

comportent plusieurs caractéristiques telles que la longueur qui est caractéristique de la continuité latérale de la zone sismique ou la largeur qui donne une idée de la fréquence apparente des horizons.

4.2 Ondelettes et sismique

4.2.1 Etat de l'art

Les ondelettes sont nées de l'analyse des signaux sismiques haute résolution. En 1984, P. Goupillaud, A. Grossmann et J. Morlet poussés par les exigences croissantes de la recherche d'hydrocarbures proposent une méthode de reconstruction des signaux sismiques permettant une restauration des hautes fréquences à l'aide de la représentation temps-fréquence des signaux [37]. La restauration des hautes fréquences permet d'avoir une meilleure résolution et permet donc d'avoir accès à des informations sur les puits de gaz ou de pétrole qui se trouvent parfois dans des couches de roches très fines.

Depuis, dans la littérature en sismique, la transformée en ondelettes a été utilisée dans le domaine du traitement du signal, c'est-à-dire l'analyse ou la reconstruction sur les traces. Ainsi en 1994, N. Thirion et al. [76] proposent une méthode de calcul des différents ondes sismiques (dispersives, réfractées...) à l'aide de l'analyse par ondelettes. En 1994, C. Pike dans [66] utilise la transformée en ondelettes continue par l'ondelette de Morlet pour l'étude de l'atténuation de l'énergie des signaux en sismique marine très haute fréquence, cette étude permettant d'analyser la nature des fonds marins pour la construction de ponts ou de plateformes pétrolières. N. Saito propose dans [71] un algorithme de suppression du bruit généré par un algorithme de migration sur une section sismique à l'aide de paquets d'ondelettes.

L'utilisation de la TO pour analyser les images sismiques à été très peu utilisée. Il faut noter que c'est un domaine d'application relativement nouveau. H.J. Grubb et A.T. Walden proposent une méthode basée sur l'analyse par ondelettes multi-résolution pour analyser les changements lithologiques latéraux à l'intérieur d'une séquence sismique [39], ceci ayant pour but de déterminer les limites d'un réservoir de pétrole.

Le principe est de trouver des attributs discriminants des "segments" de traces formant la séquence. Une méthode de "spatial clustering" (type ACP) est ensuite appliquée de telle manière à faire ressortir des zones où les attributs ont des caractéristiques homogènes [80]. Les segments considérés feront alors partie d'un même faciès.

Les attributs sont obtenus par analyse multi-résolution de chaque segment. Soit S un segment et W sa représentation en analyse multi-résolution.

$$\begin{aligned} S &= [c_1^0, \dots, c_{2^p}^0] \\ W &= [c_1^p, d_1^p, \underbrace{d_1^{p-1}, d_2^{p-1}}, \dots, \underbrace{d_1^1, \dots, d_{2^{p-1}}^1}] \end{aligned}$$

Les attributs de chaque segment seront l'énergie E_j à chaque échelle 2^{-j} avec

$$E_j = \sum_{k=1}^{2^{p-j}} (d_k^j)^2$$

Les auteurs ne présentent aucun résultat sur ces attributs, dérivés de la TOD. Dans un autre article [81], A.T. Walden présente des résultats fort concluants pour d'autres attributs obtenus directement sur le signal tels que énergie, fréquence, phase (par utilisation du temps de demi-énergie).

Il n'est pas évident que l'utilisation de la TO soit un plus d'autant plus que celle utilisée n'est pas invariante en translation. Or on veut comparer des morceaux de traces adjacents. Si un signal est légèrement décalé dans le temps par rapport à un autre, la réponse de la TO à la même échelle ne sera pas la même et les attributs auront des caractéristiques différentes pour des segments appartenant à un même faciès, ce qui n'est pas souhaitable. Il est possible que ces différences soient moindres par rapport à celles que l'on aurait pour deux traces n'appartenant pas au même faciès.

4.2.2 Objectifs

Nous avons vu précédemment que l'étude des sections sismiques passait par l'étude des continuités (horizons) et discontinuités (limites de séquences, failles) latérales de l'image. Il nous a paru important de trouver des outils capables de mettre ces continuités et discontinuités en valeur afin d'améliorer la perception de certaines caractéristiques de l'image ceci pouvant conduire à une segmentation partielle [13].

L'amélioration de la perception de l'image passe par une suppression du bruit et un réhaussement des zones d'intérêts, le bruit étant, au sens large, ce qui ne nous intéresse pas. Dans le cas où on veut améliorer les continuités de l'image, ce bruit est le bruit résiduel sur chaque trace et les zones d'intérêts sont les horizons. Une représentation sur une base d'ondelettes appropriée permet de diminuer, voir supprimer le bruit et d'accentuer les réflexions formant les horizons. C'est ce qui sera développé dans une première partie.

Dans le cas où on veut faire apparaître les discontinuités, ce sont alors les horizons qui sont considérés comme du bruit. Ces discontinuités peuvent être une fin d'horizon, un brusque changement de pendage local ou un fort changement dans la forme de la réflexion. Si on considère l'image comme une fonction de $L^2(\mathbb{R}^2)$, toutes ces formes se présentent comme une singularité de la fonction (fonction non continue ou dérivées partielles non continues). Or la transformée en ondelettes est un outil particulièrement adapté à l'étude des singularités. De plus ces images comportent des directions privilégiées. Les discontinuités sont donc très liées à ces directions. Par conséquent, les ondelettes directionnelles semblent offrir un outil privilégié. Ceci fera l'objet d'une seconde partie.

4.3 Amélioration de la perception : mise en valeur des horizons

4.3.1 Méthode : utilisation de l'algorithme à trous

Les horizons sont des alignements de réflexions maximales sur des traces adjacentes. On peut mettre en valeur ces horizons par une accentuation de ces réflexions et une suppression du bruit résiduel. Nous allons nous intéresser à une trace en particulier. Celle-ci se présente comme une succession de réflexions de l'impulsion sismique, impulsion dont la forme et les caractéristiques ressemblent à une ondelette analysante. Une telle impulsion est d'ailleurs appelée en sismique, *ondelette sismique*.

Considérons la TO d'une trace sismique f par l'ondelette analysante réelle Ψ .

$$\begin{aligned} \mathcal{W}f(a, b) &= \sqrt{\frac{a}{2\pi c\Psi}} \int e^{i\xi b} \hat{\Psi}(a\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \sqrt{\frac{a}{2\pi c\Psi}} \left(\sum_k r_k \int e^{i\xi(b-\tau_k)} \hat{\Psi}(a\xi) \hat{s}(\xi) d\xi + \int e^{i\xi b} \hat{\Psi}(a\xi) \hat{br}(\xi) d\xi \right) \end{aligned}$$

Faisons l'hypothèse que br fait partie des hautes fréquences, c'est-à-dire que

$$\hat{br}(\xi) = 0 \quad \text{pour } |\xi| < \xi_h$$

On choisit une ondelette analysante à décroissance rapide dans le domaine spatial et à support compact dans le domaine fréquentiel. Soit $\varepsilon > 0$, alors

$$\begin{aligned} \exists \xi_{\Psi_b}, \xi_{\Psi_h} > 0, \quad \hat{\Psi}(\xi) = 0 \quad \text{pour } |\xi| \notin [\xi_{\Psi_b}, \xi_{\Psi_h}] \\ \exists T_{\Psi_\varepsilon} > 0, \quad \Psi(t) < \frac{\varepsilon}{t^2} \quad \text{pour } |t| \notin [-T_{\Psi_\varepsilon}, T_{\Psi_\varepsilon}] \end{aligned}$$

Posons $a_m = \frac{\xi_{\Psi h}}{\xi_h}$.

