



**HAL**  
open science

## Plongement de graphes dans l'hypercube

Mohamed Kobeissi

► **To cite this version:**

Mohamed Kobeissi. Plongement de graphes dans l'hypercube. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2001. Français. NNT: . tel-00004683

**HAL Id: tel-00004683**

**<https://theses.hal.science/tel-00004683>**

Submitted on 16 Feb 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I  
U.F.R. IMA

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE I

Discipline : Informatique

présentée et soutenue publiquement

par

Mohamed KOBEISSI

le 12 octobre 2001

---

PLONGEMENT DE GRAPHES DANS L'HYPERCUBE

---

**JURY**

Abdelhafid BERRACHEDI RAPPORTEUR

Sylvain GRAVIER EXAMINATEUR

Jean-Marie LABORDE EXAMINATEUR

Michel MOLLARD DIRECTEUR DE THÈSE

Andre RASPAUD RAPPORTEUR

Nguyen huy XUONG PRÉSIDENT

*À Mes parents,*

*À Mes soeurs,*

*À Varuna.*



# Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au sein du laboratoire LEIBNIZ-IMAG, dont je tiens à remercier le directeur Nicolas Balacheff et l'ancien directeur Philippe Jorrand.

Ma reconnaissance va ensuite à mon directeur de thèse Michel Mollard, chargé de recherche au CNRS, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant de réaliser une thèse sous sa direction. Qu'il trouve ici tous mes remerciements pour sa présence permanente tant sur le plan professionnel que personnel.

Mes remerciements vont aux membres du jury :

à Nguyen Huy Xuong, professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, d'avoir bien voulu examiner ce travail et présider ce jury ;

à André Raspaud, professeur à l'Université Bordeaux I, pour l'intérêt qu'il a montré pour mon travail et avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse. Je le remercie pour ses commentaires et ses remarques qui m'ont permis d'améliorer ce document ;

à Abdelhafid Berrachedi, professeur à l'Université Sciences et Techniques Houari Boumediène (USTHB, Alger), pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse, je le remercie pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et de ses remarques m'ayant permis d'améliorer ce document ;

à Jean-Marie Laborde, directeur de recherche au CNRS, d'avoir accepté de participer à ce jury ;

à Sylvain Gravier, chargé de recherche au CNRS pour l'intérêt qu'il a bien voulu

porter à mon travail et d'avoir examiner ma thèse. Je le remercie pour ses conseils et ses suggestions à travers nos discussions pendant ces trois années de thèse.

Je remercie également Gerd Finke, professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble et responsable de le Formation Doctorale : Recherche Opérationnelle, Combinatoire et Optimisation.

Je remercie ensuite mes collègues du laboratoire Leibniz, Virginie, Haris, Eric, Yann, Cécile et plus particulièrement Nadia et Ammar. sans oublier les autres membres du département, pour leur soutien tout au long de ces années.

Mes derniers mots seront pour ma famille ; mes parents, mes deux soeurs, mon oncle Salim ainsi qu'à Varuna. Je leur dis merci d'avoir cru en moi et de m'avoir encouragé tout le long des années de thèse.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>1 Éléments de théorie des graphes</b>	<b>17</b>
1.1 Graphes . . . . .	17
1.1.1 Définitions générales . . . . .	17
1.1.2 Quelques graphes . . . . .	19
1.1.3 Chaînes et cycles . . . . .	19
1.2 Connexité dans les graphes . . . . .	20
1.2.1 Graphes particuliers . . . . .	21
1.3 Opérations classiques . . . . .	24
1.3.1 Produit cartésien . . . . .	24
1.3.2 Isomorphisme . . . . .	26
1.3.3 Distances, décompositions en couches . . . . .	26
1.4 Intervalles . . . . .	27
1.5 Graphes médians et graphes distance monotones . . . . .	28
1.5.1 Autres graphes . . . . .	28

---

<b>2</b>	<b>L'hypercube</b>	<b>29</b>
2.1	Le graphe de l'hypercube . . . . .	29
2.2	Décomposition en couches de l'hypercube . . . . .	34
2.3	Quelques caractérisations de l'hypercube . . . . .	35
2.4	Projection et anti-projection . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Hamiltonicité de l'hypercube</b>	<b>41</b>
3.1	Décomposition Hamiltonienne de graphes . . . . .	41
3.2	Décomposition du produit cartésien de graphes . . . . .	42
3.3	Hamiltonicité de l'hypercube . . . . .	44
3.4	Problèmes ouverts . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Chaînes et cycles dans <math>Q_n</math></b>	<b>49</b>
4.1	Chaînes hamiltoniennes dans $Q_n$ . . . . .	49
4.2	Cycles disjoints dans $Q_n$ . . . . .	53
4.3	Théorème principal . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Plongement de graphes dans l'hypercube</b>	<b>77</b>
5.1	Définitions générales . . . . .	78
5.2	Graphes et dimensions cubiques . . . . .	80
5.2.1	Décider si un graphe $G$ est cubique . . . . .	81
5.3	Complexité . . . . .	82
5.4	Plongement dans $Q_n$ . . . . .	83
5.4.1	Plongement des cycles dans l'hypercube . . . . .	85



---

5.5	Plongement d'arbres binaires complets dans l'hypercube . . . . .	85
5.5.1	Plongements d'arbres dans l'hypercube obtenus par transformation des arbres binaires . . . . .	88
5.5.2	Autres plongements d'arbres . . . . .	89
5.5.3	Plongements des chenilles . . . . .	90
5.6	Plongements des grilles et des échelles . . . . .	92
5.6.1	Grille binaire . . . . .	93
5.6.2	Échelles . . . . .	93
5.7	Plongement des quasi-étoiles et des double quasi-étoiles . . . . .	95
5.8	$MD(a_1, \dots, a_k)$ graphes . . . . .	97
5.9	Théorème principal . . . . .	100
5.10	$MD(a_1, \dots, a_k)$ graphes subdivisés . . . . .	106
5.11	Problèmes ouverts . . . . .	108
	<b>Bibliographie</b>	<b>109</b>



# Table des figures

1.1	un exemple de graphe . . . . .	18
1.2	le graphe complet $K_5$ . . . . .	22
1.3	le graphe équilibré $K_{3,3}$ . . . . .	23
1.4	le produit cartésien $K_4 \square K_2$ . . . . .	25
1.5	décomposition en couches de $G$ . . . . .	26
2.1	les premiers hypercubes . . . . .	30
2.2	décomposition canonique de $Q_3$ . . . . .	30
2.3	chaînes disjointes dans $Q_n$ . . . . .	32
2.4	cycle hamiltonien dans $Q_n$ . . . . .	33
2.5	décomposition en couches de $Q_4$ . . . . .	34
3.1	décomposition hamiltonienne de $K_5$ . . . . .	42
3.2	décomposition hamiltonienne de $C_3 \square C_4$ . . . . .	43
4.1	cas 1 - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 1$ . . . . .	54
4.2	cas 2 - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 3$ . . . . .	55
4.3	cas 3 - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 2$ . . . . .	55

4.4	contre exemple pour $n = 3$ . . . . .	57
4.5	<i>cas 3.1</i> - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 1$ . . . . .	61
4.6	<i>cas 3.2</i> - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 2$ . . . . .	62
4.7	<i>cas 3.3</i> - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 3$ . . . . .	63
5.1	le graphe $K_{2,3}$ . . . . .	81
5.2	arbre équilibré à 16 sommets qui n'est pas plongeable dans $Q_4$ . . . . .	84
5.3	arbres binaires complets . . . . .	86
5.4	arbre binaire complet double-racine $BDR(3)$ . . . . .	87
5.5	l'arbre $D_2$ . . . . .	88
5.6	l'arbre $D_1^2$ . . . . .	89
5.7	l'arbre 4-aires $T_2^4$ . . . . .	89
5.8	le graphe d'une chenille de degré 4 . . . . .	90
5.9	grille binaire . . . . .	92
5.10	une échelle de rangs 2, 0, 2 et 4 . . . . .	94
5.11	$K_{1,n}$ . . . . .	95
5.12	la quasi-étoile $S(1, 1, 1, 1, 4)$ . . . . .	96
5.13	la double quasi-étoile $S(1, 4; 2, 3)$ . . . . .	96
5.14	le graphe $MD(2,4,8)$ . . . . .	98
5.15	plongement de $S(3,4,4)$ dans $MD(4,6)$ , les arêtes ajoutées sont en pointillées . . . . .	99
5.16	plongement de $S(1,2,4;3,4)$ dans $MD(4,4,6)$ , les arêtes ajoutées sont en pointillées . . . . .	99

---

5.17	plongement de $MD(2,4,8)$ dans $Q_4$ . . . . .	101
5.18	plongement de $MD(2,2,10)$ dans $Q_4$ . . . . .	102
5.19	plongement de $MD(a_1, a_2, a_3)$ dans $Q_n$ . . . . .	102
5.20	plongement de $MD(a_1, a_2, a_3, a_4)$ dans $Q_n$ . . . . .	103
5.21	plongement de $MD(6,8,8,8)$ dans $Q_5$ . . . . .	104
5.22	le graphe $MD(2;2,4,6)$ . . . . .	106
5.23	plongement de $MD(2;2,2)$ dans $Q_3$ . . . . .	107



# Introduction

Que ce soit dû à un regain actuel d'utilisation pratique (réseaux, architectures parallèles, codage), à son utilisation pour modéliser des problèmes ou tout simplement à l'intérêt de sa structure, l'hypercube est un objet d'étude particulièrement intéressant en informatique et en combinatoire.

Nous nous intéressons ici à divers problèmes concernant l'hypercube. Le but principal de ce manuscrit est de montrer que certaines familles de graphes sont des graphes plongeables dans l'hypercube (chapitre 5). Un problème d'une autre nature sera traité dans le chapitre 4, il concerne la partition de l'hypercube en des cycles sommet-disjoints. Un théorème principal sera énoncé et qui servira pour montrer que les *MD*-graphes sont des graphes plongeables de façon optimale dans l'hypercube.

Les définitions générales utilisées dans les différents chapitres de cette thèse et dans l'introduction ont été regroupées dans le chapitre "Éléments de théorie des graphes".

Le chapitre 2 est consacré à la présentation de l'hypercube et ses caractéristiques. On vérifie facilement que l'hypercube possède la propriété suivante : Entre toute paire  $(x, y)$  de sommets distincts de l'hypercube, il existe soit exactement deux chaînes de longueur 2, soit pas de chaînes de longueur 2 (on dit que  $Q_n$  est un  $(0, 2)$ -graphe). De tels graphes sont réguliers.

Plusieurs caractérisations de l'hypercube sont ensuite données. En particulier, Laborde, Rao-Hebbare et Mulder ont indépendamment prouvé que l'hypercube était maximal (pour son ordre par rapport à son degré) pour cette propriété.

Après avoir rappelé la définition de la décomposition hamiltonienne de graphes et donné plusieurs résultats connus dans le chapitre 3, nous rapellons que l'hypercube de dimension  $n$  est décomposable en cycles hamiltoniens si  $n$  est pair en utilisant un théorème énoncé par Aubert et Schneider, et que l'hypercube est décomposable en cycles hamiltoniens plus un couplage parfait si  $n$  est impair.

Le chapitre 4 est lui consacré à un autre type de problèmes qui consiste en la recherche des chaînes et des cycles ayant certaines propriétés sur l'hypercube. Il est connu que l'hypercube est un graphe hamiltonien. Nous prouvons certaines propriétés sur les chaînes dans l'hypercube, et rappelons un résultat de Nebeskỳ qui dit que l'hypercube de dimension  $n$  peut être partitionné en  $k$  chaînes sommet-disjointes de longueurs paires si  $k$  est inférieure à  $n - 1$ .

Pour notre part, nous montrons un résultat similaire en ce qui concerne les cycles, à savoir que l'hypercube de dimension  $n$  peut aussi être partitionné en  $k$  cycles sommet-disjointes de longueur paires si  $k \leq n - 2$ , et qui utilisent des arêtes de même direction dans l'hypercube. Tous ces résultats seront utilisés dans le dernier chapitre.

Le problème de plongement de graphes dans l'hypercube fera l'objet du chapitre 5. Dans ce chapitre, nous introduisons une nouvelle famille de graphes, les *MD* graphes. Nous avons montré que les quasi-étoiles et les double quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans les *MD* graphes. Nous avons en outre réussi à montrer que les *MD* graphes sont eux même des graphes plongeables dans  $Q_n$ , ce qui nous remontre que les quasi-étoiles, mais également prouve que les doubles quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans  $Q_n$ . Ce qui résout à un problème ouvert posé par Havel [34] depuis 1984. Il est à noter que tous ces plongements sont optimaux.

Plusieurs problèmes et conjectures sur la décomposition de l'hypercube en des cycles ayant certaines propriétés et sur les plongements optimaux de quelques familles de graphes ont été regroupés à la fin des trois derniers chapitres.



# Chapitre 1

## Eléments de théorie des graphes

### 1.1 Graphes

Nous donnons ici les définitions nécessaires à la lecture de ce manuscrit et quelques propriétés fondamentales. On adoptera la terminologie de Berge [8]. D'autres références pour la théorie des graphes se trouvent dans l'ouvrage de Bondy et Murty [12].

#### 1.1.1 Définitions générales

Un *graphe orienté*  $G$  est constitué d'un ensemble  $V$  fini d'éléments  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , appelés *sommets*, et d'une famille  $E$  d'éléments du produit cartésien  $V \times V$ , appelés *arcs*. Un élément de  $V \times V$  peut apparaître plusieurs fois dans la famille  $E$ . Le nombre de sommets du graphe est appelé *ordre* du graphe et est noté  $n$ . Dans un grand nombre de cas, la distinction entre extrémité initiale et extrémité terminale des arcs n'est pas pertinente. Aussi a-t-on introduit la notion de graphe non orienté, où l'on substitue à l'arc  $(x,y)$  l'ensemble formé par les deux sommets  $x$  et  $y$ , que l'on note  $xy$  et que l'on appelle *arête* du graphe.

Un graphe  $G$  est *simple* s'il ne contient pas de boucles (arc du type  $xx$ ) et s'il ne contient pas plus qu'une arête entre deux sommets. Sauf spécifications contraires,

on considère uniquement des graphes simples, finis et non orientés.

Un exemple de graphes à 7 sommets et 5 arêtes est montré dans l'exemple suivant

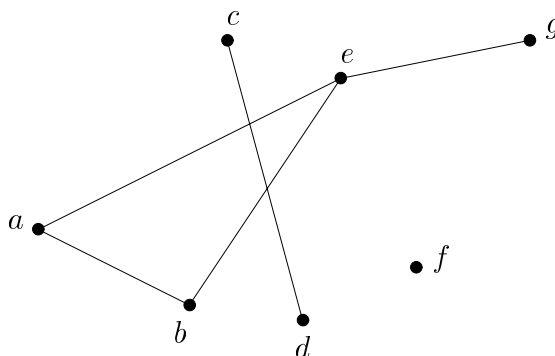


Figure 1.1 – un exemple de graphe

### Arêtes incidentes

Deux sommets sont dits *adjacents* s'ils sont extrémités d'une même arête, qui leur est alors incidente. Deux arêtes ayant une extrémité  $x$  en commun sont dites *incidentes* en  $x$ . Les *voisins* d'un sommet  $x$  d'un graphe  $G$  sont les sommets  $y$  de  $G$  tel que  $xy$  soit une arête de  $G$ .

### Degré

Le *degré* d'un sommet  $u$  de  $G$ , noté  $d(u)$  ( $d_G(u)$  s'il y a risque de confusion), est le nombre de voisins de  $u$ . Un sommet de degré 0 est dit *isolé*, un sommet de degré 1 est un sommet *pendant*. Si tous les sommets de  $G$  sont de même degré  $d$ , alors  $G$  est *régulier* de degré  $d$ , on dira qu'il est  $d$ -régulier. Noter que :

- Pour tout graphe  $G$ , 
$$\sum_{u \in G} d_G(u) = 2|E(G)|,$$

- Dans un graphe  $G$ , le nombre de sommets de degré impair est pair.

Dans tout ce manuscrit, on adoptera la notation suivante :

$$\delta(G) = \min_{u \in G} d_G(u) \quad \text{et} \quad \Delta(G) = \max_{u \in G} d_G(u)$$

### 1.1.2 Quelques graphes

Soient  $G = (V, E)$  et  $H = (W, F)$  deux graphes.

Le graphe  $G' = (V', E')$  dont l'ensemble des sommets  $V'$  est inclus dans  $V$  et l'ensemble des arêtes  $E'$  est la restriction de  $E$  à  $V' \times V'$  est appelé *sous-graphe* de  $G$  engendré par  $V'$ .

On dit que  $G' = (V', E')$  est un *graphe partiel* de  $G$  si  $V' = V$  et  $E' \subseteq E$  ( $G'$  peut être vu comme étant obtenu à partir de  $G$  en supprimant des arêtes).

L'union des deux graphes  $G$  et  $H$  (resp. intersection), noté  $G \cup H$  (resp.  $G \cap H$ ), est le graphe dont l'ensemble des sommets est  $V \cup W$  et l'ensemble des arêtes est  $E \cup F$  (resp.  $E \cap F$ ).

Le graphe complémentaire du graphe  $G$  noté  $\overline{G} = (V, \overline{E})$ , est le graphe sur le même ensemble de sommets où on relie deux sommets de  $\overline{G}$  par une arête si et seulement si ils ne sont pas adjacents dans  $G$ .

### 1.1.3 Chaînes et cycles

On appelle *chaîne* entre deux sommets  $x$  et  $y$  d'un graphe  $G$ , une suite de sommets  $x_1, \dots, x_k$  dont deux consécutifs sont adjacents, avec  $x_1 = x$  et  $x_k = y$ . Une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même sommet est dite *élémentaire*, une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite *simple*. Une chaîne élémentaire est donc une chaîne simple. On appelle *cycle* dans un graphe, une chaîne simple dont les extrémités initiale et finale sont confondues. Dans la suite, sans spécifications contraires, on parlera seulement de chaîne et de cycle élémentaires.

### Chaînes et cycles hamiltoniens

On appelle chaîne (resp. cycle) *hamiltonienne* (resp. *hamiltonien*) une chaîne (resp. cycle) passant, une fois et une seule, par tous les sommets d'un graphe  $G$ .

Un graphe  $G$  qui possède un cycle hamiltonien est dit *graphe hamiltonien*.

### Longueur de chaînes et de cycles

La *longueur* d'une chaîne (resp. cycle) est le nombre d'arêtes de cette chaîne (resp. cycle) et on note  $P_n$  (resp.  $C_n$ ) la chaîne élémentaire à  $n$  sommets, de longueur  $n - 1$  (resp.  $n$ ).

### Couplage dans un graphe

Etant donné un graphe simple  $G=(X,E)$ , on appelle *couplage* un ensemble  $E_0$  d'arêtes tel que les arêtes de  $E_0$  sont deux à deux non-incidentes.

### Couplage parfait

Un sommet  $x$  est *saturé* par un couplage  $E_0$  s'il existe une arête de  $E_0$  incidente à  $x$ . Un couplage qui sature tous les sommets du graphe est appelé un *couplage parfait*.

## 1.2 Connexité dans les graphes

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *connexe* s'il possède la propriété suivante :

$$\forall x, y \in V, \exists \text{ une chaîne entre } x \text{ et } y.$$

Pour un graphe quelconque la relation binaire de connexité  $R \subset V \times V$ , définie par :

$$xRy \iff x = y \text{ ou } \exists \text{ une chaîne entre } x \text{ et } y$$

est une relation d'équivalence. Le sous-graphe de  $G$ , engendré par une classe d'équivalence de cette relation s'appelle *composante connexe* du graphe  $G$ . En d'autres termes, un graphe est connexe s'il possède une seule composante connexe.

### Distance et diamètre

Etant donnés deux sommets  $x$  et  $y$  d'un graphe  $G$ , on appelle *distance* entre  $x$  et  $y$  et on note  $d_G(x, y)$  ( $d(x, y)$  s'il n'y a pas de confusion), la longueur d'une plus courte chaîne entre  $x$  et  $y$ . Une telle chaîne s'appelle *géodésique*. Le *diamètre* de  $G$ , noté  $D(G)$  ( $D$  s'il n'y a pas de confusion) est défini par :

$$D(G) = \max_{x, y \in G} d(x, y)$$

La distance entre deux arêtes  $xy$  et  $uv$  d'un graphe  $G$  est définie par :

$$d(xy, uv) = \min\{d(x, u), d(x, v), d(y, u), d(y, v)\}$$

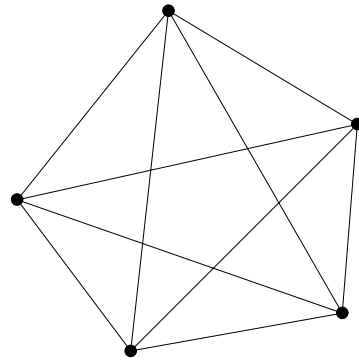
#### 1.2.1 Graphes particuliers

Cette section est consacrée aux graphes complets, bipartis et autres que nous rencontrerons tout au long de ce manuscrit, ainsi qu'une caractérisation des graphes bipartis.

##### Graphe complet

Un graphe simple  $G$  d'ordre  $n$ , qui vérifie  $\delta(G) = \Delta(G) = n - 1$ , est dit graphe *complet* à  $n$  sommets, noté  $K_n$ , et s'appelle une *n-clique*. La figure 1.2 montre le graphe complet à 5 sommets,  $K_5$ .

Le graphe complet à  $n$  sommets est un graphe qui contient  $\frac{n(n-1)}{2}$  arêtes, le diamètre de  $K_n$  est égal à 1.

Figure 1.2 – le graphe complet  $K_5$ 

### Graphes bipartis

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *biparti* s'il existe une partition de  $V$  en deux classes  $V_1$  et  $V_2$ , telle que tout élément de  $E$  a une extrémité dans  $V_1$  et l'autre dans  $V_2$ .

Une définition équivalente des graphes bipartis est donnée dans la proposition qui suit :

**Proposition 1.1** *Un graphe  $G$  est biparti si et seulement si il n'admet pas de cycle de longueur impaire.*

### Graphes bipartis complets

Un graphe biparti  $G$  est *complet* si tout sommet de  $V_1$  est adjacent à tout sommet de  $V_2$ . Un tel graphe est noté  $K_{p,q}$  où  $p = |V_1|$  et  $q = |V_2|$ .

Le graphe  $K_{p,q}$  a  $p + q$  sommets et  $pq$  arêtes, le degré d'un sommet de  $V_1$  est  $q$  et le degré d'un sommet  $V_2$  est  $p$ . Le diamètre d'un tel graphe est égal à 2.

### Graphes équilibrés

Un graphe  $G$  est dit *équilibré* si et seulement si :

- $G$  est biparti,
- chaque sous ensemble de la bipartition contient le même nombre de sommets.

Les cycles de longueurs pairs sont des graphes équilibrés, les graphes bipartis complets où  $p = q$  sont aussi de tels graphes. La figure 1.3 qui suit montre le graphe équilibré  $K_{3,3}$ .

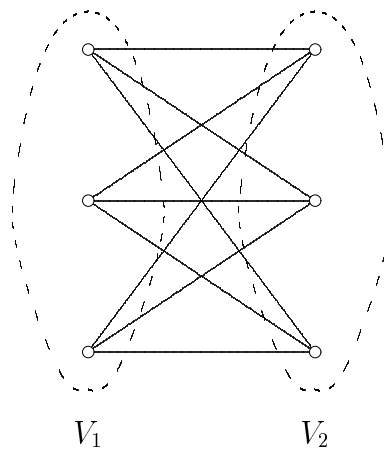


Figure 1.3 – le graphe équilibré  $K_{3,3}$

### Sommet-connexité et arête-connexité

La *sommet-connexité* (resp. *arête-connexité*), d'un graphe connexe  $G$ , notée  $\kappa(G)$  (resp.  $\lambda(G)$ ), est le nombre minimum de sommets (resp. arêtes) qu'il faut supprimer pour que  $G$  ne soit plus connexe.

On dit que  $G$  est *k-connexe* si  $\kappa(G) \geq k$ , c'est-à-dire que  $G$  est connexe et reste connexe après suppression d'au plus  $k - 1$  sommets. De la même façon, on dit que  $G$  est *k-arête-connexe* si  $\lambda(G) \geq k$ , c'est-à-dire que  $G$  est connexe et reste connexe après suppression d'au plus  $k - 1$  arêtes.

Un graphe connexe  $G$  est dit *connexe-minimal* si, en supprimant une arête quelconque,  $G$  n'est plus connexe.

**Propriété 1.1** *Tout graphe  $G$  connexe contient un graphe connexe-minimal comme graphe partiel.*

La proposition suivante relie la connexité et le degré minimum dans un graphe  $G$

**Proposition 1.2** *Pour tout graphe  $G$ ,  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ .*

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Un *isthme* dans un graphe  $G$  est une arête  $e$  de  $G$  tel que  $G \setminus \{e\}$  n'est pas connexe. Dans un arbre, toute arête est un isthme.

Les assertions suivantes sont équivalentes pour un graphe  $T$

**Théorème 1.1** *i)  $T$  est un arbre,*

*ii) Il existe une chaîne unique entre toute paire de sommets disjoints  $x$  et  $y$  de  $T$ ,*

*iii)  $T$  est connexe-minimal,*

*iv)  $T$  ne contient pas de cycles, et si on rajoute une arête entre deux sommets non-adjacents  $x$  et  $y$  de  $T$ , on crée un cycle.*

Les graphes connexes admettent la propriété suivante

**Proposition 1.3** *Un graphe  $G$  est connexe si et seulement si il contient un arbre  $T$  comme graphe partiel.*

## 1.3 Opérations classiques

### 1.3.1 Produit cartésien

On appelle produit cartésien de deux graphes  $G = (V, E)$  et  $H = (V', E')$ , noté  $G \square H$ , le graphe  $K$  dont l'ensemble de sommets est le produit cartésien  $V(G) \times$



$V(H)$  et où deux sommets  $(u, u')$  et  $(v, v')$  sont adjacents si et seulement si :

$$u = v \quad \text{et} \quad u'v' \in E'$$

ou

$$u' = v' \quad \text{et} \quad uv \in E.$$

La figure 1.4 montre le produit cartésien  $K_4 \square K_2$ .

Il est à noter que le nombre de sommets dans  $G \square H$  est  $|V| \cdot |V'|$  et que le nombre d'arêtes est  $|V| \cdot |E'| + |V'| \cdot |E|$ .

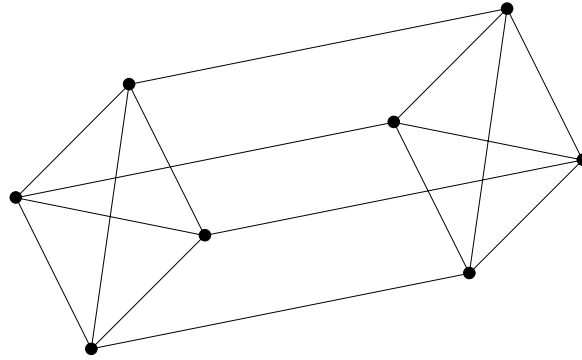


Figure 1.4 – le produit cartésien  $K_4 \square K_2$

**Proposition 1.4** *Le diamètre de la somme cartésienne de deux graphes  $G$  et  $G'$  est la somme des diamètres de ces graphes.*

*Preuve:* Soient  $(x, x')$  et  $(y, y')$  deux sommets de  $G \square G'$ . Soit  $P = x, x_1, \dots, x_{k-1}, y$  une chaîne géodésique dans  $G$  entre  $x$  et  $y$ , et soit  $P' = x', x'_1, \dots, x'_{j-1}, y'$  une chaîne géodésique dans  $G'$  entre  $x'$  et  $y'$ .

La chaîne  $(x, x'), (x_1, x'), \dots, (x_{k-1}, x'), (y, x'), (y, x'_1), \dots, (y, x'_{j-1}), (y, y')$  est une chaîne entre  $(x, x')$  et  $(y, y')$  dans  $G \square G'$ .  $P$  et  $P'$  sont de longueurs respectives  $k$  et  $j$ , alors  $k + j \leq D(G) + D(G')$  et donc  $D(G \square G') \leq D(G) + D(G')$ .

Pour établir l'égalité, il suffit de prendre deux sommets  $(x, x')$  et  $(y, y')$  du graphe  $G \square G'$  tels que  $d_G(x, y) = D(G)$  et  $d_{G'}(x', y') = D(G')$ .  $\square$

### 1.3.2 Isomorphisme

Deux graphes  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  sont dits isomorphes si et seulement si il existe une application bijective  $\varphi : V \rightarrow V'$  qui vérifie la condition suivante :

$$xy \in E \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E'$$

pour toute paire de sommets  $x, y$  dans  $V$ .

