

# Chapitre 2

## Divers algorithmes de transformée en ondelettes

Dans ce chapitre, divers algorithmes permettant de calculer les différentes transformées en ondelettes présentées au chapitre précédent vont être exposés. Nous avons vu que le type de transformée est très lié au type d'ondelette que l'on veut utiliser. Il en est de même pour le choix d'un algorithme.

### 2.1 Transformée continue

#### 2.1.1 Mise en oeuvre

Nous avons vu que la transformée en ondelettes continues  $n$ -dimensionnelles s'écrivait (équation (1.7))

$$\mathcal{W}f(a, b, r) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int \bar{\Psi}_{a,b,r}(x) f(x) d^n x$$

En pratique, on dispose des données échantillonnées de la fonction  $f$ , soit  $f(x_i)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . Une bonne approximation de la TO est alors

$$wf(a, b, r) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \sum_i \prod_j (x_{i+1} - x_i)_j \bar{\Psi}_{a,b,r}(x_i) f(x_i)$$

où  $j$  représente la  $j$ -ième coordonnée du vecteur considéré.

Le calcul d'un coefficient par cette méthode directe est en  $O(n)$  si  $n$  est le nombre de données dont on dispose. A une échelle donnée et pour une rotation donnée, le coût de la transformée pour le calcul des  $n$  coefficients est donc en  $O(n^2)$ , ce qui est assez coûteux.

La formulation de la transformée en ondelettes continue dans le domaine de Fourier

conduit à un algorithme de calcul moins coûteux. En effet, la TOC s'écrit dans le domaine de Fourier

$$\mathcal{W}f(a, b, r) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int \hat{\Psi}_{a,b,r}(\xi) \hat{f}(\xi) d^n \xi \quad (2.1)$$

Ce qui s'écrit aussi, si la famille d'ondelettes est normalisée en norme  $L^1$  (équation (1.6) )

$$\mathcal{W}f(a, b, r) = \frac{a^n}{\sqrt{c_\psi}} \int e^{i\xi b} \hat{\Psi}(ar^{-1}(\xi)) \hat{f}(\xi) d^n \xi \quad (2.2)$$

La transformée en ondelettes continues en fonction de la position  $b$  peut être vue comme la transformée de Fourier inverse du produit des transformées de Fourier des deux fonctions initiales.

L'équation (2.2) se discrétise comme suit

$$wf(a, b, r) = \frac{a^n}{\sqrt{c_\psi}} \sum_k \prod_j (\xi_{k+1} - \xi_k)_j e^{i\xi_k b} \hat{\Psi}(ar^{-1}(\xi_k)) \hat{f}(\xi_k)$$

avec les notations précédentes.

Le calcul peut alors se faire à l'aide de la transformée de Fourier rapide (FFT). En effet  $\mathcal{W}f(a, b, r)$  est la FFT inverse du produit de deux FFT directes et le calcul se fait en  $O(n \log_2 n)$  et est donc plus rapide que la méthode directe.

Le calcul dans le domaine de Fourier présente tout de même un inconvénient dans certains cas. En effet la TO permet le calcul de tous les coefficients en même temps pour une échelle et une rotation donnée. Si on veut calculer uniquement un coefficient ou quelques coefficients, alors le calcul direct est plus rapide (en  $O(n)$  au lieu de  $O(n \log_2 n)$ ).

### 2.1.2 Problèmes de représentation

La transformée en ondelettes  $n$ -dimensionnelle a un certain nombre de variables :  $a$ , le facteur d'échelle,  $b$ , le vecteur position,  $r$ , la rotation. Ceci pose un problème de représentation dans l'espace.

Dans le cas unidimensionnel, la TOC s'écrit

$$\mathcal{W}f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a c_\psi}} \int \bar{\Psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx$$

On a donc ici une fonction à deux variables qui peut se représenter de manière classique dans le plan euclidien. Traditionnellement, on place  $b$  en abscisse et  $a$  ou  $-\log a$  en ordonnées (Fig. 2.1). Une telle représentation permet d'observer toutes les positions et

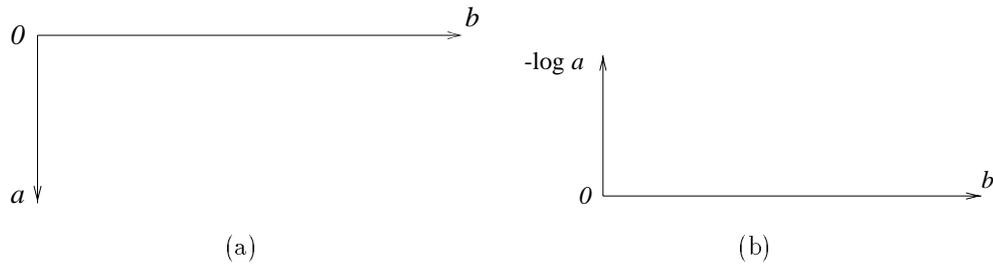


Figure 2.1: *Systèmes d'axes de la représentation de la TOC 1D.*

toutes les échelles en même temps, d'où l'appellation représentation "temps-échelle".

Dans le cas où  $f$  est une fonction à deux variables, on a

$$\mathcal{W}f(a, b, \theta) = \frac{1}{a} \int \int \bar{\Psi}\left(\frac{1}{a}r_{-\theta}(x - b_x, y - b_y)\right) f(x, y) dx dy$$

où  $r_\theta$ , la rotation d'angle  $\theta$  s'écrit  $r_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$  et  $b$ , le vecteur  $b = (b_x, b_y)$ .

On voit que la transformée en ondelettes d'une telle fonction est une fonction à quatre variables. Pour la représenter, il convient donc d'en fixer deux. Les représentations les plus naturelles vont être présentées, puis une représentation plus "adaptative".