Alors, pour tout facteur d'échelle a tel que $a \geq a_m$, $\hat{\Psi}(a\xi)\hat{b}r(\xi) = 0$ quel que soit ξ . Et finalement la transformée en ondelette s'écrit

$$\mathcal{W}f(a, b) = \sum_k r_k \mathcal{W}s(a, b - \tau_k)$$

On suppose de plus que les couches de roches sont suffisamment éloignées les unes des autres, autrement dit les réflexions ne se chevauchent pas. Ce qui se traduit par la condition suivante :

$$\forall k \neq l, \exists \alpha \geq 4, |\tau_k - \tau_l| > \alpha T$$

$[-T, T]$ étant le support de l'impulsion sismique s .

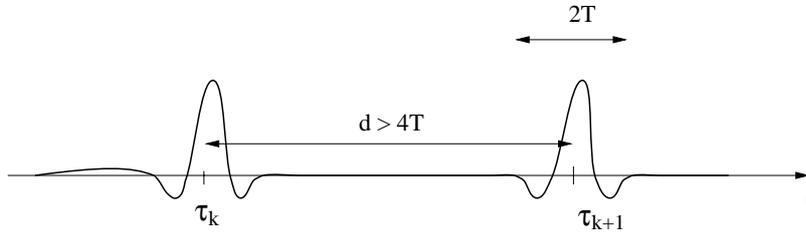


Figure 4.12: Deux réflexions successives sont relativement éloignées

Posons $a_M = \frac{T}{T_{\Psi\varepsilon}}$. Soit a tel que $a_m \leq a \leq a_M$ et k tel que $|\tau_k - b| < 2T$, alors pour $x \in [-T, T]$, $\left| \frac{x-b+\tau_k}{a} \right| > T_{\Psi\varepsilon}$ et

$$\begin{aligned} |r_k \mathcal{W}s(a, b - \tau_k)| &\leq \varepsilon r_k a^{\frac{3}{2}} \int_{-T}^T \frac{|s(x)|}{(x - b + \tau_k)^2} dx \\ &\leq \frac{r_k a^{\frac{3}{2}} s(0)}{3T} \varepsilon \leq r_k \varepsilon \quad (\text{dans la pratique}) \end{aligned}$$

Finalement, pour $a_m \leq a \leq a_M$

$$\mathcal{W}f(a, b) = \begin{cases} r_k \mathcal{W}s(a, b - \tau_k) + \mu_1 & \text{si } \exists k, |\tau_k - b| < 2T \\ \mu_2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3)$$

avec $|\mu_1| \leq \varepsilon \sum_{l \neq k} r_l$ et $|\mu_2| \leq \varepsilon \sum_l r_l$.

On remarque que le bruit ne participe pas à la TO de la trace sismique. Si on peut choisir la facteur d'échelle a de telle manière que l'ondelette analysante ait une forme la plus proche possible de s , alors $\mathcal{W}f$ aura des maxima locaux aux points τ_k et les réflexions sur les couches de roches différentes seront réhaussées.

Remarque On remarque que les réflexions sont parfois à des échelles différentes, la fréquence apparente de chaque horizon n'étant pas la même. Différents facteurs d'échelle permettront alors de mettre en valeur les différents horizons.

Choix de l'ondelette

Nous avons vu que l'ondelette analysante doit être à support compact et de forme proche d'une ondelette sismique donc sans trop d'oscillations. Les ondelettes à support compact d'I. Daubechies avec un nombre de moments nuls pas trop important paraissent donc particulièrement adaptées. Ces ondelettes présentent tout de même l'inconvénient de ne pas être symétriques. Les ondelettes biorthogonales peuvent concilier les différentes propriétés. Nous avons également étudié l'ondelette spline cubique qui est symétrique et numériquement à support compact.

Choix de l'algorithme

Les ondelettes intéressantes sont des ondelettes discrètes. Il nous faut donc choisir un algorithme discret. Le but du traitement étant de réhausser les horizons, cela passe par une comparaison des TO des différentes traces. L'algorithme choisi doit donc permettre de calculer une transformée invariante en translation. L'algorithme à trous permet de conserver cette propriété. De plus la redondance d'information qu'il fournit est plus adaptée à l'analyse, ce qui est notre propos ici.

4.3.2 Utilisation d'une ondelette adaptée : l'ondelette sismique

Nous avons vu plus haut (équation (4.2)) qu'une impulsion sismique vérifiait la condition d'admissibilité (définition 1.1) d'une ondelette analysante régulière (propriété 1.1). L'utilisation d'une telle ondelette paraît donc particulièrement adaptée au problème posé. En effet, l'ondelette sismique aura une ressemblance avec la forme de la réflexion plus qu'aucune autre ondelette mathématique. De plus l'algorithme à trous, par utilisation d'un filtre à trous permet d'utiliser directement l'ondelette échantillonnée.

Nous allons à présent exposer une méthode de calcul de l'impulsion sismique à partir de la fonction d'autocorrélation d'une trace sismique. Ceci nous permettra de dégager l'ondelette sismique à l'inverse de l'utilisation d'une ondelette classique telle qu'une ondelette de Daubechies.

On note a_f la fonction d'autocorrélation de la fonction f ,

$$a_f(t) = \int f(x)f(t+x)dx$$

On rappelle que l'expression d'une trace sismique est

$$f(t) = \sum_k r_k s(t - \tau_k) + br(t)$$

Avec les hypothèses sur f , s et br faites précédemment, on peut énoncer la propriété suivante

Propriété 4.1 *Soit $\varepsilon > 0$. Si $\forall k \neq l, \exists \alpha \geq 4, |\tau_k - \tau_l| > \alpha T$ et si il existe des fréquences ξ_{sb} et ξ_{sh} , $0 < \xi_{sb} < \xi_{sh}$ telles que*

$$\begin{aligned} \hat{s}(\xi) &< \varepsilon \quad \text{pour } |\xi| \notin [\xi_{sb}, \xi_{sh}], \quad \xi_{sb} > 0 \\ \hat{br}(\xi) &= 0 \quad \text{pour } |\xi| < \xi_{sh} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \hat{a}_f(\xi) &= \sqrt{2\pi} \left(\sum_k r_k^2 \right) |\hat{s}(\xi)|^2 = \left(\sum_k r_k^2 \right) \hat{a}_s(\xi) \quad \text{pour } |\xi| < \xi_{sh} \\ &= \sqrt{2\pi} (|\hat{b}(\xi)|^2 + \mu(\xi)) \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

avec $|\mu(\xi)| < \varepsilon \sum_k r_k (|\hat{br}(\xi)| + |\hat{br}(-\xi)|)$.

Autrement dit, pour une certaine gamme de fréquences, la fonction d'autocorrélation d'une trace sismique est proportionnelle à la fonction d'autocorrélation de l'implusion sismique.

DÉMONSTRATION: La fonction d'autocorrélation a_f s'écrit :

$$\begin{aligned} a_f(t) &= \int f(x)f(t+x)dx \\ &= \int \sum_{k,l} r_k r_l s(x - \tau_k) s(t+x - \tau_l) dx + \\ &\quad \int \sum_k (r_k s(x - \tau_k) br(t+x) + r_k s(t+x - \tau_k) br(x)) dx + \int br(x) br(t+x) dx \end{aligned} \quad (4.4)$$

Or on a fait l'hypothèse que les couches de roches sont suffisamment éloignées les unes des autres, donc

$$\int \sum_{k,l} r_k r_l s(x - \tau_k) s(t+x - \tau_l) = \left(\sum_k r_k^2 \right) a_s(t)$$

Dans le domaine de Fourier, la fonction d'autocorrélation s'exprime très simplement :

$$\hat{a}_f(\xi) = \sqrt{2\pi} |\hat{f}(\xi)|^2 \quad (4.5)$$

En réécrivant la transformée de Fourier de a_f déterminée par l'équation (4.4), on obtient

$$\begin{aligned}\hat{a}_f(\xi) &= \left(\sum_k r_k^2\right)\hat{a}_s(\xi) + \hat{a}_b(\xi) + \\ &\quad \sqrt{2\pi} \left(\sum_k r_k e^{i\xi\tau_k} \hat{s}(-\xi)\hat{b}r(\xi) + \sum_k r_k e^{-i\xi\tau_k} \hat{s}(\xi)\hat{b}r(-\xi) \right)\end{aligned}$$

Or on a fait l'hypothèse que s et br ne participaient pas aux mêmes bandes de fréquences, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}\hat{s}(\xi) &< \varepsilon \quad \text{pour } |\xi| \notin [\xi_{sb}, \xi_{sh}], \quad \xi_{sb} > 0 \\ \hat{b}r(\xi) &= 0 \quad \text{pour } |\xi| < \xi_{sh}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{a}_f(\xi) &= \sqrt{2\pi} \left(\sum_k r_k^2\right)|\hat{s}(\xi)|^2 = \left(\sum_k r_k^2\right)\hat{a}_s(\xi) \quad \text{pour } |\xi| < \xi_{sh} \\ &= \sqrt{2\pi} (|\hat{b}(\xi)|^2 + \mu(\xi)) \quad \text{sinon}\end{aligned}$$

avec $|\mu(\xi)| < \varepsilon \sum_k r_k (|\hat{b}r(\xi)| + |\hat{b}r(-\xi)|)$.

