

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Généralités sur la théorie des ondelettes</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.1.1 Remarques sur la transformée de Fourier . . . . .	9
1.1.2 La transformée de Fourier à fenêtre glissante . . . . .	10
1.1.3 Idée de la transformée en ondelettes . . . . .	11
1.2 Définition d'une ondelette et propriétés . . . . .	12
1.3 Transformée en ondelettes continue . . . . .	15
1.3.1 Définition . . . . .	15
1.3.2 Quelques propriétés . . . . .	16
1.3.2.1 Conservation de l'énergie et formule d'inversion . . . . .	16
1.3.2.2 Linéarité, translation, dilatation, rotation . . . . .	16
1.3.2.3 Noyau reproduisant . . . . .	17
1.3.3 Caractérisation de la régularité d'une fonction . . . . .	18
1.4 Transformée en ondelettes discrète . . . . .	19
1.4.1 Introduction . . . . .	19
1.4.2 Frames et ondelettes . . . . .	20
1.4.2.1 Généralités sur les frames . . . . .	20
1.4.2.2 Les ondelettes obliques . . . . .	22
1.4.2.3 Les ondelettes obliques bi et tridimensionnelles . . . . .	23
1.4.3 Bases orthonormées d'ondelettes . . . . .	24
1.4.3.1 L'analyse multi-résolution . . . . .	26
1.4.3.2 Construction d'ondelettes à partir de l'analyse multi-résolution . . . . .	28
1.4.3.3 Extension à la dimension 2 . . . . .	31
1.4.4 Remarques . . . . .	32
1.5 Quelques ondelettes . . . . .	33

1.5.1	Ondelettes continues . . . . .	33
1.5.1.1	L'ondelette de Morlet . . . . .	33
1.5.1.2	Le chapeau mexicain . . . . .	35
1.5.2	Ondelettes orthonormales . . . . .	37
1.5.2.1	L'ondelette de Haar . . . . .	37
1.5.2.2	L'ondelette de Littlewood-Paley . . . . .	37
1.5.2.3	Les ondelettes de Meyer . . . . .	38
1.5.2.4	Les ondelettes splines de Battle-Lemarié . . . . .	40
1.5.2.5	Les ondelettes à support compact de I. Daubechies . . . . .	42
1.5.3	Ondelettes biorthogonales . . . . .	45
1.5.4	Choix de l'ondelette . . . . .	49
<b>2</b>	<b>Divers algorithmes de transformée en ondelettes</b>	<b>51</b>
2.1	Transformée continue . . . . .	51
2.1.1	Mise en oeuvre . . . . .	51
2.1.2	Problèmes de représentation . . . . .	52
2.1.2.1	Représentation en espace . . . . .	53
2.1.2.2	Représentation angle-échelle . . . . .	54
2.1.2.3	Représentation espace-angle-échelle . . . . .	54
2.1.3	Problèmes aux bords . . . . .	55
2.1.4	Facteur d'échelle minimal . . . . .	56
2.2	Transformée discrète . . . . .	57
2.2.1	Multi-résolution . . . . .	57
2.2.1.1	Analyse . . . . .	58
2.2.1.2	Reconstruction . . . . .	60
2.2.1.3	Conditions sur les filtres . . . . .	61
2.2.1.4	Extension à la dimension 2 . . . . .	62
2.2.2	L'algorithme à trous . . . . .	64
2.2.2.1	Analyse . . . . .	64
2.2.2.2	Conditions sur les filtres et propriétés . . . . .	66
2.2.2.3	Reconstruction . . . . .	68
2.2.2.4	Extension à la dimension 2 . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Ondelettes directionnelles</b>	<b>71</b>
3.1	Introduction . . . . .	71
3.2	Définitions et propriétés . . . . .	72
3.3	Construction d'ondelettes directionnelles et exemples . . . . .	78

3.4	Etude de la TO par l'ondelette de Morlet d'une fonction simple . . . . .	81
3.4.1	Qualité directionnelle de l'ondelette . . . . .	82
3.4.2	Calcul de la transformée . . . . .	82
3.4.3	Etude en fonction de l'angle . . . . .	84
3.4.3.1	$\theta' = 0$ . . . . .	84
3.4.3.2	$\theta' = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	86
3.4.3.3	Tests sur la qualité directionnelle . . . . .	87
3.4.4	Etude en fonction de l'échelle . . . . .	89
3.5	Conclusion . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Analyse par ondelettes des images sismiques</b>	<b>91</b>
4.1	Les images sismiques . . . . .	91
4.1.1	Introduction . . . . .	91
4.1.2	Formation des images . . . . .	92
4.1.3	Interprétation . . . . .	95
4.1.4	Apport des traitements informatiques dans le domaine de l'interprétation . . . . .	97
4.2	Ondelettes et sismique . . . . .	101
4.2.1	Etat de l'art . . . . .	101
4.2.2	Objectifs . . . . .	102
4.3	Amélioration de la perception : mise en valeur des horizons . . . . .	103
4.3.1	Méthode : utilisation de l'algorithme à trous . . . . .	103
4.3.2	Utilisation d'une ondelette adaptée : l'ondelette sismique . . . . .	105
4.3.3	Résultats . . . . .	108
4.3.3.1	Ondelettes mathématiques . . . . .	109
4.3.3.2	Ondelette sismique . . . . .	122
4.4	Analyse par ondelettes directionnelles . . . . .	125
4.4.1	Détection de zones ayant une direction privilégiée . . . . .	125
4.4.2	Détection de failles . . . . .	127
4.4.2.1	Introduction . . . . .	127
4.4.2.2	Méthode . . . . .	127
4.4.2.3	Apport du filtrage . . . . .	132
4.4.2.4	Transformée en ondelette adaptative . . . . .	132
4.4.2.5	Limites de la méthode et perspectives . . . . .	139
	<b>Conclusion</b>	<b>141</b>

<b>A Coefficients d'ondelettes</b>	<b>143</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>146</b>

# Introduction

Les ondelettes, famille de fonctions déduites d'une même fonction, appelée ondelette mère, par opérations de translations, dilatations et rotations, sont nées de l'analyse des signaux sismiques haute résolution. En 1984, P. Goupillaud, A. Grossmann et J. Morlet [38] poussés par les exigences croissantes de la recherche d'hydrocarbures proposent une méthode de reconstruction des signaux sismiques permettant une restauration des hautes fréquences à l'aide de la représentation temps-fréquence des signaux. Cet outil puissant a ensuite été très étudié et développé, tant du point de vue pratique que du point de vue théorique, par des personnes telles Y. Meyer [61], I. Daubechies [23], S. Mallat [53], P.G. Lemarié [48], JP. Antoine [1] ou R. Murenzi [65] etc... pour aboutir à la théorie de l'analyse par ondelettes telle qu'elle existe aujourd'hui.

Le succès des ondelettes vient de son énorme champ d'applications. En effet, une famille d'ondelettes étant une base de la plupart des espaces fonctionnels [56], son utilisation simplifie parfois énormément certaines démonstrations mathématiques.

De plus, une ondelette est bien localisée en temps et en fréquence. La transformée trouve tout un domaine d'application en traitement du signal. En effet, elle permet, comme la transformée de Fourier, d'étudier les fréquences d'une fonction tout en conservant la localisation des événements [31]. Par exemple en musique, la transformée de Fourier permet de dire quelle quantité de do contient un morceau. La transformée en ondelettes, elle, permet d'affirmer qu'un do a été joué à tel moment et que c'était une croche, une noire ou une blanche.

Cette aptitude à étudier les fréquences conduit la transformée en ondelettes à être un outil particulièrement adapté à l'étude de la régularité des fonctions.

Le paramètre de rotation introduit par JP. Antoine et R. Murenzi [2] en dimension supérieure à 1 permet, à l'aide de l'ondelette de Morlet, une sélectivité directionnelle de la transformée, ce qui permet par exemple de compter et déterminer des champs de vitesse dans une certaine direction.

Le paramètre de dilatation fait de la transformée un espèce de microscope. Une

analyse multi-résolution permet de voir une fonction ou une image comme si on se rapprochait ou s'éloignait de cette fonction ou de cette image.

Une image sismique issue de la sismique réflexion est une bonne représentation du sous-sol, assimilable à ce qu'on verrait si on faisait une photographie. Une impulsion (par exemple une explosion) est envoyée dans le sol. Celle-ci se réfléchit sur les différentes couches de roches et un alignement de récepteurs enregistre ces réflexions en fonction du temps. Cette image se présente comme un ensemble de zones de textures différentes, appelées séquences sismiques, séparées parfois par des lignes blanches appelées horizons, séparation entre deux couches de roches de nature différente. L'interprétation d'une image sismique passe par la détermination des différentes séquences. Ceci est un problème difficile qui demande souvent des connaissances a priori. Les géophysiciens font souvent ce travail à la main, ce qui prend parfois un temps considérable vu la quantité de données qu'ils ont à traiter. L'informatique peut alors apporter des outils permettant d'accélérer le travail. Les séquences sismiques se différencient les unes des autres plus par dissimilarité de texture ou de direction que par des frontières. Les techniques habituelles de traitement d'image s'avèrent inefficaces et il est extrêmement difficile de segmenter totalement l'image de façon fiable. Nous allons donc nous intéresser plus particulièrement à la détection des horizons et des failles.

La détection d'horizon n'est pas un problème nouveau. Cependant, les images sont souvent bruitées, ce qui rend la détection moins fiable. Les horizons se présentent comme un alignement de réflexions. Or l'impulsion sismique et donc la réflexion sont très proches d'une ondelette. La représentation du signal sismique dans une base d'ondelettes adaptée doit donc permettre d'éliminer le bruit, ce qui a pour effet d'améliorer à la fois la perception visuelle de l'image et la détection proprement dite. Nous verrons qu'il est également possible de calculer une ondelette adaptée à chaque image à partir du signal sismique enregistré.

Les failles sont des cassures dans les couches de roches. Ceci se traduit par des réflexions désordonnées au voisinage des failles et, dans l'image, par une rupture d'horizon ou une rupture de la pente de l'horizon. Une faille est donc perçue comme la répétition d'un même événement (cassure) dans une certaine direction. On remarque que ceci correspond à des singularités de la fonction qu'est l'image. Or la transformée en ondelettes est particulièrement adaptée à l'étude des singularités. De plus, l'utilisation du paramètre de rotation et de l'ondelette de Morlet permettent d'introduire une sélectivité directionnelle. Ceci va être très utile dans la mesure où, dans la plupart

des cas, les horizons et les failles ont des directions différentes.

Dans ce travail, la transformée en ondelettes sera utilisée comme un instrument d'analyse, l'aspect inversion et reconstruction n'étant pas abordé.

Dans le **chapitre 1**, la théorie des ondelettes sera brièvement présentée. Après une introduction sur la transformée de Fourier et ses limites, nous verrons ce qu'est une ondelette ainsi que ses principales propriétés avant de passer à la transformée en ondelettes proprement dite. Transformée en ondelettes continue et transformée en ondelettes discrète seront différenciées. Un certain nombre d'ondelettes avec leurs propriétés, avantages et inconvénients, sera ensuite décrit, pour terminer sur le choix difficile de l'ondelette appropriée.

Dans le **chapitre 2**, divers algorithmes rapides de la transformée en ondelettes [7] seront exposés en commençant par la transformée continue. Celle-ci pose des problèmes de représentation en dimension supérieure à 1. Après avoir décrit les systèmes de représentation existants, on introduira une représentation "angle-échelle-espace" adaptative. La transformée en ondelettes discrète conduit principalement à deux algorithmes : l'algorithme multi-résolution et l'algorithme à trous. Une comparaison entre les avantages et les inconvénients des deux algorithmes sera faite. Pour les deux types de transformées, on étudiera les problèmes de bords ainsi que le facteur d'échelle minimal.

Dans le **chapitre 3**, une notion d'ondelette directionnelle en dimension 2 dans laquelle est incluse l'ondelette de Morlet sera introduite. Après avoir défini de telles ondelettes, on étudiera quelques-unes de leurs propriétés. Un moyen de construire une catégorie de ces ondelettes sera ensuite proposé et on verra quelques exemples, notamment le "demi-chapeau mexicain" bien adapté à la détection de frontières dans une direction. On étudiera enfin le comportement de l'ondelette de Morlet sur une fonction simple représentant un horizon simplifié au voisinage d'une faille. Cette étude va permettre par la suite de choisir plus facilement les paramètres de la transformée comme l'angle ou le facteur d'échelle.

Le **chapitre 4** est consacré à l'application aux images sismiques proprement dite. Dans un premier temps, la formation des images et leur interprétation est décrite.

Une partie est consacrée à la mise en valeur des réflexions importantes à l'aide

de la transformée en ondelettes. Les ondelettes les plus semblables à l'impulsion sismique sont des ondelettes discrètes. On utilisera l'algorithme à trous pour sa propriété d'invariance en translation. De plus cet algorithme, par l'utilisation d'un filtre à trous, permet de calculer la transformée en ondelettes exacte par l'ondelette sismique issue de l'autocorrélation du signal sismique. Cette ondelette adaptée permettra une grande amélioration par rapport aux ondelettes mathématiques.

Une autre partie est consacrée à l'utilisation des ondelettes directionnelles. Une mise en valeur de zones ayant une même direction sera abordée. Une méthode originale de détection de faille sera décrite. Un filtrage adapté préalable de l'image permettra d'améliorer la détection dans des zones très bruitées comme les zones sourdes. Une représentation "angle-échelle-espace" permettra une amélioration dans le cas où les failles ont des directions très différentes.

# Chapitre 1

## Généralités sur la théorie des ondelettes

### 1.1 Introduction

Les ondelettes, famille de fonctions déduites d'une même fonction, appelée ondelette mère, par opérations de translations, dilatations et rotations en dimension supérieure à un, ont trouvé, de par la puissance de leur théorie, des applications dans de nombreux domaines aussi variés que les mathématiques (analyse [43] [6] [24] [19], probabilités [20] [4], fractales [65]), le traitement du signal (compression [34] [74], astronomie [8], sismique [37]), la physique (mécanique quantique [14], turbulence [27]). En effet, cet outil permet la représentation de fonctions de  $L^2$  dans une base bien localisée en espace et en fréquence offrant les avantages de l'analyse de Fourier et s'affranchissant des inconvénients du manque de localisation de cette dernière.

#### 1.1.1 Remarques sur la transformée de Fourier

La transformée de Fourier (TF), outil fondamental aussi bien en mathématiques, qu'en physique et traitement du signal s'écrit pour une fonction  $f$  intégrable à une variable

$$\mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

La transformée inverse existe et s'écrit alors

$$\bar{\mathcal{F}}\hat{f}(t) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega$$

La transformée de Fourier, qui consiste à décomposer  $f$  sur des fonctions  $e^{i\omega t}$  (très localisées en fréquence mais non localisées en espace) permet une analyse de l'ensemble

des fréquences de la fonction  $f$  (analyse spectrale). En revanche cette analyse n'est pas localisée en espace (ou en temps, suivant le point de vu sous lequel on se place). L'analyse spectrale est un outil fondamental en mathématiques et en traitement du signal, notamment pour l'étude des signaux stationnaires (c'est-à-dire ayant des propriétés statistiquement invariantes au cours du temps). En effet, ces signaux se décomposent en combinaisons linéaires d'ondes. Cependant, il existe de nombreux cas où la relation temps-fréquence ou espace-fréquence est indispensable, notamment l'étude des signaux transitoires où des événements imprévisibles apparaissent.