### 2.1.2.1 Représentation en espace

La représentation en espace consiste à fixer l'angle  $\theta$  et le facteur d'échelle  $a$  et observer la transformée en ondelettes en chaque point de la fonction, fonction qui dans le cas qui nous intéressera par la suite sera une image. C'est la représentation la plus "parlante" dans la mesure où on veut représenter une fonction ou une image tout en conservant la "géographie" de cette fonction. Ce type de représentation permettra d'isoler dans l'image des zones d'intérêts (Fig. 2.2), comme les frontières (singularités apparaissant aux petites échelles), les structures principales (échelles plus importantes) ou des zones de direction privilégiée, dans la direction  $\theta$  (si l'ondelette comporte un caractère directionnel).

De plus cette représentation permet d'utiliser l'algorithme rapide de calcul des coefficients d'ondelettes présenté ci-dessus. Le coût du calcul des coefficients est donc en  $O(n_1 n_2 \log_2(n_1 n_2))$  si  $n_1$  et  $n_2$  sont les dimensions de l'image.

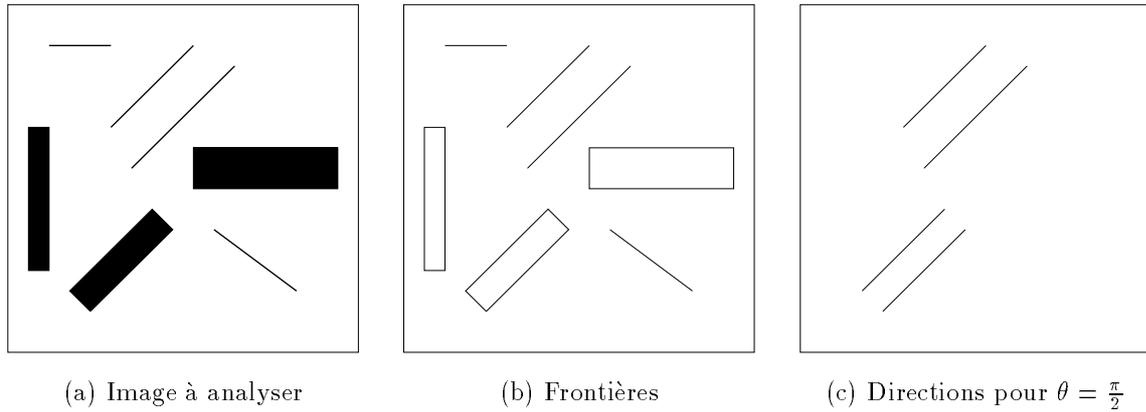


Figure 2.2: Exemples de caractéristiques extraites à l'aide d'une représentation en espace.

### 2.1.2.2 Représentation angle-échelle

La représentation angle-échelle est, d'une certaine manière, le contraire de la représentation précédente. En effet, elle consiste à se placer en un point donné et à observer le comportement des coefficients d'ondelette en ce point pour tous les angles et toutes les échelles. Ce type de représentation est utilisé pour étudier la régularité d'une fonction en un point bien précis. En effet, comme on l'a vu au chapitre précédent, le comportement de la transformée en ondelettes en un point aux petites échelles est très lié à la régularité de la fonction étudiée en ce point (paragraphe 1.3.3). Ceci nécessite bien entendu de savoir à priori quel point particulier doit être étudié.

Cette représentation ne permet pas d'utiliser la formulation dans le domaine de Fourier de la transformée en ondelette. On peut utiliser le calcul direct et la complexité est en  $O(n_1 n_2 n_a n_\theta)$  où  $n_1$  et  $n_2$  sont toujours les dimensions de l'image et  $n_a$  et  $n_\theta$ , le nombre d'échelles et d'angles respectifs souhaités.

### 2.1.2.3 Représentation espace-angle-échelle

La représentation que l'on appellera "représentation espace-angle-échelle" est une représentation adaptative en chaque point de l'image ou de la fonction. En effet, il peut arriver que l'on veuille en chaque point un angle et une échelle spécifique. On peut en effet vouloir dans une même image faire ressortir différentes directions dans des zones différentes de l'image et détecter plutôt les frontières à tel endroit ou plutôt les grosses structures à tel autre. Il faut donc un outil supplémentaire permettant de caractériser en tout point l'échelle et l'angle qui convient. Nous verrons que dans le

cadre des images sismiques un tel critère existe.

Une telle représentation nécessite l'utilisation d'une ondelette différente en chaque point. Seul le calcul direct convient et la complexité du calcul de la TO en tous les points est en  $O(n_1^2 n_2^2)$ .

### 2.1.3 Problèmes aux bords

Le calcul de la TOC par FFT pose un problème aux bords. En effet, la transformée de Fourier rapide suppose que la fonction soit périodique. Il se trouve donc que si les valeurs de la fonction sur les bords du support ne sont pas égales, la transformée en ondelettes agira en ce point comme s'il y avait une discontinuité. En effet, la fonction alors périodisée ne sera pas continue et le calcul de la TO en ce point ne sera pas exact. En imagerie, ce phénomène peut avoir des répercussions sur les autres coefficients. En effet, le résultat de la transformée étant une image, il faut coder ces coefficients d'ondelettes en niveaux de gris (valeurs entières entre 0 et 255 le plus souvent). Une méthode usuelle de visualisation est la normalisation des coefficients comme suit

$$\mathcal{W}f_{im}(a, b, \theta) = 225 \frac{\mathcal{W}f(a, b, \theta) - \min}{\max - \min}$$

où  $\max$  et  $\min$  sont les valeurs maximale et minimale des coefficients calculés au préalable et  $\mathcal{W}f_{im}$  le coefficient d'ondelette codé en niveau de gris entre 0 et 255.

Si la discontinuité occasionnée par la périodisation est la plus brutale dans l'image, on risque d'avoir une très forte réponse sur les bords et très peu d'information dans les zones d'intérêt. Plusieurs méthodes peuvent être alors envisagées pour pallier cet inconvénient.