■

On obtient donc une bonne approximation de la fonction d'autocorrélation de l'ondelette sismique en coupant les hautes fréquences de la fonction d'autocorrélation d'une trace sismique à un facteur de normalisation près.

Obtention de l'impulsion sismique

On pose f_{bf} la fonction f , "basses fréquences" déterminée comme suit

$$\begin{aligned}\hat{f}_{bf}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \quad \text{pour } |\xi| < \xi_h \\ &= 0 \quad \text{sinon}\end{aligned}$$

Alors $|\hat{f}_{bf}(\xi)|^2 = (\sum_k r_k^2)|\hat{s}(\xi)|^2$.

Or s étant symétrique réelle, \hat{s} est également symétrique réelle. On appelle \tilde{s} l'impulsion sismique approchée. On a

$$\hat{\tilde{s}}(\xi) = \frac{|\hat{f}_{bf}(\xi)|}{\sqrt{\sum_k r_k^2}} \quad (4.6)$$

On peut alors obtenir l'impulsion sismique dans le domaine temporel par transformée de Fourier inverse. On peut remarquer que $\hat{\tilde{s}}$ étant à support compact, \tilde{s} sera seulement à support compact à ε près.

Transformée en ondelettes continue d'une trace à l'aide de l'ondelette sismique

On se rapporte au calcul fait précédemment pour une ondelette mathématique (paragraphe 4.3.1). On est ici dans le cas où $a_m = 1$ et $a_M = \frac{T}{T_{\tilde{s}\varepsilon}} \geq 1$ puisque \tilde{s} n'est pas à support compact. Numériquement, on peut considérer que $T_{\tilde{s}\varepsilon} = T$ donne une précision numérique ε suffisante. L'échelle la mieux adaptée est donc pour $a = 1$ et l'équation (4.3) devient

$$\mathcal{W}f(1, b) = \begin{cases} \frac{r_k}{\sqrt{c_s}} \int s(t)\tilde{s}(t - b + \tau_k)dt + \mu_1 & \text{si } \exists k, |\tau_k - b| < 2T \\ \mu_2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.7)$$

μ_1 et μ_2 vérifiant les mêmes conditions que dans le cas précédent.

En remarquant que $\int s(t)\tilde{s}(t - b + \tau_k)dt = \int e^{i\xi(b-\tau_k)}\hat{\tilde{s}}^2(\xi)d\xi$, on voit que la fonction $\mathcal{W}f(1, b)$ présente des maxima locaux aux points $b = \tau_k$ qui sont aussi les points maxima d'une trace sans bruit. On est donc assuré qu'une telle transformation n'apportera pas de distorsion dans la détection des horizons. De plus les dérives dues au bruit seront supprimées.

Dans le calcul pratique de $\mathcal{W}f$, on considèrera que $c_s = 1$ et donc

$$\mathcal{W}f(1, b) = r_k \int \hat{s}^2(\xi)d\xi + \mu_1 > r_k s(0) = f(\tau_k) - br(\tau_k)$$

Le pic de réflexion maximum est donc réhaussé, par rapport à ce qu'il aurait été sans le bruit.

4.3.3 Résultats

Pour quantifier les différents résultats, nous introduisons le rapport R "signal à bruit" qui renseigne sur la différence entre l'image initiale et l'image traitée. Si $im(n, m)$ est l'image originale et $tr(n, m)$, l'image traitée, alors

$$R = 10 \log_{10} \frac{\sum_n \sum_m (im(n, m))^2}{\sum_n \sum_m (im(n, m) - tr(n, m))^2}$$

On voit que plus R est important, plus l'image traitée est proche de l'image initiale. Ce critère doit être utilisé avec beaucoup de prudence. En effet, le but est de trouver une image relativement proche de l'image initiale (R assez grand), mais débruitée et les horizons principaux réhaussés (ce qui a pour effet de diminuer R). Nous allons donc utiliser quelques critères supplémentaires à l'aide de pointé d'horizon qui sont la longueur

moyenne des horizons, le nombre d'horizons détectés et leur aspect lisse (smoothness) S , ce critère étant mesuré par la somme des carrés des pentes des horizons. Une courbe lisse minimise cette somme. Si n est le nombre de points participant aux horizons et $p(i)$ la pente de l'horizon au point i , alors

$$S = \frac{\sum_{i=0}^n p(i)^2}{n}$$

Afin d'éviter les problèmes de bords, chaque trace a été prolongée par une fonction constante, c'est-à-dire que les valeurs aux extrémités sont répétées. Le prolongement par symétrie (également connu sous le nom d'effet miroir) n'est pas souhaitable ici, en effet cela crée une arête (Figure 4.13) du fait de la nature des images.

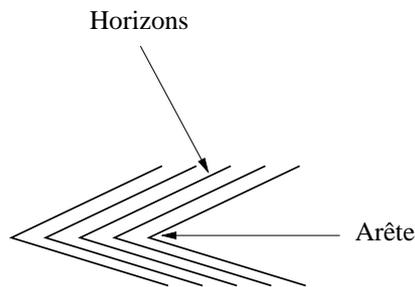


Figure 4.13: *Le prolongement par symétrie de chaque trace crée une arête qui n'est pas conforme à la réalité.*

4.3.3.1 Ondelettes mathématiques

Le choix de l'échelle pour une transformée en ondelettes peut se faire en comparant une trace initiale et une trace traitée pour plusieurs échelles. L'échelle pour laquelle les réflexions sont le plus accentuées, le signal traité gardant la forme générale du signal original. Les tests présentés ont été réalisés à partir de l'image 4.14, la trace test étant la trace 50.

On remarque que pour toutes les ondelettes, le signal traité le plus proche du signal original correspond à un facteur d'échelle $a = 2^j = 4$ ($j = 2$). On observe une forte accentuation des horizons pour les ondelettes de Daubechies, mais également un décalage et quelques distorsions surtout pour les ondelettes ayant 4 et 8 moments nuls (Fig. 4.16 et 4.18). Cet inconvénient est dû au fait que les ondelettes à supports compacts ne sont pas symétriques. L'ondelette ayant 2 moments nuls paraît la plus adaptée (Fig. 4.15). Les ondelettes splines et bi-orthogonales sont symétriques et doivent donc entraîner moins de distorsions que les ondelettes de Daubechies. En pratique, elles ont toutes deux le même type de comportement (Fig. 4.19 et 4.20). Le signal traité est

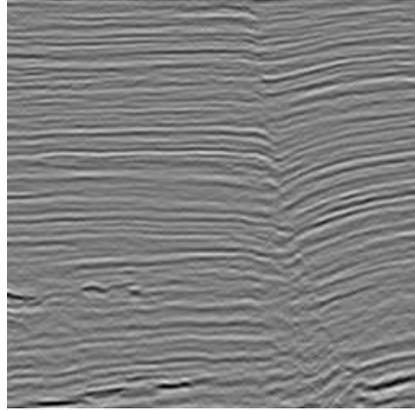


Figure 4.14: *Image contenant une faille.*

très proche du signal original, quoique légèrement décalé, cependant les réflexions ne sont pas accentuées ce qui était le but recherché.