### 1.3.3 Distances, décompositions en couches

Notons  $N(x)$  l'ensemble des voisins d'un sommet  $x$  (parfois noté  $N_1(x)$ ), et soient  $N_i(x) = \{y \in V ; d(x, y) = i\}$  l'ensemble des sommets de  $V$  qui sont à distance  $i$  de  $x$ .

Une *décomposition en couches* de  $G$ , à partir d'un sommet  $x$  donné, est formée de l'ensemble  $\{x, N_1(x), N_2(x), \dots, N_k(x)\}$ .

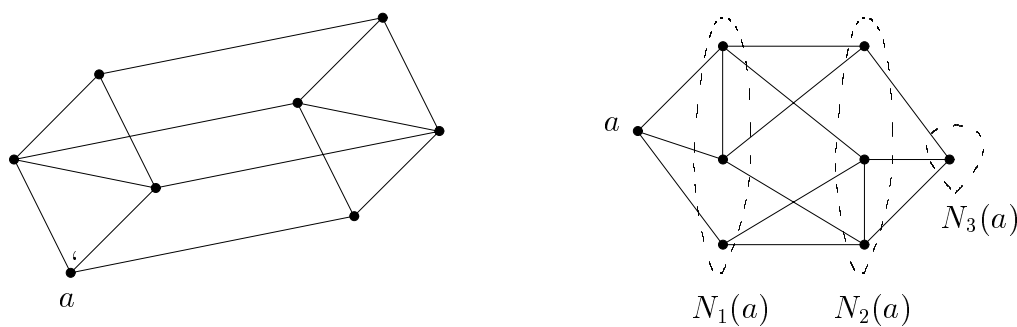


Figure 1.5 – décomposition en couches de  $G$

A noter que dans une décomposition en couches d'un graphe  $G$ , il n'y a des arêtes qu'entre couches successives ou bien dans une même couche (figure 1.5).

## 1.4 Intervalles

L'intervalle  $I_G(u, v)$  (noté aussi  $I(u, v)$  s'il n'y a pas confusion) est l'ensemble des sommets de  $G$  appartenant aux chaînes géodésiques entre  $u$  et  $v$ .

$$I(u, v) = \{w \in V; w \text{ appartient à une chaîne géodésique entre } u \text{ et } v\}$$

Trivialement, un sommet  $w \in I(u, v)$  si et seulement si  $d(u, w) + d(w, v) = d(u, v)$ .

Par abus de langage, on désignera par intervalle aussi bien l'ensemble  $I(u, v)$  que le sous-graphe engendré par  $I(u, v)$ .

Le lecteur pourra se référer à [57] pour une étude détaillée de la notion d'intervalle. Toutefois, nous citons les propositions de base suivantes

**Proposition 1.5** *Soient  $u$  et  $v$  deux sommets d'un graphe  $G$ , alors*

- i)  $u, v \in I(u, v)$ ,*
- ii)  $I(u, v) = I(v, u)$ ,*
- iii) Si  $w \in I(u, v)$ , alors  $I(u, w) \subset I(u, v)$ ,*
- iv) Si  $w \in I(u, v)$ , alors  $I(u, w) \cap I(w, v) = \{w\}$ ,*
- v) Si  $w \in I(u, v)$  et  $z \in I(u, w)$ , alors  $w \in I(z, v)$ .*

**Proposition 1.6** *Pour tout triplet  $u, v$  et  $w$  d'un graphe  $G$ , il existe un sommet  $z$  dans  $I(u, w) \cap I(u, v)$  tel que*

$$I(z, w) \cap I(z, v) = \{z\}$$

**Proposition 1.7** *Soient  $u, v, w$  et  $z$  quatre sommets d'un graphe  $G$ .  $z$  est l'unique sommet de  $I(u, w) \cap I(u, v)$  tel que  $I(z, w) \cap I(z, v) = \{z\}$  si et seulement si*

$$I(u, w) \cap I(u, v) = I(u, z)$$

## 1.5 Graphes médians et graphes distance monotones

Certains types de graphes ont été défini en utilisant la notion de l'intervalle, parmi ceux-ci les graphes médians et les graphes distance monotones.

**Définition 1.1** *Un graphe médian est un graphe tel que, pour tout triplet  $x, y, z$  de sommets, l'intersection des trois intervalles  $I(x,y)$ ,  $I(y,z)$  et  $I(z,x)$  est réduite à un sommet.*

Burosh, Havel et Laborde [14] ont introduit la notion de graphe distance monotone

**Définition 1.2** *Un graphe connexe est dit distance monotone si, pour tout intervalle  $I(x,y)$  et tout sommet  $z$  hors de l'intervalle, il existe un sommet  $z'$  dans  $I(x,y)$  tel que  $d(z, z') > d(x, y)$ .*

Il est clair qu'un intervalle  $I(x,y)$  est tel que, pour tout  $z, z'$  dans l'intervalle,  $d(z, z') \leq d(x, y)$ . Dans un graphe distance monotone, la propriété de la définition 1.2 est donc caractéristique des sommets de l'intervalle.

### 1.5.1 Autres graphes

Plusieurs autres types de graphes peuvent être défini par les intervalles, les graphes intervalle réguliers, les graphes intervalle-diamétraux et les graphes sphériques, les définitions de ces graphes ne seront pas données ici, le lecteur pourra se référer à [10] pour une étude plus détaillée.

Ces définitions serviront dans le chapitre suivant pour donner quelques caractérisations de l'hypercube.

# Chapitre 2

## L'hypercube

Les hypercubes occupent une place importante dans la littérature de l'informatique et de la combinatoire, l'objectif de ce chapitre est de citer quelques propriétés des hypercubes qui sont utilisées dans la suite. Une présentation générale des hypercubes sera donnée, ainsi que quelques propriétés élémentaires de ce type de graphe qui seront utiles dans les chapitres suivants. Enfin, nous décrivons plusieurs caractérisations différentes d'un hypercube.

### 2.1 Le graphe de l'hypercube

**Définition 2.1** *L'hypercube de dimension  $n$  (noté  $Q_n$ ) est le graphe de  $2^n$  sommets qui peuvent être considérés comme étant tous les vecteurs booléens sur  $\{0, 1\}^n$ , et où deux sommets sont adjacents si et seulement si les vecteurs associés à ces sommets diffèrent exactement en une seule composante.*

Notons que  $Q_0 = K_1$ ,  $Q_1 = K_2$  et que d'une manière générale,  $Q_n$  peut être défini récursivement en utilisant le produit cartésien par  $Q_{n+1} = Q_n \square K_2$ .

Il est donc clair que  $Q_n$  ( $n \geq 1$ ) est isomorphe à

$$\underbrace{K_2 \square K_2 \dots \square K_2}_{n \text{ fois}}. \quad (2.1)$$

et donc que  $Q_{n+d} = Q_n \square Q_d$ .

La figure 2.1 montre les hypercubes de petites dimensions.

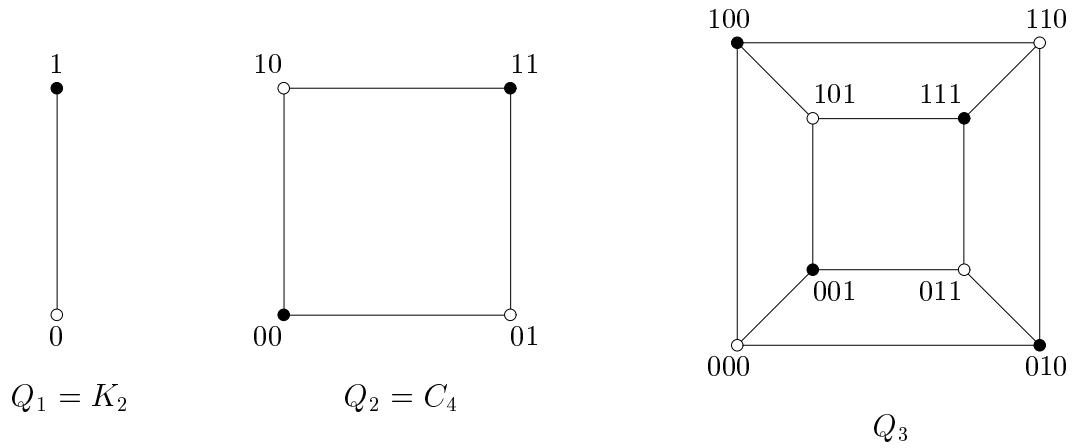


Figure 2.1 – les premiers hypercubes

Une *direction*  $i$  dans l'hypercube de dimension  $n$  ( $i \leq n$ ) est l'ensemble d'arêtes de  $Q_n$  dont les extrémités ont des vecteurs associés qui diffèrent à la  $i^{\text{ème}}$  composante.

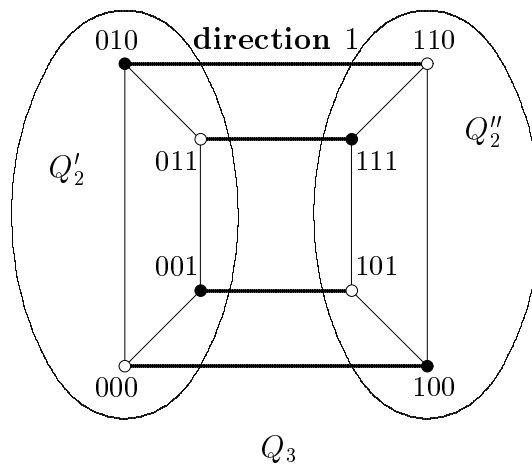


Figure 2.2 – décomposition canonique de  $Q_3$

La figure 2.2 montre une décomposition de  $Q_3$  en deux copies de  $Q_2$  suivant la direction 1 (les arêtes en gras).

Il est facile de voir qu'une direction définit un couplage parfait de  $2^{n-1}$  arêtes qui décompose  $Q_n$  en deux copies disjointes de  $Q_{n-1}$  (noté par  $Q'_{n-1}, Q''_{n-1}$ ). Une telle décomposition s'appelle *canonique* suivant la direction  $i$ . Des arêtes de même direction sont appelées *parallèles*. Il est facile à voir qu'il y a  $n$  directions distinctes dans l'hypercube de dimension  $n$ .

La notation suivante sera utilisée dans ce manuscrit : Pour  $u \in V(Q'_{n-1})$  (resp.  $V(Q''_{n-1})$ ), le sommet  $u' \in V(Q''_{n-1})$  (resp.  $V(Q'_{n-1})$ ) tel que  $uu'$  soit une arête du couplage qui relie  $Q'_{n-1}$  à  $Q''_{n-1}$  est notée  $u|_{Q''_{n-1}}$  (resp.  $u|_{Q'_{n-1}}$ ). De même, pour  $uv \in E(Q'_{n-1})$  on note  $u'v' = uv|_{Q''_{n-1}}$ , l'arête de  $Q''_{n-1}$  tels que  $u'$  et  $v'$  soient définis comme précédemment ( $u'$  et  $u'v'$  seront utilisés s'il n'y a pas de confusion).

### Quelques propriétés élémentaires de l'hypercube

L'hypercube de dimension  $n$  est un graphe équilibré,  $n$ -régulier avec  $2^n$  sommets et donc  $n \cdot 2^{n-1}$  arêtes.

En utilisant la relation 2.1 et la proposition 1.4 (page 25), on obtient que le diamètre de l'hypercube  $Q_n$  est égal à  $n$ .

De plus, pour deux sommets  $x$  et  $y$  qui sont à distance  $k$  dans  $Q_n$ , il existe  $k!$  chaînes géodésiques entre  $x$  et  $y$ .

On peut montrer, par induction, qu'entre deux sommets quelconques de l'hypercube, il existe  $n$  chaînes deux à deux sommet-disjointes, ce qui prouve que sa sommet-connexité (et donc son arête-connexité) est égale au degré  $n$ .

La proposition suivante est une proposition plus forte

**Proposition 2.1** *Il existe  $n-1$  chaînes de longueur inférieure ou égale à  $n$  et une chaîne de longueur inférieure ou égale à  $n+1$ , deux à deux sommet-disjointes, entre toute paire de sommets dictints de l'hypercube de dimension  $n$ .*

*Preuve:* La preuve se fait par induction sur  $n$ . Il est facile à voir que le résultat est vrai pour  $n = 2$ . Supposons par hypothèse d'induction que le résultat est vrai pour  $n - 1$  et considérons  $Q_n$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $Q_n$  et soit  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  une décomposition canonique de  $Q_n$ . Deux cas sont à distinguer :

cas 1 : Il existe une décomposition  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  de  $Q_n$  tel que  $x$  et  $y$  appartiennent à  $Q'_{n-1}$ .

Par hypothèse d'induction, il existe  $n-1$  chaînes  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  dans  $Q'_{n-1}$ , de longueur inférieure ou égale à  $n$ . Dans  $Q''_{n-1}$ , soit  $P'$  une chaîne de longueur inférieure ou égale à  $n - 1$  entre  $x'$  et  $y'$ . La chaîne  $P'_1 = \{xx' \cup P' \cup y'y\}$  est une chaîne de longueur inférieure ou égale à  $n + 1$  entre  $x$  et  $y$ .

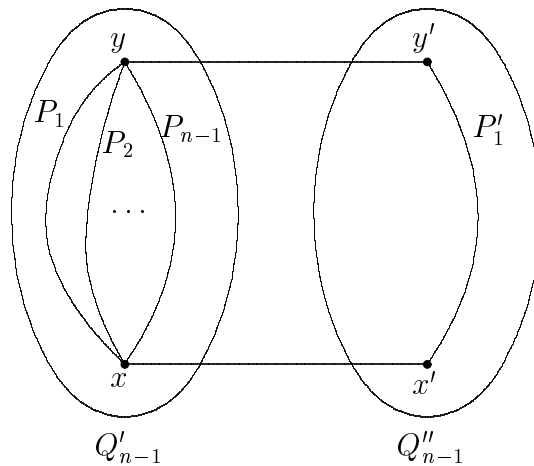


Figure 2.3 – chaînes disjointes dans  $Q_n$

Les chaînes  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  et  $P'_1$  sont les chaînes voulues dans  $Q_n$  (figure 2.3).

cas 2 : Pour toute décomposition  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  de  $Q_n$ ,  $x \in Q'_{n-1}$  et  $y \in Q''_{n-1}$ .

Dans ce cas, puisqu'ils diffèrent de chaque composante,  $x$  et  $y$  sont à distances  $n$  dans  $Q_n$  ( $x$  et  $y$  sont appelés *antipodaux*).

Les  $n$  chaînes sont construites en partant de  $x$  et en prenant les directions  $i, i+1, \dots$



(modulo  $n$ ), pour  $i = 1, \dots, n$ . Ces chaînes sont deux à deux sommet-disjointes de longueur  $n$ .  $\square$

on montre aussi, par induction sur  $n$ , que  $Q_n$  est hamiltonien.

**Assertion 2.1** *L'hypercube est hamiltonien, de plus par toute arête passe un cycle hamiltonien.*

*Preuve:*  $Q_2$  est hamiltonien. Supposons maintenant que  $Q_{n-1}$  vérifie cette propriété. Soit  $uv$  une arête de  $Q_n$  et soit  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  une décomposition canonique de  $Q_n$  tel que  $uv \in Q'_{n-1}$ . Par hypothèse d'induction, il existe un cycle hamiltonien  $C_1$  dans  $Q'_{n-1}$  qui passe par  $uv$ . Soit  $xy$  une arête de  $C_1$ , par hypothèse d'induction, il existe un cycle hamiltonien  $C_2$  dans  $Q''_{n-1}$  qui passe par  $x'y'$ . Le cycle  $C = C_1 \cup C_2 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$  est un cycle hamiltonien dans  $Q_n$ , et qui passe par l'arête  $uv$ .  $\square$

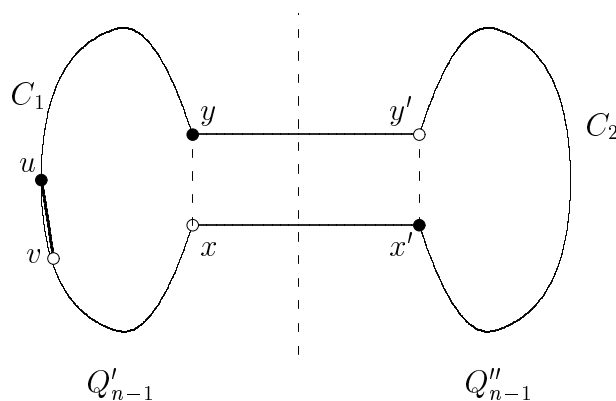


Figure 2.4 – cycle hamiltonien dans  $Q_n$

A noter que dans l'hypercube de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ), toute paire d'arêtes adjacentes de  $Q_n$  appartient à exactement un cycle de longueur 4. Il est à noter aussi, que dans un cycle de l'hypercube, le nombre d'arêtes dans une direction donnée  $i$  est toujours pair. Nous utiliserons par la suite souvent la conséquence que si un cycle passe par une arête  $xy$ , il existe une autre arête de ce cycle de même direction que  $xy$ .

A noter aussi que toute arête  $xy$  de  $Q_n$  appartient à exactement  $n - 1$  cycles de longueur 4 dans  $Q_n$ .

## 2.2 Décomposition en couches de l'hypercube

Soit  $\{x, N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x)\}$  une décomposition en couches à partir d'un sommet  $x$  quelconque de  $Q_n$ . On a les propriétés suivantes :

**Propriété 2.1** *i) Pour tout sommet  $y$  de  $N_2(x)$ , il existe exactement deux arêtes reliant  $y$  à des sommets de  $N_1(x)$ ,*

*ii)  $|N_i(x)| = C_n^i$ .*

Il est facile à voir que le nombre de sommets qui sont à distance impaire d'un sommet quelconque  $x$  de  $Q_n$  est égale à  $2^{n-1}$ , et que le nombre de sommets qui sont à distance paire de  $x$  est égale à  $2^{n-1} - 1$ .

La figure 2.5 montre une décomposition en couches de  $Q_4$  à partir du sommet 0000.

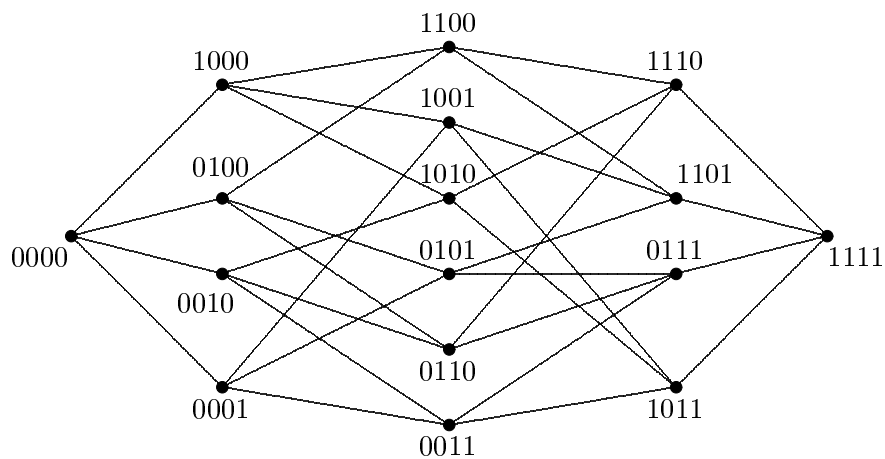


Figure 2.5 – décomposition en couches de  $Q_4$

On peut facilement vérifier les conditions *i)* et *ii)* de la propriété 2.1 sur cette figure. On peut aussi remarquer qu'il n'y a pas d'arêtes entre deux sommets quelconques dans une même couche (l'hypercube est un graphe biparti).

L'hypercube possède aussi la propriété suivante :

**Propriété 2.2** *Pour tout sommet  $y$  de  $N_i(x)$  et tout sommet  $z$  de  $N_{i-1}(x)$  ( $i \geq 2$ ), le nombre d'arêtes entre  $y$  et  $N_{i-1}(x)$  est égale au nombre d'arêtes entre  $z$  et  $N_{i-2}(x)$  plus 1. Plus précisément, le nombre d'arêtes entre  $y$  et  $N_{i-1}(x)$  est égale à  $i$ .*

## 2.3 Quelques caractérisations de l'hypercube

Il existe plus d'une trentaine de caractérisation de l'hypercube à ce jour. Foldes [23] à donné une des premières caractérisations de l'hypercube :

**Théorème 2.1** *Un graphe connexe  $G=(V,E)$  est un hypercube si et seulement si  $G$  satisfait aux conditions suivantes :*

(1)  *$G$  est biparti,*

(2) *Pour toute paire  $x, y$  de sommets de  $G$ , le nombre de chaînes géodésiques entre  $x$  et  $y$  est  $d(x,y)!$ .*

Laborde - Rao Hebbare [46] et Mulder [56] ont indépendamment démontré le théorème 2.2 suivant qui repose sur le concept de  $(0, 2)$ -graphe.

**Définition 2.2** *Un graphe connexe  $G$  est un  $(0, 2)$ -graphe si et seulement si toute paire d'arêtes adjacentes de  $G$  appartient à exactement un cycle de longueur 4.*

Cette même définition peut se formuler de manière équivalente en termes de sommets et de chaînes.

**Définition 2.3** *Un graphe connexe  $G$  est un  $(0, 2)$ -graphe si et seulement si pour toute paire  $(x, y)$  de sommets distincts de  $G$ , il existe soit exactement 2 chaînes de longueur 2 reliant  $x$  à  $y$ , soit aucune chaîne de longueur 2 reliant  $x$  à  $y$ .*

Les propositions suivantes sur les  $(0, 2)$ -graphes sont données par Mulder [56]

**Proposition 2.2** *Si  $G$  est un  $(0, 2)$ -graphe alors  $G$  est régulier.*

**Proposition 2.3** *Soit  $G$  un  $(0, 2)$ -graphe de degré  $n$ . Alors*

$$|V(G)| \leq 2^n$$

Pour un degré donné  $n$ , existe-t-il des  $(0, 2)$ -graphes pour lesquels leur ordre atteint la borne donnée dans la proposition 2.3 ?

Il se trouve que pour  $n$  donné, l'hypercube est le seul  $(0, 2)$ -graphe  $n$ -régulier d'ordre  $2^n$ .

**Théorème 2.2** *Soit  $G=(V, E)$  un  $(0, 2)$ -graphe. Alors*

- (1)  $G$  est régulier (notons  $n$  son degré),
- (2)  $|V(G)| \leq 2^n$ ,
- (3)  $|V(G)| = 2^n$  si et seulement si  $G$  est un hypercube de dimension  $n$ .

Une variante de cette caractérisation de l'hypercube en tant que  $(0, 2)$ -graphe à été donné par Mollard [50]

**Proposition 2.4** *Soit un  $(0, 2)$ -graphe  $n$ -régulier, alors*

- (1)  $D(G) \leq n$ ,

(2)  $D(G) = n$  si et seulement si  $G$  est le graphe de l'hypercube  $Q_n$ .

Le théorème suivant donne une autre caractérisation de l'hypercube en tant que  $(0, 2)$ -graphe [10]

**Théorème 2.3** *Soit  $G$  un  $(0, 2)$ -graphe tel qu'il existe une décomposition en couches où tout cycle de longueur 4 rencontre 3 couches, alors  $G$  est un hypercube.*

Une autre caractérisation de l'hypercube a été donnée par Van den Cruyce [17], elle utilise la notion de graphe convexe.

**Définition 2.4** *Soit un graphe  $G=(V,E)$  et soit  $S \subseteq V(G)$  un ensemble de sommets. Le sous-graphe engendré par  $S$  est dit convexe si pour toute paire  $(x,y)$  de sommets distincts de  $S$ , tous les sommets qui appartiennent à une chaîne géodésique entre  $x$  et  $y$ , sont dans  $S$ .*

La caractérisation suivante de l'hypercube s'ensuit :

**Théorème 2.4** *Un graphe  $G$  est un hypercube de dimension  $n$  si et seulement si l'ensemble des sous graphes convexes de  $G$  est  $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ .*

### Caractérisation de l'hypercube par les intervalles

La caractérisation suivante de l'hypercube en terme d'intervalles est due à Mulder [7].

**Théorème 2.5** *Soit  $G$  un graphe biparti connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i)  $G$  est un hypercube,

- (ii) Tout intervalle dans  $G$  engendre un hypercube,
- (iii) Tout intervalle dans  $G$  engendre un  $(0,2)$ -graphe,
- (iv) Tout intervalle  $I(u,v)$  dans  $G$  contient exactement  $2^{d(u,v)}$  sommets,
- (iv) Tout intervalle  $I(u,v)$  dans  $G$  engendre un graphe avec exactement  $d(u,v) \cdot 2^{d(u,v)-1}$  arêtes.

La caractéristion suivante en terme de graphes médians est donnée par Mulder [57]

**Théorème 2.6** *Un graphe connexe  $G = (V, E)$  est un hypercube si et seulement si  $G$  est un graphe médian régulier.*

D'autres caractérisations de l'hypercube en terme d'intervalles ont été données, en particulier des caractérisations en termes de graphes distance monotones [14], de graphes intervalle-réguliers et de graphe sphériques [10] peuvent être trouvées.

## 2.4 Projection et anti-projection

Une projection (resp. anti-projection) d'un sommet  $u$  d'un graphe  $G$  sur un ensemble de sommets  $S$  de  $G$  est un sommet  $v$  de  $S$  à distance minimum (resp. maximum) de  $u$ . Pour tout ensemble de sommets  $S$  de  $G$  et pour tout sommet  $u$ , on désigne par  $P(u, S)$  (resp.  $AP(u, S)$ ) l'ensemble des projections (resp. anti-projection) de  $u$  sur  $S$ .

On considère les propriétés suivantes :

$$P1 : \text{Pour tout } u, v \text{ et } w, |P(u, I(v, w))| = 1,$$

$$P2 : \text{Pour tout } u, v \text{ et } w, |AP(u, I(v, w))| = 1.$$

Un graphe vérifiant l'une de ces deux propriétés est un graphe biparti.

Mollard [52] a donné la caractérisation suivante de l'hypercube en considérant les anti-projections sur les intervalles.

**Proposition 2.5** *Un graphe  $G$  est un hypercube si et seulement si  $G$  vérifie la propriété P2.*

Berrachedi [10] a donné un résultat analogue en considérant les projections sur les intervalles.

**Proposition 2.6** *Un  $(0,2)$ -graphe qui vérifie la propriété P1 est un hypercube.*





# Chapitre 3

## Hamiltonicité de l'hypercube

S'il a été prouvé que l'hypercube de dimension paire est décomposable en cycles hamiltoniens, le but de ce chapitre est de montrer un résultat de même nature pour les hypercubes de dimensions impaires (théorème 3.9). La définition de la décomposition de graphes est donnée dans la première section ainsi que les premiers résultats. La deuxième partie de ce chapitre sera consacrée à la décomposition de produit cartésien des graphes ainsi qu'une large vue sur les résultats antérieurs. La troisième section sera elle consacrée à la décomposition hamiltonienne des hypercubes. Deux problèmes ouverts seront exposés à la fin de ce chapitre.

### 3.1 Décomposition Hamiltonienne de graphes

**Définition 3.1** *Un graphe  $G$  est décomposable en cycles hamiltoniens (ou cycles hamiltoniens et un couplage parfait) si on peut partitionner l'ensemble de ses arêtes en cycles hamiltoniens (ou cycles hamiltoniens et un couplage parfait).*

Il est très connu que  $K_n$  est décomposable en cycles hamiltoniens si  $n$  est impair et en cycles hamiltoniens plus un couplage parfait si  $n$  est pair. Le théorème suivant cité dans Berge [8] est un théorème de Walecki(1872) et Dirac(1972).

**Théorème 3.1** *Le graphe  $K_{2n+1}$  peut être décomposé en  $n$  cycles hamiltoniens, et  $K_{2n}$  peut être décomposé en  $n$  cycles hamiltoniens plus un couplage parfait.*

La figure 3.1 montre une décomposition de  $K_5$  en 2 cycles hamiltoniens.