Prenons l'exemple d'un morceau de musique qui serait la fonction à analyser. Ce morceau est une suite de notes (ayant une fréquence bien déterminée) dans le temps. On ne peut prévoir a priori à quel instant telle note va être jouée. La transformée de Fourier permet d'affirmer si le morceau contient des do, par exemple, et en quelle proportion. Par contre, elle ne permet pas de dire à quel moment du morceau un do a été joué.

### 1.1.2 La transformée de Fourier à fenêtre glissante

Afin d'améliorer la localisation en temps, tout en préservant au mieux la localisation en fréquence, on peut utiliser la transformée de Fourier à fenêtre glissante, approche améliorée dans les années 40 par D. Gabor [33]. En effet, celle-ci s'écrit

$$\mathcal{F}_{fen}f(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}(t-b)e^{-i\omega t}f(t)dt$$

où  $f$  est la fonction à analyser et  $h$  une fonction "fenêtre" appropriée centrée sur  $b$ . En fait, cette transformée effectue le calcul de la transformée de Fourier de la fonction  $f(\cdot)h(\cdot-b)$  à  $b$  fixé. Si les fonctions  $h$  et  $\hat{h}$  sont toutes deux concentrées autour de zéro, la transformée de Fourier à fenêtre glissante peut-être interprétée comme le "contenu" de la fonction  $f$  autour de la position  $b$  et de la fréquence  $\omega$  [23].

En effet, posons  $h_{\omega b}(t) = h(t-b)e^{i\omega t}$ . La fonction  $h_{\omega b}$  est concentrée autour de  $b$ , donc  $\mathcal{F}_{fen}f$  est une représentation de  $f$  autour de la position  $b$ .

En remarquant que

$$\mathcal{F}_{fen}f(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}_{\omega b}(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$

avec  $\hat{h}_{\omega b}(\xi) = \hat{h}(\xi-\omega)e^{i(\xi-\omega)b}$ ,  $\hat{h}_{\omega b}$  étant concentrée autour de  $\omega$  alors  $\mathcal{F}_{fen}f$  est une représentation de  $f$  autour de la fréquence  $\omega$ .

De nombreux choix de  $h$  sont possibles. En général, cette fonction est choisie à support compact, suffisamment régulière et bien localisée en espace et en fréquence.

Le choix le plus classique est celui de la gaussienne:  $h(t) = Ce^{-\alpha t^2}$  avec  $(C, \alpha) \in \mathbb{R}^{+2}$ . Cette fonction n'est pas à support compact mais à décroissance rapide, ce qui numériquement est satisfaisant. De plus elle est infiniment dérivable et bien localisée en espace et en fréquence.

On montre que, sous certaines conditions, il existe une formule d'inversion analogue à celle de la transformée de Fourier [35].

On a vu que la transformée de Fourier à fenêtre glissante de Gabor permet une représentation temps-fréquence ou espace-fréquence des fonctions. Cependant la taille de la fenêtre étant fixe, cette représentation ne paraît pas adaptée à la représentation de fonctions ou de signaux ayant des composantes de tailles très différentes de la taille de la fenêtre. Reprenons l'exemple du morceau de musique. Si la taille de la fenêtre est, par exemple, la durée d'une noire, la transformée n'est pas adaptée à l'étude des croches et des blanches.

### 1.1.3 Idée de la transformée en ondelettes

J. Morlet en 1981 [64], pour l'étude haute résolution des signaux sismiques, propose une transformée où la taille de la fenêtre est variable, ceci grâce à un paramètre d'échelle. Cette transformée, la transformée en ondelettes, est une décomposition atomique dont les atomes sont issues d'une même fonction, l'ondelette mère, par opérations de translation et dilatation. Cette ondelette, appelée ainsi car présentant des oscillations (comme une onde) mais limitée en temps (d'où le nom de "petite onde"), doit être bien localisée en temps et en fréquence. Ainsi, la transformée en ondelettes permet une analyse temps-fréquence ou temps-échelle (la fréquence de chaque ondelette étant liée à l'échelle). La notion de représentation temps-échelle ou espace-échelle permet de voir la transformée en ondelette comme un microscope mathématique, le zoom étant l'échelle et l'optique, l'ondelette.

Il existe un grand nombre d'ondelettes offrant une grande diversité d'analyse. Il existe également diverses transformées (continues ou discrètes). Les transformées les plus utilisées vont être présentées, en ayant défini au préalable l'ondelette et ses propriétés. Les ondelettes les plus courantes seront ensuite présentées.

## 1.2 Définition d'une ondelette et propriétés

Après avoir introduit l'idée qui conduit à la transformée en ondelettes, nous allons présenter ce qu'est une ondelette ainsi que ses principales propriétés. La transformée elle-même et ses propriétés seront présentées au paragraphe suivant. Nous allons nous placer, pour la définition d'une ondelette, dans le cadre très général de la dimension  $n$ . Les personnes intéressées par une étude plus détaillée de l'élaboration de cette théorie pourront se référer à la thèse de Romain Murenzi [65]. Les dimensions les plus courantes sont la dimension 1 (signaux sonores, télécommunications) et la dimension 2 (imagerie).

Nous avons vu en introduction qu'une ondelette devait être une fonction localisée aussi bien en temps qu'en fréquence. Ceci se traduit dans le domaine fréquentiel par la condition d'admissibilité suivante :

**Définition 1.1 (Admissibilité)** Soit  $\Psi$  une fonction non nulle de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$c_\Psi = (2\pi)^n A_{n-1} \int \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|^n} d^n \omega < \infty \quad (1.1)$$

où  $|\omega| = (\omega_1^2 + \dots + \omega_n^2)^{\frac{1}{2}}$  et  $A_n$  est la mesure entière de  $SO(n)$  [65] :

$$A_n = \prod_{l=1}^n \frac{2\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{l}{2})}.$$

On dit que  $\Psi$  est admissible. On appelle également  $\Psi$  ondelette analysante.

Une ondelette est une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  vérifiant la condition d'admissibilité (1.1) de la définition 1.1. Cette condition étant relativement souple, un assez grand nombre de fonctions peuvent convenir. Aussi impose-t-on souvent des contraintes supplémentaires de régularité, de décroissance rapide ou de compacité suivant les besoins [60] comme par exemple I. Daubechies pour la construction d'ondelettes à support compact [21] [23] ou P.-G. Lemarié pour des ondelettes à localisation exponentielle [47] ou Y. Meyer pour la construction d'ondelettes  $C^\infty$  [60]. Nous exposerons ceci plus en détail lors de la présentation d'ondelettes particulières (paragraphe 1.5).

Outre ses propriétés de localisation, une ondelette possède la propriété de s'annuler en 0 dans le domaine de Fourier, ce qui simplifie énormément la condition d'admissibilité dans certains cas comme le montre la propriété 1.1.

**Propriété 1.1** Soit  $\Psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

1 - Si  $\Psi$  est admissible, alors  $\hat{\Psi}(0) = 0$  soit  $\int \Psi(x) d^n x = 0$ .

2 - Inversement, si  $\hat{\Psi}(0) = 0$ , si  $\hat{\Psi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  et si les dérivées partielles de  $\hat{\Psi}$  sont bornées, alors  $\Psi$  est admissible.

Les conditions de la propriété 1.1 sont vérifiées la plupart du temps, l'ondelette étant prise assez régulière. La condition d'admissibilité s'écrit donc souvent :

$$\hat{\Psi}(0) = \int \Psi(x) d^n x = 0 \quad (1.2)$$

On peut voir cette condition comme le fait que l'ondelette doit présenter des oscillations (et donc ressembler à une onde).

### Famille d'ondelettes

A partir d'une ondelette analysante, aussi appelée ondelette mère, on définit une famille d'ondelettes  $\Psi_{a,b,r}$  par opérations de dilatation (ou contraction), translation et rotation

$$\Psi_{a,b,r}(x) = \frac{1}{a^{\frac{n}{2}}} \Psi\left(\frac{1}{a} r^{-1}(x - b)\right) \quad a \in \mathbb{R}^{+*}, b \in \mathbb{R}, r \in SO(n) \quad (1.3)$$

L'expression de la transformée de Fourier de chaque ondelette fille s'exprime facilement en fonction de l'ondelette mère

$$\hat{\Psi}_{a,b,r}(\xi) = a^{\frac{n}{2}} e^{-i\xi b} \hat{\Psi}(ar^{-1}(\xi)) \quad (1.4)$$

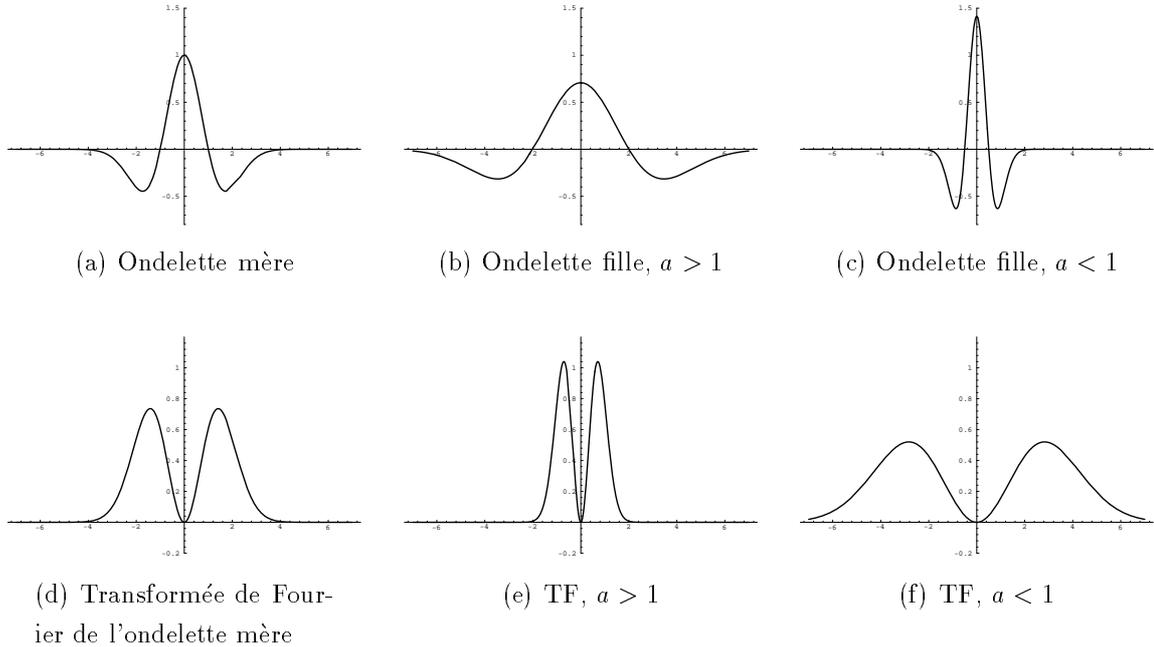


Figure 1.1: Exemples d'ondelettes unidimensionnelles pour plusieurs facteurs d'échelle et leur transformée de Fourier.

$a$  est appelé *facteur d'échelle*. On peut le lier à la fréquence : si  $a > 1$  l'ondelette sera plus étalée et correspondra donc à une fréquence plus faible, si  $a < 1$  l'ondelette sera

plus étroite et correspondra à une fréquence plus élevée que celle de l'ondelette mère (voir Fig. 1.1).  $b$  est le paramètre de translation, ce qui correspond à un changement de phase dans le domaine de Fourier, et  $r$  celui de rotation.

### Remarques

1. On remarque qu'une meilleure localisation fréquentielle pour l'ondelette entraîne une moins bonne localisation spatiale ou temporelle (Fig. 1.1 (b) et (e)) et vice versa. La représentation de la localisation spatiale et fréquentielle d'une même ondelette unidimensionnelle en fonction du facteur d'échelle est représentée par la figure 1.2.

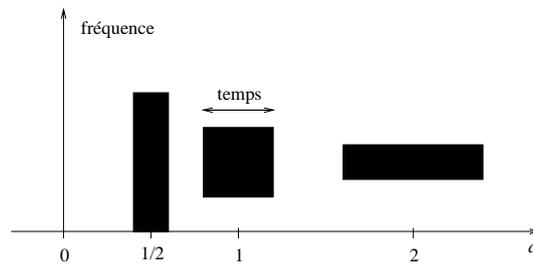


Figure 1.2: Représentation de la localisation temporelle et fréquentielle d'une ondelette en fonction de  $a$ .

2. La famille définie précédemment est normalisée en norme  $L^2$ . C'est la définition la plus utilisée. Cependant, pour certaines applications, surtout en analyse de signal [27] [3], on préférera la normalisation  $L^1$ . On pose alors

$$\Psi_{a,b,r}(x) = \frac{1}{a^n} \Psi\left(\frac{1}{a} r^{-1}(x - b)\right) \quad a \in \mathbb{R}^{+*}, b \in \mathbb{R}, r \in SO(n) \quad (1.5)$$

$$\hat{\Psi}_{a,b,r}(\xi) = a^n e^{-i\xi b} \hat{\Psi}(ar^{-1}(\xi)) \quad (1.6)$$

En effet, la transformée en ondelettes normalisées en norme  $L^1$  a pour effet de réhausser les hautes fréquences d'un signal et en particulier les singularités qui apparaissent aux échelles très fines ( $a \ll 1$ ). Cette normalisation peut donc être très utile pour l'étude de la vision humaine par exemple.

### Base de $L^2(\mathbb{R}^n)$

La définition de famille d'ondelettes par l'équation (1.3) conduit à une propriété fondamentale de la théorie des ondelettes, propriété qui mène à la transformée en ondelettes.

**Propriété 1.2 (R. Murenzi [65])** *Soit  $\Psi$  une ondelette analysante, alors la famille  $(\Psi_{a,b,r})_{a \in \mathbb{R}^{+*}, b \in \mathbb{R}, r \in SO(n)}$  est une base de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .*

La propriété 1.2 nous montre donc que toute fonction de carré intégrable peut être représentée en fonction d'une famille d'ondelettes. Cette base n'est pas orthogonale et présente donc une certaine redondance. La représentation de signaux sur une telle base n'est donc pas toujours adaptée et notamment pour des problèmes tels que la compression [62] [74]. On verra qu'il existe, sous certaines conditions une sous-famille de cette famille qui, elle, sera orthonormée. Par contre, la redondance d'information peut-être fondamentale dans des domaines comme l'analyse de signaux ou d'images [65] [20], ce qui est le cas de l'application (analyse d'images sismiques) qui sera traitée par la suite.

