HAL
open science

Radiosité dynamique 2D et complexe de visibilité

Rachel Orti

To cite this version:

Rachel Orti. Radiosité dynamique 2D et complexe de visibilité. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1997. Français. NNT : . tel-00004958

HAL Id: tel-00004958

https://theses.hal.science/tel-00004958

Submitted on 20 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Joseph Fourier Grenoble I

Radiosité Dynamique 2D et Complexe de Visibilité

Thèse présentée par :

Rachel Orti

pour obtenir le titre de :

Docteur de l'Université Joseph Fourier
spécialité Informatique

Arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992

soutenue le 15 Juillet 1997 devant la commission d'examen :

MM.	Philippe	Cinquin	Président
	Bernard	Péroche	Rapporteur
	Michel	Pocchiola	Rapporteur
	Claude	Puech	
	Xavier	Pueyo	

Thèse préparée au sein du laboratoire *iMAGIS / GRAVIR-IMAG*
iMAGIS est un projet commun entre le *CNRS*, l'*INRIA*, l'*INPG* et l'*UJF*.

Remerciements

Je tiens à remercier Bernard Péroche et Michel Pocchiola qui ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Merci aussi à Xavier Pueyo qui a bien voulu faire partie de mon jury (désolée Xavier je ne ferai pas de postdoc en Espagne, j'espère que tu ne m'en veux pas !), et merci à Philippe Cinquin qui m'a fait l'honneur de le présider.

Je remercie Claude Puech de m'avoir accueillie dans son équipe, de m'avoir fait confiance pour ce sujet, et de m'avoir toujours soutenue pendant les périodes de rush (même - surtout ? - quand c'était lui qui les avaient provoquées !).

Merci à tous les membres d'iMAGIS sans qui l'ambiance au labo n'aurait pas été la même. Merci tout particulièrement aux *Glandus* pour tout ce que nous avons vécu ensemble : de la razzia sur les toasts et les petits fours lors des pots, aux soirées grosse bouffe et picole, ... Je garderai mon tee-shirt *Glandus@imagis* précieusement! Merci notamment à Frédo et Nico dont l'appartement s'est très souvent transformé en squat iMAGIS (n'est ce pas Fabrice ? :-)) Je remercie aussi Nico pour les soirées LD THX et bientôt DTS. Quant à Frédo, j'ajouterai encore que son mérite est immense : outre les publications que nous avons partagées !, il m'a aussi beaucoup aidée par sa connaissance du sujet, par ses conseils avisés et son éternelle présence. Merci aussi à Ponpon et CSol, membres tout aussi éminents de notre petit groupe des *Glandus*. Je remercie Mathieu qui reste notre père à tous et qui est toujours présent pour filer un coup de main à tout le monde. Merci aussi à FF, qui m'a notamment accompagnée en rédigeant sa propre thèse. L'honneur reste sauf, j'ai quand-même réussi à soutenir avant lui ! Un grand merci aussi à Agata, ma coloc préférée qui m'a fait entre autres apprécier quelques bonnes recettes de cuisine du monde, et avec qui j'ai partagé des tas de choses et de très bons moments. Je n'oublie pas non plus Stéphane avec qui j'ai partagé le complexe de visibilité 2D, ni George qui nous a bien aidé pour notre article Eurographics, et qui m'a conseillée maintes fois. Merci aussi à Dominique qui est toujours d'une aide technique efficace, notamment en ce qui concerne le système, et sans qui le réseau et les conditions de travail au labo ne seraient pas ce qu'ils sont.

Je remercie de justesse *curry*, ma station préférée qui m'a lâchée deux-trois jours avant ma soutenance en dégageant une grosse fumée noire...

Et par dessus tout, je remercie Alexis qui a toujours été là pour me soutenir, et sans qui je n'aurais peut-être jamais fini cette thèse. Je lui la dédie.

Table des matières

Introduction **1**

1 Etat de l'art **5**
1.1 La méthode de radiosité 5
1.1.1 Définition 5
1.1.2 Différentes méthodes de résolution du système d'équations de radiosité . . 6
1.2 Le facteur de forme 9
1.2.1 Définition 9
1.2.2 Propriétés du facteur de forme 12
1.2.3 Méthodes de détermination 13
1.3 Le maillage de discontinuité 18
1.3.1 Introduction 18
1.3.2 Différents types de discontinuité 20
1.3.3 Maillage de discontinuité en 2D 23
1.3.4 Construction du maillage de discontinuité en 3D 25
1.4 Techniques de visibilité pour la radiosité 27
1.5 Radiosité pour les environnements dynamiques 29
1.5.1 Recalcul d'une solution de radiosité 30
1.5.2 Méthodes d'interpolation 36
1.5.3 Conclusion 37
1.6 Le complexe de visibilité 38
1.6.1 Introduction 38
1.6.2 Définition 38
1.6.3 Représentation dans un espace dual 39
1.6.4 Construction 45
1.7 Discussion 48

2 Expressions du facteur de forme en 2D **49**
2.1 Facteur de forme comme un rapport de mesures de droites 49
2.2 Facteur de forme comme une somme pondérée de longueurs de courbes 51
2.2.1 Définition de la «string rule» 51
2.2.2 Application 53
2.2.3 Démonstrations 53
2.2.4 Cas général 59

3 Expressions du facteur de forme 2D dans un espace dual 65
3.1 Expression du facteur de forme défini par un rapport de mesures de droites . . . 65
3.1.1 Facteur de forme et faces du complexe de visibilité 65
3.1.2 En dualité (θ, u) : expression du facteur de forme en fonction d'une somme d'aires de faces du complexe 67
3.1.3 En dualité (a, b) : expression du facteur de forme en fonction d'une somme d'intégrales simples 71
3.2 Expression du facteur de forme défini par une somme pondérée de longueurs de courbes 73
3.2.1 Cas des objets convexes avec la dualité (θ, u) 73
3.2.2 Cas des polygones avec la dualité (a, b) 76
3.2.3 Cas où la «string rule» n'est pas directement applicable 78
3.3 Problèmes dus à la direction verticale en dualité (a, b) 79
3.3.1 Deux types de faces dégénérées 79
3.3.2 Dégénérescence et choix du repère 81
3.3.3 Comment traiter les problèmes dus à la verticale ? 83

4 Maillage de discontinuité 87
4.1 Différents types de discontinuité et correspondance dans l'espace dual 87
4.1.1 Cas des objets convexes 88
4.1.2 Cas des polygones 89
4.2 Détermination des points de discontinuité au moyen du complexe 90
4.2.1 Utilisation d'informations issues du complexe et calcul dans l'espace de la scène 90
4.2.2 Calcul directement dans l'espace dual 93
4.3 Implémentation du calcul du maillage de discontinuité 96
4.3.1 Cas des objets convexes 96
4.3.2 Cas des polygones 98
4.3.3 Calcul uniquement des discontinuités liées à l'éclairage direct 102

5 Echantillonnage et calcul de facteurs de forme 105
5.1 Calcul du facteur de forme entre deux éléments 105
5.1.1 Facteur de forme élément à élément 105
5.1.2 Facteur de forme point à élément 110
5.2 Implémentation : Calcul des facteurs de forme entre éléments au moyen du complexe 116
5.2.1 Une première méthode de calcul des facteurs de forme entre éléments . . 117
5.2.2 Implémentation d'une méthode efficace pour les polygones 123
5.2.3 Méthode similaire élaborée pour les objets convexes 128

6 Tests de comparaison avec la méthode de Heckbert 139
6.1 Présentation des deux méthodes de calcul de facteurs de forme 139
6.1.1 Notre méthode : facteurs de forme calculés par une somme pondérée de longueurs de courbes 139
6.1.2 Méthode de Heckbert 139
6.2 Comparaison des valeurs de facteurs de forme obtenues 141
6.2.1 Critère de comparaison choisi 141
6.2.2 Résultats 141

6.3 Tests sur des scènes complexes 150
6.3.1 Description des scènes testées 150
6.3.2 Tests avec notre programme 152
6.3.3 Comparaison avec le programme de Heckbert 157
6.4 Conclusion 162

7 Radiosité pour les environnements dynamiques 2D 163
7.1 Déplacement sans changement topologique dans la visibilité 164
7.1.1 Les deux cas nécessitant un recalcul de facteur de forme 164
7.1.2 Recalcul des facteurs de forme strictement nécessaires après un déplacement Δd d'un objet 167
7.1.3 Mise à jour des discontinuités 182
7.2 Déplacement avec changement topologique dans la visibilité 186
7.2.1 Changements élémentaires de visibilité 186
7.2.2 Mise à jour dynamique du complexe de visibilité 188
7.2.3 Recalculs de facteurs de forme nécessaires 189
7.3 Conclusion 190

Conclusion 193

A Dualité et complexe de visibilité 197
A.1 Définition des dualités (θ, u) et (a, b) 197
A.2 Utilisation de la dualité pour visualiser les éléments du complexe 199

B Notions de Géométrie Intégrale 201
B.1 Rappels sur le produit extérieur $\wedge$ 201
B.2 Densité pour des ensembles de droites 202
B.3 Mesure des droites intersectant un ensemble convexe ou une courbe 203
B.4 Mesure des droites intersectant deux ensembles convexes 203

Table des figures

1.1 Deux méthodes : «gathering» (a) et «shooting» (b). 7
1.2 Subdivision hiérarchique obtenue pour deux rectangles perpendiculaires (schéma de P. Hanrahan, Princeton University). 10
1.3 (1) Répartition de l'énergie dans les différents niveaux de la hiérarchie : les surfaces les plus sombres indiquent les plus fortes valeurs de radiosité (schéma issu de [SP94]) ; (2) Représentation hiérarchique de la matrice de facteurs de forme (schéma de P. Hanrahan, Princeton University). 10
1.4 Notations pour le facteur de forme. 11
1.5 Analogue de Nusselt (schéma issu de [SP94]). 15
1.6 L'hémicube (schéma issu de [SP94]). 15
1.7 Subdivision de la source pour le calcul d'un facteur de forme (schéma issu de [SP94]). 17
1.8 Subdivision adaptative générée le long d'une limite d'ombre (schéma issu de [SP94]). 19
1.9 Discontinuités D^0 : (a) discontinuité liée à deux surfaces en contact ; (b) discontinuité liée à une source ponctuelle. 21
1.10 Exemple de surface EV (schéma (b) issu de [DF94]). 22
1.11 Détermination des limites d'ombre et de pénombre (schéma de P. Heckbert, Université de Carnegie Mellon. 22
1.12 Evénements EV, vus depuis un point de vue qui regarde en direction de la source de lumière et qui se déplace le long d'une surface réceptrice (schéma adapté de [CW93]). 23
1.13 Exemple de surface EEE (schéma (b) issu de [DF94]). 23
1.14 Méthode de Heckbert pour le calcul des discontinuités D^1. 24
1.15 Exemple de discontinuité D^1. 24
1.16 Calcul des arêtes de discontinuités dans la méthode de Heckbert. 26
1.17 Différentes étapes d'un programme utilisant la méthode de radiosité, et recalculs imposés par les différents changements apportés à la scène. 30
1.18 Utilisation de l'hémicube pour déterminer les changements de facteurs de forme (schéma issu de [SP94]) : (a) projection des objets statiques, puis du volume englobant de l'objet dynamique sur l'hémicube ; (b) stockage dans un deuxième «buffer» des surfaces statiques cachées par le volume englobant ; (c) superposition des parties visibles de l'objet dynamique sur le deuxième «buffer». 32
1.19 Redistribution d'énergie liée à l'ajout d'un objet dans la scène (schéma issu de [SP94]). 34
1.20 Utilisation d'un «shadow volume» pour déterminer les éléments affectés par la redistribution (schéma issu de [SP94]). 35
1.21 Exemples de polygones. 38

1.22 Exemple de segments libres maximaux. 39
1.23 Eléments du complexe de visibilité. 40
1.24 Une droite et son point dual dans la dualité (θ, u). 40
1.25 Courbes de tangence λ et μ d'un objet convexe. 41
1.26 Deux objets et leurs courbes de tangence associées. 41
1.27 (a) Scène ; (b) Arrangement dual de la scène ; (c) Complexe de visibilité de la scène. 42
1.28 Scène composée de trois objets et face associée à O_i et O_j. 43
1.29 Correspondance entre la scène et l'espace dual. 43
1.30 Correspondance entre la scène et l'espace dual. 45
1.31 Complexe de visibilité aux environs d'un sommet. 45
1.32 Graphe auxiliaire. 46
1.33 Pseudo-triangulation et pseudo-quadrangle. 47
1.34 Arbres d'horizon supérieur et inférieur. 47

2.1 Exemples de courbes croisées et non croisées. 52
2.2 Exemple de deux portions de courbes C_i et C_j. 53
2.3 Exemple de deux portions de courbes C_1 et C_2. 54
2.4 Exemple de deux portions de courbes C_1 et C_2. 57
2.5 Deux objets convexes O_i et O_j avec un obstacle O_k. 59
2.6 Cas où la «string rule» est valide : (a) les obstacles intersectent l'enveloppe convexe de $C_i \cup C_j$; (b) les obstacles sont à l'intérieur de l'enveloppe convexe de $C_i \cup C_j$ mais sont tangents à cette enveloppe convexe. 60
2.7 Cas où la «string rule» n'est plus valide : les obstacles sont à l'intérieur de l'enveloppe convexe de $C_i \cup C_j$ mais sans être tangents à cette enveloppe convexe. . . . 60
2.8 Expression du facteur de forme dans le cas où la «string rule» n'est pas valide. . 61

3.1 Faces associées à deux arêtes de polygones C_i et C_j. 66
3.2 Exemple de deux cercles O_i et O_j. 68
3.3 Correspondance entre les dualités (a, b) et (θ, u). 71
3.4 Deux objets O_i et O_j, et leur face associée au niveau du complexe. 74
3.5 Deux arêtes de polygones C_i et C_j, et la face associée à ces deux arêtes de polygones au niveau du complexe. 77
3.6 Exemple de scène induisant une face semi-infinie dans l'espace dual (a, b). 80
3.7 Exemple de scène induisant une face séparée en deux dans l'espace dual (a, b). . . 81
3.8 Exemple de scène avec deux arêtes de polygones $[A_1A_2]$ et $[C_1C_2]$. 82
3.9 Face dans l'espace dual (a, b) avec (O, x, y) ou (O, y, x') comme repère de la scène. 82
3.10 Exemple de scène induisant une face semi-infinie dans l'espace dual (a, b). 83
3.11 Forme *topologique* de la face associée aux arêtes de polygones $[A_1A_2]$ et $[C_1C_2]$. . 84
3.12 Forme *topologique* de la face associée aux arêtes de polygones $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$. . 85

4.1 Deux objets O_i et O_j et leur face associée au niveau du complexe de visibilité. . . 88
4.2 Deux arêtes de polygones C_i et C_j et leur face associée au niveau du complexe de visibilité. 89
4.3 Exemple de face f du complexe de visibilité associée à deux objets. 92
4.4 Deux arêtes de polygones C_i et C_j et leur face du complexe de visibilité associée. 93
4.5 Exemple de face associée à deux arêtes de polygones C_i et C_j. 94
4.6 Exemple de cas où le sommet I n'existe pas dans l'espace dual (a, b). 95

4.7 Exemple de cas où le sommet v n'existe pas dans l'espace dual (a, b). 97
4.8 Algorithme de calcul du maillage de discontinuité pour les objets convexes. . . . 98
4.9 Exemple de scènes constituées d'objets convexes. 99
4.10 Algorithme de calcul du maillage de discontinuité pour les polygones. 99
4.11 Différents types de discontinuités. 100
4.12 Exemple d'une scène polygonale constituée d'une pièce avec trois objets à l'intérieur. 101
4.13 Faces considérées pour le calcul des discontinuités liées à l'éclairage direct. 102
4.14 Faces considérées pour le calcul des discontinuités liées à l'éclairage direct. 103

5.1 Exemple d'échantillonnage d'une face associée à deux arêtes de polygones C_i et C_j. 106
5.2 Exemple d'échantillonnage d'une face associée à deux objets convexes O_i et O_j. . 108
5.3 Exemple de deux éléments l_i et r_j. 111
5.4 Interprétation du facteur de forme point à élément dans l'espace dual (a, b). . . . 112
5.5 Exemple de calcul de facteur de forme point à élément entre un point p_1 d'un élément l_1 et un élément r_1, sur des arêtes de polygones. 113
5.6 Exemple de deux éléments l_i et r_j sur des objets convexes. 114
5.7 Exemple de calcul de facteur de forme point à élément entre un point p_1 d'un élément r_1 et un élément l_1, sur des objets convexes. 115
5.8 Exemple de deux arêtes de polygones C_l et C_r avec quatre polygones qui interfèrent. 118
5.9 Exemple de deux arêtes de polygones C_l et C_r avec quatre polygones qui interfèrent. 119
5.10 Un premier algorithme de calcul des facteurs de forme entre éléments sur des objets convexes. 121
5.11 Parties des objets convexes O_l et O_r où il y a un objet qui interfère «par le haut» et un objet qui interfère «par le bas». 122
5.12 (a) Scène et échantillonnage au niveau des objets ; (b) valeur de radiosité au niveau du grand cercle ; (c) matrice M du système d'équations de radiosité. . . . 123
5.13 Parties mutuellement visibles sur deux arêtes de polygones C_l et C_r définies à partir de leur face associée. 124
5.14 Zone d'interférence associée à une arête d'une face associée à deux arêtes de polygones C_l et C_r. 125
5.15 Algorithme de calcul des facteurs de forme entre éléments sur des arêtes de polygones. 127
5.16 Zones d'interférence au cours du calcul des facteurs entre les éléments sur deux arêtes de polygones C_l et C_r. 128
5.17 Les différentes configurations d'obstruction «par le haut» pour une paire d'éléments $[p_{l_0}, p_{l_1}]$ et $[p_{r_0}, p_{r_1}]$. 129
5.18 Parties mutuellement visibles sur deux objets convexes O_l et O_r définies à partir de leur face associée. 130
5.19 Zone d'interférence associée à une arête d'une face associée à deux objets convexes O_i et O_j. 131
5.20 Détermination des points $p_{r_{up}}$ et $p_{r_{down}}$ pour un élément s_l donné. 132
5.21 Algorithme de calcul des facteurs de forme entre éléments sur des objets convexes. 134
5.22 Détermination du facteur de forme entre deux éléments s_l et s_r. 135
5.23 Zones d'interférence au cours du calcul des facteurs de forme entre les éléments (s_l, s_r) ($s_l \in O_l$ et $s_r \in O_r$) tels que $s_l \subset [p_{l_u}, l_{sup_{O_l}}]$. 136
5.24 Zones d'interférence au cours du calcul des facteurs de forme entre les éléments (s_l, s_r) ($s_l \in O_l$ et $s_r \in O_r$) tels que $S_l \subset [l_{sup_{O_l}}, l_{inf_{O_l}}]$. 137

5.25 Zones d'interférence au cours du calcul des facteurs de forme entre les éléments (s_l, s_r) ($s_l \in O_l$ et $s_r \in O_r$) tels que $S_l \subset [l_{inf_{O_l}}, p_{l_d}]$. 138

6.1 Notations pour le facteur de forme point à élément. 140
6.2 Visibilité entre deux éléments (Cas de la méthode de Heckbert avec éléments constants). 140
6.3 Exemple de segments qui se voient soit totalement soit pas du tout. 142
6.4 Différence entre les deux méthodes de calcul de facteurs de forme, pour les éléments du côté droit de C_1 et du côté gauche de C_2. 143
6.5 Différence entre les deux méthodes de calcul de facteurs de forme, pour les éléments du côté droit de C_2 et du côté gauche de C_3. 144
6.6 Exemple de segments avec un cas de visibilité partielle. 145
6.7 Différence entre les deux méthodes de calcul de facteurs de forme, pour les éléments du côté droit de C_1 et du côté gauche de C_2. 146
6.8 Différence entre les deux méthodes de calcul de facteurs de forme, pour les éléments du côté droit de C_2 et du côté gauche de C_3. 147
6.9 Différence entre les deux méthodes de calcul de facteurs de forme, pour les éléments du côté droit de C_1 et du côté gauche de C_3. 148
6.10 Visibilité entre deux éléments i et j. 149
6.11 Zoom de la partie supérieure des segments C_1, C_2 et C_3. 149
6.12 Scènes de 5 pièces sur 5 pièces : (a) Scène avec les pièces vides ; (b) Scène avec un triangle par pièce ; (c) Zoom de la scène avec deux triangles par pièce, représentée en pseudo-3D ; (d) Scène avec neuf triangles par pièce. 151
6.13 Scènes de 7 pièces sur 7 pièces : (a) Scène avec les pièces vides ; (b) Scène avec neuf triangles par pièce. 151
6.14 Nombre de sommets du complexe en fonction du nombre d'arêtes de polygones de la scène. A gauche : cas des scènes de 5 pièces sur 5 pièces. A droite : cas des scènes de 7 pièces sur 7 pièces. 153
6.15 Temps de calcul des différentes étapes de notre programme pour chaque scène de 5 pièces sur 5 pièces considérée. 156
6.16 Temps de calcul des différentes étapes de notre programme pour chaque scène de 7 pièces sur 7 pièces considérée. 156
6.17 Temps de calcul des différentes étapes du programme de Heckbert pour chaque scène de 5 pièces sur 5 pièces considérée. 158
6.18 Temps de calcul des différentes étapes du programme de Heckbert pour chaque scène de 7 pièces sur 7 pièces considérée. 161
6.19 Temps de calcul du maillage (tenant compte des discontinuités) en fonction du nombre d'arêtes de polygones de la scène. A gauche : cas des scènes de 5 pièces sur 5 pièces. A droite : cas des scènes de 7 pièces sur 7 pièces. 161
6.20 Temps de calcul des facteurs de forme en fonction du nombre d'arêtes de polygones de la scène. A gauche : cas des scènes de 5 pièces sur 5 pièces. A droite : cas des scènes de 7 pièces sur 7 pièces. 162

7.1 Exemple de déplacement d'un objet dans une scène. 164
7.2 Les deux cas nécessitant un recalcul de facteur de forme lorsqu'un objet en mouvement $\mathcal{O}$ se déplace d'une position 1 à une position 2. 166
7.3 Faces *liées à* un objet convexe O. 167

7.4 Faces *liées à* une arête de polygone C_i. 168
7.5 Algorithme de recalcul des facteurs de forme pour les faces de type *(a)* (Cas d'un déplacement Δd sans changement topologique dans la visibilité). 170
7.6 Exemple d'un polygone $\mathcal{P}$ qui s'est déplacé d'un petit déplacement Δd, sans changement topologique dans la visibilité. 172
7.7 Face associée à C_l et C_r avant et après le déplacement du polygone $\mathcal{P}$ (Cas d'un déplacement sans changement topologique dans la visibilité). 173
7.8 Zone d'interférence associée à une arête du complexe associée à un point p, avant et après son déplacement. 174
7.9 Partie sur une arête de polygone C_r dont la visibilité depuis un élément s_l donné est modifiée par le déplacement d'un polygone $\mathcal{P}$. 175
7.10 Détermination des points $l_{r_{up}}$ et $l_{r_{down}}$ pour un élément s_l donné (Cas d'un déplacement «vers le bas»). 177
7.11 Algorithme de recalcul des facteurs de forme pour les faces de type **(b)** (Cas d'un déplacement Δd sans changement topologique dans la visibilité). 178
7.12 Exemple d'un polygone $\mathcal{P}$ qui s'est déplacé «vers le bas» d'un petit déplacement Δd, sans changement topologique dans la visibilité. 180
7.13 Face associée à C_l et C_r avant et après le déplacement du polygone $\mathcal{P}$ (Cas d'un déplacement «vers le bas» sans changement topologique dans la visibilité). 181
7.14 Exemple d'une paire d'éléments sur C_l et C_r respectivement entre lesquels il y a deux objets qui interfèrent «par le haut». 182
7.15 Lignes critiques liées à un objet. 183
7.16 Recalcul des discontinuités dans le cas de faces dont un des deux objets associés est l'objet en mouvement. 185
7.17 Recalcul des discontinuités dans le cas de faces dont une des arêtes associées à des objets qui interfèrent est associée à l'objet en mouvement. 186
7.18 Changements élémentaires de visibilité. 187
7.19 Changements élémentaires dans l'espace dual lors d'un changement de visibilité. 187
7.20 Changements de base dans le complexe lors d'un changement de visibilité. 188
7.21 Exemple de changement de visibilité et modifications correspondantes au niveau du complexe. 189
7.22 Exemple de scène avec trois objets à l'intérieur d'une pièce. 191

A.1 Dualité (θ, u). 197
A.2 Dualité (a, b). 198
A.3 Exemple de deux arêtes de polygones. 199
A.4 Face du complexe avec la dualité (θ, u). 200
A.5 Face du complexe avec la dualité (a, b). 200

B.1 Représentation d'une droite dans le plan. 202
B.2 Exemple de deux ensembles convexes K_1 et K_2. 204

Liste des tableaux

6.1 Description des scènes de 5 pièces sur 5 pièces. 150
6.2 Description des scènes de 7 pièces sur 7 pièces. 150
6.3 Scènes de 5 pièces sur 5 pièces, avec notre méthode. 154
6.4 Scènes de 7 pièces sur 7 pièces, avec notre méthode. 155
6.5 Scènes de 5 pièces sur 5 pièces, avec la méthode de Heckbert. 159
6.6 Scènes de 7 pièces sur 7 pièces, avec la méthode de Heckbert. 160

Introduction

Les images de synthèse sont de plus en plus utilisées, et plus uniquement dans le domaine du cinéma, de la vidéo ou de la publicité. Elles trouvent désormais leur utilité dans de nombreuses applications comme la simulation architecturale réaliste (qui permet de visualiser un bâtiment ou une pièce, et de se promener à l'intérieur avant qu'ils soient construits), ou l'étude d'éclairage (qui permet de voir l'effet du positionnement de telle ou telle lampe, avant qu'elle soit installée). Par exemple, les éclairages de la pièce de théâtre de Puccini *La bohème*, montée au *Metropolitan Opera* de New York ont été entièrement simulés sur ordinateur avant d'être réalisés [DSG91]. De telles applications nécessitent de pouvoir calculer un éclairage réaliste avec notamment les ombres, et cela pour des environnements qui peuvent être complexes, mais aussi pour des environnements susceptibles d'être modifiés (avec la possibilité de déplacer les objets, de changer les propriétés des matériaux, de modifier les sources de lumière, etc.).

Parmi les différentes méthodes permettant de calculer l'éclairage d'une scène, la méthode de radiosité, qui modélise les échanges d'énergie entre les différents objets de la scène, semble la mieux appropriée. Elle est très adaptée pour rendre les effets globaux de l'éclairage et est très utilisée pour la visualisation de scènes d'intérieur statiques. Elle présente, de plus, l'avantage d'être indépendante du point de vue : quel que soit l'endroit où on se positionne pour regarder la scène, le calcul de radiosité effectué reste valable. Il est donc possible de se promener dans la scène très facilement sans avoir besoin de recalculer la solution d'éclairage. Reste maintenant à prendre en compte les modifications de l'environnement, et cela de façon la plus rapide possible. Il serait souhaitable, pour des applications telles que la simulation architecturale ou l'étude d'éclairage, de pouvoir utiliser des méthodes suffisamment rapides pour fournir une nouvelle solution d'éclairage en temps interactif si ce n'est en temps réel, à chaque fois qu'un changement est appliqué à la scène. On distingue à l'heure actuelle globalement deux approches : l'interpolation entre images-clés et les algorithmes de radiosité de type «incrémentaux».

Les méthodes utilisant la première approche se contentent de calculer une solution de radiosité pour certaines configurations choisies de la scène, ce qui donne un certain nombre d'images-clés ; puis d'appliquer une technique d'interpolation (comme le morphing par exemple [CW93a]) pour obtenir des images intermédiaires. Ces méthodes, bien que ne fournissant qu'une solution d'éclairage approchée pour une configuration donnée de la scène, permettent d'obtenir des images en temps interactif.

Dans le cas de la deuxième approche, la solution de radiosité est mise à jour de façon incrémentale en fonction des changements au cours du temps : les méthodes de ce type partent de la solution courante, puis essaient, pour une modification donnée de l'environnement, de calculer une nouvelle solution à partir de la solution courante. Par exemple, dans le cas d'un objet qui s'est déplacé, on supprime les effets dus à l'objet dans son ancienne position, puis on recalcule les effets dus à l'objet dans sa nouvelle position. Ces méthodes fournissent des images avec une

meilleure qualité de rendu mais elles ne permettent pas encore d'obtenir un calcul en temps interactif dans le cas d'objets en mouvement. Le problème reste ici d'arriver à discerner précisément ce qui doit vraiment être recalculé, et notamment quels facteurs de forme, en fonction de la visibilité qui a été modifiée - le calcul des facteurs de forme, qui indiquent la fraction d'énergie transmise d'un objet à un autre, constitue effectivement l'étape la plus coûteuse de l'algorithme de radiosité -.

Parallèlement aux recherches menées sur ces environnements dits *dynamiques*, la nécessité de pouvoir effectuer le rendu d'environnements complexes a motivé la recherche sur les prétraitements de la visibilité. L'approche utilisée est de construire une structure de données spéciale qui permet de déterminer facilement l'ensemble des objets potentiellement visibles, afin d'accélérer les calculs de visibilité au cours du calcul d'éclairage.

De là nous est venue l'idée de combiner les deux aspects. Une idée pour traiter les environnements dynamiques de manière efficace serait d'utiliser, pour le calcul de l'éclairage, une structure de données grâce à laquelle on pourrait à la fois :

- optimiser les calculs, en accédant de manière efficace aux informations de visibilité nécessaires et en effectuant seulement les calculs nécessaires,
- mettre à jour efficacement la solution d'éclairage, en effectuant seulement les recalculs strictement nécessaires pour un changement donné appliqué à la scène.

Compte tenu de l'ampleur du problème à résoudre en 3D et notamment de la complexité géométrique des relations de visibilité, nous nous sommes d'abord intéressés au cas 2D. La 2D permet d'aborder le problème de façon plus simple : on dispose plus facilement de solutions analytiques (par exemple, le facteur de forme peut être calculé analytiquement en 2D), les scènes sont plus simples et permettent une meilleure compréhension des modifications se produisant dans les environnements dynamiques. Cette approche qui consiste à étudier le cas plus simple du 2D pour faciliter la compréhension, avant d'aboutir à une solution 3D, est assez commune en recherche sur la simulation de l'éclairage. Elle a notamment été utilisée pour le calcul du maillage de discontinuité [Hec91], [Hec92a], ou pour le calcul de radiosité avec des ondelettes [SGCH93], [GSCH93]. De plus, certaines scènes 3D sont en fait des scènes «$2\frac{1}{2}$D», comme par exemple l'intérieur d'un bâtiment où les occlusions sont principalement causées par les murs qui sont équivalents à leur projection sur un plan 2D.

Parmi les structures de visibilité existantes, nous nous sommes intéressés au *complexe de visibilité* (introduit en géométrie algorithmique) qui semblait tout à fait approprié car d'une part il permet de coder les relations de visibilité entre les objets d'une scène 2D, et d'autre part, il peut être mis à jour facilement en fonction des changements affectant la scène, de par sa structure.

Nous présentons dans cette thèse l'utilisation du complexe de visibilité dans le cadre de la radiosité, pour les environnements statiques dans un premier temps, puis pour les environnements dynamiques. Nous avons considéré deux types de scènes 2D : les scènes constituées d'objets convexes et les scènes polygonales.

Le premier chapitre présente un état de l'art qui ne prétend pas être exhaustif. Il introduit notamment la méthode de radiosité, les principales techniques de calcul de facteurs de forme existantes, et le maillage de discontinuité. Il passe ensuite en revue les techniques de prétraitement de la visibilité utilisées en radiosité et visant à accélérer les calculs, puis les techniques

actuellement utilisées pour les environnements dynamiques. L'état de l'art s'achève par une introduction détaillée du complexe de visibilité.

Il ne suffit pas d'avoir une structure adéquate pour coder la visibilité de la scène, encore faut-il l'utiliser de manière efficace pour optimiser les calculs. A cette fin, nous nous sommes penchés sur le calcul des facteurs de forme. Nous nous sommes intéressés à deux formulations possibles du facteur de forme en 2D qui semblaient bien adaptées au complexe de visibilité. Ces deux formulations (sous forme d'un rapport de mesures de droites et sous forme d'une somme pondérée de longueurs de courbes) sont présentées dans le détail dans le deuxième chapitre.

Nous étudions ensuite dans le troisième chapitre comment ces deux formulations peuvent s'interpréter au niveau du complexe de visibilité, dans un espace dual de la scène.

Le quatrième chapitre explique comment on peut calculer les discontinuités de l'éclairage de manière efficace grâce au complexe de visibilité, et présente les deux implémentations du calcul du maillage de discontinuité que nous avons réalisées : une pour les scènes constituées d'objets convexes et une pour les scènes polygonales.

Une fois que les discontinuités ont été calculées, on échantillonne les objets de la scène en un certain nombre d'éléments pour lesquels on va calculer des facteurs de forme. Le cinquième chapitre décrit comment ces facteurs de forme sont calculés de manière efficace en utilisant les informations du complexe de visibilité. Le complexe est très utile dans ce contexte car il permet de considérer seulement les parties mutuellement visibles pour une paire d'objets donnée, permettant ainsi de calculer seulement les facteurs de forme nécessaires. Deux implémentations ont été réalisées : une pour les objets convexes et une pour les polygones.

Dans le sixième chapitre nous présentons différents tests que nous avons réalisés sur des scènes polygonales 2D statiques, afin de comparer notre programme avec un programme utilisant une méthode de calcul de facteurs de forme traditionnelle, celui de Heckbert [Hec91], [Hec92a].

Pour finir nous consacrons le septième chapitre aux environnements dynamiques. Nous étudions l'utilisation du complexe pour ce type d'environnements et nous proposons une méthode permettant de mettre à jour de façon efficace uniquement les facteurs de forme strictement nécessaires lorsqu'un objet se déplace dans une scène.

Les travaux présentés dans cette thèse ont fait l'objet de deux publications internationales : une première au «Workshop on Applied Computational Geometry» [ODRP96], et une deuxième à la conférence Eurographics [ORDP96]. La première publication montre l'utilité d'une structure telle que le complexe de visibilité pour le calcul de radiosité, dans le cas de scènes statiques constituées d'objets convexes. Elle utilise les implémentations que nous avons réalisées pour ces scènes. La deuxième publication s'intéresse au cas spécifique des scènes polygonales qui sont les scènes habituellement utilisées en synthèse d'images, et traite tout particulièrement des environnements dynamiques. Une première approche de notre méthode y est présentée, permettant au moyen du complexe de mettre à jour uniquement les facteurs de forme modifiés lorsqu'un objet se déplace. Nous avons aussi réalisé une vidéo didactique expliquant l'utilisation du complexe pour le calcul de radiosité dans le cas de scènes polygonales [DORP96].

Chapitre 1

Etat de l'art

Nous ne présentons pas ici un état de l'art exhaustif, sachant que cette thèse touche à de nombreux thèmes étudiés en synthèse d'images autour de la méthode de radiosité : le calcul de facteurs de forme, le calcul de maillage de discontinuité, le calcul de visibilité, et l'utilisation de la radiosité pour les environnements dynamiques. Nous introduisons cependant ces différents thèmes et nous fournissons des pistes de lecture pour ceux qui souhaiteraient aller plus loin. L'état de l'art s'achève par une introduction détaillée du complexe de visibilité, qui est la structure de visibilité que nous avons utilisée dans cette thèse.

1.1 La méthode de radiosité

1.1.1 Définition

La méthode de *radiosité* est basée sur les méthodes de transfert de chaleur entre surfaces en thermodynamique. Elle a été appliquée pour la première fois à l'Informatique Graphique en 1984 par Goral *et al.* [GTGB84], sur un environnement sans occlusion. Des algorithmes prenant en compte les occlusions ont ensuite été développés [CG85], [NN85].

La méthode de radiosité, méthode de simulation globale de l'éclairage, permet de calculer l'éclairage d'une scène en modélisant les échanges d'énergie lumineuse entre les différentes surfaces des objets de la scène. Dans la méthode de radiosité standard, les surfaces sont considérées comme *lambertiennes* ou *diffuses*, c'est-à-dire qu'elles réfléchissent la lumière incidente avec la même intensité dans toutes les directions. L'environnement est décomposé en éléments de surface (ou échantillons), afin d'établir un système d'équations modélisant les échanges d'énergie dans la scène. La radiosité d'un élément de surface est supposée constante et la précision de la solution obtenue dépend donc de la discrétisation de l'environnement.

La radiosité B d'un élément est égale à la quantité totale d'énergie lumineuse par unité de surface quittant cet élément. Elle s'exprime donc en fonction de l'énergie propre émise par l'élément et de l'énergie provenant des autres éléments qui est réfléchie par l'élément.
Soient E_i la quantité de lumière émise par unité de surface par un élément de surface infinitésimale dA_i, ρ_i le coefficient de réflexion de cet élément, et $F_{dA_j dA_i}$ la fraction d'énergie quittant un élément dA_j qui arrive sur l'élément dA_i. La radiosité B_i pour l'élément dA_i peut être décrite sous la forme de l'équation suivante :

$$B_i dA_i = E_i dA_i + \rho_i \int_j B_j dA_j F_{dA_j dA_i} \ ,$$

c'est à dire :

$$\textit{Radiosité} \times \textit{Aire} = \textit{Energie propre émise} + \textit{Energie réfléchie} \ ,$$

où :

$$\begin{aligned} \textit{Energie réfléchie} \quad = \quad & \textit{Coefficient de réflexion} \times \textit{Energie incidente sur} \\ & \textit{l'élément qui provient de tous les autres éléments} \ . \end{aligned}$$

Dans le cas d'un environnement discrétisé en n éléments de surface A_i ($i = 1..n$), les échanges d'énergie dans la scène peuvent donc être modélisés par un système de n équations de la forme :

$$B_i A_i = E_i A_i + \rho_i \sum_{j=1}^{n} B_j F_{A_j A_i} A_j \ . \tag{1.1}$$

La valeur $F_{A_j A_i}$ correspond à la fraction d'énergie quittant l'élément de surface A_j qui arrive sur l'élément de surface A_i. Cette quantité est appelée : *facteur de forme* entre A_j et A_i. Pour plus de simplicité, elle sera notée F_{ji}. Le facteur de forme dépend uniquement de la géométrie relative entre les éléments, d'où la relation de réciprocité :

$$F_{ij} A_i = F_{ji} A_j \Rightarrow F_{ij} = F_{ji} \frac{A_j}{A_i} \ .$$

En utilisant cette relation et en reprenant l'équation 1.1, on obtient finalement pour un élément de surface A_i, l'expression de la valeur de radiosité B_i :

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^{n} B_j F_{ij} \ .$$

Cette équation peut se réécrire sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \rho_i F_{ij}) B_j = E_i \ ,$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker dont la valeur est 1 si et seulement $i = j$ et 0 sinon.
Le système d'équations correspondant peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 1-\rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & . & . & . & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1-\rho_2 F_{22} & . & . & . & -\rho_2 F_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} & . & . & . & 1-\rho_n F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ . \\ . \\ . \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ . \\ . \\ . \\ E_n \end{bmatrix} \ , \tag{1.2}$$

que nous noterons $MB = E$ pour simplifier (avec $M_{ij} = \delta_{ij} - \rho_i F_{ij}$).

1.1.2 Différentes méthodes de résolution du système d'équations de radiosité

Les méthodes qui consistent à résoudre de manière directe le système d'équations (1.2), sont peu applicables dans le cas d'environnements avec un grand nombre d'éléments. L'accent a donc tout de suite été mis sur les méthodes de résolution *itératives* qui démarrent avec une estimation de la solution et améliorent la solution courante à chaque itération, jusqu'à atteindre la convergence.

Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel

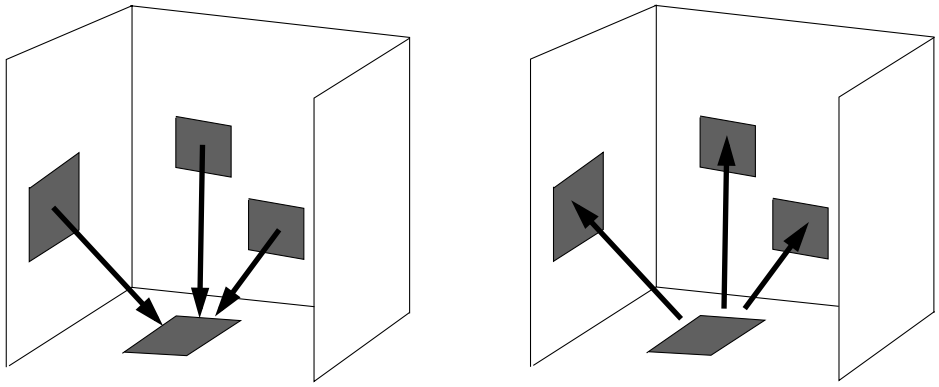
La méthode itérative la plus simple consiste à mettre à jour à chaque étape la radiosité d'un élément i donné en fonction des valeurs courantes de radiosité des autres éléments de l'environnement. La radiosité B_i d'un élément i dépend en effet de la contribution d'énergie qu'il reçoit des autres éléments de la scène. On parle de «*gathering*», de l'anglais «to gather» qui signifie rassembler (cf. figure 1.1(a)). En un sens l'énergie lumineuse quittant l'élément i est déterminée en «rassemblant» l'énergie provenant du reste de l'environnement. Cela revient à considérer une seule ligne (donc une seule équation) du système à la fois, soit :

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij} B_j = E_i \ ,$$

qui, en extrayant B_i, devient :

$$B_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{M_{ij}}{M_{ii}} B_j + \frac{E_i}{M_{ii}} \ .$$

Parmi les algorithmes numériques existant pour résoudre les systèmes d'équations linéaires, deux méthodes itératives - la *méthode de Jacobi* et la *méthode de Gauss-Seidel* - sont particulièrement adaptées à cette formulation qui consiste à exprimer la radiosité d'un élément en «rassemblant» l'énergie lumineuse provenant des autres éléments. Ces deux méthodes sont assez



(a) Gathering (b) Shooting

FIG. 1.1 - *Deux méthodes : «gathering» (a) et «shooting» (b).*

similaires. Elles commencent, à la première itération, par initialiser la valeur de radiosité de chaque élément par son énergie propre émise. Les deux méthodes ensuite se distinguent sur la façon dont la radiosité d'un élément i va être mise à jour dans les itérations suivantes. Pour un environnement constitué de n éléments, chaque itération est constituée de n étapes, chaque étape consistant à mettre à jour la radiosité d'un élément i donné. Dans le cas de la méthode de Jacobi, la radiosité d'un élément i à l'itération (m) sera calculée en fonction des valeurs de radiosité des autres éléments à l'itération $(m-1)$:

$$B_i^{(m)} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{M_{ij}}{M_{ii}} B_j^{(m-1)} + \frac{E_i}{M_{ii}} \ .$$

Par contre, dans le cas de la méthode de Gauss-Seidel, on utilise les valeurs de radiosité déjà calculées dans l'itération courante. La radiosité d'un élément i à l'itération (m) sera donc calculée en fonction de la valeur de radiosité à l'itération (m) des éléments 1 à $i-1$, et de la valeur de radiosité à l'itération $(m-1)$ des éléments $i+1$ à n (cf. [SP94] pour plus de détails) :

$$B_i^{(m)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{M_{ij}}{M_{ii}} B_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{M_{ij}}{M_{ii}} B_j^{(m-1)} + \frac{E_i}{M_{ii}} \ .$$

Ces deux méthodes sont assurées de converger. Cependant, chaque étape n'implique qu'une seule ligne du système d'équations de radiosité et met à jour la radiosité d'un seul élément à la fois. Si on souhaite visualiser la solution à mesure qu'elle progresse, l'affichage n'est donc pas du tout réaliste. Il faut attendre que la solution soit calculée complètement avant d'obtenir une image réaliste et c'est d'autant plus contraignant dans le cas de scènes complexes où le calcul est assez long et où on aimerait avoir une idée du rendu final, avant la fin du calcul de la solution. D'où l'idée de réorganiser les calculs pour obtenir une qualité de l'image affichée qui s'améliore à mesure que la solution progresse. Cette méthode est communément appelée : *radiosité progressive.*

Radiosité progressive

Cette méthode a été introduite par Cohen *et al.* [CCWG88]. Elle consiste à mettre à jour la radiosité pour tous les éléments de l'environnement à la fois, plutôt que pour un seul élément. Pour cela, il suffit d'inverser le processus d'échange de l'énergie. Par définition, la radiosité d'un élément correspond à la quantité d'énergie lumineuse par unité de surface quittant cet élément. La radiosité de cet élément va être distribuée dans l'environnement, et elle va donc contribuer à la radiosité des éléments qu'elle va atteindre. On parle de «*shooting*», de l'anglais «to shoot» qui signifie lancer (cf. figure 1.1(b)).

L'idée est de distribuer la contribution d'énergie lumineuse de chaque élément à tous les autres éléments. Chaque élément i d'un environnement a une valeur de radiosité B_i qui correspond à la valeur de radiosité calculée jusqu'à présent pour cet élément, et une valeur ΔB_i qui est la partie de la radiosité de cet élément qui n'a pas encore été distribuée. Les valeurs B_i et ΔB_i pour tout élément i sont initialisées par la valeur d'énergie émise E_i de l'élément i (E_i peut être égal à zéro). Ensuite, au cours d'une itération, on choisit l'élément qui a la plus grande valeur de radiosité non distribuée, et cette quantité d'énergie est distribuée dans l'environnement. Lors de cette distribution, les autres éléments j de l'environnement peuvent recevoir une quantité d'énergie $\Delta\mathcal{B}$. $\Delta\mathcal{B}$ correspond à la partie de la radiosité provenant de l'élément i qui contribue à la radiosité de l'élément j. Cette valeur $\Delta\mathcal{B}$ est ajoutée à B_j :

Pour tout j : $B_j = B_j + \Delta\mathcal{B}$ avec $\Delta\mathcal{B} = \Delta B_i \rho_j F_{ji}$.

Elle est aussi ajoutée à ΔB_j puisque cette radiosité qui vient d'être reçue n'a pas encore été distribuée. Après cette distribution, l'élément i n'a plus de radiosité non distribuée, donc $\Delta B_i = 0$.

En une étape de distribution, on met à jour la valeur de radiosité de tous les autres éléments de l'environnement. On obtient donc une nouvelle estimation de la solution de radiosité à chaque itération, ce qui permet d'afficher une nouvelle image. Le fait de pouvoir visualiser les résultats au fur et à mesure que la solution progresse est un des principaux avantages de cette méthode. On remarque aussi qu'elle converge plus vite que la méthode de Gauss-Seidel, et tout particulièrement dans les premières étapes de calcul. La convergence est d'autant plus rapide

que l'on choisit à chaque fois comme élément qui va distribuer son énergie, celui qui contribue le plus à l'éclairage de l'environnement [CW93b].

Ces méthodes, que ce soit Jacobi, Gauss-Seidel ou la radiosité progressive, ont cependant un coût quadratique en fonction du nombre d'éléments puisqu'on doit calculer un facteur de forme par paire d'éléments. De plus, elles ne tiennent aucun compte de la position des objets les uns par rapport aux autres. Or, dans le cas de deux surfaces très éloignées par exemple, il est envisageable de calculer les facteurs de forme directement entre les surfaces, plutôt qu'entre les éléments de ces deux surfaces, sans grande perte de précision. L'idée est de regrouper les surfaces ou les objets et de créer ainsi une hiérarchie avec plusieurs niveaux de détails. Cette subdivision hiérarchique de l'environnement a d'abord donné lieu à la *radiosité hiérarchique*, puis au *clustering*.

Radiosité hiérarchique et clustering

La radiosité hiérarchique part du principe qu'un même objet n'a pas la même importance pour tous les objets d'une scène. Il peut être modélisé grossièrement pour ses interactions avec les objets éloignés, mais doit être modélisé plus finement pour ses interactions avec les objets proches. Cette méthode a été introduite par Hanrahan *et al.* [HSA91]. Chaque surface de l'environnement est décrite par une hiérarchie de type quadtree. Les interactions entre deux portions de surfaces sont représentées par des liens. Au début, aucune surface n'est subdivisée, et un lien est créé pour chaque couple de surfaces. Quand on estime qu'un lien ne modélise pas assez finement l'interaction entre deux surfaces données, on le supprime, on subdivise l'une des deux surfaces en quatre et on crée ainsi quatre liens avec l'autre surface (cf. figure 1.2). On recalcule ensuite les échanges lumineux, et on répartit l'énergie entre les différents niveaux de la hiérarchie d'une surface pour que la radiosité d'un noeud soit bien la moyenne de ses fils (cf. [SP94] et [HSA91] pour plus de détails). Cela revient en fait à diviser la matrice de facteurs de forme en un certain nombre de «blocs», chaque «bloc» représentant une interaction entre des éléments ou des groupes d'éléments (cf. figure 1.3(2)). L'avantage avec cette formulation est que le nombre de «blocs» dans la matrice est $\mathcal{O}(n)$ (avec n le nombre total d'éléments), alors qu'on a une matrice de facteurs de forme avec $\mathcal{O}(n^2)$ coefficients dans le cas des méthodes traditionnelles.

Les travaux menés sur la radiosité hiérarchique ont récemment été étendus à des regroupements («clusters») d'objets par [SAG94] et [Sil94]. Il y a quelques différences par rapport à la méthode de radiosité hiérarchique traditionnelle, car il faut tenir compte des échanges d'énergie lumineuse à l'intérieur d'un regroupement, mais le principe reste le même. La différence majeure vient du fait que, contrairement aux différents niveaux de subdivision d'un polygone, les différents objets d'un regroupement n'ont pas tous le même vecteur normal. L'hypothèse d'isotropie n'est donc plus valable et il faut donc traiter des énergies lumineuses directionnelles, et non plus la seule radiosité.

1.2 Le facteur de forme

1.2.1 Définition

Le facteur de forme caractérise l'échange d'énergie entre deux surfaces. Le facteur de forme F_{ij} entre deux surfaces A_i et A_j correspond à la fraction de l'énergie issue de la surface A_i qui

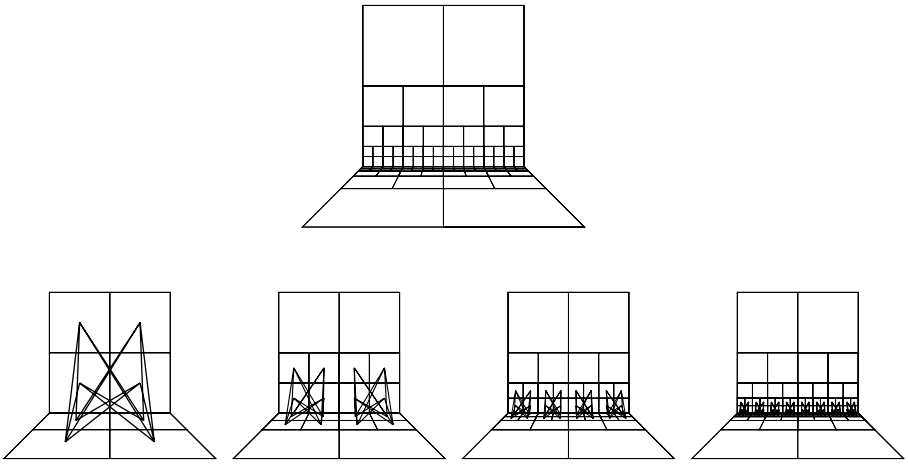


FIG. 1.2 - *Subdivision hiérarchique obtenue pour deux rectangles perpendiculaires (schéma de P. Hanrahan, Princeton University).*

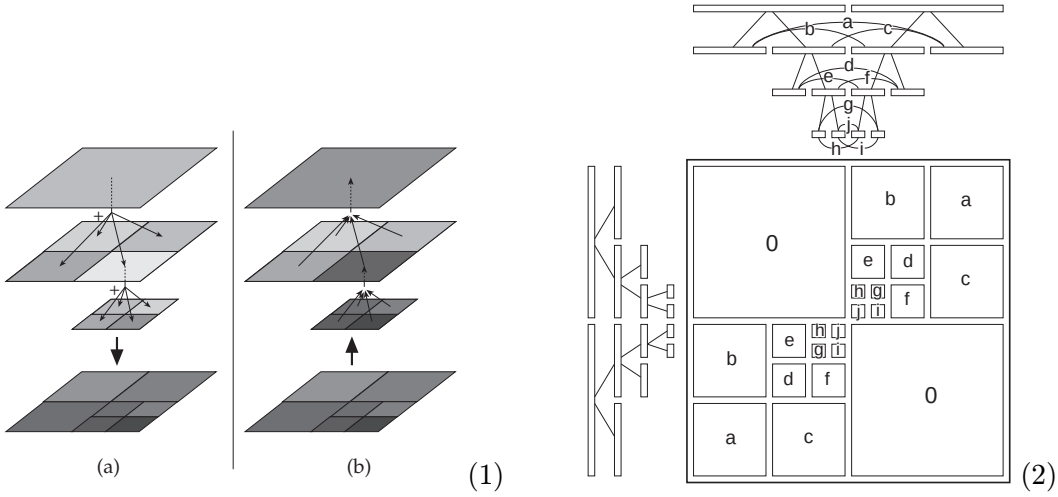


FIG. 1.3 - *(1) Répartition de l'énergie dans les différents niveaux de la hiérarchie : les surfaces les plus sombres indiquent les plus fortes valeurs de radiosité (schéma issu de [SP94]) ; (2) Représentation hiérarchique de la matrice de facteurs de forme (schéma de P. Hanrahan, Princeton University).*

arrive sur la surface A_j :

$$F_{ij} = \frac{\text{Energie provenant de } A_i \text{ qui atteint } A_j}{\text{Energie totale quittant } A_i \text{ (dans toutes les directions)}} \ . \tag{1.3}$$

Afin d'exprimer ce facteur de forme F_{ij}, explicitons les échanges d'énergie entre deux surfaces. Nous nous inspirons ici de [WW92]. On peut aussi se référer à [CW93b] ou [SP94] pour plus de détails.

Soient deux surfaces infinitésimales dA_i et dA_j. Soit $d\omega_{ij}$ l'angle solide de dA_j en dA_i (cf. figure 1.4). Par définition :

$$d\omega_{ij} = \cos\phi_j \frac{dA_j}{r^2} \ ,$$

avec ϕ_j l'angle par rapport à la normale en dA_j, et r la distance entre dA_i et dA_j.

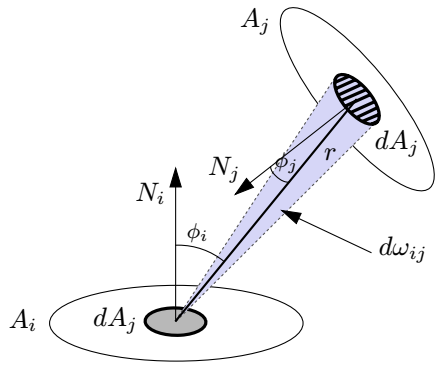


FIG. 1.4 - *Notations pour le facteur de forme.*

L'énergie quittant dA_i qui arrive en dA_j correspond à :

$$\begin{aligned} dE_i dA_i &= I_i \cos\phi_i d\omega_{ij} dA_i \\ &= I_i \cos\phi_i \cos\phi_j dA_i \frac{dA_j}{r^2} \ , \end{aligned}$$

avec ϕ_i l'angle par rapport à la normale en dA_i, ϕ_j l'angle par rapport à la normale en dA_j, r la distance entre dA_i et dA_j, et I_i l'intensité lumineuse incidente sur dA_i.