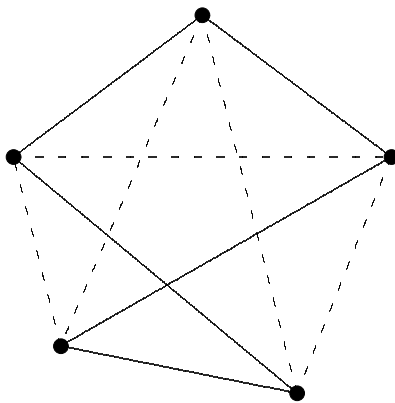


Figure 3.1 – décomposition hamiltonienne de  $K_5$

## 3.2 Décomposition du produit cartésien de graphes

On rappelle que le problème d'hamiltonicité dans les produits de graphes a été beaucoup étudié. En particulier, la décomposition du produit cartésien de graphes complets en sous-graphes hamiltoniens a été traité par Aubert et Schneider [5] qui ont donné le théorème 3.2 suivant

**Théorème 3.2**  *$K_m \square K_n$  est décomposable en  $\frac{1}{2}(m+n-2)$  cycles hamiltoniens lorsque  $m+n$  est pair ou en  $\frac{1}{2}(m+n-3)$  cycles hamiltoniens et un couplage parfait lorsque  $m+n$  est impair.*

La preuve de ce théorème repose sur le lemme suivant

**Lemme 3.1** *Considérons  $G = \bigcup_{i=1}^k G_i$  et  $G' = \bigcup_{j=1}^{k+r} G'_j$*

où les  $G_i$  (resp.  $G'_j$ ) sont des ensembles mutuellement disjoints d'arêtes ; alors

$$G \square G' = \left( \bigcup_{i=1}^k (G_i \square G'_i) \right) \cup \left( \bigcup_{a \in E(G)} (a \square \bigcup_{j=k+1}^{k+r} G'_j) \right)$$

*Remarque :* Le cas particulier du théorème 3.2 où  $m = n$  a été montré indépendamment par Myers [58].

Aubert et Schneider [6] ont également montré le théorème 3.3, sur la décomposition du produit cartésien d'un cycle et de l'union de deux cycles hamiltoniens en cycles hamiltoniens.

**Théorème 3.3** *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $m$  décomposable en deux cycles hamiltoniens et  $C$  un cycle d'ordre  $n$ , alors  $G \square C$  est décomposable en trois cycles hamiltoniens.*

Le théorème 3.4 sur la décomposition hamiltonienne du produit cartésien de deux cycles a été montré par Kotzig [45]

**Théorème 3.4**  *$C_r \square C_n$  peut être décomposé en deux cycles hamiltoniens.*

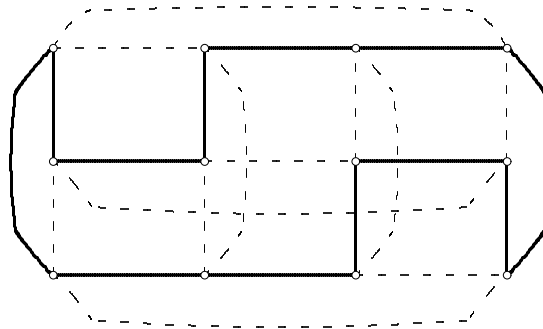


Figure 3.2 – décomposition hamiltonienne de  $C_3 \square C_4$

La figure 3.2 montre une décomposition en deux cycles (un en gras et l'autre en pointillé) du produit cartésien  $C_3 \square C_4$ .

La décomposition hamiltonienne du produit cartésien de deux graphes quelconques à également été exploré.

La conjecture suivante est dûe à Bermond [9]

**Conjecture 3.1** *Si  $G_1$  est décomposable en  $p_1$  cycles hamiltoniens et si  $G_2$  est décomposable en  $p_2$  cycles hamiltoniens, alors  $G_1 \square G_2$  est décomposable en  $p_1 + p_2$  cycles hamiltoniens.*

Aubert et Schneider [6] ont réussi à montré cette conjecture dans un cas particulier

**Théorème 3.5** *Si  $G_1$  est décomposable en  $p_1$  cycles hamiltoniens et si  $G_2$  est décomposable en  $p_2$  cycles hamiltoniens,  $p_1$  et  $p_2$  tel que  $p_2 \leq p_1 \leq 2p_2$ , alors  $G_1 \square G_2$  est décomposable en  $p_1 + p_2$  cycles hamiltoniens.*

Un corollaire immédiat de ce théorème est le suivant

**Corollaire 3.1** *Si deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont décomposables en  $p$  cycles hamiltoniens, alors le produit cartésien  $G_1 \square G_2$  est décomposable en  $2p$  cycles hamiltoniens.*

Après cette exploration des résultats bien connus, nous nous intéressons dans la section suivante à la décomposition hamiltonienne de graphes de type hypercube.

### 3.3 Hamiltonicité de l'hypercube

L'hypercube est un graphe hamiltonien (assertion 2.1 page 33). Un certain nombre de résultats sont connus sur le nombre de cycles hamiltoniens différents de l'hypercube.

### Petit historique

L'hypercube étant un graphe régulier de degré  $n$ , il existe au plus  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^1$  cycles hamiltoniens disjoints (c'est à dire sans arêtes communes).

Est-il vrai que si  $n$  est pair, il existe exactement  $\frac{n}{2}$  cycles hamiltoniens disjoints (on aurait donc une partition de l'ensemble des arêtes de l'hypercube en cycles hamiltoniens).

Koester a remarqué que  $Q_6$  était décomposable en 3 cycles hamiltoniens.

Ringel [62] a conjecturé l'existence d'une décomposition de l'hypercube de dimension pair en cycles hamiltoniens et l'a prouvé lorsque  $n$  est une puissance de 2.

Mollard [50] a indépendamment retrouvé ces deux derniers résultats comme corollaire des 2 théorèmes suivants

**Théorème 3.6** *Soit  $G$  un graphe hamiltonien, alors le produit cartésien  $G \square G$  possède au moins deux cycles hamiltoniens disjoints.*

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 3.5

**Théorème 3.7** *Soit  $G$  un graphe hamiltonien qui possède  $p$  cycles hamiltoniens disjoints, alors le produit cartésien  $G \square G$  possède au moins  $2p$  cycles hamiltoniens disjoints.*

Comme conséquence immédiate du théorème 3.7, nous pouvons donner le corollaire suivant

**Corollaire 3.2** *Si  $n = 2^p$ , alors l'hypercube de dimension  $n$  est un graphe possédant  $2^{p-1}$  cycles hamiltoniens disjoints.*

La résolution de la conjecture de Ringel a été obtenu par Aubert et Schneider comme conséquence immédiate du théorème 3.5 (résultat non publié communiqué par Bermond).

---

<sup>1</sup> $[x]$  désigne la partie entière de  $x$

**Théorème 3.8** *L'hypercube de dimension  $2n$  est décomposable en  $n$  cycles Hamiltoniens.*

La preuve de la décomposition hamiltonienne de  $Q_n$  dans le cas  $n$  impair se trouve dans les papiers suivants [2] :

**Théorème 3.9** *L'hypercube de dimension  $2n+1$  est décomposable en  $n$  cycles Hamiltoniens plus un couplage parfait.*

A titre anecdotique, remarquons que le théorème 3.9 reste valable pour  $n = 0$  !

### 3.4 Problèmes ouverts

Pour terminer ce chapitre, nous poserons deux questions dont l'une concerne la décomposition de graphes quelconques et l'autre sur une extension possible du théorème 3.8.

*Question 1* : Si  $G$  est un graphe hamiltonien, est-il vrai que le produit cartésien  $\underbrace{G \square G \square \dots \square G}_{n \text{ fois}}$  possède  $n$  cycles hamiltoniens disjoints ?

La réponse à cette question est oui dans le cas particulier où  $n$  est une puissance de 2, par application répétée du théorème 3.7.

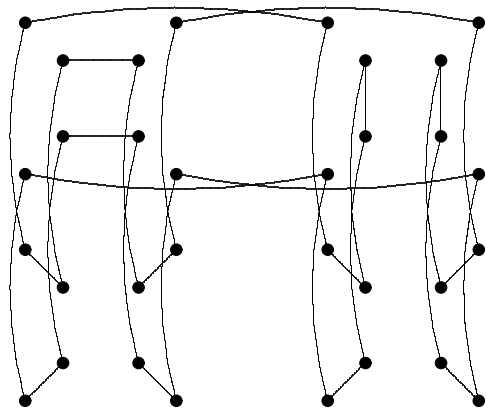
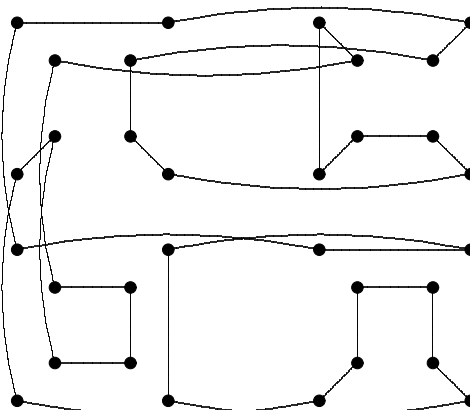
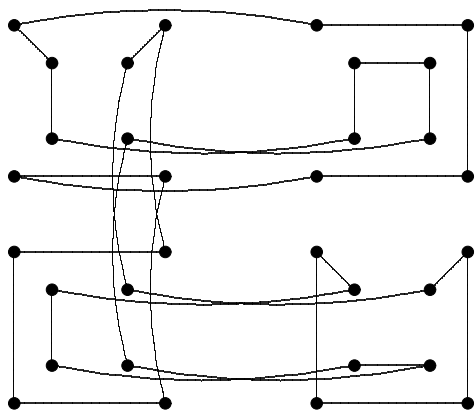
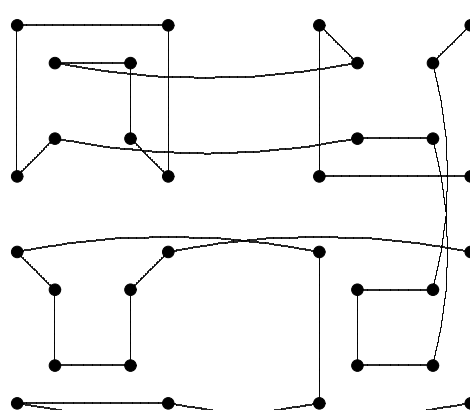
La deuxième question m'a été posée par Luis Goddyn lors d'une conférence sur la théorie des graphes qui s'est déroulée à Vancouver (Juillet 2000).

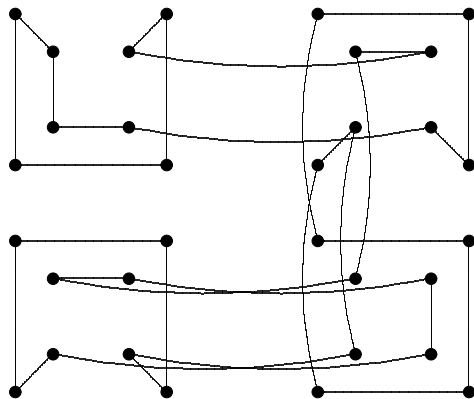
*Question 2* : Peut-on trouver  $n$  cycles hamiltoniens dans l'hypercube de dimension  $n$  tel que chaque arête de l'hypercube appartient à exactement 2 de ces cycles ?

Comme  $Q_{2n}$  est décomposable en cycles hamiltoniens (théorème 3.8), la réponse à cette question est positive dans le cas où  $n$  est pair.

Pour  $n = 3$ , il est facile à voir qu'il n'existe pas trois cycles hamiltoniens dans  $Q_3$  qui vérifient cette propriété.

Alspach a exhibé les cinq cycles hamiltoniens suivants dans  $Q_5$  qui vérifient cette propriété.

 $C_1$  $C_2$  $C_3$  $C_4$

 $C_5$ 

Le cas  $n \geq 7$  reste toujours ouvert.



# Chapitre 4

## Chaînes et cycles dans $Q_n$

Un type de problèmes sur l'hypercube consiste en la recherche de chaînes et de cycles ayant certaines propriétés, et parmi ceux-ci les chaînes et les cycles hamiltoniens.

Nous rappellons quelques résultats connus sur les chaînes hamiltoniennes dans la première section de ce chapitre. Dans la deuxième section, nous donnons trois résultats préliminaires sur les cycles hamiltoniens.

La troisième section est consacrée au résultat principal de chapitre, à savoir que, sous certaines conditions, l'hypercube de dimension  $n$  peut être partitionné en des cycles sommet-disjoints (théorème 4.2). Ce théorème sert à montrer, dans le chapitre suivant, que trois familles de graphes (les quasi-étoiles, les doubles quasi-étoiles et les  $MD$ -graphes) sont des graphes plongeables dans l'hypercube.

### 4.1 Chaînes hamiltoniennes dans $Q_n$

Le but de cette section est de donner quelques propriétés usuelles sur les chaînes hamiltoniennes dans  $Q_n$ . Certains de ces résultats sont intéressants en tant que tel, mais ils sont aussi utilisés dans le chapitre 5 pour étudier le problème de plongement de quelques familles de graphes dans l'hypercube.

**Lemme 4.1** *Soient  $x$  et  $y$  deux sommets à distance impaire dans l'hypercube de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ). Il existe une chaîne hamiltonienne  $P$  dans  $Q_n$ , d'extrémités  $x$  et  $y$ .*

*Preuve:* La preuve se fait par induction. Le résultat est évident pour  $n = 2$ . Supposons que le résultat est vrai pour  $n - 1$ , et considérons  $Q_n$ . Il est toujours possible de trouver une décomposition canonique  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  de  $Q_n$ , tels que  $x \in Q'_{n-1}$  et  $y \in Q''_{n-1}$ .

Soit  $u$  un sommet voisin de  $x$  dans  $Q'_{n-1}$ , tel que  $u'$  soit différent de  $y$ .

Par hypothèse d'induction, il existe une chaîne hamiltonienne  $P'$  dans  $Q'_{n-1}$  d'extrémités  $x$  et  $u$ , et une chaîne hamiltonienne  $P''$  dans  $Q''_{n-1}$  d'extrémités  $y$  et  $u'$ .

La chaîne  $P = P' \cup P'' \cup uu'$  est la chaîne voulue dans  $Q_n$ .  $\square$

**Lemme 4.2** *Soient  $Q_n$  pour  $n \geq 1$ ,  $u$  un sommet quelconque de  $Q_n$ , et soit  $W \in V(Q_n)$  un ensemble de sommets de  $Q_n$  tel que  $|W| \leq n - 1$ . Il existe une chaîne hamiltonienne  $P$  dans  $Q_n$  d'extrémités  $u$  et  $v$ , avec  $v \notin W$ .*

*Preuve:* Dans  $Q_n$ , il existe  $2^{n-1}$  sommets qui sont à distance impaire d'un sommet donné  $x$ . Comme  $n - 1 < 2^{n-1}$ , il existe donc un sommet  $v$  à distance impaire de  $u$ , tel que  $v$  n'appartient pas à  $W$ . Le résultat s'en déduit par application du lemme 4.1.  $\square$

La propriété 4.1 sera souvent utilisée par la suite dans ce chapitre

**Propriété 4.1** *Soient  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$  deux arêtes de même direction dans  $Q_n$ . Il existe une décomposition canonique  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  de  $Q_n$ , tels que  $u_1v_1 \in E(Q'_{n-1})$  et  $u_2v_2 \in E(Q''_{n-1})$ .*

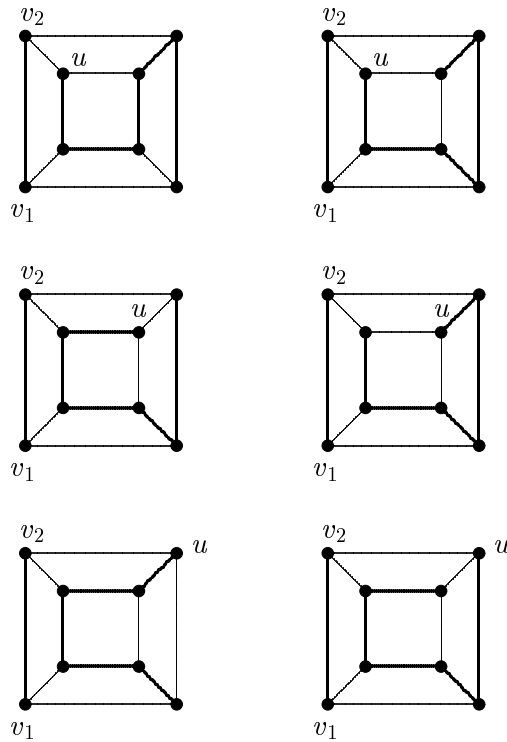
*Preuve:* Supposons, sans perte de généralité, que  $d(u_1, u_2) = d(v_1, v_2) = k$ . Les sommets  $u_1$  et  $u_2$  diffèrent donc exactement de  $k$  composantes  $i_1, \dots, i_k$ , de même pour les sommets  $v_1$  et  $v_2$ . Une décomposition canonique suivant l'une des directions  $i_j$ ,  $1 \leq j \leq k$  possède la propriété voulue.  $\square$

**Lemme 4.3** Pour  $n \geq 2$ , soient :

(1)  $u, v_1, v_2$ , 3 sommets distincts de  $Q_n$  tel que  $v_1v_2 \in E(Q_n)$ ,

(1)  $W \subset V(Q_n) - v_1 - v_2$  un ensemble de sommets de  $Q_n$  tel que  $|W| \leq n - 2$ .  
Il existe une chaîne hamiltonienne  $P$  dans  $Q_n - v_1 - v_2$  d'extrémités  $u$  et  $v$ , tel que  $v \notin W$ .

*Preuve:* La preuve de ce lemme se fait par induction sur  $n$ . Le cas  $n = 2$  est évident. Pour  $n = 3$ , les 6 cas possibles sont montrés dans la figure qui suit.



Supposons, par hypothèse d'induction, que le lemme est vrai pour  $n - 1$  ( $n \geq 4$ ), et considérons  $Q_n$ .

Par la propriété 4.1, il existe donc une décomposition canonique  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  de  $Q_n$  tel que

$$|W \cap V(Q''_{n-1})| \leq n - 3 \quad \text{et} \quad |W \cap V(Q'_{n-1})| \leq n - 3.$$

Supposons, sans perte de généralité, que  $v_1, v_2 \in V(Q''_{n-1})$ .

Deux cas sont à distinguer

-  $u \in V(Q'_{n-1})$ .

A noter que  $n - 1 \geq 3$ . D'après le lemme 4.2, il existe une chaîne hamiltonienne  $P'$  dans  $Q'_{n-1}$  d'extrémités  $u$  et  $v$ , tel que  $v$  soit différent de  $v'_1$  et de  $v'_2$ . Par hypothèse d'induction, il existe une chaîne hamiltonienne  $P''$  dans  $Q''_{n-1} - v_1 - v_2$  d'extrémités  $v'$  et  $w$ , tel que  $w \notin W \cap V(Q''_{n-1})$ .

La chaîne  $P' \cup vv' \cup P''$  est la chaîne voulue dans  $Q_n$ .

-  $u \in V(Q''_{n-1})$ .

Par hypothèse d'induction, il existe une chaîne hamiltonienne  $P''$  dans  $Q''_{n-1} - v_1 - v_2$  d'extrémités  $u$  et  $v$ . Par le lemme 4.2, il existe une chaîne hamiltonienne  $P'$  dans  $Q'_{n-1}$  d'extrémités  $v'$  et  $w$ , tel que  $w \notin W \cap V(Q'_{n-1})$ . La chaîne voulue dans  $Q_n$  est obtenue en combinant ces deux chaînes.

Ce qui complète la preuve. □

Dans le but de montrer qu'une famille de graphes, les quasi-étoiles (voir chapitre 5), est plongeable dans l'hypercube, Nebeský [61] à montré le théorème suivant sur la partition de l'hypercube en des chaînes sommet-disjointes de longueurs paires. Théorème à rapprocher des résultats que nous venons de prouver.

**Théorème 4.1** *Soient  $n$  et  $k$  deux entiers tels que :*

$$1 \leq k \leq n \quad \text{si} \quad 1 \leq n \leq 3 \quad \text{et}$$

$$1 \leq k < n \quad \text{si} \quad n \geq 4.$$

*et soient :*

(1)  $u_1, u_2, \dots, u_k$ ,  $k$  sommets distincts de  $Q_n$ ,

(2)  $a_1, a_2, \dots, a_k$  des nombres pairs tels que  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 2^n$ ,

(3)  $W_1, W_2, \dots, W_k$  des ensembles de sommets de  $Q_n$ , avec  $|W_1| \leq n-k, \dots, |W_k| \leq n-k$ .

Il existe  $k$  chaînes sommet-disjointes  $P_1, P_2, \dots, P_k$  de  $Q_n$ , d'ordres respectifs  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , tel que  $P_i$  soit d'extrémités  $u_i$  et  $v_i$  avec  $v_i \notin W_i$ .

## 4.2 Cycles disjoints dans $Q_n$

Le but de cette section est de donner quelques lemmes préliminaires sur les cycles dans l'hypercube qui possèdent certaines caractéristiques. Ces lemmes seront ensuite utilisés pour démontrer le résultat principal de ce chapitre (théorème 4.2).

**Assertion 4.1** Soient  $xy$  et  $uv$  deux arêtes parallèles de  $Q_n$  ( $n \geq 2$ ) tel que  $d(x, u) = d(y, v) = 1$ . Il existe un cycle hamiltonien  $C$  dans  $Q_n$  qui contient  $xy$  et  $uv$  comme seule arête dans cette direction.

*Preuve:* La preuve de cette assertion se fait en utilisant la décomposition canonique de  $Q_n$  suivant la direction de l'arête  $uv$ . Considérons une telle décomposition. Par l'assertion 2.1 page 33, il existe un cycle hamiltonien  $C_1$  dans  $Q'_{n-1}$  qui contient l'arête  $ux$ , et un cycle hamiltonien  $C_2$  dans  $Q''_{n-1}$  qui contient l'arête  $vy$ . Le cycle  $C = C_1 \cup C_2 \cup \{uv \cup xy\} \setminus \{ux \cup vy\}$  est le cycle voulu.  $\square$

**Lemme 4.4** Pour ( $n \geq 2$ ) soient :

(1)  $uv$  une arête quelconque de  $Q_n$ ,

(2)  $W \subset E(Q_n)$  un ensemble d'arêtes parallèles de  $Q_n$ , distinctes de  $uv$ , de même direction que  $uv$  tel que  $|W| \leq n-2$ .

Il existe un cycle hamiltonien  $C$  dans  $Q_n$  qui contient  $uv$ , tel que  $E(C) \cap W = \emptyset$ .

*Preuve:*  $|W| \leq n - 2$ , il existe donc une arête  $xy$  dans  $Q_n \setminus W$  qui forme un cycle  $C_4$  avec  $uv$  (on choisit une des arêtes qui forment les  $(n - 1)$  cycles de longueur 4 avec  $xy$ ). Par l'assertion 4.1, un cycle  $C$  avec la propriété requise existe.  $\square$

**Lemme 4.5** Pour  $n \geq 4$  soient :

(1)  $u_1v_1, u_2v_2$  deux arêtes parallèles de  $Q_n$ ,

(2)  $W \subset E(Q_n)$  un ensemble d'arêtes parallèles de  $Q_n$ , distincts de  $u_1v_1$  et de  $u_2v_2$ , de même direction que  $u_1v_1$  tel que  $|W| \leq n - 3$ .

Il existe un cycle hamiltonien  $C$  dans  $Q_n - u_2 - v_2$  qui contient  $u_1v_1$ , tel que  $E(C) \cap W = \emptyset$ .

*Preuve:* La preuve de ce lemme se fait par induction sur  $n$ .

Pour  $n = 4$ , la construction des cycles est donnée dans les figures 4.1, 4.2 et 4.3 qui suivent. Trois cas sont à distinguer selon la distance entre les deux arêtes  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$ . Il est à noter que  $|W| \leq 1$  ( $W$  est vide ou réduit à une seule arête).

cas 1 :  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$  sont à distance 1 dans  $Q_4$ .

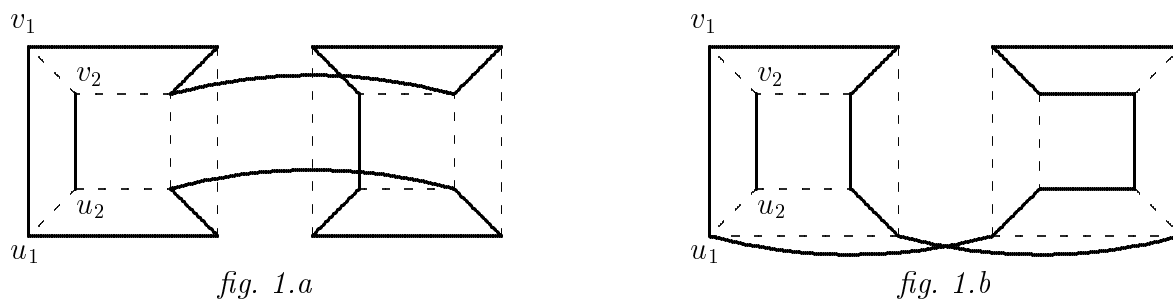


Figure 4.1 - cas 1 -  $d(u_1v_1, u_2v_2) = 1$

Suivant l'arête dans  $W$ , on utilisera les cycles des figures 1.a ou 1.b, les arêtes parallèles à  $u_1v_1$  utilisées dans les 2 cas sont disjointes.

cas 2 :  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$  sont à distance 3 dans  $Q_4$ .

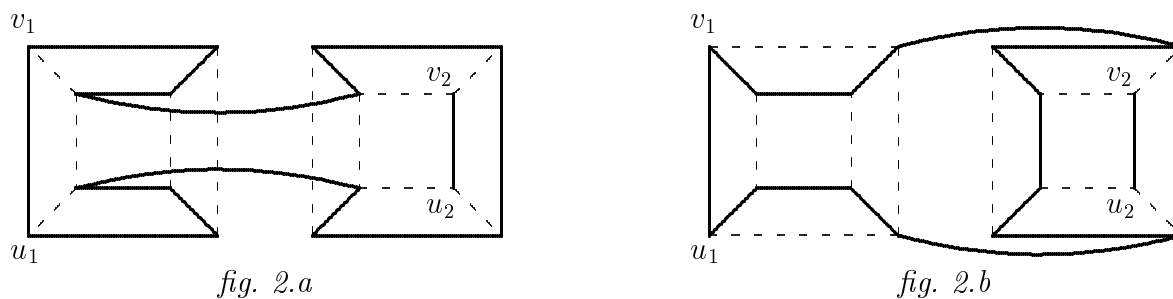


Figure 4.2 – cas 2 -  $d(u_1v_1, u_2v_2) = 3$

Suivant l'arête dans  $W$ , on utilisera les cycles des figures 1.a ou 1.b, les arêtes parallèles à  $u_1v_1$  utilisées dans les 2 cas sont disjointes.

cas 3 :  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$  sont à distance 2 dans  $Q_4$ .

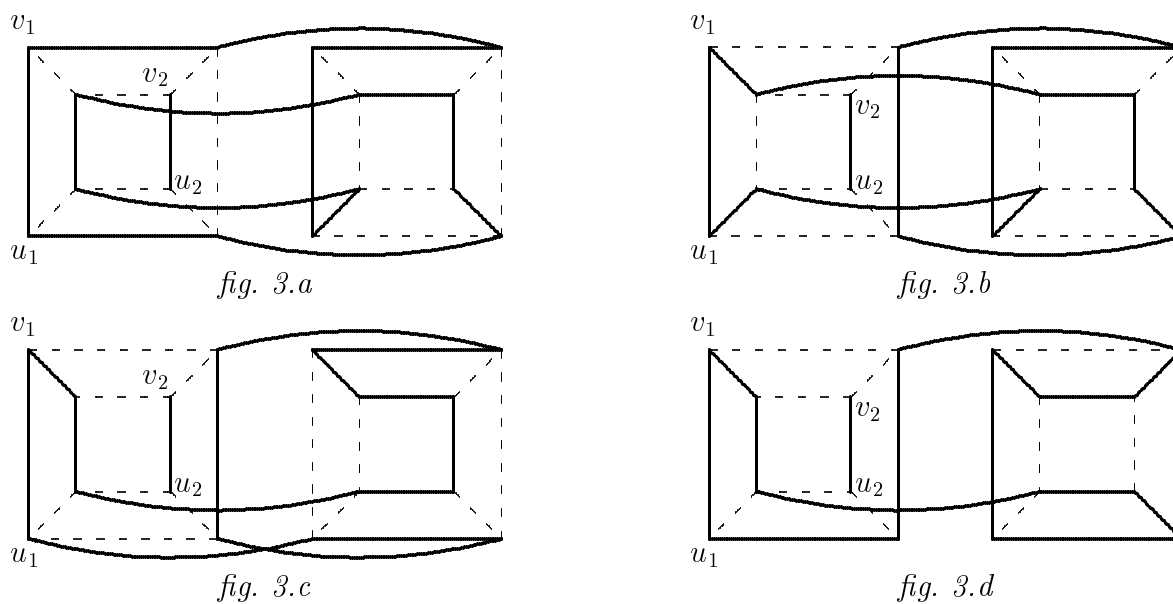


Figure 4.3 – cas 3 -  $d(u_1v_1, u_2v_2) = 2$

Le troisième cas où les 2 arêtes sont à distance deux nécessite 4 cycles, quelque soit l'arête considérée dans  $W$ , au moins un des cycles construit vérifie la propriété voulue.