### 1.3 Transformée en ondelettes continue

La transformée en ondelettes d'une fonction est une représentation de cette fonction sur la base d'ondelettes définie précédemment. Ainsi, de même que la TF continue est une décomposition atomique d'atomes  $e^{i\omega t}$ , la TO continue (ou TOC) est une décomposition d'atomes  $\Psi_{a,b,r}$  comme l'exprime la définition suivante.

#### 1.3.1 Définition

**Définition 1.2** *Soit  $\Psi$  une ondelette analysante et  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . On définit la transformée en ondelettes continue (TOC)*

$$\mathcal{W}f(a, b, r) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int \bar{\Psi}_{a,b,r}(x) f(x) d^n x \quad (1.7)$$

$\mathcal{W}f(a, b, r)$  est appelé coefficient d'ondelette.

Le facteur  $\frac{1}{\sqrt{c_\psi}}$  est un facteur de normalisation. On peut voir cette transformée comme un *microscope mathématique polarisé* positionné en  $b$ , d'agrandissement  $\frac{1}{a}$ , de polarisation caractérisée par  $r$  et d'optique donnée par l'ondelette [3]. On a vu au paragraphe 1.2 que plus le facteur d'échelle,  $a$ , est important, plus l'ondelette est étalée. Pour un facteur d'échelle assez grand, la représentation des coefficients d'ondelettes en fonction de  $b$ , la position, donne une représentation de "la forme générale de la fonction" (comme si on regardait la fonction de loin). Par contre un facteur d'échelle faible correspond à une représentation des singularités (comme si on regardait la fonction de près). Cette propriété de "microscope" est très utile pour l'étude de la régularité d'une fonction

[52] ou pour l'analyse de structures fractales où une même structure se retrouve à des échelles différentes [65].

Cette transformation est dite continue car c'est une fonction continue des paramètres de dilatation, translation et rotation. On verra que ces paramètres peuvent être discrétisés, on obtient alors la transformée en ondelettes discrète (ou TOD) de même qu'il existe une transformée de Fourier discrète.

## 1.3.2 Quelques propriétés

### 1.3.2.1 Conservation de l'énergie et formule d'inversion

Comme la transformée de Fourier, la transformée en ondelette possède la propriété de conservation de l'énergie, ce qui signifie qu'il n'y a pas de perte d'information entre la fonction et sa transformée.

**Propriété 1.3 (Conservation de l'énergie)** *Soit  $\Psi$  une ondelette analysante et  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , alors*

$$\int |f(x)|^2 d^n x = \int \int \int |\mathcal{W}f(a, b, r)|^2 \frac{da}{a^{n+1}} d^n b dr \quad (1.8)$$

La famille d'ondelettes  $(\Psi_{a,b,r})$  étant une base de  $L^2$ , toute fonction de carré intégrable peut s'écrire sur cette base. La base étant "surcomplète", l'écriture n'est pas unique. La propriété de conservation d'énergie 1.3 conduit à la propriété 1.4 qui propose une de ces écritures.

**Propriété 1.4 (Inversion)** *Soit  $\Psi$  une ondelette analysante et  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , alors*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{c_\Psi}} \int \int \int \Psi_{a,b,r}(x) \mathcal{W}f(a, b, r) \frac{da}{a^{n+1}} d^n b dr \quad (1.9)$$

### 1.3.2.2 Linéarité, translation, dilatation, rotation

#### Linéarité

La transformée en ondelettes est linéaire, c'est-à-dire

$$\mathcal{W}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \mathcal{W}f_1 + \beta \mathcal{W}f_2, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, (f_1, f_2) \in L^2(\mathbb{R})^2$$

*Translation*

Une des propriétés importante de la transformée en ondelettes continue est l'invariance en translation. En effet

$$\mathcal{W}(\tau_{b'}f)(a, b, r) = \mathcal{W}f(a, b - b', r) \quad (1.10)$$

où  $\tau_{b'}f$  désigne la translation de  $f$  par le vecteur  $b'$ , c'est-à-dire que  $(\tau_{b'}f)(x) = f(x - b)$ . Cette propriété est très importante dans le cadre de l'analyse de certains signaux tels que fractales, turbulence, signaux sismiques. En effet, une interprétation des coefficients d'ondelettes devient extrêmement difficile, si la transformée n'est pas comparable pour un signal donné et le même signal décalé dans le temps (ou l'espace).

*Dilatation*

La transformée en ondelettes a également une propriété de dilatation. En effet, si la famille d'ondelettes est déterminée par l'équation (1.3) (avec une normalisation  $L^2$ ), on a la relation

$$\mathcal{W}(\delta_k f)(a, b, r) = k^{-\frac{n}{2}} \mathcal{W}f(ka, kb, r) \quad (1.11)$$

avec  $\delta_k f(x) = f(kx)$ .

Cette propriété liée à l'échelle est très utile pour l'analyse des fractales.

Afin de s'affranchir du facteur de dilatation  $k^{-\frac{n}{2}}$ , la normalisation  $L^1$  de la famille d'ondelettes peut s'avérer extrêmement importante. En effet, ceci conduit à une propriété d'invariance en dilatation.

$$\mathcal{W}(\delta_k f)(a, b, r) = \mathcal{W}f(ka, kb, r) \quad (1.12)$$

*Rotation*

On a également une propriété d'invariance en rotation. En effet

$$\mathcal{W}(R_{r_0}f)(a, b, r) = \mathcal{W}f(a, r_0^{-1}(b), r_0^{-1} \circ r) \quad (1.13)$$

où  $R_{r_0}f(x) = f(r_0^{-1}(x))$ .

**1.3.2.3 Noyau reproduisant**

La transformée en ondelettes continue étant une fonction de  $L^2$ , on peut se demander si toute fonction de carré intégrable peut être considérée comme la transformée en ondelettes d'une ondelette particulière. Nous allons voir que ceci n'est pas vrai. En effet, si on désigne par  $\mathcal{H}_\Psi$  l'ensemble des transformées en ondelettes sur  $L^2$ ,  $\mathcal{H}_\Psi = \mathcal{W}(L^2(\mathbb{R}^n))$  alors  $\mathcal{H}_\Psi \subset L^2(\mathbb{R}^n, a^{-n-1} da d^n b dr)$  et l'inclusion est stricte. Pour

qu'une fonction puisse être considérée comme une transformée en ondelettes, il faut qu'elle vérifie une équation de reproduction (1.14) comme nous l'indique la propriété suivante.

**Propriété 1.5 (Noyau reproduisant)** *On pose*

$$P_{\Psi}((a', b', r'), (a, b, r)) = \frac{1}{\sqrt{c_{\Psi}}} \int \bar{\Psi}_{a,b,r}(x) \Psi_{a',b',r'}(x) d^n x$$

Une fonction  $F$  appartient à l'espace  $\mathcal{H}_{\Psi}$  si et seulement si elle vérifie l'équation de reproduction suivante

$$F(a, b, r) = \int \int \int P_{\Psi}((a', b', r'), (a, b, r)) F(a', b', r') \frac{da'}{a^{m+1}} d^n b' dr' \quad (1.14)$$

$P_{\Psi}$  est appelé noyau reproduisant et  $\mathcal{H}_{\Psi}$  est un espace de Hilbert à noyau reproduisant.

Cette propriété signifie qu'une fonction de  $L^2$  peut être considérée comme une transformée en ondelettes s'il existe une fonction  $P_{a',b',r'}$  de  $L^2(\mathbb{R}^n, a^{-n-1} da d^n b dr)$  telle que  $F(a', b', r) = (F, P_{a',b',r'})_{L^2(\mathbb{R}^n, a^{-n-1} da d^n b dr)}$ .

La relation (1.14) montre que l'information contenue dans la transformée en ondelettes continue est extrêmement redondante (Fig. 1.3). On conçoit donc que l'équation d'inversion (ou équation de reconstruction) (1.4) puisse être discrétisée sans perte d'information. C'est-à-dire qu'il existe une famille  $(\Psi_{a_i, b_j, r_k})$  dénombrable, appelée *frame* [23], permettant la reconstruction de la fonction  $f$ . Cette partie sera décrite plus en détail au paragraphe 1.4.2. Le noyau reproduisant étant en quelque sorte la longueur de corrélation de la transformée, il permet d'estimer la discrétisation [1].

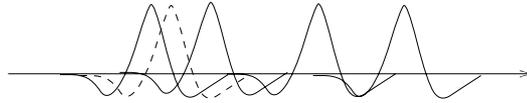


Figure 1.3: Représentation d'une même ondelette translatée en temps. Le paramètre de translation  $b$  étant continu, les ondelettes translatées se chevauchent, d'où une certaine redondance.

### 1.3.3 Caractérisation de la régularité d'une fonction

La transformée en ondelettes continue permet d'étudier le degré de régularité d'une fonction. Une étude détaillée a été effectuée pour les fonctions sur  $\mathbb{R}$  par M. Holschneider et P. Tchamitchian [43]. Une extension à  $\mathbb{R}^2$  est proposée par S. Mallat et W. L. Hwang [52]. P. G. Lemarié et Y. Meyer proposent une caractérisation des espaces de

Hölder homogènes  $C^r$  dans le cadre d'ondelettes en dimension  $n$  séparables [49]. Nous rappelons les principaux théorèmes dans le cadre de la dimension 1. On se place ici dans le cadre de la normalisation  $L^1$  des familles d'ondelettes (équation (1.5) p. 14).

**Théorème 1.1** *Soit  $f$  une fonction bornée sur  $\mathbb{R}$  telle que*

$$\exists C > 0, \quad |f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha, \quad \alpha \in ]0, 1]$$

*Soit  $\Psi$  une ondelette analysante telle que  $\Psi \in L^1(\mathbb{R})$  et  $x^\alpha \Psi \in L^1(\mathbb{R})$  alors la transformée en ondelettes par rapport à  $\Psi$  de  $f$  vérifie uniformément en  $b$*

$$\mathcal{W}f(a, b) = O(a^\alpha) \tag{1.15}$$

Le théorème 1.1 montre que si une fonction  $f$  est de régularité  $\alpha \in ]0, 1]$  alors la TOC aux petites échelles permet de mesurer cette régularité. Inversement, le théorème 1.2 va nous montrer que, sous certaines conditions, l'étude de la TOC aux petites échelles permet de renseigner sur la régularité de la fonction.

**Théorème 1.2** *Soit  $\Psi$  une ondelette analysante à support compact et une fois dérivable. Si la transformée en ondelettes continue d'une fonction  $f$  vérifie*

$$\mathcal{W}f(a, b) = O(a^\alpha)$$

*uniformément en  $b$  pour  $\alpha \in ]0, 1]$  alors  $f$  satisfait*

$$\exists C > 0, \quad |f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha$$

Les démonstrations des théorèmes cités ci-dessus peuvent se trouver dans [43] et [49].

## 1.4 Transformée en ondelettes discrète

### 1.4.1 Introduction

Nous avons vu que la transformée en ondelette continue unidimensionnelle s'écrivait

$$\mathcal{W}f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int \bar{\Psi}_{a,b}(x) f(x) dx$$

$\Psi$  étant une ondelette admissible et  $(\Psi_{a,b})$  la famille d'ondelettes définie à partir de l'ondelette mère par opérations de translations et dilatations. Cette famille est souvent

normalisée soit en norme  $L^1$ , soit en norme  $L^2$  (voir équations (1.3) et (1.5)).

Le problème se pose en calcul numérique de savoir comment discrétiser cette transformée de telle manière à conserver les propriétés intéressantes. On a vu que la base  $(\Psi_{a,b})_{a,b}$  était surcomplète. On conçoit donc que les paramètres de dilatation  $a$  et de translation  $b$  puissent être discrétisés sans perte d'information. Le problème se pose donc de trouver une famille  $(\Psi_{a_m, b_n})$  dénombrable, base de  $L^2$  et permettant une reconstruction exacte.

Une famille redondante d'ondelettes discrètes, dans le cadre des *frames* ou *structures obliques*, a été introduite par Ingrid Daubechies [23]. Cette forme de transformée discrète est très intéressante dans la mesure où les conditions que doivent vérifier les ondelettes ne sont pas trop contraignantes. De plus il existe une formule de reconstruction numériquement stable. La redondance d'informations contenues dans cette transformée peut être intéressante dans le cadre l'analyse de certains signaux et certaines images.

Y. Meyer [59] et S. Mallat [53] [54], à travers *l'analyse multi-résolution*, proposent une méthode de construction de bases d'ondelettes orthonormées. Les avantages qu'apportent les bases orthonormées en font un outil clef dans de nombreux domaines, notamment celui des mathématiques. En effet cette base est également adaptée aux espaces fonctionnels usuels. Cette approche est aussi très appréciée dans des domaines tels que le traitement du signal ou de l'image où des contraintes de rapidité ou de place mémoire nécessitent le minimum de données possible.

Nous allons présenter successivement ces approches en commençant par le cadre unidimensionnel où ces théories ont été élaborées, puis une extension en dimension supérieure.

## 1.4.2 Frames et ondelettes

### 1.4.2.1 Généralités sur les frames

Ce paragraphe décrit succinctement la notion de *frames* nécessaire à I. Daubechies pour la construction de bases d'ondelettes redondantes [23].

**Définition 1.3** Une famille de fonctions  $(\Psi_i)_{i \in I}$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est appelée une structure oblique ou frame s'il existe  $A > 0$  et  $B < \infty$  tels que, pour tout  $f$

dans  $\mathcal{H}$

$$A \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{i \in I} |(f, \Psi_i)_{\mathcal{H}}|^2 \leq B \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (1.16)$$

$A$  et  $B$  sont appelés les bornes de la structure oblique.

Si  $A = B$ , alors on appelle le frame une *structure oblique stricte* ou *tight frame*. Et alors, pour tout  $f$  de  $\mathcal{H}$

$$f = A^{-1} \sum_i (f, \Psi_i)_{\mathcal{H}} \Psi_i$$

Si  $A = 1$  et  $\|\Psi_i\|_{\mathcal{H}} = 1$  pour tout  $i$ , alors le frame est une base orthonormée de  $\mathcal{H}$ .

On peut remarquer que dans le cas général, un frame n'est pas une base orthogonale. Dans le cadre des structures obliques strictes, la borne  $A$  représente le "degré de redondance" de la famille.

On appelle  $F$  l'opérateur de frame tel que  $(Ff)_i = (f, \Psi_i)_{\mathcal{H}}$  et  $F^*$  son adjoint, c'est-à-dire que :  $(F^*c, f)_{\mathcal{H}} = (c, Ff)_{\mathcal{H}}$ . On montre alors que  $F^*F$  est inversible.

