



HAL
open science

Couplage de méthodes numériques en simulation directe d'écoulements incompressibles

Mohamed Lemine Ould Salihi

► **To cite this version:**

Mohamed Lemine Ould Salihi. Couplage de méthodes numériques en simulation directe d'écoulements incompressibles. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1998. Français. NNT: . tel-00004901

HAL Id: tel-00004901

<https://theses.hal.science/tel-00004901>

Submitted on 19 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER-GRENOBLE 1
SCIENCES & GEOGRAPHIE

THESE

Présentée par

Mohamed Lemine OULD SALIHI

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier

Discipline : Mathématiques Appliquées

**Couplage de méthodes numériques en
simulation directe
d'écoulements incompressibles**

Composition du Jury :

M. Jacques Blum	Président
M. Charles-Henri Bruneau	Rapporteur
M. Petros Koumoutsakos	Rapporteur
M. Eric Blayo	Examineur
M. Georges-Henri Cottet	Examineur
M. Patrick Witomski	Examineur

Date de soutenance : 23 Octobre 1998

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG

Remerciements :

Je remercie tout d'abord M. Georges-Henri Cottet, Professeur à l'université Joseph Fourier, qui m'a aidé pendant le déroulement de cette thèse. J'ai apprécié sa grande disponibilité ainsi que la clarté et la simplicité avec lesquelles il m'a appris les bases de la mécanique des fluides et du calcul numérique. Ses conseils et ses encouragements m'ont permis de m'épanouir dans ce travail.

Je remercie M. Charles-Henri Bruneau , Professeur à l'université de Bordeaux 1, et M. Petros Koumoutsakos, Professeur à l'Institut de dynamique des fluides à Zurich, d'avoir accepté de rapporter sur cette thèse. Leurs suggestions sur ce travail m'ont été d'une grande utilité.

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. Jacques Blum, Professeur à l'université Joseph Fourier, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie M. Eric Blayo, Maître de conférence à l'université Joseph Fourier, pour sa gentillesse et ses conseils tout au long de ce travail et de m'avoir fait l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Je tiens à remercier M. Patrick Witomski, Professeur à l'université Joseph Fourier, de m'avoir accueilli dans son laboratoire et d'avoir accepté de faire parti du jury de cette thèse.

Je remercie chaleureusement les thésards du LMC pour l'ambiance amicale et agréable qu'il m'ont offert. J'ai apprécié l'esprit d'entraide et de bonne humeur qui régnerent au laboratoire de modélisation et calcul.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance et mes remerciements aux membres de ma famille et à mes amis qui m'ont énormément soutenu durant ce travail.

Résumé :

Ce travail est consacré au développement des méthodes lagrangiennes comme alternatives ou compléments aux méthodes eulériennes conventionnelles pour la simulation d'écoulements incompressibles en présence d'obstacles. On s'intéresse en particulier à des techniques où des solveurs eulériens et lagrangiens cohabitent dans le même domaine de calcul mais traitent différents termes des équations de Navier-Stokes, ainsi qu'à des techniques de décomposition de domaines où différents solveurs sont utilisés dans chaque sous-domaine. Lorsque les méthodes eulériennes et lagrangiennes cohabitent dans le même domaine de calcul (méthode V.I.C.), les formules de passage particules-grilles permettent de représenter la vorticité avec la même précision sur une grille fixe et sur la grille lagrangienne. Les méthodes V.I.C. ainsi obtenues combinent stabilité et précision et fournissent une alternative avantageuse aux méthodes différences-finies pour des écoulements confinés.

Lorsque le domaine de calcul est décomposé en sous-domaines distincts traités par méthodes lagrangiennes et par méthodes eulériennes, l'interpolation d'ordre élevé permet de réaliser des conditions d'interface consistantes entre les différents sous-domaines. On dispose alors de méthodes de calcul avec décomposition en sous-domaines, de type Euler/Lagrange ou Lagrange/Lagrange, et résolution en formulation (vitesse-tourbillon)/(vitesse-tourbillon) ou (vitesse-pression)/(vitesse-tourbillon).

Les différentes méthodes développées ici sont testées sur plusieurs types d'écoulements (cavité entraînée, rebond de dipôles de vorticité, écoulements dans une conduite et sur une marche, écoulements autour d'obstacles) et comparées à des méthodes de différences-finies d'ordre élevé.

Mots clefs :

Equation de Navier-Stokes - Ecoulement incompressibles - Méthode de vortex - Différences-finies - Décomposition en sous-domaines - Méthode de Vortex-In-Cell - Ecoulement de cavité entraînée - Ecoulement autour de cylindres - Ecoulement sur une marche - Dip les de vorticité - Sillages.

Abstract :

This work is devoted to the development of methods based on lagrangian numerical schemes as alternative or complement to the classical Eulerian methods in the context of direct numerical simulation of incompressible viscous flows around obstacles. We are interested in hybrid techniques blending finite-differences and vortex methods.

When the domain is decomposed in distinct subdomains, which are treated either by Eulerian or Lagrangian Methods, high order interpolation formulas allow to realise the consistent interface conditions between the subdomains. We are able to design domain decomposition techniques of Euler/Lagrange or Lagrange/Lagrange type which combine (velocity-pressure) and (velocity-vorticity) formulation.

The different methods are validated on a number of fluid flows (driven cavity, rebound of vortex dipole, backward-facing step, flow past a cylinder) and are compared with high order finite-difference methods.

Key words :

Navier-Stokes equations - Viscous incompressible flows - Vortex methods - Finite difference methods - Domain decomposition methods - Vortex-In-Cell methods - Driven cavity flows - Bluff body flows - Vortex dipoles - Wake flows.

Table des matières

Introduction	5
1 Méthodes particulières pour les écoulements incompressibles	9
1.1 Position du Problème	10
1.2 Algorithmes de calcul	11
1.2.1 Calcul des vitesses	12
1.2.2 Calcul de la diffusion	14
1.2.3 Schémas numériques	16
1.2.4 Aspects algorithmiques	17
1.2.5 Exemples tests	22
1.3 Remaillage en méthode particulière	23
1.3.1 Méthode de correction des circulations	24
1.3.2 Méthode de remaillage	25
1.4 Validation numérique	30
1.4.1 Vortex axisymétrique	31
1.4.2 Axisymétrisation d'un vortex elliptique	31
1.5 Conclusion	46
2 Méthodes différences-finies	49
2.1 L'équation de Navier-Stokes en formulation (vitesse-tourbillon)	50
2.1.1 Schémas différences-finies classiques	51
2.1.2 Schémas compacts d'ordre élevé	54
2.1.3 Prise en compte de la condition de non glissement en différences-finies	55
2.2 L'équation de Navier-Stokes en formulation (vitesse-pressure)	62
2.2.1 Schémas de projection	62
2.3 Méthodes de décomposition en sous-domaines en différences-finies	66
2.3.1 Méthode de calcul	67
2.3.2 Décomposition en sous-domaines pour l'équation de Poisson	68
2.3.3 Schéma compact en décomposition en sous-domaines	75
2.4 Exemples d'écoulements incompressibles	77
2.4.1 Ecoulement dans une cavité carrée	77
2.4.2 Ecoulement dans une conduite et sur une marche	78

3	Méthode de couplage particules-grilles	93
3.1	Description de la méthode V.I.C.	94
3.1.1	Position du problème	94
3.2	Transfert particules-grille	97
3.2.1	Transfert des particules sur la grille	97
3.2.2	Transfert de la grille aux particules	99
3.2.3	Stabilité du passage particules-grilles	99
3.3	Prise en compte des conditions limites sur le bord	100
3.4	Estimation de la diffusion	101
3.5	Remaillage du champ de vorticité en présence de bords	101
3.6	Parallélisation de la méthode V.I.C.	102
3.6.1	Méthode de parallélisation	103
3.7	Résultats numériques	104
3.7.1	Cavité à faibles nombres de Reynolds	105
3.7.2	Cavité à nombres de Reynolds �lev�s	127
3.8	Conclusion	127
4	Résolution par méthode de vortex des équations de Navier-Stokes au voisinage d'obstacles	137
4.1	Position du problème	138
4.2	Méthodes de pas fractionnaires	140
4.2.1	Méthodes de pas fractionnaires pour l'équation de Stokes	140
4.2.2	Méthodes de pas fractionnaires pour l'équation de Navier-Stokes	141
4.3	Schéma de discrétisation	142
4.3.1	Résolution d'une équation de convection diffusion avec conditions limites Neumann homogènes	143
4.3.2	Résolution d'une équation de convection diffusion avec condition initiale nulle et condition limite Neumann non homogène	145
4.3.3	Transfert particules-grille	147
4.4	Algorithme de résolution	147
4.5	Résultats numériques	148
4.5.1	Rebond d'un dipôle sur une paroi	148
4.6	Conclusion	151
5	Méthodes de vortex et décomposition en sous-domaines	159
5.1	Revue des méthodes de couplage Euler/Lagrange	160
5.1.1	Méthode de décomposition avec superposition pour le couplage Euler/Lagrange	160
5.1.2	Méthode de couplage particules-maillage	161
5.1.3	Méthode de couplage différences-finies/particulaire avec génération de particules à l'interface	161
5.2	Méthode de décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange	162
5.2.1	Méthode de décomposition en sous-domaines pour un écoulement extérieur	163
5.2.2	Méthodes de calcul dans le domaine Ω_1	165
5.2.3	Calcul en domaine Ω_2	168

5.2.4	Conditions limites sur la vorticité à l'interface des deux domaines	169
5.2.5	Calcul des vitesses en décomposition en sous-domaines	169
5.2.6	Récapitulatif des algorithmes de décomposition de domaine	171
5.3	Validation numérique	172
5.3.1	Cas d'un tourbillon axisymétrique	172
5.3.2	Simulation d'écoulement autour d'un cylindre	172
5.3.3	Méthode de décomposition en sous-domaines en maillage transformé . . .	191
5.3.4	Méthode de décomposition en sous-domaines en domaine intérieur	205
5.4	Techniques de raffinement local en méthode de vortex	219
5.4.1	Méthode de vortex avec volumes variables au voisinage du cylindre	219
5.4.2	Validation numérique de la méthode de vortex autour du cylindre	223
5.4.3	Algorithme de décomposition en sous-domaines de type Lagrange/ La- grange.	223
5.5	Conclusion	233
Conclusion et perspective		235

Introduction

Ce travail est consacré au développement des méthodes de vortex comme alternative ou complément aux méthodes euleriennes conventionnelles pour la simulation d'écoulements incompressibles en présence ou non d'obstacles.

Les méthodes de vortex consistent à disposer des particules dans la zone où la vorticité (rotationnel de la vitesse) n'est pas nulle et de suivre l'évolution de l'emplacement et de la circulation de ces particules. Le domaine de calcul s'adapte ainsi de façon automatique suivant le développement de l'écoulement. Cela constitue un avantage par rapport aux méthodes euleriennes où les calculs se font sur tous les points de grille même si certains ne contiennent aucune information. Ceci est particulièrement vrai dans le cas de simulation de sillages.

Par ailleurs, la méthode de vortex permet de prendre en compte la condition limite   l'infini de façon exacte pour les écoulements non confinés. Enfin, le traitement de la convection par le transport des particules permet une prise en compte stable et précise de la partie non linéaire des équations de Navier-Stokes.

Les méthodes euleriennes, quant à elles, offrent une grande souplesse au voisinage des parois. Elles permettent de traduire les conditions limites sur les vitesses ou sur la vorticité suivant que l'on choisit une formulation (vitesse-pression) ou (vitesse-tourbillon). En géométrie simple, l'emploi des techniques de type transformée de Fourier rapide permet d'effectuer les calculs sur une grille eulerienne de façon rapide et précise.

Il paraît donc naturel de chercher à bâtir des méthodes de calculs combinant résolution par méthode de vortex avec résolution par méthode eulerienne. L'objectif de cette thèse est le développement systématique de tels algorithmes.

On s'intéresse en particulier à des techniques où des solveurs euleriens et lagrangiens cohabitent dans le même domaine de calcul mais traitent des termes différents des équations de Navier-Stokes, ainsi qu'à des techniques de décomposition de domaines où des différents solveurs sont utilisés dans les différents sous-domaines.

Pour obtenir des résultats de calcul optimaux, il s'est avéré nécessaire de s'appuyer, dans la partie eulerienne des algorithmes, sur des schémas d'ordre élevé. Ceci nous a conduit à l'implémentation et à l'étude d'algorithmes de calcul en formulation (vitesse-tourbillon) et en formulation (vitesse-pression) avec l'emploi des techniques de différenciation compacte d'ordre élevé. Cette étude nous a par ailleurs permis une comparaison systématique en terme de précision et de CPU entre les méthodes de vortex et les méthodes différences-finies.

Le travail décrit dans cette thèse est présenté de la façon suivante :

Le **chapitre 1** est consacré à la méthode de vortex. On y présente l'écriture sous forme lagrangienne et en formulation (vitesse-tourbillon) des équations de Navier-Stokes. Cette écriture est celle adaptée à la résolution par méthode particulaire. On rappelle aussi les outils ma-

thématiques nécessaires à la réalisation d'algorithmes particuliers. Ensuite, on aborde les différentes méthodes de traitement de la diffusion en coordonnées lagrangiennes. On présente en détail l'algorithme P.S.E. (Particle Strength Exchange) proposé initialement par Mas-Gallic[61] et assurant, comme le montrent les tests numériques, une bonne évaluation de la diffusion avec un coût de calcul réduit. On passe ensuite à l'étude des problèmes posés par la distorsion de distribution particulière due à la présence de gradient de vitesses très raide dans l'écoulement. On fait un résumé des différentes techniques de remaillage et on présente une méthode de remaillage précise et simple basée sur les techniques d'interpolation d'ordre élevé. Cette méthode est ensuite comparée, sur des tests numériques, à d'autres méthodes, ce qui permet de constater le gain réalisé.

Le **chapitre 2** traite des méthodes différences-finies. On s'intéresse à la discrétisation des équations de Navier-Stokes en variables originales (vitesse-pression) et en formulation (vitesse-tourbillon). Un algorithme de projection semblable à ceux proposés par Chorin [22], Temam [82] et Goda [39] a été implémenté en formulation (vitesse-pression). En formulation (vitesse-tourbillon), le problème créé par l'absence de conditions limites explicites sur la vorticité a été étudié. On expose les différentes façons dont il a été traité dans la littérature. On en conclut une manière simple de prise en compte des conditions limites. Le schéma compact d'ordre quatre proposé par Weinan et Liu [84] a été implémenté. On montre qu'il garantit une grande précision. La fin de ce chapitre est consacrée à l'étude des méthodes de décomposition en sous-domaines, car c'est le moyen ultime pour généraliser les méthodes différences-finies en géométrie non rectangulaire. Un algorithme discret de décomposition en sous-domaines, équivalent à la méthode itérative de Schwarz, est présenté. On montre que cet algorithme converge de façon géométrique et sans induire une erreur supplémentaire dans les schémas de discrétisation. Cet algorithme est ensuite utilisé dans la simulation d'écoulements dans une conduite et sur une marche.

Dans le **chapitre 3**, on s'intéresse à la méthode V.I.C. en domaine borné. L'algorithme numérique réalisé se caractérise par une très petite diffusion numérique. En effet, le transfert (particules-grille) est fait à l'aide de noyaux d'ordre élevé. La prise en compte des conditions limites est faite par les techniques de type différences-finies. Cette méthode est ensuite testée dans le cas de simulation d'écoulements dans une cavité rectangulaire. L'algorithme numérique est facilement parallélisable, ce qui permet son implémentation en **M.P.I.** et la réalisation de calculs sur **T3E** (256 processeurs).

Le **chapitre 4** est consacré à la méthode de vortex en domaine borné. On y présente l'implémentation de l'algorithme de pas fractionnaire proposé par Cottet [31]. Cet algorithme consiste à traduire les conditions limites sur le bord en terme de flux de vorticité estimé par opérateur intégral. La diffusion est calculée de façon déterministique par la méthode P.S.E. On effectue le calcul des vitesses dans cette méthode sur une grille eulerienne comme dans la méthode V.I.C. On obtient ainsi un aspect local rendant sa parallélisation très avantageuse. Cette méthode est testée numériquement en simulation d'interactions de dipôles de vorticité avec une paroi rigide.

Le **chapitre 5** traite des méthodes de décomposition en sous-domaines avec calcul par

méthode de résolution différente dans chaque sous-domaines. Des algorithmes de décomposition de type Euler/Lagrange ont été implémentés. Ils permettent l'emploi de la méthode différences-finies en formulation (vitesse-tourbillon) ou en formulation (vitesse-pression) dans la couche limite et de la méthode particulière en dehors de cette couche. Les algorithmes proposés ici permettent de conserver la nature de la discrétisation particulière et ainsi d'éviter la génération de particules de volumes très faibles. Le coût de calcul reste alors peu élevé. Le calcul des vitesses est réalisé par décomposition en sous-domaines. Ainsi, on évite les erreurs de quadrature engendrées par l'estimation des intégrales sur deux discrétisations non homogènes. Ces algorithmes ont été validés sur les écoulements de sillages et dans une conduite. Les techniques de décomposition en sous-domaines développées dans ce chapitre ont permis aussi de réaliser un algorithme de calcul par méthode de vortex avec raffinement local de maillage.

Chapitre 1

Méthodes particulières pour les écoulements incompressibles

La méthode particulière (méthode de vortex) consiste à disposer des particules dans la zone où la vorticité n'est pas nulle, et à suivre l'évolution de leur position et de leur circulation. Le domaine de calcul est ainsi réduit à une petite zone où le rotationnel de la vitesse n'est pas nul. Cela présente un grand avantage par rapport aux méthodes euleriennes où les calculs sont faits sur des points de grille même s'ils ne contiennent aucune information. Un autre avantage de cette méthode est le traitement implicite du terme de convection ce qui assure une très grande précision.

Ce chapitre est consacré à l'étude de ces méthodes en domaine infini. On y rappelle les outils mathématiques classiques nécessaires à la réalisation d'algorithmes particuliers et les méthodes numériques nécessaires à leurs implémentations. On expose en détail la méthode P.S.E. (Particle Strength Exchange) proposée par Mas-Gallic[61] et Degond et Mas-Gallic [35]. On vérifie par des tests numériques que cette méthode assure une bonne évaluation de la diffusion avec un coût de calcul réduit.

La régularité de la distribution particulière est un des critères essentiels sur lesquels repose la précision de la méthode de vortex que ce soit pour les simulations dans le cas visqueux ou non visqueux. Or, en présence de profils de vitesses cisailés dans le domaine de calcul, cette régularité se dégrade en fonction du temps. Il est nécessaire alors de compléter les algorithmes numériques particuliers par un schéma de remaillage. On s'intéresse en particulier à ce problème. Une étude des techniques de remaillage et d'interpolation nous a amené à implémenter un algorithme de redistribution des particules basé sur l'utilisation de noyaux d'interpolation d'ordres élevés et réguliers introduit par Monaghan[66]. Cet algorithme permet de faire des remaillages des particules tout en conservant la régularité de l'écoulement et en introduisant une viscosité numérique minimale. Ces algorithmes sont validés numériquement sur plusieurs problèmes physiques.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : on rappelle dans la **section 1** d'abord l'écriture des équations de Navier-Stokes en formulation (vitesse-tourbillon) et en coordonnées lagrangiennes. Cette écriture est celle adaptée à la résolution par méthode de vortex. Ensuite, on donne dans la **section 2** un résumé des méthodes d'évaluation de la vitesse et de la diffusion en méthodes particulières ainsi que les algorithmes numériques correspondants. On passe dans la **section 3**    l'étude des méthodes de remaillage et l'implémentation du procédé utilisé ici.

Enfin, dans la **section 4**, la validation numérique est faite sur deux cas tests. Dans le premier test, la distribution des particules devient rapidement très distordue. Un procédé de remaillage robuste sera alors nécessaire pour conserver la précision des calculs. Le second test est le problème d'axisymétrisation de tourbillon elliptique avec forts gradients de tourbillon.

1.1 Position du Problème

Les écoulements incompressibles sont régis par l'équation de moment :

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u\nabla u + \nabla p - \nu\nabla^2 u = 0 \quad (1.1)$$

et l'équation de continuité :

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (1.2)$$

où u est la vitesse, p la pression et ν la viscosité cinématique.

Si on pose $\omega = \nabla \times u$, on obtient le système équivalent suivant :

$$(P_1) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\omega + \nabla \cdot (u\omega) & = \nu\nabla^2\omega \\ \nabla \cdot u & = 0 \end{cases}$$

La méthode particulière consiste à travailler en coordonnées lagrangiennes. On considère les variables $X(t)$ solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) & = u(X(t), t) \\ X(0) & = x \end{cases}$$

Dans ces coordonnées, la dérivé en temps s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\omega(X(t), t) = \frac{\partial}{\partial t}\omega(X, t) + u(X, t)\nabla\omega(X, t)$$

et le problème P_1 se ramène en dimension deux d'espace au système différentiel suivant :

$$(P_2) \begin{cases} \frac{d}{dt}\omega(X, t) & = \nu\nabla^2\omega(X, t) \\ \frac{dX(t)}{dt} & = u(X(t), t) \\ \nabla \times u & = \omega \\ \nabla \cdot u & = 0 \end{cases}$$

1.2 Algorithmes de calcul

On présente d'abord l'algorithme particulière en domaine infini. La prise en compte des conditions limites en présence d'obstacles sera présentée dans les chapitres ch.4 et ch.5.

Supposons que la vorticité ω est à support compact et Ω un domaine borné contenant le support de ω . Alors, la méthode particulière consiste à définir un maillage initial $\{x_p^0, p \in \mathbb{J}\}$ recouvrant Ω . Les noeuds de ce maillage sont appelés particules. Elles sont transportées par la vitesse du fluide ce qui donne les trajectoires $\{x_p(t), p \in \mathbb{J}\}$ suivant le système :

$$\frac{d}{dt}x_p(t) = u(x_p, t) \quad (1.3)$$

$$x_p(0) = x_p^0 \quad (1.4)$$

La vitesse et la vorticité seront calculées à chaque pas de temps sur ces particules. La pression n'est pas nécessaire aux calculs mais elle peut être déduite en résolvant l'équation de Poisson obtenue en appliquant l'opérateur divergence à l'équation de moment :

$$\nabla^2 p = -div((u \nabla)u)$$

Pour estimer les intégrales sur le domaine de calcul, on se fixe une formule de quadrature, sur la distribution initiale de particules en lui associant des volumes $\{v_p, p \in \mathbb{J}\}$, définie par :

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x) dx = \sum_{p \in \mathbb{J}} v_p g(x_p^0)$$

A chaque instant de temps, l'intégrale est calculée sur les particules $\{x_p(t), p \in \mathbb{J}\}$ par le changement de variable ($x \rightarrow X(t)$), ce qui nous donne :

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x) dx = \sum_{p \in \mathbb{J}} v_p g(x_p(t)) |J(x, t)|$$

où $J(x, t)$ est la jacobienne définie par :

$$J(x, t) = \det \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x, t) \right)$$

Si l'écoulement est incompressible on a $J(x, t) = 1$. Ceci résulte de l'équation de continuité (1.2), car :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} J(x, t) = J(x, t) \nabla \cdot u(X(t), t) \\ J(x, 0) = 1 \end{cases}$$

En domaine infini, la formule de point milieu est de précision spectrale au sens du lemme suivant (Raviart [74]) :

Lemme 1.1 Soient $m \geq 1$ un entier, $p > d/m$ et $q = 1 - 1/p$. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que l'on ait :

$\forall g \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ si $m \leq 2$, ou $\forall g \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \cap W^{m-1,1}(\mathbb{R}^d)$ si $m \geq 3$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx - \sum_{p \in \mathbb{J}} h^d g(x_p) \right| \leq C h^{m+d/q} |g|_{m,p}$$

On déduit de ce lemme que si on choisit initialement une distribution de particules uniforme $\{x_p^0 = (ih, jh), p \in \mathbb{J}\}$, et si on pose $\{v_p = h^2, p \in \mathbb{J}\}$, on pourra calculer l'intégrale d'une fonction $g(x)$ à chaque moment avec une précision ne dépendant que de sa régularité par la formule :

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x) dx = \sum_{p \in \mathbb{J}} v_p g(x_p(t)) + O(h^{m+2/q}) \quad (1.5)$$

Il nous reste maintenant à écrire le problème P_2 sous forme intégrale pour pouvoir calculer la vitesse et la vorticité de façon très précise.

1.2.1 Calcul des vitesses

La formule de Biot-Savart permet de réduire le calcul des vitesses sur les particules à une convolution du rotationnel du noyau G de l'équation de Poisson (Noyau de Green) avec la vorticité.

On obtient :

$$u(x) = \int k(x-y)\omega(y) dy + U_\infty(x)$$

où $U_\infty(x)$ contient la condition limite à l'infini et

$$k(x) = \frac{(-x_2, x_1)}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)} \text{ si } x \neq 0$$

Pour simplifier l'écriture, on suppose dans la suite que la vitesse à l'infini U_∞ est nulle.

En utilisant l'estimation discrète (1.5) de l'intégrale, on obtient :

$$u(x_p) = \sum_{q \in \mathbb{J}, q \neq p} v_q k(x_p - x_q) \omega(x_q) \quad (1.6)$$

Pour éviter l'effet de la singularité du noyau k au voisinage de 0, on utilise un noyau régularisé k_ϵ obtenu par convolution avec une fonction régulière. L'erreur induite par cette régularisation peut être contrôlée par l'utilisation de fonctions appelées Cut-off.

Définition 1.1 On appelle fonction Cut-off d'ordre r une fonction ζ à symétrie radiale ayant les propriétés suivantes, appelées propriétés de moments d'ordre r :

$$\begin{cases} (i) & \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(x) dx = 1 \\ (ii) & \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha \zeta(x) dx = 0 \quad 1 \leq |\alpha| \leq r-1, r \geq 2 \\ (iii) & \int_{\mathbb{R}^d} |x|^r |\zeta(x)| dx < \infty \end{cases}$$

On donnera un exemple de fonctions Cut-off d'ordre 4 à la fin du paragraphe. L'erreur de convolution par ces fonctions Cut-off est donnée par le lemme suivant (Raviart [74]) :

Lemme 1.2 Soit ζ une fonction Cut-off ordre r , alors il existe une constante C telle que l'on ait pour toute fonction $\omega \in W^{r,p}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|\omega - \omega * \zeta_\epsilon\|_{0,p} \leq C \epsilon^r \|\omega\|_{r,p}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ϵ et :

$$\zeta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^d} \zeta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

L'utilisation de fonctions Cut-off permet d'obtenir une vitesse u_h régulière par la formule :

$$u_h(x_p) = \sum_{q \in \mathbb{J}} v_q k_\epsilon(x_p - x_q) \omega(x_q) \quad (1.7)$$

$$k_\epsilon = k * \zeta_\epsilon$$

$$\zeta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} \zeta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

Pour mesurer l'erreur sur cette vitesse, on est amené à introduire les espaces suivants :

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}; \mathbf{f} \in \mathbf{C}^\infty, (1 + |\mathbf{x}|^5) \mathbf{D}^\alpha \mathbf{f} \in \mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^2)\}$$

$$\{\mathcal{C}_m = \mathbf{f} \text{ à support dans } [0, 2], \mathbf{f} \in \mathbf{W}^{m,\infty}(\mathbf{R}^2)\}$$

$$\mathcal{C}'_m = \{\mathbf{f}; \forall \alpha > 0, \{\mathbf{x} \rightarrow (1 + |\mathbf{x}|^5) \mathbf{D}^\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x})\} \in \mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^2)\}$$

On a alors le résultat suivant (Cottet [27]) :

Lemme 1.3 Supposons que la vorticité initiale ω_0 est dans \mathcal{H} et que $\{\zeta \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{C}'_{m+1}, m \geq 2\}$ est un Cut-off d'ordre r , alors, pour tout $\alpha > 0$ il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de ω_0 telle que l'on ait $\forall t \in [0, T]$

$$|u_h - u|_\infty \leq C h^{s l - \alpha}$$

où $s = \frac{m+1}{m+r}$ et :

$l = r$ si $r \leq 3$ et $l = 1$ si $r = 2$

On peut construire de façon systématique des fonctions Cut-off d'ordre élevé comme le montre Beale et Majda[10]. Dans ce travail on utilise le Cut-off d'ordre quatre suivant :

$$\zeta_4(r) = \frac{2(2 - r^2)}{\pi(1 + r^2)^4}$$

Le noyau k_ϵ correspondant est :

$$k_\epsilon(x, y) = \frac{r^4 + 3\epsilon^2 r^2 + 4\epsilon^4}{2\pi(r^2 + \epsilon^2)^3}(-y, x) \quad (1.8)$$

1.2.2 Calcul de la diffusion

En différences-finies, l'opérateur de diffusion est facilement approché car on connaît à tout moment les voisins de chaque noeud et leurs distances . En méthode de vortex, les points de grilles sont définis par les particules qui se déplacent avec la vitesse du fluide. On n'est donc dans un contexte différent. Afin de calculer la diffusion en coordonnées lagrangiennes, plusieurs approches ont été développées. On retient surtout les deux méthodes suivantes.

Méthode de marche aléatoire

Pour estimer la diffusion sur les particules, Chorin ([23],[24]) introduit la méthode de marche aléatoire. En s'appuyant sur les techniques de type Monte-Carlo, il propose de prendre en compte la diffusion en rajoutant une partie probalistique au déplacement des particules. Cette méthode présente un moyen simple de traitement de la diffusion mais pas suffisamment précis. L'erreur engendrée par cette méthode est de $O(\frac{1}{\sqrt{N_p}})$.

Une étape de la méthode de marche aléatoire consiste à déplacer les particules suivant le schéma :

$$\begin{cases} x_p^{n+1} &= x_p^n + \Delta t u_x^n + g_p^1 \\ y_p^{n+1} &= y_p^n + \Delta t u_y^n + g_p^2 \end{cases}$$

où $\{g_p^1\}, \{g_p^2\}$ sont deux variables aléatoires indépendantes de distribution gaussienne de moyenne nulle et de variance $2\nu\Delta t$. La précision de l'ordre de $O(\frac{1}{\sqrt{N_p}})$ de cette méthode et sa capacité sur des temps petits à résoudre des écoulements complexes ont été confirmées par les tests numériques effectués par Roberts [75] et Cheer [19].

Méthode d'échange de circulations (P.S.E.)

Contrairement à la méthode de marche aléatoire, Mas-Gallic[61], Degond et Mas-Gallic[35] et Cottet et Mas-Gallic [32] proposent une approche déterministique (Particle Strength Exchange). C'est cette méthode qui sera utilisée tout au long de ce travail. Elle consiste à écrire l'opérateur de diffusion sous forme intégrale ce qui permet une très bonne évaluation de la diffusion sur les particules. Comme on l'a vu précédemment, on sait estimer d'une façon très précise les intégrales sur le domaine particulaire. La méthode de construction de ces noyaux et une analyse de convergence sont données par Degond et Mas-Gallic[35]. Numériquement,

Choquin et Lucquin-Desreux[21] donnent une comparaison de cette méthode avec la méthode de marche aléatoire. Elle est aussi utilisée par Winckelmans[87] en deux et trois dimensions pour la simulation de reconnection d'anneaux de vorticité et Koumoutsakos[51] pour la simulation d'écoulement autour d'obstacles.

Les tests numériques suivants (**exemple 1**, **exemple 2**) montrent que cette méthode permet un calcul très précis de la diffusion sur les particules. C'est elle qui sera utilisée dans ce travail.

Dans la méthode P.S.E., l'opérateur laplacien est remplacée par :

$$\Delta_\epsilon \omega(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma^\epsilon(x-y)(\omega(y) - \omega(x))dy \quad (1.9)$$

avec $\sigma_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^d} \sigma(\frac{x}{\epsilon})$ où σ est un noyau de diffusion d'ordre r , c'est-à-dire vérifiant les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & \int_{\mathbb{R}^d} |\sigma(x)|dx < \infty \\ (ii) & \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha \sigma(x)dx = 0 \quad 1 \leq |\alpha| \leq r+1, \alpha \notin \{(\dots, 2, \dots)\} \\ (iii) & \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha \sigma(x)dx = 2 \quad 1 \leq |\alpha| \leq r+1, \alpha \in \{(\dots, 2, \dots)\} \\ (iiii) & \int_{\mathbb{R}^d} |x|^{r+2} |\sigma(x)|dx < \infty \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Un développement limité dans le membre de droite de (1.9), combiné aux propriétés de moment ($i - vi$) permet de déduire la majoration d'erreur suivante :

$$\|\Delta\omega - \Delta_\epsilon\omega\|_{0,\infty} \leq C\epsilon^r \|\omega\|_{r+2,\infty}$$

L'utilisation de la formule d'intégration discrète sur les particules (1.5) permet d'écrire l'opérateur de diffusion précédent sous forme discrète :

$$\Delta_h^\epsilon \omega(x_p) = \frac{1}{\epsilon^{2+d}} \sum_{q \in \mathbb{J}} v_q (\omega_q - \omega_p) \sigma\left(\frac{x_q - x_p}{\epsilon}\right) \quad (1.11)$$

L'erreur de cette discrétisation est contrôlée par le lemme suivant (Degond et Mas-Gallic[35]) :

Lemme 1.4 Si $\omega \in W^{r+2,\infty}(\mathbb{R}^d)$, et sous les conditions précédentes sur σ , on a la majoration d'erreur suivante :

$$\|\Delta^\epsilon\omega - \Delta_h^\epsilon\omega\|_{0,\infty} \leq C \frac{h^m}{\epsilon^{m+1}} \|\omega\|_{m,\infty}$$

Comme exemples de noyau de diffusion, on donne les deux noyaux algébriques suivants qui sont respectivement du deuxième et quatrième ordre :

$$\sigma_2(r) = \frac{16}{(1+r^2)^3} \quad (1.12)$$

$$\sigma_4(r) = 6 \frac{3-r^2}{(1+r^2)^5} \quad (1.13)$$

et le noyau gaussien d'ordre deux :

$$\sigma_g(r) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \quad (1.14)$$

1.2.3 Schémas numériques

L'étude précédente nous amène finalement au système discret suivant :

$$(MP) \begin{cases} \omega(x, t) &= \sum_{q \in \mathbb{J}} v_q \zeta_\epsilon(x - x_q(t)) \omega_q(t) \\ u(x_p(t), t) &= \sum_{q \in \mathbb{J}} v_q k_\epsilon(x_p(t) - x_q(t)) \omega_q(t) \\ \frac{d}{dt} \omega_p(t) &= \nu \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{q \in \mathbb{J}} v_q (\omega_q(t) - \omega_p(t)) \sigma\left(\frac{x_q(t) - x_p(t)}{\epsilon}\right) \\ \frac{d}{dt} x_p(t) &= u(x_p(t), t) \end{cases}$$

Ce système est résolu en utilisant une formule d'intégration numérique classique (typiquement par le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 ou 4). Il est stable sous la seule condition de stabilité imposée par le traitement explicite de la diffusion. Ce qui est pour des nombres de Reynolds élevés un avantage déterminant par rapport aux méthodes eulériennes qui sont quant à elles soumises à des *CFL* provenant du traitement explicite de la convection.

Le lemme suivant montre comment la *CFL* est estimée en dimension deux, dans le cas où le noyau de diffusion σ est choisi positif.

Lemme 1.5 *Sous les hypothèses ci-dessus, la condition de stabilité en norme $\|\cdot\|_\infty$ du schéma particulière est :*

$$\Delta t \leq \frac{\epsilon^2}{\nu \|\sigma\|_{L_d^1}}$$

où

$$\|\sigma\|_{L_d^1} = \max_{p \in \mathbb{J}} \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{q \in \mathbb{J}} \sigma\left(\frac{x_q^n - x_p^n}{\epsilon}\right) v_q$$

Démonstration :

Pour simplifier, on présente la démonstration en cas d'utilisation du schéma d'intégration d'Euler. Mais elle reste valable pour les schémas de Runge-Kutta d'ordre 2 ou 4.

Posons $\omega_p^n = \omega_p(n\Delta t)$, alors le système discret précédent nous donne :

$$\omega_p^{n+1} = \omega_p^n + \frac{\nu\Delta t}{\epsilon^4} \sum_{q \in \mathbb{J}} v_q (\omega_q^n - \omega_p^n) \sigma\left(\frac{x_q^n - x_p^n}{\epsilon}\right)$$

donc on obtient :

$$\omega_p^{n+1} = \omega_p^n \left(1 - \frac{\nu\Delta t}{\epsilon^4} \sum_{q \in \mathbb{J}} v_q \sigma\left(\frac{x_q^n - x_p^n}{\epsilon}\right)\right) + \frac{\nu\Delta t}{\epsilon^4} \sum_{q \in \mathbb{J}} v_q \omega_q^n \sigma\left(\frac{x_q^n - x_p^n}{\epsilon}\right)$$

comme σ est positif, on voit que si

$$\frac{\nu\Delta t}{\epsilon^4} \sum_{q \in \mathbb{J}} v_q \sigma\left(\frac{x_q^n - x_p^n}{\epsilon}\right) \leq 1$$

alors,

$$\|\omega^{n+1}\|_\infty \leq \|\omega^n\|_\infty$$

La norme L_d^1 n'est autre que l'estimation discrète de la norme L^1 . La précision de cette estimation est en fonction de la régularité de la distribution particulaire. Le recours à un remaillage périodique permet de garder la précision de la formule de quadrature sur les particules, et nous permet d'écrire :

$$\frac{1}{\epsilon^2} \sum_{q \in \mathbb{J}} \sigma\left(\frac{x_q^n - x_p^n}{\epsilon}\right) v_q \approx \frac{1}{\epsilon^2} \int \sigma\left(\frac{x_q^n - x_p^n}{\epsilon}\right) dx = \int \sigma(x) dx$$

La condition de stabilité s'écrit alors :

$$\Delta t \leq \frac{\epsilon^2}{\nu \|\sigma\|_{L^1}}$$

1.2.4 Aspects algorithmiques

Si on note N_p le nombre de particules dans le domaine Ω , l'utilisation de façon directe des formules (1.7) de calcul de la vitesse et (1.11) de calcul de la diffusion demande un coût de calcul de l'ordre de $O(N_p^2)$. Pour réduire ce coût, il est nécessaire d'exploiter les propriétés géométriques des noyaux de calcul de la vitesse et de la diffusion. Le noyau de diffusion σ peut être choisi à décroissance rapide. L'écriture alors d'un programme de tri permet de réduire le temps de calcul de la diffusion à un ordre de $O(N_p)$ opérations. La réduction du temps de calcul de la vitesse peut se faire par l'implémentation l'algorithme multipolaire proposé par Greengard et Rokhlin [40].

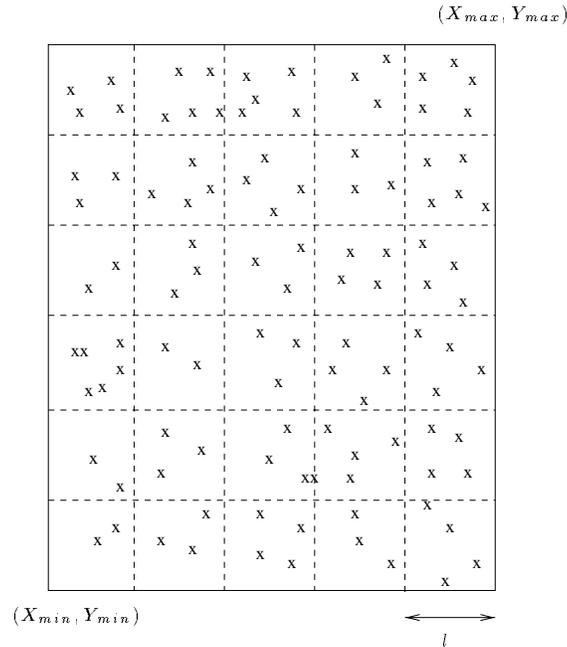


FIG. 1.1 – Boîtes de particules dans Ω : on calcule les interactions entre chaque boîte et ses voisines.

Calcul de la diffusion

On exploite en pratique la propriété de décroissance rapide du noyau de diffusion en définissant un rayon de coupure noté l par :

$$\sigma(x, y) \approx 0 \text{ si } \|x\| > l$$

Soit $[X_{min}, X_{max}, Y_{min}, Y_{max}]$ une boîte contenant le domaine de calcul, $N_x = \frac{X_{max} - X_{min}}{l}$ et $N_y = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{l}$. On va diviser le domaine de calcul en $N_x \times N_y$ boîtes (Fig.1.1) et définir un pointeur $A_g(N_x, N_y)$ contenant dans chaque noeud l'indice de la dernière particule trouvée dans sa boîte correspondante. On définit aussi un pointeur A_p permettant de repérer les particules qui se trouvent dans une boîte donnée à partir de l'indice de la dernière particule de cette boîte. Le programme de tri remplit ces deux pointeurs en parcourant la liste des particules et en plaçant la $n^{\text{ième}}$ particule dans la boîte d'indices (i, j) définis par

$$i = x_p(n_{new})/l + 1, \quad j = y_p(n_{new})/l + 1$$

Pour chaque boîte (i, j) de particules, on ne calcule que la contribution des boîtes voisines $\{(i-1, j-1) \dots (i+1, j+1)\}$. Les tests numériques montrent que cette méthode donne les mêmes résultats que la méthode directe. En revanche elle permet un gain de temps considérable comme le montrent les courbes du temps de calcul (Fig.1.2). On voit que pour 40.000 particules, on a besoin de 1.000s pour faire un calcul direct et seulement 7s avec la méthode de tri ci-dessus.

Calcul des vitesses

La réduction du temps de calcul de vitesses est plus délicate que celle du calcul de la diffusion. Le noyau des vitesses n'est pas à décroissance suffisamment rapide pour que l'on puisse

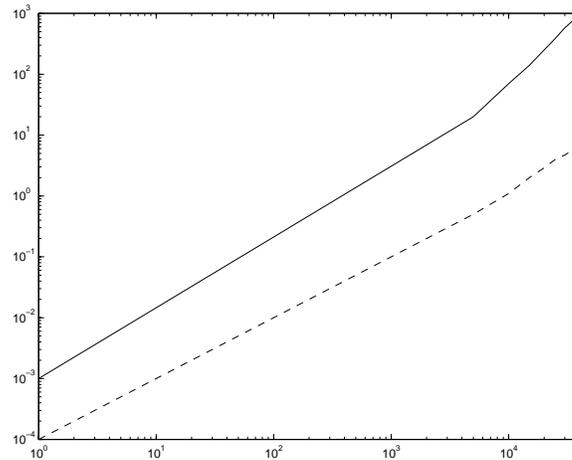


FIG. 1.2 – Les temps de calcul en CPU de la diffusion : (–) : Calcul direct, (– –) : calcul avec rayon de coupure

se contenter de fixer un rayon de coupure. Pour calculer la contribution de boîtes de particules sur celles qui se trouvent dans une autre boîte, Greengard et Rokhlin [40] proposent leur algorithme basé sur les développements limités (Méthode multipolaire) et permettant une réduction considérable du temps de calcul. Cet algorithme est devenu la base de travail pour les auteurs s'intéressant à ce problème. Koumoutsakos [51] propose une version vectorielle permettant un calcul de l'ordre de $O(N_p)$ opérations sur le Cray C94. Cette procédure sera utilisée ici dans le cas de calcul sur ordinateur vectoriel (C94). Le CPU de calcul des vitesses sur Cray pour 100.000 particules est de 327s pour le calcul direct, et de 3s pour le calcul multipolaire.

Anderson [2] a implémenté un algorithme basé sur l'utilisation des formules de Poisson pour représenter le potentiel induit par des particules dans un cercle. Cet algorithme permet de réduire le coût de calcul mais cette réduction dépend des paramètres géométriques comme la régularité des distributions particulières et le nombre de particules. Pour un nombre de particules petit, le gain de temps est important. On a typiquement sur une station de travail un coût de calcul des vitesses sur 36.000 particules de 333s pour le calcul direct et de 13s pour le calcul avec l'algorithme d'Anderson. On utilisera la subroutine d'Anderson pour les calculs effectués sur station.

Le principe de l'algorithme de Greengard et Rokhlin est résumé dans les lignes ci-dessous. La vitesse en méthode de vortex se calcule en notation complexe par la formule suivante :

$$V(z) = \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{N_p} \frac{\Gamma_n}{Z - Z_n} \quad (1.15)$$

Où Γ_n sont les circulations $\omega(x, y) = \sum_{n=1}^{N_p} \Gamma_n \zeta_\varepsilon(x - x_n, y - y_n)$, et

$$Z = x + iy$$

$$V = u_x - iu_y$$

L'évaluation de cette somme sur l'ensemble de particules de façon directe demande un coût de $O(N^2)$. L'idée de la méthode de réduction du temps de calcul est d'approcher cette formule par des développements permettant de calculer la contribution de M particules placées dans une boîte de centre Z_m et de taille R_M^2 sur les particules qui se trouvent à une distance plus grande que R_M par une formule à (P) termes (P l'ordre du développement limité) de précision $(\frac{1}{2^P})$. Les seules interactions qui restent à calculer directement sont celles entre les particules d'une même boîte.

En pratique, on se fixe un nombre maximal N_{max} de particules admissibles par boîte, et on divise le domaine de calcul en 4 boîtes de même taille. Les boîtes qui contiennent encore plus que N_{max} particules sont de nouveau subdivisées en quatre parties. Ce découpage est enchaîné jusqu'à l'arrivée à la configuration où on a au plus N_{max} particules par boîte (Fig.1.3). Dans un niveau l de subdivision, les boîtes sont appelées parents d'ordre l . Les quatre boîtes obtenues dans le niveau $l + 1$ en divisant une boîte du niveau l sont appelées les fils de cette boîte.

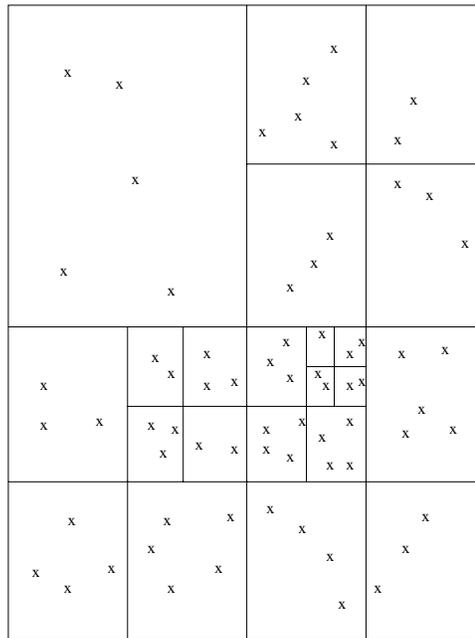


FIG. 1.3 – Décomposition du domaine de calcul en boîtes contenant au plus cinq particules.

Le calcul de la contribution d'une boîte de particules est basé sur ces deux identités du calcul complexe :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n; \text{ si } |z| < 1 \quad (1.16)$$

$$\sum_{k=0}^P \alpha_k (z - z_0)^k = \sum_{l=0}^P \sum_{k=l}^P \alpha_k C_l^k z^l (-z_0)^{k-l} \quad (1.17)$$

En introduisant Z_m dans la formule (1.15) et en utilisant la formule (1.16), on voit que la contribution $V_f(Z)$ des M particules de la boîte sur les particules de distance avec Z_M plus grande que R_M s'écrit :

$$V_f(Z) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{Z - Z_M} \sum_{n=0}^P \frac{\alpha_n}{(Z - Z_M)^n} \quad (1.18)$$

où

$$\alpha_n = \sum_{m=1}^M \Gamma_m (Z_m - Z_M)^n$$

Les coefficients α_n de la boîte M peuvent être déduits de ceux de ses fils par la relation :

$$\alpha_n^{parent} = \sum_{k=0}^n C_k^n \alpha_k^{fils} (Z_M^{fils} - Z_M^{parent})^{n-k}$$

Cette relation est obtenue en utilisant la formule (1.17).

La contribution V_n des particules de la boîte M sur celles des boîtes voisines se calcule en rajoutant et retranchant le centre Z_G de la boîte voisine dans la formule (1.15) :

$$V_n(Z) = \frac{i}{2\pi} \sum_{k=0}^P \frac{\alpha_n}{(Z_G - Z_M)^{k+1} (1 + \zeta)^{k+1}}$$

où

$$\zeta = \frac{Z - Z_G}{Z - Z_M}$$

En utilisant (1.16) on trouve :

$$V_n(Z) = \frac{i}{2\pi} \sum_{l=0}^P \delta_l (Z - Z_G)^l \quad (1.19)$$

où

$$\delta_l = \frac{(-1)^{l+1}}{(Z_G - Z_M)^l} \sum_{k=0}^P C_k^{l+k-1} \frac{\alpha_k}{(Z_G - Z_M)^k}$$

Les coefficients δ_l du niveau $l + 1$ peuvent être déduits de ceux du niveau l par la relation :

$$\delta_l^{fils} = \sum_{k=l}^P C_{k-l}^{k-1} \delta_k^{parent} (Z_M^{fils} - Z_M^{parent})^{k-l}$$

1.2.5 Exemples tests

Les tests numériques effectués avec le noyau de vitesse k_ϵ de la formule (1.8) et du noyau de diffusion σ_4 de la formule (1.13) montrent une très grande précision des méthodes décrites ci-dessus.

On présente le calcul des vitesses et de la diffusion fait dans le domaine $([-1, 1]^2)$ sur 4096 particules avec $h = \frac{1}{64}$ pour les deux exemples bidimensionnels suivants :

Exemple 1

$$\omega(x, y) = \begin{cases} (1 - r^2)^3 & \text{si } r \leq 1, \\ 0 & \text{si } r \geq 1 \end{cases} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$u_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y((1-r^2)^4 - 1)}{8r^2} & \text{si } r \leq 1 \\ -\frac{y}{8r^2} & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

$$u_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x(1 - (1-r^2)^4)}{8r^2} & \text{si } r \leq 1 \\ \frac{x}{8r^2} & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

$$g(x, y) = -\Delta\omega = \begin{cases} 12(r^2 - 1)(3r^2 - 1) & \text{si } r \leq 1 \\ 0 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

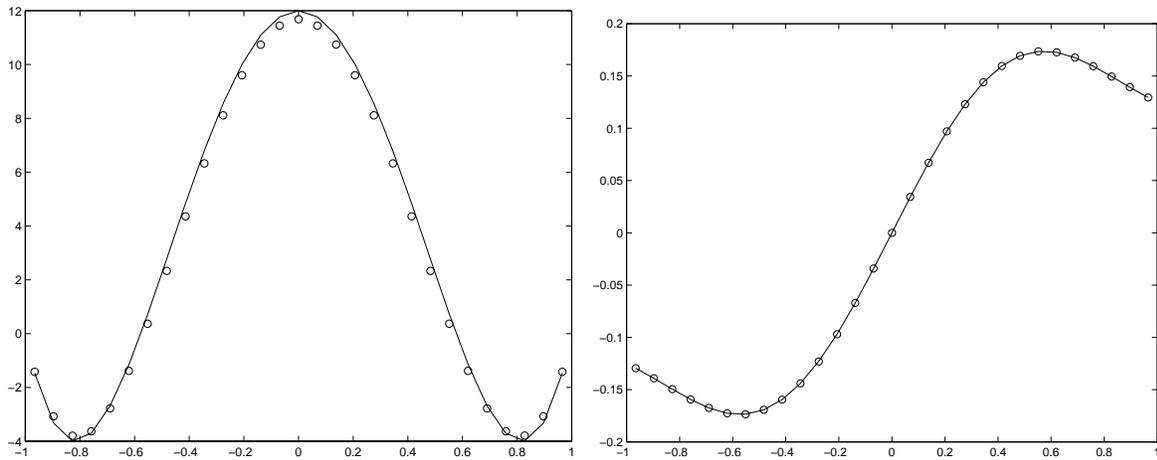


FIG. 1.4 – **Exemple 1** (-) : solution exacte, (o) : solution numérique; à gauche la vitesse et à droite la diffusion évaluées sur la droite $\{y = 0\}$

Exemple 2

$$\omega(x, y) = \frac{c}{t+c} \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu(t+c)}\right)$$

$$u_x(x, y) = y \frac{2c\nu}{r^2} \left(\exp\left(\frac{-r^2}{4\nu(t+c)}\right) - 1 \right)$$

$$u_y(x, y) = x \frac{2c\nu}{r^2} \left(1 - \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu(t+c)}\right)\right)$$

$$g(x, y) = -\Delta\omega = \frac{c}{\nu(t+c)^2} \left(1 - \frac{r^2}{4\nu(t+c)}\right) \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu(t+c)}\right)$$

La vorticité est initialisée sur les particules. Ensuite, on calcule les vitesses et la diffusion par les algorithmes rapides précédents. Les résultats de ces deux calculs sont comparés avec les solutions exactes dans les figures (Fig.1.4 et Fig.1.5). Cela montre la précision de l'estimation u_y^h de la vitesse u_y et de l'estimation $\Delta_h\omega$ de la diffusion g .

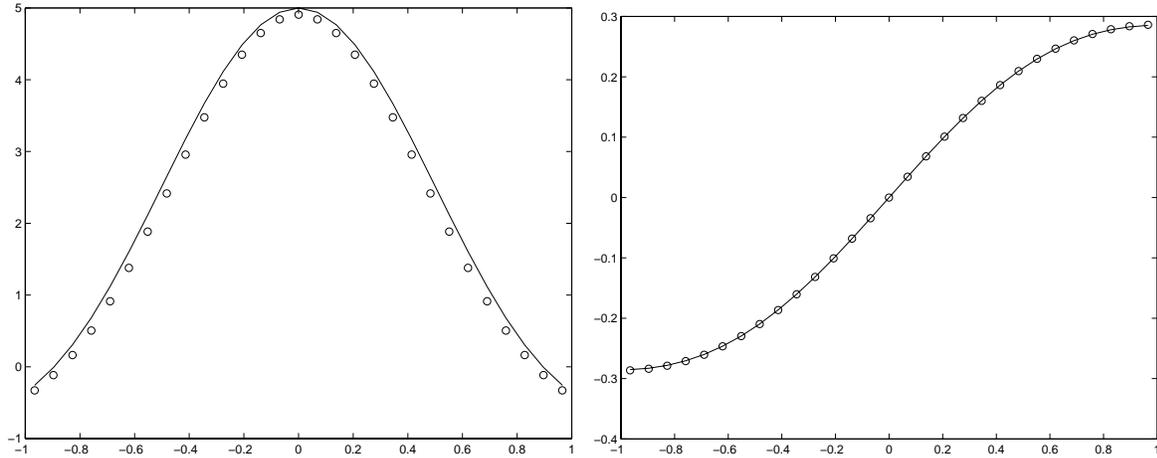


FIG. 1.5 – **Exemple 2** (-) : solution exacte, (o) : solution numérique; à gauche la vitesse et à droite la diffusion évaluées sur la droite $\{y = 0\}$

1.3 Remaillage en méthode particulière

Dans les méthodes particulières, la valeur de la vorticité ω est calculée à partir des circulations $\{\Gamma_p, p \in \mathbb{J}\}$ sur les particules $\{x_p(t), p \in \mathbb{J}\}$ par la formule :

$$\omega(x_p(t), t) = \sum_{q \in \mathbb{J}} \Gamma_q \zeta_\epsilon(x_p(t) - x_q(t)) \quad (1.20)$$

où ζ_ϵ est la fonction Cut-off et ϵ le paramètre de recouvrement. Ces particules se déplacent avec la vitesse du fluide suivant les caractéristiques de l'écoulement. Si h est le paramètre de définition de la distribution des particules, ϵ doit être choisi supérieur à h . Une simulation particulière, ne vérifiant pas l'hypothèse de recouvrement, relève de la modélisation et non de la simulation directe. Cette condition est nécessaire pour assurer une bonne précision des calculs particuliers. La consistance du calcul de la diffusion si $\omega \in H^m(\Omega)$ est proportionnelle à la quantité $(\frac{h^m}{\epsilon^{m+1}})$. La condition de stabilité repose sur la précision de l'approximation de la

norme continue $\|\cdot\|_{L^1}$ par la norme discrète $\|\cdot\|_{L^1_d}$ qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{\epsilon^2} \sum_{q \in \mathbb{J}} \sigma\left(\frac{x_q^n - x_l^n}{\epsilon}\right) v_q \approx \frac{1}{\epsilon^2} \int \sigma\left(\frac{x_q^n - x_l^n}{\epsilon}\right) dx = \int \sigma(x) dx \quad (1.21)$$

Cette approximation est justifiée par la condition de recouvrement comme le montrent les calculs ci-dessous.

Comme l'écoulement est incompressible, les volumes des particules restent constants pendant la simulation ($v_q = h^2$). En remplaçant v_q par h^2 et en utilisant le changement de variable ($\tilde{x}_q = \frac{x_q}{\epsilon}$, $\tilde{h} = \frac{h}{\epsilon}$) et le lemme 1.1, l'équation (1.21) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{q \in \mathbb{J}} \sigma\left(\frac{x_q^n - x_l^n}{\epsilon}\right) v_q &= \sum_{q \in \mathbb{J}} \sigma(\tilde{x}_q^n - \tilde{x}_l^n) \tilde{h}^2 = \int \sigma(\tilde{x}_q - \tilde{x}_l) d\tilde{x} + O(\tilde{h}^m) \\ &= \int \sigma(x) dx + O\left(\frac{h^m}{\epsilon^m}\right) \end{aligned}$$

Comme la vorticité utilisée dans les calculs est obtenue après une convolution avec une fonction Cut-off infiniment régulière, on a ($m = \infty$), et si ($\epsilon > h$) la condition de stabilité est bien vérifiée.

Au cours de l'évolution des systèmes, la distribution de particules évolue, et l'hypothèse de recouvrement est susceptible de ne plus être satisfaite dans tout le domaine. C'est particulièrement visible au voisinage des points hyperboliques de l'écoulement où le champ de vitesse tend à concentrer les particules dans une direction et    les raréfier dans l'autre direction.

Il existe deux manières de traitement pour remédier à cette situation. La première consiste à modifier à chaque pas de temps les circulations de particules de façon à prendre en compte le manque ou l'excès de recouvrement. La seconde utilise une méthode d'interpolation pour redistribuer périodiquement la distribution de particules sur un maillage régulier. On présente ci-dessous ces deux méthodes et les problèmes qu'elles soulèvent.

1.3.1 Méthode de correction des circulations

Méthode de Beale

Beale [9] propose de corriger les circulations à chaque pas de temps sans changement de la distribution particulaire. Ce qui revient à considérer un ϵ artificiel plus large par endroit et donc à conserver la condition de recouvrement. Ces nouvelles circulations $\{\tilde{\Gamma}_p, p \in \mathbb{J}\}$ sont obtenues à un temps t fixé de la façon ci-dessous.

Notons $\omega_p = \omega(x_p(t), t)$, les nouvelles circulations doivent vérifier la relation (1.20).

On a alors :

$$\omega_p = \sum_{q \in \mathbb{J}} \tilde{\Gamma}_q \zeta_\epsilon(x_p - x_q)$$

Il faut résoudre le système linéaire :

$$A\tilde{\Gamma} = \alpha$$

Si N est le nombre de particules, $A \in M_{N,N}$ est la matrice définie par ($A_{p,q} = \zeta_\epsilon(x_p - x_q)$), $\tilde{\Gamma}$ est le vecteur de \mathbb{R}^N des circulations $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\Gamma}_q)$ et $\alpha = (\omega_p)$.

L'emploi d'une méthode itérative permet généralement une résolution peu coûteuse du système précédent. Mais, la vitesse de convergence de ces techniques est conditionnée par la régularité du tourbillon. Ce qui rend cette méthode moins souple que celles proposées dans la suite surtout en dimension trois d'espace.

Méthode de triangulation particulière

Chacon-Rebollo et Hou[17] proposent de remédier au problème de distortion de la grille de particules en introduisant des fonctions de base permettant de définir une vorticitée r eguli ere  a partir des valeurs sur les particules. Leur m ethod e consiste  a d efinir  a chaque pas de temps une triangulation ayant comme noeuds les positions des particules, et  a d efinir des fonctions de base de type polynomial sur cette triangulation  a partir des valeurs aux noeuds. Ces fonctions de base seront utilis ees pour  evaluer les int egrales sur le domaine particulaire. Cette m ethod e se r esume en l'absence de viscosit e dans les trois points suivants :

- D efinir une triangulation τ_h sur le domaine particulaire.
- D efinir la fonction de base ω_i sur chaque triangle τ_i de la triangulation τ_h .
- Evaluer l'int egrale du noyau k de calcul des vitesses sur les triangles.

Le troisi eme point ne pose aucun probl eme, car on sait d efinir une formule de quadrature exacte pour les fonctions polynomiales sur les triangles. Le second point est un probl eme classique d'interpolation en  el ements finis. La construction de polyn ome de la forme $\omega_i(x) = a + bx + cy$, correspond  a une interpolation lin eaire avec une erreur de l'ordre de $O(h_{max}^2)$ o u h_{max} est la taille maximale des triangles. Le premier point de cette m ethod e repr esente la difficult e essentielle. Il est n ecessaire que la triangulation soit r eguli ere pour pouvoir contr oler la d eriv ee de la vorticitée sur les triangles (condition n ecessaire de convergence (lemme 1.3)), ce qui augmente consid erablement la complexit e de la m ethod e. Russo et Strain [76], ont impl ement e un code de type multip ole permettant une grande diminution du temps de calcul de la triangulation. Mais un algorithme rapide d' evaluation des vitesses sur les triangles n'est pas encore r ealis e.

1.3.2 M ethod e de remaillage

Une solution efficace et beaucoup moins co uteuse que celles vues ci-dessus, est la m ethod e de remaillage du domaine particulaire. Cette m ethod e consiste  a redistribuer p eriodiquement la distribution particulaire, ce qui permet d' eviter les distortions des particules, et de garder la condition de recouvrement. Pour cela, on doit  etre capable de calculer des nouvelles positions $\{\tilde{x}_q(t), q \in \mathbb{I}\}$ d efinissant une grille r eguli ere, et les circulations $\{\tilde{\Gamma}_q, q \in \mathbb{I}\}$ sur cette nouvelle distribution de particules  a partir des anciennes positions et circulations de particules. Autrement dit, (Fig.1.6) le probl eme de remaillage est ramenée  a un probl eme d'interpolation d'un maillage non uniforme $\{x_p\}$ sur un maillage uniforme $\{\tilde{x}_q\}$.

X •	X •	X •	X •	X •	X •	X •
X	X	X	X •	X •	X •	X
X •	X •	X •	X •	X •	X •	X
• X	• X	X	X •	X •	X	X
X •	X •	X •	X •	X •	X •	X

FIG. 1.6 – × : nouvelles particules, • : anciennes particules.

Si Q est le noyau de la formule d'interpolation utilisé, les nouvelles circulations sont données par la formule:

$$\tilde{\Gamma}_q = \sum_{p \in \mathbb{J}} \Gamma_p Q\left(\frac{\tilde{x}_q - x_p}{h}\right) \quad (1.22)$$

Conservation des moments par la méthode de remaillage

Traditionnellement, on mesure la qualité d'une technique de remaillage par sa capacité de conserver les moments successifs de la vorticité:

$$J(\alpha) = \sum_p \Gamma(x_p) x_p^\alpha \quad (1.23)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ est un multi indice, α_i un entier.

On rappelle que la circulation n'est autre que le moment $J(0, 0)$, l'impulsion linéaire est donnée par $(J(1, 0), J(0, 1), J(1, 1))$, et l'impulsion angulaire est donnée par $(J(2, 0), J(0, 2), J(0, 0))$. Le lemme suivant donne les conditions de conservation des moments par la formule de remaillage (1.22):

Lemme 1.6 Si la fonction de remaillage Q est à symétrie radiale, et vérifie les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} (i) & \sum_q Q(y_q) = 1 \\ (ii) & \sum_q Q(y_q) \tilde{y}_q^\alpha = 0 \quad 1 \leq |\alpha| < r, r \geq 2 \end{cases}$$

où $\{y_q\}$ est un recouvrement uniforme de \mathbb{R}^2 de pas unitaire, alors, la méthode de remaillage proposée ci-dessus conserv les moments $J(\alpha)$ pour $|\alpha| < r$.

Démonstration :

Soit $\tilde{J}(\alpha)$ les nouveaux moments calculés sur la nouvelle distribution de particules, montrons que sous les hypothèses (i), (ii) on a $\tilde{J}(\alpha) = J(\alpha)$ pour $|\alpha| < r$:

$$\tilde{J}(\alpha) = \sum_q \tilde{\Gamma}_q \tilde{x}_q^\alpha$$

La formule de remaillage (1.22) nous donne :

$$\tilde{J}(\alpha) = \sum_p \sum_q \Gamma_p Q\left(\frac{\tilde{x}_q - x_p}{h}\right) \tilde{x}_q^\alpha$$

On pose $y_q = \frac{\tilde{x}_q - x_p}{h}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\alpha) &= \sum_p \sum_q \Gamma_p Q(y_q) (hy_q + x_p)^\alpha \\ &= \sum_p \sum_q \Gamma_p Q(y_q) I_{i,j} \end{aligned}$$

où

$$I_{i,j} = \sum_{0 \leq i \leq \alpha_1} \sum_{0 \leq j \leq \alpha_2} C_{i,j} (hy_q)^{(\alpha_1 - i, \alpha_2 - j)} x_p^{(i,j)}$$

et les coefficients $C_{i,j}$ sont les coefficients binômiaux. En intervertissant les sommations sur les indices, on trouve :

$$\tilde{J}(\alpha) = \sum_p \sum_{0 \leq i \leq \alpha_1} \sum_{0 \leq j \leq \alpha_2} \Gamma_p x_p^{(i,j)} J_q^{i,j}$$

avec

$$J_q^{i,j} = C_{i,j} h^{(\alpha_1 - i, \alpha_2 - j)} \sum_q Q(y_q) y_q^{(\alpha_1 - i, \alpha_2 - j)}$$

Comme la distribution de particules $\{\tilde{x}_q\}$ est uniforme, la distribution $\{y_q\}$ est bien un recouvrement uniforme de \mathbb{R}^2 de pas unitaire. Les propriétés (i), (ii) nous permettent alors de déduire que ($J_q^{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (\alpha_1, \alpha_2)$), alors :

$$\tilde{J}(\alpha) = \sum_p \Gamma_p x_p^\alpha$$

$$J(\alpha)$$

□

Remarque : Les conditions (i), (ii) ne sont autre que l'équivalent discret des propriétés de moments du Cut-off d'ordre r .

Analyse de la précision de la méthode de remaillage

L'analyse de Fourier permet d'évaluer l'erreur de cette méthode. L'estimation d'erreur est donnée par le théorème suivant en dimension un d'espace et pour une grille uniforme de taille $h = 1$ ($x_n = n$). Le calcul en dimension quelconque et avec $h \neq 1$ se fait de façon identique.

Théorème 1.1 Soit la formule d'interpolation :

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(n)W(x - n)$$

(f : une fonction quelconque, et W le noyau d'interpolation).

Supposons que la fonction W décroît suffisamment de sorte à satisfaire :

$$\|W(x)\| \leq Ae^{-B\|x\|}, \text{ où } A > 0, B > 0$$

Cette formule d'interpolation est exacte à l'ordre $m - 1$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$g(k) - 1 \text{ est nul à l'ordre } m \text{ en } k = 0$$

$$g(k) \text{ est nul à l'ordre } m \text{ pour tout } k = 2\pi n, (n \neq 0)$$

où g est la caractéristique de la fonction d'interpolation définie par :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x)e^{-ikx} dx$$

Démonstration :

La définition de g permet d'écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(y)e^{-i(k+2\pi n)y} dy = g(k + 2\pi n)$$

En multipliant par $e^{2\pi inx}$ et en sommant sur n on a :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi inx} \int_{-\infty}^{+\infty} W(y)e^{-i(k+2\pi n)y} dy = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi inx} g(k + 2\pi n)$$

En utilisant les formules de sommation de Poisson on obtient :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-n)}W(x - n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi inx} g(k + 2\pi n)$$

et finalement

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikn}W(x - n) = e^{ikx} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi inx} g(k + 2\pi n)$$

En fixant x et en développant le membre gauche de cette équation il résulte :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i^{\nu} k^{\nu}}{\nu!} \sum_{-\infty}^{+\infty} n^{\nu} W(x - n)$$

L'utilisation de la seconde hypothèse sur g permet de déduire :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i^{\nu} k^{\nu}}{\nu!} \sum_{-\infty}^{+\infty} n^{\nu} W(x - n) = e^{ikx} g(k) + O(k^m)$$

La première hypothèse nous montre que le développement d'ordre m de g s'écrit :

$$g(k) = 1 + O(k^m)$$

En développant e^{ikx} on obtient finalement :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i^{\nu} k^{\nu}}{\nu!} \sum_{-\infty}^{+\infty} n^{\nu} W(x-n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i^{\nu} k^{\nu}}{\nu!} x^{\nu} + O(k^m)$$

L'identification des deux membres de cette égalité permet de déduire le résultat du théorème. \square

Noyaux de remaillage

On distingue deux types de noyaux de remaillage. On a d'abord les noyaux Λ_r qui permettent la conservation des moments d'ordre inférieur à r . Elles sont construites en résolvant le système linéaire qui provient des conditions de conservation des moments. Il faut pour cela se donner un support de ces fonctions égale en nombre de pas de discrétisation au nombre d'équations de moment qu'on cherche à satisfaire. Ainsi les noyaux Λ_i suivants de support i pas de discrétisation conservent les moments d'ordre inférieur à i . On rappelle les formules en dimension 1 des trois premiers noyaux de ce type. En dimension d , on les reconstitue de ces formules par produit tensoriel.

Interpolation linéaire :

$$\Lambda_1(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Interpolation quadratique :

$$\Lambda_2(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| < 1/2 \\ \frac{(1-|x|)(2-|x|)}{2} & \text{si } 1/2 \leq |x| < 3/2 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 3/2 \end{cases}$$

Interpolation cubique :

$$\Lambda_3(x) = \begin{cases} \frac{(1-|x|^2)(2-|x|)}{2} & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{(1-|x|)(2-|x|)(3-|x|)}{6} & \text{si } 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Les noyaux Λ_2 et Λ_3 conduisent à des formules d'interpolation précises (respectivement d'ordre 2 et 3) mais elles souffrent de leur manque de régularité. Ceci se traduit par une amplification des oscillations numériques lorsqu'on part d'un maillage ayant subi d'importantes distortions.

Le deuxième type de noyaux classiques est plus régulier. Il est de ce fait moins sensible aux oscillations numériques. Mais, il ne conserve pas les moments d'ordre élevé. Les noyaux les plus célèbres de ce type sont :

Interpolation TSC (Triangular Shaped Cloud) de classe C^1 :

$$M_3(x) = \begin{cases} (-x + \frac{3}{2})^2 & \text{si } 0 \leq |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - x)^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Interpolation de classe C^2 :

$$M_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(2 - |x|)^3 - \frac{4}{6}(1 - |x|)^3 & |x| < 1 \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3 & \text{si } 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Ces noyaux ont un effet régularisant, mais ils ont une précision d'ordre 2 uniquement. La construction de noyaux à la fois réguliers et précis, peut se faire par combinaison d'un noyau régulier et de sa dérivé comme le montre Monaghan[66]. Ainsi, on a construit un nouveau noyau appelé M'_4 d'ordre trois qui permet à la fois de conserver les moments d'ordre 2 (circulation, impulsion linéaire et impulsion angulaire) et de préserver la régularité. Il est construit à partir du noyau M_4 et de sa dérivé en posant :

$$M'_4(x) = \alpha M_4(x) + \beta \frac{d}{dx} M_4(x)$$

Ensuite, on calcule α et β de façon à conserver les moments linéaires et quadratiques. C'est-à-dire, en assurant que :

$$\int_{R^2} M'_4(x, y) dx dy = 1$$

$$\int_{R^2} x^m y^n M'_4(x, y) dx dy = 0, \quad 1 \leq m + n < 3$$

On obtient alors :

$$M'_4(x) = \begin{cases} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{-x^3 + 5x^2 - 8x + 4}{2} & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

On peut vérifier aisément que ce noyau vérifie les hypothèses du théorème 1.1 pour $m = 3$.

1.4 Validation numérique

Dans cette section, on s'intéresse aux tests numériques de la méthode de remaillage. On traite d'abord une solution stationnaire de l'équation de Navier-Stokes (**Exemple 1**). Cet exemple présente le cas typique où la distribution particulière subit des distortions très fortes. On présentera la comparaison de la méthode particulière avec remaillage M'_4 et la méthode particulière sans remaillage. On compare aussi cette méthode avec la méthode de remaillage Λ_2 .

Le deuxième problème est celui d'axisymétrisation d'un vortex elliptique. C'est un test sévère des méthodes numériques se caractérisant par la présence de gradients de vorticitée tr es forts. A partir de cet exemple, on a comparée nos r esultats avec la m ethod e de remaillage utilisant le noyau Λ_2 et on a montr e que le noyau M'_4 conserve bien les moments d'ordre 2 sur des grands intervalles de temps dans un code particulier tout en conservant la r egularit e des profils de vorticitée.

Il est  a noter aussi que le c ot e de cette m ethod e reste faible par rapport aux autres  etapes de calculs dans un code particulier. Le tableau Tab.1.1 montre une comparaison entre le temps de calcul sur une station de l' etape de remaillage et les  etapes de diffusion et de calcul des vitesses par m ethod e rapide.

N_p	T_{velo}	T_{diff}	T_{remesh}
30000	13	0.40	0.10
45000	22	0.60	0.10
70000	46	0.90	0.20
100000	76	1.30	0.30

TAB. 1.1 – Temps de calcul sur N_p particules; T_{velo} : temps de calcul des vitesses, T_{diff} : temps de calcul de la diffusion et T_{remesh} : temps de remaillage.

1.4.1 Vortex axisymétrique

En dimension deux, une solution (ω, u_r, u_θ) axisymétrique de l'équation d'Euler est une solution stationnaire, car la vitesse est perpendiculaire en tout point au gradient de la vorticité. C'est le cas de l'exemple ci-dessous :

$$\omega(x, y) = \begin{cases} (1 - r^2)^3 & \text{si } r \leq 1, \\ 0 & \text{si } r \geq 1 \end{cases} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$u_r(x, y) = 0$$

$$u_\theta(x, y) = \begin{cases} \frac{(1 - (1 - r^2)^4)}{8r} & \text{si } r \leq 1 \\ \frac{1}{8r} & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

Le profil de la vitesse précedente se caractérise par un cisaillement important. Les distributions particulières deviennent avec le temps très distordues (Fig.1.8). Une méthode particulaire sans remaillage est inadaptée à résoudre ce genre de problème et se traduit par une augmentation rapide de l'erreur. Les tests d'erreur (Fig.1.7) montrent la capacité de notre méthode de remaillage   résoudre ce problème contrairement à une méthode particulaire sans remaillage. Le domaine de calcul est le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Les conditions initiales sont données sur une grille particulaire de taille $h = \frac{1}{64}$ et un remaillage est effectué à chaque pas de temps. Mais, la méthode de remaillage à l'avantage de ne garder que les particules de vorticité non nulles et de mettre des particules au fur et à mesure que le support de vorticité augmente. On a dans le cas sans remaillage un nombre de particules de $N_p = 16384$, alors que le calcul avec remaillage demande un nombre maximal de $N_p = 12592$ particules. Les isovalues de la vorticité sont présentées par la figure (Fig.1.9).

1.4.2 Axisym trisation d'un vortex elliptique

On s'intéresse ici à l'évolution pour des grands temps d'une distribution de vorticité elliptique. Ceci est connu sous le nom de problème d'axisymétrisation d'un vortex elliptique. Sur des grands temps, cette distribution de vorticité converge vers un vortex axisymétrique entouré d'un sillage de filaments. Il s'agit d'un test de validation sévère permettant de vérifier que les techniques de remaillage permettent de capturer les petites échelles produites par l'écoulement.

La condition initiale choisie ici est donnée par :

$$\omega_0(x, y) = \begin{cases} \alpha \cdot f_q\left(\frac{\sqrt{x^2 + 0.25y^2}}{r_0}\right) & \text{si } \sqrt{x^2 + 0.25y^2} \leq r_0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

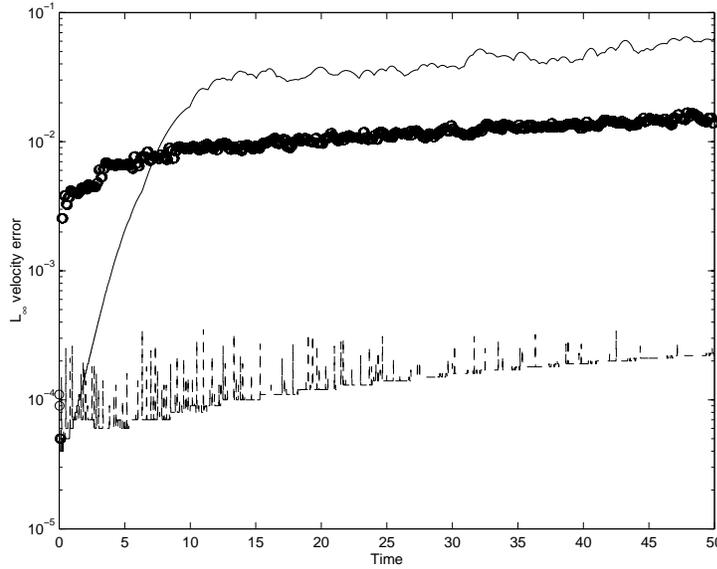


FIG. 1.7 – Erreur sur les vitesses: (–) : calcul sans remaillage; (●) : calcul avec remaillage Λ_2 ; (– –) : calcul avec remaillage M'_4

avec

$$f_q(r) = 1 - \exp^{-\frac{q}{r} \exp^{-\frac{1}{1-r}}}$$

$$r_0 = 0.8, q = 2.56085, \alpha = 20.$$

C'est le profil proposé par Melander et al. [64] et repris par Koumoutsakos [52]. Il représente un profil très raide avec des forts gradients de vorticité. Ce qui rend le remaillage crucial.

Calcul des circulations à l'instant initial

  l'instant initial, on doit initialiser les circulations $\{\Gamma_p^0, p \in \mathbb{J}\}$ des particules de telle sorte que le tourbillon régulier reproduise le profil souhaité $\{\omega(x_p, 0) = \omega_p^0, p \in \mathbb{J}\}$. Cela revient à assurer la relation (1.20) :

$$\omega_p^0 v_p = \sum_{q \in \mathbb{J}} \Gamma_q^0 \zeta_\epsilon(x_p^0 - x_q^0), p \in \mathbb{J}$$

On a alors le système linéaire suivant à résoudre :

$$A\Gamma^0 = \alpha^0$$

où $A \in \mathbb{M}_{N,N}$ est définie par $\{A_{p,q} = \zeta_\epsilon(x_p^0 - x_q^0)\}$, Γ^0 est le vecteur des circulations $\Gamma^0(q) = (\Gamma_q^0)$ et $\alpha^0(p) = (\omega_p^0 v_p)$. Ce système sera résolu par méthode itérative en rajoutant un coefficient de relaxation λ pour accélérer la convergence. Γ^0 est la limite de la suite $\Gamma^{0,m}$ définie par :

$$\Gamma^{0,m+1} = \frac{\alpha^0 - B\Gamma^{0,m}}{\lambda}$$

où

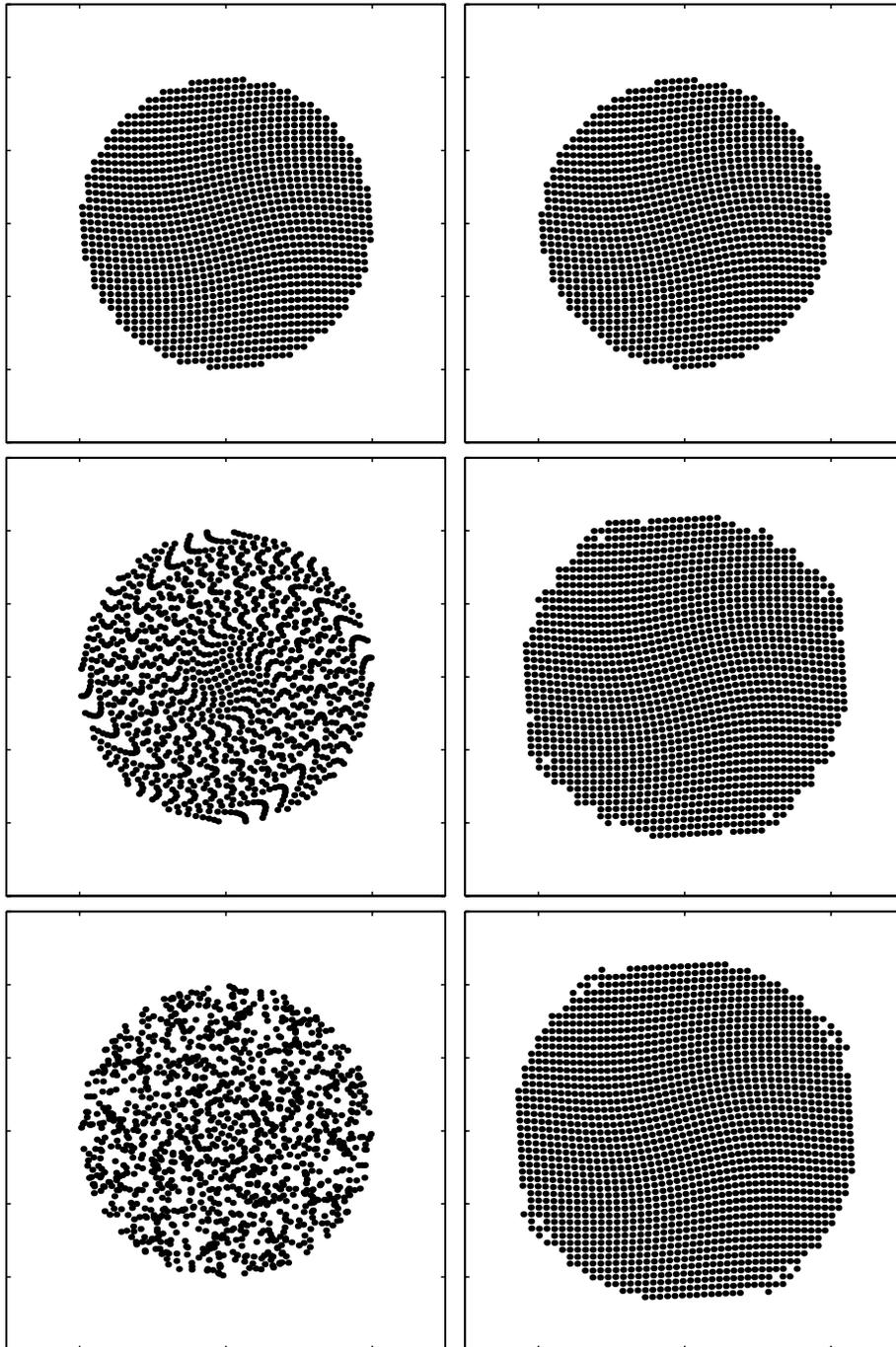


FIG. 1.8 – Distribution des particules; à gauche : calcul sans remaillage; à droite : calcul avec remaillage; $t = \{0.5, 10, 50\}$.

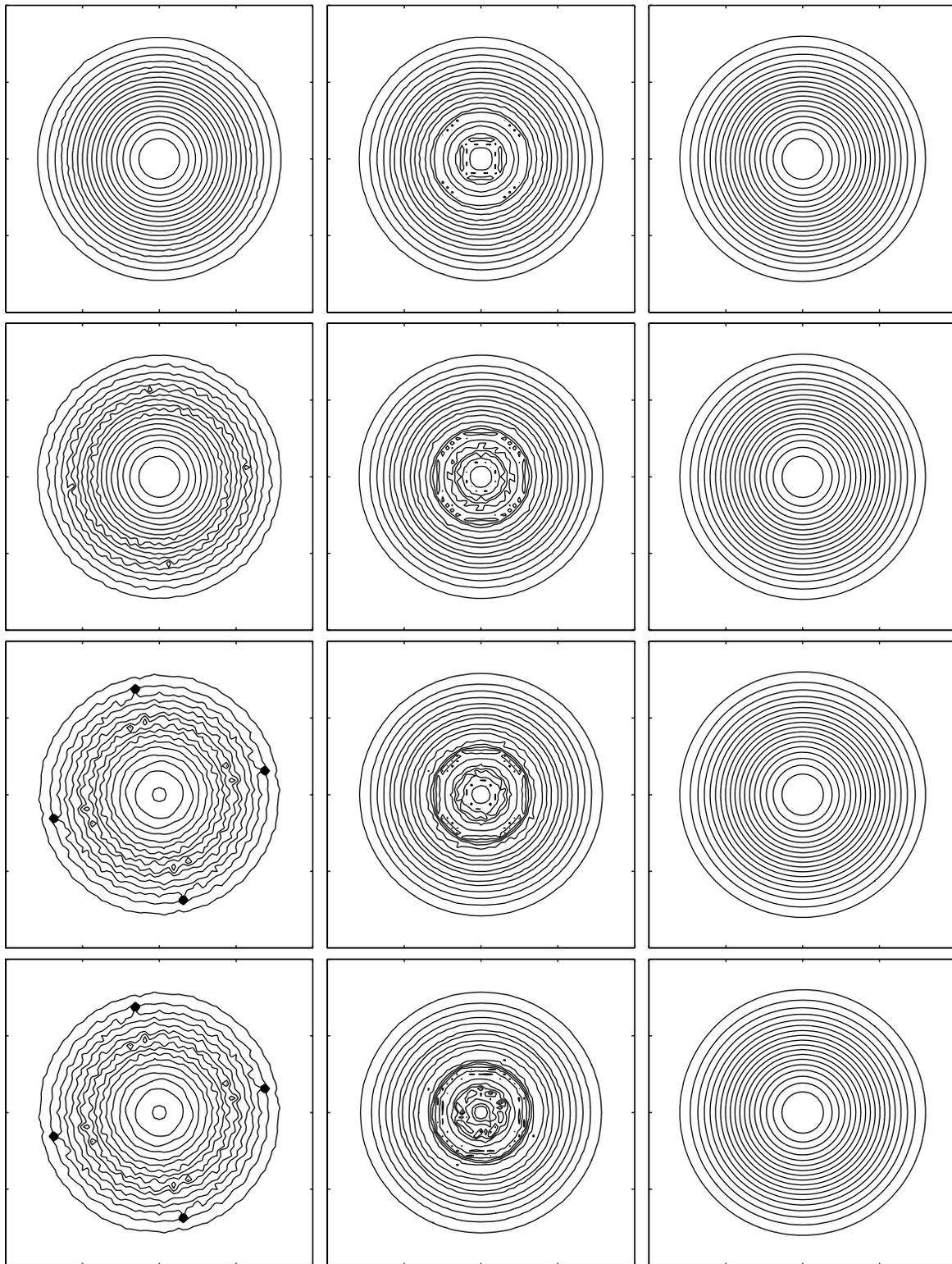


FIG. 1.9 – Vortex axisymétrique : vorticité à $t = \{10, 20, 30, 60\}$; à gauche : calcul sans remaillage; au milieu : calcul avec remaillage Λ_2 ; à droite : calcul avec remaillage M'_4 ;

$$B = A - \lambda I$$

et le coefficient optimal λ^* est donné par :

$$\lambda^* = \sum_{q \in \mathbb{J}} \frac{\zeta_\epsilon^2(x_p^0) v_p}{4\zeta_\epsilon^2(0)}$$

Évolution en temps

Le calcul des vitesses est fait par la formule (1.5). Nous avons le système différentiel suivant, qui est intégré par Runge-Kutta d'ordre 4.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x_p(t), t) = \sum_{q \in \mathbb{J}} k_\epsilon(x_p(t) - x_q(t)) \Gamma_q(t) \\ \frac{d}{dt} \Gamma_p(t) = 0 \\ \frac{d}{dt} x_p(t) = u(x_p(t), t) \\ \Gamma_p(0) = \Gamma_p^0 \\ x_p(0) = x_p^0 \end{array} \right.$$

De façon périodique, des remaillages sont effectués par la formule :

$$\tilde{x}_q = (ih, mjh), \quad q = i + mj \quad (1.24)$$

$$\tilde{\Gamma}_q = \sum_{p \in \mathbb{J}} \Gamma_p M_4' \left(\frac{\tilde{x}_q - x_p}{h} \right) \quad (1.25)$$

Résultats numériques

La simulation est effectuée jusqu'à $T = 40T_p$ ($T_p = \frac{4\pi}{\omega_{max}}$ est le temps caractéristique). A ce temps, on a déjà observé la convergence vers l'état axisymétrique. La circulation $J(0, 0)$ et l'impulsion angulaire $\frac{J(2,0)+J(0,2)}{J(0,0)}$ sont calculées par la formule (1.23), et l'énstrophie est donnée par $E_{ph} = \int \omega^2(x) dx$.

