



**HAL**  
open science

# Modélisation des instabilités liées au frottement sec des solides élastiques, aspects théoriques et numériques

Yves Renard

► **To cite this version:**

Yves Renard. Modélisation des instabilités liées au frottement sec des solides élastiques, aspects théoriques et numériques. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1998. Français. NNT: . tel-00004903

**HAL Id: tel-00004903**

**<https://theses.hal.science/tel-00004903>**

Submitted on 19 Feb 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Présentée par  
Yves RENARD

Pour obtenir le titre de  
**Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I**  
(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

---

---

## **Modélisation des instabilités liées au frottement sec des solides élastiques, aspects théoriques et numériques**

---

---

Date de soutenance : le 30 janvier 1998

### Composition du Jury :

M.	Denis CAILLERIE	Président
M.	Patrick LABORDE	Rapporteur
M.	Michel RAOUS	Rapporteur
Mme.	Michèle CHAMBAT	Examineur
M.	Ioan IONESCU	Examineur
M.	Jean-Claude PAUMIER	Examineur

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC (IMAG projet SIGMAS)



# REMERCIEMENTS

Je remercie Jean-Claude Paumier pour son soutien inconditionnel au cours de ces années de thèse et pour les nombreux échanges de vues qui ont permis de faire évoluer ce travail.

Je remercie Ioan Ionescu pour l'aide qu'il m'a souvent apportée dans la compréhension des phénomènes de frottement, et pour les fréquentes discussions sur le sujet.

Je remercie messieurs Patrick Laborde et Michel Raous, pour l'attention et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour leurs remarques constructives qui m'ont permis d'améliorer ce document de thèse.

Je tiens à remercier aussi l'ensemble des personnels du L.M.C. pour la bonne ambiance qui règne dans le laboratoire, et particulièrement l'ensemble de mes collègues thésards avec qui j'ai passé de très bonnes années en thèse.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction à la modélisation du frottement sec</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Lois classiques de frottement sec et leurs limitations</b>	<b>11</b>
1.1	Contact ponctuel . . . . .	11
1.2	Loi de Coulomb ou d'Amontons . . . . .	12
1.3	Insuffisances de la loi de Coulomb . . . . .	14
1.3.1	Variation du coefficient de frottement . . . . .	14
1.3.2	Déplacement normal . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Les lois de frottement sec non classiques</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction de la notation multivoque . . . . .	19
2.2	Lois à coefficient de frottement variable . . . . .	21
2.2.1	Dépendance par rapport au déplacement tangentiel . . . . .	21
2.2.2	Dépendance par rapport à la vitesse de glissement . . . . .	22
2.3	Lois de frottement à variables d'état . . . . .	24
2.4	Lois de frottement à déflexion normale . . . . .	26
2.5	Lois sur le modèle de la plasticité . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Frottement de corps élastiques</b>	<b>33</b>
3.1	Problème général d'élasticité . . . . .	33
3.1.1	Élasticité linéaire . . . . .	33
3.1.2	Fonctionnelles des travaux (ou puissances) virtuelles . . . . .	36
3.1.3	Le problème d'élasticité statique . . . . .	37
3.1.4	Le problème d'élasticité dynamique . . . . .	38
3.2	Le problème de Signorini . . . . .	39
3.2.1	Problème de Signorini avec frottement de Coulomb . . . . .	40
3.2.2	Problème avec force de frottement imposée de Tresca . . . . .	41
3.3	Le problème quasi-statique et incrémental . . . . .	42
3.3.1	Le problème incrémental . . . . .	43
3.4	Le problème dynamique avec frottement . . . . .	44
3.4.1	Le problème dynamique avec contrainte normale imposée . . . . .	44

3.5	Les lois non classiques et l'élasticité . . . . .	45
3.5.1	Les lois régularisées . . . . .	45
3.5.2	Lois à déflexion normale . . . . .	47
3.5.3	Lois à coefficient de frottement variable . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Modèles et analyse micro-mécaniques</b>	<b>53</b>
4.1	Contact entre deux surfaces rugueuses et aire réelle de contact . . . . .	54
4.2	Frottement de deux surfaces rugueuses : adhésion et labourage . . . . .	54
4.2.1	Composante d'adhésion . . . . .	54
4.2.2	Composante de labourage . . . . .	55
4.3	Modèles à micro-contacts . . . . .	56
4.3.1	Modèle de G.A. Greenwood et J.P.B. Williamson . . . . .	57
4.3.2	Modèle de W.R. Chang, I. Etsion et D.B. Bogy . . . . .	59
4.3.3	Autres modèles . . . . .	60
<b>II</b>	<b>Analyse du comportement stick-slip sur un problème modèle</b>	<b>61</b>
<b>1</b>	<b>Modélisation des instabilités liées au frottement sec</b>	<b>63</b>
1.1	Caractérisation des instabilités liées au frottement sec . . . . .	63
1.2	Problème modèle . . . . .	64
1.2.1	Choix du coefficient de frottement . . . . .	66
1.3	Difficulté de l'analyse mathématique du problème modèle . . . . .	68
<b>2</b>	<b>Systèmes à nombre fini de degrés de liberté</b>	<b>73</b>
2.1	Modèle à nombre fini de degrés de liberté . . . . .	73
2.2	Applications multivoques semi-continues supérieurement . . . . .	74
2.3	Inclusions différentielles . . . . .	77
2.4	Existence et unicité dans le problème de frottement . . . . .	80
2.5	Schémas aux différences pour les inclusions différentielles . . . . .	81
2.5.1	Présentation sur les méthodes linéaires à pas multiples . . . . .	82
2.5.2	Implémentations de schémas . . . . .	84
2.6	Comportement du modèle de frottement . . . . .	89
2.6.1	Modèle à un seul degré de liberté, $\mu$ variable . . . . .	90
2.6.2	Modèle à un seul degré de liberté, $\mu$ constant . . . . .	93
2.6.3	Modèle a plusieurs degrés de liberté . . . . .	94
<b>3</b>	<b>Problème de frottement unidimensionnel</b>	<b>99</b>
3.1	Présentation du problème unidimensionnel de frottement . . . . .	100
3.2	Non-unicité et critère de retard maximal . . . . .	104
3.3	Condition de frottement perturbée . . . . .	106

3.4	Convergence de la perturbation singulière . . . . .	109
3.4.1	Préalables sur quelques propriétés des fonctions réelles à variation bornées	111
3.4.2	Exemple numérique . . . . .	113
3.4.3	Majoration . . . . .	114
3.4.4	Couche limite en $t = 0$ . . . . .	116
3.4.5	Résultat général de convergence . . . . .	132
3.4.6	Relation avec le critère de retard maximal . . . . .	133
3.5	Analyse numérique . . . . .	135
3.5.1	Présentations de schémas numériques basés sur le schéma de Lax-Wendroff	135
3.5.2	Propriétés du schéma de Lax-Wendroff . . . . .	143
3.5.3	Étude de la stabilité des schémas . . . . .	147
3.5.4	Étude de la consistance des schémas . . . . .	155
3.6	Expériences numériques . . . . .	160
3.6.1	Essai numérique de convergence . . . . .	160
3.6.2	Comportement lorsque $\varepsilon$ diminue . . . . .	163
3.6.3	Comportement global pour un coefficient de frottement variable . . . . .	165
3.6.4	Comparaison avec le même système et un coefficient de frottement constant	171
<b>4</b>	<b>Perspectives pour le Problème de frottement continu multi-dimensionnel</b>	<b>173</b>
4.1	Schéma de directions alternées sur le problème tridimensionnel . . . . .	173
4.2	Schéma numérique tridimensionnel . . . . .	176
4.2.1	Problème vertical . . . . .	176
4.2.2	Problème horizontal . . . . .	179
4.3	Expériences numériques dans le cas bidimensionnel . . . . .	180
4.3.1	Comportement lorsque le paramètre de perturbation décroît . . . . .	180
4.3.2	Comportement du système avec condition périodique, $\mu$ variable . . . . .	186
4.3.3	Comportement du système avec condition périodique, $\mu$ constant . . . . .	196

## Notations diverses

$(\cdot)_+$	partie positive, $(x)_+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$
$Sgn$	Fonction signe multivoque, $Sgn(x) = x/ x $ si $x \neq 0$ et $Sgn(0) = [-1, 1]$ ,
$\underline{Dir}$	Généralisation de la fonction signe multivoque en dimension supérieure. $\underline{Dir}(v) = v/\ v\ $ si $v \neq 0$ et $\underline{Dir}(0) = \overline{B}(0, 1)$
$L^p(\Omega)$	$= \{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_{\Omega}  u ^p dx < \infty \}, 1 \leq p < \infty.$
$L^\infty(\Omega)$	$= \{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } C \text{ tel que }  u(x)  \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \},$
$W^{m,p}(\Omega), H^m(\Omega)$	les espaces de Sobolev,
$C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$	$= \{ u \in C(\Omega); \sup_{x,y \in \Omega} \frac{ u(x) - u(y) }{ x - y ^\beta} < \infty \}, \text{ avec } 0 < \beta \leq 1,$
$C^{\alpha,\beta}(\overline{\Omega})$	$= \{ u \in C^\alpha(\Omega); \mathbf{D}^j u \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega}), \forall j,  j  \leq \alpha \},$

## Notations en élasticité

On notera généralement les vecteurs par un symbole une fois souligné (par exemple  $\underline{u}$ ), les tenseurs symétriques du deuxième ordre par un symbole deux fois souligné (par exemple  $\underline{\underline{\sigma}}$ ) et le tenseur de Hooke symétrique du quatrième ordre par  $\underline{\underline{\underline{A}}}$ .

On adoptera la convention de sommation sur l'indice répété usuelle :  $u_i v_i = \sum_i u_i v_i$ .

$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u})$	tenseur des contraintes correspondant au déplacement $\underline{u}$ , on écrit $\sigma_{ij}$ les composantes du tenseur dans la base canonique,
$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$	tenseur linéarisé des déformations. dans la base canonique $(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}))_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i),$
$\underline{\underline{\underline{A}}}$	tenseur de Hooke du quatrième ordre, on écrit $\mathcal{A}_{ijkl}$ les composantes du tenseur dans la base canonique,
$\underline{\underline{\sigma}} \underline{u}$	produit tensoriel (matriciel) de $\underline{u}$ par $\underline{\underline{\sigma}}$ , $(\underline{\underline{\sigma}} \underline{u})_i = \sigma_{ij} u_j,$
$\underline{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{\sigma}}$	produit tensoriel de $\underline{\underline{\sigma}}$ par $\underline{\underline{\underline{A}}}$ , $(\underline{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{\sigma}})_{ij} = \mathcal{A}_{ijkl} \sigma_{kh},$
$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$	produit de deux tenseurs, $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$
$\sigma_N$	composante normale des contraintes à la frontière du domaine, $\sigma_N = (\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}) \cdot \underline{n}$ , où $\underline{n}$ est la normale unitaire sortante sur le bord du domaine,
$\underline{\underline{\sigma}}_N$	vecteur de composante normale des contraintes à la frontière du domaine, $\underline{\underline{\sigma}}_N = \sigma_N \underline{n}$ ,
$\underline{\underline{\sigma}}_T$	vecteur de composante tangentielle (ou de cisaillement) des contraintes à la frontière du domaine, $\underline{\underline{\sigma}}_T = \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} - \underline{\underline{\sigma}}_N,$
$u_N$	composante normale du déplacement $\underline{u}$ sur le bord du domaine, $u_N = \underline{u} \cdot \underline{n}$ ,
$\underline{u}_N$	vecteur composante normale du déplacement $\underline{u}$ , $\underline{u}_N = u_N \underline{n}$ ,
$\underline{u}_T$	vecteur composante tangentielle du déplacement, $\underline{u}_T = \underline{u} - \underline{u}_N,$
$\underline{v}_G$	la vitesse relative sur le bord de frottement,
$\Omega$	le domaine occupé par le corps élastique,
$\Gamma$	la frontière de $\Omega$ ,
$\Gamma_C$	la partie de $\Gamma$ candidate au contact,
$\Gamma_U$	la partie de $\Gamma$ où on impose un déplacement,
$\Gamma_F$	la partie de $\Gamma$ où on impose les forces,

## **Première partie**

# **Introduction à la modélisation du frottement sec**



## Introduction

Dans l'étude bibliographique que nous présentons ici, on s'intéresse aux différents modèles de frottement sec, et à leur étude mathématique.

Le frottement sec désigne l'ensemble des phénomènes qui naissent dans les zones superficielles de deux corps maintenus en contact, et effectuant un mouvement l'un par rapport à l'autre, en l'absence de lubrification. Les premiers travaux que l'on connaît sur le frottement sont ceux de Léonard de Vinci au début du 16<sup>ème</sup> siècle. Malgré l'ancienneté de l'intérêt porté à ce domaine, la compréhension des mécanismes entrant en jeu est restée longtemps très lacunaire. Il faut attendre les dernières décennies et l'accumulation de données expérimentales et de résultats théoriques pour que des progrès importants soient faits.

Les phénomènes qui sont à l'origine des forces de frottement sont très divers. On admet généralement que le glissement des aspérités en contact engendre localement des hautes températures qui permettent des processus physico-chimiques tels que la déformation plastique des aspérités, la formations d'alliages, de fusions suivies de trempes, d'oxydations, etc.

Les mécanismes microscopiques qui produisent le frottement sec peuvent être de différentes natures selon les conditions du contact. Cela, ajouté à la difficulté des mesures expérimentales, explique que malgré les nombreuses études sur le sujet le lien entre le comportement microscopique et macroscopique ne soit pas encore clairement élucidé.

Certains auteurs considèrent que la modélisation du frottement passe par la prise en compte d'un troisième corps, l'interface entre les deux parties en contact. Les propriétés mécaniques de celui-ci étant différentes de celles de l'intérieur des deux corps. C'est particulièrement le cas s'il s'agit d'un frottement lubrifié par un liquide ou un solide. Dans ce cas l'étude mène à la modélisation de l'écoulement ou des déformations plastiques du troisième corps. Cette analyse peut être extrêmement complexe à grande vitesse de glissement. Dans cette étude on se restreint au cas du frottement sec. Il n'y a donc pas à proprement parler de troisième corps, néanmoins les propriétés des surfaces en contact peuvent être très différentes de celles du corps des solides en contact (effet de la géométrie du contact, couches d'oxydes ou effets de trempes pour les métaux).

Dans le premier chapitre, on introduit les lois classiques du frottement sec (lois de Coulomb), et on présente des études expérimentales qui montrent leurs limitations. Le deuxième chapitre est consacré aux lois de frottement plus élaborées. Ces dernières décennies, plusieurs

modèles de frottement ont été proposés qui généralisent et complètent le modèle de Coulomb. Le troisième chapitre présente les études mathématiques du frottement de corps élastiques, et le quatrième chapitre donne un aperçu des analyses et des modélisation des micro-mécanismes qui sont à la base du contact et du frottement.

## Petit historique

On va citer quelques étapes importantes dans l'élaboration de la théorie du frottement.

La notion de coefficient de frottement s'est imposée durant la période qui va du 16<sup>ème</sup> au 18<sup>ème</sup> siècle. Léonard de Vinci s'intéresse au frottement vers le début du 16<sup>ème</sup> siècle et donne une première valeur (0.25) du coefficient de proportionnalité entre la force de frottement et le poids du corps. Deux siècles plus tard, vers la fin du 17<sup>ème</sup> siècle, G. Amontons redécouvre ces aspects et les étend. Il énonce les premières lois de frottement véritables.

Au 18<sup>ème</sup> siècle on s'intéresse à la rugosité des surfaces et L. Euler fait la différence entre frottement statique et frottement dynamique grâce à des expériences de petits solides glissant sur des plans inclinés. Il estime que cette différence est due au fait que plus le glissement est rapide plus les aspérités d'une surface sautent d'une aspérité de la surface opposée à l'autre, réduisant ainsi le contact.

C.A. Coulomb, à partir de nombreuses expériences, confirme les lois d'Amontons. Il pose le problème de la dépendance à la rugosité des surfaces et du rôle de l'adhésion. Il est en outre le premier à faire référence à une augmentation du coefficient statique avec le temps de contact stationnaire.

Toutefois jusqu'à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, on s'intéresse peu au problème du contact. Il faut attendre Hertz en 1881 qui énonce des résultats sur les déformations induites par un contact élastique sphère/plan ou cylindre/plan.

Dés lors, les travaux sur le contact et le frottement ont été abordés par de nombreux chercheurs, les travaux de Hertz étant confirmés par des résultats expérimentaux mettant en œuvre la mesure de conductance du contact.

Les travaux sur la rugosité des surfaces font ressortir le rôle primordial du comportement des aspérités. Il apparaît que le contact réel s'effectue sur une petite portion de l'aire apparente de contact.

En 1933, A. Signorini pose le problème général de l'équilibre d'un corps élastique en contact sans frottement avec une fondation rigide.

Les important travaux de F.P. Bowden et D. Tabor font une synthèse et améliorent les résultats obtenus sur l'analyse du frottement (voir F.P. Bowden, D. Tabor [7] [8], D. Tabor [81]).

G. Duvaut et J.L. Lions [27] dans la continuité des études des problèmes de l'élasticité comme minimisation de fonctionnelle quadratiques, posent le problème du corps élastique glissant avec frottement sous la forme d'une inéquation variationnelle. Ce sera aussi le départ de beaucoup de travaux.

La loi de Coulomb appliquée au problème de Signorini se révèle poser de nombreux problèmes mathématiques. De plus elle ne rend pas compte de tous les phénomènes observés lors du frottement de deux corps en contact. Partant de là, beaucoup d'études seront menés en vue d'améliorer ces lois de frottement. Ces études seront largement abordées dans la suite de ce texte.



# Chapitre 1

## Lois classiques de frottement sec et leurs limitations

Une loi de frottement sec est un modèle mathématique reliant les principaux paramètres qui entrent en jeu dans les mécanismes du frottement sec. Les premières lois de ce type, élaborées à partir du 16<sup>ème</sup> siècle, résument les propriétés des surfaces en présence par la notion de coefficient de frottement, c'est à dire par le rapport maximal entre force tangentielle et force normale au point de contact. Bien sûr, c'est très insuffisant pour décrire l'ensemble des phénomènes qui interviennent lors du frottement. Malgré tout, ce modèle simple exhibe déjà beaucoup de difficultés, du fait de sa non-linéarité et de sa non-différentiabilité.

Dans ce chapitre, on s'attache à décrire ces premières lois de frottement sec, ainsi que certaines critiques qui donnent un aperçu de leur limitations.

### 1.1 Contact ponctuel

Ces première lois de frottement ont été élaborées dans le cadre du contact ponctuel entre deux solides rigides, classiquement, un solide rigide effectuant un mouvement de translation sur un plan rigide (voir figure 1.1). Décrivons ce modèle simple. On désigne par  $\underline{R}$  la réaction du plan sur le solide que l'on décompose en composante tangentielle  $\underline{F}_f$  (ici projection sur le plan) et en composante normale  $N$ . On désigne par  $\underline{u}$  le déplacement de translation du solide que l'on décompose aussi en composante tangentielle  $\underline{u}_T$  et composante normale  $u_N$ . On considère que le contact a lieu lorsque  $u_N = 0$ . La vitesse de glissement est  $\underline{v}_G = \partial_t \underline{u}_T$  lorsqu'il y a contact.

Le solide est en contact unilatéral, c'est à dire que l'on a :

$$u_N \geq 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

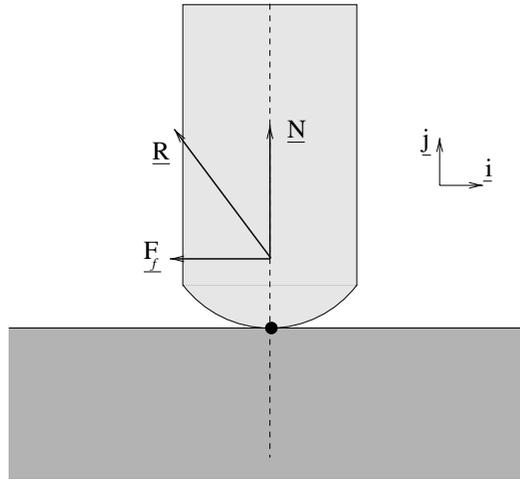


FIG. 1.1 – Point matériel en contact unilatéral avec un demi espace.

Le contact peut être rompu, et dans ce cas on a :

$$u_N > 0 \text{ et } \underline{R} = 0,$$

ou bien peut avoir lieu, et dans ce cas on a :

$$u_N = 0 \text{ et } N \geq 0.$$

(On parle de contact bilatéral lorsque le contact est astreint à avoir lieu, c'est à dire  $u_N = 0$ . Dans ce cas on peut avoir  $N < 0$ ).

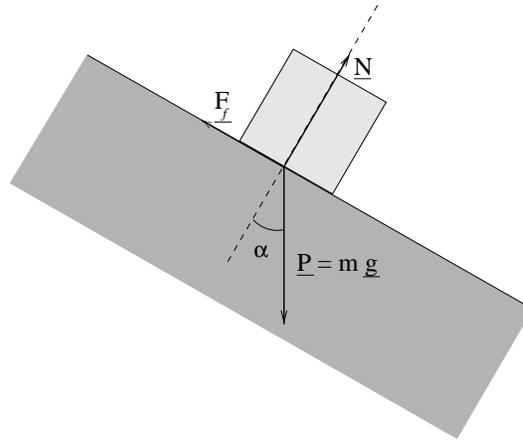
On dit que l'on a un glissement parfait, ou sans frottement, lorsque la composante tangentielle  $\underline{F}_f$  est nulle. Si au contraire, une force tangentielle existe, on dit que l'on a un glissement avec frottement, et on est amené à introduire une loi de frottement qui relie cette composante tangentielle aux autres variables du système.

## 1.2 Loi de Coulomb ou d'Amontons

Historiquement, G. Amontons a mis en avant la proportionnalité de la force de frottement  $|\underline{F}_f|$  et du chargement normal  $N$ . De manière générale on parle de loi de Coulomb ou d'Amontons pour une loi de frottement qui respecte cette proportionnalité.

L'expérience qui illustre le mieux la loi de Coulomb est celle d'un petit solide de base carré, posé sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  et soumis à son poids  $\underline{P}$  (voir figure 1.2). Expérimentalement, il existe une inclinaison critique  $\alpha_{cr}$  en deçà de laquelle le petit solide reste immobile et au delà de laquelle il se met en mouvement.

1. Ici, dans le cas des solides rigides, le vecteur  $\underline{N}$  désigne la normale unitaire rentrante au solide considéré. Dans le cas des solides élastiques on utilisera la normale unitaire sortante.

FIG. 1.2 – *Petit solide sur un plan incliné.*

A l'équilibre la réaction du plan et le poids se compensent :

$$\underline{F}_f + \underline{N} + \underline{P} = 0,$$

on a donc :

$$|\underline{F}_f| = |P| \sin(\alpha),$$

$$|N| = |P| \cos(\alpha).$$

Le coefficient de frottement  $\mu_s$  est le rapport  $\frac{|\underline{F}_f|}{|N|}$  à l'inclinaison critique :

$$\mu_s = \frac{\sin(\alpha_{cr})}{\cos(\alpha_{cr})} = \tan(\alpha_{cr}).$$

La loi de Coulomb la plus simple stipule que le rapport  $\frac{|\underline{F}_f|}{|N|}$  reste égal à  $\mu_s$  lorsque le solide est en glissement. Elle s'énonce ainsi lorsqu'il y a contact :

$$\left| \begin{array}{l} u_N = 0 \quad \text{et } N \geq 0, \\ \text{soit } |\underline{F}_f| < \mu_s |N| \text{ et } \underline{v}_G = 0, \\ \text{soit } |\underline{F}_f| = \mu_s |N| \text{ et } \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \underline{v}_G = -\lambda \underline{F}_f. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

La force de frottement s'opposant toujours à la vitesse de glissement.

**Remarque :** Dans le cas du contact unilatéral on peut remplacer l'inéquation  $|\underline{F}_f| < \mu|N|$  par  $|\underline{F}_f| < \mu N$  puisque  $N \geq 0$ . De plus on peut récrire les conditions de contact unilatéral avec

frottement par la formulation équivalente suivante :

$$\left| \begin{array}{l} N \geq 0, \quad u_N \geq 0, \quad Nu_N = 0 \quad (\text{contact unilatéral}), \\ |E_f| \leq \mu N, \quad E_f |v_G| = \mu N v_G. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

L. Euler, au début du 18<sup>ème</sup>, fait une observation importante sur l'expérience du solide posé sur un plan incliné. D'après la loi de Coulomb, lorsque le glissement a lieu, le petit solide a un mouvement uniformément accéléré. Le module de l'accélération est :

$$a = g(\sin(\alpha) - \mu_s \cos(\alpha)),$$

où  $g$  est la constante de gravitation terrestre. Or dans les expériences, on n'arrive pas à obtenir un mouvement avec une accélération aussi petite que l'on veut. Il existe une accélération minimale. Il en conclut que le rapport  $\frac{|E_f|}{|N|}$  ne reste pas égal à  $\mu_s$  lors du glissement et il considère un coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  qui est plus petit que  $\mu_s$ . La loi de frottement s'écrit lorsqu'il y a contact :

$$\left| \begin{array}{l} u_N = 0 \quad \text{et} \quad N \geq 0, \\ \text{soit} \quad |E_f| < \mu_s |N| \quad \text{et} \quad v_G = 0, \\ \text{soit} \quad |E_f| = \mu_d |N| \quad \text{et} \quad \exists \lambda \geq 0 \quad \text{tel que} \quad v_G = -\lambda E_f. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Si cette formulation permet de mieux rendre compte des comportements expérimentaux, elle introduit par contre une difficulté. En effet pour  $|E_f| = \mu_d N$  et  $v_G = 0$  on ne sait pas si on est dans la première alternative (cas collé) ou dans la deuxième alternative (début de glissement). On lève généralement cette indétermination par une description dynamique (souvent implicite) de la loi de frottement. Pratiquement on décrit les transitions acceptables de l'état en glissement à l'état collé et de l'état collé à l'état en glissement.

## 1.3 Insuffisances de la loi de Coulomb

### 1.3.1 Variation du coefficient de frottement

E. Rabinowicz est l'auteur d'importants travaux sur le frottement de solides métalliques (voir E. Rabinowicz [72] plus particulièrement). Il s'est intéressé au phénomène de stick-slip, qui engendre des instabilités (grincements) lors du glissement à des vitesses réduites. On analyse généralement cela comme une suite d'états collés et en glissement. La modélisation par une simple loi de Coulomb ne permet pas de rendre compte des résultats expérimentaux, tout au moins sur des modèles simples à pression de contact constante. Il propose donc de considérer deux dépendances :

- . Le coefficient statique  $\mu_s$  dépend du temps de contact stationnaire.
- . Le coefficient dynamique  $\mu_d$  dépend de la vitesse de glissement.

En ce qui concerne le premier point, soulevé à l'origine par Coulomb, le débat est encore ouvert pour savoir si on doit effectivement faire dépendre  $\mu_s$  du temps de contact stationnaire ou de la vitesse de chargement tangentielle (i.e. la vitesse avec laquelle la force tangentielle varie). Des expériences de V.I. Johannes, M.A. Green et C.A. Brockley [44] montrent une variation de 0.28 à 0.38 du coefficient statique par un changement d'un facteur 1000 de la vitesse de chargement tangentielle. On pourra trouver une discussion de ce problème dans R.S.H. Richardson, H. Nolle [77] qui compare l'influence des deux paramètres que sont la vitesse de chargement tangentielle et le temps de contact stationnaire sur le coefficient statique. Sa conclusion est que les deux paramètres sont nécessaires à la bonne description du mouvement. On pourra voir aussi A. Tudor et Li Chun Bo [84] sur le contact stationnaire durant le mouvement stick-slip.

Quant au deuxième point, E. Rabinowicz précise qu'il existe un retard entre le changement de vitesse de glissement et le changement de coefficient de frottement. Ce retard correspond à un glissement d'environ  $10^{-3}$  cm dans les expériences qu'il a mené sur des pièces métalliques. Il propose que l'on ne fasse pas dépendre le coefficient de frottement de la vitesse instantanée mais d'une moyenne des vitesses sur les  $10^{-3}$  cm glissés précédemment.

### 1.3.2 Déplacement normal

Les surfaces qui entrent en contact, même minutieusement usinées ne sont jamais parfaitement planes. Celle-ci sont formées d'aspérités plus ou moins fines mais toujours grandes par rapport à la dimension moléculaire. Les propriétés mécaniques de ces aspérités sont souvent sensiblement différentes des propriétés des matériaux composant les corps des solides. Pour cette raison, on peut considérer qu'entre les deux surfaces en contact il y a une interface de petite épaisseur qui a un comportement propre (voir figure 1.3, ainsi que le chapitre 4).

D.M. Tolstoy en 1967 [83] a effectué des expériences sur le frottement de pièces métalliques qui montrent qu'il y a un lien entre la variation de la force de frottement et le déplacement normal de la pièce (voir figure 1.4).

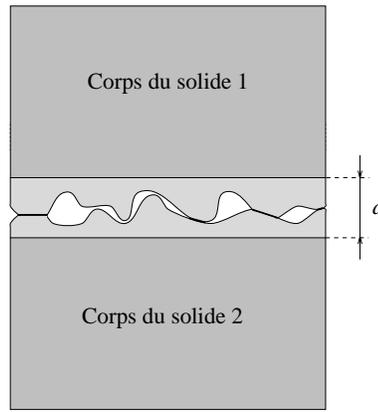


FIG. 1.3 – *Interface entre deux corps en contact.*

Son interprétation est la suivante : le glissement s'accompagne de chocs entre les aspérités des deux surfaces en contact. Ces chocs entretiennent une certaine pression qui s'oppose à la compression de l'interface. La force de frottement  $F_f$  dépend donc à la fois de la vitesse de glissement  $v_G$  et de l'épaisseur de l'interface  $a$ . Il décompose la variation de la force de frottement en deux parties :

$$\frac{dF_f}{dv_G} = \frac{\partial F_f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial v_G} + \frac{\partial F_f}{\partial v_G}, \quad (1.4)$$

où  $\frac{\partial F_f}{\partial v_G}$  serait toujours positif et représente l'augmentation de la résistance au cisaillement avec la vitesse de glissement,

où  $\frac{\partial F_f}{\partial a}$  représente la diminution de la force de frottement avec la séparation  $a$ ,

et où  $\frac{\partial a}{\partial v_G}$  représente l'augmentation de la séparation avec la vitesse de glissement.

Expérimentalement il y a deux cas où  $\frac{\partial a}{\partial v_G}$  est constaté nul, pour des vitesses extrêmement petites et lorsque les déplacements normaux sont fortement amortis. Dans ces deux cas, l'auteur constate qu'il n'y a pas de phénomène de stick-slip, phénomène qui intervient lorsque  $\frac{dF_f}{dv_G} < 0$ .

Il constate a contrario que si on impose une vibration normale au glisseur, on observe une réduction substantielle du frottement, particulièrement importante si on impose une vibration en résonance avec la vibration naturelle du glisseur.

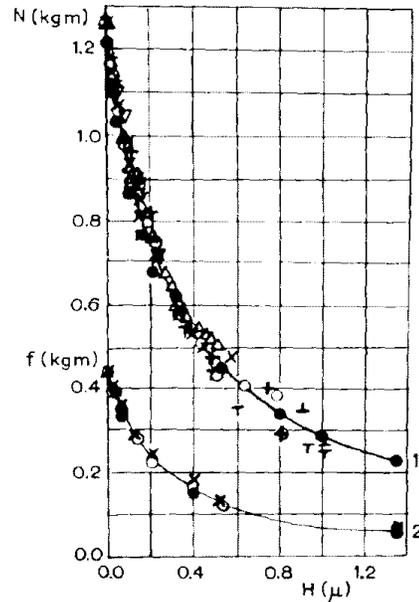


FIG. 1.4 – Force de frottement  $f$  et charge normale  $N$  en fonction de la composante normale du déplacement  $H$  <sup>(1)</sup>.

## Conclusion

Les lois classiques de Coulomb ou d'Amontons relient de manière simple les composantes normales et tangentielles des contraintes qui s'exercent au point de contact lors d'un glissement. La plupart des expériences sur le frottement sec montrent les limitations de la validité de ces lois. On vient de voir deux aspects à partir desquels on pourrait compléter la loi de Coulomb. Dans le chapitre qui suit, on décrit différentes lois de frottement qui ont été proposées pour rendre compte, dans une certaine mesure, de ces constatations expérimentales.

1. Figure reproduite de Wear, 10, D.M. Tolstoi, Significance of the normal degree of freedom and natural vibration in contact with friction, pp 199-213, 1967, avec la permission de Elsevier Science S.A., Lausanne, Switzerland.



## Chapitre 2

# Les lois de frottement sec non classiques

La modélisation par une loi de Coulomb ne permet pas de rendre compte de certains phénomènes importants du glissement avec frottement. Durant les dernières décennies, différents modèles de frottement ont été proposés. Dans ce chapitre on présente les lois à coefficient de frottement dépendant de la vitesse de glissement ou du déplacement tangentiel, les lois de frottement à variables d'état initiées par J.H. Dieterich, les lois à déflexion normale (normal compliance laws) initiées par J.T. Oden et J.A.C. Martins, ainsi que les tentatives d'interprétation du frottement en analogie avec les lois modélisant la plasticité.

### 2.1 Introduction de la notation multivoque

Ce paragraphe présente l'utilisation de fonctions multivoques issues de l'analyse convexe. C'est un cadre qui a été introduit par J.J. Moreau pour les problèmes de contact unilatéral. On pourra consulter J.J. Moreau [59] [60], ou A. Klarbring, A. Mikelic et M. Shillor [46]. Toutefois dans la suite du chapitre la présentation sera faite à la fois dans une notation usuelle et en notation multivoque.

Une fonction multivoque  $F$  de  $\mathbb{R}^N$  est une fonction  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ , c'est à dire une fonction dont les valeurs sont des sous ensembles de  $\mathbb{R}^N$ .

On désigne par  $\underline{Dir}$  la fonction multivoque de  $\mathbb{R}^N$  définie par :

$$\underline{Dir}(v) = \begin{cases} \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\} & \text{si } v \neq 0, \\ \overline{B}(0, 1) & \text{si } v = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\overline{B}(0, 1)$  est la boule fermée de centre 0 et de rayon 1. En analyse convexe la fonction multivoque  $\underline{Dir}$  est le sous-différentiel de la fonction convexe  $v \mapsto \|v\|$ .

On peut facilement visualiser la fonction  $\underline{Dir}$  en dimension 1, c'est la fonction dont la valeur en 0 est le segment  $[-1, 1]$  (voir figure 2.1)

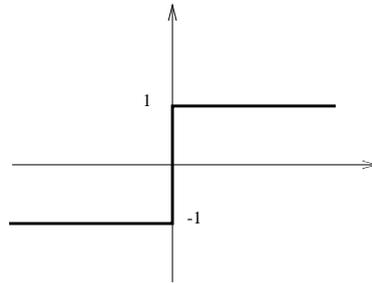


FIG. 2.1 – Fonction multivoque  $\underline{Dir}$ .

Avec la fonction multivoque  $\underline{Dir}$  l'expression (1.2) des conditions de contact unilatéral avec frottement de Coulomb devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_N \geq 0, \\ \text{soit } u_N > 0 \text{ et } \underline{F}_f = \underline{N} = 0, \\ \text{soit } u_N = 0, N \geq 0 \text{ et } \underline{F}_f \in -\mu_s N \underline{Dir}(v_G). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

On introduit une autre fonction multivoque  $J_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}) \setminus \{\emptyset\}$  définie par :

$$J_N(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x < 0 \\ [0, +\infty[ & \text{si } x = 0, \\ \emptyset & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

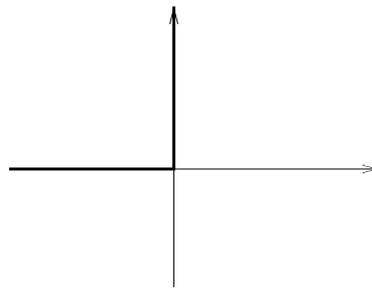


FIG. 2.2 – Fonction multivoque  $J_N(x)$ .

En analyse convexe,  $J_N(x)$  est le sous-différentiel de la fonction indicatrice<sup>1</sup> de l'intervalle  $] -\infty, 0]$  qui est une fonction convexe.

1. La fonction indicatrice d'un ensemble  $A$  vaut 0 sur  $A$  et  $+\infty$  sur le complémentaire de  $A$ .

Avec la fonction  $J_N(x)$  définie par (2.3) les conditions de contact se récrivent :

$$\begin{cases} N \in J_N(-u_N), \\ \underline{F}_f \in -\mu N \underline{Dir}(\underline{v}_G). \end{cases} \quad (2.4)$$

Il est de plus intéressant de voir que si on pose :

$$\partial I_{C(N)}(\underline{F}_f) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } |\underline{F}_f| < \mu|N|, \\ \underline{F}_f[0, +\infty[ & \text{si } |\underline{F}_f| = \mu|N|, \\ \emptyset & \text{si } |\underline{F}_f| > \mu|N|. \end{cases} \quad (2.5)$$

le sous-différentiel de la fonction  $I_{C(N)}$ , fonction indicatrice de l'ensemble :

$$C(N) = \{\underline{F}_f \in \mathbb{R}^N; |\underline{F}_f| \leq \mu|N|\},$$

on peut récrire la deuxième inclusion de (2.4) comme suit :

$$\underline{v}_G \in -\partial I_{C(N)}(\underline{F}_f), \quad (2.6)$$

c'est à dire une sorte d'inclusion inverse. On peut aussi la récrire :

$$I_{C(N)}(\underline{F}_f) + \mu N |\underline{v}_G| = -\underline{F}_f \cdot \underline{v}_G, \quad (2.7)$$

et vérifier facilement que ce sont des formulations équivalentes.

## 2.2 Lois à coefficient de frottement variable

Une première extension de la loi de Coulomb est de considérer un coefficient de frottement qui dépend de la vitesse de glissement ou du déplacement tangentiel.

### 2.2.1 Dépendance par rapport au déplacement tangentiel

La dépendance du coefficient de frottement par rapport au déplacement tangentiel peut rendre compte de l'endommagement des surfaces au cours du glissement. Principalement lorsque l'on s'intéresse à la transition collage-décollage. L'expression en contact unilatéral de cette loi est identique à celle de la loi de Coulomb :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } u_N > 0 \text{ et } \underline{F}_f = \underline{N} = 0 \text{ ( le contact n'a pas lieu )} \\ \text{Soit } u_N = 0 \text{ et } N \geq 0 \text{ ( le contact a lieu ) avec :} \\ \quad \text{soit } |\underline{F}_f| < |\underline{N}|\mu(|\underline{u}_T|) \text{ et } \underline{v}_G = 0, \\ \quad \text{soit } |\underline{F}_f| = |\underline{N}|\mu(|\underline{u}_T|) \text{ et } \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \underline{v}_G = -\lambda \underline{F}_f. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

En général cette variation s'exprime par une décroissance du coefficient  $\mu$  par rapport au déplacement tangentiel  $|\underline{u}_T|$  (voir I.R. Ionescu et J.-C. Paumier [43]).

Toutefois ce type de dépendance est plus utilisé en liaison avec le problème statique où la condition de frottement est exprimée en fonction du déplacement tangentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } u_N > 0 \text{ et } \underline{F}_f = \underline{N} = 0 \text{ ( le contact n'a pas lieu )} \\ \text{Soit } u_N = 0 \text{ et } N \geq 0 \text{ ( le contact a lieu ) avec :} \\ \quad \text{soit } |\underline{F}_f| < |\underline{N}|\mu(0) \text{ et } \underline{u}_T = 0, \\ \quad \text{soit } |\underline{F}_f| = |\underline{N}|\mu(|\underline{u}_T|) \text{ et } \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \underline{u}_T = -\lambda \underline{F}_f. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

soit en expression multivoque :

$$\left\{ \begin{array}{l} N \in J_N(-u_N), \\ \underline{F}_f \in -N\mu(|\underline{u}_T|)\underline{Dir}(\underline{u}_T). \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Le principal intérêt de cette expression statique est qu'on peut la relier à l'expression incrémentale du problème de frottement quasi-statique (voir chap. 3). La dépendance du coefficient de frottement en déplacement tangentiel exprime alors une dépendance en vitesse de glissement.

### 2.2.2 Dépendance par rapport à la vitesse de glissement

Les lois de frottement de type Coulomb avec coefficient dépendant de la vitesse de glissement sont d'inspiration ancienne. Rabinowicz en parle déjà dans son article de 1958 [72]. Elles sont une généralisation de la loi qui ne considère que deux valeurs pour le coefficient de frottement. Des travaux expérimentaux importants ont été faits pour mesurer cette dépendance sur différents matériaux. En général ce sont des expériences faites sur des échantillons en glissement, pour lesquels on mesure la force de frottement en maintenant constant une certaine vitesse de frottement. Les régimes transitoires, où la vitesse de glissement varie sont extrêmement difficiles à mesurer.

En général on utilise des coefficients de frottement qui décroissent d'une certaine valeur  $\mu_s$  appelée coefficient de frottement statique à une valeur  $\mu_d$  appelée coefficient de frottement dynamique, qui est atteinte asymptotiquement pour des grandes vitesses de glissement.

Un exemple typique est une loi avec décroissance exponentielle (voir Li Chun Bo et D. Pavelescu [51] par exemple) :

$$\mu(|v_G|) = \mu_d + (\mu_s - \mu_d)e^{-\frac{|v_G|}{V_{cr}}}, \quad (2.11)$$

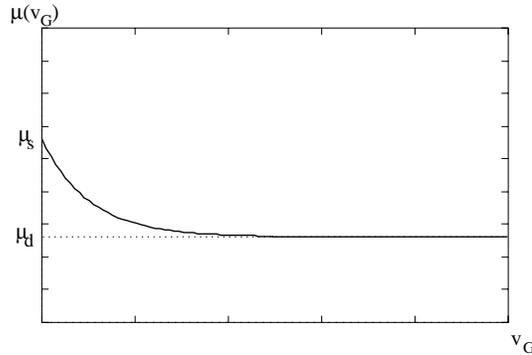


FIG. 2.3 – Dépendance en  $v_G$  du coefficient de frottement.

où  $V_{cr}$  est une vitesse critique dépendante du matériau.

Des dépendances déterminées expérimentalement peuvent avoir des formes plus complexes. Elle dépendent beaucoup de l'état de finition des surfaces et des matériaux en contact. On pourra consulter par exemple E. Rabinowicz [71] [72], F.P. Bowden, D. Tabor [8], D.M. Tlstoi [83], J.H. Dieterich [22], C. Gao, D. Kuhlmann-Wilsdorf D. [31] et A.I. Leonov, A. Srinivasan [50] pour voir la diversité de tels résultats.

L'expression avec les notations multivoques s'écrit :

$$\begin{cases} N \in J_N(-u_N), \\ \underline{F}_f \in -N\mu(|\underline{v}_G|)\underline{Dir}(\underline{v}_G). \end{cases} \quad (2.12)$$

Un des problèmes mathématiques important est que la deuxième inclusion de (2.12) ne s'inverse pas comme celle de (2.4) pour la loi de Coulomb car  $N\mu(|\underline{v}_G|)\underline{Dir}(\underline{v}_G)$  n'est plus monotone en  $\underline{v}_G$ .

## 2.3 Lois de frottement à variables d'état

Ce sont des formulations de loi de frottement qui sont apparues principalement dans la modélisation du glissement de couches géologiques dans les tremblements de terre. W.R. Brace, J.D. Byerlee [9] ont les premiers mis en avant l'analogie entre les phénomènes de stick-slip et les tremblements de terre. Ce type de loi a été développé principalement par J.H. Dieterich et A. Ruina.

Cela consiste en des généralisations de la loi de Coulomb, prenant en compte, non seulement des dépendances du coefficient de frottement comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, mais aussi des dépendances par rapport à des variables d'état de l'interface.

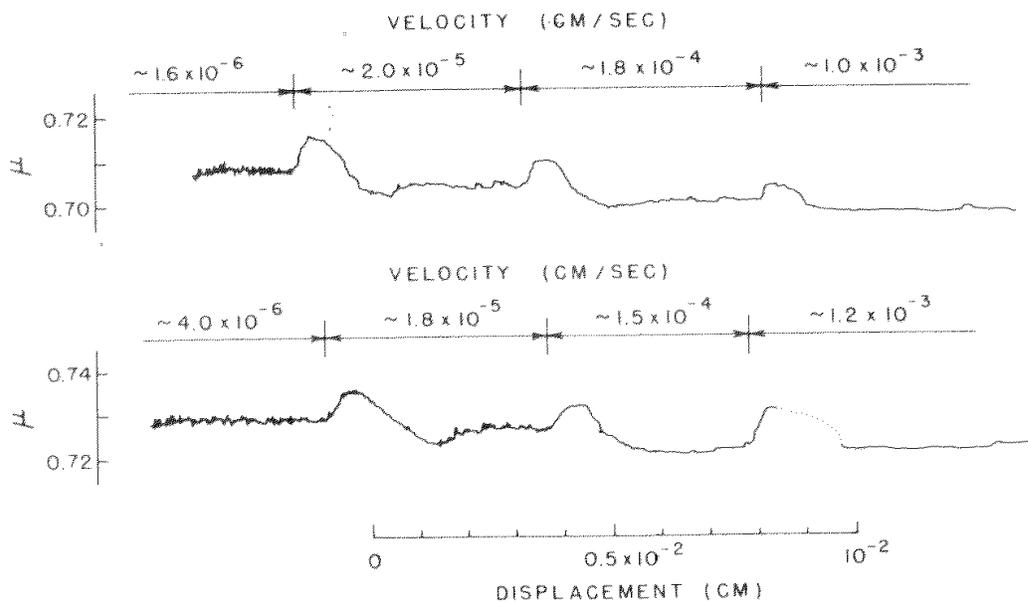


FIG. 2.4 – Exemple de résultats expérimentaux de glissement avec frottement d'échantillons de roches <sup>(2)</sup>. On y voit la dépendance du coefficient de frottement en vitesse de glissement et les transitions aux changements de vitesse de glissement.

A. Ruina [79] dans la continuité des travaux de J.H. Dieterich (dans [23] par exemple), propose la modélisation suivante :

Quand on fait des expériences de frottement à vitesse de glissement  $v_G$  constante, on observe un coefficient de frottement qui correspond à cette vitesse, soit  $\mu_{ss}(v_G)$  (ss pour steady state).

2. Figure reproduite du Journal of Geophysical Research, 84 N° B5, J.H. Dieterich, Modeling of rock friction part I, pp 2161-2168, 1979.

On suppose que l'état de la surface en glissement est caractérisée par une collection de variables internes  $\theta_i$ , représentant la mémoire des glissement antérieurs (en général une moyenne des vitesses de glissement immédiatement antérieures).

En posant  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$ , on écrit alors la loi d'évolution de la contrainte de cisaillement  $\tau$  et des variables internes  $\theta$  sous la forme :

$$\begin{cases} \tau = N \mu(\theta, v_G), \\ \frac{d\theta_i}{dt} = G_i(\theta, v_G). \end{cases} \quad (2.13)$$

où les fonctions  $\mu$  et  $G$  sont indépendantes de la contrainte normale  $N$ .

Pour être consistant avec l'état de glissement constant, on définit  $\theta_i^{ss}(v_G)$ , tel que pour une vitesse  $v_G$  constante, le système tende vers les valeurs  $\mu = \mu_{ss}(v_G)$  et  $\theta = \theta^{ss}(v_G)$ . Ce qui impose :

$$\begin{aligned} \mu_{ss}(v_G) &= \mu(\theta^{ss}(v_G), v_G), \\ G_i(\theta^{ss}(v_G), v_G) &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les lois de frottement qui seront retenues, traduisent une approche exponentielle du glissement à force de frottement constante, quand  $v_G$  est maintenue constante.

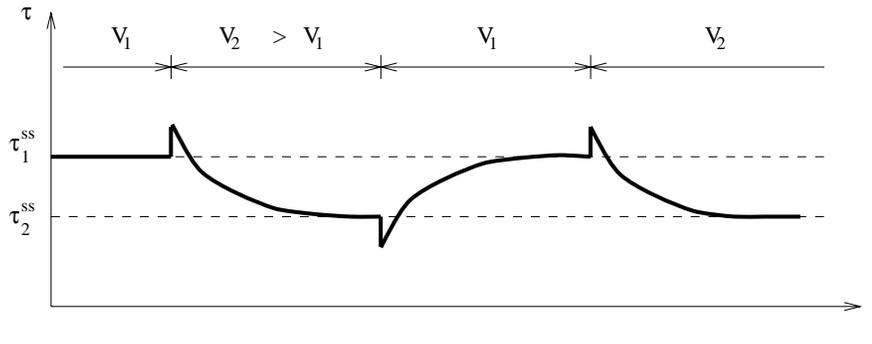


FIG. 2.5 – Contrainte de cisaillement  $\tau$  en fonction du temps. Les vitesses de glissement sont indiquées au dessus des flèches.

L'exemple le plus simple de ces lois est la loi simplifiée de Dieterich :

$$\begin{cases} \tau = N [\mu_0 + \theta + A \ln(\frac{v_G}{V_c})], \\ \frac{d\theta}{dt} = (-\frac{v_G}{d_c}) [\theta + B \ln(\frac{v_G}{V_c})], \end{cases} \quad (2.15)$$

où  $d_c$  est une distance critique de l'ordre d'une taille d'aspérité,  $V_c$  une constante de dimensionnement, A et B des constantes à déterminer expérimentalement.

On peut récrire ces équations sans faire intervenir la variable d'état  $\theta$  :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{NA}{v_G} \frac{\partial v_G}{\partial t} - \frac{v_G}{d_c} (\tau - \tau^{ss}(v_G)), \quad (2.16)$$

où

$$\tau^{ss}(v_G) = N\mu^{ss}(v_G) = N\mu_0 + N(A - B) \ln\left(\frac{v_G}{V_c}\right). \quad (2.17)$$

Une version un peu différente est utilisée dans F.G. Horowitz, A. Ruina [40] :

$$\begin{cases} \tau = N[\mu_0 + \theta + A \ln(\frac{v_G}{V_c})], \\ \frac{d\theta}{dt} = (-\frac{v_G}{d_c})[\theta + B \ln(\frac{v_G}{V_c}) + C \ln(\frac{v_G}{v_G + V_c})]. \end{cases} \quad (2.18)$$

Pour obtenir des lois qui ont le comportement indiqué sur la figure 2.5, on peut utiliser des lois avec deux variables d'état, de la forme :

$$\begin{cases} \tau = N[\mu_0 + \theta_1 + \theta_2 + A \ln(\frac{v_G}{V_c})], \\ \frac{d\theta_1}{dt} = (-\frac{v_G}{d_1})[\theta_1 + B_1 \ln(\frac{v_G}{V_c})], \\ \frac{d\theta_2}{dt} = (-\frac{v_G}{d_2})[\theta_2 + B_2 \ln(\frac{v_G}{V_c})]. \end{cases} \quad (2.19)$$

On remarque que ces lois ne permettent pas d'étudier des systèmes pour lesquels  $v_G$  s'approche de zéro. Ces lois sont adaptées pour étudier les instabilités autour d'un glissement permanent dans une direction donnée. Il est malgré tout possible de les adapter pour faire disparaître la singularité en  $v_G = 0$ .

On pourra trouver des éléments sur la stabilité de systèmes élastiques avec une telle loi de frottement dans J.R. Rice et A. Ruina [76] et dans J.C. Gu, J.R. Rice, A.L. Ruina et T. Tse [37].

## 2.4 Lois de frottement à déflexion normale

Les lois à déflexion normale (Normal compliance friction laws) ont été proposées par J.T. Oden et J.A.C. Martins 1985 [64]. Se basant sur des études constatations expérimentales telles que D.M. Tolstoi [83] et sur certains travaux concernant la réponse normale de l'interface comme ceux de M. Burdekin, A. Cowley et N. Back [10], ils proposent une loi de frottement

qui prend en compte l'écrasement normal de l'interface entre les deux corps en contact avec frottement. (voir figure 2.6)

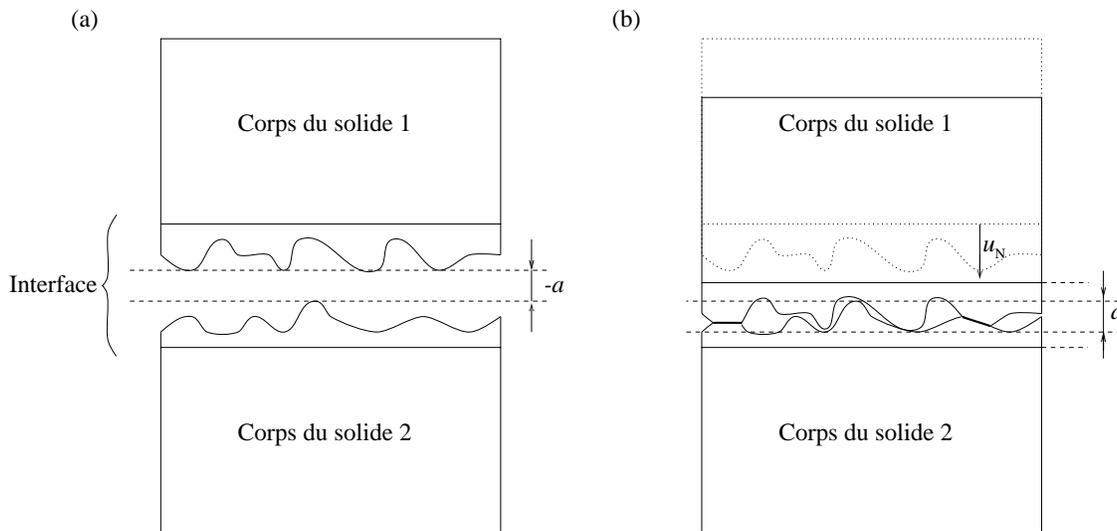


FIG. 2.6 – Écrasement de l'interface. Vue microscopique d'un contact en configuration de référence (a) et en configuration déformée (b)

Cette loi permet de résoudre certaines difficultés mathématiques dans la formulation du problème du frottement de corps élastique (voir chapitre 3).

On note  $a$  la composante d'interpénétration, représentant l'écrasement de l'interface entre le glisseur rigide et le plan rigide (voir figure 2.7).

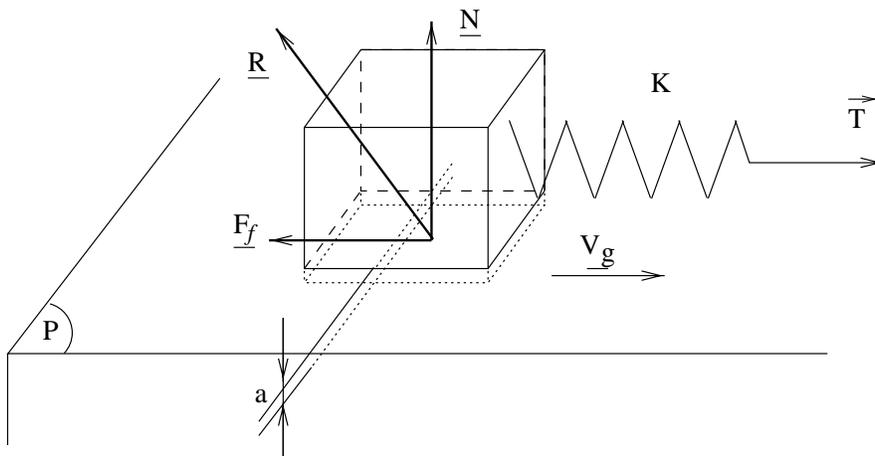


FIG. 2.7 – Pénétration du glisseur rigide dans le plan rigide  $P$ .

Cette composante d'interpénétration doit conserver une valeur très petite si l'on veut rester cohérent avec la physique du problème.

La loi à déflexion normale modélisant le contact unilatéral avec frottement s'exprime ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit } a < 0 \text{ et } \underline{F}_f = \underline{N} = 0 \text{ (Il n'y a pas contact) ,} \\ \text{soit } a \geq 0 \text{ et } N = c_N(a)^{m_N} \text{ (réponse normale de l'interface en contact) alors,} \\ \quad \text{soit } |\underline{F}_f| < c_T(a)^{m_T} \text{ et } v_G = 0, \\ \quad \text{soit } |\underline{F}_f| = c_T(a)^{m_T} \text{ et } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } v_G = -\lambda \underline{F}_f. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

où  $c_N, m_N, c_T, m_T$  sont des paramètres du matériau.

Pour une valeur de la composante d'interpénétration  $a$  constante, c'est à dire pour un chargement normal  $N$  constant, on retrouve la loi de Coulomb, avec :

$$\mu = C|\underline{N}|^\alpha \text{ où } C = c_T c_N^{1-\alpha} \text{ et } \alpha = \frac{m_T}{m_N} - 1.$$

L'expression multivoque de la loi à déflexion normale est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = c_N (u_N)_+^{m_N}, \\ \underline{F}_f \in -c_T (u_N)_+^{m_T} \underline{Dir}(v_G). \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Par rapport à la loi de Coulomb, on observe que la première inclusion de (2.4) est devenue ici une égalité. C'est à dire que l'on a remplacé la fonction multivoque  $J_N(u_N)$  par la fonction  $\tilde{J}_N(u_N) = -c_N (u_N)_+^{m_N}$  (voir figure (2.8) à comparer avec la figure (2.2)).

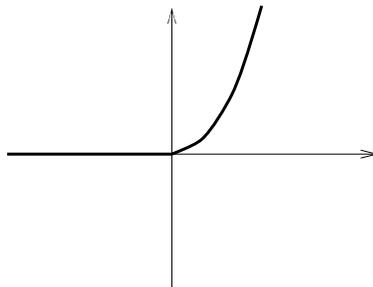


FIG. 2.8 – Fonction multivoque  $\tilde{J}_N(x)$ .

En ce sens la loi à déflexion normale est une pénalisation de la condition de contact unilatéral.

Une variante de cette loi a été introduite et étudiée (I. Figueiredo, T. Trabucho [29], J.A.C. Martins, J.T. Oden et F.M.F. Simoes [56]) qui considère une viscosité normale. La réponse normale s'écrit :

$$|\underline{N}| = c_N (a)^{m_N} + b_N (a)^{l_N} \frac{\partial a}{\partial t}.$$

Le modèle du glisseur tel qu'il est présenté figure (2.7) avec une loi de frottement à déflexion normale a été étudié par J.A.C. Martins, J.T. Oden et F.M.F. Simoes [56] avec ou sans viscosité normale. Les oscillations normales du glisseur dues à la loi en puissance engendrent une variation périodique de la force de frottement.

## 2.5 Lois sur le modèle de la plasticité

Il y a des analogies entre la théorie de la plasticité et la théorie du frottement. Le déplacement irréversible s'effectue quand les contraintes atteignent un certain seuil (limite élastique pour la plasticité, cône de frottement pour la loi de Coulomb). Certains auteurs ont tenté de porter plus loin cette analogie en transposant les concepts développés dans la théorie de la plasticité à une généralisation des lois de frottement. Une des tentatives les plus complètes à ce sujet est celle de A. Curnier [19] en 1984. Il inclut dans sa loi de frottement la possibilité de prendre en compte l'anisotropie des surfaces, la déflexion normale de l'interface, l'endommagement et la déformation élastique de l'interface.

On va ici présenter l'idée générale de ce type de construction. Pour plus de détail on pourra consulter A. Curnier [19], R. Michalowski, Z. Mróz [58], D.C. Drucker [25], Z. Mróz, S. Stupkiewicz [62], Z. Mróz, A. Jarzabowski [61].

En analogie avec le critère de limite élastique de la plasticité, on définit un critère de glissement :

$$Y(F_x, F_z, N) \leq 0,$$

où  $F_x$  et  $F_z$  sont les deux composantes de la force de frottement et

$$Y(F_x, F_z, N) < 0 \quad \text{entraîne l'adhérence,}$$

$$Y(F_x, F_z, N) = 0 \quad \text{entraîne le glissement.}$$

Par exemple pour le frottement de Coulomb, on peut prendre :

$$Y(F_x, F_z, N) = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} + \mu N,$$

ou bien pour un frottement non isotrope :

$$Y(F_x, F_z, N) = \sqrt{\left(\frac{F_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{F_z}{b}\right)^2} + N.$$

Lors du glissement, la direction de glissement est donnée par une règle de glissement dérivant d'un potentiel convexe  $Z(F_x, F_y, N)$  :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underline{u}_T)_x = \lambda \frac{\partial Z}{\partial F_x},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underline{u}_T)_z = \lambda \frac{\partial Z}{\partial F_z},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_N) = 0.$$

Lorsque le potentiel  $Z$  est égal à  $Y$ , on parle de règle de glissement associée. Mais dans beaucoup de cas  $Z = Y$  ne donne pas de résultats acceptables. On prend un  $Z \neq Y$  et on parle de règle de glissement non associée.

En posant :

$$C_N = \{\underline{F}_f ; Y(F_{fx}, F_{fz}, N) \leq 0\},$$

$$J_{C_N}(\underline{F}_f) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \underline{F}_f \in C_N, \\ [0, +\infty[ & \text{si } \underline{F}_f \in \partial C_N, \\ \{+\infty\} & \text{si } \underline{F}_f \notin C_N, \end{cases}$$

Les conditions de frottement s'écrivent :

$$\begin{cases} u_N \leq 0, \underline{F}_f \in -J_N(u_N), \\ \underline{v}_G \in -\nabla_{F_f} Z(\underline{F}_f, N) J_{C_N}(\underline{F}_f). \end{cases} \quad (2.22)$$

Bien sûr si  $Z = Y$  on écrit  $\underline{v}_G \in -\partial I_{C_N}(\underline{F}_f)$ , où  $\partial I_{C_N}$  est le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble  $C_N$ . C'est une expression similaire à (2.6).

## Conclusion

La théorie du frottement sec est encore loin d'être une théorie achevée. Les pistes explorées pour généraliser la loi de Coulomb sont encore nombreuses. Les lois à coefficient de frottement variable apportent une interprétation simple des instabilités constatées dans le frottement sec. En contrepartie l'étude mathématique comporte beaucoup de difficultés. Les lois à variable d'état, développées dans le cadre des études sur les roches, incluent certains des comportements expérimentaux comme "l'inertie" de la force de frottement constatée par E. Rabinowicz (voir paragraphe 1.3.1). En revanche elles ne sont pas adaptées pour traduire la transition collage-décollage et leur introduction amène à une équation différentielle sur le bord de frottement. Les lois à déflexion normale incluent une réponse normale de l'interface et une non-proportionnalité entre la force normale et la force de frottement qui se justifient par des

études expérimentales et théoriques sur le comportement des interfaces entre corps en contact. Quant aux lois sur le modèle de la plasticité, elles offrent beaucoup de possibilités pour la modélisation des différents aspects du frottement sec mais leur étude est encore très récente.



## Chapitre 3

# Frottement de corps élastiques

Les lois de type Coulomb ont été développées sur des modèles à nombre fini de degrés de liberté (solides rigides). Le lien avec la théorie du contact initiée par H. Hertz est assez récente. Il faut attendre les travaux de J.L. Lions et G. Duvaut dans les années 1970 pour que le problème du glissement avec frottement soit correctement posé par l'intermédiaire d'inéquations variationnelles dans le cadre du problème de contact de Signorini. L'un des problèmes mathématiques majeurs est la non différentiabilité de la condition de frottement de Coulomb.

On va présenter le problème du contact avec frottement de corps élastiques, dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire. Après le rappel de quelques résultats sur les problèmes d'élasticité, on introduira les conditions de frottement de Coulomb d'un corps élastique glissant sur une fondation rigide plane. L'analyse mathématique de ce modèle est un problème qui demeure ouvert. On présentera les principaux résultats qui ont été établis sous des hypothèses restrictives, avant de passer aux cas des lois non classiques de frottement.

### 3.1 Problème général d'élasticité

On va présenter rapidement le formalisme de la théorie de l'élasticité linéaire, ainsi que les principaux résultats d'existence d'unicité et de régularité des solutions des problèmes statiques et dynamiques.

#### 3.1.1 Élasticité linéaire

Pour la simplicité de la présentation, on se limite au cas d'un solide élastique frottant sur une surface rigide plane immobile. L'introduction de géométries plus complexes fait apparaître des problèmes délicats dans la détermination de la surface de contact. On peut voir une approche de ce problème dans N. Kikuchi et J.T. Oden [45] par exemple. Dans un premier temps on introduit la condition de frottement avec la loi de Coulomb.

On suppose donc qu'un corps élastique est représenté par un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  ( $N = 2$  ou 3) ayant certaines propriétés :

- $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  régulière (1).
- $\Gamma = \overline{\Gamma_C} \cup \overline{\Gamma_U} \cup \overline{\Gamma_F}$ , où  $\Gamma_C$ ,  $\Gamma_U$  et  $\Gamma_F$  sont des ouverts de  $\Gamma$  deux à deux disjoints.
- sur  $\Gamma_U$  on impose des déplacements  $\underline{U}(x)$ .
- sur  $\Gamma_F$  on impose des forces  $\underline{F}(x)$ .
- $\Gamma_C$  est une surface plane en contact unilatéral avec un solide rigide immobile occupant un demi-espace infini. En configuration de référence le contact s'effectue sur tout  $\Gamma_C$ .

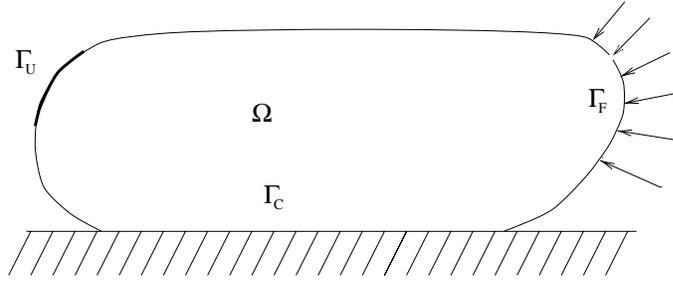


FIG. 3.1 – Exemple de corps élastique en contact unilatéral sur une fondation rigide.

De manière classique en élasticité linéaire, on désigne par  $\underline{\sigma}(x)$  le tenseur des contraintes pour  $x \in \Omega$ ,  $\underline{u}(x)$  le déplacement,  $\underline{\varepsilon}(x)$  le tenseur linéarisé des déformations,  $\sigma_{ij}$  et  $u_i$  et  $\varepsilon_{ij}$  étant les composantes de  $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{u}$  et  $\underline{\varepsilon}$  dans la base canonique.

Sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  on pose (voir aussi en page 5) :

- $\underline{n}$  normale unitaire sortante sur le bord du domaine  $\Omega$ ,
- $\sigma_N$  composante normale des contraintes sur le bord du domaine,  $\sigma_N = (\underline{\sigma} \underline{n}) \cdot \underline{n}$ ,
- $\underline{\sigma}_N$  vecteur de la composante normale des contraintes,  $\underline{\sigma}_N = \sigma_N \underline{n}$ ,
- $\underline{\sigma}_T$  vecteur des composantes tangentielles des contraintes,  $\underline{\sigma}_T = \underline{\sigma} \underline{n} - \underline{\sigma}_N$ ,
- $u_N$  composante normale du déplacement  $\underline{u}$  sur le bord du domaine,  $u_N = \underline{u} \cdot \underline{n}$ ,
- $\underline{u}_N$  vecteur composante normale du déplacement  $\underline{u}$ ,  $\underline{u}_N = u_N \underline{n}$ ,
- $\underline{u}_T$  vecteur composante tangentielle du déplacement,  $\underline{u}_T = \underline{u} - \underline{u}_N$ ,
- $\underline{v}_G$  vitesse de glissement relative sur le bord de contact  $\Gamma_C$  (ici  $\underline{v}_G = \partial_t \underline{u}_T$ ).

Avec ces notations, l'équation de la dynamique s'écrit :

$$\rho \partial_{tt}^2 \underline{u}(t, x) = \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(t, x) + \underline{f}(t, x) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1)$$

1. On demande généralement que  $\Omega$  soit au moins de classe  $\mathcal{C}^{0,1}$  (voir N. Kikuchi et J.T. Oden [45] par exemple)

où  $(\text{div } \underline{\underline{\sigma}})_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}$ ,  $\underline{f}$  est une densité volumique de force extérieure (par exemple le poids) et  $\rho$  est la masse volumique.

La loi de comportement de l'élasticité linéaire reliant le tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}(x)$  aux déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}(x))$  s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}(x)) = \underline{\underline{\mathcal{A}}}(x) \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}(x)), \quad (3.2)$$

soit dans la base canonique :

$$\sigma_{ij}(\underline{u}(x)) = \mathcal{A}_{ijkl}(x) \partial_k u_l(x), \quad (3.3)$$

où  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$  est le tenseur de Hooke de composantes  $\mathcal{A}_{ijkl}$ .  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$  est symétrique :

$$\mathcal{A}_{ijkl}(x) = \mathcal{A}_{jikl}(x) = \mathcal{A}_{klij}(x) \quad \text{pour } 1 \leq i, j, k, l \leq N, \text{ et } x \in \Omega. \quad (3.4)$$

Pour un matériau homogène isotrope la loi de comportement se réduit à :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^N} + 2G \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}), \quad (3.5)$$

où  $\lambda$  et  $G$  sont les coefficients de Lamé.

Le problème évolutif d'élasticité linéaire s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver le déplacement } \underline{u} : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ telle que :} \\ \left. \begin{array}{l} \rho \partial_{tt}^2 \underline{u} = \text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) + \underline{f}, \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) = \underline{\underline{\mathcal{A}}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}), \end{array} \right) \text{ dans } ]0, T] \times \Omega, \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) \underline{n} = \underline{E} \text{ sur } ]0, T] \times \Gamma_F, \quad \text{où } \underline{E} : ]0, T] \times \Gamma_F \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \underline{u} = \underline{U} \text{ sur } ]0, T] \times \Gamma_U, \quad \text{où } \underline{U} : ]0, T] \times \Gamma_U \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \underline{u}(0, x) = \underline{u}_0(x), \quad \text{où } \underline{u}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \partial_t \underline{u}(0, x) = \underline{u}_1(x), \quad \text{où } \underline{u}_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

et la loi de frottement de Coulomb s'exprime ponctuellement sur  $\Gamma_C$  comme au chapitre 2 :

Pour  $x \in \Gamma_C$  et  $t \in ]0, T]$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit } u_N < 0 \text{ et } \underline{\sigma}_T = \underline{\sigma}_N = 0, \\ \text{soit } u_N = 0 \text{ et } \sigma_N \leq 0 \text{ avec :} \\ \left| \begin{array}{l} \text{soit } |\underline{\sigma}_T| < \mu |\underline{\sigma}_N| \text{ et } \underline{v}_G = 0, \\ \text{soit } |\underline{\sigma}_T| = \mu |\underline{\sigma}_N| \text{ et il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \underline{v}_G = -\lambda \underline{\sigma}_T. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

soit en notation multivoque :

$$\begin{cases} \sigma_N \in -J_N(u_N), \\ \underline{\sigma}_T \in \mu \sigma_N \underline{Dir}(\underline{v}_G). \end{cases} \quad (3.8)$$

Quand on résout un problème de ce type, chaque lieu de la frontière  $\Gamma_C$  peut être dans trois états différents et il faut donc être en mesure de partitionner  $\Gamma_C$  en trois zones: la zone hors contact (où  $u_N < 0$ ), la zone en contact adhérent (ou contact collé, où  $u_N = 0$  et  $\underline{v}_G = 0$ ) et la zone en contact glissant (où  $u_N = 0$  et  $\underline{v}_G \neq 0$ ).

### 3.1.2 Fonctionnelles des travaux (ou puissances) virtuelles

On pose d'abord les espaces :

$$V = (H^1(\Omega))^N, \quad H = (L^2(\Omega))^N,$$

On introduit la fonctionnelle  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  représentant le travail (ou puissance) virtuel des forces élastiques :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dx, \quad (3.9)$$

la fonctionnelle  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  représentant le travail (ou puissance) virtuel des forces extérieures :

$$f(v) = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} dx + \int_{\Gamma_F} \underline{E} \cdot \underline{v} d\Gamma, \quad (3.10)$$

et la fonctionnelle  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  liée à la puissance virtuelle des forces de frottement :

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_C} -\mu \sigma_N(u) |\underline{v}_T| d\Gamma. \quad (3.11)$$

Regardons maintenant quelques propriétés de ces fonctionnelles.

Pour  $\tau \in H_{div}(\Omega) = \{\tau_{ij} \in L^2(\Omega), \underline{\underline{div}} \underline{\underline{\tau}} \in H, \tau_{ij} = \tau_{ji}\}$ , et  $\underline{v} \in V$ , on peut établir la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dx + \int_{\Omega} \underline{\underline{div}} \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{v} dx = \langle \underline{\underline{\tau}}, \underline{v} \rangle_{\Gamma}, \quad (3.12)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$  désigne le produit de dualité entre  $(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^N$  et  $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^N$ .

Pour  $\underline{\underline{\tau}}$  plus régulier ( $\tau_{ij} \in H^1(\Omega)$ ), on peut écrire :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dx + \int_{\Omega} \underline{\underline{div}} \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{v} dx = \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\tau}} \underline{n}) \cdot \underline{v} d\Gamma. \quad (3.13)$$

Un résultat important est l'inégalité de Korn (voir N. Kikuchi et J.T. Oden [45] par exemple pour plus de détails) :

**Théorème 1** Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $C^{0,1}$ . Il existe une constante  $c > 0$  ne dépendant que de  $\Omega$  telle que

$$\int_{\Omega} |\partial_i v_j \partial_i v_j|^{\frac{p}{2}} dx \leq c \left[ \int_{\Omega} (\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}))^{\frac{p}{2}} dx + \int_{\Omega} |\underline{v}|^{\frac{p}{2}} dx \right], \quad (3.14)$$

pour tout  $\underline{v}$  dans  $(W^{1,p}(\Omega))^N$ ,  $1 < p < \infty$ .

On se limitera par la suite au cas  $\Gamma_U$  de mesure non nulle dans  $\Gamma$ . Le cas  $\Gamma_U$  de mesure nulle entraîne des difficultés supplémentaires (solutions à un déplacement rigide près) dont on pourra voir une approche dans J.A.C. Martins et E.B. Pires [52] ou dans A. Lakhali [47] par exemple.

Quand  $\Gamma_U$  est de mesure non nulle, on a le résultat suivant qui découle de l'inégalité de Korn :

**Lemme 1** Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $C^{0,1}$ . Il existe une constante  $c > 0$  ne dépendant que de  $\Omega$  telle que

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dx \geq c \|\underline{v}\|_{V_0}^2, \quad (3.15)$$

pour tout  $\underline{v}$  dans  $V_0 = \{\underline{v} \in V \text{ tel que } \underline{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_U\}$ .

On impose au tenseur de Hooke  $\underline{\underline{A}}$  d'être coercif et borné :

$$A_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k, h \leq N,$$

Il existe  $\alpha_A > 0$  tel que  $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \geq \alpha_A (\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}})$ , pour tout tenseur symétrique  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ .

Avec ces résultats on peut établir que la fonctionnelle  $a(., .)$  est bilinéaire continue symétrique définie positive et coercive.