En posant

$$\tilde{\Psi}_i = (F^*F)^{-1} \Psi_i \quad (1.17)$$

on montre que la famille  $(\tilde{\Psi}_i)_{i \in I}$  duale ainsi créée est aussi une structure oblique et on a

$$B^{-1} \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{i \in I} |(f, \tilde{\Psi}_i)_{\mathcal{H}}|^2 \leq A^{-1} \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (1.18)$$

et finalement

$$f = \sum_i (f, \Psi_i)_{\mathcal{H}} \tilde{\Psi}_i = \sum_i (f, \tilde{\Psi}_i)_{\mathcal{H}} \Psi_i \quad (1.19)$$

On a vu que dans le cas général, les fonctions  $\Psi_i$  ne sont pas linéairement indépendantes, c'est-à-dire que  $f$  ne s'écrit pas de manière unique comme combinaison linéaire des  $\Psi_i$ . On montre [23] que l'écriture de l'équation (1.19) est la "plus économique" au sens des moindres carrés. On montre également que l'équation de reconstruction de  $f$  à partir des produits scalaires sur les fonctions  $\Psi_i$  à l'aide des fonctions  $\tilde{\Psi}_i$  est stable numériquement (convergence exponentielle) : il existe une formule de calcul de  $(F^*F)^{-1}$  qui converge en  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$  avec  $\alpha$  proportionnel à  $(\frac{B}{A} - 1)$ .

L'équation (1.19) nous montre que la théorie des frames permet une reconstruction exacte de la fonction  $f$ . Nous allons voir à présent dans quelle mesure ceci peut-être appliquer aux familles d'ondelettes.

### 1.4.2.2 Les ondelettes obliques

Nous avons vu précédemment que la discrétisation de la transformée en ondelettes consistait à trouver une sous-famille de la famille  $(\Psi_{a,b})$ , à savoir  $(\Psi_{a_m,b_n})$ , dénombrable, étant une base de  $L^2$ . Dans le cadre des frames, I. Daubechies propose une discrétisation des paramètres de dilatation et translation de la manière suivante :  $a_m = a_0^m$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  et  $a_0 > 1$ ,  $b_n = nb_0 a_0^m$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  et  $b_0 > 0$ .

La famille d'ondelette s'écrit alors

$$\Psi_{m,n}(x) = a_0^{-\frac{m}{2}} \Psi(a_0^{-m}x - nb_0) \quad (1.20)$$

Une telle discrétisation est uniforme par rapport à la mesure  $\frac{da}{a}db$ . De plus elle permet à la famille, à chaque échelle  $a_m$ , de "couvrir"  $\mathbb{R}$  sans trop de redondance, chaque ondelette étant essentiellement concentrée sur l'intervalle  $[a^m nb_0, a^m(n+1)b_0[$ . Par contre, la transformée ne sera plus invariante en translation comme la transformée continue. En effet, celle-ci s'écrit

$$\mathcal{W}f(a_m, b_n) = \frac{a_0^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{c_\psi}} \int \bar{\Psi}(a_0^{-m}x - nb_0) f(x) dx \quad (1.21)$$

et la transformée de la translatée de  $f$  s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\tau_{b'}f)(a_m, b_n) &= \frac{a_0^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{c_\psi}} \int \bar{\Psi}(a_0^{-m}x + a_0^{-m}b' - nb_0) f(x) dx \\ &\neq \mathcal{W}f(a_m, b_n - b'), \quad \forall b', b' \neq a_0^m k b_0 \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On montre que si  $\Psi_{m,n}$ , la famille définie ci-dessus par l'équation (1.20), est une structure oblique de  $L^2(\mathbb{R})$  alors

$$\frac{b_0 \ln a_0}{\pi} A \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \leq \frac{b_0 \ln a_0}{\pi} B \quad (1.22)$$

La condition d'admissibilité (1.1) est donc vérifiée et  $\Psi$  est une ondelette analysante.

On voit donc que toute famille déduite d'une même fonction  $\Psi$  par l'équation (1.20) qui est une structure oblique est aussi une famille d'ondelettes analysantes. La réciproque n'est pas toujours vraie. Le théorème suivant nous indique sous quelles conditions une ondelette admissible conduit à une structure oblique.

**Théorème 1.3** *Si  $\Psi$  et  $a_0$  sont tels que*

$$\begin{aligned} \inf_{1 \leq |\xi| \leq a_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(a_0^m \xi)|^2 &> 0 \\ \sup_{1 \leq |\xi| \leq a_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(a_0^m \xi)|^2 &< \infty \end{aligned}$$

et si  $\beta(s) = \sup_{\xi} \sum_m |\hat{\Psi}(a_0^m \xi)| |\hat{\Psi}(a_0^m \xi + s)|$  décroît au moins aussi vite que  $(1 + |s|)^{-(1+\varepsilon)}$  avec  $\varepsilon > 0$ , alors il existe  $B_0 > 0$  tel que la famille  $\Psi_{m,n}$  soit une structure oblique de  $L^2(\mathbb{R})$  pour tout  $b_0$  tel que  $b_0 < B_0$ .

Le lecteur intéressé pourra trouver la démonstration du théorème ainsi que l'expression des bornes de la structure dans le livre de Ingrid Daubechies [23].

### Remarques

1. On a vu au paragraphe précédent que si  $(\Psi_{m,n})$ , une famille d'ondelettes est une structure oblique, la formule d'inversion nécessite une *ondelette duale* définie par

$$\tilde{\Psi}_{m,n} = (F^* F)^{-1} \Psi_{m,n} \quad (1.23)$$

La famille ainsi obtenue peut se déduire d'une même fonction par opérations de dilatation, mais par contre, dans le cas général, on ne peut la déduire par opérations de translation. C'est-à-dire qu'il existe une fonction  $\tilde{\Psi}_{0,n}$  telle que

$$\tilde{\Psi}_{m,n}(x) = a_0^{-\frac{m}{2}} \tilde{\Psi}_{0,n}(a_0^{-m} x) \quad (1.24)$$

le paramètre de dilatation  $a_0$  étant le même que celui de la construction de la famille  $(\Psi_{m,n})$ .

Par contre, dans le cas général, il n'existe pas de fonction  $\tilde{\Psi}$  telle que

$$\tilde{\Psi}_{m,n}(x) = a_0^{-\frac{m}{2}} \tilde{\Psi}(a_0^{-m} x - n) \quad (1.25)$$

Une telle fonction existe néanmoins dans le cadre des ondelettes biorthogonales que nous présenterons au paragraphe 1.5.3.

2. Les fonctions  $\Psi_{m,n}$  et  $\tilde{\Psi}_{m,n}$  peuvent avoir des propriétés de régularité très différentes. Par exemple il existe des structures obliques où  $\Psi_{m,n}$  est  $C^k$  et  $\tilde{\Psi}_{m,n}$  n'est pas même continue. On peut imposer des conditions sur  $\Psi$ ,  $a_0$  et  $b_0$  pour s'affranchir de telles dissimilarités [22].

#### 1.4.2.3 Les ondelettes obliques bi et tridimensionnelles

Romain Murenzi dans sa thèse [65] présente une extension de frames d'Ingrid Daubechies en dimension 2 et 3.

En dimension 2, la transformée en ondelettes continue s'écrit

$$\mathcal{W}f(a, b, r_\theta) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int \bar{\Psi}_{a,b,r_\theta}(x) f(x) d^2 x \quad (1.26)$$

où  $r_\theta$  est la rotation d'angle  $\theta$  :  $r_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . La discrétisation des paramètres se fait comme suit :  $a_m = a_0^m$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  et  $a_0 > 1$ ,  $\theta_p = \theta_0 p$  avec  $\theta_0 = \frac{2\pi}{L_0}$ ,  $L_0 \in \mathbb{Z}^+$  et  $p \in (0, 1, \dots, L_0 - 1)$  et  $b_{n_1, n_2} = a_0^m r_{\theta_p}(n_1 b_{01}, n_2 b_{02})$  avec  $b_0 = (b_{01}, b_{02}) \in \mathbb{R}^{+2}$  et  $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ . La famille d'ondelettes s'écrit alors

$$\Psi_{m, n, \theta_p}(x) = \frac{a_0^{-m}}{\sqrt{c_\Psi}} \int \bar{\Psi}(a_0^{-m} r_{-\theta_p}(x - nb_0)) f(x) d^2 x \quad (1.27)$$

**Théorème 1.4** *Si  $\Psi$ ,  $a_0$  et  $\theta_0$  sont tels que*

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{L_0} |\hat{\Psi}(a_0^m r_{-\theta_0 p}(\xi))|^2 > 0$$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{L_0} |\hat{\Psi}(a_0^m r_{-\theta_0 p}(\xi))|^2 < \infty$$

et si  $\beta(s) = \sup_{\xi} \sum_m \sum_p |\hat{\Psi}(a_0^m r_{-\theta_0 p}(\xi))| |\hat{\Psi}(a_0^m r_{-\theta_0 p}(\xi) + s)|$  décroît au moins aussi vite que  $(1 + s^2)^{-(1+\varepsilon)}$  avec  $\varepsilon > 0$ , alors il existe  $B_{01} > 0$  et  $B_{02} > 0$  tels que la famille  $\Psi_{m, n, \theta_p}$  soit une structure oblique de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  pour tout  $b_{01}$  et  $b_{02}$  tels que  $b_{01} < B_{01}$  et  $b_{02} < B_{02}$ .

De même en dimension 3,  $r$  peut se décomposer en trois rotations dont les paramètres sont discrétisés et on aboutit à un résultat analogue à celui en dimension 2 [65].

Le cadre des frames que nous venons de présenter aboutit à des bases d'ondelettes redondantes. Cependant de nombreuses applications préfèrent le calcul d'un minimum de coefficients. C'est ce que permettent les bases orthonormées d'ondelettes.

### 1.4.3 Bases orthonormées d'ondelettes

La découverte en 1985 de bases orthonormées d'ondelettes fut un tournant décisif dans la théorie des ondelettes. Y. Meyer montre dans [57] qu'il existe des familles d'ondelettes dénombrables  $(\Psi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$  formant des bases orthonormées de  $L^2(\mathbb{R})$ . Ces familles sont un cas particulier des frames présentés dans le paragraphe précédent.

En se rapportant aux paramètres de translation et dilatation de la transformée continue, on a :  $(a, b) = (2^j, 2^j k)$ .

On remarque que les bases orthonormées d'ondelettes sont discrétisées de la même manière que les ondelettes obliques avec  $a_0 = 2$  et  $b_0 = 1$ . La famille d'ondelettes s'écrit donc

$$\Psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \Psi(2^{-j} x - k)$$

La base d'ondelettes étant orthonormée, les coefficients d'ondelettes  $w_{j,k}$  calculés par l'équation suivante (1.28) sont décorrésés entre eux.

$$w_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{\Psi}_{j,k}(x) dx \quad (1.28)$$

Et la fonction  $f$  peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_{j,k} \Psi_{j,k}(x) \quad (1.29)$$

On voit donc une application importante dans le domaine de la compression des signaux [34], autant pour la transmission rapide (téléphone numérique par exemple) que pour le stockage de données (notamment des images) et ceci sans perte d'information. En effet, le fait que les coefficients d'ondelettes soient décorrésés peut permettre une réduction du volume d'information. De plus l'équation (1.29) permet d'assurer une reconstruction exacte.

La propriété de décorrélation des coefficients peut également être très utile dans le domaine du débruitage. En effet, le signal et le bruit n'étant pas corrélés entre eux, certains coefficients représenteront le signal et d'autres le bruit. Il est alors possible de trouver un critère de sélection des coefficients représentant le signal uniquement [15] [25] [26] [4].

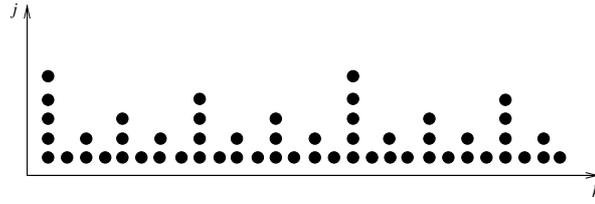
On peut définir une *ondelette de classe  $m$*  dont la régularité augmente avec  $m$ .

**Définition 1.4** Soit  $m \in \mathbb{N}$  un entier. Une fonction  $\Psi$  de variable réelle est appelée ondelette de classe  $m$  si les propriétés suivantes sont satisfaites

1.  $\Psi^{(k)} \in L^\infty(\mathbb{R}) \forall k \in \{0, \dots, m\}$  avec la convention  $\Psi^{(0)} = \Psi$ .
2.  $\Psi^{(k)}$  pour tout  $k \in \{0, \dots, m\}$  est à décroissance rapide à l'infini.
3.  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \Psi(x) dx = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, m\}$
4. la famille des fonctions  $\Psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \Psi(2^{-j}x - k), (j, k) \in \mathbb{Z}^2$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Chaque fonction  $\Psi_{j,k}$  est une ondelette fille de l'ondelette mère  $\Psi$  et garde les propriétés de cette dernière, à savoir, la régularité, indiquée par la condition 1, la localisation (condition 2) et le caractère oscillant de l'ondelette (condition 3).

On peut montrer [60] que l'ondelette  $\Psi_{j,k}$  est essentiellement concentrée sur l'intervalle dyadique  $[2^j k, 2^j(k+1)[$ . L'ensemble des bornes de ces intervalles constitue l'*espace dyadique* (Fig. 1.4).

Figure 1.4: *Espace dyadique*

Ainsi définie, la famille d'ondelettes  $(\Psi_{j,k})$  est également une base des espaces fonctionnels  $L^p(\mathbb{R})$  pour tout  $p$  tel que  $1 < p < \infty$  et on a la formule de décomposition suivante

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \Psi_{j,k})_p \Psi_{j,k}(x)$$

où  $(\cdot, \cdot)_p$  est le produit scalaire dans  $L^p(\mathbb{R})$ .

Il faut remarquer que cette propriété cesse d'être vraie pour  $p = 1$  et pour  $p = \infty$ . Dans ces cadres d'analyse fonctionnelle, on rajoute une fonction  $\Phi$  appelée *père des ondelettes*, fonction qui complète la base. Le lecteur intéressé peut se référer au livre de Y. Meyer, "Ondelettes et Opérateurs" [60].

Un outil fondamental de la construction de bases d'ondelettes orthonormées introduit par Y. Meyer [59] et S. Mallat [53] [54] est l'analyse multi-résolution. Nous allons dans un premier temps présenter le cadre général de l'analyse multi-résolution, puis le lien avec les bases d'ondelettes orthonormées unidimensionnelles et enfin une extension au cas bidimensionnel, notamment pour l'application à l'analyse d'images.

### 1.4.3.1 L'analyse multi-résolution

L'analyse multi-résolution est en quelque sorte la formalisation mathématique du phénomène suivant : lorsqu'on regarde un paysage ou un objet, suivant la distance à laquelle on se trouve, on observe plus ou moins de détails, mais le paysage ou l'objet est le même (Fig. 1.5). On peut dire que l'espace dans lequel il est représenté n'est pas le même, d'où cette présence ou absence de détails. Ces espaces ont des propriétés particulières, ce qui va être présenté ci-dessous.