Pour quantifier la convergence vers l'état axisymétrique de la distribution de vortacité, on calcule le coefficient λ_{eff} (effective aspect ratio) défini (Dritschel [36]) par :

$$\lambda_{eff} = \sqrt{\frac{J+R}{J-R}}$$

A l'instant initial, on a ($N_p = 7460$) particules, et en fin de simulation on arrive à ($N_p = 21400$). Le pas de temps est de ($\Delta t = 0.01$). Le remaillage est effectué tous les quatre pas de temps.

Les figures (Fig.1.11 Fig.1.12 Fig.1.14 Fig.1.13 Fig.1.14) montrent la comparaison du remaillage M_4' avec le noyau Λ_2 d'ordre 2.

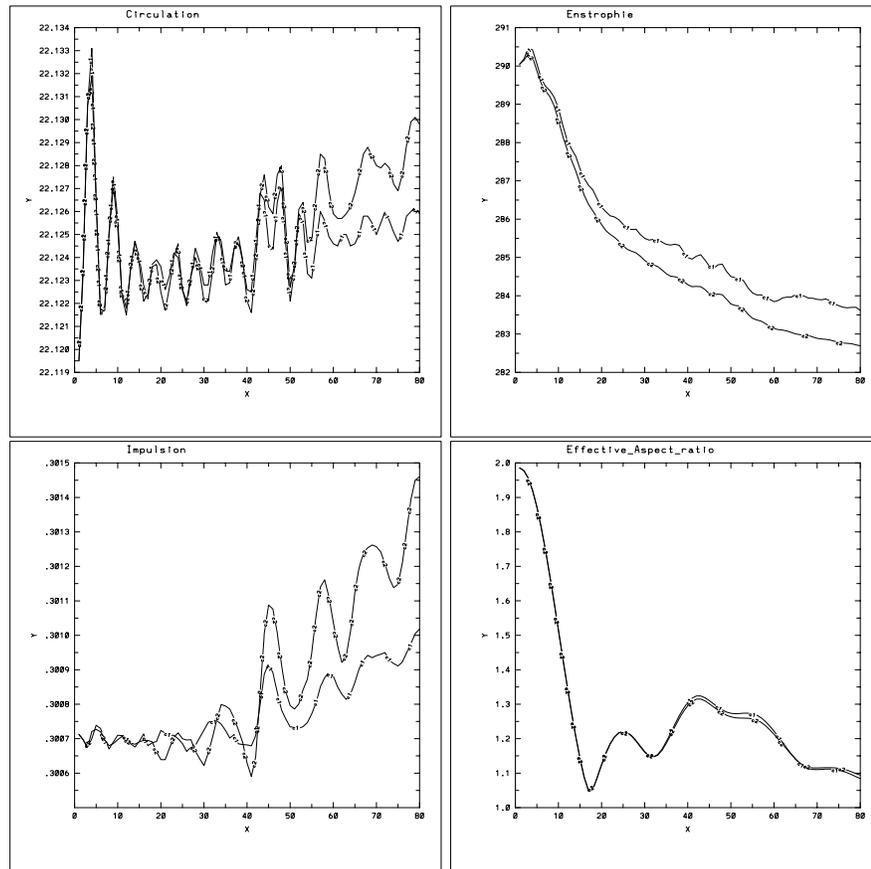


FIG. 1.10 – C_1 : remillage Λ_2 , C_2 : remillage M'_4 . ($t = 0 \dots 8$.)

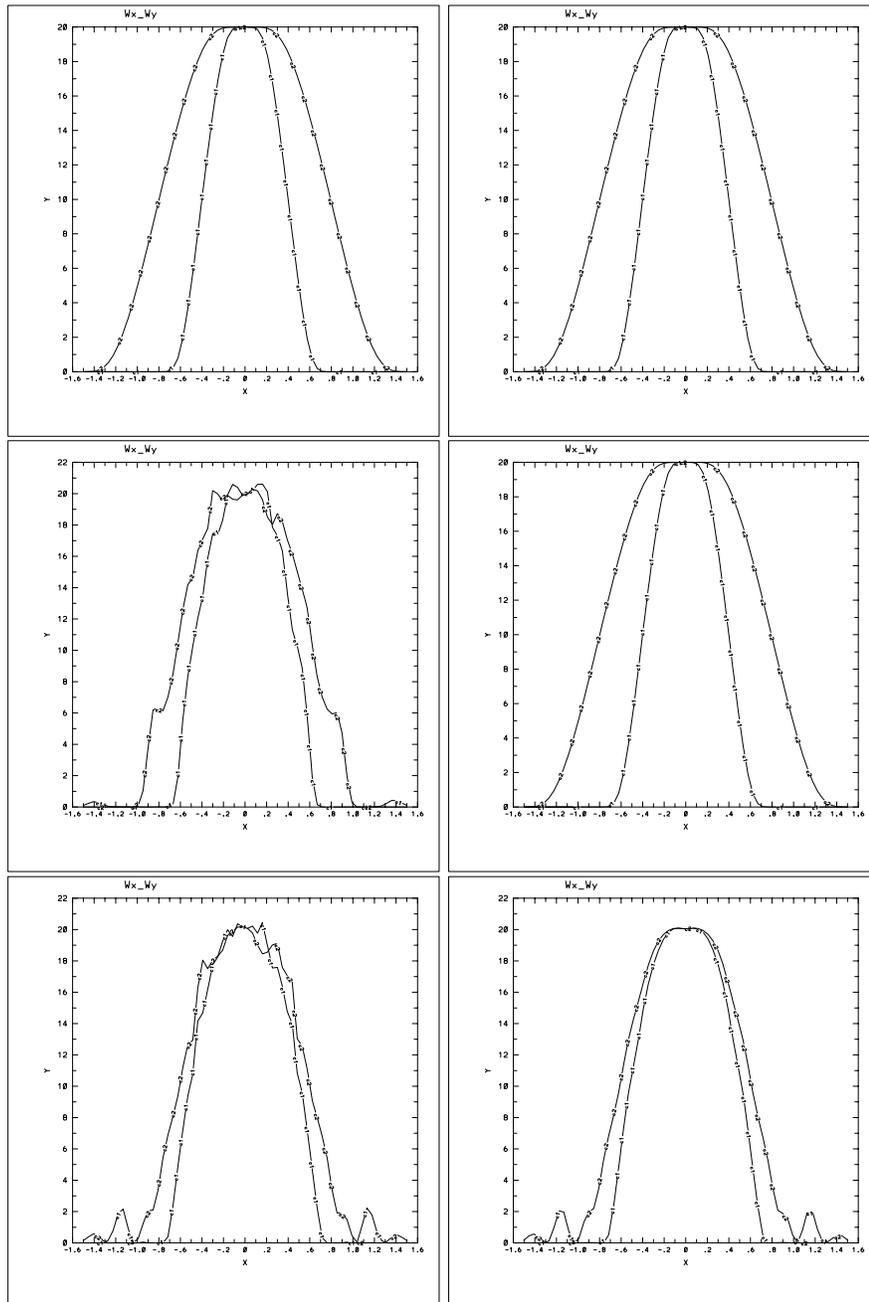


FIG. 1.11 – Vorticité sur les axes : à gauche remaillage Λ_2 , à droite remaillage M'_4 . ($t = 0 \dots 2.$)

Les figures ci-dessous nous montrent la convergence vers l'état axisymétrique ($\lambda_{ff} \approx 1$) et la bonne conservation de la circulation, l'impulsion angulaire et l'entrophie (Fig.1.19). Cela prouve la précision de la méthode malgré la fréquence du remaillage (remaillage tous les quatre pas de temps.)

L'évolution en temps du flot est décrite par les figures (Fig.1.17, Fig.1.18). On trouve aussi la vorticité sur les axes (ox) et (oy), qui représente un autre moyen de vérification de la convergence vers l'état axisymétrique (Fig.1.15, Fig.1.16).

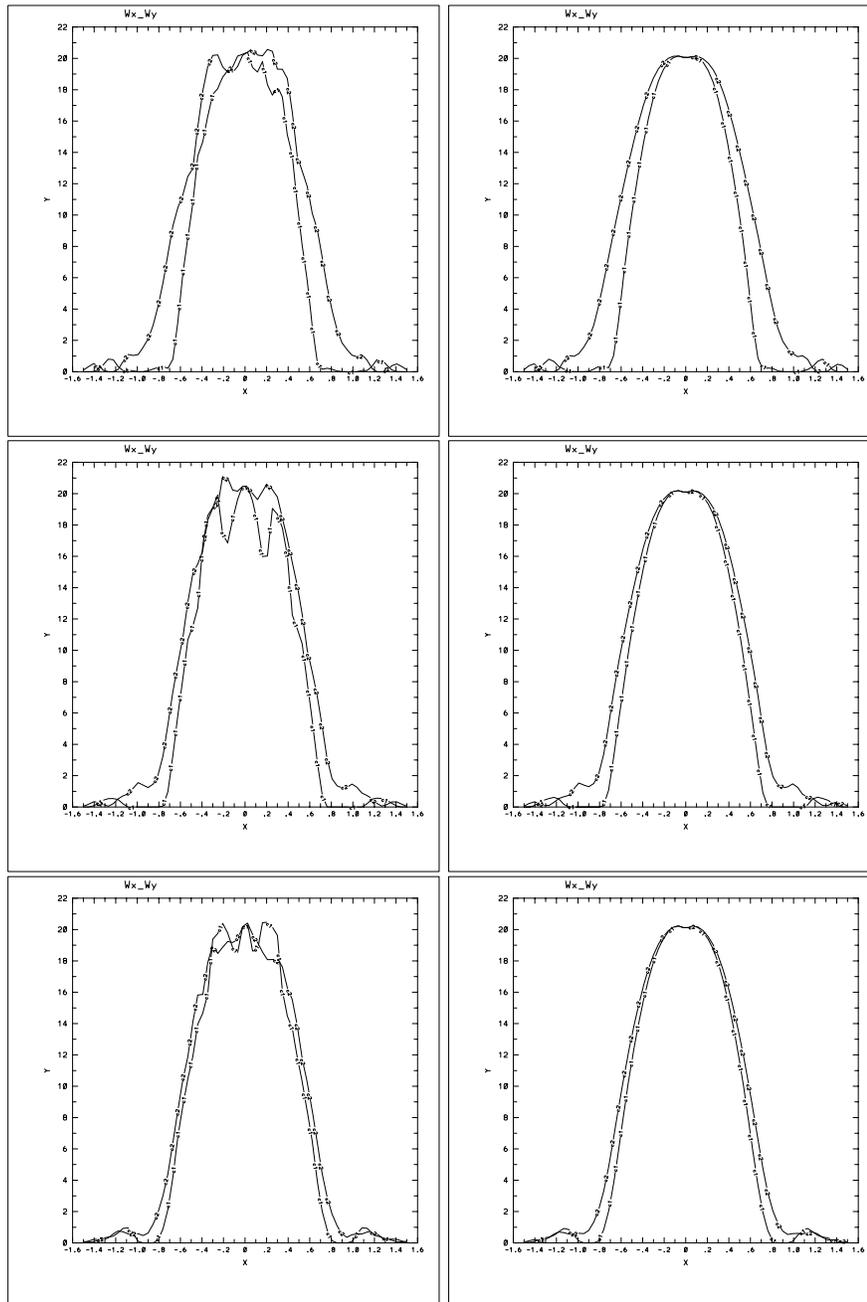


FIG. 1.12 – Vorticité sur les axes ($t = 4 \dots 8$) : à gauche remaillage Λ_2 , à droite remaillage M'_4

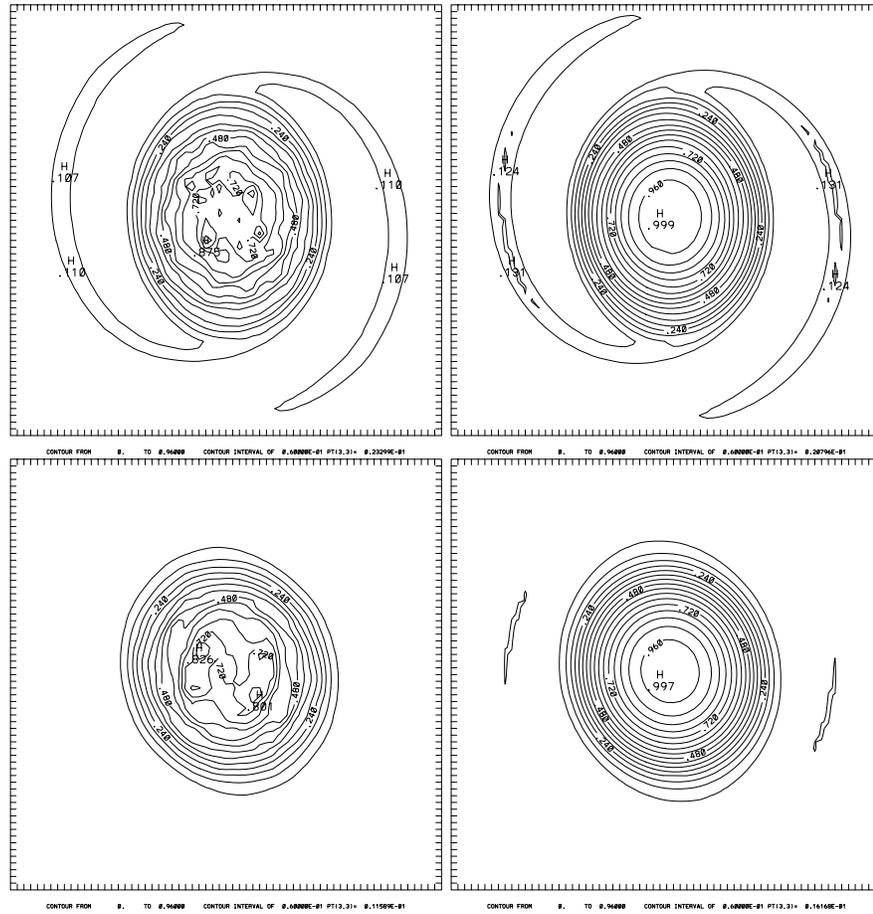


FIG. 1.13 – Isovaleurs du tourbillon après changement d'échelle. ($t = 2.$ et $t = 8.$) A gauche remaillage Λ_2 , à droite remaillage M'_4 .

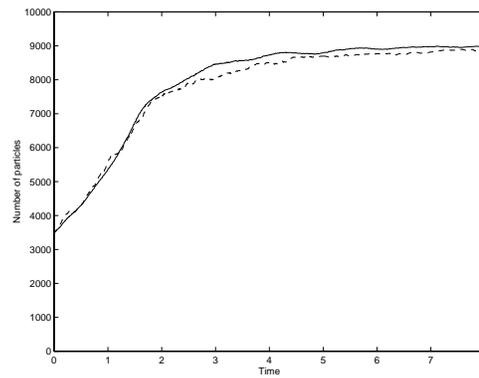


FIG. 1.14 – Nombre de particules.

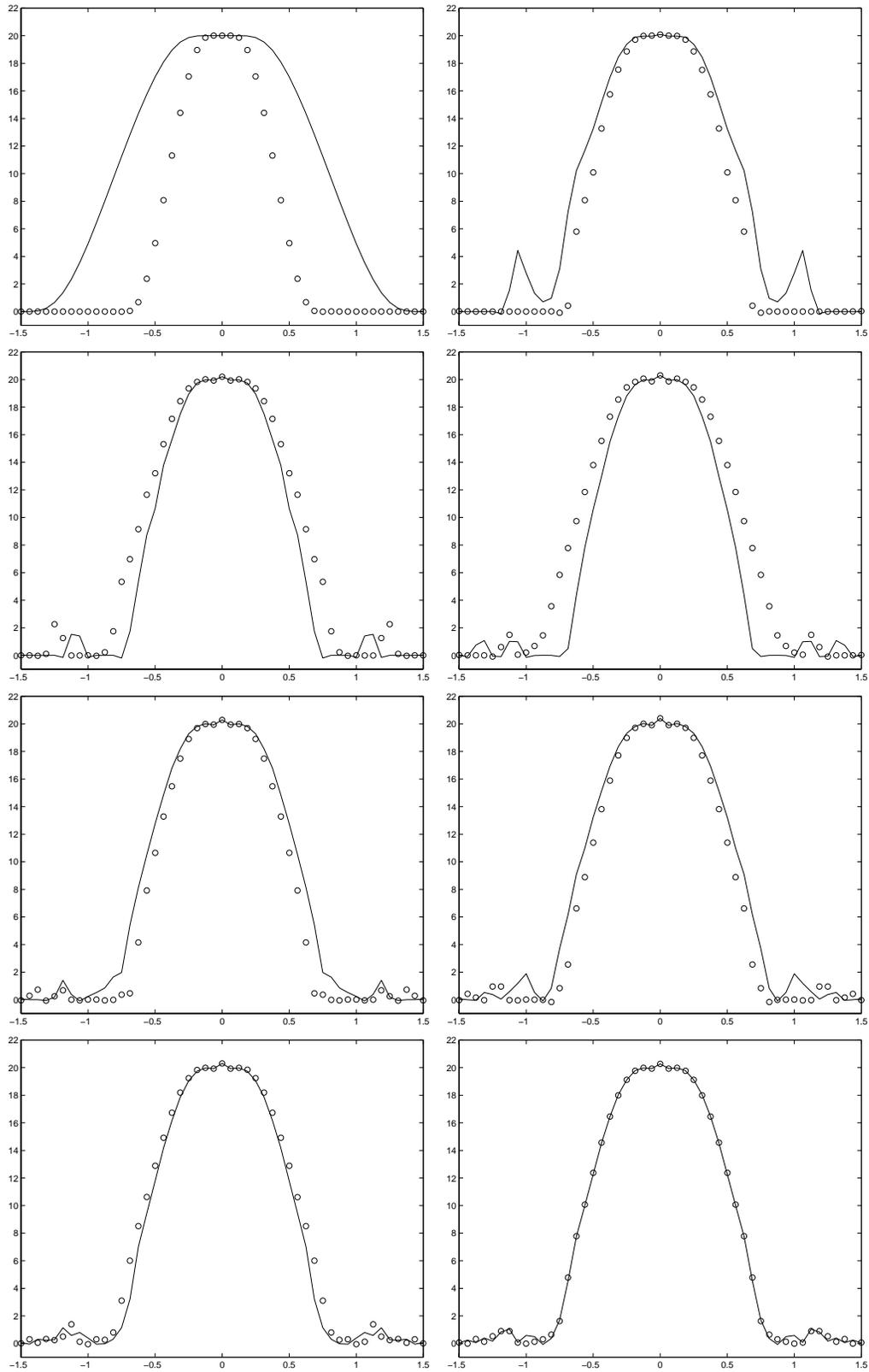


FIG. 1.15 – Vorticité sur les axes. (o) : sur l'axe (ox), (-) : sur l'axe (oy). (t = 0 . . . 9)

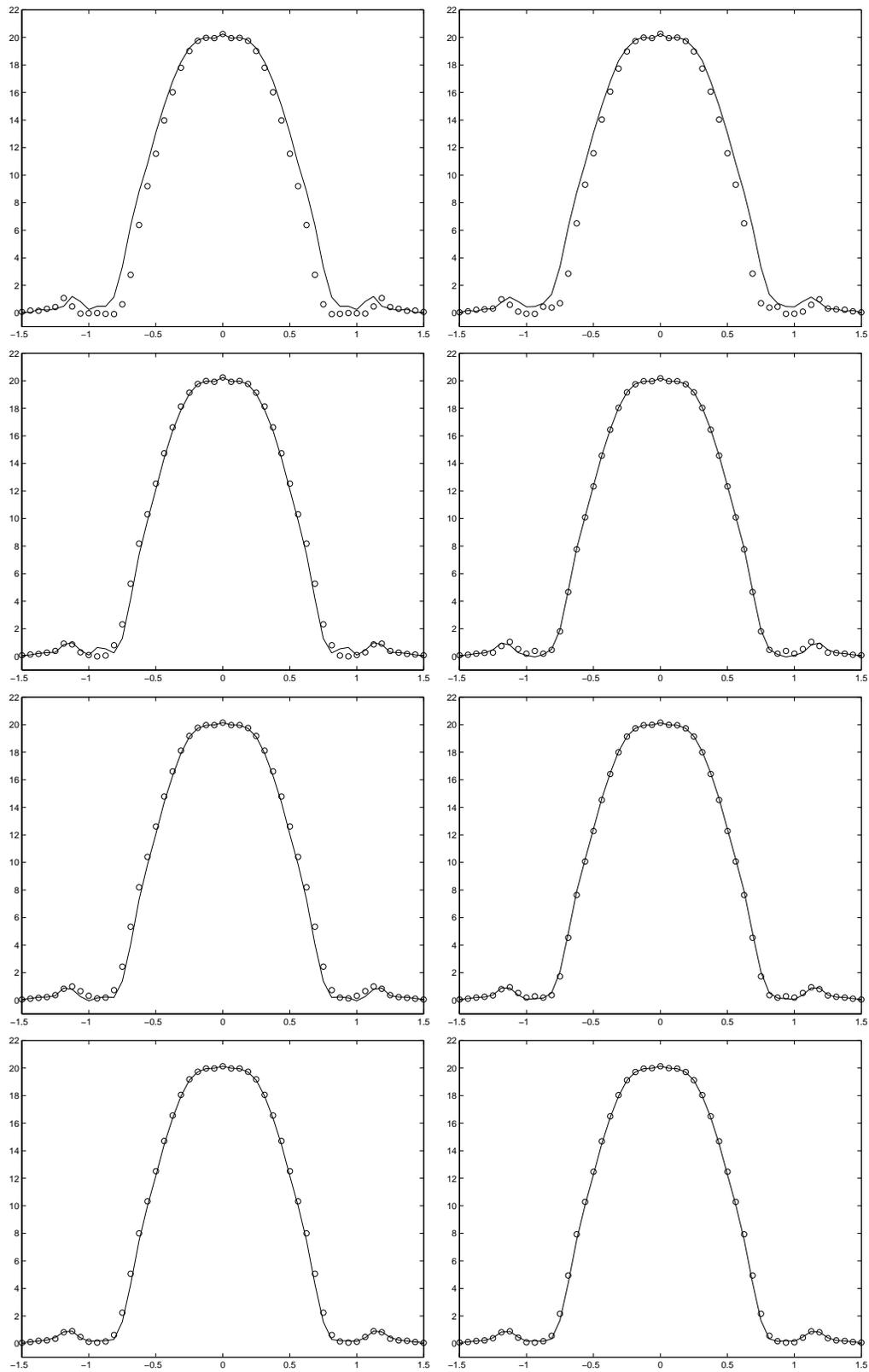
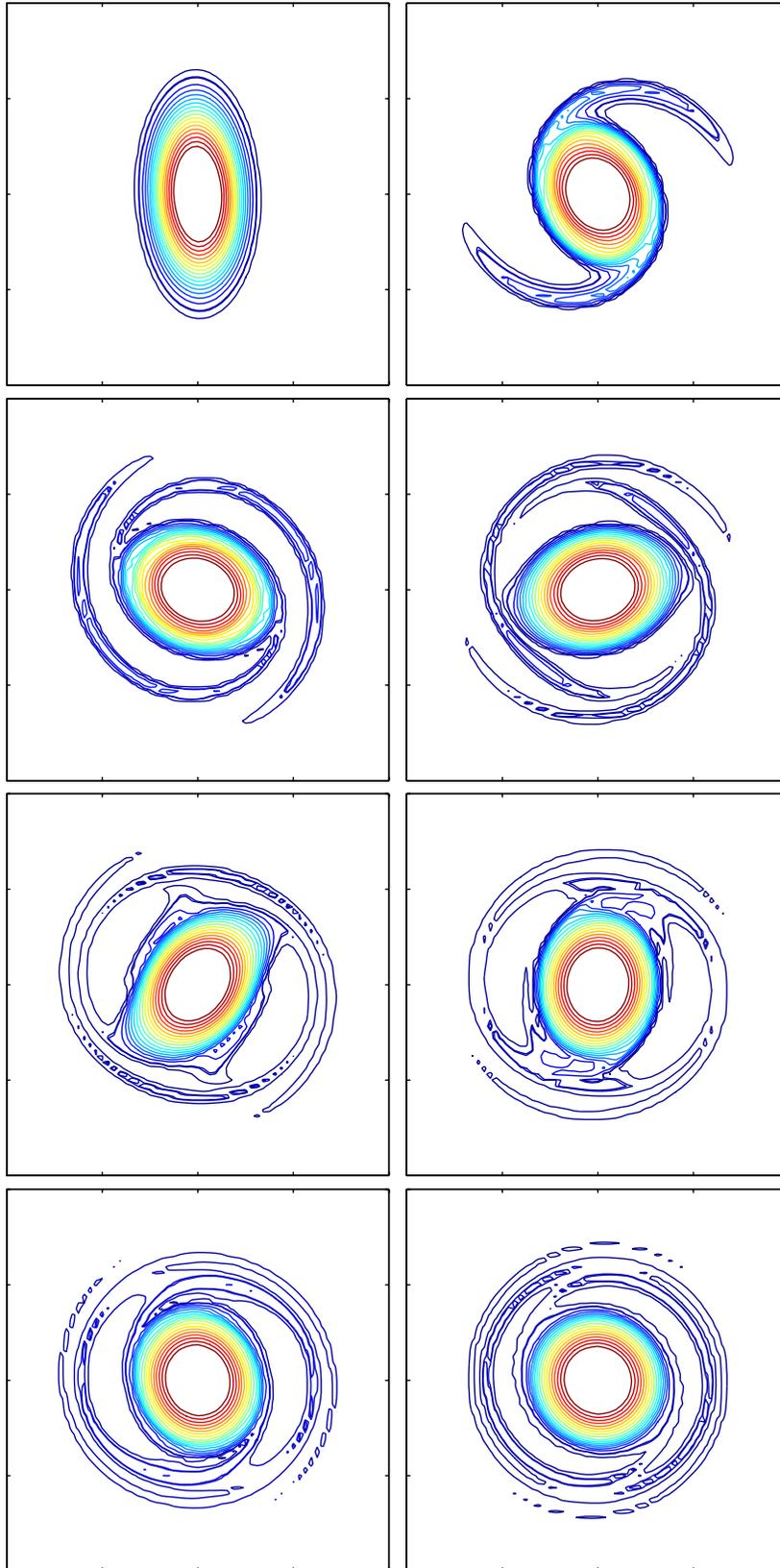
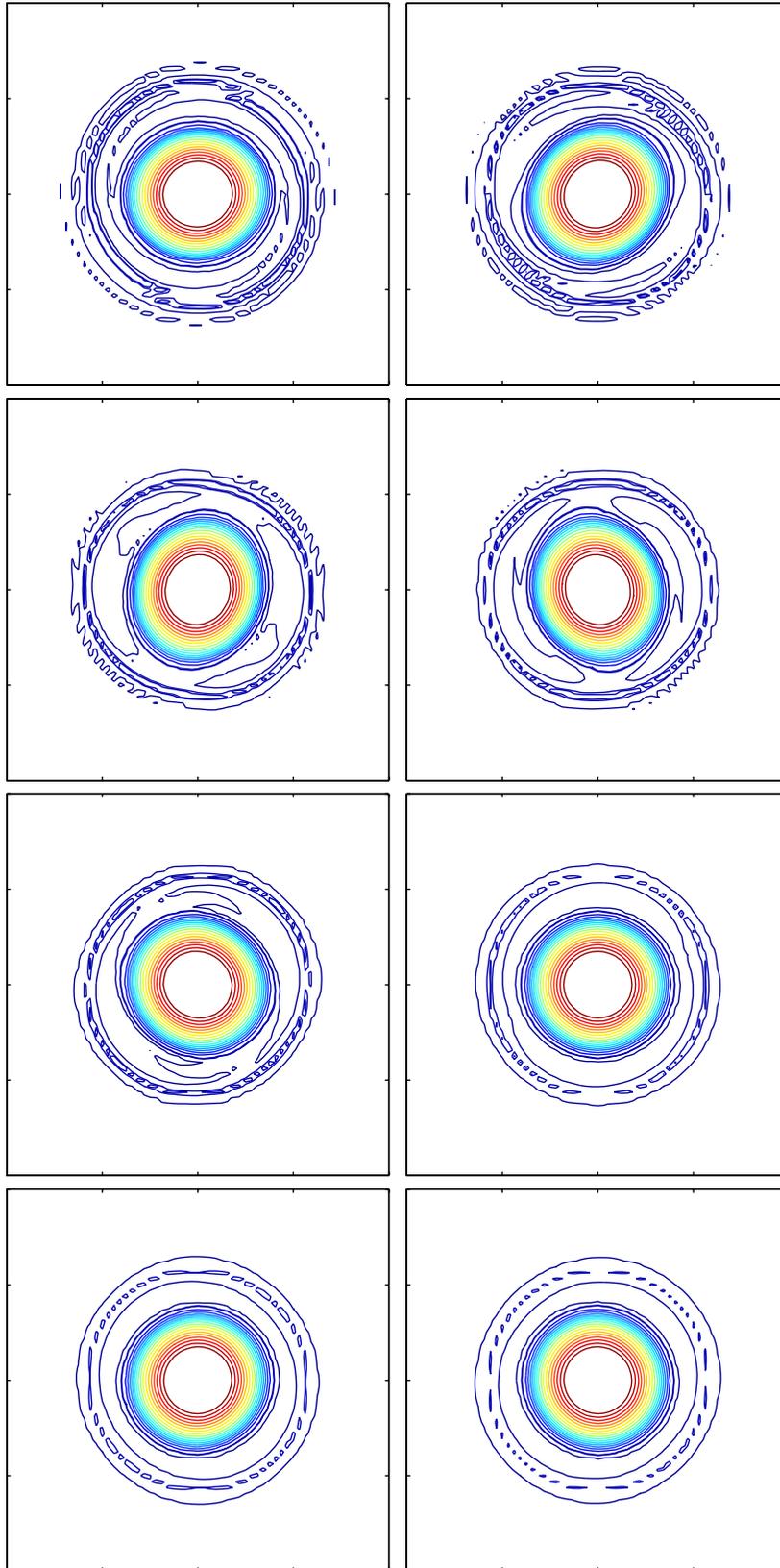


FIG. 1.16 – Vorticité sur les axes. (o) : sur l'axe (ox), (-) : sur l'axe (oy). ($t = 10 \dots 24$.)

FIG. 1.17 - *Vorticité*: ($t = 0 \dots 7.$)

FIG. 1.18 – *Vorticité*: ($t = 8 \dots 24.$)

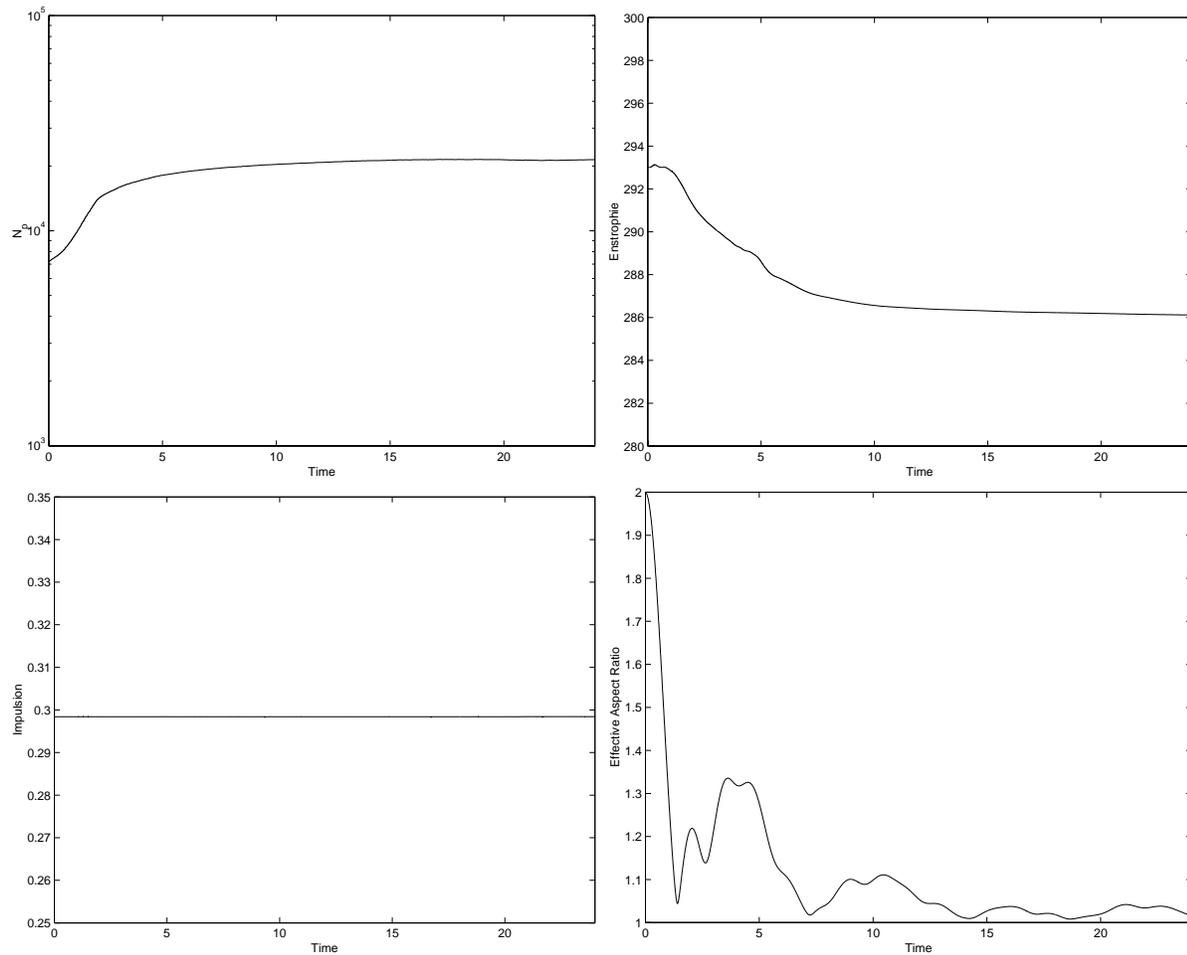


FIG. 1.19 – En haut à gauche : évolution du nombre de particules; à droite : enstrophie. En bas à gauche : impulsion; à droite : ratio de l'ellipse. ($t = 0 \dots 24$.)

1.5 Conclusion

De ce qui précède, on peut déduire que la méthode de vortex constitue un moyen simple et précis de simulation d'écoulements en domaine infini. En deux dimensions, le traitement lagrangien permet de traduire les équations de Navier-Stokes non linéaires en système d'équations différentielles linéaires. La méthode P.S.E. offre une façon précise et peu coûteuse de calcul de la diffusion sur les particules. Aussi, il existe maintenant des codes de calcul rapide des interactions entre particules permettant un calcul rapide des vitesses sur les particules. La méthode de remaillage présentée ici constitue un moyen efficace pour éviter la distorsion de distributions particulières, elle permet aussi d'assurer une création automatique de nouvelles particules suivant l'élargissement du support de la vorticité. Le c ut suppl ementaire engendré par cette méthode reste négligeable par rapport aux autres étapes de calcul.

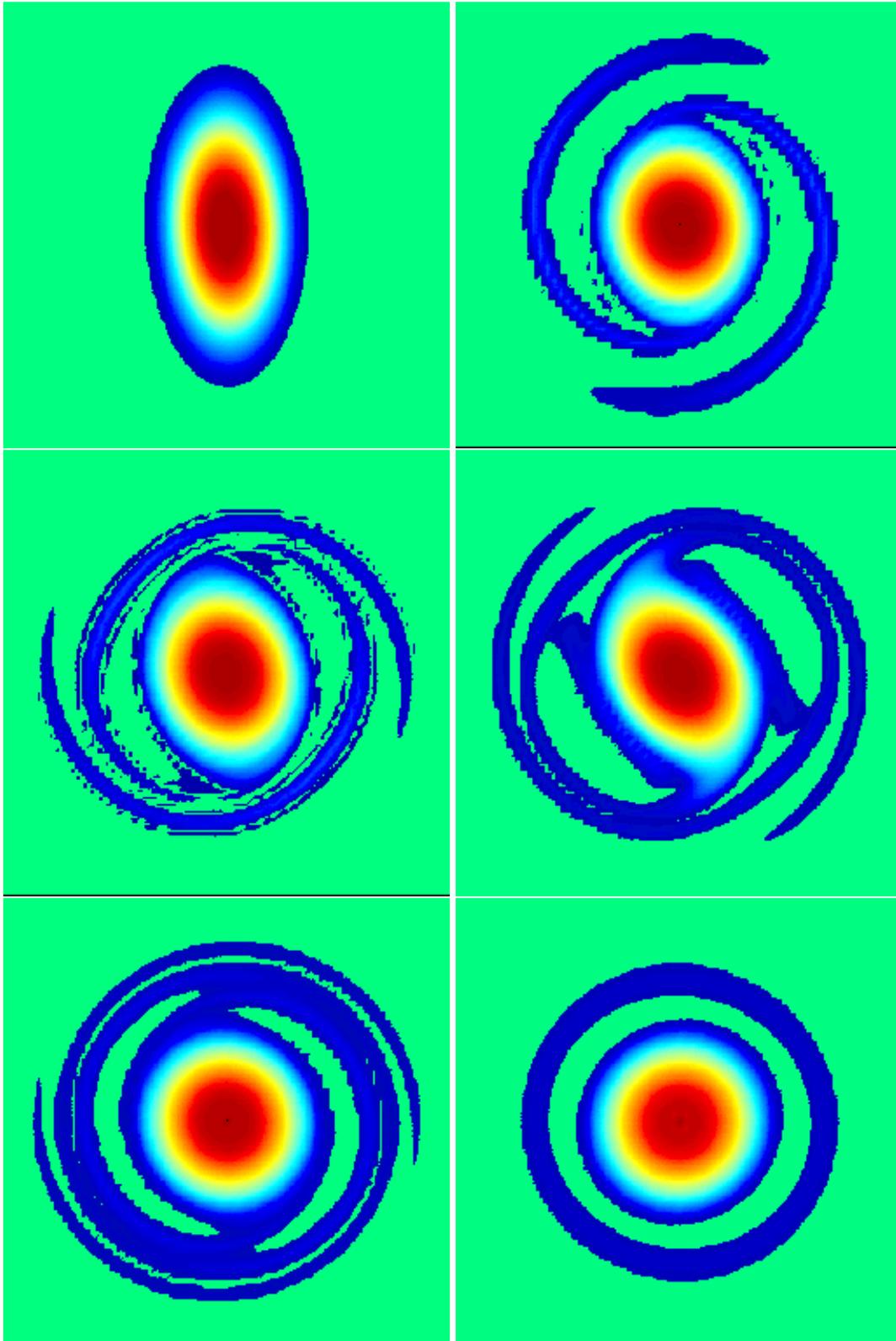


FIG. 1.20 – *Vorticité*: ($t = 0, 2, 3, 5, 8, 24$)

Chapitre 2

Méthodes différences-finies

Les méthodes différences-finies sont parmi les moyens les plus utilisés en mécanique de fluides numérique. Cela est dû à leur coût très faible et à la souplesse de leur implémentation. On s'intéresse ici à leurs applications en simulation des écoulements incompressibles. L'équation de Navier-Stokes sera étudiée en formulation (vitesse-tourbillon) et dans les variables originales (vitesse-pression). Plusieurs schémas de discrétisation seront abordés. Le problème de conditions aux limites aux voisinages d'obstacles sera étudié.

Ce chapitre se compose de quatre parties essentielles. La première est consacrée à l'étude de certains algorithmes de discrétisation des équations de Navier-Stokes en formulation (vitesse-tourbillon). On y présente les schémas suivants :

- Le schéma d'Arakawa [5] caractérisé par de bonnes propriétés de stabilité (conservation des moments linéaires et quadratiques).
- Le schéma centré d'ordre 2, qui a par rapport au schéma d'Arakawa l'avantage d'être applicable en maillage non uniforme mais ne conserve pas les moments.
- Le schéma compact d'ordre 4 de Weinan et Liu [85], qui combine précision et stabilité.

Ces schémas donnent une discrétisation des équations à l'intérieur du domaine de calcul. Ils doivent être complétés par des conditions limites explicites sur la vorticité ω au bord du domaine. Plusieurs auteurs ont écrit des algorithmes pour déduire ces conditions. On présente les méthodes explicites et implicites essentielles proposées dans la littérature.

La deuxième partie de ce chapitre traite des méthodes de projection pour la résolution des équations de Navier-Stokes en formulation (vitesse-pression). Un algorithme basé sur ceux proposés par Chorin [22], Temam [82] et Goda [39] a été implémenté. La version implicite de cet algorithme permet la simulation d'écoulements à nombre de Reynolds faible d'une façon peu coûteuse. Sa version explicite est moins coûteuse par pas de temps, mais la CFL imposée par le terme de diffusion fait qu'elle ne devient rentable que pour des nombres de Reynolds élevés ($Re > 2000$).

Dans la troisième partie, on s'intéresse à des méthodes de décomposition en sous-domaines. Un algorithme itératif de type Schwarz s'appuyant sur les équations discrètes a été réalisé. On montre qu'il converge de façon géométrique et donc ne détériore pas la précision des schémas différences-finies utilisés. Cet algorithme permet la généralisation des méthodes différences-finies à une géométrie non rectangulaire. Il nous a permis d'utiliser le schéma compact d'ordre 4 pour la simulation d'écoulements dans une conduite et sur une marche.

Dans la dernière partie, des test numériques ont été effectués afin de mettre en lumière les avantages et les inconvénients des différentes méthodes.

2.1 L'équation de Navier-Stokes en formulation (vitesse-tourbillon)

Comme on l'a vue dans le chapitre précédent, l'équation de Navier-Stokes en dimension 2 peut s'écrire sous la forme :

$$(P_1) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \omega + \nabla \cdot (u\omega) & = \nu \nabla^2 \omega & \text{dans } \Omega \\ \nabla^2 \psi & = -\omega & \text{dans } \Omega \\ u & = \nabla \wedge \psi & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Ce système doit être complété par les conditions limites nécessaires au bord. Ces conditions limites sont connues généralement sur les composantes tangentielle $u \cdot \tau$ et normale $u \cdot n$ de la vitesse :

$$u \cdot \tau = u_e \cdot \tau$$

$$u \cdot n = u_e \cdot n$$

Elles se traduisent sur la fonction courant par :

$$\begin{cases} \psi & = f & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} & = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où

$$g = -u_e \cdot \tau$$

$$f(\sigma_p) = \int_{\sigma_m}^{\sigma_p} (u_e \cdot n)(\sigma) d\sigma$$

On considère ici le cas d'un domaine rectangulaire $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ muni d'un maillage uniforme $\{(x_i, y_j) = (a + ih_x, c + jh_y), i = 0 \dots M, j = 0 \dots N\}$, où h_x, h_y sont les pas de discrétisation : $h_x = \frac{b-a}{M}$, $h_y = \frac{d-c}{N}$. On pose aussi $h = \min(h_x, h_y)$.

On cherche à déterminer ψ, u et ω sur Ω aux instants $t_n = n\Delta t$. Notons :

$$\psi_{i,j}^n = \psi(x_i, y_j, t_n)$$

$$\omega_{i,j}^n = \omega(x_i, y_j, t_n)$$

$$u_{i,j}^n = u(x_i, y_j, t_n).$$

La méthode différences-finies consiste à remplacer les opérateurs différentiels continus par des opérateurs discrets ce qui nous permet de déduire $\psi_{i,j}^{n+1}$, $u_{i,j}^{n+1}$ et $\omega_{i,j}^{n+1}$ sur les noeuds intérieurs de $\psi_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ et $\omega_{i,j}^n$. Les valeurs qui manquent sur le bord sont déduites des conditions aux limites.

Dans cette section, on donne d'abord les schémas de discrétisation implémentés dans ce travail pour discrétiser le problème (P_1) . Ensuite, on rappelle les techniques en différences-finies permettant de déduire les conditions limites sur la vorticité en formulation (vitesse-pression). Les tests numériques des algorithmes résultant de cette étude sont donnés en quatrième section.

2.1.1 Schémas différences-finies classiques

On trouve dans la littérature des schémas différences-finies faciles à implémenter et donnant une approximation assez satisfaisante des opérateurs continus.

Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à la discrétisation différences-finies du terme de convection. La prise en compte des conditions limites et de la diffusion sera présentée ultérieurement.

Approximation numérique d'une équation de convection

L'équation de convection en dimension 2 peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega = -J(\psi, \omega) \quad (2.1)$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -J(\nabla^2 \psi, \psi) \quad (2.2)$$

L'opérateur J désigne la jacobienne. Il est défini par :

$$J(\psi, \omega) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

En domaine périodique, ou avec la condition de vitesse normale nulle, les propriétés de conservation des moments physiques que sont la circulation, l'énergie cinétique et l'énstrophie s'écrivent :

$$\int_{\Omega} J(a(x), b(x)) dx = 0 \quad (2.3)$$

$$\int_{\Omega} a(x) J(a(x), b(x)) dx = 0 \quad (2.4)$$

$$\int_{\Omega} b(x) J(a(x), b(x)) dx = 0 \quad (2.5)$$

où a, b sont des fonctions régulières quelconques sur Ω .

En effet, la conservation de la circulation est assurée par la première relation :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega(x) dx = \int_{\Omega} J(\omega(x), \psi(x)) dx$$

L'énergie cinétique quant à elle s'écrit :

$$K = \int_{\Omega} u^2(x) dx = \int_{\Omega} (\nabla \psi)^2 dx$$

Sa variation est contrôlée par :

$$\frac{d}{dt}K = \int_{\Omega} J(\nabla^2\psi, \psi(x))dx$$

Enfin, la variation de l'enstrophie s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega^2(x)dx = 2 \int_{\Omega} \omega(x) \frac{\partial\omega}{\partial t} dx = -2 \int_{\Omega} \nabla^2\psi(x) \frac{\partial(\nabla^2\psi(x))}{\partial t} dx$$

En utilisant l'équation (2.2), on trouve :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega^2(x)dx = 2 \int_{\Omega} \nabla^2\psi(x) J(\nabla^2\psi, \psi) dx$$

Sa conservation résulte donc de la dernière relation.

Pour qu'un schéma numérique approchant J par J^h est les mêmes propriétés de conservation au niveau discret, il doit satisfaire l'équivalent discret des relations (2.3, 2.4, 2.5). Il doit donc vérifier les conditions :

$$\overline{J^h(a(p), b(q))} = 0 \quad (2.6)$$

$$\overline{a(p)J^h(f(p), b(q))} = 0 \quad (2.7)$$

$$\overline{b(q)J^h(a(p), b(q))} = 0 \quad (2.8)$$

où la notation $\overline{\quad}$ dénote la sommation discrète sur les points de discrétisation.

Schéma d'Arakawa

Sous les conditions ($h_x = h_y = h$), Arakawa[5] présente l'écriture suivante de J^h vérifiant les propriétés précédentes (2.6,2.7,2.8) et avec une consistance de l'ordre de $O(h^2)$:

$$J_{i,j}^h = \frac{1}{12h^2} D_{i,j}^h$$

où

$$\begin{aligned} D_{i,j} = & (\psi_{i,j-1} + \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i,j+1} - \psi_{i+1,j+1})(\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}) \\ & + (\psi_{i-1,j-1} + \psi_{i,j-1} - \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i,j+1})(\omega_{i,j} - \omega_{i-1,j}) \\ & + (\psi_{i+1,j} + \psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j} - \psi_{i-1,j+1})(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}) \\ & + (\psi_{i+1,j-1} + \psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j-1} - \psi_{i-1,j})(\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}) \\ & + (\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j+1})(\omega_{i+1,j+1} - \omega_{i,j}) \\ & + (\psi_{i,j-1} - \psi_{i-1,j})(\omega_{i,j} - \omega_{i-1,j-1}) \\ & + (\psi_{i,j+1} - \psi_{i-1,j})(\omega_{i-1,j+1} - \omega_{i,j}) \\ & + (\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j-1})(\omega_{i,j} - \omega_{i+1,j-1}) \end{aligned}$$

et

$$J^h = J + O(h^2)$$

Schéma centré

La condition ($h_x = h_y$) nécessaire pour utiliser le schéma d'Arakawa n'est pas toujours raisonnable. Typiquement en présence de géométrie cylindrique, il est contraignant de prendre ($\delta\theta = \delta r$). Les différences-finies centrées présentent une alternative simple à implémenter pour résoudre l'équation de convection. Les opérateurs différentiels continus seront remplacés par les approximations discrètes d'ordre $O(h^2)$ suivant:

$$D_x(f(x, y)) = \frac{f(x + h_x, y) - f(x - h_x, y)}{2h_x}$$

$$D_y(f(x, y)) = \frac{f(x, y + h_y) - f(x, y - h_y)}{2h_y}$$

La vorticité evolue suivant l'équation :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial t} = -u_{ij} D_x \omega_{ij} - v_{ij} D_y \omega_{ij}$$

Il est connu que si cette équation est intégrée en temps par le schéma d'Euler ou de Runge-Kutta d'ordre deux, le schéma centré est inconditionnellement instable. Par contre, il devient conditionnellement stable si on utilise le schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre. L'étude de la stabilité linéaire par transformation de Fourier nous donne la condition de stabilité suivante :

$$\Delta t < \frac{2.8h}{\|u\|_\infty}$$

La convergence à l'ordre deux est démontrée dans [46].

Traitement de la diffusion et calcul de la fonction courant

La diffusion sera traitée explicitement et approchée par les opérateurs centrés :

$$D_x^2(\omega(x, y)) = \frac{\omega(x + h_x, y) - 2\omega(x, y) + \omega(x - h_x, y)}{h_x^2}$$

$$D_y^2(\omega(x, y)) = \frac{\omega(x, y + h_y) - 2\omega(x, y) + \omega(x, y - h_y)}{h_y^2}.$$

L  aussi, l'analyse de la stabilité par transformation de Fourier nous donne la condition de stabilité suivante imposée classiquement par le traitement explicite de la diffusion :

$$\Delta t < \frac{h^2}{2\nu}$$

Une fois les termes de convection et de diffusion approchés de façon discrète, on peut calculer $\{\omega_{ij}^{n+1}\}$ sur les noeuds intérieurs, et en déduire $\{\psi_{ij}^{n+1}\}$ par un solveur de l'équation de Poisson suivante :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_{i,j}^{n+1} = -\omega_{i,j}^{n+1} & \text{dans } \Omega \\ \psi^{n+1} = f & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

2.1.2 Schémas compacts d'ordre élevé

La simulation directe d'écoulements complexes demande suffisamment de précision pour capturer les petites échelles de vorticité. En différences-finies, les recherches sont orientées vers l'élaboration de schémas compacts d'ordre élevé. On a choisi ici l'implémentation du schéma compact d'ordre quatre proposé par Weinan et Liu [84]. Ce schéma présente l'avantage d'être stable et peu c teux. Ces étapes implicites se résument à deux résolutions d'équations de Poisson. L'utilisation des formules de Briley [12] permet un traitement satisfaisant des conditions limites.

Algorithme numérique

L'idée de base de ce schéma est l'utilisation de formules discrètes et compacts d'ordre quatre de l'opérateur Laplacien. L'équation de Navier-Stokes peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega - F \quad (2.9)$$

où F contient le terme de convection.

En utilisant les formules de discrétisation compacts (  neuf points) d'ordre quatre :

$$\left(\frac{h^2}{12}\Delta_h + 1\right)u = u + \frac{h^2}{12}\Delta u + O(h^4)$$

et

$$\Delta u + \frac{h^2}{12}\Delta^2 u = \left(\Delta_h + \frac{h^2}{6}D_{h_x}^2 D_{h_y}^2\right)u + O(h^4)$$

où

$$\Delta_h(f(x, y)) = D_x^2(f(x, y)) + D_y^2(f(x, y))$$

On obtient la discrétisation compacte d'ordre quatre de l'équation (2.9) :

$$\left(1 + \frac{h^2}{12}\Delta_h\right)\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu\left(\Delta_h + \frac{h^2}{6}D_h^2 D_h^2\right)\omega - \left(1 + \frac{h^2}{12}\Delta_h\right)f + O(h^4)$$

L'utilisation de cette formule et des dérivées discrètes d'ordre quatre, pour l'évaluation du terme de convection et le calcul des vitesses, nous donne l'algorithme du schéma différences-finies compacte d'ordre quatre :

- Calcul de $\tilde{\omega}^k$ défini par :

$$\tilde{\omega}^k = \left(1 + \frac{(h_x^2 + h_y^2)}{12}\Delta_h\right)\omega^k$$

- On fait évoluer $\tilde{\omega}^k$:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\omega}^{k+1} - \tilde{\omega}^k}{\delta t} &= -D_x\left(1 + \frac{h_y^2}{6}D_y^2\right)(u^k \omega^k) - D_y\left(1 + \frac{h_x^2}{6}D_x^2\right)(v^k \omega^k) \\ &\quad + \left(\frac{h_x^2 D_x^2 + h_y^2 D_y^2}{12}\right)(u^k D_x \omega^k + v^k D_y \omega^k) \\ &\quad - \nu\left(\Delta_h + \frac{h_x^2}{6}D_x^2 D_y^2\right)\omega^k \end{aligned}$$

- Calcul de ψ^{k+1} :

$$(\Delta_h + \frac{h_x^2}{6} D_x^2 D_y^2) \psi^{k+1} = \tilde{\omega}^{k+1}$$

- Calcul de ω^{k+1} sur Ω :

$$(1 + \frac{(h_x^2 D_x^2 + h_y^2 D_y^2)}{12}) \omega^{k+1} = \tilde{\omega}^{k+1}$$

- Calcul des vitesses :

$$u_x^{k+1} = -D_y (1 - \frac{h_y^2}{6} D_y^2) \psi^{k+1}$$

$$u_y^{k+1} = -D_x (1 - \frac{h_x^2}{6} D_x^2) \psi^{k+1}$$

Ce schéma nous permet d'avoir une précision d'ordre quatre comme l'indique le théorème suivant dû à Weinan et Liu [84] :

Théorème 2.1 *Supposons que les solutions exactes ψ_e de l'équation de Navier-Stokes et dans $L^\infty([0, T]; C^{6,\alpha}(\Omega))$, alors, l'approximation numérique u_h de u_e donnée par le schéma compact vérifie :*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_e(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq Ch^4 \sup_{0 \leq t \leq T} \|\psi_e(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\|_{C^{6,\alpha}(\omega)}^2$$

où :

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \{u \in C(\Omega); \sup_{x,y \in \Omega} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} < \infty\} \text{ avec } 0 < \alpha < 1$$

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); D^j u \in C^{0,\alpha}(\Omega) \forall j, |j| \leq k\}$$

Il nous reste maintenant à préciser le calcul de $\{\omega^{k+1}\}$ sur le bord de façon à respecter la condition de non glissement :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = g \text{ sur } \partial \Omega$$

2.1.3 Prise en compte de la condition de non glissement en différences-finies

En formulation (vitesse-tourbillon), la condition limite sur la vorticité ω n'apparaît pas de façon explicite. Par contre, sur la fonction courant ψ , les conditions limites sont surdéterminées puisqu'on doit satisfaire à la fois une condition limite de type Dirichlet et Neumann :

- Condition de type Dirichlet : $\psi = f$ sur $\partial \Omega$
- Condition de type Neumann : $\frac{\partial \psi}{\partial n} = g$ sur $\partial \Omega$

Il est naturel de calculer ψ avec une des deux conditions limites et de corriger ω de façon à satisfaire la deuxième condition limite sur ψ .

On trouve dans la littérature deux types de méthodes. Le premier type utilise les techniques de matrice d'influence pour satisfaire exactement les conditions aux limites. Les méthodes du

second type se basent sur les développements limités pour approcher ces conditions. On rappelle ici les algorithmes principaux découlant de ces deux approches et on conclut par la présentation d'une méthode simple permettant la prise en compte des conditions limites de façon précise.

Méthodes exactes de prise en compte de la condition de non glissement

Méthode de Quartapelle

Pour satisfaire les deux conditions limites sur ψ , Quartapelle [73] utilise le théorème suivant dont la démonstration découle immédiatement d'intégrations par parties :

Théorème 2.2 $\nabla^2\psi = -\omega$ dans Ω , $\psi = f$ et $\frac{\partial\psi}{\partial n} = g$ si et seulement si :

$$\int_{\Omega} \omega v dx = \int_{\partial\Omega} (f \frac{\partial v}{\partial n} - gv) d\sigma_x \quad (2.10)$$

pour toute fonction harmonique $v \in \Omega$.

L'équivalent discret de cette condition est obtenu en choisissant un nombre de fonctions de bases harmoniques égal au nombre de points de discrétisation, puis, on écrit la condition (2.10) sur ω pour chacune de ces fonctions. Quartapelle propose de résoudre le système obtenu par méthode itérative. Il pose donc :

$$\psi^{n+1} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \psi^{n+1,m}$$

$$\omega^{n+1} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \omega^{n+1,m}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla^2 - eI)\omega^{n+1,m+1} - ReJ(\omega^{n+1,p}, \psi^{n+1,q}) = -eI\omega^n \\ \int_{\Omega} \omega^{n+1,m+1} v dx = \int_{\partial\Omega} (f^{n+1} \frac{\partial v}{\partial n} - g^{n+1} v) d\sigma_x \\ \nabla^2 \psi^{n+1,m+1} = -\omega^{n+1,m+1} \\ \psi^{n+1,m+1}|_{\partial\Omega} = f^{n+1} \end{array} \right.$$

avec

$$e = \frac{Re}{\Delta t}$$

Les indices p et q sont ajustés suivant le traitement en temps choisi. Pour un calcul explicite de la fonction courant et de la vorticité, il faut prendre $p = q = m$. Pour un calcul explicite de la fonction courant et implicite de la vorticité, il faut prendre $p = m + 1$, $q = m$. Il faut prendre $p = m$, $q = m + 1$, si on veut faire un calcul explicite sur la vorticité et implicite sur la fonction courant.

L'efficacité de cette méthode dépend de la nature de l'écoulement. En présence de variations rapides du champ de vorticité, la méthode itérative converge lentement; ce qui rend le coût de calcul important. Elle est efficace pour les écoulements qui convergent vers un état stationnaire.

Méthode d'Anderson

La méthode d'Anderson [4] découle de la remarque suivante. Pour assurer la condition de non glissement, il suffit d'assurer que la dérivée en temps de $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ vérifie le système :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x, 0) = g \quad (2.11)$$

et

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = \frac{d}{dt} g \quad (2.12)$$

La vorticité est  rite sous forme de deux fonctions :

$$\omega = \omega_{int} + \omega_{bdry} \quad (2.13)$$

où ω_{int} représente la vorticité sur les points de grille intérieurs du domaine et elle est nulle sur le bord; inversement, ω_{bdry} est nulle sur les points de grille intérieurs. L'évolution de ω_{int} est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \omega_{int} = L(\omega_{int}) + L(\omega_{bdry}) \quad (2.14)$$

où

$$L(\omega) = -(u \nabla) \omega + \nu \nabla^2 \omega$$

Notons D_h^n l'approximation de $\frac{\partial}{\partial n}$ sur le bord et $G_h = (\nabla_h^2)^{-1}$, on peut écrire,

$$\psi = -G_h(\omega_{int})$$

et

$$D_h^n(\psi_h) = -D_h^n(G_h(\omega_{int}))$$

L'équivalent discret de (2.12) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} D_h^n(G_h(\omega_{int})) = -\frac{d}{dt} g$$

en utilisant (2.14), on trouve :

$$D_h^n G_h(L(\omega_{int} + L(\omega_{bdry}))) = -\frac{d}{dt} g$$

Le calcul de la contribution de ω sur le bord se ramène donc à la résolution d'un système linéaire de taille M^2 où M est le nombre de points de grille sur le bord du domaine Ω . La matrice de ce système a une structure pleine mais elle doit être inversée une seule fois. Cependant, son c t global reste important par rapport aux autres étapes de calcul dans un code de calcul explicite.

Méthode de Cottet et Daube

Cottet[29] et Daube[33] proposent la prise en compte exacte des conditions limites en remplaçant l'équation de Poisson sur la fonction courant ψ par deux équations de Poisson sur les deux composantes u_x et u_y de la vitesse u . A partir des valeurs de la vorticité et des vitesses à un instant donné, on peut déduire la vorticité à l'intérieur du domaine à l'instant suivant. On calcule ensuite les nouvelles vitesses en résolvant le système :

$$\begin{cases} \nabla^2 u &= -\nabla \wedge (\omega k) & \text{dans } \Omega \\ u &= u_e & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Enfin, on calcule la nouvelle vorticité sur le bord du domaine en posant :

$$\omega|_{\partial\Omega} = \nabla \wedge u|_{\partial\Omega}$$

Ce calcul permet la prise en compte directe des conditions limites sur (u_x, u_y) . La condition de non glissement est alors satisfaite. Cette méthode nécessite néanmoins l'inversion de deux laplaciens au lieu d'un seul pour la fonction courant.

Méthodes approchées de prise en compte de la condition de non glissement

Le traitement par méthode approchée de la condition de non glissement a été envisagé très tôt par Thome [83]. Il propose de considérer des points de grille fictifs permettant de traduire la condition de non glissement par une équation sur la vorticité au bord. Son algorithme peut se résumer de la manière suivante.

Formule de Thom

On veut résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\omega + \nabla \cdot (u\omega) &= \nu \nabla^2 \omega & \text{dans } \Omega \\ \nabla^2 \psi &= -\omega & \text{dans } \Omega \\ u &= \nabla \wedge \psi & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.15)$$

avec les conditions limites :

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

Notons i, j respectivement les indices de numérotation du domaine de calcul dans les directions x et y avec $j = 0$ sur le bord Γ_x , et $i = 0$ sur le bord Γ_y . Les valeurs de $\{\omega_{ij}^{n+1}\}$ sur les noeuds intérieurs sont calculées comme dans la section précédente, le schéma classique du laplacien nous permet de calculer $\{\psi_{ij}^{n+1}\}$ sur tout le domaine en respectant la condition de Dirichlet ($\psi = 0$) sur le bord. La condition de Neumann ($\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$) sur Γ_x est imposée en posant :

$$\frac{\psi_{i,1} - \psi_{i,-1}}{2h_y} = 0. \quad (2.16)$$

Les noeuds $\{(i, -1)\}$ sont les points de grille fictifs. L'équation (2.16) nous permet de déduire les valeurs de $\psi_{i,-1}$, et cela nous permet de calculer les valeurs de ω sur le bord Γ_x par :

$$\omega_{i,0} = (\Delta_h \psi)_{i,0} = \frac{\psi_{i+1,0} - 2\psi_{i,0} + \psi_{i-1,0}}{h_x^2} + \frac{\psi_{i,1} - 2\psi_{i,0} + \psi_{i,-1}}{h_y^2} = \frac{2}{h_y^2} \psi_{i,1} \quad (2.17)$$

Sans condition de régularité supplémentaire sur le flot, l'analyse de la consistance nous donne une précision d'ordre $O(h)$ de cette formule. Meth [65] démontre la stabilité de cette formule utilisée avec le schéma différences-finies centrées précédent. Hou et Wetton [46] démontrent la convergence d'ordre deux des vitesses calculées par cet algorithme pour le système de Navier-Stokes complet.

D'autres auteurs proposent des variantes plus précises. Leur procédé consiste à rajouter des points fictifs ce qui permet de faire des développements limités à un ordre supérieur. Citons par exemple Briley [12] qui propose des formules d'ordre trois sur le bord du domaine. Ces formules sont obtenues par les approximations qui suivent.

En utilisant les mêmes notations que ci-dessus, Briley propose de rajouter deux couches $\{(i, -1)\}$ et $\{(i, -2)\}$ de points de grille fictifs. Les valeurs de ψ sur ces couches sont déduites par discrétisation du quatrième ordre de la dérivée normale :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_{i,0}} = \frac{-3\psi_{i,-1} - 8\psi_{i,-1} + 8\psi_{i,1} - \psi_{i,2}}{12h_y} + O(h^4) = 0. \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_{i,0}} = \frac{\psi_{i,-2} - 10\psi_{i,0} + 18\psi_{i,1} - 6\psi_{i,2} + \psi_{i,3}}{12h_y} + O(h^4) = 0. \quad (2.19)$$

On en déduit alors :

$$\psi_{i,-1} = 6\psi_{i,1} - 2\psi_{i,2} + \frac{1}{3}\psi_{i,3} - 4h_y \frac{\partial \psi}{\partial n_{i,0}} + O(h^5) \quad (2.20)$$

et

$$\psi_{i,-2} = 40\psi_{i,1} - 15\psi_{i,2} + \frac{8}{3}\psi_{i,3} - 20h_y \frac{\partial \psi}{\partial n_{i,0}} + O(h^5) \quad (2.21)$$

La valeur de la vorticité sur le bord est ensuite calculée par la formule d'ordre quatre :

$$\omega_{i,0} = \frac{1}{12h_y^2} (16(\psi_{i,-1} + \psi_{i,1}) - (\psi_{i,-2} + \psi_{i,2})) + O(h^4) \quad (2.22)$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\omega_{i,0} = \frac{108\psi_{i,1} - 27\psi_{i,2} + 4\psi_{i,3}}{18h_y^2} - \frac{11}{3h_y} \frac{\partial \psi}{\partial n_{i,0}} + O(h^3) \quad (2.23)$$

On trouve aussi différentes formules locales basées sur le même type d'analyse dans Weinan et Liu [85].

Dans ce travail, on impose directement les conditions limites sur les vitesses en posant :

$$u_x(x_i, 0) = u_x^e(x_i, 0) \quad (2.24)$$

$$u_y(x_i, 0) = u_y^e(x_i, 0) \quad (2.25)$$

On calcule ensuite la fonction courant par :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi & = & -\omega & \text{à l'intérieur de } \Omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau}(x_i, 0) & = & -u_y(x_i, 0) & \text{sur } \Gamma_x \end{cases}$$

On calcule les nouvelles vitesses à l'intérieur du domaine par différences-finies :

$$u = \nabla \wedge \psi$$

et enfin, on calcule la nouvelle vorticité sur le bord du domaine par estimation du rotationnel de la vitesse comme dans la méthode de Cottet et Daube :

$$\omega|_{\partial\Omega} = \nabla \wedge u|_{\partial\Omega}$$

Ce qui nous donne :

$$\omega(x_i, 0) = \frac{u_y(x_{i+1}, 0) - u_y(x_{i-1}, 0)}{2h} + \frac{3u_x(x_i, 0) - 4u_x(x_i, h) + u_x(x_i, 2h)}{2h} \quad (2.26)$$

Ce procédé permet de prendre en compte de façon discrète la condition limite de non glissement et d'estimer la vorticité sur le bord avec une erreur d'ordre $O(h^2)$. Il a l'avantage d'être très simple à implémenter par rapport aux formules de Briley. Il n'est pas nécessaire de considérer des points fictifs et de calculer par extrapolation sur ces points les valeurs de la fonction courant. Les tests numériques montrent que bien que d'un ordre inférieur, la méthode (2.24..2.24) est d'une précision comparable à la formule de Briley. Les figures Fig.[2.1] montrent une comparaison entre cette méthode et la méthode de points fictifs sur une simulation d'écoulement de cavité. Dans cette simulation, la discrétisation du terme de convection est faite par le schéma d'Arakawa et du terme de diffusion par différences-finies centrées. Le nombre de Reynolds est $Re = 1500$, le nombre de points de grille est $(m, n) = (128, 128)$ et le pas de temps est $\Delta t = 0.008$. Une présentation détaillée du problème de cavité sera exposée en dernière section dans le cadre des tests de validation numérique.

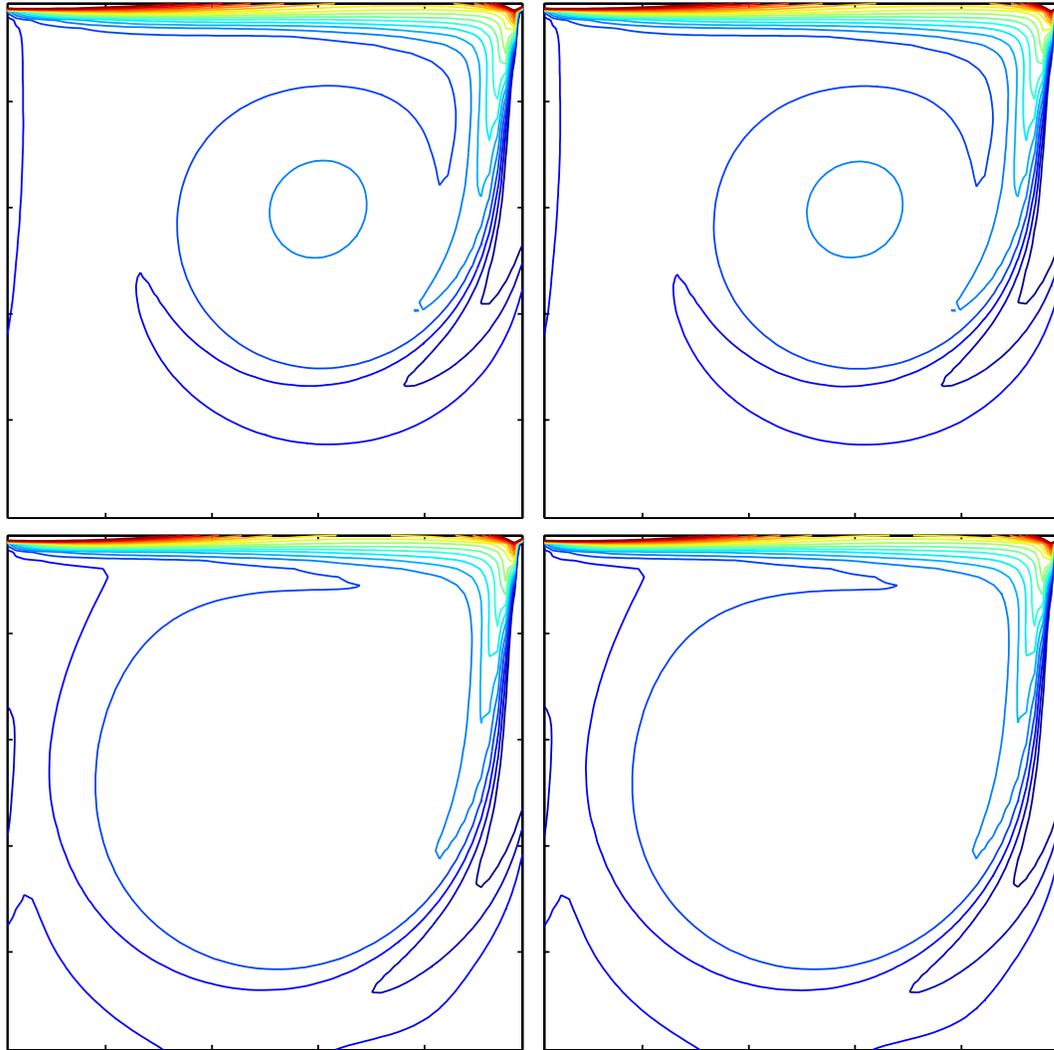


FIG. 2.1 – Vorticité. En haut : $t = 10$, en bas : $t = 20$. A gauche : calcul de la vorticité sur le bord par les formules (2.24-2.26); à droite : calcul de la vorticité sur le bord par les formules de Briley (2.20-2.23). A l'intérieur le terme de convection est discrétisé par le schéma d'Arakawa et le terme de diffusion par les différences-finies centrées

2.2 L'équation de Navier-Stokes en formulation (vitesse-pression)

On a vu que l'écriture de l'équation de Navier-Stokes en formulation (vitesse-tourbillon) permet l'obtention d'un système de deux équations : une sur la fonction courant ψ et l'autre sur la vorticité ω . La résolution numérique devient alors agréable, car à chaque pas de temps, on peut calculer d'abord l'évolution de la vorticité, puis réactualiser la fonction courant. En dimension deux, les variables ψ et ω restent des quantités scalaires. Or, en trois dimensions, elles deviennent des vecteurs. Le coût de calcul sera alors plus important. Il est donc préférable de réaliser des algorithmes de résolution en formulation (vitesse-pression) car ces algorithmes restent identiques en deux ou trois dimensions. Le découplage de l'équation nécessaire à la résolution peut se faire par méthode de projection. Un autre avantage de cette méthode est la prise en compte exacte des conditions limites aux bords d'obstacles, car ces conditions sont données de façon explicite sur la vitesse. On présente ici des variantes de la méthode de projection basée sur les schémas proposés par Chorin [22], Temam [82] et Goda [39].

2.2.1 Schémas de projection

Les schémas de projection consistent à introduire une variable supplémentaire (vitesse intermédiaire) afin de découpler les effets de la diffusion de ceux de l'incompressibilité. Cette vitesse est calculée dans une étape de prédiction, puis, projetée dans l'espace des fonctions à divergence nulle (  tape de correction). Les premiers schémas de ce type ont été proposés par Chorin [22] et Temam [82]. Leur algorithme peut se résumer dans les lignes suivantes :

- Calcul de la vitesse intermédiaire :

$$\begin{cases} \frac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{\delta t} - \nu \Delta \tilde{u}^{n+1} + (u^n \nabla) u^n = 0 & \text{dans } \Omega \\ \tilde{u}^{n+1} - u_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Calcul de la pression :

$$\begin{cases} \Delta p^{n+1} - \frac{\nabla \cdot \tilde{u}^{n+1}}{\delta t} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla p^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Calcul de la vitesse :

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{\delta t} + \nabla p^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega \\ u^{n+1} - u_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Dans ce schéma, le terme de diffusion est appliqué à la vitesse intermédiaire \tilde{u}^{n+1} au lieu de u^{n+1} qui n'est pas connue pendant le calcul. Cela revient à supposer que les dérivées d'ordre trois de la pression p^{n+1} sont négligeables, ce qui limite la précision du schéma. Plusieurs variantes ont été alors introduites par la suite pour augmenter l'ordre de la précision de cet algorithme. Dans cet ordre d'idée, le schéma de Goda[39] consiste à faire la prédiction-corr  ction

sur une différence de pression au lieu de la faire directement sur la pression physique. La précision du schéma de projection est alors augmentée, mais la connaissance de la condition initiale sur la pression devient nécessaire. L'algorithme de Goda peut s'écrire :

- Calcul de la vitesse intermédiaire :

$$\begin{cases} \frac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{\delta t} - \nu \Delta \tilde{u}^{n+1} + (u^n \nabla) u^n + \nabla p^n = 0 & \text{dans } \Omega \\ \tilde{u}^{n+1} - u_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Calcul de la pression :

$$\begin{cases} \Delta(p^{n+1} - p^n) - \frac{\nabla \cdot \tilde{u}^{n+1}}{\delta t} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial(p^{n+1} - p^n)}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Calcul de la vitesse :

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{\delta t} + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u^{n+1} - u_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

D'autres auteurs utilisent des schémas d'intégration en temps d'ordre plus élevé. L'analyse de convergence de certains de ces algorithmes a été étudiée par Guermond[41] et Pironneau[72].

Dans la suite de ce chapitre, on implémente un schéma de projection avec traitement implicite de la diffusion semblable à celui de Goda[39]. Afin de préserver la précision des calculs, les conditions limites sur la pression au bord sont déduites de l'équation de Navier-Stokes directement. Cela évite le recours aux maillages décalés qui impliquent l'imposition des conditions limites sur des points de grilles ne se trouvant pas sur le bord du domaine.

On implémente aussi un schéma de projection explicite qui nous permet d'éviter l'erreur introduite par la méthode de prédiction-corrrection.

La présence du terme non linéaire de convection impose une condition de stabilité sur le pas de temps ($\Delta t < \frac{h}{\|u\|_\infty}$). Si la diffusion est traitée de façon explicite, le schéma de projection présente une deuxième condition de stabilité ($\Delta t < c \frac{h^2}{\nu}$). Pour les écoulements faiblement visqueux, cette deuxième condition est moins contraignante que celle induite par le terme de convection. Il est alors préférable de traiter les écoulements avec un nombre de Reynolds élevé ($Re > 2000$) de façon explicite. Ces schémas sont présentés ci-dessous. On montre sur des tests numériques qu'en dimension deux, ils restent équivalents aux schémas différences-finies centrées en formulation (vitesse-tourbillon). Ces schémas seront repris en géométrie cylindrique dans le chapitre 5.

Schéma de projection implicite

On donne ci-dessous le système d'équations correspondant au schéma de projection implicite. L'intégration en temps est faite par schéma d'Euler.

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{\delta t} + (u^n \nabla) u^n - \nu \Delta \tilde{u}^{n+1} + \nabla p^n = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{\delta t} + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \tilde{u}^{n+1} - u_e + \delta t(-(u^n \nabla) u^n + \nu \Delta u^n - \nabla p^n) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial(p^{n+1} - p^n)}{\partial n} - \frac{n \cdot (u_e - \tilde{u}^{n+1})}{\delta t} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Algorithme numérique

On pose :

$$\tilde{\nabla}_h(f(x, y)) = (D_x(f(x, y)), D_y(f(x, y)))$$

L'algorithme équivalent au problème P_1 est obtenu par discrétisation d'ordre deux. Il se présente de la manière suivante :

1. Résoudre

$$(Ph_1) \left\{ \begin{array}{l} (\frac{1}{\delta t} - \nu \Delta_h) \tilde{u}^{n+1} = \frac{u^n}{\delta t} - (u^n \nabla_h) u^n - \nabla_h p^n \quad \text{dans } \Omega \\ \tilde{u}^{n+1} = u_e - \delta t((u^n \nabla_h) u^n - \nu \Delta_h u^n + \nabla p^n) \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

2. Résoudre

$$(Ph_2) \left\{ \begin{array}{l} \Delta_h(p^{n+1} - p^n) = \frac{\nabla_h \cdot \tilde{u}^{n+1}}{\delta t} \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial(p^{n+1} - p^n)}{\partial n} = \frac{\tilde{u}^{n+1} - u_e}{\delta t} \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

3. Incrémenter la vitesse

$$u^{n+1} = \tilde{u}^{n+1} - \delta t \nabla_h(p^{n+1} - p^n)$$

Cet algorithme demande la connaissance de la pression à l'instant initial dans le domaine de calcul. Or généralement, on ne connaît initialement que la vitesse. Pour remédier à ce problème, un algorithme semblable à celui de Chorin et Temam est exécuté à la première itération de calcul. Cette étape se résume comme ci-dessous :

1. Résoudre

$$(Ph_3) \left\{ \begin{array}{l} (\frac{1}{\delta t} - \nu \Delta_h) \tilde{u}^{n+1} = \frac{u^n}{\delta t} - (u^n \nabla_h) u^n \quad \text{dans } \Omega \\ \tilde{u}^{n+1} = u_e + \delta t g \quad \text{sur } \partial\Omega \\ g = -(u^n \nabla_h) u^n + \nu \Delta_h u^n \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

2. Résoudre

$$(Ph_4) \begin{cases} \Delta_h p^{n+1} = \frac{\nabla_h \cdot \tilde{u}^{n+1}}{\delta t} & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = g \cdot n & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

3. Incrémenter la vitesse

$$u^{n+1} = \tilde{u}^{n+1} - \delta t \nabla_h p^{n+1}$$

La discrétisation des opérateurs différentiels se fait comme dans la section précédente par différences-finies centrées sur les points intérieurs et par différenciation d'ordre élevé sur le bord par les formules décalées. Dans la suite, on présentera les résultats de calcul de cet algorithme sur le problème test d'écoulement de cavité. Cela nous permet de vérifier sa précision et sa stabilité.

Schéma de projection explicite

Comme le schéma implicite, on introduit dans le schéma explicite une vitesse supplémentaire pour obtenir deux équations : une sur la vitesse et l'autre sur la pression. Cela permet de calculer séparément la vitesse et la pression. Mais le schéma explicite reste plus précis que le schéma implicite car, l'introduction de la vitesse intermédiaire se fait d'une façon implicite et rigoureuse. On n'a pas besoin de faire d'autres hypothèses d'approximation et les conditions limites au bord sont pris de façon exacte. Aussi, il n'est pas nécessaire de connaître la pression à l'instant initial et donc, on n'a pas besoin de faire la première étape de calcul de façon particulière. L'algorithme de ce schéma avec une intégration en temps de type Runge-Kutta d'ordre deux est donné ci-dessous.

Algorithme numérique

L'équation de Navier-Stokes en formulation (vitesse-pression) s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \nabla p - \nu \nabla^2 u = 0 \quad (2.27)$$

L'application du schéma Runge-Kutta d'ordre 2 à cette équation nous donne le système :

$$G^n = -u^n \cdot \nabla u^n + \nu \nabla^2 u^n \quad (2.28)$$

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + \Delta t (G^n + \nabla p^n) \quad (2.29)$$

$$G^{n+\frac{1}{2}} = -u^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla u^{n+\frac{1}{2}} + \nu \nabla^2 u^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.30)$$

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{2} (G^n + G^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^n + \nabla p^{n+\frac{1}{2}}) \quad (2.31)$$

Ce système n'est pas fermé. Il nous manque des équations permettant de déterminer p^n et $p^{n+\frac{1}{2}}$. Ces équations sont obtenues par l'utilisation de l'équation de continuité ($\nabla \cdot u = 0$).

En effet, la multiplication des équations (2.29,2.31) nous donne les deux équations suivantes nécessaires pour fermer le système :

$$\begin{cases} \nabla^2 p^n = -\nabla \cdot G^n & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p^n}{\partial n} = -n \cdot G^n & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 p^{n+\frac{1}{2}} = -\nabla \cdot G^{n+\frac{1}{2}} & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p^{n+\frac{1}{2}}}{\partial n} = -n \cdot G^{n+\frac{1}{2}} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Algorithme discret

L'algorithme discret du schéma explicite s'écrit :

1. Calculer

$$G^n = -u^n \cdot \nabla_h u^n + \nu \nabla_h^2 u^n$$

2. Résoudre

$$(P_h) \begin{cases} \Delta_h(p^n) = -\nabla_h \cdot \tilde{G}^n & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p^n}{\partial n} = -n \cdot G^n & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

3. Calculer

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + \Delta t (G^n + \nabla p^n)$$

4. Calculer

$$G^{n+\frac{1}{2}} = -u^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla_h u^{n+\frac{1}{2}} + \nu \nabla_h^2 u^{n+\frac{1}{2}}$$

5. Résoudre

$$(P'_h) \begin{cases} \Delta_h(p^{n+\frac{1}{2}}) = -\nabla_h \cdot \tilde{G}^{n+\frac{1}{2}} & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p^{n+\frac{1}{2}}}{\partial n} = -n \cdot G^{n+\frac{1}{2}} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

6. Incrémenter la vitesse

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{2} (G^n + G^{n+\frac{1}{2}} + \nabla_h (p^n + p^{n+\frac{1}{2}}))$$

Cet algorithme a été validé en géométrie polaire sur le test d'écoulement derrière un cylindre. Les résultats numériques seront présentés et comparés avec d'autres méthodes dans le chapitre 5.

2.3 Méthodes de décomposition en sous-domaines en différences-finies

Une façon naturelle d'implémenter les méthodes de type différences-finies en géométrie non rectangulaire, est l'utilisation de techniques de décomposition en sous-domaines. Deux approches de ces techniques existent en littérature. La première consiste à subdiviser le domaine

en parties disjointes et d'essayer de satisfaire les relations de continuité sur les interfaces. Des algorithmes de ce type ont été proposés par plusieurs auteurs parmi lesquels Mckerrell et al. [63], Orszag [70], Marini et Quarteroni [60]. La deuxième approche est celle connue sous le nom de méthode itérative de Schwarz. Elle se caractérise par la simplicité de son implémentation et sa robustesse. Elle a été introduite par H.A Schwarz [79] comme moyen théorique permettant la démonstration de l'existence de solutions pour certains problèmes aux limites elliptiques. Plus récemment, Lions [57] a présenté un récapitulatif des applications de cette méthode pour plusieurs problèmes aux limites et leur convergence géométrique. L'analyse numérique de l'algorithme de Schwarz associée à une discrétisation par méthode spectrale est faite par Canuto et Funaro [15].

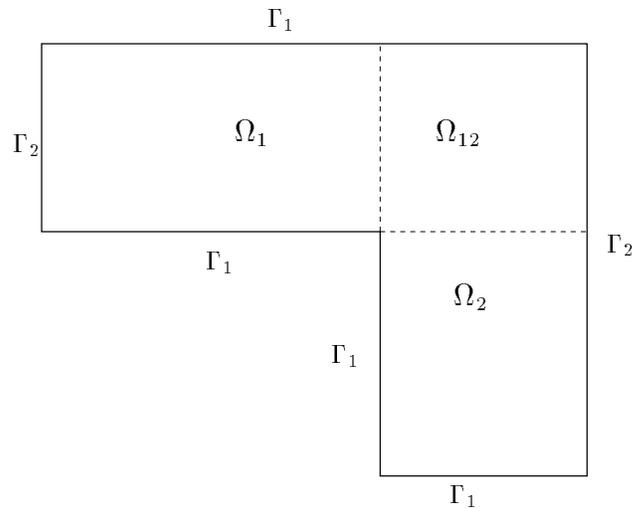


FIG. 2.2 – Décomposition du domaine de calcul ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$)

On présente ici l'implémentation de l'algorithme itératif de Schwarz associé à une discrétisation par différences-finies. On démontre la convergence du schéma discret en se basant sur les idées de la démonstration de la convergence faite par Lions [57] dans le cas continu. On arrive ainsi à préserver la précision d'ordre quatre du schéma différences-finies compact présenté précédemment. Cette méthode est utilisée pour la simulation d'un écoulement dans une conduite et sur une marche.

2.3.1 Méthode de calcul

Les algorithmes différences-finies qu'on a vus précédemment se caractérisent par un traitement explicite de la partie convective de l'équation de Navier-Stokes. Les parties implicites de ces algorithmes se ramènent à la résolution d'une équation de Poisson. Il est évident que les calculs explicites ne présentent aucune difficulté supplémentaire en décomposition en sous-domaines. Il nous reste à établir l'algorithme de décomposition en sous-domaines pour l'équation de Poisson.

2.3.2 Décomposition en sous-domaines pour l'équation de Poisson

On expose dans cette partie l'algorithme de décomposition en sous-domaines pour l'équation de Poisson. La démonstration de la convergence géométrique utilise l'équivalent discret de l'inégalité de Poincaré. Cette inégalité reste valable si, dans chaque sous domaine, les éléments de l'espace de fonctions tests associé sont nuls sur une partie de la frontière du sous domaine de mesure non nulle. On a ainsi la possibilité de combiner des conditions de type Neumann et Dirichlet à condition que les conditions de Dirichlet soient imposées dans chaque sous domaine sur un nombre de points de grille non nul.

Pour simplifier l'écriture, l'algorithme et la démonstration de convergence sont présentés dans le cas particulier du domaine décrit dans la figure Fig.2.2. Le choix de cette géométrie est motivé par la correspondance avec le problème d'écoulement dans une conduite et sur une marche. Cet écoulement est un cas typique où la décomposition en sous-domaines est profitable.

Les conditions limites sur la fonction courant seront choisies de type Dirichlet sur les parois inférieures et supérieures de la conduite et de type Neumann en entrée et en sortie. Cela correspond aux conditions limites physiques d'écoulement dans une conduite et sur une marche.

Le domaine de calcul Ω (Fig.2.2) est divisé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 .

On note :

$$\begin{aligned}\Omega_{12} &= \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ \sigma_1 &= \partial\Omega_1 \cap \Omega_2 \\ \sigma_2 &= \partial\Omega_2 \cap \Omega_1 \\ \sigma_{11} &= \partial\Omega_1 \cap \Gamma_1 \\ \sigma_{12} &= \partial\Omega_1 \cap \Gamma_2 \\ \sigma_{21} &= \partial\Omega_2 \cap \Gamma_1 \\ \sigma_{22} &= \partial\Omega_2 \cap \Gamma_2\end{aligned}$$

Sur Γ_1 , la condition de Neumann sur ψ sera traduite en terme d'équation sur la vorticité au bord comme on l'a vue dans la section 2.1.3. En amont et en aval de la conduite ($(x, y) \in \Gamma_2$), la vitesse doit être horizontale :

$$u_y = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$$

Sur les parois ($(x, y) \in \Gamma_1$), les conditions limites sont les conditions d'adhérence. A l'entrée et à la sortie de la conduite, on a donc :

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial\tau} = 0$$

$$u_y = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$$

Pour ce problème, il suffit de traiter le cas de conditions limites homogènes. Mais, pour rester dans un cadre plus large, on présente la méthode de décomposition en sous-domaine avec des conditions limites générales.

L'équation de Poisson sur la fonction courant s'écrit :

$$(P_2) \begin{cases} \nabla^2\psi &= -\omega & \text{dans } \Omega \\ \psi &= f & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} &= g & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

On sait que si $\omega \in L^2(\Omega)$ alors on aura $\psi \in H^2(\Omega)$ et d'après les injections continues dans les espaces de Sobolev[67], on peut déduire que $\psi \in C^1(\Omega)$. Cela nous permettra de définir des espaces discrets.

