(\cdot, t_{k-1})$  à son interpolation linéaire basée sur les points  $X_1^f(t_{k-1})$ ,

$\dots, X_{r+1}^f(t_{k-1})$ , on peut aussi écrire les états interpolés  $\dot{X}_j^a(t_{k-1}) = F(X_j^a(t_k), t_k)$  comme une combinaison linéaire de  $\dot{X}_1^f(t_{k-1}), \dots, \dot{X}_{r+1}^f(t_{k-1})$  de mêmes coefficients que  $X_j^a(t_{k-1})$ . Par conséquent, on peut écrire

$$P^a(t_{k-1}) \approx \left[ [X_1^a(t_{k-1}) \cdots X_{r+1}^a(t_{k-1})]T \vdots [\dot{X}_1^a(t_{k-1}) \cdots \dot{X}_{r+1}^a(t_{k-1})]T \right] \tilde{U}_{k-1}^{-1} \left[ [X_1^a(t_{k-1}) \cdots X_{r+1}^a(t_{k-1})]T \vdots [\dot{X}_1^a(t_{k-1}) \cdots \dot{X}_{r+1}^a(t_{k-1})]T \right]^T. \quad (6.79)$$

**2- Etape de Prévion :** On applique l'opérateur de transition  $M(t_k, t_{k-1})$  pour faire évoluer les états interpolés  $X_j^a(t_{k-1})$  afin d'obtenir les états  $X_j^f(t_k)$  à l'instant de prévion  $t_k$ . L'état prévu  $X^f(t_k)$ , avant l'observation  $Y_{k+1}$ , est bien entendu égal au barycentre des états interpolés  $X_1^f(t_k), \dots, X_{r+1}^f(t_k)$ . Suivant ce choix, la matrice de covariance des erreurs de prévion (dans le cas d'un modèle imparfait) est donnée par

$$P^f(t_k) = \bar{L}_k \tilde{U}_{k-1} \bar{L}_k^T, \quad (6.80)$$

où la nouvelle base de correction est donnée par

$$\bar{L}_k = \left[ [X_1^f(t_k) \cdots X_{r+1}^f(t_k)]T \vdots [\dot{X}_1^f(t_k) \cdots \dot{X}_{r+1}^f(t_k)]T \right]. \quad (6.81)$$

On rappelle que cette formule sert seulement à justifier les calculs qui suivent et que l'algorithme du filtre ne nécessite en aucun cas le calcul de  $P^f(t_k)$ .

**3- Etape de Correction :** On calcule tout d'abord

$$\bar{U}_k^{-1} = \rho \tilde{U}_{k-1}^{-1} + (H\bar{L})_k^T (H\bar{L})_k, \quad (6.82)$$

où  $(H\bar{L})_k$  est la matrice donnée par

$$\left[ [H_k X_1^f(t_k) \cdots H_k X_{r+1}^f(t_k)]T \vdots [H_k \dot{X}_1^f(t_k) \cdots H_k \dot{X}_{r+1}^f(t_k)]T \right]. \quad (6.83)$$

On corrige alors l'état prévu par la formule

$$X^a(t_k) = X^f(t_k) + \bar{L}_k \bar{U}_k (H\bar{L})_k^T R_k^{-1} [Y_k - H_k X^f(t_k)]. \quad (6.84)$$

Cette formule montre que  $X^a(t_k)$  est une combinaison linéaire des  $X_j^f(t_k)$  dont les coefficients ont pour somme 1. De plus, la matrice de covariance des erreurs d'analyse est bien de la forme annoncée dans (6.76).

– *Calcul numérique des  $\dot{X}_i^a$  :* Comme dans le filtre SDEEK, on peut utiliser le schéma de discrétisation temporelle d'Euler du système (6.48) pour calculer

$$\dot{X}(t) = \frac{1}{\delta} \left[ M(t + \delta, t) X(t) - X(t) \right]. \quad (6.85)$$

## 6.8 Applications au modèle OPA

Nous avons remarqué que les variantes du filtre SEIK se comportent mieux que celles du filtre SEEK lorsqu'elles sont implémentées dans les mêmes conditions. Nous présenterons alors les résultats des filtres interpolés uniquement. Seuls les résultats de la première version du filtre SSEEK seront présentés car une version interpolée de ce filtre n'a pas pu être construite pour des raisons techniques. Le filtre SEIK sera considéré comme une référence pour mesurer les performances de tous les autres filtres.

### 6.8.1 Performances des variantes du filtre SEEK

Nous présentons tout d'abord séparément les résultats d'assimilation de toutes les formes dégradées du filtre SEIK. A noter que dans toutes ces expériences, le modèle a été supposé parfait, le facteur d'oubli  $\rho = 0.8$ , les observations sont altimétriques simulées sur toute la première couche et, lorsqu'on ne précise pas, la dimension de la base de correction est égale à 30.

#### Filtre SFEK

Ce filtre a été largement utilisé dans nos expériences pour fixer les paramètres de nos filtres (comme le facteur d'oubli et la dimension de la base de correction ...) pour son coût très économique. Ici, nous allons tout d'abord présenter les résultats de ce filtre avec une base de correction de dimension 30 et 35 respectivement. Dans ce cas, le filtre SFEK a été presque 30 fois plus rapide que le filtre SEIK.

On peut voir sur la figure FIG. 6.1 que le filtre SFEK filter se comporte relativement bien durant la période stable. Ses performances se dégradent lors des instabilités du modèle. Comme les performances de ce filtre dépendent surtout de la représentativité de sa base de correction, on peut estimer que l'analyse EOFs n'a pas réussi à capturer une grande partie de la variabilité de l'océan, particulièrement celle associée aux périodes instables du modèle.

On peut aussi remarquer que l'augmentation du nombre des EOFs dans la base de correction n'améliore pas les résultats de ce filtre. Cela peut être expliqué par le fait que le pourcentage d'inertie absorbé par l'analyse EOFs se stabilise rapidement lorsque le nombre des EOFs augmente. De plus, les dernières EOFs ne sont presque jamais déterminées exactement à cause des fluctuations statistiques et aussi de l'utilisation d'une séquence historique pas assez longue. Plus important encore dans les applications réelles, le modèle peut être entaché d'erreurs et donc une analyse EOFs basée sur une simulation du modèle sera elle aussi entachée d'erreurs. On estime que de telles erreurs affectent surtout les dernières EOFs parce qu'elles sont les plus instables numériquement.

Nous avons aussi conduit une expérience avec le filtre SFEK lorsque l'erreur du modèle n'est pas supposée nulle. Les 30 vecteurs de la base de correction EOFs de ce filtre ont été augmentés respectivement par 10 et 20 vecteurs de la base de l'erreur du modèle comme dans le paragraphe 6.2 (pour la construction de cette base, voir paragraphe 5.4.2).

FIG. 6.2 compare le résultat de cette expérience avec ceux du même filtre mais sans erreur du modèle. Contrairement aux résultats obtenus avec le filtre SEIK avec erreur du modèle, la performance du filtre à base fixe semble s'améliorer lorsqu'on ajoute à la base EOFs les modes de l'erreur du modèle. De plus, on peut aussi noter que le fait d'augmenter le rang de la base de l'erreur du modèle ne change pratiquement pas les résultats de ce filtre avec erreur du modèle.

#### Filtre SAIK

Nous avons conduit deux expériences avec le filtre SAIK dans lesquelles nous avons fait évoluer la base de correction les 50 et 125 premiers pas de filtrage avec le filtre SEIK pour atteindre un régime permanent. La base de correction a été ensuite gardée fixe durant toute

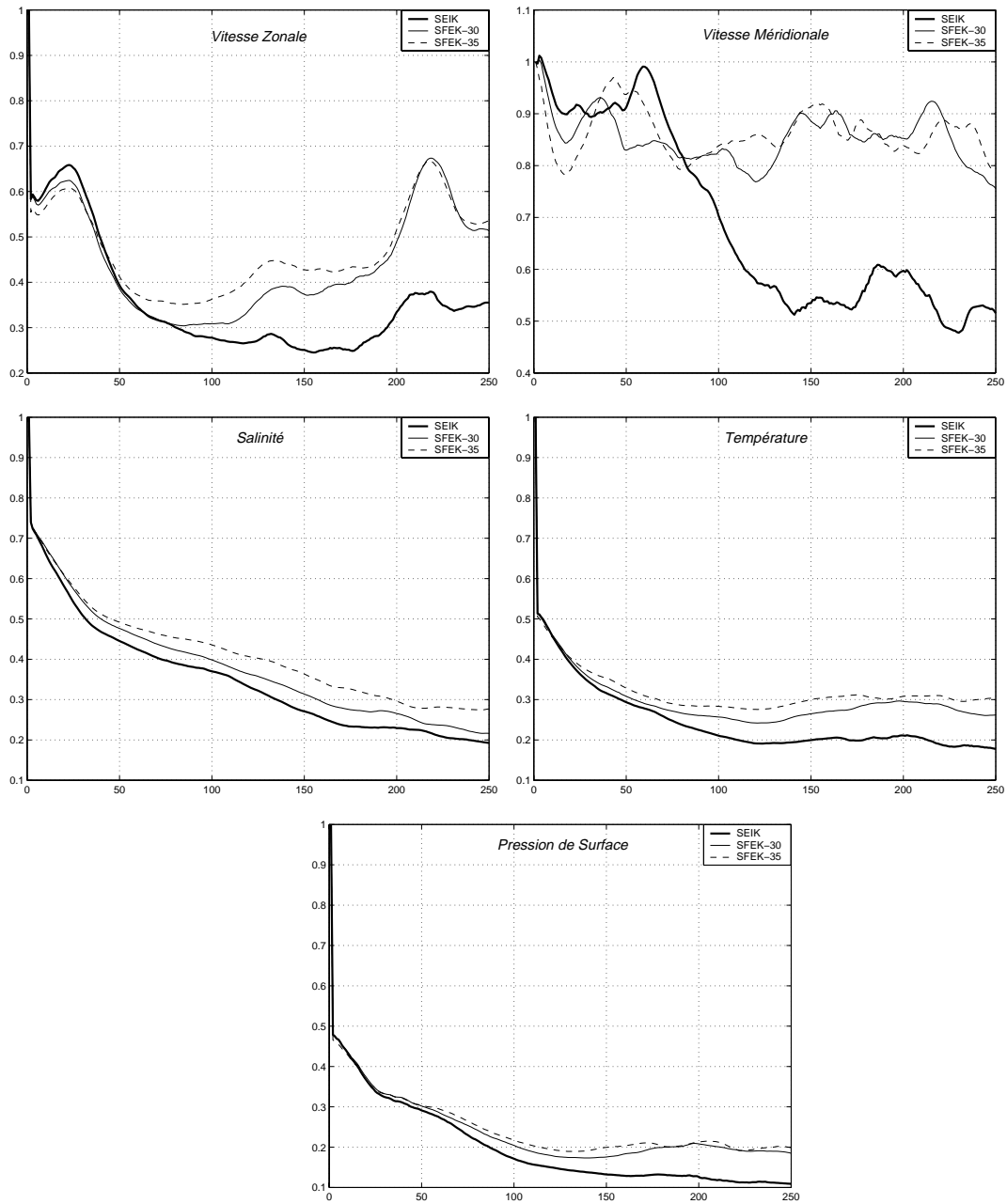


FIG. 6.1 – Evolution dans le temps de la RRMS des filtres SEIK et SFEK avec 30 et 35 EOFs

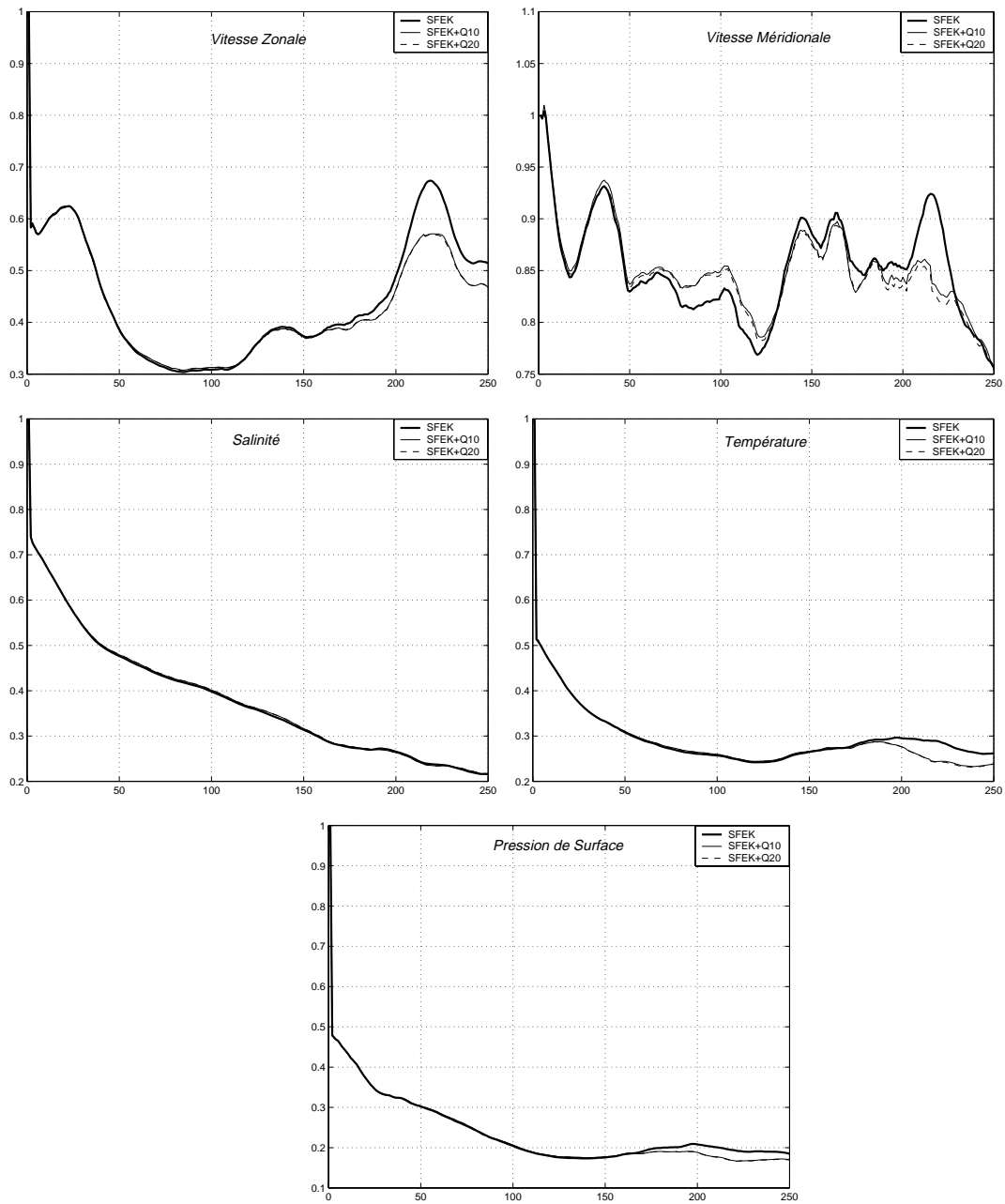


FIG. 6.2 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre SFEK sans et avec (10 et 20 vecteurs de la base de l') erreur du modèle



la période d'assimilation. Selon ces choix, le filtre SAIK a été respectivement 5 et 2 fois plus rapide que le filtre SEIK. Nous constatons d'après les résultats tracés dans FIG. 6.3 que le filtre SAIK se comporte mal durant la période instable, ce qui met en question l'existence du régime permanent. On peut aussi remarquer que l'augmentation de la durée de la période d'initialisation (de 50 à 125) avec le filtre SEIK améliore un peu la performance de ce filtre. Cela peut être expliqué par le fait que dans la deuxième expérience, l'évolution de la base de correction a été arrêtée au début de la période instable du modèle. Ainsi, elle a pu absorber une partie de la structure de la variabilité instable du modèle, ce qui n'était pas le cas de la base de la première expérience dont l'évolution a pris fin durant la période stable.

### Filtre SIEIK

Nous avons laissé la base de correction du filtre SIEIK évoluer une fois tous les 2 et 5 pas de temps, après une étape d'initialisation de 10 pas avec le filtre SEIK. Ainsi, ce filtre a été respectivement presque 2 et 6 fois plus rapide que le filtre SEIK.

Les résultats de ces expériences tracés dans FIG. 6.4 (et les figures de l'Annexe C) sont très encourageants. De plus, ce filtre semble bien se comporter durant la période instable du modèle grâce à la mise à jour régulière de sa base de correction. La bonne performance de ce filtre (durant la période stable) semble confirmer notre hypothèse sur l'existence d'un régime semi-fixe pour un modèle autonome presque-linéaire. De plus, comme on peut s'attendre, les résultats de ce filtre dépendent principalement de la longueur de ses régimes fixe et de rattrapage, notées  $K_f$  et  $K_u$  respectivement. Plus précisément, sa performance est une fonction décroissante de  $K_f$  et une fonction croissante de  $K_u$ .

### Filtre SSEIK

Pour tester le filtre SSEIK, nous avons choisi de faire évoluer 1 puis 3 vecteurs de sa base de correction. Ce filtre a donc été presque 15 et 8 fois plus rapide que le filtre SEIK. D'après les résultats tracés dans la figure FIG. 6.5, on peut voir que ce filtre est très sensible à l'instabilité du modèle. En effet, après une très bonne conduite durant la période stable du modèle, les résultats du filtre SSEIK se sont rapidement dégradés durant la période instable. Paradoxalement, le fait de faire évoluer plus de vecteurs de la base de correction (de 1 à 3) n'a pas apporté des améliorations, mais au contraire, à la performance de ce filtre pendant l'instabilité du modèle.

### Filtres SSEEK

Nous nous sommes aussi intéressés aux résultats du filtre SSEEK première version (sera noté par SSEEK1). On rappelle que nous n'avons pas pu construire une version interpolée de ce filtre pour des raisons techniques. Nous comparons aussi ses résultats à ceux du filtre SSEEK deuxième version (noté SSEEK2).

Dans ce but, nous avons implémenté les filtres SSEEK1 et SSEEK2 dans les mêmes conditions mais avec 1 et 3 vecteurs de la base de correction qui évoluent pour le premier et 1 seul vecteur pour le deuxième. La figure FIG. 6.6 montre les résultats de ces expériences. La performance du filtre SSEEK1 est assez satisfaisante et semble être plus performant que le filtre SSEEK2 surtout lorsqu'on augmente le nombre des vecteurs de la base qui évoluent. De

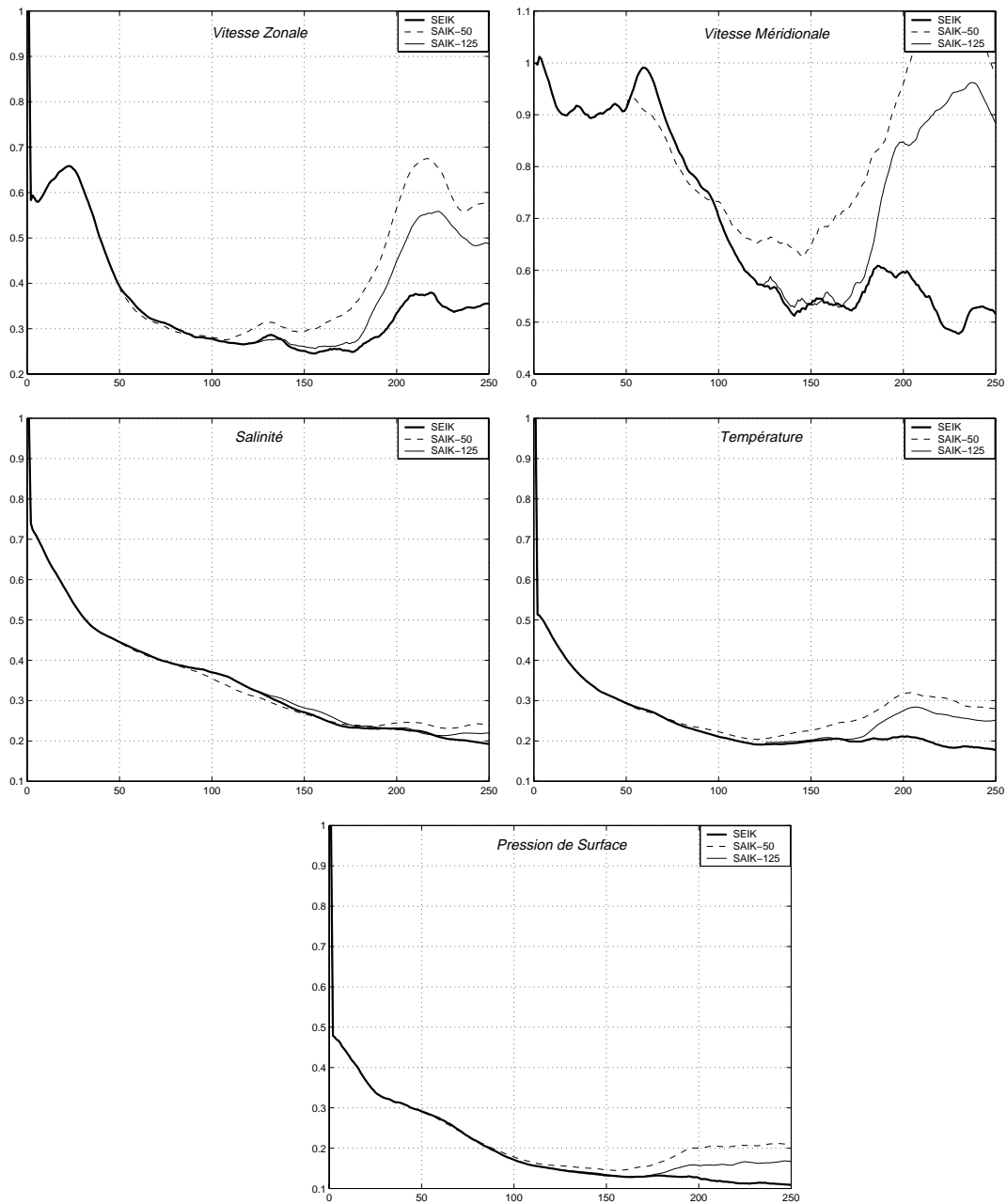


FIG. 6.3 – Evolution dans le temps de la RRMS des filtres SEIK et SAIK avec une base fixe après 50 et 125 pas d'initialisation avec le filtre SEIK

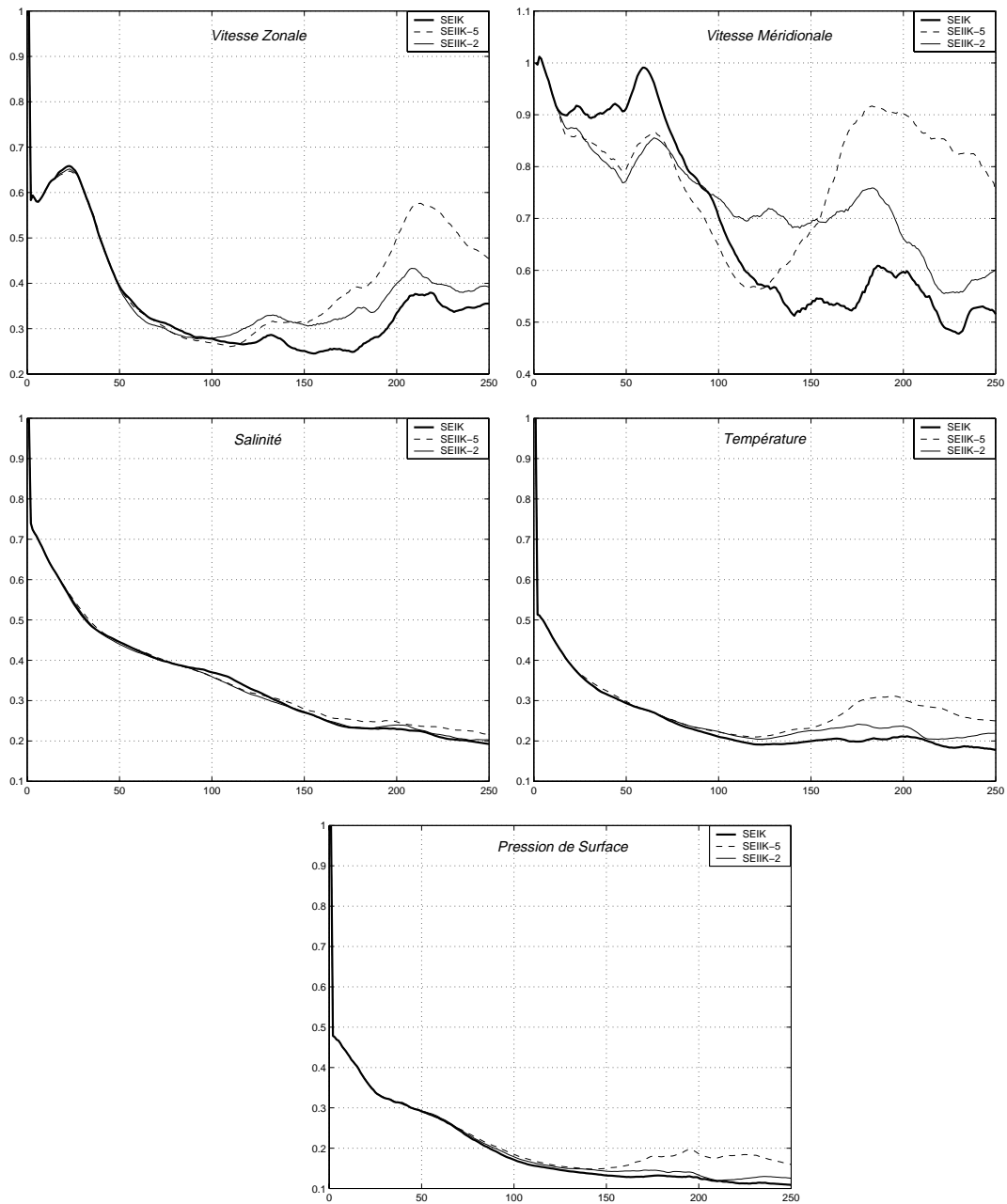


FIG. 6.4 – Evolution dans le temps de la RRMS des filtres SEIK et SIEIK avec évolution de la base 1 pas tous les 2 et 5 pas de temps

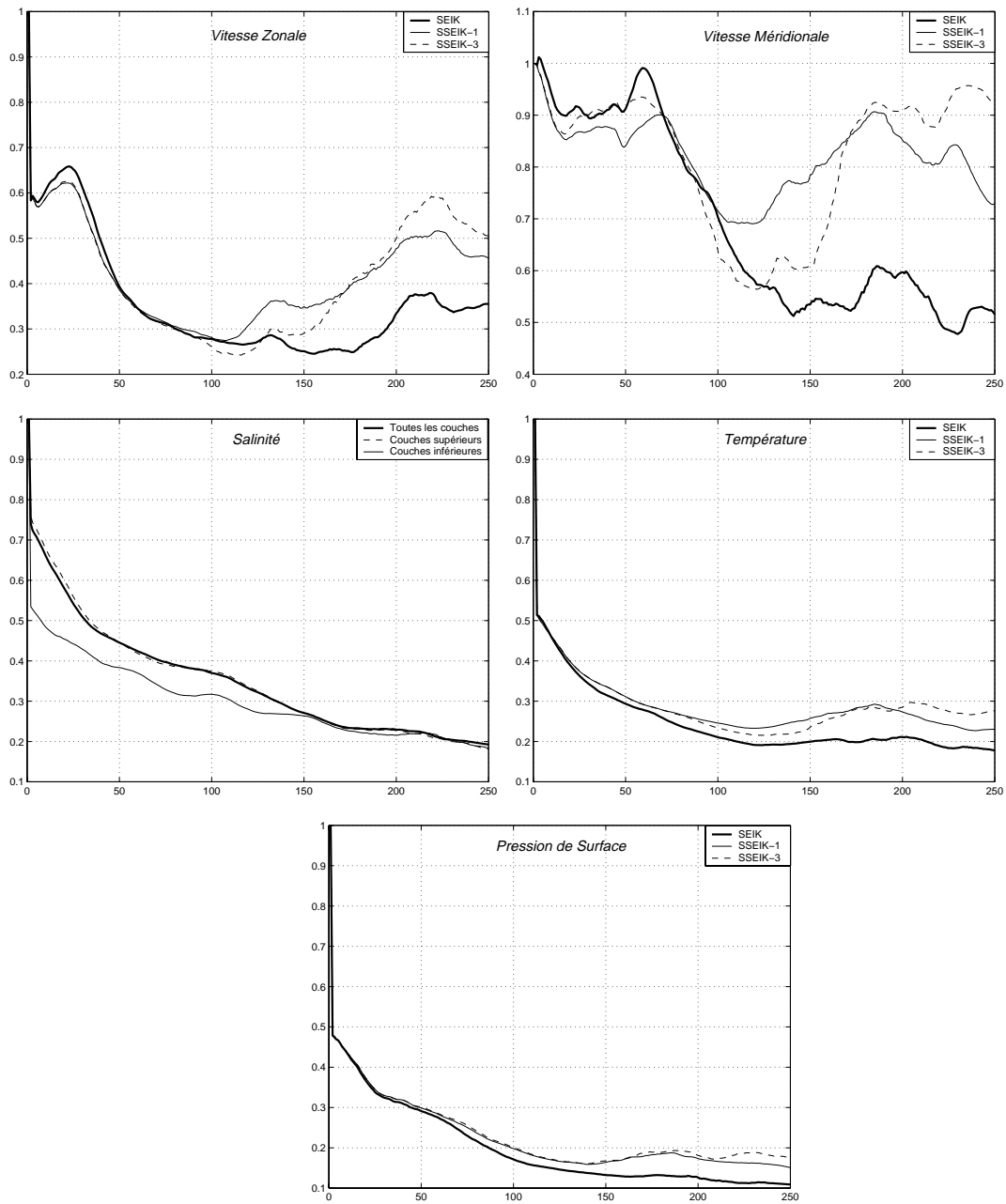


FIG. 6.5 – Evolution dans le temps de la RRMS des filtres SEIK et SSEIK avec évolution de 1 et 3 vecteurs de la base

plus, on peut remarquer que la performance de ce filtre croît avec le nombre des vecteurs qui évoluent, ce qui n'était pas le cas du filtre SSEEK2.

### Filtre SDEIK

En ce qui concerne les résultats du filtre SDEIK qui ont été quelque peu décevants (voir FIG. 6.7), une base évolutive de 15 vecteurs a été doublée selon (6.81) pour obtenir une base 30 vecteurs. Nous avons aussi fait démarrer ce filtre par 10 pas avec le filtre SEIK pour atteindre un régime plus stable. Selon ce choix, le filtre SDEIK a été presque deux fois plus rapide que le filtre SEIK. Malgré un très bon comportement durant la période instable du modèle, les résultats de ce filtre se dégradent sérieusement, spécialement dans les couches supérieures, dans la période instable. Les mauvais résultats du filtre SDEIK dans les couches supérieures nous laissent présumer que ce filtre est très sensible aux termes de forçage.

#### 6.8.2 Comparaison entre les variantes du filtre SEIK

Nous allons comparer dans ce paragraphe les performances des différentes variantes du filtre SEIK, à savoir les filtres SFEK, SIEIK et SSEIK qui ont été implémentés dans les mêmes conditions. Nous avons choisi de faire évoluer la base de correction du filtre SIEIK une fois tous les 2 pas de filtrage et 1 vecteur seulement de la base du filtre SSEIK. Ainsi, les filtres SFEK, SSEIK et SIEIK ont été respectivement presque 30, 15 et 2 fois plus rapides que le filtre SEIK. Le filtre SEIK étant toujours considéré comme référence. On peut voir dans la figure FIG. 6.8 que les formes dégradées du filtre SEIK assimilent très bien les variables  $S$  et  $T$ . Bien que leurs performances avec la vitesse horizontale se dégradent durant la période instable du modèle, le filtre SIEIK semble bien se tenir durant cette période. En conclusion, la comparaison entre ces filtres montrent que le filtre SIEIK donne les meilleurs résultats par rapport au filtre SEIK, mais n'oublions pas que c'est avec le coût le plus élevé.

#### 6.8.3 Sensibilité par rapport aux systèmes d'observation

Pour étudier la sensibilité de nos filtres par rapport à la nature et à la distribution spatio-temporelle des observations, on va utiliser le filtre SFEK à base fixe, d'une part parce qu'il est le plus économique et d'autre part parce qu'on estime que tous les autres filtres se comportent d'une manière similaire avec les observations. Le rang de la base de correction et le facteur d'oubli étant toujours égaux à 30 et 0.8 respectivement.

Ainsi, nous avons implémenté, dans les mêmes conditions (dimension de la base  $r = 30$  et facteur d'oubli  $\rho = 0.8$ ), le filtre SFEK avec des observations: (i) de la hauteur libre de l'océan sur toute la surface tous les jours, (ii) de la hauteur libre de l'océan sur la trace du satellite T/P tous les 3 jours, (iii) de la température de surface et de subsurface aux points géographiques des mouillages pour le réseau TAO tous les jours, et (iv) par une combinaison de (ii) et (iii).