**Définition 1.5 (Multi-résolution)** Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une famille de sous-espaces vectoriels fermés emboîtés de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  vérifiant les propriétés suivantes

1.  $V_j \subset V_{j-1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$
2.  $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j-1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

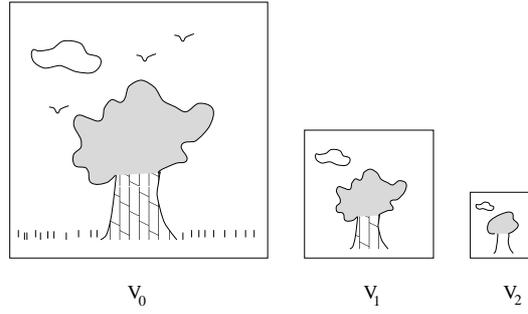


Figure 1.5: Représentation d'un paysage en analyse multi-résolution. Progressivement les détails disparaissent, d'abord les oiseaux et l'herbe, puis le tronc devient uniforme.

3.  $V_0$  est invariant par les translations entières :

$$f \in V_0 \iff \forall k \in \mathbb{Z}^n \tau_k f \in V_0$$

4.  $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$

5. il existe une fonction  $\varphi \in V_0$  telle que la suite  $\varphi(x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$  soit une base de Riesz de  $V_0$ .

On appelle  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  approximation multi-résolution de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

On rappelle qu'une famille  $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  d'éléments d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est une base de Riesz de  $\mathcal{H}$  si seulement si il existe  $C' > C > 0$  tels que

$$C \left( \sum_i |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_i \alpha_i e_i \right\| \leq C' \left( \sum_i |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.30)$$

$$\sum_i \alpha_i e_i \text{ est dense dans } \mathcal{H}$$

pour toute famille  $(\alpha_i)_i$  de scalaires.

Les propriétés énoncées précédemment dans la définition 1.5 traduisent le fait que toute l'information contenue dans l'approximation de la fonction à une certaine résolution est incluse dans l'approximation de la fonction à une résolution supérieure<sup>1</sup> (propriété 1) et que cette information est représentée de manière analogue à chaque résolution (la propriété 2 nous indique l'invariance en dilatation).

Pour en revenir à l'exemple de la vision humaine, chaque espace  $V_j$  doit être vu comme l'ensemble des photographies que l'on peut prendre à une certaine distance, la distance

<sup>1</sup>La résolution est déterminée par  $2^{-j}$

pour  $V_{j-1}$  étant plus petite (on se rapproche donc on voit plus de détail et l'approximation est meilleure). On voit que plus la résolution augmente, plus l'approximation se "rapproche" de la fonction et à la limite tend vers cette fonction (propriété 4) comme le montre la figure 1.6.

### 1.4.3.2 Construction d'ondelettes à partir de l'analyse multi-résolution

Dans ce paragraphe nous allons nous placer dans le cas unidimensionnel et voir comment le cadre de l'analyse multi-résolution dans  $L^2(\mathbb{R})$  peut mener à la construction d'ondelettes orthonormales. Si les espaces  $V_j$  représentent les espaces des différentes approximations, les espaces représentant la perte d'information et donc contenant les détails entre deux approximations successives contiendront les coefficients d'ondelettes.

**Théorème 1.5** Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une approximation multi-résolution de  $L^2(\mathbb{R})$ , alors il existe une unique fonction  $\Phi$  de  $L^2(\mathbb{R})$  telle que, la famille

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \Phi(2^{-j}x - k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

soit une base orthonormale de  $V_j$ .

$\Phi$  est appelée fonction d'échelle ou père des ondelettes.

Si  $A_j$  est l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace  $V_j$ , on a alors (Fig. 1.6)

$$A_j f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (f, \Phi_{j,k}) \Phi_{j,k}(x)$$

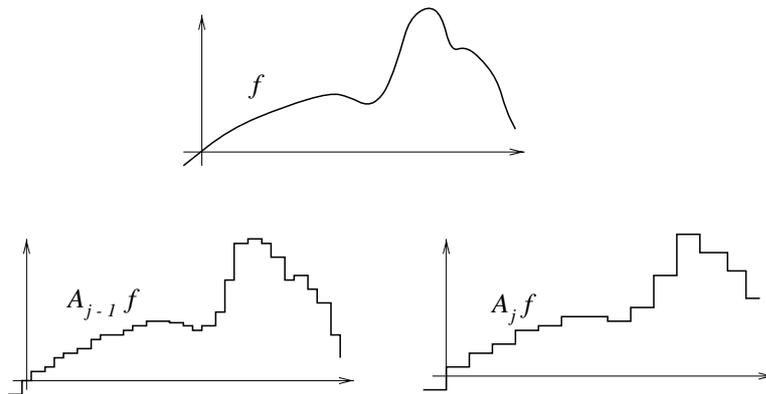


Figure 1.6: Une fonction  $f$  et ses projections sur les espaces  $V_j$  et  $V_{j-1}$ .

On voit d'après le théorème 1.5 qu'une analyse multi-résolution est complètement déterminée par la fonction  $\Phi$ . Cette dernière peut-être déterminée à l'aide de la fonction

$\varphi \in V_0$  (condition 4 de la définition 1.5) de la façon suivante:  $(\varphi(x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  étant une base de  $L^2(\mathbb{R})$ , on orthonormalise cette base ce qui nous donne  $(\Phi(x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ . Et on a le résultat suivant

$$\hat{\Phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \hat{\varphi}(\xi) \quad (1.31)$$

On impose de plus à la fonction d'échelle certaines caractéristiques: elle doit être continûment dérivable et avoir le comportement asymptotique suivant à l'infini

$$|\Phi(x)| = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ et } |\Phi'(x)| = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Une fonction  $H$ , liée à la fonction  $\Phi$ , va maintenant être introduite. Elle va permettre de construire la famille d'ondelettes [53].

**Propriété 1.6** Soit  $H(\xi)$  un filtre vérifiant

$$H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-in\xi} \text{ (développement en séries de Fourier de } H)$$

$$|H(0)| = 1 \text{ et } h(n) = O(n^{-2}) \text{ à l'infini}$$

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1$$

$$|H(\xi)| \neq 0 \text{ pour } \xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

alors  $\hat{\Phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{+\infty} (H(2^{-j}\xi))$  est la transformée de Fourier d'une fonction d'échelle

$$\text{et } h(n) = (\Phi, \Phi_{-1,n}) = \sqrt{2}(\Phi(u), \Phi(2u - n)).$$

$$\text{On a alors } \hat{\Phi}(0) = \int \Phi(t) dt = 1.$$

On a vu que, si  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une approximation multi-résolution de  $L^2(\mathbb{R})$  alors

$$V_j \subset V_{j-1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

On peut alors déterminer le complémentaire de  $V_j$  par rapport à  $V_{j-1}$ . Soit  $O_j$  un tel sous-espace. On a alors

$$O_j \perp V_j \quad \text{et} \quad O_j \oplus V_j = V_{j-1}$$

Et

$$\forall j \neq j', \quad O_j \perp O_{j'}$$

Par conséquent

$$\forall j < J, \quad V_j = V_J \oplus \bigoplus_{k=0}^{J-j-1} O_{J-k}$$

et

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} O_j$$

On peut alors énoncer un théorème analogue au théorème 1.5, c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $\Psi$  qui, prise en certains points forme une base orthonormée de  $O_j$  et cette fonction est une ondelette analysante.

**Théorème 1.6** *Soit  $\Psi$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  définie par  $\hat{\Psi}(\xi) = G(\frac{\xi}{2})\hat{\Phi}(\frac{\xi}{2})$  avec  $G(\xi) = e^{-i\xi} \overline{H(\xi + \pi)}$  et  $H$  définie par la propriété 1.6 .*

*Alors la famille  $\Psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\Psi(2^{-j}x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est une base orthonormée de  $O_j$  et  $(\Psi_{j,k}(x))_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .*

$\Psi$  est appelée ondelette orthonormale.

### Remarques

1. Soit  $g$  la réponse impulsionnelle du filtre  $G$  défini dans le théorème 1.6,

$$G(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)e^{-in\xi}. \text{ Alors}$$

$$g(n) = (-1)^{1-n}\bar{h}(1-n) \quad (1.32)$$

et

$$\Psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)\Phi_{-1,n}(x) \quad (1.33)$$

$H$  et  $G$  sont appelés *filtres en quadrature* [17].

2. Pour une même analyse multi-résolution, l'ondelette orthonormale n'est pas unique. En effet tout filtre  $G$  tel que  $G = \rho_0 e^{2im\xi}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  et  $|\rho_0| = 1$  conduit à une base d'ondelettes orthonormales (I. Daubechies [21] [23]). Cette opération correspond à un déphasage et une translation de  $\Psi$ . Par conséquent, on peut choisir  $g$  comme étant par exemple

$$g(n) = (-1)^n \bar{h}(1-n) \quad (1.34)$$

ou

$$g(n) = (-1)^n \bar{h}(1-n+2N) \quad N \in \mathbb{Z} \quad (1.35)$$

$N$  étant convenablement choisi.

3. La transformée en ondelettes obtenue à partir de l'analyse multi-résolution est invariante en dilatation par des dilatations de puissance de 2. En effet, par construction

$$f(x) \in O_j \iff f(2^j x) \in O_0$$

Par contre, comme dans le cas des frames, elle n'est pas invariante en translation entières. Elle est uniquement invariante par des translations de  $2^j$  ce qui est un peu restrictif.

### 1.4.3.3 Extension à la dimension 2

La construction d'ondelettes orthogonales à partir de l'analyse multi-résolution s'étend aisément à la dimension 2. Étant donnée une analyse multi-résolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , on définit la famille de sous-espaces  $(\mathcal{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  comme étant le produit tensoriel suivant

$$\mathcal{V}_j = V_j \otimes V_j$$

S. Mallat [53] montre qu'alors  $(\mathcal{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une multi-résolution de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Une multi-résolution ainsi définie est appelée *multi-résolution séparable*.

Si  $\phi$  est la fonction d'échelle associée à l'analyse multi-résolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ ,  $O_j$  les espaces de détails et  $\psi$  l'ondelette mère associée, on peut construire la fonction d'échelle  $\Psi$  associée à  $(\mathcal{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$$

Si on note  $\mathcal{O}_j$  le sous-espace supplémentaire de  $\mathcal{V}_j$  dans  $\mathcal{V}_{j-1}$  alors  $\mathcal{O}_j$  s'écrit

$$\mathcal{O}_j = \mathcal{O}_j^1 \oplus \mathcal{O}_j^2 \oplus \mathcal{O}_j^3$$

avec  $\mathcal{O}_j^1 = V_j \otimes O_j$ ,  $\mathcal{O}_j^2 = O_j \otimes V_j$  et  $\mathcal{O}_j^3 = O_j \otimes O_j$ . On voit que chaque espace de détail est en fait composé de trois autres espaces. Chacun de ces trois espaces  $\mathcal{O}_j^k$  correspondra à une ondelette mère  $\Psi^k$ . On peut énoncer un théorème analogue à celui énoncé en dimension 1.

**Théorème 1.7** *Soit  $(\mathcal{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multi-résolution séparable de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Soit  $\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$  la fonction d'échelle correspondante,  $\Psi$ , l'ondelette associée à  $\Phi$  et  $\psi$ , celle associée à  $\phi$ . Alors les trois ondelettes  $\Psi^1$ ,  $\Psi^2$  et  $\Psi^3$  déterminées par*

$$\begin{aligned} \Psi^1(x, y) &= \phi(x)\psi(y) \\ \Psi^2(x, y) &= \psi(x)\phi(y) \\ \Psi^3(x, y) &= \psi(x)\psi(y) \end{aligned}$$

sont telles que si  $\Psi_{j,k,l}^i(x, y) = 2^{-j} \Psi^i(2^{-j}x - k, 2^{-j}x - l)$  alors  $(\Psi_{j,k,l}^1, \Psi_{j,k,l}^2, \Psi_{j,k,l}^3)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}$  est une base orthonormée de  $\mathcal{O}_j$  et  $(\Psi_{j,k,l}^1, \Psi_{j,k,l}^2, \Psi_{j,k,l}^3)_{(j,k,l) \in \mathbb{Z}^3}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

### Remarques

1. On peut facilement construire des ondelettes multi-dimensionnelles séparables en généralisant la méthode exposée précédemment. Chaque espace d'approximation de l'analyse multi-résolution multidimensionnelle est considéré comme le produit tensoriel de  $n$  fois le même espace d'approximation d'une analyse multi-résolution unidimensionnelle.

2. En se référant à l'analyse d'image, les trois ondelettes  $\Psi^1$ ,  $\Psi^2$  et  $\Psi^3$  sont respectivement des ondelettes horizontale, verticale et diagonale et servent à détecter les détails horizontaux, verticaux et diagonaux de l'image. Des directions sont donc privilégiées. S. Mallat se réfère au fait que l'oeil est sensible surtout aux variations verticales et horizontales. Ces directions doivent donc être privilégiées.

On peut préférer une détection plus isotrope. J.C. Feauveau propose une analyse multi-résolution 2-D isotrope à l'aide d'un facteur de résolution  $\sqrt{2}$  [29] [30]. Cette transformation isotrope nécessite une seule ondelette.

L'algorithme à trous permet également une détection isotrope à l'aide d'une seule ondelette [10] [41] [72] [42].

#### 1.4.4 Remarques

On a vu dans cette partie deux approches de la transformée en ondelettes discrète. Ces deux approches conduisent à des algorithmes rapides, notamment l'approche multi-résolution qui seront présentés au chapitre 2.

Un inconvénient de ces approches est la non invariance en translation des transformées correspondantes. Ceci peut poser problème dans certaines applications où l'invariance en translation est une propriété fondamentale, comme par exemple l'analyse de texture [79].

On peut alors discrétiser la famille d'ondelettes en posant  $a_m = a_0^m$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  et  $a_0 > 1$  et  $b_n = nb_0$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $b_0 \in \mathbb{R}$ . D'où

$$\Psi_{m,n}(x) = a_0^{-\frac{m}{2}} \Psi\left(\frac{x - nb_0}{a_0^m}\right) \quad (1.36)$$

$\Psi$  étant une ondelette analysante.

Une telle famille contient les familles décrites par I. Daubechies, Y. Meyer et S. Mallat. C'est donc une base de  $L^2$ . Nous allons voir au chapitre 2 qu'une telle discrétisation conduit, en prenant  $a_0 = 2$  et  $b_0 = 1$ , à un algorithme performant, *l'algorithme à trous*, qui permet de plus en dimension 2 de n'utiliser qu'une seule ondelette au lieu de trois avec l'analyse multi-résolution.

## 1.5 Quelques ondelettes

### 1.5.1 Ondelettes continues

De nombreuses fonctions peuvent vérifier la condition d'admissibilité (1.1) de la définition 1.1. En effet, celle-ci n'est pas très restrictive. En pratique, le choix d'une ondelette analysante se fait en fonction du but recherché. Des critères supplémentaires tels que régularité, symétrie, décroissance rapide à l'infini peuvent être nécessaires. Nous allons présenter quelques exemples d'ondelettes analysantes ainsi que leur principales caractéristiques.