L'énergie totale quittant dA_i (dans toutes les directions) est obtenue en intégrant sur l'hémisphère unité centrée en dA_i. Dans le cas d'une surface lambertienne, cette énergie correspond à :

$$E_i = I_i \pi \ .$$

En utilisant l'équation 1.3, le facteur de forme entre deux surfaces infinitésimales dA_i et dA_j s'exprime donc par :

$$\begin{aligned} F_{dA_i dA_j} &= \frac{I_i \cos\phi_i \cos\phi_j dA_i dA_j}{I_i dA_i \pi r^2} \\ &= \frac{\cos\phi_i \cos\phi_j dA_j}{\pi r^2} \ . \end{aligned}$$

Le facteur de forme entre dA_i et la surface A_j correspond alors à :

$$F_{dA_i A_j} = \int_{A_j} \frac{\cos\phi_i \cos\phi_j dA_j}{\pi r^2} \ . \tag{1.4}$$

Dans le cas de surfaces lambertiennes, l'intensité I_i ne dépend ni de la direction, ni de la position sur la surface A_i. Le facteur de forme F_{ij} entre les surfaces A_i et A_j est donc obtenu en intégrant la formule 1.4 sur la surface A_i et en moyennant par l'aire de A_i :

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\phi_i \cos\phi_j}{\pi r^2} dA_j dA_i \ .$$

Cette formulation est valable seulement s'il y a visibilité totale entre les deux surfaces considérées. Dans le cas plus général qui prend en compte la possibilité d'occlusion, on introduit une fonction H_{ij} qui caractérise la visibilité entre les deux éléments de surface dA_i et dA_j.
Le facteur de forme entre deux surfaces quelconques A_i et A_j en 3D s'exprime donc par (cf. figure 1.4) :

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\phi_i \cos\phi_j}{\pi r^2} H_{ij} dA_j dA_i \ , \tag{1.5}$$

$$\text{avec} \quad H_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } dA_j \text{ est visible depuis } dA_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Expression en 2D : Dans le cas 2D, on ne considère plus des surfaces mais des portions de courbes. La formule du facteur de forme est donc simplifiée : il ne s'agit plus d'une double intégrale sur des aires, mais d'une double intégrale sur des longueurs. Le facteur de forme F_{ij} entre deux portions de courbes C_i et C_j, de longueurs respectives L_i et L_j s'exprime par :

$$F_{ij} = \frac{1}{L_i} \int_{L_i} \int_{L_j} \frac{\cos\phi_i \cos\phi_j}{2r} H_{ij} dL_j dL_i \ , \tag{1.6}$$

où H_{ij} caractérise la visibilité entre les deux portions de courbes considérées (1 si dL_j est visible depuis dL_i et 0 sinon), r est la distance entre les deux éléments de longueur dL_i et dL_j, ϕ_i l'angle par rapport à la normale en dL_i, et ϕ_j l'angle par rapport à la normale en dL_j.

1.2.2 Propriétés du facteur de forme

Le facteur de forme est en fait une quantité purement géométrique : il dépend uniquement de la forme et de la position relative des surfaces dans la scène. Compte tenu de sa définition, il possède différentes propriétés :

1. **Réciprocité :** En multipliant l'équation 1.5 par l'aire de la surface A_i, on obtient :

$$A_i F_{ij} = \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\phi_i \cos\phi_j}{\pi r^2} H_{ij} dA_j dA_i \ .$$

Cette expression est symétrique en i et j, d'où la relation de réciprocité :

$$\forall (i,j) \quad A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \ .$$

2. Le facteur de forme est défini comme une fraction d'énergie ce qui implique que, dans le cas d'un *environnement clos*, la somme de tous les facteurs de forme pour une surface donnée est égale à l'unité.

   Soit un environnement clos constitué de n surfaces A_1, A_2, ..., A_n. On a donc pour toute surface A_i de cet environnement (i allant de 1 à n) :

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ik} = 1 \ .$$

3. Dans le cas d'une surface A_i *plane ou convexe*, aucun rayon lumineux réfléchi par cette surface ne va frapper directement cette même surface. Donc :

$$F_{ii} = 0 \ .$$

   Dans le cas d'une surface A_i *concave*, on a bien sûr :

$$F_{ii} \neq 0 \ .$$

4. **Additivité :** Soient trois surfaces disjointes A_i, A_j et A_k. La fraction d'énergie issue de A_i et reçue par l'union des deux surfaces A_j et A_k est égale à la somme des fractions d'énergie issues de A_i et reçues par chacune de ces deux surfaces.

   Le facteur de forme entre A_i et l'union de A_j et A_k est donc égal à la somme du facteur de forme entre A_i et A_j et du facteur de forme entre A_i et A_k :

$$F_{i(j \cup k)} = F_{ij} + F_{ik} \ .$$

   L'inverse n'est pas valable (cf. [SP94]) :

$$F_{(j \cup k)i} = \frac{A_j F_{ji} + A_k F_{ki}}{A_j + A_k} \neq F_{ji} + F_{ki} \ .$$

   Si les deux surfaces A_j et A_k ont une partie commune, on a alors :

$$F_{i(j \cup k)} = F_{ij} + F_{ik} - F_{i(j \cap k)} \ .$$

1.2.3 Méthodes de détermination

Le calcul du facteur de forme entre deux surfaces en 3D nécessite de calculer une double intégrale sur des aires. Dans le cas très spécifique de surfaces avec une forme simple, dans des configurations simples, et lorsqu'il n'y a pas d'occlusion, il est possible d'exprimer cette intégrale double de manière analytique. Cependant, dès qu'il y a occlusion, il devient impossible de la calculer de manière analytique. De nombreuses méthodes d'approximation du facteur de forme ont donc été développées. Nous en présentons un certain nombre dans les paragraphes qui suivent. Pour une description plus détaillée des différentes méthodes de calcul des facteurs de forme existantes, se référer à [CW93b] ou [SP94].

Méthodes analytiques et semi-analytiques

La double intégrale dans l'équation 1.5 peut être calculée de manière exacte dans le cas de configurations géométriques simples et lorsqu'il n'y a pas d'occlusion. Un certain nombre d'expressions de facteurs de forme sont disponibles dans la littérature (cf. entre autres [How82, Bre92]). Ces expressions sont calculées pour des surfaces avec une forme simple, dans des configurations simples : notamment pour des rectangles parallèles, pour des rectangles perpendiculaires, pour des disques ou des cylindres coaxiaux, etc.

De nombreux chercheurs se sont intéressés au calcul des facteurs de forme entre polygones, sachant que les modèles polygonaux sont très utilisés en synthèse d'images. Baum *et al.* [BRW89] ont calculé le facteur de forme entre deux polygones en évaluant de manière analytique l'intégrale intérieure du facteur de forme (intégrale correspondant en fait au facteur de forme entre une aire différentielle et un polygone (cf. équation 1.4)), puis en intégrant numériquement l'intégrale extérieure. Schröder et Hanrahan [SH93] ont ensuite donné une expression semi-analytique générale pour le facteur de forme entre deux polygones lorsqu'il n'y a pas d'occlusion. Cette formule extrêmement compliquée est en pratique inutilisable.

Méthodes d'approximation

Les formulations analytiques ne permettent pas d'évaluer directement les facteurs de forme pour les cas courants, en particulier lorsqu'il y a occlusion. Des approches numériques sont alors nécessaires pour faire une approximation des facteurs de forme. Parmi les approches proposées, de nombreuses reposent sur deux simplifications : la réduction de l'intégrale double à une intégrale simple, et la projection des objets sur une forme simple pour laquelle les facteurs de forme sont plus faciles à calculer.

Hémicube

Cette méthode a été présentée par Cohen et Greenberg [CG85]. Elle repose sur l'hypothèse que la distance entre deux éléments i et j est suffisamment grande pour que l'intégrale intérieure du facteur de forme F_{ij} entre les éléments i et j (cf. équation 1.5) varie très peu sur l'intervalle d'intégration. On a donc :

$$F_{ij} \simeq F_{dA_i A_j} = \int_{A_j} \frac{\cos\phi_i \cos\phi_j}{\pi r^2} dA_j \ ,$$

ce qui équivaut à approximer le facteur de forme élément à élément par le facteur de forme point à élément.

Cette méthode utilise le principe de l'analogue de Nusselt («Nusselt analog») : le facteur de forme point à élément calculé au point p_i est équivalent à la fraction de l'aire de la base de l'hémisphère unité centrée en p_i, obtenue en projetant l'élément radialement sur l'hémisphère, puis orthogonalement sur la base de l'hémisphère (cf. figure 1.5).

Il en découle que les éléments ayant la même aire projetée sur l'hémisphère auront le même facteur de forme, puisqu'ils occupent le même angle solide (cf. figure 1.5). Cela signifie que si l'élément est projeté radialement sur n'importe quelle surface intermédiaire, le facteur de forme de la projection de l'élément sera le même que celui de l'élément lui-même. Cette observation constitue la base de l'algorithme de l'hémicube, où les éléments sont projetés sur les faces d'un demi-cube au lieu d'une hémisphère. Un hémicube est placé au centre de chaque élément de

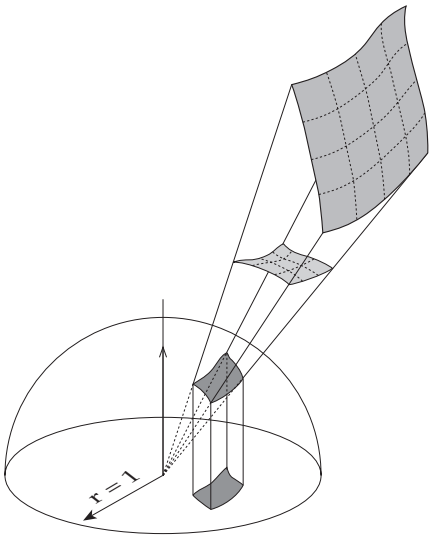


FIG. 1.5 - *Analogue de Nusselt (schéma issu de [SP94]).*

surface A_i (cf. figure 1.6). Les faces de l'hémicube sont divisées en cellules. Un facteur de forme point à élément ΔF est calculé pour chaque cellule. Ces facteurs de forme sont précalculés et stockés. Le facteur de forme entre l'élément de surface A_i et un élément de surface A_j donné de la scène est alors approximé en projetant l'élément A_j sur les faces de l'hémicube et en sommant les facteurs de forme des cellules couvertes par la projection. Les problèmes d'occlusion sont résolus en utilisant un Z-buffer qui permet de connaître les surfaces qui sont les plus proches de l'hémicube.

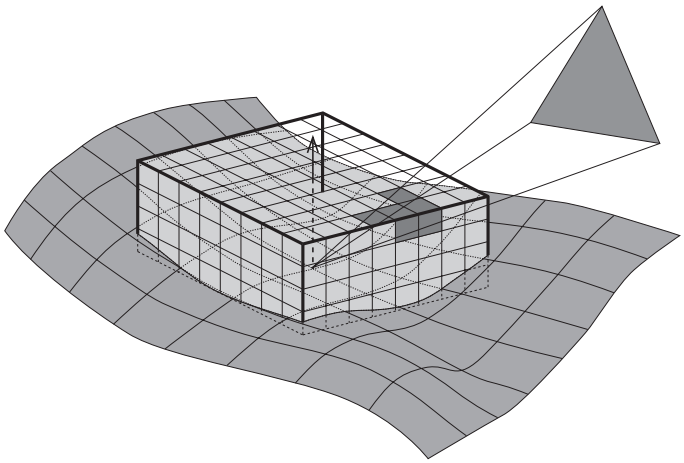


FIG. 1.6 - *L'hémicube (schéma issu de [SP94]).*

Il existe d'autres méthodes utilisant des surfaces de projection qui diffèrent principalement dans le choix des surfaces de projection et le découpage de ces surfaces. Ainsi, Sillion *et al.* [SP89] utilisent un plan de projection, au lieu d'un hémicube, et au lieu de considérer des cellules de taille uniforme, ils découpent le plan en cellules de facteurs de forme identiques : les *proxels*. Une autre surface de projection utilisée est l'hémisphère. Elle est notamment utilisée par Spen-

cer [Spe90].

L'hémicube et autres méthodes de projection similaires posent un certain nombre de problèmes numériques qui apparaissent de façon beaucoup plus flagrante lorsqu'on les utilise pour «lancer» de l'énergie dans la scène à partir d'une source (comme dans la méthode de radiosité progressive), et non plus pour «rassembler» sur une surface donnée, l'énergie provenant de l'ensemble des surfaces de la scène (comme dans la méthode standard de radiosité). L'hémicube calcule un facteur de forme point à élément. Cependant, utiliser ce point comme source produit des erreurs plus perceptibles que lorsqu'on l'utilise comme récepteur. De plus, dans ce cas, les récepteurs sont traités comme des aires qui peuvent être manquées par l'hémicube si leur projection est suffisamment petite pour tomber entre les centres des cellules de l'hémicube. L'hémicube, de par son échantillonnage uniforme et sa résolution limitée, produit aussi de l'aliassage («aliasing» en anglais).

La propagation de la radiosité devrait en fait être modélisée depuis des aires vers des points, plutôt que le contraire. C'est effectivement ce qui se passe lorsqu'on utilise l'hémicube pour «rassembler» l'énergie dans la méthode standard de radiosité. Une meilleure méthode est cependant nécessaire dans le cadre de la radiosité progressive.

Wallace *et al.* [WEH89] ont proposé un algorithme utilisant le lancer de rayon («ray casting») à la fois pour résoudre le problème de visibilité et calculer directement les facteurs de forme entre des points sur les récepteurs et la source.

Ray casting

Considérons une étape de l'algorithme de radiosité progressive pour laquelle la source (ou l'élément émetteur) est P_i. Le facteur de forme point à élément entre un sommet y du maillage d'un récepteur et la source P_i peut être calculé directement en utilisant la formule :

$$F_{y,P_i} = \int_{x \in P_i} \frac{\cos\theta \cos\theta'}{\pi r^2} V(y,x) dx \ , \tag{1.7}$$

où $V(y,x)$ caractérise la visibilité entre les points y et x (1 si y et x se voient mutuellement, 0 sinon).

La radiosité reçue en chaque sommet est alors obtenue en multipliant ce facteur de forme par la radiosité de la source. L'intégrale 1.7 peut être évaluée numériquement en divisant la surface de P_i en un nombre n_i d'éléments P_i^k ($k = 1 \ldots n_i$) (cf. figure 1.7) et en additionnant les intégrales correspondant à tous les éléments visibles. Cela suppose que chaque élément a une visibilité uniforme depuis le point y. Si la visibilité de l'élément P_i^k est notée $V_k \in \{0,1\}$, alors une estimation de F_{y,P_i} est :

$$\hat{F}_{y,P_i} = \sum_{k=1}^{n_i} V_k \ \delta F_k \ ,$$

où

$$\delta F_k = \int_{x \in P_i^k} \frac{\cos\theta \cos\theta'}{\pi r^2} dx \ .$$

La visibilité est déterminée pour chaque élément en lançant un ou plusieurs rayons. L'intégrale définissant le facteur de forme peut être calculée de différentes manières.

La méthode la plus simple consiste à calculer la valeur de l'intégrande au centre de l'élément et à la multiplier par l'aire de l'élément, supposant alors que l'intégrande est constante sur l'élément. Les résultats obtenus ne sont cependant pas très précis.

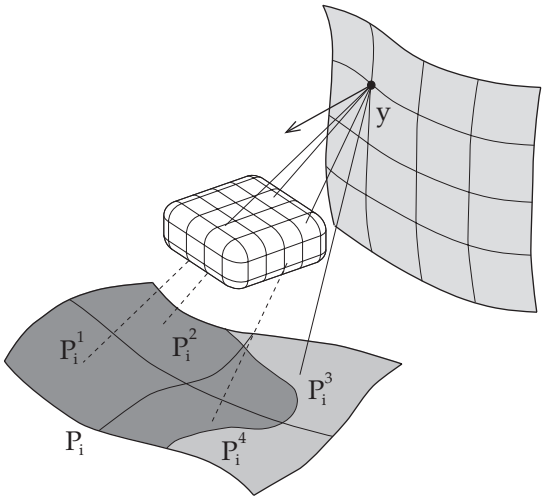


FIG. 1.7 - *Subdivision de la source pour le calcul d'un facteur de forme (schéma issu de [SP94]).*

Dans le cas de scènes polygonales, une autre possibilité consiste à calculer le facteur de forme point à élément en réalisant une intégration de contour le long des arêtes de polygones. Le facteur de forme point à élément entre le point y et l'élément P_i^k s'exprime alors par :

$$\delta F_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{g \in G} \vec{n} \ . \ \vec{\Gamma}_g \ ,$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface au point y, G est l'ensemble des sommets de l'élément P_i^k, $\vec{R}_g$ est un vecteur entre le point y et le sommet numéro g de P_i^k, et $\vec{\Gamma}_g$ est un vecteur orienté dans la direction du produit vectoriel $\vec{R}_g \wedge \vec{R}_{g+1}$, avec une amplitude égale à l'angle γ_g (angle entre $\vec{R}_g$ et $\vec{R}_{g+1}$) (cf. [SP94] pour plus de détails). Ce calcul peut, dans certains cas, ne pas être très précis car il suppose que chaque élément P_i^k de la source est soit totalement visible, soit totalement invisible.

Wallace *et al.* [WEH89] utilisent une autre méthode qui donne un bon compromis entre précision et rapidité de calcul. Chaque élément est approximé par un disque de même aire et de même orientation que l'élément. On dispose en effet d'une formulation analytique pour le facteur de forme entre une aire différentielle et un disque (cf. [WEH89] ou [SP94]). Le facteur de forme pour un élément P_i^k de la source est alors approximé par :

$$\delta F_k = \frac{A_i^k \cos\theta \cos\theta'}{A_i^k + \pi r^2} \ ,$$

avec A_i^k l'aire de l'élément P_i^k.

Différentes stratégies sont envisageables pour le choix des éléments de la source. La plus simple consiste bien évidemment à subdiviser la source de manière uniforme. On peut aussi envisager d'effectuer un découpage plus ou moins fin en fonction de la distance par rapport au récepteur considéré, ou une décomposition hiérarchique de la source, en concentrant les éléments là où l'intégrande varie le plus (cf. [SP94] pour plus de détails sur les différentes stratégies possibles).

Les différentes méthodes de détermination présentées précédemment dans ce paragraphe sont des méthodes *déterministes*. Il existe aussi un certain nombre de méthodes *probabilistes*, dites de *Monte-Carlo*, qui sont utilisées pour approximer les facteurs de forme.

Méthodes de Monte-Carlo

Malley [Mal88] a notamment proposé une évaluation de Monte-Carlo du facteur de forme basée sur l'analogue de Nusselt («Nusselt Analog»). Il commence par générer un certain nombre de points distribués uniformément dans le cercle sous l'hémisphère centrée sur un élément (cf. figure 1.5). Chaque point est ensuite projeté verticalement pour intersecter l'hémisphère. On lance ensuite depuis le centre de l'hémisphère, des rayons qui passent par les points projetés. On compte le nombre de fois que chaque élément de la scène est intersecté par un rayon. Le facteur de forme correspond alors au nombre de rayons qui intersectent un élément donné, divisé par le nombre total de rayons lancés.

Sbert, quant à lui, a appliqué Monte-Carlo de façon globale. Dans [Sbe93], il présente un algorithme pour le calcul des facteurs de forme, basé sur la géométrie intégrale. Sbert lance un certain nombre de droites aléatoires réparties uniformément dans la scène. Une droite est définie comme la droite passant par deux points pris de façon aléatoire sur une sphère englobant la scène. Pour chaque droite, il compte le nombre d'intersections avec chaque surface de la scène, ce qui lui donne une estimation des mesures des ensembles de droites intersectant les surfaces. Sbert se sert ensuite d'une formulation du facteur de forme issue de la géométrie intégrale pour évaluer les facteurs de forme entre deux surfaces : le facteur de forme entre deux surfaces A_i et A_j peut être exprimé par la mesure de l'ensemble des droites intersectant A_i et A_j sans intersecter d'obstacles, divisée par la mesure de l'ensemble total des droites intersectant A_i (cf. paragraphe 2.1 du chapitre 2 pour plus de détails).

Pellegrini [Pel95] a aussi utilisé une caractérisation des facteurs de forme basée sur les concepts de la géométrie intégrale pour calculer une approximation de Monte-Carlo des facteurs de forme. Il est parti de la formulation du facteur de forme sous forme d'un rapport de mesures de droites. Puis il a réexprimé la mesure des droites intersectant deux surfaces A_i et A_j données en mesurant les droites qui intersectent ces deux surfaces dans une direction donnée, et en considérant ensuite l'ensemble des directions. La mesure des droites intersectant deux surfaces A_i et A_j dans une direction u donnée, sans intersecter d'obstacles, est obtenue en projetant orthogonalement les surfaces A_i et A_j ainsi que les surfaces qui interfèrent sur un plan $P(u)$ orthogonal à u, puis en calculant ensuite dans le plan $P(u)$ l'aire de l'intersection des projections de A_i et A_j privée de l'union des projections des surfaces qui interfèrent. L'ensemble des directions u considérées est obtenu en choisissant uniformément de manière aléatoire un ensemble de points p sur la sphère unité centrée en O. Une direction u donnée est alors caractérisée par le vecteur $\overrightarrow{Op}$. Les calculs de parties cachées pour une projection sont cependant effectuées en utilisant des structures théoriques inimplémentables.

1.3 Le maillage de discontinuité

1.3.1 Introduction

Comme nous avons pu le voir dans le paragraphe 1.1, la méthode de radiosité est une méthode par éléments finis. La précision et la qualité de la solution d'éclairage obtenue avec cette méthode

dépendent donc de la taille et du choix de la discrétisation (ou maillage) de l'environnement considéré.

Dans la méthode de radiosité standard, la valeur de radiosité est supposée constante sur un élément donné, ce qui revient en fait à traiter la fonction de radiosité comme une fonction constante par morceaux. Si on souhaite obtenir une solution de radiosité de bonne qualité, il est donc préférable d'utiliser un maillage qui suive la distribution de la lumière dans l'environnement, avec une plus forte densité d'éléments dans les régions où l'éclairage change rapidement. Le fait que la distribution de la lumière soit justement l'inconnue du problème a conduit à l'élaboration de différentes techniques de génération automatique de maillage.

On distingue deux approches qui prennent en compte la connaissance de la fonction de radiosité : une que l'on qualifiera de *a posteriori* et l'autre de *a priori*. L'approche *a posteriori*, qui est apparue historiquement en premier, consiste à raffiner le maillage au fur et à mesure du calcul de la solution de radiosité. La seconde approche, que l'on qualifie de *a priori*, consiste à calculer tout ou une partie du maillage avant le calcul de la solution de radiosité.

Méthodes *a posteriori* : Ces méthodes s'appuient sur des résultats partiels de la simulation. Une approximation initiale de la solution de radiosité est obtenue en utilisant un maillage uniforme ou un autre maillage déterminé *a priori*. Le principe consiste ensuite à subdiviser les éléments qui ne vérifient pas certains critères. Les critères choisis peuvent être de différentes sortes. Cohen *et al.* [CGIB86], qui ont été les premiers à utiliser ce principe de subdivision adaptative pour la radiosité, raffinent le maillage dans les régions où il y a une forte variation de la fonction de radiosité. Le taux de variation de la fonction de radiosité, ou gradient de radiosité, est estimé en considérant les valeurs de radiosité des éléments voisins. Après avoir subdivisé les éléments ne vérifiant pas le critère choisi, une nouvelle estimation de la solution de radiosité est calculée avec le maillage amélioré, et l'ensemble du processus est répété jusqu'à ce qu'on ne puisse plus trouver d'éléments ne vérifiant pas le critère choisi. Le maillage est, en général, représenté sous forme de quadtrees (cf. figure 1.8).

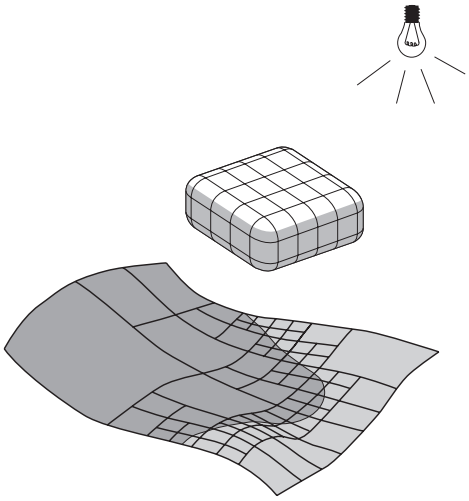


FIG. 1.8 - *Subdivision adaptative générée le long d'une limite d'ombre (schéma issu de [SP94]).*

Méthodes *a priori*: Les méthodes *a priori* consistent à calculer tout ou une partie du maillage avant le calcul de la solution de radiosité. Elles consistent à construire le maillage en positionnant les limites des éléments sur les discontinuités de la fonction de radiosité. Ces discontinuités correspondent à des changements de visibilité dans la scène. Elles délimitent notamment les zones d'ombre et de pénombre. Elles sont purement géométriques et peuvent être déterminées avant que le solution de radiosité ne soit calculée. Cette technique de maillage *a priori*, basée sur les discontinuités, est appelée *maillage de discontinuité*.

Les méthodes *a posteriori* sont moins coûteuses et plus simples à utiliser que le *maillage de discontinuité* dont la construction nécessite de nombreux calculs géométriques. Cependant ces méthodes dépendent fortement de la taille minimale des éléments, si bien que l'ombre de petits objets peut avoir été «oubliée» ou il peut apparaître des effets d'escalier aux limites d'ombre, si la subdivision n'est pas suffisamment fine. On peut aussi avoir des problèmes de fuite d'ombre ou de lumière aux endroits où les objets sont en contact (cf. [CW93b]). Par contre le *maillage de discontinuité* permet de prendre en compte toutes les ombres associées à l'ensemble des objets de la scène quelle que soit leur taille et assure que les contours des ombres seront bien dessinés puisque les limites des éléments suivent les limites des zones d'ombre et de pénombre de l'environnement. De plus, si toutes les discontinuités se trouvent sur des lignes du maillage, des techniques de reconstruction appropriées peuvent être utilisées pour représenter la fonction de radiosité exacte. Hardt et Teller présentent notamment dans [HT96] une méthode permettant de reconstruire la fonction de radiosité avec une grande fidélité et en temps interactif, qui utilise une technique de maillage prenant en compte les discontinuités.

L'utilisation du *maillage de discontinuité* dans le cadre de la radiosité semble primordiale, afin d'obtenir une image de la meilleure qualité possible.

1.3.2 Différents types de discontinuité

Les discontinuités de la fonction de radiosité correspondent à des changements de visibilité dans la scène. Les discontinuités sont purement géométriques et peuvent être déterminées avant le calcul de la solution de radiosité. Par définition, on parle de discontinuité D^k en un point si la fonction de radiosité est C^{k-1} mais non C^k en ce point. Si on tient compte de l'ensemble des changements de visibilité dans la scène, la fonction de radiosité peut avoir de très nombreuses discontinuités. Les discontinuités les plus significatives (en fait les plus visibles) sont celles que nous percevons comme des limites d'ombre et de pénombre. Dans le cas d'une scène 3D, elles correspondent à des discontinuités d'ordre 0, 1 ou 2. Les différents travaux existants se restreignent à ce type de discontinuités. Les discontinuités habituellement considérées correspondent à des changements de visibilité entre la source et les surfaces réceptrices. Elles délimitent sur les surfaces de la scène des zones où la source est totalement visible, partiellement visible ou complètement cachée par des obstacles.

Discontinuités D^0

Les discontinuités D^0 sont causées par le passage brutal de la visibilité totale de la source à l'occultation complète. Cet événement se produit quand deux objets sont en contact, ou le long des limites d'ombre créées par une source de lumière ponctuelle. On peut en voir un exemple sur la figure 1.9. Dans le cas de surfaces en contact (cf. figure 1.9(a)), la discontinuité se situe sur la ligne de contact entre les deux surfaces : en traversant cette ligne la source devient brusquement

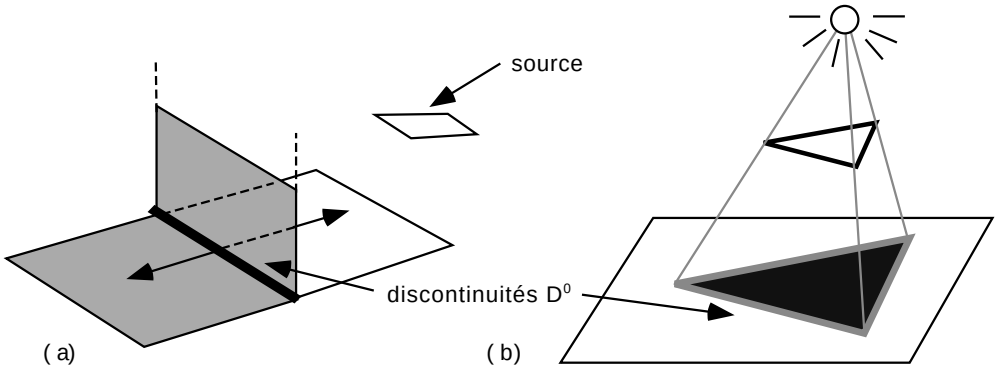


FIG. 1.9 - *Discontinuités D^0 : (a) discontinuité liée à deux surfaces en contact ; (b) discontinuité liée à une source ponctuelle.*

totalement visible ou bien complètement occultée.

Discontinuités D^1 et D^2

Des discontinuités d'ordre supérieur, résultant de changements de visibilité plus complexes, peuvent aussi apparaître dans la scène.

La visibilité que l'on a de la source varie en fonction de l'endroit où on se trouve dans l'environnement : la source peut être totalement visible, partiellement visible ou complètement cachée depuis un point donné. Les changements dans cette visibilité sont provoqués par des événements géométriques appelés *événements visuels*. Ces événements visuels ont été étudiés précédemment en vision par ordinateur, où a été développé le *graphe d'aspect* [PD90, GM90, GCS91] qui regroupe tous les points de vue depuis lesquels un objet a le même «aspect». Ce problème est étroitement lié à la détermination des régions depuis lesquelles la partie visible d'une source a le même aspect, problème correspondant en fait à trouver les limites de la pénombre.

Dans le cas des scènes polygonales, les changements de visibilité sont causés par l'interaction des arêtes et des sommets des objets de l'environnement. On distingue deux catégories d'événements visuels : les événements EV (de l'anglais «edge» (arête) - «vertex» (sommet)) qui sont causés par l'interaction d'un sommet et d'une arête, et les événements EEE (de l'anglais «edge - edge - edge») qui sont causés par l'interaction de trois arêtes.

Un calcul explicite de l'irradiance due à une source polyédrique et de ses dérivées a mis en évidence les mêmes événements (cf. [Arv94]).

Evénements EV : Un événement EV se produit lorsqu'un sommet d'un objet est vu comme coïncidant avec une arête d'un autre objet. Le changement de visibilité se fait le long d'une *surface critique*, correspondant à une portion du plan contenant le sommet et l'arête associés à cet événement. On peut en voir un exemple sur la figure 1.10, où le sommet v_1 de la source est visible depuis le point P_2 mais ne l'est pas depuis le point P_1. La *surface critique* associée à un événement EV est définie par l'ensemble des points depuis lesquels le sommet associé à l'événement est vu comme coïncidant avec l'arête associée à cet événement. L'intersection de cette surface avec les polygones de la scène crée des *courbes critiques* où se trouvent les discontinuités des dérivées de la fonction de radiosité. Pour des environnements polygonaux, les *courbes critiques* associées aux

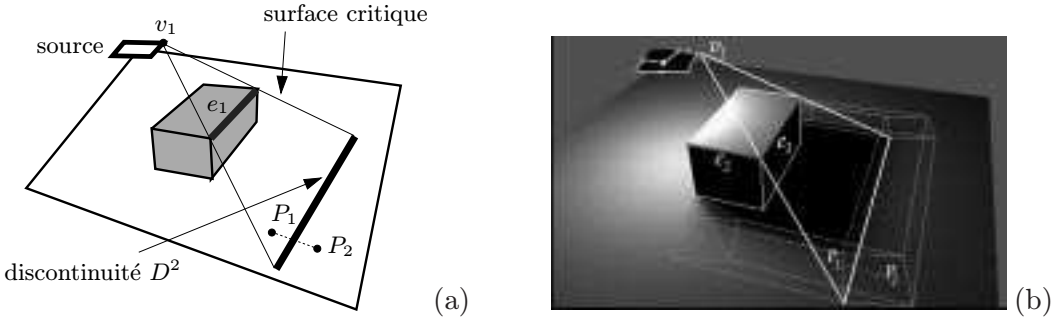


FIG. 1.10 - *Exemple de surface EV (schéma (b) issu de [DF94]).*

événements EV sont des segments de droites. La figure 1.11 montre l'ensemble des lignes critiques de type EV générées sur un polygone, par une source triangulaire et un obstacle rectangulaire. En général les discontinuités associées à ces lignes critiques sont des discontinuités D^2. Cependant

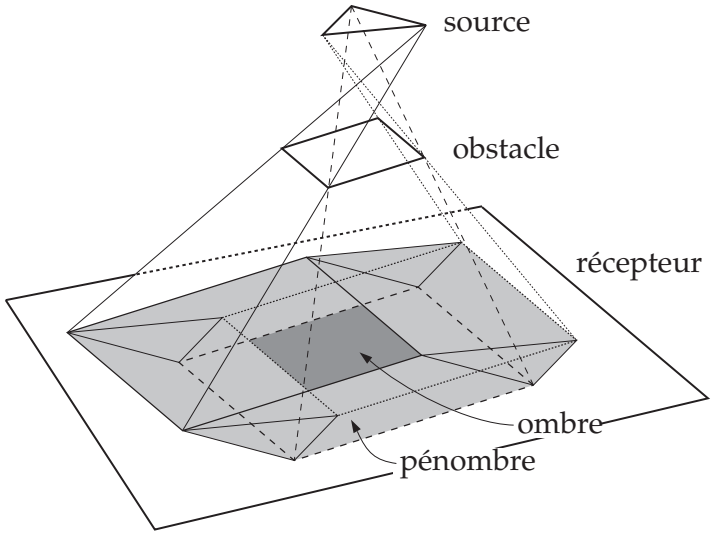


FIG. 1.11 - *Détermination des limites d'ombre et de pénombre (schéma de P. Heckbert, Université de Carnegie Mellon.*

des discontinuités D^1 peuvent se produire lorsqu'une arête de la source et une arête de l'obstacle sont coplanaires (cf. figure 1.12 où on observe la source depuis un point de vue qui se déplace le long d'une surface réceptrice).

Evénements EEE : Les événements EEE se produisent en présence de trois arêtes non coplanaires, mutuellement visibles. La *surface critique* associée correspond à un sous-ensemble d'une quadrique réglée. C'est l'ensemble des points depuis lesquels les trois arêtes sont vues comme s'intersectant en un point. On peut en voir un exemple sur la figure 1.13. Le changement de visibilité se produit lorsqu'on traverse la surface quadrique : l'arête e_1 de la source est visible depuis le point P_2 mais ne l'est pas depuis le point P_1. Les *courbes critiques* associées aux événements EEE sont des segments de coniques et correspondent à des discontinuités D^2.

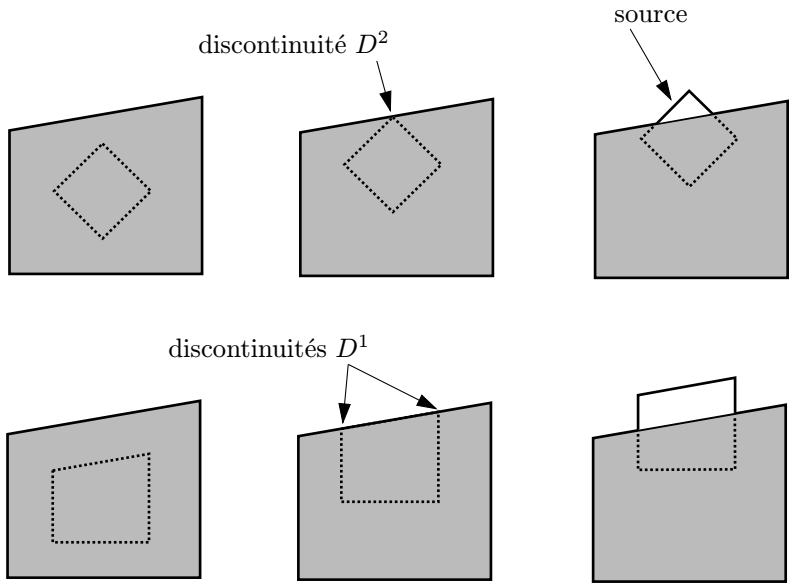


FIG. 1.12 - *Evénements EV, vus depuis un point de vue qui regarde en direction de la source de lumière et qui se déplace le long d'une surface réceptrice (schéma adapté de [CW93]).*

1.3.3 Maillage de discontinuité en 2D

Le maillage de discontinuité dont la construction s'avère assez complexe dans le cas 3D, a d'abord été étudié en 2D. Heckbert [Hec91, Hec92a] a réalisé une étude de la fonction de radiosité sur des scènes polygonales 2D. Il s'est notamment intéressé aux problèmes de maillage et a montré la nécessité d'un maillage (ou échantillonnage) en fonction des discontinuités pour pouvoir obtenir une meilleure solution de radiosité. L'étude du cas 2D, en simplifiant le problème, permet une meilleure compréhension du phénomène. En effet, dans le cas 2D, les discontinuités significatives sont limitées à des discontinuités d'ordre 0 ou 1 [Hec92b]. La fonction de radiosité en 2D possède des discontinuités D^0, au niveau des arêtes de la scène qui se touchent ou s'intersectent, et le long des limites d'ombre créées par des sources de lumière ponctuelles. Elle présente également des discontinuités D^1, le long des limites d'ombre créées par des sources de

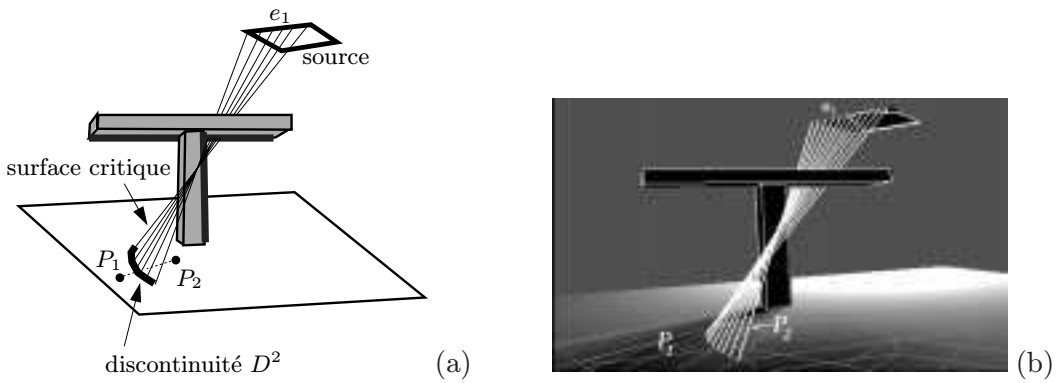


FIG. 1.13 - *Exemple de surface EEE (schéma (b) issu de [DF94]).*

Calcul des discontinuités D^1

Pour tout sommet p
  Pout tout sommet q
    Si aucune arête intersecte le segment pq **alors**
      $e = \text{trace_rayon}(p, p - q)$
      $f = \text{trace_rayon}(q, q - p)$
      Si $e \neq$ **NULL alors** e est une discontinuité
      Si $f \neq$ **NULL alors** f est une discontinuité

FIG. 1.14 - *Méthode de Heckbert pour le calcul des discontinuités D^1.*

lumière linéaires.

Construction

Dans [Hec92a], Heckbert présente un algorithme pour le calcul du maillage de discontinuité d'une scène 2D composée de segments de droites (ou arêtes). Il commence d'abord par calculer les discontinuités D^0 sachant que ce sont les plus significatives : les arêtes de la scène qui s'intersectent ou se touchent peuvent être trouvées en temps $\mathcal{O}(n \log n)$ ([PS85]), où n est le nombre d'arêtes dans la scène. Le nombre de discontinuités D^1 est de l'ordre de $\mathcal{O}(n^2)$. Heckbert [Hec92a] utilise un algorithme simple qui permet de calculer ces discontinuités en temps $\mathcal{O}(n^3)$.

L'algorithme utilisé, basé sur un principe de tracé de rayons, est décrit dans la figure 1.14. On appelle *sommet* l'extrémité d'une *arête* de la scène. On note pq le segment de droite reliant deux points donnés p et q. La fonction trace_rayon(p, d) trace un rayon depuis le point p dans la direction d et retourne le point d'intersection avec la première arête rencontrée, si ce point existe. La figure 1.15 montre un exemple de discontinuité D^1 : le point f est un point de discontinuité D^1 créé par la ligne critique passant par les extrémités p et q.

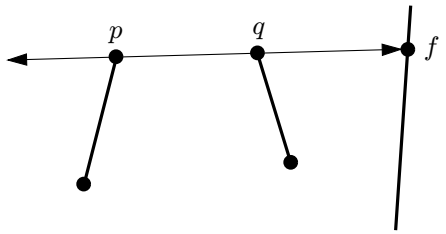


FIG. 1.15 - *Exemple de discontinuité D^1.*

Heckbert spécifie dans [Hec92a] que la complexité de l'algorithme peut être ramenée à $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ en utilisant un algorithme de calcul de visibilité par balayage radial ([EOW83]) qui permet de déterminer la visibilité en temps $\mathcal{O}(n \log n)$ pour chaque sommet de la scène.

1.3.4 Construction du maillage de discontinuité en 3D

Les premiers algorithmes traitent seulement un sous-ensemble d'événements visuels qui correspondent aux limites de l'ombre et de la pénombre.

Nishita et Nakamae [NN85] déterminent ces limites en calculant les volumes d'ombre («shadow volumes») formés par un objet et chaque sommet du polygone source. Le volume de l'ombre pour un seul obstacle (ou bloqueur) est défini par l'intersection des volumes d'ombre issus de chaque sommet du polygone source. Le volume de la pénombre est défini par l'enveloppe convexe 3D contenant les volumes d'ombre issus de chaque sommet du polygone source. L'intersection des volumes d'ombre et de pénombre avec les surfaces définit les limites d'ombre et de pénombre. Cette approche ignore les discontinuités à l'intérieur de la pénombre.

Campbell [Cam91] a aussi calculé les limites extérieures de l'ombre et de la pénombre. Comme Nishita et Nakamae, Campbell construit des volumes d'ombre et de pénombre pour chaque paire source-bloqueur. Cependant, il évite de calculer une enveloppe convexe 3D en construisant les volumes directement à partir des surfaces critiques. L'algorithme de Campbell suppose que l'on a une source convexe et des bloqueurs polygonaux. Pour chaque arête du bloqueur, il existe une surface critique formée par cette arête et par chaque sommet de la source. Le plan extremum minimum pour une arête donnée du bloqueur est défini comme la surface critique qui forme l'angle minimum par rapport au plan du bloqueur. De même, il existe pour chaque arête de la source, une surface critique passant par cette arête et par chaque sommet du bloqueur. Et il y a un plan extremum minimum pour chaque arête de la source. Le volume de la pénombre est constitué à partir de l'intersection de tous les plans extremums minimums de la source et du bloqueur. Le volume de l'ombre est défini de façon similaire en utilisant les plans extremums maximums du bloqueur. Les volumes d'ombre et de pénombre résultants sont stockés sous forme d'arbres BSP («Binary Space Partition»). Ces volumes sont ensuite fusionnés avec un arbre BSP représentant les volumes d'ombre et de pénombre pour l'ensemble de la scène. L'algorithme de Campbell teste ensuite chaque polygone dans la scène par rapport à cet arbre BSP, afin d'insérer les discontinuités au niveau de chaque polygone. L'approche de Campbell a permis de classifier toutes les régions comme totalement dans l'ombre, totalement dans la lumière ou partiellement occultées.

Heckbert [Hec92b] et Lischinski *et al.* [LTG92] ont ensuite développé indépendamment des algorithmes qui calculent les discontinuités dues aux événements VE (et EV), impliquant les sommets et arêtes des polygones source. Dans ces deux algorithmes, pour un polygone source donné, on intersecte la surface critique correspondant à chaque événement VE (et EV) avec les différents polygones de la scène.

Une fois que l'ensemble des intersections avec les polygones de la scène a été calculé pour une surface critique donnée, Heckbert utilise un algorithme dans le plan 2D de la surface lui permettant de déterminer les arêtes visibles depuis le sommet associé à cette surface critique. L'algorithme utilisé maintient une liste chaînée des intervalles visibles, auxquels on soustrait les intersections avec les polygones en commençant par la plus proche, et en allant vers la plus éloignée. Les portions des intersections visibles depuis le sommet associé à la surface critique correspondent à des discontinuités (cf. figure 1.16).

Lischinski *et al.*, quant à eux, stockent les polygones de la scène au moyen d'un arbre BSP. La construction de l'arbre BSP nécessite un traitement et un stockage supplémentaires. Mais il permet de visiter les polygones en partant du plus proche et en allant vers le plus éloigné, lorsqu'on teste les intersections avec une surface critique donnée. Chaque intersection de la surface

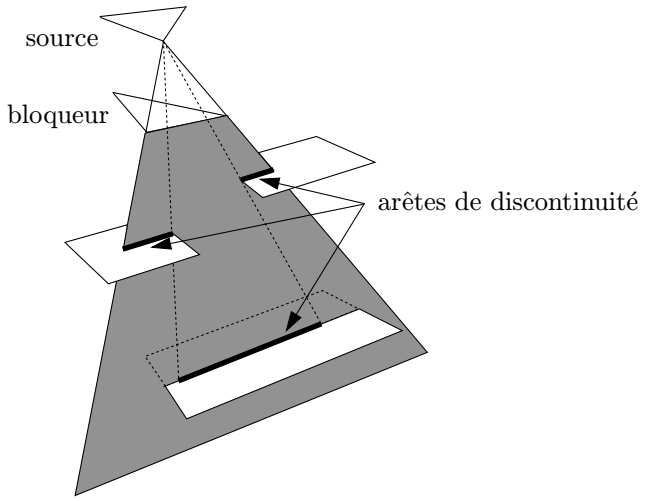


FIG. 1.16 - *Calcul des arêtes de discontinuités dans la méthode de Heckbert.*

critique avec un polygone génère une arête de discontinuité et coupe une portion de la surface critique. Cette portion n'est plus considérée car elle ne peut pas créer de discontinuités sur des polygones situés au dessous du polygone considéré. Quand la surface est entièrement découpée, plus aucun polygone n'a donc besoin d'être testé.

Heckbert et Lischinski *et al.* ignorent les événements EEE. Teller [Tel92] a été le premier à traiter ces événements dans un contexte différent. Dans [Tel92], il décrit un algorithme permettant de calculer la limite de l'anti-pénombre créée par une source polygonale convexe éclairant à travers une séquence de trous polygonaux convexes. L'anti-pénombre est le volume depuis lequel on peut voir seulement une partie de la source. Ce calcul est en fait équivalent au calcul précis de la limite extrême de l'ombre. L'algorithme utilise les coordonnées de Plücker, une représentation 5D des droites, pour transformer les arêtes de la source et des trous en hyperplans. L'enveloppe convexe de ces hyperplans définit un polytope 5D. La limite de l'anti-pénombre est ensuite obtenue en intersectant ce polytope avec une surface quadrique 4D, la quadrique de Plücker. L'utilisation d'une représentation 5D rend cette approche complexe et difficile à généraliser de manière robuste pour des environnements autres que des séquences de trous (comme indiqué dans [TH93]).

Drettakis et Fiume [DF94], et Stewart et Ghali [SG94] ont ensuite présenté les premiers algorithmes permettant de calculer un maillage de discontinuité complet, qui inclut le calcul de tous les événements EV et EEE.

Dans [DF94], Drettakis et Fiume présentent un algorithme permettant de calculer un maillage de discontinuité complet pour des scènes polyédriques et des sources surfaciques. L'algorithme partitionne la scène en un maillage constitué de faces telles que la vue que l'on a de la source dans chaque face est topologiquement identique. Cette vue est représentée par une structure de données appelée «backprojection». Cette partition de la scène en faces de mêmes «backprojections» correspond au maillage de discontinuité complet de la scène. Pour générer un tel maillage, il faut calculer toutes les surfaces EV et EEE qui interagissent avec l'émetteur. Le maillage de discontinuité est construit incrémentalement en considérant successivement les différentes surfaces de

discontinuité liées à un même polygone, avant de passer au suivant. Le nombre d'intersections entre les objets et les surfaces de discontinuité, et le temps nécessaire pour identifier les surfaces de discontinuité qui ne sont pas liées à l'émetteur sont réduits grâce à l'utilisation d'une subdivision spatiale de la scène en grille régulière. Une fois que le maillage de discontinuité est construit, Drettakis et Fiume calculent aussi la «backprojection» de chaque face du maillage incrémentalement, en passant de face en face. Les «backprojections» sont très utiles car elles permettent de calculer les valeurs de radiance dans la pénombre de manière exacte.

Un autre algorithme permettant de calculer le maillage de discontinuité complet est décrit par Stewart et Ghali dans [SG94]. Cet algorithme permet, en utilisant les «backprojections» et la cohérence spatiale, de considérer seulement les triplets d'arêtes qui définissent vraiment une surface de discontinuité. L'algorithme procède en plaçant tous les sommets dans une queue de priorité, en les ordonnant par ordre croissant par rapport à leur distance à la source. Tant que la queue n'est pas vide, on prend le sommet le plus haut. Pour chaque sommet cime ou «peak vertex» (sommet qui n'a pas d'arêtes adjacentes au dessus de lui), on calcule la «backprojection» en ce point avec un algorithme d'élimination des parties cachées. La «backprojection» est aussi calculée pour une des arêtes au dessous du sommet et est propagée aux autres arêtes. Les surfaces de discontinuité générées par le sommet et son arête adjacente sont déterminées au moyen de leurs «backprojections» respectives. Pour chaque surface de discontinuité, on calcule les intersections avec les polygones de la scène, puis on détermine les parties de ces intersections visibles depuis la source, afin de déterminer les discontinuités correspondantes. A chaque fois qu'une surface de discontinuité intersecte une arête, le point d'intersection est ajouté à la queue de priorité. Dans le cas d'un sommet non cime, ou d'un point d'intersection ajouté, les «backprojections» sont propagées et les surfaces de discontinuité correspondantes sont calculées. Chaque surface est intersectée avec l'ensemble des polygones de la scène afin de déterminer les discontinuités correspondantes. Lorsque la queue de priorité est vide, toutes les surfaces de discontinuités EV et EEE ont été considérées.

Cet algorithme nécessite des calculs géométriques plus compliqués, mais garantit un meilleur comportement asymptotique dans le cas le pire que l'algorithme de Drettakis et Fiume [DF94]. Cependant l'algorithme de Drettakis et Fiume présente l'avantage de ne réaliser que des mises à jour locales et d'utiliser des structures de données plus simples. Les différents tests réalisés par Drettakis et Fiume indiquent d'ailleurs que leur algorithme calcule le maillage de discontinuité complet en un temps qui croît linéairement par rapport au nombre d'objets, pour des scènes d'intérieur typiques.

1.4 Techniques de visibilité pour la radiosité

Dans les algorithmes de radiosité, la majeure partie du temps est passée à calculer la visibilité entre deux surfaces de la scène. Différentes méthodes ont été proposées afin d'accélérer ces calculs. Nous présentons quatre approches : une approche spécifique au «ray casting», une approche dite *prudente* («conservative») qui a été introduite pour les scènes architecturales et qui fournit un sur-ensemble d'objets partiellement visibles, une approche approximative multi-échelle, et une approche qui utilise le maillage de discontinuité.

Comme on l'a vu dans le paragraphe 1.2.3, une approche souvent employée consiste à calculer la visibilité en utilisant des méthodes de lancer de rayon (cf. [WEH89, HSA91]). Dans les différentes méthodes, la visibilité est approximée en lançant un certain nombre de rayons.

Il est donc possible d'utiliser pour ce calcul les différentes méthodes d'accélération développées dans le cadre du lancer de rayon. De nombreuses structures de subdivision de l'espace ont été proposées, visant à éliminer très rapidement un grand nombre d'objets. On peut citer notamment les grilles régulières, les quadtrees et les octrees, les Kd-trees, les arbres BSP («Binary Space Partition»), et plus récemment la hiérarchie de grilles uniformes ou HUG (cf. notamment [FvDFH90, WW92, Caz97] pour plus de détails). Le principe pour calculer l'intersection d'un rayon avec une scène, est alors de ne considérer que les objets à l'intérieur des cellules de la subdivision traversées par le rayon.

Dans [HW91], Haines et Wallace présentent un algorithme qui précalcule une liste de bloqueurs au moyen d'une structure hiérarchique. Etant donnée une structure hiérarchique de volumes englobants, ils construisent pour deux volumes englobants donnés, une structure appelée «shaft» (*tube* en français). Un *tube* correspond à l'enveloppe convexe contenant deux volumes englobants donnés. Haines et Wallace calculent ensuite une liste de candidats, constituée des volumes englobants ou des objets qui se trouvent à l'intérieur ou qui intersectent le *tube*. Le coût du lancer de rayon pour déterminer la visibilité entre un émetteur et un récepteur est alors réduit, en considérant uniquement les éléments de la liste de candidats associée.

Teller et Hanrahan [TH93] se placent dans le cas spécifique de scènes architecturales qui sont très structurées, présentent beaucoup d'occlusions, et où la visibilité d'une pièce à l'autre ne se fait qu'à travers des séries de portes ou fenêtres. L'idée est de construire une structure de données qui permet de déterminer facilement l'ensemble des objets potentiellement visibles. Les auteurs montrent notamment qu'une telle structure permet d'accélérer le calcul de radiosité hiérarchique. Les algorithmes présentés subdivisent l'espace, construisent un *graphe de visibilité* dit *prudent* («conservative») pour les polygones de la scène, puis maintiennent le graphe au cours de la subdivision récursive des polygones. Chaque paire de polygones de la scène est classifiée comme totalement invisible, totalement visible ou partiellement visible. La classification est *prudente* : toutes les paires de polygones classifiées visibles ou invisibles le sont effectivement, mais il est possible qu'une paire classifiée partiellement visible, soit totalement visible ou totalement invisible. La construction et le maintien du graphe s'effectuent en plusieurs étapes. La scène est d'abord subdivisée spatialement en cellules polyédriques convexes en utilisant les plans des polygones, à la manière d'un arbre BSP. Ensuite, Teller et Hanrahan établissent la visibilité entre les cellules en la propageant à travers les ouvertures, puis ils déterminent la visibilité entre les polygones appartenant aux parties mutuellement visibles des cellules. Lorsque deux polygones sont classifiés partiellement visibles, un ensemble de polygones interférants (ou bloqueurs) qui sont susceptibles de réduire la visibilité entre ces deux polygones est déterminé. Le calcul de cette liste de bloqueurs est aussi *prudent* : un polygone qui n'interfère pas peut être occasionnellement classifié comme bloqueur mais un bloqueur ne sera jamais oublié. Pour finir, les auteurs expliquent comment maintenir incrémentalement le *graphe de visibilité* lors de la subdivision des polygones, pour pouvoir utiliser cette structure dans le cadre d'un algorithme de radiosité hiérarchique. Une interaction entre parents étant donnée, les listes *prudentes* de bloqueurs pour les fils sont aussi déterminées incrémentalement.