Les résultats de ces expériences qui sont tracés dans FIG. 6.9 montrent que les observations T/P contrôlent les diverses variables du modèle aussi bien que les observations sur toute la surface. Cela peut être justifié par le fait que deux observations en deux positions spatiales proches n'apportent pas plus d'informations au filtre car sa base de correction "contient" les corrélations spatio-temporelle entre les variables. En ce qui concerne les observations TAO, on peut voir que l'utilisation de ces observations ne suffit pas à elle seule à bien assimiler les autres

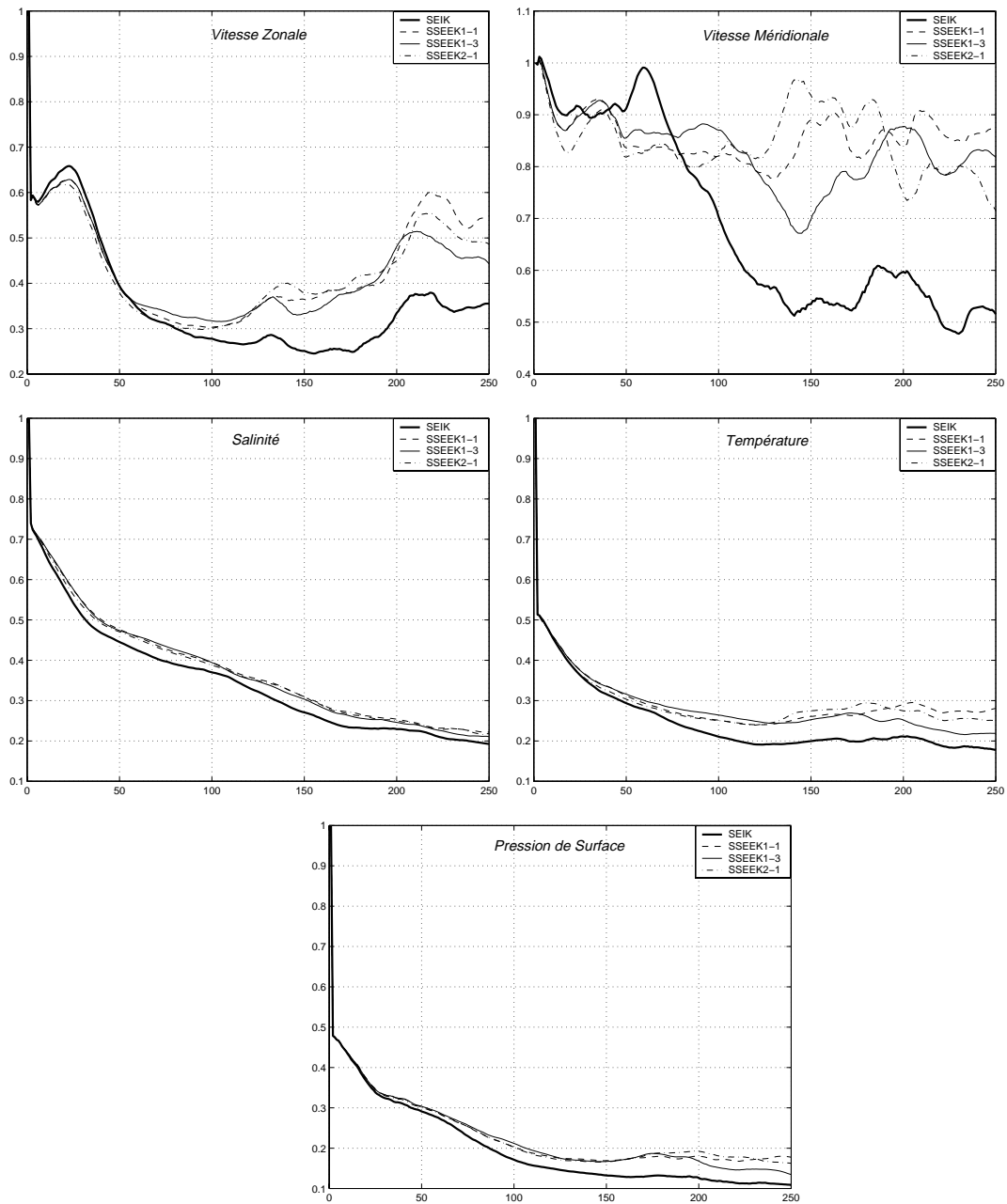


FIG. 6.6 – Evolution dans le temps de la RRMS des filtres SEIK, SEEK1 avec 1 et 3 vecteurs de la base qui évoluent et SSEEK2 avec 1 vecteur qui évolue

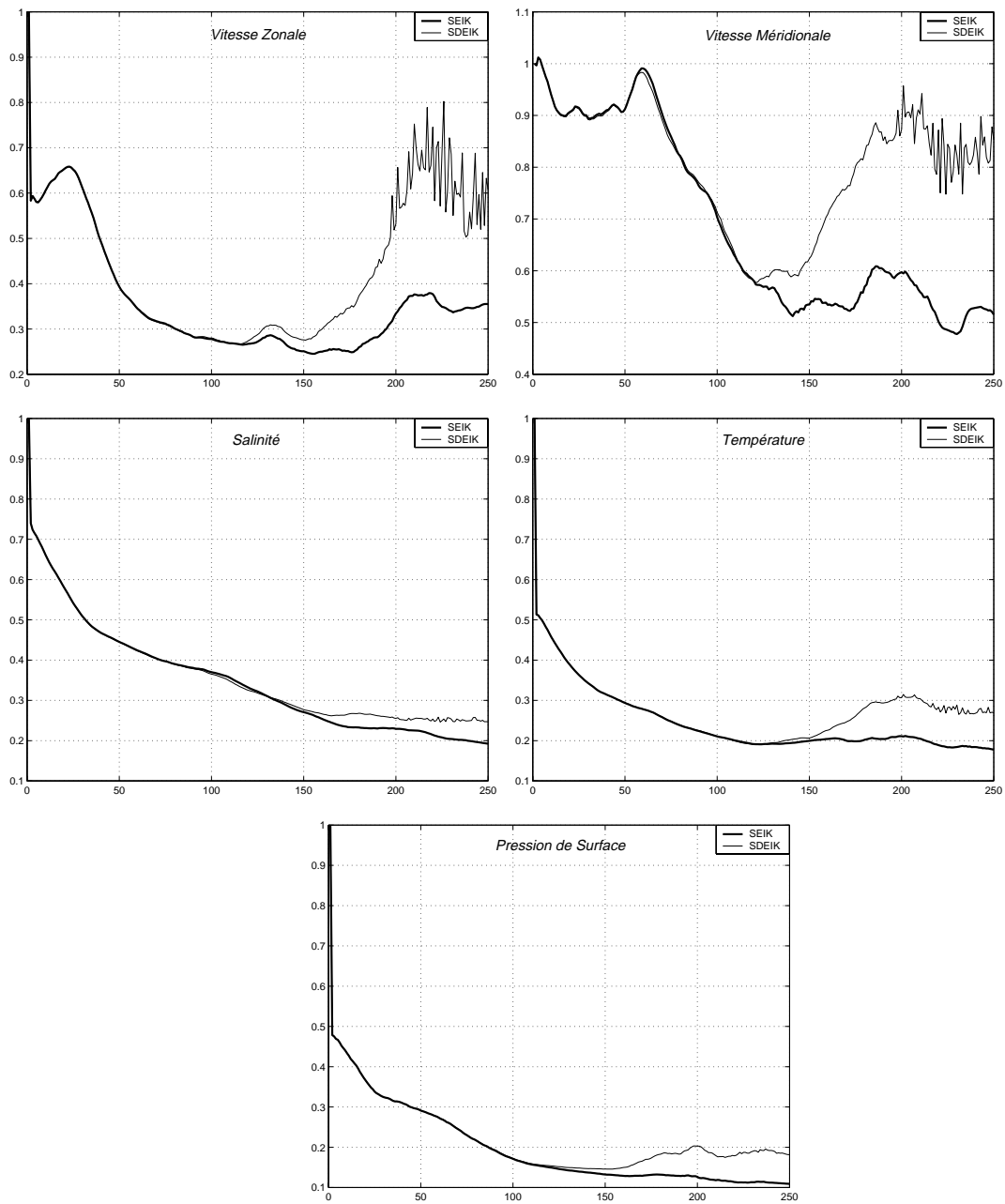


FIG. 6.7 – Evolution dans le temps de la RRMS des filtres SEIK et SDEIK

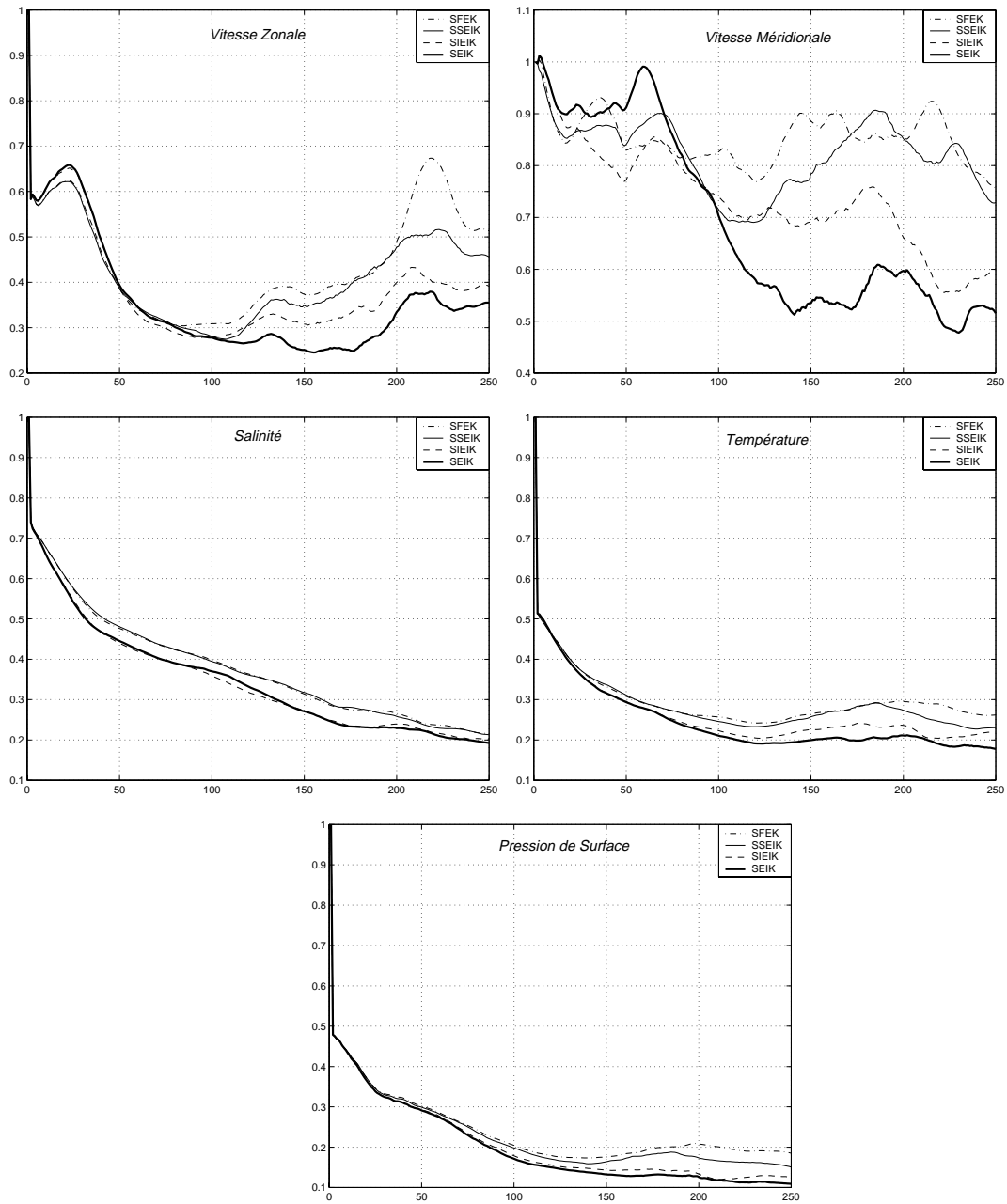


FIG. 6.8 – Evolution dans le temps de la RRMS des filtres SEIK, SFEK, SSEIK et SIEIK



variables, à cause de leur petit nombre. En effet, nous avons pu constater cela après avoir comparé les résultats d'assimilation des données TAO et des données de la température sur toute la grille du modèle. Finalement, la dégradation des résultats du filtre avec les observations T/P lors de la période instable accompagnée par un bon comportement avec les observations conjointes T/P et TAO nous laisse présumer qu'il faut utiliser le plus d'observations possible durant ces périodes pour pouvoir contrôler le système.

## 6.9 Conclusions

Nous avons développé dans ce chapitre plusieurs variantes des filtres SEEK et SEIK dans le but de réduire leurs coûts. Notre approche consistait essentiellement à simplifier l'évolution de la base de correction de ces deux filtres. On pourrait nous reprocher d'avoir utilisé plusieurs hypothèses simplificatrices sur la base de correction, mais c'est le seul moyen dont nous disposons pour pouvoir diminuer significativement les coûts des filtres SEEK et SEIK.

Puisqu'aucune étude théorique ne pourra montrer la supériorité de l'un des nouveaux filtres, l'implémentation de ces filtres en pratique s'avèrait donc très importante pour nous aider à comprendre les comportements et l'aspect numérique de ces filtres. Ainsi, nous avons conduit une série d'expériences jumelles avec une configuration réaliste du modèle OPA du pacifique tropical pour évaluer les performances de ces filtres par rapport au filtre SEIK. Nos conclusions principales sont les suivantes :

- 1- Lorsque le modèle est stable, les formes dégradées du filtre SEIK se comportent aussi bien que le filtre SEIK, mais peuvent être 2 à 10 plus rapides. Lorsque le modèle passe par une période instable, les hypothèses avec lesquelles nous avons construit nos filtres ne seront plus justifiées et les performances de nos filtres se dégradent.
- 2- La comparaison entre tous les nouveaux filtres montre que le filtre SIEIK est le plus performant de nos filtres grâce à la mise à jour régulière de sa base de correction. La dégradation rapide des résultats du filtre SAIK durant la période instable exclut l'existence du régime permanent. Avec un coût faible, le filtre SSEIK se comporte très bien durant la période stable, mais ces performances se dégradent rapidement durant la période instable. En ce qui concerne le filtre SFEK dont la performance a été relativement faible, ce qui est en quelque sorte compréhensible, il pourra toujours être utilisé, pour son coût très économique, dans des expériences préliminaires pour régler les paramètres du filtre SEIK. Finalement, pour remédier à l'instabilité du filtre SDEIK, nous proposons dans le chapitre 8 un schéma adaptatif basé sur l'évolution de la base de correction.
- 3- En plus de leur plus grand nombre, les observations satellitaires de la hauteur libre de la surface de l'océan semblent contenir plus d'information que celles de la température obtenues par les bouées. Nous avons aussi remarqué que des observations proches n'apportent pratiquement pas plus d'information à nos filtres. Cela peut être justifié par le fait que les informations contenues dans une observation se transmettent au filtre via sa base de correction qui résume les corrélations entre les variables en tout point de la grille.

On a vu que la simplification de l'évolution de la base de correction des filtres SEEK et SEIK nous permet de diminuer leurs coûts, mais sans pour autant augmenter leurs per-

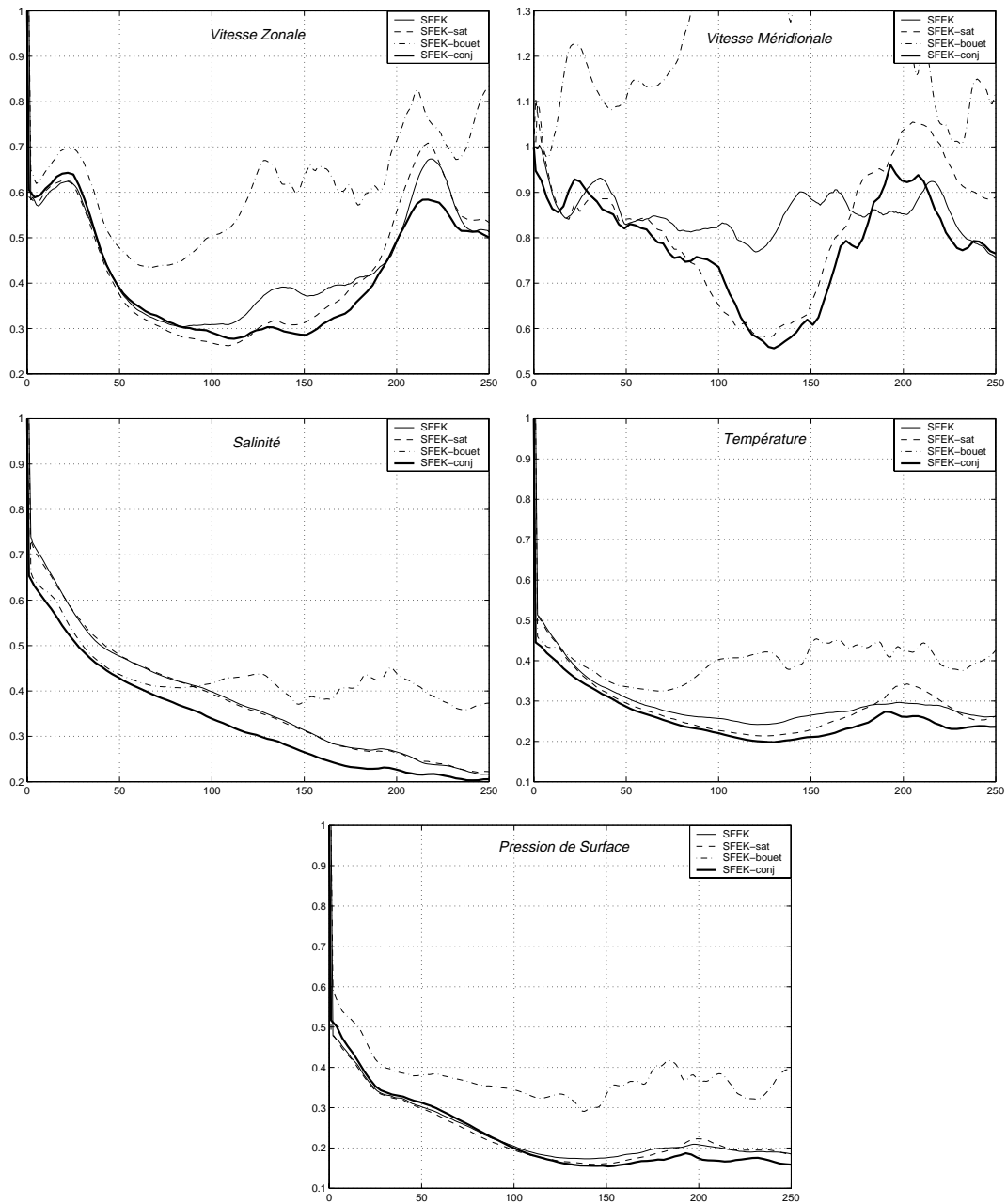


FIG. 6.9 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre SFEK avec des observations satellitaires sur toute la surface et sur les traces T/P, de la température aux points TAO et par combinaison des données T/P-TAO

performances, au contraire, surtout dans la période instable du modèle. Pour cela, nous allons introduire dans le chapitre 7 la notion d'analyse EOFs "locale" pour augmenter la représentativité de la base EOFs. Nous développerons aussi dans le chapitre 8 des schémas adaptatifs basés sur le facteur d'oubli et sur l'évolution de la base de correction pour améliorer les performances de nos filtres durant les périodes d'instabilité.

# Chapitre 7

## Filtre semi-évolutif avec une base partiellement locale

### 7.1 Introduction

L'analyse en Fonctions Empiriques Orthogonales (EOFs) est une méthode statistique de réduction de données. Elle consiste à “résumer” la variabilité d'un ensemble de vecteurs d'état dans quelques vecteurs seulement, appelés EOFs et formant ce qu'on appellera la base EOFs (notée  $L_0$ ). Elle a été initialement introduite dans le contexte du filtre SEEK par *Pham et al.* [78] pour calculer une approximation de rang faible  $r$  de la matrice de covariance  $P^a(t_0)$  de l'erreur d'estimation initiale sous la forme

$$P^a(t_0) = L_0 U_0 L_0^T \quad (7.1)$$

où  $L_0$  et  $U_0$  sont des matrices de taille  $n \times r$  et  $r \times r$  respectivement et  $n$  est la dimension du vecteur d'état. *Brasseur et al.* ont ensuite proposé d'utiliser la base EOFs comme une base de correction fixe pour le filtre SEEK. Cela leur a permis de construire un nouveau filtre très économique, appelé filtre SFEK (voir paragraphe 6.2). Cependant, nous avons remarqué dans nos expériences (voir paragraphe 6.1) que la performance de ce filtre, qui dépend surtout de la représentativité de la base EOFs  $L_0$ , s'est sérieusement dégradée lors du passage du modèle dans une période d'instabilité. Ceci peut être expliqué par le fait que la base de correction  $L_0$  ne contenait pas suffisamment d'informations ou de vecteurs pour bien représenter la variabilité à courte portée de la dynamique du modèle. Augmenter le nombre des vecteurs de base pour augmenter la représentativité de  $L_0$  va bien évidemment augmenter les coûts et, comme le montre nos expériences, n'augmente que très légèrement la représentativité de cette base. En effet, le pourcentage d'inertie expliqué par une analyse EOFs (voir paragraphe 7.2) se stabilise rapidement en fonction du nombre de vecteurs de la base. De plus, les dernières EOFs ne sont presque jamais déterminées avec précision à cause des fluctuations statistiques ainsi que l'utilisation d'une séquence historique trop courte. De façon plus importante encore dans les applications réalistes, le modèle peut être entaché d'erreurs. Une analyse EOFs basée sur une simulation du modèle sera alors elle aussi entachée d'erreurs. Nous estimons qu'une telle erreur affecte surtout les dernières EOFs parce qu'elles sont les plus instables numériquement.

Pour les raisons précédentes, nous allons introduire une sorte d'analyse “EOFs locale” qui va nous permettre d'augmenter la représentativité de la base EOFs. Notre idée consiste à construire des EOFs qui ont pour support une petite région de l'océan. Cela nous permettra

d’une part, de réduire les coûts de la correction du filtre SFEK et donc de considérer plus de vecteurs de base pour un coût donné, et d’autre part de limiter les corrélations spatiales entre les variables de l’océan, ce qui est en accord avec l’idée que de telles corrélations ne doivent pas exister entre deux positions spatiales assez éloignées. De plus, elle nous laisse le choix pour fixer le nombre des EOFs en fonction de la variabilité de chaque sous-domaine.

Cependant, cette approche de “base locale” possède deux inconvénients : (i) on ne peut pas laisser cette base évoluer avec l’équation du filtre SEEK sans perdre son caractère local, et (ii) nous avons remarqué dans nos expériences numériques que la variabilité globale du modèle n’a pas été bien représentée dans cette base, bien que nous ayons considéré des sous-domaines non-disjoints. En conséquence, nous allons garder cette base fixe dans le temps et lui rajouter quelques vecteurs de base globaux qui évoluent. Le filtre semi-évolutif à base de correction partiellement locale qui en résulte, appelé SEPLEK, peut être bien moins coûteux que le filtre SEEK et pourtant donner de meilleurs résultats.

Après avoir fait un rappel sur l’analyse EOFs classique (ou globale) et ces caractéristiques, nous introduisons la notion d’analyse EOFs locale dans le but d’augmenter la représentativité de la base EOFs. Pour remédier au caractère non-évolutif de la base EOFs locale, nous développons ensuite une nouvelle sorte d’analyse EOFs, dite mixte, pour construire une base qui représente aussi bien la variabilité globale que la variabilité locale. Nous présentons enfin le filtre SEPLEK et les résultats de son implémentation dans le modèle OPA.

## 7.2 Analyse EOFs (globale)

L’analyse EOFs est une méthode statistique de réduction de données plus connue sous le nom d’analyse en composantes principales (ACP) (voir [83]). Elle est très souvent utilisée en océanographie pour déterminer une représentation optimale de la variabilité (globale) de l’océan [81]. Elle est aussi utilisée pour résoudre des équations différentielles de grande taille, sous le nom de décomposition orthogonale propre (POD) (voir [56, 60]). Cette analyse consiste tout simplement à “compresser” les données contenues dans un ensemble de vecteurs d’états en résumant les corrélations entre les variables d’état en quelque vecteurs seulement, appelé EOFs.

### 7.2.1 Formulation et solution

Considérons un ensemble historique de  $N$  vecteurs d’états  $X_1, \dots, X_N$  de dimension  $n$ , éventuellement obtenus à partir d’une simulation du modèle numérique. La méthode de l’analyse EOFs cherche à construire une base  $L$  (on notera dans ce paragraphe  $L$  au lieu  $L_0$ ), appelée base EOFs, du sous-espace vectoriel  $E$  (de dimension faible) qui représente au mieux, selon un sens à définir, la variabilité des  $X_i$ . Le but est de réduire la dimension  $n$  de ces vecteurs en les projetant sur  $E$ .

Pour un sous-espace vectoriel quelconque  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $r$ , on peut mesurer la déformation du nuage des individus après projection sur  $F$  par la quantité

$$\mathcal{P}_I(F) = \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left[ \|X_i - X_j\|_{\mathcal{M}}^2 - \|X_i(F) - X_j(F)\|_{\mathcal{M}}^2 \right], \quad (7.2)$$

où  $X_i(F)$  dénote la projection de  $X_i$  sur  $F$  (selon  $\mathcal{M}$ ) et  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$  est une norme associée à une métrique  $\mathcal{M}$  dans l'espace d'état (à choisir). En d'autres termes,  $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(F)$  mesure la perte d'informations lors de la projection des individus sur  $F$ . On définit alors le "meilleur sous espace de projection  $E$ " comme le sous espace qui déforme le moins possible la structure du nuage de départ i.e.

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(E) = \text{Min}_{\{F \subset \mathbb{R}^n\}} \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(F). \quad (7.3)$$

### Centrage des données

Pour rendre les variables homogènes du point de vue de leurs moyennes, on place l'origine du repère au centre de gravité  $\bar{X}$  du nuage de points  $X_i$ . On définit donc les vecteurs d'état centrés pour  $i = 1, \dots, N$  par

$$Y_i = X_i - \bar{X} \quad \text{où} \quad \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i. \quad (7.4)$$

La matrice de covariances empirique  $P$  des vecteurs d'état  $X_i$  est alors donnée par

$$P = \frac{1}{N} \mathcal{Y} \mathcal{Y}^T \quad \text{où} \quad \mathcal{Y} = [Y_1 \cdots Y_N]. \quad (7.5)$$

L'expression de  $P$  facilite énormément les calculs numériques car elle ne suppose pas la mise en mémoire des données  $Y_i$  pour calculer  $P$  mais seulement la lecture séquentielle des  $Y_i$ .

### Choix et rôle de la métrique

Les variables d'états des modèles océaniques ne sont pas homogènes en général. En effet, elles représentent des variables physiques différentes (comme la salinité, la température, etc.). On utilise alors une métrique dans l'espace d'état pour rendre la distance entre les vecteurs d'état indépendante des unités de mesure. Une telle métrique est caractérisée par une matrice  $\mathcal{M}$  de dim  $n \times n$ , symétrique, définie et positive. Le produit scalaire entre deux vecteurs  $X_i$  et  $X_j$  est alors défini par

$$\langle X_i, X_j \rangle_{\mathcal{M}} = X_i^T \mathcal{M} X_j. \quad (7.6)$$

Le choix de la métrique  $\mathcal{M}$  est très important en pratique et il ne dépend que de l'utilisateur. Les deux métriques  $\mathcal{M} = I_d$  et  $\mathcal{M} = D_{1/\sigma^2}$  ( $D_{1/\sigma^2}$  est la matrice diagonale des inverses des variances des variables  $X^j$ ) sont les plus souvent utilisées. L'utilisation de la première métrique, qui revient à utiliser le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$ , conduirait à privilégier les variables les plus dispersées. La métrique  $D_{1/\sigma^2}$ , qui revient à diviser chaque variable par son écart type, établit l'équilibre entre les variables en les rendant de variance égale à 1.

### Solution du problème

La solution du problème de l'analyse EOFs réside dans le résultat suivant

*Soient  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  les valeurs propres de la matrice  $P$  relativement à  $\mathcal{M}$  rangées par ordre décroissant et  $\phi_i, i = 1, \dots, n$ , une base  $\mathcal{M}$ -orthonormée de vecteurs propres associés. Alors la base  $L$  du sous-espace qui représente au mieux les états  $X_i$  est donnée par*

$$L = [\phi_1 \cdots \phi_r]. \quad (7.7)$$

*Les  $\phi_i$  seront appelés les EOFs.*

En résumé, l'analyse du nuage des points individus nous ramène à effectuer une translation de l'origine au centre de gravité du nuage, à définir une métrique  $\mathcal{M}$  pour rendre les variables homogènes, et enfin à diagonaliser la matrice  $P$ .

### Calcul numérique des EOFs

Si on définit la matrice de dimension  $(N, N)$

$$\Gamma = \frac{1}{N} \mathcal{Y}^T \mathcal{M} \mathcal{Y} \quad (7.8)$$

et on note par  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  les vecteurs propres normés (par rapport à la métrique usuelle de  $\mathbb{R}^N$ ) associés aux valeurs propres  $\mu_1, \dots, \mu_N$ , rangées par ordre décroissant, alors pour  $i = 1, \dots, N$  les vecteurs

$$\frac{1}{\sqrt{n\mu_i}} \mathcal{Y} \varphi_i \quad (7.9)$$

forment un ensemble de  $N$  premiers vecteurs propres  $\mathcal{M}$ -orthonormés de  $P$  relativement à  $\mathcal{M}$ . De plus, on a  $\lambda_i = \mu_i$  pour  $i = 1, \dots, N$ .

Ce résultat est indispensable en pratique car en général on a  $N \ll n$ . Il est donc beaucoup moins coûteux de diagonaliser la matrice  $\Gamma$  de dimension  $(N, N)$  que de diagonaliser la matrice  $P$  de dimension  $(n, n)$ .

### Inertie et choix de la dimension

L'inertie totale du nuage des points  $X_i$ , notée  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ , qui mesure la quantité d'information contenue dans les vecteurs  $X_i$ , est définie par

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|X_i - \bar{X}\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (7.10)$$

On peut alors la décomposer par le théorème de Pythagore selon

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}} = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(E) + \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(E), \quad (7.11)$$

où  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(E)$  désigne l'inertie totale du nuage des individus après projection sur  $E$  i.e.

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(E) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|X_i(E) - \bar{X}(E)\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (7.12)$$

$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(E)$  mesure donc la "quantité d'informations absorbées" par  $E$  lors de la projection des individus sur ce sous espace et  $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(E)$  mesure la "quantité d'informations perdues" lors de cette projection. On peut alors montrer que (voir [83])

\* L'inertie totale des individus est égale à

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (7.13)$$

\* L'inertie totale des individus projetés sur  $E$  est égale à

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(E) = \sum_{i=1}^r \lambda_i. \quad (7.14)$$

Le pourcentage d'information (ou d'inertie) conservé par  $E$  peut donc être mesuré par la quantité

$$\tau_r = \frac{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(E)}{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}} = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}. \quad (7.15)$$

La qualité de la représentation du nuage des vecteurs d'état dans le sous-espace  $E$  peut être mesurée par le pourcentage d'inertie  $\tau_r$  absorbée par ce sous-espace. Une bonne qualité de représentation correspond donc à un  $\tau_r$  voisin de 1.

Le choix de la dimension  $r$  de la base EOFs  $L$  sera donc fixé en fonction de la valeur de  $\tau_r$ . On prendra aussi en compte la vitesse de décroissance des valeurs propres  $\lambda_i$ .

### 7.2.2 Reconstitution (approchée) des données de départ

Après avoir calculé la base EOFs  $L$  de dimension  $r$ , on projete les vecteurs d'état centrés  $Y_i = X_i - \bar{X}$  sur le sous-espace  $E$  engendré par  $L$ , dans le but de réduire leur dimension  $n$

$$Y_i(E) = L^T \mathcal{M} Y_i = L^T \mathcal{M} (X_i - \bar{X}). \quad (7.16)$$

Si on juge que les dernières valeurs propres  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$  sont négligeables, une formule de reconstitution approchée des vecteurs d'état  $X_i$  de départ est alors donnée par

$$X \approx \tilde{X} = \bar{X} + LL^T \mathcal{M} (X_i - \bar{X}) \quad (7.17)$$

$$= \bar{X} + \sum_{k=1}^r c_k \phi_k \quad (7.18)$$

où

$$c_k = \langle X - \bar{X}; \phi_k \rangle_{\mathcal{M}} = \phi_k^T \mathcal{M} (X - \bar{X}). \quad (7.19)$$

A partir de cette formule, on peut aussi obtenir une formule de reconstitution approchée de la matrice de covariance empirique des vecteurs d'état  $X_i$  par une matrice de rang  $r$

$$P \simeq \tilde{P} = LUL^T, \quad (7.20)$$

où  $U$  est une matrice  $r \times r$  diagonale contenant les premières valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ .

Finalement, le théorème d'Eckart-Young montre que  $\tilde{P}$  est la meilleure approximation de  $P$  par une matrice de rang  $r$  au sens de l'erreur quadratique moyenne (consulter [83] pour plus de détails).



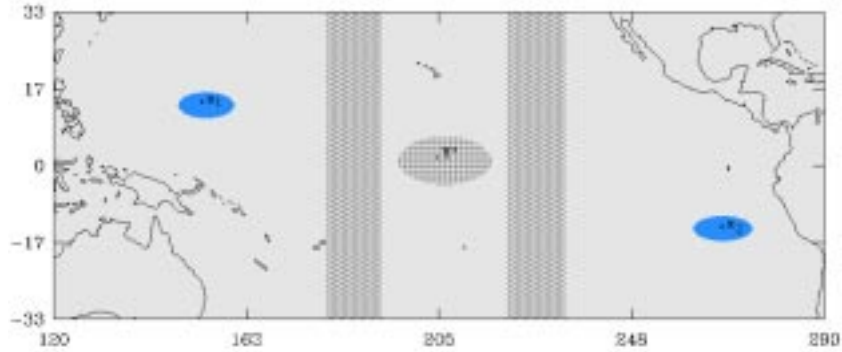


FIG. 7.1 – Un exemple de décomposition du domaine de l’océan Pacifique tropical

## 7.3 Analyse EOFs locale

### 7.3.1 L’intérêt d’une analyse locale

L’analyse EOFs classique (ou global) fournit une représentation approchée des corrélations entre toutes les variables de l’océan. Les corrélations qui en résultent contiennent en général la variabilité à longue portée si on ne retient pas assez de EOFs. Cependant, on peut s’attendre à ce que les corrélations entre ces variables aient une portée spatiale limitée car deux variables évaluées à deux locations spatiales très éloignées ne doivent pas être, en principe, corrélées. De plus, cette analyse ne distingue pas entre les zones calmes et les zones turbulentes de l’océan mais elle traite l’océan comme un seul domaine homogène. La base EOFs obtenue contient alors des informations communes sur ces zones et ceci peut réduire sa capacité à bien capturer des variabilités locales bien différentes. Enfin, une observation ne devrait induire des corrections qu’au voisinage de la position spatiale où elle a été prise (voir FIG. 7.1).

Tout cela suggère que l’utilisation d’une base dont les éléments sont des fonctions localisées en espace peut donner de meilleurs résultats. Nous proposons alors de forcer les EOFs à être locales en s’inspirant du principe de l’analyse EOFs. Notre idée consiste à construire un ensemble de EOFs qui ont pour support une petite région de l’océan. Pour cela, il suffit de partager le domaine du modèle en plusieurs sous-domaines et ensuite d’appliquer des analyses EOFs classiques indépendamment sur chacun de ces sous-domaines. Une telle analyse nous permet de limiter la portée spatiales des corrélations entre les domaines appropriés. Néanmoins, cette décomposition aboutit à des variables non-corrélées en les positions spatiales des différents sous-domaines. Pour obtenir une meilleure représentativité, nous utilisons donc des sous-domaines qui possèdent des zones de chevauchement (voir FIG. 7.1).