#### 1.5.1.1 L'ondelette de Morlet

##### Définition

L'ondelette de Morlet est une ondelette complexe. Son expression en dimension  $n$  est

$$\Psi_{M,n}(x) = e^{ik_0x} e^{-\frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle} - e^{-\frac{1}{2}\langle k_0, Bk_0 \rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle}$$

où  $k_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  est une matrice définie positive ( $\langle x, Ax \rangle > 0$ ) et  $B = A^{-1}$ .

Sa transformée de Fourier s'écrit

$$\hat{\Psi}_{M,n}(\xi) = \sqrt{\det B} \left( e^{-\frac{1}{2}\langle (\xi - k_0), B(\xi - k_0) \rangle} - e^{-\frac{1}{2}\langle k_0, Bk_0 \rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle \xi, B\xi \rangle} \right)$$

Le second terme de chaque équation assure l'admissibilité de l'ondelette. En pratique, on peut choisir le paramètre  $k_0$  de telle sorte que ce terme soit négligeable, soit  $|k_0| \geq 5,5$  [65] [1].

Dans le cas bidimensionnel,  $A$  est souvent choisie diagonale, telle que  $A = \text{diag}(\frac{1}{\varepsilon}, 1)$ , avec  $\varepsilon \geq 1$ . L'ondelette de Morlet s'écrit alors

$$\Psi_{M,2}(x, y) = \cos(k_{0x}x + k_{0y}y) e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{\varepsilon} + y^2)} + i \sin(k_{0x}x + k_{0y}y) e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{\varepsilon} + y^2)} \quad (1.37)$$

$$\hat{\Psi}_{M,2}(\xi, \nu) = \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}[\varepsilon(\xi - k_{0x})^2 + (\nu - k_{0y})^2]} \quad (1.38)$$

Si  $\varepsilon = 1$ , l'ondelette est isotrope. En effet son module est à symétrie circulaire. Si  $\varepsilon > 1$ , elle est anisotrope et son module a une direction perpendiculaire au vecteur  $k_0$ .

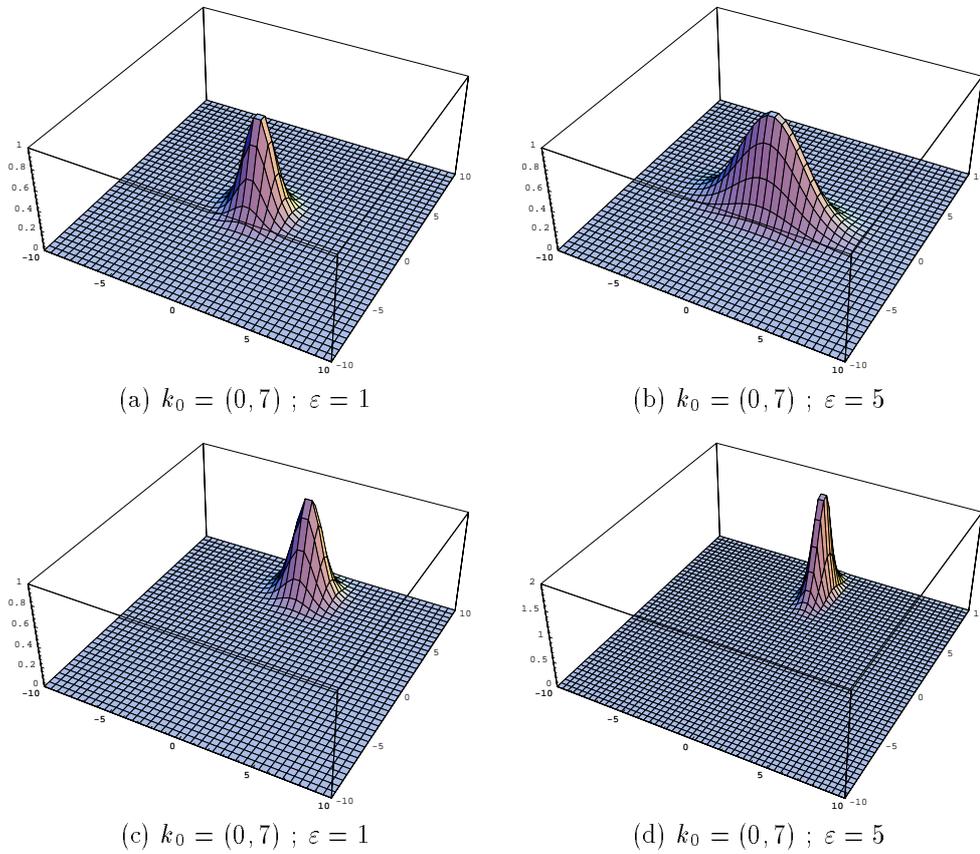


Figure 1.7: *Module (a),(b) et TF (c),(d) de l'ondelette de Morlet 2D*

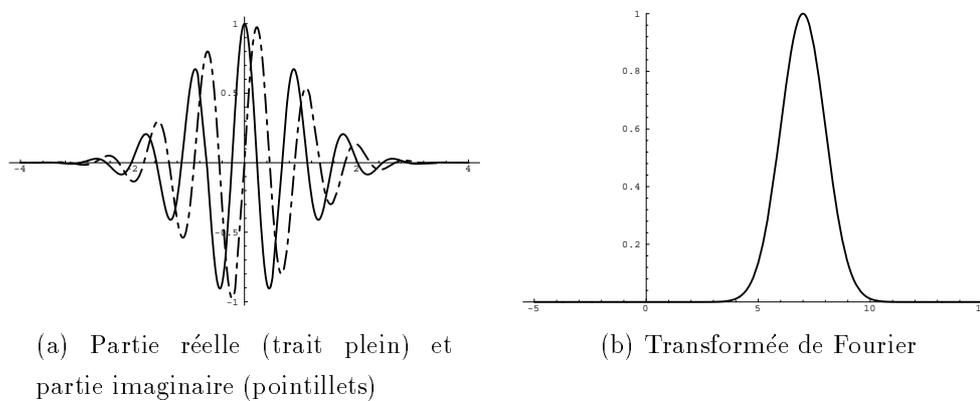


Figure 1.8: *Ondelette de Morlet unidimensionnelle,  $k_{0x} = 7$ .*

Propriétés

L'ondelette de Morlet et sa transformée de Fourier ont la propriété d'appartenir à l'espace  $\mathcal{S}$  de Schwartz. C'est donc une ondelette bien localisée en espace et en fréquence. Numériquement, on peut la considérer à support compact. De plus elle possède la propriété d'être *directionnelle*. Les propriétés de l'ondelette de Morlet bidimensionnelle seront étudiées plus en détail au chapitre 3.

Intérêt

Cette ondelette complexe permet une analyse en module et argument. Sa régularité en fait un outil particulièrement adapté pour l'étude de la régularité de fonctions. De plus, son caractère directionnel est très utile pour des fonctions possédant des directions privilégiées comme le sont les images sismiques.

**1.5.1.2 Le chapeau mexicain**Définition

Le chapeau mexicain  $n$ -dimensionnel est une ondelette réelle construite à partir de la dérivée seconde de la gaussienne. En effet, bien qu'une gaussienne ne soit pas une ondelette, toutes ses dérivées le sont. Son expression est

$$\begin{aligned}\Psi_{CM,n}(x) &= (n - \langle x, Ax \rangle) e^{-\frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle} \\ \hat{\Psi}_{CM,n}(\xi) &= \sqrt{\det B} \langle \xi, B\xi \rangle e^{-\frac{1}{2}\langle \xi, B\xi \rangle}\end{aligned}$$

où  $A$  et  $B$  sont déterminées comme dans le cas de l'ondelette de Morlet. Si  $A = I$ , elle sera dite *radiale* et *non radiale* sinon.

Propriétés

Cette ondelette appartient également à l'espace  $\mathcal{S}$  de Schwartz. En dimension 1, Elle est symétrique ce qui permet de ne pas introduire de déphasage dans la transformée en ondelettes contrairement à des ondelettes non symétriques (comme le sont les ondelettes orthonormales à support compact d'Ingrid Daubechies).

Intérêt

Etant issue de la dérivée d'une ondelette, le chapeau mexicain est particulièrement adaptée à la détection de discontinuités.

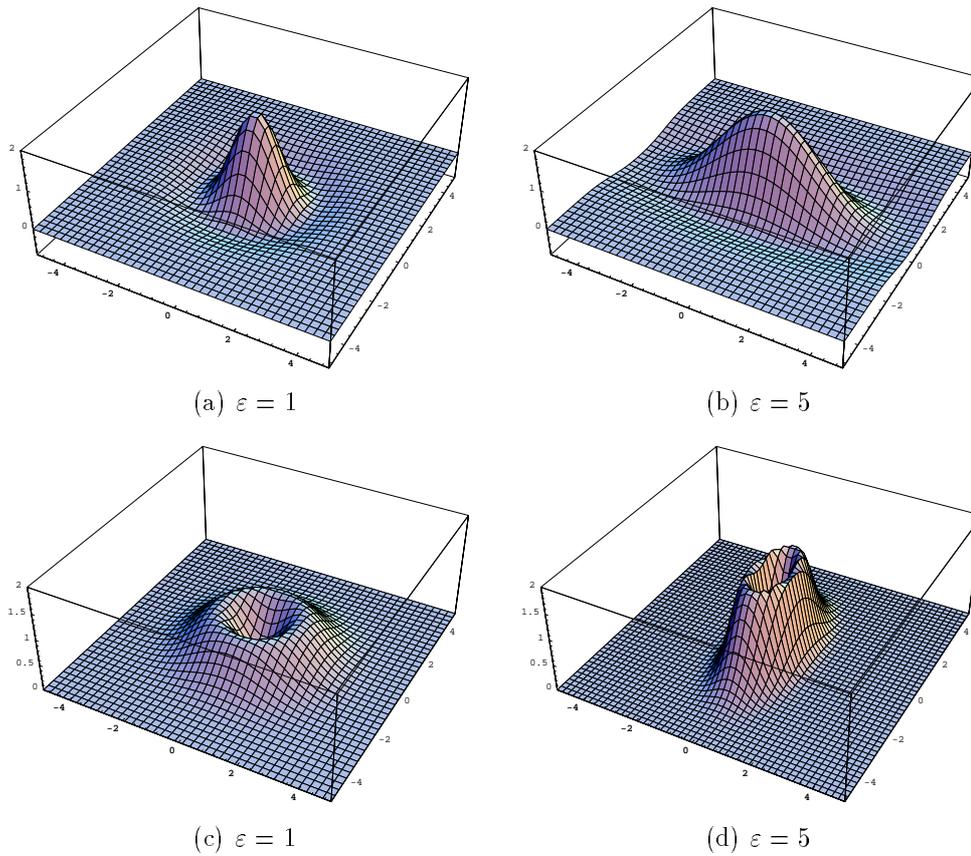


Figure 1.9: *Chapeau mexicain bidimensionnel (a),(b) et sa TF (c),(d)*

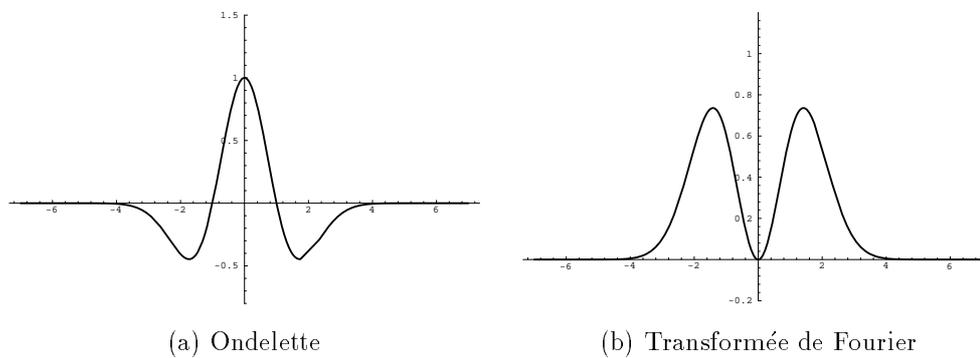


Figure 1.10: *Chapeau mexicain unidimensionnel.*

## 1.5.2 Ondelettes orthonormales

### 1.5.2.1 L'ondelette de Haar

#### Définition

Historiquement, la première base orthonormale d'ondelettes est la base de Haar. Celle-ci s'écrit

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.39)$$

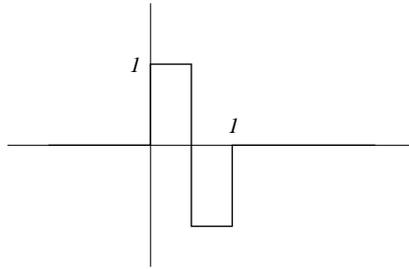


Figure 1.11: *Ondelette de Haar.*

#### Propriétés

La famille  $(\Psi_{j,k})$  telle que nous l'avons définie au paragraphe 1.4.3 à savoir  $\Psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\Psi(2^{-j}x - k)$  est une base de  $L^2(\mathbb{R})$ . On montre également que c'est une base de  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p < \infty$ .

#### Intérêt

Cette ondelette est très simple et facile à implémenter. De plus elle est à support compact. Le calcul de la TO est donc exact.

#### Inconvénient

L'ondelette de Haar quoique très simple comporte un inconvénient majeur. En effet celle-ci n'est pas continue et sa transformée de Fourier décroît seulement comme  $|\xi|^{-1}$  ce qui est une mauvaise localisation en fréquence.

### 1.5.2.2 L'ondelette de Littlewood-Paley

#### Définition

Cette ondelette s'écrit dans le domaine de Fourier

$$\hat{\Psi}(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}}, & \pi \leq |\xi| \leq 2\pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.40)$$

ou dans le domaine spatial

$$\Psi(x) = (\pi x)^{-1} (\sin 2\pi x - \sin \pi x) \quad (1.41)$$

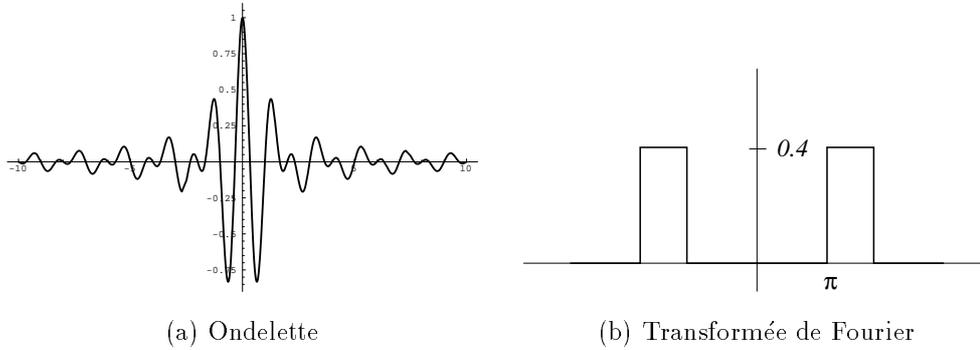


Figure 1.12: *Ondelette de Littlewood-Paley.*

### Intérêt

La transformée de Fourier de l'ondelette de Littlewood-Paley est à support compact. Cette ondelette a donc une excellente localisation en fréquence.

### Inconvénient

L'ondelette de Littlewood-Paley décroît seulement en  $|x|^{-1}$  en temps.

