



HAL
open science

Correction de l'atténuation et de la réponse géométrique d'un détecteur en tomographie d'émission sur colis de déchets nucléaires

Raphaël Thierry

► **To cite this version:**

Raphaël Thierry. Correction de l'atténuation et de la réponse géométrique d'un détecteur en tomographie d'émission sur colis de déchets nucléaires. Autre [cs.OH]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1999. Français. NNT: . tel-00004856

HAL Id: tel-00004856

<https://theses.hal.science/tel-00004856>

Submitted on 18 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Discipline : Mathématiques Appliquées

Présentée et soutenue publiquement

par

Raphaël THIERRY

le 29 octobre 1999

**CORRECTION DE L'ATTENUATION
ET DE LA REPOSE GEOMETRIQUE D'UN DETECTEUR
EN TOMOGRAPHIE D'EMISSION SUR COLIS DE DECHETS NUCLEAIRES**

COMPOSITION DU JURY :

Président :	Pierre-Jean LAURENT
Rapporteurs :	Serge MIGUET Habib BENALI
Examineurs :	Jean-Luc PETTIER Laurent DESBAT Philippe CINQUIN
Invités :	Catherine MENNESSIER Christian MOREL Philippe RIZO

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Discipline : Mathématiques Appliquées

Présentée et soutenue publiquement

par

Raphaël THIERRY

le 29 octobre 1999

CORRECTION DE L'ATTENUATION

ET DE LA REPONSE GEOMETRIQUE D'UN DETECTEUR

EN TOMOGRAPHIE D'EMISSION SUR COLIS DE DECHETS NUCLEAIRES

COMPOSITION DU JURY :

Président :	Pierre-Jean LAURENT
Rapporteurs :	Serge MIGUET Habib BENALI
Examineurs :	Jean-Luc PETTIER Laurent DESBAT Philippe CINQUIN
Invités :	Catherine MENNESSIER Christian MOREL Philippe RIZO

A mon grand-père Louis,

Remerciements :

Ces travaux ont été réalisés au Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA) de Cadarache (13) au sein du Laboratoire d'Expertise et de Contrôle des Déchets (LECD). Aussi, je remercie Mesdames Marie-Paule Elluard et Nadia Langomazino, les chefs successifs du laboratoire, de m'avoir chaleureusement accueilli.

Je tiens également à remercier les membres du jury :

Monsieur Jean-Luc Pettier, Ingénieur de Recherche au CEA, a été pendant trois années durant, mon responsable de thèse. Il a toujours su trouver le temps pour être à ma disposition, pour écouter et discuter de mes questions avec beaucoup de patience (Dieu sait qu'il t'en a fallu !). Par ta gentillesse et ta bonne humeur, tu as grandement contribué à ce que ces trois années restent pour moi un excellent souvenir. Merci pour tout Jean-Luc.

Monsieur Laurent Desbat, Chargé de Recherche au CNRS, qui a accepté de diriger cette thèse. Je tiens à le remercier pour la confiance qu'il m'a témoigné tout au long de ces années. Même si nos rencontres furent malheureusement peu nombreuses, nos entrevues furent à chaque fois l'occasion d'échanges fructueux et ces conseils prodigués se sont avérés souvent judicieux pour la continuité ou le ré-aiguillage de mes recherches. En tant que directeur de thèse tout comme professeur à l'ENSIMAG, j'ai surtout apprécié la modestie et l'amour que tu témoignes pour les mathématiques et au travers de cela, la qualité de tes enseignements. Une passion pour cette discipline agréablement contagieuse, qui a grandement influencé mon envie de poursuivre un troisième cycle.

Monsieur Pierre-Jean Laurent, Professeur l'Université Joseph Fourier de Grenoble, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Messieurs Habib Benali, Chargé de Recherche INSERM au CHU Pitié-Salpêtrière, et Serge Miquet, Professeur à l'Université de Lyon 2, qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs et de juger ce travail.

Monsieur Philippe Cinquin, professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, à qui je suis reconnaissant d'avoir pris part à ce jury.

Monsieur Christian Morel, docteur à l'Hôpital Universitaire de Genève, qui a suivi avec beaucoup d'attention mon manuscrit, et Monsieur Philippe Rizo, responsable du LETI/DSYS au CEA de Grenoble, qui ont accepté de participer à ce jury. Enfin, Madame Catherine Mennessier, docteur en astrophysique, à qui je tiens à exprimer toute ma gratitude pour ses lectures attentives et ses nombreux messages de soutien et d'encouragement qui venaient conclure la correction des chapitres.

Je tiens également à remercier toutes les personnes, permanents et non permanents du LECD, que je n'ai pas cités, pour leur accueil, leur disponibilité et leur soutien. Une pensée pour tous les stagiaires, scientifiques du contingent, thésards et ex-thésards, que j'ai pu côtoyer dans le « bureau des thésards », et qui ont contribué à maintenir une bonne ambiance tout au long de ces années.

Il m'est particulièrement agréable de pouvoir remercier les nombreux amis, les anciens tous comme ceux que j'ai eu la chance de rencontrer au cours de ces dernières années :

Tout d'abord Uli, alias « Schwulibuli », physicien allemand zen et adepte de l'électro-stimulation pour la fusion de la couche lipidique enveloppant ses puissants abdominaux, David, dont je retiens le sérieux de son travail et son enthousiasme, Pascale, une talentueuse (sur beaucoup de points) secrétaire intérimaire qui m'a rendue un énorme service en m'aidant à intégrer les corrections de chapitres, Anik, la post-doc canadienne, dont je retiens d'inoubliables parties de tennis et de très bonnes soirées passées en ta compagnie, Anne, une souteneuse de thèse hitchcockienne, une capacité à retenir les blagues surprenante, et à qui je souhaite une heureuse grossesse, Nicolas (qui est brutalement passé de Vinon à Paris, sans échauffement) et Bertrand (Sumotori japonais tremblez !), les deux docteurs qui ont gentiment su m'expliquer les grands mystères de la physique nucléaire avec la simplicité qui s'imposait, Daniel Eck, (100% alsacien, dans l'humour comme dans le plaisir de manger... et boire), qui m'a beaucoup aidé pour les manips, Philippe Llug, à qui je souhaite bon courage et dis à bientôt sur les pistes de Val-Tho (as-tu déjà préparé le terrain ?), et Gaël, le chat noir du labo (non personne t'en veut d'avoir vérolé les PC des thésards), qui m'a initié à la varappe (parfois sans cordes !)

Passons à Philippe, grand looser de DDP devant l'éternel (et oui c'est le premier qui dit qui est, revanche !, confère remerciements dans [Phi-98]¹), le bruit et l'odeur (les murs de ce bureau s'en rappellent encore !), une mémorable plongée en eaux froides dans les calanques (on aurait dû penser à la pince à épiler), qui m'a fait l'honneur d'être son ami. J'aimerais te remercier pour ta jovialité et ton immense disponibilité : tu as donné énormément de ton temps pour corriger ce manuscrit, certainement le correcteur le plus assidu, et je t'en suis plus que reconnaissant. Et puis comme la soif du cœur et de l'amitié ne s'apaise pas qu'avec une seule bière (Belge), il nous reste encore de nombreuses soirées pour refaire le monde. Sans oublier ta femme Sylvie, qui te supporte avec abnégation depuis 7 ans (si si déjà !), que j'apprécie énormément : elle sait supporter la lourdeur de nos blagues, esquisse des sourires polis devant nos pitreries qu'elle connaît par cœur, et qui a le courage d'essayer de m'arranger des coups, même si c'est pas facile.

Comment ne pas mentionner Mister Baudinet. Ses capacités sont restées dans les annales : quand Daniel cuisine la rougaille saucisse, les plus grand chef réunionnais palissent de honte (nombreuses déjà sont les gourmandes chanceuses qui y ont goûté² !), il souleve plus de 110 kg au développé-couché, et dresse le mamba royal à ses heures perdues, ... Plus sérieusement, j'ai fait la connaissance de quelqu'un d'incroyablement gentil, d'humain et toujours souriant (même quand on lui dit qu'il est lourd ça le fait sourire, nous aussi d'ailleurs n'est-ce pas Philippe...) et qui m'a fait l'honneur d'être depuis, un grand ami. Tu as été présent pendant les périodes difficiles, à m'écouter et à me remonter le moral, et je t'en suis grandement reconnaissant. Heureusement, il y a eu aussi tous les nombreux et excellents moments partagés et les grosses teufs et sessions de surf (surf, peuf, teuf...) qui sont encore à venir... Alors, que Daniel envoie dans la culture, ou qu'il change des maths, son bonheur est de jouer au tennis en pension, sans oublier que l'Afrique est dans l'attente.

J'aimerais aussi remercier Serge, pour la sympathie qu'il m'a témoigné et les nombreux entraînements de course à pied effectués ensemble. Il y a juste un problème avec lui, c'est que lorsqu'il dit qu'aujourd'hui la course sera tranquille, il faut comprendre qu'elle sera tranquille... pour lui.

Merci au groupe B (Véro, Seb, Mourad, Cristina, Kapuc, Vincent, Marta et Barth) avec qui j'ai passé une semaine mémorable aux doctoriales. D'un point de vue personnel, le contact avec vous tous a été des plus enrichissant pour moi ; je suis fier que nous puissions continuer à discuter et à nous retrouver. Bonne chance à vous, en particulier pour ceux qui arrivent au bout du tunnel.

Je tiens également à citer la dream team du TC la Balle Jaune Mirabelaine (le nom qui tue !), et en particulier remercier, David, qui jouerait première série s'il ne souffrait pas d'une (rare) arthrose aiguë des

¹ [Phi-98] Beudaert Philippe, « Simulation par dynamique moléculaire de la complexation d'ions Eu^{3+} et UO_2^{2+} par des ligands phosphoryles neutres en solution aqueuse et à l'interface eau/chloroforme » PhD thesis, Université Louis Pasteur de Strasbourg, 1998. Tu vois que j'ai réussi à te mettre en référence dans ma thèse, même si j'y est rien compris !!!

² Ne cherche pas, les contrepièteries viennent après.

genoux (le pauvre, à son âge déjà !) et Antoine, Monsieur « un cordage tous les deux matchs », avec qui je me suis vraiment bien éclaté, dans tous les sens du terme.

Je tiens à saluer les « doucs », confrérie qui trouve ses origines au 7^e bataillon de Chasseurs Alpains, dont j'ai conservé d'excellents souvenirs, notamment l'amitié de Christophe, Thierry, David ainsi qu'Eric, et de très (très) bonnes soirées.

Je ne pouvais écrire ces remerciements sans une pensée émue pour la femme (inutile de la citer, je pense qu'elle se reconnaîtra sans difficultés et c'est là l'essentiel) que j'ai rencontrée cette dernière année, et qui a fait naître en moi de nombreux changements. Je garde entier l'émotion soulevée en moi lors de ces instants magiques. Décidément, il y a des rencontres dans la vie que l'on ne peut oublier, la notre en fait partie. Bonne continuation à toi.

Un grand merci également à Elisabeth qui m'a guidé et aidé à solutionner mes problèmes. Ton écoute, tes conseils et tes remarques se sont toujours avérés judicieux. Merci vraiment pour tout, le jeu en valait largement la chandelle.

Bien évidemment, je tiens à remercier du fond du cœur ceux qui sont là depuis le tout début, mes parents (et pour cause, merci de m'avoir fait !) ainsi que l'ensemble de ma famille : mes grand-parents, parrain « Berni », marraine « Odilalé », mes tantes, oncles, cousins, cousines et l'unique représentant de la race animale, Niel (bon chien oui !) mon labrador adoré, grand massacreur de chaussures (neuves de préférence) et joueur infatigable à la ba-balle, qui, d'ailleurs, s'en tape pas mal que le remercie ici.

Je tiens à remercier tout particulièrement ma mère, ma plus grande supportrice, qui m'a soutenue et aidée pendant toute ma scolarité : tu as tellement donné de toi pour me faciliter la tâche, que je ne pourrai jamais assez te remercier. Merci aussi à papa : si tu m'as pas forcé à continuer mes études, tu as fait beaucoup mieux en me communiquant la volonté d'apprendre, de réussir, le plaisir du sport, et celui de savoir goûter à la souffrance pour vaincre les difficultés. Infiniment merci à tous les deux.

Une pensée spéciale et un grand merci à mon grand-père, alias « Papapa Phousi », à qui je dois ma maîtrise un peu chaotique du patois alsacien, et pour qui j'ai une énorme admiration : je regretterai pourtant que, pendant ces longues années d'études, je n'ai pu profiter d'avantage de tes connaissances, distillées avec sagesse et conviction, sur la nature et l'art du jardinage. Merci à la grand mère, plus connue désormais au labo sous le nom de « Grandmère Kougaloupff » puisque grâce à ses dons de pâtissière, nous goûtons désormais régulièrement à ce gâteau divin.

Une dernière pensée pour ma deuxième grand-mère « mamama Ranspach », que je vois malheureusement encore moins souvent, mais toujours présente dans mes pensées, ainsi que pour mon grand-père Louis à qui je dédie ce travail (je sais combien tu aurai été fier).

J'oubliais les logiciels microsoft, sans lesquels je n'aurai pas connu l'incommensurable plaisir de rester des heures à récupérer des fichiers désespérément perdus : « Avec Windows95, on était au bord du gouffre, avec Windows98, on a fait un grand pas en avant. »

Encore un grand merci à toutes et à tous, et je vous souhaite tout de bon pour le futur millénaire.

Raphaël

SOMMAIRE

ABREVIATIONS	1
1. INTRODUCTION	3
2. LA GESTION DES DECHETS NUCLEAIRES	7
2.1. CONTEXTE ET ENJEU.....	7
2.2. LA RADIOACTIVITE.....	7
2.3. ORIGINE DES DECHETS RADIOACTIFS.....	8
2.3.1. <i>Définition des déchets radioactifs</i>	8
2.3.2. <i>La fabrication du combustible nucléaire</i>	9
2.3.3. <i>L'utilisation du combustible en centrale nucléaire</i>	9
2.4. SPECIFICATION DES DECHETS.....	10
2.4.1. <i>Classification des déchets</i>	10
2.4.2. <i>Les matériaux de conditionnement</i>	11
2.5. LES OPTIONS DE STOCKAGE ACTUELLES.....	11
2.6. CARACTERISATION ET CONTROLE DES DECHETS PAR MESURES NON DESTRUCTIVES.....	12
2.6.1. <i>Introduction</i>	12
2.6.2. <i>Les méthodes de mesure de la radioactivité</i>	13
2.7. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	15
3. PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE LA TOMOGRAPHIE	17
3.1. INTRODUCTION.....	17
3.2. MODELISATION DES MESURES.....	17
3.3. OPERATEURS DE PROJECTION ET RETROPROJECTION EN GEOMETRIE PARALLELE.....	19
3.3.1. <i>La transformée de Radon</i>	19
3.3.2. <i>Théorème coupe-projection</i>	21
3.4. FORMULES D'INVERSION ANALYTIQUE.....	22
3.4.1. <i>Reconstruction de Fourier directe</i>	22
3.4.2. <i>Rétroprojection filtrée</i>	22
3.4.3. <i>La formule de Radon</i>	23
3.5. LA TRANSFORMEE DE RADON ATTENUUEE.....	23
3.6. FORMULE D'INVERSION ANALYTIQUE.....	24
3.6.1. <i>La méthode de Tretiak et Metz</i>	25
3.6.2. <i>La méthode de Bellini</i>	25
3.6.3. <i>En présence d'une atténuation non uniforme</i>	25
3.7. LA RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE : UN PROBLEME INVERSE « MAL-POSE ».....	26
3.8. ECHANTILLONNAGE DES MESURES.....	27
3.8.1. <i>Indétermination due à un nombre limité de projections</i>	27
3.8.2. <i>Ensemble complet de projections</i>	28
3.8.3. <i>Echantillonnage efficace en 2D</i>	30
3.8.4. <i>Echantillonnage hexagonal entrelacé en 3D</i>	34
3.9. CONCLUSION.....	35
3.10. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	35

4. FACTEURS DE DEGRADATION PHYSIQUES DES MESURES.....	39
4.1. INTERACTIONS ENTRE RAYONNEMENT GAMMA ET MATIERE	39
4.1.1. <i>Les phénomènes d'interaction prépondérants</i>	39
4.1.2. <i>L'atténuation des rayonnements gamma</i>	41
4.2. LOI STATISTIQUE D'EMISSION PHOTONIQUE	43
4.3. DISPERSION DE LA RESOLUTION SPATIALE	44
4.3.1. <i>Les détecteurs</i>	44
4.3.2. <i>Collimation</i>	49
4.3.3. <i>Résolution du système de détection</i>	50
4.4. LES METHODES DE CORRECTION.....	53
4.4.1. <i>Correction du diffusé</i>	53
4.4.2. <i>Correction de l'absorption</i>	55
4.4.3. <i>Les corrections simultanées</i>	56
4.5. APPROCHE RETENUE VIS-A-VIS DU PROBLEME INVERSE	58
4.5.1. <i>Rappel du contexte</i>	58
4.5.2. <i>Modélisation et algorithmique : les choix réalisés</i>	58
4.6. CONCLUSION.....	60
4.7. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	60
5. MODELISATION ANALYTIQUE D'UNE FONCTION REPONSE	67
5.1. INTRODUCTION	67
5.2. MODELISATION : PRESENTATION GENERALE ET CHOIX EFFECTUES	68
5.2.1. <i>Les fonctions de base</i>	68
5.2.2. <i>Le modèle de distribution d'intensité</i>	72
5.3. MISE EN ŒUVRE DE LA METHODE	73
5.3.1. <i>Dispositif de mesures, définitions et notations</i>	73
5.3.2. <i>Compensation simultanée de l'atténuation et de la réponse du détecteur</i>	77
5.4. IMPLEMENTATION NUMERIQUE DU MODELE.....	79
5.4.1. <i>Modèle de la réponse géométrique</i>	79
5.4.2. <i>Compensation de l'atténuation</i>	81
5.4.3. <i>Méthodes numériques de calcul intégral surfacique</i>	84
5.5. VALIDATION EXPERIMENTALE - CALIBRAGE DE LA RÉPONSE	88
5.5.1. <i>Dispositif expérimental</i>	88
5.5.2. <i>Calibrage fonction de l'énergie et de l'éloignement</i>	90
5.5.3. <i>Phénomène de pénétration par les septas</i>	93
5.5.4. <i>Intégration au modèle de la LSF non atténuée</i>	99
5.5.5. <i>Résultats</i>	100
5.6. CONCLUSION.....	101
5.7. REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUES.....	102
6. ALGORITHMES DE RECONSTRUCTION.....	107
6.1. INTRODUCTION	107
6.2. APPROCHE BAYESIENNE - ESTIMATEUR DU MAXIMUM A POSTERIORI.....	108
6.3. MODELES PROBABILISTES DE VRAISEMBLANCE.....	109
6.3.1. <i>Cas d'une vraisemblance poissonnienne</i>	109
6.3.2. <i>Cas d'une vraisemblance gaussienne</i>	114
6.3.3. <i>Instabilité des estimateurs ML-EM et CG</i>	125
6.4. MODELES DE DISTRIBUTIONS A PRIORI	127
6.4.1. <i>Estimateur du Maximum A Posteriori</i>	127
6.4.2. <i>Modélisation de l'a priori sur un champ de Markov</i>	127
6.4.3. <i>Les fonctions de potentiel et préservation des discontinuités</i>	132
6.4.4. <i>Paramètres des distributions de Gibbs retenues</i>	140
6.5. ALGORITHMES DE RECONSTRUCTION DU MAP	146
6.5.1. <i>Optimisation non-linéaire : méthodes de Newton et Quasi-Newton</i>	146
6.5.2. <i>Optimisation semi-quadratique (SQ)</i>	147
6.5.3. <i>Régularisation SQ avec vraisemblance poissonnienne</i>	148
6.5.4. <i>Régularisation SQ avec vraisemblance gaussienne</i>	151

6.5.5. Régularisation à partir du modèle « Thin Plate »	154
6.5.6. Critères de mesure de l'image et critères d'arrêt des algorithmes.....	156
6.6. CONCLUSION.....	156
6.7. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	157
7. APPLICATION A LA RECONSTRUCTION D'IMAGE.....	165
7.1. INTRODUCTION	165
7.2. SIMULATIONS A PARTIR D'UN FANTOME NUMERIQUE	165
7.2.1. Présentation du fantôme	166
7.2.2. Application de la régularisation.....	168
7.3. RECONSTRUCTIONS A PARTIR DE FANTOMES REELS.....	173
7.3.1. Descriptif des matrices HETER et HOMOG	173
7.3.2. Validation de la modélisation.....	176
7.3.3. Reconstructions à partir d'échantillonnage efficace	184
7.3.4. Application de la régularisation semi-quadratique	187
7.4. APPLICATIONS AUX COLIS REELS AVEC UN FAIBLE NOMBRE DE MESURES	188
7.4.1. Contrôle et reconstructions sur le colis CDT-1.....	189
7.4.2. Colis de type CDT-2	193
7.5. CONCLUSION.....	195
7.6. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	195
8. CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES DE TRAVAIL	197
ANNEXES.....	203
BIBLIOGRAPHIE GENERALE.....	213

ABREVIATIONS

ARTUR :	Algorithme de Reconstruction Tomographique Utilisant la Régularisation, (régularisation semi-quadratique avec une vraisemblance gaussienne).
CdTe	Tellurure de Cadmium, semi-conducteur utilisé comme détecteur.
CG :	Conjugate Gradient, gradient conjugué, algorithme de descente pour la résolution de systèmes linéaires symétriques, définis positifs.
CGLS :	Conjugate Gradient Least Squares, algorithme du gradient conjugué adapté aux équations normales.
CND :	Contrôle Non Destructif.
EM :	Expectation-Maximization, algorithme algébrique utilisé pour la détermination du maximum de vraisemblance (ML).
FWHM :	Full Width at Half Maximum, grandeur définissant la résolution spatiale d'un dispositif.
GCV	Generalized Cross Validation, algorithme de détermination optimale de paramètre.
GEM	Generalized Expectation-Maximization, algorithme d'augmentation pour l'optimisation du MAP.
HpGe	Germanium Hyper pur, semi-conducteur utilisé comme détecteur.
ICM	Iterative Conditional Mode.
LSF :	Line Spread Function, intégration de la PSF selon l'axe de rotation.
MAP :	Maximum <i>A Posteriori</i> , estimateur du Maximum <i>a posteriori</i> .
MFA	Mean Field Annealing, algorithme stochastique pour l'optimisation de fonctionnelles non convexes.
MEPHISTO :	Multi-Energy PHoton Imagery through Segmented TOMography, nom du code de modélisation volumique adapté à la géométrie d'acquisition de TEMISEC.
ML (MLE) :	Maximum Likelihood (Estimator), estimateur du maximum de vraisemblance.
MOISE :	Modified One step late Implicit Scheme Em, version régularisée de l'EM à l'aide de la technique de la régularisation semi-quadratique.
NMSE :	Normalized Mean Square Error, erreur quadratique relative entre deux images.
PET :	Positron Emission Tomography.
PSF :	Point Spread Function, réponse impulsionnelle d'un appareil.
RD	Ray-Driven, modèle de mesure limitant l'espace de détection à la ligne centrale.
RPF :	Rétroprojection Filtrée, méthode de reconstruction analytique.
SNR :	Signal to Noise Ratio, rapport signal sur bruit.
SPECT :	Single Photon Emission Computerized Tomography, tomographie d'émission monophotonique appliquée à l'imagerie médicale.
TEMISEC :	Tomographe d'EMISSion pour l'Expertise des Colis, nom donné au dispositif expérimental du laboratoire.
TP	Thin-Plate, algorithme régularisé utilisant les dérivées secondes de l'image.

CHAPITRE 1.

INTRODUCTION

A une époque où la préservation de l'environnement devient une préoccupation majeure, de plus en plus d'industries s'emploient à la gestion et au traitement de leurs déchets. Le nucléaire ne déroge pas à cette préoccupation et cette nécessité est d'autant plus impérieuse que le devenir des déchets radioactifs soulève de nombreuses questions et l'inquiétude parmi nos concitoyens. Pour attester la qualité et la rigueur de la gestion des déchets radioactifs, l'industrie nucléaire a su se doter des moyens techniques et scientifiques. Ce travail s'inscrit dans le cadre du développement de techniques de mesures améliorant la connaissance et la caractérisation des déchets radioactifs. La maîtrise de ces outils est une aide précieuse pour décider des solutions garantissant une protection durable de l'environnement, et pour leur mise en œuvre.

Parmi ces techniques, le contrôle non destructif (CND) joue un rôle prépondérant : il est devenu un complément indispensable aux méthodes dites « destructives » pour la caractérisation dans le contrôle des déchets nucléaires. La caractérisation et l'expertise constituent une étape nécessaire pour la détermination de l'orientation future des colis de déchets vers un stockage approprié.

L'avantage indéniable des méthodes de CND est qu'elles ne génèrent pas de déchets supplémentaires. D'autre part, elles réduisent considérablement le danger des expositions aux rayonnements. De plus, elles sont souvent rapides et peuvent s'appliquer à l'ensemble du colis, ce qui les rend représentatives de l'ensemble de l'objet par rapport aux analyses destructives effectuées à partir d'échantillons.

Parmi les méthodes de CND employées, se côtoient différentes techniques, suivant le type d'information ou le type de radioactivité qui est recherché : d'un côté, les mesures actives, telles que l'interrogation neutronique ou photonique ; de l'autre, les mesures passives, comme la spectrométrie alpha, gamma, ou X, le comptage neutronique, et la tomographie d'émission gamma. Pour notre étude, nous nous sommes intéressés au cas de la tomographie d'émission multiphotonique.

Cette méthode est similaire à celle de la tomographie d'émission monophotonique utilisée dans le domaine médical : il s'agit de détecter les photons émis dans chacune des fenêtres d'énergie correspondant à un pic d'absorption totale d'un radioélément détecté, et ceci à différentes positions angulaires autour de l'objet. A partir de cet ensemble de mesures, la distribution spatiale de l'activité pour chaque radioélément présent peut être déterminée grâce à un algorithme de reconstruction. Cette technique apporte deux informations capitales :

- la connaissance de la morphologie du colis (répartition de l'activité, détection de points chauds, ...) par reconstruction de l'image : la qualification.
- la connaissance de l'intensité de l'activité en chaque point de l'image : la quantification ;

L'accès simultané à ces deux informations nécessite de bien connaître le processus de formation des mesures afin de l'intégrer au mieux dans la modélisation du phénomène. La phase d'acquisition des données est perturbée par de multiples phénomènes physiques :

- les rayonnements sont atténués par la matière du colis entre leur lieu d'émission jusqu'à l'entrée du détecteur : une méconnaissance de cette donnée empêche une quantification précise de l'image,
- le phénomène de diffusion Compton est responsable de la déviation de la trajectoire des photons et de la diminution de leur énergie : ceci altère considérablement la connaissance de leur lieu probable d'émission ainsi que de leur nature énergétique. Cela se traduit par une perte de contraste dans l'image et une incertitude sur la localisation exacte des points d'activité,
- le collimateur placé devant le détecteur permet de focaliser le champ de détection des photons à une partie réduite de l'objet. L'ouverture parallèle du collimateur ainsi que la nature du détecteur traduisent une réponse impulsionnelle dans le champ d'acquisition, réponse qu'il faut prendre en compte tel un flou sur l'image,
- enfin, à très haute énergie, certains photons n'émanant pas de l'espace théorique de détection passent au travers des parois en plomb du collimateur et viennent s'ajouter au comptage total. C'est ce qu'on appelle le phénomène de pénétration par les septas.

Une correction prenant en compte l'ensemble de ces phénomènes est donc nécessaire si l'on veut accéder simultanément à une qualité d'image optimale et à une bonne quantification de l'activité. Nous nous sommes intéressés à l'atténuation, à la réponse du détecteur et à la pénétration par les septas. La diffusion Compton est précorrigée avec précision au niveau du spectre grâce à la haute résolution en énergie d'un détecteur en Germanium HyperPur (HpGe).

Outre ces phénomènes que l'on peut qualifier de « déterministes », il faut également tenir compte des phénomènes aléatoires, tel que le bruit sur les mesures, qui ne peut se modéliser que de manière statistique. Classiquement, on utilise une loi gaussienne, même si une loi poissonnienne est théoriquement mieux adaptée pour les faibles taux de comptage.

Le premier objectif de ce travail est de développer un modèle permettant une correction simultanée de l'ensemble de ces phénomènes sans avoir à recourir à de coûteuses simulations par des codes de type Monte-Carlo. Ce modèle doit permettre d'intégrer la correction d'atténuation à l'énergie des radioéléments dont on désire connaître la répartition d'activité. On dispose pour cela de la distribution bidimensionnelle de l'atténuation obtenue par un tomographe de transmission utilisant une source externe de ^{60}Co à l'énergie moyenne de 1225 keV, une extrapolation polynomiale permettant ensuite de connaître la distribution des coefficients d'atténuation aux autres énergies.

Le second objectif est de développer une méthode de reconstruction adaptée au contexte de travail : faible nombre de mesures, diversité du niveau de bruit et des distributions d'atténuation, et aucune information structurelle *a priori* sur la distribution d'activité.

Nous disposons pour cela de deux types de méthodes de reconstruction : les méthodes analytiques et les méthodes algébriques.

Les premières ne permettent pas d'effectuer une correction simultanée de l'ensemble des phénomènes. D'autre part, elles sont rapidement limitées lorsque la distribution d'atténuation n'est pas uniforme. Par ailleurs, lorsque les faisceaux de détection sont larges et divergents (non assimilables à des droites), il devient particulièrement difficile de les intégrer dans un formalisme analytique.

A l'inverse, les secondes étant basées sur une formulation algébrique du processus de mesure, elles sont mieux adaptées à ces corrections qui peuvent alors être facilement modélisées à l'aide des outils de l'algèbre linéaire. C'est dans ce cadre que la correction des phénomènes perturbants peut le mieux être envisagée et permettre, par voie de conséquence, d'aboutir à une meilleure quantification et une résolution améliorée des images reconstruites. Telle est l'orientation choisie pour notre travail.

La formulation algébrique conduit à la résolution d'un système matriciel creux, dont l'inversion est réalisée par des méthodes itératives. Elles nécessitent des temps de calcul plus lourds que les méthodes analytiques. L'inconvénient majeur des méthodes itératives reste leur tendance à amplifier le bruit de mesure en fonction du nombre d'itérations. Ce phénomène inhérent au caractère « mal posé » de la tomographie se traduit par l'amplification des artefacts : l'image prend un aspect « granuleux » et sa lecture se dégrade rapidement. Il est donc nécessaire de régulariser ces méthodes afin de gagner en stabilité et de réduire la sensibilité vis-à-vis du critère d'arrêt des itérations.

Les méthodes de régularisation proposées sont définies dans le cadre d'une approche bayésienne à partir de distributions *a priori* sur l'image. Ces distributions sont déterminées sur des champs markoviens. Cet outil de manipulation pratique, permet de définir une grande classe de contraintes au travers de fonctions de potentiel. L'estimateur des images reconstruites est celui du Maximum *A Posteriori* (MAP). Les méthodes d'optimisation de critères du MAP sont de deux types : les algorithmes déterministes ou stochastiques. Dans notre étude, les algorithmes déterministes seront préférés aux algorithmes stochastiques, ces derniers étant peu adaptés aux problèmes tomographiques et nécessitant des temps de calcul démesurément longs.

Dans le cadre de cette thèse nous nous sommes donc attachés à définir une « bonne modélisation » du processus de formation des données et à choisir un type d'algorithme de reconstruction « approprié ». Ces deux points méritent l'intérêt qu'il leur a été porté, si l'on désire accéder à des images quantifiées et de bonne définition de surcroît. Un « bon » modèle de distribution de l'image *a priori* est en revanche difficile à définir, le modèle structurel d'une répartition d'activité dans un colis restant complètement aléatoire.

Après cette introduction, le chapitre 2 présente de façon synthétique les caractéristiques générales de la gestion des déchets radioactifs de l'origine de ces déchets et leur classification jusqu'aux principaux modes de traitement et d'évacuation. Une description des méthodes non destructives les plus utilisées pour mesurer la radioactivité est donnée. En particulier, ce chapitre permet d'introduire la tomographie d'émission bidimensionnelle et son application dans le contrôle des déchets nucléaires.

Dans le chapitre 3, la problématique de la reconstruction en tomographie d'émission est abordée. Après la présentation des outils mathématiques de base, les méthodes analytiques sont abordées dans leurs grandes lignes, en absence d'atténuation puis avec correction d'atténuation, ainsi que leur limitation. Nous discutons également des conditions d'échantillonnage, et plus particulièrement, nous introduisons le schéma d'échantillonnage efficace qui, sous certaines conditions, permet de diminuer le nombre de mesures tout en conservant la même quantité d'information.

Le chapitre 4 traite des principaux phénomènes physiques responsables de la dégradation des mesures que nous rencontrons dans cette application. Il comprend, entre autres, la description de l'appareillage d'acquisition des projections. Un état de l'art des méthodes de correction des phénomènes physiques est donné, ce qui nous permet à la suite de spécifier les problèmes que nous cherchons à résoudre et les orientations retenues.

Le chapitre 5 décrit la modélisation du processus de formation des mesures dans lequel une correction simultanée de l'atténuation et de la réponse tridimensionnelle du détecteur est apportée. La détermination des coefficients de la matrice de projection est effectuée à partir d'une expression analytique de la réponse linéique du système. Nous décrivons également une validation de la méthode qui permet de calibrer le modèle. En fin de chapitre, nous complétons la modélisation en y intégrant une correction du phénomène de pénétration par les septas.

Dans le chapitre 6, les algorithmes itératifs sont décrits. Les méthodes de reconstruction sont classées suivant qu'elles admettent une distribution poissonnienne ou gaussienne du bruit. Dans les deux cas, nous traitons des méthodes régularisées utilisées ultérieurement. Plus particulièrement, nous retrouvons, quelles que soient les hypothèses de bruit utilisées, une méthode de régularisation semi-quadratique. A titre de perspectives, nous passons en revue quelques stratégies de minimisation qui pourraient s'avérer intéressantes à tester.

L'application du modèle proposé au chapitre 5 et l'utilisation des algorithmes régularisés décrits au chapitre 6 sont traités au chapitre 7. Nous y abordons l'analyse comparative des différents algorithmes sur un fantôme numérique en terme de qualité d'image. L'apport de la modélisation et l'aspect quantitatif sera abordé à partir des fantômes réels. L'apport du schéma d'échantillonnage efficace est également abordé : il est comparé à d'autres configurations équivalentes en nombre de mesures en fonction des distributions d'atténuation. Finalement, nous exposons une application à des colis réels avec très peu de mesures et une comparaison de la tomographie d'émission avec une méthode de mesure globale pour l'évaluation de la quantification d'activité.

CHAPITRE 2.

LA GESTION DES DECHETS NUCLEAIRES

2.1. CONTEXTE ET ENJEU

Le parc électronucléaire français produit aujourd'hui 59 000 MWe, soit 75% de la production totale d'électricité alors qu'elle n'était que de 1600 MWe en 1970. Cette évolution a permis de renforcer l'indépendance énergétique de notre pays. Elle évite aussi chaque année une combustion de 80 millions de tonnes équivalents pétrole, l'émission associée de 240 millions de tonnes de CO₂ et 2 millions de tonnes de vapeurs acides, et leurs effets sur l'environnement. De tous les secteurs d'activité utilisant la radioactivité, l'électronucléaire est celui qui produit le plus de déchets à la fois en quantité et en activité.

La gestion des déchets radioactifs s'effectue dans un cadre réglementaire, couvrant la totalité du cycle du combustible : de l'extraction du minerai jusqu'au retraitement du combustible usé ainsi que le démantèlement des installations nucléaires [Loi-91]. Elle vise à assurer la protection des personnes contre des risques radiologiques, à préserver l'environnement et à limiter les contraintes induites pour les générations futures [Bour-84]. La pérennité du secteur nucléaire français dépend inévitablement de sa capacité à apporter des solutions à long terme pour les déchets de haute activité, la gestion des déchets anciens, l'assainissement et le démantèlement des installations.

2.2. LA RADIOACTIVITE

La radioactivité est un phénomène lié à l'instabilité nucléaire que présentent certains atomes. Leur noyau, excédentaire en énergie, subit une série de transformations, dont la première est la **désintégration radioactive**. L'énergie excédentaire ainsi libérée est émise sous forme de rayonnements. Les désintégrations radioactives résultent soit d'un déséquilibre entre protons et neutrons au sein du noyau, soit d'un excès de nucléons. En évoluant vers un état plus stable du noyau, le nombre de protons diminue et, de ce fait, le numéro atomique¹ aussi. On distingue deux types de désintégration radioactives [Knol-89]:

1. **les désintégrations isobariques** : le nombre de masse du noyau² est inchangé. On distingue :

¹ Le numéro atomique (noté Z) d'un atome est le nombre d'électrons que compte son cortège électronique. C'est aussi le nombre de protons du noyau.

² Le nombre de masse (noté A) d'un atome est le nombre de nucléons (protons + neutrons) présents dans le noyau

- la désintégration β^- : émission d'un électron et d'un antineutrino $\bar{\nu}$ pour compenser un excès de neutrons
- la désintégration β^+ : émission d'un électron positif et d'un neutrino ν pour compenser un excès de protons
- la capture électronique ε : l'instabilité est due à un excès de protons. Le noyau capture un électron des couches internes du cortège électronique de l'atome pour « transformer » un proton en neutron, et émet un neutrino ν .

2. les désintégrations par partition : le nombre de masse du noyau est modifié. On distingue :

- la désintégration α : un excédent en nucléons conduit à l'expulsion d'une particule α formée de deux neutrons et deux protons, soit un noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$
- la fission spontanée : le noyau se scinde en deux fragments de masse à peu près identiques, dans un état très excité. Cette désintégration s'accompagne d'émissions β^- , γ et de neutrons.

Après la désintégration radioactive, le noyau-fils (ou les deux noyaux dans le cas de la fission) se retrouve dans un état d'énergie excité. Il se désexcite généralement par transition électromagnétique γ . L'émission γ la plus courante est celle d'un rayonnement électromagnétique d'énergie égale à la différence des niveaux final et initial de la transition. Le retour du noyau excité à son état stable peut s'effectuer par sauts successifs entre niveaux intermédiaires, conduisant à l'émission de plusieurs rayonnements γ . Pour mémoire, on notera les deux autres types d'émission γ qui sont la création de paires d'électrons (positon+négaton) et la conversion interne.

Enfin, suite à une désintégration par capture électronique ou à une désexcitation électromagnétique, des « vacances » sont créées dans le cortège électronique de l'atome. Des électrons des couches plus externes viennent remplir ces lacunes, en créant ainsi de nouvelles. Ce phénomène se propage de proche en proche jusqu'aux couches périphériques. Chaque remplissage d'une vacance s'accompagne de deux types d'émission : émission X , ou émission d'un électron Auger.

2.3. ORIGINE DES DECHETS RADIOACTIFS

2.3.1. Définition des déchets radioactifs

L'utilisation de radioéléments dans les organismes de recherche, la médecine, l'industrie et le cycle du combustible, conduit à la production de déchets radioactifs. L'Agence Internationale de l'Energie Atomique (AIEA) en fournit la définition suivante [Iae-92]:

Déchet radioactif: tout matériau qui contient ou est contaminé par des radioéléments à des concentrations ou niveaux de radioactivité supérieurs aux valeurs définies par les autorités compétentes de réglementation, et pour lequel aucune utilisation n'est prévue .

Ces quantités de radioéléments, en-dessous desquelles le déchet n'est pas déclaré radioactif (le traitement est alors celui de déchets classiques), correspondent à une valeur réglementaire bien inférieure à tout risque.

La majeure partie des déchets radioactifs est produite par les activités liées à la production d'électricité nucléaire. Sous l'appellation de « cycle du combustible » sont regroupées les étapes suivantes : fabrication

du combustible nucléaire, son utilisation en réacteur pour la production d'électricité, puis le retraitement et le recyclage du combustible usé.

2.3.2. La fabrication du combustible nucléaire

Les centrales productrices d'électricité puisent leur énergie à partir des combustibles naturels provenant de la terre, tels que le charbon, le pétrole, le gaz ou l'uranium. La préparation du combustible est plus ou moins longue pour libérer son énergie sous forme d'électricité. Celle de l'uranium est relativement complexe. De son extraction de la mine à sa mise en place dans les centrales à eau sous pression, sa transformation s'effectue en quatre étapes :

1. l'extraction et la concentration à la mine,
2. la conversion ou fluoration,
3. l'enrichissement,
4. la fabrication des assemblages combustibles.

Au cours de ces quatre étapes, sont générés les premiers déchets nucléaires solides, liquides et gazeux contenant des radioéléments issus de la famille des isotopes de l'uranium 235 et 238 [Cea-86] : ce sont les stériles de minerai, des effluents liquides et gazeux de procédés, des déchets technologiques (gants, surbottes, vêtements, filtres, matériel de laboratoire et autres), etc.

2.3.3. L'utilisation du combustible en centrale nucléaire

C'est à ce niveau que commence la production de déchets contenant des radioéléments artificiels de forte radiotoxicité. Selon la façon dont ils apparaissent et le type de nuisance qu'ils représentent, on peut classer les radioéléments créés en trois catégories :

1. *Les produits de fission* : dans le réacteur, les noyaux dits fissiles (uranium 235, plutonium 239, plutonium 241) se scindent en deux noyaux plus légers après capture neutronique. Les produits de fission sont très nombreux et la plupart ont des durées de vie très courtes. Ils disparaissent rapidement des déchets produits. Certaines exceptions posent cependant un problème de radioprotection car ils ont une période de radiotoxicité plus longue :

-*Le krypton 85*: gaz rare, émetteur β de période $\tau_{1/2} = 10,7$ ans. Il constitue le principal rejet gazeux radioactif des centrales nucléaires.

-*Le tritium (3_1H)*: émetteur β de période $\tau_{1/2} = 12,3$ ans. Il se retrouve dans l'eau du circuit primaire et, à terme, dans celle des piscines de refroidissement.

-*L'iode 129, le césium 135 et le technétium 99* : de périodes respectives $1,6 \cdot 10^7$, $2,3 \cdot 10^6$ et $2,13 \cdot 10^4$ ans, ils forment les rares produits de fission à très longue durée de vie et posent un problème particulier pour la gestion à très long terme des déchets radioactifs. Leur solubilité en milieu aqueux justifie une attention particulière dans les études sur leur confinement et leur comportement à long terme.

-*Le strontium 90* : il pose un problème important de radioprotection en raison de sa période, (28 ans), et de son descendant direct, l'yttrium 90, émetteur β très énergétique (2,27 MeV).

-*Le ruthénium 106* : il a une période de 1 an mais son descendant, le rhodium 106, émet un β de 3,53 MeV. Ce radioélément pose un problème particulier au cours du retraitement, car il possède des formes chimiques nombreuses et complexes. On le retrouve ainsi à tous les niveaux du procédé, depuis les solutions de retraitement jusque dans les canalisations et filtres à air.

-*Le césium 137* : d'une période de 30 ans, il est (avec le strontium 90) l'une des principales sources de nuisance des déchets dits « bêta-gamma ».

2. *Les produits d'activation* : ils sont engendrés par l'activation des matériaux de structure et des constituants de l'eau du circuit primaire. Ce dernier peut notamment arracher des particules métalliques radioactives, appelées « produits de corrosion », aux parois des canalisations, de la cuve et des assemblages. Les principaux produits d'activation sont le *tritium* et le *cobalt 60*. Ce dernier est le plus important en raison de sa période de 5,2 ans et de son double rayonnement γ ($\Delta E = 1.17$ MeV et 1,33 MeV).

3. *Les transuraniens* : ils proviennent de l'absorption neutronique par les éléments lourds, tel que l'uranium, qui se transmutent ainsi en éléments de numéros atomiques plus élevés ($Z > Z_{\text{uranium}} = 92$). Le plus connu est le **plutonium**, en raison des périodes longues de certains de ses isotopes, des grandes quantités produites en réacteur, de l'énergie des rayonnements α , et à la fois de sa radiotoxicité importante et de sa toxicité chimique. Les autres transuraniens créés sont produits en plus faibles quantités, c'est pourquoi on les appelle des « actinides mineurs ». Ce sont principalement le **neptunium 237**, l'**américium 241**, et les deux isotopes du **curium 242** et **244**. Ils sont tous émetteurs α de périodes respectives $2,2 \cdot 10^6$ ans, 433 ans, 162,5 jours et 19,2 ans.

2.4. SPECIFICATION DES DECHETS

La plupart des déchets nucléaires sont produits en fin de cycle du combustible nucléaire. Ils sont classés en fonction de leur risque radioactif. Les caractéristiques prises en compte sont :

- l'**activité**, en terme de nombre de désintégrations par seconde et par unité de masse, permet de distinguer des déchets de faible, moyenne et haute activité. Ce critère est nécessaire à une gestion à court et moyen terme, dans la mesure où il permet de définir les épaisseurs des écrans de protection biologique vis-à-vis du personnel,
- la **période** de décroissance radioactive, temps nécessaire pour que l'activité diminue de moitié. Plus particulièrement, on s'intéresse à la quantité d'émetteurs α de radiotoxicité élevée et de période très longue, dont la nuisance persiste pendant des durées géologiques se comptant parfois en milliers voire en millions d'années,
- le **type de rayonnement émis**, permet de définir, tout comme l'activité, les mesures de radioprotection nécessaires. Ainsi, les déchets non irradiants, généralement émetteurs α , ne présentent pas de danger d'exposition externe. En revanche, le contact direct par les voies naturelles (inhalation, ingestion, contact cutané) avec le matériau peut s'avérer très nocif. Un simple conditionnement étanche suffit à s'en protéger efficacement. A l'inverse, les déchets irradiants, (émetteurs β , γ et neutrons), émettent des rayonnements parfois très pénétrants. Des barrières biologiques plus importantes doivent alors être définies, en fonction de l'activité et du type de rayonnement.

2.4.1. Classification des déchets

La gestion des déchets implique des tâches telles que le transport, le conditionnement, l'entreposage et le stockage à court, moyen ou long terme. En fonction des critères énoncés précédemment, trois catégories de déchets sont définis [Marq-95] :

- **catégorie A** : déchets de faible ou de moyenne activité, ils sont essentiellement constitués de radioéléments émetteurs β - γ de période inférieure à 30 ans et, dans certains cas, de radioéléments à durée de vie longue en très faible quantité (une teneur inférieure au seuil d'activité de 0,1 curie (3,7 GBq) par tonne, en corps à vie longue, est fixée pour des émetteurs α). Il s'agit de la quasi-totalité des

déchets technologiques provenant des réacteurs et du retraitement. Ils sont stockés en surface soit dans le centre de la Manche, soit dans le centre de l'Aube à Soulaines. Ces déchets représenteront près de 1 million de tonnes en France en l'an 2000 [Scha-91].

- **catégorie B** : déchets de faible et moyenne activité, ils contiennent une quantité significative de radioéléments à vie longue, essentiellement des transuraniens, associés ou non à des émetteurs β - γ à vie courte. L'activité spécifique α dépasse le seuil défini ci-dessus. Ce sont, pour l'essentiel, les déchets de procédés et certains déchets technologiques produits à l'étape du retraitement du combustible irradié. Le volume total atteindra 80 000 m³ en l'an 2000 [Scha-91]. Leur stockage en couches géologiques profondes pour être isolés pendant des millénaires est à l'étude.
- **catégorie C** : ce sont les déchets de haute et très haute activité. Ils contiennent des produits de fission et quelques transuraniens. Un premier entreposage en piscine des combustibles est effectué afin de dissiper une partie de l'importante énergie thermique produite par le combustible. Les transuraniens et les produits de fission sont conditionnés par vitrification dans les colis de verres. Il ne représentent qu'un faible volume, soit 1500 m³ en l'an 2000 [Scha-91].

Les déchets de catégorie A correspondent à 95% du volume total des déchets produits mais contiennent seulement 1% de la radioactivité totale. Au cours de cette étude, nous serons confrontés aux déchets de catégorie A, et, occasionnellement, à des déchets B.

2.4.2. Les matériaux de conditionnement

Avant que les déchets ne soient mis en conteneurs, ils subissent une phase d'immobilisation.

Celle-ci nécessite la mise en œuvre de matières variées qui fixent les déchets dans un bloc compact, le plus souvent directement dans le conteneur de manutention, c'est ce qu'on appelle l'**enrobage**. Cette matrice constitue la première barrière de confinement du déchet et le choix des matériaux utilisés est guidé par les considérations suivantes :

- Compatibilité avec la nature des composants radioactifs,
- Adaptabilité aux caractéristiques physiques et chimiques du déchet (liquides, boues, dégagement calorifique,...),
- Adéquation aux exigences de sûreté (faible solubilité, imperméabilité, résistance mécanique, résistance aux agents externes chimiques et biologiques, stabilité à long terme,...)

De plus, les matériaux utilisés ne doivent pas augmenter de façon excessive le volume des déchets et leur coût.

Les principales matrices utilisées pour l'immobilisation des déchets de faible et moyenne activité sont le **béton**, les **liants hydrauliques**, le **bitume**, et les **résines thermodurcissables** [Cea-86].

2.5. LES OPTIONS DE STOCKAGE ACTUELLES

L'état d'avancement et de développement des solutions définitives dépendent des types de déchets :

- la solution réglementaire et industrielle pour les **déchets A** (faible activité, courtes périodes) actuellement retenue est le stockage en surface sous surveillance, avec un déclassement du site dans 300 ans,
- on s'oriente vers une solution de stockage profond pour le devenir des **déchets C** (longues périodes),
- la solution n'est pas encore véritablement tranchée en ce qui concerne les **déchets B**. Après avoir envisagé la solution du stockage profond, on se réoriente vers des solutions de stockage en surface ou sub-

surface.

Cela fait l'objet des orientations des recherches dans le cadre de la [Loi-91] :

- séparation et incinération (axe 1),
- étude du stockage géologique (axe2),
- étude des procédés de conditionnement et d'entreposage de longue durée en surface (axe 3).

Les axes 1 et 3 sont sous la responsabilité du CEA et l'axe 2 sous la responsabilité de l'ANDRA (Agence Nationale de gestion des Déchets RAdioactifs).

Globalement, les trois objectifs principaux dans le domaine des déchets nucléaires concernent:

① l'amélioration du **traitement** et du **conditionnement** des effluents et déchets par :

- **des techniques séparatives** permettant d'extraire les radioéléments (des autres atomes inactifs ou des espèces de radioéléments entre elles) avec en particulier l'objectif du déclasserment des déchets, ou du recyclage contrôlé des matériaux,
- **la réduction des volumes,**
- **l'amélioration des conditionnements** des déchets sous forme finale, pour assurer un confinement durable à long terme des radioéléments, dans un volume réduit.

② la **caractérisation** et le **contrôle** des déchets, permettant l'accroissement de la connaissance et du suivi des déchets, le développement et la qualification des méthodes de mesure et de tri sur déchets réels.

- les études pour la spécification des colis destinés à l'entreposage et au stockage profond,
- des développements et des qualifications de méthodes de caractérisation.

③ l'étude du **comportement à long terme** des déchets conditionnés, en stockage et en entreposage pour comprendre et prévoir le devenir de ces déchets et de leur environnement proche dans les conditions :

- d'un **stockage géologique**, en contribuant ainsi, avec l'ANDRA, à l'étude de cette option qui paraît incontournable, dans tous les scénarii,
- d'un **entreposage de longue durée** en surface, en étudiant les concepts associés avec les capacités d'entreposage pour permettre aux producteurs de disposer de la souplesse nécessaire pour la gestion des déchets et des produits du retraitement.

2.6. CARACTERISATION ET CONTROLE DES DECHETS PAR MESURES NON DESTRUCTIVES

2.6.1. Introduction

Au paragraphe précédent, nous avons vu, qu'une gestion efficace des déchets radioactifs nécessite une classification en fonction du type de radioactivité : nature des rayonnements émis, période des radioéléments et niveau de radioactivité. Pour mener à bien cette classification, il faut donc effectuer des mesures de radioactivité (appelées aussi mesures d'activité).

Au-delà du problème des déchets, les exploitants d'installations produisant, utilisant ou transformant des produits radioactifs doivent en assurer la surveillance. Le suivi de ces matières sensibles fait appel à des mesures de radioactivité pour évaluer leur quantité et leur nature, à toutes les étapes des procédés. Les organismes de contrôle chargés de vérifier la gestion de cette matière nucléaire, ont également leurs besoins propres dans ce domaine. Par ailleurs, les mesures d'activité sont largement utilisées dans le contrôle de procédés et l'analyse en ligne dans le cadre du cycle du combustible.

Parmi les différentes méthodes de mesure de la radioactivité décrites, nous mettons l'accent sur les mesures non destructives. Elles sont de plus en plus utilisées dans toute l'industrie du cycle du combustible pour le contrôle de procédé, l'analyse en ligne, le suivi de la matière nucléaire et, notamment, la mesure des déchets radioactifs.

2.6.2. Les méthodes de mesure de la radioactivité

On distingue deux grandes familles de mesures selon qu'elles modifient ou non l'état physico-chimique du produit étudié. On parle ainsi d'« **analyses destructives** » ou de « **mesures non destructives** ».

2.6.2.1. Les méthodes d'analyses destructives

Les analyses destructives [Roge-83] consistent à prélever un échantillon, éventuellement à modifier son état physico-chimique, puis à procéder à des analyses. Ces opérations modifient la nature du matériau étudié. Les deux paramètres les plus souvent analysés sont la **concentration** et la **composition isotopique**. Ces techniques sont essentiellement axées sur l'analyse de l'uranium, du plutonium et de leurs isotopes.

Ces analyses sont, par nature, génératrices de déchets supplémentaires. Malgré cet inconvénient majeur, elles sont très largement utilisées car elles permettent d'obtenir une excellente précision, sous réserve que l'échantillon soit suffisamment représentatif de l'ensemble du produit.

2.6.2.2. Les mesures non destructives

Les mesures non destructives consistent généralement à mesurer les radiations émises spontanément ou induites au moyen d'une source extérieure dans le matériau à caractériser. Parfois, on s'intéresse aussi à l'absorption par ce même matériau des rayonnements issus d'une source extérieure. Ces mesures sont **non intrusives** et ne modifient pas l'état physico-chimique du matériau étudié, d'où leur qualificatif de « non destructives ». Elles sont classées en deux grandes familles, selon qu'elles font appel ou non à l'utilisation d'une source extérieure de rayonnements. On parle ainsi respectivement de **mesures actives** ou de **mesures passives**. Si elles sont, généralement, moins précises que les méthodes destructives, elles présentent cependant des avantages non négligeables, dont les principaux sont :

- leur application à tout ou partie de l'espace de l'objet à caractériser, ce qui élimine le problème de représentativité du prélèvement,
- la réduction de l'exposition des opérateurs aux rayonnements,
- la non génération de déchets secondaires,
- la rapidité et le coût parfois inférieur.

Elles sont appliquées aujourd'hui dans tout le cycle du combustible pour le contrôle de procédé, pour la sûreté (contrôle de criticité), pour la caractérisation des matières nucléaires et des déchets radioactifs. Elles sont utilisées partout où des analyses chimiques ne peuvent pas être mises en œuvre, ou sont mal adaptées (impossibilité d'extraire un échantillon, prélèvement non représentatif de l'ensemble du matériau, analyse chimique difficile, ou nécessité d'un contrôle rapide (analyse en ligne, automatisation des chaînes de production).

2.6.2.2.1. Les mesures passives

Elles ne nécessitent pas de source extérieure : les rayonnements émis spontanément par la matière nucléaire ont une intensité et un pouvoir de pénétration dans la matière suffisants pour être détectés par la chaîne de mesure externe, ce qui permet de caractériser les émetteurs. Si la mise en œuvre de ces mesures est simple, l'émission spontanée de rayonnements par la matière nucléaire est dépendante de nombreux facteurs physiques (atténuation au travers de la matière environnante, déviation par diffusion Compton, etc.) altérant sérieusement la représentativité des mesures.

Ces techniques sont basées sur la détection des rayonnements qui sortent le plus facilement des colis (gamma, neutrons). Les plus couramment utilisées sont :

-la **spectrométrie gamma** : la mesure des rayonnements γ s'effectue avec un dispositif permettant de les trier en fonction de leur énergie (raies γ). On utilise souvent des détecteurs à semi-conducteur de type germanium Hyper Pur (HpGe), ou dopés au lithium (Ge(Li)), qui permettent d'obtenir des spectres gamma de haute résolution (c.f. section 4.3.1). L'analyse du spectre obtenu permet d'identifier les radioéléments présents dans un colis et de déterminer leur quantité. Les principales limitations de la spectrométrie gamma ont essentiellement deux origines : la première est l'atténuation des rayonnements γ dans les matériaux (matrice, enrobage) qui entourent la matière radioactive, ce qui rend la mesure très sensible à la densité électronique de la matrice et à la répartition des émetteurs γ dans le colis, la deuxième est la présence d'éventuels rayonnements parasites qui perturbent la mesure.

-le **comptage neutronique passif** : on utilise le comptage neutronique dans le cas où le phénomène d'atténuation est trop important pour effectuer une spectrométrie γ et lorsque les radioéléments présents sont de forts émetteurs neutroniques, notamment pour la mesure des transuraniens (Pu, Am, Cm). La principale difficulté de ce type de mesure est son interprétation car le comptage neutronique est totalement non sélectif en énergie. Le champ d'application de la méthode est dédié à l'information qualitative, et lorsque la sensibilité exigée n'est pas trop grande.

Pour mémoire, on retiendra aussi la **calorimétrie** qui mesure la chaleur dégagée par le dépôt d'énergie des rayonnements radioactifs dans la matière. La **spectrométrie X** et le **comptage alpha** reposent sur la détection de rayonnements moins pénétrants et sont utilisées pour des applications spécifiques, notamment la caractérisation de solutions peu concentrées d'uranium ou de plutonium, mais rarement pour la mesure des déchets solides.

2.6.2.2.2. Les mesures actives

Pour les mesures actives, le colis est irradié avec une source radioactive extérieure. L'objectif est, soit d'exciter certains éléments et de mesurer les rayonnements de désexcitation émis, soit de mesurer l'absorption des rayonnements de la source dans l'échantillon. Bien que plus coûteuses et plus difficiles à mettre en œuvre que les mesures passives, ces méthodes posent généralement moins de problèmes de représentativité et permettent d'atteindre de plus grandes sensibilités. Elles sont donc couramment employées, notamment pour la détection de très faibles quantités d'émetteurs alpha dans des déchets solides. Là aussi, on peut distinguer deux grandes familles de mesures, suivant que le faisceau interrogateur émet un flux neutronique ou un flux photonique :

- **L'interrogation neutronique** consiste à irradier l'objet à l'aide d'une source de neutrons de manière à y provoquer des fissions et à détecter les particules pénétrantes, neutrons ou photons, émises au cours des réactions de fissions, instantanément ou de façon retardée. On dissocie les techniques basées sur la détection des neutrons prompts de celles de la détection des neutrons et gammas retardés.
- **L'interrogation photonique** consiste à irradier le colis par un flux de photons. Les différentes techniques existantes se distinguent par la nature des sources émettrices utilisées et les réactions nucléaires induites. Ainsi, les mesures par **réactions photonucléaires** utilisent des sources de photons

de haute énergie, et cherchent à détecter essentiellement les neutrons issus des émissions neutrons-gamma. La **photofission**, technique analogue, consiste à induire des fissions dans les radioéléments lourds à caractériser, à l'aide d'un flux intense de photons très énergétiques, issus d'un accélérateur linéaire d'électrons. On mesure ensuite les neutrons prompts ou retardés émis suite à ces réactions. La mesure des neutrons retardés offre de bons résultats³ (car moins sensible au bruit de fond) et semble être actuellement une voie prometteuse [Huyn-99].

Enfin, citons les **mesures de transmission photonique**. Ce ne sont pas des mesures de radioactivité, mais elles sont fréquemment utilisées pour la caractérisation non destructive des matériaux et le contrôle de procédé. Elles permettent de mesurer quantitativement des densités de matériaux et des concentrations de solutions, ou de tester qualitativement la présence de matière de façon non intrusive. La technique la plus répandue est la **densimétrie par transmission photonique**. Elle consiste à évaluer la densité d'un matériau par une mesure de transmission d'un rayonnement photonique (tube à rayons X, source isotopique de rayonnements gamma ou X) et un détecteur, qui permet de mesurer le flux photonique transmis par le matériau. Certaines techniques de densimétrie mettent en jeu l'absorption photonique à deux énergies. Ceci permet de déterminer les concentrations de deux constituants d'un mélange. La densimétrie double-énergie est particulièrement efficace si la dépendance en énergie du coefficient d'atténuation massique μ_m est très différente pour les deux constituants, ce qui est le cas quand l'un des composants a un numéro atomique faible et l'autre élevé (par exemple, un solvant et l'uranium ou le plutonium qu'il contient). Une application récente de cette technique utilise une source d'holmium dont les raies d'émission à 195 keV et 405 keV sont exploitées [Bern-99]. La carte d'atténuation obtenue par tomographie de transmission permet une meilleure interpolation à l'énergie intermédiaire du plutonium à 208 keV, le but étant d'intégrer cette information et de tenir compte de l'atténuation dans une technique de tomographie d'émission, pour améliorer la quantification du plutonium.

2.7. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Bern-99] R.T. Bernardi « *TRU drum NDE and NDA with WIT* » in Conference Waste Management 99, Tucson, Arizona, 1999
- [Bour-84] M. Bourgeois. « *Cycle du combustible-Retraitement des combustibles.* » Techniques de l'ingénieur-Mécanique et chaleur Génie Nucléaire, B3650 :1-56, 1984
- [Cea-86] Commissariat à l'Energie Atomique. « *Les déchets nucléaires.* » Séries synthèses, éditions Eyrolles, 1986
- [Iae-92] International Atomic Energy Agency. « *Radioactive waste management : an IAEA source book.* » Vienna, 1992
- [Loi-91] Loi n°91-1381 relative aux recherches sur la gestion des déchets radioactifs, 30 décembre 1991
- [Huyn-99] F. Huynh, « *Tomographie appliquée à la détection des actinides par photofission.* », PhD thesis, INST Cea-Saclay, 1999

³ malgré une statistique intrinsèquement moins bonne que celle des neutrons prompts, ces derniers étant beaucoup plus nombreux,

- [Knol-89] G.F. Knoll, « *Radiation Detection and Measurement.* » Second Edition, Wiley, 1989
- [Marq-95] Y. Marque. « *La gestion à long terme des déchets radioactifs du cycle du combustible.* » Institut National des Sciences et techniques Nucléaires, Le cycle du combustible nucléaire, 1995
- [Roge-83] D.R. Rogers. « *Handbook of nuclear safeguards measurement methods.* » Contractor : Monsanto Research Corporation, Mound Laboratory Miamisburg. NUREG-CR-2078/MLM-2855. Miamisburg, Ohio, 1983
- [Scha-91] J.P. Schapira. « *Les déchets nucléaires : un problème mondial.* » La documentation française, série « Problèmes politiques et sociaux », n°649, 1991

CHAPITRE 3.

PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE LA TOMOGRAPHIE

3.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous faisons un exposé rapide, mais nécessaire, des méthodes de reconstruction à partir de données complètes. Nous pensons qu'il est utile d'en faire un rappel, puisque la plupart des méthodes de reconstruction à partir d'un nombre limité de projections utilisent ou adaptent ces méthodes de reconstruction « traditionnelles ».

Nous distinguons les méthodes de reconstruction par "transformée", qui sont des méthodes analytiques de reconstruction supposant une relation entre l'ensemble de données continu et un objet continu. Le problème de la reconstruction d'une fonction à partir de ses projections a été abordé très tôt par Radon [Rado-17]. Les premières applications concrètes n'apparaissent que 40 ans plus tard en astronomie [Brac-56] mais aussi et surtout en imagerie médicale [Corm-63][Houn-73]. La transformée de Radon est l'outil mathématique qui formalise le lien existant entre les mesures (les données) et l'image que l'on cherche à reconstruire (l'objet). Nous verrons que ces méthodes analytiques sont directement dérivées de l'inverse de la transformée de Radon, et les algorithmes de reconstruction correspondants consistent à effectuer une version discrétisée de ces transformations continues. Dans les méthodes de reconstruction dites « algébriques », le problème de reconstruction est lui-même discrétisé dès le début, et au lieu d'estimer une fonction f par inversion directe du problème, ces méthodes calculent une suite finie de vecteurs par des procédés itératifs. Le chapitre 5 leur est entièrement consacré.

Ici, nous faisons plus particulièrement l'analyse de la caractéristique de la mesure par tomographie d'émission dans le cadre de la détection en géométrie parallèle. Nous établissons les opérateurs de base et les notations utiles à la description de la transformée de Radon : d'abord en l'absence d'atténuation, puis nous abordons le cas plus délicat où l'atténuation est une fonction quelconque non forcément uniforme sur le support de l'image. Le cas particulier où l'atténuation est constante est également abordé, ainsi que les algorithmes qui s'y rattachent.

Enfin, nous discutons de l'échantillonnage de l'objet. Entre autres, nous abordons le schéma d'acquisition standard en mesures tomographiques et le nombre de mesures minimales relatif à cette configuration. Une méthode permettant de réduire le nombre de mesures, sans diminuer l'information nécessaire à la reconstruction d'image, est également décrite.

3.2. MODELISATION DES MESURES

Le but de la tomographie d'émission 2D est de reconstruire la répartition bidimensionnelle d'activité d'un radioélément émetteur gamma dans la tranche d'un objet mesuré. La technique consiste à accumuler des mesures de l'activité émergente en déplaçant un détecteur muni d'un dispositif de collimation en de multiples positions spatiales, généralement des successions de rotations et de déplacements latéraux de l'objet devant le détecteur fixe (ou inversement). La collimation devant le détecteur (c.f. § 4.3.1) permet de focaliser ces mesures à un domaine spécifique de l'objet que l'on peut plus ou moins grossièrement assimiler à des droites (c.f. figure 3.1).

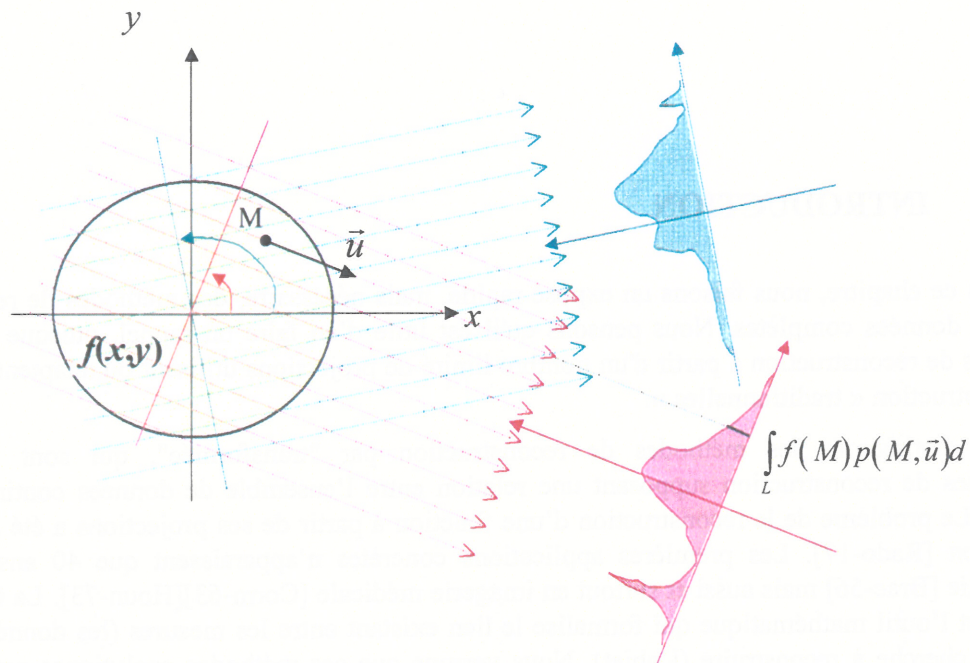


figure 3.1: Deux groupes de mesures en ligne à deux angles différents. Les courbes correspondent au relevé des différentes intensités d'activité émergente mesurées le long des lignes de mesure (L)

La modélisation des mesures présuppose une connaissance du processus de formation de celles-ci et donc de l'ensemble des phénomènes physiques qui s'y rattachent.

Désignons par $f(M)$ la distribution d'activité moyenne au point M de coordonnées (x, y) , et par $p(M, \vec{u})$ la probabilité qu'un photon émis du point M parvienne au détecteur placé dans la direction désignée par le vecteur directeur \vec{u} . Cette probabilité englobe l'ensemble des processus et paramètres nous informant sur la loi de formation des mesures. Notons par $b(\vec{u})$ le bruit sur la mesure $m(\vec{u})$ effectuée dans cette même direction. Alors, la loi de formation de la mesure s'écrit:

$$E(m(\vec{u})) = \int_{R^3} p(M, \vec{u}) f(M) dM + b(\vec{u})$$

où E désigne l'espérance mathématique de la mesure (on considère la moyenne de la mesure et non la mesure elle-même car le processus d'émission est lui-même probabiliste).

Remarquons qu'il n'existe pas de formule analytique de cette probabilité : en pratique, seuls des codes de calculs de Monte-Carlo simulant aléatoirement les émissions de photons permettent d'accéder à ces

valeurs [Bries-90]. Cependant, le temps de calcul reste long et pénalisant pour être utilisé dans des tâches de routine [Floy-84].

3.3. OPERATEURS DE PROJECTION ET RETROPROJECTION EN GEOMETRIE PARALLELE

Nous désignons par μ la distribution du coefficient linéique d'atténuation par unité de longueur (cm^{-1}), et par f la distribution volumique de l'activité d'émission, exprimée en nombre total de photons émis et détectés par unité de volume (Bq/cm^3) pendant toute la durée de l'acquisition. Ces fonctions sont supposées nulles en dehors d'un support compact Ω tel que

$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in R^3, x^2 + y^2 \leq R_{obj}^2, z \in [0, H_{obj}] \right\}$ où R_{obj} et H_{obj} désignent respectivement le rayon et la hauteur de l'objet.

Nous référençons le repère fixe lié à l'objet par $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et choisissons (O, \vec{k}) pour axe de rotation du système tomographique. Nous utilisons un repère tournant $(O, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ contenu dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) défini à partir de ce dernier par une rotation d'angle θ . Pour $\theta \in [0, 2\pi]$, les deux vecteurs unitaires¹ sont ainsi définis par $u_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)'$ et $v_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)'$. Dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) , nous utilisons le couple de variables (x, y) pour désigner les coordonnées d'un point M, exprimées dans le repère fixe et le couple (ρ, τ) pour le repère tournant. Dans la suite de ce chapitre, on travaille en normalisant les distances dans le plan (x, y) au disque unité Ω_2 .

3.3.1. La transformée de Radon

La transformée de Radon, notée $\mathfrak{R}f$, d'une fonction f de R^n vers R continue et à support compact, est l'ensemble des mesures intégrales sur des hyperplans de R^n . Dans cette géométrie, les deux opérateurs que nous allons détailler agissent sur des coupes bidimensionnelles de la fonction. En dimension deux, les hyperplans sont des droites L que nous décrivons par l'équation $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$, où ρ est un nombre réel. La transformée de Radon de la fonction f suivant la droite L est donc paramétrisée par la distance ρ au centre et l'angle θ définissant le vecteur directeur v_θ de la droite, soit :

$$\mathfrak{R}f(\rho, \theta) = \int_{\langle u_\theta, M \rangle = \rho} f(M) dM = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho u_\theta + \tau v_\theta) dt \quad (3.1)$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien.

\mathfrak{R} est appelé l'opérateur de transformée de Radon en 2D. On parle aussi d'opérateur de projection. Lorsqu'on fera allusion à l'opérateur de projection pour un angle θ fixé, l'opérateur sera encore noté $\mathfrak{R}_\theta f(\rho)$.

¹ Dans la suite, on fera l'abus de notation d'utiliser M pour désigner le vecteur OM, ainsi que (u_θ, v_θ) en lieu et place de $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$.

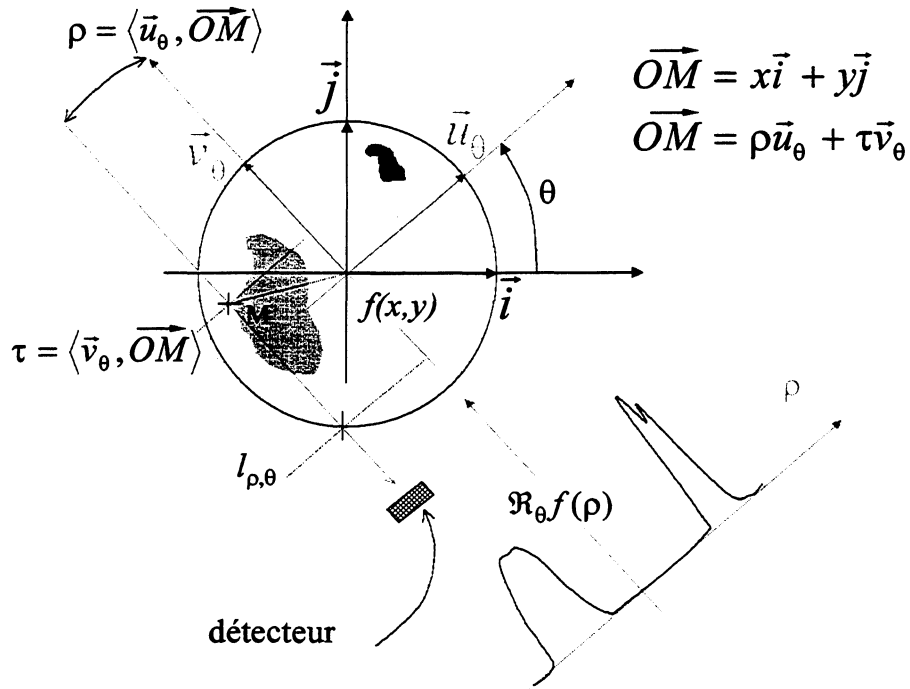


figure 3.2 : Projection de la fonction f à l'angle θ en géométrie parallèle. Le dispositif de détection se trouve dans la partie négative du demi-espace engendré par le vecteur v_θ (projection suivant $-v_\theta$)

Une image peut ainsi être projetée suivant un axe directeur (ici en l'occurrence portée par le vecteur v_θ) dans l'espace dit de Radon. Cet espace est paramétré par ρ et θ , et lorsqu'on représente l'ensemble des mesures acquises aux différents angles de projection en fonction des variables (ρ, θ) on appelle l'image obtenue un **sinogramme**, car la projection d'un point de l'image se projette en une sinusoïde (figure 3.3-c).

L'**opérateur de rétroprojection** est le deuxième opérateur communément utilisé en tomographie : c'est l'opérateur adjoint de l'opérateur de projection, on a donc coutume de le noter \mathfrak{R}^* . Tout comme l'opérateur de projection, il intervient dans la reconstruction de l'image. A une fonction g définie de $R \times [0, 2\pi]$ dans R , et M un point de R^2 , la rétroprojection de g au point M est définie par :

$$\mathfrak{R}^* g(M) = \int_0^{2\pi} g(\langle u_\theta, M \rangle, \theta) d\theta \quad (3.2)$$

En un point M de l'image, la rétroprojection consiste à affecter la somme des valeurs de la droite de projection passant par ce point et faisant un angle θ , où θ varie entre $[0, 2\pi]$. \mathfrak{R}^* est l'adjoint de \mathfrak{R} pour les produits scalaires suivants :

$$\langle \mathfrak{R}f, g \rangle = \int_R \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}f(\rho, \theta) g(\rho, \theta) d\theta$$

$$\langle f, \mathfrak{R}^* g \rangle = \int_{R^2} f(M) \mathfrak{R}^* g(M) dM$$

L'égalité entre les deux produits scalaires s'établit directement avec $\rho = \langle M, u_\theta \rangle$. Les opérateurs de projection/rétroprojection dans les autres géométries (éventail, conique) ne sont pas détaillés car nous n'en ferons pas usage dans nos travaux. On pourra se référer aux descriptions des opérateurs en géométrie conique dans [Donn-84] et pour la géométrie éventail dans [Herm-76].

3.3.2. Théorème coupe-projection

Ce théorème essentiel découle d'une propriété qu'il est aisé de démontrer : l'application d'une transformée intégrale sur la transformée de Radon a un équivalent comme transformée de l'image : c'est-à-dire que pour toute fonction d'une variable $h(\rho)$, avec $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$, et telle que $\Re f(\rho, \theta)h(\rho) \in L^1(\mathbb{R})$, et quel que soit θ , on a l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}} \Re f(\rho, \theta)h(\rho)d\rho = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)h(x \cos \theta + y \sin \theta)dx dy$$

Si on choisit $h(\rho) = e^{-2i\pi k\rho}$ et $(k_x, k_y)^t = k u_\theta$, on a alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \Re f(\rho, \theta).e^{-2i\pi k\rho} d\rho = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)e^{-2i\pi(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (3.3)$$

Du côté droit de l'expression, on reconnaît la transformée de Fourier 2D de l'image suivant le vecteur u_θ . Du côté gauche, il s'agit de la transformée de Fourier 1D de la transformée de Radon par rapport ρ .

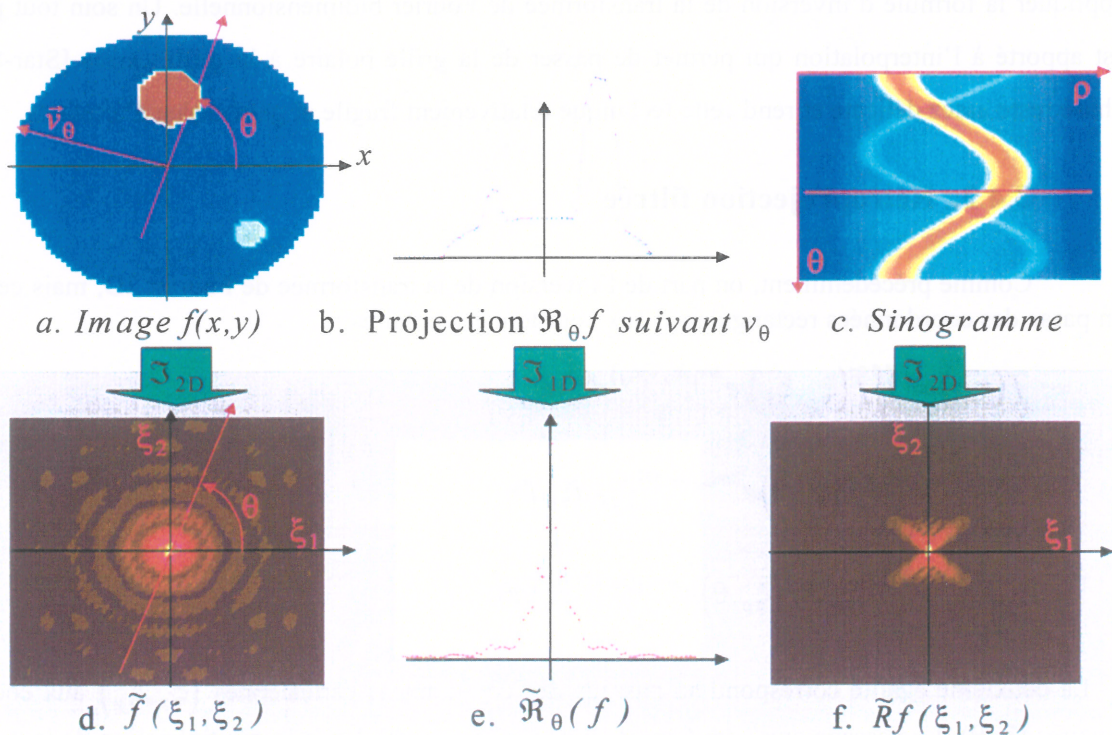


figure 3.3 : **Théorème coupe-projection** : en a) l'image $f(x,y)$; en b) la projection à l'angle θ de l'image ; en d) la transformée 2D de l'image f et en e) la transformée de Fourier 1D de la projection $\Re_\theta f$. Le théorème exprime que le profil de l'image e) est aussi la coupe centrale de l'image obtenue en d) suivant de vecteur directeur u_θ . Pour illustration, notons la forme particulière de la transformée de Fourier 2D (image f) du sinogramme (image c), support géométrique qui sera exploité au chapitre 3.7 afin de définir des schémas d'échantillonnage efficaces.

Ce résultat est connu sous le nom du théorème coupe-projection [Natt-86] et il exprime que la transformée de Fourier d'une projection obtenue à θ fixé, est égale à une coupe (ou un profil²) à l'angle θ passant par le centre dans l'espace de Fourier de la transformée de Fourier 2D de l'image (c.f. figure 3.3-d).

3.4. FORMULES D'INVERSION ANALYTIQUE

De nombreuses méthodes analytiques ont été proposées pour la détermination d'une fonction à partir de sa transformée de Radon. Nous nous limitons ici aux développements effectués à partir du théorème coupe-projection.

3.4.1. Reconstruction de Fourier directe

On part de la détermination d'une fonction à partir de sa transformée de Fourier 2D, par application de l'expression inverse, soit :

$$f(x, y) = \iint_{R^2} \tilde{f}(\xi_x, \xi_y) \cdot e^{2i\pi(x\xi_x + y\xi_y)} d\xi_x d\xi_y$$

La technique consiste à réaliser une interpolation fine de l'ensemble des points de mesures sur une grille polaire de la transformée de Radon sur une grille cartésienne. Ensuite, il ne reste plus qu'à appliquer la formule d'inversion de la transformée de Fourier bidimensionnelle. Un soin tout particulier est apporté à l'interpolation qui permet de passer de la grille polaire à la grille carrée [Star-86]. Cette phase reste assez délicate et rend cette technique relativement fragile et génératrice d'artefacts.

3.4.2. Rétroprojection filtrée

Comme précédemment, on part de l'inversion de la transformée de Fourier 2D, mais cette fois-ci on passe des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \iint_{R^2} \tilde{f}(\xi_x, \xi_y) \cdot e^{2i\pi(x\xi_x + y\xi_y)} d\xi_x d\xi_y \\ &= \int_0^\pi \int_R \tilde{f}(\xi_\rho, \theta) \cdot e^{2i\pi\xi_\rho \langle u_\theta, M \rangle} |\xi_\rho| d\xi_\rho d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_R |\xi_\rho| \tilde{\mathcal{R}}f(\xi_\rho, \theta) \cdot e^{2i\pi\xi_\rho \langle u_\theta, M \rangle} d\xi_\rho d\theta \end{aligned}$$

La deuxième égalité correspond au passage des coordonnées cartésiennes (ξ_x, ξ_y) aux coordonnées polaires (ξ_ρ, θ) . Le passage aux coordonnées polaires met en évidence la multiplication de la transformée de Fourier du sinogramme par le facteur $|\rho|$, appelé filtre rampe. Le théorème coupe-projection intervient pour l'obtention de la dernière égalité. On peut encore l'exprimer en posant :

² Le théorème est aussi connu sous le nom de théorème profil central.

$$q(\omega, \theta) = \int_{\mathbb{R}} |\xi_\rho| \tilde{\mathfrak{R}}f(\xi_\rho, \theta) e^{2im\xi_\rho\omega} d\xi_\rho \quad (3.4)$$

et ainsi :

$$f(x, y) = \int_0^\pi q(\langle u_\theta, M \rangle, \theta) d\theta = \int_0^\pi q(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad (3.5)$$

Finalement, la fonction image f est restituée à partir de la rétroprojection (intégrale suivant θ) d'un filtrage rampe des projections (la fonction q). Une autre méthode consiste à rétroprojeter puis filtrer l'image rétroprojetée.

3.4.3. La formule de Radon

C'est Radon qui le premier a exprimé qu'une fonction f pouvait se déterminer à partir de sa transformée de Radon $\mathfrak{R}f$ par rétroprojection du sinogramme filtré [Rado-17]. f étant toujours donné par 3.5 mais avec la fonction q déterminée par :

$$q(\omega, \theta) = \nu p \left[\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathfrak{R}f(\rho, \theta) / \partial \rho}{(\omega - \rho)} d\rho \right]$$

L'intégrale ci-dessus est impropre et présente une singularité en ρ . Elle est évaluée par sa valeur principale (νp) de Cauchy. Mais l'expression illustre surtout que la formule d'inversion fait appel à divers opérateurs comme la différentiation partielle (D), une transformée de Hilbert (H) et la rétroprojection, avec $\mathfrak{R}^{-1} = \frac{-1}{2\pi} \mathfrak{R}^* H D$. Une démonstration de l'équivalence entre q définie au 3.4 et la dernière relation est donnée dans [Rose-82].

3.5. LA TRANSFORMÉE DE RADON ATTENUÉE

On considère cette fois-ci un facteur de pondération dans l'expression de la transformée de Radon. Ce coefficient correspond à la prise en compte de l'atténuation des photons au travers de la matière le long du chemin d'intégration. De la loi de Beer-Lambert (c.f chapitre 4), le coefficient de pondération que subit un rayonnement émis au point $M(\rho, \tau)$ jusqu'à son point de détection, noté $M_{det}(\rho, \tau_{det, \theta})$, est :

$$a(M, M_{det}) = \exp\left(-\int_{M_{det}}^M \mu(l) dl\right) = \exp\left(-\int_{\tau_{det, \theta}}^{\tau} \mu(\rho u_\theta + l v_\theta) dl\right)$$

La transformée de Radon telle qu'elle est décrite à la section 3.3.1 se présente donc comme le cas particulier où la fonction d'atténuation est égale à la fonction nulle sur le support Ω . Dans la majeure partie des applications de la tomographie d'émission, l'atténuation est non nulle. On note alors \mathfrak{R}_μ , l'opérateur de projection atténué définie par:

$$\mathfrak{R}_\mu f(\rho, \theta) = \int_{\langle u_\theta, M \rangle = \rho} f(M) a(M, M_{det}) dM = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho u_\theta + \tau v_\theta) \exp\left(-\int_{\tau_{det, \theta}}^{\tau} \mu(\rho u_\theta + l v_\theta) dl\right) d\tau \quad (3.6)$$

Dans l'équation (3.6), le terme $\exp\left(-\int_{\tau_{det,\theta}}^{\tau} \mu(\rho u_\theta + l v_\theta) dl\right)$ traduit aussi la probabilité pour qu'un photon

émis au point M n'interagisse pas avec la matière sur la droite le liant au point M_{det} . L'opérateur dual \mathfrak{R}_μ^* correspondant à la rétroprojection atténuée, a pour expression :

$$\mathfrak{R}_\mu^* g(M) = \int_0^{2\pi} g(\langle u_\theta, M \rangle, \theta) \exp\left(-\int_{-\infty}^0 \mu(M + l v_\theta) dl\right) d\theta \quad (3.7)$$

On peut montrer comme dans le cas de l'atténuation nulle, que les deux opérateurs sont adjoints l'un de l'autre pour le produit scalaire nouvellement défini par :

$$\langle \mathfrak{R}_\mu f, g \rangle = \int_R \int_0^{2\pi} \int_R f(\rho u_\theta + \tau v_\theta) g(\rho, \theta) \exp\left(-\int_{-\infty}^{\tau} \mu(\rho u_\theta + l v_\theta) dl\right) d\rho d\theta d\tau$$

Dans le cas particulier où l'atténuation est constante $\mu(M) = \mu_0$ sur un support convexe qui contient le support de f^3 , on parle alors de **transformée de Radon exponentielle**. Dans ce cas, si on note $l_{\rho,\theta}$ (c.f. figure 3.2) l'ordonnée du point d'intersection entre la droite passant par M dirigée par v_θ et le bord du support Ω le calcul de $a(M, M_{det})$ se simplifie en :

$$\int_{\tau_{det,\theta}}^{\tau} \mu(\rho u_\theta + \tau v_\theta) d\tau = \mu_0 (\tau - l_{\rho,\theta}) \quad (3.8)$$

On passe de la transformée de Radon atténuée à la transformée exponentielle [Mark-85], par normalisation, comme suit :

$$\begin{aligned} T_{\mu_0} f(\rho, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho u_\theta + \tau v_\theta) \cdot e^{-\mu_0 \tau} d\tau \\ &= \mathfrak{R}_\mu f(\rho, \theta) e^{-\mu_0 l_{\rho,\theta}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

La transformée de Radon exponentielle T_μ peut se voir comme une normalisation de \mathfrak{R}_μ lorsque μ est uniforme sur le support convexe Ω .