Une telle approche est très flexible en pratique car sa mise en oeuvre nous laisse le choix de fixer : (i) le nombre des sous-domaines, (ii) la forme des sous-domaines ainsi que la superficie de leurs zones de chevauchement, et (iii) le nombre des EOFs dans chaque sous-domaine. Cette flexibilité nous permettra d’une part, de construire la base la mieux adaptée à chaque sous-domaine, et d’autre part, de diminuer les coûts car les calculs avec la base locale sont moins coûteux puisque l’on travaille avec des domaines bien plus petits. Ceci nous permettra alors de considérer plus de vecteurs de la base EOFs locale sans sur coût.

L’analyse EOFs locale ne sera utile que pour l’initialisation des filtres évolutifs et pour le

filtre à base de correction fixe. La grande difficulté reste l'introduction d'un moyen de faire évoluer la base locale dans le temps d'une manière consistante avec la dynamique du modèle sans lui faire perdre son caractère local.

### 7.3.2 Construction de la base EOFs locale

Pour construire la base EOFs locale, on doit tout d'abord définir les sous-domaines de l'océan sur lesquels on va appliquer des analyses EOFs classiques indépendantes les unes des autres. Comme on l'a déjà dit, ces sous-domaines ne doivent pas être disjoints. Pour faire cela proprement, on va considérer une "partition de l'unité", c'est-à-dire un ensemble de fonctions positives  $\chi^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, J$  définies sur le domaine du modèle, dont la somme est identiquement égale à 1. Dans ce cas, tout vecteur d'état  $X$  peut s'écrire comme

$$X(x, y, z) = \sum_{j=1}^J X(x, y, z) \chi^{(j)}(x, y, z) = \sum_{j=1}^J X^{(j)}(x, y, z) \quad (7.21)$$

où

$$X^{(j)}(x, y, z) = X(x, y, z) \chi^{(j)}(x, y, z) \quad (7.22)$$

et  $x, y$  et  $r$  désignent les coordonnées spatiales. Ensuite, pour chaque  $j$  entre 1 et  $J$ , on applique séparément une analyse EOFs sur chaque champ  $X^{(j)}$  pour calculer une base EOFs pour chaque sous-domaine de l'océan.

En utilisant la formule de reconstitution (7.17) des données de départ, on obtient une formule de reconstitution pour chaque champ local  $X^{(j)}$  selon

$$X^{(j)}(x, y, z) = \bar{X}^{(j)}(x, y, z) + \sum_{l=1}^{r^{(j)}} c_l^{(j)} \phi_l^{(j)}(x, y, z) + e^{(j)}. \quad (7.23)$$

où comme précédemment,  $\bar{X}^{(j)}(x, y, z)$  est le champ moyen des vecteurs locaux  $X^{(j)}$ , les  $\phi_l^{(j)}(x, y, z)$  sont les EOFs résultant de la  $j^{\text{ème}}$  analyse EOFs et les  $c_l^{(j)}$  sont des coefficients.

Par suite, en sommant sur l'indice  $j$ , on aboutit à une nouvelle formule de reconstitution des vecteurs d'état globaux  $X_i$  sous la forme

$$X(x, y, z) = \bar{X}(x, y, z) + \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^{r^{(j)}} c_l^{(j)} \phi_l^{(j)}(x, y, z) + e. \quad (7.24)$$

Dans cette formule, l'erreur de représentation  $e$  est la somme de toutes les erreurs de représentation locales  $e^{(j)}$ . Notons que celle relative au champ  $X^{(j)}$  produit une erreur nulle en dehors du support de la fonction  $\chi^{(j)}(x, y, z)$ . Toutefois, on peut encore diminuer cette erreur en réajustant les coefficients  $c_l^{(j)}$  afin d'obtenir le minimum de la somme des carrés des erreurs.

En effet, si on écrit l'équation (7.24) sous la forme matricielle

$$X = \bar{X} + BC + e \quad (7.25)$$

où  $B$  est la matrice dont les  $r = \sum_{j=1}^J r^{(j)}$  colonnes sont les EOFs locales  $\phi_i^{(j)}$  et  $\mathcal{C}$  est le vecteur colonne de  $\mathbb{R}^r$  contenant les coefficients  $c_i^{(j)}$ , on peut encore réduire l'erreur de représentation  $e$  dans (7.25) en considérant le vecteur  $\mathcal{C}^*$  qui minimise la norme de l'erreur de représentation  $(X - \bar{X}) - B\mathcal{C}$ . La solution de ce problème est bien évidemment donnée par la projection orthogonale de  $X - \bar{X}$  sur le sous-espace engendré par les colonnes de  $B$ . Ainsi, on prend comme dans le paragraphe 7.2.2, l'ensemble des vecteurs colonnes de la matrice  $B$ , appelée base EOFs locale, comme une base de représentation de la variabilité du système d'état.

*Tout se passe comme si on complétait chacune des bases EOFs locales par des zéros en dehors du sous-domaine sur laquelle elle a été déterminée.*

Finalement, le nombre des EOFs à retenir dans le  $k^{\text{ème}}$  sous-domaine  $r_k$  sera fixé en fonction de l'inertie absorbée par ses premières EOFs locales de chaque sous-domaine. Les sous-domaines de forte variabilité peuvent alors se voir affecter plus de fonctions de base que d'autres zones plus calmes.

### 7.3.3 Choix des sous-domaines

La taille et la forme des sous-domaines est bien évidemment caractérisée par le support des fonctions de l'unité  $\chi^{(j)}$ . En pratique, ces fonctions doivent avoir comme support une petite région de l'océan. Par exemple, dans le cas d'un domaine rectangulaire, on peut prendre les  $\chi^{(j)}$  sous forme tensoriel

$$\chi^j(x, y, z) = \chi_X^{(j_1)}(x)\chi_Y^{(j_2)}(y) \quad (7.26)$$

où  $j_1$  varie entre 1,  $J_1$ ,  $j_2$  entre 1 et  $J_2$ ,  $j = j_1 + J(j_2 - 1)$  varie entre 1 et  $J = J_1J_2$  et les fonctions  $\chi_X^{(j_1)}$  et  $\chi_Y^{(j_2)}$  sont également de petit support et ont pour somme identiquement 1. Par ailleurs, le champ de vecteur d'état est continu. Il serait donc bon de considérer des fonctions  $\chi^{(j)}$  continues, ce qui implique que leurs supports ne peuvent pas être disjoints. De toutes façons, on ne doit pas limiter la portée des corrélations verticales pour laisser les informations de surface (satellites) se propager au fond de l'océan.

La difficulté principale avec les EOFs locales est qu'il n'y a aucun moyen pour les faire évoluer avec l'équation d'évolution de la base de correction du filtre SEEK pour suivre la dynamique du modèle, sans leur faire perdre la localité. De plus, même si on utilise cette base uniquement pour initialiser le filtre SEEK et donc abandonner la localité, cela peut être très coûteux car la dimension de cette base est en général assez grande. Par ailleurs, nous avons remarqué dans nos expériences numériques que la variabilité à longue portée a été mal représentée par la base EOFs locale. Pour ces raisons, nous allons augmenter la base locale par quelques vecteurs de la base globale, d'où résulte en une base globale-locale, dite base EOFs mixte. L'avantage d'une telle base est qu'on peut faire évoluer sa partie globale comme dans le filtre SEEK.

## 7.4 Analyse EOFs mixte

### 7.4.1 L'intérêt d'une analyse mixte

La variabilité des phénomènes océaniques peut être de portée globale aussi bien que de portée locale. Le deuxième type de variabilité est en général mal représentées dans les premières

EOFs globales. Par conséquent, les résidus des vecteurs d'état dans le sous-espace engendré par la base EOFs globale contiennent surtout des informations sur les mouvements à courte portée. L'idée est donc d'appliquer une analyse EOFs locale sur ces résidus pour en extraire la variabilité locale. Ainsi, en combinant la base EOFs locale obtenue à partir des résidus avec la base EOFs globale en une seule base appelée base EOFs mixte, on va posséder une base de représentation tenant compte de la variabilité globale et locale. De plus, on peut faire évoluer la partie globale de cette base comme dans le SEEK pour suivre la dynamique du modèle.

#### 7.4.2 Construction de la base EOFs mixte

Pour construire une telle base, on calcule tout d'abord une base EOFs globale  $L = [\phi_k]_{k=1,\dots,r}$  à partir de l'échantillon de vecteurs d'état  $X_1, \dots, X_N$ . La formule de reconstitution de ces états, après projection sur le sous-espace engendré par  $L$ , est donnée par (voir paragraphe 7.2.2)

$$X = \bar{X} + \sum_{k=1}^r c_k \phi_k + e \quad (7.27)$$

où  $e$  est l'erreur de représentation (ou résidu) du vecteur d'état  $X$  dans le sous-espace engendré par  $L$ . Ensuite, en appliquant une analyse EOFs locale sur les résidus  $e_1, \dots, e_N$  de la représentation des vecteurs d'état  $X_1, \dots, X_N$  dans la base globale, on obtient une autre formule de reconstitution, mais cette fois des résidus des états dans la base locale

$$e = \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^{r^{(j)}} c_l^{(j)} \phi_l^{(j)} + e'. \quad (7.28)$$

où les  $B = [\phi_l^{(j)}]$  désignent les premières EOFs locales et  $e'$  est l'erreur de représentation du résidu  $e$  dans le sous-espace engendré par  $B$ . A noter que dans cette analyse, le champ  $e$  n'a pas été centré car il représente un résidu et donc doit être, en principe, déjà centré. En remplaçant  $e$  par sa valeur dans la formule (7.27), on obtient

$$X = \bar{X} + \sum_{k=1}^r c_k \phi_k + \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^{r^{(j)}} c_l^{(j)} \phi_l^{(j)} + e' \quad (7.29)$$

qui peut être bien plus précise que la formule de reconstitution (7.27) avec la base EOFs globale. Finalement, en représentant cette dernière formule sous la forme matricielle comme dans le paragraphe 7.2.2, on peut prendre la matrice

$$L^B = [ \phi_1 \dots \phi_r : \phi_1^{(1)} \dots \phi_{r_1}^{(1)} : \dots : \phi_1^{(J)} \dots \phi_{r_J}^{(J)} ], \quad (7.30)$$

qu'on appellera base EOFs mixte, comme une base de représentation de la variabilité de l'état du modèle.

On aurait, bien évidemment, pu commencer par une analyse EOFs locale et ensuite calculer une base globale à partir des résidus des états dans le sous-espace engendré par la base locale. Mais nous avons remarqué dans nos expériences numériques que la première façon de faire donne de meilleurs résultats.

## 7.5 Bases EOFs et filtres SEEK

Ce paragraphe est consacré à l'utilisation des différentes bases EOFs dans le filtre SEEK et ses variantes. Nous introduisons en outre une nouvelle version du filtre SEEK adaptée à la base EOFs mixte.

### 7.5.1 Base de correction initiale

L'analyse EOFs (globale) a été initialement introduite par *Pham et al.* [78] dans le contexte du filtre SEEK pour calculer une approximation de rang faible  $r$  de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $P^f(t_0)$  à l'instant initial  $t_0$ . Dans ce cas et sous l'hypothèse d'un modèle linéaire parfait, on a vu que la matrice de covariance de l'erreur  $P^a(t_k)$  du filtre de Kalman va rester de rang  $r$ . Ici, nous avons jusqu'à maintenant utilisée cette analyse pour déterminer une base de correction soit pour la première correction (selon une analyse objective) de nos filtres, soit comme base fixe pour le filtre SFEK.

Le filtre SFEK qui a été présenté dans le paragraphe 6.2 et qui revient à considérer la base EOFs comme une base de correction fixe, peut alors être utilisé pour tester la représentativité de nos différentes analyses EOFs et comparer leurs performances. En effet, ce filtre constitue un moyen efficace et surtout très économique pour mesurer la représentativité d'une base EOFs.

### 7.5.2 Filtre semi-évolutif avec une base partiellement locale

Notre idée consiste à faire évoluer la partie globale de la base EOFs mixte comme dans le filtre SEEK et à laisser la base locale fixe dans le temps, puisqu'on ne peut pas la faire évoluer sans perdre son caractère local. Parmi les différentes formes dégradées du filtre SEEK que nous avons présentées dans le chapitre précédent, il est évident que le filtre à base semi-évolutive SSEEK (première version) que nous avons développé dans le paragraphe 6.6.1 semble le mieux adapté à notre problème. On peut ainsi construire un nouveau filtre avec une base semi-évolutive partiellement locale, appelé filtre SEPLEK.

Le filtre SEPLEK procède en deux étapes, comme le filtre SSEEK, après une étape d'initialisation avec une base EOFs mixte. Comme pour le filtre SSEEK, il est toujours utile, pour des raisons de stabilité numérique, de normaliser les vecteurs de base qui évoluent. Nous les normalisons alors par la racine carrée de la moyenne des normes des EOFs (voir paragraphe 6.6.1).

- *Initialisation*: On utilise l'analyse EOFs mixte du paragraphe 7.4 pour calculer une approximation de rang  $r + s$  ( $r$  et  $s$  désignent la dimension de la partie globale de la base  $L_0$  et la partie locale  $B$  respectivement) de la matrice de covariance de l'erreur initiale. Une telle analyse fournit une base EOFs mixte  $L_0^B$  décomposée sous forme locale-globale selon

$$L_0^B = [L_0 \dot{ : } B]. \quad (7.31)$$

La première correction se fait alors selon une analyse objective dans les directions de  $L_0^B$ , i.e.

$$X^a(t_0) = X_0 + L_0^B U_0 (L_0^B)^T \mathbf{H}_0^T R_0^{-1} [Y_0^o - H_0 X_0] \quad (7.32)$$

$$U_0 = [(L_0^B)^T \mathbf{H}_0^T R_0^{-1} \mathbf{H}_0 L_0^B]^{-1}, \quad (7.33)$$

ce qui donne

$$P^a(t_0) = L_0^B U_0 (L_0^B)^T. \quad (7.34)$$

- 1- Etape de prévision :** A l'instant  $t_{k-1}$ , on dispose d'une estimation  $X^a(t_{k-1})$  de l'état du système et de la matrice de covariance de l'erreur correspondante  $P^a(t_{k-1})$ , factorisée selon

$$P^a(t_{k-1}) = L_{k-1}^B U_{k-1} (L_{k-1}^B)^T \quad (7.35)$$

où la base de correction mixte  $L_{k-1}^B$  donnée par

$$L_{k-1}^B = [L_{k-1} : B] \quad (7.36)$$

et la matrice  $U_{k-1}$  est de dimension  $(r+s) \times (r+s)$ . Le modèle (3.1) est alors utilisé pour prévoir l'état, i.e.

$$X^f(t_k) = M(t_k, t_{k-1}) X^a(t_{k-1}). \quad (7.37)$$

Une approximation de la matrice de covariance de l'erreur correspondante est alors donnée par

$$P^f(t_k) = L_k^B U_{k-1} (L_k^B)^T + Q(t_k) \quad (7.38)$$

où la nouvelle base de correction mixte  $L_k^B$  est égale à

$$L_k^B = [L_k : B] \quad (7.39)$$

et la partie globale de la base mixte  $L_k$  évolue comme dans le filtre SEEK, i.e.

$$L_k = \mathbf{M}(t_k, t_{k-1}) L_{k-1} \quad (7.40)$$

Finalement, on normalise les vecteurs de base qui évoluent comme dans le filtre SSEEK (voir paragraphe 6.6.1).

- 2- Etape de correction :** La nouvelle observation  $Y_k^o$  à l'instant  $t_k$  est ensuite utilisée pour corriger l'état prévu par la formule

$$X^a(t_k) = X^f(t_k) + G_k [Y_k^o - H_k X^f(t_k)], \quad (7.41)$$

où  $G_k$  est la matrice de gain de ce filtre donnée par

$$G_k = L_k^B U_k (L_k^B)^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1}, \quad (7.42)$$

et la matrice  $U_k$  est calculée par (ceci pour un modèle parfait : sinon on projète l'erreur du modèle sur la base de correction  $L_k^B$ )

$$U_k^{-1} = U_{k-1}^{-1} + (\mathbf{H} L_k^B)^T R_k^{-1} \mathbf{H}_k L_k^B. \quad (7.43)$$

La matrice de covariance de l'erreur d'analyse est alors

$$P^a(t_k) = L_k^B U_k (L_k^B)^T. \quad (7.44)$$

En ce qui concerne le coût, ce filtre peut être bien moins coûteux que le filtre SEEK puisque la dimension de la partie globale de sa base de correction qui évolue (2 – 5 par exemple) est, en général, très inférieure à la dimension de la base du filtre SEEK (20 – 50 par exemple).

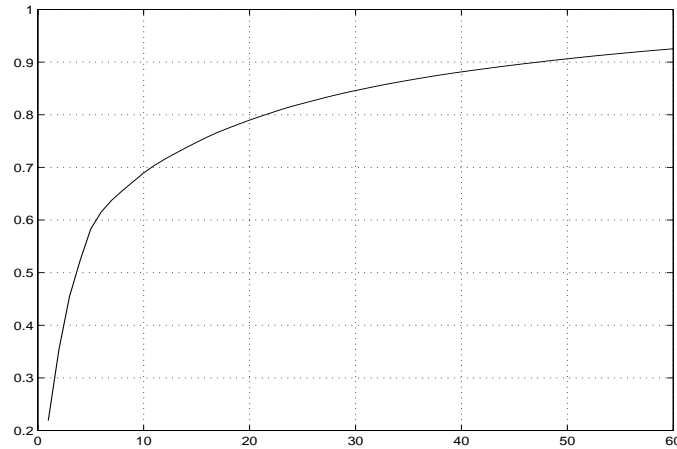


FIG. 7.2 – Pourcentage de l'inertie en fonction du nombre des EOFs retenues

## 7.6 Applications au modèle OPA

Nous présentons tout d'abord les résultats des différentes analyse EOFs que nous avons appliquées sur l'ensemble de données historique  $H_S$  simulé par le code numérique du modèle (voir paragraphe 2.5). Nous comparons ensuite d'abord les représentativités de ces bases et puis les résultats d'assimilation du filtre SEPLEK avec ceux du filtre SEIK.

### 7.6.1 Résultats des analyses EOFs

#### Analyse EOFs globale

Le pourcentage de variabilité de l'échantillon  $H_S$  absorbé par l'analyse EOFs globale est montré dans la figure FIG. 7.2. En tenant compte de ce résultat, nous avons choisi de retenir  $r = 30$  EOFs globales dans nos expériences d'assimilation. En effet, cela nous permet de représenter 85% de l'inertie de  $H_S$  et de plus ce pourcentage n'augmente que légèrement pour des valeurs de  $r$  plus grandes.

#### Analyse EOFs locale

Comme le domaine de l'océan Pacifique tropical est rectangulaire, avec une largeur bien supérieure à la hauteur, nous avons choisi de le subdiviser en trois sous-domaines dans la direction zonale pour limiter la portée des corrélations spatiales des variables du modèle dans cette direction. Nous avons également considéré des subdivisions dans la direction méridionale mais les résultats que nous avons obtenus n'étaient pas très bons. Cela peut être dû à la petite hauteur du domaine ou aussi aux mouvements de l'océan pacifique tropical qui sont surtout zonales. De plus, notre modèle admet dans cette direction deux zones tampons au Nord et au Sud qui ne présentent pas parfaitement les circulations océaniques.

Le choix de la partition de l'unité du domaine est montré dans la figure FIG. 7.3. La seule fonction tensorielle unidimensionnelle dans la direction méridionale a été alors considérée constante identique à 1. Après avoir appliqué séparément une analyse EOFs sur les vecteurs d'état de ces trois sous-domaines, nous avons retenu respectivement 18, 30 et 23 EOFs pour

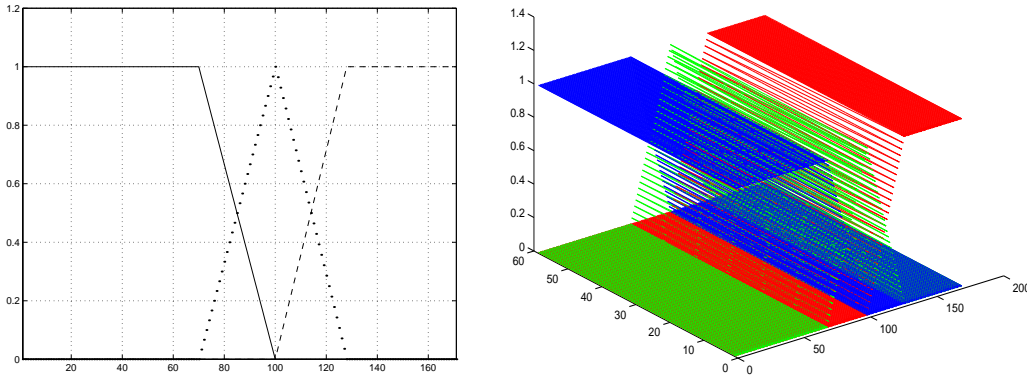


FIG. 7.3 – Les fonctions tensorielles unidimensionnelles  $\{\chi_X^{(j)}(x), j = 1, \dots, 3\}$  et la partition de l'unité par des fonctions bidimensionnelles  $\{\chi^{(j)}(x, y) = \chi_X^{(j)}(x), j = 1, \dots, 3\}$

expliquer 85% de l'inertie de l'échantillon  $H_S$  dans le premier, deuxième et le troisième sous-domaine. Selon ce choix, la dimension de la base EOFs locale est égale à  $18 + 30 + 23 = 71$ .

Nous avons aussi tracé la première EOFs globale et les premières EOFs locales en surface de la vitesse horizontale et de la salinité dans l'annexe C. On peut voir que la zone où le champ de vitesse est extremum se situe dans la région zonale et que les EOFs locales résument plus de variabilité que la EOFs globale avec la vitesse horizontale mais pas avec la salinité.

### Analyse EOFs mixte

Nous avons appliqué la même analyse EOFs locale précédente sur les résidus des vecteurs d'état de l'échantillon  $H_S$  dans le sous-espace engendré par les 5 premières EOFs globales qui expliquent presque 50% de la variabilité globale. Les résultats de cette analyse montrent qu'on doit considérer 19, 19 et 20 EOFs afin de résumer 65% de l'inertie des résidus dans le premier, deuxième et troisième sous-domaine respectivement. Par conséquent, la dimension de la base EOFs mixte est égale à  $5 + 19 + 19 + 20 = 63$ .

### 7.6.2 Etude de la représentativité des différentes bases EOFs

Une manière simple, efficace et surtout très rapide pour tester la performance des différentes analyses EOFs que nous avons développée dans ce chapitre est d'utiliser la base EOFs obtenue à partir de ces analyses comme une base de correction fixe pour le filtre SFEK et ensuite de mesurer ses performances. Par conséquent, nous avons conduit trois expériences en utilisant le filtre SFEK avec les différentes bases EOFs : globale, locale et mixte. Le facteur d'oubli étant égal à 0.8.

Les résultats de ces expériences tracés dans la figure FIG. 7.4 montrent que la base EOFs locale représente beaucoup mieux la variabilité de la vitesse horizontale  $U_h$  et la pression de surface  $P_s$  que la base EOFs globale. Cependant, les résultats d'assimilation de la salinité  $S$  et la température  $T$ , qui sont probablement contrôlées par des phénomènes de variabilité à longue portée, ne sont pas aussi bons que ceux obtenus par la base globale. En ce qui concerne



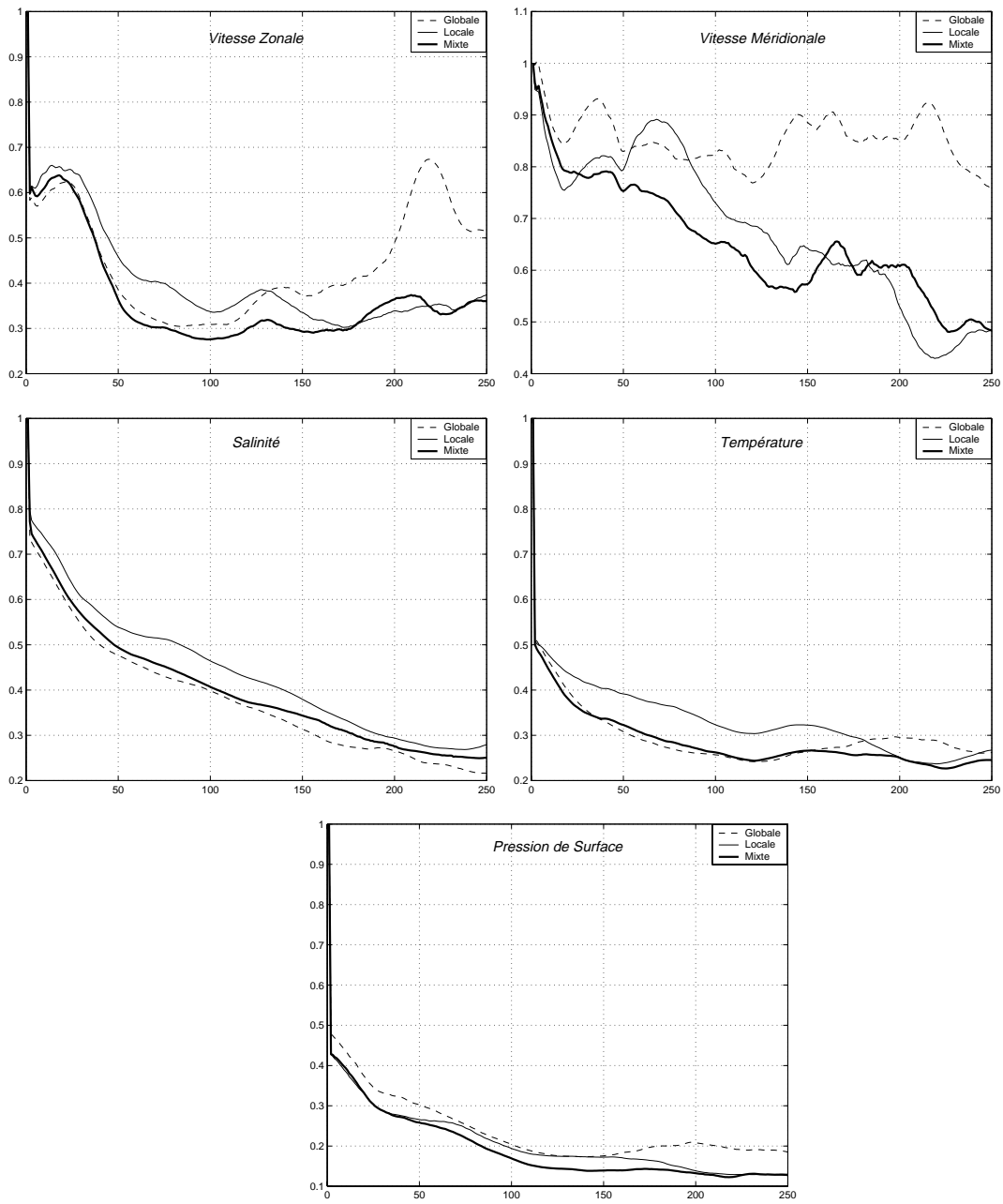


FIG. 7.4 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre SFEK avec la base EOFs globale, locale et mixte

la base EOFs mixte, on peut voir que le filtre SFEK se comporte aussi bien avec cette base qu'avec la base locale en ce qui concerne la vitesse horizontale  $U_h$  et la pression de surface  $P_s$ , et de plus, il améliore considérablement l'assimilation de la salinité  $S$  et la température  $T$  par rapport à cette dernière. Ces résultats montrent que l'analyse EOFs mixte est capable de capturer la variabilité des phénomènes océaniques à longue et courte portée.

Finalement, il est important de noter ici que la non-divergence du transport barotrope est une propriété essentielle à conserver pour garder la stabilité du code numérique du modèle OPA. Sinon, cette propriété, issue de l'hypothèse de toit rigide, accroît anormalement les valeurs des traceurs  $S$  et  $T$  et conduit à une "explosion" très rapide du modèle. Le problème de la divergence du transport intervient lorsqu'on applique une analyse EOFs locale sur les vecteurs d'état du modèle. En effet, les vecteurs de la base EOFs obtenus par cette analyse ne vérifient pas cette condition sur les zones de chevauchement des sous-domaines. Pour remédier à ce problème, nous sommes alors obligés de projeter à chaque pas de filtrage le vecteur d'état analysé  $X^a(t_k)$  sur un sous-espace de vitesse barotrope non-divergent avant d'utiliser le modèle OPA pour prévoir l'état à l'instant suivant. Malgré la perte de précision sur  $X^a(t_k)$  en raison de cette projection, la base locale a donné des résultats très satisfaisants.

### 7.6.3 Filtre SEPLEK versus filtre SEIK

Nous avons également testé le filtre SEPLEK avec un facteur d'oubli 0.8, en laissant la partie globale de la base mixte évoluer avec la dynamique du modèle comme dans le filtre SEEK, tandis que la partie locale étant gardée fixe. La performance de ce filtre est alors comparée à celle du filtre SEIK et aussi du filtre SFEK avec la base mixte. Comme les dimensions des bases EOFs globale et mixte ont été prises égales à 30 et 5 respectivement, les filtres SFEK et SEPLEK sont respectivement presque 30 et 6 fois plus rapide que le filtre SEIK.

On peut voir dans la figure FIG. 7.5 (voir également l'Annexe C) que le filtre SEPLEK est très performant. Ses résultats d'assimilation des composantes de la vitesse horizontale et de la pression de surface sont même meilleurs que ceux obtenus par le filtre SEIK durant la période instable du modèle. En ce qui concerne la salinité et la température, le filtre SEPLEK est aussi performant que le filtre SEIK. On peut aussi noter la bonne influence de l'évolution de la partie globale de la base de correction mixte en comparant les résultats de ce filtre avec ceux du filtre SFEK lorsque la base EOFs mixte est utilisée comme une base de correction fixe.

## 7.7 Conclusions

Nous avons introduit dans ce chapitre la nouvelle notion d'analyse EOFs locale. Dans cette analyse, les EOFs ont comme support une petite région du domaine de l'océan. Pour améliorer ces résultats d'assimilation des phénomènes à grande échelle, nous avons alors eu l'idée d'appliquer cette analyse sur les résidus des vecteurs d'état après projection sur le sous-espace engendré par quelques EOFs globales. Cette approche nous a fourni une nouvelle base, appelée base EOFs mixte, qui représente aussi bien les phénomènes océaniques à longue et courte portée. L'évolution de la partie globale de cette base avec la dynamique du modèle nous a conduit ensuite à construire une nouvelle variante du filtre SEEK, appelée SEPLEK, qui consiste essentiellement à garder la partie locale de la base EOFs mixte fixe dans le temps et à ne faire évoluer que la partie globale. Une série d'expériences jumelles a été conduite

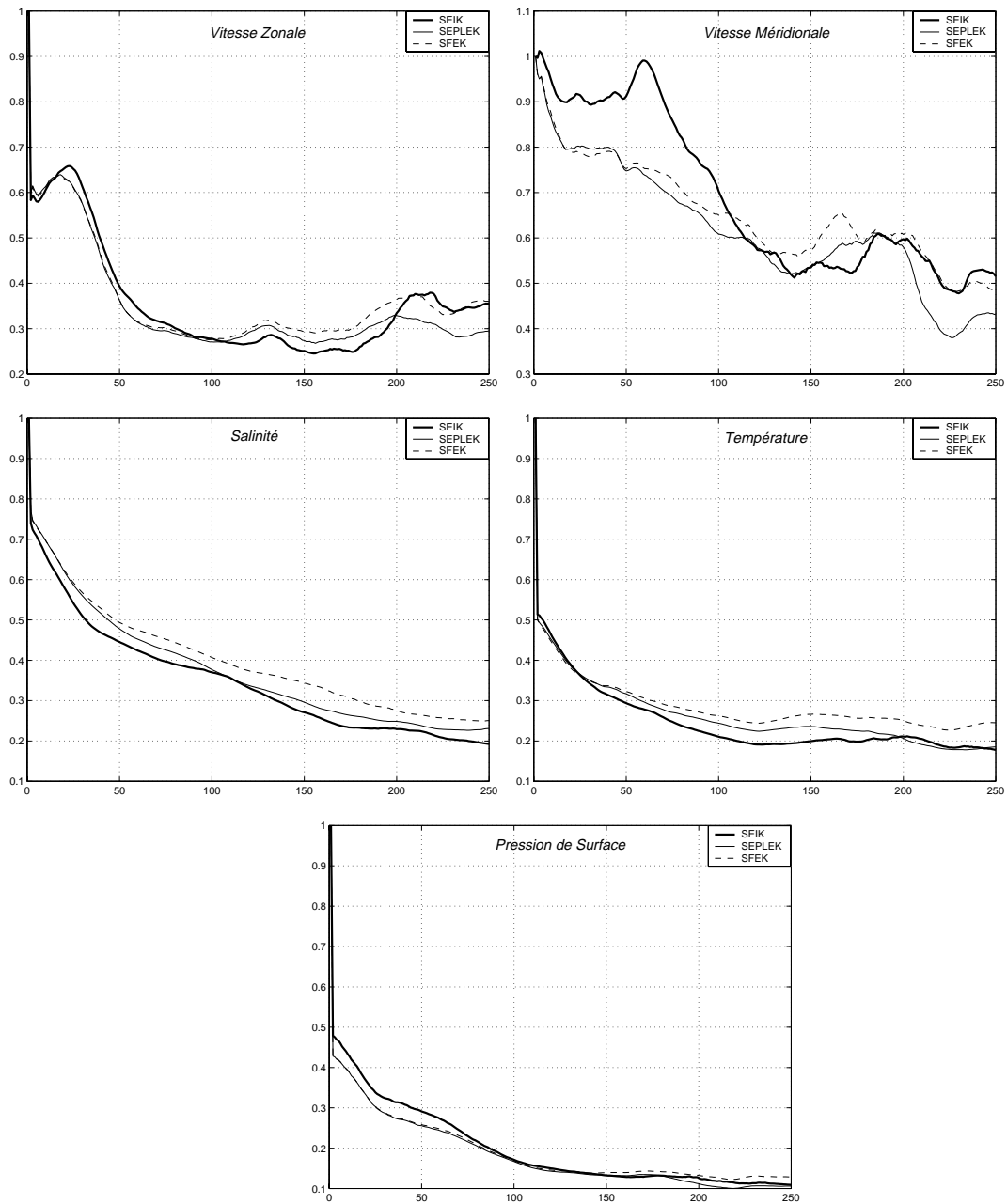


FIG. 7.5 – Evolution dans le temps de la RRMS des filtres SFEK (avec la base EOFs mixte), SEPLEK et SEIK avec un facteur d'oubli de 0.8

avec le modèle OPA pour comparer la représentativité des différentes analyses EOFs et pour évaluer la performance de nouveau filtre par rapport au filtre SEIK. Au vu des résultats de ces expériences, nos conclusions sont les suivantes :

- La base EOFs locale représente mieux la variabilité du champs de vitesse et de la pression de surface par rapport à la base obtenue par l'analyse EOF classique. Ses résultats avec la salinité et la température, qui sont essentiellement de variabilité globale, ne sont pas aussi bons que ceux obtenus par la base globale. Par ailleurs, trouver un moyen de faire évoluer les vecteurs de la base locale avec la dynamique du modèle sans perdre la localité reste une question ouverte.
- La base EOFs mixte s'est montrée très performante même lorsqu'on la garde fixe. Elle améliore sensiblement les résultats d'assimilation de la salinité et la température avec le filtre SFEK par rapport à la base locale. Lorsqu'on fait évoluer la partie globale de sa base de correction comme dans le filtre SEEK, elle fournit un filtre dynamiquement évolutif, avec une base de correction qui représente aussi bien la variabilité locale que globale, et qui semble même être plus performant que le filtre SEIK avec un coût bien inférieur. On peut aussi noter la bonne influence de l'évolution de la partie globale de la base de correction.