La visualisation des images traitées avec un facteur d'échelle de 4 (Fig. 4.21 et 4.22) permet de voir que les horizons paraissent plus réguliers. Les réflexions importantes ont bien été réhaussées avec les ondelettes de Daubechies. Ceci est moins visible sur les deux autres images comme le prévoyait l'étude précédente. Les images de différences représentent la différence absolue entre une image traitée et l'image initiale. On remarque dans ces images une présence assez importante de structures qui correspondent au fait que les horizons ont été renforcés dans le cas de l'ondelette de Daubechies mais également un changement sensible de l'image du fait que l'ondelette n'est pas exactement adaptée, les signaux traités sont donc décalés. Il faut remarquer cependant que l'aspect structural de l'image n'a pas été modifié. On remarque également sur les rapports signal à bruit (Tab. 4.1) que les images produites par l'ondelette spline et l'ondelette biorthogonale sont plus proches de l'image initiale que celle produite par les ondelettes de Daubechies. Cependant l'ondelette à support compact avec $N = 2$ a un rapport relativement élevé, très proche de celui obtenu avec les ondelettes spline et biorthogonale. Cette ondelette paraît donc la plus adaptée parmi toutes les ondelettes testées. Ce qui conforte les conclusions faites par l'étude d'une trace.

L'étude du pointé d'horizons (suivant la méthode suivi de maximum de Pitas) sur les différentes images permet également d'observer le décalage introduit par la transformée. Cependant, visuellement les horizons paraissent plus réguliers et moins bruités (Fig. 4.23). L'étude des paramètres (Table 4.2) montre que l'aspect régulier des horizons est du même ordre de grandeur ($5 \cdot 10^{-2}$). Cependant le traitement par la TO réduit le nombre d'horizons et augmente leur longueur moyenne. Ceci signifie qu'un certain

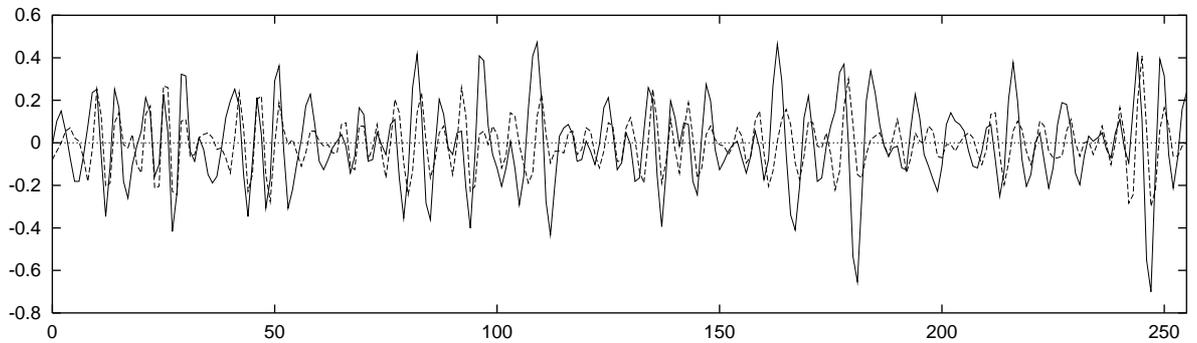
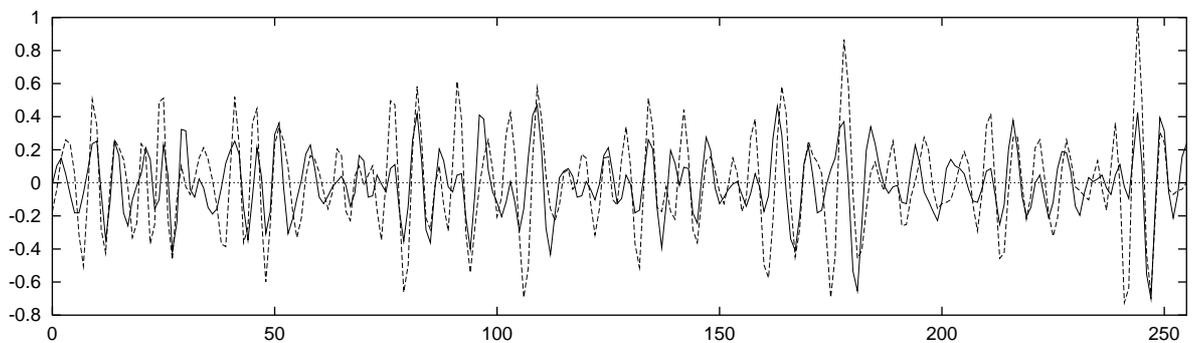
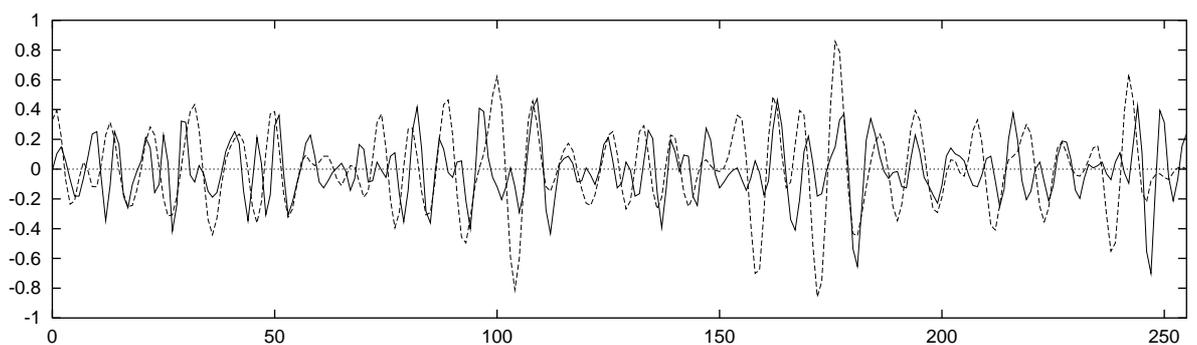
(a) $j = 1$ (b) $j = 2$ (c) $j = 3$

Figure 4.15: Comparaison trace originale (en trait plein) et trace traitée (en pointillés) par l'ondelette de Daubechies à 2 moments nuls