Son opérateur adjoint, l'opérateur de rétroprojection de la transformée exponentielle, est défini par :

$$T_{\mu_0}^* g(M) = \int_0^{2\pi} g(\langle \tilde{u}_\theta, M \rangle, \theta) \cdot e^{-\mu_0 \langle \tilde{v}_\theta, M \rangle} d\theta \quad (3.10)$$

3.6. FORMULE D'INVERSION ANALYTIQUE

En géométrie parallèle, quand l'atténuation est uniforme sur un objet convexe, des formules d'inversion de la transformée de Radon exponentielle existent [Hazo-90]. Les applications de ces théorèmes sont nombreuses en imagerie nucléaire, plus particulièrement en SPECT (Single Photon Emission Computed Tomography) où on cherche à reconstruire la distribution d'un radioélément mono-énergétique injecté dans le corps d'un patient. On retrouve parmi les plus utilisés, le technécium 99, le thallium 201 ou l'iode 123, tous émetteurs à une centaine de keV. Malheureusement, dans cette gamme d'énergie, l'interaction photons énergie-matière n'est pas négligeable. Il est donc impératif de tenir

³ ce qui ne signifie pas que l'atténuation est constante en dehors de ce support

compte de la fonction d'atténuation μ si l'on veut à la fois améliorer la quantification et la qualité de l'image. Dans le domaine des déchets, l'atténuation joue un rôle prépondérant, et la gamme de densité des matériaux constituant les colis ainsi que la large gamme de radioéléments (en terme de raies d'énergies d'émissions) obligent à une prise en compte de l'atténuation.

3.6.1. La méthode de Tretiak et Metz

L'inversion analytique proposée par [Tret-80] généralise la méthode de filtrage-rétroprojection. Si on note $T_\mu = P_\mu R_\mu$, où $P_\mu = \text{diag}(e^{\mu \rho, \theta})$ est l'opérateur diagonal dont les coefficients proviennent de l'équation (3.9), alors il est démontré que l'image f peut être reconstruite par :

$$f = T_{-\mu}^* F_\mu P_\mu R_\mu f$$

où F_μ est un filtre de fonction de transfert tel que $\mathfrak{F}_\rho F_\mu(\lambda) = |\lambda| \delta_{|\lambda| \geq \mu}$

La méthode correspond à une rétroprojection filtrée pondérée.

3.6.2. La méthode de Bellini

C'est une des méthodes les plus employées [Bell-79] : elle repose sur la formule reliant la transformée de Radon et la transformée de Radon exponentielle :

$$\mathfrak{F}_\rho T_\mu f \left(\sqrt{\sigma_\rho^2 + \mu^2}, \theta + i \sinh^{-1} \left(\frac{\mu}{\sigma_\rho} \right) \right) = \mathfrak{F}_\rho \mathfrak{R}f(\sigma_\rho, \theta) \quad (3.11)$$

On utilise un développement en séries de Fourier suivant θ pour le calcul de la transformée de Fourier de T_μ dans l'espace complexe. Enfin, à partir de cette relation, on tire les valeurs de $\mathfrak{R}f(\rho, \theta)$, les projections non atténuées, et on reconstruit par FBP (Filtered Back Projection). L'enchaînement se décompose de cette manière :

1. Une première étape consiste à calculer l'opérateur $T_\mu f(\rho, \theta)$ à partir des mesures, en multipliant par le facteur de normalisation $\exp(-\mu l_{\rho, \theta})$.
2. On calcule la transformée de Fourier selon ρ : $\mathfrak{F}_\rho T_\mu f(\sigma, \theta)$.
3. On développe en série de Fourier, puis on prolonge aux angles complexes.
4. On utilise l'équation (3.11) pour le calcul de $\mathfrak{F}_\rho \mathfrak{R}f(\sigma, \theta)$ et finalement $\mathfrak{R}f(\sigma, \theta)$ par transformée de Fourier inverse.
5. On obtient f par FBP sur $\mathfrak{R}f(\rho, \theta)$.

Une formulation générique de l'inversion de la transformée de Radon 2D, ainsi que le comportement des méthodes en présence de bruit sont données dans [Metz-95].

3.6.3. En présence d'une atténuation non uniforme

Il n'existe pas à ce jour de méthode exacte d'inversion de la transformée de Radon atténuée. Cependant beaucoup de méthodes ont été empiriquement étendues à partir des méthodes d'inversion sur la transformée de Radon exponentielle. Citons parmi celles-ci la méthode de Manglos qui part de la

méthode de filtrage-rétroprojection pondérée adaptée à une carte d'atténuation non uniforme[Mang-88]. Les valeurs μ sont remplacées par les μ_{ij} , valeurs de l'atténuation linéique aux pixels (i,j) . D'autre part, dans [Glic-96], une généralisation de la méthode de Bellini pour corriger l'atténuation non uniforme est donnée. Cependant, son application principale visant la scintigraphie cérébrale et cardiaque, a orienté la méthode vers des classes d'images spécifiques et donc restreintes.

Toutes ces extensions à une distribution d'atténuation non uniforme permettent l'obtention de solutions très rapidement, cependant la solution est approchée et entachée d'erreurs de quantification, d'artefacts de non uniformité et de distorsions géométriques.

3.7. LA RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE : UN PROBLEME INVERSE « MAL-POSE »

Le problème inverse en reconstruction par tomographie d'émission consiste à restituer la distribution d'activité f à partir des mesures de projections m . Mathématiquement, cela revient à inverser l'opérateur H , sachant que le problème direct est modélisé par:

$$Hf + b = m \tag{3.12}$$

où b est le bruit de mesure. L'opérateur H , dit opérateur de projection, modélise le processus d'acquisition. Dans le cas présent, il doit prendre en compte l'ensemble des phénomènes physiques qui définissent le processus de mesure (c.f. chapitre 4). Si l'on restreint l'ensemble des phénomènes à ceux de l'atténuation du milieu et si l'on suppose que l'espace de mesure puisse être modélisé comme des droites, alors on peut considérer que l'opérateur de projection atténué R_μ constitue une bonne modélisation de H . Les méthodes analytiques calculent la solution dans l'espace des fonctions, en approchant la solution du problème inverse sous une formulation continue. La formule d'inversion analytique, reliant la fonction inconnue aux mesures, est discrétisée par la suite pour être mise en œuvre. La formulation discrète du processus et les méthodes algébriques de reconstructions associées sont abordées aux chapitres 5 et 6. Les méthodes algébriques conventionnelles posent le problème sous forme d'un système d'équations linéaires à résoudre. L'opérateur H devient alors la matrice de projection du système. La taille du système étant très grande, sa résolution par des méthodes directes n'est pas envisageable.

Le problème inverse (3.12) est un problème dit mal posé, car il ne satisfait pas aux conditions d'Hadamard qui imposent [Hada-23]:

- l'existence d'une solution f pour toute observation m ;
- l'unicité de la solution f ;
- la dépendance continue de cette solution f par rapport aux données m .

En effet, l'inversion de la transformée de Radon est un problème mal posé :

- la condition de l'existence d'une solution n'est pas satisfaite en pratique du fait du bruit de mesure. On peut montrer que les données doivent satisfaire des conditions de consistences, c'est-à-dire les conditions qui garantissent l'appartenance des données à l'image de la transformée de Radon ($m \in Im H$) [Natt-80],
- d'autre part, dans le cas où une solution existe, l'unicité n'est, en général, pas vérifiée car le problème peut être sous-déterminé. C'est le cas lors d'un sous-échantillonnage angulaire des mesures, ou lorsque les phénomènes d'atténuation rendent l'exploitation de certaines mesures impossible. Dans la pratique, nous ne procédons qu'à une version échantillonnée de la transformée de Radon de la fonction, à la fois en directions (on ne peut enregistrer qu'un nombre fini de projections) et en mesures par projection (les projections sont échantillonnées afin de pouvoir être traitées

numériquement). Or, il est montré dans [Herm-80] que ce nombre fini de données est une source d'indétermination fondamentale. Cela se traduit par le résultat suivant :

Soient $M, K \in \mathbb{N}^2$, deux entiers positifs et pour tout k tel que $1 \leq k \leq K$

On considère des points $(\rho_k, \theta_k)_k$ distincts dans la région de l'image, et L_k des nombres réels arbitraires. On peut alors montrer qu'il existe une fonction continue ε (la perturbation) telle que

$$\forall k \in [1, K] \quad \varepsilon(\rho_k, \theta_k) = L_k \text{ et } \forall m \in [0, M-1], \forall \rho, \quad \Re \varepsilon\left(\rho, \frac{2\pi m}{M}\right) = 0$$

Cela signifie que pour toute fonction f continue, il existe une autre fonction continue, $f+\varepsilon$, telle que f et $f+\varepsilon$ possèdent les mêmes intégrales rectilignes, dans toutes les M directions également espacées sur 2π , et cependant f et $f+\varepsilon$ sont différentes aux points $(\rho_k, \theta_k)_k$

Ainsi en pratique, les hautes fréquences sont souvent enregistrées de façon erronées à cause de l'échantillonnage discret de la transformée de Radon. Une image ne contenant que de hautes fréquences peut alors correspondre à un sinogramme dont l'échantillonnage donne un sinogramme nul [Loui-83]. Etant donné que leur présence n'est pas reflétée par le sinogramme échantillonné, on qualifie de tels artefacts d'artefacts fantômes. On voit donc que plusieurs solutions⁴ sont compatibles avec les données échantillonnées.

- Enfin, de petites variations sur les données vont engendrer de grands écarts sur les distributions résultantes. On dira aussi, lorsque la formulation du problème est matricielle, que le problème est mal conditionné. Ceci est inhérent à la tomographie et pose problème quelle que soit la technique de reconstruction. Ainsi, parmi les méthodes analytiques, le caractère mal conditionné du problème se retrouve d'un point de vue fréquentiel par la mise en évidence du filtre rampe : les hautes fréquences sont écrasées par la mesure intégrale et sont amplifiées à la reconstruction d'autant plus fortement que la fréquence est élevée. Or c'est dans les hautes fréquences que vont se retrouver les erreurs, qui vont être très amplifiées à la reconstruction, produisant ainsi une solution instable. La volonté d'augmenter la résolution à la reconstruction, c'est-à-dire travailler avec des pixels nombreux et petits, revient également à chercher à reconstruire des hautes fréquences. Ce qui rend difficile l'analyse entre d'une part les hautes fréquences résultant de l'amplification du bruit au travers de la reconstruction, et d'autre part celles correspondant à de réels détails présents dans l'image [Demo-89].

3.8. ECHANTILLONNAGE DES MESURES

3.8.1. Indétermination due à un nombre limité de projections

Le théorème de projection montre qu'il est possible de restituer l'image f à partir des projections, si on dispose d'une infinité de projections angulaires variant entre 0 et 2π et d'une infinité de mesures

⁴ au moins deux : la solution nulle et la vraie image

radiales. En pratique, nous ne disposons que d'un nombre fini de projections, et celles-ci sont elles-mêmes échantillonnées. Cet échantillonnage est nécessaire pour l'orientation numérique donnée à la reconstruction d'image.

Pour des raisons techniques ou purement physiques nous ne disposons pas toujours d'un nombre suffisant de mesures. Les deux causes majeures à la limitation des données sont :

1. Des projections manquantes : le sinogramme est incomplet du fait qu'une acquisition de mesures d'au moins 360° autour de l'objet n'a pas été possible. On parle d'angle de vue limité. Nous ne sommes pas confrontés à ce problème dans le contrôle des déchets.
2. Toutes les projections sont présentes, mais une partie de l'objet, fortement atténuante, empêche tout rayonnement d'émerger. Une grande partie des projections passant par cette zone ont un taux de comptage inexploitable. On parle de projections creuses.

L'éventualité de sinogrammes partiellement creux est non négligeable dans l'expertise des colis. Les éléments denses (fer, plomb, acier,...) contenus dans les colis ou les matrices d'enrobage de type béton/bitume réduisent considérablement l'émission photonique vers l'extérieur au colis. Lorsque l'angle de vue disponible se retrouve ainsi limité, la transformée de Fourier de l'image est connue de manière exacte, mais sur une zone réduite. De nombreuses publications sont consacrées à la restauration de la partie manquante, on pourra pour cela consulter [Rang-85] et [Azev-91]. L'objectif de nos travaux se limite au cas où les acquisitions sont obtenues sur des projections équiréparties sur 360° , en envisageant toutefois des configurations sous-échantillonnées radialement et angulairement (c.f. section 7.3).

3.8.2. Ensemble complet de projections

Nous utilisons la définition suivante de la transformée de Fourier de f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathfrak{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$$

En analyse de Fourier, c'est la formule de Poisson qui traduit l'efficacité d'un échantillonnage : soit $h > 0$, et f à support compact (i.e. $f \in \mathcal{E}'$)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\xi - \frac{2\pi k}{h}\right) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ih\langle \xi, k \rangle}$$

En général, les conditions d'échantillonnage sont données pour une fonction f dont le spectre ne comporte pas de fréquence supérieure à une valeur limite b , c'est-à-dire que la transformée de Fourier de f vérifie $Supp(\hat{f}) \subset [-b, b]^n$. On dit encore que f est b -bande limitée. Dans ces conditions, échantillonner f revient à périodiser le spectre, et la condition de non recouvrement des spectres de Shannon-Nyquist est satisfaite dès que $h \leq \pi / b$ (fréquence de Nyquist). Au delà de la fréquence de Nyquist on s'expose à des recouvrements de spectres, f n'est plus suffisamment échantillonnée et on ne peut isoler \hat{f} en multipliant l'équation par une fonction indicatrice.

La résolution du système est caractérisée par la largeur totale à mi-hauteur, notée FWHM⁵ (voir aussi section 4.3.3). Elle impose donc une fréquence maximale restituable dans l'image de $b = 1 / FWHM$. Si on se place dans le domaine spatial, l'échantillonnage radial h optimal est donc tel que $h = \pi FWHM$.

⁵ de l'anglais Full Width at Half Maximum

En pratique, on a tendance à échantillonner en deçà de la condition de Nyquist, par exemple en prenant $h = 2\pi\text{FWHM} / 3$.

On note Q le nombre de mesures par projection, et P le nombre de projections. Pour établir la relation entre Q et P , on peut voir l'ensemble des mesures comme un échantillonnage polaire de la transformée de Fourier de l'image f (c.f. figure 3.4). Ainsi, le nombre de mesures par projection, soit $Q = \lceil 2R_{obj} / h \rceil^6$, détermine l'échantillonnage radial des fréquences : la fréquence maximale transmise détermine le rayon extérieur du disque, soit π / h , et l'espacement sur un rayon entre deux données est de $(2\pi / h) / Q = \pi / R_{obj}$. La reconstruction de l'image est théoriquement possible par une transformée de Fourier discrète inverse à partir de l'ensemble de données interpolées sur une grille cartésienne. Or, on passe de la grille polaire à la grille cartésienne sans perte d'information, si l'écartement maximal entre deux points, c'est-à-dire la longueur de l'arc extérieur en fonction de l'échantillonnage angulaire $\Delta\theta$, n'excède pas l'échantillonnage radial. A l'optimum, on a $\frac{\pi}{h} \Delta\theta_{opt} = \frac{\pi}{R_{obj}}$ ce qui correspond à un nombre

de projections P régulièrement espacées sur 2π de :

$$P = \frac{2\pi}{\Delta\theta_{opt}} = \pi \frac{2R_{obj}}{h} = \pi Q \tag{3.13}$$

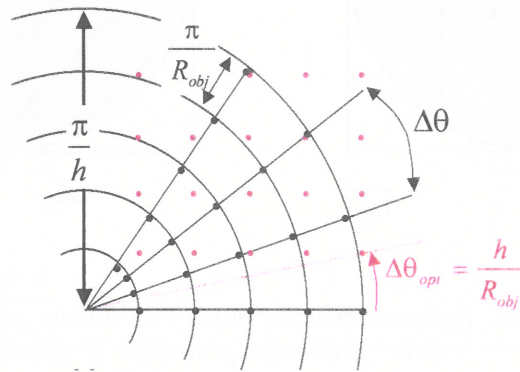


figure 3.4 : Echantillonnage dans l'espace de Fourier. Ce cas de figure correspond à un sous-échantillonnage angulaire, i.e. $\Delta\theta > h / R_{obj}$

Le nombre de projections doit alors être égal à au moins trois fois celui du nombre de mesures. Un ensemble complet de projections est donc défini pour Q satisfaisant à la condition de Nyquist et pour un nombre de projections angulaires tel que la relation (3.13) soit satisfaite. Comme nous le verrons à la section 3.8.3, ces conditions ne sont pas nécessaires mais suffisantes. Nous verrons qu'il est possible d'alléger le nombre de mesures sans perte d'information et, sous certaines conditions en élaborant un schéma efficace d'échantillonnage.

⁶ En réalité, pour une clarification ultérieure des formulations en échantillonnage efficace, on posera $q = \lfloor R_{obj} / h \rfloor$ et on prendra $Q=2q+1$. De ce fait on aura toujours une mesure centrée sur le colis.

3.8.3. Echantillonnage efficace en 2D

L'idée de rechercher un échantillonnage efficace vient du fait que la base canonique de R^n dans laquelle se formule généralement le problème n'est souvent pas la mieux adaptée pour l'échantillonnage de f . Ainsi, il est plus efficace d'échantillonner une fonction $f \in R^2$, b -bande limitée sur un schéma hexagonal (c.f. figure 3.6) plutôt que sur une grille carrée [Desb-97a]. Dans le cadre de la reconstruction tomographique, Cormack fut le premier à proposer une amélioration du schéma standard d'échantillonnage (équidistance des mesures radiales et déplacement angulaire constant entre projections) [Corm-78]. Le modèle de mesure considéré par Cormack est formé de bandes recouvrant le disque (support de f) (c.f. figure 3.5). L'échantillonnage entrelacé consiste à introduire un décalage d'une demi-largeur de bande entre chaque rotation ; d'où une succession de nombre pairs et impairs de mesures.

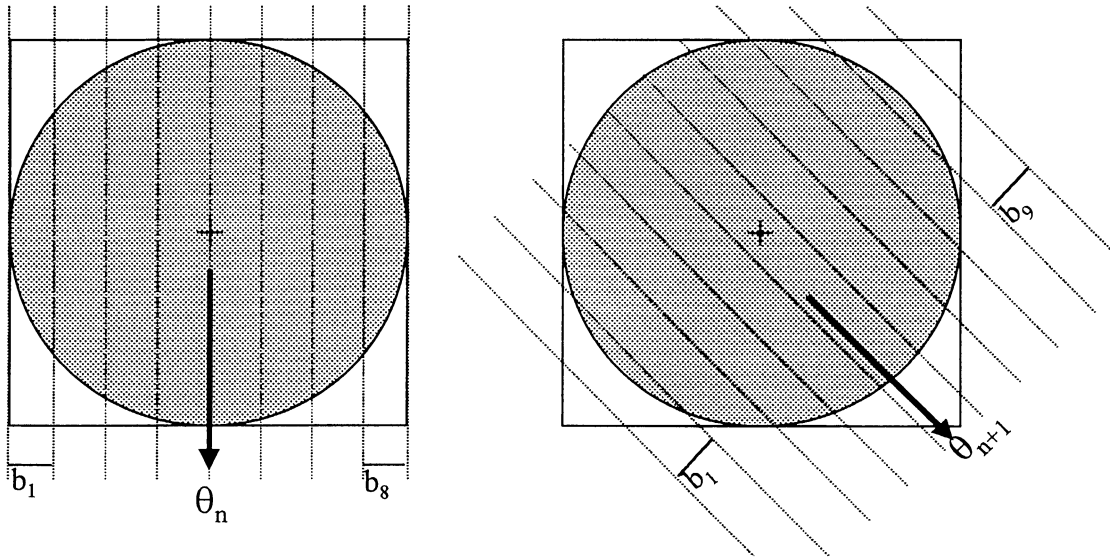


figure 3.5 : Recouvrement par nombre de bandes pairs (gauche) et impair (droite) proposé dans le schéma entrelacé de Cormack

Une approche analytique de l'échantillonnage entrelacé dans l'espace R^n a été proposée dans [Pete-62]. Nous nous restreignons ici au cas bidimensionnel et faisons l'hypothèse préalable que le support $K \subset R^2$, de la transformée de Fourier de f , ou $f \in S(R^2)$, existe. La condition de Nyquist des échantillonnages sur les grilles peut alors être généralisée pour des ensembles $\Lambda = \{Wk, k \in Z^2\}$ où W est une matrice (2,2) non-singulière. La condition devient :

$$\text{les ensembles } K + 2\pi W^{-t}k, k \in Z^2 \text{ doivent être mutuellement disjoints} \quad (3.14)$$

Nous pouvons illustrer ce résultat avec l'efficacité de l'échantillonnage hexagonal, à partir d'une fonction f essentiellement b -bande limitée. Soit W_S la matrice standard (diagonale) et W_H celle du schéma hexagonal. On constate aisément dans la figure 3.6 que le schéma obtenu à partir de W_H est plus compact. L'expression du non recouvrement des supports détermine ses éléments, soit :

$$2\pi W_H^{-t} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}b & 0 \\ b & 2b \end{bmatrix}, \text{ soit } W_H = \frac{\pi}{b} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } W_S = (\pi/b)I \quad (3.15)$$

Le rapport d'efficacité est déterminé par le rapport des deux déterminants (l'aire de la maille élémentaire qu'on cherchera à maximiser correspond au parallélogramme en gris sur la partie gauche de la

figure 3.6) : ici, on a $\det W_H / \det W_S = 2 / \sqrt{3}$. Dans le cas d'une fonction b -bande limitée, on sait que le schéma d'échantillonnage hexagonal est (parmi les schémas réguliers⁷ satisfaisant la condition 3.14 avec pour K un disque) optimal car il réalise le pavage de R^2 le plus compact [Conw-93].

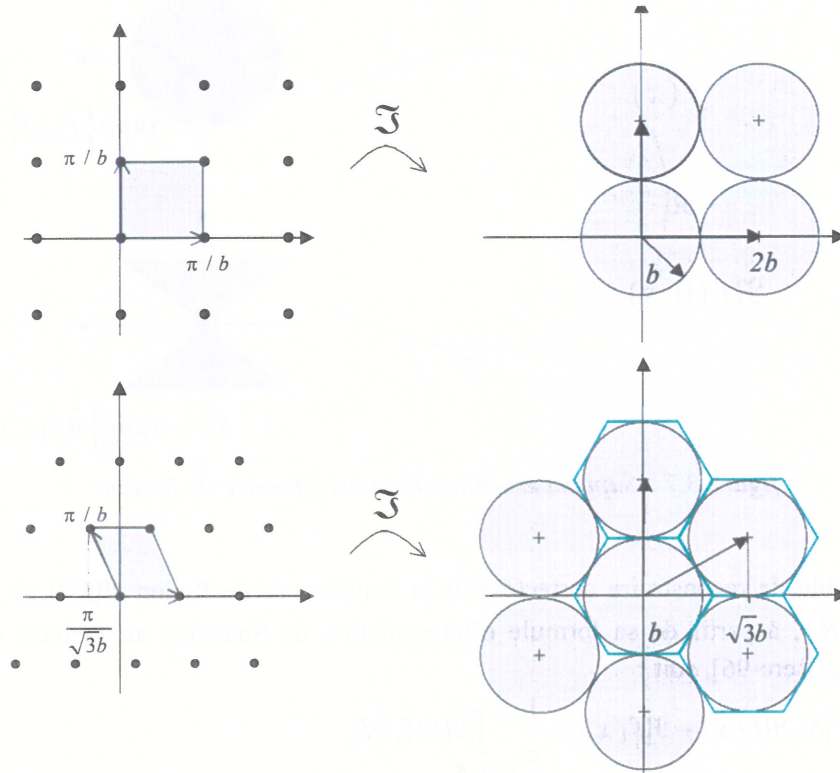


figure 3.6 : Echantillonnage standard de f réalisé à partir de la matrice W_S et le recouvrement induit dans l'espace de Fourier (en haut) ; l'échantillonnage hexagonal effectué à partir de W_H (en bas)

En utilisant maintenant l'écriture de la formule de Poisson pour l'appliquer à $f(Wx)$, nous obtenons la formule d'interpolation de Shannon :

$$f(x) = S_W(f)(x) = \frac{|\det W|}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f(Wk) \delta_K(Wk - x) \quad (3.16)$$

Pour son application au domaine de la tomographie, ce théorème a été adapté à la transformée de Radon $\mathfrak{R}f$, sur le groupe $T = R / 2\pi\mathbb{Z} \times R$. On note $\{k, \sigma\}$ les deux variables dans l'espace de Fourier 2D correspondant aux variables d'espace $\{x, y\}$. Dans le cas où W est admissible⁸, la grille $\{Wk, k \in A_W\}$ avec $A_W = \{k \in \mathbb{Z}^2, Wk \in [0, 2\pi[\times R\}$ est un sous-groupe de T . Alors, il a été montré [Natt-86] que la transformée de Fourier de $\mathfrak{R}f$ est négligeable en dehors du support défini par :

$$K_2(\vartheta, b) = \{(\nu, \sigma) \in \mathbb{Z} \times R : |\sigma| < b, |\nu| < \max(|\sigma| / \vartheta, (1 - \vartheta)b / \vartheta)\} \quad (3.17)$$

⁷ Effectivement, parmi les schémas non réguliers, il existe des schémas plus performants encore [Higg-95].

⁸ c'est-à-dire que l'ensemble $2\pi i \vec{e} \in W\mathbb{Z}^2$, puisque la transformée de Radon $Rf(\theta, s)$ est 2π -périodique de la première variable, il faut s'assurer que Wk produise un échantillon périodique de Rf . Pour plus de détails, se référer à [Fari-90].

où $0 < \vartheta < 1$ est un coefficient réel qui influence la rapidité de convergence des coefficients de Fourier. Le support essentiel K_2 de $\mathfrak{R}f$ est illustré à la figure 3.7.

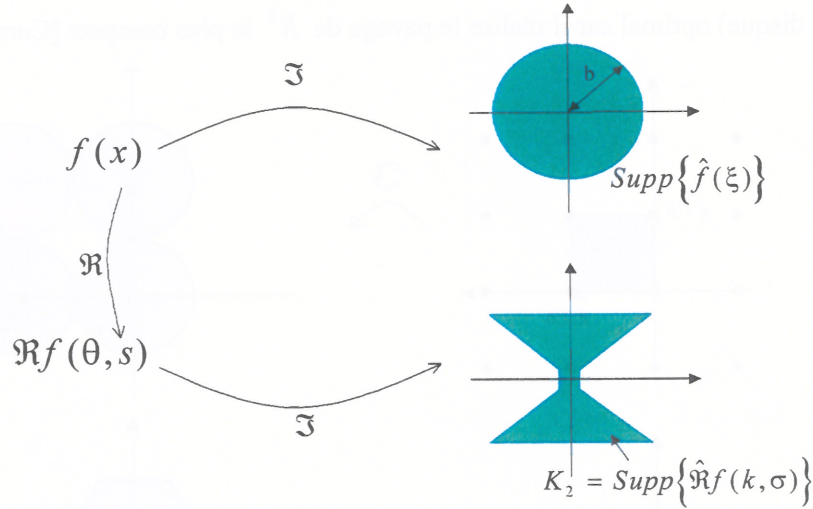


figure 3.7 : Support essentiel de la transformée de Radon

Il est possible de reconstruire correctement la transformée de Radon $\mathfrak{R}f(\theta, s)$, périodique en θ et $\mathfrak{R}f(\cdot, s) \in \mathcal{S}(R)$, à partir de sa formule d'interpolation de Shannon sur la base de l'échantillonnage effectué sur A_w [Bere-96], soit :

$$|\mathcal{S}_w \mathfrak{R}f(x) - \mathfrak{R}f(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{Z} \times R - K} |\hat{\mathfrak{R}}f(\xi)| d\xi \quad (3.18)$$

si W satisfait les conditions d'échantillonnage (3.14) avec $K = K_2$

L'échantillonnage standard de la transformée de Radon s'effectue suivant les directions angulaires $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P$ uniformément distribuées sur 2π et $\mathfrak{R}_{\theta_j} f$ est échantillonnée aux Q points équidistants s_l :

$$u_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos \theta_j \\ \sin \theta_j \end{pmatrix}, \quad \theta_j = (j-1)2\pi / P, \quad j = 1 \dots P \quad (3.19)$$

$$s_l = lh, \quad l = -q \dots q \quad (q = \lceil R_{obj} / h \rceil)$$

La matrice diagonale W_s telle que $\{W_s k, k \in A_w\} \cap \{T \times [-R_{obj}, R_{obj}]\}$ satisfaisant aux conditions de Shannon et qui engendre les points de l'échantillonnage standard est donc :

$$W_s = \begin{pmatrix} 2\pi / P & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad 2\pi W_s^{-t} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 2\pi / h \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

De la figure 3.8, on voit assez facilement que le non recouvrement des supports dans le domaine de Fourier impose les conditions suivantes : $P \geq 2b / \vartheta$, $2\pi / h \geq 2b$, ou encore :

$$P \geq 2b / \vartheta, \quad h \geq \pi / b \quad (3.21)$$

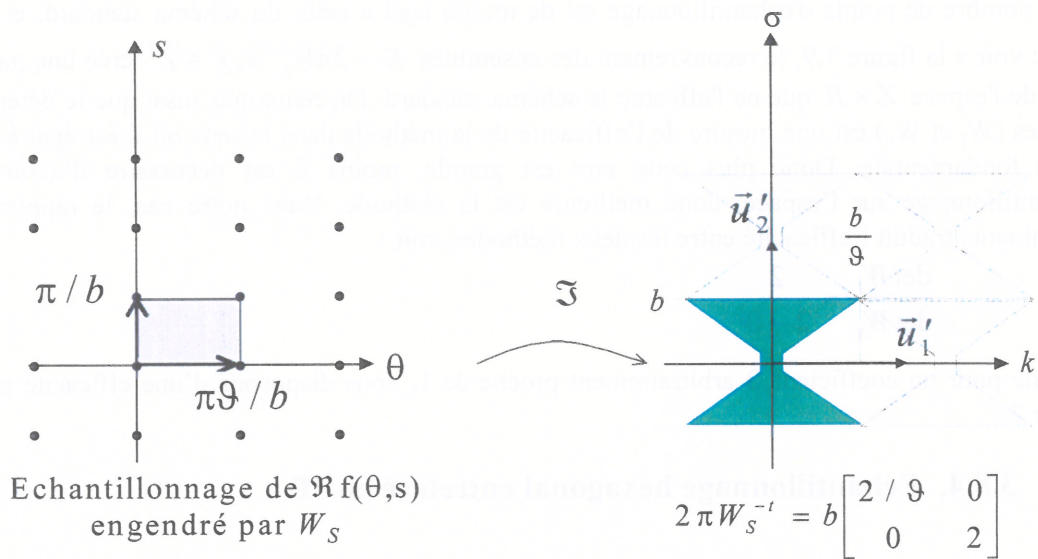


figure 3.8: Echantillonnage standard par W_S

Par ailleurs, on voit dans l'espace de Fourier que les zones non recouvertes par les supports sont importantes. L'échantillonnage efficace est réalisé à partir de la matrice W_I qui minimise cette zone, comme on peut le voir sur la figure 3.9.

Il est démontré dans [Natt-86] que la matrice admissible W_I correspondant au schéma entrelacé s'écrit :

$$W_I = \begin{pmatrix} 4\pi/P & -2\pi/P \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad 2\pi W_I^{-t} = \begin{pmatrix} P/2 & 0 \\ \pi/h & 2\pi/h \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Les conditions de non recouvrement des supports implique alors que $P/2 \geq b/\vartheta + (1/\vartheta - 1)b$, celle sur h restant la même à savoir $2\pi/h \geq 2b$. Donc à l'égalité, c'est-à-dire pour une minimisation des zones non recouvertes par les supports, nous avons :

$$P = 2b/\vartheta', \quad h = \pi/b \text{ avec } \vartheta' = \frac{\vartheta}{2-\vartheta} \quad (3.23)$$

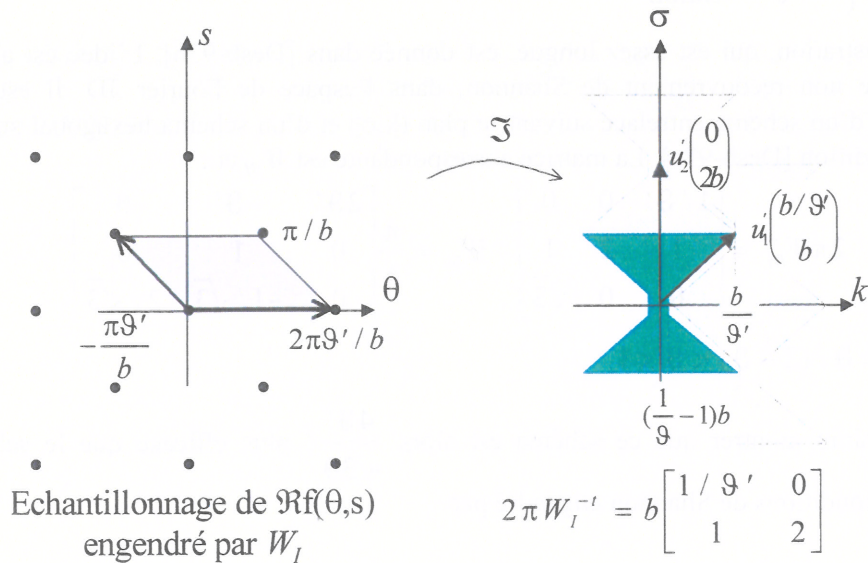


figure 3.9 : Echantillonnage efficace avec W_I avec choix optimal des valeurs de P et h (q) en fonction de ϑ'

Le nombre de points d'échantillonnage est de moitié égal à celui du schéma standard, et comme on peut le voir à la figure 3.9, le recouvrement des ensembles $K + 2\pi W_I^{-1}k$, $k \in \mathbb{Z}^2$ créé une partition plus dense de l'espace $Z \times R$ que ne l'effectue le schéma standard. On remarque aussi que le déterminant des matrices (W_I et W_S) est une mesure de l'efficacité de la méthode dans le sens où il est égal à l'aire de la région fondamentale. Donc plus cette aire est grande, moins il est nécessaire d'avoir de points d'échantillonnage sur l'espace, donc meilleure est la méthode. Dans notre cas, le rapport des deux déterminants traduit l'efficacité entre les deux méthodes, soit :

$$\frac{\det W_I}{\det W_S} = \frac{2}{2 - \vartheta} \quad (3.24)$$

Donc pour un coefficient ϑ arbitrairement proche de 1, nous disposons d'une efficacité proche d'un facteur 2.

3.8.4. Echantillonnage hexagonal entrelacé en 3D

Dans cette partie, nous souhaitons introduire les principales idées énoncées dans [Desb-97a] relatives à la théorie de l'échantillonnage efficace en 3D. L'idée principale est de réaliser dans l'espace de Fourier 3D les conditions de non recouvrement de Shannon en combinant un schéma entrelacé suivant les variables k et σ et un échantillonnage hexagonal suivant σ et τ . L'avantage d'un échantillonnage efficace envisagé dans le cadre d'une reconstruction tomographique 3D par rapport à celui de la 2D est de gagner en efficacité, donc de réduire encore davantage le nombre de mesures.

Nous nous plaçons toujours sous les hypothèses d'une fonction $f \in C_0^\infty(\Omega_3)$ dont le support est contenu dans $\Omega_3 = \Omega_2 \times [-1,1]$, le cylindre unitaire de R^3 .

Le support essentiel tridimensionnel de la transformée de Radon, K_3 est cette fois-ci égal à $K_3 = \{(k, \sigma, \tau) \in Z \times R \times R; |k| \leq \max(|\sigma|/b, (1/\vartheta - 1)b), |\sigma| \leq b, |\tau| \leq c(b, \sigma)\}$,

où $0 < \vartheta < 1$ arbitrairement proche de 1 et

$$c(b, \sigma) = \begin{cases} b & \text{si } |\sigma| \leq \sigma_{\vartheta, b} = \max(1, (1 - \vartheta)b) \\ \sqrt{b^2 - \sigma^2} & \text{si } \sigma_{\vartheta, b} < |\sigma| < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La démonstration, qui est assez longue, est donnée dans [Desb-97b]. L'idée est alors de réaliser les conditions de non recouvrement de Shannon, dans l'espace de Fourier 3D. Il est démontré que la combinaison d'un schéma entrelacé suivant le plan (k, σ) et d'un schéma hexagonal suivant le plan (σ, τ) réalise la condition [Desb-97a]. La matrice correspondante est W_{IH} et :

$$2\pi W_{IH}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\vartheta' & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad W_{IH} = \frac{\pi}{b} \begin{bmatrix} 2\vartheta' & -\vartheta' & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

avec $\vartheta' = \vartheta / (2 - \vartheta) < \vartheta < 1$

On peut alors montrer que ce schéma est alors $\frac{4\vartheta'}{\sqrt{3}\vartheta}$ ⁹ plus efficace que le schéma standard 3D vérifiant les conditions de Shannon engendré par

⁹ Soit un rapport de $4/\sqrt{3} \approx 2.3$ lorsque ϑ' et ϑ sont tous deux arbitrairement proche de 1.

$$W_s = \frac{\pi}{b} \begin{bmatrix} \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

D'autre part, en utilisant des considérations géométriques, on peut aussi montrer que les ensembles $K_3 + 2\pi W_{IH}^{-1}l, l \in Z^3$ ne se recouvrent pas dès que b est suffisamment grand et que $\vartheta > \sqrt{1 - (\sqrt{3} - 1)^2}$ [Desb-97b].

3.9. CONCLUSION

Nous avons vu dans ce chapitre le formalisme mathématique de la reconstruction analytique tomographique, avec ou sans correction d'atténuation. Ces méthodes sont particulièrement intéressantes lorsque le cadre expérimental se prête bien au modèle : un collimateur de très bonne résolution et une atténuation pas trop hétérogène permettant à des algorithmes adaptés de converger vers une solution raisonnable. Dans un cadre où la quantification d'activité de la solution reconstruite revêt une importance toute particulière, et où la collimation est délibérément de basse résolution, le modèle de la transformée de Radon atténuée est mal adapté. Enfin, l'approche analytique se prête moins facilement à la régularisation ou à l'ajout d'information *a priori*. Par ailleurs, la rapidité qui est un des atouts majeurs des méthodes de reconstruction analytiques devient un critère de choix moins critique dans le sens où les temps d'acquisition restent infiniment plus long que les temps de reconstruction. Il nous reste alors la classe des méthodes itératives qui, bien que plus lourdes en temps de calcul, s'adaptent aisément à la prise en compte des facteurs de dégradation des mesures, et en particulier l'atténuation. Nous abordons au prochain chapitre les facteurs physiques de dégradation, et les techniques mises en œuvre pour les corriger lorsque la formulation du problème a été discrétisée.

Les derniers paragraphes relatifs à l'échantillonnage viennent compléter une étude qui cherche à optimiser au mieux la mesure tomographique ; le but est d'obtenir le maximum d'information en un temps si possible minimal. La théorie exposée n'a été démontrée que dans le cas de l'échantillonnage de la transformée de Radon non atténuée ; il serait intéressant de se concentrer dans un premier temps à l'étude d'objets à support d'atténuation uniforme (non nul), avant d'examiner l'application éventuelle aux distributions d'atténuation quelconques. Dans notre contexte de travail, l'échantillonnage efficace pourrait alors diminuer les mesures et donc les temps de calculs qui restent encore pénalisants.

3.10. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Azev-91] S.G. Azevedo « Model-based computed tomography for nondestructive evaluation », *PhD dissertation, Lawrence Livermore National Laboratory, UCLR-LR-106884, 1991*
- [Bell-79] S. Bellini, M. Piacentini, C. Cafforio, and F. Rocca. « Compensation of tissue absorption in emission tomography », *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, 27 (3):213-218, 1979
- [Bere-96] C. Berenstein and W. Walnut. « Wavelets and local tomography », *In Wavelets in Medicine and Biology*, pages 231-361, CRC Press, 1996
- [Brac-56] R.N Bracewell and A.C Riddle. « Inversion of fan-beam scans in radio astronomy », *Aus J. Phys*, 9:198-217, 1956

- [Bries-90] J.F. Briesmeister « MCNP-A general Monte-carlo code for neutron and photon transport , version 4 », *Los Alamos, NM: Los Alamos National Laboratory; technical Report LA-7396-M*, 1990
- [Corm-63] A.M Cormack. Representation of a function by its line integral, with some radiological applications, *J. appl. Phys*, 34:2722-277, 1963
- [Corm-78] A.M Cormack. Sampling the Radon transform with beam of finite width, *Phys, Med. Biol.* 23:1141-1148, 1978
- [Demo-89] G. Demoment. « Image reconstruction and restoration: Overview of common estimation structures and problems », *IEEE Tans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37 (12):2024-2036, 1989
- [Conw-93] J.H. Conway and N.J.A Sloane. « Sphere Packings, Lattice and Groups », *Compreh. Math. Springer, second edition*, 1993
- [Desb-97a] L. Desbat « Echantillonnage parallèle efficace en tomographique 3D », *C.R Acad. Sci. Paris, Série I*, 324 : 1193-1199, 1997
- [Desb-97b] L. Desbat, « Echantillonnage efficace en tomographie ». *Thèse d'habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier*, 1997
- [Donn-84] Q. Donner. « Correction de l'atténuation et du rayonnement diffusé en tomographie d'émission à simples photons », *PhD thesis, Université Joseph. Fourier, Grenoble*, 1994
- [Fari-90] A.Faridani, « An application of a multidimensional sampling theorem to computed tomography », *Comtemp. Math.*, 113:65-80, 1990
- [Floy-84] C. Floyd, R. Jaszczak, C. Harris, and R. Coleman. « Energy and spatial distributions of multiple order Compton scatter in SPECT: a monte-carlo investigation », *Phys. Med. Biol.*, 29:1217-30, 1984
- [Gasq-90] C. Gasquet et P. Witomski. « Analyse de Fourier et applications », *Editions Masson*, 1990
- [Glic-96] S. Glick, M.A.King, T. Pan, and E. Soares. « An analytical approach of compensation for non-uniform attenuation and 3D detector response in cardiac SPECT imaging », *Three-dimensional image reconstruction in radiology and nuclear medicine*, pages 133-148, 1996
- [Hada-23] J. Hadamard. « Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equations ». Yale University Press, 1923
- [Hazo-90] I. Hazou and D.C Solmon « Inversion of the exponential X-ray Transform. II :numerics », *Math. Meth. Appl. Sci.*, 13 :205-218, 1990
- [Herm-76] G.T. Herman. A.V. Lakshminarayanan A. Naparstek. « Convolution reconstruction techniques for divergent beams ». *Comput. Med. Biol.* 6:259271, 1976
- [Herm-80] G.T. Herman. « *Image reconstruction from projections* », Academic Press, 1980

- [Higg-95] J.R. Higgins. « Sampling theory in Fourier and signal analysis: foundations », *Oxford Science publications*, 1995
- [Houn-73] G.N Hounsfield. « Computerized transverse axial scanning tomography : Part I, description of the system », *Br. J. Radiol.*, 46:1016-1022, 1973
- [Loui-83] A.K Louis and F. Natterer. « Mathematical problems of computerized tomography », *Proceedings IEEE*, 71(3):379-389, 1983
- [Natt-80] F. Natterer, « Efficient Implementation of Optimal Algorithms in computerized tomography », *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2 :545-555, 1980
- [Natt-86] F. Natterer, « The mathematics of computed tomography », *Wiley*, 1986
- [Mang-88] S. Manglos, R. Jaszczak, and C. Floyd. « Weighted backprojection implemented with a non-uniform attenuation map for improved SPECT quantification », *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 35 (1):625-628, 1988
- [Mark-85] A. Markoe and E.T Quinto « An elementary proof of local invertibility for generalized and attenuated Radon transforms », *SIAM J. Math. Anal.* 16:1114-1119, 1985
- [Metz-95] C. Metz and X. Pan. « A unified analysis of exact methods of inverting the 2D exponential Radon transform, with implications for noise control in SPECT », *IEEE Trans. Med. Imaging*, 14 (4):643-658, 1995
- [Pete-62] D.P. Petersen and D. Middleton. « Sampling and reconstruction of wavenumber-limited functions in N-dimensional Euclidian space ». *Info. Control.* 5:79-323, 1962
- [Rado-17] J. Radon. « Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewissen Mannigfaltigkeiten » *Ber. Saechsische Akademie der Wissenschaften*, 29:262-277, 1917
- [Rang-85] R. Rangarayan, A.P Dhawan and G. Gordon « Algorithms for limited-view computed tomography : an annotated bibliograghy and a challenge », *Applied Optics*, 24(23) :4000-4012, 1985
- [Rose-82] A. Rosenfeld and A.C Kak. « *Digital picture processing* » Academic Press, 1982
- [Star-86] H. Stark « Image recovery: theory and application », *Academic Press*, 1986
- [Tret-80] O. Tretiak and C. Metz. The exponential Radon transform. *SIAM J. Appl. Math.*, 39 (2):341-354, 1980

CHAPITRE 4

FACTEURS DE DEGRADATION PHYSIQUE DES MESURES

4.1. INTERACTIONS ENTRE RAYONNEMENT GAMMA ET MATIERE

4.1.1. Les phénomènes d'interaction prépondérants

Il existe un grand nombre d'interactions possibles entre un rayonnement gamma et la matière environnante. En réalité, seules trois interactions jouent un rôle prépondérant : *l'absorption photoélectrique, la diffusion Compton et la création de paire*. Tous ces processus induisent un transfert partiel, voire total, de l'énergie du photon incident vers un électron. Selon les cas, cela se traduit par un changement de direction du photon ou sa disparition. Nous ne détaillerons pas la création de paire car, comme nous le voyons à la figure 4.1, cette interaction ne devient statistiquement prépondérante qu'aux très hautes énergies (> 4 MeV).

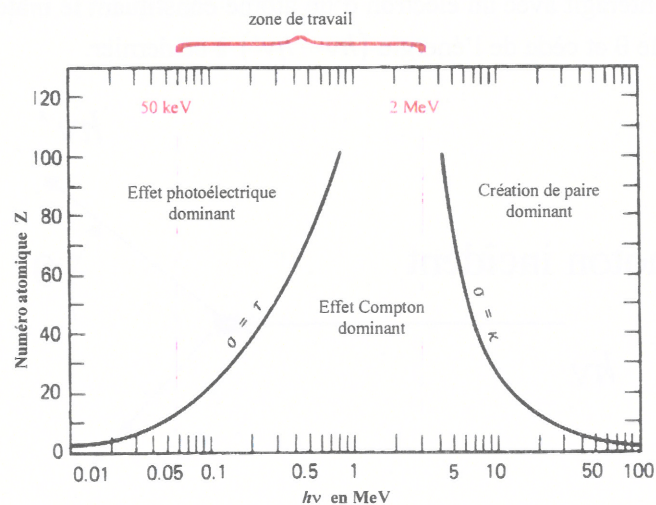


figure 4.1 : Domaine de prédominance des trois effets majeurs, et intervalle de travail en énergie pour la mesure des émetteurs gamma [Evan-82].

Dans le cadre de la tomographie d'émission, on se limitera à des énergies maximales de 2 MeV. On a fixé l'énergie minimale à 50 keV sachant que l'émetteur gamma de plus basse énergie détectable dans des dispositions expérimentales est l'américium 241 avec une raie d'émission à 59 keV.

4.1.1.1. L'absorption photoélectrique

Dans le processus d'absorption par effet photoélectrique, le photon interagit avec un atome du milieu et cède entièrement son énergie à un électron du cortège. Un photoélectron est alors expulsé avec une énergie

$$E_{e^-} = h\nu - E_l \quad (4.1)$$

où E_l est l'énergie de liaison de l'électron avec sa couche.

Ce phénomène est prépondérant pour les photons de basse énergie. Le processus est accentué pour les matériaux de forte densité, ayant des numéros atomiques élevés.

Il n'existe pas de formulation analytique valide pour caractériser la probabilité d'interaction par atome en fonction de l'énergie du photon incident ou du numéro atomique de l'atome rencontré. En revanche, on sait qu'une approximation moyenne de la probabilité d'interaction τ par effet photoélectrique est de la forme :

$$\tau \cong cteZ^n E^{-3.5} \quad (4.2)$$

où $4 \leq n \leq 5$, est déterminé empiriquement, pour des énergies de photons allant du keV au MeV [Evan-82].

De la relation ci-dessus, nous noterons la forte dépendance de la probabilité en fonction de Z ; ce qui explique l'utilisation de matériaux constitués d'atomes de numéro atomique élevé (comme le plomb) pour la fabrication des écrans de radioprotection ou des collimateurs.

4.1.1.2. La diffusion Compton

Dans le processus de diffusion Compton, illustré par la figure 4.2, un photon gamma incident d'énergie initiale $h\nu$ interagit avec un électron d'un atome constituant le matériau traversé, en déviant de sa trajectoire d'un angle θ et cède de l'énergie $(h\nu - h\nu')$ à ce dernier.

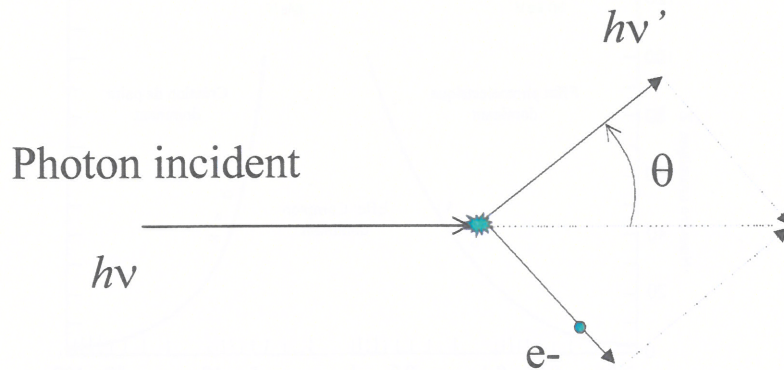


figure 4.2 : Choc élastique et diffusion Compton

L'énergie cédée est fonction de l'angle de déviation selon l'équation [Baur-85] :

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}(1 - \cos\theta)} \quad (4.3)$$

où m_0c^2 est l'énergie de masse au repos de l'électron (0,511 MeV).

La probabilité d'avoir une diffusion Compton par atome est proportionnelle au nombre d'électrons gravitant sur les couches électroniques puisqu'ils constituent autant de cibles potentielles. La probabilité de diffusion du photon d'énergie $h\nu$ à un angle θ contenu dans un angle solide $d\Omega$ est exprimée par la formule de *Klein-Nishina* [Knol-89]. Elle est donnée par la section efficace de choc par angle solide en fonction de la distribution angulaire et de l'énergie initiale :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Zr_0^2 \left(\frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos^2\theta}{2} \right) \left(1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)[1 + \alpha(1 - \cos\theta)]} \right) \quad (4.4)$$

où $\alpha = \frac{h\nu}{m_0c^2}$ et r_0 est le rayon classique de l'électron.

C'est la probabilité de diffuser à un angle θ dans l'angle solide $d\Omega$. Une illustration de la distribution est donnée à la figure 4.3 : elle montre la tendance des photons hautes énergies à diffuser vers l'avant (θ petit). A très basse énergie, de l'ordre du keV, la distribution se symétrise par rapport à l'axe des 90° : il y a alors autant de chance d'avoir des photons qui diffusent vers l'arrière que vers l'avant.

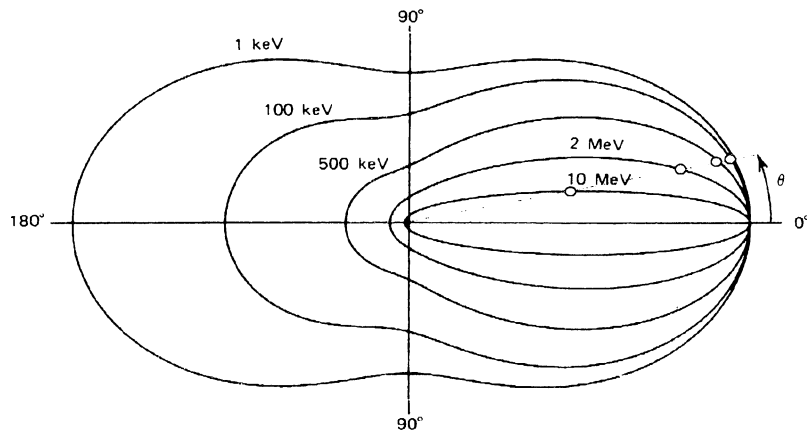


figure 4.3 : Représentation polaire de la probabilité $d\sigma(\theta)$ du photon diffusé à être dévié suivant l'angle θ dans un angle solide $d\Omega$ fixé unitaire ($d\Omega = 1$). Les courbes sont tracées pour les différentes énergies du photon incident, les photons incidents venant de la gauche.

4.1.2. L'atténuation des rayonnements gamma

L'expérience à la figure 4.4 décrit une source gamma mono-énergétique collimatée, alignée avec un système de détection avec, entre les deux, un matériau d'épaisseur variable. Si on note I_0 l'intensité de la source à l'émission et $I(x)$ l'intensité de la source détectée derrière une épaisseur x de matériau, on constate alors que le rapport des deux quantités suit une loi exponentielle.

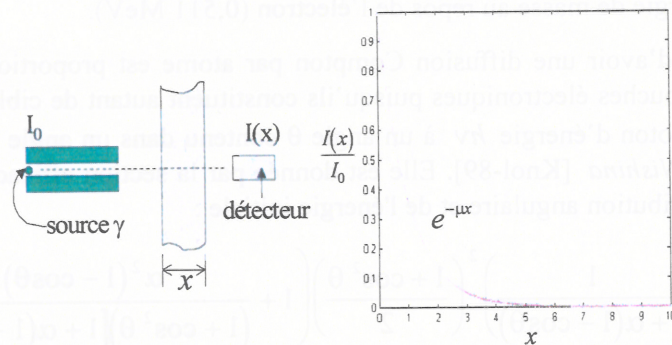


figure 4.4 : Illustration de loi de Beer-Lambert : la transmission suit une loi exponentielle

Que ce soit par diffusion Compton ou absorption photoélectrique, chacun de ces deux phénomènes contribue à diminuer le nombre de photons directement ou indirectement transmis au travers du matériau. Ils caractérisent tous les deux une probabilité d'interaction par unité de longueur dans le matériau. Si on néglige la création de paire, cette probabilité se restreint à la somme des probabilités d'interaction du photon par unité de longueur :

$$\mu = \tau(\text{photoélectrique}) + \sigma(\text{Compton}) = \mu_{PE} + \mu_C \quad (4.5)$$

elle est appelée **coefficient d'atténuation linéique** (cm^{-1}) et résulte de l'atténuation par effet photoélectrique (μ_{PE}) et par effet Compton (μ_C). Le coefficient d'atténuation Compton s'obtient en intégrant l'équation de Klein-Nishina (4.4) sur toutes les directions θ [Donn-94]. Ainsi, le nombre de photons transmis après avoir passé une épaisseur x de matériau est (loi de Beer-Lambert) :

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad (4.6)$$

Il est courant de réexprimer la probabilité en terme de **libre parcours moyen** λ . Ce coefficient est défini par la distance moyenne parcourue dans la matière par le photon avant qu'il interagisse (par absorption ou par diffusion). Sa valeur est déterminée par le calcul de l'espérance mathématique :

$$\lambda = \frac{\int_0^{\infty} x e^{-\mu x} dx}{\int_0^{\infty} e^{-\mu x} dx} = \frac{1}{\mu} \quad (\text{en cm}) \quad (4.7)$$

A titre comparatif, nous donnons au tableau 4.1 quelques valeurs typiques [Hubb-93] de μ en fonction de matériaux communément rencontrés et des raies d'énergies des radioéléments. On indique également l'atténuation moyenne subie sur un parcours de longueur égale au rayon standard R_{obj} du colis. La valeur de l'atténuation moyenne correspond au nombre de libres parcours moyens que doit parcourir le photon pour sortir et être détecté, soit $\ln(I_0 / I) = \mu R_{obj} = R_{obj} / \lambda$.

	eau		Polyéthylène		PVC		Béton	
	$\rho=1,00 \text{ (g/cm}^3\text{)}$		$\rho=1,38 \text{ (g/cm}^3\text{)}$		$\rho=1,40 \text{ (g/cm}^3\text{)}$		$\rho=2,30 \text{ (g/cm}^3\text{)}$	
	$\mu \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	R_{obj}/λ	$\mu \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	R_{obj}/λ	$\mu \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	R_{obj}/λ	$\mu \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	R_{obj}/λ
$^{241}\text{Am} - 59 \text{ keV}$	0,20	5,87	0,26	7,35	0,47	13,32	9,53	271,57
$^{99m}\text{Tc} - 140 \text{ keV}$	0,15	4,38	0,19	5,53	0,21	5,95	1,02	29,04
$^{137}\text{Cs} - 662 \text{ keV}$	0,08	2,43	0,12	3,30	0,12	3,32	0,19	5,38
$^{60}\text{Co} - 1332 \text{ keV}$	0,06	1,76	0,08	2,33	0,08	2,34	0,13	3,54

tableau 4.1 : Atténuations linéiques (μ) et en gras les coefficients d'atténuation moyens (R_{obj} / λ), correspondant à un rayon de colis de déchets 200-l soit $R_{obj} = 28,5 \text{ cm}$.

Comme le coefficient μ dépend de la densité du matériau, il est parfois utile de pouvoir définir un coefficient invariant selon les changements d'état d'un même matériau. On définit donc le :

$$\text{Coefficient d'atténuation massique } \mu_{mas} = \frac{\mu}{\rho} \quad (4.8)$$

où ρ est la densité moyenne du matériau.

Ainsi, l'eau aura même atténuation massique qu'elle soit sous forme vapeur ou liquide.

Par ailleurs, cette quantité est relativement invariante pour les différents éléments vers 1 MeV : à l'énergie du Cobalt, on a $\mu_{mas}(\text{eau}) = 0,061$ alors que $\mu_{mas}(\text{béton}) \approx 0,13 / 2,3 \approx 0,056$, soit une variation relative de 8% entre deux éléments de densité très éloignée. Cette particularité est exploitée en tomodensitométrie et permet de remonter rapidement à la densité des matériaux.

Dans le cas d'un mélange de matériaux (mixture), on définit le coefficient massique de l'ensemble par la loi des mélanges :

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_c = \sum_i w_i \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_i \quad (4.9)$$

où w_i est le pourcentage massique du matériau i dans le mélange.

Cette loi est parfois utilisée pour définir les coefficients d'atténuation moyens d'un colis lorsqu'on ne dispose pas d'autre information que la fiche descriptive des constituants et leur proportion fournie par le producteur [Pett-98].

La correction d'atténuation revêt un aspect tout particulier dans notre travail puisque, outre les améliorations attendues au niveau de la qualité d'image, elle permet de prétendre à une quantification de l'activité globale, pour l'ensemble des radioéléments présents dans la tranche mesurée.

4.2. LOI STATISTIQUE D'EMISSION PHOTONIQUE

La désintégration radioactive étant un processus aléatoire, toute mesure basée sur l'observation des radiations émises est donc sujette à l'incertitude statistique. Cette fluctuation inhérente aux mesures

nucléaires représente une source inévitable d'incertitude et peut même, dans certains cas, devenir la source prédominante d'erreurs ou d'imprécisions.

Le nombre de désintégrations radioactives émises pendant un temps donné est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre γ . Ce dernier symbolisant l'activité moyenne du radioélément. La probabilité d'observer x photons émis pendant un intervalle de temps donné est :

$$\Pr(X = x) = \frac{\gamma^x e^{-\gamma}}{x!} \quad (4.10)$$

L'espérance mathématique et la variance de cette loi sont égales au paramètre γ [Knol-89]. L'incertitude statistique sur la moyenne γ est donnée par le rapport de l'écart-type sur la moyenne, soit $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Ce rapport (que l'on peut assimiler à l'inverse d'un rapport signal sur bruit) est d'autant plus petit que l'intensité γ de la source est grande. Une autre possibilité d'améliorer la sensibilité est d'augmenter le temps de comptage.

Dès lors, une modélisation poissonienne du bruit est théoriquement la mieux adaptée. Cependant, nous verrons en détail au chapitre 6 que la loi de vraisemblance correspondante est difficile à exploiter car elle introduit essentiellement des non-linéarités, qui ne se prêtent guère au développement de schémas algorithmiques rapides. C'est ce qui est constaté avec l'utilisation de l'algorithme EM (Expectation-Maximisation), qui présente un taux de convergence faible.

Il est classiquement admis que lorsque le nombre de photons mesurés devient relativement grand (> 20), on peut approcher correctement la loi poissonienne par une loi gaussienne. Lorsque cette hypothèse est valable¹, on peut s'orienter vers une modélisation basée sur un bruit de mesure gaussien, centré et de matrice de covariance K [Char-94].

En conséquence, les algorithmes alors développés sont additifs et donc plus compétitifs en terme de convergence [Tsui-91], contrairement aux algorithmes EM qui conduisent à des schémas multiplicatifs.

Dans certains cas, la matrice de covariance est choisie égale à la matrice identité. Cette pondération uniforme des projections permet une vitesse de convergence plus élevée [La-97].

4.3. DISPERSION DE LA RESOLUTION SPATIALE

Pour appréhender la résolution spatiale du système d'acquisition, il nous faut d'abord connaître les deux constituants essentiels : le détecteur et le collimateur.

4.3.1. Les détecteurs

Dans la gamme d'énergie allant de quelques keV à quelques MeV, deux catégories de détecteurs sont essentiellement utilisés pour la mesure gamma spectrométrique : les détecteurs à gaz et les détecteurs solides.

Parmi les détecteurs solides, on distingue les scintillateurs, le plus commun étant le détecteur d'iodure de sodium activé au thallium NaI(Tl), et les détecteurs à base de cristaux semi-conducteurs, comme le silicium ou le germanium.

¹ ce qui est majoritairement le cas en SPECT, étant donnés les taux de comptage utilisés

4.3.1.1. Quelques définitions générales

4.3.1.1.1. La résolution

Avec un détecteur parfait, un spectre devrait présenter des pics de Dirac, dits pics photoélectriques (ou encore photopics), aux énergies des différents photons incidents. Dans la pratique, on obtient, dans le meilleur des cas, une forme gaussienne des pics, traduisant une perte de résolution en énergie autour de l'énergie du photon.

On définit la résolution d'un détecteur à l'énergie E du photon incident, par :

$$r(E) = \frac{FWHM}{E}$$

Si r est grand, deux photons d'énergies proches peuvent ne plus donner lieu à des pics photoélectriques séparés mais à un seul pic élargi. Un critère de séparation de deux pics est que les énergies centrales soient distantes d'au moins une valeur égale à la $FWHM^2$.

Pour ce travail, on voudrait pouvoir séparer des raies éventuellement proches en énergie pour faciliter l'identification. On doit donc avoir une excellente résolution. On se tourne par conséquent vers les détecteurs à base de cristal de germanium, pour lesquels la résolution est meilleure. Par exemple, pour le détecteur germanium hyperpur coaxial qui sera utilisé par la suite, la résolution annoncée par le constructeur est de 0,69% à 122 keV, et 0,14% à 1,33 MeV [Canb-97]. Par comparaison, la résolution d'un détecteur NaI(Tl) est typiquement de 6% à 662 keV.

4.3.1.1.2. Efficacité absolue, intrinsèque et relative

Une autre caractéristique importante d'un détecteur de rayonnement gamma est l'efficacité. On distingue usuellement deux classes d'efficacité:

1. l'efficacité absolue est celle qui nous intéresse pour remonter à l'activité d'une source. Elle est définie par:

$$\varepsilon_{abs} = \frac{\text{nombre de photons comptés}}{\text{nombre de photons émis}}$$

2. l'efficacité intrinsèque qui ne considère que les photons dont la trajectoire passe par le détecteur:

$$\varepsilon_{int} = \frac{\text{nombre de photons comptés}}{\text{nombre de photons incidents}}$$

Le plus souvent, on considère qu'un photon est compté s'il donne lieu à un coup dans le pic photoélectrique. On parle alors d'efficacité absolue/intrinsèque de pleine énergie. On ne considère que l'aire de la gaussienne représentative et non le fond éventuel auquel elle se superpose.

Par fond, on entend d'une part le continuum Compton créé par les photons d'énergie plus élevée ayant généré des photons diffusés soit dans le colis soit dans le détecteur, qui s'ajoutent au pic photoélectrique et d'autre part, les bruits de fond divers tels que la diffusion des matériaux environnants, les rayonnements cosmiques, etc. Ce fond que l'on retrouve systématiquement tout au long du spectre décroît avec l'énergie.

² Full Width at Half Maximum, voir § 4.3.3

Il est également possible de prendre en compte tous les coups du spectre, hormis le bruit de fond. On parle alors d'efficacité absolue/intrinsèque totale.

L'efficacité absolue dépendant naturellement de la géométrie du détecteur et de la configuration source-détecteur est, par nature, spécifique au poste de mesure de rayonnement gamma.

Pour pouvoir comparer des détecteurs entre eux, on définit l'efficacité relative, qui correspond à l'efficacité absolue d'un détecteur rapportée à celle d'un détecteur standard de type scintillateur NaI(Tl) cylindrique, de 3 pouces de diamètre pour 3 pouces de hauteur. La source de ^{60}Co , placée à 25 cm du détecteur, l'efficacité est mesurée dans le pic photoélectrique à 1332 MeV. Pour un détecteur en germanium, l'efficacité relative vaut approximativement un cinquième du volume actif exprimé en cm^3 . C'est une donnée souvent communiquée par le constructeur [Canb-97]. Le choix entre les deux catégories de détecteurs dépend du compromis entre résolution et taux de comptage désiré lors de l'application.

Intuitivement, on comprend que l'efficacité est fonction de la probabilité d'interaction entre les photons gamma et la matière constitutive du détecteur. Comme on l'a vu au § 4.1.1.1, cette probabilité augmente avec le numéro atomique Z . Comparativement au germanium dont le numéro atomique est $Z=32$, dans un scintillateur NaI, le numéro atomique relativement élevé de l'iodure ($Z=53$) lui confère une bonne probabilité d'interaction avec les photons gamma. L'efficacité d'un détecteur en germanium est donc faible mais cet inconvénient est compensé par son excellente résolution. En effet, les pics comportent peu de coups, ils ont donc une aire faible. Mais comme ils sont par ailleurs très fins, ils se détachent facilement du fond. La résolution en énergie du germanium, nettement supérieure à celle d'un scintillateur, permet ainsi de séparer de nombreuses raies d'émission très proches les unes des autres, et de faire émerger des raies de radioéléments à faible énergie noyées dans le bruit de fond continu. L'excellente résolution en énergie est la caractéristique dominante des détecteurs germanium. A la figure 4.5, nous donnons une comparaison d'un spectre de comptage d'un scintillateur NaI et d'un détecteur germanium.

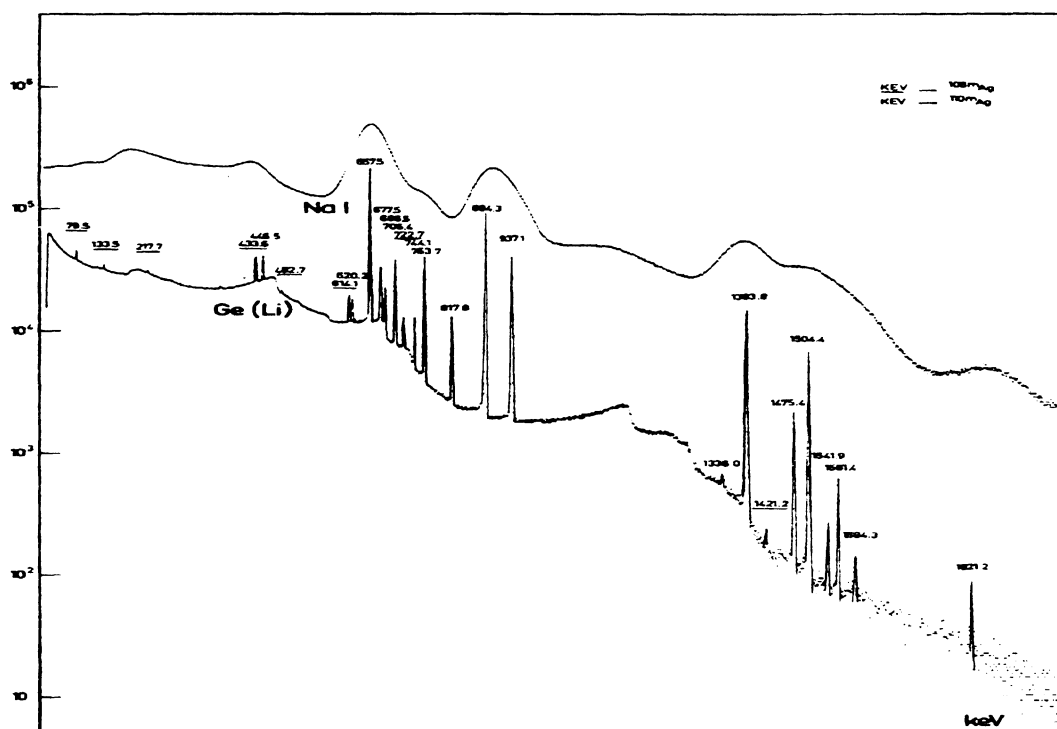


figure 4.5 : Comparaison de deux spectres gamma sur des sources radioactives de ^{108m}Ag et ^{110m}Ag à partir d'un scintillateur NaI et d'un détecteur germanium de type Ge(Li) [Phil-70].

Ce type de détecteur reste très largement préféré pour l'analyse de spectres gamma complexes. Plus particulièrement dans l'industrie nucléaire, il permet d'établir une carte détaillée des radioéléments contenus dans un colis. Ce choix devient moins évident lorsqu'il n'y a pas de pics d'énergies proches à séparer et, particulièrement lorsque la mesure de l'intensité prend le pas sur une bonne résolution en énergie. On comprend dès lors le choix gamma-caméras utilisant une matrice de cristaux NaI pour les applications de la SPECT dans le domaine médical.

4.3.1.2. Quelques généralités sur le détecteur germanium

4.3.1.2.1. La collection de charges

Dans un semi-conducteur, les photons sont directement convertis en charges électriques (paires électron-trou) qui sont collectées par un champ électrique que l'on applique aux deux surfaces de conduction (c.f. figure 4.6) enrobant le milieu du détecteur. Cette conversion directe présente deux avantages : d'une part les charges collectées au lieu de l'interaction sont canalisées par le champ électrique, conservant ainsi l'information spatiale et d'autre part, le nombre de charges créées par l'interaction est bien supérieur (environ dix fois plus) dans un semi-conducteur que dans le cas d'un scintillateur/photodétecteur. Ceci se traduit par l'amélioration de la résolution en énergie. Parmi les détecteurs de type germanium on distingue essentiellement trois types : les détecteurs plans, coaxiaux et les détecteurs puits. A la figure 4.6, nous donnons une illustration des deux types P et N pour un détecteur coaxial.

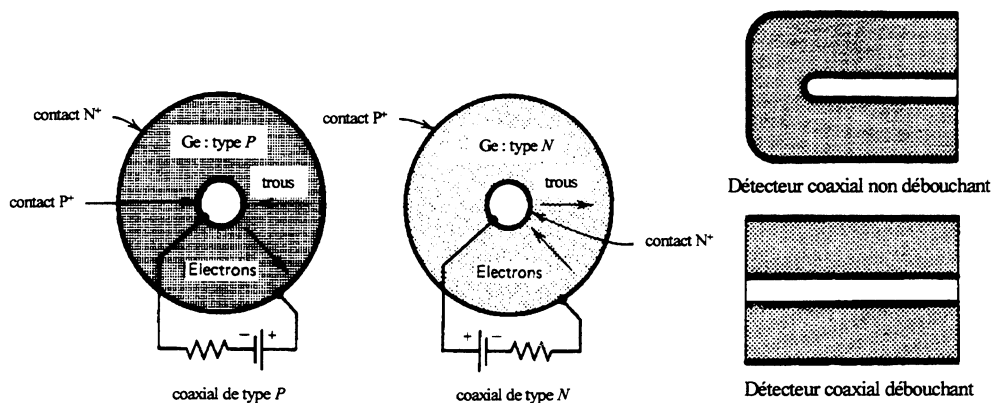


figure 4.6 : Détecteurs germanium coaxiaux de type P et N

Pour mesurer des sources très actives, un détecteur peu efficace (détecteur plan) est préférable.

Pour les sources de petite taille, on utilise les détecteurs puits. La cavité où vient se loger la source permet d'augmenter l'angle solide et donc l'efficacité absolue de la mesure.

4.3.1.2.2. La chaîne de mesure

Le signal collecté aux électrodes du détecteur est trop faible pour être exploité directement. Il doit faire l'objet d'une amplification et d'une mise en forme. La chaîne de mesure comprend les éléments suivants :

- un préamplificateur, placé le plus près possible du détecteur, pour éviter que le signal utile ne se perde dans le bruit;
- un amplificateur de mise en forme des impulsions ;

- un convertisseur analogique-numérique ;
- un analyseur multicanaux, qui génère le spectre.

Les caractéristiques de chaque élément doivent être prises en considération si la source a une activité élevée. En effet, si le temps entre deux événements dans le détecteur est plus court que le temps de traitement d'un événement, on aura une perte ou une déformation de l'information, selon que le deuxième événement est ignoré ou s'ajoute au premier totalement ou partiellement. On peut ainsi observer un pic artefact qui est la somme de deux énergies réelles, les coups formant ce pic venant se soustraire aux coups formant les vrais pics.

Le détecteur est limité par le temps de collection des charges générées par une interaction, c'est-à-dire le temps mis par les porteurs de charge pour atteindre l'électrode. Pour un détecteur germanium, la limite se situe au-delà d'un million de coups par seconde, il s'agit d'un détecteur extrêmement rapide.

Le préamplificateur intègre les charges générées dans le détecteur et délivre en sortie une impulsion dont l'amplitude est proportionnelle à la charge totale accumulée pendant l'événement et donc à l'énergie déposée dans le détecteur. Comme la constante de temps du préamplificateur est prise assez grande devant le temps de collection des charges pour limiter les pertes, la sortie du préamplificateur n'a souvent pas le temps de revenir à zéro avant le coup suivant. Il y a alors risque de saturation et de distorsion par addition des signaux résiduels.

L'amplificateur met en forme le signal issu du préamplificateur en vue de son codage. Il assure la proportionnalité entre l'amplitude de l'impulsion qu'il délivre et l'énergie déposée dans le détecteur. La constante de mise en forme de l'impulsion (*shaping time*) détermine le débit de l'amplificateur. On doit faire un compromis entre une constante longue qui améliore la mise en forme et la résolution, en accroissant le risque d'empilement d'impulsions si l'activité est élevée, et une constante de temps faible qui autorise des taux de comptage élevés au détriment de la résolution. Avec une chaîne classique, cette constante est typiquement fixée à 4 μ s. Une technique appelée "intégration porte" permet de descendre à 0,25 μ s avec une dégradation minimale en énergie, autorisant des taux de comptage allant jusqu'à 100000 coups par seconde [Knol-89]. Cette technique consiste à intégrer le signal gaussien sur une porte. Le signal résultant est alors sensible à l'aire plutôt qu'à l'amplitude du signal original. Les distorsions sont ainsi minimisées, ce qui autorise des taux de comptage plus élevés.

Le codeur ou convertisseur analogique-numérique convertit le signal analogique issu de l'amplificateur en une valeur numérique représentative de l'énergie déposée dans le détecteur.

Enfin, l'analyseur multicanaux, généralement implanté dans un P.C., est constitué d'une mémoire qui permet de stocker les valeurs provenant du codeur, d'une visualisation graphique et d'un logiciel de traitement des spectres (marquage des zones, identification des radioéléments, etc.).

4.3.1.3. *Vers une nouvelle génération de détecteurs semi-conducteurs : le (CdZnTe) et le (CdTe)*

Du fait de son encombrement et de son incapacité à travailler à température ambiante, le détecteur germanium n'est pas toujours adapté à toutes les applications. Des recherches se tournent désormais vers un nouveau type de semi-conducteur à base de tellure de cadmium et de zinc : le (CdTe) et le (CdZnTe).

Le tellure de cadmium est un matériau semi-conducteur de numéro atomique et de densité élevés. Il a un fort pouvoir d'arrêt au rayonnement et est bien adapté à la gamme d'énergie 10 keV-1 MeV. Sa haute résistivité lui permet de travailler à température ambiante.

L'avantage du (CdTe) est une image finale plus contrastée et des informations plus rapides (plusieurs millions d'événements à la seconde) pour une résolution en énergie légèrement dégradée.

Les caractéristiques physiques du (CdZnTe) sont également bien adaptées aux hauts flux tels que ceux produits par les accélérateurs linéaires. Une installation d'imagerie tomographique a montré la faisabilité de l'utilisation d'un détecteur (CdZnTe) à partir d'un flux généré par un accélérateur linéaire 12 MeV [Ross-96]. Ses applications ont été testées avec succès en radiographie X [Glas-97], en tomographie de positons (PET³) pour diminuer le temps des coïncidences [Bert-97] et en tomographie par transmission et émission [Ciri-99], avec des applications en SPECT [Iwat-99]. Sur les mêmes bases techniques, le CEA/LETI/DSYS⁴ développe une gamma-caméra (CdZnTe) pour applications médicales permettant d'atteindre une résolution en énergie deux fois supérieure à celle de la caméra d'Anger qui constitue le standard technique actuel et ce, avec un détecteur plus compact et une capacité de comptage nettement supérieure (résolution en énergie de 4% et une efficacité de détection de 85% à 122 keV [Verg-97], [Gers-98]).

4.3.2. Collimation

Lors d'une désintégration, l'émission d'un photon γ est isotropique : la probabilité qu'il soit émis dans une direction donnée de l'espace est uniforme. D'autre part, lorsqu'un photon est capté à la surface du détecteur, son angle d'incidence influe peu sur la probabilité d'être transmis (traduit) par la chaîne d'amplification et compté comme tel. L'information sur sa direction d'origine est perdue. Or nous avons vu au chapitre 3 que la reconstruction d'image en tomographie nécessite de ramener la détection à un espace réduit de l'objet, idéalement une ligne. L'idée retenue est de focaliser la détection à l'aide d'un collimateur : c'est un tube, le plus souvent de forme cylindrique ou hexagonale, son dimensionnement définissant un angle d'acceptance. Seuls les photons passant dans cette direction sont acceptés, les autres sont théoriquement⁵ absorbés par les épaisseurs de ses parois (ou septas). Comme la collimation idéale est physiquement impossible et pratiquement d'aucune utilité, les lignes d'intégration mathématiques sont donc approchées par des bandes d'une certaine épaisseur ou des cônes, ce qui n'est pas sans conséquence.

Les géométries d'acquisition des projections sont étroitement liées aux géométries des collimateurs utilisés, plus particulièrement la forme des trous. Nous pouvons distinguer 3 principales géométries (c.f. figure 4.7) :

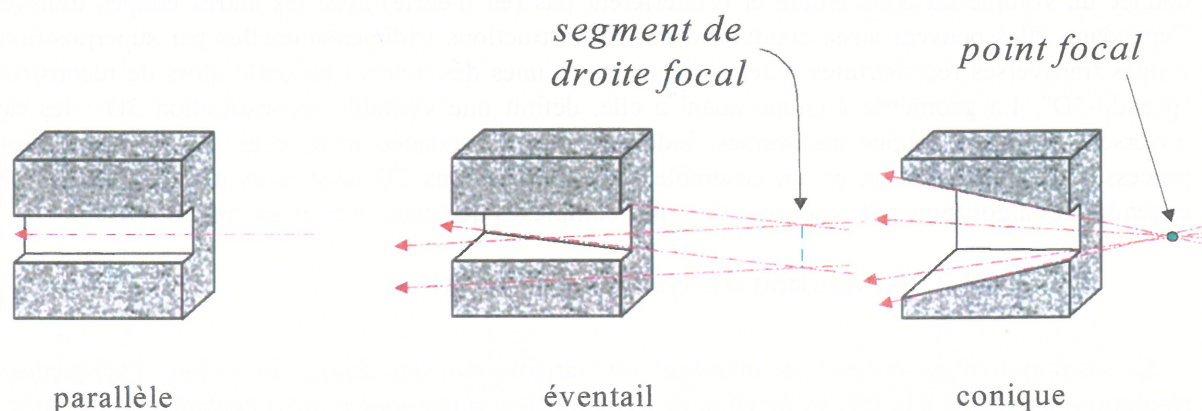


figure 4.7 : Les trois géométries de collimations en ouverture rectangulaire

³ de l'anglais Positron Emission Tomography

⁴ LETI/DSYS : Laboratoire d'Electronique de Technologie et d'Instrumentation / Département Système

⁵ Nous verrons au § 5.5 qu'aux énergies de l'ordre du MeV, des parois épaisses de plusieurs centimètres de plomb sont insuffisantes.

- la **géométrie d'acquisition parallèle** : les rayons acquis sont parallèles entre eux et perpendiculaires au plan du détecteur (les parois des septas sont parallèles entre elles);
- la **géométrie en éventail** (*fan-beam*) : les rayons acquis forment un faisceau en éventail dans le plan perpendiculaire au plan du détecteur (les parois des septas ne sont plus parallèles dans le plan transversal ; la convergence des faisceaux définit un segment de droite focal parallèle à l'axe de rotation);
- la **géométrie conique** (*cone-beam*) : les rayons acquis convergent vers un point focal (les parois des septas sont soit de forme conique soit pyramidal) .

Plus l'ouverture du collimateur est faible, plus on est sélectif sur l'angle des photons incidents et donc meilleure est la résolution du système de détection. Ce faisant, le détecteur recueille moins de photons, diminuant ainsi la sensibilité.

Tout comme pour le détecteur, choisir un type de collimateur revient donc à se fixer un compromis entre sensibilité et résolution en adéquation avec le type d'objet à expertiser et les orientations du laboratoire (en terme de temps d'acquisition, de résolution spatiale). La résolution et la sensibilité⁶ pour les types de collimateurs sont exposées plus en détail dans [Tour-94].

A résolution égale, la sensibilité des collimateurs à géométrie convergente [Gull-92] (éventail ou conique) est plus importante que celle du collimateur à géométrie parallèle. En géométrie éventail, un effet de grossissement se produit suivant la dimension transverse, tandis qu'en géométrie conique [Gran-93], le grossissement a lieu suivant les dimensions axiales et transverses. Cela se traduit par une augmentation du nombre de photons γ acquis par le détecteur sans perte de résolution spatiale [Gull-92]. Un inconvénient des géométries convergentes est que leur gain géométrique (pour des distances détecteur-objet fixées) dépend maintenant de la distance source-détecteur, ce qui peut avoir pour effet de diminuer la taille de certaines régions d'intérêt.

Les géométries parallèle et éventail sont adaptées essentiellement à la reconstruction bidimensionnelle. En effet, dans les deux cas, les rayons acquis sont situés dans une coupe transverse donnée du volume du colis étudié et n'interfèrent pas (en théorie) avec les autres coupes transverses. Cependant, elles peuvent aussi conduire à des reconstructions tridimensionnelles par superposition des coupes transverses reconstruites indépendamment les unes des autres : on parle alors de reconstruction "pseudo-3D". La géométrie conique quant à elle, définit une véritable reconstruction 3D : les rayons traversent plusieurs coupes transverses, induisant une dépendance entre elles. La décomposition du processus de reconstruction en un ensemble de reconstructions 2D n'est alors plus applicable, ce qui engendre des algorithmes de reconstruction plus complexes que ceux utilisés en "pseudo-3D".

4.3.3. Résolution du système de détection

La résolution d'un système de détection est variable sur son champ de vision. Typiquement, la résolution se dégrade à la fois en fonction de l'éloignement point-source, mais également à distance fixe, lorsqu'on s'écarte de l'axe central de détection : c'est la conséquence géométrique de la collimation. Ce phénomène a fait l'objet de relativement peu d'études, car la dégradation qu'il engendre est supposée moindre par rapport à la diffusion Compton ou à l'absorption. Ce n'est qu'au cours des dernières années que sont apparus des modèles prenant en compte ce phénomène [Form-89] [Beek-93].

Le collimateur est caractérisé, en plus de l'épaisseur et la nature de ses septas, par la largeur de ses trous et la longueur de ses septas. Ces paramètres permettent de définir l'ensemble des directions acceptées par le trou du collimateur. L'angle est d'autant plus réduit que le trou est petit et les septas

⁶ Que l'on peut rapprocher du gain géométrique au centre de rotation, fonction des dimensions du collimateur.

longs. Dans le cas où le collimateur est percé d'un trou unique à ouverture carrée, le cône de détection théorique correspond à une pyramide dont le sommet est situé au centre du parallélépipède (vide) définissant le trou (c.f. figure 4.8). L'ensemble des points de l'espace détectable est également appelé *noyau de détection* du système.

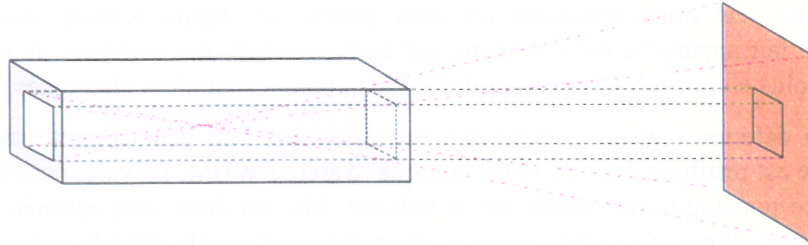


figure 4.8 : Noyau de détection pyramidal du dispositif à géométrie parallèle

La variation de la résolution est exprimée à partir de l'angle solide Ω (exprimé en stéradian), vu d'un point M appartenant au noyau de détection.

Ce phénomène est dit de dispersion parce que le détecteur ne rend pas l'image d'un point source sous forme ponctuelle mais étalée sous une forme proche d'une gaussienne : un point de l'image n'est donc pas projeté en un point unique du détecteur mais se disperse sur une partie d'autant plus grande que le collimateur accepte des directions non orthogonales et que la source est éloignée du détecteur. Lorsque le phénomène est ignoré, cela engendre des effets de flou dans les images reconstruites, ainsi que des distorsions géométriques [Glic-94].

Les méthodes de correction de la perte de résolution reposent soit sur des techniques de déconvolution des projections mesurées [Lewi-89], soit sur la modélisation de la réponse impulsionnelle du détecteur dans l'opérateur de projection. Dans ce dernier cas, la correction est souvent associée simultanément à la correction de l'atténuation et à celle du diffusé [Lian-92].

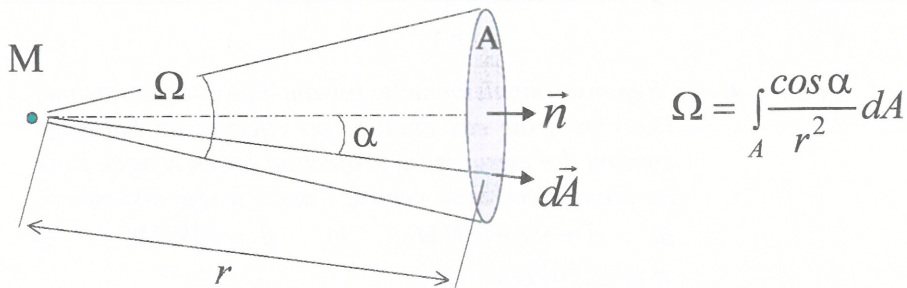


figure 4.9 : **définition de l'angle solide** : r représente la distance entre source et élément de surface dA , α étant l'angle entre la normale à la surface et la direction de la source.

La *réponse impulsionnelle spatiale* est intrinsèque au système détecteur-collimateur : elle traduit la relation entre l'intensité (en terme de photons comptés) parvenant d'un point de l'espace de détection et ses coordonnées spatiales. La caractéristique principale d'une réponse est la FWHM : la mesure de la dispersion de l'image d'un point source. Plus cette valeur sera fine, meilleure sera la résolution. Elle détermine aussi la capacité du système à distinguer deux points. En effet, on considère, que la distribution de la réponse suit une loi gaussienne de variance σ [Form-89]. Dans ce cas, la FWHM est égale à :

$$FWHM = 2\sigma\sqrt{2 \ln 2} \quad (4.11)$$

Si les sommets sont séparés d'une distance d inférieure à la FWHM, un échantillonnage continu ne laisse apparaître qu'un maximum unique, supérieur aux maxima de chacune des gaussiennes prise séparément, on ne peut donc distinguer les deux points (c.f. figure 4.10-a). Au-delà de la FWHM, l'échantillonnage fait apparaître deux maxima qui correspondent aux sommets de chaque gaussienne et qui se creuse de plus en plus en augmentant d . Les deux points sont alors distingués (c.f. figure 4.10-c).

La résolution détermine aussi la taille des structures que l'on peut correctement quantifier : toute source ponctuelle est restituée dans un voxel cubique⁷ d'arête FWHM. La valeur attribuée à ce volume est celle de la source ponctuelle moyennée sur le volume. Elle est donc sous-estimée, lorsqu'elle n'occupe que partiellement le volume. Cet effet purement géométrique s'appelle effet de volume partiel [Pret-98].