Une première méthode consiste à prolonger la fonction de sorte qu'elle devienne périodisable tout en restant régulière (Fig. 2.3).

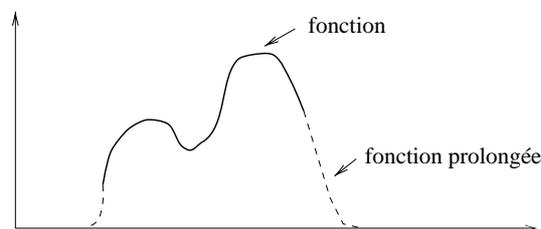


Figure 2.3: *Extrapolation d'une fonction afin d'éviter les problèmes de bords.*

L'inconvénient de ce type de méthode est qu'elle augmente le nombre de données parfois de façon considérable. En effet la transformée de Fourier rapide fonctionnant

avec des dimensions égales aux puissances de 2, cela peut contraindre à passer à la puissance de 2 supérieure. Elle reste cependant une méthode très fiable.

Une méthode moins fine, mais plus rapide consiste à ne pas tenir compte des bords. Ceci peut être fait dans la mesure où ce qui nous intéresse est au “milieu” de la fonction. Ne pas tenir compte des bords consiste à considérer comme nul les coefficients pour lesquels une ondelette n’a pu être prise en entier (Fig. 2.4).

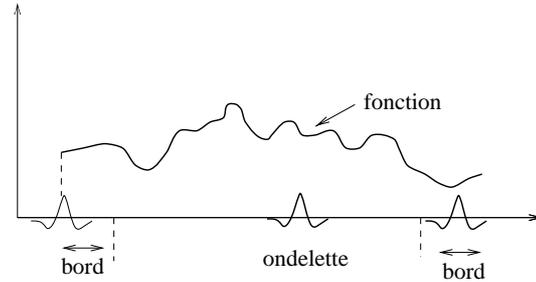


Figure 2.4: Zones où les coefficients d’ondelette ne seront pas calculés de façon exacte.

### 2.1.4 Facteur d’échelle minimal

Théoriquement le facteur d’échelle,  $a$ , peut varier de 0 à  $+\infty$ . Quand il tend vers 0, l’ondelette tend vers la fonction de Dirac et la transformée en ondelette tend alors vers la fonction elle-même (convolution d’un Dirac avec une fonction).

En pratique, on stocke les valeurs de l’ondelette mère discrétisée, autrement dit, l’ondelette pour le facteur d’échelle 1, ces valeurs étant au nombre de  $N_1$ . On appelle  $N_a$  le nombre de points de discrétisation de  $\Psi_{a,b,r}$ .

Pour  $a < 1$ , on a  $N_a = \lceil a N_1 \rceil$  (Fig.2.5).

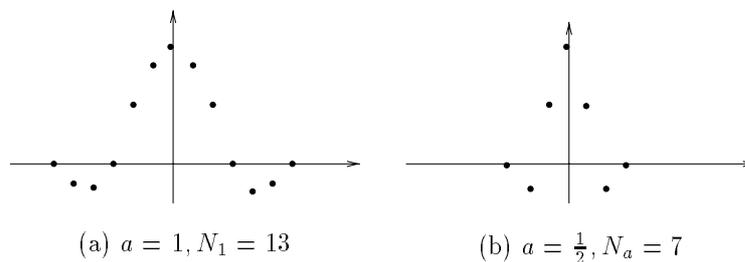


Figure 2.5: Ondettes discrétisées pour différentes échelles.

On remarque que  $N_a$  tend vers 0 lorsque  $a$  tend vers 0. Il arrive donc un moment où l’ondelette n’en est plus une. Il convient donc de se fixer un nombre de points

de discrétisation minimum,  $N_{min}$ , de telle sorte que les valeurs discrètes de l'ondelette soient "représentatives" de sa forme continue. Soit  $a_{min}$  le facteur d'échelle minimum, alors

$$a_{min} = \frac{N_{min}}{N_1} \quad (2.3)$$

## 2.2 Transformée discrète

Nous avons vu au chapitre précédent que la transformée en ondelettes discrète TOD consistait, en dimension 1, à trouver une sous-famille dénombrable  $(\Psi_{a_j, b_k})_{a_j, b_k \in \mathbb{R}}$  de la famille  $(\Psi_{a, b})_{a, b \in \mathbb{R}}$  et formant une base de  $L^2(\mathbb{R})$ . Nous allons présenter ici des algorithmes pour deux types de discrétisation de la famille  $(\Psi_{a, b})_{a, b}$ , à savoir

1.  $a_j = 2^j$ ,  $b_k = 2^j k$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$

La transformée en ondelettes devient

$$\mathcal{W}f(2^j, 2^j k) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \int \bar{\Psi}\left(\frac{t}{2^j} - k\right) f(t) dt$$

Cette écriture conduit à un algorithme rapide de calcul des coefficients d'ondelettes introduit par S. Mallat dans [53] dans le cadre de l'analyse multi-résolution.

2.  $a_j = 2^j$ ,  $b_k = k$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$

La transformée en ondelettes devient

$$\mathcal{W}f(2^j, k) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \int \bar{\Psi}\left(\frac{t - k}{2^j}\right) f(t) dt$$

Cette écriture conduite également à un algorithme rapide de calcul des coefficients d'ondelettes, l'algorithme à trous. La TO, en raison de la non orthogonalité des familles d'ondelettes sera alors redondante. Elle sera également invariante en translation par des valeurs entières.