## Chapitre 8

# Réglage adaptatif des paramètres des filtres SEEK

### 8.1 Introduction

Plusieurs études ont montré que l’erreur de filtrage augmentait rapidement durant les périodes d’instabilité barocline et barotrope [37, 72, 89]. *Cohn et Tolding* [20] ont aussi remarqué que toutes leurs formes dégradées du filtre de Kalman n’avaient pas réussi à capturer les instabilités du modèle, et que généralement elles divergeaient durant ces périodes. Les formes dégradées des filtres SEEK et SEIK que nous avons présentées dans le chapitre 6 ne peuvent pas être une exception à cette règle à partir du moment où les hypothèses avec lesquelles nous les avons construites ne sont plus justifiées durant ces périodes. De plus, nous avons pu voir dans les applications numériques du chapitre 6 que les filtres SEEK, SEIK et surtout leurs formes dégradées avaient montré des signes de faiblesse lors du passage du modèle dans des périodes instables.

Par ailleurs, on sait que la matrice de covariance de l’erreur d’estimation du filtre SEEK et de ses variantes n’est qu’une approximation de rang faible de la “vraie” matrice de covariance de l’erreur. L’adaptation des paramètres de nos filtres en fonction de l’erreur de prévision nous semble donc une nécessité pour améliorer leurs performances. Ainsi, pour augmenter la stabilité de nos filtres durant les périodes instables et améliorer leurs performances, nous proposons dans ce chapitre des schémas de réglage adaptatifs des paramètres du filtre SEEK concernant le facteur d’oubli et la base de correction. Mais avant cela, nous décrivons brièvement l’idée principale de l’adaptativité dans un filtre de type Kalman.

### 8.2 Adaptativité et vecteur d’innovation

L’adaptativité est la propriété du filtre de se modifier lui-même pour tenir compte des erreurs du modèle, et d’une manière plus générale, des défauts du filtre. Le seul critère objectif des performances d’un filtre est l’erreur de prévision (appelée aussi vecteur d’innovation)

$$v_k = Y_k^o - H_k X^f(t_k). \quad (8.1)$$

Son importance est sa “décorrélation sérielle”. Ainsi, la suite des erreurs de prévision peut contenir des informations que l’on peut exploiter pour modifier les paramètres de filtrage de façon à améliorer ses performances.

### 8.2.1 Tester l'optimalité d'un filtre de type Kalman

*Jazwinski* [52] a fait remarquer que la seule quantité disponible pour juger de la performance d'un filtre de type Kalman est le vecteur d'innovation et ses statistiques. En effet, sous les conditions que les termes d'erreur sont sériellement non corrélés, *Kailath* [53] a montré que si la matrice de gain du filtre de Kalman était optimale alors les vecteurs d'innovation étaient sériellement non-corrélés et vice versa, au sens où la matrice de covariance d'innovation vérifie

$$C_h^k = E[v_k v_k^T] = 0 \quad \text{si} \quad k \neq h. \quad (8.2)$$

Ainsi, en surveillant continuellement le résidu entre les observations et le vecteur d'état prévu, nous pouvons évaluer d'une manière rationnelle la proximité de notre filtre de l'optimalité, et ainsi prévoir des améliorations à notre algorithme. *Daley* [24] a montré comment une telle surveillance pourrait même être utile pour diagnostiquer la faiblesse dans un système d'assimilation de données : un schéma d'assimilation serait proche de l'optimalité si la covariance d'innovation était assez petite. Dans ce cas, le schéma aurait extrait toutes les informations contenues dans les observations. Inversement, lorsque la covariance d'innovation n'est pas suffisamment petite, cela veut dire que les observations n'ont pas été utilisées efficacement par notre schéma d'assimilation, qui n'est plus optimal.

### 8.2.2 Calibration du système d'innovation

Supposons que la matrice de covariance de l'erreur de prévision de notre filtre dépende d'un paramètre inconnu  $\alpha$  et notons<sup>1</sup>

$$P_k^f(\alpha) = E\left([X^t(t_k) - X^f(t_k)][X^t(t_k) - X^f(t_k)]^T\right). \quad (8.3)$$

*Kailath* [53] a aussi montré que si  $P_k^f(\alpha)$  était optimale, alors la matrice de covariance  $C_k$  du vecteur d'innovation  $v_k$  définie par

$$C_k = E(v_k v_k^T) \quad (8.4)$$

vérifiait le système d'innovation

$$C_k = S_k(\alpha) \quad (8.5)$$

où

$$S_k(\alpha) = H_k P_k^f(\alpha) H_k^T + R_k. \quad (8.6)$$

Deux cas se présentent : (i) soit on possède une estimation de  $\alpha$  et dans ce cas on peut vérifier la consistance du système d'innovation (8.5) en comparant les termes de part et d'autre de cette égalité, (ii) soit  $\alpha$  est inconnu et dans ce cas le terme à droite de l'égalité (8.5) présente une famille de covariance d'innovation. Comme le terme à gauche de l'égalité (8.5) est toujours valable, on peut trouver un ensemble de paramètres consistants avec les innovations produites par notre système d'assimilation. On va alors choisir le paramètre  $\alpha$  de manière à ce qu'il soit le plus consistant possible, selon un sens à définir, avec le système d'innovation (8.5). Cette méthode connue sous le nom de "covariance matching" a été présentée en détail *Burg* [16], *Dee* [27] et *Mehra* [68].

1. Dans la suite, on notera  $P_k^f(\alpha)$  au lieu de  $P^f(t_k)$  à chaque fois que  $P^f$  dépend de  $\alpha$ .

### Estimateur du maximum de vraisemblance

Burg [16] a montré qu'un moyen efficace pour calibrer le système d'innovation précédent est d'utiliser un estimateur de maximum de vraisemblance de  $\alpha$ . Le principe de sa méthode repose sur l'hypothèse suivante : pour un  $\alpha$  donné, le vecteur d'innovation  $v_k$  suit une loi normale centrée et de matrice de covariance  $S_k(\alpha)$ . Dans ce cas, la densité de probabilité conditionnelle  $P(v/\alpha)$  du vecteur d'innovation s'écrit

$$P(v/\alpha) = (2\pi)^{-\frac{p_k}{2}} |S_k(\alpha)|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} v_k^T S_k^{-1}(\alpha) v_k \right], \quad (8.7)$$

où  $p_k$  est la dimension de  $v_k$  (qui est aussi égale à la dimension du vecteur d'observation à l'instant  $t_k$ ). Etant donné le vecteur d'innovation  $v_k$  à l'instant  $t_k$ , l'estimateur de maximum de vraisemblance  $\alpha^{MV}$  du paramètre  $\alpha$  maximise la probabilité de calibrer le système d'innovation. Il vérifie donc

$$\begin{aligned} \alpha^{MV} &= \text{Argmax}_{\alpha} P(v/\alpha) \\ &= \text{Argmin}_{\alpha} f(\alpha) \end{aligned} \quad (8.8)$$

où  $f$  est la fonction du maximum de vraisemblance définie par<sup>2</sup>

$$f(\alpha) = \log |S_k(\alpha)| + v_k^T S_k^{-1}(\alpha) v_k. \quad (8.9)$$

On montre alors que la dérivée de  $f$  par rapport à  $\alpha$  est donnée par (voir *Dee* [27])

$$f'(\alpha) = \text{Tr} \left[ \left( S_k^{-1} - S_k^{-1} v_k v_k^T S_k^{-1} \right) S_k'(\alpha) \right] \quad (8.10)$$

où la matrice  $S_k'(\alpha)$  est obtenue en dérivant chaque coefficient de la matrice  $S_k(\alpha)$  par rapport à  $\alpha$ . Finalement, pour minimiser la fonction du maximum de vraisemblance  $f$  par rapport à  $\alpha$ , on peut utiliser l'algorithme de Newton, à savoir

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n - \frac{f(\alpha^n)}{f'(\alpha^n)}. \quad (8.11)$$

### Estimateur des moindres carrés

Pour calibrer le système d'innovation, on peut aussi utiliser un estimateur des moindres carrés de  $\alpha$  qui consiste à chercher  $\alpha^{MC}$  qui minimise la distance (à définir) de  $S_k(\alpha)$  à  $C_k$  i.e.

$$\|C_k - S_k(\alpha^{MC})\|^2 = \min_{\alpha} \|C_k - S_k(\alpha)\|^2. \quad (8.12)$$

Concernant le choix de la norme matricielle dans la formule précédente, on peut considérer par exemple la norme matricielle canonique

$$\|A\|^2 = \text{Tr}[A^T A]. \quad (8.13)$$

---

2.  $|A|$  est la valeur absolue du déterminant de la matrice  $A$ .



### 8.2.3 Réglage des paramètres selon l'état du filtre ou du modèle

L'inconvénient principal du schéma adaptatif présenté dans le paragraphe précédent est son coût de calcul relativement élevé. De plus, lorsque le nombre des observations  $p_k$  est bien supérieur à la dimension du paramètre (ce qui est le cas en pratique), on peut s'attendre à ce que le réglage du paramètre inconnu  $\alpha$  ne soit pas très efficace puisqu'on ne peut pas calibrer un système matriciel  $p_k \times p_k$  à partir d'un seul paramètre. Rajoutons à cela le fait qu'en océanographie, la matrice de covariance de l'erreur de prévision est toujours une approximation de la "vraie" matrice de covariance, ce qui veut dire que le système d'innovation n'est jamais déterminé avec précision.

Pour les applications en océanographie, un bon schéma adaptatif serait un schéma qui opère en conjonction avec le filtre mais avec un coût assez raisonnable. Par ailleurs, on avait fait remarqué que nos filtres se comportaient très bien durant les périodes stables du modèle et que leurs performances se dégradent lorsque le modèle était instable. Pour construire un schéma adaptatif efficace et surtout économique, notre idée consiste ici à régler les paramètres de nos filtres uniquement dans les périodes instables du modèle de façon à améliorer ses performances. Reste alors à trouver un moyen pour détecter ces périodes. Pour cela on va présenter deux méthodes empiriques : la première basée sur l'état du modèle et la deuxième sur la performance du filtre.

#### Surveiller l'état du modèle

Pour détecter les périodes instables du modèle, la démarche la plus naturelle est bien évidemment de définir un critère qui porte directement sur le modèle. Un moyen simple consiste alors à surveiller l'énergie cinétique de l'océan. Pour cela, on calcule à chaque instant une moyenne à court et à long terme de l'énergie cinétique, notée  $s_k$  et  $l_k$  respectivement. On va alors supposer que si  $cs_k \leq l_k$ , (où  $c$  est une constante de réglage), le modèle a atteint un régime stable. En revanche, si  $cs_k > l_k$ , il est très probable que le modèle passe dans une période instable. Un autre moyen encore plus simple serait de fixer un seuil pour l'énergie cinétique (par exemple l'énergie cinétique moyenne calculée sur plusieurs années) à partir duquel le modèle pourrait être dans une période instable.

#### Surveiller la performance du filtre

Le vecteur d'innovation est le seul lien entre les prévisions du modèle et la réalité. Il contient des informations qui nous indiquent la performance du filtre à chaque instant. L'idée ici consiste à surveiller la performance du filtre en calculant comme précédemment une moyenne à court et à long terme mais cette fois-ci de la magnitude de l'erreur de prévision (ou de la norme du vecteur d'innovation)

$$\|v_k\|^2 = \|Y_k^o - H_k X^f(t_k)\|^2, \quad (8.14)$$

notée (aussi)  $s_k$  et  $l_k$  respectivement. Ainsi, si  $cs_k \leq l_k$ , cela veut dire que le filtre se comporte bien et on peut donc supposer qu'un régime stable a été atteint. Si  $cs_k > l_k$ , l'erreur de filtrage augmente et cela laisse penser que le modèle est dans une période instable car c'est la seule raison plausible pour expliquer la dégradation soudaine de la performance du filtre.

### Calcul de la moyenne à court et à long terme

Supposons qu'on possède  $k$  mesures d'une grandeur physique  $e_1, \dots, e_k$  à l'instant  $t_k$ . Si on affecte à chaque mesure  $e_k$  un poids qui diminue exponentiellement dans le temps, on calcule la moyenne  $\bar{e}_k$  des  $e_k$  par la formule

$$\bar{e}_k = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \gamma^i e_{k-i}}{\sum_{i=0}^{k-1} \gamma^i} \quad (8.15)$$

où  $\gamma$  est un réel à choisir entre 0 et 1.

Pour  $k$  assez grand, on a la formule approchée

$$\sum_{i=0}^{k-1} \gamma^i = \frac{1 - \gamma^k}{1 - \gamma} \approx \frac{1}{1 - \gamma}. \quad (8.16)$$

On peut alors écrire

$$\bar{e}_k \approx (1 - \gamma) \sum_{i=0}^{k-1} \gamma^i e_{k-i} = (1 - \gamma) \sum_{i=1}^{k-1} \gamma^i e_{k-i} + (1 - \gamma) e_k. \quad (8.17)$$

En procédant comme précédemment, on a aussi

$$\bar{e}_{k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \gamma^i e_{k-i}}{\sum_{i=1}^{k-1} \gamma^i} \approx \frac{1 - \gamma}{\gamma} \sum_{i=1}^{k-1} \gamma^i e_{k-i}. \quad (8.18)$$

En combinant les équations (8.17) et (8.18), on obtient finalement une formule approchée pour calculer récursivement  $\bar{e}_k$  selon

$$\bar{e}_k \approx \gamma \bar{e}_{k-1} + (1 - \gamma) e_k \quad (8.19)$$

avec comme moyenne initiale  $\bar{e}_0 = e_0$ . Cette formule est très utile en pratique car elle nous permet de calculer la moyenne  $\bar{e}_k$  à chaque instant  $t_k$  d'une manière séquentielle i.e. à chaque fois qu'une nouvelle mesure  $e_k$  est disponible.

Pour calculer une estimation de la moyenne à court et à long terme des  $e_k$ , il suffit alors de d'utiliser la formule récursive précédente avec deux paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  qui vérifient  $0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 \lesssim 1$  (par exemple  $\gamma_1 = 0,8$  et  $\gamma_2 = 0,9$ ). A noter que pour  $\gamma_1 = 0$ , la moyenne à court terme à l'instant  $t_k$  sera réduite à  $e_k$ . Dans ce cas, la comparaison se fait entre la moyenne à long terme et la valeur instantanée de la variable.

A noter qu'on peut toujours chercher à adapter les (paramètres des) statistiques des erreurs d'observation et du modèle de manière à calibrer le système d'innovation comme nous l'avons présenté dans le paragraphe 8.2.2. En effet, plusieurs algorithmes ont déjà été développés pour adapter ces paramètres dans le cadre du filtre de Kalman (voir *Blanchet et al.* [9] et *Mehra* [68] pour une revue sur ces méthodes). Ces algorithmes peuvent être adaptés facilement dans le cadre du filtre SEEK. Mais l'inconvénient majeur de ces méthodes est leur coût d'implémentation qui devient vite prohibitif pour des applications sur des modèles océaniques réalistes. Ici, nous nous intéresserons uniquement à l'adaptation des paramètres propres au filtre SEEK et à ses variantes comme le facteur d'oubli et la dimension ou l'évolution de sa base de correction.

### 8.3 Adaptation du facteur d'oubli

La propriété principale d'un système de filtrage adaptatif est sa capacité à poursuivre les variations de la dynamique du modèle. Pour cela, il est nécessaire de supprimer les anciennes données pour permettre au filtre de s'adapter aux nouveaux régimes du modèle. Il a été reconnu que l'utilisation d'un facteur d'oubli  $\rho$ , qui consiste à diminuer le poids des anciennes observations dans le temps d'une manière exponentielle, constitue un moyen efficace pour supprimer l'effet des anciennes observations sur l'estimation courante (voir *Astrom and Wit-tenmark* [4]).

Le choix de la valeur de  $\rho$  est très important en pratique et doit être réglé par l'utilisateur. Ce facteur doit être proche de 1 si le modèle est assez stable et plus faible que 1 dans le cas contraire. Cependant, le fait d'utiliser un facteur d'oubli constant revient à supposer que les variations du modèle sont uniformes dans le temps, ce qui n'est pas le cas des modèles océaniques réalistes. En effet, un facteur d'oubli petit pourrait dégrader les performances du filtre lorsque le modèle est dans une période stable, surtout si les nouvelles observations n'apportent suffisamment d'informations. Par contre, si on utilise un facteur d'oubli proche de 1, les observations seront oubliées lentement et le filtre ne pourra pas s'adapter rapidement aux fortes variations du modèle.

Tout cela suggère que l'utilisation d'un facteur d'oubli qui varie dans le temps en fonction de l'état du modèle peut améliorer les performances du filtre. Dans ce but, nous allons présenter plusieurs schémas pour régler adaptativement la valeur du facteur d'oubli.

#### 8.3.1 Selon le système d'innovation

La matrice de covariance de l'erreur de prévision du filtre SEEK, qui est de rang  $r$ , a été factorisée selon

$$P_k^f = L_k U_{k-1} L_k^T. \quad (8.20)$$

Par ailleurs, on a pu voir dans le paragraphe 4.4 que l'introduction d'un facteur d'oubli  $\rho$  dans le filtre SEEK (lorsqu'il est appliqué à un modèle parfait) se traduit par l'apparition de  $\rho$  dans l'équation de mise à jour de la matrice  $U_k$  selon

$$U_k^{-1} = \rho U_{k-1}^{-1} + L_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1} \mathbf{H}_k L_k. \quad (8.21)$$

Tout se passe donc comme si on considérait que  $P_k^f$  était égale à

$$P_k^f = L_k \left( \frac{1}{\rho} U_{k-1} \right) L_k^T = \frac{1}{\rho} L_k U_{k-1} L_k^T. \quad (8.22)$$

Ainsi, on va supposer que  $P_k^f$  dépend d'un paramètre inconnu  $\rho$  et on va chercher à estimer sa valeur de manière à calibrer le système d'innovation (8.5). En remplaçant  $P_k^f$  par sa valeur dans l'expression (8.6) de  $S_k$ , on obtient

$$S_k(\rho) = \frac{1}{\rho} \mathbf{H}_k L_k U_{k-1} L_k^T \mathbf{H}_k^T + R_k. \quad (8.23)$$

A noter que si on tient compte de l'erreur du modèle (de covariance  $Q(t_k)$ ), il faut tout simplement ajouter le terme  $\mathbf{H}_k Q(t_k) \mathbf{H}_k^T$  à droite de l'égalité précédente.

### Estimateur du maximum de vraisemblance

Comme on l'a présenté dans le paragraphe 8.2.2, on peut choisir  $\rho$  de manière à maximiser la probabilité de calibrer le système d'innovation. Cela revient à minimiser la fonction

$$f(\rho) = \log|S(\rho)| + v^T S^{-1}(\rho)v \quad (8.24)$$

dont la dérivée par rapport à  $\rho$  est donnée par

$$f'(\rho) = Tr \left[ (S^{-1}(\rho) - S^{-1}(\rho)vv^T S^{-1}(\rho))S'(\rho) \right]. \quad (8.25)$$

où

$$S'(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} \mathbf{H}_k L_k U_{k-1} L_k^T \mathbf{H}_k^T. \quad (8.26)$$

Pour déterminer  $S^{-1}(\rho)$ , on peut utiliser la formule classique

$$[A_1 + A_{12}A_2^{-1}A_{21}]^{-1} = A_1^{-1} - A_1^{-1}A_{12}[A_2 + A_{21}A_1^{-1}A_{12}]^{-1}A_{12}A_1^{-1}, \quad (8.27)$$

et on obtient alors

$$S_k^{-1}(\rho) = R_k^{-1} - R_k^{-1} \mathbf{H}_k L_k U_k L_k^T \mathbf{H}_k^T R_k^{-1}. \quad (8.28)$$

Le calcul de  $\rho^{MV}$ , qui minimise  $f$ , peut se faire à l'aide de l'algorithme de Newton. De plus, comme le facteur d'oubli est par définition inférieur à 1, on prendra alors

$$\rho = \text{Min} \{ 1 ; \rho^{MV} \}. \quad (8.29)$$

L'inconvénient de cette méthode est son coût prohibitif du fait que la taille matrice  $S_k$  est égale à celle du vecteur d'observation ( $\sim 10^3$ ). C'est pour cette raison que nous n'avons jamais implémenté cette méthode dans nos expériences numériques.

### Estimateur des moindres carrés

la deuxième méthode pour calibrer le système d'innovation est d'utiliser un estimateur de moindre carré de  $\rho$ . On va alors chercher  $\rho^{MC}$  qui minimise la distance de la matrice de covariance du vecteur d'innovation  $C_k$  à  $S_k(\rho)$  i.e.

$$\rho^{MC} = \text{Argmin}_\rho \|C_k - S_k(\rho)\|^2. \quad (8.30)$$

Notre problème est donc équivalent à la résolution du problème d'optimisation

$$\text{trouver } \rho^{MC} = \text{Argmin}_\rho \|A_k - \frac{1}{\rho} B_k\|^2 \quad (8.31)$$

où

$$A_k = C_k - R_k \quad \text{et} \quad B_k = \mathbf{H}_k L_k U_{k-1} L_k^T \mathbf{H}_k^T. \quad (8.32)$$

Si on considère la norme matricielle canonique, il est facile de voir que

$$\rho^{MC} = \frac{\|B_k\|^2}{\langle B_k, A_k \rangle} = \frac{Tr[B_k^T B_k]}{Tr[B_k^T A_k]}. \quad (8.33)$$

Comme précédemment, on prendra comme facteur d'oubli le réel

$$\text{Min}\{ 1 ; \rho^{MC} \}. \quad (8.34)$$

Finalement, pour donner plus de poids aux dernières observations, on estimera la matrice de covariance du vecteur d'innovation à chaque instant  $t_k$  par la formule récursive (voir Mehra [68])

$$C_k = \gamma C_{k-1} + (1 - \gamma) v_k v_k^T \quad (8.35)$$

où  $\gamma$  est un réel compris entre 0 et 1.

Le calibrage de  $\rho$  avec les méthodes présentées ci-dessus enlève à ce facteur un peu de sens car son rôle n'est pas de calibrer le système d'innovation; il serait plus judicieux de parler dans ce cas d'un paramètre qui mesure le poids à donner aux observations. Par ailleurs, l'estimation du facteur d'oubli à partir du système d'innovation ne peut jamais être très efficace à partir du moment où l'on peut s'attendre à ce que le calibrage d'un système matriciel avec un seul paramètre réel ne soit pas toujours efficace. Même si on l'on avait pu considérer une matrice de facteurs d'oubli pour remédier à ce problème, d'autant plus que les variations du modèles océaniques ne sont pas uniformes en espace, cette méthode ne peut pas être envisagée pour le moment puisque cela augmenterait les coûts qui sont déjà assez élevés.

### 8.3.2 Selon la performance du filtre

Nous proposons ici de donner au facteur d'oubli une des deux valeurs  $\rho_1^*$  proche de 1 et  $\rho_2^*$  strictement inférieure à 1 selon la performance du filtre. L'idée de ce schéma adaptatif est simple et repose sur l'observation suivante: si le modèle a atteint un régime stable, il est raisonnable de considérer un facteur d'oubli proche de 1 (voir égale à 1) pour extraire le maximum d'informations des observations. En revanche, si le modèle passe dans une période d'instabilité, les anciennes observations ne contiennent plus d'informations sur le nouveau régime. Il faut donc diminuer rapidement le poids de ces observations pour permettre au filtre de s'adapter au nouveau régime. Pour cela, nous allons utiliser un facteur d'oubli strictement inférieur à 1 (par exemple 0,7 ou 0,8).

Pour détecter les périodes instables, nous allons suivre le schéma que nous avons présenté dans le paragraphe 8.2.3 consistant à suivre la performance du filtre en calculant une moyenne de l'erreur de prévision à court  $s_k$  et à long terme  $l_k$ .

Le facteur d'oubli sera donc choisi comme suit

$$\rho = \begin{cases} \rho_1^* & \text{si } cs_k \leq l_k, \\ \rho_2^* & \text{si } cs_k > l_k \end{cases} \quad (8.36)$$

où  $c$  est une constante de réglage et où  $s_k$  et  $l_k$  sont calculés récursivement par les formules

$$\begin{cases} s_k &= \gamma_1 s_{k-1} + (1 - \gamma_1) \|v_k\|^2, \\ l_k &= \gamma_2 l_{k-1} + (1 - \gamma_2) \|v_k\|^2 \end{cases} \quad (8.37)$$

avec  $0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 \lesssim 1$ .

### 8.3.3 Selon l'état du modèle

Le principe de ce schéma est identique au schéma présenté dans le paragraphe précédent. Seulement ici on utilise l'énergie cinétique du modèle pour mesurer son "degré d'excitation". L'adaptation du facteur d'oubli se fera alors comme dans (8.36) mais avec

$$\begin{cases} s_k &= \gamma_1 s_{k-1} + (1 - \gamma_1) e_k^c, \\ l_k &= \gamma_2 l_{k-1} + (1 - \gamma_2) e_k^c \end{cases} \quad (8.38)$$

où  $e_k^c$  représente l'énergie cinétique du modèle à l'instant  $t_k$ .

Le grand avantage de ces deux derniers schémas est leurs coûts de calcul presque négligeables. De plus, on peut s'attendre à ce qu'ils soient assez performants et donnent des bons résultats si nos deux critères arrivent à bien détecter les périodes instables du modèle.

## 8.4 Adaptation de l'évolution de la base

On a pu remarquer dans nos expériences numériques (voir paragraphe 5.4) que le filtre SEIK s'était relativement bien comporté durant la période instable du modèle alors que les performances de ses formes simplifiées s'étaient dégradées (voir paragraphe 6.8). Par ailleurs, ces mêmes filtres ont été presque aussi performants que le filtre SEIK durant la période stable du modèle. Ces observations nous ont motivé pour faire évoluer la base de correction comme dans le filtre SEIK durant les périodes instables et comme dans une de ses formes simplifiées lorsque le modèle est stable. Cela peut être aussi expliqué par le fait que l'hypothèse

$$L_k = \mathbf{M}(t_k, t_{k-1}) L_{k-1} \approx L_{k-1}. \quad (8.39)$$

est plus justifié lorsque le modèle est stable. Dans ce cas, il est donc inutile de faire évoluer la base de correction comme dans le filtre SEIK. En revanche, lorsque le modèle est instable l'approximation précédente n'est plus justifiée. Il faut donc faire évoluer la base avec l'équation d'évolution du filtre SEIK.

En résumé, nous allons donc adapter l'évolution de la base de correction selon l'état du modèle ou du filtre comme dans le paragraphe 8.2.3, i.e.

$$L_k \text{ évolue comme dans } \begin{cases} \text{le filtre SEIK} & \text{lorsque } cs_k \leq l_k, \\ \text{une variante du SEIK} & \text{lorsque } cs_k > l_k. \end{cases} \quad (8.40)$$

Si les simulations confirment notre hypothèse, une telle procédure peut être très intéressante en pratique car elle va nous permettre de diminuer considérablement les coûts de calcul du filtre SEIK sans vraiment perdre ses performances.

## 8.5 Adaptation de la dimension de la base

On peut aussi chercher à adapter la dimension de la base de correction. En effet, l'un des points faibles du filtre SEIK est que la dimension de sa base de correction reste fixe dans le temps (égale aux nombres d'EOFs retenues lors de l'étape d'initialisation). Par ailleurs, si on augmente le nombre de vecteurs de la base pour améliorer les performances de nos filtres, cela augmente sensiblement leurs coûts. De plus, la base du filtre SEIK qui contient, en principe, les directions explosives du modèle ne peut pas avoir un rang constant du moment où

le nombre de ces directions varie dans le temps.

Dans le même état d'esprit que le paragraphe précédent, nous proposons d'utiliser deux dimensions de la base de correction  $r_1^*$  et  $r_2^*$ , avec  $r_1^* < r_2^*$ . Ainsi, on utilise la première lorsque le modèle est stable et la deuxième lorsque le modèle est instable. En effet, on peut s'attendre à ce que le nombre de directions explosives augmente durant les périodes d'instabilité. La dimension de la base de correction sera donc adaptée selon l'état du modèle ou du filtre (voir paragraphe 8.2.3), comme suit

$$r = \begin{cases} r_1^* & \text{si } cs_k \leq l_k, \\ r_2^* & \text{si } cs_k > l_k. \end{cases} \quad (8.41)$$

Ce schéma adaptatif peut être facilement implémenté dans le filtre à base fixe car pour passer de la dimension  $r_1^*$  à la dimension  $r_2^*$  il suffit de rajouter les  $i^{\text{ème}}$  EOFs pour  $i = r_2^* - r_1^*, \dots, r_2^*$ . En ce qui concerne la matrice  $U_k$ , on peut la compléter par des zéros en supposant qu'il y avait pas d'erreur dans les nouvelles directions (pour passer de  $r_2^*$  à  $r_1^*$ , il suffit de supprimer les derniers  $r_2^* - r_1^*$  coefficients de  $U_k$ ). Pour les filtres avec une base évolutive se pose donc le problème des vecteurs de base à ajouter, même si on peut toujours repartir des derniers vecteurs obtenus avant de passer à la dimension  $r_1^*$ .

## 8.6 Applications au modèle OPA

Nous avons supposé dans toutes les expériences que nous avons conduit dans ce chapitre que la pression de surface était observée sur toute la surface de l'océan. A la fin de ce chapitre, nous présenterons les résultats de deux expériences d'assimilation avec le filtre SEIK dans un cadre bien plus réaliste. On note aussi que lorsque le facteur d'oubli et la dimension de la base sont considérés fixes, ils sont toujours fixés à 0.8 et 30 respectivement.

### 8.6.1 Adaptation du facteur d'oubli

#### Filtre SFEK

Nous présentons ici les résultats de plusieurs expériences que nous avons mené pour étudier la sensibilité de nos filtres par rapport au facteur d'oubli  $\rho$  et pour tester l'utilité de nos schémas d'adaptation du facteur d'oubli décrits dans le paragraphe 8.3. Comme on peut s'attendre à ce que l'influence de la valeur du facteur d'oubli soit presque la même sur toutes les variantes du filtre SEEK, nous avons alors seulement investi le filtre SFEK dans ces expériences pour gagner du temps de calcul. Par conséquent, nous avons considéré d'une part un facteur d'oubli fixe avec trois valeurs différentes 1, 0.8 et 0.6, et d'autre part un facteur d'oubli variable prenant la valeur 1 ou 0.6 selon la moyenne des erreurs de prévision à court et à long terme  $s_k$  et  $l_k$  respectivement. Les valeurs initiales  $s_0$  et  $l_0$  ont été considérées égales à  $\|Y_0^o - H_k X^f(t_0)\|^2$  pour être sûr que  $\rho$  prendrait la valeur 0.6 durant la première période d'assimilation. Les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  ont été fixées à 0.9 et 0.95 respectivement.