La résolution totale r_t , du système dépend de la limite de résolution intrinsèque du détecteur r_i , et de la résolution du collimateur r_c . Si on suppose que leurs variations sont gaussiennes et indépendantes, la somme de leurs variations est également gaussienne, d'où l'expression :

$$r_t^2 = r_i^2 + r_c^2 \quad (4.12)$$

La résolution du détecteur est souvent négligeable devant celle du collimateur. On retient donc $r_t \approx r_c$.

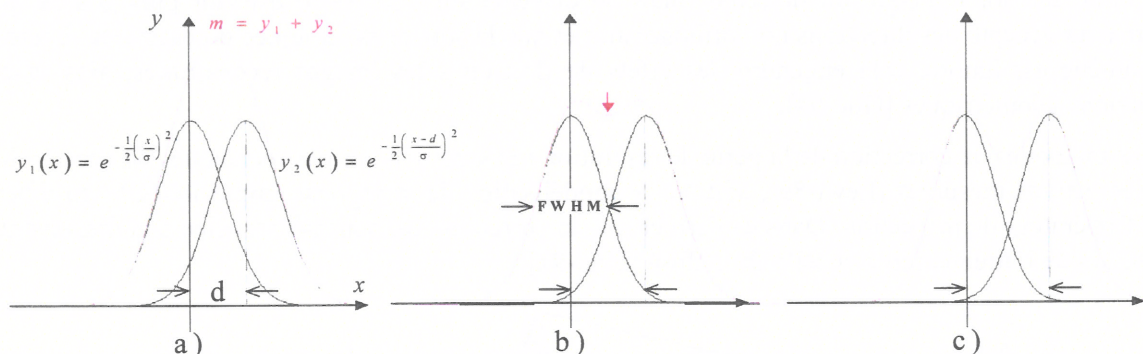


figure 4.10 : Réponse impulsionnelle suivant une loi gaussienne. Dans les trois cas étudiés, on effectue un balayage continu des mesures (la projection est en rouge), avec un point d'émission centré, l'autre à une distance d .
 a) $d = 0,8FWHM$; b) $d = FWHM$; c) $d = 1,2FWHM$

En pratique, les mesures de FWHM peuvent être réalisées à l'aide d'une source linéique parallèle à l'axe de rotation. La réponse (puis la FWHM) est alors déterminée à partir d'un déplacement de la source, orthogonal à l'axe de détection (c.f. § 5.4). Comme la réponse et la FWHM varient en fonction de l'éloignement de la source, on définit généralement une FWHM globale à partir de la réponse obtenue pour une source placée au centre de l'objet.

⁷ lorsque l'ouverture du collimateur est carrée

4.4. LES METHODES DE CORRECTION

4.4.1. Correction du diffusé

La diffusion Compton est le phénomène le plus difficile à modéliser du fait de sa complexité. Comme nous l'avons vu au § 4.1.1.2, elle dépend de l'énergie des photons ainsi que de la nature des matériaux traversés et de la géométrie de l'objet. D'autre part, certains photons qui auraient normalement été absorbés par le collimateur, s'ils avaient conservé leur trajectoire initiale, vont faire l'objet d'une (voir plusieurs) déviation(s) et atteindre la fenêtre du détecteur avec une énergie moindre. C'est pourquoi la géométrie du dispositif de détection ainsi que sa résolution en énergie vont également influencer sur la modélisation du phénomène. En imagerie médicale, les gamma-caméras utilisées ont une résolution d'une dizaine de keV autour du photopic du radioélément. Ainsi, au technétium 99m, la précision en énergie autour de la fenêtre de détection est de 20%, et la proportion de photons diffusés est de l'ordre de 30% [Floy-84].

La diffusion Compton va également se produire dans le système de détection, notamment dans le cristal du détecteur, et dégrader considérablement l'analyse de la mesure [Graf-96] [DeVo-95]. D'autre part, la déviation angulaire des photons diffusés rend la collimation moins efficace. On est donc moins informé sur l'origine spatiale des photons : l'effet visuel en reconstruction d'image se traduit par l'écrasement des contrastes.

Remarque : La spectrométrie gamma permet d'éliminer les photons diffusés selon un angle θ important ($h\nu' \ll h\nu$). Le problème vient de la diffusion à faible angle où la différence entre $h\nu'$ et $h\nu$ est de l'ordre de la résolution en énergie du détecteur.

A partir de l'équation (4.1), et en considérant l'ordre de résolution du détecteur germanium comme très petit (0,66% à 140 keV), on obtient des angles de diffusion Compton critique inférieurs au degré d'angle ($\theta_{\text{crit}} \approx 0,023^\circ$).

Si le caractère aléatoire de la diffusion Compton rend le phénomène difficile à modéliser et à corriger, l'importance de sa prise en compte a suscité de nombreuses recherches et le développement de méthodes diverses et variées, dans lesquelles la contribution de la diffusion Compton dans les mesures d'aire des photopics dépasse la dizaine de pourcent. C'est le cas avec les détecteurs NaI utilisés dans le domaine médical. On trouvera une large description des méthodes de correction de l'effet Compton en fonction de leur but dans [Buva-94], [Buva-95] et de leur principe dans [Mas-90].

Parmi ces méthodes, on distingue :

1. Celles qui cherchent à limiter le comptage des diffusés détectés, par l'utilisation particulière des fenêtres d'énergies [Kora-86]. Ce type de méthode présente quelques désavantages, notamment dans la difficulté à trouver les limites spectrales des fenêtres, qu'elles soient symétriques [Floy-88] ou non [Grah-86],
2. celles qui cherchent à modéliser le phénomène pour l'intégrer dans l'opérateur de projection [Frey-93a] [Beek-96]. Ce sont les méthodes les plus ambitieuses, plus robustes à réduire l'amplification du bruit comparées aux méthodes de soustraction [Frey-93b]. Elles font souvent appel à des codes Monte-Carlo et sont de ce fait lourdes d'utilisation [Frey-94]. Des alternatives ont été proposées, en se restreignant à la modélisation du premier choc du diffusé [Bouc-95] ou en développant des modèles analytiques de projecteurs-réprojecteurs, à l'instar des « proback »⁸ dans [Beek-96],

⁸ PROjector-BACKprojector

- celles qui procèdent par l'élimination des photons diffusés. Le but commun de ces méthodes n'est plus de localiser le diffusé dans l'objet mais d'estimer la distribution de la diffusion Compton afin de l'éliminer des mesures. Ce sont des méthodes de pré-correction. On distingue parmi elles les méthodes utilisant les doubles fenêtres d'énergie [Jasz-84], ou les méthodes de déconvolutions [Ljun-90].

Enfin, certains auteurs proposent d'exploiter les performances caractéristiques de différents types de détecteurs pour la correction du diffusé Compton [Sing-87] [Zasa-90]. Ainsi, l'association de détecteurs Germanium HyperPur et de caméras Anger permet une bonne prédiction de la fraction du diffusé notamment pour une meilleure quantification en SPECT.

Dans le cadre de nos travaux, nous avons utilisé une méthode de suppression de fond, basée sur une forme de Galton, assimilable à un trapézoïde amélioré. On trouvera une étude plus approfondie sur les méthodes de calcul de l'aire du photopic dans [Kokt-73], et plus particulièrement sur des détecteurs germanium dans [Hert-74].

Le photopic est marqué entre les énergies E_1 et E_2 . A partir d'une courbe de Galton, La contribution de la part du diffusé $N_{scat}(E_i)$ dans le canal d'énergie $E_i \in [E_1, E_2]$ est donné par :

$$N_{scat}(E_i) = N(E_1) + (N(E_2) - N(E_1)) \frac{\sum_{E_j=E_1}^{E_i} N(E_j)}{\sum_{E_j=E_1}^{E_2} N(E_j)} \quad (4.13)$$

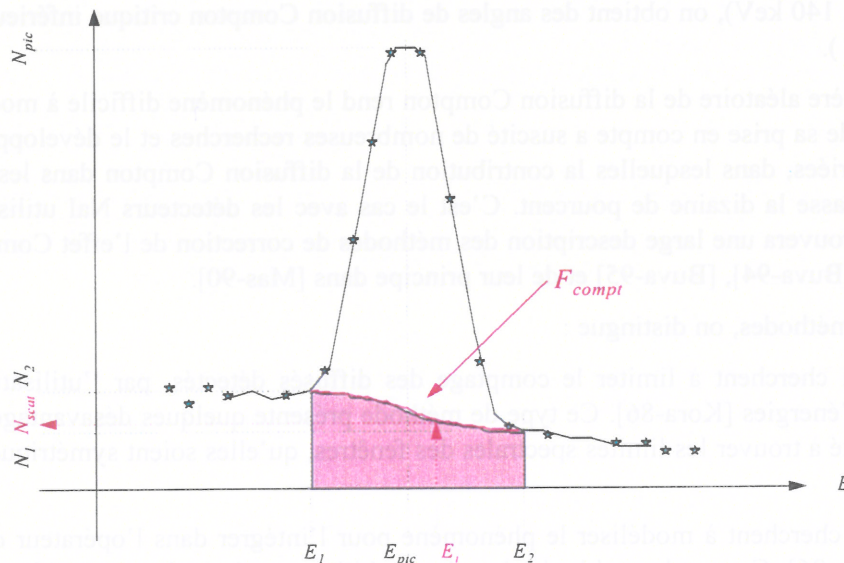


figure 4.11 : Fond de Galton à partir d'un pic identifié centré en E_{pic}

où $N(E_i)$ est le nombre total de photons comptabilisés au canal E_i , le numérateur et le dénominateur représentent respectivement la somme partielle (jusqu'à E_i) et la somme totale dans la fenêtre d'énergie

sélectionnée. La suppression du fond Compton F_{compt} est finalement réalisée en additionnant les valeurs $N_{scat}(E_i)$ lorsque $E_i \in [E_1, E_2]$. On a donc :

$$F_{compt} = \sum_{E_i=E_{deb}}^{E_{fin}} N_{scat}(E_i) \quad (4.14)$$

4.4.2. Correction de l'absorption

Au chapitre 3, nous avons abordé les méthodes analytiques de reconstruction basées sur l'inversion de la transformée de Radon. Celles-ci ne sont exactes que si l'atténuation sur le support convexe est uniforme. L'avantage des méthodes analytiques est leur rapidité et donc leur parfaite adaptation à traiter un grand nombre de mesures. Lorsque la distribution de l'atténuation sur le support est quelconque et non nulle, le théorème de coupe-projection n'est plus applicable. Une des conséquences notable d'une méconnaissance de l'atténuation est l'incapacité à reconstruire des images quantitativement exactes. Un autre inconvénient de taille est l'apparition d'images biaisées lorsqu'elles sont déterminées par des reconstituteurs analytiques, et ceci indépendamment de la qualité des mesures. Il est cependant possible de corriger l'atténuation à partir de méthodes itératives avec une bonne précision et des temps de calcul raisonnables (à chaque itération, on procède à une opération de projection et une de rétroprojection, soit deux fois le temps de calcul d'une méthode analytique). Le principe des méthodes itératives est de construire une suite d'estimées $\{f^k\}_{k=0,1,\dots}$ convergent vers la solution. L'estimée à l'itération $(k+1)$ étant de la forme :

$$f^{k+1} = f^k + \lambda^k d^k$$

où λ^k est un paramètre de relaxation dont dépend la vitesse de convergence, et d^k un terme de correction fonction de l'erreur entre les mesures et les projections de l'estimée f^k .

On reconnaît un procédé similaire à celui des méthodes de gradient où d^k est appelé la direction de descente et est proportionnel au résidu de l'itéré d'indice k [Lasc-93]. Leur grand avantage reste leur possibilité d'intégrer des facteurs de correction divers et de manière simultanée (c.f. § 4.4.3). Par ailleurs, elles se prêtent mieux à l'introduction d'informations *a priori*, d'où une plus grande souplesse et efficacité dans les processus de régularisation. On peut distinguer *grosso modo* trois types de méthodes traitant la correction d'absorption, suivant le moment où elles interviennent dans le calcul :

- les méthodes de **pré-corrrection** : elles agissent sur les projections par des opérations de moyenne entre deux vues opposées [Boul-92]. Les deux plus courantes sont la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique. Des méthodes plus sophistiquées utilisant des convolutions ont aussi été développées [Gull-81] [Tana-83] ;
- les méthodes **itératives hybrides** : leur principe est de construire une suite d'estimées $\{f^k\}_{k=0,1,\dots}$ convergent vers la solution sur la base d'images reconstruites par FBP. Ces méthodes sont dites hybrides⁹ puisqu'elles font appel à la fois à un formalisme analytique et algébrique. L'idée de base est que l'inverse régularisé de la transformée de Radon est peu différent de l'inverse régularisé de la transformée de Radon atténuée. Le facteur correctif d^k à l'estimée $(k+1)$ est de la forme :

$$d^k = P(m - \mathfrak{R}_\mu f^k)$$

⁹ aussi appelées méthodes IFBP (Iterative Filtered BackProjection)

où P est un opérateur général construit à partir de l'inverse régularisé de \mathfrak{R} .

Il existe plusieurs méthodes de ce type utilisant des opérateurs P différents, parmi lesquelles celles de Walter [Walt-81], de Maze [Maze-93], de Morozumi [Moro-84], et celle de Chang [Chan-78] qui se présente comme une version pondérée de celle de Walters avec :

$$P_{Chang} = C_{\mu} P_{Walters}$$

$$C_{\mu}(M) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\mu l_{\theta}(M)) d\theta \right]^{-1}$$

où $l_{\theta}(M)$ est la longueur du trajet atténuant passant par M dirigée par v_{θ} et μ l'atténuation linéique du milieu.

Initialement, la méthode de Chang est une méthode de post-correction où on recorrige l'image obtenue par FBP en chaque point, par le facteur correctif $C_{\mu}(M)$. Elle correspond au premier ordre¹⁰ de la méthode itérative.

L'inconvénient majeur de ces méthodes est que leur convergence n'est pas établie en théorie. D'autre part, une incertitude demeure quant à l'existence de classes de fonctions f et μ pour lesquelles ces méthodes ne convergeraient pas vers des solutions viables. Des situations dans lesquelles ces méthodes divergent ont été exhibées dans [Mall-95]. Pour plus de précision sur les performances et la convergence, on pourra se reporter à la thèse de Q. Donner [Donn-94] ou dans [Mura-87] où les auteurs ont intercomparé les méthodes hybrides sur des données bruitées.

- Les **méthodes algébriques** intègrent la correction d'atténuation directement dans l'opérateur de projection discrétisé. Les classes de méthodes algébriques sont vastes, elles dépendent notamment des éléments finis utilisés pour la discrétisation de l'objet, du modèle de distribution d'intensité choisi sur les éléments finis (pixels ou voxels), etc. L'avantage essentiel de ces méthodes est de pouvoir intégrer un grand nombre de facteurs correctifs : il est rare de voir une méthode algébrique traiter uniquement de la correction d'atténuation. Nous aborderons plus précisément la correction d'atténuation dans le cadre plus général des méthodes algébriques de corrections simultanées (c.f. paragraphe 4.4.3).
- Enfin, citons les récentes méthodes de **Data Consistency Condition**, qui permettent de corriger l'atténuation uniquement à partir des mesures d'émissions. Elles ne requièrent donc pas l'utilisation d'un tomographe de transmission, et exploitent le fait que seules certaines distributions d'atténuation sont consistantes avec les données issues de l'émission. La carte d'atténuation est sélectionnée selon des critères mathématiques basés sur les propriétés des mesures SPECT, appelées « conditions de rang » [Natt-92]. Une première étude a été menée avec succès sur des données issues de la SPECT, où les conditions de consistences sont utilisées afin de retrouver l'atténuation uniforme sur un support elliptique [Welc-97]. Plus récemment, cette méthode a été employée en PET [Welc-98]. Sa principale limitation est qu'elle ne s'applique qu'à la géométrie parallèle 2D, seule géométrie où les conditions de rang de la transformée atténuée sont connues. Une extension à la géométrie 3D RHS¹¹ « Rotating Slant Hole » a cependant été réalisée par Mennessier [Menn-99].

¹⁰ version itérée de Chang avec une seule itération

¹¹ la géométrie RHS est une géométrie 3D parallèle, pour laquelle les collimateurs sont inclinés d'un même angle (non nul) par rapport à l'axe de détection

4.4.3. Les corrections simultanées

Parmi les méthodes de compensation simultanée, certaines se proposent de corriger l'atténuation et la diffusion [Axel-84] [Beck-82], ou l'atténuation et la réponse du détecteur [Zeng-91]. Nous ne nous sommes intéressés qu'aux méthodes permettant de corriger les trois phénomènes primordiaux qui sont la diffusion, l'atténuation et la réponse du détecteur. Ce sont les méthodes algébriques qui permettent de prendre en compte au mieux ces différentes corrections au sein de la modélisation.

La modélisation appropriée consiste à élaborer une fonction de dispersion ponctuelle, la PSF (Point Spread Function) de notre système. Celle-ci traduit la fonction réponse globale de notre système à un point donné de l'espace, en fonction des paramètres influents la mesure, *i.e.* l'atténuation du milieu, la diffusion Compton et la réponse spatiale du système de détection.

Dans le cadre des géométries d'acquisitions parallèles, il est souvent préférable d'utiliser la fonction de dispersion linéique, ou LSF (Line Spread Function). Dans le cas où l'axe de rotation est dirigé suivant l'axe z , elle se déduit de la PSF par :

$$LSF(x, y) = \int_z PSF(x, y, z) dz$$

La modélisation de la LSF peut s'effectuer de différentes manières :

1. La première consiste à utiliser des codes de Monte-Carlo. L'inconvénient majeur de ce type d'approche est le temps considérable pour réaliser les simulations [Floy-86]. L'approche de Penney est similaire mais elle se limite à des atténuations uniformes [Penn-90]. Malgré l'amélioration constante de la vitesse des processeurs et la taille des mémoires, ces méthodes demeurent toujours très lourdes d'emploi.
2. En disposant de mesures à partir de sources linéiques radioactives, il est possible d'accéder à la LSF de manière expérimentale. Cette démarche permet aussi de valider le modèle analytique [Form-93], [Beek-93], dans le sens où elle fournit des estimations numériques des paramètres dont dépendrait un modèle préétabli, le modèle classiquement utilisé étant celui de la gaussienne [Beek-93]. Dans certains cas, les expériences peuvent induire de nouveaux choix de modèles analytiques. Ainsi, dans [Ying-83], les expériences montrent que la décroissance de l'amplitude de la gaussienne en fonction de la distance y répond plus favorablement à une décroissance de type exponentielle $e^{-\alpha y}$ qu'à une décroissance de la forme $1 / \sigma(y)\sqrt{2\pi}$.
3. En modélisant les phénomènes à l'aide de formulations analytiques pour décrire les phénomènes physiques intervenants [Beek-93] [Beek-95]. Ainsi, dans le cadre des dispositifs utilisés en SPECT, il est courant de modéliser la contribution des photons directs¹² par une gaussienne. Ainsi, dans [Beek-93], la LSF de la partie directe est de la forme :

$$LSF(x, y, d) = A(d)e^{-B(d)(x^2+y^2)}$$

La modélisation de la LSF de notre système ainsi que la validation expérimentale réalisée sont détaillées au chapitre suivant.

¹² par opposition aux photons diffusés qui sont modélisés à part.

4.5. APPROCHE RETENUE VIS-A-VIS DU PROBLEME INVERSE

Dans cette dernière partie du chapitre, nous identifions le problème de reconstruction que nous cherchons à résoudre, et justifions les choix que nous avons réalisés pour entreprendre sa résolution. Ces choix portent sur la modélisation du processus de formation de l'image et sur la manière générale d'approcher la résolution du problème. Nous allons donc préciser les hypothèses faites sur les phénomènes physiques dégradant la mesure et les classes de méthodes d'inversion retenues. Pour terminer, nous indiquons les objectifs à poursuivre dans l'élaboration de la méthode de reconstruction et les différents problèmes auxquels nous sommes confrontés.

4.5.1. Rappel du contexte

Rappelons les grandes lignes du problème inverse que nous désirons résoudre. Nous cherchons à déterminer la distribution d'activité d'émission gamma pour chacun des radioéléments présents et identifiés, dans une section transverse d'un colis de déchets. Le dispositif d'acquisition est muni d'un détecteur germanium hyperpur (HpGe) avec une géométrie de collimation parallèle : les projections s'effectuent au plus près du colis sur 360° .

Ces mesures sont dégradées par divers phénomènes perturbateurs, dont le plus important est l'atténuation. Les structures constitutives des colis sont extrêmement variables : des densités de matériaux très différents, et/ou des zones d'homogénéités ou d'hétérogénéités. Par ailleurs, les radioéléments présents et recherchés émettent entre 50 keV et 2 MeV. Par conséquent, la distribution d'atténuation linéique n'est pas connue *a priori* et ne répond à aucun standard. Une connaissance de la distribution spatiale de l'atténuation est pourtant indispensable pour pouvoir corriger son effet et améliorer la quantification des images reconstruites. La correction de la diffusion Compton est supposée de bonne qualité grâce à la bonne résolution en énergie du détecteur en germanium. D'autre part, nous nous plaçons dans un contexte de dégradation volontaire de la résolution spatiale en détection pour deux raisons : la faible efficacité du détecteur et la forte atténuation due aux matériaux confinants dans le colis. De ce fait, pour compenser la faible statistique de comptage, nous pouvons soit augmenter l'angle solide de détection (mais altérer la résolution), soit augmenter le temps de comptage. La solution choisie réalise un compromis entre ces deux possibilités. Il en résulte un cône de détection ouvert et divergent dans l'espace objet que nous chercherons à compenser dans le modèle.

L'objectif poursuivi est donc de reconstruire la carte d'émission en compensant l'atténuation et la réponse du dispositif de détection.

4.5.2. Modélisation et algorithmique : les choix réalisés

Le choix des hypothèses sur la distribution de l'atténuation de l'objet est primordial. Nous nous plaçons par défaut dans le cas où elle est donnée par une carte d'atténuation. Dans le cas contraire, nous émettons l'hypothèse simplificatrice d'une homogénéité parfaite, et nous la calculons en fonction de données *a priori* (densité du colis entier, données producteur, etc).

Un second choix porte sur la prise en compte de la réponse spatiale du dispositif de détection.

Enfin, le dernier choix important se réfère à l'approche algorithmique utilisée.

4.5.2.1. Utilisation d'une carte d'atténuation

La meilleure manière de traiter la correction d'atténuation est de disposer de la carte d'atténuation à l'énergie du radioélément. Elle est absolument nécessaire pour une quantification optimale. Il existe plusieurs manières de l'obtenir pour la tranche d'objet considérée. Tout comme pour la tomographie

d'émission, un large éventail de techniques existent que ce soit pour la détection, le choix des sources, la collimation, les trajectoires d'acquisition, etc. Ces choix sont motivés par l'utilisation faite des images reconstruites, souvent en terme de précision ou de quantification. Celle dont nous disposons au laboratoire procède par mesure d'atténuation à l'aide d'une source gamma externe de ^{60}Co placée à l'extérieure du colis, face à une batterie de détecteurs disposés en éventail. L'échantillonnage permet de reconstruire une image 256×256 pixels à l'aide d'un algorithme de rétroprojection filtrée. La résolution spatiale des pixels est de 3 mm^3 . Une tomographie par transmission permet de mesurer la transformée de Radon de l'atténuation μ . La relation entre l'intensité du flux à la source, I_0 , et l'intensité transmise $I(\rho, \theta)$, pour une acquisition effectuée suivant la direction v_θ et à la distance ρ du centre, est :

$$I(\rho, \theta) = I_0 \exp \left(- \int_{\langle u_\theta, M \rangle = \rho} \mu(M) dM \right) \quad (4.15)$$

En prenant le logarithme, on retrouve bien la transformée de Radon de la fonction d'atténuation :

$$\mathfrak{R}\mu(\rho, \theta) = \ln \left[\frac{I_0}{I(\rho, \theta)} \right] = \int_{\langle u_\theta, M \rangle = \rho} \mu(M) dM \quad (4.16)$$

Le couplage des mesures par transmission pour la correction en tomographie d'émission nécessite une interpolation en énergie entre celle de la source utilisée en transmission et celle de chaque radioélément à reconstruire. La correspondance spatiale des deux images (transmission et émission) ne pose pas de problème : un simple marquage à l'angle zéro de projection permet un recalage précis des images. L'interpolation en énergie fait appel à une formule empirique de Klein-Nishina (c.f. § 5.3.3).

Tout l'intérêt d'une carte d'atténuation est que son intégration dans un opérateur discret de projection/rétroprojection est relativement aisée et permet de corriger au mieux ce phénomène.

4.5.2.2. Correction de la réponse géométrique de détection

La correction de la réponse spatiale de détection est nécessaire dès lors que la géométrie d'acquisition implémentée sur le tomographe impose un large faisceau de détection. D'autre part, la réponse varie spatialement en fonction de l'éloignement de la source au détecteur mais aussi de celui de la source à l'axe central de détection. Il est difficile d'en tenir compte par des techniques de pré ou post-correction dans des méthodes de reconstructions analytiques. Il devient donc plus judicieux d'intégrer la compensation de la réponse dans une technique algébrique, d'autant plus que l'on peut y intégrer simultanément la correction de l'atténuation.

Ainsi, nous proposons une méthode prédictive de la réponse basée sur des considérations de géométrie optique [Proc-86]. Le calibrage en efficacité d'abord prise égale à l'unité est ensuite déterminée à l'aide des validations expérimentales.

4.5.2.3. Approche algorithmique adoptée

Une méthode de reconstruction est caractérisée tout d'abord par la classe à laquelle elle appartient. Nous avons opté pour une méthode de reconstruction algébrique. En effet, dans le cas d'une distribution d'atténuation non uniforme, il n'est pas envisageable d'appliquer une méthode analytique qui, malgré sa rapidité, ne peut corriger avec exactitude l'effet d'atténuation. Il reste alors les méthodes itératives, qui sont plus lourdes en temps de calcul, mais permettent de prendre en compte les facteurs de dégradation des mesures, en particulier la réponse de détection et l'atténuation. De plus, elles facilitent l'introduction d'information *a priori* dans le processus de reconstruction, conduisant ainsi à une meilleure

régularisation du problème. Nous orienterons donc nos travaux sur les algorithmes algébriques dont la convergence est théoriquement assurée.

Les techniques d'optimisation les plus employées en reconstruction d'image par tomographie d'émission sont, dans le cas d'un modèle de bruit poissonien, l'algorithme Expectation-Maximisation (EM), et dans le cas d'un modèle de bruit gaussien, les algorithmes de type gradient conjugué (GC). Nous nous plaçons dans le cadre d'une hypothèse poissonienne, puisque nous ne savons pas dans l'absolu si l'ensemble des mesures (pour les différents radioéléments détectés) bénéficient de taux de comptage suffisants pour justifier l'hypothèse gaussienne. L'hypothèse gaussienne n'en est pas rejetée pour autant : elle permet, lors des reconstructions, de confronter les deux modèles de bruit et les algorithmes employés. Afin de stabiliser le processus de reconstruction, nous introduisons une régularisation dans son schéma : quel que soit le modèle de bruit choisi, le critère à minimiser peut ne plus être quadratique, voire être non convexe. Ceci nécessite alors l'application d'autres algorithmes de minimisation, ou de techniques particulières pour contourner cette difficulté. Ces aspects sont discutés au chapitre 6.

4.6. CONCLUSION

Nous voulons donc déterminer une cartographie de l'activité d'émission par une technique de tomographie d'émission bidimensionnelle pour l'ensemble des radioéléments détectés sur les spectres de mesure. Nous avons vu au cours de ce chapitre, qu'outre le problème de l'atténuation, d'autres phénomènes entravent sérieusement la quantification et la localisation de l'activité dans le colis : la perte de résolution liée à une réponse spatiale variant dans le noyau de détection est la plus significative. La correction du diffusé Compton n'est pas corrigée dans le modèle, car l'emploi d'un détecteur haute résolution permet une correction de très bonne qualité. L'utilisation à terme d'une nouvelle génération de détecteurs, tels que les (CdTe), moins résolutifs en énergie, nécessiterait alors la mise en œuvre d'une correction du diffusé.

De l'état de l'art des méthodes de reconstructions avec corrections, il ressort que les méthodes de corrections simultanées sont les mieux adaptées à la modélisation de notre problème. Nous proposons de développer une méthode de reconstruction avec correction de l'atténuation et de la réponse aux énergies des radioéléments identifiés. La première correction repose sur la prise en compte d'une distribution bidimensionnelle de l'atténuation obtenue par un tomographe de transmission, celle de la réponse sur un modèle analytique issu de l'angle solide. La modélisation et la construction de la matrice de projection est décrite au chapitre suivant.

Le problème inverse de la reconstruction tomographique étant mal conditionné, il est nécessaire d'appliquer des techniques de régularisation pour empêcher l'amplification du bruit à chaque itération. Une stabilisation de la reconstruction est d'autant plus nécessaire qu'aux fortes atténuations, les faibles taux de comptages induits rendent les processus itératifs d'autant plus fragiles. Les méthodes retenues proposent alors une reconstruction itérative régularisée de la solution. Les algorithmes de reconstruction sont proposés au chapitre 6.

4.7. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Axel-84] B. Axelsson, P. Msaki and A. Israelsson, « Substraction of Compton scattered photons in SPECT », *J. Nucl. Med.* 25 : 490-494, 1984
- [Baur-85] A. Baur, « *Protection contre les rayonnements, aspects physiques et méthodes de calcul.* », Edition du CEA, 1985

- [Beck-82] J. Beck, R. Jaszczak, E. Coleman, C. Starmer and L. Nolte, « Analysis of SPECT including scatter and attenuation using sophisticated Monte-Carlo methods », *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 29 : 506-511, 1982
- [Beek-93] F.J. Beekman, « Object shape dependent PSF model for SPECT imaging », *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 40(1) : 31-39, 1993
- [Beek-95] F.J. Beekman, et al. « Fast SPECT simulation including object shape dependent scatter ». *IEEE Trans. Med. Imag.* 14(2) :271-282, 1995
- [Beek-96] F.J. Beekman, C. Kamphuis and M.A. Viergever. « Improved SPECT quantitation using fully three-dimensional iterative spatially variant scatter response compensation. » *IEEE Trans. Med. Imag.* 15(4) :491-499, 1996
- [Bert-97] Bertolucci, E et al. « Timing properties of CdZnTe detectors for positron emission tomography. » *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 400 :107-112, 1997
- [Bouc-95] V. Bouchard, P. Cinquin and L. Desbat. « First Compton scatter correction in SPECT using PVM. » In *Proceedings of the 1995 International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, pages 109-111, Aix-Les-Bains, France, Jul 4-6, 1995
- [Boul-92] D. Boulfelfel, R. M. Rangayyan, L. J. Hahn, and R. Kloibert. « Use of the geometric mean of opposing planar projections in pre-reconstruction restoration of SPECT images. » *Phys. Med. Biol.*, 37:1915-1929, 1992.
- [Buva-94] I. Buvat, H. Benali, A. Todd-Pokropek, and R. Di Paola. « Scatter correction in scintigraphy: the state of the art. » *Eur. J. Nucl. Med.*, 21:675-694, 1994
- [Buva-95] I. Buvat, M. Rodriguez-Villafuerte, A. Todd-Pokropek, H. Benali, and R. Di Paola. « Comparative assessment of nine scatter correction methods based on spectral analysis using Monte-Carlo simulations. » *IEEE Trans. Nucl. Med.*, 36:1476-1488, 1995
- [Canb-97] Catalogue Canberra Measure, 1997
- [Chan-78] L. Chang. « A method for attenuation correction in radionuclide computed tomography. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 25 (1):638-639, 1978
- [Char-94] P. Charbonnier. « *Reconstruction d'image: régularisation avec prise en compte des discontinuités.* » PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1994
- [Ciri-99] Cirignano, L « Pixellated CdZnTe detector for emission/transmission computed tomography. » *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 422 :216-220, 1999
- [DeVo-95] M.J.A. De Voigt et al. « A novel compact Ge-BGO Compton suppression spectrometer. » *Nucl. Instr. And Meth. In Phys. Res.*A356 :362-375, 1995
- [Donn-94] Q. Donner. « *Correction de l'atténuation et du rayonnement diffusé en tomographie d'émission à simples photons.* » PhD thesis, Université Joseph Fourier-Grenoble 1, 1994
- [Evan-82] R.D. Evans. « *The atomic nucleus.* » Krieger, New York, 1982

- [Floy-84] C. Floyd, R. Jaszczak, C. Harris, and R. Coleman. « Energy and spatial distribution of multiple order Compton scatter in SPECT: a monte-carlo investigation. » *Phys. Med. Biol.*, 29:1217-30, 1984
- [Floy-86] C. Floyd, R. Jaszczak, K. Greer and R. Coleman. « Inverse Monte-Carlo as a unified reconstruction algorithm for ECT. » *Phys. Med. Biol.* 33:1075-1081, 1988
- [Floy-88] C. Floyd, R. Jaszczak, and R. Coleman. « Scatter detection in SPECT imaging :dependence on source depth, energy, and energy window. » *Phys. Med. Biol.* 33:1075-1081, 1988
- [Form-89] A.R Formiconi, A. Pupi and A. Passeri. « Compensation of spatial response in SPECT with conjugate gradient reconstruction technique. » *Phys. Med. Biol.* 34:69-84, 1989
- [Form-93] A. Formiconi, A. Pupi, and A. Passeri. « Simultaneous correction of attenuation and distance-dependent resolution in SPECT: an analytical approach. » *Phys. Med. Biol.*, 5:1207-1217, 1993
- [Frey-93a] E. Frey and B. Tsui. « A practical method for incorporating scatter in a projector-backprojector for accurate scatter compensation in SPECT. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 40:1107-1116, 1993
- [Frey-93b] E. Frey Z.W Ju and B. Tsui. « A fast projector-backprojector pair modeling the asymmetric, spatially varying scatter response function for scatter compensation in SPECT imaging. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 40:1192-1197, 1993
- [Frey-94] E. Frey and B. Tsui. « Modeling the scatter response function in inhomogeneous scattering media in SPECT. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 15(4):491-499, 1994
- [Gers-98] J.L Gerstenmayer, O. Bonnin, V. Gerbe, F. Glasser, O. Peyret, « New CdTe Quantum Sensor, with Improved Spatial Resolution, for Fast X-Ray and gamma-Ray Imaging. » *Materials Research Society Symposium Proceedings*, 487 :281-286, 1998
- [Glas-97] F. Glasser, et al. « Recent developments on a CdTe based X-ray detector for digital radiography. » *Proceedings- Spie The International Society For Optical Engineering*, issue 3032 :513-519, 1997
- [Glic-94] S. Glick, B. Penney, M. King, and C. Byrne. « Non iterative compensation for the distance-dependent detector response and photon attenuation in SPECT imaging. » *IEEE Trans. Med. Imaging*, 13:363-374, 1994
- [Graf-96] U. Graf. « Anti-Compton suppression with a HpGe detector response. » *Grantholder report*, ISIS-JRC ISPRA, 1996
- [Grah-86] L.S. Graham, R.L La Fontaine, M.A Stein. « Effects of asymmetric photopeak windows on flood field uniformity and spatial resolution of scintillation cameras. » *J. Nucl. Med.* 27 :706-713, 1986
- [Gran-93] P. Grangeat, R. Guillemaud, P. Rizo, R. Sauze, Q. Donner, and J.-P. Gorius. « Cone beam SPECT with a tilted detector. » *Comput. Med. Imag. Graph.*, 17 (4,5):279-287, 1993

- [Gull-81] G. Gullberg and T. Budinger. « The use of filtering methods to compensate for constant attenuation in single photon emission computed tomography. » *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 28 (2):142-157, 1981
- [Gull-92] G. T. Gullberg, G. L. Zeng, F. L. Datz, P. E. Christian, and C. H. Tung. « Review of convergent beam tomography in single photon emission computed tomography. » *Phys. Med. Biol.*, 37 (3):507-534, 1992
- [Hert-74] J. Hertogen, J. De Donter and R. Gijbels. « Experimental data on photopeak integration methods in activation analysis. » *Nucl. Instr. and Meth.* 115:197-212, 1974
- [Hubb-93] J ;H. Hubbell and S.M Seltzer. « *Tables of X-ray mass attenuation coefficients and mass energy-absorption coefficients 1 keV to 20 MeV for elements Z=1 to 92 and 48 additional substances of dosimetric interest.* » IRD, Physics Laboratory, U.S. department of Commerce, Gaithersburg, MD 20899 U.S.A, 1993
- [Iwat-99] K. Iwata, et al. « CdZnTe detector for combined X-ray CT and SPECT. » *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 422 :740-744, 1999
- [Jasz-84] R. Jaszczak, L. Greer, C. Floyd, C. Harris, and R. Coleman. « Improved SPECT quantification using compensation for scattered photons. » *J. Nucl. Med.*, 25:893-900, 1984
- [Kokt-73] L. Kokta. « Determination of peak area. » *Nucl. Instr. and Meth.* 112:245-251,1973
- [Kora-86] K. Koral, N. Clinthorne, and W. Rogers. « Improving emission computed tomography quantification by Compton-scatter rejection through offset windows. » *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res.*, A242:610-614, 1986
- [Knol-89] G.F. Knoll, « *Radiation Detection and Measurement.* » Second Edition, Wiley, 1989.
- [La-97] V. La. « *Correction d'atténuation en géométrie conique avec mesures de transmission en tomographie d'émission mono-photonique.* » PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997
- [Lasc-93]. Lascaux and R. Théodor. « *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 1.* » Masson, 1993
- [Lewi-89] R. M. Lewitt, P. R. Edholm, and W. Xia. « Fourier method for correction of depth dependent collimator blurring. » *SPIE Med. Imag. II: Image Processing*, 1092:232-243, 1989
- [Lian-92] Z. Liang, T.G. Turkington, D.R. Gilland, R.J. Jaszczak and R.E. Coleman. « Simultaneous compensation for attenuation, scatter and detector response for SPECT reconstruction in three dimensions. » *Phys. Med. Biol.* 37(3):587-603, 1992
- [Ljun-90] M. Ljungberg and S. E. Strand. « Scatter and attenuation correction in SPECT using density maps and Monte-Carlo simulated scatter functions. » *J. Nucl. Med.*, 31:1560-1567, 1990
- [Mall-95] A. Mallon, P. Grangeat, and Q. Donner. « Convergence study of iterative algorithms for attenuation correction in SPECT. » In *Proceedings of the 1995 International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, pages 97-101, Aix-Les-Bains, France, Jul 4-6, 1995

- [Mas-90] J.Mas *et al.* « De la fenêtre asymétrique à l'analyse factorielle sous contrainte spectrale : une revue des méthodes de correction de la diffusion Compton en imagerie isotopique. » *J. Med. Nucl. and Biophys.* 14 :285-294, 1990
- [Maze-93] A. Maze *et al.* « Iterative reconstruction methods for nonuniform attenuation distribution in SPECT. » *J. Nucl. Med.*, 34:1204-1209, 1993
- [Menn-99] C. Mennessier, F. Noo, R. Clackdoyle, G. Bal and L. Desbat « Attenuation correction in SPECT using consistency conditions for the exponential ray transform » *Conf. Record 3D99*, 1999
- [Moro-84] T. Morozumi, M. Nakajima, K. Ogawa, and S. Yuta. « Attenuation correction methods using the information of attenuation distribution for single photon emission CT. » *Med. Imag. Tech.*, 2:20-28, 1984
- [Mura-87] K. Murase, H. Itoh, and H. Mogami. « A comparative study of attenuation correction algorithms in single photon emission computed tomography (SPECT). » *Eur. J. Nucl. Med.*, 13:55-62, 1987
- [Natt-92] F. Natterer « Attenuation correction in Positron Emission Tomography » *Math. Meth. in the Appl. Sci.* 15 :321-330, 1992
- [Penn-90] B. Penney and M. King « A projector, back-projector pair which accounts for the 3D depth and distance dependent blurring in SPECT. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 37 : 681-686, 1990
- [Pett-98] J.L. Pettier, B. Chabalier, D. Eymery and R. Thierry. « TEMISEC : la tomographie d'émission appliquée aux colis de déchets FA et MA. » Rapport technique, DESD N° 98-170, CEA, 1998
- [Phil-70] J.C. Philippot, *IEEE Trans. Nucl. Sci.* NS-17(3), 446, 1970
- [Fret-98] P.H. Pretorius *et al.* « Reducing the influence of the partial volume effect on SPECT activity quantification with 3D modelling of spatial resolution in iterative reconstruction. » *Phys. Med. Biol.* 43:407-420, 1998
- [Proc-86] A.E. Proctor. « Geometrical optics for predicting gamma spectrometer collimator performance. » EGG-PHY 7279, Idaho National Engineering Laboratory, EG&G Idaho, Inc. Idaho falls, Idaho 83415. May 1986
- [Ross-96] M. Rossi *et al.* « High energy tomography using cadmium zinc telluride detector. » *Nucl. Instr. And Meth. In Phys. Res.* A380 :419-422, 1996
- [Sing-87] M. Singh, C. Horne. « Use of a germanium detector to optimize scatter correction in SPECT. » *J. Nucl. Med.* 28 :1853-1860, 1987
- [Tana-83] E. Tanaka. « Quantitative image reconstruction with weighted backprojection for single photon emission computed tomography. » *J. Comput. Assist. Tomogr.*, 7:692-700, 1983
- [Tour-94] E.Tournier, C. Mestais, O. Peyret. « Le compromis sensibilité-résolution, méthodes de collimation, caméras multi-têtes, méthodes tomographiques. Médecine nucléaire. »-Imagerie fonctionnelle et métabolique (18) :317-321, 1994

- [Tsui-91] B. Tsui, X. Zhao, E. Frey, and G. Gullberg. « Comparison between ML-EM and WLS-CG algorithms for SPECT image reconstruction. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 38 (6):1766-1772, 1991
- [Verg-97] L. Verger, J.P. Bonnefoy, F. Glasser, P. Ouvrier-Bufferet. « New Developments in CdTe and CdZnTe Detectors for X and gamma-Ray Applications. » *J. Elec. Mat.* 26(6): 738-744, 1997
- [Walt-81] T. Walters, W. Simon, D. Chesler, and J. Correia. « Attenuation correction in gamma emission computed tomography. » *J. Comput. Ass. Tomogr.*, 5 (1):89-94, 1981
- [Welc-97] A. Welch, R. Clack, F. Natterer and G. Gullberg « Toward accurate attenuation correction in SPECT without transmission measurements » *IEEE Trans. Med. Imag.*, 16(5) :532-541, 1997
- [Welc-98] A. Welch, et al « Attenuation correction in PET using consistency information » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 45(6) :3134-3141, 1998
- [Ying-83] O. Ying-Lie « An ECAT reconstruction method which corrects for attenuation and detector response. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 30:632-635, 1983
- [Zasa-90] K.R. Zasadny, K.F. Koral, C.E Floydand R.J Jaszczak. « Measurement of Compton scattering in phantoms by germanium detector. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 37(2):642-646, 1990
- [Zeng-91] G. Zeng, G. Gullberg, B. Tsui and J. Tarry « Three-dimensional iterative reconstruction algorithms with attenuation and geometric point response correction » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 38(2):693-702, 1991

CHAPITRE 5.

MODELISATION DU PROCESSUS DE MESURE

5.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous abordons la modélisation du processus de mesure. Tout d'abord, il est nécessaire de connaître les notions fondamentales concernant la construction de la matrice de projection. La discrétisation de l'objet en éléments finis [Zien-91] est une étape clé pour la suite des opérations puisqu'elle conditionne directement les résultats finaux et influence les orientations des méthodes de reconstruction.

Dans un premier temps, nous exposons la démarche qui nous a conduit vers le choix du modèle développé à la section suivante. Elle comprend un recensement des techniques et des modèles qui ont retenu notre attention (seuls les modèles dont l'adaptation à notre cas de figure est réalisable et présentant des caractéristiques intéressantes ont été retenus).

Dans un deuxième temps, nous détaillons la mise en œuvre de la méthode dans le cadre du dispositif expérimental. C'est l'occasion de donner quelques spécificités sur le dispositif en lui-même ainsi que quelques définitions et notations utiles. Un modèle déterministe de réponse linéique du système, incluant la correction de la réponse géométrique de détection et l'atténuation, est détaillé. Une exception est faite en ce qui concerne la modélisation du phénomène de pénétration par les septas qui n'est décrite que dans le chapitre dédié à la validation expérimentale. Pour finir, nous donnons l'expression générale des coefficients matriciels, incorporant la correction de l'atténuation et de la réponse géométrique.

La troisième section est dédiée aux implémentations numériques utilisées pour la correction de la réponse géométrique et de l'atténuation. En particulier, nous donnons une expression analytique de la réponse géométrique du détecteur.

Enfin, nous présentons la démarche expérimentale mise en place pour valider le modèle. Les résultats et les comparaisons avec le modèle mathématique sont exposés pour une large gamme d'énergie. Aux moyennes et hautes énergies et en l'absence d'atténuation de matrice, l'effet de septas n'est plus négligeable. Nous proposons ici d'introduire dans le modèle une correction de l'effet de pénétration par les septas, dont l'apport est mesuré sur la base des mêmes expériences. La correction du phénomène est abordée dans cette section pour deux raisons : elle n'apparaît pas en tant que telle dans le modèle décrit à la section 5.2, car les calculs qu'elle exige sont beaucoup trop longs (nous nous servons de tables pré-calculées tabulées en énergie) et d'autre part, elle n'a été envisagée qu'après l'observation des résultats expérimentaux.

5.2. MODELISATION : PRESENTATION GENERALE ET CHOIX EFFECTUES

Une méthode algébrique résoud le problème sous une formulation matricielle. La discrétisation de l'objet est une étape nécessaire et préalable à la linéarisation des relations entre activité et mesures.

La phase de discrétisation revient à se donner un espace de dimension finie N dans lequel est décomposée la fonction f . Celle-ci est entièrement connue à partir de ces N décompositions sur les **fonctions de bases** $\{\phi_k\}_{k=1\dots N}$, soit :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = \sum_{k=1}^N f_k \phi_k(x, y) \quad (5.1)$$

où f_k est la **distribution d'activité** de la fonction f sur la base ϕ_k , et Ω le support de l'objet. Des distributions plus ou moins complexes ont été utilisées. La distribution classique reste la répartition uniforme: le vecteur f est cherché comme la solution du système matriciel s'accordant avec le vecteur de mesures m , de taille M :

$$Hf = m \quad (5.2)$$

Si on note $[Hf]_l$, la $l^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur issu de la multiplication de H par f , et H_l la $l^{\text{ème}}$ ligne de la matrice H , alors de (5.2) et (5.1) on obtient :

$$m_l = [Hf]_l = \sum_{k=1}^N f_k H_l(\phi_k) = \sum_{k=1}^N H_{lk} f_k \quad (5.3)$$

où l'élément H_{lk} de la matrice $H \stackrel{\text{def}}{=} (H_{lk})_{l=1\dots M, k=1\dots N}$ de taille M -par- N , exprime l'espérance de la contribution de l'activité de base ϕ_k au lieu de mesure l .

Indépendamment des corrections que l'on choisit d'intégrer, la détermination de H est tributaire de la donnée des fonctions de bases et de la distribution d'activité choisie.

5.2.1. Les fonctions de base

Les **pixels naturels** présentent des caractéristiques très attractives. Cette modélisation tient naturellement compte de la forme du noyau de détection. Le formalisme des pixels naturels, tel qu'il a été initialement développé par Buconore dans le cadre de projections incomplètes, ne prévoyait pas l'incorporation de contraintes, voire de régularisations [Buoc-81]. Les fonctions de bases ϕ^n , de même nombre que les mesures, étaient alors simplement définies par : la $l^{\text{ème}}$ base ϕ_l^n est l'indicatrice du noyau de détection K_l d'une mesure, soit

$$\phi_l^n(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in K_l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec} \quad f(x, y) = \sum_l f_l \phi_l^n(x, y)$$

Cette méthode permet de traduire exactement le principe de formation d'images et de relier à un ensemble de données discrètes une fonction f continue (sans passer par une discrétisation arbitraire de f). Contrairement aux pixels carrés, les pixels naturels peuvent se recouvrir : les fonctions de base ne vérifient donc plus le principe d'orthogonalité. Dans une décomposition sur pixels naturels, l'estimée de f ne possède qu'une seule valeur sur la fonction ϕ^n et les variations de f dans ϕ^n sont données par les

des différentes fonctions de base. L'algorithme comprend une étape supplémentaire par rapport aux décompositions classiques : outre la construction de la matrice H et de son inversion, il faut finalement rétroprojeter les coefficients f_m pour retrouver f en tous points désirés.

L'introduction de contraintes (contrainte de support, information de densité) a été proposée depuis, notamment par Garnero [Garn-87], par le biais d'une fonction de pondération. L'étude sur des reconstructions 2D [Garn-87] a montré qu'elles étaient stables en présence de bruit et qu'elles permettaient, dans le cas où une contrainte de support était appliquée, d'estimer des fréquences spatiales de l'objet non transmises à l'enregistrement. Plus récemment, la réponse spatiale du détecteur est corrigée en tenant compte de l'ouverture angulaire d'une collimation parallèle [Hsie-98], Celle-ci est prise en compte en sommant plusieurs bandes de pixels naturels classiques de largeur variable disposées en éventail et pondérées de manière à reproduire la réponse géométrique du détecteur. Une illustration est donnée à la figure 5.1.

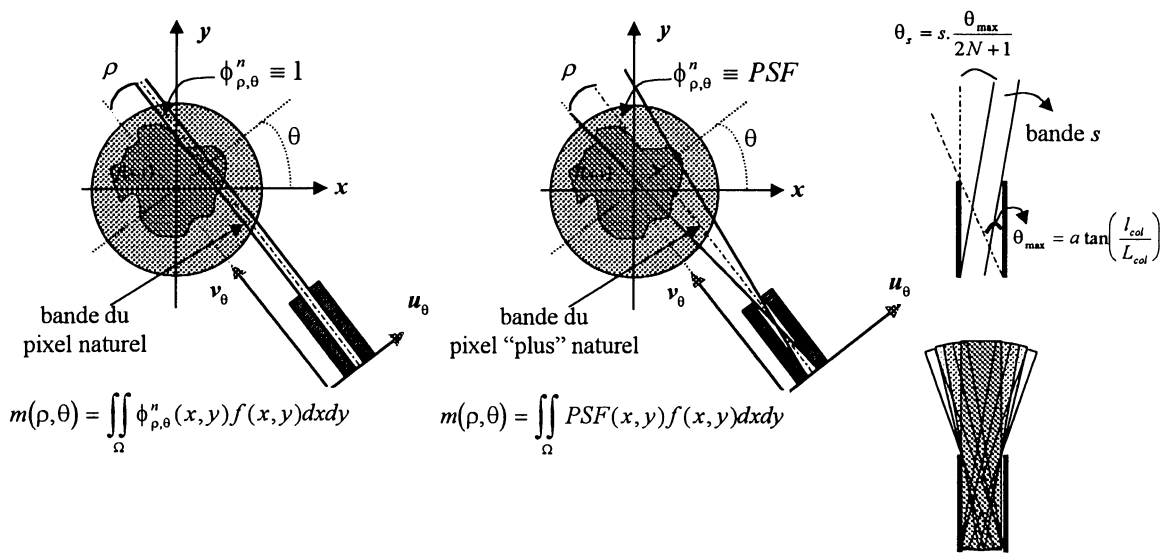


figure 5.1 : Base du pixel naturel - extension à des pixels " plus " naturels pour la prise en compte de la divergence du faisceau

Par ailleurs, il a été proposé d'utiliser une base de transformées en ondelettes 1D sur la base des pixels naturels [Bhat-97]. Cette transformation permet de passer de l'inversion d'une matrice pleine mal conditionnée à l'inversion d'une matrice creuse, mieux conditionnée. De plus, elle permet l'analyse de l'image à plusieurs facteurs d'échelle, ainsi que l'extension des inversions vers des estimateurs de type maximum *a posteriori* (MAP), par l'introduction d'un formalisme régularisant. Cette méthode présente des caractéristiques attrayantes : une bonne adaptation à un nombre de mesures bruitées limité, l'extension possible à une géométrie de faisceau divergent et, la possibilité d'y introduire un formalisme régularisant.

La méthode des **pixels polaires**, assez marginale, peut néanmoins trouver son intérêt dans les cas où les positions du détecteur aux acquisitions présentent des symétries, et lorsque certaines dispositions physiques sont réalisées. Alors cette méthode permet d'aboutir à une décomposition de la matrice H en une structure intéressante. La décomposition de l'objet en pixels polaires consiste à fractionner l'objet en rayons équirépartis sur $[0, 2\pi]$ et en cercles concentriques (c.f. figure 5.2).

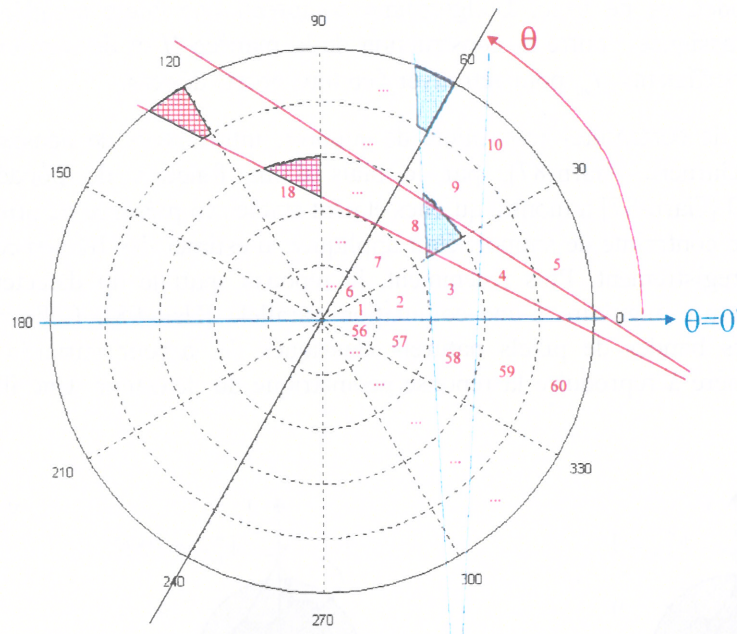


figure 5.2: *Pixélisation en polaire du colis : les droites bleu et rouge désignent les bords du faisceau de détection à deux mesures différentes. La symétrie angulaire en accord avec la géométrie de mesure permet de retrouver des invariances par rotation : ainsi l'aire du pixel 18 est la même que celle du pixel 8, etc. Cela se traduit par une structure bloc-circulante de la matrice de projection (avec la condition préalable d'une atténuation uniforme)*

Les fonctions ϕ sont les indicatrices des pixels polaires. Ce type de modélisation [Thie-98] a attiré notre attention pour les raisons suivantes :

- les colis de déchets de géométrie circulaire se prêtent parfaitement à ce genre de discrétisation,
- dans un schéma d'échantillonnage standard, les projections sont équiréparties sur 360° , et les mesures d'intégration équidistantes sur toute la largeur de l'objet, ce qui conserve la symétrie de la matrice ; la construction de la matrice de projection ne nécessite que la détermination des coefficients de la première projection, les autres se déduisent par des jeux de symétrie.
- dans le cadre de reconstruction en faible résolution (faible nombre de mesures), le pavage de l'objet est parfait, le problème des pixels au bord ou extérieurs au support d'activité nulle ne se pose pas,
- la structure bloc-circulante de la matrice permet de mettre en œuvre des algorithmes de reconstruction rapides grâce à des matrices de transformations de Fourier discrètes d'ordre P^1 [Natt-81].
- enfin, la pixelisation polaire permet dans le cadre de régularisations de Philipps-Tikhonov [Tikh-77], une estimation aisée du paramètre de régularisation par une méthode de validation croisée généralisée [Gira-84], [Golu-79].

Pourtant, nous n'avons pas poursuivi nos recherches dans cette direction, car ce type de modélisation n'est valable que pour une atténuation uniforme : en effet, l'efficacité de la méthode repose sur la

¹ P étant le nombre de projections angulaires sur $[0, 2\pi]$

conservation des symétries entre mesures et pixels polaires quelle que soit la position angulaire de projection. En couplant avec une atténuation hétérogène nous introduisons une asymétrie qui détruit la structure bloc-circulante. Par ailleurs, la géométrie variable des pixels polaires n'est pas sans poser quelques problèmes : la forme très étalée des pixels du bord engendre de sérieux problèmes effets de volume partiel [Pret-98]. Il est difficilement envisageable d'introduire des régularisations élaborées, d'une part à cause des adjacences circulaires entre pixels et, d'autre part, le calcul dérivatif au centre de l'objet reste problématique. Enfin, et surtout, les problèmes de calibrage nécessaires pour obtenir une reconstruction d'image quantitative n'ont pas abouti à des résultats convaincants.

Les « blobs » sont des fonctions de Kaiser-Bessel modifiées. C'est Lewitt qui a initialement proposé l'utilisation de ces fonctions en imagerie [Lewi-90]. Depuis leur usage s'est optimisé à travers les reconstructions d'images 2D et 3D en PET² [Lewi-92], [Mate-95]. Dans les deux cas, elles se sont avérées supérieures aux fonctions indicatrices des pixels. Ces fonctions sont de bases circulaires et limitées en fréquence. La formulation des blobs regroupe les fonctions de base en même temps que la distribution d'activité. Dans le cadre bidimensionnel, la fonction de base du blob est :

$$\forall \|r\| < a \quad \phi(r) = \frac{\left(1 - \left(\frac{\|r\|}{a}\right)^2\right)^{\frac{m}{2}} I_m\left(\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\|r\|}{a}\right)^2}\right)}{I_m(\alpha)}$$

où a est le rayon du blob, I_m la fonction de Bessel modifiée d'ordre m et α un coefficient déterminant la forme du blob (pour α très petit, le blob est très étalé sur le rayon a , alors que pour α grand, le blob devient similaire à un Dirac) (c.f. figure 5.3). Les paramètres sont généralement choisis en fonction des caractéristiques des mesures. Malheureusement, l'optimisation de ces variables prend énormément de temps [Jaco-98]. Des études numériques sur la base d'un seul blob montrent un intérêt visuel incontestable dans la reconnaissance des points chauds et froids et des contrastes [Jaco-99]. Néanmoins, certaines configurations demeurent mieux reconstruites sur la base de pixels carrés.

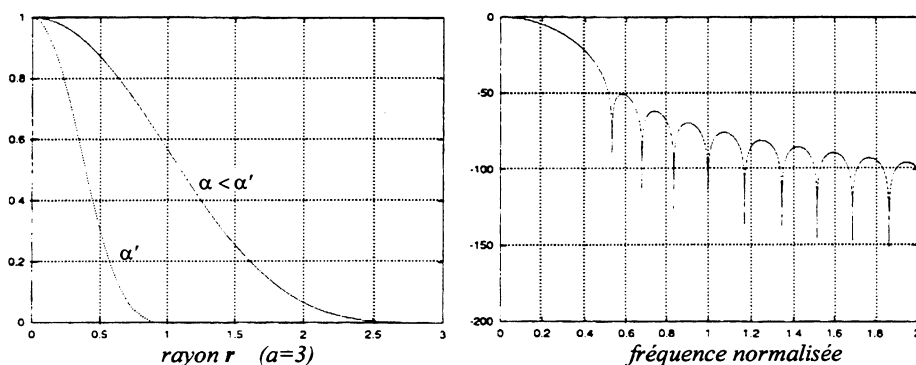


figure 5.3: Profil des blobs (à gauche) et densité spectrale (à droite)

D'autres modèles ont été développés sur des bases plus complexes dont l'intérêt est de permettre des transitions plus douces entre les points de l'image. On retrouve des bases de gaussiennes, des splines ou

² Positron Emission Tomography

des bases de polynômes [Mady-83]. En tomographie X, une base de polynômes a été formulée rendant l'opérateur de projection-rétroprojection diagonal [Marr-79].

Dans le cadre de la reconstruction d'images par tomographie, la décomposition la plus courante s'effectue sur une grille régulière cartésienne d'éléments. Les fonctions ϕ deviennent alors les **indicatrices des pixels** (ou des voxels pour les reconstructions 3D). Dans le cadre de reconstructions bidimensionnelles, l'activité surfacique f est discrétisée dans un espace de dimension finie $N = n^2$. On rappelle ici que l'on note par i l'indice des lignes de la grille et par j l'indice des colonnes, et S_{ij} la surface carrée du pixel indicé à la ligne numéro i et la colonne numéro j . Cette solution est exprimée comme la combinaison linéaire sur l'espace des fonctions indicatrices des pixels ϕ_{ij} :

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \phi_{ij}(x, y) \quad (5.4)$$

avec

$$\phi_{ij}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in S_{ij} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.5)$$

C'est cette méthode que nous avons retenue. Le motif de ce choix est son utilisation directe et rapide pour une représentation graphique de l'image. Mais surtout, la discrétisation en pixels cartésiens permet, d'introduire une diversité de régularisations qu'il aurait été plus difficile à mettre en œuvre avec d'autres modèles.

Il nous reste à déterminer une "bonne" répartition d'activité sur le pixel.

5.2.2. Le modèle de distribution d'intensité

Le modèle de distribution d'intensité exprime la répartition d'activité au sein d'un même élément de la discrétisation de l'objet. Les principaux modèles utilisés sont (c.f. figure 5.4) :

- **Le modèle de Dirac** : un pixel n'est considéré que par son centre, et toute l'intensité de la fonction est concentrée et déterminée en son centre. Ce modèle est aussi invariant par rotation.
- **le modèle du disque concave** : cela revient à considérer que la fonction est répartie sur le support d'un disque concave. Son épaisseur est maximale au bord et minimale au centre: sa forme invariante par rotation permet des projections d'égales longueurs sur les pixels des détecteurs [Hues-77], donc une mise en œuvre facile lors de la modélisation [Form-89]. Une adéquation entre taille du pixel et taille du détecteur est toutefois nécessaire.
- **Le modèle uniforme** : on considère que la répartition d'activité est uniforme sur l'ensemble du support du pixel (ou du voxel). C'est la modélisation que nous avons retenue dans la suite de ce chapitre.

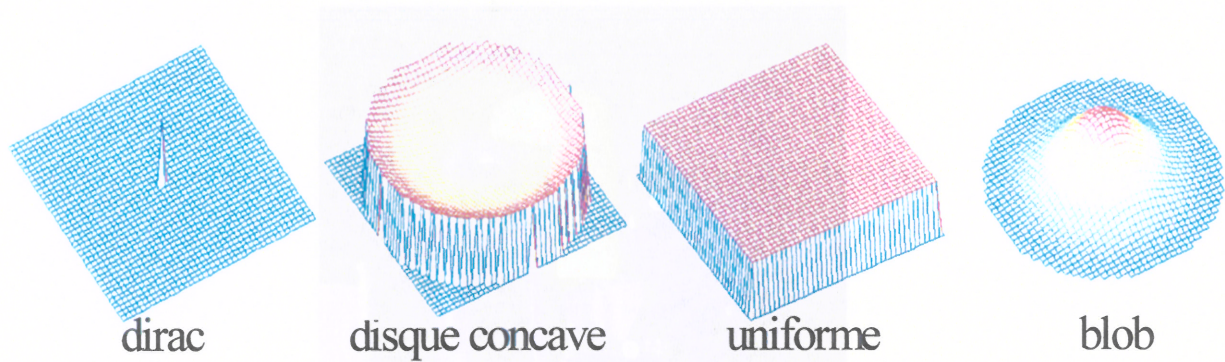


figure 5.4 : Représentation bidimensionnelle des fonctions de distribution d'activité sur un pixel de la discrétisation correspondante.

Le modèle de répartition uniforme est le mieux adapté à nos besoins car ce type de distribution facilite la quantification d'activité.

L'utilisation du disque concave reste trop restrictive d'un point de vue géométrie de mesure, et celui du Dirac est plus adapté au cas où la discrétisation de l'objet est fine et le nombre de mesures important.

5.3. MISE EN ŒUVRE DE LA METHODE

Après description de l'installation expérimentale, le repère est introduit ainsi que les notations et définitions utiles à la manipulation des équations. Nous explicitons ensuite la démarche menant à l'expression générale des coefficients matriciels.

La dernière section présente les détails techniques des calculs.

5.3.1. Dispositif de mesures, définitions et notations

L'installation TEMISEC (Tomographe d'EMISSion pour l'Expertise des Colis) se compose d'une partie mécanique comportant un chariot automoteur permettant de déplacer le colis suivant 3 axes (θ pour la rotation, Z pour la cote et X pour l'abscisse).

La détection comporte une diode Germanium HyperPur de 47mm de diamètre placée dans une protection en plomb cylindrique recevant un collimateur en plomb d'ouverture parallèle. On notera dans la suite, h_{col} , l_{col} , et L_{col} , respectivement la hauteur la largeur et la longueur de l'ouverture du trou percé dans le collimateur (c.f. figure 5.5 et schéma de la figure 5.6)

Le dimensionnement du colis est invariant : il correspond au fût de déchets de 200 litres, pour un rayon objet, R_{obj} , de 28.5 cm et une hauteur H_{obj} de 85 cm.

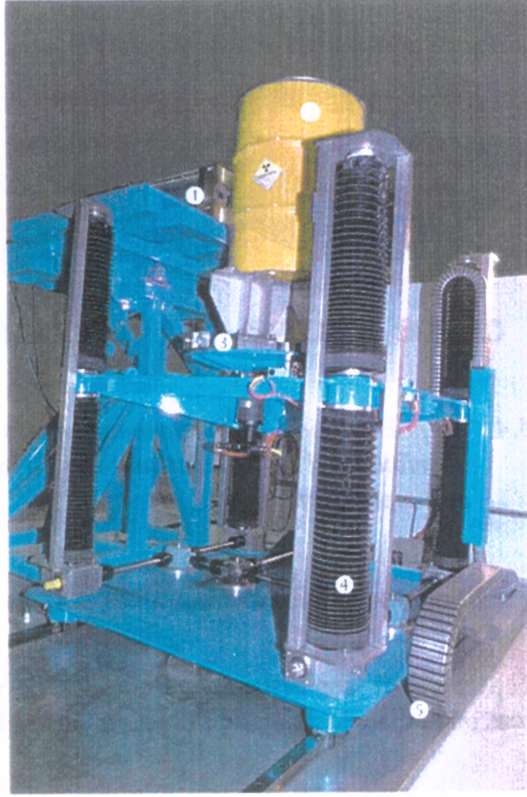


figure 5.5: Installations TEMISEC. 1) embout du collimateur (ouverture au centre), 2): fût de 200 l; 3) 4) et 5) dispositifs mécaniques permettant la rotation (θ), l'élevation (Z) et la translation (X)

Dans la suite du développement, nous utilisons l'indexation lexicographique pour l'image et la mesure, soit :

$$\begin{cases} \forall i, j \in [1 \dots n] \times [1 \dots n], & k = (i-1)n + j, \\ \forall p \in [1 \dots P], \forall q \in [1 \dots Q], & l = (q-1)P + p \end{cases} \quad (5.6)$$

l'activité f , exprimée en (5.4), devient alors :

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{N=n^2} f_k \phi_k(x, y) \quad (5.7)$$

et on rappelle que le vecteur de mesure m est de taille $M = P \cdot Q$, où P est le nombre de positions angulaires uniformément réparties sur 360° , et Q le nombre de mesures par projection.

Nous notons $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le référentiel objet fixe, (O, \vec{k}) désigne l'axe de rotation du système, le plan de mesure est $z = 0$. Le centre du référentiel coïncide avec le centre de l'objet, l'orientation des axes est donnée à la figure 5.6.

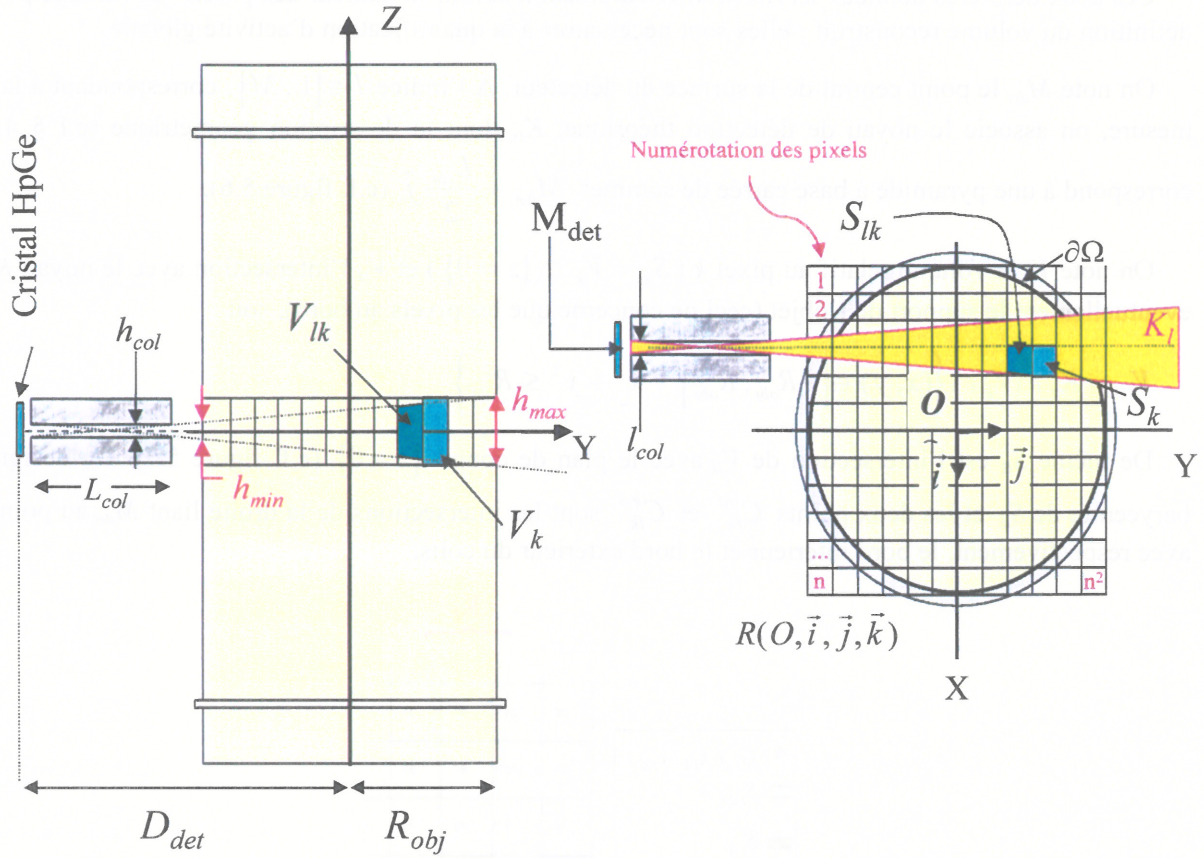


figure 5.6 : Vue schématique suivant l'axe X (à gauche) et Z (à droite) du dispositif d'acquisition

Les nœuds du maillage sont définis par rapport au centre O de l'objet :

$$(x_i, y_j) = \left(-R_{obj} + (i-1) \cdot \frac{2R_{obj}}{n}, -R_{obj} + (j-1) \cdot \frac{2R_{obj}}{n} \right)_{i=1..n+1, j=1..n+1}$$

Soient β_x et β_z les angles d'ouverture de collimation axiale et transversale, dans le cadre de ces travaux, on se limite à une collimation à ouverture carrée et le détecteur se déplace sur une trajectoire circulaire à une distance fixe D_{det} du centre O. On a alors :

$$\beta = \beta_x = \beta_z = \arctan\left(\frac{l_{col}}{L_{col}}\right) = \arctan\left(\frac{h_{col}}{L_{col}}\right)$$

On définit la hauteur $h(y)$ et la largeur $l(y)$ de la fenêtre de détection pour un point éloigné de y du centre par :

$$h(y) = \frac{h_{col}}{L_{col}} \cdot \left(D_{det} + y - \frac{L_{col}}{2}\right) \text{ et } l(y) = \frac{l_{col}}{L_{col}} \cdot \left(D_{det} + y - \frac{L_{col}}{2}\right)$$

Soient h_{min} la hauteur du faisceau de mesure à l'entrée et, h_{max} celle à la sortie telles que:

$$h_{min} = 2 \cdot \tan \beta \cdot \left(D_{det} - R_{obj} - \frac{L_{col}}{2}\right) \text{ et } h_{max} = 2 \cdot \tan \beta \cdot \left(D_{det} + R_{obj} - \frac{L_{col}}{2}\right)$$

Ces deux dernières données serviront ultérieurement à définir la hauteur des pixels³ de l'image pour la définition du volume reconstruit : elles sont nécessaires à la quantification d'activité globale.

On note M_{det} le point central de la surface du détecteur. A l'indice $l \in [1..M]$, correspondant à la $l^{\text{ème}}$ mesure, on associe le noyau de détection théorique, K_l , dont la description géométrique (c.f § 4.3.3) correspond à une pyramide à base carrée de sommet $M_{det} + \frac{L_{col}}{2} \vec{j}$ (c.f. figure 5.6).

On note V_k le volume relatif au pixel k ($S_k = V_k \cap \{z = 0\}$) et V_{lk} l'intersection avec le noyau K_l et éventuellement le support de l'objet (ceci ne concerne que les pixels au bord), soit :

$$V_{lk} = K_l \cap V_k \cap \left\{ (x, y) \in [-R_{obj}, R_{obj}]^2 / x^2 + y^2 \leq R_{obj}^2 \right\}$$

De même S_{lk} est l'intersection de V_{lk} avec le plan de coupe $\{z = 0\}$ (c.f. figure 5.7). G_{lk} désigne le barycentre de S_{lk} et les deux points C_{lk}^{int} et C_{lk}^{ext} sont les intersections de la droite liant M_{det} au point G_{lk} avec respectivement, le bord intérieur et le bord extérieur du colis.

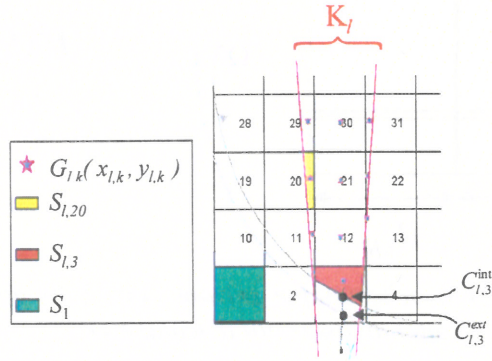


figure 5.7: Illustration des quantités S_b , S_{lk} , G_{lk} , C_{lk}^{int} et C_{lk}^{ext} et du noyau K_l

L'intersection du support Ω de l'objet avec le noyau de détection se décompose en :

$$K_l \cap \Omega = \bigcup_{k \in \Gamma_l} V_{lk} \quad (5.8)$$

où $\Gamma_l = \{k \in [1..N] / V_{lk} = K_l \cap V_k \neq \emptyset\}$ désigne l'ensemble des pixels situés dans l'espace de détection de la $l^{\text{ème}}$ mesure.

Nous disposons maintenant des outils et des définitions nécessaires à l'élaboration du modèle abordé à la section suivante.

³ on ne parle pas véritablement de voxels. Bien que les pixels ont une hauteur au moins égale au pas d'échantillonnage de la grille, on reste pour l'instant sur la base d'une reconstruction transaxiale, donc bidimensionnelle

5.3.2. Compensation simultanée de l'atténuation et de la réponse du détecteur

Sur la base de la section 4.4.3, nous entreprenons le développement d'un modèle de réponse linéique (LSF), en géométrie parallèle. Pour chaque mesure, on désire calculer les coefficients matriciels à partir de l'équation :

$$m_l = \iiint_{K_l} f(M) \cdot PSF(M) dM \quad (5.9)$$

La fonction PSF désigne la réponse impulsionnelle du système de détection collimaté, fonction de la diffusion Compton et de l'atténuation relatives à l'objet, de la pénétration par les septas, etc.

Nous avons fait le choix d'intégrer les phénomènes prépondérants⁴ à savoir, l'atténuation ainsi que la réponse géométrique du détecteur ; une méthode analytique est proposée au § 5.5.3 pour le phénomène de pénétration par les septas, bien que celui-ci représente une faible contribution dans la réponse totale.

Si on décompose l'équation (5.9) suivant Γ_l nous obtenons :

$$\begin{aligned} m_l &= \sum_{k \in \Gamma_l} \iiint_{V_k} f(x, y, z) PSF(x, y, z) dx dy dz \\ &= \sum_{k \in \Gamma_l} \iint_{S_k} \left\{ \int_{[-h/2, h/2]} f(x, y, z) PSF(x, y, z) dz \right\} dx dy \end{aligned} \quad (5.10)$$

La distribution uniforme de l'activité sur l'ensemble du pixel, permet d'écrire :

$$\forall k \in [1 \dots N], \forall (x, y, z) \in V_k, \quad f(x, y, z) = f_k \quad (5.11)$$

La PSF et la LSF ont une relation univoque dans le cadre de dispositifs à collimation parallèle et lorsque la PSF possède une symétrie centrale [Marc-64] [Marc-65]. Nous supposons cette symétrie dans le cadre d'un milieu homogène et lorsque la distribution de f est invariante suivant z (parallèle au dispositif de détection). Cette propriété est utile car elle permet d'étendre le modèle symétrique à un modèle asymétrique, par exemple lorsque le milieu n'est plus homogène, et peut être validé à l'aide de sources linéiques [Beek-93] [Msak-87].

En décomposant la PSF comme le produit de l'atténuation du milieu à l'énergie E et de $R_{det}(M)$, la réponse spatiale ponctuelle du système de détection au point M de coordonnées (x, y, z) , nous avons :

$$LSF(x, y) = \int_z PSF(x, y, z) dz = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} R_{det}(x, y, z) \cdot \exp\left(-\int_{M_{det}}^M \mu(l, E) dl\right) dz \quad (5.12)$$

Remarque : La formulation du modèle développée par la suite est définie par extension, à l'ensemble des énergies des radioéléments. Toutefois, nous laisserons une écriture générique de l'atténuation μ tout au long des équations sans faire la distinction en énergie. Dans tous les paragraphes suivants, on suppose

⁴ La diffusion Compton étant prise en compte par pré-correction du spectre avec une suppression de fenêtre de Galton

que l'ensemble des calculs sont exprimés à l'énergie E d'un radioélément contenu dans le fût, et on écrit $\mu(\cdot)$ en lieu et place de $\mu(\cdot, E)$.

En substituant (5.11) et (5.12) dans (5.10), l'expression de la mesure devient :

$$m_l = \sum_{k \in \Gamma_l} f_k \iint_{S_{lk}} LSF(x, y) dx dy \quad (5.13)$$

En identifiant (5.13) et (5.3), l'expression des éléments de la matrice H est donc donnée par :

$$\forall l, \forall k, \quad H_{lk} = \iint_{S_{lk}} LSF(x, y) dx dy$$

soit encore :

$$H_{lk} = \iint_{S_{lk}} \left[\int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} R_{\text{det}}(x, y, z) \cdot \exp\left(-\int_{M_{\text{det}}}^M \mu(l) dl\right) dz \right] dx dy \quad (5.14)$$

Concernant la distribution d'atténuation, nous faisons alors l'hypothèse suivante :

quel que soit le point M appartenant à la surface S_{lk} , le coefficient d'atténuation entre les points M_{det} et M ne varie pas en fonction de la hauteur z , et peut être approché par la valeur au centre ($z = 0$).

Remarque : Cette hypothèse est nécessaire en pratique, car nous ne disposons jamais de l'information tridimensionnelle de l'atténuation, celle-ci n'étant connue que sur 3 mm centrée à la hauteur $z = 0$.

L'expression (5.14) devient alors :

$$H_{lk} = \iint_{S_{lk}} \left[\exp\left(-\int_{M_{\text{det}}}^M \mu(l) dl\right) \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} R_{\text{det}}(x, y, z) \cdot dz \right] dx dy \quad (5.15)$$

Par ailleurs, en tenant compte de la symétrie en z de la réponse du détecteur, l'expression de l'élément matriciel s'écrit :

$$H_{lk} = 2 \iint_{S_{lk}} \left[\exp\left(-\int_{M_{\text{det}}}^M \mu(l) dl\right) \int_{z=0}^{\frac{h(y)}{2}} R_{\text{det}}(x, y, z) \cdot dz \right] dx dy \quad (5.16)$$

Nous avons finalement décomposé la LSF comme le produit des deux phénomènes à corriger, ce qui permet de découpler l'analyse de la réponse géométrique de celle de l'atténuation.

Lorsque l'atténuation du milieu est nulle, la LSF se restreint à celle de la réponse géométrique, aussi nous posons :

$$LSF_0(x, y) = 2 \int_{z=0}^{\frac{h(y)}{2}} R_{\text{det}}(x, y, z) \cdot dz$$

Le calcul de H_{lk} exige de connaître la réponse tridimensionnelle du détecteur ainsi que l'atténuation. Nous nous occupons d'abord de la réponse géométrique du système de détection, puis nous incorporons le phénomène d'atténuation. Enfin, nous proposons deux méthodes de calcul numériques de l'intégrale surfacique.

5.4. IMPLEMENTATION NUMERIQUE DU MODELE

Les méthodes de correction de l'atténuation envisagées restent assez classiques, et s'apparentent à celles rencontrées en SPECT. En revanche, la détermination de la réponse géométrique reste particulière car elle est adaptée à un détecteur germanium avec une collimation parallèle basse résolution. Aussi nous l'abordons en premier.

5.4.1. Modèle de la réponse géométrique

L'expression de $R_{det}(M)$ est donnée à partir de l'angle solide (voir section 4.3.3) vu du point $M(x,y,z)$ limité par l'ouverture géométrique du collimateur (c.f. figure 5.8), soit :

$$R_{det}(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_M} \frac{d\vec{S} \cdot d\vec{M}}{d^2(u,w)} dudw = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_M} \frac{\cos \chi}{(u-x)^2 + (D_{det} + y)^2 + (w-z)^2} dudw \quad (5.17)$$

S_M est le domaine de surface l_m, h_m appartenant au plan de détection observable du point M ,

$d\vec{S}$ est le vecteur unitaire normal au plan de détection,

$d\vec{M}$ est le vecteur unitaire de direction parallèle à MS , le point $S(u,w)$ étant le point d'intégration parcourant le domaine S_M

χ est l'angle formé entre $d\vec{S}$ et $d\vec{M}$.

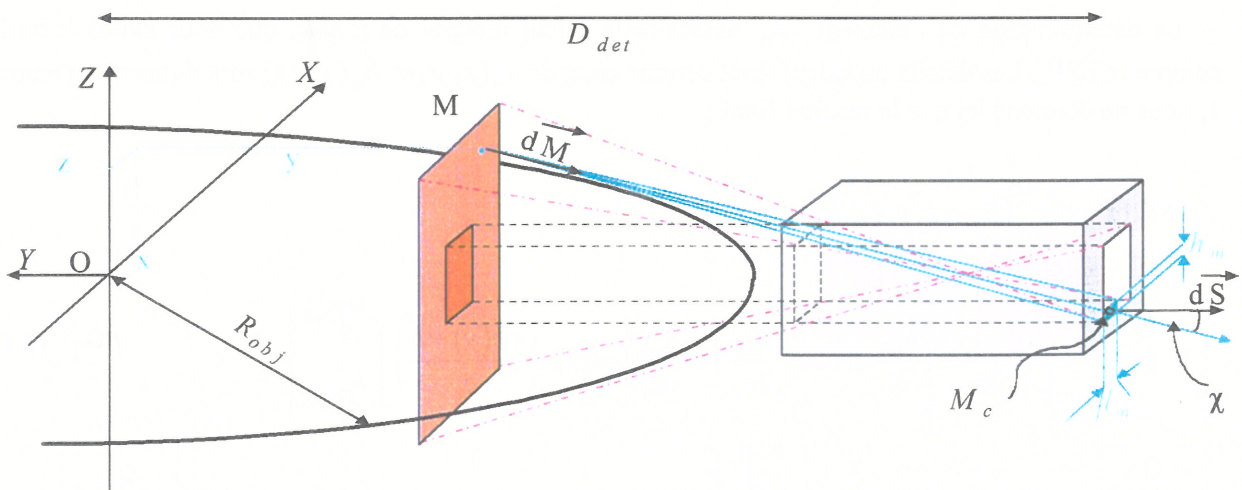


figure 5.8: Angle solide du point M (rayons bleus) délimité par la géométrie du collimateur. En orange, l'intersection du noyau de détection avec le plan $\{Y = y\}$

On note $M_c(x_c, -D_{det}, z_c)$, le centre de la fenêtre d'intégration S_M (parallélépipède bleu).

Des approximations aux grandes distances [Thie-99] nous permettent de simplifier l'expression (5.16) ; précisons :

1. la distance $d(u, w)$ variant peu, elle est approchée par la distance constante $\|MM_c\|$,

2. on peut raisonnablement supposer que le terme $\cos\chi$ est proche de 1 : c'est la grande distance entre l'espace objet Ω et le plan de détection, et la relativement faible ouverture de la collimation qui permet cela. L'étude réalisée à partir de la LSF montre d'ailleurs que l'erreur relative maximale reste inférieure à 0,25%.

En notant l_m et h_m les longueurs des arêtes définissant S_M , la relation (5.16) se simplifie pour donner une expression littérale :

$$R_{\det}(x, y, z) \approx \frac{l_m(x, y) \cdot h_m(y, z)}{4\pi \cdot \|MM_c\|^2} \quad (5.18)$$

avec :

$$\begin{cases} l_m(x, y) = l_{col}, & \text{si } |x| \leq \frac{l_{col}}{2} \\ l_m(x, y) = l_{col} - L_{col} \frac{|x| - \frac{l_{col}}{2}}{y + D_{\det} - L_{col}}, & \text{si } \frac{l_{col}}{2} < |x| \leq x_{\max} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} h_m(y, z) = h_{col}, & \text{si } |z| \leq \frac{h_{col}}{2} \\ h_m(y, z) = h_{col} - L_{col} \frac{|z| - \frac{h_{col}}{2}}{y + D_{\det} - L_{col}}, & \text{si } \frac{h_{col}}{2} < |z| \leq z_{\max} \end{cases}$$

La détermination de l'élément H_{lk} nécessite le calcul intégral de (5.20), que nous avons identifié comme la LSF₀. Les détails du calcul (tout comme ceux de $l_m(x, y)$ et $h_m(y, z)$) sont données en annexe 1, nous ne donnons ici que le résultat final :

$$\begin{aligned} LSF_0(x, y) &= \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} R_{\det}(x, y, z) \cdot dz \\ &= \frac{l_m(x, y)}{2\pi} \left\{ \frac{h_{col}}{c_1} \arctan\left(\frac{h_{col}}{2c_1}\right) + \frac{h_{col}}{ac_1} \left[\arctan\left(\frac{ah(y) + b}{c_1}\right) \right]_{a\frac{h_{col}}{2}+b}^{a\frac{h(y)}{2}+b} \right\} \\ &\quad - \frac{l_m(x, y) \cdot L_{col}}{4\pi a^2 (y + D_{\det} - L_{col})} \left\{ \ln \left[\frac{c_1^2 + (ah(y) + b)^2}{c_1^2 + \left(a\frac{h_{col}}{2} + b\right)^2} \right] - \left[\frac{2b + ah_{col}}{c_1} \arctan\left(\frac{u}{c_1}\right) \right]_{a\frac{h_{col}}{2}+b}^{a\frac{h(y)}{2}+b} \right\} \end{aligned} \quad (5.19)$$

avec les constantes définies par :

$$c_1^2 = (x_c - x)^2 + y^2, \quad a = \frac{2y - L_{col}}{2(y - L_{col})}, \quad b = -\frac{L_{col}h_{col}}{4(y - L_{col})} \quad (5.20)$$

Nous donnons à la figure 5.9 une illustration de la LSF « non atténuée » dans le domaine objet en vue de dessus (à gauche) et en représentation bidimensionnelle (à droite).