### 3.1.3 Le problème d'élasticité statique

Le problème élastique statique sans condition de frottement s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver le déplacement } \underline{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ tel que :} \\ \left. \begin{array}{l} \underline{\operatorname{div}} \underline{\sigma}(\underline{u}) + \underline{f} = 0, \\ \underline{\sigma}(\underline{u}) = \underline{\underline{A}} \underline{\varepsilon}(\underline{u}), \end{array} \right) \text{ dans } \Omega, \\ \underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} = \underline{F} \text{ sur } \Gamma_F, \quad \text{où } \underline{F} : \Gamma_F \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \underline{u} = \underline{U} \text{ sur } \Gamma_U, \quad \text{où } \underline{U} : \Gamma_U \rightarrow \mathbb{R}^N. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Ce problème équivaut formellement au problème en formulation variationnelle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \underline{u} \in U_{ad} = \{\underline{v} \in V, \underline{v} = U \text{ sur } \Gamma_U\}, \text{ tel que :} \\ a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) = f(\underline{v} - \underline{u}), \text{ pour tout } \underline{v} \in U_{ad}. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Il équivaut aussi au problème de minimisation d'une fonctionnelle énergie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \underline{u} \text{ qui minimise sur } U_{ad} \text{ la fonctionnelle} \\ I(\underline{v}) = \frac{1}{2} a(\underline{v}, \underline{v}) - f(\underline{v}). \end{array} \right. \quad (3.18)$$

On démontre l'existence et l'unicité de la solution de ce problème en montrant qu'à condition que  $U \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_U))^N$ ,  $F \in (L^2(\Gamma_F))^N$  et  $f \in (L^2(\Omega))^N$  la fonctionnelle  $I(v)$  est convexe coercive et Gâteaux-différentiable sur  $U_{ad}$ , qui est lui même un sous-ensemble convexe fermé de  $V$  (voir G. Duvaut [26] par exemple).

### 3.1.4 Le problème d'élasticité dynamique

On va présenter la formulation variationnelle en déplacement usuelle pour le problème d'élasticité dynamique. On pose :

$$\phi(t) \text{ une fonctionnelle telle que } \phi(t) \in V, \phi(t) = U(t) \text{ sur } \Gamma_U, \quad (3.19)$$

$$V_0 = \{\underline{v} \in V, \underline{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_U\}. \quad (3.20)$$

On identifie  $H$  et son dual et on considère le schéma d'inclusion

$$V_0 \hookrightarrow H \hookrightarrow V_0'$$

avec inclusions continues et compactes.

On pose

$$\underline{w}(t) = \underline{u}(t) - \phi(t).$$

Le problème dynamique est alors formellement équivalent au problème en formulation variationnelle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{w} : [0, T] \rightarrow V_0 \text{ tel que} \\ (\rho \partial_{tt}^2 \underline{w}(t), \underline{v})_{V_0', V_0} + a(\underline{w}(t), \underline{v}) = f(\underline{v}) + (\partial_{tt}^2 \phi(t), \underline{v})_{V_0', V_0} + a(\phi(t), \underline{v}) \quad \forall v \in V_0, \\ \underline{w}(0) = \underline{u}_0 - \phi(0), \\ \partial_t \underline{w}(0) = \underline{u}_1 - \partial_t \phi(0). \end{array} \right. \quad (3.21)$$

On pose

$$(\psi(t), \underline{v})_{V_0', V_0} = f(\underline{v}) + (\partial_{tt}^2 \phi(t), \underline{v})_{V_0', V_0} + a(\phi(t), \underline{v}), \quad (3.22)$$

et on a le résultat suivant :

**Théorème 2** Avec  $\psi$  et  $\partial_t \psi$  dans  $L^2(0, T, V_0')$ ,  $\underline{u}_0 \in V_0$  et  $\underline{u}_1 \in H$ , Il existe une unique fonction  $u$  solution de (3.21) telle que :

$$\begin{aligned} \underline{u} &\in L^\infty(0, T; V_0), \\ \partial_t \underline{u} &\in L^\infty(0, T; H), \\ \partial_{tt}^2 \underline{u} &\in L^\infty(0, T; V_0'). \end{aligned}$$

Pour démontrer ce théorème, G. Duvaut et J.L. Lions [27] utilisent une méthode de type Galerkin.

## 3.2 Le problème de Signorini

Si on introduit la condition de contact unilatéral sans frottement dans le problème élastique statique, on arrive à l'expression suivante sur  $\Gamma_C$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}_T = 0, \\ \text{soit } u_N(x) < 0 \text{ et } \sigma_N = 0, \\ \text{soit } u_N(x) = 0 \text{ et } \sigma_N \leq 0. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Ce que l'on peut exprimer aussi de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}_T = 0, \sigma_N \leq 0, u_N \leq 0, \\ \text{et } u_N \sigma_N = 0. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Ce problème est appelé problème de Signorini. La formulation variationnelle est attribuée à G. Fichera au début des années 1960.

On pose

$$U_{ad} = \{\underline{v} \in V, \underline{v} = \underline{U} \text{ sur } \Gamma_U, v_N \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}.$$

Le problème de Signorini est formellement équivalent au problème :

$$\begin{cases} \text{trouver } \underline{u} \in U_{ad} \text{ tel que} \\ I(\underline{u}) \leq I(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in U_{ad}, \end{cases} \quad (3.25)$$

où  $I(\underline{v}) = \frac{1}{2}a(\underline{v}, \underline{v}) - f(\underline{v})$  comme précédemment.

On peut toujours montrer que  $I(\underline{v})$  est convexe coercive Gâteaux-différentiable sur  $U_{ad}$  sous-ensemble fermé convexe de  $V$  (toujours dans le cas où  $\Gamma_U \neq \emptyset$ ), ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.25).

**Remarque :** Pour le problème de Signorini comme pour le problème élastique, il existe d'autres formulations variationnelles, les formulations variationnelles duales, ou en contraintes, voir G. Duvaut et J.L. Lions [27] ou N. Kikuchi et J.T. Oden [45].

### 3.2.1 Problème de Signorini avec frottement de Coulomb

Si on introduit la condition de frottement de Coulomb dans le problème de Signorini, la condition au bord sur  $\Gamma_C$  devient :

$$\begin{cases} \text{soit } u_N(x) < 0 \text{ et } \underline{\sigma}_N = 0, \\ \text{soit } u_N(x) = 0, \sigma_N \leq 0 \text{ et } |\underline{\sigma}_T| \leq -\mu\sigma_N. \end{cases} \quad (3.26)$$

Le problème ainsi exprimé on obtiendra toutes les solutions d'équilibre du problème dynamique avec frottement. On sait (notamment si on pense à des chargement et déchargement successifs) que les solutions dépendent de l'histoire du chargement et que le problème statique ainsi défini admet en général une infinité de solutions.

Ce que l'on appelle généralement problème de Signorini avec frottement (introduit par G. Duvaut et J.L. Lions [27]) est un problème statique avec une condition de frottement faisant intervenir le déplacement tangentiel. Son importance est lié à la formulation incrémentale du problème quasi-statique qui sera présentée dans la suite du chapitre. On écrit la condition au bord :

$$\begin{cases} \sigma_N(\underline{u}(x)) \in -J_N(u_N(x)), \\ \underline{\sigma}_T \in \mu\sigma_N \underline{Dir}(\underline{u}_T), \end{cases} \quad (3.27)$$

où  $J_N$  est toujours définie par (2.3).

Avec

$$U_{ad} = \{\underline{v} \in V, \underline{v} = \underline{U} \text{ sur } \Gamma_U, v_N \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}.$$

la formulation variationnelle (introduite par G. Duvaut et J.L. Lions [27]) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{trouver } \underline{u} \in U_{ad} \text{ tel que} \\ a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) + j(\underline{u}, \underline{v}) - j(\underline{u}, \underline{u}) \geq f(\underline{v} - \underline{u}) \text{ pour tout } \underline{v} \in U_{ad}. \end{cases} \quad (3.28)$$

Pour des  $\underline{u}$  dans  $H^1(\Omega)$  la fonctionnelle  $j(\underline{u}, \underline{v})$  définie par (3.11) n'est bien définie que pour  $\underline{v}$  dans  $H_{div}(\Omega)$ . L'existence et l'unicité de solutions au problème de Signorini avec frottement de Coulomb est un problème ouvert.

Il existe toutefois des résultats partiels. Des résultats pour un coefficient de frottement petit, (I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas, J. Lovíšek [39]), des résultats sur le problème dit de Tresca à contrainte normale imposée sur le bord de frottement et des résultats avec une régularisation de la loi de frottement (voir paragraphe sur les lois non classiques).

### 3.2.2 Problème avec force de frottement imposée de Tresca

C'est le problème de Signorini avec frottement où on a découpé la condition de frottement et la valeur de la contrainte normale sur le bord de contact. On considère donnée une fonction positive :

$$g \in L^2(\Gamma_C),$$

représentant la force de frottement et on pose la fonctionnelle :

$$j_2(v) = \int_{\Gamma_C} g(x) |\underline{v}_T| d\Gamma, \quad (3.29)$$

qui est continue convexe non différentiable sur  $V$ . Avec

$$U_{ad} = \{\underline{v} \in V, \underline{v} = \underline{U} \text{ sur } \Gamma_U, v_N = 0 \text{ sur } \Gamma_C\},$$

le problème de Tresca s'écrit en formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \text{trouver } \underline{u} \in U_{ad} \text{ tel que} \\ a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) + j_2(\underline{v}) - j_2(\underline{u}) \geq f(\underline{v} - \underline{u}) \text{ pour tout } \underline{v} \in U_{ad}. \end{cases} \quad (3.30)$$

En posant

$$I'(\underline{v}) = \frac{1}{2}a(\underline{v}, \underline{v}) - f(\underline{v}) + j_2(\underline{v}), \quad (3.31)$$

on montre que le problème de Tresca est équivalent à la minimisation de  $I'(\underline{v})$  sur  $U_{ad}$ .

On peut montrer que  $j_2(\underline{v})$  est une fonctionnelle convexe semi-continue inférieurement, que  $I'(\underline{v})$  est strictement convexe semi-continue inférieurement et coercive sur  $U_{ad}$  (toujours sous l'hypothèse  $\Gamma_U \neq \emptyset$ ). Il en découle l'existence et l'unicité de la solution.

A priori, le problème de Tresca semble réservé à un petit nombre d'applications où la contrainte tangentielle sur le bord de frottement est connue. Les problèmes de contact unilatéral n'entrent pas directement dans ce cadre, néanmoins M. Raous, P. Chabrand et F. Lebon [74] montrent que l'on peut utiliser un algorithme numérique pour résoudre ce genre de problèmes, qui est basé sur une séquence de problèmes de Tresca.

### 3.3 Le problème quasi-statique et incrémental

On reprend la formulation du problème élastique dynamique en négligeant l'inertie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver le déplacement } \underline{u} : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ tel que :} \\ \left. \begin{array}{l} \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{u}) + \underline{f} = 0, \\ \underline{\sigma}(\underline{u}) = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}), \end{array} \right) \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} = \underline{F} \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma_F, \quad \text{où } \underline{F} : ]0, T[ \times \Gamma_F \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \underline{u} = \underline{U} \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma_U, \quad \text{où } \underline{U} : ]0, T[ \times \Gamma_U \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \left. \begin{array}{l} \sigma_N \in -J_N(u_N), \\ \underline{\sigma}_T \in \mu \sigma_N \underline{Dir}(\underline{v}_G), \end{array} \right) \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma_C \\ \underline{u}(0, x) = \underline{u}_0(x), \quad \text{où } \underline{u}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \partial_t \underline{u}(0, x) = \underline{u}_1(x), \quad \text{où } \underline{u}_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N. \end{array} \right. \quad (3.32)$$

La condition de contact unilatéral fait intervenir le déplacement normal, et la condition de frottement fait intervenir la vitesse tangentielle. Pour cette raison, la formulation variationnelle doit faire intervenir à la fois le déplacement  $u$  et sa dérivée en temps, ce qui est une difficulté importante.

M. Cocu, E. Pratt et M. Raous dans [16] et [17] résolvent ce problème en faisant intervenir la combinaison de deux inéquations variationnelles. Ici en posant :

$$V_{ad}(t) = \{\underline{v} \in V, \underline{v} = \partial_t \underline{U} \text{ sur } \Gamma_U\},$$

$$K(t) = \{\underline{v} \in V, \underline{v}(t) = \underline{U}(t) \text{ sur } \Gamma_U, v_N \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\},$$

cette approche revient à introduire la formulation variationnelle suivante :



On peut montrer que ce problème est équivalent au problème suivant (voir [17] dans le cas d'une loi de frottement régularisée) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \underline{u}^{l+1} \in K(t_{l+1}) \text{ tel que} \\ a(\underline{u}^{l+1}, \underline{w} - \underline{u}^{l+1}) + j(\underline{u}^{l+1}, \underline{w} - \underline{u}^l) - j(\underline{u}^{l+1}, \underline{u}^{l+1} - \underline{u}^l) \\ \geq f(\underline{w} - \underline{u}^{l+1}), \quad \forall \underline{w} \in K(t_{l+1}). \end{array} \right. \quad (3.35)$$

### 3.4 Le problème dynamique avec frottement

Comme le problème de Signorini avec frottement, le problème dynamique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb est un problème ouvert. Des résultats existent sous l'hypothèse restrictive de la contrainte normale donnée sur le bord de frottement.

#### 3.4.1 Le problème dynamique avec contrainte normale imposée

On suppose donc encore que la fonction

$$g : [0, T] \longrightarrow L^2(\Gamma_C)$$

est donnée. On suppose l'existence d'une fonction  $\phi(t)$  satisfaisant à :

$$\phi(t) \in V, \quad \phi(t) = U(t) \text{ sur } \Gamma_U,$$

et on pose :

$$V_0 = \{\underline{v} \in V, \underline{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_U\},$$

$$\underline{w}(t) = \underline{u}(t) - \phi(t).$$

La formulation variationnelle s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \underline{w} \text{ telle que } \underline{w}(t) \in V_0 \text{ et} \\ (\partial_{tt}^2 \underline{w}(t), \underline{v} - \partial_t \underline{w}(t))_{V_0, V_0} + a(\underline{w}(t), \underline{v} - \partial_t \underline{w}(t)) + j_2(\underline{v} + \partial_t \phi(t)) - j_2(\partial_t \underline{w}(t) + \partial_t \phi(t)) \\ \geq (\psi(t), \underline{v} - \partial_t \underline{w}(t)), \quad \forall \underline{v} \in V_0, \forall t \in ]0, T], \\ \underline{w}(0) = \underline{u}_0 - \phi(0), \\ \partial_t \underline{w}(0) = \underline{u}_1 - \partial \phi(0), \end{array} \right. \quad (3.36)$$

où  $(\psi(t), \underline{v}) = f(\underline{v}) - (\partial_{tt}^2 \phi(t), \underline{v}) - a(\phi(t), \underline{v})$ , et  $j_2(\cdot)$  est toujours définie par (3.29).

G. Duvaut et J.L. Lions [27] ont établi le résultat d'existence et d'unicité suivant :

**Théorème 3** Avec les hypothèses suivantes :

- $\psi, \partial_i \psi, \partial_{ii}^2 \psi \in L^2(0, T, V_0')$ ,
- $g \in L^\infty(\Gamma_C)$  donnée indépendante du temps,
- $\underline{u}_0 \in (H^2(\Omega))^N \cap V_0$ ,
- $\underline{u}_1 \in V, (u_1)_T = 0$  sur  $\Gamma_C$ ,
- $\int_{\Gamma_C} \underline{\sigma}_T(\underline{u}_0) \cdot \underline{v}_T d\Gamma = 0, \forall \underline{v} \in V_0$ ,

Il existe une unique solution au problème (3.36) telle que

$$\underline{u}, \partial_t \underline{u} \in L^\infty(0, T; V_0) \text{ et } \partial_{tt}^2 \underline{u} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V_0).$$

La démonstration qui est donnée utilise une régularisation de la fonctionnelle  $j(\cdot)$  et une méthode de type Galerkin.

## 3.5 Les lois non classiques et l'élasticité

### 3.5.1 Les lois régularisées

Une des principales difficultés de la loi de Coulomb est la non différentiabilité. On peut régulariser la fonctionnelle  $j(u, v)$  pour approcher cette loi par une loi différentiable (voir J.T. Oden et E.B. Pires [63] par exemple).

On remplace les conditions sur le bord de frottement  $\Gamma_C$

$$\underline{\sigma}_T \in \mu \sigma_N \underline{Dir}(\underline{v}_G),$$

par une équation régularisée

$$\underline{\sigma}_T = \mu \sigma_N \phi_\varepsilon(\underline{v}_G),$$

où  $\phi_\varepsilon(\cdot)$  est une fonction qui approche  $\underline{Dir}(\cdot)$ . Par exemple on peut prendre :

$$\phi_\varepsilon^1(\underline{v}) = \begin{cases} \tanh\left(\frac{\|\underline{v}\|}{\varepsilon}\right) \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} & \text{si } \underline{v} \neq 0, \\ 0 & \text{si } \underline{v} = 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

ou bien

$$\phi_\varepsilon^2(\underline{v}) = \begin{cases} \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} & \text{si } \|\underline{v}\| \geq \varepsilon, \\ \frac{\underline{v}}{\varepsilon} & \text{si } \|\underline{v}\| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (3.38)$$

On approche ensuite  $\sigma_N$  par sa régularisée en espace (cette étape est inutile pour un problème à contrainte normale imposée, prise suffisamment régulière).

Pour  $\sigma_N$  régulier on pose :

$$S_\rho(\sigma_N)(x) = - \int_{\Gamma} \omega_\rho(\|x - y\|) \sigma_N(y) d\Gamma,$$

où  $\omega_\rho$  est une fonction positive de classe  $C^\infty$  à support compact inclus dans  $[-\rho, \rho]$  et telle que  $\int_{\mathbb{R}} \omega_\rho(x) dx = 1$ . Par exemple :

$$\omega_\rho = \begin{cases} c e^{\frac{-\rho^2}{x^2 - \rho^2}} & \text{si } |x| < \rho, \\ 0 & \text{si } |x| \geq \rho. \end{cases} \quad c \text{ constante de normalisation.}$$

Quand  $\sigma_N \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ , on définit  $S_\rho(\sigma_N) = \omega_\rho * \sigma_N$  au sens de la convolution des distributions sur  $\Gamma$ .

Les conditions de frottement s'écrivent alors :

$$\underline{\sigma}_T(x) = \mu S_\rho(\sigma_N(u))(x) \phi_\varepsilon(\underline{v}_G(x)),$$

(Bien sûr s'il s'agit du problème de Signorini, on remplace  $\underline{v}_G$  par  $\underline{u}_T$ ).

Certains auteurs ont interprété cette régularisation comme l'expression d'une loi de frottement non locale. Le paramètre  $\rho$  correspond, dans ce cas, à une distance critique en deçà de laquelle la surface perd son homogénéité.

On écrit la fonctionnelle régularisée de la puissance virtuelle des forces de frottement :

$$j_{\rho,\varepsilon}(\underline{u}, \underline{v}) = \mu \int_{\Gamma_C} |S_\rho(\sigma_N(\underline{u}))(x)| M_\varepsilon(|\underline{v}_T|) d\Gamma,$$

où  $M_\varepsilon(\cdot)$  est le potentiel dont  $\phi_\varepsilon(\cdot)$  dérive (i.e.  $\phi_\varepsilon = \nabla M_\varepsilon$ ). Dans le deux exemples (3.37), (3.37) de fonction  $\phi_\varepsilon(\cdot)$  cela donne respectivement:

$$M_\varepsilon^1(\underline{v}) = \ln(\cosh(\frac{\|\underline{v}\|}{\varepsilon})),$$

et

$$M_\varepsilon^2(\underline{v}) = \begin{cases} \|\underline{v}\| - \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } \|\underline{v}\| \geq \varepsilon, \\ \frac{\|\underline{v}\|^2}{2\varepsilon} & \text{si } \|\underline{v}\| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

La fonctionnelle  $j_{\rho,\varepsilon}(\underline{u}, \underline{v})$  est bien définie pour  $\underline{u} \in V$  avec  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) \in L^2(\Omega)$  et  $\underline{v} \in V$ .

Le problème statique s'écrit en formulation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \underline{u} \in U_{ad} = \{ \underline{v} \in V, \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{u}) \in L^2(\Omega), \underline{v} = U \text{ sur } \Gamma_U, v_N \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C \}, \text{ tel que} \\ a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) + j_{\rho, \varepsilon}(\underline{u}, \underline{v}) - j_{\rho, \varepsilon}(\underline{u}, \underline{u}) \geq f(\underline{v} - \underline{u}) \text{ pour tout } \underline{v} \in U_{ad}. \end{array} \right.$$

L. Demkowicz et J.T. Oden dans [21] et E.B. Pires, L. Trabucho dans [66] montrent que ce problème admet des solutions et qu'il y a unicité pour un coefficient de frottement  $\mu$  suffisamment petit. M. Cocu dans [15] montre un résultat similaire pour le problème sans régularisation de la condition de frottement.

Il existe aussi des résultats en dynamique avec contrainte tangentielle imposée sur le bord de frottement, voir J.A.C. Martins et J.T. Oden [54], ainsi que des résultats sur le problème quasi-statique dans M.Cocu, E. Pratt et M. Raous dans [17].

### 3.5.2 Lois à déflexion normale

L'expression de la loi à déflexion normale sur le bord de contact  $\Gamma_C$  est, conformément à ce que l'on a vu au chapitre 2 :

$$\begin{aligned} \sigma_N &= -c_N (u_N)_+^{m_N}, \\ \underline{\sigma}_T &\in -c_T (u_N)_+^{m_T} \underline{\text{Dir}}(\underline{v}_G). \end{aligned}$$

On pose alors

$$j_N(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Gamma_C} c_N (u_N(x))_+^{m_N} v_N(x) d\Gamma,$$

le travail virtuel de la contrainte normale, et

$$j_T(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Gamma_C} c_T (u_N(x))_+^{m_T} |\underline{v}_T| d\Gamma,$$

la puissance virtuelle des forces de frottement.

$j_N(\underline{u}, \underline{v})$  et  $j_T(\underline{u}, \underline{v})$  sont bien définis pour  $1 \leq m_N, m_T < \infty$  pour  $N = 2$  et  $1 \leq m_N, m_T \leq 3$  pour  $N = 3$  (voir les inclusions de Sobolev dans R.A. Adams [1] par exemple,  $H^s \hookrightarrow L^r(\Omega)$  pour  $1 \leq r \leq \frac{2N}{N-2s}$ ).

Le problème dynamique en formulation variationnelle se pose ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Avec } U_{ad} = \{ \underline{v} \in V; \underline{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_U \}, \\ \text{Trouver } \underline{u} : [0, T] \rightarrow V \text{ tel que } \partial_t \underline{u} \in U_{ad} \text{ et} \\ \langle \rho \partial_{tt}^2 \underline{u}, \underline{v} - \partial_t \underline{u} \rangle_{V', V} + a(\underline{u}, \underline{v} - \partial_t \underline{u}) + j_N(\underline{u}, \underline{v} - \partial_t \underline{u}) + j_T(\underline{u}, \underline{v}) - j_T(\underline{u}, \partial_t \underline{u}) \\ \geq f(\underline{v} - \partial_t \underline{u}), \forall \underline{v} \in U_{ad}. \\ \underline{u}(0) = \underline{u}_0, \\ \partial_t \underline{u}(0) = \underline{u}_1. \end{array} \right. \quad (3.39)$$

L'existence et l'unicité des solutions est un problème ouvert. Il existe toutefois des résultats partiels. On pourra consulter J.A.C. Martins et J.T. Oden [55], I. Figueiredo, T. Trabucho [29] pour l'étude du cas visco-élastique, P.J. Rabier et J.T. Oden [69] [70] pour le cas statique sans frottement, A. Klarbring, A. Mikelic et M. Shillor [46] pour le problème incrémental, L.E. Anderson [2] pour le problème quasi-statique, et aussi A. Lakhali [47] pour une loi un peu différente.

### 3.5.3 Lois à coefficient de frottement variable

Malgré l'intérêt de ce genre de loi, très peu d'études théoriques ont été menées sur l'application des lois de frottement à coefficient variable aux modèles dans les modèles élastiques linéaires. La fonctionnelle qui traduit le travail virtuel des forces de frottement n'a en général pas de propriété de convexité du fait de la décroissance en  $v$  du coefficient de frottement  $\mu(v)$ .

Des pistes ont été ouvertes par I.R. Ionescu et J.-C. Paumier qui font ressortir le caractère irrégulier et non-unique des solutions.

### Elastodynamique

Un problème élastique avec contact et frottement simple, mais permettant d'exhiber des solutions est le problème élastique antiplan homogène. Il représente une couche élastique infinie se déplaçant dans une seule direction horizontale (voir I.R. Ionescu, J.-C. Paumier [41] et [42], et A.I. Leonov, A. Srinivasan [50]). Sur la hauteur, la couche élastique satisfait à l'équation :

$$\partial_{tt}^2 u_x(t, y) - c^2 \partial_{yy}^2 u_x(t, y) = 0, \quad (3.40)$$

où  $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$  est la vitesse de propagation des ondes ( $G$  le module de cisaillement,  $\rho$  la masse volumique du matériau).

Verticalement la couche infinie est bloquée entre deux plans rigides  $\{y = 0\}$  et  $\{y = L\}$ . En  $y = L$ , le plan rigide est immobile et la couche infinie  $y$  est fixée. En  $y = 0$ , le plan rigide est animé d'une vitesse  $V_e(t)$ , et la couche infinie est en contact avec frottement. Ceci se traduit par les conditions au bords :

$$\begin{aligned} u(t, L) &= 0 \text{ sur le bord } y = L, \\ G \partial_y u(t, 0) &= -F_f \text{ sur le bord } y = 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

où  $F_f$  est la force de frottement.

En posant :

$v_G(t) = \partial_t u(t, 0) - V_e(t)$  la vitesse de glissement sur le bord de frottement ,

$$\alpha(t) = \frac{G}{c}(u_1(ct) - V_e(t)) + G\partial_x u_0(ct), \quad (3.42)$$

$\beta(v) = \frac{G}{c}v + S\mu(|v|)\underline{Dir}(v)$ , fonction multivoque ,

$\tau(t) = -G\partial_y u(t, 0)$ , la contrainte de cisaillement sur le bord de frottement.

Grâce aux propriétés de l'équation (3.40) on montre que le problème avec conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u : [0, T] \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \partial_{tt}^2 u(t, y) - c^2 \partial_{xx}^2 u(t, y) = 0, \text{ pour tout } t \in [0, T], \text{ et tout } y \in [0, L], \quad (3.43) \\ \text{(C.L.) } \begin{cases} u(t, L) = 0, \\ G\partial_y u(t, 0) \in S\mu(|v_G|)\underline{Dir}(v_G), \end{cases} \quad (3.44) \\ \text{(C.I.) } \begin{cases} u(0, y) = u_0(y), \\ \partial_t u(0, y) = u_1(y), \end{cases} \quad (3.45) \end{array} \right.$$

peut se ramener pour  $T \leq \frac{L}{c}$  au problème sur le bord suivant :

$$\begin{cases} \frac{G}{c}v_G(t) - \tau(t) = \alpha(t), \\ \alpha(t) \in \beta(v_G(t)), \end{cases} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.46)$$

Autrement dit, le couple  $(v_G(t), \alpha(t))$  reste sur la courbe  $(v, \beta(v))$ . Cette courbe est représentée sur la figure 3.2.

Deux cas sont possibles suivant la monotonie de  $\beta(v)$  :

- ou bien  $\beta(v)$  est strictement monotone croissante. Ce cas est dit cas régulier. L'équation scalaire (3.46) admet toujours une unique solution. Si la donnée  $\alpha(t)$  est continue alors la solution  $u(t, y)$  sera de classe  $C^1$ .
- ou bien  $\beta(v)$  n'est pas strictement monotone croissante (c'est le cas de la figure 3.2). L'équation scalaire (3.46) n'admet alors pas toujours de solution unique. Par exemple, pour une donnée  $\alpha(t)$  croissante de 0 à une valeur supérieure à  $S\mu_s$ , il y a une infinité de solutions dont aucune n'est de classe  $C^1$ . Pour choisir entre toutes les solutions, on peut

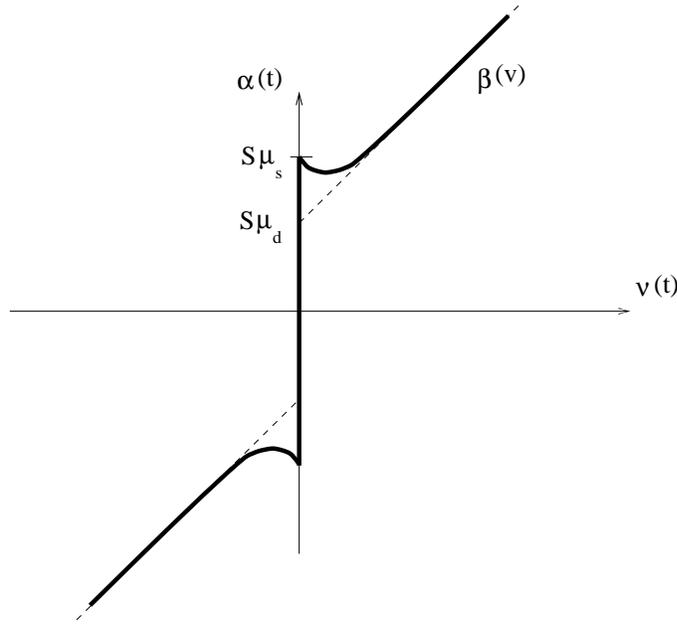


FIG. 3.2 – courbe  $(v_G(t), \alpha(t))$ .

adopter la convention du retard maximal : choisir la solution qui reste de classe  $C^1$  le plus longtemps possible en temps.

### Elastostatique

Dans le paragraphe (3.2.2) on a vu des résultats sur le problème de Tresca, c'est à dire le problème statique avec frottement de Coulomb et contrainte normale imposée. Le problème similaire avec coefficient  $\mu(|\underline{u}_T|)$  dépendant du déplacement tangentiel a été traité par I.R. Ionescu et J.-C. Paumier [43]. Cette dépendance apporte sous certaines conditions une perte de convexité de la fonctionnelle énergie. Il est montré que l'étude du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver le déplacement } \underline{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ tel que :} \\ \left. \begin{array}{l} \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{u}) + \underline{f} = 0, \\ \underline{\sigma}(\underline{u}) = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}), \end{array} \right) \text{ dans } \Omega, \\ \left. \begin{array}{l} \underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} = \underline{F} \text{ sur } \Gamma_F, \quad \text{où } \underline{F} : \Gamma_F \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \underline{u} = \underline{U} \text{ sur } \Gamma_U, \quad \text{où } \underline{U} : \Gamma_U \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \sigma_N(\underline{u}) = -S, \\ \underline{\sigma}_T(\underline{u}) \in -S\mu(|\underline{u}_T|) \underline{Dir}(\underline{u}_T), \end{array} \right) \text{ sur } \Gamma_C, \end{array} \right. \quad (3.47)$$

dépend de l'étude du problème aux valeurs propres suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) + \underline{f} = 0, \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}), \end{array} \right) \text{ dans } \Omega, \quad (3.48)$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \underline{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_F, \\ \underline{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_U, \\ \sigma_N(\underline{v}) = 0, \\ \underline{\underline{\sigma}}_T(\underline{v}) = b \underline{v}_T, \end{array} \right) \text{ sur } \Gamma_C,$$

pour lequel il existe une suite infinie de valeurs propres positives  $(b_n)$  croissante et tendant vers  $+\infty$ .

Le résultat important est que sous la condition :

$$\text{ess sup}_{x \in \Gamma_C} \left( - \inf_{u \in \mathbb{R}_+} \partial_u \mu(x, u) S(x) \right) \geq b_0,$$

le problème (3.47) admet une multiplicité des solutions, correspondant à des extrema locaux de la fonctionnelle énergie.



## Chapitre 4

# Modèles et analyse micro-mécaniques

Les propriétés du contact et du frottement ne dépendent pas uniquement des matériaux en contact, l'état des surfaces est tout à fait prépondérant.

Quel que soit l'état de finition, le polissage des surfaces usinées, celles-ci ne sont jamais parfaitement planes. Elles présentent une suite de bosses et de creux, qui peuvent être petites d'un point de vue macroscopique mais toujours grande par rapport aux dimensions moléculaires.

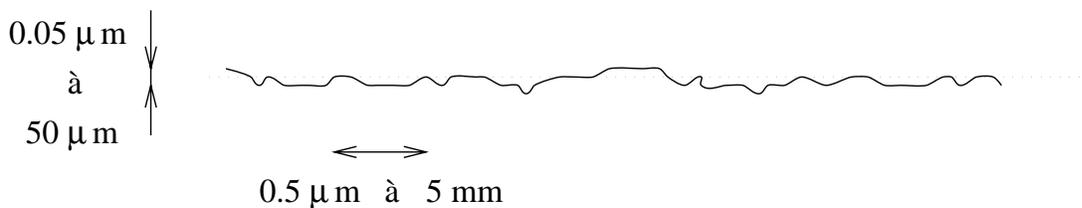


FIG. 4.1 – Vue microscopique d'un profil de surface

On peut retenir que pour la plupart des surfaces usinées ou polies, la hauteur moyenne des aspérités est de l'ordre de  $0,05 \mu\text{m}$  à  $50 \mu\text{m}$  et la pente de ces aspérités est assez faible, au maximum 17%, pour une distance entre les aspérités de  $0,5 \mu\text{m}$  à  $5 \text{mm}$ . Ceci dépendant de l'état de finition de la surface.

Les propriétés d'élasticité, de plasticité de la surface sont souvent différentes des propriétés du matériau même. La présence de couche d'oxyde pour les métaux a tendance la plupart du temps à augmenter la dureté. Le polissage et les différents traitements de surface modifient localement les structures cristallines. Pour des discussions de ce type, voir G.A. Greenwood et J.P.B. Williamson [36], D. Tabor [81] ou D. Pavelescu et A. Tudor [65] par exemple.

La représentation et la caractérisation des surfaces est un problème important si on veut rendre compte des propriétés du contact à partir de modèles microscopiques. C'est un domaine

de recherche important.

## 4.1 Contact entre deux surfaces rugueuses et aire réelle de contact

Les principales propriétés du contact entre deux surfaces proviennent du fait que, tout au moins pour des chargement raisonnables, le contact réel ne se fait que sur une part assez faible de la surface. On définit mécaniquement le contact réel comme étant les lieux où les molécules des deux surfaces sont dans le champ de force des molécules de la surface opposée (distance de moins de 100 Å environ).

La répartition de la charge n'est donc pas homogène sur la surface, elle est concentrée sur les aspérités en contact réel.

Par opposition à l'aire apparente de contact ( $A_a$ ) qui est l'aire de contact "macroscopique", on introduit l'aire réelle de contact ( $A_r$ ). Beaucoup d'efforts sont faits pour présenter des modèles théoriques exprimant l'aire réelle de contact  $A_r$  en fonction des différents paramètres ; en particulier la dépendance entre  $A_r$  et la charge normale.

Une discussion importante à ce sujet est de savoir si les déformations des aspérités se font sur un mode élastique ou plastique. L'aire réelle de contact étant faible par rapport à l'aire apparente, les contraintes qui y existent peuvent être élevées. C'est un sujet largement débattu et maintenant beaucoup d'auteurs s'accordent à dire que, mis à part des cas très spéciaux de surfaces extrêmement lisses, des déformations plastiques ont lieu même pour des chargement faibles.

Pour donner un ordre de grandeur, Le rapport  $\frac{A_r}{A_a}$  pour des surfaces métalliques dans des conditions normales évolue entre  $10^{-4}$  et  $10^{-2}$ .

## 4.2 Frottement de deux surfaces rugueuses : adhésion et labourage

### 4.2.1 Composante d'adhésion

Les forces qui s'exercent entre deux surfaces planes, sont pour une séparation de l'ordre de 20Å ou plus les forces de Van der Waals. En dessous, quand la séparation se rapproche de la distance atomique, il y a création de liaisons (jonctions) moléculaires (voir D. Tabor [81]).

Ces jonctions dépendent beaucoup de la nature des matériaux en contact. Avec deux surfaces d'un même matériau, les jonctions qui se créent sont du même type que celles qui existent à l'intérieur du matériau. Les traitements de surface et les couches d'oxyde sur les métaux facilitent ou défavorisent la création de jonctions.

Dans beaucoup de cas, la force de frottement est essentiellement produite par le cisaillement des jonctions qui se sont créées. C'est ce qu'on appelle la composante d'adhésion du frottement.

Cette composante peut être faible pour certaines paires de matériaux (on dit alors qu'ils sont mutuellement insolubles) ou au contraire très forte (matériaux mutuellement très solubles), auquel cas le frottement s'accompagnera de détachement de matière d'une surface sur l'autre et on aura un phénomène d'usure important.

L'adhésion est renforcée lors du frottement par l'échauffement important supporté par l'extrémité des aspérités en contact qui, par exemple pour les métaux, augmente leur ductilité. Il est renforcé aussi par les déformations plastiques des aspérités.

D. Tabor [81], en cherchant à évaluer cette composante d'adhésion du frottement, donne l'estimation suivante :

$$\sigma_{\tau} = A_r \tau,$$

où  $\sigma_{\tau}$  est la force de frottement macroscopique totale et  $\tau$  la contrainte de cisaillement moyenne dans les aspérités en contact réel. D'après lui, cette contrainte  $\tau$  est approximativement donnée par une fonction affine de la contrainte normale totale  $\sigma_n$  :

$$\tau = \tau_0 + \alpha \sigma_n.$$

On peut donc estimer le coefficient de frottement dû à l'adhésion par :

$$\mu_a = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_n} = \frac{A_r(\tau_0 + \alpha \sigma_n)}{\sigma_n} = A_r \left( \frac{\tau_0}{\sigma_n} + \alpha \right).$$

Toujours d'après le même auteur la partie  $\frac{\tau_0}{\sigma_n}$  est souvent du même ordre de grandeur que  $\alpha$  pour les métaux, alors que pour beaucoup de matériaux non métalliques, cette partie est petite comparée à  $\alpha$ .

#### 4.2.2 Composante de labourage

Une part du frottement est dû aux déformations engendrées par le labourage des aspérités les plus dures dans le matériau le plus mou. On estime généralement que cette participation est faible, tant que la composante d'adhésion est importante.

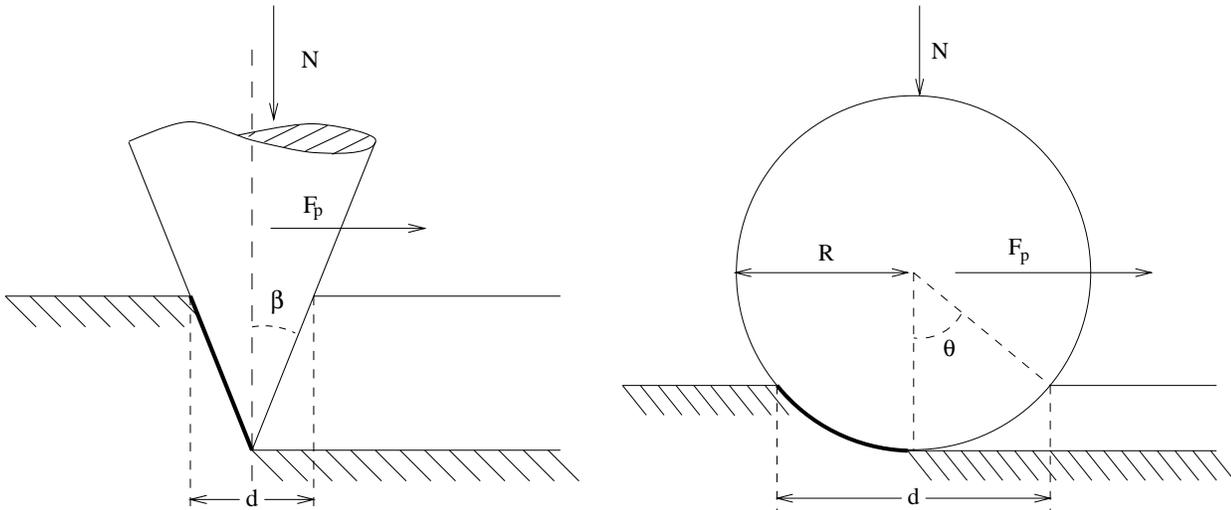


FIG. 4.2 – *Modèle simple de labourage d'une surface par un cône et par une sphère*

Pour estimer la composante de labourage  $\mu_p$  du coefficient de frottement, on utilise généralement des modèles assez simples de sphères ou de cônes rigides labourant une surface molle (voir figure 4.2). A partir de la surface de contact  $A$  du cône et de ses projections,  $A_1$  de  $A$  sur le plan normal au déplacement et  $A_2$  de  $A$  sur le plan horizontal, on écrit que la pression normale  $N$  est  $N = pA_2$  et la force de cisaillement  $F_p$  est  $F_p = pA_1$ . Au total  $\mu_p = \frac{F_p}{N}$  où  $p$  est un coefficient d'élasticité du matériau le plus mou.

Dans le cas de la sphère  $A_2 = \frac{1}{8}\pi d^2$  et  $A_1 = \frac{1}{2}R^2(2\theta - \sin 2\theta)$ . Aussi :

$$\mu_p = \frac{4R^2}{\pi d^2}(2\theta - \sin 2\theta).$$

Dans le cas du cône  $A_2 = \frac{1}{8}\pi d^2$  et  $A_1 = \frac{1}{4}d^2 \cot \beta$ . Donc :

$$\mu_p = \frac{2}{\pi} \cot \beta.$$

Pour des surfaces usuelles la pente des aspérités dépasse rarement les 17% selon D. Tabor [81]. La contribution du labourage  $\mu_p$  est donc dans ces conditions inférieure à 0,11.

### 4.3 Modèles à micro-contacts

Durant les dernières décennies un intérêt particulier a été porté aux modèles de contact micro-mécaniques. Ce sont des modèles qui tentent de rendre compte du contact entre deux surfaces rugueuses. Généralement, on considère une certaine distribution d'aspérités sur une

surface plane s'écrasant sur une autre surface plane. La théorie de Hertz fournit une estimation de l'aire réelle de contact, de la pression et du déplacement normal en fonction de la charge normale totale.

Le premier modèle à micro-contact est celui de G.A. Greenwood et J.P.B. Williamson [36]. C'est un modèle simple où seule la hauteur des aspérités varie, les aspérités se déformant de manière élastique suivant la théorie de Hertz. Ce modèle a été amélioré pour inclure certains aspects tels que les surfaces courbes et les aspérités non alignées. J.A. Greenwood, J.H. Tripp [34], [35] pour un rayon non uniforme des pics d'aspérités, J. Pullen et J.P.B. Williamson [67] pour un modèle plastique, T. Hisakado [38] pour les aspérités elliptiques et paraboliques et M. Burdekin, A. Cowley et N. Back [10] pour un modèle tenant compte d'un chargement tangentiel.

W.R. Chang, I. Etsion et D.B. Bogy [13] proposent un modèle élasto-plastique basé sur la conservation du volume des aspérités déformées plastiquement. V. Aronov, S. Nair et J.M. Wang [3] proposent un modèle prenant à la fois en compte les déformations plastiques et les contacts "conformes". C'est à dire qu'ils prennent en compte des contacts entre une aspérité et un creux.

#### 4.3.1 Modèle de G.A. Greenwood et J.P.B. Williamson

Afin de présenter ce que sont les modèles à micro-contacts, on va présenter en détail le modèle de G.A. Greenwood et J.P.B. Williamson [36] qui est à la base de la quasi-totalité des modèles qui existent (on le désigne généralement par modèle G.W.).

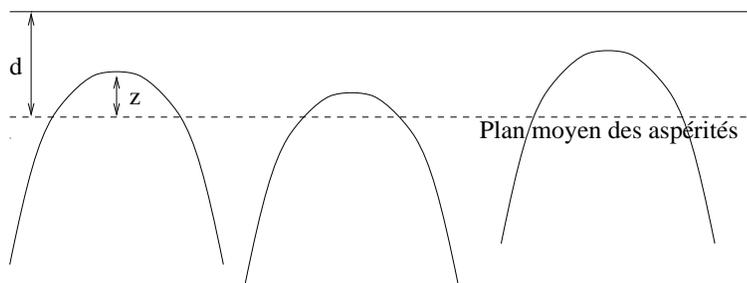


FIG. 4.3 – Aspérités en contact avec une surface plane.

Le contact entre deux surfaces rugueuses est d'abord ramené au contact entre une surface rugueuse et une surface plane. On considère que cette surface est un plan sur lequel il y a une certaine densité surfacique isotropique d'aspérités. On désigne par  $\eta$  le nombre d'aspérités par unité de surface. On considère ensuite que les aspérités ont des extrémités sphériques de rayon de courbure  $R$  constant. Seule la hauteur des aspérités est variable et suit une loi aléatoire de densité  $\phi(z)$ , où  $z$  est la hauteur des aspérités par rapport au plan moyen des aspérités (voir figure 4.3).

Les aspérités sont considérées ne pas avoir d'interactions entre elles. On ne prend en compte que la déformation des aspérités, et non des déformations plus globales du support.

En notant de plus  $d$  la séparation entre le plan moyen des aspérités et la surface plane (séparation des surfaces), et  $A_n$  l'aire nominale (ou apparente) de contact, on a :

$$N = \eta A_n \text{ le nombre total d'aspérités,}$$

$$N_c = N \int_d^\infty \phi(z) dz \text{ le nombre d'aspérités en contact réel,}$$

pour une aspérité en contact donnée de hauteur  $z > d$ , on pose  $w = z - d$  son écrasement. On considère la loi de comportement :

$$\bar{A}(w) \text{ l'aire réelle de contact d'une aspérité d'écrasement } w,$$

$$\bar{P}(w) \text{ le chargement normal total sur cette aspérité.}$$

Ainsi l'aire réelle de contact totale est :

$$A_r(d) = \eta A_n \int_d^\infty \bar{A}(z - d) \phi(z) dz,$$

et le chargement total :

$$P(d) = \eta A_n \int_d^\infty \bar{P}(z - d) \phi(z) dz.$$

Maintenant, si on choisit comme G.A. Greenwood et J.P.B. Williamson la solution du contact élastique de Hertz pour l'écrasement d'une sphère élastique sur un plan élastique, on prend la loi de comportement suivante :

$$\bar{A}(w) = \pi R w,$$

$$\bar{P}(w) = \frac{4}{3} E R^{\frac{1}{2}} w^{\frac{3}{2}},$$

où  $\frac{1}{E} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$  et  $E_1, \nu_1, E_2, \nu_2$  les coefficient de Lamé des matériaux en contact.

Si on choisit de plus une distribution exponentielle :

$$\phi(z) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{z}{\sigma}}, \text{ pour } z > 0,$$

on trouve :

$$\begin{aligned} N(d) &= \eta A_n e^{-\frac{d}{\sigma}}, \\ A_r(d) &= \pi \eta A_n R e^{-\frac{d}{\sigma}}, \\ P(d) &= \sqrt{\frac{\pi \sigma}{R}} \eta R \sigma E A_n e^{-\frac{d}{\sigma}} \end{aligned}$$

Et on constate que  $A_r$  et  $P$  sont proportionnels. Cette proportionnalité est conservée pour une distribution gaussienne des hauteurs des aspérités.

Ce modèle est valide si la déformation des aspérités reste dans le domaine élastique. Selon G.A. Greenwood et J.P.B. Williamson, une aspérité se déforme plastiquement à partir de  $w = w_p$  avec :

$$w_p = R \left( \frac{\pi K H}{E'} \right)^2,$$

où  $H$  est la limite élastique du matériau le plus mou et  $K$  une constante de l'ordre de 0,6. La probabilité de contact plastique est alors :

$$p(z > d + w_p) = \int_{d+w_p}^{+\infty} \phi(z) dz,$$

et l'aire réelle de contact plastique :

$$A_p = \pi \eta R A_n \int_{d+w_p}^{+\infty} (z - d) \phi(z) dz.$$

Le modèle perd sa validité quand  $\frac{A_p}{A_r}$  devient significatif.

#### 4.3.2 Modèle de W.R. Chang, I. Etsion et D.B. Bogy

S'inspirant directement du modèle G.W., I. Etsion et D.B. Bogy [13] présentent un modèle tenant compte des déformations plastiques des aspérités. La relation donnant l'aire de contact en déformation plastique est basée sur la conservation du volume des aspérités. Cette aire est donnée pour une aspérité par :

$$\bar{A}(w) = \pi R w \left( 2 - \frac{w_p}{w} \right),$$

pour  $w > w_p$  et avec les notations du paragraphe précédent.

L'expression de l'aire réelle de contact et de la charge normale est alors :

$$A_r(d) = A_e(d) + A_p(d) = \eta A_n \pi R \left( \int_d^{d+w_p} (z - d) \phi(z) dz + \int_{d+w_p}^{+\infty} (2(z - d) - w_p) \phi(z) dz \right),$$

$$P(d) = \eta A_n E \left( \frac{4}{3} R^{\frac{1}{2}} \int_d^{d+w_p} (z - d)^{\frac{3}{2}} \phi(z) dz + \pi R K \frac{H}{E} \int_{d+w_p}^{+\infty} (2(z - d) - w_p) \phi(z) dz \right).$$

Les calculs numériques effectués à partir de ce modèle afin de le comparer au modèle G.W., tendent à montrer que le modèle G.W. sous-estime légèrement l'aire réelle de contact. Toutefois les résultats des deux modèles restent très proches.

### 4.3.3 Autres modèles

Divers autres modèles ont été proposés afin de modéliser le contact de surfaces rugueuses. Les principes de base sont similaires à ceux des deux modèles que l'on vient de voir, c'est à dire une surface représentée par une distribution aléatoire d'aspérités.

Il n'est pas l'objet de les détailler tous ici, on va toutefois en citer rapidement deux.

Le premier modèle est celui de M. Burdekin, A. Cowley et N. Back [10]. Il a la spécificité de se préoccuper du chargement et du déchargement tangentiel. La surface  $y$  est représentée par une distribution d'aspérités prismatiques. Sous l'effet du chargement tangentiel, les aspérités réagissent élastiquement dans un premier temps, avant d'effectuer un glissement pour un chargement plus grand. Chaque aspérité est en fait représentée par une petite barre élastique sujette à la loi de frottement de Coulomb sur une surface rigide plane.

Le deuxième modèle est celui de V. Aronov, S. Nair et J.M. Wang [3]. Il est une amélioration de celui de W.R. Chang, I. Etsion et D.B. Bogy. Au lieu d'utiliser les résultats de Hertz pour la déformation des aspérités, il est utilisé des résultats de simulation numérique de contact entre des surfaces de courbures différentes, de même signe ou de signe opposé. Les résultats de ce modèle diffèrent essentiellement dans le domaine plastique. Leur conclusion est que les modèles précédent surestimaient le contact plastique.

## Conclusion

Les travaux expérimentaux portant sur l'étude des surfaces et leur contact, dont en particulier D. Tabor a présenté une synthèse ont permis d'importants progrès dans la compréhension des phénomènes physiques qui entrent en jeux lors du frottement. Il est tentant de vouloir faire le lien entre ce que l'on connaît du comportement microscopique des surfaces et les lois de frottement sec usuelles. Toutefois ce lien semble difficile à établir. Les modèles qui sont mis en œuvre ne prennent en compte qu'un petit nombre de paramètres. Pour la grande majorité d'entre eux, ils donnent des estimations pour le contact statique sans contraintes tangentielles.

## **Deuxième partie**

# **Analyse du comportement stick-slip sur un problème modèle**



# Chapitre 1

## Modélisation des instabilités liées au frottement sec

### Introduction

Les instabilités, ou vibrations induites par le frottement sec dans les structures élastiques ont fait l'objet de nombreux travaux, dont certains ont été introduits en première partie. Un grand nombre d'entre eux concernent l'étude de loi de Coulomb modifiées et leur influence sur les systèmes dynamiques à nombre fini de degrés de libertés. Une manière simple de rendre compte de ces instabilités est d'introduire un coefficient de frottement qui dépend de la vitesse de glissement et qui admet d'importantes portions décroissantes. Le travail qui est présenté dans cette deuxième partie est centré sur l'étude du comportement d'un problème modèle de frottement sec que l'on introduit dans ce chapitre et qui sera étudié sous différentes formes dans les chapitres suivants. L'objectif est de saisir l'influence de la dépendance du coefficient de frottement sur le comportement du modèle et d'aborder certaines des difficultés mathématiques qui sont liées à ce problème. Au chapitre 2, on présente un analogue discret du problème modèle, ce qui nous permet d'introduire des outils mathématiques sur l'analyse des problèmes différentiels multivoques. Le chapitre 3 est consacré à l'analyse mathématique et numérique du problème unidimensionnel qui consiste à chercher les solutions horizontalement homogène du problème modèle. On présente ensuite au chapitre 4 des simulations sur le problème bidimensionnel réalisées à l'aide d'un schéma basé sur une méthode de décomposition suivant les directions alternées.

### 1.1 Caractérisation des instabilités liées au frottement sec

Il est de l'expérience de la vie courante que le frottement induit des phénomènes vibratoires (grincements de pièces métalliques, archet sur une corde de violon mais aussi glissement de faille dans les tremblements de terre).

Les premières approches expérimentales de ce phénomène ont été réalisées sur l'étude du mouvement de petits solides sur lesquels on a fait des mesures globales. De la même manière, la modélisation des instabilités liées au frottement sec a été largement abordée sur des systèmes discrets tels que les systèmes masselottes-ressorts. Ces systèmes ont souvent servi et servent encore de "banc d'essai" à la mise au point de loi de frottement capables de rendre compte de ces instabilités (voir par exemple [12] pour une étude sur une loi à coefficient variable, [30] pour un système lié à la modélisation des failles géologiques, [6] pour une loi liée à un opérateur d'hysteresis, etc. ).

Les études sur l'aspect dynamique des solides élastiques soumis à la friction sèche sont moins nombreuses. Des résultats expérimentaux existent sur le frottement de matériaux de dureté différentes, par exemple dans [85] pour du polyuréthane glissant sur de l'époxy, ou dans [5] pour du verre glissant sur du caoutchouc. Lors du glissement on observe la formation de plis de décollement dans le matériau le plus mou, que l'on a appelé "onde de Schallamach" et dont l'allure est donnée sur la figure 1.1.

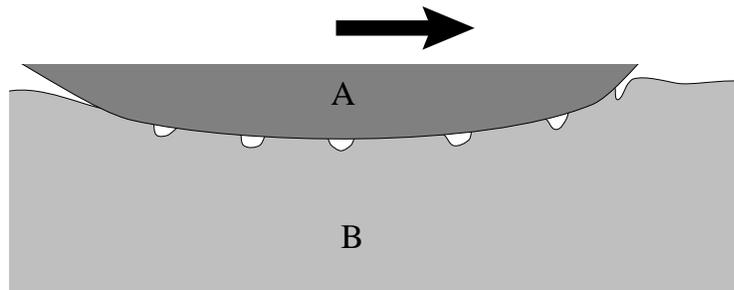


FIG. 1.1 – *Solide rigide glissant avec frottement sur un matériau élastique*

D'autres études expérimentales font état d'ondes de contraintes très rapides sur la surface de contact. Peu d'études mathématiques ont été faites sur ce sujet. On peut citer néanmoins [73] et [75] sur l'évolution quasi-statique d'un bloc élastique, [14] sur l'évolution dynamique de failles géologiques et [18] sur les ondes d'interfaces dans le glissement relatif de deux solides élastiques.

## 1.2 Problème modèle

On présente dans ce paragraphe un problème modèle de système élastique avec frottement qui va nous servir de support pour l'étude du mouvement stick-slip par la suite. Il s'agit du modèle du bloc élastique glissant sur une fondation rigide plane qui est elle-même animée d'un mouvement horizontal.

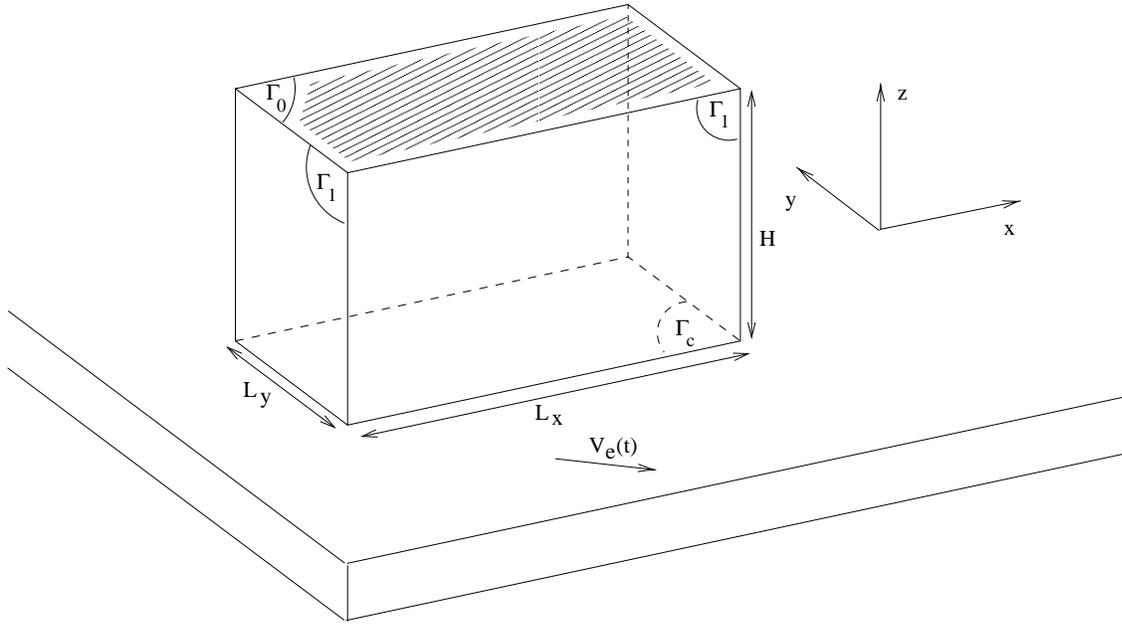


FIG. 1.2 – bloc élastique glissant avec frottement sur une fondation rigide animée d'un mouvement horizontal

Le domaine  $\Omega = ]0, L_x[ \times ]0, L_y[ \times ]0, H[$  représente le bloc élastique en configuration de référence. A l'intérieur du bloc les déplacements sont régis par les équations de l'élasticité linéaire avec une loi de Hooke :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \partial_{tt}^2 \underline{u} = \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{u}) , \\ \underline{\sigma}(\underline{u}) = \lambda \text{tr}(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) \mathbf{I}_{\mathbb{R}^3} + 2G \underline{\varepsilon}(\underline{u}) , \\ \underline{\varepsilon}(\underline{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}) , \end{array} \right) \text{ dans } \Omega \times ]0, T], \quad (1.1)$$

où  $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$  est le déplacement par rapport à la configuration de référence,  $\rho$  la densité du matériau,  $\lambda$  et  $G$  les coefficients de Lamé,  $\underline{\varepsilon}(\underline{u})$  le tenseur linéarisé des déformations et  $\underline{\sigma}(\underline{u})$  le tenseur des contraintes. Sur la partie du bord  $\Gamma_0$  qui représente la face du haut, on impose les déplacements :

$$\underline{u}(t, x, y, H) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -D \end{pmatrix}, \text{ sur } \Gamma_0, \quad (1.2)$$

de manière à ce que la structure ait tendance à rester en contact avec la fondation rigide. Sur la partie du bord  $\Gamma_1$  représentant les faces latérales, on impose soit des conditions périodiques

soit des conditions de Neumann. Les conditions périodiques s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{u}(t, 0, y, z) = \underline{u}(t, L_x, y, z), & \underline{u}(t, x, 0, z) = \underline{u}(t, x, L_y, z), \\ (\underline{\sigma}(\underline{u})\underline{n})(t, 0, y, z) = (\underline{\sigma}(\underline{u})\underline{n})(t, L_x, y, z), & (\underline{\sigma}(\underline{u})\underline{n})(t, x, 0, z) = (\underline{\sigma}(\underline{u})\underline{n})(t, x, L_y, z), \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $\underline{n}$  est la normale extérieure à  $\Omega$  sur  $\Gamma_1$ . En introduisant des conditions périodiques on peut estimer que l'on étudie les mouvements périodiques d'une couche infinie. La condition de Neumann s'écrit :

$$\underline{\sigma}(\underline{u})\underline{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (1.4)$$

et modélise le mouvement d'un solide élastique que l'on ne sollicite pas sur ses bords latéraux.

Sur la partie  $\Gamma_c$  qui représente la face en contact on impose une condition de contact unilatéral et une condition de frottement de Coulomb avec un coefficient dépendant de la vitesse de glissement :

$$\sigma_N(\underline{u}) \in -J_N(u_N) \quad \text{sur } \Gamma_c \times ]0, T] \quad (1.5)$$

$$\sigma_T(\underline{u}) \in (\sigma_N(\underline{u}))\mu(|v_G|)\underline{Dir}(v_G), \quad \text{sur } \Gamma_c \times ]0, T], \quad (1.6)$$

où  $\mu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est le coefficient de frottement,  $\sigma_T$  et  $\sigma_N$  sont les parties tangentielle et normale de la contrainte,  $\underline{Dir}$  et  $J_N$  sont les fonctions multivoques déjà définies au chapitre 2 de la partie 1 (voir équations (2.1) et (2.3)) et  $\underline{v}_G = \partial_t \underline{u}_T(t, x, y, 0) - \underline{V}_e(t)$  est la vitesse de glissement sur le bord de contact.

Le problème est complété par des conditions initiales :

$$\underline{u}(0, x, y, z) = \underline{u}_0(x, y, z), \quad \partial_t \underline{u}(0, x, y, z) = \underline{u}_1(x, y, z). \quad (1.7)$$

### 1.2.1 Choix du coefficient de frottement

On donne ici l'expression du coefficient de frottement que l'on utilisera dans les exemples numériques. Bien sur il existe un choix infini de dépendance possible. Le coefficient choisi s'inspire de dépendances ayant été constatées dans certains travaux expérimentaux sur le glissement des métaux.

On choisit un coefficient de frottement avec trois portions monotones. On impose à ce coefficient de frottement d'avoir une portion monotone croissante pour des petites vitesses de glissement  $|v_G| \in ]0, V_{cr1}[$ , une portion décroissante pour des vitesses intermédiaires  $|v_G| \in ]V_{cr1}, V_{cr2}[$  et une portion légèrement croissante pour  $|v_G| \in ]V_{cr2}, +\infty[$ , et qui reste borné. On pose donc  $\mu_{min}, \mu_{max}, \mu_s, \mu_d$  respectivement la valeur minimale, maximale, le coefficient statique et la limite du coefficient pour des grandes vitesses. On prend par exemple :

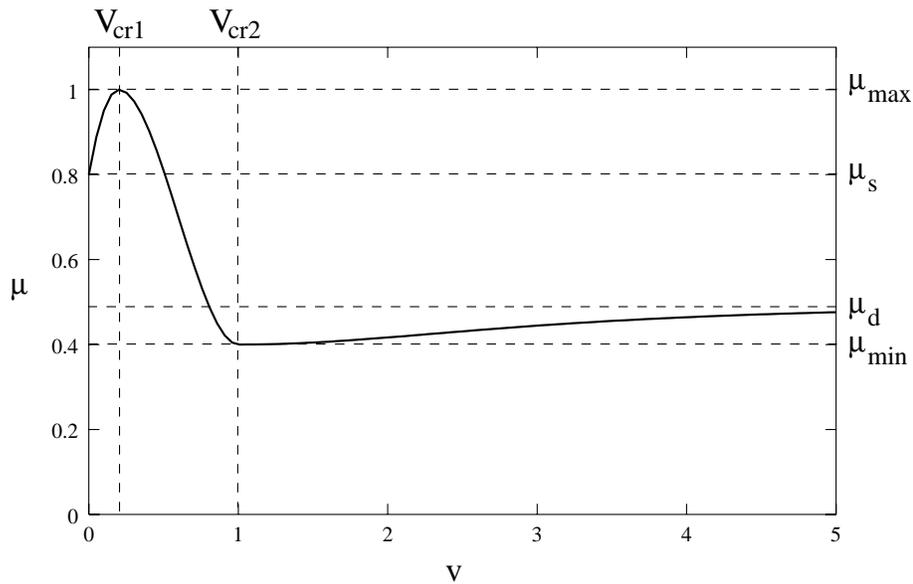


FIG. 1.3 – Coefficient de frottement avec trois portions de monotonie

$$\begin{aligned}\mu_1(v) &= \mu_s + (\mu_{max} - \mu_s) \frac{v}{V_{cr1}} \left(2 - \frac{v}{V_{cr1}}\right), \\ \mu_2(v) &= \mu_{max} - (\mu_{max} - \mu_{min}) \left(\frac{v - V_{cr1}}{V_{cr2} - V_{cr1}}\right)^2 \left(3 - 2\frac{v - V_{cr1}}{V_{cr2} - V_{cr1}}\right), \\ \mu_3(v) &= \mu_d - \frac{1}{\frac{1}{\mu_d - \mu_{min}} + b(v - V_{cr2})^2},\end{aligned}$$

avec  $b > 0$  et

$$\mu(v) = \begin{cases} \mu_1(v) & \text{si } v \in [0, V_{cr1}], \\ \mu_2(v) & \text{si } v \in [V_{cr1}, V_{cr2}], \\ \mu_3(v) & \text{si } v \in [V_{cr2}, +\infty[, \end{cases}$$

La plus grande pente négative du coefficient  $\mu$  est alors :

$$M_\mu = -\mu'_2 \left(\frac{V_{cr2} + V_{cr1}}{2}\right) = -\frac{3}{2} \frac{\mu_{max} - \mu_{min}}{V_{cr2} - V_{cr1}}.$$

On verra l'importance de cette constante au chapitre suivant. Dans les exemples numériques qui seront présentés dans les chapitres suivants, on prendra les valeurs suivantes :

$$V_{cr1} = 0.05 \text{ m/sec.}, V_{cr2} = 1.0 \text{ m/sec.}, \mu_s = 0.8, \mu_d = 0.5, \mu_{max} = 1.0, \mu_{min} = 0.4,$$

ce qui donne :

$$\mu(v) = \begin{cases} 0.8 + 8v(1 - 10v) & \text{si } v \in [0, 0.05], \\ 1 - \frac{0.6}{19^3}(20v - 1)^2(59 - 40v) & \text{si } v \in [0.05, 1.0], \\ 0.5 - \frac{1}{v^2 - 2v + 11} & \text{si } v \in [1.0, +\infty[, \end{cases} \quad (1.8)$$

### 1.3 Difficulté de l'analyse mathématique du problème modèle

Essayons de mettre le problème modèle avec condition de Neumann sous la forme d'une inégalité variationnelle comme on l'a vu au chapitre 3 de la partie 1. On pose :

$$H = (L^2(\Omega))^3, \quad V = (H^1(\Omega))^3,$$

$$V_0 = \{\underline{v} \in V, \underline{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_0\},$$

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}(x)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}(x)) dx.$$

Et on introduit les fonctionnelles suivantes :

$$j_T(\underline{u}, \partial_t \underline{u}, \underline{v}, V_\varepsilon) = - \int_{\Gamma_c} \mu(\|\partial_t \underline{u} - V_\varepsilon\|) \sigma_N(\underline{u}) \|\underline{v}_T - V_\varepsilon\| d\Gamma,$$

$$j_N(\underline{u}, \underline{v}) = - \int_{\Gamma_c} \sigma_N(\underline{u}) |v_N| d\Gamma,$$

et la formulation en inéquation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{u} : [0, T] \longrightarrow V \text{ tel que } \partial_t \underline{u} \in V_0 \text{ et} \\ < \rho \partial_{tt}^2 \underline{u}, \underline{v} - \partial_t \underline{u} >_{V', V} + a(\underline{u}, \underline{v} - \partial_t \underline{u}) + j_N(\underline{u}, \underline{v}) - j_N(\underline{u}, \partial_t \underline{u}) \\ \quad + j_T(\underline{u}, \partial_t \underline{u}, \underline{v}, V_\varepsilon(t)) - j_T(\underline{u}, \partial_t \underline{u}, \partial_t \underline{u}, V_\varepsilon(t)) \geq 0, \forall \underline{v} \in V_0. \\ \underline{u}(0) = \underline{u}_0, \\ \partial_t \underline{u}(0) = \underline{u}_1. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Essayons alors de montrer qu'une solution  $u$  suffisamment régulière de (1.9) est solution du problème (1.1) (1.2) (1.5) (1.4) (1.6) (1.7) au sens classique. Le cadre théorique n'étant pas totalement défini, le raisonnement qui suit n'a pas toute la rigueur nécessaire mais est destiné à faire ressortir certaines des difficultés mathématiques.

La partie concernant les équations de l'élasticité est classique. Pour  $t \in ]0, T]$  fixé, soit  $\underline{v} \in V_0$  tel que  $\underline{v} = \partial_t \underline{u}$  sur  $\Gamma_c$ . Comme  $\underline{u}$  est solution régulière de (1.9) on a :

$$\int_{\Omega} \rho \partial_{tt}^2 \underline{u} \cdot (\underline{v} - \partial_t \underline{u}) dx + a(\underline{u}, \underline{v} - \partial_t \underline{u}) \geq 0, \quad (1.10)$$

On pose  $\tilde{\underline{v}} = 2\partial_t \underline{u} - \underline{v}$ , alors on a aussi :

$$\int_{\Omega} \rho \partial_{tt}^2 \underline{u} \cdot (\tilde{\underline{v}} - \partial_t \underline{u}) dx + a(\underline{u}, \tilde{\underline{v}} - \partial_t \underline{u}) \geq 0,$$

c'est à dire :

$$\int_{\Omega} \rho \partial_{tt}^2 \underline{u} \cdot (\partial_t \underline{u} - \underline{v}) dx + a(\underline{u}, \partial_t \underline{u} - \underline{v}) \geq 0,$$

Combiné avec (1.10) cela donne :

$$\int_{\Omega} \rho \partial_{tt}^2 \underline{u} \cdot (\partial_t \underline{u} - \underline{v}) dx + a(\underline{u}, \partial_t \underline{u} - \underline{v}) = 0,$$

Or pour tout  $\underline{w} \in (H_0^1(\Omega))^3$ ,  $\underline{v} + \underline{w} = \partial_t \underline{u}$  sur  $\Gamma_c$ , donc on a :

$$\int_{\Omega} \rho \partial_{tt}^2 \underline{u} \cdot \underline{w} dx + a(\underline{u}, \underline{w}) = 0, \quad \forall \underline{w} \in (H_0^1(\Omega))^3.$$

D'après la formule de Green vue au chapitre 3 partie 1, on a pour  $\underline{u}$  régulier :

$$a(\underline{u}, \underline{w}) = - \int_{\Omega} (\mathbf{div} \underline{\sigma}(\underline{u})) \cdot \underline{w} dx + \int_{\Gamma} \underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} \cdot \underline{w} d\Gamma,$$

où  $\underline{n}$  est la normale unitaire sortante sur le bord de  $\Omega$ , et  $w \in V$ . on a donc :

$$\int_{\Omega} \rho \partial_{tt}^2 \underline{u} \cdot \underline{w} dx - \int_{\Omega} (\mathbf{div} \underline{\sigma}(\underline{u})) \cdot \underline{w} dx = 0, \quad \forall \underline{w} \in (H_0^1(\Omega))^3.$$

Pour  $\underline{u}$  régulier cela implique :

$$\rho \partial_{tt}^2 \underline{u} - \mathbf{div} \underline{\sigma}(\underline{u}) = 0,$$

au sens classique. L'inégalité de (1.9) se réduit donc à :

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_c} \underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} \cdot (\underline{v} - \partial_t \underline{u}) d\Gamma + j_N(\underline{u}, \underline{v}) - j_N(\underline{u}, \partial_t \underline{u}) + j_T(\underline{u}, \partial_t \underline{u}, \underline{v}, V_\epsilon(t)) - j_T(\underline{u}, \partial_t \underline{u}, \partial_t \underline{u}, V_\epsilon(t)) \geq 0, \quad \forall \underline{v} \in V_0.$$

Maintenant, s'agissant de la condition de Neumann, le traitement est aussi classique. On prend  $\underline{v} \in V_0$  tel que  $\underline{v} = \partial_t \underline{u}$  sur  $\Gamma_c$ , alors on a :

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_c} \underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} \cdot (\underline{v} - \partial_t \underline{u}) d\Gamma \geq 0$$

et donc par le même raisonnement que précédemment on a :

$$\int_{\Gamma_1} \underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} \cdot \underline{w} d\Gamma \geq 0, \quad \forall \underline{w} \in V_0, \quad \underline{w} = 0 \text{ sur } \Gamma_c.$$

Et pour  $\underline{u}$  régulier cela implique :

$$\underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

Finalement on n'a plus qu'à considérer les termes relatifs au bord de contact  $\Gamma_c$  :

$$\int_{\Gamma_c} \underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} \cdot (\underline{v} - \partial_t \underline{u}) d\Gamma + j_N(\underline{u}, \underline{v}) - j_N(\underline{u}, \partial_t \underline{u}) + j_T(\underline{u}, \partial_t \underline{u}, \underline{v}, V_\epsilon(t)) - j_T(\underline{u}, \partial_t \underline{u}, \partial_t \underline{u}, V_\epsilon(t)) \geq 0, \quad \forall \underline{v} \in V_0.$$

Pour la condition de contact unilatéral, on prend  $\underline{v} \in V_0$  tel que  $\underline{v}_T = \partial_t \underline{u}_T$  sur  $\Gamma_c$ , alors on a :

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_N(\underline{u})(v_N - \partial_t u_N) d\Gamma + j_N(\underline{u}, \underline{v}) - j_N(\underline{u}, \partial_t \underline{u}) \geq 0,$$

autrement dit :

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_N(\underline{u})(v_N - |v_N|)d\Gamma \geq \int_{\Gamma_c} \sigma_N(\underline{u})(\partial_t u_N - |\partial_t u_N|)d\Gamma,$$

Si on prend  $\underline{w} \in V_0$  tel que  $\underline{w}_T = \partial_t \underline{u}_T$  et  $w_N = \nu v_N$  sur  $\Gamma_c$  et pour  $\nu \geq 0$ , alors on arrive à :

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_N(\underline{u})(\nu v_N - |\nu v_N|)d\Gamma \geq \int_{\Gamma_c} \sigma_N(\underline{u})(\partial_t u_N - |\partial_t u_N|)d\Gamma, \quad \forall \nu \geq 0,$$

En faisant varier  $\nu$  on en conclut à :

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_N(\underline{u})(v_N - |v_N|)d\Gamma \geq 0,$$

Pour  $\underline{u}$  régulier cela implique que :

$$\sigma_N(\underline{u}) \leq 0, \quad \text{sur } \Gamma_c,$$

et par conséquent :

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_N(\underline{u})(\partial_t u_N - |\partial_t u_N|)d\Gamma = 0.$$

mais comme  $\sigma_N(\underline{u})(\partial_t u_N - |\partial_t u_N|)$  est un terme positif on en conclut que :

$$\sigma_N(\underline{u}) \cdot (\partial_t u_N - |\partial_t u_N|) = 0, \quad \text{sur } \Gamma_c,$$

C'est une condition qui a du sens et qui implique que lorsque  $\sigma_N(\underline{u})$  est non nul, c'est à dire lorsque le contact est établi, la vitesse normale  $\partial_t u_N$  ne peut être que positive, c'est à dire que l'interpénétration est interdite. Elle implique aussi que la contrainte  $\sigma_N(\underline{u})$  est nulle lorsque la vitesse normale  $\partial_t u_N$  est négative. A priori on ne peut pas retrouver toute la condition de contact unilatéral, car il manque la condition sur  $u_N$ . La cause principale est la formulation en puissances virtuelles qui fait intervenir la vitesse  $\partial_t u_N$  au lieu du déplacement.