La méthode de Schwarz consiste à s'intéresser à la limite de la suite ψ^m définie par :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi^{2m+1} = -\omega & \text{dans } \Omega_1 \\ \psi^{2m+1} = \psi^{2m} & \text{sur } \sigma_1 \\ \psi^{2m+1} = f & \text{sur } \sigma_{11} \\ \frac{\partial \psi^{2m+1}}{\partial n} = g & \text{sur } \sigma_{12} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla^2 \psi^{2m} = -\omega & \text{dans } \Omega_2 \\ \psi^{2m} = \psi^{2m-1} & \text{sur } \sigma_2 \\ \psi^{2m} = f & \text{sur } \sigma_{21} \\ \frac{\partial \psi^{2m}}{\partial n} = g & \text{sur } \sigma_{22} \end{cases}$$

Soit $\{x_k\}_{k \in I}$ de cardinal N_d un maillage uniforme de pas de discrétisation h sur $\overline{\Omega}$, on note :

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \{i \in I; x_i \in \Omega\} \\ \hat{I} &= \{i \in I; (x_i + (h, h)) \in \overline{\Omega}\} \\ \tilde{I} &= \{i \in I; x_i \in \Gamma_1\} \\ \check{I} &= \{i \in I; x_i \in \Gamma_2\} \end{aligned}$$

On définit de même $I_k, \hat{I}_k, \tilde{I}_k,$ et \check{I}_k en remplaçant Ω par Ω_k . On note aussi :

$$\begin{aligned} \Omega^h &= \{x_i; i \in \hat{I} \cup \check{I}\} \\ \Omega_k^h &= \{x_i; i \in \hat{I}_k \cup \check{I}_k\} \end{aligned}$$

Le problème P_2 discrétisé par différences-finies s'écrit :

$$P_2^h \begin{cases} \Delta_h \psi^h = -\omega & \text{dans } \Omega^h \\ \psi^h = f & \text{sur } \Gamma_1^h \\ \frac{\partial \psi^h}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_2^h \end{cases}$$

et l'équivalent discret de la méthode de Schwarz consiste à :

- Choisir ψ_0^h sur σ_1^h quelconque.
- Calculer ψ_{2m+1}^h dans $H^1(\Omega_1)$ tel que :

$$P_{2m+1}^h \begin{cases} \Delta_h \psi_{2m+1}^h = -\omega & \text{dans } \Omega_1^h \\ \psi_{2m+1}^h = \psi_{2m}^h & \text{sur } \sigma_1^h \\ \psi_{2m+1}^h = f & \text{sur } \sigma_{11}^h \\ \frac{\partial \psi_{2m+1}^h}{\partial n} = g & \text{sur } \sigma_{12}^h \end{cases}$$

- Calculer ψ_{2m}^h dans $H^1(\Omega_2)$ tel que :

$$P_{2m}^h \begin{cases} \Delta_h \psi_{2m}^h = -\omega & \text{dans } \Omega_2^h \\ \psi_{2m}^h = \psi_{2m-1}^h & \text{sur } \sigma_2^h \\ \psi_{2m}^h = f & \text{sur } \sigma_{21}^h \\ \frac{\partial \psi_{2m}^h}{\partial n} = g & \text{sur } \sigma_{22}^h \end{cases}$$

Les fonctions ψ_{2m+1}^h et ψ_{2m}^h peuvent être prolongées sur Ω^h en posant $\psi_{2m+1}^h = \psi_{2m}^h$ sur $\Omega_1^h \setminus \Omega_2^h$ et $\psi_{2m}^h = \psi_{2m+1}^h$ sur $\Omega_2^h \setminus \Omega_1^h$.

Cette suite converge géométriquement vers la solution ψ^h du problème P_2^h :

Théorème 2.3 La suite ψ_m^h définie ci-dessus converge vers ψ^h solution du problème P_2^h dans le sens suivant :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{i \in I} |\psi_m^h(x_i) - \psi^h(x_i)| = 0$$

et il existe $r \in [0, 1[$ indépendant de h tel que :

$$\sup_{i \in I} |\psi_{m+1}^h(x_i) - \psi^h(x_i)| \leq r^m \sup_{i \in I} |\psi_0^h(x_i) - \psi^h(x_i)|$$

Idée de la démonstration :

Comme dans le cas continu (Lions [57]) on montre d'abord que cette méthode itérative est équivalente à une suite de projections :

$$\psi_{2m+1}^h - \psi^h = P_{V_1^\perp}(\psi_{2m}^h - \psi^h) \quad \forall m \geq 0$$

$$\psi_{2m}^h - \psi^h = P_{V_2^\perp}(\psi_{2m-1}^h - \psi^h) \quad \forall m \geq 1$$

Ensuite, on montre que la composition de ces deux projections définit une application contractante :

$$\|P_{V_2^\perp} P_{V_1^\perp}\| \leq r, \quad r \in [0, 1[$$

Dans le cas continu, la démonstration de cette inégalité se base sur l'hypothèse d'existence de fonctions \mathcal{X}_i caractéristiques par domaine vérifiant :

$$\sum_i \mathcal{X}_i = 1$$

$$\|\nabla \mathcal{X}_i\| \leq C \text{dist}(x, \partial\Omega)^{-1}$$

Dans le cas discret, on obtient cette inégalité en construisant une décomposition des éléments de l'espace de fonctions tests $V(\Omega)$ en sommes d'éléments des espaces tests $V(\Omega_1)$ et $V(\Omega_2)$:

$$\forall v \in V(\Omega), \quad \exists (v_1, v_2) \in V(\Omega_1) \times V(\Omega_2), \quad v = v_1 + v_2$$

et

$$\|v_i\| \leq \|v\|, \quad i = 1, 2$$

Démonstration

Le théorème précédent équivaut à montrer que :

$$\sup_{i \in I} |v_i^{m+1}| \leq r^m \sup_{i \in I} |v_i^0| \tag{2.32}$$

où v_m est un vecteur de \mathbb{R}^{N_d} défini par :

$$v_m(i) = \psi_{m+1}^h(x_i) - \psi^h(x_i)$$

On peut montrer que v_m vérifie :

$$\Delta_h v^{2m+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1^h \quad (2.33)$$

$$v^{2m+1} = v^{2m} \quad \text{sur } \sigma_1^h \quad (2.34)$$

$$v^{2m+1} = 0 \quad \text{sur } \sigma_{11}^h \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial v^{2m+1}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \sigma_{12}^h \quad (2.36)$$

$$\Delta_h v^{2m} = 0 \quad \text{dans } \Omega_2^h \quad (2.37)$$

$$v^{2m} = v^{2m-1} \quad \text{sur } \sigma_2^h \quad (2.38)$$

$$v^{2m} = 0 \quad \text{sur } \sigma_{21}^h \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial v^{2m}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \sigma_{22}^h \quad (2.40)$$

Soit le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^{N_d} suivant :

$$V = \{(\lambda_i)_{i \in I}; \lambda_i = 0 \text{ si } i \in \tilde{I}\}$$

et les deux sous-espaces de V :

$$V_1 = \{(\lambda_i)_{i \in I_1}; \lambda_i = 0 \text{ si } i \in \tilde{I}_1\}$$

$$V_2 = \{(\lambda_i)_{i \in I_2}; \lambda_i = 0 \text{ si } i \in \tilde{I}_2\}$$

On définit les notations suivantes :

$$D_x^+(f(x, y)) = \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x}$$

$$D_x^-(f(x, y)) = \frac{f(x, y) - f(x - h_x, y)}{h_x}$$

$$D_y^+(f(x, y)) = \frac{f(x, y + h_y) - f(x, y)}{h_y}$$

$$D_y^-(f(x, y)) = \frac{f(x, y) - f(x, y - h_y)}{h_y}$$

$$\nabla_h(f(x, y)) = (D_x((f(x, y)), D_y(f(x, y)))$$

$$\nabla_h^+(f(x, y)) = (D_x^+((f(x, y)), D_y^+(f(x, y)))$$

$$\nabla_h^-(f(x, y)) = (D_x^-((f(x, y)), D_y^-(f(x, y)))$$

$$\nabla_h^n(f(x, y))_x = D_x^+((f(x, y)) \text{ si } n_x > 0$$

$$\nabla_h^n(f(x, y))_x = D_x^-((f(x, y)) \text{ si } n_x < 0$$

$$\nabla_h^n(f(x, y))_y = D_y^+((f(x, y)) \text{ si } n_y > 0$$

$$\nabla_h^n (f(x, y))_y = D_y^- (f(x, y)) \text{ si } n_y < 0$$

On définit sur V la forme bilinéaire suivante :

$$\langle u, v \rangle_0 = \sum_{i \in \hat{I}} u_i v_i$$

le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_1 = \sum_{i \in \hat{I}} \nabla_h^+ u_i \nabla_h^+ v_i$$

et les normes :

$$\|u\|_0^2 = \langle u, u \rangle_0$$

$$\|u\|_1^2 = \langle u, u \rangle_1$$

Il est facile de démontrer l'équivalent discret de la formule de Green :

$$\langle \Delta_h u, v \rangle_0 = - \langle u, v \rangle_1 + \sum_{i \in \hat{I}} \nabla_h^n u_i v_i \quad u, v \in V \quad (2.41)$$

On déduit de (2.33-2.40) que :

$$\langle \Delta_h (v^{2m+1} - v^{2m}), v_1 \rangle_0 = \langle \Delta_h v^{2m}, v_1 \rangle_0 \quad \forall v_1 \in V_1, \quad v^{2m+1} - v^{2m} \in V_1 \quad (2.42)$$

$$\langle \Delta_h (v^{2m} - v^{2m-1}), v_2 \rangle_0 = \langle \Delta_h v^{2m-1}, v_2 \rangle_0 \quad \forall v_2 \in V_2, \quad v^{2m} - v^{2m-1} \in V_2 \quad (2.43)$$

et en vertu de (2.41) et de (2.42-2.43) on déduit :

$$\langle v^{2m+1} - v^{2m}, v_1 \rangle_1 = \langle v^{2m}, v_1 \rangle_1 \quad \forall v_1 \in V_1, \quad v^{2m+1} - v^{2m} \in V_1 \quad (2.44)$$

$$\langle v^{2m} - v^{2m-1}, v_2 \rangle_1 = \langle v^{2m-1}, v_2 \rangle_1 \quad \forall v_2 \in V_2, \quad v^{2m} - v^{2m-1} \in V_2 \quad (2.45)$$

Si on désigne par P_V la projection orthogonale sur l'espace V , les équations (2.44-2.45) seront équivalentes à :

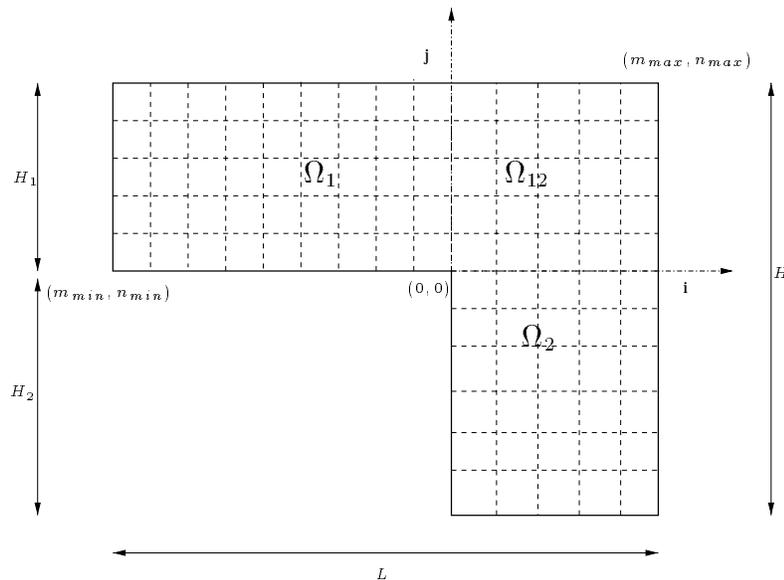
$$v^{2m+1} - v^{2m} = P_{V_1} v^{2m} \quad \forall m \geq 0 \quad (2.46)$$

$$v^{2m} - v^{2m-1} = P_{V_2} v^{2m-1} \quad \forall m \geq 1 \quad (2.47)$$

or de façon équivalente :

$$v^{2m+1} = P_{V_1^\perp} v^{2m} \quad \forall m \geq 0 \quad (2.48)$$

$$v^{2m} = P_{V_2^\perp} v^{2m-1} \quad \forall m \geq 1 \quad (2.49)$$

FIG. 2.3 – Mailles de Ω^h

Montrons que ce processus de projection itératif converge géométriquement. Pour simplifier les notations, on suppose que le maillage du domaine Ω est numéroté comme dans la figure Fig.2.3, alors :

$$\Omega_1^h = \{x_{i,j}, \quad m_{\min} \leq i \leq m_{\max}, \quad 0 \leq j \leq n_{\max}\}$$

$$\Omega_2^h = \{x_{i,j}, \quad 0 \leq i \leq m_{\max}, \quad n_{\min} \leq j \leq n_{\max}\}$$

$$\Omega_{12}^h = \{x_{i,j}, \quad 0 \leq i \leq m_{\max}, \quad 0 \leq j \leq n_{\max}\}$$

On va d'abord montrer l'équivalent discret de l'inégalité de Poincaré.

Lemme 2.1 (Inégalité de Poincaré discrète)

Il existe deux constantes $C_i > 0$, $i \in \{1, 2\}$ ne dépendant que de la taille de Ω_i telle que pour tout $v_i \in V_i$, on a :

$$\|v_i\|_0 \leq C_i \|v_i\|_1$$

Démonstration

On donne la démonstration pour le domaine Ω_1 , le cas de Ω_2 se fait de la même façon.

Soit $v \in V_1$, notons $v_{i,j} = v(x_{i,j})$. Comme v est nulle sur le bord ($j = n_{\max}$) on a :

$$v_{k,l} = \sum_{j=l-1}^{n_{\max}} h \frac{v_{k,j+1} - v_{k,j}}{h}$$

On a alors,

$$v_{k,l}^2 \leq N h^2 \sum_j \left(\frac{v_{k,j+1} - v_{k,j}}{h} \right)^2$$

et

$$\|v\|_0^2 = \sum_{k,l} v_{k,l}^2 \leq N^2 h^2 \sum_{k,l} \left(\frac{v_{k,l+1} - v_{k,l}}{h} \right)^2$$

Comme $h = \frac{L}{N}$ on trouve :

$$\|v\|_0^2 \leq L^2 \|v\|_1^2$$

Lemme 2.2 *Il existe une constante C telle que, pour tout $v \in V$, il existe $v^1 \in V_1$ et $v^2 \in V_2$ tels que :*

- $v = v^1 + v^2$
- $\|v^i\|_1 \leq C \|v\|_1, \quad i \in \{1, 2\}$

Démonstration

Il suffit en effet de choisir :

$$v_{i,j}^1 = \begin{cases} v_{i,j} & \text{si } i \leq 0 \\ \frac{ij}{n_{max}m_{max}} v_{i,j} & \text{si } i > 0, j > 0 \\ 0 & \text{si } j \leq 0 \end{cases}$$

$$v_{i,j}^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq 0 \\ \frac{n_{max}m_{max}-ij}{n_{max}m_{max}} v_{i,j} & \text{si } i > 0, j > 0 \\ v_{i,j} & \text{si } j \leq 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$v = v^1 + v^2$$

et

$$\begin{aligned} \|v^1\|_1 &= \sum_{i < 0, j > 0} \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h} \right)^2 + \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h} \right)^2 \\ &+ \sum_{i \geq 0, j > 0} \left(\frac{(i+1)j v_{i+1,j} - ij v_{i,j}}{n_{max}m_{max}h} \right)^2 + \left(\frac{i(j+1)v_{i,j+1} - ij v_{i,j}}{n_{max}m_{max}h} \right)^2 \\ &\leq 2(\|v\|_1 + \sum_{i \geq 0, j > 0} \left(\frac{j v_{i+1,j}}{n_{max}m_{max}h} \right)^2 + \left(\frac{i v_{i,j+1}}{n_{max}m_{max}h} \right)^2) \end{aligned}$$

Comme $\frac{j}{n_{max}m_{max}h} \leq 1$ et $\frac{i}{n_{max}m_{max}h} \leq 1$, on trouve :

$$\|v^1\|_1 \leq 2(\|v\|_1 + \|v\|_0)$$

et en utilisant le lemme 2.1 (qui est valable aussi dans V) on voit que :

$$\|v^1\|_1 \leq C \|v\|_1$$

On démontre de la même façon que :

$$\|v^2\|_1 \leq C \|v\|_1$$

Lemme 2.3 *Il existe une constante $C_0 > 0$ indépendante de h telle que pour tout $v \in V$ on a :*

$$\|v\| \leq C_0 (\|P_{V_1} v\|^2 + \|P_{V_2} v\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration

Du lemme 2.2 on déduit que pour tout $v \in V$ il existe $v^1 \in V_1, v^2 \in V_2$ tels que $v = v^1 + v^2$ et $\|v^i\|_1 \leq C\|v\|_1, i \in \{1, 2\}$

On a alors :

$$\|v\|^2 = \langle v, v^1 \rangle_1 + \langle v, v^2 \rangle_1 = \langle P_{V_1}v, v^1 \rangle_1 + \langle P_{V_2}v, v^2 \rangle_1$$

et donc

$$\|v\| \leq C_0(\|P_{V_1}v\|^2 + \|P_{V_2}v\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Lemme 2.4 Il existe une constante $r \in [0, 1[$ telle que :

$$\|P_{V_2^\perp}P_{V_1^\perp}\| \leq r$$

Démonstration

La démonstration de ce lemme s'appuie sur le lemme précédent et le fait que $V_1^\perp \cap V_2^\perp = \{0\}$.

On a

$$\|P_{V_1^\perp}v\| \leq C_0\|P_{V_2}P_{V_1^\perp}v\|$$

et

$$\begin{aligned} \|P_{V_1^\perp}v\|^2 &= \|P_{V_2^\perp}P_{V_1^\perp}v\|^2 + \|P_{V_2}P_{V_1^\perp}v\|^2 \\ &\geq \|P_{V_2^\perp}P_{V_1^\perp}v\|^2 + \frac{1}{C_0}\|P_{V_1^\perp}v\|^2 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\|P_{V_2^\perp}P_{V_1^\perp}v\| \leq \left(1 - \frac{1}{C_0}\right)\|P_{V_1^\perp}v\| \leq \left(1 - \frac{1}{C_0}\right)\|v\| \quad \forall v \in V$$

La démonstration du théorème 2.3 est une conséquence de ce lemme car :

$$v^{2m+1} = P_{V_1^\perp}P_{V_2^\perp}v^{2m-1} \tag{2.50}$$

et

$$v^{2m} = P_{V_2^\perp}P_{V_1^\perp}v^{2(m-1)} \tag{2.51}$$

□

2.3.3 Schéma compact en décomposition en sous-domaines

La méthode de décomposition en sous-domaine est maintenant appliquée en formulation (vitesse-tourbillon) avec le schéma de discrétisation différences-finies compact d'ordre quatre. Le seul changement consiste à traiter les résolutions de l'équation de Poisson par la méthode itérative de la section précédente. La convergence géométrique de cette méthode permet de garder un coût très faible de l'algorithme. L'algorithme complet de résolution de l'équation de Navier-Stokes par le schéma compact se résumera alors dans les lignes suivantes :

- Calcul de $\tilde{\omega}^n$ sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$ défini par :

$$\tilde{\omega}^n = \left(1 + \frac{(h_x^2 + h_y^2)}{12}\Delta_h\right)\omega^n$$

- Evolution de $\tilde{\omega}^n$ sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\omega}^{n+1} - \tilde{\omega}^n}{\delta t} &= -D_x \left(1 + \frac{h_y^2}{6} D_y^2\right) (u^n \omega^n) - D_y \left(1 + \frac{h_x^2}{6} D_x^2\right) (v^n \omega^n) \\ &\quad + \left(\frac{h_x^2 D_x^2 + h_y^2 D_y^2}{12}\right) (u^n D_x \omega^n + v^n D_y \omega^n) \\ &\quad - \nu \left(\Delta_h + \frac{h_x^2}{6} D_x^2 D_y^2\right) \omega^n \end{aligned}$$

- Calcul de $\psi^{n+1} = \lim_m \psi^{n+1,m}$; $\{\psi^{n+1,m}\}$ définie par le processus itératif :

$$\begin{aligned} \psi_0^{n+1} &= \psi^n \\ \left\{ \begin{array}{ll} \left(\Delta_h + \frac{h_x^2}{6} D_x^2 D_y^2\right) \psi_{2m+1}^{n+1} &= \tilde{\omega}^{n+1} \quad \text{dans } \Omega_1 \\ \psi_{2m+1}^{n+1} &= \psi_{2m}^{n+1} \quad \text{sur } \sigma_1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \left(\Delta_h + \frac{h_x^2}{6} D_x^2 D_y^2\right) \psi_{2m}^{n+1} &= \tilde{\omega}^{n+1} \quad \text{dans } \Omega_2 \\ \psi_{2m}^{n+1} &= \psi_{2m-1}^{n+1} \quad \text{sur } \sigma_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

- Calcul de ω^{n+1} sur le bord par les formules décalées d'ordres trois de Briely.

$$\omega_{0,j}^{n+1} = \frac{108\psi_{1,j}^{n+1} - 27\psi_{2,j}^{n+1} + 4\psi_{3,j}^{n+1}}{18h_x^2}$$

⋮

- Calcul de $\omega^{n+1} = \lim_m \omega^{n+1,m}$ où la suite $\{\omega^{n+1,m}\}$ est définie par le processus itératif :

$$\begin{aligned} \omega_0^{n+1} &= \omega^n \\ \left\{ \begin{array}{ll} \left(1 + \frac{(h_x^2 D_x^2 + h_y^2 D_y^2)}{12}\right) \omega_{2m+1}^{n+1} &= \tilde{\omega}^{n+1} \quad \text{dans } \Omega_1 \\ \omega_{2m+1}^{n+1} &= \omega_{2m}^{n+1} \quad \text{sur } \sigma_1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \left(1 + \frac{(h_x^2 D_x^2 + h_y^2 D_y^2)}{12}\right) \omega_{2m}^{n+1} &= \tilde{\omega}^{n+1} \quad \text{dans } \Omega_2 \\ \omega_{2m}^{n+1} &= \omega_{2m-1}^{n+1} \quad \text{sur } \sigma_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

- Calcul des vitesses sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$:

$$\begin{aligned} u_x^{n+1} &= -D_y \left(1 - \frac{h_y^2}{6} D_y^2\right) \psi^{n+1} \\ u_y^{n+1} &= -D_x \left(1 - \frac{h_x^2}{6} D_x^2\right) \psi^{n+1} \end{aligned}$$

2.4 Exemples d'écoulements incompressibles

2.4.1 Ecoulement dans une cavité carrée

Comme test de validation des schémas différences-finies centrées et de l'algorithme de projection de ce chapitre, on s'intéresse au problème d'écoulement dans une cavité. La géométrie simple facilite l'implémentation de différentes étapes. On présente des simulations dans le carré unité et avec une vitesse initiale nulle sur tout le domaine sauf en $y = 1$, où on prend $u(x, y) = (1, 0)$. La taille de la grille cartésienne est $h = \frac{1}{N}$ (N^2 est le nombre de degré de liberté). Cet écoulement reste laminaire pour $Re \leq 10000$. Ce cas test est couramment utilisé en littérature, ce qui permet de comparer les résultats avec d'autres méthodes. On cite par exemple, Kustafson et Halasi[49] qui utilisent un schéma de type Mac explicite dans le cas d'une cavité rectangulaire de rapport (A =longueur/largeur=2) et pour des nombres de Reynolds inférieurs à 10000. Scheriber et Keller[78] présentent une méthode de type différences-finies avec un solveur de type Newton après décomposition LU et traitent le cas de cavité carrée avec $Re < 10000$. Bruneau et Jouron[14] proposent un schéma de type upwind avec une résolution par des techniques de type multigrilles. Ils traitent des $Re < 15000$ pour la cavité carrée et des $Re < 10000$, pour la cavité de rapport ($A = 2$). Weinan et Liu [85] utilisent le schéma différences-finies centrées simple d'ordre deux et un schéma d'ordre quatre compact. Ils considèrent sur le bord une vitesse régulière $u(x, 1) = x^2(1 - x)^2$ et traitent des simulations sur des intervalles de temps petits.

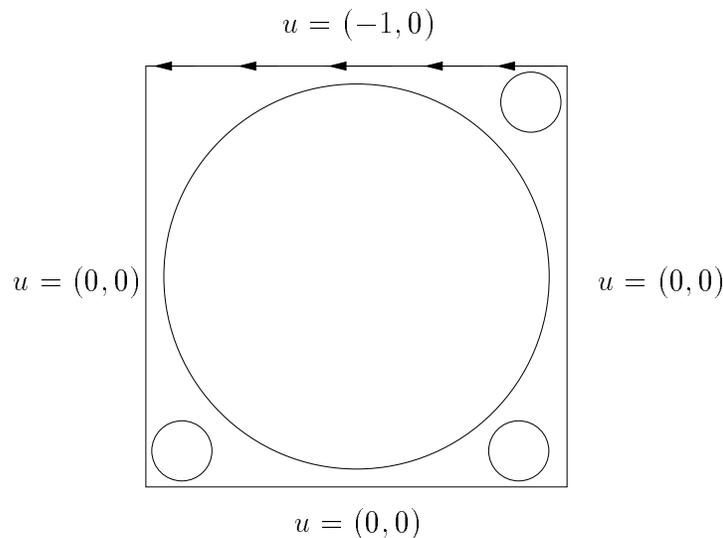


FIG. 2.4 – L'état de convergence statistique se caractérise par un vortex au centre créé par la vorticité primaire et suivant le nombre de Reynolds la vorticité secondaire crée ou pas des vortex dans trois angles de la cavité.

On s'intéresse ici uniquement aux cas de nombre de Reynolds modéré ($100 \leq Re \leq 5000$). Le cas de nombre de Reynolds élevé sera traité dans le chapitre suivant par méthode hybride.

Les simulations effectuées permettent de retrouver l'état de convergence statistique et montrent ainsi la validation en formulation (vitesse-tourbillon) du schéma centré avec le traitement des conditions limites par les formules (2.24-2.26) et en formulation ($u-p$), de l'algorithme implicite du paragraphe 2.2.1. Le schéma de projection implicite est préféré ici au schéma explicite car,

pour des nombres de Reynolds faibles la CFL imposée par traitement explicite de la diffusion et plus importante que celle qui provien du traitement de la convection.

Pour cette intervalle de nombre de Reynolds, l'écoulement converge vers un état stationnaire représenté dans les figures Fig[2.5-??-2.10]. Les deux méthodes de calcul nous donnent les mêmes résultats. Les figures (Fig.[2.6], Fig.[2.7], Fig.[2.8], Fig.[2.9]) présentent l'évolution de l'écoulement vers l'état de convergence pour différents nombre de Reynolds. L'intégration en temps est faite en algorithme de projection par le schéma d'Euler et en formulation (vitesse-tourbillon) par le schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre sans lequel les différences-finies centrées ne sont pas stables. Les paramètres numériques sont donnés par le tableau Tab[2.4.1].

<i>Reynolds</i>	100	2000	3500	5000
N	54	128	164	256
$\delta t_{u-\omega}$	0.01	0.008	0.005	0.004
δt_{u-p}	0.01	0.004	0.0025	0.002

TAB. 2.1 – Paramètres des simulations

2.4.2 Écoulement dans une conduite et sur une marche

Le problème d'écoulement dans une conduite (Fig.2.3) présente un test de validation très sévère des méthodes numériques en décomposition en sous-domaines. Plusieurs études numériques et expérimentales ont été faites sur ce phénomène. Armaly et Al [6] démontrent expérimentalement que l'écoulement dans une conduite reste bidimensionnel si $Re < 400$ ou $Re > 6000$. Par contre pour $400 < Re < 6000$, il devient fortement tridimensionnel. Ils montrent aussi que cet écoulement est laminaire si $Re < 400$ et turbulent si $Re > 6000$. Ghoniem et Gagnon [38] retrouvent les solutions laminaires pour $Re < 230$ en utilisant une méthode lagrangienne de type marche aléatoire.

On utilise ici la méthode de décomposition en sous-domaines décrite dans la section (2.3) pour retrouver les solutions laminaires de l'écoulement dans une conduite pour $Re < 400$. On traite aussi l'écoulement sur une marche pour des nombres de Reynolds plus grands. Le domaine de calcul est limité par $0 \leq x \leq L_1 + L_2$ et $0 \leq y \leq H_1 + H_2$ (Fig.2.3). H_s est la hauteur de la marche. L'écoulement est défini par la vitesse à l'entrée U_1 , et le nombre de Reynolds $Re = \frac{H_s U_1}{\nu}$. On définit une grille uniforme sur le domaine de pas h . Les conditions limites sont données sur ψ et $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ sur les façades supérieures et inférieures de la conduite et sur $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ en amont et en aval. La vorticité en amont est nulle. En aval, les conditions limites sortantes de la vorticité sont obtenues en remplaçant les opérateurs différentiels du terme de convection par des opérateurs décentrés à gauche. Cela permet de se débarrasser de la vorticité qui quitte le domaine de calcul. La condition initiale correspond à un écoulement potentiel produit par une source placée en ($x = -\infty$). La condition de non glissement sur les parois produit une grande vorticité dans la couche limite. De grands tourbillons sont crées dans la zone de recirculation derrière la marche. Ils sont transportés par la convection et s'éloignent rapidement de la marche. Dans le cas de diffusion suffisante ($Re < 400$), la dissipation diminue avec le temps l'intensité de ces tourbillons et on converge vers un état laminaire composé d'un petit nombre de grandes structures tourbillonnaires.

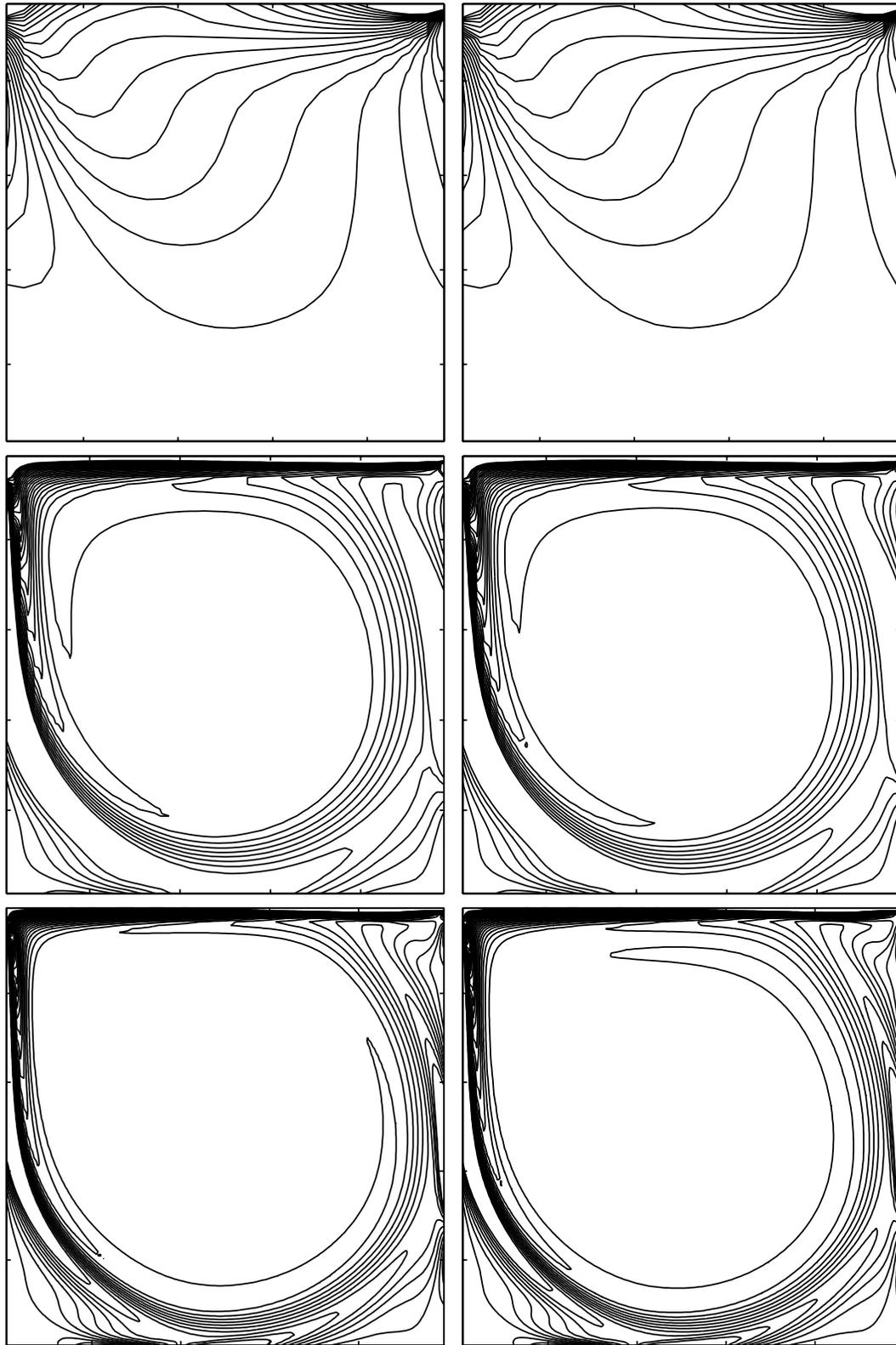


FIG. 2.5 – Vorticité. A gauche : calcul (vitesse-pression); à droite : calcul (vitesse-tourbillon). De haut en bas $Re = \{100, 2000, 5000\}$.

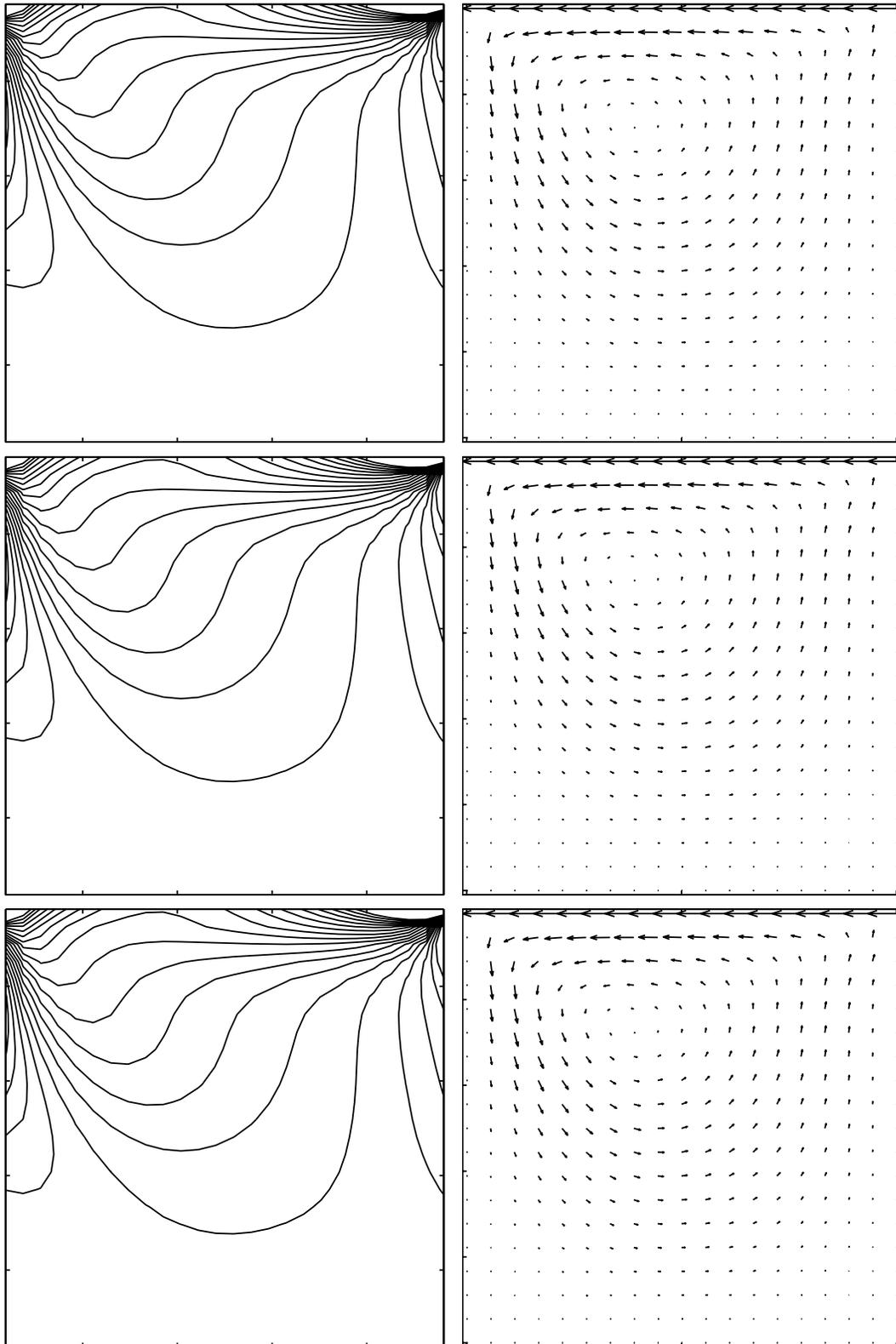


FIG. 2.6 – $Re = 100$. Vorticité et vitesse à $T = 10$, $T = 20$ et $T = 50$.

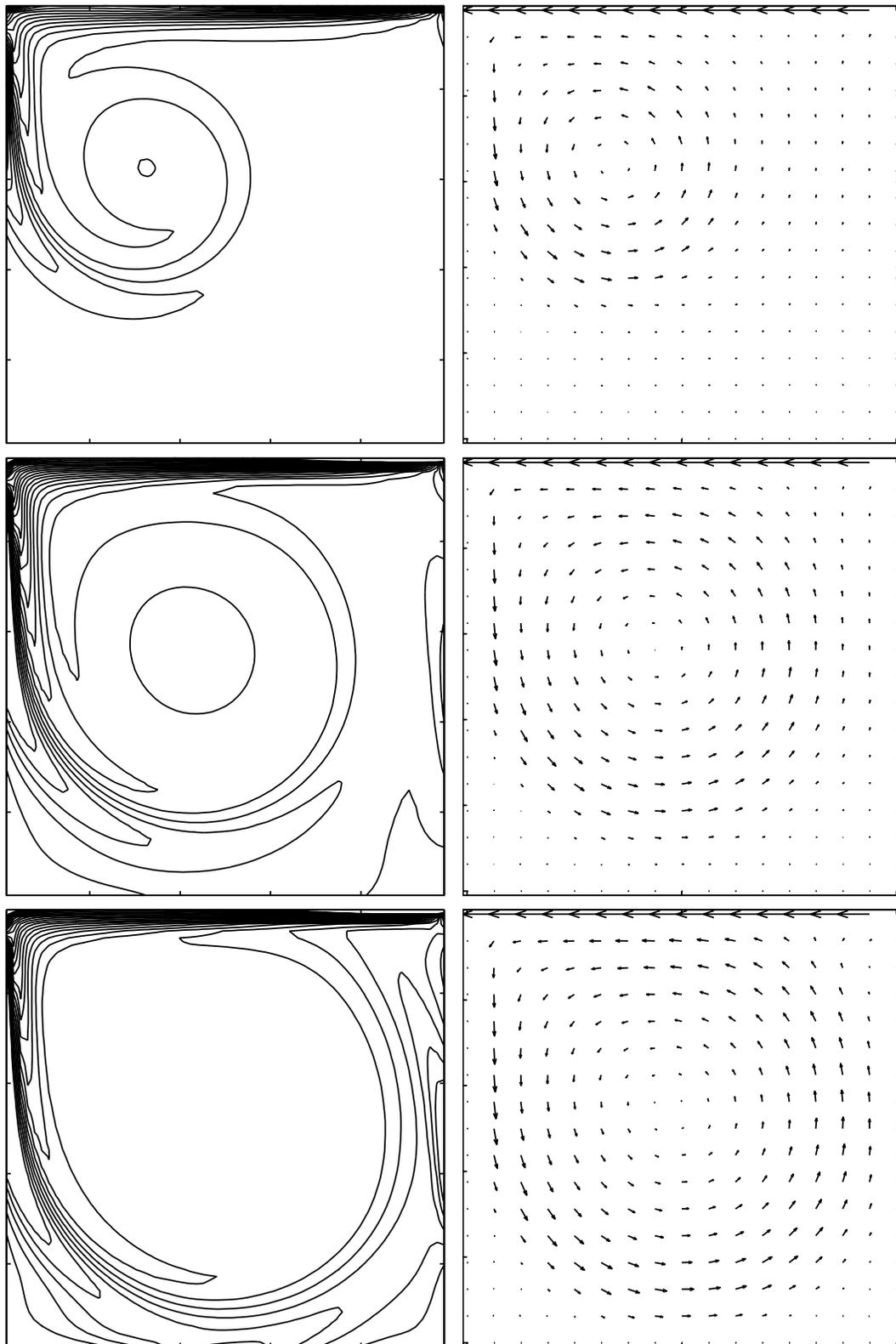


FIG. 2.7 - $Re = 2000$. Vorticité et vitesse à $T = 8$, $T = 16$ et $T = 32$.

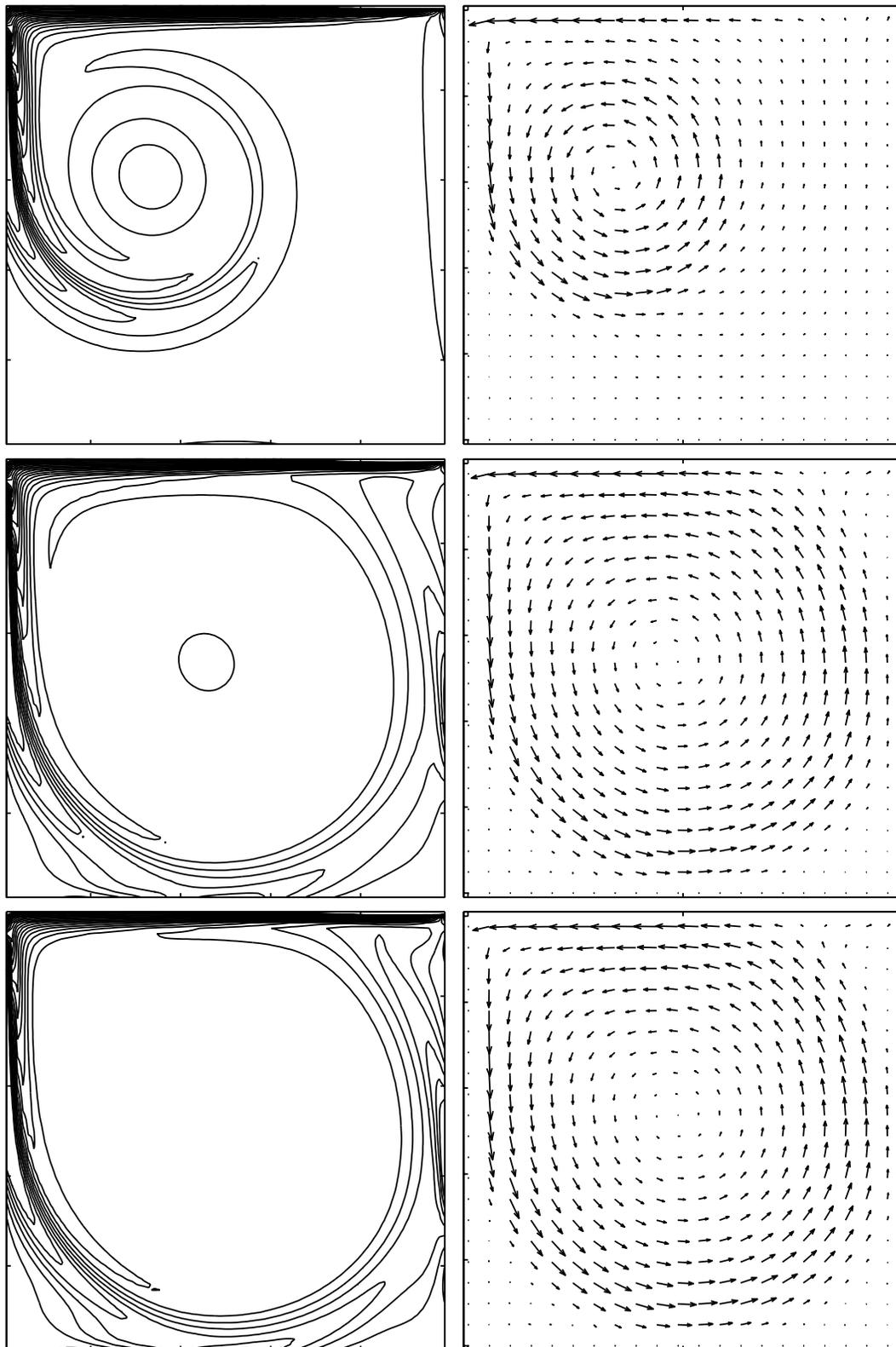


FIG. 2.8 - $Re = 3500$. Vorticité et vitesse à $T = 10$, $T = 30$ et $T = 100$.

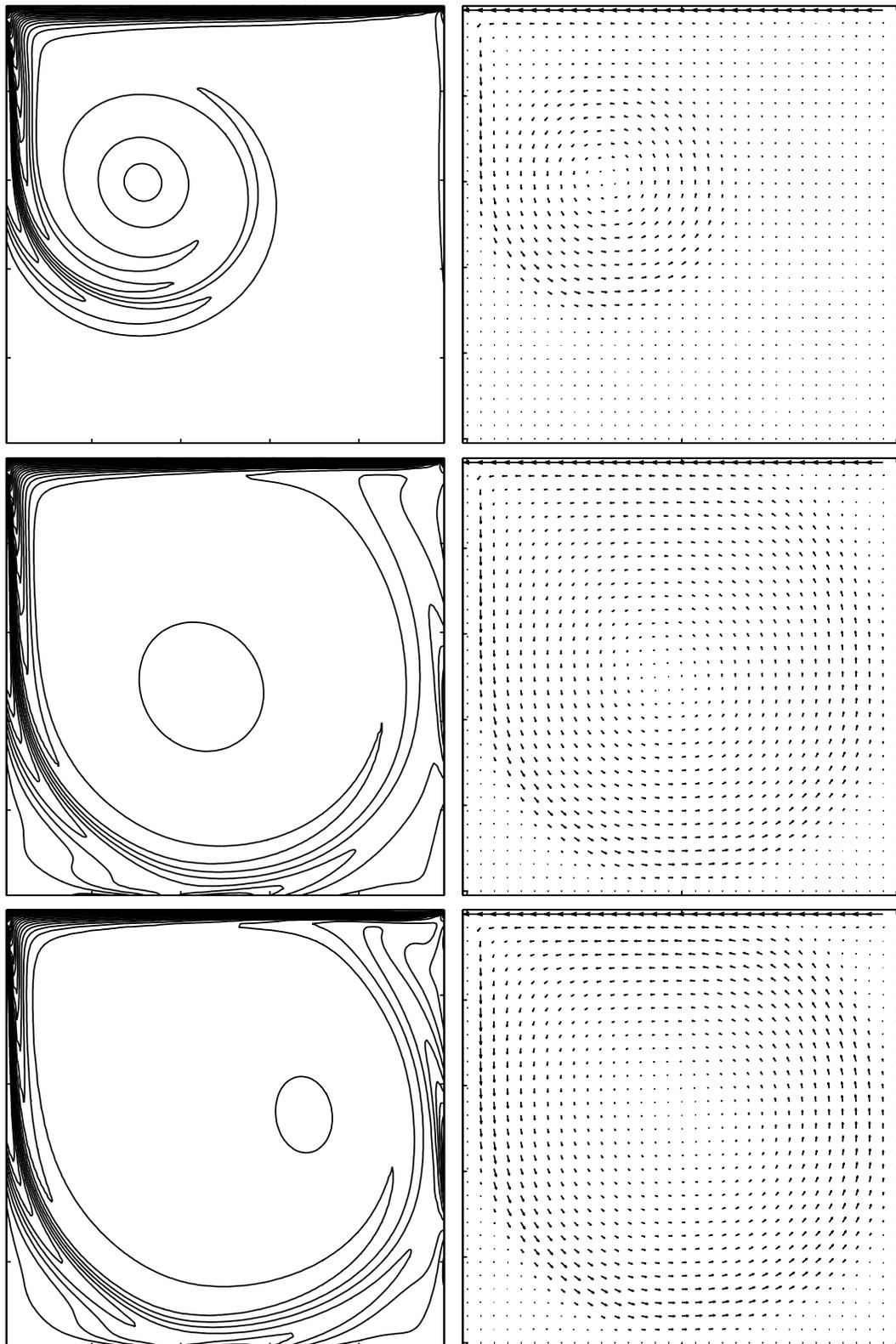


FIG. 2.9 - $Re = 5000$. Vorticité et vitesse à $T = 10$, $T = 30$ et $T = 60$.

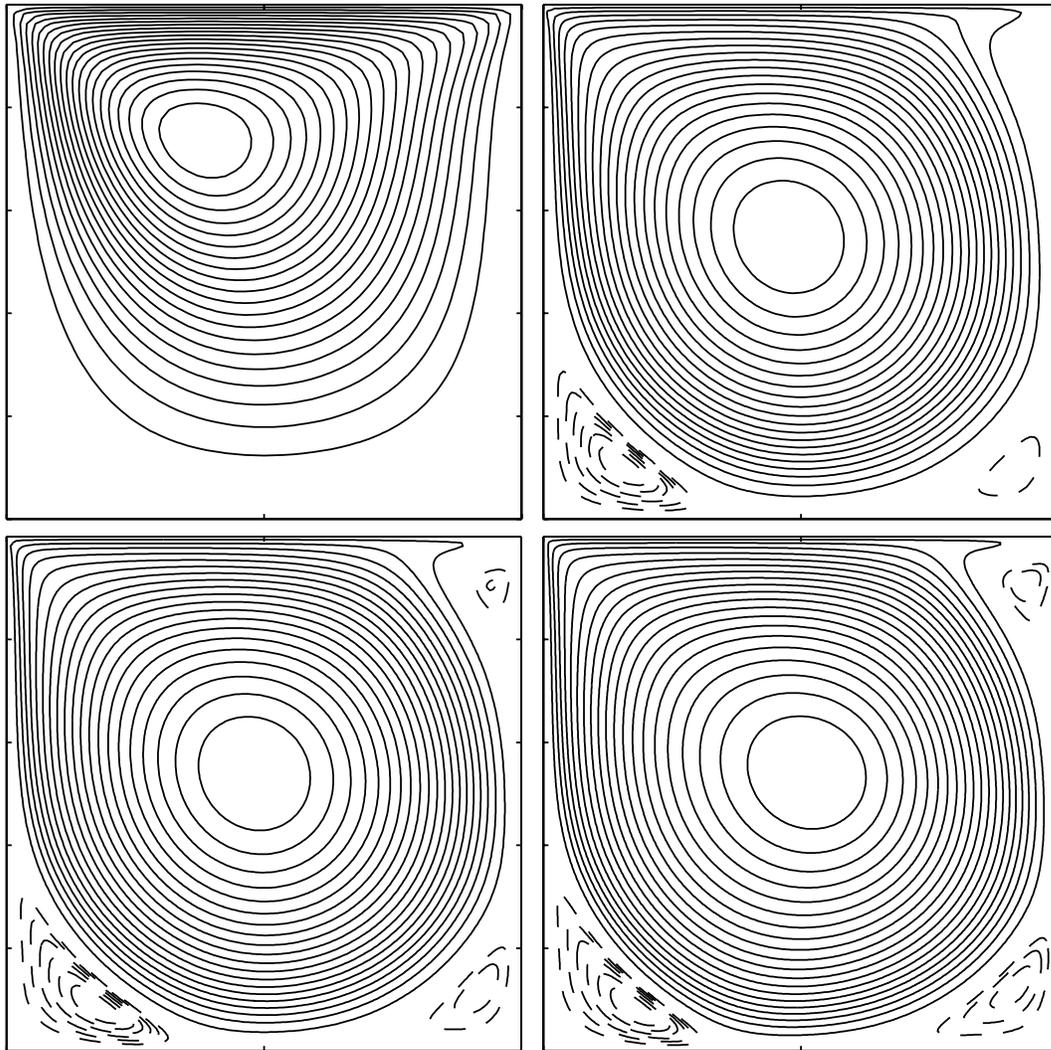


FIG. 2.10 – Fonction courant; de gauche à droite et de haut en bas $Re = \{100, 2000, 3500, 5000\}$.

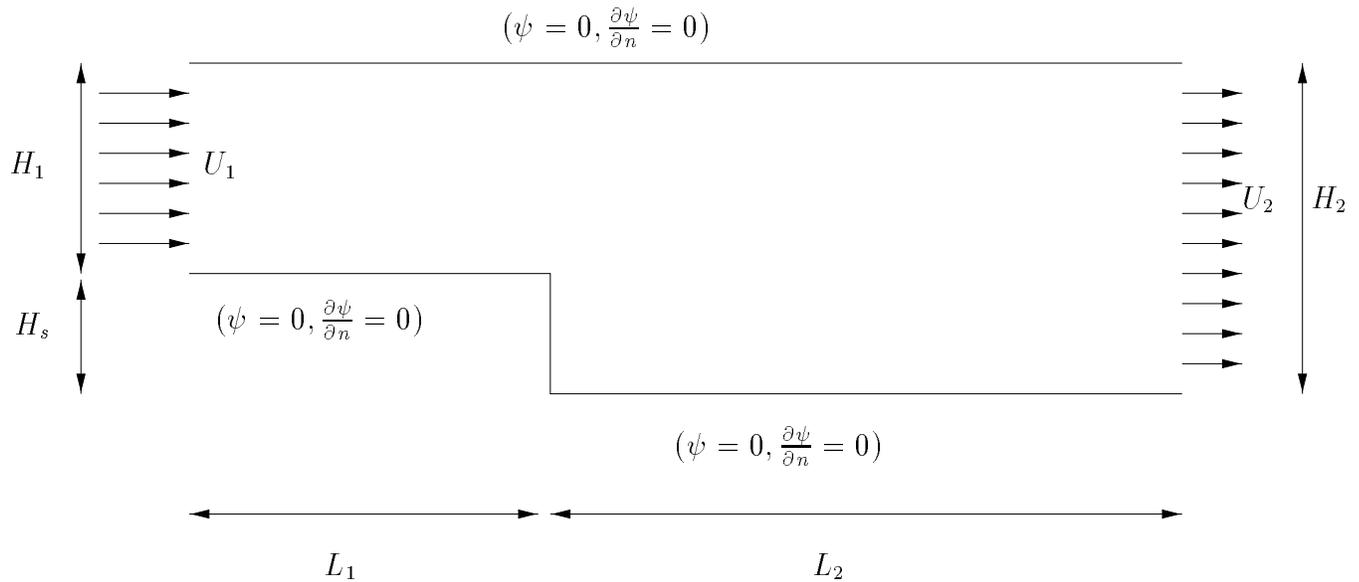


FIG. 2.11 – Conditions limites et initiales pour la conduite

Une moyenne est calculée sur des périodes T_m . Les figures Fig.[2.12- 2.16-2.18] montrent qu'on est bien arrivé à l'état statistiquement stationnaire pour les $Re < 400$. L'indépendance des résultats par rapport au pas de temps et de discrétisation est illustrée par la figure Fig.2.17. On voit en fait qu'on retrouve exactement les mêmes résultats si on divise le pas de temps ou de discrétisation par deux. Un exemple d'écoulement sur une marche est illustré dans la figure Fig.[2.21] pour $Re = 900$. Le lâchage de tourbillons pour ce nombre de Reynolds continue pendant toute la simulation. En atteignant la sortie, on remarque de légères perturbations sur les lignes d'isovorticité. Cela est dû à la condition de sortie. Cependant, ces perturbations n'affectent pas l'écoulement en amont.

Les valeurs des paramètres numériques de simulations sont données par le tableau Tab[2.4.2].

Reynolds	73	229	355	900
$(m1, m2)$	(80,300)	(80,300)	(160,320)	(200,380)
$(n1, n2)$	(32,16)	(32,16)	(64,32)	(80,40)
h	0.125	0.125	0.0625	0.005
δt	0.05	0.1	0.04	0.003

TAB. 2.2 – Paramètres des simulations

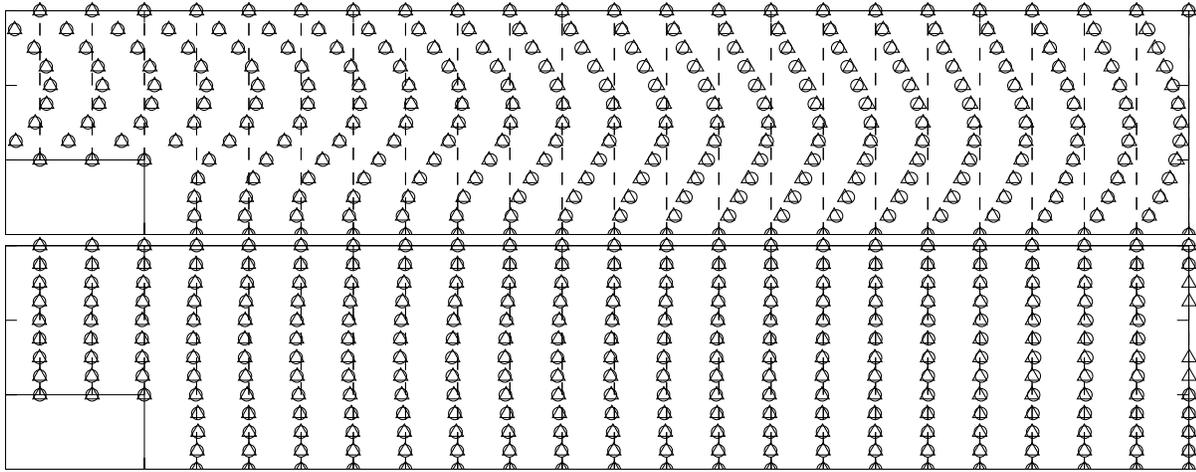


FIG. 2.12 - $Re = 73$. Les vitesses moyennes. En haut composante horizontale et en bas composante verticale; (o) : $T = 40$, (Δ) : $T = 60$.

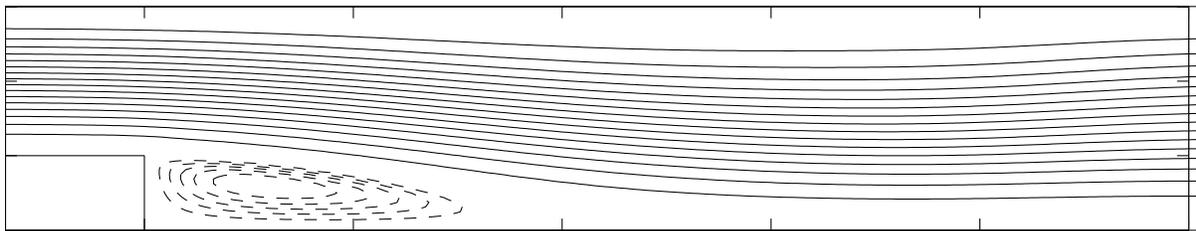


FIG. 2.13 - $Re = 73$. La fonction courant à $T = 40$.

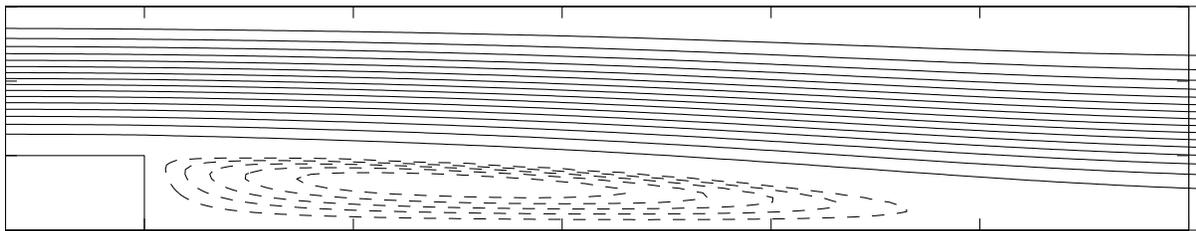


FIG. 2.14 - $Re = 229$. La fonction courant à $T = 300$.

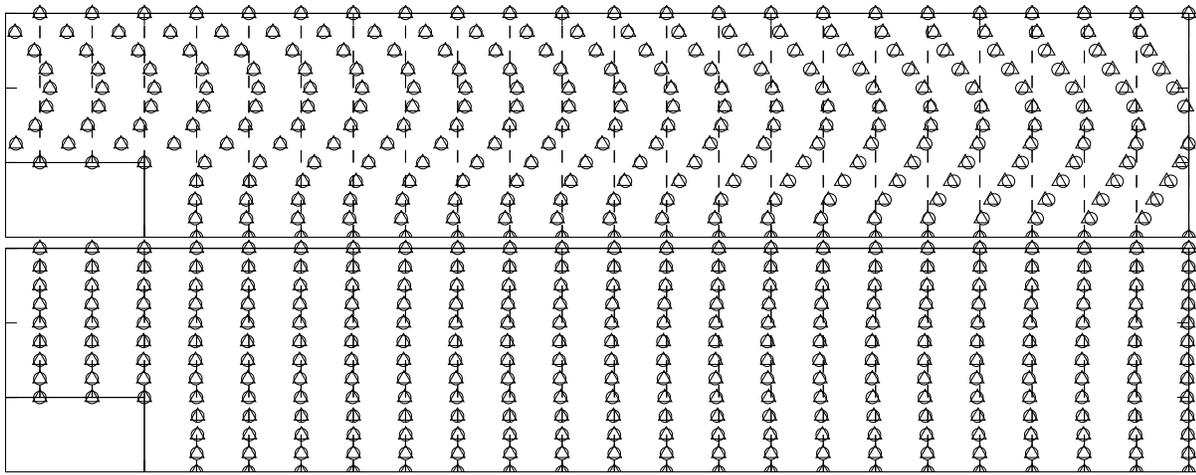


FIG. 2.15 – $Re = 229$. Les vitesses moyennes. En haut composante horizontale et en bas composante verticale; (o) : $T = 200$, (Δ) : $T = 300$.

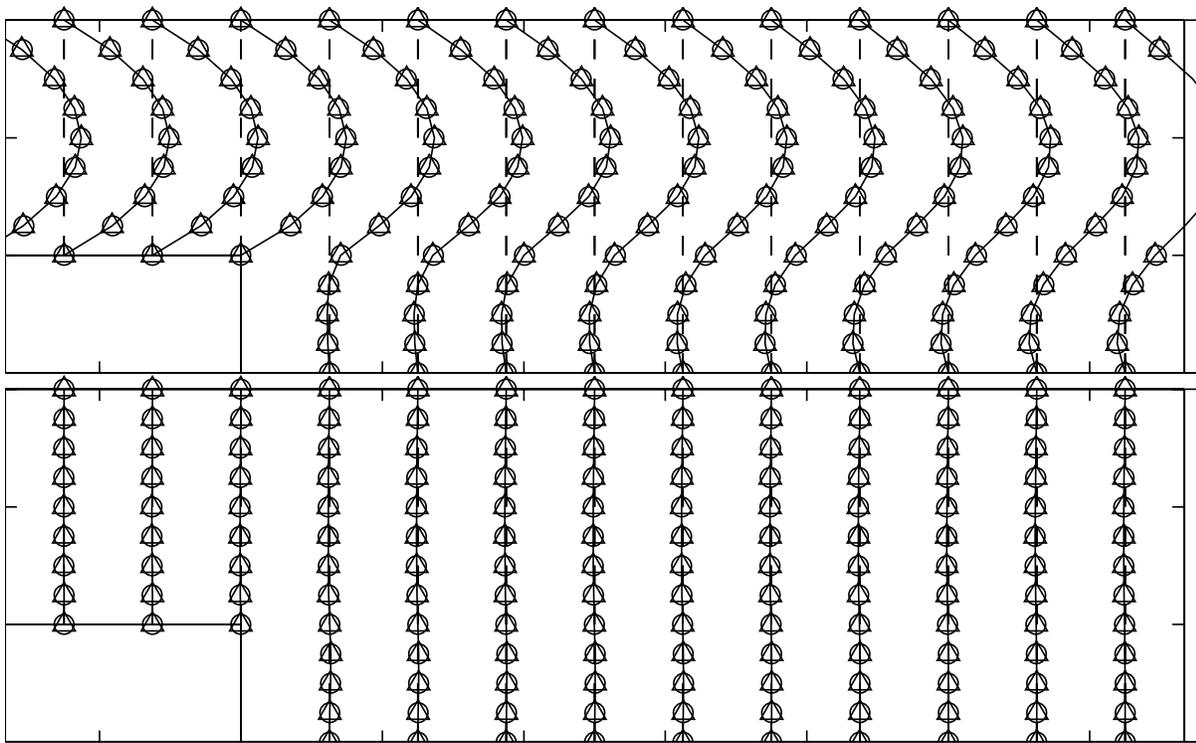


FIG. 2.16 – $Re = 355$. Les vitesses moyennes. En haut composante horizontale et en bas composante verticale; $T = 160$; $(-)$: $h = 0.125$, $\delta_t = 0.04$, (o) : $h = 0.0625$, $\delta_t = 0.04$ et (Δ) : $h = 0.0625$, $\delta_t = 0.02$

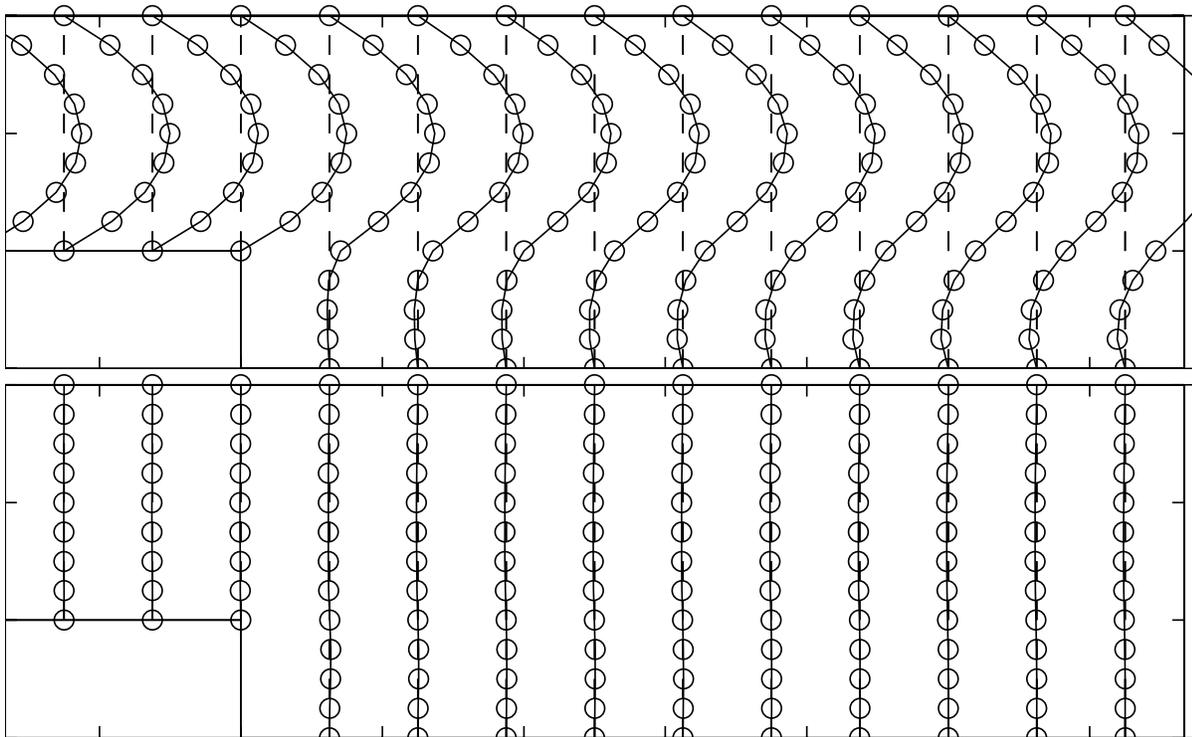


FIG. 2.17 - $Re = 355$. Les vitesses moyennes. En haut composante horizontale et en bas composante verticale; (o) : $T = 200$, (-) : $T = 300$.

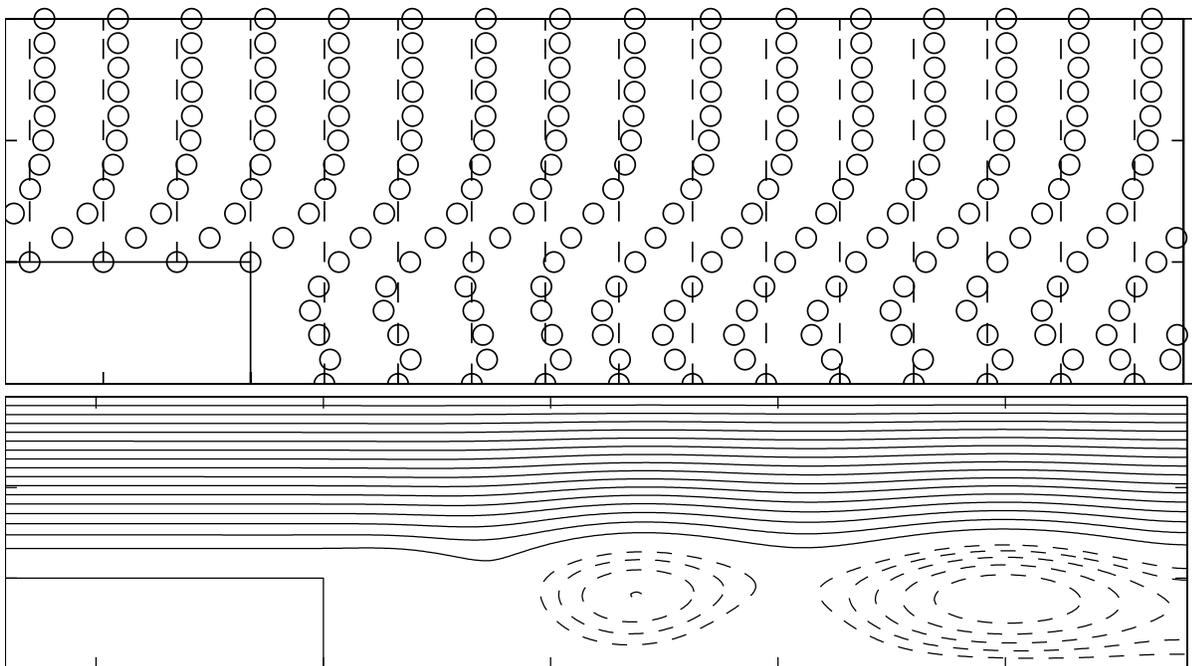


FIG. 2.18 - $Re = 900$. En haut composante horizontale de la vitesse; en bas fonction courant; $T = 160$

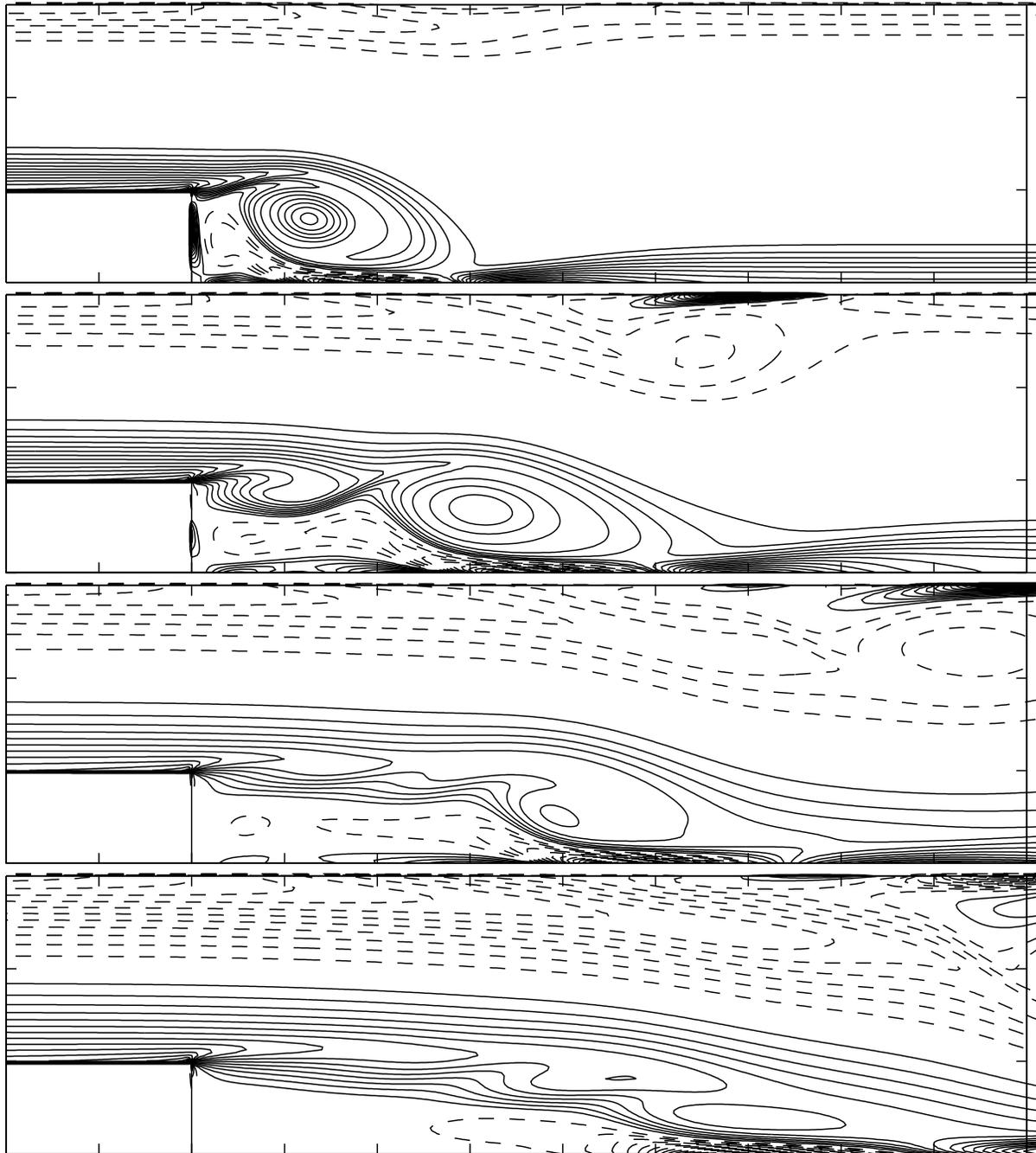


FIG. 2.19 - $Re = 355$. Vorticité; De haut en bas $T = \{16, 32, 48, 64\}$

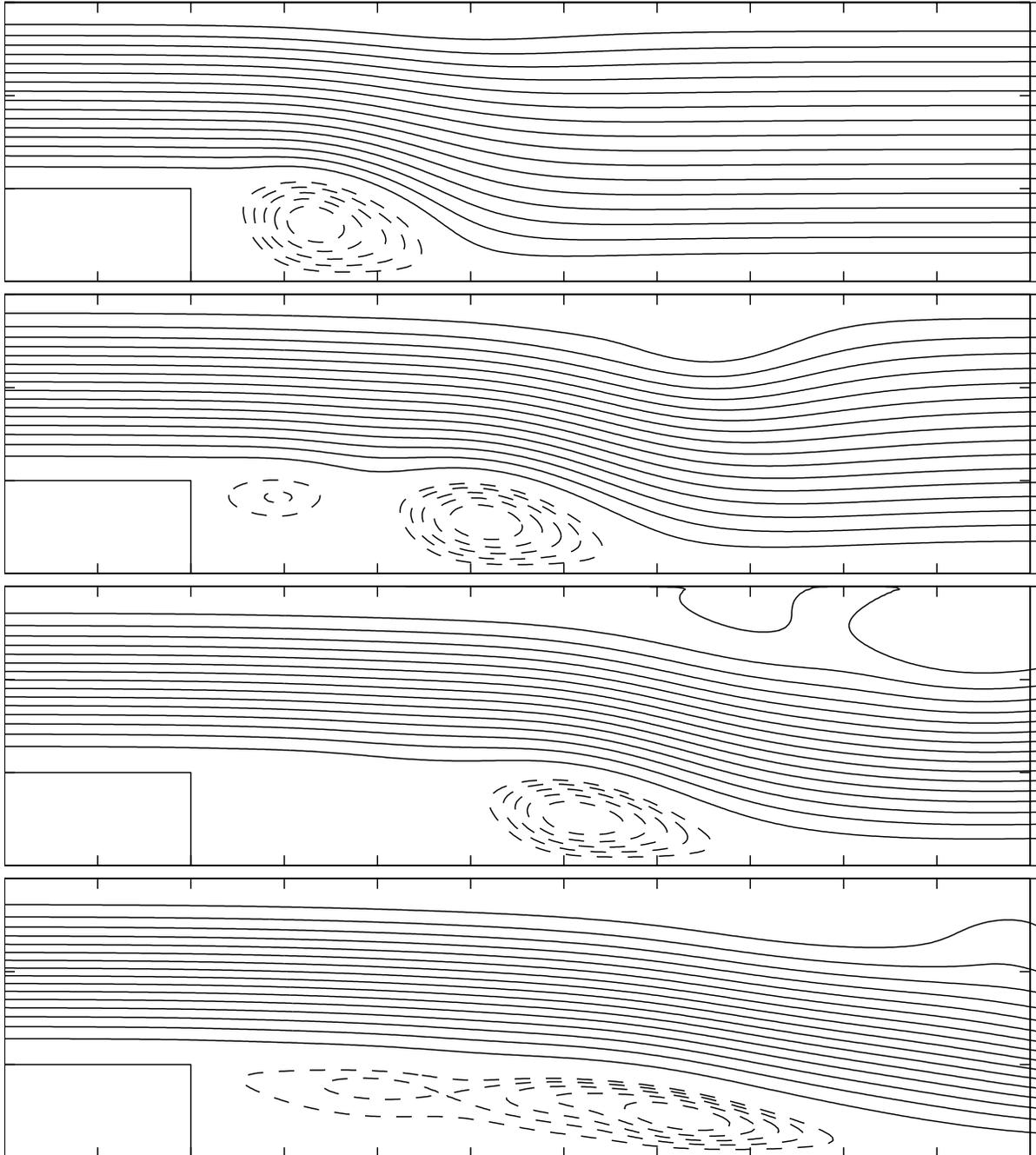


FIG. 2.20 - $Re = 355$. fonction courant. De haut en bas $T = \{16, 32, 48, 64\}$

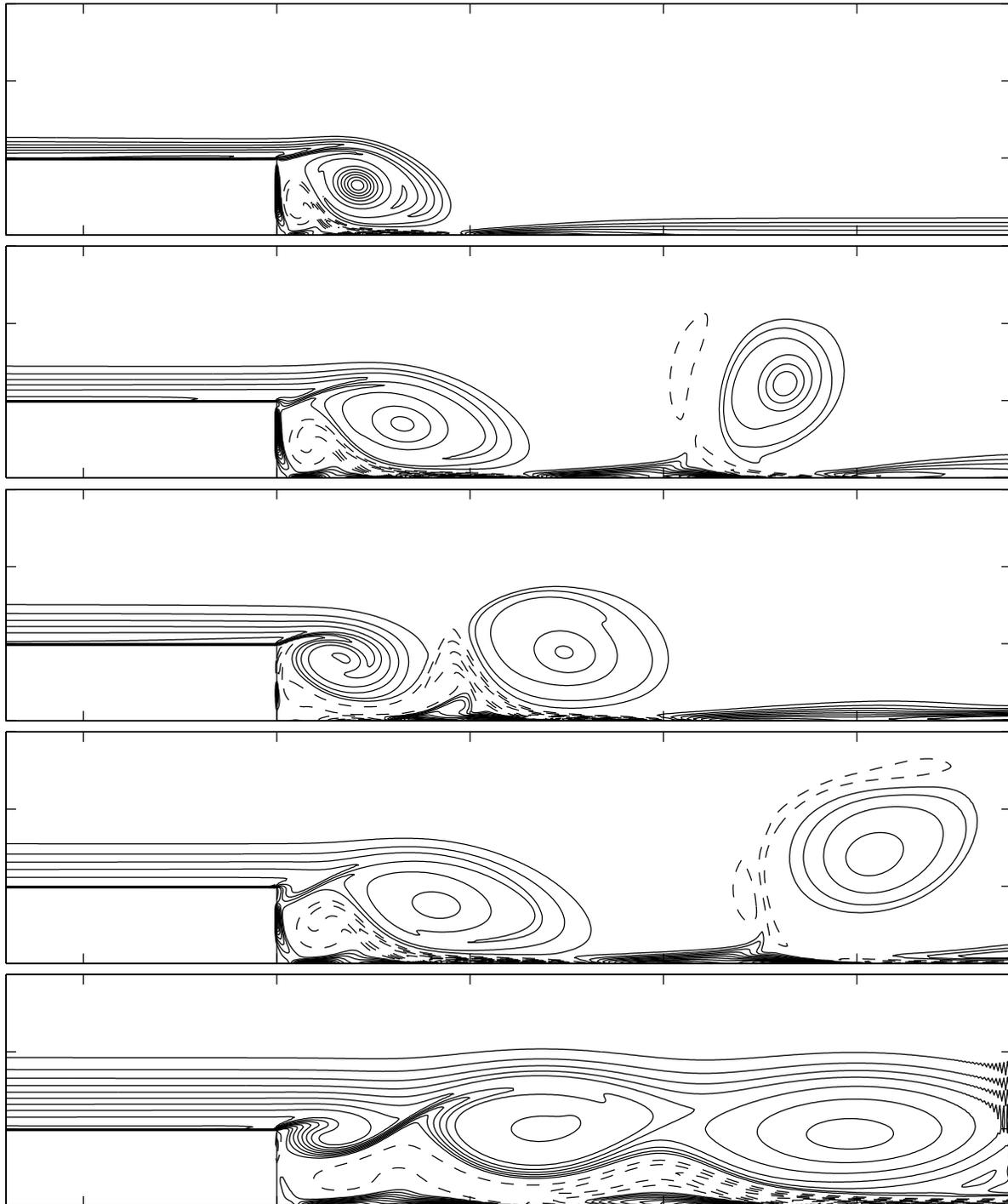


FIG. 2.21 – *Écoulement sur une marche. $Re = 900$; Vorticité. De haut en bas $T = \{15, 45, 65, 85, 120\}$*

Chapitre 3

Méthode de couplage particules-grilles

On s'intéresse dans ce chapitre à la méthode de couplage particules-grilles connue sous le nom de Vortex In Cell (V.I.C.). Cette méthode consiste à superposer une distribution de particules et une grille eulerienne sur le domaine de calcul. La convection est résolue de façon exacte en déplaçant les particules sur les caractéristiques, tandis que le calcul des vitesses sur la grille permet un gain de temps considérable. Cela permet de profiter de la précision du traitement lagrangien des équations de Navier-Stokes tout en diminuant le coût de calcul.

Les premiers algorithmes de ce type ont été proposés par Harlow [42] et Hockney[44] en simulation d'écoulements compressibles. L'étude de convergence et les schémas de résolution d'écoulements incompressibles sont proposés par Cottet ([27],[28]). Les applications de cette méthode sont divers et variées. Citons à titre d'exemple l'algorithme de résolution de l'équation d'Euler compressible réalisé par Mas-Gallic [62] et l'algorithme de résolution de l'équation de Navier-Stokes incompressible implémenté par Kong [50].

Dans ce chapitre , on propose un algorithme permettant la généralisation de la méthode V.I.C. classique aux cas d'écoulements incompressibles en domaines bornés. Les techniques de type différences-finies nous permettent la prise en compte des conditions limites au bord du domaine et l'estimation de la diffusion, tandis que la méthode particulière assure une résolution précise de la convection. D'autre part, l'aspect local des calculs dans cet algorithme rend sa parallélisation profitable et robuste. Les calculs ont ainsi pu être réalisés sur un calculateur parallèle **T3E**.

L'écriture de l'équation de Navier-Stokes en formulation (vitesse-tourbillon) permet de découpler le calcul des vitesses qui est effectué sur la grille et l'incrémentation de la vorticitée r ealis ee sur les particules. Les  etapes de l'algorithme de calcul peuvent  etre r esum ees de la mani ere suivante :

- Assignement de la vorticitée sur la grille par un sch ema d'interpolation.
- Calcul de la vitesse sur la grille diff erences-finies
- Interpolation des vitesses sur les particules
- Calcul de la diffusion sur la grille par formules de type diff erences-finies
- Interpolation de la diffusion sur les particules
- D eplacement des particules

- Remaillage de la distribution de particules

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la **section 1**, on rappelle les principes de la méthode V.I.C. Dans la **section 2**, on présente les méthodes de passage particules-grilles. On présente les techniques de prise en compte des conditions limites dans la **section 3** et de la diffusion dans la **section 4**. Le remaillage en domaine borné est présenté dans la **section 5**. On fait la description du schéma V.I.C. proposé ici et son implémentation sur ordinateur parallèle (**T3E**) dans la **section 6**. Enfin, dans la **section 7** la validation numérique est faite sur le cas test d'écoulement dans une cavité rectangulaire. Ce problème a été déjà abordé pour des nombres de Reynolds modérés ($Re \leq 5.10^3$) en chapitre 2. Les bonnes propriétés de stabilité de la méthode V.I.C. nous permettent de traiter avec un pas de temps abordable le cas de nombres de Reynolds supérieurs à cette limite. On retrouve ainsi la convergence vers l'état statistiquement stationnaire de cet écoulement pour les nombres de Reynolds inférieurs à 10^4 et on présente le développement de la turbulence pour des nombres de Reynolds supérieurs (de l'ordre de 10^5).

3.1 Description de la méthode V.I.C.

3.1.1 Position du problème

En posant ($\omega = \nabla \wedge u$) et $u = \nabla \wedge \psi$, le système d'équations de Navier-Stokes en domaine borné se réduit à l'écriture suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + (u \cdot \nabla) \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (3.1)$$

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x) \quad (3.2)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (3.3)$$

$$\psi|_{\partial\Omega}(\sigma, t) = \psi_e(\sigma, t) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\partial\Omega}(\sigma, t) = \frac{\partial \psi_e}{\partial n}(\sigma, t) \quad (3.5)$$

$$u = \nabla \wedge \psi \quad (3.6)$$

On définit sur le domaine de calcul une distribution de particules et une grille eulerienne. L'objectif du schéma proposé ici est de conserver un traitement lagrangien de la convection en déplaçant les particules sur les caractéristiques et d'assurer la prise en compte des conditions limites et de la diffusion en utilisant des techniques de type différences-finies sur la grille.

Les méthodes particulières sont parfaitement adaptées au traitement numérique de la convection en particulier grâce à leur stabilité inconditionnelles. L'estimation de la diffusion et la prise en compte des conditions limites peuvent être réalisées de façon simple sur la grille eulerienne comme on l'a vu dans le chapitre 2.

L'évaluation des vitesses des particules se fait en méthode de vortex à l'aide de solveurs multipôlaire rapides. Malgré cela, en géométrie simple et pour les écoulements confinés, les solveurs différences-finies utilisant les techniques de transformé de Fourier rapide restent plus rentables. Il découle de ces remarques qu'il peut être tentant de faire cohabiter dans le domaine de calcul une grille eulerienne et une distribution de particules (Fig.3.1).