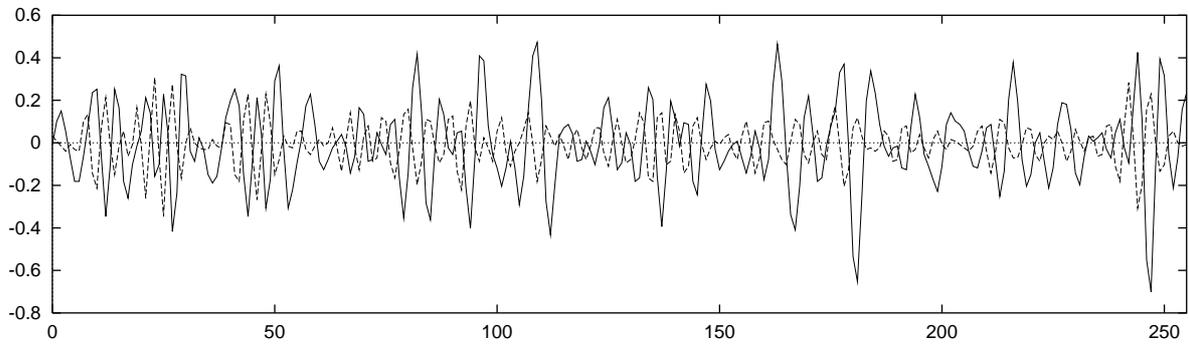
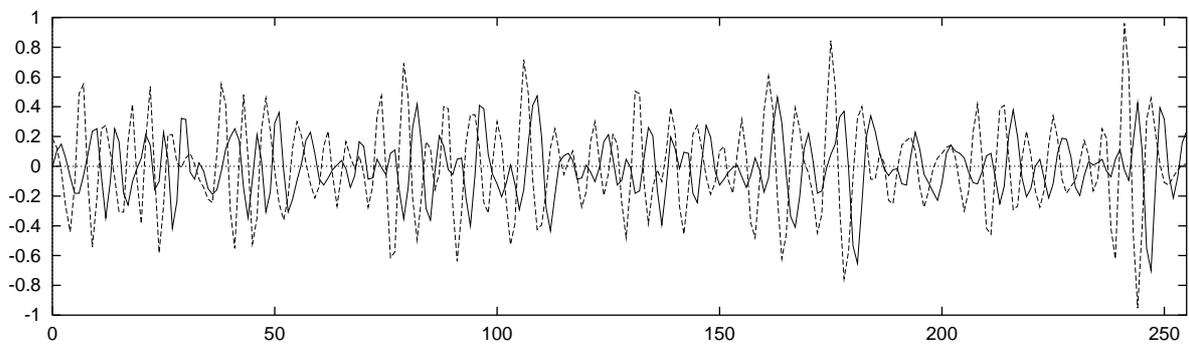
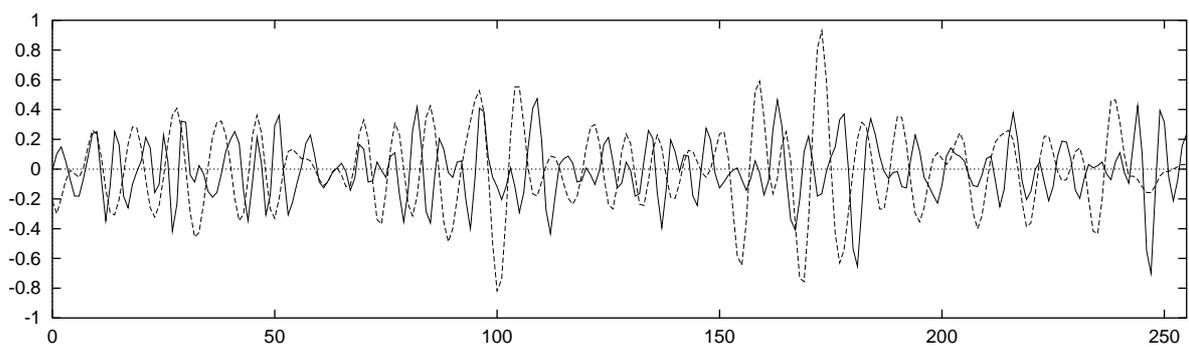
(a) $j = 1$ (b) $j = 2$ (c) $j = 3$

Figure 4.16: Comparaison trace originale (en trait plein) et trace traitée (en pointillés) par l'ondelette de Daubechies à 4 moments nuls

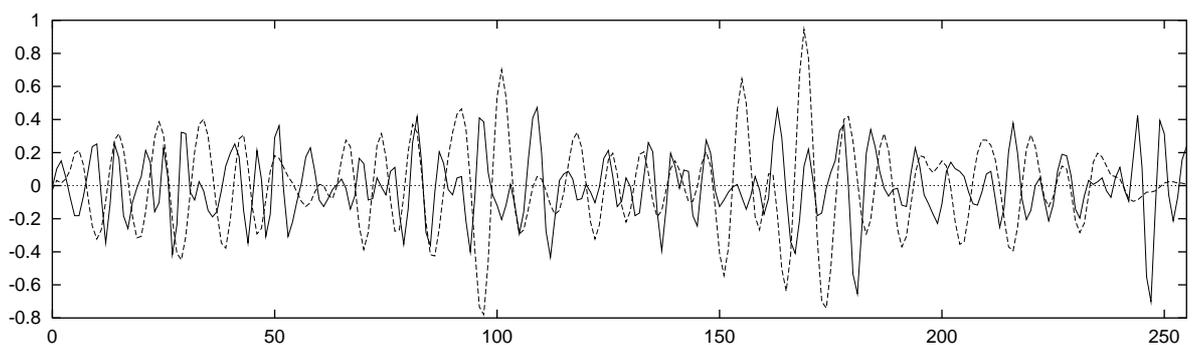
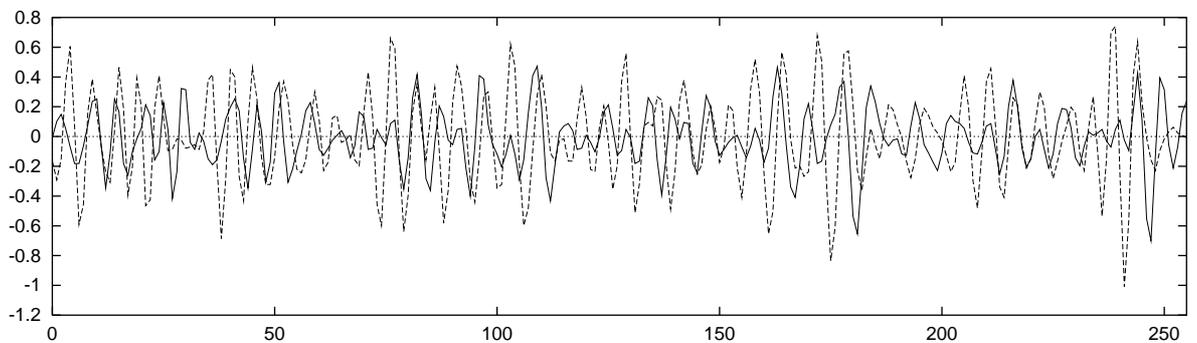
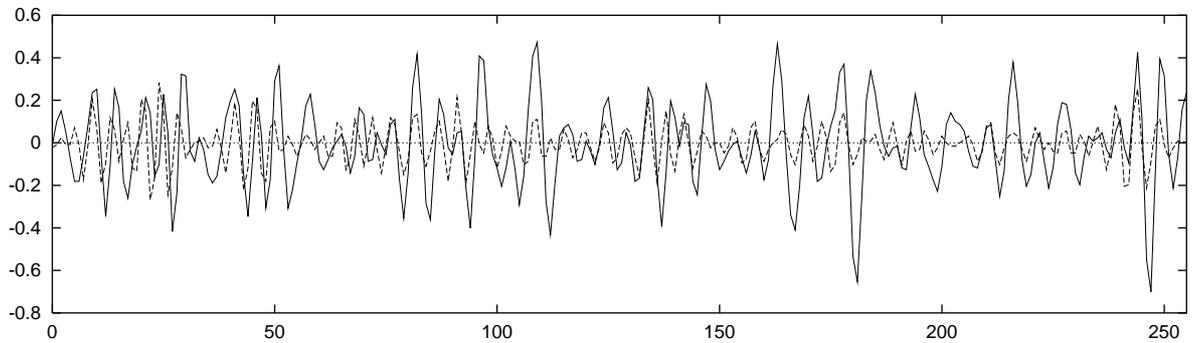


Figure 4.17: Comparaison trace originale (en trait plein) et trace traitée (en pointillés) par l'ondelette de Daubechies à 6 moments nuls