Ces calculs de visibilité ont été réutilisés dans [TFFH94], dans le cadre de très grandes scènes qui ne peuvent être stockées entièrement en mémoire centrale. Teller *et al.* y décrivent des algorithmes permettant de calculer une solution de radiosité hiérarchique pour de telles scènes. Pour rassembler l'énergie provenant de l'environnement sur un regroupement («cluster») R donné, ils chargent en mémoire, les uns après les autres, seulement les regroupements vus par le regroupement R, et les regroupements interférants entre ces regroupements et le regroupement R. Ces

méthodes ont aussi été utilisées dans [Fun96], dans un contexte parallèle.

Une autre approche possible consiste à approximer la visibilité, en la représentant à différents niveaux de précision. Dans [SD95], Sillion et Drettakis présentent un algorithme de calcul de visibilité multi-résolution permettant de réduire le coût du calcul de visibilité dans le cadre d'un algorithme de radiosité basé sur le «clustering». Dans cet article, ils se proposent de pouvoir régler la qualité de l'image souhaitée, tout en n'effectuant que les calculs de visibilité au degré de précision nécessaire pour obtenir cette qualité. On peut en effet souhaiter modéliser de façon précise les ombres des gros objets qui vont avoir un contour net, mais se contenter d'une approximation pour l'ombre d'un amas de petits objets qui aura un contour flou. Dans le cadre du «clustering», la visibilité est approximée par une atténuation volumique moyenne pour chaque regroupement («cluster»). Pour pouvoir régler la précision du calcul de visibilité, il suffit de pouvoir contrôler la descente dans la hiérarchie et de la stopper quand on a une précision suffisante.
Sillion et Drettakis associent à chaque regroupement un coefficient d'extinction exprimant la probabilité qu'un rayon aléatoire soit intercepté à l'intérieur du regroupement. Ils introduisent la notion de *caractéristique* («feature») pour évaluer la qualité d'une image. Les *caractéristiques* correspondent à ce qu'on perçoit quand on regarde une image. Dans le cas de l'éclairage, il s'agit principalement des zones d'ombre et des zones éclairées. Une taille spécifique s de caractérisque étant choisie, il n'est pas nécessaire de considérer le contenu du regroupement pour le calcul de visibilité si ce contenu va produire des caractéristiques plus petites que s. Dans ce cas, la descente dans la hiérarchie est arrêtée et le coefficient d'extinction est utilisé, évitant ainsi de considérer tous les descendants du regroupement.

A l'opposé dans [DS96], Drettakis et Sillion proposent un calcul exact de la visibilité de la source, obtenu au moyen du maillage de discontinuité. Ils présentent un algorithme incorporant les «backprojections» et le maillage de discontinuité dans l'algorithme de radiosité hiérarchique. Les «backprojections» (cf. paragraphe 1.3.4) sont des structures de données permettant de déterminer efficacement et de manière exacte, la partie d'une source visible depuis un point quelconque de la pénombre. Elles permettent donc de déterminer à moindre coût la valeur analytique du facteur de forme point à élément entre tout point de la pénombre et la source. La prise en compte de la visibilité exacte de la source permet d'améliorer grandement la qualité visuelle. Cette approche est limitée à la source principale.

1.5 Radiosité pour les environnements dynamiques

La méthode de radiosité est particulièrement adaptée pour le rendu de scènes d'intérieurs et semble donc bien appropriée pour des applications comme la simulation architecturale réaliste, ou l'étude d'éclairage. De telles applications nécessitent de pouvoir modifier l'environnement (bouger les objets, modifier l'éclairage, changer les propriétés des matériaux, etc.). De tels environnements sont dits *dynamiques*.

La méthode de radiosité est très utile dans ce contexte car elle présente déjà l'avantage d'être indépendante du point de vue : quel que soit l'endroit où on se positionne pour regarder la scène, le calcul de radiosité effectué reste valable. Il reste encore bien évidemment à prendre en compte les modifications de l'environnement, et cela de façon la plus rapide possible.

On peut distinguer deux approches complémentaires : les algorithmes de calcul de radiosité

qui ont été adaptés pour traiter les environnements dynamiques, et l'interpolation entre images-clés. La première approche consiste à fournir une nouvelle solution de radiosité pour chaque nouvelle configuration de la scène. La méthode la plus utilisée, dite méthode *incrémentale*, part d'une solution de radiosité existante et la met à jour de façon incrémentale, en fonction des changements affectant la scène. A l'opposé, les méthodes utilisant la deuxième approche se contentent de calculer une solution de radiosité pour certaines configurations choisies de la scène, puis d'appliquer une technique d'interpolation pour obtenir des images intermédiaires.

Nous nous intéresserons ici tout particulièrement à la première approche sachant que la méthode que nous présentons dans cette thèse rentre dans cette catégorie.

1.5.1 Recalcul d'une solution de radiosité

Une solution, pour recalculer la solution de radiosité après un changement de la scène, serait bien évidemment de recommencer le calcul à zéro. Mais de cette façon, on ne tiendrait pas compte des informations toujours valables (en particulier si le changement est peu important), ce qui ne serait pas du tout efficace. L'idée est en fait d'essayer de discerner ce qui est modifié, en fonction du changement apporté à l'environnement, et d'effectuer ensuite uniquement les recalculs strictement nécessaires. Ces recalculs dépendent en fait du type de changement effectué (cf. figure 1.17). Si on modifie la géométrie de la scène (ajout, destruction, déplacement d'un objet), le maillage va être modifié, il va aussi falloir calculer ou recalculer un certain nombre de facteurs de forme, avant de résoudre à nouveau le système d'équations de radiosité. Par contre si on change les propriétés de réflectance, il suffit seulement de résoudre à nouveau le système d'équations pour obtenir la nouvelle solution de radiosité.

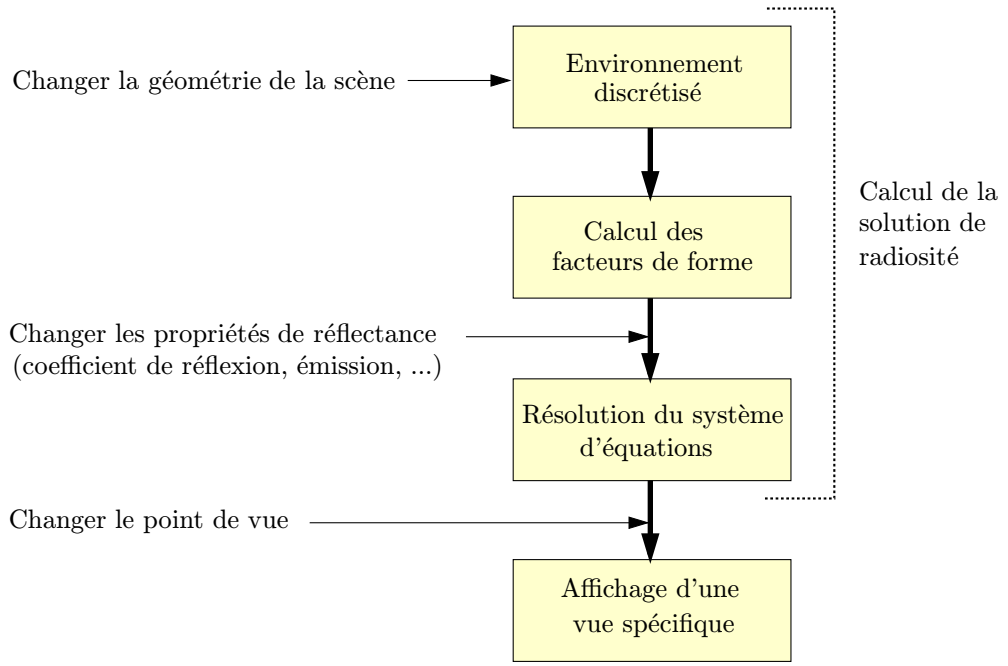


FIG. 1.17 - *Différentes étapes d'un programme utilisant la méthode de radiosité, et recalculs imposés par les différents changements apportés à la scène.*

Un certain nombre de méthodes spécifiques ont été proposées pour les changements de pro-

priétés de réflectance des objets. Les chercheurs se sont cependant beaucoup plus intéressés au problème du calcul de la solution de radiosité dans le cas d'objets en mouvement, sachant que le déplacement d'un objet dans une scène nécessite de recalculer un certain nombre de facteurs de forme et que le calcul des facteurs de forme est l'étape la plus coûteuse de la méthode de radiosité. Nous verrons dans un premier temps les méthodes spécifiques pour les changements de propriétés de réflectance des objets, puis les différentes méthodes proposées dans le cas d'objets en mouvement.

Changements des propriétés de réflectance des objets

Les changements de propriétés de réflectance des objets (terme d'émission, couleur, coefficient de réflexion) sont les changements les plus simples à prendre en compte et les moins coûteux puisqu'ils ne nécessitent pas de recalculer des facteurs de forme.

Ces changements peuvent être pris en compte très facilement et très rapidement en utilisant des méthodes incrémentales telles que celles de Chen [Che90] et George *et al.* [GSG90], qui partent d'une solution de radiosité existante et la mettent à jour de façon incrémentale en redistribuant l'énergie déjà échangée entre les objets. Dans le cas du changement des propriétés de réflectance d'un objet, il suffit de redistribuer de l'énergie depuis les éléments de cet objet afin de prendre en compte ses nouvelles propriétés dans l'éclairage de l'environnement. Les méthodes incrémentales de Chen et de George *et al.* sont décrites de façon plus précise dans le paragraphe suivant qui traite du cas d'objets en mouvement dans une scène.

Dans le cadre d'un environnement où les seules modifications apportées sont des changements des termes d'émission, comme c'est le cas par exemple dans les applications d'étude de l'éclairage, une autre solution consiste à calculer une solution de radiosité séparée pour chaque source de lumière, avec un terme d'émission égal à 1 (cf. [ARB90]). Il suffit ensuite tout simplement de combiner les différentes solutions de radiosité, afin d'obtenir la solution correspondant à un jeu de lampes donné.

Dans la même lignée, Dorsey [Dor93] calcule, dans son système d'étude d'éclairage pour un opéra, de multiples images de scènes complexes depuis un point de vue fixé. Ces différentes images diffèrent seulement par les termes d'émission des lampes. Ensuite, en mettant à l'échelle et en sommant les images, elle obtient des solutions correspondant à différentes conditions d'éclairage, en temps interactif.

Cas d'objets en mouvement

On distingue ici deux approches : une approche où on calcule une solution de radiosité pour chaque image d'une séquence, avec la trajectoire des objets en mouvement connue à l'avance, et une approche dite *incrémentale* où on part d'une solution de radiosité pour une configuration donnée de la scène, que l'on met à jour incrémentalement, en fonction des changements apportés à la scène.

Calcul d'une séquence pour laquelle la trajectoire des objets est connue à l'avance

Dans [BWCG86], Baum *et al.* proposent une première méthode de calcul de radiosité pour des environnements dynamiques où la trajectoire des objets en mouvement est connue à l'avance. L'algorithme présenté utilise la cohérence temporelle afin de produire une séquence d'images de manière efficace. Les auteurs distinguent les objets qui ne bougent pas (objets *statiques*) et les

objets qui se déplacent au cours de l'animation (objets *dynamiques*). La méthode est basée sur le fait que le facteur de forme entre deux objets statiques qui ne sont pas occultés par un objet en mouvement aura une valeur constante au cours de l'animation, et il sera donc inutile de le recalculer.
Chaque objet dynamique est entouré d'un volume englobant l'ensemble de sa trajectoire. L'algorithme se déroule ensuite en deux étapes : une étape de prétraitement qui est exécutée une seule fois pour l'ensemble de l'animation, et une étape de mise à jour qui est effectuée pour chaque image. L'étape de prétraitement permet de calculer les facteurs de forme entre les objets statiques qui ne seront pas occultés par un objet dynamique au cours de l'animation. Ces facteurs de forme sont obtenus en utilisant un hémicube. Pour un élément donné, on projette d'abord l'ensemble des surfaces statiques sur l'hémicube, puis on projette le volume englobant de chaque objet dynamique (cf. figure 1.18(a)). On utilise une deuxième *mémoire-tampon* («buffer») pour stocker les surfaces statiques qui sont cachées par les volumes englobants, lorsqu'on les projette sur l'hémicube (cf. figure 1.18(b)). Un masque est ensuite constitué, regroupant les différentes cellules de l'hémicube recouvertes par un volume englobant donné. Ce masque est utilisé dans la deuxième étape pour déterminer les surfaces effectivement occultées par un objet dynamique donné, dans une image donnée. La deuxième étape consiste à calculer, pour chaque image, les facteurs de forme qui n'ont pas encore été calculés. Il s'agit des facteurs de forme pour les objets dont la visibilité est potentiellement réduite par un objet dynamique (facteurs de forme entre un élément statique donné et les éléments appartenant à la projection du volume englobant dans l'hémicube correspondant), et des facteurs de forme pour les objets dynamiques. Pour déterminer les parties d'un objet dynamique, visibles depuis un élément statique donné, dans une image donnée, on utilise le masque de projection. Pour calculer les facteurs de forme entre cet élément et les parties visibles de l'objet dynamique, il suffit alors de superposer ces parties visibles sur la *mémoire-tampon* («buffer») qui contient les surfaces statiques cachées par le volume englobant de l'objet dynamique (cf. figure 1.18(c)).

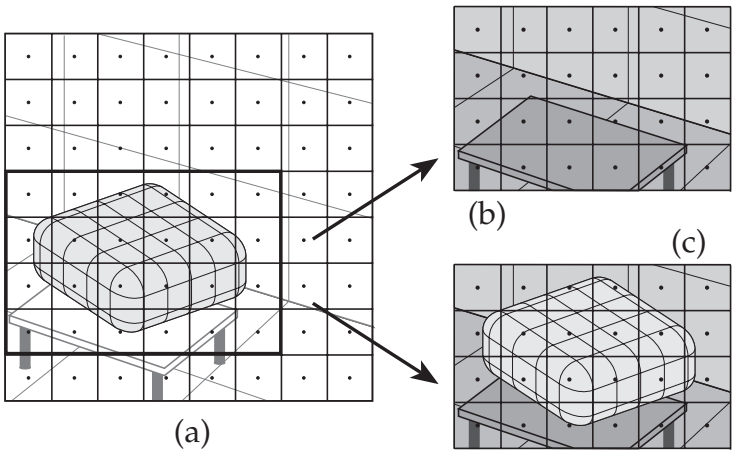


FIG. 1.18 - *Utilisation de l'hémicube pour déterminer les changements de facteurs de forme (schéma issu de [SP94]) : (a) projection des objets statiques, puis du volume englobant de l'objet dynamique sur l'hémicube ; (b) stockage dans un deuxième «buffer» des surfaces statiques cachées par le volume englobant ; (c) superposition des parties visibles de l'objet dynamique sur le deuxième «buffer».*

Dans [BS96], Besuievsky et Sbert présentent une autre méthode permettant de calculer la solution de radiosité pour une séquence d'images avec un objet en mouvement. Cet algorithme est aussi basé sur le fait que la trajectoire des objets est connue à l'avance. La solution de radiosité est calculée en utilisant une approche de Monte Carlo globale. Au lieu de calculer chaque image séparément, Besuievsky et Sbert proposent de calculer la simulation de l'éclairage d'une séquence de n images en un seul processus. Ceci est réalisé en «regroupant» l'ensemble des images dans une unique scène plus complexe. L'objet en mouvement est donc reproduit n fois (autant de fois que le nombre d'images). La simulation de l'éclairage est réalisée en lançant des droites aléatoires dans cette nouvelle scène. Chaque droite intersecte la totalité de la scène, et les intersections sont stockées dans l'ordre, dans une liste appelée liste de visibilité. Chaque liste est partagée en n listes indépendantes (une pour chaque image). On calcule ensuite pour chacune des droites, un tranfert d'énergie indépendant pour chaque image, en utilisant la liste de visibilité associée qui permet de connaître les paires de surfaces mutuellement visibles.

Une deuxième approche utilisée dans le cas d'objets en mouvement est une approche dite *incrémentale*.

Méthodes incrémentales

Les différentes méthodes proposées partent d'une solution de radiosité courante, puis calculent une nouvelle solution à partir de cette solution courante, en essayant de se limiter aux recalculs strictement nécessaires. Les différentes méthodes suivent en fait les progrès des solutions de radiosité : la méthode de radiosité progressive a d'abord été adaptée pour prendre en compte la spécificité des environnements dynamiques, puis la méthode de radiosité hiérarchique, et finalement la méthode de radiosité hiérarchique avec «clustering».

En 1990, Chen [Che90] et George *et al.* [GSG90] présentent deux méthodes similaires, basées sur la méthode de radiosité progressive. La simulation de radiosité est exprimée sous forme d'un processus incrémental où les effets de l'éclairage introduits par le déplacement d'un objet sont calculés en redistribuant l'énergie déjà échangée entre les objets. Dans les deux algorithmes, on déplace un objet de la scène en l'enlevant d'abord de la scène, puis en le rajoutant dans sa nouvelle position. Lorsqu'un objet est ajouté dans la scène, il faut redistribuer l'énergie qui a déjà été propagée dans l'environnement, afin de tenir compte de ce nouvel objet. Les éléments de l'environnement qui voient le nouvel objet, doivent lancer de l'énergie «positive» vers le nouvel objet, afin qu'il reçoive sa part d'énergie. Les éléments dans l'ombre du nouvel objet doivent recevoir moins d'énergie que dans la solution de radiosité précédente. Ceci est réalisé en lançant de l'énergie «négative» vers les éléments qui sont partiellement ou complètement dans l'ombre du nouvel objet (cf. figure 1.19). Lorsqu'on enlève un objet de l'environnement, l'inverse se produit. En résumé, pour chaque élément qui a émis de l'énergie, on procède en enlevant sa contribution d'énergie en se basant sur l'ancienne géométrie de la scène, et on relance l'énergie en se basant sur la nouvelle géométrie.
Les éléments affectés par la redistribution d'énergie sont en fait très localisés : il s'agit des éléments sur l'objet en mouvement et des éléments dont la visibilité est réduite par l'objet en mouvement. Ils correspondent en fait aux éléments pour lesquels il faut recalculer un facteur de forme. Afin de réduire le nombre d'éléments considérés, Chen utilise un hémicube (un peu à la manière de Baum *et al.* [BWCG86]) et ne considère que la fraction de l'hémicube contenant la projection de l'objet en mouvement. George *et al.*, qui calculent les facteurs de forme au moyen

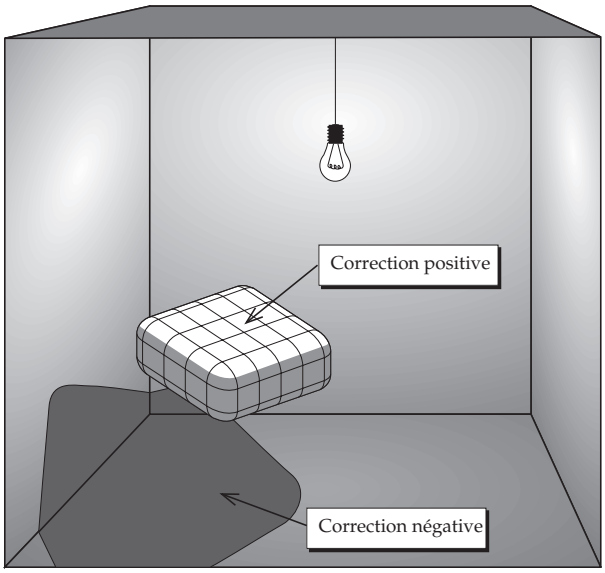


FIG. 1.19 - *Redistribution d'énergie liée à l'ajout d'un objet dans la scène (schéma issu de [SP94]).*

du «ray casting», réduisent le nombre d'éléments considérés en utilisant un volume d'ombre («shadow volume») qui permet d'éliminer les éléments qui ne peuvent pas nécessiter un recalcul de facteur de forme (cf. figure 1.20).
La vitesse à laquelle la nouvelle solution converge dépend de l'ordre dans lequel on effectue les étapes de redistribution et de propagation d'énergie (l'étape de propagation correspondant à l'étape standard de la méthode de radiosité progressive qui consiste à lancer dans l'environnement l'énergie de l'élément qui va contribuer le plus à l'éclairage de l'environnement, cf. paragraphe 1.1.2). Chen [Che90] et George *et al.* [GSG90] proposent différentes heuristiques afin de déterminer l'élément qui doit redistribuer ou propager son énergie. Ils présentent aussi des améliorations de l'algorithme initial permettant, en gardant un historique des changements effectués, d'enchaîner successivement plusieurs changements géométriques sans avoir besoin d'attendre que la solution converge.

Müller et Schöffel [MS94] ont proposé une amélioration des méthodes incrémentales de Chen [Che90] et de George *et al.* [GSG90]. L'algorithme développé est basé sur le fait que la plupart des informations nécessaires pour la repropagation de l'énergie après une modification de la scène, ont déjà été déterminées au cours du calcul de la solution de radiosité existante. Müller et Schöffel utilisent une structure de données qui permet de stocker, pour une itération donnée, les facteurs de forme entre un élément émetteur et les éléments récepteurs, si ils sont mutuellement visibles, ou bien l'identificateur de l'objet qui obstrue la visibilité s'il y a occlusion. Ils stockent aussi, dans une liste, l'identificateur de l'élément qui a lancé son énergie pour chacune des itérations de la méthode de radiosité progressive, et la quantité d'énergie lancée dans l'environnement par cet élément. On peut ainsi, à partir d'une solution de radiosité existante, répéter seulement les itérations affectées par un changement survenant dans l'environnement.

En 1994, Forsyth *et al.* [FYT94] décrivent la première méthode basée sur la méthode de radiosité hiérarchique [HSA91], qui permet de déterminer la solution de radiosité pour un en-

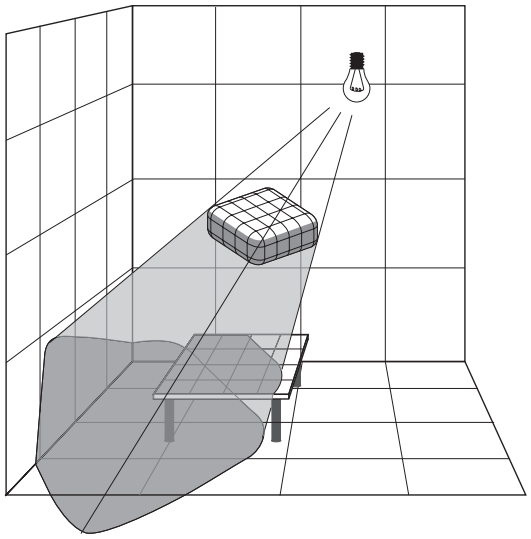


FIG. 1.20 - *Utilisation d'un «shadow volume» pour déterminer les éléments affectés par la redistribution (schéma issu de [SP94]).*

vironnement avec des objets qui se déplacent. L'algorithme proposé consiste à commencer par calculer la hiérarchie de liens ainsi qu'une première solution de radiosité hiérarchique, pour une première configuration de la scène ; puis à mettre à jour la hiérarchie à mesure qu'un objet se déplace. Une technique itérative est ensuite utilisée pour résoudre le système linéaire d'équations résultant. Le maintien de la hiérarchie est basé sur le fait que, lorsqu'un objet se déplace, seulement trois événements différents peuvent se produire à un instant donné, pour un lien donné. Le lien peut se retrouver occulté par l'objet en mouvement, ou bien deux éléments peuvent se retrouver suffisamment loin pour qu'il ne soit plus nécessaire de conserver le lien correspondant - on peut donc remonter dans la hiérarchie et considérer des éléments plus grands (on dit dans ce cas que le lien est remonté dans la hiérarchie) -. Ou inversement, deux objets peuvent se retrouver trop près si bien que le niveau de représentation courant ne suffit plus et il faut subdiviser les éléments (on dit dans ce cas que le lien est descendu dans la hiérarchie).
Il est important de pouvoir prédire efficacement quels liens auront leurs facteurs de forme modifiés par des occlusions, pour éviter d'examiner tous les liens à chaque étape au cours du déplacement. Forsyth *et al.* distinguent les liens *statiques* (liens entre deux éléments sur des objets statiques) et les liens *dynamiques* (liens reliés à un élément sur l'objet dynamique). L'implémentation courante se limite en fait au cas des scènes où les liens statiques ne sont pas occultés. Afin de limiter le nombre de liens dynamiques considérés à chaque étape au cours du déplacement, Forsyth *et al.* font de l'extrapolation linéaire. Les calculs de facteurs de forme et d'occlusion sont réalisés seulement pour certaines images. Pour les images intermédiaires, ils sont extrapolés.

Shaw [Sha94] a aussi appliqué la méthode de radiosité hiérarchique de Hanrahan *et al.* [HSA91] aux environnements dynamiques. Dans [Sha94], elle propose deux algorithmes permettant de simplifier un maillage qui devient trop raffiné après un changement appliqué à la scène. Elle présente aussi une méthode permettant de limiter le nombre de liens considérés lors de la mise à jour après le déplacement d'un objet.
Afin de pouvoir réduire la précision du maillage lorsqu'on diminue l'émission d'une lampe, ou lorsqu'on assombrit la couleur d'une surface, Shaw stocke des liens inactifs appelés *liens fan-*

tômes («ghost links») qui permettent de sauvegarder les informations de visibilité et de facteur de forme à chaque étape du raffinement du maillage. Avant de subdiviser tout élément, un *lien fantôme* est créé entre les deux éléments considérés. Dans ce lien sont stockées les informations de visibilité et de facteur de forme entre les deux éléments considérés. Le lien est inactif car il ne transporte pas d'énergie pour la solution de radiosité courante, mais il pourra éventuellement être restauré et utilisé après simplification du maillage. De façon similaire, afin de pouvoir simplifier le maillage au niveau de l'ancienne zone d'ombre de l'objet dynamique lorsqu'il s'est déplacé, Shaw utilise des liens appelés *liens d'ombre* («shadow links»). Ces liens sont créés entre un élément de la source de lumière et un élément sur un récepteur lorsque la visibilité partielle cause une diminution d'énergie suffisante pour passer au dessous du seuil limite d'énergie, stoppant ainsi la subdivision. L'élément dans l'ombre continue ensuite bien évidemment à être subdivisé jusqu'à la limite d'aire, en suivant le processus normal de l'algorithme de radiosité hiérarchique. Les *liens d'ombre* stockent, outre les informations de visibilité et de facteur de forme, une liste des bloqueurs qui réduisent la visibilité entre les deux éléments considérés.
Enfin, afin de limiter le nombre de liens considérés pour le recalcul des facteurs de forme dans le cas d'un objet en mouvement, Shaw utilise un *volume de déplacement* («motion volume») qui contient la région où se produit le mouvement de l'objet (dans le même esprit que Baum *et al.* [BWCG86]). Elle considère alors comme affectés par le déplacement de l'objet dynamique, seulement les liens qui intersectent ce volume.

En 1997, Drettakis et Sillion [DS97] présentent un algorithme basé sur la méthode de radiosité hiérarchique avec «clustering». Cet algorithme permet de fournir une mise à jour de la solution de radiosité en temps interactif, lorsqu'un objet se déplace dans une scène de taille modérée. La hiérarchie de liens entre éléments («clusters» ou surfaces) est augmentée par des «shafts» [HW91] (cf. paragraphe 1.4). Un «shaft» représente ici, pour un lien donné, l'ensemble des droites intersectant les deux éléments liés. La hiérarchie de l'espace des droites de la scène ainsi obtenue permet d'identifier rapidement les liens modifiés lorsqu'un objet se déplace dans la scène, en descendant hiérarchiquement dans l'espace des droites. Les liens dont les «shafts» sont intersectés par la boîte englobante de l'objet en mouvement, avant ou après son déplacement, sont considérés comme potentiellement changés. Pour ces liens, il est nécessaire de recalculer de nouveaux facteurs de forme, puisque la visibilité par rapport à l'objet dynamique est susceptible d'avoir changé. La hiérarchie de l'espace des droites permet aussi en même temps de supprimer les subdivisions trop fines des objets qui sont devenues inutiles après le déplacement de l'objet dynamique (par exemple aux limites de l'ancienne zone d'ombre de l'objet dynamique, après son déplacement). Grâce à cette hiérarchie, on peut aussi marquer les parties de la hiérarchie qui sont modifiées et donc identifier les parties du système d'équations qui changent, ce qui permet alors de résoudre très rapidement le système d'équations modifié. La nouvelle méthode présentée permet aussi à l'utilisateur d'effectuer un contrôle du temps souhaité pour le calcul d'une image donnée, en limitant la descente dans la hiérarchie de l'espace des droites en fonction du temps attribué pour cette image.

1.5.2 Méthodes d'interpolation

Une deuxième approche possible, dans le cas des environnements dynamiques avec des objets en mouvement, consiste à calculer une solution d'éclairage pour certaines configurations choisies de la scène, ce qui donne un certain nombre d'images-clés ; puis à appliquer une technique d'interpolation pour obtenir des images intermédiaires. Nous présentons ici deux méthodes utilisant

la méthode de radiosité pour calculer des images-clés.

Dans [CW93a], Chen et Williams présentent une méthode pour générer rapidement des images intermédiaires à partir d'images-clés calculées pour des points de vue proches. Une nouvelle image, pour un point de vue intermédiaire, est obtenue en faisant une interpolation («morphing») de deux images adjacentes. La méthode présentée utilise la position et l'orientation de la caméra, ainsi que la carte de profondeur associée à chaque image (stockant pour chaque pixel, la distance à l'objet visible) pour déterminer automatiquement une correspondance pixel par pixel entre les images considérées. La correspondance entre deux images-clés successives est précalculée et stockée. Au moyen des différentes correspondances, on peut ensuite interpoler les pixels pour créer des images intermédiaires.

Nimeroff *et al.* [NDR95] vont encore plus loin dans ce sens, en interpolant aussi les solutions de radiosité et plus seulement les images. Dans [NDR95], ils présentent une méthode permettant de calculer et de stocker efficacement les effets de l'éclairage global pour des environnements complexes animés (où le point de vue et les objets se déplacent). Le système présenté génère rapidement des séquences d'images pour tout chemin dans l'espace de vue, permettant ainsi à l'utilisateur de se promener librement dans l'environnement. Il est basé sur l'utilisation d'images auxquelles on rajoute une carte de profondeur («range-images», stockant pour chaque pixel la distance à l'objet visible, et la radiance). L'illumination globale est ainsi stockée sous forme de séquences d'images (plus cartes de profondeur) dans le temps, calculées pour des points de vue clés qui couvrent l'espace de vue. Nimeroff *et al.* exploitent la cohérence spatiale et temporelle en calculant l'éclairage direct et indirect séparément, à la fois dans l'espace et dans le temps. L'éclairage indirect est calculé au moyen d'un algorithme de radiosité hiérarchique [HSA91], pour des points espacés dans l'environnement, et pour différents pas de temps. On effectue ensuite une interpolation entre les différentes solutions obtenues, pour calculer l'éclairage indirect pour des séries d'images dans le temps, pour chaque point de vue clé. Ces images constituent des images-clés. La séquence d'images correspondant à un chemin donné dans l'espace de vue est ensuite générée en interpolant les images-clés. Dans [NDR95], Nimeroff *et al.* présentent aussi des algorithmes permettant de déterminer les positions des points de vue clés, ainsi que les pas de temps requis pour représenter correctement les effets dus au mouvement des objets.

1.5.3 Conclusion

Les différentes méthodes proposées permettent d'accélérer grandement le calcul d'une solution de radiosité dans le cas d'environnements dynamiques. Elles ne permettent cependant toujours pas d'obtenir un calcul en temps interactif, à moins de privilégier le temps de calcul au détriment de la qualité. Un problème important qu'il reste à résoudre est l'identification précise et efficace des facteurs de forme qui doivent vraiment être recalculés. En effet, les différentes approches proposées jusqu'à présent ne donnent qu'un sur-ensemble des facteurs de forme à recalculer. Or, le calcul des facteurs de forme constitue l'étape la plus coûteuse de la méthode de radiosité.

Nous introduisons maintenant le complexe de visibilité, qui est la structure de visibilité que nous avons utilisée dans cette thèse.

1.6 Le complexe de visibilité

1.6.1 Introduction

Les problèmes de visibilité dans le plan ont donné lieu à de nombreux travaux en géométrie algorithmique. Une structure bien connue est le *graphe de visibilité*. Pour une scène d'objets convexes dans le plan, il est constitué des bitangentes communes aux objets qui intersectent aucun objet de la scène. Pour une scène polygonale, il est constitué de l'ensemble des segments reliant deux sommets de polygones mutuellement visibles. Le graphe de visibilité cependant ne code pas assez d'informations pour permettre des requêtes de visibilité globale telles que maintenir une vue autour d'un point par exemple. Pour faire face à ce problème, une nouvelle structure de données, le *complexe de visibilité*, a été introduite par Pocchiola et Vegter [PV93b], comme une extension du graphe de visibilité. Le complexe de visibilité permet de représenter l'ensemble des relations de visibilité entre différents objets dans le plan. Il a d'abord été défini pour des objets convexes (c'est à dire des objets de type cercle, ellipse, etc.) [PV93b, Riv93] puis étendu aux scènes polygonales [Riv95].

Nous introduisons ici le complexe de visibilité. Pour plus de détails, vous pouvez vous référer à [DP95, Dur95, Riv95, PV96, Riv97]. Nous présentons les deux cas : cas des objets convexes et cas des polygones, qui sont en fait assez similaires. Dans le cas des scènes polygonales, les polygones considérés peuvent être indifféremment concaves ou convexes, et peuvent avoir des trous (cf. figure 1.21). Les sommets d'un polygone sont orientés de telle sorte que le polygone soit localement à gauche de deux sommets consécutifs (cf. [Riv97]).

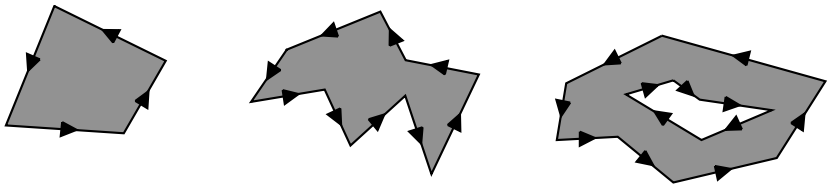


FIG. 1.21 - *Exemples de polygones.*

1.6.2 Définition

Le *complexe de visibilité* est la partition de l'ensemble des segments libres maximaux d'une scène 2D selon les objets qu'ils touchent (donc en fonction de leur visibilité).

Un *segment libre maximal* est un segment de longueur maximale qui ne coupe pas l'intérieur des objets de la scène. Ses extrémités reposent donc sur le contour des objets ou bien sont à l'infini (cf. figure 1.22). Un segment libre maximal peut en fait être vu comme un rayon qui voit dans les deux sens.

Le complexe de visibilité est constitué de trois types d'éléments nommés : *faces, arêtes, sommets.*

- Les *faces* sont des composantes 2D : une face correspond à une composante connexe de segments libres maximaux qui touchent la même paire d'objets, c'est à dire qui «voient» les deux mêmes objets. Une face associée à deux objets convexes O_l et O_r, étiquetée (O_l, O_r), correspond à l'ensemble des segments libres maximaux allant de l'objet O_l à l'objet O_r

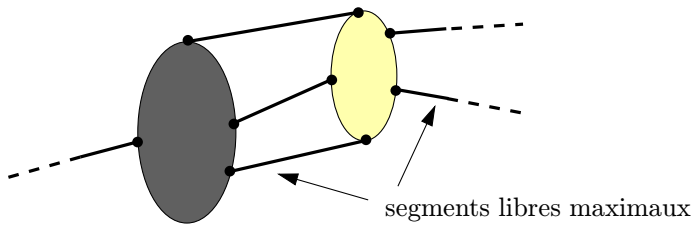


FIG. 1.22 - *Exemple de segments libres maximaux.*

sans couper aucun autre objet (cf. figure 1.23 (a)). Dans le cas des polygones, l'objet élémentaire considéré est l'arête de polygone. Une face est donc associée à deux arêtes de polygones et correspond à l'ensemble des segments libres maximaux allant d'une arête de polygone C_l à une arête de polygone C_r sans couper aucune autre arête de polygone (cf. figure 1.23 (b)).

– Les *arêtes* sont des composantes 1D : dans le cas des objets convexes, une arête correspond à une composante connexe de segments libres maximaux tangents à un objet et touchant deux autres objets (cf. figure 1.23 (a)) ; dans le cas des polygones, elle correspond à la composante connexe des segments libres maximaux passant par un sommet de polygone donné et touchant deux autres arêtes de polygones (cf. figure 1.23 (b)).

– Les *sommets* sont des composantes 0D : dans le cas des objets convexes, un sommet correspond à un segment libre maximal tangent à deux objets de la scène (et touchant deux autres objets à ses extrémités) (cf. figure 1.23 (a)) ; dans le cas des polygones, il correspond à un segment libre maximal passant par deux sommets de polygones donnés (cf. figure 1.23 (b)).
Ce type de segment constitue une limite de visibilité.

1.6.3 Représentation dans un espace dual

Afin d'aider à visualiser les éléments du complexe, nous considérons une *transformation duale* qui à toute droite de la scène associe un point dans un espace dual. Il est en effet plus facile de manipuler des points que des droites.

Nous traitons dans un premier temps le cas des objets convexes. Nous verrons par la suite le cas spécifique des polygones.

Cas des objets convexes

Nous considérons ici *la transformation duale* qui à toute droite D d'équation polaire : $y \cos\theta - x \sin\theta - u = 0$ associe le point de coordonnées (θ, u) dans l'espace dual. L'angle θ correspond dans la scène, à l'angle de la droite D par rapport à l'axe des abscisses et u à sa distance algébrique à l'origine (cf. figure 1.24). Cette relation de dualité que nous nommerons *dualité* (θ, u) est une des dualités classiques.

Tout objet convexe O admet pour une direction θ donnée deux tangentes de distances algébriques à l'origine $\mu(\theta)$ et $\lambda(\theta)$ avec $\mu(\theta) < \lambda(\theta)$. Dans l'espace dual (θ, u), ces tangentes sont

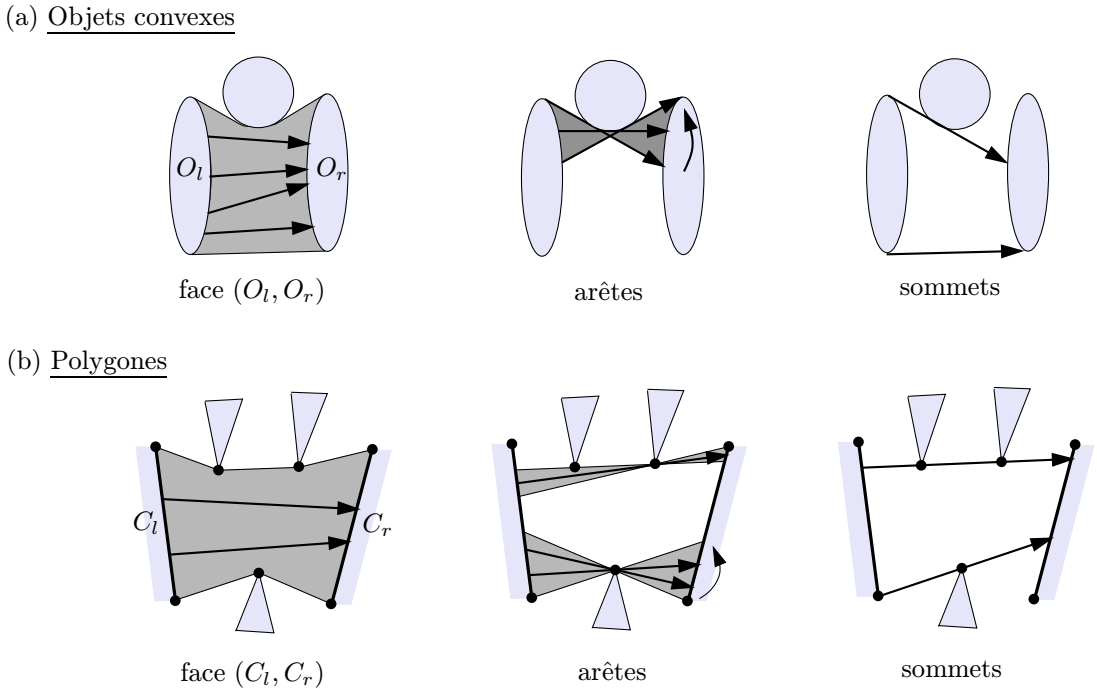


FIG. 1.23 - *Eléments du complexe de visibilité.*

transformées en deux points $(\theta, \mu(\theta))$ et $(\theta, \lambda(\theta))$, et lorsque θ varie, ces points décrivent deux courbes appelées respectivement courbes de tangence μ et λ (cf. figure 1.25).

Toute droite dans la scène de direction θ et de distance algébrique à l'origine u telle que $\mu(\theta) < u < \lambda(\theta)$ intersecte l'objet O. De même, dans l'espace dual, un point de coordonnées (θ, u) compris entre les deux courbes de tangence μ et λ d'un objet correspond à une droite dans la scène qui intersecte cet objet (cf. figures 1.25 et 1.26).

Les courbes λ et μ associées à un objet donné définissent ainsi dans l'espace dual une bande qui correspond aux droites qui intersectent cet objet (zone comprise entre les deux courbes λ_i et μ_i pour le cercle O_i, dans l'exemple de la figure 1.26). De même, l'intersection des bandes associées à deux objets va définir une zone dans l'espace dual correspondant aux droites qui

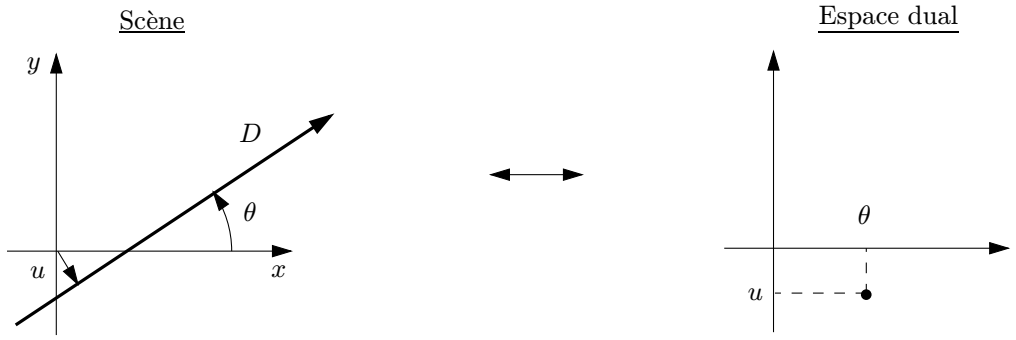


FIG. 1.24 - *Une droite et son point dual dans la dualité* (θ, u).

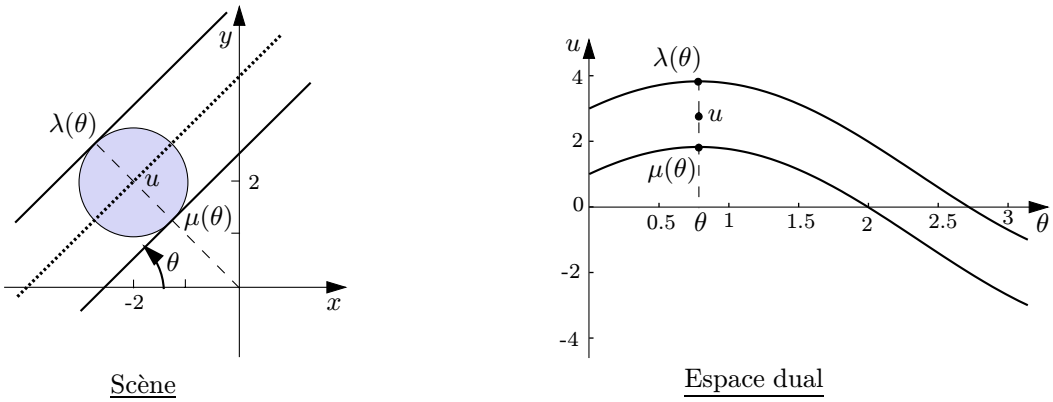


FIG. 1.25 - *Courbes de tangence λ et μ d'un objet convexe.*

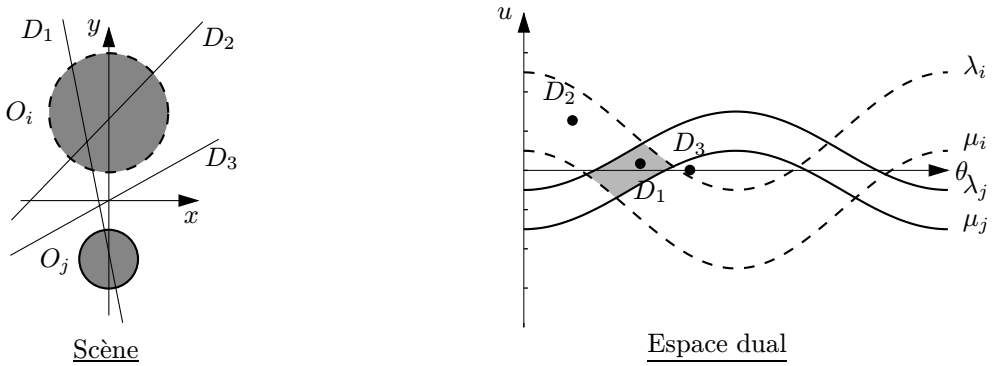


FIG. 1.26 - *Deux objets et leurs courbes de tangence associées.*

intersectent ces deux objets (zone grisée pour les deux objets O_i et O_j dans l'exemple de la figure 1.26).

En traçant les courbes λ et μ pour tout objet d'une scène, on obtient donc une partition de l'espace dual en composantes connexes correspondant aux droites qui intersectent les mêmes objets. Cette partition est appelée *l'arrangement dual*. Cependant, dans le cadre du complexe de visibilité, on ne considère pas des droites mais des segments libres maximaux. Cela revient donc à rajouter une pseudo-dimension de plus, sachant qu'à une même droite peut correspondre plusieurs segments. La dimension supplémentaire ne sert qu'à dissocier les points duaux représentant les segments partageant la même droite support. La figure 1.27 qui montre un exemple d'arrangement dual et de complexe de visibilité, met bien en évidence la différence entre ces deux structures.

Les faces du complexe de visibilité correspondent à des ensembles de segments libres maximaux dont les extrémités sont sur les deux mêmes objets. Elles ne tiennent compte que des objets qui se trouvent entre deux objets donnés et on ne s'intéresse pas aux éléments de visibilité derrière un objet. Une face associée à deux objets O_l et O_r correspond donc à l'ensemble des droites qui intersectent ces deux objets sans intersecter aucun autre objet de la scène se trouvant entre O_l et O_r. Une arête du complexe associée à un objet O correspond, dans le cas des objets convexes, à un ensemble de segments tangents à cet objet et touchant deux autres

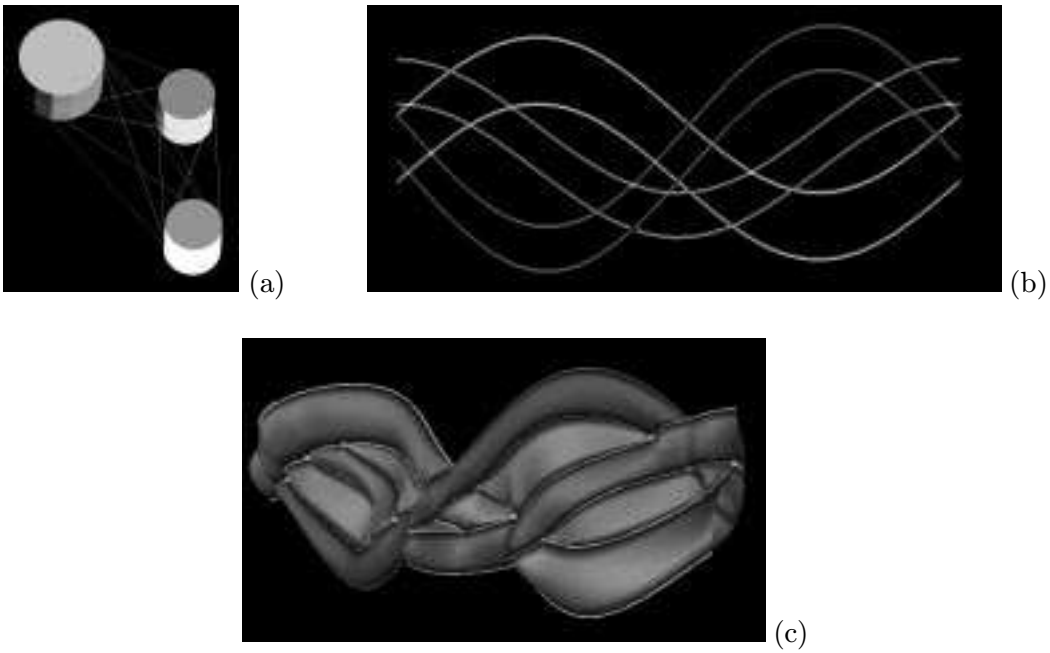


FIG. 1.27 - *(a) Scène ; (b) Arrangement dual de la scène ; (c) Complexe de visibilité de la scène.*

objets. Un sommet du complexe correspond à un segment tangent à deux objets O_l et O_r de la scène.

D'où les correspondances suivantes dans l'espace dual :

- Un *sommet* du complexe de visibilité correspond, dans l'espace dual, à l'intersection de deux courbes de tangence associées à deux objets donnés, sachant qu'une courbe de tangence associée à un objet correspond aux droites tangentes à cet objet dans la scène.
- Une *arête* associée à un objet O correspond, dans l'espace dual, à une partie d'une courbe de tangence de l'objet O comprise entre deux sommets.
- Une *face* associée à deux objets O_l et O_r donnés correspond à la zone des points, dans l'espace dual, comprise à la fois dans la bande associée à O_l et dans la bande associée à O_r, mais non incluse dans les bandes des objets se trouvant entre O_l et O_r dans la scène (cf. figure 1.28). Une *face* est donc une région connexe délimitée par des arêtes.

La figure 1.29 illustre ces différentes correspondances. Elle permet aussi de voir plus en détail la structure générale d'une face du complexe de visibilité. Une face est constituée de deux chaînes d'arêtes (une chaîne supérieure d'arêtes et une chaîne inférieure d'arêtes) qui sont reliées par deux sommets caractéristiques (le premier et le dernier sommet de la face). Elle est associée à deux objets O_l et O_r. La chaîne supérieure est constituée éventuellement d'arêtes de type λ (arêtes qui correspondent à des parties d'une courbe de tangence λ) associées à O_l, puis d'une série d'arêtes de type μ (arêtes correspondant à des parties de courbes de tangence μ) associées à des objets qui interfèrent, puis d'arêtes de type λ associées à l'objet O_r. La chaîne inférieure d'arêtes est constituée éventuellement d'arêtes de type μ associées à O_r, puis d'une série d'arêtes de type λ associées à des objets qui interfèrent, puis d'arêtes de type μ associées à l'objet O_l.

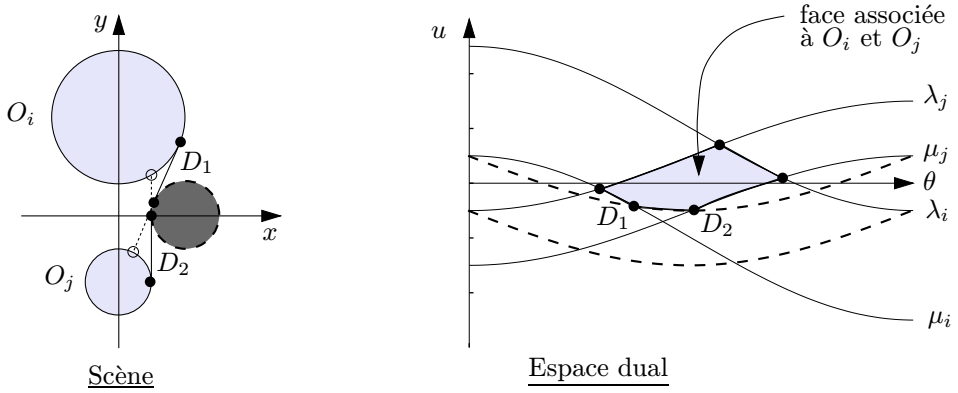


FIG. 1.28 - *Scène composée de trois objets et face associée à O_i et O_j.*

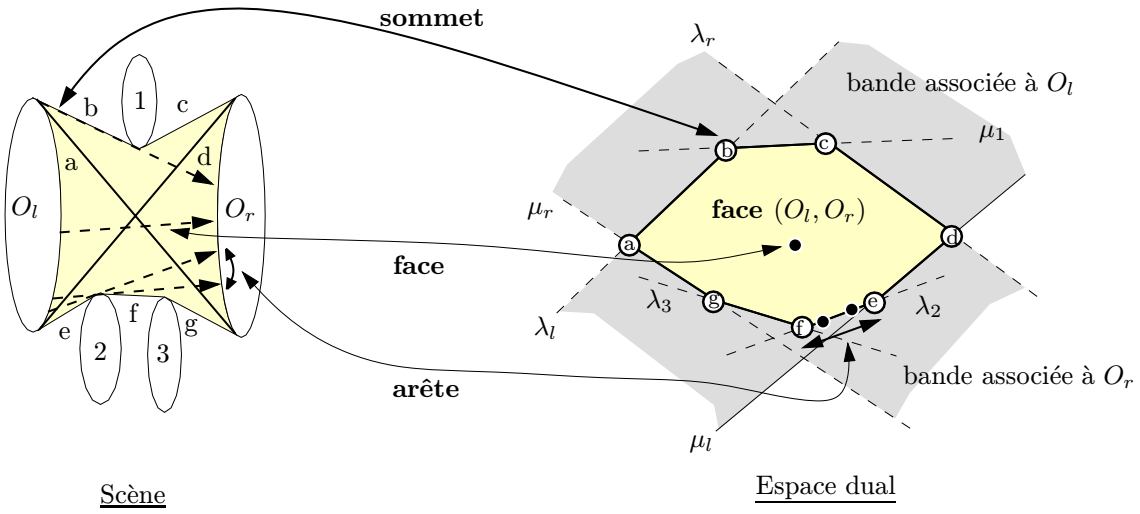


FIG. 1.29 - *Correspondance entre la scène et l'espace dual.*

Cas des polygones

Dans le cas des polygones, il est possible d'utiliser une autre dualité que nous nommerons dualité (a, b). Cette dualité consiste à considérer la relation qui à une droite d'équation $y = ax - b$ (respectivement un point de coordonnées $(a, -b)$) associe le point de coordonnées (a, b) (respectivement la droite d'équation $y = ax + b$).

Dans le cas spécifique des polygones, les objets élémentaires considérés sont les arêtes de polygones. Soient p_l et p_r les deux sommets extrémités d'une arête de polygone C. En dualité (a, b), l'ensemble des droites qui passent par un point dans la scène est représenté par une droite dans l'espace dual. L'ensemble des droites passant par chacun des sommets de l'arête C dans la scène correspond donc à une droite dans l'espace dual (a, b).