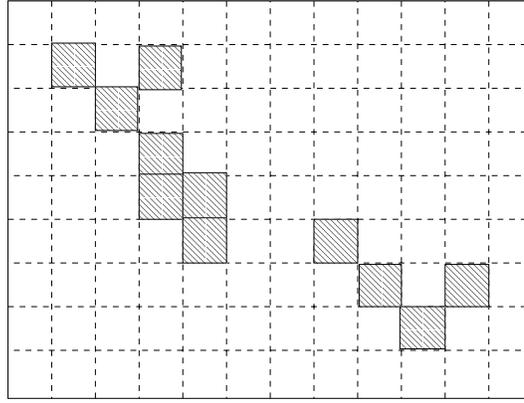


FIG. 3.1 – Grille eulerienne et cellules de particules dans le fluide

Dans tout ce qui suit, les indices $\{i, j, k, l\}$ se réfèrent à la grille et les indices $\{p, q\}$ aux particules. Supposons que le domaine de calcul est défini par :

$$\Omega = \{(x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

La grille eulerienne est définie par :

$$G_h = \{x_{i,j} = (a + ih_x, c + jh_y); 0 \leq i \leq M_g, 0 \leq j \leq N_g\}$$

où

$$h_x = \frac{(b-a)}{M_g}, h_y = \frac{(d-c)}{N_g}$$

La distribution de particules $\{x_p(t), v_p, p \in \mathbb{J}\}$ qui définit les coordonnées lagrangiennes sur le domaine de calcul est donnée à l'instant initial par :

$$\{x_p^0 = (a + mh, c + nh); 0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N; p = m + nM\}$$

où

$$h = \frac{(b-a)}{M}, N = \frac{(d-c)}{h}$$

et $\{v_p, p \in \mathbb{J}\}$ sont les volumes des cellules de particules. Comme la distribution de particules est initialement uniforme, ces volumes sont donnés par la relation :

$$v_p = h^2$$

Le déplacement par la vitesse du fluide de cette grille initiale de particules nous donne les positions à chaque instant de ces particules en résolvant le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{\partial x_p}{\partial t}(t) = u(x_p(t), t) \\ x_p(0) = x_p^0 \end{cases}$$

Pour permettre l'échange d'information entre la grille et les particules, on introduit deux noyaux d'interpolation η_ϵ et W_ϵ . Une étape de l'algorithme discret de résolution des équations (3.1-3.6) s'écrit dans le cas d'intégration par schéma d'Euler :

1. Assignement de la vorticité sur les points de grille intérieurs à l'aide du noyau d'interpolation η_ϵ

$$\omega_{i,j}^n = \sum_{p \in \mathbb{J}} v_p \omega_p^n \eta_\epsilon(x_{i,j} - x_p)$$

2. Calcul de la fonction courant sur la grille par différences-finies

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_{i,j}^n &= -\omega_{i,j}^n \\ \psi_{i,j}^n|_{\partial\Omega} &= \psi_e^n \end{cases}$$

3. Calcul des vitesses sur la grille par différences-finies

$$\begin{cases} u_x^n(x_{i,j}) &= D_y \psi_{i,j}^n \\ u_y^n(x_{i,j}) &= -D_x \psi_{i,j}^n \\ (u_x^n, u_y^n)|_{\partial\Omega} &= (u_{x_e}^n, u_{y_e}^n) \end{cases}$$

4. Interpolation de la vitesse sur les particules à l'aide du noyau d'interpolation W_ϵ

$$\begin{cases} u_x^n(x_p) &= \sum_{i,j} u_x^n(x_{i,j}) W_\epsilon(x_p - x_{i,j}) \\ u_y^n(x_p) &= \sum_{i,j} u_y^n(x_{i,j}) W_\epsilon(x_p - x_{i,j}) \end{cases}$$

5. Calcul de la vorticité de grille sur le bord du domaine grâce aux formules (2.24..2.24)

$$\omega_{i,j}^n|_{\partial\Omega} = D_x u_y^n - D_x u_x^n$$

6. Calcul de la diffusion sur la grille

$$D\omega_{i,j}^n = (D_x^2 + D_y^2)\omega_{i,j}^n$$

7. Interpolation de la diffusion sur les particules

$$D\omega_p^n = \sum_{i,j} D\omega_{i,j}^n W_\epsilon(x_p - x_{i,j})$$

8. Evolution des particules

$$x_p^{n+1} = x_p^n + \Delta t(u_x^n(x_p), u_y^n(x_p))$$

9. Evolution de la vorticité sur les particules

$$\omega_p^{n+1} = \omega_p^n + \nu \Delta t D\omega_p^n$$

Ce système est complété par un remaillage sur un intervalle de temps régulier de la distribution particulaire. On donne ci-dessous les corrections à rajouter à la méthode de remaillage vue en chapitre 1 pour préserver sa précision en domaine borné.

Les étapes de la méthode V.I.C. relative au traitement différences-finies et particulaire ont été vues dans les chapitre s précédents. Il nous reste maintenant à détailler la première et la quatrième étapes relatives au transfert particules-grille.

3.2 Transfert particules-grille

3.2.1 Transfert des particules sur la grille

Assignement en absence de frontières solides

Dans ce qui suit, on notera les noeuds de la grille eulerienne avec un seul indice qui représente le numéro du noeud.

En méthode de vortex, la vorticité en un point donné est reconstituée à partir des valeurs sur les particules par la formule :

$$\omega(x) = \sum_{q \in \mathbb{J}} v_q \omega_q \delta(x - x_q) \quad (3.7)$$

Les valeurs de la vorticité sur les points de grille $\{x_j\}$ sont calculées en utilisant la formule (3.7) et la convolution de ω par une fonction d'interpolation η_ϵ . L'opérateur d'assignment \mathbb{A} est alors défini par :

$$\mathbb{A}(\omega)(x) = \omega_\epsilon(x) = (\omega * \eta_\epsilon)(x) = \sum_{q \in \mathbb{J}} \Gamma_q \eta_\epsilon(x - x_q)$$

$$\omega_\epsilon(x) = \sum_{q \in \mathbb{J}} v_q \omega_q \eta_\epsilon(x - x_q)$$

On en déduit les valeurs de la vorticité sur les points de grille :

$$\omega_j = \mathbb{A}(\omega)(x_j) = \sum_{p \in \mathbb{J}} v_p \omega_p \eta_\epsilon(x_j - x_p) \quad (3.8)$$

L'erreur produite par cette convolution dépend de la fonction η_ϵ . En particulier si on utilise une fonction Cut-off d'ordre r , l'erreur est de l'ordre de $O(\epsilon^r)$ comme le montre le lemme-définition suivant (Raviart [74]) :

Lemme 3.1 Soit une fonction Cut-off η à symétrie radiale et ayant les propriétés suivantes, appelées propriétés de moments d'ordre r :

$$\begin{cases} (i) & \int_{R^d} \eta(x) dx = 1 \\ (ii) & \int_{R^d} x^\alpha \eta(x) dx = 0 \quad 1 \leq |\alpha| \leq r - 1, r \geq 2 \\ (iii) & \int_{R^d} |x|^r \eta(x) dx < \infty \end{cases}$$

Alors, on a pour toute fonction $\omega \in W^{r,p}(R^d)$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|\omega - \omega * \eta_\epsilon\|_{0,p} \leq C \epsilon^r \|\omega\|_{r,p}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ϵ et $\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^d} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$

En résumé, pour retrouver ω_j à partir des valeurs particulières, on a eu besoin de discrétiser une intégrale avec une erreur de l'ordre de $O(h^m)$ où h est le paramètre de discrétisation et m ne dépend que de la régularité de ω et de faire une convolution d'erreur $O(\epsilon^r)$.

Assignement en domaine borné

Quand une particule se trouve à une distance du bord inférieur à ϵ , les propriétés du moment ne sont plus tout à fait satisfaites. On remplace alors la formule (3.8) par :

$$\omega_j = \frac{\sum_{p \in \mathbb{J}} v_p \omega(x_p) \eta_\epsilon(x_j - x_p)}{J_j} \quad (3.9)$$

où

$$J_j = \sum_{p \in \mathbb{J}} v_p \eta_\epsilon(x_j - x_p) \quad (3.10)$$

C'est-à-dire que la fonction η a été remplacée localement par la fonction $\eta_j(x) = \frac{\eta(x)}{J_j}$. Cette correction a été proposée par Brackbill et Ruppel[11]. On l'appellera ici méthode d'assignement avec calcul de volume.

Le Cut-off η qui sera utilisé ici est une fonction B-spline quadratique par morceaux (Hockney et Eastwood[45]). Il est connu en interpolation sous le nom de W_3 ou T.S.C. (Triangular shaped cloud) :

$$W_3 = \begin{cases} (-x + \frac{3}{2})^2 & \text{si } 0 \leq |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - x)^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Le noyau M'_4 vu dans le chapitre 1 sera aussi utilisé ici pour certaines simulations.

Technique d'amélioration

Afin de réduire l'erreur d'interpolation intervenant dans le passage grille-particules, il est possible de formuler un algorithme itératif inspiré de la méthode de Beale vue au chapitre 1.

Notons \mathbb{A} l'opérateur d'assignement sur la grille et I_n celui d'interpolation sur les particules. Une application directe de l'opérateur d'assignement nous donne la vorticité sur la grille ω_g à partir de la vorticité sur les particules ω_p par la formule :

$$\omega_g = \mathbb{A}(\omega_p)$$

Si l'interpolation est l'assignement se font sans perte d'information, la vorticité $\tilde{\omega}_p$ calculée des valeurs de la grille sur les particules par interpolation doit vérifier :

$$\tilde{\omega}_p = I_n(\omega_g) \approx \omega_p$$

Le procédé d'amélioration de la précision de l'interpolation consiste alors à appliquer la méthode suivante :

On pose $M = I_n \circ \mathbb{A}$, on a alors :

$$M\tilde{\omega}_p = \omega_p$$

Ce système linéaire est résolu par méthode itérative en écrivant :

$$(M - I)\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_p = \omega_p$$

et on définit la suite :

$$(M - I)\tilde{\omega}_p^k + \tilde{\omega}_p^{k+1} = \omega_p$$

L'opérateur M dans le cas ci-dessus est très proche de l'identité. Cette méthode itérative converge donc très rapidement. En générale trois itérations suffisent pour obtenir un résidu petit. Le calcul de la vorticité sur la grille peut donc être résumé dans les lignes suivantes :

- On pose :

$$\tilde{\omega}_p^0 = \omega_p$$

- On calcule jusqu'à la convergence contrôlée par un résidu petit :

$$\tilde{\omega}_p^{n+1} = \omega_p + \tilde{\omega}_p^n - M.(\tilde{\omega}_p^n)$$

- On pose la limite de cette suite :

$$\tilde{\omega} = \text{limite } (\tilde{\omega}_p^{n+1})$$

- On calcule la vorticité sur la grille :

$$\omega_j = \mathbb{A}(\tilde{\omega})$$

3.2.2 Transfert de la grille aux particules

La grille utilisée étant une grille eulerienne fixe, alors, l'interpolation des données sur les particules se fait suivant la théorie classique d'interpolation. La précision de la méthode d'interpolation et des exemples de noyaux d'interpolation sont donnés dans le chapitre 1 en section 1.3.2.

3.2.3 Stabilité du passage particules-grilles

Lemme 3.2 *Si le noyau d'assignement η est positif, alors le passage particules-grille est stable en norme $\|\cdot\|_\infty$:*

$$\|\omega_j\|_\infty \leq \|\omega_p\|_\infty$$

Démonstration : D'après les formules d'assignement (3.9-3.10) on a :

$$\omega_j = \sum_{p \in \mathbb{J}} \omega_p \tilde{\eta}_\epsilon(x_j - x_p) \quad (3.11)$$

où

$$\tilde{\eta}_\epsilon(x_j - x_p) = \frac{v_p \eta_\epsilon(x_j - x_p)}{J_j}$$

On remarque que :

$$\sum_{p \in \mathbb{J}} \tilde{\eta}_\epsilon(x_j - x_p) = \sum_{p \in \mathbb{J}} \frac{v_p \eta_\epsilon(x_j - x_p)}{\sum_{q \in \mathbb{J}} v_q \eta_\epsilon(x_j - x_q)} = 1$$

En utilisant l'équation (3.11), on aura alors :

$$\begin{aligned} \|\omega_j\|_\infty &\leq \sum_{p \in \mathbb{J}} \tilde{\eta}_\epsilon(x_j - x_p) \|\omega_p\|_\infty \\ &= \|\omega_p\|_\infty \end{aligned}$$

On peut aussi montrer que le passage particules-grille est stable en norme $\|\cdot\|_{L^2}$ (voir Kong[50]).

3.3 Prise en compte des conditions limites sur le bord

Comme on l'a vu au chapitre 2, on peut prendre en compte les conditions limites sur le bord avec un procédé simple à implémenter et de précision comparable aux formules d'ordre élevé. Ce procédé consiste à calculer la fonction courant avec une condition limite Dirichlet (condition de non pénétration) et de traduire la condition de non glissement sur la vorticité par les formules approchées (2.24..2.26). Ces techniques sont appliquées en méthode V.I.C. sur la grille de la façon suivante :

On déduit d'abord la vorticité sur les points intérieurs de la grille par assignement (3.9-3.10). Ensuite, on implémente les conditions limites sur le bord de la grille comme dans (2.1.3) en résolvant à l'intérieur du domaine :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_{i,j}^n &= -\omega_{i,j}^n \\ \psi_{i,j}^n &= \psi_e^n \\ \begin{cases} u_x^n(x_{i,j}) &= D_y \psi_{i,j}^n \\ u_y^n(x_{i,j}) &= -D_x \psi_{i,j}^n \end{cases} \end{cases}$$

et en prenant comme vitesse et vorticité sur le bord :

$$\begin{aligned} (u_x^n, u_y^n)|_{\partial\Omega} &= (u_{xe}^n, u_{ye}^n) \\ \omega_{i,j}^n &= D_x u_y^n - D_y u_x^n \end{aligned}$$

où les opérateurs D_x et D_y représentent les opérateurs de dérivation partielle décentrés d'ordre deux comme dans le traitement des conditions limites dans le chapitre 2.

3.4 Estimation de la diffusion

L'opérateur de diffusion est évalué comme les vitesses sur la grille. Comme on l'a vu, l'assignement et la condition limite Neumann sur la fonction courant nous permettent de connaître la vorticité sur les noeuds du bord et à l'intérieur du domaine. A partir de ces valeurs, on peut calculer la diffusion sur les points de grille par différences-finies :

$$\Delta\omega_{ij} = D_{xx}\omega_{ij} + D_{yy}\omega_{ij}$$

A l'intérieur du domaine, les opérateurs (D_{xx}, D_{yy}) sont remplacés par les formules centrées d'ordre deux du laplacien (laplacien à cinq points). Au bord il est nécessaire d'utiliser les formules décentrées qui nous permettent de garder la précision. On donne ci-dessous la formule de la dérivation décentrée utilisée au voisinage du bord d'indice $(j = 0)$:

$$D_{xx}\omega_{i,0} = \frac{70\omega_{i,0} - 208\omega_{i,1} + 228\omega_{i,2} - 112\omega_{i,3} + 22\omega_{i,4}}{24h^2}$$

Ensuite, la procédure d'interpolation nous permet de transférer l'estimation de la diffusion sur les particules.

3.5 Remaillage du champ de vorticité en présence de bords

Comme on l'a vu au chapitre 1, le remaillage des distributions particulières est nécessaire pour conserver la précision des méthodes particulières. On utilise ici la méthode de remaillage de noyau M'_4 vue en section (1.3.2). Ce noyau permet le transfert de la vorticité d'une particule qui n'est pas très proche du bord sur ses seize voisins.

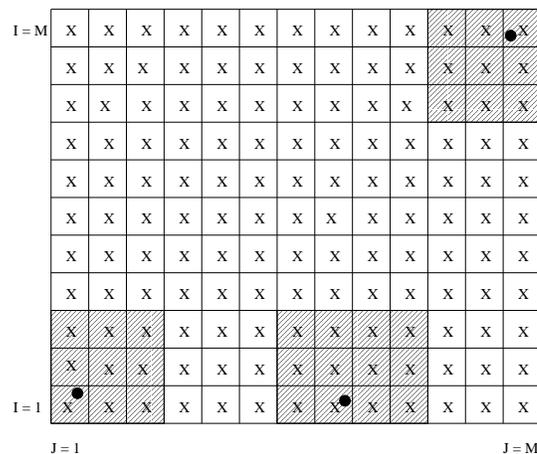


FIG. 3.2 – Les anciennes particules proches du bord (●) transfère de la vorticité aux nouvelles particules (x) dans le domaine hachuré.

Au voisinage du bord, l'utilisation du noyau M'_4 demande des voisins en dehors du domaine. Pour pallier à ce problème, on utilise sur les particules qui se trouvent sur la dernière couche, le noyau Λ_J utilisé par Koumoutsakos [51].

Notons $\{(x_p, y_p)\}$ les positions des anciennes particules et $\{\Gamma_p\}$ leur circulation. Si on pose $\{(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j); 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M\}$ les positions des nouvelles particules et $\{\tilde{\Gamma}_{i,j}; 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M\}$ leurs circulations, on aura :

$$\tilde{\Gamma}_{i,j} = \sum_p f_i\left(\frac{x_i - x_p}{h}\right) f_j\left(\frac{y_j - y_p}{h}\right) \Gamma_p$$

où f_i est définie par :

$$f_i(x) = \begin{cases} M'_4(x) & \text{si } 1 < i < M \\ \Lambda_g(x) & \text{si } i = 1 \\ \Lambda_g(-x) & \text{si } i = M \end{cases}$$

et

$$\Lambda_g(x) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ (x-1)(1+x) & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}(2-x)(x-1) & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

L'utilisation de ce noyau au voisinage du bord permet de préserver les propriétés de conservation de la méthode de remaillage.

3.6 Parallélisation de la méthode V.I.C.

Le caractère local de l'algorithme V.I.C. rend sa parallélisation très rentable. On présente ici l'implémentation du schéma V.I.C. sur machines multi-processeurs à mémoire distribuée (T3E) en langage MPI (Message Passing Interface). Une décomposition du domaine en sous-domaines de taille identique est réalisée. La taille des données échangées est petite par rapport à la taille globale.

Les principes de cette parallélisation se résument dans les points suivants :

- Décomposer le domaine de calcul en autant de sous-domaines qu'il y a de processeurs.
- Définir des variables de type "interface" pour permettre un échange de données rapide entre les processeurs.
- Définir deux groupes de processeurs (processeurs pair et impair) afin de chevaucher l'envoi et la réception de messages.
- Itérer en temps :
 - Faire le calcul sur chaque processeur dans son sous-domaine associé.
 - Echanger les données.

Comme référence sur les facilités offertes par MPI, on cite : Message Passing Interface[20], Message Passing Interface Standard[68] et MPI The Complete Reference[81].

3.6.1 Méthode de parallélisation

La bibliothèque parallèle choisie ici est **MPI** (Message Passing Interface). Le modèle de programmation est le modèle **SPMD** (Single Program Multiple Data). Un seul code s'exécute sur chacun des processeurs dans le sous-domaine correspondant. Dans la boucle en temps, chaque processeur échange les données avec ses deux voisins (sauf le premier et le dernier processeur qui n'ont qu'un seul voisin).

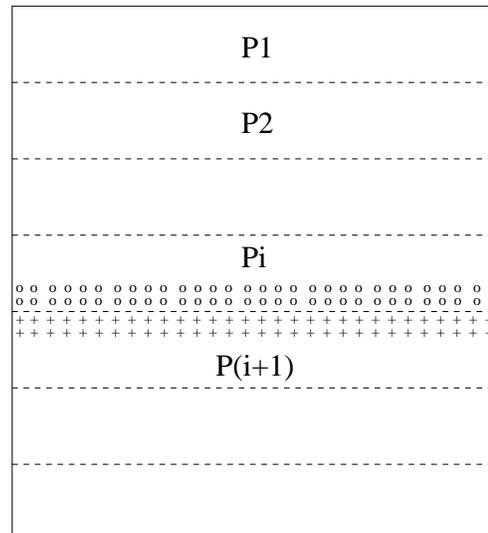


FIG. 3.3 – Découpage du domaine. \circ : données transmises par le processeur $P(I)$ au processeur $P(I+1)$; $+$: données transmises par le processeur $P(I+1)$ au processeur $P(I)$.

Le domaine de calcul est découpé en N_{proc} sous-domaines (N_{proc} est le nombre de processeurs) comme dans la figure (Fig.3.3). Ce découpage assure l'optimalité de la taille des données à échanger. Le calcul dans chaque domaine demande la connaissance des données sur les $icor$ couches de grille voisines. Où $icor$ est la taille du support des noyaux d'interpolation (en général $icor = 2$). Les grandes lignes du programme sont expliquées ci-dessous.

Transfert des données entre les processeurs

On définit d'abord le type (interface) permettant de simplifier les communications :

- `CALL MPI_TYPE_VECTOR(ICOR,M,N,MPL_REAL,INTERFACE,INFO)`
- `CALL MPI_TYPE_COMMIT(INTERFACE,INFO)`

Une variable de ce type correspond à la quantité d'informations qu'un processeur peut envoyer à un autre.

Le groupe de processeurs est divisé en deux sous groupes : les processeurs pairs (G_1) et les processeurs impairs (G_2). Cela permet de chevaucher les communications. Il n'est pas nécessaire d'apporter de modification dans le programme séquentiel décrit précédemment. Il suffit de rajouter l'envoi et la réception des données sur les interfaces entre les deux groupes de processeurs (G_1) et (G_2). Cela se fait de façon très rapide par la commande `MPLSENDRECV`. Cet

outil de communication est très efficace sur la machine **T3E**, car il est bâti à partir de fonctions cray **SHMEM** permettant la copie directe de mémoire à mémoire.

La migration des particules entre les processeurs se fait sans difficulté. On fait d'abord un tri sur les particules. Après avoir rangé les particules qui sont sorties du domaine dans un vecteur, on les envoie au voisin correspondant.

Le calcul de la fonction courant en parallèle se fait par le solveur **CRUNCHE** [34] basé sur les techniques de résolution de type transformées de Fourier rapides qui assurent une résolution rapide en géométrie simple de l'équation de Poisson.

Des exemples des temps passés en calcul et en communication pour effectuer un pas de temps avec intégration par le schéma Runge-Kutta d'ordre quatre sont donnés dans le tableau Tab.3.1. On donne aussi dans ce tableau la performance définie par :

$$\text{Performance} = \frac{\text{Temps total} - \text{Temps de communication}}{\text{Temps total}}$$

Elle montre le pourcentage du temps passé par les processeurs en calcul par rapport au temps globale qui inclut le temps passé en communication et en synchronisation des processeurs.

On donne aussi dans la figure Fig.3.4 le temps CPU total et le temps physique nécessaire au calcul sur une grille de taille $(314, 314)$ et avec 98000 particules en fonction du nombre de processeurs.

N_{proc}	N_g	N_p	T_{calcul}	T_{comm}	T_{total}	Performance
2	128	65000	3.05	0.11	3.16	96
4	128	65000	2.96	0.35	3.31	90
8	272	300000	13.25	1.68	14.93	88
12	384	590000	26.58	2.15	28.73	92

TAB. 3.1 – Temps de calcul en utilisant N_{proc} processeurs sur une grille de taille N_g^2 et avec N_p particules. (T_{calcul}) : temps utilisé en calcul par les processeurs, (T_{comm}) : temps passé en communication et en synchronisation des processeurs et (T_{total}) : temps total utilisé par les processeurs.

3.7 Résultats numériques

Comme on l'a vu dans le chapitre 2, le problème d'écoulement de cavité est un test de validation sévère des méthodes numériques. L'étude numérique effectuée dans la section (2.4.1) nous a montré que les méthodes différences-finies du (chapitre 2) constituent un moyen simple et efficace de résolution numérique de ce problème pour des nombres de Reynolds faibles ($Re \leq 5000$). Par contre, ces méthodes demandent un raffinement coûteux dès qu'on veut passer à des nombres de Reynolds élevés ($Re \approx 10000$).

Dans cette section, on présente d'abord une comparaison des résultats de la méthode V.I.C. avec ceux de la méthode différences-finies pour des nombres de Reynolds faibles et des nombres de Reynolds modérés mais avec un profil de vitesses régulier. Ensuite, on effectue les simulations pour des nombres de Reynolds élevés sans correction de vitesse et on montre que le schéma V.I.C. proposé ici est capable de mener à bien ces simulations dans des limites de CPU raisonnables.

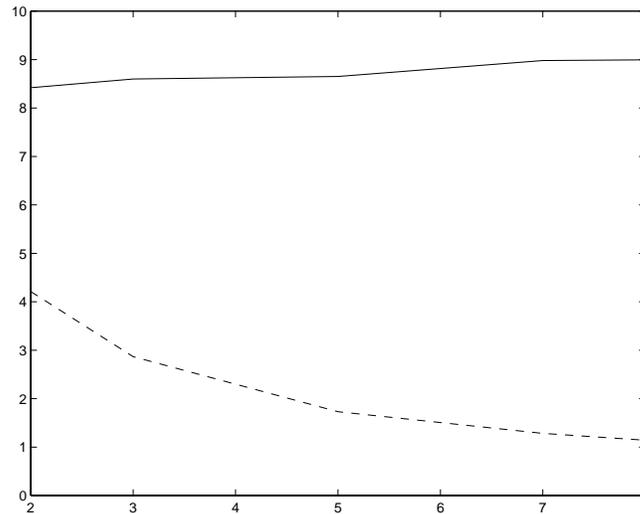


FIG. 3.4 – (–) : Temps CPU total de calcul, (– –) : Temps physique de calcul.

Pour la comparaison entre la méthode V.I.C. et celle des différences-finies, on prend le même nombre de points de grille dans les deux cas. Cependant, pour les grands nombres de Reynolds, la CFL de convection nous oblige à prendre le pas de temps de la méthode différences-finies Δt_{df} beaucoup plus petit que le pas de temps de la méthode V.I.C. Δt_{vic} . Rappelons en effet que pour une méthode de vortex, la seule CFL est celle qui provient du terme de diffusion.

Les calculs différences-finies présentés ici sont faits en formulation (vitesse-tourbillon), le schéma de discrétisation est le schéma différences-finies centrées d'ordre deux. Le calcul de la vorticité sur le bord est fait comme pour la méthode V.I.C. par formules approchées d'ordre deux.

Dans les calculs différences-finies, le nombre de points de grille sur une longueur de $L = 1$ est noté M_{df} . Pour la cavité carrée, le nombre total de points de grille est alors M_{df}^2 . Pour une cavité rectangulaire de longueur deux fois plus grande que la largeur, le nombre total de points de grille est $2M_{df}^2$. Pour la méthode V.I.C., la grille initiale de particules est de taille M_{pv} sur une longueur unitaire, la fonction courant est calculée sur une grille de taille M_{pp} sur une longueur unitaire. On note la vitesse sur le bord superieur de la conduite : $U_b(x) = u(x, L)$ où $L = 1$ pour une cavité carrée et $L = 2$ pour une cavité rectangulaire.

3.7.1 Cavité à faibles nombres de Reynolds

Re \leq 1000

Dans le cas de nombres de Reynolds faibles, la diffusion est dominante. L'écoulement est donc régulier. On constate la convergence rapide vers l'état stationnaire. Cette convergence est observée à $T = 20$ pour un $Re = 100$ et   $T = 40$ pour un $Re = 500$. Dans les figures (Fig.3.7, Fig.3.8), les lignes de vorticité et de la fonction courant sont représentées après la convergence vers l'état stationnaire. On retrouve des résultats identiques par la méthode différences-finies et la méthode V.I.C.

Re=1000

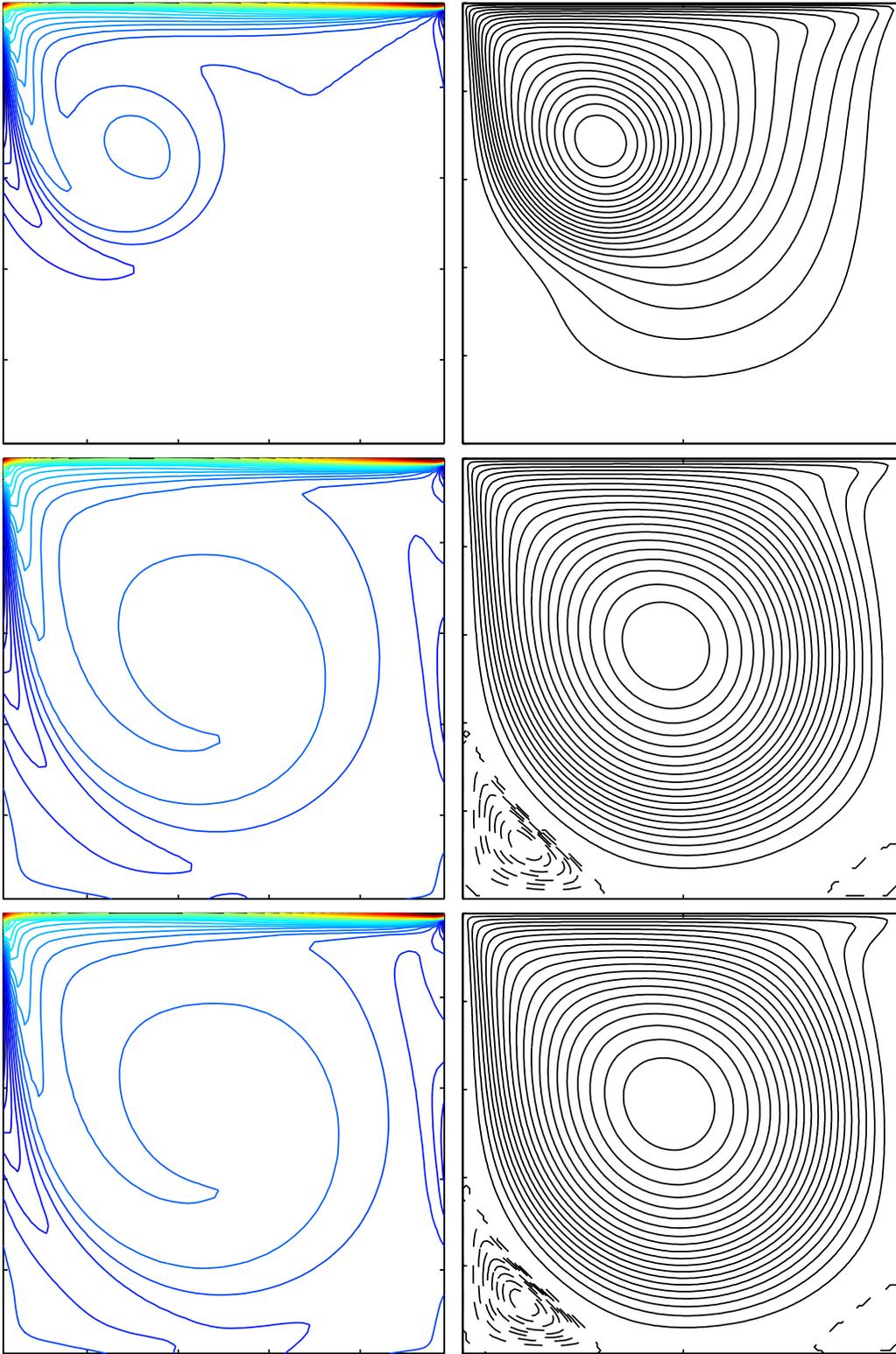


FIG. 3.5 - $U_b = -1, Re = 1000, mv = 200, mp = 128$, calcul par méthode V.I.C., $\delta t = 0.01$ du haut vers le bas : $\{T = 5, 20, 30, 50\}$

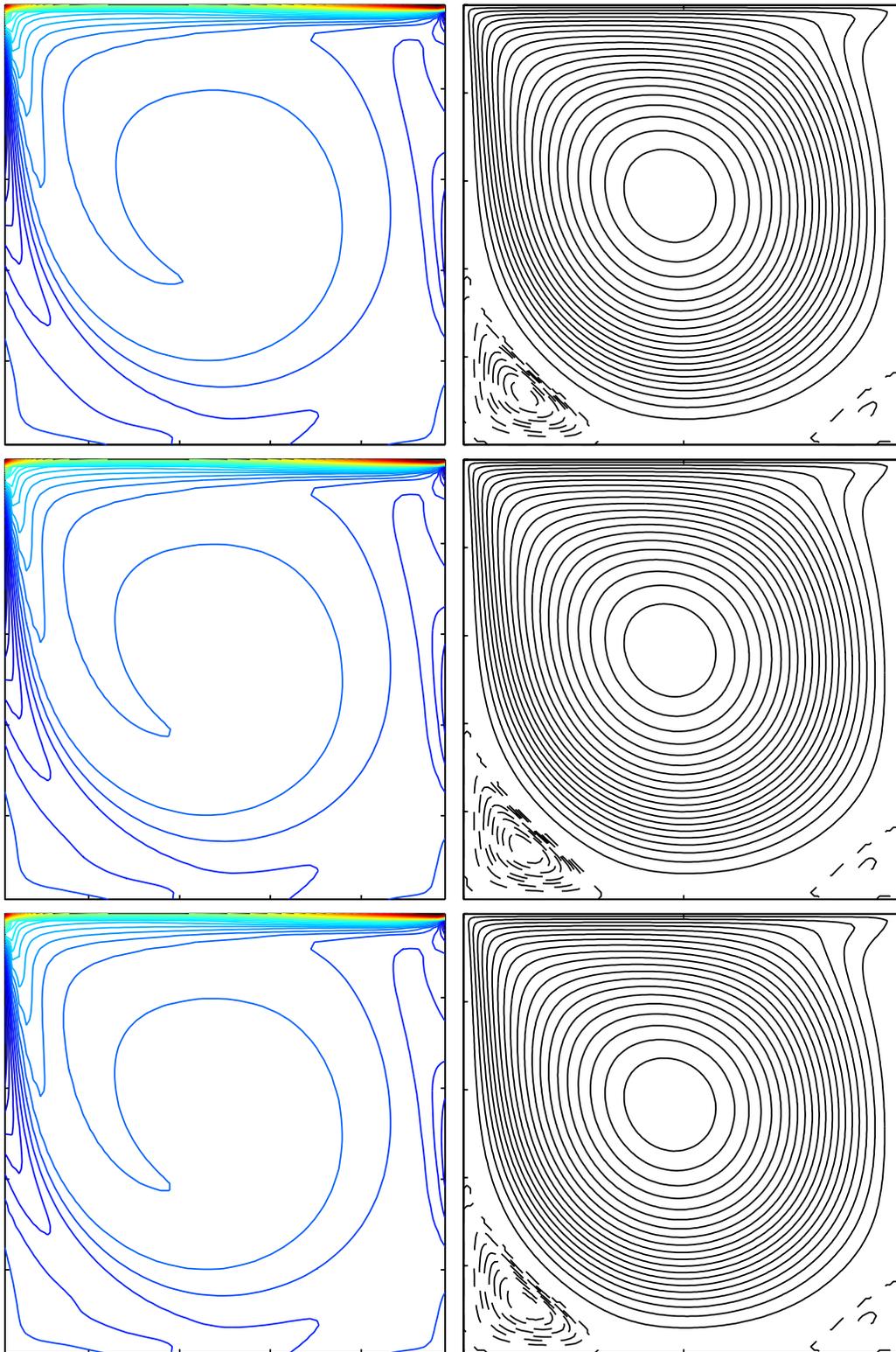


FIG. 3.6 - $U_b = -1, Re = 1000, mv = 200, mp = 128$, calcul par méthode V.I.C., $\delta t = 0.01$ du haut vers le bas : $\{T = 60, 70, 90, 100\}$

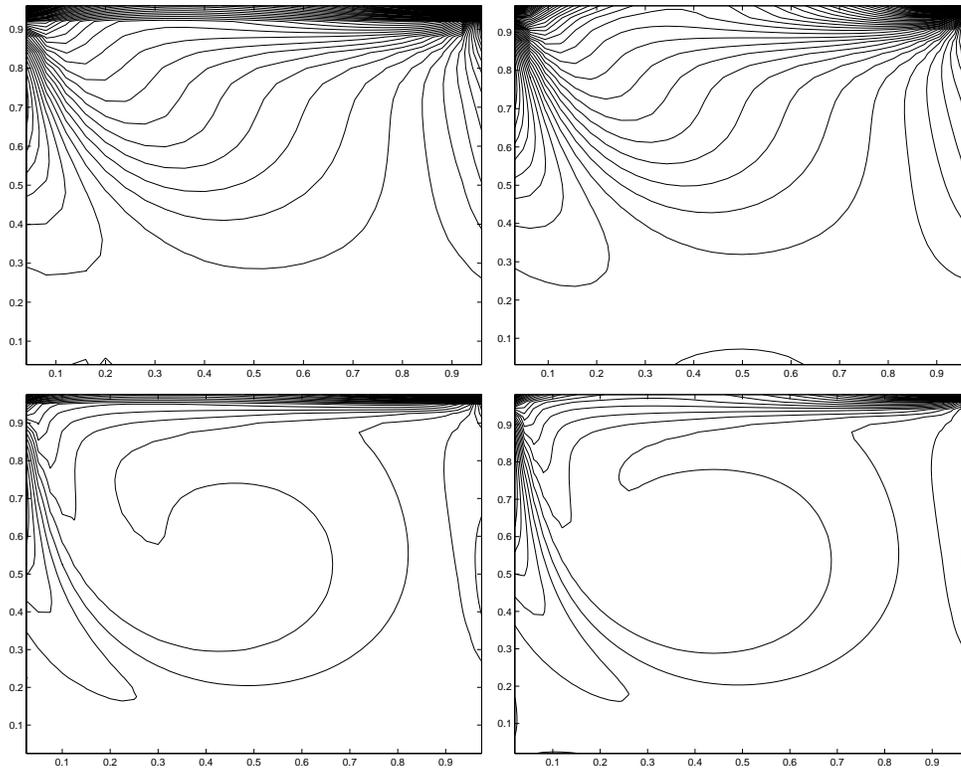


FIG. 3.7 – Isovaleurs de la vorticité après la convergence à l'état stationnaire. A gauche : méthode V.I.C.; à droite : méthode différences-finies; du haut vers le bas : $Re = \{100, 500\}$

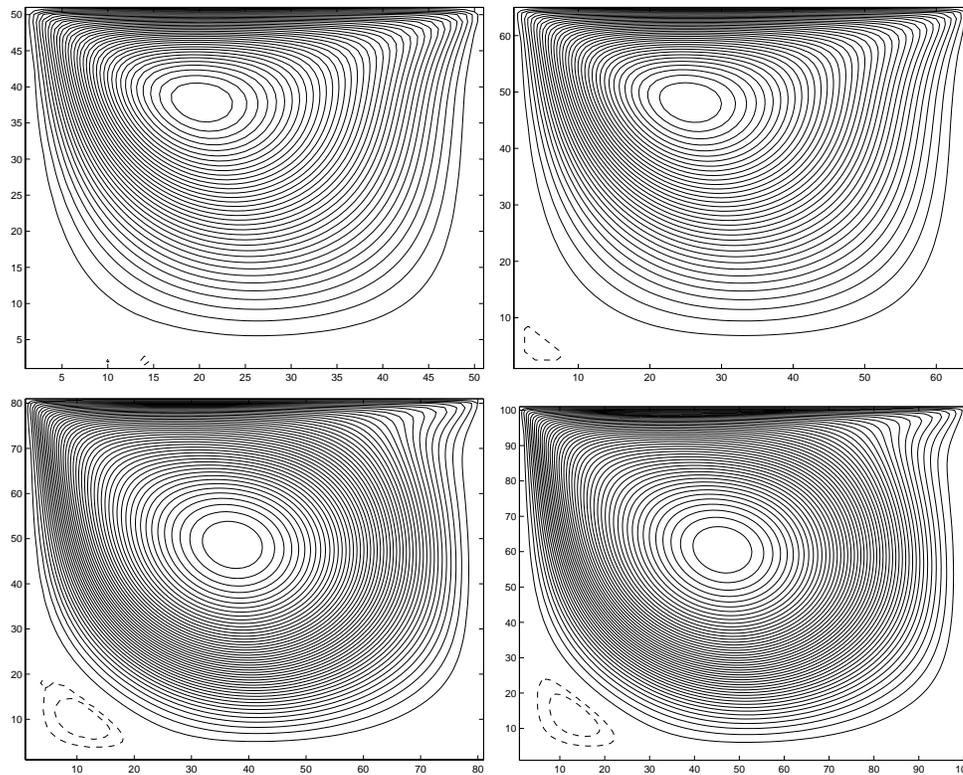


FIG. 3.8 – Isovaleurs de la fonction courant après la convergence à l'état stationnaire. A gauche : méthode V.I.C.; à droite : méthode différences-finies; du haut vers le bas : $Re = \{100, 500\}$

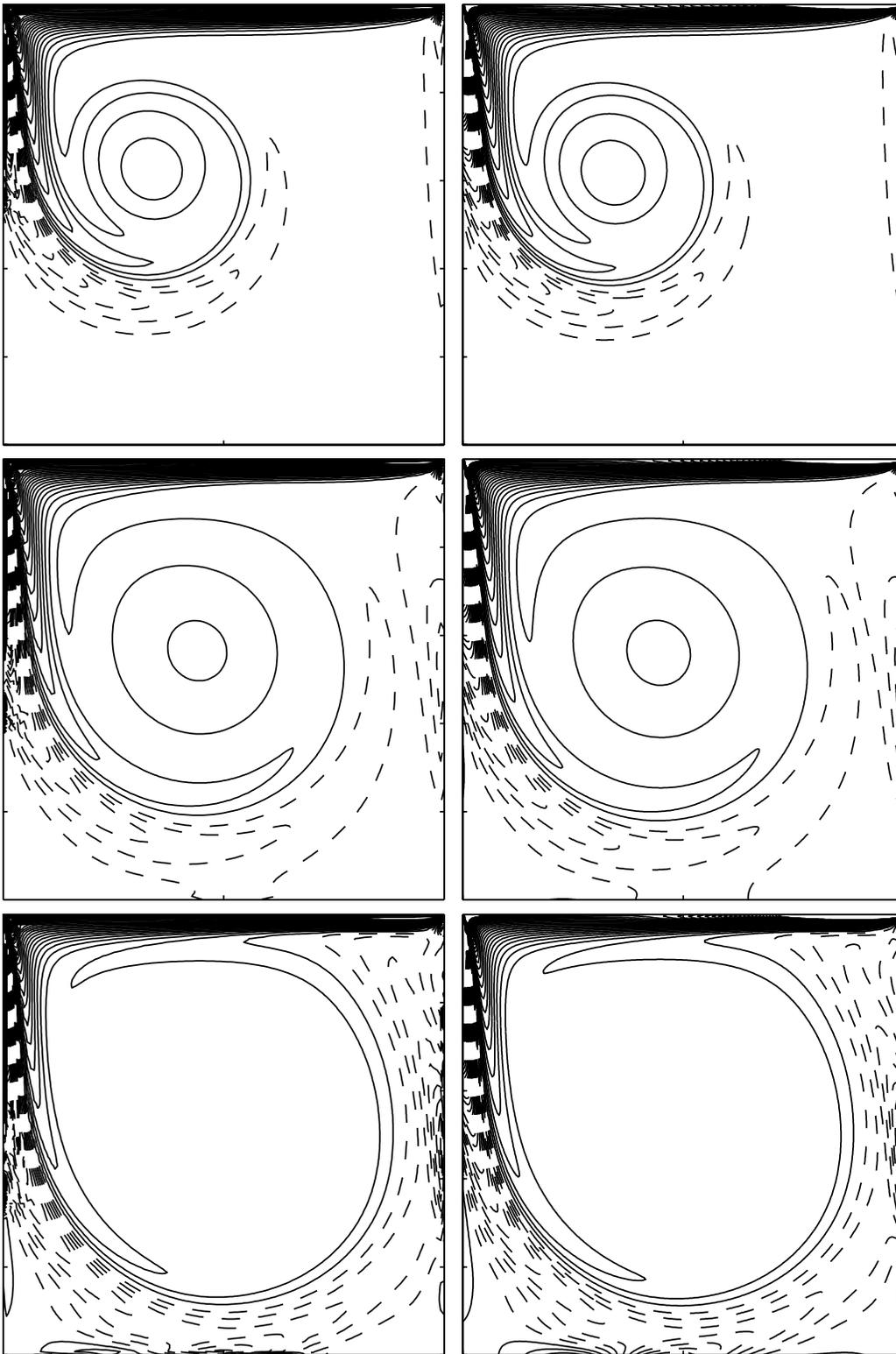


FIG. 3.9 – $Re = 2000$: Isovaleurs de la vorticité. A gauche : méthode V.I.C., $\Delta t_{vic} = 0.015$; à droite : méthode différences-finies, $\Delta t_{df} = 0.0075$; du haut vers le bas : $T = 8, 16, 40$

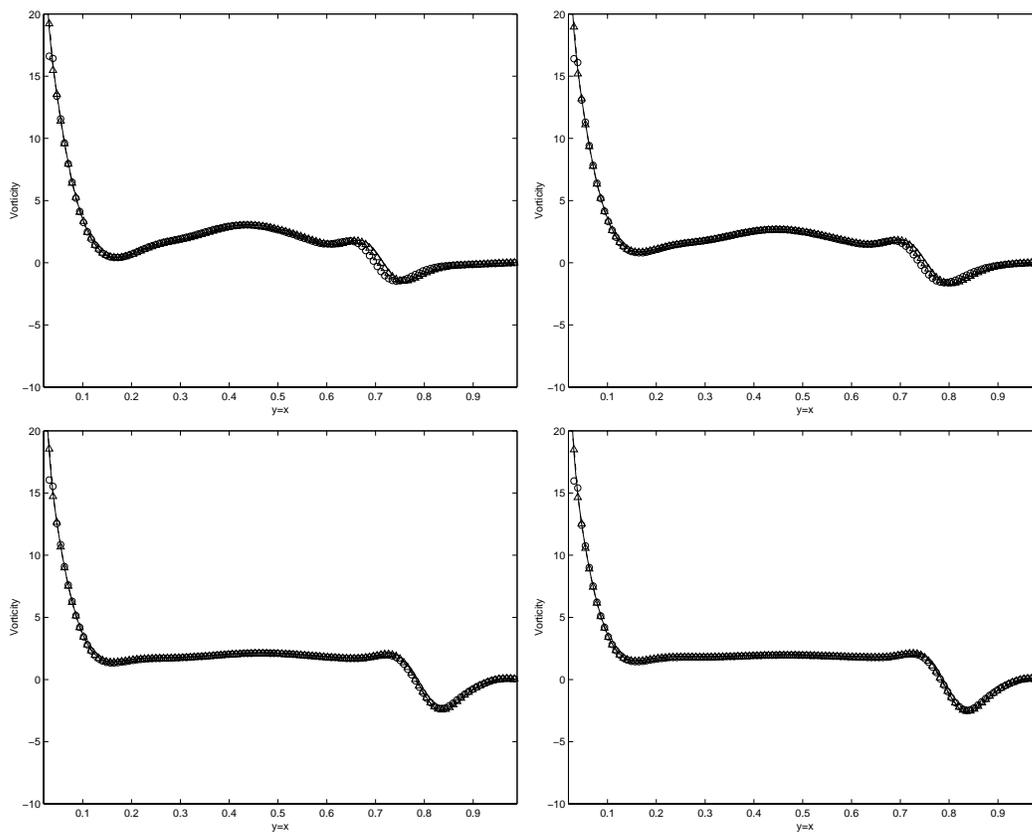


FIG. 3.10 – $Re = 2000$, $U_b = -1$ Vorticité sur la droite $y = 1 - x$. (–) : méthode différences-fines avec $M_{df} = 256$ et $\delta t_{DF} = 0.004$; o : méthode différences-fines avec $M_{df} = 128$ et $\delta t_{DF} = 0.008$; (– –) : méthode VIC avec $M_{pv} = 256$, $M_{pp} = 128$ et $\delta t_{VIC} = 0.02$; (Δ) : méthode VIC avec $M_{pv} = 128$, $M_{pp} = 128$ et $\delta t_{VIC} = 0.02$. De gauche à droite et de haut vers le bas : $\{T = 16, 20, 32, 40\}$

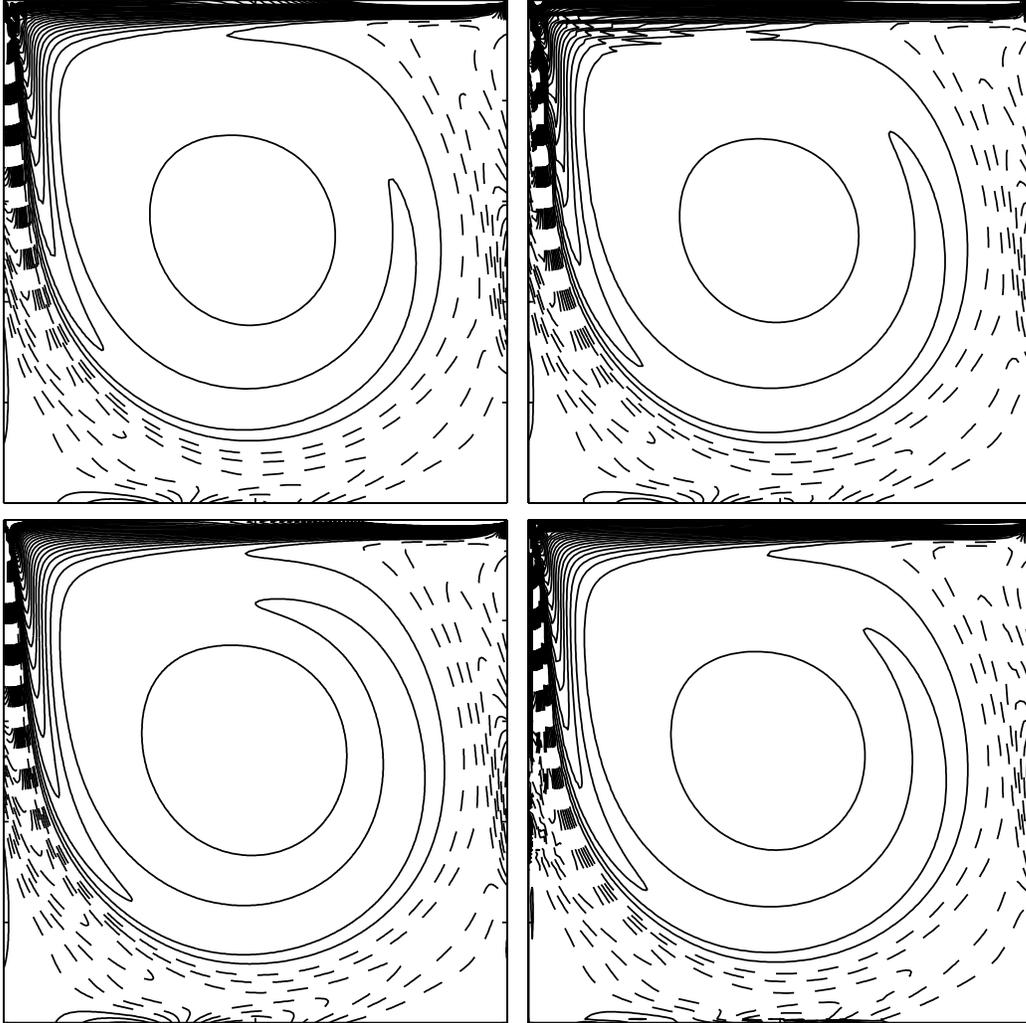


FIG. 3.11 - $Re = 2000$, $U_b = -1$ Isovaleurs de la vorticité, de gauche à droite et de haut vers le bas: méthode différences-finies avec $M_{df} = 256$ et $\delta t_{DF} = 0.004$; méthode VIC avec $M_{pv} = 256$, $M_{pp} = 128$ et $\delta t_{VIC} = 0.02$; méthode différences-finies avec $M_{df} = 128$ et $\delta t_{DF} = 0.008$; méthode VIC avec $M_{pv} = 128$, $M_{pp} = 128$ et $\delta t_{VIC} = 0.02$

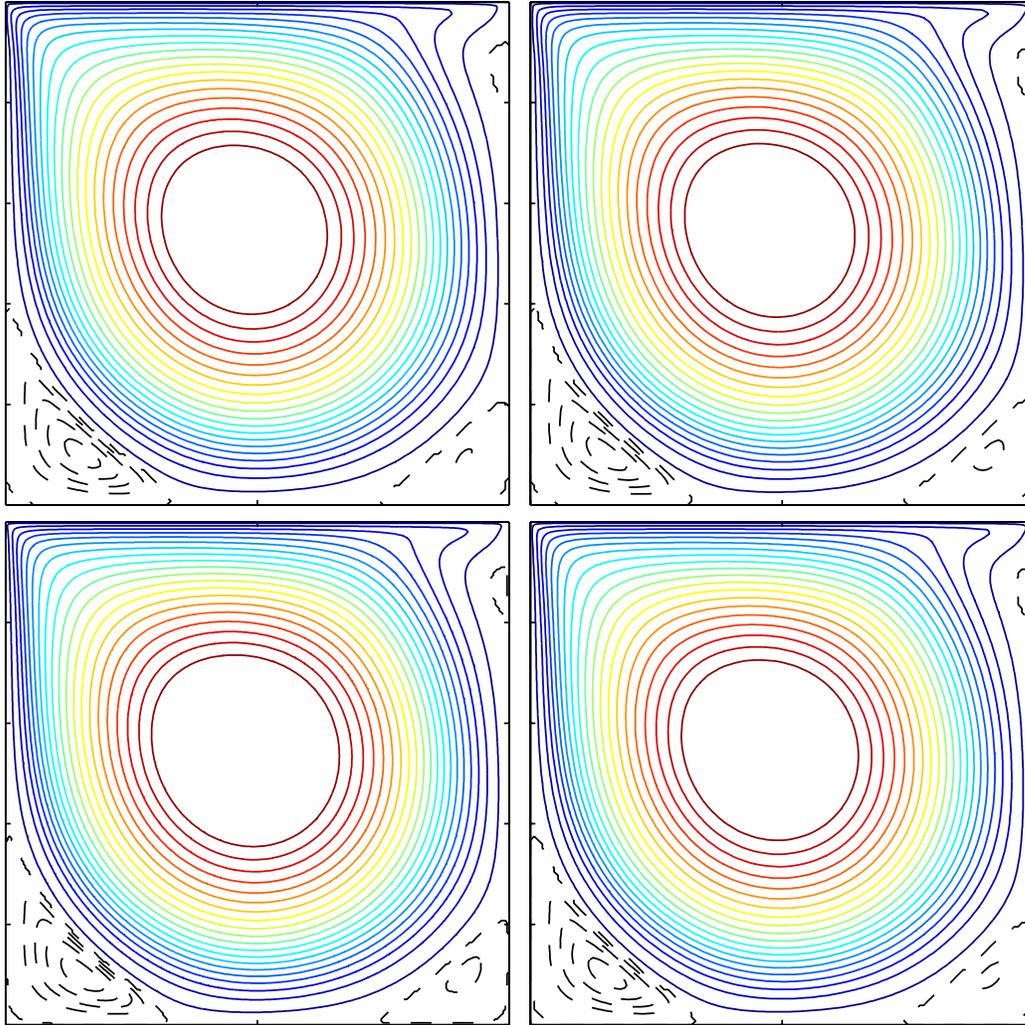


FIG. 3.12 - $Re = 2000$, $U_b = -1$ Isovaleurs de la fonction courant, de gauche à droite et de haut vers le bas : méthode différences-finies avec $M_{df} = 256$ et $\delta t_{DF} = 0.004$; méthode VIC avec $M_{pv} = 256$, $M_{pp} = 128$ et $\delta t_{VIC} = 0.02$; méthode différences-finies avec $M_{df} = 128$ et $\delta t_{DF} = 0.008$; méthode VIC avec $M_{pv} = 128$, $M_{pp} = 128$ et $\delta t_{VIC} = 0.02$

On donne le développement de l'écoulement pour une cavité carrée dans les figures (Fig.3.5, Fig.3.6). On remarque la convergence vers l'état stationnaire dès $T = 50$. Dans le cas d'une cavité de rapport $A = 2$, on remarque dès que $T = 60$, que les changements dans le champ de vorticité sont négligeables. Les figures (Fig.3.13, Fig.3.14) montrent les calculs faits par les deux méthodes V.I.C. et différences-finies jusqu'à $T = 20$. L' tat stationnaire est représenté en Fig.3.15.

Re=2000

Les comparaisons des deux méthodes pour une cavité carrée et $Re = 2000$, montrent une grande similarité entre les résultats des deux méthodes (Fig.3.9). Comme la méthode VIC ne subit pas la condition de stabilité convective, les pas de temps ont pu être choisis plus larges dans le calcul VIC par rapport au calcul différences-finies. Dans les figures (Fig.3.11, Fig.3.10, Fig.3.12) on montre les résultats de calcul sur deux grilles différentes. Cela montre l'indépendance des résultats de calcul des pas de discrétisation temporelle et spatiale.

Re=5000

On présente les calculs dans le cas d'une cavité de rapport $A = 2$. L  aussi, on remarque la similitude des résultats des deux méthodes. Cependant, on a besoin de faire huit pas de temps différences-finies pour un pas de temps V.I.C. On remarque dès que $T = 80$, que les changements dans le champ de vorticité sont négligeables. Les figures (Fig.3.16, Fig.3.17) montrent les calculs faits par les deux méthodes jusqu'à $T = 30$. L' tat stationnaire est représenté en Fig.3.18.

Re=10000

Si on garde la vitesse $U_b(x) = 1$ sur la façade supérieure, la méthode différences-finies demande un nombre important de points de discrétisation pour rester stable. On l'a donc dans cette simulation remplacée par : $U_b(x) = 16x^2(1 - x)^2$. On constate que la méthode VIC nous permet de choisir des pas de temps très grands par rapport aux pas de temps nécessaires au calcul différences-finies. Les figures (Fig.3.20, Fig.3.21, Fig.3.22, Fig.3.23, Fig.3.24) montrent que malgré le pas de temps utilisé en méthode VIC les résultats de calcul restent conformes avec les calculs par méthode différences-finies sur une grille de même taille ainsi que sur une grille deux fois plus fine.

La liste des paramètres de calcul et les caractéristiques des simulations de comparaison différences-finies-V.I.C. sont données par le tableau Tab.3.2. Les temps de calcul sont comparés dans ce tableau sur une station de travail. Les paramètres des simulations effectuées uniquement en méthode V.I.C. sont donnés directement dans les commentaires des figures correspondantes.

Re	100	500	2000	10000
U_b	-1	-1	-1	$-16x^2(1 - x)^2$
M_{df}	64	100	164	256
M_{pv}	64	100	164	256
M_{pp}	50	80	100	128
δt_{D-F}	0.01	0.015	0.0075	0.004
δt_{VIC}	0.01	0.02	0.015	0.04
Temps de calcul D-F en CPU/T	6.	10	73	334
Temps de calcul VIC en CPU/T	15	21	58	50

TAB. 3.2 – Paramètres des simulations

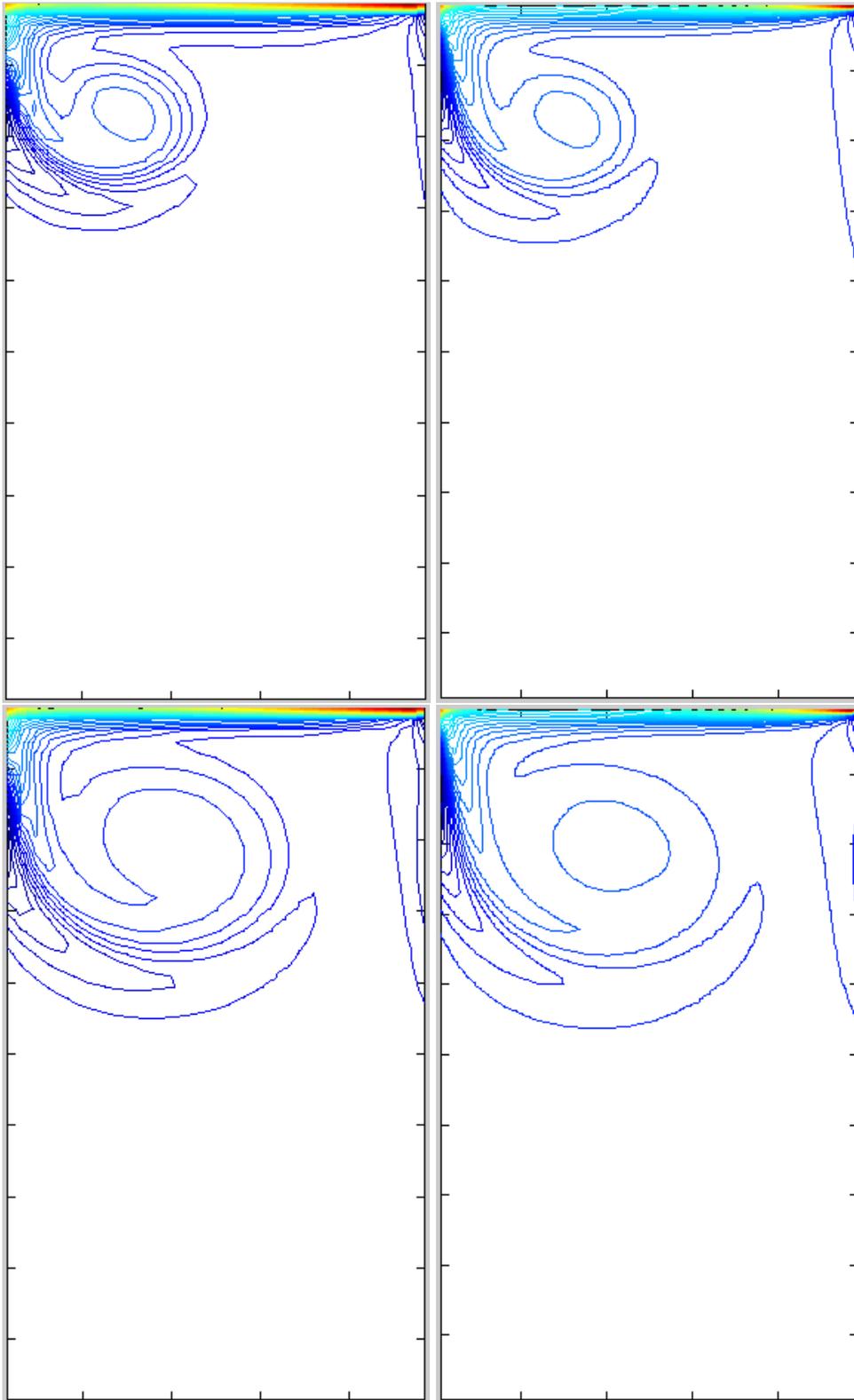


FIG. 3.13 – $Re = 1000$: Isovaleurs de la vorticité. A gauche : méthode V.I.C., $\Delta t_{vic} = 0.08$; à droite : méthode différences-finies, $\Delta t_{df} = 0.01$; du haut vers le bas : $T = \{5, 10\}$

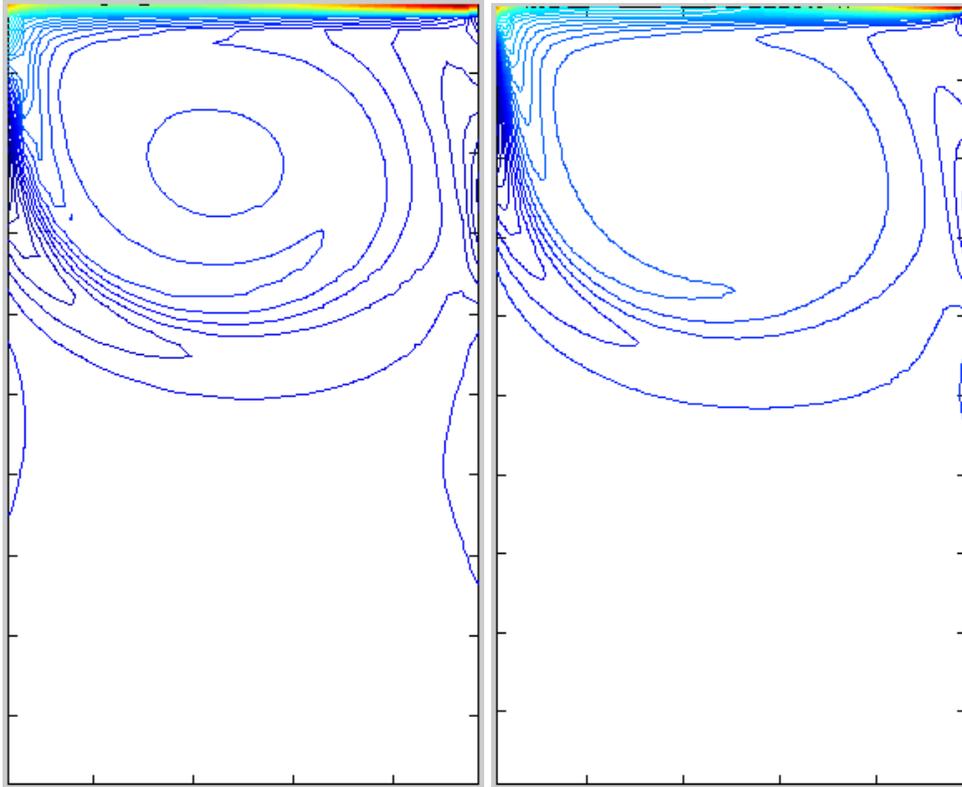


FIG. 3.14 - $Re = 1000$: Isovaleurs de la vorticité. A gauche : méthode V.I.C., $\Delta t_{vic} = 0.08$; à droite : méthode différences-finies, $\Delta t_{df} = 0.01$; $T = \{20\}$

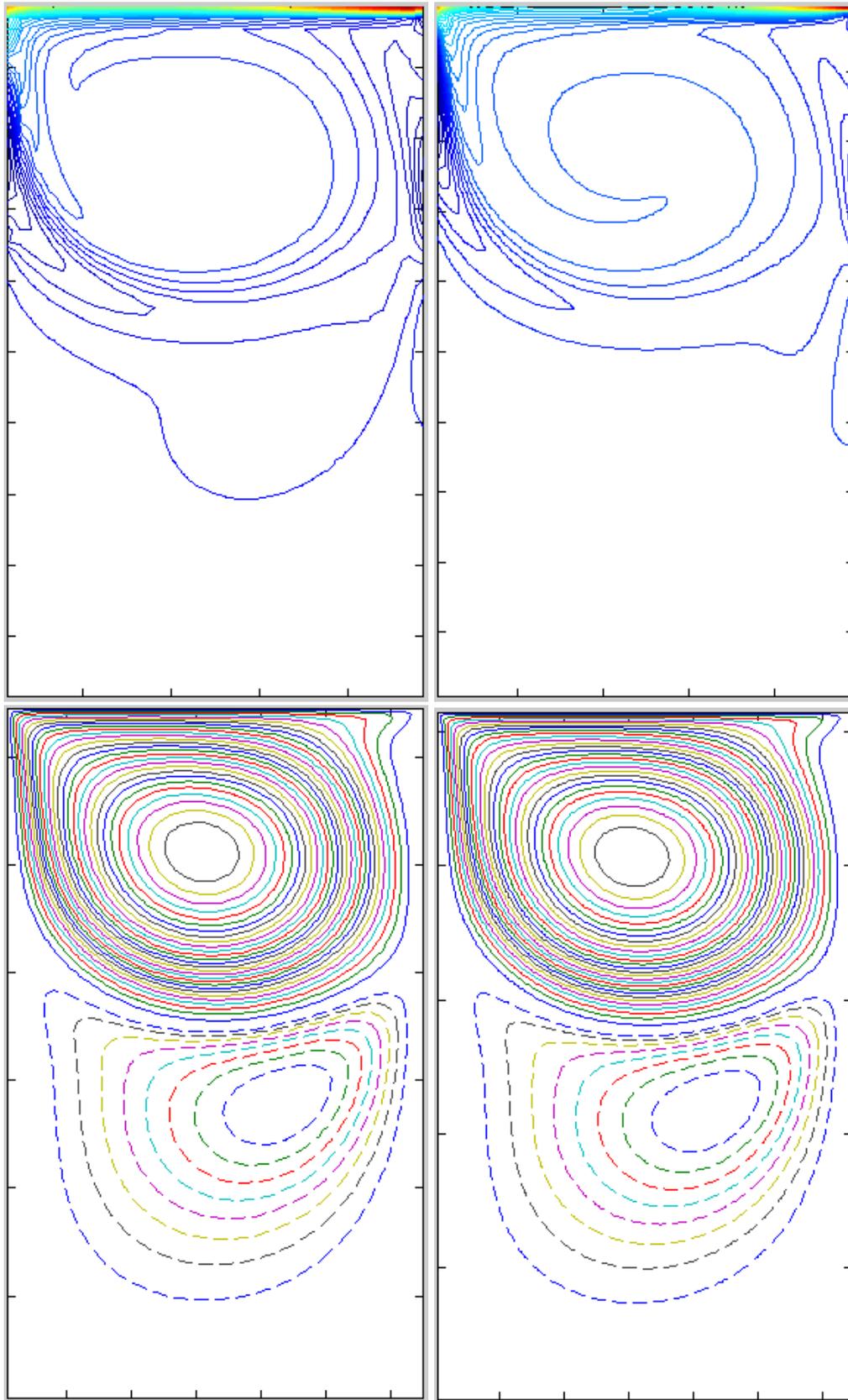


FIG. 3.15 – $Re = 1000$: Etat stationnaire (après convergence) : Isovaleurs de la vorticité et de la fonction courant. A gauche : méthode V.I.C.; à droite : méthode différences-finies, $T = 100$

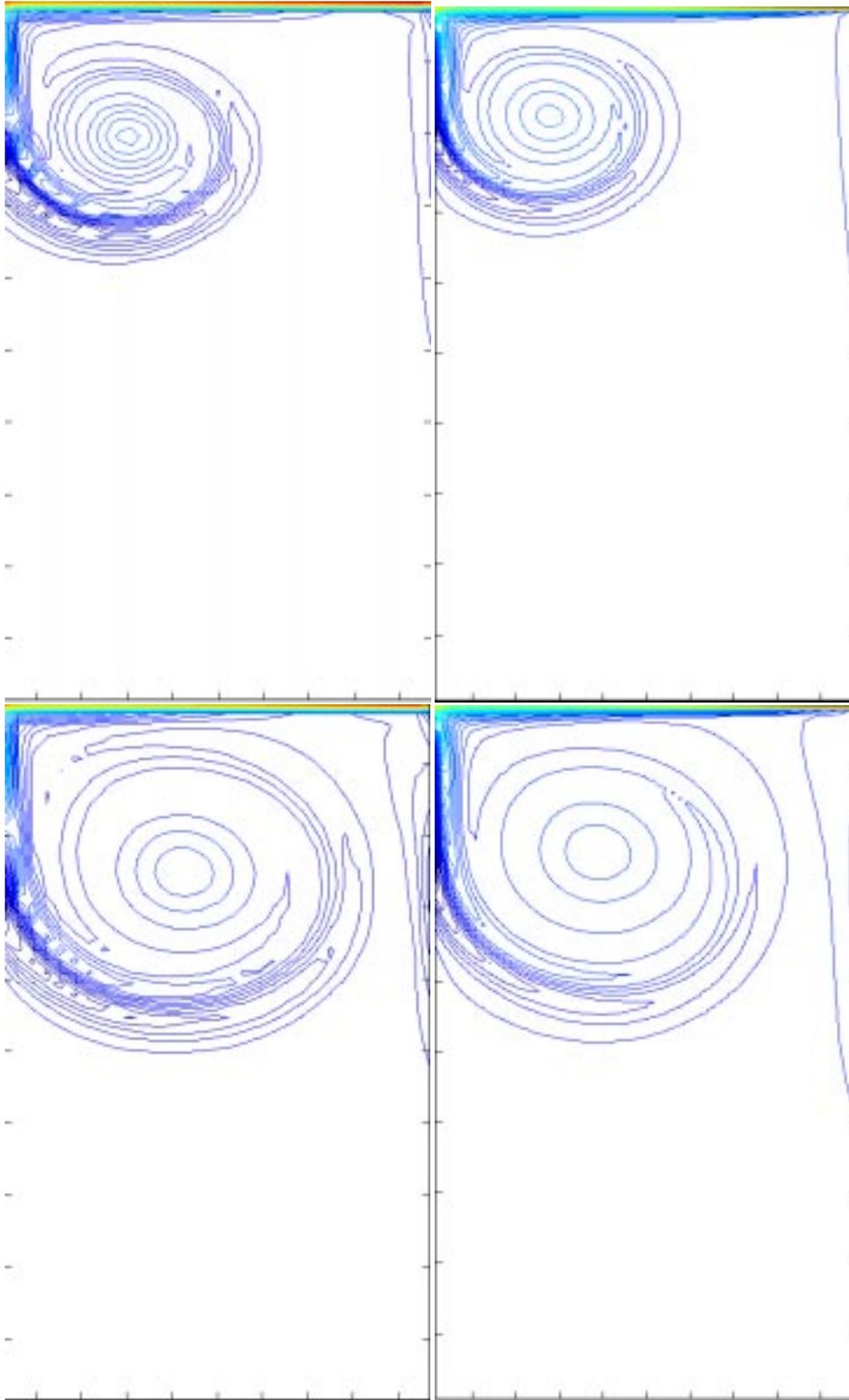


FIG. 3.16 – $Re = 5000$: Isovaleurs de la vorticité. A gauche : méthode V.I.C., $\Delta t_{vic} = 0.08$; à droite : méthode différences-finies, $\Delta t_{df} = 0.01$; du haut vers le bas : $T = \{10, 20\}$

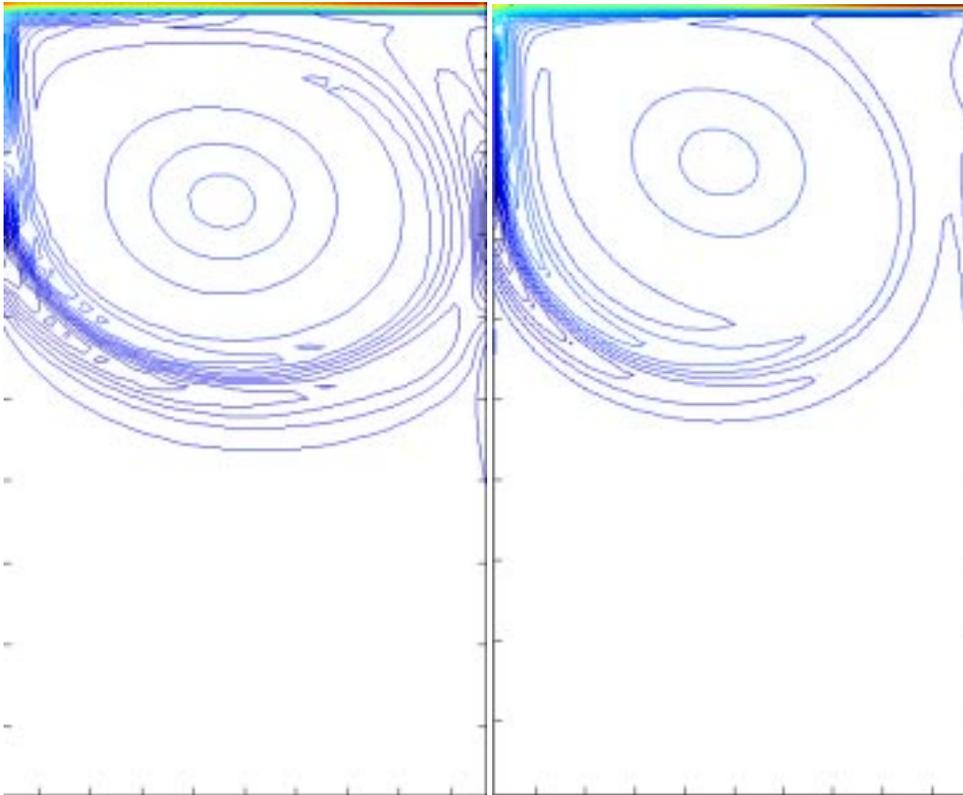


FIG. 3.17 - $Re = 5000$: Isovaleurs de la vorticité. A gauche : méthode V.I.C., $\Delta t_{vic} = 0.08$; à droite : méthode différences-finies, $\Delta t_{df} = 0.01$; $T = 30$

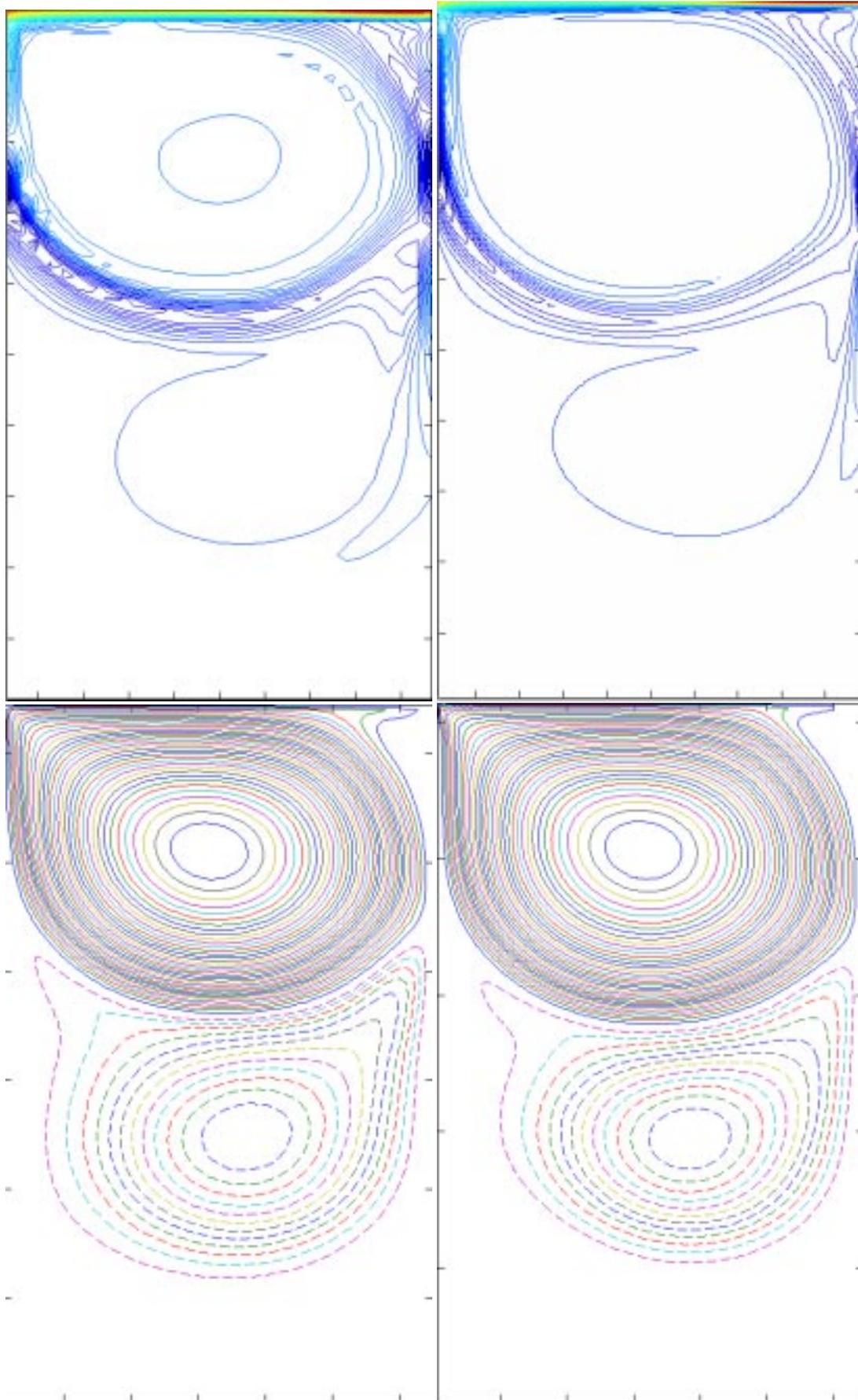


FIG. 3.18 – $Re = 5000$: Etat stationnaire (après convergence) : Isovaleurs de la vorticité et de la fonction courant. A gauche : méthode V.I.C.; à droite : méthode différences-finies, $T = 100$

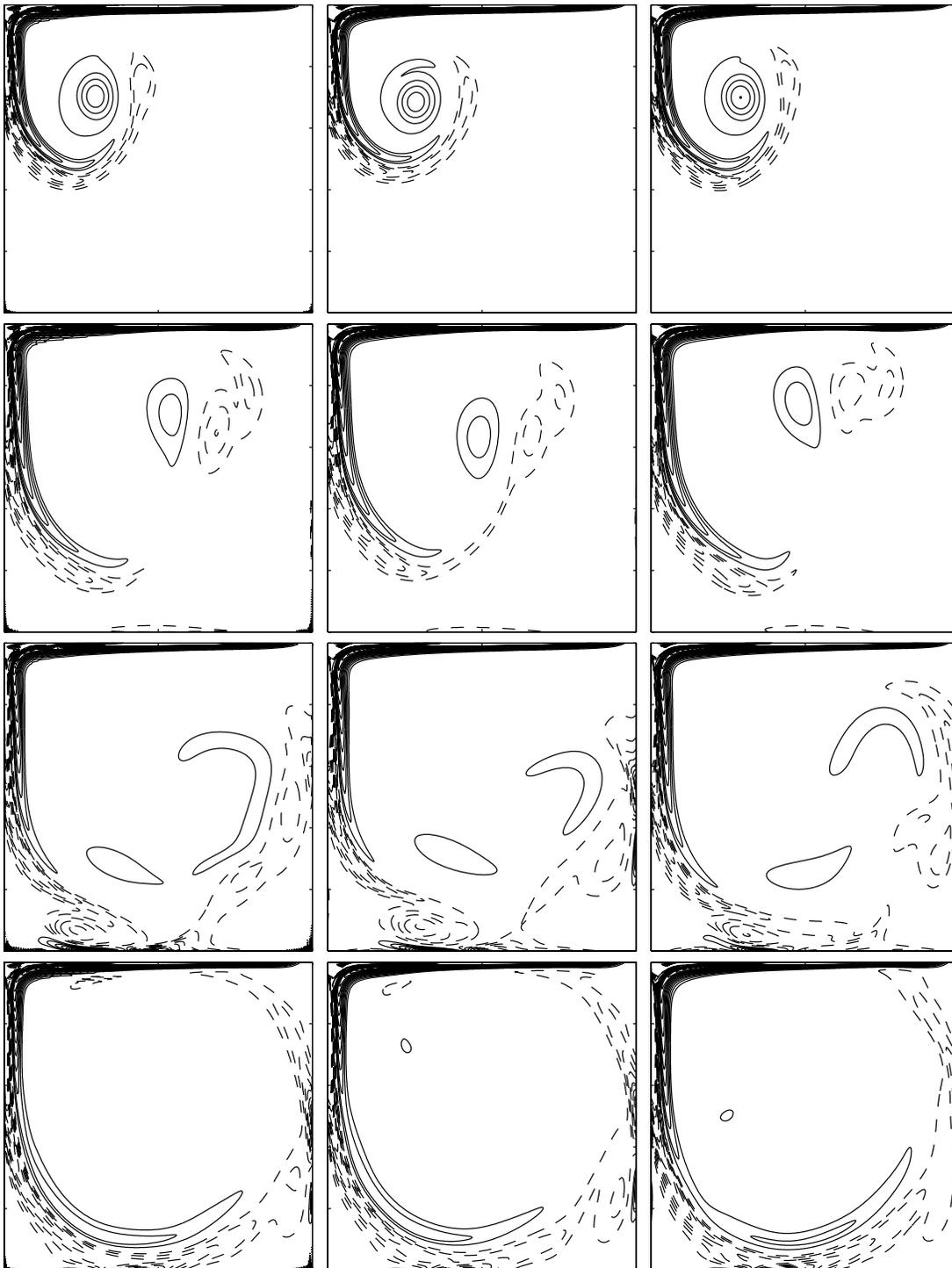


FIG. 3.19 - $Re = 10000$, $U_b = -16x^2(1-x)^2$. A gauche : calcul par méthode VIC avec $M_{pv} = 256$, $M_{pp} = 256$, $\delta t_{VIC} = 0.04$. Au milieu : calcul par méthode différences-finies avec $M_{df} = 256$, $\delta t_{DF} = 0.004$. A droite : calcul par méthode différences-finies avec $M_{df} = 512$, $\delta t_{DF} = 0.002$. Du haut vers le bas, isovalues de la vorticité : $\{T = 10, 20, 30, 40\}$

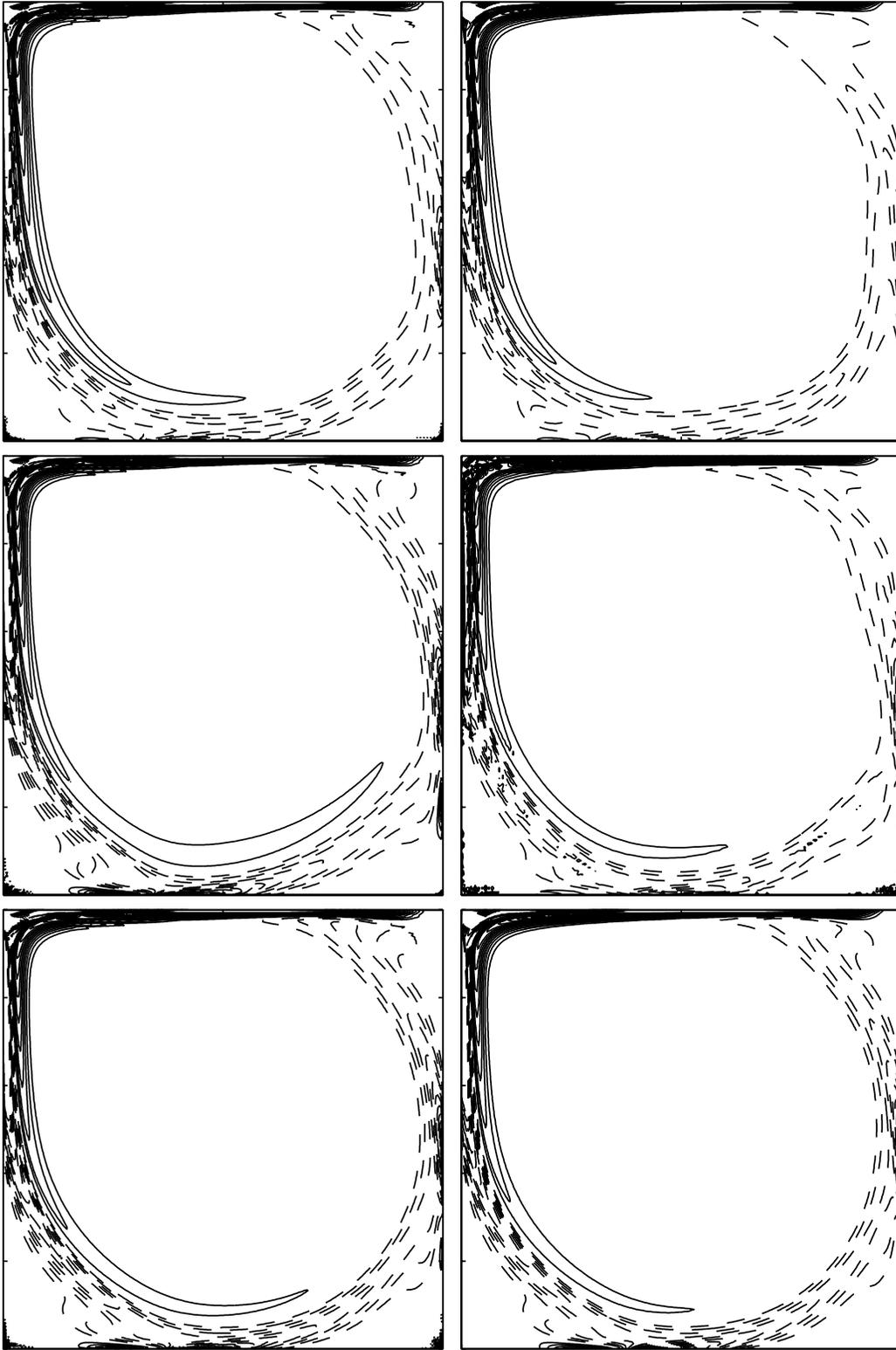


FIG. 3.20 - $Re = 10000$, $U_b = -16x^2(1-x)^2$, $M_{df} = 256$, $M_{pv} = 256$, $M_{pp} = 256$, $\delta t_{DF} = 0.004$, $\delta t_{VIC} = 0.04$. A gauche : calcul par méthode VIC. A droite : calcul par méthode différences-finies. Du haut vers le bas, isovalues de la vorticité : $\{T = 50, 70, 100\}$

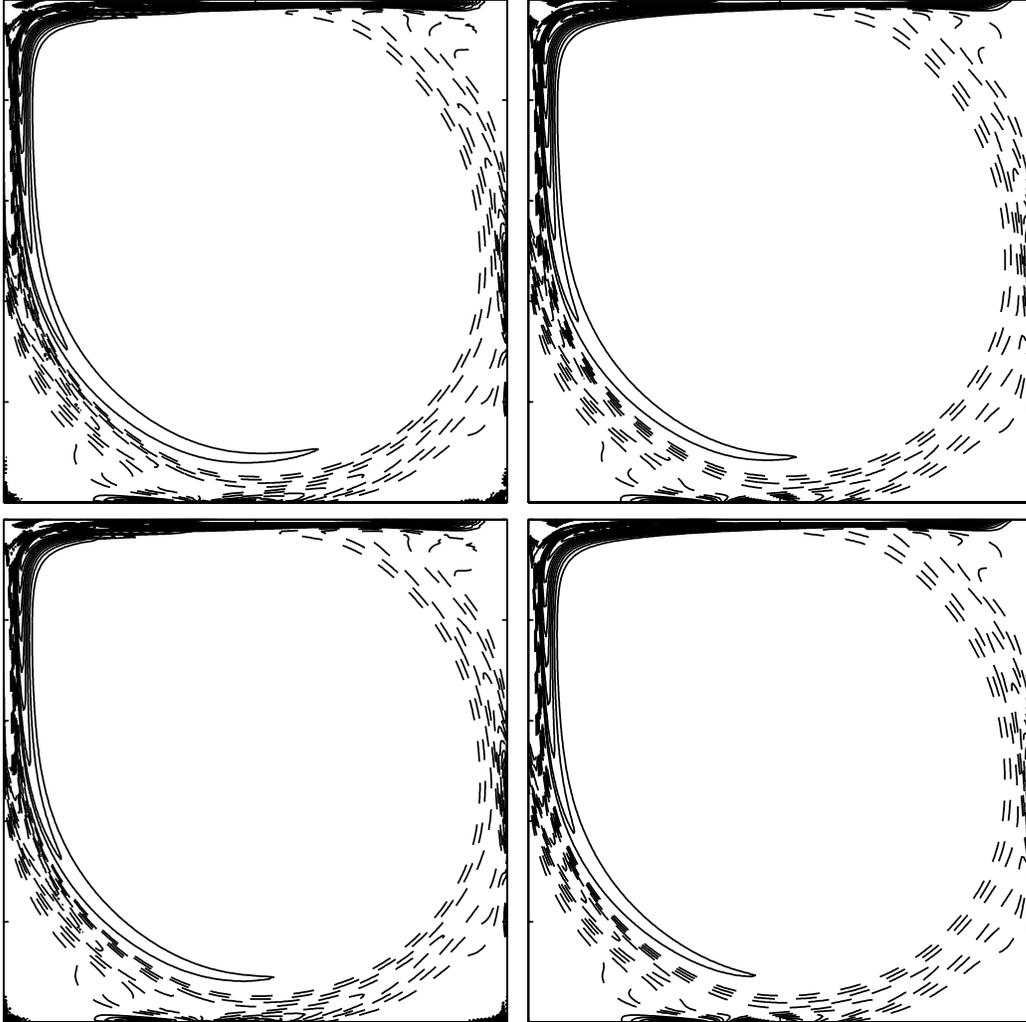


FIG. 3.21 - $Re = 10000$, $U_b = -16x^2(1-x)^2$, $M_{df} = 256$, $M_{pv} = 256$, $M_{pp} = 256$, $\delta t_{DF} = 0.004$, $\delta t_{VIC} = 0.04$. A gauche : calcul par méthode VIC. A droite : calcul par méthode différences-finies. Du haut vers le bas, isovalues de la vortacité : $\{T = 150, 200\}$

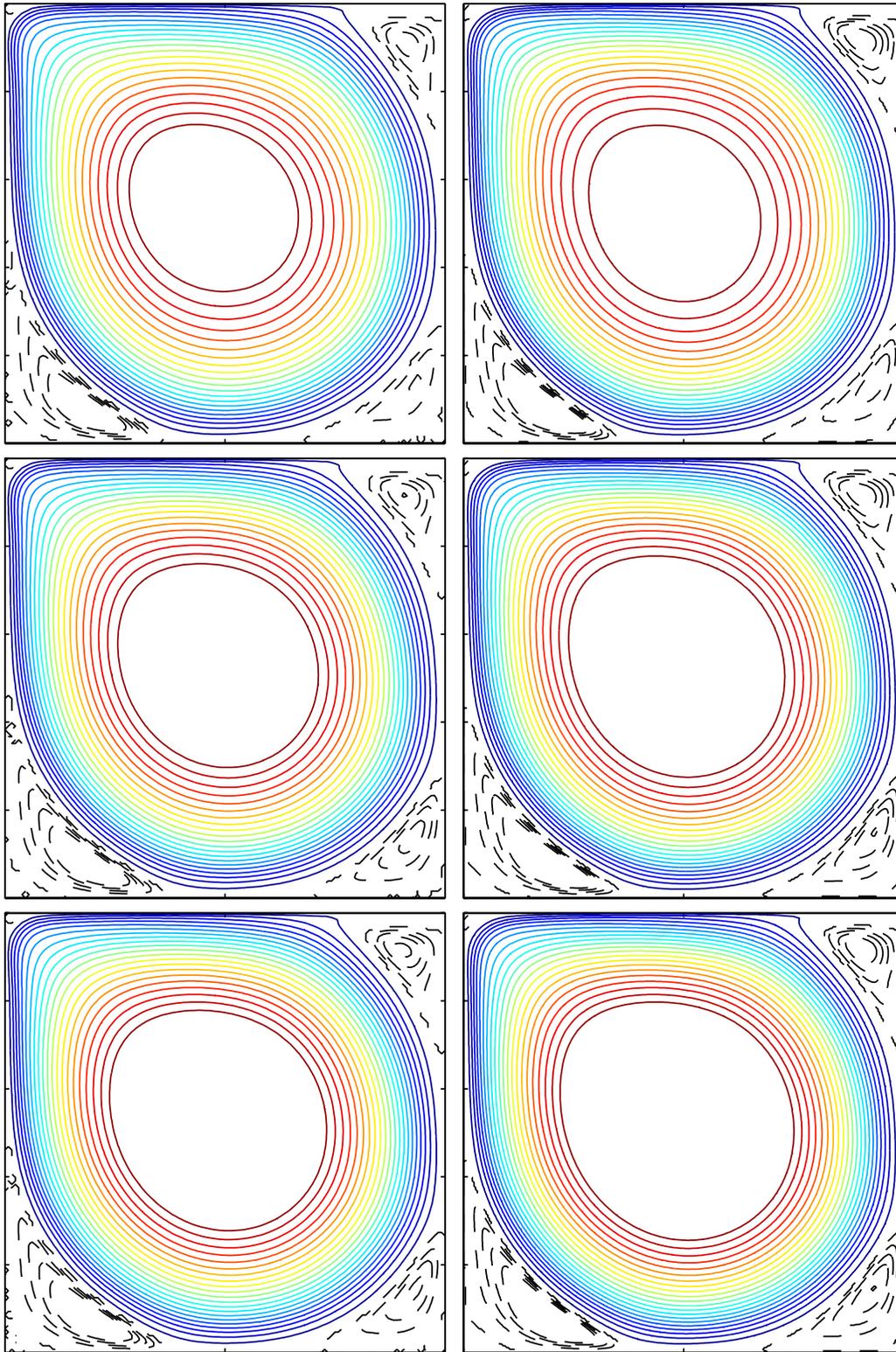


FIG. 3.22 - $Re = 10000$, $U_b = -16x^2(1-x)^2$, $M_{df} = 256$, $M_{pv} = 256$, $M_{pp} = 256$, $\delta t_{DF} = 0.004$, $\delta t_{VIC} = 0.04$. A gauche : calcul par méthode VIC. A droite : calcul par méthode différences-finies. Du haut vers le bas, isovaleurs de la foction courant : $\{T = 70, 100, 150, 200\}$

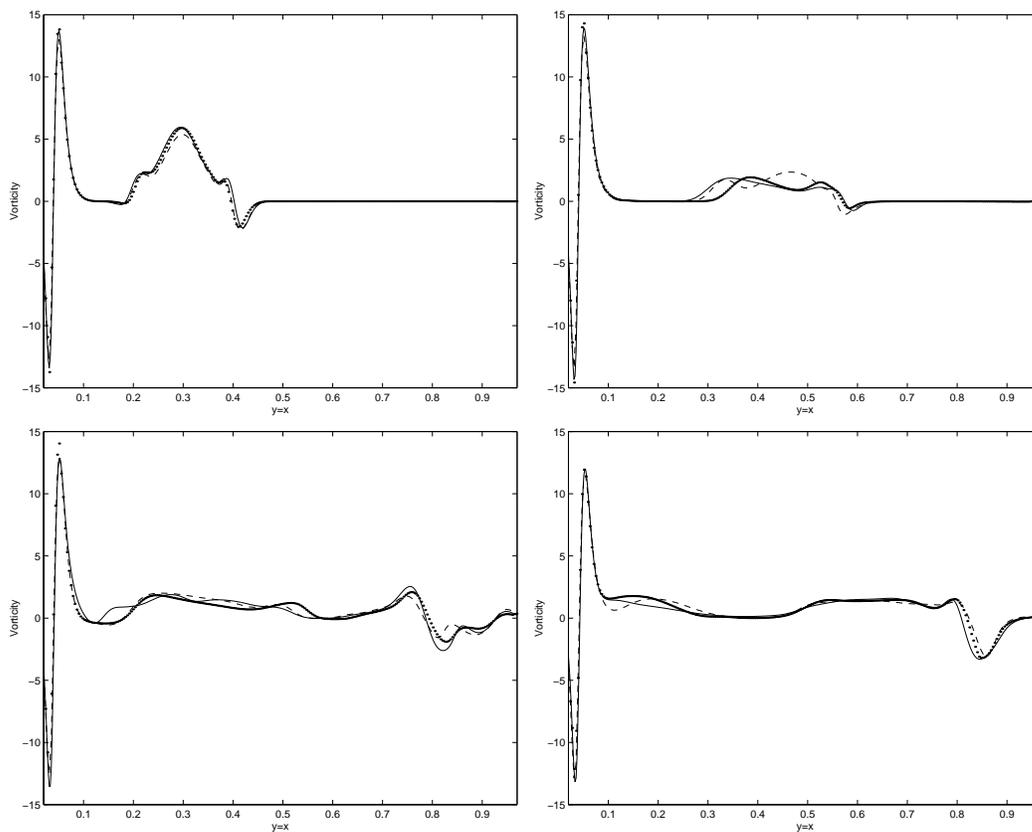


FIG. 3.23 – $Re = 10000$, $U_b = -16x^2(1-x)^2$. (\cdot) : calcul par méthode VIC avec $M_{pv} = 256$, $M_{pp} = 256$, $\delta t_{VIC} = 0.01$. ($--$) : calcul par méthode différences-finies avec $M_{df} = 256$, $\delta t_{DF} = 0.004$. ($-$) : calcul par méthode différences-finies avec $M_{df} = 512$, $\delta t_{DF} = 0.002$. Vorticité sur la droite $y = 1 - x$. De gauche à droite et de haut vers le bas : $\{T = 10, 20, 40, 50\}$

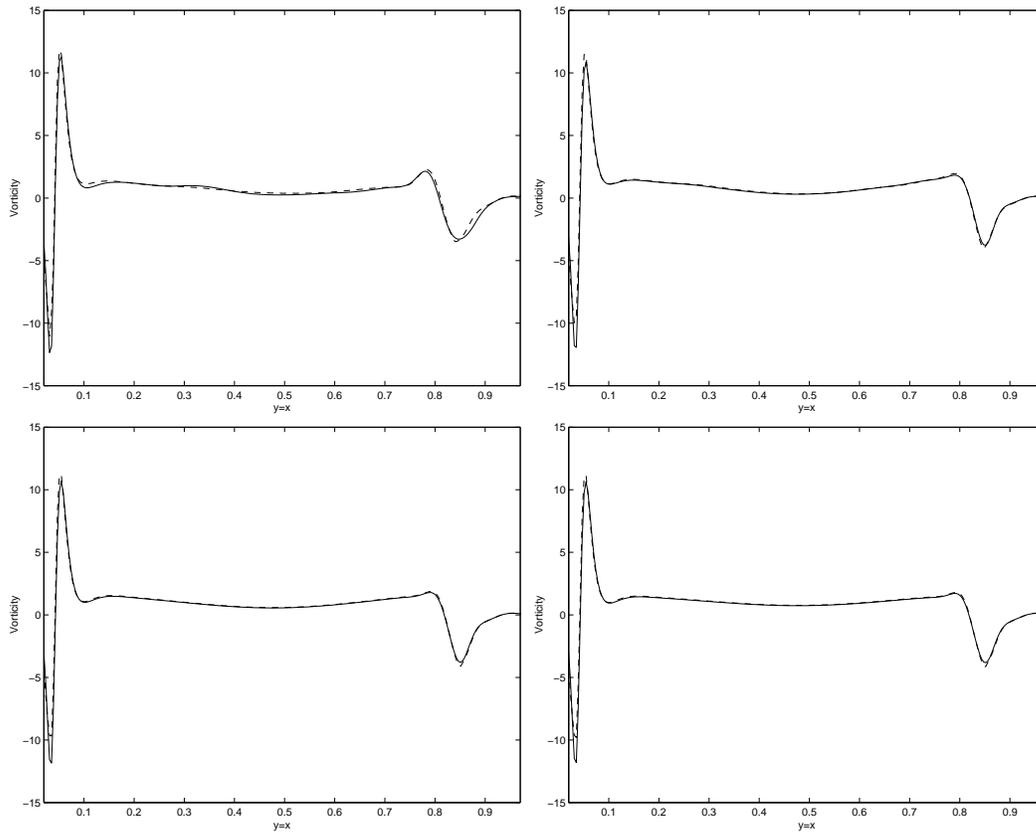


FIG. 3.24 – $Re = 10000$, $U_b = -16x^2(1-x)^2$, $M_{df} = 256$, $M_{pv} = 256$, $M_{pp} = 256$, $\delta t_{DF} = 0.004$, $\delta t_{VIC} = 0.04$. Vorticité sur la droite $y = 1 - x$; (-) : méthode différences-finies, (--) : méthode VIC. De gauche à droite et de haut vers le bas : $\{T = 70, 100, 150, 200\}$

3.7.2 Cavité à nombres de Reynolds élevés

Re=7500

Dans le cas d'une cavité de rapport $A = 1$, on remarque dès que $T = 50$, que l'état stationnaire est atteint. Les figures Fig.3.25 montrent les calculs faits par la méthode V.I.C.