### 2.2.1 Multi-résolution

On rappelle qu'une analyse multi-résolution est une famille  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  d'espaces emboîtés (définition 1.5) où  $V_j$  représente l'espace dans lequel est approximée la fonction à la résolution  $2^{-j}$ . On désigne par  $O_j$  l'espace dans lequel on trouve le "détail" qu'on a perdu entre la résolution  $2^{-(j-1)}$  et la résolution  $2^{-j}$ :

$$V_j \subset V_{j-1} \quad \text{et} \quad O_j \oplus V_j = V_{j-1}$$

En dimension 1, chaque espace  $V_j$  est représenté par la fonction d'échelle  $\Phi$ ,  $(\Phi_{j, k})_{k \in \mathbb{Z}}$  étant une base de  $V_j$  et chaque espace  $O_j$  est représenté par l'ondelette  $\Psi$ ,  $(\Psi_{j, k})_{k \in \mathbb{Z}}$

étant une base de  $O_j$  où  $f_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} f(2^{-j}t - k)$ .

On considère une fonction  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$ . Soit  $(c_k^j)_{k \in \mathbb{Z}}$  son approximation discrète dans l'espace  $V_j$ , et  $(d_k^j)_{k \in \mathbb{Z}}$  les coefficients de détails dans  $O_j$  c'est-à-dire la projection de  $f$  sur  $O_j$  :

$$\begin{aligned} c_k^j &= (f, \Phi_{j,k}) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} (f(u), \Phi(2^{-j}u - k)) \\ d_k^j &= (f, \Psi_{j,k}) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} (f(u), \Psi(2^{-j}u - k)) \end{aligned}$$

On remarque que  $d_k^j = \mathcal{W}f(2^j, 2^j k)$ .

### 2.2.1.1 Analyse

Le but de l'algorithme d'analyse multi-résolution est de calculer les coefficients de détail  $d_k^j$  ou coefficients d'ondelettes, à partir des différentes approximations.

Les espaces  $V_j$  étant emboîtés, toute l'information contenue dans  $V_j$  est également contenue dans  $V_{j-1}$ . On peut donc exprimer les coefficients  $c_k^j, k \in \mathbb{Z}$  en fonction des coefficients  $c_k^{j-1}, k \in \mathbb{Z}$ . En effet,

$$c_k^j = \int f(u) \bar{\Phi}_{j,k}(u) du$$

En exprimant  $\Phi_{j,k}$  dans la base  $\Phi_{j-1,k}$ , on obtient

$$\Phi_{j,k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(2n - k) \Phi_{j-1,k}$$

avec  $h$ , la réponse impulsionnelle du filtre  $H$  défini par la propriété 1.6

$$h(n) = (\Phi, \Phi_{-1,n})$$

et  $\tilde{h}$  le filtre miroir associé à  $h$ , c'est-à-dire  $\tilde{h}(n) = h(-n)$ .

Alors

$$c_k^j = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(2k - n) c_n^{j-1} \quad (2.4)$$

De même que l'information contenue dans  $V_j$  est contenue dans  $V_{j-1}$ , celle contenue dans  $O_j$  est également contenue dans  $V_{j-1}$ . Par contre elle n'est pas présente dans  $V_j$ . On peut exprimer les coefficients  $(d_k^j)_{k \in \mathbb{Z}}$  en fonction des coefficients  $(c_k^{j-1})_{k \in \mathbb{Z}}$  en procédant de la même manière que précédemment.

$$d_k^j = \int f(u) \bar{\Psi}_{j,k}(u) du$$

En exprimant  $\Psi_{j,k}$  dans la base  $\Phi_{j-1,k}$  et en utilisant le filtre  $G$  de réponse impulsionnelle  $g$  défini par l'équation (1.32) on obtient

$$d_k^j = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(2k-n) c_n^{j-1} \tag{2.5}$$

avec  $g(n) = (\Psi, \Phi_{-1,n}) = (-1)^{1-n}h(1-n)$  et  $\tilde{g}$  le filtre miroir associé à  $g$ .

Les équations (2.4) et (2.5) montrent qu'on peut calculer les coefficients d'ondelettes en fonction des différentes approximations suivant le schéma représenté par la figure 2.6. Les coefficients d'ondelettes pour une résolution donnée sont obtenus en appliquant le filtre  $g$  sur les coefficients d'approximation à la résolution précédente et en en gardant un sur deux, d'où un phénomène de *décimation*. Ces mêmes coefficients d'approximation ont été obtenus par filtrages successifs par  $h$  puis décimation des données d'approximation aux résolutions précédentes.

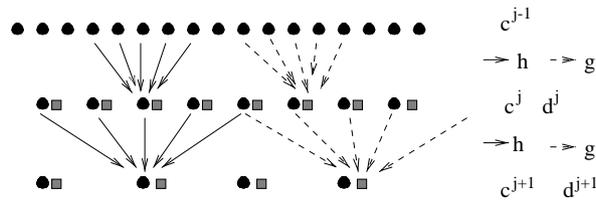


Figure 2.6: Schéma de calcul des coefficients d'approximation (ronds) et d'ondelette (carrés) par analyse multi-résolution.

### Remarques

1. On remarque que le volume de données stockées à chaque itération reste le même. En effet, si  $n_{j-1}$  est le nombre de coefficients d'approximation à la résolution  $2^{-(j-1)}$ , à la résolution  $2^{-j}$ , on conservera  $\frac{n_{j-1}}{2}$  coefficients d'approximation et  $\frac{n_{j-1}}{2}$  coefficients d'ondelettes. Si  $n$  est le nombre de données initiales,  $n_a$ , le nombre de coefficients d'approximation à la résolution  $2^{-j}$  et  $n_o$ , le nombre de coefficients d'ondelettes calculés jusqu'à la résolution  $2^{-j}$ , on a

$$n_a = \frac{n}{2^j} \text{ et } n_o = \sum_{l=1}^j \frac{n}{2^l}$$

et finalement  $n = n_a + n_o$ .

2. Le calcul des coefficients est exact si les filtres sont à support compact, comme les ondelettes de I. Daubechies, ou numériquement à support compact, comme les ondelettes splines de Battle-Lemarié qui sont à décroissance exponentielle.