On peut alors faire pour les arêtes de polygones, un raisonnement similaire à celui tenu pour les objets convexes. L'ensemble des droites qui intersectent une arête de polygone donnée dans la scène correspond dans l'espace dual (a, b) à la zone de points comprise entre les droites

associées aux deux extrémités de cette arête de polygone. L'intersection, dans l'espace dual, des deux zones comprises entre les droites associées aux extrémités de deux arêtes de polygones données définit une région dans l'espace dual correspondant aux droites qui intersectent ces deux arêtes dans la scène. En traçant l'ensemble des droites associées aux extrémités de toutes les arêtes des polygones de la scène, on obtient ce qu'on appelle *l'arrangement dual*. L'arrangement dual correspond ici à une partition de l'espace dual en composantes connexes correspondant aux droites intersectant les mêmes arêtes de polygones. Les correspondances entre la scène et l'espace dual pour les différents éléments du complexe, qui ont été établies précédemment dans le cas des objets convexes, restent valables :

- Un *sommet* du complexe de visibilité d'une scène polygonale correspond, dans l'espace dual, à l'intersection de deux droites associées à deux sommets extrémités d'arêtes de polygones, sachant qu'une droite dans l'espace dual représente l'ensemble des droites passant par un point donné de la scène.

- Une *arête* associée à un sommet extrémité p d'arête de polygone correspond, dans l'espace dual, à un morceau de la droite associée à p, compris entre deux sommets.

- Une *face* associée à deux arêtes de polygones C_l et C_r données correspond dans l'espace dual à l'intersection des zones comprises entre les droites associées aux extrémités de C_l et C_r, moins les zones comprises entre les droites associées aux extrémités des arêtes de polygones se trouvant entre C_l et C_r dans la scène.

La figure 1.30 illustre ces correspondances. Elle permet aussi de voir un exemple de face associée à deux arêtes de polygones C_l et C_r. Sur cette figure, la droite dans l'espace dual qui représente l'ensemble des droites passant par un sommet de polygone p de la scène est nommée p^*. On constate que la structure d'une face est similaire à celle dans le cas des objets convexes. Une face est constituée de deux chaînes d'arêtes. La chaîne supérieure d'arêtes peut être décomposée en trois sous-chaînes : les arêtes associées à l'extrémité supérieure de l'arête de polygone C_l, les arêtes associées à des sommets de polygones qui interfèrent «par le haut» entre C_l et C_r, les arêtes associées à l'extrémité supérieure de l'arête de polygone C_r. La chaîne inférieure d'arêtes peut aussi être décomposée en trois sous-chaînes : les arêtes associées à l'extrémité inférieure de C_r, les arêtes associées à des sommets de polygones qui interfèrent «par le bas» entre C_l et C_r, les arêtes associées à l'extrémité inférieure de C_l. Certaines sous-chaînes des chaînes supérieure et inférieure d'arêtes peuvent manquer.

La figure 1.31 montre une vue du complexe aux environs d'un de ses sommets. Elle permet aussi de voir plus clairement les relations d'incidence entre les éléments du complexe.

Remarque : Bien évidemment, il est aussi possible d'utiliser la dualité (θ, u) dans le cas des polygones. Cependant, la dualité (a, b) sera préférée à la dualité (θ, u) dans le cas spécifique des polygones, sachant qu'il est plus simple de manipuler des droites que des courbes sinusoïdales dans l'espace dual. En dualité (a, b), l'arrangement dual correspond en effet à un arrangement de droites dans le plan, et les faces du complexe sont délimitées par des portions de droites, au lieu de courbes sinusoïdales comme dans le cas de la dualité (θ, u).
L'annexe A donne de plus amples informations sur la différence entre les dualités (a, b) et (θ, u).

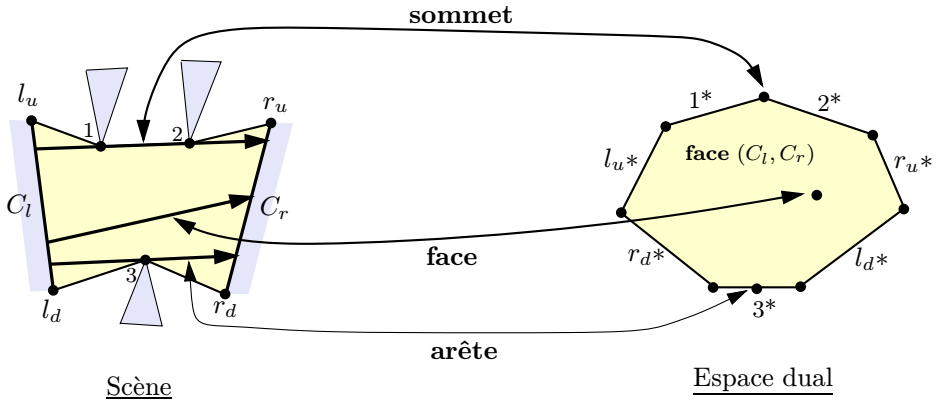


FIG. 1.30 - *Correspondance entre la scène et l'espace dual.*

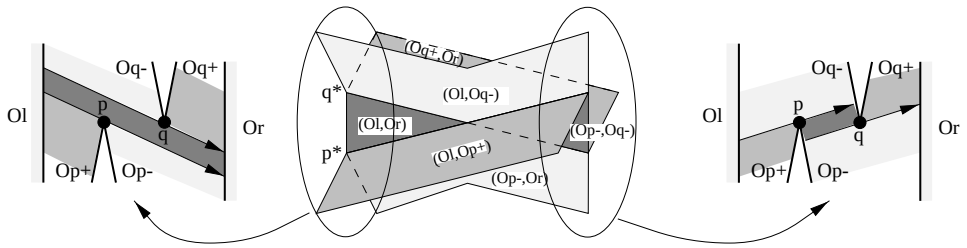


FIG. 1.31 - *Complexe de visibilité aux environs d'un sommet.*

1.6.4 Construction

Dans les différents algorithmes qui ont été proposés, la construction du complexe est réalisée par un balayage de ses sommets. Quand un sommet est balayé, les relations d'incidence entre les arêtes et les faces doivent être mises à jour.

Le premier algorithme de construction qui a été implémenté a été proposé par Pocchiola et Vegter [PV93a]. Cet algorithme sensible à la sortie permet de construire le complexe de visibilité pour des objets convexes, par un balayage selon une droite verticale, en temps $\mathcal{O}(m \log n)$, où n est le nombre d'objets et m le nombre de sommets du complexe. On trouvera les détails de l'implémentation de cet algorithme dans [Riv93]. L'algorithme maintient un *graphe auxiliaire* qui est une coupe du complexe de visibilité à θ constant. Pour une direction θ donnée, on considère l'ensemble des segments libres maximaux d'angle θ. Les segments tangents aux objets découpent l'espace libre de la scène en faces (cf. figure 1.32). Par dualité (transformation points $\leftrightarrow$ droites), les segments tangents à un objet deviennent des sommets et les segments appartenant à une face décrivent une arête. La structure ainsi définie correspond au *graphe auxiliaire* pour une direction θ donnée.

Le complexe est balayé pour θ allant de 0 à π en maintenant le graphe auxiliaire. Il y a changement de topologie uniquement au passage des sommets du complexe. Pour chaque sommet, il faut mettre à jour les relations d'incidence à la fois pour le graphe auxiliaire et pour le complexe, et tester l'existence de nouveaux sommets. La mise à jour des incidences se fait en temps constant pour chaque sommet, mais le maintien d'une queue de priorité des sommets à

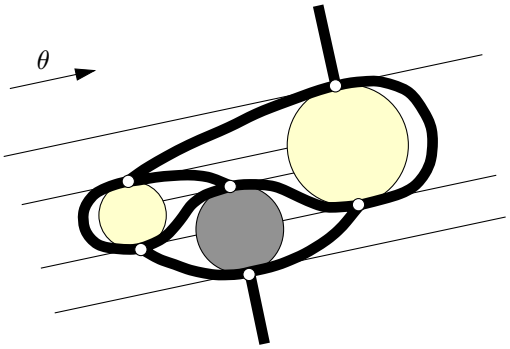


FIG. 1.32 - *Graphe auxiliaire.*

balayer impose un coût $\log n$. L'initialisation du graphe auxiliaire pour $\theta = 0$ se fait en temps $\mathcal{O}(n \log n)$ grâce à un balayage vertical. On calcule d'abord tous les points de tangence à $\theta = 0$, puis on les trie selon leur ordonnée, et on les introduit dans cet ordre. Chaque point de tangence correspond à un sommet du graphe auxiliaire (= une arête du complexe). Pour chaque tangente, on effectue une recherche sur les arêtes de la ligne de balayage pour trouver les arêtes à relier.

Un premier algorithme de construction du complexe pour les objets convexes, optimal en temps $\mathcal{O}(m + n \log n)$, mais pas en espace $\mathcal{O}(m)$, a été proposé dans [PV93b]. Cet algorithme présente également le défaut de faire appel à des structures de données très complexes qui rendent son implémentation impossible.

Un algorithme implémentable optimal a ensuite été proposé dans [PV95], utilisant un balayage topologique. Cet algorithme sensible à la sortie permet de construire le complexe pour des objets convexes en temps optimal $\mathcal{O}(m + n \log n)$ et en espace optimal $\mathcal{O}(n)$. Il s'appuie sur des *pseudo-triangulations* de la scène. Une *pseudo-triangulation* est un ensemble de bitangentes libres ne se croisant pas, maximal pour l'inclusion (cf. figure 1.33(a)). Il est bien évident qu'il existe toujours une pseudo-triangulation (on peut la construire incrémentalement) et que les bitangentes de l'enveloppe convexe de la scène en font partie. Les composantes connexes bornées et libres d'une telle partition sont des pseudo-triangles (cf. figure 1.33(a)). Pocchiola et Vegter montrent dans [PV95] que deux pseudo-triangles disjoints possèdent exactement une tangente commune. Un pseudo-quadrangle constitué de deux pseudo-triangles qui partagent une bitangente possède donc seulement deux bitangentes intérieures (appelées diagonales), une des deux étant la bitangente partagée par les deux pseudo-triangles qui le constitue (cf. figure 1.33(b)). En passant d'une bitangente diagonale à l'autre d'un pseudo-quadrangle, on réalise ce qu'on appelle un «flip», et on passe d'une pseudo-triangulation à une autre. Les bitangentes correspondent aux sommets du complexe de visibilité. Il est montré dans [PV95] qu'en opérant une série de «flips» sur une pseudo-triangulation initiale, on parcourt tous les sommets du complexe de visibilité. La pseudo-triangulation initiale est calculée, de façon gloutonne, par rapport à la direction horizontale u_0 : chaque nouvelle bitangente de cette pseudo-triangulation est la bitangente de plus petite pente par rapport à la direction u_0, qui ne coupe pas les bitangentes qui ont déjà été calculées. Une première solution consiste à effectuer les «flips» dans l'ordre des pentes croissantes. On a alors un coût en $\mathcal{O}(m \log n)$ à cause du maintien d'une queue de priorité. L'utilisation d'un ordre partiel permet de s'en affranchir et d'obtenir alors un coût en $\mathcal{O}(m + n \log n)$.

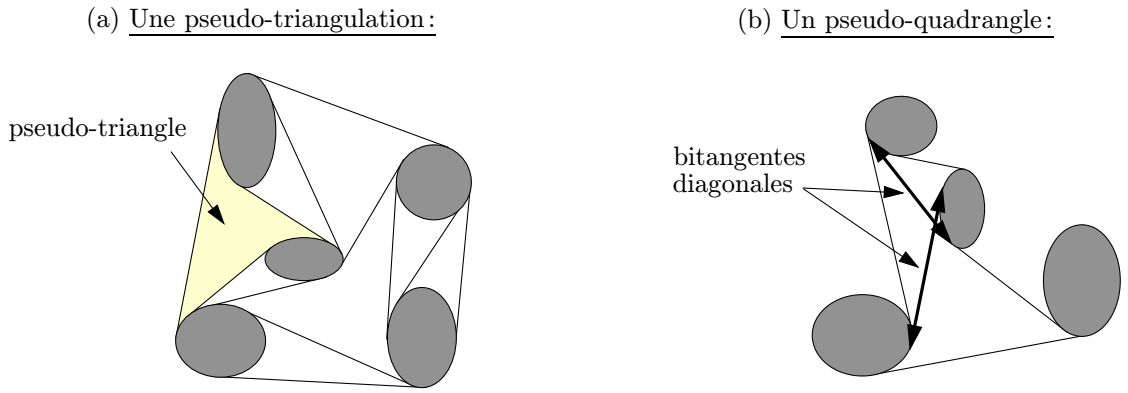


FIG. 1.33 - *Pseudo-triangulation et pseudo-quadrangle.*

Rivière (cf. [Riv95] et [Riv97]) a ensuite proposé et implémenté un algorithme pour la construction du complexe de visibilité pour les scènes polygonales. Cet algorithme sensible à la sortie permet aussi de construire le complexe en temps optimal $\mathcal{O}(m + n \log n)$ et en espace optimal $\mathcal{O}(n)$, mais avec n représentant le nombre total d'arêtes de polygones dans la scène et m le nombre de sommets du complexe. Il s'inspire de [EG86] et [OW88], et utilise dans la scène deux *arbres d'horizon*, l'un inférieur et l'autre supérieur. Un *arbre d'horizon* est un graphe qui possède une arête par point de la scène. Etant donnée une direction θ, pour l'arbre d'horizon supérieur (respectivement inférieur), on associe à chaque sommet p de la scène le premier sommet q rencontré «vers l'avant» (respectivement «vers l'arrière») lorsqu'on part de la direction θ et qu'on tourne dans le sens trigonométrique (cf. figure 1.34). Une arête u (qui correspond en fait à un sommet du complexe) n'est passable que si elle appartient aux deux arbres d'horizon et si elle a une pente inférieure à celle de son père dans les deux arbres. Il faut bien sûr, lors du passage d'une arête, mettre à jour les arbres d'horizon ainsi que les relations d'incidence au niveau du complexe de visibilité. Afin de trouver l'arête qui remplace l'arête u dans les deux arbres d'horizon, il faut effectuer un balayage de chaînes d'arêtes. Rivière montre dans [Riv97] que l'ensemble des balayages d'arêtes a une complexité amortie $\mathcal{O}(m)$.

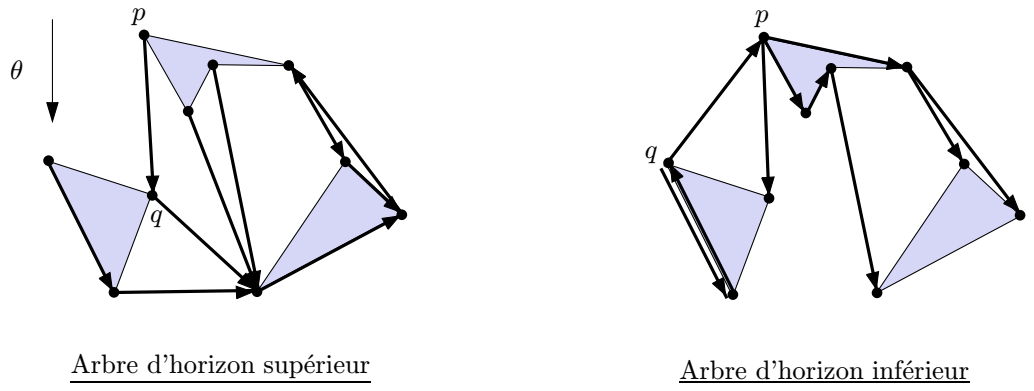


FIG. 1.34 - *Arbres d'horizon supérieur et inférieur.*

1.7 Discussion

La méthode de radiosité, qui modélise les échanges d'énergie entre les différents objets d'une scène, est bien adaptée pour rendre les effets globaux de l'éclairage et est très utilisée pour la visualisation de scènes d'intérieur statiques. Elle peut maintenant être utilisée sur des scènes très complexes avec l'introduction de méthodes hiérarchiques, et de méthodes utilisant le parallélisme. Son coût reste cependant conditionné par le calcul des facteurs de forme, qui constitue l'étape la plus coûteuse, compte tenu des calculs de visibilité qu'il implique. Différentes méthodes ont été proposées pour accélérer les calculs de visibilité dans le cadre de la radiosité, mais elles ne sont pas exactes, au mieux prudentes, ou alors limitées à la source principale. Une représentation exacte de la visibilité permettrait cependant d'optimiser les calculs de facteurs de forme et d'améliorer la qualité. L'utilisation d'un maillage en fonction des discontinuités semble primordiale pour obtenir une solution de radiosité de bonne qualité. Son calcul est cependant très coûteux car il nécessite de nombreux calculs géométriques.

La méthode de radiosité présente déjà l'avantage d'être indépendante du point de vue. Elle a été adaptée aux environnements dynamiques. Cependant, les différentes méthodes proposées, si elles permettent d'accélérer grandement les calculs, effectuent toujours trop de recalculs. Le problème reste ici d'arriver à identifier précisément et efficacement quels facteurs de forme doivent vraiment être recalculés, en fonction de la visibilité qui a été modifiée.

Nous nous proposons dans cette thèse de répondre à un certain nombre de problèmes posés par la méthode de radiosité en utilisant, pour le calcul de radiosité, une structure de visibilité bien adaptée. Plutôt que de nous attaquer de front au problème 3D, nous nous sommes d'abord intéressés au cas 2D qui permet une meilleure compréhension et une analyse plus approfondie, ne serait-ce que grâce à l'existence de solutions analytiques. Nous nous sommes penchés sur le *complexe de visibilité*, introduit récemment en géométrie algorithmique. Nous verrons que cette structure qui code les relations de visibilité entre les objets dans le plan, permet d'effectuer le calcul des facteurs de forme de manière efficace, et de calculer le maillage de discontinuité de façon simple. Le complexe permet aussi d'éviter les calculs inutiles dans le cas statique, comme dans le cas dynamique où il permet notamment d'identifier et de mettre à jour de façon efficace uniquement les facteurs de forme strictement nécessaires lorsqu'un objet se déplace dans une scène.

Chapitre 2

Expressions du facteur de forme en 2D

Nous introduisons dans ce chapitre deux expressions du facteur de forme que nous réutiliserons par la suite : une première expression sous forme d'un rapport de mesures de droites, et une deuxième sous forme d'une somme pondérée de longueurs de courbes. La première expression est valable en 2D comme en 3D, alors que la deuxième n'est valable qu'en 2D.

2.1 Facteur de forme comme un rapport de mesures de droites

Revenons à la définition initiale du facteur de forme (cf. équation 1.3) dans le paragraphe 1.2.1 : le facteur de forme entre deux surfaces en 3D correspond à la fraction d'énergie quittant une surface qui arrive sur une autre surface.
Dans les milieux non participants, l'énergie est transmise le long de trajectoires linéaires, c'est à dire suivant des droites (cf. [Pel95]). Ainsi on peut mesurer l'énergie totale I_i quittant une surface A_i en sommant l'énergie transportée par chaque droite intersectant A_i. L'énergie I_i est donc définie par l'intégrale :

$$I_i = \int_{L \cap A_i \neq \emptyset} I(L) dL \ , \tag{2.1}$$

où $I(L)$ est la densité d'énergie sur la droite L.
Dans le cas d'un modèle lambertien, $I(L)$ est une constante $\bar{I}$. Il reste donc à calculer :

$$\int_{L \cap A_i \neq \emptyset} dL \ . \tag{2.2}$$

On cherche en fait à mesurer l'ensemble des droites qui intersectent la surface A_i. Cette mesure de droites doit être invariante par les déplacements rigides dans l'espace (translations et rotations). Or c'est justement la caractéristique des mesures de droites définies dans le contexte de la géométrie intégrale qui sont étudiées dans [San76] (cf. paragraphe B.2 de l'annexe B). L'intégrale 2.2 est donc la mesure (invariante) de l'ensemble des droites intersectant la surface A_i, telle qu'elle est définie dans le contexte de la géométrie intégrale. Cette mesure sera notée $m(L : L \cap A_i \neq \emptyset)$.

De la même manière, la quantité d'énergie I_{ij} quittant une surface A_i et atteignant une surface A_j est définie par l'intégrale sur les droites intersectant A_i et A_j sans intersecter les

surfaces qui interfèrent (c'est à dire les surfaces se trouvant entre les surfaces A_i et A_j) :

$$I_{ij} = \int_{L\cap A_i\neq\emptyset \text{ et } L\cap A_j\neq\emptyset \text{ et } L\,\cap \text{ chaque surface interférant } =\emptyset} I(L)dL \ . \tag{2.3}$$

La valeur $I(L)$ est toujours constante et égale à $\bar{I}$. La valeur I_{ij} est donc fonction de la mesure des droites intersectant les surfaces A_i et A_j sans intersecter de surfaces qui interfèrent. Cette mesure est notée :

$$m(L : L \cap A_i \neq \emptyset \text{ et } L \cap A_j \neq \emptyset \text{ et } L \cap \text{ chaque surface interférant } = \emptyset) \ ,$$

et elle correspond donc à :

$$\int_{L\cap A_i\neq\emptyset \text{ et } L\cap A_j\neq\emptyset \text{ et } L\,\cap \text{ chaque surface interférant } =\emptyset} dL \ .$$

Le facteur de forme F_{ij} entre les deux surfaces A_i et A_j est donc donné par le rapport des deux intensités 2.1 et 2.3 (cf. [Pel95]) :

$$F_{ij} = \frac{I_{ij}}{I_i} = \frac{\int_{L\cap A_i\neq\emptyset \text{ et } L\cap A_j\neq\emptyset \text{ et } L\,\cap \text{ chaque surface interférant } =\emptyset} dL}{\int_{L\cap A_i\neq\emptyset} dL} \ . \tag{2.4}$$

On en déduit donc la proposition suivante :

Proposition 1 *Soient deux surfaces A_i et A_j dans une scène 3D. Le facteur de forme F_{ij} entre ces deux surfaces peut être exprimé par :*

$$F_{ij} = \frac{\textit{Mesure de l'ensemble des droites intersectant } A_i \textit{ et } A_j \textit{ sans intersecter d'obstacles}}{\textit{Mesure de l'ensemble total des droites intersectant } A_i}$$

La mesure de droites considérée est celle définie dans [San76], dans le contexte de la géométrie intégrale. Elle est aussi décrite dans l'annexe B.

Sbert [Sbe93] a utilisé cette formulation pour calculer les facteurs de forme entre deux surfaces dans le cas 3D. Il a approximé les mesures d'ensembles de droites intersectant des surfaces en lançant un certain nombre de rayons de façon aléatoire dans une scène 3D et en comptabilisant les rayons intersectant les différentes surfaces. Ceci lui a permis d'obtenir une approximation du facteur de forme entre deux surfaces en 3D.

Pellegrini [Pel95] a aussi utilisé une caractérisation des facteurs de forme basée sur les concepts de la géométrie intégrale pour calculer une approximation de Monte-Carlo des facteurs de forme. Il est parti de la formulation 2.4, puis il a réexprimé la mesure des droites intersectant deux surfaces A_i et A_j données en mesurant les droites qui intersectent ces deux surfaces dans une direction donnée, et en considérant ensuite l'ensemble des directions. La mesure des droites intersectant deux surfaces A_i et A_j dans une direction u donnée, sans intersecter d'obstacles, est obtenue en projetant orthogonalement les surfaces A_i et A_j ainsi que les surfaces qui interfèrent sur un plan $P(u)$ orthogonal à u, puis en calculant ensuite dans le plan $P(u)$ l'aire de l'intersection des projections de A_i et A_j privée de l'union des projections des surfaces qui interfèrent. L'ensemble des directions u considérées est obtenu en choisissant uniformément de manière aléatoire un ensemble de points p sur la sphère unité centrée en O. Une direction u

donnée est alors caractérisée par $\overrightarrow{Op}$.

Cette expression du facteur de forme sous forme d'un rapport de mesures de droites reste bien évidemment valable en 2D, si ce n'est que l'on ne considère plus des surfaces mais des portions de courbes dans le plan. Le facteur de forme F_{ij} entre deux portions de courbes C_i et C_j dans le plan peut donc être exprimé par :

$$F_{ij} = \frac{\text{Mesure de l'ensemble des droites intersectant } C_i \text{ et } C_j \text{ sans intersecter d'obstacles}}{\text{Mesure de l'ensemble total des droites intersectant } C_i} \tag{2.5}$$

Dans le cas 2D, il est possible, en plus, de calculer les facteurs de forme de manière exacte, en utilisant la géométrie intégrale qui fournit des mesures exactes des ensembles de droites dans le plan (cf. [San76]).

2.2 Facteur de forme comme une somme pondérée de longueurs de courbes

2.2.1 Définition de la «string rule»

Bien avant l'apparition de la notion de radiosité en synthèse d'images, de nombreux chercheurs travaillant sur le transfert de chaleur en thermodynamique se sont penchés sur le calcul du *facteur d'angle* qui caractérise la fraction de chaleur transmise d'une surface à une autre. Hottel en 1954 [Hot54] a donné une règle pour calculer le facteur d'angle, dans le cas bidimensionnel, qu'il a nommé «string rule». Cette règle permet de définir le facteur d'angle comme une somme pondérée de longueurs de courbes. La «string rule» s'applique aussi pour le calcul des facteurs de forme puisqu'ils sont l'équivalent pour la radiosité, des facteurs d'angle définis en thermodynamique.

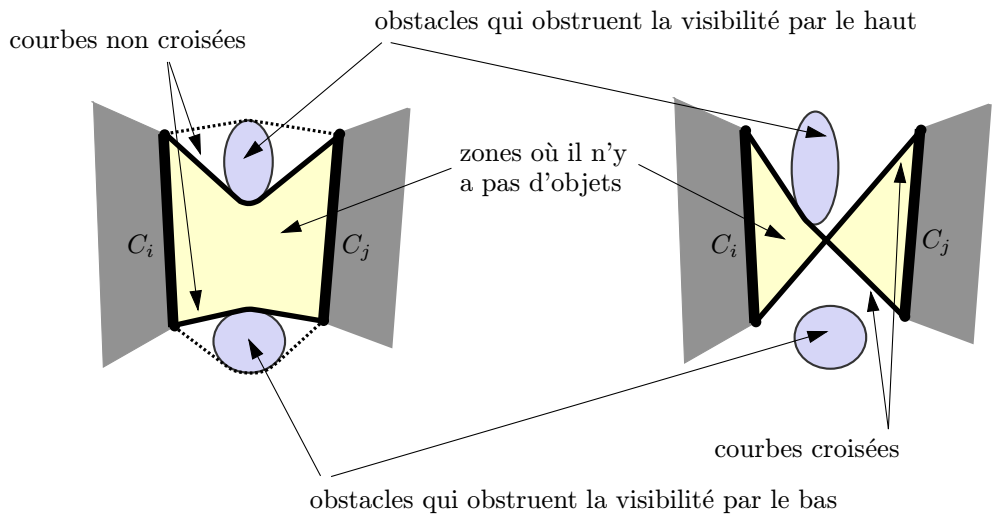
Commençons par introduire quelques notions :

Soient deux portions de courbes C_i et C_j qui se font face (cf. figure 2.1). Les obstacles éventuels qui se trouvent entre ces deux portions de courbes sont séparés en trois groupes : les obstacles qui obstruent la visibilité «par le haut», les obstacles qui obstruent la visibilité «par le bas» et les obstacles qui obstruent la visibilité «par le milieu» (c'est-à-dire que la visibilité est possible au-dessus et en-dessous). Considérons pour le moment uniquement le cas d'obstacles qui obstruent la visibilité «par le haut» et «par le bas», nous reviendrons par la suite au cas général en utilisant les résultats obtenus.

- On appelle *courbes non croisées* entre C_i et C_j, les courbes de l'espace libre de longueur minimale reliant les extrémités face à face de C_i et C_j (haut avec haut, bas avec bas) telles que tout objet entre C_i et C_j soit soit au dessus de ces deux courbes, soit au dessous de ces deux courbes (cf. figure 2.1(a)). Ces deux courbes délimitent ainsi une zone entre les deux portions de courbes C_i et C_j où il n'y a pas d'objets (cf. figure 2.1(a)).

- On appelle *courbes croisées* entre C_i et C_j, les courbes de l'espace libre de longueur minimale reliant les extrémités opposées de C_i et C_j telles que tout objet entre C_i et C_j soit soit au dessus de ces deux courbes, soit au dessous de ces deux courbes (cf. figure 2.1(b)).

Ces deux courbes délimitent donc aussi une zone entre les deux portions de courbes C_i et C_j où il n'y a pas d'objets (cf. figure 2.1)(b)).



(a) Courbes non croisées (b) Courbes croisées

FIG. 2.1 - *Exemples de courbes croisées et non croisées.*

«**String rule**»

Considérons deux portions de courbes C_i et C_j de longueurs respectives L_i et L_j dans l'espace 2D, et soit F_{ij} le facteur de forme entre ces deux portions de courbes. L_iF_{ij} correspond à la somme des longueurs des courbes croisées tendues entre les extrémités opposées des deux portions de courbes C_i et C_j, moins la somme des longueurs des courbes non croisées tendues entre les extrémités face à face de ces deux portions de courbes, et le tout divisé par 2 [Hot54, Bre92].

$$\begin{aligned} L_iF_{ij} &= L_jF_{ji} \\ &= \frac{\sum \text{longueurs des courbes croisées} - \sum \text{longueurs des courbes non croisées}}{2} \end{aligned}$$

On en déduit l'expression du facteur de forme F_{ij} entre les deux portions de courbes C_i et C_j :

$$F_{ij} = \frac{\sum \text{longueurs des courbes croisées} - \sum \text{longueurs des courbes non croisées}}{2L_i} \tag{2.6}$$

S'il y a des extrémités des deux portions de courbes qui ne sont pas mutuellement visibles, les courbes croisées et non croisées vont contourner les obstacles tout en suivant au mieux leur contour, à la manière d'un élastique.

2.2.2 Application

On note $d_e(M,N)$ la distance euclidienne entre deux points M et N, et $d_c(M,N)$ la distance curviligne entre les points M et N le long d'une courbe C.

Considérons l'exemple 2D de la figure 2.2 constitué de deux portions de courbes C_i et C_j de longueurs respectives L_i et L_j. Soit F_{ij} le facteur de forme entre ces deux portions de courbes. D'après l'équation 2.6, on obtient :

$$F_{ij} = \frac{\{\ d_e(a,d) + [\ d_e(b,e) + d_c(e,c)\ ]\ \} - \{\ d_e(b,d) + [\ d_e(a,f) + d_e(f,c)\ ]\ \}}{2L_i}$$

Les points b et c ne sont pas mutuellement visibles compte tenu de la courbure de la courbe C_j. La courbe croisée C_{bc} tendue entre les points b et c va donc suivre en partie le contour de la courbe C_j (entre les points e et c).
De même, les points a et c sont cachés par le triangle blanc. La courbe non croisée C_{ac} tendue entre les points a et c passe donc par l'extrémité f du triangle blanc qui obstrue la visibilité entre les points a et c.

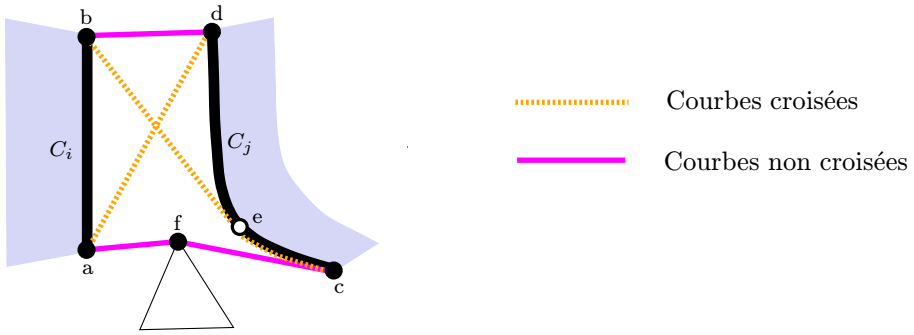


FIG. 2.2 - *Exemple de deux portions de courbes C_i et C_j.*

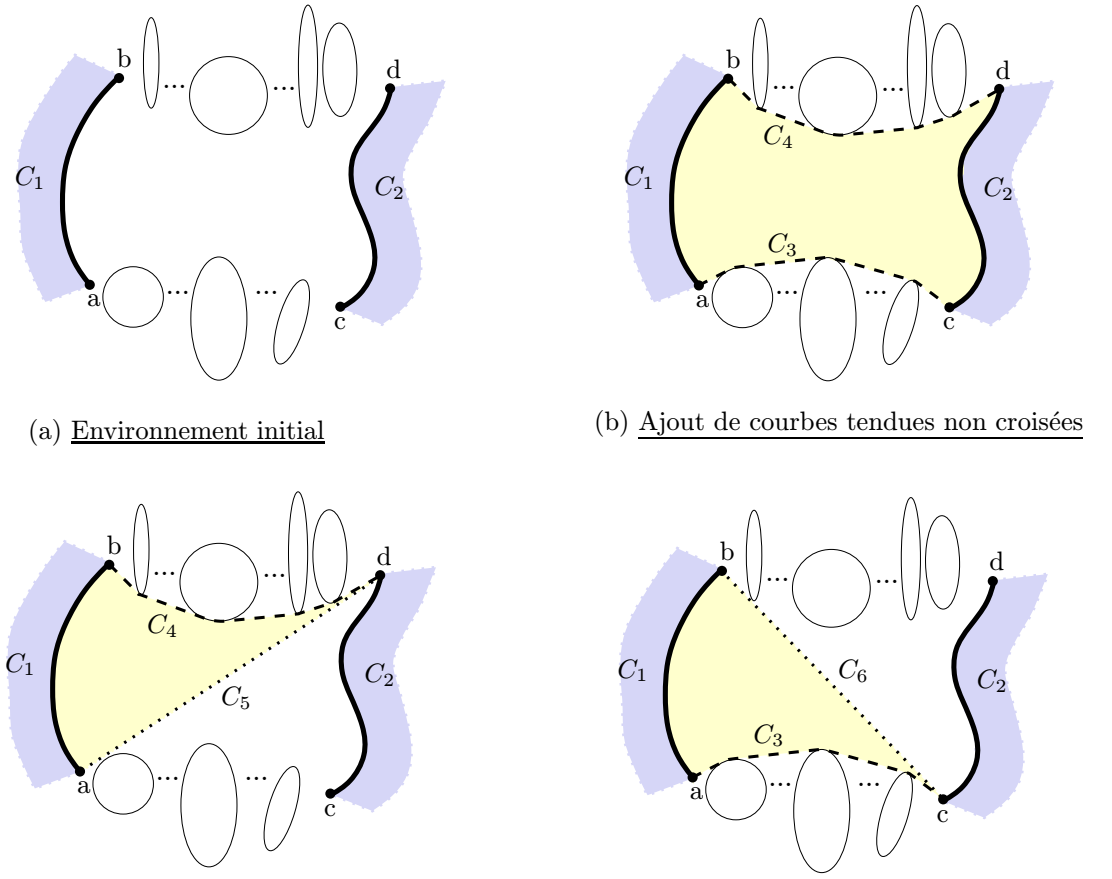
2.2.3 Démonstrations

Nous nous intéressons à l'utilisation de la «string rule» dans le cadre de la radiosité. Nous allons donc démontrer l'équation 2.6 qui exprime le facteur de forme comme une somme pondérée de longueurs de courbes. Nous donnons deux démonstrations pour cette équation : une première utilisant le principe de conservation de l'énergie, et une deuxième basée sur la formulation du facteur de forme au moyen de la géométrie intégrale (donc utilisant le facteur de forme exprimé comme un rapport de mesures de droites).

Première démonstration : Avec le principe de conservation de l'énergie

Soient deux portions de courbes C_1 et C_2 de longueurs respectives L_1 et L_2, et soit F_{12} le facteur de forme entre ces deux portions de courbes. La courbe C_1 a pour extrémités les points a et b, et la courbe C_2 a pour extrémités les points c et d (cf. figure 2.3(a)). Les différents obstacles se trouvant entre C_1 et C_2 sont répartis en deux groupes (nous nous plaçons toujours pour l'instant dans le cas simple où il n'y a pas d'obstacle obstruant la visibilité «par le milieu») :

ceux qui obstruent la visibilité entre les extrémités a et c (obstacles obstruant la visibilité «par le bas»), et ceux qui obstruent la visibilité entre les extrémités b et d (obstacles obstruant la visibilité «par le haut»).



(a) Environnement initial

(b) Ajout de courbes tendues non croisées

(c) Ajout d'une courbe tendue croisée

(d) Ajout d'une autre courbe tendue croisée

FIG. 2.3 - *Exemple de deux portions de courbes C_1 et C_2.*

D'après la propriété 2 du facteur de forme (cf. paragraphe 1.2.2) : dans un environnement 3D clos, la somme de tous les facteurs de forme pour une surface donnée est égale à l'unité. En 2D, les portions de courbes sont l'équivalent des surfaces. On en déduit donc d'après la propriété 2 du facteur de forme que dans le cas d'un environnement 2D clos, la somme de tous les facteurs de forme pour une portion de courbe donnée est égale à l'unité.

Afin de pouvoir appliquer cette propriété dans le cas de notre exemple, on rajoute des portions de courbes «virtuelles» pour clore l'environnement.

Rajoutons une première courbe élastique de l'espace libre tendue entre les extrémités a et c, et passant au dessus des obstacles «du bas». Cette courbe est appelée C_3. Rajoutons ensuite une deuxième courbe élastique de l'espace libre tendue entre les extrémités b et d, et passant au dessous des obstacles «du haut». Cette courbe est appelée C_4. Les courbes C_3 et C_4 ont pour longueurs respectives L_3 et L_4. Ces deux courbes correspondent en fait aux *courbes non croisées*

telles qu'elles ont été définies dans le paragraphe 2.2.1.

On considère maintenant un nouvel environnement constitué de l'environnement initial auquel on a ajouté les courbes C_3 et C_4 (cf. figure 2.3(b)). Soit l'environnement clos constitué des portions de courbes C_1, C_2, C_3 et C_4. On note F_{ij} le facteur de forme entre une portion de courbe C_i et une portion de courbe C_j. D'après la propriété 2 du facteur de forme (cf. paragraphe 1.2.2) appliquée au cas 2D, on a la relation suivante :

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} + F_{14} = 1$$

$$\Longrightarrow L_1F_{11} + L_1F_{12} + L_1F_{13} + L_1F_{14} = L_1$$

Le facteur de forme F_{12} correspond au facteur de forme entre les portions de courbes C_1 et C_2 dans le nouvel environnement (environnement de la figure 2.3(b)). Ce facteur de forme est identique au facteur de forme entre les portions de courbes C_1 et C_2 dans l'environnement initial. En effet, les deux courbes ajoutées C_3 et C_4 ne modifient en rien les échanges d'énergie entre les courbes C_1 et C_2, compte tenu du fait qu'elles n'influent pas sur la manière dont C_1 et C_2 se «voient».

Ajoutons encore deux nouvelles courbes : une courbe élastique de l'espace libre tendue entre les extrémités a et d, et passant au dessus des obstacles «du bas» et au dessous des obstacles «du haut», et une courbe élastique de l'espace libre tendue entre les extrémités b et c, et passant au dessous des obstacles «du haut» et au dessus des obstacles «du bas». La première courbe est appelée C_5 et la deuxième C_6. Les courbes C_5 et C_6 ont pour longueurs respectives L_5 et L_6. Ces deux courbes correspondent en fait aux *courbes croisées* telles qu'elles ont été définies dans le paragraphe 2.2.1.

Considérons l'enceinte fermée constituée des portions de courbes C_1, C_4 et C_5 (cf. figure 2.3(c)). D'après la propriété 2 du facteur de forme (cf. paragraphe 1.2.2) appliquée au cas 2D, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} L_1F_{11} + L_1F_{14} + L_1F_{15} = L_1 \\ L_4F_{41} + L_4F_{44} + L_4F_{45} = L_4 \\ L_5F_{51} + L_5F_{54} + L_5F_{55} = L_5 \end{cases} \tag{2.7}$$

D'après la propriété 3 du facteur de forme (cf. paragraphe 1.2.2) appliquée au cas 2D, le facteur de forme F_{44} est nul puisque aucun rayon lumineux réfléchi par la courbe C_4 ne va frapper directement cette même courbe. Il en est de même pour le facteur de forme F_{55}. D'où :

$$\begin{cases} L_1F_{11} + L_1F_{14} + L_1F_{15} = L_1 \\ L_4F_{41} + L_4F_{45} = L_4 \\ L_5F_{51} + L_5F_{54} = L_5 \end{cases}$$

D'après la propriété de réciprocité du facteur de forme (cf. paragraphe 1.2.2) :

$$L_4F_{41} = L_1F_{14}$$
$$L_5F_{51} = L_1F_{15}$$
$$L_5F_{54} = L_4F_{45}$$

En remplaçant dans le système d'équations 2.7, on obtient le nouveau système suivant :

$$\begin{cases} L_1F_{11} + L_1F_{14} + L_1F_{15} = L_1 & \text{(a)} \\ L_1F_{14} + L_4F_{45} = L_4 & \text{(b)} \\ L_1F_{15} + L_4F_{45} = L_5 & \text{(c)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad &\Longrightarrow \quad L_4 F_{45} = L_4 - L_1 F_{14} \\ \text{(c)} \quad &\Longrightarrow \quad L_1 F_{15} = L_5 - L_4 F_{45} \end{aligned}$$

D'où, d'après (b) et (c) : $L_1 F_{15} = L_5 - L_4 + L_1 F_{14}$.
En remplaçant dans (a), on obtient :

$$L_1 F_{11} + L_1 F_{14} + L_5 - L_4 + L_1 F_{14} = L_1$$

$$\Longrightarrow L_1 F_{14} = \frac{L_1 - L_1 F_{11} + L_4 - L_5}{2} \tag{2.8}$$

De façon similaire, si on considère l'enceinte fermée constituée des portions de courbes C_1, C_3 et C_6 (cf. figure 2.3(d)), on obtient :

$$L_1 F_{13} = \frac{L_1 - L_1 F_{11} + L_3 - L_6}{2} \tag{2.9}$$

Or on a vu précédemment que : $L_1 F_{11} + L_1 F_{12} + L_1 F_{13} + L_1 F_{14} = L_1$

$$\Longrightarrow L_1 F_{12} = L_1 - L_1 F_{11} - L_1 F_{13} - L_1 F_{14}$$

En utilisant les égalités 2.8 et 2.9, on obtient :

$$L_1 F_{12} = \frac{(L_5 + L_6) - (L_3 + L_4)}{2}$$

$$\Longrightarrow F_{12} = \frac{(L_5 + L_6) - (L_3 + L_4)}{2L_1}$$

On constate que la «string rule» est bien vérifiée. Le facteur de forme entre les portions de courbes C_1 et C_2 s'exprime bien comme la somme des longueurs des courbes croisées tendues entre les extrémités de C_1 et C_2, moins la somme des longueurs des courbes non croisées tendues entre les extrémités de C_1 et C_2, et le tout divisé par $2L_1$.

On note que cette expression du facteur de forme est valable dans le cas où il y a des obstacles et qu'elle prend directement en compte la notion de visibilité, compte tenu de la manière dont sont définies les *courbes croisées* et les *courbes non croisées* (nous restons dans l'hypothèse simplificatrice introduite en 2.2.1, c'est à dire le cas où il y a uniquement des obstacles qui obstruent la visibilité «par le haut» et «par le bas»).

Il est possible de réaliser une démonstration similaire de la «string rule» dans le cadre des échanges de chaleur, en utilisant le principe de conservation de la chaleur (cf. [Hot54] où on peut trouver des éléments de démonstration).

Deuxième démonstration : Par la géométrie intégrale

Soient deux portions de courbes C_1 et C_2 de longueurs respectives L_1 et L_2, et soit F_{12} le facteur de forme entre ces deux portions de courbes. La courbe C_1 a pour extrémités les points a et b, et la courbe C_2 a pour extrémités les points c et d (cf. figure 2.4). D'après le

paragraphe 2.1, le facteur de forme F_{12} entre la portion de courbe C_1 et la portion de courbe C_2 peut être exprimé par le rapport de mesures de droites suivant (cf. équation 2.5) :

$$F_{12} = \frac{\text{Mesure de l'ensemble des droites intersectant } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sans intersecter d'obstacles}}{\text{Mesure de l'ensemble total des droites intersectant } C_1} \tag{2.10}$$

Nous allons montrer que ce rapport de mesures de droites est égal à l'expression du facteur de forme issue de la «string rule» (cf. équation 2.6).

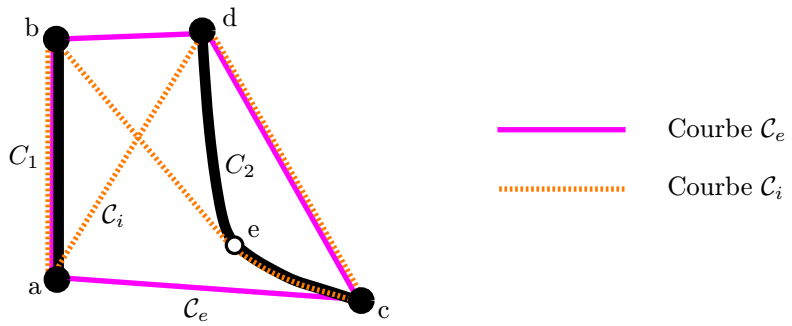


FIG. 2.4 - *Exemple de deux portions de courbes C_1 et C_2.*

Soient deux courbes $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{C}_i$ définies comme suit. La courbe $\mathcal{C}_e$ est le contour de l'enveloppe convexe de $C_1 \cup C_2$. Cette courbe correspond à la courbe élastique fermée tracée autour des portions de courbes C_1 et C_2. Elle passe donc par les points a, b, d, c pour revenir finalement en a (cf. figure 2.4). La courbe $\mathcal{C}_i$ est définie comme la courbe élastique croisée construite autour des portions de courbes C_1 et C_2. Elle passe donc par les points a, b, e, c, d pour revenir finalement en a (cf. figure 2.4). Les courbes $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{C}_i$ ont pour longueurs respectives $\mathcal{L}_e$ et $\mathcal{L}_i$.

Les différents principes de la géométrie intégrale relatifs à la mesure d'ensembles de droites dans le plan permettent d'établir les résultats suivants dans le cas 2D (cf. annexe B) :

- La mesure de l'ensemble des droites intersectant les portions de courbes C_1 et C_2 est égale à : $\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_e$ (cf. paragraphe B.4).
- La mesure de l'ensemble total des droites intersectant C_1 est égale à : $2L_1$ (cf. paragraphe B.3).

En remplaçant dans l'équation 2.10, on obtient :

$$F_{12} = \frac{\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_e}{2L_1}$$

On note $d_e(M, N)$ la distance euclidienne entre deux points M et N, et $d_c(M, N)$ la distance curviligne entre les points M et N.
Dans le cas de l'exemple de la figure 2.4, les longueurs $\mathcal{L}_e$ et $\mathcal{L}_i$ correspondent à :

$$\mathcal{L}_e = d_e(a, b) + d_e(b, d) + d_e(d, c) + d_e(c, a)$$
$$\mathcal{L}_i = d_e(a, b) + [\ d_e(b, e) + d_c(e, c)\ ] + d_e(c, d) + d_e(a, d)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_e = d_e(a,d) + [\ d_e(b,e) + d_c(e,c)\ ] - d_e(c,a) - d_e(b,d)$$

Les distances entre les points a et b d'une part, et c et d d'autre part ont disparu au cours du calcul. On constate que la valeur $\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_e$ correspond en fait à la somme des longueurs des courbes croisées entre les extrémités des portions de courbes C_1 et C_2, moins la somme des longueurs des courbes non croisées, telles qu'elles ont été définies dans le paragraphe 2.2.1.
D'où :

$$F_{12} = \frac{\sum \text{longueurs des courbes croisées} - \sum \text{longueurs des courbes non croisées}}{2L_1} \ .$$

On retrouve l'expression du facteur de forme entre deux portions de courbes qui est issue de la «string rule» (cf. équation 2.6 dans le paragraphe 2.2.1).

Cette démonstration permet de mettre en évidence la correspondance entre les deux formulations du facteur de forme : facteur de forme exprimé comme un rapport de mesures de droites (cf. équation 2.5) et facteur de forme exprimé comme une somme pondérée de longueurs de courbes (cf. équation 2.6).

Correspondance entre les deux formulations du facteur de forme : Soit $m_{so}(C_i, C_j)$ la mesure de l'ensemble des droites intersectant deux portions de courbes C_i et C_j sans intersecter d'obstacles se trouvant entre les deux, et soit $m(C_i)$ la mesure de l'ensemble total des droites intersectant C_i. On a les correspondances suivantes :

- La mesure de droites $m_{so}(C_i, C_j)$ est égale à la somme des longueurs des courbes croisées tendues entre les extrémités de C_i et C_j, moins la somme des longueurs des courbes non croisées tendues entre les extrémités de C_i et C_j, telles qu'elles ont été définies dans le paragraphe 2.2.1 :

$$m_{so}(C_i, C_j) = \sum \text{longueurs des courbes croisées} - \sum \text{longueurs des courbes non croisées} \ . \tag{2.11}$$

- La mesure de droites $m(C_i)$ est fonction de la longueur L_i de la portion de courbe C_i :

$$m(C_i) = 2L_i \ . \tag{2.12}$$

On peut aussi déduire, à partir de cette démonstration, une expression générale pour le facteur de forme entre deux objets convexes dans le plan :

Généralisation pour deux objets convexes : Soient deux objets convexes O_i et O_j dans le plan. Le facteur de forme F_{ij} entre ces deux objets s'exprime par :

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \frac{\text{Mesure de l'ensemble des droites intersectant } O_i \text{ et } O_j \text{ sans intersecter d'obstacles}}{\text{Mesure de l'ensemble total des droites intersectant } O_i} \\ &= \frac{\text{Longueur de la courbe } \mathcal{C}_i - \text{Longueur de la courbe } \mathcal{C}_e}{\text{Longueur du contour de } O_i} \ , \end{aligned}$$

sachant que d'après la géométrie intégrale (cf. paragraphe B.3), la mesure de l'ensemble total des droites intersectant un objet convexe O_i est égale à la longueur de son contour. $\mathcal{C}_e$ correspond à la courbe élastique fermée construite autour de O_i et O_j telle que tout objet entre O_i et O_j soit à l'extérieur de cette courbe, et $\mathcal{C}_i$ à la courbe élastique croisée construite autour de O_i et O_j telle que tout objet entre O_i et O_j soit à l'extérieur de la région délimitée par cette courbe.

$$= \frac{\sum \text{longueurs des courbes croisées} - \sum \text{longueurs des courbes non croisées}}{\text{Longueur du contour de } O_i},$$

avec les courbes croisées et les courbes non croisées correspondant aux deux courbes $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_e$ moins les parties communes à ces deux courbes.

La figure 2.5 montre d'une part les courbes $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_e$, et d'autre part les courbes croisées et non croisées, dans le cas de deux objets convexes O_i et O_j avec un obstacle qui interfère. Les courbes croisées correspondent aux deux courbes reliant respectivement les points (P_{u_l}, P_{d_r}) et (P_{d_l}, P_{u_r}), et les courbes non croisées correspondent aux deux courbes reliant respectivement les points (P_{u_l}, P_{u_r}) et (P_{d_l}, P_{d_r}) (cf. figure 2.5).

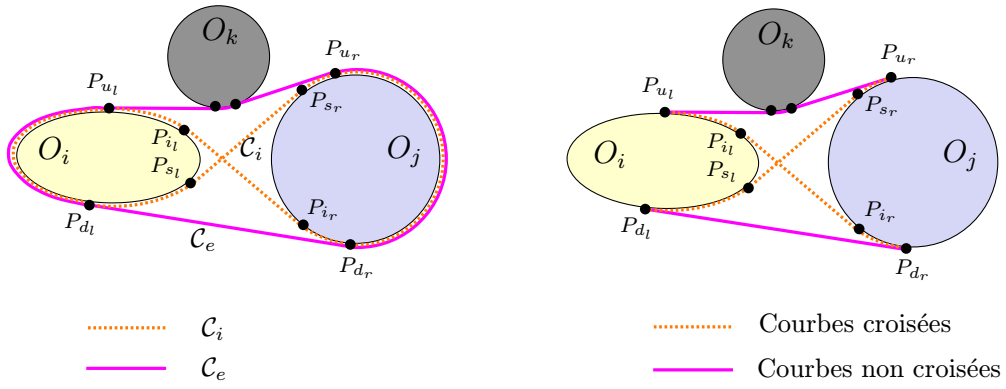


FIG. 2.5 - *Deux objets convexes O_i et O_j avec un obstacle O_k.*

2.2.4 Cas général

La «string rule» telle qu'elle a été définie pour deux portions de courbes C_i et C_j (cf. paragraphe 2.2.1), n'est valable que lorsque l'ensemble des segments libres maximaux qui touchent C_i et C_j est *connexe*. Cette condition est vérifiée lorsque tous les obstacles entre C_i et C_j intersectent l'enveloppe convexe de $C_i \cup C_j$ (cf. figure 2.6(a)), ou sont à l'intérieur de l'enveloppe convexe de $C_i \cup C_j$ mais sont tangents à cette enveloppe convexe (cf. figure 2.6(b)).

Lorsque les obstacles entre les portions de courbes C_i et C_j se trouvent à l'intérieur de l'enveloppe convexe de $C_i \cup C_j$ mais sans être tangents à cette enveloppe convexe, l'ensemble des segments libres maximaux qui touchent C_i et C_j n'est plus *connexe* (cf. figure 2.7). Dans ce cas là, la «string rule» n'est plus applicable directement. Nous allons voir cependant qu'elle peut toujours être utilisée si on décompose le problème de façon à ce qu'elle soit applicable.

La formulation du facteur de forme sous forme d'un rapport de mesures de droites (cf. paragraphe 2.1) est toujours valable quelle que soit la position des obstacles. Soit $m_{so}(C_i, C_j)$ la

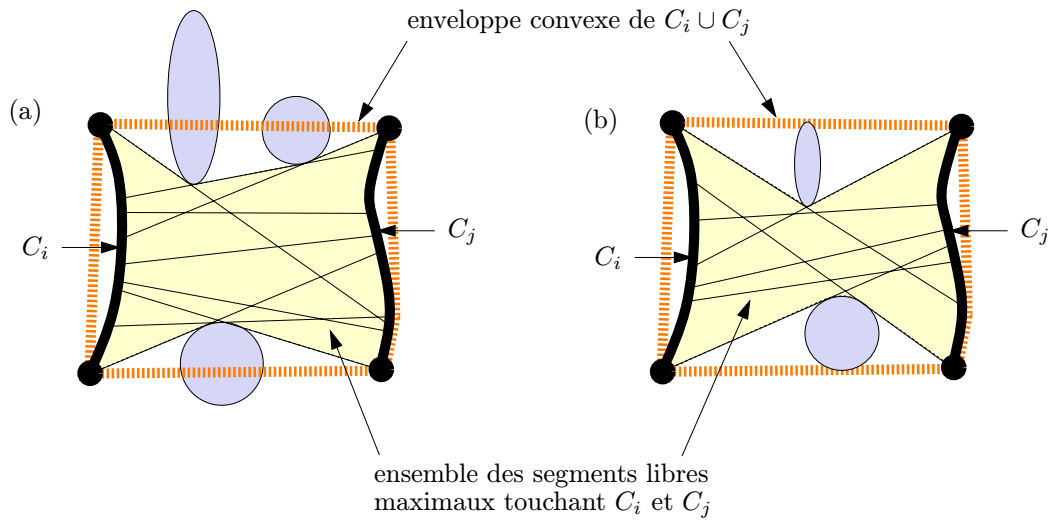


FIG. 2.6 - *Cas où la «string rule» est valide : (a) les obstacles intersectent l'enveloppe convexe de $C_i \cup C_j$; (b) les obstacles sont à l'intérieur de l'enveloppe convexe de $C_i \cup C_j$ mais sont tangents à cette enveloppe convexe.*

mesure de l'ensemble des droites qui intersectent les portions de courbes C_i et C_j sans intersecter d'obstacles entre C_i et C_j, et soit $m(C_i)$ la mesure de l'ensemble total des droites intersectant C_i. D'après l'équation 2.5, le facteur de forme F_{ij} entre C_i et C_j peut donc être exprimé par :

$$F_{ij} = \frac{m_{so}(C_i, C_j)}{m(C_i)} \ .$$

Considérons pour simplifier le cas où il y a un seul obstacle $\mathcal{O}$ à l'intérieur de l'enveloppe convexe de $C_i \cup C_j$ (cf. figure 2.8(a)). Le principe est bien sûr généralisable au cas où il y a plusieurs obstacles.