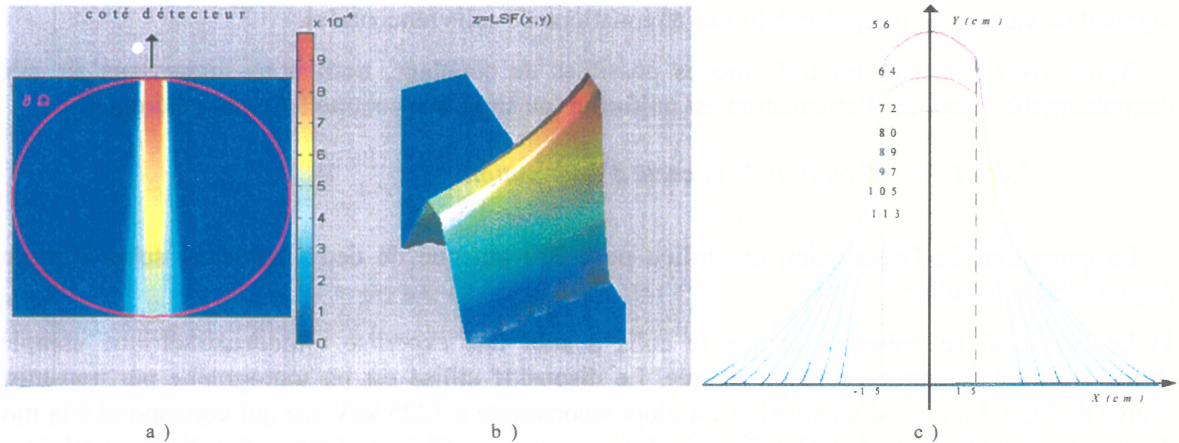


figure 5.9 : Différentes représentations de la LSF non atténuée : en vue de dessus à la figure a) ; en vue suivant une direction quelconque de l'espace en b) et en profil pour 8 éloignements source-détecteur en c).

Dans le cadre des dispositifs utilisés en SPECT, il est courant de modéliser la contribution des photons directs⁵ par une gaussienne. Dans [Beek-93] [Nuyt-91], la PSF de la partie directe est de la forme :

$$LSF(x, y, d) = e^{-\mu d} e^{-u(y)x^2}$$

où d est la distance atténuante dans l'objet placé en (x, y) , et $u(z)$ est assimilable à la variance de la gaussienne dépendante de l'éloignement entre la source et le détecteur.

Ici, l'utilisation d'une gaussienne, voire d'une double gaussienne [Todd-88], n'est pas adaptée pour une modélisation correcte de la réponse : la large ouverture du collimateur crée un plateau central de même longueur dans lequel la réponse est quasi invariante, quel que soit l'éloignement de la source (c.f. figure 5.9-c).

5.4.2. Compensation de l'atténuation

Nous avons fait l'hypothèse que le facteur d'atténuation est uniquement fonction du couple (x, y) et invariant axialement. Pour nos calculs, nous avons alors utilisé la simplification :

$$LSF(x, y) = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} R_{det}(M(x, y, z)) \cdot \exp\left(-\int_{M_{det}}^{M(x, y, z)} \mu(l) dl\right) dz \approx \exp\left(-\int_{M_{det}}^{M(x, y, 0)} \mu(l) dl\right) \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} R_{det}(M(x, y, z)) dz$$

⁵ par opposition aux photons diffusés qui sont modélisés à part

Lorsque la fonction d'atténuation est variable suivant z , il est difficile d'évaluer l'erreur commise entre ces deux expressions. En revanche, lorsque la distribution de l'atténuation est axialement constante, soit

$$\forall x, y, z \in \Omega, \quad \mu(x, y, z) = \mu(x, y, 0) = \mu(x, y),$$

il est possible d'évaluer numériquement l'erreur commise par la simplification. On peut montrer [Thie-99] que l'erreur relative entre les deux calculs de la LSF est négligeable et de l'ordre du pourcent pour un segment de valeurs de μ représentatif des atténuations de colis rencontrées.

Après avoir parcouru les trois modes possibles de couplage, nous nous intéressons au calcul de l'exponentielle selon que l'atténuation est uniforme (ou supposée comme telle) ou hétérogène.

5.4.2.1. Obtention de la carte d'atténuation

La correction de l'atténuation du milieu peut être obtenue de deux manières, selon l'information disponible sur le colis :

1) Le cas idéal se présente lorsque le colis a subi une expertise tomodensimétrique complète ou simplement à la hauteur de coupe désirée. Le dispositif utilisé est un tomographe par transmission à source de ^{60}Co . La carte d'atténuation est alors reconstruite à 1225 keV (ce qui correspond à la moyenne des deux⁶ raies d'énergie du ^{60}Co). Le calcul du nouveau coefficient d'atténuation linéique à l'énergie de l'isotope traité correspond à la somme de la composante liée à l'interaction photoélectrique et celle relative à la diffusion Compton. Dans le cadre de la reconstruction par tomographie X, Alvarez suggère une combinaison qui, d'un point de vue expérimental, donne de bonnes estimations [Alva-76]. Elle est de la forme :

$$\mu(E) = K_1 \rho \frac{Z^n}{AE^3} + K_2 \rho \frac{Z}{A} f_{KN}(E)$$

Le premier terme est une approximation de la probabilité d'interaction par effet photoélectrique (voir chapitre 4.1.1.1), le second utilise une fonction de Klein-Nishina $f_{KN}(E)$ pour la dépendance en énergie de la section efficace de la diffusion Compton. L'équation de Klein-Nishina utilisée est :

$$f_{KN}(E) = \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2(1 + \alpha)}{1 + 2\alpha} - \frac{\ln(1 + 2\alpha)}{\alpha} \right] + \frac{\ln(1 + 2\alpha)}{2\alpha} - \frac{1 + 3\alpha}{(1 + 2\alpha)^2}$$

avec $\alpha = E/(510,975 \text{ keV})$, ρ la densité massique, $n \approx 4$, K_1 et K_2 sont des constantes, A le nombre de masse et Z le numéro atomique.

Remarque : Lorsque l'on approche du domaine photoélectrique (typiquement en dessous de 250 keV) l'atténuation $\mu(E)$ devient fortement dépendante de la connaissance de la nature des matériaux, du fait du terme en Z^n . Cette information n'étant pas connue *a priori*, l'utilisation de la formule d'Alvarez cause des incertitudes sur l'évaluation de $\mu(E)$. Une méthode permettant d'estimer l'atténuation de matrice aux faibles énergies est d'utiliser une densimétrie à double énergie. Une application aux colis de déchets de faibles densités a été réalisée par C. Robert-Coutant au laboratoire du LETI/DSYS [Robe-99].

2) Dans le cas où on ne dispose pas d'une carte d'atténuation, une atténuation constante est calculée. Les deux méthodes utilisées sont :

⁶ 1173 keV et 1332 keV

- la méthode des mélanges, à partir des données de fabrication décrivant la composition massique du colis et de son enrobage, et des tables de Hubbell [Hubb-93].
- à partir de l'équation de Klein-Nishina ci-dessus et d'une densité apparente de l'objet supposé homogène physiquement.

5.4.2.2. Correction d'une atténuation homogène

Lorsque l'atténuation est supposée uniforme dans le colis, il n'est pas nécessaire de recourir à des méthodes d'intégrations numériques, nous l'évaluons directement à partir de :

$$\exp\left(-\int_{M_{det}}^M \mu(l) dl\right) = \exp\left(-\mu \|MC^{int}\| - \mu_{cont} \|C^{ext} C^{int}\|\right) \quad (5.21)$$

où μ_{cont} est l'atténuation du conteneur⁷, et C^{ext} et C^{int} sont les points d'intersection avec le colis (c.f. figure 5.7). La distance $d_{\Omega}(x, y) = \|MC^{int}\|$, correspond au trajet parcouru dans le colis, de la position du point M jusqu'à l'intersection avec le bord intérieur.

La distance $d_{cont}(x, y) = \|C^{ext} C^{int}\|$, correspondant au trajet parcouru dans le conteneur, varie aussi en fonction de la position du point M . L'atténuation dans le conteneur peut représenter une proportion importante de l'atténuation du milieu, surtout pour des colis de faible densité.

L'expression (5.21) nécessite le calcul des distances $d_{\Omega}(x, y)$ et $d_{cont}(x, y)$: celles-ci dépendent de la forme de l'objet et de la position du détecteur. En pratique, nous pré-calculons la fonction $LSF(x, y)$, pour chacune des mesures à $\theta=0^\circ$, corrigée de l'atténuation linéique du colis et du conteneur :

$$LSF(x, y) = e^{(-\mu d_{\Omega}(x, y) - \mu_{cont} d_{cont}(x, y))} \cdot LSF_0(x, y) \quad (5.22)$$

L'invariance par rotation de la forme du colis et de l'atténuation, nous permet de réutiliser les valeurs calculées à la projection d'angle nul. Ces valeurs sont stockées dans une matrice de données, et nous corrigeons pour chaque configuration de mesure à la fois de l'atténuation et de la réponse spatiale, par des interpolations sur ces valeurs si nécessaire.

5.4.2.3. Correction de l'atténuation hétérogène

Dans le cas où l'on dispose de la carte d'atténuation issue d'une tomographie par transmission, on détermine le calcul intégral le long de chaque trajet joignant un point M de l'image au centre M_c de la fenêtre du détecteur. Une interpolation des valeurs de μ est nécessaire car le trajet linéaire tombe rarement sur les nœuds de la grille.

Si μ_j désigne l'interpolation de μ lorsque le trajet rentre dans le pixel j , celui-ci peut être déterminé soit à partir du point le plus proche, soit par interpolation bilinéaire. Le calcul de l'atténuation au pixel k pour la mesure l est de la forme :

$$att_{lk} = \exp\left(-\sum_{j=1}^k \mu_j d_{lj}\right) \quad (5.23)$$

⁷ il s'agit en pratique d'un conteneur en fer pour les colis de 200 litres, d'une épaisseur de 0,9 mm.

Toutes les intersections avec la grille et les longueurs d_{ij} résultantes sont déterminées. D'autres méthodes récursives de calcul ont été proposées. Une petite variante de l'équation (5.23) consiste à diviser de moitié la contribution de l'atténuation due au trajet dans le pixel considéré [Lian-92] :

$$att_{lk} = \exp\left(-\sum_{j=1}^{k-1} \mu_j d_{lj} - \frac{1}{2} \mu_k d_{lk}\right)$$

Les longueurs d_{ij} sont déterminées par la méthode de Gullberg [Gull-85] bien que d'autres alternatives existent [Sidd-85] [Hues-77]. Une interpolation de type spline cubique n'a pas été retenue car des effets de bords causés aux régions à fort gradient sont indésirables dans le cadre du calcul intégral. La méthode développée par Joseph [Jose-82], consistant à ne prendre que les intersections aux colonnes ou aux lignes suivant l'inclinaison du trajet sur la grille, donne des résultats satisfaisant en un peu moins de temps que la méthode de Liang.

A la figure 5.10, nous avons effectué une coupe de profil de l'atténuation suivant les deux méthodes de calcul, à partir d'une carte d'atténuation de 256×256 pixels d'un colis quasi-homogène. La différence majeure se situe dans l'évaluation de l'atténuation du conteneur ; le calcul d'atténuation globale des deux méthodes, c'est-à-dire intégré sur le trajet en entier, donne des résultats très similaires. Toutes les reconstructions d'images présentées ont été réalisées avec une interpolation au plus proche voisin : elle est plus rapide et donne des résultats identiques à l'interpolation bilinéaire.

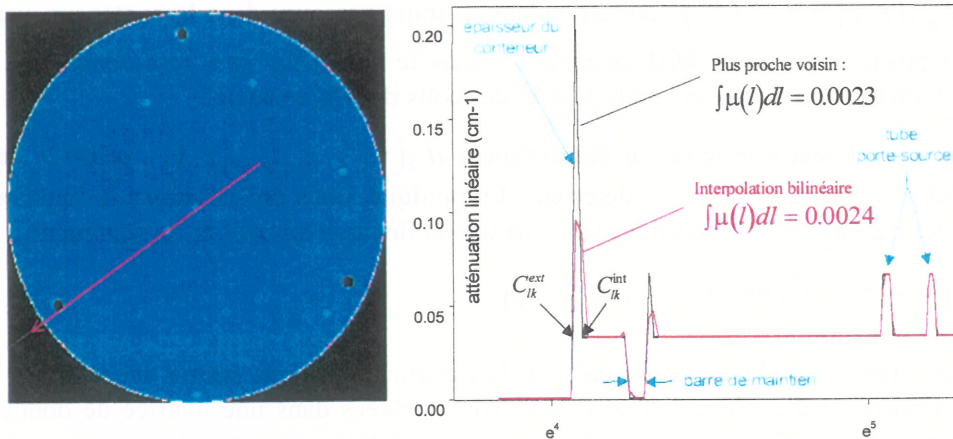


figure 5.10 : Calcul de l'atténuation linéaire avec les méthodes du point le plus proche et une interpolation bilinéaire sur une maquette d'un colis avec un milieu atténuant homogène. Les rares hétérogénéités sont générées par des tubes portes-sources, des barres de maintien (creuses) et l'épaisseur du conteneur.

5.4.3. Méthodes numériques de calcul intégral surfacique

Connaissant maintenant l'expression de l'atténuation et de la réponse géométrique, il nous reste à évaluer le calcul intégral :

$$H_{lk} = \iint_{S_{lk}} \exp\left(-\int_{M_{det}}^M \mu(l) dl\right) \cdot LSF_0(x, y) dx dy$$

Nous proposons deux manières d'appréhender le calcul surfacique de l'équation ci-dessus : l'une à partir du calcul barycentrique, l'autre au-travers d'une méthode multigrille. Ces deux méthodes diffèrent

essentiellement de par la précision du calcul intégral, et sont, de ce fait, étroitement liées à la forme analytique de la LSF et à la taille de l'échantillonnage spatial de l'image. La détermination à l'aide de la multigrille est utilisée lorsqu'on travaille sur des images de faible résolution spatiale, de manière à mieux intégrer la variation de la réponse sur la base du pixel.

5.4.3.1. Approximation au barycentre

Pour cela, on détermine les n_{kl} sommets $S_{lk}^k(x_{lk}^k, y_{lk}^k)$ du polygone S_{lk} , avec $3 \leq n_{kl} \leq 6$, où S_{lk} est un polygone inscrit dans le carré S_k , éventuellement délimité par le contour $\partial\Omega$. On peut regrouper le nombre de cas rencontrés en 4 **catégories** (c.f. figure 5.11):

1. le pixel est vu en entier et ne contient pas le contour $\partial\Omega$: les 4 sommets n_{kl} sont ceux définissant le pixel de base S_k ,
2. le pixel est vu en entier et contient le contour $\partial\Omega$: les sommets n_{kl} contiennent 2 ou 3 sommets de base S_k plus deux nouvelles intersections liées au contour : $n_{kl} = 4$ ou 5 ,
3. le pixel est vu partiellement et ne contient pas le contour $\partial\Omega$: il y a trois cas de figure, $n_{kl} = 3, 4$ ou 5 ,
4. le pixel est vu partiellement et contient le contour $\partial\Omega$: tous les cas de figure sont possibles, $n_{kl} = 3, 4, 5$ ou 6 .

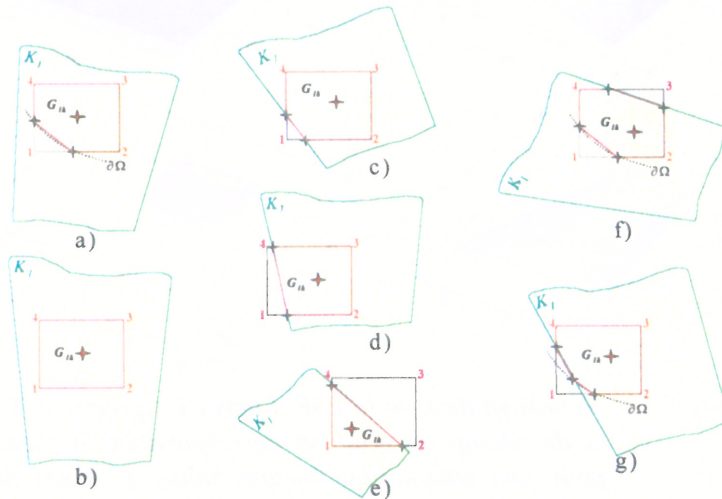


figure 5.11 : Intersections entre le pixel et le cône de détection (en jaune) : quelques cas de figure. **a)** catégorie 2, $n_{lk}=5$; **b)** catégorie 1 ; **c) d) et e)** catégorie 3, $n_{lk}=5, 4, 3$; **f)** et **g)** catégorie 4, $n_{lk}=6$

La connaissance des coordonnées des n_{kl} sommets $S_{lk}^k(x_{lk}^k, y_{lk}^k)$ du polygone permet de calculer rapidement et exactement l'aire A_{lk} et les coordonnées $G_{lk}^k(x_{lk}^k, y_{lk}^k)$, le barycentre du polygone. On peut facilement extraire un ensemble de $(n_{lk} - 2)$ triangles qui réalisent un pavage exact du polygone (le détail des calculs est donné en annexe 2). Une utilisation du calcul surfacique par triangulation en tomographie est donnée dans [Guil-90] : la modélisation est basée sur des faisceaux de détection assimilés à des bandes parallèles, et suppose un nombre impair de mesures dont une passant par le centre de l'objet. Dans ces conditions, on peut extraire plusieurs symétries (symétries des surfaces

d'intersection, dans un même profil par rapport au centre de la grille, symétries angulaires à modulo π et modulo $\pi / 2$) d'où une diminution approximative du temps de construction de la matrice par 4.

On fait alors l'hypothèse que la LSF varie peu au sein du volume V_{lk} , sa valeur étant prise égale à celle calculée en son barycentre $G_{lk}(x_{lk}^G, y_{lk}^G, 0)$ ce qui permet d'écrire :

$$H_{lk} \approx \left\{ \exp \left(- \int_{M_{det}}^{G_{lk}} \mu(l) dl \right) \cdot LSF_0(x_{lk}^G, y_{lk}^G) \right\} A_{lk} \quad (5.24)$$

Ce calcul est exact si la LSF est constante sur le domaine d'intégration. Comme ceci n'est jamais le cas, nous proposons d'affiner le calcul intégral en utilisant une multigrille de points de calcul. En fait, nous avons constaté que la variation de la LSF est maximale sur les pixels situés au plus proche du détecteur. A la figure 5.12, nous voyons par exemple pour une atténuation $\mu=0,1125 \text{ cm}^{-1}$ (en haut à droite) que la fonction LSF est quasi-nulle après 15 cm parcourus dans le colis. L'essentiel de l'information apportée est confinée dans la première dizaine de centimètres.

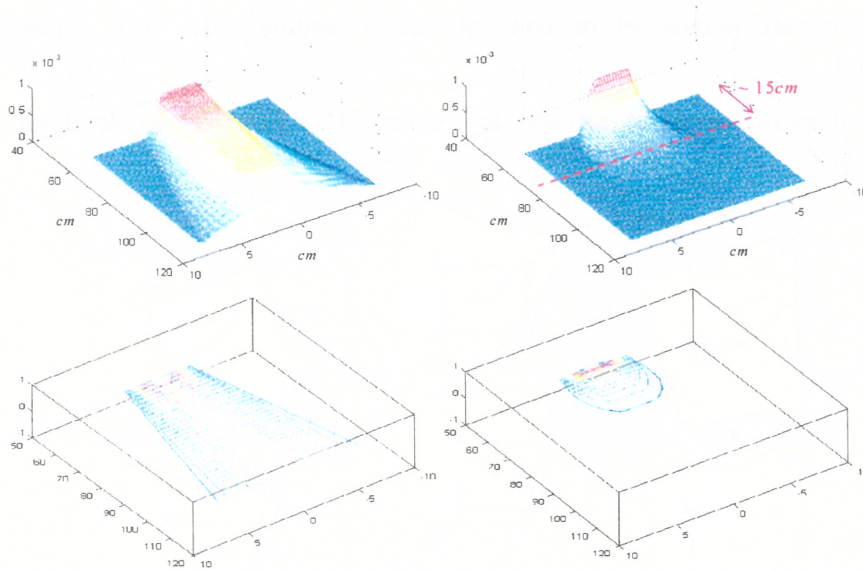


figure 5.12 : Représentation de la LSF d'après l'expression (5.24) et du champ de gradient correspondant. A gauche, pour une atténuation linéique nulle, à droite pour $\mu=0,1125 \text{ cm}^{-1}$ soit l'atténuation équivalente de la raie à 779 keV de ^{152}Eu dans une matrice de sable. L'atténuation du conteneur est celle du fût de 200 litres.

D'un point de vue numérique cela peut avoir une importance capitale dans la mesure où lorsque le modèle est confronté à de fortes atténuations, l'essentiel de l'information est concentrée dans le calcul de l'influence des pixels au plus proche du détecteur, en périphérie du colis.

5.4.3.2. Approximation à l'aide d'une multigrille

Nous superposons à la grille principale formée de N pixels, une grille suréchantillonnée composée de N' pixels, avec $N' = \tau^2 N$, où τ est un entier supérieur ou égal à 2 (voir figure 5.13). Les

notations restent les mêmes, seules les indexations correspondant à la multigrille sont surmontées du “ τ ”. L'ensemble des pixels constituant par leur union le pixel k s'écrit :

$$\Lambda_k^\tau = \left\{ k' \in [1.. \tau^2 N] / S_k = \bigcup_{k'} S_{k'} \right\} \quad (5.25)$$

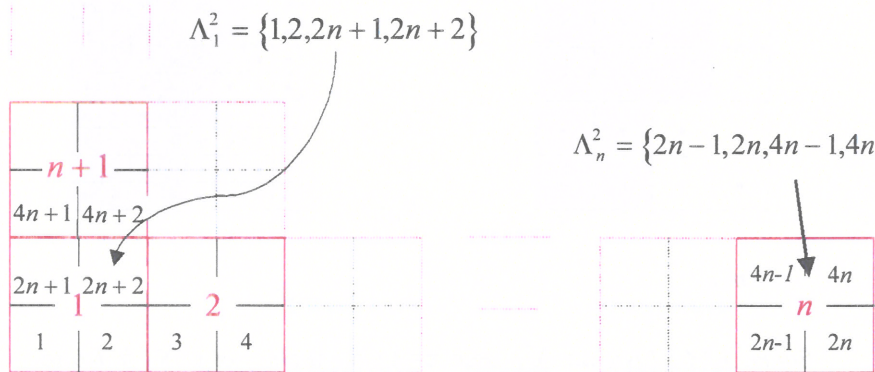


figure 5.13 : Grille principale (en rouge) et multigrille (en noir) pour $\tau = 2$

Sur la grille suréchantillonnée, la surface élémentaire du pixel est égale à $\frac{A_k}{\tau^2}$, où $A_k = \iint_{S_k} dx dy$ est l'aire du pixel dans la grille principale. Nous définissons le sous-ensemble de Λ_k^τ constitué des pixels dont le centre $(x_{k'}^g, y_{k'}^g) \in S_{lk}$, par :

$$\Lambda_{lk}^\tau = \left\{ k' \in [1.. \tau^2 N] / (x_{k'}^g, y_{k'}^g) \in S_{lk} \right\} \quad (5.26)$$

Si l'on se donne une subdivision de grille suffisamment fine (τ très grand), l'ensemble des surfaces ainsi retenues forme une bonne approximation de S_{lk} , puisque : $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \bigcup_{k' \in \Lambda_{lk}^\tau} S_{k'} = S_{lk}$ (c.f. figure 5.14).

Ainsi, à partir de la multigrille, l'égalité (5.14) se réécrit :

$$m_l = \sum_{k \in \Gamma_l} f_k \cdot \sum_{k' \in \Lambda_{lk}^\tau} \iint_{S_{k'}} LSF(x, y) dx dy \approx \sum_{k \in \Gamma_l} f_k \cdot \frac{A_k}{\tau^2} \sum_{k' \in \Lambda_{lk}^\tau} LSF(x_{k'}^g, y_{k'}^g) \quad (5.27)$$

Finalement, l'influence du pixel k sur la mesure l est maintenant donnée par

$$H_{lk} \approx \frac{A_k}{\tau^2} \sum_{k' \in \Lambda_{lk}^\tau} \left\{ \exp \left(- \int_{M_{det}} \mu(l) dl \right) \cdot LSF_0(x_{k'}^g, y_{k'}^g) \right\} \quad (5.28)$$

Cette méthode est utilisée en pratique pour des reconstructions rapides, de très faibles résolutions pour lesquelles la variation de la LSF est importante dans le pixel.

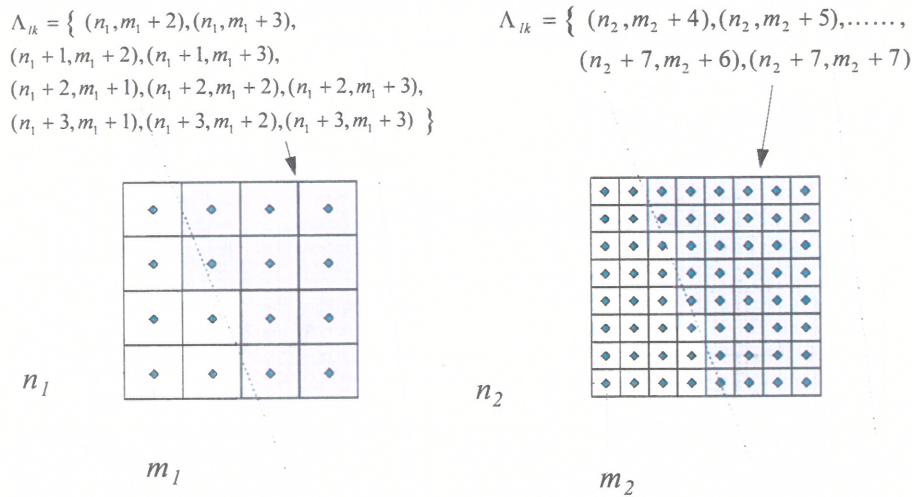


figure 5.14 : Liste de Λ_{ik}^τ pour $\tau=4$ (à gauche) et $\tau=8$ (à droite)

5.5. VALIDATION EXPERIMENTALE - CALIBRAGE DE LA REPONSE

Le modèle analytique étant maintenant déterminé, il nous reste à le valider. Il existe essentiellement deux procédures : la validation par code Monte-Carlo et la validation expérimentale. Nous détaillons ici une procédure expérimentale qui nous a permis d'accéder à des données échantillonnées de la LSF du dispositif.

5.5.1. Dispositif expérimental

Le dimensionnement du collimateur pour lequel ont été réalisées les simulations ainsi que les expérimentations est une ouverture carrée de 3 cm pour une longueur de 38.5 cm. L'angle d'ouverture de collimation résultant est de $\beta = 4,45^\circ$, ce qui nous donne une hauteur de détection à l'entrée et à la sortie de $h_{min} = 5,8$ cm, et $h_{max} = 14,7$ cm respectivement.

Les sources utilisées en expérimentation sont :

- des sources linéiques de ^{152}Eu et de ^{60}Co d'un diamètre de 0,8 cm et d'une longueur de 73 cm. Pour la détermination de la réponse linéique de TEMISEC, nous avons utilisé une source multi-énergétique d'euporium, ses pics d'énergie exploitables recouvrent un domaine plus large que pour le cobalt. L'activité de la source est donnée avec une incertitude de 5%. Les raies d'émission gamma exploitables, c'est-à-dire ayant des taux d'émission relatifs importants, sont au nombre de sept (c.f. tableau 5.1).
- une source ponctuelle : une source de ^{241}Am de pic d'absorption totale à 59 keV qui permet d'étudier les limites du modèle à très basse énergie. Elle a permis dans un premier temps de valider l'expression théorique adoptée pour la PSF.

Energie (keV)	121,78	244,70	344,28	778,90	964,13	1112,12	1408,01
Taux d'émission (%)	28,04	7,54	26,5	12,9	14,5	13,6	20,8

tableau 5.1 : Probabilité d'émission des raies gamma ^{152}Eu utilisées.

Nous utilisons deux grilles de positionnement en aluminium permettant de disposer et de maintenir des sources linéaires étalons parallèlement à l'axe de rotation. A partir des dispositions polaires des trous, nous avons réalisé, par le truchement de translations et d'une rotation d'angle 180° , un échantillonnage cartésien de l'espace de détection.

La source linéique a été placée sur l'axe A1 aux projections d'angle 0 et 180° , successivement aux huit positions radiales (D_1 à D_7) plus la position centrale (D_0) (c.f. figure 5.15).

Au total, nous avons échantillonné la zone de détection sur 450 points. A distance y fixe, le pas d'échantillonnage suivant (Ox) est fixé à 8 mm (diamètre actif de la source). Nous avons effectué des mesures suivant (Ox) au-delà du bord de détection, afin de quantifier et modéliser les effets de pénétration au travers les septas de plomb (c.f. § 5.5.3).

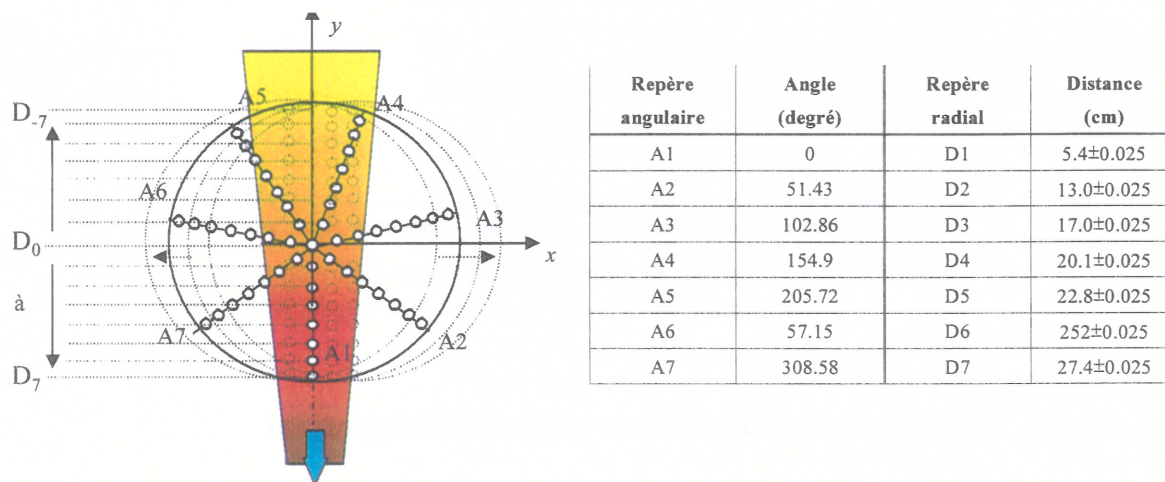


figure 5.15 : Vue de dessus de la grille de positionnement et coordonnées polaires des trous de positionnement

Lors des mesures, nous avons supprimé tout écran physique entre la source et le détecteur, exception faite du tube porte-source (en aluminium) et de la gaine enrobant la source (couches superposées de résines, polyéthylène, inox et plexiglas) dont l'atténuation a été calculée puis compensée au niveau du calcul analytique de la LSF.

Nous aurions pu exploiter la symétrie de l'expression analytique de la réponse par rapport à l'axe (Oy) pour diminuer le nombre de mesures de moitié. Néanmoins, le balayage suivant (Ox) a été effectué sur l'ensemble du noyau de détection. Cela a permis de vérifier l'existence éventuelle de dissymétries dans l'assemblage des septas, et le parallélisme des parois de collimation.

L'ensemble de ces manipulations réalise trois objectifs :

1. Le premier est de caractériser par interpolation numérique le calibrage qu'il est nécessaire d'appliquer afin d'obtenir une cohérence quantitative entre la modélisation et les mesures.
2. Le second, est de vérifier que le modèle analytique proposé est valide (à une constante multiplicative près), autrement dit que nous avons une correspondance entre les profils de la LSF expérimentale et la LSF théorique.
3. Le dernier objectif consiste à analyser l'importance de la correction de l'effet de pénétration et de son apport dans la modélisation de la LSF (c.f. section 5.5.3).

Le premier objectif est nécessaire puisque nous recherchons dans notre modèle un calibrage qui permette de remonter à l'activité d'un objet à partir de la mesure réalisée par le dispositif de détection. Ce facteur correctif dépend intrinsèquement de la collimation car celle-ci définit l'angle solide suivant lequel

est vu l'objet, des caractéristiques du détecteur, mais aussi des chaînes de préamplifications et d'amplification du signal. Plus précisément, le calibrage que nous cherchons numériquement, est déterminé relativement à un calibrage déjà existant. En effet, les mesures sont toutes corrigées par rapport à un calibrage du système réalisé à partir de la réponse d'une source ponctuelle placée à 1 mètre du détecteur (c.f. figure 5.16).

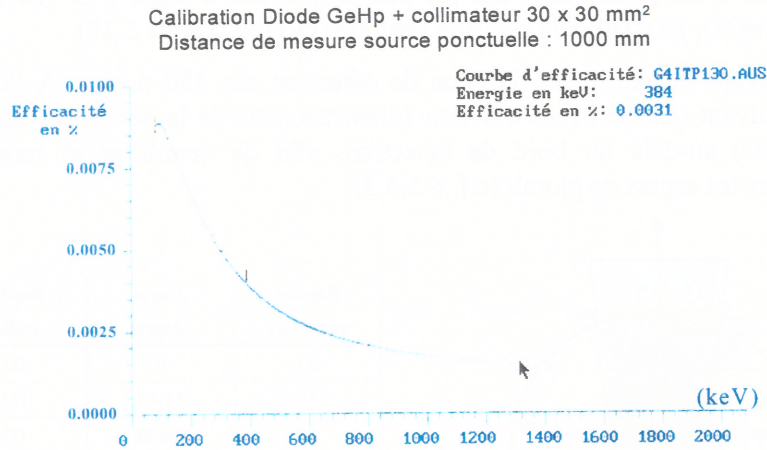


figure 5.16 : Calibrage en énergie du détecteur HpGe pour une collimation de 3x3 cm² pour une source placée à 1 m.

5.5.2. Calibrage fonction de l'énergie et de l'éloignement

Soit $c(y_i, E_j)$ le coefficient réel positif réalisant l'erreur minimale entre les points expérimentaux distants de y_i , (soit l'ensemble des points de positionnement de source $[(x_{k,i}, y_i)]_k$), pour le $j^{\text{ième}}$ radioélément du tableau 5.1, et les points théoriques :

$$c(y_i, E_j) = \min_{c \geq 0} \left(\sum_k (c \cdot LSF_{the}(x_{k,i}, y_i) - LSF_{exp}(x_{k,i}, y_i))^2 \right) \quad (5.29)$$

où LSF_{the} est la LSF telle qu'elle est définie à l'équation (5.24), avec une atténuation du milieu nulle, une paroi de conteneur inexistante, mais corrigée de l'atténuation due à la gaine et au porte-source.

On définit le résidu correspondant par :

$$r(y_i, E_j) = \frac{\|LSF_{exp}(y_i, E_j) - c(y_i, E_j) LSF_{the}(y_i, E_j)\|}{\|LSF_{the}(y_i, E_j)\|} \quad (5.30)$$

A l'énergie E_j fixée, l'ensemble des points $\{c(y_i, E_j)\}_i$ est approché par une interpolation polynomiale en y de degré 3. Ce polynôme est noté $P_j(y) = p_{3,j}y^3 + p_{2,j}y^2 + p_{1,j}y^1 + p_{0,j}$. Le vecteur de variables $(p_{3,j}, p_{2,j}, p_{1,j}, p_{0,j})$ vérifie :

$$(p_{3,j}, p_{2,j}, p_{1,j}, p_{0,j}) = \min_{a_j, b_j, c_j, d_j} \left(\sum_{y_i} (p_{3,j}y^3 + p_{2,j}y^2 + p_{1,j}y^1 + p_{0,j} - c(y_i, E_j))^2 \right) \quad (5.31)$$

Les mesures aux emplacements D_6, D_4, D_2 et D_{-3} sont aberrantes : leur résidu s'éloigne du résidu moyen obtenu aux autres positions, aussi elles n'ont pas été prises en compte.

Les vecteurs $(p_{3,j}, p_{2,j}, p_{1,j}, p_{0,j})_{j=1..7}$ sont ensuite interpolés en énergie, élément par élément ; on

calcul les quatre polynômes cubiques $P_h(E) = \sum_{i=0..3} p_{h,i} E^i$, $h = 0..3$

De là, on tire une interpolation polynomiale de E et y de notre calibrage par la formule :

$$c(y, E) = P_3(E)y^3 + P_2(E)y^2 + P_1(E)y^1 + P_0(E) \quad (5.32)$$

Nous donnons à la figure 5.17 ci-dessous les coefficients calculés à partir de la procédure suivant l'expression (5.33) :

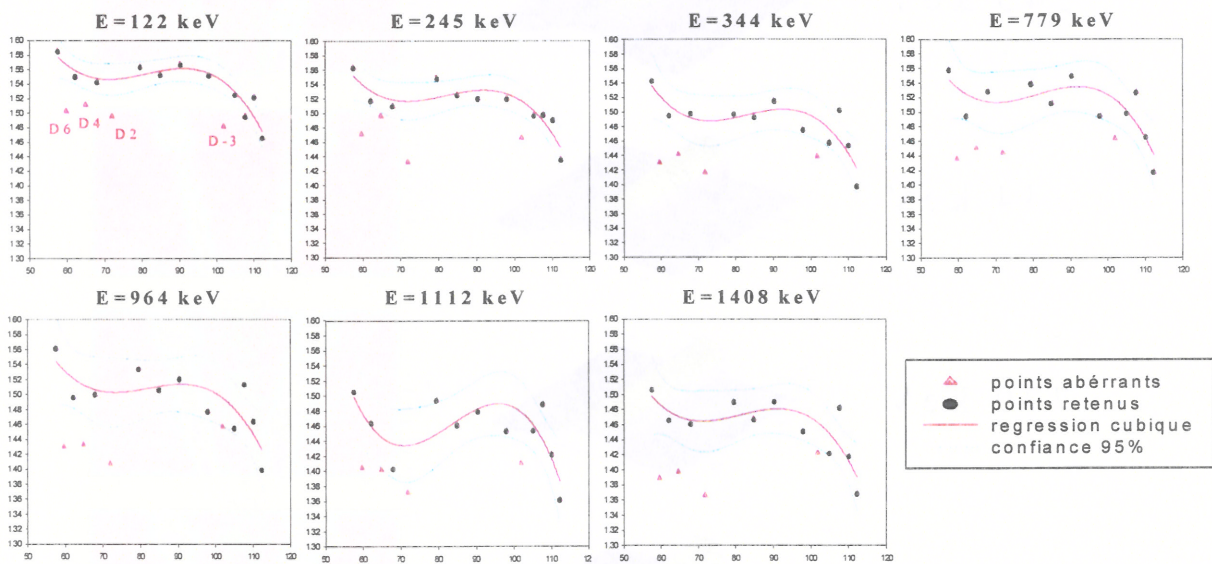


figure 5.17 : Courbes de calibrage par approximation cubique. En abscisse la distance (cm) entre source et détecteur et en ordonnée le coefficient de calibrage.

La courbe de calibrage fonction de l'énergie et de l'éloignement de la source est donnée à la figure 5.18.

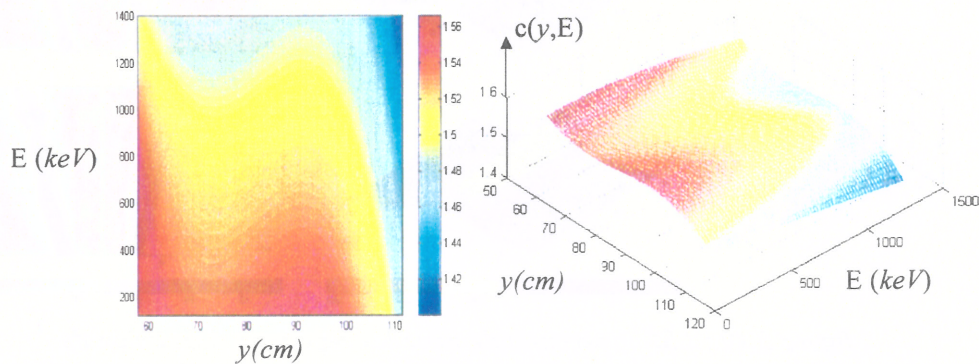


figure 5.18: A gauche, les courbes de niveaux issues des points expérimentaux de calibrage, et sa vue dans l'espace (y, E) à droite.

Nous donnons à la figure 5.19, la représentation de la réponse linéique aux différentes raies d'énergie de l'europium 152 (colonne de gauche), la différence de la réponse linéique expérimentale avec la réponse théorique calibrée, ainsi que les points de calibrage obtenus pour chaque profil, avec l'expression du résidu en pourcent (colonne de droite).

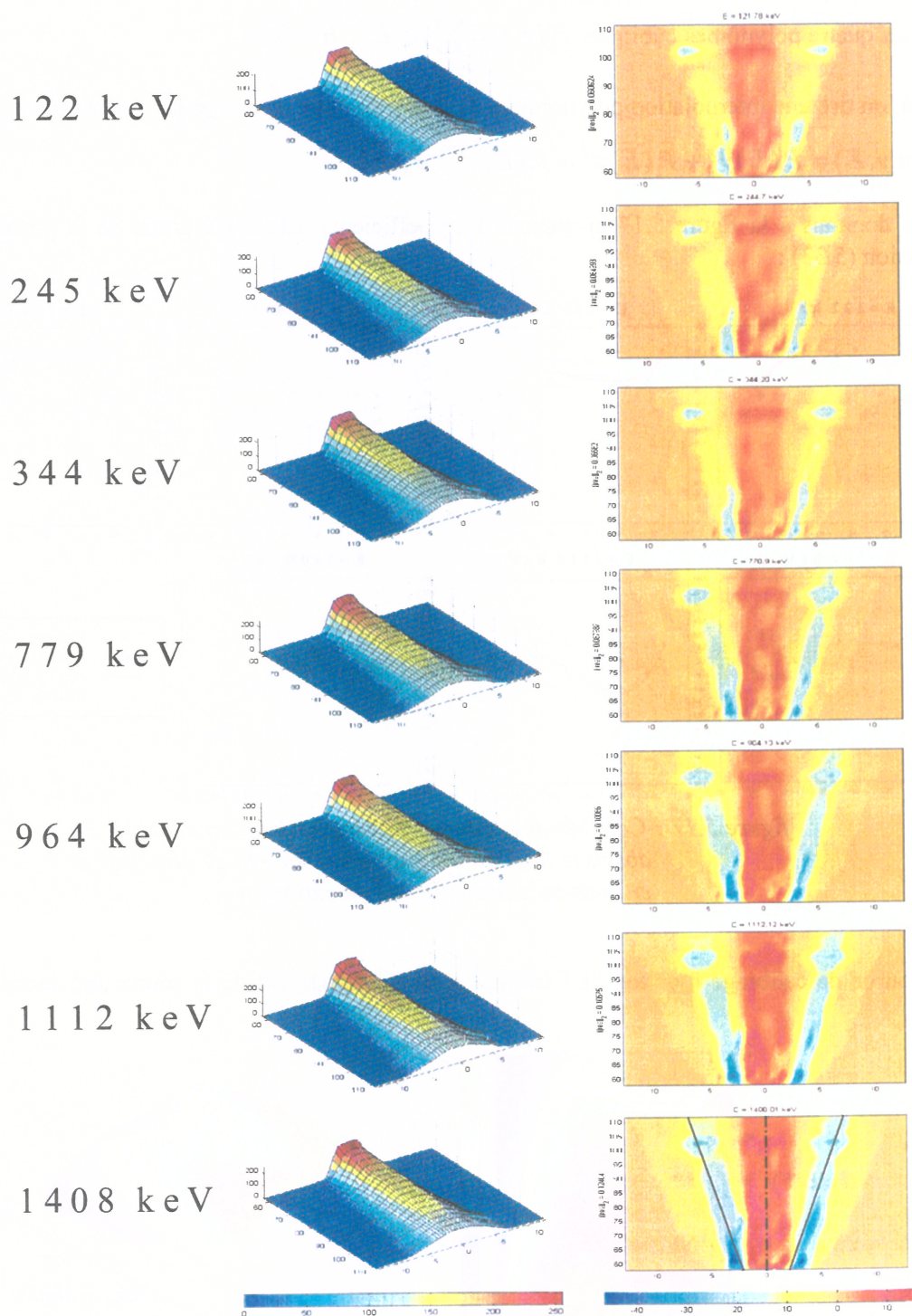


figure 5.19 : LSF expérimentale pour les sept raies d'émission de l'europium. En colonne centrale, le résidu avec la théorie (calibrée). L'unité de l'axe des z est en Becquerel, les axes x et y en centimètre

5.5.3. Phénomène de pénétration par les septas

5.5.3.1. Origine du phénomène

Les résultats expérimentaux recueillis sur la réponse linéique expérimentale montrent une altération de la prédictibilité du modèle analytique tel qu'il est actuellement proposé, et ceci proportionnellement à l'énergie du radioélément. Cette constatation est visuelle lorsqu'on regarde l'allure du résidu à la deuxième colonne de la figure 5.20 en fonction de l'énergie, et numérique puisque la norme du résidu est croissante en fonction de l'énergie. D'autre part, de l'allure de la distribution des résidus, nous déduisons que les zones de plus grande erreur (des minimaux) sont localisées à la frontière du cône de détection. Ceci nous porte à croire qu'un nombre non négligeable de photons pénètrent au-travers des parois du collimateur en plomb, et viennent s'ajouter au comptage total. Aux hautes énergies, l'absorption par effet photoélectrique est moins importante, ce phénomène gagne donc en importance. Cet *effet de pénétration par les septas*, n'a, à notre connaissance, pas fait l'objet de larges recherches dans le domaine d'application de la tomographie. Les quelques travaux qui lui sont consacrés évoluent dans des configurations où les collimations sont d'ouverture très fine, dites en tête d'épingle (« pinholes aperture ») [Smit-98], et sont appliquées à l'imagerie médicale sur des animaux de petite taille [Wrob-97]. Dans ce cas, la technique utilisée pour évaluer l'importance du phénomène et le compenser consiste à effectuer deux séries de mesures sur des sources calibrées en configuration normale, puis en bouchant les ouvertures. Tsui a montré que l'effet de septa peut ne pas être négligeable et qu'en l'absence de correction, les images reconstruites comportent des artefacts. C'est l'utilisation d'un filtre sur la fonction réponse globale qui permet de compenser le phénomène aux hautes et moyennes énergies [Tsui-99].

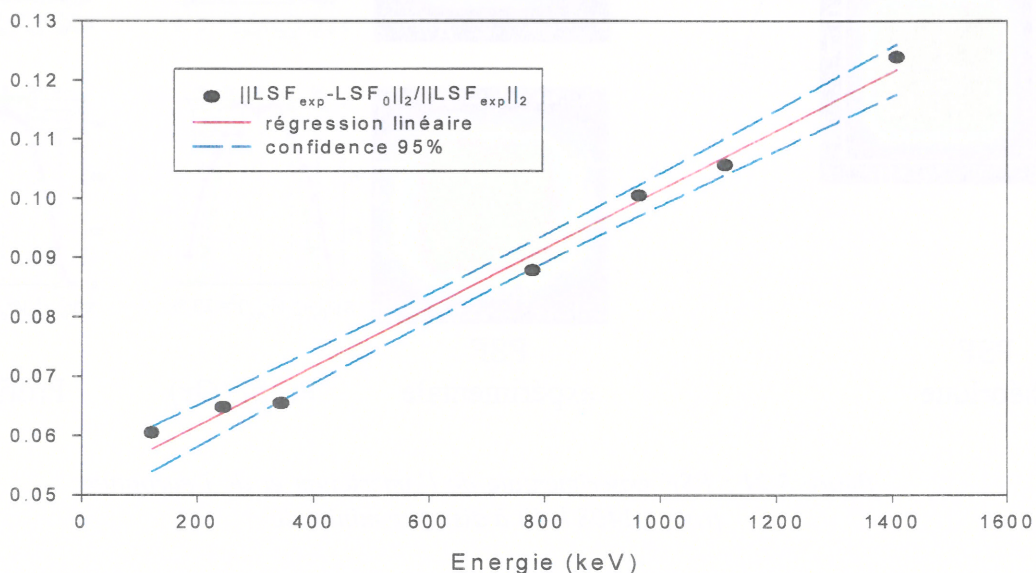


figure 5.20 : Evolution du résidu entre le modèle prédictif de la réponse linéique et l'expérience en fonction de l'énergie

5.5.3.2. Mise en évidence du phénomène

Une série d'expériences, à partir de sources ponctuelles, viennent compléter les constatations précédentes. Ces expériences ont été menées, à l'origine, pour valider le modèle géométrique : valider les hypothèses simplificatrices alors utilisées et le confronter à une base expérimentale. Elles ont permis de

mettre en évidence l'existence du phénomène de pénétration et d'avoir une illustration tridimensionnelle du comportement.

Nous avons utilisé des sources ponctuelles d'américium et d'euporium, ce qui permet une analyse sur 8 raies d'énergie allant de 59 keV à 1408 keV. L'échantillonnage de l'espace s'est restreint à trois distances suivant (Oy), la distance minimale $y_{\min} = D_{\det} - R_{obj}$, la distance maximale $y_{\max} = D_{\det} + R_{obj}$, et une distance moyenne, $y_{\text{moy}} = D_{\det}$, correspondant à une source placée au centre de rotation. Sur chacun de ces plans, nous avons utilisé la symétrie de la géométrie d'acquisition pour réduire l'échantillonnage de l'espace de détection sur le quart de plan positif ($x \geq 0, z \geq 0$). La course maximale est supérieure de 10% à celle définie par les limites théoriques de la détection, et les manipulations ont également été effectuées dans un milieu sans atténuation et sans écran. Nous avons évalué la qualité de prédiction du modèle à partir de l'erreur quadratique résiduelle calculée suivant les deux axes (Ox) et (Oz) du repère. Toutes indiquent une bonne prédiction du phénomène et les erreurs résiduelles vont de 0 à 28 %. L'erreur maximale étant atteinte au pic d'énergie maximale et au plan de distance minimale (c.f. figure 5.21). Par ailleurs, pour une source d'américium placée à cette distance minimale, la prédiction est de très bonne qualité. L'atténuation linéique à 59 keV dans le plomb ($\mu \approx 70 \text{ cm}^{-1}$) diminue considérablement le nombre de photons comptés ayant traversé les parois.

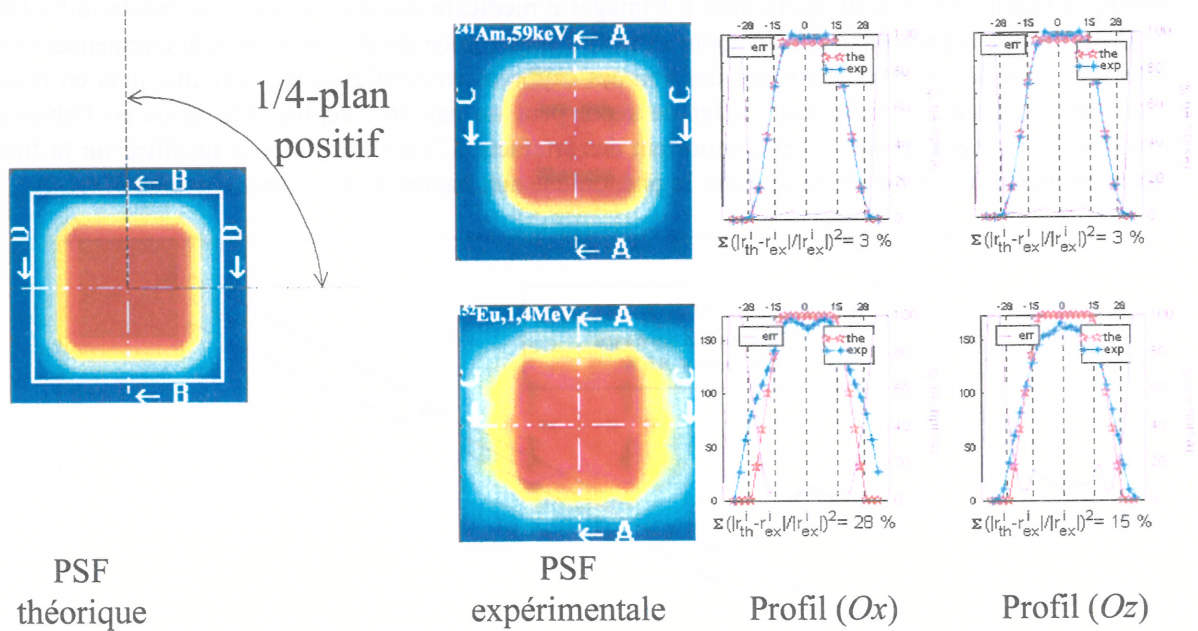


figure 5.21 : PSF expérimentale de l'américium et de l'euporium (raie à 1408 keV) à distance minimale.

Une différence est à souligner entre les deux profils axiaux (Ox) et (Oz) sur la source d'euporium. Un problème d'alignement de source au moment des mesures peut en être à l'origine. Un défaut de parallaxe entre les deux blocs de collimation peut aussi générer l'anisotropie de la réponse sur les deux profils.

Le phénomène de pénétration se traduit visuellement par les "bavures" (figure de gauche) au-delà du noyau théorique de détection.

5.5.3.3. Modélisation de l'effet des septas

Le dispositif de collimation utilisé sur TEMISEC comprend deux collimateurs "secondaires" de longueur $L_{ec} = 8$ cm, disposés aux extrémités de la protection cylindrique principale, et espacés d'une longueur $L_{vid} = 22,5$ cm (cf. figure 5.22). Dans ce modèle, nous nous intéressons aux photons émis dans le noyau de détection et qui sont détectés bien que n'ayant traversé qu'un seul des deux collimateurs secondaires. Ce modèle se limite toutefois aux photons émis à partir du cône de détection : certains des photons émis au bord extérieur du noyau, ne parcourent qu'une infime distance dans le plomb avant d'être éventuellement détectés.

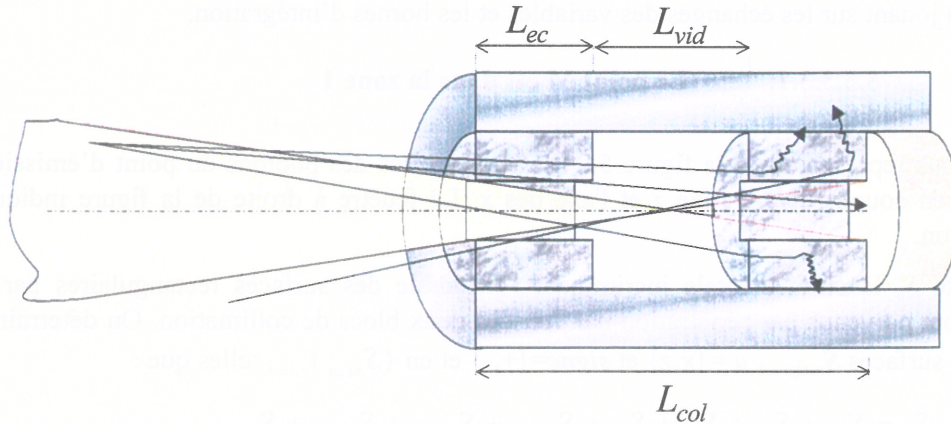


figure 5.22 : Dispositif de collimation en coupe

Nous utilisons un formalisme identique à celui utilisé pour le modèle géométrique de la réponse développé au 5.4.1, c'est-à-dire basé sur l'angle solide résultant d'un point M quelconque de l'espace de détection. Le phénomène étant symétrique par rapport à l'axe des x et des z , nous allons décomposer le phénomène selon l'appartenance du point à quatre zones différentes (zones 1, 2, 3 et 4) décrites à la figure 5.23:

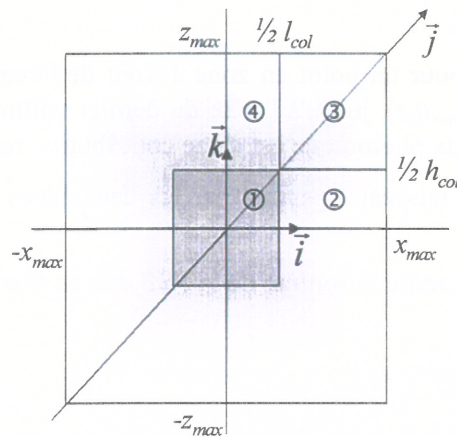


figure 5.23 : Découpage géométrique des cas à étudier. Pour une largeur et une hauteur d'ouverture de collimateur de l_{col} et h_{col} , nous définissons les longueurs d'arêtes du parallélépipède de détection par $2x_{max} = 2 \tan \beta_x (D_{det} + y - L_{col} / 2)$ et $2z_{max} = 2 \tan \beta_z (D_{det} + y - L_{col} / 2)$ où y est la distance de la source au détecteur.

Outre le fait que nous élaborons le modèle sur l'octant positif, nous pouvons aussi faire l'économie de l'étude d'un point situé en zone 4.

Effectivement, l'étude du cas où le point est en zone 4 se déduit naturellement de celle où le point est en zone 2 puisque le modèle est aussi symétrique suivant le plan $\{x=z\}$ (seulement dans le cas d'une ouverture du collimateur carrée).

Voyons à présent l'étude du cas où le point est dans la zone 1 (les autres cas sont détaillées dans [Thie-99], le principe des calculs étant très similaire). Par rapport à cette zone, un nouveau cas se présente pour un point en zone 2 : celui où la pénétration a lieu au travers du premier bloc de collimation. Ensuite, pour un point en zone 3 ou en zone 4, on retrouve beaucoup de similitudes avec des cas déjà étudiés, en jouant sur les échanges des variables et les bornes d'intégration.

5.5.3.3.1. Le point M est dans la zone 1

Nous représentons à la figure 5.24 les trajectoires des photons du point d'émission M jusqu'au détecteur, en coupe suivant l'axe z et l'axe des x . La fenêtre à droite de la figure indique les surfaces d'intégration.

On note S_p la surface totale incriminant l'ensemble des surfaces rectangulaires par lesquelles les photons sont parvenus par pénétration par l'un des deux blocs de collimation. On détermine S_p comme la somme de surfaces $S_{u,signe}$, $u = \{x,z\}$ et $signe = \{+,-\}$ et en $(S_{xs,zt})_{s,t=\pm}$ telles que :

$$S_p = S_{x+} + S_{x-} + S_{z+} + S_{z-} + S_{x+,z+} + S_{x+,z-} + S_{x-,z+} + S_{x-,z-} \quad (5.33)$$

Les surfaces sont ainsi numérotées telles que $S_{u,signe}$ désigne la surface entièrement située sur l'espace des u de signe $signe$. $(S_{xs,zt})_{s,t=\pm}$ est située dans l'octant des x de signe s et les z de signe t . Nous ne calculons pas l'apport des surfaces incriminant une pénétration à la fois par les parois horizontales et verticales, ce qui revient à négliger les termes de la forme $(S_{xs,zt})_{s,t=\pm}$. En pratique, on déduit la valeur de $(S_{xs,zt})_{s,t=\pm}$ par interpolation à partir des valeurs de S_{xs} et S_{zt} . Pour simplifier, on écrit donc :

$$S_p \approx S_{x+} + S_{x-} + S_{z+} + S_{z-} \quad (5.34)$$

Les faisceaux admissibles pour un point en zone 1 vont de l'extrémité de l'ouverture sur le plan de détection, de coordonnée $(\pm 1/2 l_{col}, 0, z)$, jusqu'à l'arête du dernier collimateur, de coordonnée $(\pm 1/2 l_{col}, L_{ec}, z)$. Au-delà, on considère que le flux photonique est d'une contribution relativement négligeable.

Remarque : l'ensemble des faisceaux passant par les deux blocs de collimation ne sont pas pris en compte.

La PSF au point M s'écrit comme la somme de la PSF due au flux direct et de celle passant au travers des parois de plomb :

$$\begin{aligned} PSF(M) &= R_{det}(M) + R_{det}^{septa}(M) \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{d\vec{s} \cdot d\vec{n}}{\|MS\|^2} + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_p} \frac{e^{-\mu_{pb}(E) \int_{d(M_e,S)} dl}}{\|MS\|^2} d\vec{s} \cdot d\vec{n} \end{aligned} \quad (5.35)$$

En exprimant que le produit scalaire des vecteurs ds et dn est proche de 1, on a :

$$R_{det}^{septa}(M) \approx \frac{1}{4\pi} \iint_{S_p} \frac{e^{-\mu_{pb}(E) \int_{d(M_e,S)} dl}}{\|MS\|^2} dudw \quad (5.36)$$

où M_e est le point d'entrée du faisceau dans la paroi du collimateur secondaire, $S(u, D_{det}, w)$ le point d'impact sur la surface du détecteur, et $d(M_e, S)$ le segment de droite intérieur au collimateur dans lequel le flux est atténué du coefficient $\mu_{pb}(E)$, atténuation linéique dans le plomb à l'énergie E .

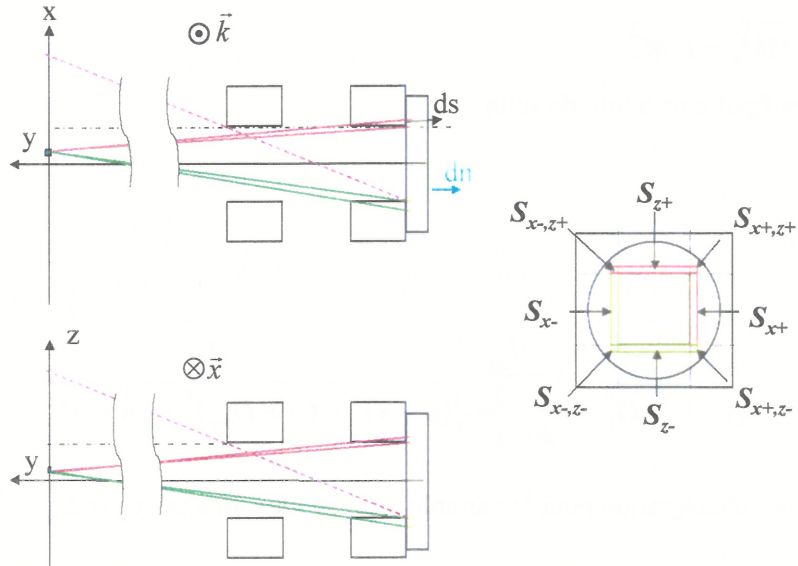


figure 5.24 : Angles solides générés par pénétration en zone 1

L'expression (5.36) n'admet pas d'expression analytique, le calcul intégral s'effectue par méthode numérique. Au préalable, il est nécessaire de déterminer l'expression de $d(M_e, S)$ en fonction des variables u et w sur chacune des différentes surfaces $S_{u,signe}$.

5.5.3.3.2. Calcul sur $S_{x+}(x, y, z, E)$

Il faut déterminer l'expression de l'intégrale linéique $l(S) = \int_{d(M_e, S)} dl$ lorsque S parcourt S_{x+}

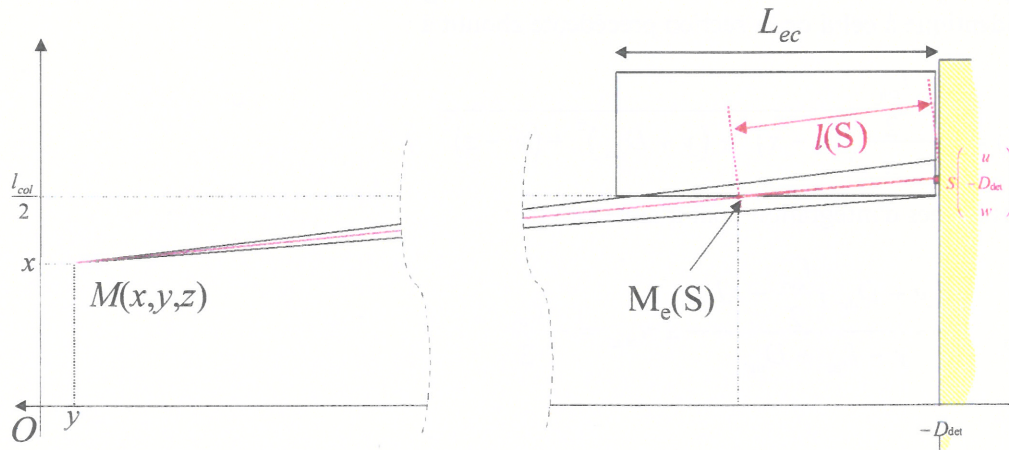


figure 5.25 : Localisation des points S et M_e et de la quantité $l(S)$ correspondante

Pour cela, il suffit de déterminer les coordonnées du point d'entrée $M_e(S)$ à la figure 5.25. Les points ont pour coordonnées $M_e\left(\frac{l_{col}}{2}, y_e, z_e\right)$, $M(x, y, z)$, et $S(u, -D_{det}, w)$. La colinéarité des trois points s'écrit :

$$\exists t \in [0,1], \quad \overrightarrow{MM_e} = t \cdot \overrightarrow{MS}$$

De la première égalité on a tout de suite :

$$t = \frac{\frac{l_{col}}{2} - x}{u - x}$$

et donc :

$$l(S) = \|M_e S\| = (1-t)\|MS\| = \frac{u - \frac{l_{col}}{2}}{u - x} \sqrt{(u-x)^2 + (y + D_{det})^2 + (w-z)^2} \quad (5.37)$$

La limite supérieure d'intégration pour la variable u est atteinte lorsque $y_e = L_{ec} - D_{det}$, soit :

$$u_{max} = \frac{(y + D_{det}) \frac{l_{col}}{2} - x L_{ec}}{y - L_{ec} + D_{det}}.$$

On a finalement:

$$S_{x+}(x, y, z, E) = \frac{1}{4\pi} \int_{w=-\frac{h_{col}}{2}}^{\frac{h_{col}}{2}} \int_{u=\frac{l_{col}}{2}}^{u_{max}} \frac{\exp\left(-\frac{u - l_{col}/2}{u-x} \mu_{pb}(E) \|MS\|\right)}{\|MS\|^2} dudw \quad (5.38)$$

5.5.3.3.3. Calcul sur $S_x(x, y, z, E)$

Le principe reste le même, seules les bornes d'intégration sont à recalculer. On peut montrer qu'un calcul identique à celui de la section précédente aboutit à :

$$l(S) = \frac{u + \frac{l_{col}}{2}}{u - x} \sqrt{(u-x)^2 + (y + D_{det})^2 + (w-z)^2}$$

et les bornes d'intégration vont maintenant de :

$$u_{min} = \frac{-(y + D_{det}) \frac{l_{col}}{2} - x L_{ec}}{y - L_{ec} + D_{det}} \text{ à } u_{max} = -\frac{l_{col}}{2}$$

soit :

$$S_{x-}(x, y, z, E) = \frac{1}{4\pi} \int_{w=-\frac{h_{col}}{2}}^{\frac{h_{col}}{2}} \int_{u=u_{min}}^{-\frac{l_{col}}{2}} \frac{\exp\left(-\frac{u + l_{col}/2}{u-x} \mu_{pb}(E) \|MS\|\right)}{\|MS\|^2} du dw \quad (5.39)$$

5.5.3.3.4. Calcul sur $S_{z+}(x, y, z, E)$

La encore, seule l'expression de $l(S)$ et les bornes d'intégration changent. Nous obtenons en interchangeant les variables w et u :

$$l(S) = \frac{w - \frac{h_{col}}{2}}{w-z} \sqrt{(u-x)^2 + (y + D_{det})^2 + (w-z)^2} \text{ et } w_{max} = \frac{y \frac{h_{col}}{2} - zL_{ec}}{y - L_{ec}}$$

soit :

$$S_{z+}(x, y, z, E) = \frac{1}{4\pi} \int_{u=-\frac{l_{col}}{2}}^{\frac{l_{col}}{2}} \int_{w=\frac{h_{col}}{2}}^{w_{max}} \frac{\exp\left(-\frac{w - h_{col}/2}{w-z} \mu_{pb}(E) \|MS\|\right)}{\|MS\|^2} dudw \quad (5.40)$$

5.5.3.3.5. Calcul de $S_{z-}(x, y, z, E)$

$$\text{On trouve } l(S) = \frac{w + \frac{h_{col}}{2}}{w-z} \sqrt{(u-x)^2 + (y + D_{det})^2 + (w-z)^2} \text{ et } w_{min} = \frac{-(y + D_{det}) \frac{h_{col}}{2} - zL_{ec}}{y - L_{ec} + D_{det}}$$

soit :

$$S_{z-}(x, y, z, E) = \frac{1}{4\pi} \int_{u=-\frac{l_{col}}{2}}^{\frac{l_{col}}{2}} \int_{w=w_{min}}^{-\frac{h_{col}}{2}} \frac{\exp\left(-\frac{w + h_{col}/2}{w-z} \mu_{pb}(E) \|MS\|\right)}{\|MS\|^2} dudw \quad (5.41)$$

5.5.4. Intégration au modèle de la LSF non atténuée

La LSF, en l'absence d'atténuation-matrice, est maintenant déterminée par la somme de la réponse linéique géométrique du système, la LSF_0 déterminée en (5.19), et la réponse linéique issue du phénomène de pénétration par les septas, on la note LSF_{Σ} : en (x, y) , elle vaut :

$$LSF_{\Sigma}(x, y) = LSF_0(x, y) + \int_z \int_{S_p} \int \exp(-\mu_{pb}(E)l(S)) \cdot \frac{dudw}{\|MS\|^2} dz$$

La fonction $z \rightarrow \int_{S_p} \int \exp(-\mu_{pb}(E)l(S)) \cdot \frac{dudw}{\|MS\|^2}$ est paire, on peut donc intégrer sur le demi-espace

positif, avec comme borne supérieure $z_{max}(y) = \tan\beta(y + D_{det} - \frac{L_{col}}{2})$, soit :

$$LSF_{\Sigma}(x, y) = LSF_0(x, y) + 2 \int_{z=0}^{z_{\max}(y)} \iint_{S_p} \exp(-\mu_{pb}(E)l(S)) \frac{dudw}{\|MS\|^2} dz \quad (5.42)$$

En utilisant maintenant les notations définies au § 5.5.3.3.1, avec en exposant le chiffre correspondant à la zone de calcul (i.e. S_{us}^i correspondant au calcul sur la zone numéro i , pour i allant de 1 à 4), on a en tout point (x, y) appartenant au cône de détection :

$$\text{Si } |x| \leq \frac{l_{col}}{2}$$

$$LSF_{\Sigma}(x, y) = LSF_0(x, y) + 2 \int_{z=0}^{\frac{h_{col}}{2}} \left[\sum_{\substack{u=x,z \\ s=+,-}} S_{us}^1(x, y, z, E) \right] dz + 2 \int_{z=\frac{h_{col}}{2}}^{z_{\max}(y)} \left[\sum_{\substack{u=x,z \\ s=+,-}} S_{us}^4(x, y, z, E) \right] dz$$

$$\text{sinon, } \left(\frac{l_{col}}{2} < |x| \leq x_{\max}(y) \right)$$

$$LSF_{\Sigma}(x, y) = LSF_0(x, y) + 2 \int_{z=0}^{\frac{h_{col}}{2}} \left[\sum_{\substack{u=x,z \\ s=+,-}} S_{us}^2(x, y, z, E) \right] dz + 2 \int_{z=\frac{h_{col}}{2}}^{z_{\max}(y)} \left[\sum_{\substack{u=x,z \\ s=+,-}} S_{us}^3(x, y, z, E) \right] dz$$

5.5.5. Résultats

Nous recalculons à présent les coefficients de calibrage suivant la même procédure utilisée au § 5.5.2 mais cette fois-ci en utilisant LSF_{Σ} comme expression de la réponse linéique. La figure 5.26 montre l'évolution du résidu en fonction de l'énergie des raies d'émission de l'euporium avec et sans correction.

S'il est clair que l'opération n'apporte guère d'amélioration à basse énergie, son efficacité se mesure surtout à haute énergie.

Le calcul du calibrage donné au § 5.5.2 est celui obtenu à partir de LSF_{Σ} .

Si la diminution de l'erreur résiduelle semble confirmer une relative bonne prise en compte du phénomène, il demeure un écart fluctuant aux environs de 6% que l'on peut difficilement faire diminuer dans l'état actuel de la modélisation.

La cause principale est imputable au modèle : en effet, la modélisation de l'effet de pénétration se limite au cône de détection, ce qui constitue une limite en soi. Or l'illustration de la PSF sur l'euporium à 1,4 MeV à la figure 5.21 montre bien que le phénomène subsiste au delà de cette frontière. A la figure 5.19, ceci peut aussi se voir à la raie de 1,4 MeV, où nous avons tracé les limites du faisceau de détection : les "traînées bleus" témoignent d'un surplus de comptage en dehors de la zone théorique et qui n'est pas pris en compte dans le modèle.

D'autre part, l'effet de pénétration par les septas, même s'il est important à haute énergie, ne constitue pas le phénomène physique prépondérant. Le fait est qu'aux basses énergies ($E < 500keV$), zone où l'effet de septa est relativement inexistant, le résidu du modèle oscille entre 5 et 6%. L'ensemble des propagations d'erreurs de la mesure expérimentale (positionnement des sources, incertitude sur l'activité, incertitude sur l'atténuation réelle de la gaine et du porte-source, bruitage parasite sur les chaînes d'acquisitions) au traitement de l'information et de la comparaison au modèle (qui a aussi ses

incertitudes dues aux simplifications), le tout fait que nous sommes confrontés à une erreur résiduelle non nulle.

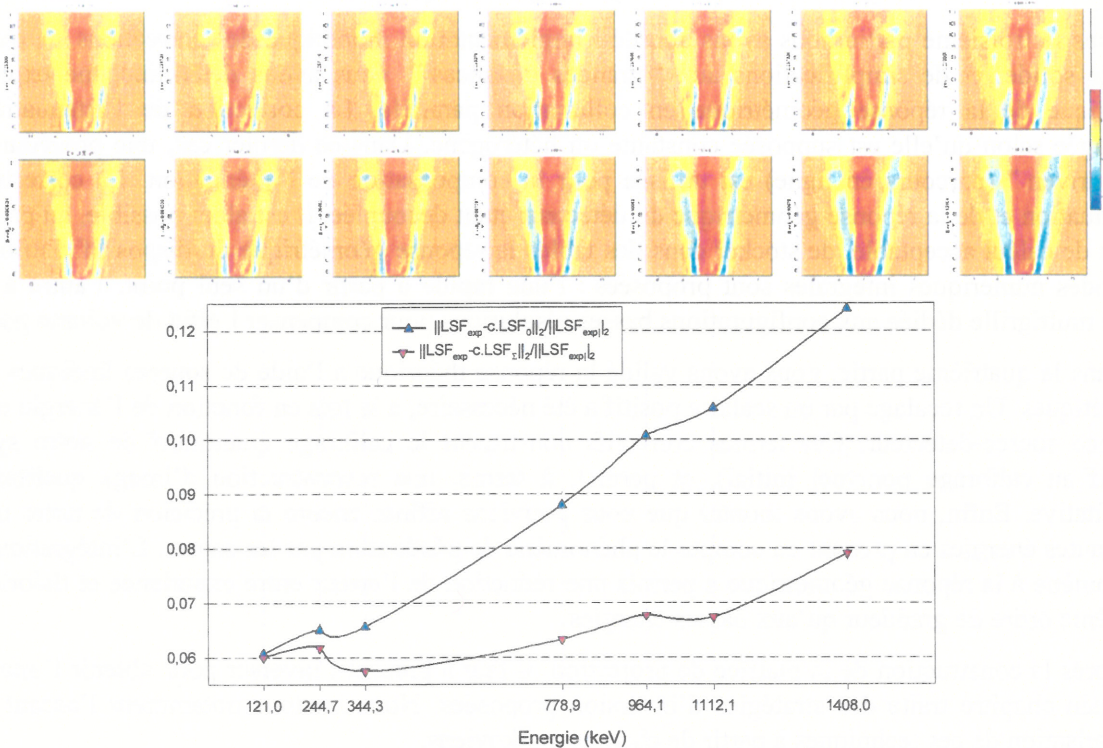


figure 5.26 : La première ligne représente les sept résidus avec la LSF_z et, à titre de comparaison, les résidus avec la LSF_0 , la ligne en-dessous. Les deux courbes illustrent l'évolution du résidu en fonction de l'énergie avec la correction de l'effet de pénétration (triangles rouges) et sans l'effet de pénétration (triangles bleus).

Enfin, la détermination du calibrage par la méthode des moindres carrés minimise l'importance du bruit d'émission photonique mais elle ne peut en aucun cas réduire l'erreur à zéro.

Néanmoins, l'ordre de grandeur de l'erreur permet d'envisager une reconstruction quantitative de qualité. Une modélisation de type Monte-Carlo, méthode que nous n'avons pas retenue, permettrait certainement une approche plus fine de la réponse linéique dans un cadre d'application extrêmement large. Les deux raisons essentielles pour lesquelles nous n'avons pas retenu cette méthode sont sa lourdeur quant aux temps de simulation (la convergence de la méthode statistique peut devenir très lente à la frontière du noyau de détection) et la complexité à élaborer une description tridimensionnelle proche de la réalité avec les détails de la collimation et de la détection.

5.6. CONCLUSION

Ce chapitre a permis d'exposer la méthode de calcul des éléments de la matrice de projection. Nous avons opté pour une distribution sur les fonctions indicatrices des voxels. Ces fonctions de base présentent l'intérêt pratique d'une formulation aisée de la modélisation et de son implémentation. Par ailleurs, elles conduisent à une matrice de projection creuse : cette propriété est appréciable pour la mise en œuvre d'algorithmes régularisés spécifiques et plus rapides.

Dans une seconde partie, nous avons proposé une formulation générale de notre modèle sur la base d'une réponse linéique, la LSF. Le modèle tient compte de la géométrie divergente du faisceau, et la LSF intègre la correction de l'atténuation et de la réponse géométrique du détecteur.

Dans la troisième partie nous avons abordé l'implémentation numérique des corrections. A partir de l'angle solide, et de simplifications aux "grandes distances", nous avons déterminé une expression analytique de la réponse géométrique en collimation parallèle. La correction de l'atténuation est envisagée selon qu'elle est supposée constante ou hétérogène. Dans ce dernier cas, une procédure type "ray-driven" (parcours en ligne) est utilisée pour la compensation de l'atténuation. La correction de l'atténuation et de la réponse géométrique du détecteur étant découplée, il est alors possible, au prix d'un temps de calcul acceptable, de stocker dans des tables la réponse géométrique du dispositif. Enfin, deux méthodes numériques intégrales sont proposées : l'une rapide à partir d'un seul point, l'autre à l'aide d'une multigrille dédiée aux configurations basses résolutions pour compenser l'effet de volume partiel.

Dans la quatrième partie, nous avons validé la réponse théorique à l'aide de sources linéiques multi-énergétiques. Un recalage par un scalaire positif a été nécessaire, à la fois en fonction de l'énergie et de la distance source-détecteur. Ces termes correctifs constituent le calibrage quantitatif de notre système (relatif au calibrage ponctuel initial), et permet, à terme, une reconstruction d'image qualitative et quantitative. Enfin, nous avons montré que nous pouvions affiner encore la précision de notre modèle aux hautes énergies en prenant en compte le phénomène de pénétration par les septas. L'intégration de ce phénomène à la réponse géométrique a permis une réduction de l'erreur entre expérience et théorie dans un même ordre de grandeur qu'aux basses énergies.

Après la construction de la matrice de projection, il faut à présent l'inverser pour obtenir l'image. Le prochain chapitre traite des stratégies d'inversion proposées. Nous mettons notamment l'accent sur la régularisation de ces techniques à partir de champs markoviens.

5.7. REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUES

- [Alva-76] R.E Alvarez and A. Macovski « Energy-selective reconstruction X-ray computerized tomography. » *Phys. Med. Biol.* 21(5) :733-744, 1976
- [Bhat-97] M. Bhatia, W.C. Karl, A.S. Willsky. « Tomographic Reconstruction and Estimation Based on Multiscale Natural-Pixel Bases. » *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 6(3) :463-478, 1997
- [Beek-93] F.J Beekman *et al.* « Objet-Shape dependent PSF Model for SPECT imaging. » *IEEE Trans. on Nucl. Sci.* (40)1 :31-39, 1993
- [Buoc-81] M. Buoconore, W. Brady, and A. Macovski. « A natural pixel decomposition for two dimensional image reconstruction. » *IEEE Tans. Biomed. Eng.*, 28:69-78, 1981
- [Form-89] A.R. Formiconi, A Pupi and A. Passeri. « Compensation of spatial system response in SPECT with conjugate gradient reconstruction technique » *Phys. Med. Biol.* 34(1) :69-84, 1989

- [Garn-87] L. Garnero « *Reconstruction d'images tomographiques à partir d'un ensemble limité de projections* », PhD thesis, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1987
- [Gira-84] D.A. Girard. « *Les méthodes de régularisation optimale et leur applications en tomographie : nouveaux algorithmes performants de reconstruction d'image.* » PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1984
- [Gira-89] D.A. Girard. « A fast 'Monte-Carlo cross-validation' procedure for large least square problems with noisy data. » *Numer. Math.* 56 :1-23, 1989
- [Golu-79] G.H. Golub, M Health and G. Wahba. « Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. » *Technometrics*, 21(2) :215-223, 1979
- [Guil-90] B. Guilpart. « *Reconstruction pratique d'images tomographiques à partir d'un jeu de données incomplet.* » C.E.A-DAM/CE/MES/RC N°004/90, 1990
- [Gull-85] G. Gullberg, R. Huesman, J. Malko, N. Pelc and T. Budinger « An attenuated projector-backprojector for iterative SPECT reconstruction. » *Phys. Med. Biol.* 30, 799-816, 1985
- [Hsie-98] Y.-L Hsieh, G. L Zeng, G. T.Gullberg, « Projection Space Image Reconstruction using Strip Functions to Calculate Pixels More "Natural" for Modeling the Geometric Response of the SPECT Collimator. » *IEEE Trans. Med. Imag.* MI 17(1) :24-44, 1998
- [Hubb-93] J.H. Hubbell and S.M Seltzer. *Tables of X-ray mass attenuation coefficients and mass energy-absorption coefficients 1 keV to 20 MeV for elements Z=1 to 92 and 48 additional substances of dosimetric interest.* IRD, Physics Laboratory, U.S. department of Commerce, Gaithersburg, MD 20899 U.S.A, 1993
- [Hues-77] R. Huesman, G. Gullberg, W. Greenberg and T. Budinger. « *User manual : donner algorithm for reconstruction tomography.* » (Lawrence Berkeley Laboratory Publication), 1977
- [Jaco-98] F. Jacobs, S. Matej and R. Lewitt « Image reconstruction techniques for PET. » Department of electronics and information systems, university of Ghent, medical image and signal processing group, technical report R9810 and departement of radiology, university of Pennsylvania, medical image processing group technical report N° MIPG245, August 1998
- [Jaco-99] F. Jacobs and I. Lemahieu. « Iterative image reconstruction from projections based on generalised Kaiser-Bessel window functions. » *Proceedings of 1st World Congress on Industrial Process Tomography.* Buxton, 427-432, April 1999

- [Jose-82] P.M Joseph. « An improved algorithm for reprojection rays through pixel images. » *IEEE Trans. Med. Imag.*, MI-1(3), 1982
- [Lewi-90] R.M. Lewitt. « Multidimensional digital image representations using generalized kaiser-bessel window functions. » *J. Opt. Am.* 7 :1834-1846, 1990
- [Lewi-92] R.M. Lewitt. « Alternatives to voxels for image representation in iterative reconstruction algorithms. » *Phys. Med. Biol.*, 37:705-716, 1992
- [Lian-92] Z. Liang et al, « Simultaneous compensation for attenuation, scatter, and detector response for SPECT reconstruction in three dimensions. », *Phys. Med. Biol.* 37(3) :587-603, 1992
- [Mady-83] W. Madych and S. Nelson. « Polynomial based algorithms for computed tomography. » *SIAM J. Appl. Math.*, 43:157-185, 1983
- [Marc-64] E. Marchand. « Deviation of the point spread function from the line spread function. » *J. Opt. Soc. Am.* 54 :915-920, 1964
- [Marc-65] E. Marchand. « From line to point spread function : the general case. » *J. Opt. Soc. Am.* 55 :352-355, 1965
- [Marr-79] R.B. Marr. « On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals. » *J. Math. Anal. Appl.* 19 :357-374, 1979
- [Mate-95] S. Matej and J. Browne « Performance of a fast Maximum Likelihood algorithm for fully 3D PET reconstruction », *International Meeting on Fully three-dimensional Image reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, 247-251, 1995
- [Msak-87] P.Msaki, B. Axelsson, C.M. Dahl and S. Larsson. « Generalized scatter correction method in SPECT using point scatter functions. » *J. Nucl. Med.*, 28 :1861-1869, 1987
- [Natt-80] [Natt-80] F. Natterer, « Efficient Implementation of Optimal Algorithms in computerized tomography », *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2 :545-555, 1980
- [Nuyt-91] J. Nuyts. « *Quantification of SPECT images : simulation, scatter correction, reconstruction and automated analysis.* » PhD. Thesis, Catholic University Leuven, 1991
- [Pret-98] P. H. Pretorius et al « Reducing the influence of partial volume effect on SPECT activity quantitation with 3D modelling of spatial resolution in iterative reconstruction », *Phys. Med. Biol.* 43 :407-420, 1998

- [Robe-99] C. Robert-Coutant, V. Moulin, R. Sauze, P. Rizo, J. M Casagrande. « Estimation of the matrix attenuation in heterogeneous radioactive waste drums using dual-energy computed tomography », *Instr. and Meth. in Phys. Res. Section A*, 422 :949-456, 1999
- [Sidd-85] R. Siddon. « Fast calculation of the exact radiological path for 3D CT array. » *Med. Phys.* 12 :252-255, 1985
- [Smit-98] M. F. Smith, R. J Jaszczak. « An analytic model of pinhole aperture penetration for 3D pinhole SPECT image reconstruction. » *Phys. Med. Biol.* 43(4) :761-776, 1998
- [Thie-98] R. Thierry. « Méthodes de reconstruction adaptées à la tomographie d'émission bidimensionnelle sur TEMISEC. » *NT SCCD 98-06, CEA*, 1998
- [Thie-99] R. Thierry. « Modélisation volumique de la réponse linéique pour la quantification d'activité des colis par tomographie d'émission 2D. » *NT SCCD 99-xx, CEA*, 1999
- [Tsui-99] B. Tsui, X. Zhao, C. Tocharoenchai, D. Lewis and E. Frey « Compensation of collimator response function in quantitative SPECT using medium and high energy photons », *International Meeting on Fully three-dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, 1999
- [Tikh-77] A. Tikhonov and V. Arsenin. « *Solution of ill-posed problems.* » Winston, Wiley, 1977
- [Todd-88] A. Todd-Pokropek, « Non-stationary deconvolution using a multi-resolution stack. » in *Inf Proc. Med. Imag.*, New-York, Plenum Press, 277-290, 1988
- [Wrob-97] M.C Wrobel et al. « A proposed method for correcting aperture penetration in high energy slit aperture and pinhole SPECT. » *IEEE trans. Nucl. Sci.* 44(4) :1564-1570, 1997
- [Zien-91] O.C. Zienkiewicz, R.L.Taylor « *The Finite Element Method.* » Basic Formulation and Linear Problems, Afnor Paris, 1991

CHAPITRE 6.

ALGORITHMES DE RECONSTRUCTION

6.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous décrivons les algorithmes de reconstruction retenus pour la résolution du système linéaire $Hf = m$, où la matrice H de taille $M \times N$, est la matrice de projection corrigeant les phénomènes décrits au chapitre précédent, f le vecteur de l'activité surfacique de taille N que nous désirons reconstruire, et m le vecteur de mesures de taille M . L'objectif de notre travail est de proposer une méthode qui, à partir d'un faible nombre de données bruitées, permette de reconstruire une image quantifiée, avec la possibilité de localiser des points chauds éventuels. Nous avons fait le choix d'une classe de méthodes où le processus d'inversion est stabilisé par l'introduction d'informations *a priori* portant sur la structure de l'image.

Tout d'abord, nous définissons l'approche probabiliste permettant d'utiliser l'ensemble des données issues des mesures (en transmission et en émission) et d'introduire des informations sur l'image (la structure, la régularité, etc.). Cette approche se place dans le cadre bayésien : l'estimateur de l'image à reconstruire est déterminé à partir d'une distribution *a posteriori* de l'image, conditionnellement aux observations. L'estimateur choisi est celui du Maximum A Posteriori (MAP).

Dans un deuxième temps, nous détaillons la probabilité de formation des mesures conditionnellement à l'image. La vraisemblance, qui représente l'énergie de dégradation des mesures, est présentée pour deux configurations : lorsque le bruit « ajouté » aux mesures suit une loi de Poisson et lorsqu'il suit une loi de Gauss. Aucune des vraisemblances présentées n'est privilégiée par avance, puisque le cadre de travail dans lequel nous nous plaçons ne permet pas de faire l'hypothèse définitive d'une vraisemblance gaussienne. C'est pourquoi nous présentons les algorithmes de reconstruction qui sont généralement associés dans les deux cas : l'algorithme Expectation-Maximisation (EM) dans le cas poissonien et le Gradient Conjugué (CG pour *Conjugate Gradient*) dans le gaussien.