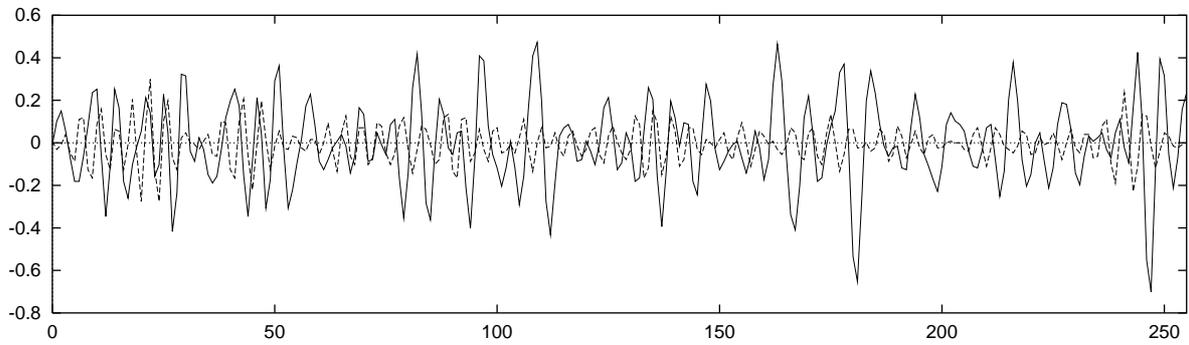
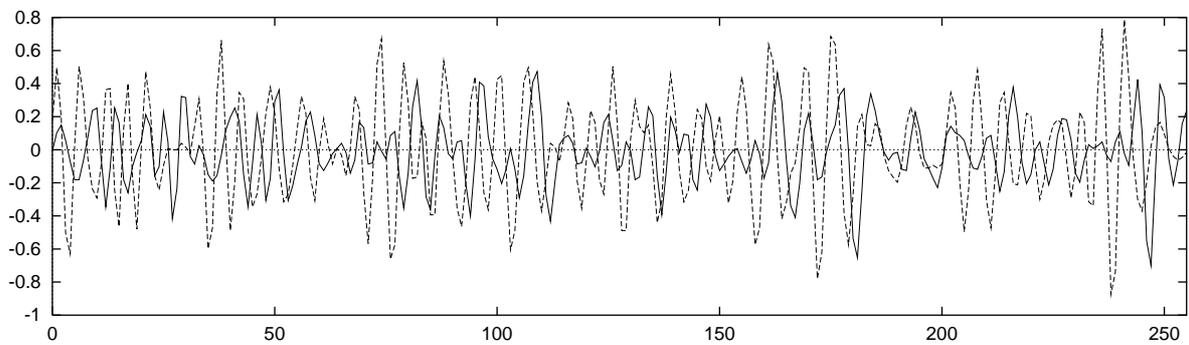
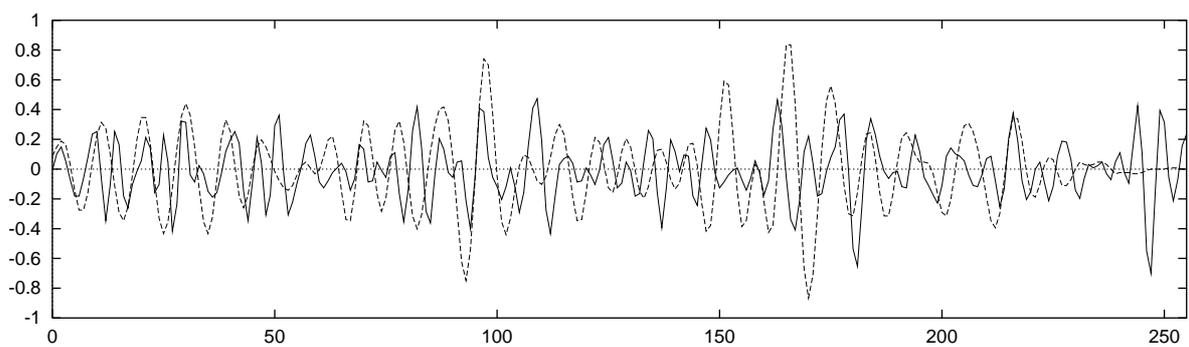
(a) $j = 1$ (b) $j = 2$ (c) $j = 3$

Figure 4.18: Comparaison trace originale (en trait plein) et trace traitée (en pointillés) par l'ondelette de Daubechies à 8 moments nuls

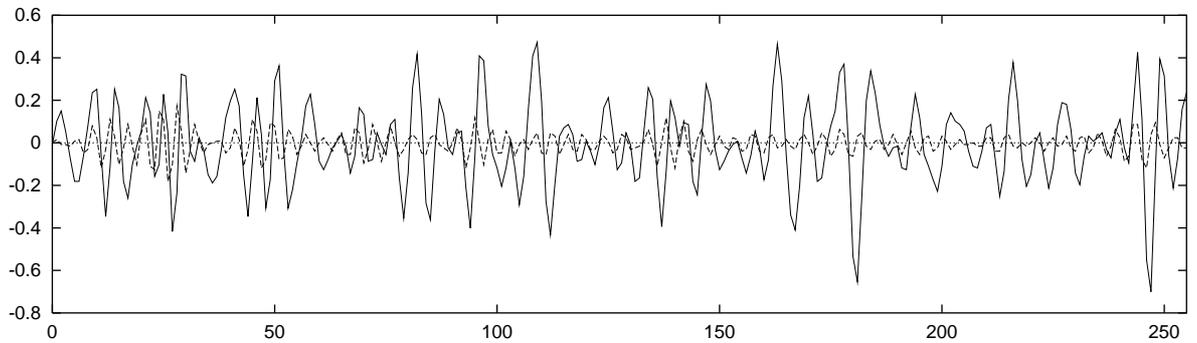
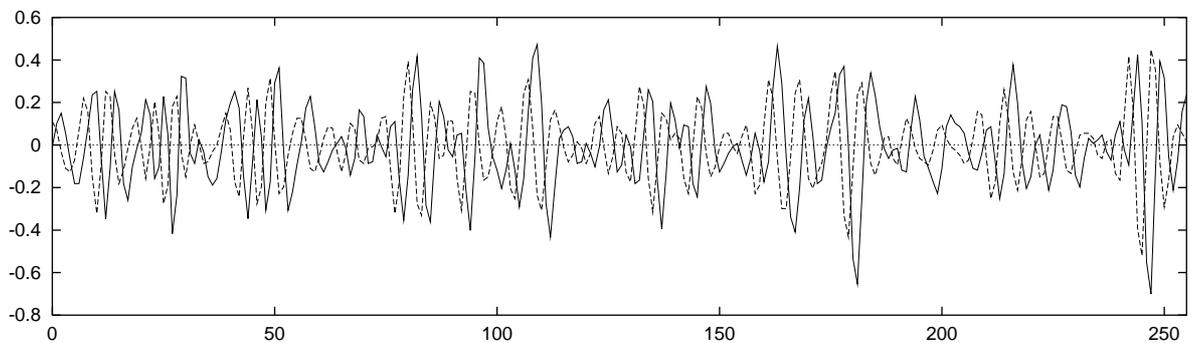
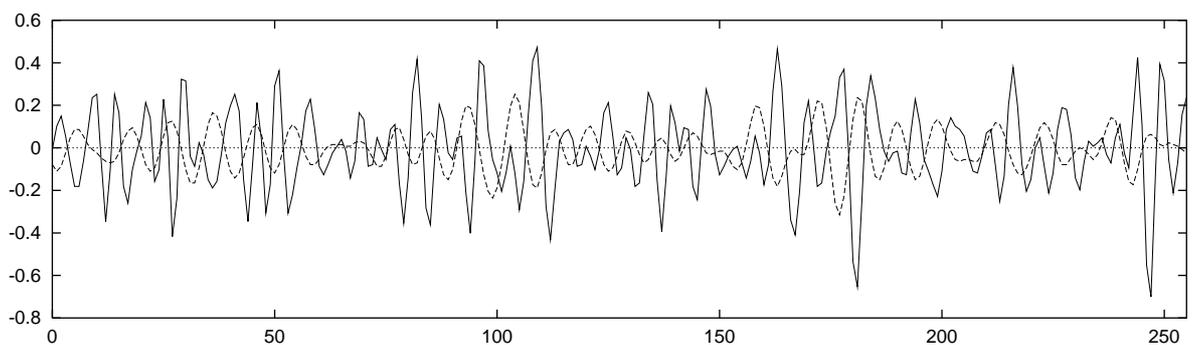
(a) $j = 1$ (b) $j = 2$ (c) $j = 3$