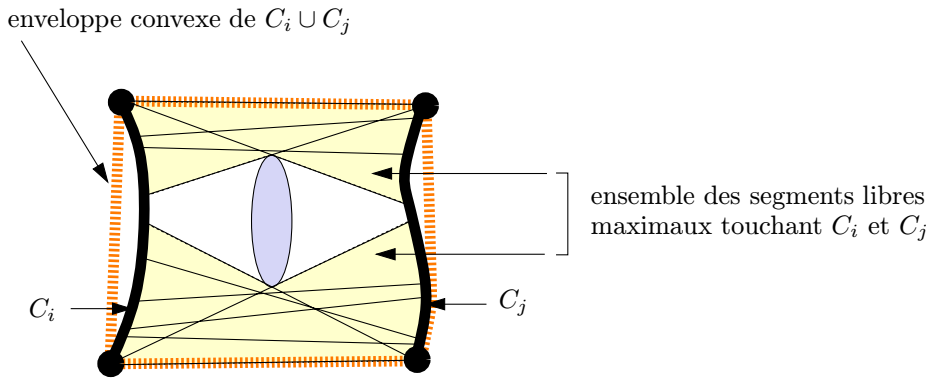


FIG. 2.7 - *Cas où la «string rule» n'est plus valide : les obstacles sont à l'intérieur de l'enveloppe convexe de $C_i \cup C_j$ mais sans être tangents à cette enveloppe convexe.*

On note $m(C, C')$ la mesure de l'ensemble total des droites intersectant deux portions de courbes

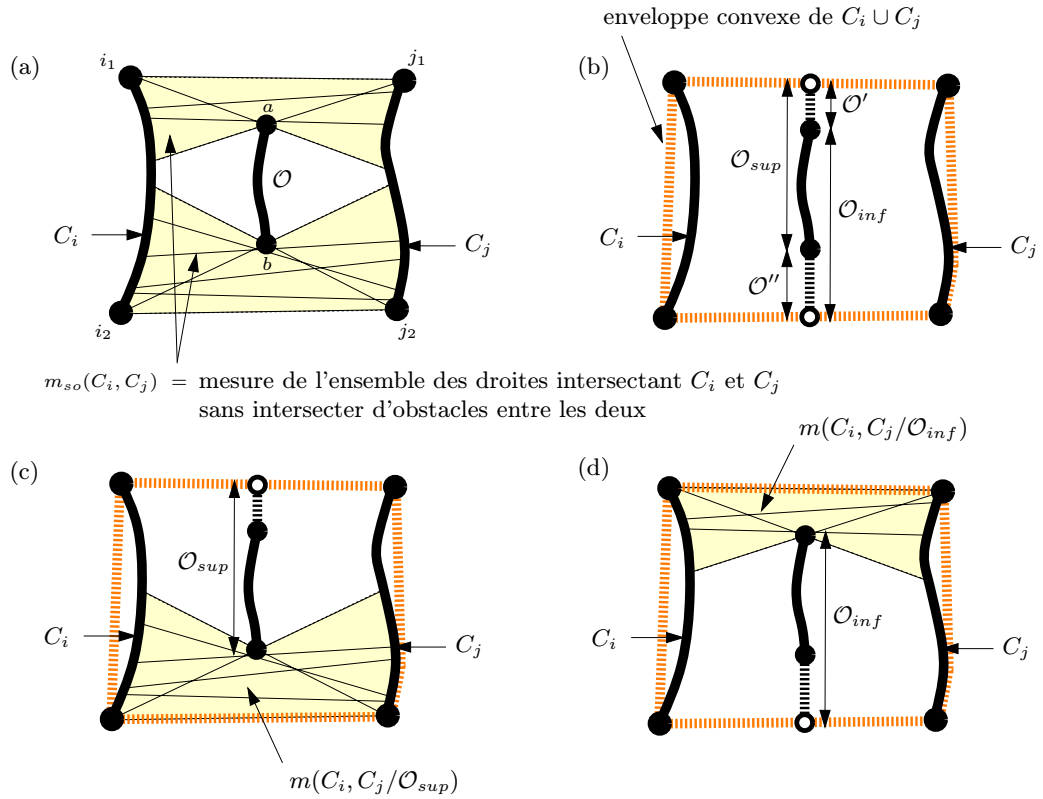


FIG. 2.8 - *Expression du facteur de forme dans le cas où la «string rule» n'est pas valide.*

C et C', et $m(C, C', C'')$ la mesure de l'ensemble total des droites intersectant trois portions de courbes C, C' et C''.
En utilisant ces notations, la mesure de droites $m_{so}(C_i, C_j)$ est donc égale à :

$$m_{so}(C_i, C_j) = m(C_i, C_j) - m(C_i, \mathcal{O}, C_j) \ . \tag{2.13}$$

Pour calculer $m_{so}(C_i, C_j)$, il suffit donc de calculer les mesures de droites $m(C_i, C_j)$ et $m(C_i, \mathcal{O}, C_j)$.
La mesure de droites $m(C_i, C_j)$ représentant l'ensemble total des droites intersectant les portions de courbes C_i et C_j peut être exprimée au moyen de la «string rule». Il suffit de considérer les deux portions de courbes C_i et C_j sans tenir compte de l'obstacle $\mathcal{O}$ entre les deux. La mesure de droites $m(C_i, C_j)$ correspond alors à la somme des longueurs des courbes croisées tendues entre C_i et C_j sans tenir compte de $\mathcal{O}$, moins la somme des longueurs des courbes non croisées tendues entre C_i et C_j sans tenir compte de $\mathcal{O}$.
La mesure de droites $m(C_i, \mathcal{O}, C_j)$ peut être calculée en utilisant les résultats de Sylvester [Syl90] qui permettent de calculer la mesure de l'ensemble des droites qui intersectent trois objets dans le plan.

Nous préférerons cependant utiliser pour calculer la mesure $m_{so}(C_i, C_j)$ une expression dérivant directement de la «string rule», et issue de la formulation décrite ci-dessous. Le principe

est de réexprimer $m_{so}(C_i, C_j)$ en considérant deux obstacles «virtuels» que l'on rajoute pour les besoins du calcul. Soient $\mathcal{O}_{sup}$ et $\mathcal{O}_{inf}$ ces deux obstacles. Chacun des deux obstacles «virtuels» est défini comme une sorte de prolongation de l'obstacle $\mathcal{O}$: les obstacles $\mathcal{O}_{sup}$ et $\mathcal{O}_{inf}$ sont tous les deux constitués de l'obstacle $\mathcal{O}$ puis se prolongent jusqu'à la limite supérieure de l'enveloppe convexe de $C_i \cup C_j$ pour $\mathcal{O}_{sup}$ et jusqu'à la limite inférieure de cette enveloppe convexe pour $\mathcal{O}_{inf}$ (cf. figure 2.8(b)).
On note $m(C, C'/C'')$ la mesure de l'ensemble des droites intersectant deux portions de courbes C et C' sans intersecter une portion de courbe C''. En considérant les deux objets «virtuels» $\mathcal{O}_{sup}$ et $\mathcal{O}_{inf}$, la mesure de droites $m_{so}(C_i, C_j)$ peut être exprimée par :

$$m_{so}(C_i, C_j) = m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{sup}) + m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{inf}) \ . \tag{2.14}$$

On constate intuitivement que ce résultat est valide en considérant les figures 2.8(a), 2.8(c) et 2.8(d). Ce résultat peut aussi être démontré de manière plus formelle.
On a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{sup}) & = & m(C_i, C_j) - m(C_i, \mathcal{O}_{sup}, C_j) \\ m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{inf}) & = & m(C_i, C_j) - m(C_i, \mathcal{O}_{inf}, C_j) \ . \end{array} \right. \tag{2.15}$$

Appelons $\mathcal{O}'$ la partie rajoutée à $\mathcal{O}$ pour former $\mathcal{O}_{sup}$, et $\mathcal{O}''$ la partie rajoutée à $\mathcal{O}$ pour former $\mathcal{O}_{inf}$ (cf. figure 2.8(b)). On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m(C_i, \mathcal{O}_{sup}, C_j) & = & m(C_i, \mathcal{O}', C_j) + m(C_i, \mathcal{O}, C_j) \\ m(C_i, \mathcal{O}_{inf}, C_j) & = & m(C_i, \mathcal{O}, C_j) + m(C_i, \mathcal{O}'', C_j) \ , \end{array} \right. \tag{2.16}$$

et chaque droite intersectant C_i et C_j intersecte nécessairement un des trois obstacles $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ ou $\mathcal{O}''$, ce qui s'exprime par :

$$m(C_i, \mathcal{O}', C_j) + m(C_i, \mathcal{O}, C_j) + m(C_i, \mathcal{O}'', C_j) = m(C_i, C_j) \ . \tag{2.17}$$

En utilisant les équations 2.15, 2.16 et 2.17, puis en remplaçant dans l'équation 2.14, on obtient :

$$m_{so}(C_i, C_j) = m(C_i, C_j) - m(C_i, \mathcal{O}, C_j) \ ,$$

ce qui correspond bien à la formulation initiale de la mesure des droites intersectant C_i et C_j sans intersecter d'obstacles entre les deux (cf. équation 2.13).
Si on considère la mesure de droites $m_{so}(C_i, C_j)$ sous la forme spécifiée par l'équation 2.14, cette mesure peut alors être exprimée au moyen de la «string rule». En effet, les mesures de droites $m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{sup})$ et $m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{inf})$ peuvent être calculées au moyen de la «string rule» (cf. figures 2.8(c) et 2.8(d)), car compte tenu de la façon dont les obstacles $\mathcal{O}_{sup}$ et $\mathcal{O}_{inf}$ sont définis, la «string rule» est valide (ils sont à l'intérieur de l'enveloppe convexe de $C_i \cup C_j$, mais sont tangents à cette enveloppe convexe).

Les mesures de droites $m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{sup})$ et $m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{inf})$ peuvent en fait être obtenues en utilisant seulement l'obstacle $\mathcal{O}$, et elles ne dépendent donc pas de la forme que la partie supérieure de $\mathcal{O}_{sup}$ (partie $\mathcal{O}'$) et la partie inférieure de $\mathcal{O}_{inf}$ (partie $\mathcal{O}''$) peuvent avoir.

En utilisant la «string rule», la mesure de droites $m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{sup})$ de l'ensemble des droites intersectant C_i et C_j sans intersecter $\mathcal{O}_{sup}$ est égale à la somme des longueurs des *courbes croisées* entre C_i et C_j en tenant compte de $\mathcal{O}_{sup}$, moins la somme des longueurs des *courbes non croisées* entre C_i et C_j en tenant compte de $\mathcal{O}_{sup}$. D'après la définition des *courbes croisées* et *non croisées*

entre deux portions de courbes C_i et C_j (cf. paragraphe 2.2.1), ces courbes passent en dessous de $\mathcal{O}_{sup}$.
Soient i_1, i_2 les extrémités de C_i, et j_1, j_2 les extrémités de C_j (cf. figure 2.8(a)). On note a, b les points extrémités de l'obstacle $\mathcal{O}$ dans le cas de l'exemple de la figure 2.8(a). Et soit $d_e(M, N)$ la distance euclidienne entre deux points M et N. On a alors, dans la cas de la figure 2.8(a) :

$$\begin{aligned} m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{sup}) &= [\ d_e(i_1, b) + d_e(b, j_2)\ ] + [\ d_e(i_2, b) + d_e(b, j_1)\ ] \\ &\quad -[\ d_e(i_1, b) + d_e(b, j_1)\ ] - d_e(i_2, j_2) \\ &= d_e(i_2, b) + d_e(b, j_2) - d_e(i_2, j_2)\ . \end{aligned}$$

On constate que la mesure de droites $m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{sup})$ dépend uniquement des extrémités des portions de courbes C_i et C_j, et de l'extrémité inférieure de $\mathcal{O}$.

De même, la mesure de droites $m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{inf})$ est égale à la somme des longueurs des *courbes croisées* entre C_i et C_j en tenant compte de $\mathcal{O}_{inf}$, moins la somme des longueurs des *courbes non croisées* entre C_i et C_j en tenant compte de $\mathcal{O}_{inf}$. D'après la définition des *courbes croisées* et *non croisées* entre deux portions de courbes C_i et C_j (cf. paragraphe 2.2.1), ces courbes passent au dessus de $\mathcal{O}_{inf}$. Dans le cas de l'exemple de la figure 2.8(a), la mesure de droites $m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{inf})$ va donc dépendre uniquement des extrémités de C_i et C_j, et de l'extrémité supérieure de $\mathcal{O}$:

$$m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{inf}) = d_e(i_1, a) + d_e(a, j_1) - d_e(i_1, j_1)\ .$$

Les expressions de $m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{sup})$ et $m(C_i, C_j/\mathcal{O}_{inf})$ permettent ensuite de calculer $m_{so}(C_i, C_j)$.

En utilisant cette règle autant de fois qu'il y a d'obstacles disjoints obstruant la visibilité «par le milieu» (c'est-à-dire d'obstacles qui rompent la connexité de l'ensemble de segments libres maximaux touchant C_i et C_j), on obtient l'expression générale de $m_{so}(C_i, C_j)$, et donc du facteur de forme F_{ij}.

Chapitre 3

Expressions du facteur de forme 2D dans un espace dual

Les deux expressions du facteur de forme présentées dans le chapitre 2 peuvent être réexprimées dans l'espace dual, en utilisant le complexe de visibilité. Nous considérons ici deux dualités différentes : la dualité (θ, u) dans le cas des scènes constituées d'objets convexes, et la dualité (a, b) dans le cas des scènes polygonales (cf. paragraphe A.1 de l'annexe A pour la définition des deux dualités).

Nous allons voir que le facteur de forme exprimé comme un rapport de mesures de droites peut être réexprimé, dans le cas de la dualité (θ, u), en fonction de la somme des aires des différentes faces associées du complexe de visibilité, alors que dans le cas de la dualité (a, b), il s'exprime en fonction d'une somme d'intégrales simples. Le facteur de forme exprimé comme une somme pondérée de longueurs de courbes peut être réexprimé, quant à lui, en fonction des sommets et des arêtes des différentes faces associées du complexe de visibilité.

3.1 Expression du facteur de forme défini par un rapport de mesures de droites

3.1.1 Facteur de forme et faces du complexe de visibilité

Soient deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ donnés. Dans le cas d'une scène constituée d'objets convexes, il s'agit de deux objets convexes, et dans le cas d'une scène polygonale, il s'agit de deux arêtes de polygones.
Considérons le facteur de forme défini comme un rapport de mesures de droites (cf. équation 2.5). Dans le cas de deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ (deux objets convexes ou deux arêtes de polygones, selon le cas), le facteur de forme F_{ij} entre $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ s'exprime donc par :

$$F_{ij} = \frac{m_{so}(\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j)}{m(\mathcal{O}_i)} \tag{3.1}$$

avec $m_{so}(\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j)$ la mesure de l'ensemble des droites intersectant $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ sans intersecter d'obstacles se trouvant entre les deux, et $m(\mathcal{O}_i)$ la mesure de l'ensemble total des droites intersectant $\mathcal{O}_i$.
Pour calculer le facteur de forme F_{ij}, il s'agit donc de caractériser la mesure de droites $m_{so}(\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j)$,

et la mesure de droites $m(\mathcal{O}_i)$.

Le complexe de visibilité associé à une scène donnée est constitué d'un ensemble de faces. Une face donnée est associée à deux objets (il s'agit de deux objets convexes dans le cas des scènes constituées d'objets convexes, et de deux arêtes de polygones dans le cas des scènes polygonales). Une face associée à deux objets donnés correspond à une composante connexe de segments libres maximaux qui touchent ces deux objets (cf. paragraphe 1.6.2). Si l'ensemble des segments libres maximaux qui touchent deux objets donnés n'est pas connexe, cet ensemble de segments libres maximaux est représenté au niveau du complexe de visibilité, par autant de faces qu'il y a de composantes connexes dans cet ensemble de segments libres maximaux. On peut voir un exemple sur la figure 3.1 où l'ensemble des segments libres maximaux qui touchent les deux arêtes de polygones C_i et C_j est séparé en deux composantes connexes.
Toute droite qui intersecte deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ sans intersecter d'obstacles correspond à un segment libre maximal d'une face associée aux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$. L'ensemble des faces associées à deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ représente donc l'ensemble des droites intersectant $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ sans intersecter d'obstacles se trouvant entre les deux. Soient f_1, ... f_k ($k \geq 1$) les différentes faces associées à $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$. On note $\mathcal{M}(f_k)$ la mesure de l'ensemble des droites correspondant à la face f_k. On a donc :

$$m_{so}(\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j) = \sum_k \mathcal{M}(f_k) \ .$$

En remplaçant dans l'équation 3.1, on obtient :

$$F_{ij} = \frac{\sum_k \mathcal{M}(f_k)}{m(\mathcal{O}_i)} = \frac{\mathcal{M}(f_1)}{m(\mathcal{O}_i)} + ... + \frac{\mathcal{M}(f_k)}{m(\mathcal{O}_i)} \tag{3.2}$$

On retrouve ici, sous une forme plus générale, la propriété d'additivité du facteur de forme (cf. paragraphe 1.2.2).

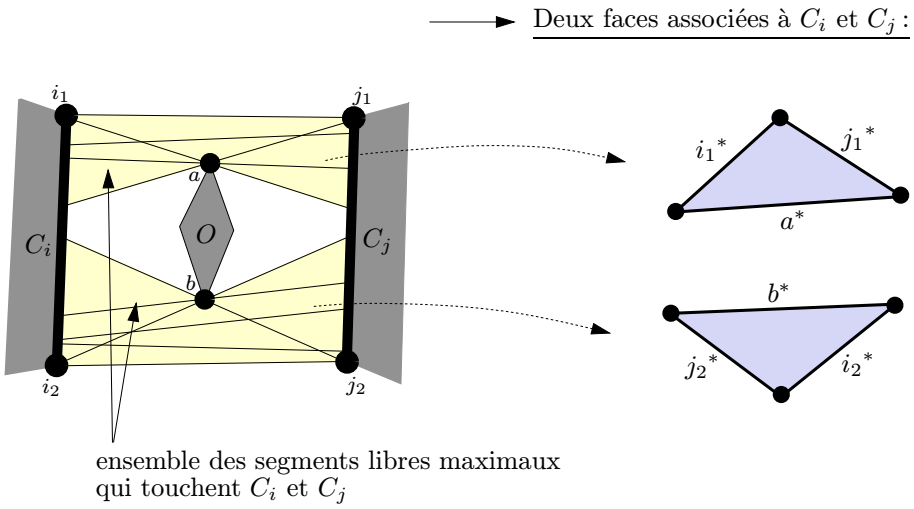


FIG. 3.1 - *Faces associées à deux arêtes de polygones C_i et C_j.*

3.1.2 En dualité (θ, u) : expression du facteur de forme en fonction d'une somme d'aires de faces du complexe

D'après le paragraphe 3.1.1, le facteur de forme entre deux objets convexes O_i et O_j donnés s'exprime en fonction de la somme sur l'ensemble des faces associées à O_i et O_j de la mesure des droites correspondant à chaque face associée à O_i et O_j (cf. équation 3.2). Une droite de la scène est représentée par un point dans l'espace dual (θ, u). Une face associée à deux objets convexes est donc représentée, dans l'espace dual (θ, u), par une zone de points délimitée par un ensemble de courbes associées aux objets qui interviennent dans la face (cf. paragraphe 1.6.3). De même, dans l'espace dual (θ, u), la zone comprise entre les deux courbes de tangence associées à un objet convexe donné correspond à l'ensemble des droites qui intersectent cet objet dans la scène (cf. paragraphe 1.6.3).

Les mesures de droites intersectant des objets convexes dans le plan correspondent en fait, dans l'espace dual (θ, u), à des aires de régions. Plus précisément, on peut établir les propositions suivantes :

Proposition 2 *La mesure de l'ensemble des droites qui intersectent un objet convexe O_i dans le plan est égale, dans l'espace dual (θ, u), à l'aire comprise entre les deux courbes de tangence λ_i et μ_i associées à l'objet convexe O_i pour θ compris entre 0 et π.*

(Cf. paragraphe 1.6.3 pour la définition de courbes de tangence associées à un objet convexe.)

Proposition 3 *La mesure de l'ensemble des droites intersectant deux objets convexes O_i et O_j dans le plan est égale, dans l'espace dual (θ, u), à la somme des aires des différentes faces du complexe de visibilité associées à ces deux objets.*

Ces deux propositions seront démontrées un peu plus loin.

Soient f_1, ... f_k $(k \geq 1)$ les différentes faces associées à deux objets convexes O_i et O_j. En utilisant les propositions 2 et 3, et l'équation 3.1, le facteur de forme entre les deux objets convexes O_i et O_j s'exprime, dans l'espace dual (θ, u), par :

$$F_{ij} = \frac{\sum_k \text{Aire de la face } f_k \text{ associée aux objets } O_i \text{ et } O_j}{\text{Aire comprise entre les deux courbes } \lambda_i \text{ et } \mu_i \text{ pour } \theta \text{ compris entre } 0 \text{ et } \pi}$$

Exemple

Considérons l'exemple de la figure 3.2 constitué de deux cercles O_i et O_j de centres respectifs $I(x_i, y_i)$, $J(x_j, y_j)$, et de rayons r_i et r_j.

Dans l'espace dual (θ, u), on associe à tout objet deux courbes de tangence λ et μ. Dans le cas d'un cercle O_i de centre $I(x_i, y_i)$ et de rayon r_i, les courbes λ et μ sont définies par :

$$\lambda_i = y_i \cos\theta - x_i \sin\theta + r_i \tag{3.3}$$

$$\mu_i = y_i \cos\theta - x_i \sin\theta - r_i \tag{3.4}$$

On a une définition similaire pour le cercle O_j.

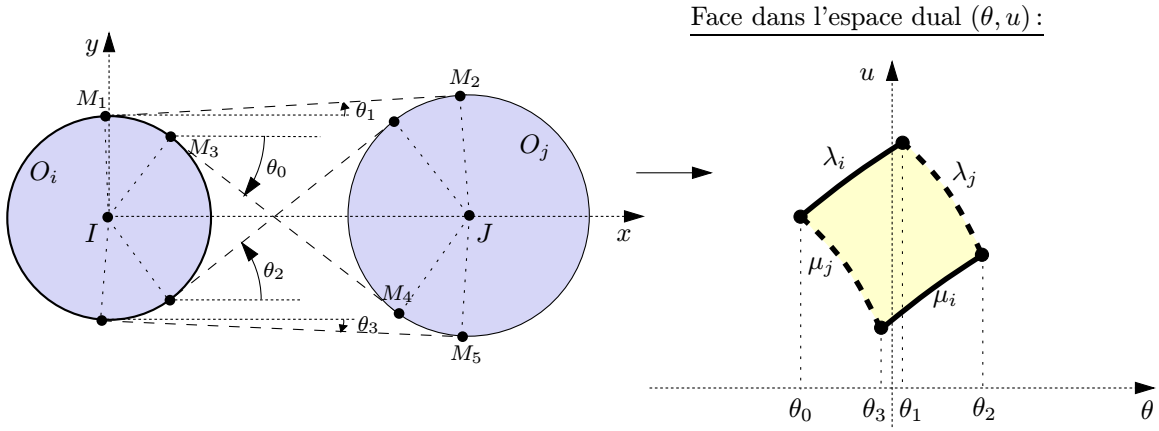


FIG. 3.2 - *Exemple de deux cercles O_i et O_j.*

Soit A_i l'aire comprise entre les courbes de tangence λ_i et μ_i pour θ compris entre 0 et π. L'aire A_i s'exprime donc par :

$$A_i = \int_0^{\pi} [\lambda_i(\theta) - \mu_i(\theta)] d\theta$$

Dans le cas de l'exemple de la figure 3.2, on a donc, en utilisant les équations 3.3 et 3.4 :

$$A_i = \int_0^{\pi} 2r_i d\theta \implies A_i = 2\pi r_i$$

Or, d'après la géométrie intégrale (cf. paragraphe B.3 de l'annexe B), la mesure de l'ensemble des droites qui intersectent un objet est égale à son périmètre. Le périmètre d'un cercle O_i de rayon r_i est égal à $2\pi r_i$.

On constate que la proposition 2 est bien vérifiée.

Calculons maintenant l'aire de la face du complexe associée aux cercles O_i et O_j (cf. figure 3.2), que nous noterons A_{ij}.
D'après la figure 3.2, l'aire A_{ij} s'exprime par :

$$A_{ij} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \lambda_i(\theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda_j(\theta) d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta_3} \mu_j(\theta) d\theta - \int_{\theta_3}^{\theta_2} \mu_i(\theta) d\theta$$

D'où :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= [y_i \sin\theta + x_i \cos\theta + r_i\theta]_{\theta_0}^{\theta_1} + [y_j \sin\theta + x_j \cos\theta + r_j\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} \\ &\quad - [y_j \sin\theta + x_j \cos\theta - r_j\theta]_{\theta_0}^{\theta_3} - [y_i \sin\theta + x_i \cos\theta - r_i\theta]_{\theta_3}^{\theta_2} \\ &= (y_i - y_j)\{-\sin\theta_0 + \sin\theta_1 - \sin\theta_2 + \sin\theta_3\} \\ &\quad + (x_i - x_j)\{-\cos\theta_0 + \cos\theta_1 - \cos\theta_2 + \cos\theta_3\} \\ &\quad + (r_i + r_j)\{-\theta_0 + \theta_2\} + (r_i - r_j)\{\theta_1 - \theta_3\} \end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, on exprime les coordonnées des points dans un repère centré en I (centre de O_i) et dont l'axe des abscisses correspond à la droite (IJ). Dans ce repère, on a (cf.

figure 3.2) :

$$\theta_3 = -\theta_1$$
$$\theta_2 = -\theta_0$$

$$\Rightarrow A_{ij} = 2\{(x_i - x_j)(-\cos\theta_0 + cos\theta_1) - (r_i + r_j)\theta_0 + (r_i - r_j)\theta_1\}$$

Exprimons maintenant la mesure de l'ensemble des droites intersectant les cercles O_i et O_j, que nous noterons m_{ij}.

D'après la géométrie intégrale (cf. paragraphe B.4 de l'annexe B), $m_{ij} = \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_e$, $\mathcal{L}_e$ et $\mathcal{L}_i$ étant les longueurs respectives des courbes $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{C}_i$. Par définition, $\mathcal{C}_e$ est la courbe élastique fermée tracée autour des deux cercles O_i et O_j, et $\mathcal{C}_i$ est la courbe élastique croisée construite autour de ces deux cercles.

Si on note d_e la distance entre les points M_1 et M_2, et d_i la longueur de la courbe de longueur minimum reliant M_1 à M_5 et restant extérieure aux cercles O_i et O_j (cf. figure 3.2), on a alors :

$$m_{ij} = 2\{d_i - d_e\}$$

Dans le repère choisi (repère centré en I avec pour axe des abscisses la droite (IJ)), on a :

$$d_e = (x_j - x_i)\cos\theta_1$$
$$d_i = r_i(\theta_1 - \theta_0) + r_j(-\theta_1 - \theta_0) + M_3M_4 \quad \text{avec} \quad M_3M_4 = (x_j - x_i)\cos\theta_0$$

D'où :

$$m_{ij} = 2\{(x_j - x_i)(\cos\theta_0 - \cos\theta_1) - (r_i + r_j)\theta_0 + (r_i - r_j)\theta_1\}$$

Donc : $m_{ij} = A_{ij}$.

On constate que la proposition 3 est bien vérifiée : la mesure de l'ensemble des droites intersectant les cercles O_i et O_j est égale à l'aire de la face du complexe associée à O_i et O_j.

Démonstration

On souhaite démontrer les propositions 2 et 3 qui expriment, dans l'espace dual (θ, u), des mesures d'ensembles de droites intersectant des objets convexes.

Considérons les résultats de géométrie intégrale présentés dans le paragraphe B.2 de l'annexe B. Une droite G dans le plan est définie par deux paramètres p et ϕ, p étant la distance de la droite à l'origine et ϕ l'angle entre l'axe des abscisses et la droite perpendiculaire à G qui passe par l'origine (cf. figure B.1). La droite G a donc pour équation : $x\cos\phi + y\sin\phi - p = 0$. La mesure d'un ensemble X de droites $G(p, \phi)$ est définie par (cf. paragraphe B.2 de l'annexe B) :

$$m(G : G \in X) = \int_{G\in X} dG = \int_{G\in X} dp \wedge d\phi$$

avec $\wedge$ produit extérieur (défini dans le paragraphe B.1).

Dans le cas de la dualité (θ, u), une droite D dans la scène est définie par deux paramètres θ et u, θ étant l'angle de la droite D avec l'axe des abscisses et u sa distance algébrique à l'origine

(cf. paragraphe A.1). La droite D a donc pour équation : $y\cos\theta - x\sin\theta - u = 0$.
On en déduit la relation suivante, entre les deux paramétrisations de droites (p, ϕ) et (u, θ) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p & = & u \\ \phi & = & \theta + \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \tag{3.5}$$

On veut procéder au changement de variables : $p \to u$, $\phi \to \theta$. Par définition, on a (cf. paragraphe B.1 de l'annexe B) :

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial u} du + \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta \\ d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta \end{aligned}$$

En utilisant les équations 3.5, on a donc :

$$\begin{aligned} dp &= du \\ d\phi &= d\theta \end{aligned}$$

D'où :

$$dp \wedge d\phi = du \wedge d\theta \ .$$

La mesure d'un ensemble X de droites D paramétrées par u, θ est donc égale à la mesure du même ensemble X de droites G paramétrées par p, ϕ définies dans le contexte de la géométrie intégrale :

$$m(G : G \in X) = \int_{G \in X} dp \wedge d\phi = \int_{D \in X} du \wedge d\theta = m(D : D \in X) \tag{3.6}$$

Soient $\lambda_i(\theta)$ et $\mu_i(\theta)$ les deux courbes de tangence associées à un objet convexe O_i dans l'espace dual (θ, u), telles que $\lambda_i(\theta) > \mu_i(\theta)$ pour tout θ. Par définition, les points de coordonnées $(\theta, \lambda_i(\theta))$ et $(\theta, \mu_i(\theta))$ dans l'espace dual (θ, u) correspondent aux deux droites tangentes à l'objet O_i dans la scène, pour une direction θ donnée (cf. paragraphe 1.6.3).
Si on considère les deux courbes $\lambda_i(\theta)$ et $\mu_i(\theta)$ pour θ entre 0 et π, on a donc l'ensemble des droites tangentes à l'objet O_i. Soit la fonction $u(\theta)$ définie par : $u(\theta) = \lambda_i(\theta) - \mu_i(\theta)$ pour $\theta \in [0, \pi[$. Cette fonction correspond en fait à la fonction support de O_i. Dans ce cas là, la mesure de l'ensemble des droites D qui intersectent l'objet convexe O_i est égale à (cf. paragraphe B.3 de l'annexe B) :

$$m(D : D \cap O_i \neq \emptyset) = \int_{D \cap O_i \neq \emptyset} du \wedge d\theta = \int_0^{\pi} u(\theta) d\theta$$

La proposition 2 est donc bien vérifiée.

D'après l'équation 3.6, la mesure de l'ensemble des droites D de paramètres u, θ qui intersectent deux objets convexes O_i et O_j est donc définie par :

$$\begin{aligned} m(D : D \cap O_i \neq \emptyset \text{ et } D \cap O_j \neq \emptyset) &= \textstyle\int_{D \cap O_i \neq \emptyset \text{ et } D \cap O_j \neq \emptyset} du \wedge d\theta \\ &= \textstyle\int_{D \cap O_i \neq \emptyset \text{ et } D \cap O_j \neq \emptyset} du d\theta \ . \end{aligned}$$

Chaque face associée à O_i et O_j est représentée, dans l'espace dual (θ, u), par une zone de points délimitée par un ensemble de courbes $u(\theta)$ (courbes fonctions de θ). Chaque point appartenant

à cette face correspond à une droite dans la scène qui intersecte O_i et O_j sans intersecter d'obstacles. L'intégrale $\int_{D\cap O_i\neq\emptyset \text{ et } D\cap O_j\neq\emptyset} dud\theta$ correspond donc à la somme sur l'ensemble des faces associées à O_i et O_j de l'aire comprise, pour chaque face associée à O_i et O_j, entre les courbes $u(\theta)$ délimitant cette face dans l'espace dual (θ, u).
La proposition 3 est donc aussi vérifiée.

3.1.3 En dualité (a, b) : expression du facteur de forme en fonction d'une somme d'intégrales simples

Les expressions de mesures d'ensembles de droites dans l'espace dual (θ, u), qui ont été établies dans les propositions 2 et 3, dépendent fortement de la dualité choisie, puisque l'expression de la mesure d'un ensemble de droites dépend de la paramétrisation choisie pour les droites. Ces résultats sont valables en dualité (θ, u) car les droites sont distribuées uniformément. Mais nous allons voir qu'ils ne sont plus valables en dualité (a, b), où l'on considère la relation qui à une droite d'équation $y = ax - b$ (respectivement un point de coordonnées $(a, -b)$) associe le point de coordonnées (a, b) (respectivement la droite d'équation $y = ax + b$).

Considérons la face f associée à deux arêtes de polygones données. La face f représentée dans la dualité (θ, u) est délimitée par un ensemble de courbes sinusoïdales $u(\theta)$. Cette même face représentée dans la dualité (a, b) est délimitée par un ensemble de droites $b(a)$ (cf. paragraphe A.2 de l'annexe A). Les faces ont donc un aspect différent selon la dualité choisie ((θ, u) ou (a, b)). Étudions plus précisément la correspondance entre ces deux dualités.

Correspondance entre les dualités (θ, u) et (a, b)

Relations entre a, b, θ et u

Dans le cas de la dualité (θ, u), un point de coordonnées (θ, u) dans l'espace dual correspond à une droite D d'équation $y \cos\theta - x \sin\theta - u = 0$ dans la scène.

Dans le cas de la dualité (a, b), un point de coordonnées (a, b) dans l'espace dual correspond à une droite D d'équation $y = ax - b$ dans la scène (cf. figure 3.3).

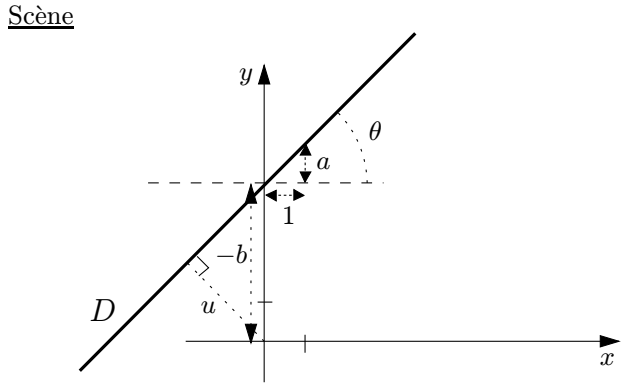


FIG. 3.3 - *Correspondance entre les dualités (a, b) et (θ, u).*

Pour trouver la correspondance entre les deux dualités, il suffit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} y\cos\theta - x\sin\theta - u = 0 \\ y = ax - b \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} a = \tan\theta \\ \\ b = -\dfrac{u}{\cos\theta} \end{cases}$$

D'après la figure 3.3 qui illustre la correspondance entre les deux types de dualités, on constate aussi que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} \end{cases}$$

Lien entre $u(\theta)$ et $b(a)$

Soit M un point de coordonnées (x, y) dans le repère de la scène. Soit $u(\theta)$ la courbe dans l'espace dual (θ, u) représentant l'ensemble des droites passant par le point M dans la scène, et soit $b(a)$ la droite dans l'espace dual (a, b) représentant, de même, l'ensemble des droites passant par le point M dans la scène.
Par définition, on a :

$$\begin{aligned} u(\theta) &= y\cos\theta - x\sin\theta \\ b(a) &= xa - y \end{aligned}$$

En considérant les relations entre a, b, θ et u (cf. paragraphe précédent), on obtient :

$$u(\theta) = -\cos\theta . b(a) = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} b(a)$$

Lien entre $\int u(\theta)d\theta$ et $\int b(a)da$

Connaissant la relation entre $u(\theta)$ et $b(a)$, et la relation entre θ et a (cf. paragraphes précédents), on peut en déduire la relation entre l'intégrale de $u(\theta)$ et l'intégrale de $b(a)$.

$$\begin{aligned} \theta = \arctan(a) \Rightarrow \frac{d\theta}{da} &= \frac{1}{1+a^2} \\ \Rightarrow d\theta &= \frac{1}{1+a^2} da \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\int_{\theta_1=\arctan(a_1)}^{\theta_2=\arctan(a_2)} u(\theta)d\theta = \int_{a_1}^{a_2} -\frac{1}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} b(a)da \ .}$$

On constate donc que :

$$\boxed{\int u(\theta)d\theta \neq \int b(a)da \ .}$$

L'aire comprise entre des droites de l'espace dual (a, b) n'est donc pas directement équivalente à l'aire comprise entre les courbes sinusoïdales correspondantes dans l'espace dual (θ, u). Les propositions 2 et 3 établies dans le cadre de la dualité (θ, u) ne sont donc pas directement transposables en dualité (a, b).

Le facteur de forme entre deux arêtes de polygones C_i et C_j données ne peut pas s'exprimer, dans l'espace dual (a, b), en fonction de la somme des aires des différentes faces associées à ces deux arêtes de polygones. Le facteur de forme s'exprime en fait, dans l'espace dual (a, b), en fonction d'une somme d'intégrales simples de la forme :

$$\int -\frac{1}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} b(a)da \ .$$

Cette somme d'intégrales simples correspond à la mesure de l'ensemble des droites intersectant les arêtes de polygones C_i et C_j sans intersecter d'obstacles, qui apparaît dans l'expression du facteur de forme défini comme un rapport de mesures de droites (cf. équation 3.1).

3.2 Expression du facteur de forme défini par une somme pondérée de longueurs de courbes

Nous avons vu dans le paragraphe 2.2 que le facteur de forme peut être exprimé comme une somme pondérée de longueurs de courbes (expression issue de la «string rule»). Cette expression du facteur de forme peut être interprétée dans l'espace dual, grâce au complexe de visibilité. Le facteur de forme s'exprime alors, dans le cas des objets convexes avec la dualité (θ, u), comme une somme pondérée de valeurs fonctions des sommets et arêtes des faces du complexe de visibilité, et dans le cas des polygones avec la dualité (a, b), comme une somme pondérée dépendant uniquement des sommets des faces du complexe de visibilité.

Nous considérerons dans un premier temps, pour les objets convexes et pour les arêtes de polygones, le cas plus simple où il y a une seule face associée à deux objets convexes donnés, et une seule face associée à deux arêtes de polygones données. Nous verrons ensuite, dans un deuxième temps, le cas plus compliqué où il y a plusieurs faces du complexe associées à deux objets donnés (deux objets convexes ou deux arêtes de polygones, selon le cas).

3.2.1 Cas des objets convexes avec la dualité (θ, u)

Considérons l'exemple de la figure 3.4. Pour déterminer le facteur de forme entre les objets convexes O_i et O_j, il s'agit de calculer la longueur des *courbes croisées* tendues respectivement entre les points (P_{u_l}, P_{d_r}) et (P_{d_l}, P_{u_r}), et la longueur des *courbes non croisées* tendues respectivement entre les points (P_{u_l}, P_{u_r}) et (P_{d_l}, P_{d_r}) (cf. paragraphe 2.2.1 pour la définition de *courbes croisées* et *non croisées*). Le facteur de forme entre les objets convexes O_i et O_j s'exprime alors

par :

$$F_{ij} = \frac{L(P_{u_l}, P_{d_r}) + L(P_{d_l}, P_{u_r}) - L(P_{u_l}, P_{u_r}) - L(P_{d_l}, P_{d_r})}{\textit{Longueur du contour de } O_i} ,$$

avec $L(M, N)$ correspondant à la longueur de la courbe (*croisée* ou *non croisée*, selon le cas) tendue entre les points M et N.

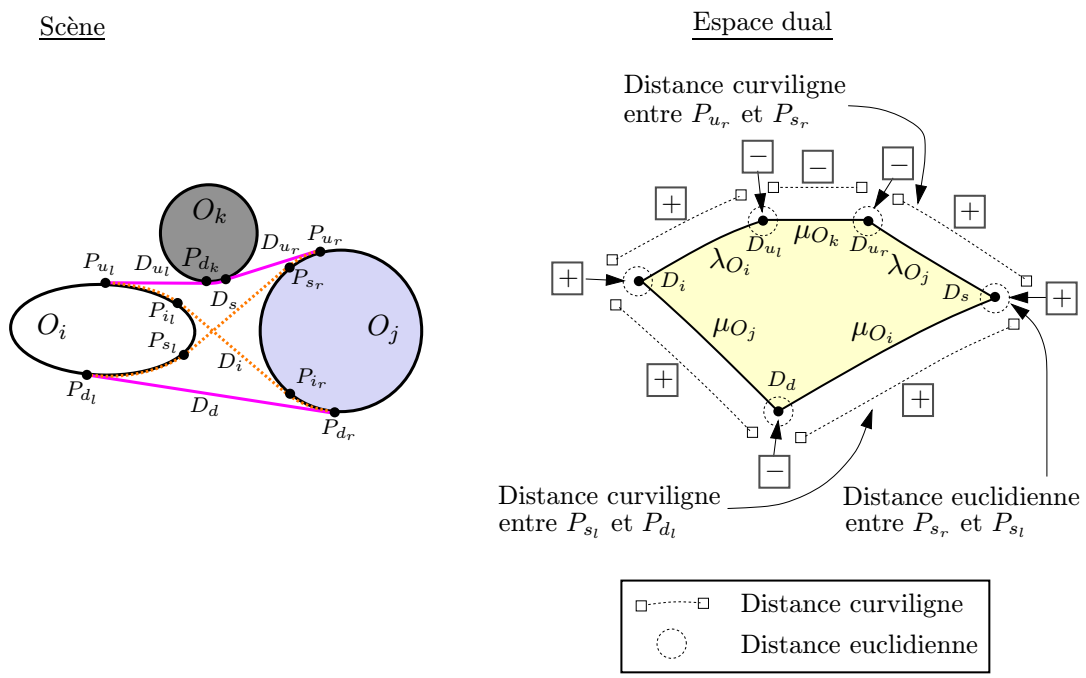


FIG. 3.4 - *Deux objets O_i et O_j, et leur face associée au niveau du complexe.*

Les *courbes croisées* et *non croisées* considérées sont constituées de parties courbes qui suivent le contour des objets, et de parties droites qui sont tangentes aux objets.
Les parties droites correspondent en fait aux bitangentes communes aux objets, bitangentes correspondant dans l'espace dual aux sommets de la face associée aux objets O_i et O_j (la droite D_{u_l} de la scène correspond au sommet D_{u_l} dans l'espace dual, la droite D_{u_r} au sommet D_{u_r}, etc.). Les parties courbes, quant à elles, sont directement liées aux arêtes délimitant la face. En effet, considérons la figure 3.4. L'arête λ_{O_j} appartenant à la face est délimitée par les sommets D_{u_r} et D_s. Les droites D_{u_r} et D_s correspondantes dans la scène sont tangentes à l'objet O_j aux points P_{u_r} et P_{s_r} respectivement. Le fait d'aller de P_{u_r} à P_{s_r} en suivant le contour de l'objet O_j peut être considéré, dans l'espace dual (θ, u), comme le parcours de la courbe de tangence λ_{O_j} entre les sommets D_{u_r} et D_s. Cela revient à considérer dans la scène l'ensemble des droites tangentes à l'objet O_j situées dans le «secteur» compris entre les droites D_{u_r} et D_s.

Les différents sommets et arêtes de la face associée aux objets O_i et O_j permettent donc de calculer les longueurs de courbes nécessaires pour le calcul du facteur de forme F_{ij} entre deux objets convexes O_i et O_j.
On associe, à chaque sommet v de la face, une valeur $d_e(v)$ représentant la longueur euclidienne de la bitangente correspondante dans la scène, et à chaque arête e de la face, une valeur $d_c(e)$ représentant la longueur curviligne de la portion correspondante de l'objet associé.
Le facteur de forme entre deux objets convexes O_i et O_j peut alors être exprimé à partir de la

face associée à O_i et O_j par :

$$F_{ij} = \frac{\sum_{v \text{ sommet de la face}} d'_e(v) + \sum_{e \text{ arête de la face}} d'_c(e)}{\text{Longueur du contour de } O_i} , \tag{3.7}$$

$$\text{où } d'_e(v) = \begin{cases} +d_e(v) \text{ si } v \text{ est un sommet extrémal de la face} \\ \text{(premier ou dernier sommet de la face)} \\ -d_e(v) \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } d'_c(e) = \begin{cases} +d_c(e) \text{ si l'objet associé à l'arête } e \text{ est } O_i \text{ ou } O_j \\ -d_c(e) \text{ sinon} \end{cases}$$

La figure 3.4 montre les différents signes affectant les différentes valeurs obtenues pour chaque sommet v et chaque arête e de la face associée à deux objets O_i et O_j donnés.

Calcul des valeurs $d_e(v)$ et $d_c(e)$:

- La valeur $d_e(v)$ représente pour un sommet v donné du complexe de visibilité, la longueur euclidienne de la bitangente correspondante dans la scène. Soient (θ_v, u_v) les coordonnées du sommet v dans l'espace dual (θ, u). Ce sommet v correspond dans la scène à une droite D_v d'équation $y \cos\theta_v - x \sin\theta_v - u_v = 0$. La valeur $d_e(v)$ est obtenue en calculant d'abord les points d'intersection de la droite D_v avec les deux objets associés aux deux arêtes incidentes à v qui appartiennent à la face du complexe considérée, puis en calculant la distance entre ces deux points. Considérons l'exemple de la figure 3.4. Le sommet D_{u_l} de l'espace dual a pour arêtes incidentes λ_{O_i} et μ_{O_k} sur la face associée aux objets O_i et O_j. Les arêtes λ_{O_i} et μ_{O_k} sont associées respectivement aux objets O_i et O_k. La droite D_{u_l} correspondant au sommet D_{u_l} intersecte les objets O_i et O_k en deux points P_{u_l} et P_{d_k}. A partir du sommet D_{u_l} et de ses arêtes incidentes, on peut donc calculer les points P_{u_l} et P_{d_k}, puis la distance euclidienne entre ces deux points. La distance calculée entre ces deux points correspond à la longueur d'une partie droite de la *courbe non croisée* tendue entre les points P_{u_l} et P_{u_r}.

- Soit une arête e du complexe de visibilité associée à un objet O. L'arête e est la partie de la courbe de tangence $u(\theta)$ de l'objet O comprise entre deux sommets que nous nommerons D_1 et D_2. Les droites correspondant aux sommets D_1 et D_2 dans la scène, sont appelées respectivement droites D_1 et D_2. La valeur $d_c(e)$ représente la longueur curviligne de la portion correspondante de l'objet O. Cette portion correspond à la portion du contour de l'objet O délimitée par les points P_1 et P_2 dans la scène. Les points P_1 et P_2 correspondent aux points d'intersection des droites D_1 et D_2 avec l'objet O. Le fait d'aller de P_1 à P_2 en suivant le contour de l'objet O peut être considéré comme le parcours de la courbe $u(\theta)$ entre les sommets D_1 et D_2. La valeur $d_c(e)$ correspond à la distance curviligne entre les points P_1 et P_2. La distance curviligne entre deux points est, par définition, l'intégrale de l'abscisse curviligne $s(\theta)$ d'un point décrivant l'arc de courbe. Soient $(\theta_1, u(\theta_1))$ les coordonnées du sommet D_1 dans l'espace dual (θ, u), et soient $(\theta_2, u(\theta_2))$ les coordonnées du sommet D_2. La valeur $d_c(e)$ vaut donc :

$$d_c(e) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} s(\theta) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mid u(\theta) + u''(\theta) \mid d\theta ,$$

avec θ_1 et θ_2 les angles respectifs des droites D_1 et D_2 avec l'axe des abscisses du repère de la scène. On constate donc que la valeur $d_c(e)$ peut être obtenue uniquement à partir de l'arête e et de ses sommets extrémités dans l'espace dual.
Dans le cas d'un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r, on a :

$$\begin{aligned} u(\theta) &= y_0 \cos\theta - x_0 \sin\theta \pm r \\ \Longrightarrow u''(\theta) &= -y_0 \cos\theta + x_0 \sin\theta \\ \Longrightarrow &\mid u(\theta) + u''(\theta) \mid = r \ , \end{aligned}$$

d'où : $d_c(e) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r d\theta = r(\theta_2 - \theta_1)$, ce qui correspond bien à la distance curviligne le long d'un cercle.

3.2.2 Cas des polygones avec la dualité (a, b)

Considérons maintenant les exemples (a) et (b) de la figure 3.5. Pour déterminer le facteur de forme entre les deux arêtes de polygones C_i et C_j, il s'agit de calculer la longueur des *courbes croisées* et des *courbes non croisées* tendues entre les extrémités de ces deux arêtes. Soient i_1, i_2 les extrémités de l'arête C_i, et soient j_1, j_2 les extrémités de l'arête C_j. Le facteur de forme entre C_i et C_j s'exprime alors par :

$$F_{ij} = \frac{L(i_1, j_2) + L(i_2, j_1) - L(i_1, j_1) - L(i_2, j_2)}{2 * \textit{Longueur de } C_i}$$

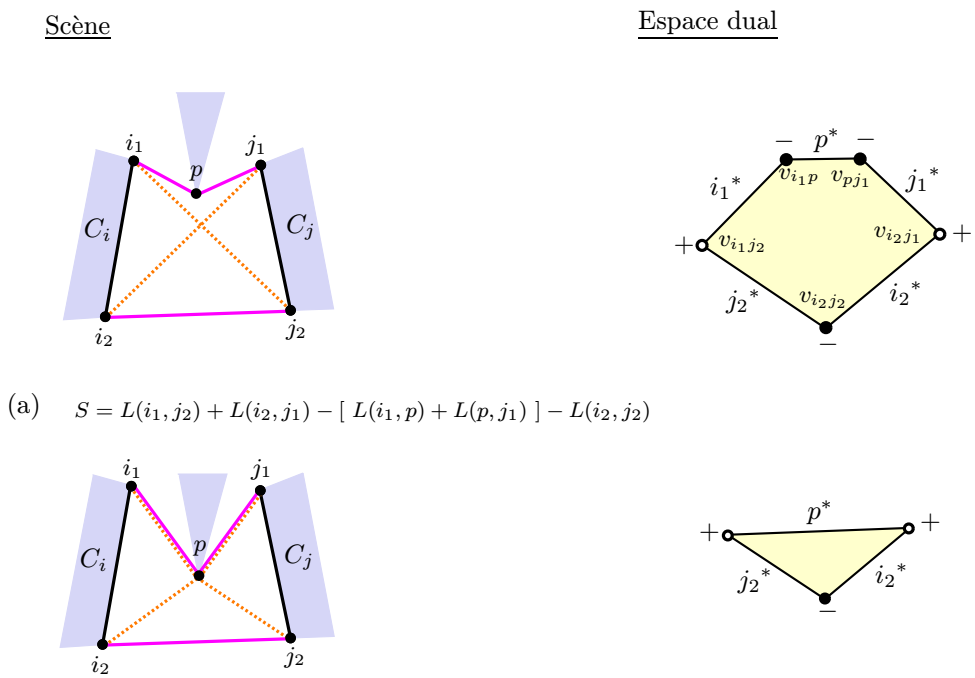
avec $L(M, N)$ correspondant à la longueur de la courbe (*croisée* ou *non croisée*, selon le cas) tendue entre les points M et N.

Les *courbes croisées* et *non croisées* considérées sont constituées uniquement de parties droites reliant des sommets de polygones de la scène. Ces différentes parties droites correspondent à des sommets de la face associée aux arêtes C_i et C_j (la droite (i_1, p) correspond au sommet $v_{i_1 p}$, la droite (p, j_1) au sommet $v_{p j_1}$, etc.). Plus précisément, les deux sommets extrémaux de la face (c'est à dire le premier et le dernier sommets) correspondent aux deux *courbes croisées* et les autres sommets des deux chaînes d'arêtes de la face correspondent aux deux *courbes non croisées* (cf. figure 3.5(a)).

Connaissant les sommets de la face associée à deux arêtes de polygones C_i et C_j, il est alors possible de calculer le facteur de forme F_{ij} entre ces deux arêtes de polygones.
On associe à chaque sommet v de la face, une valeur $d(v)$ représentant la longueur de la partie droite correspondante dans la scène.
Le facteur de forme entre deux arêtes de polygones peut alors être exprimé à partir de la face associée à C_i et C_j par :

$$F_{ij} = \frac{\sum\limits_{v \textit{ sommet de la face}} d'(v)}{2 * \textit{Longueur de } C_i} \ , \tag{3.8}$$

$$\text{où } d'(v) = \begin{cases} +d(v) \text{ si } v \text{ est un sommet extrémal de la face} \\ \ \text{(premier ou dernier sommet de la face)} \\ -d(v) \text{ sinon} \end{cases}$$



(a) $S = L(i_1, j_2) + L(i_2, j_1) - [\ L(i_1, p) + L(p, j_1)\ ] - L(i_2, j_2)$

(b) $S = [\ L(i_1, p) + L(p, j_2)\ ] + [\ L(i_2, p) + L(p, j_1)\ ] - [\ L(i_1, p) + L(p, j_1)\ ] - L(i_2, j_2)$
$= L(i_2, p) + L(p, j_2) - L(i_2, j_2)$

FIG. 3.5 - *Deux arêtes de polygones C_i et C_j, et la face associée à ces deux arêtes de polygones au niveau du complexe.*

La figure 3.5 montre les différents signes affectant les différentes valeurs obtenues pour chaque sommet v de la face associée à deux arêtes de polygones C_i et C_j données. On constate que si les extrémités opposées de C_i et C_j sont cachées par un obstacle, certaines parties droites des *courbes croisées* et des *courbes non croisées* tendues entre les extrémités de C_i et C_j ne correspondent pas à des sommets délimitant la face associée à C_i et C_j (c'est le cas par exemple dans l'exemple de la figure 3.5(b) où les extrémités i_1 et j_2 d'une part, et i_2 et j_1 d'autre part ne sont pas mutuellement visibles). Cependant ces parties droites font parties à la fois des *courbes croisées* et des *courbes non croisées*, donc elles disparaissent au cours du calcul. L'interprétation du facteur de forme défini à partir de la «string rule», sous forme d'une somme pondérée de valeurs fonctions des sommets d'une face du complexe de visibilité, reste donc valable même en présence d'obstacles.