Supposons maintenant, par hypothèse d'induction, que le lemme est vrai pour  $Q_{n-1}$  ( $n \geq 5$ ), et considérons  $Q_n$ .

D'après la propriété 4.1, il est toujours possible de trouver une décomposition canonique  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  de  $Q_n$ , tels que

$$\begin{cases} |W \cap E(Q'_{n-1})| \leq n - 4 \\ |W \cap E(Q''_{n-1})| \leq n - 4 \\ u_2 v_2 \in E(Q''_{n-1}) \end{cases}$$

Soient  $u'_2 v'_2 = u_2 v_2|_{Q'_{n-1}}$ ,  $W_1 = W \cap E(Q'_{n-1})$  et  $W_2 = W \cap E(Q''_{n-1})$ .

Deux cas sont à distinguer suivant que l'arête  $u_1 v_1$  appartient à  $Q'_{n-1}$  ou à  $Q''_{n-1}$ .

cas 1 :  $u_1 v_1 \in E(Q'_{n-1})$ .

$$\text{Soit } W'_1 = \begin{cases} W_1 \cup \{u'_2 v'_2\} & \text{si } u_1 v_1 \neq u'_2 v'_2 \\ W_1 & \text{si } u_1 v_1 = u'_2 v'_2 \end{cases}$$

Il est clair que  $|W'_1| \leq n - 3$ . Par le lemme 4.4, il existe un cycle hamiltonien  $C'_1$  dans  $Q'_{n-1}$  qui contient  $u_1 v_1$ , tel que  $E(C'_1) \cap W'_1 = \emptyset$ .

Soit  $xy$  une arête de  $C'_1$  de même direction que  $u_1 v_1$  et soit  $x'y' = xy|_{Q''_{n-1}}$  ( $x'y' \neq u_2 v_2$ ). Par hypothèse d'induction, il existe un cycle hamiltonien  $C''_1$  dans  $Q''_{n-1} - u_2 - v_2$  qui contient  $x'y'$  tel que  $E(C''_1) \cap W_2 = \emptyset$  (ou  $E(C''_1) \cap W_2 = \{x'y'\}$  si  $x'y' \in W_2$ ).

Le cycle  $C_1 = C'_1 \cup C''_1 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$  est le cycle voulu.

cas 2 :  $u_1 v_1 \in E(Q''_{n-1})$ .

Par hypothèse d'induction, il existe un cycle hamiltonien  $C''_1$  dans  $Q''_{n-1} - u_2 - v_2$  qui contient  $u_1 v_1$ , tel que  $E(C''_1) \cap W_2 = \emptyset$ .

Soit  $xy$  une arête de  $C''_1$  de même direction que  $u_1 v_1$ , et soit  $x'y' = xy|_{Q'_{n-1}}$ . Par le lemme 4.4, il existe un cycle hamiltonien  $C'_1$  dans  $Q'_{n-1}$  qui contient  $x'y'$ , tel que  $E(C'_1) \cap W_1 = \emptyset$  (ou  $E(C'_1) \cap W_1 = \{x'y'\}$  si  $x'y' \in W_1$ ).



Le cycle  $C_1 = C'_1 \cup C''_1 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$  est le cycle voulu.

Ce qui complète la preuve.  $\square$

A noter que ce lemme n'est pas vérifié pour  $n = 3$ , il suffit pour cela de considérer les deux arêtes  $xy$  et  $uv$  de  $Q_3$  qui soient à distance 2 comme le montre la figure 4.4.

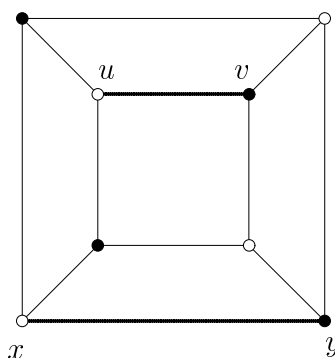


Figure 4.4 – contre exemple pour  $n = 3$

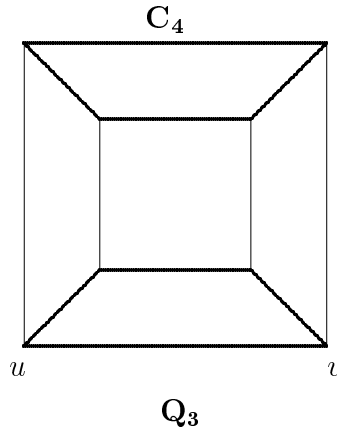
Il est facile de voir qu'il n'existe pas de cycle hamiltonien dans  $Q_3 - x - y$  qui utilise l'arête  $uv$ .

**Lemme 4.6** *Pour  $n \geq 3$  soient :*

- (1)  $uv$  une arête de  $Q_n$ ,
- (2)  $C_4$  un cycle de longueur 4 qui contient deux arêtes de même direction que  $uv$ , et distinctes de  $uv$ ,
- (3)  $W \subset E(Q_n)$  un ensemble d'arêtes parallèles de même direction que  $uv$  ( $uv \notin W$ ), tel que  $|W| \leq n - 3$ .

*Il existe un cycle hamiltonien  $C$  dans  $Q_n \setminus C_4$  qui contient  $uv$ , tel que  $E(C) \cap W = \emptyset$ .*

*Preuve:* Vérification immédiate pour  $n = 3$ , le seul cas possible est montré sur la figure 4.2 suivante



On suppose maintenant, par hypothèse d'induction, que le lemme est vérifié pour  $Q_{n-1}$  ( $n \geq 4$ ), et on considère  $Q_n$ . Deux cas sont à distinguer :

cas 1 : Il existe une décomposition canonique  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  de  $Q_n$  tel que le cycle  $C_4$  et l'arête  $uv$  appartiennent à  $Q'_{n-1}$ .

Soient  $W' = W \cap E(Q'_{n-1})$ ,  $W'' = W \cap E(Q''_{n-1})$ , et soit  $ab$  une arête de  $W'$  (si  $W' \neq \emptyset$ ).

$$\text{On note } W'_{11} = \begin{cases} W' & \text{si } |W'| \leq n - 4 \\ W' \setminus ab & \text{si } |W'| = n - 3 \end{cases}$$

Clairement  $|W'_{11}| \leq n - 4$ . Par hypothèse d'induction, il existe un cycle hamiltonien  $C'_1$  dans  $Q'_{n-1} \setminus C_4$  qui contient  $uv$  tel que  $E(C'_1) \cap W'_{11} = \emptyset$ .

Si  $ab \in C'_1$ . Par le lemme 4.4, il existe un cycle hamiltonien  $C'_2$  dans  $Q''_{n-1}$  qui contient  $a'b'$ , tel que  $E(C'_2) \cap W'' = \emptyset$  (ou  $E(C'_2) \cap W'' = \{a'b'\}$  si  $a'b' \in W''$ ). Le cycle  $C = C'_1 \cup C'_2 \cup \{aa' \cup bb'\} \setminus \{ab \cup a'b'\}$  est le cycle voulu.

Si  $ab \notin C'_1$  (ou si  $ab$  n'existe pas), on choisit une arête  $xy$  sur le cycle  $C'_1$  de même direction que  $uv$ . Par le lemme 4.4, il existe un cycle hamiltonien  $C'_2$  dans  $Q''_{n-1}$  qui contient  $x'y'$ , tel que  $E(C'_2) \cap W'' = \emptyset$  (ou  $E(C'_2) \cap W'' = \{x'y'\}$  si  $x'y' \in W''$ ). Le cycle  $C = C'_1 \cup C'_2 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$  est le cycle voulu.

cas 2 : Une telle décomposition n'existe pas.

Dans ce cas le cycle  $C_4$  contient une arête à distance maximale de  $uv$ , on peut alors choisir une décomposition canonique  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  de  $Q_n$  tel que le cycle  $C_4$  appartient à  $Q'_{n-1}$ , l'arête  $uv$  appartient à  $Q''_{n-1}$ , et  $|W'| \leq n - 4$ .

Comme  $uv$  appartient à  $n - 1$  cycles de longueur 4 dans  $Q_n$ , il existe donc une arête  $xy$  de même direction que  $uv$  dans  $Q''_{n-1}$ , qui forme un cycle  $C'_4$  de longueur 4 avec  $uv$ , tel que  $x'y' = xy|_{Q'_{n-1}}$  n'appartient pas au cycle  $C_4$ . Par l'assertion 4.1, il existe un cycle hamiltonien  $C''_1$  dans  $Q''_{n-1}$  qui contient  $xy$  et  $uv$  comme seule arête de même direction. Par hypothèse d'induction, il existe un cycle hamiltonien  $C'_1$  dans  $Q'_{n-1} \setminus C_4$  qui contient  $x'y'$  tel que  $E(C'_1) \cap W' = \emptyset$  (ou  $E(C'_1) \cap W' = \{x'y'\}$  si  $x'y' \in W'$ ). Le cycle  $C = C'_1 \cup C''_1 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$  est le cycle voulu dans  $Q_n$ .

Ce qui complète la preuve. □

### 4.3 Théorème principal

Par analogie avec le théorème 4.1 de Nebeský page 52 qui a montré que l'hypercube peut être partitionné en des chaînes sommet-disjointes de longueurs paires, tel que les extrémités de chaque chaîne évitent un ensemble de sommets donné, nous allons montrer dans cette section que l'hypercube de dimension  $n$  peut aussi être partitionné (théorème 4.2) en des cycles sommet-disjointes tels que chaque cycle évite les arêtes d'un ensemble donné  $W$ .

Ce résultat nous montre que des cycles sommet-disjointes  $C_1, \dots, C_k$  d'ordres respectifs  $a_1, \dots, a_k$  ( $a_i$  pair), avec  $k \leq n - 2$ , peuvent être plongés dans l'hypercube de dimension  $n$  (voir définition page 78), et  $a_1 + \dots + a_k \leq 2^n$ . dans tout ce chapitre, une arête est peut être considérée comme un cycle de longueur 2.

La preuve de ce théorème nécessite le lemme préliminaire suivant

**Lemme 4.7** *Pour  $n \leq 4$  et  $k \leq n - 2$ , soient :*

- (1)  $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_kv_k$   $k$  arêtes parallèles de  $Q_n$ ,
- (2)  $a_1, a_2, \dots, a_k$  des nombres pairs tels que  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 2^n$ ,
- (3)  $W_1, W_2, \dots, W_k$  des ensembles d'arêtes de  $Q_n$ , non nécessairement disjoints, de même direction que  $u_1v_1$  ( $u_iv_i \notin W_i$ ), avec  $|W_1| \leq n - (k + 1), \dots, |W_k| \leq n - (k + 1)$ .

*Il existe  $k$  cycles sommets-disjointes  $C_1, C_2, \dots, C_k$  dans  $Q_n$ , d'ordres respectifs  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , qui passent respectivement par  $u_iv_i$ , tels que  $E(C_i) \cap W_i = \emptyset$  ( $i = 1, \dots, k$ ).*

*Preuve:* Le résultat est vrai pour  $k = 1$  par le lemme 4.4 page 53.

Reste à le vérifier pour  $n = 4$  et  $k = 2$ , cette vérification sera donnée par les 3 figures suivantes.

Soient  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$  deux arêtes parallèles de  $Q_4$ ,  $a_1$  et  $a_2$  deux entiers positifs tels

que  $a_1 + a_2 = 16$ .

On peut supposer, sans perte de généralité, que  $a_1 \geq a_2$ . Quatres cas sont à distinguer selon les valeurs de  $a_1$  et  $a_2$ .

cas 1 :  $a_1 = 14$  et  $a_2 = 2$ .

Dans ce cas, il suffit d'appliquer le lemme 4.5 page 54.

cas 2 :  $a_1 = 12$  et  $a_2 = 4$ .

Soit  $W'_2 = \{u_1v_1\} \cup W_2$ .  $|W'_2| \leq 2$ , il existe donc une arête  $xy$  qui n'appartient pas à  $W'_2$ , et qui forme un cycle  $C_2$  de longueur 4 avec  $u_2v_2$ . Le cycle  $C_1$  peut ainsi être construit en appliquant le lemme 4.6.

cas 3 :  $a_1 = 10$  et  $a_2 = 6$ .

Ce cas sera divisée en trois sous cas, selon la distance entre les deux arêtes  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$ . La construction des cycles sera donnée dans les figures 4.5, 4.6 et 4.7 qui suivent. Il est à noter que  $|W_1| \leq 1$  et que  $|W_2| \leq 1$ .

cas 3.1 :  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$  sont à distances 1 dans  $Q_4$ .

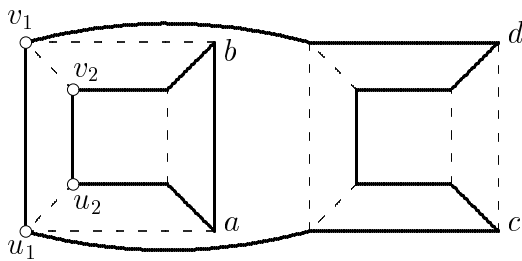


fig. 4.5-a :  $W_1 = cd, W_2 \neq ab$

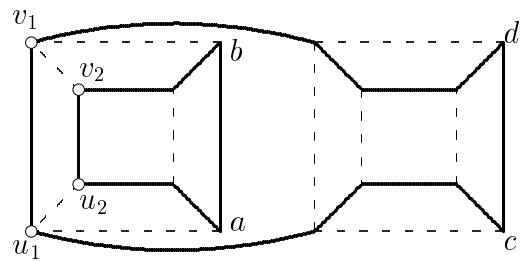


fig. 4.5-b :  $W_1 \neq cd, W_2 \neq ab$

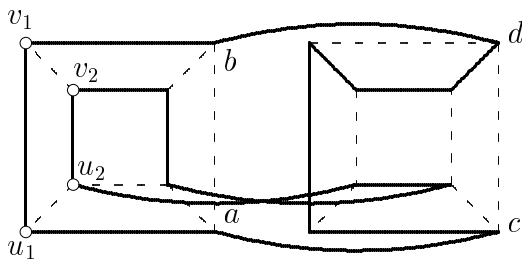


fig. 4.5-c :  $W_1 = ab, W_2 = cd$

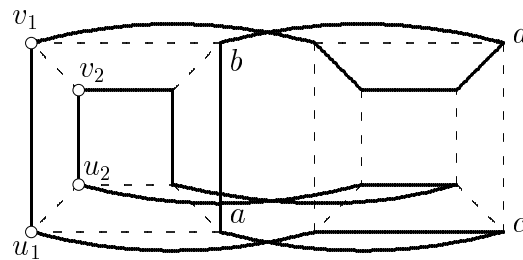
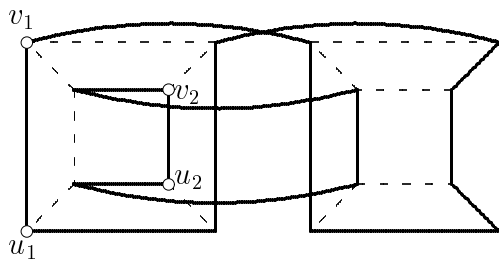


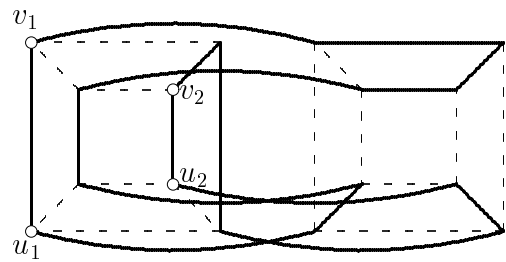
fig. 4.5-d :  $W_1 \neq ab, W_2 = cd$

Figure 4.5 – cas 3.1 -  $d(u_1v_1, u_2v_2) = 1$

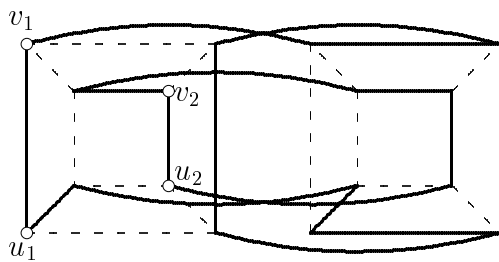
*cas 3.2* :  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$  sont à distances 2 dans  $Q_4$ .



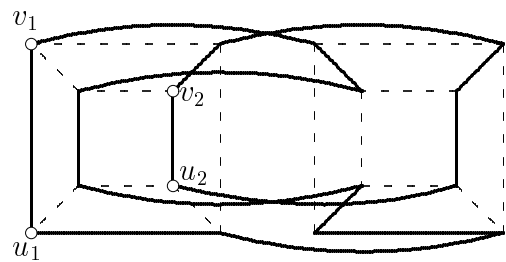
*fig. 4.6-a*



*fig. 4.6-b*



*fig. 4.6-c*



*fig. 4.6-d*

Figure 4.6 – *cas 3.2* -  $d(u_1v_1, u_2v_2) = 2$

cas 3.3 :  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$  sont à distances 3 dans  $Q_4$ .

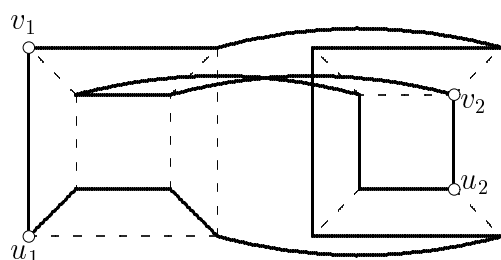


fig. 4.7-a

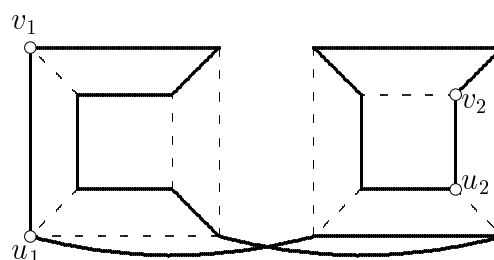


fig. 4.7-b

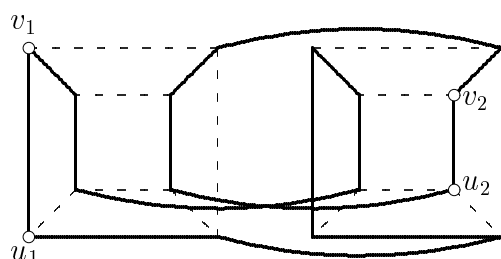


fig. 4.7-c

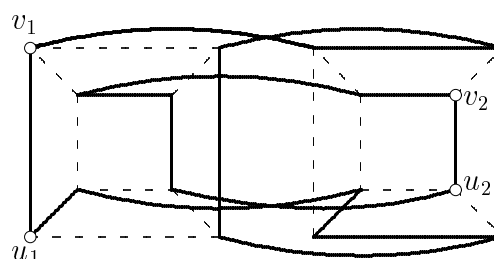


fig. 4.7-d

Figure 4.7 – cas 3.3 -  $d(u_1v_1, u_2v_2) = 3$ 

Le même raisonnement que dans le cas 3.1 peut également s'appliquer aux deux cas 3.2 et 3.3

cas 4 :  $a_1 = 8$  et  $a_2 = 8$ .

Par la propriété 4.1, il est toujours possible de trouver une décomposition canonique  $\{Q'_3, Q''_3\}$  de  $Q_4$ , tels que  $u_1v_1$  appartient à  $Q'_3$  et  $u_2v_2$  appartient à  $Q''_3$ . Des cycles qui possèdent la propriété requise peuvent être facilement construits.

Ce qui complète la preuve. □

**Théorème 4.2** Pour  $n \geq 3$  et  $k \leq n - 2$ , soient :

- (1)  $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_kv_k$   $k$  arêtes parallèles de  $Q_n$ ,
- (2)  $a_1, a_2, \dots, a_k$  des nombres pairs tels que  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 2^n$ ,
- (3)  $W_1, W_2, \dots, W_k$  des ensembles d'arêtes de  $Q_n$ , non nécessairement disjoints, de même direction que  $u_1v_1$  ( $u_iv_i \notin W_i$ ), avec  $|W_1| \leq n - (k + 1), \dots, |W_k| \leq n - (k + 1)$ .

Il existe  $k$  cycles sommets-disjoints  $C_1, C_2, \dots, C_k$  dans  $Q_n$ , d'ordres respectifs  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , qui passent respectivement par  $u_iv_i$ , tels que  $E(C_i) \cap W_i = \emptyset$  ( $i = 1, \dots, k$ ).

Nous dirons que  $Q_n$  admet la propriété  $H(n, k)$  si cet ensemble vérifie la propriété du théorème 4.2 précédent.

*Preuve:* La preuve de ce théorème se fera par induction sur  $n$ .  $H(3, k)$  et  $H(4, k)$  sont vraies par le lemme 4.7.

Supposons, par hypothèse d'induction,  $H(n - 1, k)$  pour  $Q_{n-1}$ , et considérons  $Q_n$ .

Pour toute décomposition canonique  $\{G', G''\}$  de  $Q_n$ , et pour  $i = 1, \dots, k$  on définit

$$\left\{ \begin{array}{l} I(G') = \{i ; u_iv_i \in E(G')\} \\ I(G'') = \{i ; u_iv_i \in E(G'')\} \\ k(G') = |I(G')| \\ k(G'') = |I(G'')| \\ U(G') = \{u_iv_i ; i \in I(G')\} \\ U(G'') = \{u_iv_i ; i \in I(G'')\} \\ A(G') = \sum_{i \in I(G')} a_i, \quad A(G'') = \sum_{i \in I(G'')} a_i \end{array} \right.$$



Deux cas se présentent :

cas 1 : Il existe une décomposition canonique  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  de  $Q_n$ , tel que  $A(Q'_{n-1}) = A(Q''_{n-1}) = 2^{n-1}$ .

Soit  $I' = I(Q'_{n-1}), I'' = I(Q''_{n-1}), k' = |I'|$  et  $k'' = |I''|$ .

Puisque  $k'$  et  $k''$  sont non nuls, il est donc clair que  $k' \leq k - 1 \leq n - 3$ , et que  $k'' \leq n - 3$ .

Pour  $i \in I'$ , soit

$$\begin{cases} W'_i = W_i \cap E(Q'_{n-1}) \\ u'_i v'_i = u_i v_i \cap E(Q'_{n-1}) \text{ et} \\ a'_i = a_i \end{cases}$$

Il est clair que  $|W'_i| \leq (n - 1) - (k' + 1)$ ,  $u'_i v'_i$  sont des arêtes parallèles de  $Q'_{n-1}$  et  $a'_i$  sont des entiers positifs tels que  $\sum_{i \in I'} a_i = 2^{n-1}$ .

Par hypothèse d'induction, il existe donc  $k'$  cycles sommet-disjoints  $C'_1, C'_2, \dots, C'_{k'}$  dans  $Q'_{n-1}$  qui contiennent  $u'_i v'_i$ , d'ordres respectifs  $a'_i$  ( $i = 1, \dots, k'$ ), tels que  $E(C'_i) \cap W'_i = \emptyset$ .

Pour  $i \in I''$ , soit

$$\begin{cases} W''_i = W_i \cap E(Q''_{n-1}) \\ u''_i v''_i = u_i v_i \cap E(Q''_{n-1}) \text{ et} \\ a''_i = a_i \end{cases}$$

Il est clair que  $|W''_i| \leq (n - 1) - (k'' + 1)$ ,  $u''_i v''_i$  sont des arêtes parallèles de  $Q''_{n-1}$  et  $a''_i$  sont des entiers positifs tels que  $\sum_{i \in I''} a_i = 2^{n-1}$ .

Par hypothèse d'induction, il existe donc  $k''$  cycles sommet-disjoints  $C''_1, C''_2, \dots, C''_{k''}$  dans  $Q''_{n-1}$  qui contiennent  $u''_i v''_i$ , d'ordres respectifs  $a''_i$  ( $i = 1, \dots, k''$ ), tels que  $E(C''_i) \cap W''_i = \emptyset$ .

Les cycles  $C'_1, C'_2, \dots, C'_{k'}, C''_1, C''_2, \dots, C''_{k''}$  sont les cycles recherchés dans  $Q_n$ .

cas 2 :  $A(Q'_{n-1}) \neq A(Q''_{n-1})$  pour toute décomposition canonique  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  de  $Q_n$  suivant une direction non parallèle à  $u_1v_1$ .

Ce cas sera divisé en plusieurs cas et sous-cas, qui correspondent à quatre cas particuliers ( $k = 1, 2, 3$  et  $4$ ), plus le cas général ( $k \geq 5$ ).

cas 2.1 :  $k = 1$ . C'est le cas du lemme 4.4 page 53.

cas 2.2 :  $k = 2$ . Supposons, sans perdre de généralités, que  $a_1 > a_2$ .

cas 2.2.1 :  $a_2 = 2$ . C'est le cas du lemme 4.5 page 54.

cas 2.2.2 :  $a_2 = 4$ .

Soit  $W'_2 = \{u_1v_1\} \cup W_2$  alors  $|W'_2| \leq n - 2$ . Comme une arête de  $Q_n$  appartient exactement à  $n - 1$  cycles de longueur 4, il existe donc une arête  $xy$  qui n'appartient pas à  $W'_2$ , et qui forme un cycle  $C_2$  de longueur 4 avec  $u_2v_2$ . Le cycle  $C_1$  peut ainsi être construit en appliquant le lemme 4.6 page 57.

cas 2.2.3 :  $a_2 \geq 6$ .

Soit  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  une décomposition canonique de  $Q_n$  tels que  $|W_1 \cap E(Q''_{n-1})| \leq n - 4$ ,  $|W_1 \cap E(Q'_{n-1})| \leq n - 4$ , et l'arête  $u_1v_1$  appartient à  $E(Q'_{n-1})$ .

$$\text{On note } \begin{cases} W'_1 = W_1 \cap E(Q'_{n-1}) \\ W''_1 = W_1 \cap E(Q''_{n-1}) \\ W'_2 = W_2 \cap E(Q'_{n-1}) \quad \text{et} \\ W''_2 = W_2 \cap E(Q''_{n-1}) \end{cases}$$

cas 2.2.3.1 :  $u_2v_2 \in E(Q'_{n-1})$  et  $W'_2 = \emptyset$ .

Soient  $a'_2 = a_2$  et  $a'_1 = a_1 - 2^{n-1}$ . Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints  $C'_1$  et  $C_2$  dans  $Q'_{n-1}$  qui contiennent  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$ , d'ordres respectifs  $a'_1$  et  $a'_2$ , tel que  $E(C'_1) \cap W'_1 = \emptyset$ .

Si  $a_1 > 2^{n-1} + 2$ , on choisit une arête  $ab$  du cycle  $C'_1$  de même direction que  $u_1v_1$ . Par le lemme 4.4, il existe un cycle hamiltonien  $C''_1$  dans  $Q''_{n-1}$  qui contient  $a'b'$

tel que  $E(C_1'') \cap W_1'' = \emptyset$  (ou  $E(C_1'') \cap W_1'' = \{a'b'\}$  si  $a'b' \in W_1''$ ). Les 2 cycles  $C_1 = C_1' \cup C_1'' \cup \{aa' \cup bb'\} \setminus \{ab \cup a'b'\}$  et  $C_2$  sont les cycles voulus.

Si  $a_1 = 2^{n-1} + 2$ , on prend l'arête  $u_1v_1$  au lieu de  $ab$ . On fait la même construction, le cycle  $C_1 = u_1v_1 \cup C_1' \cup \{u_1u_1' \cup v_1v_1'\} \setminus \{u_1'v_1'\}$ ,  $C_2$  reste inchangé.

cas 2.2.3.2 :  $u_2v_2 \in E(Q'_{n-1})$  et  $W_2' \neq \emptyset$ .

Soient  $a_2' = 4$  et  $a_1' = 2^{n-1} - 4$ . Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints  $C_1'$  et  $C_2'$  dans  $Q'_{n-1}$  qui contiennent  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$ , d'ordres respectifs  $a_1'$  et  $a_2'$ , tels que  $E(C_1') \cap W_1' = \emptyset$ .

Soit  $ab$  une arête du cycle  $C_1'$  de même direction que  $u_1v_1$ , et soit  $xy$  l'arête du cycle  $C_2'$  de même direction que  $u_2v_2$ . Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints  $C_1''$  et  $C_2''$  dans  $Q''_{n-1}$  qui contiennent  $a'b'$  et  $x'y'$ , d'ordres respectifs  $2^{n-1} - a_2 + 4$  et  $a_2 - 4$ , tels que  $E(C_1'') \cap W_1'' = \emptyset$  (ou  $E(C_1'') \cap W_1'' = \{a'b'\}$  si  $a'b' \in W_1''$ ) et  $E(C_2'') \cap W_2'' = \emptyset$  (ou  $E(C_2'') \cap W_2'' = \{x'y'\}$  si  $x'y' \in W_2''$ ).