Regardons maintenant la condition de frottement sur  $\Gamma_c$ . On prend  $\underline{v} \in V_0$  tel que  $v_N = \partial_t u_N$  sur  $\Gamma_c$ , alors on a :

$$\int_{\Gamma_c} \underline{\sigma}_T(\underline{u}) \cdot (\underline{v}_T - \partial_t \underline{u}_T) d\Gamma + j_T(\underline{u}, \underline{v}) - j_T(\underline{u}, \partial_t \underline{u}) \geq 0,$$

se qui se récrit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_c} \underline{\sigma}_T(\underline{u}) \cdot (\underline{v}_T - V_e(t)) - \sigma_N(\underline{u}) \mu (\|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\|) \|\underline{v}_T - V_e(t)\| d\Gamma \\ & \geq \int_{\Gamma_c} \underline{\sigma}_T(\underline{u}) \cdot (\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)) - \sigma_N(\underline{u}) \mu (\|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\|) \|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\| d\Gamma. \end{aligned}$$

On pose  $\lambda \beta = \underline{v}_T - V_e(t)$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , cela donne :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_c} \lambda \underline{\sigma}_T(\underline{u}) \cdot \beta - |\lambda| \sigma_N(\underline{u}) \mu (\|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\|) \|\beta\| d\Gamma \\ & \geq \int_{\Gamma_c} \underline{\sigma}_T(\underline{u}) \cdot (\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)) - \sigma_N(\underline{u}) \mu (\|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\|) \|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\| d\Gamma, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En particulier :

$$\int_{\Gamma_c} \underline{\sigma}_T(\underline{u}) \cdot (\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)) - \sigma_N(\underline{u}) \mu(\|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\|) \|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\| d\Gamma \leq 0, \quad (1.11)$$

$$\int_{\Gamma_c} \lambda \underline{\sigma}_T(\underline{u}) \cdot \beta - |\lambda| \sigma_N(\underline{u}) \mu(\|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\|) \|\beta\| d\Gamma \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

La deuxième inégalité implique que :

$$\left| \int_{\Gamma_c} \underline{\sigma}_T(\underline{u}) \cdot \beta d\Gamma \right| \leq - \int_{\Gamma_c} \sigma_N(\underline{u}) \mu(\|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\|) \|\beta\| d\Gamma.$$

Ceci pour un  $\beta$  a priori arbitraire dans  $H^{1/2}(\Gamma_c)$ . Pour  $\underline{u}$  régulier cela implique que :

$$\|\underline{\sigma}_T(\underline{u})\| \leq -\sigma_N(\underline{u}) \mu(\|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\|), \quad \text{sur } \Gamma_c. \quad (1.13)$$

Des deux inégalités (1.11) et (1.12) on tire :

$$\int_{\Gamma_c} \underline{\sigma}_T(\underline{u}) \cdot (\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)) - \sigma_N(\underline{u}) \mu(\|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\|) \|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\| d\Gamma = 0,$$

et comme d'après ce qui précède le terme à l'intérieur de l'intégrale est toujours négatif ou nul, on en conclut :

$$\underline{\sigma}_T(\underline{u}) \cdot (\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)) - \sigma_N(\underline{u}) \mu(\|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\|) \|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\| = 0, \quad \text{sur } \Gamma_c.$$

Ceci avec l'inégalité (1.13) assure que si  $\partial_t \underline{u}_T \neq V_e(t)$  on a les deux relations suivantes :

$$\|\underline{\sigma}_T(\underline{u})\| = -\sigma_N(\underline{u}) \mu(\|\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)\|),$$

$$\exists \lambda \geq 0, \quad \underline{\sigma}_T(\underline{u}) = -\lambda(\partial_t \underline{u}_T - V_e(t)),$$

Ce qui est l'expression de la condition de frottement.

Par ce raisonnement, on voit que pour utiliser la formulation en inéquation proposée, il reste à trouver un moyen d'inclure la condition de contact unilatéral complète. Il est possible que la méthode introduite dans [17] pour le problème quasi-statique et faisant intervenir une double inéquation variationnelle, puisse s'étendre au cas dynamique.

Une difficulté supplémentaire vient lorsque l'on cherche le cadre mathématique précis pour la définition des fonctionnelles  $j_N$  et  $j_T$ . On a vu au chapitre 3 de la première partie qu'il était possible de donner du sens aux contraintes sur le bord  $\sigma_N$  et  $\underline{\sigma}_T$  pour un tenseur des contraintes qui a une régularité  $H_{div}(\Omega)$ . Dans le problème dynamique cela veut dire que le terme  $\rho \partial_{tt}^2 \underline{u}$  doit avoir la régularité  $L^2(\Omega)$ . Mais par des arguments simples, on peut voir que les solutions du problème que l'on considère n'ont pas cette régularité. En effet imaginons par exemple une situation où le bloc élastique est totalement décollé, à une altitude constante et est animée d'une

vitesse constante dirigée vers le bas. Lorsque le contact s'établit sur toute la surface de contact, la vitesse sur le bord admet une discontinuité (elle passe d'une valeur strictement négative à la valeur zéro). Cette discontinuité va se propager à l'intérieur du solide à cause du caractère strictement hyperbolique de l'équation de l'élasticité linéaire. Ce type de solution n'a pas la régularité nécessaire.

On voit donc qu'on ne peut pas traiter ce problème par la formulation habituelle utilisée pour les problèmes de contact. A notre connaissance, il n'a pas encore été proposé un cadre totalement satisfaisant pour le traitement mathématique de ce problème.

## Chapitre 2

# Systemes à nombre fini de degrés de liberté

### Introduction

Les modèles de frottement faisant intervenir des systèmes de masselottes et de ressorts ont été, et sont encore, à la base de beaucoup d'études sur les lois de frottement (voir par exemple [80], [6], [53], [30], [12], [57]). Le modèle que l'on va présenter ici, et qui est un analogue discret du problème modèle présenté au chapitre 1, va nous permettre d'aborder des premiers éléments sur le comportement des systèmes élastiques soumis à la friction sèche avec un coefficient qui dépend de la vitesse de glissement, et nous donnera des éléments de comparaison quand nous aborderons les systèmes continus. Cette étude des systèmes discrets nous permet aussi d'introduire la théorie des inclusions différentielles, ainsi que des méthodes numériques qui s'y rapportent et que nous appliquerons aussi dans les modèles continus.

### 2.1 Modèle à nombre fini de degrés de liberté

Sur la figure 2.1, est représenté un modèle discret analogue au problème modèle présenté au chapitre 1. On considère un système de  $N$  masselottes de masses respectives  $m_i, i = 1..N$  reposant en ligne sur une fondation rigide animée d'un mouvement horizontal de vitesse  $V_e$  (voir fig. 2.1). Des ressorts de raideur  $K_i^1$  relient chaque masselotte à un support fixe. Une pression de contact  $S_i$  constante est imposée sur chaque masselotte, maintenant un contact permanent. Entre deux masselottes successives  $m_i, m_{i+1}$  est placé un ressort de raideur  $NK_i^2$  (Le facteur  $N$  devant  $K_i^2$  est ajouté pour que le système soit homogène lorsque le nombre de masselottes varie). L'équation de la dynamique pour la  $i^{\text{ème}}$  masselotte s'écrit alors :

$$m_i \ddot{u}_i(t) \in -K_i^1 u_i(t) + NK_i^2 (u_{i+1}(t) - u_i(t)) + NK_{i-1}^2 (u_{i-1}(t) - u_i(t)) - S_i \mu (\dot{u}_i(t) - V_e(t)) \text{Sgn}(\dot{u}_i - V_e(t)),$$

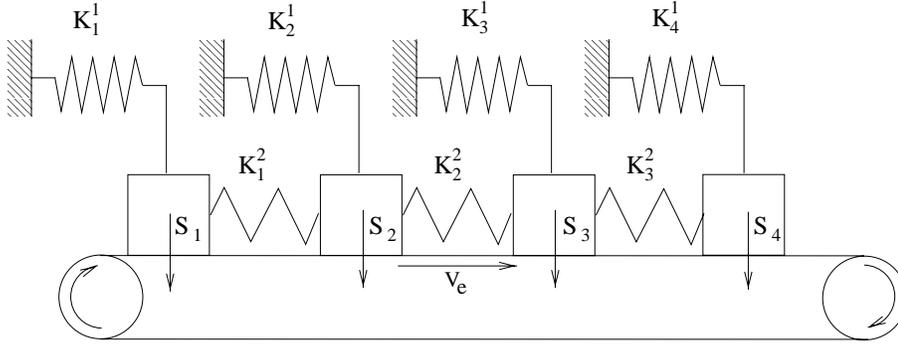


FIG. 2.1 – Système de masselottes et ressorts glissant avec frottement sur une fondation rigide.

où par convention, on donne des valeurs à  $u_0$ ,  $u_{N+1}$  et à  $K_{-1}^2$  suivant les conditions aux limites que l'on veut traduire. Une condition périodique sera traduite par  $u_0 = u_N$ ,  $u_{N+1} = u_1$ , une condition de bord libre par  $u_0 = u_1$ ,  $u_{N+1} = u_N$ , une condition type Dirichlet par  $u_0 = u_{N+1} = 0$ , etc. La fonction  $Sgn$  désigne toujours la fonction signe multivoque.

On transforme le système obtenu en système du premier ordre en posant  $v_i = \dot{u}_i$  :

$$U = (u_i)_{i=1..N}, \quad V = (v_i)_{i=1..N},$$

$$W = (U, V), \quad F(t, W) = (F_1(t, W), F_2(t, W)),$$

$$\begin{cases} (F_1(t, W))_i = v_i(t), \\ (F_2(t, W))_i = \frac{1}{m_i} [-K_i^1 u_i + N K_i^2 (u_{i+1} - u_i) + N K_{i-1}^2 (u_{i-1} - u_i) - S_i \mu (v_i - V_e(t)) Sgn(v_i - V_e(t))], \end{cases} \quad (2.1)$$

le système s'écrit donc :

$$\dot{W}(t) \in F(t, W),$$

où donc  $F : [0, T] \times \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2N})$  est une application multivoque. Avant de poursuivre l'étude de ce système, nous allons introduire la théorie des inclusions différentielles avec les principaux résultats dont nous aurons besoin par la suite.

## 2.2 Applications multivoques semi-continues supérieurement

Les principales références sur lesquelles nous nous sommes basés pour ce qui suit sont les ouvrages de K. Deimling [20] et de V. Barbu [4]. Une application multivoque est une application dont les valeurs sont des sous-ensembles d'un espace vectoriel  $X$ . Souvent ce sont des sous-ensembles particuliers (parties fermées convexes par exemples). Ces applications sont vues

comme des extensions des fonctions ordinaires sur  $X$ , et les opérations élémentaires sur les applications multivoques se déduisent des opérations élémentaires sur  $X$ .

**Définition 1** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach, on note  $\mathcal{P}(X)$  l'ensemble de toutes les parties de  $X$ . Soit  $D \neq \emptyset$  un sous-ensemble de  $Y$ , une **application multivoque** est une application sur  $D$  :

$$F : D \longrightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}.$$

Une **sélection** de  $F : D \longrightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$  est une application :

$$f : D \longrightarrow X,$$

telle que :

$$f(x) \in F(x) \text{ pour tout } x \in D.$$

On dira que  $F$  est **univoque** si elle n'admet qu'une seule sélection  $F(x) = \{f(x)\}$ .

On décrit les principales opérations élémentaires sur les applications multivoques. Tout d'abord, pour deux sous-ensembles  $A, B$  de  $X$  on note :

$$A + \lambda B = \{a + \lambda b; a \in A, b \in B\},$$

ce qui donne un sens à l'addition et la multiplication par un scalaire des applications multivoques :

$$(F + \lambda G)(x) = F(x) + \lambda G(x) = \{f + \lambda g; f \in F(x), g \in G(x)\}.$$

De même lorsque  $X$  est muni d'une relation d'ordre, on dira qu'on a les inégalités suivantes :

$$A < B, \quad A > B, \quad A \leq B, \quad \text{ou} \quad A \geq B,$$

si c'est le cas quelque soit le choix de  $a \in A$  et de  $b \in B$ , c'est à dire si l'on a respectivement :

$$a < b, \quad a > b, \quad a \leq b, \quad \text{ou} \quad a \geq b, \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Ce qui donne un sens aux relations de comparaison entre applications multivoques. En règle générale, quand il n'y a pas d'ambiguïté, un ensemble représentant un singleton  $\{a\}$  est tout simplement noté  $a$ . Par exemple la notation :

$$A > 0,$$

signifie :

$$A > \{0\}, \quad \text{c'est à dire } a > 0, \quad \forall a \in A.$$

Par ailleurs, on note la distance d'un point à un ensemble par :

$$\rho(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|,$$

la distance de Hausdorff entre les deux ensembles  $A$  et  $B$  par :

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} \rho(x, B), \sup_{x \in B} \rho(x, A)\},$$

et pour  $A \subset X$  on note :

$$\|A\| = \sup_{y \in A} \|y\|_X.$$

La propriété de semi-continuité supérieure des applications multivoques qui suit joue un rôle important pour l'obtention des résultats d'existence dans les inclusions différentielles.

**Définition 2 (semi-continuité supérieure)** Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach, et un ensemble  $D \subset Y$ ,  $D \neq \emptyset$ , l'application  $F : D \rightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$  est dite **semi-continue supérieurement (scs en abrégé)** si pour tout fermé  $A \subset X$ , l'ensemble  $F^{-1}(A)$  est fermé dans  $D$ .

On peut traduire la condition de semi-continuité supérieure en terme de suite (voir toujours [20]) : soient  $(w_n)_{n \geq 1} \subset D$  une suite,  $w_0 \in D$  et  $A \subset X$  un ensemble fermé avec  $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} w_0$  et  $F(w_n) \cap A \neq \emptyset$  pour tout  $n \geq 1$ , alors  $F(w_0) \cap A \neq \emptyset$  aussi. Intuitivement  $F(w_0)$  doit être au moins aussi grand en terme d'inclusion que la limite des  $F(w_n)$ .

Un prototype des applications multivoques scs est l'application  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$  définie par :

$$F(t) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } t < 0, \\ \{0, 1\} & \text{si } t = 0, \\ \{1\} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Dans la suite, on utilisera plus particulièrement les applications multivoques à valeurs fermées convexes. Ici  $F$  est scs à valeurs fermées convexes si on remplace  $F(0) = \{0, 1\}$  par  $F(0) = [0, 1]$ .

On peut généraliser cet exemple en posant, pour  $f : D \rightarrow X$  :

$$F(x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{conv}} f(B(x, \delta) \cap D), \quad \text{pour } x \in D, \quad (2.2)$$

où  $\overline{\text{conv}} A$  est la fermeture de l'enveloppe convexe de  $A$ . L'application  $F$  ainsi définie est à valeurs convexes fermées et si  $f$  est continue au point  $x$  alors  $F(x) = \{f(x)\}$ . Si la fonction  $f$  est localement compacte, c'est à dire si pour tout  $x \in D$ , il existe  $r > 0$  tel que  $f(B(x, r) \cap D)$  relativement compact, alors  $F(x)$  est scs (voir [20]).

Une classe intéressante d'applications multivoques sont les applications multivoques monotones.

**Définition 3** Soit  $X$  un espace de Hilbert, muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ , et un ensemble  $D \subset X$ , avec  $D \neq \emptyset$ , l'application  $F : D \rightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$  est dite **monotone** si

$$(F(x) - F(y), x - y) \geq 0, \quad \text{sur } D \times D.$$

On dit aussi que  $F$  est **dissipative** si c'est l'application  $-F$  qui a la propriété d'être monotone.

On peut citer au moins deux propriétés importantes des applications multivoques monotones (voir [20]):

- a)-  $F$  est localement bornée sur  $\overset{\circ}{D}$ ,
- b)- Il existe une réunion dénombrable d'ensembles ouverts  $D_0$  avec  $D_0 \subset \overset{\circ}{D}$  dense dans  $\overset{\circ}{D}$  telle que  $F|_{D_0}$  soit univoque.

On définit aussi une propriété un peu plus faible que la monotonie, qui est la suivante :

**Définition 4** Soit  $X$  un espace de Hilbert, muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ , et un ensemble  $D \subset X$ , avec  $D \neq \emptyset$ , l'application  $F : D \rightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$  est dite **semi-lipschitzienne** s'il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que :

$$(F(x) - F(y), x - y) \leq k \|x - y\|^2, \quad \text{sur } D \times D.$$

Ce qui revient à dire que  $F + kI$  est dissipative, soit  $-F - kI$  monotone. De ce fait les propriétés a)- et b)- précédentes s'appliquent aussi.

## 2.3 Inclusions différentielles

On se place dans le cadre de la dimension finie. Soient  $J = [0, T] \subset \mathbb{R}$ , et  $D \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble fermé d'intérieur non vide et une application multivoque  $F : J \times D \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$ , on s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) \in F(t, u(t)) & \text{presque partout sur } J, \\ u(0) = u_0 \in D, \end{cases} \quad (2.3)$$

dont on cherche les solutions absolument continues, c'est à dire les fonctions  $u : J \rightarrow D$  telles qu'il existe  $u' \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$  avec :

$$u(t) = u_0 + \int_0^t u'(s) ds \quad \text{sur } J,$$

et qui vérifient  $u'(t) \in F(t, u(t))$  presque partout sur  $J$ .

Le fait que l'on considère un sous-ensemble  $D \subset \mathbb{R}^n$  et pas  $\mathbb{R}^n$  tout entier impose certaines conditions. Supposons que  $u : J \rightarrow D$  soit une solution continûment différentiable de (2.3) avec comme condition initiale  $u(0) = x \in D$ . Alors on a en particulier :

$$u(h) = x + hf(0, x) + o(h),$$

où  $f(0, x) \in F(0, x)$  et  $\frac{1}{h}\|o(h)\| \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0^+$ . Donc aussi :

$$0 = \rho(u(h), D) = \rho(x + hf(0, x), D) + \bar{o}(h),$$

où encore  $\frac{1}{h}\|\bar{o}(h)\| \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0^+$ . Ce qu'on traduit par  $f(0, x) \in \tilde{T}_D(x)$  avec :

$$\tilde{T}_D(x) = \{y \in \mathbb{R}^n; \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda} \rho(x + \lambda y, D) = 0\}.$$

La condition  $f(t, x) \in \tilde{T}_D(x)$  est nécessaire pour avoir une solution continûment différentiable qui reste dans  $D$ . Dans [20] il est montré qu'une condition suffisante pour avoir des solutions absolument continues qui restent dans  $D$  est  $f(t, x) \in T_D(x)$ , avec :

$$T_D(x) = \{y \in \mathbb{R}^n; \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda} \rho(x + \lambda y, D) = 0\},$$

Il est clair que l'on a  $0 \in \tilde{T}_D(x) \subset T_D(x)$ , et  $\tilde{T}_D(x) = X$  pour  $x \in \overset{\circ}{D}$ . On peut montrer que si  $D$  est convexe alors  $\tilde{T}_D(x) = T_D(x)$  et :

$$T_D(x) = \overline{\{\lambda(y - x) : \lambda \geq 0, y \in D\}}.$$

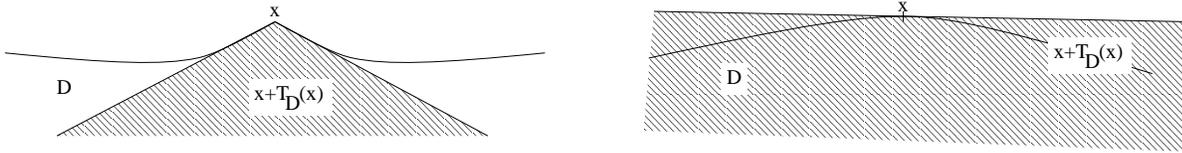


FIG. 2.2 – Exemples de cônes  $T_D(x)$  pour un point angulaire et un point régulier du bord de  $D$ .

On introduit aussi la notion de mesurabilité des applications multivoques :

**Définition 5** Soit  $(D, \mathcal{A})$  un espace mesurable, une application multivoque  $F : D \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$ , est dite mesurable si  $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  pour tout ouvert  $B \subset \mathbb{R}^n$ .

Dans la suite “mesurable” fera référence à la mesure de Lebesgue sur  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Il existe plusieurs résultats d’existence de solution pour l’inclusion différentielle (2.3). Nous allons en citer quelques uns. Tout d’abord un résultat sur les systèmes autonomes :

**Lemme 2 (Deimling 1988)** Avec  $X = \mathbb{R}^n$  et  $D \subset X$  fermé, si l’application  $F : D \rightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ , à valeurs convexes fermées est telle que :

1.  $F$  est semi-continue supérieure,
2.  $F(x) \cap T_D(x) \neq \emptyset$  sur  $D$ ,
3.  $\|F(x)\| \leq c(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n})$  sur  $D$  avec  $c > 0$ ,

alors pour toute donnée initiale  $u_0 \in D$ , le problème (2.3) admet au moins une solution absolument continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

Ce résultat permet d'établir les résultats suivant sur les systèmes non autonomes :

**Théorème 4 (Deimling 1989)** Avec  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $J = [0, T] \subset \mathbb{R}$  et  $D \subset X$  fermé, si l'application  $F : J \times D \rightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ , à valeurs convexes fermées est telle que :

1.  $F(t, x) \cap T_D(x) \neq \emptyset$  sur  $J \times D$ ,
2.  $\|F(t, x)\| \leq c(t)(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n})$  sur  $J \times D$  avec  $c \in L^1(J)$ ,
3.  $F(t, \cdot)$  est semi-continue supérieurement pour tout  $t \in J$ ,
4.  $F(\cdot, x)$  est mesurable pour tout  $x \in D$ .

alors pour toute donnée initiale  $u_0 \in D$ , le problème de Cauchy (2.3) admet au moins une solution absolument continue sur  $J$ .

La deuxième condition, qui est  $\|F(t, x)\| \leq c(t)(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n})$ , exclut les valeurs non bornées pour  $F$ . Il est possible d'affaiblir cette condition :

**Corollaire 1 (Deimling 1989)** Avec  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $J = [0, T] \subset \mathbb{R}$  et  $D \subset X$  fermé, si l'application  $F : J \times D \rightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ , à valeurs convexes fermées est telle que :

1.  $F(t, x) \cap r(t, x)\overline{B}_1(0) \cap T_D(x) \neq \emptyset$  sur  $J \times D$ , avec  $r(t, x) = c(t)(1 + \|x\|)$  et  $c \in L^1(J)$ ,
2.  $F(t, \cdot)$  est semi-continue supérieurement pour tout  $t \in J$ ,
3.  $F(\cdot, x)$  est mesurable pour tout  $x \in D$ .

alors pour toute donnée initiale  $u_0 \in D$ , le problème de Cauchy (2.3) admet au moins une solution absolument continue sur  $J$ .

Si de plus l'application multivoque a la propriété d'être semi-lipschitzienne en  $x$ , cela assure l'unicité de la solution. En effet s'il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que :

$$(F(t, x) - F(t, y), x - y) \leq k\|x - y\|^2, \quad \text{sur } J \times D \times D. \quad (2.4)$$

alors pour deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  de (2.3) on a :

$$\frac{d}{dt}(u_1(t) - u_2(t)) \in F(t, u_1) - F(t, u_2) \text{ presque partout sur } J,$$

donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}(u_1(t) - u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\right) &\in (F(t, u_1) - F(t, u_2), u_1(t) - u_2(t)) \\ &\leq k\|u_1(t) - u_2(t)\|^2, \text{ presque partout sur } J. \end{aligned}$$

On conclut par l'utilisation du lemme de Gronwall. La condition (2.4) peut être affaiblie en n'imposant pas à  $k$  d'être constant. Il suffit d'avoir  $k \in L^1(J)$ .

## 2.4 Existence et unicité dans le problème de frottement

On va montrer que le problème de frottement introduit au premier paragraphe entre bien dans le cadre du théorème 4 (Il est à noter que K. Deimling dans [20] donne déjà un exemple d'application des inclusions différentielles a un problème de frottement discret). On considère donc le problème de Cauchy suivant sur  $J = [0, T]$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}W(t) \in F(t, W(t)) & \text{presque partout sur } J, \\ W(0) = W_0 \in \mathbb{R}^{2N}, \end{cases} \quad (2.5)$$

avec  $F : J \times \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2N})$  définie par les équations (2.1).

**Proposition 1** Avec  $V_e : J \longrightarrow \mathbb{R}$  mesurable,  $\mu : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$  borné et lipschitzien, le problème de Cauchy (2.5) admet une unique solution.

**Preuve :** Pour l'existence de la solution, nous allons vérifier toutes les conditions du théorème 4. Tout d'abord l'application  $F$  est bien à valeur fermées convexes (car la fonction  $Sgn$  l'est) et est semi-continue supérieurement (la fonction  $Sgn$  est typiquement une fonction multivoque semi-continue supérieurement). La condition sur  $T_D(x)$  ne joue aucun rôle puisqu' on travaille ici sur  $\mathbb{R}^{2N}$  tout entier. Avec  $V_e : J \longrightarrow \mathbb{R}$  mesurable la condition de mesurabilité est aussi satisfaite.

La deuxième condition, qui est une condition sur la croissance de  $F$ , est aussi immédiate car on remarque a propos des équations (2.5) que  $F$  peut se décomposer de la manière suivante :

$$F(t, W) = AW + g(W),$$

où  $A$  est une matrice et  $g$  est une application multivoque bornée ( $\mu$  est borné). On a donc :

$$\|F(t, W)\| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^{2N}} \|g(x)\| + \|A\| \|W\|.$$

On peut donc appliquer le théorème 4 pour l'existence de la solution.

Pour l'unicité de la solution, vérifions que l'application  $F$  est semi-lipschitzienne. Posons d'abord :

$$M_{min} = \min_{i=1..N} \{m_i\}, \quad K_{max} = \max_{i=1..N} \{K_i^1, NK_i^2\}, \quad S_{max} = \max_{i=1..N} \{S_i\}.$$

Pour  $t$  fixé, on considère :

$$\begin{aligned} (F(t, W_1) - F(t, W_2)) & \quad , \quad (W_1 - W_2)_{\mathbb{R}^{2N}} = (V_1 - V_2, U_1 - U_2)_{\mathbb{R}^N} \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{v_{1,i} - v_{2,i}}{m_i} \left[ -K_i^1(u_{1,i} - u_{2,i}) + NK_i^2(u_{1,i+1} - u_{1,i} - u_{2,i+1} + u_{2,i}) \right. \\ & + NK_{i-1}^2(u_{1,i-1} - u_{1,i} - u_{2,i-1} + u_{2,i}) - S_i\mu(v_{1,i} - V_e(t))Sgn(v_{1,i} - V_e(t)) \\ & \left. + S_i\mu(v_{2,i} - V_e(t))Sgn(v_{2,i} - V_e(t)) \right] \end{aligned}$$

Les parties du type  $(V_1 - V_2, U_1 - U_2)_{\mathbb{R}^N}$  sont faciles à majorer car :

$$\begin{aligned} (V_1 - V_2, U_1 - U_2)_{\mathbb{R}^N} &\leq \sum_{i=1}^N (v_{1,i} - v_{2,i})(u_{1,i} - u_{2,i}), \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N ((v_{1,i} - v_{2,i})^2 + (u_{1,i} - u_{2,i})^2), \\ &\leq \frac{1}{2} \|W_1 - W_2\|_{\mathbb{R}^{2N}}^2, \end{aligned}$$

par conséquent on a :

$$\begin{aligned} (F(t, W_1) - F(t, W_2), W_1 - W_2)_{\mathbb{R}^{2N}} &\leq \left( \frac{1}{2} + \frac{5 K_{max}}{2 M_{min}} \right) \|W_1 - W_2\|_{\mathbb{R}^{2N}}^2 \\ &+ \frac{S_{max}}{M_{min}} \sum_{i=1}^N (v_{1,i} - v_{2,i}) [\mu(v_{2,i} - V_\epsilon(t)) Sgn(v_{2,i} - V_\epsilon(t)) - \mu(v_{1,i} - V_\epsilon(t)) Sgn(v_{1,i} - V_\epsilon(t))]. \end{aligned}$$

Il reste à donner une majoration pour :

$$(\mu(v_2) Sgn(v_2) - \mu(v_1) Sgn(v_1))(v_1 - v_2).$$

Mais l'application  $-\mu(\cdot) Sgn(\cdot)$  a les propriétés suivantes : Si  $v_1 > 0$  et  $v_2 > 0$  alors

$$(\mu(v_2) Sgn(v_2) - \mu(v_1) Sgn(v_1))(v_1 - v_2) = (\mu(v_2) - \mu(v_1))(v_1 - v_2) \leq M_\mu (v_1 - v_2)^2,$$

où  $M_\mu$  est la constante de semi-lipschitzianité de  $(-\mu)$ . Si  $v_1 < 0$  et  $v_2 < 0$  on a la même estimation. Si  $v_1 < 0$  et  $v_2 > 0$  alors on a :

$$(\mu(v_2) Sgn(v_2) - \mu(v_1) Sgn(v_1))(v_1 - v_2) = (\mu(v_2) + \mu(v_1))(v_1 - v_2) \leq 0,$$

car  $\mu$  est une fonction positive. On a donc

$$(\mu(v_2) Sgn(v_2) - \mu(v_1) Sgn(v_1))(v_1 - v_2) \leq M_\mu (v_1 - v_2)^2,$$

pour tout  $v_1$  et  $v_2$ . Donc  $F$  est semi-lipschitzienne de constante  $\left( \frac{1}{2} + \frac{5 K_{max}}{2 M_{min}} + \frac{S_{max} M_\mu}{M_{min}} \right)$ . ■

## 2.5 Schémas aux différences pour les inclusions différentielles

On va voir que les inclusions différentielles, et spécialement celles dont le second membre a une propriété de semi-lipschitzianité, peuvent être approchées par des schémas classiques provenant des équations différentielles ordinaires. Notre principale référence à ce sujet est Lempio [24], [48] et [49].

### 2.5.1 Présentation sur les méthodes linéaires à pas multiples

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) \in F(t, u(t)) & \text{presque partout sur } J, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.6)$$

posée dans  $\mathbb{R}^n$  tout entier, sur  $J = [0, T]$ . L'application  $F : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$ , étant à valeurs convexes fermées, semi-continue supérieurement par rapport à la deuxième variable et mesurable en temps et vérifiant la condition suivante :

$$\|F(t, x)\| \leq c(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n}) \quad \text{sur } J \times D. \quad (2.7)$$

ce qui assure par le théorème 4 l'existence d'au moins une solution pour (2.6).

On présente ici les idées générales pour l'approximation des inclusions différentielles par des méthodes aux différences sur la classe des méthodes linéaires à pas constants multiples. La méthode générale est de remplacer l'inclusion différentielle sur l'intervalle  $[0, T]$  par une suite d'inclusions discrètes sur :

$$0 = t_0^N < t_1^N < \dots < t_N^N = T, \quad N > 0,$$

avec un pas constant :

$$h = \frac{T}{N} = t_i^N - t_{i-1}^N.$$

On définit :

$$y^N = (y_0^N, y_1^N, \dots, y_N^N),$$

les solutions approchées correspondantes. La notation

$$y^N(t), \quad \text{pour } t \in [0, T],$$

fera référence à l'interpolation linéaire par morceaux, avec :

$$y^N(t_i^N) = y_i^N, \quad i = 0..N.$$

Une méthode linéaire à  $r$  pas, avec  $r > 0$ , est construite avec un choix de valeurs :

$$a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0..r,$$

avec  $a_r \neq 0$  et  $|a_0| + |b_0| > 0$ , un choix de d'approximation initiales :

$$y_i^N \in \mathbb{R}^n, \quad i = 0..r - 1,$$

et de sélections initiales :

$$\zeta_i^N \in F(t_i^N, y_i^N), \quad i = 0..r-1.$$

Le calcul des valeurs pour  $j = r..N$  se fait par l'intermédiaire du schéma :

$$\begin{cases} \frac{1}{h} \sum_{i=0}^r a_i y_{j-r+i}^N = \sum_{i=0}^r b_i \zeta_{j-r+i}^N + \epsilon_j^N, \\ \zeta_j^N \in F(t_j^N, y_j^N). \end{cases} \quad (2.8)$$

Les approximations initiales et les sélections initiales peuvent être calculées par une méthode linéaire à  $\hat{r}$  pas avec  $\hat{r} < r$ , où plus simplement avec une méthode à un pas. les valeurs  $\epsilon_j^N$  représentent les erreurs éventuelles faites dans l'inversion du système d'inclusion. On demande à ces erreurs de tendre vers zéro lorsque  $h$  tend vers zéro.

La stabilité d'un tel schéma est assuré par la condition (2.7) et la condition suivante sur la coefficients  $a_i$  :

$$\text{tous les zéros } \lambda \text{ du polynôme } \sum_{i=0}^r a_i \lambda^i \text{ on leur valeur absolue } |\lambda| < 1 \quad (2.9)$$

excepté le zéro simple  $\lambda = 1$ .

Une condition nécessaire pour avoir la consistance du schéma est :

$$\sum_{i=0}^r a_i = 0, \quad \sum_{i=0}^r i a_i = \sum_{i=0}^r b_i, \quad b_i \geq 0, \text{ pour } i = 0..r. \quad (2.10)$$

On établit alors le résultat suivant :

**Théorème 5 (Lempio 1992)** Pour une application  $F : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$ , à valeurs convexes fermées, semi-continue supérieure par rapport à la deuxième variable, mesurable en temps et vérifiant la condition (2.7), si les conditions (2.9) et (2.10) sur les coefficients du schémas sont satisfaites, si les approximations initiales vérifient :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} y_0^N = y_0,$$

$$\|y_{j+1}^N - y_j^N\| \leq hM, \quad \text{pour } j = 0..r-2,$$

avec  $M$  une constante indépendante de  $h$ , et si les erreurs  $\epsilon_j^N$  ont le comportement suivant :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \max_{r \leq j \leq N} (\|\epsilon_j^N\|_\infty) \right] = 0,$$

alors la suite :

$$(y^N)_{N \in \mathbb{N}},$$

des interpolant linéaires des valeurs  $(y_0^N, y_1^N, \dots, y_N^N)$ , admet une sous suite qui converge uniformément vers une solution du problème de Cauchy (2.6).

On peut préciser ce résultat lorsque le problème de Cauchy admet une unique solution (par exemple quand  $F$  est semi-lipschitzienne) :

**Corollaire 2** *Sous les conditions du théorème 5, Si le problème de Cauchy (2.6) admet une unique solution, alors toute la suite  $(y^N)_{N \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers cette solution.*

Des résultats d'estimations d'erreur partiels avec un ordre égal à un ont été établis. Nous en indiquerons certains en introduisant l'implémentation des schémas numériques.

## 2.5.2 Implémentations de schémas

Dans la suite  $F$  sera supposée semi-lipschitzienne de constante  $k$ , ce qui assure l'unicité de la solution du problème de Cauchy (2.6).

### Schéma d'Euler explicite

On considère le schéma suivant :

$$\begin{cases} y_0^N = y_0, \\ y_{i+1}^N \in y_i^N + hF(t_i^N, y_i^N). \end{cases} \quad (2.11)$$

Ce schéma entre dans le cadre du théorème (5) et est donc convergent. En fait on peut montrer qu'il est convergent d'ordre 1 pour  $F$  semi-lipschitzienne, alors que certains autres schémas à pas multiples ne le sont pas (voir [49]).

L'implémentation de ce schéma ne pose pas de problème dès lors que  $F$  est donnée, il suffit de choisir  $y_{i+1}^N \in y_i^N + hF(t_i^N, y_i^N)$  à chaque pas de temps. Quand  $F(t_i^N, y_i^N)$  est un point de multivaluation, il se pose le problème du choix, bien que la convergence d'ordre 1 soit assurée pour tout choix de  $y_{i+1}^N$ . Pour une application  $F$  semi-lipschitzienne les points de multivaluation sont nécessairement réduits (voir paragraphe 2.2) et la chance de tomber sur un point de multivaluation lors de l'intégration numérique est négligeable en général.

On donne un exemple d'intégration par le schéma d'Euler explicite sur la figure 2.3. Le problème que l'on intègre est celui du système de frottement à une seule masselotte qui sera étudié plus en détail au paragraphe suivant. Les graphiques représentent la trajectoire dans le portrait de phase  $(u, \dot{u})$ . La discontinuité apparaît pour  $\dot{u} = V_e$ , avec  $V_e = 0.05$ .

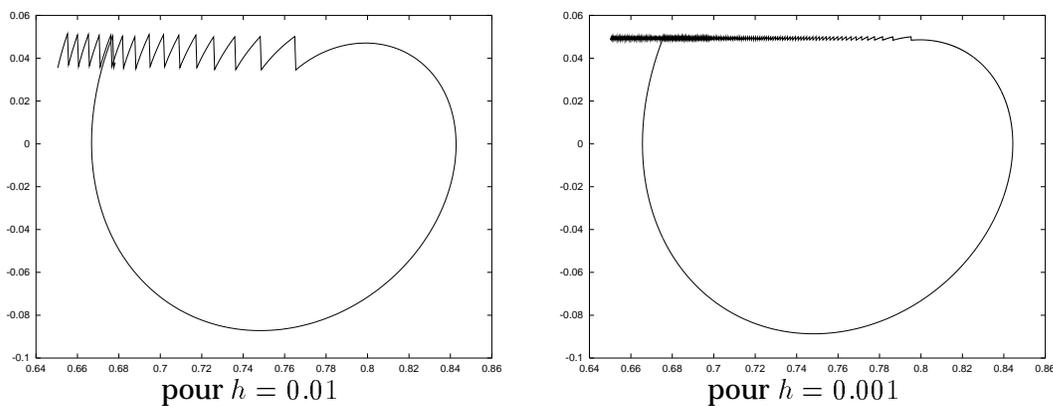


FIG. 2.3 – Exemple d'intégration par le Schéma d'Euler explicite.

### Schéma de Runge-Kutta d'ordre 4

On peut appliquer le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 classique aux inclusions différentielles, et il s'écrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0^N = y_0, \\ y_{i+1}^N = y_i^N + \frac{h}{6}(a_{0,i}^N + 2a_{1,i}^N + 2a_{2,i}^N + a_{3,i}^N), \\ a_{0,i}^N \in F(t_i^N, y_i^N), \\ a_{1,i}^N \in F(t_i^N + \frac{h}{2}, y_i^N + \frac{h}{2}a_{0,i}^N), \\ a_{2,i}^N \in F(t_i^N + \frac{h}{2}, y_i^N + \frac{h}{2}a_{1,i}^N), \\ a_{3,i}^N \in F(t_{i+1}^N, y_i^N + ha_{2,i}^N). \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Ce schéma n'entre pas dans le cadre du théorème (5), mais on peut voir un étude des schémas de Runge-Kutta appliqués aux inclusions différentielles dans [49]. La figure 2.4 représente l'intégration numérique de l'exemple précédent. On peut comparer par rapport aux résultats de la figure 2.3 obtenus par le schéma d'Euler explicite. L'amélioration n'est pas sensible en ce qui concerne le voisinage de la discontinuité.

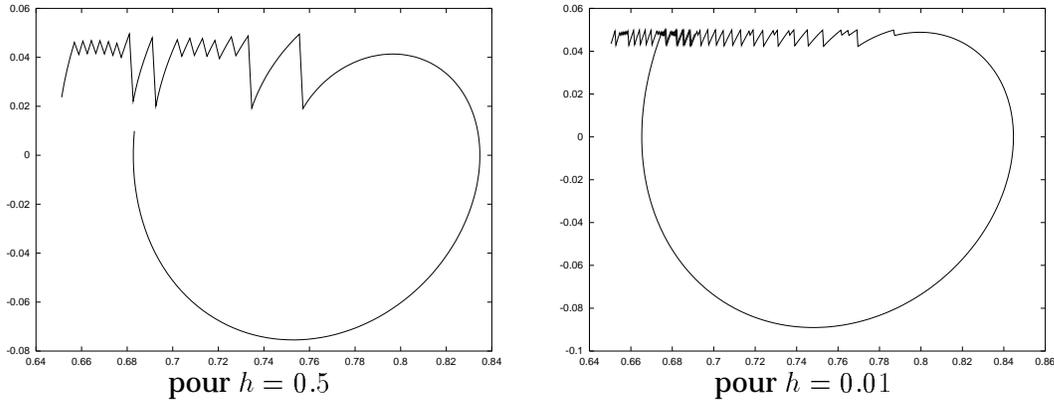


FIG. 2.4 – Exemple d'intégration par le Schéma de Runge-Kutta d'ordre 4

### Schéma d'Euler Implicite

Le schéma d'Euler implicite s'écrit:

$$\begin{cases} y_0^N = y_0, \\ y_{i+1}^N \in y_i^N + hF(t_{i+1}^N, y_{i+1}^N). \end{cases} \quad (2.13)$$

Ce schéma entre dans le cadre du théorème (5) et de plus, sous condition de semi-lipschitzianité de  $F$ , il a été montré que ce schéma est convergent d'ordre 1 (voir [49]). A chaque itération on a à résoudre l'inclusion suivante:

$$y_i^N \in y_{i+1}^N - hF(t_{i+1}^N, y_{i+1}^N), \quad (2.14)$$

c'est à dire un système de dimension finie d'inclusions non linéaires. C'est une difficulté supplémentaire, compensée par le fait que le schéma se comporte mieux au passage des singularité que la version explicite (On peut voir les résultats numériques sur la figure 2.5).

On donne maintenant une idée de la méthode que l'on a utilisée pour résoudre numériquement le système d'inclusions non linéaires.

Si  $F$  était différentiable, une possibilité serait de faire un schéma de type prédiction - correction, avec un prédiction par le schéma d'Euler explicite :

$$y_{i+1,0}^N \in y_i^N + hF(t_i^N, y_i^N),$$

et une correction par une méthode de Newton.

De manière évidente la méthode de Newton se comporte mal aux abords des portions multivoques. Cette méthode n'est pas utilisable ici.

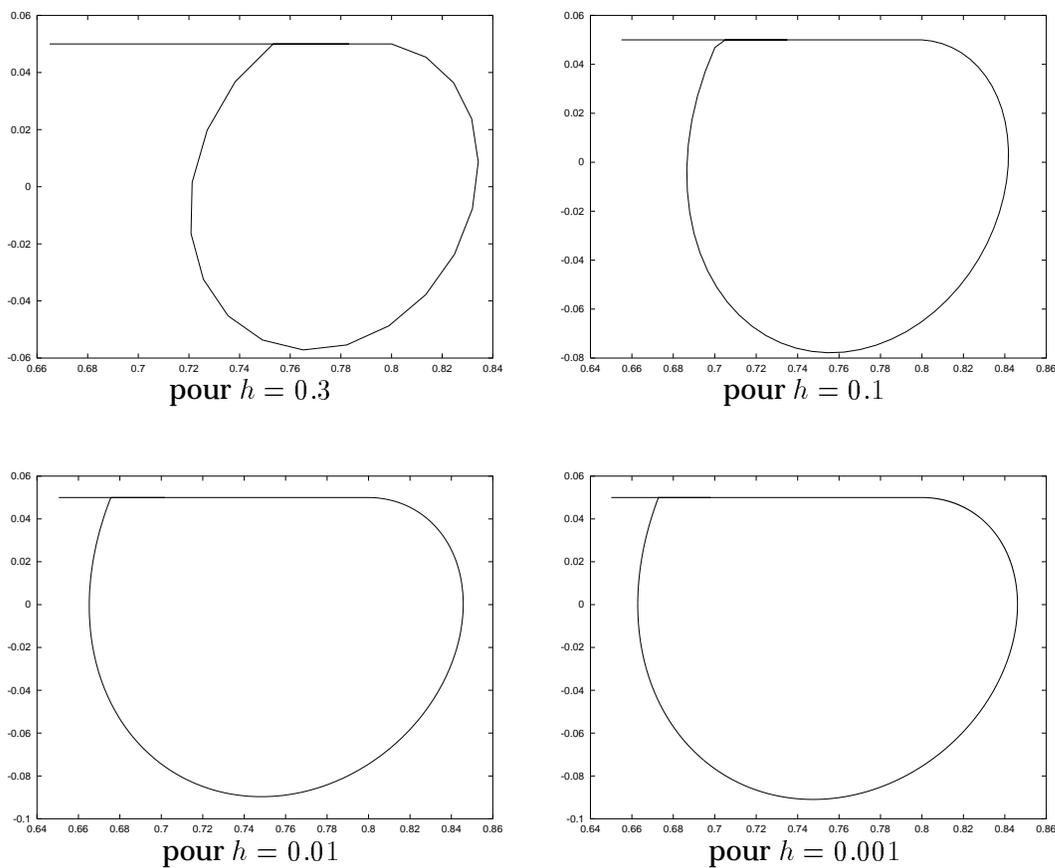


FIG. 2.5 – Exemple d'intégration par le Schéma d'Euler implicite

La méthode que nous avons développée est la suivante : on remarque tout d'abord que si  $k$  est la constante de semi-lipschitzianité de  $F$  alors :

$$(k + \varepsilon)I - F,$$

est strictement monotone pour  $\varepsilon > 0$ . Donc le second membre de (2.14) est strictement monotone pour  $0 < h < \frac{1}{k}$ . Nous imposons donc à  $h$  d'être plus petit que  $\frac{1}{k}$  afin d'avoir à résoudre un système strictement monotone d'équations. En posant :

$$G(y) = y - hF(t_{i+1}^N, y) - y_i^N,$$

on est amené à trouver  $y_{i+1}^N \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$0 \in G(y_{i+1}^N).$$

L'algorithme proposé est le suivant : étant donné  $y_{i+1,0}^N$  donné par une prédiction du schéma explicite, on calcule  $y_{i+1,j+1}^N$  en fonction de  $y_{i+1,j}^N$  en choisissant la direction :

$$\zeta_j \in G(y_{i+1,j}^N),$$

de norme minimale, et en calculant  $\alpha_j < 0$  tel que :

$$0 \in (G(y_{i+1,j}^N + \alpha_j \zeta_j), \zeta_j)_{\mathbb{R}^n}. \quad (2.15)$$

On pose alors

$$y_{i+1,j+1}^N = y_{i+1,j}^N + \alpha_j \zeta_j,$$

Ce qui revient à résoudre une suite d'inclusions unidimensionnelles monotones. Pour la résolution de l'inclusions unidimensionnelle on pourra utiliser des algorithmes de type méthode de la tangente, regula-falsi ou dichotomie.

Dans le cas où  $G$  est le sous-différentiel d'une fonction convexe  $J$ , cet algorithme n'est rien d'autre qu'un algorithme de type gradient conjugué pour la minimisation de  $J$ .

### Schéma du point milieu implicite

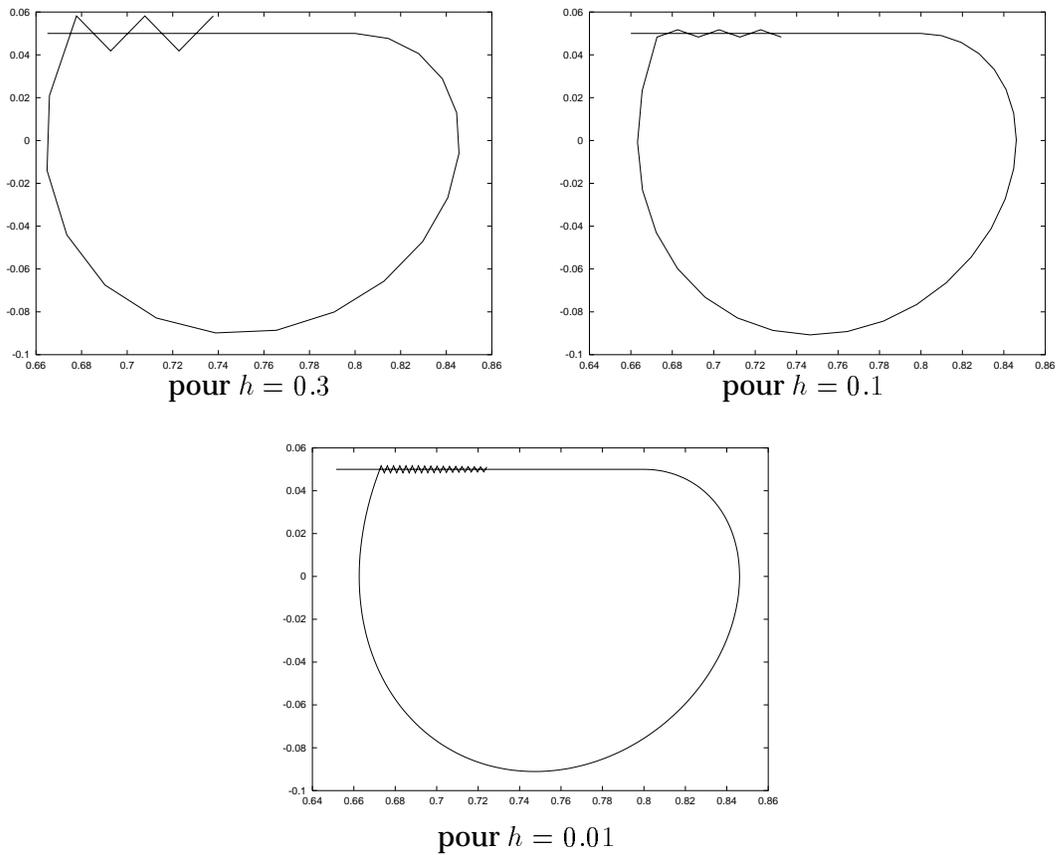


FIG. 2.6 – Exemple d'intégration par le Schéma du point milieu implicite.

Le schéma du point milieu implicite est un schéma de type Runge-Kutta, qui est d'ordre deux pour les équations différentielles ordinaires suffisamment régulières. Il s'écrit :

$$\begin{cases} y_0^N = y_0, \\ y_{i+1}^N \in y_i^N + hF\left(t_i^N + \frac{h}{2}, \frac{y_{i+1}^N + y_i^N}{2}\right). \end{cases} \quad (2.16)$$

On constate sur la figure 2.6 que ce schéma se comporte mieux au voisinage de la singularité que le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. Malgré tout il persiste un comportement oscillant. Ce schéma a fait l'objet de beaucoup d'études (voir [49]), il est d'ordre un sur les inclusions différentielles à second membre semi-lipschitzien.

### Schéma d'Adams-Moulton à deux points

C'est un schéma implicite (qui entre dans le cadre du théorème 5) d'ordre deux pour les équations différentielles ordinaires suffisamment régulières, qui s'écrit :

$$\begin{cases} y_0^N = y_0, \quad \zeta_0^N \in F(0, y_0^N), \\ y_{i+1}^N \in y_i^N + \frac{h}{2}(\zeta_i^N + \zeta_{i+1}^N), \\ \zeta_{i+1}^N \in F(t_{i+1}^N, y_{i+1}^N). \end{cases} \quad (2.17)$$

Ce schéma a un très bon comportement sur les portions multivoques (voir figure 2.7), et reste

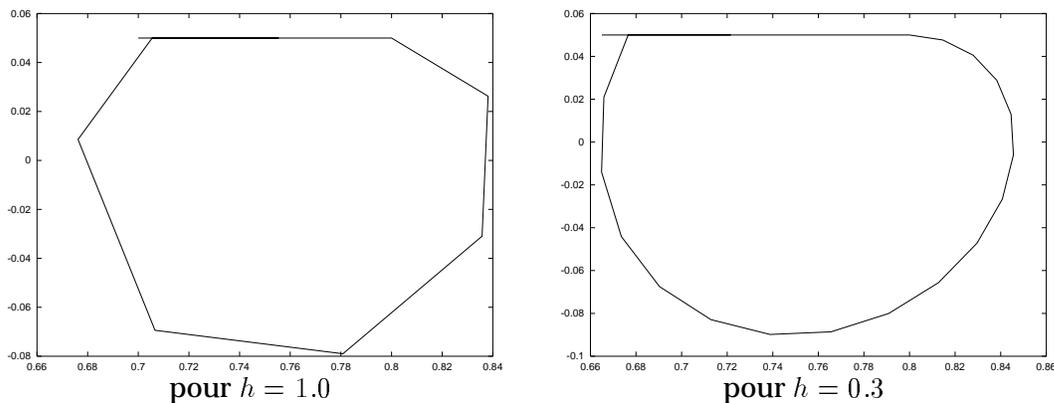


FIG. 2.7 – Exemple d'intégration par le Schéma d'Adams-Moulton à deux points

d'ordre deux sur les portions régulières.

## 2.6 Comportement du modèle de frottement

On va donner maintenant quelques résultats d'expériences numériques qui sont significatifs du comportement des systèmes élastiques soumis au frottement sec.

### 2.6.1 Modèle à un seul degré de liberté, $\mu$ variable

Le système à une seule masselotte fourni un système très simple qui permet d'appréhender les premières propriétés importantes des systèmes en glissement avec frottement sec. Pour une seule masselotte le système se réduit au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \\ m\ddot{u}(t) \in -Ku(t) - S\mu(|\dot{u}(t) - V_e|)Sgn(\dot{u}(t) - V_e), \end{cases}$$

Dans les expériences numériques qui suivent, on utilise le coefficient de frottement donné par la formule (1.8) du chapitre 1. Le schéma utilisé est celui d'Adams-Moulton à deux points en raison du bon comportement sur les portions multivoques.

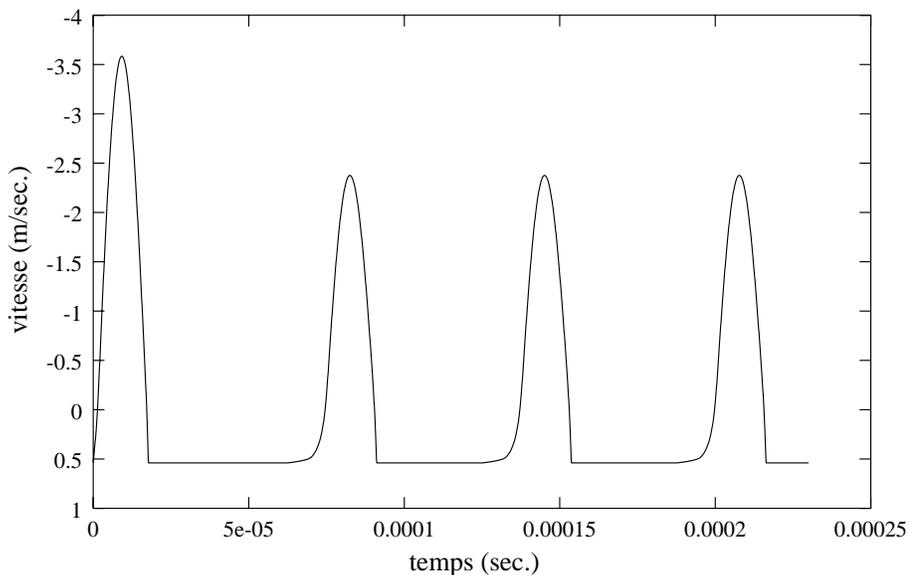


FIG. 2.8 – Système à une masselotte : évolution de la vitesse pour  $V_e = 0,5$ .

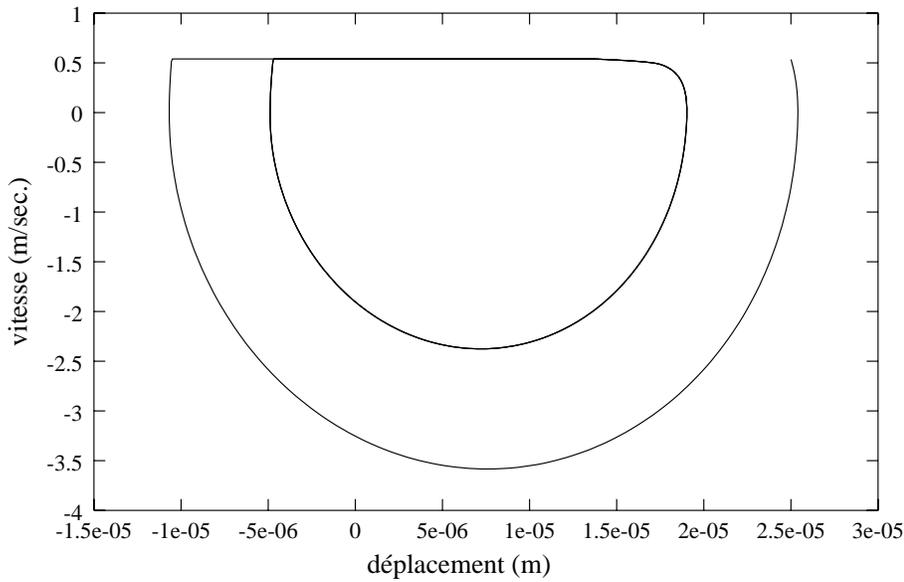


FIG. 2.9 – Système à une masselotte : portrait de phase pour  $V_e = 0,5$ .

La figure (2.8) représente la vitesse de la masselotte au cours du temps, pour une vitesse d'entraînement de  $V_e = 0,5$ . On remarque que le système se cale très vite sur une solution périodique. Cette solution périodique est une suite d'état collés ( $\dot{u} = V_e$ ) et d'état en glissement ( $\dot{u} \neq V_e$ ), c'est à dire un mouvement stick-slip.

La figure (2.9) représente la trajectoire du système dans l'espace des phases  $(u, \dot{u})$ . On voit très clairement le cycle limite. Dans ce cas précis, on peut montrer que toutes les trajectoires, sauf la solution stationnaire, convergent vers ce cycle limite. De plus à cause du caractère discontinu de la condition de frottement, le cycle limite est atteint en un temps fini, et non asymptotiquement comme dans des systèmes dynamiques plus réguliers.

Pour  $V_e \neq 0$ , le système admet un unique point stationnaire qui est :

$$u(t) \in \frac{S}{K} \mu(|V_e|) \text{Sgn}(V_e).$$

Pour de petites perturbations,  $\dot{u}(t)$  reste différent de  $V_e$  et l'inclusion différentielle est une équation différentielle ordinaire. On peut estimer la stabilité du point stationnaire, et un calcul simple montre que ce point stationnaire est stable si et seulement si :

$$\mu'(|V_e|) > 0.$$

De même on peut donner des éléments sur le comportement du système en évaluant l'évolution des normes suivantes :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left( \frac{K}{M} (u(t) - \alpha)^2 + \dot{u}^2(t) \right) \in -\frac{S}{M} \dot{u}(t) \left( \frac{K}{S} \alpha + \mu(|\dot{u}(t) - V_e|) \text{Sgn}(\dot{u}(t) - V_e) \right).$$

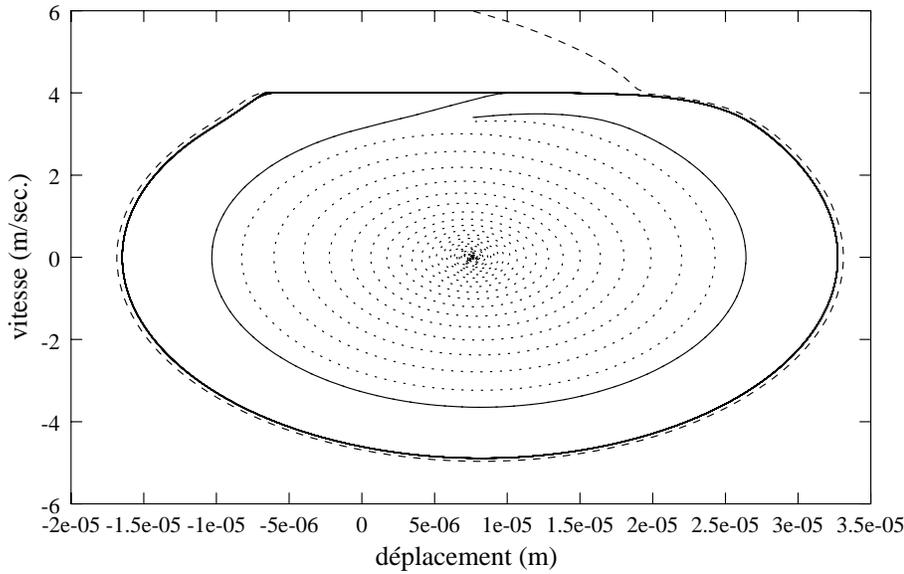


FIG. 2.10 – Système à une masselotte : portrait de phase pour  $V_e = 4, 0$ .

D'où on déduit :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left( \frac{K}{M} u^2(t) + \dot{u}^2(t) \right) \in -\dot{u}(t) \frac{S}{M} \mu (|\dot{u}(t) - V_e|) \text{Sgn}(\dot{u}(t) - V_e),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left( \frac{K}{M} \left( u(t) - \frac{S}{K} \mu(|V_e|) \right)^2 + \dot{u}^2(t) \right) \in -\frac{S}{M} \dot{u}(t) (\mu(|V_e|) + \mu(|\dot{u}(t) - V_e|) \text{Sgn}(\dot{u}(t) - V_e)).$$

Si on se place pour  $V_e > 0$ , on voit que la première norme,  $\frac{K}{M} u^2 + \dot{u}^2$ , croît pour  $0 < \dot{u} < V_e$  et décroît sinon. La deuxième norme,  $\frac{K}{M} \left( u(t) - \frac{S}{K} \mu(|V_e|) \right)^2 + \dot{u}^2(t)$ , qui représente l'éloignement par rapport au point stationnaire, décroît pour  $\dot{u} < V_e$ .

Une situation un peu plus complexe est représentée figure 2.10, pour une vitesse d'entraînement  $V_e = 4, 0$ . Pour cette vitesse d'entraînement la solution stationnaire est stable, et il existe aussi une solution périodique stable. On a donc un attracteur en deux parties non connexes. Sur cette figure sont représentées deux solutions avec des conditions initiales proches. Une des solution converge vers le point stationnaire et l'autre solution converge vers la solution périodique. Cela indique l'existence d'une solution périodique instable.

On ne donne pas de résultats numériques dans le cas  $V_e < 0,05$ . Dans ce cas la solution stationnaire est stable et attire très rapidement toutes les trajectoires.

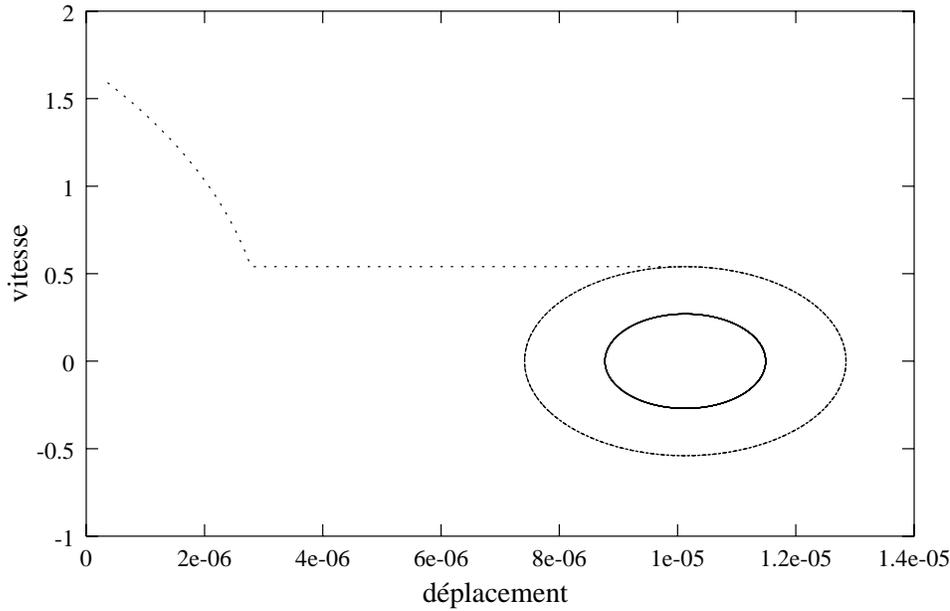


FIG. 2.11 – Système à une masselotte : portrait de phase pour  $\mu$  constant.

### 2.6.2 Modèle à un seul degré de liberté, $\mu$ constant

Dans ce cas le système se réduit au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \\ m\ddot{u}(t) \in -Ku(t) - S\mu \text{Sgn}(\dot{u}(t) - V_e), \end{cases}$$

et peut se résoudre de manière explicite. Il existe la solution :

$$\dot{u}(t) = V_e, \quad \text{pour } |Ku(t)| < S\mu.$$

En supposant  $V_e > 0$ , lorsque  $v_0 > V_e$  la solution est :

$$u(t) = u_0 \cos(\sqrt{K/mt}) + v_0 \sin(\sqrt{K/mt}) - \frac{S\mu}{K},$$

tout au moins tant que  $\dot{u}(t) > V_e$ . Comme dans ce cas  $\dot{u}(t)$  est une fonction sinusoïdale, sa valeur devient inférieure à  $V_e$  au bout d'un certain temps. Lorsque  $v_0 < V_e$  la solution est :

$$u(t) = u_0 \cos(\sqrt{K/mt}) + v_0 \sin(\sqrt{K/mt}) + \frac{S\mu}{K}.$$

C'est une solution qui oscille autour de la position stationnaire  $\frac{S\mu}{K}$ . On peut voir facilement que toutes les solutions de ce système deviennent périodiques au bout d'un certain temps, mais à la différence de la situation précédente avec  $\mu$  variable, il existe ici une infinité de solutions périodiques, dont aucune n'est une solution stick-slip (voir figure 2.11). Dans ce type de système, les solutions de type stick-slip ne sont susceptible d'apparaître que lorsque le coefficient de frottement admet une portion décroissante.

### 2.6.3 Modèle a plusieurs degrés de liberté

L'expérience numérique qui est présentée dans ce paragraphe est un calcul sur un système de 200 masselottes avec une condition périodique et une vitesse d'entraînement  $V_e = 0,5$ . Le choix du nombre de masselottes est arbitraire, il a été choisi suffisamment grand pour obtenir une situation qui soit similaire à un problème continu. Les valeurs de  $m_i, S_i$  et  $K_i^1$  sont choisies indépendantes de  $i$  et égales aux valeurs prise dans l'expérience sur une seule masselotte. les valeurs de  $K_i^2$  sont choisies aussi indépendante de  $i$ . De ce fait, si on donne comme condition initiale des valeurs qui sont indépendantes de la masselotte, le système va se comporter comme s'il n'y avait qu'une seule masselotte, c'est a dire que toutes les masselottes vont avoir le même mouvement, et qui sera du type de la figure 2.8.

On choisit une condition initiale qui n'est pas exactement indépendante de  $i$  mais qui en est très proche.

La figure 2.12, représente le premier événement stick-slip. Durant cet événement chaque masselotte a un mouvement très proche de la solution donnée sur la figure 2.8.

Les figures 2.13, 2.14, et 2.15 représentent les événements stick-slip successifs. On constate qu'au cours du temps, les masselottes ont un mouvement qui est de moins en moins identique. Cela indique que la solution homogène (égale sur chaque masselotte) est instable.

Au bout d'un certain temps, le système devient complètement inhomogène (figure 2.16), et se cale ensuite sur une solution qui est presque périodique (figure 2.16). Elle consiste en quatre zone de glissement qui se propagent en se croisant. On peut remarquer que cette solution est symétrique par rapport à la masselotte du milieu. Cela vient du fait que la perturbation que l'on a mis sur la condition initiale est elle même symétrique, et que le système conserve cette symétrie. Des expériences numériques effectuées avec des conditions initiales non symétriques semblent montrer qu'alors le système se cale sur des solutions qui ne sont pas symétrique non plus (déplacement de zones de glissement dans une seule direction).

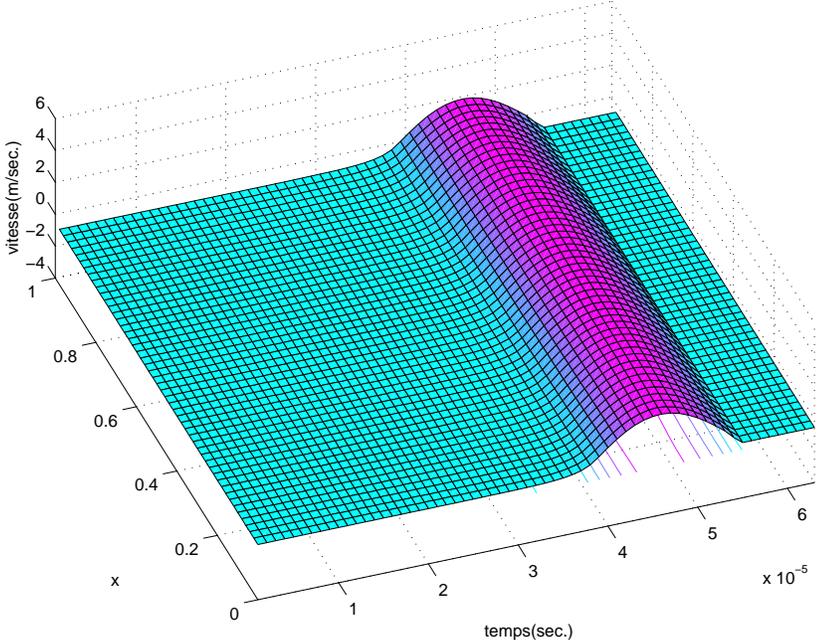


FIG. 2.12 – Système de 200 masselottes, premier événement stick-slip.

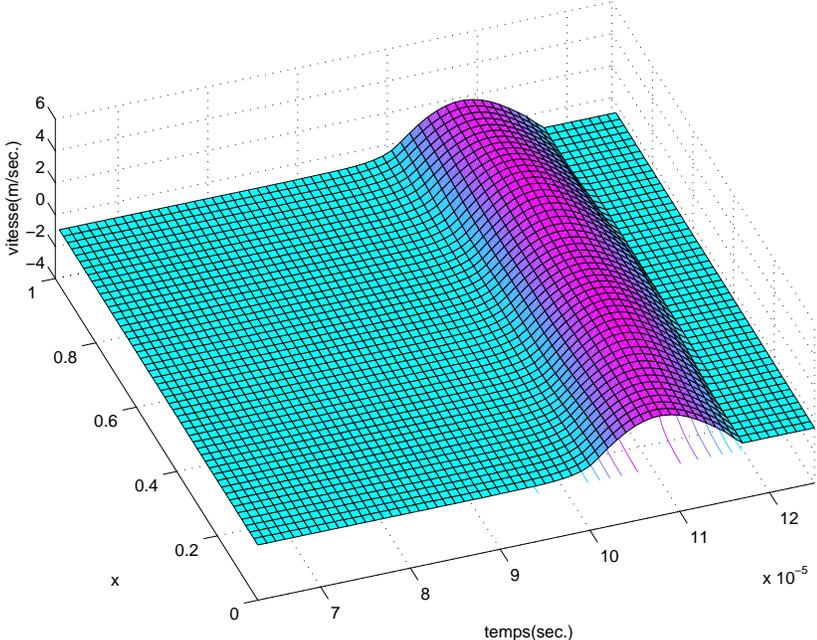


FIG. 2.13 – Système de 200 masselottes, deuxième événement stick-slip.

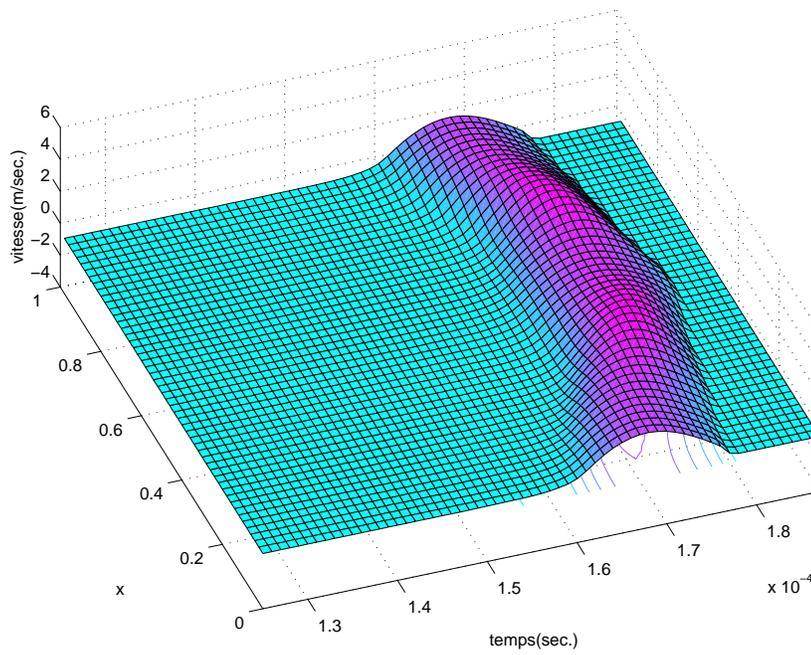


FIG. 2.14 – Système de 200 masselottes, troisième événement stick-slip.

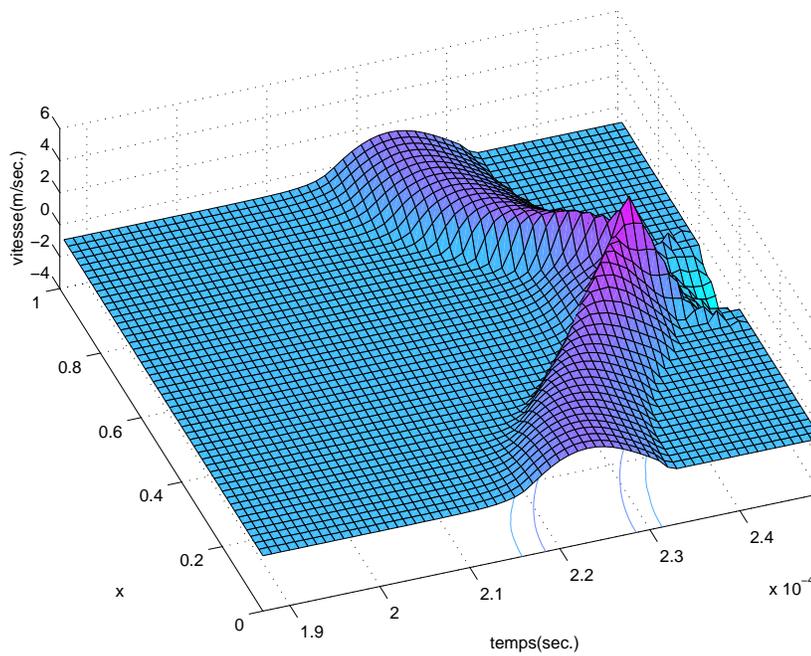


FIG. 2.15 – Système de 200 masselottes, quatrième événement stick-slip.