Calcul de la valeur $d(v)$: La valeur $d(v)$ représente pour un sommet v donné de la face associée à deux arêtes de polygones C_i et C_j, la longueur de la partie droite correspondante dans la scène. Cette partie droite est la portion de droite comprise, dans la scène, entre les sommets de polygones associés aux deux arêtes incidentes à v qui appartiennent à la face. La valeur $d(v)$ est alors obtenue tout simplement en calculant la distance entre ces deux sommets de polygones. Considérons la figure 3.5(a) et prenons un exemple de sommet dans l'espace dual. Le sommet v_{i_1p} qui a pour arêtes incidentes $i_1{}^*$ et p^* associées respectivement aux sommets i_1 et p dans la scène, permet effectivement de calculer la longueur de la partie droite comprise entre

les sommets de polygones i_1 et p.

3.2.3 Cas où la «string rule» n'est pas directement applicable

Nous avons vu dans le paragraphe 2.2.4 que la «string rule» telle qu'elle a été définie pour deux portions de courbes C_i et C_j (et donc la formulation du facteur de forme issue de la «string rule», définie dans le paragraphe 2.2.1) n'est valable que lorsque l'ensemble des segments libres maximaux qui touchent C_i et C_j est *connexe*. Si cette condition n'est pas vérifiée, la «string rule» ne peut pas être appliquée directement.

Il en est de même si on considère les segments libres maximaux qui touchent deux objets convexes donnés ou deux arêtes de polygones données. La «string rule» n'est directement applicable que si l'ensemble des segments libres maximaux considéré est connexe. S'il n'est pas connexe, la «string rule» peut cependant être appliquée en décomposant le problème (cf. paragraphe 2.2.4). Pour cela, on considère successivement chaque composante connexe de segments libres maximaux qui touchent deux objets donnés (deux objets convexes ou deux arêtes de polygones, selon le cas) et on suppose à chaque fois que les segments libres maximaux de cette composante connexe correspondent à l'ensemble des segments libres maximaux qui touchent les deux objets considérés. La mesure des segments libres maximaux d'une composante connexe peut alors être calculée au moyen de la «string rule» sous forme d'une somme de longueurs de courbes : cette mesure est égale à la somme des longueurs des *courbes croisées* entre les deux objets considérés en tenant compte des obstacles, moins la somme des longueurs des *courbes non croisées* entre ces deux mêmes objets en tenant compte des obstacles. La mesure de l'ensemble total des segments libres maximaux qui touchent les deux objets considérés est ensuite obtenue en sommant les valeurs obtenues pour chaque composante connexe de segments libres maximaux.
Or chaque composante connexe de segments libres maximaux qui touchent deux objets donnés correspond, au niveau du complexe de visibilité, à une face associée à ces deux objets (cf. paragraphe 3.1.1). La «string rule» est donc applicable pour une face donnée, et s'il y a plusieurs faces associées aux deux mêmes objets (donc plusieurs composantes connexes de segments libres maximaux qui touchent ces deux mêmes objets), la mesure de l'ensemble total des segments libres maximaux est donc obtenue en sommant les valeurs obtenues pour chaque face.

D'après les paragraphes 3.2.1 et 3.2.2, on constate en fait que la somme des longueurs de courbes issue de la «string rule» s'exprime, pour une face donnée, en fonction des sommets et arêtes de cette face.
S'il y a plusieurs faces associées à deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ donnés (deux objets convexes ou deux arêtes de polygones, selon le cas), le facteur de forme exprimé à partir de la «string rule» (cf. paragraphe 2.2), peut donc être exprimé, pour les deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$, en fonction des sommets et arêtes des différentes faces associées à ces deux objets. Soient f_1, ... f_k ($k \geq 1$) les différentes faces associées à deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ donnés. Le facteur de forme F_{ij} entre ces deux objets s'exprime alors en appliquant pour chacune des faces, l'équation 3.7 du paragraphe 3.2.1 dans le cas de deux objets convexes, et l'équation 3.8 du paragraphe 3.2.2 dans le cas de deux arêtes de polygones, puis en additionnant les valeurs obtenues pour chacune des faces. On retrouve ici, sous une forme plus générale, la propriété d'additivité du facteur de forme (cf. paragraphe 1.2.2). Le facteur de forme F_{ij} entre les deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ s'exprime donc par :

$$F_{ij} = \sum_k F_{ij}(f_k)$$

La valeur $F_{ij}(f_k)$ est obtenue en appliquant à la face f_k l'équation 3.7 ou l'équation 3.8, selon le cas.

3.3 Problèmes dus à la direction verticale en dualité (a, b)

La dualité (a, b) peut être utilisée pour représenter les éléments du complexe dans le cas des scènes polygonales (cf. paragraphe A.2). Cependant cette dualité, compte tenu de sa définition (cf. paragraphe A.1), ne traite pas les droites verticales : il n'existe pas de point dans l'espace dual (a, b) permettant de représenter une droite verticale de la scène. Les droites associées dans l'espace dual (a, b) aux deux extrémités d'une arête de polygone verticale sont donc parallèles et ne s'intersectent pas, ce qui va créer des dégénérescences des faces du complexe de visibilité.

Une face associée à deux objets donnés correspond par définition à un ensemble connexe de segments libres maximaux dans la scène, qui touchent ces deux objets (cf. paragraphe 1.6.2). Les objets considérés dans le cas des scènes polygonales sont les arêtes de polygones. Donc toute droite qui intersecte deux arêtes de polygones C_i et C_j données sans intersecter d'obstacles correspond à un segment libre maximal d'une face associée aux deux arêtes de polygones C_i et C_j.
Une droite non verticale (ou un segment libre maximal non vertical) dans la scène correspond à un point dans l'espace dual (a, b). Soit une face associée à deux arêtes de polygones données. Si aucun segment libre maximal appartenant à cette face n'est vertical, cette face correspond donc, dans l'espace dual (a, b), à une région connexe de points qui est délimitée par des portions de droites associées aux différents sommets de polygones qui interviennent dans la face considérée. Par contre, si la direction verticale apparaît pour une face donnée, cette face a une forme «dégénérée». On en distingue deux types : les *faces semi-infinies* et les *faces séparées en deux*.

3.3.1 Deux types de faces dégénérées

Les faces semi-infinies

Ce sont des faces semi-ouvertes. Elles sont caractérisées par une liste supérieure et une liste inférieure d'arêtes reliées d'un côté par un sommet commun et se terminant de l'autre côté par deux arêtes infinies (qui sont des portions de droites parallèles).
On obtient une face de ce type dans le cas où les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- la direction verticale correspond à une limite (ou bordure) de la zone qui caractérise, dans la scène, la visibilité entre les deux arêtes de polygones associées à la face considérée,

- cette droite verticale, qui délimite la visibilité entre les deux arêtes de polygones associées à la face considérée, correspond aussi à la droite support d'une de ces deux arêtes.

La figure 3.6 montre un exemple de scène où les deux conditions énoncées précédemment sont vérifiées. La zone de visibilité entre les arêtes de polygones $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$ est coloriée en gris clair. Si nous considérons cette zone comme un ensemble de segments libres maximaux, elle correspond en fait à l'expression, dans la scène, de la face associée aux deux arêtes de polygones considérées. On peut voir sur la droite de la figure 3.6 la représentation de la face associée aux arêtes de polygones $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$, obtenue dans l'espace dual (a, b). Cette face est semi-infinie. Les arêtes D_{A_1} et D_{A_2} (qui sont des portions de droites en dualité (a, b)) associées respectivement aux points extrémités A_1 et A_2 sont parallèles. Elles ne s'intersectent donc pas.

En effet, l'arête de polygone $[A_1A_2]$ est verticale dans le repère de la scène et il n'existe pas de point dans l'espace dual (a, b) permettant de représenter une droite verticale.

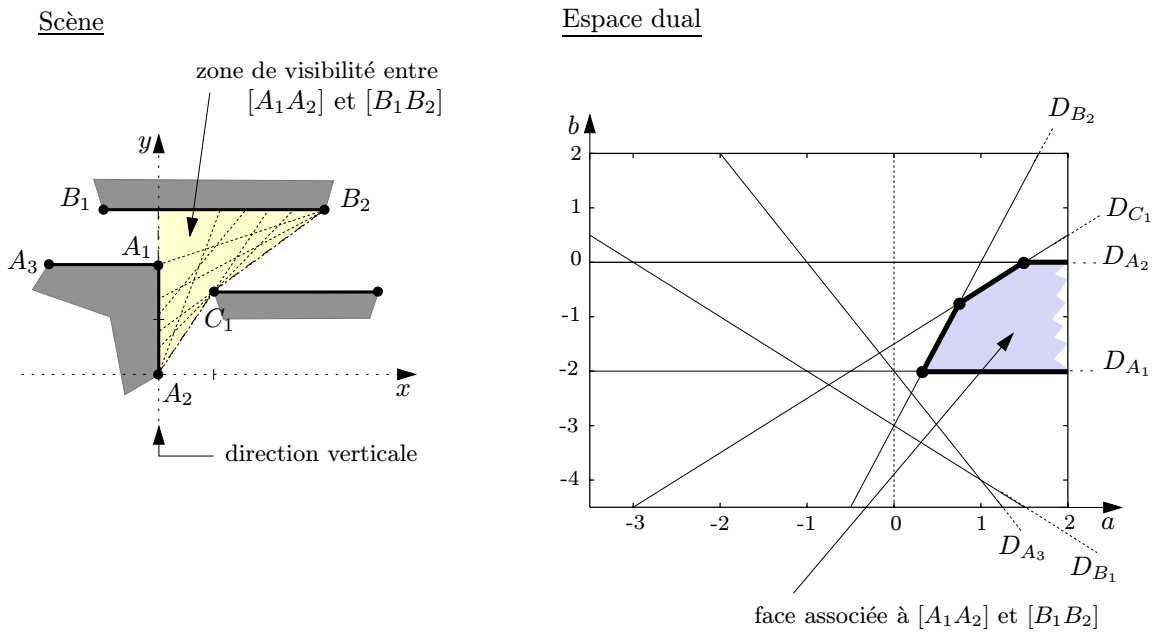


FIG. 3.6 - *Exemple de scène induisant une face semi-infinie dans l'espace dual* (a, b).

Les faces séparées en deux

Ce sont des faces divisées en deux parties. Chaque partie est constituée d'une liste supérieure et d'une liste inférieure d'arêtes reliées d'un côté par un sommet commun et se terminant de l'autre côté par deux arêtes infinies. Pour retrouver la face totale, il faut «reconnecter» les deux parties. La liste supérieure d'arêtes (respectivement la liste inférieure d'arêtes) de l'une des parties de la face se «connecte» avec la liste inférieure (respectivement la liste supérieure) de l'autre partie de la face.
On obtient une face de ce type dans le cas où les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- une partie des segments libres maximaux qui appartiennent à la face considérée sont verticaux dans le repère de la scène.
- les droites supports des deux arêtes de polygones associées à la face considérée ne font pas partie des segments libres maximaux verticaux appartenant à la face.

La figure 3.7 montre un exemple de scène où les deux conditions précédentes sont vérifiées. Sur la droite de la figure 3.7, on peut voir la représentation, dans l'espace dual (a, b), de la face associée aux arêtes de polygones $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$.

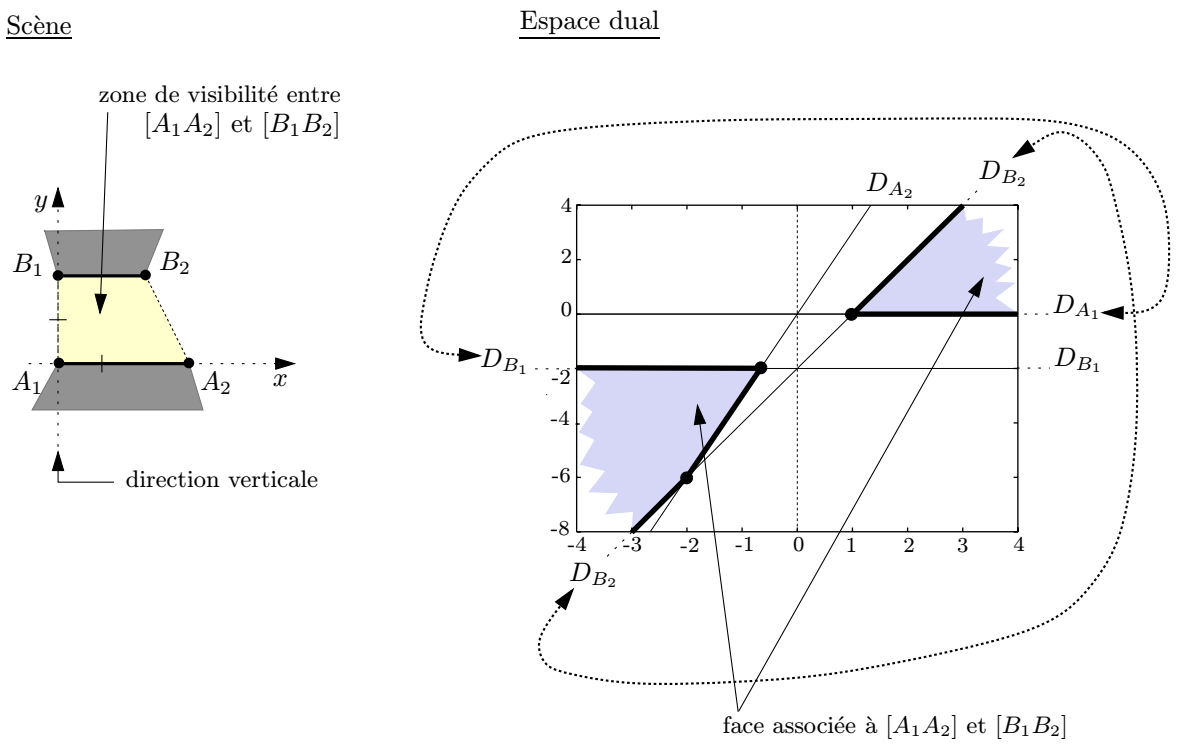


FIG. 3.7 - *Exemple de scène induisant une face séparée en deux dans l'espace dual* (a, b).

3.3.2 Dégénérescence et choix du repère

La représentation dans l'espace dual (a, b) d'une face donnée associée à deux arêtes de polygones peut avoir une forme dégénérée ou non, suivant le repère choisi pour la scène. En effet, la forme obtenue, dans l'espace dual (a, b), pour une face donnée va dépendre des équations des arêtes qui délimitent la face, et ces équations dépendent directement des coordonnées des sommets de polygones de la scène qui interviennent dans la face.
Considérons l'exemple de la figure 3.8. Si les coordonnées au niveau de la scène sont exprimées dans le repère (O, x, y), on constate qu'une partie des segments libres maximaux de la face associée aux arêtes de polygones $[A_1A_2]$ et $[C_1C_2]$ sont verticaux. Dans ce cas, la représentation de cette face obtenue dans l'espace dual (a, b) est de forme «séparée en deux» (cf. schéma de gauche sur la figure 3.9).

Si les coordonnées sont exprimées dans le repère (O, y, x'), la représentation dans l'espace dual (a, b) de la face associée aux arêtes de polygones $[A_1A_2]$ et $[C_1C_2]$ est de forme standard : elle est constituée d'une liste supérieure d'arêtes et d'une liste inférieure d'arêtes reliées de chaque côté par un sommet commun (un sommet qui commence la face et un sommet qui la termine). Le schéma de droite sur la figure 3.9 illustre la représentation de cette face dans l'espace dual (a, b).

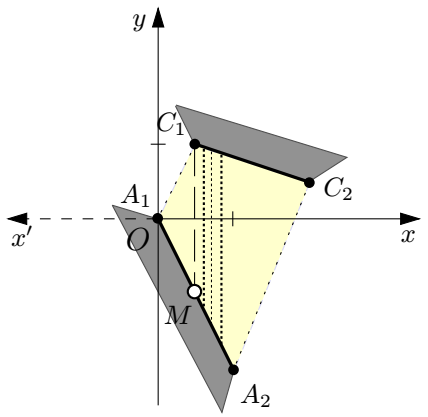


FIG. 3.8 - *Exemple de scène avec deux arêtes de polygones* $[A_1A_2]$ *et* $[C_1C_2]$.

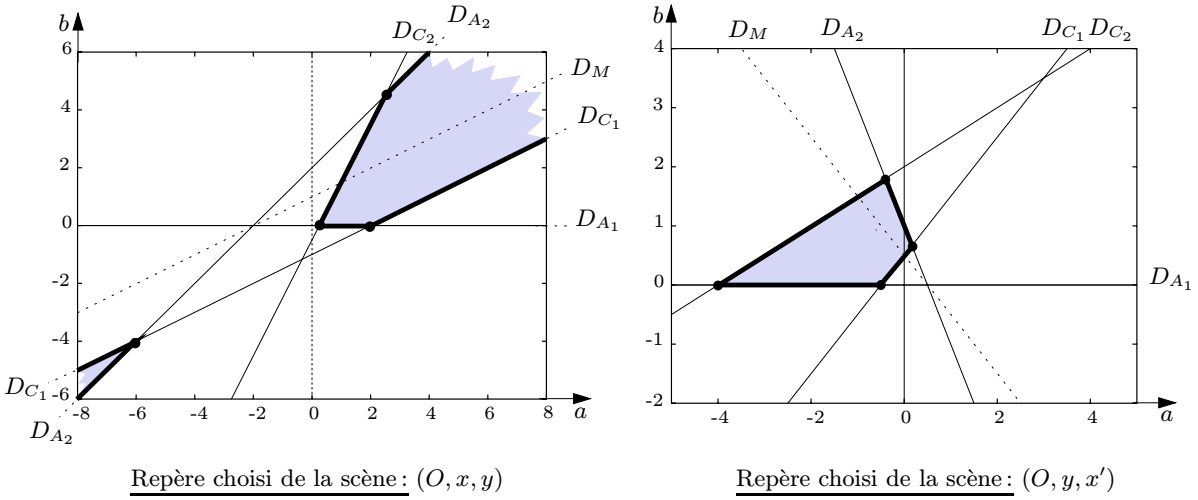


FIG. 3.9 - *Face dans l'espace dual* (a, b) *avec* (O, x, y) *ou* (O, y, x') *comme repère de la scène.*

3.3.3 Comment traiter les problèmes dus à la verticale ?

Si la direction verticale apparaît pour une face donnée du complexe, la représentation de cette face dans l'espace dual (a, b) aura une forme dégénérée. Il est donc nécessaire de tenir compte de ce problème si on souhaite utiliser la représentation du complexe de visibilité dans l'espace dual (a, b) pour faire des calculs, comme les calculs de facteurs de forme par exemple. Deux solutions sont envisageables : soit traiter les faces dégénérées à part en réalisant des calculs spécifiques dans le cas de ces faces, soit faire abstraction du type de dualité en réalisant des calculs qui utilisent uniquement des informations topologiques des faces.

Traitement spécifique pour les faces dégénérées

Considérons par exemple le cas de deux arêtes de polygones dont la face associée dans l'espace dual (a, b) est de forme «semi-infinie» (cf. figure 3.10). Si on souhaite calculer le facteur de forme entre ces deux arêtes de polygones en utilisant la formulation sous forme de somme pondérée de valeurs fonctions des sommets d'une face (cf. paragraphe 3.2.2), il faut considérer lors du calcul le sommet manquant au niveau de la face semi-infinie (cf. figure 3.10). Ce sommet n'apparaît pas car les deux arêtes semi-infinies (D_{A_1} et D_{A_2} dans le cas de la figure 3.10) sont associées aux extrémités d'une arête de polygone verticale dans la scène.

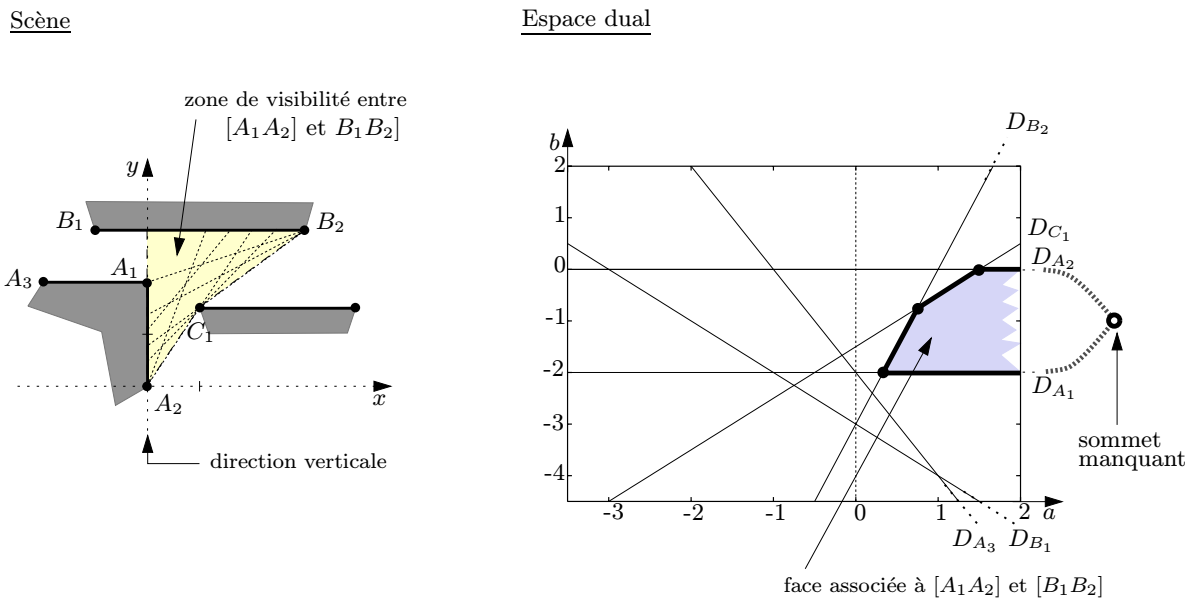


FIG. 3.10 - *Exemple de scène induisant une face semi-infinie dans l'espace dual* (a, b).

Faire abstraction du type de dualité

Une solution pour pallier le problème de la verticale en dualité (a, b) consiste à faire abstraction du type de dualité, en considérant les faces sous leur forme purement *topologique*.

En tenant compte uniquement de la position relative des différentes arêtes de polygones de la scène par rapport aux autres (sans tenir compte des coordonnées réelles des objets exprimées dans le repère de la scène) et en considérant les segments libres maximaux reliant deux arêtes de polygones $[A_1A_2]$ et $[C_1C_2]$ données, on peut en déduire la «forme» de la face associée, dans l'espace dual, à ces deux arêtes de polygones (cf. figure 3.11).

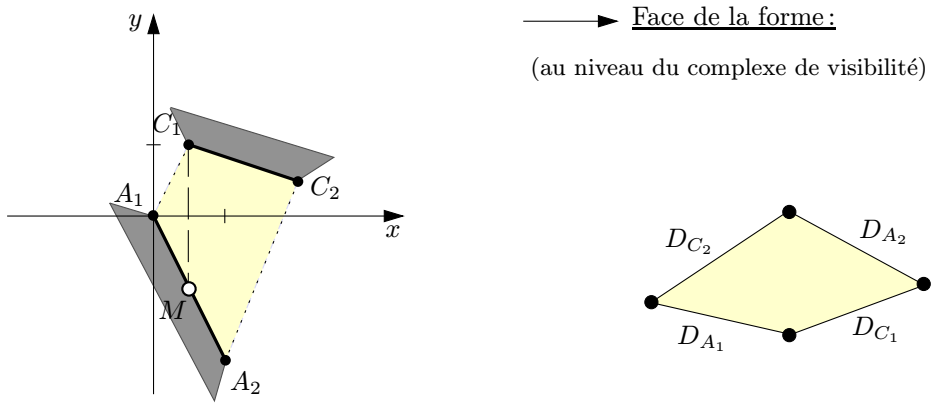


FIG. 3.11 - *Forme* topologique *de la face associée aux arêtes de polygones* $[A_1A_2]$ *et* $[C_1C_2]$.

Cette forme de face est purement *topologique* : elle décrit seulement les relations d'incidence entre les arêtes associées, dans l'espace dual, aux différentes extrémités des arêtes de polygones de la scène. La représentation *topologique* d'une face est de plus complétement indépendante du repère choisi pour la scène. En effet, si on «reconnecte» les deux parties de la face «séparée en deux» sur le schéma de gauche de la figure 3.9, on retrouve bien les mêmes relations d'incidence entre arêtes (et donc la même *topologie*) que dans le cas de la face sur le schéma de droite de la figure 3.9.

En considérant les faces sous leur forme purement *topologique*, on s'affranchit donc du repère choisi pour la scène. On s'affranchit aussi du type de dualité choisi, puisque la forme *topologique* ne tient pas compte des équations des arêtes ni des coordonnées des sommets de la face dans l'espace dual. Et on évite aussi par la même occasion les problèmes dus à la direction verticale, dans le cas de la dualité (a, b). Il n'est plus nécessaire de faire un traitement spécifique. Il suffit de réaliser des calculs qui utilisent uniquement des informations *topologiques*. Reprenons l'exemple de la figure 3.10 où la face associée aux deux arêtes de polygones $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$ considérées est de forme «semi-infinie» dans l'espace dual (a, b). On peut calculer le facteur de forme entre les deux arêtes de polygones $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$ à partir de leur face associée définie sous sa forme topologique (cf. figure 3.12), en utilisant l'interprétation du facteur de forme décrite dans le paragraphe 3.2.2. Cette interprétation consiste à déduire la valeur du facteur de forme en se servant des sommets de la face du complexe associée aux deux arêtes de polygones considérées. Plus précisément, il s'agit de considérer, pour chaque sommet de la face, les points associés à ses deux arêtes incidentes appartenant à la face et de calculer la distance entre ces deux points dans

la scène. Les informations nécessaires (c'est à dire les points associés aux deux arêtes incidentes à chaque sommet) peuvent être obtenues à partir de la face décrite sous sa forme *topologique*.

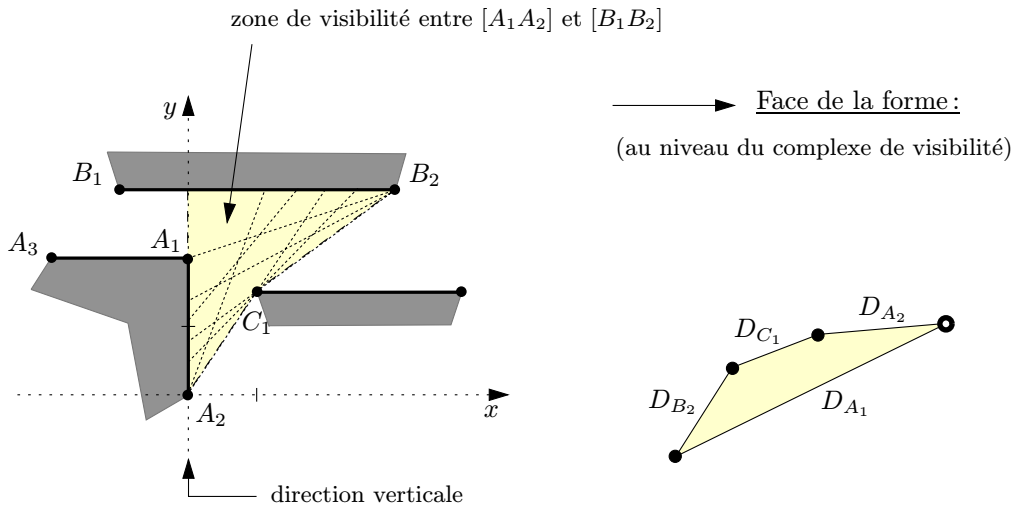


FIG. 3.12 - *Forme* topologique *de la face associée aux arêtes de polygones* $[A_1A_2]$ *et* $[B_1B_2]$.

Chapitre 4

Maillage de discontinuité

Pour appliquer la méthode de radiosité à une scène 2D, le contour de chaque objet doit être subdivisé en petits éléments (ou échantillons). La valeur de radiosité calculée pour un élément donné est supposée constante sur cet élément, dans la méthode de radiosité standard. La précision et la qualité de la solution de radiosité obtenue dépendent donc de la taille et du choix de la discrétisation (ou maillage) de l'environnement.

Les changements de visibilité survenant dans une scène produisent des discontinuités de l'éclairage qui correspondent à des limites de zones d'ombre ou de pénombre. Il est très important de prendre en compte ces discontinuités lors du calcul des échantillons, si on souhaite avoir le meilleur rendu possible pour une scène donnée. Cependant, le calcul d'un maillage en fonction des discontinuités nécessite traditionnellement de nombreux calculs géométriques, rendant cette technique difficile à utiliser.

Nous allons voir que le complexe de visibilité est très approprié dans ce cas, dans la mesure où il permet de faciliter le calcul du maillage de discontinuité.

4.1 Différents types de discontinuité et correspondance dans l'espace dual

Les différentes discontinuités de la fonction de radiosité pour une scène donnée sont associées aux limites de visibilité. Ces limites de visibilité sont définies par les bitangentes communes aux objets dans le cas d'une scène constituée d'objets convexes, et par des droites passant par les différents sommets des polygones intervisibles dans le cas d'une scène polygonale. Considérons par exemple la figure 4.1 constituée de quatre objets convexes. Les objets O_m et O_n obstruent partiellement la visibilité entre les objets O_i et O_j et vont donc causer des discontinuités au niveau de ces deux objets. La bitangente D_2 dans la scène correspond à la limite de l'ombre portée par l'objet O_m sur l'objet O_j. Le point d'intersection de cette bitangente avec l'objet O_j constitue un point de discontinuité au niveau de O_j. En fait, les discontinuités sont causées par les objets associés aux arêtes délimitant la face correspondante (face associée aux objets O_i et O_j dans l'exemple de la figure 4.1).
D'après la définition du complexe de visibilité (cf. paragraphe 1.6.2), les bitangentes (dans le cas d'une scène constituée d'objets convexes) et les droites passant par des sommets de polygones intervisibles (dans le cas d'une scène polygonale) correspondent aux sommets des différentes faces du complexe de visibilité associé à la scène. Les sommets du complexe de visibilité permettent ainsi de déterminer l'ensemble des points de discontinuité pour une scène donnée. Les sommets

du complexe correspondent en fait dans la scène, aux *lignes critiques* qui induisent les points de discontinuité.

4.1.1 Cas des objets convexes

Considérons une scène constituée d'objets convexes, et le complexe de visibilité associé à cette scène. Soit f une face de ce complexe de visibilité, et soit v un sommet donné de cette face. La face f est associée à deux objets convexes O_i et O_j donnés de la scène. Trois cas de figure peuvent se produire pour le sommet v (cf. figure 4.1) :

Cas 1 Le sommet v correspond, dans la scène, à une bitangente commune aux objets O_i et O_j. Dans l'espace dual, une des deux arêtes incidentes au sommet v sur la face f est donc associée à l'objet O_i, et l'autre à l'objet O_j. (Sommets • sur la figure 4.1).

Cas 2 Le sommet v correspond, dans la scène, à une bitangente commune à un objet qui interfère et à un objet auquel la face est associée (donc O_i ou O_j). Dans l'espace dual, une des deux arêtes incidentes au sommet v sur la face f est donc associée à un objet qui interfère, et l'autre à l'objet O_i ou O_j. (Sommets ∘ sur la figure 4.1).

Cas 3 Le sommet v correspond, dans la scène, à une bitangente commune à deux objets qui interfèrent. Dans l'espace dual, les deux arêtes incidentes au sommet v sur la face f sont donc associées à deux objets qui interfèrent. (Sommet □ sur la figure 4.1).

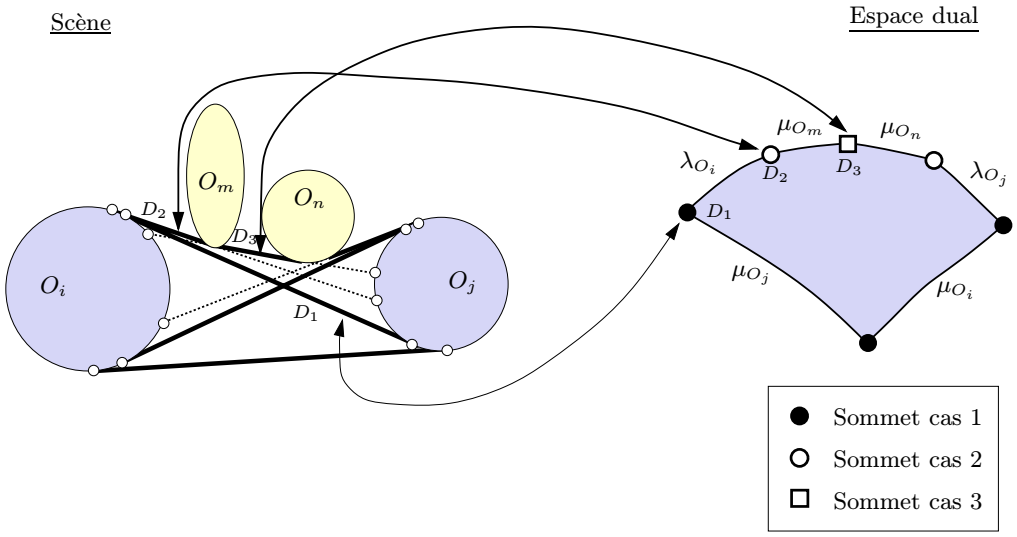


FIG. 4.1 - *Deux objets O_i et O_j et leur face associée au niveau du complexe de visibilité.*

Chaque cas de figure permet de déterminer deux points de discontinuité : un au niveau de l'objet O_i et l'autre au niveau de l'objet O_j. Soit D la droite correspondant dans la scène au sommet v. Les points de discontinuité obtenus à partir du sommet v correspondent, dans la scène, aux premières intersections de la droite D avec les objets O_i et O_j.

Les différents sommets d'une face associée à deux objets convexes donnés permettent donc de déterminer différents points de discontinuité au niveau de ces deux objets convexes. En

considérant l'ensemble des sommets des faces du complexe de visibilité, on obtient l'ensemble des points de discontinuité pour une scène donnée.

4.1.2 Cas des polygones

Considérons maintenant une scène constituée de polygones, et le complexe de visibilité associé à cette scène. Soit f une face de ce complexe de visibilité, et soit v un sommet donné de cette face. La face f est associée à deux arêtes de polygones C_i et C_j données de la scène. On distingue ici quatre cas de figure pour le sommet v, les trois premiers étant similaires à ceux dans le cas des objets convexes (cf. exemples (a) et (b) sur la figure 4.2) :

Cas 1 Le sommet v a pour arêtes incidentes sur la face f, deux arêtes dont une est associée à une des extrémités de l'arête de polygone C_i, et l'autre à une des extrémités de l'arête de polygone C_j. (Sommets • dans les exemples (a) et (b) de la figure 4.2).

Cas 2 Le sommet v a pour arêtes incidentes sur la face f, deux arêtes dont une est associée à une des extrémités des arêtes C_i ou C_j, et l'autre à un sommet de polygone qui interfère entre C_i et C_j. (Sommets ∘ dans l'exemple (a) de la figure 4.2).

Cas 3 Le sommet v a pour arêtes incidentes sur la face f, deux arêtes associées à des sommets de polygones qui interfèrent entre C_i et C_j. (Sommet □ dans l'exemple (a) de la figure 4.2).

Cas 4 Le sommet v a pour arêtes incidentes sur la face f, deux arêtes associées chacune à une des deux extrémités de l'arête de polygone C_i (respectivement C_j). (Sommet ◇ dans l'exemple (b) de la figure 4.2).

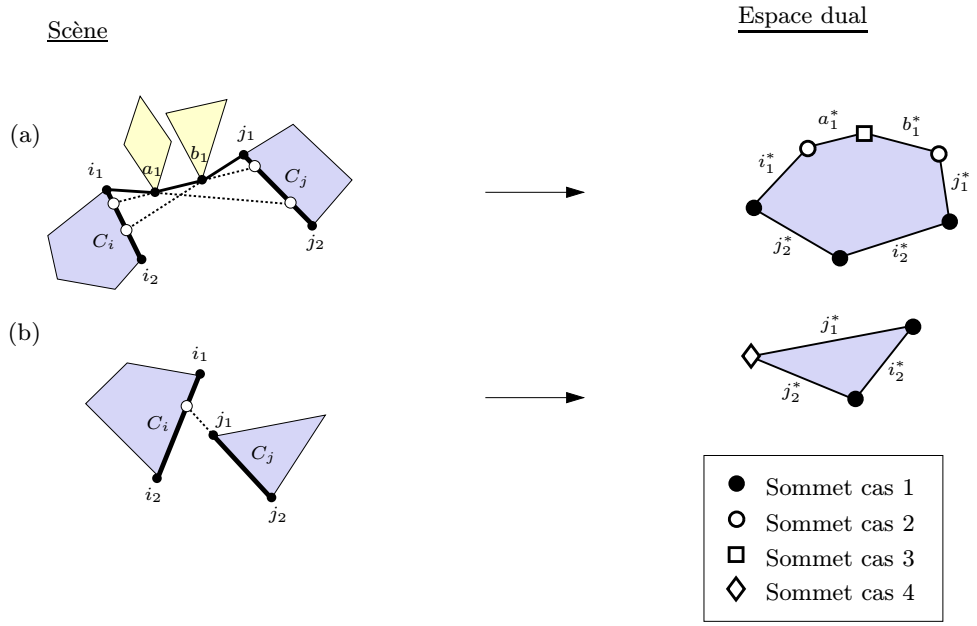


FIG. 4.2 - *Deux arêtes de polygones C_i et C_j et leur face associée au niveau du complexe de visibilité.*

Le premier cas de figure rend simplement compte du fait qu'il y a des discontinuités au niveau des extrémités des arêtes des polygones.

Le deuxième cas de figure permet de déterminer un point de discontinuité, soit au niveau de l'arête de polygone C_i, soit au niveau de l'arête C_j. Si une des deux arêtes incidentes au sommet v est associée à une des extrémités de C_i (respectivement C_j), alors le sommet v permet de déterminer un point de discontinuité au niveau de l'arête C_j (respectivement C_i).

Le troisième cas de figure permet de déterminer deux points de discontinuité : un au niveau de l'arête de polygone C_i et l'autre au niveau de l'arête de polygone C_j.

Le quatrième cas de figure permet de déterminer un point de discontinuité sur l'arête de polygone C_i (respectivement C_j) si les deux arêtes incidentes au sommet v sont associées aux extrémités de l'arête de polygone C_j (respectivement C_i).

Les sommets d'une face associée à deux arêtes de polygones données, qui vérifient le deuxième, le troisième ou le quatrième cas de figure permettent donc de déterminer différents points de discontinuité sur ces deux arêtes de polygones. Les différents points de discontinuité sur les arêtes de polygones C_i ou C_j, obtenus à partir d'un sommet v donné de la face f du complexe, correspondent à des points d'intersection de la droite D avec les arêtes de polygones C_i ou C_j, la droite D étant la droite correspondant dans la scène au sommet v. En considérant pour l'ensemble des faces du complexe de visibilité, les sommets vérifiant les cas de figure 2, 3 et 4, on obtient l'ensemble des points de discontinuité pour une scène donnée. Il est inutile de considérer les sommets vérifiant le cas de figure 1. En effet, les points de discontinuité calculés à partir de ces sommets correspondent aux extrémités des arêtes de polygones, qui sont bien évidemment connues.

4.2 Détermination des points de discontinuité au moyen du complexe

Nous avons vu dans le paragraphe 4.1 que les discontinuités peuvent être obtenues à partir des sommets des faces du complexe. Voyons maintenant dans le détail comment calculer ces points de discontinuité.

Nous distinguons deux approches possibles : la première consiste à utiliser des informations issues du complexe de visibilité, et à effectuer ensuite le calcul dans l'espace de la scène ; la seconde consiste à effectuer les calculs directement dans l'espace dual.

4.2.1 Utilisation d'informations issues du complexe et calcul dans l'espace de la scène

On peut procéder de deux façons différentes pour utiliser des informations issues du complexe : soit utiliser des informations géométriques liées à l'espace dual dans lequel le complexe est représenté, soit utiliser uniquement des informations purement topologiques en ne prenant en compte que les relations d'incidence au niveau des faces et en ne tenant pas compte des coordonnées des sommets ni des équations des arêtes du complexe.

Calcul au moyen d'informations géométriques du complexe liées à l'espace dual

Les points de discontinuité peuvent être déterminés en utilisant des informations dépendant de l'espace dual qui est utilisé pour représenter le complexe de visibilité.

Cas des objets convexes dans l'espace dual (θ, u)

Soit une face f du complexe de visibilité associé à une scène donnée constituée d'objets convexes (cf. exemple (a) de la figure 4.3). La face f est associée à deux objets convexes O_i et O_j. Soit un sommet v de la face f de coordonnées (θ_v, u_v) dans l'espace dual (θ, u). Ce sommet correspond dans la scène à une droite D d'équation : $y \cos\theta_v - x \sin\theta_v - u_v = 0$. Pour calculer les points de discontinuité induits par ce sommet pour les objets convexes O_i et O_j, il suffit de calculer dans la scène les premières intersections de la droite D avec ces deux objets.

Application : Soit $M(x_M, y_M)$ le point de discontinuité recherché sur l'objet O_i. Dans le cas d'un cercle O_i de centre (x_i, y_i) et de rayon r_i, il s'agit de résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} (x_M - x_i)^2 + (y_M - y_i)^2 = r_i^2 \\ y_M \cos\theta_v - x_M \sin\theta_v - u_v = 0 \end{cases}$$

Après résolution, on obtient :

$$\begin{cases} x_M = x_i \cos^2\theta_v - u_v \sin\theta_v + y_i \cos\theta_v \sin\theta_v - A\cos\theta_v \\ y_M = x_i \sin\theta_v \cos\theta_v + u_v \cos\theta_v + y_i \sin^2\theta_v - A\sin\theta_v \end{cases}$$

avec : $A = \sqrt{r_i^2 - (y_i \cos\theta_v - x_i \sin\theta_v - u_v)^2}$.

Cas des polygones dans l'espace dual (a, b)

Soit une face f du complexe de visibilité associé à une scène polygonale donnée (cf. exemple (b) de la figure 4.3). La face f est associée à deux arêtes de polygones C_i et C_j. Soit un sommet v de la face f de coordonnées (a_v, b_v) dans l'espace dual (a, b). Ce sommet correspond dans la scène à une droite D d'équation : $y = a_v x - b_v$. Pour calculer les points de discontinuité induits, selon le cas, au niveau des arêtes de polygones C_i et/ou C_j, (cf. paragraphe 4.1.2 pour les différents cas), il suffit de calculer dans la scène les intersections de la droite D avec les arêtes de polygones C_i et/ou C_j.

Application : Supposons que le point $M(x_M, y_M)$ soit un point de discontinuité induit par le sommet v sur l'arête de polygone C_i. Soient $i_1(x_{i_1}, y_{i_1})$ et $i_2(x_{i_2}, y_{i_2})$, les sommets extrémités de C_i dans la scène. Pour trouver le point M, il s'agit de calculer le point d'intersection dans la scène de la droite D et de la droite $D_{i_1 i_2}$ passant par les points i_1 et i_2. Si la droite $D_{i_1 i_2}$ n'est pas verticale, elle a pour équation dans la scène : $y = Ax + B$ avec $A = \dfrac{y_{i_2} - y_{i_1}}{x_{i_2} - x_{i_1}}$ et $B = \dfrac{x_{i_2} y_{i_1} - x_{i_1} y_{i_2}}{x_{i_2} - x_{i_1}}$. Il s'agit donc, dans ce cas, de résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} y_M = a_v x_M - b_v \\ y_M = A x_M + B \end{cases}$$

avec $A = \dfrac{y_{i_2} - y_{i_1}}{x_{i_2} - x_{i_1}}$ et $B = \dfrac{x_{i_2} y_{i_1} - x_{i_1} y_{i_2}}{x_{i_2} - x_{i_1}}$.

On obtient après résolution :

$$\begin{cases} x_M = -\dfrac{B + b_v}{A - a_v} \\ \\ y_M = -\dfrac{a_v B + b_v A}{A - a_v} \end{cases}$$

Si la droite $D_{i_1 i_2}$ est verticale, elle a pour équation : $x = x_{i_1} = x_{i_2}$, et on obtient alors :

$$\begin{cases} x_M = x_{i_1} = x_{i_2} \\ y_M = a_v x_{i_1} - b_v \end{cases}$$

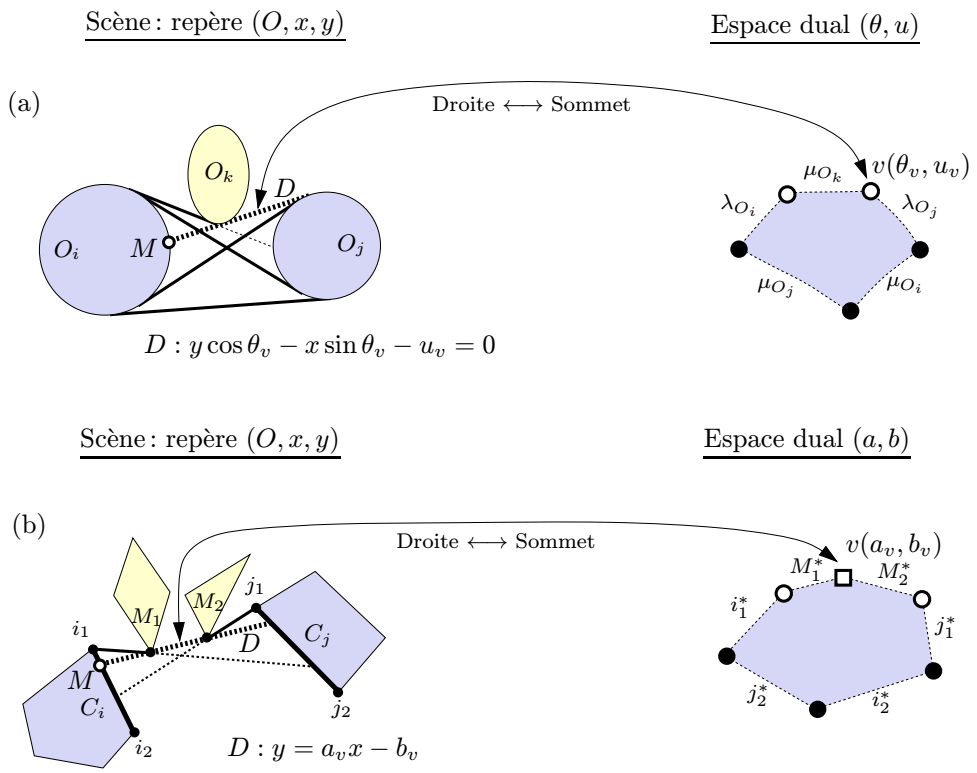


FIG. 4.3 - *Exemple de face f du complexe de visibilité associée à deux objets.*

Calcul au moyen d'informations purement topologiques du complexe

Il est possible de déterminer les points de discontinuité indépendamment de la dualité choisie pour représenter le complexe de visibilité. Il suffit de ne pas considérer de coordonnées de points dans l'espace dual et d'utiliser uniquement des informations topologiques comme les relations d'incidence entre les sommets et arêtes d'une face du complexe (les relations d'incidence étant bien indépendantes de la dualité choisie, cf. paragraphe A.2 de l'annexe A).

Considérons le cas d'une scène polygonale. Pour un sommet v donné d'une face f du complexe de visibilité associé à la scène, on ne considère plus ses coordonnées mais uniquement les points associés à ses deux arêtes incidentes appartenant à la face f. Soient M_1 et M_2 ces deux points. Par définition, le sommet v correspond dans la scène à la droite $D_{M_1M_2}$ passant par les points M_1 et M_2 associés à ses deux arêtes incidentes sur la face f considérée (cf. figure 4.4). Supposons que le point $M(x_M, y_M)$ soit un point de discontinuité induit par le sommet v sur l'arête de polygone C_i. Soient i_1 et i_2 les sommets extrémités de C_i dans la scène. Pour trouver le point M, il s'agit donc de calculer le point d'intersection dans la scène de la droite $D_{M_1M_2}$ et de la droite $D_{i_1i_2}$ passant par les points i_1 et i_2. L'équation de la droite $D_{M_1M_2}$ (respectivement $D_{i_1i_2}$) est définie à partir des coordonnées dans la scène des points M_1, M_2 (respectivement i_1, i_2).

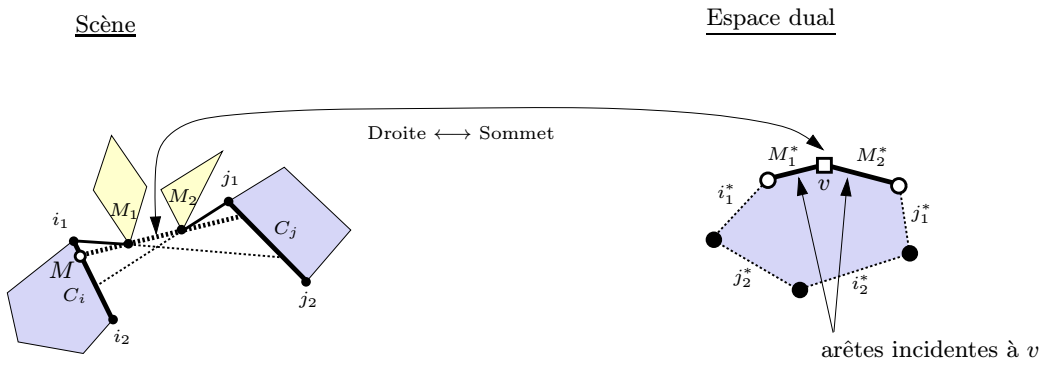


FIG. 4.4 - *Deux arêtes de polygones C_i et C_j et leur face du complexe de visibilité associée.*

4.2.2 Calcul directement dans l'espace dual

Dans le cas des scènes polygonales, il est possible de déterminer les points de discontinuité directement dans l'espace dual.

Considérons une scène polygonale donnée et le complexe de visibilité associé représenté dans l'espace dual (a, b). Soit un sommet v d'une face f du complexe. La face f est associée à deux arêtes de polygones C_i et C_j (cf. exemple sur la figure 4.5). Supposons que le point M de coordonnées (x_M, y_M) dans la scène soit un point de discontinuité induit par le sommet v sur l'arête de polygone C_i. Soit D_M la droite dans l'espace dual (a, b) représentant l'ensemble des droites passant par le point M dans la scène. La droite D_M passe par le sommet v dans l'espace dual, sachant que la droite associée à v dans la scène intersecte l'arête de polygone C_i en M. Le point M appartient à l'arête de polygone C_i, donc la droite D_M passe par le point d'intersection I des droites associées aux deux extrémités de C_i dans l'espace dual (cf. figure 4.5).
La droite D_M dans l'espace dual a pour équation : $b = x_M a - y_M$, x_M et y_M étant les inconnues à déterminer. Soient (a_I, b_I) les coordonnées de I dans l'espace dual, et soient (a_v, b_v) les coordonnées du sommet v de la face f. Pour déterminer x_M et y_M, il suffit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} b_I = x_M a_I - y_M \\ b_v = x_M a_v - y_M \end{cases},$$

sachant que : $I \in D_M$ et $v \in D_M$.

On obtient après résolution :

$$x_M = \frac{b_v - b_I}{a_v - a_I} \quad et \quad y_M = \frac{a_I b_v - b_I a_v}{a_v - a_I} \ .$$

Remarque : Les droites associées dans l'espace dual (a, b) aux points de discontinuité sur une arête de polygone donnée sont comprises entre les deux droites associées dans l'espace dual (a, b) aux extrémités de cette arête de polygone et elles passent toutes par l'intersection I de ces deux droites. En effet, ce point d'intersection I dans l'espace dual (a, b) correspond à la droite qui passe par l'arête de polygone dans la scène.

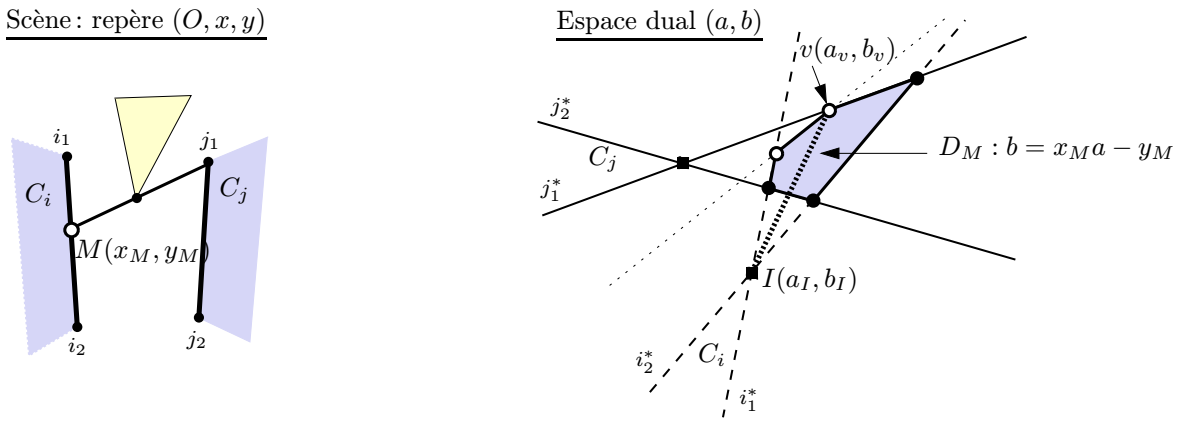


FIG. 4.5 - *Exemple de face associée à deux arêtes de polygones C_i et C_j.*

Problèmes dus à la direction verticale en dualité (a, b)

Le calcul présenté précédemment, permettant de calculer la discontinuité induite sur une arête de polygone C_i par un sommet v du complexe, est défini en fonction des coordonnées dans l'espace dual (a, b) du sommet v et du sommet I (I étant l'intersection des droites associées aux deux extrémités de C_i dans l'espace dual). Ce calcul est donc valable seulement si les sommets v et I sont effectivement représentés dans l'espace dual (a, b). La dualité (a, b) ne permet pas de représenter les droites verticales dans l'espace dual (a, b) (cf. paragraphe 3.3). Les sommets v et I ne seront donc pas représentés dans l'espace dual (a, b) s'ils correspondent à des droites verticales dans le repère de la scène.

On distingue donc deux cas : le cas où le sommet I n'est pas représenté dans l'espace dual (a, b), et le cas où le sommet v n'est pas représenté dans l'espace dual (a, b).
Le premier cas se produit lorsque l'arête de polygone C_i, sur laquelle on veut déterminer une discontinuité, est verticale. Dans ce cas là, les droites associées aux deux extrémités de C_i dans l'espace dual sont parallèles et ne s'intersectent donc pas.
Le deuxième cas se produit lorsque la droite correspondant dans la scène au sommet v est verticale, c'est à dire lorsque la droite passant dans la scène par les deux points associés aux deux arêtes de la face f qui sont incidentes au sommet v est verticale.