Les deux cycles  $C_1 = C_1' \cup C_1'' \cup \{aa' \cup bb'\} \setminus \{ab \cup a'b'\}$  et  $C_2 = C_2' \cup C_2'' \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$  sont les cycles voulus dans  $Q_n$ .

cas 2.2.3.3 :  $u_2v_2 \in E(Q''_{n-1})$  et  $W_2'' = \emptyset$ .

$$\text{Soit } W_{11}' = \begin{cases} W_1' \cup \{u_2'v_2'\} & \text{si } u_2'v_2' \neq u_1v_1 \\ W_1' & \text{si } u_2'v_2' = u_1v_1 \end{cases}$$

Il est clair que  $|W_{11}'| \leq n - 3$ . D'après le lemme 4.4, il existe un cycle hamiltonien  $C_1'$  dans  $Q'_{n-1}$  qui contient  $u_1v_1$ , tel que  $E(C_1') \cap W_{11}' = \emptyset$ .

Soit  $ab$  une arête du cycle  $C_1'$  de même direction que  $u_1v_1$  et soit  $a'b' = ab|_{Q''_{n-1}}$ , on a dans tous les cas  $a'b' \neq u_2v_2$ .

Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints  $C_1''$  et  $C_2$  dans  $Q''_{n-1}$  qui contiennent  $a'b'$  et  $u_2v_2$ , d'ordres respectifs  $a_1 - 2^{n-1}$  et  $a_2$ , tels que  $E(C_1'') \cap W_1'' = \emptyset$  (ou  $E(C_1'') \cap W_1'' = \{a'b'\}$  si  $a'b' \in W_1''$ ).

Les deux cycles  $C_1 = C_1' \cup C_1'' \cup \{aa' \cup bb'\} \setminus \{ab \cup a'b'\}$  et  $C_2$  sont les cycles voulus.

cas 2.2.3.4 :  $u_2v_2 \in E(Q_{n-1}'')$  et  $W_2'' \neq \emptyset$ .

Comme une arête de  $Q_n$  appartient à  $n - 1$  cycles de longueur 4, il existe donc une arête  $xy$  dans  $Q_{n-1}''$ , qui forme un cycle  $C_2''$  de longueur 4 avec  $u_2v_2$ , telle que l'arête  $x'y' = xy|_{Q_{n-1}'}$  soit différente de  $u_1v_1$ .

Soit  $ab$  une arête de  $W_1'$  (si  $W_1' \neq \emptyset$ ), et soit

$$W_{11}' = \begin{cases} W_1' & \text{si } (u_2'v_2' = u_1v_1) \text{ ou } (u_2'v_2' \neq u_1v_1 \text{ et } u_2'v_2' \in W_1') \\ W_1' \cup \{u_2'v_2'\} \setminus ab & \text{si } u_2'v_2' \neq u_1v_1 \text{ et } W_1' \neq \emptyset \\ u_2'v_2' & \text{si } u_2'v_2' \neq u_1v_1 \text{ et } W_1' = \emptyset \end{cases}$$

Il est clair que  $|W_{11}'| \leq n - 4$ . Par hypothèse d'induction, il existe donc deux cycles sommet-disjoints  $C_1'$  et  $C_2'$  dans  $Q_{n-1}'$  qui contiennent  $u_1v_1$  et  $x'y'$ , d'ordres respectifs  $a_1 - 2^{n-1} + 4$  et  $a_2 - 4$ , tels que  $E(C_1') \cap W_{11}' = \emptyset$  et  $E(C_2') \cap W_2' = \emptyset$  (ou  $E(C_2') \cap W_2' = \{x'y'\}$  si  $x'y' \in W_2'$ ).

Si  $ab \in C_1'$ . Par le lemme 4.6, il existe un cycle hamiltonien  $C_1''$  dans  $Q_{n-1}'' \setminus C_2''$  qui contient  $a'b'$ , tel que  $E(C_1'') \cap W_1'' = \emptyset$  (ou  $E(C_1'') \cap W_1'' = \{a'b'\}$  si  $a'b' \in W_1''$ ). Les deux cycles  $C_1 = C_1' \cup C_1'' \cup \{aa' \cup bb'\} \setminus \{ab \cup a'b'\}$  et  $C_2 = C_2' \cup C_2'' \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$  sont les cycles voulus.

Si  $ab \notin C_1'$ , on choisit une arête  $cd$  du cycle  $C_1'$  de même direction que  $u_1v_1$ . Par le lemme 4.6, il existe un cycle hamiltonien  $C_1''$  dans  $Q_{n-1}'' \setminus C_2''$  qui contient  $c'd'$ , tel que  $E(C_1'') \cap W_1'' = \emptyset$  (ou  $E(C_1'') \cap W_1'' = \{c'd'\}$  si  $c'd' \in W_1''$ ). Les deux cycles  $C_1 = C_1' \cup C_1'' \cup \{cc' \cup dd'\} \setminus \{cd \cup c'd'\}$  et  $C_2 = C_2' \cup C_2'' \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$  sont les cycles voulus.

cas 2.3 :  $k \geq 3$ .

Nous allons tout d'abord prouver qu'il existe une décomposition canonique  $\{G_1, G_2\}$  de  $Q_n$  tel que  $A(G_1) > A(G_2)$  et  $1 \leq k(G_2) \leq k - 2$ . (4.1)

Nous allons procéder par l'absurde. Supposons que cette décomposition canonique n'existe pas, on peut donc supposer que pour toute décomposition canonique

$\{G^*, G^{**}\}$  de  $Q_n$ , si  $A(G^*) > A(G^{**})$  et  $1 \leq k(G^{**})$ , alors  $k(G^{**}) = k - 1$ . (4.2)

Comme  $k \geq 3$ , alors il existe une décomposition canonique  $\{G_{11}, G_{12}\}$  de  $Q_n$  tel que  $A(G_{11}) > A(G_{12})$  et  $k(G_{12}) \geq 1$ . D'après la relation (4.2),  $k(G_{12}) = k - 1$ , et donc  $k(G_{11}) = 1$ . Donc il existe  $i; 1 \leq i \leq k$ , tel que  $U(G_{11}) = \{u_i v_i\}$ . Comme  $A(G_{11}) > A(G_{12})$  alors  $a_i > 2^{n-1}$ .

Comme  $k(G_{12}) = k - 1 \geq 2$ , il existe une décomposition canonique  $\{G_{21}, G_{22}\}$  de  $Q_n$  tel que

$$U(G_{12}) \cap E(G_{21}) \neq \emptyset \neq U(G_{12}) \cap E(G_{22})$$

Supposons, sans perdre de généralité, que  $A(G_{21}) > A(G_{22})$ . Comme  $U(G_{12}) \cap E(G_{22}) \neq \emptyset$  alors  $k(G_{22}) \geq 1$ . D'après la relation (4.2),  $k(G_{22}) = k - 1$ , et donc  $k(G_{21}) = 1$ . Donc il existe  $j; 1 \leq j \leq k$ , tel que  $U(G_{21}) = \{u_j v_j\}$ . Comme  $A(G_{21}) > A(G_{22})$  alors  $a_j > 2^{n-1}$ . Comme  $U(G_{12}) \cap E(G_{21}) \neq \emptyset$  et  $U(G_{21}) = \{u_j v_j\}$ , on peut voir que  $u_j v_j \in E(G_{12})$ . Donc  $i \neq j$ , et  $a_i + a_j > 2^n$ , ce qui contredit notre hypothèse. La relation (4.1) est donc prouvée.

Ce cas sera à nouveau divisé en deux cas particuliers ( $k = 3$  et  $k = 4$ ), plus le cas général.

cas 2.3.1 :  $k = 3$ .

Soit  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  une décomposition canonique de  $Q_n$  tels que  $A(Q'_{n-1}) > A(Q''_{n-1})$  et  $k(Q''_{n-1}) = 1$ .

Supposons, sans perte de généralité, que  $u_1 v_1$  et  $u_2 v_2$  appartiennent à  $Q'_{n-1}$ , et que  $a_1 \geq a_2$ .

Soient  $W'_1 = W_1 \cap E(Q'_{n-1})$ ,  $W'_2 = W_2 \cap E(Q'_{n-1})$  et  $u'_3 v'_3 = u_3 v_3|_{Q'_{n-1}}$ .

Si  $W'_1 \neq \emptyset$ , soit  $ab$  une arête de  $W'_1$ . Deux cas se présentent

cas 2.3.1.1 :  $2 \leq a_2 \leq 2^{n-1} - 4$ .

$$\text{Soit } W'_{11} = \begin{cases} W'_1 & \text{si } (u'_3 v'_3 = u_1 v_1) \text{ ou } (u'_3 v'_3 \in W'_1) \\ W'_1 \cup \{u'_3 v'_3\} \setminus ab & \text{si } u'_3 v'_3 \neq u_1 v_1 \text{ et } W'_1 \neq \emptyset \\ u'_3 v'_3 & \text{si } u'_3 v'_3 \neq u_1 v_1 \text{ et } W'_1 = \emptyset \end{cases}$$

Puisque  $n \geq 5$  et que  $|W'_1| \leq n - 4$ , il est clair que  $|W'_{11}| \leq n - 4$ .

Soient  $a'_2 = a_2$  et  $a'_1 = 2^{n-1} - a_2$ . Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints  $C'_1$  et  $C_2$  dans  $Q'_{n-1}$ , d'ordres respectifs  $a'_1$  et  $a'_2$ , qui contiennent  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$ , tels que  $E(C'_1) \cap W'_{11} = \emptyset$  et  $E(C_2) \cap W'_2 = \emptyset$ .

Si  $ab \in C'_1$ , on remarquera que dans ce cas  $a'b' \neq u_3v_3$ . Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints  $C''_1$  et  $C_3$  dans  $Q''_{n-1}$ , d'ordres respectifs  $2^{n-1} - a_3$  et  $a_3$ , qui contiennent  $a'b'$  et  $u_3v_3$ , tels que  $E(C''_1) \cap W''_1 = \emptyset$  (ou  $E(C''_1) \cap W''_1 = \{a'b'\}$  si  $a'b' \in W''_1$ ) et  $E(C_3) \cap W''_3 = \emptyset$ . Les cycles  $C_1 = C'_1 \cup C''_1 \cup \{aa' \cup bb'\} \setminus \{ab \cup a'b'\}$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont les cycles voulus.

Si  $ab \notin C'_1$  ou  $W'_1$  est vide, on choisit une arête  $xy$  du cycle  $C'_1$  de même direction que  $u_1v_1$ , on remarquera que  $x'y' \neq u_3v_3$ . Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints  $C''_1$  et  $C_3$  dans  $Q''_{n-1}$ , d'ordres respectifs  $2^{n-1} - a_3$  et  $a_3$ , qui contiennent  $x'y'$  et  $u_3v_3$ , tels que  $E(C''_1) \cap W''_1 = \emptyset$  (ou  $E(C''_1) \cap W''_1 = \{x'y'\}$  si  $x'y' \in W''_1$ ) et  $E(C_3) \cap W''_3 = \emptyset$ . Les cycles  $C_1 = C'_1 \cup C''_1 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont les cycles voulus.

cas 2.3.1.2 :  $a_2 = 2^{n-1} - 2$ .

Si  $u'_3v'_3 \neq u_1v_1$ , alors la même construction que dans le cas 2.3.1.1 marche en prenant comme cycle  $C_1 = \{u_1v_1\} \cup C''_1 \cup \{u_1u'_1 \cup v_1v'_1\} \setminus \{u'_1v'_1\}$ .

Si  $u'_3v'_3 = u_1v_1$ , alors on utilisera une décomposition canonique  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  de  $Q_n$  tels que  $u_1v_1$  et  $u_3v_3$  appartiennent à  $Q'_{n-1}$ , et  $u_2v_2$  appartient à  $Q''_{n-1}$ . La même construction que dans le cas 2.3.1.1 marche (en interchangeant  $a_2, u_2v_2$  et  $a_3, u_3v_3$ ).

cas 2.3.2 :  $k = 4$  (donc  $n \geq 6$ ).

D'après la relation (4.1), il existe une décomposition canonique  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  de  $Q_n$  tels que  $A(Q'_{n-1}) > A(Q''_{n-1})$  et  $1 \leq k(Q''_{n-1}) \leq 2$ .

Soit  $k'' = k(Q''_{n-1})$ .

case 2.3.2.1 :  $k'' = 1$ .

Supposons, sans perdre de généralité, que  $u_1v_1, u_2v_2$  et  $u_3v_3$  appartiennent à  $Q'_{n-1}$ , et que  $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ . On peut facilement voir que  $a_3 \leq 2^{n-1} - 8$  (4.3).

Soient  $W'_1 = W_1 \cap E(Q'_{n-1})$ ,  $W'_2 = W_2 \cap E(Q'_{n-1})$ ,  $W'_3 = W_3 \cap E(Q'_{n-1})$ , et soit  $u'_4v'_4 = u_4v_4|_{Q'_{n-1}}$ .

D'après la relation (4.3), on en déduit qu'il existe deux entiers pairs strictement positifs  $a'_1$  et  $a'_2$ , tels que  $a'_1 + a'_2 + a_3 = 2^{n-1}$ .

Pour  $i = 1, 2$  si  $W'_i \neq \emptyset$ , soit  $a_i b_i$  une arête de  $W'_i$ , et soit

$$W'_{1i} = \begin{cases} W'_i & \text{si } (u'_4v'_4 = u_i v_i) \text{ ou } (u'_4v'_4 \in W'_i) \\ W'_i \cup \{u'_4v'_4\} \setminus a_i b_i & \text{si } (u'_4v'_4 \neq u_i v_i) \text{ et } W'_i \neq \emptyset \\ u'_4v'_4 & \text{si } W'_i = \emptyset \end{cases}$$

Puisque  $n \geq 6$  et  $|W'_i| \leq n - 5$ , il est clair que  $|W'_{1i}| \leq n - 5$ . Par hypothèse d'induction, il existe donc trois cycles sommets-disjoints  $C'_1, C'_2$ , et  $C_3$  dans  $Q'_{n-1}$ , d'ordres respectifs  $a'_1, a'_2$ , et  $a_3$ , qui contiennent  $u_1v_1, u_2v_2$ , et  $u_3v_3$  respectivement, tels que  $E(C'_1) \cap W'_{11} = \emptyset$ ,  $E(C'_2) \cap W'_{12} = \emptyset$  et  $E(C_3) \cap W'_3 = \emptyset$ .

Pour  $i = 1, 2$ , si  $a_i b_i \in C_i$  on pose  $x_i y_i = a'_i b'_i$ , sinon  $x_i y_i$  est une arête quelconque de  $C_i$  de même direction que  $u_i v_i$ , sur les cycles d'ordres respectifs  $a'_1$  et  $a'_2$ . Par construction des ensembles  $W'_{1i}$ ,  $x_i y_i \neq u_4 v_4$ .

Par hypothèse d'induction, il existe trois cycles sommets-disjoints  $C''_1, C''_2$ , et  $C_4$  dans  $Q''_{n-1}$ , d'ordres respectifs  $a_1 - a'_1, a_2 - a'_2$  et  $a_4$ , qui contiennent  $x'_1 y'_1, x'_2 y'_2$  et  $u_4 v_4$ , tels que  $E(C''_1) \cap W''_1 = \emptyset$  (ou  $E(C''_1) \cap W''_1 = \{x'_1 y'_1\}$ , si  $x'_1 y'_1 \in W''_1$ ),  $E(C''_2) \cap W''_2 = \emptyset$  (ou  $E(C''_2) \cap W''_2 = \{x'_2 y'_2\}$ , si  $x'_2 y'_2 \in W''_2$ ) et  $E(C_4) \cap W''_4 = \emptyset$ .

En combinant les cycles  $C'_1$  et  $C''_1$ ,  $C'_2$  et  $C''_2$  avec les deux cycles  $C_3$  et  $C_4$ , nous avons les quatres cycles voulus dans  $Q_n$ .

case 2.3.2.2 :  $k'' = 2$ .

Supposons, sans perdre de généralité, que  $u_1 v_1$  et  $u_2 v_2$  soient dans  $Q'_{n-1}$ , et que  $a_1 \geq a_2$ .

Soient  $W'_1 = W_1 \cap E(Q'_{n-1})$  et  $W'_2 = W_2 \cap E(Q'_{n-1})$ , et si  $W'_1 \neq \emptyset$  soit  $a_1 b_1$  une arête de  $W'_1$ .

Deux cas sont à distinguer suivant la valeur de  $a_2$  :

cas 2.3.2.2.1 :  $a_2 \leq 2^{n-1} - 4$

Soient  $a'_2 = a_2$  et  $a'_1 = 2^{n-1} - a_2$ .

Soit

$$W'_{11} = \begin{cases} W'_1 \cup \{u'_3v'_3\} \cup \{u'_4v'_4\} \setminus a_1b_1 & \text{si } W'_1 \neq \emptyset, a_1b_1 \neq u'_3v'_3 \text{ et } a_1b_1 \neq u'_4v'_4 \\ u'_3v'_3 \cup u'_4v'_4 & \text{si } W'_1 = \emptyset \end{cases}$$

Puisque  $n \geq 6$  et  $|W'_{11}| \leq n - 5$ , il est clair que  $|W'_{11}| \leq n - 4$ . Par hypothèse d'induction, il existe donc deux cycles sommets-disjoints  $C'_1, C'_2$  dans  $Q'_{n-1}$ , d'ordres respectifs  $a'_1$  et  $a'_2$ , qui contiennent  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$ , tels que  $E(C'_1) \cap W'_{11} = \emptyset$  et  $E(C'_2) \cap W'_2 = \emptyset$ .

Si  $a_1b_1 \in C'_1$ , posons  $xy = a_1b_1$  sinon soit  $xy$  une arête quelconque sur le cycle  $C'_1$  de même direction que  $u_1v_1$ , on remarquera que dans tous les cas  $x'y' \neq u'_3v'_3$  et  $x'y' \neq u'_4v'_4$ . Par hypothèse d'induction, il existe trois cycles sommets-disjoints  $C''_1, C_3$  et  $C_4$  dans  $Q''_{n-1}$ , d'ordres respectifs  $a_1 - a'_1, a_3$  et  $a_4$ , qui contiennent  $x'y', u_3v_3$  et  $u_4v_4$ , tels que  $E(C''_1) \cap W''_1 = \emptyset$  (ou  $E(C''_1) \cap W''_1 = \{x'y'\}$  si  $x'y' \in W''_1$ ),  $E(C_3) \cap W''_3 = \emptyset$  et  $E(C_4) \cap W''_4 = \emptyset$ .

En combinant les cycles  $C'_1$  et  $C''_1$ , avec les trois cycles  $C_2, C_3$  et  $C_4$ , nous avons les quatres cycles voulus dans  $Q_n$ .

cas 2.3.2.2.2 :  $a_2 = 2^{n-1} - 2$

Dans ce cas, on a forcément  $a_1 = 2^{n-1} - 2$ . On prend  $a'_2 = a_2$  et  $a'_1 = 2$ .

Si  $u'_3v'_3 \neq u_1v_1$  et  $u'_4v'_4 \neq u_1v_1$ , alors la même construction que dans le cas précédent marche, en prenant pour  $C_1$  le cycle  $\{u_1v_1\} \cup C''_1 \cup \{u_1u'_1 \cup v_1v'_1\} \setminus \{u'_1v'_1\}$ , les cycles  $C_2, C_3$  et  $C_4$  restent inchangés.

Si  $u'_3v'_3 = u_1v_1$  ou  $u'_4v'_4 = u_1v_1$  (supposons ici, sans perdre de généralité, que  $u'_3v'_3 = u_1v_1$ ). Dans ce cas il est toujours possible de trouver une nouvelle décomposition canonique de  $Q_n$  qui vérifie la condition (4.1), tels que les arêtes  $u_1v_1$  et  $u_3v_3$  soient toutes les deux dans  $Q'_{n-1}$ . Il suffit d'appliquer le cas 2.3.2.1 à cette nouvelle décomposition.



cas 2.3.3 :  $k \geq 5$  (donc  $n \geq 7$ ).

Soit  $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$  une décomposition canonique de  $Q_n$  tels que  $A(Q'_{n-1}) > A(Q''_{n-1})$  et  $1 \leq I(Q''_{n-1}) \leq k - 2$ .

On note  $I' = I(Q'_{n-1})$ ,  $k' = |I'|$  et soit  $a = \min_{i \in I'} a_i$ .

Nous allons tout d'abord prouver que  $a \leq 2^{n-1} - 4(k' - 1)$ . (4.4)

On va procéder par l'absurde, supposons que  $a > 2^{n-1} - 4(k' - 1)$ . Comme  $a$  est pair, alors  $a \geq 2^{n-1} - 4(k' - 1) + 2$ . (4.5)

Comme  $k'' \geq 1$ , alors  $a \leq \frac{2^n - 2k''}{k'}$ . (4.6)

Si  $k' = 2$ , alors -en combinant (4.5) et (4.6)- et puisque  $k' \leq n - 3$  on a,  $2^{n-1} - 2 \leq 2^{n-1} - k''$ , ce qui est une contradiction ( $k'' \geq 3$ ).

Si  $k' \geq 3$ , alors -en combinant (4.5) et (4.6)- on a

$$2^{n-1} - 4(n - 4) + 2 \leq 2^{n-1} - 4(k' - 1) + 2 \leq \frac{2^n - 2k''}{k'} \leq \frac{2^n - 2k''}{3}$$

Donc  $2^{n-2} \leq 6n - 24$ , ce qui est une contradiction pour  $n \geq 5$ . La relation (4.4) est donc prouvée.

On en déduit qu'il existe des ensembles disjoints non vides  $I^\#, I^b$  de  $I'$  et des entiers  $a'_i$  pairs qui satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} I' = I^\# \cup I^b \\ a'_i = a_i \quad \text{si } i \in I^\# \\ 4 \leq a'_i < a_i \quad \text{si } i \in I^b \\ \sum_{i \in I'} a'_i = 2^{n-1} \end{array} \right.$$

Pour cela, on observe qu'en partant de  $I^b = \emptyset$  et qu'en diminuant successivement les valeurs des  $a'_i$ , sauf pour les indices  $i_0$  tel que  $a_{i_0}$  est plus grand que 2, la somme des  $a'_i$  parcourt les entiers pairs de  $A(Q'_1)$  jusqu'à  $a + 4(k - 1)$ .

Soient  $U' = \{u_i v_i ; i \in I'\}$ ,  $U'' = \{u_i v_i ; i \in I''\}$  et soit  $k_b = |I^b|$ .

Pour  $i \in I''$ , soit  $u'_i v'_i = u_i v_i|_{Q'_{n-1}}$  et soit  $W' = \{u'_i v'_i, i \in I''; u'_i v'_i \notin U'\}$ .

Pour  $i \in I'$ , soit  $W'_i = W_i \cap E(Q'_{n-1})$  et si  $W'_i \neq \emptyset$  soit  $a_i b_i$  une arête de  $W'_i$ .

On note

$$W'_{i1} = \begin{cases} W'_i & \text{si } i \in I^\# \\ W'_i \cup W' \setminus \{a_i b_i\} & \text{si } i \in I^b \text{ et } (W'_i \neq \emptyset \text{ ou } a_i b_i \in W_i) \\ W' & \text{si } i \in I^b \text{ et } W'_i = \emptyset \end{cases}$$

Puisque  $W'_i \leq n - (k + 1)$  et que  $|W'| \leq |I''| = k - k'$ , il est clair que  $|W'_{i1}| \leq (n - 1) - (k' + 1)$ .

Par hypothèse d'induction, il existe  $k'$  cycles sommet-disjoints  $C'_1, C'_2, \dots, C'_{k'}$  dans  $Q'_{n-1}$  qui contiennent  $u_i v_i$ , d'ordres respectifs  $a'_i$ , tels que  $E(C'_i) \cap W'_{i1} = \emptyset$ .

Soit  $I_1 = \{i \in I^b; a_i b_i \in C'_i\}$  et  $I_2 = \{i \in I^b; a_i b_i \notin C'_i\}$ .

Pour  $i \in I_2$ , soit  $x_i y_i$  une arête du cycle  $C'_i$  de la même direction que  $u_i v_i$ .

On note

$$\begin{aligned} k''_2 &= k'' + k_b \\ W''_i &= W_i \cap E(Q''_{n-1}) \quad \text{pour } i \leq 1 \leq k \\ u''_i v''_i &= \begin{cases} u_i v_i & \text{si } i \in I'' \\ a'_i b'_i & \text{si } i \in I_1 \\ x'_i y'_i & \text{si } i \in I_2 \end{cases} \\ a''_i &= \begin{cases} a_i & \text{si } i \in I'' \\ a_i - a'_i & \text{si } i \in I^b \end{cases} \end{aligned}$$

Il est clair que  $k''_2 \leq k'' + k' - 1 = k - 1$ , et que les  $a''_i$  sont des entiers positifs pairs tels que  $\sum_{i \in I'' \cup I^b} a_i = 2^{n-1}$ .

Comme  $k''_2 \leq k - 1$ , alors  $|W''_i| \leq n - (k + 1) \leq (n - 1) - (k'' + 1)$ . Par hypothèse d'induction, il existe donc  $k''_2$  cycles sommet-disjoints  $C''_1, \dots, C''_j, \dots, C''_{k''_2}$  dans  $Q''_{n-1}$  qui contiennent les arêtes  $u''_{i(j)} v''_{i(j)}$ , d'ordres respectifs  $a''_{i(j)}$ , tels que  $E(C''_j) \cap W''_{i(j)} = \emptyset$ .

Pour  $i = 1, \dots, k$ , on définit les cycles  $C_i$  par :

$$C_i = \begin{cases} C_i' & \text{si } i \in I^\# \\ C_i' \cup C_i'' \cup \{a_i a_i' \cup b_i b_i'\} \setminus \{a_i b_i \cup a_i' b_i'\} & \text{si } i \in I_1 \text{ et } a_i - a_i' \geq 4 \\ C_i' \cup C_i'' \cup \{a_i a_i' \cup b_i b_i'\} \setminus \{a_i b_i\} & \text{si } i \in I_1 \text{ et } a_i - a_i' = 2 \\ C_i' \cup C_i'' \cup \{x_i x_i' \cup y_i y_i'\} \setminus \{x_i y_i \cup x_i' y_i'\} & \text{si } i \in I_2 \text{ et } a_i - a_i' \geq 4 \\ C_i' \cup C_i'' \cup \{x_i x_i' \cup y_i y_i'\} \setminus \{x_i y_i\} & \text{si } i \in I_2 \text{ et } a_i - a_i' = 2 \\ C_i'' & \text{si } i \in I'' \end{cases}$$

Les cycles  $C_1, \dots, C_k$  sont les cycles voulus dans  $Q_n$ . Ce qui complète la preuve du théorème.  $\square$

Il est à noter que la condition " $k \leq n - 2$ " est la meilleure possible dans le théorème précédent :

Pour tout  $n$ , on peut trouver  $n - 1$  arêtes parallèles dans  $Q_n$ , et  $n - 1$  entiers positifs pairs  $a_1, \dots, a_{n-1}$ , avec  $a_1 + \dots + a_{n-1} = 2^n$ , telle que la condition du théorème ne soit pas satisfaite.

En effet, soit  $xy$  une arête quelconque de  $Q_n$ , et soient  $u_1 v_1, \dots, u_{n-1} v_{n-1}$  les  $(n - 1)$  autres arêtes de même direction que  $xy$ , qui forment avec  $xy$  un cycle de longueur 4 dans  $Q_n$ . Soient  $a_1, \dots, a_{n-1}$  des entiers positifs pairs tels que  $a_1 + \dots + a_{n-1} = 2^n$  avec  $a_i \geq 6$  pour tout  $i$ . Puisque les voisins de  $x$  sont les sommets  $u_1 \dots, u_{n-1}$  et les voisins de  $y$  les sommets  $v_1 \dots, v_{n-1}$ , un cycle qui passe par  $x$  doit être un cycle de longueur 4,  $xyu_i v_i$ .  $Q_n$  ne peut donc pas être partitionné en des cycles sommet-disjoints  $C_1, \dots, C_n$  qui passent par  $u_1 v_1, \dots, u_{n-1} v_{n-1}$  et d'ordres respectifs  $a_1 + \dots + a_{n-1}$  (les sommets  $x$  et  $y$  ne peuvent appartenir à aucun de ces cycles).



# Chapitre 5

## Plongement de graphes dans l'hypercube

La mise en oeuvre d'algorithmes parallèles sur des architectures multiprocesseurs à mémoire distribuée a conduit au développement de la notion de *plongement* d'un graphe  $G$  dans un graphe  $H$ .