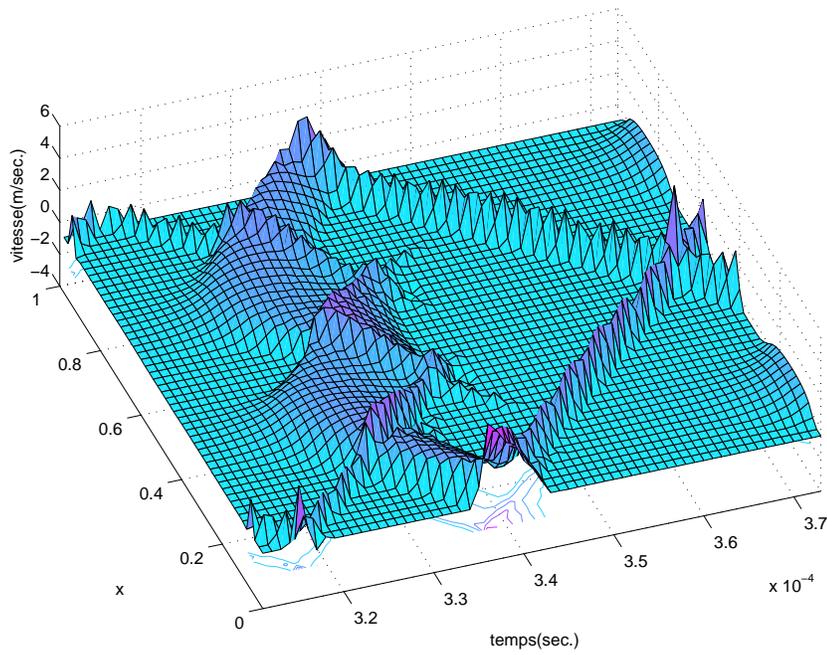


FIG. 2.16 – *Système de 200 masselottes, après un certain temps, le système est complètement inhomogène.*

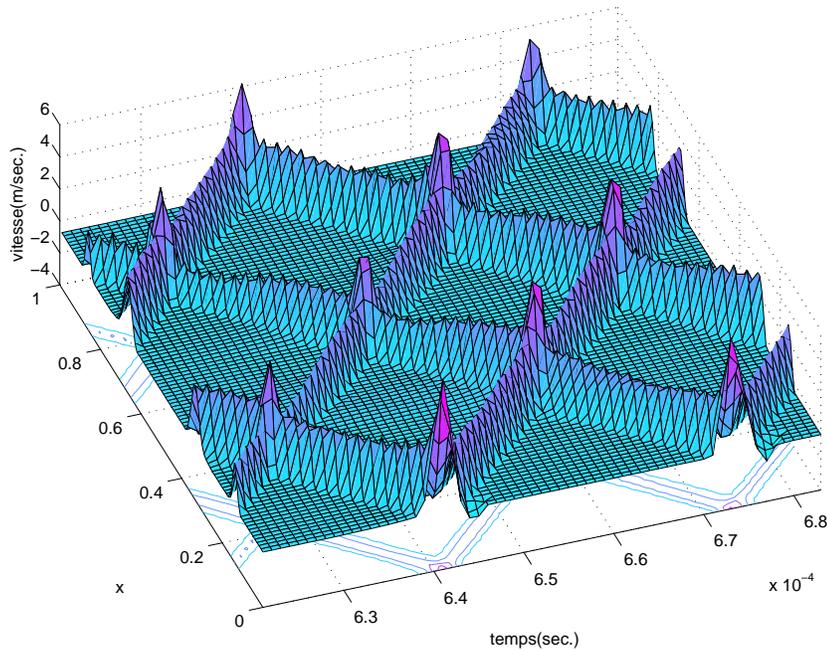


FIG. 2.17 – *Système de 200 masselottes, le système a atteint une solution quasi-périodique.*



## Chapitre 3

# Problème de frottement unidimensionnel

### Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons l'analyse du problème unidimensionnel. Dans ce problème on cherche les solutions du problème modèle introduit au chapitre 1 qui ne dépendent pas des coordonnées horizontales. Bien qu'assez simple, ce problème permet d'aborder d'importantes difficultés liées au frottement sec avec coefficient de frottement dépendant de la vitesse de glissement. Il permet aussi une première analyse du comportement global d'un système élastique continu avec une telle condition de frottement. De ce point de vue, nous rappelons et poursuivons les études initiées dans [42] et [50] sur ce même sujet. En particulier nous analysons l'utilisation du critère de retard maximal introduit pour sélectionner une solution mécaniquement acceptable du système dans ce type de processus dynamique. Pour cela nous discutons de l'introduction d'une condition de frottement perturbée qui revient à l'ajout d'une légère masse de surface et qui permet de recouvrer l'unicité de la solution du problème unidimensionnel. Nous essayons de préciser le lien entre cette condition de frottement perturbée et le critère de retard maximal en faisant une étude de la convergence des solutions quand le paramètre de perturbation tend vers zéro. Enfin, dans une dernière partie, nous proposons des schémas numériques, étudions leur stabilité et la convergence pour certains d'entre eux. Nous présentons quelques expériences numériques.

### 3.1 Présentation du problème unidimensionnel de frottement

On cherche les solutions du problème modèle (1.1) (1.2) (1.5) (1.3) (1.6) (1.7) qui ne dépendent pas des coordonnées horizontales, c'est à dire un déplacement qui s'écrit sous la forme

$\underline{u}(t, z) = \begin{pmatrix} u_x(t, z) \\ u_y(t, z) \\ u_z(t, z) \end{pmatrix}$ , où  $z$  est la coordonnée verticale. On arrive alors au système d'équations suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \partial_{tt}^2 u_x = G \partial_{zz}^2 u_x, \\ \rho \partial_{tt}^2 u_y = G \partial_{zz}^2 u_y, \\ \rho \partial_{tt}^2 u_z = (\lambda + 2G) \partial_{zz}^2 u_z, \end{array} \right. \quad \text{dans } ]0, H[ \times ]0, T],$$

$$(\lambda + 2G) \partial_z u_z \in -J_N(-u_z(t, 0)), \quad \forall t \in ]0, T],$$

$$G \begin{pmatrix} \partial_z u_x(t, 0) \\ \partial_z u_y(t, 0) \end{pmatrix} \in -((\lambda + 2G) \partial_z u_z) \mu(\|\underline{v}_G(t)\|) \underline{Dir}(\underline{v}_G(t)), \quad \forall t \in ]0, T], \quad (3.1)$$

$$\underline{u}(t, H) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -D \end{pmatrix}, \quad \forall t \in ]0, T],$$

$$\underline{u}(0, z) = \underline{u}_0(z), \partial_t \underline{u}(0, z) = \underline{u}_1(z), \quad \text{dans } ]0, H[.$$

Où  $\underline{v}_G = \partial_t \underline{u}_T - \underline{V}_c$  est la vitesse de glissement. Ce système se compose de trois équations des ondes qui ne sont couplées que par la condition de frottement; l'équation en  $u_z$  pouvant se résoudre indépendamment de celles en  $u_x$  et  $u_y$ . On va d'abord préciser quelques notations. Il y a deux vitesses des ondes, une première :

$$c_1 = \sqrt{G/\rho},$$

qui concerne les déplacements horizontaux, c'est à dire qui correspond aux ondes transversales ou de cisaillement, et une deuxième :

$$c_2 = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}, \quad (c_2 > c_1),$$

qui concerne les déplacements verticaux, et qui correspond aux ondes longitudinales ou de compression. On introduit la matrice :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

qui permet d'écrire les trois équations des ondes sous une forme vectorielle :

$$\partial_{tt}^2 \underline{u} = \mathbf{C} \partial_{zz}^2 \underline{u}.$$

On va noter aussi :

$$\underline{b}_+(t, z) = \partial_t \underline{u}(t, z) + \mathbf{C} \partial_z \underline{u}(t, z),$$

$$\underline{b}_-(t, z) = \partial_t \underline{u}(t, z) - \mathbf{C} \partial_z \underline{u}(t, z),$$

les quantités qui sont transportées par les équations des ondes, au sens où les composantes de  $\underline{b}_+(t, x)$  et  $\underline{b}_-(t, x)$  satisfont aux relations suivantes pour un  $\delta t$  compatible avec les limites du problème :

$$b_{x+}(t + \delta t, z) = b_{x+}(t, z + c_1 \delta t), \quad (3.2)$$

$$b_{y+}(t + \delta t, z) = b_{y+}(t, z + c_1 \delta t), \quad (3.3)$$

$$b_{z+}(t + \delta t, z) = b_{z+}(t, z + c_2 \delta t), \quad (3.4)$$

$$b_{x-}(t + \delta t, z) = b_{x-}(t, z - c_1 \delta t), \quad (3.5)$$

$$b_{y-}(t + \delta t, z) = b_{y-}(t, z - c_1 \delta t), \quad (3.6)$$

$$b_{z-}(t + \delta t, z) = b_{z-}(t, z - c_2 \delta t), \quad (3.7)$$

En particulier pour  $t \in [0, \frac{H}{c_2}]$ , on a :

$$b_{x+}(t, 0) = b_{x+}(0, c_1 t) = u_{x1}(c_1 t) + c_1 \partial_z u_{x0}(c_1 t), \quad (3.8)$$

$$b_{y+}(t, 0) = b_{y+}(0, c_1 t) = u_{y1}(c_1 t) + c_1 \partial_z u_{y0}(c_1 t), \quad (3.9)$$

$$b_{z+}(t, 0) = b_{z+}(0, c_2 t) = u_{z1}(c_2 t) + c_2 \partial_z u_{z0}(c_2 t). \quad (3.10)$$

C'est à dire que ces quantités ne dépendent que des conditions initiales. Quand cela sera utile on notera aussi :

$$\underline{b}_{T+}(t, z) = \begin{pmatrix} b_{x+}(t, z) \\ b_{y+}(t, z) \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_{T-}(t, z) = \begin{pmatrix} b_{x-}(t, z) \\ b_{y-}(t, z) \end{pmatrix},$$

les composantes horizontales de  $\underline{b}_+(t, x)$  et  $\underline{b}_-(t, x)$ .

Les relations (3.8), (3.9) et (3.10) vont nous permettre de ramener le problème (3.1) à un problème sur le bord de contact pour  $t \in [0, \frac{H}{c_2}]$ . Pour le déplacement vertical, grâce à (3.10), on se ramène à l'inclusion différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt} u_N(t) \in -b_{z+}(t, 0) - J_N(u_N(t)), \quad (3.11)$$

où  $u_N(t) = -u_z(t, 0)$  est toujours le déplacement normal sur la surface de contact. On va montrer que le problème de Cauchy correspondant à cette inclusion différentielle admet une unique solution.

**Proposition 2** *Pourvu que  $b_{z+}(\cdot, 0)$  soit dans  $L^1(0, T)$  et que la condition initiale vérifie  $u_N(0) = u_{N0} \leq 0$ , le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_N(t) \in -b_{z+}(t, 0) - J_N(u_N(t)), & \text{presque partout sur } [0, T], \\ u_N(0) = u_{N0}, \end{cases} \quad (3.12)$$

*admet une unique solution absolument continue qui vérifie  $u_N(t) \leq 0$  sur tout  $[0, T]$ .*

**Preuve :** On pose :

$$F(t, x) = -b_{z+}(t, 0) - J_N(x),$$

et :

$$D = ] - \infty, 0].$$

L'application multivoque  $F : [0, T] \times D \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$  est bien à valeurs fermées convexes et est mesurable en temps. Pour montrer que  $F(t, \cdot)$  est semi-continue supérieurement, il suffit de montrer que  $J_N$  l'est. Or pour  $A \subset \mathbb{R}$ , l'ensemble  $J_N^{-1}(A)$  est ou bien  $] - \infty, 0]$ , ou bien  $\{0\}$  ou bien encore l'ensemble vide qui sont des ensembles fermés. Cela suffit pour dire que  $J_N$  est semi-continue supérieurement. Pour entrer dans les conditions du corollaire 1 il reste à montrer l'existence d'une fonction  $r(t, x)$  de la forme  $r(t, x) = c(t)(1 + |x|)$  avec  $c \in L^1(0, T)$  et telle que :

$$F(t, x) \cap r(t, x)\overline{B}(0, 1) \cap T_D(x) \neq \emptyset \text{ sur } [0, T] \times D.$$

Or pour  $x \in \overset{\circ}{D}$  on a  $T_D(x) = \mathbb{R}$  et  $F(t, x) = -b_{z+}(t, 0)$  et donc :

$$c(t) = 1 + |b_{z+}(t, 0)|,$$

convient. De même pour  $x = 0$ , on a  $T_D(0) = ] - \infty, 0]$  et  $F(t, 0) = ] - \infty, -b_{z+}(t, 0)]$ , et encore une fois :

$$c(t) = 1 + |b_{z+}(t, 0)|,$$

convient. L'existence d'une solution au problème de Cauchy qui reste dans  $D$  s'en trouve établie. Pour l'unicité il suffit de montrer que  $F$  est semi-lipschitzienne en  $x$ . On a :

$$(F(t, x_1) - F(t, x_2))(x_1 - x_2) = (J_N(x_2) - J_N(x_1))(x_1 - x_2).$$

pour  $x_1 \neq x_2$ , si  $x_1 < 0$  et  $x_2 < 0$  alors  $J_N(x_2) - J_N(x_1) = 0$ ; si  $x_1 = 0$  et  $x_2 < 0$  alors  $J_N(x_2) - J_N(x_1) = ] - \infty, 0]$ ; si  $x_1 < 0$  et  $x_2 = 0$  alors  $J_N(x_2) - J_N(x_1) = [0, +\infty, 0[$ . On en conclut facilement que :

$$(F(t, x_1) - F(t, x_2))(x_1 - x_2) \leq 0, \text{ sur } D \times D,$$

c'est à dire que  $F$  est semi-lipschitzienne de constante 0, autrement dit dissipative. ■

**Remarque :** La régularité obtenue pour  $u_N$  est assez faible. Quand il y a un événement de type transition contact rompu - contact établi, la vitesse  $\frac{d}{dt}u_N$  passe de strictement négative à zéro. Dans beaucoup d'études qui traitent du contact unilatéral (voir en 1<sup>ère</sup> partie), on approche l'application  $J_N$  par une fonction plus régulière. Ici on propose de prendre la fonction :

$$J_N^\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{\eta} & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

Les solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}u_N(t) = -b_{z+}(t, 0) - \frac{c_2}{\lambda + 2G}J_N(u_N(t)), \quad (3.14)$$

sont telles que  $\frac{d}{dt}u_N$  est lipschitzien, pourvu que  $b_{z+}(t, 0)$  le soit. La condition de non pénétration est relaxée par ce qu'on peut interpréter comme étant une certaine élasticité d'interface.

A partir de la solution  $u_z(t, 0)$  de l'inclusion différentielle (3.11), la pression de contact est donnée par :

$$\begin{aligned} S(t) &= -(\lambda + 2G)\partial_z u_z(t, 0), \\ &= -\frac{\lambda + 2G}{c_2}(b_{z+}(t, 0) - \partial_t u_z(t, 0)). \end{aligned}$$

Elle est bien positive ou nulle car  $S(t) \in J_N(u_N(t))$ , elle est de plus dans  $L^1(0, T)$  pourvu que  $b_{z+}$  y soit.

Les équations concernant les déplacements horizontaux se récrivent quant à elles grâce aux relations (3.8) et (3.9) et cela donne l'inclusion suivante sur le bord de contact :

$$\frac{G}{c_1} \begin{pmatrix} b_{x+}(t, 0) \\ b_{y+}(t, 0) \end{pmatrix} - \underline{v}_G(t) - \underline{V}_e(t) \in S(t)\mu(\|\underline{v}_G(t)\|)\underline{Dir}(\underline{v}_G(t)).$$

Si on pose :

$$\underline{\alpha}(t) = \frac{G}{c_1} \begin{pmatrix} b_{x+}(t, 0) \\ b_{y+}(t, 0) \end{pmatrix} - \underline{V}_e(t),$$

une fonction qui ne dépend que des conditions initiales et de  $\underline{V}_e$ , cette inclusion devient :

$$\underline{\alpha}(t) \in \frac{G}{c_1}\underline{v}_G(t) + S(t)\mu(\|\underline{v}_G(t)\|)\underline{Dir}(\underline{v}_G(t)). \quad (3.15)$$

Nous verrons par la suite que tout au moins lorsque le coefficient de frottement  $\mu$  admet des portions décroissantes cette inclusion peut admettre une infinité de solutions. Quand ce coefficient est croissant on peut quand même établir l'existence et l'unicité de la solution du problème de frottement :

**Proposition 3** *Si le coefficient de frottement  $\mu$  est une fonction lipschitzienne et croissante de la vitesse de glissement et si  $S(t)$  est positive sur tout  $[0, T]$ , alors l'inclusion (3.15) admet une unique solution  $\underline{v}_G$ .*

**Preuve :** En effet, pour  $t \in [0, T]$  fixé, si  $\underline{v}_G = 0$  est solution alors :

$$\|\underline{\alpha}(t)\| \leq S(t)\mu(0),$$

et si  $\underline{v}_G \neq 0$  est solution alors :

$$\underline{\alpha}(t) = \frac{\underline{v}_G}{\|\underline{v}_G\|} \left( \frac{G}{c_1} \|\underline{v}_G\| + S(t)\mu(\|\underline{v}_G(t)\|) \right).$$

C'est à dire que  $\underline{v}_G$  a même sens et même direction que  $\underline{\alpha}(t)$  et que :

$$\|\underline{\alpha}(t)\| = \frac{G}{c_1} \|\underline{v}_G\| + S(t)\mu(\|\underline{v}_G(t)\|).$$

mais comme  $\mu$  est une fonction croissante et  $S(t) \geq 0$ , on a  $\frac{G}{c_1} \|\underline{v}_G\| + S(t)\mu(\|\underline{v}_G(t)\|) > S(t)\mu(0)$  et il n'est pas possible d'avoir a la fois une solution nulle et une solution non nulle. De plus si  $\underline{v}_G = 0$  n'est pas solution, alors comme la fonction :

$$f(x) = \frac{G}{c_1}x + S(t)\mu(x),$$

est continue croissante pour  $x \geq 0$ , et que de plus  $f(0) = S(t)\mu(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , il existe un unique  $x \geq 0$  tel que  $\|\underline{\alpha}(t)\| = f(x)$ . ■

**Remarque :** L'utilisation des relations (3.8) et (3.9) nous amène a restreindre l'étude du problème à l'intervalle de temps  $[0, \frac{H}{c_2}]$ . Cette restriction n'empêche pas, une fois le problème résolu sur cet intervalle, de poursuivre l'étude sur l'intervalle suivant  $[\frac{H}{c_2}, 2\frac{H}{c_2}]$  en prenant comme condition initiale la valeur de la solution trouvée pour  $t = \frac{H}{c_2}$ .

### 3.2 Non-unicité et critère de retard maximal

Lorsque le coefficient de frottement n'est pas monotone croissant, l'inclusion (3.15) peut admettre plusieurs solutions pourvu que  $S(t)$  soit suffisamment grand. Nous allons voir cela sur un exemple. On se place dans un cas bidimensionnel, c'est à dire avec un déplacement  $u_y$  nul. L'inclusion (3.15) est alors une inclusion scalaire avec  $\alpha = \frac{G}{c_1}(b_{x+}(t, 0) - V_e(t))$ ,  $V_e(t)$  étant la vitesse de la fondation rigide suivant l'axe des  $x$ . Cette inclusion s'écrit :

$$\alpha(t) \in \frac{G}{c_1}v_G(t) + S(t)\mu(|v_G(t)|)Sgn(v_G(t)), \quad (3.16)$$

où  $v_G$  est la vitesse de glissement suivant l'axe de  $x$ . On choisit, par exemple, un coefficient de frottement avec décroissance exponentielle :

$$\mu(v) = \mu_d + (\mu_s - \mu_d)e^{-\frac{v}{V_{cr}}}, \quad (3.17)$$

et on suppose que la pression normale est constante, a pour valeur  $S = 1$  et que  $G = c_1 = 1$ . On pose :

$$\beta(v) = v + \mu(|v|)Sgn(v) = \begin{cases} \{v - \mu(-v)\} & \text{si } v < 0, \\ [-\mu_s, +\mu_s] & \text{si } v = 0, \\ \{v + \mu(v)\} & \text{si } v > 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

le second membre de l'inclusion (3.16). Pour  $V_{cr} > \mu_s - \mu_d$  ce second membre n'est pas croissant (voir figure 3.1). On se place dans ce cas. Si maintenant on choisit une donnée  $\alpha$  continue

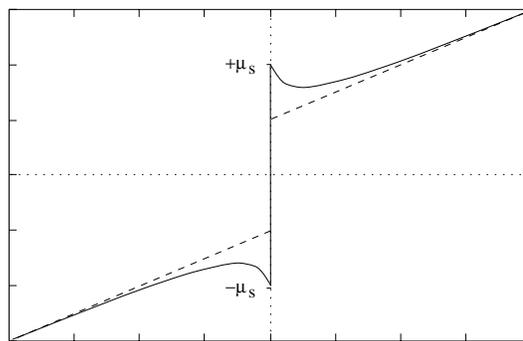


FIG. 3.1 – Allure de l'application  $\beta(v)$  pour  $V_{cr} > \mu_s - \mu_d$ .

strictement croissante telle que  $\alpha(0) = 0$  et  $\alpha(T) > \mu_s$ , alors on peut analyser le comportement des solutions de l'inclusion (3.16) qui se récrit :

$$\alpha(t) \in \beta(v_G(t)).$$

Pour  $v > 0$ , l'application  $\beta(v)$  admet un minimum en  $v_{min} = V_{cr} \ln\left(\frac{\mu_s - \mu_d}{V_{cr}}\right)$  dont la valeur  $\beta(v_{min}) = \mu_d + V_{cr}\left(1 + \ln\left(\frac{\mu_s - \mu_d}{V_{cr}}\right)\right)$ . Comme  $\alpha$  est choisie strictement croissante, il existe  $t_1$  et  $t_2$  tels que  $0 < t_1 < t_2 < T$  et :

$$\alpha(t) \in \begin{cases} [0, \beta(v_{min})[ & \text{si } t \in [0, t_1[, \\ [\beta(v_{min}), \mu_s[ & \text{si } t \in ]t_1, t_2[, \\ ]\mu_s, +\infty[ & \text{si } t \in ]t_2, T[. \end{cases}$$

Sur la première portion, c'est à dire pour  $t \in [0, t_1[$ , l'inclusion admet une unique solution qui est  $v_G(t) = 0$ . Sur la troisième portion, pour  $t \in ]t_2, T[$ , l'inclusion admet aussi une unique solution. Par contre pour  $t \in ]t_1, t_2[$  il y a trois solutions possibles, ce qui donne une infinité

de fonctions  $v_G$  solutions. Chaque solution étant bornée, est aussi suffisamment régulière pour définir une solution de classe  $H^1(0, H)$  du problème (3.1).

Malgré tout, d'un point de vue mécanique, cette multiplicité de solutions n'est pas satisfaisante. En particulier, pour  $t \in ]t_1, t_2[$  on s'aperçoit que des solutions partent en glissement alors que la contrainte de cisaillement seuil de la loi de Coulomb n'est pas atteinte. En un certain sens ces solutions ne respectent pas la loi de Coulomb. Pour cette raison, et afin de sélectionner des solutions mécaniquement acceptables, I.R. Ionescu et J.-C. Paumier proposent dans [42] un critère de choix qui est issu de la théorie des catastrophes, dit critère du retard maximal, et qui s'énonce ainsi :

$$\text{Le système effectue un saut en vitesse quand il n'a plus d'autres choix possibles.} \quad (3.19)$$

Indépendamment, A.I. Leonov et A. Srinivasan dans [50] ont proposé le critère suivant :

$$\text{on choisit la solution qui minimise a chaque instant } t \text{ la différence } |v^-(t) - v^+(t)|, \quad (3.20)$$

qui donne une information supplémentaire sur le choix des sauts en vitesse. Dans l'exemple que l'on a donné ces critères sélectionnent la seule solution qui part en glissement lorsque la contrainte de cisaillement seuil est atteinte. Malgré tout ce sont des critères qualitatifs dont l'expression n'est pas suffisamment précise pour sélectionner une unique solution dans tous les cas de figure, comme on va le voir dans la suite de ce chapitre. Il est à remarquer aussi que ce type de critère est ordinairement utilisé dans le cadre de la théorie des catastrophes, pour des problèmes quasi-statiques ou statiques.

### 3.3 Condition de frottement perturbée

Nous allons introduire maintenant une condition de frottement perturbée qui va nous redonner l'unicité de la solution dans le problème unidimensionnel. On verra par la suite le rapport qu'il existe entre cette condition et le critère de retard maximal.

On remplace la condition normale de frottement qui est :

$$\underline{\sigma}_T(\underline{u}) \in (\sigma_N(\underline{u}))\mu(\|\underline{v}_G\|)\underline{Dir}(v_G)$$

par la condition perturbée suivante :

$$\varepsilon \frac{d}{dt}(\underline{v}_G + V_\varepsilon) + \underline{\sigma}_T(\underline{u}) \in \sigma_N(\underline{u})\mu(\|\underline{v}_G\|)\underline{Dir}(\underline{v}_G). \quad (3.21)$$

Le terme  $\varepsilon \partial_{tt}^2 \underline{u}_T = \varepsilon \partial_t(vg + V_\varepsilon)$ , avec  $\varepsilon > 0$ , peut être interprété comme l'addition d'une légère masse surfacique de densité  $\varepsilon$  sur le bord de contact. Pour le problème unidimensionnel, comme avec la condition normale on se ramène sur le bord de contact grâce aux relations (3.8) et (3.9), et cela donne :

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \underline{v}_G \in \underline{\alpha}(t) - \varepsilon \frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) - \frac{G}{c_1} \underline{v}_G(t) - S(t)\mu(\|\underline{v}_G(t)\|)\underline{Dir}(\underline{v}_G(t)), \quad (3.22)$$

On va montrer que cela redonne bien l'unicité de la solution.

**Proposition 4** *Si la pression de contact  $S$  est positive et dans  $L^1(0, T)$ , si la donnée  $\underline{\alpha}$  est dans  $L^1(0, T) \times L^1(0, T)$ , si la vitesse d'entraînement  $V_\varepsilon$  est absolument continue sur  $[0, T]$  et si le coefficient de frottement  $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est lipschitzien et borné, alors le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d}{dt} \underline{v}_G \in \underline{\alpha}(t) - \varepsilon \frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) - \frac{G}{c_1} \underline{v}_G(t) - S(t) \mu(\|\underline{v}_G(t)\|) \underline{Dir}(\underline{v}_G(t)), \\ \underline{v}_G(0) = \underline{v}_{G0}, \end{cases} \quad (3.23)$$

*admet une unique solution absolument continue.*

**Preuve :** Soit  $F : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \setminus \{\emptyset\}$  l'application multivoque définie par :

$$F(t, x) = \frac{1}{\varepsilon} (\underline{\alpha}(t) - \varepsilon \frac{d}{dt} V_\varepsilon(t) - \frac{G}{c_1} x - S(t) \mu(\|x\|) \underline{Dir}(x)),$$

alors  $F$  est bien à valeurs fermées convexes et mesurable en temps. La semi-continuité supérieure de  $F$  par rapport à la seconde variable découle de celle de l'application  $\underline{Dir}$  et de la continuité du coefficient  $\mu$ . Pour appliquer le théorème (4) il reste à vérifier la condition de croissance, c'est à dire l'existence d'une fonction  $c \in L^1(0, T)$  telle que :

$$\|F(t, x)\| \leq c(t)(1 + \|x\|) \text{ sur } [0, T] \times D.$$

Or ici :

$$\begin{aligned} \|F(t, x)\| &\leq \frac{1}{\varepsilon} (\|\underline{\alpha}(t) - \varepsilon \frac{d}{dt} V_\varepsilon(t)\| + \frac{G}{c_1} \|x\| + S(t) \mu(\|x\|)), \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} (\|\underline{\alpha}(t) - \varepsilon \frac{d}{dt} V_\varepsilon(t)\| + S(t) \|\mu\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} + \frac{G}{c_1} \|x\|), \end{aligned}$$

donc  $c(t) = \frac{1}{\varepsilon} \max(\frac{G}{c_1}, 1) (\|\underline{\alpha}(t) - \varepsilon \frac{d}{dt} V_\varepsilon(t)\| + S(t) \|\mu\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)})$  convient. Le problème de Cauchy (3.23) admet au moins une solution. Pour montrer l'unicité de la solution, il suffit de montrer que  $F$  est semi-lipschitzienne. Or on a :

$$\begin{aligned} (F(t, x) - F(t, y), x - y) &= \frac{1}{\varepsilon} (\frac{G}{c_1} y + S(t) \mu(\|y\|) \underline{Dir}(y) - \frac{G}{c_1} x - S(t) \mu(\|x\|) \underline{Dir}(x), x - y), \\ &\leq \frac{S(t)}{\varepsilon} (\mu(\|y\|) \underline{Dir}(y) - \mu(\|x\|) \underline{Dir}(x), x - y). \end{aligned}$$

Dans un premier temps supposons que  $x$  et  $y$  sont tous deux non nuls. Alors :

$$\begin{aligned} (\mu(\|y\|) \underline{Dir}(y) - \mu(\|x\|) \underline{Dir}(x), x - y) &= (\mu(\|y\|) \frac{y}{\|y\|} - \mu(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}, x - y), \\ &\leq -\mu(\|y\|) \|y\| - \mu(\|x\|) \|x\| + (\frac{\mu(\|y\|)}{\|y\|} + \frac{\mu(\|x\|)}{\|x\|})(x, y), \\ &\leq -\mu(\|y\|) \|y\| - \mu(\|x\|) \|x\| + \mu(\|y\|) \|x\| + \mu(\|x\|) \|y\|, \\ &\leq (\mu(\|y\|) - \mu(\|x\|)) (\|x\| - \|y\|). \end{aligned}$$

Mais comme  $\mu$  est lipschitzien, la fonction  $v \rightarrow -\mu(v)$  est semi-lipschitzienne pour une constante  $M_\mu$ , et on peut écrire :

$$\begin{aligned} (\mu(\|y\|) - \mu(\|x\|))(\|x\| - \|y\|) &\leq M_\mu(\|x\| - \|y\|)^2, \\ &\leq M_\mu\|x - y\|^2, \end{aligned}$$

On a donc l'estimation :

$$(F(t, x) - F(t, y), x - y) \leq \frac{S(t)M_\mu}{\varepsilon}\|x - y\|^2.$$

Si maintenant  $x$  ou  $y$  est nul, supposons que c'est  $x$ , alors

$$\begin{aligned} (F(t, 0) - F(t, y), -y) &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{G}{c_1} + S(t)\mu(\|y\|)\underline{Dir}(y) - S(t)\mu(0)\overline{B}(0, 1), -y \right), \\ &\leq \frac{S(t)}{\varepsilon} (\mu(\|y\|)\frac{y}{\|y\|} - \mu(0)\overline{B}(0, 1), -y), \\ &\leq \frac{S(t)}{\varepsilon} \left( \max_{w \in \overline{B}(0, 1)} \mu(0)(w, y) - \mu(\|y\|)\|y\| \right), \\ &\leq \frac{S(t)}{\varepsilon} (\mu(0)\|y\| - \mu(\|y\|)\|y\|), \\ &\leq \frac{S(t)M_\mu}{\varepsilon}\|y\|^2. \end{aligned}$$

et on obtient la même estimation. On a montré qu'au temps  $t$  l'application  $F(t, \cdot)$  est semi-lipschitzienne de constante  $\frac{S(t)M_\mu}{\varepsilon}$ . Comme  $S$  est dans  $L^1(0, T)$  cela suffit pour prouver l'unicité de la solution du problème de Cauchy (3.23). ■

On voit que la condition de frottement perturbée, en plus de redonner l'unicité de la solution, assure une régularité plus grande à la solution. On va montrer dans un cadre un peu moins général, que la solution ainsi calculée approche la solution à retard maximal quand le paramètre de perturbation tend vers zéro.

**Remarque 1 :** au vu des résultats apportés par la perturbation sur la condition de frottement, on pourrait être tenté de tenir compte de la masse de surface introduite pour obtenir des solutions plus régulières pour le déplacement normal, puisqu' on a vu que la condition de contact unilatéral génèrait des sauts en vitesse. Si on applique le même principe, on arrive à l'inclusion suivante pour le déplacement normal :

$$\varepsilon \frac{d^2}{dt^2} u_N(t) \in -\frac{d}{dt} u_N(t) - b_{z+}(t, 0) - J_N(u_N(t)),$$

Malheureusement cette inclusion différentielle n'a pas de solution absolument continue en général, à cause de la condition de bord en  $u_N = 0$ . En effet elle s'écrit sous la forme du système du premier ordre suivant :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_N \\ v_N \end{pmatrix} \in F(t, u_N, v_N),$$

avec :

$$F(t, u_N, v_N) = \left( \frac{1}{\varepsilon} (-v_N - b_{z+}(t, 0) - J_N(u_N(t))) \right)^{v_N}.$$

Avec  $D = ]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$  le domaine de définition de  $F$ , la condition  $F(t, x) \cap T_D(x) \neq \emptyset$  n'est pas toujours satisfaite, car  $T_D \left( \begin{smallmatrix} 0 \\ v_N \end{smallmatrix} \right) = ]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$  et  $F(0, v_N) = \left( ]-\infty, \frac{1}{\varepsilon} (-v_N - b_{z+}(t, 0)) \right)^{v_N}$  ont une intersection nulle lorsque  $v_N < 0$  ce qui est précisément le cas lorsqu'il y a une transition contact rompus - contact établi.

Par contre, il est possible d'introduire la perturbation dans la condition de contact régularisée que l'on a vu au paragraphe 3.1, et on arrive à l'équation différentielle suivante :

$$\varepsilon \frac{d^2}{dt^2} u_N(t) = -\frac{d}{dt} u_N(t) - b_{z+}(t, 0) - \frac{c_2}{\lambda + 2G} J_N^\eta(u_N(t)).$$

qui donne une solution à dérivée seconde lipschitzienne pourvu que  $b_{z+}(\cdot, 0)$  soit lipschitzienne.

**Remarque 2:** Une autre approche pour recouvrer l'unicité de la solution du problème, adoptée par certains auteurs, est de considérer le problème avec une viscosité à l'intérieur de la couche.

### 3.4 Convergence de la perturbation singulière

On va montrer, dans un cadre un peu plus restreint que celui des paragraphes précédents, un résultat de convergence des solutions du problème avec condition de frottement perturbée vers une solution du problème non perturbé. On se place dans le cas bidimensionnel avec une pression de contact  $S > 0$  constante et une vitesse  $V_e$  constante également. C'est à dire qu'on ne se préoccupe que du déplacement  $u_x(t, z)$ . Comme dans le paragraphe 3.2, on pose :

$$\alpha = \frac{G}{c_1} (b_{x+}(t, 0) - V_e(t)) \quad (3.24)$$

$$\beta(v) = \frac{G}{c_1} v + S \mu(|v|) \text{Sgn}(v). \quad (3.25)$$

On suppose la donnée  $\alpha$  réglée, et le problème de frottement non perturbé revient alors au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \alpha^-(t) \in \beta(v(t)),^{(1)} \text{ pour tout } t \in ]0, T]. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Le choix de la limite à gauche  $\alpha^-(t)$  sera justifié par la suite. On fait deux hypothèses sur l'application  $\beta$ . La première hypothèse est naturellement satisfaite lorsque le coefficient  $\mu$  est lipschitzien borné, et est la suivante :

**Hypothèse 1**

- $\beta$  est semi-continue supérieurement à valeurs compactes convexes
- l'opposée de  $\beta$  est semi-lipschitzienne, c'est à dire qu'il existe une constante  $M_\beta$  telle que :

$$(\beta(v_2) - \beta(v_1))(v_1 - v_2) \leq M_\beta(v_1 - v_2)^2, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

La deuxième hypothèse est suffisante pour établir les résultats de convergence présentés dans la suite, et s'énonce :

**Hypothèse 2** Il existe  $N \geq 0$  et des couples  $(v_j^*, \alpha_j^*)_{1 \leq j \leq 2N}$ , avec  $v_1^* \leq v_2^* \leq \dots \leq v_{2N}^*$  et :

- $[v_{2N}, +\infty[, [\alpha_{2N}, +\infty[; ] - \infty, v_1^*], ] - \infty, \alpha_1^*]$  et  $[v_{2i}^*, v_{2i+1}^*], [\alpha_{2i}^*, \alpha_{2i+1}^*], 1 \leq i < N$  branches strictement croissante de  $\beta$ ,
- $[v_{2i-1}^*, v_{2i}^*], [\alpha_{2i-1}^*, \alpha_{2i}^*], 1 \leq i \leq N$ , branches strictement décroissantes de  $\beta$ ,
- $\lim_{|v| \rightarrow +\infty} |\beta(v)| = +\infty$ ,

où l'on dit qu'une branche  $[v_1, v_2], [\alpha_1, \alpha_2]$  est strictement croissante (respectivement décroissante) si  $\alpha_1 \in \beta(v_1), \alpha_2 \in \beta(v_2), \alpha_1 < \alpha_2$  (respectivement  $\alpha_1 > \alpha_2$ ) et :

$$(\beta(u) - \beta(w))(u - w) > 0 \text{ (respectivement } < 0 \text{)}, \quad \forall u, w \in [v_1, v_2], u \neq w.$$

Les hypothèses 1 et 2 impliquent en particulier que  $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

**Terminologie :** Un point  $(\alpha, v)$  avec  $\alpha \in \beta(v)$  est appelé **point stable** (respectivement **point instable**) s'il existe une branche strictement croissante (respectivement décroissante)  $[v_1, v_2], [\alpha_1, \alpha_2]$  avec  $\alpha \in ]\alpha_1, \alpha_2[$  (respectivement  $\alpha \in ]\alpha_2, \alpha_1[$ ) et  $v \in [v_1, v_2]$ . Les points  $(\alpha_j^*, v_j^*)$  sont appelés les points critiques; les points  $(\alpha_{2i-1}^*, v_{2i-1}^*)$  sont les **points critiques maximums**; les points  $(\alpha_{2i}^*, v_{2i}^*)$  sont les **points critiques minimums**.

Sur la figure 3.2 on donne un exemple illustratif, pour une application  $\beta$  construite à partir de  $\mu(v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-v} \cos(2\pi v)$ ,  $G = S = 1$  et  $c = 4$ .

Le problème avec condition de frottement perturbée revient quant à lui au problème sui-

---

1. On note les limites à droite et à gauche respectivement  $v^+(t) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} v(\tau)$  et  $v^-(t) = \lim_{\tau \rightarrow t^-} v(\tau)$

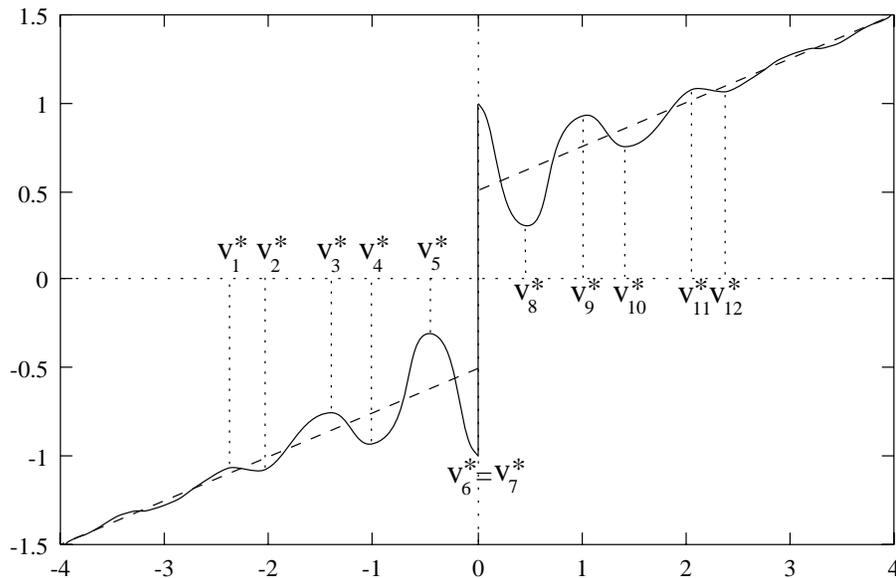


FIG. 3.2 - Application  $\beta(v) = \frac{1}{4}v + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-|v|} \cos(2\pi v)) \text{Sgn}(v)$ .

vant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v_\varepsilon : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ pour } \varepsilon > 0 \text{ telle que :} \\ \varepsilon \frac{d}{dt} v_\varepsilon(t) \in \alpha(t) - \beta(v_\varepsilon(t)), \text{ presque partout sur } [0, T], \\ v_\varepsilon(0) = v^0 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

La démarche que l'on va suivre pour établir le résultat de convergence est la suivante :

On commence par établir un résultat de majoration de la suite  $v_\varepsilon$ , ce qui est fondamental dans ce type d'étude.

Ensuite on analyse la suite  $v_\varepsilon$  au voisinage de la condition initiale où on a un comportement de couche limite.

On montre que sous les hypothèses 1 et 2 la convergence des solutions perturbées a lieu au voisinage de la condition initiale.

On réutilise alors l'analyse de la couche limite pour le cas général et les transitions entre les branches de  $\beta$ , et on montre que sous la condition  $\alpha \in BV(0, T)$  le nombre de transitions est nécessairement fini, ce qui implique la convergence sur tout l'intervalle  $[0, T]$ .

### 3.4.1 Préalables sur quelques propriétés des fonctions réelles à variation bornées

Sur ce sujet on pourra consulter, par exemple, les ouvrages de L. Giusti [32], L.C. Evans, R.F. Gariepy [28] et W. Rudin [78].

On commence par définir les fonction en escalier et réglées :

**Définition 6** On dit que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction en escalier si elle est constante par morceau avec un nombre fini de points de discontinuité. C'est à dire qu'il existe un nombre fini de valeurs  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$  telles que  $f$  soit constante sur les intervalles  $]x_i, x_{i+1}[$  pour  $0 \leq i \leq n$ . Les valeurs de  $f$  aux points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  étant quelconque.

**Définition 7** On dit que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction réglée si elle admet une limite à droite  $f^+(x)$  en tout point  $x \in [a, b[$  et limite à gauche  $f^-(x)$  en tout point  $x \in ]a, b]$ .

On a la propriété suivante :

**Proposition 5** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $f$  est une fonction réglée sur  $[a, b]$  si et seulement s'il existe une suite de fonctions en escalier  $(f^n)_{n \geq 1}$  qui converge uniformément vers  $f$ .

Pour une fonction  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  on définit la variation sur un intervalle  $(c, d)$ , pour  $a \leq c < d \leq b$  par :

$$V_c^d(f) = \sup \sum_{j=1}^m |f(t_{j+1}) - f(t_j)|,$$

le supremum étant pris sur toutes les partitions finies  $c < t_1 < \dots < t_{m+1} < d$ .

La valeur  $V_a^b(f)$  et appelée la variation totale de  $f$ .

**Définition 8** On dit que  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction à variation bornée sur  $[a, b]$  si :

$$V_a^b(f) < +\infty.$$

On note  $BV(a, b)$  l'ensemble des fonctions à variation bornée sur  $]a, b[$ . On a les propriétés suivantes (voir [78]) :

**Proposition 6** Si  $f \in BV(a, b)$  alors :

– on a :

$$|f(c) - f(d)| \leq V_c^d(f), \quad a \leq c < d \leq b,$$

en particulier  $f$  est bornée sur  $[a, b]$ ,

–  $f$  est réglée sur  $[a, b]$ ,

– l'ensemble des points de discontinuité de  $f$  est au plus dénombrable.

Et donc on peut approcher uniformément toute fonction à variation bornée par une suite de fonctions en escalier.

### 3.4.2 Exemple numérique

Avant d'entamer l'étude de la convergence, voici un exemple qui illustre le comportement de la suite  $v_\varepsilon$  des solutions du problème (3.27) lorsque le paramètre de perturbation diminue, on montre ici des calculs faits sur l'exemple du paragraphe 3.2 avec un coefficient  $\mu$  donné par (3.17) et le second membre donné par (3.18). On choisit  $V_{cr} > (\mu_s - \mu_d)$  de telle manière que

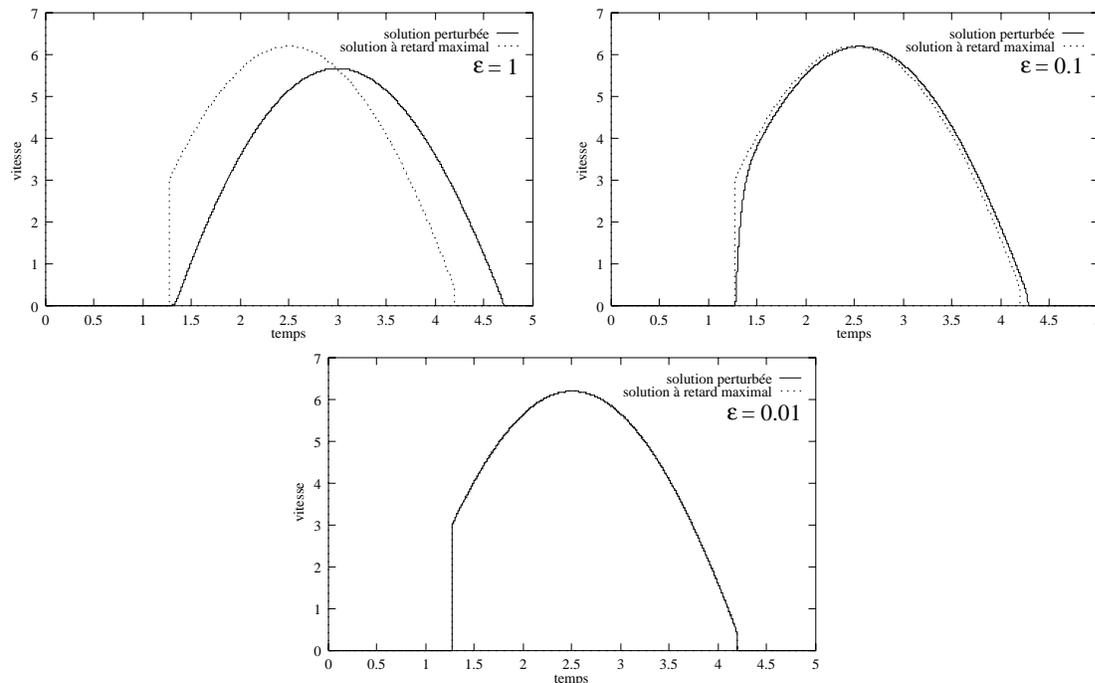


FIG. 3.3 – Solution du système perturbé et solution à retard maximal.

l'application  $\beta$  ne soit pas strictement croissante (voir figure 3.1). Afin de calculer un événement stick-slip complet, la donnée  $\alpha(t)$  est choisie croissante de  $t = 0$  à  $t = \frac{T}{2}$ , avec  $\alpha(0) = 0$  et  $\alpha(\frac{T}{2}) > \mu_s$ , puis décroissante de  $t = \frac{T}{2}$  à  $t = T$ , avec  $\alpha(T) = 0$ .

La figure 3.3 représente les résultats numériques des solutions du problème perturbé pour des valeurs du paramètre de régularisation  $\varepsilon$  allant de 1 à 0.01, ainsi que la solution sélectionnée par le critère du retard maximal. La figure 3.4 représente l'écart relatif entre les deux solutions. On remarque le caractère non uniforme de la convergence due aux saut en vitesse de la solution limite.

La figure 3.5 représente les solutions du problème perturbé dans un diagramme  $(\alpha(t), v(t))$ . On observe que la solution s'approche de la courbe  $\alpha(t) \in \beta(v(t))$ , et que les sauts en vitesse sont bien ceux qui respectent le critère du retard maximal.

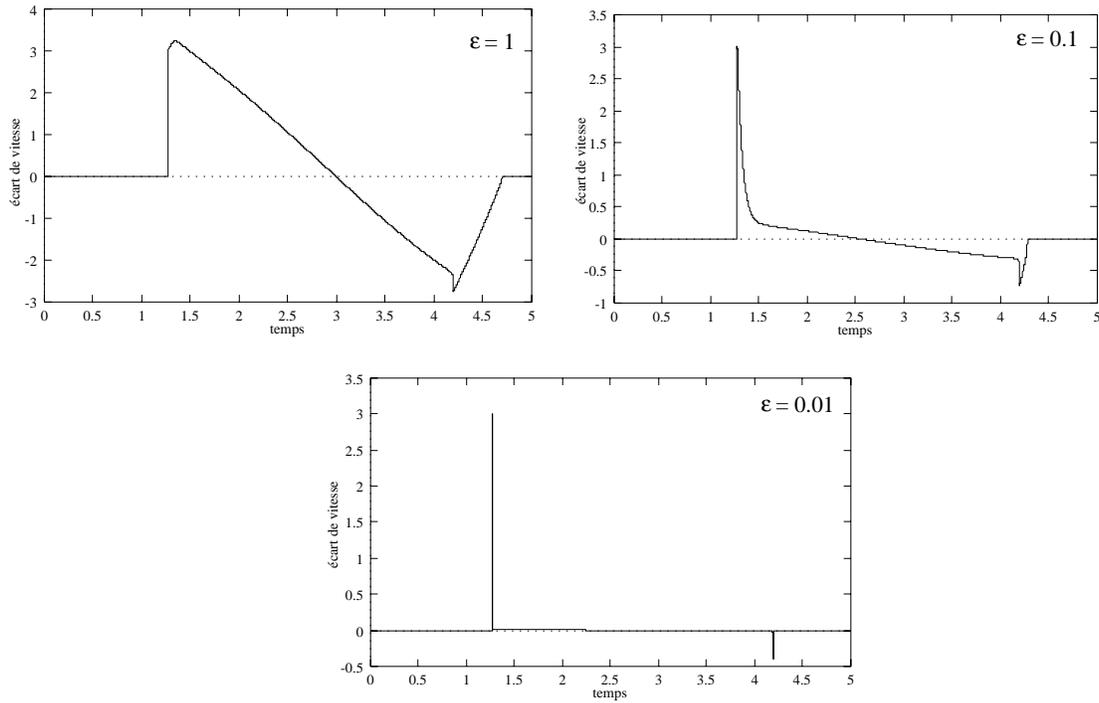


FIG. 3.4 – Écart relatif entre solution du système perturbé et solution à retard maximal.

### 3.4.3 Majoration

On commence par montrer un résultat important sur le comportement global de la suite des solutions du problème (3.27).

**Proposition 7** Avec  $\beta$  satisfaisant aux hypothèse 1 et 2, s'il existe deux couples de valeurs  $(v_1, \alpha_1)$  et  $(v_2, \alpha_2)$  tels que :

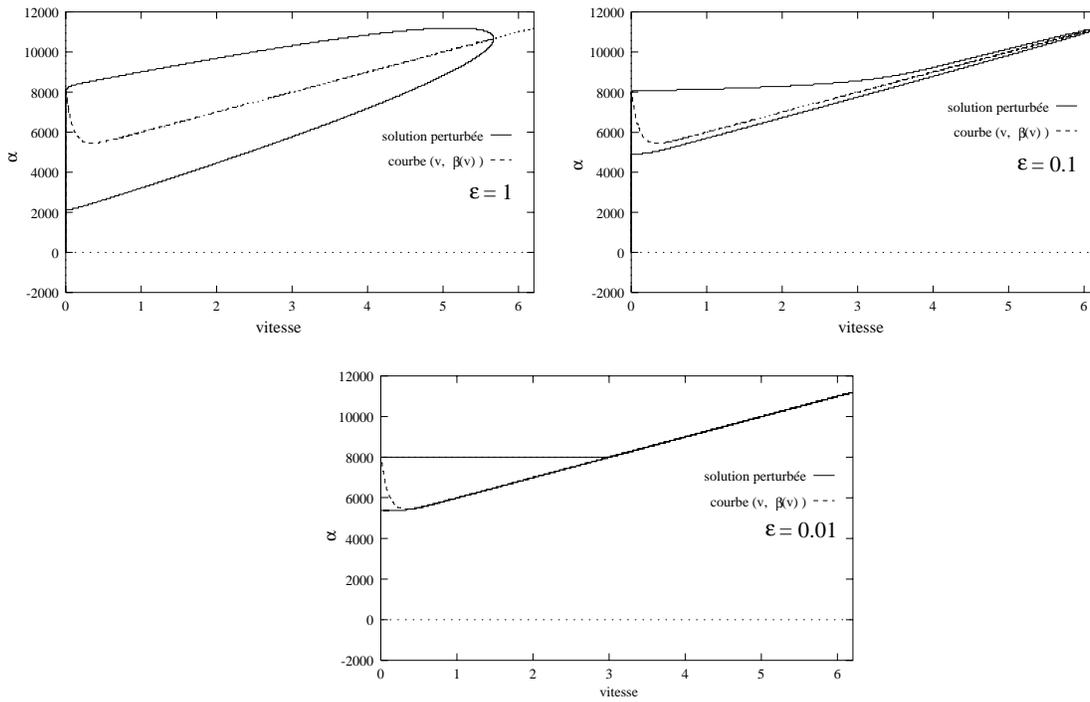
- $\alpha_1 < \alpha_2$ ,  $v_1 \leq v_2$ ,  $\alpha_1 \in \beta(v_1)$ ,  $\alpha_2 \in \beta(v_2)$ ,
- $v^0 \in [v_1, v_2]$ ,
- $\alpha(t) \in [\alpha_1, \alpha_2]$ , pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

alors la suite de solutions  $v_\epsilon$  du problème (3.27) vérifie pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$v_\epsilon(t) \in [v_1, v_2], \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \epsilon > 0.$$

**Preuve :**

Construisons  $\tilde{\beta}$  l'application multivoque suivante :

FIG. 3.5 – Graphe  $(\alpha(t), v(t))$ .

$$\tilde{\beta}(v) = \begin{cases} \{\alpha_1 + (v - v_1)\} & \text{si } v < v_1, \\ \beta(v) & \text{si } v \in [v_1, v_2], \\ \{\alpha_2 + (v - v_2)\} & \text{si } v > v_2. \end{cases}$$

Soit  $\tilde{v}_\varepsilon$  une solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d}{dt} \tilde{v}_\varepsilon(t) \in \alpha(t) - \tilde{\beta}(\tilde{v}_\varepsilon(t)), \text{ presque pour tout } t \in [0, T], \\ \tilde{v}_\varepsilon(t_0) = v^0. \end{cases} \quad (3.28)$$

En raisonnant par l'absurde, admettons qu'il existe  $t_2 \in [0, T]$  tel que  $\tilde{v}_\varepsilon(t_2) < v_1$ . Par continuité de  $\tilde{v}_\varepsilon$ , il existe  $t_1 < t_2$  tel que  $\tilde{v}_\varepsilon(t_1) = v_1$  et  $\tilde{v}_\varepsilon(t) < v_1$  pour  $t_1 < t \leq t_2$ . Or sur cet intervalle on a :

$$\tilde{v}_\varepsilon(t) = v_1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^t \alpha(s) - \alpha_1 + v_1 - \tilde{v}_\varepsilon(s) ds \geq v_1,$$

d'où la contradiction. De la même manière on prouve qu'il n'existe pas de  $t_3 \in [0, T]$  tel que  $\tilde{v}_\varepsilon(t_3) > v_2$ . On a donc  $\tilde{v}_\varepsilon(t) \in [v_1, v_2]$  pour  $t \in [0, T]$ , donc  $\tilde{v}_\varepsilon$  est aussi solution du problème (3.27) puisque  $\tilde{\beta}$  et  $\beta$  coïncident sur  $[v_1, v_2]$ . Par unicité de la solution du problème (3.27), on en déduit que  $\tilde{v}_\varepsilon$  et  $v_\varepsilon$  coïncident et que  $v_\varepsilon(t) \in [v_1, v_2]$  pour  $t \in [0, T]$ . ■

**Proposition 8** Si  $\beta$  satisfait aux hypothèses 1 et 2, et si la donnée  $\alpha$  est dans  $L^\infty(0, T)$ , alors il existe une constante  $M_1 > 0$  indépendante de  $\varepsilon > 0$ , telle que pour tout  $\varepsilon > 0$  la solution  $v_\varepsilon$  du problème (3.27) vérifie :

$$\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T)} < M_1.$$

**Preuve :**

Si on pose :

$$\alpha_1 = \min(\alpha_1^*, \inf_{t \in [0, T]} \text{ess } \alpha(t), \beta(v^0)), \quad \alpha_2 = \max(\alpha_{2N}^*, \sup_{t \in [0, T]} \text{ess } \alpha(t), \beta(v^0)),$$

et :

$$v_1 = \min(\beta^{-1}(\alpha_1)), \quad v_2 = \max(\beta^{-1}(\alpha_2)),$$

alors  $v_1 \leq v_2$  et l'application de la proposition 7 nous donne :

$$v_\varepsilon(t) \in [v_1, v_2], \quad \forall t \in [0, T].$$

■

### 3.4.4 Couche limite en $t = 0$

Au temps initial  $t = 0$ , le problème de la convergence ponctuelle ne se pose pas puisque  $v_\varepsilon(0) = v^0$  quelque soit  $\varepsilon > 0$ . Malgré cela, dans le cas le plus courant où la donnée initiale vérifie :

$$\alpha^+(0) \notin \beta(v^0),$$

il y a un comportement de couche limite en  $t = 0$  de la suite de solutions  $v_\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. C'est ce comportement que l'on analyse dans ce paragraphe.

Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, on répartit en quatre catégories les points  $(\alpha^+(0), v)$  tels que  $\alpha^+(0) \in \beta(v)$  : les points stables, instables critiques minimum et critiques maximum. Cette terminologie, ainsi que l'étude qui suit est inspirée de A.N. Tikhonov et al. [82], où sont traités des cas d'équations différentielles ordinaires régulières. Nous avons adapté leur méthode pour les équations différentielles multivoques.

Avant de poursuivre notre investigation, voyons ce qui se passe sur un exemple autonome régulier. On suppose donc  $\alpha(t) \equiv 0$  et  $\beta$  de classe  $C^1(\mathbb{R})$ . Les racines de l'équation :

$$\beta(v) = 0,$$

sont en nombre fini, car  $\beta$  est strictement monotone par morceaux. Soit  $\phi$  une racine stable encadrée par deux racines instables  $\phi_1 < \phi < \phi_2$ . Il est clair que  $\beta(v) < 0$  pour  $v \in ]\phi_1, \phi[$  et  $\beta(v) > 0$  pour  $v \in ]\phi, \phi_2[$ .

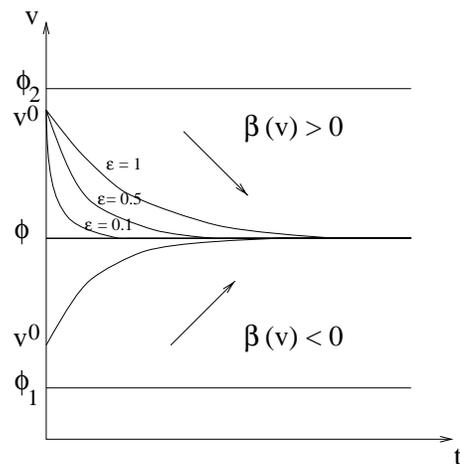


FIG. 3.6 – Schéma décrivant le comportement de la couche limite.

On appelle  $] \phi_1, \phi_2[$  le bassin d'attraction de la racine stable  $\phi$  (voir figure 3.6). On peut voir dans [82] que pour toute donnée initiale  $v^0$  choisie dans  $] \phi_1, \phi_2[$  on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon(t) = \phi, \forall t \in ]0, T].$$

Cet exemple illustre le type de comportement de couche limite que l'on cherche à exhiber pour le problème (3.27). Pour cela on introduit quelques notions qui nous sont utiles.

### Points d'adhérence de la couche limite

**Définition 9** On dit que  $v \in \mathbb{R}$  est un point d'adhérence de la couche limite en  $t = 0$  du problème (3.27) si et seulement s'il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  strictement positive et une suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  positive telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\varepsilon_n}(t_n) = v.$$

Cela revient à dire que le couple  $(0, v)$  est point d'adhérence de la suite des graphes  $(t, v_\varepsilon(t))$ , ce que l'on illustre par le dessin de la figure 3.7.

**Proposition 9** Pour  $\alpha \in BV(0, T)$  et  $\beta$  satisfaisant aux hypothèses 1 et 2, l'ensemble des points d'adhérence de la couche limite en  $t = 0$  du problème (3.27) est un intervalle fermé borné. On note  $I_a(v^0)$  cet intervalle.

### Preuve :

Remarquons d'abord que  $v^0 \in I_a(v^0)$ . On sait par la proposition 8 que la suite  $v_\varepsilon$  est bornée dans  $L^\infty(0, T)$  uniformément en  $\varepsilon$ . L'ensemble des points d'adhérence est donc nécessairement borné. C'est un fermé car c'est l'intersection du fermé  $\{0\} \times \mathbb{R}$  avec l'ensemble fermé des points

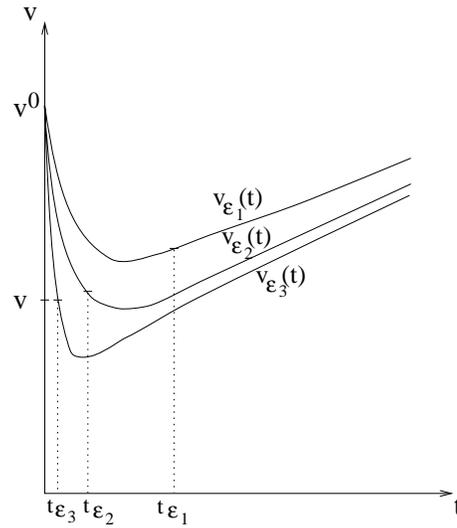


FIG. 3.7 – Point d'adhérence de la couche limite.

d'adhérence de la suite des graphes  $\{(t, v_\varepsilon(t)); t > 0\}_{\varepsilon > 0}$ . Il suffit maintenant de montrer que c'est un ensemble convexe. Comme  $v^0$  est toujours un point d'adhérence, s'il existe un autre point d'adhérence  $v > v^0$  alors par définition il existe  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  positive et  $(t_n)_{n \geq 0}$  positive telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\varepsilon_n}(t_n) = v.$$

On pose :

$$\zeta_n = v_{\varepsilon_n}(t_n) - v.$$

On a bien sûr  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \zeta_n = 0$ . Soit  $\tilde{v} \in ]v^0, v[$ , pour  $n$  assez grand on a  $|\zeta_n| < v - \tilde{v}$ , et comme les fonctions  $v_{\varepsilon_n}$  sont continues, il existe  $\tilde{t}_{\varepsilon_n} \in [0, t_n]$  tel que :

$$v_{\varepsilon_n}(\tilde{t}_{\varepsilon_n}) = \tilde{v},$$

car  $\tilde{v} \in [v^0, v + \zeta_n]$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\varepsilon_n}(\tilde{t}_{\varepsilon_n}) = \tilde{v}$ , et  $\tilde{v}$  est aussi point d'adhérence et pour la même suite de solutions. Le raisonnement est le même s'il existe un  $v < v^0$  point d'adhérence, et on a bien montré que l'ensemble des points d'adhérence est convexe. ■

On présente maintenant deux résultats qui nous sont utiles par la suite :

**Lemme 3** Pour  $\alpha \in BV(0, T)$  et  $\beta$  satisfaisant aux hypothèses 1 et 2, s'il existe  $v_0 \in \mathbb{R}$  et  $t_0 \in [0, T[$  tels que :

$$\alpha^+(t_0) > \beta(v_0),$$

alors il existe  $\delta > 0$  et  $\zeta > 0$  tels que :

$$\alpha^+(t) > \beta(v), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \zeta], \quad \forall v \in [v_0 - \delta, v_0 + \delta].$$

**Preuve :**

Posons :

$$\eta = \min(\alpha^+(t_0) - \beta(v_0)).$$

D'après l'existence de la limite à droite  $\alpha^+(t_0)$  il existe  $\zeta > 0$  tel que

$$|\alpha^+(t) - \alpha^+(t_0)| < \frac{\eta}{4}, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \zeta].$$

En raisonnant par l'absurde, admettons que :

$$\forall \delta > 0, \exists v_\delta \in [v_0 - \delta, v_0 + \delta], \min(\alpha^+(t_0) - \beta(v_\delta)) < \frac{\eta}{4},$$

on a :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} v_\delta = v_0, \quad \alpha^+(t_0) - \beta(v_\delta) \cap ]-\infty, \frac{\eta}{4}] \neq \emptyset.$$

La condition de semi-continuité supérieure de  $\beta$  implique alors que

$$\alpha^+(t_0) - \beta(v_0) \cap ]-\infty, \frac{\eta}{4}] \neq \emptyset,$$

ce qui est une contradiction. Il existe donc  $\delta > 0$  tel que

$$\alpha^+(t_0) > \beta(v) + \frac{3\eta}{4}, \quad \forall v \in [v_0 - \delta, v_0 + \delta].$$

■

Le lemme suivant donne le signe de  $\beta(v) - \alpha^+(0)$  sur  $I_a(v^0)$  :

**Lemme 4** Pour  $\alpha \in BV(0, T)$ ,  $\beta$  satisfaisant aux hypothèses 1 et 2, et pour tout  $v \in I_a(v^0)$  on a :

$$\min[(\beta(v) - \alpha^+(0))(v - v^0)] \leq 0.$$

**Preuve :**

En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe  $v_b \in I_a(v^0)$  tel que  $(\beta(v_b) - \alpha^+(0))(v_b - v^0) > 0$ . Supposons  $v_b > v^0$ , le cas  $v_b < v^0$  étant symétrique. On a :

$$\beta(v_b) - \alpha^+(0) > 0.$$

D'après le lemme 3, il existe  $\delta > 0$  et  $\zeta > 0$  tels que :

$$\beta(v) - \alpha^+(t) > 0, \quad \forall t \in [0, \zeta], \forall v \in [v_b - \delta, v_b + \delta].$$

Donc pour tout  $\varepsilon > 0$  on a :

$$\frac{d}{dt}v_\varepsilon(t) < 0, \quad \forall t \in ]0, \zeta] \text{ et pour } v_\varepsilon(t) \in [v_b - \delta, v_b + \delta].$$

De ceci on peut conclure que  $v_\varepsilon(t) \leq v_b - \delta$  pour tout  $t \in [0, \zeta]$ , car s'il existait  $t_a \in ]0, \zeta]$  tel que  $v_\varepsilon(t_a) > v_b - \delta$  par continuité il existerait un  $t'_a \in ]0, t_a[$  tel que  $v_\varepsilon(t'_a) = v_b - \delta$  et  $\frac{d}{dt}v_\varepsilon(t) < 0$  sur  $[t'_a, t_a]$  ce qui est impossible. Comme  $v_\varepsilon(t) \leq v_b - \delta$  pour tout  $t \in [0, \zeta]$  et tout  $\varepsilon > 0$  le point  $v_b$  ne peut pas être un point d'adhérence.

■

### Points limites de la couche limite

**Définition 10** On dit que  $v \in \mathbb{R}$  est un **point limite** de la couche limite en  $t = 0$  du problème (3.27) si et seulement s'il existe  $t_\varepsilon > 0$  pour tout  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t_\varepsilon = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon(t_\varepsilon) = v.$$

**Proposition 10** L'ensemble des points limites de la couche limite en  $t = 0$  du problème (3.27) est un sous intervalle fermé de  $I_a(v^0)$ . On note  $I_l(v^0)$  cet intervalle.

La preuve de cette proposition est strictement similaire à la preuve de la proposition 9.

**Proposition 11** Pour  $\alpha \in BV(0, T)$  et  $\beta$  satisfaisant aux hypothèses 1 et 2, la donnée initiale  $v^0$  est toujours une extrémité de  $I_l(v^0)$ . Si  $(\alpha^+(0), v^0)$  n'est pas un point instable de  $\beta$  alors  $v^0$  est aussi une extrémité de  $I_a(v^0)$ .

**Preuve :**

Posons  $I_a(v^0) = [v_a, v_b]$  et supposons que  $v^0 \in ]v_a, v_b[$ . Le lemme 4 nous assure que :

$$\alpha^+(0) \leq \max \beta(v), \quad \text{pour } v \in [v_a, v^0[,$$

$$\alpha^+(0) \geq \min \beta(v), \quad \text{pour } v \in ]v^0, v_b[.$$

Ces deux conditions ne sont compatibles que si  $(\alpha^+(0), v^0)$  est un point instable de  $\beta$ .

Soit  $[v_i^*, v_{i+1}^*], [\alpha_i^*, \alpha_{i+1}^*]$  la branche instable correspondante de  $\beta$ , on pose :

$$[v_i^*, v_{i+1}^*] \cap I_l(v^0) = [v'_a, v'_b].$$

Supposons  $v^0 \in ]v'_a, v'_b[$ , alors  $(\alpha^+(0), v^0)$  est un point instable de  $\beta$  et on a :

$$\alpha^+(0) < \beta(v'_a), \quad \alpha^+(0) > \beta(v'_b).$$

D'après le lemme 3, il existe  $\delta > 0$  et  $\zeta > 0$  tels que :

$$\alpha^+(t) < \beta(v), \quad \text{pour } v \in [v'_a - \delta, v'_a + \delta], \text{ et } t \in [0, \zeta],$$

$$\alpha^+(t) > \beta(v), \quad \text{pour } v \in [v'_b - \delta, v'_b + \delta], \text{ et } t \in [0, \zeta].$$

Comme  $v'_a$  et  $v'_b$  sont des points limites, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  on ait :

$$\exists t_\varepsilon^a, t_\varepsilon^b \in ]0, t_0], \quad |v_\varepsilon(t_\varepsilon^a) - v'_a| < \frac{\delta}{2}, \quad |v_\varepsilon(t_\varepsilon^b) - v'_b| < \frac{\delta}{2}.$$

Pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  fixé, si  $t_\varepsilon^a > t_\varepsilon^b$  alors  $v_\varepsilon(t_\varepsilon^b) \in [v'_b - \delta, v'_b + \delta]$  et comme  $\alpha(t) - \beta(v) > 0$  pour  $v \in [v'_b - \delta, v'_b + \delta]$ , et  $t \in ]0, \zeta]$  on a aussi  $\frac{d}{dt}v_\varepsilon > 0$  pour  $v \in [v'_b - \delta, v'_b + \delta]$ , et  $t \in ]0, \zeta]$ . Comme  $t_\varepsilon^a \in ]t_\varepsilon^b, \zeta]$  il est impossible que  $|v_\varepsilon(t_\varepsilon^a) - v'_a| < \frac{\delta}{2}$ . De même si  $t_\varepsilon^a < t_\varepsilon^b$  il est impossible que  $|v_\varepsilon(t_\varepsilon^b) - v'_b| < \frac{\delta}{2}$ . Donc  $v^0$  est une extrémité de  $I_l(v^0)$ . ■

### Points attractifs de la couche limite

**Définition 11** On dit que  $v_0 \in \mathbb{R}$  est un point attractif en  $t_0 \in [0, T[$  du problème (3.27) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i)  $\alpha^+(t_0) \in \beta(v_0)$ ,

(ii) Il existe une branche strictement croissante  $[v_1, v_2], [\alpha_1, \alpha_2]$  de  $\beta$  et  $\zeta > 0$  telle que :

$$v_0 \in [v_1, v_2], \alpha^+(t) \in [\alpha_1, \alpha_2], \forall t \in [t_0, t_0 + \zeta[.$$

En particulier si  $(\alpha^+(0), v_0)$  est un point stable de  $\beta$  alors  $v_0$  est un point attractif. La limitation de la deuxième condition opère lorsque  $(\alpha^+(0), v_0)$  est un point critique.

**Définition 12** On dit que  $v_0 \in \mathbb{R}$  est un point attractif rétrograde en  $t_0 \in ]0, T]$  du problème (3.27) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

.  $\alpha^-(t_0) \in \beta(v_0)$ ,

. Il existe une branche strictement croissante  $[v_1, v_2], [\alpha_1, \alpha_2]$  de  $\beta$  et  $\zeta > 0$  telle que :

$$v_0 \in [v_1, v_2], \alpha^-(t) \in [\alpha_1, \alpha_2], \forall t \in ]t_0 - \zeta, t_0].$$

On peut caractériser le comportement de la suite des solutions  $v_\varepsilon$  du problème (3.27) quand  $I_a(v^0)$  contient un point attractif de la manière suivante :

**Lemme 5** Pour  $\alpha \in BV(0, T)$  et  $\beta$  satisfaisant aux hypothèses 1 et 2, si  $I_a(v^0)$  contient un point attractif  $v_0$ , pour toute suite  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  strictement positive et toute suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  positive telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\varepsilon_n}(t_n) = v_0,$$

pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\zeta_2 > 0$  tel que pour tout  $\zeta_1 \in ]0, \zeta_2]$  il existe  $N > 0$  avec :

$$v_{\varepsilon_n}(t) \in [v_0 - \delta, v_0 + \delta], \forall t \in [\zeta_1, \zeta_2], \forall n \geq N,$$

$$(v_{\varepsilon_n}(t) - v_0) \mathbf{Sgn}(v_0 - v^0) < \delta, \forall t \in [0, \zeta_2], \forall n \geq N.$$

**Preuve:** Supposons  $v_0 > v^0$  (le cas  $v_0 = v^0$  est une application directe de la proposition 7 et le cas  $v_0 < v^0$  se traite de manière symétrique). Il existe une branche strictement croissante  $[v_1, v_2], [\alpha_1, \alpha_2]$  de  $\beta$  et  $\zeta > 0$  telle que :

$$v_0 \in [v_1, v_2], \quad \alpha^+(t) \in [\alpha_1, \alpha_2], \quad \forall t \in [0, \zeta].$$

Alors il existe  $\delta_0 > 0$  tel que :

$$\alpha^+(0) > \beta(v), \quad \forall v \in [v_0 - \delta, v_0[.$$

En effet dans le cas contraire, le point  $(\alpha^+(0), v_0)$  est un point critique minimum attractif avec  $\alpha^+(0) = \alpha_1$  et  $v_0 = v_1$ . Ceci est impossible car alors il existe un  $v \in ]v^0, v_0[$  tel que  $\beta(v) > \alpha^+(0)$  ce qui contredit le lemme 4.

Considérons  $\delta > 0$ , on pose :

$$\tilde{v}_1 = v_0 - \min(\delta_0, \delta), \quad \tilde{\alpha}_1 \in \beta(\tilde{v}_1),$$

$$\tilde{v}_2 = v_0 + \min(v_2 - v_0, \delta), \quad \tilde{\alpha}_2 = \max \beta(\tilde{v}_2).$$

Par propriété de  $\alpha^+(0)$ , il existe  $\zeta_2 > 0$  tel que :

$$\alpha^+(t) \in [\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2], \quad \forall t \in [0, \zeta_2].$$

Maintenant si on prend  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  strictement positive et  $(t_n)_{n \geq 0}$  positive telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\varepsilon_n}(t_n) = v,$$

alors pour tout  $\zeta_1 \in ]0, \zeta_2]$ , il existe  $N > 0$  telle que :

$$t_n < \zeta_2, \quad \forall n \geq N,$$

$$v_{\varepsilon}(t_n) \geq \tilde{v}_1,$$

On pose  $\tilde{t}_n \in ]0, t_n]$  le plus petit temps  $t$  tel que  $v_{\varepsilon}(t) = v_0 - \delta$  et on peut appliquer la proposition 7 sur les intervalles  $[\tilde{v}_1, \tilde{v}_2]$  et  $[\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2]$  pour conclure :

$$v_{\varepsilon}(t) \in [\tilde{v}_1, \tilde{v}_2], \quad \forall t \in [\zeta_1, \zeta_2].$$

$$v_{\varepsilon}(t) \leq \tilde{v}_2, \quad \forall t \in [0, \zeta_2].$$

■

**Lemme 6** Pour  $\alpha \in BV(0, T)$  et  $\beta$  satisfaisant aux hypothèses 1 et 2, si  $I_l(v^0)$  contient un point attractif  $v_0$  alors pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\zeta_2 > 0$  tel que pour tout  $\zeta_1 \in ]0, \zeta_2]$  il existe  $\varepsilon_0 > 0$  avec :

$$v_{\varepsilon}(t) \in [v - \delta, v + \delta], \quad \forall t \in [\zeta_1, \zeta_2], \quad \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0],$$

$$(v_{\varepsilon}(t) - v_0) \text{Sgn}(v_0 - v^0) < \delta, \quad \forall t \in [0, \zeta_2], \quad \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0].$$

Ce lemme est une conséquence directe du lemme précédent.