Re=10000

On présente ici deux simulations. La première est pour une cavité de rapport $A = 1$. On remarque que les changements deviennent négligeable (Fig.3.26, Fig.3.27) après $T = 180$. La deuxième, est une cavité de rapport $A = 2$. Après $T = 100$, les changements deviennent petits, mais on ne peut pas dire que la solution deviendra complètement stationnaire (Fig.3.28, Fig.3.29, Fig.3.30).

Re=20000

Le développement de l'écoulement est présenté dans les figures (Fig.3.31, Fig.3.32). Au commencement, les tourbillons se créent et se développent rapidement (Voir Fig.3.31).

Re=100000

L'objectif de cette simulation est de montrer que même avec peu diffusion, la méthode V.I.C. proposée ici reste stable et arrive à transporter la vorticité générée sur le bord à l'intérieur du domaine. Cela montre l'avantage de cette méthode par rapport à beaucoup d'autres. La plupart des méthodes numériques sont incapables d'implémenter des simulations en présence de frontières non régulières et en absence d'effet régularisant de la diffusion (Fig.3.33).

3.8 Conclusion

Le couplage des techniques lagrangiennes et euleriennes offrent un moyen robuste de simulation en mécanique des fluides. Il permet de combiner les avantages du traitement non linéaire de la convection avec une prise en compte simple des conditions limites sur les parois par méthode eulerienne. L'emploi de grille eulerienne donne aussi la possibilité de calcul des vitesses en géométrie simple par méthodes précises et peu coûteuses comme la transformée de Fourier rapide et l'algorithme de réduction cyclique.

L'aspect local de la méthode V.I.C. rend sa parallélisation avantageuse. La quantité de données échangées entre les sous-domaines, est négligeable par rapport à la taille globale des données.

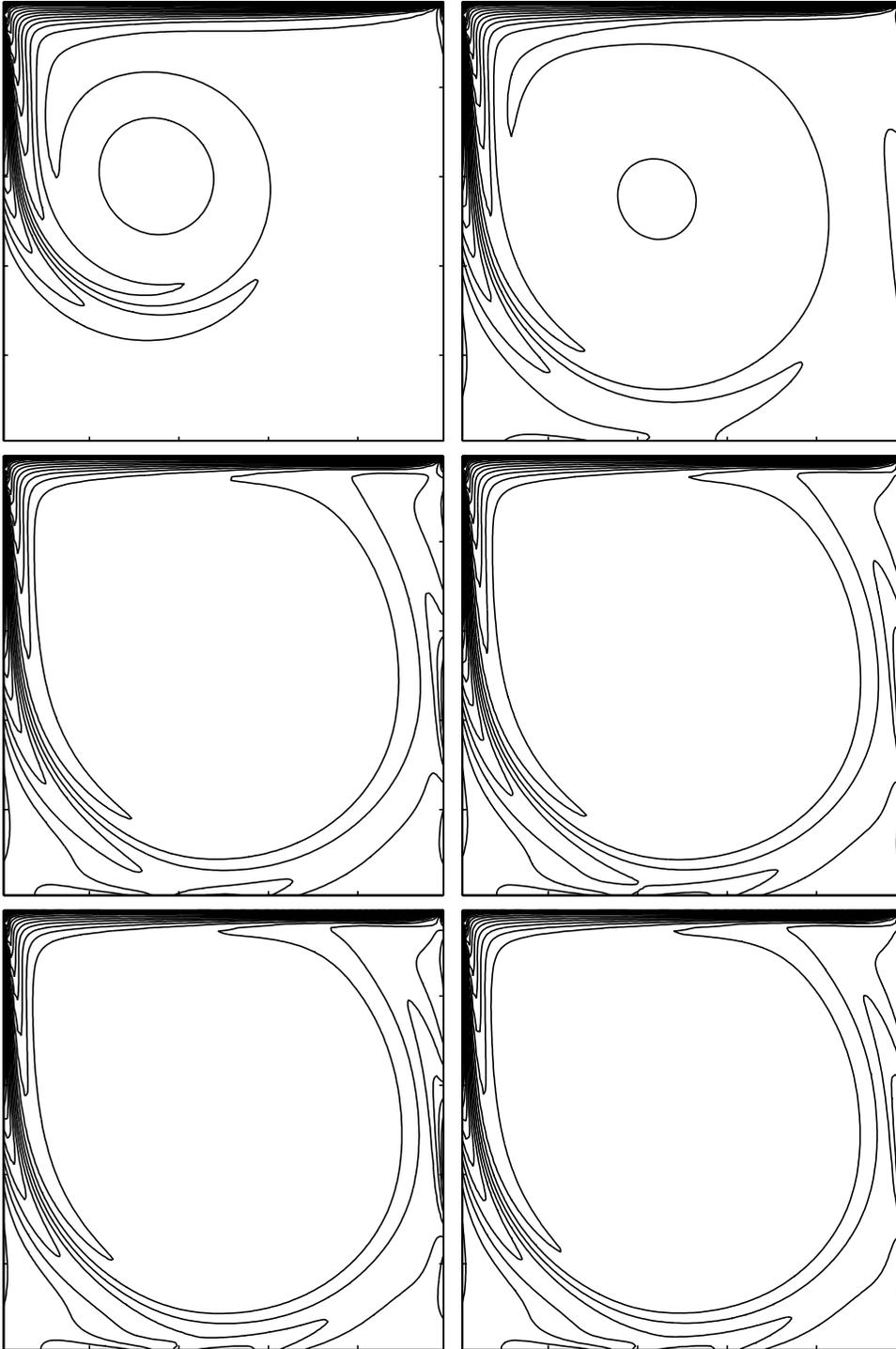


FIG. 3.25 - $U_b = -1$, $Re = 7500$, $mv = 256$, $mp = 256$ du haut vers le bas et de gauche à droite: $\{T = 10, 20, 30, 40, 50, 60\}$

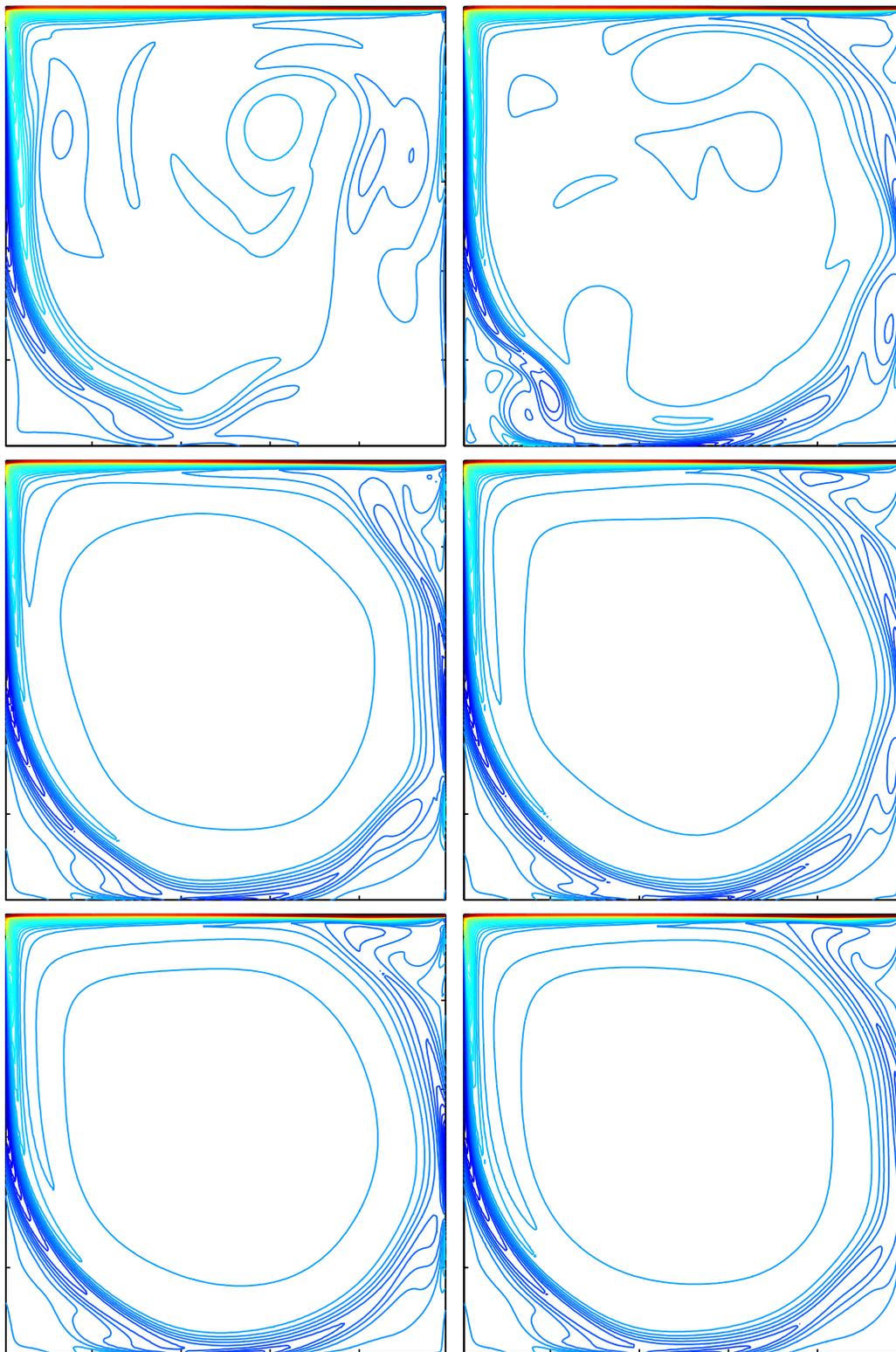


FIG. 3.26 - $U_b = -1$, $Re = 10000$, $mv = 300$, $mp = 300$, $\delta t = 0.01$. *Vorticité, du haut vers le bas :* $\{T = 20, 40, 100, 140, 180, 200\}$

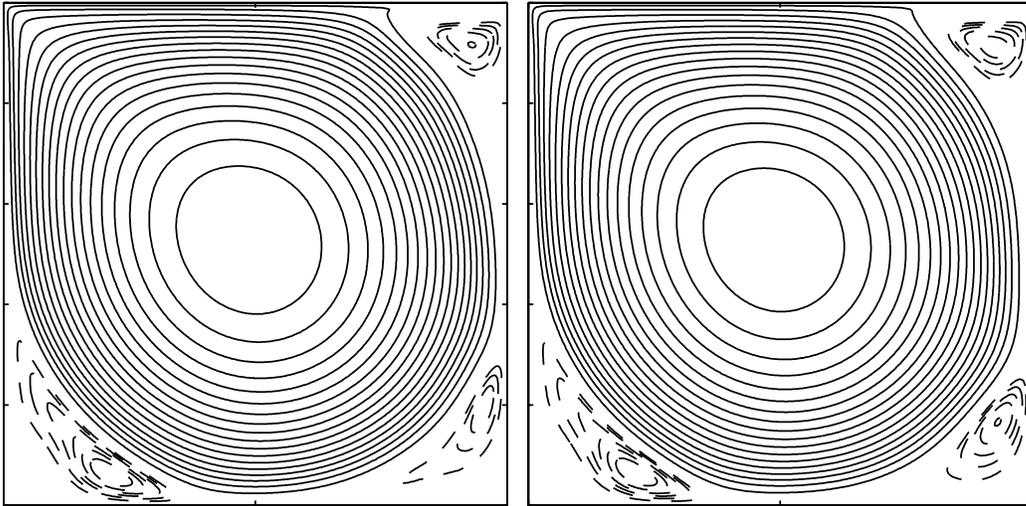


FIG. 3.27 - $U_b = -1$, $Re = 10000$, $mv = 300$, $mp = 300$, $\delta t = 0.01$. *Fonction courant, de gauche à droite: $\{T = 180, 200\}$*

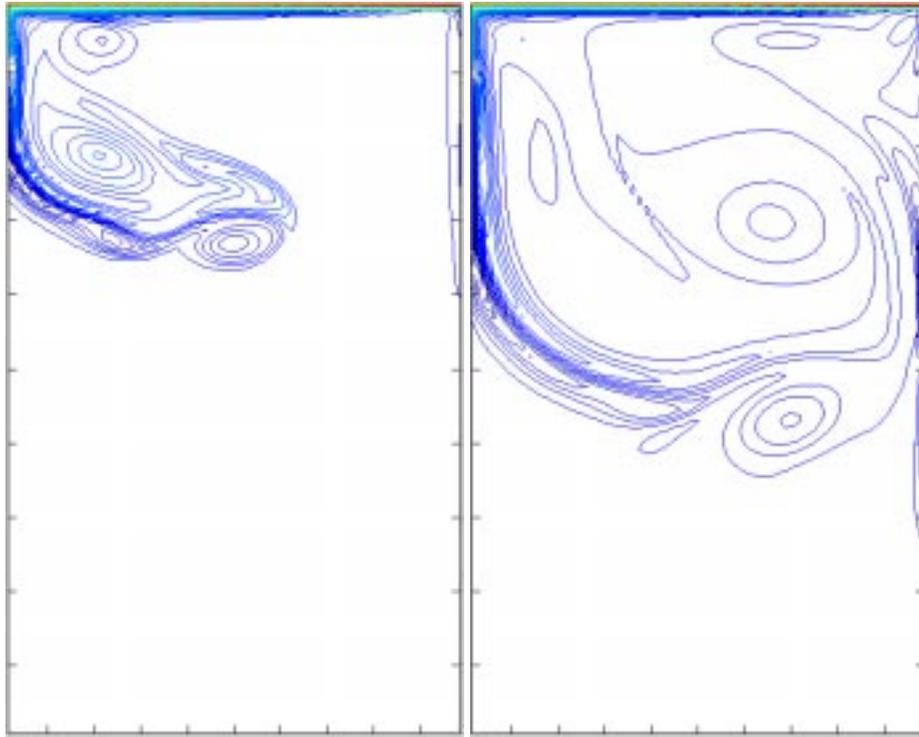


FIG. 3.28 - $Re = 10000$: $(mv, nv) = (256, 512)$, $(mp, np) = (128, 256)$ *Isovaleurs de la vorticité*
 $T = \{10, 20\}$

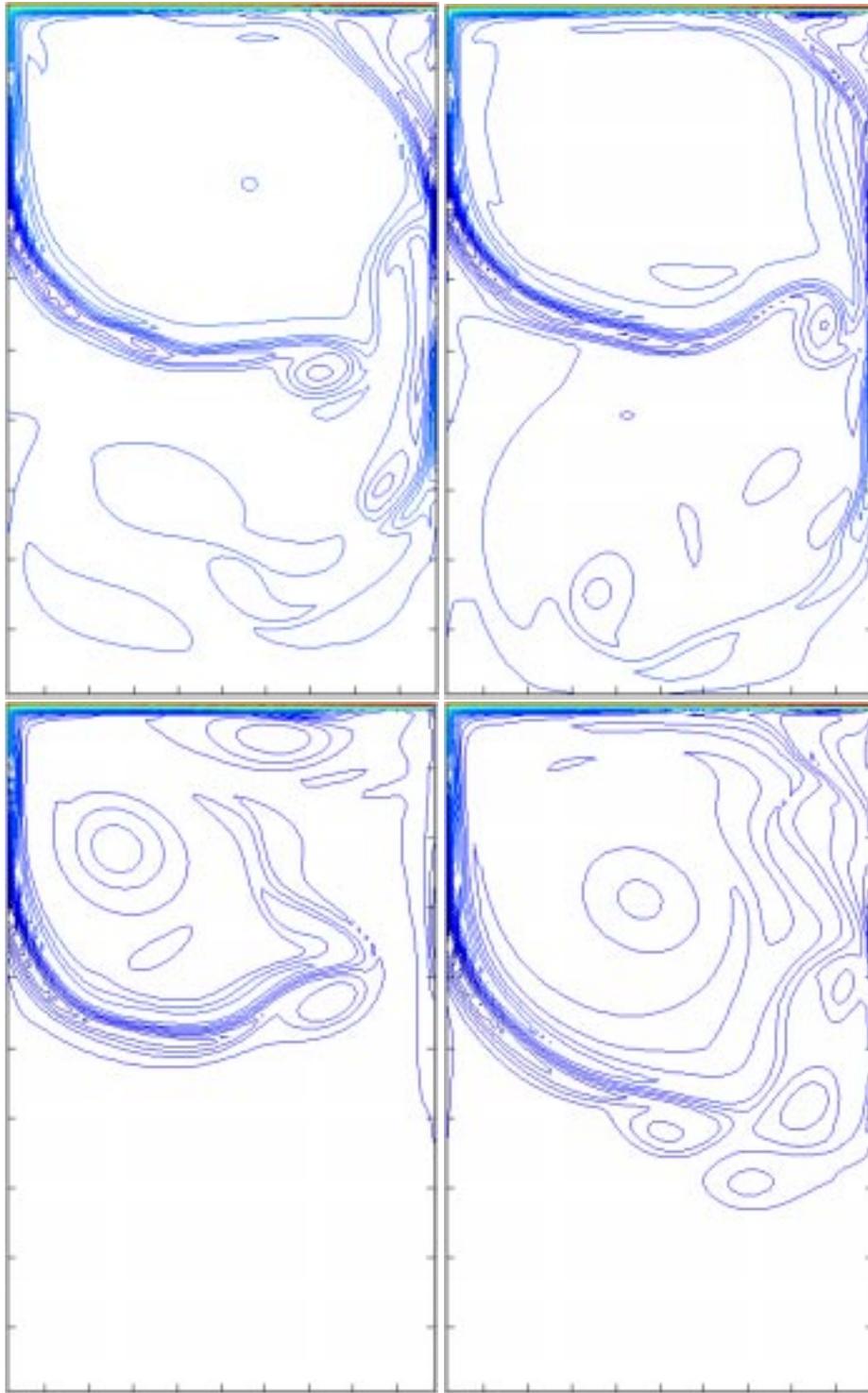


FIG. 3.29 - $Re = 10000$: $(mv, nv) = (256, 512)$, $(mp, np) = (128, 256)$ *Isovaleurs de la vorticité*
 $T = \{30, 40, 80, 120\}$

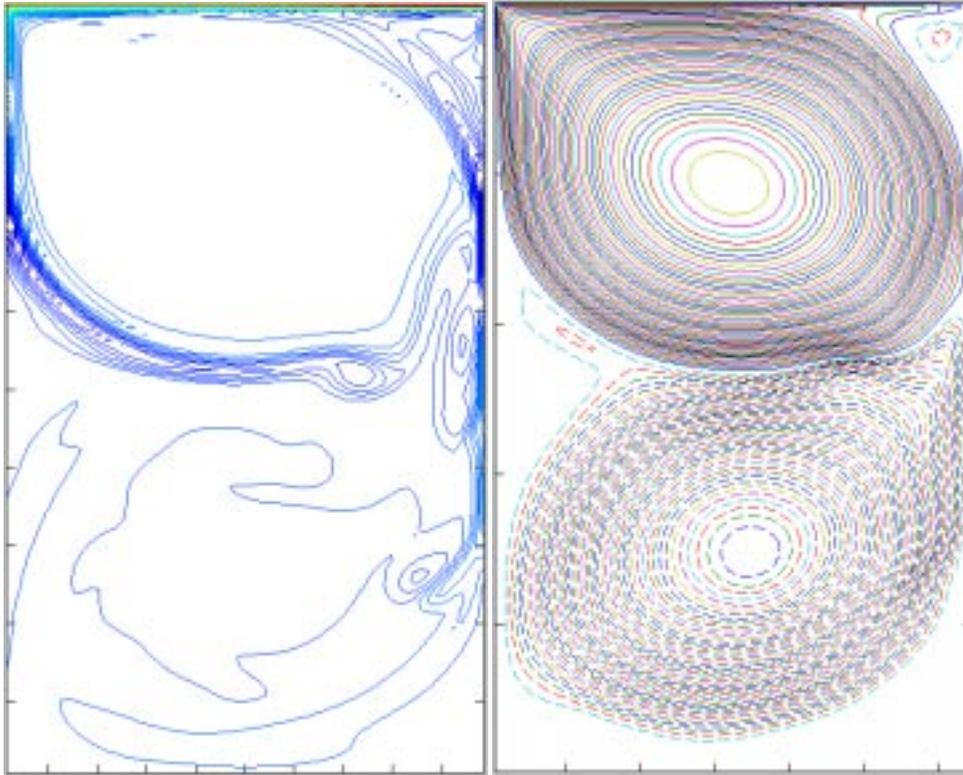


FIG. 3.30 – $Re = 10000$: Isovaleurs de la vorticité et de la fonction courant $T = \{150\}$

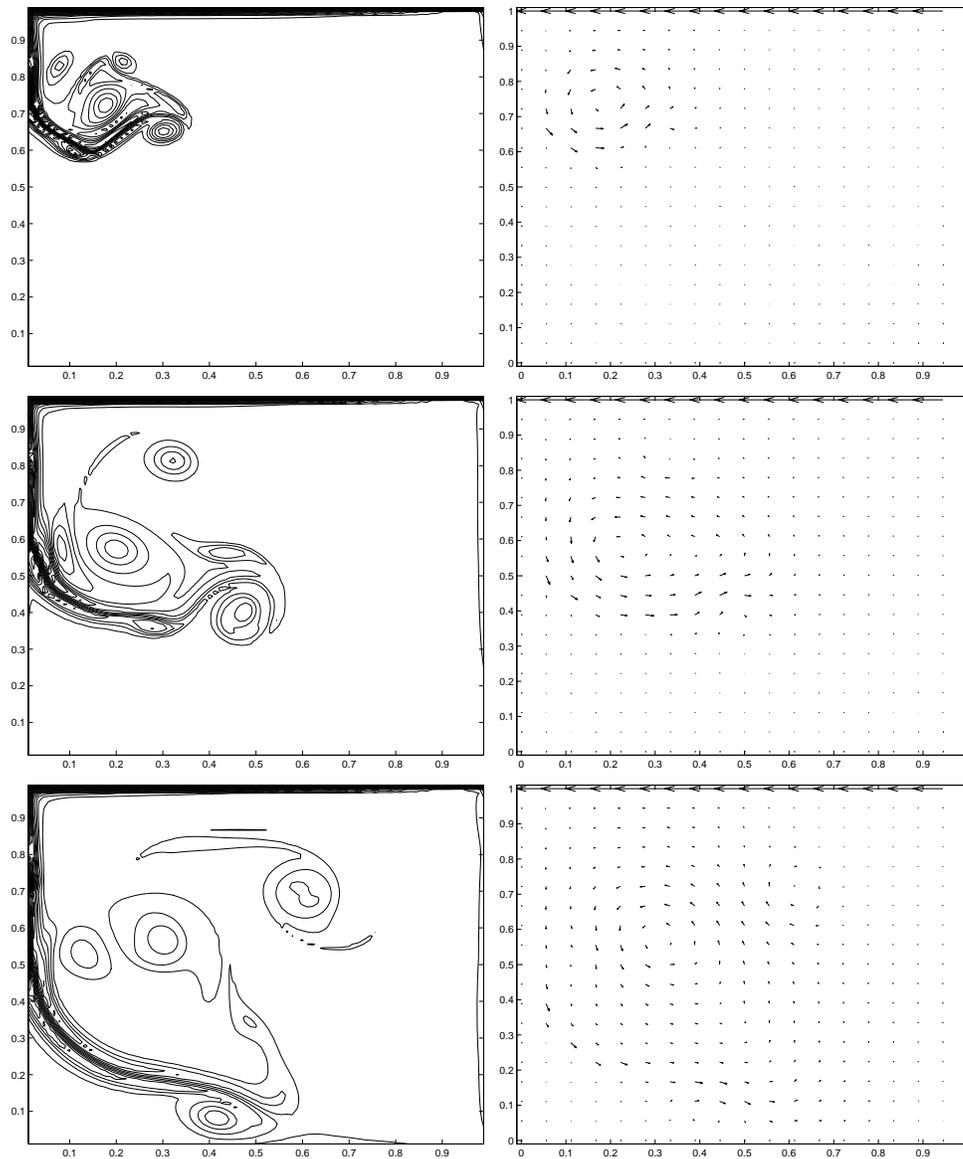


FIG. 3.31 – $Re = 20000$, $mv = 360$, $mp = 180$: Isovaleurs de la vorticité et la vitesse : $T = \{5, 10, 15\}$

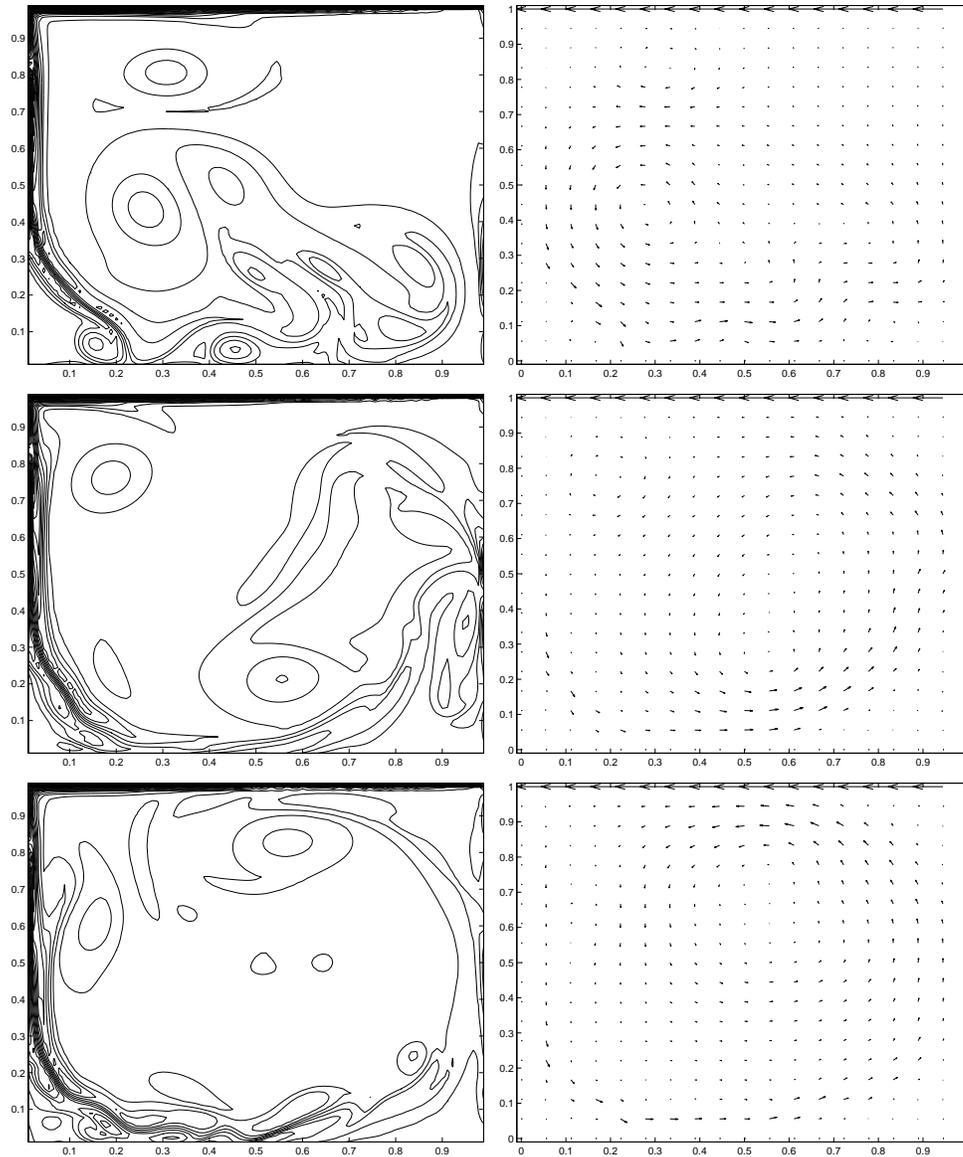


FIG. 3.32 – $Re = 20000$: Isovaleurs de la vorticité et la vitesse : $T = \{20, 25, 30\}$

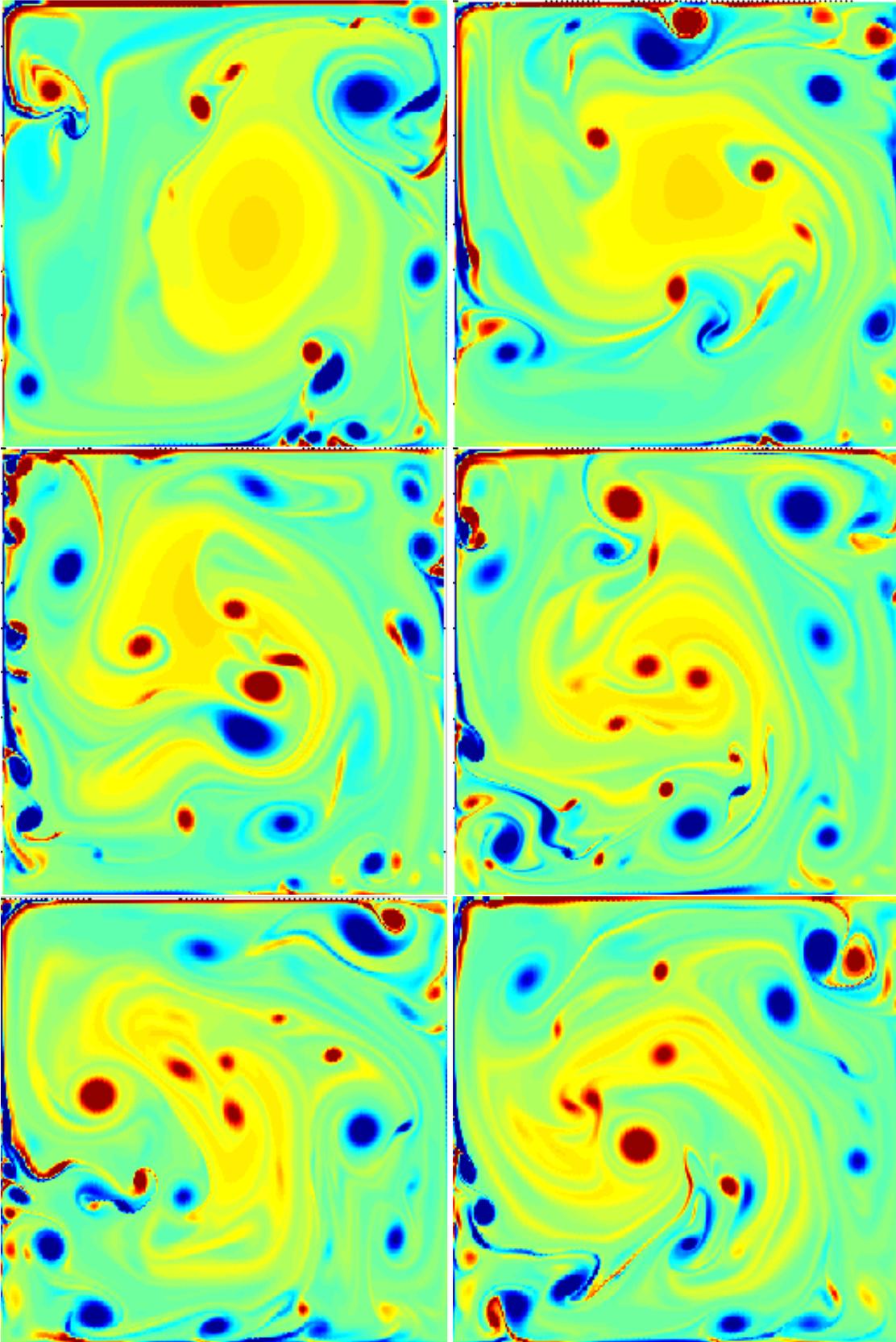


FIG. 3.33 – $Re = 100000$; Vorticité à $T = \{10, \dots, 20\}$, $M = 512$, $N = 512$, $N_p = 1000000$

Chapitre 4

Résolution par méthode de vortex des équations de Navier-Stokes au voisinage d'obstacles

Comme on l'a vu au chapitre 1, les méthodes de vortex offrent de nombreux avantages pour la simulation d'écoulements non bornés. Le traitement lagrangien des équations présente un atout important pour la résolution numérique d'écoulements complexes. L'objectif de ce chapitre est d'étudier ces méthodes en présence d'obstacles. Une étude des différentes méthodes de prise en compte des conditions limites a été réalisée et un algorithme à pas fractionnaire a été implémenté.

La prise en compte des conditions limites par une méthode de vortex au voisinage de parois a été l'objet de nombreux travaux. Les premiers algorithmes de ce type ont été réalisés par Chorin ([24],[25]).

L'algorithme de Chorin consiste à compenser la composante tangentielle de la vitesse au bord par une nappe de tourbillon. Cette nappe est discrétisée par une distribution de particules qui subissent ensuite une marche aléatoire qui les fait pénétrer dans le domaine fluide. Ce procédé a permis de réaliser les premières simulations en coordonnées lagrangiennes d'écoulement au voisinage d'obstacles. Cependant, la viscosité numérique due au traitement statistique et la non satisfaction totale de la condition de non glissement constitue un défaut important dans cette méthode.

Chorin[25] envisage aussi de faire un couplage des équations de Navier-Stokes avec les solutions des équations de Prandtl (vortex sheet method). Les équations de Prandtl sont résolues aux voisinages d'obstacles et les équations de Navier-Stokes ailleurs. Anderson et Reider[3] montrent que cette méthode n'est pas toujours consistante. La région dans laquelle les équations de Prandtl restent valables n'est pas bien déterminée. Le raccordement des solutions des équations de Prandtl avec celles de Navier-Stokes, peut être mis en défaut pour certains écoulements.

Une autre approche pour prendre en compte les conditions limites au bord consiste à traduire la condition de non glissement en termes de flux de vorticité. Cela est réalisé par un algorithme de pas fractionnaires dans lequel on fait une résolution de façon alternée d'une équation de convection dans un premier temps et d'une équation de Stokes dans un deuxième temps. Ces méthodes ont permis d'implémenter les équations de Navier-Stokes en présence

d'obstacles pour des écoulements variés. On cite à titre d'exemples Cottet[29], Koumoutsakos et Leonard[53] et Koumoutsakos et al.[55].

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la discrétisation de l'algorithme de pas fractionnaire basé sur les conditions de flux de vorticité tel qu'il est formulé dans Cottet[31]. Le choix de cet algorithme est motivé par sa compatibilité avec le traitement de la diffusion par méthode déterministique (P.S.E.). La condition d'adhérence sur le bord d'obstacles est traduite par une condition de Neumann sur le tourbillon et l'utilisation de formules intégrales pour l'équation de diffusion. On effectue ici le calcul des vitesses sur une grille eulerienne. La parallélisation de l'algorithme de calcul est très facile. Car, les différentes étapes gardent un aspect local. Cette parallélisation est faite sur machine multi-processeurs à mémoire distribuée (**T3E**) en langage **MPI**. Les techniques utilisées pour faire cette parallélisation restent similaires à celles décrites dans le chapitre 3.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : on commence par une présentation des aspects du problème, ensuite on rappelle l'algorithme continu de Cottet et les théorèmes de stabilité et de convergence. Enfin, on passe à l'étude numérique. On donne le schéma numérique de discrétisation et on présente la validation numérique sur le problème de rebond de dipôles de vorticité.

4.1 Position du problème

Les écoulements visqueux incompressibles sont régis en dimension deux d'espace par les équations :

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + (u.\nabla)\omega = \nu\nabla^2\omega \quad (4.1)$$

$$\nabla.u = 0 \quad (4.2)$$

où ν est la viscosité cinématique, u la vitesse du fluide et $\omega = \nabla \wedge u$ est la vorticité. On rappelle que ce système représente les équations de Navier-Stokes en formulation (vitesse-tourbillon) comme vu dans le chapitre précédent. En présence d'obstacles ou en domaine borné, la vitesse u de l'écoulement doit vérifier les conditions d'adhérence et de non pénétration qui s'écrivent :

$$u.\tau = u_b.\tau \quad (4.3)$$

$$u.n = u_b.n \quad (4.4)$$

où τ , n sont respectivement la tangente et la normale au bord. u_b peut représenter la vitesse de déplacement de l'obstacle (Fig.4.1) ou la condition de non glissement (Fig.4.2).

Afin de simplifier la présentation, on suppose que le champ de vitesse $u_b(t)$ est irrotationnel. On peut alors écrire la vitesse de l'écoulement comme la somme d'une vitesse nulle sur le bord et de la vitesse $u_b(t)$:

$$\begin{cases} u - \tilde{u} = u_b \\ \tilde{u}.\tau = 0 \\ \tilde{u}.n = 0 \end{cases}$$

La condition d'incompressibilité sur \tilde{u} est prise en compte comme dans les chapitres précédents en introduisant une fonction courant ψ . On obtient alors le système suivant :

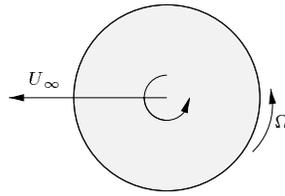


FIG. 4.1 – *Cylindre en translation de vitesse $U_\infty(t)$ et en rotation de vitesse angulaire $\Omega(t)$. La vitesse sur le bord est donnée par : $U_b(t) = U_\infty(t) + \Omega(t)e_\theta$*

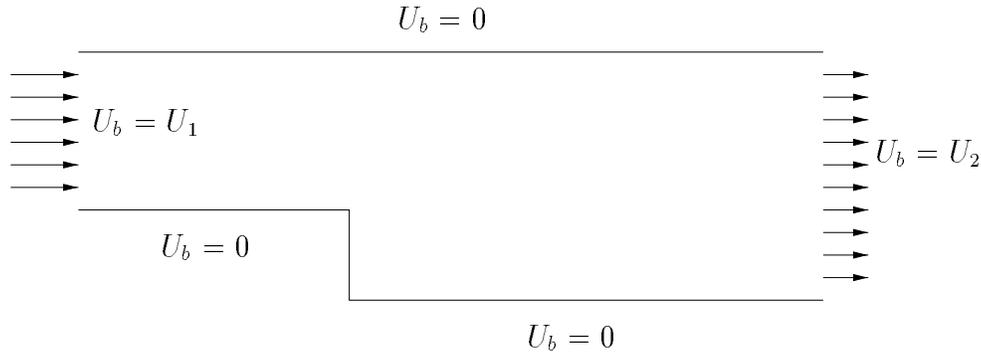


FIG. 4.2 – *Conditions de flux à l'entrée et à la sortie de la conduite et d'adhérence sur les parois.*

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + (u \cdot \nabla)\omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (4.5)$$

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x) \quad (4.6)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (4.7)$$

$$\tilde{u} = \nabla \wedge \psi \quad (4.8)$$

$$u - \tilde{u} = u_b(t) \quad (4.9)$$

Pour fermer ce système, on a besoin des conditions limites sur la vorticité et sur la fonction courant. Les conditions limites sur \tilde{u} doivent être traduites sur ces deux quantités. La condition de vitesse normale nulle peut être traduite sur ψ par :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \tilde{u}_n = 0$$

Sur ω une condition limite de type Neumann est choisie :

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = g$$

Le choix de la fonction g doit être fait de façon à obtenir la satisfaction par ψ de la condition de non glissement :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\tilde{u}_\tau = 0$$

Le but de l'algorithme de pas fractionnaires que nous allons présenter ici est de réaliser cet objectif à une erreur de discrétisation près.

4.2 Méthodes de pas fractionnaires

Dans cette section, on rappelle la méthode de pas fractionnaires proposée indépendamment par Cottet[31] et Koumoutsakos et al.[55]. La seule différence entre ces deux algorithmes se trouve au niveau de la condition limite sur la vorticité pendant la première étape de calcul. Dans le premier algorithme, une condition Neumann est imposée sur le bord ce qui permet de donner à la méthode P.S.E. les particules sources dont elle a besoin au bord. Dans le second algorithme, aucune disposition n'est prise dans cette étape de calcul sur le bord.

La simulation numérique en coordonnées lagrangiennes des équations de Navier-Stokes ne représente pas beaucoup de difficultés supplémentaires par rapport à la simulation numérique de l'équation de Stokes. Dans un premier temps, il n'est donc pas crucial de prendre en compte le terme de convection dans l'analyse de l'implémentation des conditions limites et on présente les détails de cette méthode sur l'équation de Stokes. La généralisation de l'algorithme numérique au cas de l'équation complète sera donnée en fin de section.

4.2.1 Méthodes de pas fractionnaires pour l'équation de Stokes

On cherche ici à résoudre cette équation avec une condition limite Neumann de façon à satisfaire les conditions limites d'adhérence sur ψ . Autrement dit, on veut résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \nabla^2 \omega = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \omega(., 0) = \omega_0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial \Omega \end{array} \right.$$

où la fonction g est une inconnue qui doit être calculée de façon à assurer que ψ la solution du problème elliptique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla^2 \psi = \omega \quad \text{dans } \Omega \\ \psi = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \end{array} \right.$$

satisfait la condition :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\tilde{u}_\tau = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (4.10)$$

La méthode de pas fractionnaires proposée dans [31] consiste à résoudre un premier problème avec condition Neumann homogène sur le bord. On utilise ensuite le résultat de ce calcul pour construire la fonction g qui assure que la solution d'un deuxième problème possède les propriétés d'adhérence souhaitées. Ces deux systèmes sont donnés ci-dessous.

Soit $\{t_n, n = 0 \dots N\}$ une discrétisation de l'intervalle de temps de calcul $[0, T]$ ($t_n = n\Delta t, \Delta t = \frac{T}{N}$). Sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$, on résoud d'abord :

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} - \nu \nabla^2 \omega_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.11)$$

$$\omega_1(., 0) - \omega_n = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (4.13)$$

on calcule la vitesse correspondante à ω_1 :

$$\nabla^2 \psi_1 + \omega_1 = 0 \text{ dans } \Omega \quad (4.14)$$

$$\psi_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.15)$$

$$u_1 - \nabla \wedge \psi_1 = 0 \text{ dans } \Omega \quad (4.16)$$

$$(4.17)$$

et finalement, on calcule ω_2 :

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} - \nu \nabla^2 \omega_2 = 0 \text{ dans } \Omega \quad (4.18)$$

$$\omega_2(\cdot, 0) - \omega_n = 0 \text{ dans } \Omega \quad (4.19)$$

$$\nu \frac{\partial \omega_2}{\partial n} - g = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.20)$$

$$g + \frac{d}{dt}(u_1 \cdot \tau) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.21)$$

La vorticité à l'instant t_{n+1} est alors donnée par :

$$\omega_{n+1} = \omega_2 \quad (4.22)$$

Propriétés de cet algorithme

L'algorithme de pas fractionnaires cité précédemment vérifie les propriétés de stabilité et de convergence suivantes :

- Quand le pas de temps est petit la condition de non glissement est satisfaite exactement :

$$u(\cdot, t) \cdot \tau \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

- Cet algorithme est stable au sens de la norme L_2 :

$$\|\omega_{n+1}\|_2^2 \leq \|\omega_n\|_2^2$$

- La suite ω_n converge faiblement vers la solution de l'équation de Stokes.

4.2.2 Méthodes de pas fractionnaires pour l'équation de Navier-Stokes

L'algorithme utilisé dans le cas de l'équation de Navier-Stokes est analogue à celui utilisé dans le cas de l'équation de Stokes vue ci-dessus. Il suffit de rajouter les termes convectifs qui contribuent uniquement dans le transport de la vorticité est non dans l'étape de génération de vorticité sur le bord. Une étape (un pas de temps) du système de pas fractionnaires s'écrit en utilisant les mêmes notations de discrétisation que précédemment :

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \text{div}(u_1 \omega_1) - \nu \nabla^2 \omega_1 = 0 \text{ dans } \Omega \quad (4.23)$$

$$\omega_1(\cdot, 0) - \omega_n = 0 \text{ dans } \Omega \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.25)$$

$$(4.26)$$

La vitesse correspondante à ω_1 est donnée par :

$$\nabla^2 \psi_1 + \omega_1 = 0 \text{ dans } \Omega \quad (4.27)$$

$$\psi_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.28)$$

$$u_1 - \nabla \wedge \psi_1 = 0 \text{ dans } \Omega \quad (4.29)$$

$$(4.30)$$

La deuxième étape de l'algorithme consiste à calculer :

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} + \text{div}(u_1 \omega_2) - \nu \nabla^2 \omega_2 = 0 \text{ dans } \Omega \quad (4.31)$$

$$\omega_2(\cdot, 0) - \omega_n = 0 \text{ dans } \Omega \quad (4.32)$$

$$\nu \frac{\partial \omega_2}{\partial n} - g = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.33)$$

$$g + \left[\frac{\partial}{\partial t} u_1 + (u_1 \cdot \nabla) u_1 \right] \cdot \tau = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.34)$$

et la vorticité à l'instant t_{n+1} est alors donnée par :

$$\omega_{n+1} = \omega_2 \quad (4.35)$$

4.3 Schéma de discrétisation

Cette section est consacrée à la discrétisation numérique du schéma à pas fractionnaires précédent. Notre objectif est de présenter un algorithme numérique permettant une simulation lagrangienne d'écoulements incompressibles en présence d'obstacles.

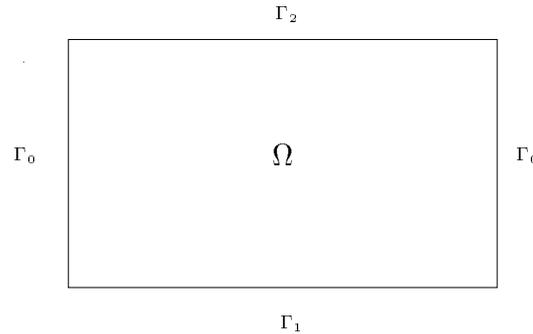


FIG. 4.3 – Les conditions limites : périodicité sur Γ_0 , non glissement sur Γ_1 et glissement sur Γ_2 .

Pour se fixer les idées, la présentation de l'algorithme numérique sera faite ici sur un domaine rectangulaire avec conditions limites de non glissement sur la paroi inférieure, conditions limites périodiques dans la direction horizontale et conditions limites de glissement sur la paroi supérieure. Cette géométrie ne constitue pas une restriction du schéma. On trouvera par exemple dans le chapitre 5 l'utilisation de ce schéma en géométrie polaire. Les conditions limites sur le bord correspond au cas qui sera considéré dans les tests numériques.

Les principes de résolution par cet algorithme des équations de Navier-Stokes sont les suivants :

- La résolution de l'équation de Poisson sur la fonction courant et le calcul de la vitesse sont faits sur une grille eulerienne.

- La convection est résolue exactement en déplaçant les particules sur les caractéristiques.
- Le calcul de la diffusion sur les particules est fait par la méthode déterministique P.S.E. (Particle Strength Exchange)
- L'interprétation des conditions limites sur la vorticitée se fait par m ethode int egrale.
- Un remaillage p eriodique de la distribution de particules assure la r egularit e du maillage et la g en eration automatique de particules pour tenir compte de l'expansion du support de la vorticitée.

On suppose que le domaine de calcul est le rectangle $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ (Fig.4.3). A l'instant initial, on d efinit sur le domaine Ω une grille uniforme de particules $\{x_p^0, v_p, p \in \mathbb{J}\}$ par :

$$\{x_p^0 = (a + mh, c + nh; 0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N; p = m + nM)\}$$

o u h est le param etre de discr etisation, (M, N) le nombre de cellules de particules dans les directions (ox, oy) et $v_p = h^2$ sont les volumes des particules. On d efinit aussi une grille eul erienne G_h par :

$$G_h = \{x_{i,j} = (a + ih_x, c + jh_y; 0 \leq i \leq M_g, 0 \leq j \leq N_g)\}$$

o u

$$h_x = \frac{(b - a)}{M_g}, h_y = \frac{(d - c)}{N_g}$$

M_g et N_g sont le nombre de points de grille dans les directions (ox) et (oy) .

On veut r esoudre les  equations (4.23-4.35) sur le domaine Ω . Comme on l'a vu, dans une it eration en temps, il faut r esoudre deux probl emes de convection-diffusion avec condition limite de type Neumann sur la vorticitée. Dans le premier probl eme les conditions limites Neumann sont homog enes et dans le second, les conditions limites ne sont pas homog enes, mais comme on le verra dans la suite il peut  etre ramenée  a un probl eme de convection-diffusion avec condition initiale nulle. Pour prendre en compte la condition limite homog ene dans la premi ere  etape, on peut sym etriser les particules dans un voisinage du bord. Dans la deuxi eme  etape, on peut se ramener  a un probl eme de type Neumann avec condition initiale nulle ce qui permet l'utilisation de formules int egrales (Friedmann[37]).

4.3.1 R esolution d'une  equation de convection diffusion avec conditions limites Neumann homog enes

On pr esente ici la m ethode num erique de r esolution de la premi ere  etape de l'algorithme de pas fractionnaires ( equations 4.23-4.25). Les techniques classiques de m ethodes de vortex (chapitre 1, chapitre 3) nous permettent de remplacer ces  equations par les trois syst emes r esolus successivement. Ces syst emes sont données ci-dessous.

Calcul des vitesses

Le calcul des vitesses est fait sur la grille en résolvant une équation de Poisson sur la grille et en calculant les vitesses par différences-finies :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_{i,j}^n &= -\omega_{i,j}^n \\ u_x^n(x_{i,j}) &= D_y \psi_{i,j}^n \\ u_y^n(x_{i,j}) &= -D_x \psi_{i,j}^n \end{cases}$$

Les conditions limites sur ψ sont périodiques sur Γ_0 et homogènes sur Γ_1 et Γ_2 (Fig.4.3). Elles représentent les conditions physiques du problème dévolution de dipôles de vorticité au voisinage d'un mur.

Résolution de la convection

La convection est prise en compte en déplaçant les particules sur les caractéristiques. Cela revient à résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_p(t) &= u(x_p(t), t) \\ x_p(t_n) &= x_p^n \end{cases}$$

Calcul de la diffusion avec condition limite Neumann homogène

Il nous reste maintenant à résoudre sur les trajectoires de particules l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{d}{dt} \bar{\omega}(t) - \nu \nabla^2 \bar{\omega}(t) = 0 \text{ dans } \Omega \tag{4.36}$$

$$\bar{\omega}(t_n) - \omega^n = 0 \text{ dans } \Omega \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \tag{4.38}$$

Comme on l'a vu dans la section 1.2.4 du chapitre 1, le calcul de la diffusion sur une particule demande de connaître la vorticité dans un voisinage d'une épaisseur ϵ . On va donc utiliser la condition Neumann sur le bord pour obtenir les particules sources qui prolongent la vorticité au bord par symétrie. Si x_p est une particule proche du bord de vorticité $\bar{\omega}(x_p)$, on lui associe une nouvelle particule \tilde{x}_p (Fig.4.4) de vorticité $\bar{\omega}(\tilde{x}_p) = \bar{\omega}(x_p)$. Cela revient à un prolongement par symétrie de la solution des équations (4.36-4.38).

Après cette symétrisation, la méthode (P.S.E.) peut être appliquée sans difficulté pour évaluer la vorticité dans le domaine Ω .

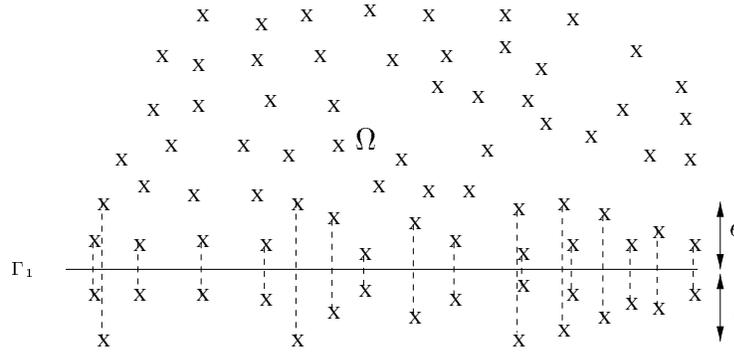


FIG. 4.4 – Distribution des particules après symétrisation de celles qui sont à une distance plus petite que ϵ du bord.

4.3.2 Résolution d'une équation de convection diffusion avec condition initiale nulle et condition limite Neumann non homogène

La deuxième partie de la méthode de pas fractionnaires consiste à résoudre le problème :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \text{div}(u\tilde{\omega}) - \nu \nabla^2 \tilde{\omega} &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \tilde{\omega}(\cdot, 0) - \omega_n &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial n} - g &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ g + \left[\frac{\partial}{\partial t} u + (u \cdot \nabla) u \right] \cdot \tau &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

Après avoir effectué la convection des particules comme dans l'étape précédente, il nous reste à résoudre le problème suivant sur les caractéristiques de l'écoulement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\omega} - \nu \nabla^2 \tilde{\omega} &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \tilde{\omega}(\cdot, 0) - \omega_n &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial n} - g &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ g + \frac{d}{dt} u \cdot \tau &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

Posons $\omega' = \tilde{\omega} - \bar{\omega}$, à l'instant t_n , on a $\tilde{\omega} = \bar{\omega}$ et $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial n} = 0$, le système ci-dessus nous donne alors :

$$\frac{d}{dt} \omega' - \nu \nabla^2 \omega' = 0 \text{ dans } \Omega \quad (4.39)$$

$$\omega'(\cdot, 0) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (4.40)$$

$$\nu \frac{\partial \omega'}{\partial n} - g = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \quad (4.41)$$

Pour résoudre le système d'équations (4.39-4.41), on suit l'approche basée sur les méthodes intégrales proposée par Koumoutsakos[51]. Ce système est équivalent à l'équation de la chaleur

en domaine infini avec terme source de force $2g(x)$. Sa solution est donnée par la formule intégrale (Friedmann[37]) :

$$\omega'(x, t) = \int_{t_n}^t \int_{\Gamma_1} G(x - y_\sigma, t) \mu(y_\sigma, t) d\sigma ds \quad (4.42)$$

où $G(x, t)$ est le noyau de l'équation de la chaleur :

$$G(x, t) = \frac{1}{4\pi\nu(t - t_n)} e^{-\frac{|x|^2}{4\nu(t-t_n)}} \quad (4.43)$$

et $\mu(x, t)$ est la solution de l'équation intégrale :

$$\frac{1}{2}\mu(x, t) - \int_{t_n}^t \int_{\Gamma_1} \frac{\partial G}{\partial n}(x - y_\sigma, t) \mu(y_\sigma, t) d\sigma ds = g(x, t) \quad (4.44)$$

Le calcul de ω' est donc équivalent à la résolution d'un système d'équations intégrales. En frontières non régulières, cette résolution peut être faite très simplement en approchant ces équations localement. Le développement limité permet de les découpler et d'établir une approximation de μ en fonction de g et de la courbure de la frontière (Koumoutsakos et al. [55]).

Ici la frontière Γ_1 est la droite ($y = c$). Le système d'équations intégrales précédent est naturellement découplé. La relation (4.44) nous donne alors :

$$\mu(x, t) = 2g(x, t) \quad (4.45)$$

Il nous reste alors à calculer :

$$\omega'(x, t) = 2 \int_{t_n}^t \int_{\Gamma_1} G(x - y_\sigma, t) g(y_\sigma, t) d\sigma ds \quad (4.46)$$

Notons $x = (x_1, x_2)$ les coordonnées du plan. Cette intégrale sera calculée par la méthode de trapèzes. La frontière Γ_1 est divisée en M segments $S_i = [x_1^i - \frac{d}{2}, x_1^i + \frac{d}{2}]$, de taille $d = \frac{b-a}{M}$ avec $x_1^i = a + id$. En supposant que la fonction g est constante sur chacun de ces segments de valeur g_i sur S_i et en approchant la valeur de G en temps, on aura en $x = (x_1, x_2)$:

$$\omega'(x, t_{n+1}) = 2 \sum_{i=1}^{i=M} \frac{g_i}{2\pi\nu} e^{-\frac{|c-x_2|^2}{4\nu\Delta t}} I_i(x_1)$$

avec

$$I_i(x_1) = \int_{x_1^i - d/2}^{x_1^i + d/2} e^{-\frac{|x_1 - x_1^i|^2}{4\nu\Delta t}} dx_1$$

Pour éviter les erreurs de quadrature, on évalue les intégrales I_i de la façon suivante : On pose :

$$\epsilon^2 = 4\nu\Delta t$$

et

$$e = \frac{d}{2}$$

on trouve :

$$I_i(x_1) = \frac{\sqrt{\pi}\epsilon}{2} [Erf(\frac{x_1+e}{\epsilon}) - Erf(\frac{x_1-e}{\epsilon})]$$

et

$$\omega'(x, t_{n+1}) = \frac{\Delta t}{\sqrt{\pi}\epsilon} \sum_{i=1}^{i=M} g_i [Erf(\frac{x_1+e}{\epsilon}) - Erf(\frac{x_1-e}{\epsilon})] e^{-\frac{|c-x_2|^2}{\epsilon^2}}$$

donc :

$$\tilde{\omega}_p^{n+1} = \bar{\omega}_p^{n+1} + \sum_{i=1}^{i=M} H_i(x_p) \quad (4.47)$$

où

$$H_i(x) = \frac{\Delta t}{\sqrt{\pi}\epsilon} g_i [Erf(\frac{x_1+e}{\epsilon}) - Erf(\frac{x_1-e}{\epsilon})] e^{-\frac{|c-x_2|^2}{\epsilon^2}} \quad (4.48)$$

Comme pour le calcul de la diffusion (section 1.2.4), cette sommation se fait de façon très rapide. Pour chaque particule proche du bord, le nombre de termes sources se réduit à quelques voisins. Le coût total de cette étape est de l'ordre de $O(M)$ opérations.

4.3.3 Transfert particules-grille

Le schéma de discrétisation précédent comporte des étapes réalisées sur la grille (calcul de la fonction courant et des vitesses) et des étapes estimées sur les particules (convection, diffusion et calcul du flux de vorticité sur le bord). Le transfert des données de la grille vers les particules (vitesses) et des particules vers la grille (vorticité) se fait par interpolation et assignement. Les techniques utilisées sont les mêmes que celles présentées dans le chapitre 3. On utilise le noyau M'_4 pour l'assignement et l'interpolation. Au voisinage du bord, la symétrisation permet de compléter les valeurs manquantes.

4.4 Algorithme de résolution

Les étapes de l'algorithme de résolution bâti sur le schéma précédent sont successivement :

- Assignement de la vorticité sur les points de grille

$$\omega_{i,j}^n = \sum_{p \in \mathbb{J}} v_p \omega_p^n \eta_\epsilon(x_{i,j} - x_p)$$

- Calcul de la fonction courant par résolution sur la grille de

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_{i,j}^n & = & -\omega_{i,j}^n \\ & + \text{CL} \end{cases}$$

- Calcul des vitesses par les formules différences-finies

$$\begin{cases} u_x^n(x_{i,j}) & = & D_y \psi_{i,j}^n \\ u_y^n(x_{i,j}) & = & -D_x \psi_{i,j}^n \\ (u_x^n, u_y^n)|_{\partial\Omega} & = & (u_{x\epsilon}^n, u_{y\epsilon}^n) \end{cases}$$

- Interpolation de la vitesse sur les particules

$$\begin{cases} u_x^n(x_p) & = & \sum_{i,j} u_x^n(x_{i,j}) \eta_\epsilon(x_p - x_{i,j}) \\ u_y^n(x_p) & = & \sum_{i,j} u_y^n(x_{i,j}) \eta_\epsilon(x_p - x_{i,j}) \end{cases}$$

- Calcul de la diffusion sur les particules par la méthode (P.S.E) rapide

$$\overline{\omega_p^{n+1}} = \omega_p^n + \Delta t \nu \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{q \in \mathbb{J}} v_q (\omega_q^n - \omega_p^n) \sigma\left(\frac{x_q^n - x_p^n}{\epsilon}\right)$$

- Evolution des particules

$$x_p^{n+1} = x_p^n + \Delta t (u_x^n(x_p), u_y^n(x_p))$$

- Calcul du flux de vorticité sur le bord

$$\omega_p^{n+1} = \overline{\omega_p^{n+1}} + \sum_{i=1}^{i=M} H_i(x_p)$$

- Remaillage périodique du champ de vorticité.

Cet algorithme a un aspect local rendant sa parallélisation facilement implémentable. Il suffit de décomposer le domaine de calcul en nombre de sous-domaines égal au nombre de processeurs disponibles avec un chevauchement de quelques points de grilles. Les mêmes procédures sont exécutées sur chaque processeur et l'échange des données sur les interfaces s'effectue exactement de la même façon que pour la méthode VIC parallèle du chapitre 3.

4.5 Résultats numériques

4.5.1 Rebond d'un dipôle sur une paroi

Dans cette section, on s'intéresse à la validation numérique de l'algorithme précédent et à sa comparaison avec la méthode différences-finies vue dans le chapitre 2.

Le test choisi correspond au problème d'interaction de dipôles de vorticité avec un obstacle. Cet écoulement révèle des points d'une grande importance en dynamique d'interaction des grandes échelles tourbillonnaires au voisinage de parois. Les interactions des tourbillons avec un obstacle sont étudiées en mécanique des fluides avec et sans glissement. Dans les deux cas, on peut observer des rebonds. Mais dans le cas avec glissement, ces rebonds sont observés que sous certaines conditions de vitesses et de viscosité particulières. Aucune grande structure n'est générée dans le fluide. Par contre en cas de non glissement, les effets de la convection et de la diffusion prennent une grande importance aux voisinages d'obstacles et on observe rapidement la création de vorticité secondaire et tertiaire. On observe alors des rebonds pour des nombres de Reynolds relativement faibles ($Re \geq 400$) et une émission de jet pour des nombres de Reynolds plus élevés ($Re \geq 1600$).

Comme exemple d'études faites dans ce domaine, on cite Harvey et Perry[43]. Lors de plusieurs expériences, ils ont étudié l'évolution d'un tourbillon de vorticité qui interagit avec un plan en mouvement. Ils observent le phénomène de rebond et d'éloignement du tourbillon du plan. Leurs expériences rentrent dans le cadre de rebond par création de vorticité secondaire dans la couche limite. Barker et Crow[7] observent dans le cas de condition de glissement un phénomène de rebond. Ils font l'hypothèse que cela est dû à la dynamique non visqueuse. Mais plus tard, Saffman[77] montre que cette explication n'est pas valable. En simulation numérique, Peace et Riley[71] reconstituent le phénomène de rebond dans les deux cas avec et sans glissement. Le rebond dans le premier cas est dû à la formation de vorticité secondaire par dissipation proche de l'obstacle.

Récemment, Orlandi[69] donne une description complète de la dynamique de dipôles de vorticité pour des nombres de Reynolds vérifiant ($Re \leq 1600$). Il utilise le schéma d'Arakawa[5] et les différences-finies d'ordre deux pour réaliser ces simulations. Cette méthode constitue un moyen simple et efficace de résolution numérique à nombres de Reynolds modérés, mais pour des nombres de Reynolds élevés les méthodes différences-finies deviennent chères. Cela est dû à la condition de stabilité induite par le terme de convection (voir chapitre 2). Un traitement lagrangien est nécessaire dans le cas de nombres de Reynolds  lev s. Pour valider la méthode introduite ici, on commence par une comparaison des résultats qu'elle donne avec ceux obtenus par différences-finies pour des nombres de Reynolds faibles ($400 \leq Re \leq 800$). Ensuite, on s'intéresse à la simulation par la méthode de vortex de cas de nombres de Reynolds  lev s.

On retrouve le phénomène de rebond pour des nombres de Reynolds tels que ($Re \geq 400$) et le phénomène d'émission de jet observé par Orlandi[69]   ($Re = 1600$). Cela est réalisé avec des pas de temps très grands par rapport à ceux qui seraient nécessaires en différences-finies. On peut en conclure que l'algorithme présenté ici constitue un moyen efficace et souple de simulation d'écoulement complexe.

Conditions initiales

Initialement, la vorticité du dipôle est donnée par (Lamb[56] et Batchelor[8]) :

$$\omega_0(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\alpha}{a} U_c J_1(k \frac{r}{a}) \cos(\theta) & \text{si } r \leq a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

avec $\alpha = 19.0$, $k = 3.8$. La fonction J_1 est la fonction de Bessel du premier ordre. La vitesse du centre du dipôle est U_c et son rayon est a .

Le nombre de Reynolds de l'écoulement est donné par $Re = \frac{1.3U_c a^2}{\nu}$. Le domaine de calcul est $D = \{(x, y), -5 \leq x \leq 5 \text{ et } 0 \leq y \leq 10\}$. Les particules sont initialement distribuées de façon uniforme avec M_p particules dans chaque direction. De cette grille particulière, on ne garde que celles qui ont une vorticité non nulle. La génération de particules pendant la durée de la simulation est assurée par le procédé de remaillage. La grille eulerienne de calcul est de taille M_g dans chaque direction. Typiquement, cette taille est donnée par $M_g = M_p/2$. Car, la précision nécessaire pour l'évaluation de la vorticité sur les particules est plus importante que celle nécessaire au calcul de la fonction courant. Le schéma d'intégration en temps implémenté est le schéma de Runge-Kutta d'ordre deux. La seule condition de stabilité est celle imposée par le traitement explicite de la diffusion ($\Delta t \leq \frac{h_p^2}{2\nu}$).

Les résultats de calcul sont comparés avec ceux de la méthode différences-finies utilisée par Orlandi[69]. La discrétisation du terme de convection est faite par le schéma d'Arakawa et le terme de diffusion est discrétisé par les différences-finies centrées. L'utilisation du schéma de Runge-Kutta d'ordre supérieur à trois est nécessaire. Ici on a choisi le schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre. En plus de la condition de stabilité due au traitement explicite de la diffusion ($\Delta t \leq h_g^2 2\nu$), on a la condition de stabilité due au traitement explicite de la convection ($\Delta t \leq \frac{2.8h_g}{\|u\|_\infty}$).

  coulements à faibles nombres de Reynolds

Dans le cas de nombres de Reynolds faibles, la diffusion est dominante. Les différences-finies constituent un moyen efficace de résolution. Les comparaisons faites nous montrent qu'on retrouve alors des résultats identiques par les deux méthodes. Pour $Re = 400$, cette comparaison est montr  e dans la figure Fig.4.5 et pour $Re = 800$, on se réfère à la figure Fig.4.6.

Le pas de discrétisation spatiale particulière est choisi égal au pas de discrétisation différences-finies. Cependant, il y a des particules uniquement dans la zone où la vorticité n'est pas nulle. Le procédé de remaillage assure la génération de ces particules en fonction de l'évolution du support de la vorticité. On a alors un gain important de mémoire par rapport à la méthode différences-finies. Par exemple, pour $Re = 400$, la vorticité en différences-finies est donnée sur 65.000 noeuds, alors que le nombre de particules en début de simulation est $N_p = 9.400$ et arrive en fin de simulation à $N_p = 17.800$. Pour $Re = 800$, on a, en différences-finies, 130.000 noeuds, alors que la méthode de vortex utilise en début de simulation 18.000 particules et en fin de simulation, à $T = 8$, 26.000 particules. Il faut noter que ce gain serait encore supérieur pour des écoulements non confinés à une boîte périodique (jet ou sillage).

On note aussi que pour ce nombre de Reynolds, le pas de temps de la méthode de vortex est $\Delta t = 0.1$, alors que la condition de stabilité due au traitement explicite de la convection en différences-finies nous impose un pas de temps de $\Delta t = 0.02$.

L'indépendance des résultats de la méthode introduite ici par rapport aux pas de discrétisation est montr  e dans la figure Fig.4.7. On voit que les résultats restent inchangés malgré une division par deux des pas de discrétisation temporelle et spatiale.

  coulements à nombres de Reynolds   lev  s

On montre ici la capacité de notre schéma à simuler des rebonds multiples. Deux simulations sont effectuées. La première est pour un nombre de Reynolds de $Re = 1600$ (Fig.4.9) et la seconde pour un nombre de Reynolds de $Re = 3200$ (Fig.4.12). On observe les phénomènes de

création de vorticité secondaire et tertiaire et le rebond de dipˆles de vorticité qui s'éloignent de l'obstacle. L'évolution du nombre de particules est donnée par les figures (Fig.4.10-4.11). Les pas de temps et d'espace utilisés pour ces deux simulations sont $\Delta t = 0.1$ et $h_p = \frac{10}{512}$ pour la première et $\Delta t = 0.02$ et $h_p = \frac{10}{800}$ pour la seconde. Pour que les particules ne sortent pas de la boˆte, le remaillage doit ˆtre effectué sur des intervalles de temps de l'ordre de $T = \frac{1}{\|\nabla u\|}$. C'est cette condition qui nous impose de réduire le pas de temps pour un $Re = 3200$   $\Delta t = 0.02$, car les gradients de vitesses deviennent importants pour ce nombre de Reynolds. On rappelle qu'un traitement par différences-finies aura nécessité pour la mˆme résolution spatiale des pas de temps respectivement de $\Delta t = 0.00625$ et $\Delta t = 0.004$ dans le premier et le second calcul.

4.6 Conclusion

Les algorithmes à pas fractionnaire offrent un moyen précis pour effectuer des simulations par méthodes purement lagrangiennes aux voisinages des parois. Bien que d'ordre 1 en temps, ces algorithmes permettent des calculs d'une précision équivalente à celle obtenue en utilisant une méthode eulerienne (qui s'implémente sans recours aux méthodes de pas fractionnaire). Pour des nombres de Reynolds élevés, les méthodes de vortex permettent l'utilisation de pas de temps importants car elles ne subissent pas la contrainte de stabilité due à un traitement explicite du terme non linéaire de convection.