Figure 4.19: *Comparaison trace originale (en trait plein) et trace traitée (en pointillés) par l'ondelette spline*

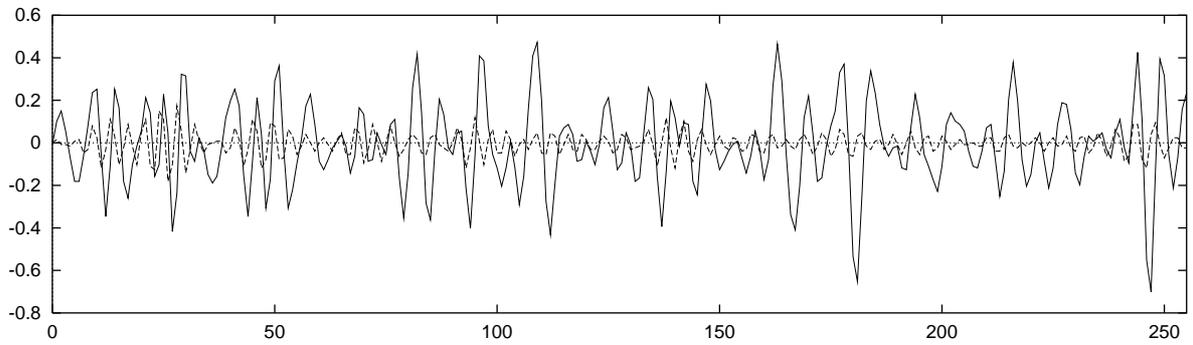
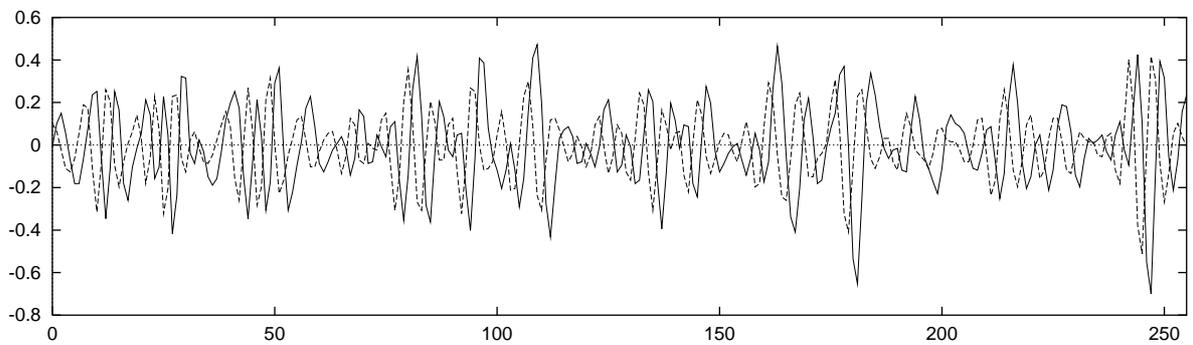
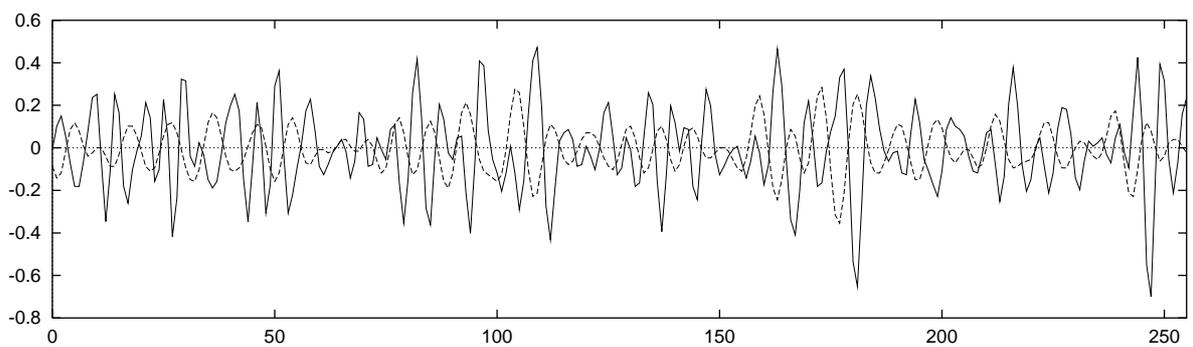
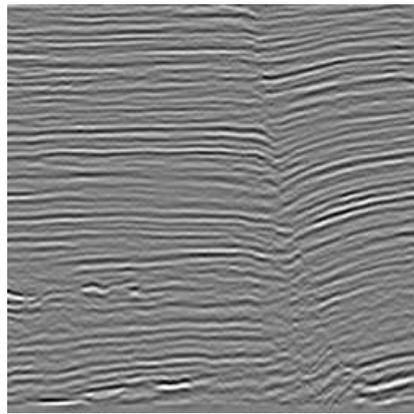
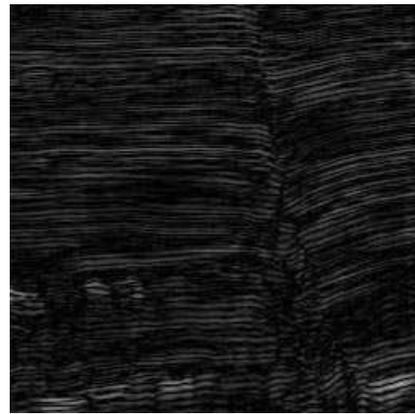
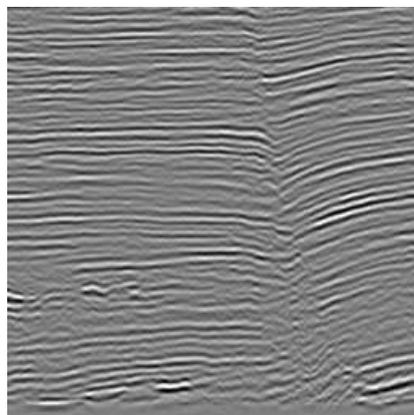
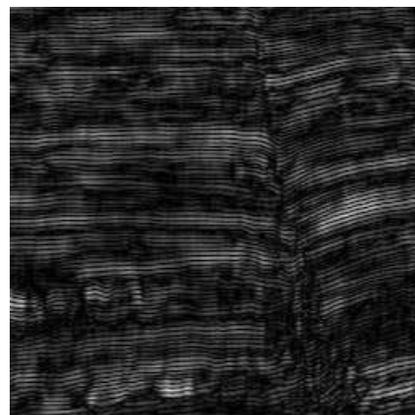
(a) $j = 1$ (b) $j = 2$ (c) $j = 3,$

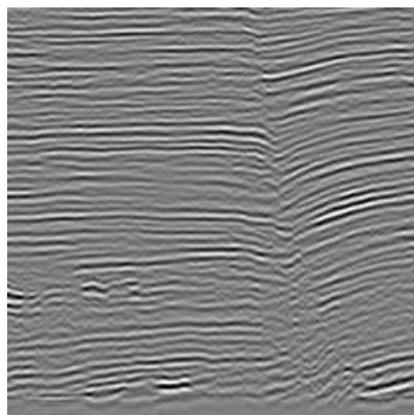
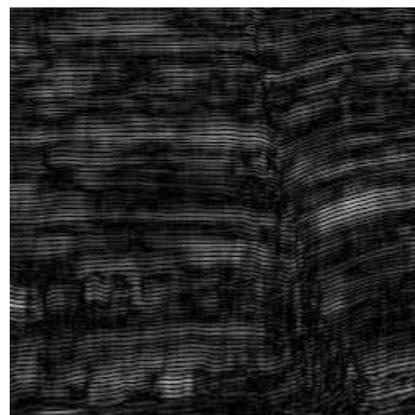
Figure 4.20: Comparaison trace originale (en trait plein) et trace traitée (en pointillés) par une ondelette biorthogonale