**Proposition 12** *En posant  $I_a(v^0) = [i_{a1}, i_{a2}]$  et  $I_l(v^0) = [i_{l1}, i_{l2}]$ , on a les propriétés suivantes :*

- a -  $]i_{a1}, i_{a2}[$  ne contient pas de points attractifs,
- b - on a  $\alpha^+(0) \geq \max(\beta(i_{a1}), \beta(i_{l1}))$  et  $\alpha^+(0) \leq \min(\beta(i_{a2}), \beta(i_{l2}))$ ,
- c - si  $(\alpha^+(0), i_{a1})$  ou  $(\alpha^+(0), i_{l1})$  est un point critique minimum, alors il est attractif; si  $(\alpha^+(0), i_{a2})$  ou  $(\alpha^+(0), i_{l2})$  est un point critique maximum, alors il est attractif,
- d - une extrémité de  $I_a(v^0)$  et de  $I_l(v^0)$  est ou bien  $v^0$  ou bien un point attractif,

**Preuve :**

- a - Supposons qu'il existe  $v_0 \in [v^0, i_{a2}[$  qui soit un point attractif. L'application du lemme 5 pour  $\delta = \frac{i_{a2} - v_0}{2}$  implique que  $i_{a2}$  n'est pas un point d'adhérence, d'où la contradiction.
- b - Supposons que  $\alpha^+(0) > \beta(i_{a2})$  (les autres cas se traitent de la même manière). D'après le lemme 3, il existe  $\delta > 0$  et  $\zeta > 0$  tel que

$$\alpha^+(t) > \beta(v), \quad \forall v \in [i_{a2} - \delta, i_{a2} + \delta], \quad \forall t \in [0, \zeta].$$

On pose :

$$\eta = \min(\alpha^+(t) - \beta(v)), \quad \text{pour } v \in [i_{a2} - \delta, i_{a2} + \delta], \quad \text{et } t \in [0, \zeta].$$

Le point  $i_{a2}$  est un point d'adhérence, donc il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  strictement positive et une suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  positive telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\varepsilon_n}(t_n) = i_{a2}.$$

Pour  $\theta \in ]0, \zeta]$  il existe  $N \geq 0$  tel que pour tout  $n \geq N$  on ait :

$$v_{\varepsilon_n}(t_n) \in [i_{a2} - \delta, i_{a2} + \delta], \quad t_n \in [0, \frac{\theta}{2}], \quad \varepsilon_n \in ]0, \frac{\eta\theta}{\delta}].$$

Or pour  $v_{\varepsilon_n}(t) \in [i_{a2} - \delta, i_{a2} + \delta]$  et presque tout  $t \in [0, \zeta]$  on a :

$$\varepsilon \frac{d}{dt} v_{\varepsilon_n}(t) \in \alpha(t) - \beta(v_{\varepsilon_n}(t)) \geq \eta,$$

donc pour  $n \geq N$  fixé on a :

$$v_{\varepsilon_n}(\theta) \geq \min(i_{a2} - \delta + \frac{\eta}{\varepsilon_n}(\theta - t_n), i_{a2} + \delta).$$

donc :

$$v_{\varepsilon_n}(\theta) \geq i_{a2} + \delta,$$

par continuité de  $v_{\varepsilon_n}$  il existe un  $\tilde{t}_n \in [0, \theta]$  tel que  $v_{\varepsilon_n}(\tilde{t}_n) = i_{a2} + \delta$  ce qui implique que  $i_{a2} + \delta$  est un point d'adhérence. D'où la contradiction.

c - Supposons que  $(\alpha^+(0), i_{a2})$  est un point critique maximum non attractif (les autres cas se traitent de la même manière). Il existe  $\delta > 0$  tel que  $[i_{a2} - \delta, i_{a2}]$  soit une branche strictement croissante de  $\beta$  et  $[i_{a2}, i_{a2} + \delta]$  soit une branche strictement décroissante de  $\beta$ . Par propriété de la limite à droite  $\alpha^+(0)$ , il existe  $\zeta > 0$  tel que :

$$\alpha^+(t) > \beta(i_{a2} - \delta), \quad \forall t \in [0, \zeta].$$

Le fait que  $(\alpha^+(0), i_{a2})$  n'est pas attractif se traduit par :

$$\forall \theta \in ]0, \zeta], \exists 0 < t_\theta < \tilde{t}_\theta < \theta, \quad \alpha^+(t) > \beta(v), \quad \forall v \in [i_{a2} - \delta, i_{a2} + \delta], \quad \forall t \in [t_\theta, \tilde{t}_\theta].$$

Le point  $i_{a2}$  est un point d'adhérence, donc il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  strictement positive et une suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  positive telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\varepsilon_n}(t_n) = i_{a2}.$$

Pour  $\theta \in ]0, \zeta]$  fixé on pose :

$$\eta = \min(\alpha^+(t) - \beta(v)), \quad \text{pour } v \in [i_{a2} - \delta, i_{a2} + \delta], \quad \text{et } t \in [t_\theta, \tilde{t}_\theta].$$

Il existe  $N \geq 0$  tel que pour tout  $n \geq N$  on ait :

$$v_{\varepsilon_n}(t_n) \in [i_{a2} - \delta, i_{a2} + \delta], \quad t_n \in [0, t_\theta], \quad \varepsilon_n \in ]0, \frac{\eta(\tilde{t}_\theta - t_\theta)}{2\delta}].$$

On a :

$$v_{\varepsilon_n}(t) \geq i_{a2} - \delta, \quad \forall t \in [t_n, t_\theta],$$

et :

$$\frac{d}{dt} v_{\varepsilon_n}(t) \geq \frac{\eta}{\varepsilon_n}, \quad \text{pour presque tout } t \in [t_\theta, \tilde{t}_\theta], \quad \text{et tant que } v_{\varepsilon_n} \leq i_{a2} + \delta.$$

donc :

$$v_{\varepsilon_n}(\tilde{t}_\theta) \geq \min(i_{a2} + \delta, i_{a2} - \delta \frac{\eta}{\varepsilon_n}(\tilde{t}_\theta - t_\theta)),$$

soit :

$$v_{\varepsilon_n}(\tilde{t}_\theta) \geq i_{a2} + \delta.$$

par continuité de  $v_{\varepsilon_n}$  il existe un  $\tilde{t}_n \in [0, \tilde{t}_\theta]$  tel que  $v_{\varepsilon_n}(\tilde{t}_n) = i_{a2} + \delta$  ce qui implique que  $i_{a2} + \delta$  est un point d'adhérence. D'où la contradiction.

d - Supposons par exemple que  $i_{a2}$  ne soit ni égal à  $v^0$  ni un point attractif. Une conséquence de la propriété b et du lemme 4 est que  $\alpha^+(0) \in \beta(i_{a2})$ . Le point  $(i_{a2}, \alpha^+(0))$  ne peut pas être un point instable et si c'est un point critique, c'est nécessairement un point critique maximum qui est attractif d'après la propriété c. Si ce n'est pas un point critique, c'est un point stable donc automatiquement attractif.

Ceci permet d'expliciter  $I_a(v^0)$  et  $I_l(v^0)$  lorsque  $(\alpha^+(0), v^0)$  n'est pas un point instable de  $\beta$  :

- si  $(\alpha^+(0), v^0)$  est un point attractif alors  $I_a(v^0) = I_l(v^0) = \{v^0\}$ ,
- si  $\alpha^+(0) > \beta(v^0)$  ou bien si  $(\alpha^+(0), v^0)$  est un point critique maximum non attractif alors :

$$I_a(v^0) = I_l(v^0) = [v^0, \min\{v > v^0, v \text{ point attractif}\}],$$

- si  $\alpha^+(0) < \beta(v^0)$  ou bien si  $(\alpha^+(0), v^0)$  est un point critique minimum non attractif alors :

$$I_a(v^0) = I_l(v^0) = [\max\{v < v^0, v \text{ point attractif}\}, v^0],$$

En particulier, lorsque  $(\alpha^+(0), v^0)$  n'est pas un point instable de  $\beta$ ,  $I_l(v^0)$  contient un unique point attractif.

Arrêtons nous sur le cas  $(\alpha^+(0), v^0)$  point instable de  $\beta$ . Si on se rapporte au dessin de la figure 3.6, cela correspond à une donnée initiale égale à une racine instable, par exemple  $\phi_2$ , qui délimite deux bassins d'attraction (voir figure 3.6). Si on se place dans le cas autonome,

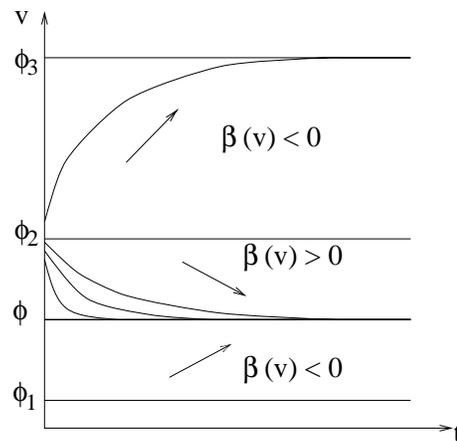


FIG. 3.8 – Comportement de la couche limite,  $\phi_2$  racine instable.

la seule solution est alors  $v \equiv \phi_2$ , mais c'est une solution instable. Dans le cas non autonome, le comportement de la suite de solutions  $v_\varepsilon$  va dépendre du comportement de  $\alpha(t)$  dans un voisinage de  $t = 0$ . S'il existe un petit intervalle de la forme  $]0, \zeta]$  sur lequel :

- $\alpha$  est constant, alors on est dans le cas autonome. Sur cet intervalle la solution pour tout  $\varepsilon$  est la solution constante égale à  $v^0$ ,
- $\alpha$  est croissant, alors  $I_a(v^0) = I_l(v^0) = [v^0, \min\{v > v^0, v \text{ point attractif}\}]$ , comme dans le cas  $\alpha^+(0) < \beta(v^0)$ ,

- $\alpha$  est décroissant, alors  $I_a(v^0) = I_l(v^0) = [\max\{v < v^0, v \text{ point attractif}\}, v^0]$ , comme dans le cas  $\alpha^+(0) > \beta(v^0)$ .

Par contre, si  $\alpha$  ne vérifie aucun de ces trois cas, par exemple pour

$$\alpha(t) = \alpha(0) + t^3 \sin\left(\frac{1}{t}\right),$$

on a  $I_a(v^0) = [\max\{v < v^0, v \text{ point attractif}\}, \min\{v > v^0, v \text{ point attractif}\}]$  et  $I_l(v^0) = \{v^0\}$ , donc  $I_a(v^0)$  contient deux points attractifs et  $I_l(v^0)$  aucun. Dans ce cas la suite  $v_\varepsilon$  ne converge pas. Pour cette raison c'est un cas que l'on évitera en imposant à  $(\alpha^+(0), v^0)$  de ne pas être un point instable. D'après ce qui précède, on pourrait affaiblir un peu cette condition.

### Bassin d'attraction d'un point attractif

**Définition 13** Soit  $v_0$  un point attractif de la couche limite en  $t = 0$  du problème (3.27). On appelle bassin d'attraction de  $v_0$  l'intervalle des valeurs de la donnée initiale  $v^0$  telles que  $v_0 \in I_l(v^0)$ . On note  $I_b(v_0)$  cet intervalle.

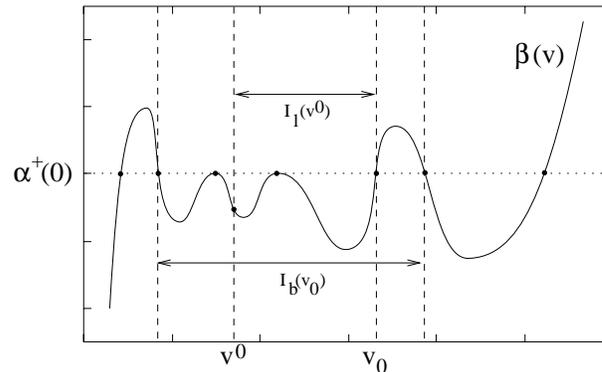


FIG. 3.9 – Exemple de détermination de la valeur  $v_0$  de l'intervalle des points limites et du bassin d'attraction pour  $\alpha$  strictement croissante.

On peut donner l'expression des bassins d'attraction qui est déduite de l'expression de  $I_l(v^0)$ . l'intérieur de  $I_b(v_0)$  est  $]v_a, v_b[$  avec :

$$v_a = \begin{cases} v_0 & \text{si } (\alpha^+(0), v_0) \text{ est un point critique minimum} \\ \max\{\{v < v_0, (\alpha^+(0), v) \text{ point instable ou critique maximum attractif}\} \cup \{-\infty\}\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$v_b = \begin{cases} v_0 & \text{si } (\alpha^+(0), v_0) \text{ est un point critique maximum} \\ \min\{\{v > v_0, (\alpha^+(0), v) \text{ point instable ou critique minimum attractif}\} \cup \{+\infty\}\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

Bien sûr pour  $v^0 \in I_b(v_0)$ , on a  $I_l(v^0) \subset I_b(v_0)$ , plus précisément  $I_l(v^0)$  est l'intervalle d'extrémités  $v^0$  et  $v_0$ . Les figure 3.9 et 3.10 présente un exemple de détermination des intervalles  $I_b(v_0)$  et  $I_l(v^0)$ , et de leur sensibilité au comportement de  $\alpha$  au voisinage de  $t = 0$ .

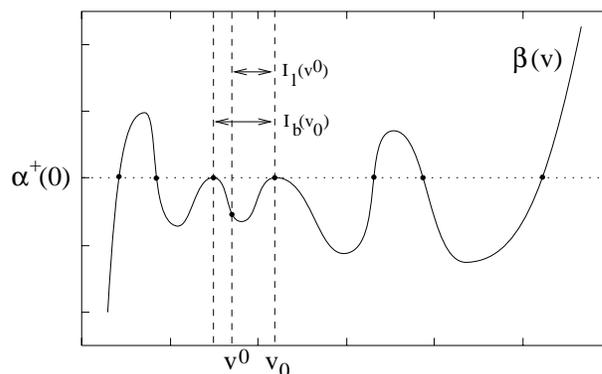


FIG. 3.10 – Exemple de détermination de la valeur  $v_0$  de l'intervalle des points limites et du bassin d'attraction pour  $\alpha$  strictement décroissante)

### Comportement de la suite de solutions au voisinage de $t = 0$

On montre dans ce paragraphe que lorsque  $(\alpha^+(0), v^0)$  n'est pas un point instable de  $\beta$ , la suite  $v_\varepsilon$  converge simplement dans un voisinage de  $t = 0$ . En effet, dans ce cas,  $I(v^0)$  contient un unique point attractif  $v_0$ . D'après la définition d'un point attractif il existe une branche strictement croissante  $[v_1, v_2], [\alpha_1, \alpha_2]$  de  $\beta$  et  $\zeta > 0$  telle que :

$$v_0 \in [v_1, v_2], \alpha^+(t) \in [\alpha_1, \alpha_2], \forall t \in [0, \zeta].$$

On se restreint à l'étude sur  $[0, \zeta]$ . Étudions tout d'abord le cas où  $\beta$  est strictement croissante. On peut énoncer les résultats suivants :

**Proposition 13** Pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha \in BV(0, T)$  et  $\beta$  strictement croissante respectant l'hypothèse 1, on a les propriétés suivantes :

1. Si  $v_1$  et  $v_2$  sont solutions du problème (3.27) pour des données initiales respectives  $v_1^0$  et  $v_2^0$  dans  $[v_1, v_2]$ , alors la différence  $|v_1(t) - v_2(t)|$  est décroissante sur l'intervalle  $[0, T]$ ,
2. Soit  $\alpha_i$  une suite de fonctions de  $BV(0, T)$  qui converge uniformément vers une fonction  $\alpha$  de  $BV(0, T)$ , alors la suite de fonctions  $v_{\varepsilon_i}$  des solutions du problème (3.27) pour les données  $\alpha_i$  converge uniformément vers la fonction  $v_\varepsilon$  solution du problème (3.27) pour la donnée  $\alpha$ . De plus cette convergence est uniforme en  $\varepsilon$ .

#### Preuve :

Propriété 1 : En effet dans ce cas  $\beta$  est un opérateur maximal monotone. On conclut par une application directe du lemme de Gronwall.

Propriété 2 : L'application  $\beta$  admet un inverse continu univoque et monotone croissant au sens

large  $\beta^{-1}$ . On pose :

$$\begin{aligned} M &= \sup_{\varepsilon > 0, i \geq 0} \|v_{\varepsilon i}\|_{L^\infty(0, T)}, \\ A &= \sup_{i \geq 0} \|\alpha_i\|_{L^\infty(0, T)}. \end{aligned}$$

On a  $A < +\infty$  car les  $\alpha_i$  convergent uniformément, et  $M < +\infty$  car  $M$  s'exprime directement en fonction de  $A$  (voir preuve de la proposition 8). Comme  $\beta^{-1}$  est continu sur  $[-M, +M]$ , il y est uniformément continu et on peut écrire :

$$\forall \gamma > 0, \exists \eta_\gamma > 0 ; a_1, a_2 \in [-A, +A], |a_1 - a_2| < \eta_\gamma \Rightarrow |\beta^{-1}(a_1) - \beta^{-1}(a_2)| < \gamma.$$

En utilisant la monotonie de  $\beta^{-1}$  on peut récrire cela :

$$\forall \gamma > 0, \exists \eta_\gamma > 0 ; a_1, a_2 \in [-A, +A], a_2 - a_1 \leq \eta_\gamma \Rightarrow \beta^{-1}(a_2) - \beta^{-1}(a_1) \leq \gamma.$$

En posant  $w_1 = \beta^{-1}(a_1)$  et  $w_2 = \beta^{-1}(a_2)$ , on obtient :

$$\forall \gamma > 0, \exists \eta_\gamma > 0 ; w_1, w_2 \in [-M, +M], \min(\beta(w_2) - \beta(w_1)) \leq \eta_\gamma \Rightarrow w_2 - w_1 \leq \gamma,$$

soit :

$$\forall \gamma > 0, \exists \eta_\gamma > 0 ; w_1, w_2 \in [-M, +M], w_2 - w_1 > \gamma \Rightarrow \beta(w_2) - \beta(w_1) > \eta_\gamma. \quad (3.29)$$

Pour  $\eta > 0$  donné on pose :

$$\delta(\eta) = \inf \{ \gamma > 0 ; \text{l'affirmation 3.29 est vérifiée pour } \eta_\gamma = \eta \},$$

Grâce à 3.29 on a  $\delta(\eta)$  tend vers zéro quand  $\eta$  tend vers zéro. On montre que l'on a la propriété suivante, pour clore la démonstration :

$$\|v_{\varepsilon i} - v_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T)} \leq \delta(\|\alpha_i - \alpha\|_{L^\infty(0, T)}).$$

En effet, admettons par l'absurde qu'il existe  $t_1 \in [0, T]$  tel que :

$$v_{\varepsilon i}(t_1) > v_\varepsilon(t_1) + \delta(\|\alpha_i - \alpha\|_{L^\infty(0, T)}),$$

par continuité de  $v_{\varepsilon i}$  et  $v_\varepsilon$ , il existe alors  $t_0 \in ]0, t_1[$  tel que :

$$v_{\varepsilon i}(t_0) = v_\varepsilon(t_0) + \delta(\|\alpha_i - \alpha\|_{L^\infty(0, T)}),$$

et

$$v_{\varepsilon i}(t) > v_\varepsilon(t) + \delta(\|\alpha_i - \alpha\|_{L^\infty(0, T)}), \quad \text{pour } t \in ]t_0, t_1].$$

Donc on a aussi :

$$\varepsilon \frac{d}{dt} v_{\varepsilon i} - \varepsilon \frac{d}{dt} v_\varepsilon \in \alpha_i(t) - \alpha(t) - \beta(v_{\varepsilon i}) + \beta(v_\varepsilon), \quad \text{presque partout dans } ]t_0, t_1],$$

donc

$$\varepsilon \frac{d}{dt} v_{\varepsilon i} - \varepsilon \frac{d}{dt} v_{\varepsilon} < 0 \text{ presque partout dans } ]t_0, t_1],$$

D'où la contradiction. On montre de même que :

$$v_{\varepsilon i}(t) \geq v_{\varepsilon}(t) - \delta(\|\alpha_i - \alpha\|_{L^\infty(0,T)}), \quad \forall t \in [0, T],$$

ce qui complète la preuve. ■

On peut maintenant énoncer le résultat de convergence suivant :

**Proposition 14** Pour  $\alpha \in BV(0, T)$  et  $\beta$  strictement croissante respectant l'hypothèse 1, la suite  $v_{\varepsilon}$  du problème (3.27) converge simplement vers une fonction  $v_0$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. De plus  $v_0$  est réglée, continue à gauche et vérifie :

$$\begin{aligned} v_0^+(t) & \text{ point attractif pour tout } t \in [0, T[, \\ v_0(t) & \text{ point attractif rétrograde pour tout } t \in ]0, T]. \end{aligned}$$

On commence par montrer le résultat intermédiaire suivant :

**Lemme 7** L'énoncé de la proposition 14 est valide pour  $\alpha$  fonction en escalier <sup>1</sup>

**Preuve du lemme :**

Il suffit de montrer ce résultat pour une donnée  $\alpha$  constante sur deux intervalles ; la preuve se généralise ensuite de manière évidente. Prenons donc  $\alpha(t) = a_0$  pour  $t \in [0, t_0)$  et  $\alpha(t) = a_1$  pour  $t \in (t_0, T]$ .

Le point  $(\alpha^+(0), v^0)$  ne pouvant pas être un point instable,  $\mathbb{I}(v^0)$  contient un unique point attractif  $v_0$ . D'après le lemme 6, pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\zeta_2 > 0$  tel que pour tout  $\zeta_1 \in ]0, \zeta_2]$  il existe  $\varepsilon_0 > 0$  avec :

$$v_{\varepsilon}(t) \in [v_0 - \delta, v_0 + \delta], \quad \forall t \in [\zeta_1, \zeta_2], \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0].$$

D'après la propriété 1 de la proposition 13 la différence  $|v_{\varepsilon}(t) - v_0|$  est décroissante sur  $[0, t_0]$ , donc :

$$v_{\varepsilon}(t) \in [v_0 - \delta, v_0 + \delta], \quad \forall t \in [\zeta_1, t_0],$$

et donc la suite  $v_{\varepsilon}$  converge uniformément vers la valeur  $v_0$  sur  $[\zeta_1, a]$ , quelque soit  $\zeta_1 \in ]0, t_0[$ . Sur l'intervalle  $[a, T]$  on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d}{dt} \tilde{v}_{\varepsilon}(t) \in \alpha(t) - \beta(\tilde{v}_{\varepsilon}(t)), \text{ presque pour tout } t \in [t_0, T], \\ \tilde{v}_{\varepsilon}(t_0) = v_0. \end{cases}$$

---

1. On appelle fonction en escalier une fonction admettant un nombre fini d'intervalles où elle est constante.

De la même manière que sur le premier intervalle, la suite  $\tilde{v}_\varepsilon$  converge uniformément sur tout intervalle de la forme  $[t_0 + \zeta_1, T]$  vers une valeur constante  $\tilde{v}_0$ . De plus en  $t = t_0$ , la suite  $v_\varepsilon$  converge vers la valeur  $v_0$ . D'après la propriété (1) de la proposition 13 cela implique que :

$$|\tilde{v}_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)| < |v_0 - v_\varepsilon(t_0)| \quad \text{pour } t \in [t_0, T],$$

ce qui assure la convergence uniforme de la suite  $v_\varepsilon$  sur tout intervalle de la forme  $[t_0 + \zeta_1, T]$  vers la valeur constante  $\tilde{v}_0$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Les propriétés supplémentaires sur  $v_0$  sont vérifiées de manière évidente. ■

#### Preuve de la proposition 14 :

La donnée  $\alpha$  étant à variation bornée on peut l'approcher uniformément par une suite de fonctions  $\alpha_i$  en escalier. Soit  $v_{\varepsilon_i}$  les solutions du problème (3.27) pour les données  $\alpha_i$  et  $v_\varepsilon$  la solution du problème (3.27) pour la donnée  $\alpha$ . D'après le lemme 7 il existe des fonctions  $v_{0i}$  telles que pour chaque  $i$  la suite  $v_{\varepsilon_i}$  converge simplement vers  $v_{0i}$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0, avec  $\alpha_i^-(t) \in \beta(v_{0i}(t))$  sur  $]0, T]$ . La propriété (2) de la proposition 13 nous assure que  $v_{\varepsilon_i}$  converge uniformément sur  $[0, T]$  vers  $v_\varepsilon$  quand  $i$  tend vers  $+\infty$  et ceci uniformément en  $\varepsilon$ . Donc pour  $t \in ]0, T]$  on a :

$$\forall \delta > 0, \exists N > 0, \exists \varepsilon(N) > 0; \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon(N) \Rightarrow \begin{cases} |v_{\varepsilon_1 N}(t) - v_{\varepsilon_2 N}(t)| < \delta/3, \\ |v_{\varepsilon_2 N}(t) - v_{\varepsilon_2}(t)| < \delta/3, \\ |v_{\varepsilon_1 N}(t) - v_{\varepsilon_1}(t)| < \delta/3, \end{cases}$$

donc :

$$\forall \delta > 0, \exists N > 0, \exists \varepsilon(N) > 0; \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon(N) \Rightarrow |v_{\varepsilon_1}(t) - v_{\varepsilon_2}(t)| < \delta.$$

La suite  $v_\varepsilon(t)$  est donc une suite de Cauchy quand  $\varepsilon$  tend vers 0; elle converge donc simplement vers une fonction  $v_0(t)$ . De plus  $v_0$  est la limite uniforme des fonction  $v_{0i}$  car des différentes convergences on peut écrire :

$$\forall \delta > 0, \exists N > 0; \forall i \geq N, \forall t \in [0, T], \exists \varepsilon(i, t) > 0, \varepsilon < \varepsilon(i, t) \Rightarrow \begin{cases} |v_{\varepsilon_i}(t) - v_{0i}(t)| < \delta/3, \\ |v_\varepsilon(t) - v_0(t)| < \delta/3, \\ |v_{\varepsilon_i}(t) - v_\varepsilon(t)| < \delta/3, \end{cases}$$

donc :

$$\forall \delta > 0, \exists N > 0; \forall i \geq N, \forall t \in [0, T], |v_0(t) - v_{0i}(t)| < \delta.$$

Pour la continuité à gauche de  $v_0$ , on peut écrire :

$$v_0(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} v_{0i}(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \beta^{-1}(\alpha_i^-(t)) = \beta^{-1}(\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i^-(t)).$$

Mais du fait de la convergence uniforme des  $\alpha_i$  vers  $\alpha$  on a :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i^-(t) = \alpha^-(t),$$

et  $v_0(t)$  est bien un point attractif rétrograde. De même pour la limite à droite, on a :

$$v_0^+(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} v_{0i}^+(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \beta^{-1}(\alpha_i^+(t)) = \beta^{-1}(\alpha^+(t)).$$

et  $v_0^+(t)$  est un point attractif. ■

On peut maintenant décrire le comportement de la suite  $v_\varepsilon$  au voisinage de  $t = 0$  :

**Proposition 15** Pour  $\alpha \in BV(0, T)$  et  $\beta$  respectant les hypothèses 1 et 2, le point  $(\alpha^+(0), v^0)$  n'étant pas un point instable de  $\beta$ , il existe une branche strictement croissante  $[v_1, v_2], [\alpha_1, \alpha_2]$  de  $\beta$  et  $\zeta > 0$  tels que la suite  $v_\varepsilon$  du problème (3.27) converge simplement vers une fonction  $v_0$  sur l'intervalle  $[0, \zeta]$ . De plus  $v_0$  est réglée, continue à gauche et vérifie :

$$\begin{aligned} v_0^+(t) & \text{ point attractif pour tout } t \in [0, \zeta[, \\ v_0(t) & \text{ point attractif rétrograde pour tout } t \in ]0, \zeta]. \end{aligned}$$

**Preuve :**

Le point  $(\alpha^+(0), v^0)$  n'étant pas instable  $I_l(v^0)$  contient un unique point attractif  $v_{00}$ . D'après la définition d'un point attractif, il existe une branche strictement croissante  $[v_1, v_2], [\alpha_1, \alpha_2]$  de  $\beta$  et  $\zeta > 0$  tels que :

$$v_{00} \in [v_1, v_2], \alpha^+(t) \in [\alpha_1, \alpha_2], \forall t \in [0, \zeta].$$

Sur l'intervalle  $[0, \zeta]$  on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d}{dt} \tilde{v}_\varepsilon(t) \in \alpha(t) - \beta(\tilde{v}_\varepsilon(t)), \text{ presque pour tout } t \in [0, \zeta], \\ \tilde{v}_\varepsilon(t_0) = v_{00}. \end{cases}$$

On peut appliquer la proposition 14 à ce problème car on sait par la proposition 7 que  $\tilde{v}_\varepsilon(t) \in [v_1, v_2]$  pour tout  $t \in [0, \zeta]$  et tout  $\varepsilon > 0$ . On en déduit que la suite  $\tilde{v}_\varepsilon$  converge simplement vers une fonction  $\tilde{v}_0$  sur l'intervalle  $[0, \zeta]$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. de plus  $v_0$  a les propriétés recherchées. Il reste à montrer que la suite  $v_\varepsilon$  converge simplement vers  $v_0$  aussi.

Supposons  $v_{00} > v^0$  ( quand  $v_{00} = v^0$  on conclut en appliquant directement la proposition 14 et quand  $v_{00} < v^0$  on fait un raisonnement symétrique). La branche strictement croissante  $[v_1, v_2], [\alpha_1, \alpha_2]$  est incluse dans une branche strictement croissante  $[v_i^*, v_{i+1}^*], [\alpha_i^*, \alpha_{i+1}^*]$  de  $\beta$  avec  $(\alpha_i^*, v_i^*)$  point critique minimum. On a nécessairement  $v_{00} > v_i^*$  car dans le cas contraire  $I_l(v^0) = [v^0, v_i^*]$  avec un  $v_1 \in ]v^0, v_i^*]$  tel que  $\beta(v) > \alpha^+(0)$  ce qui est impossible d'après le lemme 4. On applique le lemme 6, pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\zeta_2 > 0$  tel que pour tout  $\zeta_1 \in ]0, \zeta_2]$  il existe  $\varepsilon_0 > 0$  avec :

$$v_\varepsilon(t) \in [v_{00} - \delta, v_{00} + \delta], \forall t \in [\zeta_1, \zeta_2], \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0].$$

Pour  $\delta < v_{00} - v_i^*$  on en déduit par l'application de la propriété 1 de la proposition 13 que  $|v_\varepsilon(t) - \tilde{v}_\varepsilon(t)|$  est décroissant sur l'intervalle  $[\zeta_1, \zeta]$ . Donc  $v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon(t)$  converge uniformément vers 0 sur tout intervalle de la forme  $[\zeta_1, \zeta]$  avec  $\zeta_1 > 0$ .



### 3.4.5 Résultat général de convergence

On est maintenant en mesure de montrer un résultat de convergence pour une application  $\beta$  quelconque, respectant les hypothèses 1 et 2.

**Théorème 6** Pour  $\alpha \in BV(0, T)$ ,  $\beta$  respectant les hypothèses 1 et 2, le point  $(\alpha^+(0), v^0)$  n'étant pas un point instable de  $\beta$ , la suite des solutions  $v_\varepsilon$  du problème (3.27) converge simplement vers une fonction  $v_0$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. De plus  $v_0$  est réglée continue à gauche et vérifie :

$$\begin{aligned} v_0^+(t) &\text{ point attractif pour tout } t \in [0, T[, \\ v_0(t) &\text{ point attractif rétrograde pour tout } t \in ]0, T]. \end{aligned}$$

**Preuve :**

On sait que c'est vrai sur un voisinage de  $t = 0$  d'après la proposition 15. Si on reprend la preuve de cette proposition, on sait qu'il existe une branche strictement croissante  $[v_i^*, v_{i+1}^*]$ ,  $[\alpha_i^*, \alpha_{i+1}^*]$  de  $\beta$  avec  $\alpha^+(0) \in [\alpha_i^*, \alpha_{i+1}^*]$  telle que si on pose :

$$t_0 = \sup\{t \leq T; \alpha^+(\tau) \in [\alpha_i^*, \alpha_{i+1}^*] \forall \tau \in [0, t]\},$$

alors il y a convergence de la suite  $v_\varepsilon$  sur l'intervalle  $[0, t_0]$  vers une fonction  $v_0$  ayant les propriétés recherchées.

A ce niveau on considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d}{dt} \tilde{v}_\varepsilon(t) \in \alpha(t) - \beta(\tilde{v}_\varepsilon(t)), \text{ presque pour tout } t \in [t_0, T], \\ \tilde{v}_\varepsilon(t_0) = v_0(t_0). \end{cases} \quad (3.30)$$

On peut appliquer la proposition 15 à ce problème et de la même manière il existe une branche strictement croissante  $[v_j^*, v_{j+1}^*]$ ,  $[\alpha_j^*, \alpha_{j+1}^*]$  de  $\beta$  différente de la précédente, avec  $\alpha^+(t_0) \in [\alpha_j^*, \alpha_{j+1}^*]$  telle que si on pose :

$$t_1 = \sup\{t \leq T; \alpha^+(\tau) \in [\alpha_j^*, \alpha_{j+1}^*], \forall \tau \in [t_0, t]\},$$

alors il y a convergence de la suite  $\tilde{v}_\varepsilon$  sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$  vers une fonction  $\tilde{v}_0$  ayant les propriétés recherchées.

On note  $\tilde{\mathbf{I}}_l(v_0(t_0))$  et  $\tilde{\mathbf{I}}_b(\tilde{v}_0^+(t_0))$  respectivement l'intervalle des points limites et le bassin d'attraction de la couche limite du problème (3.30).

Comme  $v_0(t_0) \in [v_i^*, v_{i+1}^*]$  et  $\tilde{v}_0^+(t_0) \in [v_j^*, v_{j+1}^*]$  on a nécessairement  $v_0(t_0) \neq \tilde{v}_0^+(t_0)$ . Donc  $v_0(t_0)$  n'est ni un point attractif, ni un point instable. Comme  $v_0(t_0) \in \tilde{\mathbf{I}}_b(\tilde{v}_0^+(t_0))$ , il est dans

l'intérieur de  $\tilde{\mathbf{I}}_b(\tilde{v}_0^+(t_0))$  car une extrémité de  $\tilde{\mathbf{I}}_b(\tilde{v}_0^+(t_0))$  est ou un point instable ou un point critique attractif. Donc pour  $\delta > 0$  suffisamment petit on a

$$[v_0(t_0) - \delta, v_0(t_0) + \delta] \subset \tilde{\mathbf{I}}_b(\tilde{v}_0^+(t_0)).$$

Comme  $v_\varepsilon(t_0)$  tend vers  $v_0(t_0)$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $v_\varepsilon(t_0) \in [v_0(t_0) - \delta, v_0(t_0) + \delta]$  pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ .

Soit  $v_\varepsilon^a$  la solution du problème (3.30) mais pour la donnée initiale  $v_\varepsilon^a(t_0) = v_0(t_0) - \delta$  et  $v_\varepsilon^b$  la solution du problème (3.30) mais pour la donnée initiale  $v_\varepsilon^b(t_0) = v_0(t_0) + \delta$ . Sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$  on a  $v_\varepsilon(t) \in [v_\varepsilon^a(t), v_\varepsilon^b(t)]$ . Or d'après la proposition 15 les deux suites  $v_\varepsilon^a$  et  $v_\varepsilon^b$  convergent toute deux vers  $\tilde{v}_0$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, donc  $v_\varepsilon$  aussi.

Le raisonnement que l'on vient de faire s'étend à un nombre fini de changement de branche. Il suffit donc pour conclure de montrer qu'il y a nécessairement un nombre fini de changement de branche dans l'intervalle  $[0, T]$ .

Admettons que le point  $(\alpha^+(0), v^0)$  est sur une branche croissante  $[\alpha_{i_0}^*, \alpha_{i_0+1}^*], [v_{i_0}^*, v_{i_0+1}^*]$ . La première transition entre branche croissante ne peut avoir lieu en  $t = t_1$  que si  $\alpha^+(t_1) \geq \alpha_{i_0+1}^*$  ou si  $\alpha^+(t_1) \leq \alpha_{i_0}^*$  et vers une branche croissante  $[\alpha_{i_1}^*, \alpha_{i_1+1}^*], [v_{i_1}^*, v_{i_1+1}^*]$ . De même la deuxième transition ne peut avoir lieu en  $t = t_2$  que si  $\alpha^+(t_2) \geq \alpha_{i_1+1}^*$  ou si  $\alpha^+(t_2) \leq \alpha_{i_1}^*$  et vers une branche croissante  $[\alpha_{i_2}^*, \alpha_{i_2+1}^*], [v_{i_2}^*, v_{i_2+1}^*]$ . On peut en conclure que :

$$|\alpha^+(0) - \alpha^+(t_1)| + |\alpha^+(t_1) - \alpha^+(t_2)| > \min_{1 \leq i \leq 2N-1} |\alpha_i^* - \alpha_{i+1}^*|,$$

En généralisant ce raisonnement, si  $t_i$  pour  $i = 1..M$  sont les temps de transitions entre branches croissantes de  $\beta$  alors :

$$\sum_{i=1}^{M-1} |\alpha^+(t_i) - \alpha^+(t_{i+1})| \geq \frac{M}{2} \min_{1 \leq i \leq 2N-1} |\alpha_i^* - \alpha_{i+1}^*|,$$

mais si on note  $V_0^T \alpha^+$  la variation totale de  $\alpha^+$  qui est finie car  $\alpha \in BV(0, T)$ , on a :

$$\sum_{i=1}^{M-1} |\alpha^+(t_i) - \alpha^+(t_{i+1})| \leq V_0^T \alpha^+,$$

et donc

$$M \leq 2 * \frac{V_0^T \alpha^+}{\min_{1 \leq i \leq 2N-1} |\alpha_i^* - \alpha_{i+1}^*|}.$$

On a bien montré que le nombre de transitions est nécessairement fini. ■

### 3.4.6 Relation avec le critère de retard maximal

Les expressions (3.19) et (3.20) du critère de retard maximal, n'ont de sens que pour des données suffisamment régulières. En supposant toujours que l'application  $\beta$  satisfait aux hypothèses 1 et 2, on va faire la comparaison entre la solution limite  $v_0(t)$  des solutions du problème

perturbé (3.27), et la solution sélectionnée par le critère de retard maximal, sur quelques cas qui montrent bien le comportement général.

a) Branche strictement croissante de  $\beta$ , donnée  $\alpha$  continue.

Supposons que la donnée  $\alpha$  soit continue et qu'il existe une branche strictement croissante  $[v_1, v_2], [\alpha_1, \alpha_2]$  de  $\beta$  telle que  $v^0 \in [v_1, v_2]$  et  $\alpha(t) \in [\alpha_1, \alpha_2]$  sur  $[0, T]$ . La proposition 14 implique que la solution limite  $v_0(t)$  des solutions du problème perturbé à la propriété suivante :

$$v_0(t) \in [v_1, v_2].$$

De plus l'application  $\beta$  admet un inverse continu sur la branche  $[v_1, v_2], [\alpha_1, \alpha_2]$ . Ceci implique que  $v_0$  est continue. Donc dans ce cas, la solution limite  $v_0$  respecte le critère de retard maximal.

b) Branche strictement croissante de  $\beta$ , donnée  $\alpha$  discontinue.

On se place toujours sous les hypothèses du paragraphe précédent, mais avec une donnée  $\alpha$  possédant un point de discontinuité en un temps  $t = t_1$ , c'est à dire  $\alpha^-(t_1) \neq \alpha^+(t_1)$ . La solution limite  $v_0$ , tout en satisfaisant toujours :

$$v_0(t) \in [v_1, v_2].$$

peut alors admettre un saut en  $t = t_1$ . Si c'est le cas, c'est à dire  $v_0^-(t_1) \neq v_0^+(t_1)$ , l'expression (3.19) du critère de retard maximal ne donne pas de renseignement sur le choix du saut à effectuer, et n'importe quelle valeur  $v_0^+(t_1) \in \beta^{-1}(\alpha^+(t_1))$  convient. Cette expression ne permet pas de sélectionner une solution unique. Quant à l'expression (3.20), elle impose que le saut sélectionné soit le plus petit possible en valeur absolue. Outre le fait que cela ne permet pas toujours de sélectionner une unique solution, car deux sauts possibles peuvent être de même longueur, c'est un choix qui peut être incompatible avec la solution limite  $v_0$ .

c) Point critique maximal de  $\beta$ , donnée  $\alpha$  continue croissante.

Supposons que la donnée  $\alpha$  soit continue strictement croissante, que la solution se trouve sur une branche strictement croissante de  $\beta$ , et que pour un temps  $t = t_1$  la donnée  $\alpha(t_1)$  atteigne un point critique maximal  $(v_1, \alpha(t_1))$  de  $\beta$ . A ce point, il n'existe pas de solution qui reste continue pour l'équation (3.26). Comme dans le cas précédent, l'expression (3.19) du critère de retard maximal nous indique qu'un saut doit être effectué, sans indiquer lequel. L'expression (3.20) indique que l'on doit choisir le saut de longueur minimale, et on peut faire la même remarque qu'au b).

La conclusion que l'on peut tirer de ces constatations, est que l'approche par perturbation singulière donne un critère de sélection des solutions de l'équation (3.26), qui est comparable au critère de retard maximal. Contrairement aux expressions (3.19) et (3.20), qui restent qualitatives, le critère par perturbation singulière permet toujours de dégager une unique solution. De plus comme l'illustre l'exemple des figures 3.3, 3.4 et 3.5, la solution du problème perturbé, pour un petit paramètre de perturbation, donne une approximation de la solution sélectionnée.

### 3.5 Analyse numérique

Nous présentons ici des schémas numériques qui permettent le calcul de la solution approchée sur toute la hauteur et à chaque pas de temps et qui sont basés sur un schéma de type Lax-Wendroff pour les équations des ondes ainsi que des schémas sur les inclusions différentielles présentés au chapitre précédent.

Nous établissons la stabilité de ces schémas dans tout les cas. La convergence est établie seulement pour la condition de frottement perturbée et une condition de contact est régularisée.

#### 3.5.1 Présentations de schémas numériques basés sur le schéma de Lax-Wendroff

Le schéma est basé sur une formulation du problème qui porte sur les variables  $\underline{u}_t = \partial_t \underline{u}$  et  $\underline{u}_z = \partial_z \underline{u}$ . La couche est discrétisée sur sa hauteur avec un pas constant  $\Delta z = \frac{H}{N_z}$  et avec un pas de temps constant  $\Delta t = \frac{T}{N_t}$ .

On note  $\underline{u}^{i,n} = \begin{pmatrix} u_x^{i,n} \\ u_y^{i,n} \\ u_z^{i,n} \end{pmatrix}$ ,  $\underline{u}_{,t}^{i,n} = \begin{pmatrix} u_{x,t}^{i,n} \\ u_{y,t}^{i,n} \\ u_{z,t}^{i,n} \end{pmatrix}$  et  $\underline{u}_{,z}^{i,n} = \begin{pmatrix} u_{x,z}^{i,n} \\ u_{y,z}^{i,n} \\ u_{z,z}^{i,n} \end{pmatrix}$  les valeurs approchées respectives du déplacement  $\underline{u}$  de  $\underline{u}_t$  et de  $\underline{u}_z$  à l'instant  $t^n = n\Delta t$  et en  $z^i = i\Delta z$ . Quand cela permet une écriture plus claire on utilisera aussi  $\underline{u}_T^{0,n} = \begin{pmatrix} u_x^{0,n} \\ u_y^{0,n} \end{pmatrix}$ ,  $\underline{u}_{T,t}^{0,n} = \begin{pmatrix} u_{x,t}^{0,n} \\ u_{y,t}^{0,n} \end{pmatrix}$ ,  $\underline{u}_{T,z}^{0,n} = \begin{pmatrix} u_{x,z}^{0,n} \\ u_{y,z}^{0,n} \end{pmatrix}$ .

On se base alors sur les relations suivantes sur les droites caractéristiques :

$$\underline{u}_{,t}(t + \Delta t, z) + \mathbf{C}\underline{u}_{,z}(t + \Delta t, z) = \begin{pmatrix} u_{x,t}(t, z + c_1\Delta t) \\ u_{y,t}(t, z + c_1\Delta t) \\ u_{z,t}(t, z + c_2\Delta t) \end{pmatrix} + \mathbf{C} \begin{pmatrix} u_{x,z}(t, z + c_1\Delta t) \\ u_{y,z}(t, z + c_1\Delta t) \\ u_{z,z}(t, z + c_2\Delta t) \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

$$\underline{u}_{,t}(t + \Delta t, z) - \mathbf{C}\underline{u}_{,z}(t + \Delta t, z) = \begin{pmatrix} u_{x,t}(t, z - c_1\Delta t) \\ u_{y,t}(t, z - c_1\Delta t) \\ u_{z,t}(t, z - c_2\Delta t) \end{pmatrix} - \mathbf{C} \begin{pmatrix} u_{x,z}(t, z - c_1\Delta t) \\ u_{y,z}(t, z - c_1\Delta t) \\ u_{z,z}(t, z - c_2\Delta t) \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Le schéma de Lax-Wendroff est construit à partir des approximations linéaires suivantes pour  $\Delta z \in [0, \Delta z]$ :

$$\underline{u}_t(t, z \pm \Delta z) \approx \left(1 - \frac{\Delta z}{\Delta z}\right) \underline{u}_t(t, z) + \frac{\Delta z}{\Delta z} \underline{u}_t(t, z \pm \Delta z), \quad (3.33)$$

$$\underline{u}_z(t, z \pm \Delta z) \approx \left(1 - \frac{\Delta z}{\Delta z}\right) \underline{u}_z(t, z) + \frac{\Delta z}{\Delta z} \underline{u}_z(t, z \pm \Delta z). \quad (3.34)$$

En posant  $\mathbf{D} = \frac{\Delta t}{\Delta z} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \frac{\Delta t}{\Delta z} & 0 & 0 \\ 0 & c_1 \frac{\Delta t}{\Delta z} & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \frac{\Delta t}{\Delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}$ , on écrit :

$$\underline{u}_t^{i,n+1} + \mathbf{C} \underline{u}_z^{i,n+1} = \underline{u}_t^{i,n} + \mathbf{C} \underline{u}_z^{i,n} + \mathbf{D}(\underline{u}_t^{i+1,n} - \underline{u}_t^{i,n}) + \mathbf{D}\mathbf{C}(\underline{u}_z^{i+1,n} - \underline{u}_z^{i,n}) \quad (3.35)$$

$$\underline{u}_t^{i,n+1} - \mathbf{C} \underline{u}_z^{i,n+1} = \underline{u}_t^{i,n} - \mathbf{C} \underline{u}_z^{i,n} + \mathbf{D}(\underline{u}_t^{i-1,n} - \underline{u}_t^{i,n}) - \mathbf{D}\mathbf{C}(\underline{u}_z^{i-1,n} - \underline{u}_z^{i,n}). \quad (3.36)$$

### A l'intérieur de la couche

Le schéma s'écrit à l'intérieur de la couche, pour  $1 \leq i \leq N_z - 1$ :

$$\underline{u}_t^{i,n+1} = \underline{u}_t^{i,n} + \frac{\mathbf{D}}{2}(\underline{u}_t^{i-1,n} - 2\underline{u}_t^{i,n} + \underline{u}_t^{i+1,n}) + \frac{\mathbf{D}\mathbf{C}}{2}(\underline{u}_z^{i+1,n} - \underline{u}_z^{i-1,n}), \quad (3.37)$$

$$\underline{u}_z^{i,n+1} = \underline{u}_z^{i,n} + \frac{\mathbf{D}}{2}(\underline{u}_z^{i-1,n} - 2\underline{u}_z^{i,n} + \underline{u}_z^{i+1,n}) + \frac{\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}}{2}(\underline{u}_t^{i+1,n} - \underline{u}_t^{i-1,n}). \quad (3.38)$$

Si on pose :

$$\begin{cases} \underline{b}_+^{i,n} = \underline{u}_t^{i,n} + \mathbf{C} \underline{u}_z^{i,n}, \\ \underline{b}_-^{i,n} = \underline{u}_t^{i,n} - \mathbf{C} \underline{u}_z^{i,n}, \end{cases} \quad (3.39)$$

Il s'écrit aussi :

$$\underline{b}_+^{i,n+1} = \underline{b}_+^{i,n} + \mathbf{D}(\underline{b}_+^{i+1,n} - \underline{b}_+^{i,n}), \quad 0 \leq i \leq N_z - 1, \quad (3.40)$$

$$\underline{b}_-^{i,n+1} = \underline{b}_-^{i,n} + \mathbf{D}(\underline{b}_-^{i-1,n} - \underline{b}_-^{i,n}), \quad 1 \leq i \leq N_z, \quad (3.41)$$

On utilisera souvent cette expression du schéma qui est plus facile à manipuler.

### Condition de Dirichlet sur le haut de la structure

La prise en compte de la condition de Dirichlet en  $z = H$  se fait en imposant  $\underline{u}_t^{N_z,n} = 0$  et en utilisant la relation (3.36) pour avoir l'expression de  $\underline{u}_z^{N_z,n+1}$  suivante :

$$\underline{u}_{,z}^{N_z,n+1} = \underline{u}_{,z}^{N_z,n} + \mathbf{D}(\underline{u}_{,z}^{N_z-1,n} - \underline{u}_{,z}^{N_z,n}) - \mathbf{DC}^{-1}\underline{u}_{,t}^{N_z-1,n}, \quad (3.42)$$

$$\underline{u}_{,t}^{N_z,n+1} = 0. \quad (3.43)$$

elle revient aussi à :

$$\underline{b}_{+}^{N_z,n+1} = -\underline{b}_{-}^{N_z,n+1}. \quad (3.44)$$

### **Condition de contact unilatéral**

La fonction  $\underline{b}_{+}(t, 0)$  est approchée par  $\underline{b}_{+}^{0,n}$  au temps  $t = n\Delta t$ . On notera  $b_{T+}^{0,n} = \begin{pmatrix} b_{x+}^{0,n} \\ b_{y+}^{0,n} \end{pmatrix}$  la partie tangentielle sur le bord de contact.

La condition de contact unilatéral est traduite par l'inclusion différentielle (voir (3.11)):

$$\frac{d}{dt}u_z(t, 0) \in b_{z+}(t, 0) + J_N(-u_z(t, 0)),$$

On propose deux schémas de résolution, le premier est le schéma d'Euler implicite :

$$u_z^{0,n+1} \in u_z^{0,n} + \Delta t b_{z+}^{0,n+1} + J_N(-u_z^{0,n+1}), \quad (3.45)$$

On va voir que ce schéma a des propriétés importantes. De plus il se résout explicitement :

$$u_z^{0,n+1} = (u_z^{0,n} + \Delta t b_{z+}^{0,n+1})_+, \quad (3.46)$$

On constate que ce schéma assure la positivité de  $u_z^{0,n}$ , ce qui ne serait pas le cas d'un schéma explicite. Maintenant il convient de prendre une valeur pour  $u_{z,t}^{0,n+1}$  telle que :

$$u_{z,t}^{0,n+1} \in b_{z+}^{0,n+1} + J_N(-u_z^{0,n+1}(t, 0)).$$

Pour la portion multivoque il y a un choix à faire, et on fait le choix suivant :

$$u_{z,t}^{0,n+1} = \begin{cases} b_{z+}^{0,n+1} & \text{si } u_z^{0,n+1} \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.47)$$

qui correspond au choix de l'élément de norme minimale. On peut vérifier que c'est un choix licite, c'est à dire que  $b_{z+}^{0,n+1} \leq 0$  lorsque  $u_z^{0,n+1} = 0$  pour faire le choix  $u_{z,t}^{0,n+1} = 0$ . On le voit

sur la formule (3.46), lorsque  $u_z^{0,n+1} = 0$  on a  $u_z^{0,n} + \Delta t b_{z+}^{0,n+1} \leq 0$  et comme  $u_z^{0,n} \geq 0$  on a bien  $b_{z+}^{0,n+1} \leq 0$ . La pression normale est donnée par :

$$S^{n+1} = -\frac{\lambda + 2G}{c_2}(b_{z+}^{0,n+1} - u_{z,t}^{0,n+1}). \quad (3.48)$$

et est aussi positive ou nulle. On a aussi la relation :

$$S^{n+1} u_z^{0,n+1} = 0,$$

comme dans le cas continu. Le schéma de Lax-Wendroff étant convergent d'ordre 2 lorsque la solution est régulière, on est tenté d'utiliser un schéma d'ordre 2 pour la résolution de l'inclusion différentielle. On donne le schéma suivant (schéma d'Adams-Moulton à deux points) qui a de bonnes propriétés :

$$u_z^{0,n+1} = u_z^{0,n} + \frac{\Delta t}{2}(\zeta_z^n + \zeta_z^{n+1}), \quad (3.49)$$

$$\zeta_z^{n+1} \in b_{z+}^{0,n+1} + J_N(-u_z^{0,n+1}). \quad (3.50)$$

La valeur de  $\zeta_z^0$  étant initialisée comme l'élément de norme minimal de  $b_{z+}^{0,0} + J_N(-u_z^{0,0})$ . Cette inclusion se résout aussi de façon explicite :

$$u_z^{0,n+1} = (u_z^{0,n} + \frac{\Delta t}{2}(\zeta_z^n + b_{z+}^{0,n+1}))_+, \quad (3.51)$$

$$\zeta_z^{n+1} = \frac{2}{\Delta t}(u_z^{0,n+1} - u_z^{0,n}) - \zeta_z^n. \quad (3.52)$$

On constate que le schéma assure aussi la positivité de  $u_z^{0,n+1}$ . Pour le choix de  $u_{z,t}^{0,n+1} \in b_{z+}^{0,n+1} + J_N(-u_z^{0,n+1}(t, 0))$  on peut faire aussi le choix de l'élément de norme minimale mais ici on n'est pas assuré d'avoir  $b_{z+}^{0,n+1} \leq 0$  lorsque  $u_{z,t}^{0,n+1} = 0$ . L'élément de norme minimale est :

$$u_{z,t}^{0,n+1} = \begin{cases} b_{z+}^{0,n+1} & \text{si } u_z^{0,n+1} \neq 0, \\ \max(0, b_{z+}^{0,n+1}) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.53)$$

On perd le fait que  $u_{z,t}^{0,n+1}$  est nul si  $u_z^{0,n+1}$  l'est. Cela est dû à des oscillations des valeurs de  $\zeta_z^n$  lorsque la portion multivoque est atteinte. La pression normale est toujours obtenue par l'équation (3.48) et sa positivité est toujours assurée par le schéma.

### Condition de contact unilatéral régularisée

La condition de contact unilatéral régularisée est traduite par l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}u_z(t, 0) = b_{z+}(t, 0) + \frac{c_2}{\lambda + 2G}J_N^\eta(-u_z(t, 0)),$$

où  $J_N^\eta$  est donnée par la formule (3.13). Pour simplifier les notations on pose  $\tilde{\eta} = \frac{\lambda + 2G}{c_2}\eta$ . Le schéma d'Euler implicite donne :

$$u_z^{0,n+1} = (u_z^{0,n} + \Delta t b_{z+}^{0,n+1})_+ + \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\tilde{\eta}}}(u_z^{0,n} + \Delta t b_{z+}^{0,n+1})_-, \quad (3.54)$$

$$u_{z,t}^{0,n+1} = b_{z+}^{0,n+1} + J_N^{\tilde{\eta}}(-u_z^{0,n+1}), \quad (3.55)$$

et le schéma d'Adams-Moulton à deux points:

$$u_z^{0,n+1} = (u_z^{0,n} + \frac{\Delta t}{2}(u_{z,t}^{0,n} + b_{z+}^{0,n+1}))_+ + \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2\tilde{\eta}}}(u_z^{0,n} + \frac{\Delta t}{2}(u_{z,t}^{0,n} + b_{z+}^{0,n+1}))_-, \quad (3.56)$$

$$u_{z,t}^{0,n+1} = \frac{2}{\Delta t}(u_z^{0,n+1} - u_z^{0,n}) - u_{z,t}^{0,n}. \quad (3.57)$$

La pression normale est toujours donnée par :

$$S^{n+1} = -\frac{\lambda + 2G}{c_2}(b_{z+}^{0,n+1} - u_{z,t}^{0,n+1}). \quad (3.58)$$

Les deux schémas assurent la positivité de  $S^n$ .

### Condition de frottement

Si on considère d'abord la condition de frottement non perturbée qui s'écrit (déduite de (3.15):

$$\underline{u}_{T,t} \in b_{T+}(t) - \frac{c_1 S(t)}{G} \mu(\|\underline{u}_{T,t} - \underline{V}_e(t)\|) \underline{Dir}(\underline{u}_{T,t} - \underline{V}_e(t)),$$

alors le schéma naturel est de choisir un  $\underline{u}_{T,t}^{0,n+1}$  tel que :

$$\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} \in b_{T+}^{0,n+1} - \frac{c_1 S^{n+1}}{G} \mu(\|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1})\|) \underline{Dir}(\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1})), \quad (3.59)$$

Le problème bien sûr est qu'il n'y a pas forcément unicité de la solution de cette inclusion lorsque le coefficient de frottement n'est pas croissant. Cette inclusion qui est a priori un système à deux inconnues scalaires, peut se ramener à une inclusion à une inconnue scalaire. On pose

$$X = \underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1}).$$

S'il existe un  $X \neq 0$  solution alors :

$$X = b_{T+}^{0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1}) - \frac{c_1 S^{n+1}}{G} \frac{\mu(\|X\|)}{\|X\|} X,$$

soit :

$$X \left(1 + \frac{c_1 S^{n+1}}{G} \frac{\mu(\|X\|)}{\|X\|}\right) = b_{T+}^{0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1}).$$

On pose :

$$Y = b_{T+}^{0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1}),$$

le second membre de l'équation, et on a  $X$  de même sens et même direction que  $Y$  avec :

$$\|X\| + \frac{c_1 S^{n+1}}{G} \mu(\|X\|) = \|Y\|.$$

C'est bien une équation à une seule inconnue, qui est strictement monotone pour  $\frac{c_1 S^{n+1}}{G} M_\mu < 1$  quand l'application  $v \rightarrow -\mu(v)$  est semi-lipschitzienne de constante  $M_\mu$ .  $X = 0$  est solution si  $\|Y\| \leq \frac{c_1 S^{n+1}}{G} \mu(0)$ .

On considère maintenant la condition de frottement perturbée. On doit approcher l'inclusion différentielle suivante (déduite de (3.22)) :

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \underline{u}_{T,t} \in \frac{G}{c_1} (b_{T+}(t) - \underline{u}_{T,t}) - S(t) \mu(\|\underline{u}_{T,t} - \underline{V}_\varepsilon(t)\|) \underline{Dir}(\underline{u}_{T,t} - \underline{V}_\varepsilon(t)),$$

Comme dans le cas du contact unilatéral on va présenter deux schémas. Le schéma d'Euler implicite s'écrit :

$$\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} \in \underline{u}_{T,t}^{0,n} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left( \frac{G}{c_1} (b_{T+}^{0,n+1} - \underline{u}_{T,t}^{0,n+1}) - S^{n+1} \mu(\|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1})\|) \underline{Dir}(\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1})) \right), \quad (3.60)$$

C'est une inclusion qui se réduit aussi à une inclusion scalaire. En posant encore :

$$X = \underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_e(t^{n+1}).$$

et

$$Y = \underline{u}_{T,t}^{0,n} - \underline{V}_e(t^{n+1}) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left( \frac{G}{c_1} (b_{T+}^{0,n+1} - \underline{V}_e(t^{n+1})), \right)$$

alors  $X = 0$  est solution si et seulement si  $\|Y\| \leq \frac{\Delta t}{\varepsilon} S^{n+1} \mu(0)$ . Les solutions non nulles sont telles que  $X$  a même sens et même direction que  $Y$  et :

$$\|X\| + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (S^{n+1} \mu(\|X\|) + \frac{G}{c_1} \|X\|) = \|Y\|.$$

Cette équation étant strictement monotone pour  $\frac{\Delta t}{\varepsilon} (S^{n+1} M_\mu - \frac{G}{c_1}) < 1$ .

Le schéma d'ordre deux (Adams-Moulton) s'écrit :

$$\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} = \underline{u}_{T,t}^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} (\underline{\zeta}_T^n + \underline{\zeta}_T^{n+1}), \quad (3.61)$$

$$\underline{\zeta}_T^{n+1} \in \frac{G}{c_1} (b_{T+}^{0,n+1} - \underline{u}_{T,t}^{0,n+1}) - S^{n+1} \mu(\|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_e(t^{n+1})\|) \underline{Dir}(\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_e(t^{n+1})). \quad (3.62)$$

Système que l'on ramène encore à une inclusion scalaire en posant cette fois ci :

$$Y = \underline{u}_{T,t}^{0,n} - \underline{V}_e(t^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} (\underline{\zeta}_T^n + \frac{G}{c_1} (b_{T+}^{0,n+1} - \underline{V}_e(t^{n+1}))).$$

Et on a  $X = 0$  qui est solution si et seulement si  $\|Y\| \leq \frac{\Delta t}{2\varepsilon} S^{n+1} \mu(0)$ . Les solutions non nulles étant telles que  $X$  a même sens et même direction que  $Y$  et :

$$\|X\| \left( 1 + \frac{\Delta t G}{2\varepsilon c_1} \right) + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} S^{n+1} \mu(\|X\|) = \|Y\|.$$

Cette équation étant strictement monotone pour  $\frac{\Delta t}{2\varepsilon} (S^{n+1} M_\mu - \frac{G}{c_1}) < 1$ .

### Récapitulatif

Les schémas ont une partie commune concernant l'intérieur de la couche, la condition de Dirichlet et  $\underline{u}_{z}^{0,n+1}$  :

$$(SCI) \begin{cases} \underline{u}_{,t}^{i,n+1} = \underline{u}_{,t}^{i,n} + \frac{1}{2}\mathbf{D}(\underline{u}_{,t}^{i-1,n} - 2\underline{u}_{,t}^{i,n} + \underline{u}_{,t}^{i+1,n}) + \frac{1}{2}\mathbf{DC}(\underline{u}_{,z}^{i+1,n} - \underline{u}_{,z}^{i-1,n}), \\ \underline{u}_{,z}^{i,n+1} = \underline{u}_{,z}^{i,n} + \frac{1}{2}\mathbf{D}(\underline{u}_{,z}^{i-1,n} - 2\underline{u}_{,z}^{i,n} + \underline{u}_{,z}^{i+1,n}) + \frac{1}{2}\mathbf{DC}^{-1}(\underline{u}_{,t}^{i+1,n} - \underline{u}_{,t}^{i-1,n}), \\ \underline{u}_{,z}^{N_z,n+1} = \underline{u}_{,z}^{N_z,n} + \mathbf{D}(\underline{u}_{,z}^{N_z-1,n} - \underline{u}_{,z}^{N_z,n}) - \mathbf{DC}^{-1}\underline{u}_{,t}^{N_z-1,n}, \\ \underline{u}_{,z}^{N_z,n+1} = 0, \\ \underline{b}_{,t}^{0,n+1} = \underline{u}_{,t}^{0,n} + \mathbf{C}\underline{u}_{,z}^{0,n} + \mathbf{D}(\underline{u}_{,t}^{1,n} - \underline{u}_{,t}^{0,n}) + \mathbf{DC}(\underline{u}_{,z}^{1,n} - \underline{u}_{,z}^{0,n}), \\ \underline{u}_{,z}^{0,n+1} = \mathbf{C}^{-1}(\underline{b}_{,t}^{0,n+1} - \underline{u}_{,t}^{0,n+1}). \end{cases}$$

Concernant la condition de contact unilatéral on a le schéma d'Euler implicite :

$$(SCII) \begin{cases} u_z^{0,n+1} = (u_z^{0,n} + \Delta t b_{z+}^{0,n+1})_+, \\ u_{z,t}^{0,n+1} = \begin{cases} b_{z+}^{0,n+1} \text{ si } u_z^{0,n+1} \neq 0, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases} \\ S^{n+1} = -\frac{\lambda + 2G}{c_2}(b_{z+}^{0,n+1} - u_{z,t}^{0,n+1}). \end{cases}$$

Le schéma d'Adams-Moulton à deux points:

$$(SCIII) \begin{cases} u_z^{0,n+1} = (u_z^{0,n} + \frac{\Delta t}{2}(\zeta_z^n + b_{z+}^{0,n+1}))_+, \\ \zeta_z^{n+1} = \frac{2}{\Delta t}(u_z^{0,n+1} - u_z^{0,n}) - \zeta_z^n, \\ u_{z,t}^{0,n+1} = \begin{cases} b_{z+}^{0,n+1} \text{ si } u_z^{0,n+1} \neq 0, \\ \max(0, b_{z+}^{0,n+1}) \text{ sinon,} \end{cases} \\ S^{n+1} = -\frac{\lambda + 2G}{c_2}(b_{z+}^{0,n+1} - u_{z,t}^{0,n+1}). \end{cases}$$

Le schéma d'Euler implicite pour la condition de contact unilatéral régularisée :

$$(SCIV) \begin{cases} u_z^{0,n+1} = (u_z^{0,n} + \Delta t b_{z+}^{0,n+1})_+ + \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\tilde{\eta}}}(u_z^{0,n} + \Delta t b_{z+}^{0,n+1})_-, \\ u_{z,t}^{0,n+1} = b_{z+}^{0,n+1} + J_{\tilde{\eta}}(-u_z^{0,n+1}), \\ S^{n+1} = -\frac{\lambda + 2G}{c_2}(b_{z+}^{0,n+1} - u_{z,t}^{0,n+1}). \end{cases}$$

Le schéma d'Adams-Moulton pour la condition de contact unilatéral régularisée :

$$(SCV) \begin{cases} u_z^{0,n+1} = (u_z^{0,n} + \frac{\Delta t}{2}(u_{z,t}^{0,n} + b_{z+}^{0,n+1}))_+ + \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2\tilde{\eta}}}(u_z^{0,n} + \frac{\Delta t}{2}(u_{z,t}^{0,n} + b_{z+}^{0,n+1}))_-, \\ u_{z,t}^{0,n+1} = b_{z+}^{0,n+1} + J_{\tilde{\eta}}(-u_z^{0,n+1}), \\ S^{n+1} = -\frac{\lambda + 2G}{c_2}(b_{z+}^{0,n+1} - u_{z,t}^{0,n+1}). \end{cases}$$

La condition de frottement non perturbée :

$$(SCVI) \quad \underline{u}_{T,t}^{0,n+1} \in b_{T+}^{0,n+1} - \frac{c_1 S^{n+1}}{G} \mu (\| \underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_e(t^{n+1}) \|) \underline{Dir}(\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_e(t^{n+1})),$$

Le schéma d'Euler implicite pour la condition de frottement perturbée :

$$(SCVII) \quad \underline{u}_{T,t}^{0,n+1} \in \underline{u}_{T,t}^{0,n} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left( \frac{G}{c_1} (b_{T+}^{0,n+1} - \underline{u}_{T,t}^{0,n+1}) - S^{n+1} \mu(\|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1})\|) \underline{Dir}(\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1})) \right),$$

Le schéma d'Adams-Moulton pour la condition de frottement perturbée:

$$(SCVIII) \quad \begin{cases} \underline{u}_{T,t}^{0,n+1} &= \underline{u}_{T,t}^{0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} (\zeta_T^n + \zeta_T^{n+1}), \\ \zeta_T^{n+1} &\in \frac{G}{c_1} (b_{T+}^{0,n+1} - \underline{u}_{T,t}^{0,n+1}) - S^{n+1} \mu(\|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1})\|) \underline{Dir}(\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1})). \end{cases}$$

### 3.5.2 Propriétés du schéma de Lax-Wendroff

Il est bien connu que le schéma de Lax-Wendroff n'est stable que pour  $d_b = \frac{\Delta t}{\Delta z} c_2 \leq 1$ , c'est pourquoi on va supposer dès maintenant que  $D$ , qui est une matrice diagonale, a tous ces coefficients compris entre 0 et 1.

On introduit l'énergie:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^H \|\underline{u}_t(z, t)\|^2 + \|\mathbf{C}\underline{u}_z(z, t)\|^2 dz,$$

Si on note  $\underline{u}_t^n$  et  $\underline{u}_z^n$  les interpolées linéaires suivant la direction des  $z$  des solutions discrètes, alors l'énergie de la solution discrète s'écrit :

$$\begin{aligned} E^n &= \frac{1}{2} \int_0^H \|\underline{u}_t^n(z)\|^2 + \|\mathbf{C}\underline{u}_z^n(z)\|^2 dz, \\ &= \frac{\Delta z}{2} \sum_{i=1}^{N_z-1} (\|\underline{u}_t^{i,n}\|^2 + \|\mathbf{C}\underline{u}_z^{i,n}\|^2) + \frac{\Delta z}{4} (\|\underline{u}_t^{0,n}\|^2 + \|\underline{u}_t^{N_z,n}\|^2 + \|\mathbf{C}\underline{u}_z^{0,n}\|^2 + \|\mathbf{C}\underline{u}_z^{N_z,n}\|^2), \end{aligned}$$

et en remarquant que :

$$\|\underline{b}_+^{i,n}\|^2 + \|\underline{b}_-^{i,n}\|^2 = 2\|\underline{u}_t^{i,n}\|^2 + 2\mathbf{C}\|\underline{u}_t^{i,n}\|^2,$$

on voit que cette énergie s'écrit aussi :

$$E^n = \frac{\Delta z}{4} \sum_{i=1}^{N_z-1} (\|\underline{b}_+^{i,n}\|^2 + \|\underline{b}_-^{i,n}\|^2) + \frac{\Delta z}{8} (\|\underline{b}_+^{0,n}\|^2 + \|\underline{b}_-^{0,n}\|^2 + \|\underline{b}_+^{N_z,n}\|^2 + \|\underline{b}_-^{N_z,n}\|^2),$$

Il est alors possible de quantifier la dissipation d'énergie du schéma. On calcule :

$$\begin{aligned}
E^{n+1} - E^n &= \frac{\Delta z}{4} \sum_{i=1}^{N_z-1} (\|\underline{b}_+^{i,n} + \mathbf{D}(\underline{b}_+^{i+1,n} - \underline{b}_+^{i,n})\|^2 + \|\underline{b}_-^{i,n} + \mathbf{D}(\underline{b}_-^{i-1,n} - \underline{b}_-^{i,n})\|^2 - \|\underline{b}_+^{i,n}\|^2 - \|\underline{b}_-^{i,n}\|^2) \\
&\quad + \frac{\Delta z}{8} (\|\underline{b}_+^{0,n} + \mathbf{D}(\underline{b}_+^{1,n} - \underline{b}_+^{0,n})\|^2 + \|\underline{b}_-^{0,n+1} + \underline{b}_+^{0,n+1} - \underline{b}_+^{0,n} - \mathbf{D}(\underline{b}_+^{1,n} - \underline{b}_+^{0,n})\|^2 \\
&\quad + \|\underline{b}_-^{N_z,n} + \mathbf{D}(\underline{b}_-^{N_z-1,n} - \underline{b}_-^{N_z,n})\|^2 \\
&\quad + \|\underline{b}_+^{N_z,n+1} + \underline{b}_-^{N_z,n+1} - \underline{b}_-^{N_z,n} - \mathbf{D}(\underline{b}_-^{N_z-1,n} - \underline{b}_-^{N_z,n})\|^2 \\
&\quad - \|\underline{b}_+^{0,n}\|^2 - \|\underline{b}_-^{0,n}\|^2 - \|\underline{b}_+^{N_z,n}\|^2 - \|\underline{b}_-^{N_z,n}\|^2), \\
&= \frac{\Delta z}{4} \sum_{i=0}^{N_z-1} (\|\mathbf{D}(\underline{b}_+^{i+1,n} - \underline{b}_+^{i,n})\|^2 + 2 \langle \underline{b}_+^{i,n}, \mathbf{D}(\underline{b}_+^{i+1,n} - \underline{b}_+^{i,n}) \rangle \\
&\quad + \|\mathbf{D}(\underline{b}_-^{i,n} - \underline{b}_-^{i+1,n})\|^2 + 2 \langle \underline{b}_-^{i+1,n}, \mathbf{D}(\underline{b}_-^{i,n} - \underline{b}_-^{i+1,n}) \rangle) \\
&\quad + \frac{\Delta z}{8} (\|\underline{b}_-^{0,n+1}\|^2 - \|\underline{b}_+^{0,n+1}\|^2 + \|\underline{b}_+^{N_z,n+1}\|^2 - \|\underline{b}_-^{N_z,n+1}\|^2 \\
&\quad + \|\underline{b}_+^{0,n}\|^2 - \|\underline{b}_-^{0,n}\|^2 - \|\underline{b}_+^{N_z,n}\|^2 + \|\underline{b}_-^{N_z,n}\|^2).
\end{aligned}$$

La partie qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
ED^n &= -\frac{\Delta z}{4} \sum_{i=0}^{N_z-1} (\|\mathbf{D}(\underline{b}_+^{i+1,n} - \underline{b}_+^{i,n})\|^2 - \langle \mathbf{D}(\underline{b}_+^{i+1,n} - \underline{b}_+^{i,n}), \underline{b}_+^{i+1,n} - \underline{b}_+^{i,n} \rangle \\
&\quad + \|\mathbf{D}(\underline{b}_-^{i,n} - \underline{b}_-^{i+1,n})\|^2 - \langle \mathbf{D}(\underline{b}_-^{i,n} - \underline{b}_-^{i+1,n}), \underline{b}_-^{i,n} - \underline{b}_-^{i+1,n} \rangle),
\end{aligned}$$

est positive ou nulle sous la condition C.F.L. et représente l'énergie discrète dissipée par le

schéma numérique qui est d'autant plus importante que le rapport  $\frac{\Delta t}{\Delta z}$  est petit. Et on a donc :

$$\begin{aligned}
E^{n+1} - E^n &= \frac{\Delta z}{4} \sum_{i=0}^{N_z-1} (\langle \mathbf{D}(\underline{b}_+^{i+1,n} + \underline{b}_+^{i,n}), \underline{b}_+^{i+1,n} - \underline{b}_+^{i,n} \rangle - \langle \mathbf{D}(\underline{b}_-^{i+1,n} + \underline{b}_-^{i,n}), \underline{b}_-^{i+1,n} - \underline{b}_-^{i,n} \rangle) \\
&\quad + \frac{\Delta z}{8} (\|\underline{b}_-^{0,n+1}\|^2 - \|\underline{b}_+^{0,n+1}\|^2 + \|\underline{b}_+^{N_z,n+1}\|^2 - \|\underline{b}_-^{N_z,n+1}\|^2 \\
&\quad + \|\underline{b}_+^{0,n}\|^2 - \|\underline{b}_-^{0,n}\|^2 - \|\underline{b}_+^{N_z,n}\|^2 + \|\underline{b}_-^{N_z,n}\|^2) - ED^n, \\
&= \frac{\Delta z}{4} \sum_{i=0}^{N_z-1} (\langle \mathbf{D}\underline{b}_+^{i+1,n}, \underline{b}_+^{i+1,n} \rangle - \langle \mathbf{D}\underline{b}_+^{i,n}, \underline{b}_+^{i,n} \rangle - \langle \mathbf{D}\underline{b}_-^{i+1,n}, \underline{b}_-^{i+1,n} \rangle \\
&\quad + \langle \mathbf{D}\underline{b}_-^{i,n}, \underline{b}_-^{i,n} \rangle + \frac{\Delta z}{8} (\|\underline{b}_-^{0,n+1}\|^2 - \|\underline{b}_+^{0,n+1}\|^2 + \|\underline{b}_+^{N_z,n+1}\|^2 - \|\underline{b}_-^{N_z,n+1}\|^2 \\
&\quad + \|\underline{b}_+^{0,n}\|^2 - \|\underline{b}_-^{0,n}\|^2 - \|\underline{b}_+^{N_z,n}\|^2 + \|\underline{b}_-^{N_z,n}\|^2) - ED^n, \\
&= \frac{\Delta z}{4} (\langle \mathbf{D}\underline{b}_+^{N_z,n}, \underline{b}_+^{N_z,n} \rangle - \langle \mathbf{D}\underline{b}_+^{0,n}, \underline{b}_+^{0,n} \rangle - \langle \mathbf{D}\underline{b}_-^{N_z,n}, \underline{b}_-^{N_z,n} \rangle + \langle \mathbf{D}\underline{b}_-^{0,n}, \underline{b}_-^{0,n} \rangle) \\
&\quad + \frac{\Delta z}{8} (\|\underline{b}_-^{0,n+1}\|^2 - \|\underline{b}_+^{0,n+1}\|^2 + \|\underline{b}_+^{N_z,n+1}\|^2 - \|\underline{b}_-^{N_z,n+1}\|^2 \\
&\quad + \|\underline{b}_+^{0,n}\|^2 - \|\underline{b}_-^{0,n}\|^2 - \|\underline{b}_+^{N_z,n}\|^2 + \|\underline{b}_-^{N_z,n}\|^2) - ED^n, \\
&= \frac{\Delta z}{8} (\langle (1 - 2\mathbf{D})(\underline{b}_-^{N_z,n} + \underline{b}_+^{N_z,n}), \underline{b}_-^{N_z,n} - \underline{b}_+^{N_z,n} \rangle \\
&\quad - \langle \underline{b}_-^{N_z,n+1} + \underline{b}_+^{N_z,n+1}, \underline{b}_-^{N_z,n+1} - \underline{b}_+^{N_z,n+1} \rangle - \langle (1 - 2\mathbf{D})(\underline{b}_-^{0,n} + \underline{b}_+^{0,n}), \underline{b}_-^{0,n} - \underline{b}_+^{0,n} \rangle \\
&\quad + \langle \underline{b}_-^{0,n+1} + \underline{b}_+^{0,n+1}, \underline{b}_-^{0,n+1} - \underline{b}_+^{0,n+1} \rangle) - ED^n.
\end{aligned}$$

La condition de Dirichlet s'exprime par  $\underline{b}_+^{N_z,n} = -\underline{b}_-^{N_z,n}$  et on voit qu'elle est neutre en apport d'énergie. On arrive donc a :

$$\begin{aligned}
E^{n+1} - E^n &= \frac{\Delta z}{8} (\langle (1 - 2\mathbf{D})(\underline{b}_+^{0,n} + \underline{b}_-^{0,n}), \underline{b}_+^{0,n} - \underline{b}_-^{0,n} \rangle - \langle \underline{b}_+^{0,n+1} + \underline{b}_-^{0,n+1}, \underline{b}_+^{0,n+1} - \underline{b}_-^{0,n+1} \rangle) \\
&\quad - ED^n, \\
&= \frac{\Delta z}{2} (\langle (1 - 2\mathbf{D})\underline{u}_t^{0,n}, \mathbf{C}\underline{u}_z^{0,n} \rangle - \langle \underline{u}_t^{0,n+1}, \mathbf{C}\underline{u}_z^{0,n+1} \rangle) - ED^n.
\end{aligned}$$

C'est à dire qu'il est possible de quantifier l'apport en énergie en examinant uniquement les termes correspondant au bord de contact.