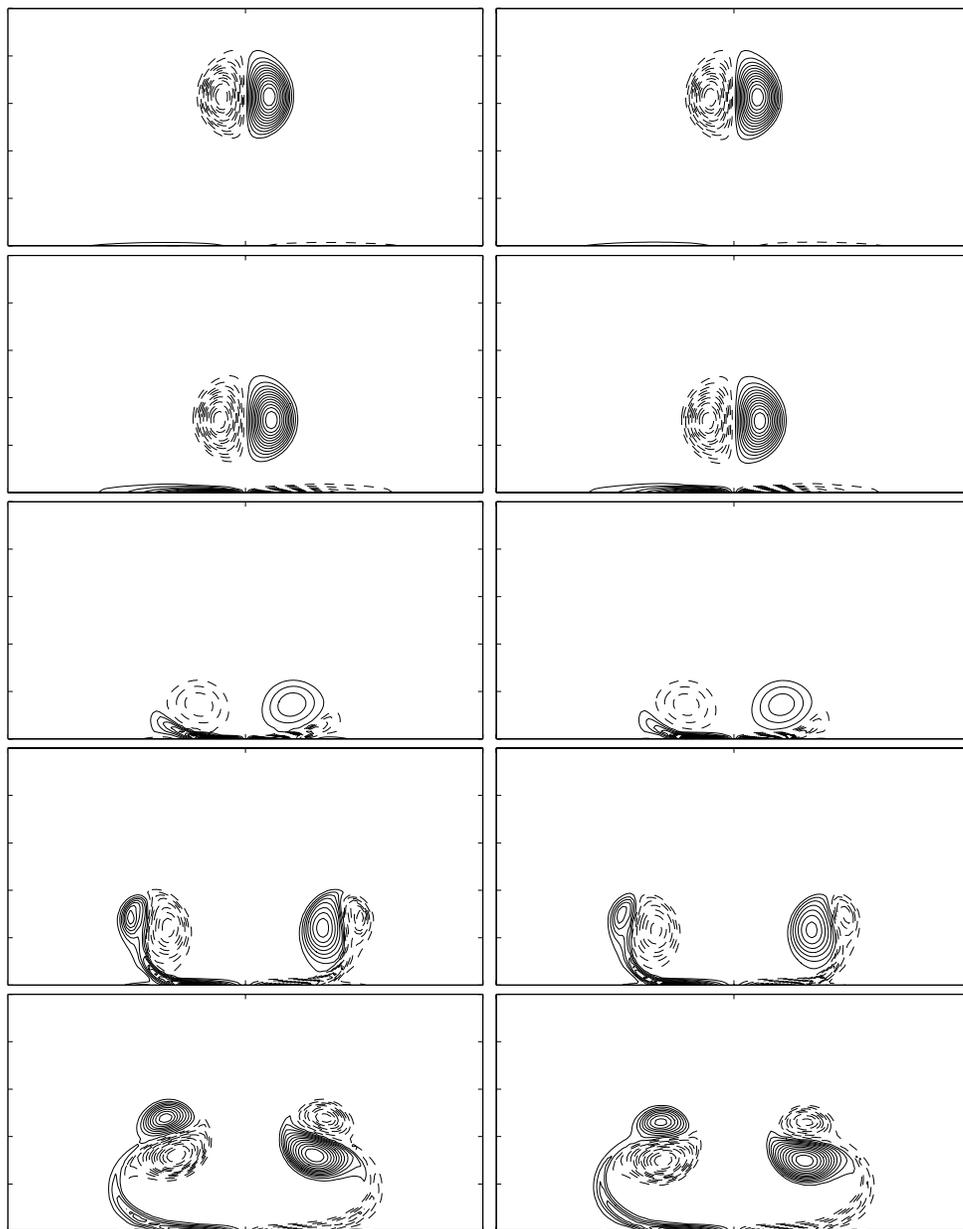


FIG. 4.5 - $Re = 400$; ($\Delta t_{df} = 0.02, \Delta t_p = 0.02$) A gauche méthode différences-finies et à droite méthode de vortex; de haut en bas: $T = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

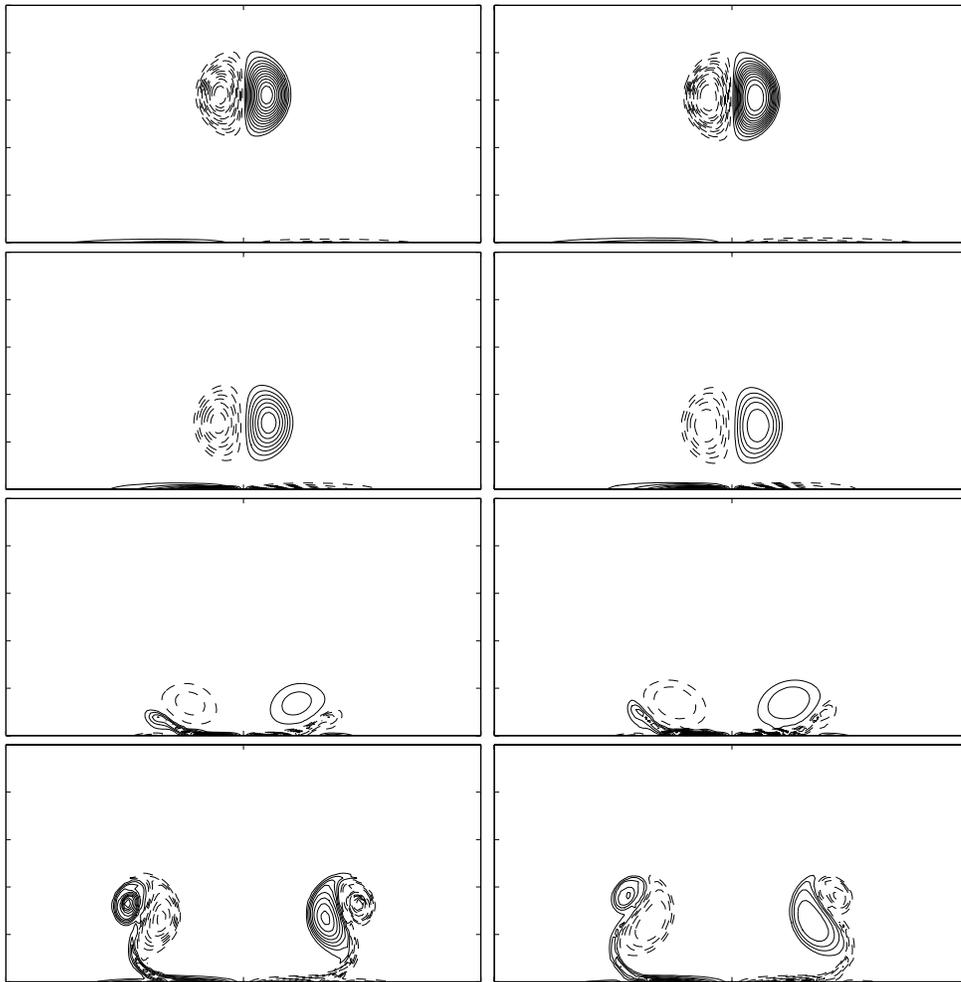


FIG. 4.6 – $Re = 800$; ($\Delta t_{df} = 0.02, \Delta t_p = 0.1$) A gauche méthode différences-finies et à droite méthode de vortex; de haut en bas : $T = \{2, 4, 6, 8\}$

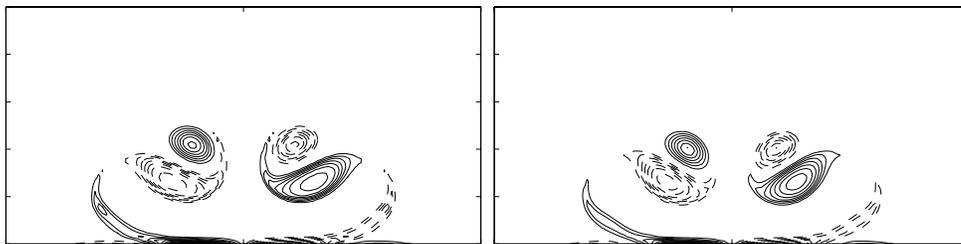


FIG. 4.7 – $Re = 800, T = 10$ Simulation par méthode de vortex; A gauche : $h_p = 0.027$ et $\Delta t = 0.1$; à droite : $h_p = 0.0195$ et $\Delta t = 0.05$

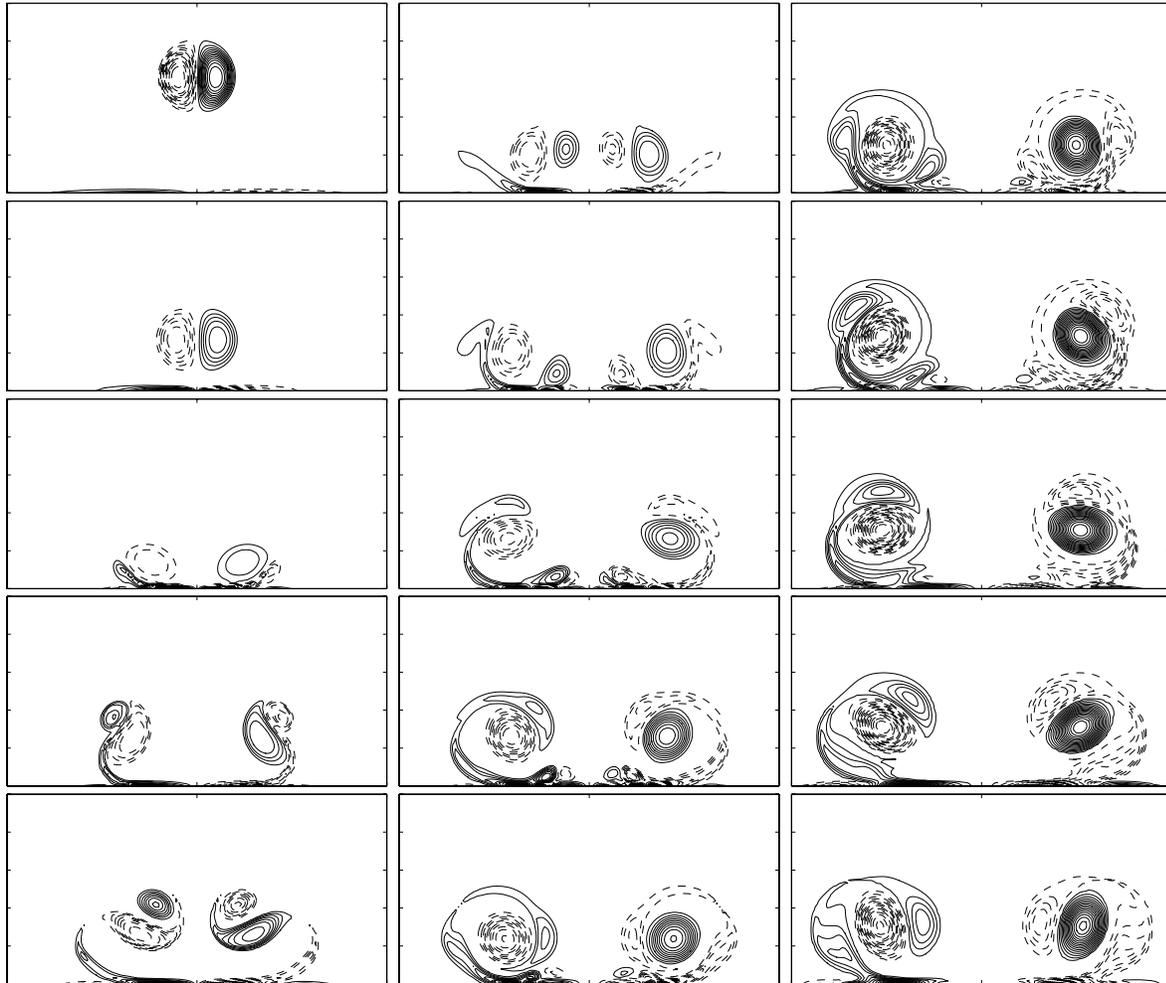


FIG. 4.8 - $Re = 800$; Simulation par méthode de vortex; $\Delta t = 0.1$; de haut en bas et de gauche à droite: $T = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$

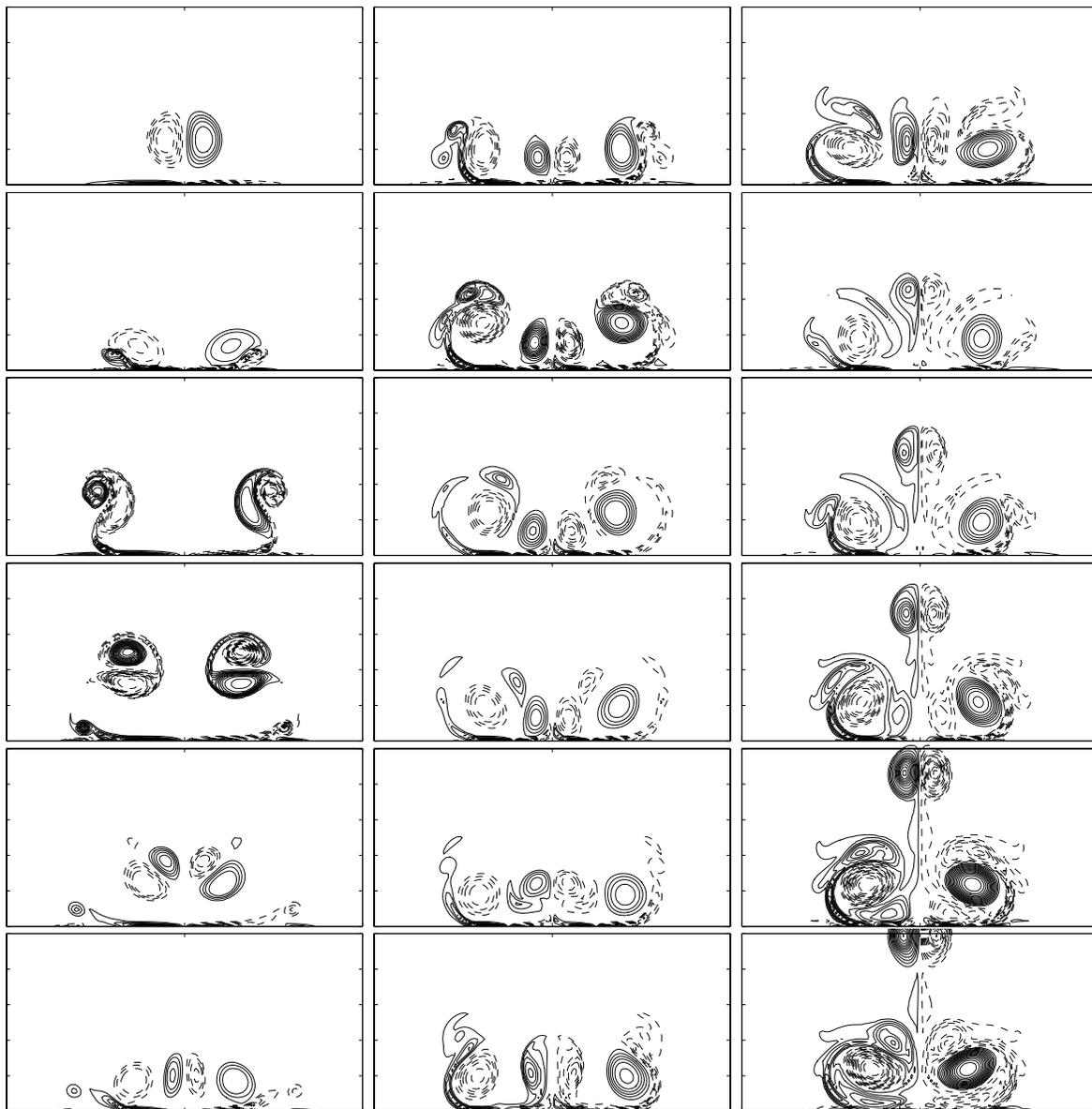


FIG. 4.9 - $Re = 1600$; Simulation par méthode de vortex; $\Delta t = 0.1$; de haut en bas et de gauche à droite: $T = \{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40\}$

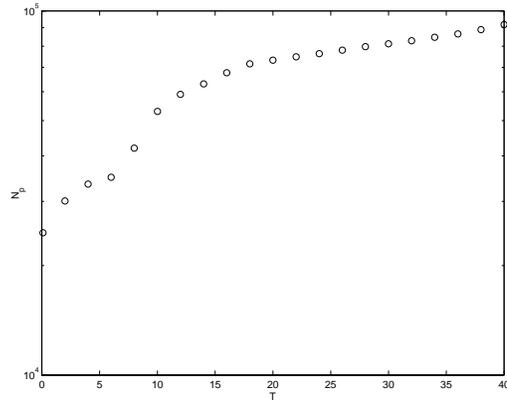


FIG. 4.10 – $Re = 1600$; Evolution du nombre de particules; $T = \{0 \dots 40\}$

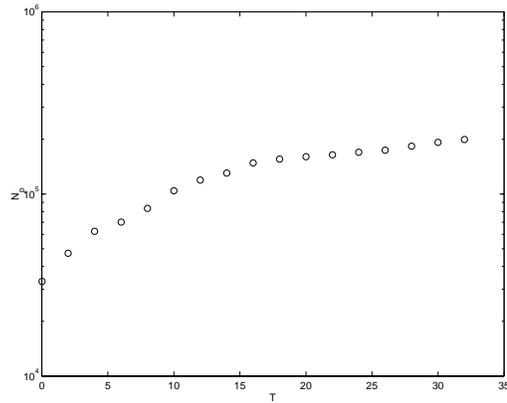


FIG. 4.11 – $Re = 3200$; Evolution du nombre de particules; $T = \{0 \dots 32\}$

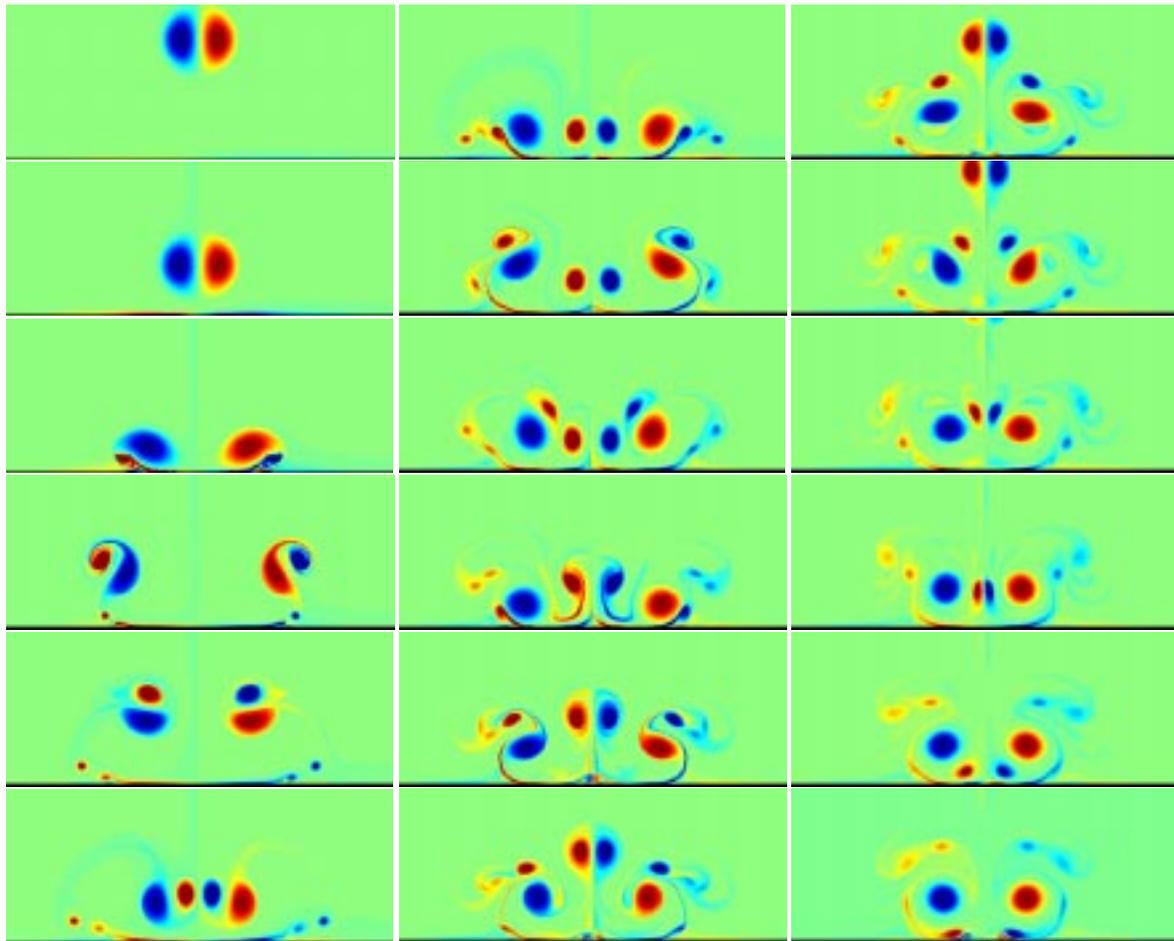


FIG. 4.12 - $Re = 3200$; *Simulation par méthode de vortex*; $\Delta t = 0.02$; de haut en bas et de gauche à droite: $T = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 32\}$

Chapitre 5

Méthodes de vortex et décomposition en sous-domaines

Les chapitres précédents ont permis de vérifier que grâce au traitement lagrangien de la convection les méthodes de vortex sont un outil robuste et précis pour la simulation d'écoulements incompressibles. Ces méthodes offrent aussi la possibilité de prendre en compte la condition limite à l'infini de façon exacte et de réduire le domaine de calcul au support de la vorticité. Cependant, en géométrie non régulière et aux voisinages d'obstacles, les méthodes eulériennes présentent un outil plus souple. Elles offrent une grande flexibilité dans le choix des conditions limites (vorticité ou vitesse si l'on choisit une formulation (vitesse-pression)). Dans ce chapitre, on présente un algorithme de décomposition en sous-domaines avec méthode différente dans chaque domaine permettant de combiner les avantages des différentes méthodes.

Les techniques que nous allons décrire permettent de faire des simulations en décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange avec calcul en (vitesse-pression)/(vitesse-tourbillon) ou (vitesse-tourbillon)/(vitesse-tourbillon) et en (explicite)/(explicite) ou (implicite)/(explicite). Dans cette décomposition, le domaine eulerien est le domaine proche des parois (couche limite). On y effectue les calculs par différences-finies. Le domaine lagrangien constitue le complémentaire du domaine eulerien. On y effectue les calculs par méthode de vortex. Ces techniques de décomposition en sous-domaines nous permettent aussi de faire des calculs en décomposition Lagrange/Lagrange et de type (explicite)/(explicite). L'utilisation de noyaux d'interpolation d'ordre élevé permet d'effectuer le transfert d'information entre les différents domaines avec un minimum de diffusion numérique.

En domaine extérieur ( coulement autour d'un obstacle), le traitement par méthode de vortex en domaine lagrangien permet de réduire automatiquement le domaine de calcul à la zone où le rotationnel de la vitesse n'est pas nul. Ainsi, une réduction considérable du coût de calcul est réalisée.

Un autre objectif de ce chapitre, est l'étude de la méthode de vortex avec particules de taille variable. L'écriture d'un algorithme lagrangien avec maillage exponentiel a permis d'effectuer des simulations de sillages d'obstacles avec un nombre de particules très réduit. On peut par ailleurs avec cette méthode combiner plusieurs types de résolutions et effectuer des raffinements de maillages locaux. Le raccordement des différents maillages se fait par outils de décompositions en sous-domaines.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la **section 1**, on donne un rappel des principes et

des caractéristiques des algorithmes de couplage Euler/Lagrange réalisés ces dernières années. Dans la **section 2**, on introduit les outils utilisés pour implémenter chaque méthode dans son domaine et pour assurer le raccordement sur les frontières. La **section 3** est consacrée à la validation numérique de la méthode de couplage Euler/Lagrange. On y présente des exemples d'écoulements en domaine extérieur (écoulement derrière un cylindre et sur une marche) et un exemple d'écoulement en domaine intérieur (écoulement dans une conduite). On présente aussi dans cette section la méthode de vortex avec particules de taille variable qui permet d'effectuer des simulations de sillage avec un nombre de particules réduit. Dans la **section 4**, on présente l'implémentation numérique de la méthode de décomposition en sous-domaine (Lagrange/Lagrange) et son application en raffinement local de maillage. La validation de cette méthode est effectuée sur le cas test d'écoulement entre deux cylindres.

5.1 Revue des méthodes de couplage Euler/Lagrange

5.1.1 Méthode de décomposition avec superposition pour le couplage Euler/Lagrange

La méthode de décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange a été introduite par Cottet[30]. Il utilise une méthode différences-finies proche des parois et la méthode de vortex ailleurs. Cette méthode est appliquée à l'écoulement autour d'un cylindre. Le domaine eulerien est le domaine intérieur Ω_1 et le domaine lagrangien est le domaine extérieur Ω_2 , comme indiqué sur la Fig.5.1. Les schémas d'interpolation et d'assignement permettent l'échange des valeurs de vorticité entre les deux domaines. Le couplage sur le calcul des vitesses est réalisé par un algorithme itératif de type Schwarz. Les particules sont générées en amont de l'obstacle dans le domaine eulerien. La précision de cette méthode repose sur l'hypothèse que l'écoulement transporte les particules dans la zone de recouvrement. On verra dans la suite que les techniques de remaillage introduites dans le chapitre 1 permettent de s'affranchir de cette hypothèse. Cependant, les résultats numériques illustrés dans [30] montrent une bonne précision de cette méthode pour des nombres de Reynolds inférieurs à 3000.

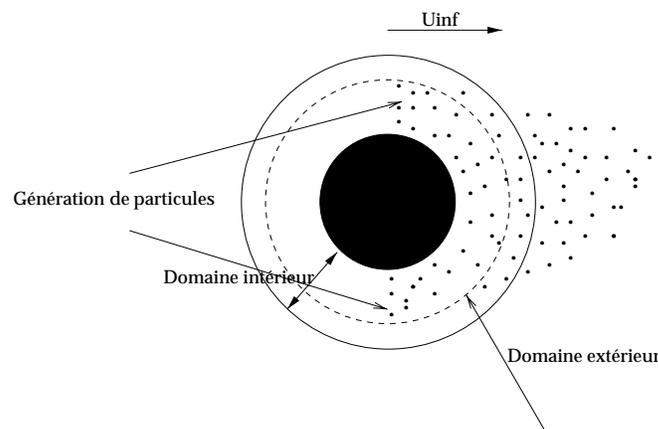


FIG. 5.1 – Décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange avec lâchage de particules en amont de l'obstacle

5.1.2 Méthode de couplage particules-maillage

Dans le but de bénéficier de la bonne résolution de la convection en coordonnées lagrangiennes, plusieurs auteurs se sont intéressés aux méthodes de couplage particules-maillage (Jollés[48]), Cassot et Huberson[16]). Cela consiste à décomposer le champ de vorticité en deux parties, un champ moyen et un champ fluctuant. Le champ moyen est résolu par une méthode différences-finies sur le maillage et le champ fluctuant est résolu par la méthode particulaire sur les particules. Cette méthode permet d'augmenter la précision des méthodes eulériennes, mais un double calcul est effectué (sur le maillage et sur les particules). Les particules et les points de grilles doivent couvrir tout le domaine de calcul.

5.1.3 Méthode de couplage différences-finies/particulaire avec génération de particules à l'interface

Méthode de couplage différences-finies/particulaire en formulation (vitesse-tourbillon)

Afin de prendre en compte les conditions limites sur la vorticité par méthode eulerienne, Shen[80] a introduit une méthode de couplage différences-finies/particulaire (Fig.5.2). Les conditions de raccordement d'équations hyperboliques lui permettent de faire un calcul de la vorticité sans recouvrement. Le domaine intérieur Ω_1 transfere le flux au domaine extérieur Ω_2 si le flux est entrant et inversement sinon. Les conditions qui manquent pour le domaine parti-

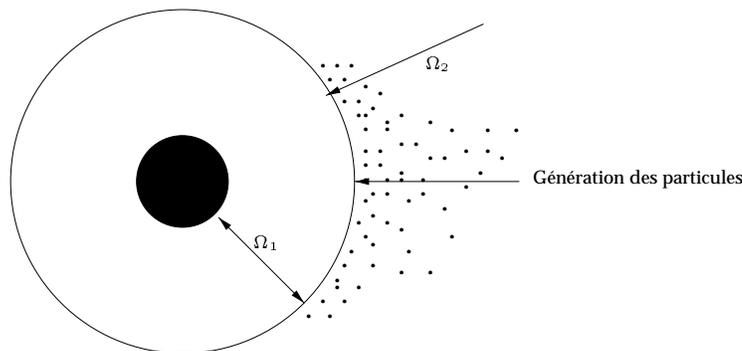


FIG. 5.2 – Décomposition en sous-domaines sans recouvrement.

culaire sont déduites par extrapolation du terme de diffusion. Cette méthode évite le double calcul sur la vorticité utilisée dans les méthodes particules/maillage. Mais, le calcul des vitesses sur les particules se fait par les lois de Biot-Savart à partir des points de grille et des particules. On a alors besoin de calculer un produit de convolution sur les deux domaines. Cela induit une erreur numérique due à la non cohérence des deux maillages (maillage eulérien et maillage lagrangien). Par ailleurs, la génération de particules se fait en divisant le bord du domaine différences-finies en petits segments qui sont transformés en particules en chaque pas de temps. Le volume des particules cr e es dépend alors du pas de temps et de la vitesse sur l'interface. Il peut conduire à la création de beaucoup de particules de volumes petits, ce qui augmentera considérablement le coût de calcul. En plus, ce procédé ne rend pas compte clairement des conditions limites à l'interface entre les deux domaines.

Méthode de couplage différences-finies/particulaire en formulation (vitesse-pression)

En formulation (vitesse-pression), Hui-Zhong[47] a introduit une méthode de couplage différences-finies/vortex. La méthode de projection dans la zone différences-finies lui permet de prendre en compte exactement les conditions limites aux bords d'obstacles. Le domaine particulaire Ω_2 est le domaine extérieur (Fig.5.3). Des particules recouvrent le domaine différences-finies. Elles sont utilisées pour calculer la vitesse sur l'interface extérieure du domaine différences-finies et pour générer les nouvelles particules. A chaque pas de temps, les particules du domaine intérieur qui s'approchent du domaine extérieur sont transformées en particules extérieures par interpolation. L'inconvénient essentiel de cette méthode est sa mise en oeuvre délicate et son coût élevé. La génération des particules peut donner lieu à des particules de volumes très petits. On se retrouve alors rapidement avec un nombre de particules très élevé.

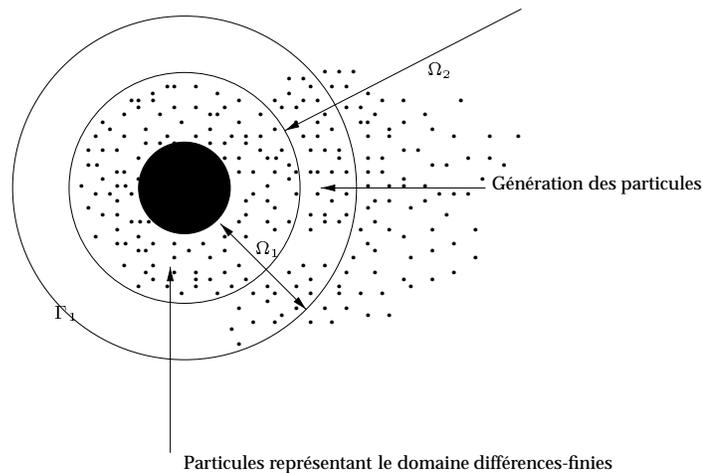


FIG. 5.3 – Décomposition en sous-domaines avec recouvrement.

5.2 Méthode de décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange

Nous allons présenter ci-dessous un algorithme de décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange basé sur les principes de la méthode de décomposition avec superposition pour le couplage Euler/Lagrange introduit par Cottet[30] et vue dans la section (5.1.1). Le calcul est fait par méthode différences-finies dans le domaine eulerien et par méthode de vortex dans le domaine lagrangien. Le domaine eulerien peut être le domaine intérieur et le domaine lagrangien le domaine extérieur comme dans le cas d'écoulement externe (Fig.5.4), ou inversement comme dans le cas d'écoulement interne (Fig.5.5). La génération de particules est assurée par le procédé de remaillage. En effet, pendant l'étape de remaillage des particules sont remis dans la partie de la zone de superposition aux points où la vorticité est pas nulle. Cela permet de créer de nouvelles particules de volume r egulier tout en respectant la pr ecision des formules de quadratures dans le domaine particulaire.

Pour se fixer les id ees, on donne d'abord les principes g en eraux de cet algorithme dans le cas test d' ecoulement autour d'un cylindre avec calcul (vitesse-tourbillon)/(vitesse-tourbillon)

et intégration en temps (explicite/explicite). On développera ensuite les différentes étapes de calcul pour des écoulements extérieurs et intérieurs.

On note Ω_1 le domaine eulerien, Γ_0 la frontière de l'obstacle qui constitue aussi le bord intérieur du domaine Ω_1 et Γ_1 le bord extérieur de Ω_1 (qui se trouve dans le domaine lagrangien). Le domaine lagrangien est noté Ω_2 , sa frontière intérieure (qui se trouve dans le domaine eulerien) est notée Γ_2 . On définit sur Ω_1 une grille eulerienne. Les données sur les points de cette grille qui se trouvent sur Γ_1 , sont déduites des valeurs calculées dans Ω_2 . Dans le domaine Ω_2 ,

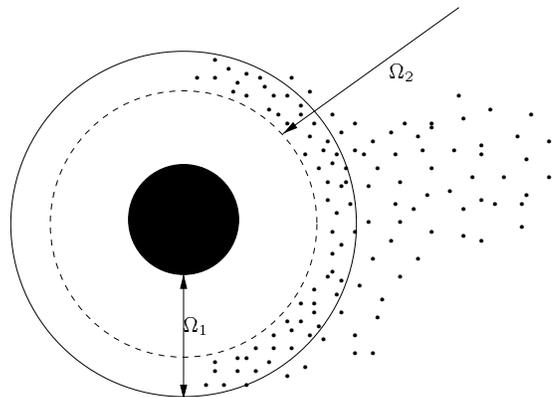


FIG. 5.4 – Décomposition en sous-domaines avec recouvrement partiel et génération automatique de particules de volumes uniformes pour un écoulement extérieur.

une distribution de particules est définie à l'instant initial. Elle évolue suivant la vitesse du fluide. Les données sur les particules proches de Γ_2 sont déduites des calculs effectués sur la grille. Une redistribution de ces particules est réalisée de façon périodique avec une période T_r . Cela permet d'éviter une distorsion trop importante dans la distribution particulaire et d'assurer la génération de nouvelles particules suivant l'élargissement du support de la vorticité. Les étapes de cet algorithme peuvent être résumées dans les lignes suivantes :

- Calcul de la vitesse dans les deux sous-domaines par algorithme itératif de Schwarz.
- Calcul de la vorticité à l'intérieur du domaine Ω_1 par différences-finies.
- Calcul de la vorticité à l'intérieur du domaine Ω_2 par méthode de vortex.
- Calcul de la vorticité sur le bord du domaine Ω_1 de celle des particules par assignement.
- Calcul de la vorticité sur les particules qui se trouvent à l'intérieur du domaine Ω_1 par interpolation de la vorticité de grille.

Afin d'expliquer les différentes étapes de cet algorithme, la décomposition en sous-domaines est illustrée ci-dessous sur deux exemples. Le premier représente le cas d'écoulement autour d'un cylindre et le second représente le cas d'écoulement dans une conduite.

5.2.1 Méthode de décomposition en sous-domaines pour un écoulement extérieur

Un exemple modèle d'écoulement extérieur est le cas d'écoulement autour d'un cylindre. Il représente la configuration de référence qui peut approcher par moyen de transformation géométrique un écoulement autour d'obstacles quelconques.

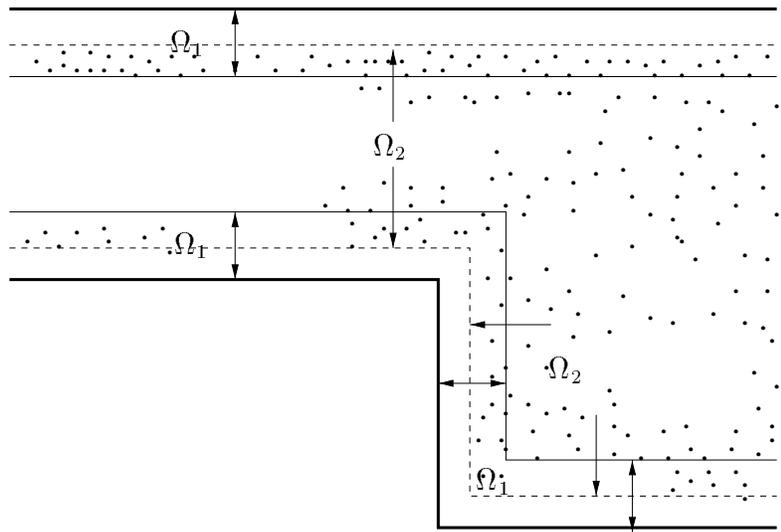


FIG. 5.5 – Décomposition en sous-domaines avec recouvrement partiel et génération automatique de particules de volumes uniformes pour un écoulement intérieur.

Décomposition du domaine

Les décompositions en sous-domaines sur le calcul de la vitesse et sur le calcul de la vorticité dans notre algorithme peuvent être différentes. A chaque pas de temps, la vorticité dans le domaine lagrangien, est calculée par méthode de vortex dans la partie Ω_ω de frontière Γ_ω . La vitesse est calculée par les lois de Biot-Savart dans la partie Ω_{bs} de frontière Γ_{bs} .

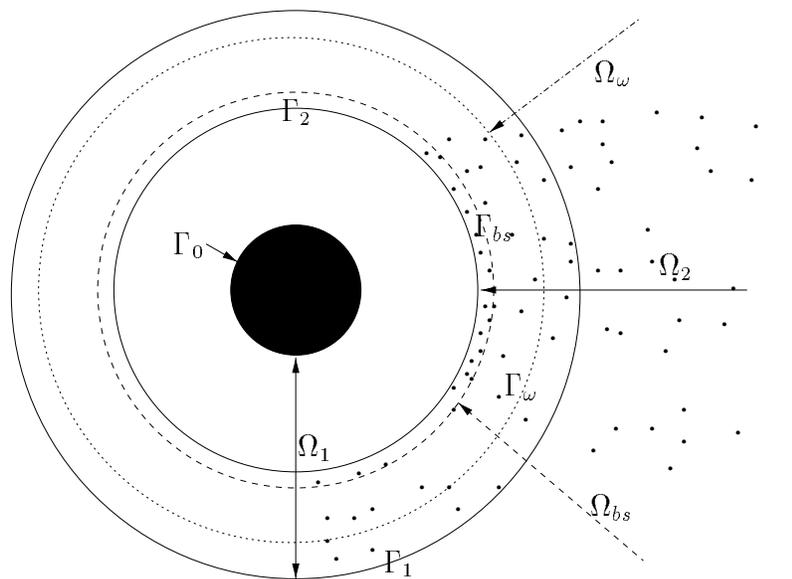


FIG. 5.6 – Décomposition en sous-domaines autour du cylindre.

5.2.2 Méthodes de calcul dans le domaine Ω_1

Deux algorithmes de type différences-finies en coordonnées polaires dans le domaine Ω_1 ont été utilisés. Le premier est écrit en formulation (vitesse-tourbillon) des équations de Navier-Stokes. Il a donc l'avantage d'être moins coûteux en dimension deux. Le second algorithme est écrit en formulation (vitesse-pression). Cette dernière écriture présente l'avantage d'être applicable sans modification en trois dimensions.

Paramètres de discrétisation

Le domaine Ω_1 est limité à l'intérieur par ($a \leq r$) où a est le rayon du cylindre et à l'extérieur par ($r \leq b$). On définit une grille polaire de taille m points dans la direction r et n points dans la direction θ . Les noeuds de discrétisation sont alors donnés par :

$$\Omega_1^h = \{(r_i, \theta_j); r_i = a + i\delta r, \theta_j = j\delta\theta, i = 0 \dots m, j = 0 \dots n\}$$

$$\delta r = \frac{b-a}{m}, \quad \delta\theta = \frac{2\pi}{n}$$

On note $f_{i,j} = f(r_i, \theta_j)$ la valeur d'une fonction f sur un point de grille (r_i, θ_j) . Le bord Γ_0 de l'obstacle et le bord extérieur Γ_1 de Ω_1 sont donnés par :

$$\Gamma_0 = \{(r_0, \theta_j); \theta_j = j\delta\theta, j = 0 \dots n\}$$

$$\Gamma_1 = \{(r_m, \theta_j); \theta_j = j\delta\theta, j = 0 \dots n\}$$

Le pas de discrétisation temporel est Δt , on note $t_n = n\Delta t$.

Algorithme différences-finies en formulation (vitesse-tourbillon)

L'algorithme de discrétisation différences-finies centrées d'ordre deux et avec prise en compte des conditions limites par méthode explicite présentée dans le chapitre 2 en coordonnées cartésiennes est implémenté ici en géométrie polaire autour du cylindre. Les grandes étapes de cet algorithme sont écrites ci-dessous.

En coordonnées polaires les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{1}{r}(u_r \frac{\partial\omega}{\partial r} - u_\theta \frac{\partial\omega}{\partial\theta}) = \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} \right) \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta_p \psi &= -\omega \\ u_r &= \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ u_\theta &= -\frac{\partial\psi}{\partial r} \end{aligned}$$

L'opérateur Δ_p désigne le laplacien en coordonnées polaires, il est donné par :

$$\Delta_p g = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$$

La condition d'adhérence sur le bord de l'obstacle nous permet de déduire les conditions limites de type Dirichlet et Neumann sur ψ en Γ_0 . Sur Γ_1 les valeurs de la vorticité et de la vitesse sont déduites du calcul dans le domaine Ω_2 .

Les équations précédentes sont discrétisées par les opérateurs différentiels centrés. Notons :

$$D_r(f_{i,j}) = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\delta r}$$

$$D_r^+(f_{i,j}) = \frac{-3f_{i,j} + 4f_{i+1,j} - f_{i+2,j}}{2\delta r}$$

$$D_{rr}(f_{i,j}) = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\delta r^2}$$

$$D_\theta(f_{i,j}) = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\delta\theta}$$

$$D_{\theta\theta}(f_{i,j}) = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\delta\theta^2}$$

Connaissant les anciennes valeurs de la vorticité ω^n , de la fonction courant ψ^n et les valeurs de la vitesse u_e^n sur le bord de l'obstacle Γ_0 et $u_{\Gamma_1}^n$ sur le bord extérieur Γ_1 à un instant donné, on peut déduire les nouvelles valeurs grâce aux étapes suivantes :

- Intégration de l'équation de convection-diffusion suivante à l'intérieur du domaine :

$$\frac{\partial \omega_{i,j}}{\partial t} = \frac{\Delta t}{r_{i,j}} (u_\theta D_\theta(\omega) - u_r D_r(\omega))_{i,j} + \frac{\Delta t}{Re} (\Delta_p \omega)_{i,j} \quad 0 < i < m, 0 \leq j < n$$

- Calcul de la fonction courant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{r_{i,j}} D_r(r D_r \psi)_{i,j} - \frac{1}{r_{i,j}^2} D_{\theta\theta} \psi_{i,j} = \omega_{i,j} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} |_{\partial \Omega} - u_e \cdot n = 0 \end{cases}$$

- Calcul des vitesses :

$$u_r = D_\theta \psi$$

$$u_\theta = D_r \psi$$

- Calcul de la vorticité sur le bord du cylindre Γ_0 par formule approchée comme dans le chapitre 2 :

$$\omega_{\Gamma_0} = \frac{1}{r^2} (r D_r^+(r u_\theta) + D_\theta(u_r))$$

Algorithme différences-finies en formulation (vitesse-pression)

En coordonnées polaires les équations de Navier-Stokes en variables originales s'écrivent :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_r - \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{Re} \left(\Delta_p u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{Re} \left(\Delta_p u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (5.3)$$

Ces équations sont complétées par les conditions limites sur la vitesse au bord du domaine ($u = u_e$). Elles peuvent être résolues par l'algorithme de projection explicite introduit en géométrie cartésienne dans le chapitre 2. L'intégration en temps est faite par le schéma de Runge-Kutta d'ordre deux. Les équations sur la pression sont déduites par l'application de l'opérateur

divergence sur les équations de mouvements précédentes. L'algorithme de projection s'écrit alors :

- Calcul de G^n :

$$G_r^n = \left(u_r^n \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta^n}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_r^n - \frac{u_\theta^{n2}}{r} - \frac{1}{Re} \left(\Delta_p u_r^n - \frac{u_r^n}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta^n}{\partial \theta} \right) \quad (5.4)$$

$$G_\theta^n = \left(u_r^n \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta^n}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_\theta^n + \frac{u_r^n u_\theta^n}{r} - \frac{1}{Re} \left(\Delta_p u_\theta^n - \frac{u_\theta^n}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r^n}{\partial \theta} \right) \quad (5.5)$$

- Calcul de la pression p^n :

$$\begin{cases} \Delta_p p^n &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rG_r^n)}{\partial r} + \frac{\partial G_\theta^n}{\partial \theta} \right) \\ -\frac{\partial p^n}{\partial r} |_{\partial\Omega} &= G_r^n |_{\partial\Omega} + \frac{\partial u_r}{\partial t} |_{\partial\Omega} \end{cases}$$

- Calcul de la vitesse intermédiaire u^i :

$$u_r^i = u_r^n - \Delta t \left(G_r^n + \frac{\partial p^n}{\partial r} \right) \quad (5.6)$$

$$u_\theta^i = u_\theta^n - \Delta t \left(G_\theta^n + \frac{1}{r} \frac{\partial p^n}{\partial \theta} \right) \quad (5.7)$$

- Calcul de G^i :

$$G_r^i = \left(u_r^i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta^i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_r^i - \frac{u_\theta^{i2}}{r} - \frac{1}{Re} \left(\Delta_p u_r^i - \frac{u_r^i}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} \right) \quad (5.8)$$

$$G_\theta^i = \left(u_r^i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta^i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_\theta^i + \frac{u_r^i u_\theta^i}{r} - \frac{1}{Re} \left(\Delta_p u_\theta^i - \frac{u_\theta^i}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} \right) \quad (5.9)$$

- Calcul de la pression intermédiaire p^i :

$$\begin{cases} \Delta_p p^i &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rG_r^i)}{\partial r} + \frac{\partial G_\theta^i}{\partial \theta} \right) \\ -\frac{\partial p^i}{\partial r} |_{\partial\Omega} &= G_r^i |_{\partial\Omega} + \frac{\partial u_r}{\partial t} |_{\partial\Omega} \end{cases}$$

- Calcul de la vitesse à l'instant suivant u^{n+1} :

$$u_r^{n+1} = u_r^n - \frac{\Delta t}{2} \left(G_r^n + G_r^i + \frac{\partial(p^n + p^i)}{\partial r} \right) \quad (5.10)$$

$$u_\theta^{n+1} = u_\theta^n - \frac{\Delta t}{2} \left(G_\theta^n + G_\theta^i + \frac{1}{r} \frac{\partial(p^n + p^i)}{\partial \theta} \right) \quad (5.11)$$

L'algorithme discret est obtenu en remplaçant les opérateurs différentiels continus par les opérateurs différences-finies discrets utilisés dans la section précédente.

5.2.3 Calcul en domaine Ω_2

Calcul de la vorticité et génération des particules

Dans le domaine extérieur, on utilise la méthode de vortex présentée dans le chapitre 1. L'opérateur de diffusion est approché par la méthode P.S.E. et la convection est traduite par le déplacement des particules sur les caractéristiques. La génération de particules servant à transférer le tourbillon de Ω_1 vers Ω_2 est prise en compte implicitement par le procédé de remaillage. A chaque pas de temps les circulations des particules du domaine Ω_2/Ω_ω sont calculées par interpolation des valeurs de la grille différences-finies. Tandis que les nouvelles circulations des particules se trouvant dans le domaine Ω_ω sont calculées par méthode P.S.E.

Calcul des vitesses sur les particules

Si on connaît la fonction courant ψ sur le bord Γ_2 ainsi que sa dérivée normale, on peut calculer ψ sur tout le domaine Ω_2 par formules intégrales. En effet, l'utilisation des solutions élémentaires de l'opérateur laplacien et les formules de Biot-Savart nous permettent d'écrire :

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) \quad (5.12)$$

où

$$\psi_1(x) = \int_{\Gamma_2} G(x - x') \nabla \psi(x') \cdot n(x') d\sigma(x') - \int_{\Gamma_2} \psi(x') \nabla G(x - x') \cdot n(x') d\sigma(x') \quad (5.13)$$

et

$$\psi_2(x) = \int_{\Omega_2} \omega(x') G(x - x') dx' \quad (5.14)$$

La vitesse est obtenue en appliquant l'opérateur rotationnel à ces formules :

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) \quad (5.15)$$

où

$$u_1(x) = \int_{\Gamma_2} k(x - x') \nabla \psi(x') \cdot n(x') d\sigma(x') - \int_{\Gamma_2} \psi(x') \nabla k(x - x') \cdot n(x') d\sigma(x') \quad (5.16)$$

et

$$u_2(x) = \int_{\Omega_2} \omega(x') (k * \zeta_\epsilon)(x - x') dx' \quad (5.17)$$

5.2.4 Conditions limites sur la vorticité à l'interface des deux domaines

Le transfert d'information entre le domaine eulerien et lagrangien est l'ingrédient crucial qui permet d'assurer la consistance de la méthode de décomposition en sous-domaines. Pour faire le calcul P.S.E., on a besoin des valeurs de la vorticité dans un voisinage de Γ_ω de taille petite (quelques pas de discrétisation) que l'on doit déduire des résultats de calcul au pas de temps précédent dans la zone eulerienne. Ceci se fait naturellement par interpolation des valeurs de grille sur les particules dans ce voisinage.

Inversement, le calcul différences-finies dans Ω_1 nécessite la connaissance des valeurs de la vorticité sur Γ_1 . Ces valeurs s'obtiennent à l'issue du calcul P.S.E. dans Ω_2 par assignement des circulations sur la grille.

La précision de ces procédures est conditionnée d'une part par la qualité des noyaux d'interpolation utilisés et d'autre part par le fait que la distribution particulaire assure une discrétisation adéquate de la zone de recouvrement. On utilise pour cela le noyau d'ordre trois (M'_4) et des techniques de remaillage basées sur le même noyau.

5.2.5 Calcul des vitesses en décomposition en sous-domaines

Calcul des vitesses en décomposition (vitesse-tourbillon)/(vitesse-tourbillon)

Le calcul de la fonction courant dans chaque domaine demande la connaissance des conditions limites sur sa frontière. Au bord de l'obstacle et à l'infini, ces conditions sont données par les hypothèses physiques. Sur les bords Γ_1 et Γ_{bs} , ces conditions sont obtenues par une méthode de Schwarz modifiée pour prendre en compte le fait que dans Ω_2 on utilise une résolution par formules intégrales (Cottet[30]). Cet algorithme est décrit ci-dessous. La démonstration de la convergence géométrique de ce type d'algorithme est donnée par Albuquerque[1].

On se donne une valeur initiale quelconque a^0 sur Γ_1 et on itère sur m le procédé :

- Calcul de la fonction courant ψ^m dans Ω_1 par différences-finies :

$$\begin{cases} \Delta \psi^m = -\omega & \text{dans } \Omega_1 \\ \frac{\partial \psi^m}{\partial \tau} = u_e \cdot n & \text{sur } \Gamma_0 \\ \psi^m = a^m & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

- Calcul de b^m et c^m sur Γ_{bs} définis par :

$$b^m = \psi^m|_{\Gamma_{bs}}$$

$$c^m = \frac{\partial \psi^m}{\partial n}|_{\Gamma_{bs}}$$

- Calcul de a^{m+1} sur Γ_1 par les lois de Biot-Savart :

$$a^{m+1} = \int_{\Gamma_{bs}} G(x-x')c^m(x')d\sigma(x') - \int_{\Gamma_{bs}} b^m(x')\frac{\partial G}{\partial n}(x')d\sigma(x') + G_\omega(x)$$

La fonction $G_\omega(x)$ est définie par :

$$G_\omega(x) = \int_{\Omega_2} \omega(x') G(x - x') dx'$$

Après la convergence de cet algorithme, on dispose de la fonction courant dans le domaine Ω_1 et sa valeur ainsi que sa dérivée normale sur le bord Γ_{bs} . On peut alors calculer la vitesse sur les particules par la formule intégrale vue précédemment.

La valeur initiale a^0 de la suite a^m peut être choisie quelconque. En pratique, on prend pour a^0 la valeur de la fonction courant ψ sur Γ_1 à l'instant de temps précédent. On obtient alors une convergence très rapide (en moins de quatre itérations) car les changements entre deux instants de temps successifs de la fonction courant ne sont pas très importants.

Calcul des vitesses en décomposition (vitesse-pression)/(vitesse-tourbillon)

Dans la méthode de projection explicite, le calcul de la pression à un instant suivant t_{n+1} demande la connaissance à cet instant du gradient de la vitesse sur le bord Γ_1 . L'algorithme itératif est alors appliqué sur le calcul de la pression dans le domaine différences-finies et sur le calcul de la vitesse dans le domaine particulaire. Il se résume en utilisant les mêmes notations que précédemment dans les étapes ci-dessous.

Notons u^n la vitesse à l'instant t_n et G^n la variation de la vitesse intermédiaire, la pression et la vitesse à l'instant suivant t_{n+1} sont respectivement les limites de la suite u^m et de la suite p^m définies par :

- Résolution d'une équation de Poisson sur la pression :

$$\begin{cases} \Delta p^m = -\nabla \cdot G^n & \text{dans } \Omega_1 \\ \frac{\partial p^m}{\partial r} |_{\Gamma_0} = -G_r^n |_{\Gamma_0} + \frac{(u_r^n - u_r^{n+1})}{\Delta t} |_{\Gamma_0} \\ \frac{\partial p^m}{\partial r} |_{\Gamma_1} = -G_r^n |_{\Gamma_1} + \frac{(u_r^n - a_r^m)}{\Delta t} |_{\Gamma_1} \end{cases}$$

- Calcul de b^m et c^m sur Γ_{bs} définis par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial b^m}{\partial \theta} &= u_r^n - \Delta t (G^n - \nabla p^m)_r |_{\Gamma_{bs}} \\ c^m &= -u_\theta^n - \Delta t (G^n - \nabla p^m)_\theta |_{\Gamma_{bs}} \end{aligned}$$

- Calcul de a^{m+1} sur Γ_1 par les lois de Biot-Savart :

$$a^{m+1} = \int_{\Gamma_{bs}} k(x - x') c^m(x') d\sigma(x') - \int_{\Gamma_{bs}} b^m(x') \frac{\partial k}{\partial n}(x') d\sigma(x') + k_\omega(x)$$

La fonction $k_\omega(x)$ est définie par :

$$k_\omega(x) = \int_{\Omega_2} \omega(x') k(x - x') dx'$$

Comme dans la section précédente, il est rentable de choisir pour a^0 la vitesse sur Γ_1 à l'instant de temps précédent.

5.2.6 Récapitulatif des algorithmes de décomposition de domaine

Calcul en formulation (vitesse-tourbillon)/(vitesse-tourbillon)

L'algorithme de décomposition en sous-domaines avec calcul en formulation (vitesse-tourbillon) dans le domaine différences-finies consiste à itérer en temps les étapes suivantes :

- Calcul de la vorticité ω_g à l'intérieur du domaine Ω_1 par différences-finies.
- Calcul par méthode itérative de type Schwarz des vitesses sur la grille dans Ω_1 et sur les particules dans Ω_{bs} .
- Calcul de la vorticité sur les points de grille se trouvant sur Γ_0 par application de l'opérateur rotationnel aux vitesses sur la grille.
- Calcul de la vorticité sur les points de grille se trouvant sur Γ_1 par assignement du tourbillon particulaire.
- Calcul de vorticité sur les particules se trouvant dans le domaine Ω_w par méthode de vortex.
- Calcul de la vorticité sur les particules se trouvant dans le domaine Ω_2/Ω_w par interpolation de la vorticité de grille.

Les schémas d'intégration en temps utilisés sont le schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre dans le domaine différences-finies et le schéma d'Adams-Bashforth d'ordre deux dans le domaine particulaire. Cependant, après les étapes de remaillage, il est nécessaire d'utiliser le schéma de Runge-Kutta d'ordre deux, car, on ne connaît pas la vitesse à l'instant précédent sur les nouvelles positions des particules.

Calcul en formulation (vitesse-pression)/(vitesse-tourbillon)

L'algorithme de décomposition en sous-domaines avec calcul en formulation (vitesse-pression) dans le domaine différences-finies consiste à itérer en temps les étapes suivantes :

- Calcul de la contribution G des termes de convection et de diffusion à l'intérieur du domaine Ω_1 par différences-finies.
- Calcul par méthode itérative de type Schwarz de la pression sur la grille dans Ω_1 et des vitesses sur les particules dans Ω_{bs} .
- Calcul des vitesses sur la grille dans Ω_1 à partir de la pression et des vitesses à l'instant précédent.
- Calcul de la vorticité sur les points de grille se trouvant dans Ω_2 par application de l'opérateur rotationnel aux vitesses sur la grille.
- Calcul de vorticité sur les particules se trouvant dans le domaine Ω_w par méthode de vortex.
- Calcul de la vorticité sur les particules se trouvant dans le domaine Ω_2/Ω_w par interpolation de la vorticité de grille.

En domaine eulerien, on utilise le schéma d'intégration de Runge-Kutta d'ordre deux. Comme précédemment, c'est le schéma d'Adams-Bashforth d'ordre deux qui est utilisé en domaine particulaire sauf après les étapes de remaillage, où on utilise le schéma de Runge-Kutta d'ordre deux.

5.3 Validation numérique

5.3.1 Cas d'un tourbillon axisymétrique

On montre dans cette section que les algorithmes itératifs de calcul $(p - u)$ et $(\psi - u)$ n'influent pas sur la précision des calculs entre le domaine particulaire et le domaine eulerien. On prend comme condition initiale autour du cylindre la distribution de vorticité :

$$\omega(x, y) = \begin{cases} (1 - r^2)^3 & \text{si } r \leq 1, \\ 0 & \text{si } r \geq 1 \end{cases} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Les vitesses correspondantes à cette distribution sont :

$$u_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y((1-r^2)^4 - 1)}{8r^2} & \text{si } r \leq 1 \\ -\frac{y}{8r^2} & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

$$u_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x(1 - (1-r^2)^4)}{8r^2} & \text{si } r \leq 1 \\ \frac{x}{8r^2} & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

L'application de l'opérateur laplacien à ω nous donne :

$$g(x, y) = -\Delta\omega = \begin{cases} 12(r^2 - 1)(3r^2 - 1) & \text{si } r \leq 1 \\ 0 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

Les algorithmes de décomposition en sous-domaines avec calcul (vitesse-tourbillon) et calcul (vitesse-pression) en domaine différences-finies sont appliqués à cet exemple. Le rayon du cylindre est $a = 0.1$. Le domaine eulerien est limité par $0.1 \leq r \leq 0.6$ et le domaine lagrangien est limité par $r \geq 0.3$. La figure Fig.5.7 montre une coupe de la vitesse et de la diffusion calculées par ces deux algorithmes après la convergence des méthodes itératives. On voit alors la précision des algorithmes de décomposition en sous-domaines. Le nombre de points de grille en domaine eulerien est ($m = 60, n = 100$) et le nombre de particules en domaine particulaire est ($N_p = 4068$).

5.3.2 Simulation d'écoulement autour d'un cylindre

La mise en mouvement brusque d'un cylindre en écoulement uniforme constitue un test de validation sévère des méthodes numériques. Des structures complexes dues à la mise en mouvement brusque se forment rapidement et se développent dans l'écoulement. Une résolution précise est alors nécessaire surtout dans le cas où le nombre de Reynolds est élevé. L'utilisation de méthodes numériques classiques rend alors les calculs très coûteux. En effet, la vorticité occupe une petite partie du domaine, un nombre important de points de discrétisation se trouve dans des zones ne représentant aucune information. La méthode de décomposition en sous-domaines présentée ici a l'avantage de permettre une résolution précise avec prise en compte

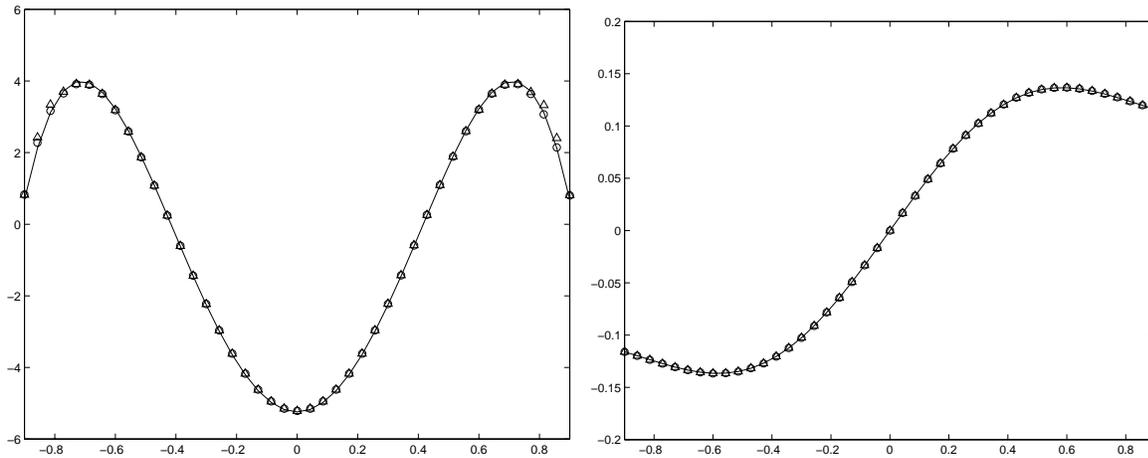


FIG. 5.7 – A gauche, la vitesse u_y et à droite la diffusion g évaluées en $\{-0.9 \leq x \leq 0.9\}$ et $\{y = 0.4\}$; (-): solution exacte, (o): solution numérique calculée par décomposition (vitesse-tourbillon)/(vitesse-tourbillon); (Δ): solution numérique calculée par décomposition (vitesse-pression)/(vitesse-tourbillon)

exacte des conditions limites autour du cylindre tout en évitant de faire des calculs dans les zones irrotationnelles de l'écoulement.

L'existence en littérature d'une large documentation sur ce cas test rend possible une vérification précise des résultats obtenus par les méthodes de décomposition en sous-domaines introduites ici. On rappelle ci-dessous à titre d'exemple un ensemble d'applications numériques faites ces dernières années.

En méthode différences-finies, Ta Phuoc Loc[58], Ta Phuoc Loc et Bouard[59] testent plusieurs schémas de discrétisation d'ordre élevé. Ils donnent une description détaillée pour l'écoulement symétrique (non perturbé) et pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à $Re = 9500$. Anderson et Reider[4] utilisent les différences-finies centrées d'ordre quatre avec intégration de Runge-Kutta du quatrième ordre. Ils traduisent les conditions limites sur le bord en terme de système matriciel. C.-H. Bruneau[13] propose une méthode différences-finies en formulation (vitesse-pression) sur un maillage cartésien capable de prendre en compte des éventuels obstacles dans le domaine de calcul. Il utilise un couplage des équations de Navier-Stokes dans l'écoulement avec les équations de Darcy dans l'obstacle (l'obstacle est assimilé à un milieu poreux de perméabilité très faible). A la limite extérieure, les conditions de sortie proviennent de l'hypothèse de traction nulle. Il applique cette méthode à l'écoulement derrière plusieurs cylindres.

En méthode lagrangienne, Chang et Chern[18] utilisent une méthode de couplage particules-grilles afin de résoudre la convection de façon précise. Ils traitent le cas de cylindre en translation et en rotation et des viscosités très petites allant jusqu'à $Re = 10^6$. Le transfert de la vorticité sur la grille est fait par le schéma C.I.C. (cloud in cell) proposé par Christiansen[26]. Koumoutsakos et Leonard[54] utilisent une méthode de vortex pure basée sur un schéma de génération de particules par méthode intégrale et un remaillage périodique de la distribution particulaire. Ils construisent ainsi une méthode purement lagrangienne et déterministique. Le traitement de la diffusion est réalisé par la méthode P.S.E.

Les méthodes de décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange tentent de combiner les avantages des deux types de méthodes précédentes. Une grille eulerienne est définie autour

des obstacles afin de prendre en compte de façon exacte les conditions limites. Le traitement par méthode particulière assure l'adaptation du domaine de calcul à l'évolution du champ de vorticité. Le test de référence utilisé par les auteurs de ces méthodes est le cas d'écoulement derrière un cylindre. Mais, comme on a l'vue en section 5.1, ces méthodes rencontrent plusieurs difficultés. On montre ici que les algorithmes de décomposition en sous-domaines proposés dans ce chapitre permettent de remédier à ces difficultés et d'offrir ainsi un moyen précis et peu c uteux de calculs d'écoulement en présence d'obstacles.

Simulation d'écoulement autour d'un cylindre se déplaçant avec une vitesse uniforme U_∞ en maillage uniforme

Dans cette section, on s'intéresse à l'implémentation de la méthode de décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange avec maillage uniforme. Dans le domaine Ω_1 , autour du cylindre on utilise une grille polaire uniforme et dans le domaine particulière les particules sont données après chaque étape de remaillage sur une grille cartésienne uniforme. En domaine eulerien la résolution numérique est faite par la méthode différences-finies en formulation (vitesse-tourbillon) ou en formulation (vitesse-pression). Les algorithmes de calculs sont définis dans les paragraphes précédents.

Résultats numériques

Paramètres de calcul

On rappelle d'abord les paramètres géométriques de décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange. Le rayon du cylindre est a , le domaine eulerien est limité par $a < r < b$ et le domaine lagrangien est limité par $r > c$ avec $c < b$. Le nombre de points de discrétisation en domaine différences-finies est m points dans la direction r et n points dans la direction θ . En domaine particulière le nombre de particules est N_p . Le pas de temps est Δt . Les calculs faits par méthode purement différences-finies sont notés calcul **mdf**, les calculs faits par méthode de décomposition en sous-domaines avec calcul en formulation (vitesse-tourbillon) en domaine eulerien sont notés calcul **mdcuw** et les calculs faits par méthode de décomposition en sous-domaines avec calcul en formulation (vitesse-pression) en domaine eulerien sont notés calcul **mdcup**.

Conditions initiales

Initialement, la vorticité est supposée nulle dans tout le domaine de calcul. Les vitesses et la fonction courant à l'intérieur du domaine de calcul sont celles qui proviennent de l'écoulement potentiel :

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta, 0) &= \sin(\theta) \frac{r^2 - a^2}{r} \\ v_r(r, \theta, 0) &= \cos(\theta) \frac{r^2 - a^2}{r^2} \\ v_\theta(r, \theta, 0) &= -\sin(\theta) \frac{r^2 + a^2}{r^2}\end{aligned}$$

Sur le bord du cylindre, la condition de non glissement impose :

$$v_r(a, \theta, t) = 0$$

$$v_\theta(a, \theta, t) = 0$$

En méthode de décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange, l'emploi de la formulation intégrale en calcul des vitesses permet de prendre en compte directement les conditions limites à l'infini. Par contre, en méthode purement différences-finies, on a besoin d'approcher les conditions limites sur le bord extérieur du domaine ($r = b$). On suppose ici que les vitesses sur ce bord restent constantes en posant :

$$\psi(b, \theta, t) = \sin(\theta) \frac{b^2 - a^2}{b}$$

$$v_r(b, \theta, t) = \cos(\theta) \frac{b^2 - a^2}{b^2}$$

$$v_\theta(b, \theta, t) = -\sin(\theta) \frac{b^2 + a^2}{b^2}$$

Calcul du coefficient de trainée

Le coefficient de trainée représente une quantité physique très importante. Il représente la force exercée sur le cylindre. Il est donné par la formule :

$$C_d = \frac{F_b \cdot \hat{e}_x}{U_\infty^2 a} \quad (5.18)$$

La force F_B peut être calculée par la formule :

$$F_b = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \omega \times x dx \quad (5.19)$$

ou par la formule :

$$F_b = F_p + F_f \quad (5.20)$$

avec :

$$F_p = -a \int_{\Gamma_0} \nu \frac{\partial \omega}{\partial r} \hat{e}_\theta d\theta \quad (5.21)$$

$$F_f = a \int_{\Gamma_0} \nu \omega \hat{e}_\theta d\theta \quad (5.22)$$

Les deux forces F_p et F_f définissent la partie de la force de trainée due à la pression et celle due aux frictions. On leur associe les deux coefficients :

$$C_p = \frac{F_p \cdot \hat{e}_x}{U_\infty^2 a} \quad (5.23)$$

$$C_f = \frac{F_f \cdot \hat{e}_x}{U_\infty^2 a} \quad (5.24)$$

on a évidemment :

$$C_d = C_p + C_f \quad (5.25)$$

Ici, le coefficient de trainée C_d est calculé par la formule 5.19 et le coefficient C_f par 5.22. Les valeurs du coefficient C_p sont obtenues par :

$$C_p = C_d - C_f$$

Car, cela permet d'éviter le manque de précision engendré par l'estimation de la dérivée normale de la vorticité sur le bord.

L'évolution du coefficient de trainée pour un cylindre plongé en écoulement uniforme est largement décrit pour des nombres de Reynolds tels que ($Re \leq 9500$) par Koumoutsakos et Leonard[54]. On effectue ici une comparaison systématique du coefficient de trainée calculé ici avec leurs résultats.

Calcul en formulation (vitesse-tourbillon)

La méthode de décomposition Euler/Lagrange est appliquée ici avec calcul dans le domaine eulerien en formulation (vitesse-tourbillon). Les résultats de calcul par cette méthode sont comparés avec ceux obtenus par méthode purement eulerienne (méthode différences-finies). Le calcul du coefficient de trainée C_d , nous permet de faire la comparaison aussi avec les calculs par méthode purement lagrangienne présentés par Koumoutsakos et Leonard[54] et avec les résultats obtenus par Anderson et Reider[4] qui utilisent les techniques de type différences-finies d'ordre élevé couplées avec systèmes d'équations intégrales. On montre ainsi la précision de cette méthode.

Re=550

L'évolution de la vorticité derrière le cylindre obtenue par les deux méthodes **mdf** et **md-cuw** est décrite dans la figure Fig.5.9. On y observe la création et le développement de la vorticité primaire et secondaire. La comparaison de la vorticité, sur le bord du cylindre, calculée par les deux méthodes, est donnée en figure Fig.5.11. La comparaison des vitesses derrière le cylindre est rapportée dans la figure Fig.5.10. On remarque que les deux méthodes donnent des résultats très similaires. Cependant, il y a une légère différence entre les vitesses derrière le cylindre (Fig.5.10). Cette différence est due à l'erreur commise sur la condition limite sur le

bord extérieur en méthode **mdf** alors que la formulation intégrale en méthode **mdcuw** permet de prendre exactement la condition limite à l'infini. Le coefficient de trainée calculé par la méthode **mdcuw** est donné en figure Fig.5.8 et la comparaison avec le coefficient donné par Koumoutsakos et Leonard est faite en Tab.5.1. La simulation est réalisée sur un intervalle de temps $T \in [0, 7]$ avec un pas de temps $\Delta t = 0.005$. Comme le cylindre avance avec une vitesse $U_\infty = 1$, la méthode différences-finies a besoin d'un domaine de largeur égale à sept fois le rayon du cylindre. La méthode **mdf** utilise alors un nombre de points de grilles $(m, n) = (480, 300)$ sur un domaine $1 < r < 7$. La méthode **mdcuw** utilise une grille $(m, n) = (80, 300)$ sur le domaine eulerien $1 < r < 2$, en domaine particulière on n'a pas de particules au départ, mais des particules sont créées suivant l'élargissement du support de la vorticité. Ainsi à la fin de la simulation, on a $N_p = 37835$. L'évolution en fonction du temps du nombre de particules est donnée en figure Fig.5.10.

Re=1000

La structure de l'écoulement derrière un cylindre devient de plus en plus compliquée suivant l'augmentation du nombre de Reynolds. L'intensité des tourbillons est plus importante pour ce nombre de Reynolds que pour le précédent. L'évolution de la vorticité obtenue par les deux méthodes **mdf** et **mdcuw** est décrite dans la figure Fig.5.12. On y observe la création et la diffusion de la vorticité primaire et secondaire. Le coefficient de trainée calculé par la méthode **mdcuw** est donné en figure Fig.5.8 et la comparaison avec le coefficient donné par Koumoutsakos et Leonard est faite en Tab.5.2. La simulation est réalisée sur un intervalle de temps $T \in [0, 9]$ avec un pas de temps $\Delta t = 0.006$. La méthode **mdf** utilise un nombre de points de grilles $(m, n) = (560, 512)$ sur un domaine $1 < r < 8$. La méthode **mdcuw** utilise une grille $(m, n) = (78, 512)$ sur le domaine eulerien $1 < r < 1.975$, en domaine particulière on n'a pas de particules au départ, à la fin de la simulation on a $N_p = 38500$. L'évolution en fonction du temps du nombre de particules est donnée en figure Fig.5.15.

Re=3000

Pour ce nombre de Reynolds, la vorticité primaire crée sur le bord du cylindre a une grande intensité. On observe deux grandes structures qui ont tendance à s'éloigner du cylindre. On observe aussi la création de la vorticité secondaire et tertiaire qui interagissent au voisinage du cylindre. La figure Fig.5.13 montre la comparaison entre les méthodes **mdf** et **mdcuw**. L'évolution de l'écoulement pour des temps $T \in [0, 8.4]$ obtenue par calcul **mdcuw** est décrite en Fig.5.14. Le coefficient de trainée calculé par la méthode **mdcuw** est donné en figure Fig.5.8. La simulation est réalisée avec un pas de temps $\Delta t = 0.004$. La méthode **mdf** utilise un nombre de points de grilles $(m, n) = (700, 620)$ sur un domaine $1 < r < 6$. La méthode **mdcuw** utilise une grille $(m, n) = (120, 620)$ sur le domaine eulerien $1 < r < 2$, en domaine particulière, le nombre de particules arrive à $N_p = 36000$   $T = 8.4$. L'évolution en fonction du temps du nombre de particules est donnée en figure Fig.5.16.

Re=9500

La simulation de nombres de Reynolds élevés demande un maillage suffisamment fin. Le coût du calcul devient important. La simulation pour $Re = 9550$ a été faite ici sur un intervalle de temps réduit à $\{t < 3.3\}$. Les isovaleurs de la vorticité sont données dans la figure Fig.5.17. En fin de simulation, on a un nombre totale de points de discrétisation de $N = 255000$ points.

Le pas de temps est de $\Delta t = 0.003$. Le coefficient de trainée est comparé à ceux calculés par Koumoutsakos et Leonard[54], Anderson et Reider[4], Wu et al.[88]. A $T = 3$, Koumoutsakos et Leonard utilisent $N = 300000$ particules tandis que Anderson et Reider utilisent 262000 points de grille. Le traçage du coefficient de trainée obtenu par ces simulations est donné dans la figure Fig.5.18.

Calcul en formulation (vitesse-pression)

On montre dans cette section que la méthode de décomposition Euler/Lagrange avec calcul dans le domaine eulerien en formulation (vitesse-pression) **mdcup** donne des résultats équivalents à ceux obtenus par **mdcuw** et **mdf**. Les paramètres numériques choisis sont les mêmes que ceux des calculs précédents. La figure Fig.5.19 montre la comparaison de la méthode **mdcuw** avec la méthode **mdf** pour un nombre de Reynolds de $Re = 300$. Les figures (Fig.5.20, Fig.5.21) montrent la comparaison des isovaleurs de la vorticité et les valeurs de la vorticité, sur le bord, obtenues par les méthodes **mdcuw** et **mdcup** pour un nombre de Reynolds de $Re = 1000$.

Temps	0.2	0.5	1	2	3	7
C_{d1}	1.0	0.75	0.77	1.1	1.3	1.0
C_{d2}	1.0	0.75	0.77	1.1	1.3	1.0

TAB. 5.1 – $Re = 550$. Coefficient de trainée. C_{d1} : Present calcul, C_{d2} : Koumoutsakos et Leonard

Temps	0.5	2	3	4	5
C_{d1}	0.55	1.1	1.3	1.2	1.1
C_{d2}	0.54	1.1	1.3	1.2	1.1

TAB. 5.2 – $Re = 1000$. Coefficient de trainée. C_{d1} : Present calcul, C_{d2} : Koumoutsakos et Leonard

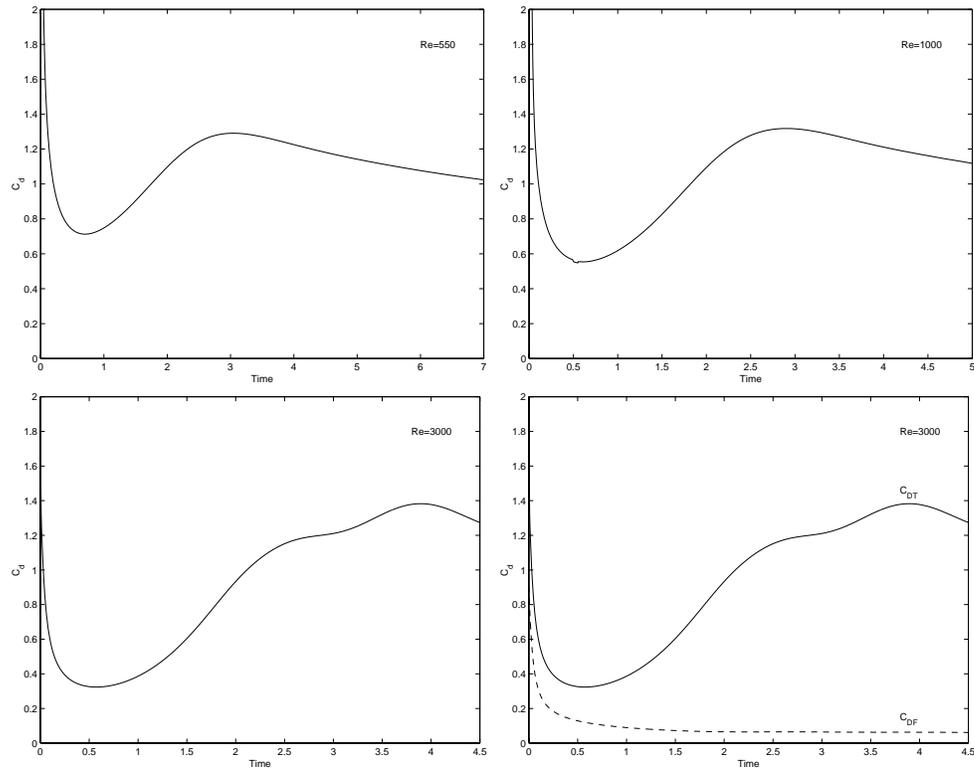


FIG. 5.8 – Coefficient de trainée. Calcul par méthode de couplage Euler/Lagrange.

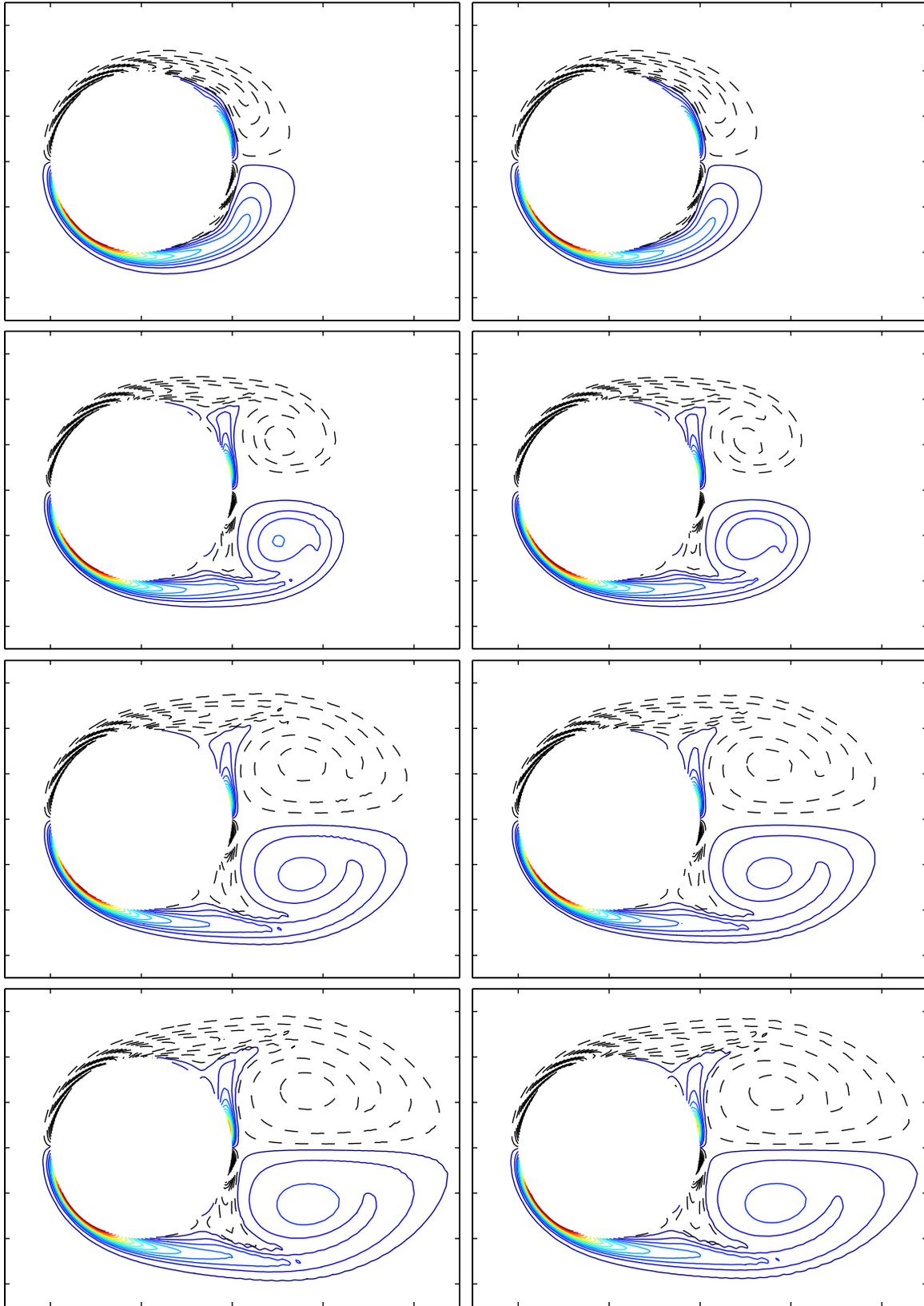


FIG. 5.9 - $Re = 550$. Isovaleurs de la vorticité. De haut en bas $T = \{2, 4, 6, 7\}$. A gauche méthode *mdcuw*, à droite méthode *mdf*.

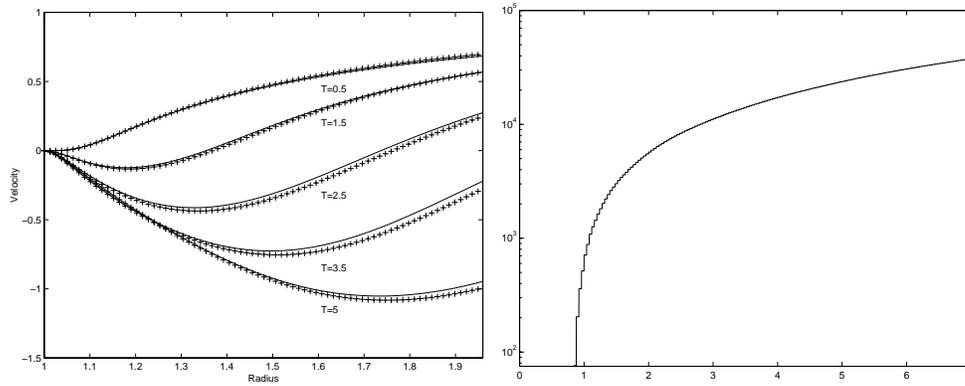


FIG. 5.10 – $Re = 550$. A gauche, vitesse derrière le cylindre, (–) : mdf, (+) : mdcuw. A droite, Evolution du nombre de particules.

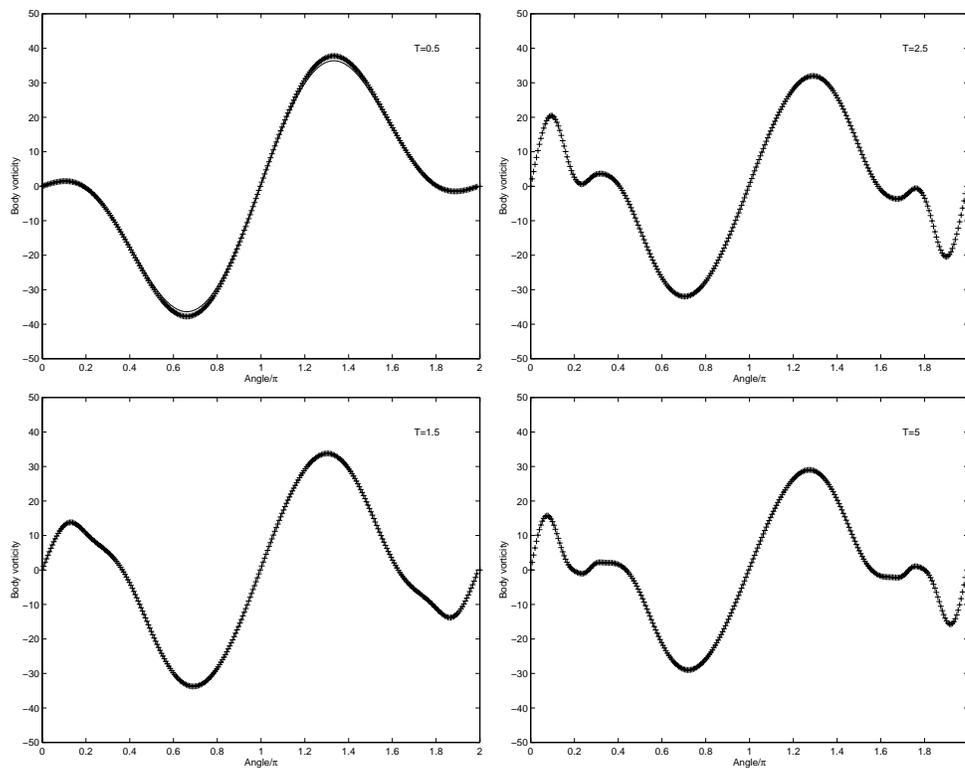


FIG. 5.11 – $Re = 550$. Vorticité sur le bord du cylindre. (–) : mdf, (+) : mdcuw.

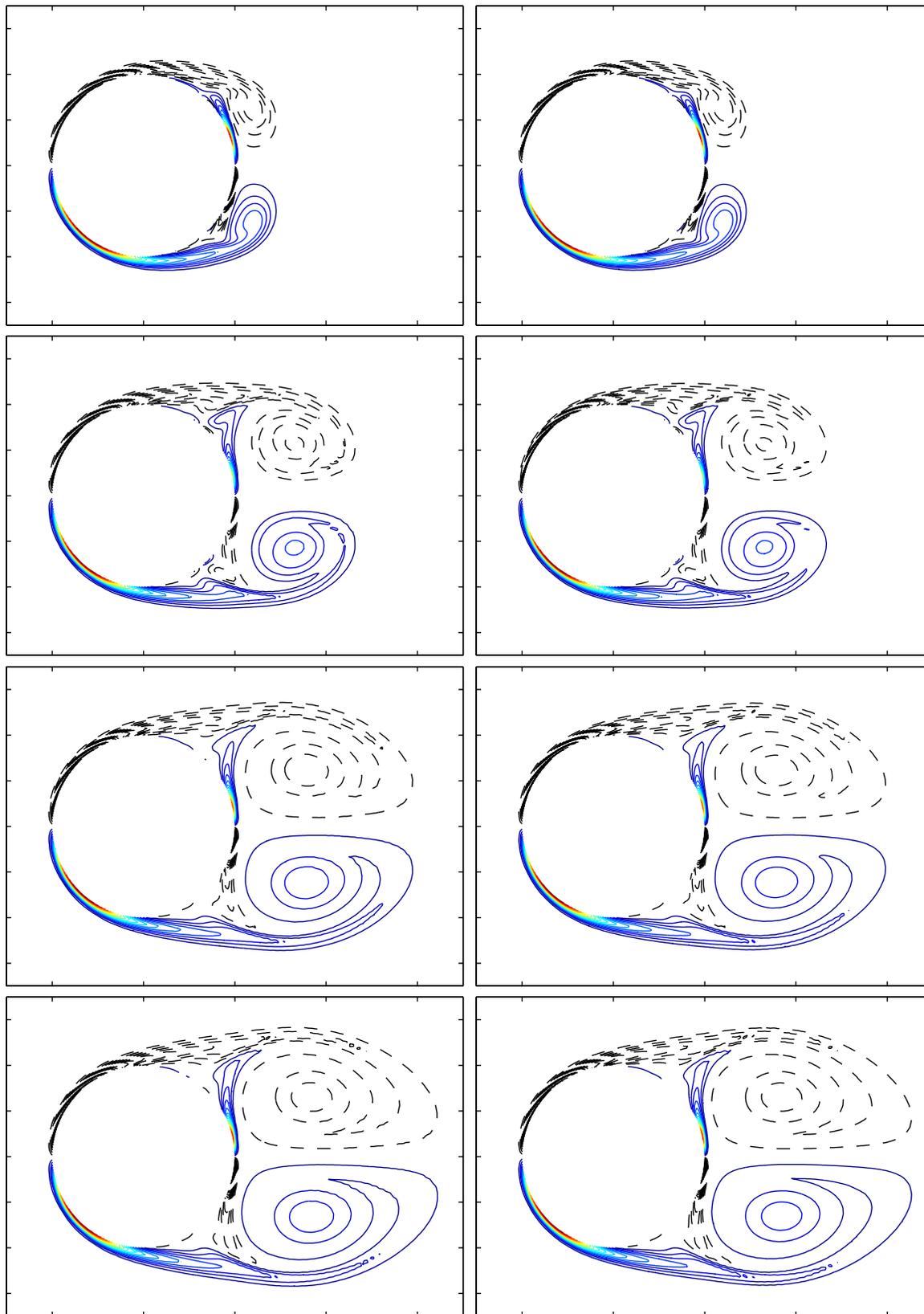


FIG. 5.12 – $Re = 1000$. Isovaleurs de la vorticité. De haut en bas $T = \{2.4, 4, 8, 7.2, 8.4\}$; $\Delta t = 0.006$. A gauche méthode **mdcuw**, à droite méthode **mdf**.

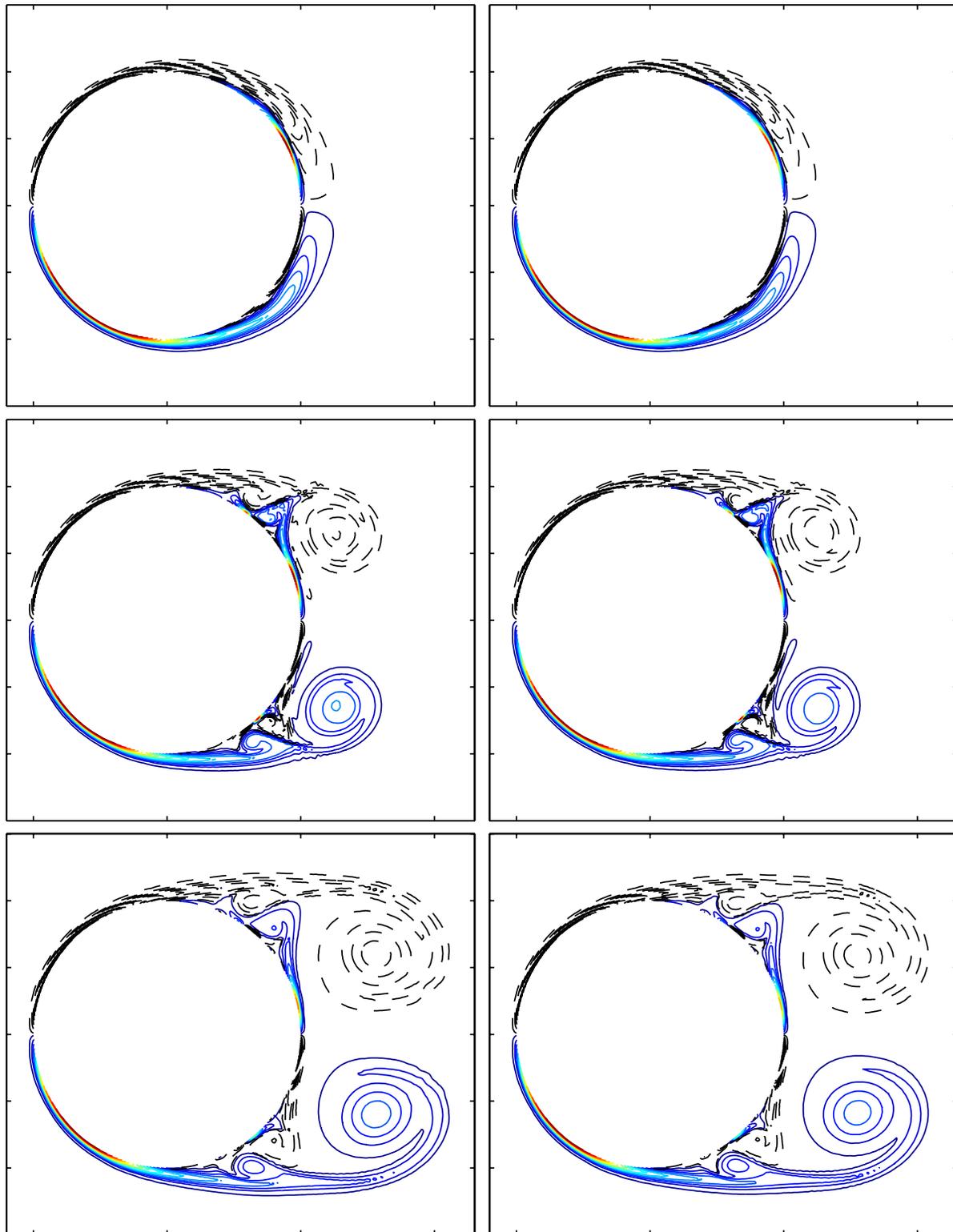


FIG. 5.13 – $Re = 3000$. Isovaleurs de la vorticité. De haut en bas $T = \{1.6, 3.2, 4.8\}$. A gauche méthode *mdcuw*, à droite méthode *mdf*.