Bien souvent, un algorithme distribué  $\mathcal{A}$  est décrit en supposant l'existence d'une topologie logique  $S$ , sur laquelle  $\mathcal{A}$  est défini. Parmi les topologies logiques les plus utilisées, se trouvent les arborescences et les hypercubes.

Une méthode pour implémenter sur un réseau  $R$  un algorithme  $\mathcal{A}$  et sa structure logique associée  $S$ , consiste à "simuler"  $S$  sur  $R$ . Cette simulation peut être faite en utilisant uniquement la structure du graphe  $S$ , en le *plongeant* dans le graphe de  $R$  (voir la définition dans la section 5.1).

Par exemple, l'arbre binaire complet à  $2^n - 1$  sommets n'est pas un sous-graphe de l'hypercube de dimension  $n$  (voir la proposition 5.2), mais on peut le plonger dans cet hypercube en remplaçant simplement une arête de l'arbre binaire par une chaîne de longueur 2 dans l'hypercube. De ce fait, un algorithme  $\mathcal{A}$ , défini sur l'arbre binaire, peut être exécuté sur l'hypercube de sorte qu'une communication entre seulement deux voisins sur l'arbre binaire est remplacée par une communication entre deux sommets à distance 2 sur l'hypercube. La dégradation du temps

d'exécution se traduit par au plus un facteur 2.

Le problème de plongement de graphes dans l'hypercube à été traité par plusieurs auteurs. Ainsi, Havel [36, 37, 38, 33], Harary [27, 28, 29], Nebeský [59, 60] et plusieurs auteurs ont donné des familles de graphes qui sont plongeables dans l'hypercube.

Nous nous intéressons dans ce chapitre à trois familles de graphes plongeables dans  $Q_n$ , et plus particulièrement aux double quasi-étoiles. Pour cela, nous considérons une famille de graphes, que nous appellerons les  $MD$ -graphes<sup>1</sup>, nous montrons que les doubles quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans un certain  $MD$ -graphes, nous montrons ensuite que les  $MD$ -graphes sont eux même des graphes plongeables dans  $Q_n$ . Nous en déduisons que les doubles quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans  $Q_n$ . Ce qui répondra à une question ouverte posée par Havel [33]. Notons que l'on retrouvera de la même façon que les quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans  $Q_n$ .

## 5.1 Définitions générales

**Définition 5.1** *Un plongement d'un graphe  $G$  dans un graphe  $H$  est défini par la donnée d'une application injective  $\varphi$  de l'ensemble des sommets de  $G$  dans l'ensemble des sommets de  $H$ , et d'une application  $P_\varphi$  de l'ensemble des arêtes de  $G$  dans l'ensemble des chaînes de  $H$ , qui associe à chaque arête  $xy$  de  $G$ , une chaîne reliant les sommets  $\varphi(x)$  et  $\varphi(y)$  dans  $H$ .*

Beaucoup de paramètres ont été définis pour mesurer l'efficacité des plongements (voir [40]). Nous donnerons la définition de ceux d'entre eux qui sont le plus souvent étudiés, à savoir la dilatation, l'expansion et la congestion.

---

<sup>1</sup>La notion de  $MD$ -graphes à été introduite dans [42]

## Dilatation

La *dilatation* d'un plongement  $\varphi$  d'un graphe  $G$  dans un graphe  $H$ , notée  $dil(\varphi)$  est la longueur maximale des chaînes  $P_\varphi(xy)$  de  $H$ , associées aux arêtes  $xy$  de  $G$ . Dans le cas où l'on considère des chaînes de plus courte longueur, la longueur de  $P_\varphi(xy)$  est alors égale à la distance  $d_H(\varphi(x), \varphi(y))$  et la dilatation s'exprime uniquement en fonction de  $\varphi$ , par :

$$dil(\varphi) = \max_{xy \in E(G)} d_H(\varphi(x), \varphi(y))$$

Dire que  $G$  est plongeable avec dilatation 1 est équivalent à dire que  $G$  est un sous-graphe de  $H$ . Dans ce cas, l'image de l'arête  $xy$  de  $G$  est l'arête  $\varphi(x)\varphi(y)$  de  $H$ . Si de plus  $|V(G)| = |V(H)|$ , alors  $G$  est un graphe partiel de  $H$ .

Dans ce chapitre, nous nous intéressons essentiellement aux plongements de dilatation 1, tout en rappelant des résultats sur les plongements de dilatation quelconque dans l'hypercube.

## Expansion

L'*expansion* d'un plongement d'un graphe  $G$  dans un graphe  $H$  est le rapport du nombre de sommets de  $H$ , sur le nombre de sommets de  $G$ . Ce paramètre est une mesure du degré d'utilisation des processeurs dans le cas d'un algorithme modélisé par  $G$ , et implémenté sur le réseau de processeurs modélisé par  $H$ .

une expansion égale à 1 peut correspondre à une utilisation optimale, ou du moins très efficace, des processeurs.

## Congestion

La *congestion* d'un plongement  $\varphi$  d'un graphe  $G$  dans un graphe  $H$ , notée  $cong(\varphi)$ , est le maximum, pris sur toutes les arêtes  $e$  de  $H$ , du nombre de chaînes  $P_\varphi(xy)$  de  $H$ , images d'arêtes de  $G$ , qui contiennent  $e$ .

Dans la littérature, le calcul de la congestion n'est généralement fait que pour un

plongement qui optimise d'abord des contraintes sur la dilatation et l'expansion. Cependant, il semblerait que ce paramètre soit plus important que la dilatation (dépendant des modèles de communication) et qu'il serait intéressant de le minimiser, sans tenir compte de la dilatation.

### Plongement optimal

Chercher un plongement d'expansion minimum d'un graphe  $G$  dans un graphe d'une famille donnée, revient donc à plonger  $G$  dans le graphe  $H$  de cette famille ayant le plus petit nombre de sommets possible, supérieur ou égal à celui de  $G$ . On dit que  $H$  est *optimal* pour  $G$ .

La seule borne inférieure connue pour la dilatation, valable pour tous les graphes si l'expansion du plongement vaut 1 (l'application  $\varphi$  est alors bijective), est donnée par la proposition suivante

**Proposition 5.1** *Si l'expansion d'un plongement  $\varphi$  d'un graphe  $G$  dans un graphe  $H$  vaut 1, alors la dilatation de  $\varphi$  est au moins égale au rapport du diamètre de  $H$ , sur le diamètre de  $G$ .*

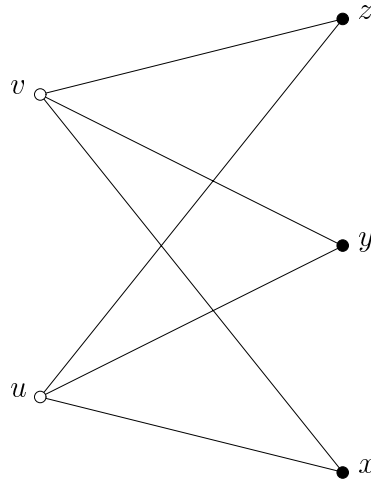
## 5.2 Graphes et dimensions cubiques

Un graphe  $G$  est dit *cubique* s'il admet un plongement de dilatation 1 dans  $Q_n$  pour un certain  $n$ . Le plus petit entier  $n$  pour lequel  $G$  est plongeable dans  $Q_n$  est appelé *dimension cubique*, noté  $cd(G)$ .

Firsov [22] a remarqué que les arbres sont des graphes cubiques. Il a aussi montré que tout graphe cubique est nécessairement biparti, mais la réciproque n'est pas vraie en général. Un exemple de graphe biparti est le graphe  $K_{2,3}$  ci-dessous (figure 5.1).

$K_{2,3}$  n'est pas un graphe cubique, il n'admet pas de plongement dans  $Q_n$  quelque soit la valeur de  $n$ . En effet, supposons qu'il existe un tel plongement, comme



Figure 5.1 – le graphe  $K_{2,3}$ 

$u$  et  $v$  sont à distance 2 dans  $K_{2,3}$ , alors leurs images respectives  $p = \varphi(u)$  et  $q = \varphi(v)$  seront aussi à distance 2 dans  $Q_n$ . Or, deux sommets à distance 2 dans  $Q_n$  appartiennent à exactement 2 chaînes sommet-disjointes de longueurs 2 dans  $Q_n$ , ce qui n'est pas possible car les 3 chaînes sommet-disjointes de longueurs 2 dans  $K_{2,3}$  doivent se plonger dans 3 chaînes sommet-disjointes dans  $Q_n$ .

### 5.2.1 Décider si un graphe $G$ est cubique

A noter qu'un graphe  $G$  est cubique si et seulement si toutes ses composantes connexes le sont. Havel et Morávek [39] ont donné les conditions nécessaires et suffisantes suivantes pour dire si un graphe  $G$  donné est cubique.

#### Conditions nécessaires et suffisantes

Un graphe  $G$  peut être plongé dans  $Q_n$  si et seulement si on peut étiqueter les arêtes de  $G$  par des entiers appartenant à l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , de telle sorte que

- 1) Toutes les arêtes de  $G$  incidentes à un même sommet  $x$  admettent des étiquetages différents,

- 2) Pour toute chaîne  $P$  de  $G$ , il existe un entier  $i \in \{1, \dots, n\}$  qui apparaît un nombre impair de fois dans l'étiquetage des arêtes de  $P$ ,
- 3) Pour tout cycle  $C$  de  $G$ , aucun entier  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$  n'apparaît un nombre impair de fois dans l'étiquetage des arêtes de  $C$ .

En utilisant ces conditions, Havel et Liebl [36, 37] ont montré, indépendamment du résultat de Firsov, que les arbres sont des graphes cubiques et ont donné des plongements efficaces des arbres binaires dans l'hypercube. Ils ont aussi montré que les cycles sont des graphes cubiques si et seulement si ils sont d'ordres pairs.

### Subdivision de graphes

Pour terminer cette section, nous donnons la définition de la *subdivision* de graphes, qui sera utilisée plus tard dans ce chapitre.

**Définition 5.2** *La subdivision d'une arête  $uv$  est le remplacement de  $uv$  par une chaîne  $u = u_0, \dots, u_i, \dots, u_p = v$  où les  $u_i$  sont de nouveaux sommets pour  $i = 1, \dots, p - 1$ . Une subdivision d'un graphe  $G$  est un graphe où les arêtes de  $G$  ont été subdivisés.*

## 5.3 Complexité

Chercher un plongement de dilatation 1 d'un graphe  $G$  dans un graphe  $H$  n'est pas un problème facile, c'est un problème NP-complet. Le théorème suivant a été montré par Garey et Graham [25]

**Théorème 5.1** *(subgraph isomorphism problem) Le problème suivant est NP-complet*

**Données :**  $G$  et  $H$  deux graphes.

**Question :**  $G$  est-il (isomorphe à) un sous-graphe partiel de  $H$  ?

Arfati, Papadimitriou et Papageorgiou [4] ont étendu ce résultat dans le cas où  $H$  est le graphe de l'hypercube :

**Théorème 5.2** *Le problème suivant est NP-complet*

**Données** :  $G$  un graphe,  $n$  un entier.

**Question** :  $G$  est-il un sous-graphe partiel de  $Q_n$  ?

Enfin, Wagner et Corneil [63] ont montré que ce problème reste NP-complet même dans le cas particulier où  $G$  est un arbre et où  $H$  est le graphe de l'hypercube  $Q_n$ .

**Théorème 5.3** *Le problème suivant est NP-complet*

**Données** :  $T$  un arbre et  $n$  un entier.

**Question** :  $T$  est-il un sous-graphe partiel de  $Q_n$  ?

## 5.4 Plongement dans $Q_n$

Le graphe de  $Q_n$  est biparti connexe et est tel que chaque ensemble de la bipartition contient le même nombre de sommets,  $Q_n$  est donc un graphe *équilibré*.

Si  $G$  est un graphe plongeable dans un graphe  $H$ ,  $G$  est connexe et  $H$  biparti, alors  $G$  est biparti. Si de plus  $|V(G)| = |V(H)|$  et  $H$  équilibré alors  $G$  est aussi équilibré.

On notera  $G \subseteq^d Q_n$  si  $G$  est un graphe plongeable dans  $Q_n$  avec dilatation  $d$ . Si la dilatation vaut 1, on note simplement  $G \subseteq Q_n$ .  $G \not\subseteq Q_n$  est utilisé pour dire que le graphe  $G$  n'est pas plongeable dans  $Q_n$ . Dans tout ce chapitre, on parlera de plongement de dilatation 1 si aucune précision n'est donnée.

A noter que si  $G$  est un graphe plongeable dans  $H$ ,  $H$  est plongeable dans  $H'$ , alors  $G$  est aussi plongeable dans  $H'$ .

### Conditions nécessaires pour un graphe $G$ plongeable dans $Q_n$

Si un graphe  $G$  est plongeable dans le graphe  $Q_n$ , alors nécessairement

- $|V(G)| \leq 2^n$ ,
- $G$  est biparti,
- le degré maximum de  $G$ ,  $\Delta(G) \leq n$ .

Si de plus  $|V(G)| = 2^n$ , alors  $G$  doit être équilibré.

Toutes ces conditions sont nécessaires pour un graphe  $G$  qui est plongeable dans  $Q_n$ , mais pas suffisantes, comme le montre l'exemple suivant (figure 5.2) :

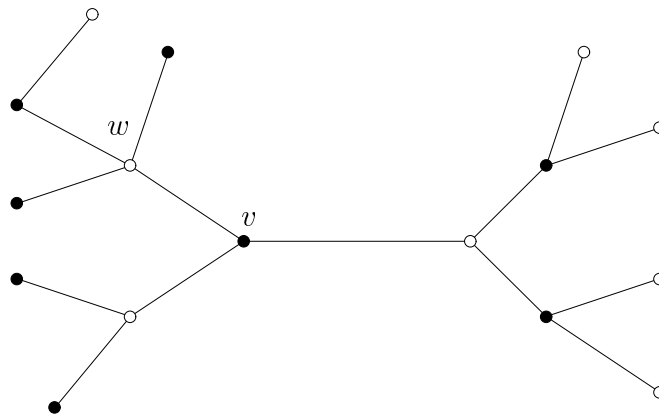


Figure 5.2 – arbre équilibré à 16 sommets qui n'est pas plongeable dans  $Q_4$

Cet arbre  $T$  n'est pas plongeable dans  $Q_4$  pour la simple raison que dans  $T$  tous les sommets sont à distance au plus 3 du sommet  $v$ , alors que dans  $Q_n$ , pour tout sommet donné  $v$ , il existe un unique sommet  $u$  tel que  $d(u, v) = n$  ( $Q_n$  est *antipodal*). L'antipodal de  $v$  devrait être à distance 4 dans  $Q_4$ .

On peut ainsi construire, pour tout  $n$ , un arbre équilibré  $T$  à  $2^n$  sommets avec  $\Delta(T) = 4$ , qui ne soit pas plongeable dans  $Q_n$ . En fait,  $T$  peut être construit avec exactement un sommet de degré 4 (le sommet de degré 4 est noté  $w$ ).

Ce qui a motivé la conjecture suivante de Havel [33] :

**Conjecture 5.1** *Tout arbre  $T$  équilibré à  $2^n$  sommets tel que  $\Delta(T) \leq 3$ , est plongeable dans  $Q_n$ .*

Cette conjecture a été démontré dans plusieurs cas particuliers, dans le cas des arbres binaires, des chenilles ainsi que dans d'autres cas que nous allons détailler dans ce qui suit.

#### 5.4.1 Plongement des cycles dans l'hypercube

L'hypercube est hamiltonien, il s'ensuit que le cycle  $C_{2^n}$  est plongeable avec dilatation 1 dans  $Q_n$ , et que  $cd(C_n) = \lceil \log_2(n) \rceil$ .

### 5.5 Plongement d'arbres binaires complets dans l'hypercube

Les résultats qui suivent sont détaillés dans [36], [47] et [54]. En accord avec la définition générale donnée dans la section 5.1, on appelle *hypercube optimal* d'un graphe  $G$  d'ordre  $N$ , le plus petit hypercube dont le nombre de sommets est supérieur ou égal à celui de  $G$ , soit  $Q_n$ , avec  $n = \lceil \log_2(N) \rceil$ .

Tout arbre est plongeable dans l'hypercube d'après la section 5.2. On s'intéressera donc à la recherche de plongement optimal de ces arbres dans l'hypercube.

**Définition 5.3** *L'arbre binaire complet  $B_n$  est le graphe défini inductivement comme suit*

- $B_1$  est le graphe complet  $K_{1,2}$ ,

- Pour  $n \geq 2$ ,  $B_n$  est formé de deux copies disjointes  $B'_{n-1}$  et  $B''_{n-1}$ , et d'un sommet  $u$ , tel que  $u$  soit relié par une arête à l'unique sommet de degré 2 de  $B'_{n-1}$  et par une autre arête à l'unique sommet de degré 2 de  $B''_{n-1}$ .

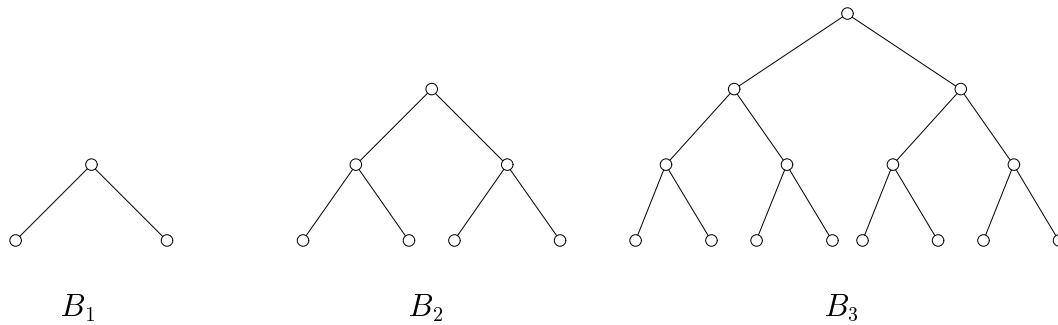


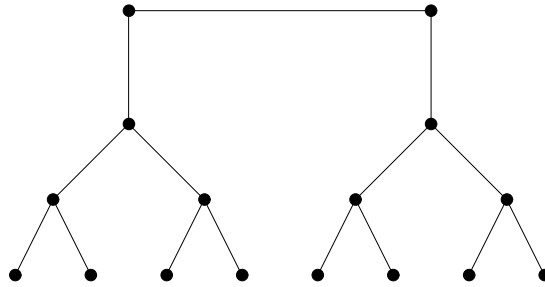
Figure 5.3 – arbres binaires complets

$B_n$  est donc un graphe qui possède  $2^n$  sommets de degré 1, un seul sommet de degré 2 et  $2^n - 2$  sommets de degré 3. Cet unique sommet de degré 2 sera appelé la *racine* de l'arbre.  $B_n$  est un arbre de hauteur  $n$  ayant  $2^{n+1} - 1$  sommets.

**Proposition 5.2** *L'arbre binaire complet de hauteur  $n$ ,  $B_n$ , ne peut se plonger avec dilatation 1 dans son hypercube optimal  $Q_{n+1}$ , pour  $n$  supérieur ou égal à 1.*

*Preuve:* Les deux graphes sont bipartis. Le graphe  $B_n$  étant connexe, un plongement de dilatation 1 doit envoyer chaque partie de la bipartition de  $B_n$  dans une classe de la bipartition de  $Q_n$ . Or, l'hypercube a le même nombre de sommets dans les deux classes de la bipartition, alors que le nombre de sommets de l'arbre  $B_n$  dans une classe de la bipartition est strictement supérieur à  $2^n$ , si  $n$  est strictement supérieur à 1.  $\square$

Par contre, en modifiant très peu  $B_n$ , on obtient un arbre qui se plonge avec dilatation 1 dans son hypercube optimal. Soit  $BDR(n)$  l'arbre obtenu en dédoublant la racine de l'arbre binaire complet  $B_n$  en deux sommets  $x$  et  $y$ . Ces deux sommets sont adjacents entre eux et chacun est adjacent à la racine d'un sous-arbre  $B_{n-1}$ . Cet arbre est appelé *arbre binaire complet double-racine*.  $BDR(n)$  est un arbre binaire ayant  $2^{n+1}$  sommets, comme  $Q_{n+1}$  (voir figure 5.4).

Figure 5.4 – arbre binaire complet double-racine  $BDR(3)$ 

**Proposition 5.3** *L'arbre binaire complet double-racine  $BDR(n)$  peut se plonger avec dilatation 1 dans son hypercube optimal  $Q_{n+1}$ .*

La preuve de cette proposition se fait par induction, elle ne sera pas détaillée ici. Une preuve générale est donnée dans [55].

Le corollaire suivant s'en déduit

**Corollaire 5.1** *L'arbre binaire complet  $B_n$  peut se plonger dans son hypercube optimal  $Q_{n+1}$  avec dilatation 2 et une seule arête dilatée.*

*Remarque :* Par "arête dilatée", nous entendons une arête  $xy$  de  $B_n$  qui, par l'application  $P_\varphi$  du plongement, se transforme en une chaîne de longueur au moins 2.

*Preuve:*  $B_n \subseteq^2 BDR(n)$  par construction,  $BDR(n) \subseteq Q_{n+1}$  par la proposition 5.3, d'où  $B_n \subseteq^2 Q_{n+1}$ .  $\square$

La proposition suivante sur le plongement des arbres binaires se déduit facilement de la proposition 5.3

**Proposition 5.4** *L'arbre binaire complet peut être plongé avec dilatation 1 dans l'hypercube de dimension égale à la dimension optimale plus 1.*

*Preuve:*  $B_n \subseteq BDR(n+1)$ ,  $BDR(n+1) \subseteq Q_{n+2}$  par la proposition 5.3, donc  $B_n \subseteq Q_{n+2}$ , ce qui complète la preuve.  $\square$

### 5.5.1 Plongements d'arbres dans l'hypercube obtenus par transformation des arbres binaires

Dans cette section, nous décrivons une famille d'arbres plongeables dans l'hypercube, qui est obtenu par simple transformation des arbres binaires.

Soit le graphe  $D_n$ , qui est formé de l'arbre binaire complet  $B_n$  auquel on ajoute un sommet relié par une arête à la racine de l'arbre,  $D_n$  est donc un arbre à  $2^{n+1}$  sommets. La figure 5.5 suivante montre l'arbre  $D_2$ .

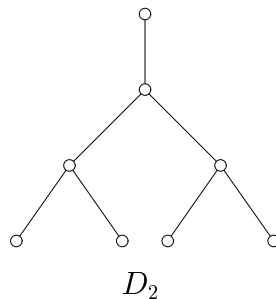


Figure 5.5 – l'arbre  $D_2$

Ce graphe n'est pas équilibré, et Havel [36] a montré que  $D_n$  (et donc  $B_n$ ) est un graphe plongeable dans l'hypercube  $Q_{n+2}$ , et donc que  $cd(D_n) = n + 2$ .

Pour  $n \geq 2$ , et pour  $k \geq 1$ ,  $D_n^k$  est défini comme suit

$$D_n^1 = D_n$$

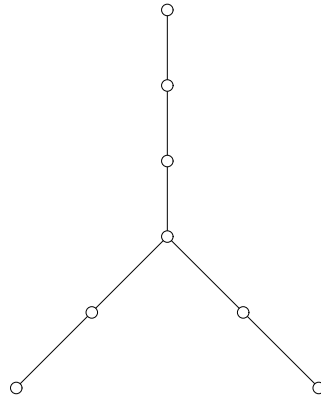
et

$D_n^k$  est le graphe pris en subdivisant chaque arête de l'arbre binaire par  $k - 1$  sommets et l'arête supplémentaire par  $k$  sommets.

Il est clair que  $|V(D_n^k)| = k \cdot 2^{n+1}$  (voir figure 5.6). Havel [33] a donné la proposition suivante concernant le plongement de ces graphes dans l'hypercube, par exemple pour  $k = 2$  ce graphe est équilibré et vérifie la conjecture 5.1.

**Proposition 5.5** *Pour  $n \geq 2$ ,  $|V(D_n^2)| = 2^{n+2}$ , et  $D_n^2$  est un graphe plongeable dans  $Q_{n+2}$ .*



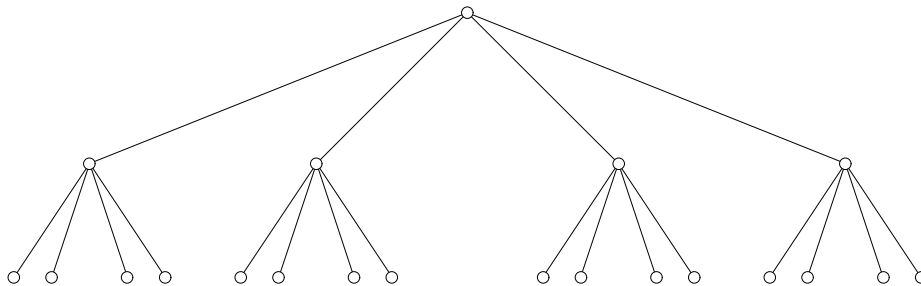
Figure 5.6 – l'arbre  $D_1^2$ 

Une généralisation de cette proposition est donnée aussi par Havel [33]

**Proposition 5.6** *Pour  $n \geq 2$  et  $s \geq 1$ ,  $|V(D_n^{(2s)})| = 2^{n+s+1}$ , et  $D_n^{(2s)}$  est un graphe plongeable dans  $Q_{n+s+1}$ .*

### 5.5.2 Autres plongements d'arbres

Les arbres  $n$ -aires complets sont tout naturellement une généralisation des arbres binaires, où le degré de la racine est égal à  $n$ . Un tel arbre de degré  $n$  et de hauteur  $k$  est noté  $T_k^n$ .

Figure 5.7 – l'arbre 4-aires  $T_2^4$ 

Havel [37] a donné la proposition suivante concernant le plongement de ces arbres dans l'hypercube

**Proposition 5.7**  $T_2^n$  est un arbre plongeable dans l'hypercube, et  $cd(T_2^n) = \lfloor \frac{3n+1}{2} \rfloor$ .

La question reste ouverte de savoir si un arbre binaire quelconque (arbre de degré maximum 3) peut se plonger avec dilatation 2 dans son hypercube optimal (ce qui serait le meilleur possible, au vu de la proposition 5.2), ou dilatation 1 dans l'hypercube de dimension la dimension optimale plus un.

Si l'arbre binaire est de bipartition équilibrée, c'est-à-dire a le même nombre de sommets dans chaque classe de la bipartition, on retrouve la conjecture 5.1 de Havel [33].

Cette conjecture est vérifiée pour certaines classes particulières d'arbres, à savoir les chenilles de degré maximum 3.

### 5.5.3 Plongements des chenilles

**Définition 5.4** Une chenille (figure 5.8) est un arbre avec au moins trois sommets, qui devient une chaîne si tous les sommets pendants de cet arbre sont supprimés.

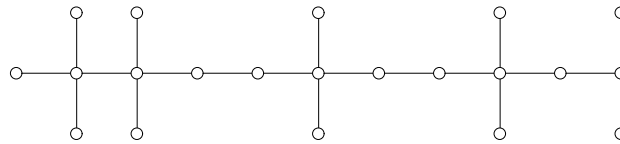


Figure 5.8 – le graphe d'une chenille de degré 4

Une chaîne  $P$  dans une chenille  $C$  est appelé *épine dorsale* de  $C$  si toute arête de  $C$  est incidente à un sommet de  $P$ . Les sommets de  $P$  sont appelés sommets épinaux. A noter que l'épine d'une chenille n'est pas unique.

Pour  $k \geq 1$ , soit  $l_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) des entiers positifs tel que  $k + l_1 + \dots + l_k \geq 3$ . D'après [21],  $CAT[l_1, \dots, l_k]$  denote la chenille qui est formée par une épine  $P$  à  $k$  sommets,  $l_i$  étant le nombre de sommets non épinaux adjacents au sommet  $i$  de  $P$ . Le nombre de sommets dans  $CAT[l_1, \dots, l_k]$  est  $k + l_1 + \dots + l_k$ , et  $CAT[0, l_2, \dots, l_k]$  ( $k$  sommets épinaux) est isomorphe à  $CAT[l_2 + 1, \dots, l_k]$  ( $k - 1$  sommets épinaux).

Pour simplifier la notation, des parenthèses et des puissances seront employés :  $CAT[(3)^4] = CAT[3, 3, 3, 3]$  et  $CAT[0, (2, 0)^3, (0, 2)^2] = CAT[0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 2]$ .

### Quelques plongements connus

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des chenilles de degré au plus 3, et soit  $\mathcal{C}_n$  le sous ensemble de  $\mathcal{C}$  formé par les chenilles équilibrées à  $2^n$  sommets.