La figure FIG. 8.1 montre l'erreur *RRMS* de ces expériences. Comme prévu, la performance du filtre SFEK se dégrade sérieusement pour  $\rho = 1$  durant la période instable du modèle. Avec  $\rho = 0.8$ , le filtre SFEK se comporte relativement bien mais ces résultats ne sont pas aussi bons que ceux obtenus avec  $\rho = 1$  dans la période stable du modèle. Finalement, l'utilisation d'un  $\rho = 0.6$  améliore la performance de ce filtre durant la période instable, alors

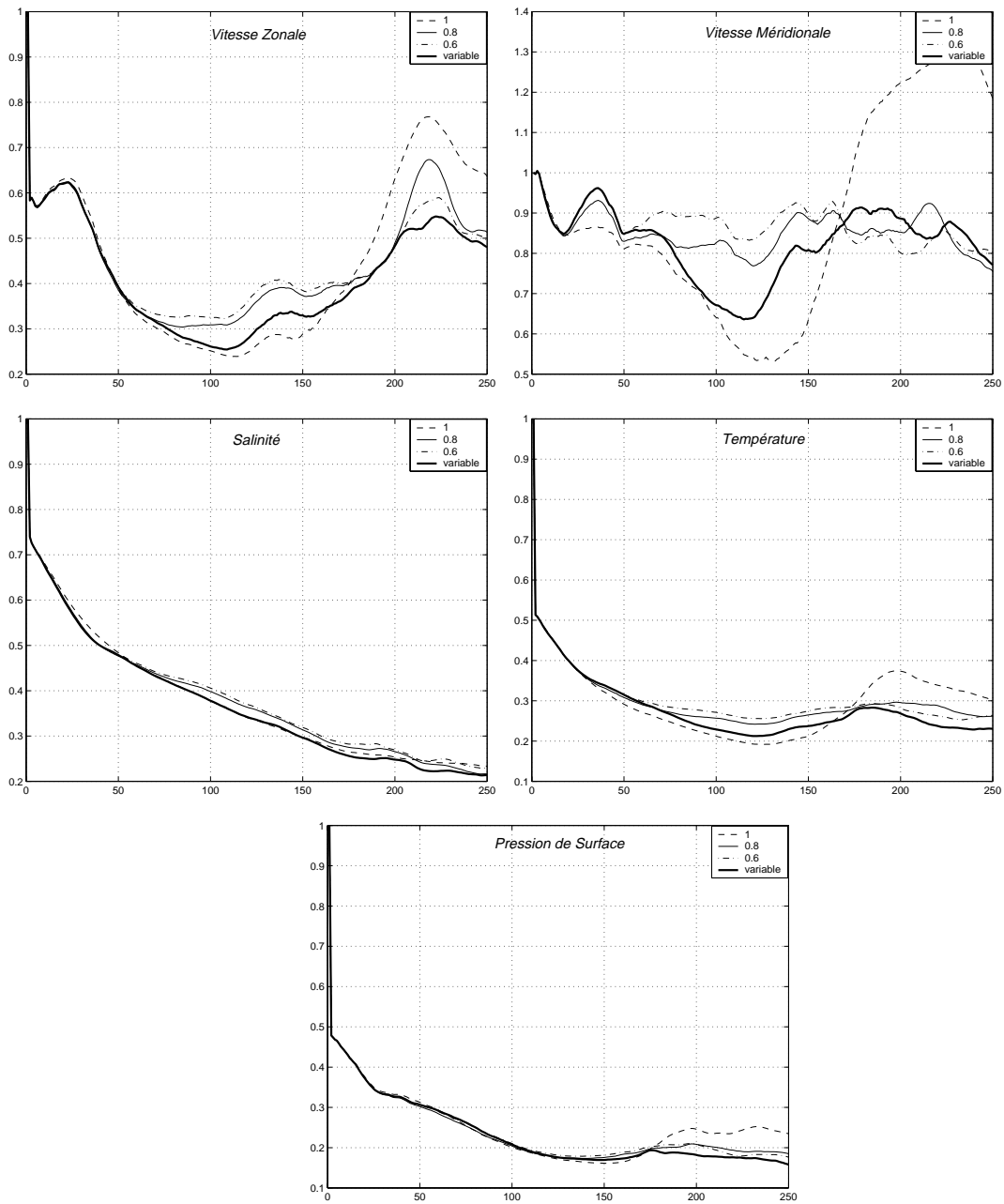


FIG. 8.1 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre SFEK avec différentes valeurs du facteur d'oubli et avec un facteur d'oubli variable (adapté selon la performance du filtre)



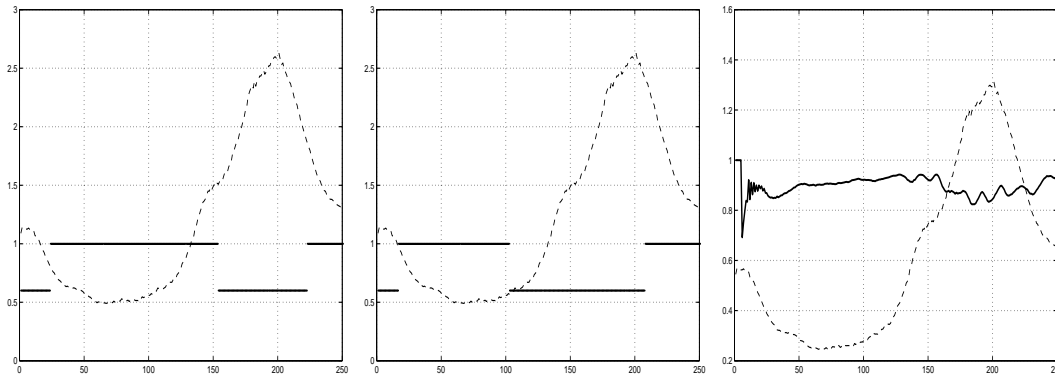


FIG. 8.2 – Evolution dans le temps du facteur d’oubli (courbe continue) pour le filtre SFEK selon la performance du filtre (gauche), l’état du modèle (milieu) et le système d’innovation (droite) et variation relative du vecteur d’état (courbe pointillée)

que ces résultats se dégradent dans la période stable. Le choix  $\rho = 0.8$  peut donc être vu comme un compromis entre  $\rho = 1$  et  $\rho = 0.6$  pour s’assurer du “bon” fonctionnement du filtre durant les périodes stables et instables.

Les résultats de ces expériences nous permettent de conclure que plus la valeur de  $\rho$  est proche de 1, plus le filtre SFEK est performant dans la période stable. Le phénomène inverse est alors observé dans la période instable (sous une certaine condition sur la valeur minimale de  $\rho$ ). Cela confirme nos arguments sur l’adaptation du facteur d’oubli  $\rho$ . En outre, ces résultats montrent aussi l’efficacité de nos schémas d’adaptation du facteur d’oubli et, comme le montre la FIG. 8.2, de détection de la période instable du modèle selon la performance du filtre.

Nous avons aussi conduit des expériences pour comparer les performances des trois schémas d’adaptation du facteur d’oubli que nous avons développés dans le paragraphe 8.3 selon : (i) la performance du filtre, (ii) l’état du modèle ( $\alpha$  et  $\beta$  sont fixés comme précédemment), et (iii) le système d’innovation (par un estimateur des moindres carrés). Dans le dernier schéma, nous avons commencé par une période d’initialisation de 5 pas et le paramètre  $\gamma$  (pour l’estimation de la matrice de covariance du vecteur d’innovation dans (8.35)) a été considéré égal à 0.8. Les résultats de ces expériences tracés dans la figure FIG. 8.3 montrent que l’adaptation du facteur d’oubli selon la performance du filtre donne les meilleurs résultats. On peut aussi voir que le choix de  $\rho$  selon l’état du modèle donne de très bons résultats. Cependant, l’estimation de  $\rho$  par une estimateur de moindres carrés selon le système d’innovation n’a pas été très efficace. Cela peut être expliqué par le très grand nombre d’observations utilisées par rapport au paramètre adapté  $\rho$ . La valeur de  $\rho$  n’a pas alors été suffisamment bien adaptée (voir FIG. 8.2) malgré le fait qu’elle décroisse durant la période instable. On note finalement que la valeur de  $\rho$  n’a pas été adaptée de la même façon lorsqu’elle est réglée selon la performance du filtre ou du modèle (voir FIG. 8.2).

### Filtre SEIK

Nous avons aussi testé nos schémas d’adaptation du facteur d’oubli avec le filtre SEIK. Deux expériences ont été donc menées dans lesquelles le facteur d’oubli variait selon la performance du filtre et le système d’innovation. Dans la première, le facteur d’oubli prenait la

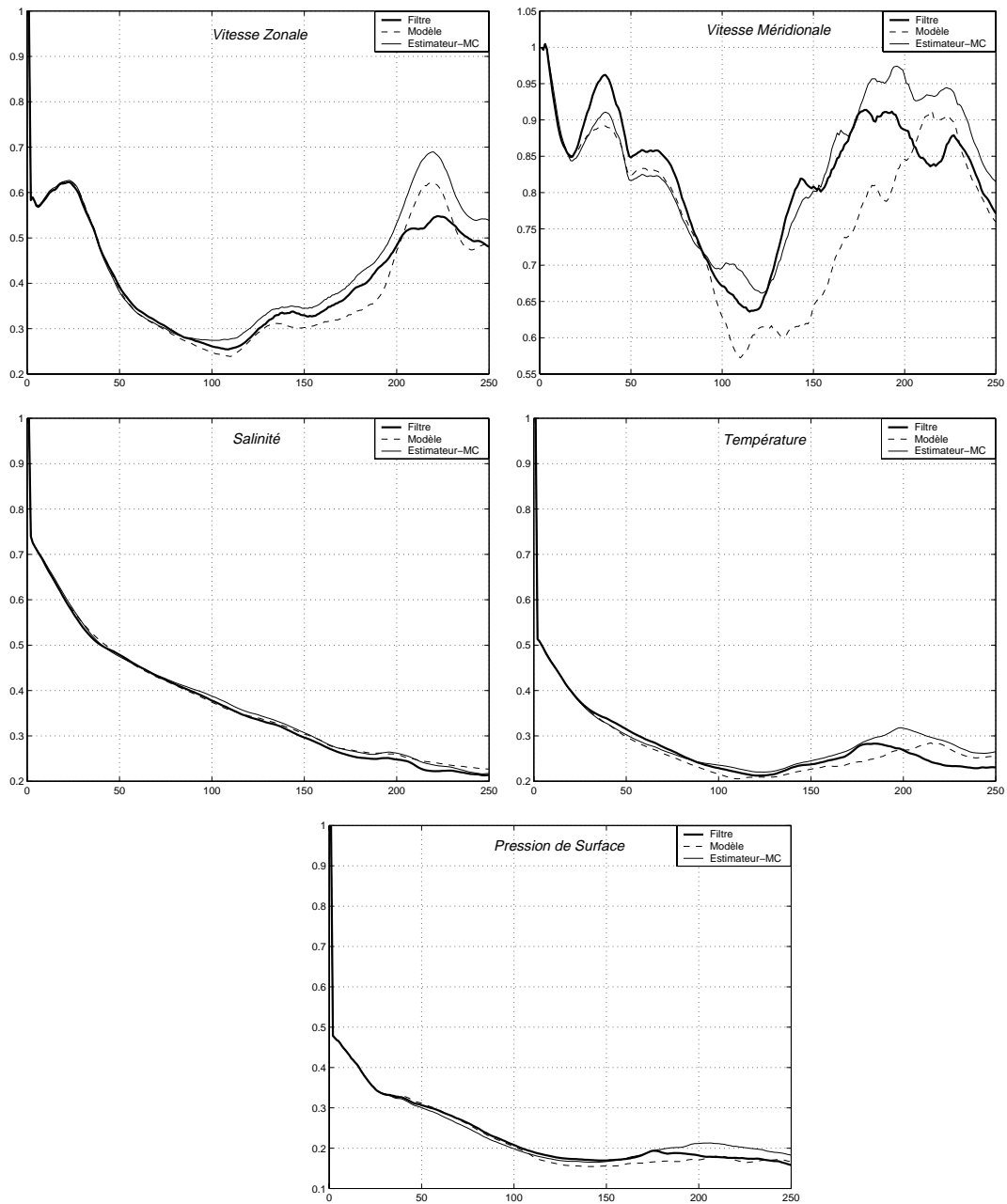


FIG. 8.3 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre SFEK avec un facteur d'oubli variable adapté selon la performance du filtre, l'état du modèle et selon le système d'innovation

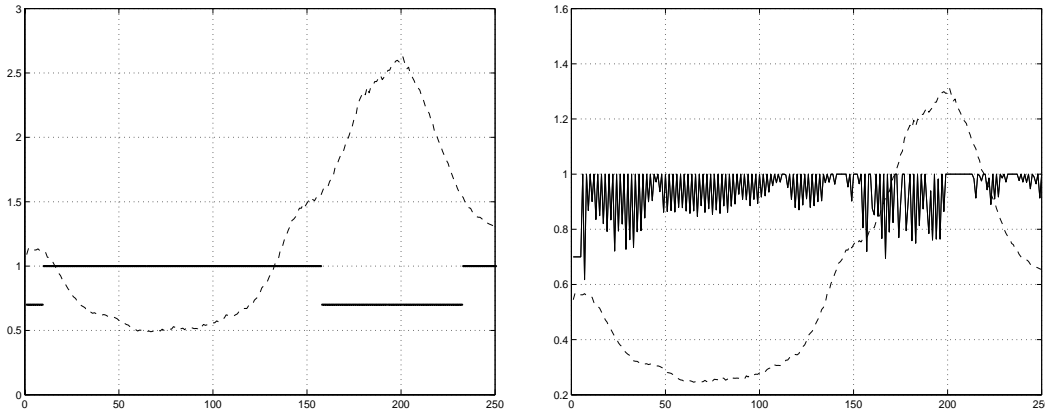


FIG. 8.4 – Evolution dans le temps du facteur d’oubli (courbe continue) pour le filtre SEIK selon la performance du filtre (gauche) et le système d’innovation (droite) et variation relative du vecteur d’état (courbe pointillée)

valeur 1 ou 0.7 selon  $s_k$  et  $l_k$  et  $s_0$  et  $l_0$  ont été choisies comme précédemment. Les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  ont été fixées à 0.75 et 0.77 respectivement. A noter que nous avons augmenté ici la valeur du deuxième facteur d’oubli (0.7 au lieu de 0.6) car il n’est pas nécessaire d’utiliser un facteur d’oubli petit avec le filtre SEIK qui s’est montré suffisamment stable durant la période instable. En ce qui concerne la configuration du deuxième schéma d’adaptation, nous l’avons considérée identique à celle du filtre SFEK.

Les résultats de ces expériences montrés dans FIG. 8.5 sont en accord avec ceux obtenus par le filtre SFEK. On note seulement qu’ici l’adaptation avec un estimateur de moindres carrés donne des résultats plus satisfaisants que ceux obtenus avec le filtre SFEK. Nous avons aussi tracés la valeur du facteur d’oubli des deux schémas dans FIG. 8.4. On peut voir que le facteur d’oubli a été très bien adapté par le premier schéma et que sa valeur est diminuée dans la période instable lorsqu’il est adapté selon le système d’innovation.

### Formes dégradées du filtre SEIK

Dans d’autres expériences d’assimilation, nous avons étudié la performance d’un facteur d’oubli variable selon la performance du filtre sur les formes dégradées du filtre SEIK, à savoir les filtres SSEIK, SIEIK, SDEIK et SEPLEK dans le même cadre que le filtre SFEK. Les résultats du filtre SSEIK (avec un seul vecteur de la base qui évolue) sont montrés dans FIG. 8.6. On peut voir que l’adaptation du facteur d’oubli augmente sensiblement la performance du filtre SSEIK, particulièrement dans la période instable du modèle. Une amélioration similaire, mais pas aussi significative, a été observée sur les résultats des filtres SIEIK et SEPLEK. Cependant, ce schéma n’a pas suffi à lui seul pour arrêter la dégradation de la performance du filtre SDEIK.

#### 8.6.2 Adaptation de l’évolution de la base de correction

Pour tester l’efficacité de notre schéma de réglage adaptatif de l’évolution de la base de correction  $L_k$  (selon la performance du filtre), nous avons tout d’abord comparé la performance du filtre SIEIK avec et sans ce schéma adaptatif (les paramètres ont été fixés comme dans le cas du filtre SFEK). Nous avons alors choisi de faire évoluer la base  $L_k$  une fois tous les

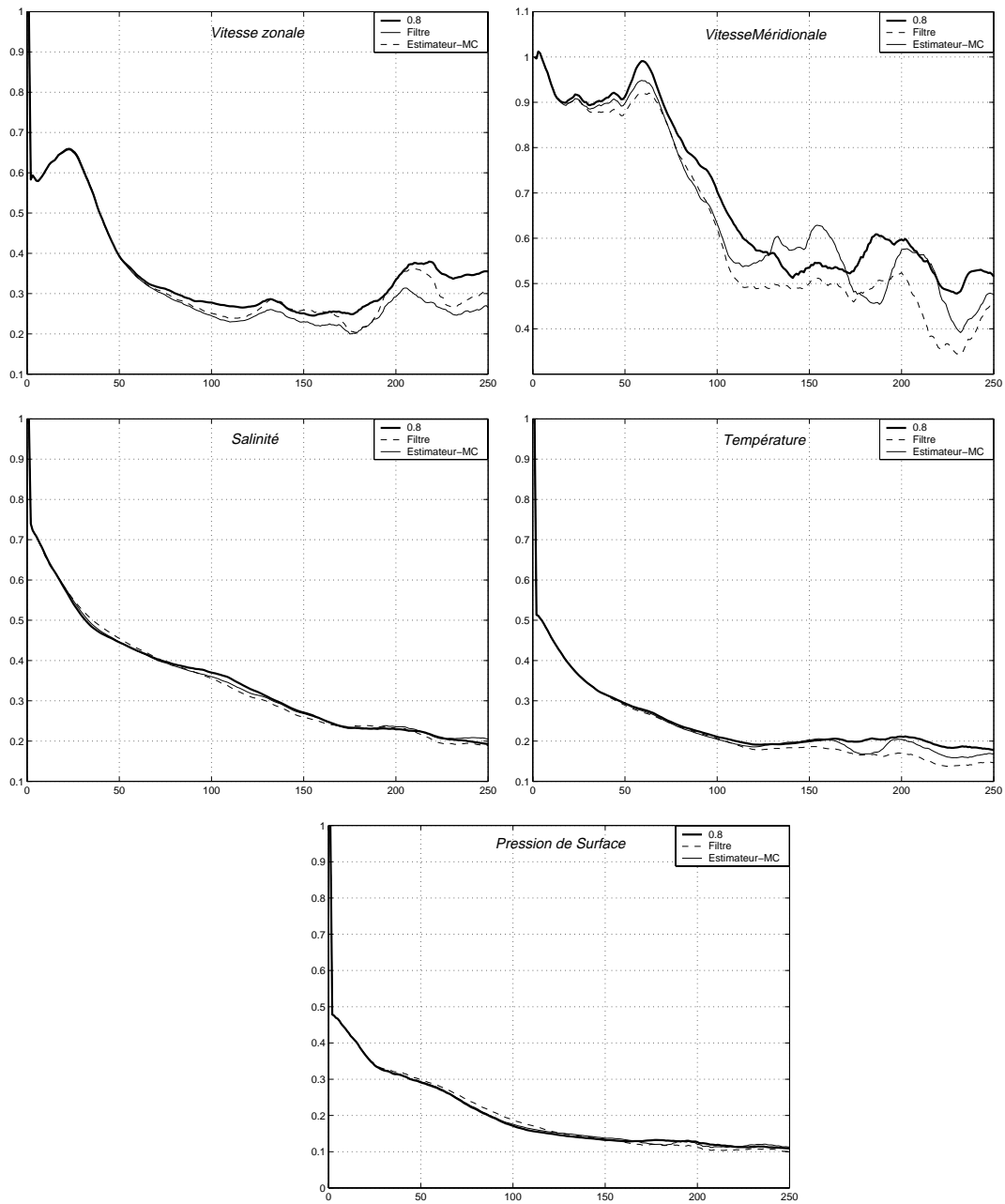


FIG. 8.5 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre SEIK avec un facteur d'oubli fixe ( $= 0.8$ ) et variable adapté selon la performance du filtre et le système d'innovation

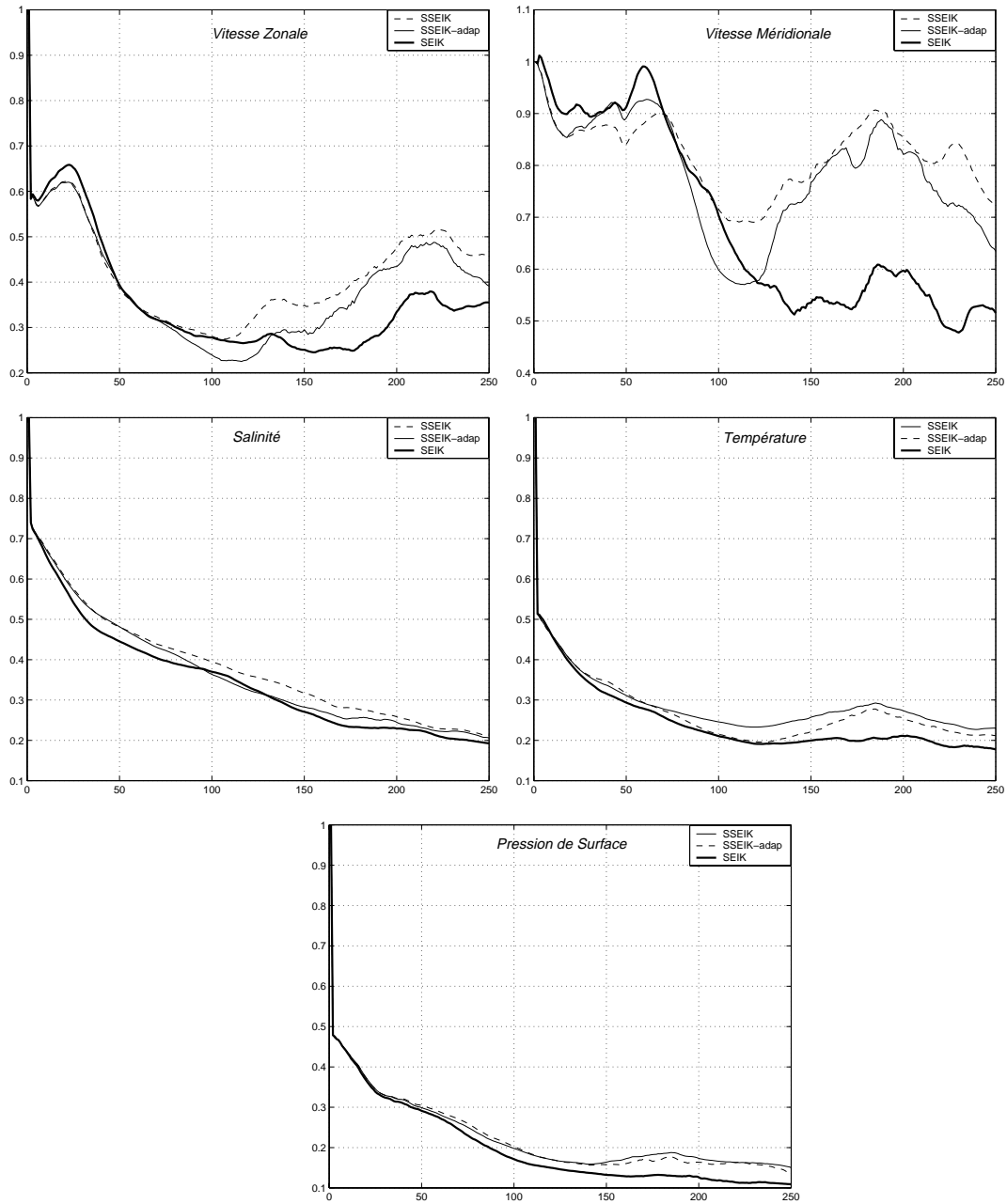


FIG. 8.6 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre SEIK et du filtre SSEIK avec et sans adaptation (selon la performance du filtre) du facteur d'oubli

4 pas de filtrage. Nous avons aussi utilisé un facteur d'oubli variable prenant les valeurs 1 et 0.8. On peut voir à partir de FIG. 8.7 que l'adaptation de l'évolution de la base de correction améliore nettement la performance du filtre SIEIK.

La même configuration que précédemment a été utilisée dans des expériences avec les filtres SDEIK, SFEK et SSEIK. En comparant les résultats du filtre SDEIK avec et sans schéma adaptatif dans FIG. 8.8, on peut voir clairement que les résultats du filtre SDEIK ont été complètement stabilisés dans le premier cas. En ce qui concerne les filtres SFEK et SSEIK et particulièrement pour ce dernier, ce schéma adaptatif n'a pas apporté une amélioration significative sur les performances de ces deux filtres. Ceci peut être expliqué par le fait que la convergence de la base de correction vers les directions d'amplification de l'erreur a été très lente durant la période instable à cause de la dernière valeur de  $L_k$ .

### 8.6.3 Adaptation de la dimension de la base de correction

Nous avons aussi conduit deux expériences avec le filtre SFEK avec deux dimensions fixes 30 et 35 et avec une dimension variable qui prend les valeurs 30 et 35 selon la performance du filtre (les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  ont été fixés à 0.87 et 0.88). Le facteur d'oubli a aussi été considéré variable, prenant les valeurs 1 et 0.6. Les résultats tracés dans FIG. 8.9 montrent que l'adaptation du rang de la base de correction avec le facteur d'oubli améliore sensiblement les résultats d'assimilation du filtre SFEK, particulièrement ceux de la vitesse horizontale.

### 8.6.4 Simulations réalistes avec le filtre SEIK

Nous présentons enfin les résultats de deux expériences d'assimilation que nous avons conduit avec le filtre SEIK en considérant un facteur d'oubli variable adapté selon la performance du filtre et des observations simulées : (i) sur les traces du satellite T/P et (ii) on ajoute à ces dernières les observations du réseau TAO. Les résultats de ces expériences sont alors comparés avec ceux obtenus par le filtre SEIK avec un facteur d'oubli fixe et des observations simulées sur toute la surface de l'océan. On peut voir dans FIG. 8.10 (et les figures de l'Annexe C) que le filtre SEIK se comporte relativement bien lorsqu'on utilise des observations échantillonnées sur les traces du satellite T/P. De plus, ses performances augmentent lorsqu'on rajoute à ces dernières les données du réseau TAO. A noter que ces résultats sont conformes avec ceux obtenus par le filtre SFEK (voir paragraphe 6.8.3).

## 8.7 Conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre plusieurs schémas adaptatifs sur les paramètres du filtre SEIK et ses variantes. Notre idée principale consistait à "réagir" durant les périodes instables du modèle. Pour détecter ces périodes, nous avons alors proposé de suivre la performance du filtre (ou du modèle) en calculant une moyenne de l'erreur de prévision (ou de l'énergie cinétique) à court et long terme. Les résultats de ce chapitre se résument comme suit.

- 1- L'adaptation du facteur d'oubli de manière à calibrer le système d'innovation n'a pas été très efficace. Ceci peut être expliqué par le fait qu'on ne peut pas calibrer un système matriciel de très grande dimension à l'aide d'un seul paramètre réel. L'utilisation d'une matrice diagonale de facteurs paraît nécessaire dans ce cas et devrait être envisagée dans un futur travail.

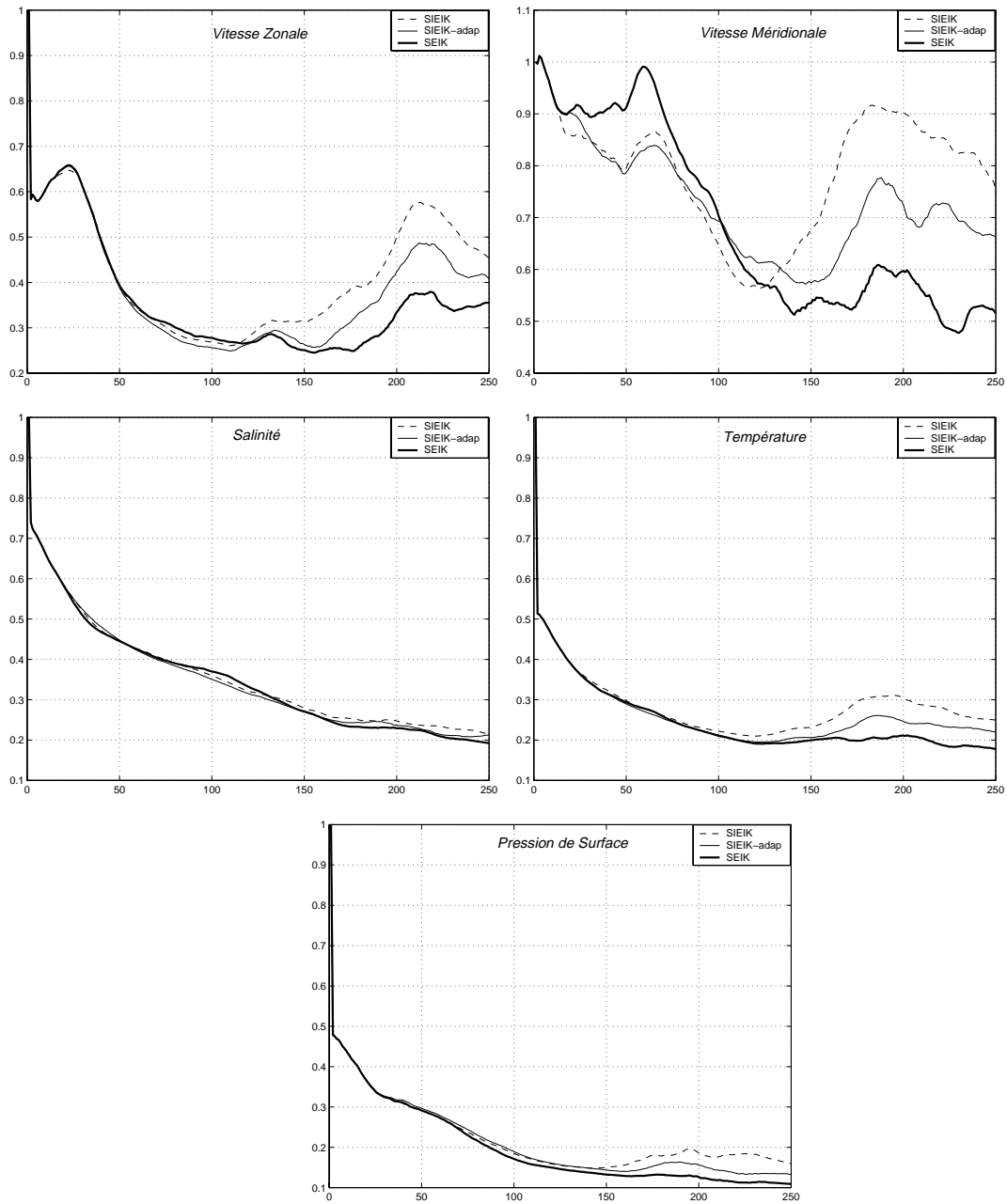


FIG. 8.7 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre SEIK et du filtre SIEIK avec et sans schémas adaptatifs (selon la performance du filtre) de l'évolution de la base de correction et du facteur d'oubli

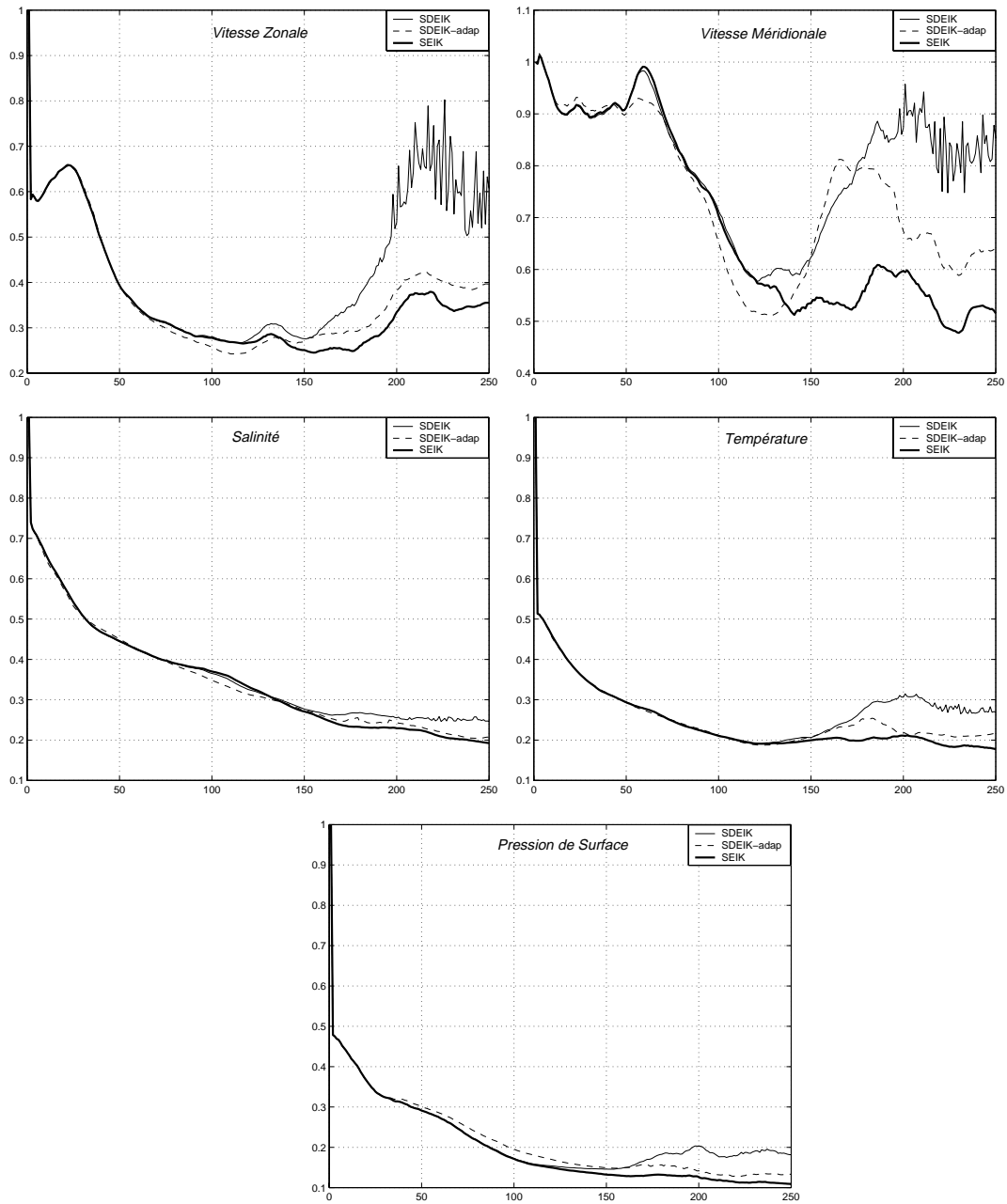


FIG. 8.8 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre SEIK et du filtre SDEIK avec et sans schémas adaptatifs (selon la performance du filtre) de l'évolution de la base de correction et du facteur d'oubli



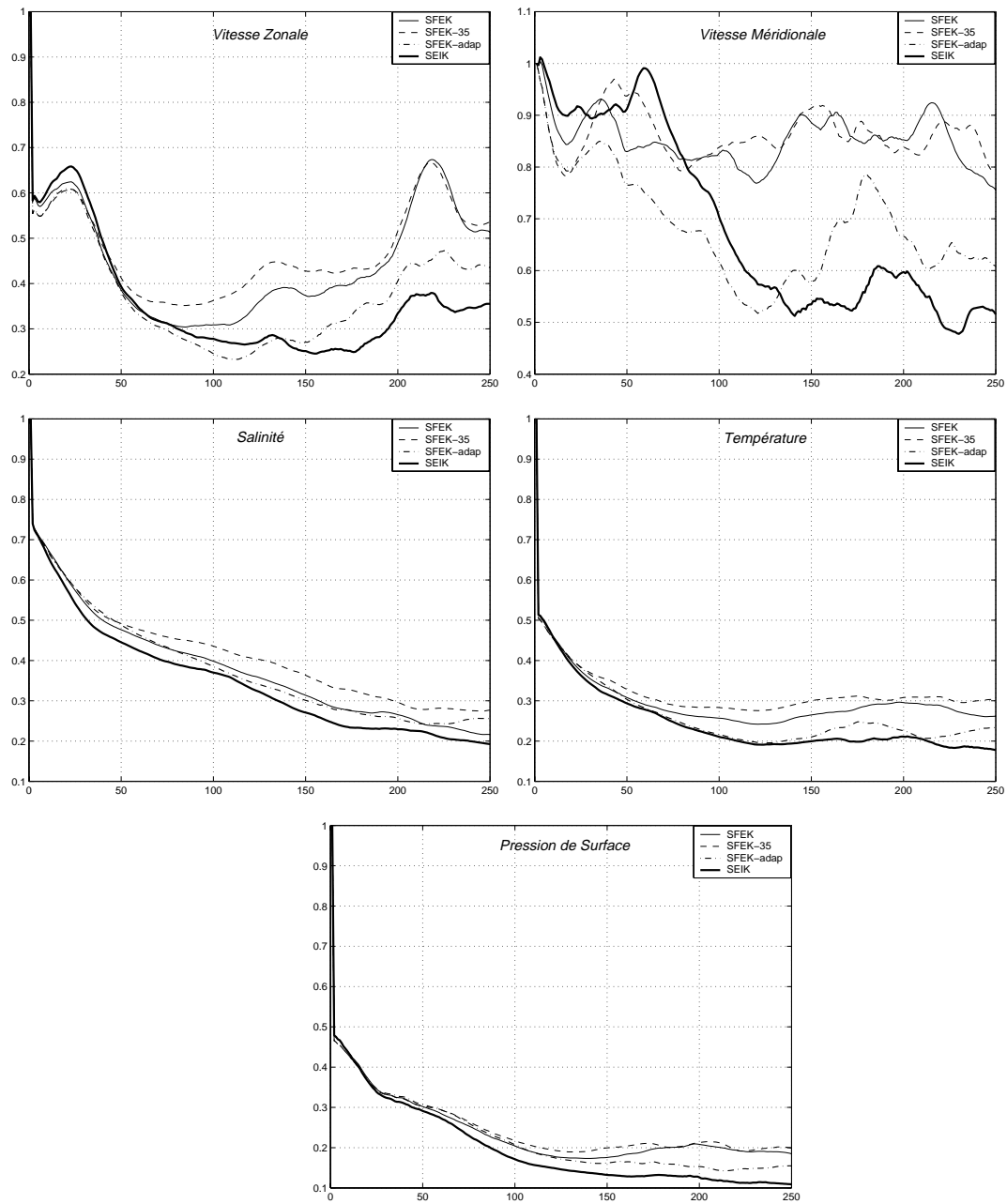


FIG. 8.9 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre SEIK et du filtre SFEK avec une base EOFs de dimension fixe 30 et 35 et de dimension variable (selon la performance du filtre)