La troisième partie est dédiée aux distributions *a priori*. Les champs de Markov sont utilisés pour traduire les informations géométriques locales. Les distributions de Gibbs permettent d'introduire la notion de fonctions de potentiels sur lesquelles nous travaillons afin de préciser les critères à respecter pour définir une régularisation avec prise en compte des discontinuités. Une autre approche, définie à la section 6.4.3, utilise un processus de ligne pour marquer les discontinuités. Enfin, à titre informatif, nous recensons les principales méthodes utilisées en tomographie pour la détermination optimale du coefficient de régularisation, facteur contrôlant l'importance de l'*a priori* vis-à-vis des données.

La dernière partie est consacrée à la mise en œuvre d'algorithmes déterministes du MAP. Après présentation des méthodes de type Newton et Quasi-Newton dédiées à la résolution de systèmes non linéaires, nous décrivons la méthode de régularisation semi-quadratique reposant sur l'utilisation de la

variable du processus de ligne. Son principe général est abordé, puis nous détaillons les algorithmes résultant du choix des deux types de vraisemblance : l'algorithme MOISE pour une loi de Poisson et ARTUR pour une loi de Gauss. Enfin, nous traiterons d'une méthode faisant usage de fonctions de potentiels aux dérivées secondes de l'image : c'est la méthode « Thin-Plate », variante d'une procédure de recuit déterministe.

6.2. APPROCHE BAYESIENNE - ESTIMATEUR DU MAXIMUM A POSTERIORI

Nous nous basons sur une approche bayésienne du problème. Le théorème de Bayes s'applique à la distribution *a posteriori* $P(f|m)$ qui établit la distribution de l'image conditionnellement aux observations. La relation s'écrit :

$$P(f|m) = \frac{P(m|f)P(f)}{P(m)} \quad (6.1)$$

où :

- $P(m|f)$ la fonction de vraisemblance qui relie le vecteur image f au vecteur de mesure m : elle décrit la loi statistique du processus physique de l'enregistrement des données. Les deux types de vraisemblance couramment rencontrés (distributions de Poisson et de Gauss), sont traitées au § 6.3.
- $P(f)$ décrit un modèle probabiliste relatif à la connaissance de l'image, une connaissance intervenant sous la forme d'une distribution *a priori* (voir § 6.4).
- le terme $P(m)$ représente la distribution des données. Il n'intervient qu'en tant que constante, les mesures étant déjà connues.

A partir de cette distribution *a posteriori*, différents estimateurs de l'image f (correspondant à différentes fonctions de coûts) peuvent être proposés :

1. Le **Maximum A Posteriori** [Gema-84] est celui utilisé dans notre étude. L'estimateur du MAP est donné par :

$$f^* = \arg \max_f P(f|m)$$

Si la distribution de l'*a priori* est uniforme, l'estimateur du MAP se confond à celui du **Maximum Likelihood** (ML) :

$$f^* = \arg \max_f P(m|f) \quad (6.2)$$

dont la procédure est détaillée au § 6.3.

2. Le **Maximum of the Posterior Marginal** (MPM) [Marr-87] pour lequel f_k , la $k^{\text{ième}}$ coordonnée de l'estimateur, est donnée par :

$$f_k^* = \arg \max_{f_k} P(f_k|m)$$

3. Le **Posterior Mean** dont l'estimateur est donné par :

$$f_k^* = \int_{\Lambda_k} f_k P(f_k|m) df_k$$

où Λ_k représente l'ensemble des états possibles de f au pixel k . Cet estimateur conduit à d'importantes quantités de calculs.

On utilise généralement un échantillonneur de Gibbs [Gema-84] pour simuler les réalisations des lois $P(f_k|m)$, pour l'estimateur du Posterior Mean et pour le MPM. Ces deux estimateurs ont notamment été utilisés en segmentation [Dint-90].

Le choix de l'estimateur et le critère d'optimalité *a posteriori* conditionnent les propriétés de l'image que nous désirons reconstruire. L'avantage du MAP est qu'il permet la mise en œuvre d'algorithmes déterministes dont les quantités de calculs restent abordables [Demo-89]. Les algorithmes itératifs qui convergent vers le MAP sont traités au § 6.5.

Remarque : Dans les différentes sections de ce chapitre, on fera usage d'un ordonnancement lexicographique des indices.

6.3. MODELES PROBABILISTES DE VRAISEMBLANCE

6.3.1. Cas d'une vraisemblance poissonnienne

On rappelle que l'élément H_{lk} correspond à la probabilité qu'un photon émis en k soit détecté à la mesure l . Chacun des photons émis à partir du pixel k est sélectionné par un processus de Bernoulli de paramètre H_{lk} .

6.3.1.1. Modèle statistique du processus d'émission

La source d'erreur la plus courante en reconstruction par tomographie d'émission est le bruit lié aux fluctuations statistiques du nombre de photons émis par un radioélément. En effet, par unité de temps donnée, ce nombre suit une loi statique de Poisson :

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

où $P(N = n)$ désigne la probabilité que l'événement aléatoire N , (le nombre de photons émis) soit égal à n .

Rappel : λ , espérance statistique de l'événement, désigne aussi l'estimation de l'intensité de la source. Par analogie, f_k est identifiée à l'espérance de l'activité du processus poissonnien au pixel k de l'image.

On note $c = (c_{lk})_{l,k}$, le vecteur de variable aléatoire désignant le nombre de photons émis en k et réellement captés à la mesure l . Finalement, le nombre moyen de photons détectés \bar{c}_{lk} est un

processus poissonien puisqu'il résulte du produit de la moyenne poissonnienne f_k et de la probabilité H_{lk} , soit :

$$\bar{c}_{lk} = H_{lk} f_k$$

Ainsi, chaque élément du vecteur de mesure est relié à c par la relation :

$$m_l = \sum_k c_{lk}$$

Le vecteur de mesure résulte également d'une somme de processus poissonniens, il est donc lui aussi poissonnien et de paramètre :

$$\bar{m}_l = \sum_k \bar{c}_{lk} = \sum_k H_{lk} f_k \quad (6.3)$$

où \bar{m}_l représente le nombre moyen de coups enregistrés à la mesure l . La vraisemblance de m est donnée par le produit des distributions poissonniennes indépendantes, soit :

$$P(m|f) = \prod_l \frac{\left(\sum_k H_{lk} f_k \right)^{m_l} \exp\left(-\sum_k H_{lk} f_k\right)}{m_l!} \quad (6.4)$$

6.3.1.2. Estimateur du maximum de vraisemblance - Algorithme EM

Une solution à notre problème de reconstruction consiste à rechercher le maximum suivant f de la vraisemblance $P(m|f)$, encore appelé estimateur du maximum de vraisemblance (MLE¹). A l'optimisation de (6.4), nous préférons le problème entièrement équivalent : rechercher le maximum du logarithme de la vraisemblance (log-vraisemblance), soit:

$$\begin{aligned} f_{ML} &= \arg \max_{f \geq 0} (\ln P(m|f)) = \arg \max_{f \geq 0} \left\{ \sum_l (m_l \ln \bar{m}_l - \bar{m}_l - \ln m_l!) \right\} \\ &= \arg \max_{f \geq 0} \left\{ \sum_l \left(m_l \ln \left(\sum_k H_{lk} f_k \right) - \sum_k H_{lk} f_k \right) \right\} \end{aligned}$$

Le terme $\ln m_l!$ n'apparaît plus dans la dernière relation, puisqu'il est constant et indépendant de f . Par la suite, la log-vraisemblance est assimilée à une énergie de vraisemblance. On pose alors :

$$E_V(f) = -\ln P(m|f) = \sum_l \left(\sum_k H_{lk} f_k - m_l \ln \left(\sum_k H_{lk} f_k \right) \right) \quad (6.5)$$

L'utilisation du MLE en reconstruction d'image revient à Rockmore et Macovski [Rock-76]. L'algorithme EM (Expectation Maximization), développé par Dempster [Demp-77] est classiquement associé à sa détermination. La facilité de son implémentation et ses propriétés contribuent à son utilisation répandue en tomographie [Shep-82], aussi bien en émission qu'en transmission [Lang-84] et en PET [Vard-85].

¹Maximum Likelihood Estimator

Son principe repose sur l'idée suivante :

Soit \mathbf{M} , un vecteur de variables aléatoires fonction du vecteur de paramètres \mathbf{f} à estimer. A ce vecteur de paramètres correspond la probabilité maximale d'obtenir l'observation de \mathbf{M} . Formulé ainsi, le problème reste souvent difficile à résoudre. Une des solutions est de reformuler l'espace de mesure de \mathbf{M} de manière à rendre « faisable » l'optimisation.

L'idée de la méthode EM est de mettre à profit l'existence du vecteur de variables aléatoires \mathbf{C} (*non observable mais complet*), et d'utiliser la relation qui le lie au vecteur de variables aléatoires \mathbf{M} , quant à lui *observable mais incomplet* [Demp-77].

La relation ψ de \mathbf{C} vers \mathbf{M} est telle que :

pour \mathbf{C} donné, il correspond une seule image \mathbf{M} et, pour \mathbf{M} fixé, il existe plusieurs réalisations \mathbf{C} possibles, soit :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall \mathbf{c}, \exists ! \hat{\mathbf{m}} / \hat{\mathbf{m}} = \psi(\mathbf{c}) \\ (ii) \quad & \forall \mathbf{m}, \text{Card}\{\{\hat{\mathbf{c}} / \mathbf{m} = \psi(\hat{\mathbf{c}})\}\} \geq 1 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Pour son application à la reconstruction tomographique, on pose $\mathbf{M} = m, \mathbf{C} = c, \mathbf{f} = f$ et la relation liant m et c est celle exprimée en (6.3). L'algorithme utilise le calcul de la moyenne suivant c de la log-vraisemblance conditionnellement à la donnée de m et de f^p , où f^p désigne une estimation courante de f :

$$\begin{aligned} E_C [\ln P(m|f) | m, f^p] &= \sum_{\{c\}} \ln P(m|f) P(c|m, f^p) \\ &= \ln P(m|f) \underbrace{\sum_{\{c\}} P(c|m, f^p)}_{=1 \text{ d'après (6.6):(ii)}} \\ &= \ln P(m|f) \end{aligned}$$

Ainsi, il est équivalent de maximiser l'espérance conditionnelle de la log-vraisemblance que de chercher à maximiser directement la log-vraisemblance. La première étape de l'algorithme qui consiste à calculer l'espérance conditionnelle est appelée *Expectation* (étape E). La seconde, consistant à calculer le maximum relativement à f , est appelée *Maximisation* (étape M). L'étude de la convergence de l'algorithme est donnée dans [Lang-84].

Le vecteur des données *incomplètes* est $m = (m_l)$, vecteur des données physiques. Le vecteur des données complètes $c = (c_{l,k})$ mais *non observables*, représente le nombre aléatoire de photons émis au sein du pixel k de l'image et captés lors de la projection l . Le calcul de l'espérance E_C fait intervenir la probabilité conditionnelle $P(c|m, f^p)$ que nous pouvons réexprimer grâce à la relation bayésienne :

$$P(c|m, f) = \frac{P(m|c, f) P(c|f)}{P(m|f)} \tag{6.7}$$

Or, d'après la condition (i) de (6.6), la probabilité conditionnelle $P(m|c, f)$ est égale à 1 si m est l'image de c par ψ , et nulle sinon. Dans le premier cas, lorsque $P(m|c, f) = 1$, la relation (6.7) devient :

$$P(m|f) = \frac{P(c|f)}{P(c|m, f)}$$

De cette dernière relation, l'espérance E_C se réécrit :

$$\begin{aligned} E_C[\ln P(m|f)|m, f^p] &= E_C[\ln P(c|f)|m, f^p] - E_C[\ln P(c|m, f)|m, f^p] \\ &= Q(f|f^p) - E_C[\ln P(c|m, f)|m, f^p] \end{aligned}$$

avec la quantité $Q(f|f^p)$ définie par :

$$Q(f|f^p) \stackrel{\text{def}}{=} E_C[\ln P(c|f)|m, f^p]$$

Considérons à présent une suite de paramètres $f^p, p = 0, 1, \dots$ que l'on cherche à estimer pour augmenter la log-vraisemblance à chaque itération. Donc, f^{p+1} , le prochain estimateur de l'algorithme, doit vérifier l'augmentation de la log-vraisemblance calculée en f^p , soit :

$$Q(f^{p+1}|f^p) - E_C[\ln P(c|m, f^{p+1})|m, f^p] > Q(f^p|f^p) - E_C[\ln P(c|m, f^p)|m, f^p] \quad (6.8)$$

L'inégalité de Jensen [Rao-73], valable quel que soit $f^{p+1} \neq f^p$, établit :

$$-E_C[\ln P(c|m, f^{p+1})|m, f^p] \geq -E_C[\ln P(c|m, f^p)|m, f^p] \quad (6.9)$$

Sachant (6.9), il suffit de vérifier l'augmentation de Q pour réaliser (6.8). On pose :

$$f_{ML}^{p+1} = \arg \max_{f \geq 0} Q(f, f^p) \quad (6.10)$$

Ainsi, à partir d'une estimée courante $f^p > 0$, l'estimation suivante est déterminée en réalisant les deux étapes de l'algorithme EM :

Etape E : Calcul de la quantité $Q(f|f^p) \stackrel{\text{def}}{=} E_C[\ln P(c|f)|m, f^p]$

Etape M : Recherche de l'optimum $f^{p+1} = \arg \max_{f \geq 0} Q(f|f^p)$

Remarque : Dans l'algorithme EM, le M-step recherche un maximum global du E-step. Une autre variante, l'algorithme Expectation-Maximisation Généralisé (GEM²), utilisé pour l'optimisation du critère du MAP, propose une méthode heuristique d'augmentation simple de la quantité $Q(f|f^p)$.

En s'aidant de (6.4) et en utilisant la nature poissonnienne de c , le calcul de la vraisemblance de c (conditionnelle à f), donne :

$$\begin{aligned} \ln P(c|f) &= \sum_{l,k} \{c_{lk} \ln \bar{c}_{lk} - \bar{c}_{lk} + \ln(c_{lk}!)\} = \sum_{l,k} \{c_{lk} \ln(H_{lk} f_k) - H_{lk} f_k + \ln(c_{lk}!)\} \\ &= \sum_{l,k} \{c_{lk} \ln f_k - H_{lk} f_k + \ln(c_{lk}!)\} + K(c, H) \end{aligned}$$

² Generalized Expectation Maximization

En utilisant cette dernière expression, l'étape E vaut encore ³:

$$E_C[\ln P(c|f)|m, f^p] = \sum_{l,k} \left\{ E_C[c_{lk}|m, f^p] \ln f_k - H_{lk} f_k \right\}$$

On peut montrer par ailleurs que le calcul de $E_C[c_{lk}|m, f^p]$ conduit à l'expression :

$$E_C[c_{lk}|m, f^p] = m_l \frac{H_{lk} f_k^p}{\sum_m H_{lm} f_m^p}$$

En regroupant ces deux dernières relations, on a finalement :

$$Q(f|f^p) = \sum_{l,k} \left\{ m_l \frac{H_{lk} f_k^p}{\sum_m H_{lm} f_m^p} \ln f_k - H_{lk} f_k \right\}$$

Nous avons vu que le M-step consiste à rechercher le maximum de la quantité $Q(f|f^p)$, qui est aussi le maximum de la log-vraisemblance. Sous les conditions que H a autant de lignes que de colonnes (système déterministe ou sur-déterministe) et qu'elle est de rang plein, alors un calcul de la dérivée seconde de la log-vraisemblance nous assure que $Q(f|f^p)$ est strictement concave [Shep-82]. Ainsi, l'obtention du maximum est réalisée en veillant à l'annulation des dérivées partielles en f_k , soit :

$$\frac{\partial Q(f|f^p)}{\partial f_k} = \sum_l \left[m_l \frac{H_{lk} f_k^p}{\sum_m H_{lm} f_m^p} \frac{1}{f_k} - H_{lk} \right] = 0 \quad (6.11)$$

Le schéma itératif menant au maximum de vraisemblance par l'algorithme EM (ML-EM⁴) s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} f^0 &\geq 0 \\ \forall p \geq 1, \forall k = 1 \dots n^2 \quad f_k^{p+1} &= f_k^p \frac{1}{\sum_l H_{l,k}} \sum_l H_{l,k} \frac{m_l}{\sum_m H_{l,m} f_m^p} \end{aligned}} \quad (6.12)$$

Une interprétation intuitive de l'équation (6.12) peut être donnée : on reconnaît au dernier terme la rétroprojection du rapport entre mesures et projection de l'estimée actuelle. Le second terme agit comme un facteur de normalisation (la rétroprojection de l'identité). Ainsi, l'algorithme stagne lorsque la solution a été trouvée.

L'équation (6.12) est aussi remarquable puisque les qualités du ML-EM sont directement lisibles du schéma. Ses propriétés sont les suivantes :

- le schéma itératif est multiplicatif : un élément f_k fixé initialement à zéro reste à zéro. En pratique, on ne fait itérer l'algorithme que sur les pixels recouvrant le domaine objet
- la contrainte de positivité est naturellement respectée, du moment que le vecteur initial vérifie aussi ($f^0 \geq 0$)

³ le terme $K(c, H)$ est indépendant de \mathbf{f} , son calcul est inutile pour rechercher un optimum suivant \mathbf{f}

⁴ Maximum Likelihood Expectation Maximization

- il y a conservation globale de la quantité de photons comptés au cours des itérations dès lors que la relation est vérifiée pour f^0 . Un calcul direct sur la relation montre :

$$\forall p > 0, \sum_{l,k} H_{l,k} f_k^p = \sum_l m_l$$

L'algorithme EM reconstruit d'abord les basses fréquences puis les hautes fréquences. Les détails et les contours ne se dessinent qu'à partir d'un certain nombre d'itérations. Ce problème a été contourné par l'algorithme FIR⁵ de Tanaka [Tan-87] en introduisant rapidement de l'information concernant les hautes fréquences. Etant donnée la lenteur de l'algorithme pour converger, la restitution des hautes fréquences de l'image intervient souvent en même temps que le schéma amplifie le bruit de mesure : c'est ce qu'on appelle le « checkerboard effect » [Snyd-87]. De nombreuses méthodes d'accélération de l'algorithme ont été proposées : par mise en œuvre d'une technique de surrelaxation [Lewi-86], de bases de polynômes minimaux [Raje-92], ou à partir des réordonnements spécifiques de projections (algorithme RAMLA⁶ [Mate-95]).

6.3.2. Cas d'une vraisemblance gaussienne

Il est souvent possible d'approcher la loi poissonnienne par une loi gaussienne. En effet, cette approximation est valide lorsque le nombre de coups est suffisamment grand (de l'ordre de 20 à 30 [Koul-96a]), ce qui la rend plausible dans de nombreux cas rencontrés en expertise de colis. En conséquence, nous pouvons considérer que le bruit de mesure est gaussien, centré et de matrice de covariance Λ . La loi de vraisemblance associée s'écrit alors :

$$P(m|f) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M |\det \Lambda|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(m - Hf)' \Lambda^{-1} (m - Hf)\right) \quad (6.13)$$

Suivant la même procédure que celle utilisée au § 6.3.1.2, la maximisation de la vraisemblance est équivalente à celle de la log-vraisemblance, ce qui revient ici à minimiser le critère quadratique :

$$E_v(f) = (m - Hf)' \Lambda^{-1} (m - Hf)$$

La solution du problème de minimisation est obtenue à partir de la résolution des équations normales :

$$H' \Lambda^{-1} Hf = H' \Lambda^{-1} m \quad (6.14)$$

Dans notre application, le bruit est supposé indépendant entre chaque mesure, de telle sorte que la matrice de covariance est alors diagonale, soit $\Lambda = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_M^2)$.

Le critère quadratique devient le critère des moindres carrés pondérés. A partir d'un développement de Taylor d'ordre 2 de la log-vraisemblance poissonnienne, Lalush et Bouman proposent une approximation des valeurs de la variance à $\sigma_i^2 = m_i$ [Boum-96], [Lalu-95].

Toutefois, en pratique, l'influence du choix du modèle de la matrice de covariance reste faible pour des taux de comptage classiquement rencontrés en SPECT [Koul-96b]. Nous choisissons finalement

⁵ Filtered Iterative Reconstruction

⁶ Row Action Maximum Likelihood Algorithm

la matrice de covariance telle que $\Lambda = \sigma^2 I$, et la log-vraisemblance dans le cas gaussien s'écrit alors :

$$E_v(f) = \frac{1}{2\sigma^2} \|m - Hf\|^2 \quad (6.15)$$

On reconstruit une solution approchée en minimisant l'erreur résiduelle $\|m - Hf\|^2$. La solution alors recherchée est celle des équations normales (6.14) (Λ n'intervient plus, puisque $\Lambda = \sigma^2 I$).

Si la matrice $H'H$ n'est pas inversible, la solution de (6.14) n'est plus unique. On peut adopter la solution associée à l'inverse généralisée de Moore-Penrose [Penr-55] de norme minimale :

$$f^* = H^+ m \text{ où le rang de } H^+ \text{ est égal au nombre de valeurs propres non nulles de } H'H.$$

Si la matrice $H'H$ est inversible la résolution des équation normales conduit à :

$$f^* = (H'H)^{-1} H'm$$

Les algorithmes itératifs de résolution du système $Hf = m$ ont été regroupées en trois grandes catégories. Nous abordons d'abord les méthodes projectives, plus précisément l'algorithme ART⁷, puis celles de résolution de systèmes linéaires carrés. Parmi ces dernières, on distinguera les méthodes de relaxation de celles de gradient. Les méthodes de gradient à pas optimal ou à paramètre constant sont présentés dans l'hypothèse où la matrice du système est symétrique et définie positive, pas tellement pour leur intérêt propre car leur propriété de convergence n'est pas très bonne mais plutôt pour servir d'introduction au gradient conjugué. Nous ne donnons que le schéma itératif du gradient conjugué, l'étude des étapes menant au schéma est exposé en annexe 3. Pour plus de précision sur les méthodes de relaxation et de gradient, on pourra se référer aux ouvrages de Ciarlet [Ciar-94] ou de Lascaux et Théodor [Lasc-93]. Néanmoins, nous rappelons une estimation du taux de convergence, fonction du conditionnement de la matrice, dans le cadre de ces méthodes.

6.3.2.1. Méthodes de projection

Des méthodes de projection sur ensembles convexes (POCS⁸), l'algorithme ART a été le plus utilisé en tomographie. Développé par Gordon et Herman, il a été un des tous premiers algorithmes de reconstruction itératifs à être utilisé [Gord-74], [Herm-76]. On trouve un exposé de différents types d'algorithmes ART dans [Cens-83].

Le principe de l'algorithme ART repose sur une séquence de projections d'une estimée f^p sur les hyperplans définis par les lignes du système matriciel à résoudre. La solution recherchée est alors située à l'intersection de tous ces hyperplans.

Lorsqu'on réunit l'ensemble des conditions, on peut montrer qu'on aboutit à la relation de Kaczmarz [Herm-80] :

⁷ Algebraic Reconstruction Technic

⁸ Projection Onto Convex Sets

$$f^{p+1} = f^p + \alpha^p \frac{H_{i_p}^t (m_{i_p} - H_{i_p} f^p)}{H_{i_p}^t H_{i_p}} \quad (6.16)$$

où $i_p = p \bmod N + 1$ et $\{\alpha^p\}_{p=1..}$ une suite de coefficients de relaxation.

Chaque itération de ART consiste à projeter séquentiellement f^p sur l'ensemble des hyperplans. A chaque projection de la séquence, l'estimée saute d'un hyperplan à l'autre et converge vers la solution plausible. L'algorithme ART peut également être présenté dans le cadre des projections sur des ensembles convexes à partir des travaux d'Oskoui-Fard [Osco-88].

Une démonstration particulièrement élégante de la relation de Kaczmarz dans le cas de la projection orthogonale ($\alpha^p = 1$), est donnée dans [Ridd-93] : on traduit la relation définissant la projection P_j correspondant à la $j^{\text{ième}}$ ligne dans le fait qu'elle réalise la minimisation de la norme entre g et f^* (la solution) sous la contrainte que g appartienne à l'hyperplan défini par la $j^{\text{ième}}$ mesure, soit $\{g \mid (Hg - m)_j = 0\}$. Pour minimiser une telle fonctionnelle, on construit le Lagrangien correspondant :

$$L(g, \alpha) = \frac{1}{2} \|g - f^*\|^2 + \alpha \langle Hg - m \mid e_j \rangle$$

où e_j est le $j^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de R^N . Des relations de Kuhn et Tucker [Ciar-94], on montre que l'annulation des dérivées partielles de L aboutit à la détermination de la solution (g^*, λ^*) telle que g^* est le minimum de la fonctionnelle sous contrainte. Après calcul des dérivées partielles, puis annulation, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha^* = -\frac{\langle m - Hf \mid e_j \rangle}{\|H^t e_j\|^2} = \frac{m_j - \sum_i H_{ji} f_i}{\sum_i H_{ji}^2} \\ \Rightarrow g^* = P_j f = f - \alpha^* H^t e_j \end{cases}$$

Le paramètre de relaxation α^p est choisi par l'utilisateur. Si $\alpha^p = 1$, chaque étape p correspond à une projection orthogonale de f^p sur les hyperplans d'équation $H_{i_p} f = m_{i_p}$, comme illustré à la figure 6.1.

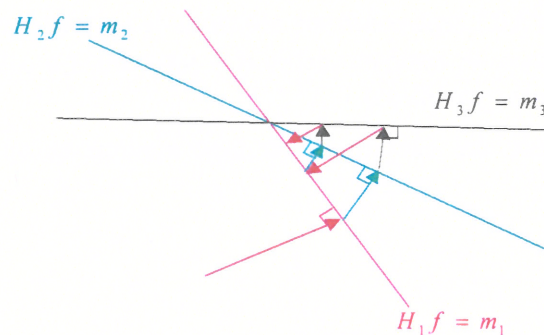


figure 6.1: Itérations successives dans un schéma ART avec projecteurs orthogonaux.

D'autres variantes de l'algorithme ont été implémentées pour accélérer la convergence ou diminuer le temps de calcul : l'algorithme SART (Simultaneous ART) traite la méthode par blocs, où un bloc est constitué de l'ensemble des équations liées à une projection. La méthode AART (Approximate ART) [Watt-94] est intéressante dans la mesure où elle est adaptée à la parallélisation du schéma. Alors que dans le schéma ART les itérés sont corrigés sur la base des erreurs résiduelles individuelles, la méthode AART propose une modification de l'itéré en un pixel de l'image, basée sur la somme des résidus issus des projections le contenant. L'algorithme AART se présente donc comme une technique de relaxation par colonne.

L'ordre de traitement séquentiel influe grandement sur la vitesse de convergence, la précision et la quantité d'artefacts reconstruits. Les recherches ont abondé dans ce sens. Dans [Muel-97] on trouvera une méthode heuristique de l'optimisation angulaire entre la nouvelle séquence et toutes celles qui ont été traitées jusqu'à présent. Cette technique visant à minimiser la corrélation dans l'ordre de séquençement, porte le nom de *Weighted-Distance Scheme* (WDS). La technique d'ordonnement la plus connue demeure la technique des « Ordered-Subset » (OS), surtout utilisée afin d'accélérer la convergence. Le principe de ces méthodes étant de trouver un ordonnancement des équations en sous-ensembles (blocs) de façon à traiter des blocs les plus orthogonaux possibles. Cette technique a été utilisée par exemple pour l'accélération des algorithmes EM et MAP-OSL [Koul-96a].

On trouvera une étude de l'influence du paramètre de relaxation dans [Ros-96]. En outre, Herman montre que les méthodes par blocs convergent si pour tout p on a $0 < \alpha^p < 2$ [Herm-78].

L'inconvénient des méthodes par blocs est qu'elles produisent des images très bruitées, en particulier lorsque la taille des blocs est petite [Ridd-93].

6.3.2.2. Méthodes itératives de relaxation

Nous nous plaçons à présent dans le cas général de la résolution du système matriciel à partir de méthodes itératives où A est une matrice réelle régulière de rang N :

$$Ax = b \tag{6.17}$$

Le principe des méthodes de relaxation est de scinder la matrice A sous la forme $A = P - Q$, avec P une matrice régulière. Les itérations successives résolvent à chaque étape :

$$Px^{p+1} = Qx^p + b$$

La partition de A est réalisée de manière à simplifier au maximum la résolution du système ci-dessus. Pour cela, on décompose A en une somme de trois matrices : on désigne par L et U , respectivement, les matrices « Lower » (partie inférieure) et « Upper » (partie supérieure) de A , et D sa diagonale. La décomposition de A est la suivante :

$$A = L + U + D \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} \cdot & & U \\ & D & \\ L & & \cdot \end{bmatrix}$$

Soit x^* la solution de (6.17), et $e(x^p) = x^* - x^p$ l'erreur commise à la $p^{\text{ième}}$ itération. Un calcul facile permet de montrer que cette dernière s'exprime en fonction de l'erreur commise au départ $e(x^0)$, par $e(x^p) = B^p e(x^0) = (I - P^{-1}A)^p e(x^0)$

La suite $\{e(x^p)\}_{p=1, \dots}$ définie ci-dessus converge si et seulement si $\rho(B) < 1$, où ρ désigne le rayon spectral⁹ de la matrice. La méthode itérative de Gauss-Seidel utilise la décomposition de A en :

$$P = D + L \text{ et } Q = -U$$

La méthode s'écrit alors :

$$(D + L)x^{p+1} = (b - Ux^p)$$

Mise sous sa forme discrète, la méthode de Gauss-Seidel à la ligne k s'écrit :

$$\sum_{l=1}^k a_{kl} x_l^{p+1} + \sum_{l=k+1}^N a_{kl} x_l^p = b_k$$

ce qui se simplifie encore pour donner :

$$x_k^{p+1} = \frac{1}{a_{kk}} \left\{ b_k - \sum_{l=1}^{k-1} a_{kl} x_l^{p+1} - \sum_{l=k+1}^N a_{kl} x_l^p \right\}$$

La méthode de Gauss-Seidel utilise simultanément les itérés récemment calculés pour la détermination des prochains. Elle s'apparente à une méthode ICM¹⁰ appliquée à la minimisation de la fonctionnelle $E(f) = \|Af - b\|^2$.

La méthode de Jacobi, que nous ne détaillons pas ici, utilise la décomposition $P = D$ et $Q = -(U + L)$. Le passage d'un vecteur x^p de la suite se fait en corrigeant successivement une composante de ce vecteur. Cette méthode n'utilise pas directement les derniers itérés d'ordre $p + 1$ dans la relation de récurrence. L'ensemble des itérés d'ordre $p + 1$ est déterminé à partir de ceux de la $p^{ième}$ itération. La méthode de Jacobi converge généralement plus lentement que celle de Gauss-Seidel et n'est pratiquement jamais utilisée.

On peut généraliser les deux méthodes précédentes (Gauss-Seidel et Jacobi) en introduisant un paramètre de relaxation ω : on parle alors de méthodes de relaxation. La détermination de f^{p+1} est donnée à partir de l'itéré précédent f^p et de \tilde{f}^{p+1} , où \tilde{f}^{p+1} est obtenue par une procédure de Jacobi ou Gauss-Seidel, soit :

$$f^{p+1} = \omega \tilde{f}^{p+1} + (1 - \omega) f^p$$

Dans le cas de la méthode de Gauss-Seidel, la procédure de relaxation porte le nom de SOR¹¹, et on a dans ce cas :

$$P = \frac{D}{\omega} + L \text{ et } Q = \frac{1 - \omega}{\omega} D - U$$

ce qui entraîne :

⁹ Le rayon spectral est la plus grande valeur propre de la matrice. On dit aussi que la matrice, est dans ce cas, contractante, puisqu'elle ne permet pas l'expansion de la norme du vecteur par itérations successives

¹⁰ Iterative Conditional Mode

¹¹ Succesive Over Relaxation

$$f^{p+1} = \left(\frac{D}{\omega} + L \right)^{-1} \left(\left(\frac{1-\omega}{\omega} D - U \right) f^p + b \right) \quad (6.18)$$

Le formalisme discret de ces méthodes mène au schéma itératif suivant [Lasc-93] :

$$f_k^{p+1} = \frac{\omega}{a_{kk}} \left[b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} f_j^{p+1} - \sum_{j=k+1}^N a_{kj} f_j^p \right] + (1-\omega) f_k^p \quad (6.19)$$

Le rayon spectral de la matrice d'itération vérifie $\rho(\omega) \geq |1-\omega|$. Une condition nécessaire pour que la méthode de relaxation converge est donc de prendre ω dans l'intervalle ouvert $]0,2[$. La détermination du paramètre optimal n'est pas connu dans l'absolu (sauf cas particuliers : A est la matrice du Laplacien à 5 points ou encore A est tridiagonale par blocs).

Les méthodes de relaxation peuvent se généraliser en utilisant des décompositions par blocs des matrices.

6.3.2.3. Méthodes de gradient

Aux méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel (dont les applications en tomographie sont principalement connues sous le nom d'itérations de Landweber (méthode SIRT¹²), les méthodes de gradient ont été préférées car, bien plus rapides. Van der Sluis montre au travers d'une intercomparaison détaillée entre les méthodes de type SIRT et les méthodes de gradient, que ces dernières conduisent globalement au même résultat mais avec des coûts de calculs de l'ordre de la racine carrée du temps pris par une méthode SIRT [Vand-90].

Dans un premier temps, on explicite le procédé des méthodes de type gradient dans le cas où A est une matrice symétrique, définie positive. Puis, dans le paragraphe suivant, la méthode de gradient conjugué est traitée. Pour plus de précision sur ces méthodes, le lecteur trouvera des explications détaillées des propriétés énoncées dans [Lasc-93] et [Ciar-94].

6.3.2.3.1. Les méthodes de gradient simple

Lorsque A est symétrique et définie positive, la fonctionnelle quadratique E de l'espace des images R^N vers R est définie par :

$$E(x) = \frac{1}{2} \langle Ax | x \rangle - \langle b | x \rangle = \frac{1}{2} x^t Ax - b^t x \quad (6.20)$$

On note x^* la solution du système matriciel $Ax = b$. Il y a équivalence entre x^* et le vecteur qui réalise le minimum de E , car, E est quadratique et définie positive. La fonctionnelle est différentiable et continue, son minimum est atteint en annulant le gradient :

$$E'(x) = Ax - b.$$

¹² Simultaneous Iterative Reconstruction Technique

On note par ailleurs le résidu du système, $r(x) = b - Ax$, et on définit l'erreur sur la solution par $e(x) = x - x^*$.

Ainsi, la résolution du système peut être abordée tantôt comme un problème d'optimisation si c'est la minimisation de la fonctionnelle E qui est recherchée, tantôt comme la résolution d'un système matriciel.

Dans le cadre général des méthodes de *descente*, on part d'une image arbitraire x^0 , et à la $p^{\text{ième}}$ étape de l'itération, on choisit un vecteur d^p de descente, *i.e.* il existe un scalaire $\alpha^p > 0$ tel que le vecteur x^{p+1} défini par $x^{p+1} = x^p + \alpha^p d^p$ vérifie la minimisation de la fonctionnelle :

$$E(x^{p+1}) = E(x^p + \alpha^p d^p) \leq E(x^p)$$

Les méthodes de *gradient* mettent à profit le fait que celui-ci indique toujours la direction de croissance maximale de la fonction. Afin de minimiser la fonctionnelle, on choisit alors le vecteur de descente dans le sens opposé au gradient, soit $d^p = r^p = b - Ax^p$, et donc :

$$x^{p+1} = x^p + \alpha^p r^p$$

Enfin, remarquons qu'il est équivalent de minimiser E ou de minimiser E^* défini par :

$$E^*(x) = \|x - x^*\|_A^2 = \langle A(x - x^*) | x - x^* \rangle = e(x)^t A e(x)$$

puisque les deux quantités diffèrent d'une constante indépendante de x , soit $E^*(x) = E(x) + \langle Ax^* | x^* \rangle$. Nous choisissons désormais de minimiser la quantité $E^*(x)$.

(i) La méthode du gradient à pas optimal

La méthode du gradient à pas optimal, encore appelée *steepest descent*, établit un choix optimal du scalaire α^p en fonction de d^p . A la $p^{\text{ième}}$ itération, le choix optimal de α^p consiste donc à minimiser $E^*(x^{p+1})$ dans la direction r^p , soit :

$$\begin{aligned} E^*(x^p + \alpha^p \cdot d^p) &= \min_{\alpha \in \mathbb{R}} [E^*(x^p + \alpha \cdot d^p)] \\ &= \min_{\alpha \in \mathbb{R}} [E^*(x^p) - 2\alpha \langle r^p | d^p \rangle + \alpha^2 \langle Ad^p | d^p \rangle] \end{aligned}$$

La minimisation du trinôme du second degré en α est obtenue pour :

$$\alpha^p = \frac{\langle r^p | d^p \rangle}{\langle Ad^p | d^p \rangle} \tag{6.21}$$

enfin, puisqu'on choisit $d^p = r^p$, la méthode s'écrit finalement :

$$\begin{cases} x^0, d^0 = r^0 \\ \alpha^p = \left(\|r^p\| / \|r^p\|_A \right)^2 \\ x^{p+1} = x^p + (\alpha^p)^2 r^p \end{cases}$$

et on vérifie facilement que les deux relations suivantes sont vraies :

$$r^{p+1} = r^p - \alpha^p Ad^p$$

$$\langle r^{p+1} | d^p \rangle = 0 \tag{6.22}$$

En dimension 2, l'interprétation géométrique des propriétés (6.22) est immédiate :

$E^*(x) = cte$ correspond à l'équation d'une ellipse. La famille de vecteurs $\{x^p\}_{p=1,2,\dots}$ de l'itération forment les courbes de niveau de la fonctionnelle E^* en ces points, et se caractérise par un ensemble de p ellipses concentriques autour du minimum x^* de la fonctionnelle (c.f. figure 6.2). Par construction le vecteur résidu r^p est tangent à l'ellipse $E(x) = E(x^{p+1})$. Comme r^{p+1} est orthogonal à la tangente de la courbe en ce point, on retrouve la propriété d'orthogonalité entre deux résidus consécutifs.

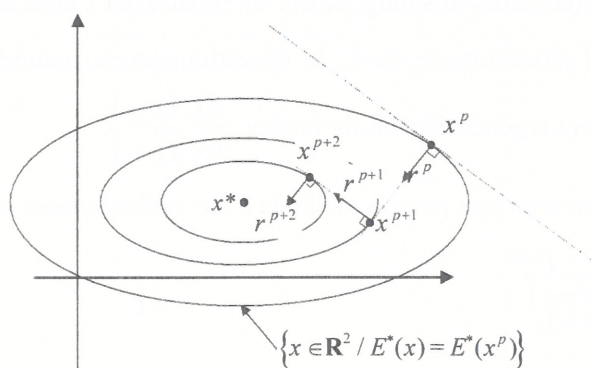


figure 6.2 : Itérations successives de l'algorithme de gradient à pas optimal lorsque $N = 2$

On peut constater, dans le cas de la figure 6.2, que si les courbes de niveaux de E deviennent des cercles concentriques, le calcul itératif aboutit à la solution en une seule itération (c.f. figure 6.3-A). Dans ce cas, il existe une base de R^N dans laquelle la matrice A est égale à l'identité (à une constante multiplicative près).

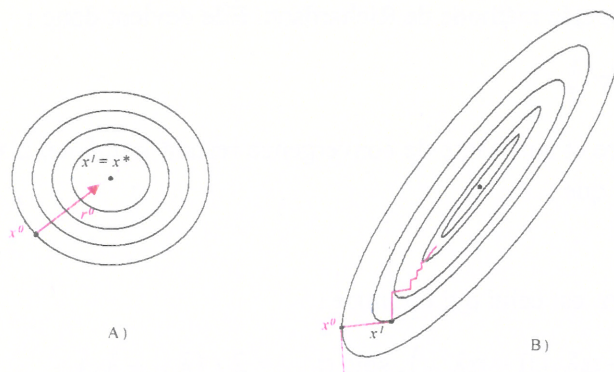


figure 6.3 : A) Cas particulier des courbes de niveaux circulaires. B) Cas où le conditionnement de A est grand (ellipsoïdes aplaties)

Ce cas particulier illustre en fait une notion importante dans les algorithmes itératifs, à savoir la relation entre le taux de convergence¹³ et le conditionnement de la matrice, noté $K(A)$.

Soit $spec(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$. En norme euclidienne, le conditionnement matriciel est défini par :

$$K(A) = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|} = \frac{\lambda_N}{\lambda_1}$$

Aussi, lorsque $K(A)$ est proche de 1, c'est-à-dire lorsque les valeurs propres sont presque toutes égales, alors les courbes de niveau de la fonctionnelle correspondante tendent à ressembler à des sphères (c.f. figure 6.3-A). Inversement, plus $K(A)$ tend vers 0, plus les ellipses tendent à s'aplatir. Le taux de convergence devient alors très long, ce qui est illustré par l'effet zig-zag de la figure 6.3-B.

On retiendra que si $K(A)$ est proche de 1, le conditionnement numérique est bon. On pourra vérifier que la rapidité de convergence dépend du facteur $\frac{K(A) - 1}{K(A) + 1}$.

Très précisément, on peut montrer que pour la méthode à pas optimal, nous avons :

$$E(x^p) \leq E(x^0) \left(\frac{K(A) - 1}{K(A) + 1} \right)^{2p}$$

et le nombre d'itérations est proportionnel à $K(A)$, car pour que $E(x^p) \leq \varepsilon E(x^0)$, il suffit que :

$$p > \frac{K(A)}{4} \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

(ii) La méthode du gradient à pas constant

Il arrive que la convergence ait lieu en zig-zag (cf. figure 6.3-B), avec un facteur de réduction de l'erreur d'autant plus proche de 1 que $K(A)$ est grand. Pour diminuer le nombre d'opérations par itérations, on peut alors considérer la méthode où α^p est constant. Cette méthode du gradient à pas constant est également appelée méthode de Richardson. Elle devient donc :

$$x^{p+1} = x^p + \alpha(b - Ax^p)$$

La condition nécessaire et suffisante de convergence restant la même, à savoir $\rho(I - \alpha A) < 1$, on montre qu'il faut et suffit que :

$$0 < \alpha < 2 / \lambda_N.$$

Le meilleur choix de α est celui qui optimise :

$$\rho(I - \alpha A) = \max(|1 - \alpha \lambda_1|, |1 - \alpha \lambda_N|), \text{ soit } \alpha_{opt} = 2 / (\lambda_N + \lambda_1).$$

¹³ qui exprime la rapidité de convergence de l'algorithme. Une définition mathématique est donnée dans [Lasc-93]

En prenant α optimal dans la méthode du gradient à pas constant, le facteur de réduction de l'erreur est de l'ordre de $\frac{K(A) - 1}{K(A) + 1}$, comme pour le gradient à pas optimal. Il nécessite toutefois de connaître λ_1 et λ_N , ce qui n'est pas le cas en pratique.

6.3.2.3.2. Application à la reconstruction

La plupart des algorithmes de descente utilisés en tomographie a été développée à partir de l'équation normale [Xu-93]. L'estimée f^* recherchée est dite solution des moindres carrés, solution de $H^t Hf = H^t m$.

Une grande partie des schémas de descente présentés jusqu'ici s'applique au problème de la reconstruction tomographique. Le schéma itératif peut se mettre sous la forme suivante :

$$f^{p+1} = f^p + \alpha^p B H^t (m - Hf^p)$$

Les différents algorithmes alignés sur cette formulation sont :

- **Les méthodes SIRT**: on fixe $\alpha^p = \alpha = cte$ et $B = S$ où S est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux s_i sont égaux à l'inverse de la somme des longueurs des rayons passant par le pixel i . Van der Sluis donne une formulation générale de ces méthodes [Vand-90] :

$$f^{p+1} = f^p + \omega S H^t T (m - Hf^p)$$

$$f^{p+1} = (I - \omega S H^t T H) f^p + \omega S H^t T m$$

où S et T sont des opérateurs diagonaux.

Elles peuvent être perçues comme des méthodes de préconditionnement matriciel. En effet, le système à résoudre est maintenant $S H^t T H f = S H^t T m$, et les opérateurs S et T ont pour rôle d'améliorer les propriétés spectrales de la matrice $H^t H$ des équations normales. Van der Sluis montre par exemple en dimension finie, que l'opérateur $(I - \omega S H^t T H)$ est contractant lorsque :

$$S_k = \frac{1}{\sum_j |H_{jk}|^\gamma}, T_k = \frac{1}{\sum_l |H_{kl}|^{2-\gamma}} \quad 0 \leq \gamma \leq 2, 0 < \omega < 2$$

Malgré l'introduction de ces termes, les méthodes SIRT restent trop lentes. On retrouve également des matrices de pondération dans certaines méthodes d'inverses approchés, comme celle de Chang [Chan-78] et de Bourguignon [Bour-93], [Mazé-93] (avec $\gamma = 1$)

- **Les méthodes de Landweber généralisées** [Stra-74] : $B = P_{H^t H}$ où $P_{H^t H}$ est un opérateur polynomial fonction de $H^t H$ et $\alpha^p = \alpha = cte$. Le cas particulier où $P_{H^t H} = I_N$ est appelé méthode de Landweber [Land-51]. C'est aussi la méthode de gradient à pas constant. L'itération de Landweber s'écrit donc :

$$f^{p+1} = f^p + H^t (m - Hf^p)$$

- **La méthode de gradient à pas optimal** [Clin-93] : on a $B = I_N$ (opérateur identité) et $\alpha^p = \frac{\|r^p\|^2}{\|r^p\|_{H'H}^2}$ d'après la relation (6.21)

Si on choisit de plus l'estimée initiale nulle ($f^0 = 0$), la solution vers laquelle ces méthodes convergent est celle des moindres carrés de norme minimale. Les conditions de convergence de ces méthodes restent les mêmes, c'est-à-dire qu'on a convergence si et seulement si $\rho(I - \alpha^p B H' H) < 1$. La vitesse de convergence dépend du spectre de $\alpha^p B H' H$.

L'utilisation de matrices diagonales dans les méthodes SIRT ou de polynômes pour la méthode de Landweber permet d'améliorer le taux de convergence, même si cela alourdit le schéma itératif global.

Dans tous les cas, ces méthodes souffrent d'une vitesse de convergence très faible du fait du mauvais conditionnement matriciel du produit $H' H$. Dans le cadre de la tomographie atténuée, le conditionnement matriciel est très mauvais. Cela a pour conséquence de ralentir la rapidité de convergence (et donc d'augmenter les calculs et les erreurs d'approximation), d'où l'intérêt de méthodes itératives plus rapides, tels que les algorithmes de type gradient conjugué.

6.3.2.3.3. La méthode du gradient conjugué

Seuls l'idée de départ, les caractéristiques ainsi que le schéma de l'algorithme sont traités ici. Le lecteur pourra se référer à l'annexe 3 pour un développement plus complet de cette technique.

Dans le gradient conjugué, une direction de descente d^p est cherchée, différente du gradient cette fois-ci, telle que le résidu à la $(p+1)^{i\text{ème}}$ itération soit orthogonal à toutes les directions de descente précédentes : $r^{p+1} \perp d^l, l = 1 \dots p$. On choisit α^p le minimum local d'après la relation (6.21), et on conserve la relation d'orthogonalité $\langle r^p | d^{p-1} \rangle = 0$; on va chercher d^p dans le plan formé par les deux directions orthogonales r^p et d^{p-1} :

$$d^p = r^p + \beta^p d^{p-1}$$

β^p est alors choisi de manière à ce que le facteur de réduction de l'erreur soit le plus grand possible dans $E^*(x)$. Après calcul, on peut montrer qu'en initialisant les variables à $x^0, d^0 = r^0 = b - Ax^0, \beta^0 = 0$, la boucle du gradient conjugué est :

$$\text{Pour } p = 0, 1, \dots \left\{ \begin{array}{l} \alpha^p = \frac{\|r^p\|^2}{\|d^p\|_A^2} \\ x^{p+1} = x^p + \alpha^p d^p \\ r^{p+1} = r^p - \alpha^p A d^p \\ \beta^{p+1} = \frac{\|r^{p+1}\|^2}{\|r^p\|^2} \\ d^{p+1} = r^{p+1} + \beta_{k+1} d^p \end{array} \right. \quad (6.23)$$

Le coût essentiel de cette méthode est le calcul du produit matriciel Ad^p . Elle n'en reste pas moins une des mieux adaptées à la résolution de systèmes linéaires dont la matrice est symétrique et définie positive.

L'algorithme converge en au plus N itérations, lorsque N est la dimension de la matrice. La méthode est donc théoriquement directe. En pratique cependant, la convergence peut nécessiter plus de N itérations à cause des erreurs d'arrondi. En conséquence, la méthode est considérée comme itérative.

Par analogie avec les méthodes de descente, on a cette fois-ci un facteur de convergence tel que :

$$E(x^{p+1}) \leq 4E(x^0) \cdot \left(\frac{\sqrt{K(A)} - 1}{\sqrt{K(A)} + 1} \right)^{2p} \quad (6.24)$$

le nombre d'itérations étant proportionnel à $\sqrt{K(A)}$. En effet, pour que $E(x^p) \leq \varepsilon E(x^0)$, il suffit que :

$$k > \frac{\sqrt{K(A)}}{2} \ln \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (6.25)$$

Comme les méthodes de gradient simple étudiées ont un nombre d'itérations proportionnel à $K(A)$, la méthode de gradient conjugué apparaît plus rapide et est préférée dans la suite de notre étude.

6.3.3. Instabilité des estimateurs ML-EM et CG

Nous montrons au travers d'un exemple, que quel que soit le type de vraisemblance utilisée, les estimateurs du maximum de vraisemblance ou la solution des moindres carrés ne convergent pas vers la solution désirée en présence de bruit sur les mesures. Cette « pseudo-instabilité »¹⁴ est en réalité due au caractère mal-posé du problème inverse en tomographie et non aux méthodes employées. Le mauvais conditionnement matriciel engendre l'amplification du bruit lorsqu'on poursuit les itérations, et les images reconstruites s'éloignent de l'image originelle non bruitée qui est recherchée. Cette particularité est plutôt gênante en tomographie d'émission, où le nombre de photons comptés peut être, selon les circonstances, faible et les mesures bruitées, soit un rapport signal sur bruit (SNR)¹⁵ assez pauvre.

Dans le cadre d'une vraisemblance poissonnienne, les images reconstruites par l'algorithme EM tendent à se détériorer après un certain nombre d'itérations, et restituent des reconstructions bruitées (c.f. figure 6.4). On retrouve cet aspect granuleux (« checkerboard effect ») caractéristique au ML-EM à la dernière image.

En effet, comme le MLE encourage l'ajustement aux données de manière à maximiser la vraisemblance, un bruit sur les mesures induit une perturbation du MLE. Une méthode peu coûteuse pour surmonter ce problème consiste à appliquer des procédures d'arrêt des itérations. On retrouve des

¹⁴ par abus de langage, on parlera dans la suite de l'instabilité (où de la divergence) des méthodes, dans le sens où l'image reconstruite s'éloigne de l'activité recherchée.

¹⁵ Signal to Noise Ratio

versions légèrement lissées de l'algorithme pour éviter la propagation des artefacts [Shep-82], à partir de validations croisées [Falc-98], souvent aussi à partir d'hypothèses statistiques [Llac-89], [Vekl-87].

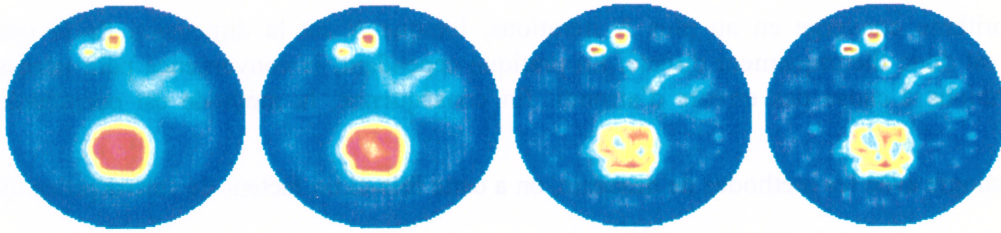


figure 6.4 : Images reconstruites aux itérations 50, 100, 500 et 2000 par le ML-EM sur le fantôme numérique CASPER (c.f. chapitre 7). Le rapport signal sur bruit est de 23 dB (bruit poissonien).

L'instabilité numérique se retrouve aussi dans le cadre d'une vraisemblance gaussienne. Elle se traduit visuellement par une amplification du bruit au fur et à mesure que le nombre d'itérations augmente (c.f. figure 6.5). La méthode du gradient conjugué n'intègre pas naturellement de contrainte de positivité sur la solution, aussi celle-ci tend rapidement à « exploser » numériquement. La méthode CGLS¹⁶ utilisée, correspond à la méthode CG appliquée aux équations normales.

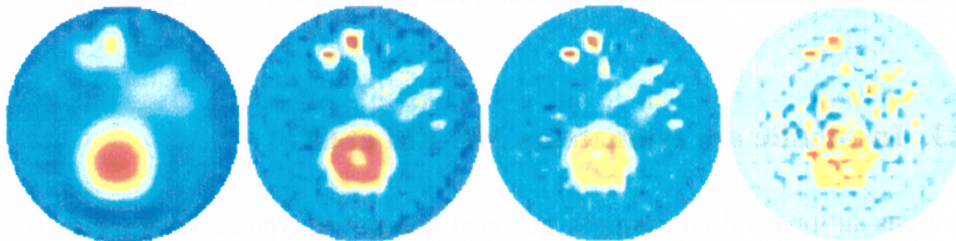


figure 6.5 : Variations de l'image reconstruite par la méthode CGLS sur le fantôme CASPER pour les itérations 10, 50, 100 et 500. Le SNR est de 43dB avec bruit poissonien. On constate que la méthode est plus rapidement instable que le ML-EM.

Au travers de ces deux exemples on voit donc, que le maximum de vraisemblance et le critère des moindres carrés sont instables et ne convergent pas vers la solution lorsque le nombre d'itérations augmente. La vraisemblance poissonienne diverge moins rapidement que le gradient conjugué. Qui plus est, les images obtenues par la méthode ML-EM sont itérées sur une mesure de $SNR = 23dB$, alors que le CG travaille sur une mesure bruitée à 43dB. La méthode ML-EM semble donc plus robuste au bruit que le CG.

Une approche plus générale vise à diminuer les artefacts dans l'image par l'introduction d'une probabilité *a posteriori* sur la structure formée par l'image. La régularisation du problème consiste globalement à introduire de l'information *a priori*. Cette information est très souvent de type structurelle. Elle peut se faire de manières diverses :

¹⁶ Conjugate Gradient Least Square

- on suppose, indépendamment des mesures, que l'image répond à une distribution *a priori* ; c'est l'approche bayésienne,
- on peut l'incorporer sous forme de pénalité, on contraint alors l'image à répondre à un standard de mesure : c'est le principe de régularisation de Philipps-Tikhonov [Tikh-63]. Le principe consiste à introduire la pénalisation sous forme d'une mesure de douceur, généralement par la mesure d'une norme sur l'image. Par exemple, avec une vraisemblance gaussienne, cela revient à résoudre le critère des moindres carrés suivant :

$$J(f) = \|m - Hf\|^2 + \rho \|Cf\|^2 \quad (6.26)$$

Le paramètre ρ est le paramètre de régularisation contrôlant le compromis entre fidélité aux mesures et la solution « douce ». C est l'opérateur de différentiation contrôlant la douceur de l'image. Si C est pris égal à l'unité, on contrôle ainsi la norme de la solution, si C est pris égal au Laplacien, on contrôle alors le gradient de l'image. La solution de (6.26) est celle du système :

$$(H' H + \rho C' C) f = H' m$$

- en utilisant une cartographie d'atténuation, nous pouvons introduire deux sortes d'informations : la première sur la distribution des zones de matériaux, la seconde sur les caractéristiques physiques de chaque matériau. Une distribution markovienne semble bien convenir pour traduire l'information structurelle [Dint-90].

Nous abordons maintenant la structure des distributions *a priori* utilisé dans le cadre de l'approche bayésienne.

6.4. MODELES DE DISTRIBUTIONS *A PRIORI*

6.4.1. Estimateur du Maximum *A Posteriori*

L'estimateur du MAP dans l'approche bayésienne est un moyen séduisant de s'affranchir des problèmes d'instabilité : il procède en incorporant une information *a priori* sur la distribution statistique de l'image. L'apport de l'*a priori* stabilise la solution dans le sens où on restreint volontairement l'espace des solutions fidèles aux mesures (à une précision donnée), à un sous-espace où les solutions répondent à une distribution introduite par l'utilisateur. Les méthodes MAP sont équivalentes à des procédures de pénalisation [Ciar-94] : on pénalise la vraisemblance de certaines images lorsqu'elles répondent à une probabilité trop faible d'existence, même si à celles-ci peuvent correspondre une probabilité $P(m|f)$ importante.

f est maintenant un paramètre muni de sa propre distribution (non uniforme) probabiliste. L'estimateur f_{MAP} est la fonction qui optimise le logarithme de la distribution *a posteriori*, soit :

$$f_{MAP} = \arg \max_{f \geq 0} [\ln P(m|f) + \ln P(f)] \quad (6.27)$$

La structure de ces *a priori* fait l'objet de la section suivante. Nous décrivons les champs de Markov et leur équivalence à d'autres distributions : les distributions de Gibbs. Puis, nous montrons comment ces dernières s'inscrivent dans les schémas itératifs de reconstructions bayésiennes.

6.4.2. Modélisation de l'a priori sur un champ de Markov

Dans ce contexte, se donner une distribution *a priori* revient à exprimer une connaissance de la structure spatiale de l'image, tels que les zones homogènes, des cassures, de bords francs, etc. Comme il est plutôt difficile de définir une telle structure sur la globalité de l'image, une approche classique consiste à formuler des hypothèses sur les caractéristiques locales de l'image. De telles distributions tendent à favoriser la formation d'intensités similaires sur des structures de voisinage, aux exceptions près où des séparations franches viennent à apparaître.

Les champs de Markov aléatoires (MRF¹⁷) sont devenus un des outils mathématiques les plus usités dans le cadre des approches bayésiennes. Ils permettent une spécification claire des attributs de l'image en terme de caractéristiques locales et conduisent à des expressions mathématiques malléables pour l'analyse numérique ultérieure.

L'image f est définie comme un champ aléatoire à partir d'un ensemble de sites s_k , que l'on note $S = \{s_k\}_{k=1..n^2}$. Un champ de Markov aléatoire sur S est un processus stochastique caractérisé par une distribution des valeurs de chaque point conditionnée par la valeur des voisins en ce point, soit :

$$P(F_k = f_k | \{F_s = f_s | s \neq k\}) = P(F_k = f_k | \{F_s = f_s | s \in \mathcal{V}_k\})$$

où \mathcal{V}_k désigne l'ensemble des pixels voisins du site s_k . La définition sous-entend explicitement la donnée d'une structure de voisinage $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_s, s \in S\}$. Cette dernière vérifie les deux conditions suivantes :

- i) $\forall k \quad s_k \notin \mathcal{V}_k$
- ii) $\forall s_k, s_l \in S, \quad s_k \in \mathcal{V}_l \Leftrightarrow s_l \in \mathcal{V}_k$

L'ensemble des sites satisfaisant à ces conditions sont appelés des « cliques », notées c . Dans [Gema-84], les voisinages sont classifiés selon leur ordre : pour $k = (i, j)$, on définit le voisinage $\mathcal{V}_{i,j}^\kappa$ d'ordre κ de la forme $\mathcal{V}_{i,j}^\kappa = \{(m, n) | 0 < (m - i)^2 + (n - j)^2 \leq \kappa\}$

Nous représentons à la figure 6.6, les voisinages à quatre et huit voisins qui sont les plus couramment utilisés.

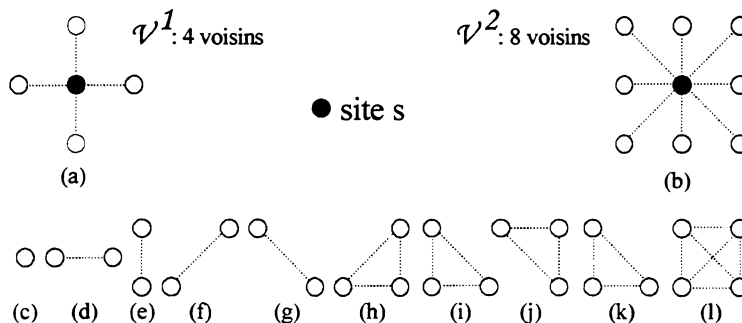


figure 6.6: Voisinage et cliques associées : (a) voisinage du premier ordre \mathcal{V}^1 . (b) voisinage du second ordre \mathcal{V}^2 . De (c) à (e) les cliques associées à \mathcal{V}^1 . De (c) à (l) les cliques associées à \mathcal{V}^2 .

¹⁷ Markov Random Fields

Dans la suite nous travaillerons uniquement¹⁸ sur les structures \mathcal{V}^1 et \mathcal{V}^2 .

Nous avons vu que la modélisation du champ f comme un champ de Markov se détermine à partir de la probabilité marginale $P(f_k)$ conditionnellement à ses voisins. Le passage à la probabilité jointe $P(f)$ sur l'ensemble du domaine, à partir de l'ensemble de probabilités marginales est une tâche difficile. Les distributions de Gibbs, développées à la section suivante, permettent de définir une probabilité jointe à partir de probabilités marginales markoviennes.

6.4.2.1. Distribution de Gibbs - Théorème de Hammersley-Clifford

Le théorème de Hammersley-Clifford énonce qu'un champ de variables aléatoires f est un champ de Markov si et seulement si sa probabilité $P(f)$ est une distribution de Gibbs de forme générale :

$$P(f) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E_p(f)), \quad (6.28)$$

où β est une constante positive jouant le rôle de paramètre de contrôle et Z une constante de normalisation calculée à partir de l'ensemble des réalisations possibles de f :

$$Z = \sum_{\{f\}} \exp(-\beta E_p(f))$$

avec E_p correspondant à la "fonction d'énergie" relative à l'*a priori*. La forme générale de E_p sur l'ensemble des cliques est :

$$E_p(f) = \sum_{(s,t) \in C} \varphi(w_{st} [\partial^{(k)} f]_{st}) \quad (6.29)$$

C étant l'ensemble de toutes les cliques, φ est une **fonction de potentiel** définie pour chaque clique c du système de voisinage.

Le terme $\partial^{(k)}$ désigne l'opérateur différentiel d'ordre k . Pour une image supposée constante par morceaux, les dérivées sont prises d'ordre 1. Pour obtenir une image linéaire par morceaux, nous devrions prendre des dérivées d'ordre 2 [Gema-92], etc.

Dans l'ensemble des algorithmes développés nous avons utilisé l'opérateur de gradient ($k=1$) sur l'image¹⁹. Pour les applications faisant usage de l'opérateur gradient, les cliques c correspondantes sont les cliques à deux sites (cliques (d) à (g) de la figure 6.2).

Les w_{st} sont des scalaires positifs agissant comme des coefficients de pondération en fonction de la nature de la clique. Ils prennent généralement une valeur proportionnelle à l'inverse de la distance [Gema-87]. Pour les cliques verticales et horizontales (cliques (d) et (e) de la figure 6.2), on pose $w_{st} = 1$, et sur les cliques obliques (cliques (f) et (g) de la figure 6.2) $w_{st} = 1/\sqrt{2}$. Les travaux réalisés par Manbeck suggèrent que la réelle portée des coefficients w_{st} n'est pas primordiale [Manb-90].

¹⁸ exception faite du modèle « Thin-Plate » à la section 6.5.5

¹⁹ le modèle « Thin Plate » utilise les dérivées secondes ($k=2$).

Les dérivées partielles sur l'image sont obtenues à partir des schémas classiques de dérivation sur les éléments finis [Lasc-93].

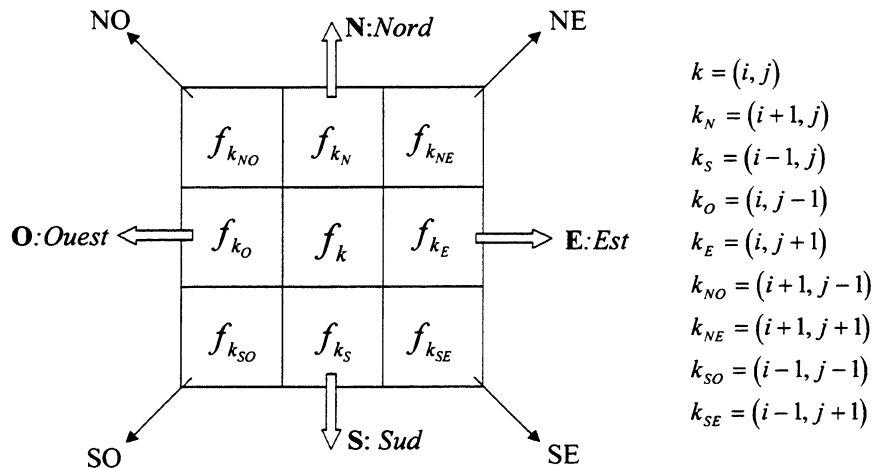


figure 6.7 : Orientation cardinale de l'image et indexation du site (i,j) et des 8 voisins

Pour les dérivées partielles d'ordre 1, nous utilisons les approximations décentrées avant, précises au premier ordre :

$$(\partial f)_{s,t} = (f_t - f_s) / \delta$$

où le paramètre δ permet la mise à l'échelle des valeurs du gradient de l'image. Nous fixons provisoirement ce paramètre à 1, afin d'alléger les notations. Nous y reviendrons à la section suivante.

Lorsqu'on utilise le voisinage d'ordre 1, l'expression de l'énergie *a priori* s'écrit :

$$E_P(f) = \sum_{k \in S} \sum_{l=k_N, k_S, k_O, k_E} \varphi[(\partial f)_{kl}]$$

Lorsqu'on utilise le voisinage d'ordre 2, les termes diagonaux viennent se rajouter :

$$E_P(f) = \sum_{k \in S} \left\{ \sum_{l=k_N, k_S, k_O, k_E} \varphi[(\partial f)_{kl}] + \sum_{l=k_{NE}, k_{SE}, k_{NO}, k_{SO}} \varphi \left[\frac{(\partial f)_{kl}}{\sqrt{2}} \right] \right\}$$

Dans la suite du développement, on utilise un voisinage d'ordre 1 de manière à simplifier les écritures. L'implémentation des algorithmes, quant à elle, fait usage d'un voisinage d'ordre 2. Nous notons désormais $\partial_x f$ et $\partial_y f$ les dérivées suivant x et y . L'énergie *a priori* s'écrit alors :

$$E_P(f) = \sum_k \left\{ \varphi[(\partial_x f)_k] + \varphi[(\partial_y f)_k] \right\} \quad (6.30)$$

6.4.2.2. Retour à la distribution *a posteriori*

Le théorème de Hammersley-Clifford établit l'équivalence entre champ de Markov et champ de Gibbs, associée à une famille de fonctions de potentiel φ indexées par l'ensemble des cliques c du voisinage \mathcal{V} . Ce résultat est très important puisqu'il permet de s'affranchir des modèles de probabilités

marginales, et donne, de surcroît, une formule explicite de la distribution jointe de $P(f)$ selon (6.28).

Le choix de la fonction d'énergie, primordiale dans la détermination des algorithmes de reconstruction et sur l'image reconstruite, devra répondre à l'objectif suivant :

- les configurations de f probables devront être de basse énergie,
- la fonction de potentiel ϕ est équivalente à une fonction de coût.

Avec une distribution de Gibbs sur un voisinage d'ordre 1, la solution du MAP revient à maximiser la quantité :

$$\begin{aligned} f_{MAP} &= \arg \max_{f \geq 0} [\ln P(m|f) + \ln P(f)] \\ &= \arg \max_{f \geq 0} [\ln P(m|f) - \beta E_p(f) - \ln Z] \\ &= \arg \max_{f \geq 0} [\ln P(m|f) - \beta E_p(f)] \end{aligned} \quad (6.31)$$

la troisième relation utilise le fait que Z est une constante indépendante de f , elle n'intervient donc pas dans le processus d'optimisation. La fonction d'énergie en (6.30) ainsi que l'énergie de vraisemblance $E_v(f) = -\ln P(m|f)$ définissent ensemble une fonction d'énergie globale E . On préfère alors rechercher l'estimateur du MAP comme l'état minimal d'une fonction d'énergie totale $E(f) = -\ln P(f|m)$, soit :

$$f_{MAP} = \arg \min_{f \geq 0} (E(f)) = \arg \min_{f \geq 0} [E_v(f) + \beta E_p(f)]$$

β peut être vu comme le paramètre de régularisation, contrôlant le compromis entre fidélité aux mesures ($\beta=0$) et fidélité au modèle *a priori* ($\beta=+\infty$).

Lorsque la vraisemblance est supposée poissonnienne, le critère du MAP à minimiser devient alors :

$$f_{MAP} = \arg \min_f \left[\sum_l \left(\sum_k H_{l,k} f_k - m_l \ln \left(\sum_k H_{l,k} f_k \right) \right) + \beta \sum_k \left\{ \phi[(\partial_x f)_k] + \phi[(\partial_y f)_k] \right\} \right] \quad (6.32)$$

Dans le cas d'une vraisemblance gaussienne, le critère du MAP à minimiser est :

$$f_{MAP} = \arg \min_f \left[\|m - Hf\|^2 + \beta \sum_k \left\{ \phi[(\partial_x f)_k] + \phi[(\partial_y f)_k] \right\} \right] \quad (6.33)$$

Le critère du MAP est la plupart du temps non convexe à cause du terme de fonction d'énergie $E_p(f)$. Dans ce cas, les algorithmes déterministes sont tous sous-optimaux, en ce sens qu'ils ne permettent d'atteindre qu'un minimum local de l'énergie $E(f)$. Ainsi, les algorithmes de descente simple du type relaxation, gradient, gradient conjugué, ou encore l'ICM [Besa-86] risquent fort de rester bloqués au premier minimum local trouvé. Les estimées peuvent alors être de mauvaise qualité.

Des techniques d'optimisation de fonctionnelles non convexes existent néanmoins, elles font appel à des algorithmes stochastiques, tel que le recuit simulé de Kirkpatrick [Kirk-83]. Cependant, du fait

de leur extrême lourdeur en temps de calcul, elles ne peuvent raisonnablement fonctionner sur des unités de calcul classiques.

Des stratégies déterministes, dérivées du recuit simulé, ont été proposées afin d'obtenir de « bonnes » solutions pour des coûts de calculs inférieurs. Les plus connues sont la Non Convexité Graduelle (GNC²⁰) [Blak-87] et le Recuit par Champ Moyen (MFA²¹) [Geig-91] mais leur mise en forme demeure fastidieuse.

Si la convexité de la fonction de potentiel influe sur l'unicité de la solution et sur la convergence de l'algorithme, c'est avant tout l'allure de la fonction φ et le choix du paramètre de régularisation β qui déterminent le type d'images reconstruites.

6.4.3. Les fonctions de potentiel et préservation des discontinuités

Les fonctions de potentiel doivent être des fonctions paires, puisqu'elles doivent être indépendantes du signe du gradient. Leur étude peut de ce fait se restreindre à l'intervalle $[0, +\infty[$. Avant de définir les critères nécessaires à la préservation des contours, voyons un exemple de fonction de potentiel qui ne convient pas à notre objectif :

Prenons le cas de la fonction de potentiel quadratique $\varphi(x) = x^2$. Le critère du MAP se met sous la forme :

$$E(f) = E_v(f) + \beta \left(\|\partial_x f\|^2 + \|\partial_y f\|^2 \right)$$

Si la vraisemblance était gaussienne, ce critère serait celui de la régularisation de Philipps-Tikhonov [Tikh-63] (voir relation (6.26)). Ce schéma ne permet pas la préservation des discontinuités naturelles de l'image. En effet, la minimisation du critère du MAP exige une diminution globale du gradient de l'image. L'image reconstruite se trouve donc uniformément lissée et les discontinuités se voient gommées. Et si on cherche à diminuer le coefficient β , on pénalise effectivement moins la présence de forts gradients dans l'image. Ce faisant, on ne pénalise pas non plus les forts gradients correspondants aux artefacts. L'image conserve son aspect bruité du départ.

Remarque : En pratique, il est, absolument impossible de déterminer si tel ou tel gradient de l'image reconstruite correspond à un réel contour de l'image ou s'il s'agit d'un artefact. Nous émettons donc l'hypothèse, certes discutable, que les forts gradients correspondent à de réelles discontinuités qu'il faut préserver, tandis que pour des valeurs inférieures, les gradients sont considérés comme issus d'une amplification du bruit et, de ce fait, peuvent être lissés. Le problème réel réside dans le fait qu'une image peut avoir à la fois des contours et des bruits de gradients identiques : il est donc difficile de les discriminer devant la régularisation.

Afin de préserver les discontinuités, Geman propose d'introduire un « processus de ligne » dans le modèle de l'image [Gema-84]. Ce processus utilise un champ de variables booléennes l , marquant les discontinuités de l'image. La convention suivante est utilisée :

- en l'absence de discontinuités, le processus est fixé à $l=1$,

²⁰ Gradual Non Convexity

²¹ Mean Field Annealing

- lorsque qu'une discontinuité entre deux pixels voisins est détectée, $l=0$.

On décompose le processus selon $l = (l_x, l_y)$, sur les lignes et colonnes de l'image. Le processus l_x repère les discontinuités selon les colonnes : au point (i, j) , on note $(l_x)_{i,j}$ le processus entre ce pixel et $(i, j + 1)$. De même, l_y repère les discontinuités selon les lignes : au point (i, j) , on note $(l_y)_{i,j}$ le processus entre ce pixel et $(i + 1, j)$ (c.f. figure 6.8).

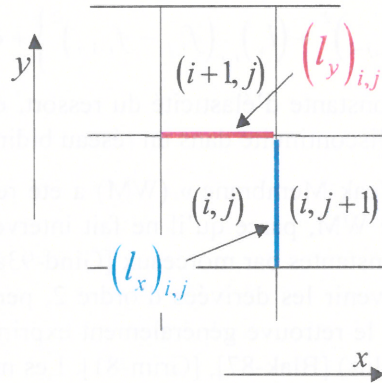


figure 6.8 : Processus de ligne vertical $(l_y)_{i,j}$ (rouge) et horizontal $(l_x)_{i,j}$ (bleu)

Quelques versions de processus de ligne ont été utilisées dans la restauration d'images [John-91] ainsi qu'en imagerie médicale [Gind-93a]. Des modèles plus complets utilisant des cliques à plus de deux éléments, font appel à des processus plus complexes²² [Gema-84]. Le nouveau modèle considère alors l'estimation simultanée de l'image f et de la variable non-observable l , en terme d'un couple de champ de Markov. La nouvelle solution du MAP s'écrit alors comme :

$$(f_{MAP}^*, l_{MAP}^*) = \arg \min_{(l, f)} [E_V(f) + \beta E_P(f, l)] \quad (6.34)$$

On peut montrer que le terme $E_P(f, l)$ peut se mettre sous la forme [Gema-84] :

$$E_P(f, l) = \underbrace{\sum_k \left\{ (l_x)_k (\partial_x f)_k^2 + (l_y)_k (\partial_y f)_k^2 \right\}}_{E_i(f, l)} + \underbrace{\sum_k \left[[1 - (l_x)_k] + [1 - (l_y)_k] \right]}_{E_r(l)} \quad (6.35)$$

Le premier facteur est appelé *énergie d'interaction* entre f et l , le second, *énergie de régularisation* du processus de ligne, correspondant au coût de la création d'une discontinuité. En effet, en son absence, l'énergie totale est minimisée en posant $l=0$, et l'image ainsi reconstruite présente des

²² Ces derniers permettant la détection de contours plus élaborés (coins, croisements, contours continus ou interrompus) sont particulièrement adaptés dans le cas où la structure de l'image répond à un standard géométrique connu (par exemple les images satellites).

discontinuités partout [Geig-91]. En associant une pénalité de 1 à chaque discontinuité créée, on supprime cet inconvénient.

L'énergie *a priori* du (6.35) se comporte donc comme un potentiel quadratique dans les zones uniformes de l'image ($l = 1$) : le lissage y est donc favorisé. Dans les zones de discontinuités ($l=0$), le lissage est interrompu puisque l'énergie de régularisation est indépendante de f : en effet, une diminution du gradient aux zones de fracture ne favorise pas la minimisation de l'énergie de l'*a priori*. Blake montre que l'expression de l'énergie (6.35) présente des analogies avec l'expression de la fonction d'énergie d'une chaîne de ressorts dits élastiques et « cassables »²³ [Blak-87] :

$$E_{WM}(f, l) = \lambda \sum_i \left\{ (l_x)_{i,j} (f_{i,j} - f_{i,j-1})^2 + (l_y)_{i,j} (f_{i,j} - f_{i-1,j})^2 \right\} + \alpha \sum_k \left(\left[1 - (l_x)_{i,j} \right] + \left[1 - (l_y)_{i,j} \right] \right)$$

où le paramètre λ correspond à la constante d'élasticité du ressort, et α au poids de la pénalisation accordée à la création d'une cassure (discontinuité dans un réseau bidimensionnel de ressorts).

Ce modèle portant le nom de « Weak Membrane » (WM) a été repris dans [Lee-95a] comme un des choix de distribution *a priori*. Le WM, parce qu'il ne fait intervenir que le gradient de l'image, favorise la reconstruction d'images constantes par morceaux [Gind-93a]. Le modèle d'ordre supérieur, le « Weak Plate » (WP), faisant intervenir les dérivées d'ordre 2, permet la reconstruction d'images linéaires par morceaux [Lee-95b]. On le retrouve généralement exprimé sous une version laplacienne ou quadratique (dérivées croisées en plus) [Blak-87], [Grim-81]. Les modèles WM et WP montrent de bonnes dispositions à reconstruire des images tomographiques de bonnes qualités visuelles avec respect des discontinuités [Gind-93b]. Néanmoins, l'utilisation d'algorithmes déterministes de recuit les rend moins attractifs. Nous verrons à la section 6.5.5 une utilisation simplifiée du WP qui conduit au modèle « Thin-Plate » (TP) et ne nécessite pas d'algorithmes de recuit déterministe.

6.4.3.1. Processus de ligne implicite discontinu

L'expression (6.34) engendre une charge de calcul assez importante. En effet, la minimisation requiert une technique d'optimisation hybride : le champ f , considéré comme continu, est sujet à des techniques d'optimisation de type gradient, alors que le processus de ligne booléen l fait plutôt appel à de l'optimisation combinatoire. Toutefois, on peut inclure le processus de ligne de manière implicite dans une fonction de potentiel [Blak-87], en posant :

$$(l_x)_{i,j} = \begin{cases} 1, & (V_x)_{i,j} \leq 1 \\ 0, & (V_x)_{i,j} > 1 \end{cases}, \quad \text{et} \quad (l_y)_{i,j} = \begin{cases} 1, & (V_y)_{i,j} \leq 1 \\ 0, & (V_y)_{i,j} > 1 \end{cases}$$

avec :

$$(V_x)_{i,j} = (\partial_x f)_{i,j}^2, \quad \text{et} \quad (V_y)_{i,j} = (\partial_y f)_{i,j}^2$$

Cette transformation permet d'éliminer le processus de ligne en l'intégrant implicitement dans une fonction de potentiel. Dans ce cas, la nouvelle énergie *a priori* s'écrit :

$$E_p(f) = \sum_{i,j} \varphi_{BZ} \left(\sqrt{(V)_{i,j}} \right)$$

²³ la convention utilisée par les auteurs pour les valeurs booléennes est inversée : on retrouve la formule en interchangeant l et $(1-l)$.

où φ_{BZ} est la quadratique tronquée élaborée par Blake et Zisserman [Blak-87]. Elle est définie par $\varphi_{BZ}(x) = \min(x^2, 1)$

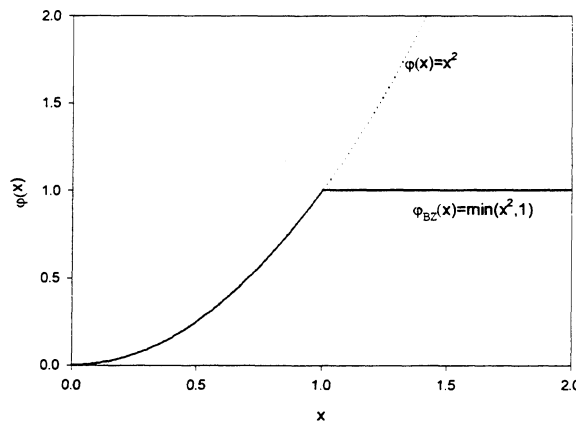


figure 6.9 : fonction quadratique (pointillés) et fonction quadratique tronquée (trait plein)

Finalement, le problème de minimisation a été réduit à celui d'une minimisation sur la seule variable f . Un inconvénient est que la fonction φ_{BZ} n'est pas dérivable en 1. En conséquence, une variation de x autour de 1, peut entraîner une variation importante du potentiel, ce qui peut avoir une répercussion sur la régularisation de l'image.

Un autre inconvénient est que l'énergie totale à minimiser peut être maintenant non-convexe, et peut avoir plusieurs minima locaux. Outre la méthode du recuit simulé, une alternative possible est d'utiliser des méthodes dites de recuits déterministes [Gind-93b] [Rang-92], ces derniers restent, somme toute, assez lourd d'utilisation.

6.4.3.2. Processus de ligne implicite continu

Une façon de pallier les inconvénients de la quadratique tronquée, est d'utiliser une fonction de potentiel continue qui approche celle-ci. Par exemple, Geman et McClure [Gema-85] proposent la

fonction $\varphi_{GM}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ dont l'allure est donnée à la figure 6.10.

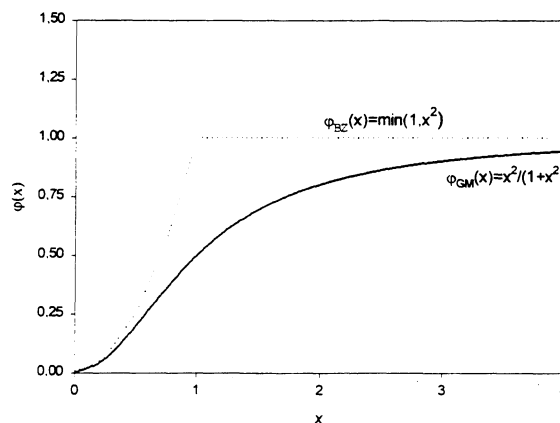


figure 6.10 : Potentiel de Geman et McClure (traits pleins)

La fonction φ_{GM} correspond en fait à un processus de ligne implicite, comme toutes celles vérifiant les conditions du théorème 1 énoncé par Geman et Reynolds [Gema-92] :

Théorème 1 :

Soit $\varphi(x)$ une fonction définie sur $[0, +\infty[$ vérifiant les trois conditions :

$$\varphi(0)=0$$

$\varphi(\sqrt{x})$ est concave

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$$

alors, il existe $\psi(l)$ une fonction définie pour $l \in [0,1]$ telle que :

$$\varphi(x) = \inf_{0 \leq l \leq 1} (lx^2 + \psi(l)) \tag{6.36}$$

$$\psi(0)=1$$

$\psi(l)$ est strictement décroissante

$$\psi(1)=0$$

On remarque, dans [Blak-87] comme dans l'expression (6.36) du théorème, que l'objectif est d'assurer une équivalence entre le modèle couplé (f,l) et une fonction de potentiel donnée.

Remarque : Dans le modèle utilisant la fonction φ_{BZ} , l'expression de ψ est donnée puisqu'on a $\psi(l)=(1-l)$.

Malgré l'utilisation répandue des distributions de Gibbs en restauration d'images, l'étude des propriétés théoriques des fonctions de potentiel reste rare et les conclusions ne sont pas toujours unificatrices. Ainsi, par exemple dans [Lang-90], les sept conditions²⁴ :

1 et 2 : positivité et parité de la fonction $\varphi(x) \geq 0$, et $\varphi(-x) = \varphi(x)$:

3 et 4 : conditions aux limites : $\varphi(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$

5 et 6 : conditions sur la dérivée : $\sup_{x \in [0, +\infty[} \varphi'(x) < +\infty$ et $\varphi'(x) > 0$

7 : $\varphi''(x) > 0$ (convexité de φ)

sont énoncées comme des propriétés nécessaires à la convergence de la méthode OSL²⁵ [Gree-90]. Or, les propriétés 4 et 7 sont en contradiction avec l'existence de l'asymptote horizontale à l'infini et la concavité $\varphi(\sqrt{x})$ figurant au théorème 1.

²⁴ sur les 7 conditions suffisantes dénombrées, la fonction de Green n'en vérifie que trois.

²⁵ One-Step-Late : une méthode utilisée pour atteindre le critère du MAP lorsque la vraisemblance est poissonnienne.

Notons cependant que la dernière des propriétés de Lange insiste sur la convexité de φ ce qui assure l'unicité du minimum du MAP. Cette condition est également défendue par d'autres auteurs comme Green [Gree-90] ou Bouman [Boum-93].

Ces derniers proposent une gamme de potentiels s'insérant dans le cadre général des « Champs de Markov Gaussiens Généralisés ». Ils ont la forme :

$$\varphi_{BS}(x) = |x|^p \quad 1 \leq p < 2$$

Pour le cas limite où $p = 1$, la distribution est laplacienne : le potentiel a été proposé par Besag [Besa-86]. Pour $p = 2$, la distribution est gaussienne, et on retrouve le potentiel quadratique qui pénalise la présence de forts gradients, et de ce fait ne peut préserver les contours francs. C'est pourquoi cette valeur est exclue de l'intervalle.

D'autres auteurs ont opté pour la fonction de potentiel de Huber [Stev-90] :

$$\varphi_{HU}(x) = \min[x^2, 2x - 1].$$

La fonction de Huber est quadratique près de zéro, mais linéaire à partir de 1.

D'autres fonctions de potentiel, convexes et non-convexes ont été suggérées dans la littérature. Parmi celles-ci, on citera celle de Lange [Lang-90], de Geman et Reynolds [Gema-92], et celle de Hebert et Leahy [Hebe-89]. La démarche empirique utilisée par ces derniers, a conduit à trouver une fonction réalisant un compromis entre la fonction φ_{GM} et la fonction quadratique. Le potentiel φ_{HL} est non-convexe, et s'écrit :

$$\varphi_{HL}(x) = \ln(1 + x^2)$$

On peut effectivement espérer que l'utilisation de potentiels non-convexes est mieux adaptée à la préservation de contours francs dans une image constante par région. Toutefois, l'utilisation de potentiels non-convexes complique l'optimisation au sens du MAP et la convergence vers l'optimum global n'est pas assurée. C'est pourquoi de nombreux auteurs proposent des potentiels convexes. Parmi les fonctions les plus utilisées citons le potentiel de Green [Gree-90], qui s'écrit :

$$\varphi_{GR}(x) = 2 \log[\cosh(x)]$$

Cette fonction a un comportement polynomial en zéro et se comporte linéairement à l'infini en $2(x - \ln 2)$.

Le potentiel des *hyper-surfaces*, encore appelé potentiel des « surfaces minimales », fait également partie de l'ensemble de famille ayant un comportement polynomial :

$$\varphi_{HS}(x) = 2\sqrt{1 + x^2} - 2 \tag{6.37}$$

L'utilisation de la fonction φ_{HS} revient à poser une contrainte sur la longueur totale des courbes décrites par les lignes et les colonnes de l'image [Char-94].

Un bon nombre de ces fonctions ne respecte pas les conditions énoncées par le théorème de Geman et Reynolds, notamment la convergence vers une asymptote horizontale à l'infini.

Charbonnier a montré que l'on pouvait relâcher cette hypothèse [Char-94]. Ceci permet alors à des fonctions convexes de préserver les discontinuités tout en imposant un lissage sur les régions uniformes de l'image. L'étude théorique du théorème et la convergence de l'énergie *a priori* est donnée dans [Aube-94]. Le théorème s'énonce comme suit :

Théorème 2 : Soit $\varphi(x)$ une fonction définie sur $[0, +\infty[$ telle que $\varphi(\sqrt{x})$ soit strictement concave et soient L et M définis comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi'(x)}{2x} = L$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi'(x)}{2x} = M$, alors :

il existe $\psi: [L, M] \rightarrow [\alpha, \beta]$ une fonction strictement convexe et décroissante telle que :

$$\varphi(x) = \inf_{L \leq l \leq M} (lx^2 + \psi(l)) \quad (6.38)$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\varphi(x) - x^2 \frac{\varphi'(x)}{2x} \right) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \beta$$

pour tout x positif, la valeur de l pour laquelle la borne inférieure est atteinte est unique et est donnée par : $\inf_{L \leq l \leq M} (lx^2 + \psi(l)) = (l_{\text{inf}}(x)x^2 + \psi(l_{\text{inf}}(x)))$ avec

$$l_{\text{inf}}(x) = \frac{\varphi'(x)}{2x} \quad (6.39)$$

La fonction $\frac{\varphi'(x)}{2x}$ est appelée **fonction de pondération**.