3. Comme dans le cas continu, bien que la limite théorique de résolution soit  $+\infty$  ( $j = -\infty$ ), ce qui correspond à un facteur de résolution  $a = 0$ , la pratique impose d'autres réalités. En effet, le nombre de coefficients d'approximation étant divisé par deux à chaque itération, il est nécessaire de s'arrêter avant qu'il n'y en ait plus. Si  $l_h$  est la largeur du filtre  $h$  et  $2^{-j_{min}}$  la résolution minimale, alors  $l_h = \frac{n}{2^{-(j_{min}-1)}}$ . En effet, pour calculer le dernier coefficient, il faut qu'il y ait au moins  $l_h$  coefficients à l'étape précédente. D'où

$$j_{min} = \lfloor \log_2 \frac{n}{l_h} + 1 \rfloor$$

4. La complexité de l'algorithme pour le calcul de tous les coefficients est en  $O(l_h n)$ .
5. Pour initialiser l'algorithme, on considère que les données dont on dispose au départ sont l'approximation de la fonction dans  $V_0$ , c'est-à-dire que  $(f(t), \Phi(t - n)) = c_n^0$ . Les coefficients calculés ne sont donc pas exactement les coefficients d'ondelettes de la fonction de départ discrétisée.
6. L'opération de décimation entraîne une non invariance en translation de la transformée. En effet, un signal et le même signal décalé d'un entier en temps n'auront pas la même réponse à la même échelle.
7. Le signal n'étant connu que sur un intervalle borné, le calcul des coefficients aux bords pose un problème. En effet, à chaque résolution  $2^{-j}$ , les coefficients calculés de manière correcte seront ceux situés à une distance supérieure à  $(\frac{l_h}{2})^j$  du bord. Si on ne prolonge pas le signal, le nombre de coefficients calculés est donc considérablement diminué.

Les méthodes classiques de prolongement de la fonction sont une symétrie par rapport aux bords (méthode miroir), une prolongation par une fonction constante (répétition des coefficients extrémaux) ou la méthode signalée dans le cas de la transformée continue.

### 2.2.1.2 Reconstruction

Etant donné que la somme directe des espaces  $V_j$  et  $O_j$  est  $V_{j-1}$ , les coefficients  $c_k^{j-1}, k \in \mathbb{Z}$  peuvent être calculés de façon exacte à partir des coefficients  $c_k^j, k \in \mathbb{Z}$  et  $d_k^j, k \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire qu'on peut également passer de la résolution  $2^{-j}$  à la résolution  $2^{-(j-1)}$ . Ces constatations montrent qu'il existe un algorithme de reconstruction exact.

En raisonnant de manière analogue à l'analyse, on aboutit à l'équation suivante :

$$c_k^{j-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k-2n) c_n^j + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(k-2n) d_n^j$$

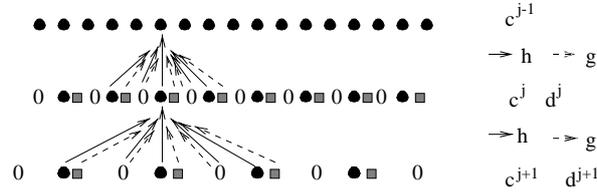


Figure 2.7: Schéma de reconstruction des coefficients d'approximation successifs par analyse multi-résolution.

Le schéma de reconstruction des coefficients  $c_k^j$  est montré par la figure 2.7. Chaque coefficient d'approximation est obtenu par la somme du filtrage par  $h$  des coefficients d'approximation à la résolution précédente auxquels sont intercalés des 0 et du filtrage par  $g$  des coefficients d'ondelettes auxquels sont également intercalés des 0.

**Remarque** Si la fonction n'a pas été prolongée dans la phase d'analyse, seul un faible nombre de coefficients pourront être reconstruits. Il est donc nécessaire de procéder comme ce qui a été présenté auparavant.

### 2.2.1.3 Conditions sur les filtres

Les algorithmes présentés précédemment sont des algorithmes de calcul des coefficients d'ondelette et de reconstruction complètement définis par les filtres en quadrature  $h$  et  $g$ . La théorie des ondelettes donnent des conditions sur la fonction d'échelle  $\Phi$  et l'ondelette  $\Psi$  conduisant à une analyse multi-résolution. Ces conditions peuvent être exprimées en fonction des réponses impulsionnelles  $h$  et  $g$  [53] [21] [72] comme suit :

$$\sum_j (\bar{h}(2j-n)h(2j-m) + \bar{g}(2j-n)g(2j-m)) = \delta(n,m) \quad \forall(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \quad (2.6)$$

$$\sum_j h(2n-j)\bar{g}(2m-j) = 0 \quad \forall(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \quad (2.7)$$

$$\sum_n g(n) = 0 \quad (2.8)$$

$$\sum_n h(n) = \sqrt{2} \quad (2.9)$$

### Remarques

1. Les conditions (2.6) et (2.7) expriment l'orthonormalité des bases d'ondelettes et de la fonction d'échelle. Cette orthonormalité assure que la TO calculée est

non redondante. C'est donc un algorithme bien adapté à la synthèse ou à la compression de signaux, le nombre de coefficients à stocker étant "minimal".

2. Les conditions (2.8) et (2.9) expriment que  $g$  et  $h$  sont les réponses impulsionnelles de filtres respectivement passe-haut et passe-bas. En effet, les approximations successives de la fonction  $f$  dans les espaces  $V_j$  correspondent à des lissages successifs et donc à des fréquences de plus en plus basses,  $h$  étant de plus en plus étalé. Chaque espace  $O_j$  représente une bande de fréquence, les hautes fréquences perdues entre  $V_j$  et  $V_{j-1}$  (Fig. 2.8).