## 1.5.2.3 Les ondelettes de Meyer

### Définition

Une classe d'ondelettes orthogonales, dites "ondelettes de Meyer" sont construites comme suit.

$$\hat{\Psi}(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i\xi}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\xi| - 1\right)\right], & \frac{2\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{4\pi}{3} \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i\xi}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{4\pi}|\xi| - 1\right)\right], & \frac{4\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.42)$$

où  $\nu$  est une fonction de classe  $C^k$ , ( $k$  étant choisi arbitrairement et pouvant être égal à  $\infty$ ) vérifiant les conditions suivantes

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (1.43)$$

et

$$\nu(x) + \nu(1 - x) = 1 \quad (1.44)$$

### Propriétés

Les ondelettes de Meyer sont  $C^\infty$ , leur transformée de Fourier est  $C^k$  et à support compact.

Si la fonction  $\nu$  est de classe  $C^\infty$  alors l'ondelette  $\Psi$  décroît aussi vite que l'inverse d'un polynôme, c'est-à-dire que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C_N < \infty$  telle que

$$|\Psi(x)| \leq C_N(1 + |x|^2)^{-N} \quad (1.45)$$

Cependant, numériquement la décroissance peut-être relativement lente, correspondant à un  $C_N$  relativement grand.

En pratique, un choix courant de la fonction  $\nu$  est  $\nu(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$ . La figure 1.13 montre l'ondelette alors obtenue.

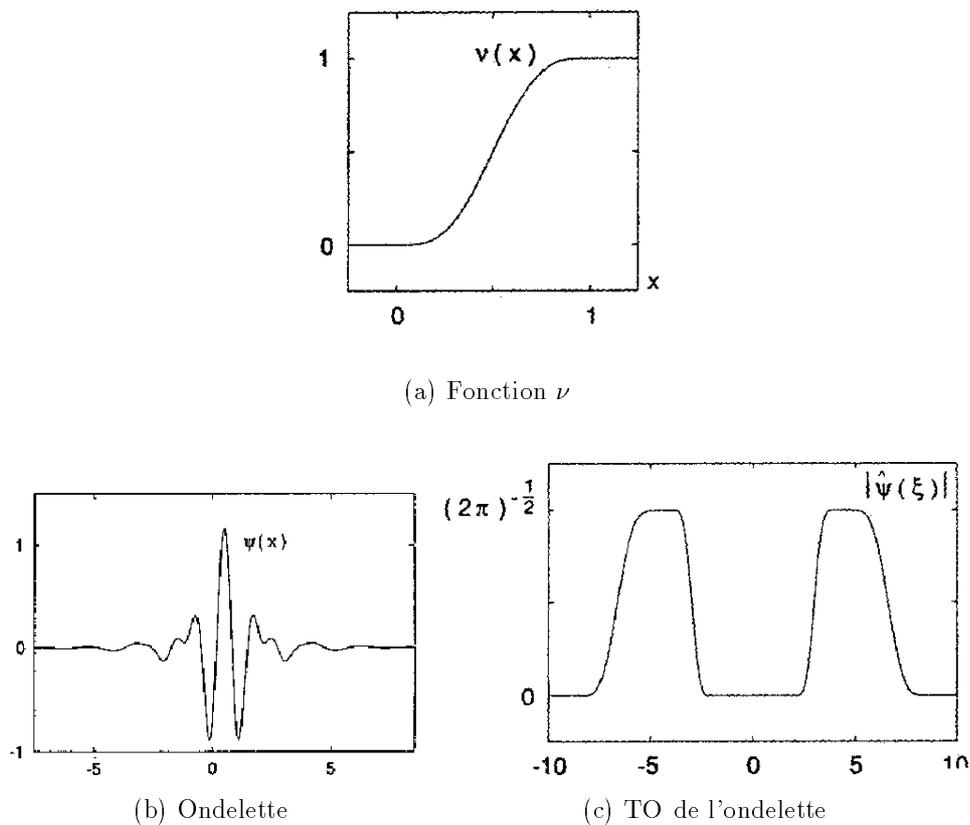


Figure 1.13: *Ondelette de Meyer.*

### 1.5.2.4 Les ondelettes splines de Battle-Lemarié

#### Définition

Ces ondelettes sont associées à l'analyse multi-résolution où les espaces d'approximation sont des espaces de fonctions splines [58]. Dans le cas général, la fonction  $\varphi$  définie par la condition 4 de la définition 1.5 est une  $B$ -spline de degré  $N$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i\mathcal{K}\xi}{2}} \left( \frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} \right)^{N+1} \quad (1.46)$$

où  $\mathcal{K} = 0$  si  $N$  est impair et  $\mathcal{K} = 1$  si  $N$  est pair.

La fonction  $\varphi$  vérifie  $\int \varphi(x) dx = 1$  et

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2^{-2M} \sum_{j=0}^{2M+1} \binom{2M+1}{j} \varphi(2x - M - 1 + j) & \text{si } N = 2M \\ 2^{-2M-1} \sum_{j=0}^{2M+2} \binom{2M+2}{j} \varphi(2x - M - 1 + j) & \text{si } N = 2M + 1 \end{cases}$$

La base  $(\varphi(x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  ainsi définie n'étant pas orthogonale (sauf pour  $N = 0$ ), on l'orthogonalise (1.31) ce qui conduit à la fonction d'échelle  $\Phi$ . L'ondelette  $\Psi$  est définie par le théorème 1.6.

#### Propriétés

Ces ondelettes sont à décroissance exponentielle. Elles peuvent être choisies  $C^k$ , mais pas  $C^\infty$ .

La fonction d'échelle  $\Phi$  est symétrique par rapport à  $\frac{1}{2}$  si  $N$  est impair et par rapport à 0 si  $N$  est pair. L'axe de symétrie de l'ondelette  $\Psi$  est  $x = \frac{1}{2}$  et elle est symétrique si  $N$  est impair et antisymétrique si  $N$  est pair.

#### Exemples

★  $N = 0$ ,  $\Phi = \varphi$  est une spline constante par morceaux

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction d'échelle conduit à la base de Haar.

★  $N = 1$ ,  $\varphi$  est une spline linéaire par morceaux

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } 0 \leq |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction  $\varphi$  vérifie  $\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(2x+1) + \varphi(2x) + \frac{1}{2}\varphi(2x-1)$ . La fonction d'échelle est déterminée par l'équation suivante

$$\hat{\Phi}(\xi) = \sqrt{3} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{4 \sin^2 \frac{\xi}{2}}{\xi^2 (1 + 2 \cos^2 \frac{\xi}{2})^{\frac{1}{2}}} \quad (1.47)$$

Et l'ondelette mère a comme expression dans le domaine de Fourier

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\xi) &= e^{\frac{i\xi}{2}} \sin^2 \frac{\xi}{4} \left[ \frac{1 + 2 \sin^2 \frac{\xi}{4}}{1 + 2 \cos^2 \frac{\xi}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \hat{\Psi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \sqrt{3} e^{\frac{i\xi}{2}} \sin^2 \frac{\xi}{4} \left[ \frac{1 + 2 \sin^2 \frac{\xi}{4}}{(1 + 2 \cos^2 \frac{\xi}{2})(1 + 2 \cos^2 \frac{\xi}{4})} \right]^{\frac{1}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{aligned}$$

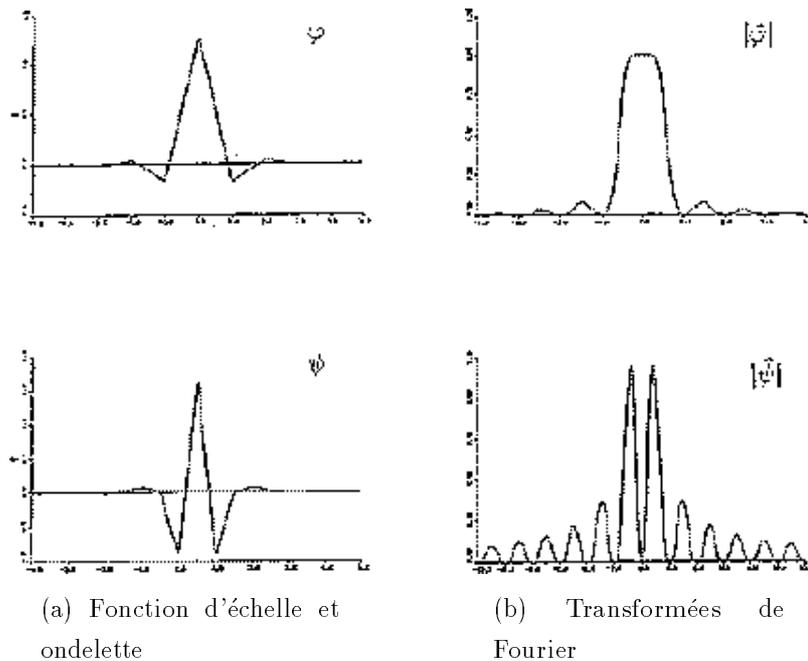
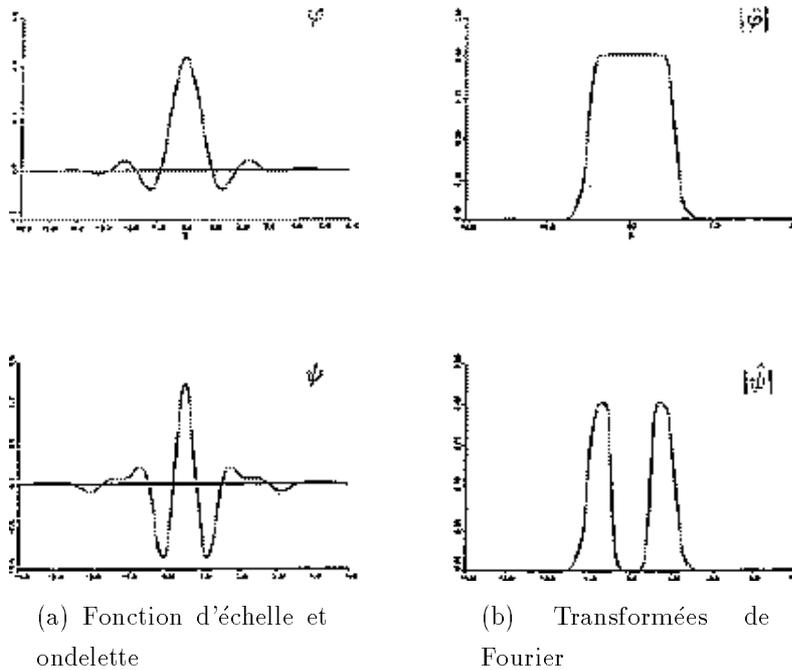


Figure 1.14: *Ondelette spline pour  $N = 1$ .*

★  $N = 3$ ,  $\varphi$  est une  $B$ -spline cubique par morceaux.

La fonction  $\varphi$  vérifie  $\varphi(x) = \frac{1}{8}\varphi(2x+2) + \frac{1}{2}\varphi(2x+1) + \frac{3}{4}\varphi(2x) + \frac{1}{2}\varphi(2x-1) + \frac{1}{8}\varphi(2x-2)$ . La fonction d'échelle et l'ondelette correspondante sont déterminées comme précédemment.

Figure 1.15: *Ondelette spline cubique.*

### 1.5.2.5 Les ondelettes à support compact de I. Daubechies

#### Définition

Les ondelettes orthonormales à support compact sont définies à partir du théorème suivant énoncé par I. Daubechies [21].

**Théorème 1.8** *Soit  $h$  la réponse impulsionnelle d'un filtre tel que*

$$\sum_n |h(n)| |n|^\varepsilon < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (1.48)$$

$$\sum_n h(n - 2k)h(n - 2l) = \delta(k, l) \quad (1.49)$$

$$\sum_n h(n) = \sqrt{2} \quad (1.50)$$

Supposons que  $H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-in\xi}$  soit un polynôme trigonométrique.

On définit

$$g(n) = (-1)^n h(1 - n) \quad (1.51)$$

$$\hat{\Phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{+\infty} (H(2^{-j}\xi)) \quad (1.52)$$

$$\Psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g(n)\Phi(2x - n) \quad (1.53)$$

Alors  $\Phi$  est la fonction d'échelle d'une analyse multi-résolution et  $\Psi$  est l'ondelette associée.

On remarque que la condition (1.49) sur  $h$  est la condition d'orthogonalité, ce que implique sur  $H$  la condition

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad (1.54)$$

de la propriété 1.6.

Si la suite  $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est choisie finie, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers  $N_i$  et  $N_f$  tels que  $h(n) = 0$  pour  $n > N_f$  et  $n < N_i$  alors les fonctions d'échelle et d'ondelette correspondantes sont à support compact et on a

$$\text{supp}(\Phi) \subset [N_i, N_f] \quad (1.55)$$

$$\text{supp}(\Psi) \subset \left[ \frac{1}{2}(1 - N_f - N_i), \frac{1}{2}(1 + N_f - N_i) \right] \quad (1.56)$$

On montre [21] que tout polynôme  $H$  vérifiant (1.54) peut se mettre sous la forme

$$H(\xi) = \left[ \frac{1}{2}(1 + e^{i\xi}) \right]^N Q(\xi) \quad (1.57)$$

où  $N \geq 1$  est le nombre de moment nuls de l'ondelette et  $Q$  est un polynôme de la forme

$$|Q(\xi)|^2 = P(\sin^2 \xi/2)$$

avec

$$P(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} t^k + t^N R\left(\frac{1}{2} - t\right)$$

où  $R$  est un polynôme impair tel que

$$\begin{aligned} P(t) &\geq 0, \quad \forall t \in [0, 1] \\ \sup_{0 \leq t \leq 1} P(t) &< 2^{2(N-1)} \quad \text{si } N \geq 2 \\ -\frac{2}{1-|2t|} &\leq R(t) \leq \frac{2}{1+|2t|}, \quad \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad \text{si } N = 1 \end{aligned}$$