Nous allons voir maintenant, au travers des équations normales, comment les conditions énoncées ci-dessus permettent de conserver les discontinuités dans l'image.

6.4.3.3. Passage aux équations normales

Les équations normales associées au critère du MAP s'écrivent :

$$\frac{\partial E(f)}{\partial f} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_v(f)}{\partial f} + \beta \frac{\partial E_p(f)}{\partial f} = 0$$

Nous nous intéressons au terme relatif à la régularisation. L'énergie *a priori* est celle exprimée en (6.30). On a alors :

$$\frac{\partial E_p(f)}{\partial f} = \sum_{k \in S} \left\{ \left(\frac{\partial E_p(f)}{\partial f} \right)_k \right\} = \sum_{k \in S} \left\{ \sum_{l=k_v, k_s, k_o, k_E} \frac{\partial \varphi[(\partial f)_{kl}]}{\partial f} \right\}$$

où tous les termes faisant intervenir l'élément f_k sont :

$$\left(\frac{\partial E_p(f)}{\partial f} \right)_k = \left\{ -\varphi'(f_{k_E} - f_k) - \varphi'(f_{k_v} - f_k) + \varphi'(f_k - f_{k_o}) + \varphi'(f_k - f_{k_s}) \right\} \quad (6.40)$$

On réécrit cette expression en faisant apparaître le rapport $\frac{\varphi'(x)}{2x}$:

$$\varphi'(f_i - f_s) = 2(f_i - f_s) \frac{\varphi'(f_i - f_s)}{2(f_i - f_s)}$$

et on considère que l'écriture reste valide en 0 moyennant un prolongement par continuité lorsque le gradient entre les deux pixels voisins est nul. En posant maintenant :

$$\begin{aligned}\lambda_{k_E} &= \frac{\Phi'(f_{k_E} - f_k)}{2(f_{k_E} - f_k)}, \lambda_{k_N} = \frac{\Phi'(f_{k_N} - f_k)}{2(f_{k_N} - f_k)}, \\ \lambda_{k_O} &= \frac{\Phi'(f_k - f_{k_O})}{2(f_k - f_{k_O})}, \lambda_{k_S} = \frac{\Phi'(f_k - f_{k_S})}{2(f_k - f_{k_S})}, \\ \text{et } \Lambda_k &= \lambda_{k_E} + \lambda_{k_N} + \lambda_{k_O} + \lambda_{k_S}\end{aligned}\tag{6.41}$$

on peut alors écrire (6.40) sous la forme :

$$\left(\frac{\partial E_P(f)}{\partial f}\right)_k = 2\{\Lambda_k f_k - \lambda_{k_E} f_{k_E} - \lambda_{k_N} f_{k_N} - \lambda_{k_O} f_{k_O} - \lambda_{k_S} f_{k_S}\}$$

La régularisation peut être vue comme un filtrage de l'image par l'opposé d'un Laplacien pondéré : chaque point f_k de f est modifié par le filtre Δ_{pond} défini tel que :

$$\Delta_{pond}(f_k) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{k_N} & 0 \\ \lambda_{k_O} & -\Lambda_k & \lambda_{k_E} \\ 0 & \lambda_{k_S} & 0 \end{bmatrix}\tag{6.42}$$

et

$$\left(\frac{\partial E_P(f)}{\partial f}\right)_k = -2\Delta_{pond}(f_k) \cdot f\tag{6.43}$$

Les coefficients de la matrice du Laplacien sont calculés à partir de la fonction de pondération appliquée au gradient entre les voisins et le point central. On peut voir concrètement comment opère le filtre de régularisation suivant qu'on se trouve sur une zone de fracture ou sur une zone uniforme. Le premier objectif est de lisser les zones homogènes, c'est-à-dire les zones de faible gradient. Supposons que la fonction de potentiel vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Phi'(x)}{2x} = 1$$

alors, pour une grille 3x3 placée dans une zone uniforme, tous les gradients sont nuls et, de ce fait, les coefficients λ sont égaux à 1. La matrice Δ_{pond} se réduit à la matrice du Laplacien à 5 points. Nous obtenons donc bien un lissage du gradient de l'image.

Le second objectif est de préserver les discontinuités réelles du lissage. Supposons que la fonction de potentiel vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Phi'(x)}{2x} = 0$$

Alors, pour une grille 3x3 se trouvant sur une discontinuité dans la direction « Est », on aurait

$$\lambda_E = \frac{\Phi'(f_{k_E} - f_k)}{2(f_{k_E} - f_k)} = \varepsilon \quad (\text{avec } \lim_{|f_k - f_{k_E}| \rightarrow +\infty} \varepsilon = 0), \text{ les autres coefficients } \lambda \text{ restant égaux à 1. Le lissage}$$

est donc atténué (interrompu lorsque $\varepsilon=0$) dans cette direction afin de préserver la discontinuité (cf. figure 6.11)

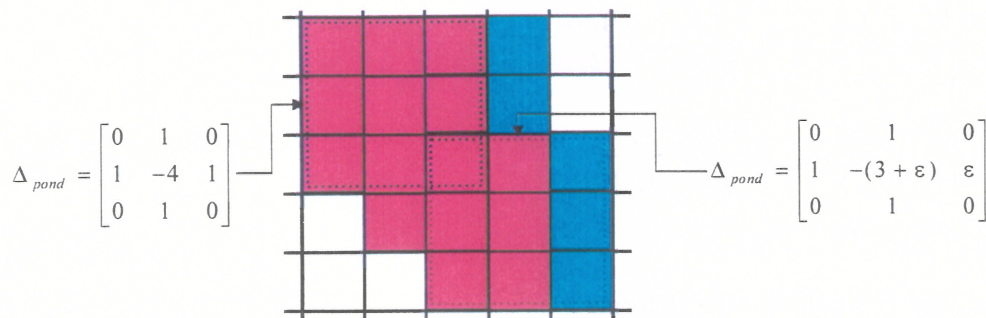


figure 6.11 : Comportement du filtre laplacien pondéré sur une zone uniforme (grille 3x3 rouge) et une région avec une discontinuité dans la direction « Est » (grille 3x3 rouge-bleu).

Afin d'assurer la continuité de la solution par rapport aux données, Charbonnier impose une hypothèse de continuité sur la fonction entre ces deux limites [Char-94].

En résumé, la fonction de potentiel doit vérifier :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi'(x)}{2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi'(x)}{2x} = 0$$

$\frac{\varphi'(x)}{2x}$ est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$,

Ces trois conditions permettent une régularisation avec prise en compte des discontinuités et lissage des zones homogènes. On remarquera au passage que la dernière condition est équivalente à la stricte concavité de $\varphi(\sqrt{x})$ énoncée au théorème 2.

6.4.4. Paramètres des distributions de Gibbs retenues

6.4.4.1. Les fonctions de potentiel

Parmi les fonctions de potentiel passées en revue au dernier paragraphe, certaines respectent les trois conditions de prise en compte des discontinuités, d'autres non. Il est facile de voir ainsi que ni le potentiel quadratique (tronqué ou non), ni le potentiel de Huber, ni les potentiels gaussiens généralisés ne respectent les trois conditions simultanément. Les deux premières conduisent à des fonctions de pondération non dérivables sur $[0, +\infty[$. Lorsque la valeur du gradient oscille autour du point de discontinuité de la dérivée, la valeur du lissage donnée par la fonction de pondération ne varie pas de manière continue. Donc, une infime variation sur la donnée du gradient peut entraîner un changement

important du coefficient de lissage, et influencer l'aspect de l'image, ce qui va à l'encontre du principe de régularisation.

Les fonctions que nous avons utilisé sont au nombre de deux : la fonction de Geman et McClure, en guise de fonction non convexe, et celle des Hyper-surfaces pour la fonction convexe. Dans le tableau 6.1, nous avons rajouté celle de Hebert et Leahy et celle Green, bien qu'elles ne soient pas utilisées pour les régularisations. En effet, le potentiel des hyper-surfaces se comporte de manière identique à la fonction de Green (c.f. *figure 6.12*). L'expression de sa fonction de pondération est directe et ne nécessite aucun prolongement par continuité en 0. Son utilisation, comparée à celle du potentiel de Green, permet d'accélérer des algorithmes implémentés vectoriellement. C'est la seule fonction de potentiel convexe que nous utilisons dans les applications. D'autre part, nous avons préféré celle de Geman et McClure à celle de Hebert et Leahy, car sa décroissance en $1/x^4$ tranche davantage avec le potentiel des hyper-surfaces.

Potentiels	Expression de $\varphi(x)$	Nature de $\varphi(x)$	Expression de $\varphi'(x)/2x$	Décroissance de $\varphi'(x)/2x$
GM :Geman et McClure	$\varphi_{GM}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$	Non convexe	$\frac{1}{(1+x^2)^2}$	$\frac{1}{x^4}$
GR :Green	$\varphi_{GR}(x) = 2 \log[\cosh(x)]$	Convexe	$\begin{cases} 1, & x = 0 \\ \tanh(x)/x, & x \neq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{x}$
HL :Hebert et Leahy	$\varphi_{HL}(x) = \ln(1+x^2)$	Non convexe	$\frac{1}{(1+x^2)}$	$\frac{1}{x^2}$
HS :Hyper-surface	$\varphi_{HS}(x) = 2\sqrt{1+x^2} - 2$	Convexe	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$

tableau 6.1 : Fonctions de potentiels étudiées et quelques propriétés

L'analyse de la forme des fonctions de pondération laisse entrevoir deux états de fonctionnement. Pour des valeurs de gradients proches de zéro, les fonctions de pondération, autrement dit les coefficients de lissage, convergent vers la valeur 1. Pour des gradients tendant vers l'infini, les pondérations tendent toutes vers zéro. Le lissage est donc interrompu, la préservation des discontinuités est possible. La décroissance asymptotique des différents potentiels (c.f. tableau 6.1 colonne 5) nous informe sur le mode de transition entre lissage et préservation des discontinuités.

Pour la fonction des hyper-surfaces, la décroissance (en $1/x$) est douce : la transition entre lissage et préservation des discontinuités est progressive. En revanche, la fonction de Geman et McClure décroît (en $1/x^4$) très rapidement vers 0, la transition est donc plus franche : la décision de lisser ou non est plus brutale. Dans ce cas, on peut s'attendre à des restitutions de contours plus nettes que dans celui du potentiel des hyper-surfaces.

On retrouve cette propriété au sein de la famille de potentiels gaussiens généralisés [Boum-93]. En effet, dans ce cas, la fonction de pondération décroît en $1/x^{2-p}$ (pour p fixé dans $[1,2[$) : lorsque p tend vers 2, la transition entre état de lissage et état de conservation des discontinuités disparaît.

Il est également intéressant de noter que la prise en compte des discontinuités ne dépend pas de la convexité de la fonction de potentiel. On peut s'attendre néanmoins à des images aux bords moins francs avec des potentiels convexes.

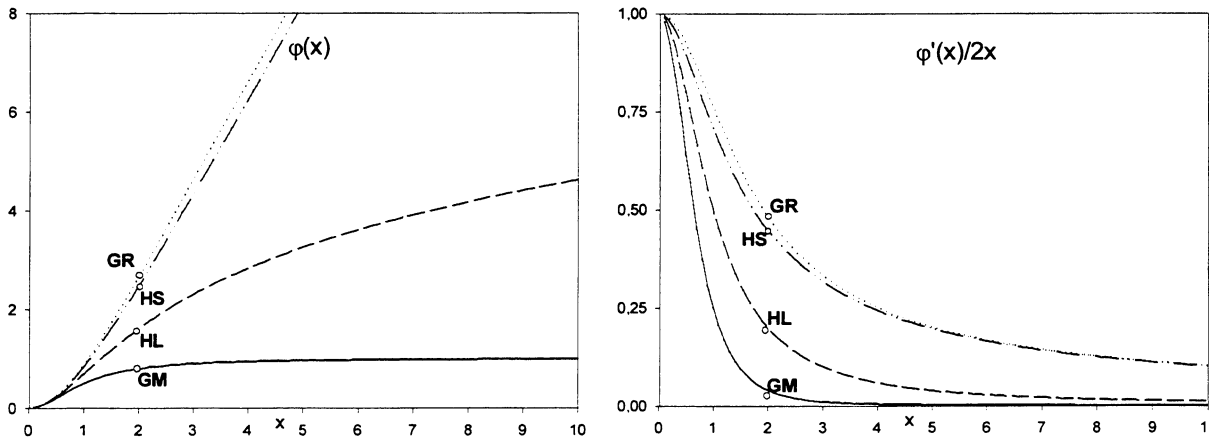


figure 6.12 : Fonctions de potentiel (à gauche) et fonctions de pondération associées (à droite)

En contrepartie, on est assuré de l'unicité du MAP, et qu'une approche déterministe suffit pour converger vers le minimum global.

Comme nous le voyons à la figure 6.12, les fonctions de potentiel ont des vitesses de décroissance très différentes. En pratique, nous utilisons une version harmonisée du potentiel de Geman et McClure, et de celui des hyper-surfaces. L'harmonisation consiste à appliquer à chacune d'elles un facteur homothétique afin que les fonctions de pondération aient une allure identique. Cela facilite la comparaison des algorithmes pour des paramètres de Gibbs (β, δ) fixés, et évite d'avoir des solutions très différentes les unes des autres.

Potentiels	Expression de $\varphi(x)$	Expression de $\varphi'(x)/2x$
GM :Geman et McClure	$\varphi_{GM}(x) = \frac{(3x)^2}{3(1+(3x)^2)}$	$\frac{1}{(1+(3x)^2)^2}$
HS :Hyper-surface	$\varphi_{HS}(x) = \frac{1}{100} \left(2\sqrt{1+(100x)^2} - 2 \right)$	$\frac{1}{\sqrt{1+(100x)^2}}$

tableau 6.2 : Fonctions de potentiel et de pondération harmonisées en $x=1$

Dans [Gree-90], on trouve des propositions d'harmonisation portant directement sur la fonction de potentiel.

Toutefois, comme c'est la fonction de pondération qui détermine l'action de lissage, il paraît plus logique d'harmoniser celle-ci [Char-94]. Les constantes multiplicatives sont choisies de manière à ce que la pondération soit proche de 1% lorsque le gradient est égal à 1.

Leur expression est donnée au tableau 6.2, et une illustration est donnée à la figure 6.13.

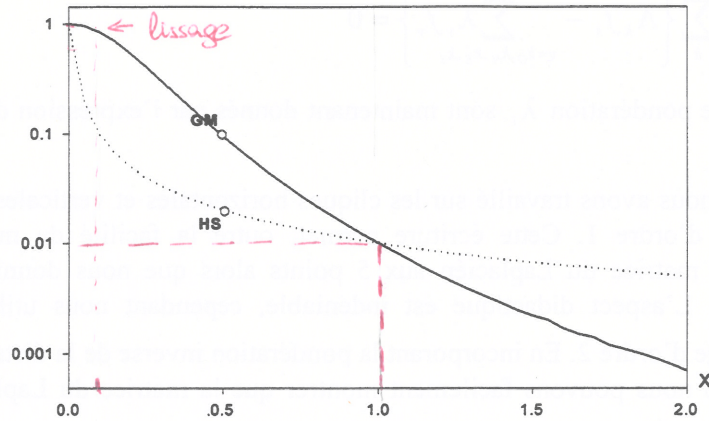


figure 6.13 : Fonctions de pondération utilisées en reconstruction. (Echelle logarithmique en ordonnées).

6.4.4.2. Hyperparamètres des distributions

Par hyperparamètres des distributions de Gibbs, on entend le paramètre β qui pondère l'importance de la distribution *a priori* de l'image par rapport à la vraisemblance aux données, et le paramètre δ . Les deux paramètres jouent un rôle capital dans la structure de l'image reconstruite.

Il est rappelé que le paramètre δ effectue une mise à l'échelle de l'*a priori* par rapport aux données et est donc amené à diviser les valeurs du gradient de l'image. Ce dernier dépend donc entièrement de la dynamique des images à traiter dans la pratique. Ainsi, les fonctions de potentiel ne sont plus simplement fonction de la différence entre pixels voisins $(f_i - f_s)$, mais fonction de $(f_i - f_s)/\delta$. Il traduit, vis-à-vis d'une fonction de potentiel donnée et d'une image, la valeur minimale à partir de laquelle une discontinuité est pénalisée ou non.

Si δ est choisi trop grand, la valeur des processus de ligne calculée est située dans la première zone de la courbe, c'est-à-dire le lissage des gradients. Le filtre va avoir tendance à se comporter comme un filtre laplacien classique. Si on choisit δ trop petit, le calcul des processus de ligne se déplace dans la zone de préservation des contours : le lissage est interrompu. Le filtre régularisant n'agit plus et tout se passe comme si on préservait tous les contours, y compris les artefacts de bruit.

Soit donc δ la valeur du gradient à laquelle on souhaite préserver les discontinuités de l'image. Le nouveau critère du MAP s'écrit :

$$f_{MAP} = \arg \min_{f \geq 0} \left\{ E_V(f) + \beta \sum_k \varphi \left[\frac{(\partial f)_k}{\delta} \right] \right\}$$

En tenant compte du paramètre δ , les processus de ligne se réécrivent :

$$(I_x^{p+1})_k = \frac{\varphi'[(\partial_x f)_k / \delta]}{2((\partial_x f)_k / \delta)}, \quad (I_y^{p+1})_k = \frac{\varphi'[(\partial_y f)_k / \delta]}{2((\partial_y f)_k / \delta)} \quad (6.44)$$

et les équations normales deviennent :

$$\frac{\partial E_v(f)}{\partial f} + 2 \frac{\beta}{\delta^2} \sum_k \left\{ \Lambda_k f_k - \sum_{v=k_O, k_N, k_E, k_S} \lambda_v f_v \right\} = 0$$

où les coefficients de pondération λ_i sont maintenant donnés par l'expression des processus de ligne en (6.44).

Jusqu'à présent, nous avons travaillé sur les cliques horizontales et verticales à deux pixels, c'est-à-dire le voisinage d'ordre 1. Cette écriture permet, outre la facilité de manipulation, de faire l'amalgame avec la matrice du Laplacien aux 5 points alors que nous donnions l'expression des équations normales. L'aspect didactique est indéniable, cependant nous utilisons en pratique la structure de voisinage d'ordre 2. En incorporant la pondération inverse de la distance ($1/\sqrt{2}$) et de la mise à échelle par δ nous pouvons facilement montrer que la matrice du Laplacien pondéré s'écrit dorénavant :

$$\Delta_{pond}(f_k) = \begin{bmatrix} \lambda_{k_{VO}} & \lambda_{k_N} & \lambda_{k_{NE}} \\ \lambda_{k_O} & -\Lambda_k & \lambda_{k_E} \\ \lambda_{k_{SO}} & \lambda_{k_S} & \lambda_{k_{SE}} \end{bmatrix}$$

avec

$$\forall v \in \{k_E, k_S, k_O, k_N\}, \quad \lambda_v = \frac{\varphi'([\partial f]_{kv} / \delta)}{2([\partial f]_{kv} / \delta)},$$

$$\forall v \in \{k_{NE}, k_{SE}, k_{NO}, k_{SO}\}, \quad \lambda_v = \frac{1}{2} \frac{\varphi'([\partial f]_{kv} / (\sqrt{2}\delta))}{2([\partial f]_{kv} / (\sqrt{2}\delta))}$$

$$\text{et } \Lambda_k = \sum_{v=k_E, k_S, k_O, k_N} \lambda_v + \sum_{v=k_{NE}, k_{SE}, k_{NO}, k_{SO}} \lambda_v$$

Un coefficient $1/2$ vient pondérer les coefficients diagonaux, et Λ_k est maintenant la somme des huit coefficients. Dans le cas d'une zone homogène, la matrice du Laplacien pondéré vaut :

$$\Delta_{pond} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & -6 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

On peut donc s'attendre à ne pas avoir le même degré de lissage suivant qu'on utilise un voisinage d'ordre 1 ou un voisinage d'ordre 2.

Plus particulièrement, dans le cadre des distributions de Gibbs, le choix du paramètre β influence grandement la qualité de l'image reconstruite [Zhou-97]. Aussi, depuis quelques années, son estimation optimale a fait l'objet de nombreuses recherches. Il existe fondamentalement deux types d'approches pour obtenir une estimation correcte de β :

1. Celles qui traitent β comme un paramètre de régularisation. Les validations croisées généralisées (GCV²⁶) [Gira-91], les « L-curves » [Zhou-93] ou les tests du χ^2 [Hebe-92] sont

²⁶ Generalized Cross Validation

des exemples de techniques utilisées. L'estimation par validation croisée généralisée [Crav-79] a été développée dans le cadre de la restauration et la reconstruction d'images bayésiennes [John-91]. Ces méthodes présentent néanmoins quelques difficultés : la localisation du minimum est difficile, car la fonction du GCV est assez plate [Vara-83]. Le plus gros problème est cependant la faiblesse de la méthode lorsque le bruit de mesure est corrélé [Wahb-90]. La méthode des « L-curves », développée par Hansen [Hans-92] est basée sur la forme en « L » des courbes de correspondance entre distribution de Gibbs et vraisemblance. Le coin de la courbe correspond alors à une bonne estimation du paramètre [Zhou-93]. Néanmoins, quelques tests aux environs du point théorique demeurent nécessaires pour parfaire l'estimation, ce qui tend à alourdir la tâche.

2. L'estimation par une approche théorique, tel que le Maximum Likelihood. L'estimateur du ML de β correspond à la maximisation de la probabilité conditionnelle $P(m|\beta)$. On peut montrer [Zhou-97] que :

$$P(m|\beta) = \frac{\int_{\Lambda} \exp(\ln P(m|f) - \beta E_p(f)) df}{\int_{\Lambda} \exp(-\beta E_p(f)) df} \quad (6.46)$$

où Λ est l'espace des réalisations de l'image f , et on reconnaît au dénominateur l'expression de la fonction de partition de la distribution de Gibbs du (6.35). Certains auteurs proposent une méthode généralisée du ML (GML²⁷) [Djaf-93]. Elle est basée sur l'approximation simplificatrice que les estimateurs du MAP et de β peuvent être déterminés de manière simultanée comme les maxima joints de la densité jointe de f et m . L'optimisation s'effectue en deux étapes :

$$\begin{cases} f^p = \arg \max_f (P(m|f, \beta^p)) \\ \beta^{p+1} = \arg \max_{\beta} (P(f^p|\beta)) \end{cases}$$

Cependant, les grandes dimensions d'espaces (*i.e* Λ) dans lesquels on recherche les images rendent les calculs de densité impossibles numériquement. Plusieurs moyens de contourner ce problème ont été proposés. Geman et McClure proposent l'utilisation d'une technique de relaxation stochastique [Gema-84] pour le calcul de l'étape E de l'EM. Le coût de calcul demeure toutefois lourd. Les méthodes de chaînes de Markov Monte Carlo (MCMC²⁸) [Bes-95] ont également été proposées pour compenser le calcul d'intégration sur de larges dimensions de l'étape E [Sagu-98]. Le temps de calcul de ces méthodes demeure rédhibitoire. Une autre possibilité de traiter les intégrales multiples de (6.46) est de pouvoir approximer les distributions de Gibbs par des distributions séparables, et de ramener le calcul de (6.46) à celui de multiples intégrales mono-dimensionnelles. Cette approche qui s'apparente encore à une technique d'approximation aux champs moyens, a été proposée par Zhou [Zhou-97].

La détermination optimale n'a pu faire partie des objectifs de ces travaux, et les paramètres utilisés dans les algorithmes développés au chapitre suivant, ont été déterminés de manière empirique. Toutefois, nous sommes conscients qu'une détermination optimale et automatisée des deux

²⁷ Generalized ML

²⁸ Markov Chain Monte Carlo

paramètres, plus particulièrement le coefficient de régularisation β , est absolument nécessaire si on veut à terme pouvoir utiliser les algorithmes régularisés en routine.

Nous proposons dans la prochaine section deux approches pour l'optimisation du critère non-linéaire du MAP. Nous abordons les techniques d'optimisation non-linéaire de Newton, ainsi qu'une méthode de régularisation semi-quadratique introduite par Geman et Yang [Gema-95], et depuis appliquée à la reconstruction d'images en tomographie d'émission [Koul-96a], [La-97].

6.5. ALGORITHMES DE RECONSTRUCTION DU MAP

6.5.1. Optimisation non-linéaire : méthodes de Newton et Quasi-Newton

Les méthodes de Newton sont classiquement utilisées pour résoudre des équations non linéaires

$$\phi(x) = 0 \tag{6.47}$$

où ϕ est une fonction de R^n dans R^n (*a priori* non linéaire) et au moins deux fois différentiable.

Il est également équivalent de les appliquer pour minimiser une fonction φ de R^n dans R telle que $\partial\varphi(x) = \phi(x)$. Nous choisissons l'approche de minimisation.

La méthode de Newton consiste à trouver une procédure de descente telle que la nouvelle estimée est $x^{p+1} = x^p + d^p$

Le principe de cette méthode utilise le développement limité de Taylor au voisinage de x^p , soit :

$$\varphi(x^{p+1}) = \varphi(x^p) + (d^p)^t \partial\varphi(x^p) + \frac{1}{2}(d^p)^t \partial^2\varphi(x^p)d^p \tag{6.48}$$

où on rappelle que $\partial\varphi(x^p)$ est le gradient de φ en x^p , et $\partial^2\varphi(x^p)$ est le Hessien de φ en x^p .

La direction d^p de descente minimisant la quantité en (6.48), est donnée par

$$d^p = -[\partial^2\varphi(x^p)]^{-1} \partial\varphi(x^p)$$

soit le schéma itératif :

$$x^{p+1} = x^p - [\partial^2\varphi(x^p)]^{-1} \partial\varphi(x^p)$$

Dans la relation de descente de Newton, on dispose à chaque itération de la direction de descente $-\partial\varphi(x^p)$ ainsi que du pas de descente $[\partial^2\varphi(x^p)]^{-1}$. Toutefois, cette méthode présente quelques limitations majeures qui sont :

1. le calcul du Hessien et, à chaque étape, le calcul de la nouvelle direction, nécessite la résolution du système linéaire $[\partial^2\varphi(x^p)]d^p = -\partial\varphi(x^p)$,

2. c'est une méthode locale qui dépend de l'estimée initiale : rien ne garantit la convergence si x^0 est trop éloigné de la solution. Dans le cas de la minimisation des moindres carrés, soit $\varphi(x) = \frac{1}{2\sigma^2} \|m - Hf\|^2$, la fonctionnelle est convexe. La convergence de la méthode vers le minimum global est assurée. En revanche, rien ne garantit la convergence dès lors que nous utilisons une fonctionnelle non-convexe, les moindres carrés augmentés d'une régularisation non-convexe,
3. enfin, lorsque le Hessien n'est plus forcément défini positif, i.e $[\partial^2\varphi(x^p)] > 0$, la direction dans laquelle s'effectue le déplacement n'est plus une direction de descente.

Les méthodes de Quasi-Newton permettent de remédier aux inconvénients cités ci-dessus. On allège le calcul du Hessien (à chaque étape) ainsi que son inversion en l'approchant par une matrice W^p , que l'on cherche en outre symétrique et définie positive. La mise à jour de la matrice au prochain itéré s'effectue de manière additive, $W^{p+1} = W^p + B^p$, où la matrice B^p est choisie minimale en un certain sens (de petit rang par exemple).

Enfin, on réintroduit un pas de descente α^p réalisant la minimisation de φ dans la direction $-W^p \partial\varphi(x^p)$. La structure générale de l'algorithme de Quasi-Newton s'écrit :

$$\boxed{\begin{cases} x^0, W^0 \\ x^{p+1} = x^p - \alpha^p W^p \partial\varphi(x^p) \\ W^{p+1} = W^p + B^p \end{cases}} \quad (6.49)$$

Notons, que les deux principales méthodes de calcul des matrices W^p sont celle de Davidon-Fletcher-Powell (DFP) et celle de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [Pres-89].

Faute de temps, ces méthodes n'ont pas été implémentées dans le cadre de la reconstruction. Elles mériteraient certainement quelques études, en particulier pour l'application aux fonctionnelles (issues du modèle de Poisson comme de celui de Gauss) régularisées sur des champs de Gibbs au potentiel non-convexe.

6.5.2. Optimisation semi-quadratique (SQ)

La régularisation quadratique introduite par Geman et Yang [Gema-95], est la généralisation de travaux antérieurs visant à faciliter l'estimation du MAP [Gema-84].

Le principe de base est l'introduction d'une variable supplémentaire pour rendre le critère plus facile à minimiser. Cette variable supplémentaire joue le rôle de processus de ligne.

L'algorithme développé à la base sur une modélisation gaussienne utilise le résultat suivant : une fois le processus de ligne fixé [Marr-85] [Gema-92], il est remarquable de constater que le critère du MAP devient quadratique en f .

Si on reprend les expressions utilisant le processus de ligne l , en (6.34) et (6.35), l'énergie augmentée de la variable l s'écrit :

$$E(f) = \inf_{l=(l_x, l_y)} E^*(f, l_x, l_y)$$

avec

$$E^*(f, l_x, l_y) = E_V(f) + \beta \sum_k \Phi^*[(\partial_x f)_k, (l_x)_k] + \beta \sum_k \Phi^*[(\partial_y f)_k, (l_y)_k]$$

$$\text{avec } \Phi^*[(\partial f)_k, (l)_k] = l(\partial f)_k^2 + \Psi((l)_k)$$

A supposer que la minimisation à l fixée puisse être réalisée, le principe de régularisation semi-quadratique procède par une minimisation alternée sur les deux variables l et f selon le schéma suivant :

$$\begin{array}{l}
 f^0 \\
 \text{repete} \\
 \left. \begin{array}{l}
 (1): l^{p+1} = \arg \min_l [E^*(f^p, l)] \\
 (2): f^{p+1} = \arg \min_f [E^*(f, l^{p+1})]
 \end{array} \right\} \\
 \text{jusqu'à convergence}
 \end{array}$$

A chaque étape, on calcule la valeur du processus de ligne l à partir de l'estimée courante f^p de l'image de manière à minimiser l'énergie globale E^* . Ceci définit alors un nouveau critère fonction de f qu'il faut minimiser selon un algorithme itératif.

En s'aidant du résultat du théorème 2 (formule 6.39), l'étape (1) de l'algorithme est immédiate puisque le minimum en l à f fixé est donné par :

$$(l_x^{p+1})_k = \frac{\Phi'[(\partial_x f)_k]}{2(\partial_x f)_k}, \quad (l_y^{p+1})_k = \frac{\Phi'[(\partial_y f)_k]}{2(\partial_y f)_k} \quad (6.50)$$

En s'assurant que la fonction de potentiel respecte bien les hypothèses du théorème 2 (avec $L=0$ et $M=1$ pour les conditions aux limites), la régularisation semi-quadratique assure à chaque itération une prise en compte des discontinuités, puisque celles-ci sont précisément marquées par le processus de ligne (l_x^{p+1}, l_y^{p+1}) .

Les algorithmes utilisant la régularisation semi-quadratique sont dits « implicites » puisque, à chaque itération, chaque nouveau couple (l_x^{p+1}, l_y^{p+1}) nécessite la résolution de l'équation (2) sur f .

Nous allons maintenant mettre en œuvre la régularisation semi-quadratique dans le cadre d'une vraisemblance poissonnienne et gaussienne.

6.5.3. Régularisation SQ avec vraisemblance poissonnienne

Dans le cadre d'une vraisemblance poissonnienne, le critère du MAP s'écrit :

$$E^*(f, l_x, l_y) = \sum_l \left(\sum_k H_{l,k} f_k - m_l \ln \left(\sum_k H_{l,k} f_k \right) \right) + \beta \left\{ \sum_k \varphi^* \left[(\partial_x f)_k, (l_x)_k \right] + \sum_k \varphi^* \left[(\partial_y f)_k, (l_y)_k \right] \right\}$$

A supposer que le processus de ligne (l_x^{p+1}, l_y^{p+1}) est connu et déterminé, il faut, dans une seconde étape, minimiser l'énergie $E^*(f, l_x^{p+1}, l_y^{p+1})$.

Pour cela, nous cherchons l'annulation des dérivées de la log-vraisemblance.

On note $f^{p+1, q+1}$, l'estimée à l'itération $q+1$ à l'étape $p+1$ (détermination de f^{p+1}).

En reprenant le calcul de la maximisation de la quantité $Q(f|f^p)$ au ML-EM, le calcul de la dérivée de la log-vraisemblance au point f_k , s'écrit :

$$\left. \frac{\partial E^*(f^p, l_x^{p+1}, l_y^{p+1})}{\partial f_k} \right|_{f=f^{p+1}} = \sum_l \left[H_{l,k} - m_l \frac{H_{l,k} f_k^p}{\sum_k H_{l,k} f_k^p} \frac{1}{f_k^{p+1}} \right] + \beta \left. \frac{\partial E_p(f, l^{p+1})}{\partial f} \right|_{f=f^{p+1}} \quad (6.51)$$

$$= 0$$

Avec les notations

$$A_k = \sum_l H_{l,k},$$

$$B_k = \sum_l m_l \frac{H_{l,k} f_k^{p,q}}{\sum_k H_{l,k} f_k^{p,q}},$$

$$\text{et } C_k = \lambda_{k_E} f_{k_E}^{p,q} + \lambda_{k_N} f_{k_N}^{p,q} + \lambda_{k_O} f_{k_O}^{p,q+1} + \lambda_{k_S} f_{k_S}^{p,q+1}$$

le calcul du second terme à l'indice k , donné par l'équation (6.43), devient :

$$\left(\frac{\partial E_p(f)}{\partial f} \right)_k = 2 \left\{ \Lambda_k f_k^{p+1, q+1} - C_k \right\}$$

et on peut alors réécrire l'équation (6.51) comme un polynôme du second degré en f_k^{p+1} , soit :

$$2\beta \Lambda_k (f_k^{p+1, q+1})^2 + (A_k - 2\beta C_k) f_k^{p+1, q+1} - B_k = 0$$

et la solution retenue est celle conduisant à une valeur positive de f_k^{p+1} , soit :

$$f_k^{p+1, q+1} = \frac{2\beta C_k - A_k + \sqrt{(A_k - 2\beta C_k)^2 + 8\beta \Lambda_k B_k}}{2\beta \Lambda_k}$$

On obtient finalement le schéma général de l'étape $(p+1)$ de l'algorithme MOISE (Modified One step late Implicit Scheme Em).

On initialise les variables $f^0, l^0 = 1$, et $A_k = \sum_l H_{l,k}$, et la boucle d'itération $(p+1)$ est :

$$f^{p+1,0} = f^p$$

$$\text{Calcul de : } \left(l_x^{p+1} \right)_k = \frac{\varphi' \left[\left(\partial_x f^p \right)_k \right]}{2 \left(\partial_x f^p \right)_k}, \quad \left(l_y^{p+1} \right)_k = \frac{\varphi' \left[\left(\partial_y f^p \right)_k \right]}{2 \left(\partial_y f^p \right)_k},$$

Répéter

Pour $k = 1 \dots n^2$

Calcul de B_k, C_k, Λ_k

$$f_k^{p+1,q+1} = \frac{2\beta C_k - A_k + \sqrt{(A_k - 2\beta C_k)^2 + 8\beta \Lambda_k B_k}}{2\beta \Lambda_k}$$

Fin boucle sur k

Jusqu'à convergence (arrêt à $q = \hat{q}$)

$$f^{p+1} = f^{p,\hat{q}}$$

Cet algorithme a été développé par Koulibaly dans le cadre de la reconstruction d'images en SPECT. Il a été appliqué sur des données cérébrales à partir d'un tomographe d'émission à positons [Koul-96]. Si les résultats ont montré la nécessité de la régularisation, il a néanmoins été constaté que la vraisemblance poissonnienne ne donne pas de résultats supérieurs à son équivalent utilisant la vraisemblance gaussienne.

Voyons à présent la différence entre l'algorithme MOISE et l'algorithme OSL :

Le problème se pose pour l'évaluation de la dérivée de la distribution de Gibbs, puisque celle-ci s'exprime en fonction du prochain itéré. La méthode OSL consiste à estimer que la variation de la dérivée de l'*a priori* varie peu d'une itération à l'autre et qu'elle peut, de ce fait, être estimée à partir de l'itéré précédent (d'où la dénomination de « One-Step-Late » donnée à l'algorithme). Avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$\left(\frac{\partial E_p(f^{p+1})}{\partial f} \right)_k = 2 \{ \Lambda_k f_k^p - C_k \}$$

L'équation du nouvel itéré obtenu s'exprime explicitement en fonction de l'itéré courant, soit :

$$f_k^{p+1} = \frac{B_k}{A_k + 2\beta(\Lambda_k f_k - C_k)}$$

L'algorithme OSL est donc une version explicite de MOISE. Il n'est cependant pas possible de donner une preuve de la convergence de l'algorithme en général puisque celui-ci est largement dépendant du choix de la fonction de potentiel et du poids qu'on lui accorde. On peut néanmoins dire que si il y a convergence alors la solution vérifie l'annulation de la dérivée de la distribution *a posteriori*.

Pour les applications numériques, l'algorithme MOISE sera préféré à l'OSL, car les algorithmes implicites sont plus robustes au bruit que leurs homologues explicites [Ciar-94].

L'apport de la régularisation ainsi définie devrait permettre la restitution correcte des hautes fréquences de l'image (contours, bords, etc.). On peut ainsi laisser le processus itératif aller à son terme sans craindre l'apparition des artéfacts.

6.5.4. Régularisation SQ avec vraisemblance gaussienne

La fonction à minimiser est maintenant de la forme :

$$J(f) = \|m - Hf\|^2 + \beta \sum_k \left\{ \varphi\left[(\partial_x f)_k\right] + \varphi\left[(\partial_y f)_k\right] \right\} \quad (6.52)$$

Le critère (6.52) est minimisé en résolvant les équations normales. Elles mènent à la résolution du système :

$$\left(H^t H - \beta \Delta_{pond}(f) \right) f = H^t m \quad (6.53)$$

Remarque : Il n'est pas possible d'envisager la résolution de (6.53) par des techniques classiques de minimisation quadratique (c.f. section 6.3.2.3). Kawata a néanmoins essayé d'utiliser un gradient conjugué bien que le terme $\beta \Delta_{pond}(f)$, variable en f , ne permette plus la conservation de directions conjuguées [Kawa-85].

Appliquons la technique de régularisation semi-quadratique :

La première minimisation (étape 1 du SQ) reste immédiate puisque la valeur de l minimisant E^* est donnée par les mêmes expressions. La deuxième minimisation peut à présent être résolue par des techniques de régularisation quadratique. En effet, comme la matrice $\Delta_{pond}(l^{P+1})$ est symétrique, il s'agit de résoudre le système symétrique défini positif :

$$\left(H^t H - \lambda \Delta_{pond}(l^{P+1}) \right) f^{P+1} = H^t m \quad (6.54)$$

Plusieurs techniques de minimisation sont envisageables à ce stade. L'algorithme appelé ARTUR, a été initialement mis en œuvre par Charbonnier [Char-94]. Ce dernier propose l'utilisation d'un algorithme de type SOR pour la résolution de (6.54). On peut tout aussi bien utiliser un autre algorithme de descente. Celui que nous proposons est le gradient conjugué (CG).

Au § 6.5.4.2, il est présentée une méthode où on s'affranchit du passage aux équations normales. La résolution du système est alors envisagée, après préconditionnement, par des méthodes de gradient adaptées à des matrices non symétriques. Cette méthode est issue des travaux de V.La [La-97].

6.5.4.1. Résolution des équations normales

Nous commençons par décrire l'algorithme CGLS, une version du gradient conjugué s'appliquant aux équations normales :

Soit A une matrice régulière non symétrique. Le gradient conjugué ne pouvant être appliqué à partir de A , l'idée est alors de remplacer l'équation $Ax = b$ par l'équation $A^t Ax = A^t b$. Comme

$A' A$ est maintenant symétrique, définie positive, on peut maintenant lui appliquer l'algorithme du gradient conjugué. On minimise :

$$E(r) = \left\langle (A' A)^{-1} r \mid r \right\rangle \text{ avec } r = b - Ax.$$

La relation de conjugaison des directions de descente s'écrit :

$$\left\langle A' A d^p \mid d^{p-1} \right\rangle = 0.$$

L'algorithme CGLS initialise les variables par $f^0, r^0 = b - A f^0, d^0 = A' r^0, \beta^0 = 0$ et les nouvelles relations de mise à jour sont :

$$\text{Pour } p = 0, 1, \dots \left\{ \begin{array}{l} \alpha^p = \frac{\|A' r^p\|^2}{\|A d^p\|^2} \\ x^{p+1} = x^p + \alpha^p d^p \\ r^{p+1} = r^p - \alpha^p A d^p \\ \beta^{p+1} = \frac{\|A' r^{p+1}\|^2}{\|A' r^p\|^2} \\ d^{p+1} = A' r^{p+1} + \beta^{p+1} d^p \end{array} \right. \quad (6.55)$$

L'application de la méthode du gradient à l'équation normale, tout comme les méthodes SIRT, nous conduit à la solution correspondant au minimum selon le critère des moindres carrés.

Si l'algorithme converge pour toute matrice régulière, il présente néanmoins deux désavantages :

- $K(A' A) = K(A)^2$: le conditionnement est égal au carré de celui de l'équation initiale, la rapidité de convergence est donc plus faible.
- A chaque itération, il est nécessaire d'effectuer deux produits de matrice-vecteur, ce qui rallonge le temps de calcul d'une boucle de l'itération.

En reconstruction tomographique, la matrice est rarement de rang plein. Dans ce cas on dit que la matrice $H' H$ est semi-définie positive. Cela n'altère visiblement pas la convergence de l'algorithme [Axel-80]. Par ailleurs, le système $H' H f = H' m$ est consistant car $H' m \in \text{Im}(H' H)$ donc il y aura toujours une solution même lorsque $m \notin \text{Im}(H)$ (ce qui est classique en tomographie du fait du bruit de mesure). On peut montrer que le CGLS converge vers la solution de norme minimale, lorsque A est symétrique semi-défini positive.

Citons également l'algorithme du CGNE (Conjugate Gradient on the Normal equations to minimize the Error) qui résoud le système non symétrique par :

$$\left\{ \begin{array}{l} A A' y = b, \\ x = A' y \end{array} \right. \quad (6.56)$$

Cet algorithme ne garantit pas, comme le CGLS, une convergence vers une solution lorsque $b \notin \text{Im}(A)$. De plus, l'application du CGNE comme méthode de minimisation nécessite une

factorisation sous la forme $(H^t H - \lambda \Delta_{pond}(I^{p+1})) = C^t C$, ce qui rallonge le temps de calcul par itération.

L'algorithme LSQR (Least Square QR²⁹) [Paig-82] est analytiquement équivalent à CGLS, mais numériquement plus robuste, surtout lorsque le nombre d'itérations est grand ou que la matrice A est mal-conditionnée.

Il a été appliqué en PET [Kauf-93] et en tomographie sismologique [Nole-85]. Son implémentation est cependant plus complexe. Faute de temps, il n'a pas pu être testé.

Une autre possibilité est d'utiliser la version multiplicative de la régularisation semi-quadratique, appelée LEGEND [Char-94]. Cette approche utilise les paires de Legendre [Gema-95]. Dans le cas de LEGEND, la matrice issue de la régularisation est constante, et c'est le second terme qui varie à chaque itération. On peut alors envisager une factorisation de Cholesky [Lasc-93] lors de l'initialisation de la méthode. Toutefois, les résultats numériques dans [Char-94] montrent que la méthode ARTUR reste souvent supérieure à celle LEGEND.

En pratique, nous avons mis en œuvre la méthode du CG, puisque la matrice du système (6.53) est symétrique, définie positive. La régularisation semi-quadratique, utilisant l'algorithme CG s'écrit :

On initialise à $f^0, l^0 = 1$

$p=p+1,$

Tant que non convergence du critère :

$$\text{Calcul de : } (l^{p+1})_x = \frac{\varphi'[(\partial_x f^p)_k]}{2(\partial_x f^p)_k}, (l^{p+1})_y = \frac{\varphi'[(\partial_y f^p)_k]}{2(\partial_y f^p)_k},$$

$$\text{Résolution par CG de } (H^t H - \lambda \Delta_{pond}(l^{p+1})) f^{p+1} = H^t m$$

Jusqu'à convergence

$$f^p = f^{p+1}$$

En résumé, l'inconvénient des méthodes basées sur les équations normales est la symétrisation d'un problème qui est non symétrique initialement. Une première conséquence visible est la dégradation de la vitesse de convergence de la méthode. Outre une vitesse de convergence ralentie, la méthode symétrisée présente une instabilité numérique accrue. En effet, à un conditionnement plus grand correspond un nombre d'itérations plus élevés pour atteindre la solution et, par conséquent, on augmente la chance de voir apparaître des erreurs d'arrondi et l'amplification du bruit.

Il a été montré que l'algorithme de régularisation semi-quadratique avec vraisemblance gaussienne, développé par Charbonnier, est globalement convergent, dès lors que l'énergie de *l'a priori* est strictement convexe [Aube-94]. Cependant, aucune garantie de convergence n'est donnée lorsque le problème est sous-déterminé (projections creuses ou angles de vue limités). Une généralisation de l'algorithme est donnée dans [Dela-98] : la convergence théorique (déjà pressentie dans [Koul-94]) est démontrée dans le cas d'*a priori* non convexes et pour des systèmes sous-déterminés, pourvu que les minima du critère soient isolés (*i.e.* le critère ne contient pas de régions « plates »).

²⁹ la méthode QR est une méthode de factorisation sous forme de produit $A=QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire.

6.5.4.2. Résolution du système non symétrique

Pour éviter la dégradation de la vitesse de convergence causée par la symétrisation, on peut chercher à résoudre le système asymétrique directement. Il existe un certain nombre de méthodes, basées sur l'utilisation du gradient, permettant la résolution d'un système linéaire asymétrique. Les méthodes usuellement rencontrées (l'algorithme du résidu minimal, le GMRES, l'algorithme développé par Riddell, ainsi que l'algorithme BI-CG et sa variante stabilisée BI-CGSTAB) sont détaillées dans [La-97]. Ces méthodes n'ont pas été étudiées, car l'emploi de beaucoup d'entre elles nécessitent, une matrice dont la partie symétrique est définie positive. Ainsi, une manière d'opérer est de supposer que le préconditionnement de la matrice H permet de négliger la partie anti-symétrique de la matrice résultante. L'efficacité d'un préconditionnement matriciel est effectivement discutable pour les faibles tailles de matrices que nous utilisons.

6.5.5. Régularisation à partir du modèle « Thin Plate »

Jusqu'à présent, l'énergie a priori était fonction du gradient de l'image et restreint au voisinage des 4 ou 8 voisins. Nous présentons ici le modèle « Thin-Plate » (TP) qui se caractérise par l'utilisation des carrés des dérivées secondes.

Le TP fait parti de la classe des splines d'interpolations [Blak-87], [Terz-86]. L'énergie *a priori* du TP est donnée par :

$$E_{TP}(\mathbf{f}) = \sum_k \left\{ \left[\partial_x^{(2)} f \right]_k^2 + 2 \left[\partial_{xy}^{(2)} f \right]_k^2 + \left[\partial_y^{(2)} f \right]_k^2 \right\} \quad (6.57)$$

avec :

$$\begin{aligned} (a) \quad \left[\partial_x^{(2)} f \right]_k &= f_{k_E} - 2f_k + f_{k_O} \\ (b) \quad \left[\partial_y^{(2)} f \right]_k &= f_{k_N} - 2f_k + f_{k_S} \\ (c) \quad \left[\partial_{xy}^{(2)} f \right]_k &= f_{k_{NE}} - f_{k_N} - f_{k_S} + f_k \end{aligned} \quad (6.58)$$

où (a) et (b) sont les approximations discrètes précises d'ordre 2, de la dérivée seconde en x et de la dérivée seconde en y respectivement et (c) celle de la dérivée croisée. Le voisinage du TP fait intervenir le voisinage à 12 points figurant ci-dessous :

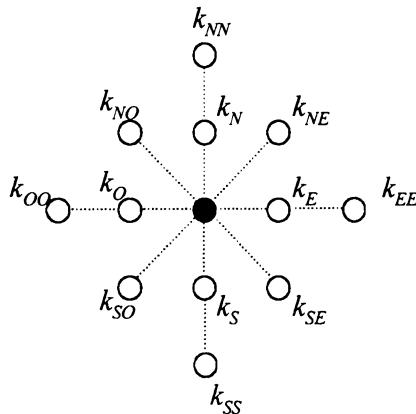


figure 6.14 : Les 12 voisins utilisés dans le modèle TP

L'approche du GEM-MAP a été utilisée pour trouver le minimum du critère :

$$E(f) = -Q(f|f^p) + \beta E_{TP}(f)$$

et un algorithme ICM permet d'établir le schéma itératif suivant :

$$f_k^{p+1} = \frac{-(A_k - 2\beta E_k) + \sqrt{(A_k - 2\beta E_k)^2 + 8\beta D_k B_k f_k^p}}{4\beta D_k}$$

avec

$$D_k = 20 \tag{6.59}$$

$$E_k = 8(f_{k_S}^{p+1} + f_{k_O}^{p+1} + f_{k_N}^p + f_{k_E}^p) - 2(f_{k_{SO}}^{p+1} + f_{k_{SE}}^p + f_{k_{NO}}^p + f_{k_{NE}}^p) \\ - (f_{k_{OO}}^{p+1} + f_{k_{SS}}^{p+1} + f_{k_{NN}}^p + f_{k_{EE}}^p)$$

L'équation des itérés par la méthode ICM en (6.59) est dérivée d'une version Mean Field que l'on résoud à l'aide d'un algorithme de type GNC [Blak-87], et où tous les processus de ligne³⁰ ont été fixés à 1.

Pour chaque fonction φ_τ , une version GEM-MAP est ensuite utilisée [Lee-95a] pour l'étape M de l'algorithme EM. La méthode ICM est préférée à la méthode heuristique de Hebert, puisque une forme explicite de descente par coordonnée (pixel) est exhibée, *via* la résolution d'équations du champ moyen, MFA³¹.

On trouvera les détails de l'algorithme appelé recuit déterministe (« Deterministic Annealing ») [Gind-93b]^o, dans [Lee-95a].

Cette méthode du recuit déterministe, est peu pratique et lourde d'utilisation. Aucune méthode n'est donnée pour la progression du paramètre τ et la détermination des hyperparamètres semble assez complexe [Lee-95b]. La version (6.59) proposée s'affranchit du processus de ligne : elle est plus facile d'utilisation et ne nécessite la connaissance que d'un seul hyperparamètre, β .

Nous aurions également pu utiliser une version OSL pour la résolution de l'étape M, mais la version ICM évite les problèmes de convergence de OSL. En contrepartie, elle met un peu plus de temps pour se stabiliser. Notons qu'à la vue de (6.59), l'algorithme est une méthode itérative qui utilise immédiatement les dernières valeurs des itérés pour les intégrer dans le calcul des prochains pixels.

Le modèle utilisé pour le TP fait intervenir une variation quadratique de l'énergie. Une autre version, appelée variation laplacienne carrée, d'énergie :

$$E_{TP}(f) = \sum_k \left\{ \left[\partial_x^{(2)} f \right]_k^2 + \left[\partial_y^{(2)} f \right]_k^2 \right\}$$

³⁰ le processus de ligne dans la version du WP est représenté par une quadratique tronquée d'après le formalisme proposé par Blake. La quadratique tronquée φ_{BZ} est alors « approchable » par une suite de fonctions paramétrées φ_τ , lorsque le paramètre τ tend vers l'infini (le paramètre τ étant l'analogue de l'inverse de la température utilisée dans l'algorithme du recuit simulé [Metr-53] [Kirk-83])

³¹ MFA : Mean Field Annealing (voir [Geig-91]-Appendice A ou [Lee-95a]-page 108 pour la résolution de ces équations).

n'a pas été retenue. Blake montre que cette version, bien que plus rapide pour le calcul, présente des instabilités aux limites [Blak-87].

6.5.6. Critères de mesure de l'image et critères d'arrêt des algorithmes

Pour une évaluation quantitative de l'image, nous calculons la moyenne stoppée à l'itération p par :

$$S_p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k^p = \bar{f}^p \quad (6.60)$$

La quantité d'activité contenue dans une tranche est alors égale à NS_p . Dans le cas où la reconstruction est effectuée à partir d'un fantôme d'activité f^* , on calcule le SNR entre l'image reconstruite et le fantôme par :

$$SNR = 10 \ln \left(\frac{\sigma_{f^*}^2}{\sigma_{f^* - f^p}^2} \right) \quad (6.61)$$

et l'erreur relative entre les deux images (NMSE : Normalized Mean Square Error) est définie par

$$NMSE_p = \frac{\|f^p - f^*\|^2}{\|f^*\|^2} \quad (6.62)$$

Pendant une reconstruction, nous nous intéressons également aux différences entre estimées successives. Pour les algorithmes n'utilisant qu'un seul indice de boucle (ML, CG, OSL, etc.), nous calculons alors le NMSE entre deux étapes successives :

$$\frac{\|f^{p+1} - f^p\|^2}{\|f^p\|^2}$$

Pour les algorithmes utilisant une boucle d'itération supplémentaire (ARTUR, MOISE, etc.), nous pouvons également calculer la différence relative entre deux itérations successives au sein d'une même étape :

$$\frac{\|f^{p+1,q+1} - f^{p+1,q}\|^2}{\|f^{p+1,q}\|^2}$$

Les critères d'arrêts pour les algorithmes itératifs reposent sur la norme résiduelle. En pratique, c'est-à-dire en l'absence de fantôme, on évalue la NMSE entre deux estimées successives, et on l'arrête lorsqu'on tombe au delà d'un seuil fixé par l'utilisateur.

6.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons abordé un ensemble d'algorithmes de reconstructions permettant la résolution du système linéaire et basés sur l'optimisation du critère du Maximum A Posteriori. Du fait

du caractère mal conditionné de la matrice H et de la présence de bruit sur les mesures, il est nécessaire d'introduire une régularisation. Nous nous sommes intéressés à cette régularisation par des distributions de Gibbs avec prise en compte des discontinuités, ce qui a permis d'établir trois critères nécessaires auxquels les fonctions de pondération $\varphi'(x) / 2x$ doivent répondre. Un point important est que ces critères ne préjugent pas de la nature convexe ou non de la fonction de potentiel. Dans le cas d'un potentiel convexe, le critère du MAP admet un minimum global. Toutefois, nous avons retenu deux fonctions de potentiel, l'une convexe l'autre non : l'usage du potentiel non convexe doit permettre un rehaussement des contrastes sur l'image.

La résolution du critère du MAP est envisagée par la technique de régularisation semi-quadratique. Le marquage des discontinuités est introduit par un processus de ligne, déterminé à chaque étape par les fonctions de pondération appliquées à l'image. Nous proposons de retenir les deux versions de l'algorithme : l'algorithme MOISE dans le cas d'une vraisemblance poissonnienne et ARTUR dans le cas d'une vraisemblance gaussienne.

A titre de comparaison, nous proposons un algorithme régularisé du MAP, où la distribution *a priori* est uniquement fonction des dérivées secondes l'image. Le modèle « Thin-Plate » atteint le critère du MAP à partir d'une version simplifiée d'un algorithme MFA, où on a supprimé le processus de ligne. L'algorithme itératif est de type ICM et ne nécessite que la détermination d'un seul hyperparamètre.

Au prochain chapitre, nous commençons par évaluer les performances des algorithmes de régularisation sur le fantôme numérique CASPER.

Les données issues de fantômes réels serviront à analyser la prise en compte du facteur d'atténuation ainsi que de la réponse de détection. On compare la version présentée au chapitre 5 avec une version où la détection est limitée à la bande de largeur égale à l'ouverture de collimation, et à un modèle « ray-driven » où la détection s'effectue suivant une droite. La correction de l'atténuation s'effectue, soit à partir d'une carte d'atténuation TCT (atténuation hétérogène), soit à partir d'une valeur moyenne (atténuation constante).

Les données mesurées serviront également à évaluer l'échantillonnage efficace bidimensionnel. On comparera ainsi les images reconstruites avec celles issues d'un échantillonnage avec même nombre de mesures ou avec les mesures complètes.

Enfin, on terminera avec des images reconstruites sur des colis réels, à partir d'un très faible nombre de mesures.

6.7. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Aube-94] G. Aubert, M. Barlaud L. Blanc-Feraud and P. Charbonnier « Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging » Tec. Rep. 94-01, I3S, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1994
- [Axel-80] O. Axelsson. « Conjugate gradient type methods for unsymmetric and inconsistent systems of linear equations ». *Lin. Alg. and its Applic.*, 29 :1-16, 1980
- [Besa-86] J. Besag. « On the statistical analysis of dirty pictures », *J. Roy. Statist. Soc.*, 3:259-302, 1986
- [Besa-95] J. Besag. P. Green, D. Higdon and K. Mengersen« Bayesian computation and stochastic systems », *Statist. Sci.*, 10 :3-66, 1995

- [Boum-93] C. A. Bouman and K. Sauer. A generalized gaussian image model or edge-preserving map estimation. *IEEE Trans. Image Processing*, 2:296-310, 1993
- [Boum-96] C. A. Bouman and K. Sauer. « A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization. » *IEEE Trans. Image Processing*, 5:480-492, 1996
- [Bour-93] M.H. Bourguignon et al « Correction of attenuation in SPECT with a attenuation coefficient map : a new method », *J. Nucl. Biol. Med.* 37 : 26-32, 1993
- [Blak-87] A. Blake and A. Zisserman. « Visual Reconstruction » The M.I.T. Press Series in artificial intelligence, 1987
- [Blak-89] A. Blake. « Comparison of the efficiency of deterministic and stochastic algorithms for visual reconstruction », *IEEE Trans. PAMI*; 11 :2-12, 1989
- [Cens-83] Y. Censor, « Finite series expansion methods » *Proceedings IEEE*, 71 :409-419, 1983
- [Ciar-94] P. Ciarlet. « Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation ». Masson, 1994
- [Chan-78] L. Chang. « A method for attenuation correction in radionuclide computed tomography. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 25 (1):638-639, 1978
- [Char-94] P. Charbonnier. « Reconstruction d'image :régularisation avec prise en compte des discontinuités », PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1994
- [Clin-93] N. H. Clinthorne, T.-S. Pan, P.-C. Chiao, W. L. Rogers, and J. A. Stamos. « Preconditioning methods for improved convergence in iterative reconstructions » *IEEE Trans. Med. Imaging*, 12 (1):78-83, 1993
- [Crav-79] P. Craven and G. Wahba, « Smoothing noisy data with spline function », *Numerische Math.* 31 :377-403, 1979
- [Dela-98] A. Delaney and Y. Bresler « Globally convergent edge-preserving regularized reconstruction :an application to limited-angle tomography », *IEEE Trans. Imag. Proc.* 7(2) :204-221, 1998
- [Demo-89] G. Demoment. « Image reconstruction and restoration: Overview of common estimation structures and problems ». *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37 (12):2024-2036, 1989
- [Demp-77] A.P. Dempster, N.M. Laird, and D.B. Rubin. « Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm » *J. Roy. Statist. Soc.*, 39:1-38, 1977
- [Dint-90] J.M. Dinten. « Tomographie à partir d'un nombre limité de projections : régularisation par des champs de Markoviens », PhD thesis, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1990
- [Djaf-93] A. M. Djafari. « On the estimation of hyperparameters in bayesian approach of solving inverse problems » in *Proc. ICAPSSP*. 495-498, 1993

- [Falc-98] C. Falcon et al. « Evaluation of a cross-validation stopping rule in MLE SECT reconstruction », *Phys. Med. Biol.* 43 :1271-1283, 1998
- [Geig-91] D. Geiger and F. Girosi. « Parallel and deterministic algorithms from MRF's surface reconstruction and integration », *IEEE Trans. PAMI*; 13 :401-412, 1991
- [Gema-84] S. Geman and D. Geman. « Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images », *IEEE Trans. PAMI*; 6(6):721-741, 1984
- [Gema-85] S. Geman and D.E. McClure. « Bayesian image analysis : an application to single photon emission tomography », *Amer. Statist. Assoc., Washington DC*, 1985
- [Gema-87] S. Geman and D.E. McClure. « Statistical Methods for tomographic image reconstruction », in *Proc. 46th session of the ISI, Bulletin of the ISI*, 52, 1987
- [Gema-92] D. Geman and G. Reynolds. « Constrained restoration and the recovery of discontinuities », *IEEE Trans. Image Processing*, 14(3):367-383, 1992
- [Gema-95] D. Geman and C. Yang. « Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization », *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 4 :932-946, 1995
- [Gind-93a] G. Gindi, M. Lee, A. Rangarajan and I.G. Zubal. « Bayesian reconstruction of functional images using anatomical information as priors » *IEEE Trans. Med. Imag.* 12 :670-680, 1993
- [Gind-93b] G. Gindi, A. Rangarajan, M. Lee, P.J Hong and I.G. Zubal. « Bayesian reconstruction for emission tomography via deterministic annealing » in *H. Barrett and A. Gmitro, editors, Information Processing in Medical Imaging*, 322-338, Springer-Verlag, 1993
- [Gira-91] D. Girard, « Asymptotic optimality of the fast randomized versions of GCV and C_L in ridge regression and regularisation », *Ann. of Stat.* 19(4) :1950-1963, 1991
- [Gord-74] R. Gordon. A tutorial on ART. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 21:78-93, 1974
- [Gree-90] P. Green. « Bayesian reconstruction from emission tomography data using a modified EM algorithm », *IEEE Trans. Med. Imaging*, 9(1):84-93, 1990
- [Grim-81] W.E. Grimson. « From surfaces to images » The M.I.T. Press, Cambridge, MA 1981
- [Hans-92] P. Hansen. « Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve » *SIAM Rev.* 34(4) :561-580, 1992
- [Hebe-89] T. Hebert and R. Leahy. « A generalized EM algorithm for 3D Bayesian reconstruction from Poisson data using Gibbs priors ». *IEEE Trans. Med. Imag.*, 8(2):194-202, 1989
- [Hebe-92] T. Hebert and R. Leahy. « The GEM-MAP algorithm with 3-D spect system response ». *IEEE Trans. Med. Imag.*, 11(1) :81-90, 1992
- [Herm-76] G. Herman and A. Lent « Iterative reconstruction algorithms » *Comput. Biol. Med.* 6 :273-294, 1976

- [Herm-78] G. Herman. « Relaxation methods for image reconstruction ». *Comm. of the ACM*, 21:152-158, 1978
- [Herm-80] G. Herman. « *Image Reconstruction From Projections.* » Academic Press, 1980.
- [John-91] V.E. Johnson et al. « Image restoration using Gibbs priors :boundary modeling, treatment of blurring and selection of hyperparameter », *IEEE Trans. PAMI*, 13 :413-425, 1991
- [Kauf-93] L. Kaufman. « Maximum likelihood, least squares, and penalized least squares for PET ». *IEEE Trans. Med. Imaging*, 12 (2):200-214, 1993
- [Kawa-85] S. Kawata, O. Nalcioclu « Constrained iterative Reconstruction by the conjugate gradient method » *.IEEE Trans on Med. Imaging MI-4(2)* 1985
- [Kell-95] C. Kelley. *Iterative methods for linear and nonlinear equations.* SIAM, 1995
- [Kirk-83] S. Kirkpatrick, C. Gelatt, and M. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:671-680, 1983
- [Koul-94] P. Koulibaly, P. Charbonnier, M. Barlaud., J. Darcourt and L. Blanc-Féraud. « EM-MAP algorithm versus ARTUR : theoretical and practical comparaison », *SPIE 2299* :294-304, 1994
- [Koul-96a] P. Koulibaly. « Régularisation et corrections physiques en tomographie d'émission », PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1996
- [Koul-96b] P. Koulibaly, P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, I. Laurette, J. Darcourt, and M. Barlaud. « Poisson statistic and half-quadratic regularization for emission tomography reconstruction algorithm », *In Proc. IEEE ICIP*, 719-722, Lausanne, Suisse, 1996
- [La-97] V. La « *Correction d'atténuation en géométrie conique avec mesures de transmission en tomographie d'émission mono-photonique* », PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997
- [Land-51] L. Landweber. « An iterative formula for Fredholm integral equations of the first kind », *Amer. J. Math.*, 73:615-624, 1951
- [Lalu-95] D. Lalush and B. Tsui. « A fast and stable maximum *a posteriori* reconstruction algorithm ». *Med. Phys.*, 22(8):1273-1284, 1995
- [Lang-84] K. Lange and R. Carson. « EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography » *J. Comput. Assist. Tomogr.*, 8 (2):306-316, 1984
- [Lang-90] K. Lange « Convergence of EM Image reconstruction algorithms with Gibbs smoothing » *IEEE. Trans. Med. Imag.* ,MI-9 4, 1990
- [Lasc-93] P. Lascaux et R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. tome I* , Masson , 1993

- [Lee-95a] S-J. Lee. « Bayesian Image reconstruction in emission computed tomography using mechanical models as priors » Ph.D thesis, UMI dissertation service, 1995
- [Lee-95b] S-J. Lee, A. Rangarajan and G. Gindi. « Bayesian image reconstruction reconstruction in SPECT using higher order mechanical models as priors » *IEEE Trans. Med. Imag.* 14 :669-680, 1995
- [Lewi-86] R. Lewitt and G. Muehlehner « Accelerated iterative reconstruction for PET based on the EM algorithm for ML estimation » *IEEE Trans. Med. Imag.* MI-5 : 16-22, 1986
- [Llac-89] J. Llacer and E. Veklerov. « Feasible images and practical stopping rules for iterative algorithms in emission tomography », *IEEE Trans. Med. Imag.* MI-8 : 186-193, 1989
- [Manb-90] K. Manbeck, « Bayesian statistical methods applied to emission tomography with physical phantom and patient data », PhD thesis, Division of applied mathematics, Brown University, Providence, RI 1990
- [Marr-85] J.L. Marroquin. « Probabilistic solution of inverse problems », PhD thesis, Massachussets Institute of Technology, 1985
- [Marr-87] J. Marroquin. S. Mitter and T. Poggio « Probabilistic solution ill-posed problems in computational vision », *J. Amer. Stat. Assoc.*, 82 :76-89, 1987
- [Mate-95] S. Matej and J. Browne « Performance of a fast Maximum Likelihood algorithm for fully 3D PET reconstruction », *International Meeting on Fully three-dimensional Image reconstruction in Radiology and Nuclear Medecine*, 247-251, 1995
- [Mazé-93] A. Mazé et al « Iterative reconstruction methods for non uniform attenuation distribution in SPECT », *J. Nucl. Med.* 34 :1204-1209, 1993
- [Metr-53] N .Metropolis et al « Equations of state calculations by fast computing machines. » *J. Chem. Phys.* 21 :1087-1091, 1953
- [Muel-97] K. Mueller, R. Yagel and J. Cornhill. « The weighted-distance scheme :a globally optimizing projection ordering method for ART ». *IEEE Trans. Med. Imag.* 16() :223-229, 1997
- [Nole-85] G. Nolet. « Solving or resolving inadequate and noisy tomographic systems ». *J. Computat. Phys.*, 61:463-482, 1985
- [Osko-88] P. Oskoui-Fard and H. Stark. « tomographic image reconstruction using the theory of convex projections ». *IEEE Trans med. Imag.* 7(1) :45-58, 1988
- [Paig-82] C. Paige and M. Saunders. « LSQR: an algorithm for sparse linear equations and sparse least-squares ». *ACM Trans. Math. Software*, 8:43-71, 1982
- [Penr-55] R. Penrose. « A generalized inverse for matrices ». *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 51:406-413, 1955
- [Pres-89] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. « Numerical Recipes, the art of scientific computing (C version) ». Cambridge University Press, 1989

- [Raje-92] N. Rajeevan et al « Vector-extrapolated fast maximum likelihood estimation algorithms for emission tomography » *IEEE Trans. Med. Imag.* 11(1) :9-20, 1992
- [Rang-92] A. Rangarajan et al. « A continuation method for emission tomography », in *proc. IEEE Nucl. Sci. Symp. and Med. Imag. Conf.*, vol II :1207-1207, oct 1992
- [Ridd-93] C. Riddell. « *Quantification en tomographie d'émission de simples photons.* » PhD thesis, Université de Compiègne, 1993
- [Rao-73] C.R. Rao « Linear statistical inference and its application » 2nd ed. New York :Wiley, 1973
- [Rock-76] A.J. Rockmore and A. Macovski. « A Maximum Likelihood approach to emission image reconstruction from projections », *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, NS-23 :1428-1432, 1976
- [Ros-96] D. Ros et al. « The influence of a relaxation parameter on SPECT iterative reconstruction algorithms » *Phys. Med. Biol.*, 41 :925-937, 1996
- [Saqu-98] S. Saquib, C. Bouman and K. Sauer « ML parameter estimation for markov random fields with application to bayesian tomography », *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 7 (7):1029-1044, 1998
- [Snyd-87] D. Snyder, M. Miller, L. Thomas, and D. Politte « Noise and Edge artefacts in Maximum-Likelihood reconstructions for emission tomography », *IEEE Trans. Med. Imag.* MI-6 (3) :228-238, 1987
- [Tan-87] Tanaka E. « A fast reconstruction algorithm for stationary positron emission tomography based on a modified EM algorithm » *IEEE Trans. Med. Imag.*, MI-6 :98-105, 1987
- [Terz-86] D. Terzopoulos « Regularisation of inverse visual problems involving discontinuities », *IEEE Trans. PAMI* 8 :413-424, 1986
- [Tikh-63] A. Tikhonov « Regularization of incorrectly posed problems » *Sov. Math. Dokl.*, 4 :1624-1627, 1963
- [Shep-82] L.A. Shepp and Y.Vardi. « Maximum likelihood reconstruction for emission tomography ». *IEEE Trans. Med. Imaging*, 1 (2):113-122, 1982
- [Stev-90] R. Stevenson and E. Delp. « Fitting curves with discontinuities », in *Proc. 1st Int. Workshop on Robust Computer Vision*, Seattle, WA, 127-136, 1990
- [Stra-74] O. Strand. « Theory and methods related to the singular function expansion and Landweber's iteration for integral equations of the first kind » *SIAM J. Numer. Anal.*, 11:798-825, 1974
- [Vand-90] A. Van der Sluis a., H. Van der Vorst. « SIRT- and CG-type methods for iterative solution of sparse linear least-square problems » *Linear Algebra and its Applications* 130: 257-302, 1990
- [Vara-83] J. Varah, « Pitfalls in the numerical solution of ill-posed problems », *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 4 :164-176, 1983

- [Vard-85] Y.Vardi L.A. Shepp and L. Kaufmann. « A statistical model for positron emission tomography ». *J. Amer. Stat. Ass.*, 80 :8-37, 1985
- [Vekl-87] E. Veklerov and J. Llacer. « Stopping rule for the MLE algorithm based on statistical hypothesis testing », *IEEE Trans. Med. Imag.* MI-6 :313-319, 1987
- [Wahb-90] G. Wahba, « Spline models for observational data », in *proc. CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math.* vol 59, Soc. Ind. Appl. Math. Philadelphia, PA, 1990
- [Watt-94] D. Watt. « Column-relaxed algebraic reconstruction algorithm for tomography with noisy data ». *Applied Optics*, 33(20) :4420-4427, 1994
- [Xu-93] X. Xu, J. Liow, and S. Strother. « Iterative algebraic reconstruction algorithms for emission computed tomography: a unified framework and its application to emission tomography ». *Med. Phys.*, 20 (6), 1993
- [Zhou-93] Z. Zhou, R. Leahy and E. Mumguoclu « A comparative study of using anatomical boundary in PET reconstruction », in *Proc. IEEE Nucl. Sci. Symp. And Med. Imag* 1749-1753, 1993
- [Zhou-97] Z. Zhou, R.M. Leahy and J.Qi « Approximate maximum likelihood hyperparameter estimation for Gibbs priors », *IEEE Trans. Imag. Proc.* 6 (6) :844-861, 1997

CHAPITRE 7.

APPLICATION A LA RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE

7.1. INTRODUCTION

Ce chapitre est dédié à la reconstruction d'images. Nous travaillons sur des données :

- simulées, à partir d'un fantôme numérique,
- obtenues sur des fantômes réels (maquettes),
- et obtenues sur des colis de déchets radioactifs.

Chacune d'entre elles permet d'analyser un aspect particulier de la reconstruction.

Ainsi, à partir des données simulées, nous testons les algorithmes régularisés présentés au chapitre précédent. Plus précisément, nous nous intéressons aux effets de la régularisation sur la qualité des images reconstruites en présence d'un bruit poissonien. Le premier paragraphe devrait permettre, en partie, de retenir l'algorithme de régularisation approprié à la reconstruction à partir d'un sinogramme de mesures complets.

Pour les données issues des maquettes, nous portons notre attention sur l'apport des corrections dans la modélisation de la matrice. En particulier, nous étudions l'effet de la correction d'atténuation, celui de la réponse de détection et celui de la pénétration par les septas. L'analyse est paramétrée aux énergies des radioéléments contenus dans les colis tests, allant de 60 keV à 1,4 MeV. Puis, nous évaluons l'apport d'un échantillonnage efficace de mesures en le comparant à des schémas « standards » mais équivalents en nombre de mesures. Enfin, nous appliquons, en fin de paragraphe, les méthodes de régularisation sur les images reconstruites.

Sur la dernière série de mesures, nous présentons les résultats expérimentaux issus d'expertises réalisées sur une variété de colis de déchets nucléaires. Deux types de colis extrêmement répandus sont analysés : le colis de déchets compactés et le colis de déchets technologiques. Ces manipulations, ont pour but principal de montrer la faisabilité de la quantification d'activité globale à partir d'un jeu de données extrêmement réduit. Les résultats sont comparés au modèle « Ray-Driven » (modélisation des mesures comme des intégrales sur des droites).

7.2. SIMULATIONS A PARTIR D'UN FANTOME NUMERIQUE

Pour tous les types de données, ici, comme aux paragraphes 7.3 et 7.4, la distribution angulaire des acquisitions est prise équirépartie sur 360 degrés. La collimation correspondant à toutes les mesures

est celle d'une ouverture carrée $l_{col} = h_{col}$, de 3 cm de côté, et une longueur L_{col} , de 38,5 cm. Pour améliorer la lisibilité, les activités affichées sont interpolées sur une grille de 128x128 pixels.

7.2.1. Présentation du fantôme

Nous avons testé le comportement des algorithmes sur un fantôme numérique bidimensionnel. Ce fantôme, appelé CASPER, constitue la carte d'activité que l'on cherche à reconstruire. Le niveau d'activité dans CASPER varie de 0 à 100. Il est composé de deux zones (c.f. figure 7.1) :

- La première est limitrophe à l'objet : le niveau d'activité y est nul,
- la deuxième correspond au grand cercle principal où la répartition d'activité est hétérogène. Le niveau d'activité de base est de 31. Les formes elliptiques constituent les hétérogénéités fortes et faibles : les niveaux d'activité sont de 57 pour le petit cercle ainsi que pour les trois lignes (couleur jaune), et les trois points chauds dans la partie supérieure ont des niveaux d'activité allant de 70 à 100.

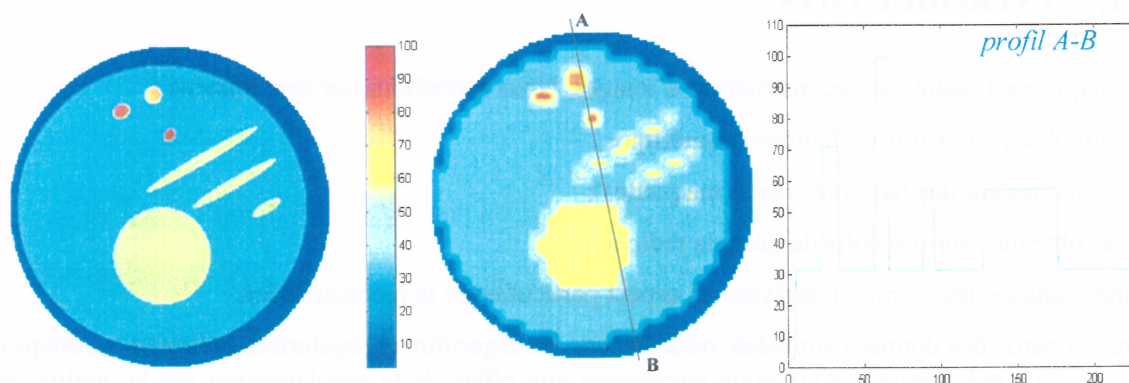


figure 7.1 : A gauche, le fantôme d'activité CASPER défini sur 256x256 pixels ; au centre, sur 31x31 pixels (interpolé sur une grille 128 x128) ; à droite, le profil A-B suivant lequel est comparé la dynamique des images.

CASPER simule un colis contenant une galette de déchets technologiques compactés décentrée enrobée de béton¹. Ainsi, le niveau d'activité périphérique (fixé à 0) correspond à l'espace du liant. La deuxième zone correspond à la galette : elle contient l'essentiel de la radioactivité avec des formes et des niveaux d'activité différents. L'activité numérisée de CASPER est notée f_{ref} .

L'utilisation d'un fantôme numérique est pratique pour les expérimentations. En effet, on connaît déjà l'objet à reconstruire, ce qui permet d'effectuer des mesures d'erreurs entre les images reconstruites et l'image originale, ainsi que des visualisations de profils.

Toutefois, ce fantôme numérique ne permet pas de juger du réalisme du modèle puisque la matrice de projection est précisément construite à partir du modèle élaboré. Pour plus de réalisme, il est donc souhaitable de passer à des simulations Monte-Carlo (ou alors d'utiliser des fantômes réels). Aussi, l'apport de la modélisation et de l'échantillonnage seront étudiés au paragraphe 7.3.

¹ Le compactage sous forme de galette est une technique de réduction du volume des colis. Le colis de déchets se présente alors sous la forme d'empilements de galettes. Un liant (du béton par exemple) peut être utilisé pour le blocage (c.f. § 7.4).

Les données simulées sont obtenues par projection du fantôme « CASPER », où la matrice de projection est reconstruite à partir du modèle développé au chapitre 5 : elle comporte la prise en compte d'une atténuation constante², $\mu = \mu_0 = 0,04 \text{ cm}^{-1}$, et la modélisation de la réponse impulsionnelle du détecteur. Le calcul barycentrique (c.f. § 5.4.3.1) est utilisé dans la modélisation pour la détermination du calcul surfacique de la LSF. Le code permettant la construction de la matrice s'appelle MEPHISTO, pour *Multi Emission PHoton Imagery through Segmented TOMography* [Thie-99a]. Dans la suite, on parle de la méthode MEPHISTO pour se référer aux images reconstruites à partir de la matrice ainsi générée.

Enfin, nous rajoutons au sinogramme obtenu, un bruit poissonien ε pour davantage de réalisme, soit :

$$m_{ref} = Hf_{ref} + \varepsilon$$

Nous avons généré un ensemble complet de 969 données, constitué par 57 projections angulaires et 17 mesures par projection. La résolution de TEMISEC est donné par sa FWHM au centre du colis soit: $FWHM = \frac{h_{col}}{L_{col}} D_{det} = 6.7105 \text{ cm}$. A la condition de Nyquist (c.f. § 3.8.2), le nombre de mesures par projection et le nombre de projections valent alors :

$$Q = \left\lceil 4 \frac{R_{obj} L_{col}}{D_{det} h_{col}} \right\rceil = 17 \text{ et } P = \lceil \pi Q \rceil = 54.$$

où $\lceil \cdot \rceil$ désigne la borne supérieure de la partie entière.

Il a été montré que sur un champ d'acquisition de 2π , le remplacement de $2n$ projections angulaires par ses nombres impairs voisins ($2n-1$ ou $2n+1$) diminue les artefacts d'aliasing [Zong-96]. On va donc préférer un nombre de projections angulaires impair, donc plutôt $P=53$ ou $P=55$. Nous avons fixé le nombre de projections à 57 pour plus de sûreté.

Nous avons considéré une taille d'objet unique constituée de 31×31 pixels, et nous mesurons la convergence de la solution à partir de la mesure du NMSE (c.f. § 6.5.6). Nous nous intéressons à présent au domaine d'application où les mesures sont bruitées.

Il est nécessaire, dans ce cas, d'appliquer des méthodes de régularisation si l'on veut éviter l'instabilité des méthodes pour un grand nombre d'itérations. Le CGLS, tout comme le ML-EM, ne peuvent convenir à une reconstruction d'image de qualité en présence de bruit. Dans les deux cas, le NMSE diverge : les méthodes basées sur une formulation identique à celle du gradient conjugué divergent plus rapidement que le ML-EM (c.f. figure 7.2).

Quel que soit les niveaux de bruit appliqués, la méthode du CGLS devient plus vite instable que le ML-EM. C'est d'autant plus vrai à des niveaux de bruits élevés. Le ML-EM semble plus stable en apparence : il faut en réalité beaucoup d'itérations à la méthode pour amorcer une divergence, et celle-ci reste progressive et moins abrupte qu'elle celle observée sur le CGLS.

La stabilité aux faibles itérations du ML est exploitée dans les cas réels pour obtenir une première estimation de l'image. De plus, elle donne directement l'information sur la quantité d'activité globale dans la coupe tomographique. En revanche, elle est insuffisante pour une restitution claire des contours de l'image.

² la constante correspond à la valeur moyenne de la carte d'atténuation hétérogène qui a été initialement définie comme support d'atténuation de CASPER.

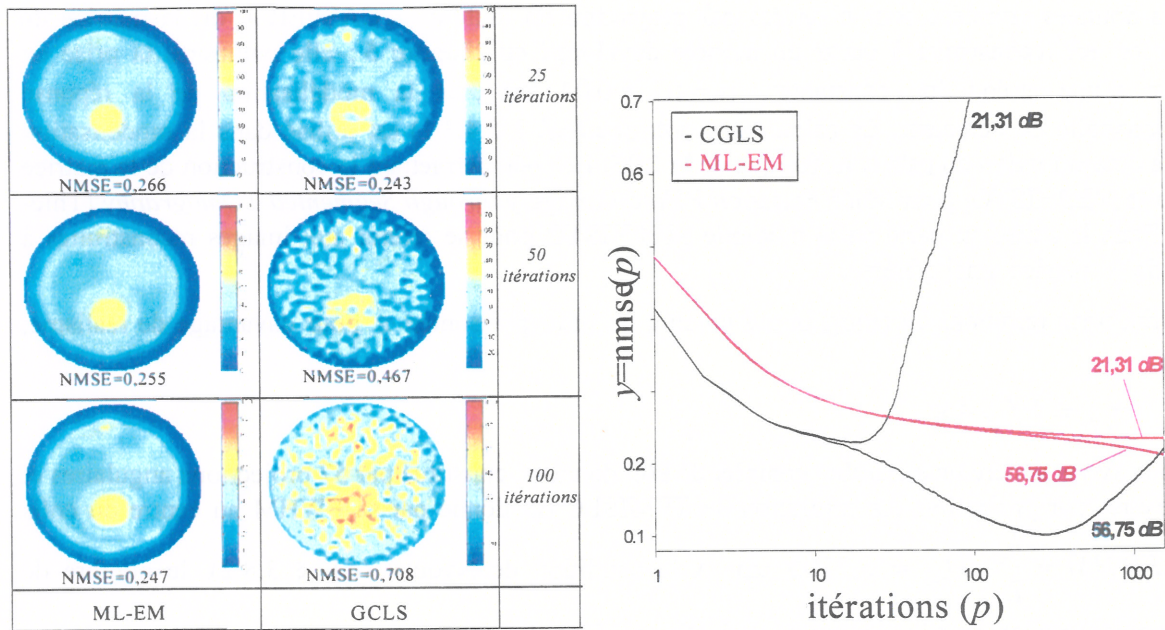


figure 7.2 : Images reconstruites par ML-EM et GCLS dans le cas d'une mesure bruitée à 21,31 dB³. L'évolution du NMSE a été tracé à deux niveaux de bruits différents : 21,31 dB et 56,75 dB. La condition initiale est identique pour les deux méthodes. ($f^0 = \sum_i m_i / \sum_{ij} H_{ij}$).

Nous nous plaçons donc directement dans les conditions proche des expériences où les données sont toujours entachées de bruit. Nous avons généré des projections bruitées à 56,75 dB, et nous concentrons notre étude sur la régularisation à partir du vecteur de données complet. L'analyse de la régularisation à partir de données incomplètes est sans conteste intéressante ; elle représente un travail en soi qui n'a pu être abordé dans les temps.

7.2.2. Application de la régularisation

Nous nous intéressons à présent aux comportements des trois algorithmes retenus au chapitre 6 : les deux algorithmes de régularisation semi-quadratique MOISE et ARTUR, et le Thin-Plate (TP).

7.2.2.1. Influence des hyperparamètres en régularisation SQ

Nous avons choisi d'étudier l'influence de ces paramètres sur la base d'ARTUR, sachant que le comportement est identique sur MOISE. Les potentiels utilisés ont été harmonisés pour $\delta=1$ (c.f. § 6.4.4.1).

³ on rappelle (c.f. § 6.5.6) que si ε désigne le bruit de mesure poissonnien, m est la mesure, alors le SNR (en dB) est défini par $SNR = 10 \ln \left(\frac{\sigma^2(m)}{\sigma^2(\varepsilon - m)} \right)$ où σ désigne la variance statistique.

Dans l'expérience qui suit, nous avons utilisé la fonction de potentiel de Geman et McClure, sur la base d'un modèle markovien à 8 voisins. Nous avons stoppé l'algorithme après 30 itérations.

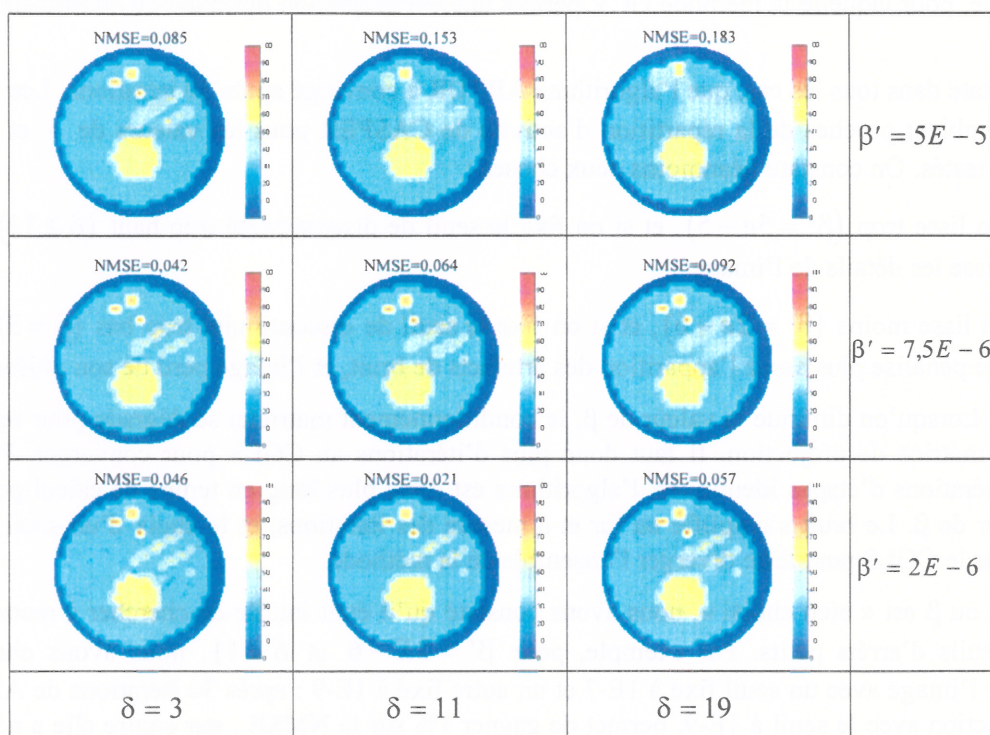


figure 7.3 : Images reconstruites par ARTUR pour différents valeurs du couple (δ, β')

A chaque itération, nous stoppons l'algorithme du CGLS dès que la norme résiduelle est inférieure à $1E-7^4$. Le seuil des discontinuités, δ , et le coefficient de régularisation, $\beta' = \beta / \delta^2$, sont déterminés empiriquement suivant l'heuristique suivante :

1. A partir d'une image (relativement stable) reconstruite par le ML-EM, nous commençons d'abord par fixer la valeur de δ : il est choisi supérieur au gradient maximal correspondant à un artefact. Si à un détail réel de l'image correspond un gradient inférieur à cette valeur, il sera également lissé, c'est une des limites de cet algorithme⁵.
2. Une fois la valeur de δ fixée, on cherche la valeur de β qui donne le résultat le plus probant. Cette phase reste malgré tout assez empirique. Une alternative est d'appliquer une méthode de validation croisée généralisée (GCV) [Gira-89] à la première itération. Ce n'est certes pas le choix optimal, mais cela permet de donner un ordre de grandeur du β . En effet, dans le cas d'une vraisemblance gaussienne, et lorsque l'image choisie en condition initiale est constante, alors le

⁴ soit : lorsque p vérifie $\|f^{p+1} - f^p\| / \|f^p\| < 1E - 7$

⁵ Si on connaît *a priori* la structure de l'image, on peut contourner ce handicap en réalisant une segmentation préalable et imposer des coefficients de lissage différents dans certaines zones que l'on désire préserver [La-97]. Cette méthode n'a pas été retenue dans notre travail car elle n'est techniquement pas applicable, puisque la distribution d'activité dans un colis ne répond à aucun standard.