Soit  $C$  une chenille dans  $\mathcal{C}$  et soit  $P$  son épine (on note  $v_1, \dots, v_s$  l'ensemble des sommets de  $P$ ).

Pour  $x, y \in V(P)$ , on note  $C_{x,y}$  le sous-graphe de  $C$  engendré par les sommets  $v_x, \dots, v_y$ .

Havel et Liebl [38] ont montré le théorème 5.4 suivant sur les chenilles de degré maximum 3, ce qui prouve la conjecture 5.1 dans ce cas particulier.

**Théorème 5.4** *Toute chenille équilibrée à  $2^n$  sommets de degré maximum 3 est plongeable dans  $Q_n$ .*

Leur preuve repose sur le lemme suivant :

**Lemme 5.1** *Pour  $n \geq 2$ , soit  $C \in \mathcal{C}_{n+1}$ . Soit  $P$  une épine de  $C$  et  $s = |V(P)|$ . Il existe  $x, y$  dans  $P$  ( $1 \leq x < y < s$ ) tel que  $C_{x,y}$  soit dans  $\mathcal{C}_n$ .*

Harary et Lewinter[32] ont montré un résultat identique pour les chenilles de degré maximum 4

**Théorème 5.5** *Toute chenille équilibrée à  $2^n$  sommets de degré maximum 4 est plongeable dans  $Q_n$ .*

Havel, Laborde et Mollard [21] ont donné d'autres plongements de ce type de graphes. Ils ont aussi montré, en utilisant les propriétés de l'hypercube, que certaines chenilles particulières n'admettent pas de plongement optimal dans  $Q_n$ .

**Lemme 5.2** Pour  $n \geq 3$  et pour  $k \geq 0$ ,

$$CAT[n-1, (0, n-3)^k, 0, n-1] \not\subseteq Q_n.$$

La preuve de ce lemme est détaillée dans [21], elle utilise le fait que deux sommets à distance 2 appartiennent à exactement 2 chaînes de longueurs 2 dans l'hypercube.

La proposition suivante sur le plongement des chenilles est aussi dûe à ces mêmes auteurs [21]

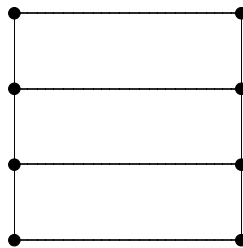
**Proposition 5.8** *i) Pour  $n \geq 4$ ,  $CAT[(3)^{2^n}] \subseteq Q_{n+2}$ ,*

*ii) Pour  $0 \leq n \leq 3$ ,  $CAT[(3)^{2^n}] \not\subseteq Q_{n+2}$ .*

La preuve de *ii)* repose sur des considérations de degré maximum et le lemme 5.2. La preuve de *i)* se fait par une simple induction.

## 5.6 Plongements des grilles et des échelles

**Définition 5.5** Une  $n$ -grille  $M = M(d_1 \times d_2, \dots \times d_n)$  est le produit cartésien de  $n$  chaînes  $P_1, P_2, \dots, P_n$  d'ordres respectifs  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .



$$M(2 \times 4) = P_2 \square P_4$$

Figure 5.9 – grille binaire

### 5.6.1 Grille binaire

Une grille est dite *binnaire* si  $d_i$  est une puissance de 2 pour tout  $i$ . Un exemple de grille binaire est montré dans la figure 5.9 ci-dessus.

En particulier, si  $d_i = 2$  pour tout  $i$ , alors  $M$  est l'hypercube de dimension  $n$ .

Harary et Lewinter [28] ont montré que les grilles binaires sont des graphes plongables dans l'hypercube en utilisant le lemme suivant

**Lemme 5.3** *Si  $A$  et  $B$  sont deux graphes plongables dans  $U$  et  $W$  respectivement, alors  $A \square B$  est plongable dans  $U \square W$ .*

*Preuve:* On a  $V(A \square B) \subseteq V(U \square W)$ , et par définition du produit cartésien, on a  $E(A \square B) \subset E(U \square W)$ .  $\square$

### Plongements des grilles binaires dans l'hypercube

**Théorème 5.6** *La  $n$ -grille est un graphe plongable dans  $Q_m$  si et seulement si  $d_1.d_2 \dots d_n \leq 2^m$ .*

*Preuve:* La condition nécessaire vient du fait que  $|V(M)| = d_1.d_2 \dots d_n$ , alors que  $|V(Q_m)| \leq 2^m$ .

Maintenant supposons que  $d_1.d_2 \dots d_n = 2^m$ . Dans ce cas  $M$  est le produit cartésien de chaînes d'ordres  $d_i$  (ou  $d_i$  est une puissance de 2 pour tout  $i$ ). Chaque chaîne d'ordre  $d_i$  se plonge dans son hypercube optimal de dimension  $\log d_i$  car l'hypercube est hamiltonien, la preuve s'en suit en utilisant le lemme 5.3.  $\square$

### 5.6.2 Échelles

**Définition 5.6** *Soient  $\mathbf{P}_1 = a_1, a_2, \dots, a_k$  et  $\mathbf{P}_2 = b_1, b_2, \dots, b_k$  deux chaînes d'ordres  $k$ , tels que les sommets  $a_i$  et  $b_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) sont reliés par des chaînes*

d'ordres  $r_1, \dots, r_k$  de telle sorte que les extrémités de  $r_i$  soient reliées l'une par une arête à  $a_i$  et l'autre par une autre arête à  $b_i$  pour  $i = 1, \dots, k$  ( $a_i$  et  $b_i$  seront reliés par une arête si  $r_i = 0$ ). Le graphe qui en résulte est appelée une échelle  $E$ , et les chaînes entre  $a_i$  et  $b_i$  sont appelées les rangs de cette échelle.

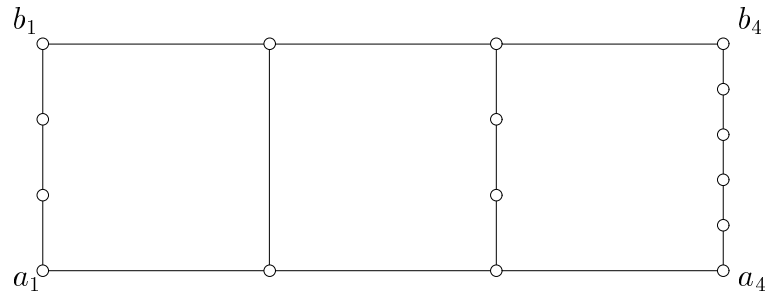


Figure 5.10 – une échelle de rangs 2, 0, 2 et 4

Le théorème 5.7 suivant sur le plongement des échelles dans l'hypercube est dû à Bezrukov [11]

**Théorème 5.7** *Toute échelle équilibrée  $E$  est plongeable dans son hypercube optimal.*

La preuve de ce théorème se fait par une simple induction, il suffit de le vérifier pour une échelle  $E$  équilibrée à  $2^n$  sommets (sinon on rajoute à  $E$  un rang d'ordre  $2^n - |V(E)|$ ).

Il en déduit facilement le corollaire suivant sur le plongement des chenilles dans l'hypercube s'en déduit facilement

**Corollaire 5.2** *Soit  $C$  une chenille de degré maximum 3, telle que toute arête de  $C \setminus P$  soit subdivisée en un nombre pair de sommets. Alors  $C$  est plongeable dans son hypercube optimal.*

## 5.7 Plongement des quasi-étoiles et des double quasi-étoiles

Après avoir rappelé des résultats sur le plongement de certains graphes dans l'hypercube, nous nous intéressons à présent dans cette section à deux familles de graphes, à savoir les quasi-étoiles et les doubles quasi-étoiles.

Par opposé aux plongements précédents qui concernaient les graphes à faible degré, on s'intéresse ici aux plongements de graphes ayant un degré maximum par rapport à l'hypercube.

Une *étoile* est, comme son nom l'indique, un arbre avec exactement un sommet  $u$  qui n'est pas pendant. Ce sommet est appelé *jonction*, et son degré est le nombre d'arêtes qui sont incidentes à  $u$ . Un tel arbre est noté  $K_{1,n}$

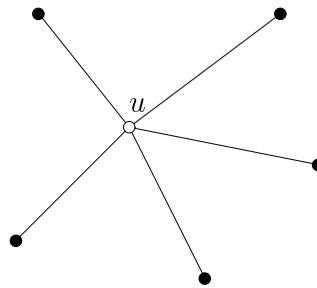


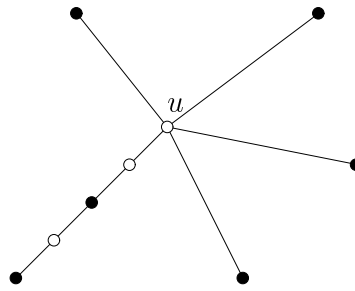
Figure 5.11 –  $K_{1,n}$

Il est évident qu'une étoile est cubique et que  $cd(K_{1,n}) = n$ .

Une *quasi-étoile* est une étoile dont les arêtes sont subdivisées. Le lemme 5.4 donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une quasi-étoile soit équilibrée.

**Lemme 5.4** *Une quasi-étoile est équilibrée si et seulement si elle possède exactement une seule chaîne de longueur impaire.*

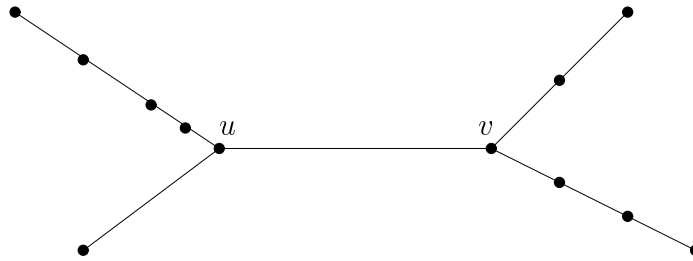
Le degré d'une quasi-étoile est le nombre de chaînes qui sont incidentes à  $u$ . On notera  $S(a_1, a_2, \dots, a_k)$  une quasi-étoile ayant  $k$  chaînes incidentes à  $u$ , d'ordres respectifs  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Une quasi-étoile de degré  $k$ , à  $2^n$  sommets, est appelée  $k$ -quasi-étoile équilibrée.

Figure 5.12 – la quasi-étoile  $S(1, 1, 1, 1, 4)$ 

Une *double étoile* est formée de deux étoiles dont les jonctions  $u$  et  $v$  sont reliées par une arête. À noter que  $u$  et  $v$  ne sont pas forcément de même degré.

Une *double quasi-étoile* est une subdivision d'une double étoile, dans laquelle l'arête qui relie  $u$  et  $v$  n'est pas subdivisée.

Une double quasi-étoile dont les sommets  $u$  et  $v$  sont de degrés respectifs  $k$  et  $s$  ( $k \geq s$ ), est notée  $S(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_s)$ . La figure suivante montre un exemple d'un tel graphe

Figure 5.13 – la double quasi-étoile  $S(1, 4; 2, 3)$ 

Il est clair qu'une double quasi-étoile est équilibrée si et seulement si le nombre de chaînes d'ordres impairs qui sont incidentes à  $u$  est égal au nombre de chaînes d'ordres impairs qui sont incidentes à  $v$ . Une double quasi-étoile équilibrée  $S(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_s)$  est appelée  $k$ -double quasi-étoile équilibrée.

Havel [33] a montré que les 3-quasi-étoiles équilibrées à  $2^n$  sommets sont plongeables dans  $Q_n$ , Nebešký [60] a étendu ce résultat aux 4-quasi-étoiles équilibrées et 5-quasi-étoiles équilibrées. Limaye [48] a prouvé ce même résultat pour  $k = 6$ . Harary et



Lewinter [29] ont cru prouvé le théorème général suivant concernant le plongement des quasi-étoiles

**Théorème 5.8** *Toute  $k$ -quasi-étoile équilibrée à  $2^n$  sommets, avec  $k \leq n$ , est plongeable dans  $Q_n$ .*

Leur "preuve" reposait sur le lemme suivant :

"Étant donné un ensemble de sommets  $\{v_1, \dots, v_s\}$  qui appartiennent à la même classe de la bipartition de  $Q_n$ , et  $\{e_1, \dots, e_s\}$  un ensemble d'entiers positifs tels que  $\sum e_i = 2^n$ . Il existe  $s$  chaînes sommet-disjointes  $\{P_1, \dots, P_s\}$  d'ordres respectifs  $e_1, \dots, e_s$ , tels que  $v_i$  soit une extrémité de  $P_i$ ".

Il est facile de voir que ce lemme est faux en prenant  $v_1, \dots, v_s$  comme étant les voisins d'un sommet donné  $v$  (avec  $s = n$ ), et aucun des entiers  $e_i$  qui soit égal à 2. Néanmoins, ce théorème reste vrai par le résultat de Nebeskỳ [61].

La preuve du théorème 5.8 se fait par induction, en utilisant le théorème 4.1 page 52. Une preuve complète est donnée dans [61]. Ce résultat sera aussi une conséquence immédiate de notre théorème 5.9 page 100 sur le plongement des  $MD$ -graphes dans l'hypercube.

La conjecture suivante concernant les doubles quasi-étoiles est dûe à Havel [33]

**Conjecture 5.2** *Toute double quasi-étoile équilibrée à  $2^n$  sommets, de degré maximum  $n$ , est un graphe partiel de  $Q_n$ .*

Nous nous proposons de montrer cette conjecture dans de ce chapitre.

## 5.8 $MD(a_1, \dots, a_k)$ graphes

Dans cette section, nous introduisons une nouvelle famille de graphes, notée par  $MD$ -graphes. Nous prouvons que les quasi-étoiles et les doubles quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans un certain  $MD$ -graphes.

**Définition 5.7** Soit  $uv$  une arête donnée. On désigne par  $MD(a_1, \dots, a_k)$  graphe, le graphe formé par l'arête  $uv$  et de  $k$  ( $k \geq 1$ ) chaînes distinctes d'ordres respectifs  $a_1, \dots, a_k$  où les  $a_i$  sont des entiers positifs pairs, tels que les extrémités de chaque chaîne soient reliées l'une par une arête à  $u$  et l'autre extrémité par une arête à  $v$ , et tels que  $a_1 + \dots + a_k = 2^n - 2$  (figure 5.14).

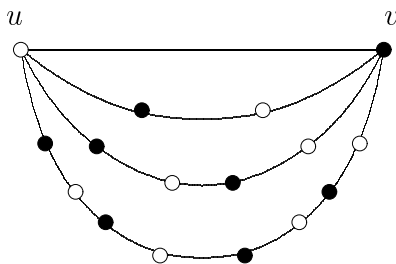


Figure 5.14 – le graphe  $MD(2,4,8)$

Il est clair que  $MD(a_1, \dots, a_k)$  est biparti si et seulement si  $a_i$  est pair pour tout  $i$ . On peut facilement voir qu'un  $MD$ -graphe biparti est *équilibré*. On note ce graphe, un  $MD$ -graphe  $k$ -équilibré.

**Propriété 5.1** Toute  $k$ -quasi-étoile équilibrée à  $2^n$  sommets est plongeable dans un certain  $MD$ -graphe  $(k - 1)$ -équilibré.

*Preuve:* Soit  $S(a_1, \dots, a_k)$  une  $k$ -quasi-étoile équilibrée à  $2^n$  sommets. On peut supposer, sans perdre de généralité, que  $a_1$  est impair. Soit  $v$  le sommet adjacent à  $u$  sur la chaîne d'ordre  $a_2$ , et soit  $w_1, \dots, w_k$  les sommets extrémités des chaînes d'ordres  $a_1, \dots, a_k$ . On ajoute une arête entre  $w_1$  et  $w_2$  et des arêtes entre  $w_i$  et  $v$  pour  $i = 3, \dots, k$ .  $S(a_1, \dots, a_k)$  est donc un graphe plongeable dans  $MD(a_1 + a_2 - 1, a_3, \dots, a_k)$ , et  $S$  est équilibrée implique que  $MD$  est équilibré (Figure 5.15).  $\square$

**Propriété 5.2** Toute  $k$ -double quasi-étoile équilibrée à  $2^n$  sommets est plongeable dans un certain  $MD$ -graphe  $k$ -équilibré.

*Preuve:* Soit  $S(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_s)$  une  $k$ -double quasi-étoile équilibrée à  $2^n$  sommets. On peut supposer, sans perdre de généralité, que  $a_1, \dots, a_i; b_1, \dots, b_i$  sont

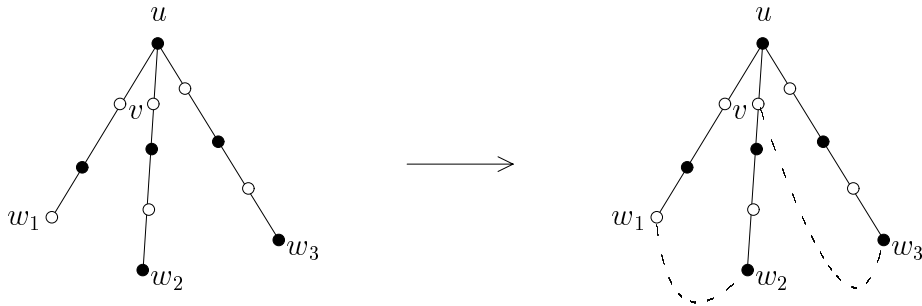


Figure 5.15 – plongement de  $S(3,4,4)$  dans  $MD(4,6)$ , les arêtes ajoutées sont en pointillées

des entiers impairs et que  $a_{i+1}, \dots, a_k; b_{i+1}, \dots, b_s$  sont des entiers pairs. Soient  $w_1, \dots, w_k$  les sommets extrémités sur les chaînes d'ordres  $a_1, \dots, a_k$  et soient  $y_1, \dots, y_s$  les sommets extrémités sur les chaînes d'ordres  $b_1, \dots, b_s$ . On ajoute des arêtes entre  $w_i$  et  $y_i$  pour  $i = 1, \dots, s$ , et des arêtes entre  $v$  et  $w_i$  pour  $i = s+1, \dots, k$ .  $S(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_s)$  est donc un graphe plongeable dans  $MD(a_1 + b_1, \dots, a_s + b_s, a_{s+1}, \dots, a_k)$ , et  $S$  est équilibrée implique que  $MD$  est équilibré (Figure 5.16).  $\square$

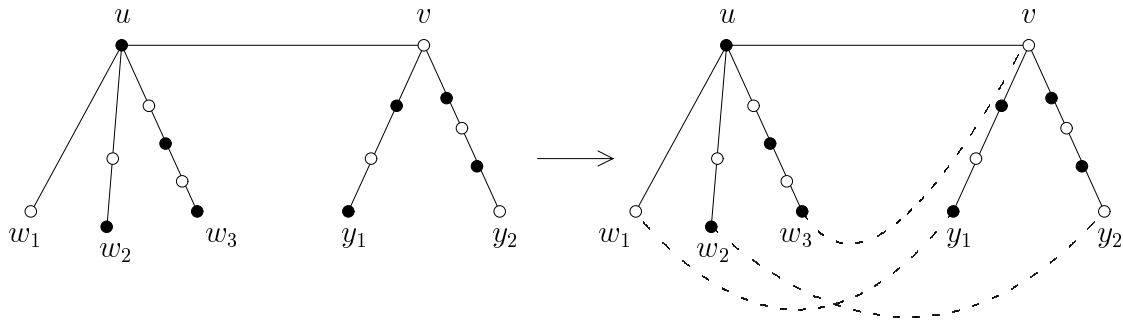


Figure 5.16 – plongement de  $S(1,2,4;3,4)$  dans  $MD(4,4,6)$ , les arêtes ajoutées sont en pointillées

## 5.9 Théorème principal

Le but de cette section est de montrer que les  $MD$ -graphes équilibrés à  $2^n$  sommets sont des graphes plongeables dans  $Q_n$ . Nous en déduisons, indépendamment du résultat de Nebeský [60], que les quasi-étoiles équilibrées à  $2^n$  sommets sont plongeables dans  $Q_n$ . Nous en déduisons également que les doubles quasi-étoiles équilibrées à  $2^n$  sommets sont aussi des graphes plongeables dans  $Q_n$ , ce qui résoudra la conjecture 5.2 page 97.

**Théorème 5.9** *Tout  $MD$ -graphe  $k$ -équilibré à  $2^n$  sommets, avec  $k \leq n - 1$ , est plongeable dans  $Q_n$ .*

Comme conséquence directe de ce théorème, nous avons les deux corollaires suivants :

**Corollaire 5.3** *Toute  $k$ -quasi-étoile équilibrée à  $2^n$  sommets, avec  $k \leq n$ , est plongeable dans  $Q_n$ .*

**Corollaire 5.4** *Toute  $k$ -double quasi-étoile équilibrée à  $2^n$  sommets, avec  $k \leq n - 1$ , est plongeable dans  $Q_n$ .*

*Preuve:* Soit un  $MD(a_1, \dots, a_k)$  graphe à  $2^n$  sommets. Supposons, sans perdre de généralité, que  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ . (5.1)

Le cas  $k = 1$  est vérifiée puisque  $Q_n$  est hamiltonien. La preuve de ce théorème sera divisé en plusieurs cas.

cas 1 :  $k = 2$ .

Soient  $a'_1 = \frac{a_1}{2}$ ,  $a'_2 = \frac{a_2}{2}$ ,  $B_1$  et  $B_2$  les chaînes adjacentes à  $u$ , d'ordres respectifs  $a'_1$  et  $a'_2$ , et soient  $u_1, v_1$  les extrémités de  $B_1$  et  $B_2$  autre que  $u$ . Soient  $B'_1$  et  $B'_2$  les chaînes adjacentes à  $v$ , d'ordres respectifs  $a'_1$  et  $a'_2$ , et soient  $u'_1, v'_1$  les extrémités de  $B'_1$  et  $B'_2$  autre que  $v$ . Soit  $P_1$  la chaîne d'ordre  $2^{n-1}$  formée par  $B_1 \cup B_2 \cup \{u\}$ , et soit  $P_2$  la chaîne d'ordre  $2^{n-1}$  formée par  $B'_1 \cup B'_2 \cup \{v\}$ . Considérons maintenant

une décomposition canonique de  $Q_n$  en  $Q'_{n-1}$  et  $Q''_{n-1}$ .  $Q'_{n-1}$  est hamiltonien, soit  $A$  un plongement de  $P_1$  dans  $Q'_{n-1}$ , notons  $x = \phi(u_1), y = \phi(v_1)$  et  $z = \phi(u)$ . Soit  $A'$  le même plongement de  $P_2$  dans  $Q''_{n-1}$ , on aura  $x' = \phi(u'_1), y' = \phi(v'_1)$  et  $z' = \phi(v)$ . Le graphe formé par  $A \cup A' \cup \{xx'\} \cup \{yy'\} \cup \{zz'\}$  est isomorphe à  $MD(a_1, a_2)$  (Figure 5.17).

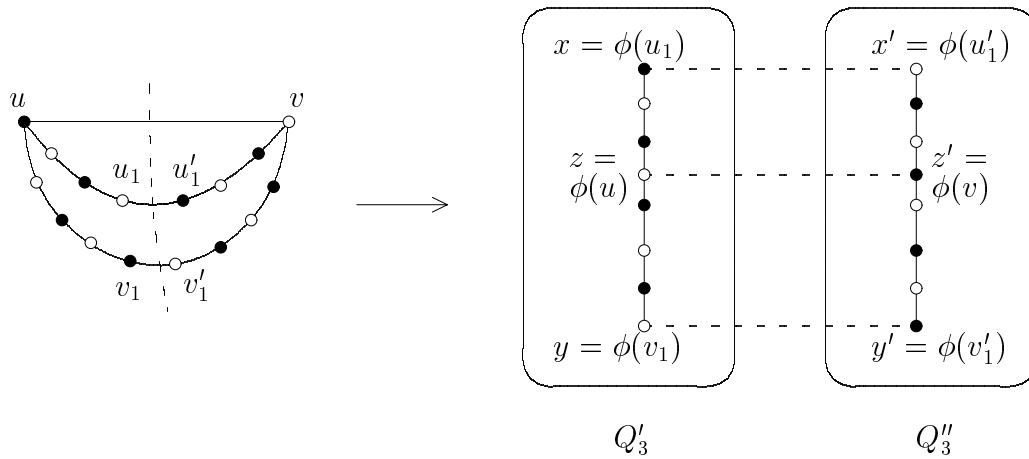


Figure 5.17 – plongement de  $MD(2,4,8)$  dans  $Q_4$

cas 2 :  $k \geq 3$ .

Nous supposons, par hypothèse d'induction, que  $MD(a_1, \dots, a_{k*})$  à  $2^{n-1}$  sommets et plongeable dans  $Q_{n-1}$  pour  $k* \leq n - 2$ , et soit un  $MD(a_1, \dots, a_k)$  à  $2^n$  sommets ( $k \leq n - 1$ ).

cas 2.1 :  $k = 3$ .

Pour  $n = 4$ , il est immédiat de construire des plongements de  $MD(2, 2, 10)$ ,  $MD(2, 4, 8)$ ,  $MD(2, 6, 6)$  et  $MD(4, 4, 6)$  dans le graphe de  $Q_4$ . Un exemple d'un tel plongement est montré dans la figure 5.18 suivante

Pour  $n \geq 5$ , soit  $a'_3 = 2^{n-1} - 2 - a_1 > 0$ . On remarquera que  $a'_3 < a_3$ , par hypothèse d'induction,  $MD(a_1, a'_3)$  étant équilibré à  $2^{n-1}$  sommets, est plongeable dans  $Q'_{n-1}$ . Il existe donc un plongement  $MD'$  de  $MD(a_1, a'_3)$  dans  $Q'_{n-1}$ , notons  $x = \phi(u)$  et  $y = \phi(v)$ .

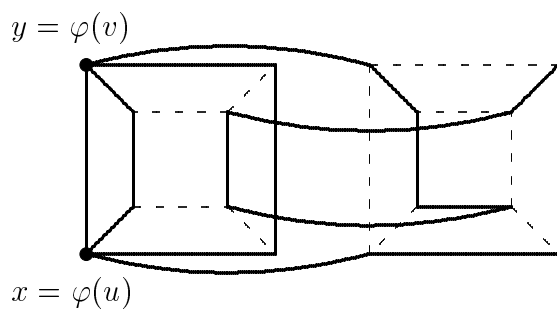


Figure 5.18 – plongement de  $MD(2, 2, 10)$  dans  $Q_4$

Soit  $u_1v_1$  une arête de même direction que  $xy$ , sur la chaîne d'ordre  $a'_3$  (cette arête existe puisque cette chaîne forme un cycle pair avec  $xy$ ). Dans  $Q''_{n-1}$ , par le théorème 4.2, il existe deux cycles sommet-disjoints  $C_1$  et  $C_2$  d'ordres respectifs  $a_3 - a'_3$  et  $a_2$  qui contiennent  $u'_1v'_1$  et  $x'y'$ . Le graphe formé par  $MD' \cup C_1 \cup C_2 \cup \{xx' \cup yy' \cup u_1u'_1 \cup v_1v'_1\} \setminus \{u_1v_1 \cup u'_1v'_1 \cup x'y'\}$  est isomorphe à  $MD(a_1, a_2, a_3)$  (voir figure 5.19).

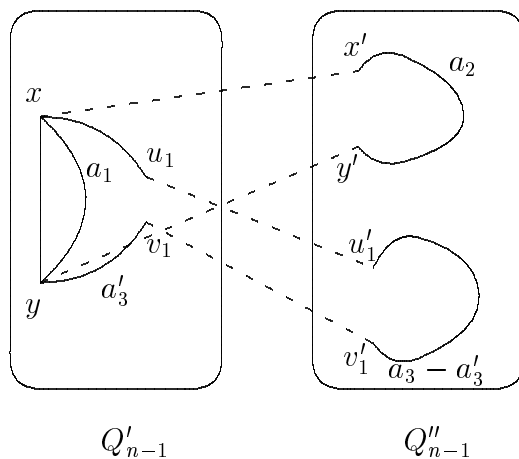


Figure 5.19 – plongement de  $MD(a_1, a_2, a_3)$  dans  $Q_n$

cas 2.2 :  $k = 4$ .