Le schéma a d'autres propriétés importantes qui permettrons l'étude de la stabilité. Si on pose :

$$B_{max}^n = \max_{0 \leq i \leq N_z} (\|\underline{b}_+^{i,n}\|, \|\underline{b}_-^{i,n}\|), \quad (3.63)$$

$$dB_{max}^n = \max_{0 \leq i \leq N_z-1} (\|\underline{b}_+^{i+1,n} - \underline{b}_+^{i,n}\|, \|\underline{b}_-^{i+1,n} - \underline{b}_-^{i,n}\|), \quad (3.64)$$

alors des expressions (3.40) et (3.41) de  $\underline{b}_+^{i,n+1}$  et  $\underline{b}_-^{i,n+1}$  on tire :

$$\begin{aligned}
\|\underline{b}_+^{i,n+1}\| &= \|\underline{b}_+^{i,n} + \mathbf{D}(\underline{b}_+^{i+1,n} - \underline{b}_+^{i,n})\| \leq B_{max}^n, \quad 0 \leq i \leq N_z - 1, \\
\|\underline{b}_-^{i,n+1}\| &= \|\underline{b}_-^{i,n} + \mathbf{D}(\underline{b}_-^{i-1,n} - \underline{b}_-^{i,n})\| \leq B_{max}^n, \quad 1 \leq i \leq N_z,
\end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned} \|\underline{b}_+^{i,n+1} - \underline{b}_+^{i+1,n+1}\| &= \|\underline{b}_+^{i,n} - \underline{b}_+^{i+1,n} + \mathbf{D}(\underline{b}_+^{i+1,n} - \underline{b}_+^{i+2,n} - \underline{b}_+^{i,n} + \underline{b}_+^{i+1,n})\| \\ &= dB_{max}^n, \quad 0 \leq i \leq N_z - 2, \\ \|\underline{b}_-^{i,n+1} - \underline{b}_-^{i-1,n+1}\| &\leq \|\underline{b}_-^{i,n} - \underline{b}_-^{i-1,n} + \mathbf{D}(\underline{b}_-^{i-1,n} - \underline{b}_-^{i-2,n} - \underline{b}_-^{i,n} + \underline{b}_-^{i-1,n})\| \\ &\leq dB_{max}^n, \quad 2 \leq i \leq N_z, \end{aligned}$$

C'est à dire que le schéma de Lax-Wendroff à l'intérieur de la couche ne fait que diminuer  $B_{max}^n$  et  $dB_{max}^n$ . Il n'est pas difficile de voir que la condition de Dirichlet agit de même :

$$\begin{aligned} \|\underline{b}_+^{N_z,n+1}\| &= \|\underline{b}_-^{N_z,n+1}\| \leq B_{max}^n, \\ \|\underline{b}_+^{N_z-1,n+1} - \underline{b}_+^{N_z,n+1}\| &= \|\underline{b}_+^{N_z-1,n} + \mathbf{D}(\underline{b}_+^{N_z,n} - \underline{b}_+^{N_z-1,n}) - \underline{b}_+^{N_z,n} + \mathbf{D}(\underline{b}_-^{N_z-1,n} - \underline{b}_-^{N_z,n})\|, \\ &\leq dB_{max}^n. \end{aligned}$$

Autrement dit, on arrive à :

$$\begin{aligned} B_{max}^{n+1} &\leq \max(B_{max}^n, \|\underline{b}_-^{0,n+1}\|), \\ dB_{max}^{n+1} &\leq \max(dB_{max}^n, \|\underline{b}_-^{1,n+1} - \underline{b}_-^{0,n+1}\|). \end{aligned}$$

C'est à dire qu'il ne reste plus qu'à estimer ce qui correspond aux bord de contact. On remarque aussi que pour  $n \leq 2N_z$  on a :

$$\|\underline{b}_+^{0,n}\| \leq B_{max}^0, \quad (3.65)$$

$$\|\underline{b}_+^{1,n} - \underline{b}_+^{0,n}\| \leq dB_{max}^0, \quad (3.66)$$

La raison est que si on développe  $\underline{b}_+^{0,n}$  on trouve :

$$\begin{aligned} \underline{b}_+^{0,n} &= (1 - \mathbf{D})\underline{b}_+^{0,n-1} + \mathbf{D}\underline{b}_+^{1,n-1}, \\ &= (1 - \mathbf{D})^2\underline{b}_+^{0,n-2} + 2(1 - \mathbf{D})\mathbf{D}\underline{b}_+^{1,n-2} + \mathbf{D}^2\underline{b}_+^{2,n-2}, \\ &= \dots \\ &= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \mathbf{D}^i (1 - \mathbf{D})^{j-i} \underline{b}_+^{i,n-j}, \quad \text{pour } 0 \leq j \leq \min(n, N_z), \end{aligned}$$

où les  $\binom{j}{i}$  sont les combinaisons de  $i$  éléments parmi  $j$ . Bien sûr  $\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \mathbf{D}^i (1 - \mathbf{D})^{j-i} = (1 - \mathbf{D} + \mathbf{D})^j = 1$  et on a bien  $\|\underline{b}_+^{0,n}\| \leq \|\underline{b}_+^{0,n-j}\|$ . Mais on peut continuer le processus car pour  $j = N_z$  on a  $\underline{b}_+^{N_z,n-j} = -\underline{b}_-^{N_z,n-j}$  ce qui fait que pour  $0 \leq j \leq \min(n, 2N_z)$  on arrive à  $\|\underline{b}_+^{0,n}\| \leq \max(\|\underline{b}_+^{0,n-j}\|, \|\underline{b}_-^{0,n-j}\|)$ , d'où le résultat. Le même raisonnement est possible pour  $\|\underline{b}_+^{1,n} - \underline{b}_+^{0,n}\|$ .

### 3.5.3 Étude de la stabilité des schémas

Dans un premier temps on va traiter la partie contact unilatéral, c'est à dire la composante  $u_z$  du déplacement. Pour cela on va considérer  $E_z^n$  la partie de  $E^n$  correspondant aux composantes en  $z$  :

$$E_z^n = \frac{\Delta z}{2} \sum_{i=1}^{N_z-1} ((u_{z,t}^{i,n})^2 + (c_2 u_{z,z}^{i,n})^2) + \frac{\Delta z}{4} ((u_{z,t}^{0,n})^2 + (u_{z,t}^{N_z,n})^2 + (c_2 u_{z,z}^{0,n})^2 + (c_2 u_{z,z}^{N_z,n})^2),$$

ainsi que  $B_{z \max}^n$  et  $dB_{z \max}^n$  :

$$B_{z \max}^n = \max_{0 \leq i \leq N_z} (|b_{z+}^{i,n}|, |b_{z-}^{i,n}|), \quad (3.67)$$

$$dB_{z \max}^n = \max_{0 \leq i \leq N_z-1} (|b_{z+}^{i+1,n} - b_{z+}^{i,n}|, |b_{z-}^{i+1,n} - b_{z-}^{i,n}|), \quad (3.68)$$

D'après ce que l'on vient de voir on a :

$$E_z^{n+1} - E_z^n \leq \frac{\Delta z}{2} (1 - 2d_2) c_2 u_{z,z}^{0,n} u_{z,t}^{0,n} - c_2 u_{z,z}^{0,n+1} u_{z,t}^{0,n+1},$$

et :

$$B_{z \max}^{n+1} \leq \max(B_{z \max}^n, |b_{z-}^{0,n+1}|),$$

$$dB_{z \max}^{n+1} \leq \max(dB_{z \max}^n, |b_{z-}^{1,n} - b_{z-}^{0,n}|).$$

**Proposition 16** *Sous la condition C.F.L.  $d_2 \leq 1$ , le schéma (SCI) (SCII) a les propriétés suivantes :*

$$E_z^n \leq E_z^0,$$

$$B_{z \max}^n \leq B_{z \max}^0,$$

$$|u_{z,t}^{0,n}| \leq |u_{z,t}^{0,0}| + TB_{z \max}^0.$$

**Preuve :** on a vu que :

$$E_z^{n+1} - E_z^n \leq \frac{\Delta z}{2} ((2d_2 - 1) u_{z,t}^{0,n} (u_{z,t}^{0,n} - b_{z+}^{0,n}) + u_{z,t}^{0,n+1} (u_{z,t}^{0,n+1} - b_{z+}^{0,n+1})).$$

Or  $u_{z,t}^{0,n}$  vaut 0 ou  $b_{z+}^{0,n}$  à chaque itération ; donc :

$$E_z^{n+1} \leq E_z^n \leq \dots \leq E_z^0.$$

C'est à dire que le schéma (SCII) respecte le fait que le contact unilatéral n'apporte pas d'énergie au système. De même :

$$b_{z-}^{0,n+1} = \begin{cases} -b_{z+}^{0,n+1} & \text{si } u_{z,t}^{0,n+1} = 0, \\ b_{z+}^{0,n+1} & \text{si } u_{z,t}^{0,n+1} = b_{z+}^{0,n+1}, \end{cases}$$

par conséquent  $|b_{z-}^{0,n+1}| = |b_{z+}^{0,n+1}|$  et on a bien :

$$B_{z \max}^{n+1} \leq B_{z \max}^n \leq \dots \leq B_{z \max}^0.$$

Si on analyse le système continu, lorsque qu'il y a une transition contact rompu - contact établi, cela crée une discontinuité de la variable  $u_t(t, 0)$ . Dans le schéma discret cela se traduit par l'impossibilité de majorer  $dB_{z \max}^n$  en fonction de  $dB_{z \max}^0$ . On peut s'en convaincre en essayant de majorer le terme  $|b_{z-}^{1,n} - b_{z-}^{0,n}|$  quand  $u_z^{0,n} > 0$  et  $u_z^{0,n+1} = 0$  ce qui traduit un tel événement dans le système discret. Bien sûr il reste toujours l'estimation :

$$dB_{z \max}^n \leq 2B_{z \max}^0,$$

mais qui n'apporte pas grand chose. Quant à  $u_z^{0,n}$  on a :

$$|u_z^{0,n+1} - u_z^{0,n}| \leq \Delta t |b_{z+}^{0,n+1}|,$$

d'après le schéma et donc :

$$|u_z^{0,n}| \leq TB_{z \max}^0.$$

■

**Proposition 17** *Sous la condition C.F.L.  $d_2 \leq 1$ , le schéma (SCI) (SCII) a les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} E_z^n &\leq E_z^0, \\ B_{z \max}^n &\leq B_{z \max}^0, \\ |\zeta_z^n| &\leq B_{z \max}^0, \\ |u_z^{0,n}| &\leq |u_z^{0,0}| + TB_{z \max}^0. \end{aligned}$$

**Preuve:** Comme dans le schéma précédent on a  $u_{z,t}^{0,n}$  qui vaut 0 ou  $b_{z+}^{0,n}$  à chaque itération et donc on a aussi :

$$E_z^{n+1} \leq E_z^0, \quad B_{z \max}^n \leq B_{z \max}^0.$$

D'après le schéma on a :

- ou bien  $u_z^{0,n+1} \neq 0$  et  $\zeta_z^{n+1} = b_{z+}^{0,n+1}$ ,
- ou bien  $u_z^{0,n+1} = 0$  et  $\zeta_z^{n+1} = -\frac{2}{\Delta t}u_z^{0,n} - \zeta_z^n$  avec  $u_z^{0,n} + \frac{\Delta t}{2}(\zeta_z^n + b_{z+}^{0,n+1}) \leq 0$ . mais alors :

$$0 \leq u_z^{0,n} \leq -\frac{2}{\Delta t}u_z^{0,n} - \zeta_z^n,$$

et :

$$b_{z+}^{0,n+1} \leq \zeta_z^{n+1} \leq -\zeta_z^n.$$

Par suite  $|\zeta_z^{n+1}| \leq \max(|\zeta_z^n|, B_{z \max}^0)$ , et par récurrence  $|\zeta_z^{n+1}| \leq \max(|\zeta_z^0|, B_{z \max}^0)$ . Comme le schéma est initialisé avec une valeur  $\zeta_0 \in b_{z+}^{0,0}$  de norme minimale on a bien :

$$|\zeta_z^{n+1}| \leq B_{z \max}^0.$$

D'après le schéma on a :

$$|u_z^{0,n+1} - u_z^{0,n}| \leq \frac{\Delta t}{2} |\zeta_z^n + b_{z+}^{0,n+1}|,$$

et donc :

$$|u_z^{0,n+1} - u_z^{0,n}| \leq \Delta t B_{z \max}^0,$$

ce qui permet de conclure :

$$|u_z^{0,n}| \leq |u_z^{0,0}| + TB_{z \max}^0.$$

■

**Proposition 18** *S'il existe  $d_{min} > 0$  tel que  $d_{min} \leq d_2 \leq 1$  alors le schéma (SCI) (SCIV) assure les propriétés suivantes : Il existe des constantes  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  qui ne dépendent que des conditions initiales telles que :*

$$\begin{aligned} B_{z \max}^n &\leq C_1, \\ |u_z^{0,n}| &\leq C_2, \\ dB_{z \max}^n &\leq C_3 dB_{z \max}^0 + \Delta t C_4. \end{aligned}$$

**Preuve :** On va d'abord se placer pour  $n < 2N_z$  où on a vu que :

$$|b_{z+}^{0,n}| \leq B_{z \max}^0, \quad (3.69)$$

$$|b_{z+}^{1,n} - b_{z+}^{0,n}| \leq dB_{z \max}^0, \quad (3.70)$$

D'après le schéma (SCIV) on a :

$$\begin{aligned} |u_z^{0,n+1}| &\leq |\Delta t b_{z+}^{0,n+1} + u_z^{0,n}|, \\ &\leq |u_z^{0,n}| + \Delta t B_{z \max}^0, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} |u_z^{0,n}| &\leq |u_z^{0,0}| + 2N_z \Delta t B_{z \max}^0, \\ &\leq |u_z^{0,0}| + 2 \frac{H}{c_2} B_{z \max}^0. \end{aligned}$$

Par ailleurs toujours d'après le schéma (SCIV) on a :

$$\begin{aligned} |u_z^{0,n+1} - u_z^{0,n}| &\leq \Delta t (|b_{z+}^{0,n+1}| + \frac{|u_z^{0,n+1}|}{\tilde{\eta}}), \\ &\leq \Delta t B_{z \max}^0 (1 + 2N_z \Delta t + |u_z^{0,0}|). \end{aligned}$$

Comme :

$$b_{z-}^{0,n+1} = b_{z+}^{0,n+1} + 2c_2 u_{z,z}^{0,n+1},$$

et :

$$u_{z,z}^{0,n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } u_z^{0,n+1} \geq 0, \\ \frac{u_z^{0,n+1}}{c_2 \tilde{\eta}} & \text{si } u_z^{0,n+1} < 0, \end{cases}$$

on a :

$$\begin{aligned} |b_{z-}^{0,n+1}| &\leq |b_{z+}^{0,n+1}| + \frac{2|u_z^{0,n+1}|}{\tilde{\eta}}, \\ &\leq B_{z \max}^0 \left(1 + 4 \frac{H}{c_2}\right) + 2|u_z^{0,0}|. \end{aligned}$$

C'est à dire que :

$$B_{z \max}^n \leq B_{z \max}^0 \left(1 + 4 \frac{H}{c_2}\right) + 2|u_z^{0,0}|.$$

Calculons maintenant :

$$\begin{aligned} |b_{z-}^{1,n+1} - b_{z-}^{0,n+1}| &= |b_{z-}^{1,n} + D(b_{z-}^{0,n} - b_{z-}^{1,n}) - b_{z-}^{0,n+1}|, \\ &\leq (1 - d_2)|b_{z-}^{1,n} - b_{z-}^{0,n}| + 2|c_2 u_{z,z}^{0,n} - c_2 u_{z,z}^{0,n+1}| + |b_{z+}^{0,n+1} - b_{z+}^{0,n}|, \\ &\leq (1 - d_2)dB_{z \max}^n + d_2 dB_{z \max}^0 + 2 \frac{\Delta t}{\tilde{\eta}} B_{z \max}^0 (1 + 2N_z \Delta t + |u_z^{0,0}|). \end{aligned}$$

Donc :

$$dB_{z \max}^{n+1} \leq (1 - d_2)dB_{z \max}^n + d_2 dB_{z \max}^0 + 2 \frac{\Delta t}{\tilde{\eta}} B_{z \max}^0 (1 + 2N_z \Delta t + |u_z^{0,0}|),$$

et par récurrence :

$$\begin{aligned} dB_{z \max}^n &\leq (1 - d_2)^n dB_{z \max}^0 + (d_2 dB_{z \max}^0 + 2 \frac{\Delta t}{\tilde{\eta}} B_{z \max}^0 (1 + 2N_z \Delta t)) \sum_{i=0}^{n-1} (1 - d_2)^i, \\ &\leq (1 - d_2)^n dB_{z \max}^0 + \frac{1}{d_2} (d_2 dB_{z \max}^0 + 2 \frac{\Delta t}{\tilde{\eta}} B_{z \max}^0 (1 + 2N_z \Delta t + |u_z^{0,0}|)), \\ &\leq (1 + (1 - d_2)^n) dB_{z \max}^0 + \Delta t \frac{2}{\tilde{\eta} d_2} B_{z \max}^0 \left(1 + 2 \frac{H}{c_2}\right), \\ &\leq 2dB_{z \max}^0 + \Delta t \frac{2}{\tilde{\eta} d_{\min}} B_{z \max}^0 \left(1 + 2 \frac{H}{c_2} + |u_z^{0,0}|\right). \end{aligned}$$

On vient donc d'établir la proposition lorsque  $T \leq 2 \frac{H}{c_2} d_{\min}$ . Pour  $T > 2 \frac{H}{c_2} d_{\min}$  il suffit de réitérer le processus sur chaque intervalle de temps  $[k(2 \frac{H}{c_2} d_{\min}), (k+1)(2 \frac{H}{c_2} d_{\min})]$  pour trouver l'expression des constantes  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$ . ■

**Remarque :** On voit le gain en régularité apporté par la régularisation de la condition de contact unilatéral. En effet, pour peu que la condition initiale soit lipschitzienne, le contrôle de

la valeur de  $dB_{z\max}^n$  va permettre de borner la constante de Lipschitz de la solution discrète par rapport à la variable  $z$  donc aussi par rapport à la variable  $t$ . Autrement dit la suite des solutions discrètes sera bornée dans  $W^{1,\infty}([0, H[\times]0, T])$ .

**Proposition 19** *S'il existe  $d_{\min} > 0$  tel que  $d_{\min} \leq d_2 \leq 1$  alors le schéma (SCI) (SCV) assure les propriétés suivantes : il existe des constantes  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  qui ne dépendent que des conditions initiales telles que :*

$$\begin{aligned} B_{z\max}^n &\leq C_1, \\ |u_z^{0,n}| &\leq C_2, \\ dB_{z\max}^n &\leq C_3 dB_{z\max}^0 + \Delta t C_4, \end{aligned}$$

**Preuve :** La preuve de cette proposition se construit de manière tout à fait similaire à celle de la proposition précédente. La seule différence est que l'on se base sur le schéma (SCV) pour obtenir l'estimations suivantes pour  $|u_z^{0,n+1}|$  :

$$\begin{aligned} |u_z^{0,n+1}| &\leq |u_z^{0,n}| + \frac{\Delta t}{2} |b_{z+}^{0,n} + J_N^{\tilde{\eta}}(-u_z^{0,n+1}) + b_{z+}^{0,n+1}|, \\ &\leq |u_z^{0,n}| + \Delta t B_{z\max}^0 + \frac{\Delta t}{2\tilde{\eta}} |u_z^{0,n+1}|, \end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire, en travaillant pour  $\frac{\Delta t}{\tilde{\eta}} < 1$  :

$$\begin{aligned} |u_z^{0,n+1}| &\leq \frac{1}{1 - \frac{\Delta t}{2\tilde{\eta}}} (|u_z^{0,n}| + \Delta t B_{z\max}^0), \\ &\leq \left(1 + \frac{\Delta t}{\tilde{\eta}}\right) (|u_z^{0,n}| + \Delta t B_{z\max}^0), \end{aligned}$$

et par récurrence :

$$|u_z^{0,n+1}| \leq \left(1 + \frac{\Delta t}{\tilde{\eta}}\right)^{n+1} |u_z^{0,0}| + \Delta t B_{z\max}^0 \sum_{i=1}^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t}{\tilde{\eta}}\right)^i,$$

et en utilisant  $\left(1 + \frac{T}{N\tilde{\eta}}\right)^N \leq e^{\frac{T}{\tilde{\eta}}}$  :

$$|u_z^{0,n+1}| \leq e^{\frac{T}{\tilde{\eta}}} (|u_z^{0,0}| + T B_{z\max}^0),$$

Cette estimation obtenue, la preuve est identique. ■

On va maintenant passer aux schémas complets, incluant la condition de frottement. On va considérer  $B_{T\max}^n$  et  $dB_{T\max}^n$  les composantes sur les déplacement horizontaux :

$$B_{T\max}^n = \max_{0 \leq i \leq N_z} (\|\underline{b}_{T+}^{i,n}\|, \|\underline{b}_{T-}^{i,n}\|), \quad (3.71)$$

$$dB_{T\max}^n = \max_{0 \leq i \leq N_z - 1} (\|\underline{b}_{T+}^{i+1,n} - \underline{b}_{T+}^{i,n}\|, \|\underline{b}_{T-}^{i+1,n} - \underline{b}_{T-}^{i,n}\|), \quad (3.72)$$

où  $\underline{b}_{T+}^{i,n}$  et  $\underline{b}_{T-}^{i,n}$  désigne les composantes horizontales de  $\underline{b}_T^{i,n}$  et  $\underline{b}_-^{i,n}$ . D'après ce que l'on a vu au paragraphe précédent on a :

$$B_{T \max}^{n+1} \leq \max(B_{T \max}^n, \|\underline{b}_{T-}^{0,n+1}\|),$$

$$dB_{T \max}^{n+1} \leq \max(dB_{T \max}^n, \|\underline{b}_{T-}^{1,n} - \underline{b}_{T-}^{0,n}\|).$$

**Proposition 20** *S'il existe  $d_{\min} > 0$  tel que  $d_{\min} \leq d_2 \leq 1$  alors le schéma (SCI) (SCVI) combiné à l'un des schéma (SCII) (SCIII) (SCIV) ou (SCV) a la propriété qu'il existe une constante  $C_1$  qui ne dépend que des conditions initiales telle que :*

$$B_{T \max}^n \leq C_1.$$

**Preuve :** D'après le schéma on a :

$$\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} \in b_{T+}^{0,n+1} - \frac{c_1 S^{n+1}}{G} \mu(\|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_e(t^{n+1})\|) \underline{Dir}(\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_e(t^{n+1})),$$

Comme le coefficient  $\mu$  est lipschitzien et borné on a :

$$\|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1}\| \leq \|b_{T+}^{0,n+1}\| + \frac{c_1 S^{n+1}}{G} \|\mu\|_\infty.$$

Les propositions précédentes nous assurent que  $\|S^n\|$  est bornée indépendamment de  $n$  quel que soit le schéma choisi pour le contact unilatéral, et donc pour  $n < 2N_z$  :

$$\begin{aligned} \|\underline{b}_{T-}^{0,n+1}\| &\leq \|\underline{b}_{T+}^{0,n+1}\| + 2\|\underline{u}_{T,t}^{0,n}\|, \\ &\leq 2B_{T \max}^0 + \frac{c_1}{G} \|\mu\|_\infty \max_{0 \leq k \leq N_t} S^k. \end{aligned}$$

Comme dans les propositions précédentes, c'est suffisant pour conclure que  $B_{T \max}^n$  est borné pour  $0 \leq n \leq N_t$ , car on réitère le raisonnement pour  $n > 2N_z$ . ■

Il n'est pas possible d'aller plus loin si le coefficient de frottement  $\mu$  n'est pas monotone par rapport à la vitesse de glissement, car, comme on l'a vu, des chocs en vitesses apparaissent dans ce cas. Le fait que le coefficient  $\mu$  soit monotone ne semble pas suffire non plus car la condition de contact unilatéral introduit des chocs en vitesse du déplacement normal, donc des chocs en pression de contact, et par conséquent des chocs en vitesse de glissement. Il est toutefois possible de montrer une estimation du type  $dB_{T \max}^n \leq C_3 dB_{T \max}^0 + \Delta t C_4$  lorsqu'on utilise à la fois une condition de contact unilatérale régularisée et un coefficient de frottement monotone.

**Proposition 21** *S'il existe  $d_{\min} > 0$  tel que  $d_{\min} \leq d_2 \leq 1$  alors le schéma (SCI) (SCVII) combiné à l'un des schémas (SCII) (SCIII) (SCIV) ou (SCV) a la propriété suivante : il existe des constantes  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  qui ne dépendent que des conditions initiales telles que :*

$$\begin{aligned} B_{T \max}^n &\leq C_1, \\ \|\underline{u}_T^{0,n}\| &\leq C_2, \\ dB_{T \max}^n &\leq C_3 dB_{T \max}^0 + \Delta t C_4. \end{aligned}$$

**Preuve:** D'après le schéma (SCVII), on a :

$$\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} \in \underline{u}_{T,t}^{0,n} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left( \frac{G}{c_1} (b_{T+}^{0,n+1} - \underline{u}_{T,t}^{0,n+1}) - S^{n+1} \mu (\|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_e(t^{n+1})\|) \underline{Dir}(\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{V}_e(t^{n+1})) \right),$$

c'est à dire :

$$\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} \in \underline{u}_{T,t}^{0,n} + \Delta t F(t^{n+1}, \underline{u}_{T,t}^{0,n+1}), \quad (3.73)$$

avec une application multivoque  $F$  qui a une croissance bornée par :

$$\|F(t^n, x)\| \leq c(t^n)(1 + \|x\|),$$

avec  $c(t^n)$  défini par :

$$c(t^n) = \frac{1}{\varepsilon} \max\left(\frac{G}{c_1}, 1\right) (\|\underline{b}_{T+}^{0,n}\| + \|S^n\| \|\mu\|_\infty).$$

Les propositions précédentes nous assurent que  $\|S^n\|$  est bornée indépendamment de  $n$  quel que soit le schéma choisi pour le contact unilatéral. De plus pour  $n < 2N_z$  on a  $\|\underline{b}_{T+}^{0,n}\| \leq B_{T_{max}}^0$  et donc  $c(t^n)$  est borné indépendamment de  $n$  et  $\Delta t$  pour  $t < 2\frac{H}{c_2}d_{min}$ . On note :

$$c_{max} = \max_{0 \leq i < 2N_z} c(t^i).$$

Alors de (3.73) on déduit que :

$$\|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1}\| \leq \|\underline{u}_{T,t}^{0,n}\| + \Delta t c_{max} (1 + \|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1}\|).$$

On se place pour  $\Delta t < \frac{1}{2c_{max}}$  et donc :

$$\begin{aligned} \|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1}\| &\leq \frac{1}{1 - \Delta t c_{max}} (\|\underline{u}_{T,t}^{0,n}\| + c_{max} \Delta t), \\ &\leq (1 + 2c_{max} \Delta t) (\|\underline{u}_{T,t}^{0,n}\| + c_{max} \Delta t). \end{aligned}$$

d'où par récurrence :

$$\|\underline{u}_{T,t}^{0,n}\| \leq (1 + 2c_{max} \Delta t)^n \|\underline{u}_{T,t}^0\| + \Delta t c_{max} \sum_{i=1}^n (1 + 2c_{max} \Delta t)^i,$$

Comme  $(1 + 2c_{max} \frac{T}{N})^N \leq e^{2Tc_{max}}$  on a :

$$\|\underline{u}_{T,t}^{0,n}\| \leq e^{\frac{4H}{c_2} d_{min} c_{max}} (\|\underline{u}_{T,t}^0\| + 2c_{max} \frac{H}{c_2} d_{min}).$$

On note  $C_1^0 = e^{\frac{4H}{c_2} d_{min} c_{max}} (\|\underline{u}_{T,t}^0\| + 2\frac{H}{c_2} c_{max} d_{min})$ , et on en déduit immédiatement :

$$\begin{aligned} \|\underline{b}_{T-}^{0,n+1}\| &\leq \|\underline{b}_{T+}^{0,n+1}\| + 2\|\underline{u}_{T,t}^{0,n}\|, \\ &\leq B_{T_{max}}^0 + 2C_1^0. \end{aligned}$$

On peut donc poursuivre par :

$$\begin{aligned} \|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{u}_{T,t}^{0,n}\| &\leq \Delta t \|F(t^n + 1, \underline{u}_{T,t}^{0,n+1})\|, \\ &\leq \Delta t c_{max} (1 + \|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1}\|), \\ &\leq \Delta t c_{max} (1 + C_1^0). \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \|\underline{b}_{T-}^{1,n+1} - \underline{b}_{T-}^{0,n+1}\| &\leq \|\underline{b}_{T-}^{1,n} + d_1(\underline{b}_{T-}^{0,n} - \underline{b}_{T-}^{1,n}) - \underline{b}_{T-}^{0,n+1}\|, \\ &\leq (1 - d_1) \|\underline{b}_{T-}^{0,n} - \underline{b}_{T-}^{1,n}\| + 2\|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} - \underline{u}_{T,t}^{0,n}\| + \|\underline{b}_{T+}^{0,n+1} - \underline{b}_{T+}^{0,n}\|, \\ &\leq (1 - d_1) dB_{T_{max}}^n + d_1 dB_{T_{max}}^0 + 2\Delta t c_{max} (1 + C_1^0). \end{aligned}$$

Comme dans la proposition 18, on en conclut par un raisonnement par récurrence que :

$$dB_{T_{max}}^n \leq 2dB_{T_{max}}^0 + 2\frac{\Delta t}{d_1} c_{max} (1 + C_1^0).$$

Et comme dans les propositions précédentes c'est suffisant pour conclure qu'on a le même type de majoration pour  $0 \leq n \leq N_t$ . ■

**Proposition 22** *S'il existe  $d_{min} > 0$  tel que  $d_{min} \leq d_2 \leq 1$  alors le schéma (SCI) (SCVIII) combiné à l'un des schéma (SCII) (SCIII) (SCIV) ou (SCV) assure les propriétés suivantes : il existe des constantes  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  qui ne dépendent que des conditions initiales telles que :*

$$\begin{aligned} B_{T_{max}}^n &\leq C_1, \\ \|\underline{u}_{T-}^{0,n}\| &\leq C_2, \\ dB_{T_{max}}^n &\leq C_3 dB_{T_{max}}^0 + \Delta t C_4. \end{aligned}$$

**Preuve :** La seule différence avec la preuve de la proposition précédente est que l'on part de :

$$\underline{u}_{T,t}^{0,n+1} \in \underline{u}_{T,t}^{0,n} + \frac{\Delta t}{2} (F(t^n, \underline{u}_{T,t}^{0,n}) + F(t^{n+1}, \underline{u}_{T,t}^{0,n+1})),$$

ce qui donne l'estimation :

$$\|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1}\| \leq \|\underline{u}_{T,t}^{0,n}\| + \frac{\Delta t}{2} c_{max} (2 + \|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1}\| + \|\underline{u}_{T,t}^{0,n}\|).$$

La preuve se poursuit de manière similaire. ■

Et en conclusion tout les schémas présentés sont stables au sens où la solution discrète est bornée dans  $L^\infty(]0, H[\times ]0, T[)$  indépendamment de  $\Delta t$ , sous la condition raisonnable qu'il existe  $d_{min} > 0$  tel que  $d_{min} \leq d_2 \leq 1$ .

### 3.5.4 Étude de la consistance des schémas

Pour étudier la consistance, on va supposer que le rapport  $\frac{\Delta t}{\Delta z}$  est constant, c'est à dire que  $N_z$  est proportionnel à  $N_t$ :

$$N_z = \frac{1}{\eta} N_t,$$

où  $\eta$  est indépendant de  $N_t$ , bien sûr en respectant la condition C.F.L. :

$$\eta \geq \frac{c_2 T}{H},$$

On note  $\underline{u}_t^{i,n,N_t}, \underline{u}_z^{i,n,N_t}$  la solution discrète donnée par l'un des schémas numériques proposés et  $\underline{u}_t^{N_t}(t, z), \underline{u}_z^{N_t}(t, z)$  les interpolées linéaires de ces solutions discrètes :

$$\begin{aligned} \underline{u}_t^{N_t}(n\Delta t + \Delta t, i\Delta z + \Delta z) &= (1 - \Delta t)((1 - \Delta z)\underline{u}_t^{i,n,N_t} + \Delta z \underline{u}^{i+1,n,N_t}) \\ &\quad + \Delta t((1 - \Delta z)\underline{u}_t^{i,n+1,N_t} + \Delta z \underline{u}^{i+1,n+1,N_t}), \end{aligned}$$

pour  $0 \leq \Delta t \leq \Delta t$  et  $0 \leq \Delta z \leq \Delta z$ . Une définition analogue étant prise pour  $\underline{u}_z^{N_t}(t, z)$ . On va montrer le résultat suivant :

**Lemme 8** Si la suite  $(\underline{u}_t^{N_t}, \underline{u}_z^{N_t})_{N_t}$  est une suite qui converge uniformément vers un couple de fonctions  $(u_t, u_z)$  et si de plus les fonctions  $\underline{u}_t$  et  $\underline{u}_z$  sont continues sur  $[0, T] \times [0, H]$  alors ces fonctions vérifient sur  $[0, T] \times [0, H]$  les relations (3.2)-(3.7) sur les droites caractéristiques.

**Preuve :** On va donner la preuve sur une seule relation et sur une seule composante, la composante verticale, la preuve étant identique sur chaque composante. on pose toujours :

$$\begin{aligned} b_{z+}(t, z) &= u_{z,t}(t, z) + c_2 u_{z,z}(t, z), \\ b_{z+}^{N_t}(t, z) &= u_{z,t}^{N_t}(t, z) + c_2 u_{z,z}^{N_t}(t, z), \\ b_{z+}^{i,n,N_t} &= u_{z,t}^{i,n,N_t} + c_2 u_{z,z}^{i,n,N_t}, \end{aligned}$$

On travaille à  $z_0, t_0, \delta_0$  fixés tels que :

$$\delta_0 \in [0, \max(T, \frac{H}{c_2})], z_0 \in [0, H - \eta \delta_0 \frac{H}{T}], t_0 \in [0, T - \delta_0],$$

On pose :

$$\begin{aligned} n_1^{N_t} &= \left\lfloor \frac{N_t t_0}{T} \right\rfloor, \quad i_2^{N_t} = \left\lfloor \frac{N_t z_0}{\eta H} \right\rfloor, \quad n_2^{N_t} = \left\lfloor \frac{N_t(t_0 + \delta_0)}{T} \right\rfloor, \\ \Delta_n^{N_t} &= n_2^{N_t} - n_1^{N_t}, \end{aligned}$$

où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ . On a bien sûr  $n_1^{N_t} \Delta t$  qui converge vers  $t_0$  lorsque  $N_t$  tend vers l'infini, et  $(n_2^{N_t} \Delta t, i_2^{N_t} \Delta z)$  qui converge vers  $(t_0 + \delta_0, z_0)$ , et par conséquent :

$$b_{z+}^{i_2^{N_t}, n_2^{N_t}, N_t} \xrightarrow{N_t \rightarrow +\infty} b_{z+}(t_0 + \delta_0, z_0),$$

D'après le schéma de Lax-Wendroff, on a :

$$\begin{aligned}
b_{z+}^{i_2^{N_t}, n_2^{N_t}, N_t} &= (1 - d_2) b_{z+}^{i_2^{N_t}, n_2^{N_t} - 1, N_t} + d_2 b_{z+}^{i_2^{N_t} + 1, n_2^{N_t} - 1, N_t}, \\
&= (1 - d_2)^2 b_{z+}^{i_2^{N_t}, n_2^{N_t} - 2, N_t} + 2(1 - d_2) d_2 b_{z+}^{i_2^{N_t} + 1, n_2^{N_t} - 2, N_t} + d_2^2 b_{z+}^{i_2^{N_t} + 2, n_2^{N_t} - 2, N_t}, \\
&= \dots \\
&= \sum_{i=0}^{\Delta_n^{N_t}} \binom{i}{\Delta_n^{N_t}} d^i (1 - d)^{\Delta_n^{N_t} - i} b_{z+}^{i_2^{N_t} + i, n_1^{N_t}, N_t}, \\
&= \sum_{i=0}^{\Delta_n^{N_t}} B_i^{\Delta_n^{N_t}} (d_2) b_{z+}^{i_2^{N_t} + i, n_1^{N_t}, N_t},
\end{aligned}$$

où  $B_i^{\Delta_n^{N_t}}$  est un polynôme de Bernstein. On écrit :

$$b_{z+}^{i_2^{N_t} + i, n_1^{N_t}, N_t} = b_{z+}(t_0, z_0 + \frac{i}{\Delta_n^{N_t}}(\eta \delta_0 \frac{H}{T})) + \left( b_{z+}^{i_2^{N_t} + i, n_1^{N_t}, N_t} - b_{z+}(t_0, z_0 + \frac{i}{\Delta_n^{N_t}}(\eta \delta_0 \frac{H}{T})) \right),$$

et donc :

$$\begin{aligned}
b_{z+}^{i_2^{N_t}, n_2^{N_t}, N_t} &= \sum_{i=0}^{\Delta_n^{N_t}} B_i^{\Delta_n^{N_t}} (d_2) b_{z+}(t_0, z_0 + \frac{i}{\Delta_n^{N_t}}(\eta \delta_0 \frac{H}{T})) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\Delta_n^{N_t}} B_i^{\Delta_n^{N_t}} (d_2) \left( b_{z+}^{i_2^{N_t} + i, n_1^{N_t}, N_t} - b_{z+}(t_0, z_0 + \frac{i}{\Delta_n^{N_t}}(\eta \delta_0 \frac{H}{T})) \right),
\end{aligned}$$

De l'approximation par les polynômes de Bernstein on sait que pour toute fonction continue  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction  $f^N = \sum_{i=0}^N B_i^N f(\frac{i}{N})$  converge uniformément vers  $f$  quand  $N$  tend vers  $+\infty$ . La fonction  $b_{z+}^{N_t}$  étant continue, l'expression :

$$\sum_{i=0}^{\Delta_n^{N_t}} B_i^{\Delta_n^{N_t}} (d_2) b_{z+}(t_0, z_0 + \frac{i}{\Delta_n^{N_t}}(\eta \delta_0 \frac{H}{T})),$$

converge vers la valeur :

$$b_{z+}(t_0, z_0 + d_2(\eta \delta_0 \frac{H}{T})) = b_{z+}(t_0, z_0 + \delta_0 c_2),$$

quand  $\Delta_n^{N_t}$  tend vers  $+\infty$ .

On va maintenant utiliser la convergence uniforme, on a :

$$\forall \varepsilon, \exists N_\varepsilon > 0; \forall N_t > N_\varepsilon, \forall (t, z) \in [0, T] \times [0, H], |b_{z+}^{N_t}(t, z) - b_{z+}(t, z)| < \varepsilon.$$

En utilisant l'uniforme continuité sur  $[0, T] \times [0, H]$  de  $b_{z+}$  on a aussi :

$$\forall \varepsilon, \exists \delta_\varepsilon; \forall (t_1, x_1), \forall (t_2, x_2), d((t_1, x_1), (t_2, x_2)) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |b_{z+}(t_1, x_1) - b_{z+}(t_2, x_2)| < \varepsilon.$$

D'autre part comme :

$$|t_0 - n_1^{N_t} \Delta t| \leq \Delta t,$$

et :

$$\begin{aligned} |(i_2^{N_t} + i)\Delta z - z_0 + \frac{i}{\Delta^{N_t}}(\eta\delta_0 \frac{H}{T})| &\leq \Delta z + \Delta z \frac{i}{\Delta^{N_t}} \left( \left| \frac{t_0}{\Delta t} - \left\lfloor \frac{t_0}{\Delta t} \right\rfloor + \frac{\delta_0}{\Delta t} \right| - \frac{\delta_0}{\Delta t} \right), \\ &\leq 3\Delta z, \end{aligned}$$

on a aussi :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon, \exists N_\varepsilon > 0; \forall N_t > N_\varepsilon, \quad &|b_{z_+}^{N_t}(n_1^{N_t} \Delta t, (i_2^{N_t} + i)\Delta z) - b_{z_+}(n_1^{N_t} \Delta t, (i_2^{N_t} + i)\Delta z)| < \varepsilon, \\ &|b_{z_+}(n_1^{N_t} \Delta t, (i_2^{N_t} + i)\Delta z) - b_{z_+}(t_0, z_0 + \delta_0 c_2)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

et donc :

$$\forall \varepsilon, \exists N_\varepsilon > 0; \forall N_t > N_\varepsilon, \quad |b_{z_+}^{N_t}(n_1^{N_t} \Delta t, (i_2^{N_t} + i)\Delta z) - b_{z_+}(t_0, z_0 + \delta_0 c_2)| < 2\varepsilon.$$

et donc l'expression :

$$\sum_{i=0}^{\Delta_n^{N_t}} B_i^{\Delta_n^{N_t}}(d_2) \left( b_{z_+}^{N_t}(n_1^{N_t} \Delta t, (i_2^{N_t} + i)\Delta z) - b_{z_+}(t_0, z_0 + \frac{i}{\Delta^{N_t}}(\eta\delta_0 \frac{H}{T})) \right),$$

converge vers zéro lorsque  $N_t$  tend vers  $+\infty$ .

On vient de montrer que la relation :

$$b_{z_+}(t_0 + \delta_0, z_0) = b_{z_+}(t_0, z_0 + c_2 \delta_0), \quad (3.74)$$

est vérifiée pour tout  $\delta_0 \in [0, \max(T, \frac{H}{c_2})]$ , et pour tout couple  $(t_0, z_0)$  vérifiant :

$$z_0 \in [0, H - \eta\delta_0 \frac{H}{T}], \quad t_0 \in [0, T - \delta_0].$$

C'est a priori insuffisant car on veut prouver cette relation pour tout couple  $(t_0, z_0)$  vérifiant :

$$z_0 \in [0, H - c_2 \delta_0], \quad t_0 \in [0, T - \delta_0].$$

Mais on peut scinder l'égalité (3.74) en deux parties :

$$\begin{aligned} b_{z_+}(t_0 + \frac{\delta_0}{2}, z_0 + c_2 \frac{\delta_0}{2}) &= b_{z_+}(t_0, z_0 + c_2 \frac{\delta_0}{2}), \\ b_{z_+}(t_0 + \delta_0, z_0) &= b_{z_+}(t_0 + \frac{\delta_0}{2}, z_0 + c_2 \frac{\delta_0}{2}). \end{aligned}$$

Qui sont des relations que l'on a montrées pour :

$$z_0 \in [0, H - c_2 \frac{\delta_0}{2} - \eta \frac{\delta_0}{2} \frac{H}{T}].$$

En poursuivant ce raisonnement on arrive à montrer que la relation (3.74) est vérifiée pour :

$$z_0 \in [0, H - c_2 \frac{\delta_0}{2}[.$$

Et comme la fonction  $b_{z+}$  est continue, par passage à la limite, elle est encore vraie pour :

$$z_0 \in [0, H - c_2 \frac{\delta_0}{2}].$$

■

Ce résultat va nous permettre d'étudier la convergence de certains schémas. Le lemme 6 prend comme hypothèse que la solution limite  $\underline{u}_i(t, x)$  et  $\underline{u}_z(t, x)$  est continue sur  $[0, T] \times [0, H]$ . On ne peut donc appliquer ce résultat que pour les problèmes régularisés, c'est à dire pour une condition de contact régularisée et pour une condition de frottement perturbée.

Pour simplifier, on ne va donner de résultats que pour les schémas construits à partir du schéma d'Euler implicite, bien qu'ils s'étendent facilement aux schémas construits à partir du schéma d'Adams-Moulton.

**Proposition 23** *Si les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

- la condition initiale  $\underline{u}_0$  est dérivable à dérivée lipschitzienne,
- la condition initiale  $\underline{u}_1$  est lipschitzienne,
- le rapport  $\eta = \frac{N_t}{N_z}$  est constant et respecte la condition :

$$\eta \geq \frac{c_2 T}{H},$$

alors le schéma (SCI)(SCIV)(SCVII) est convergent.

**Preuve :**

Soit toujours  $\underline{u}_t^{N_t}(t, z)$ ,  $\underline{u}_z^{N_t}(t, z)$  les interpolées linéaires de la solution discrète calculée par le schéma (SCI)(SCIV)(SCVII). D'après les proposition 18 et 21 ces fonctions sont bornées dans  $(L^\infty([0, T] \times [0, H]))^3$  indépendamment de  $N_t$  et de plus il existe des constantes  $C_3$  et  $C_4$  qui ne dépendent que des conditions initiales telles que :

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq i \leq N_z - 1} (\|\underline{u}_t^{i+1, n, N_t} - \underline{u}_t^{i, n, N_t}\|, \|\mathbf{C}\underline{u}_z^{i+1, n, N_t} - \mathbf{C}\underline{u}_z^{i, n, N_t}\|) \\ & < C_3 \max_{0 \leq i \leq N_z - 1} (\|\underline{u}_1((i+1)\Delta t) - \underline{u}_1(i\Delta t)\|, \|\mathbf{C}\partial_z \underline{u}_0((i+1)\Delta t) - \mathbf{C}\partial_z \underline{u}_0(i\Delta t)\|) + C_4 \Delta t. \end{aligned}$$

Comme on a supposé que  $\underline{u}_0$  est dérivable à dérivée lipschitzienne et que  $\underline{u}_1$  est lipschitzienne, on en conclut que  $\underline{u}_t^{N_t}$  et  $\underline{u}_z^{N_t}$  sont bornées dans  $(W^{1, \infty}([0, T] \times [0, H]))^3$  indépendamment de  $N_t$ .

D'après le théorème de Rellich-Kondrachov (voir [1] par exemple) l'espace  $W^{1,\infty}([0, T] \times [0, H])$  est inclus de manière compacte dans l'espace  $\mathcal{C}([0, T] \times [0, H])$  des fonctions continues sur  $[0, T] \times [0, H]$ . Donc de la suite  $(\underline{u}_t^{N_t}, \underline{u}_z^{N_t})_{N_t}$  on peut extraire une sous-suite  $(\underline{u}_t^{N_t}, \underline{u}_z^{N_t})_{N_t}$  qui converge uniformément vers un couple de fonctions continues  $(\underline{u}_b, \underline{u}_z)$ .

Par application du lemme 8, on sait que  $\underline{u}_t(t, z)$  et  $\underline{u}_z(t, z)$  satisfont aux relations (3.2)-(3.7) sur les droites caractéristiques. En particulier pour  $t < \frac{H}{c_2}$ , on a :

$$\begin{aligned} b_{x+}(t, 0) &= u_{x1}(c_1 t) + c_1 \partial_z u_{x0}(c_1 t), \\ b_{y+}(t, 0) &= u_{y1}(c_1 t) + c_1 \partial_z u_{y0}(c_1 t), \\ b_{z+}(t, 0) &= u_{z1}(c_2 t) + c_2 \partial_z u_{z0}(c_2 t). \end{aligned}$$

et du fait de la convergence uniforme, les fonctions  $b_{x+}^{N_t}(\cdot, 0)$ ,  $b_{y+}^{N_t}(\cdot, 0)$  et  $b_{z+}^{N_t}(\cdot, 0)$  convergent uniformément vers les valeurs respectives  $u_{x1}(c_1 t) + c_1 \partial_z u_{x0}(c_1 t)$ ,  $u_{y1}(c_1 t) + c_1 \partial_z u_{y0}(c_1 t)$  et  $u_{z1}(c_2 t) + c_2 \partial_z u_{z0}(c_2 t)$ .

L'expression du schéma d'Euler implicite est :

$$\begin{aligned} u_z^{0,n+1,N_t} &= (u_z^{0,n,N_t} + \Delta t b_{z+}^{0,n+1,N_t})_+ + \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\tilde{\eta}}} (u_z^{0,n,N_t} + \Delta t b_{z+}^{0,n+1,N_t})_-, \\ S^{n+1,N_t} &= -\frac{\lambda + 2G}{c_2} (b_{z+}^{0,n+1,N_t} - u_{z,t}^{0,n+1,N_t}), \\ \underline{u}_{T,t}^{0,n+1,N_t} &\in \underline{u}_{T,t}^{0,n,N_t} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left( \frac{G}{c_1} (b_{T+}^{0,n+1,N_t} - \underline{u}_{T,t}^{0,n+1,N_t}) \right. \\ &\quad \left. - S^{n+1,N_t} \mu(\|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1,N_t} - \underline{V}_e(t^{n+1})\|) \text{Dir}(\underline{u}_{T,t}^{0,n+1,N_t} - \underline{V}_e(t^{n+1})) \right), \end{aligned}$$

qui peut se récrire comme suit :

$$\begin{aligned} u_z^{0,n+1,N_t} &= (u_z^{0,n,N_t} + \Delta t b_{z+}(t^{n+1}, 0))_+ + \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\tilde{\eta}}} (u_z^{0,n,N_t} + \Delta t b_{z+}(t^{n+1}, 0))_- + \epsilon_z^{n+1,N_t}, \\ S^{n+1,N_t} &= -\frac{\lambda + 2G}{c_2} (b_{z+}(t^{n+1}, 0) - u_{z,t}^{0,n+1,N_t}), \\ \underline{u}_{T,t}^{0,n+1,N_t} &\in \underline{u}_{T,t}^{0,n,N_t} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left( \frac{G}{c_1} (b_{T+}(t^{n+1}, 0) - \underline{u}_{T,t}^{0,n+1,N_t}) \right. \\ &\quad \left. - S^{n+1,N_t} \mu(\|\underline{u}_{T,t}^{0,n+1,N_t} - \underline{V}_e(t^{n+1})\|) \text{Dir}(\underline{u}_{T,t}^{0,n+1,N_t} - \underline{V}_e(t^{n+1})) \right) + \epsilon_T^{n+1,N_t}, \end{aligned}$$

Ce schéma est un schéma d'Euler implicite pour le problèmes de Cauchy correspondant à l'équation différentielle (3.14) et au problème de Cauchy (3.23). D'après le théorème 5 ce schéma est convergent si les valeurs de  $\epsilon_z^{n+1,N_t}$ , et  $\epsilon_T^{n+1,N_t}$  vérifient :

$$\lim_{N_t \rightarrow \infty} \left[ \max_{1 \leq j \leq N} (\|\epsilon_T^{n,N_t}\|, |\epsilon_z^{n,N_t}|) \right] = 0,$$

ce qui est le cas car on peut donner les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} |\epsilon_z^{n,N'_t}| &\leq \left( \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\tilde{\eta}}} \right) |b_{z+}(t^{n+1}, 0) - b_{z+}^{0,n+1,N'_t}|, \\ &\leq 2\Delta t |b_{z+}(t^{n+1}, 0) - b_{z+}^{0,n+1,N'_t}|, \\ \|\epsilon_T^{n,N'_t}\| &\leq \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left( \frac{G}{c_1} + \frac{\lambda + 2G}{c_2} \|\mu\|_\infty \right) \|b_{T+}(t^{n+1}, 0) - b_{T+}^{0,n+1,N'_t}\|, \end{aligned}$$

et on sait que les fonctions  $b_{T+}^{N'_t}(\cdot, 0)$  et  $b_{z+}^{N'_t}(\cdot, 0)$  convergent uniformément respectivement vers  $b_{T+}(\cdot, 0)$  et  $b_{z+}(\cdot, 0)$ .

On peut donc en conclure que pour  $t \in [0, \frac{H}{c_2}]$  la fonction  $u(t, 0)_{z,t}$  est la dérivée par rapport au temps de l'unique solution du problème de Cauchy associé à l'équation différentielle (3.14) et la fonction  $u(t, 0)_{T,t}$  est l'unique solution de (3.23). Le lemme (8) assure par ailleurs que les fonctions  $\underline{u}_t(t, z)$  et  $\underline{u}_z(t, z)$  satisfont aux relations (3.2)-(3.7) sur les droites caractéristiques. Par unicité de cette solution, on en conclut que toutes les sous-suites uniformément convergentes de la suite  $(\underline{u}_t^{N'_t}, \underline{u}_z^{N'_t})_{N'_t}$  converge vers  $(\underline{u}_t, \underline{u}_z)$ , ce qui est suffisant pour dire que toute la suite  $(\underline{u}_t^{N'_t}, \underline{u}_z^{N'_t})_{N'_t}$  converge uniformément vers  $(\underline{u}_t, \underline{u}_z)$ . ■

### 3.6 Expériences numériques

Nous présentons maintenant quelques expériences numériques sur le problème unidimensionnel. Le schéma numérique utilisé est le schéma (SCI) (SCIII) (SCVIII). Les paramètres du matériau correspondent à ceux d'une petite pièce métallique ( $\lambda = 107 \times 10^9 Pa$ ,  $G = 77 \times 10^9 Pa$ ,  $\rho = 7800 Kg/m^3$ ) de hauteur  $5cm$ .

#### 3.6.1 Essai numérique de convergence

On teste ici la stabilité et la convergence du schéma (SCI) (SCIII) (SCVIII) sur un exemple. La convergence de ce schéma n'a pas été montrée théoriquement. Pour avoir un test complet, on prend un cas où la pression de contact varie et où il y a des événements de décollement de la structure, c'est à dire des moments où le contact est rompu. Le paramètre de perturbation de la condition de frottement est fixé à une valeur constante ( $\varepsilon = 10.0$ ).

On fait le calcul pour des valeurs différentes de  $\Delta t$  et  $\Delta z$  avec un rapport  $\frac{\Delta t}{\Delta z}$  constant et inférieur à la condition C.F.L. indiquée précédemment.

Dans le tableau suivant on résume les valeurs de  $\Delta t$  et  $\Delta z$  utilisées ainsi que les écarts maximaux respectifs de la vitesse tangentielle et du déplacement normal entre deux résultats numériques successifs.

Expérience	$\Delta t$	$\Delta z$	$\ v_x^n - v_x^{n-1}\ _\infty$	$\ u_z^n - u_z^{n-1}\ _\infty$
1	$10^{-7}$	$10^{-4}$		
2	$4 \times 10^{-8}$	$4 \times 10^{-5}$	0.3678	$2.5342 \times 10^{-6}$
3	$10^{-8}$	$10^{-5}$	0.1277	$9.2298 \times 10^{-7}$
4	$4 \times 10^{-9}$	$4 \times 10^{-6}$	0.0905	$7.1579 \times 10^{-7}$
5	$10^{-9}$	$10^{-6}$	0.0237	$2.8334 \times 10^{-7}$

Les écarts maximaux en pression de contact ne sont pas donnés car, dans le cas qui est calculé, la solution du problème initial n'est pas continue en pression de contact, et il ne peut donc pas y avoir de convergence uniforme. Les figures 3.11, 3.12 et 3.13 montrent respectivement la pression de contact, la vitesse tangentielle et le déplacement normal des différentes solution calculées.

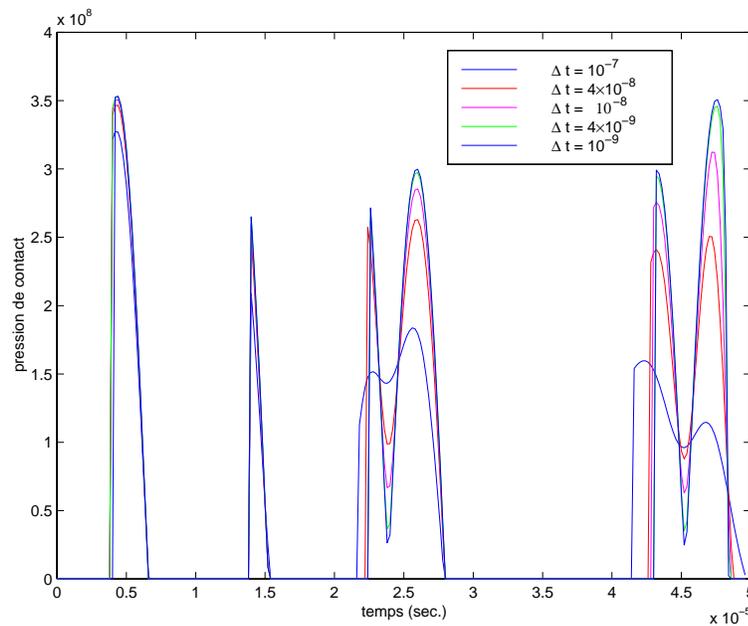


FIG. 3.11 – Pression de contact en fonction du temps.

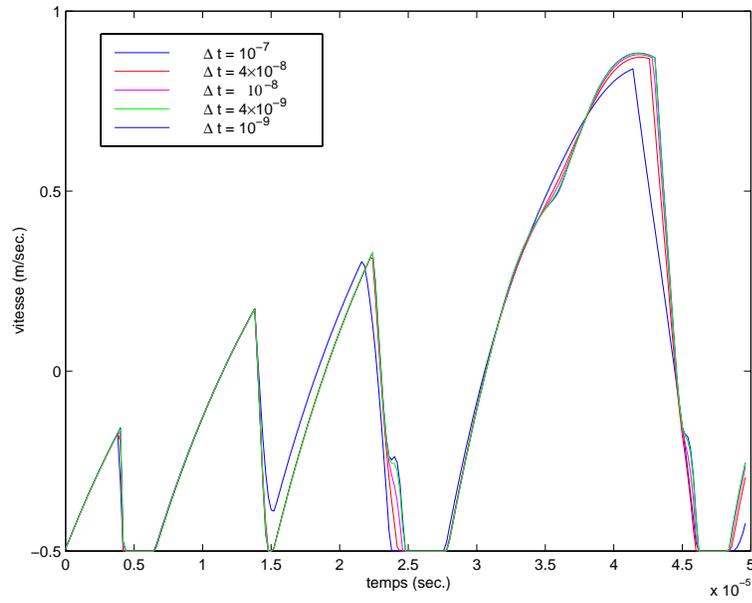


FIG. 3.12 – Vitesse tangentielle au point de contact en fonction du temps.

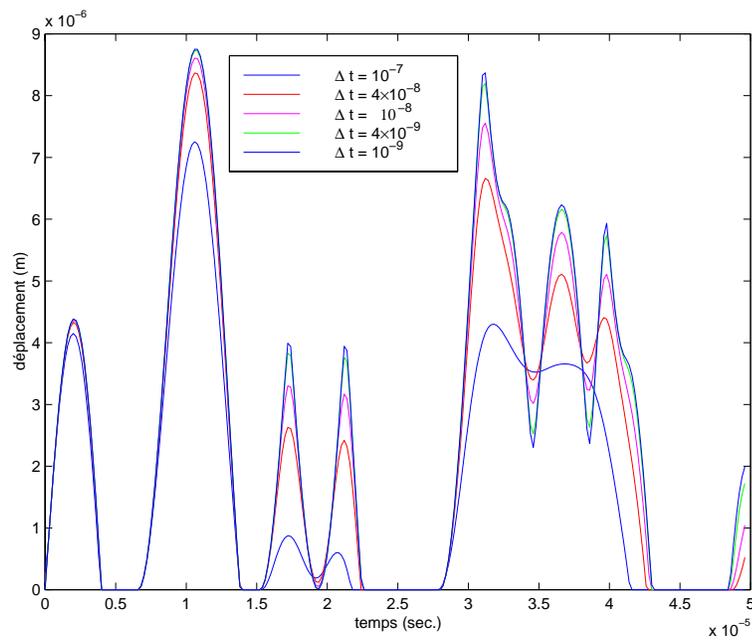


FIG. 3.13 – Déplacement normal au point de contact en fonction du temps.

### 3.6.2 Comportement lorsque $\varepsilon$ diminue

Pour être dans un cadre plus large que celui du théorème 6 on choisit une condition initiale telle que le déplacement vertical n'est pas constant en temps. On la choisit telle que la pression de contact oscille de manière sinusoïdale. La solution en déplacement vertical étant indépendante du coefficient de perturbation  $\varepsilon$ , on donne, sur la figure 3.14 le résultat de la simulation pour la pression de contact au cours du temps. Les calculs ont été effectués avec un nombre de pas en espace constant  $N_z = 200$  et un pas de temps constant tel que l'on soit proche de la condition C.F.L. correspondant aux ondes de compression ( $\Delta t = 2 \times 10^{-8} \text{sec.}$ ). Le léger affaiblissement de l'amplitude des oscillations en pression de contact est dû à la dissipativité du schéma de Lax-Wendroff.

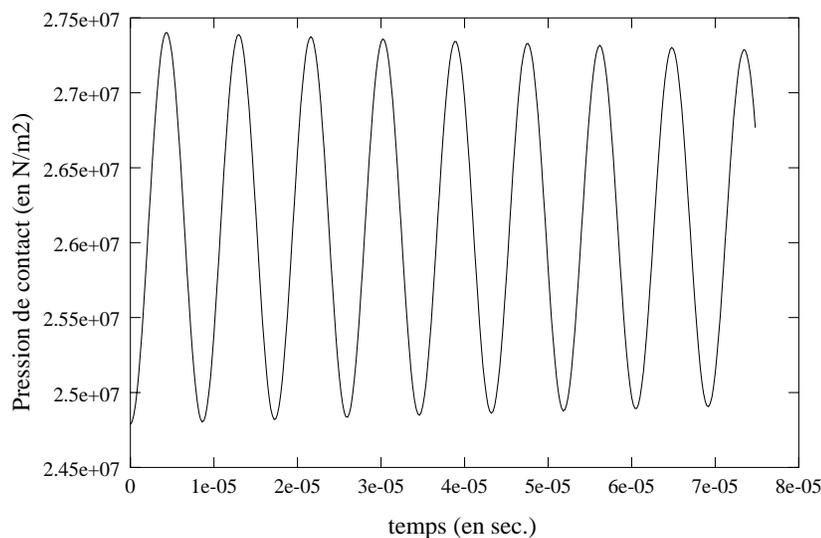


FIG. 3.14 – *Pression de contact en fonction du temps.*

La figure 3.15 représente une série de simulations pour des valeurs du paramètre de perturbation  $\varepsilon$  qui diminuent. Le coefficient de frottement utilisé est toujours celui donné par (1.8) du chapitre 1. Dans chaque graphique, la courbe en pointillé représente la solution du problème non perturbé sélectionnée par le critère de retard maximal. Numériquement, on constate un phénomène de convergence, quand  $\varepsilon$  diminue. Ce qui semble indiquer que le résultat du théorème 6 peut être étendu à des cas où la pression de contact varie au cours du temps.

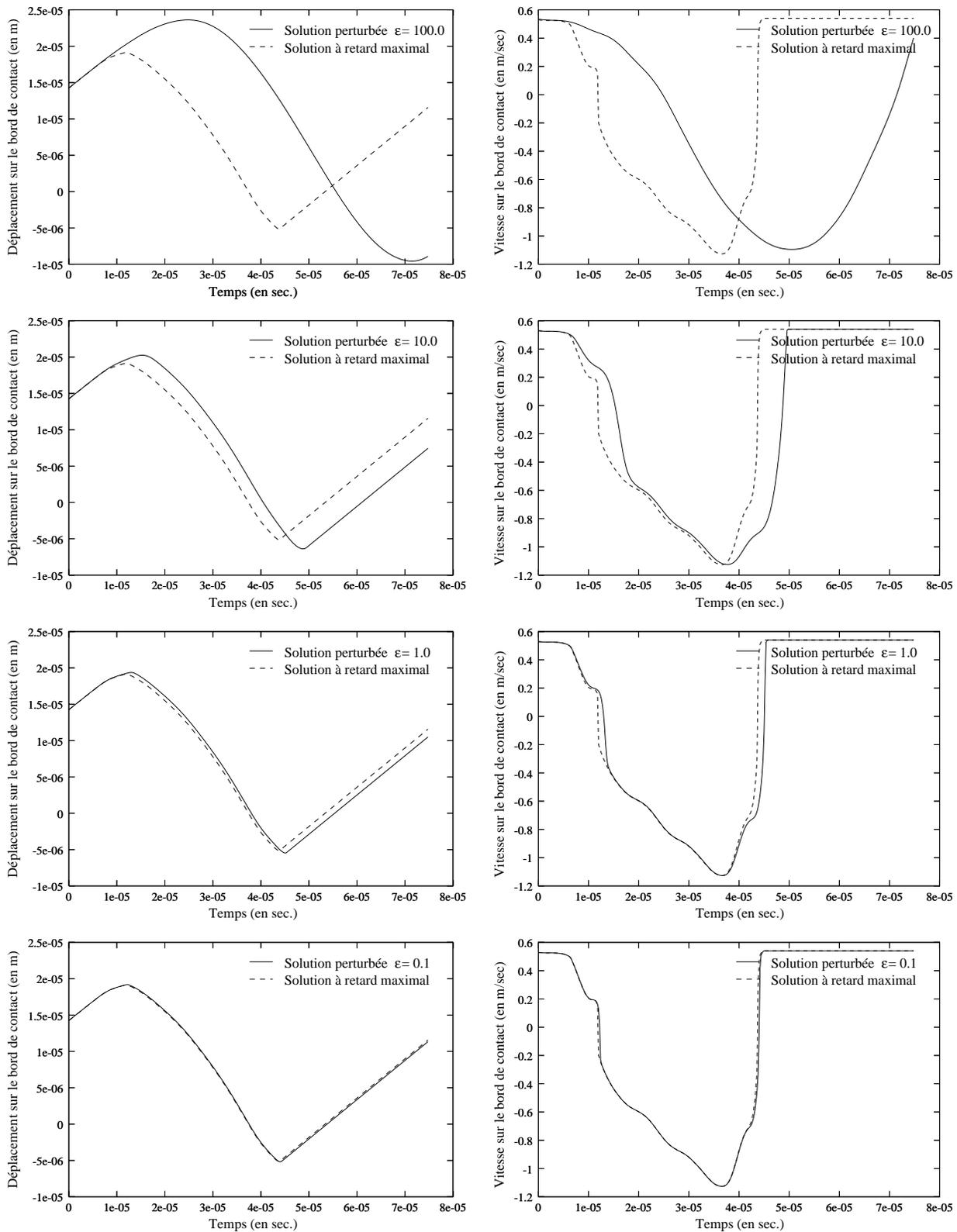


FIG. 3.15 – Déplacement et vitesse sur le bord de contact pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ .

### 3.6.3 Comportement global pour un coefficient de frottement variable

On choisit maintenant un paramètre de perturbation petit ( $\varepsilon = 0.1$ ) et une pression de contact constante, toujours avec le coefficient de frottement donné par la formule (1.8). Le nombre de pas d'espace est toujours  $N_z = 200$  et le pas de temps  $\Delta t = 2 \times 10^{-8} \text{sec}$ .

Les figures 3.16 et 3.17 représentent respectivement le déplacement et la vitesse sur le bord de contact en fonction du temps. On voit que dans les premiers temps de simulation, la solution a un comportement chaotique, avant de se caler sur une solution périodique. Les figures 3.18, 3.19 et 3.20 représentent des détails pour des intervalles de temps plus petits. La figure 3.18 présente le comportement chaotique du système en début de simulation. La figure 3.19 présente un stade intermédiaire où le système s'approche d'une solution périodique, et la figure 3.20 un stade où la solution est quasiment périodique. Le troisième graphique des figures 3.19 et 3.20 est un portrait de phase (vitesse en fonction du déplacement du point de contact) qui illustre cette approche d'une solution périodique.

On peut comparer ces résultats à ceux présentés au chapitre 2 sur le système à une seule masselotte. Une des différences est la régularité de la vitesse. Dans le cas continu qui est présenté ici, le système non perturbé admet des sauts en vitesse (on peut voir dans [11] une étude qualitative des différences entre ces deux systèmes).

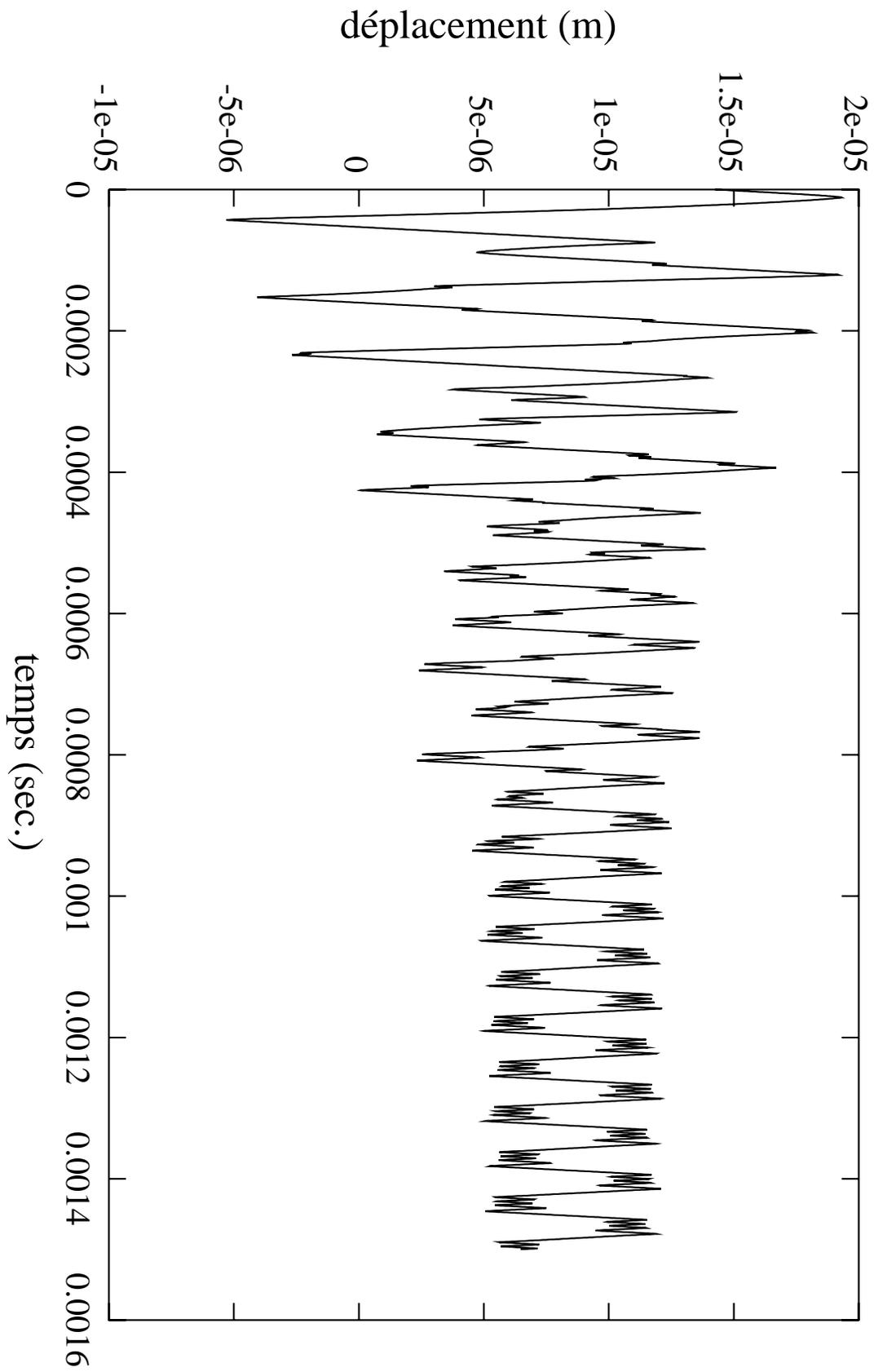


FIG. 3.16 – Déplacement au point de contact en fonction du temps.