Laplacien pondéré (c.f. § 6.4.3.2) devient la matrice du Laplacien classique à 5 points : la première itération de ARTUR s'apparente donc à une régularisation de Philipps-Tikhonov classique, pour laquelle la méthode GCV permet une détermination optimale du coefficient [Gira-86].

On constate dans tous les cas, que l'algorithme ARTUR a convergé après 30 itérations. Les images obtenues semblent proches de la répartition d'activité de CASPER pour les valeurs de δ et β que nous avons testés. On constate néanmoins deux choses :

1. Si on lisse trop ($\beta' = 5e - 5$), et si on fixe le seuil de discontinuité trop haut ($\delta \geq 11$), alors on lisse les détails de l'image.
2. si on lisse moins ($\beta' = 2e - 6$), et si on fixe le seuil de discontinuité trop bas ($\delta = 3$), alors on ne pénalise plus assez l'apparition des artefacts de bruit, et l'image perd de son uniformité.

Remarque : Lorsqu'on diminue la valeur de β , le conditionnement matriciel se dégrade pour rejoindre celui de la matrice de projection. Il faut donc plus d'itérations au CGLS pour converger. Pour un nombre d'itérations d'étapes identiques, l'algorithme est donc plus long en temps de calcul pour une faible valeur de β . Le bruit s'amplifie au fur et à mesure des itérations, et le choix d'un seuil d'arrêt trop petit sur le CGLS peut faire diverger l'ensemble de la méthode.

Dans le cas où β est « bien choisi », nous avons constaté qu'il était inutile de chercher à reconstruire avec des seuils d'arrêts petits. Par exemple, pour $\beta' = 2E - 6$ et $\delta = 11$, nous avons cherché à reconstruire l'image avec un seuil fixé à $1E-7$ et un autre fixé à $1E-9$: après 30 itérations de ARTUR, la reconstruction avec le seuil à $1E-9$, permet de gagner 1% sur le NMSE, par contre elle a nécessité environ 1,5 fois le temps qu'il a fallu avec un seuil d'arrêt à $1E-7$.

On voit donc, sur cet exemple, toute l'importance des deux hyperparamètres sur la qualité de l'image reconstruite. La mise en œuvre d'une méthode de sélection optimale de ces paramètres reste définir, pour que l'utilisation des régularisations semi-quadratiques soit entièrement opérationnelle.

Pour le couple de valeur ($\beta' = 2e - 6, \delta = 11$), nous présentons les résultats obtenus avec le potentiel convexe des hypersurfaces, φ_{HS} , et celui non-convexe de Geman et McClure, φ_{GM} . Le résultat à la figure 7.4 confirme qu'il est possible de préserver les contours avec une fonction de potentiel convexe.

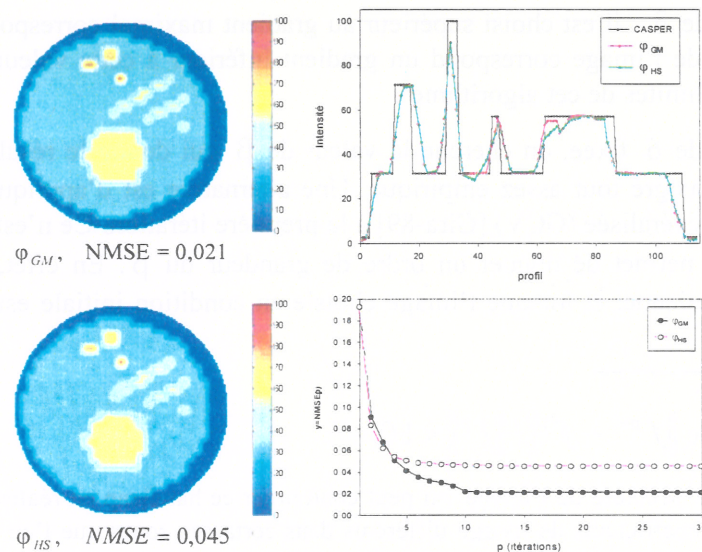


figure 7.4 : Reconstruction avec les fonctions de potentiel φ_{HS} et φ_{GM}

En utilisant le potentiel φ_{HS} , on observe des artefacts de bruit dans l'image. Ces derniers pourraient disparaître si on lisait davantage (avec un β' plus grand) mais on risquerait également de gommer les contours réels de l'image. Bien que les résultats obtenus avec les deux fonctions de potentiel soient d'un aspect assez proche, on peut noter que le résultat obtenu avec le potentiel non convexe φ_{GM} , est meilleur que φ_{HS} : les discontinuités sont mieux restituées avec un potentiel non convexe, et les points chauds apparaissent plus nettement (c.f. profil de la figure 7.4). Cela vient confirmer que dans le cas de distributions d'activités constituées de zones constantes séparées par des contours francs, (CASPER en est un exemple), alors la régularisation semi-quadratique fonctionne d'autant mieux avec des fonctions de pondérations à décroissances rapides.

Toutefois, l'avantage du potentiel φ_{HS} est qu'il n'engendre qu'un seul minimum. La convergence vers le minimum global est assurée. Pour autant nous choisissons le potentiel φ_{GM} pour les reconstructions à venir. Nous nous référençons aux travaux publiés par Delanay et Bresler [Dela-98], qui prouvent la convergence de la régularisation semi-quadratique lorsque le potentiel utilisé est non convexe, dès lors que le minimum global de la fonctionnelle est isolé⁶.

7.2.2.2. Influence de l'hyperparamètre β sur le modèle THIN-PLATE (TP)

Ce modèle est plus simple d'utilisation. Il ne nécessite que le choix du coefficient de régularisation β (voir § 6.5.5). Nous donnons à la figure 7.5 les reconstructions d'images du TP pour différentes valeurs du paramètre.

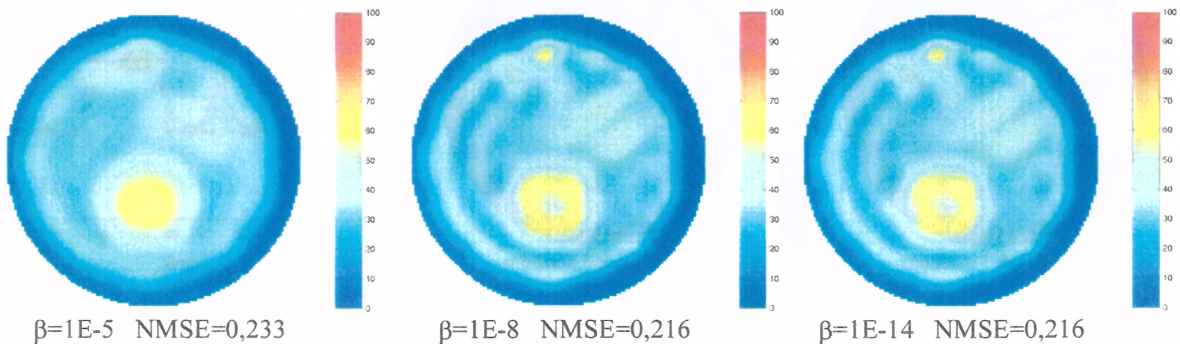


figure 7.5 : Images reconstruites par le TP avec différentes valeurs de β et le NMSE correspondant sur 1000 itérations

On constate qu'un choix trop important de la valeur de β , conduit à un surlissage de l'image reconstruite (figure 7.5 à gauche). Pour des valeurs plus faible, ($\beta = 1E - 8$, $\beta = 1E - 14$) l'image restitue mieux les hautes fréquences, mais elle conserve toutefois un aspect trop lisse pour être véritablement satisfaisante. L'utilisation de la dérivée seconde dans l'énergie *a priori* a tendance à égaliser l'aspect général de l'image, et permet plus difficilement la restitution de contours francs.

Dans tous les cas, l'algorithme est stabilisé, mais n'a pas abouti à la convergence, et ceci même pour un nombre d'itérations très important. La méthode du TP est plus robuste vis-à-vis du choix de l'hyperparamètre, mais elle présente un taux de convergence très bas.

⁶ Cette dernière hypothèse est difficile à vérifier en pratique. *A contrario*, on peut montrer par exemple que l'utilisation d'un potentiel convexe ne permet pas de reconstruire une image de meilleure qualité

D'une part, l'algorithme GEM-MAP utilisé dans le schéma itératif est sous-optimal : il risque donc de rester piégé dans des minima locaux éloignés du minimum local. D'autre part, la version ICM de descente ne permet à chaque itération de ne changer que la valeur du pixel qui est visité, les autres conservant leur valeur. L'I.C.M est généralement utilisé en segmentation d'image : lorsque le nombre d'état possibles est petit, il est alors pratique et rapide. Il semble moins approprié dans notre cas.

Lee a utilisé le TP en tomographie cérébrale [Lee-97] : les résultats du TP, comparés au ML-EM et une RPF, sont d'une qualité supérieure autant en résolution que d'un point de vue quantitatif. Pour autant, le nombre d'itérations n'étant pas fourni, il nous est pas possible de juger de la rapidité de la méthode.

Pour un emploi futur de cet algorithme, il serait bon d'envisager une version accélérée (en utilisant un Ordered Subset par exemple). En revanche, le problème de la sous-optimalité du TP subsiste. C'est pour cette dernière raison que nous l'avons pas retenu.

7.2.2.3. Comparaison des algorithmes ARTUR et MOISE

Nous avons comparé les performances de l'algorithme MOISE et ARTUR selon les deux critères : le taux de convergence et la qualité de l'image. Les itérations ont été arrêtées dès que les images ont un NMSE inférieur à 9%. Le résultat est donné à la figure 7.6 :

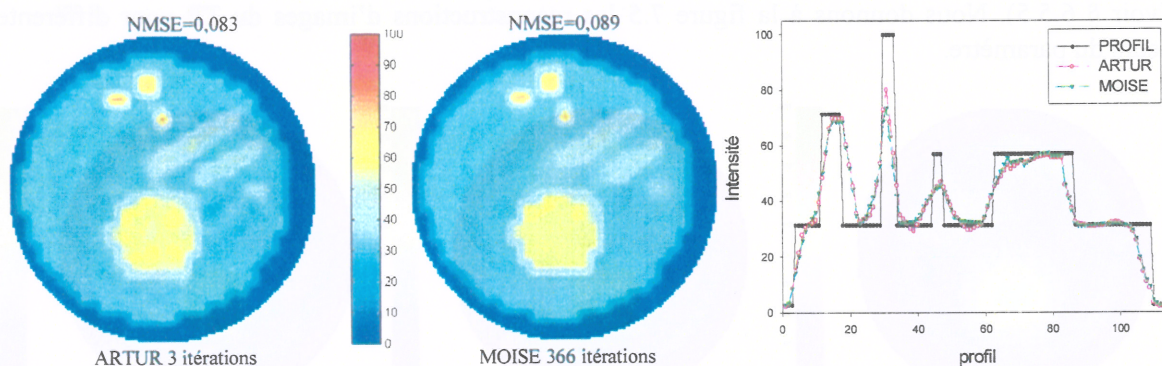


figure 7.6 : Comparaison entre ARTUR et MOISE pour $\beta=2E-6$ et $\delta=11$

Remarque : nous aurions pu nous attacher à l'étude de la durée nécessaire d'une itération de ces méthodes. Nous ne l'avons pas réalisé principalement parce que chacun des algorithmes n'a pas bénéficié de la même attention en ce qui concerne l'optimisation des différentes phases de calcul, la gestion des structures et de la mémoire. D'autre part, les reconstructions ont été tantôt réalisées sur un PC tantôt sur une station de travail. Sur la station de travail, les temps de calcul sont généralement divisés par deux par rapport au PC.

L'algorithme ARTUR converge en moins d'une dizaine d'itérations vers une image très satisfaisante. La convergence de MOISE est plus lente, puisqu'il lui faut entre 300 et 400 itérations pour atteindre un NMSE identique. Le temps d'une itération de chacun est approximativement égal.

Toutefois, l'image reconstruite par MOISE restitue mieux les zones uniformes entrecoupées de bords francs. Ainsi, sur le profil de la figure 7.6, les zones d'activités constantes gagnent en uniformité, les fluctuations autour de ces valeurs sont moins nombreuses.

Par ailleurs, il est remarquable de voir qu'ARTUR a tendance à provoquer des creusements entre des pics d'activités (c.f. profil de la figure 7.6). Ce détail n'a pas de conséquence ici, car le niveau moyen d'activité est supérieur à zéro. En revanche, la restitution de points chauds voisins d'une zone d'activité nulle amène ARTUR à reconstruire des activités alentours négatives. L'algorithme n'est donc pas approprié à la reconstruction de l'ensemble des distributions d'activités rencontrées dans les colis de déchets. On peut supposer qu'ARTUR puisse avoir un comportement *ad hoc* sur des distributions d'activité non nulles sur l'ensemble du support (colis homogènes), mais il reste inapproprié pour des distributions de la forme « présence de pics d'activités situés dans des zones uniformes inactives ». Pour qu'il puisse être opérationnel, il faudrait envisager une contrainte de positivité sur les itérés intermédiaires de l'algorithme. Ce type de contrainte a été imposé sur un algorithme de type gradient dans [Mumc-94].

Conclusion :

MOISE et ARTUR permettent de corriger un bruit statistique poissonien. Si on s'en tient à la qualité de l'image reconstruite, MOISE est le plus performant dans le sens où l'image restituée répond mieux à notre exigence, c'est-à-dire « reconstruire une image constituée de zones constantes pouvant être séparées par des bords francs ». Les simulations réalisées ne permettent pas cependant de savoir si l'hypothèse d'une vraisemblance poissonienne est supérieure, en terme de NMSE, à l'hypothèse d'une vraisemblance gaussienne. Pour l'application de la régularisation à des cas réels, nous privilégions la version MOISE, car elle prend naturellement en compte la contrainte de positivité.

7.3. RECONSTRUCTIONS A PARTIR DE FANTOMES REELS

Nous allons tester la reconstruction tomographique sur une partie plus appliquée de notre travail. Les deux maquettes élaborées à cet effet, HETER et HOMOG, permettent de valider simultanément l'aspect quantitatif du modèle et la qualité des images reconstruites.

Dans un premier temps nous montrons les effets de la prise en compte des corrections des facteurs physiques dans la matrice de projection, par le biais des images.

Puis, on s'intéresse aux effets de l'échantillonnage entrelacé puis de la régularisation.

7.3.1. Descriptif des matrices HETER et HOMOG

La maquette HETER est une maquette simulant une tranche de 15 cm de colis contenant des hétérogénéités physiques et radioactives. La tranche a été divisée en 4 secteurs angulaires, de densité moyenne variable :

- un secteur vide,
- un secteur rempli de billes de polyéthylène, de densité 0,6
- un secteur contenant du sable, de densité 1,6
- et un secteur rempli de déchets technologiques divers (matériels de laboratoire : gants, éprouvettes et récipients plastiques). La densité moyenne de la tranche (sans le conteneur) est de 0,315.

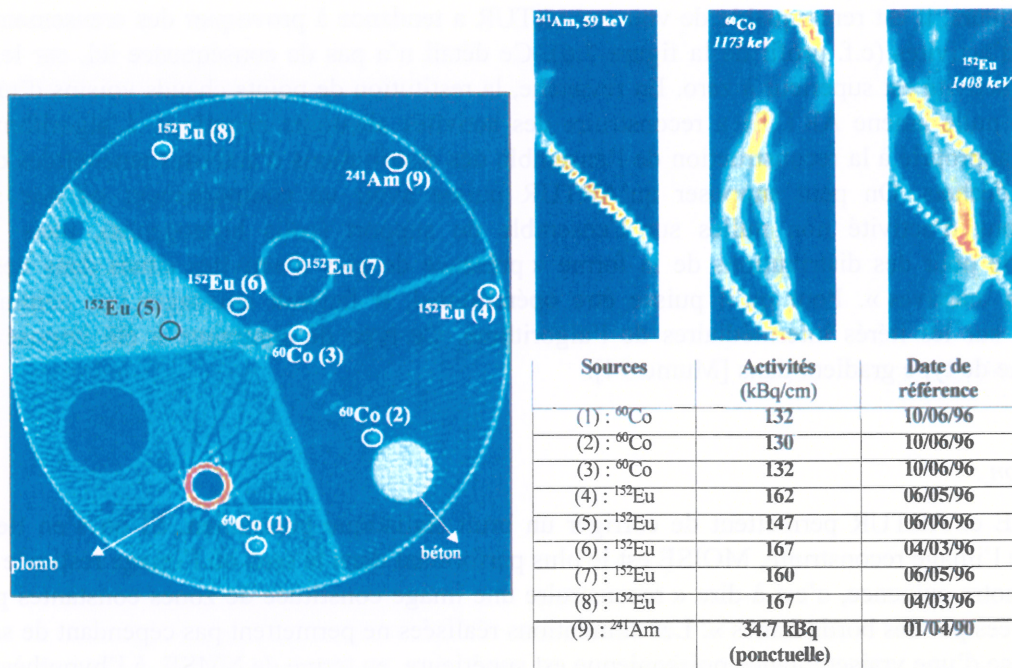


figure 7.7 : Carte de distribution d'atténuation de HETER à 1173 keV (à gauche) avec la localisation des sources. Les activités linéiques correspondantes sont données dans le tableau. A droite, les sinogrammes pour les 3 différents radioéléments.

En résumé, HETER est une matrice de faible densité, mais fortement hétérogène.

Une imagerie par tomographie de transmission (c.f. figure 7.7) a été réalisée pour la configuration hétérogène.

La maquette HETER permet, par conséquent, une reconstruction en corrigeant de deux méthodes de d'atténuation :

1. en utilisant la carte d'atténuation, extrapolée aux énergies correspondantes,
2. en utilisant une valeur moyenne de l'atténuation linéique contenue (au sens strict) dans le colis. On rappelle que la correction de l'atténuation due au conteneur est corrigée à part.

Nous avons utilisé des sources linéiques radioactives placées parallèlement à l'axe de rotation, grâce à la grille de positionnement décrite au § 5.5.1. Elles respectent donc l'hypothèse d'une distribution axiale uniforme de l'activité. La répartition de l'atténuation peut être considérée comme uniforme suivant l'axe.

La source ponctuelle d' ^{241}Am permet une évaluation de la méthode à très basse énergie (raie d'émission à 59 keV), ainsi que l'analyse du comportement de la modélisation en présence d'une répartition d'activité non linéique. L'emplacement des sources linéiques, ainsi que leur intensité respective, sont référencés sur la carte d'atténuation à la figure 7.7.

La maquette HOMOG est une maquette similaire à HETER simulant une tranche de 15 cm de colis de densité physique quasiment homogène.

La maquette est remplie sur toute la hauteur par des billes de polyéthylène (PE).

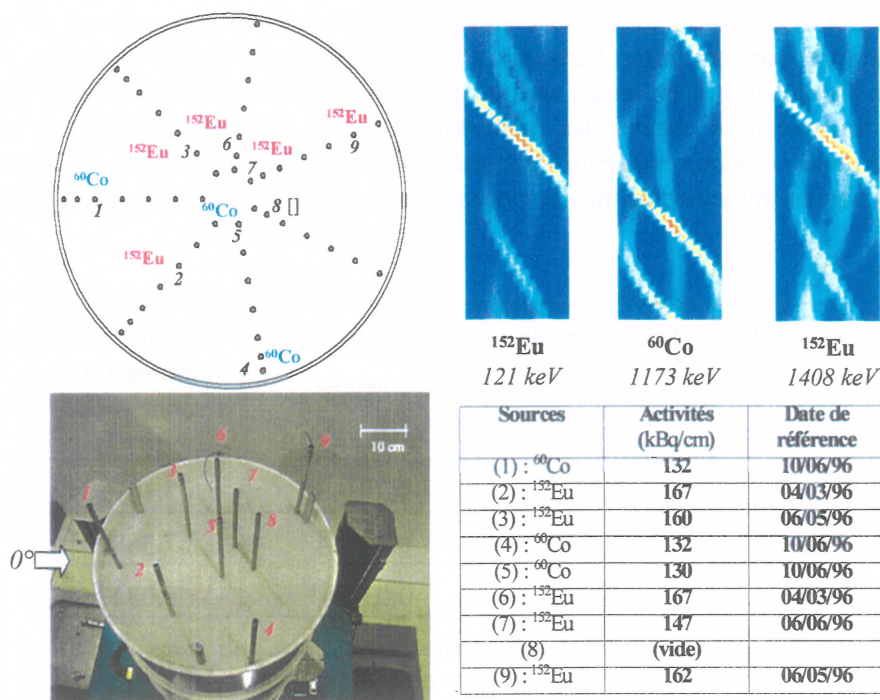


figure 7.8 : Maquette HOMOG : description schématique des emplacements des sources (en haut à gauche) et tableau des correspondances entre chiffres et sources (en bas à droite). Une photo prise de dessus du colis (à 90° de l'angle zéro de référence)

Les seules hétérogénéités à dénombrer sont les tubes porte-sources, les tubes de maintien⁷ et l'épaisseur du conteneur. La maquette utilise les mêmes sources linéiques que HETER, dans une disposition différente ; la source ponctuelle d'Américium a été retirée.

En résumé, HOMOG est une matrice de densité moyenne 0,6 et de répartition quasi-homogène.

La correction d'atténuation s'effectue dans le cas de HOMOG à partir des tables de Hubbell [Hube-93]. Nous supposons donc une atténuation constante dans le colis, et nous prenons également en compte l'atténuation due au conteneur. Nous n'avons pas pris en compte l'atténuation due aux tubes porte-sources dans lesquels sont logées les sources linéiques, ainsi que les trois cylindres de maintien (tubes non numérotés sur l'image de la figure 7.8). Pour des billes de polyéthylène les atténuations linéiques des matériaux aux énergies des radioéléments est résumé dans le tableau 7.1 :

Energie (keV)	121.8	244.7	344.3	964.1	1173.2	1332.5	1408.0
μ (cm ⁻¹)	(¹⁵² Eu)	(¹⁵² Eu)	(¹⁵² Eu)	(¹⁵² Eu)	(⁶⁰ Co)	(⁶⁰ Co)	(¹⁵² Eu)
PE	0,0951	0,0765	0,06727	0,04296	0,0394	0,0368	0,0353
conteneur	2,0182	0,9682	0,8026	0,4799	0,4341	0,4068	0,3958

tableau 7.1 : Valeurs des atténuations linéiques de la matrice et du conteneur (fer) utilisées pour la reconstruction sur HOMOG

⁷ On distingue un tube de maintien entre la source #2 et la source #4 à la figure 7.8. Au nombre de trois, ils maintiennent et garantissent le positionnement vertical des sources linéiques.

Sur HETER et HOMOG, nous avons réalisé un ensemble complet de mesures, soit 57 projections angulaires et 17 mesures par projection. Le temps d'une acquisition est de 600 secondes, soit un peu plus de 160 heures d'acquisitions. En tenant compte de la décroissance de la radioactivité des sources, l'activité globale linéique pour chacun des radioéléments a été calculée et se trouve résumée au tableau 7.2. La dernière colonne représente l'activité globale sur une hauteur de 10,24 cm, hauteur correspondant à la hauteur moyenne de mesure pour un collimateur d'ouverture carrée de 3 cm [Thie-99a].

Radioéléments	Demi-période (années)	Activité totale corrigée (MBq/cm)	Activité totale mesurée sur la tranche (MBq)
^{60}Co	5,27	0,30343	3,1092
^{152}Eu	13,48	0,71914	7,3689
^{241}Am	433	0,0347 ^(*)	0,0347

tableau 7.2 : Activité globale des radioéléments contenus dans HETER et HOMOG (^(*) c'est une activité en MBq car la source est ponctuelle)

7.3.2. Validation de la modélisation

Nous consacrons ce paragraphe à l'influence de la correction des facteurs physiques au travers de la reconstruction d'images. Il s'agit de l'atténuation, de la perte de résolution du détecteur, et de l'effet de pénétration par les septas.

Nous avons utilisé, pour l'ensemble des reconstructions, avec et sans correction des phénomènes physiques, une méthode ML-EM. Nous avons décidé de stopper l'algorithme à 500 itérations. Cette borne correspond à une plage d'itérations où l'image évolue peu et précède de loin la phase de dégradation des reconstructions.

7.3.2.1. Effets de la correction d'atténuation

Il s'agit d'étudier les effets de la correction d'atténuation sur la qualité des images reconstruites sur le fantôme HETER. Pour ce faire, nous étudions l'aspect des images reconstruites lorsque nous utilisons la matrice de projection ne corrigeant que d'une valeur constante de l'atténuation et celle corrigeant de l'atténuation en utilisant la carte de transmission. Dans les deux cas, nous corrigeons de la réponse géométrique du détecteur.

Par abus de langage, on parlera de correction d'atténuation pour désigner la correction où on tient compte de la carte d'atténuation par tomographie de transmission. Dans les deux cas, nous avons intégré la correction de la réponse du détecteur telle qu'elle est proposée au chapitre 5. Parmi les images obtenues nous avons sélectionné ^{241}Am à 59 keV, ^{152}Eu à 121 keV, 344 keV et 964 keV et le ^{60}Co à la raie de 1332 keV, ce qui correspond à un échantillonnage représentatif des énergies.

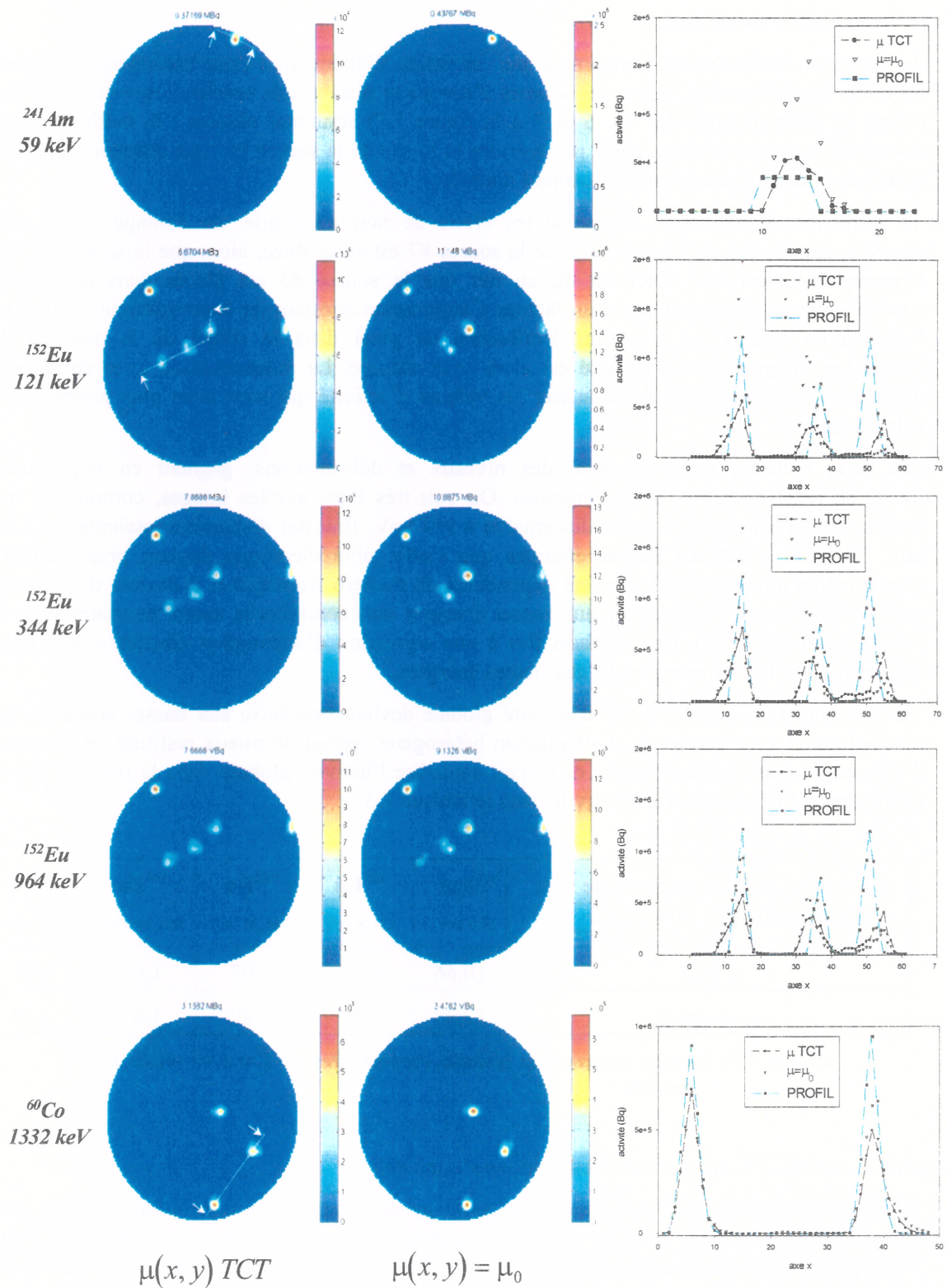


figure 7.9 : Images reconstruites à différentes énergies. La colonne de gauche correspond à une correction d'atténuation hétérogène ; la colonne centrale corrige d'une atténuation constante. Les profils sont données en vis-à-vis.

Visuellement, on constate que :

- la correction d'atténuation comparée à une correction d'atténuation prise homogène minimise les effets de déformation. Ainsi, les sources d'euporium placées très proches l'une de l'autre au centre du colis (numérotées #5, 6 et 7 à la figure 7.7) sont mal placées : la méthode avec correction uniforme n'arrive pas à reconstruire la forme de la source #6 : sur chacune des raies d'émission, celle-ci est systématiquement doublée,
- la correction d'atténuation minimise les effets de non-uniformité sur l'image. Ainsi, on constate, dans le cas de l'euporium, que la source #7 est surévaluée, alors que la source #5 est largement sous-estimée. Ceci est dû au fait que la source #5 est placée dans le secteur « sable » : en ne corrigeant que d'un facteur d'atténuation constant (et donc inférieur à celui de l'atténuation locale), on surestime l'influence du pixel dans le calcul de la matrice. A l'inversion du processus, l'activité est alors sous-estimée. La reconstruction avec correction d'atténuation permet donc de rehausser les valeurs d'activité qui sont alors plus proches des valeurs réelles,
- ces deux facteurs, non-uniformité des niveaux et déformations, gagnent en importance lorsqu'on reconstruit aux basses énergies. On voit très bien, sur les images, comme sur les profils, que la source #5, à peine discernable à 964 keV, finit par disparaître totalement à 121 keV. En effet, c'est aux basses énergies que l'effet photoélectrique devient prépondérant. L'atténuation devient alors fortement dépendante du numéro atomique et il devient difficile de corriger exactement l'atténuation aux basses énergies sans connaître la nature du matériau (c.f. remarque au § 5.4.2.1). Les artefacts liés à une correction d'atténuation constante sont plus importants aux basses énergies qu'aux hautes énergies,
- en conséquent, la quantification d'activité globale devient imprécise aux basses énergies. La reconstruction avec correction d'atténuation hétérogène permet de mieux restituer les niveaux d'activité, et ainsi, par extension, de mieux connaître l'activité globale dans la tranche. Nous avons rassemblé les rapports d'activité dans le tableau 7.3

Rapport : activité reconstruite sur activité réelle $(\sum_k f_k^{500} / \sum_k f_{ref,k})$	²⁴¹ Am 59,9 keV	¹⁵² Eu 121,8 keV	¹⁵² Eu 344,28 keV	¹⁵² Eu 964,13 keV	⁶⁰ Co 1332,5 keV
μ TCT	10,66	0,87	1,07	1,04	1,01
μ constant	12,38	1,51	1,47	1,47	1,12

tableau 7.3 : Rapport des activités globales reconstruites sur l'activité réelle du fantôme

A partir du tableau 7.3, trois autres constatations s'imposent :

1. le modèle corrigeant de l'atténuation par couplage des données de transmission permet une quantification d'activité globale de bonne qualité sur une large gamme d'énergie. Pour l'euporium, l'activité est sous-estimée de 13% à 121 keV, et surestimée de 4% à 964 keV et de 1% à 1332 keV
2. Enfin, notons l'erreur d'un facteur 10, commise sur la source ponctuelle de l'américium. Elle illustre une limitation fondamentale du modèle lorsqu'il est appliqué à de larges ouvertures. En effet, on rappelle que le modèle suppose une répartition axiale de l'activité. On est dans le cas précis où cette hypothèse n'est pas vérifiée. Aussi, après reconstruction, l'activité volumique (Bq/cm³) reconstruite est multipliée par le volume des pixels de la tranche, pour avoir une

image exprimée en activité (Bq). C'est précisément en multipliant par la hauteur de tranche que l'on commet l'erreur. C'est un effet de volume partiel que le modèle peut difficilement corriger dans l'état actuel.

3. A la figure 7.9, on constate curieusement que les niveaux d'activités du Cobalt sont plus uniformes dans le cas d'une atténuation constante que dans le cas du couplage de la carte d'atténuation. On constate cependant au tableau 7.3 que la quantification est surestimée (rapport 1,12). En réalité, si la restitution des niveaux d'activité est meilleure avec une correction d'atténuation constante, elle est malheureusement plus étalée aux pourtours des points chauds.

7.3.2.2. Influence de la réponse spatiale

Nous nous plaçons dans le cas où nous corrigeons l'atténuation en couplant l'image obtenue par tomographie de transmission. Nous voulons étudier l'effet de la correction de perte de résolution due au collimateur. Pour cela, nous proposons 3 corrections de la réponse :

1. la correction présentée au chapitre 5 (équation (5.19)), calculée sur l'ensemble du cône de détection ; on la référence « MEPHISTO »
2. la correction identique à MEPHISTO, déterminée sur la bande de détection de largeur du collimateur (I_{col}), et nulle ailleurs ; on la référence « BANDE »
3. une détection approchée par la ligne centrale, appelée méthode « ray-driven » [Jose-82] ; on la référence « RD »

Nous présentons d'abord les résultats sur la matrice HETER, puis sur HOMOG, ainsi que les rapports d'activités globales reconstruites.

De la figure 7.10, on peut faire les constatations suivantes :

- le fait de prendre en compte l'ouverture divergente de la réponse améliore considérablement la qualité de l'image. La méthode « MEPHISTO » est la seule à pouvoir réellement permettre une lecture des points chauds, et ceci quelle que soit l'énergie. La correction de ce phénomène sur l'ensemble de l'espace de détection améliore la localisation des sources émettrices.
- Elle améliore également le contraste. La dégradation de la correction géométrique tend à étaler les sources et engendre des artefacts de reconstruction là où il n'y a pas d'activité. La suppression de l'effet de flou et de distorsion est manifeste avec la méthode « MEPHISTO ».
- Enfin, la quantification est très détériorée avec les modèles « BANDE » et « RD ». Notons cependant, que la méthode « BANDE » utilise un calibrage identique à celle de « MEPHISTO ». Aussi, il est possible que l'on puisse améliorer le calibrage pour ce type de réponse, mais là n'est pas le but de cette étude. D'ailleurs, cela n'affecterait que la quantification, la qualité de l'image resterait toujours aussi peu satisfaisante. La méthode « RD » est, quant à elle, dédiée aux reconstructions avec de très faible nombre de mesures, plus particulièrement pour les configurations d'images 9x9 pixels et autant de mesures. Dans cette configuration, un pixel au centre de l'image a une taille presque égale à la taille du faisceau interrogateur. Pour des résolutions d'images supérieures, il est normal que la méthode RD génère un biais sur la quantification.

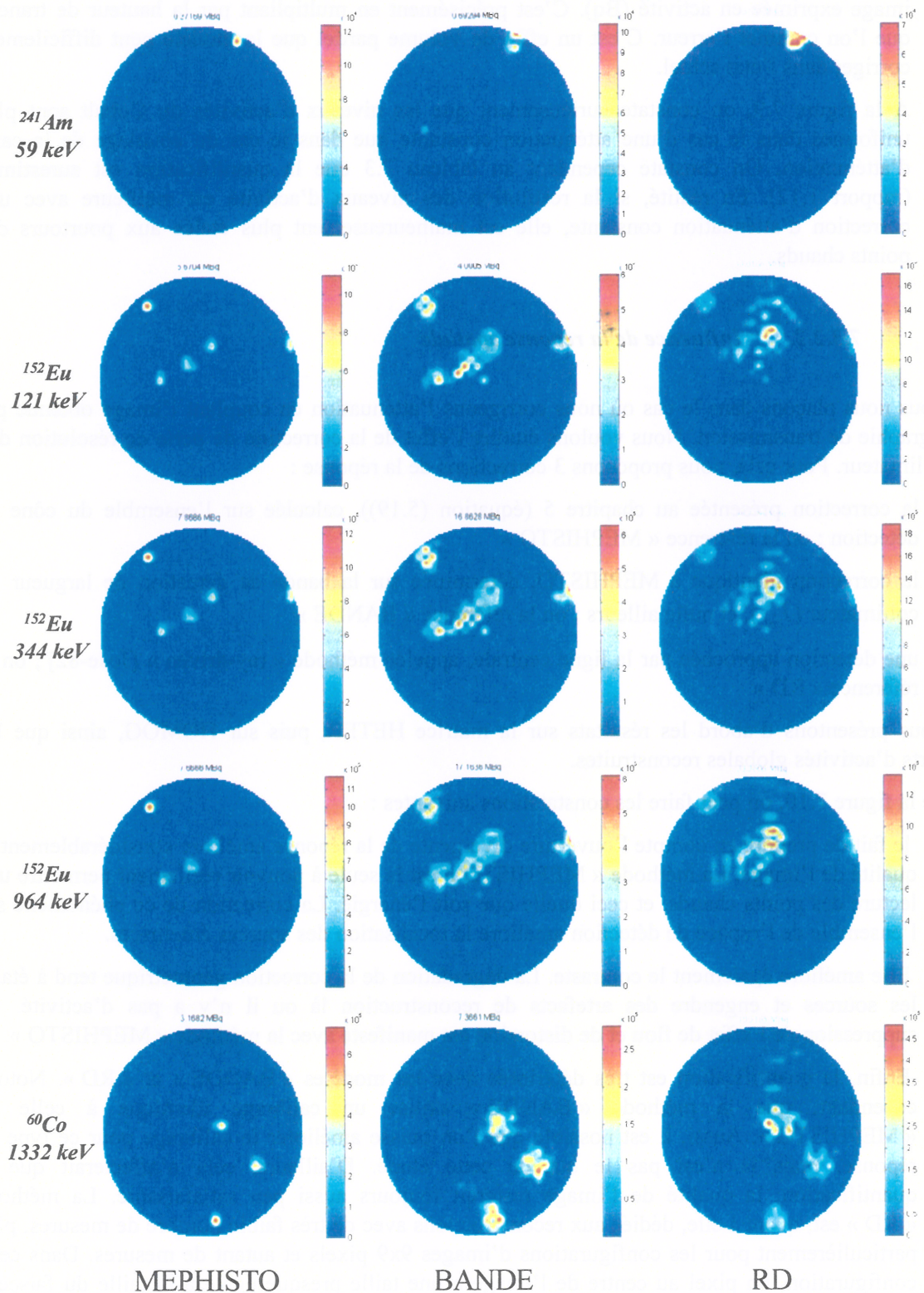


figure 7.10 : Reconstruction d'images obtenues par les trois différents modèles de correction de réponse de détecteur : de la colonne de gauche à celle de droite : la méthode « MEPHISTO », « BANDE », et « RD ».

Voyons à présent l'étude à partir d'une atténuation homogène, sur le colis HOMOG.

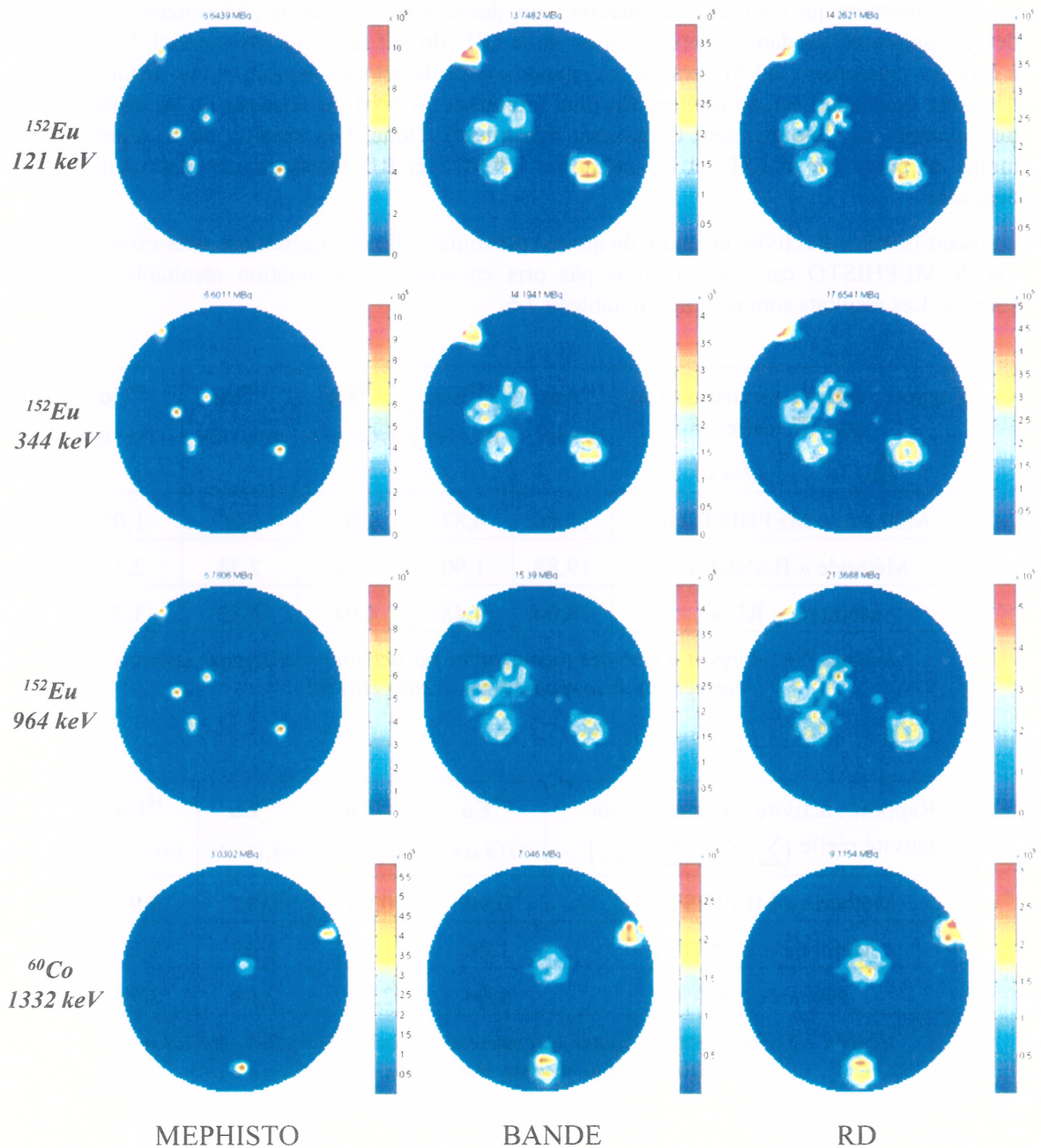


figure 7.11 : Reconstitutions sur HOMOG à l'aide des différentes corrections de la perte de résolution en détection. de la colonne de gauche à celle de droite : la méthode « MEPHISTO », « BANDE », et « RD »

Visuellement, nous constatons les points suivants :

- pour tous les radioéléments de la figure 7.11, on constate cette fois-ci moins de déformations géométriques autour des points chauds. Dans le cas de la méthode « BANDE », la localisation des sources devient possible, même s'il demeure un phénomène de flou. En effet, lorsque la densité

moyenne du colis augmenté⁸, alors la correction de la réponse de détection devient relativement moins importante que celle de l'atténuation : aux densités croissantes, le phénomène d'atténuation devient prépondérant dans la détermination de la LSF, du fait du terme exponentiel. L'atténuation « écrase » rapidement la LSF lorsque la distance source détecteur s'accroît. A une distance source-détecteur constante, cet écrasement est plus important au bord du faisceau qu'au centre (car on tient compte de l'éloignement transversal également). Donc, l'expression de la réponse prend moins de poids sur la LSF, et les méthodes BANDE et RD reconstruisent des images moins dégradées.

- La quantification d'activité demeure de qualité identique. Elle est légèrement sous-estimée dans le cas de MEPHISTO car nous n'avons pas pris en compte l'atténuation résultante des portes sources. Les résultats sont résumés au tableau 7.5.

Rapport : activité reconstruite sur activité réelle $(\sum_k f_k^{500} / \sum_k f_{ref,k})$	²⁴¹ Am 59,9 keV	¹⁵² Eu 121,8 keV	¹⁵² Eu 344,28 keV	¹⁵² Eu 964,13 keV	⁶⁰ Co 1332,5 keV
Méthode « MEPHISTO »	10,66	0,87	1,07	1,04	1,01
Méthode « BANDE »	19,88	1,90	2,29	2,33	2,37
Méthode « RD »	18,04	4,48	4,94	4,53	3,32

tableau 7.4 : Rapport d'activités reconstruites sur activités réelles pour les trois corrections de la réponse, sur le colis HETER

Rapport : activité reconstruite sur activité réelle $(\sum_k f_k^{500} / \sum_k f_{ref,k})$	¹⁵² Eu 121,8 keV	¹⁵² Eu 344,28 keV	¹⁵² Eu 964,13 keV	⁶⁰ Co 1332,5 keV
Méthode « MEPHISTO »	0,90	0,90	0,92	0,98
Méthode « BANDE »	1,86	1,92	2,08	2,27
Méthode « RD »	1,94	2,39	2,89	2,94

tableau 7.5 : Rapports d'activités reconstruites sur activités réelles pour les trois corrections de la réponse, sur le colis HOMOG

7.3.2.3. influence du phénomène de pénétration par les septas

Nous avons effectué les reconstructions sur HETER, en intégrant la correction d'atténuation et la correction de la perte de résolution, mais sans tenir compte de l'effet de septa. Nous avons soustrait les images, à celles obtenues par le modèle complet (c.f. MEPHISTO).

⁸ ce qui est le cas ici, puisque $\rho_{HOMOG} = 0,6 > \rho_{HETER} = 0,315$

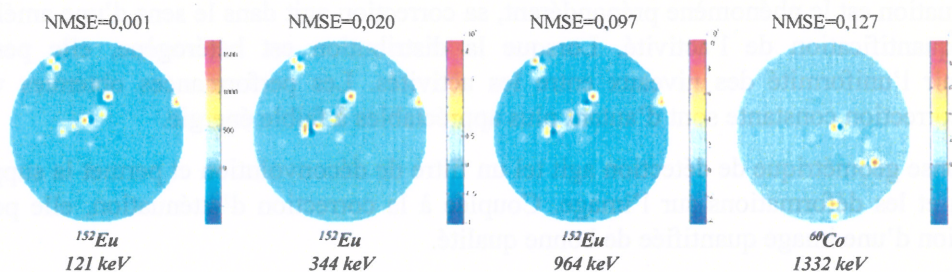


figure 7.12 : Evaluation aux 4 raies d'énergies de la différence entre l'image reconstruite par MEPHISTO et la version n'intégrant pas la pénétration par les septas

Visuellement, il est difficile de constater une différence sur les deux images reconstruites. Cela était prévisible compte tenu de l'importance tout à fait relative du phénomène comparé à l'atténuation et la réponse de détection. Toutefois, en effectuant la soustraction entre les deux images il apparaît une différence, localisée au niveau des points chauds (c.f. figure 7.12).

Les deux principales constatations que nous pouvons faire, sont :

- l'effet va en s'accroissant avec l'énergie du radioélément : le résidu relatif (entre la différence des deux images, et l'image reconstruite avec le modèle complet) va de 0,1% à 121 keV pour atteindre 12,7% à 1332 keV
- Les maxima se situent au niveau de la périphérie proche des points chauds, ce qui est particulièrement visible sur le cobalt. La prise en compte de l'effet agit, tout comme la prise en compte de la réponse de détection, dans le sens d'une suppression de l'effet de flou et de distorsion, à une moindre échelle cependant.
- Enfin, lorsque l'effet n'est pas pris en compte, la quantification d'activité est légèrement surestimée, comme le soulignent les résultats au tableau 7.6 ci-dessous. En ne tenant pas compte des photons qui viennent s'ajouter par pénétration par les septas, on sous-estime les coefficients matriciels : lors de l'inversion du système, l'activité est alors surestimée. L'erreur de quantification est accentuée aux hautes énergies.

Rapport : activité reconstruite sur activité réelle $(\sum_k f_k^{500} / \sum_k f_{ref,k})$	^{152}Eu 121,8 keV	^{152}Eu 344,28 keV	^{152}Eu 964,13 keV	^{60}Co 1332,5 keV
Avec correction de l'effet de septa	0,90	0,90	0,92	0,98
Sans correction de l'effet de septa	0,91	1,10	1,17	1,19

tableau 7.6 : Effets de la pénétration des septas sur la quantification d'activité globale

Conclusion :

A partir des deux fantômes étudiés, et de la configuration en collimation retenue, nous pouvons résumer les effets par ces trois constatations :

- L'atténuation est le phénomène prépondérant, sa correction agit dans le sens d'une amélioration de la quantification de l'activité. Lorsque la distribution est hétérogène, elle permet de maintenir l'uniformité des niveaux entre les activités. Les performances obtenues vis-à-vis d'une correction constante sont d'autant plus appréciables à faible énergie.
- La réponse géométrique de détection agit tel un filtre de déconvolution et permet la suppression du flou et les déformations sur l'image. Couplée à la correction d'atténuation, elle permet la restitution d'une image quantifiée de bonne qualité.
- La pénétration par les septas n'est perceptible qu'aux très hautes énergies. Elle reste négligeable en présence d'une atténuation non nulle.

7.3.3. Reconstructions à partir d'échantillonnage efficace

Les support κ_2 des transformées de Fourier des sinogrammes obtenus sur HOMOG sont proches des supports essentiels de la transformée de Radon non atténuée (c.f. § 3.8.3) comme on peut le voir à la figure 7.13 .

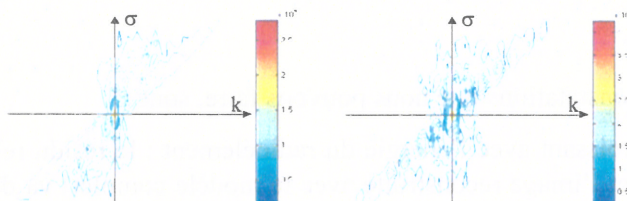


figure 7.13 : Support K_2 du sinogramme obtenu à 964 keV sur la matrice HOMOG (à gauche) et HETER.

Aussi on est en droit de penser qu'un schéma d'échantillonnage efficace peut être appliqué dans ce cadre expérimental. Pour cela, nous avons comparé trois schémas d'échantillonnage :

1. Une **géométrie standard**, $p = 19$ projections (1 projection sur 3 des 57 projections initiales) et $q = 17$ mesures, soit 323 mesures :
2. La **géométrie entrelacée** qui en est extraite, soit 162 mesures,
3. Une **géométrie standard équivalente** : la géométrie de mesure est standard, presque équivalente à la géométrie entrelacée en terme de nombre de mesures : $p = 19$ projections et $q = 9$ mesures, soit 171 mesures.

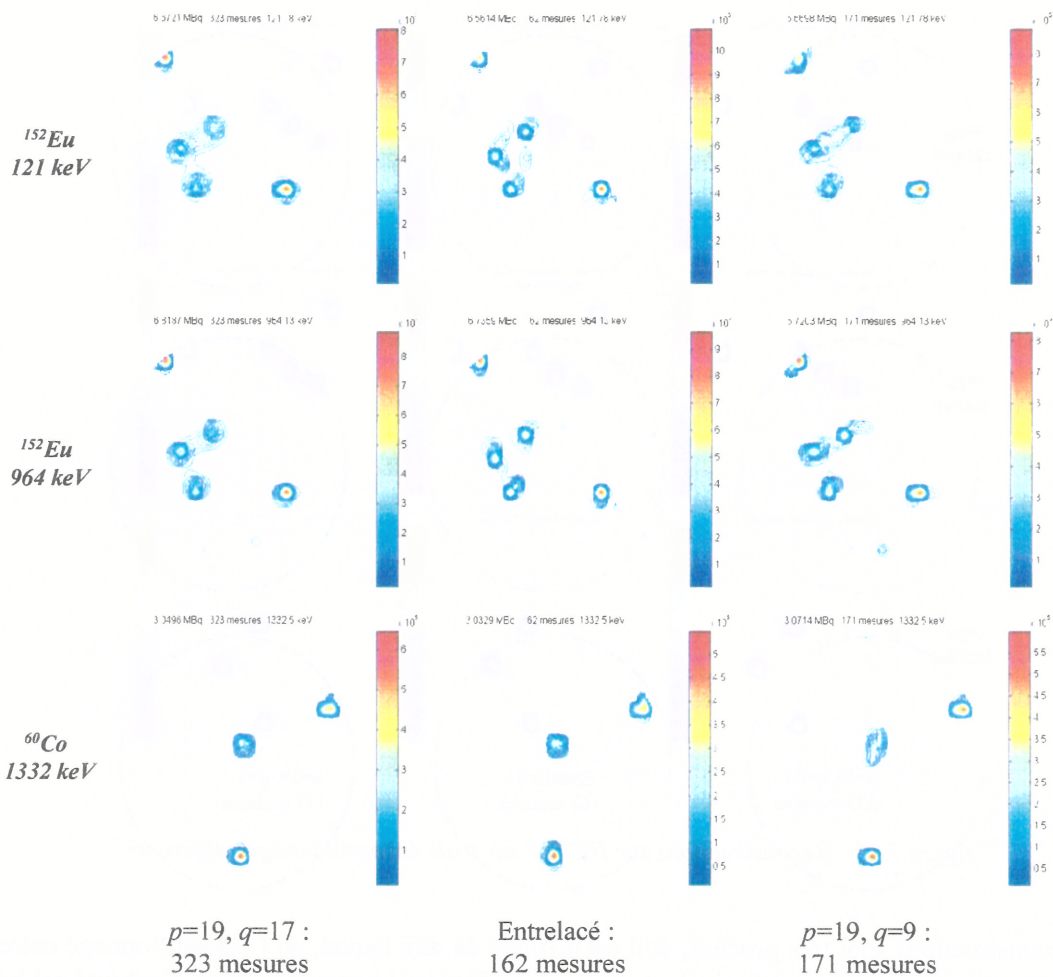


figure 7.14 : Reconstructions sur HOMOG sur trois échantillonnages différents

Nous avons tracé les résultats aux énergies de 121 keV, 964 keV et 1332 keV. La première colonne correspond à la géométrie standard, la seconde à la géométrie entrelacée et la troisième à la géométrie non entrelacée. La figure 7.14 a été réalisée sur la maquette HOMOG, et nous avons tracé les lignes de contours générés à partir du minimum et du maximum de l'image.

Les reconstructions montrent que dans tous les cas, la quantification est préservée sur un nombre réduit de mesures. La configuration complète $p = 57, q = 17$ est sans doute suréchantillonnée.

Les images reconstruites par la géométrie standard, $p = 19, q = 17$ restent très similaires à celles obtenues en figure 7.11. De même, la géométrie entrelacée et la géométrie standard produisent des images très semblables. A 121 keV et 964 keV, la géométrie entrelacée sépare mieux les 3 sources linéiques regroupées au centre, que la géométrie standard équivalente.

Dans le cas de la géométrie non entrelacée (dernière colonne de la figure 7.14), les images restituées sont d'une qualité légèrement inférieure :

- à 1332 keV, la source centrale n'est plus localisée avec précision et son activité est étalée,
- de même pour les sources d' ^{152}Eu où 2 des 3 sources placées au centre fusionnent. A la plus basse énergie, il devient difficile de faire la part entre un réel point chaud et un artefact de reconstruction.

A la figure 7.15, nous donnons les résultats obtenus à partir de la maquette HETER.

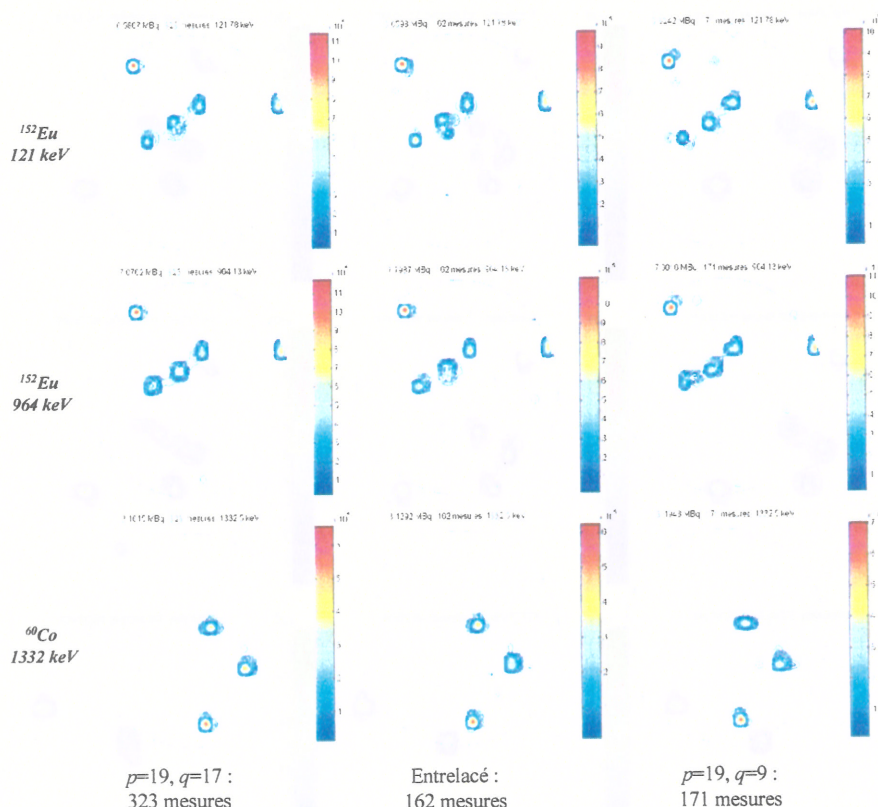


figure 7.15 : Reconstructions sur HETER sur trois échantillonnages différents

Les reconstructions sont très proches, et il est difficile de dire lequel, de l'échantillonnage entrelacé ou de l'échantillonnage standard équivalent est le plus efficace. La quantification d'activité est bonne quelque soit la géométrie employée.

En résumé, les résultats ne permettent pas d'affirmer à l'heure actuelle que l'échantillonnage entrelacé est supérieur à l'échantillonnage standard équivalent en nombre de mesures.

On peut toutefois constater les points suivants :

L'apport de l'échantillonnage entrelacé est plus visible sur le cas HOMOG que sur le cas HETER. On peut supposer que dans le cas où la théorie de l'échantillonnage efficace s'applique aux configurations atténuées (ce qui n'est pas démontré), elle donne de meilleurs résultats dans le cas de distributions uniformes qu'en présence de fortes hétérogénéités. A partir de simulations numériques, il a été montré que le schéma entrelacé permettait d'obtenir des résultats en transformée de Radon exponentielle avec deux fois moins de mesures [Desb-99].

L'échantillonnage standard et entrelacé conduisent dans ce dernier cas de figure, et quel que soit les énergies, à des images de qualités identiques. Le gain de l'échantillonnage entrelacé semble donc indépendant de l'atténuation moyenne dans la coupe.

Il est à noter que le schéma non entrelacé ($p = 19, q = 9$) qui lui a été comparé compte 9 mesures supplémentaires. D'autre part, le schéma entrelacé étudié n'est pas tout à fait optimal, ce qui penche en faveur de ce dernier. En effet, il aurait fallu un nombre p pair pour pouvoir compléter correctement l'entrelacement des mesures.

En conclusion, les expériences ne permettent pas de dire si l'échantillonnage entrelacé est plus performant que l'échantillonnage standard, même s'il semble applicable dans les cas que nous avons testé.

7.3.4. Application de la régularisation semi-quadratique

Nous avons appliqué l'algorithme MOISE sur les reconstructions de HETER et HOMOG pour la géométrie entrelacée retenue au § 7.3.3. En suivant l'heuristique définie au § 7.2.2.1, nous avons retenu les paramètres suivants pour la régularisation des images obtenues par le schéma entrelacé du paragraphe précédent.

	121 keV	964 keV
β	2E-7	4E-7
δ	1200	1200
itérations	100	100

tableau 7.7 : paramètres fixés pour la régularisation semi-quadratique

Nous n'avons cherché à régulariser que les images qui présentaient une dégradation au niveau de la localisation des points chauds. Cela concerne en particulier les sources d'europium. Nous avons reconstruit aux énergies de 121 keV et 964 keV, puis stoppé le processus après 100 itérations ce qui correspond à une stagnation de la méthode. Si on laisse aller l'algorithme à la convergence, on s'aperçoit que les performances restent identiques. Les résultats sont présentés à la figure 7.16.

Les résultats obtenus montrent que les points chauds au centre sont nettement mieux reconstruits. Le profil montre clairement que le flou autour du point chaud a été réduit, le niveau maximal d'activité est mieux restitué, et les deux sources sont mieux séparées. La quantification d'activité globale reste bonne dans les deux cas ; toutefois, elle est légèrement sous-estimée à celle obtenue pour des reconstructions sur l'ensemble complet de mesures. Les rapports d'activité sont résumés au tableau 7.8 :

Rapport d'activité	121 keV	964 keV
ML-EM	0,89	0,91
MOISE	0,88	0,91

tableau 7.8 : Rapport activités reconstruites sur activités réelles par les deux méthodes.

Il est à noter que dans la configuration à 964 keV, la méthode MOISE ne permet pas de supprimer l'artefact de la source #2 et elle étale l'activité de la source #3 ; au contraire, elle rehausse le contraste. On a alors l'impression que deux sources très proches l'une de l'autre coexistent. En réalité, cet artefact déjà présent sur l'image produite par ML-EM a un niveau d'activité sensiblement égal aux sources centrées. L'utilisation de la régularisation semi-quadratique ne permet pas de distinguer le gradient résultant de celui des artefacts de reconstruction. Au cours du processus, elle est donc restituée telle une réelle discontinuité de l'image.

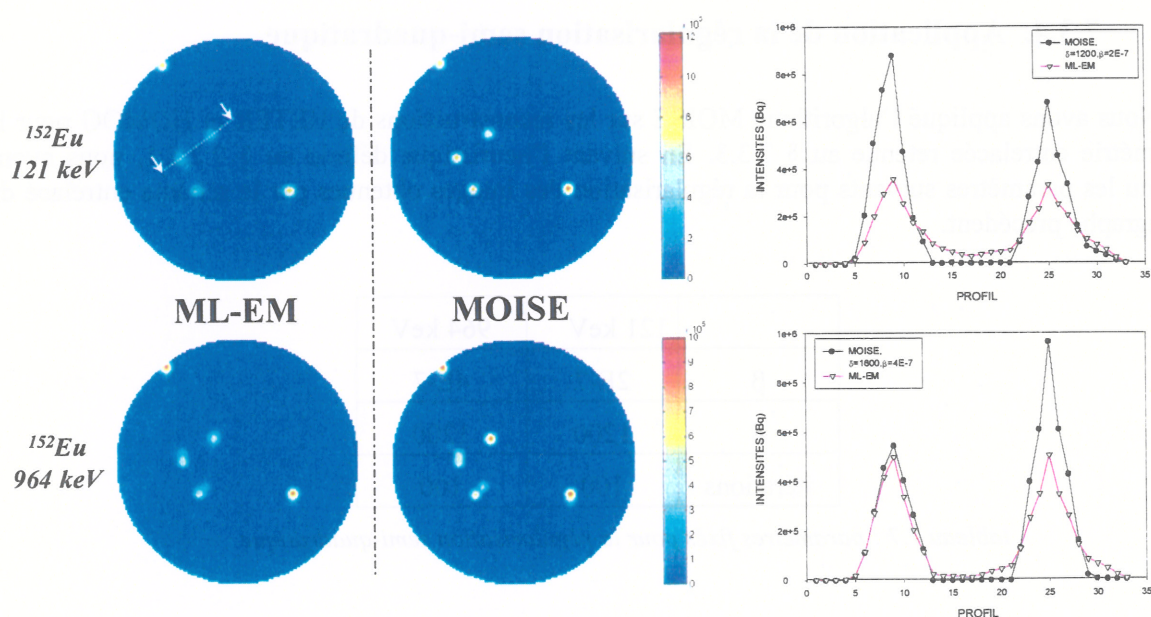


figure 7.16 : Régularisation par MOISE à partir du schéma entrelacé

Nous avons donc vu que MOISE est bien adapté à la régularisation : le contraste des images est rehaussé, et le flou est diminué. En comparaison des images présentées en figure 7.11 (schéma de mesure complet), les images reconstruites par régularisation sur la base d'une géométrie entrelacée donnent des résultats presque identiques : les images sont plus contrastées mais comportent quelques artefacts résiduels. La quantification est légèrement moins précise, tout en restant satisfaisante. L'inconvénient de la régularisation semi-quadratique est le rehaussement des artefacts dont le gradient est au moins égal à celui des discontinuités de l'image. On peut craindre des erreurs d'interprétation dues au fait que des artefacts soient rehaussés et interprétés tels des points chauds.

7.4. APPLICATIONS AUX COLIS REELS AVEC UN FAIBLE NOMBRE DE MESURES

Nous appliquons désormais le modèle à des colis de déchets radioactifs réels. La méthode est appliquée dans le cadre de contrôle complémentaire par tomographie avec un faible nombre de mesures, et un couplage avec l'imagerie par transmission.

La tomographie d'émission se justifie dans le cas des colis de déchets présentés ici, car les méthodes globales de quantification d'activité atteignent leurs limites. En effet, ces méthodes globales nécessitent de faire des hypothèses d'homogénéités physiques et radioactives du colis, ou de considérer toute l'activité placée au centre.

Dans le premier cas (hypothèse homogène), les résultats sont entachés d'un biais systématique si le nombre de points chauds devient faible [Huot-96], [Thie-99a].

Dans le second cas, les résultats peuvent être largement surestimés ce qui a des conséquences sur les décisions quant à la destination de ces colis vers un site de stockage.

Le nombre de mesures, 9 projections par 9 mesures, permet un compromis entre temps de mesure et quantification d'activité globale. La méthode MEPHISTO est comparée à la méthode RD : cette dernière est effectivement utilisée en routine par le laboratoire car elle a été développée pour la

reconstruction et la quantification sur la géométrie de mesure décrite. La méthode RD utilise la courbe de calibrage ponctuelle (c.f. § 5.5.1)

Nous testons la méthode sur un colis, référencé *CDT-1*, qui correspond à un fût cylindrique de 225 litres, de déchets (solides et divers cellulosiques) compactés et bloqués. Le second test porte sur un colis, référencé *CDT-2*, correspondant à un fût cylindrique de 225 litres, composé d'un mélange polyvinyle-fer, et de déchets technologiques.

7.4.1. Contrôle et reconstructions sur le colis CDT-1

Sur ce colis, ont été réalisés :

- une radiographie axiale, puis douze tomographies par transmission du colis,
- une mesure globale et un scanning axial permettant une évaluation de l'activité totale émergente du colis, et la répartition axiale relative⁹ de l'activité,
- sept mesures tomographiques, comportant chacune 81 mesures (9 projections x 9 mesures), échantillonnées sur la hauteur du colis.

Le *gamma scanning* axial relatif met en évidence les différences d'activités gamma à condition que la densité apparente du milieu soit à peu près constante d'une tranche à l'autre. Pour chaque pas axial de mesure, le colis est mis en rotation pendant la durée de l'acquisition (ici, 3600 s).

7.4.1.1. Radiographie et coupe tomodensimétrique

A la figure 7.17, nous donnons la correspondance entre la radiographie et l'activité émergente du colis obtenue par *gamma scanning*.

La radiographie montre quatre galettes compactées empilées de densité moyenne variant entre 0,9 et 1,2, puis bloquées par un liant de densité 2,34 (béton). L'épaisseur moyenne mesurée du liant en périphérie est de 4 cm. Du lien entre le profil des densités radiologiques et les profils d'émission gamma, on constate un pic d'émission provenant de la galette numéro 3 à 680 mm. Parmi les radioéléments détectés, le césium 137 (¹³⁷Cs) et le ruthénium 106 (¹⁰⁶Ru) ont les activités les plus significatives.

⁹ La technique de *gamma scanning* axial n'est pas quantitative, mais permet de localiser les répartitions relatives d'activité suivant l'axe du colis.

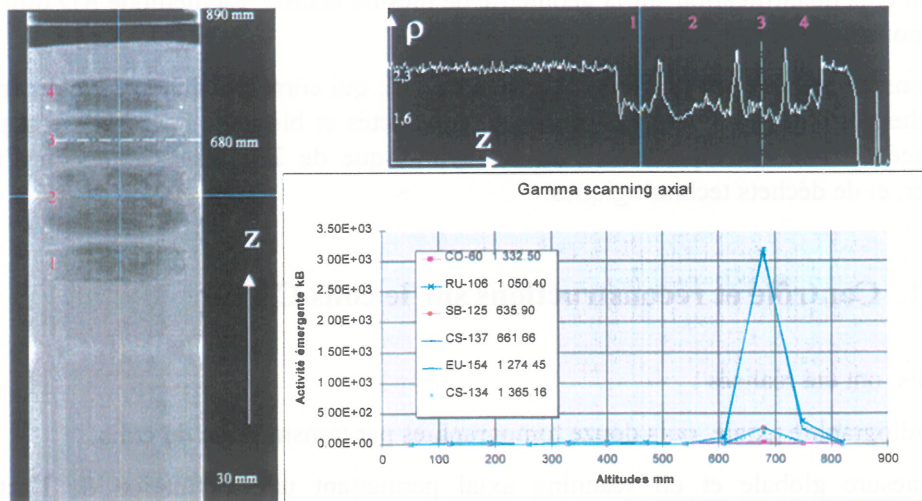


figure 7.17 : Radiographie et mesure axiale d'activité par gamma scanning sur le colis CDT-1

Les mesures de tomographie d'émission ont été effectuées au niveau des galettes, de la hauteur 400 mm à 820 mm avec un pas d'échantillonnage de 70 mm, soit sept séquences d'acquisition. Les temps de comptage sont de 600 s par mesure, soit près de 14 heures d'acquisition par coupe tomographique.

Pour chaque coupe, nous disposons de la carte d'atténuation par tomographie de transmission, de taille 256 x 256 pixels. La figure 7.18 rassemble l'ensemble des coupes utilisées pour la correction d'atténuation.

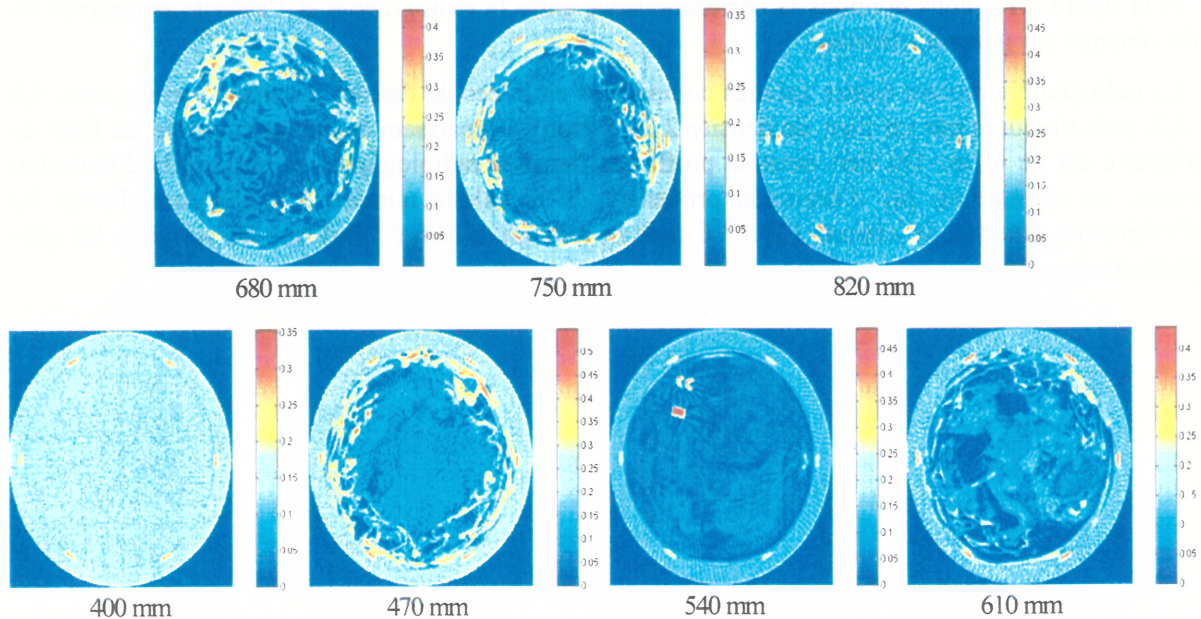


figure 7.18 : Distributions d'atténuation 256 x 256 à 1173 keV, utilisées pour la correction d'atténuation.

7.4.1.2. Images reconstruites et quantification d'activité globale

Les activités qui suivent sont les activités globales mesurées par tranche et par radioélément, données en kBq. Dans les tableaux, les radioéléments sont représentés par colonne, les tranches reconstruites par lignes. Le premier tableau représente l'activité reconstruite par la méthode MEPHISTO, et le second, les activités reconstruites par la méthode RD. La ligne apparaissant en gris correspond à la hauteur ou se situe le pic d'activité.

Activité kBq	¹⁰⁶ Ru	¹⁰⁶ Ru	¹²⁵ Sb	¹²⁵ Sb	¹³⁴ Cs	¹³⁴ Cs	¹⁵⁴ Eu	¹³⁷ Cs	⁶⁰ Co	⁶⁰ Co
keV	621,80	1 050,40	427,89	635,90	795,84	1 365,16	1 274,45	661,66	1 173,24	1 332,50
400mm	1,08E+02	0,88E+02	2,71E+02	1,06E+02	0,77E+01	1,03E+02	2,20E+00	1,83E+01	1,29E+01	1,55E+01
470mm	2,35E+02	0,57E+02	2,59E+02	1,67E+02	0,06E+02	8,29E+01	1,41E+01	1,38E+03	6,07E+00	6,32E+00
540mm	3,71E+02	0,88E+02	2,42E+02	1,98E+02	0,2E+01	4,44E+01	6,44E+00	6,00E+01	6,19E+00	6,49E+00
610mm	1,63E+03	1,62E+03	4,23E+02	7,04E+02	5,9E+01	1,16E+02	2,05E+02	1,42E+03	1,55E+01	1,63E+01
680mm	7,16E+04	7,82E+04	8,34E+03	9,28E+03	2,70E+03	3,13E+03	5,13E+03	1,14E+05	3,61E+02	3,73E+02
750mm	58,1E+02	7,72E+03	8,2E+02	1,30E+03	2,00E+02	2,75E+02	4,79E+02	8,22E+03	8,08E+01	1,13E+02
820mm	11,0E+02	5,63E+02	9,9E+02	5,77E+02	0,89E+01	3,31E+01	2,89E+01	1,41E+02	3,58E+01	4,94E+01
SOMME	8,08E+04	8,83E+04	1,13E+04	1,23E+04	2,97E+03	3,78E+03	5,87E+03	1,25E+05	5,19E+02	5,80E+02
Moyennes		8,45E+04		1,18E+04		3,375E+03	5,87E+03	1,25E+05		5,49E+02
Pourcentages		36,5 %		5,1 %		1,4 %	2,5 %	54,1 %		0,2 %

Tableau 7.9 : Activités globales du colis CDT-1 par la méthode MEPHISTO

Activité kBq	¹⁰⁶ Ru	¹⁰⁶ Ru	¹²⁵ Sb	¹²⁵ Sb	¹³⁴ Cs	¹³⁴ Cs	¹⁵⁴ Eu	¹³⁷ Cs	⁶⁰ Co	⁶⁰ Co
keV	621,80	1 050,40	427,89	635,90	795,84	1 365,16	1 274,45	661,66	1 173,24	1 332,50
400mm			1,27E+02		8,58E+00			1,86E+01	1,43E+01	1,87E+01
470mm	1,76E+02	2,12E+02	2,39E+02	2,22E+02	1,47E+01		1,46E+01	1,73E+03		
540mm	3,90E+02		2,56E+02	2,69E+02				6,94E+01		
610mm	1,42E+03	2,03E+03	4,80E+02	8,44E+02	7,26E+01		2,39E+02	1,43E+03	1,90E+01	1,90E+01
680mm	8,34E+04	9,17E+04	8,93E+03	1,17E+04	3,26E+03	3,71E+03	6,16E+03	1,36E+05	5,02E+02	5,04E+02
750mm	6,47E+03	8,66E+03	8,69E+02	1,56E+03	2,33E+02	4,41E+02	5,65E+02	9,40E+03	1,05E+02	1,42E+02
820mm	5,47E+02		4,05E+02	4,17E+02	1,35E+01		3,24E+01	7,49E+01	3,22E+01	3,89E+01
SOMME	9,24E+04	1,03E+05	1,13E+04	1,50E+04	3,60E+03	4,15E+03	7,01E+03	1,49E+05	6,73E+02	7,23E+02
Moyennes		9,75E+04		1,32E+04		3,88E+03	7,01E+03	1,49E+05		6,98E+02
Pourcentages		29,6 %		4,0 %		1,2 %	2,1 %	45,1 %		0,2 %

tableau 7.10: Activités globales du colis CDT-1 par la méthode RD

Les images reconstruites par MEPHISTO et présentées en figure 7.19, sont données à la tranche de hauteur 680 mm. Si on se réfère aux images du ¹⁰⁶Ru et du ¹³⁷Cs, les plus fiables en terme de taux de comptage, on constate une concentration supérieure de l'activité dans la partie Nord de l'image. Pour

l'ensemble des radioéléments, la radioactivité est répartie dans l'espace intérieur, correspondant à la galette. L'espace périphérique (rempli par le liant) est inactif.

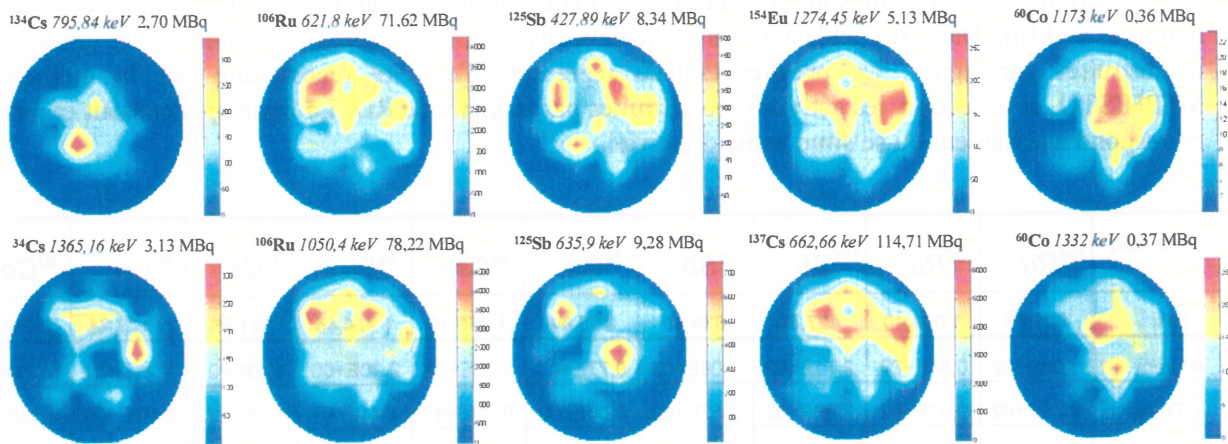


figure 7.19 : Répartitions d'activité par radioélément sur le colis CDT-1 à 680 mm par la méthode MEPHISTO

Nous avons ensuite comparé les activités de chaque radioélément, sommées sur l'ensemble des coupes, pour les deux méthodes de reconstruction par tomographie d'émission, ainsi que l'activité globale calculée par une méthode de mesure globale (supposant une hypothèse d'homogénéité).

Les résultats sont résumés au tableau 7.11 ci-dessous :

CDT-1 kBq (1/01/99)	Méthode globale (MG) (hypothèse homogène)	RD	MEPHISTO	Ecart % MG-RD	Ecart % MG- MEPHISTO	Ecart % RD- MEPHISTO
¹⁰⁶ Ru	5,38 E+04 ± 15 %	9,75 E+04	8,45 E+04	45	36	15
¹²⁵ Sb	6,11 E+03 ± 26 %	1,32 E+04	1,18 E+04	54	48	12
¹³⁴ Cs	2,29 E+03 ± 23 %	3,88 E+03	3,37 E+03	41	32	15
¹⁵⁴ Eu	4,22 E+03 ± 22 %	7,01 E+03	5,87 E+03	40	28	19
¹³⁷ Cs	9,35 E+04 ± 12 %	1,49 E+05	1,25 E+05	37	25	19
⁶⁰ Co	3,92 E+02 ± 22 %	6,98 E+02	5,49 E+02	44	28	27
Total	1,60 E+05	2,71 E+05	2,31 E+05	41	31	17

tableau 7.11 : Activités et écarts sur le colis CDT-1

Les activités globales issues de RD et MEPHISTO fournissent des grandeurs cohérentes entre elles. En revanche, les écarts entre MEPHISTO et la méthode globale varient entre 25 et 48%, pour un écart global de 31%. La sous-estimation de l'activité par la méthode globale a été démontrée, par simulations sur code MCNP et des mesures expérimentales, lorsque la répartition d'activité n'est plus suffisamment homogène [Huot-97].

Les biais les plus importants sont causés par l'hétérogénéité radioactive : une comparaison entre méthodes de tomographie d'émission couplée (méthode RD et MEPHISTO) et la méthode globale ont

permis d'observer que l'activité était sous-estimée par cette dernière, sur des maquettes homogènes en densité [Thie-99a], avec une erreur proportionnelle à la densité du colis [Thie-99b].

La figure 7.19 confirme que la répartition d'activité n'est pas uniforme, ce qui peut être à l'origine de la sous-estimation des valeurs obtenues par la méthode globale.

7.4.2. Colis de type CDT-2

Il s'agit, comme on peut le voir sur la radiographie du colis à la figure 7.20, d'un colis qu'à moitié rempli.

La densité moyenne du colis est de 0,77, et contient des éléments hétérogènes de type déchets technologiques : débris métalliques (en rouge sur les cartes de densité), bouteilles plastiques, récipients, etc.

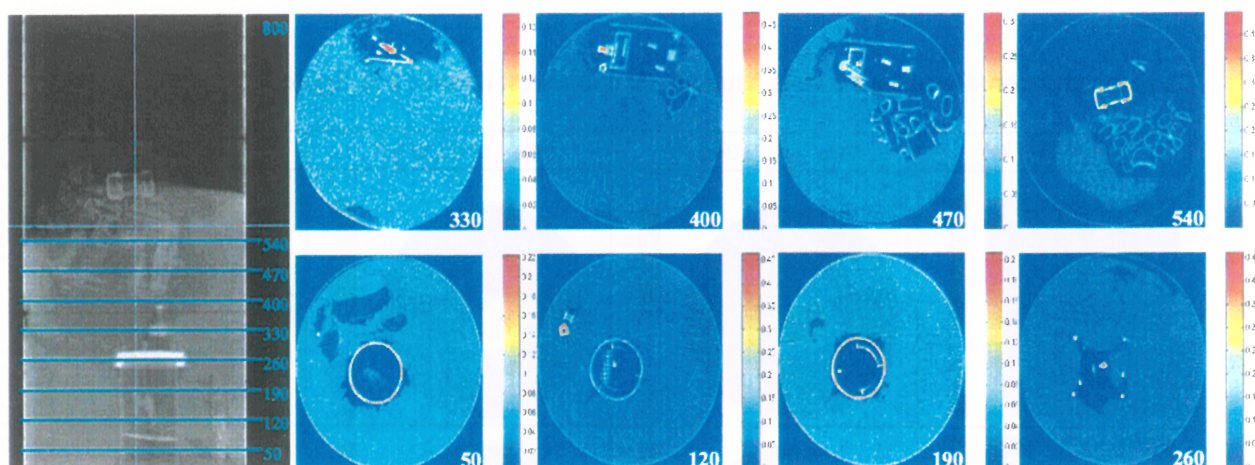


figure 7.20 : Radiographie du colis CDT-2 (à gauche). Les huit lignes correspondent aux hauteurs où ont été réalisées les coupes tomographiques. À droite, les reconstructions rangées de gauche vers la droite et de bas en haut pour les hauteurs de coupe croissantes.

On peut également distinguer une « poubelle » de diamètre 140 mm au centre du colis. On la retrouve sur les sections tomographiques de 50 mm à 260 mm.

Le colis CDT-2 contient deux radioéléments : le ^{60}Co et le ^{137}Cs . Aux huit coupes tomographiques de transmission, nous avons réalisé les examens d'émission.

La géométrie de mesure est identique à celle du colis CDT-1, soit 9 x 9 mesures, et nous avons utilisé les méthodes RD et MEPHISTO pour la reconstruction d'activité.

Les activités par coupe et par radioéléments pour chacune des méthodes tomographiques sont données au tableau 7.12 :

Activité Bq	Méthode RD	Méthode MEPHISTO	Méthode RD	Méthode MEPHISTO	Méthode RD	Méthode MEPHISTO
Radioélément	⁶⁰ Co, 1173,24 keV		⁶⁰ Co, 1332,50 keV		¹³⁷ Cs, 661,66 keV	
50mm	1,27E+06	1,02E+06	1,30E+06	1,05E+06	8,07E+06	6,20E+06
120mm	2,26E+06	1,81E+06	2,26E+06	1,83E+06	2,47E+07	1,84E+07
190mm	6,74E+05	4,76E+05	6,84E+05	4,91E+05	4,53E+06	3,03E+06
260mm	2,69E+05	2,09E+05	2,74E+05	2,14E+05	1,91E+06	1,45E+06
330mm	2,06E+05	1,78E+05	2,10E+05	1,88E+05	1,99E+06	1,62E+06
400mm	9,23E+04	7,78E+04	1,01E+05	9,00E+04	9,48E+05	8,12E+05
470mm	5,49E+04	3,61E+04	6,32E+04	3,76E+04	7,37E+05	4,80E+05
540mm	-	1,23E+03	-	2,39E+03	1,90E+05	1,06E+05
SOMME	4,83E+06	3,81E+06	4,89E+06	3,91E+06	4,31E+07	3,23E+07

tableau 7.12 : Activités globales par tranches sur le colis CDT-2

La reconstruction des images à trois hauteurs de coupes est donnée à la figure 7.21.