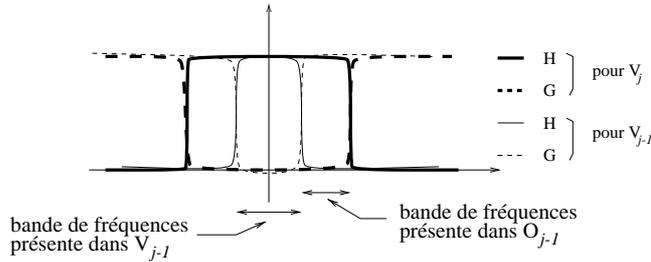


Figure 2.8: Bandes de fréquences présentes dans les différents espaces dans le cadre de l'analyse multi-résolution.  $H$  et  $G$  sont les filtres de réponses impulsionnelles respectives  $h$  et  $g$ .

### 2.2.1.4 Extension à la dimension 2

Nous avons vu au chapitre précédent (paragraphe 1.4.3.3) que l'analyse par ondelettes dans le cadre de l'analyse multi-résolution pouvait s'étendre à la dimension  $n$  à l'aide de la notion de multi-résolution séparable. Nous allons présenter brièvement les algorithmes de décomposition et reconstruction qui en découlent en dimension 2 où une application directe est l'analyse d'images.

Si  $(\mathcal{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  sont les espaces d'approximation et  $(\mathcal{O}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , les espaces de détails, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{j-1} &= \mathcal{V}_j \otimes \mathcal{O}_j \\ &= \mathcal{V}_j \otimes \mathcal{O}_j^1 \oplus \mathcal{O}_j^2 \oplus \mathcal{O}_j^3 \end{aligned}$$

où  $\mathcal{O}_j^1, \mathcal{O}_j^2$  et  $\mathcal{O}_j^3$  sont les espaces de détails respectivement verticaux, horizontaux et diagonaux.

$\mathcal{V}_j$  est caractérisé par la fonction d'échelle  $\Phi(x, y)$  et  $\mathcal{O}_j^1, \mathcal{O}_j^2$  et  $\mathcal{O}_j^3$ , par trois ondelettes  $\Psi^1(x, y), \Psi^2(x, y)$  et  $\Psi^3(x, y)$  définies au paragraphe 1.4.3.3.

On note

$$\begin{aligned} c_{k,l}^j &= (f, \Phi_{j,k,l}) = \frac{1}{2^j} (f(u, v), \Phi(2^{-j}u - k, 2^{-j}v - l)) \\ d_{k,l}^{1,j} &= (f, \Psi_{j,k,l}) = \frac{1}{2^j} (f(u, v), \Psi(2^{-j}u - k, 2^{-j}v - l)) \\ d_{k,l}^{2,j} &= (f, \Psi_{j,k,l}) = \frac{1}{2^j} (f(u, v), \Psi(2^{-j}u - k, 2^{-j}v - l)) \\ d_{k,l}^{3,j} &= (f, \Psi_{j,k,l}) = \frac{1}{2^j} (f(u, v), \Psi(2^{-j}u - k, 2^{-j}v - l)) \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue à celui fait en dimension 1 conduit à un algorithme de décomposition et un algorithme de reconstruction rapides. On utilisera les mêmes notations.

## Décomposition

L'algorithme de décomposition s'écrit

$$\begin{aligned} c_{k,l}^j &= \sum_n \sum_m \tilde{h}(2k - n) \tilde{h}(2l - n) c_{n,m}^{j-1} \\ d_{k,l}^{1,j} &= \sum_n \sum_m \tilde{h}(2k - n) \tilde{g}(2l - n) c_{n,m}^{j-1} \\ d_{k,l}^{2,j} &= \sum_n \sum_m \tilde{g}(2k - n) \tilde{h}(2l - n) c_{n,m}^{j-1} \\ d_{k,l}^{3,j} &= \sum_n \sum_m \tilde{g}(2k - n) \tilde{g}(2l - n) c_{n,m}^{j-1} \end{aligned}$$

On remarque que l'algorithme de décomposition est le même que dans le cas 1D. En effet, l'algorithme unidimensionnel est appliqué successivement sur les lignes et les colonnes de l'image pour chaque type de coefficient. Cette constatation nous aide à comprendre la notion de détail vertical, horizontal et diagonal.  $d^1$ , par exemple, est obtenu par approximation sur les lignes puis calcul de coefficients d'ondelettes sur les colonnes. Ce sera donc le détail horizontal.

On voit qu'un tel algorithme privilégie certaines directions fixées au départ. Certaines applications (comme l'astronomie, A. Bijaoui [8] [9]) préfèrent une analyse plus isotrope comme le permet l'algorithme à trous qui sera présenté dans le paragraphe suivant. On peut également vouloir privilégier une direction qui ne soit pas horizontale, verticale ou diagonale, mais autre (détection de structures ayant une direction privilégiée, comme en turbulence [27] [28] ou en sismique, l'application qui nous intéresse). On utilisera alors les *ondelettes directionnelles* qui seront présentées ultérieurement.

## Reconstruction

L'algorithme de reconstruction s'écrit

$$c_{k,l}^{j-1} = \sum_n \sum_m \left[ h(k-2n)h(l-2m)c_{n,m}^j + h(k-2n)g(l-2m)d_{n,m}^{1,j} \right. \\ \left. + g(k-2n)h(l-2m)d_{n,m}^{2,j} + g(k-2n)g(l-2m)d_{n,m}^{3,j} \right]$$

Cet algorithme est également fondé sur le même principe que l'algorithme de reconstruction 1D.

### 2.2.2 L'algorithme à trous

L'algorithme de la TO à partir d'une analyse multi-résolution présenté précédemment est un algorithme de calcul des coefficients d'ondelettes orthonormales. L'algorithme à trous [72] [41] [10] est un algorithme plus souple dans la mesure où les familles d'ondelettes ne sont pas orthogonales. Les conditions sur les filtres seront alors moins contraignantes. De plus, ne présentant pas de décimation, la TO correspondante sera invariante en translation. Nous verrons que sous certaines conditions, le calcul de la TO est exact.