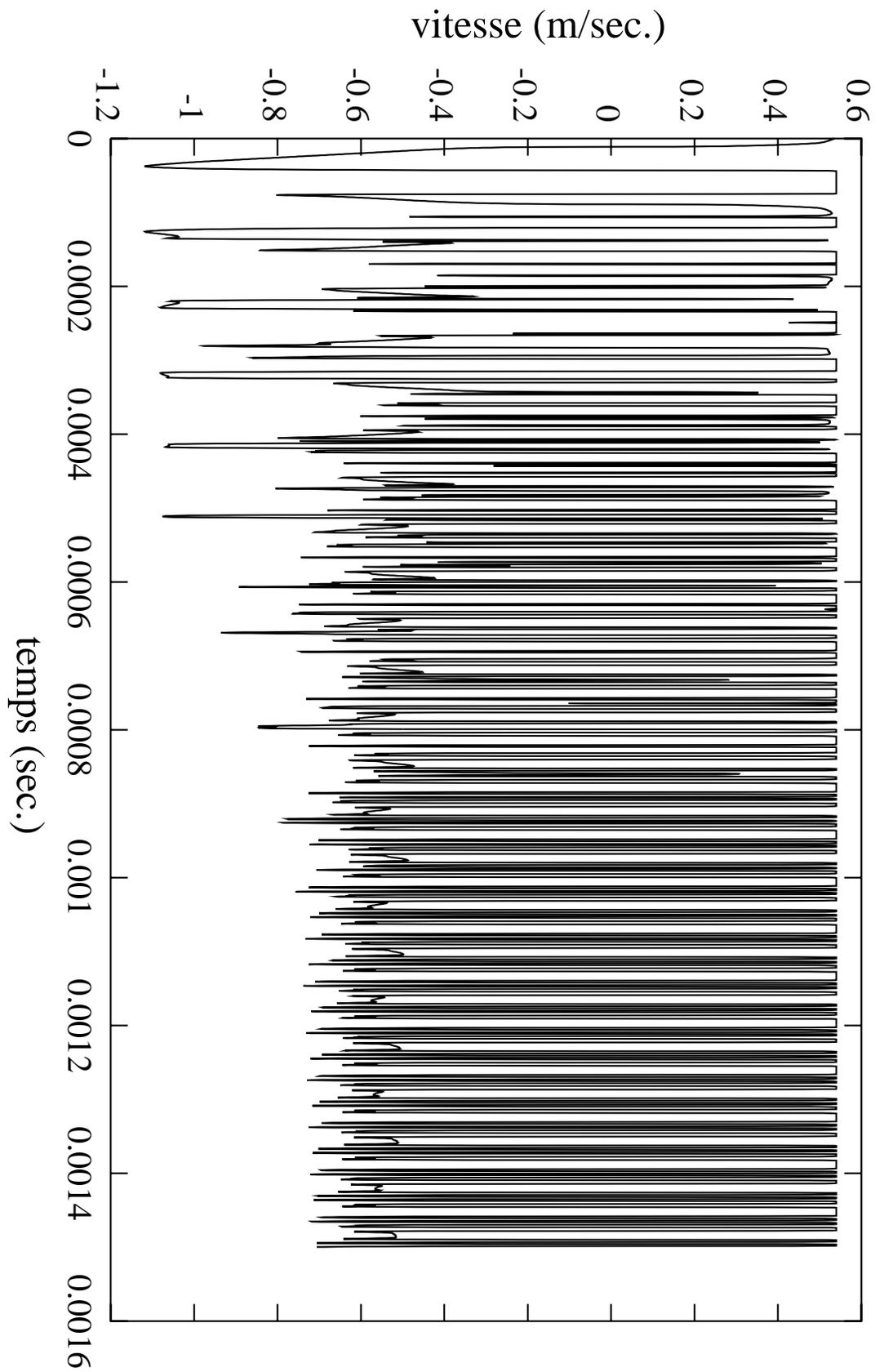
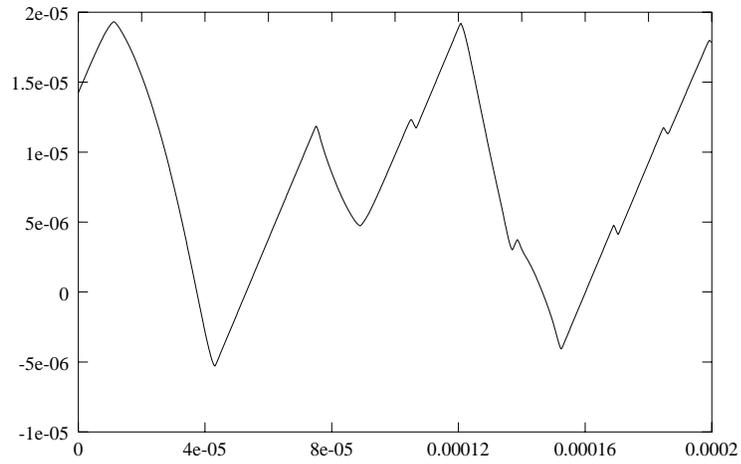
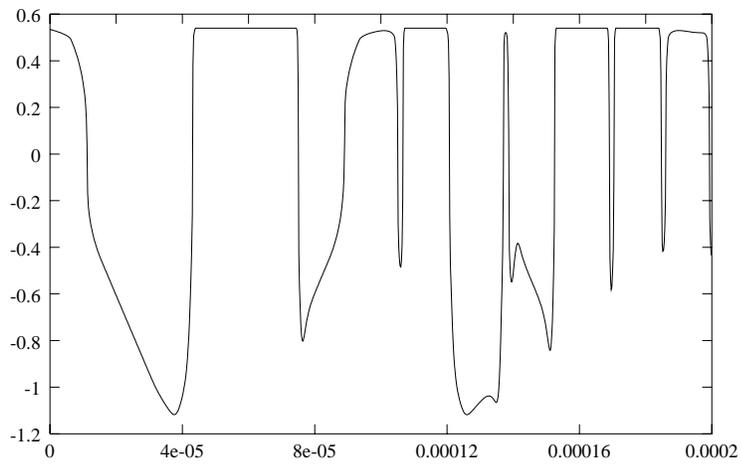


FIG. 3.17 – Vitesse au point de contact en fonction du temps.

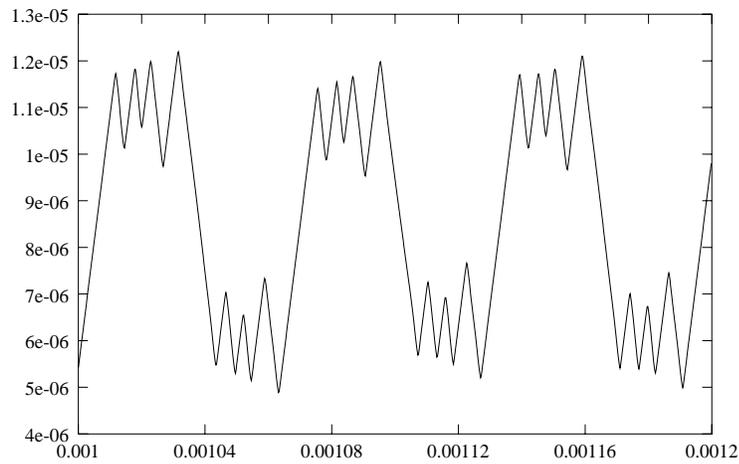


Déplacement en fonction du temps.

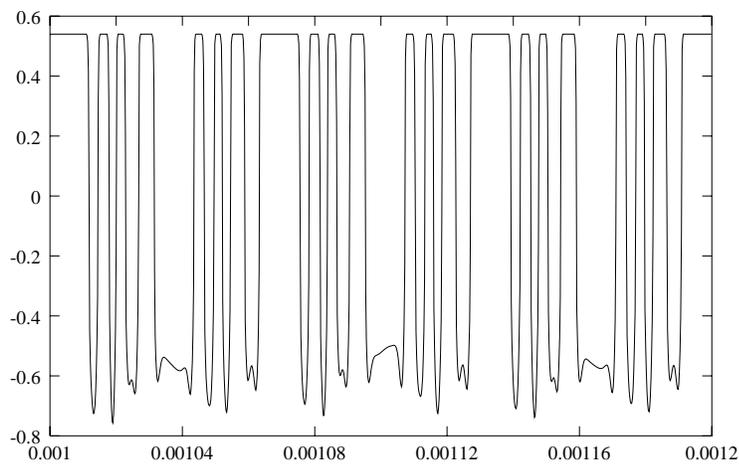


Vitesse en fonction du temps.

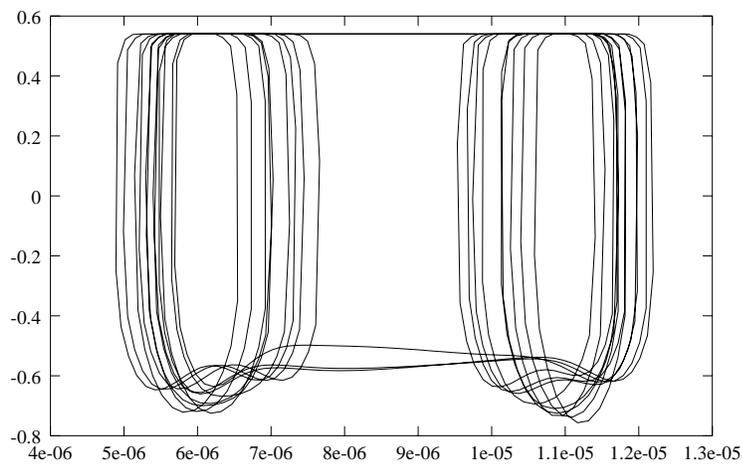
FIG. 3.18 – Déplacement et vitesse au point de contact pour  $t$  compris entre 0sec. et 0,0002sec.



Déplacement en fonction du temps.

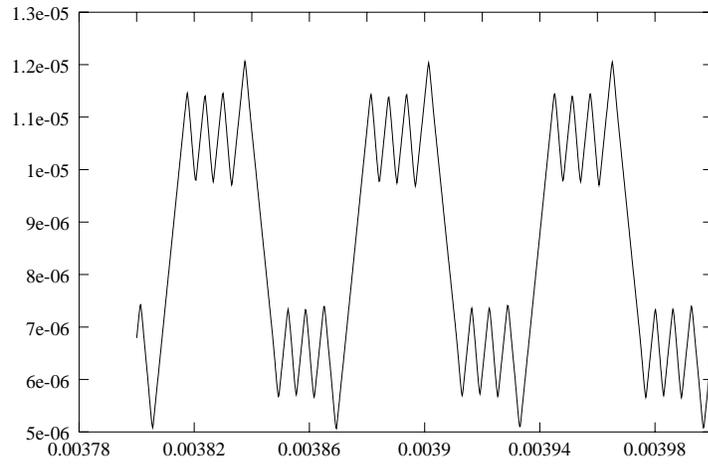


Vitesse en fonction du temps.

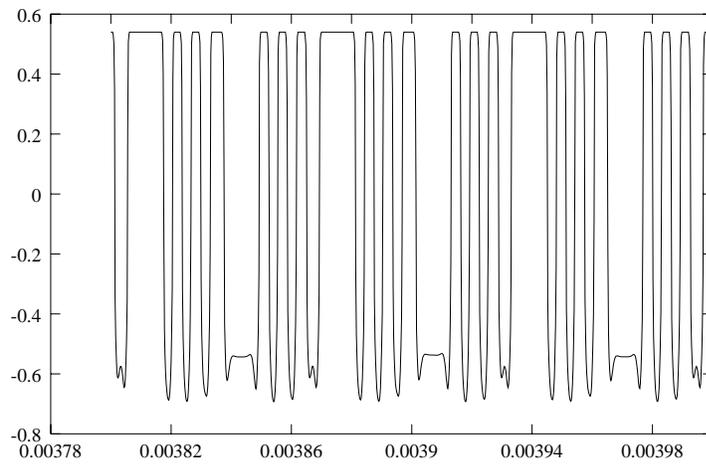


Vitesse en fonction du déplacement.

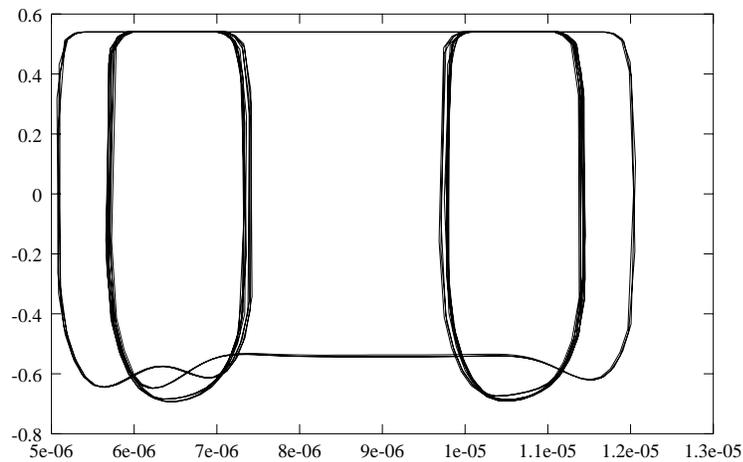
FIG. 3.19 – Déplacement et vitesse au point de contact pour  $t$  compris entre 0,001sec. et 0,0012sec..



Déplacement en fonction du temps.



Vitesse en fonction du temps.



Vitesse en fonction du déplacement.

FIG. 3.20 – Déplacement et vitesse au point de contact pour  $t$  compris entre  $0,0038\text{sec.}$  et  $0,004\text{sec.}$ .

### 3.6.4 Comparaison avec le même système et un coefficient de frottement constant

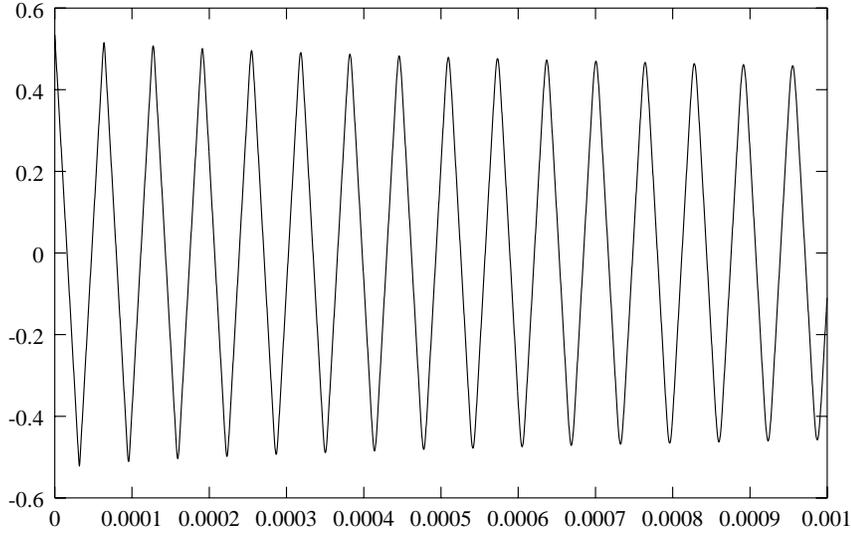


FIG. 3.21 – Expérience avec  $\mu$  constant égal à 0.8, vitesse sur le bord de contact en fonction du temps

La figure 3.21 présente le résultat de simulation pour la même expérience numérique que la précédente, mais avec un coefficient de frottement constant. On constate que le système se cale sur une solution périodique dès le départ, qui ne présente pas d'événement de recollage. L'amortissement qui est visible est principalement dû à la dissipativité du schéma de Lax-Wendroff. En fait dans ce cas on peut faire le calcul explicite de la solution du système non perturbé ( $\varepsilon = 0$ ). De l'inclusion (3.15) et puisqu'il n'y a pas d'événement de recollage, on a :

$$b_{x+}(t, 0) = u_{x,t}(t, 0) - \frac{Sc_1}{G}\mu,$$

donc :

$$u_{x,z}(t, 0) = -\frac{S}{G}\mu.$$

Soit une valeur constante de  $u_{x,z}(t, 0)$ . Mais pour  $t > 2\frac{H}{c_1}$  on a par les relations sur les droites caractéristiques et par la condition de Dirichlet :

$$b_{x+}(t, 0) = b_{x+}(t - \frac{H}{c_1}, H) = -b_{x-}(t - \frac{H}{c_1}, H) = -b_{x-}(t - 2\frac{H}{c_1}, 0),$$

et donc :

$$\begin{aligned} u_{x,t}(t, 0) &= b_{x+}(t, 0) - c_1 u_{x,z}(t, 0), \\ &= -b_{x-}(t - 2\frac{H}{c_1}, 0) - c_1 u_{x,z}(t, 0), \\ &= -u_{x,t}(t - 2\frac{H}{c_1}, 0) + c_1 u_{x,z}(t - 2\frac{H}{c_1}, 0) - c_1 u_{x,z}(t, 0), \\ &= -u_{x,t}(t - 2\frac{H}{c_1}, 0). \end{aligned}$$

d'où une périodicité de période  $4\frac{H}{c_1}$ . Dans la simulation présentée, la valeur de  $4\frac{H}{c_1}$  est approximativement égale à  $6,38 \times 10^{-5} \text{sec}$ . On peut vérifier approximativement cette valeur sur la figure 3.21. Là aussi le comportement du système est très similaire à celui du système à une seule masselotte présenté au chapitre 2. De plus on remarque que le régime périodique de la simulation avec coefficient de frottement variable du paragraphe précédent a sensiblement la même période.

## Chapitre 4

# Perspectives pour le Problème de frottement continu multi-dimensionnel

### Introduction

Dans ce chapitre nous présentons un schéma numérique basé sur une décomposition suivant les directions alternées et la perturbation par masse de surface introduite au chapitre 3. Nous n'avons pas de résultats de stabilité ou de consistance pour ce schéma. Ce travail représente une première approche du problème, pour saisir le comportement des instabilités dans un problème multidimensionnel.

### 4.1 Schéma de directions alternées sur le problème tridimensionnel

Nous proposons un schéma numérique qui s'inspire de la méthode de décomposition suivant les direction alternées. Cette méthode est un cas particulier de la méthode de décomposition des opérateurs (splitting). Rappelons brièvement ce qu'est une méthode de splitting dans un cas linéaire. Soit  $A$  et  $B$  deux opérateurs linéaires sur un espace de Banach  $F$ . On s'intéresse à la résolution approchée du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + Au + Bu = 0, & t \in ]0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Si on veut approcher  $u$  par  $u^n$  au temps  $t_n = n\Delta t$ . Pour calculer  $u^{n+1}$ , on résout dans un premier temps le problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = 0, & t \in ]t^n, t^{n+1}], \\ u(t^n) = u^n. \end{cases} \quad (4.2)$$

qui donne  $u^{n,1} = u(t^{n+1}) = e^{-\Delta t A} u^n$ , puis dans un deuxième temps on résout le problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + Bu = 0, & t \in ]t^n, t^{n+1}], \\ u(t^n) = u^{n,1}. \end{cases} \quad (4.3)$$

qui donne  $u^{n+1} = u(t^{n+1}) = e^{-\Delta t B} e^{-\Delta t A} u^n$ . On peut montrer que cela donne une méthode convergente d'ordre 1 (voir [33] par exemple à ce sujet).

Dans le même cadre, on peut construire une méthode convergente d'ordre deux, construite à partir des trois étapes suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = 0, & t \in ]t^n, t^n + \frac{\Delta t}{2}], \\ u(t^n) = u^n. \end{cases} \quad (4.4)$$

qui donne  $u^{n,1} = u(t^n + \frac{\Delta t}{2}) = e^{-\frac{\Delta t}{2} A} u^n$ , puis dans un deuxième temps on résout le problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + Bu = 0, & t \in ]t^n, t^{n+1}], \\ u(t^n) = u^{n,1}. \end{cases} \quad (4.5)$$

qui donne  $u^{n,2} = u(t^{n+1}) = e^{-\Delta t B} e^{-\frac{\Delta t}{2} A} u^n$ , puis dans un troisième temps on résout le problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = 0, & t \in ]t^n + \frac{\Delta t}{2}, t^{n+1}], \\ u(t^n) = u^{n,2}. \end{cases} \quad (4.6)$$

qui donne  $u^{n+1} = u(t^{n+1}) = e^{-\frac{\Delta t}{2} A} e^{-\Delta t B} e^{-\frac{\Delta t}{2} A} u^n$ .

En ce qui concerne le problème modèle (1.1) (1.2) (1.5) (1.6) (1.7) du chapitre 1, la première étape est de mettre ce problème sous la forme d'un problème du premier ordre en temps. Pour cela on considère les variables  $\underline{u}_x, \underline{u}_y, \underline{u}_z, \underline{u}_t$ . Le problème se réécrit de la manière suivante dans  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \rho \partial_t u_{x,t} &= (\lambda + 2G) \partial_x u_{x,x} + (\lambda + G) (\partial_x u_{y,y} + \partial_x u_{z,z}) + G \partial_y u_{x,y} + G \partial_z u_{x,z}, \\ \rho \partial_t u_{y,t} &= (\lambda + 2G) \partial_y u_{y,y} + (\lambda + G) (\partial_y u_{x,x} + \partial_y u_{z,z}) + G \partial_x u_{y,x} + G \partial_z u_{y,z}, \\ \rho \partial_t u_{z,t} &= (\lambda + 2G) \partial_z u_{z,z} + (\lambda + G) (\partial_z u_{x,x} + \partial_z u_{y,y}) + G \partial_x u_{z,x} + G \partial_y u_{z,y}, \\ \partial_t \underline{u}_x &= \partial_x \underline{u}_t, \quad \partial_t \underline{u}_y = \partial_y \underline{u}_t, \quad \partial_t \underline{u}_z = \partial_z \underline{u}_t. \end{aligned} \quad (4.7)$$

La condition de Dirichlet sur le haut de la structure :

$$\underline{u}_t(t, x, y, H) = 0. \quad (4.8)$$

Sur les bords latéraux, une condition périodique s'exprime par :

$$\begin{aligned} \underline{u}_t(t, 0, y, z) &= \underline{u}_t(t, L_x, y, z), \\ \begin{pmatrix} (\lambda + 2G) u_{x,x} + \lambda(u_{y,y} + u_{z,z}) \\ G(u_{x,y} + u_{y,x}) \\ G(u_{x,z} + u_{z,x}) \end{pmatrix} (t, 0, y, z) &= \begin{pmatrix} (\lambda + 2G) u_{x,x} + \lambda(u_{y,y} + u_{z,z}) \\ G(u_{x,y} + u_{y,x}) \\ G(u_{x,z} + u_{z,x}) \end{pmatrix} (t, L_x, y, z), \\ \underline{u}_t(t, x, 0, z) &= \underline{u}_t(t, x, L_y, z), \\ \begin{pmatrix} G(u_{x,y} + u_{y,x}) \\ (\lambda + 2G) u_{y,y} + \lambda(u_{x,x} + u_{z,z}) \\ G(u_{y,z} + u_{z,y}) \end{pmatrix} (t, x, 0, z) &= \begin{pmatrix} G(u_{x,y} + u_{y,x}) \\ (\lambda + 2G) u_{y,y} + \lambda(u_{x,x} + u_{z,z}) \\ G(u_{y,z} + u_{z,y}) \end{pmatrix} (t, x, L_y, z), \end{aligned} \quad (4.9)$$

et une condition de Neumann par :

$$\begin{pmatrix} (\lambda + 2G)u_{x,x} + \lambda(u_{y,y} + u_{z,z}) \\ G(u_{x,y} + u_{y,x}) \\ G(u_{x,z} + u_{z,x}) \\ G(u_{x,y} + u_{y,x}) \\ (\lambda + 2G)u_{y,y} + \lambda(u_{x,x} + u_{z,z}) \\ G(u_{y,z} + u_{z,y}) \end{pmatrix} (t, 0, y, z) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2G)u_{x,x} + \lambda(u_{y,y} + u_{z,z}) \\ G(u_{x,y} + u_{y,x}) \\ G(u_{x,z} + u_{z,x}) \\ G(u_{x,y} + u_{y,x}) \\ (\lambda + 2G)u_{y,y} + \lambda(u_{x,x} + u_{z,z}) \\ G(u_{y,z} + u_{z,y}) \end{pmatrix} (t, L_x, y, z) = 0, \\ \begin{pmatrix} (\lambda + 2G)u_{x,x} + \lambda(u_{y,y} + u_{z,z}) \\ G(u_{x,y} + u_{y,x}) \\ G(u_{x,z} + u_{z,x}) \\ G(u_{x,y} + u_{y,x}) \\ (\lambda + 2G)u_{y,y} + \lambda(u_{x,x} + u_{z,z}) \\ G(u_{y,z} + u_{z,y}) \end{pmatrix} (t, x, 0, z) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2G)u_{x,x} + \lambda(u_{y,y} + u_{z,z}) \\ G(u_{x,y} + u_{y,x}) \\ G(u_{x,z} + u_{z,x}) \\ G(u_{x,y} + u_{y,x}) \\ (\lambda + 2G)u_{y,y} + \lambda(u_{x,x} + u_{z,z}) \\ G(u_{y,z} + u_{z,y}) \end{pmatrix} (t, x, L_y, z) = 0, \quad (4.10)$$

Sur le bord de frottement on a :

$$\begin{aligned} \sigma_N &= (\lambda + 2G)u_{z,z} + \lambda(u_{x,x} + u_{y,y}), \\ \underline{\sigma}_T &= -G \begin{pmatrix} u_{x,z} + u_{z,x} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

La condition de contact unilatéral et la condition de frottement perturbée s'écrivent toujours :

$$\sigma_N \in -J_N(u_z) \quad (4.12)$$

$$\varepsilon \partial_{tt}^2 \underline{u}_T + \sigma_T \in \sigma_N \mu(|v_G|) \underline{Dir}(v_G), \quad \text{sur } \Gamma_c \times ]0, T], \quad (4.13)$$

On propose une décomposition du problème suivant les directions horizontale et verticale. Suivant les directions horizontales le sous problème est :

$$\begin{cases} \rho \partial_t u_{x,t} = (\lambda + 2G) \partial_x u_{x,x} + (\lambda + G) (\partial_x u_{y,y} + \partial_x u_{z,z}) + G \partial_y u_{x,y}, \\ \rho \partial_t u_{y,t} = (\lambda + 2G) \partial_y u_{y,y} + (\lambda + G) (\partial_y u_{x,x} + \partial_y u_{z,z}) + G \partial_x u_{y,x}, \\ \rho \partial_t u_{z,t} = G \partial_x u_{z,x} + G \partial_y u_{z,y}, \\ \partial_t \underline{u}_x = \partial_x \underline{u}_t, \quad \partial_t \underline{u}_y = \partial_y \underline{u}_t, \quad \partial_t \underline{u}_z = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

qui revient à un problème élastique plan et une équation des ondes plane auxquels il convient de rajouter les conditions aux limites sur les bords latéraux. Suivant la direction verticale le sous problème est :

$$\begin{cases} \rho \partial_t u_{x,t} = G \partial_z u_{x,z}, \\ \rho \partial_t u_{y,t} = G \partial_z u_{y,z}, \\ \rho \partial_t u_{z,t} = (\lambda + 2G) \partial_z u_{z,z} + (\lambda + G) (\partial_z u_{x,x} + \partial_z u_{y,y}), \\ \partial_t \underline{u}_x = 0, \quad \partial_t \underline{u}_y = 0, \quad \partial_t \underline{u}_z = \partial_z \underline{u}_t. \end{cases} \quad (4.15)$$

Il faut ajouter à cela la condition de Dirichlet :

$$\underline{u}_t(t, x, y, H) = 0,$$

et les conditions de contact unilatéral et de frottement (4.12) et (4.13). Comme on peut le constater, ce problème est similaire au problème unidimensionnel présenté au chapitre 3 avec des termes additionnels en  $\partial_z u_{x,x}$  et  $\partial_z u_{y,y}$  qui peuvent être considérés comme des termes sources dans l'équation en  $u_z$ .

## 4.2 Schéma numérique tridimensionnel

Soit  $\underline{u}^{i,j,k,n}$ ,  $\underline{u}_t^{i,j,k,n}$ ,  $\underline{u}_x^{i,j,k,n}$ ,  $\underline{u}_y^{i,j,k,n}$ ,  $\underline{u}_z^{i,j,k,n}$  les valeurs approchées pour  $x = i\Delta x$ ,  $y = j\Delta y$ ,  $z = k\Delta z$  et  $t = n\Delta t$ . de  $\underline{u}$ ,  $\underline{u}_t$ ,  $\underline{u}_x$ ,  $\underline{u}_y$  et  $\underline{u}_z$ .

### 4.2.1 Problème vertical

Pour le problème vertical on se base sur les relations :

$$\begin{aligned} u_{z,t}(t + \Delta t, x, y, z) + c_2 u_{z,z}(t + \Delta t, x, y, z) &= u_{z,t}(t, x, y, z + c_2 \Delta t) + c_2 u_{z,z}(t, x, y, z + c_2 \Delta t) \\ &+ \int_0^{\Delta t} \frac{\lambda + G}{\rho} (\partial_z u_{x,x} + \partial_z u_{y,y})(t + s, x, y, z + c_2(\Delta t - s)) ds, \\ u_{z,t}(t + \Delta t, x, y, z) - c_2 u_{z,z}(t + \Delta t, x, y, z) &= u_{z,t}(t, x, y, z - c_2 \Delta t) - c_2 u_{z,z}(t, x, y, z - c_2 \Delta t) \\ &+ \int_0^{\Delta t} \frac{\lambda + G}{\rho} (\partial_z u_{x,x} + \partial_z u_{y,y})(t + s, x, y, z - c_2(\Delta t - s)) ds, \end{aligned}$$

Sur  $z \in [i\Delta z, (i+1)\Delta z]$  on approche  $\partial_z u_{x,x} + \partial_z u_{y,y}$  par le schéma aux différences  $\frac{1}{\Delta z} (u_{x,x}^{i,j,k+1,n} - u_{x,x}^{i,j,k,n} + u_{y,y}^{i,j,k+1,n} - u_{y,y}^{i,j,k,n})$  et cela donne avec :

$$\mathbf{C}_z = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

le schéma :

$$\begin{aligned} \underline{u}_t^{i,j,k,n+1} + \mathbf{C}_z \underline{u}_z^{i,j,k,n+1} &= \underline{u}_t^{i,j,k,n} + \mathbf{C}_z \underline{u}_z^{i,j,k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \mathbf{C}_z (\underline{u}_t^{i,j,k+1,n} - \underline{u}_t^{i,j,k,n}) \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta z} \mathbf{C}_z^2 (\underline{u}_z^{i,j,k+1,n} - \underline{u}_z^{i,j,k,n}) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{\lambda + G}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x,x}^{i,j,k+1,n} - u_{x,x}^{i,j,k,n} + u_{y,y}^{i,j,k+1,n} - u_{y,y}^{i,j,k,n} \end{pmatrix}, \\ \underline{u}_t^{i,j,k,n+1} - \mathbf{C}_z \underline{u}_z^{i,j,k,n+1} &= \underline{u}_t^{i,j,k,n} - \mathbf{C}_z \underline{u}_z^{i,j,k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \mathbf{C}_z (\underline{u}_t^{i,j,k-1,n} - \underline{u}_t^{i,j,k,n}) \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta z} \mathbf{C}_z^2 (\underline{u}_z^{i,j,k-1,n} - \underline{u}_z^{i,j,k,n}) - \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{\lambda + G}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x,x}^{i,j,k-1,n} - u_{x,x}^{i,j,k,n} + u_{y,y}^{i,j,k-1,n} - u_{y,y}^{i,j,k,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Et donc le schéma s'écrit à l'intérieur de la couche pour  $1 \leq k \leq N_z - 1$  :

$$\begin{aligned} \underline{u}_{,t}^{i,j,k,n+1} &= \underline{u}_{,t}^{i,j,k,n} + \frac{\Delta t}{2\Delta z} \mathbf{C}_z (\underline{u}_{,t}^{i,j,k+1,n} - 2\underline{u}_{,t}^{i,j,k,n} + \underline{u}_{,t}^{i,j,k-1,n}) + \frac{\Delta t}{2\Delta z} \mathbf{C}_z^2 (\underline{u}_{,z}^{i,j,k+1,n} - \underline{u}_{,z}^{i,j,k-1,n}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta z} \frac{\lambda + G}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x,x}^{i,j,k+1,n} - u_{x,x}^{i,j,k-1,n} + u_{y,y}^{i,j,k+1,n} - u_{y,y}^{i,j,k-1,n} \end{pmatrix}, \\ \underline{u}_{,x}^{i,j,k,n+1} &= \underline{u}_{,x}^{i,j,k,n}, \\ \underline{u}_{,y}^{i,j,k,n+1} &= \underline{u}_{,y}^{i,j,k,n}, \\ \underline{u}_{,z}^{i,j,k,n+1} &= \underline{u}_{,z}^{i,j,k,n} + \frac{\Delta t}{2\Delta z} \mathbf{C}_z (\underline{u}_{,z}^{i,j,k+1,n} - 2\underline{u}_{,z}^{i,j,k,n} + \underline{u}_{,z}^{i,j,k-1,n}) + \frac{\Delta t}{2\Delta z} (\underline{u}_{,t}^{i,j,k+1,n} - \underline{u}_{,t}^{i,j,k-1,n}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta z} \frac{\lambda + G}{\rho} \mathbf{C}_z^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x,x}^{i,j,k+1,n} - 2u_{x,x}^{i,j,k,n} + u_{x,x}^{i,j,k-1,n} + u_{y,y}^{i,j,k+1,n} - 2u_{y,y}^{i,j,k,n} + u_{y,y}^{i,j,k-1,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On pose de plus :

$$\underline{b}(t, x, y) = u_{z,t}(t, x, y, 0) + \mathbf{C}_z u_{z,z}(t, x, y, 0)$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \underline{b}^{i,j,n+1} &= \underline{u}_{,t}^{i,j,k,n} + \mathbf{C}_z \underline{u}_{,z}^{i,j,k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \mathbf{C}_z (\underline{u}_{,t}^{i,j,k+1,n} - \underline{u}_{,t}^{i,j,k,n}) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \mathbf{C}_z^2 (\underline{u}_{,z}^{i,j,k+1,n} - \underline{u}_{,z}^{i,j,k,n}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{\lambda + G}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x,x}^{i,j,k+1,n} - u_{x,x}^{i,j,k,n} + u_{y,y}^{i,j,k+1,n} - u_{y,y}^{i,j,k,n} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

La condition de Dirichlet s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{u}_{,z}^{i,j,N_z,n+1} &= \underline{u}_{,z}^{i,j,N_z,n} - \frac{\Delta t}{\Delta z} \underline{u}_{,t}^{i,j,N_z-1,n} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \mathbf{C}_z (\underline{u}_{,z}^{i,j,N_z-1,n} - \underline{u}_{,z}^{i,j,N_z,n}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{\lambda + G}{\rho} \mathbf{C}_z^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x,x}^{i,j,N_z-1,n} - u_{x,x}^{i,j,N_z,n} + u_{y,y}^{i,j,N_z-1,n} - u_{y,y}^{i,j,N_z,n} \end{pmatrix}, \\ \underline{u}_{,t}^{i,j,N_z,n+1} &= 0, \\ \underline{u}_{,x}^{i,j,N_z,n+1} &= 0, \\ \underline{u}_{,y}^{i,j,N_z,n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Pour la condition de contact unilatéral, on doit intégrer l'inclusion différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt} u_z(t, x, y, 0) \in b_z(t, x, y) + \frac{c_2}{\lambda + 2G} (J_N(-u_z(t, x, y, 0)) + \lambda(u_{x,x}(t, x, y, 0) + u_{y,y}(t, x, y, 0))),$$

Le schéma d'Adams-Moulton d'ordre 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} u_z^{i,j,0,n+1} &= u_z^{i,j,0,n} + \frac{\Delta t}{2} (\zeta_z^{i,j,n} + \zeta_z^{i,j,n+1}), \\ \zeta_z^{i,j,n+1} &\in b_z^{i,j,n+1} + \lambda \frac{c_2}{\lambda + 2G} (u_{x,x}^{i,j,0,n} + u_{y,y}^{i,j,0,n}) + J_N(-u_z^{i,j,0,n+1}), \end{aligned}$$

qui se résout de manière explicite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_z^{i,j,0,n+1} &= \left[ u_z^{i,j,0,n} + \frac{\Delta t}{2} (\zeta_z^{i,j,n} + b_z^{i,j,n+1} + \lambda \frac{c_2}{\lambda + 2G} (u_{x,x}^{i,j,0,n} + u_{y,y}^{i,j,0,n})) \right]_+, \\ \zeta_z^{i,j,n+1} &= \frac{2}{\Delta t} (u_z^{i,j,0,n+1} - u_z^{i,j,0,n}) - \zeta_z^{i,j,n}, \end{aligned}$$

on choisit ensuite :

$$u_{z,t}^{i,j,0,n+1} = \begin{cases} b_z^{i,j,n+1} + \lambda \frac{c_2}{\lambda + 2G} (u_{x,x}^{i,j,0,n} + u_{y,y}^{i,j,0,n}) & \text{si } u_z^{i,j,0,n+1} > 0, \\ \max(0, b_z^{i,j,n+1} + \lambda \frac{c_2}{\lambda + 2G} (u_{x,x}^{i,j,0,n} + u_{y,y}^{i,j,0,n})) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose la pression de contact :

$$S^{i,j,n+1} = -\lambda (u_{x,x}^{i,j,0,n} + u_{y,y}^{i,j,0,n}) - \frac{\lambda + 2G}{c_2} (b_z^{i,j,n+1} - u_{z,t}^{i,j,0,n+1})$$

Pour la condition de frottement, on doit intégrer l'inclusion différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \underline{u}_T(t, x, y, 0) &= \frac{1}{\varepsilon} \left( G \begin{pmatrix} u_{z,x}(t, x, y, 0) \\ u_{z,y}(t, x, y, 0) \end{pmatrix} + \frac{G}{c_1} b_T(t, x, y) - \frac{G}{c_1} \frac{d}{dt} \underline{u}_T(t, x, y, 0) \right. \\ &\quad \left. - S(t) \mu(\| \frac{d}{dt} \underline{u}_T(t, x, y, 0) - \underline{V}_\varepsilon(t) \|) \underline{Dir}(\frac{d}{dt} \underline{u}_T(t, x, y, 0) - \underline{V}_\varepsilon(t)) \right). \end{aligned}$$

Le schéma d'Adams-Moulton d'ordre 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{u}_{T,t}^{i,j,0,n+1} &= \underline{u}_{T,t}^{i,j,0,n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} (\zeta_T^{i,j,n} + \zeta_T^{i,j,n+1}), \\ \zeta_T^{i,j,n+1} &\in G \begin{pmatrix} u_{z,x}^{i,j,0,n} \\ u_{z,y}^{i,j,0,n} \end{pmatrix} + \frac{G}{c_1} b_T^{i,j,n+1} - \frac{G}{c_1} \underline{u}_{T,t}^{i,j,0,n+1} \\ &\quad - S^{i,j,n+1} \mu(\| \underline{u}_{T,t}^{i,j,0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1}) \|) \underline{Dir}(\underline{u}_{T,t}^{i,j,0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1})), \end{aligned}$$

et qui se ramène à une équation à une seule inconnue en posant :

$$\begin{aligned} X^{i,j} &= \underline{u}_{T,t}^{i,j,0,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1}), \\ Y^{i,j} &= \underline{u}_{T,t}^{i,j,0,n} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \left( \zeta_T^{i,j,n} + G \begin{pmatrix} u_{z,x}^{i,j,0,n} \\ u_{z,y}^{i,j,0,n} \end{pmatrix} + \frac{G}{c_1} b_T^{i,j,n+1} - \underline{V}_\varepsilon(t^{n+1}) \right). \end{aligned}$$

Alors  $X^{i,j} = 0$  est solution si et seulement si  $\|Y^{i,j}\| \leq \frac{\Delta t}{2\varepsilon} S^{i,j,n+1} \mu(0)$ , les autres solutions sont telles que  $X^{i,j}$  a même sens et même direction que  $Y^{i,j}$  avec :

$$\|X^{i,j}\| \left( 1 + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{G}{c_1} \right) + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} S^{i,j,n+1} \mu(\|X^{i,j}\|) = \|Y^{i,j}\|.$$

Cette équation étant strictement monotone pour  $\frac{\Delta t}{2\varepsilon} (S^{i,j,n+1} M_\mu - \frac{G}{c_1}) < 1$ , où  $M_\mu$  est toujours la constante de semi-lipschitzianité de l'application  $v \rightarrow -\mu(v)$ .

### 4.2.2 Problème horizontal

Pour le problème horizontal, on applique un second schéma de splitting, et on découpe le problème (4.14) en deux sous-problèmes, qui sont :

$$\begin{cases} \rho \partial_t u_{x,t} = (\lambda + 2G) \partial_x u_{x,x} + (\lambda + G) (\partial_x u_{y,y} + \partial_x u_{z,z}), \\ \rho \partial_t u_{y,t} = G \partial_x u_{y,x}, \\ \rho \partial_t u_{z,t} = G \partial_x u_{z,x}, \\ \partial_t \underline{u}_x = \partial_x \underline{u}_t, \partial_t \underline{u}_y = 0, \partial_t \underline{u}_z = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

et :

$$\begin{cases} \rho \partial_t u_{x,t} = G \partial_y u_{x,y}, \\ \rho \partial_t u_{y,t} = (\lambda + 2G) \partial_y u_{y,y} + (\lambda + G) (\partial_y u_{x,x} + \partial_y u_{z,z}), \\ \rho \partial_t u_{z,t} = G \partial_y u_{z,y}, \\ \partial_t \underline{u}_x = 0, \partial_t \underline{u}_y = \partial_y \underline{u}_t, \partial_t \underline{u}_z = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

On va décrire le schéma pour le premier sous problème. On se base sur les relations :

$$\begin{aligned} u_{x,t}(t + \Delta t, x, y, z) + c_2 u_{x,x}(t + \Delta t, x, y, z) &= u_{x,t}(t, x + c_2 \Delta t, y, z) + c_2 u_{z,z}(t, x + c_2 \Delta t, y, z) \\ &\quad + \int_0^{\Delta t} \frac{\lambda + G}{\rho} (\partial_x u_{y,y} + \partial_x u_{z,z})(t + s, x + c_2(\Delta t - s), y, z) ds, \\ u_{x,t}(t + \Delta t, x, y, z) - c_2 u_{x,x}(t + \Delta t, x, y, z) &= u_{x,t}(t, x - c_2 \Delta t, y, z) - c_2 u_{x,x}(t, x - c_2 \Delta t, y, z) \\ &\quad + \int_0^{\Delta t} \frac{\lambda + G}{\rho} (\partial_x u_{y,y} + \partial_x u_{z,z})(t + s, x - c_2(\Delta t - s), y, z) ds, \end{aligned}$$

Sur  $x \in [i\Delta z, (i+1)\Delta z]$  on approche  $\partial_x u_{y,y} + \partial_x u_{z,z}$  par le schéma aux différences  $\frac{1}{\Delta x} (u_{y,y}^{i+1,j,k,n} - u_{y,y}^{i,j,k,n} + u_{z,z}^{i+1,j,k,n} - u_{z,z}^{i,j,k,n})$  et cela donne avec

$$\mathbf{C}_x = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

le schéma :

$$\begin{aligned} \underline{u}_t^{i,j,k,n+1} + \mathbf{C}_x \underline{u}_x^{i,j,k,n+1} &= \underline{u}_t^{i,j,k,n} + \mathbf{C}_x \underline{u}_x^{i,j,k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{C}_x (\underline{u}_t^{i+1,j,k,n} - \underline{u}_t^{i,j,k,n}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{C}_x^2 (\underline{u}_x^{i+1,j,k,n} - \underline{u}_x^{i,j,k,n}) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\lambda + G}{\rho} \begin{pmatrix} u_{y,y}^{i+1,j,k,n} - u_{y,y}^{i,j,k,n} + u_{z,z}^{i+1,j,k,n} - u_{z,z}^{i,j,k,n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \underline{u}_t^{i,j,k,n+1} - \mathbf{C}_x \underline{u}_x^{i,j,k,n+1} &= \underline{u}_t^{i,j,k,n} - \mathbf{C}_x \underline{u}_x^{i,j,k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{C}_x (\underline{u}_t^{i-1,j,k,n} - \underline{u}_t^{i,j,k,n}) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{C}_x^2 (\underline{u}_x^{i-1,j,k,n} - \underline{u}_x^{i,j,k,n}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\lambda + G}{\rho} \begin{pmatrix} u_{y,y}^{i-1,j,k,n} - u_{y,y}^{i,j,k,n} + u_{z,z}^{i-1,j,k,n} - u_{z,z}^{i,j,k,n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ce qui donne à l'intérieur de la couche pour  $1 \leq i \leq N_x - 1$  :

$$\begin{aligned}\underline{u}_{,t}^{i,j,k,n+1} &= \underline{u}_{,t}^{i,j,k,n} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \mathbf{C}_x (\underline{u}_{,t}^{i+1,j,k,n} - 2\underline{u}_{,t}^{i,j,k,n} + \underline{u}_{,t}^{i-1,j,k,n}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \mathbf{C}_x^2 (\underline{u}_{,x}^{i+1,j,k,n} - \underline{u}_{,x}^{i-1,j,k,n}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{\lambda + G}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{y,y}^{i+1,j,k,n} - u_{y,y}^{i-1,j,k,n} + u_{z,z}^{i+1,j,k,n} - u_{z,z}^{i-1,j,k,n} \end{pmatrix}, \\ \underline{u}_{,x}^{i,j,k,n+1} &= \underline{u}_{,x}^{i,j,k,n} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \mathbf{C}_x (\underline{u}_{,x}^{i+1,j,k,n} - 2\underline{u}_{,x}^{i,j,k,n} + \underline{u}_{,x}^{i-1,j,k,n}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\underline{u}_{,t}^{i+1,j,k,n} - \underline{u}_{,t}^{i-1,j,k,n}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{\lambda + G}{\rho} \mathbf{C}_x^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{y,y}^{i+1,j,k,n} - 2u_{y,y}^{i,j,k,n} + u_{y,y}^{i-1,j,k,n} + u_{z,z}^{i+1,j,k,n} - 2u_{z,z}^{i,j,k,n} + u_{z,z}^{i-1,j,k,n} \end{pmatrix}, \\ \underline{u}_{,y}^{i,j,k,n+1} &= \underline{u}_{,y}^{i,j,k,n}, \\ \underline{u}_{,z}^{i,j,k,n+1} &= \underline{u}_{,z}^{i,j,k,n}.\end{aligned}$$

Sur les bords latéraux, une condition de Neumann s'exprime par :

$$\underline{u}_{,x}^{0,j,k,n+1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda + 2G} (u_{y,y}^{0,j,k,n} + u_{z,z}^{0,j,k,n}) \\ \frac{1}{G} u_{x,y}^{0,j,k,n} \\ \frac{1}{G} u_{x,z}^{0,j,k,n} \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_{,x}^{N_x,j,k,n+1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda + 2G} (u_{y,y}^{N_x,j,k,n} + u_{z,z}^{N_x,j,k,n}) \\ \frac{1}{G} u_{x,y}^{N_x,j,k,n} \\ \frac{1}{G} u_{x,z}^{N_x,j,k,n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\underline{u}_{,t}^{0,j,k,n+1} &= -\mathbf{C}_x \underline{u}_{,x}^{0,j,k,n+1} + \underline{u}_{,t}^{0,j,k,n} + \mathbf{C}_x \underline{u}_{,x}^{0,j,k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{C}_x (\underline{u}_{,t}^{1,j,k,n} - \underline{u}_{,t}^{0,j,k,n}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{C}_x^2 (\underline{u}_{,x}^{1,j,k,n} - \underline{u}_{,x}^{0,j,k,n}) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\lambda + G}{\rho} \begin{pmatrix} u_{y,y}^{1,j,k,n} - u_{y,y}^{0,j,k,n} + u_{z,z}^{1,j,k,n} - u_{z,z}^{0,j,k,n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \underline{u}_{,t}^{N_x,j,k,n+1} &= \mathbf{C}_x \underline{u}_{,x}^{N_x,j,k,n+1} + \underline{u}_{,t}^{N_x,j,k,n} - \mathbf{C}_x \underline{u}_{,x}^{N_x,j,k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{C}_x (\underline{u}_{,t}^{N_x-1,j,k,n} - \underline{u}_{,t}^{N_x,j,k,n}) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{C}_x^2 (\underline{u}_{,x}^{N_x-1,j,k,n} - \underline{u}_{,x}^{N_x,j,k,n}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\lambda + G}{\rho} \begin{pmatrix} u_{y,y}^{N_x-1,j,k,n} - u_{y,y}^{N_x,j,k,n} + u_{z,z}^{N_x-1,j,k,n} - u_{z,z}^{N_x,j,k,n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

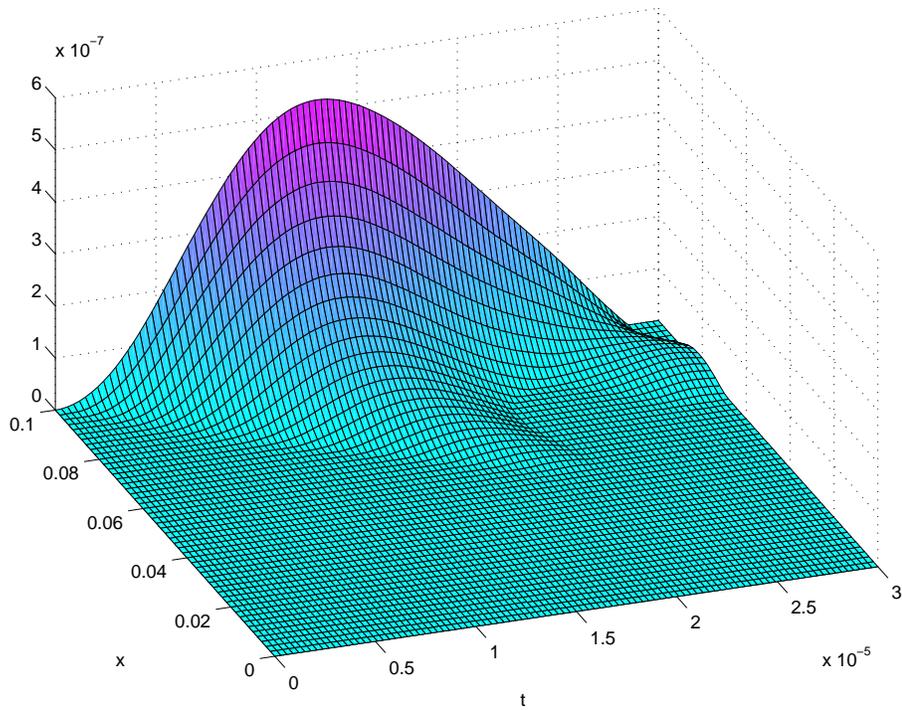
### 4.3 Expériences numériques dans le cas bidimensionnel

Nous présentons maintenant quelques expériences numériques sur le problème bidimensionnel. Les paramètres du matériau correspondent à ceux d'une petite pièce métallique ( $\lambda = 107 \times 10^9 Pa$ ,  $G = 77 \times 10^9 Pa$ ,  $\rho = 7800 Kg/m^3$ ) de hauteur  $2,5cm$  et de largeur  $10cm$ .

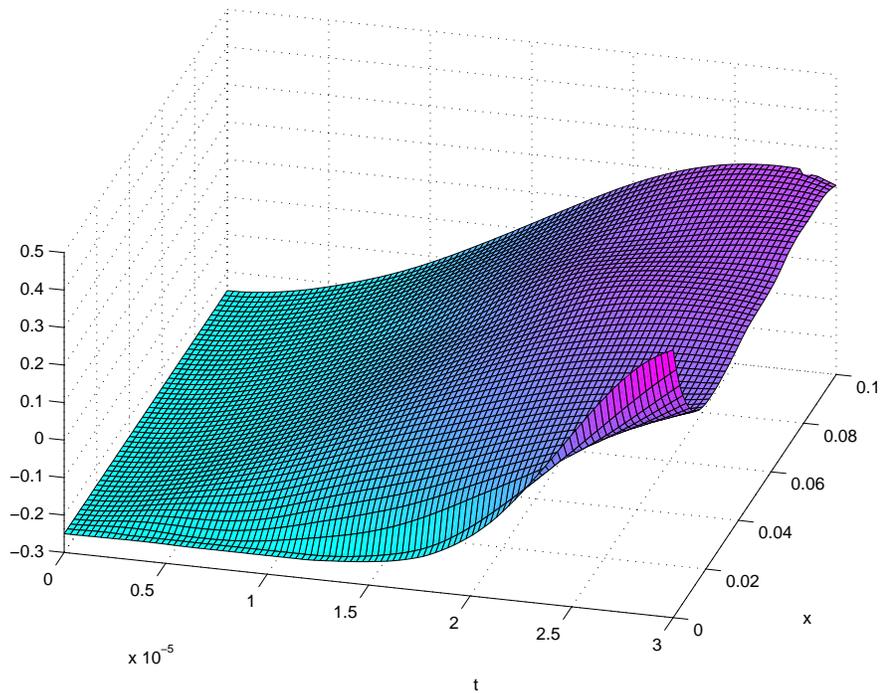
#### 4.3.1 Comportement lorsque le paramètre de perturbation décroît

La première expérience numérique est représentée un cas avec condition de Neumann sur les bords latéraux. Pour le calcul on a pris un nombre de pas d'espace  $N_x = 200$  pour la largeur

et  $N_z = 50$  pour la hauteur ; le pas de temps correspond à la condition C.F.L.  $\Delta t = 6 \times 10^{-8} \text{sec}$ . Les figures 4.1 à 4.4 montrent les résultats avec une valeur du paramètre de perturbation  $\varepsilon$  qui varie de 100.0 à 0.1. On ne représente dans ces figures que ce qui se produit sur le bord de contact. Chaque figure se compose de deux graphiques dont le premier représente le déplacement normal en fonction du temps et le second la vitesse tangentielle en fonction du temps (La vitesse d'entraînement est fixée à 0.25 dans cet exemple). On constate que la solution semble se stabiliser pour des  $\varepsilon$  petits, pour lesquels on voit se dessiner un saut en vitesse. Cela laisse espérer l'obtention de résultats de convergence lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

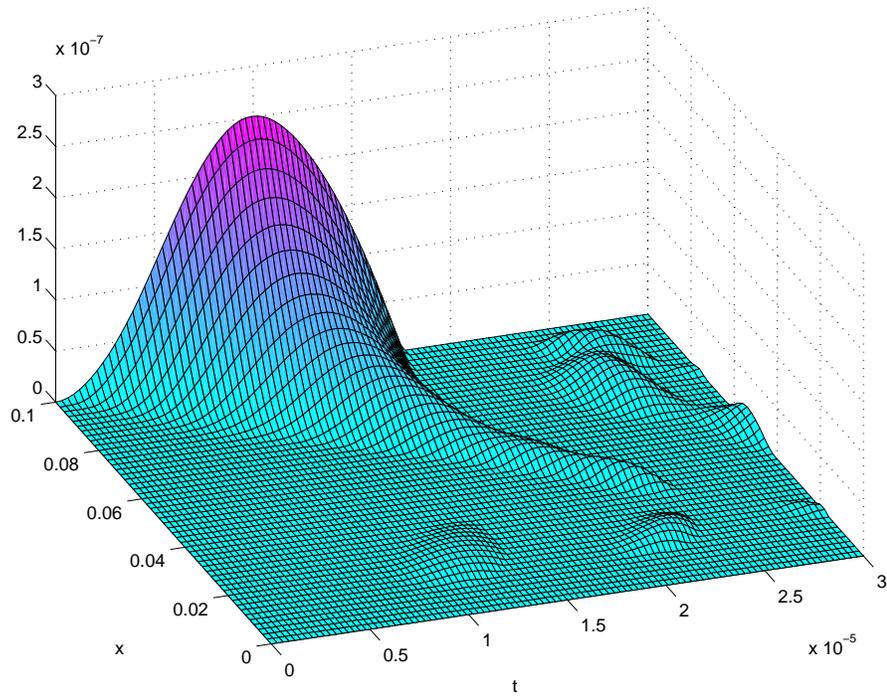


Déplacement vertical en fonction du temps sur le bord de contact.

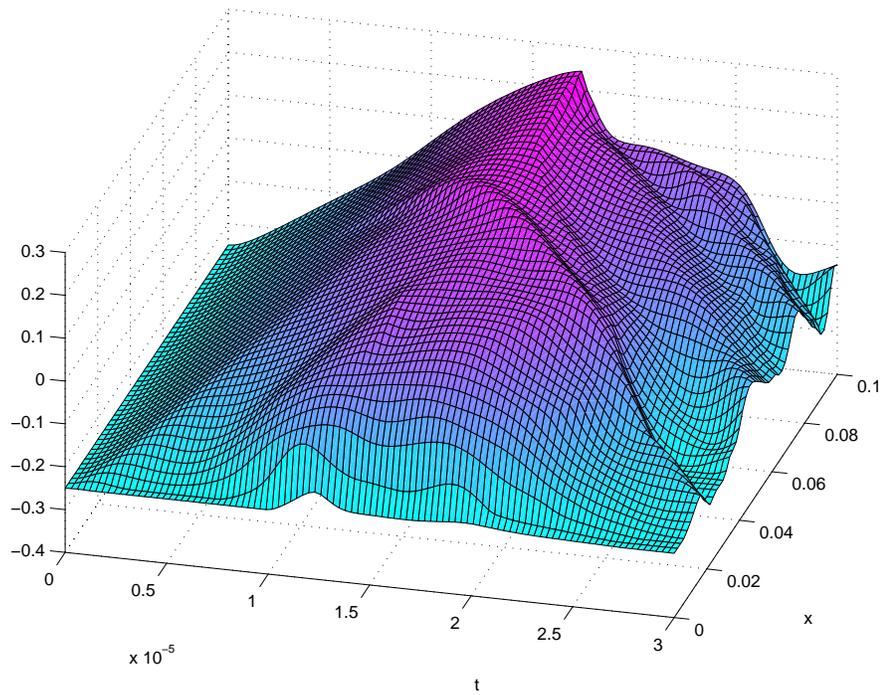


Vitesse horizontale en fonction du temps sur le bord de contact.

FIG. 4.1 - *Expérience pour  $\varepsilon = 100.0$ .*

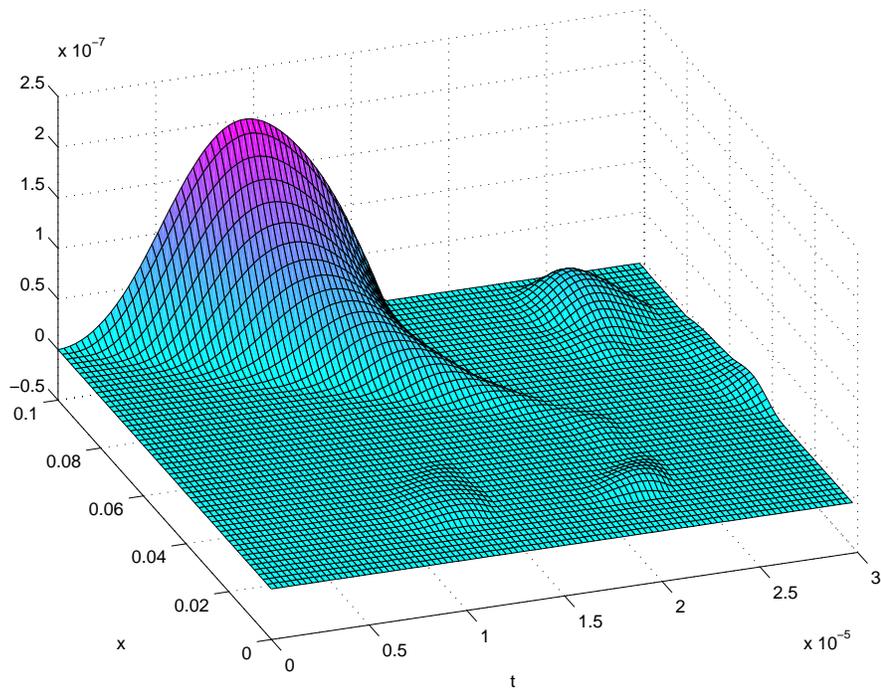


Déplacement vertical en fonction du temps sur le bord de contact.

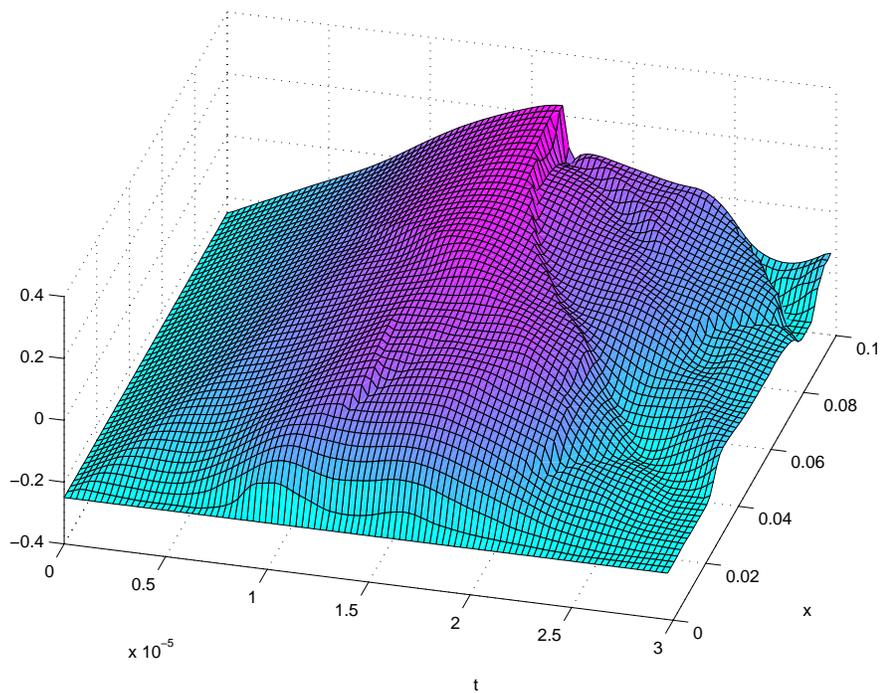


Vitesse horizontale en fonction du temps sur le bord de contact.

FIG. 4.2 – Expérience pour  $\varepsilon = 10.0$ .

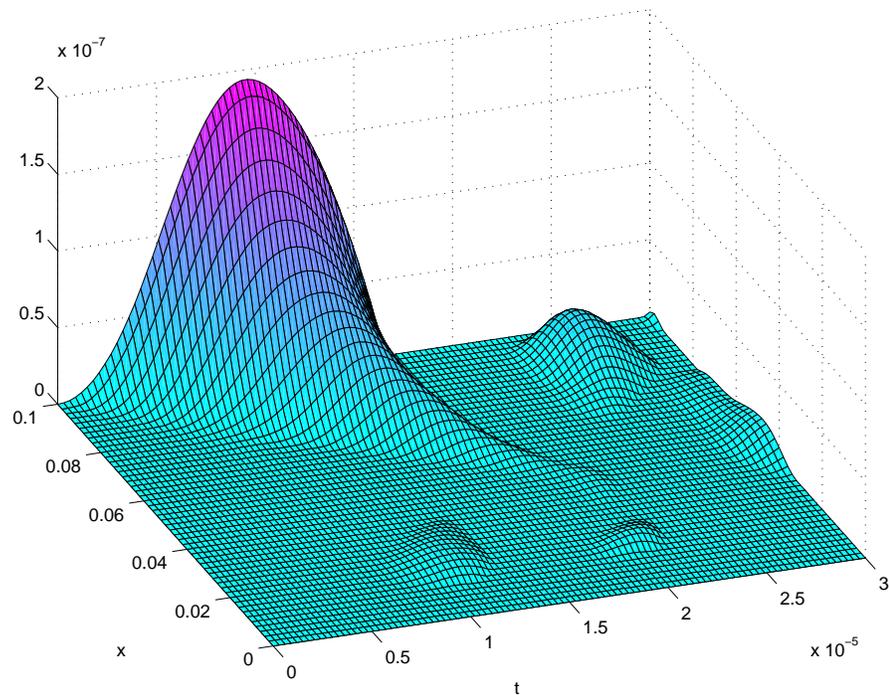


Déplacement vertical en fonction du temps sur le bord de contact.

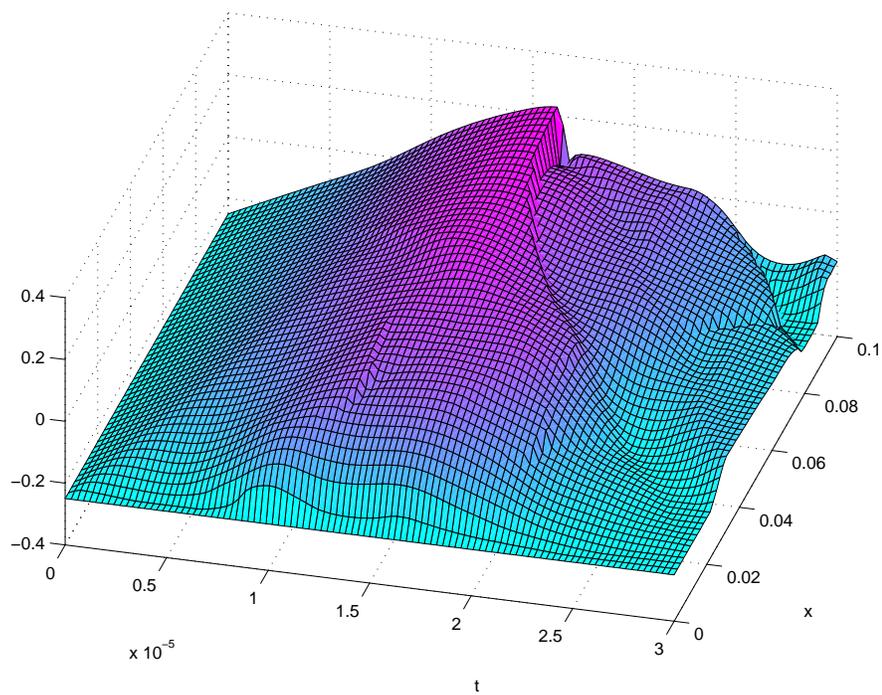


Vitesse horizontale en fonction du temps sur le bord de contact.

FIG. 4.3 – *Expérience pour  $\varepsilon = 1.0$ .*



Déplacement vertical en fonction du temps sur le bord de contact.



Vitesse horizontale en fonction du temps sur le bord de contact.

FIG. 4.4 – *Expérience pour  $\varepsilon = 0.1$ .*

### 4.3.2 Comportement du système avec condition périodique, $\mu$ variable

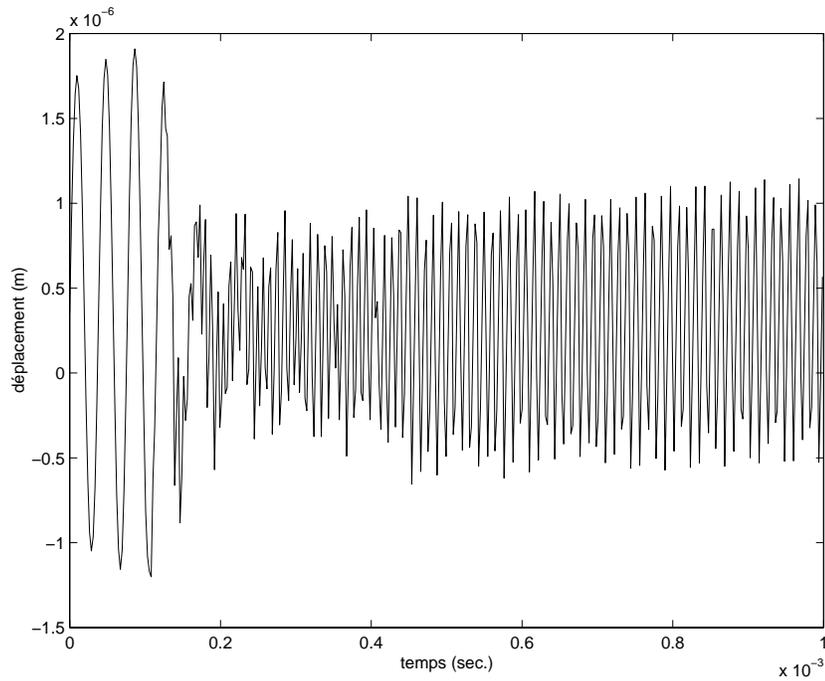
On teste maintenant le problème avec conditions périodiques sur les bord latéraux et avec un coefficient de frottement donné par la formule (1.8). Les pas d'espace et de temps sont toujours les même, et la coefficient de perturbation est choisi petit ( $\varepsilon = 1.0$ ). La figure 4.5 donne un le mouvement du point milieu du bord de contact au cours de la simulation. On constate que le mouvement a deux régimes. Au début de la simulation le régime est oscillatoire et correspond au comportement du système unidimensionnel, puis il il y a une transition vers  $t = 2 \times 10^{-4} sec.$  et le système va vers un autre régime. Le deuxième graphique de cette figure représente le déplacement normal du point milieu du bord du contact. Dans la première partie, il n'y a pas de décollement et le contact est permanent. Un déplacement vertical apparaît au bout d'un certain temps de simulation.

La figure 4.6 représente un diagramme vitesse tangentielle en fonction du déplacement tangentiel du point milieu du bord de contact quand le régime quasi-périodique est atteint.

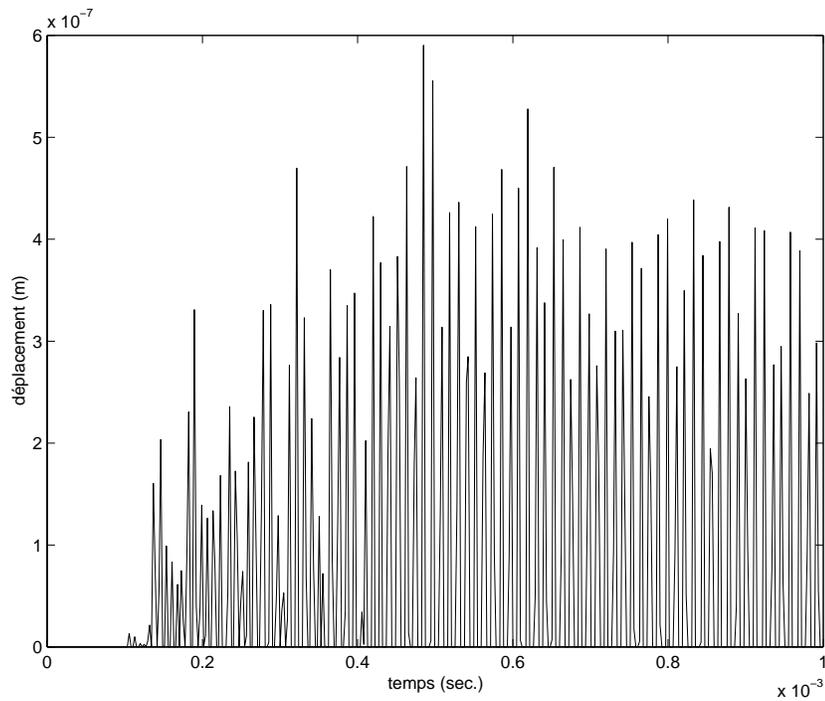
La figure 4.7 donne la vitesse horizontale et la pression de contact dans une période proche du temps initial. La perturbation mise sur la condition initiale fait que la pression de contact est faiblement inhomogène.

Les figures 4.8 4.9 donnent la vitesse horizontale, le déplacement vertical et la pression de contact dans une période de temps intermédiaire. Les premiers décollement (déplacement verticaux strictement positifs) ont lieux. La pression de contact est devenue très inhomogène.

Les figures 4.10 4.11 donnent la vitesse horizontale, le déplacement vertical et la pression de contact en fin de simulation, lorsque le système semble avoir atteint un régime quasi-périodique. Des zones de décollement se propagent de manière rétrograde.



Déplacement tangentiel du point milieu du bord de contact au cours du temps.



Déplacement normal du point milieu du bord de contact au cours du temps.

FIG. 4.5 – *Mouvement du point milieu du bord de contact au cours de la simulation.*

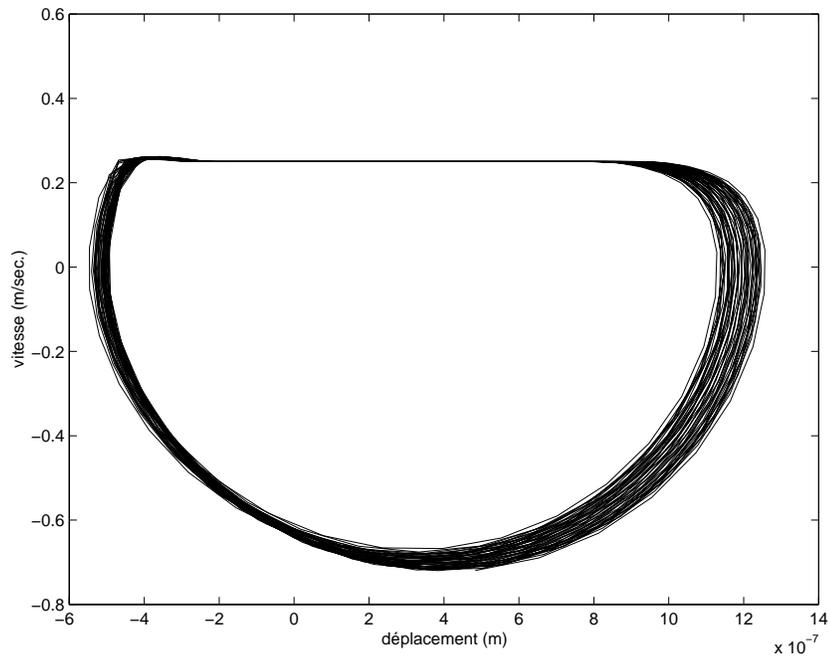
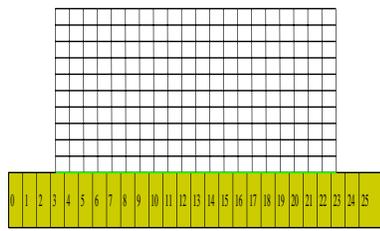
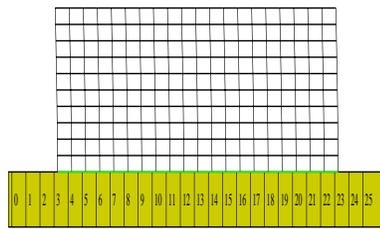


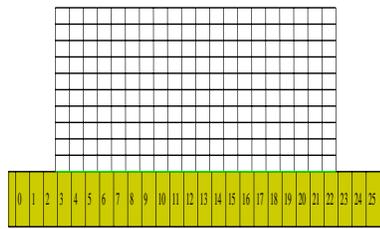
FIG. 4.6 – Diagramme vitesse tangentielle en fonction du déplacement tangentiel du point milieu du bord de contact pour  $t$  compris entre 0.001 et 0.0015.