(a) $N = 2$ 

(b) Image de différence

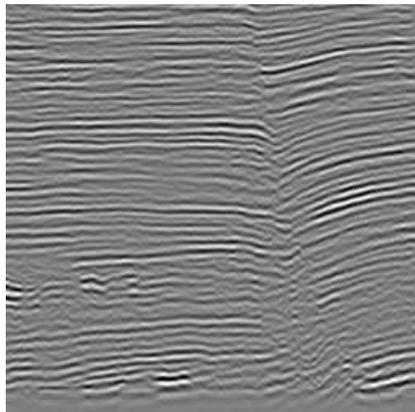
(c) $N = 4$ 

(d) Image de différence

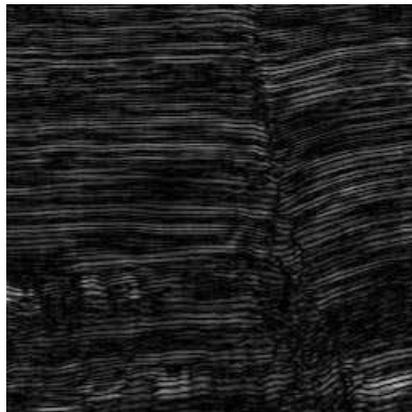
(e) $N = 6$ 

(f) Image de différence

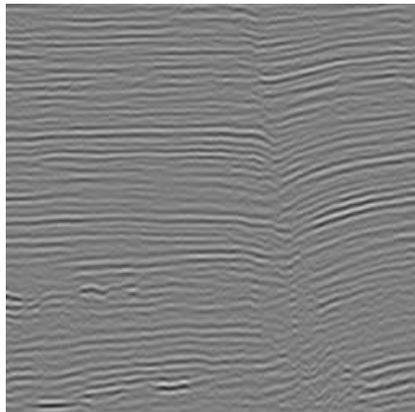
Figure 4.21: *TO avec $j = 2$ et images de différences pour plusieurs ondelettes de Daubechies*



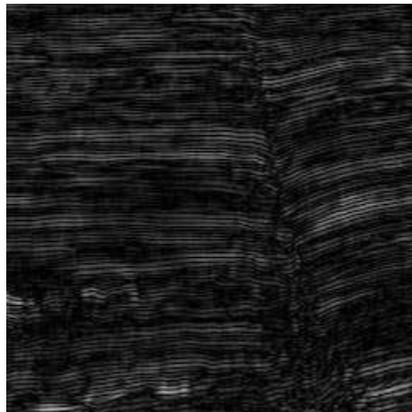
(a) Ondelette de Daubechies,
 $N = 8$



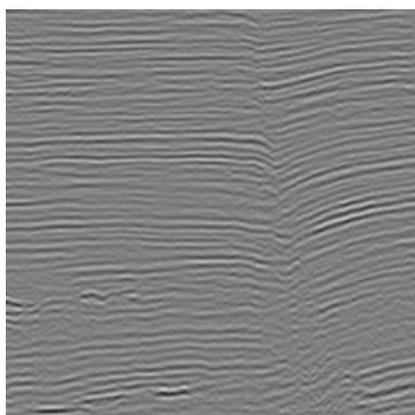
(b) Image de différence



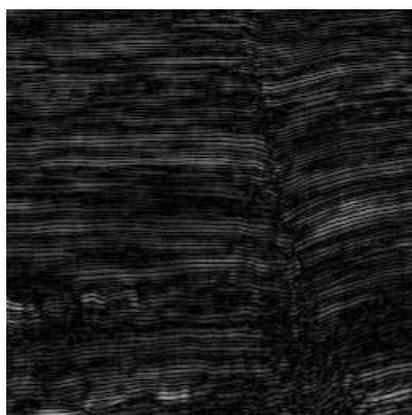
(c) Ondelette de spline



(d) Image de différence



(e) Ondelette biorthogonale



(f) Image de différence

Figure 4.22: *TO avec $j = 2$ et images de différences pour plusieurs ondelettes*

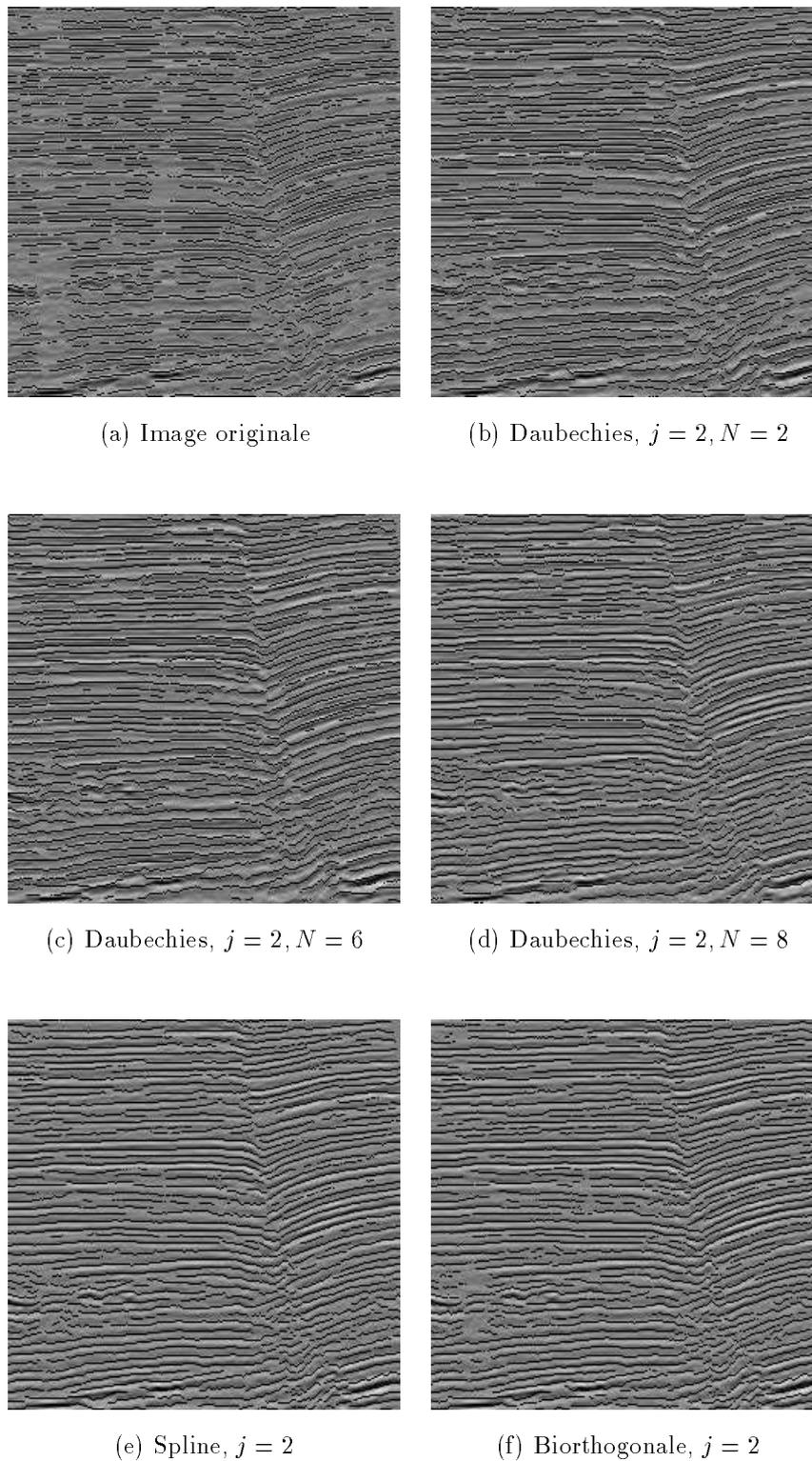


Figure 4.23: *Horizons obtenus à partir d'images traitées par différentes ondelettes*