– *Cas où le sommet I n'est pas représenté dans l'espace dual (a, b):*
  Considérons par exemple le cas de la figure 4.6. On souhaite calculer le point de discontinuité M induit sur l'arête de polygone C_i par le sommet v. L'arête de polygone C_i est

verticale. Les droites associées dans l'espace dual (a, b) aux deux extrémités de C_i sont parallèles (cf. droites D_{A_1} et D_{A_2} sur la figure 4.6) et le point I correspondant à leur intersection n'existe donc pas. Soit D_M la droite associée au point M dans l'espace dual (a, b). Cette droite, par définition, représente l'ensemble des droites passant par le point M dans la scène. Le point M appartient à l'arête de polygone C_i, donc la droite D_M est censée passer par le point d'intersection I des droites associées aux deux extrémités de C_i dans l'espace dual (soient les droites D_{A_1} et D_{A_2} dans le cas de la figure 4.6). Or le point I n'existe pas : les droites D_{A_1} et D_{A_2} ne s'intersectent pas. La droite D_M correspond donc à une droite passant entre les droites D_{A_1} et D_{A_2} sans les intersecter. On sait d'autre part que la droite D_M passe par le sommet v dans l'espace dual, puisque la droite associée à v dans la scène intersecte C_i en M.

Si le sommet I n'est pas représenté, la droite D_M dans l'espace dual (a, b) est donc définie comme la droite qui est parallèle aux droites associées aux extrémités de l'arête de polygone C_i et qui passe par le sommet v.

Soient (x_M, y_M), (x_{A_1}, y_{A_1}), (x_{A_2}, y_{A_2}) les coordonnées respectives des points M, A_1 et A_2 dans le repère de la scène. Soient (a_v, b_v) les coordonnées du sommet v dans l'espace dual (a, b). La droite D_M dans l'espace dual (a, b) a pour équation : $b = x_M a - y_M$, x_M et y_M étant les inconnues à déterminer. De même, les droites D_{A_1} et D_{A_2} ont pour équations respectives : $b = x_{A_1} a - y_{A_1}$ et $b = x_{A_2} a - y_{A_2}$. Sachant que D_M est parallèle à D_{A_1} et D_{A_2}, et que le sommet v appartient à D_M, on a donc :

$$\begin{cases} x_M = x_{A_1} = x_{A_2} \\ b_v = x_M a_v - y_M \Longrightarrow y_M = x_{A_1} a_v - b_v \end{cases}$$

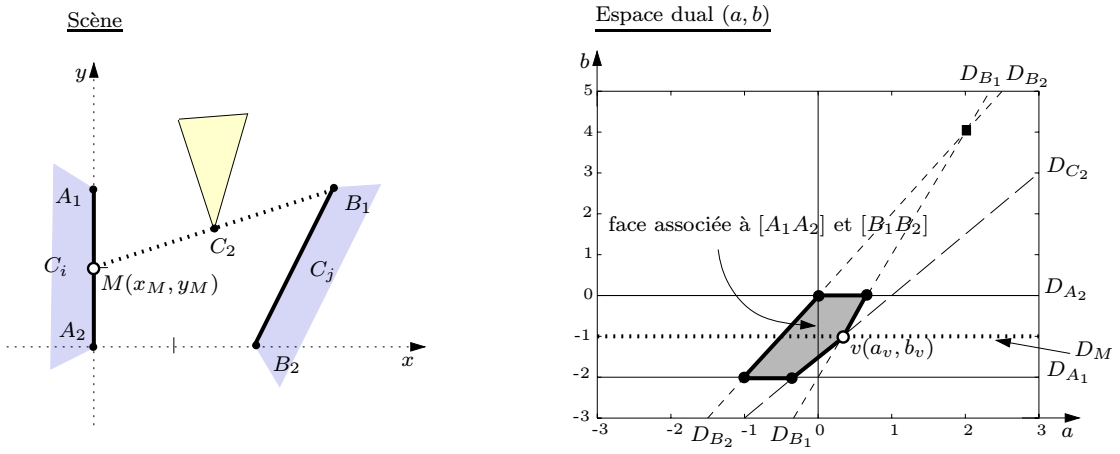


FIG. 4.6 - *Exemple de cas où le sommet I n'existe pas dans l'espace dual (a, b).*

– *Cas où le sommet v n'est pas représenté dans l'espace dual (a, b):*
Considérons par exemple le cas de la figure 4.7. On souhaite calculer le point de discontinuité M induit sur l'arête de polygone C_i par le sommet v. Ce sommet v a pour arêtes incidentes sur la face du complexe considérée, deux arêtes associées respectivement aux points B_1 et C_2 de la scène (cf. forme «topologique» de la face sur la figure 4.7). La droite

(B_1C_2) correspondant au sommet v dans la scène est verticale. Le sommet v n'est donc pas représenté dans l'espace dual (a, b). Les droites D_{B_1} et D_{C_2} associées respectivement aux points B_1 et C_2 dans l'espace dual (a, b) sont parallèles et ne s'intersectent donc pas. Soit D_M la droite associée au point M dans l'espace dual (a, b). Cette droite, par définition, représente l'ensemble des droites passant par le point M dans la scène. La droite D_M est censée passer par le sommet v dans l'espace dual, puisque la droite associée à v dans la scène (droite (B_1C_2) dans le cas de la figure 4.7) intersecte C_i en M. Cependant le sommet v n'existe pas : les droites D_{B_1} et D_{C_2} ne s'intersectent pas puisqu'elles sont parallèles. La droite D_M correspond donc à une droite parallèle aux droites D_{B_1} et D_{C_2}. D'autre part, le point M appartient à l'arête de polygone C_i, donc la droite D_M passe par le point d'intersection I des droites associées aux deux extrémités de C_i dans l'espace dual (soient les droites D_{A_1} et D_{A_2} dans le cas de la figure 4.7).

Si le sommet v induisant la discontinuité n'est pas représenté, il est nécessaire de considérer la forme «topologique» de la face du complexe considérée, afin de connaître les deux arêtes de cette face qui sont incidentes au sommet v. On considère ensuite les deux points associés à ces deux arêtes incidentes (points B_1 et C_2 dans le cas de la figure 4.7). La droite D_M dans l'espace dual (a, b) est alors définie comme la droite qui est parallèle aux droites associées aux deux points associés aux deux arêtes incidentes à v, et qui passe par le point d'intersection I des droites associées aux deux extrémités de C_i dans l'espace dual.

Soient (x_M, y_M), (x_{B_1}, y_{B_1}) et (x_{C_2}, y_{C_2}) les coordonnées respectives des points M, B_1 et C_2 dans le repère de la scène, B_1 et C_2 étant les points associés aux arêtes incidentes à v au niveau de la face considérée prise sous sa forme «topologique». Soient (a_I, b_I) les coordonnées du point d'intersection I dans l'espace dual. La droite D_M dans l'espace dual a pour équation : $b = x_M a - y_M$, x_M et y_M étant les inconnues à déterminer. De même, les droites D_{B_1} et D_{C_2} ont pour équations respectives : $b = x_{B_1} a - y_{B_1}$ et $b = x_{C_2} a - y_{C_2}$. Sachant que D_M est parallèle à D_{B_1} et D_{C_2}, et que le point I appartient à D_M, on a donc :

$$\begin{cases} x_M = x_{B_1} = x_{C_2} \\ b_I = x_M a_I - y_M \Longrightarrow y_M = x_{B_1} a_I - b_I \end{cases}$$

4.3 Implémentation du calcul du maillage de discontinuité

Deux implémentations différentes ont été réalisées : une première pour les scènes constituées d'objets convexes et une deuxième pour les scènes polygonales.

4.3.1 Cas des objets convexes

L'implémentation du calcul du maillage de discontinuité pour les objets convexes utilise une implémentation du complexe de visibilité pour les objets convexes réalisée par Rivière (cf. [Riv93] pour les détails d'implémentation). Cette implémentation du complexe est basée sur le balayage par une droite verticale proposé par Pocchiola et Vegter [PV93a]. Ce balayage permet de construire le complexe pour des objets convexes en temps $\mathcal{O}(m \log n)$, avec n le nombre d'objets convexes dans la scène et m le nombre de sommets du complexe (cf. paragraphe 1.6.4 pour les différentes méthodes de construction du complexe de visibilité).

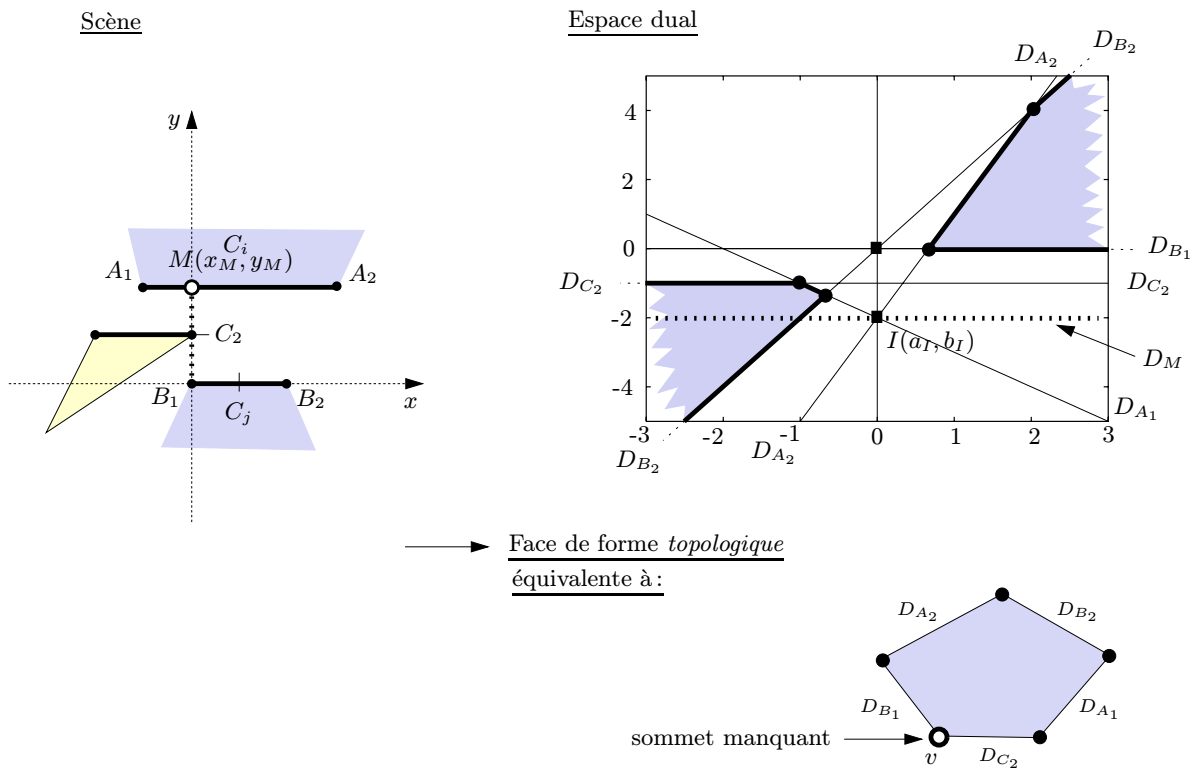


FIG. 4.7 - *Exemple de cas où le sommet v n'existe pas dans l'espace dual (a, b).*

Une fois que le complexe de visibilité associé à une scène donnée est construit, le calcul du maillage de discontinuité est réalisé en considérant tous les sommets du complexe de visibilité. Le calcul est donc effectué en temps $\mathcal{O}(m)$. La figure 4.8 montre l'algorithme que nous utilisons pour calculer les discontinuités au niveau des objets convexes d'une scène, en utilisant le complexe de visibilité.

Détails d'implémentation

Dans l'implémentation utilisée pour la construction du complexe de visibilité sont stockées, en plus de la structure des faces et des relations d'incidence entre les différentes arêtes et sommets du complexe, les coordonnées dans l'espace dual (θ, u) de chaque sommet v du complexe. Les points de discontinuité sont calculés avec la méthode de calcul utilisant des informations géométriques du complexe liées à l'espace dual, qui est présentée dans le paragraphe 4.2.1. Cette méthode se sert des coordonnées du sommet v dans l'espace dual (θ, u) pour obtenir la droite correspondant à v dans la scène, puis calcule dans la scène le point d'intersection de cette droite avec l'objet convexe sur lequel on veut calculer la discontinuité.

Les différents points de discontinuité calculés sur un objet convexe O donné sont stockés dans une liste associée à cet objet. Pour un point de discontinuité donné, plutôt que de stocker directement ses coordonnées (x, y), on stocke un paramètre k qui représente ce point de manière unique. Tout point sur un objet convexe O peut effectivement être représenté par un paramètre lié à cet objet. Par exemple, dans le cas d'un cercle O_i de centre (x_i, y_i) et de rayon r_i, tout

Calcul des points de discontinuité pour les objets convexes

Soit c le complexe de visibilité associé à la scène
Pour toute face f de c associée à deux objets O_i et O_j donnés **faire**
  Pour tout sommet v de f **faire**
    Calculer la discontinuité induite sur O_i
    Calculer la discontinuité induite sur O_j
  Fin Pour
Fin Pour

FIG. 4.8 - *Algorithme de calcul du maillage de discontinuité pour les objets convexes.*

point M de l'objet O_i de coordonnées (x, y) dans le repère de la scène peut être défini par :

$$\begin{cases} x = x_i + r_i \cos k \\ y = y_i + r_i \sin k \end{cases}$$

avec $k \in [-\pi, \pi[$.
La liste permettant de stocker les points de discontinuité sur un objet convexe O donné est donc constituée d'une liste de paramètres k qui sont ordonnés par ordre croissant.

Remarque : Dans l'algorithme de calcul du maillage de discontinuité pour les objets convexes (cf. figure 4.8), les sommets d'une face f donnée sont considérés en parcourant successivement la liste supérieure et la liste inférieure d'arêtes de la face.

Exemple

La figure 4.9 montre un exemple d'images obtenues avec le programme que nous avons implémenté. Les deux scènes considérées sont constituées de trois cercles dont une source. Elles sont représentées en pseudo-3D. On peut voir les différentes lignes critiques induisant des points de discontinuité dans la scène. Chaque ligne critique correspond à un sommet du complexe de visibilité associé à la scène. Les objets sont échantillonnés en fonction des discontinuités et la valeur de radiosité est affichée pour chacun des éléments ainsi obtenus.

4.3.2 Cas des polygones

L'implémentation du calcul du maillage de discontinuité pour les polygones utilise une implémentation du complexe de visibilité pour les polygones réalisée par Rivière (cf. [Riv95] et [Riv97]). Cette implémentation permet de construire le complexe de visibilité pour une scène polygonale en temps $\mathcal{O}(m + n \log n)$ et en espace $\mathcal{O}(n)$, avec n le nombre d'arêtes de polygones dans la scène et m le nombre de sommets du complexe de visibilité associé à la scène (cf. paragraphe 1.6.4 pour les différentes méthodes de construction du complexe de visibilité).

Une fois que le complexe de visibilité associé à une scène donnée est construit, le calcul du maillage de discontinuité est réalisé en considérant les sommets du complexe. Le calcul est donc effectué en temps $\mathcal{O}(m)$, comme dans le cas des objets convexes (cf. paragraphe 4.3.1). Le nombre de sommets m du complexe est en fait $\Omega(n)$ et $\mathcal{O}(n^2)$. On constate donc que l'utilisation du

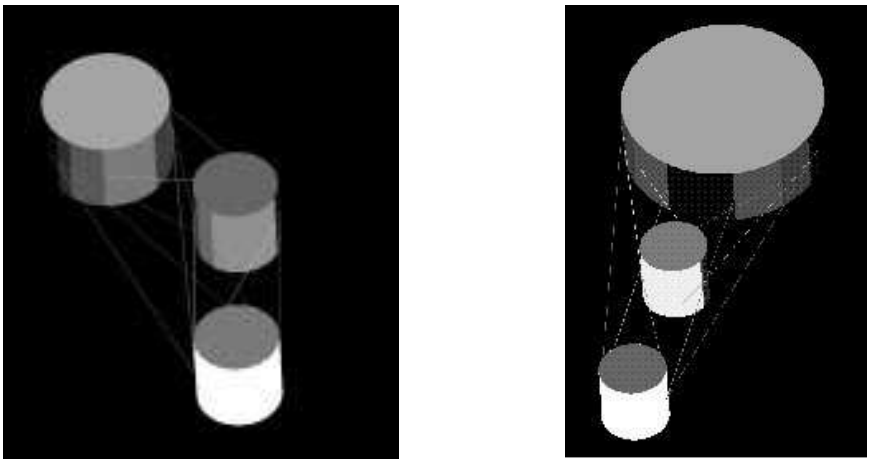


FIG. 4.9 - *Exemple de scènes constituées d'objets convexes.*

complexe de visibilité pour le calcul des discontinuités est très utile puisque Heckbert [Hec92a] a proposé un algorithme qui permet de calculer les discontinuités d'une scène 2D polygonale, en temps $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ au mieux, n étant le nombre d'arêtes de polygones (cf. paragraphe 1.3.3). La figure 4.10 montre l'algorithme que nous utilisons pour calculer les discontinuités sur les arêtes de polygones d'une scène, en utilisant le complexe de visibilité. Les différents types de discontinuités nommés **(1)**, **(2)**, **(3)**, et **(4)** dans l'algorithme sont illustrés sur la figure 4.11. Le type **(5)** n'est pas représenté sachant qu'il correspond au cas symétrique du type **(4)**. Les types **(1)** et **(2)** correspondent à des sommets vérifiant le cas de figure 2 (cf. paragraphe 4.1.2), le type **(3)** correspond à un sommet vérifiant le cas de figure 3 (cf. paragraphe 4.1.2), et les types **(4)** et **(5)** correspondent à des sommets vérifiant le cas de figure 4 (cf. paragraphe 4.1.2).

Calcul des points de discontinuité pour les polygones

Soit c le complexe de visibilité associé à la scène
Pour toute face f de c associée à deux arêtes de polygones C_i et C_j données **faire**
  Pour toute arête e de f non associée à C_i ou C_j **faire**
    Pour tout sommet v extrémité de e **faire**
      Si v est aussi l'extrémité d'une arête de f associée à C_i **(1)**
        Calculer la discontinuité induite sur C_j
      Sinon Si v est aussi l'extrémité d'une arête de f associée à C_j **(2)**
          Calculer la discontinuité induite sur C_i
        Sinon Calculer les discontinuités induites sur C_i et C_j **(3)**
    Fin Pour
  Fin Pour
  Si les arêtes incidentes au premier sommet de f sont associées à C_i (resp. C_j) **(4)**
    Calculer la discontinuité induite sur C_j (resp. C_i)
  Si les arêtes incidentes au dernier sommet de f sont associées à C_i (resp. C_j) **(5)**
    Calculer la discontinuité induite sur C_j (resp. C_i)
Fin Pour

FIG. 4.10 - *Algorithme de calcul du maillage de discontinuité pour les polygones.*

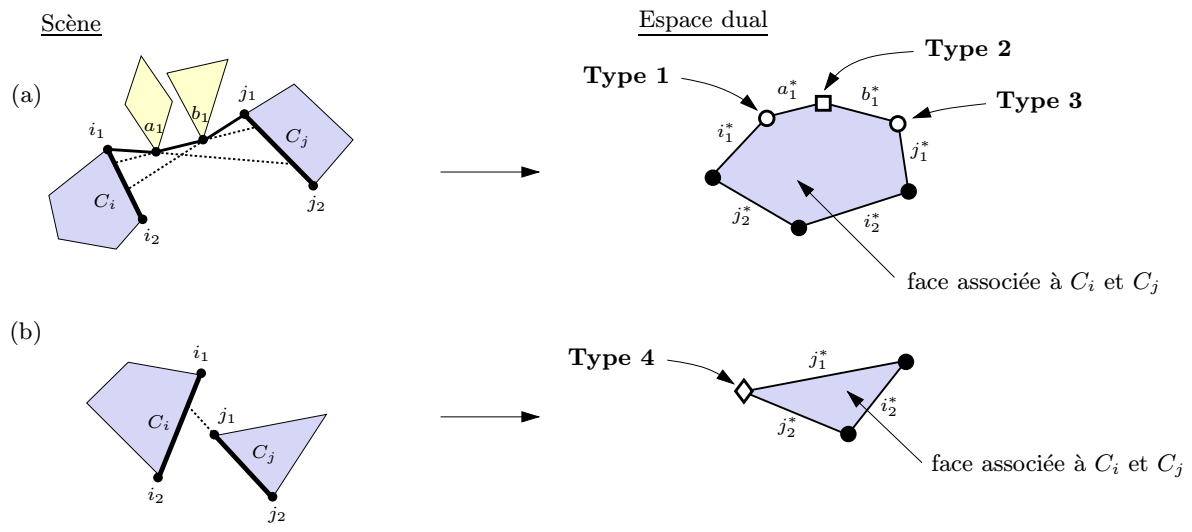


FIG. 4.11 - *Différents types de discontinuités.*

Détails d'implémentation

Dans l'implémentation utilisée pour la construction du complexe de visibilité sont stockées uniquement des informations topologiques : structure des faces et relations d'incidence entre les différentes arêtes et sommets du complexe. Les différentes informations stockées pour décrire le complexe de visibilité sont donc indépendantes d'une quelconque dualité. Les points de discontinuité sont calculés en utilisant la méthode de calcul utilisant des informations topologiques du complexe, qui est présentée dans le paragraphe 4.2.1. Cette méthode utilise les points associés aux deux arêtes incidentes à un sommet v pour obtenir la droite correspondant à v dans la scène, puis calcule dans la scène le point d'intersection de cette droite avec l'arête de polygone sur laquelle on veut calculer la discontinuité.

De même que dans le cas des objets convexes (cf. paragraphe 4.3.1), plutôt que de stocker pour chaque point de discontinuité ses coordonnées (x, y), on stocke un paramètre k qui représente ce point de manière unique. Soit $M(x, y)$ un point appartenant à une arête de polygone C_i d'extrémités $i_1(x_{i_1}, y_{i_1})$ et $i_2(x_{i_2}, y_{i_2})$ dans la scène. Ce point peut être défini à partir des coordonnées des points extrémités de C_i par :

$$\begin{cases} x = x_{i_1} + k(x_{i_2} - x_{i_1}) \\ y = y_{i_1} + k(y_{i_2} - y_{i_1}) \end{cases}$$

avec $k \in [0, 1]$.
La liste permettant de stocker les points de discontinuité au niveau d'une arête de polygone donnée est donc constituée d'une liste de paramètres k qui sont ordonnés par ordre croissant.

Remarque : Dans l'algorithme de calcul du maillage de discontinuité pour les polygones (cf. figure 4.10), on considère pour une face f associée à deux arêtes de polygones C_i et C_j uniquement les arêtes non associées aux arêtes C_i et C_j. Puis on considère les sommets extrémités des arêtes vérifiant cette condition. Deux arêtes adjacentes vérifiant cette condition ont bien évidemment un sommet commun. Dans ce cas là, ce sommet n'est bien sûr considéré qu'une seule fois pour la face f.

Exemple

La figure 4.12 montre un exemple d'images obtenues avec le programme que nous avons implémenté. La scène considérée est constituée d'une pièce contenant trois objets dont une source. Elle est représentée en pseudo-3D. On peut voir sur chacune des images, le maillage de discontinuité associé à la scène considérée. Nous avons rajouté sur l'image de droite, les lignes critiques liées au rectangle (lignes critiques passant par les sommets du rectangle). Ce sont ces lignes critiques qui seront modifiées si le rectangle se déplace dans la scène. On remarque ici que la mise à jour des discontinuités est très localisée, dans le cas d'un objet en mouvement (cf. paragraphe 7.1.3 pour plus de précisions). Sur les deux images, les objets sont échantillonnés en fonction des discontinuités et la valeur de radiosité est affichée pour chacun des éléments ainsi obtenus.

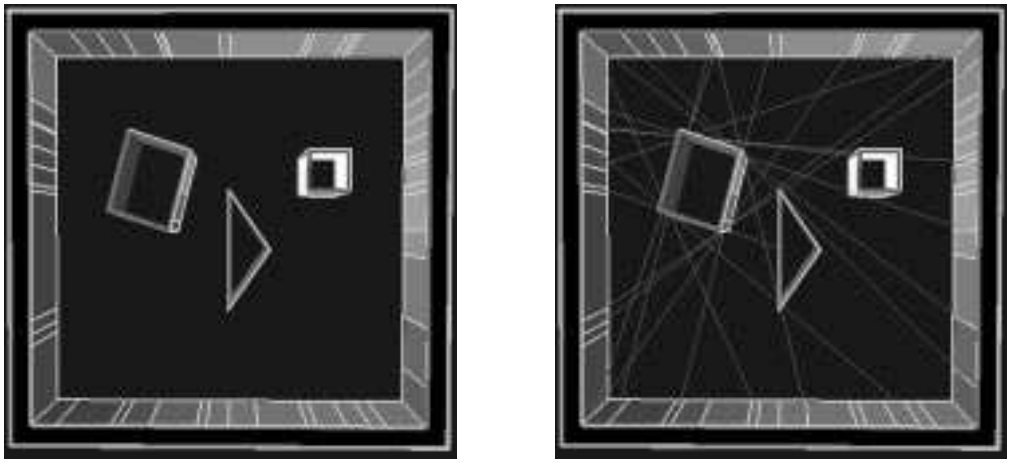


FIG. 4.12 - *Exemple d'une scène polygonale constituée d'une pièce avec trois objets à l'intérieur.*

4.3.3 Calcul uniquement des discontinuités liées à l'éclairage direct

Dans le cas 3D, actuellement seules les discontinuités liées à l'éclairage direct sont prises en compte (cf. paragraphe 1.3.2), sachant que ce sont les discontinuités les plus significatives et que calculer l'ensemble des discontinuités, compte tenu des techniques actuelles de calcul, serait prohibitif.

Dans les techniques de calcul présentées précédemment (cf. paragraphes 4.3.1 et 4.3.2), en considérant l'ensemble des faces du complexe de visibilité pour une scène 2D donnée, on calcule en fait l'ensemble des discontinuités liées à l'éclairage direct mais aussi à l'éclairage indirect. On peut cependant, en utilisant le complexe de visibilité, se limiter très facilement au calcul des discontinuités liées à l'éclairage direct si on le désire. Il suffit pour cela, dans le cas d'une scène constituée d'objets convexes, de considérer seulement les faces dont un des deux objets associés est une source de lumière, et dans le cas d'une scène polygonale, de considérer seulement les faces dont une des deux arêtes de polygones associées appartient à une source de lumière. Compte tenu de la structure du complexe de visibilité, ces faces peuvent être visitées *en temps proportionnel à leur nombre*. Le calcul du maillage de discontinuité lié uniquement à l'éclairage direct sera donc effectué en temps proportionnel à la taille du maillage.

Considérons le cas des objets convexes. Soit une source de lumière S_i. Les faces du complexe dont un des deux objets associés est S_i, sont comprises entre les courbes de tangence λ_{S_i} et μ_{S_i} associées à l'objet S_i dans l'espace dual (θ, u). Ces courbes de tangence qui correspondent aux supports des arêtes du complexe associées à l'objet S_i, sont directement accessibles. On peut donc accéder facilement aux faces que l'on doit considérer, sans recherche inutile.
On peut voir un exemple sur la figure 4.13. Soit une scène constituée de quatre objets convexes avec O_i la source de lumière. On peut constater que les faces dont un des deux objets associés est l'objet O_i sont bien situées, dans l'espace dual (θ, u), entre les deux courbes de tangence λ_{O_i} et μ_{O_i} de l'objet O_i.

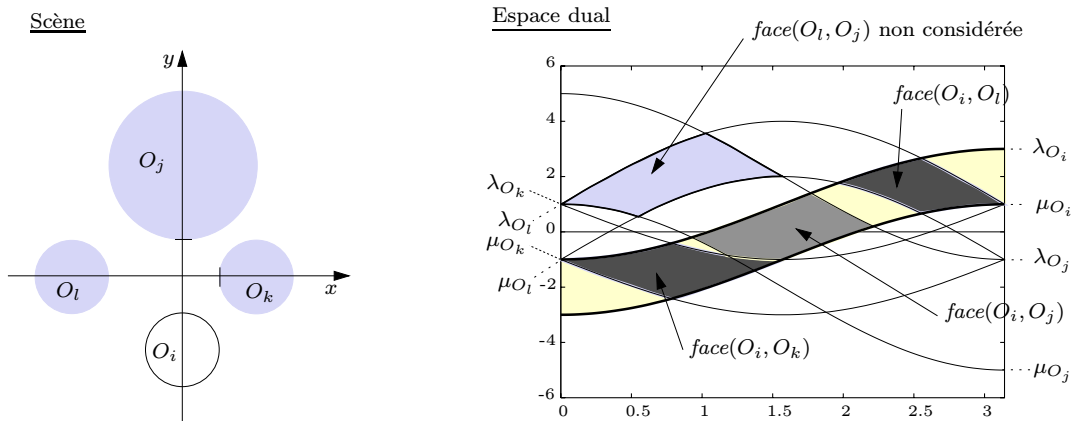


FIG. 4.13 - *Faces considérées pour le calcul des discontinuités liées à l'éclairage direct.*

Considérons de même le cas des polygones. Soit s_i une arête d'un polygone source de lumière. Les faces du complexe dont une des deux arêtes associées est s_i, sont comprises entre les droites associées aux deux extrémités de s_i dans l'espace dual (a, b). Ces droites sont direc-

tement accessibles, et permettent donc d'accéder facilement aux faces que l'on doit considérer. Ces droites correspondent en fait aux supports des arêtes du complexe associées aux extrémités de l'arête de polygone s_i. Donc, dans le cas où le complexe de visibilité est décrit uniquement à partir d'informations topologiques (donc indépendamment d'une quelconque dualité), on peut aussi accéder facilement aux faces que l'on doit considérer. Il suffit, dans ce cas, de suivre les différentes arêtes associées aux extrémités de s_i et de considérer seulement les faces entre ces arêtes.

On peut voir un exemple sur la figure 4.14. Soit une scène constituée de trois polygones : P_i, P_j et P_k. Le polygone P_i est une source de lumière. Soit s_i l'arête de P_i d'extrémités A_1 et A_2. On peut constater que les faces dont une des deux arêtes de polygones associées est s_i sont bien situées entre les droites D_{A_1} et D_{A_2} associées dans l'espace dual (a, b) aux points extrémités A_1 et A_2 de l'arête de polygone s_i.

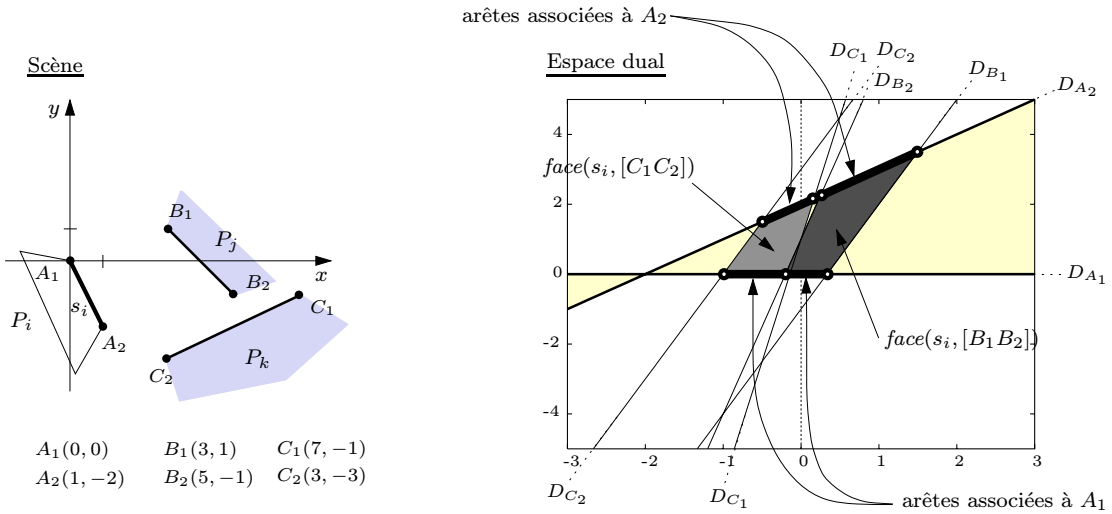


FIG. 4.14 - *Faces considérées pour le calcul des discontinuités liées à l'éclairage direct.*

Chapitre 5

Echantillonnage et calcul de facteurs de forme

Nous avons vu dans le chapitre 3 comment calculer le facteur de forme entre deux objets convexes ou entre deux arêtes de polygones, en se servant des faces associées du complexe de visibilité. Cependant, pour pouvoir appliquer la méthode de radiosité à une scène donnée, les objets de la scène sont discrétisés en éléments (ou échantillons), et il s'agit non pas de calculer les facteurs de forme entre les différents objets (c'est à dire entre les objets convexes ou les arêtes de polygones, selon la scène considérée) mais entre les différents éléments sur le contour des objets.

Nous allons voir dans un premier temps comment calculer le facteur de forme entre deux éléments, et comment il s'interprète dans un espace dual. Nous verrons ensuite comment le calcul des facteurs de forme entre éléments peut être réalisé de manière efficace au moyen du complexe, sachant que cette structure permet de considérer uniquement les parties mutuellement visibles entre une paire d'objets convexes ou une paire d'arêtes de polygones.

5.1 Calcul du facteur de forme entre deux éléments

5.1.1 Facteur de forme élément à élément

Soit une scène constituée d'objets discrétisés en éléments. De manière similaire aux portions de courbes (cf. équation 2.5 dans le chapitre 2), on peut définir le facteur de forme entre deux éléments l_i et r_j par :

$$F_{l_i r_j} = \frac{m_{so}(l_i, r_j)}{m(l_i)}$$

avec $m_{so}(l_i, r_j)$ correspondant à la mesure de l'ensemble des droites intersectant dans la scène, les deux éléments l_i et r_j sans intersecter aucun autre objet se trouvant entre les deux, et $m(l_i)$ correspondant à la mesure de l'ensemble total des droites intersectant l'élément l_i.
D'après l'équation 2.11 appliquée aux éléments l_i et r_j, la mesure de droites $m_{so}(l_i, r_j)$ est égale à la somme des longueurs des *courbes croisées* tendues entre les extrémités des deux éléments l_i et r_j, moins la somme des longueurs des *courbes non croisées* tendues entre les extrémités de ces mêmes éléments. Et d'après l'équation 2.12, la mesure de droites $m(l_i)$ est égale à deux fois la longueur de l_i.

Interprétation dans un espace dual

Considérons un échantillonnage donné au niveau des objets d'une scène. Les objets considérés sont les objets convexes, dans le cas des scènes constituées d'objets convexes, et les arêtes de polygones, dans le cas des scènes polygonales. Chaque objet est discrétisé en un certain nombre d'éléments. Pour caractériser la visibilité entre deux éléments, au lieu de considérer l'ensemble des segments libres maximaux qui touchent les objets en entier (comme c'est le cas pour le complexe de visibilité), il faut considérer l'ensemble des segments libres maximaux qui touchent chaque élément d'un objet. Cela revient, dans l'espace dual, à diviser les faces du complexe en sous-faces associées directement aux éléments. L'échantillonnage des objets induit ainsi un découpage des faces du complexe de visibilité.

Cas des polygones dans l'espace dual (a, b)

Considérons par exemple le cas d'une scène polygonale donnée. Soit l'exemple de la figure 5.1 constitué de trois polygones. Le triangle, par sa position, induit un point de discontinuité N_1 sur l'arête de polygone C_i, et un point de discontinuité N_2 sur l'arête de polygone C_j. Ceci conduit à considérer deux échantillons sur C_i : l_1 et l_2, et deux échantillons sur C_j : r_1 et r_2.

- l_1 a pour extrémités A_1, N_1.
- l_2 a pour extrémités N_1, A_2.
- r_1 a pour extrémités B_1, N_2.
- r_2 a pour extrémités N_2, B_2.

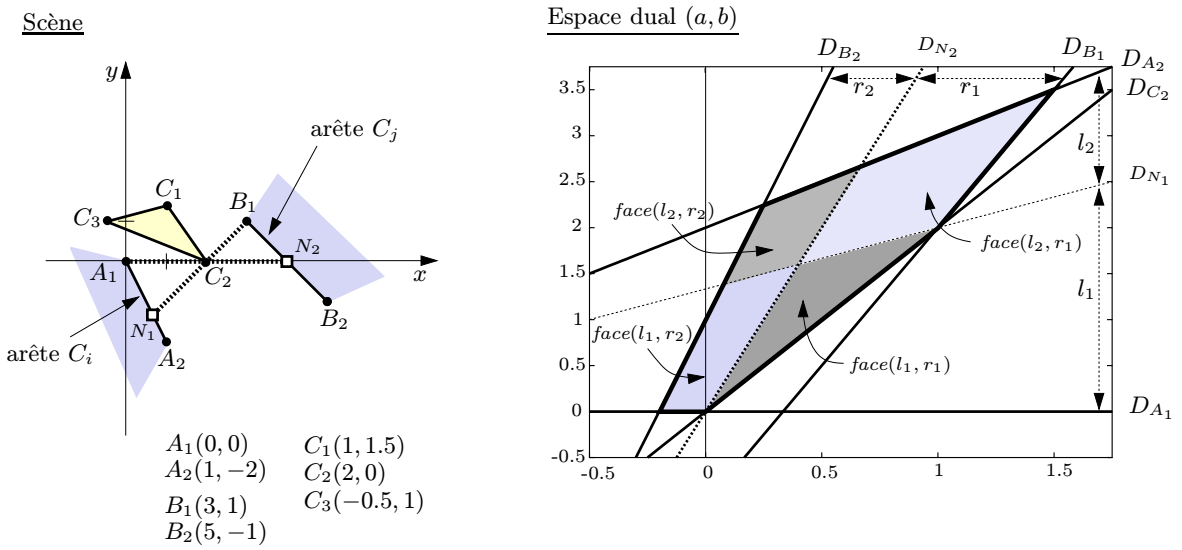


FIG. 5.1 - *Exemple d'échantillonnage d'une face associée à deux arêtes de polygones C_i et C_j.*

Traçons, dans l'espace dual (a, b), les droites associées aux différents points extrémités de ces éléments : pour un point extrémité M de coordonnées (x_M, y_M) dans la scène, on trace la droite d'équation : $b = x_M a - y_M$ dans l'espace dual (cf. schéma de droite sur la figure 5.1).

Cette droite associée au point M dans l'espace dual représente l'ensemble des droites passant par ce point dans la scène. On remarque qu'il est nécessaire en fait de tracer seulement les droites associées aux points qui ne sont pas des extrémités d'arêtes de polygones (soient N_1 et N_2 dans le cas de l'exemple de la figure 5.1). En effet, les droites associées aux points extrémités d'arêtes de polygones sont déjà représentées dans l'espace dual, puisqu'elles délimitent des faces du complexe associé à la scène.
Dans l'exemple de la figure 5.1, en traçant les droites associées aux points N_1 et N_2 dans l'espace dual, la face associée aux arêtes de polygones C_i et C_j est ainsi divisée en quatre sous-faces. Une sous-face donnée est délimitée par des portions de droites associées aux extrémités d'un élément de C_i, par des portions de droites associées aux extrémités d'un élément de C_j, et éventuellement par des portions de droites associées à des sommets de polygones qui obstruent la visibilité entre les deux éléments de C_i et C_j considérés. Chaque sous-face correspond donc à l'ensemble des droites qui intersectent deux éléments donnés de C_i et C_j, sans intersecter d'obstacle éventuel se trouvant entre les deux. On obtient ainsi la notion de faces associées directement aux éléments. Connaissant ces faces, il suffit pour calculer le facteur de forme entre deux éléments au niveau de deux arêtes de polygones, d'appliquer les différentes méthodes présentées dans le chapitre 3 qui permettent de calculer le facteur de forme entre deux arêtes de polygones, à partir des faces associées du complexe.

Cas des objets convexes dans l'espace dual (θ, u)

Considérons de même le cas d'une scène donnée constituée d'objets convexes. Soit l'exemple de la figure 5.2 composé de deux cercles O_i et O_j. Les sommets de la face associée à ces deux objets au niveau du complexe induisent les points de discontinuités P_{i_U}, P_{i_I}, P_{i_S} et P_{i_D} sur l'objet O_i, et les points de discontinuités P_{j_U}, P_{j_S}, P_{j_I} et P_{j_D} sur l'objet O_j. On s'intéresse ici uniquement aux deux parties mutuellement visibles entre les objets O_i et O_j. Ces deux parties sont définies à partir des sommets de la face associée aux objets O_i et O_j. Elles sont délimitées par la bitangente supérieure $(P_{i_U}P_{j_U})$ et par la bitangente inférieure $(P_{i_D}P_{j_D})$. La partie considérée sur O_i est donc comprise entre les points P_{i_U} et P_{i_D}, et la partie considérée sur O_j est comprise entre les points P_{j_U} et P_{j_D}. Ceci conduit à considérer trois échantillons sur O_i : l_1, l_2 et l_3, et trois échantillons sur O_j : r_1, r_2 et r_3.

- l_1 a pour extrémités P_{i_U}, P_{i_I}.
- l_2 a pour extrémités P_{i_I}, P_{i_S}.
- l_3 a pour extrémités P_{i_S}, P_{i_D}.
- r_1 a pour extrémités P_{j_U}, P_{j_S}.
- r_2 a pour extrémités P_{j_S}, P_{j_I}.
- r_3 a pour extrémités P_{j_I}, P_{j_D}.

Afin de caractériser la visibilité entre deux éléments donnés de O_i et O_j, on souhaite déterminer l'ensemble des droites qui intersectent ces deux éléments, sans intersecter d'obstacles éventuels se trouvant entre les deux. La zone dans l'espace dual représentant cet ensemble de droites est délimitée par des courbes correspondant à l'ensemble des droites passant par les extrémités des deux éléments dans la scène, et éventuellement par des courbes correspondant à

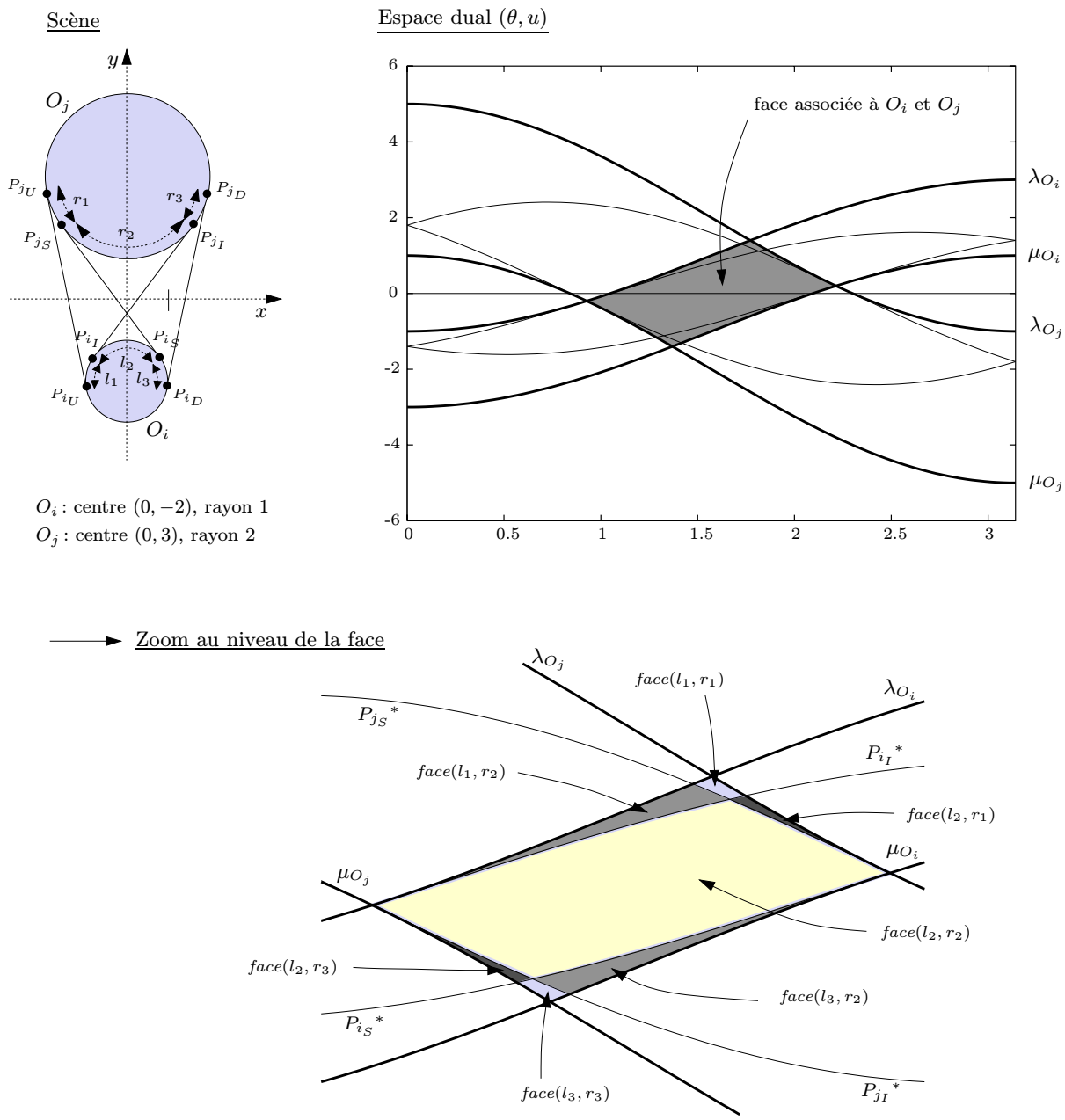


FIG. 5.2 - *Exemple d'échantillonnage d'une face associée à deux objets convexes O_i et O_j.*

l'ensemble des droites tangentes à des obstacles éventuels dans la scène.
On note P^* la courbe dans l'espace dual, qui représente l'ensemble des droites passant dans la scène par le point P.
Considérons les éléments l_1 et r_1 d'extrémités respectives P_{i_U}, P_{i_I}, et P_{j_U}, P_{j_S} (cf. figure 5.2), et déterminons les droites dans la scène, qui intersectent ces deux éléments sans intersecter d'obstacles éventuels. La zone dans l'espace dual représentant cet ensemble de droites est délimitée par la courbe ${P_{j_S}}^*$, par la courbe ${P_{i_I}}^*$, et par les courbes λ_{O_i} et λ_{O_j} correspondant à l'ensemble des droites tangentes respectivement à O_i et O_j dans la scène. Cette zone est la zone grisée appelée $face(l_1, r_1)$ sur la figure 5.2. Les courbes ${P_{i_U}}^*$ et ${P_{j_U}}^*$ associées respectivement à l'extrémité P_{i_U} de l_1, et P_{j_U} de r_1 ne sont pas prises en compte. En effet, les droites passant par le point P_{i_U} qui intersectent l'objet O_j ailleurs qu'en P_{j_U} ne sont pas valables car elles coupent l'intérieur de l'objet O_i. De même, les droites passant par le point P_{j_U} qui intersectent l'objet O_i ailleurs qu'en P_{i_U} ne sont pas valables car elles coupent l'intérieur de l'objet O_j.
De façon similaire, si on s'intéresse aux éléments l_3 et r_3, et qu'on souhaite déterminer l'ensemble des droites qui intersectent ces deux éléments sans intersecter d'obstacles éventuels, on constate que les courbes ${P_{i_D}}^*$ et ${P_{j_D}}^*$ ne sont pas prises en compte. On considère donc, dans l'espace dual, seulement les courbes associées aux extrémités d'éléments qui ne sont pas des extrémités des deux parties mutuellement visibles entre les objets O_i et O_j (soient P_{i_I}, P_{i_S}, P_{j_S} et P_{j_I} dans le cas de l'exemple de la figure 5.2).
La courbe P^* associée dans l'espace dual (θ, u), à un point P de coordonnées (x_P, y_P) dans la scène, a pour équation : $u(\theta) = y_P \cos\theta - x_P \sin\theta$.
Dans l'exemple de la figure 5.2, en traçant les courbes ${P_{i_I}}^*$, ${P_{i_S}}^*$, ${P_{j_S}}^*$ et ${P_{j_I}}^*$ dans l'espace dual (θ, u), la face associée aux objets convexes O_i et O_j est ainsi divisée en sept sous-faces. Chaque sous-face est associée à un élément de O_i et à un élément de O_j. Connaissant ces sous-faces, on peut maintenant calculer le facteur de forme entre deux éléments sur deux objets convexes en se servant de la sous-face associée.

Les deux méthodes présentées dans le chapitre 3 (cf. paragraphes 3.1.2 et 3.2.1) qui permettent de calculer le facteur de forme entre deux objets convexes à partir des faces associées du complexe, permettent d'établir deux expressions pour le facteur de forme entre deux éléments sur des objets convexes.

La proposition 3 (cf. paragraphe 3.1.2) établie dans le cas des objets convexes est toujours valable. Soient l et r deux éléments sur deux objets convexes. La mesure de l'ensemble des droites intersectant les deux éléments l et r est donc égale, dans l'espace dual (θ, u), à la somme des aires des différentes faces associées à ces deux éléments. Le facteur de forme F_{lr} associé aux éléments l et r peut donc être exprimé dans l'espace dual (θ, u) par :

$$F_{lr} = \frac{\sum_k \text{Aire de la face } f_k \text{ associée aux éléments } l \text{ et } r}{2 * \text{Longueur de l'élément } l}$$

avec f_1, ... f_k $(k \geq 1)$ correspondant aux différentes faces associées aux éléments l et r.

Le facteur de forme entre deux éléments sur des objets convexes peut toujours être exprimé, comme dans le cas des objets convexes (cf. paragraphe 3.2.1), comme une somme pondérée de valeurs fonctions des sommets et arêtes des faces associées du complexe de visibilité. Cependant, on ne prend plus en compte dans le calcul, la totalité des arêtes des faces associées. On ne tient compte que des arêtes directement associées à des objets convexes, et on ne considère donc pas les arêtes associées à des extrémités d'éléments. Soient l et r deux éléments sur deux objets

convexes. L'élément l est sur l'objet convexe O_i et l'élément r est sur l'objet convexe O_j. Soit f la face associée aux éléments l et r. On associe à chaque sommet v de f, une valeur $d_e(v)$ représentant la longueur euclidienne du segment libre maximal correspondant dans la scène, et à chaque arête e de f qui est associée à un objet convexe, une valeur $d_c(e)$ représentant la longueur curviligne de la portion correspondante de l'objet associé. Le facteur de forme F_{lr} entre les deux éléments l de O_i et r de O_j peut alors être exprimé à partir de la face f associée à l et r par :

$$F_{lr} = \frac{\sum\limits_{v \text{ sommet de } f} d'_e(v) + \sum\limits_{e \text{ arête de } f \text{ associée à un objet convexe}} d'_c(e)}{2 * \text{Longueur de l'élément } l}, \tag{5.1}$$

$$\text{où } d'_e(v) = \begin{cases} +d_e(v) \text{ si } v \text{ est un sommet extrémal de la face} \\ \text{(premier ou dernier sommet de la face)} \\ -d_e(v) \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } d'_c(e) = \begin{cases} +d_c(e) \text{ si l'arête } e \text{ est associée à } O_i \text{ ou } O_j \\ -d_c(e) \text{ si l'arête } e \text{ est associée à un objet convexe autre que } O_i \text{ et } O_j \end{cases}$$

S'il existe plusieurs faces associées aux éléments l et r, le facteur de forme entre ces deux éléments est obtenu en appliquant l'équation 5.1 à chaque face associée aux éléments l et r, et en sommant ensuite la valeur obtenue pour chacune des faces associées à l et r.

5.1.2 Facteur de forme point à élément

Soit une scène constituée d'objets discrétisés en éléments. Outre le facteur de forme élément à élément, on peut définir le facteur de forme point à élément. Deux éléments l_i et r_j étant donnés, il correspond au facteur de forme entre un point p_i de l_i et l'intervalle visible sur r_j depuis p_i.
Le facteur de forme point à élément $F_{p_i r_j}$ entre l_i et r_j calculé en p_i est exprimé par :

$$F_{p_i r_j} = \int_{\text{élément } r_j} ds_j \frac{\cos\phi_i \cos\phi_j}{2r} V$$

avec : p_i de paramètre s_i sur l_i, s_j le paramètre d'un point p_j sur r_j, ϕ_i l'angle de la droite $(p_i p_j)$ par rapport à la normale en p_i, ϕ_j l'angle de la droite $(p_j p_i)$ par rapport à la normale en p_j, r la distance entre p_i et p_j, et V la fonction de visibilité entre p_i et p_j (V est égal à 1 si p_i et p_j se voient mutuellement et 0 sinon) (cf. schéma de gauche sur la figure 5.3).

Interprétation dans un espace dual

Cas des polygones dans l'espace dual (a, b)

Considérons le cas de deux éléments l_i et r_j sur des arêtes de polygones. L'élément l_i a pour extrémités les points I_1, I_2, et l'élément r_j a pour extrémités les points J_1, J_2 (cf. schéma de gauche sur la figure 5.3). Soit $F_{p_i r_j}$ le facteur de forme point à élément entre les éléments l_i et r_j calculé au point p_i de l_i.
Posons :

$$\mathcal{I} = \int_{\text{élément } r_j} ds_j \frac{\cos\phi_i \cos\phi_j}{r} V$$

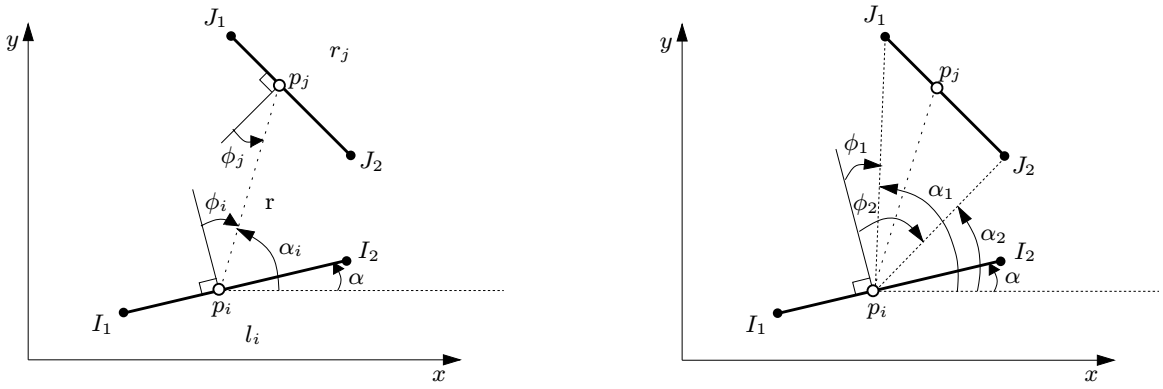


FIG. 5.3 - *Exemple de deux éléments l_i et r_j.*

On a donc : $F_{p_i r_j} = \dfrac{\mathcal{I}}{2}$.