On note  $a'_4 = 2^{n-1} - 2 - a_1 - a_2$ . On remarquera que  $a'_4 < a_4$ , deux cas sont à distinguer

cas 2.2.1 :  $a'_4 > 0$

Par hypothèse d'induction,  $MD(a_1, a_2, a'_4)$  est équilibré à  $2^{n-1}$  sommets, est plongeable dans  $Q'_{n-1}$ . Il existe donc un plongement  $MD'$  de  $MD(a_1, a_2, a'_4)$  dans  $Q'_{n-1}$ , notons  $x = \phi(u)$  et  $y = \phi(v)$ . Soit  $u_1v_1$  une arête de même direction que  $xy$  sur la chaîne d'ordre  $a'_4$  (cette arête existe toujours pour la même raison). Dans  $Q''_{n-1}$ , par le théorème 4.2, il existe deux cycles sommet-disjoints  $C_1$  et  $C_2$  d'ordres respectifs  $a_4 - a'_4$  et  $a_3$  qui contiennent  $u'_1v'_1$  et  $x'y'$ . Le graphe formé par  $MD' \cup C_1 \cup C_2 \cup \{xx' \cup yy' \cup u_1u'_1 \cup v_1v'_1\} \setminus \{u_1v_1 \cup u'_1v'_1 \cup x'y'\}$  est isomorphe à  $MD(a_1, a_2, a_3, a_4)$  (figure 5.20).

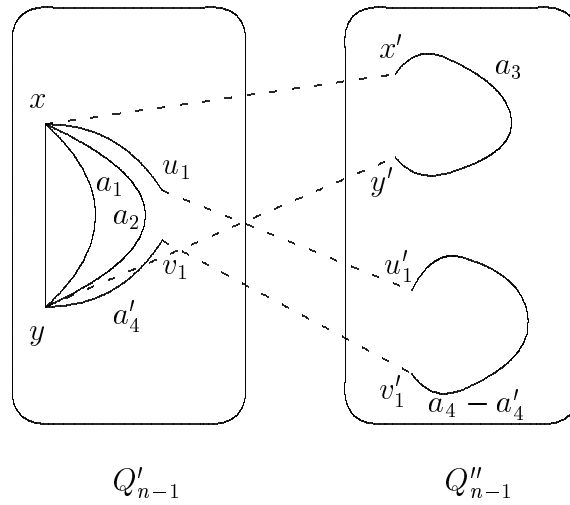
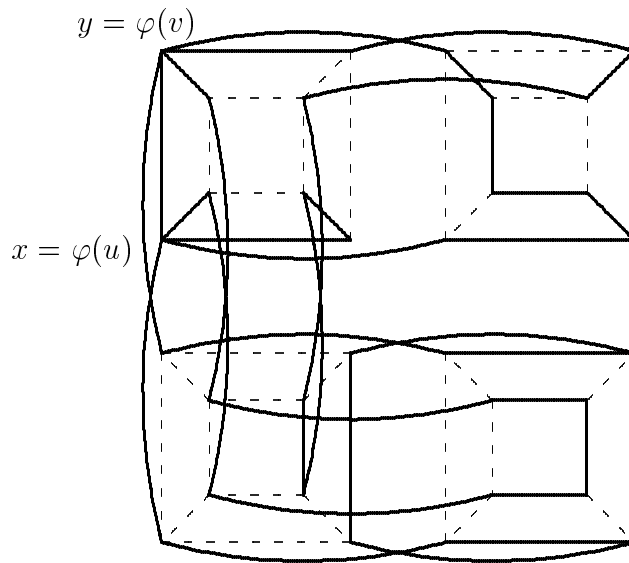


Figure 5.20 – plongement de  $MD(a_1, a_2, a_3, a_4)$  dans  $Q_n$

cas 2.2.2 :  $a'_4 = 0$

On a donc un  $MD(2^{n-2} - 2, 2^{n-2}, 2^{n-2}, 2^{n-2})$ .

Pour  $n = 5$ , le plongement de  $MD(6, 8, 8, 8)$  dans  $Q_5$  est donnée dans la figure 5.21.

Figure 5.21 – plongement de  $MD(6, 8, 8, 8)$  dans  $Q_5$ 

Pour  $n \geq 6$ , soit  $a'_2 = 2$  et  $a'_4 = 2^{n-2} - 2$ .  $MD(a_1, a'_2, a'_4)$  est équilibré à  $2^{n-1}$  sommets, est plongable dans  $Q'_{n-1}$ . Donc, il existe un plongement  $MD'$  de  $MD(a_1, a'_2, a'_4)$  dans  $Q'_{n-1}$ , notons  $x = \phi(u)$  et  $y = \phi(v)$ .

Soient  $x_1y_1$  et  $x_2y_2$  deux arêtes de même direction que  $xy$ , sur les chaînes d'ordres respectifs  $a'_2$  et  $a'_4$ . Dans  $Q''_{n-1}$ , par le théorème 4.2, il existe trois cycles sommet-disjoints  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  d'ordres respectifs  $a_2 - a'_2$ ,  $a_4 - a'_4$  et  $a_3$  qui contiennent  $x'_1y'_1$ ,  $x'_2y'_2$  et  $x'y'$ . Le graphe formé par  $MD' \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \{xx' \cup yy' \cup x_1x'_1 \cup y_1y'_1 \cup x_2x'_2 \cup y_2y'_2\} \setminus \{x_1y_1 \cup x'_1y'_1 \cup x_2y_2 \cup x'_2y'_2 \cup x'y'\}$  est isomorphe à  $MD(a_1, a_2, a_3, a_4)$ .

Le cas général correspond au cas  $k \geq 5$ .

cas 2.3 :  $k \geq 5$ .

Nous allons tout d'abord prouver que  $a_3 \leq 2^{n-1} - 4(k-3)$ . (1)

On va procéder par l'absurde, pour cela supposons que  $a_3 > 2^{n-1} - 4(k-3)$ . Comme  $a_3$  est pair, alors  $a_3 \geq 2^{n-1} - 4(k-3) + 2$ . (2)

Comme les  $a_i$  sont des entiers positifs pour tout  $i$ , alors par la relation (5.1) page



$$98, a_3 \leq \frac{2^n - 6}{k - 2}. \quad (3)$$

A noter que  $k \leq n - 1$ , donc -en combinant (2) et (3)- on a

$$2^{n-1} - 4(n - 4) + 2 \leq 2^{n-1} - 4(k - 3) + 2 \leq \frac{2^n - 6}{k - 2} \leq \frac{2^n - 6}{3}$$

Donc  $2^{n-3} \leq 3n - 15$ , ce qui est faux. Le résultat s'en suit.

Il est clair que  $a_3 + a_4 + \dots + a_k \geq 2^{n-1} + 2$ , on en déduit d'après (1) qu'il existe des ensembles disjoints  $I_1$  et  $I_2$  de  $\{4, \dots, k\}$  et des entiers pairs positifs strictement  $a'_i$  qui satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \cup I_2 = \{4, \dots, k\} \\ a'_i = a_i \quad \text{si } i \in I_1 \\ a'_i \leq a_i - 4 \quad \text{si } i \in I_2 \\ a_1 + a_2 + \sum_{i=4}^k a'_i = 2^{n-1} - 2 \end{array} \right.$$

Par l'hypothèse d'induction,  $MD(a_1, a_2, a'_4, a'_5, \dots, a'_k)$  est équilibré à  $2^{n-1}$  sommets, est plongeable dans  $Q'_{n-1}$ .

Il existe donc un plongement  $MD'$  de  $MD(a_1, a_2, a'_4, a'_5, \dots, a'_k)$  dans  $Q'_{n-1}$ , notons  $x = \phi(u)$  et  $y = \phi(v)$ .

Pour  $i \in I_2$ , soit  $x_i y_i$  une arête de même direction que  $xy$  sur le chaîne d'ordre  $a'_i$ .

On note  $k_2 = |I_2|$ . Il est clair que  $k_2 + 1 \leq k - 2 \leq (n - 1) - 2$ . Par le théorème 4.2, il existe donc  $k_2 + 1$  cycles sommet-disjoints  $C'_3, C'_i$  dans  $Q''_{n-1}$ , qui contiennent  $x' y', x'_i y'_i$  ( $i \in I_2$ ), d'ordres respectifs  $a_3$  et  $a'_i$  ( $i \in I_2$ ).

Soit  $C_3 = C'_3 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{x' y'\}$  et  $C_i = C'_i \cup \{x_i x'_i \cup y_i y'_i\} \setminus \{x_i y_i \cup x'_i y'_i\}$ .

Le graphe formé par  $MD' \cup C_3 \bigcup_{i \in I_2} C_i$  est isomorphe à  $MD(a_1, \dots, a_k)$ . Ce qui complète la preuve.  $\square$

## 5.10 $MD(a_1, \dots, a_k)$ graphes subdivisés

On peut également se poser la question suivante : Les  $MD(a_1, \dots, a_k)$  restent-ils des graphes plongeables dans  $Q_n$  si on subdivise l'arête  $uv$  ?

**Définition 5.8** *Un MD graphe subdivisé, noté  $MD(a_0; a_1, \dots, a_k)$ , est un  $MD(a_1, \dots, a_k)$  graphe dans lequel l'arête  $uv$  est subdivisée en un nombre pair de sommets  $a_0$ , et tel que  $a_0 + a_1 + \dots + a_k = 2^n - 2$  (Figure 5.22).*

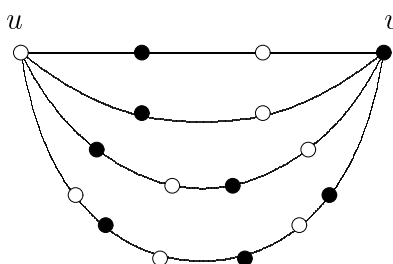


Figure 5.22 – le graphe  $MD(2; 2, 4, 6)$

Il est clair que si l'arête  $uv$  est subdivisée en un nombre impair de sommets, le graphe qui en résulte ne serait pas plongeable dans l'hypercube car il ne serait pas biparti. On s'intéresse donc uniquement à une subdivision d'ordre pair de l'arête  $uv$ .

Il est facile à voir que ces graphes, les  $MD(a_0; a_1, \dots, a_k)$ , sont plongeables dans  $Q_n$  si  $k \leq n - 2$ . En effet, il suffit de rajouter une arête entre  $u$  et  $v$ , on aura donc un  $MD(a_0, a_1, \dots, a_k)$  graphe avec  $k \leq n - 1$ , qui est plongeable dans  $Q_n$  d'après le théorème 5.9.

Le seul cas qui reste à traiter est lorsque  $k = n - 1$ . On peut supposer, sans perdre de généralité, que  $a_0 \leq a_1, \dots, \leq a_{n-1}$ .

La figure 5.23 montre un plongement de  $MD(2; 2, 2)$  dans  $Q_3$ , la chaîne d'ordre  $a_0$  étant en gras, celle d'ordre  $a_1$  en pointillé et celle d'ordre  $a_2$  est en trait normal.

Il est également très facile de construire des plongements de  $MD(2; 2, 2, 8)$ , de  $MD(2; 2, 4, 6)$  et de  $MD(2; 4, 4, 4)$  dans le graphe de  $Q_4$ , ceci résout le cas  $n \leq 4$ .

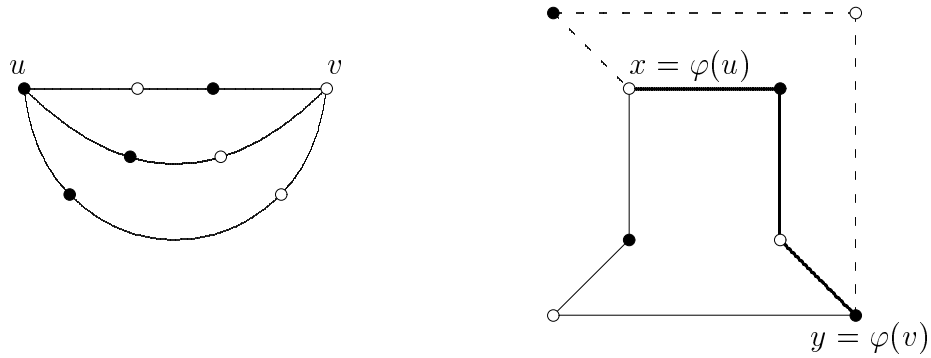
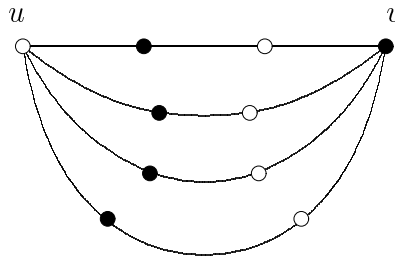


Figure 5.23 – plongement de  $MD(2; 2, 2)$  dans  $Q_3$

*cas général :  $n \geq 5$ .*

Le problème dans le cas général n'a pas été résolu, mais nous avons la conjecture suivante

**Conjecture 5.3** *Un  $MD(a_0; a_1, \dots, a_{n-1})$  graphe est plongeable dans le graphe de  $Q_n$  si et seulement si, il ne contient pas le graphe de la figure suivante comme sous-graphe induit.*



Considérons un  $MD(a_0; a_1, \dots, a_{n-1})$  graphe, et supposons qu'il contienne ce graphe comme sous graphe induit.

Nous allons montrer que ce graphe n'est pas plongeable dans  $Q_n$ . Si tel était le cas, il existerait donc un plongement  $MD'$  de  $MD(a_0; a_1, \dots, a_{n-1})$  dans  $Q_n$  tels que  $x = \phi(u)$  et  $y = \phi(v)$ . Deux cas se présentent

*cas 1* :  $d(x, y) = 1$ .

Dans ce cas,  $x$  et  $y$  sont deux sommets voisins dans l'hypercube  $Q_n$ . Mais le sommet  $u$  admet  $n$  sommets voisins dans le graphe  $MD(a_0; a_1, \dots, a_{n-1})$ , donc son plongement  $MD'$  doit admettre  $n$  sommets voisins dans  $Q_n$  autre que le sommet  $\varphi(u)$ , ce qui n'est pas possible dans ce cas.

*cas 2* :  $d(x, y) = 3$ .

$x$  et  $y$  sont à distance 3 dans  $Q_n$ . Le graphe de la figure précédente peut être considéré comme étant 4 chaînes disjointes de longueur 4 entre  $u$  et  $v$ . Or, dans  $Q_n$ , il existe exactement 3 chaînes disjointes de longueur 4 entre deux sommets à distance 3. Donc ce graphe ne peut pas être plongeable dans  $Q_n$ .

Il est à noter que si la conjecture 5.3 est vérifiée, alors la conjecture suivante l'est aussi

**Conjecture 5.4** *Une double quasi-étoile équilibrée à  $2^n$  sommets, de degré maximum est  $n$ , et dont l'arête  $uv$  est subdivisée en un nombre pair de sommets, est plongeable dans  $Q_n$ .*

## 5.11 Problèmes ouverts

Pour terminer ce chapitre, nous citons quelques problèmes de plongement de graphes dans l'hypercube qui restent ouverts.

On peut se poser la question suivante : les  $MD$  graphes subdivisés, où l'on remplace les entiers positifs pairs  $a_0, a_1, \dots, a_k$  par des entiers positifs impairs  $b_0, b_1, \dots, b_k$  restent-ils des graphes plongeables dans  $Q_n$  ?

Plusieurs conjectures sont également citées en ce qui concerne le plongement des arbres dans l'hypercube

**Conjecture 5.5** *Tout arbre  $T$  avec  $\Delta(T) \leq 3$  peut être plongé dans son hypercube de dimension optimale plus 1, avec dilatation 1.*

---

**Conjecture 5.6** *Tout arbre  $T$  avec  $\Delta(T) \leq 3$  peut être plongé dans son hypercube optimal avec dilatation 2.*

**Conjecture 5.7** *Tout arbre  $T$  avec  $\Delta(T) \leq 5$  peut être plongé dans son hypercube optimal avec dilatation 2.*

Des éléments de réponse sont donnés dans [34]. En particulier, Il est montré que si la conjecture 5.1 page 85 est vraie, cela implique que les conjectures 5.5, 5.6 et 5.7 sont également satisfaites.



# Bibliographie

- [1] H.L. Abbott. Hamiltonian circuits and paths in the  $n$ -cube. *Canad. Math. Bull.*, (9) :557–562, 1966.
- [2] B. Alspach, J.-C. Bermond, and D. Sotteau. Decomposition into cycles. i. hamilton decompositions, cycles and rays (montreal, pq, 1987). *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci*, (17) :9–18, 1990.
- [3] L. R. Alvarez. Undirected graphs as graphs of modular lattices. *Canad. Journ. Math.*, (17) :923–932, 1965.
- [4] J. Arfati, C.H. Papadimitriou, and P. Papageorgiou. The complexity of cubical graphs. *Proceedings of 11th International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, pages 51–57, 1984.
- [5] J. Aubert and B. Schneider. Décomposition de  $k_n + k_m$  en cycles hamiltoniens. *Discrete Mathematics*, (37) :19–27, 1981.
- [6] J. Aubert and B. Schneider. Décomposition de la somme cartésienne d'un cycle et de l'union de deux cycles hamiltoniens en cycles hamiltoniens. *Discrete Mathematics*, (38) :7–16, 1982.
- [7] H.J. Bandelt and H.M. Mulder. Infinite median graphs,  $(0,2)$ -graphs and hypercubes. *Journal of Graph Theory*, (7) :487–492, 1983.
- [8] C. Berge. *Graphes and hypergraphs*. Dunod, Paris, 1973.
- [9] J.C. Bermond. Hamiltonian decomposition of graphs and hypergraphs. *B. Bollobas, ed. Advanced in Graph Theory, Annals of Discrete Mathematics*, 3 :21–28, 1978.

- 
- [10] A. Berrachedi. *Sur quelques propriétés métriques du graphe de type hypercube*. PhD thesis, l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, 1997.
- [11] S. Bezrukov, B. Monien, W. Unger, and G. Wechsung. Embedding ladders and caterpillars into hypercube. *Discrete Applied Mathematics*, (83) :21–29, 1992.
- [12] A.J. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Springer, 1976.
- [13] M. Buratti. Edge-colourings characterizing a class of cayley graphs and a new characterization of hypercubes. *Discrete Mathematics*, (161) :291–295, 1996.
- [14] G. Burosch, I. Havel, and J.M. Laborde. Distance monotone graphs and a new characterization of hypercubes. *Discrete Mathematics*, (110) :9–16, 1992.
- [15] S.A. Choudum and V. Sunitha. Caterpillars with legs of length at most two span hypercubes.
- [16] J. de Rumeur. *Communications dans les réseaux de processeurs*. Masson, Paris, 1994.
- [17] P. Van den Cruyce. A characterization of the n-cube by convex subgraphs. *Discrete Mathematics*, (41) :109–110, 1982.
- [18] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer, 1991.
- [19] E. Dixon and S. Goodman. On the number of hamiltonian circuits in the n-cubes. *Proc. Ann. Math. Soc. Jo.*, pages 500–504, 1975.
- [20] D. Duffus and I. Rival. Graphs orientable as distributive lattices. *Proc. Amer. Soc.*, (88) :197–200, 1983.
- [21] T. Dvoraák, I. Havel, J.M. Laborde, and M. Mollard. Spanning caterpillars of a hypercube. *Journal of Graph Theory*, 24(1) :9–19, 1997.
- [22] V. Firsov. On isometric embeddings of a graph into a boolean cube. *Cybernetics 1*, pages 112–113, 1965.
- [23] S. Foldes. A characterization of hypercubes. *Discrete Mathematics*, (17) :155–159, 1977.
- [24] M. Foregger. Hamilton decompositions of products of cycles. *Discrete Mathematics*, (24) :251–260, 1978.



- 
- [25] M.R. Garey and R.L. Graham. *Computers and Intractability - A guide to theory of NP-completeness*. W.M. Freeman and Company, 1979.
- [26] F. Harary. Recent results and unsolved problems on hypercube theory. *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, 2 :621–632, 1991.
- [27] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of a hypercube ii : double starlike trees. *Math. Comput. Modelling*, 11 :216–217, 1988.
- [28] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of a hypercube ii : Meshes. *Inter. Jour. Computer Math.*, 25 :20–24, 1988.
- [29] F. Harary and M. Lewinter. The starlike trees which span a hypercube. *Comput. Math. Appl.*, (15) :299–302, 1988.
- [30] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of a hypercube vi : Survey and unsolved problems. *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, 2 :633–637, 1991.
- [31] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of a hypercube iv : rooted trees. *Math. Comput. Modelling*, 17(11) :85–88, 1993.
- [32] F. Harary, M. Lewinter, and W. Widulski. On two legged caterpillars which span hypercubes. *Congress. Numer.*, (66) :103–108, 1988.
- [33] I. Havel. On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercubes. *Časopis pro pěstování matematiky*, (109) :135–152, 1984.
- [34] I. Havel. On certain trees in hypercube. *R. Bodedick, R. Henn (Eds.), Topics in Combinatorics and Graph Theory, Physica-Verlag, Heidelberg*, pages 353–358, 1990.
- [35] I. Havel and J.M. Laborde. On distance monotone graphs. *Colloquia Mathematica Societatis Janos, Combinatorics Eger (Hungary)*, (52) :557–561, 1987.
- [36] I. Havel and P. Liebl. Embedding the dichotomic tree into the n-cube. *Cas. Pest. mat.*, (97) :201–205, 1972.
- [37] I. Havel and P. Liebl. Embedding the polytomic tree into the n-cube. *Cas. Pest. mat.*, (98) :307–314, 1973.
- [38] I. Havel and P. Liebl. One-legged caterpillars span hypercubes. *Journal of Graph Theory*, (10) :69–77, 1986.

- 
- [39] I. Havel and J. Morávek. B-valuations of graphs. *Czech. Math. Journ.*, (22) :338–351, 1972.
- [40] C.T. Ho and L. Johnson. Embedding meshes in boolean cubes by graph decomposition. *Journal of parallel and Distributed Computing*, (8) :325–339, 1990.
- [41] M. Kobeissi and M. Mollard. Disjoint cycles and spanning graphs of hypercubes. *soumis à Computers and Matmematics with Applications*.
- [42] M. Kobeissi and M. Mollard. Spanning graphs of hypercubes : starlike and double starlike trees. *accepté à Discrete Math*.
- [43] M. Kobeissi and M. Mollard. A counter-example about embedding graphs into hypercubes. *Computers and Matmematics with Applications*, (41) :669–670, 2001.
- [44] A. Kotlov. The hypercube has a large clique minor.
- [45] A. Kotzig. Every cartesian product of two circuits is decomposable into two hamiltonian circuits. Technical report, Centre de Recherche Mathématique, Montréal, 1973.
- [46] J.M. Laborde and S.P. Rao Hebbare. Another characterization of hypercubes. *Discrete Mathematics*, (39) :161–166, 1982.
- [47] F.T. Leighton. *Introduction to parallel algorithms and architectures*. Morgan Kaufmann, 1991.
- [48] N.B. Limaye. 6-quasistars and n-cubes. Technical Report numéro 563, Institut IMAG, Saint Martin d’hères, France, 1986.
- [49] M. Livingston and Q.F. Stout. Embedding in hypercubes. *Math. Comput. Modelling*, 11 :222–227, 1988.
- [50] M. Mollard. *Les invariants du n-cube*. Docteur de troisième cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble et l’Institut National polytechnique de Grenoble, 12 Novembre 1981.
- [51] M. Mollard. Un nouvel encadrement du nombre de cycles hamiltoniens du n-cubes. *Europ. Jour. Combinatorics*, (9) :49–52, 1988.
- [52] M. Mollard. *Quelques problèmes combinatoires sur l’hypercube et les graphes de Hamming*. PhD thesis, l’Université Joseph Fourier, 1989.

- 
- [53] M. Mollard and A. Berrachedi. Median graphes and hypercubes, some new characterizations. *Discrete Mathematics*, 208/209 :71–75, 1999.
- [54] B. Monien and H. Sudborough. Simulating binary trees on hypercubes. *Proceedings of the 1988 Aegean Workshop on Computing*, pages 170–180, 1988.
- [55] B. Monien and H. Sudborough. Embedding one interconnection network in another. *Computing Supplement*, 7, 1990.
- [56] H.M. Mulder.  $(0, \lambda)$ -graphs and n-cubes. *Discrete Mathematics*, (28) :179–188, 1979.
- [57] H.M. Mulder. *The interval function of a graph*. Mathematical Centrum, Amsterdam, 1980.
- [58] B.R. Myers. Hamilton factorization of the product of a complete graph with itself. *Networks 2*, pages 1–9, 1972.
- [59] L. Nebeský. On cubes and dichotomic trees. *Cas. Pest. mat.*, (99) :164–167, 1974.
- [60] L. Nebeský. On quasistars in n-cubes. *Cas. Pest. mat.*, (109) :153–156, 1984.
- [61] L. Nebeský. Embedding m-quasistars into n-cubes. *Czechoslovak Mathematical Journal, Praha*, 38(113), 1988.
- [62] G. Ringel. Uber drei kombinatorische probleme am n-dimensionen wurfel und wurfelgitter. *Abh. Math. Sem.*, 20 :10–19, 1954.
- [63] A. Wagner and D.G. Corneil. Embedding trees in a hypercube is np-complete. Technical Report 197/87, Department of Computer Science, University of Toronto, Toronto, Ontario, February 1987.



# Index

- (0, 2)–graphe, 35, 36
- échelle, 94
- étoile
  - jonction, 95
- anti-projection, 38
- antipodal, 84
- arête, 17
  - adjacent, 18
- arêtes
  - parallèles, 31
- arbre, 24
  - étoile, 95
  - binaire, 85
  - double quasi-étoile, 96
  - double-étoile, 96
  - isthme, 24
  - quasi-étoile, 95
  - racine, 86
- arcs, 17
- biparti
  - complet, 22
  - graphe, 22
- chaîne, 19, 20
  - élémentaire, 19
  - géodésique, 21
  - hamiltonienne, 20
  - simple, 19
- chenille, 90
  - épine, 90
- clique, 21
- connexe
  - composante, 21
  - graphe, 20
- couplage, 20
  - parfait, 20
- cycle, 19
- décomposition
  - couche, 26
  - cycle, 41
- décomposition canonique, 31
- degré, 18
- dimension cubique, 80
- distance, 21
- graphe
  - équilibré, 22
  - complémentaire, 19
  - complet, 21
  - connexe-minimal, 23
  - convexe, 37
  - cubique, 80
  - diamètre, 21
  - distance monotone, 28

- hamiltonien, 20
- intervalle régulier, 28
- intervalle-diamétral, 28
- k-arête-connexe, 23
- k-connexe, 23
- médian, 28
- non-orienté, 17
- ordre, 17
- orienté, 17
- partiel, 19
- régulier, 18
- simple, 17
- sphérique, 28
- subdivision, 82
- graphes isomorphes, 26
- grille, 92
  - binaire, 93
- hypercube, 29
  - direction, 30
- plongement, 78
  - congestion, 79
  - dilatation, 79
  - expansion, 79
  - optimal, 80
- produit cartésien, 24
- projection, 38
- sommet, 17
  - adjacent, 18
  - isolé, 18
  - pendant, 18
  - saturé, 20
- sommet-connexité, 23
- sous-graphe, 19
- voisin, 18



**Résumé** Le but principal de ce manuscrit est de montrer que certaines familles de graphes sont des graphes plongeables dans l'hypercube. Un problème d'une autre nature sera traité, il concerne la partition de l'hypercube en des cycles sommet-disjoints de longueur paires. Nous prouvons que l'hypercube de dimension  $n$  peut être partitionné en  $k$  cycles sommet-disjoints de longueur paires si  $k < n - 1$ , et qui utilisent des arêtes de même direction dans l'hypercube.

Le problème de plongement de graphes dans l'hypercube fera l'objet du dernier chapitre. Dans ce chapitre, nous introduisons une nouvelle famille de graphes, les MD-graphes. Nous avons montré que les quasi-étoiles et les double quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans certain MD-graphes. Nous avons réussi à montrer que les MD-graphes sont des graphes plongeables dans l'hypercube, ce qui nous remontre que les quasi-étoiles, mais également montre que les doubles quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans  $Q_n$ . Ce qui résout un problème ouvert posé par Ivan Havel depuis 1984.

**Mots clés** hypercube, partition en cycles disjoints, plongement de graphes

**Abstract** The aim of this thesis is to prove that certain family of graphs are embeddable into hypercube. Another problem will be treated, it concerns the partitioning of hypercube in vertex-disjoints cycles of even length. We prove that hypercube of dimension  $n$  can be partitined into  $k$  vertex-disjoints cycles of even length if  $k < n - 1$ , which use edges of the sams direction in the hypercube.

The last chapter concern the problem of embedding graphs into hypercube. In this chapter, we introduce a new family of graphs, the MD-graphs. We prove that quasistar and that double quasistar are embeddable into certain MD-graphs. We also prove that MD-graphs are embeddable in  $Q_n$ , which prove that quasistar and that double quasistar are embeddable into hypercubes. This resolve an open question posed by Ivan Havel since 1984.

**Keywords** hypercube, partitioning into vertex-disjoints cycles, spanning graphs of hypercubes

**Laboratoire LEIBNIZ-IMAG, 46, avenue Félix viallet, 38031 Grenoble, France**