Afin d'éviter la phase de décimation, qui rend la transformation en ondelettes non invariante en translation, l'idée est de traiter séparément à chaque étape les coefficients pairs des coefficients impairs. Pour cela, on calcule la transformée en ondelette suivante

$$W(2^j, k) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}\left(\frac{t-k}{2^j}\right) f(t) dt$$

Dans cette équation, on peut effectuer le changement de variable suivant :  $t' = \frac{t-k}{2^j}$ .

On a alors

$$W(2^j, k) = \sqrt{2^j} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}(t) f(2^j t + k) dt$$

et l'intégrale peut être calculée par l'approximation suivante

$$w(2^j, k) = \sqrt{2^j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}(n) f(2^j n + k) \quad (2.10)$$

#### 2.2.2.1 Analyse

Soient  $w_k^j$  les coefficients d'ondelette calculés par cet algorithme à la résolution  $2^{-j}$  et  $s_k^j$  les coefficients d'approximation correspondant. L'algorithme à trous comme

l'algorithme multi-résolution nécessite deux filtres respectivement passe haut et passe bas, de réponses impulsionnelles  $h$  et  $g$  et on a

$$\begin{aligned} s_k^j &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) s_{2^{j-1}n+k}^{j-1} \\ w_k^j &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) s_{2^j n+k}^j \end{aligned} \tag{2.11}$$

**Remarques**

1. L'équation de calcul des coefficients (2.11) est très proche de l'équation (2.10). En effet, si  $\bar{\Psi}(n) = g(n)$  c'est-à-dire que le filtre  $g$  est directement l'ondelette discrétisée et si  $\sqrt{2^j} f(2^j n + k) = s_{2^j n+k}^j$ , c'est-à-dire que  $s^j$  est la fonction  $f$  échantillonnée et normalisée, alors les deux calculs sont les mêmes et  $w(2^j, k) = w_k^j$ .
2. On remarque que si  $k = 2p$  est pair,  $w_{2p}^1$  est fonction des termes pairs de  $s^1$ . De même, si  $k = 2p + 1$  est impair,  $w_{2p+1}^1$  est fonction des termes impairs de  $s^1$ . Tout ceci revient à appliquer  $h$ , à chaque étape, sur les termes pairs d'une part et sur les termes impairs d'autre part de la série précédemment calculée. Puis, à la dernière étape appliquer  $g$  de la même manière (Fig. 2.9).

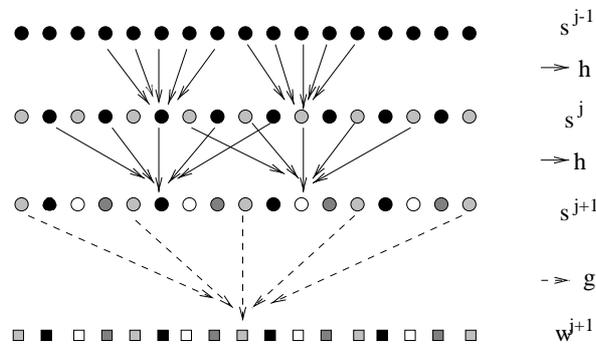


Figure 2.9: Schéma de calcul des coefficients d'approximation et d'ondelette par l'algorithme à trous.

En faisant un parallèle avec l'analyse multi-résolution,  $V_0$  l'espace d'approximation où est représenté  $s^0$  est décomposé de deux manières :

$$V_0 = V_{-1}^p \oplus O_{-1}^p = V_{-1}^i \oplus O_{-1}^i$$

où  $V_{-1}^p$  et  $O_{-1}^p$  sont les espaces d'approximation et de détails utilisant les termes pairs et  $V_{-1}^i$  et  $O_{-1}^i$  ceux utilisant les termes impairs. Chaque espace  $V_j$  est ainsi décomposé

de deux manières.

Les coefficients calculés par cette méthode incluent ceux calculés par la méthode précédente si les filtres  $h$  et  $g$  vérifient les conditions présentées au paragraphe 2.2.1.3 [72] et on a

$$\begin{aligned} c_k^j &= s_{2^j k}^j \quad \forall (n, j) \in \mathbb{Z}^2 \\ d_k^{j+1} &= w_{2^j k}^j \quad \forall (n, j) \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

### Remarques

1. Les coefficients calculés par l'algorithme à trous peuvent être vus comme un entrelacement de coefficients calculés par l'algorithme multi-résolution. A la résolution  $2^{-j}$ , tout se passe comme si on avait  $2^j$  coefficients imbriqués les uns dans les autres. Cette redondance d'information implique une invariance en translation qui est fondamentale en analyse de signaux.
2. Comme l'algorithme de Mallat présenté auparavant, l'algorithme à trous nécessite des filtres numériquement à support compact (de largeur  $l_h$ ) et la résolution minimale est la même, à savoir  $j_{min} = \lfloor \log_2 \frac{n}{l_h} + 1 \rfloor$ .
3. La complexité de l'algorithme est en  $O(Jl_h n)$  si  $J$  est le nombre d'échelles souhaitées. Ceci est du même ordre que l'algorithme basé sur l'analyse multi-résolution.
4. Les problèmes de bords peuvent être traités de la même manière que pour l'algorithme de Mallat.

#### 2.2.2.2 Conditions sur les filtres et propriétés

Les algorithmes présentés précédemment fonctionnent pour des filtre  $g$  et  $h$  arbitraires. Cependant, il est souhaitable d'avoir certaines propriétés comme une énergie finie pour la transformée, par exemple, ou un comportement raisonnable de la fonction d'échelle  $\Phi$  correspondante.

Cette fonction d'échelle est déterminée par sa transformée de Fourier, et on a par définition

$$\hat{\Phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-in \frac{\xi}{2^j}} \right)$$

Pour qu'une telle fonction existe, c'est-à-dire converge vers une fonction non nulle, il faut que le filtre  $h$  soit passe-bas, c'est-à-dire

$$\sum_n h(n) = \sqrt{2}$$

Il faut noter qu'avec uniquement cette condition,  $\Phi$  n'est pas forcément continue. Elle peut être fractale et est en général non orthonormale [72]. Pour que  $\Phi$  soit suffisamment régulière, on peut lui imposer d'avoir un certain nombre de moments nuls [21].