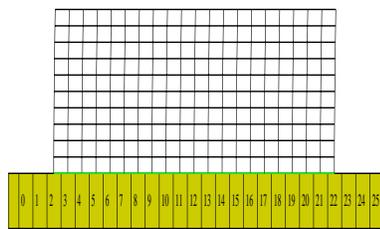
$t = 0 \text{ sec.}$



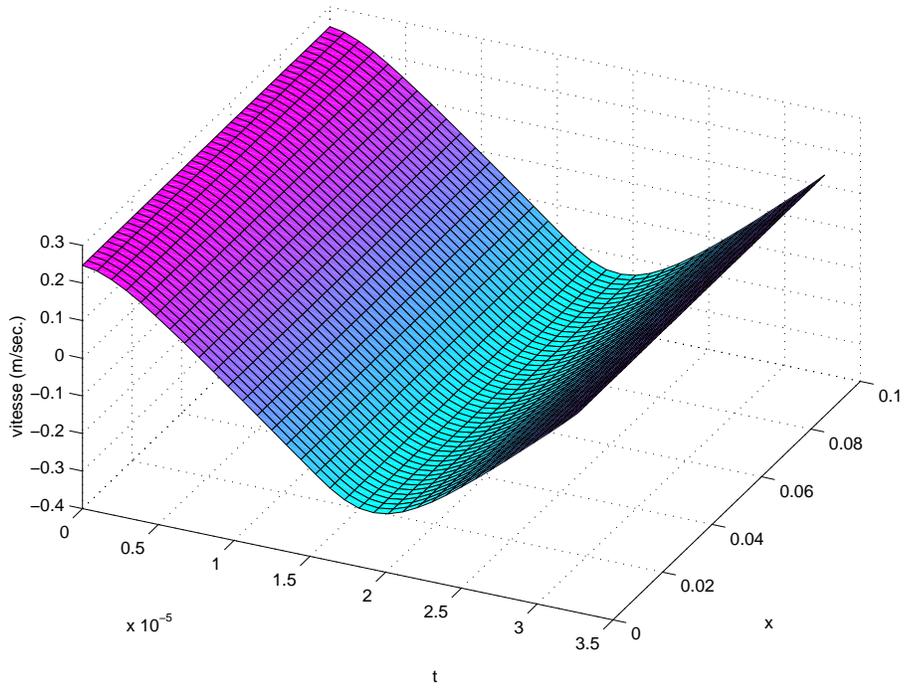
$t = 1 \times 10^{-5} \text{ sec.}$



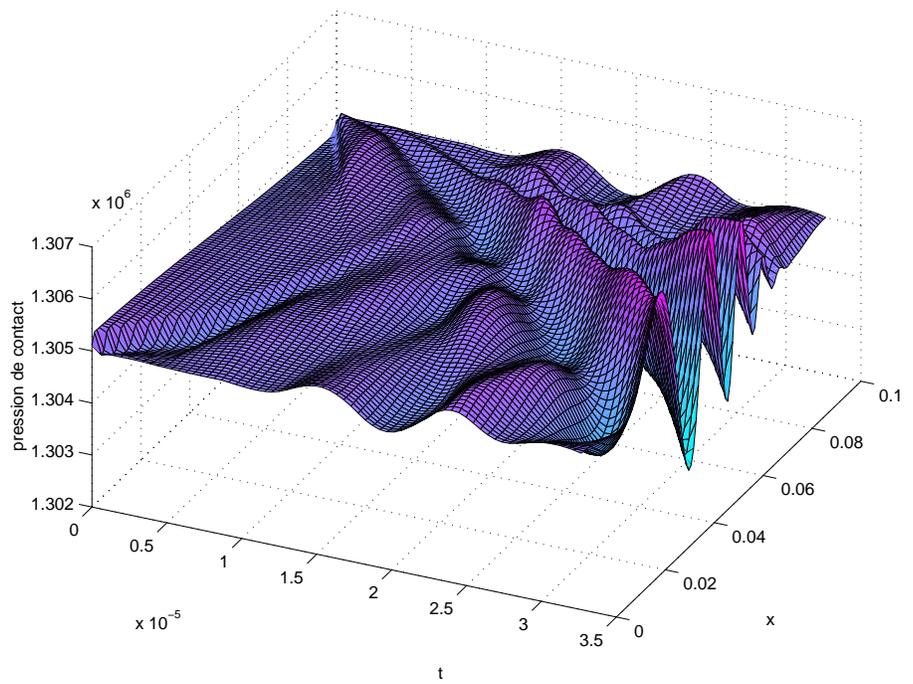
$t = 2 \times 10^{-5} \text{ sec.}$



$t = 3 \times 10^{-5} \text{ sec.}$



Vitesse sur le bord de contact.



Pression de contact.

FIG. 4.7 – État du système pour  $t = 0$  à  $t = 3.5 \times 10^{-5} \text{ sec.}$

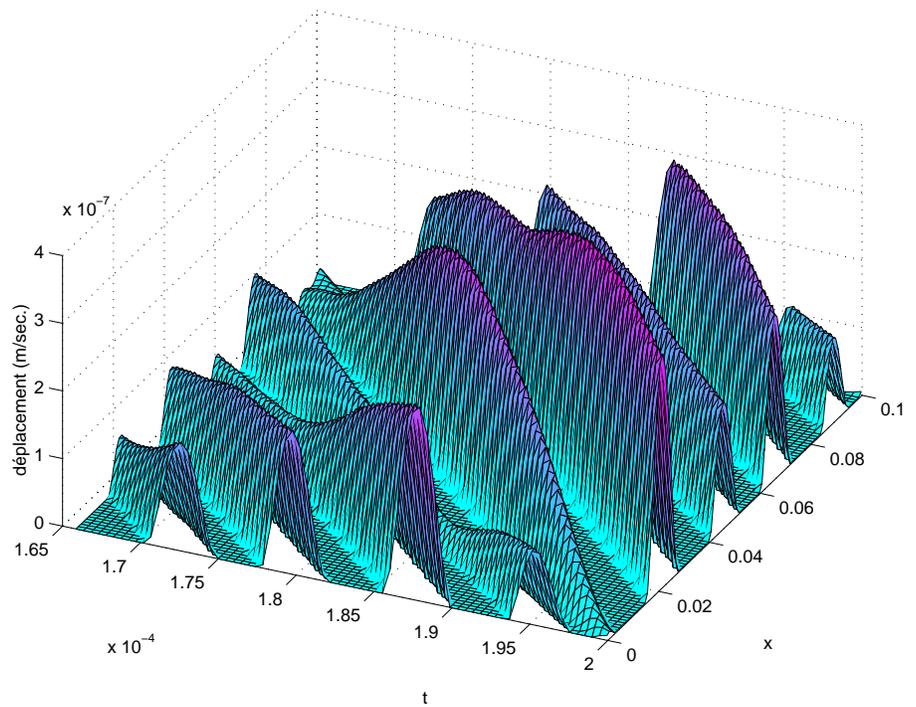
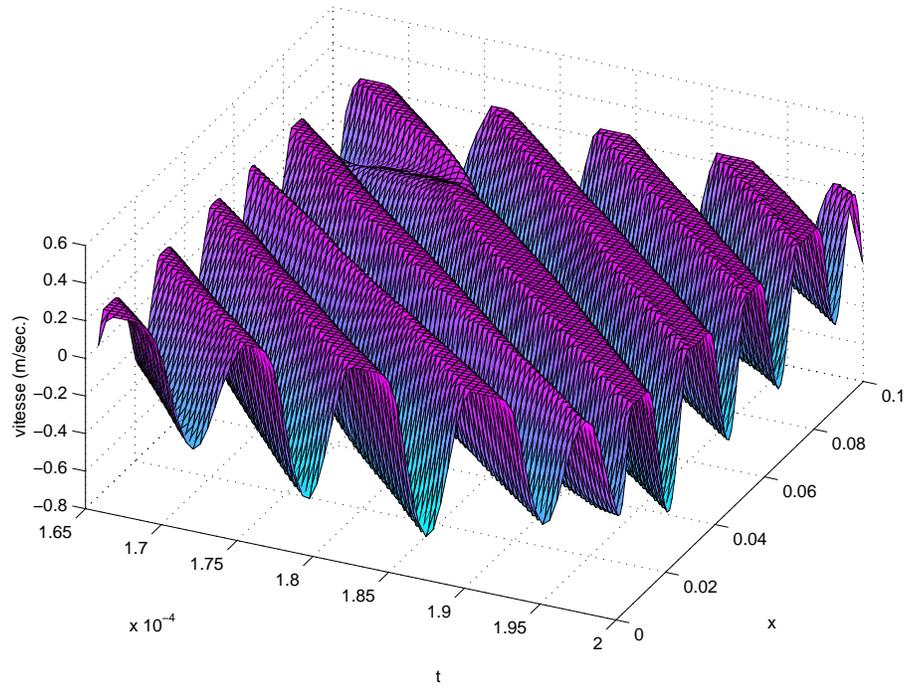
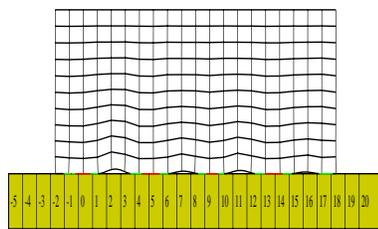
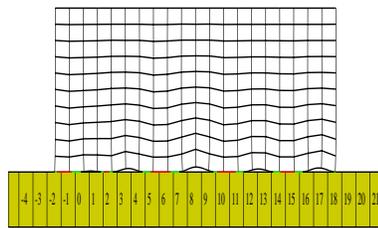
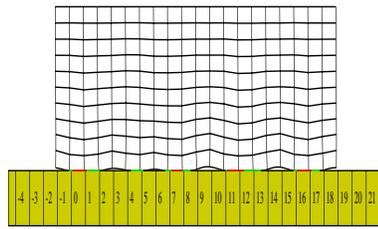
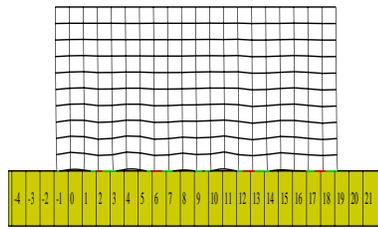
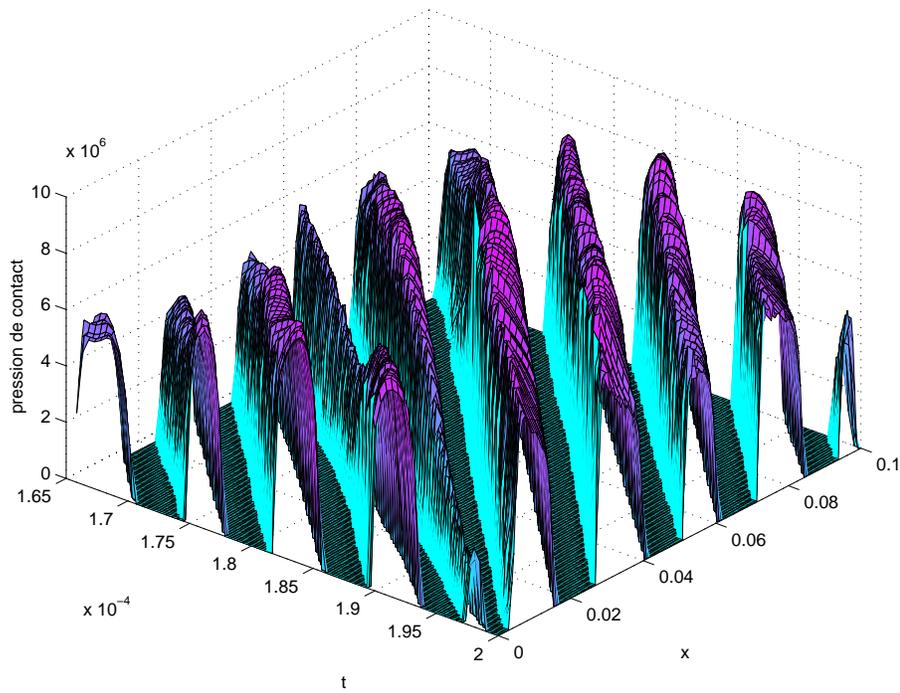
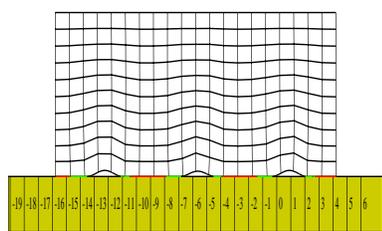


FIG. 4.8 – État du système pour  $t = 1.66 \times 10^{-4}$  à  $t = 2 \times 10^{-4}$  sec.

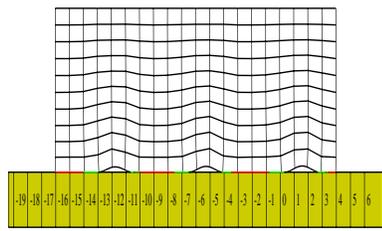


Pression de contact.

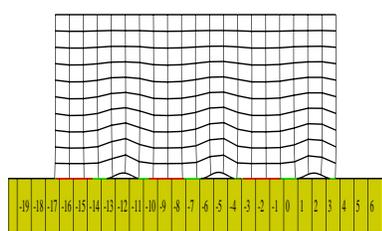
FIG. 4.9 – État du système pour  $t = 1.66 \times 10^{-4}$  à  $t = 2 \times 10^{-4}$  sec.



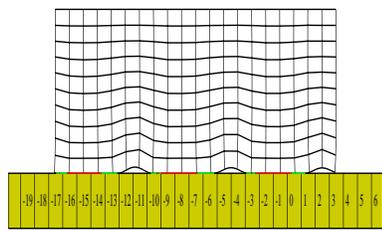
$t = 7.65 \times 10^{-4}$  sec.



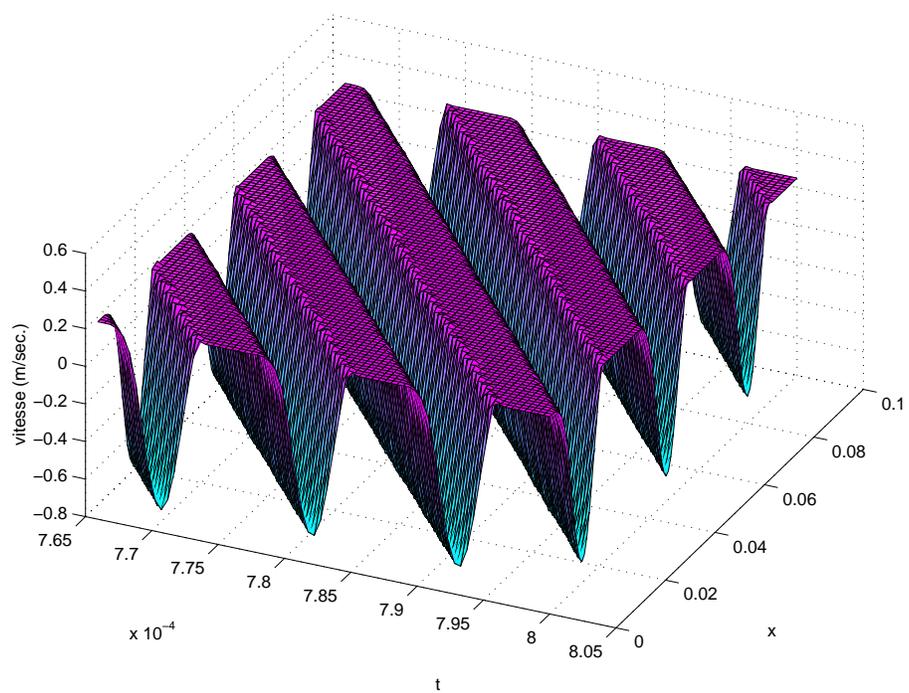
$t = 7.75 \times 10^{-4}$  sec.



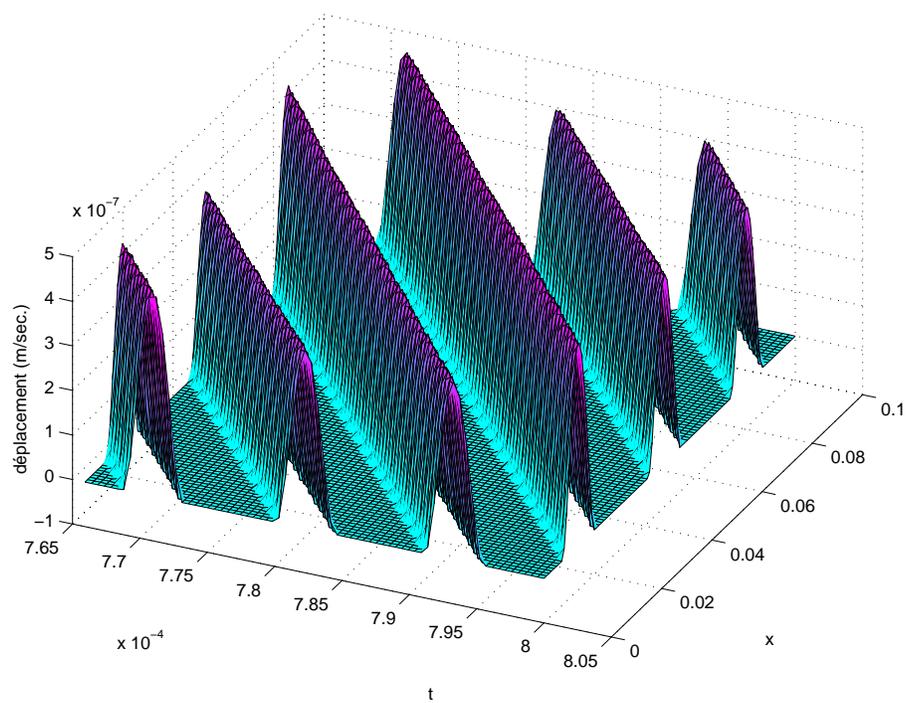
$t = 7.85 \times 10^{-4}$  sec.



$t = 7.95 \times 10^{-4}$  sec.

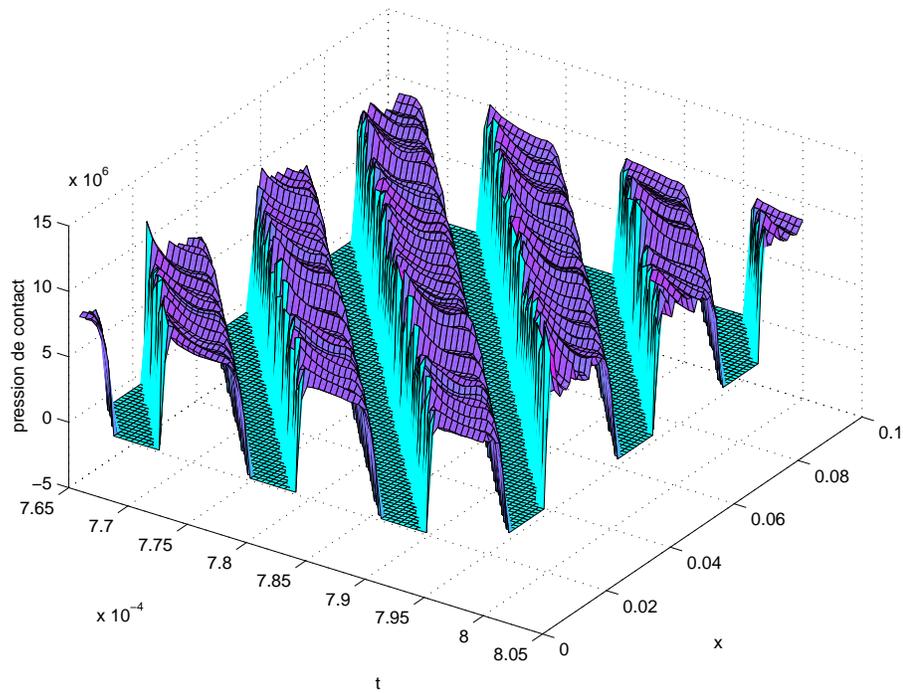


Vitesse sur le bord de contact.



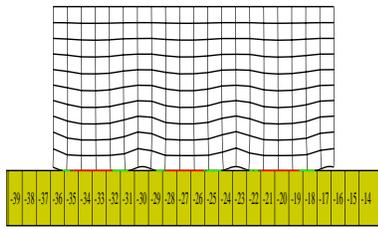
Déplacement sur le bord de contact.

FIG. 4.10 – État du système pour  $t = 7.66 \times 10^{-4}$  à  $t = 8 \times 10^{-4}$  sec.

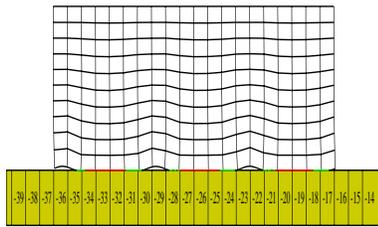


Pression de contact.

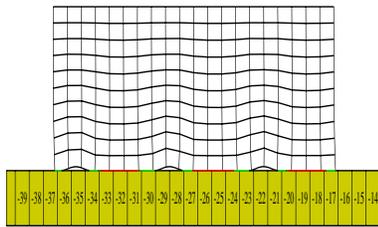
FIG. 4.11 – État du système pour  $t = 7.66 \times 10^{-4}$  à  $t = 8 \times 10^{-4}$  sec.



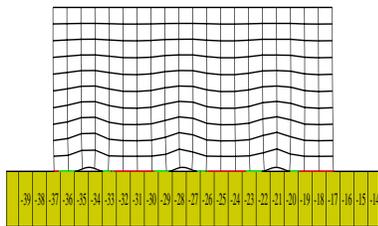
$t = 15.65 \times 10^{-4}$  sec.



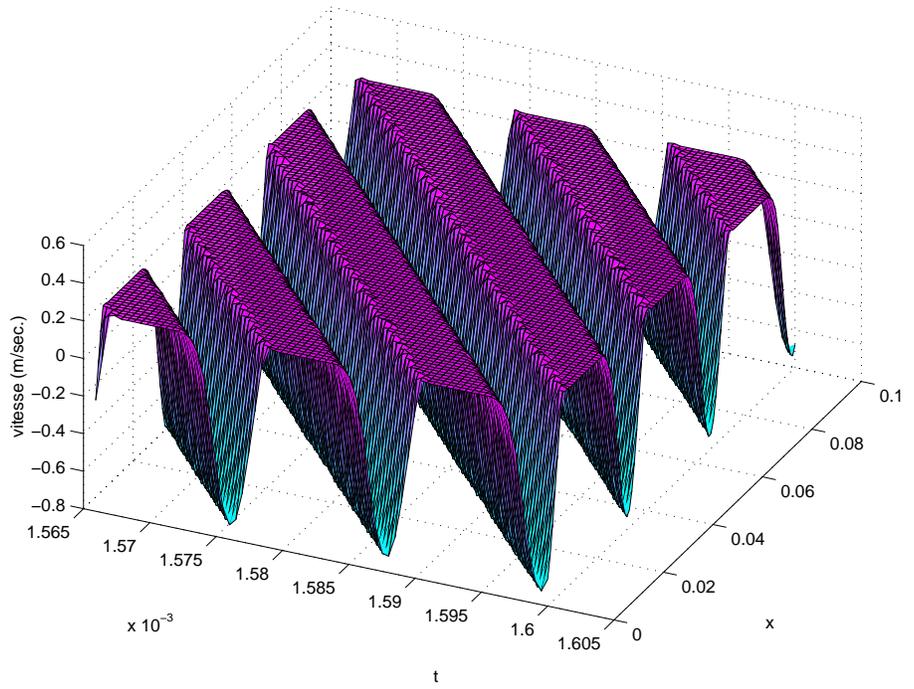
$t = 15.75 \times 10^{-4}$  sec.



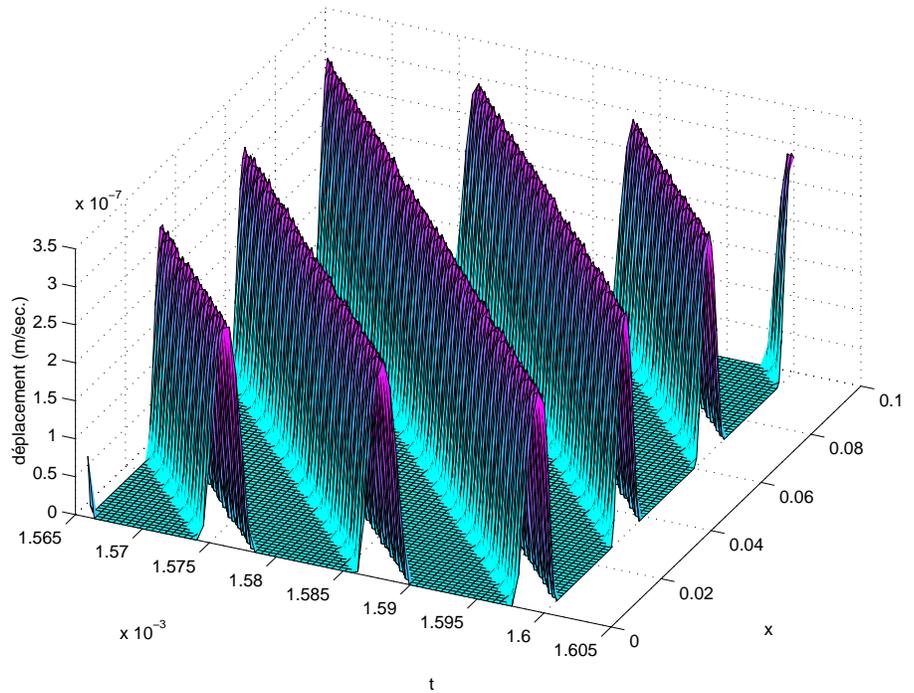
$t = 15.85 \times 10^{-4}$  sec.



$t = 15.95 \times 10^{-4}$  sec.

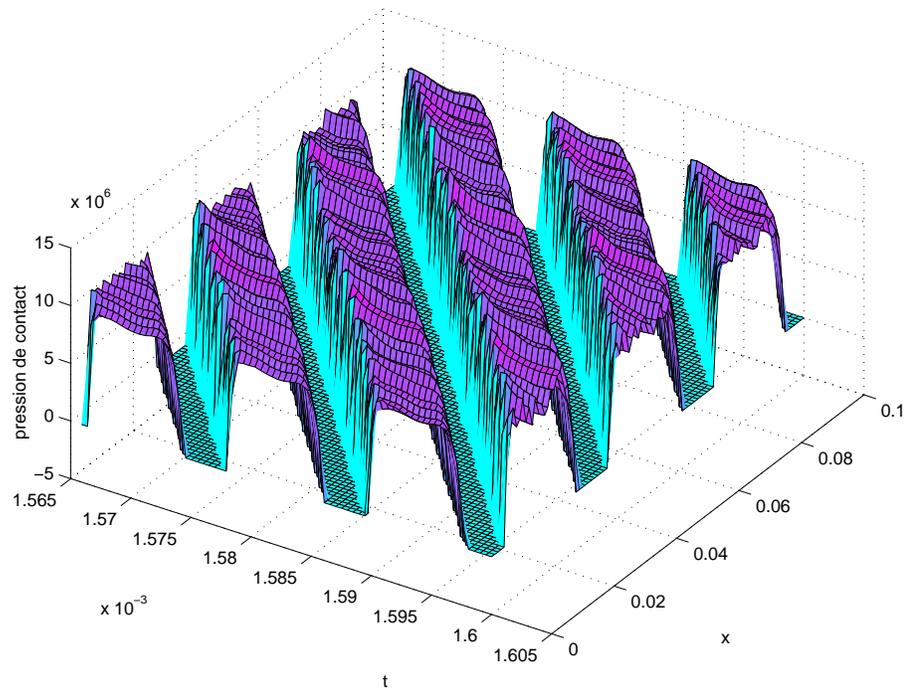


Vitesse sur le bord de contact.



Déplacement sur le bord de contact.

FIG. 4.12 – État du système pour  $t = 15.66 \times 10^{-4}$  à  $t = 16 \times 10^{-4}$  sec.



Pression de contact.

FIG. 4.13 - État du système pour  $t = 15.66 \times 10^{-4}$  à  $t = 16 \times 10^{-4}$  sec.

### 4.3.3 Comportement du système avec condition périodique, $\mu$ constant

Le test qui suit est identique au précédent mais avec un coefficient de frottement constant égal à 0.8. On constate que même avec un coefficient  $\mu$  constant des instabilités apparaissent dans le mouvement du bloc élastique. Le comportement du système n'est pas fondamentalement différent du cas avec coefficient variable. Il semble que ce soit une particularité du problème bidimensionnel par rapport au système unidimensionnel et aux systèmes à nombre fini de degrés de liberté où la pression de contact est imposée.

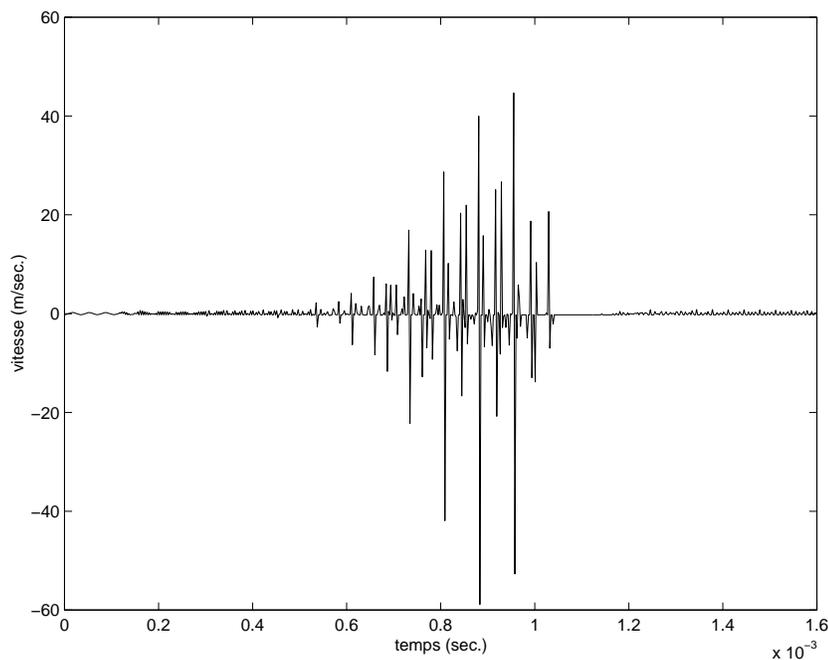
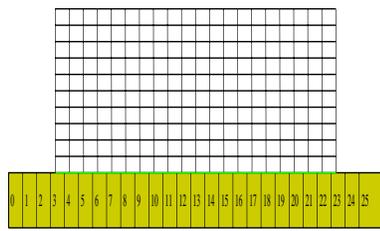
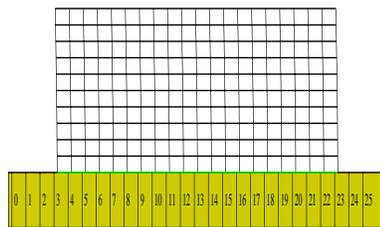


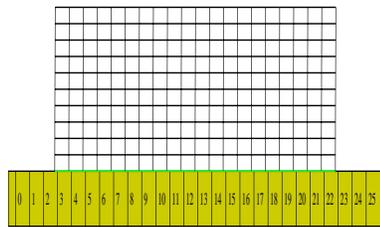
FIG. 4.14 – *Déplacement tangentiel du point milieu du bord de contact au cours de la simulation.*



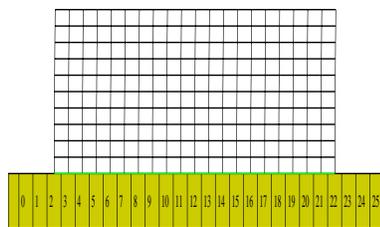
$t = 0 \text{ sec.}$



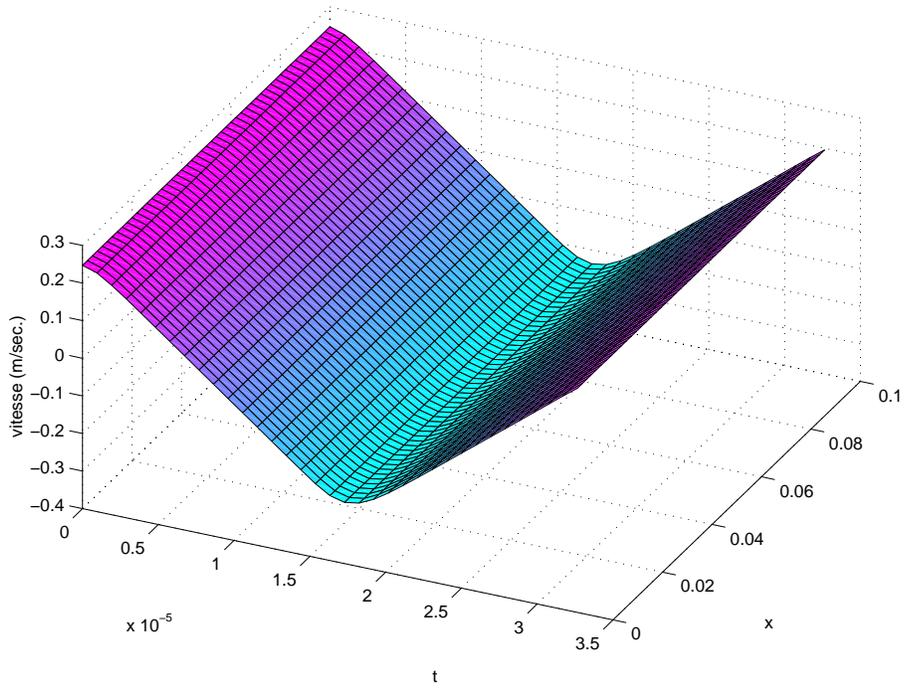
$t = 1 \times 10^{-5} \text{ sec.}$



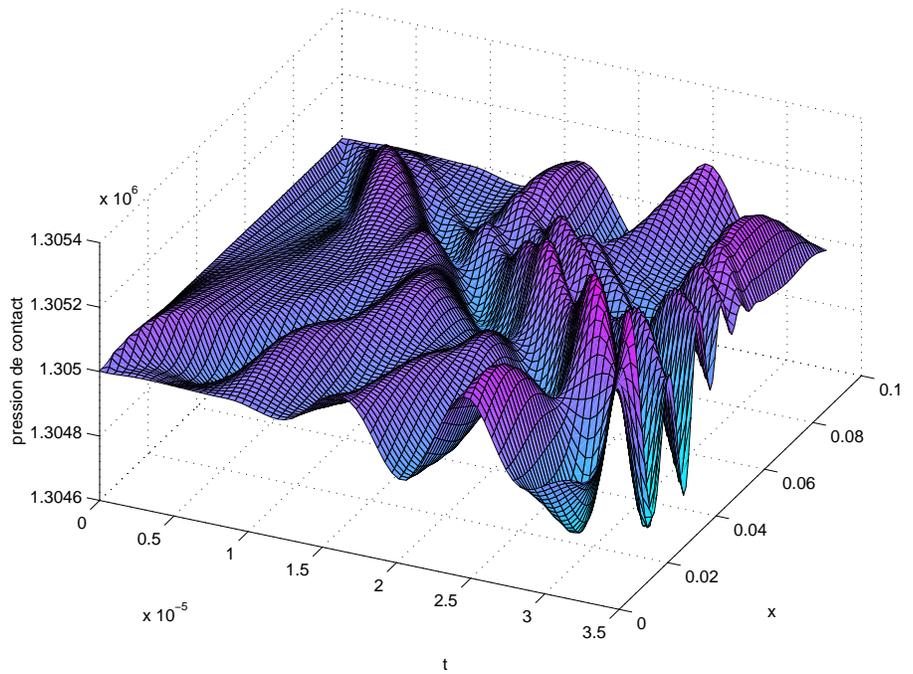
$t = 2 \times 10^{-5} \text{ sec.}$



$t = 3 \times 10^{-5} \text{ sec.}$

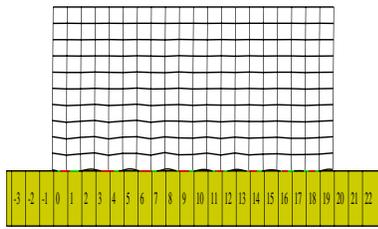


Vitesse sur le bord de contact.

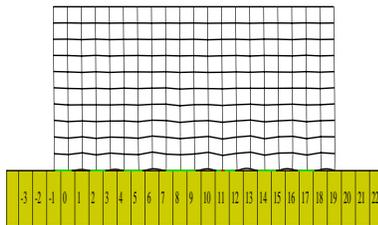


Pression de contact.

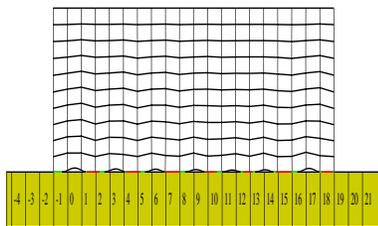
FIG. 4.15 - État du système pour  $t = 0$  à  $t = 3.5 \times 10^{-5} \text{ sec.}$



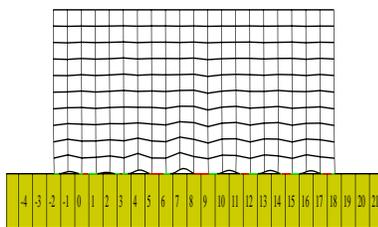
$t = 1.65 \times 10^{-4}$  sec.



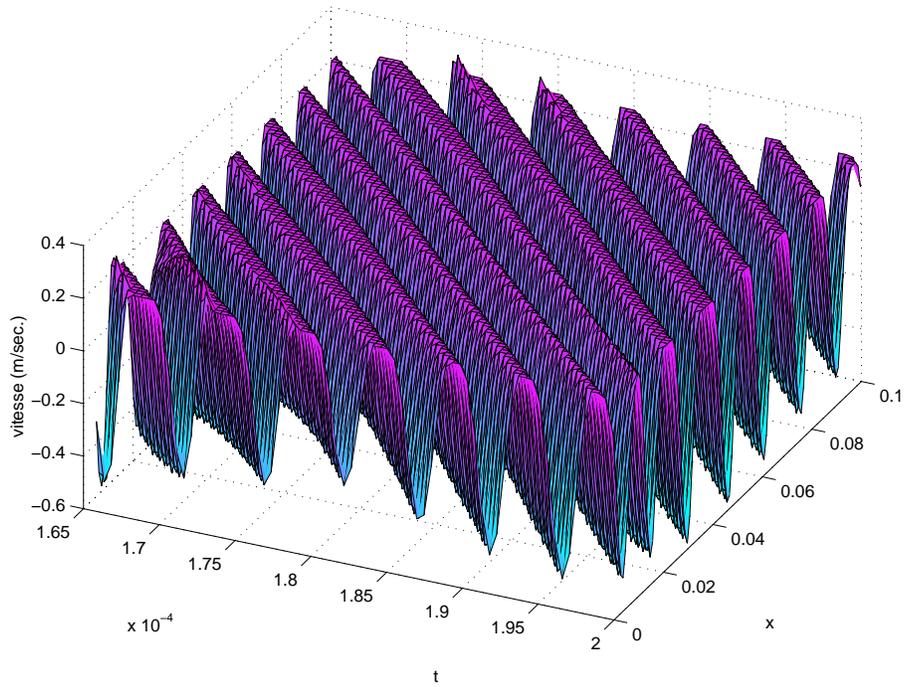
$t = 1.75 \times 10^{-4}$  sec.



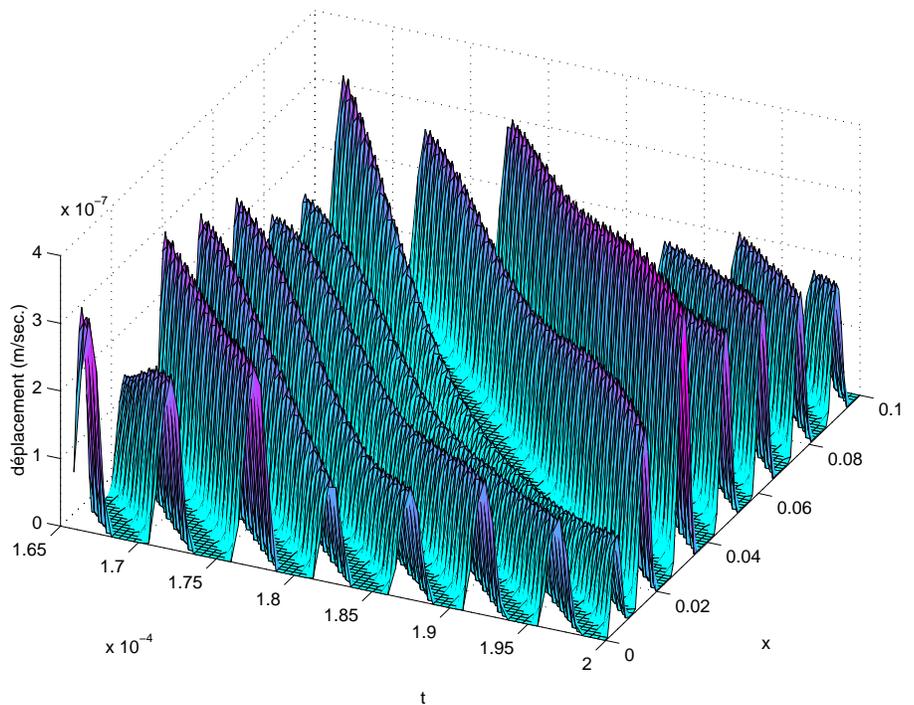
$t = 1.85 \times 10^{-4}$  sec.



$t = 1.95 \times 10^{-4}$  sec.

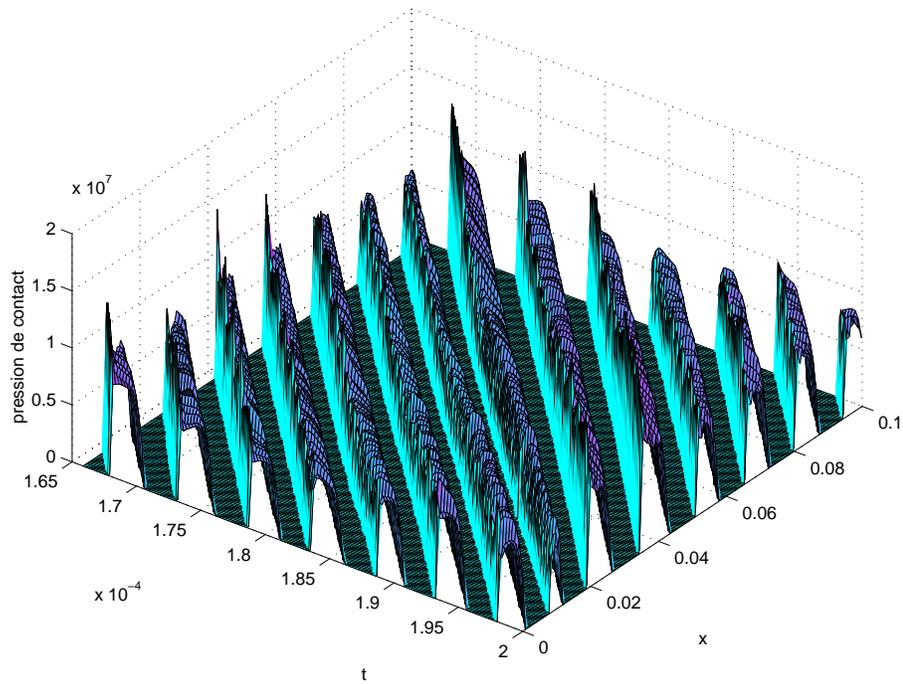


Vitesse sur le bord de contact.



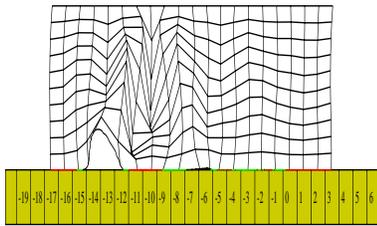
Déplacement vertical.

FIG. 4.16 – État du système pour  $t = 1.66 \times 10^{-4}$  à  $t = 2 \times 10^{-4}$  sec.

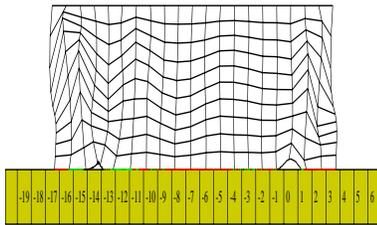


Pression de contact.

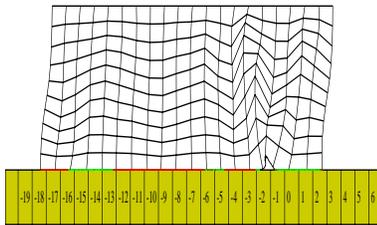
FIG. 4.17 - État du système pour  $t = 1.66 \times 10^{-4}$  à  $t = 2 \times 10^{-4}$  sec.



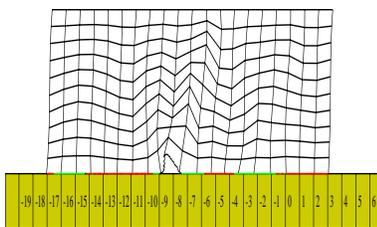
$t = 7.65 \times 10^{-4}$  sec.



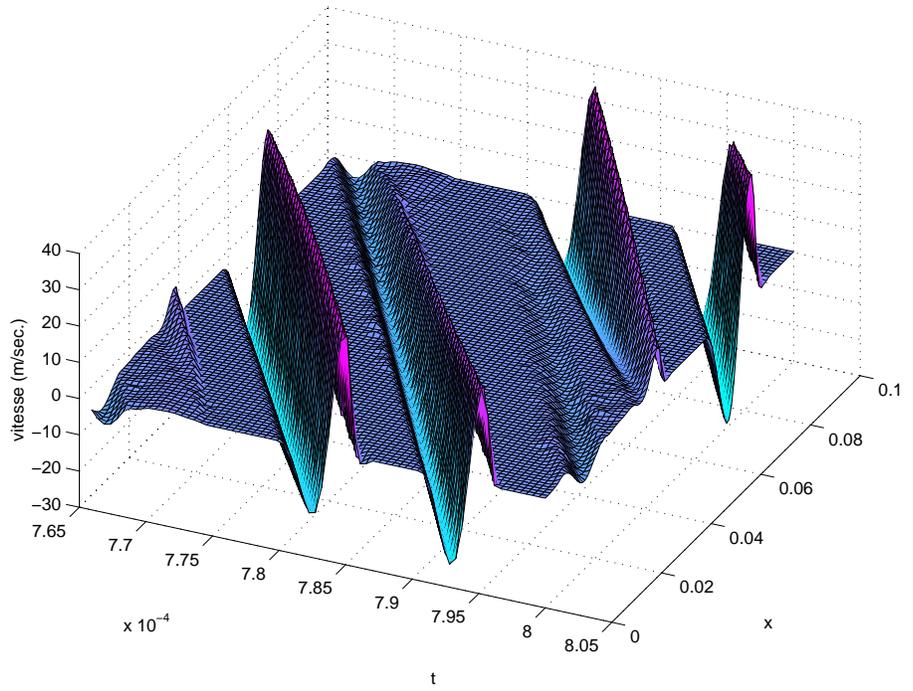
$t = 7.75 \times 10^{-4}$  sec.



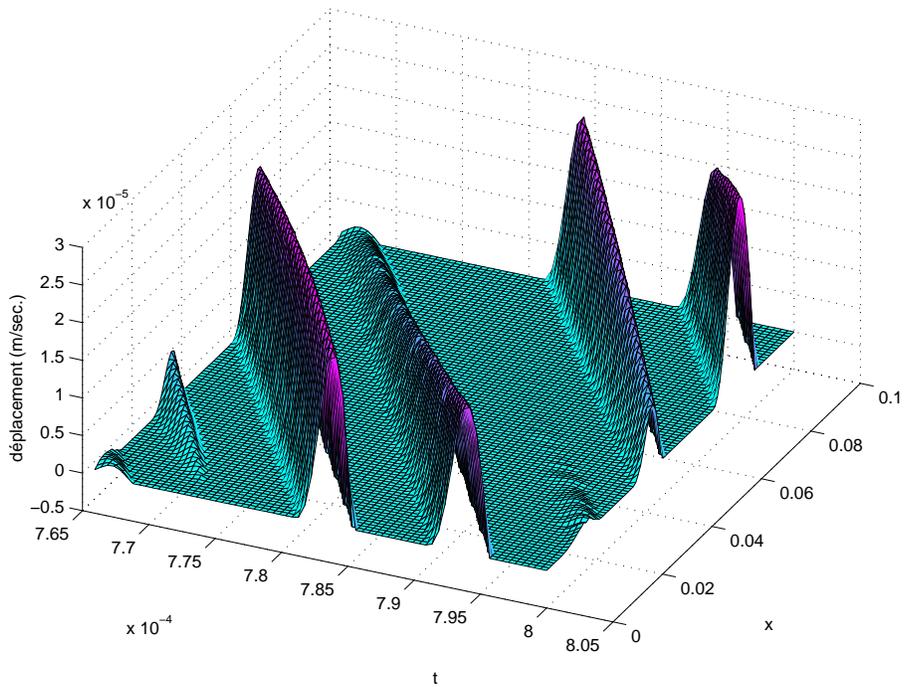
$t = 7.85 \times 10^{-4}$  sec.



$t = 7.95 \times 10^{-4}$  sec.

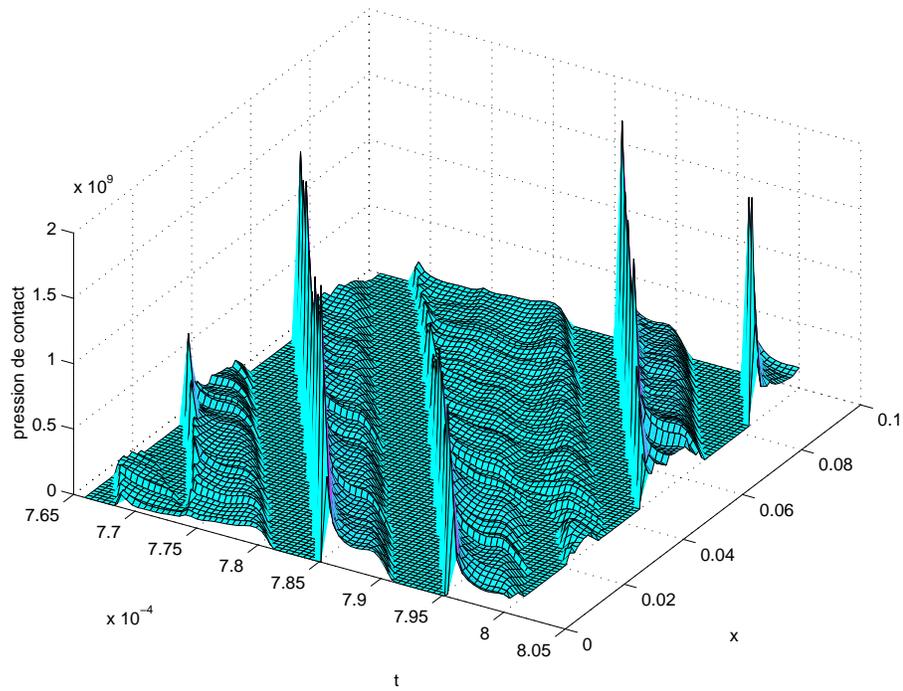


Vitesse sur le bord de contact.



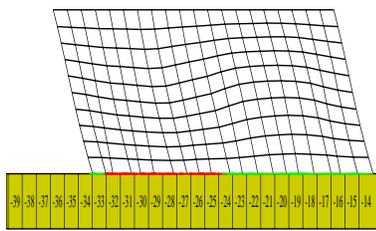
Déplacement vertical.

FIG. 4.18 – État du système pour  $t = 7.66 \times 10^{-4}$  à  $t = 8 \times 10^{-4}$  sec.

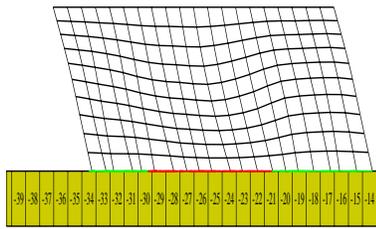


Pression de contact.

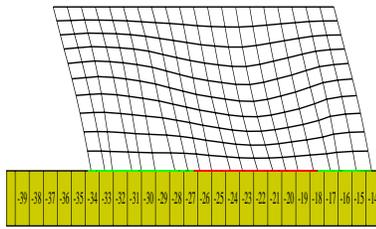
FIG. 4.19 – État du système pour  $t = 7.66 \times 10^{-4}$  à  $t = 8 \times 10^{-4}$  sec.



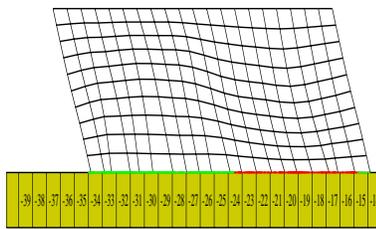
$t = 15.65 \times 10^{-4}$  sec.



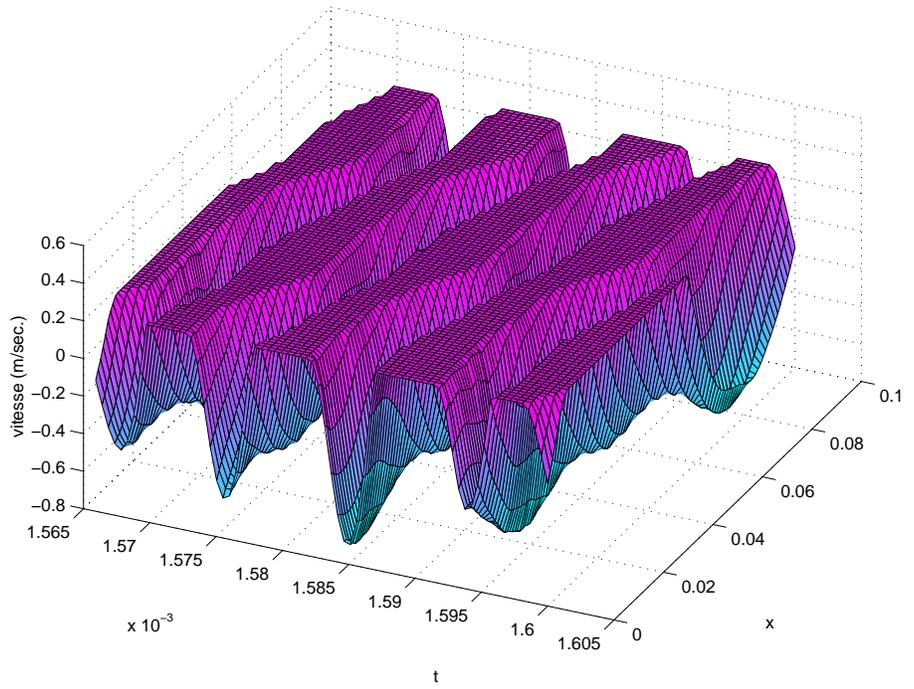
$t = 15.75 \times 10^{-4}$  sec.



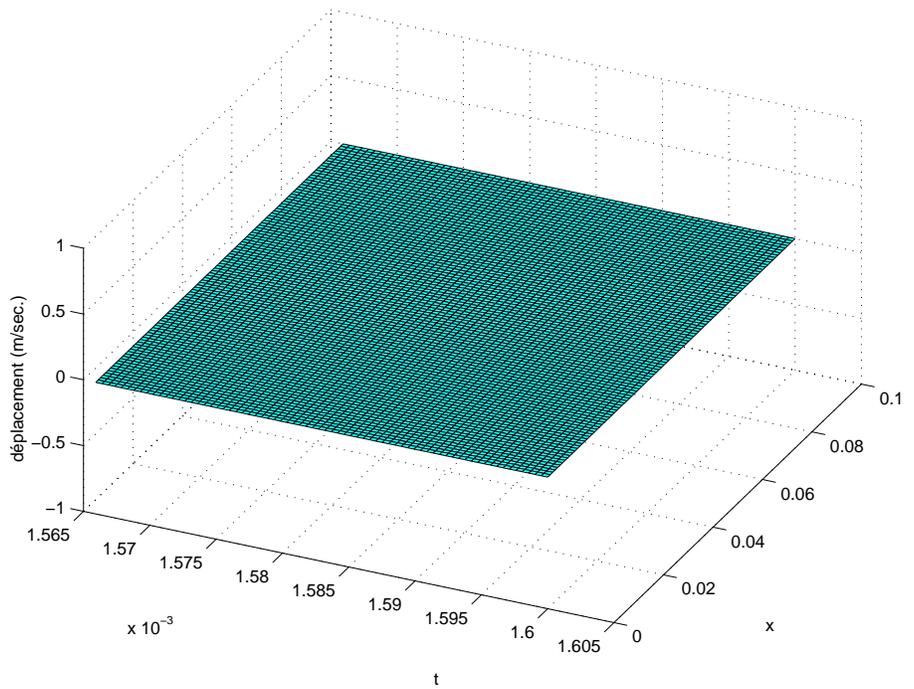
$t = 15.85 \times 10^{-4}$  sec.



$t = 15.95 \times 10^{-4}$  sec.

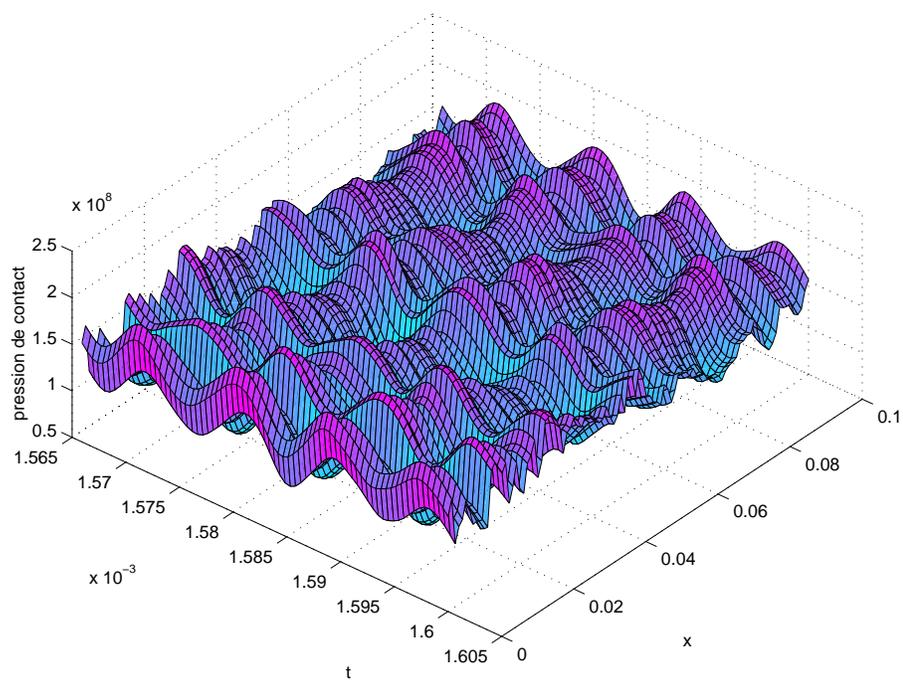


Vitesse sur le bord de contact.



Déplacement vertical.

FIG. 4.20 – État du système pour  $t = 15.66 \times 10^{-4}$  à  $t = 16 \times 10^{-4}$  sec.



Pression de contact.

FIG. 4.21 – État du système pour  $t = 15.66 \times 10^{-4}$  à  $t = 16 \times 10^{-4}$  sec.



# Bibliographie

- [1] R.A. ADAMS. *Sobolev spaces*. Academic Press, 1975.
- [2] L.E. ANDERSON. A quasistatic frictional problem with normal compliance. *Nonlinear Analysis, th. meth. Appl.*, 16 N° 4 : pp 347–369, 1991.
- [3] V. ARONOV, S. NAIR, J.M. WANG. A deterministic conformal counterformal microcontact model. *J. of Tribology*, N° 116 : pp 833–840, 1994.
- [4] V. BARBU. *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*. Noordhoff International Publishing, 1975.
- [5] M. BARQUINS, J. E. WEISFRED. Caoutchouc et séismes. *Pour la Science*, N° 189 : pp 24, 1993.
- [6] P.-A. BLIMAN, A.M. KRASNOSEL'SKII, M. SORINE, A.A. VLADIMIROV . Nonlinear resonance in systems with hysteresis. *Nonlinear Analysis, Methods & Applications*, 27 N° 5 : pp 561–577, 1996.
- [7] F.P. BOWDEN, D. TABOR. The area of contact between stationary and between moving surfaces. *Proc. Roy. Soc. London*, N° A169:pp 391–413, 1939.
- [8] F.P. BOWDEN, D. TABOR. Friction, lubrication and wear : a survey of work during the last decade. *Brit. J. Appl. Phys.*, N° 17 : pp 1521–1544, 1966.
- [9] W.R. BRACE, J.D. BYERLEE. Stick-slip as a mechanism for earth-quakes. *Science*, N° 153 : pp 990–992, 1966.
- [10] M. BURDEKIN, A. COWLEY, N. BACK. An elastic mechanism for the micro-sliding characteristics between contacting machined surfaces. *J. Mech. Engng. Sci.*, 20 N° 3 : pp 121–227, 1978.
- [11] M. CAMPILLO, I.R. IONESCU, J.-C. PAUMIER, Y. RENARD. On the dynamic sliding with friction of a rigid block and of an infinite elastic slab. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, N° 96 : pp 15–23, 1996.

- [12] G. CAPONE, V. D'AGOSTINO, S. DELLA VALLE, D. GUIDA. Stick-slip instability analysis. *Meccanica*, N° 27 : pp 111–118, 1992.
- [13] W.R. CHANG, I. ETSION, D.B. BOGY. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces. *ASME J. of Tribology*, N° 109 : pp 257–263, 1987.
- [14] A. COCHARD, R. MADARIAGA. Dynamic faulting under rate-dependent friction. *Pure & Applied Geophys*, N°142 : pp 419–445, 1995.
- [15] M. COCU. Existence of solutions of signorini problems with friction. *Int. J. Engng. Sci.*, 22 N° 5 : pp 567–575, 1984.
- [16] M. COCU, E. PRATT, M. RAOUS. Existence d'une solution du problème quasi-statique de contact unilatéral avec frottement non local. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, N° 320 : pp 1413–1417, 1995.
- [17] M. COCU, E. PRATT, M. RAOUS. Formulation and approximation of quasistatic frictional contact. *Int. J. Engng. Sci.*, 34 N° 7 : pp 783–798, 1996.
- [18] M. COMNINOU, J. DUNDURS. Elastic interface waves and sliding between two solids. *Journal of Applied Mechanics*, N° 45 : pp 325–330, 1978.
- [19] A. CURNIER. A theory of friction. *Int. J. Solids Structures*, 20 N° 7 : pp 637–647, 1984.
- [20] K. DEIMLING. *Multivalued differential equations*. Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [21] L. DEMKOWICZ, J.T. ODEN. On some existence and uniqueness results in contact problems with nonlocal friction. *Nonlin. An. Th. Meth. Appl.*, 6 N° 10 : pp 1075–1093, 1982.
- [22] J.H. DIETERICH. Time-dependent friction and the mechanics of stick-slip. *Pure & Applied Geophys*, N° 116 : pp 790–806, 1978.
- [23] J.H. DIETERICH. Modeling of rock friction part I. *J. Geophys. res.*, 84 N° B5 : pp 2161–2168, 1979.
- [24] A. DONTCHEV, F. LEMPIO. Difference methods for differential inclusions: a survey. *SIAM Review*, 34 N° 2 : pp 263–294, 1992.
- [25] D.C. DRUCKER. Coulomb friction, plasticity and limit loads. *J. Appl. Mech. Trans A.S.M.E.*, 21 N° 1 : pp 71–74, 1954.
- [26] G. DUVAUT. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1990.
- [27] G. DUVAUT, J.L. LIONS. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod Paris, 1972.
- [28] L.C. EVANS, R.F. GARIEPY. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, 1992.

- [29] I. FIGUEIREDO, T. TRABUCHO. A class of contact and friction dynamic problems in thermoelasticity and in thermoviscoelasticity. *Int. J. Engng. Sci.*, 33 N° 15 : pp 45–66, 1995.
- [30] U. GALVANETTO, S.R BISHOP. Stick-slip vibrations of a two degree-of-freedom geophysical fault model. *Int. J. Mech. Sci.*, 36 N° 8 : pp 683–698, 1994.
- [31] C. GAO, D. KUHLMANN-WILSDORF. On stick-slip and velocity dependence of friction at low speeds. *ASME Journal of Tribology*, N° 112 : pp 355–360, april 1990.
- [32] E. GIUSTI. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Birkhäuser Boston, 1984.
- [33] E. GODLEWSKI, P.-A. RAVIART. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer-Verlag, Applied Math. Sciences, vol. 18, 1996.
- [34] J.A. GREENWOOD, J.H. TRIPP. The elastic contact of rough spheres. *J. of Applied Mechanics*, N° 3 : pp 153–159, 1967.
- [35] J.A. GREENWOOD, J.H. TRIPP. The contact of two nominally flat rough surfaces. *Proc. Instn. Mech. Engrs*, N 185° 48 : pp 625–633, 1971.
- [36] G.A. GREENWOOD, J.P.B. WILLIAMSON. Contact of nominally flat surfaces. *Proc. Roy. Soc. London*, N° A295 : pp 300–319, 1966.
- [37] J.C. GU, J.R. RICE, A.L. RUINA, T. TSE. Slip motion and stability of single degree of freedom elastic system with rate and state dependent friction. *J. Mech. Phys. Solids*, 32 N° 3 : pp 167–196, 1984.
- [38] T. HISAKADO. Effect of surface roughness on contact between solid surfaces. *Wear*, N° 28 : pp 217–234, 1974.
- [39] I. HLAVÁČEK, J. HASLINGER, J. NEČAS, J. LOVIŠEK. *Solution of variational inequalities in Mechanics*. Springer-Verlag, Series: Applied mathematical sciences, vol. 66, 1988.
- [40] F.G. HOROWITZ, A. RUINA. Slip patterns in a spatially homogeneous fault model. *J. of Geol. Res.*, 94 N° B8: pp 10,279–10,298, 1989.
- [41] I.R. IONESCU, J.-C. PAUMIER. Friction dynamique avec coefficient dépendant de la vitesse de glissement. *C.R.Acad.Sci.*, N° 316 série I : pp 121–125, 1993.
- [42] I.R. IONESCU, J.-C. PAUMIER. On the contact problem with slip rate dependent friction in elastodynamic. *Eur. J. Mech., A/Solids*, N° 4 : pp 555–568, 1994.
- [43] I.R. IONESCU, J.-C. PAUMIER. On the contact problem with slip displacement dependent friction in elastostatics. *Int. J. Engng. Sci.*, 34N° 4 : pp 471–491, 1996.

- [44] V.I. JOHANNES, M.A. GREEN, C.A. BROCKLEY. The role of the rate of application of tangential force in determining the static friction coefficient. *Wear*, N° 24 : pp 381–385, 1973.
- [45] N. KIKUCHI, J.T. ODEN. *Contact problems in elasticity*. SIAM, 1988.
- [46] A. KLARBRING, A. MIKELIC, M. SHILLOR. Frictional contact problems with normal compliance. *Int. J. Engng. Sci.*, 26 N° 8 : pp 811–832, 1988.
- [47] A. LAKHAL. Modelisation mathématique du contact unilatéral avec frottement en dynamique. *Thèse Univ. Cl. Bernard de Lyon I. INSA de Lyon*, 1995.
- [48] F. LEMPIO. Modified euler methods for differential inclusions. *Proc. IIASA Workshop on Set-Valued Analysis and Differential Inclusions*, Pamporovo (Bulgaria), September 17-21, 1990.
- [49] F. LEMPIO. Difference methods for differential inclusions. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, N° 378 : pp 236–273, 1992.
- [50] A.I. LEONOV, A. SRINIVASAN. Self-oscillations of an elastic plate sliding over a smooth surface. *Int. J. Engng. Sci.*, 31 N° 3 : pp 453–473, 1993.
- [51] LI CHUN BO, D. PAVELESCU. The friction-speed relation and its influence on the critical velocity of stick-slip motion. *Wear*, N° 82 : pp 277–289, 1982.
- [52] J.A.C. MARTINS, E.B. PIRES. *Free boundary problems: Theory and Applications*, volume 1, A class of impact problems in linear elasticity, pages pp 323–328. Longman Scientific & Technical J.M. Chadam & H. Rasmussen Editors, 1990.
- [53] J.A.C. MARTINS, F.M.F. SIMÕES, F. GASTALDI, M.D.P. MONTEIRO MARQUES. Dissipative graph solutions for a two degree-of-freedom quasistatic frictional contact problem. *Int. J. Engng. Sci.*, N° 33 : pp 1956–1986, 1995.
- [54] J.A.C. MARTINS, J.T. ODEN. A numerical analysis of a class of problems in elastodynamics with friction. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, N° 40 : pp 327–360, 1983.
- [55] J.A.C. MARTINS, J.T. ODEN. Existence and uniqueness result for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws. *Nonlinear Analysis, th. meth. appl.*, 11 N° 3 : pp 407–428, 1987.
- [56] J.A.C. MARTINS, J.T. ODEN, F.M.F. SIMOES. A study of static and kinetic friction. *Int. J. Engng. Sci.*, 28 N° 1 : pp 29–92, 1990.
- [57] J.A.C. MARTINS, S. BARBARIN, M. RAOUS, A. PINTO DA COSTA. Dynamic stability of finite dimensional linearly elastic systems with unilateral contact and coulomb friction. *Comp. meth. appl. mech. engng.*, à paraître, 1998.

- [58] R. MICHALOWSKI, Z. MRÓZ. Associated and non associated sliding rules in contact friction problems. *Archives of Mechanics*, 30 N° 3 : pp 259–276, 1978.
- [59] J.J. MOREAU. Les liaisons unilatérales et le principe de gauss. *C.R.A.S.*, N° 256 : pp 871–874, 1963.
- [60] J.J. MOREAU. Une formulation du contact à frottement sec, application au calcul numérique. *C.R.A.S. Série II*, 302 N° 13 : pp 799–801, 1986.
- [61] Z. MRÓZ, A. JARZEBOWSKI. Phenomenological model of contact slip. *Acta Mechanica*, N° 102 : pp 59–72, 1994.
- [62] Z. MRÓZ, S. STUPKIEWICZ. An isotropic friction and wear model. *Int. J. Solids Structures*, 31 N° 8 : pp 1113–1131, 1994.
- [63] J.T. ODEN, E.B. PIRES. Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. *J. Appl. Mech.*, N° 50 : pp 67–76, 1983.
- [64] J.T. ODEN, J.A.C. MARTINS. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, N° 52 : pp 527–634, 1985.
- [65] D. PAVELESCU, A. TUDOR. The sliding friction coefficient, its evolution and usefulness. *Wear*, N° 120 : pp 321–336, 1987.
- [66] E.B. PIRES, L. TRABUCHO. The steady sliding problem with nonlocal friction. *Int. J. Engng. Sci.*, 28 N° 7 : pp 631–641, 1990.
- [67] J. PULLEN, J.P.B. WILLIAMSON. On the plastic contact of rough surfaces. *Proc. R. soc. Lond. A*, N° 327 : pp 159–173, 1972.
- [68] P. RABIER, J.A.C. MARTINS, J.T. ODEN, L. CAMPOS. Existence and local uniqueness of solutions to contact problems in elasticity with nonlinear friction laws. *Int. J. Engng. Sci.*, 24 N° 11 : pp 1755–1768, 1986.
- [69] P.J. RABIER, J.T. ODEN. solution to signorini-like contact problem through interface models : Part I. *Nonlin. Anal. Th. Meth. Appl.*, 11 N° 12 : pp 1325–1350, 1987.
- [70] P.J. RABIER, J.T. ODEN. Solution to signorini-like contact problem through interface models : Part II. *Nonlin. Anal. Th. Meth. Appl.*, 12 N° 1 : pp 1–17, 1988.
- [71] E. RABINOWICZ. *Friction & Wear*, pages 149–164, Study of the stick–slip process. Davies, Elsevier New-York, 1949.
- [72] E. RABINOWICZ. The intrinsic variables affecting the stick-slip process. *Proceedings of the royal physic society*, N° 71 : pp 668–675, 1958.

- [73] M. RAOUS, J. MARTINS, S. BARBARIN. Caractérisation numérique d'instabilités dues au frottement : ondes de contraintes dans un contact glissant. *26ème congrès d'analyse numérique (Savoie 1994)*, pages pp C32–C33, 1994.
- [74] M. RAOUS, P. CHABRAND, F. LEBON. Numerical methods for frictional contact problems and applications. *J. Méca. théo. et appl.*, Spéc. Issue suppl. : pp 111–128, 1988.
- [75] M. RAOUS, S. BARBARIN. Stress waves in a sliding contact. part 2: modeling. *The Third Body Concept, Elsevier Science*, pages pp 39–44, 1996.
- [76] J.R. RICE, A. RUINA. Stability of steady frictional slipping. *J. Applied. Mech.*, N° 50 : pp 343–349, 1983.
- [77] R.S.H. RICHARDSON, H. NOLLE. Surface friction under time-dependent loads. *Wear*, N° 37 : pp 87–101, 1976.
- [78] W. RUDIN. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1992.
- [79] A. RUINA. Slip instability and state variable friction laws. *J. Geoph. Res.*, 88 N° B12 : pp 10,359–10,370, 1983.
- [80] P. STELTER, W. SEXTRO. Bifurcations in dynamic systems with dry friction. *International Series of Numerical Mathematics*, N° 97 : pp 343–347, 1991.
- [81] D. TABOR. Friction : the present state of our understanding. *J. of Lubrification Technology*, N° 103 : pp 169–179, 1981.
- [82] A.N. TIKHONOV, A.B. VASILÉVA, A.G. SVESHNIKOV. *Differential Equations, Chapter VII, Asymptotics of solutions of differential equations with respect to a small parameter*, pages 181–213. Springer Verlag, 1980.
- [83] D.M. TOLSTOI. Significance of the normal degree of freedom and natural vibrations in contact with friction. *Wear*, N° 10 : pp 199–213, 1967.
- [84] A. TUDOR, LI CHUN BO. The squeeze film under boundary conditions and its effect on the vertical displacement of sliding bodies. *Wear*, N° 80 : pp 115–119, 1982.
- [85] T. ZEGHLOUL, B. VILLECHAISE. Stress waves in a sliding contact. part 1: Experimental study. *The Third Body Concept, Elsevier Science*, pages pp 33–37, 1996.



## Résumé

Ce travail comporte deux parties. La première partie est une étude bibliographique sur la modélisation du frottement sec et sur les différentes lois de frottement qui ont été introduites pour rendre compte des instabilités du mouvement des solides soumis à la friction sèche. La deuxième partie est une étude théorique et numérique d'un problème modèle dynamique où une lois de type Coulomb avec coefficient de frottement dépendant de la vitesse de glissement est appliquée à un solide élastique.

Le cadre des inclusions différentielles est introduit pour traiter rigoureusement les modèles à nombre fini de degré de liberté et à pression de contact imposée. Ce cadre sert ensuite à l'analyse en détail d'un problème unidimensionnel d'une couche élastique glissant avec frottement sur une fondation rigide plane. On montre l'existence et l'unicité de la solution lorsque le coefficient de frottement est croissant, mais lorsque celui-ci comporte au moins une portion décroissante, ce qui est le cas dans la plupart des modélisation, on montre que le problème admet en général une infinité de solutions. Cela amène à considérer un critère de choix de solution appelé critère de retard maximal. Par ailleurs, on introduit une condition de frottement perturbée qui consiste en l'ajout d'une masse de surface et qui redonne aussi l'unicité de la solution. On montre le lien entre le critère de retard maximal et cette condition perturbée. On présente aussi des schémas numériques, des résultats de stabilité et de convergence, ainsi que des expériences numériques.

On donne enfin des perspectives pour les problèmes en dimension deux ou trois. On présente des simulations numériques significatives, obtenues à l'aide d'un schéma numérique basé sur une méthode de type directions alternées, et sur la perturbation par une masse de surface.

### Mots clés :

*frottement sec, instabilités, inclusions différentielles, mouvement stick-slip.*