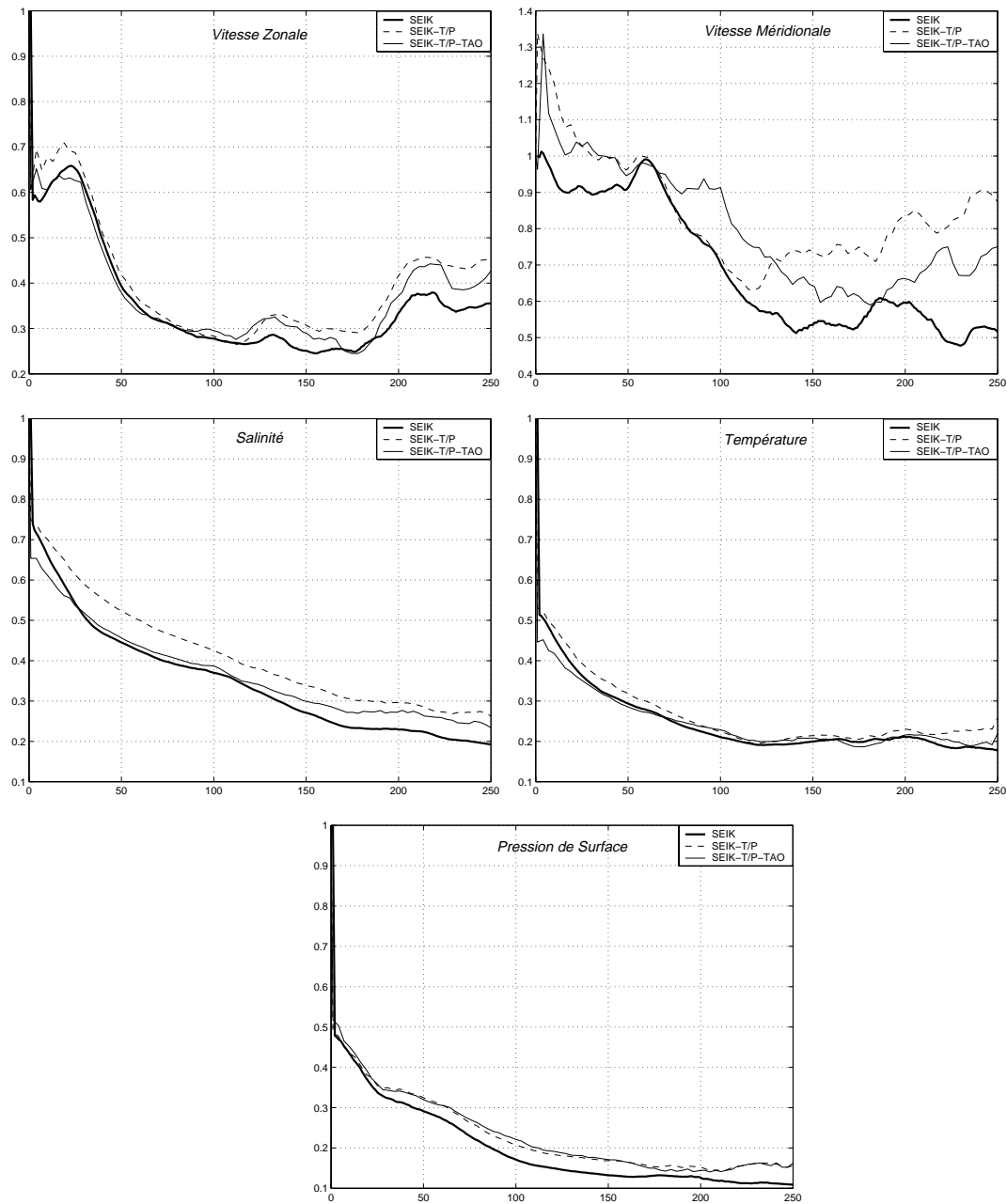


FIG. 8.10 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre SEIK avec un facteur d'oubli fixe et des observations sur toute la surface et avec un facteur d'oubli variable (selon la performance du filtre) et des observations T/P et combinaison T/P-TAO

- 2- En suivant les erreurs de prévision, on peut obtenir des informations sur la performance du filtre et ensuite adapter les paramètres du filtre à la situation présente de façon à améliorer ses performances.
- 3- L'adaptation de la valeur du facteur d'oubli selon la performance du filtre (et du modèle) augmente sensiblement les résultats du filtre SEIK et ses formes dégradées. De plus, son coût très faible la rend particulièrement attractive.
- 4- Dans la majorité des cas, et spécialement avec le filtre SDEIK, le réglage adaptatif de l'évolution de la base de correction a été très utile. Dans très peu de cas, ce schéma n'apporte pas une amélioration significative.
- 5- L'adaptation de la dimension de la base de correction du filtre SFEK s'est montrée très efficace et elle a sensiblement amélioré les résultats de ce dernier. L'utilisation de ce schéma dans le cadre du filtre SEIK et de ses variantes nécessite encore du travail, surtout pour l'initialisation des vecteurs de base à ajouter.

## Chapitre 9

# Filtre de Kalman étendu d'ordre réduit - Filtre ROEK

### 9.1 Introduction

Le filtre de Kalman étendu d'ordre réduit (ROEK) est une variante du filtre de Kalman étendu (EK) qui a été introduite par *Cane et al.* [17]. Il consiste essentiellement à simplifier l'évolution de la matrice de covariance de l'erreur de filtrage du filtre EK en projetant le vecteur d'état sur l'espace réduit engendré par la base EOFs. Ceci conduit à corriger l'état prévu uniquement dans les directions des EOFs, après avoir projeté l'erreur de prévision sur la base EOFs. L'introduction de ce filtre dans le cadre de cette thèse a été motivée par deux raisons :

1. *Comparer les performances des filtres SEEK et ROEK* pour étudier l'intérêt de l'évolution de la base de correction effectuée dans le filtre SEEK. En effet, bien que ces deux filtres aient été dérivés à partir de deux approches différentes, on peut montrer qu'ils sont tous les deux des formes dégradées d'un filtre de type Kalman qui consiste à corriger l'état prévu dans les directions d'amplification de l'erreur. Ainsi, on laisse la base de correction évoluer pour suivre la dynamique du modèle dans le filtre SEEK, tandis qu'on remplace l'évolution de la base, qui reste donc fixe, dans le filtre ROEK par l'évolution de l'erreur avec la dynamique réduite définie par cette base.
2. *Implémenter et tester le filtre ROEK avec la base EOFs locale* pour voir si la projection de l'erreur de prévision sur la base de correction (qui reste fixe) peut compenser le caractère non-évolutif (avec l'équation d'évolution du filtre SEEK) de la base locale.

Par ailleurs, le coût du filtre ROEK est très proche du filtre SEEK bien que sa base de correction reste fixe. Pour réduire son coût, nous introduisons dans ce chapitre l'utilisation d'un modèle statistique autorégressif d'ordre 1 pour faire évoluer l'erreur de prévision dans l'espace réduit, la partie la plus chère de ce filtre.

### 9.2 Filtre ROEK

L'implémentation du filtre EK dans les modèles océaniques réalistes ne peut se faire sans une *réduction d'ordre* massive de la taille du système. Comme proposé par *Fukumori et al.* [43], l'utilisation d'une transformation linéaire  $S$ , appelée aussi opérateur de réduction d'ordre, qui relie le vecteur d'état à un état d'ordre réduit de petite dimension  $r$ , nous offre plusieurs

solutions pour réduire le coût du filtre EK. En effet, il suffit pour cela de faire évoluer l'erreur de prévision dans l'espace d'ordre réduit, après l'avoir "transportée" dans cet espace, et puis de la reconstruire dans son espace d'origine à l'aide de l'opérateur pseudo-inverse de  $S$ , notée  $S^{-1}$  (si  $S$  est orthogonale,  $S^{-1} = S^T$ ). On obtient ainsi la forme générale de la variante du filtre EK la plus utilisée en pratique, dite filtre ROEK (reduced-order extended Kalman filter), qui opère en deux étapes après une étape d'initialisation exactement comme le filtre EK (voir [30] pour plus de détail).

**1- Etape de prévision :** On utilise le modèle pour calculer l'état prévu

$$X^f(t_k) = M(t_k, t_{k-1})X^a(t_{k-1}) \quad (9.1)$$

et on fait évoluer la matrice de covariance de l'erreur de prévision dans l'espace réduit  $P_r^f(t_k)$  comme

$$P_r^f(t_k) = [SM(t_k, t_{k-1})S^{-1}]P_r^a(t_{k-1})[SM(t_k, t_{k-1})S^{-1}]^T + SQ(t_k)S^{-1}. \quad (9.2)$$

**2- Etape de correction :** La correction de l'état prévu se fait uniquement dans l'espace réduit selon la formule classique

$$X^a(t_k) = X^f(t_k) + G_k[Y_k^o - H_k X^f(t_k)] \quad (9.3)$$

où  $G_k$  est la matrice de gain donnée par

$$G_k = S^{-1}P_r^f(t_k)S\mathbf{H}_k^T R_k^{-1}. \quad (9.4)$$

La matrice de covariance de l'erreur d'analyse dans l'espace réduit  $P_r^a(t_k)$  est alors calculée à partir de l'équation

$$[P_r^a(t_k)]^{-1} = [P_r^f(t_k)]^{-1} + S\mathbf{H}_k^T R_k^{-1}\mathbf{H}_k S^{-1}. \quad (9.5)$$

Il est important de noter que nous avons négliger dans cet algorithme l'erreur de représentativité contenant l'information de l'erreur qui n'est pas représentée par le sous-espace défini par  $S$  (cette erreur peut être commodément "insérer" dans l'erreur du modèle (voir [17])). En revanche, nous introduisons l'utilisation du facteur d'oubli comme dans le filtre SEEK pour atténuer la propagation de cette erreur dans le temps. Cette approche a été adaptée du fait de la difficulté de spécifier correctement l'erreur de représentativité. La version de ce filtre avec facteur d'oubli reste inchangée, seule l'équation d'évolution de la matrice de covariance de l'erreur dans le sous-espace réduit est remplacée par

$$[P_r^a(t_k)]^{-1} = \rho[P_r^f(t_k)]^{-1} + S\mathbf{H}_k^T R_k^{-1}\mathbf{H}_k S^{-1}. \quad (9.6)$$

La performance du filtre ROEK dépend tout particulièrement de l'opérateur de simplification  $S$ . Un bon choix de  $S$  devrait conduire à une large réduction d'ordre et un espace réduit qui représente bien la variabilité du modèle. Différents types d'opérateurs  $S$  ont été utilisés, qui comportent des hypothèses plus ou moins simplificatrices sur la dynamique et les caractéristiques du modèle (voir [30] pour une revue).

En ce qui concerne le coût du filtre ROEK, il provient surtout de l'équation (9.2) d'évolution de l'erreur de prévision dans l'espace réduit. La dimension de l'espace réduit  $r$  conditionne

donc le coût de ce filtre car le calcul numérique du terme  $\mathbf{M}(t_k, t_{k-1})S$  nécessite  $(r + 1)$  fois l'intégration du modèle. Un choix raisonnable de  $r$  s'impose donc pour des applications réalistes.

Parmi les méthodes statistiques, *Cane et al.* [17] ont utilisé pour l'assimilation le sous-espace engendré par la base EOFs (voir chapitre 7), notée  $L$ . Plus qu'une réduction d'ordre pour des critères de coûts de calcul, la philosophie de *Cane et al.* [17] se reposait sur le fait que du moment que l'on ne connaît pas la "vraie" matrice de covariance de l'erreur, il est inutile d'essayer de spécifier sa description complète. La comparaison entre les caractéristiques de ce filtre, appelé toujours ROEK, et le filtre SEEK est discutée dans le paragraphe suivant.

### 9.3 Comparaison entre les filtres SEEK et ROEK

Les filtres SEEK et ROEK ont été dérivés du filtre EK selon deux approches différentes. En effet, on a vu que le premier consiste à approcher la matrice de covariance de l'erreur par une matrice de rang faible; tandis que le deuxième consiste à diminuer la taille du système en le projetant sur le sous-espace engendré par la base EOFs. Cependant, on peut facilement voir que ces deux filtres consistent à corriger l'état prévu avec l'équation du filtre EK mais uniquement dans les directions de la base EOFs  $L$  qui reste fixe dans le filtre ROEK tandis qu'elle évolue dans le filtre SEEK. En effet, il suffit pour cela de remplacer  $S$  et  $L$  par  $S^{-1}$  et  $L^T$  respectivement (on suppose que la base EOFs est orthonormée) dans les équations de l'algorithme du filtre ROEK.

La comparaison entre ces deux filtres se fait alors autour de trois points :

- L'originalité du filtre SEEK par rapport au filtre ROEK réside dans ses vecteurs de base qui évoluent dans le temps pour suivre la dynamique du modèle selon l'équation (4.10). En effet, tout se passe comme si le filtre SEEK détectait les directions d'amplification de l'erreur et corrigeait l'erreur de prédiction avec l'équation de correction du filtre EK dans ces directions seulement.
- La deuxième remarque à faire porte sur l'évolution de la matrice de covariance de l'erreur dans l'espace réduit  $P_r^f(t_k)$  de ces deux filtres. En effet, cette matrice reste fixe égale à la matrice de covariance de l'erreur d'analyse dans l'espace réduit à l'instant précédent  $P_r^a(t_{k-1})$  dans le filtre SEEK tandis qu'elle évolue avec la dynamique du modèle réduit dans le deuxième selon l'équation (9.2) pour compenser, en quelque sorte, le fait que sa base de correction reste fixe.
- Finalement, le coût du filtre ROEK est presque identique à celui du filtre SEEK bien que dans le premier on ne fasse pas évoluer la base de correction. En effet, le coût de l'évolution de la matrice de covariance de l'erreur dans l'espace réduit  $P_r^f(t_k)$  par l'équation (9.2) est presque équivalent au coût d'évolution de la base de correction du filtre SEEK car tous les deux requièrent  $(r + 1)$  fois intégrations du modèle. Le fait de garder la base de correction fixe ne diminue donc pas le coût par rapport au filtre SEEK.

Avec les deux premières remarques, on peut se demander :

1. *Quel est l'intérêt de faire évoluer la base de correction?*

2. Est-ce-que l'utilisation du filtre ROEK peut compenser le caractère non-évolutif de la base EOFs locale ou de la partie locale de la base EOFs mixte?

Comme on ne peut pas rapporter des réponses théoriques à ce questions, nous allons nous contenter d'implémenter et de comparer (dans le paragraphe 9.5) les performances de ces deux filtres dans notre configuration du modèle OPA pour essayer d'en tirer des conclusions.

Bien que la base de correction du filtre ROEK reste fixe, mais ce n'est pas pour autant que son coût d'implémentation est plus faible que celui du filtre SEEK. La réduction du coût du filtre SEEK a été largement discutée dans le chapitre 6. Pour réduire le coût du filtre ROEK, nous allons introduire dans le paragraphe ci-dessous l'utilisation d'un modèle statistique autorégressif d'ordre 1 ( $AR(1)$ ) pour faire évoluer la matrice de covariance de l'erreur de prévision  $P_r^f(t_k)$  dans l'espace réduit engendré par les colonnes de  $L$ .

## 9.4 Réduction du coût du filtre ROEK - Filtre ROAEK

La réduction du coût du filtre ROEK passe bien évidemment par la recherche d'un moyen de simplifier l'évolution de la matrice de covariance de l'erreur de prévision dans l'espace réduit  $P_r^f(t_k)$  avec l'équation (9.2). Dans ce but, nous allons construire un modèle statistique  $AR(1)$  qui gouverne l'évolution de l'état  $X^t(t_k)$  dans l'espace réduit. En effet, supposons qu'un tel modèle soit disponible, c'est-à-dire

$$X_r^t(t_k) = AX_r^t(t_{k-1}) + \mu + e_r(t_k) \quad (9.7)$$

où  $X_r^t$  représente l'état  $X^t$  dans l'espace réduit engendré par  $L$ ,  $A$  est une matrice  $r \times r$ ,  $\mu = (I_d - A)\bar{X}_r^t$ ,  $\bar{X}_r^t$  est la moyenne de  $X_r^t$  et  $e_r$  est un bruit centré de matrice de covariance  $Q_r$ , indépendant de  $X_r^t(t_l)$  pour  $l < k$ . On peut alors écrire

$$e^{f,a}(t_k) \approx L[X_r^t(t_k) - X_r^{f,a}(t_k)] \implies e_r^{f,a}(t_k) \approx X_r^t(t_k) - X_r^{f,a}(t_k). \quad (9.8)$$

avec comme précédemment  $X_r^{f,a}$  représentant  $X^{f,a}$  dans l'espace réduit. L'évolution de l'erreur d'analyse dans l'espace réduit peut alors être approchée par l'équation

$$e_r^f(t_k) = Ae_r^a(t_{k-1}) + e_r(t_k) \quad (9.9)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$P_r^f(t_k) = AP_r^a(t_{k-1})A^T + Q_r. \quad (9.10)$$

Pour diminuer le coût du futur ROEK, il suffit alors de remplacer l'équation (9.2) par (9.10) pour éviter le calcul coûteux du gradient de l'opérateur de transition du modèle. On aboutit ainsi à une forme dégradée du filtre ROEK qui sera appelée ROAEK. Ce filtre est bien moins coûteux que le filtre ROEK, mais sa performance dépend tout particulièrement de la précision du modèle  $AR(1)$ .

- Construction d'un modèle autorégressif d'ordre 1

Pour construire le modèle  $AR(1)$  comme il a été présenté dans (9.7), supposons qu'on possède un échantillon de vecteurs d'état  $X^t(t_1), \dots, X^t(t_N)$  de taille  $N$ . La projection de ces états sur l'espace engendré par  $L$  nous donne un échantillon de vecteurs d'état dans

l'espace réduit  $X_r^t(t_1), \dots, X_r^t(t_N)$ . Pour construire le modèle statistique  $AR(1)$  qui représente l'évolution de l'état dans l'espace réduit il suffit alors de calculer des estimateurs de moindres carrés de  $A$ ,  $\mu$  et  $Q_r$  à partir de l'échantillon  $X_r^t(t_1), \dots, X_r^t(t_N)$  selon les formules (consulter [15] pour plus de détail)

$$\tilde{A} = R_N^{-1}(1, 1)R_N(0, 1). \quad (9.11)$$

$$\tilde{\mu} = (I_d - \tilde{A})\bar{X}_r^T. \quad (9.12)$$

$$\tilde{Q}_r = R_N(0, 0) - R_N(0, 1)\tilde{A}^T. \quad (9.13)$$

avec

$$R_N(i, j) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=2}^N [X_r^t(t_{k-i}) - \bar{X}_r^t][X_r^t(t_{k-j}) - \bar{X}_r^t]^T. \quad (9.14)$$

## 9.5 Applications au modèle OPA

Nous avons conduit deux expériences avec le filtre ROEK : la première avec la base EOFs globale et la deuxième avec la base EOFs mixte, et une troisième expérience pour tester le filtre ROAEEK. A noter que le modèle a été considéré parfait dans toutes ces expériences et que le facteur d'oubli a été choisi égale à 0.8.

### 9.5.1 Comparaison entre les filtres SEEK et ROEK

Nous avons tout d'abord comparé les résultats du filtre ROEK avec ceux du filtre SEEK pour montrer l'intérêt de l'évolution de la base de correction poursuivi dans le cadre de ce dernier. Dans ce but, nous avons implémenté les filtres ROEK et SEEK avec une base EOFs globale de dimension 30. Les résultats de ces expériences, tracés dans la figure FIG. 9.1, confirment notre hypothèse. En effet, malgré un très bon comportement du filtre ROEK durant la période stable du modèle, on peut clairement voir que le filtre SEEK est bien plus stable que le filtre ROEK durant la période instable grâce à la mise à jour de sa base de correction selon la dynamique du modèle. Le très bon comportement du filtre ROEK dans la période stable nous laisse présumer que ce filtre peut être aussi performant que le filtre SEEK si sa base de correction (fixe) représente suffisamment bien la variabilité (de tous les régimes) du modèle. En revanche, les performances de ce filtre se dégradent rapidement durant la période instable, là où cette base n'est pas assez représentative. L'évolution de la base de correction paraît donc nécessaire durant la période instable du modèle pour suivre la nouvelle dynamique du modèle.

On peut aussi remarquer dans ces résultats la bonne performance du filtre ROEK par rapport au filtre SFEK surtout durant la période stable du modèle ce qui montre l'intérêt de faire évoluer la matrice de covariance de l'erreur dans l'espace réduit  $P_r^f(t_k)$  avec la dynamique du modèle selon l'équation (9.2).

### 9.5.2 Filtre ROEK avec la base EOFs mixte

Nous avons utilisé le filtre ROEK avec la base EOFs mixte pour voir si la projection de l'erreur sur la base de correction peut compenser le caractère non-évolutif de la partie locale de cette base. Les résultats de cette expérience sont alors comparés avec ceux obtenus par le filtre SEPLEK et le filtre SFEK avec la base EOFs mixte. Pour réduire les coûts, particulièrement ceux du filtre ROEK, nous avons considéré ici une base EOFs mixte composée de 5 EOFs



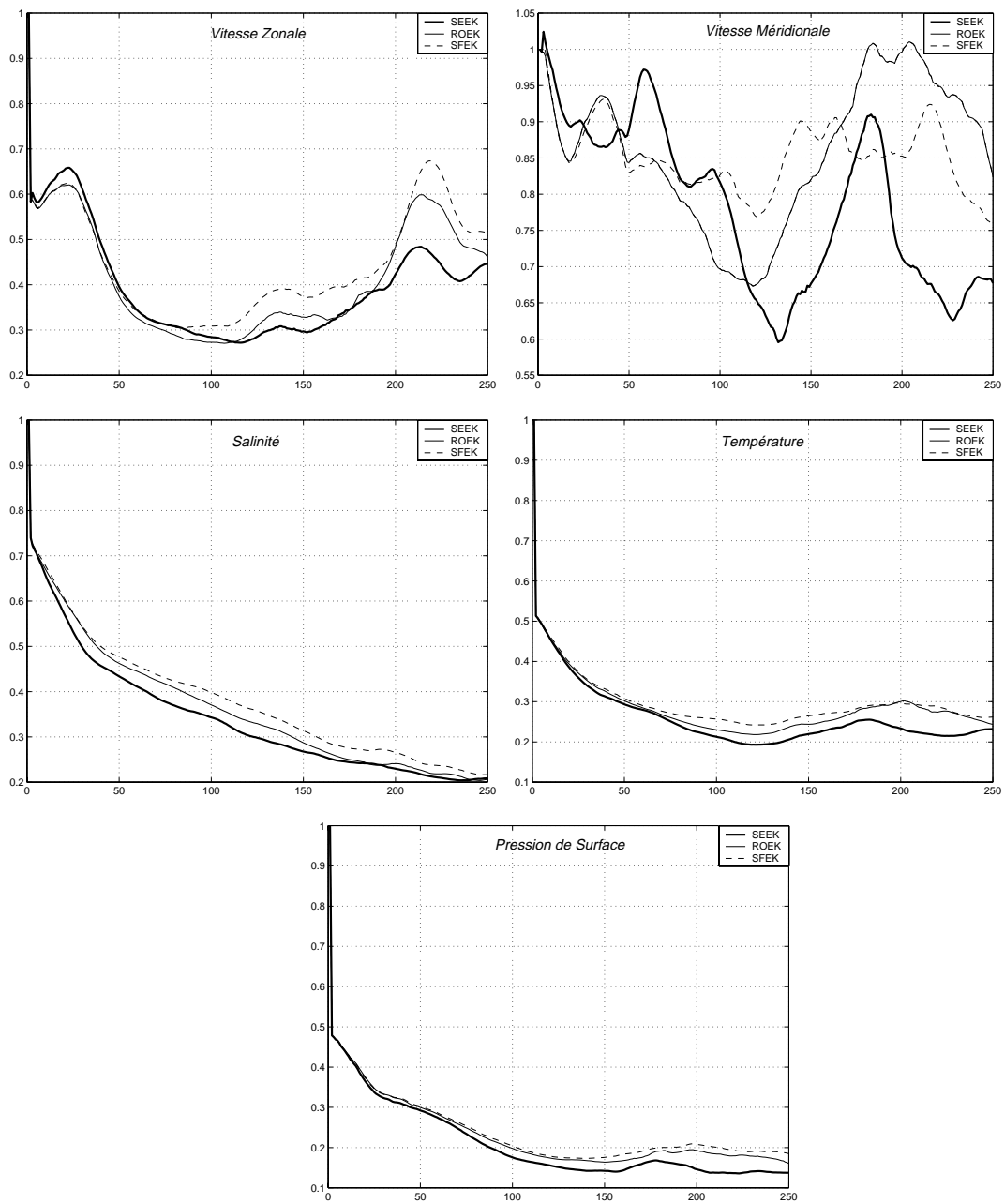


FIG. 9.1 – Evolution dans le temps de la RRMS des filtres SEEK, ROEK et SFEK

globales et de 6, 6 et 7 EOFs locales respectivement dans la première, deuxième et troisième zone (selon la décomposition du paragraphe 7.6.1). Nous avons ainsi représenté 50% de l'inertie globale et 40% de l'inertie locale. La figure FIG. 9.2 montre les résultats de ces expériences. On peut voir que le filtre SEPLEK est plus performant que le filtre ROEK, surtout durant la période instable du modèle. Cela montre l'intérêt de faire évoluer les vecteurs de base globaux durant les périodes d'instabilité où la base EOFs ne représentent pas suffisamment bien la variabilité du modèle. Cependant, on peut noter que l'utilisation d'une base EOFs mixte améliore sensiblement les résultats du filtre ROEK dans la période instable par rapport à la base EOFs globale. Enfin, la comparaison entre les résultats des filtre ROEK et SFEK avec la base EOFs mixte montre que le filtre ROEK est plus performant, ce qui est en accord avec les résultats que nous avons obtenus dans le paragraphe ci-dessus.

### 9.5.3 Filtre ROAEK

Finalement, nous avons testé la performance du filtre ROAEK et nous avons comparé ces résultats à ceux du filtre SFEK. Nous avons alors utilisé la base EOFs globale de dimension 30. A noter que nous avons pas considéré un facteur d'oubli avec ce filtre car la matrice de covariance de l'erreur autorégressif  $Q_r$  joue le même rôle que ce dernier.

#### Construction du modèle $AR(1)$

Pour faire évoluer l'erreur dans l'espace réduit, nous avons utilisé un modèle autorégressif d'ordre 1 comme nous l'avons décrit dans le paragraphe 9.4. Ainsi, nous avons tout d'abord projeté les vecteurs de l'échantillon  $H_S$  sur la base EOFs. Après avoir identifié l'évolution de l'erreur à celle de l'état dans les sous-espaces engendrés par la base EOFs, nous avons construit le modèle  $AR(1)$  à partir des états projetés selon les formules classiques rappelées dans le paragraphe 9.4.

#### Résultats d'assimilation

FIG. 9.3 montre les résultats de cette expérience et les compare avec ceux du filtre SFEK. On peut voir que le filtre SFEK se comporte nettement mieux que le filtre ROAEK. Après avoir examiné de plus près les résultats, nous avons pu constater que la mauvaise performance du filtre ROAEK est due au modèle  $AR(1)$  qui a été mal estimé, d'autant plus que les coefficients de la matrice de covariance de l'erreur de ce modèle  $Q_r$  ont été très larges.

## 9.6 Conclusions

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à la comparaison entre les performances des filtres ROEK et SEEK pour montrer l'intérêt de l'évolution de la base de correction effectuée dans ce dernier. Nous avons alors montré qu'ils peuvent être tous les deux dérivés à partir d'un filtre plus général qui consiste à corriger l'erreur d'estimation uniquement dans les directions d'amplification de l'erreur. Nous avons ensuite implémenté ces deux filtres dans les mêmes conditions. Les résultats de ces expériences montrent qu'il faut faire évoluer la base de correction durant les périodes instables du modèle pour suivre le nouveau régime du modèle.

Nous avons aussi testé la performance du filtre ROEK avec la base EOFs mixte. Les résultats de cette expérience, comparés avec ceux du filtre SEPLEK, montrent que l'évolution même partielle de la base de correction est très bénéfique et que la projection de l'erreur sur

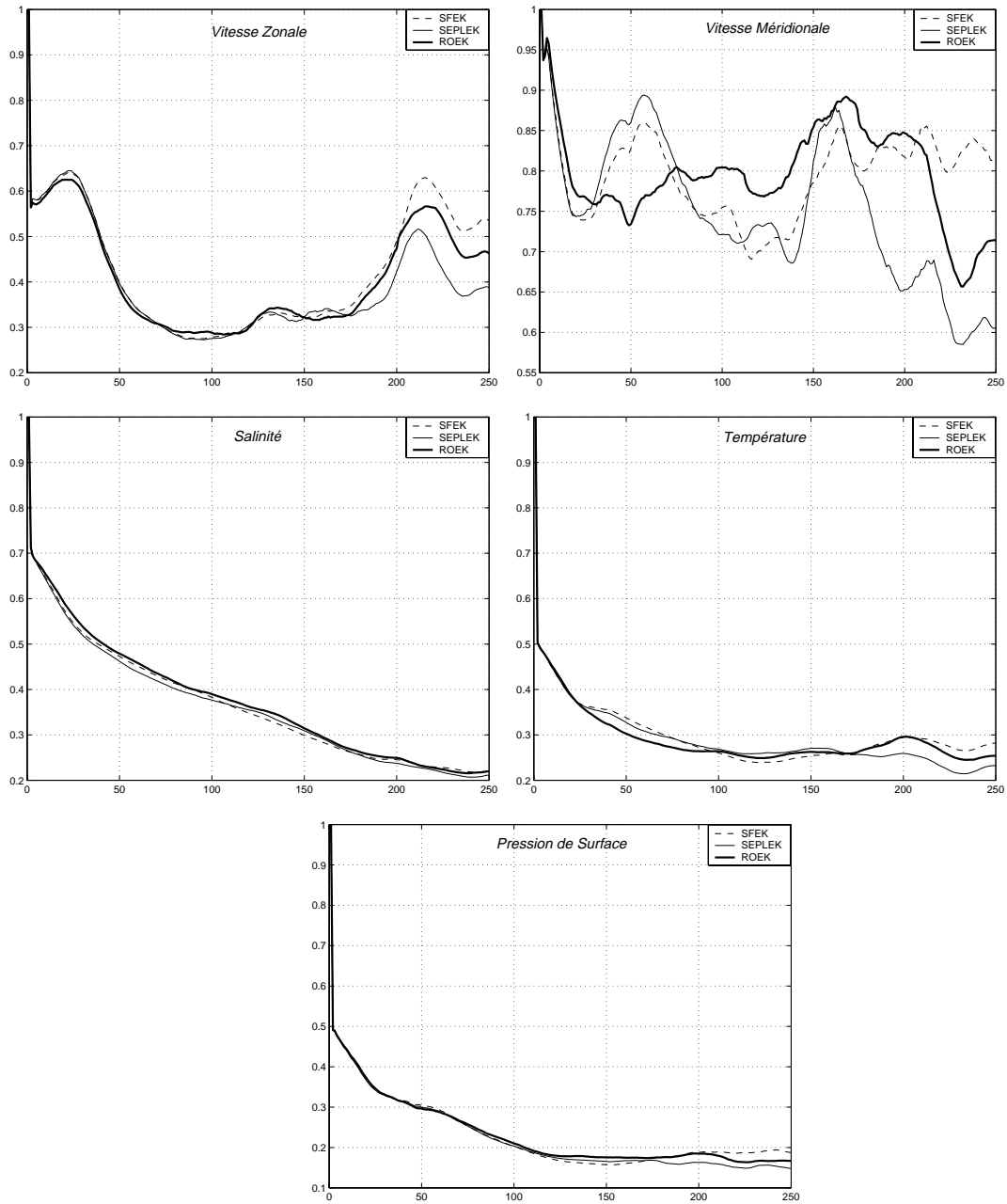


FIG. 9.2 – Evolution dans le temps de la RRMS du filtre ROEK avec la base EOFs mixte et le filtre SEPLEK

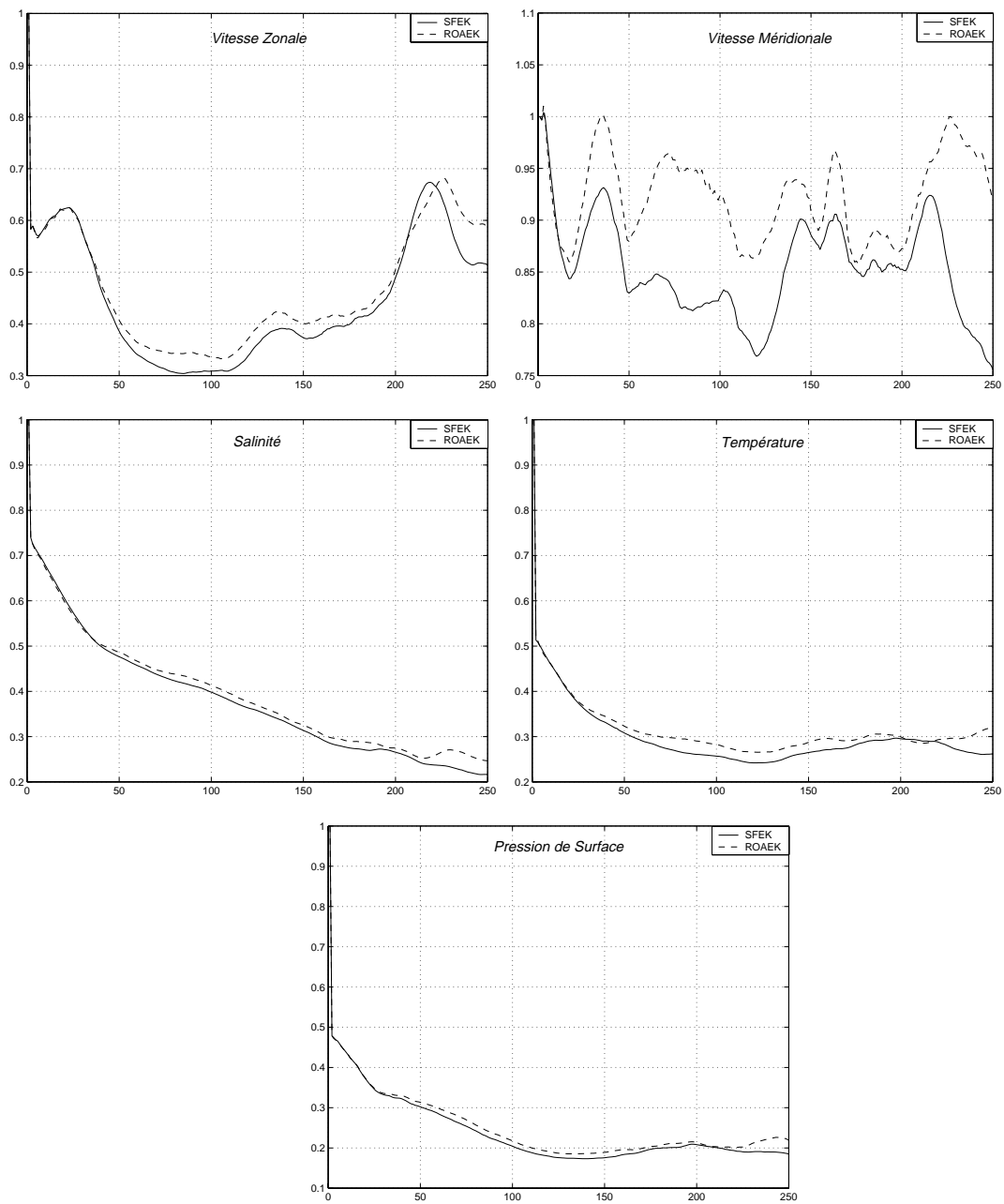


FIG. 9.3 – Evolution dans le temps de la RRMS des filtres ROAEK et SFEK

la base de correction qui reste fixe ne suffit pas à remplacer le caractère non-évolutif de la partie locale.