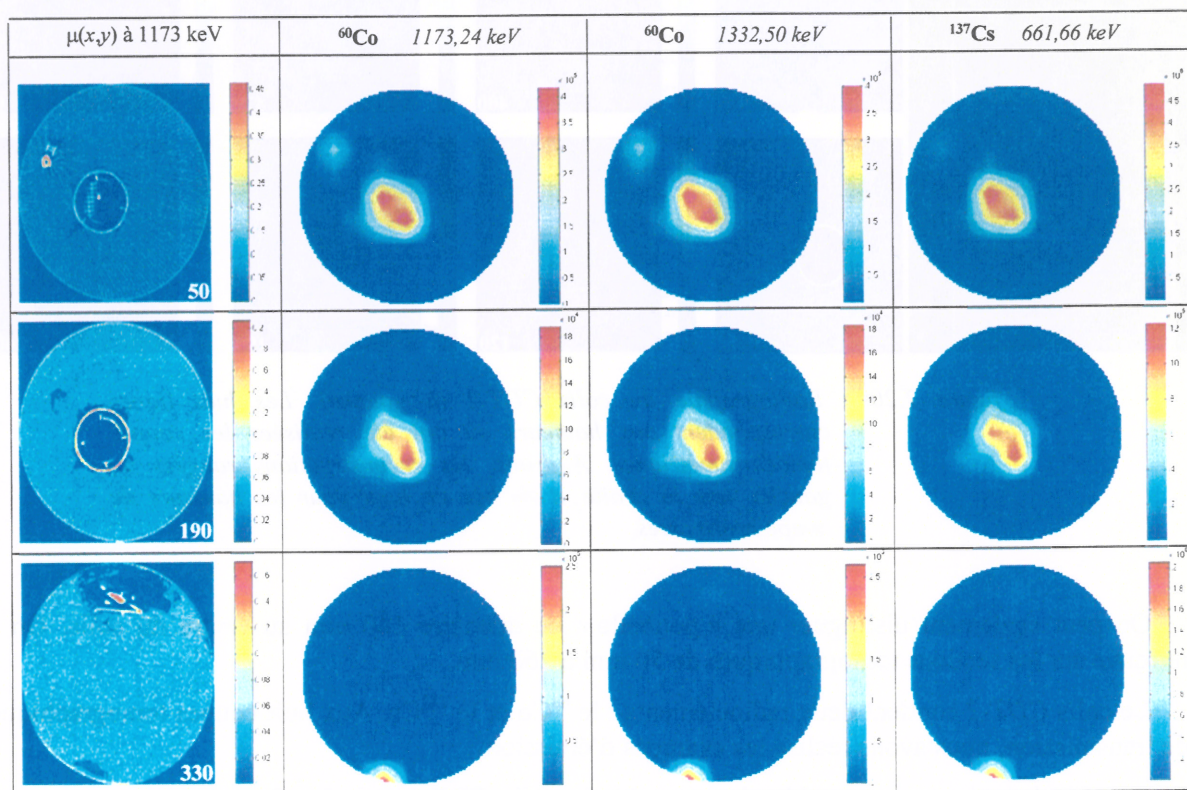


figure 7.21: Répartitions d'activité par radioélément sur le colis CDT-2 à 50 mm, 190 mm et 330 mm par la méthode MEPHISTO

A chacune des coupes, nous observons une correspondance entre la structure de la carte d'atténuation et la répartition des activités. Ainsi, à 50 et 190 mm, l'activité en ⁶⁰Co et ¹³⁷Cs est localisée dans la forme circulaire (i.e la « poubelle »). Pour la coupe à 50 mm, il semblerait que l'hétérogénéité lourde (située dans le coin supérieur gauche) corresponde à un débris métallique irradié. Enfin, pour la coupe à 330 mm, l'activité est fortement localisée au niveau de l'hétérogénéité

légère (située dans le coin inférieur gauche) et plus faiblement dans l'agglomérat d'hétérogénéités situés dans la zone supérieure de la carte.

Au vue des activités globales et des images reconstruites, on peut en déduire que l'essentiel de l'activité du colis CDT-2 provient de la « poubelle », fortement chargée en ^{60}Co et ^{137}Cs .

Nous disposons également pour le colis CDT-2 des mesures d'activités globales. Au tableau 7.13, nous faisons la comparaison des activités globales sur le colis reconstruites par tomographie d'émission et par la méthode globale :

Activité (MBq)	MG	RD	Ecart (%) MG-RD	MEPHISTO	Ecart (%) MG-MEPHISTO
^{137}Cs	23,1	43,1	65,8%	32,3	24,2%
^{60}Co	3,4	4,86	38,8%	3,86	10,3%

tableau 7.13 : Comparaison des activités globales par les différentes méthodes

Nous constatons à nouveau une sous-estimation de l'activité reconstruite par la méthode globale.

7.5. CONCLUSION

Nous avons vu que l'utilisation des corrections physiques, permettaient d'obtenir des résultats plus justes, autant d'un point de vue quantitatif que d'un point de vue qualitatif. Nous avons également constaté, que l'utilisation de l'algorithme ML-EM suffisait à la reconstruction d'une image stabilisée dans une grande majorité des cas. Ce n'est pas tant la vraisemblance poissonnienne qui permet d'obtenir ces résultats, mais la prise en compte de la contrainte de positivité dans le schéma itératif et un taux de convergence très bas, qui permet de pousser les itérations très loin sans craindre l'amplification des artefacts. Pour les tailles de données utilisées jusqu'à présent, l'algorithme permet d'obtenir des images relativement rapidement. Toutefois, lorsqu'on se place dans des configurations sous-échantillonnées, l'utilisation de la régularisation semi-quadratique a montré son efficacité à reconstruire des images visuellement plus satisfaisante. MOISE est l'algorithme de régularisation qui a été mis en œuvre pour des reconstructions à partir de données réelles. Même s'il est plus lent qu'ARTUR, il présente l'avantage de reconstruire des images positives. Enfin, la tomographie d'émission a montré qu'elle pouvait reconstruire des images quantitatives à partir d'un jeu de mesures extrêmement réduit ; la correction de la distribution d'atténuation la rend plus souple d'usage et plus polyvalente qu'une technique de mesure globale.

7.6. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Dela-98] A.H. Delaney, Y. Bresler. « Globally convergent edge-preserving regularized reconstruction : an application to limited-angle tomography. », *IEEE Trans Imag. Proc.* 7(2) :204-221, 1998
- [Desb-99] L. Desbat and R. Thierry, « Efficient sampling of the exponential Radon Transform », 1st World Congress on Industrial Process Tomography, Buxton, Greater Manchester, April 14th –17th, S2 :423-426, 1999

- [Gira-86] D. Girard « Les méthodes de régularisation optimale et leur applications en tomographie : nouveaux algorithmes performants de reconstruction d'images », PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1986
- [Gira-89] D.A. Girard « A fast Monte-Carlo cross-validation procedure for large least square problems with noisy data », *Numer. Stat.*, 56 :1-23, 1989
- [Hubb-93] J ;H. Hubbell and S.M Seltzer. « *Tables of X-ray mass attenuation coefficients and mass energy-absorption coefficients 1 keV to 20 MeV for elements Z=1 to 92 and 48 additional substances of dosimetric interest.* » IRD, Physics Laboratory, U.S. department of Commerce, Gaithersburg, MD 20899 U.S.A, 1993
- [Huot-96] N. Huot, P. Bonifay et B. Chabaliere « Effets des hétérogénéités radioactives sur les mesures d'activité par la méthode MARCO-CARACO », N.T. C.E.A./S.C.C.D96-003, 1996
- [Huot-97] N. Huot, B. Chabaliere « Heterogeneities effect in total gamma spectroscopy of radioactive waste drums », *International Seminar on Radioactive Waste Products*, Wursburg, Germany, 1997
- [La-97] V. La « Correction d'atténuation en géométrie conique avec mesures de transmission en tomographie d'émission mono-photonique », *PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1997
- [Lee-97] S.J. Lee, I.T. Hsiao and G.R. Gindi, « The Thin-Plate as a regularizer in bayesian SPECT reconstruction », *IEEE Trans Nucl. Sci.* 44,(3), 1997
- [Mumc-94] E.U. Mumcuoglu, R. Leahy, R.C. Simon, and Z. Zhou. « Fast gradient-based methods for bayesian reconstruction methods for bayesian reconstruction of transmission and emission PET », *IEEE Trans. Med. Imag.*, 13 :687-701, 1994
- [Thie-99a] R. Thierry and J.L Pettier « MEPHISTO : a volumic model for the characterization of waste packages by gamma emission tomography », in *Symposium of Waste Management 99*, Tucson, Arizona, 12(1039) :1-18, 1999
- [Thie-99b] R. Thierry, J.L Pettier and L. Desbat « Simultaneous compensation for attenuation, scatter and detector response for 2D-emission tomography on nuclear waste with reduced data », 1st World Congress on Industrial Process Tomography, Buxton, Greater Manchester, April 14th –17th, E1 :542-551, 1999
- [Zong-96] C. ZongJian, E.H. Lawrence and C.C. Charles « Optimal number of views in 360° SPECT imaging », *J. Nucl. Med.*, 37(10) : 1740-1744, 1996

CHAPITRE 8.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

L'objectif général de cette thèse a consisté à élaborer une méthode de reconstruction d'image par tomographie d'émission en géométrie parallèle bidimensionnelle. Le but est de pouvoir quantifier avec une bonne précision, l'activité de chaque radioélément contenu dans une coupe transaxiale d'un colis, et, à partir d'une résolution de l'image suffisante, de permettre la localisation de « points chauds ». Son application à l'expertise et au contrôle des déchets nucléaires de faible et moyenne activité, la situe dans un contexte particulier. En effet, la réduction des volumes tend à utiliser des procédés de compactage donnent lieu à des colis hétérogènes et denses. Les limites des méthodes globales de détermination de l'activité sont alors atteintes.

Connaître la carte d'atténuation est nécessaire à l'obtention d'une bonne quantification. Cette information est essentielle vue la diversité des distributions, tant en termes de densités que de répartitions. Un tomographe de transmission utilisant une source externe de ^{60}Co permet de disposer de cette donnée. L'application de la formule de Klein-Nishina permet alors l'extrapolation aux énergies (supérieures à 250 keV) des radioéléments pour lesquels nous désirons reconstruire la distribution d'activité.

Par ailleurs, un détecteur en germanium hyperpur (HpGe), de haute résolution en énergie, est utilisé pour l'identification des divers radioéléments. La mise en œuvre de l'examen tomographique sur colis de déchets nucléaires ne peut s'envisager qu'avec des jeux de données réduits et une collimation de large ouverture. Il en résulte une résolution géométrique variable sur un faisceau de détection divergent, ce qui nous écarte du formalisme de la transformée de Radon atténuée.

Devant la spécificité des problèmes, il est apparu nécessaire d'apporter un soin tout particulier à la phase de modélisation en y intégrant les corrections appropriées. Parmi les différentes méthodes de correction recensées, nous avons constaté que la mise en œuvre d'une modélisation incorporant une correction simultanée de l'atténuation et de la réponse permettait davantage de réalisme, et donc serait plus efficace qu'une succession de corrections indépendantes les unes des autres.

C'est sur la base de pixels carrés et d'un modèle de distribution d'intensité uniforme que nous avons entrepris de modéliser les phénomènes physiques entrant en jeu dans le processus d'acquisition. La base du modèle repose sur la relation univoque existant entre la fonction réponse impulsionnelle du système et la fonction de dispersion linéique, la LSF. Un modèle analytique de la LSF est proposé en se basant sur l'expression de l'angle solide vu d'un point M de l'objet suivant l'ouverture définie par la collimation. La correction de l'atténuation intervient de manière multiplicative par la détermination d'une intégrale linéique. Les coefficients matriciels de l'opérateur de projection sont alors déterminés en intégrant la LSF sur les surfaces issues des intersections entre base des pixels, support de l'objet et espace de détection.

Nous avons fait le choix d'une validation expérimentale du modèle en échantillonnant l'espace de détection à l'aide de sources multi-énergétiques de ^{152}Eu . Nous avons alors constaté la bonne adéquation entre le modèle prédictif et les mesures expérimentales. En revanche, nous avons également observé l'effet de pénétration par les parois en plomb du collimateur aux très hautes énergies. Bien que ce phénomène ne soit pas prépondérant, sa prise en compte dans la correction confère au modèle une cohérence aux énergies situées au-delà du MeV. Un calibrage réechelonne la dynamique des données modélisées aux mesures expérimentales, ce qui permet de disposer d'un opérateur de projection algébrique reliant quantitativement les mesures à l'activité volumique discrétisée.

Nous nous sommes ensuite attachés au choix d'un algorithme de reconstruction. Dans un premier temps, la méthode du maximum de vraisemblance (ML-EM) et celle du gradient conjugué ont été examinées. Même lorsque des corrections physiques sont intégrées au modèle, le caractère mal-posé de la reconstruction tomographique, et la présence inévitable de bruit dans les mesures, rendent ces méthodes instables. Il faut alors veiller à arrêter les itérations avant que la méthode ne diverge : c'est peu commode, subjectif, car sujet à l'interprétation visuelle de l'utilisateur, et par conséquent cela influe considérablement l'aspect qualitatif et quantitatif de l'image. La régularisation est une alternative élégante et couramment employée : elle consiste à stabiliser le processus en introduisant un terme pénalisant l'amplification du bruit. A la régularisation quadratique de Phillips-Tikhonov, qui a tendance à surlisser les images, nous avons préféré employer une régularisation markovienne. Cette dernière permet de modéliser un grand nombre de contraintes, à travers la spécification de fonctions de potentiel. En nous basant sur le formalisme de Charbonnier [Char-96], généralisé par Delaney [Dela-98], nous avons retenu une fonction de potentiel non convexe permettant la préservation des discontinuités, en supposant que l'image puisse être formée de zones uniformes séparées par des bords francs. Nous nous sommes placés dans le cadre d'une approche probabiliste (bayésienne) de la reconstruction, dans laquelle la solution de notre problème est déterminée par l'estimateur du Maximum *A Posteriori*. La résolution de ce critère peut alors devenir délicate, puisqu'il s'agit de résoudre un problème d'optimisation de fonctionnelles non convexes. Nous avons adopté une méthode déterministe de minimisation semi-quadratique : l'algorithme préserve des discontinuités en déterminant, à chaque itération, un filtre fonction du gradient de l'image. Nous avons alors proposé deux algorithmes, ARTUR et MOISE, basés respectivement sur une vraisemblance gaussienne et poissonnienne du bruit, afin de les évaluer. En parallèle, nous avons testé l'algorithme déterministe THIN-PLATE, utilisant les dérivées secondes de l'image. Cette méthode utilise une vraisemblance poissonnienne, et dérive d'un algorithme stochastique de type Recuit à Champ Moyen.

Nous disposons à présent d'une matrice de projection intégrant les corrections, et d'algorithmes régularisés dédiés à la reconstruction d'images. Nous les avons mis en œuvre sur des données issues de simulations numériques, puis de deux maquettes réelles, et enfin sur des colis de déchets réels. Les données simulées ont été obtenues par projection d'un fantôme numérique sur la matrice, corrigeant l'atténuation et la réponse géométrique de détection, auquel nous avons ajouté un bruit poissonnien. Ces données servent à l'évaluation des algorithmes de reconstruction.

L'analyse des résultats a montré une bonne disposition de l'algorithme ARTUR à reconstruire une image satisfaisante en très peu d'itérations. L'algorithme MOISE, permet également la reconstruction de l'image en préservant les discontinuités, toutefois, sa vitesse de convergence est plus lente (un facteur 10 par rapport à ARTUR). Les images comparées des deux algorithmes sont quasiment identiques, même si MOISE semble mieux se comporter dans la restauration des zones uniformes. Par ailleurs, MOISE intègre naturellement la contrainte de positivité de la solution ce qui est un atout majeur pour nos applications.

Les reconstructions réalisées à partir du THIN-PLATE ne donnent pas entière satisfaction, et nous n'avons pas souhaité le conserver pour les applications suivantes. Les deux raisons principales sont : d'une part, une vitesse de convergence très basse qui le rend inexploitable (dans son état actuel) pour des applications pratiques ; d'autre part, l'algorithme semble stagner dans des minima locaux éloignés

du minimum global. En effet, la convergence théorique du THIN-PLATE n'est pas démontrée : son schéma itératif, dérivé d'un algorithme d'optimisation de type GEM (Generalized Expectation Maximisation) ne peut que garantir la convergence vers un optimum local.

A partir des fantômes réels, nous avons d'abord analysé les effets des corrections des phénomènes physiques, en fonction de l'énergie des radioéléments. Une méthode ML-EM a été utilisée pour reconstruire les images : cette méthode ne nécessite pas la détermination de paramètres de régularisation, elle reste stable sur un intervalle d'itérations large avant de diverger, et fournit des images satisfaisantes qualitativement et quantitativement. Elle est bien adaptée à des études sur fantômes réels.

Les effets de la correction d'atténuation ont été étudiés sur une maquette hétérogène, en comparant les images reconstruites avec une correction d'atténuation uniforme, et lorsqu'une carte d'atténuation est obtenue par transmission. Les profils tracés au travers des sources linéaires ont montré que la correction d'atténuation permet de mieux restituer l'uniformité des niveaux d'activité et la forme des structures. Par ailleurs, la quantification est améliorée en couplant une atténuation hétérogène : elle est d'une excellente qualité jusqu'à 344 keV. En-deçà, la dépendance croissante de l'atténuation en fonction de la nature des matériaux crée des biais qui se répercutent sur la quantification. La correction d'atténuation hétérogène permet donc une quantification plus précise aux basses énergies, que l'atténuation supposée constante.

Les effets de la correction de la réponse géométrique ont été étudiés en comparant le modèle analytique développé, appelé MEPHISTO, avec deux modèles dégradés : un modèle où la détection se limite à la bande de largeur égale à l'ouverture de collimation, et un modèle « *Ray-Driven* » supposant que les mesures sont des intégrales de ligne. Nous avons les modèles sur deux fantômes : la maquette hétérogène et une maquette homogène de densité supérieure à la première. Sur les deux maquettes, les résultats montrent que la réponse géométrique de détection a une influence directe sur la restitution des formes de l'image. Ainsi, MEPHISTO reconstruit des images nettes et des formes bien restituées. Par contre, les deux modèles dégradés engendrent des images comportant des distorsions géométriques importantes et une mauvaise localisation des points chauds. De même, d'un point de vue quantitatif, le modèle analytique est le seul à fournir des résultats en accord avec la réalité sur la totalité de la gamme d'énergie. Sur la maquette homogène, où l'atténuation est plus importante, les images reconstruites par les modèles dégradés semblent moins chaotiques, même si elles conservent un flou important et une quantification plus qu'approximative. Ceci tend à montrer que l'atténuation demeure, dans notre contexte, l'effet de dégradation prépondérant.

Une étude sur l'influence des phénomènes de pénétration par les parois du collimateur, nous a confirmé que ce phénomène restait minoritaire par rapport aux deux premiers. Son influence est visible à une moindre échelle sur la quantification : en l'absence de correction, les niveaux d'activité sont légèrement surestimés. Pour le collimateur utilisé, cet effet ne prend de l'importance qu'aux énergies supérieures au MeV.

Nous avons ensuite évalué les effets d'un échantillonnage entrelacé sur les mesures, afin de voir s'il est possible de réduire le nombre de mesures tout en conservant une qualité d'image à peu près identique. Les premiers résultats sont encourageant : dans le cas d'une d'atténuation constante, les images reconstruites par les géométries standard et la géométrie entrelacée extraite sont de qualité identique. Les résultats sont moins évidents lorsque l'atténuation devient hétérogène. Toutefois, des images de qualité satisfaisante sont reconstruites.

Sur la base de la géométrie entrelacée, nous avons appliqué la méthode de régularisation semi-quadratique. Les résultats ont montré que l'algorithme MOISE était adapté à la reconstruction sur des cas réels. Elle nécessite toutefois un temps de calcul plus conséquent. Les résultats obtenus ont montré que la régularisation semi-quadratique réduisait efficacement le flou sur les images, et la quantification d'activité globale demeure satisfaisante. La localisation des points chauds est améliorée par le rehaussement des niveaux d'activités. En revanche, lorsque le niveau des artefacts de bruits et des discontinuités naturelles de l'image sont identiques, le rehaussement du contraste peut devenir un

problème : en effet, le bruit est restitué comme un contour de l'image ce qui peut fausser l'interprétation. Ceci justifie entièrement la mise en œuvre d'une détermination optimale des paramètres de régularisation.

Enfin, nous avons testé le modèle sur deux colis de déchets réels avec un jeu extrêmement réduit de mesures. Le modèle a été comparée à la méthode « Ray-Driven » et une méthode de mesure globale (non segmentée). L'algorithme probabiliste EM est tout-à-fait adapté à la tomographie d'émission avec un faible nombre de données, pour les mêmes raisons qui ont été évoquées précédemment : prise en compte naturelle de la contrainte de positivité de l'image, stabilité vis-à-vis du bruit et absence de réglage paramétrique. Nous avons constaté que les méthodes RD et MEPHISTO étaient en accord d'un point de vue quantitatif. Pour les deux types de colis étudiés, la méthode de mesure globale sous-estime l'activité. Le couplage de deux méthodes de mesures non destructives (tomographie d'émission et tomographie de transmission) se justifie pleinement dès lors que les hypothèses sur l'homogénéité de répartition des matériaux et des radioéléments, ainsi que sur le volume et la densité du terme source, ne sont plus respectées. L'imagerie appliquée aux colis hétérogènes démontre, sa pertinence en terme de localisation et de quantification globale vis-à-vis des biais systématiques engendrés par la méthode globale. Ainsi, la tomographie d'émission, lorsqu'elle est couplée à celle de transmission, se présente comme une technique robuste, permettant une quantification à partir d'un jeu de données réduit, et permet de surcroît d'accéder à la localisation des points chauds dans le colis.

Au cours de cette étude, nous avons pu constater que la tomographie d'émission multiphotonique fait appel à de nombreux domaines scientifiques, dans lesquels les perspectives d'amélioration et d'approfondissement ne manquent pas.

Ce travail a permis de mettre en valeur toute l'importance de la bonne modélisation des phénomènes physiques des mesures sur la qualité des images reconstruites. Nous avons porté un effort tout particulier dans ce domaine, et même si les résultats semblent aujourd'hui satisfaisants, de nombreuses améliorations restent à réaliser.

Nous pensons que l'orientation des prochains travaux vers une plate-forme de simulation par code Monte-Carlo permettra d'améliorer la connaissance des phénomènes perturbateurs, et par conséquent de perfectionner la mise en œuvre des corrections. Les perspectives offertes par cet outil sont nombreuses. Parmi celles-ci :

- la possibilité d'estimer la réponse ponctuelle globale du dispositif, en tenant compte de la géométrie du collimateur, du type de détecteur et de la nature des matériaux,
- l'élaboration de fantômes numériques et de sinogrammes plus réalistes : cela constituerait une base d'étude pour l'évaluation des algorithmes, des corrections et de l'influence des géométries d'échantillonnage de mesures.

Concernant la modélisation de la matrice, les expériences ont souligné deux limitations essentielles :

- d'une part, l'hypothèse de la répartition axiale uniforme de l'activité peut être une source d'erreur fréquente, lorsque l'ouverture angulaire axiale du collimateur est large,

- d'autre part, la non-adéquation de la hauteur de la carte d'atténuation avec celle de la tomographie d'émission.

La première limitation peut être minimisée en diminuant la hauteur de mesure. Ce faisant, nous diminuons également la sensibilité du dispositif. Un compromis optimal pourrait, par exemple, être trouvé à l'aide de simulations par la méthode de type Monte-Carlo.

Dans le deuxième cas, nous pensons qu'il serait peut-être plus juste d'utiliser un couplage de données d'atténuation de résolution inférieure, moyennées sur une hauteur de mesure en correspondance avec celle de la tomographie d'émission. Dans ce cas aussi, la simulation Monte-Carlo pourrait permettre, à partir de configurations simples, d'estimer les biais induits à la reconstruction suivant la résolution axiale (et transaxiale) de la carte d'atténuation utilisée lors du couplage.

Sur le plan technologique, il serait intéressant d'étudier le comportement d'un détecteur semi-conducteur de type CdTe/CdZnTe. Les avantages de ces détecteurs sont :

- un encombrement moins important, donc la possibilité d'envisager une détection multi-voies,
- un coût financier inférieur au HpGe actuellement utilisé,
- le fonctionnement du semi-détecteur à température ambiante (alors que le HpGe nécessite un refroidissement à l'azote liquide),
- un traitement de l'information plus rapide, le nouveau système permettant de compter plusieurs millions de coups à la seconde (contre 100000 pour le HpGe), donc des temps de comptage diminués.

L'inconvénient de ce détecteur est sa résolution en énergie : elle est environ de 4 keV à l'énergie du ^{137}Cs (662 keV). Par conséquent, la séparation de nombreuses raies d'émission très proches n'est pas aussi facile qu'elle ne l'est avec un détecteur HpGe.

Notre étude sur l'algorithmique a également fait apparaître quelques sujets de réflexions.

Ainsi, les paramètres utilisés en régularisation semi-quadratique sont, jusqu'à présent, déterminés par des critères subjectifs (restauration visuelle la plus agréable). Si le choix du seuil de discontinuité (δ) est assez rapide, le choix du coefficient de régularisation (β) reste plus fastidieux. La mise en œuvre d'une méthode permettant un calcul rapide des hyperparamètres faciliterait leur utilisation. Nous proposons par exemple comme perspective, une généralisation du critère de validation croisée (GCV) pour la détermination du coefficient β à chaque itération de la minimisation semi-quadratique.

Ce travail présuppose que l'algorithme utilisé converge assez rapidement, afin de ne pas trop surcharger le calcul d'une itération. Une implémentation de MOISE, dans sa version accélérée par la méthode OS (Ordered Subset), est à envisager pour réduire le nombre d'itérations. Koulibaly a montré que l'application de l'OS sur MOISE permettait d'envisager un gain de temps d'un facteur voisin de 2 pour très peu de sous-ensembles [Koul-96]. Une autre possibilité est d'imposer une contrainte de positivité sur ARTUR.

Pour améliorer la qualité des images produites, nous avons essayé d'utiliser des contraintes différentes du gradient. Si le THIN-PLATE n'a pas donné entièrement satisfaction, nous pensons que c'est moins l'*a priori* qui est en cause que l'algorithme de minimisation retenu. Il serait intéressant d'imposer en même temps un *a priori* sur le gradient et sur la dérivée seconde de l'image.

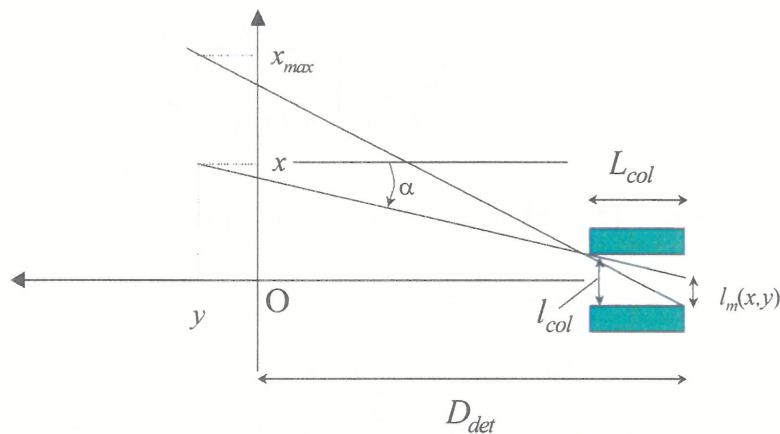
Enfin, nos travaux sur l'échantillonnage entrelacé laissent entrevoir des résultats plutôt encourageants en terme de réduction de mesures. Nos études doivent être complétées sur des fantômes simulés et réels. Les résultats, quels qu'ils soient, pourraient d'être d'une grande utilité dans l'optique du passage à une détection multi-voies, voire à une détection tridimensionnelle, dans la détermination d'un nombre minimal de mesures. Cette contribution constituerait une avance certaine vers la phase d'industrialisation du procédé.

ANNEXE 1.

DETERMINATION DE LA REPONSE ANALYTIQUE DU DETECTEUR

Si $|x| \leq \frac{l_{col}}{2}$ alors l'ouverture est maximale et on a $l_m(x, y, z) = l_{col}$.

Si $|x| > x_{max}$ alors $l_m(x, y) = 0$ (ce cas n'est jamais traité car seuls les pixels contenus dans le noyau de diffusion, et donc leur barycentre sont traités).



Examinons le cas $\frac{l_{col}}{2} < |x| < x_{max}$: à partir de l'angle α on a :

$$l_m(x, y) = l_{col} - L_{col} \tan \alpha = l_{col} - L_{col} \frac{x - \frac{l_{col}}{2}}{y + D_{det} - L_{col}}$$

On a donc, avec $y' = y + D_{det}$:

$$\begin{cases} l_m(x, y) = l_{col}, & \text{si } |x| \leq \frac{l_{col}}{2} \\ l_m(x, y) = l_{col} - L_{col} \frac{|x| - \frac{l_{col}}{2}}{y' - L_{col}}, & \text{si } \frac{l_{col}}{2} < |x| \leq x_{max} \end{cases}$$

l_m est indépendant de la variable z et par analogie, l'expression de $h_m(y, z)$ est indépendante de la variable x , soit :

$$\begin{cases} h_m(y, z) = h_{col} , & \text{si } |z| \leq \frac{h_{col}}{2} \\ h_m(y, z) = h_{col} - L_{col} \frac{|z| - \frac{h_{col}}{2}}{y' - L_{col}} , & \text{si } \frac{h_{col}}{2} < |z| \leq z_{max} \end{cases}$$

Les coordonnées du point central M_c sont :

$$x_c = \left(-\frac{l_{col}}{2} + \frac{l_m(x, y)}{2}\right) \cdot \text{sign}(x') \text{ et } z_c = \left(-\frac{h_{col}}{2} + \frac{h_m(y, z)}{2}\right) \cdot \text{sign}(z)$$

On pose $n_c(x, y, z) = \|MM_c\|$. Nous pouvons maintenant calculer $\int_{z=0}^{\frac{h_{ji}}{2}} \frac{h_m(y, z)}{n_c^2(x, y, z)} dz$ en le décomposant par :

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^{\frac{h_{ji}}{2}} \frac{h_m(y, z)}{n_c^2(x, y, z)} dz &= h_{col} \int_{z=0}^{\frac{h_{col}}{2}} \frac{dz}{n_c^2(x, y, z)} + h_{col} \int_{\frac{h_{col}}{2}}^{\frac{h_{ji}}{2}} \frac{dz}{n_c^2(x, y, z)} \\ &\quad - \frac{L_{col}}{(y' - L_{col})} \int_{\frac{h_{col}}{2}}^{\frac{h_{ji}}{2}} \frac{\left(z - \frac{h_{col}}{2}\right)}{n_c^2(x, y, z)} dz \end{aligned}$$

Posons $n_c^2(x, y', z) = c_1^2 + (z_c - z)^2$ avec $c_1^2 = (x_c - x)^2 + (y')^2$, soit :

$$\begin{cases} n_c^2(x, y, z) = c_1^2 + z^2 & \text{si } |z| \leq \frac{h_{col}}{2} \\ n_c^2(x, y, z) = c_1^2 + \left[z \left(\frac{2y' - L_{col}}{2(y' - L_{col})} \right) - \frac{L_{col} h_{col}}{4(y' - L_{col})} \right]^2 & \text{si } |z| > \frac{h_{col}}{2} \end{cases}$$

La première intégrale se calcule directement puisque :

$$h_{col} \int_{z=0}^{\frac{h_{col}}{2}} \frac{dz}{n_c^2(x, y', z)} = h_{col} \left[\frac{1}{c_1} \arctan\left(\frac{z}{c_1}\right) \right]_0^{\frac{h_{col}}{2}} = \frac{h_{col}}{c_1} \arctan\left(\frac{h_{col}}{2c_1}\right)$$

On nome les constantes $a = \frac{2y' - L_{col}}{2(y' - L_{col})}$ et $b = -\frac{L_{col} h_{col}}{4(y' - L_{col})}$ et on pose le changement de variables $u = az + b$.

La deuxième intégrale s'écrit :

$$h_{col} \int_{\frac{h_{col}}{2}}^{\frac{h_{ji}}{2}} \frac{dz}{c_1^2 + (az + b)^2} = \frac{h_{col}}{a} \int_{a \frac{h_{col}}{2} + b}^{a \frac{h_{ji}}{2} + b} \frac{du}{c_1^2 + u^2} = \frac{h_{col}}{ac_1} \left[\arctan\left(\frac{u}{c_1}\right) \right]_{a \frac{h_{col}}{2} + b}^{a \frac{h_{ji}}{2} + b}$$

Enfin, la dernière intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned}
 -\frac{L_{col}}{(y' - L_{col})} \int_{\frac{h_{col}}{2}}^{\frac{h_{ji}}{2}} \frac{\left(z - \frac{h_{col}}{2}\right)}{n_c^2(x', y', z)} dz &= -\frac{L_{col}}{2a^2(y' - L_{col})} \int_{a\frac{h_{col}+b}{2}}^{a\frac{h_{ji}+b}{2}} \frac{2u - 2b - ah_{col}}{c_1^2 + u^2} du \\
 &= -\frac{L_{col}}{2a^2(y' - L_{col})} \left(\left[\ln(c_1^2 + u^2) \right]_{a\frac{h_{col}+b}{2}}^{a\frac{h_{ji}+b}{2}} - \left[\frac{2b + ah_{col}}{c_1} \arctan\left(\frac{u}{c_1}\right) \right]_{a\frac{h_{col}+b}{2}}^{a\frac{h_{ji}+b}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

L'expression finale s'écrit donc :

$$R \det_{ji} = \frac{l_m(x, y)}{2\pi} \left[\begin{aligned} &\frac{h_{col}}{c_1} \arctan\left(\frac{h_{col}}{2c_1}\right) + \frac{h_{col}}{ac_1} \left[\arctan\left(\frac{a\frac{h_{ji}}{2} + b}{c_1}\right) - \arctan\left(\frac{a\frac{h_{col}}{2} + b}{c_1}\right) \right] \\ &-\frac{L_{col}}{2a^2(y' - L_{col})} \left(\ln \left[\frac{c_1^2 + \left(a\frac{h_{ji}}{2} + b\right)^2}{c_1^2 + \left(a\frac{h_{col}}{2} + b\right)^2} \right] - \left[\frac{2b + ah_{col}}{c_1} \arctan\left(\frac{u}{c_1}\right) \right]_{a\frac{h_{col}+b}{2}}^{a\frac{h_{ji}+b}{2}} \right) \end{aligned} \right]$$

ANNEXE 2.

CALCUL DE LA SURFACE ET DU BARYCENTRE D'UN POLYGONE A PARTIR DE CES SOMMETS

Soit le polygone déterminé par ces n_{ji} sommets $S_{ji}^k(x_{ji}^k, y_{ji}^k)$ ($3 \leq n_{ji} \leq 6$) dont on désire connaître la surface et le barycentre.

La première étape consiste à chercher les sommets dont les abscisses correspondent aux extremums, soit :

$$x_{ji}^{\min} = \min_k(x_{ji}^k), \quad x_{ji}^{\max} = \max_k(x_{ji}^k)$$

On note k_{\min} et k_{\max} les indices respectifs. A partir de la droite affine d liant ces deux points, soit

$$d(x, y) = y_{ji}^{k_{\max}} \cdot (x - x_{ji}^{\min}) - x_{ji}^{\max} (y - y_{ji}^{k_{\min}}),$$

on définit les deux sous-ensembles S_{ji}^{\inf} et S_{ji}^{\sup} constitués des points situés en dessous de d , respectivement au-dessus, répertoriés par abscisse croissant, que l'on complète avec le point d'abscisse maximal, soit :

$$S_{ji}^{\inf} = \underset{x_{ji}^k}{\text{sort}} \{k \in [1..n_{ji}] / d(S_{ji}^k) < 0\} \cup k_{\max}, \quad S_{ji}^{\sup} = \underset{x_{ji}^k}{\text{sort}} \{k \in [1..n_{ji}] / d(S_{ji}^k) > 0\} \cup k_{\max}$$

La surface A_{ji} est alors obtenu par calcul exact par fractionnement de l'aire en triangle.

Par exemple, pour un polygone à 5 sommets, on calcule d'abord l'aire A_1 par le produit vectoriel des deux vecteurs $\langle M_{\min} - M_1, M_{\min} - M_2 \rangle$,

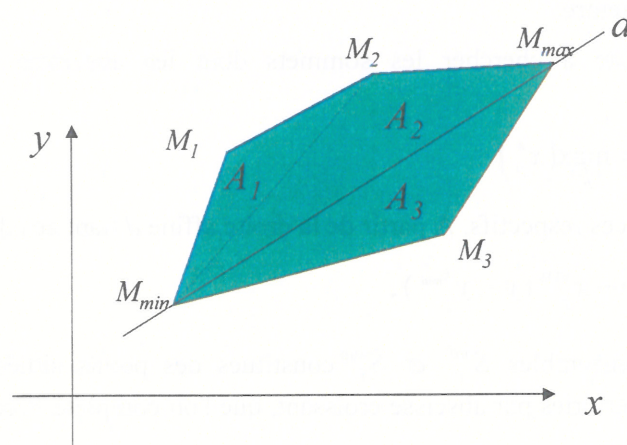
puis l'aire A_2 par le produit vectoriel des deux vecteurs $\langle M_{\min} - M_2, M_{\min} - M_{\max} \rangle$, pour la partie située au-dessus de la droite d ,

et le produit $\langle M_{\min} - M_3, M_{\min} - M_{\max} \rangle$ définit l'aire A_3 située en dessous de d .

On a donc, pour tout polygone convexe : l'aire A_{ji} et le barycentre de coordonnées (x_{ji}^g, y_{ji}^g) définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A_{ji} = \sum_{l \in S_{ji}^{\text{inf}}} A_{ji}^{l,\text{min}} + \sum_{l \in S_{ji}^{\text{sup}}} A_{ji}^{l,\text{max}} \\
 \text{avec } A_{ji}^{l,\text{min}} = \langle S_{ji}^{\text{min}} - S_{ji}^l \mid S_{ji}^{\text{min}} - S_{ji}^{l+1} \rangle, \quad A_{ji}^{l,\text{max}} = \langle S_{ji}^{\text{max}} - S_{ji}^l \mid S_{ji}^{\text{max}} - S_{ji}^{l+1} \rangle \\
 x_g(A_{ji}^{l,m}) = \frac{(x_{ji}^m + x_{ji}^l + x_{ji}^{l+1})}{3}, \quad y_g(A_{ji}^{l,m}) = \frac{(y_{ji}^m + y_{ji}^l + y_{ji}^{l+1})}{3} \quad (m = \text{min, max}) \\
 x_{ji}^g = \frac{1}{A_{ji}} \left(\sum_{l \in S_{ji}^{\text{inf}}} x_g(A_{ji}^{l,\text{min}}) A_{ji}^{l,\text{min}} + \sum_{l \in S_{ji}^{\text{sup}}} x_g(A_{ji}^{l,\text{max}}) A_{ji}^{l,\text{max}} \right) \\
 y_{ji}^g = \frac{1}{A_{ji}} \left(\sum_{l \in S_{ji}^{\text{inf}}} y_g(A_{ji}^{l,\text{min}}) A_{ji}^{l,\text{min}} + \sum_{l \in S_{ji}^{\text{sup}}} y_g(A_{ji}^{l,\text{max}}) A_{ji}^{l,\text{max}} \right)
 \end{array} \right.$$

Cette méthode a donc l'avantage d'être rapide exacte et permet sans trop de calcul supplémentaire d'accéder à la fois au barycentre et au calcul d'aire total.



partition du polygone en triangles

ANNEXE 3.

LES METHODES DE GRADIENT

Nous cherchons à déterminer à chaque itération, une direction de descente d^p , différente du gradient, tel que le résidu à la $(p+1)^{\text{ème}}$ itération soit orthogonal à toutes les directions de descente précédentes : $r^{p+1} \perp d^l, l = 1 \dots p$.

On choisit α^p le minimum local de l'énergie $E(x^p)$, et on conserve la relation d'orthogonalité $\langle r^p | d^{p-1} \rangle = 0$; on va chercher d^p dans le plan formé par les deux directions orthogonales r^p et d^{p-1} :

$$d^p = r^p + \beta^p d^{p-1}$$

avec β^p choisi de tel manière que le facteur de réduction de l'erreur soit le plus grand possible dans $E(x)$. En remplaçant la valeur de α^p dans $E(x^{p+1})$ on obtient :

$$E(x^{p+1}) = E(x^p) - \frac{\langle r^p | d^p \rangle^2}{\|d^p\|_A^2}$$

en remarquant d'autre part que $E(x^p) = \langle A^{-1}r^p | r^p \rangle$, on a alors :

$$E(x^{p+1}) = E(x^p) \cdot \left(1 - \frac{\langle r^p | d^p \rangle^2}{\langle A^{-1}r^p | r^p \rangle \cdot \|d^p\|_A^2} \right)$$

β^p sera donc choisi de manière à maximiser la quantité $\frac{\langle r^p | d^p \rangle^2}{\langle A^{-1}r^p | r^p \rangle \cdot \|d^p\|_A^2}$. Constatons d'abord

que $\langle r^p | d^p \rangle = \langle r^p | r^p + \beta^p d^{p-1} \rangle = \|r^p\|^2 + \beta^p \langle r^p | d^{p-1} \rangle = \|r^p\|^2$. La détermination du maximum se réduit à minimiser $\|d^p\|_A$. Comme

$$\begin{aligned} \|d^p\|_A &= \langle A(r^p + \beta^p d^{p-1}) | (r^p + \beta^p d^{p-1}) \rangle \\ &= (\beta^p)^2 \langle A d^{p-1} | d^{p-1} \rangle + 2\beta^p \langle A d^{p-1} | r^p \rangle + \langle A r^p | r^p \rangle \end{aligned}$$

la minimisation du trinôme en β^p fournit en fin de compte :

$$\beta^p = -\frac{\langle Ad^{p-1} | r^p \rangle}{\langle Ad^{p-1} | d^{p-1} \rangle}$$

De cette dernière relation, on en déduit que :

$$\langle Ad^{p-1} | d^p \rangle = 0$$

On dit alors que les deux vecteurs d^p et d^{p-1} sont A -conjugués, c'est-à-dire qu'ils sont orthogonaux pour le produit scalaire induit par A . Comme A est symétrique, définie positive, $\langle Ax, y \rangle$ définit un produit scalaire.

Deux résidus consécutifs ainsi construits sont alors orthogonaux puisque :

$$\begin{aligned} \langle r^{p+1} | r^p \rangle &= \|r^p\|^2 - \alpha^p \langle Ad^p | r^p \rangle = \|r^p\|^2 - \alpha^p \langle Ad^p | d^p - \beta^p d^{p-1} \rangle \\ &= \|r^p\|^2 - \alpha^p \langle Ad^p | d^p \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si on choisit lors de l'initialisation $d^0 = r^0$, ($\beta^0 = 0$), et en tenant compte de $Ad^{p-1} = \frac{1}{\alpha^{p-1}}(r^p - r^{p-1})$, on peut montrer alors que β^p s'exprime comme le rapport des deux résidus successifs, soit :

$$\beta^p = -\frac{\langle Ad^{p-1} | r^p \rangle}{\langle Ad^{p-1} | d^{p-1} \rangle} = \frac{\|r^p\|^2}{\|r^{p-1}\|^2}$$

En initialisant les variables à $x^0, d^0 = r^0 = b - Ax^0, \beta^0 = 0$, la boucle du gradient conjugué est donc :

Pour $p = 0, 1, \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^p = \frac{\ r^p\ ^2}{\ d^p\ _A^2} \\ x^{p+1} = x^p + \alpha^p d^p \\ r^{p+1} = r^p - \alpha^p Ad^p \\ \beta^{p+1} = \frac{\ r^{p+1}\ ^2}{\ r^p\ ^2} \\ d^{p+1} = r^{p+1} + \beta_{k+1} d^p \end{array} \right.$
------------------------	--

Les propriétés de l'algorithme sont :

- le résidu à la $p^{\text{ième}}$ itération est orthogonal à toutes les directions précédentes, à condition que $r^p \neq 0$ soit : $\langle r^p | d^i \rangle = 0 \quad i \leq p-1$
- la direction de descente à la $p^{\text{ème}}$ itération est A -conjugué à toutes les directions de descente précédentes : $\langle Ad^p | d^i \rangle = 0 \quad i \leq p-1$

- le résidu à la $p^{\text{ième}}$ itération est orthogonal à tous les résidus précédents :

$$\langle r^p | r^i \rangle = 0 \quad i \leq p-1$$

Ainsi, à chaque itération, on détermine le minimum de la fonctionnelle dans une direction orthogonale à toutes les précédentes. On remarquera que les $(r^i)_{i=0\dots p-1}$ forment une base orthogonale égale à la base engendrée par l'espace de Krylov, noté $K_p = E(r^0, Ar^0, \dots, A^{p-1}r^0)$.

Aussi, le vecteur x^p vérifie la relation :

$$E(x^p) \leq E(x) \quad \forall x \in x^0 + K_p \quad (1)$$

L'algorithme converge en au plus N itérations, lorsque N est la dimension de la matrice. En effet, ou $r^p = 0$ pour $p \leq N-1$ et dans ce cas on a la convergence en p itérations, ou r^p est orthogonal à d^0, d^1, \dots, d^{N-1} qui sont N vecteurs linéairement indépendants (car orthogonaux pour le produit scalaire $\langle Ax, y \rangle$) dans l'espace R^N , et donc nécessairement $r^N = 0$. La méthode est donc théoriquement une méthode directe, puisqu'on obtient la solution exacte en au plus N itérations. En pratique cependant, on n'a jamais les relations de A-conjugaisons entre les vecteurs de descente, à cause des erreurs d'arrondi, et la convergence peut nécessiter plus de N itérations. C'est pour cela qu'en pratique la méthode est considérée comme une méthode itérative.

BIBLIOGRAPHIE GENERALE

- [Alva-76] R.E Alvarez and A. Macovski « Energy-selective reconstruction X-ray computerized tomography. » *Phys. Med. Biol.* 21(5) :733-744, 1976
- [Aube-94] G. Aubert, M. Barlaud L. Blanc-Feraud and P. Charbonnier « Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging » Tec. Rep. 94-01, I3S, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1994
- [Axel-80] O. Axelsson. « Conjugate gradient type methods for unsymmetric and inconsistent systems of linear equations ». *Lin. Alg. and its Applic.*, 29 :1-16, 1980
- [Axel-84] B. Axelsson, P. Msaki and A. Israelsson, « Substraction of Compton scattered photons in SPECT », *J. Nucl. Med.* 25 : 490-494, 1984
- [Azev-91] S.G. Azevedo « Model-based computed tomography for nondestructive evaluation », *PhD dissertation, Lawrence Livermore National Laboratory, UCLR-LR-106884*, 1991
- [Baur-85] A. Baur, « *Protection contre les rayonnements, aspects physiques et méthodes de calcul.* », Edition du CEA, 1985
- [Beck-82] J. Beck, R. Jaszczak, E. Coleman, C. Starmer and L. Nolte, « Analysis of SPECT including scatter and attenuation using sophisticated Monte-Carlo methods », *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 29 : 506-511, 1982
- [Beek-93] F.J. Beekman *et al.*, « Object shape dependent PSF model for SPECT imaging », *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 40(1) : 31-39, 1993
- [Beek-95] F.J. Beekman, *et al.* « Fast SPECT simulation including object shape dependent scatter ». *IEEE Trans. Med. Imag.* 14(2) :271-282, 1995
- [Beek-96] F.J Beekman, C. Kamphuis and M.A. Viergever. « Improved SPECT quantitation using fully three-dimensional iterative spatially variant scatter response compensation. » *IEEE Trans. Med. Imag.* 15(4) :491-499, 1996
- [Bell-79] S. Bellini, M. Piacentini, C. Cafforio, and F. Rocca. « Compensation of tissue absorption in emission tomography », *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, 27 (3):213-218, 1979
- [Bere-96] C. Berenstein and W. Walnut. « Wavelets and local tomography », *In Wavelets in Medicine and Biology*, pages 231-361, CRC Press, 1996
- [Bern-99] R.T. Bernardi « *TRU drum NDE and NDA with WIT* » in Conference Waste Management 99, Tucson, Arizona, 1999

- [Bert-97] Bertolucci, E et al. « Timing properties of CdZnTe detectors for positron emission tomography. » *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 400 :107-112, 1997
- [Besa-86] J. Besag. « On the statistical analysis of dirty pictures », *J. Roy. Statist. Soc.*, 3:259-302, 1986
- [Besa-95] J. Besag, P. Green, D. Higdon and K. Mengersen « Bayesian computation and stochastic systems », *Statist. Sci.*, 10 :3-66, 1995
- [Bhat-97] M. Bhatia, W.C. Karl, A.S. Willsky. « Tomographic Reconstruction and Estimation Based on Multiscale Natural-Pixel Bases. » *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 6(3) :463-478, 1997
- [Blak-87] A. Blake and A. Zisserman. « Visual Reconstruction » The M.I.T. Press Series in artificial intelligence, 1987
- [Blak-89] A. Blake. « Comparison of the efficiency of deterministic and stochastic algorithms for visual reconstruction », *IEEE Trans. PAMI*, 11 :2-12, 1989
- [Bouc-95] V. Bouchard, P. Cinquin and L. Desbat. « First Compton scatter correction in SPECT using PVM. » In *Proceedings of the 1995 International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, pages 109-111, Aix-Les-Bains, France, Jul 4-6, 1995
- [Boul-92] D. Boulfelfel, R. M. Rangayyan, L. J. Hahn, and R. Kloibert. « Use of the geometric mean of opposing planar projections in pre-reconstruction restoration of SPECT images. » *Phys. Med. Biol.*, 37:1915-1929, 1992
- [Boum-93] C. A. Bouman and K. Sauer. A generalized gaussian image model or edge-preserving map estimation. *IEEE Trans. Image Processing*, 2:296-310, 1993
- [Boum-96] C. A. Bouman and K. Sauer. « A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization. » *IEEE Trans. Image Processing*, 5:480-492, 1996
- [Bour-84] M. Bourgeois. « Cycle du combustible-Retraitement des combustibles. » Techniques de l'ingénieur-Mécanique et chaleur Génie Nucléaire, B3650 :1-56, 1984
- [Bour-93] M.H. Bourguignon et al « Correction of attenuation in SPECT with a attenuation coefficient map : a new method », *J. Nucl. Biol. Med.* 37 : 26-32, 1993
- [Brac-56] R.N Bracewell and A.C Riddle. « Inversion of fan-beam scans in radio astronomy », *Aus J. Phys.* 9:198-217, 1956
- [Bries-90] J.F. Briesmeister « MCNP-A general Monte-carlo code for neutron and photon transport , version 4 », *Los Alamos, NM: Los Alamos National Laboratory; technical Report LA-7396-M*, 1990
- [Buoc-81] M. Buoconore, W. Brady, and A. Macovski. « A natural pixel decomposition for two dimensional image reconstruction. » *IEEE Tans. Biomed. Eng.*, 28:69-78, 1981
- [Buva-94] I. Buvat, H. Benali, A. Todd-Pokropek, and R. Di Paola. « Scatter correction in scintigraphy: the state of the art. » *Eur. J. Nucl. Med.*, 21:675-694, 1994
- [Buva-95] I. Buvat, M. Rodriguez-Villafuerte, A. Todd-Pokropek, H. Benali, and R. Di Paola. « Comparative assessment of nine scatter correction methods based on spectral analysis using Monte-Carlo simulations. » *IEEE Trans. Nucl. Med.*, 36:1476-1488, 1995

- [Canb-97] Catalogue Canberra Mesure, 1997
- [Cea-86] Commissariat à l'Énergie Atomique. « *Les déchets nucléaires.* » Séries synthèses, éditions Eyrolles, 1986
- [Cens-83] Y. Censor, « Finite series expansion methods » *Proceedings IEEE*, 71 :409-419, 1983
- [Chan-78] L. Chang. « A method for attenuation correction in radionuclide computed tomography. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 25 (1):638-639, 1978
- [Char-94] P. Charbonnier. « *Reconstruction d'image: régularisation avec prise en compte des discontinuités.* » PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1994
- [Ciar-94] P. Ciarlet. « Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation ». Masson, 1994
- [Ciri-99] Cirignano, L « Pixellated CdZnTe detector for emission/transmission computed tomography. » *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 422 :216-220, 1999
- [Clin-93] N. H. Clinthorne, T.-S. Pan, P.-C. Chiao, W. L. Rogers, and J. A. Stamos. « Preconditioning methods for improved convergence in iterative reconstructions » *IEEE Trans. Med. Imaging*, 12 (1):78-83, 1993
- [Conw-93] J.H. Conway and N.J.A Sloane. « Sphere Packings, Lattice and Groups », *Compreh. Math. Springer, second edition*, 1993
- [Corm-63] A.M Cormack. Representation of a function by its line integral, with some radiological applications, *J. appl. Phys*, 34:2722-277, 1963
- [Corm-78] A.M Cormack. Sampling the Radon transform with beam of finite width, *Phys, Med. Biol.* 23:1141-1148, 1978
- [Crav-79] P. Craven and G. Wahba, « Smoothing noisy data with spline function », *Numerische Math.* 31 :377-403, 1979
- [Dela-98] A. Delaney and Y. Bresler « Globally convergent edge-preserving regularized reconstruction :an application to limited-angle tomography », *IEEE Trans. Imag. Proc.* 7(2) :204-221, 1998
- [Dela-98] A.H. Delaney, Y. Bresler. « Globally convergent edge-preserving regularized reconstruction : an application to limited-angle tomography. », *IEEE Trans Imag. Proc.* 7(2) :204-221, 1998
- [Demo-89] G. Demoment. « Image reconstruction and restoration: Overview of common estimation structures and problems », *IEEE Tans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37 (12):2024-2036, 1989
- [Demp-77] A.P. Dempster, N.M. Laird, and D.B. Rubin. « Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm » *J. Roy. Statist. Soc.*, 39:1-38, 1977
- [Desb-97a] L. Desbat « Echantillonnage parallèle efficace en tomographique 3D », *C.R Acad. Sci. Paris, Série I*, 324 : 1193-1199, 1997
- [Desb-97b] L. Desbat, « Echantillonnage efficace en tomographie ». *Thèse d'habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier*, 1997

- [Desb-99] L. Desbat and R. Thierry, « Efficient sampling of the exponential Radon Transform », 1st World Congress on Industrial Process Tomography, Buxton, Greater Manchester, April 14th –17th, S2 :423-426, 1999
- [DeVo-95] M.J.A. De Voigt et al. « A novel compact Ge-BGO Compton suppression spectrometer. » *Nucl. Instr. And Meth. In Phys. Res.*A356 :362-375, 1995
- [Dint-90] J.M. Dinten. « Tomographie à partir d'un nombre limité de projections : régularisation par des champs de Markoviens », PhD thesis, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1990
- [Djaf-93] A. M. Djafari. « On the estimation of hyperparameters in bayesian approach of solving inverse problems » in *Proc. ICAPSSP*. 495-498, 1993
- [Donn-84] Q. Donner. « Correction de l'atténuation et du rayonnement diffusé en tomographie d'émission à simples photons », *PhD thesis, Université Joseph. Fourier, Grenoble*, 1994
- [Evan-82] R.D. Evans. « *The atomic nucleus.* » Krieger, New York, 1982
- [Falc-98] C. Falcon et al. « Evaluation of a cross-validation stopping rule in MLE SECT reconstruction », *Phys. Med. Biol.* 43 :1271-1283, 1998
- [Fari-90] A.Faridani, « An application of a multidimensional sampling theorem to computed tomography », *Contemp. Math.*, 113:65-80, 1990
- [Floy-84] C. Floyd, R. Jaszczak, C. Harris, and R. Coleman. « Energy and spatial distributions of multiple order Compton scatter in SPECT: a monte-carlo investigation », *Phys. Med. Biol.*, 29:1217-30, 1984
- [Floy-86] C. Floyd, R. Jaszczak, K. Greer and R. Coleman. « Inverse Monte-Carlo as a unified reconstruction algorithm for ECT. » *Phys. Med. Biol.* 33:1075-1081, 1988
- [Floy-88] C. Floyd, R. Jaszczak, and R. Coleman. « Scatter detection in SPECT imaging :dependence on source depth, energy, and energy window. » *Phys. Med. Biol.* 33:1075-1081, 1988
- [Form-89] A.R. Formiconi, A Pupi and A. Passeri. « Compensation of spatial system response in SPECT with conjugate gradient reconstruction technique » *Phys. Med. Biol.* 34(1) :69-84, 1989
- [Form-93] A. Formiconi, A. Pupi, and A. Passeri. « Simultaneous correction of attenuation and distance-dependent resolution in SPECT: an analytical approach. » *Phys. Med. Biol.*, 5:1207-1217, 1993
- [Frey-93a] E. Frey and B. Tsui. « A practical method for incorporating scatter in a projector-backprojector for accurate scatter compensation in SPECT. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 40:1107-1116, 1993
- [Frey-93b] E. Frey Z.W Ju and B. Tsui. « A fast projector-backprojector pair modeling the asymmetric, spatially varying scatter response function for scatter compensation in SPECT imaging. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 40:1192-1197, 1993
- [Frey-94] E. Frey and B. Tsui. « Modeling the scatter response function in inhomogeneous scattering media in SPECT. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 15(4):491-499, 1994

- [Garn-87] L. Garnero « *Reconstruction d'images tomographiques à partir d'un ensemble limité de projections* », PhD thesis, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1987
- [Gasq-90] C. Gasquet et P. Witomski. « *Analyse de Fourier et applications* », *Editions Masson*, 1990
- [Geig-91] D. Geiger and F. Girosi. « *Parallel and deterministic algorithms from MRF's surface reconstruction and integration* », *IEEE Trans. PAMI*; 13 :401-412, 1991
- [Gema-84] S. Geman and D. Geman. « *Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images* », *IEEE Trans. PAMI*; 6(6):721-741, 1984
- [Gema-85] S. Geman and D.E. McClure. « *Bayesian image analysis : an application to single photon emission tomography* », *Amer. Statist. Assoc., Washington DC*, 1985
- [Gema-87] S. Geman and D.E. McClure. « *Statistical Methods for tomographic image reconstruction* », in *Proc. 46th session of the ISI, Bulletin of the ISI*, 52, 1987
- [Gema-92] D. Geman and G. Reynolds. « *Constrained restoration and the recovery of discontinuities* », *IEEE Trans. Image Processing*, 14(3):367-383, 1992
- [Gema-95] D. Geman and C. Yang. « *Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization* », *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 4 :932-946, 1995
- [Gers-98] J.L Gerstenmayer, O. Bonnin, V. Gerbe, F. Glasser, O. Peyret, « *New CdTe Quantum Sensor, with Improved Spatial Resolution, for Fast X-Ray and gamma-Ray Imaging.* » *Materials Research Society Symposium Proceedings*, 487 :281-286, 1998
- [Gind-93a] G. Gindi, M. Lee, A. Rangarajan and I.G. Zubal. « *Bayesian reconstruction of functional images using anatomical information as priors* » *IEEE Trans. Med. Imag.* 12 :670-680, 1993
- [Gind-93b] G. Gindi, A. Rangarajan, M.Lee, P.J Hong and I.G. Zubal. « *Bayesian reconstruction for emission tomography via deterministic annealing* » in *H. Barrett and A. Gmitro, editors, Information Processing in Medical Imaging*, 322-338, Springer-Verlag, 1993
- [Gira-84] D.A. Girard. « *Les méthodes de régularisation optimale et leur applications en tomographie : nouveaux algorithmes performants de reconstruction d'image.* » PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1984
- [Gira-86] D. Girard « *Les méthodes de régularisation optimale et leur applications en tomographie : nouveaux algorithmes performants de reconstruction d'images* », PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1986
- [Gira-89] D.A. Girard « *A fast Monte-Carlo cross-validation procedure for large least square problems with noisy data* », *Numer. Stat.*, 56 :1-23, 1989
- [Gira-91] D. Girard, « *Asymptotic optimality of the fast randomized versions of GCV and C_L in ridge regression and regularisation* », *Ann. of Stat.* 19(4) :1950-1963, 1991
- [Glas-97] F. Glasser, et al. « *Recent developments on a CdTe based X-ray detector for digital radiography.* » *Proceedings- Spie The International Society For Optical Engineering*, issue 3032 :513-519, 1997

- [Glic-94] S. Glick, B. Penney, M. King, and C. Byrne. « Non iterative compensation for the distance-dependent detector response and photon attenuation in SPECT imaging. » *IEEE Trans. Med. Imaging*, 13:363-374, 1994
- [Glic-96] S. Glick, M.A.King, T. Pan, and E. Soares. « An analytical approach of compensation for non-uniform attenuation and 3D detector response in cardiac SPECT imaging », *Three-dimensional image reconstruction in radiology and nuclear medicine*, pages 133-148, 1996
- [Golu-79] G.H. Golub, M Health and G. Wahba. « Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. » *Technometrics*, 21(2) :215-223, 1979
- [Gord-74] R. Gordon. A tutorial on ART. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 21:78-93, 1974
- [Graf-96] U. Graf. « Anti-Compton suppression with a HpGe detector response. » Grantholder report, ISIS-JRC ISPRA, 1996
- [Grah-86] L.S. Graham, R.L La Fontaine, M.A Stein. « Effects of asymmetric photopeak windows on flood field uniformity and spatial resolution of scintillation cameras. » *J. Nucl. Med.* 27 :706-713, 1986
- [Gran-93] P. Grangeat, R. Guillemaud, P. Rizo, R. Sauze, Q. Donner, and J.-P. Gorius. « Cone beam SPECT with a tilted detector. » *Comput. Med. Imag. Graph.*, 17 (4,5):279-287, 1993
- [Gree-90] P. Green. « Bayesian reconstruction from emission tomography data using a modified EM algorithm », *IEEE Trans. Med. Imaging*, 9(1):84-93, 1990
- [Grim-81] W.E. Grimson. « From surfaces to images » The M.I.T. Press, Cambridge, MA 1981
- [Guil-90] B. Guilpart. « Reconstruction pratique d'images tomographiques à partir d'un jeu de données incomplet. » C.E.A-DAM/CE/MES/RC N°004/90, 1990
- [Gull-81] G. Gullberg and T. Budinger. « The use of filtering methods to compensate for constant attenuation in single photon emission computed tomography. » *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 28 (2):142-157, 1981
- [Gull-85] G. Gullberg, R. Huesman, J. Malko, N. Pelc and T. Budinger « An attenuated projector-backprojector for iterative SPECT reconstruction. » *Phys. Med. Biol.* 30, 799-816, 1985
- [Gull-92] G. T. Gullberg, G. L. Zeng, F. L. Datz, P. E. Christian, and C. H. Tung. « Review of convergent beam tomography in single photon emission computed tomography. » *Phys. Med. Biol.*, 37 (3):507-534, 1992
- [Hada-23] J. Hadamard. « Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equations ». Yale University Press, 1923
- [Hans-92] P. Hansen. « Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve » *SIAM Rev.* 34(4) :561-580, 1992
- [Hazo-90] I. Hazou and D.C Solmon « Inversion of the exponential X-ray Transform. II :numerics », *Math. Meth. Appl. Sci.*, 13 :205-218, 1990
- [Hebe-89] T. Hebert and R. Leahy. « A generalized EM algorithm for 3D Bayesian reconstruction from Poisson data using Gibbs priors ». *IEEE Trans. Med. Imag.*, 8(2):194-202, 1989

- [Hebe-92] T. Hebert and R. Leahy. « The GEM-MAP algorithm with 3-D spect system response ». *IEEE Trans. Med. Imag.*, 11(1) :81-90, 1992
- [Herm-76] G. Herman and A. Lent « Iterative reconstruction algorithms » *Comput. Biol. Med.* 6 :273-294, 1976
- [Herm-76] G.T. Herman. A.V. Lakshminarayanan A. Naparstek. « Convolution reconstruction techniques for divergent beams ». *Comput. Med. Biol.* 6:259271, 1976
- [Herm-78] G. Herman. « Relaxation methods for image reconstruction ». *Comm. of the ACM*, 21:152-158, 1978
- [Herm-80] G.T. Herman. « *Image reconstruction from projections* », Academic Press, 1980
- [Hert-74] J. Hertogen, J. De Donter and R. Gijbels. « Experimental data on photopeak integration methods in activation analysis. » *Nucl. Instr. and Meth.* 115:197-212, 1974
- [Higg-95] J.R. Higgins. « Sampling theory in Fourier and signal analysis: foundations », *Oxford Science publications*, 1995
- [Houn-73] G.N Hounsfield. « Computerized transverse axial scanning tomography : Part I, description of the system », *Br; J. Radiol.* 46:1016-1022, 1973
- [Hsie-98] Y.-L Hsieh, G. L Zeng, G. T.Gullberg, « Projection Space Image Reconstruction using Strip Functions to Calculate Pixels More "Natural" for Modeling the Geometric Response of the SPECT Collimator. » *IEEE Trans. Med. Imag.* MI 17(1) :24-44, 1998
- [Hubb-93] J ;H. Hubbell and S.M Seltzer. « *Tables of X-ray mass attenuatiuon coefficients and mass energy-absorption coefficeints 1 keV to 20 MeV for elements Z=1 to 92 and 48 additional substances of dosimétric interest.* » IRD, Physics Laboratory, U.S. department of Commerce, Gaithersburg, MD 20899 U.S.A, 1993
- [Hues-77] R. Huesman, G. Gullberg, W. Greenberg and T. Budinger. « *User manual : donner algorithm for reconstruction tomography.* » (Lawrence Berkeley Laboratory Publication), 1977
- [Huot-96] N. Huot, P. Bonifay et B. Chabaliér « Effets des hétérogénéités radioactives sur les mesures d'activité par la méthode MARCO-CARACO », N.T. C.E.A./S.C.C.D96-003, 1996
- [Huot-97] N. Huot, B. Chabaliér « Heterogeneities effect in total gamma spectroscopy of radioactive waste drums », *International Seminar on Radioactive Waste Products*, Wursburg, Germany, 1997
- [Huyn-99] F. Huynth, « *Tomographie appliquée à la détection des actinides par photofission.* », PhD thesis, INST Cea-Saclay, 1999
- [Iae-92] International Atomic Energy Agency. « *Radioactive waste management : an IAEA source book.* » Vienna, 1992
- [Iwat-99] K. Iwata, et al. « CdZnTe detector for combined X-ray CT and SPECT. » *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 422 :740-744, 1999
- [Jaco-98] F. Jacobs, S. Matej and R. Lewitt « Image reconstruction techniques for PET. » Department of electronics and information systems, university of Ghent, medical image

- and signal processing group, technical report R9810 and departement of radiology, university of Pennssylvania, medical image processing group technical report N° MIPG245, August 1998
- [Jaco-99] F. Jacobs and I. Lemahieu. « Iterative image reconstruction from projections based on generalised Kaiser-Bessel window functions. » *Proceedings of 1st World Congress on Industrial Process Tomography*. Buxton, 427-432, April 1999
- [Jasz-84] R. Jaszczak, L. Greer, C. Floyd, C. Harris, and R. Coleman. « Improved SPECT quantification using compensation for scattered photons. » *J. Nucl. Med.*, 25:893-900, 1984
- [John-91] V.E. Johnson et al. « Image restoration using Gibbs priors :boundary modeling, treatment of blurring and selection of hyperparameter », *IEEE Trans. PAMI*, 13 :413-425, 1991
- [Jose-82] P.M Joseph. « An improved algorithm for reprojection rays through pixel images. » *IEEE Trans. Med. Imag.*, MI-1(3), 1982
- [Kauf-93] L. Kaufman. « Maximum likelihood, least squares, and penalized least squares for PET ». *IEEE Trans. Med. Imaging*, 12 (2):200-214, 1993
- [Kawa-85] S. Kawata, O. Nalcioclu « Constrained iterative Reconstruction by the conjugate gradient method » *.IEEE Trans on Med. Imaging* MI-4(2) 1985
- [Kell-95] C. Kelley. *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. SIAM, 1995
- [Kirk-83] S. Kirkpatrick, C. Gelatt, and M. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:671-680, 1983
- [Knol-89] G.F. Knoll, « *Radiation Detection and Measurement*. » Second Edition, Wiley, 1989
- [Kokt-73] L. Kokta. « Determination of peak area. » *Nucl. Instr. and Meth.* 112:245-251, 1973
- [Kora-86] K. Koral, N. Clinthorne, and W. Rogers. « Improving emission computed tomography quantification by Compton-scatter rejection through offset windows. » *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res.*, A242:610-614, 1986
- [Koul-94] P. Koulibaly, P. Charbonnier, M. Barlaud., J. Darcourt and L. Blanc-Féraud. « EM-MAP algorithm versus ARTUR : theoretical and practical comparaisn », *SPIE 2299* :294-304, 1994
- [Koul-96a] P. Koulibaly. « Régularisation et corrections physiques en tomographie d'émission », PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1996
- [Koul-96b] P. Koulibaly, P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, I. Laurette, J. Darcourt, and M. Barlaud. « Poisson statistic and half-quadratic regularization for emission tomography reconstruction algorithm », *In Proc. IEEE ICIP*, 719-722, Lausanne, Suisse, 1996
- [La-97] V. La. « *Correction d'atténuation en géométrie conique avec mesures de transmission en tomographie d'émission mono-photonique*. » PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997
- [Lalu-95] D. Lalush and B. Tsui. « A fast and stable maximum *a posteriori* reconstruction algorithm ». *Med. Phys.*, 22(8):1273-1284, 1995

- [Land-51] L. Landweber. « An iterative formula for Fredholm integral equations of the first kind », *Amer. J. Math.*, 73:615-624, 1951
- [Lang-84] K. Lange and R. Carson. « EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography » *J. Comput. Assist. Tomogr.*, 8 (2):306-316, 1984
- [Lang-90] K. Lange « Convergence of EM Image reconstruction algorithms with Gibbs smoothing » *IEEE. Trans. Med. Imag.* ,MI-9 4, 1990
- [Lasc-93] P. Lascaux et R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. tome I*, Masson , 1993
- [Lee-95a] S-J. Lee. « *Bayesian Image reconstruction in emission computed tomography using mechanical models as priors* » Ph.D thesis, UMI dissertation service, 1995
- [Lee-95b] S-J. Lee, A. Rangarajan and G. Gindi. « Bayesian image reconstruction reconstruction in SPECT using higher order mechanical models as priors » *IEEE Trans. Med. Imag.* 14 :669-680, 1995
- [Lee-97] S.J. Lee, I.T. Hsiao and G.R. Gindi, « The Thin-Plate as a regularizer in bayesian SPECT reconstruction », *IEEE Trans Nucl. Sci.* 44,(3), 1997
- [Lewi-86] R. Lewitt and G. Muehllehner « Accelerated iterative reconstruction for PET based on the EM algorithm for ML estimation » *IEEE Trans. Med. Imag.* MI-5 : 16-22, 1986
- [Lewi-89] R. M. Lewitt, P. R. Edholm, and W. Xia. « Fourier method for correction of depth dependent collimator blurring. » *SPIE Med. Imag. II: Image Processing*, 1092:232-243, 1989
- [Lewi-90] R.M. Lewitt. « Multidimensional digital image representations using generalized kaiser-bessel window functions. » *J. Opt. Am.* 7 :1834-1846, 1990
- [Lewi-92] R.M. Lewitt. « Alternatives to voxels for image representation in iterative reconstruction algorithms. » *Phys. Med. Biol.*, 37:705-716, 1992
- [Lian-92] Z. Liang, T.G. Turkington, D.R. Gilland, R.J. Jaszczak and R.E. Coleman. « Simultaneous compensation for attenuation, scatter and detector response for SPECT reconstruction in three dimensions. » *Phys. Med. Biol.* 37(3):587-603,1992
- [Ljun-90] M. Ljungberg and S. E. Strand. « Scatter and attenuation correction in SPECT using density maps and Monte-Carlo simulated scatter functions. » *J. Nucl. Med.*, 31:1560-1567, 1990
- [Llac-89] J. Llacer and E. Veklerov. « Feasible images and practical stopping rules for iterative algorithms in emission tomography », *IEEE Trans. Med. Imag.* MI-8 : 186-193, 1989
- [Loi-91] Loi n°91-1381 relative aux recherches sur la gestion des déchets radioactifs, 30 décembre 1991
- [Loui-83] A.K Louis and F. Natterer. « Mathematical problems of computerized tomography », *Proceedings IEEE*, 71(3):379-389, 1983
- [Mady-83] W. Madych and S. Nelson. « Polynomial based algorithms for computed tomography. » *SIAM J. Appl. Math.*, 43:157-185, 1983

- [Mall-95] A. Mallon, P. Grangeat, and Q. Donner. « Convergence study of iterative algorithms for attenuation correction in SPECT. » In *Proceedings of the 1995 International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, pages 97-101, Aix-Les-Bains, France, Jul 4-6, 1995
- [Manb-90] K. Manbeck, « *Bayesian statistical methods applied to emission tomography with physical phantom and patient data* », PhD thesis, Division of applied mathematics, Brown University, Providence, RI, 1990
- [Mang-88] S. Manglos, R. Jaszczak, and C. Floyd. « Weighted backprojection implemented with a non-uniform attenuation map for improved SPECT quantification », *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 35 (1):625-628, 1988
- [Marc-64] E. Marchand. « Deviation of the point spread function from the line spread function. » *J. Opt. Soc. Am.* 54 :915-920, 1964
- [Marc-65] E. Marchand. « From line to point spread function : the general case. » *J. Opt. Soc. Am.* 55 :352-355, 1965
- [Mark-85] A. Markoe and E.T Quinto « An elementary proof of local invertibility for generalized and attenuated Radon transforms », *SIAM J. Math. Anal.* 16:1114-1119, 1985
- [Marq-95] Y. Marque. « *La gestion à long terme des déchets radioactifs du cycle du combustible.* » Institut National des Sciences et techniques Nucléaires, Le cycle du combustible nucléaire, 1995
- [Marr-79] R.B. Marr. « On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals. » *J. Math. Anal. Appl.* 19 :357-374, 1979
- [Marr-85] J.L. Marroquin. « *Probabilistic solution of inverse problems* », PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1985
- [Marr-87] J. Marroquin. S. Mitter and T. Poggio « Probabilistic solution ill-posed problems in computational vision », *J. Amer. Stat. Assoc.*, 82 :76-89, 1987
- [Mas-90] J.Mas *et al.* « De la fenêtre asymétrique à l'analyse factorielle sous contrainte spectrale : une revue des méthodes de correction de la diffusion Compton en imagerie isotopique. » *J. Med. Nucl. and Biophys.* 14 :285-294, 1990
- [Mate-95] S. Matej and J. Browne « Performance of a fast Maximum Likelihood algorithm for fully 3D PET reconstruction », *International Meeting on Fully three-dimensional Image reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, 247-251, 1995
- [Mazé-93] A. Mazé *et al* « Iterative reconstruction methods for non uniform attenuation distribution in SPECT », *J. Nucl. Med.* 34 :1204-1209, 1993
- [Menn-99] C. Mennessier, F. Noo, R. Clackdoyle, G. Bal and L. Desbat « Attenuation correction in SPECT using consistency conditions for the exponential ray transform » *Conf. Record 3D99*, 1999
- [Metr-53] N. Metropolis *et al* « Equations of state calculations by fast computing machines. » *J. Chem. Phys.* 21 :1087-1091, 1953

- [Metz-95] C. Metz and X. Pan. « A unified analysis of exact methods of inverting the 2D exponential Radon transform, with implications for noise control in SPECT », *IEEE Trans. Med. Imaging*, 14 (4):643-658, 1995
- [Moro-84] T. Morozumi, M. Nakajima, K. Ogawa, and S. Yuta. « Attenuation correction methods using the information of attenuation distribution for single photon emission CT. » *Med. Imag. Tech.*, 2:20-28, 1984
- [Msak-87] P. Msaki, B. Axelsson, C.M. Dahl and S. Larsson. « Generalized scatter correction method in SPECT using point scatter functions. » *J. Nucl. Med.*, 28 :1861-1869, 1987
- [Muel-97] K. Mueller, R. Yagel and J. Cornhill. « The weighted-distance scheme : a globally optimizing projection ordering method for ART ». *IEEE Trans. Med. Imag.* 16(1) :223-229, 1997
- [Mumc-94] E.U. Mumcuoglu, R. Leahy, R.C. Simon, and Z. Zhou. « Fast gradient-based methods for bayesian reconstruction methods for bayesian reconstruction of transmission and emission PET », *IEEE Trans. Med. Imag.*, 13 :687-701, 1994
- [Mura-87] K. Murase, H. Itoh, and H. Mogami. « A comparative study of attenuation correction algorithms in single photon emission computed tomography (SPECT). » *Eur. J. Nucl. Med.*, 13:55-62, 1987
- [Natt-80] [Natt-80] F. Natterer, « Efficient Implementation of Optimal Algorithms in computerized tomography », *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2 :545-555, 1980
- [Natt-86] F. Natterer, « The mathematics of computed tomography », *Wiley*, 1986
- [Natt-92] F. Natterer « Attenuation correction in Positron Emission Tomography » *Math. Meth. in the Appl. Sci.* 15 :321-330, 1992
- [Nole-85] G. Nolet. « Solving or resolving inadequate and noisy tomographic systems ». *J. Computat. Phys.*, 61:463-482, 1985
- [Nuyt-91] J. Nuyts. « *Quantification of SPECT images : simulation, scatter correction, reconstruction and automated analysis.* » PhD. Thesis, Catholic University Leuven, 1991
- [Osco-88] P. Oskoui-Fard and H. Stark. « tomographic image reconstruction using the theory of convex projections ». *IEEE Trans med. Imag.* 7(1) :45-58, 1988
- [Paig-82] C. Paige and M. Saunders. « LSQR: an algorithm for sparse linear equations and sparse least-squares ». *ACM Trans. Math. Software*, 8:43-71, 1982
- [Penn-90] B. Penney and M. King « A projector, back-projector pair which accounts for the 3D depth and distance dependent blurring in SPECT. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 37 : 681-686, 1990
- [Penr-55] R. Penrose. « A generalized inverse for matrices ». *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 51:406-413, 1955
- [Pete-62] D.P. Petersen and D. Middleton. « Sampling and reconstruction of wavenumber-limited functions in N-dimensional Euclidian space ». *Info. Control.* 5:79-323, 1962

- [Pett-98] J.L Pettier, B. Chabaliér, D. Eymery and R. Thierry. « *TEMISEC : la tomographie d'émission appliquée aux colis de déchets FA et MA.* » Rapport technique, DESD N° 98-170, CEA, 1998
- [Phil-70] J.C. Philippet, *IEEE Trans. Nucl. Sci.* NS-17(3), 446, 1970
- [Pres-89] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. « Numerical Recipes, the art of scientific computing (C version) ». Cambridge University Press, 1989
- [Pret-98] P. H. Pretorius *et al* « Reducing the influence of partial volume effect on SPECT activity quantitation with 3D modelling of spatial resolution in iterative reconstruction », *Phys. Med. Biol.* 43 :407-420, 1998
- [Proc-86] A.E. Proctor. « *Geometrical optics for predicting gamma spectrometer collimator performance.* » EGG-PHY 7279, Idaho National Engineering Laboratory, EG&G Idaho, Inc. Idaho falls, Idaho 83415. May 1986
- [Rado-17] J. Radon. « Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewissen Mannigfaltigkeiten » *Ber. Saechsische Akademie der Wissenschaften*, 29:262-277, 1917
- [Raje-92] N. Rajeevan *et al* « Vector-extrapolated fast maximum likelihood estimation algorithms for emission tomography » *IEEE Trans. Med. Imag.* 11(1) :9-20, 1992
- [Rang-85] R. Rangarayan, A.P Dhawan and G. Gordon « Algorithms for limited-view computed tomography : an annotated bibliography and a challenge », *Applied Optics*, 24(23) :4000-4012, 1985
- [Rang-92] A. Rangarajan *et al.* « A continuation method for emission tomography », *in proc. IEEE Nucl. Sci. Symp. and Med. Imag. Conf.*, vol II :1207-1207, oct 1992
- [Rao-73] C.R. Rao « Linear statistical inference and its application » 2nd ed. New York :Wiley, 1973
- [Ridd-93] C. Riddell. « *Quantification en tomographie d'émission de simples photons.* » PhD thesis, Université de Compiègne, 1993
- [Robe-99] C. Robert-Coutant, V. Moulin, R. Sauze, P. Rizo, J. M Casagrande. « Estimation of the matrix attenuation in heterogeneous radioactive waste drums using dual-energy computed tomography », *Instr. and Meth. in Phys. Res. Section A*, 422 :949-456, 1999
- [Rock-76] A.J. Rockmore and A. Macovski. « A Maximum Likelihood approach to emission image reconstruction from projections », *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, NS-23 :1428-1432, 1976
- [Roge-83] D.R. Rogers. « *Handbook of nuclear safeguards measurement methods.* » Contractor : Monsanto Research Corporation, Mound Laboratory Miamisburg. NUREG-CR-2078/MLM-2855. Miamisburg, Ohio, 1983
- [Ros-96] D. Ros *et al.* « The influence of a relaxation parameter on SPECT iterative reconstruction algorithms » *Phys. Med. Biol.*, 41 :925-937, 1996
- [Rose-82] A. Rosenfeld and A.C Kak. « *Digital picture processing* » Academic Press, 1982
- [Ross-96] M. Rossi *et al.* « High energy tomography using cadmium zinc telluride detector. » *Nucl. Instr. And Meth. In Phys. Res.* A380 :419-422, 1996

- [Saqu-98] S. Saquib, C. Bouman and K. Sauer « ML parameter estimation for markov random fields with application to bayesian tomography », *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 7 (7):1029-1044, 1998
- [Scha-91] J.P. Schapira. « *Les déchets nucléaires : un problème mondial.* » La documentation française, série « Problèmes politiques et sociaux », n°649, 1991
- [Shep-82] L.A. Shepp and Y.Vardi. « Maximum likelihood reconstruction for emission tomography ». *IEEE Trans. Med. Imaging*, 1 (2):113-122, 1982
- [Sidd-85] R. Siddon. « Fast calculation of the exact radiological path for 3D CT array. » *Med. Phys.* 12 :252-255, 1985
- [Sing-87] M. Singh, C. Horne. « Use of a germanium detector to optimize scatter correction in SPECT. » *J. Nucl. Med.* 28 :1853-1860, 1987
- [Smit-98] M. F. Smith, R. J Jaszczak. « An analytic model of pinhole aperture penetration for 3D pinhole SPECT image reconstruction. » *Phys. Med. Biol.* 43(4) :761-776, 1998
- [Snyd-87] D. Snyder, M. Miller, L. Thomas, and D. Politte « Noise and Edge artefacts in Maximum-Likelihood reconstructions for emission tomography », *IEEE Trans. Med. Imag.* MI-6 (3) :228-238, 1987
- [Star-86] H. Stark « Image recovery: theory and application », *Academic Press*, 1986
- [Stev-90] R. Stevenson and E. Delp. « Fitting curves with discontinuities », in *Proc. 1st Int. Workshop on Robust Computer Vision*, Seattle, WA, 127-136, 1990
- [Stra-74] O. Strand. « Theory and methods related to the singular function expansion and Landweber's iteration for integral equations of the first kind » *SIAM J. Numer. Anal.*, 11:798-825, 1974
- [Tan-87] Tanaka E. « A fast reconstruction algorithm for stationary positron emission tomography based on a modified EM algorithm » *IEEE Trans. Med. Imag.*, MI-6 :98-105, 1987
- [Tana-83] E. Tanaka. « Quantitative image reconstruction with weighted backprojection for single photon emission computed tomography. » *J. Comput. Assist. Tomogr.*, 7:692-700, 1983
- [Terz-86] D. Terzopoulos « Regularisation of inverse visual problems involving discontinuities », *IEEE Trans. PAMI* 8 :413-424, 1986
- [Thie-98] R. Thierry. « Méthodes de reconstruction adaptées à la tomographie d'émission bidimensionnelle sur TEMISEC. » *NT SCCD 98-06, CEA*, 1998
- [Thie-99a] R. Thierry and J.L Pettier « MEPHISTO : a volumic model for the characterization of waste packages by gamma emission tomography », in *Symposium of Waste Management 99, Tucson, Arizona*, 12(1039) :1-18, 1999
- [Thie-99b] R. Thierry, J.L Pettier and L. Desbat « Simultaneous compensation for attenuation, scatter and detector response for 2D-emission tomography on nuclear waste with reduced data », *1st World Congress on Industrial Process Tomography, Buxton, Greater Manchester, April 14th -17th*, E1 :542-551, 1999

- [Tikh-63] A. Tikhonov « Regularization of incorrectly posed problems » *Sov. Math. Dokl.*, 4 :1624-1627, 1963
- [Tikh-77] A. Tikhonov and V. Arsenin. « *Solution of ill-posed problems.* » Winston, Wiley, 1977
- [Todd-88] A. Todd-Pokropek, « Non-stationary deconvolution using a multi-resolution stack. » in *Inf. Proc. Med. Imag.*, New-York, Plenum Press, 277-290, 1988
- [Tour-94] E.Tournier, C Mestais, O. Peyret. « *Le compromis sensibilité-résolution, méthodes de collimation, caméras multi-têtes, méthodes tomographiques. Médecine nucléaire.* »-Imagerie fonctionnelle et métabolique (18) :317-321, 1994
- [Tret-80] O. Tretiak and C. Metz. The exponential Radon transform. *SIAM J. Appl. Math.*, 39 (2):341-354, 1980
- [Tsui-91] B. Tsui, X. Zhao, E. Frey, and G. Gullberg. « Comparison between ML-EM and WLS-CG algorithms for SPECT image reconstruction. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 38 (6):1766-1772, 1991
- [Tsui-99] B. Tsui, X. Zhao, C. Tocharoenchai, D. lewis and E. Frey « Compensation of collimator response function in quantitative SPECT using medium and high energy photons », *International Meeting on Fully three-dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medecine*, 1999
- [Vand-90] A. Van der Sluis a., H. Van der Vorst. « SIRT- and CG-type methods for iterative solution of sparse linear least-square problems » *Linear Algebra and its Applications* 130: 257-302, 1990
- [Vara-83] J. Varah, « Pitfalls in the numerical solution of ill-posed problems », *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 4 :164-176, 1983
- [Vard-85] Y.Vardi L.A. Shepp and L. Kaufmann. « A statistical model for positron emission tomography » *J. Amer. Stat. Ass.*, 80 :8-37, 1985
- [Vekl-87] E. Veklerov and J. Llacer. « Stopping rule for the MLE algorithm based on statistical hypothesis testing », *IEEE Trans. Med. Imag.* MI-6 :313-319, 198
- [Verg-97] L. Verger, J.P. Bonnefoy, F. Glasser, P. Ouvrier-Buffet. « New Developments in CdTe and CdZnTe Detectors for X and gamma-Ray Applications. » *J. Elec. Mat.* 26(6): 738-744, 1997
- [Wahb-90] G. Wahba, « Spline models for observational data », in *proc. CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math.* vol 59, Soc. Ind. Appl. Math. Philadelphia, PA, 1990
- [Walt-81] T. Walters, W. Simon, D. Chesler, and J. Correia. « Attenuation correction in gamma emission computed tomography. » *J. Comput. Ass. Tomogr.*, 5 (1):89-94, 1981
- [Watt-94] D. Watt. « Column-relaxed algebraic reconstruction algorithm for tomography with noisy data ». *Applied Optics*, 33(20) :4420-4427, 1994
- [Welc-97] A. Welch, R. Clack, F. Natterer and G. Gullberg « Toward accurate attenuation correction in SPECT without transmission measurements » *IEEE Trans. Med. Imag.*, 16(5) :532-541, 1997

- [Welc-98] A. Welch, et al « Attenuation correction in PET using consistency information » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 45(6) :3134-3141, 1998
- [Wrob-97] M.C Wrobel et al. « A proposed method for correcting aperture penetration in high energy slit aperture and pinhole SPECT. » *IEEE trans. Nucl. Sci.* 44(4) :1564-1570, 1997
- [Xu-93] X. Xu, J. Liow, and S. Strother. « Iterative algebraic reconstruction algorithms for emission computed tomography: a unified framework and its application to emission tomography ». *Med. Phys.*, 20 (6), 1993
- [Ying-83] O. Ying-Lie « An ECAT reconstruction method which corrects for attenuation and detector response. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 30:632-635, 1983
- [Zasa-90] K.R. Zasadny, K.F. Koral, C.E Floydand R.J Jaszczak. « Measurement of Compton scattering in phantoms by germanium detector. » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 37(2):642-646, 1990
- [Zeng-91] G. Zeng, G. Gullberg, B. Tsui and J. Tarry « Three-dimensional iterative reconstruction algorithms with attenuation and geometric point response correction » *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 38(2):693-702, 1991
- [Zhou-93] Z. Zhou, R. Leahy and E. Mumguoclu « A comparative study of using anatomical boundary in PET reconstruction », in *Proc. IEEE Nucl. Sci. Symp. And Med. Imag* 1749-1753, 1993
- [Zhou-97] Z. Zhou, R.M. Leahy and J.Qi « Approximate maximum likelihood hyperparameter estimation for Gibbs priors », *IEEE Trans. Imag. Proc.* 6 (6) :844-861, 1997
- [Zien-91] O.C. Zienkiewicz, R.L.Taylor « *The Finite Element Method.* » Basic Formulation and Linear Problems, Afnor Paris, 1991
- [Zong-96] C. ZongJian, E.H. Lawrence and C.C. Charles « Optimal number of views in 360° SPECT imaging », *J. Nucl. Med.*, 37(10) : 1740-1744, 1996