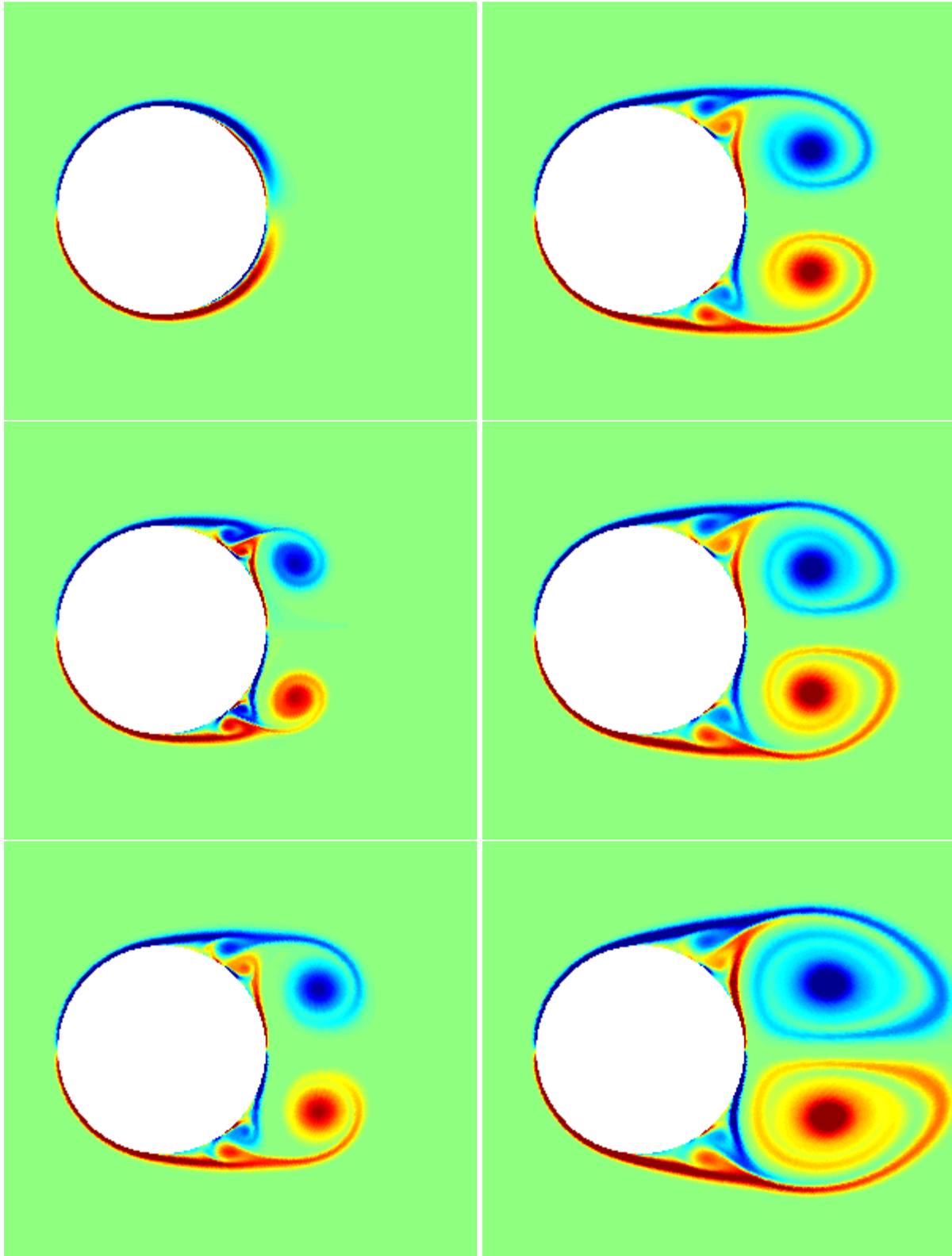


FIG. 5.14 – $Re = 3000$; Méthode de décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange; Vorticité; De haut en bas et de gauche à droite $T = \{1, 2, \dots, 8.4\}$

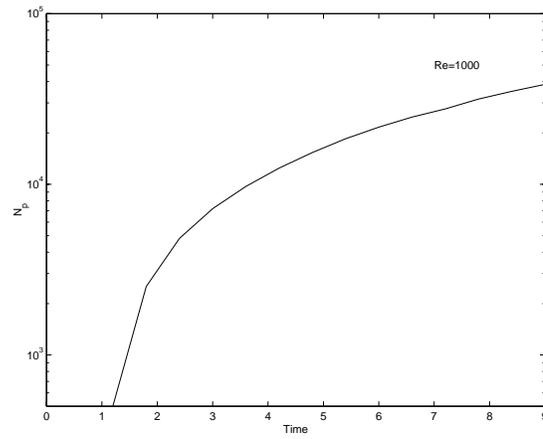


FIG. 5.15 – $Re = 1000$. Evolution du nombre de particules.

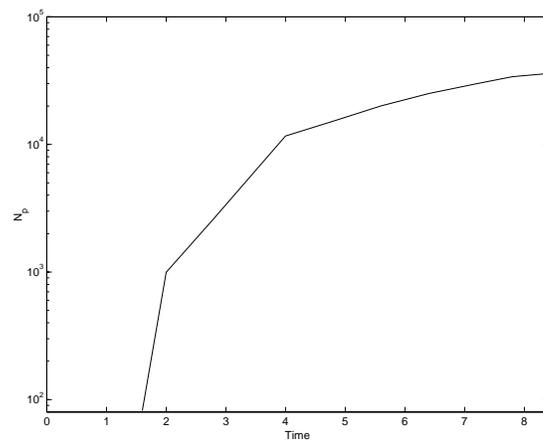


FIG. 5.16 – $Re = 3000$. Evolution du nombre de particules.

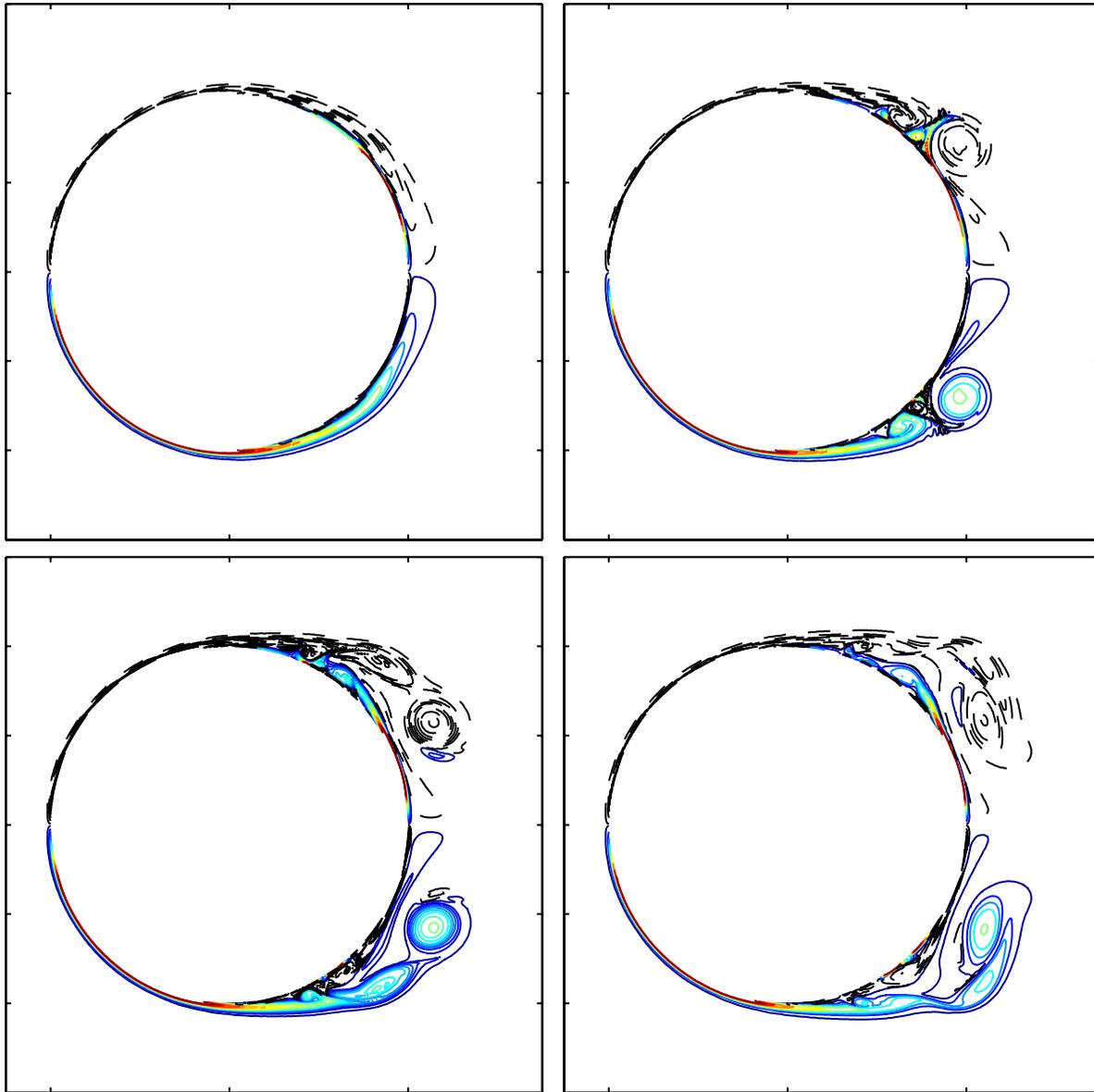


FIG. 5.17 - $Re = 9500$; Méthode de décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange; Vorticité; De haut en bas et de gauche à droite $T = \{1.5, 2.4, 3, , 3.3\}$

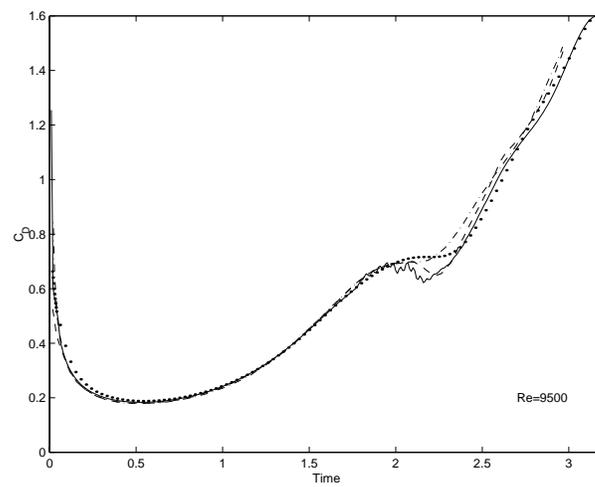


FIG. 5.18 – Coefficient de trainée. (—) : Koumoutsakos et Leonard, (---) : Anderson et Reider, (- · -) : Wu et al., (·) : calcul par méthode de couplage Euler/Lagrange.

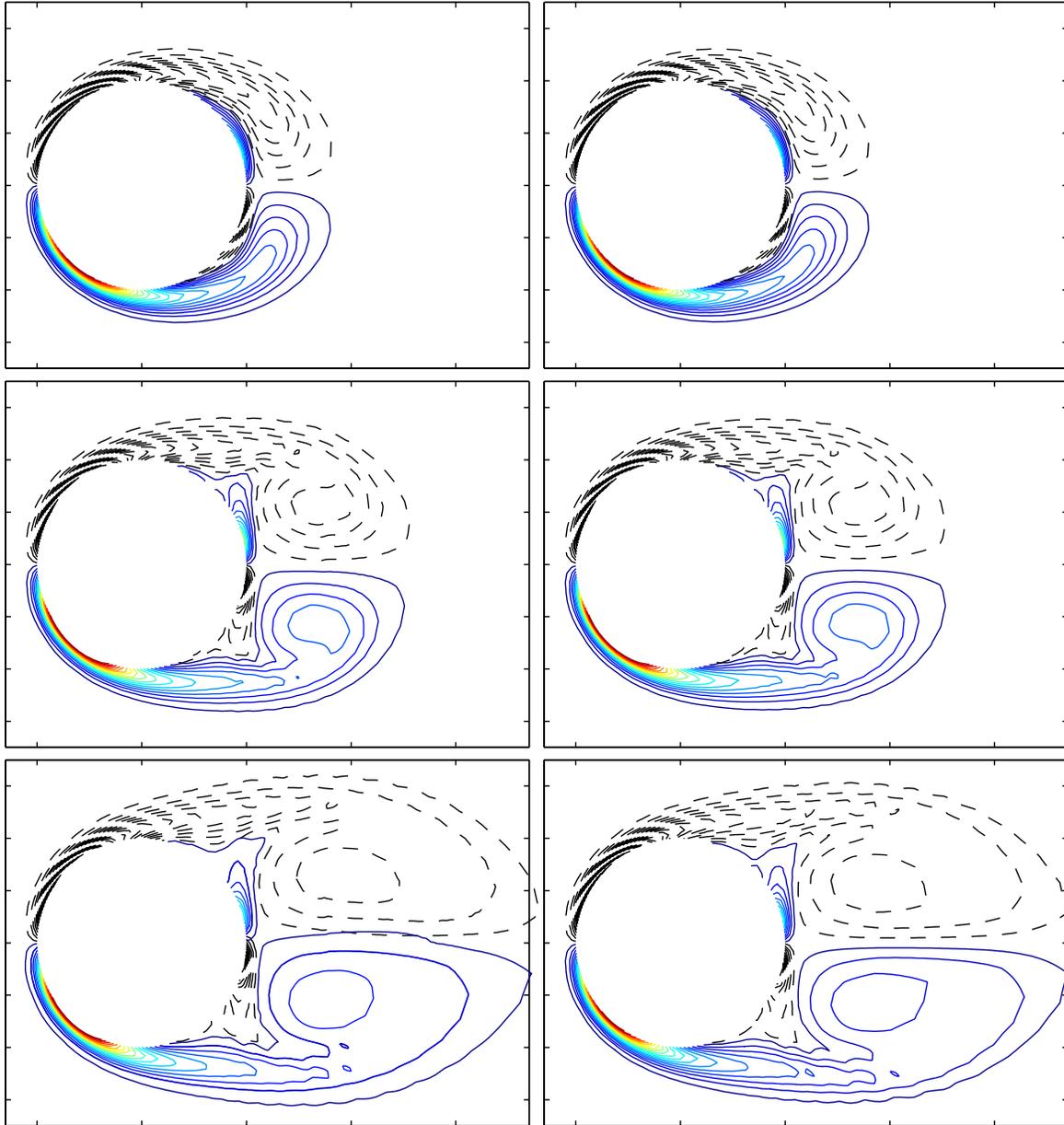


FIG. 5.19 - $Re = 300$. Isovaleurs de la vorticité. De haut en bas $T = \{2, 4, 7\}$. A gauche méthode **mdcup**, à droite méthode **mdf**.

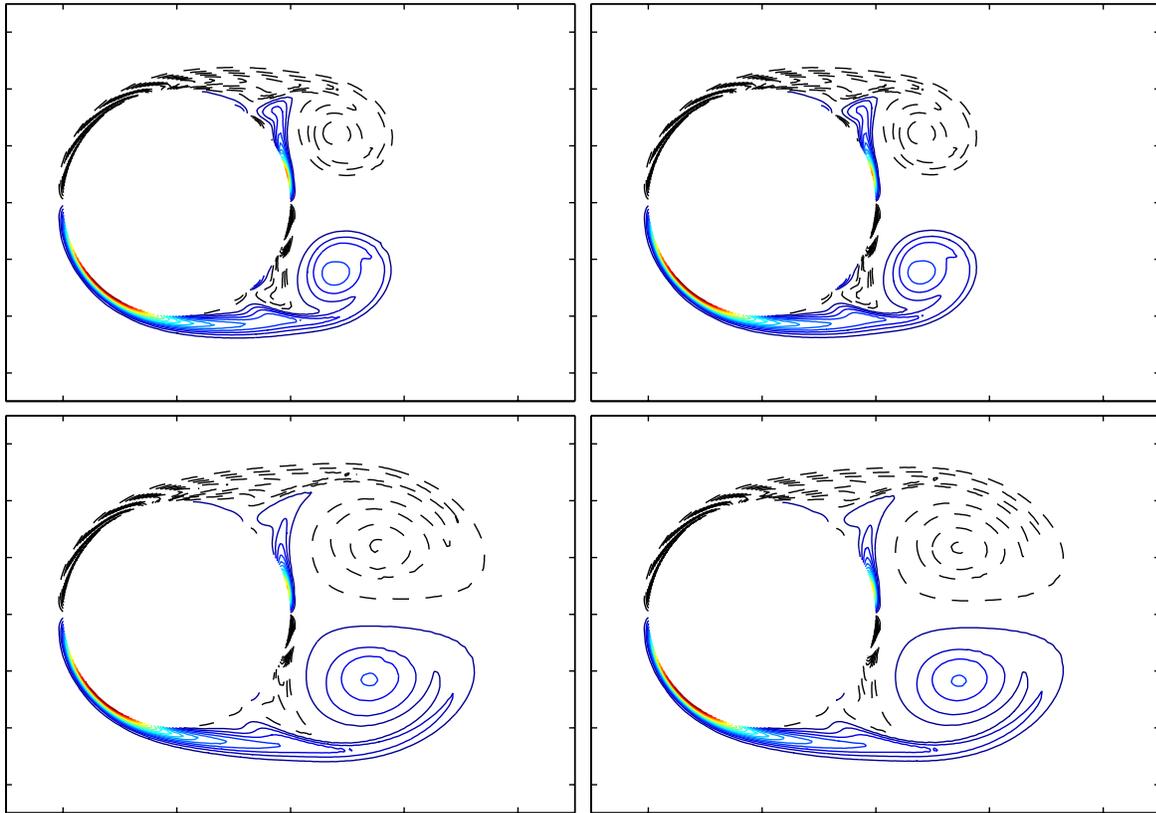


FIG. 5.20 – $Re = 1000$. Isovaleurs de la vorticité. De haut en bas $T = \{3.6, 6\}$. A gauche méthode **mdcup**, à droite méthode **mdcuw**.

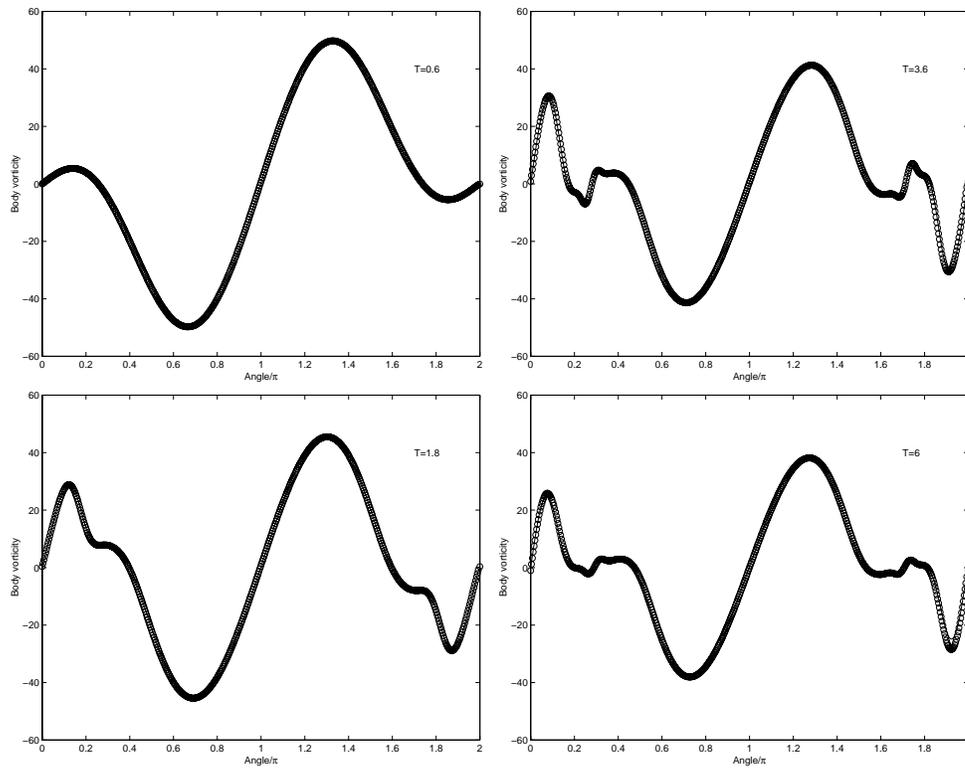


FIG. 5.21 – $Re = 1000$. Vorticité sur le bord du cylindre. (–) : mdcuw, (•) : mdcup.

5.3.3 Méthode de décomposition en sous-domaines en maillage transformé

La méthode de décomposition en sous-domaines vue dans les sections précédentes utilise une discrétisation uniforme dans le domaine de calcul. Dans le cas de simulation avec un nombre de Reynolds élevé, la vorticité reste, pour des intervalles de temps suffisamment grands, dans une zone proche du cylindre. Cette discrétisation reste alors raisonnable. Par contre, en simulation de sillage avec perturbation de l'écoulement, des tourbillons se détachent périodiquement et s'éloignent du cylindre. Le domaine de calcul devient alors très large et un recouvrement par des particules de taille uniforme rend les calculs très coûteux. Cependant, la zone où le gradient de la vorticité est important reste une petite couche autour du cylindre. Il est naturel dans ce genre de situation de faire recours à des maillages étirés. On arrive ainsi à garder une discrétisation fine autour du cylindre et une discrétisation grossière loin du cylindre là où les gradients de vorticité ne présentent pas de changements importants.

La réalisation de maillage étiré en discrétisation différences-finies est courante. On montre ici que la méthode de vortex et la méthode de décomposition en sous-domaines peuvent être aussi implémentées sur ce genre de maillage. Le cas pratique sur lequel on illustre l'implémentation en maillage non uniforme de la méthode de décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange, est le cas de simulation de sillage derrière un cylindre.

Le rayon du cylindre est a . Le maillage étiré est ici un maillage exponentiel autour du cylindre (Fig.5.22). Ce maillage est obtenu par la transformation du domaine polaire par la transformation F suivante :

$$F : (r, \theta) \rightarrow (\zeta, \eta) \\ (\zeta, \eta) = (\log(r/a), \theta)$$

La décomposition en sous-domaines est celle donnée par la figure Fig.5.4. Les noeuds du maillage sont distribués uniformément dans le maillage transformé. En domaine eulerien, les points de grille sont donnés dans les coordonnées (ζ, η) par :

$$(\zeta_i, \eta_j) = (i\delta\zeta, j\delta\eta)$$

Les particules sont aussi distribuées de façon uniforme. Elles occupent des volumes $\tilde{v}_p = \delta\zeta\delta\eta$.

En domaine physique, les noeuds de la grille sont donnés en coordonnées polaires par :

$$(r_i, \theta_j) = F^{-1}(\zeta_i, \eta_j) = (ae^{\zeta_i}, \eta_j)$$

Une particule définie au point (ζ_p, η_p) se trouve dans le domaine physique au point $(r_p, \theta_p) = F^{-1}(\zeta_p, \eta_p) = (ae^{\zeta_p}, \eta_p)$ et occupe un volume $v_p = r_p^2 \tilde{v}_p$. Dans le domaine extérieur les particules sont définies par leur position $\{x_p(t) = (r_p(t), \theta_p(t)), p \in \mathbb{J}\}$, leur vorticité $\{\omega_p(t), p \in \mathbb{J}\}$ et leur volume $\{v_p, p \in \mathbb{J}\}$. En coordonnées (ζ, η) les positions des particules sont notées $\{\tilde{x}_p(t) = (\zeta_p(t), \eta_p(t)), p \in \mathbb{J}\}$, leur vorticité $\{\tilde{\omega}_p(t), p \in \mathbb{J}\}$ et leur volume $\{\tilde{v}_p, p \in \mathbb{J}\}$. Le pas de discrétisation en temps est Δt .

Calcul en domaine eulerien

Les calculs dans le domaine eulerien Ω_1 sont faits par algorithmes différences-finies en formulation (vitesse-tourbillon) ou en formulation (vitesse-pression) du même type que ceux définis dans la section précédente. Les équations de Navier-Stokes sont d'abord écrites dans les coordonnées (ζ, η) , ensuite on remplace les opérateurs différentiels continus par opérateurs discrets.

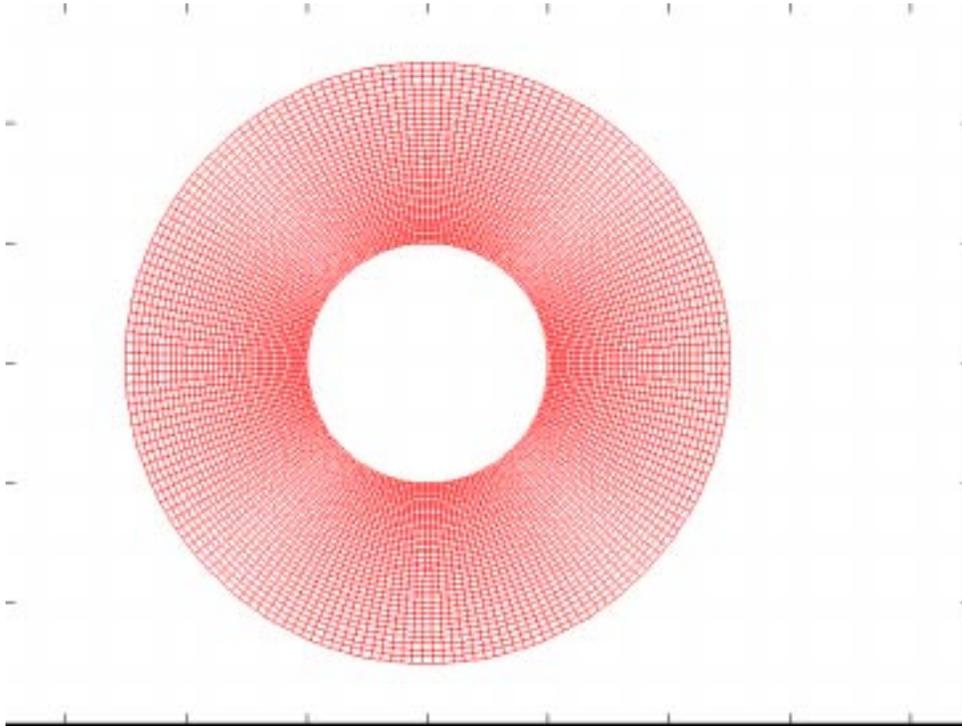


FIG. 5.22 – Maillage étiré autour du cylindre.

Calcul en domaine lagrangien

En domaine lagrangien, les particules en coordonnées (ζ, η) ont des volumes uniformes. On peut alors faire le remaillage et le calcul de la diffusion dans ces coordonnées par les mêmes algorithmes que dans la section précédente. La convection des particules est faite en coordonnées physiques. Le calcul des vitesses par les lois de Biot-Savart se réalise par l'estimation des intégrales sur les particules en domaine transformé par changement de variables. Cependant, le paramètre de régularisation du Cut-off k_ϵ doit être choisi de taille variable afin de conserver la propriété de recouvrement. On le prend ici proportionnel au rayon d'emplacement des particules.

Les algorithmes itératifs de calcul (vitesse-fonction courant) et (vitesse-pression) restent identiques à ceux utilisés dans la méthode de décomposition en variables uniformes moyennant un changement de variables.

Les détails de chacune des étapes de calcul en domaine particulaire sont présentés dans les paragraphes ci-dessous.

Formules de quadrature en domaine lagrangien

Initialement, la distribution de particules est assumée uniforme en domaine transformé. Les particules ont des volumes identiques $\{\tilde{v}_p = \Delta h_\zeta \Delta h_\eta, p \in \mathbb{J}\}$. Comme l'écoulement est incompressible, ces volumes ne changent pas. La formule de quadrature sur les particules est définie

dans les coordonnées (ζ, η) par :

$$\int_{\Omega_2} f(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = \sum_{p \in \mathbb{J}} \tilde{f}_p \tilde{v}_p \quad (5.26)$$

où f est une fonction définie sur Ω_2 et $\tilde{f}_p = \tilde{f}(\tilde{x}_p) = f(x_p)$.

De cette formule, on peut déduire la formule de quadrature en domaine physique :

$$\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega_2} f(\zeta, \theta) a^2 e^{2\zeta} d\zeta d\theta = \sum_{p \in \mathbb{J}} \tilde{f}_p \tilde{v}_p a^2 e^{2\zeta} = \sum_{p \in \mathbb{J}} f_p v_p \quad (5.27)$$

avec :

$$\begin{aligned} f_p &= f(x_p) \\ v_p &= \|x\|^2 \tilde{v}_p \\ \tilde{f}_p &= f(F^{-1}(\tilde{x}_p)) \end{aligned}$$

Calcul des vitesses en maillage étiré

On a vu que le calcul des vitesses sur les particules se fait à partir des valeurs de la fonction courant et sa dérivée normale sur le bord Γ_2 et de la vorticité par les formules (5.15-5.17).

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) \quad (5.28)$$

où

$$u_1(x) = \int_{\Gamma_2} k(x - x') \nabla \psi(x') \cdot n(x') d\sigma(x') - \int_{\Gamma_2} \psi(x') \nabla k(x - x') \cdot n(x') d\sigma(x') \quad (5.29)$$

et

$$u_2(x) = \int_{\Omega_2} \omega(x') (k * \zeta_\epsilon)(x - x') dx' \quad (5.30)$$

La formule 5.29 est discrétisée par la méthode de trapèzes en divisant le bord Γ_2 en n segments. La formule 5.30 est discrétisée suivant la formule de quadrature 5.27. On obtient alors :

$$u_2(x) = \sum_{p \in \mathbb{J}} \omega(x_p) k_\epsilon(x - x_p) v_p$$

avec

$$k_\epsilon = k * \zeta_\epsilon$$

Comme on l'a vu au chapitre 1, en utilisant le noyau de régularisation d'ordre quatre ζ_4 , on obtient :

$$k_\epsilon(x_1, x_2) = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 + 3\epsilon^2(x_1^2 + x_2^2) + 4\epsilon^4}{2\pi((x_1^2 + x_2^2) + \epsilon^2)^3} (-x_2, x_1)$$

Le paramètre de régularisation ϵ doit être choisi de façon à vérifier la propriété de recouvrement. En maillage physique, la taille de la distance entre les particules grandit proportionnellement au rayon $r_p = x_p$. Une manière simple de satisfaire la condition de recouvrement est de choisir le paramètre ϵ variable :

$$\epsilon(r) = \epsilon_0 r$$

où ϵ_0 est une constante fixée. On trouve la formule discrète du calcul de u_2 respectant la condition de recouvrement :

$$u_2(x_1, x_2) = \sum_{p \in \mathbb{J}} \omega(x_{p1}, x_{p2}) v_p \frac{1 + 3\epsilon_0^2 + 4\epsilon_0^4}{2\pi \|x - x_p\|^2 (1 + \epsilon_0^2)^3} (-x_2, x_1)$$

Calcul de la diffusion

L'opérateur de diffusion peut être estimé en coordonnées transformées. Les circulations sont données par :

$$\Gamma_p = v_p \omega_p$$

ou dans le maillage transformé :

$$\tilde{\Gamma}_p = \tilde{v}_p \tilde{\omega}_p$$

On a :

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_p &= v_p \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \omega(x_p) \\ &= \frac{1}{r_p^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \tilde{\omega}(\tilde{x}_p) \end{aligned}$$

Dans les coordonnées (ζ, θ) , la distribution de particules est uniforme. On peut alors estimer l'opérateur $(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2})$ par la méthode P.S.E. avec le procédé vu au chapitre 1.

Simulation de sillages derrière un cylindre

La méthode de décomposition en sous-domaines de type Euler/Lagrange avec maillage exponentiel (**mdcexp**) constitue un moyen efficace de simulation de sillages derrière un obstacle. Car, dans les écoulements de sillages, les petites échelles de vorticité restent dans une petite zone proche des parois, par contre, des grandes échelles de tourbillon se détachent et évoluent loin de l'obstacle. La simulation de ce genre de phénomène en maillage uniforme est très coûteuse. Par contre, en maillage exponentiel, on arrive à suivre les écoulements de sillages pour de très grands temps avec un nombre d'éléments de calcul très faible.

Deux simulations de sillages derrière un cylindre sont présentées ici. La première est avec un nombre de Reynolds $Re = 150$ et la seconde avec un nombre de Reynolds $Re = 300$. Le phénomène de sillage est retrouvé derrière un cylindre en rajoutant une perturbation représentant les conditions réelles physiques qui déstabilisent la symétrie du cylindre.

Initialement, on fait subir au cylindre des oscillations de vitesse angulaire Ω dans un sens et puis dans l'autre pendant une brève période T_{os} . Les notations numériques sont les mêmes que celles vues précédemment. Les paramètres de ces deux simulations sont donnés dans Tab.5.3. La description du comportement de l'écoulement est décrite graphiquement par (Fig.5.24- Fig.5.30). On remarque surtout le faible nombre de points de discrétisation nécessaire à ces simulations (Fig.5.23). Le nombre de particules pour la première simulation est de $N_p = 7432$ à

$T = 114$ et de $N_p = 11836$ à $T = 96$ pour la seconde. Le calcul de la période T_d de détachement du tourbillon derrière le cylindre nous donne une période de $T_d = 5.4545$ pour un nombre de Reynolds $Re = 150$ et de $T_d = 4.7916$ pour un nombre de Reynolds $Re = 300$. On peut en déduire que la fréquence universelle de détachement du tourbillon S (nombre de Strouhal) est de $S = 0.183$ pour un nombre de Reynolds de $Re = 150$ et de $S = 0.208$ pour un nombre de Reynolds de $Re = 300$. Ces résultats sont conformes pour un nombre de Reynolds de $Re = 150$ avec ceux obtenus expérimentalement par Williamson[86] qui présente une étude de sillage à nombre de Reynolds vérifiant ($Re < 200$).

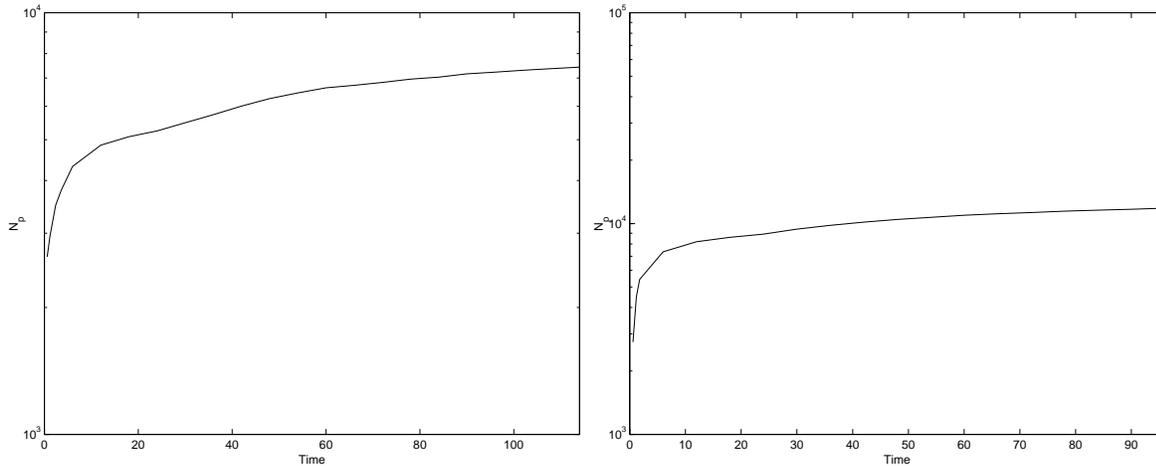


FIG. 5.23 – Evolution du nombre de particules; à droite : $Re = 150$ et à gauche : $Re = 300$.

Re	150	300
b	6	6
c	3	3
(m, n)	(50,174)	(70,244)
T_{os}	0.6	0.6
Ω	1	1
δt	0.006	0.006

TAB. 5.3 – Simulations de sillages

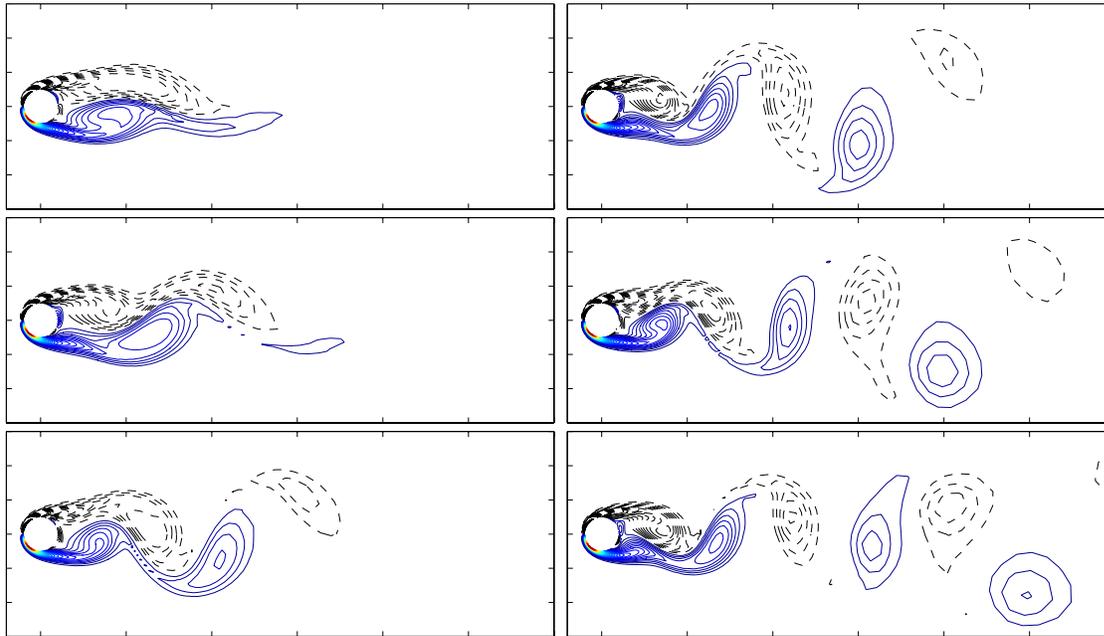


FIG. 5.24 – Isovaleurs de la vorticité derrière le cylindre à $Re = 150$; De haut en bas et de gauche à droite $T = \{24, 30, 36, 42, 48, 54\}$

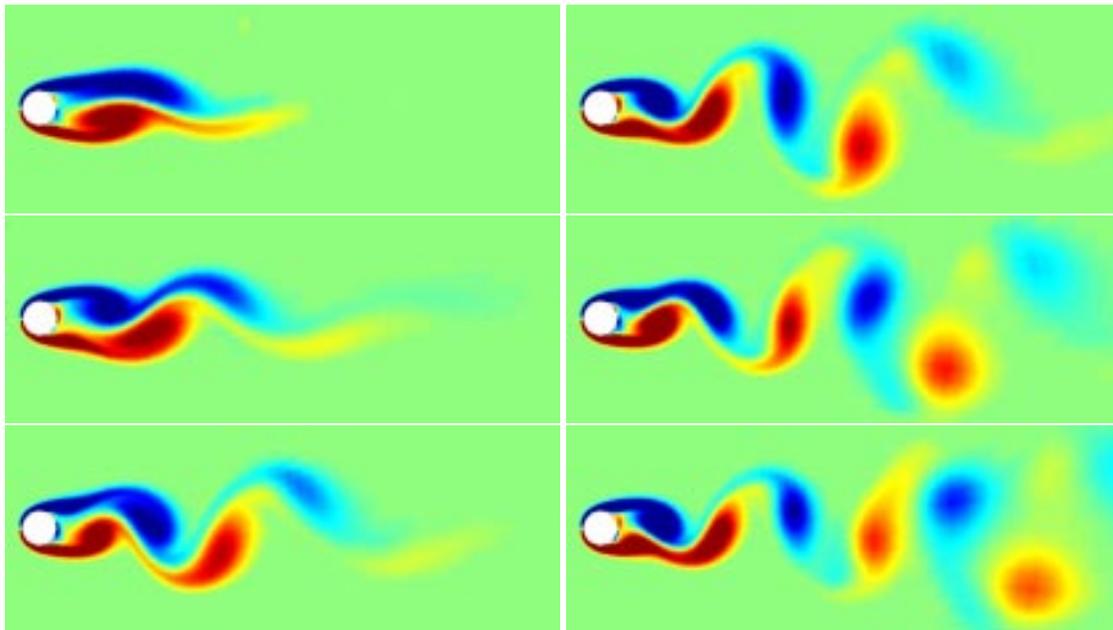


FIG. 5.25 - *Sillage derrière le cylindre à $Re = 150$; De haut en bas et de gauche à droite $T = \{24, 30, 36, 42, 48, 54\}$*

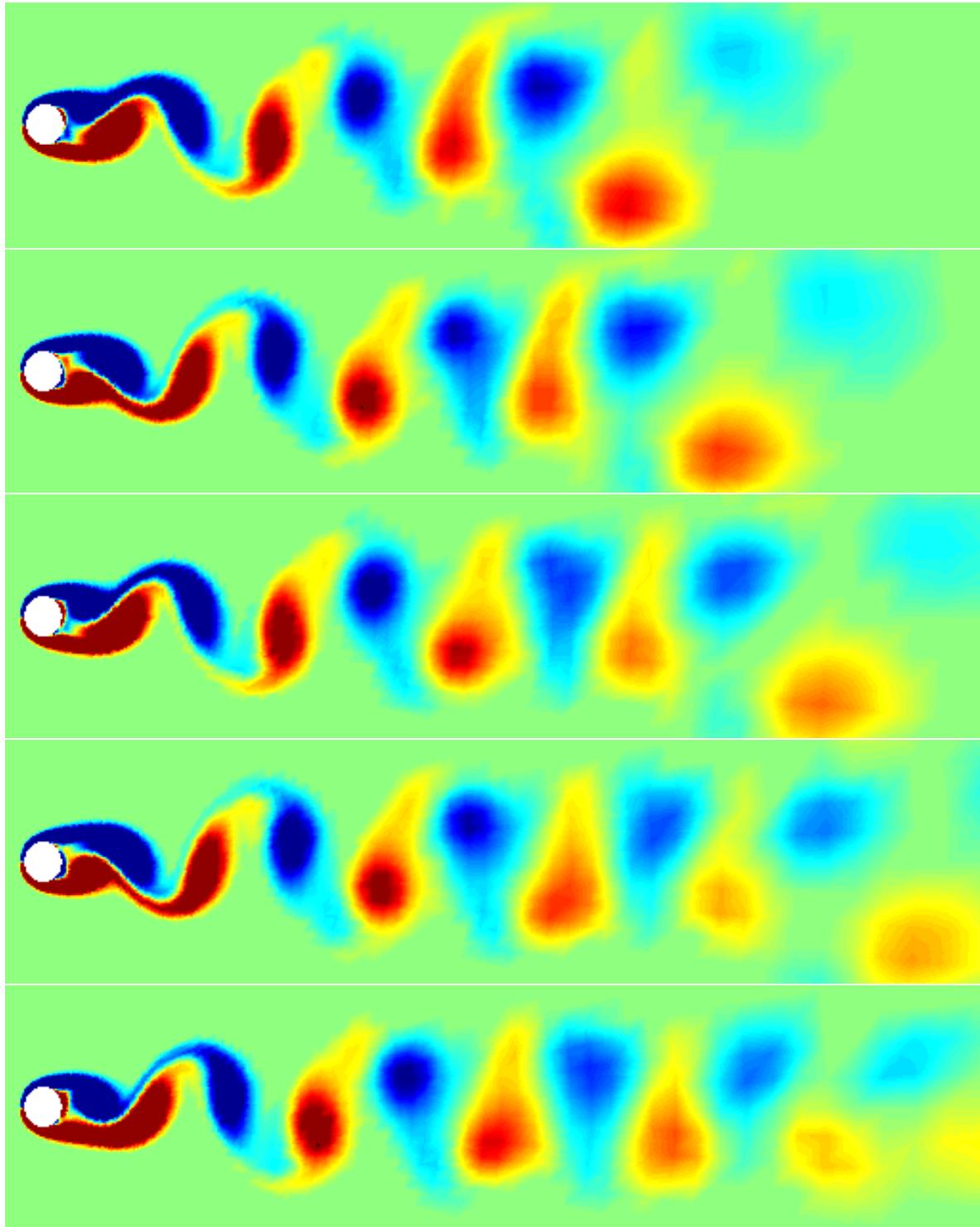


FIG. 5.26 – Sillage derrière le cylindre à $Re = 150$; De haut en bas et de gauche à droite $T = \{60, 66, 72, 78, 84\}$

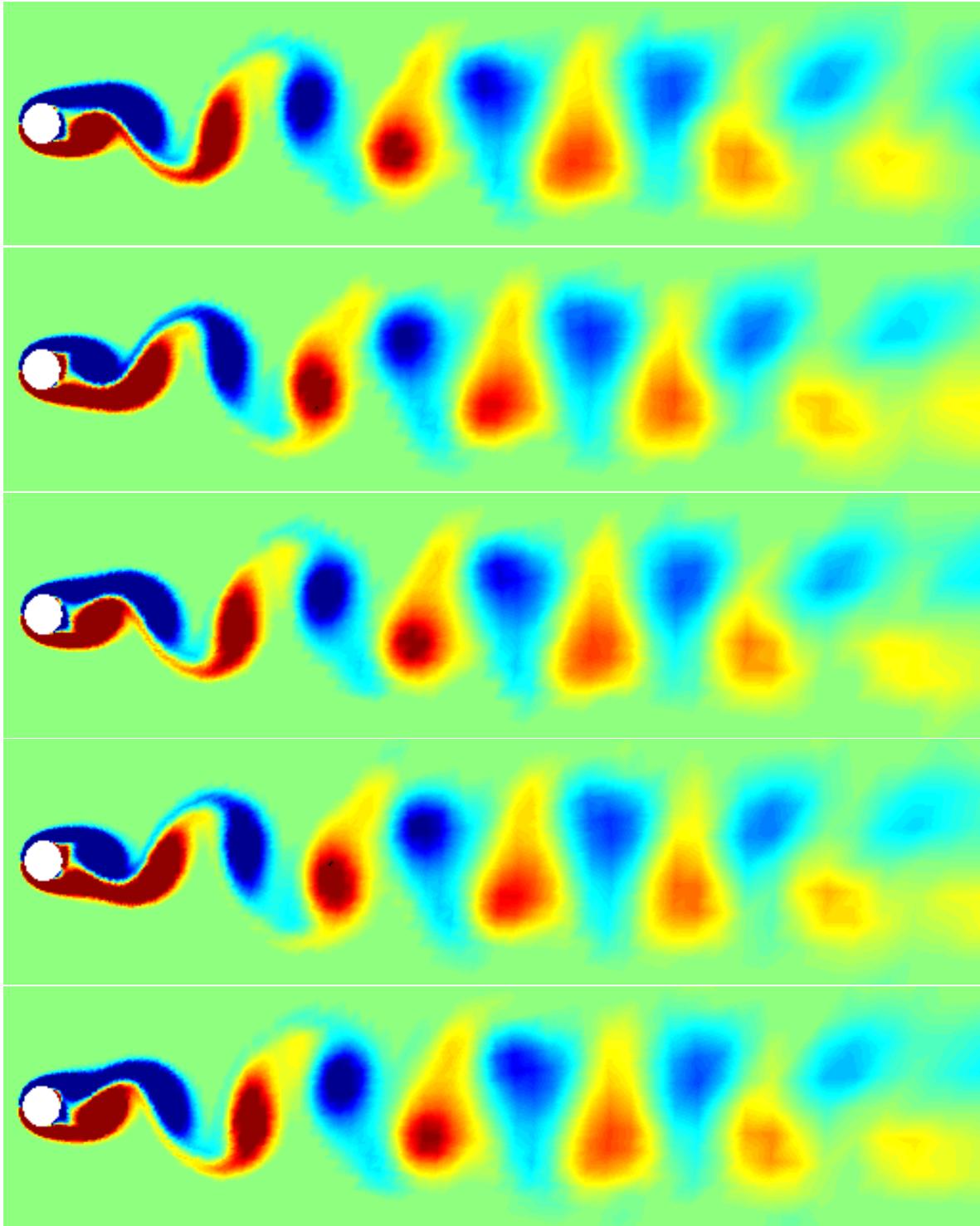


FIG. 5.27 - *Sillage derrière le cylindre à $Re = 150$; De haut en bas et de gauche à droite $T = \{90, 96, 102, 108, 114\}$*

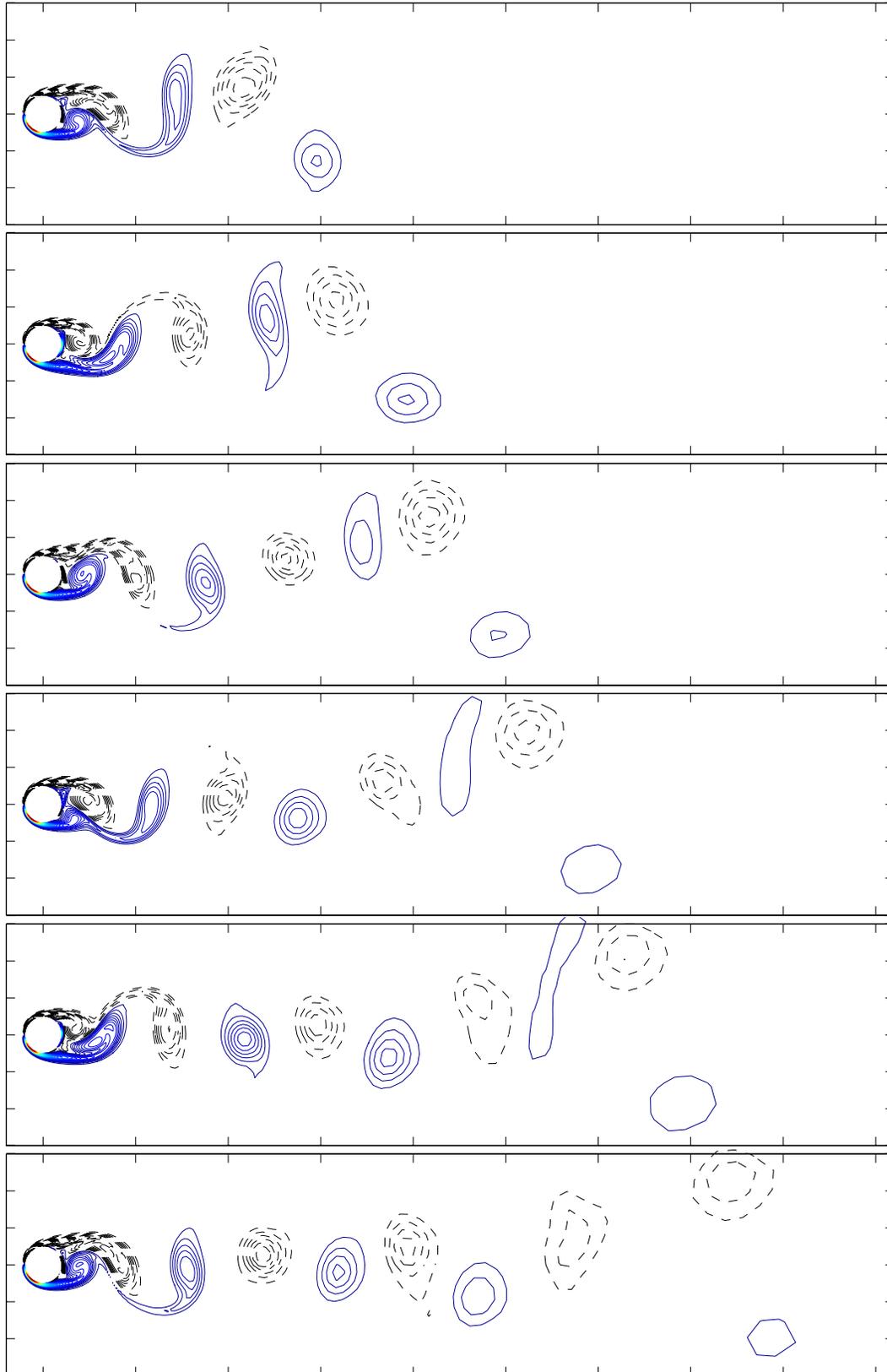


FIG. 5.28 – Isovaleurs de la vorticité derrière le cylindre à $Re = 300$; De haut en bas et de gauche à droite $T = \{24, 30, 36, 42, 48, 54\}$

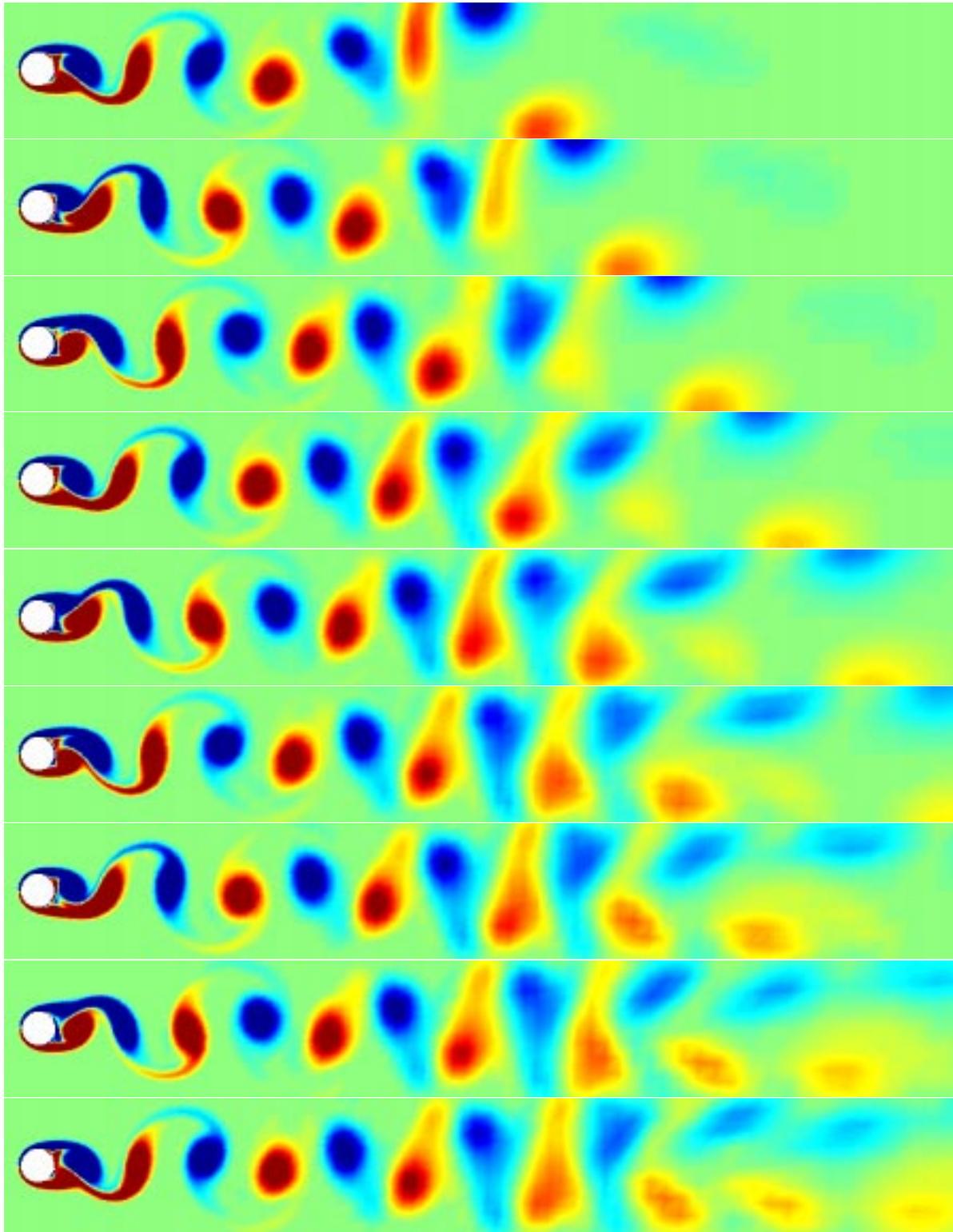


FIG. 5.29 – *Sillage derrière le cylindre à $Re = 300$; De haut en bas et de gauche à droite $T = \{48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$*

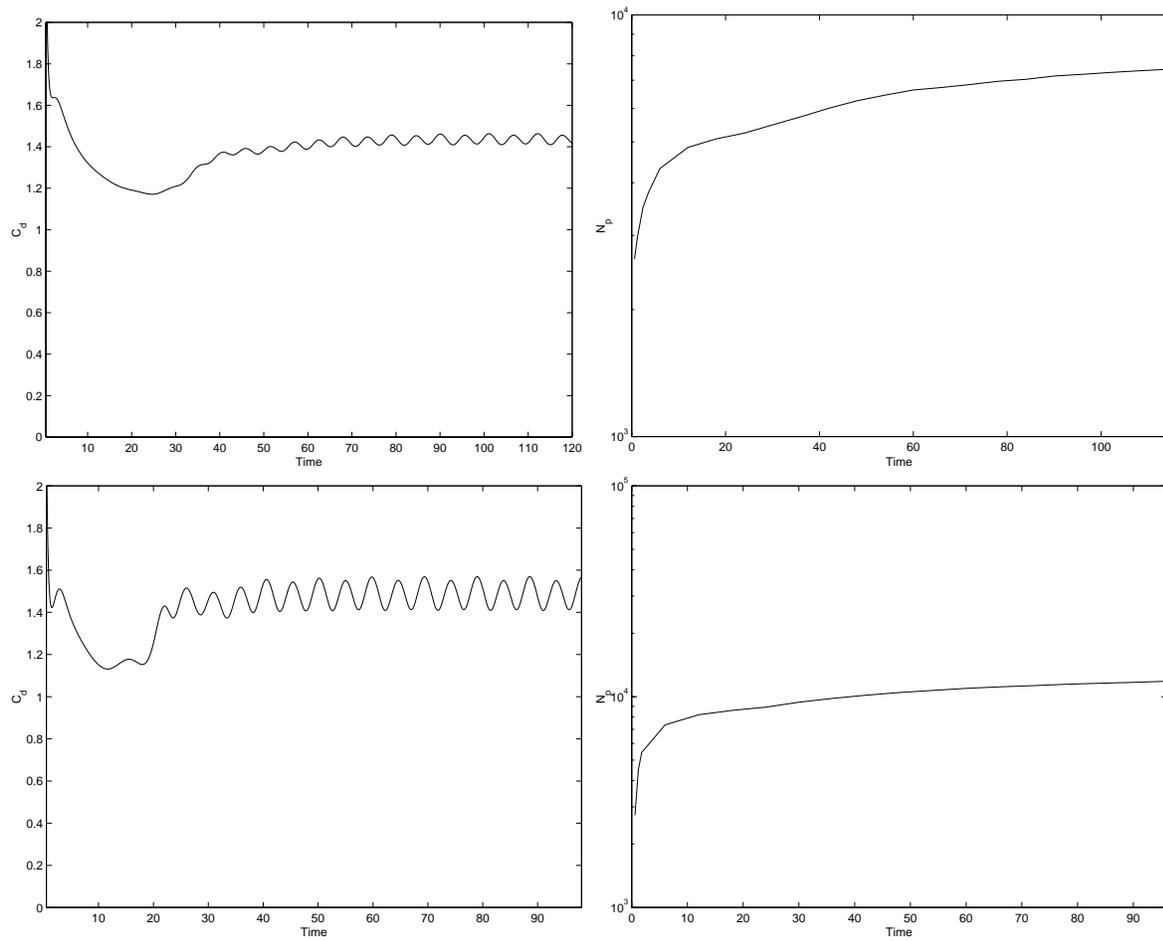


FIG. 5.30 – A gauche : coefficient de trainé; à droite évolution du nombre de particules; En haut : $Re = 150$; En bas $Re = 300$.

5.3.4 Méthode de décomposition en sous-domaines en domaine intérieur

La méthode de décomposition en sous-domaines constitue aussi un moyen efficace de traitement des écoulements en domaine intérieur. Dans cette section, cette méthode est appliquée au cas d'écoulement dans une conduite et sur une marche en forme d'escalier. Ce genre d'écoulement a été déjà traité par schéma différences-finies compact du quatrième ordre au chapitre 2. Les comparaisons des calculs faites par ce schéma et par la méthode de décomposition Euler/Lagrange prouvent la précision de cette dernière méthode (Fig.5.33-Fig.5.44). Les comparaisons sont faites sur deux simulations. La première représente une simulation d'écoulement dans une conduite avec un nombre de Reynolds $Re = 355$ et la seconde représente une simulation d'écoulement sur une marche avec $Re = 900$.

La taille de discrétisation en domaine eulerien est choisie égale à la taille utilisée en simulation purement eulerienne (chapitre 2). L'évolution du nombre de particules est montrée par les courbes (Fig.5.45, Fig.5.46). Contrairement à l'exemple d'écoulement derrière un cylindre, on ne réalise pas de gain mémoire pour ce genre d'écoulement car la vorticité occupe tout le domaine de calcul. On a alors en méthode de décomposition Euler/Lagrange un nombre de point de discrétisation équivalent à celui utilisé en méthode purement eulerienne.

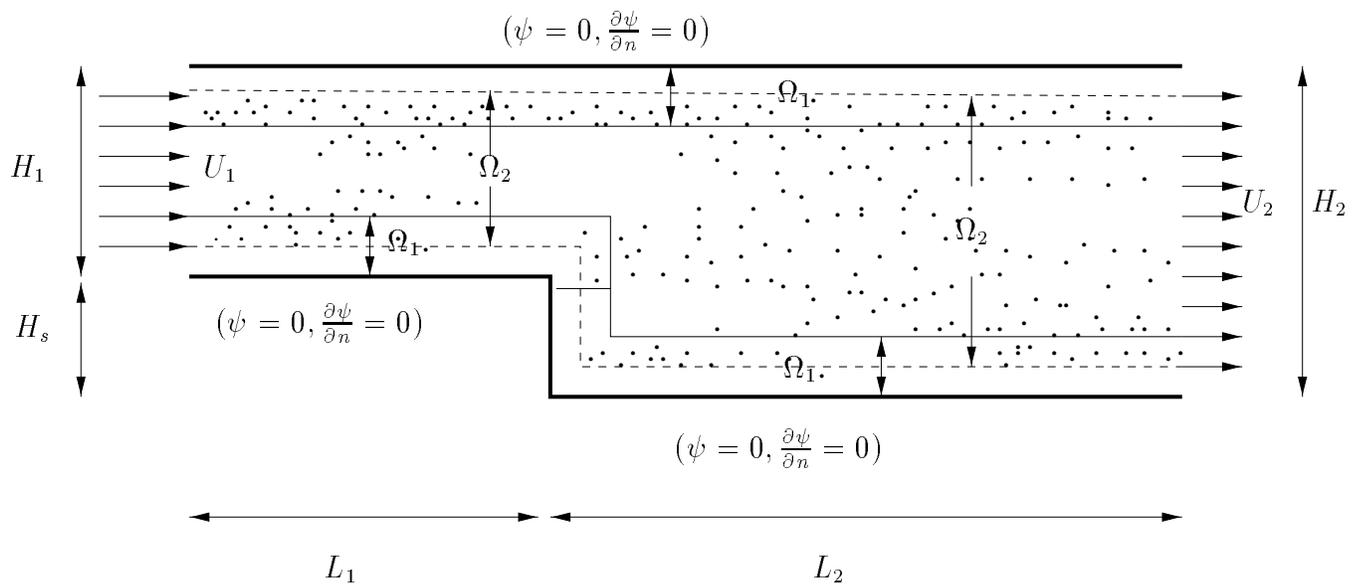


FIG. 5.31 – Conditions limites et décomposition en sous-domaines pour un écoulement dans une conduite

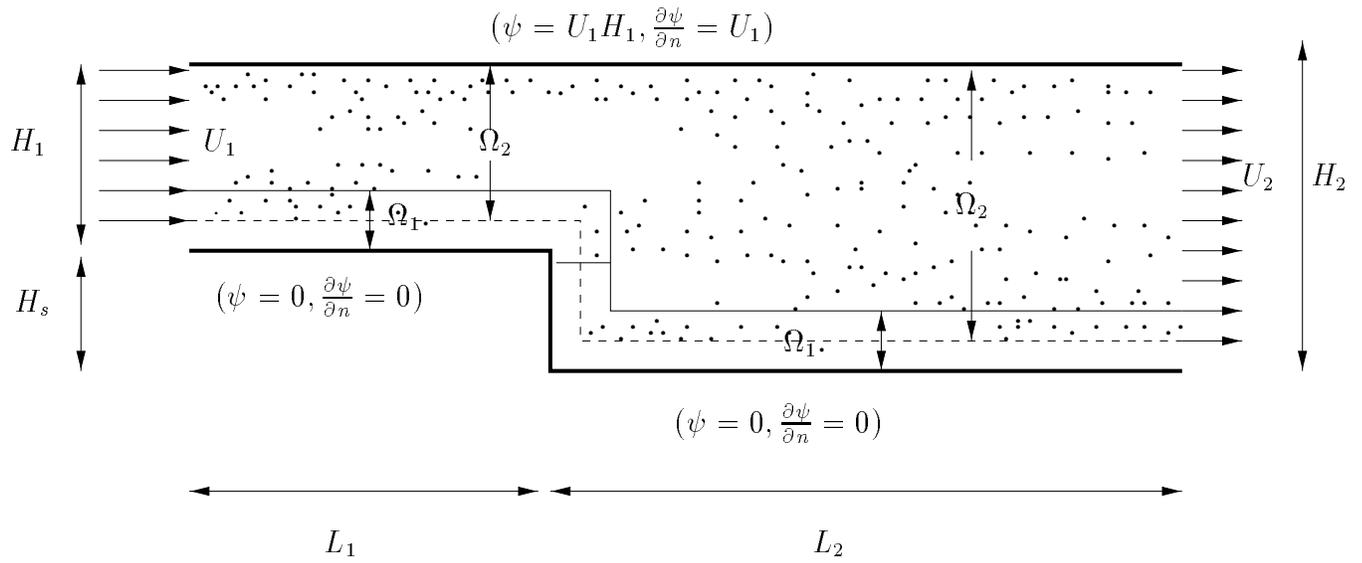


FIG. 5.32 – Conditions limites et décomposition en sous-domaines pour un écoulement sur une marche

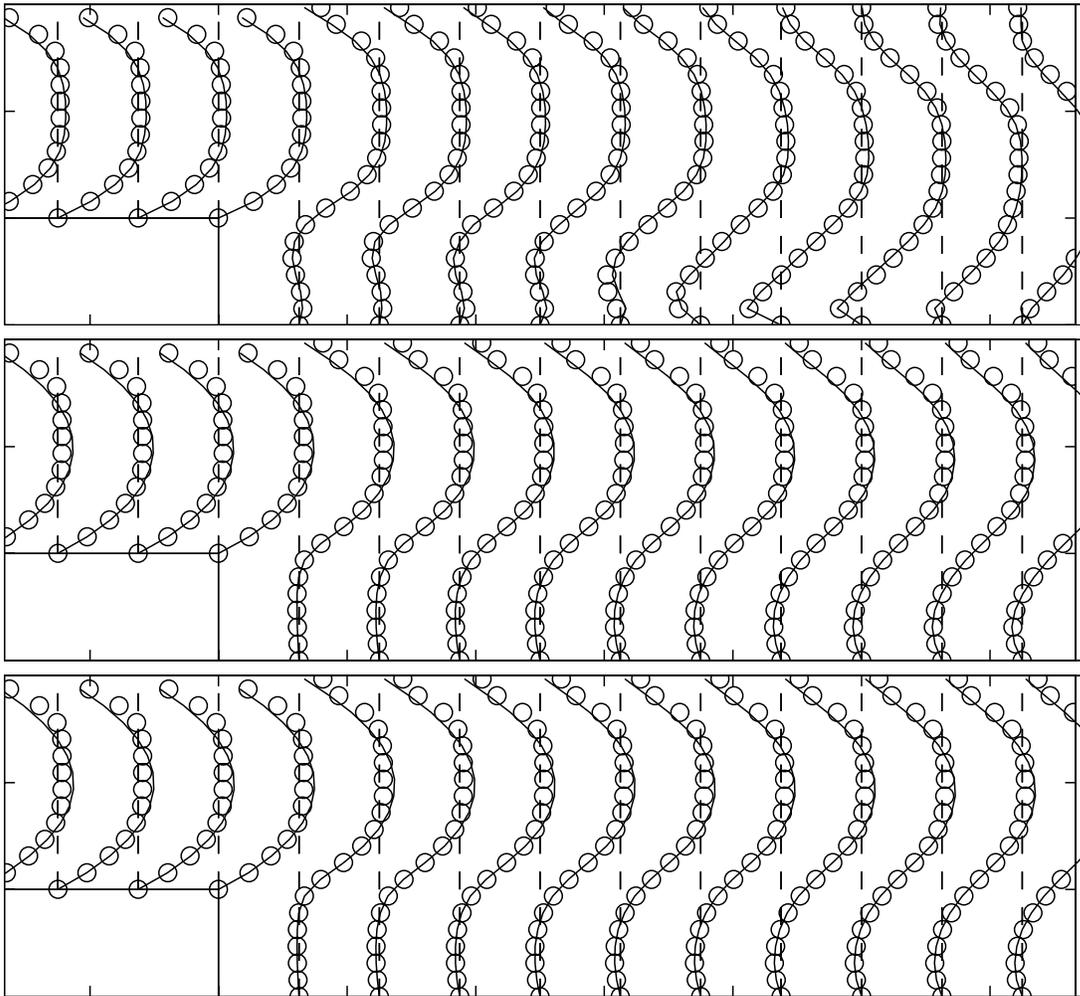


FIG. 5.33 – $Re = 355$. Composante horizontale de la vitesse: (–) : calcul différences-finies, (o) : calcul par décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange. De haut en bas, $T \in \{48, 128, 288\}$

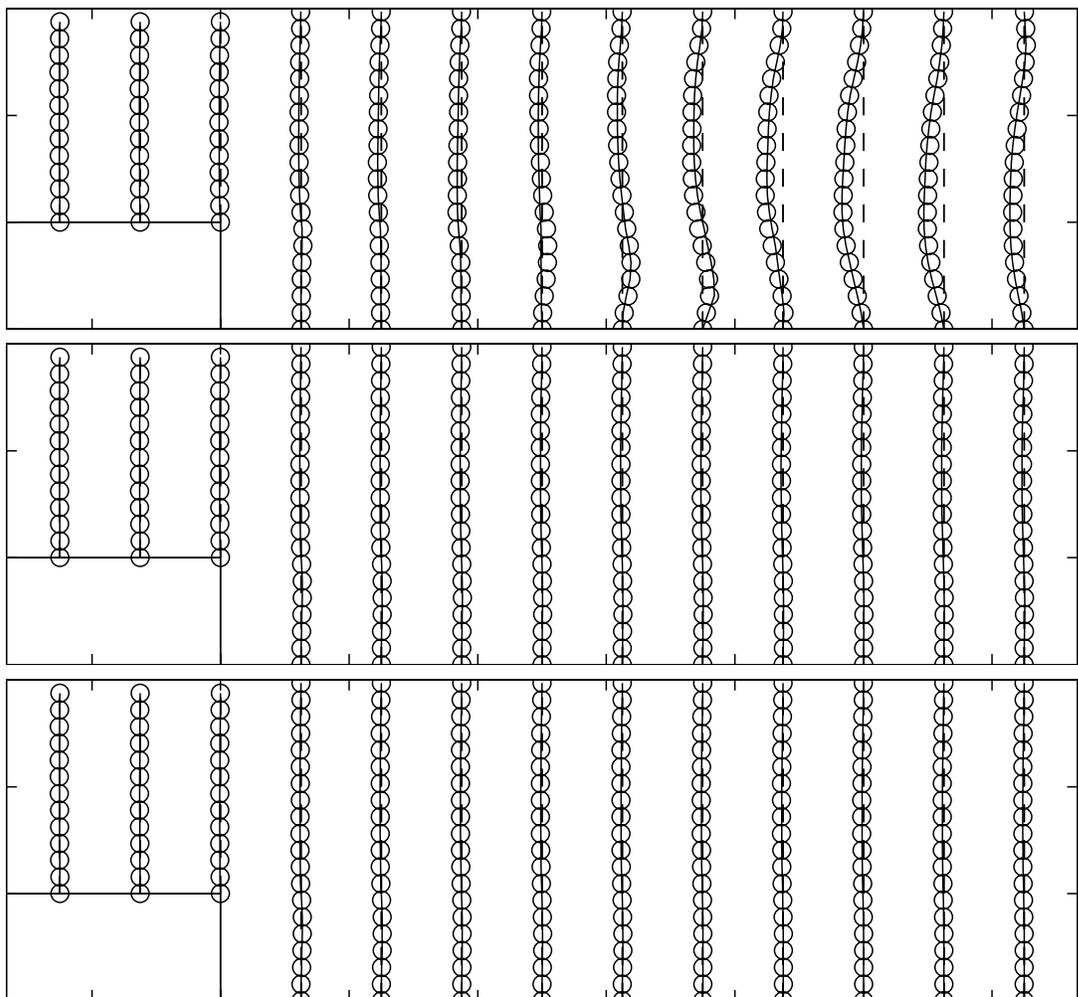


FIG. 5.34 – $Re = 355$. Composante verticale de la vitesse: (–) : calcul différences-finies, (o) : calcul par décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange. De haut en bas, $T \in \{48, 128, 288\}$

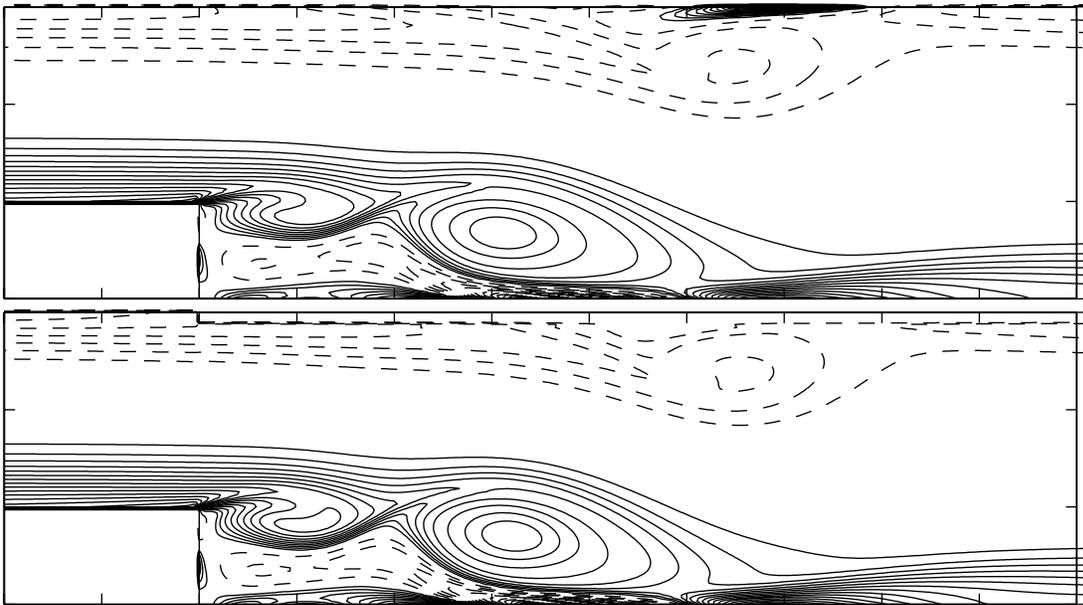


FIG. 5.35 – $Re = 355$. Vorticité. En haut : calcul différences-finies, en bas : calcul par décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange. $T = 32$

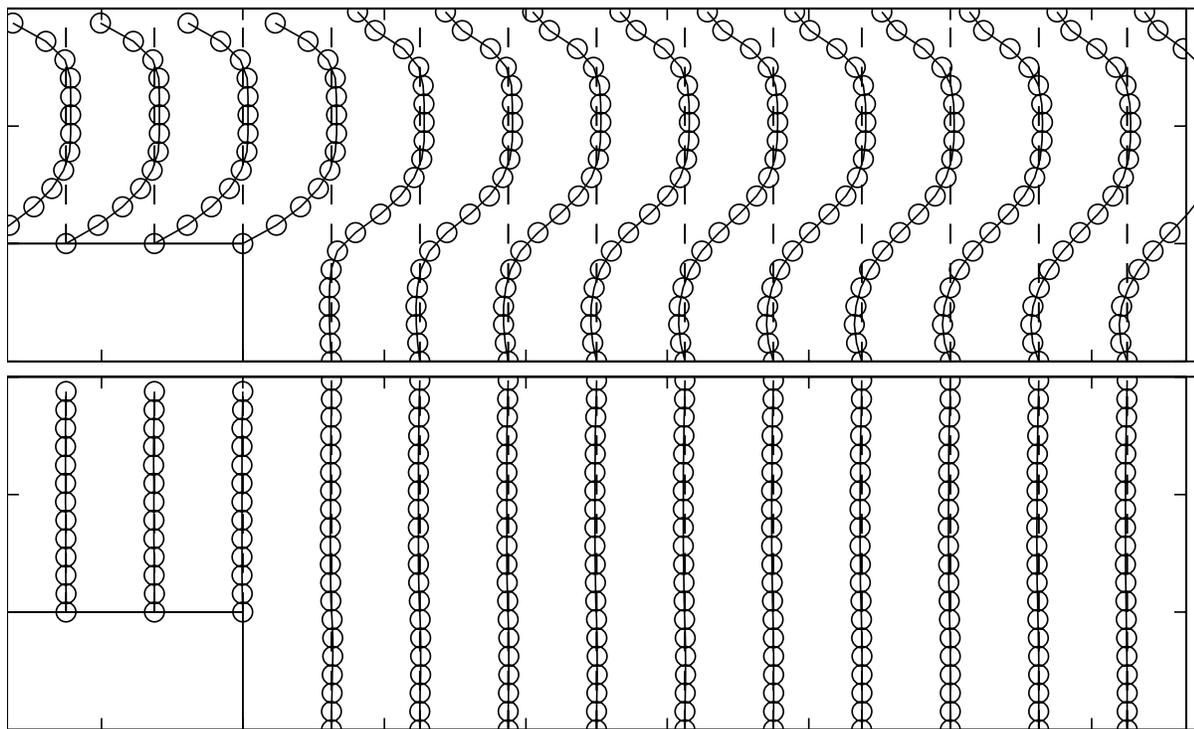


FIG. 5.36 – $Re = 355$. Les vitesses moyennes. En haut composante horizontale et en bas composante verticale; (o) : $T = 200$, (•) : $T = 300$.