Pour que la transformée ait une énergie finie, il faut que  $g$  soit passe-haut, soit

$$\sum_n g(n) = 0$$

Il existe une transformation inverse bornée si il existe deux filtres  $\tilde{h}$  et  $\tilde{g}$  tels que

$$\sum_n \tilde{h}(n)h(l-n) + \tilde{g}(n)g(l-n) = \delta(l)$$

Les ondelettes biorthogonales conduisent à des filtres satisfaisant cette propriété.

L'ondelette  $\Psi$  est définie par

$$\Psi(t) = \sum_k \Phi(t-k)g(k)$$

Nous allons voir que le calcul des coefficients par l'algorithme à trous peut être exact. Pour cela nous introduisons la notion de *filtre à trous*.

**Définition 2.1** Soit  $h$  un filtre d'interpolation vérifiant

$$h(2k) = \frac{\delta(k)}{\sqrt{2}} \text{ où } \delta \text{ est le symbole de Kronecker}$$

On dit que  $h$  est un filtre à trous.

**Propriété 2.1 :**

- si  $h$  est un filtre à trous, alors  $\bar{\Psi}(n) = g(n)$ .
- Pour un signal discret  $s$ ,
  - si  $s^0 = s$  et  $h$  est à trous, alors  $w(2^j, n) = w_n^j$
  - si  $s_n^0 = \sum_k \Phi(k-n)s_k$ , alors  $w(2^j, n) = w_n^j$ .
- Pour un signal continu,
  - si  $s_n^0 = (\Phi_n, s)$  avec  $\Phi_n(t) = \Phi(t-n)$ , alors  $W(2^j, n) = w_n^j$ .

On remarque que les conditions sur les filtres sont moins contraignantes pour les algorithmes à trous que pour l'algorithme multi-résolution. En effet, les filtres  $h$  et  $g$  peuvent être choisis indépendamment l'un de l'autre.

### 2.2.2.3 Reconstruction

Etant donnés les filtres  $\tilde{h}$  et  $\tilde{g}$  défini au paragraphe précédent, l'algorithme de reconstruction s'écrit

$$s_k^j = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\tilde{h}(n) s_{2^j n+k}^{j+1} + \tilde{g}(n) w_{2^j n+k}^j]$$

L'algorithme est analogue à celui obtenu dans le cadre de la multi-résolution (Fig. 2.10). Cependant, comme il n'y a pas eu de phase de décimation, on n'a pas besoin d'interpoler entre les coefficients (ajout de 0).

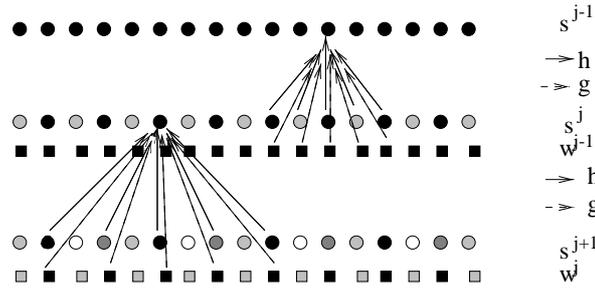


Figure 2.10: Schéma de reconstruction par l'algorithme à trous.

### 2.2.2.4 Extension à la dimension 2

L'algorithme à trous s'étend facilement à la dimension 2 [10]. Contrairement à l'analyse multi-résolution, une seule ondelette est nécessaire (au lieu de 3) et le calcul des coefficients est plus isotrope. On notera  $s_{k,l}^j$  et  $w_{k,l}^j$  les coefficients d'ondelette et d'approximation à la résolution  $2^{-j}$ .

### Décomposition

L'algorithme de décomposition s'écrit

$$s_{k,l}^j = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(n, m) s_{2^{j-1}n+k, 2^{j-1}m+l}^{j-1}$$

$$w_{k,l}^j = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(n, m) s_{2^j n+k, 2^j m+l}^j$$

$h$  est un filtre passe bas déterminé par

$$\frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = \sum_{n,m} h(n, m) \Phi(x-n, y-m)$$

avec  $\sum_{n,m} |\hat{\Phi}(\xi+n, \nu+m)|^2 \neq 0$ .

Le filtre  $g$  est passe haut :  $\sum_{n,m} g(n, m) = 0$  et vérifie l'équation

$$\Psi(x, y) = \sum_{n,m} g(n, m) \Phi(x - n, y - m)$$

où  $\Psi$  est une ondelette analysante.

### Reconstruction

L'algorithme de reconstruction est également une simple extension de l'algorithme 1D.

$$s_{k,l}^j = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{h}(n, m) s_{2^j n+k, 2^j m+l}^{j+1} + \tilde{g}(n, m) w_{2^j n+k, 2^j m+l}^j \right]$$

où  $\tilde{h}$  et  $\tilde{g}$  sont des filtres vérifiant l'équation suivante

$$\sum_{n,m} \tilde{h}(n, m) h(k - n, l - m) + \tilde{g}(n, m) g(k - n, l - m) = \delta(k) \delta(l)$$

**Remarque** En pratique, la fonction d'échelle  $\Phi$  est souvent prise à variables séparables, c'est-à-dire qu'elle vérifie  $\Phi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$ . Le calcul des coefficients d'approximation peut alors se faire par une convolution 1D sur les lignes puis sur les colonnes.

Le filtre  $g$  peut être choisi indépendamment de  $h$ . On peut donc le choisir de telle sorte que le calcul des coefficients d'ondelettes se réduise à faire la différence de deux plans d'approximation successive. Ce choix simplifie l'algorithme de façon conséquente.