En ce qui concerne la performance du filtre ROAEK qui a été décevante, nous avons pu constater que les mauvais résultats de ce filtre sont dus au modèle autorégressif que nous avons utilisé pour faire évoluer l'erreur dans l'espace réduit. Une meilleure estimation du modèle  $AR(1)$  pourra être envisagée dans un travail ultérieur.

# Conclusions et Perspectives

Développer des schémas d'assimilation de données opérationnels est l'un des défis majeurs des années à venir pour l'océanographie. De tels schémas doivent opérer en conjonction avec les modèles réalistes, avec une qualité acceptable et un coût raisonnable comme en météorologie. A cet égard, le filtre de Kalman, qui fournit de façon séquentielle le meilleur estimateur de l'état au sens des moindres carrés pour un système dynamique linéaire connaissant les observations disponibles, apparaît comme l'un des schémas d'assimilation le plus intéressant.

Malheureusement, le filtre de Kalman ne peut pas être implémenté sous sa forme originale dans les modèles océaniques réalistes à cause de l'énorme dimension du vecteur d'état du système (de l'ordre  $10^6$ ). La non-linéarité des modèles océaniques joue aussi un mauvais tour au filtre de Kalman. Une solution au premier problème a été proposée par le filtre de Kalman singulier évolutif (SEEK) pour réduire le coût du filtre de Kalman. Ce filtre consiste essentiellement à corriger la prévision de l'état dans les directions dans lesquelles l'erreur n'a pas été suffisamment atténuée par la dynamique du modèle. En ce qui concerne la non-linéarité, l'usage a été de linéariser le modèle autour de l'état estimé pour obtenir le filtre de Kalman étendu. Cependant, ce filtre peut présenter des instabilités en présence de fortes non-linéarités. Pour résoudre partiellement ce problème, *Pham* [79] a proposé de remplacer la linéarisation par une interpolation linéaire dans son filtre SEEK, introduisant ainsi la variante interpolée du filtre SEEK, appelée filtre SEIK.

Malgré la diminution très importante du coût par rapport au filtre de Kalman, les filtres SEEK et SEIK restent chers pour océanographie opérationnelle. Nous nous sommes alors surtout intéressés, dans notre travail de recherche présenté dans ce mémoire, à la réduction des coûts de ces deux filtres. Dans ce but, nous avons construit plusieurs formes dégradées des filtres SEEK et SEIK dans lesquelles nous avons simplifié l'évolution de leurs bases de correction, puisque c'est le seul moyen pour réduire significativement leurs coûts. Les expériences jumelles que nous avons menées dans une configuration réaliste du modèle OPA dans l'océan Pacifique tropical ont montrés que nos formes dégradées des filtres SEEK et SEIK sont aussi performantes que le filtre SEIK dans les périodes stables du modèle mais peuvent être de 2 à 20 fois plus rapides. Cependant, leurs performances se dégradent en présence des instabilités. Le tableau TAB. 9.1 (page suivante) résume les caractéristiques de tous les filtres que nous avons expérimenté.

Pour améliorer les résultats de ces filtres dans les périodes instables, nous avons suivi deux approches :

- (i) Construire une analyse EOFs locale pour mieux résumer la variabilité locale des phénomènes océaniques. Le caractère non évolutif de la base obtenue par cette analyse locale

Filtre	Principe	Coût	Performance
SEEK	Corrige l'état prévu dans les directions d'amplification de l'erreur	$(r + 1)$ fois coût du modèle	Bonne performance
SEIK	Remplace la linéarisation du SEEK par une interpolation linéaire	Equivalent au Coût du filtre SEEK	Plus performant que le filtre SEEK
SFEK	Garde la base EOFs initiale du filtre SEEK fixe dans le temps	$r$ fois plus rapide que le filtre SEEK	Mauvaise avec la base globale et très bonne avec la base mixte
SAIK	Fait évoluer la base durant les $L$ premiers pas seulement (parmi $N$ )	$N/L$ fois plus rapide que le filtre SEEK	Faible performance
SIEIK	Fait évoluer la base par intermittence 1 fois tous les $K$ pas	$K$ fois plus rapide que le filtre SEEK	Performance proche de celle du filtre SEIK
SSEEK	Fait évoluer uniquement les $r_1$ derniers vecteurs de la base EOFs	$r/r_1$ fois plus rapide que le filtre SEEK	Performance raisonnable
SSEIK	Fait évoluer les $r_1$ vecteurs de la base qui contribuent le plus à l'erreur	$r/r_1$ fois plus rapide que le filtre SEEK	Bonne lorsque le modèle est stable et mauvaise lorsqu'il est instable
SDEIK	Double la taille de la base en lui rajoutant les champs de vitesse de ses colonnes	2 fois plus rapide que le filtre SEEK	Très performant lorsque le modèle est stable et mauvais lorsqu'il est instable
SEPLEK	Fait évoluer uniquement la partie globale (dim $r_0$ ) de la base EOFs mixte	$r/r_0$ fois plus rapide que le filtre SEEK	Plus performant que le filtre SEIK surtout dans la période instable
ROEK	Projette la dynamique du modèle sur le sous-espace engendré par la base EOFs	Equivalent au Coût du filtre SEEK	Performant lorsque le modèle est stable et mauvais lorsqu'il est instable
ROAEK	Utilise un modèle AR(1) pour faire évoluer l'erreur dans l'espace réduit	$r$ fois plus rapide que le filtre SEEK	Mauvaise performance

TAB. 9.1 – Tableau récapitulatif des caractéristiques de tous les filtres

et la mauvaise représentativité de la variabilité globale dans cette base nous ont ensuite amenés à construire une nouvelle base EOFs locale-globale (ou mixte) que nous avons obtenu par une analyse locale sur les résidus des états dans la base globale. L'idée naturelle était alors de faire évoluer la partie globale de cette base et de garder la partie locale fixe. Le filtre semi-évolutif partiellement locale qui en résulte, appelé SEPLEK, s'est montré plus performant que le filtre SEIK dans nos expériences mais avec un coût bien inférieur à celui du SEEK.

- (ii) Adapter les paramètres du filtre SEEK. Nous avons alors construit des schémas de réglage adaptatif basés sur le facteur d'oubli, l'évolution et la dimension de la base de correction. Ses schémas ont été implémentés et testés avec succès dans nos formes dégradées des filtres SEEK et SEIK. En particulier l'adaptation du facteur d'oubli s'est avérée très efficace avec un coût négligeable.

Finalement, nous nous sommes intéressés au filtre ROEK, introduit par *Cane et al.* [17], d'une part pour montrer l'avantage de faire évoluer la base de correction effectuée dans le filtre SEEK, et d'autre part pour compenser le caractère non-évolutif de la base EOFs locale. Comme le coût de ce filtre est très proche de celui du filtre SEEK, nous avons aussi construit une variante du filtre ROEK, appelée ROAEK, dans laquelle nous avons introduit l'utilisation d'un modèle autorégressif d'ordre 1 pour faire évoluer l'erreur dans le sous-espace engendré par la base EOFs. Nos expériences semblent confirmer l'intérêt de l'évolution de la base. Les résultats de ce filtre avec la base EOFs mixte ont même été moins bons que ceux du filtre SEPLEK mais avec un coût plus élevé. Et enfin le filtre ROAEK n'a pas fourni des résultats satisfaisants car le modèle autorégressif que nous avons construit ne représentait pas suffisamment bien l'évolution de l'erreur dans l'espace réduit.

Le travail que nous avons accompli dans ce mémoire nous a permis de construire des variantes des filtres SEEK et SEIK qui sont beaucoup moins coûteuses mais aussi performantes. Cependant, nous pouvons toujours chercher à améliorer les performances (coûts+résultats) de nos filtres en travaillant, dans un futur proche, sur les points suivants :

- 1- Implémenter le filtre SEEK dans un modèle avec une grille grossière (adaptative). L'approche multirésolution de *Fiegunth et al.* [38, 39] pourra être envisagée pour propager les informations à travers les grilles de différentes résolutions. Il sera aussi intéressant de tester les performances de nos variantes du filtre SEEK sur une grille grossière dans le but de réduire encore leurs coûts.
- 2- L'analyse EOFs mixte augmente sensiblement la représentativité de sa base, mais trouver un moyen pour faire évoluer la partie locale de cette base reste une question ouverte. Ce point paraît important du moment que l'évolution de la partie globale de la base mixte a amélioré les résultats du filtre à base fixe.
- 3- En ce qui concerne l'adaptation des paramètres du filtre SEEK, nous avons pu voir que le facteur d'oubli jouait un rôle très important pour garder la stabilité de nos filtres. Son adaptation a été bénéfique même avec un estimateur de moindres carrés réel qui calibre le système d'innovation matriciel de très grande taille. Il serait alors intéressant de considérer une matrice de facteurs d'oubli et de l'adapter comme nous l'avons présenté dans le chapitre 8. L'adaptation de la dimension de la base de correction durant la période instable du modèle a largement amélioré les résultats du filtre à base



- fixe. Trouver un moyen pour implémenter ce schéma dans le filtre SEEK et ses variantes devrait être envisagé très prochainement.
- 4- Après avoir examiné de plus près les résultats du filtre ROAEK, nous avons pu constater que sa mauvaise performance était due en grande partie au modèle autorégressif numérique que nous avons construit pour faire évoluer l'erreur dans l'espace réduit. Pour améliorer la performance de ce filtre, nous devons chercher des nouveaux moyens pour construire ce modèle autorégressif.

## Annexe A

# Tirage aléatoire d'une matrice orthogonale

Nous présentons ici un algorithme pour générer une matrice aléatoire uniforme  $\Omega$  de  $r$  vecteurs colonnes orthonormés dans  $\mathbb{R}^{r+1}$  et orthogonaux au vecteur  $(1, \dots, 1)^T$ . Pour plus de détails sur cette méthode on pourra consulter *Pham* [79].

Dans ce but, on construit, d'une manière itérative, une suite de matrices aléatoires uniforme orthogonales  $\Omega_k, k = 1, \dots, r$  vérifiant :

- 1- Initialisation :**  $\Omega_1 = w_{1,1}$ , où  $w_{1,1}$  est une variable aléatoire prenant les valeurs 1 ou -1 avec une probabilité égale à 0.5 chacune.
- 2- Itération :** Pour  $k = 1, \dots, r$ , on calcule  $\Omega_k$  à partir de  $\Omega_{k-1}$  par la formule

$$\Omega_k = \begin{pmatrix} & & w_{k,1} \\ H(w_{k,1}, \dots, w_{k,k})\Omega_{k-1} & & \vdots \\ & & w_{k,k} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

où  $w_k = (w_{k,1}, \dots, w_{k,k})^T$  est un vecteur aléatoire suivant la loi uniforme sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^k$  et  $H(w_k)$  est la matrice de Householder associée au vecteur  $w_k$ , à savoir

$$H(w_k) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{|w_{k,k}|+1} \begin{pmatrix} w_{k,1} \\ \vdots \\ w_{k,k-1} \\ w_{k,k} + \delta \end{pmatrix} (w_{k,1}, \dots, w_{k,k-1}). \quad (\text{A.2})$$

où  $\delta = 1$  si  $w_{k,k-1} > 0$  et  $-1$  sinon. Remarquons que les colonnes de  $H(w_k)$  sont orthonormées et orthogonales au vecteur  $w_k$ .

On peut alors montrer que les matrices  $\Omega_k, k = 1, \dots, r$  sont des matrices aléatoires orthogonales uniformes. Pour obtenir  $\Omega$ , il suffit alors de remultiplier  $\Omega_r$  par la matrice de Householder associée au vecteur normé

$$\frac{1}{\sqrt{r+1}}(1, \dots, 1)^T, \quad (\text{A.3})$$

c'est à dire la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{r+1+\sqrt{r+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \sqrt{r+1} \end{pmatrix} (1, \dots, 1). \quad (\text{A.4})$$

## Annexe B

# Construction d'une base orthonormée orthogonale aux colonnes d'une matrice

Nous développons une méthode récursive et efficace pour générer une base orthonormée  $V$  du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{r+1}$  orthogonal aux colonnes d'une matrice quelconque  $\Gamma$  de rang  $r'+1$ . L'idée consiste à construire récursivement des vecteurs  $z_{r+1}, \dots, z_{r+1-r'}$  de sorte qu'à la  $i^{\text{ème}}$  étape, les colonnes de la matrice  $H(z_{r+1}) \cdots H(z_{r+1-i})$  ( $H$  est la matrice de Housholder donnée par A.2) forment une base orthonormée du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{r+1}$  orthogonal aux  $i+1$  colonnes distinctes  $\gamma_0, \dots, \gamma_i$  de  $\Gamma$ . Cette méthode peut être résumée comme suit (pour plus de détails consulter *Pham* [75]).

- **Initialisation** : On choisit tout d'abord une colonne  $\gamma_0$  de la matrice  $\Gamma$  et on la normalise pour obtenir le vecteur  $z_{r+1}$  dans  $\mathbb{R}^{r+1}$ . On notera alors

$$\Gamma^{(0)} = \Gamma - \{\gamma_0\}. \quad (\text{B.1})$$

- **Récurrence** : Pour  $i = 1, \dots, r'-1$ , on considère une colonne  $\gamma_i$  de la matrice  $H^T(z_{r+1-i})\Gamma^{(i)}$  et on la normalise, ce qui donne un vecteur  $z_{r-i}$  dans  $\mathbb{R}^{r-i}$ . On vérifie alors que les colonnes de la matrice  $H(z_{r+1}) \cdots H(z_{r+1-i})$  forment une base orthonormée du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{r+1}$  orthogonal à  $i+1$  colonnes distinctes  $\gamma_0, \dots, \gamma_i$  de  $\Gamma$ . Ensuite, on note comme précédemment

$$\Gamma^{(i+1)} = H^T(z_{r+1-i})\Gamma^{(i)} - \{\gamma_i\}. \quad (\text{B.2})$$

Une fois calculé les vecteurs  $z_{r+1}, \dots, z_{r+1-r'}$ , on peut montrer que les colonnes de la matrice  $H(z_{r+1}) \cdots H(z_{r-r'+1})$  forment les éléments de la base recherchée.



## Annexe C

# Champ des états de référence et estimés par les filtres SEEK

Nous comparons ici les champs des variables de l'état de référence (haut à gauche) en 01/09/1990 et de son estimation par les filtres : SEEK (haut à droite), ROEK (milieu à gauche), SEPLEK (milieu à droite), SEIK (bas à gauche) et SIEIK (bas à droite).

### Table des figures

- FIG. C.1 : Vitesse horizontale dans la 1<sup>ère</sup> couche.
- FIG. C.2 : Vitesse horizontale dans la 17<sup>ème</sup> couche.
- FIG. C.3 : Salinité dans la 1<sup>ère</sup> couche.
- FIG. C.4 : Salinité dans la 17<sup>ème</sup> couche.
- FIG. C.5 : Température dans la 1<sup>ère</sup> couche.
- FIG. C.6 : Température dans la 17<sup>ème</sup> couche.
- FIG. C.7 : Pression de surface dans la 1<sup>ère</sup> couche.
- FIG. C.8 : Premières EOFs globales et locales de la vitesse horizontale en surface.
- FIG. C.9 : Premières EOFs globales et locales de la salinité en surface.

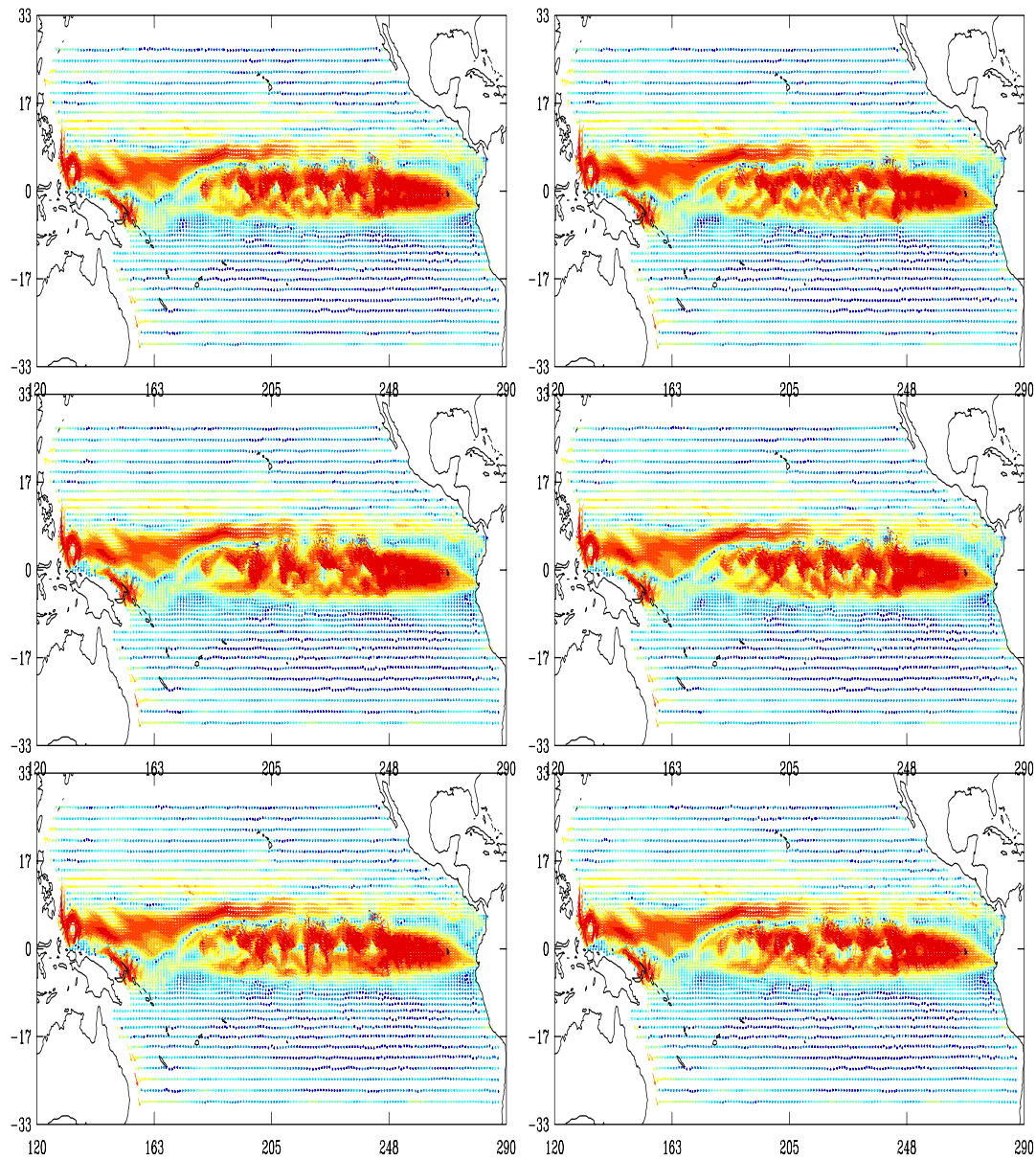


FIG. C.1 – Vitesse horizontale dans la 1<sup>ère</sup> couche

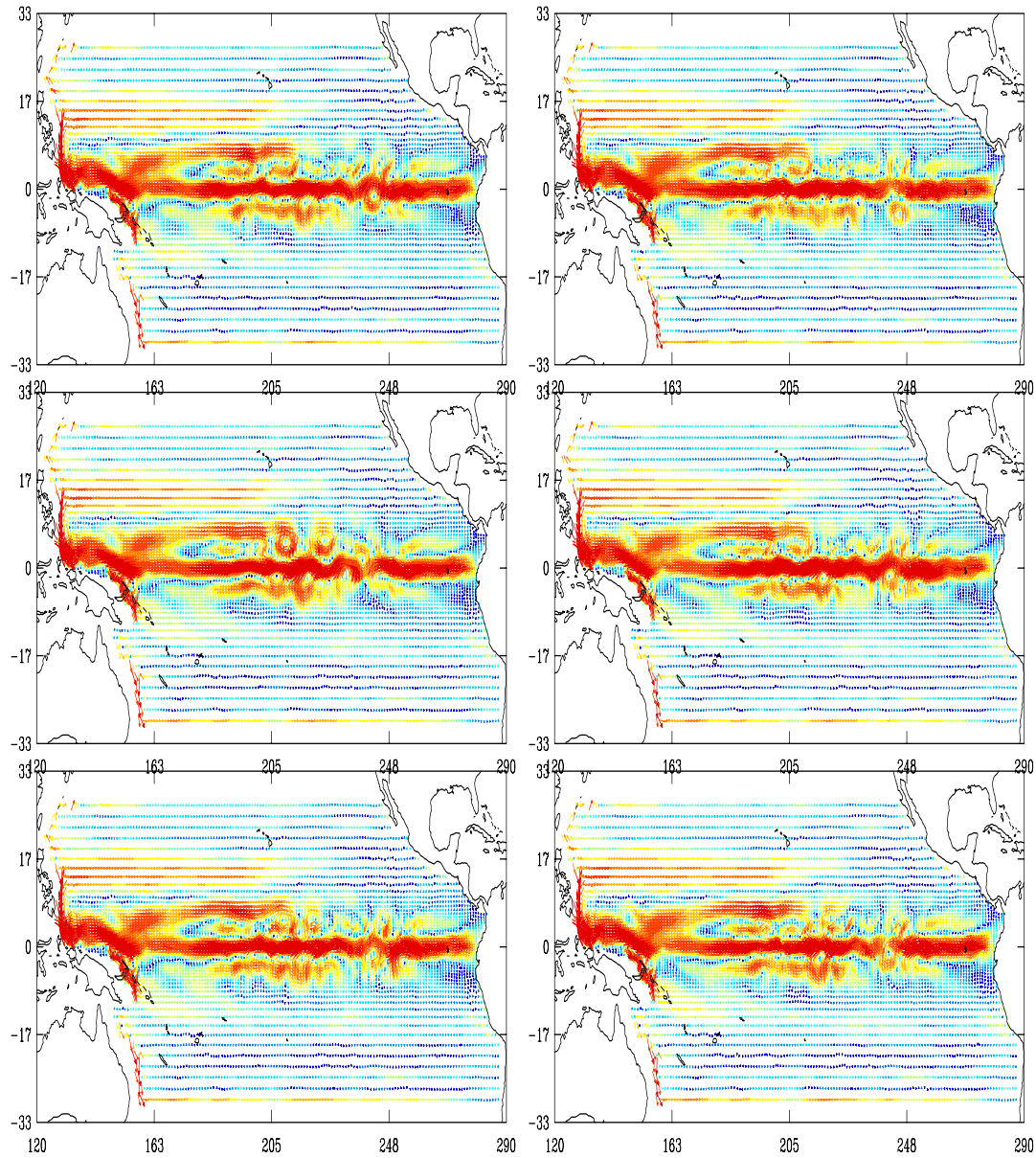
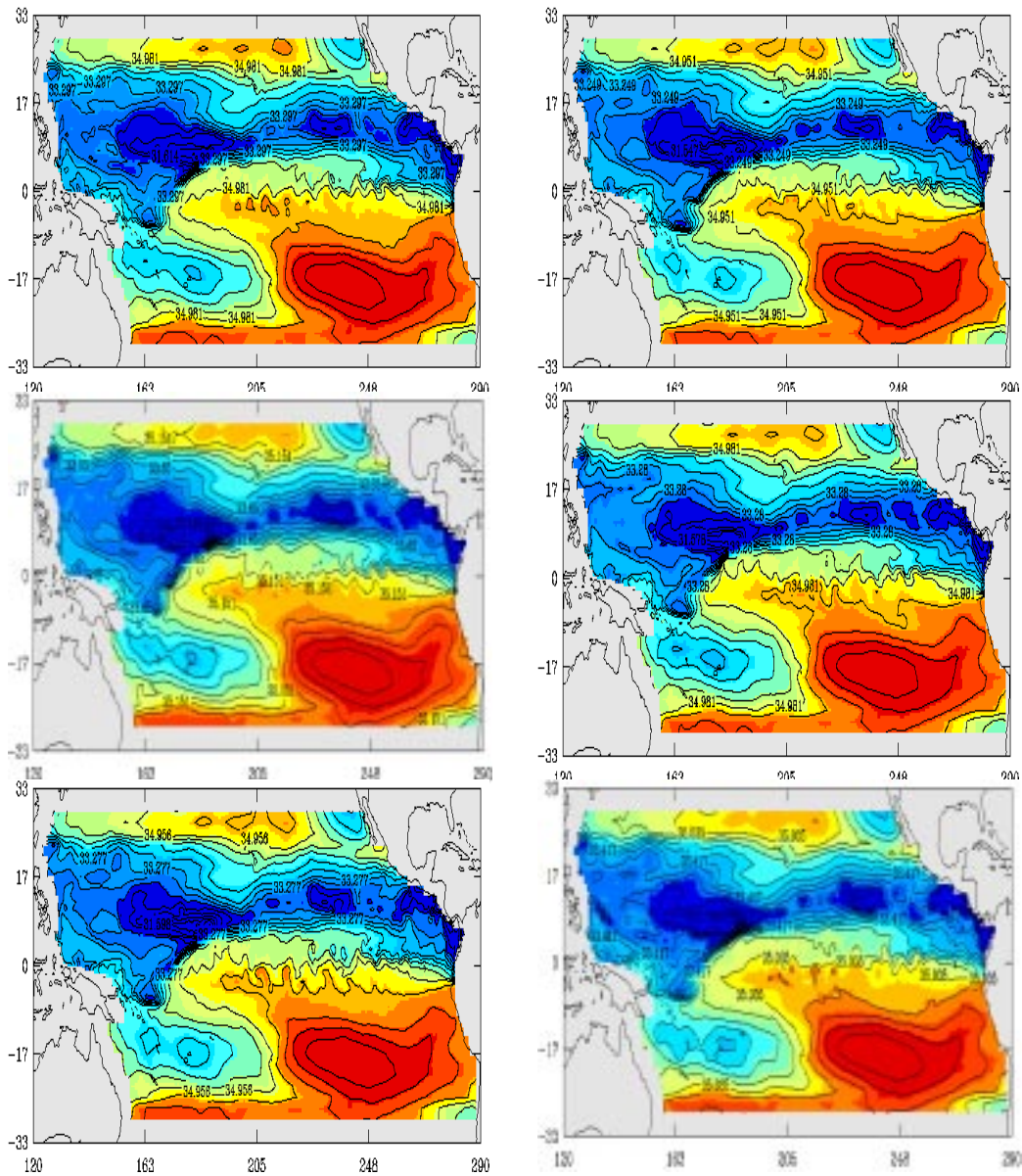
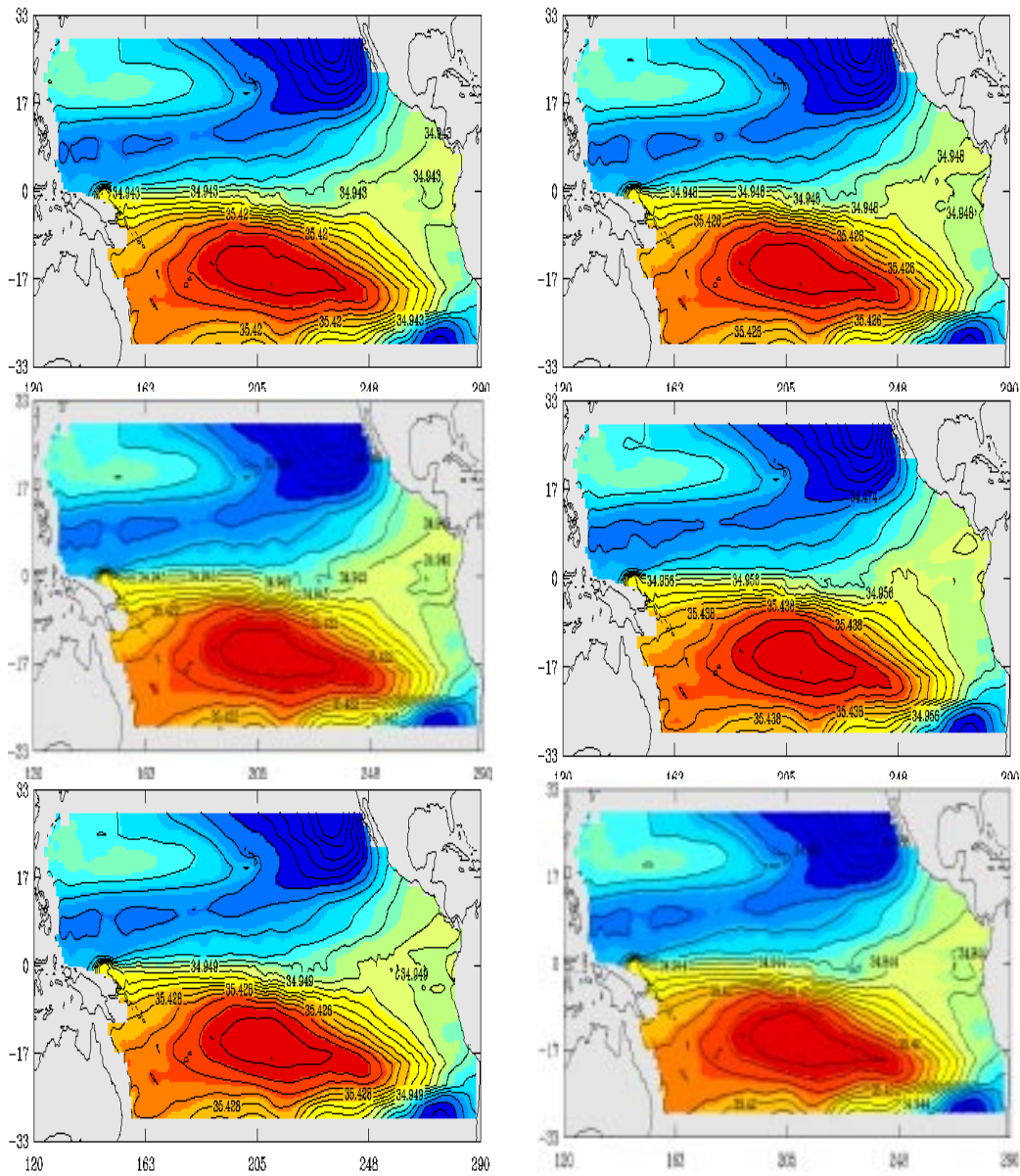
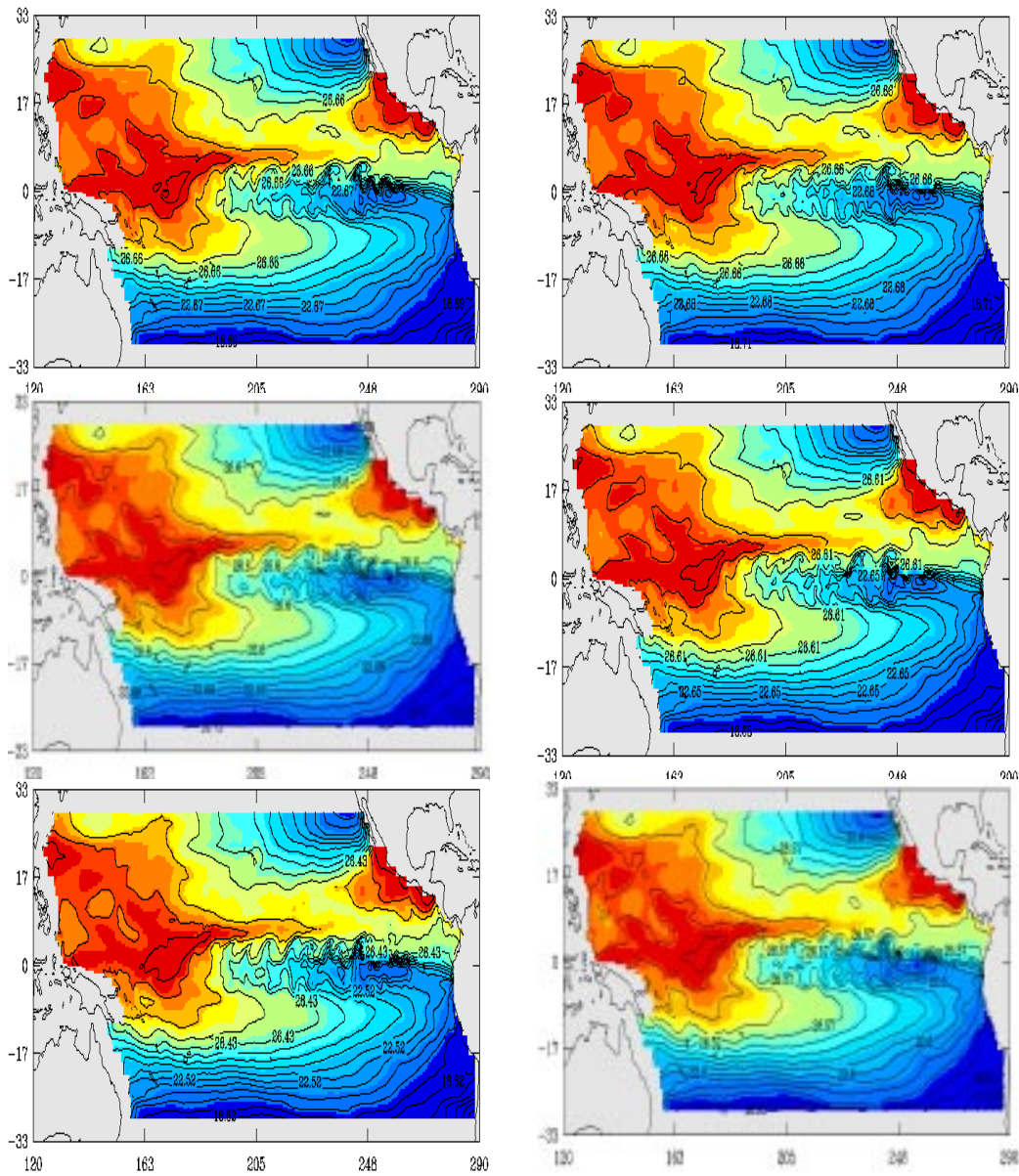