### Exemples

Une classe d'ondelettes à support compact peut être obtenue avec  $R \equiv 0$ . Le module de  $H$  est ainsi déterminé.  $H$  ayant  $2N$  coefficients non nuls, on peut choisir sa phase de telle sorte que

$$H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{2N-1} h(n) e^{-in\xi}$$

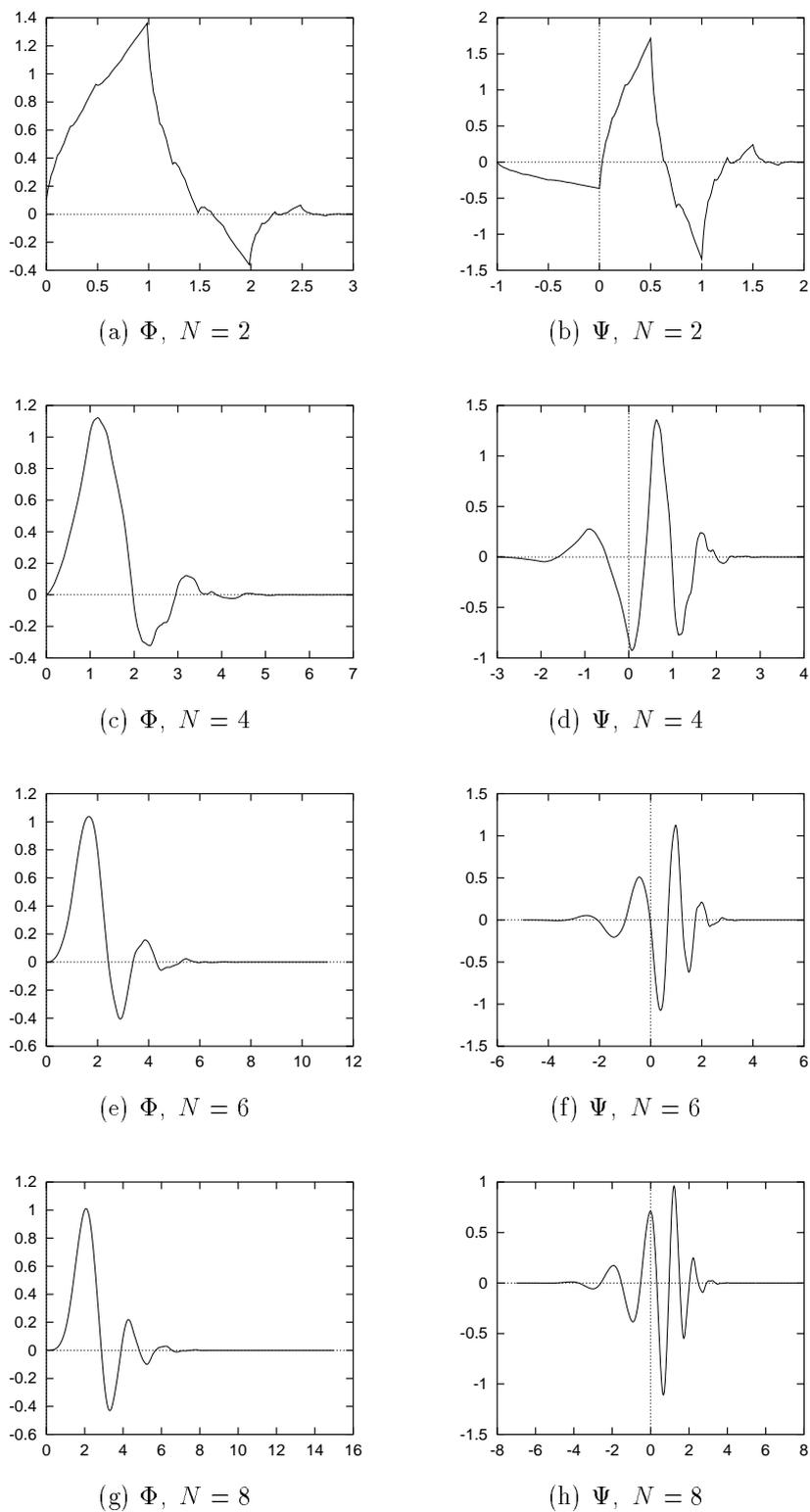


Figure 1.16: *Exemples d'ondelettes à support compact.*

Quelques exemples de fonctions d'échelle et d'ondelette sont donnés ci-contre (Fig. 1.16). La table des coefficients  $h(n)$  est donnée en annexe.

### Intérêt

Les ondelettes à support compact de Ingrid Daubechies sont particulièrement intéressantes dans la mesure où on peut choisir la régularité voulue en imposant un certain nombre de moments nuls : la régularité augmente avec  $N$ . De plus, étant à support compact, le calcul de la transformée en ondelettes est exacte.

### Inconvénients

Les ondelettes à support compact ne sont pas symétriques ce qui introduit un déphasage. Ceci peut être problématique dans certains problèmes comme la détection de frontières. I. Daubechies a montré que la seule ondelette réelle à support compact orthonormale était l'ondelette de Haar. On peut obtenir les ondelettes "les moins asymétriques" en choisissant  $H$  ayant la phase minimum parmi tous les filtres que l'on peut obtenir à partir de  $R \equiv 0$  [23].

## 1.5.3 Ondelettes biorthogonales

La notion de biorthogonalité a été introduite en 1987 par Tchamitchian [75] et celle d'ondelettes biorthogonales, en 1992 par Cohen et al. [18]. Les ondelettes biorthogonales permettent d'introduire une certaine souplesse par rapport aux ondelettes orthonormales. En effet, la base permettant l'analyse (décomposition en coefficients d'ondelettes) ne sera pas la même que celle permettant la synthèse (reconstruction de la fonction) d'où des conditions moins strictes pour la construction des ondelettes.

### Définition

Les ondelettes biorthogonales sont construites à partir de la notion de frames ou structures obliques (paragraphe 1.4.2). On considère une famille  $(\Psi_i)_{i \in I}$  étant une structure oblique d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . On a vu (équation (1.19)) qu'il existe une structure oblique duale  $(\tilde{\Psi}_i)_{i \in I}$  telle que

$$f = \sum_i (f, \Psi_i)_{\mathcal{H}} \tilde{\Psi}_i = \sum_i (f, \tilde{\Psi}_i)_{\mathcal{H}} \Psi_i$$

On dit que les familles  $(\Psi_i)_{i \in I}$  et  $(\tilde{\Psi}_i)_{i \in I}$  sont *biorthogonales* si

$$(\Psi_i, \tilde{\Psi}_j)_{\mathcal{H}} = \delta(i, j) \tag{1.58}$$

où  $\delta(i, j)$  est le symbole de Kronecker.

On montre alors l'existence de bases d'ondelettes biorthogonales [18].

**Théorème 1.9** *Soient  $h$  et  $\tilde{h}$  les réponses impulsionnelles de deux filtres tels que*

$$\sum_n h(n-2k)\tilde{h}(n-2l) = \delta(k, l) \quad (1.59)$$

$$\sum_n h(n) = \sqrt{2} \quad (1.60)$$

$$\sum_n \tilde{h}(n) = \sqrt{2} \quad (1.61)$$

On définit

$$H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-in\xi} \quad , \quad \tilde{H}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(n)e^{-in\xi}$$

$$\hat{\Phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{+\infty} (H(2^{-j}\xi)) \quad , \quad \hat{\tilde{\Phi}}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{+\infty} (\tilde{H}(2^{-j}\xi))$$

$$\Psi(x) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^n \tilde{h}(1-n)\Phi(2x-n) \quad , \quad \tilde{\Psi}(x) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^n h(1-n)\tilde{\Phi}(2x-n)$$

On suppose de plus que pour  $C, \varepsilon > 0$

$$|\hat{\Phi}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \quad , \quad |\hat{\tilde{\Phi}}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\tilde{\Phi}(x-k)dx = \delta(k)$$

alors les familles  $\Psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\Psi(2^{-j}x-k)$ ,  $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$  et  $\tilde{\Psi}_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\tilde{\Psi}(2^{-j}x-k)$ ,  $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$  sont deux bases de Riesz duales de  $L^2(\mathbb{R})$  avec

$$(\Psi_{j,k}, \tilde{\Psi}_{j',k'}) = \delta(j, j')\delta(k, k')$$

et

$$f(x) = \sum_{j,k} (f, \Psi_{j,k})\tilde{\Psi}_{j,k}(x) = \sum_{j,k} (f, \tilde{\Psi}_{j,k})\Psi_{j,k}(x)$$

### Propriétés

1. Avec des notations analogues à celles des ondelettes orthonormales à support compact, c'est-à-dire si il existe deux entiers  $N_i$  et  $N_f$  tels que  $h(n) = 0$  pour

$n > N_f$  et  $n < N_i$  et  $\tilde{N}_i$  et  $\tilde{N}_f$  tels que  $\tilde{h}(n) = 0$  pour  $n > \tilde{N}_f$  et  $n < \tilde{N}_i$  les supports des différentes fonctions s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{supp}(\Phi) &= [N_i, N_f] \\ \text{supp}(\tilde{\Phi}) &= [\tilde{N}_i, \tilde{N}_f] \\ \text{supp}(\Psi) &= \left[ \frac{1}{2}(N_i - \tilde{N}_f - 1), \frac{1}{2}(N_f - \tilde{N}_i - 1) \right] \\ \text{supp}(\tilde{\Psi}) &= \left[ \frac{1}{2}(\tilde{N}_i - N_f - 1), \frac{1}{2}(\tilde{N}_f - N_i - 1) \right] \end{aligned}$$

2. Le nombre de moments nuls de  $\Psi$  correspond à la régularité de  $\tilde{\Psi}$  et vice-versa.

### Intérêt

Les ondelettes biorthogonales sont à support compact et peuvent être symétriques. De plus les conditions sur les filtres sont plus souples que pour les ondelettes biorthogonales.

### Inconvénient

La transformée nécessite deux ondelettes. De plus, elles peuvent toutes deux avoir des régularités très différentes.

### Exemples

Nous allons présenter quelques exemples d'ondelettes biorthogonales à support compact, les coefficients des filtres correspondants étant donnés en annexe.

★ Le premier exemple est l'exemple des *B-splines*. Le filtre  $\tilde{H}$  est choisi de telle manière que la fonction d'échelle  $\tilde{\Phi}$  soit une B-spline centrée autour de 0 pour le cas pair et  $\frac{1}{2}$  pour le cas impair. Et alors  $\tilde{H}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\xi) &= \left( \cos \frac{\xi}{2} \right)^{\tilde{N}} \quad \text{si } \tilde{N} = 2\tilde{\ell} \\ \tilde{H}(\xi) &= e^{-\frac{i\xi}{2}} \left( \cos \frac{\xi}{2} \right)^{\tilde{N}} \quad \text{si } \tilde{N} = 2\tilde{\ell} + 1 \end{aligned}$$

et pour  $H$

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \left( \cos \frac{\xi}{2} \right)^N \sum_{m=0}^{\ell+\tilde{\ell}-1} \binom{\ell+\tilde{\ell}-1+m}{m} \left( \sin^2 \frac{\xi}{2} \right)^m \quad \text{si } N = 2\ell \\ H(\xi) &= e^{-\frac{i\xi}{2}} \left( \cos \frac{\xi}{2} \right)^N \sum_{m=0}^{\ell+\tilde{\ell}} \binom{\ell+\tilde{\ell}+m}{m} \left( \sin^2 \frac{\xi}{2} \right)^m \quad \text{si } N = 2\ell + 1 \end{aligned}$$

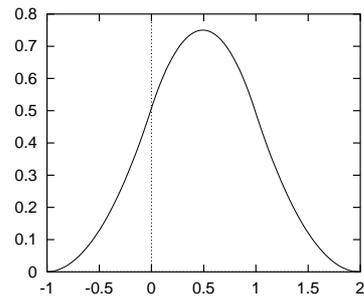
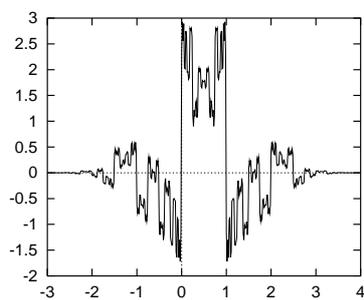
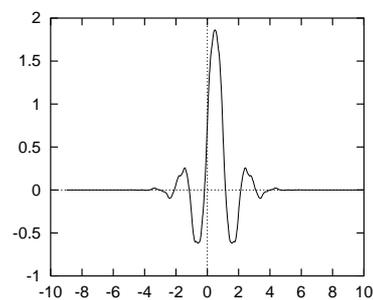
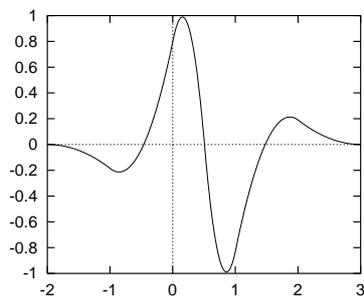
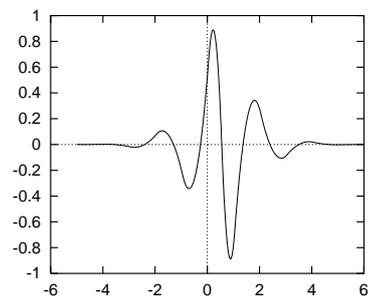
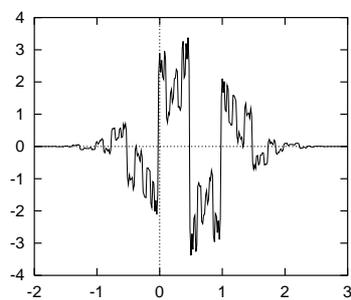
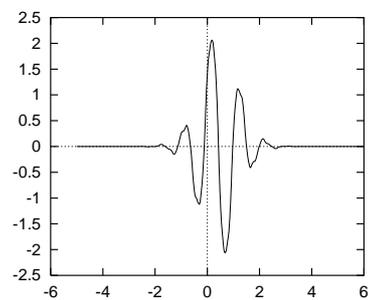
(a)  $\tilde{\Phi}$ ,  $\tilde{N} = 3$ (b)  $\Phi$ ,  $N = 3$ (c)  $\Phi$ ,  $N = 9$ (d)  $\tilde{\Psi}$ ,  $N = 3$ (e)  $\tilde{\Psi}$ ,  $N = 9$ (f)  $\Psi$ ,  $N = 3$ (g)  $\Psi$ ,  $N = 9$ 

Figure 1.17: Exemples d'ondelettes bi-orthogonale splines.

Nous montrons un exemple pour  $\tilde{N} = 3$  (Fig 1.17). Alors les supports des différentes fonctions s'écrivent  $\text{supp } \Phi_{3,N} = [-N, N + 1]$  et  $\text{supp } \Psi_{3,N} = \text{supp } \tilde{\Psi}_{3,N} = [-\frac{N+1}{2}, \frac{N+3}{2}]$ .

★ On peut également construire des bases biorthogonales proches des bases orthonormales d'ondelettes. L'idée de M. Barlaud est de symétriser les bases orthonormales et de calculer les bases duales correspondantes. Le lecteur intéressé pourra se référer à [5].

#### 1.5.4 Choix de l'ondelette

Le choix de l'ondelette adaptée n'est pas aisé. Il convient de bien cerner le problème à étudier et d'identifier le type de transformée à utiliser (continue ou discrète). En analyse d'image, il est souvent utile d'avoir une certaine redondance pour avoir plus d'informations. L'utilisation de la TO continue ou de frames est alors conseillée. Pour une analyse multi-résolution, on préfère une base d'ondelettes orthonormale et si on veut un calcul exact, alors les ondelettes à support compact sont indiquées. On peut également avoir besoin d'une ondelette indéfiniment dérivable, il faudra alors utiliser une des ondelettes de Meyer. Pour détecter les frontières, on préférera des ondelettes symétriques.

On voit donc qu'on ne peut parler d'une ondelette "idéale" adaptée à tous les cas. A chaque cas particulier correspond une ondelette particulière adaptée.