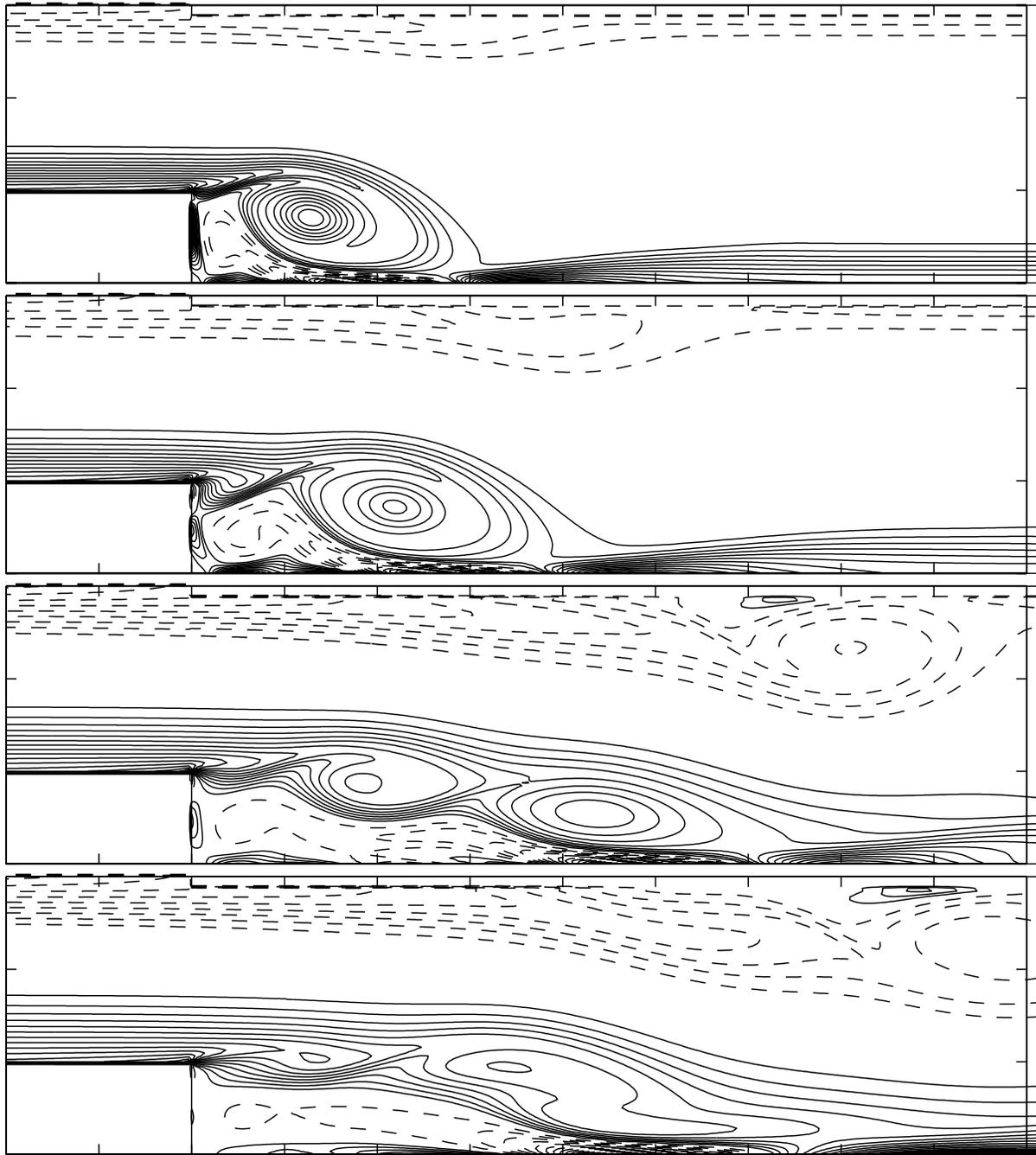


FIG. 5.37 - $Re = 355$. Vorticité. Calcul par décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange. De haut en bas $T = \{16, 24, 40, 48\}$

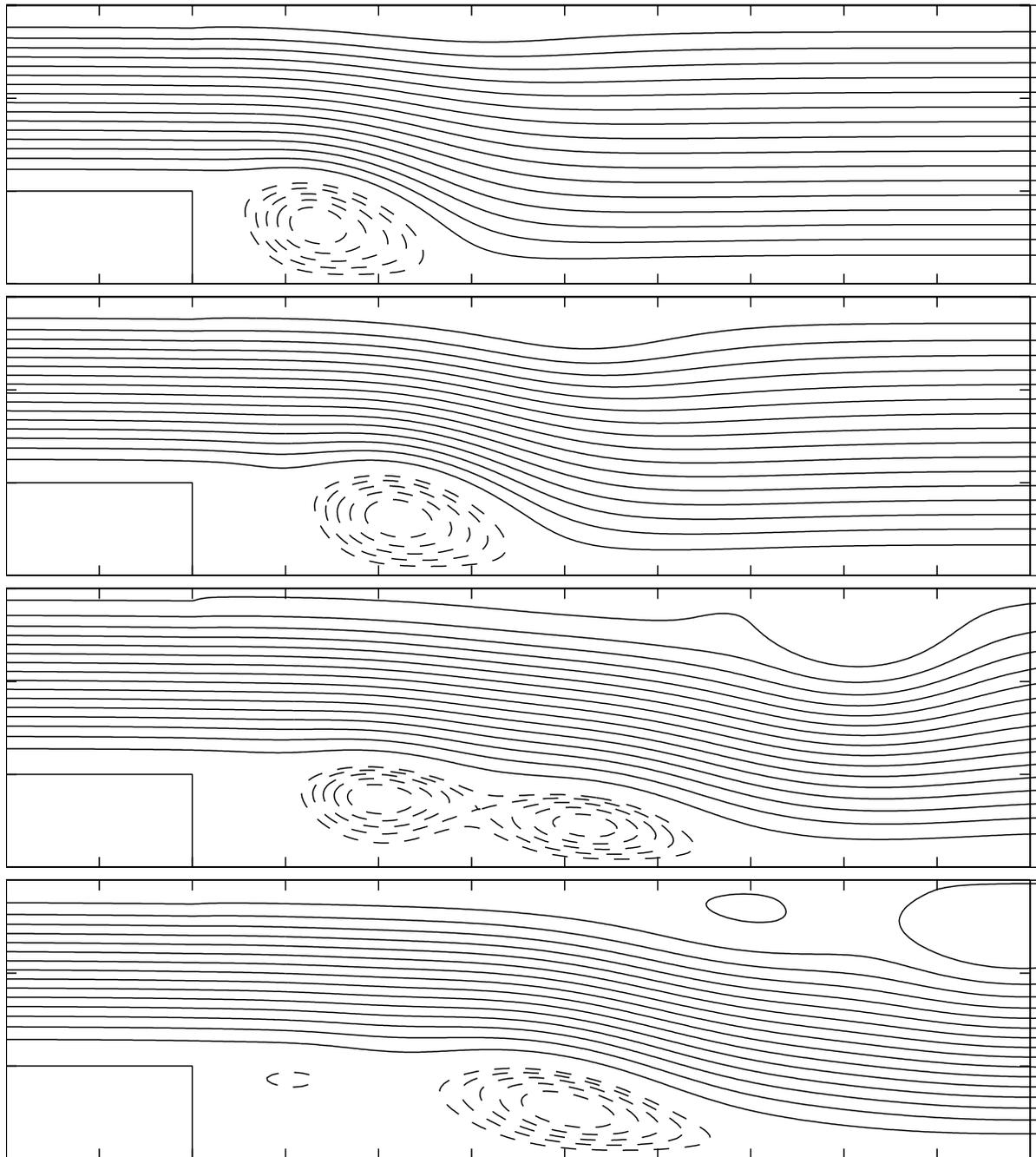


FIG. 5.38 – $Re = 355$. *Fonction courant. Calcul par décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange. De haut en bas $T = \{16, 24, 40, 48\}$*

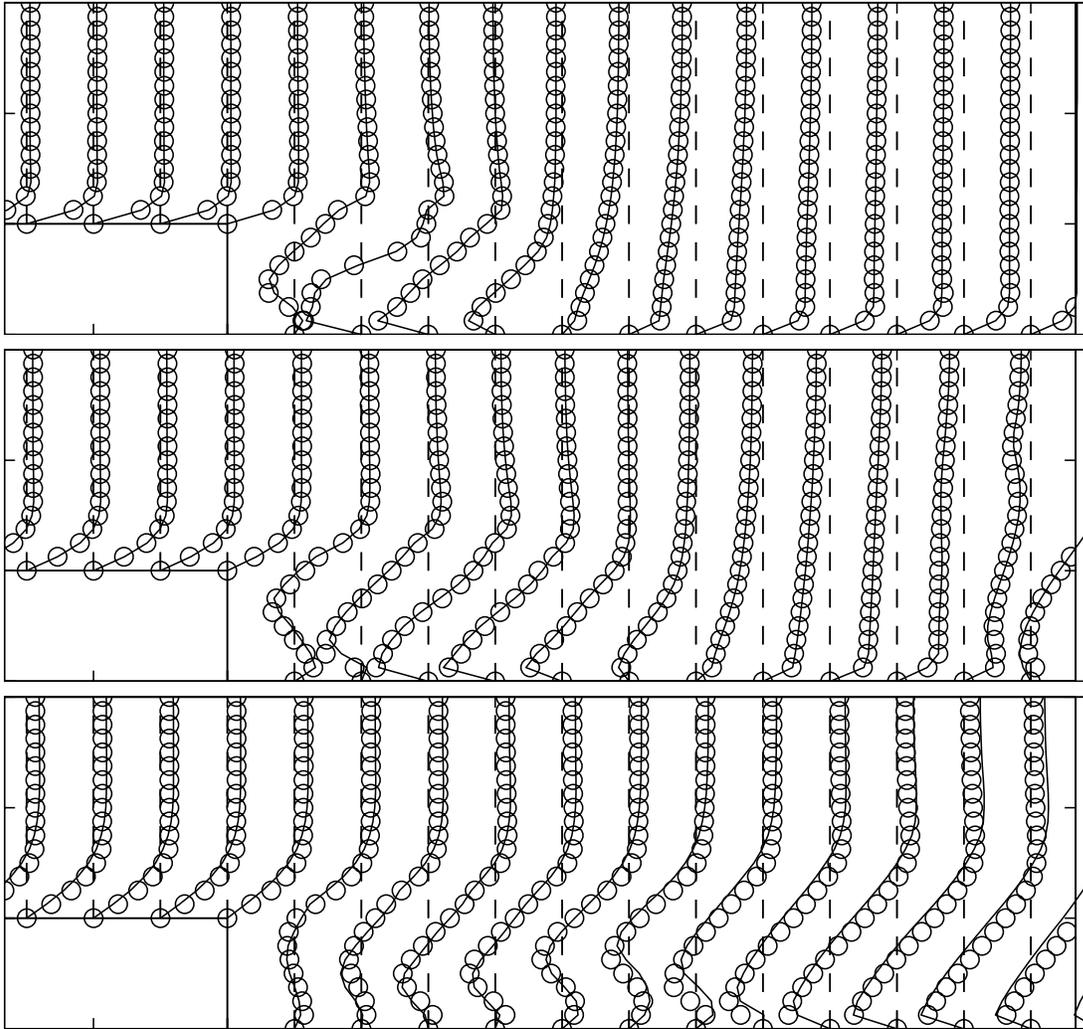


FIG. 5.39 – $Re = 900$. Composante horizontale de la vitesse: (–) : calcul différences-finies, (o) : calcul par décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange. De haut en bas, $T \in \{15, 45, 150\}$

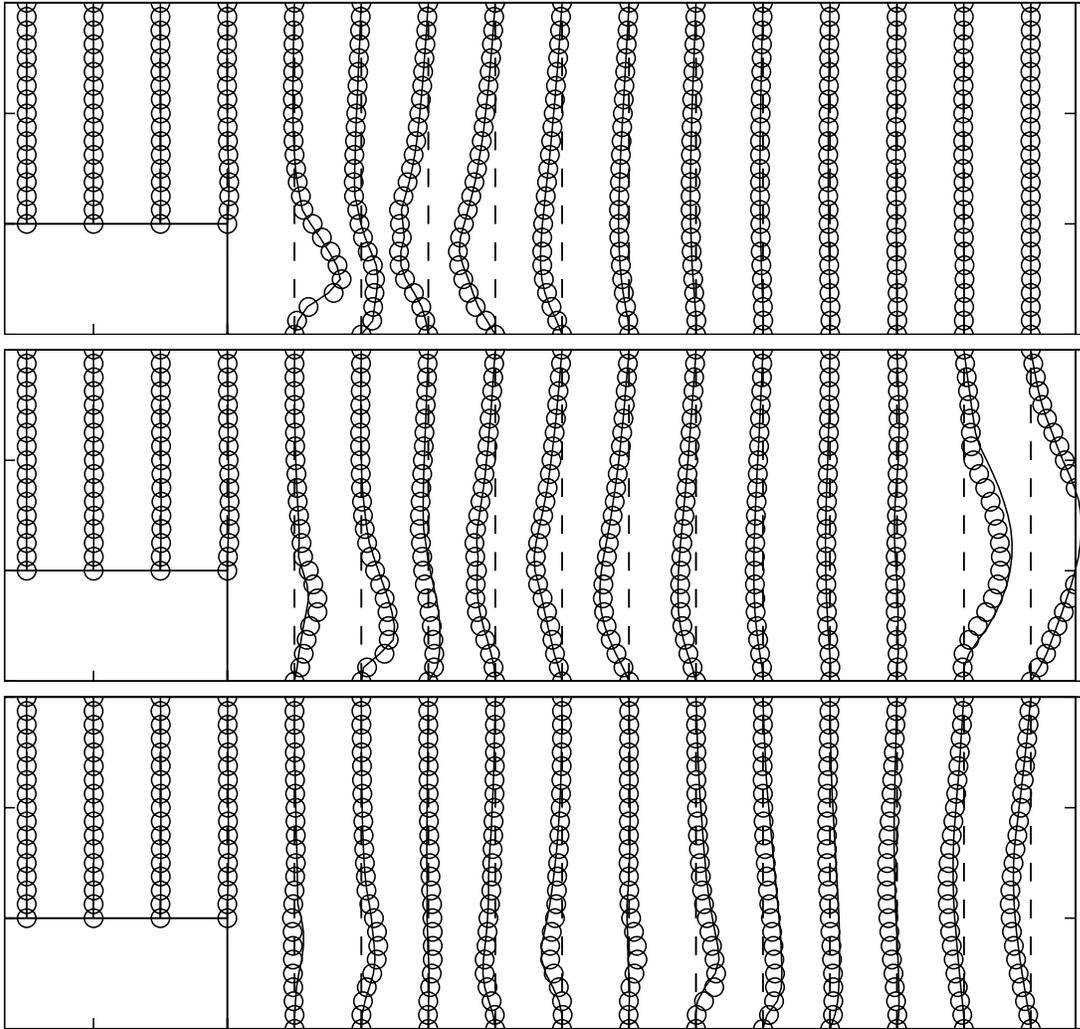


FIG. 5.40 – $Re = 900$. Composante verticale de la vitesse : (–) : calcul différences-finies, (o) : calcul par décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange. De haut en bas, $T \in \{15, 45, 150\}$

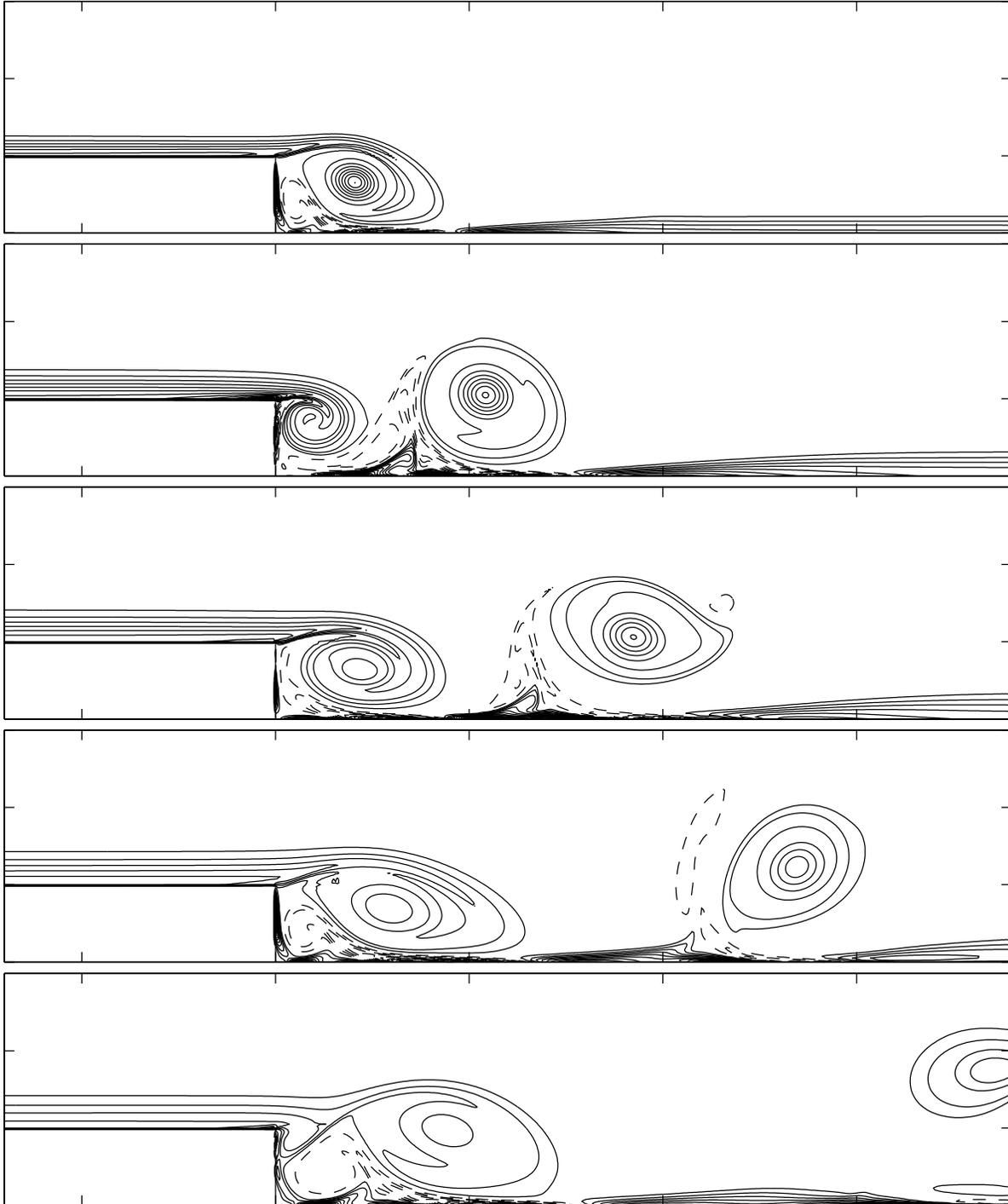


FIG. 5.41 – $Re = 900$. Vorticité. Calcul par décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange. De haut en bas $T = \{15, 30, 37, 45, 52\}$

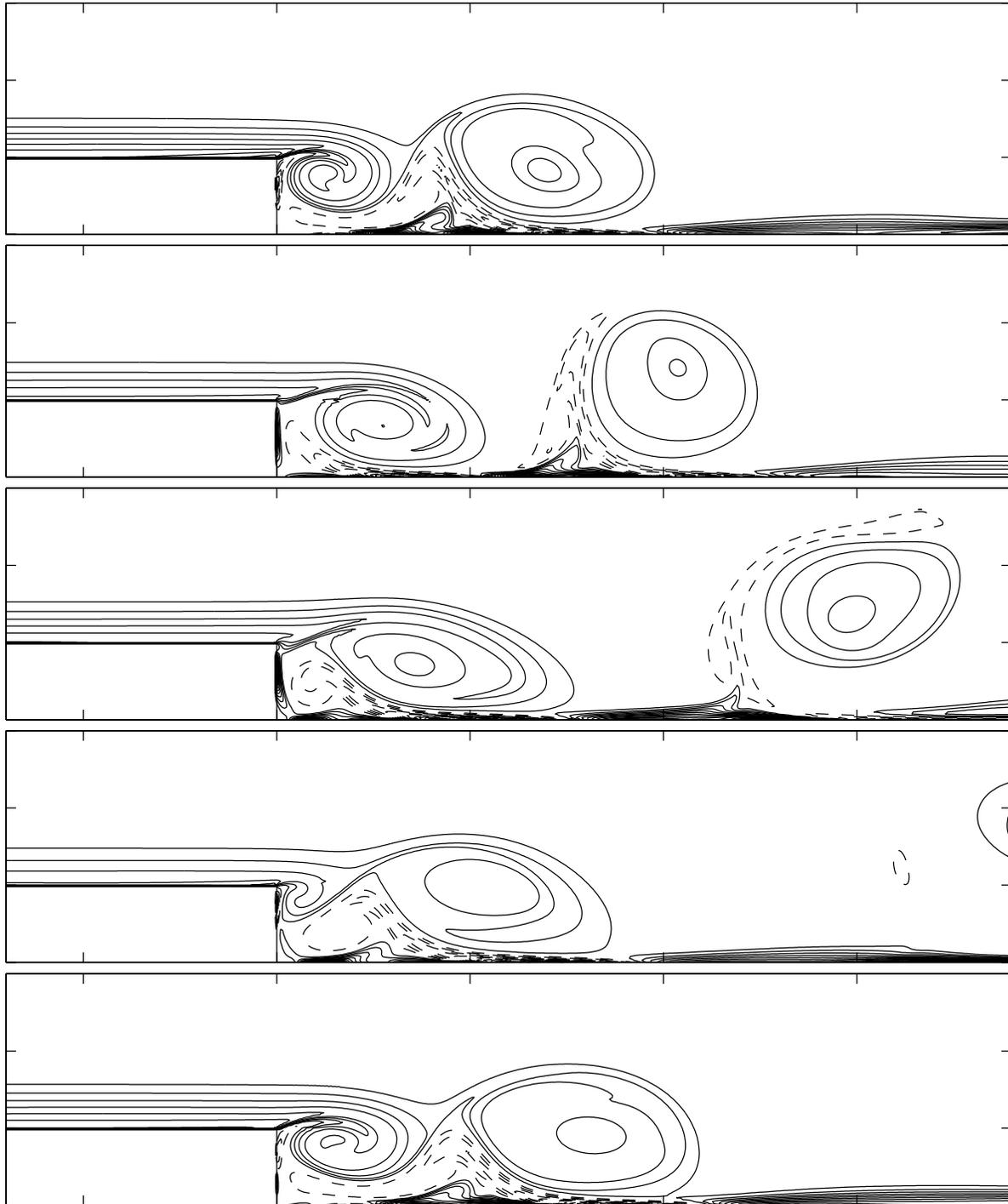


FIG. 5.42 - $Re = 900$. Vorticité. Calcul par décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange. De haut en bas $T = \{60, 67, 75, 82\}$

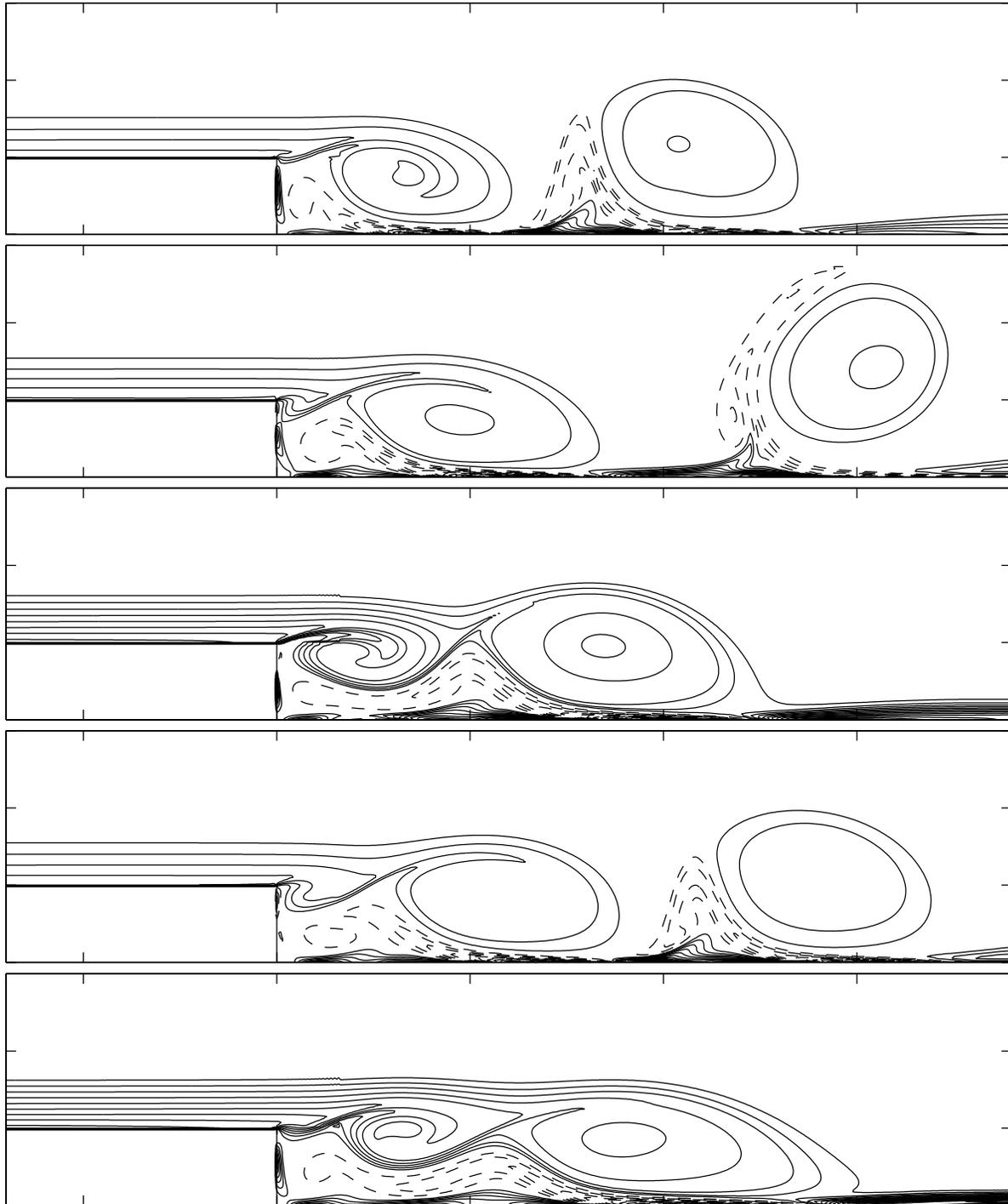


FIG. 5.43 - $Re = 900$. Vorticité. Calcul par décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange. De haut en bas $T = \{97, 105, 120, 135, 150\}$

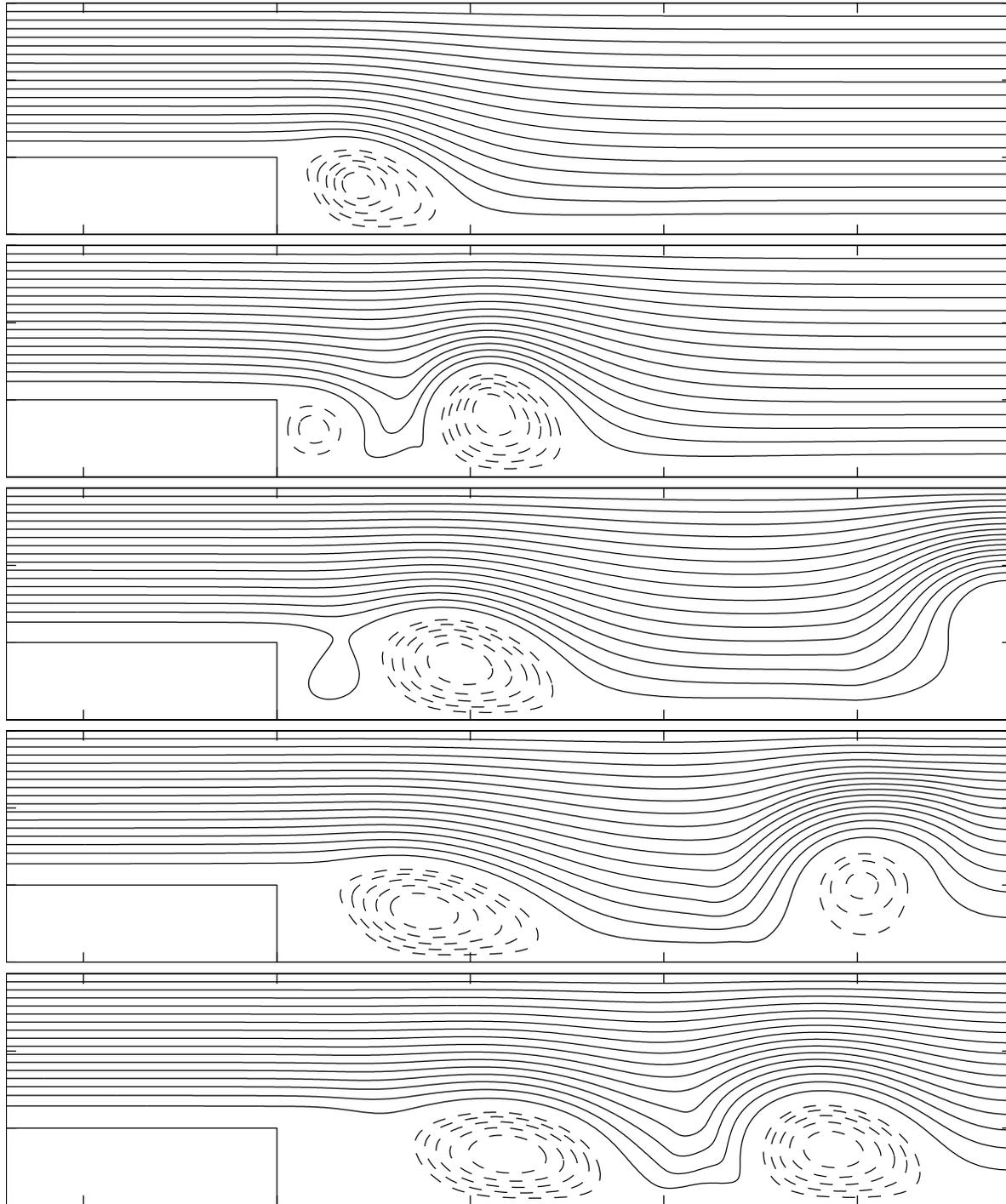


FIG. 5.44 – $Re = 900$. *Fonction courant. Calcul par décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange.*
De haut en bas $T = \{15, 30, 52, 75, 135\}$

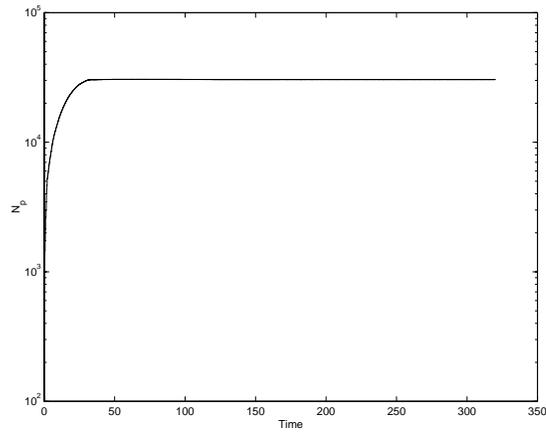


FIG. 5.45 – $Re = 355$. *Nombre de particules.*

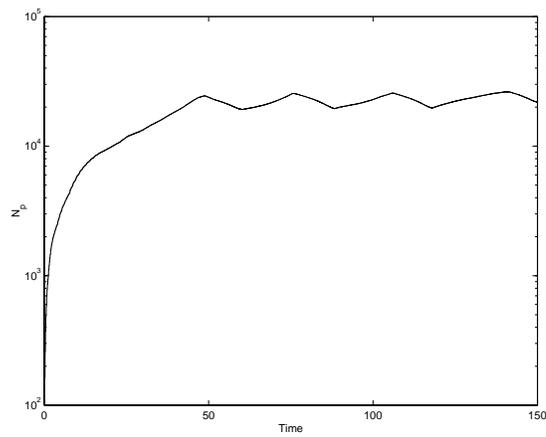


FIG. 5.46 – $Re = 900$. *Nombre de particules.*

5.4 Techniques de raffinement local en méthode de vortex

En présence de plusieurs obstacles, il est naturel de chercher des discrétisations permettant des raffinements locaux autour des obstacles et d'utiliser des particules de taille plus importante entre les obstacles et leurs sillages. Ceci peut être réalisé en combinant des maillages locaux à l'aide de techniques de décomposition en sous-domaines semblables à celles décrites précédemment. Dans cette section, on décrit un tel algorithme en se plaçant dans le cas test découlement entre deux cylindres. La résolution particulière autour de chaque cylindre est de type polaire exponentiel et en dehors des voisinages des deux cylindres, elle est de type cartésien. Dans la suite, on introduit d'abord les techniques de calcul permettant de faire une résolution par méthode de vortex autour d'un cylindre. Ensuite, on passe à l'implémentation et la validation numérique de l'algorithme de raffinement local de maillage.

5.4.1 Méthode de vortex avec volumes variables au voisinage du cylindre

La méthode de vortex avec maillage exponentiel, est implémentée autour d'un cylindre dans un domaine Ω_1 . Le domaine Ω_1 est limité à l'intérieur par le bord du cylindre Γ_0 en ($r = a$) et à l'extérieur par la frontière extérieure Γ_1 en ($r = b$) (Fig.5.47).

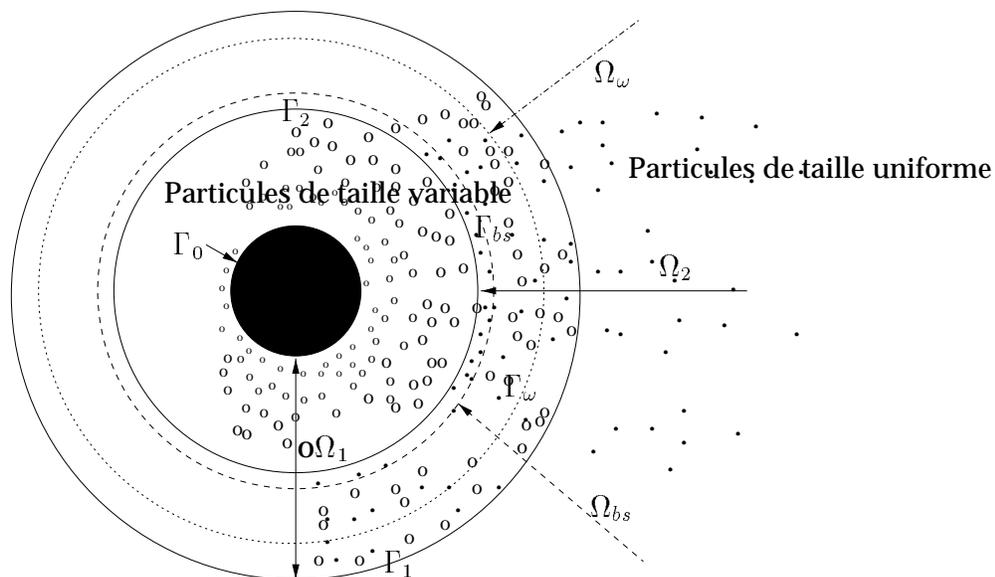


FIG. 5.47 – Décomposition en sous-domaines Lagrange/Lagrange avec recouvrement partiel et génération automatique de particules de volume uniforme pour un écoulement extérieur.

Dans ce domaine, un maillage exponentiel semblable à celui utilisé en section (5.3.3) est adopté. Ce maillage définit la grille initiale de particules.

Afin de résoudre dans ce domaine les équations de Navier-Stokes, on applique l'algorithme de pas fractionnaire vu au chapitre 4. Cet algorithme consiste à résoudre dans chaque étape (un

pas de temps) les deux systèmes suivants :

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \operatorname{div}(u_1 \omega_1) - \nu \nabla^2 \omega_1 = 0 \text{ dans } \Omega_1 \quad (5.31)$$

$$\omega_1(\cdot, 0) - \omega_n = 0 \text{ dans } \Omega_1 \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad (5.33)$$

$$\nabla^2 \psi_1 + \omega_1 = 0 \text{ dans } \Omega_1 \quad (5.34)$$

$$\psi_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad (5.35)$$

$$u_1 - \nabla \wedge \psi_1 = 0 \text{ dans } \Omega_1 \quad (5.36)$$

$$\omega_1 - \nabla \wedge u_1 = 0 \text{ dans } \Omega_1 \quad (5.37)$$

ensuite :

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} + \operatorname{div}(u_1 \omega_2) - \nu \nabla^2 \omega_2 = 0 \text{ dans } \Omega_1 \quad (5.38)$$

$$\omega_2(\cdot, 0) - \omega_n = 0 \text{ dans } \Omega_1 \quad (5.39)$$

$$\nu \frac{\partial \omega_2}{\partial n} - g = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad (5.40)$$

$$g + \left[\frac{\partial}{\partial t} u_1 + (u_1 \cdot \nabla) u_1 \right] \cdot \tau = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad (5.41)$$

Alors, la vorticité à l'instant t_{n+1} est donnée par :

$$\omega_{n+1} = \omega_2 \quad (5.42)$$

En plus des particules $\{x_p^0, p \in \mathbb{J}\}$, on définit sur le domaine Ω_1 une grille eulerienne $\{x_i, i \in \mathbb{I}\}$ de type exponentiel comme dans la section (5.3.3). Cette grille est utilisée pour calculer la fonction courant et les vitesses qui sont ensuite interpolées sur les particules.

Dans une étape de calcul, on résoud d'abord un système d'équations de convection diffusion avec condition de type Neumann homogène et ensuite un système d'équations de convection diffusion avec condition de type Neumann non homogène. On va alors généraliser les techniques utilisées au chapitre 4 au cas de méthode particulière avec volumes variables et en géométrie polaire.

Résolution de l'équation de Navier-Stokes avec conditions limites Neumann homogènes

La résolution des équations (5.31-5.37) se résume en deux étapes. La première étape est relative au calcul de la convection. Cela se fait de façon classique en méthode particulière en déplaçant les particules sur les caractéristiques. La fonction courant et les vitesses sont calculées ici sur la grille et interpolées sur les particules.

La seconde étape est relative au calcul de la diffusion. Il s'agit de résoudre sur les trajectoires de particules l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{d}{dt} \bar{\omega}(t) - \nu \nabla^2 \bar{\omega}(t) = 0 \text{ dans } \Omega_1 \quad (5.43)$$

$$\bar{\omega}(t_n) - \omega^n = 0 \text{ dans } \Omega_1 \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad (5.45)$$

Le calcul de la diffusion sur une particule par la méthode P.S.E. demande de connaître la vorticité dans un voisinage d'une épaisseur ϵ . On va donc utiliser la condition Neumann sur le bord pour obtenir les particules sources qui prolongent la vorticité au bord par symétrie.

Si x_p est une particule proche du bord de vorticité $\bar{\omega}(x_p)$, on lui associe une nouvelle particule \tilde{x}_p (Fig.5.48) de vorticité $\bar{\omega}(\tilde{x}_p) = \bar{\omega}(x_p)$. Cela revient à une approximation d'ordre deux de la condition limite Neumann sur le bord. Après cette symétrisation, la méthode (P.S.E.) peut être appliquée sans difficulté pour évaluer la vorticité dans le domaine Ω_1 .

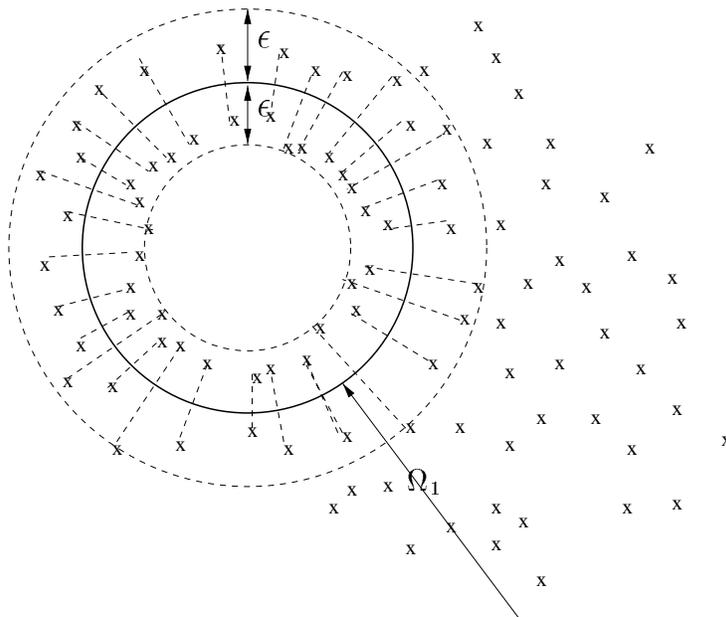


FIG. 5.48 – Distribution des particules après symétrisation de celles qui sont à une distance plus petite que ϵ du bord.

Résolution de l'équation de Navier-Stokes avec conditions limites Neumann non homogènes

La deuxième partie de la méthode de pas fractionnaire consiste à résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \text{div}(u\tilde{\omega}) - \nu \nabla^2 \tilde{\omega} &= 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \tilde{\omega}(\cdot, 0) - \omega_n &= 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \nu \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial n} - g &= 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ g + \left[\frac{\partial}{\partial t} u + (u \cdot \nabla) u \right] \cdot \tau &= 0 \text{ sur } \Gamma_0 \end{aligned}$$

Après avoir effectué la convection des particules comme dans l'étape précédente, il nous reste à résoudre le problème suivant sur les caractéristiques de l'écoulement :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{\omega} - \nu\nabla^2\tilde{\omega} &= 0 \text{ dans } \Omega_1 \\
\tilde{\omega}(\cdot, 0) - \omega_n &= 0 \text{ dans } \Omega_1 \\
\nu\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial n} - g &= 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\
g + \frac{d}{dt}u.\tau &= 0 \text{ sur } \Gamma_0
\end{aligned}$$

Posons $\omega' = \tilde{\omega} - \bar{\omega}$, à l'instant t_n , on a $\tilde{\omega} = \bar{\omega}$ et $\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial n} = 0$, le système ci-dessus nous donne alors :

$$\frac{d}{dt}\omega' - \nu\nabla^2\omega' = 0 \text{ dans } \Omega_1 \quad (5.46)$$

$$\omega'(\cdot, 0) = 0 \text{ dans } \Omega_1 \quad (5.47)$$

$$\nu\frac{\partial\omega'}{\partial n} - g = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad (5.48)$$

La solution du système d'équations (5.46-5.48) est donnée par la formule 5.49 :

$$\omega'(x, t) = \int_{t_n}^t \int_{\Gamma_0} G(x - y_\sigma, t) \mu(y_\sigma, t) d\sigma ds \quad (5.49)$$

où $G(x, t)$ est le noyau de l'équation de la chaleur :

$$G(x, t) = \frac{1}{4\pi\nu(t - t_n)} e^{-\frac{|x|^2}{4\nu(t - t_n)}} \quad (5.50)$$

et $\mu(x, t)$ est la solution de l'équation intégrale :

$$-\frac{1}{2}\mu(x, t) + \int_{t_n}^t \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G}{\partial n}(x - y_\sigma, t) \mu(y_\sigma, t) d\sigma ds = g(x, t) \quad (5.51)$$

Un développement limité de la formule 5.51 permet de déduire la valeur de μ comme le montre Koumoutsakos[51]. On obtient pour un cylindre de rayon a :

$$\mu(\sigma, t) = -2g(\sigma, t)(1 - \sqrt{\pi\nu(t - t_n)})$$

La valeur de $\omega'(x, t)$ peut se calculer simplement par application de la formule du trapèze comme au chapitre 4.

5.4.2 Validation numérique de la méthode de vortex autour du cylindre

5.4.3 Algorithme de décomposition en sous-domaines de type Lagrange/ Lagrange.

Une fois la méthode de résolution lagrangienne autour du cylindre est établie, la mise en place d'une méthode de décomposition en sous-domaines de type Lagrange/Lagrange peut se faire très facilement en utilisant les mêmes techniques de décomposition en sous-domaines que celles utilisées dans la méthode Euler/Lagrange. Une grille particulière, en dehors des domaines qui entourent le cylindre, est définie. Le transfert des informations entre les deux domaines lagrangiens se fait par interpolation.

La méthode de décomposition en sous-domaines de type Lagrange/Lagrange est illustrée sur l'exemple d'écoulement entre deux cylindres. La distribution de particules est définie initialement sur une grille polaire autour de chaque cylindre et sur une grille cartésienne à l'extérieur des deux cylindres. Les particules sont ramenées à cette géométrie pendant l'étape de remaillage. Un exemple de grilles utilisées dans l'étape de remaillage est donné sur la figure Fig.5.4.3. Parmi ces points de grilles les seuls qui sont considérés comme particules et qui font partis de la mémoire utilisée pendant le calcul sont ceux de vorticitée non nulle. Leur nombre évolue en fonction du temps. On trouve en Fig.5.4.3 l'évolution du nombre de particules polaire (particules du domaine intérieur qui entourent les cylindres) et des particules cartésiennes (particules du domaine extérieur) pendant les quatre simulations effectuées.

Les coordonnées (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) des centres des deux cylindres pendant ces quatre simulations sont données dans le tableau Tab.5.4. L'évolution de la vorticitée est décrite dans les figures (Fig.5.4.3..Fig.5.4.3).

	X_1	Y_1	X_2	Y_2
Simulation 1	0	4	0	-4
Simulation 2	4	0	-4	0
Simulation 3	2.82	2.82	-2.82	-2.82
Simulation 4	3.86	-1	-3.86	1

TAB. 5.4 – Coordonnées des centres des deux cylindres

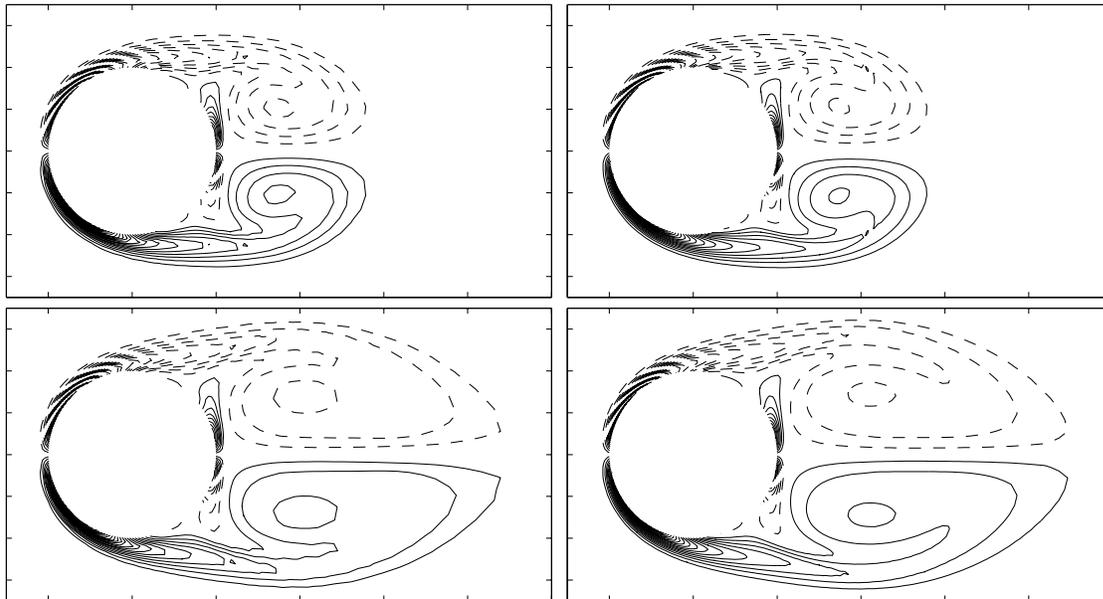


FIG. 5.49 - $Re = 300$: Isovaleurs de la vorticité; En haut $T = 5$, en bas $T = 10$; $\Delta t = 0.005$, $Re_{ext} = 10$, $(m, n) = (100, 200)$; A gauche méthode de vortex à volumes variables, à droite Méthode différences-finies

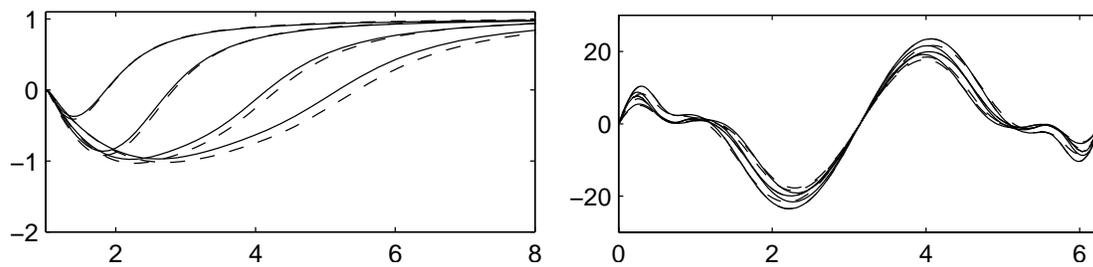


FIG. 5.50 - $Re = 300$:A gauche : vorticité sur le bord du cylindre; à droite : vitesse derrière le cylindre; (-) : Méthode de vortex à volumes variables, (--) : Méthode différences-finies; $T \in \{2.5 \ 5 \ 10 \ 15\}$

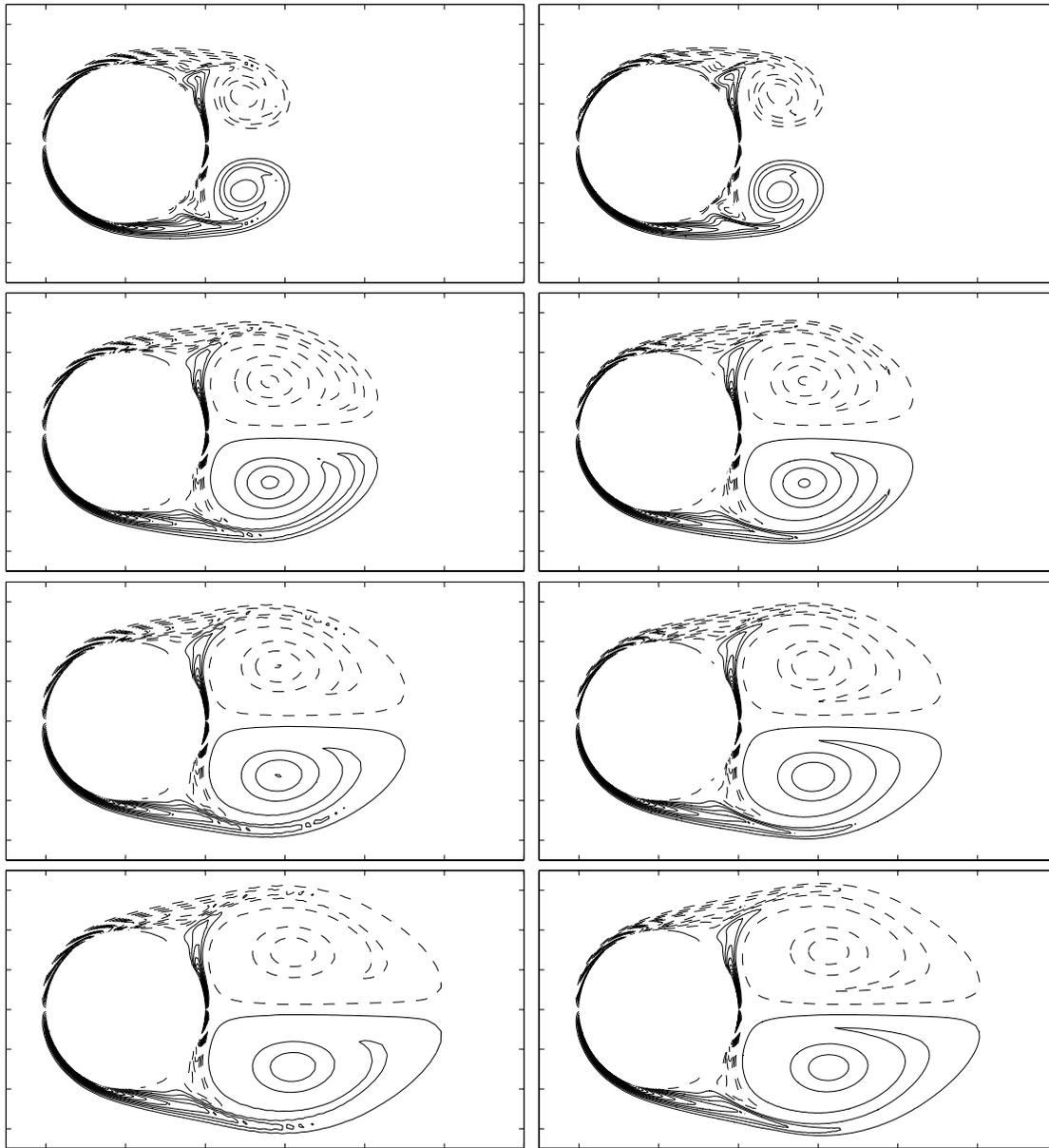


FIG. 5.51 - $Re = 1000$: Isovaleurs de la vorticité; De haut en bas $T \in \{4 \ 8 \ 9.6 \ 12\}$; en bas $T = 10$; $\Delta t = 0.008$, $Re_{ext} = 10$, $(m, n) = (200, 364)$; A gauche Méthode de vortex à volumes variables, à droite Méthode différences-finies

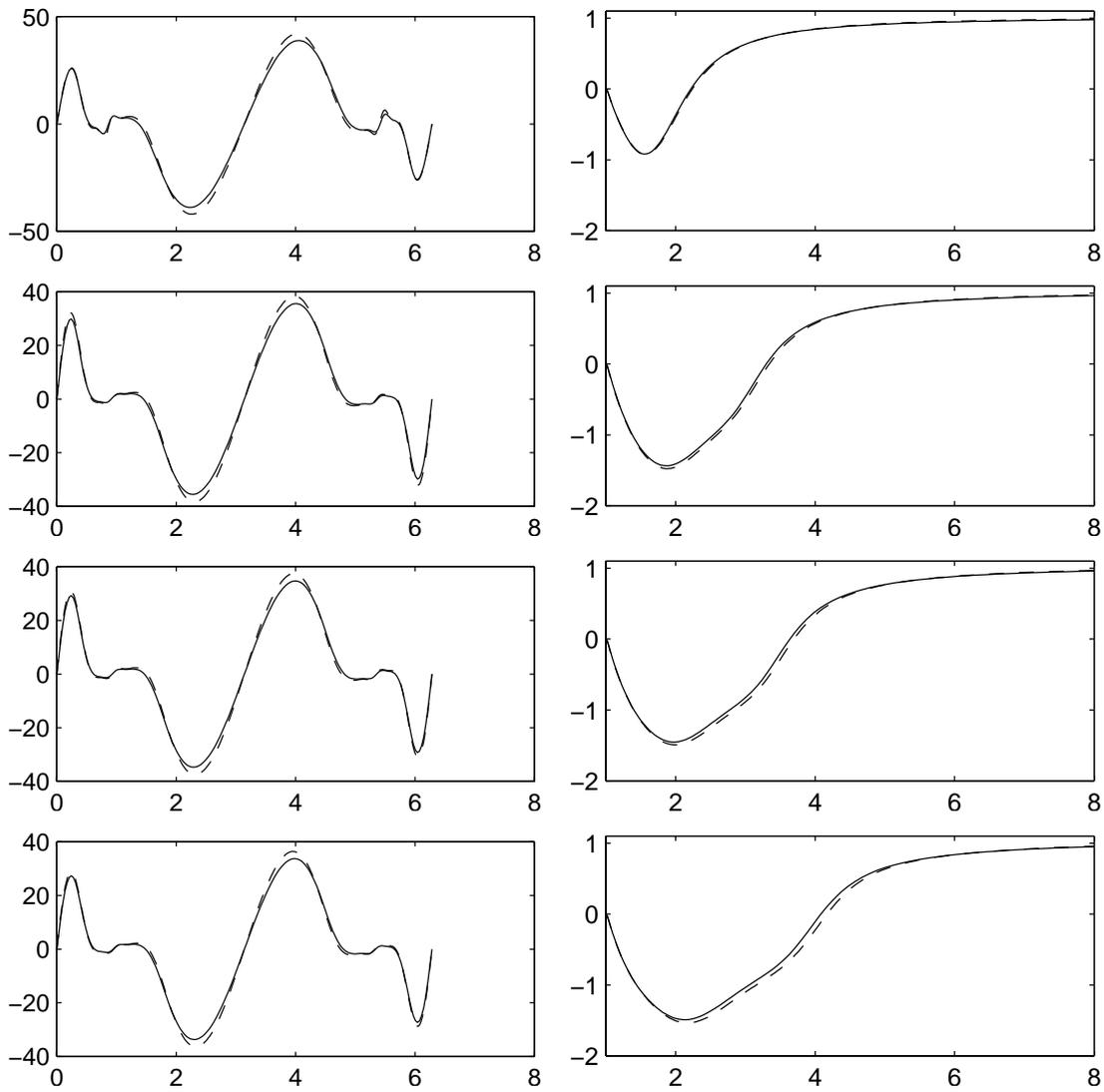


FIG. 5.52 – $Re = 1000$: A gauche : vorticité sur le bord du cylindre; à droite : vitesse derrière le cylindre; (–) : Méthode de vortex à volumes variables, (– –) : Méthode différences-finies; De haut en bas $T \in \{4 \ 8 \ 9.6 \ 12\}$

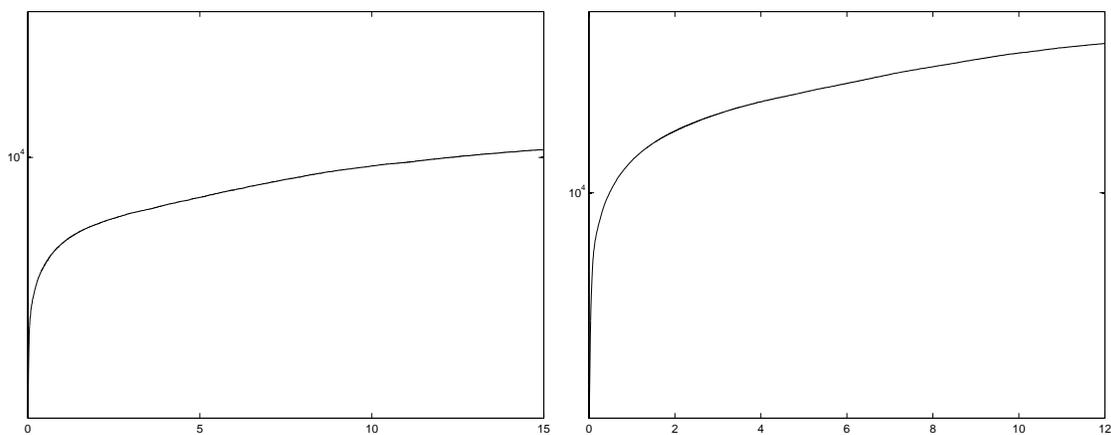


FIG. 5.53 – Evolution du Nombre de particules en temps; A gauche $Re = 300$, $T \in [0, 15]$, à droite $Re = 1000$, $T \in [0, 12]$

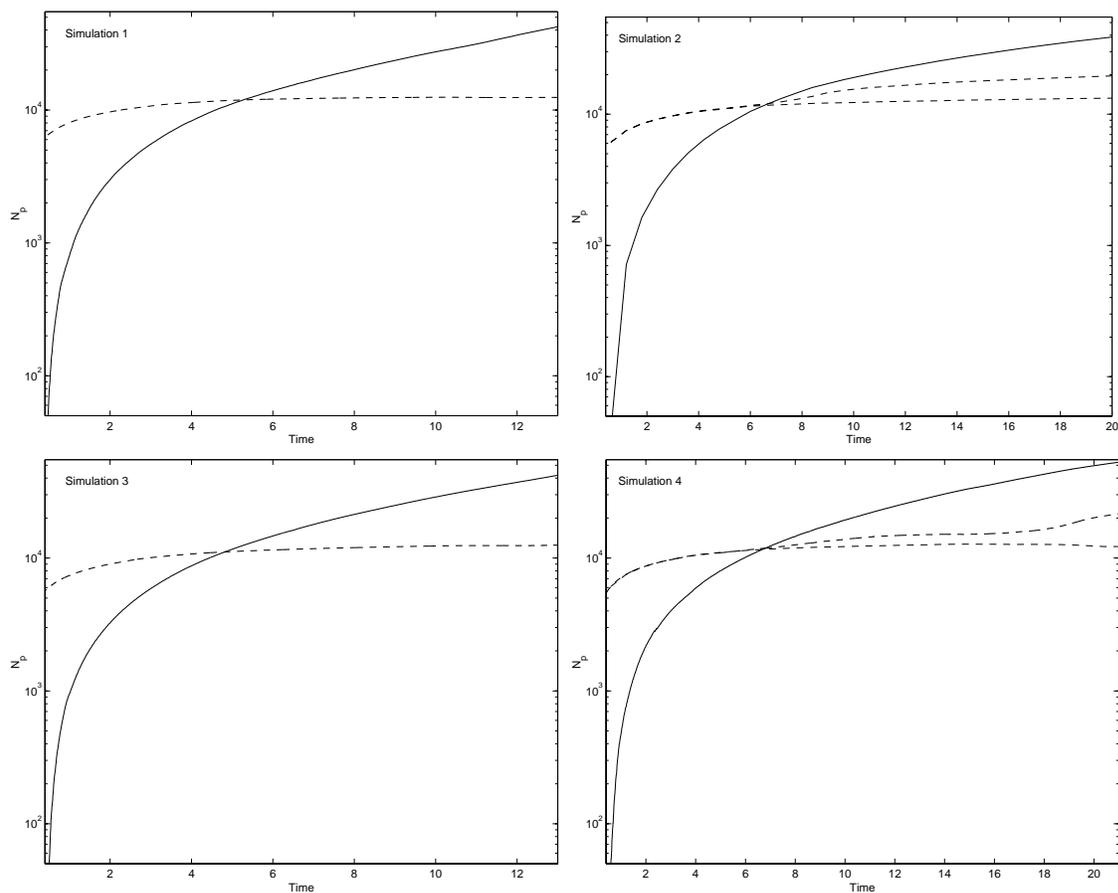


FIG. 5.54 – Ecoulement entre deux cylindres. Evolution du nombre des particules; (---) : particules dans un domaine intérieur; (—) : particules dans le domaine extérieur

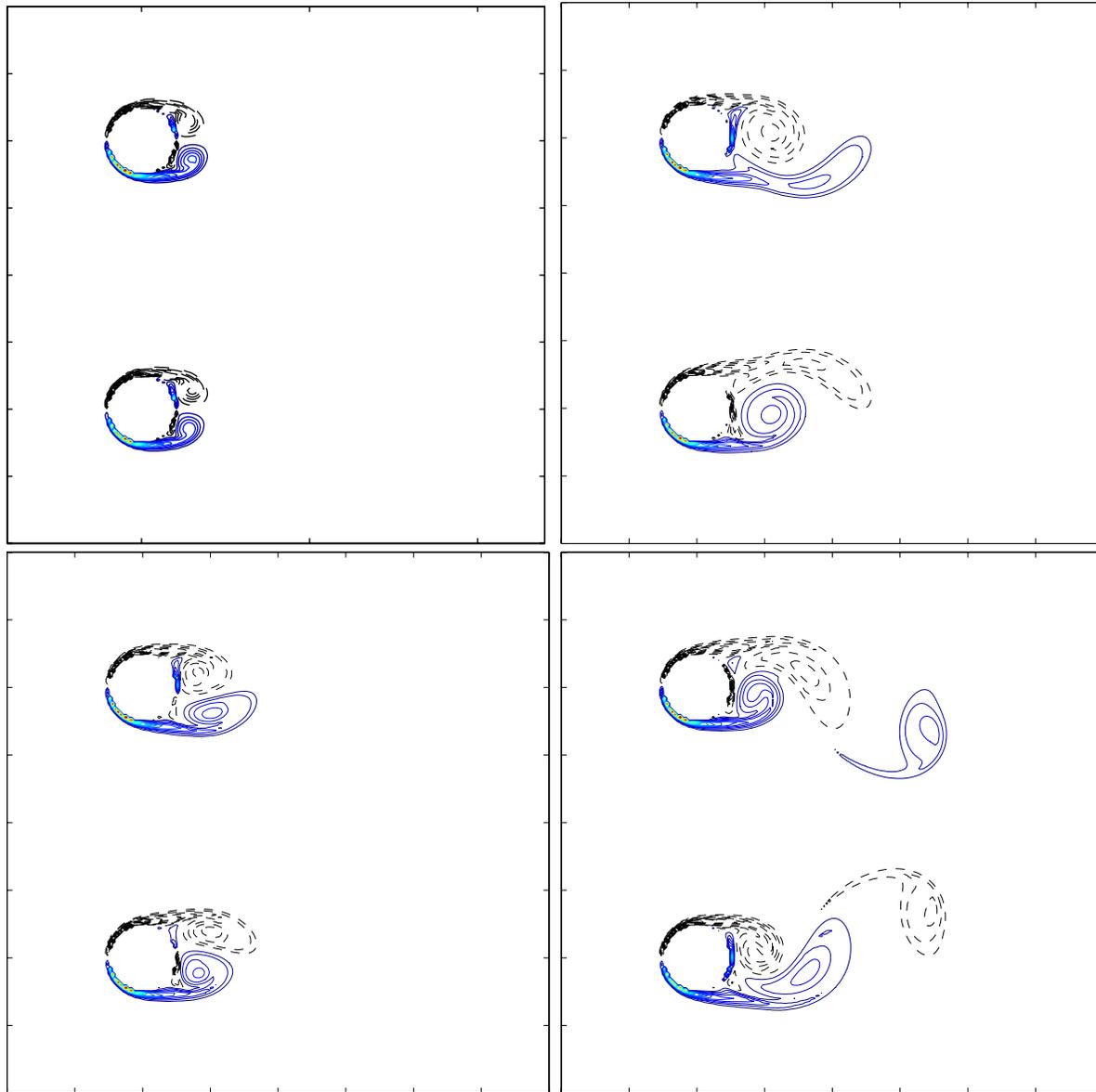


FIG. 5.55 - *Ecoulement entre deux cylindres, simulation 1. $Re = 500$; Isovaleurs de la vorticité à $(t = 3 \dots 12)$*

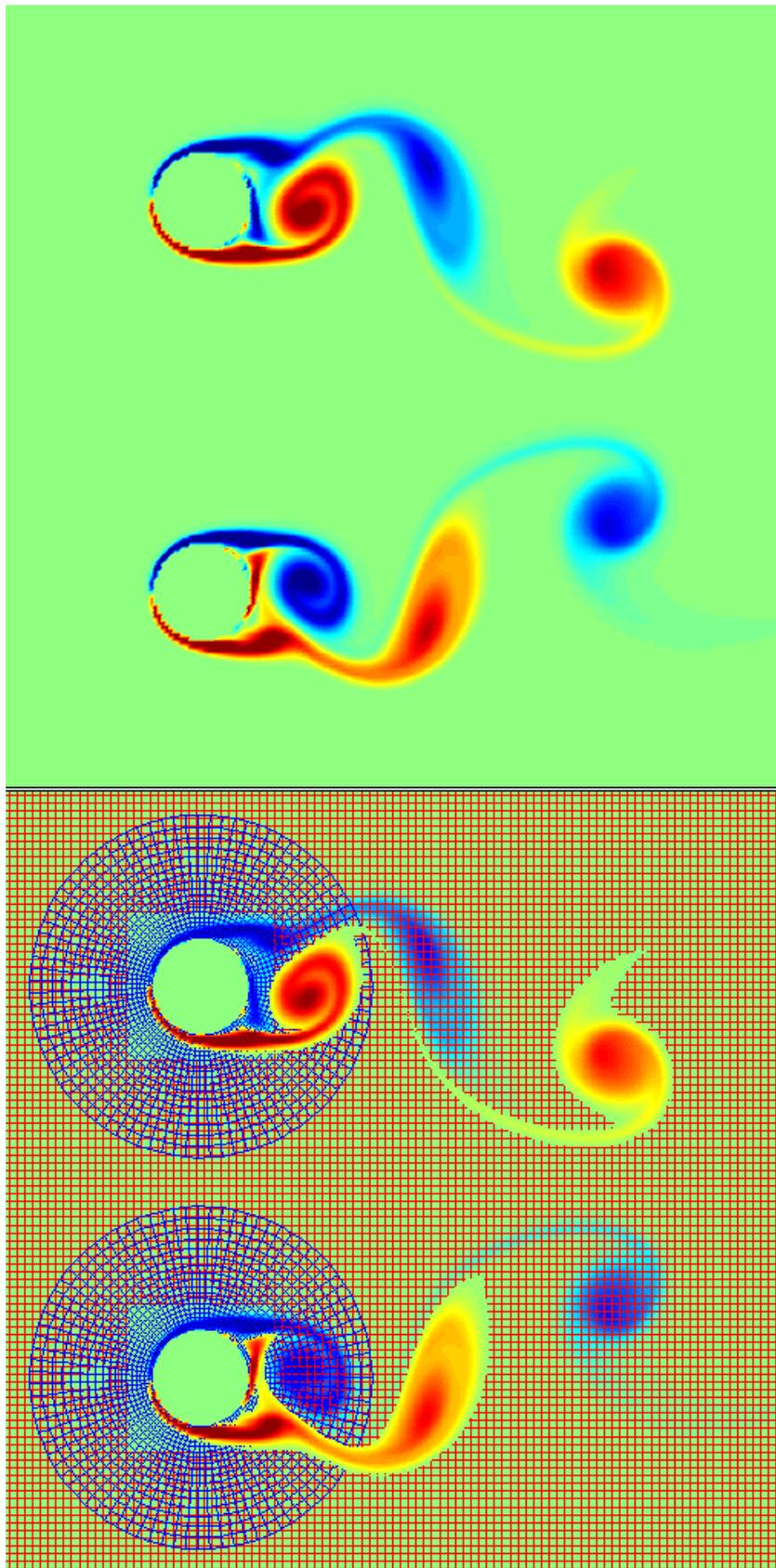


FIG. 5.56 – Méthode de décomposition en sous-domaines Lagrange/Lagrange. Ecoulement entre deux cylindres, simulation 1. Vorticité; $Re = 500$, $T = 13.8$. Tailles des particules intérieurs et extérieurs et décomposition du domaine

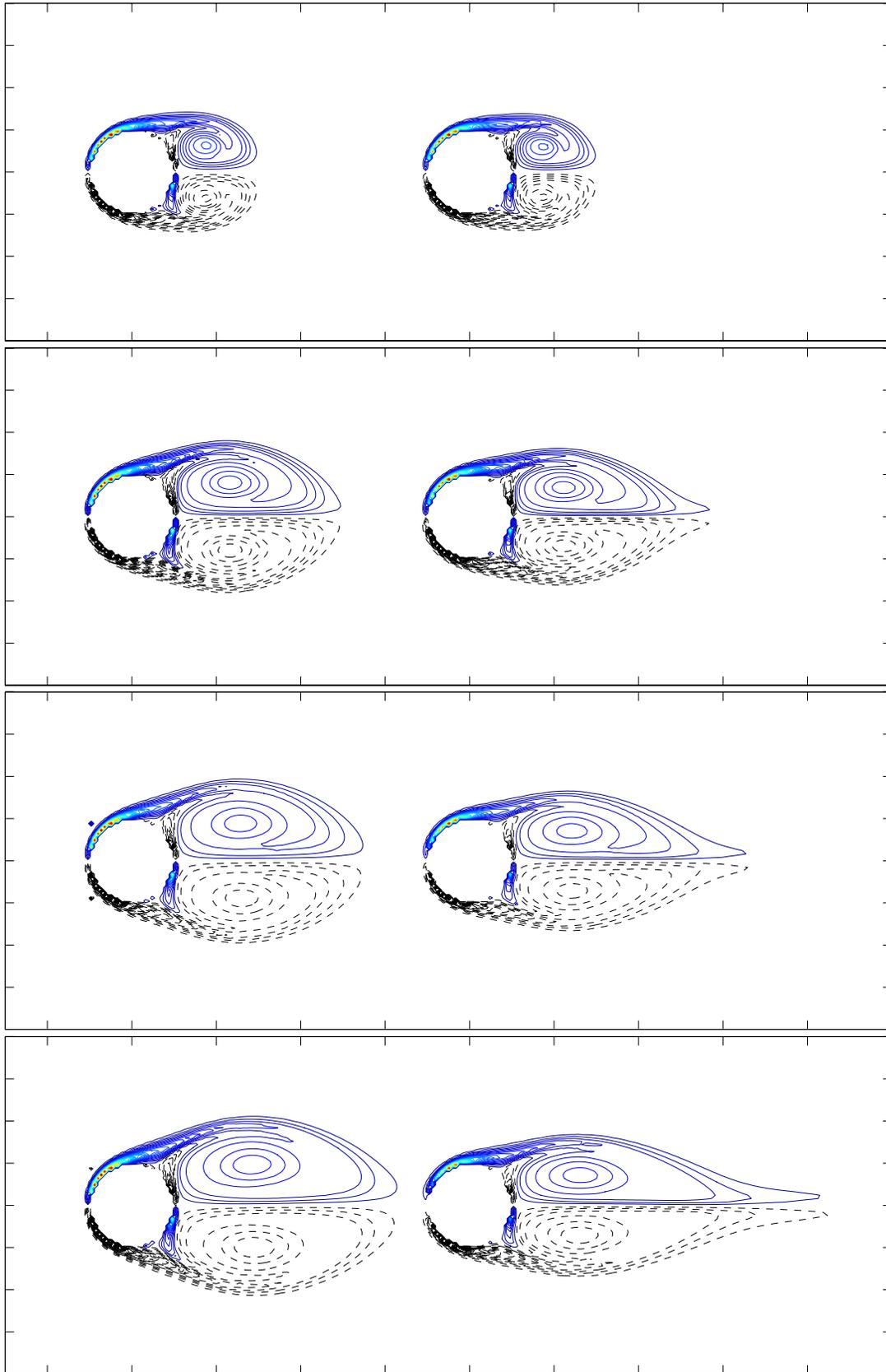


FIG. 5.57 - *Écoulement entre deux cylindres, simulation 2. $Re = 500$; Isovaleurs de la vorticité à ($t = 6, 13.2, 16.8, 20$)*

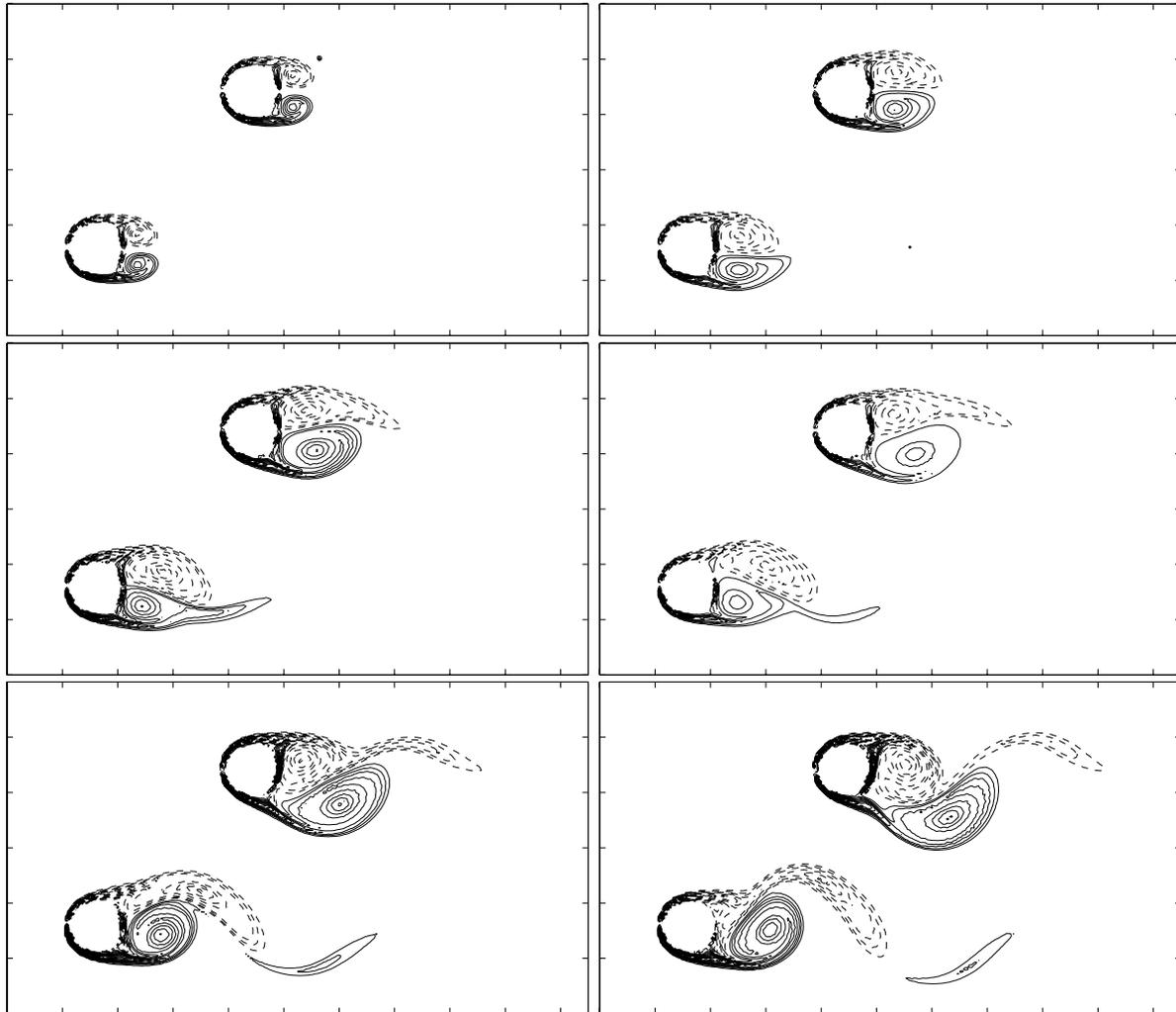


FIG. 5.58 – *Ecoulement entre deux cylindres, simulation 3. $Re = 700$; Isovaleurs de la vorticité à $t = \{3, 6, 9, 10.2, 12, 13.2\}$*

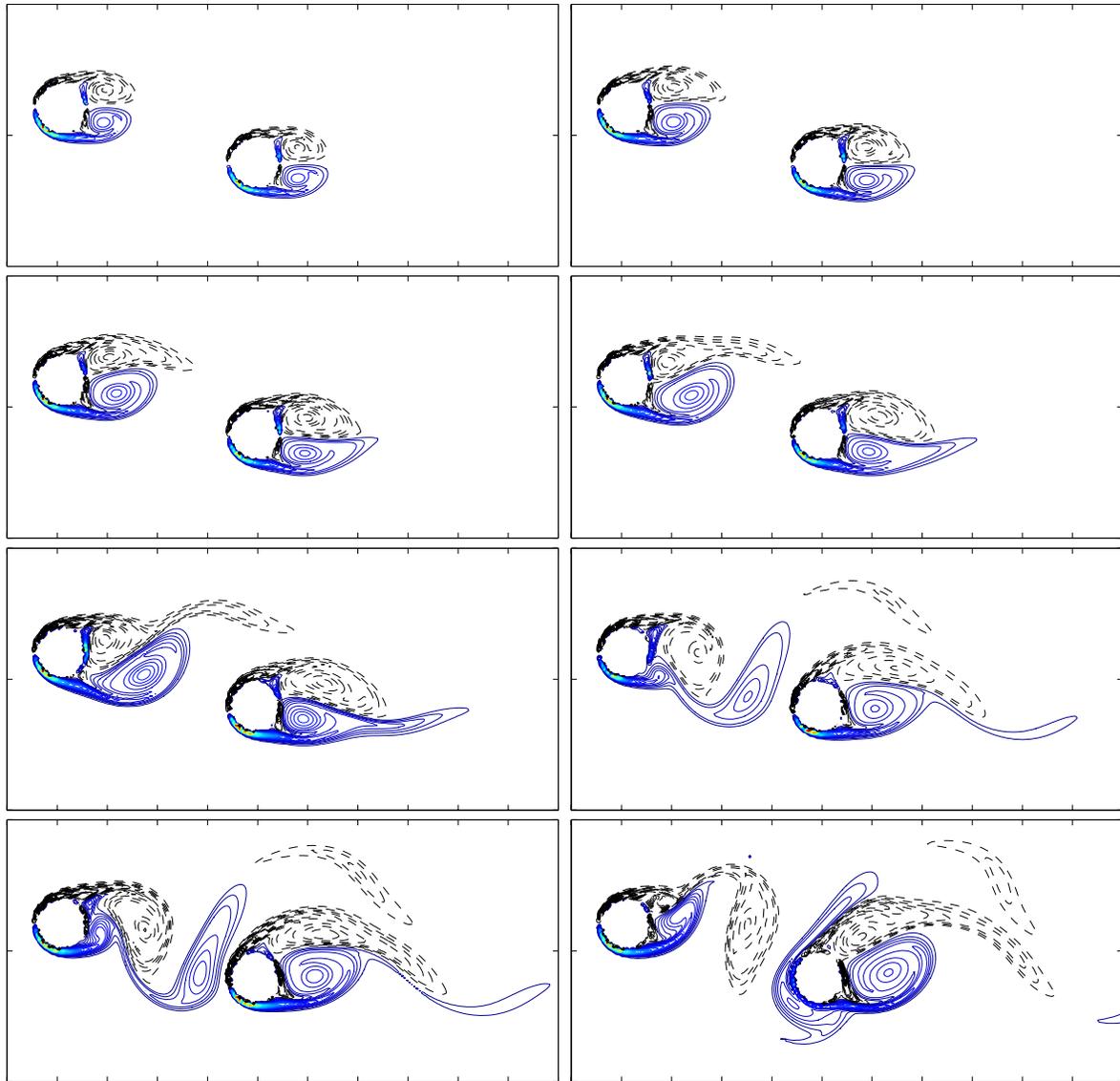


FIG. 5.59 – *Ecoulement entre deux cylindres, simulation 4. $Re = 500$; Isovaleurs de la vorticité à $t = \{6, 8.4, 10.8, 13.2, 15.6, 19.2, 20.4, 23.4\}$*

5.5 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre décrit une gamme de méthodes de décomposition de domaines permettant soit la combinaison des techniques eulériennes et lagrangiennes soit des techniques purement lagrangiennes présentant des raffinements locaux de maillage.

Les outils essentiels utilisés dans ces méthodes sont l'emploi de la méthode P.S.E. pour le calcul de la diffusion et les techniques d'interpolation d'ordre élevé pour assurer des conditions d'interface consistantes entre les différents sous-domaines et la régularité du maillage lagrangien.

Ces méthodes offrent aussi la possibilité d'utiliser dans la couche limite une méthode eulérienne. Cela permet de bénéficier de la souplesse de ces méthodes dans la prise en compte des conditions limites. On a utilisé ici comme exemple de méthode eulérienne, la méthode différences-finies dans les deux formulations (vitesse-tourbillon) et (vitesse-pression). On peut aussi utiliser dans tous les sous-domaines des méthodes lagrangiennes et s'affranchir ainsi de la condition de stabilité imposée par un traitement explicite de la convection.

La méthode de vortex avec particules de taille variable implémentée ici permet de réaliser en domaine infini des simulations de sillages avec un coût de calcul très faible.

Conclusion et perspective

Dans cette thèse, des algorithmes de calcul combinant des techniques de différences-finies d'ordre élevé et de méthodes de vortex ont été développés. Ces algorithmes permettent la réalisation de simulation directe d'écoulements incompressibles avec un coût de calcul réduit.

Les bonnes propriétés des méthodes de vortex (traitement implicite de la convection, prise en compte exacte des conditions limites à l'infini et adaptativité à la géométrie de l'écoulement) sont combinées dans ces algorithmes avec les avantages qui caractérisent les méthodes euleriennes (souplesse de traitement des conditions limites au voisinage des parois et possibilité d'utiliser des méthodes de calcul rapides comme les transformées de Fourier rapide en géométrie simple). Le passage d'un type de solveur à un autre est réalisé à l'aide de techniques d'interpolation d'ordre élevé.

Lorsque les méthodes euleriennes et de vortex cohabitent dans le même domaine de calcul (méthode V.I.C.), ces techniques d'interpolation permettent de représenter la vorticité avec la même précision sur une grille fixe et sur la grille lagrangienne. Les méthode V.I.C. ainsi obtenues combinent stabilité et précision et fournissent une alternative avantageuse aux méthodes différences-finies pour des écoulements confinés.

Lorsque le domaine de calcul est décomposé en sous-domaines distincts traités par méthode de vortex et par méthode euleriennes, les formules d'interpolation permettent de réaliser des conditions d'interface consistantes entre les différents sous-domaines. On dispose alors de méthodes de calcul avec décomposition en sous-domaines de type Euler/Lagrange et Lagrange/Lagrange et résolution en formulation (vitesse-tourbillon)/(vitesse-tourbillon) ou (vitesse-pression)/(vitesse-tourbillon). L'intégration en temps dans ces méthodes se fait par schéma explicite/explicite ou implicite/explicite. Ces méthodes permettent aussi de réaliser des calculs en présence de plusieurs obstacles avec raffinement local de maillage avec calcul purement lagrangien.

Afin de profiter dans un cadre plus large des méthodes développées dans ce travail, il sera utile de continuer les recherches dans les directions suivantes :

- En méthode de vortex et en dimension deux, les vitesses des particules sont calculées par l'algorithme multipolaire rapide. Pour bénéficier des avantages de la méthode de vortex en trois dimensions, il est important d'implémenter cet algorithme en trois dimensions. Cet algorithme doit permettre, en plus du calcul rapide des vitesses et de la diffusion, une estimation peu coûteuse de certains opérateurs différentiels sur les particules (gradient ou divergence selon l'écriture de l'équation de Navier-Stokes choisie).
- A partir du moment où le code de calcul multipolaire rapide sera disponible, il sera facile d'implémenter la méthode de décomposition en sous-domaines Euler/Lagrange avec calcul en formulation (vitesse-pression)/(vitesse-tourbillon) en trois dimensions. Cela per-

mettrait de bénéficier d'un code de calcul robuste et valable avec des conditions limites quelconque en trois dimensions. On pourrait aussi augmenter les performances de ce code en incluant des techniques de discrétisation à taille variable et de calcul parallèle.

- Les techniques de décomposition en sous-domaines sont illustrées ici, sur le couplage différences-finies/vortex et vortex/vortex uniquement. Il serait très utile de les développer afin de bénéficier des avantages d'autres méthodes. Pour les écoulements avec présence de zone à géométrie complexe, l'utilisation des méthodes avec maillage adaptatif (éléments-finis par exemple) serait avantageuse.

Bibliographie

- [1] C. Albuquerque. PhD thesis, Lisbon, 1998.
- [2] C-R. Anderson. An implementation of the fast multipole method without multipoles. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 29(3):615–639, 1992.
- [3] C-R. Anderson and M-B. Reider. Investigation of the use of prandtl/navier-stokes equation procedure for two dimensional incompressible flow. *Vortex Flows and Related Numerical Methods*, 395:105, 1993.
- [4] C-R. Anderson and M-B. Reider. A high order explicit method for the computation of flow about a circular cylinder. *J. Comp. Phys.*, 125:207–224, 1996.
- [5] A. Arakawa. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. *J. Comp. Phys.*, 1:119–143, 1966.
- [6] B. F. Armaly, F. Durst, and J. C. F. Rereira. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. Fluid Mech.*, 127:473–496, 1983.
- [7] S. J. Barker and C. Crow. *J. Fluid Mech.*, (82):659, 1977.
- [8] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, London, 1967.
- [9] J-T. Beale. On the accuracy of vortex methods at large times,. *Fluid Dyn.*, 1986.
- [10] J. T. Beale and A. Magda. High order accurate vortex methods with explicit velocity kernels. *J. Comp. Phys.*, 58:188–208, 1985.
- [11] J. Brackbill and H. Ruppel. A method for adaptatively zoned, particle in cell calculations of fluid flows in two dimension. *J. Comp. Phys.*, 65:314–343, 1986.
- [12] W.-R. Briley. A numerical study of laminar separation bubbles using the navier-stokes equations. *J. Fluid Mech.*, 4:713–736, 1971.
- [13] C-H. Bruneau. Calcul d'écoulements incompressibles derrière des obstacles et analyse des solutions transitoires. *Rapport interne, Mathématiques appliquées de Bordeaux*, 97009, 1997.
- [14] C-H. Bruneau and C. Jouren. An efficient scheme for solving steady incompressible navier-stokes equations. *J. Comp. Phys.*, 89:389–413, 1990.
- [15] C. Canuto and D. Funaro. The schwarz algorithm for spectral methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(1):24–40, 1988.

- [16] F. Cassot and S. Huberson. Numerical simulation of unsteady flows behind cylindrical structures using finite difference-particle superposition algorithm. *Vortex Flows and Related Numerical Methods*, pages 159–170, 1993.
- [17] T. Chacon-Rebollo and T. Y. Hou. A lagrangian finite element method for the 2-d euler equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 43:735–767, 1990.
- [18] C.-C. Chang and R.-L. Chern. Vortex shedding for impulsively started rotating and translating circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 233:265–298, 1991.
- [19] A. Y. Cheer. Unsteady separated wake behind an impulsively started cylinder in slightly viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 201:485–505, 1989.
- [20] J. Chergui, I. Dupays, and D. Girou. Message passing interface. *Cours I.D.R.I.S.*, 1997.
- [21] J. P. Choquin and B. Lucquin-Desreux. Accuracy of a deterministic particle method for navier-stokes equation. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*.
- [22] A. J. Chorin. Numerical simulation of the navier-stokes equation. *Math. Comp.*, 22:745, 1968.
- [23] A. J. Chorin. Computational aspects of the turbulence problem. *In proc. 2nd Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Mech. Springer*, page 285, 1970.
- [24] A. J. Chorin. A numerical study of slightly viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 57:785–796, 1973.
- [25] A. J. Chorin. Vortex sheet approximation of boundary layers. *J. Comput. Phys.*, 27:428–442, 1978.
- [26] J. P. Christiansen. Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortices. *J. Comp. Phys.*, 13:363–379, 1973.
- [27] G-H. Cottet. thèse 3ème cycle, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1982.
- [28] G-H. Cottet. *Analyse numérique des Méthodes Particulières pour certains problèmes non linéaires*. thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1987.
- [29] G-H. Cottet. Vorticity boundary conditions and deterministic vortex methods for the navier-stokes equation. *Mathematical Aspects of Vortex Dynamics*, pages 128–143, 1988.
- [30] G-H. Cottet. Particle-grid domain decomposition methods for the navier-stokes equation in exterior domain. *Lect. in Applied Math.*, 28, 1991.
- [31] G-H. Cottet. A vorticity creation algorithm for navier-stokes equations in arbitrary domain. *Navier-Stokes equations and related nonlinear problems*, 1995.
- [32] G-H. Cottet and S. Mas-Gallic. A particle method to solve the navier-stokes system. *Num. Math.*, (57):1–23, 1990.
- [33] O. Daube. Vorticity boundary conditions for the navier-stokes equation in velocity-vorticity formulation. *Vortex Flows and Related Numerical Methods*, pages 117–127, 1993.
- [34] L. Debreu. *Thèse 3ème cycle*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble.

- [35] P. Degond and S. Mas-Gallic. The weighted particle method for convection-diffusion equation, part 1 : The case of an isotropic viscosity. *Mathematics of computation*, 53(188):485–507, 1989.
- [36] D. G. Dritschel. Contour dynamics and contour surgery : Numerical algorithms for extended, high-resolution modeling of vortex dynamics in two dimensional, inviscid, incompressible flows. *Comp. Phys. Rep.*, 10:77–146, 1989.
- [37] A. Friedmann. *Partial differential equation of parabolic type*. Prentice-Hall. Inc., Engewood Cliffs, 1964.
- [38] A. F. Ghoniem and Y. Gagnon. Vortex simulation of laminar recirculating flow. *J. Comp. Phys.*, 68(2), 1987.
- [39] K. Goda. A multistep technique with implicate difference schemes for calculating two or three-dimensional cavity flow. *J. Comp. Phys.*, 30:76–95, 1979.
- [40] L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulation. *J. Comp. Phys.*, 73:325, 1987.
- [41] J-L. Guermond. Sur l'approximation des équations de Navier-Stokes par une méthode de projection. *C.R Acad. Sci.*, 319:887–892, 1994.
- [42] F. Harlow. The particle-in-cell method for fluid dynamics. *J. Funct. Anal*, 9:296–305, 1964.
- [43] J. K. Harvey and F. J. Perry. Flow field produced by trailing vortices in the vicinity of the ground. *AIAA J.*, 9:1659–1661, 1971.
- [44] R. W. Hockney. *Comp. Phys. Comm.*, 2, 1971.
- [45] R. W. Hockney and J. W. Eastwood. Computer simulation using particles. *McGraw-Hill Inc*, 1981.
- [46] T.Y Hou and B.T.R. Wetton. Convergence of a finite difference scheme for the Navier-Stokes equations using vorticity boundary conditions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 53(188):485–507, 1989.
- [47] L. Hui-Zhong. *Simulation des écoulements externes visqueux incompressibles par une méthode de couplage différences finies-particulaires*. PhD thesis, LIMSI, Paris, 1996.
- [48] A. Jollés. *Résolution des équations de Navier-Stokes par des méthodes particules-maillages*. PhD thesis, Paris, 1989.
- [49] K. Kustafson and K. Halasi. Cavity flow dynamics at higher Reynolds number and higher aspect ratio. *J. Fluid Mech.*, 296:1–38, 1995.
- [50] J. X. Kong. thèse 3ème cycle, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1993.
- [51] P-D. Koumoutsakos. *Direct Numerical Simulations of Unsteady Separated Flows Using Vortex Methods*. PhD thesis, G.A.L.C.I.T, Pasadena, 1993.

- [52] P-D. Koumoutsakos. Inviscid axisymmetrization of an elliptical vortex. *J. Comp. Phys.*, 138:821–857, 1997.
- [53] P-D. Koumoutsakos and A. Leonard. Direct numerical simulations using vortex methods. *Vortex Flows and Related Numerical Methods*, pages 179–190, 1993.
- [54] P-D. Koumoutsakos and A. Leonard. High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods. *J. Comp. Phys.*, 113:52–61, 1994.
- [55] P-D. Koumoutsakos, A. Leonard, and F. Pepin. Boundary condition for viscous vortex methods. *J. Comp. Phys.*, 113:52–61, 1994.
- [56] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1932.
- [57] P. L. Lions. On the schwarz alternating method. *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 1–35, 1987.
- [58] Ta Phuoc Loc. Numerical analysis of unsteady vortices generated by an impulsively started circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 100:111, 1980.
- [59] Ta Phuoc Loc and R. Bouard. Numerical solution of the early stage of the unsteady viscous flow around a circular cylinder : a comparison with experimental visualization and measurements. *J. Fluid Mech.*, 160:93–117, 1985.
- [60] L.D Marini and A. Quarteroni. A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements. *J. Numer. Math.*, 55:575–598, 1989.
- [61] S. Mas-Gallic. *Contribution à l'analyse numérique des méthodes particulières*. thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1987.
- [62] S. Mas-Gallic. A particle in cell method for the 2-d compressible euler equations. *Vortex Flows and Related Numerical Methods*, pages 373–387, 1993.
- [63] A. McKerrell, C. Phillips, and L. M. Delves. Chebyshev expansion methods for the solution of elliptic partial differential equations. *J. Comp. Phys.*, 37:321–332, 1980.
- [64] J-C. Melander, M-C. Williams, and N-J Zabusky. Axisymmetrization and vorticity-gradient intensification of an isolated two-dimensional vortex through filamentation. *J. Fluid Mech.*, 178:137–159, 1987.
- [65] K. Z. Meth. Stable numerical boundary conditions for stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(5):1336–1351, 1994.
- [66] J. J. Monaghan. Extrapolation of b-splines for interpolation. *J. Comp. Phys.*, 60:253–262, 1985.
- [67] J. Negas. *Méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. MASSON, PARIS, 1976.
- [68] University of Tennessee. *Message Passing Interface Standard*. University of Tennessee, Knoxville, 1993.
- [69] P. Orlandi. Vortex dipole rebound from a wall. *Phys. Fluids*, 2:1429–1436, 1990.

- [70] S. A. Orszag. Spectral methods for problems in complex geometries. *J. Comp. Phys.*, 37:70–92, 1980.
- [71] A. J. Peace and N. Riley. *J. Fluid Mech.*, (129):409, 1983.
- [72] O. Pironneau. Conditions aux limites sur la pression pour les équations de stokes et de navier-stokes. *C.R Acad. Sci.*, 303:403–406, 1986.
- [73] L. Quartapelle. Vorticity conditioning in the computation of two-dimensional viscous flows. *J. Comp. Phys.*, 40:453–477, 1980.
- [74] P-A. Raviart. *An analysis of particle methods*, volume 1127 of *Lecture note in Math*. Springer-Verlag, Reading, Massachusetts, second edition, 1981.
- [75] S. Roberts. Accuracy of the random vortex for a problem with non-smooth initial conditions. *Center for Pure and Applied Mathematics, Berkeley, PAM-162*, 1983.
- [76] G. Russo and J. A. Strain. Fast triangulated vortex methods for 2d euler equations. *J. Comp. Phys.*, 111:291–323, 1994.
- [77] P. G. Saffman. The approach of a vortex pair to a plane surface. *J.Fluid Mech.*, (92):497, 1979.
- [78] R. Schreiber and H. B. Keller. Driven cavity flows by efficient numerical techniques. *J. Comp. Phys.*, 49:310–333, 1983.
- [79] H. A. Schwarz. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, volume 2 of *Springer*. Springer-Verlag, Berlin,New York, 1980.
- [80] W.-Z. Shen. PhD thesis.
- [81] M. Snir, S. Otto, S. Huss-Lederman, and D. Walker J. Dongarra. *MPI The Complete Reference*. The MIT Press, Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- [82] R. Temam. Navier-stokes numerical equations study in mathematics and its applications. 2, 1968.
- [83] A. Thome. The flow past circular cylinders at low speed. *Proc. Roy. Soc. London*, pages 651–669, 1933.
- [84] E. Weinan and J-G. Liu. Essentially compact schemes for unsteady viscous incompressible flows. *J. Comp. Phys.*, 126:122–138, 1996.
- [85] E. Weinan and J-G. Liu. Vorticity boundary conditions and related issues for finite difference schemes. *J. Comp. Phys.*, 124:368–382, 1996.
- [86] C. H. K. Williamson. 2-d and 3-d aspects of the wake of a cylinder and their relation to wake computations. *Lectures in Applied Mathematics*, 28:719–751, 1991.
- [87] G. S. Winckelmans. *Topics in vortex methods for the computations of three- and two-dimensional incompressible unsteady flows*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1989.

- [88] J.-Z. Wu, X. Wu, H. Ma, and J.-M. Wu. Dynamic vorticity boundary condition : theory and numerical implementation. *J. Numer. Meth. Fluids*, 1995.