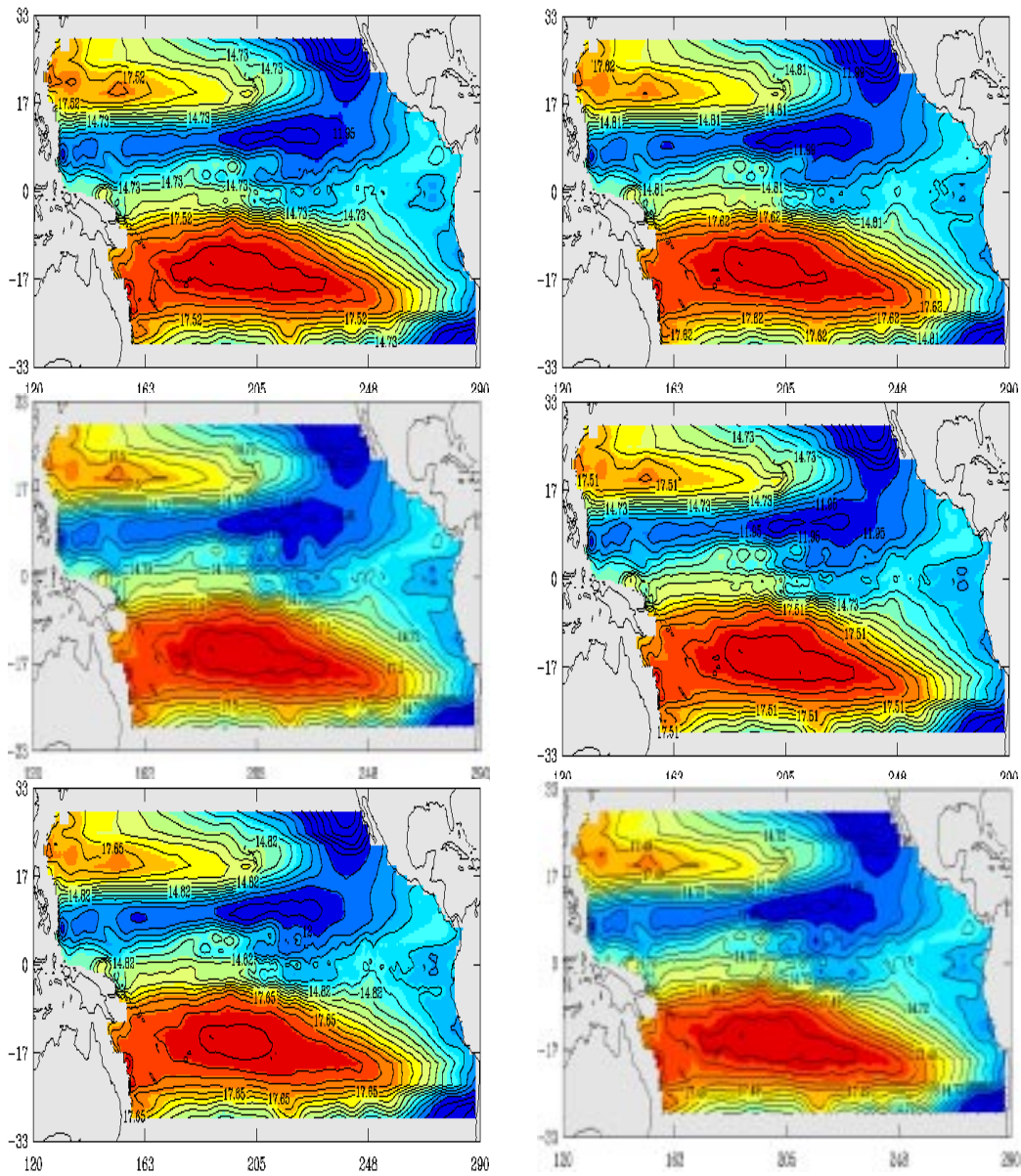
FIG. C.2 – Vitesse horizontale dans la 17<sup>ème</sup> couche





FIG. C.4 – Salinité dans la 17<sup>ème</sup> couche

FIG. C.5 – *Température dans la 1<sup>ère</sup> couche*

FIG. C.6 – *Température dans la 17ème couche*

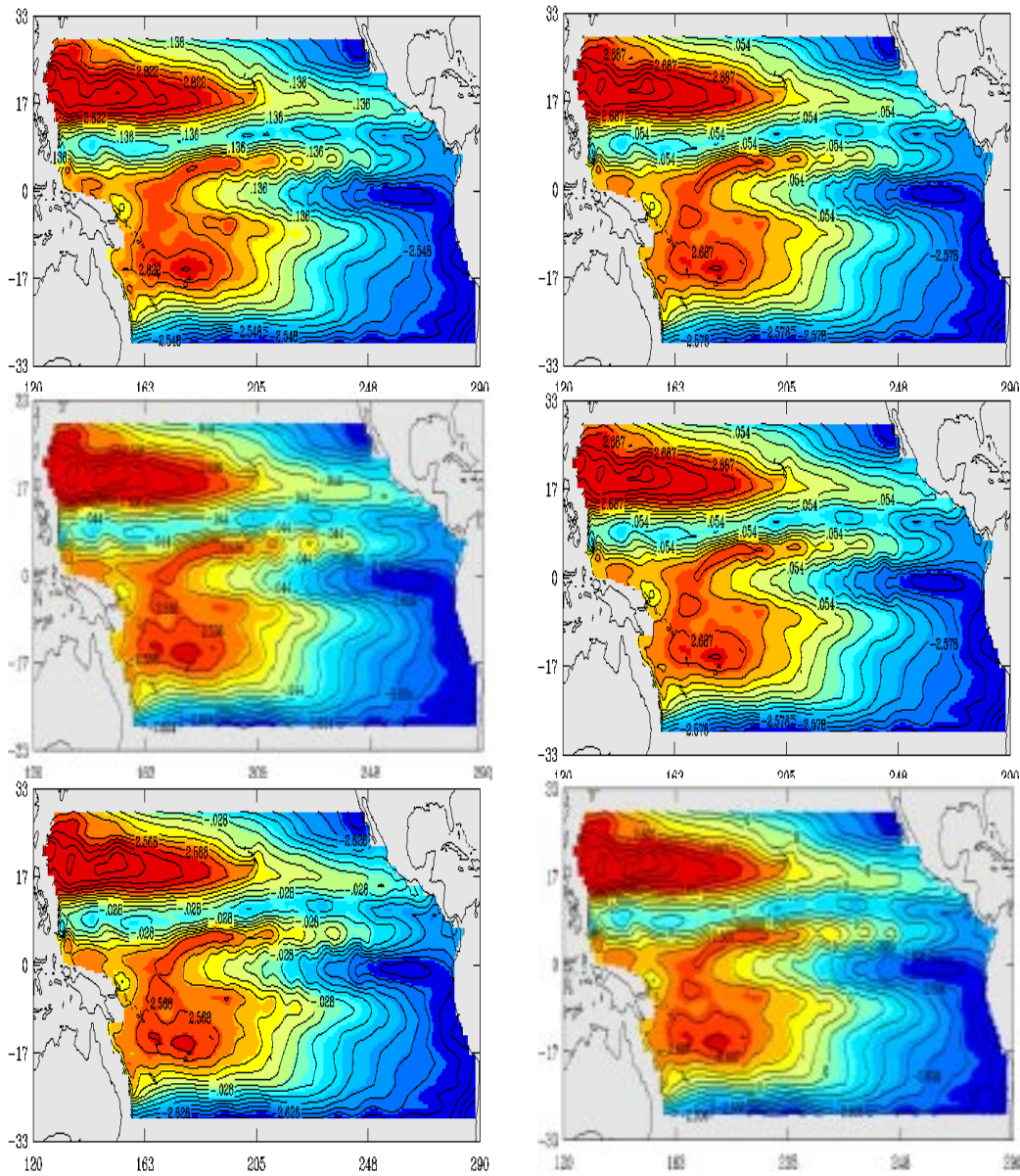


FIG. C.7 – Pression de surface dans la 1<sup>ère</sup> couche

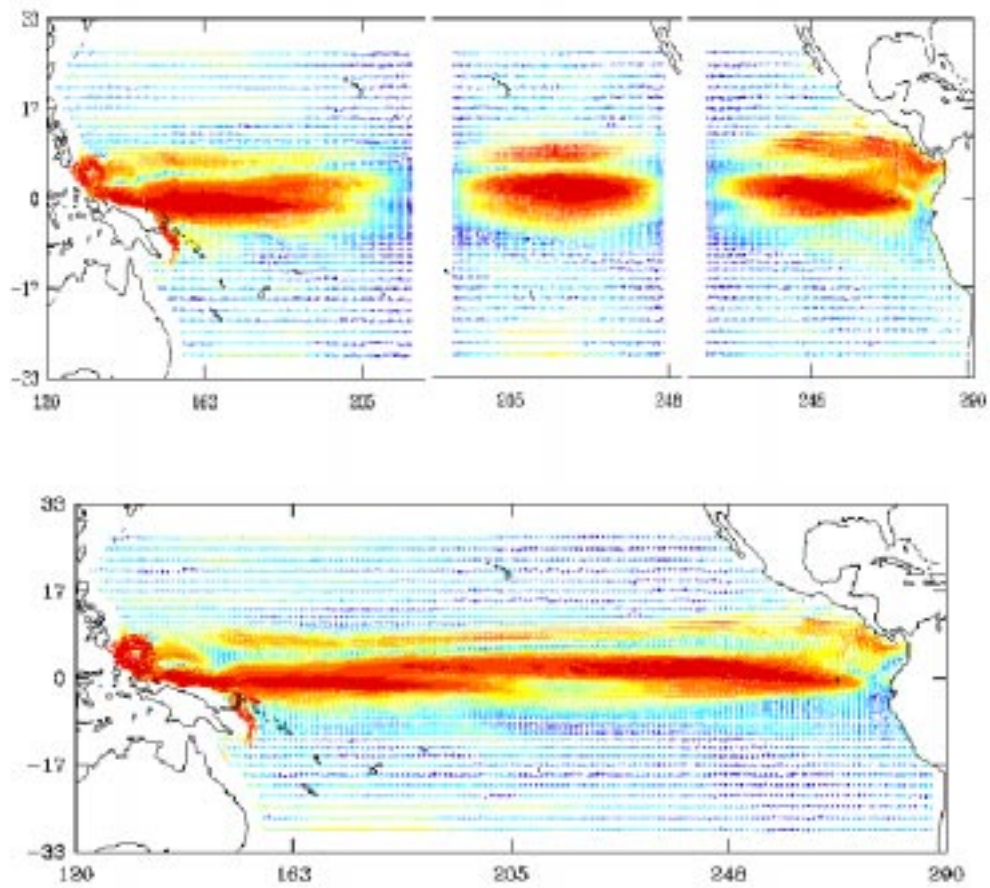


FIG. C.8 – La 1<sup>ère</sup> EOFs de la vitesse horizontale dans la 1<sup>ère</sup> couche

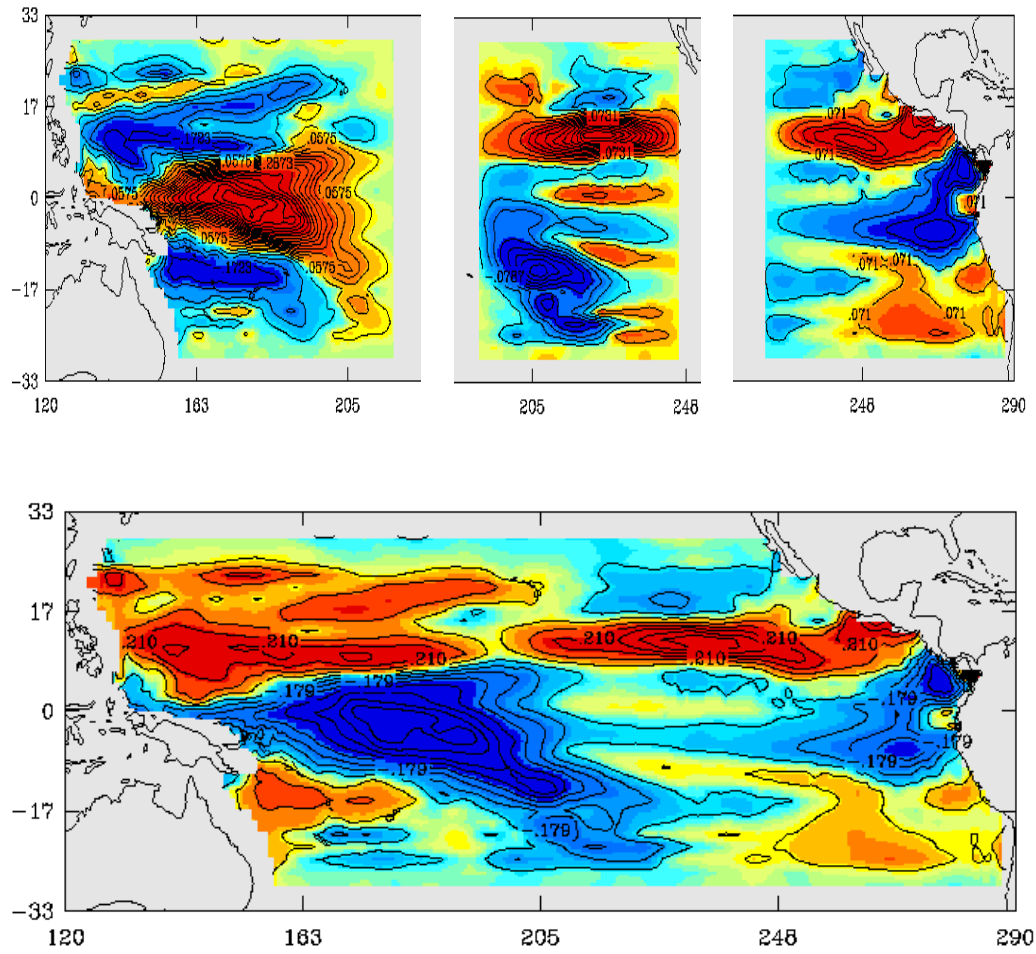


FIG. C.9 – La 1<sup>ère</sup> EOFs de la salinité dans la 1<sup>ère</sup> couche

# Bibliographie

- [1] Anderson B.D.O. Anderson and J.B. Moore, (1979): *Optimal filtering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [2] Anthes R., (1974): *Data Assimilation and initialization of hurricane prediction models*. J. Atmos. Sci., vol.31, pp.702-719.
- [3] Arakawa A., (1972): *Design of the UCLA general circulation model. Numerical integration of weather and climate*. Dept. of Meteorology, University of California, Rep.7, 116pp.
- [4] Astrom K.J. and B. Wittenmark, (1989): *Adaptive control*. Addison-Wesley publishing company.
- [5] Barnier B., Siefridt L. and Marchesio P., (1995): *Thermal forcing for a global ocean circulation model using a three-year climatology of ECMWF analyses*. Journal of Marine systems, 6, pp.363-380.
- [6] Bennett A.F. and B.F. Chua, (1994): *Open-ocean modelling as an inverse problem*. Mon. Weat. Rev., vol.22.
- [7] Bennett A.F., L.M. Leslie, C.R. Hagelberg and P.E. Powers, (1993): *Tropical cyclone prediction using a barotropic model initialized by a generalized inverse method*. Mon. Wea. Rev., vol.121, pp.1714-1729.
- [8] Bennett A.F. and A.M. Thurborn, (1992): *The generalized inverse of a nonlinear quasi-geostrophic ocean circulation model*. J. Phys. Oceanogr., vol.22, pp.213-230.
- [9] Blanchet I., C. Frankignoul and M. Cane, (1997): *A comparison of adaptive Kalman filters for a tropical pacific ocean model*. Mon. Wea. Rev., vol.125, no.1, pp.41-57.
- [10] Blanke B. and P. Delecluse, (1993): *Variability of the tropical Atlantic ocean simulated by a general circulation model with two different mixed layer physics*. J. Phys. Oceanogr., 23, 1363-1388.
- [11] Blayo E., J. Blum and J. Verron, (1998): *Assimilation variationnelle de données en océanographie et réduction de la dimension de l'espace de contrôle*. Article dédié à J. Lions pour son 70<sup>ème</sup> anniversaire.
- [12] Boggs D., M. Ghil and C. Keppenne, (1995): *A stabilized sparse matrix U-D square root implementation of a large state extended Kalman filter*. In second Intern. Symp. on Assim. of obs. in Meteo. and Oceano., WMO, pp.219-224.
- [13] Budgell W.P., (1986): *Nonlinear data assimilation for shallow water equations in branched channels*. J. Geophys. Res., vol.10, pp.633-644.
- [14] Brasseur P., J. Ballabrera-Poy and J. Verron, (1999): *Assimilation of altimetric observations in a primitive equation model of the gulf stream using a singular evolutive extended Kalman filter*. J. Mar. Systems, 22(4), 269-294.
- [15] Brillinger D.R., (1981): *Time series, data analysis and theory*. New-York, Rinehart & winston.



- [16] Burg J.P., D.G. Luenberger and D.L. Wenger, (1982): *Estimation of structured covariance matrices*. Proc. IEEE, 963-974.
- [17] Cane M.A., A. Kaplan, R.N. Miller, B. Tang, E.C. Hackert and A.J. Busalacchi, (1996): *Mapping tropical pacific sea level: data assimilation via a reduced state Kalman filter*. J. Geophys. Res., vol.101, no.C10, pp.599-617.
- [18] Cohn S.E., (1997): *Assessing the effects of data selection with the DAO physical-space statistical analysis system*. DAO Office Note 97-08.
- [19] Cohn S.E., (1986): *Observability of discretized partial differential equations*. Technical report.
- [20] Cohn S.E. and R. Tolding, (1995): *Approximate Kalman filters for unstable dynamics*. In second Intern. Symp. on Assim. of obs. in Meteo. and Oceano., WMO, 241-246.
- [21] Courtier P., J.-N. Thépaut and A. Hollingsworth, (1994): *Theory for operational implementation of 4D-Var, using an incremental approach*. Q. J. R. Meteorol. Soc., 113, pp.1329-1347.
- [22] Curi R.C., T.E. Unny, K.W. Hipel and K. Ponnambalam, (1995). *Application of the distributed parameter filter to predict simulated tidal induced shallow water flow*. Stochastic Hydrology and Hydraulics, 913-932.
- [23] Curtain R.F. and A.J. Pritchard, (1978): *Infinite dimensional linear systems theory*. Springer Verlag.
- [24] Daley R., (1992): *The lagged innovation covariance. A performance diagnostic for atmospheric data assimilation*. Mon. Wea. Rev., vol.120, pp.178-196.
- [25] Daley R., (1991): *Atmospheric data assimilation*. Cambridge Univ. Press.
- [26] Debreu L. (2000): *Raffinement adaptatif de maillage et méthodes de zoom. Application aux modèles d'océan*. Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, France.
- [27] Dee P.D., (1995): *One-line estimation of error covariance parameters for atmospheric data assimilation*. Mon. Wea. Rev., vol.123, pp.1128-1145.
- [28] Dee D.P., (1990): *Simplification of the Kalman filter for meteorological data assimilation*. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., vol.117, pp.365-384.
- [29] Dee D.P., S.E. Cohn, A. Dalcher and M. Ghil, (1985): *an efficient algorithm for estimating noise covariances in distributed systems*. IEEE Trans. Control, AC-30, 1057-1065.
- [30] De Mey P., (1998): *Scientific feasibility of data assimilation in the MERCATOR project*. Draft, April 25, Part I.
- [31] Ehrendorfer M., (1992): *Four-Dimensional Data Assimilation: Comparison of Variational and Sequential Algorithms*. Q. J. R. Meteorol. Soc., vol.118, pp.673-713.
- [32] Evensen G., Dee D. and J. Schroter, (1998): *Parameter estimation in dynamical models*. NATO ASI, Ocean modeling and parameterizations, Kluwer Academic Publishers, pp.373-398.
- [33] Evensen G., (1994): *Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics*. J. Geophysical Research, vol.99, pp.10143-10162.
- [34] Evensen G., (1992): *Using the Extended Kalman Filter with a Multilayer Quasi-Geostrophic Ocean Model*. J. Geophys. Res., vol.97, pp.17905-17924.
- [35] Fortescue T.R., L.S. Kershenbaum and B.E. Ydstie, (1981): *Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors*. Automatica, vol.17, pp.831-835.

- [36] Fagin S.L., (1964): *Recursive linear regression theory, optimal filter theory, and error analysis optimal system*. IEEE Int. Conv. Record, vol.12, pp.216-240.
- [37] Farrell B.F., (1989): *Optimal excitation of baroclinic waves*. J. Geophys. Res. Oceans, 100, 6777-6793.
- [38] Fieguth P.W., D. Menemenlis, T. Ho, C. Wunsch, and A. Willsky, (1997): *Mapping mediterranean altimeter Data with a multiresolution optimal interpolation algorithm*. J. Atmos.and Oceanic Technology, 15, pp.535-546.
- [39] Fieguth P.W., W.C. Karl, A.S. Willsky, and C. Wunsch, (1995): *Multiresolution optimal interpolation and statistical analysis of TOPEX/POSEIDON satellite altimetry*. IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing, Vol.33, No.2, pp.280-292.
- [40] Fu L.L., I. Fukumori and R.N. Miller, (1993): *Fitting dynamic models to geosat sea level observations in the tropical pacific ocean*. J. Phys. Oceanogr., vol.23, pp.2162-2182.
- [41] Fukumori I. and P. Malanotte-Rizzoli, (1995): *An approximate Kalman filter for ocean data assimilation: an example with an idealized gulf stream model*. J. Geophys. Res., 100 (C4), 6777-6793.
- [42] Fukumori I., (1995): *Assimilation of Topex Sea Level Measurements with a Reduced-Gravity Shallow Water Model of the Tropical Pacific Ocean*. J. Geophys. Res., 100 (C12), pp.27-39.
- [43] Fukumori I., J. Benveniste, C. Wunsch and D.B. Haidvogel, (1993): *Assimilation of sea surface topography into an ocean circulation model using a steady-state smoother*. J. Phys. Oceanogr., vol.23, pp.2162-2182.
- [44] Gauthier P. et al, (1993): *Assimilation of simulated wind lidar data with a Kalman filter*. Mon. Wea. Rev, vol.121, pp.1803-1820.
- [45] Gelb A., (1974): *Applied optimal estimation*. M.I.T. press.
- [46] Ghil M. and Malanotte-Rizzoli, (1991): *Data assimilation in meteorology and oceanography*. Advances in Geophysics, vol.23, pp.141-266.
- [47] Gong J., G. Wahbba, D.R. Johnson and J. Tribbia, (1998): *Adaptive tuning of numerical weather prediction models: simultaneous estimation of weighting, smoothing and physical parameters*. Mon. Wea. Rev., vol.125, pp.210-231.
- [48] Gourdeau L., S. Arnault, Y. Ménard and J. Merle, (1992): *Geosat sea-level assimilation in a tropical atlantic model using the Kalman filter*. Oceano. Acta., vol.15, pp.567-574.
- [49] Hoang H.S., P. De Mey, O. Tallagrand and R. Baraille, (1995): *Assimilation of altimeter data in multilayer quasi-geostrophic model by simple nonlinear adaptive filter*. Proc. Internat. Symposium Assimilation Obser. Meteo. Oceano., Tokyo, Japan, pp.521-526.
- [50] Ide K., A.F. Bennett, P. Courtier, M. Ghil and A.C. Lorenc, (1995): *Unified notation for data assimilation: operational, sequential and variational*. J. Met. Soc. Japan, 75, 1B, 71-79.
- [51] Ikeda M. and al., (1994): *Comparison of sequential updating Kalman filter and variational methods or assimilating rossby waves in the simulated geosat altimeter data into a quasi-geostrophic model*. J. Mar. sys., vol.6, pp.15-30.
- [52] Jazwinski A., (1970): *Stochastic and filtering theory*. Mathematics in Sciences and Engineering series, Academic Press, New-York.
- [53] Kailath T., (1968): *An innovations approach to least squares estimation. Part I: linear filtering in additive white noise*. IEEE Trans. Autom. Cont., vol.13, no.6, 646-655.
- [54] Kalman and Bucy, (1961): *New results in linear filtering and prediction theory*. trans. ASME (J.Basic Engng.), vol.33, pp.95-108.

- [55] Kulhavy R., (1987): *Restricted exponential forgetting in real-time identification*. Automatica, vol.23, no.5, pp.589-600.
- [56] Kunisch K. and S. Volkwein (1998): Control of Burgers' equation by a reduced order approach using proper orthogonal decomposition. To appear in JOTA.
- [57] Kushner H., (1967): *Approximation to optimal nonlinear filters*. IEEE trans. Autom. Control, AC-12, pp.546-556.
- [58] Labarrere M., J.P. Krief et B. Gimonet, (1985): *Le filtrage de Kalman et ses applications*. Cepadus Editions.
- [59] Le-Dimet F.X. and O. Talagrand, (1986): *Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observation: theoretical aspects*. Tellus, 38A, pp.97-110.
- [60] Lumely J., (1970): *Stochastic tools in Turbulence*. Academic press, New York.
- [61] Lermusiaux P., (1997): *Error subspace data assimilation methods for ocean field estimation: Theory, validation and application*. PHD Thesis, May, Harvard University, Cambridge, Massachusetts.
- [62] Levent O. and A.A. Fazil, (1998): *Comments on adaptive fading Kalman filter with an application*. Automatica, vol.34, no.12, pp.1663-1164.
- [63] Levitus S., (1982): *Climatological atlas of the world ocean*. Geophysical fluid dynamics laboratory, Princeton.
- [64] Lions J.L., (1968): *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod.
- [65] Lorenc A.C., (1986): *Analysis methods for numerical weather prediction*. Quart. J. R. Met. Soc., vol.112, pp.1177-1194.
- [66] Luong B., J. Blum and J. Verron, (1995): Variational assimilation of altimeter data into a nonlinear ocean model: temporal strategies, submitted to tellus.
- [67] Madec G., P. Delecluse, M. Imbard and C. Levy, (1997): *Ocean general circulation model reference manual*. Technical report, University Pierre and Marie Curie, Paris VI.
- [68] Mehra R.K., (1972): *Approaches to adaptive filtering*. IEEE Trans. Autom. Cont., vol.15, pp.693-698.
- [69] Mehra R.K., (1970): *On the identification of variances and adaptive Kalman filtering*. IEEE Trans. Autom. Cont., vol.15, no.2, pp.175-184.
- [70] Ménard R. and R. Daley, (1996): *The application of Kalman smoother theory to the estimation of 4DVAR error statistics*. Tellus, 48A, pp.221-237.
- [71] Miller R.N. and M. Cane, (1989): *A Kalman filter analysis of sea level height in the tropical pacific*. J. Phys. Oceanogr. vol.19, pp.773-790.
- [72] Moore A.M., (1991): *Data assimilation in a quasi-geostrophic open-ocean model of the Gulf-Stream region using the adjoint model*. J. Phys. Oceanogr., 21, pp.398-427.
- [73] Morf M., G.S. Sidhu and T. Kailath, (1974): *Some new algorithms for recursive estimation in constant, linear, discrete-time systems*. IEEE Trans. Aut. Control., AC-19(4), pp.315-323.
- [74] Penenko V.V. and N.N. Obraztsov, (1976): *A variational initialization method for the fields of the meteorological elements*. Soviet Meteorol. Hydrol., pp.1-11.
- [75] Pham D. T., (1998): *Stochastic methods for sequential data assimilation in strongly nonlinear systems*. A paraître dans Mon. Wea. Rev.
- [76] Pham D.T., (1998): *Dimension, predictability and reduced rank Kalman filtering in data assimilation*. Proceeding of the third bilateral Franco-Russian conference predictability of atmospheric and oceanic circulations, 61-72.

- [77] Pham D.T., J. Verron and L. Gourdeau, (1998): *Singular evolutive Kalman filter for data assimilation in oceanography*. C. R. Acad. Sci. Paris, vol.326, pp.255-260.
- [78] Pham D.T., J. Verron and M.C. Roubaud, (1997): *Singular evolutive Kalman filter with EOF initialization for data assimilation in oceanography*. J. Mar. Syst., vol.16, 323-340.
- [79] Pham D.T., (1996): *A singular evolutive interpolated Kalman filter for data assimilation in oceanography*. Technical report LMC, RT 163, Projet Idopt.
- [80] Poy J. B., (1998): *Assimilation de données par un filtre de Kalman évolutif de rang réduit dans un modèle aux équations primitives*. Thèse de Doctarat au Laboratoire LEGI de Grenoble.
- [81] Preisendorfer R., (1988): *Principal component analysis in meteorology and oceanography*. Elsevier Sci. Publ., 17, 425 pp.
- [82] Rabier F. and al., (1993): *A Comparison between four-dimensional variational assimilation and simplified sequential assimilation relying on three-dimensional variational analysis*. Q. J. R. Meteo. Soc., vol.119, pp.845-880.
- [83] Saporta G., (1990): *Probabilité, analyse de données et statistiques*. Paris: Technip, XXVI, pp.493.
- [84] Sasaki Y.K., (1958): *An objective analysis based on the variational method*. J. Met. Soc., Japan, II(36), pp.77-88.
- [85] Szunyogh S., D. Kalnay and Zoltan Toth, (1997): *A comparaison of Lyapounov and optimal vectors in a low-resolution GCM*. Tellus, 49A, pp.200-227.
- [86] Tabor M., (1989): *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*. JohnWiley & Sons, New York, 376 pp.
- [87] Talagrand O., (1997): *Assimilation of observations, an introduction*. J. Meteo. Soc. Japan, vol.75, no.1B, pp.191-209.
- [88] Talagrand O. and P. Courtier, (1987): *Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation*. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., vol.113, pp.1311-1328.
- [89] Trefethen L.N., A.E. Trefethen, S.C. Reddy and T.A. Driscoll, (1993): *Hydrodynamic stability without eigenvalues*. Science, 261, 571-584.
- [90] Verlann M. and A. Heemink, (1998): *Tidal flow forecasting using reduced square root filters*. Report 95-75, Delft University of Technology.
- [91] Verron J., L. Gourdeau, D.T. Pham, R. Murtugudde and A.J. Busalacchi, (1998): *An extended Kalman filter to assimilate satellite altimeter data into a non-linear numerical model of the tropical pacific: method and validation*. J. Geophys. Res., vol. 104, C3, 5441-5458.





## Résumé

Le filtre de Kalman étendu singulier évolutif (SEEK) et sa variante interpolée, appelée SEIK, ont été implémentés et testés avec succès dans plusieurs modèles océaniques. Cependant, ces deux filtres restent chers pour une océanographie opérationnelle. L'objectif principal de notre travail est de développer des formes dégradées des filtres SEEK et SEIK qui sont moins coûteux mais aussi performants. Notre approche consiste essentiellement à simplifier l'évolution de la base de correction des filtres SEEK et SEIK, qui est la partie la plus chère de ces deux filtres.

Pour améliorer les performances de nos filtres dans les périodes instables du modèle, nous introduisons tout d'abord les notions d'analyse EOFs locales et mixte dans le but d'augmenter la représentativité de la base de correction. Cela nous amène à construire une nouvelle variante du filtre SEEK avec une base de correction semi-évolutive partiellement locale. Nous présentons ensuite plusieurs schémas de réglage adaptatif des paramètres du filtre SEEK.

Nous terminons enfin par une comparaison entre les performances des filtres SEEK et ROEK pour montrer l'intérêt de l'évolution de la base de correction, ce dernier étant aussi introduit pour compenser le caractère non-évolutif de la base EOFs locale.

Nous avons implémenté tous nos filtres dans une configuration réaliste du modèle OPA dans l'océan Pacifique tropical. Leurs performances ont été étudiées avec des expériences jumelles. Le filtre SEIK est utilisé comme une référence pour la comparaison. Les résultats de ces expériences montrent que nos nouveaux filtres sont aussi performants que le filtre SEIK, mais peuvent être de 2 à 10 fois plus rapides.

## Mots clés

Assimilation de données. Modèle OPA. Altimétrie satellitaire. Filtre de Kalman. Filtres SEEK et SEIK. Filtres SEEK et SEIK simplifiés. Filtre ROEK. Analyse EOFs. Adaptativité. Facteur d'oubli.