On définit $\phi_1(s_i)$ comme l'angle par rapport à la normale en p_i (de paramètre s_i) de la droite passant par p_i et par le point le plus proche de J_1 visible depuis p_i, et $\phi_2(s_i)$ comme l'angle par rapport à la normale en p_i de la droite passant par p_i et par le point le plus proche de J_2 visible depuis p_i.
En tenant compte de ces notations, l'intégrale $\mathcal{I}$ peut être réexprimée par :

$$\mathcal{I} = \int_{\phi_2(s_i)}^{\phi_1(s_i)} \cos\phi_i d\phi_i$$

Dans l'exemple de la figure 5.3, $\phi_1(s_i)$ correspond en fait à l'angle par rapport à la normale en p_i de la droite $(p_i J_1)$, et $\phi_2(s_i)$ à l'angle par rapport à la normale en p_i de la droite $(p_i J_2)$, sachant que p_i voit la totalité de r_j.

Soit α_i l'angle avec l'axe des abscisses de la droite passant par p_i et par un point donné p_j de r_j compris entre J_1 et J_2, et soit α l'angle de la droite $(I_1 I_2)$ avec l'axe des abscisses (cf. schéma de gauche sur la figure 5.3). On a donc :

$$\phi_i = (\alpha_i - \alpha) - \frac{\pi}{2}$$

En procédant au changement de variable, on obtient :

$$\mathcal{I} = \int_{\alpha_2(s_i)}^{\alpha_1(s_i)} \sin(\alpha_i - \alpha) d\alpha_i = [-\cos(\alpha_i - \alpha)]_{\alpha_2(s_i)}^{\alpha_1(s_i)} \tag{5.2}$$

avec : $\alpha_1(s_i) = \phi_1(s_i) + \alpha + \pi/2$, et $\alpha_2(s_i) = \phi_2(s_i) + \alpha + \pi/2$.
Par définition :

$$\cos(\alpha_i - \alpha) = \cos\alpha_i \cos\alpha + \sin\alpha_i \sin\alpha \tag{5.3}$$

Pour simplifier, $\alpha_1(s_i)$ et $\alpha_2(s_i)$ seront notés respectivement α_1 et α_2. On obtient donc en utilisant l'équation 5.3 et en remplaçant dans l'équation 5.2 :

$$\mathcal{I} = \cos\alpha(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) + \sin\alpha(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) \tag{5.4}$$

On constate que la valeur $\mathcal{I}$ peut être directement exprimée dans l'espace dual (a, b). Considérons les droites D_{I_1}, D_{I_2}, D_{J_1} et D_{J_2} associées respectivement aux points I_1, I_2, J_1 et J_2 dans l'espace dual (a, b) (cf. figure 5.4). Par définition, la droite D_{I_1} représente l'ensemble

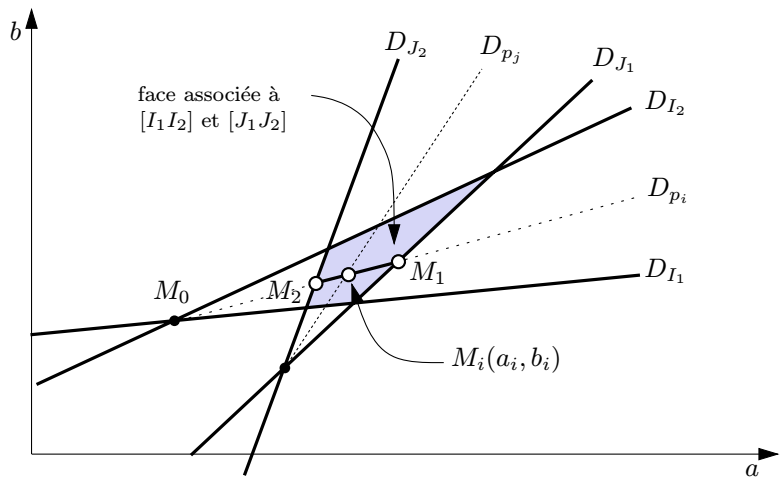


FIG. 5.4 - *Interprétation du facteur de forme point à élément dans l'espace dual* (a, b).

des droites passant par le point I_1 dans la scène, la droite D_{I_2} représente l'ensemble des droites passant par le point I_2 dans la scène, etc. La droite D_{p_i} associée à p_i est comprise entre les droites D_{I_1} et D_{I_2} associées aux extrémités respectives de l_i. De même, la droite D_{p_j} associée à un point p_j donné est comprise entre D_{J_1} et D_{J_2}.
Le point M_0, intersection de D_{I_1} et D_{I_2} dans l'espace dual, correspond à la droite $(I_1 I_2)$ dans la scène, le point M_1 (intersection de D_{p_i} et D_{J_1}) à la droite $(p_i J_1)$, et le point M_2 (intersection de D_{p_i} et D_{J_2}) à la droite $(p_i J_2)$ (cf. figure 5.4). Le point M_i, intersection de D_{p_i} et D_{p_j} dans l'espace dual, correspond à la droite $(p_i p_j)$ dans la scène. Soient (a_i, b_i) les coordonnées de M_i dans l'espace dual (a, b). D'après le principe de dualité, la droite $(p_i p_j)$ a donc pour équation : $y = a_i x - b_i$, dans la scène.
De plus, sachant que α_i est l'angle avec l'axe des abscisses de la droite $(p_i p_j)$, on a les relations :

$$\begin{cases} \cos\alpha_i &= \dfrac{1}{\sqrt{1+{a_i}^2}} \\ \sin\alpha_i &= \dfrac{a_i}{\sqrt{1+{a_i}^2}} \end{cases} \tag{5.5}$$

Soient (a_0, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2) les coordonnées respectives des points M_0, M_1 et M_2 dans l'espace dual (a, b). En utilisant les équations 5.5, et en remplaçant dans l'équation 5.4, on obtient :

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\sqrt{1+{a_0}^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+{a_2}^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+{a_1}^2}}\right) + \frac{a_0}{\sqrt{1+{a_0}^2}}\left(\frac{a_2}{\sqrt{1+{a_2}^2}} - \frac{a_1}{\sqrt{1+{a_1}^2}}\right) \tag{5.6}$$

Généralisation : Soient deux éléments l_i et r_j, et soit $F_{p_i r_j}$ le facteur de forme point à élément entre l_i et r_j calculé au point p_i de l_i. Connaissant la face associée aux deux éléments l_i

et r_j, pour calculer le facteur de forme $F_{p_i r_j}$ dans l'espace dual (a, b), il suffit de tracer dans l'espace dual (a, b) la droite D_{p_i} associée à p_i (droite d'équation : $b = x_{p_i} a - y_{p_i}$ avec (x_{p_i}, y_{p_i}) les coordonnées de p_i dans la scène), et de considérer la portion de cette droite qui est incluse dans la face. Cette portion de droite est délimitée par deux points M_1 et M_2 appartenant à des arêtes délimitant la face. On appelle M_0 le point correspondant dans l'espace dual à la droite support de l'élément l_i dans la scène. Les points M_0, M_1, M_2 (de coordonnées respectives (a_0, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2)) étant ainsi définis dans l'espace dual (a, b), il ne reste plus qu'à appliquer l'équation 5.6 pour obtenir $\mathcal{I}$. Connaissant $\mathcal{I}$, on obtient alors le facteur de forme point à élément $F_{p_i r_j}$ très simplement puisque : $F_{p_i r_j} = \frac{\mathcal{I}}{2}$.
S'il existe plusieurs faces associées à deux éléments l_i et r_j, le principe établi précédemment dans le cas d'une face associée à deux éléments est appliqué pour chacune des faces associées à l_i et r_j, et les différentes valeurs obtenues sont ensuite additionnées pour obtenir le facteur de forme point à élément entre l_i et r_j.
L'équation 5.6 est en fait valable même s'il y a des obstacles qui interfèrent entre les deux éléments considérés. On peut voir un exemple avec un obstacle sur la figure 5.5. On souhaite calculer le facteur de forme point à élément entre le point p_1 de l'élément l_1, et l'élément r_1. Soit $F_{p_1 r_1}$ ce facteur de forme. Considérons la face associée aux éléments l_1 et r_1, et traçons la droite D_{p_1} associée à p_1 dans l'espace dual. Cette droite intersecte la droite D_{N_2} en M_2 et la droite D_{C_2} en M_1. Le fait que le sommet de polygone C_2 réduise la visibilité entre les éléments l_1 et r_1 est bien pris en compte puisque le segment $[M_2 M_1]$ que l'on considère pour le calcul du facteur de forme $F_{p_1 r_1}$ est délimité par la droite D_{C_2} associée au sommet de polygone C_2. Soit M_0 le point d'intersection, dans l'espace dual, des droites D_{A_1} et D_{N_1} (droites associées aux extrémités de l'élément l_1). Connaissant les points M_0, M_1, M_2 et leurs coordonnées dans l'espace dual (a, b), on peut appliquer directement l'équation 5.6 pour déterminer le facteur de forme point à élément entre le point p_1 de l_1, et l'élément r_1.

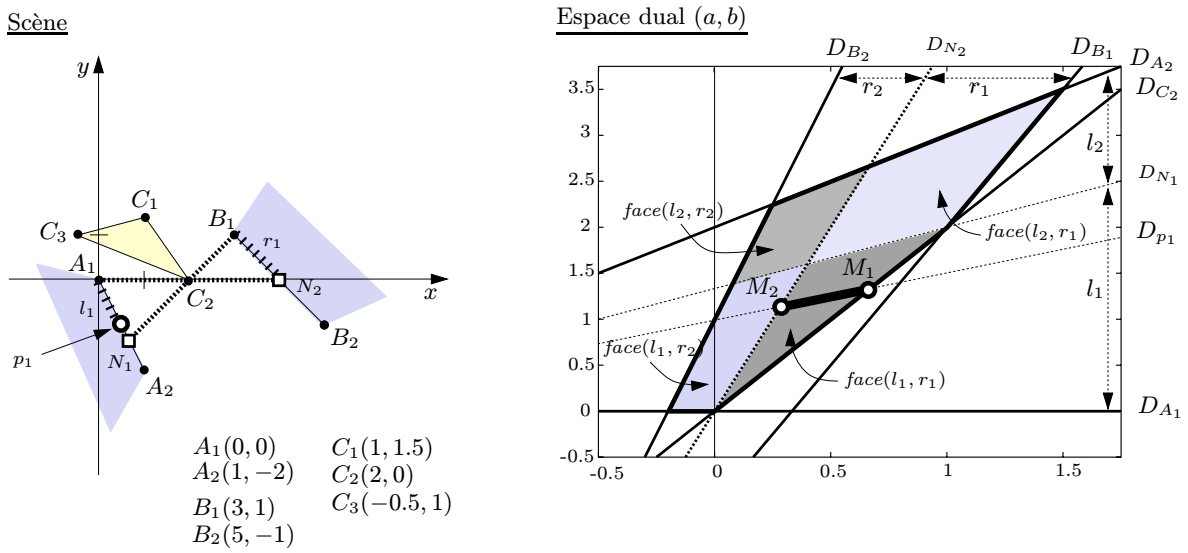


FIG. 5.5 - *Exemple de calcul de facteur de forme point à élément entre un point p_1 d'un élément l_1 et un élément r_1, sur des arêtes de polygones.*

Cas des objets convexes dans l'espace dual (θ, u)

L'interprétation du facteur de forme point à élément établie précédemment dans le cas d'éléments sur des arêtes de polygones, reste valable dans le cas d'éléments sur des objets convexes.

Soient l_i et r_j deux éléments sur des objets convexes. L'élément l_i a pour extrémités I_1, I_2, et l'élément r_j a pour extrémités J_1, J_2 (cf. figure 5.6). Le facteur de forme point à élément entre l_i et r_j calculé au point p_i de l_i peut aussi, comme dans le cas des polygones, être exprimé par :

$$F_{p_i r_j} = \frac{\cos\alpha(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) + \sin\alpha(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)}{2} \tag{5.7}$$

La valeur α correspond à l'angle par rapport à l'axe des abscisses de la tangente à l'élément l_i en p_i (cf. figure 5.6). La valeur α_1 est définie comme l'angle par rapport à l'axe des abscisses

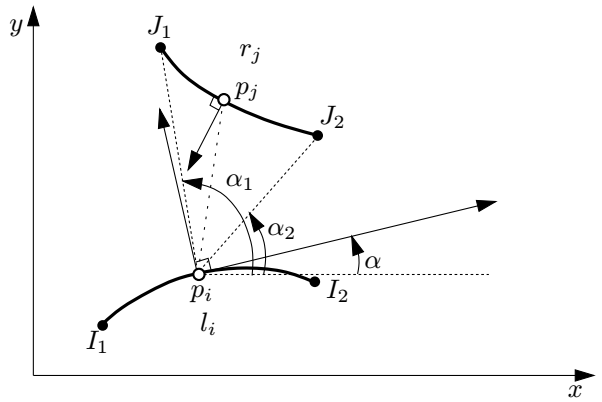


FIG. 5.6 - *Exemple de deux éléments l_i et r_j sur des objets convexes.*

de la droite passant par p_i et par le point le plus proche de J_1 visible depuis p_i, et la valeur α_2 est définie comme l'angle par rapport à l'axe des abscisses de la droite passant par p_i et par le point le plus proche de J_2 visible depuis p_i. Dans l'exemple de la figure 5.6, α_1 correspond donc à l'angle de la droite $(p_i J_1)$ avec l'axe des abscisses, et α_2 à l'angle de la droite $(p_i J_2)$ avec l'axe des abscisses.

Le facteur de forme point à élément $F_{p_i r_j}$ peut être exprimé très facilement dans l'espace dual (θ, u). En effet, d'après la définition de la dualité (θ, u), une droite d'angle θ_i avec l'axe des abscisses dans la scène, correspond dans l'espace dual (θ, u) à un point d'abscisse θ_i. Dans le cas de l'exemple de la figure 5.6, les angles α_1 et α_2 sont donc obtenus très facilement en considérant respectivement les points correspondant aux droites $(p_i J_1)$ et $(p_i J_2)$ dans l'espace dual.

Généralisation : Soient deux éléments l_i et r_j appartenant respectivement aux objets convexes O_i et O_j, et soit $F_{p_i r_j}$ le facteur de forme point à élément entre l_i et r_j calculé au point p_i de l_i. Connaissant la face associée aux deux éléments l_i et r_j, pour calculer le facteur de forme $F_{p_i r_j}$ dans l'espace dual (θ, u), il suffit de tracer dans l'espace dual (θ, u) la courbe ${p_i}^*$ associée à p_i (courbe d'équation : $u(\theta) = y_{p_i}\cos\theta - x_{p_i}\sin\theta$ avec (x_{p_i}, y_{p_i}) les coordonnées de p_i dans la scène), et de considérer la portion de cette courbe qui est incluse dans la face. Cette portion de courbe est délimitée par deux points M_1 et M_2 appartenant à des arêtes délimitant la face. On appelle M_0 le point correspondant dans l'espace dual à la droite dans la scène qui est tangente

à l'élément l_i en p_i. Ce point correspond dans l'espace dual à l'intersection de la courbe $p_i{}^*$ (courbe représentant l'ensemble des droites passant par p_i dans la scène) et de la courbe λ_{O_i} (courbe représentant l'ensemble des droites tangentes à l'objet O_i dans la scène). Les points M_0, M_1, M_2 (de coordonnées respectives (θ_0, u_0), (θ_1, u_1), (θ_2, u_2)) étant ainsi définis dans l'espace dual (θ, u), il ne reste plus qu'à appliquer l'équation 5.7 (avec $\alpha = \theta_0$, $\alpha_1 = \theta_1$, $\alpha_2 = \theta_2$), pour obtenir le facteur de forme point à élément $F_{p_i r_j}$.
On peut voir un exemple sur la figure 5.7. On souhaite calculer le facteur de forme point à élé-

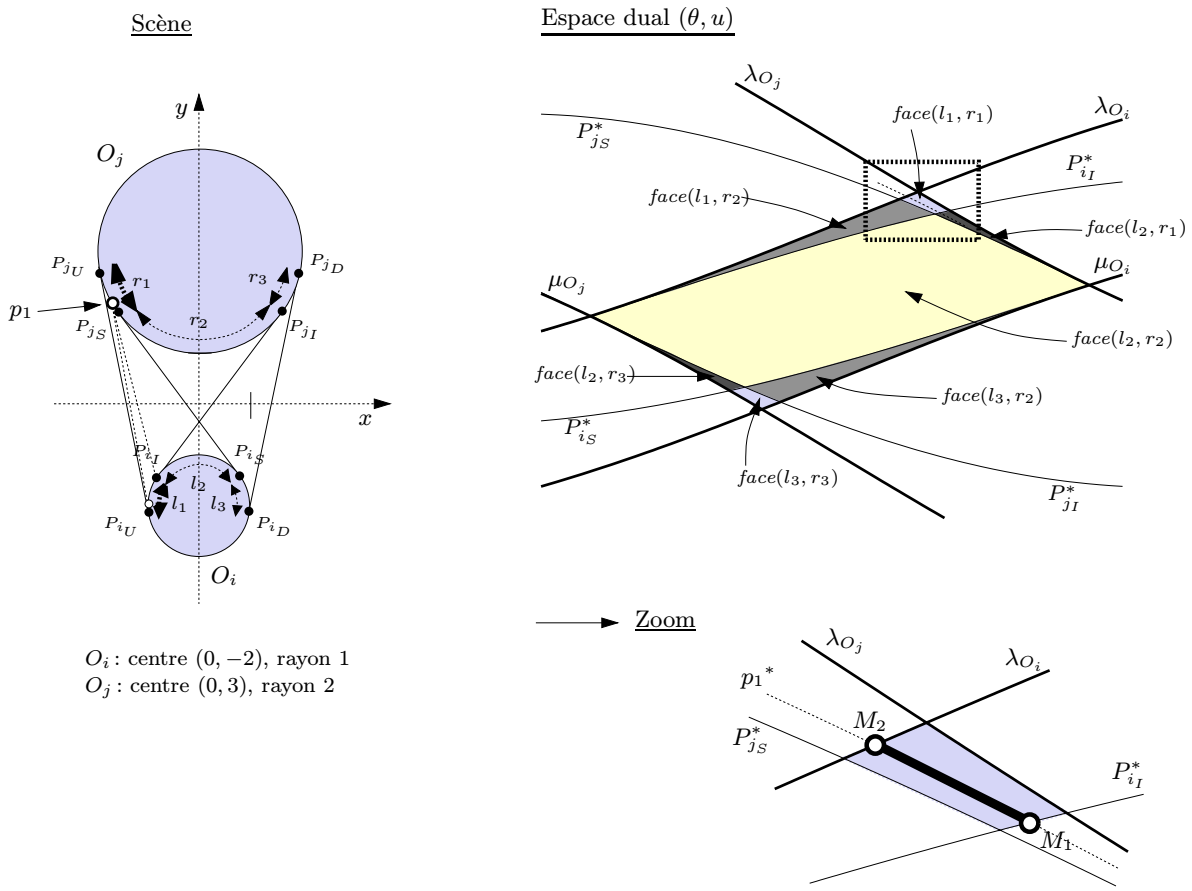


FIG. 5.7 - *Exemple de calcul de facteur de forme point à élément entre un point p_1 d'un élément r_1 et un élément l_1, sur des objets convexes.*

ment entre le point p_1 de l'élément r_1, et l'élément l_1. Soit $F_{p_1 l_1}$ ce facteur de forme. Considérons la face associée aux éléments l_1 et r_1, et traçons la courbe $p_1{}^*$ associée à p_1 dans l'espace dual. Cette courbe intersecte la courbe λ_{O_i} en M_2 et la courbe $P_{i_I}{}^*$ en M_1, montrant ainsi que le point p_1 ne voit pas la totalité de l'élément l_1. Soit M_0 le point d'intersection, dans l'espace dual, des courbes $p_1{}^*$ et λ_{O_j} (O_j étant l'objet auquel l'élément r_1 appartient).
Soient (x_{p_1}, y_{p_1}) les coordonnées du point p_1 dans la scène. Dans le cas d'un cercle O_j de centre

(x_j, y_j) et de rayon R_j, l'angle θ_0 de la tangente à l'élément r_1 en p_1 est caractérisé par :

$$\begin{cases} \cos\theta_0 & = & \dfrac{y_{p_1} - y_j}{R_j} \\ \\ \sin\theta_0 & = & -\dfrac{x_{p_1} - x_j}{R_j} \end{cases}$$

Les abscisses θ_1 et θ_2 sont obtenues de façon similaire en calculant l'intersection des courbes ${p_1}^*$ et ${P_{i_I}}^*$ pour θ_1, et des courbes ${p_1}^*$ et λ_{O_i} pour θ_2. Connaissant les abscisses θ_0, θ_1 et θ_2 des points M_0, M_1 et M_2 dans l'espace dual (θ, u), on peut alors déterminer le facteur de forme point à élément entre le point p_1 de l'élément r_1, et l'élément l_1 au moyen de l'équation 5.7 (avec $\alpha = \theta_0$, $\alpha_1 = \theta_1$, $\alpha_2 = \theta_2$).
S'il existe plusieurs faces associées à deux éléments l_i et r_j, le principe établi précédemment dans le cas d'une face associée à deux éléments est appliqué pour chacune des faces associées à l_i et r_j, et les différentes valeurs obtenues sont ensuite additionnées pour obtenir le facteur de forme point à élément entre l_i et r_j.

5.2 Implémentation : Calcul des facteurs de forme entre éléments au moyen du complexe

Le facteur de forme entre deux éléments est nul si ces deux éléments ne sont pas mutuellement visibles. En pratique, de telles situations sont fréquentes et devraient être prises en compte afin d'éviter des calculs inutiles. Heckbert [Hec92a] a notamment constaté lors de tests que la densité α de la matrice de radiosité (α représente la fraction d'éléments non nuls dans la matrice de radiosité) est en général comprise entre 10% et 40%.

Le complexe de visibilité est très utile dans ce cas, puisqu'il permet de considérer seulement les paires d'objets (objets convexes ou arêtes de polygones) mutuellement visibles, et pour chaque paire de ne considérer ensuite que les parties mutuellement visibles.

Pour considérer uniquement les paires d'objets mutuellement visibles dans une scène donnée, il suffit de considérer toutes les faces du complexe de visibilité associées à deux objets quelconques de cette scène. Chaque face associée à deux objets donnés correspond à une composante connexe de segments libres maximaux qui touchent ces deux objets. Elle permet donc de connaître des paires de points mutuellement visibles sur ces deux objets, et permet, par extension, de connaître des parties mutuellement visibles sur ces deux objets. Pour calculer les facteurs de forme nécessaires entre deux objets donnés, il suffit donc simplement de considérer les faces du complexe de visibilité associées à ces deux objets. Le complexe de visibilité permet donc d'effectuer seulement les calculs nécessaires.

Deux implémentations ont été réalisées : une première pour les scènes constituées d'objets convexes, et une deuxième pour les scènes polygonales. L'implémentation du calcul des facteurs de forme entre éléments utilise ici aussi les deux implémentations réalisées par Rivière([Riv93] et [Riv95]) évoquées au paragraphe 4.3.

Dans le cas des scènes constituées d'objets convexes, comme dans le cas des scènes polygonales, les différents objets de l'environnement sont d'abord discrétisés en éléments. L'échantillonnage des objets de la scène est calculé en tenant compte des discontinuités de l'éclairage. On crée donc les éléments en positionnant leurs extrémités sur les discontinuités (cf. paragraphe 4.3

pour l'implémentation du calcul des discontinuités), puis les éléments obtenus sont éventuellement subdivisés s'ils sont de taille trop importante. Il reste alors à calculer les facteurs de forme nécessaires entre les différents éléments, avant de pouvoir calculer la solution de radiosité.

5.2.1 Une première méthode de calcul des facteurs de forme entre éléments

Pour calculer le facteur de forme entre deux éléments donnés sur deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ (deux objets convexes ou deux arêtes de polygones, selon le cas), il faut connaître les objets qui réduisent la visibilité entre ces deux éléments. Pour obtenir cette information, on va utiliser les faces du complexe de visibilité associées aux deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ considérés.

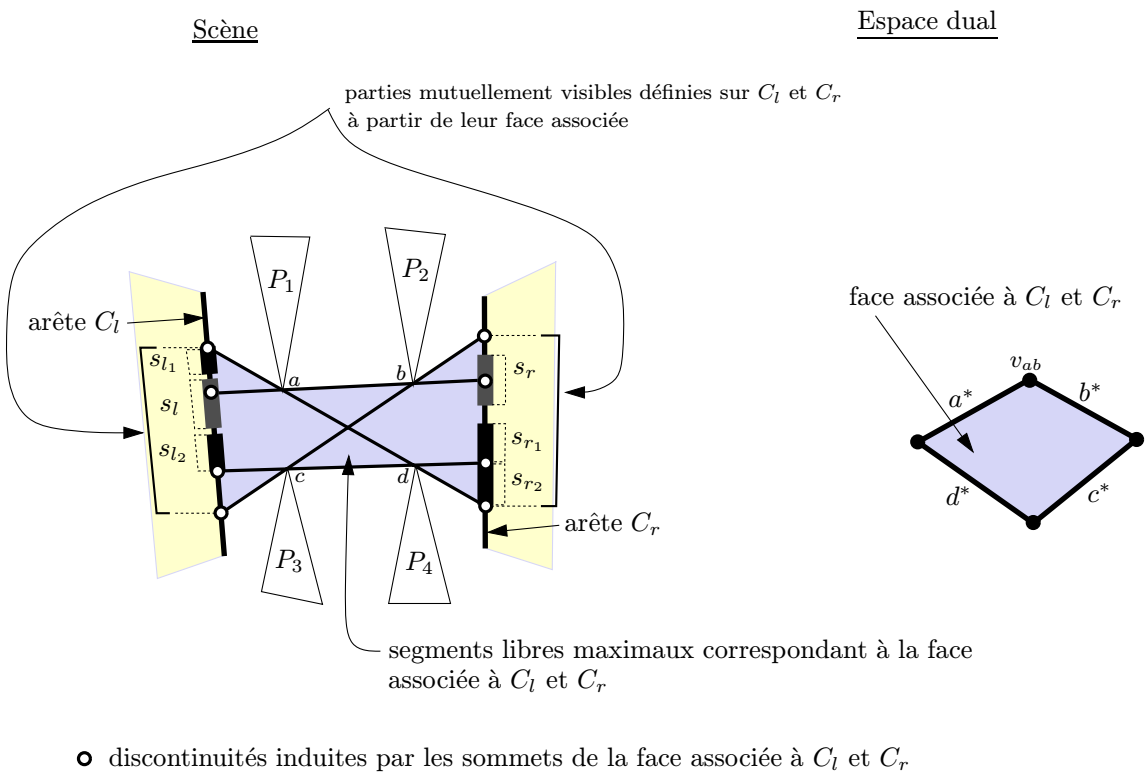
Une face associée à deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ donnés correspond à une composante connexe de segments libres maximaux qui touchent ces deux objets. Dans le cas de deux objets convexes O_i et O_j, cette composante connexe de segments libres maximaux est délimitée par les segments libres maximaux tangents aux objets qui réduisent la visibilité entre O_i et O_j, et dans le cas de deux arêtes de polygones C_i et C_j, elle est délimitée par les segments libres maximaux passant par les sommets de polygones qui réduisent la visibilité entre C_i et C_j. Une face associée à deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ est ainsi représentée par deux listes d'arêtes : une liste supérieure d'arêtes qui est entre autres constituée des arêtes associées aux objets (objets convexes ou extrémités d'arêtes de polygones, selon le cas) qui réduisent la visibilité «par le haut» entre les objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$; et une liste inférieure d'arêtes qui est entre autres constituée des arêtes associées aux objets qui réduisent la visibilité «par le bas» entre $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$.

Soit une face f associée à deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ donnés. Cette face f permet de définir deux parties «mutuellement visibles» sur $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$, qui correspondent aux parties de $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ touchées par les segments libres maximaux correspondant à cette face. Ces parties seront appelées $vis_{\mathcal{O}_i}$ et $vis_{\mathcal{O}_j}$, $vis_{\mathcal{O}_i}$ étant la partie de $\mathcal{O}_i$ «visible depuis $\mathcal{O}_j$» et $vis_{\mathcal{O}_j}$ étant la partie de $\mathcal{O}_j$ «visible depuis $\mathcal{O}_i$». Si deux éléments donnés de $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ appartiennent respectivement aux parties «mutuellement visibles» $vis_{\mathcal{O}_i}$ et $vis_{\mathcal{O}_j}$, on sait alors que ces deux éléments peuvent être obstrués seulement par les objets de la liste supérieure d'arêtes de la face f (obstruction «par le haut») et par les objets de la liste inférieure d'arêtes de la face f (obstruction «par le bas»). Le fait de considérer la face f permet donc déjà de réduire les obstacles éventuels considérés pour deux éléments donnés appartenant aux parties $vis_{\mathcal{O}_i}$ et $vis_{\mathcal{O}_j}$ (parties «mutuellement visibles» sur $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ définies à partir de la face f).

On peut voir un exemple sur la figure 5.8. Les éléments des arêtes de polygones C_l et C_r qui appartiennent aux parties «mutuellement visibles» sur C_l et C_r définies à partir de la face associée à C_l et C_r peuvent être obstrués «par le haut» seulement par les sommets de polygones a et b, et «par le bas» seulement par les sommets de polygones c et d.

Si les éléments sur les objets sont définis sans prendre en compte les discontinuités de l'éclairage, on peut avoir un nombre quelconque d'objets de la liste supérieure et de la liste inférieure d'arêtes de la face f qui interfèrent entre deux éléments donnés appartenant aux parties «mutuellement visibles» sur $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ définies à partir de la face f.

On peut voir un exemple sur la figure 5.8. Soient s_l et s_r deux éléments sur les arêtes de polygones C_l et C_r respectivement. Les éléments s_l et s_r s'étendent de part et d'autre des points de discontinuité induits respectivement sur C_l et C_r par le sommet v_{ab} (sommet de la face associée à C_l et C_r) qui correspond à la droite (ab) dans la scène. On constate d'après la figure que les sommets de polygones a et b appartenant respectivement aux polygones P_1 et P_2 réduisent



○ discontinuités induites par les sommets de la face associée à C_l et C_r

FIG. 5.8 - *Exemple de deux arêtes de polygones C_l et C_r avec quatre polygones qui interfèrent.*

la visibilité entre les éléments s_l et s_r considérés. Ces deux sommets de polygones sont associés aux arêtes a^* et b^* de la liste supérieure d'arêtes de la face associée aux arêtes de polygones C_l et C_r. Donc, dans ce cas précis, l'ensemble des sommets de polygones associés à des arêtes de la liste supérieure d'arêtes de cette face interfèrent entre les éléments s_l et s_r considérés (cf. figure 5.8).

Par contre si les éléments sont définis en prenant en compte les discontinuités, on a, pour deux éléments donnés qui appartiennent aux parties «mutuellement visibles» sur $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ définies à partir de la face f, et qui sont compris entre deux points de discontinuité, au plus un objet de la liste supérieure d'arêtes de la face f et un objet de la liste inférieure d'arêtes de la face f qui interfèrent, si les deux éléments considérés se «voient» mutuellement.

On peut voir un exemple sur la figure 5.8. Si les éléments sont définis en prenant en compte les discontinuités, on a au plus un sommet de polygone de la liste supérieure d'arêtes de la face associée à C_l et C_r, et un sommet de polygone de la liste inférieure d'arêtes de cette même face, qui interfèrent entre un élément de C_l et un élément de C_r qui se «voient» mutuellement. Pour les éléments s_{l_1} de C_l et s_{r_1} de C_r, on a le sommet de polygone a qui interfère. Pour les éléments s_{l_1} et s_{r_2}, on a les sommets a et d qui interfèrent (cf. figure 5.8). Pour les éléments s_{l_2} et s_{r_1}, on a visibilité totale. Pour les éléments s_{l_2} et s_{r_2}, on a le sommet d qui interfère (cf. figure 5.8).

⟹ Première idée

Soit une face f associée à deux objets $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ (deux objets convexes ou deux arêtes de polygones, selon le cas). Si les éléments sont définis en prenant en compte les discontinuités de l'éclairage, une première idée pour calculer les facteurs de forme nécessaires entre les différents éléments qui appartiennent aux parties «mutuellement visibles» sur $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ définies à partir de la face f, consiste donc à considérer successivement les différentes parties de $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ où il y a un objet donné de la liste supérieure d'arêtes de la face f et un objet donné de la liste inférieure d'arêtes de la face f qui interfèrent. Il est alors facile de calculer le facteur de forme entre deux éléments appartenant à deux parties ainsi définies sur $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ puisqu'on connaît les deux objets potentiellement interférants (un «par le haut» et un «par le bas») entre ces deux éléments. Les parties de $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ où il y a un objet donné O_{up} qui interfère «par le haut» et un objet donné O_{down} qui interfère «par le bas» sont obtenues à partir des sommets extrémités des deux arêtes de la face f qui sont associées aux objets O_{up} et O_{down}.

Par exemple, dans la figure 5.9, les parties des arêtes de polygones C_l et C_r où il y a le sommet de polygone a qui interfère «par le haut» et le sommet de polygone d qui interfère «par le bas», sont définies à partir des sommets extrémités des arêtes a^* et d^* de la face associée à C_l et C_r. Les limites supérieures des parties définies sur C_l et C_r sont définies à partir de l'arête a^*.

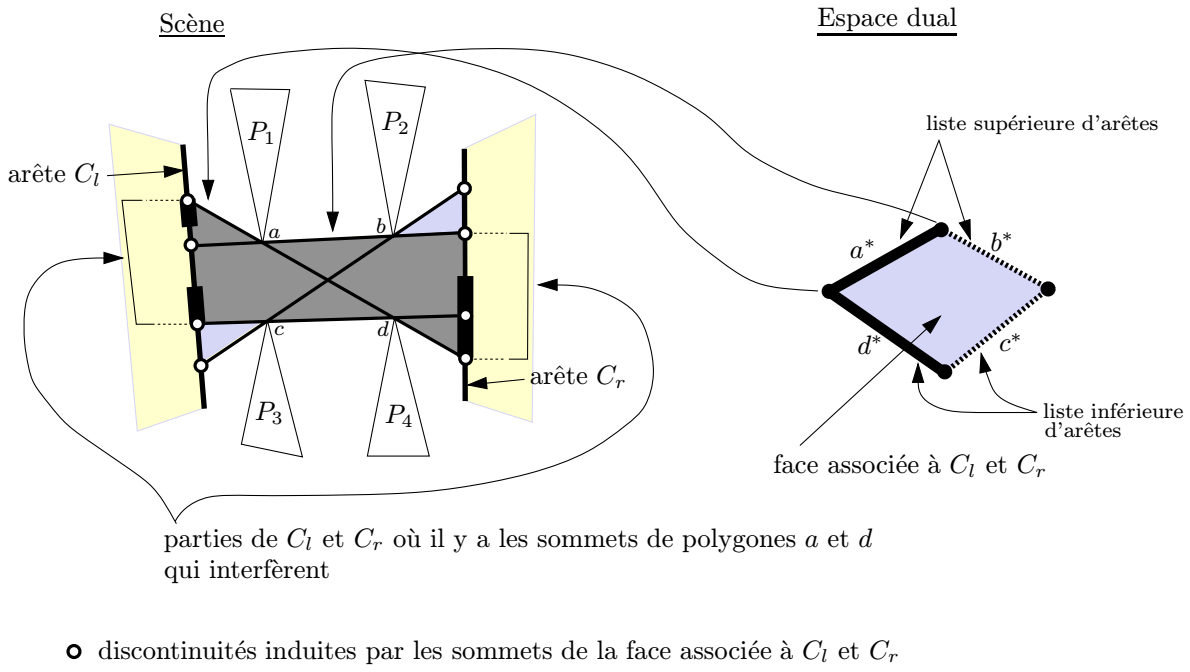


FIG. 5.9 - *Exemple de deux arêtes de polygones C_l et C_r avec quatre polygones qui interfèrent.*

La limite supérieure de la partie définie sur C_l correspond à l'intersection avec C_l de la droite dans la scène qui correspond au sommet gauche de l'arête a^* (droite (ad)), et la limite supérieure de la partie définie sur C_r correspond à l'intersection avec C_r de la droite dans la scène qui correspond au sommet droit de l'arête a^* (droite (ab)) (cf. figure 5.9). De façon similaire, les limites inférieures des parties définies sur C_l et C_r sont définies à partir de l'arête d^*. La limite inférieure de la partie définie sur C_l correspond à l'intersection avec C_l de la droite dans la scène qui correspond au sommet droit de l'arête d^* (droite (cd)), et la limite inférieure de la partie

définie sur C_r correspond à l'intersection avec C_r de la droite dans la scène qui correspond au sommet gauche de l'arête d^* (droite (ad)) (cf. figure 5.9).

Cette méthode permettant de se restreindre aux parties sur deux objets donnés où il y a deux objets qui interfèrent (un «par le haut» et un «par le bas») a été implémentée pour les scènes constituées d'objets convexes.

Implémentation pour les objets convexes

Soit une face $f_{O_lO_r}$ associée à deux objets convexes O_l et O_r, et soient $list_{up}$ la liste supérieure d'arêtes de cette face, et $list_{down}$ la liste inférieure d'arêtes de cette face. Pour calculer les facteurs de forme nécessaires entre les différents éléments de O_l et O_r appartenant aux parties «mutuellement visibles» sur O_l et O_r définies à partir de la face $f_{O_lO_r}$, on considère successivement les différentes parties de O_l et O_r où il y a un objet de $list_{up}$ et un objet de $list_{down}$ qui interfèrent. Pour cela, il suffit de se positionner sur les premières arêtes de $list_{up}$ et $list_{down}$ qui sont associées à des objets qui interfèrent s'il y en a, et sinon sur les dernières arêtes de $list_{up}$ et $list_{down}$. Puis il s'agit ensuite de parcourir simultanément les arêtes de $list_{up}$ et $list_{down}$, tout en considérant à chaque fois les parties de O_l et O_r délimitées par les droites dans la scène qui correspondent aux sommets extrémités des deux arêtes courantes considérées de $list_{up}$ et $list_{down}$. Deux parties courantes sur O_l et O_r étant ainsi définies, il s'agit alors de calculer les facteurs de forme entre les éléments de O_l et O_r appartenant à ces deux parties. On note $L_{sup_{O_l}}$ et $L_{inf_{O_l}}$ les limites supérieure et inférieure de la partie ainsi définie sur O_l à partir des arêtes courantes considérées de $list_{up}$ et $list_{down}$. Et on note $L_{sup_{O_r}}$ et $L_{inf_{O_r}}$ les limites supérieure et inférieure de la partie définie sur O_r à partir des arêtes courantes considérées de $list_{up}$ et $list_{down}$.

Cette méthode de calcul des facteurs de forme entre éléments sur des objets convexes, utilisant le complexe de visibilité, est présentée dans le détail dans la figure 5.10.

Pour mieux comprendre la méthode, l'exécution de l'algorithme est illustrée sur un exemple où on calcule les facteurs de forme pour les éléments sur deux objets convexes O_l et O_r (cf. figure 5.11). Pour chaque étape de l'itération principale, on montre les arêtes courantes e_{up} de $list_{up}$ et e_{down} de $list_{down}$ (représentées respectivement en tirets et en pointillés), et les parties courantes de O_l et O_r (obtenues à partir de e_{up} et e_{down}) que l'on considère. Pour calculer les facteurs de forme entre les éléments appartenant à ces deux parties, on utilise la formulation du facteur de forme issue de la «string rule», qui permet d'exprimer le facteur de forme comme une somme pondérée de longueurs de courbes (cf. paragraphe 2.2). Lors du calcul des longueurs des *courbes croisées* et *non croisées* entre deux éléments donnés des objets O_l et O_r, on tient compte des objets $objI_{up}$ et $objI_{down}$ (cf. algorithme dans la figure 5.10), qui sont susceptibles d'interférer entre ces deux éléments.

La figure 5.12 montre un exemple d'images obtenues avec notre programme. La scène considérée est constituée de trois objets dont une source. Elle est représentée en pseuso-3D. Les objets sont échantillonnés en fonction des discontinuités. Sur la figure 5.12(b), est reportée la valeur de radiosité obtenue pour chaque élément du grand cercle. La figure 5.12(c) représente la matrice M du système d'équations de radiosité (cf. paragraphe 1.1.1).

Cette méthode permet de simplifier le calcul des facteurs de forme entre les éléments qui appartiennent aux parties «mutuellement visibles» de deux objets donnés, en se restreignant à différentes zones sur ces deux objets où il y a seulement deux objets qui interfèrent (un «par le

Calcul des facteurs de forme pour la face $f_{O_l O_r}$ associée à O_l et O_r

Initialisation

e_{up} := première arête de $list_{up}$ associée à un objet qui interfére entre O_l et O_r s'il y en a au moins un, et sinon la dernière arête de $list_{up}$
e_{down} := première arête de $list_{down}$ associée à un objet qui interfére entre O_l et O_r s'il y en a au moins un, et sinon la dernière arête de $list_{down}$
Soient O_{up} et O_{down} les objets associés respectivement aux arêtes e_{up} et e_{down}
/* On note $objI_{up}$ l'objet courant de la liste supérieure d'arêtes qui est susceptible d'interférer */
/* On note $objI_{down}$ l'objet courant de la liste inférieure d'arêtes qui est susceptible d'interférer */

Itération

v_{up_l} := sommet gauche de e_{up}
v_{up_r} := sommet droit de e_{up}
v_{down_l} := sommet gauche de e_{down}
v_{down_r} := sommet droit de e_{down}

$L_{sup_{O_l}}$:= intersection avec O_l de la droite dans la scène qui correspond à v_{up_l}
Si $O_{up} = O_r$
  $L_{sup_{O_r}}$:= intersection avec O_r de la droite dans la scène qui correspond à v_{up_l}
  $objI_{up}$:= NULL
Fin Si
Sinon
  $L_{sup_{O_r}}$:= intersection avec O_r de la droite dans la scène qui correspond à v_{up_r}
  $objI_{up} := O_{up}$
Fin Sinon

$L_{inf_{O_r}}$:= intersection avec O_r de la droite dans la scène qui correspond à v_{down_l}
Si $O_{down} = O_l$
  $L_{inf_{O_l}}$:= intersection avec O_l de la droite dans la scène qui correspond à v_{down_l}
  $objI_{down}$:= NULL
Fin Si
Sinon
  $L_{inf_{O_l}}$:= intersection avec O_l de la droite dans la scène qui correspond à v_{down_r}
  $objI_{down} := O_{down}$
Fin Sinon

Calculer les facteurs de forme pour les éléments de O_l et O_r compris dans les zones $[L_{sup_{O_l}}, L_{inf_{O_l}}]$ de O_l et $[L_{sup_{O_r}}, L_{inf_{O_r}}]$ de O_r, sachant que les objets $objI_{up}$ et $objI_{down}$ sont susceptibles d'interférer
e_{up} := arête suivante de $list_{up}$ associée à un objet qui interfère (si elle existe)
e_{down} := arête suivante de $list_{down}$ associée à un objet qui interfère (si elle existe)

Fin Itération quand les calculs ont été exécutés pour les deux dernières arêtes de $list_{up}$ et $list_{down}$ associées à des objets qui interfèrent entre O_l et O_r

FIG. 5.10 - *Un premier algorithme de calcul des facteurs de forme entre éléments sur des objets convexes.*

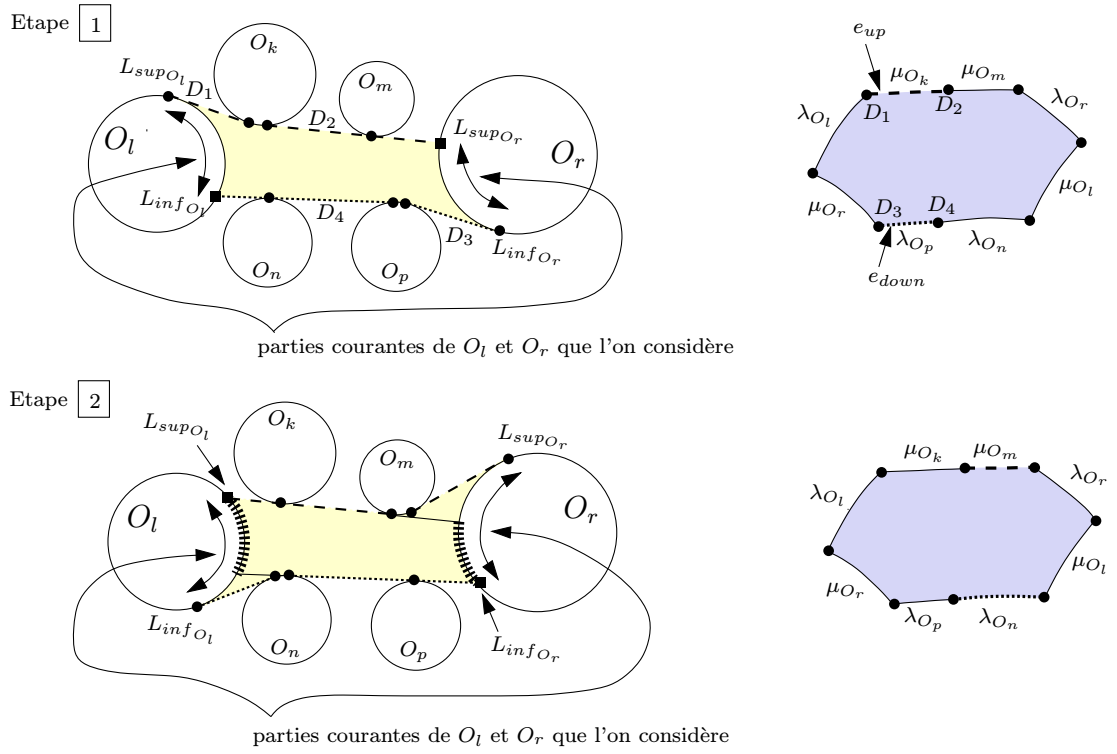


FIG. 5.11 - *Parties des objets convexes O_l et O_r où il y a un objet qui interfère «par le haut» et un objet qui interfère «par le bas».*

haut» et un «par le bas»). On constate cependant que lorsqu'il y a plusieurs objets qui interfèrent «par le haut» et plusieurs objets qui interfèrent «par le bas» pour une face donnée associée à deux objets O_l et O_r, certaines paires d'éléments appartenant à O_l et O_r sont considérées plusieurs fois. On peut voir un exemple sur la figure 5.11. Dans le cas de l'exemple considéré, les paires d'éléments qui appartiennent aux parties de O_l et O_r marquées en pointillés sont considérées deux fois (cf. schéma de l'étape 2 dans la figure 5.11).

$\Longrightarrow$ Nouvelle idée

Soient $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ deux objets donnés (deux objets convexes ou deux arêtes de polygones, selon le cas), et soit f une face associée à ces deux objets. Au lieu de considérer directement des zones sur $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ où il y a deux objets qui interfèrent, on considére chaque élément de $\mathcal{O}_i$ appartenant à la partie «mutuellement visible» définie sur $\mathcal{O}_i$ à partir de la face f, puis on détermine les objets potentiellement interférants pour cet élément, ainsi que les éléments qu'il «voit» sur $\mathcal{O}_j$. Il reste ensuite à calculer les facteurs de forme entre cet élément de $\mathcal{O}_i$ et les différents éléments qu'il «voit» sur $\mathcal{O}_j$. De cette façon, chaque paire d'éléments de $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ n'est considérée qu'une seule fois et, en plus, on ne considère que les paires d'éléments nécessaires (les éléments en visibilité totale ou visibilité partielle, mais pas les éléments qui ne se «voient» pas).

Cette méthode permettant d'effectuer seulement les calculs nécessaires a été implémentée pour les scènes polygonales.

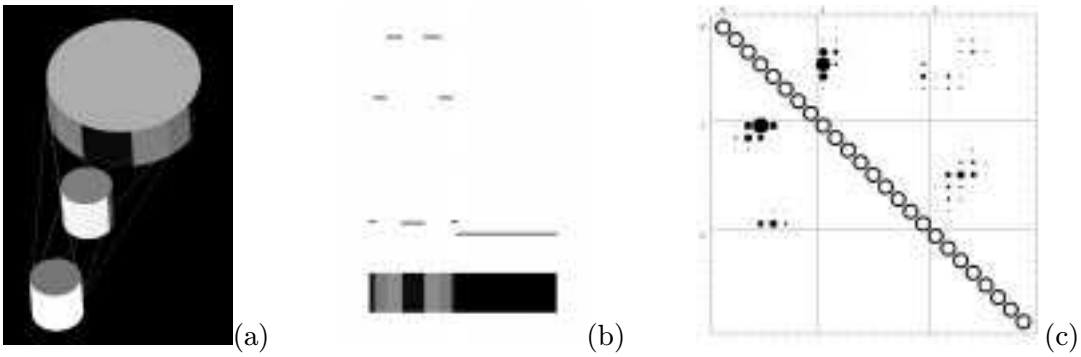


FIG. 5.12 - *(a) Scène et échantillonnage au niveau des objets ; (b) valeur de radiosité au niveau du grand cercle ; (c) matrice M du système d'équations de radiosité.*

5.2.2 Implémentation d'une méthode efficace pour les polygones

Pour calculer les facteurs de forme nécessaires pour une scène polygonale donnée, on considère toutes les faces du complexe de visibilité associées à deux arêtes de polygones quelconques de cette scène.

Soit une face f donnée associée à deux arêtes de polygones C_l et C_r. Pour calculer les facteurs de forme nécessaires pour la face f, on considère successivement chaque élément s_l de C_l qui appartient à la partie mutuellement visible définie sur C_l à partir de la face f, et on calcule pour cet élément la partie qu'il «voit» sur l'arête de polygone C_r. Il suffit ensuite de calculer les facteurs de forme entre cet élément s_l et chaque élément s_r de C_r qui appartient entièrement ou partiellement à la partie de C_r vue par l'élément s_l.

Partie mutuellement visible définie sur C_l à partir de la face f

La face f associée à C_l et C_r correspond à une composante connexe de segments libres maximaux qui touchent les deux arêtes de polygones C_l et C_r. Cette face permet donc de définir deux parties dites *mutuellement visibles* sur C_l et C_r, définies de telle sorte que tout point appartenant à la partie *mutuellement visible* définie sur C_l «voit» au moins une partie de la partie *mutuellement visible* définie sur C_r, et vice versa.

La partie mutuellement visible définie sur C_l (respectivement sur C_r) à partir de la face f correspond à la partie de C_l (respectivement de C_r) comprise entre les points d'intersection, avec C_l (respectivement C_r), des deux droites correspondant respectivement aux premier et dernier sommets de la face f. Dans le cas de la figure 5.13, les premier et dernier sommets de la face associée aux arêtes de polygones C_l et C_r correspondent respectivement aux sommets D_i et D_f. Les droites correspondantes D_i et D_f dans la scène permettent de délimiter des parties dites *mutuellement visibles* sur C_l et C_r (parties marquées par des hachures le long de C_l et C_r, sur la figure 5.13).

Partie de C_r vue par un élément s_l donné de C_l

Pour pouvoir déterminer la partie de l'arête de polygone C_r vue par un élément s_l donné de l'arête de polygone C_l, il est nécessaire de connaître les objets potentiellement interférants pour

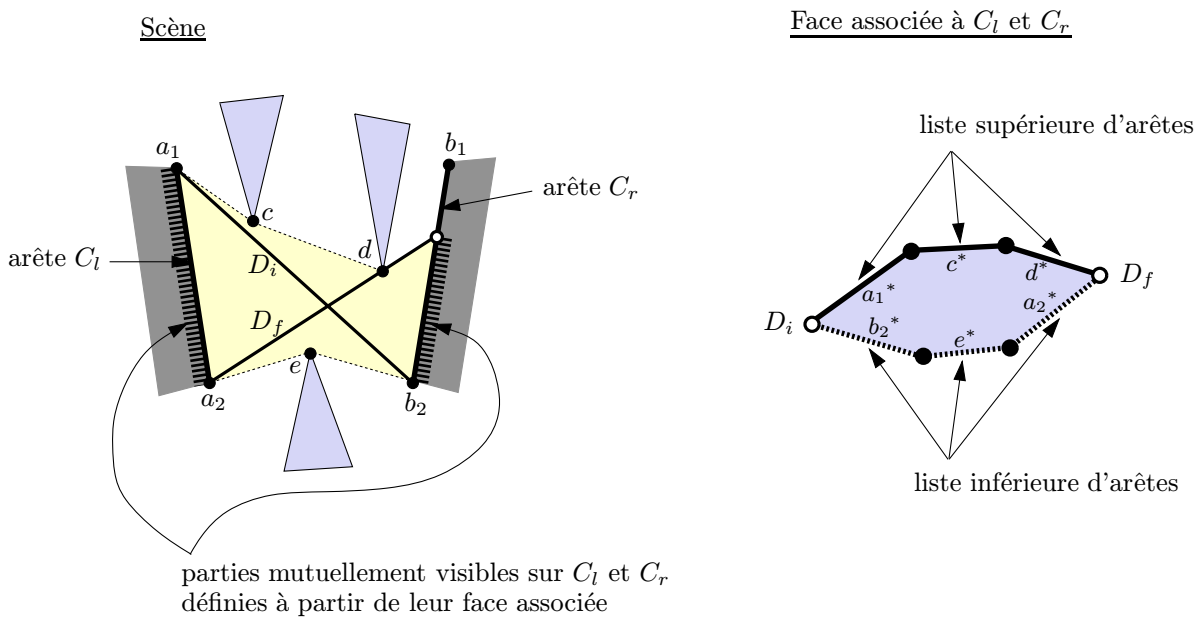


FIG. 5.13 - *Parties mutuellement visibles sur deux arêtes de polygones C_l et C_r définies à partir de leur face associée.*

l'élément s_l considéré (objets qui réduisent la visibilité pour l'élément s_l considéré et vont donc influer sur la partie de C_r qui est vue par cet élément s_l).

Pour pouvoir déterminer ces objets, on introduit la notion de *zone d'interférence* associée à une arête du complexe de visibilité :

Soit une face f associée à deux arêtes de polygones C_l et C_r. On appelle *zone d'interférence* associée à une arête donnée e de la face f, la zone dans la scène qui est comprise entre les deux arêtes de polygones C_l et C_r associées à la face f, et qui est délimitée par les deux droites, dans la scène, correspondant aux deux sommets de la face f adjacents à l'arête e considérée. Si l'arête e considérée est associée à un sommet de polygone M qui réduit la visibilité entre C_l et C_r, la *zone d'interférence* associée à e correspond en fait, dans la scène, à la région entre C_l et C_r où le sommet de polygone M peut obstruer la visibilité.

On peut voir un exemple sur la figure 5.14. Considérons l'arête a^* de la face associée aux deux arêtes de polygones C_l et C_r. Cette arête est associée au point a de la scène. Elle a pour sommets adjacents D_1 et D_2 sur la face considérée (cf. schéma de droite sur la figure 5.14). La *zone d'interférence* associée à l'arête a^* est comprise entre les arêtes de polygones C_l et C_r, et est délimitée par les droites D_1 et D_2 (dans la scène) correspondant respectivement aux sommets D_1 et D_2 de la face associée à C_l et C_r (cf. schéma de gauche sur la figure 5.14).

Une face f associée à deux arêtes de polygones C_l et C_r est constituée de deux listes d'arêtes : une liste supérieure d'arêtes que l'on appelle $list_{up}$ et qui est entre autres constituée des arêtes associées aux sommets de polygones qui réduisent la visibilité «par le haut» entre les arêtes de polygones C_l et C_r (cf. figure 5.13 pour un exemple) ; et une liste inférieure d'arêtes que l'on appelle $list_{down}$ et qui est entre autres constituée des arêtes associées aux sommets de polygones

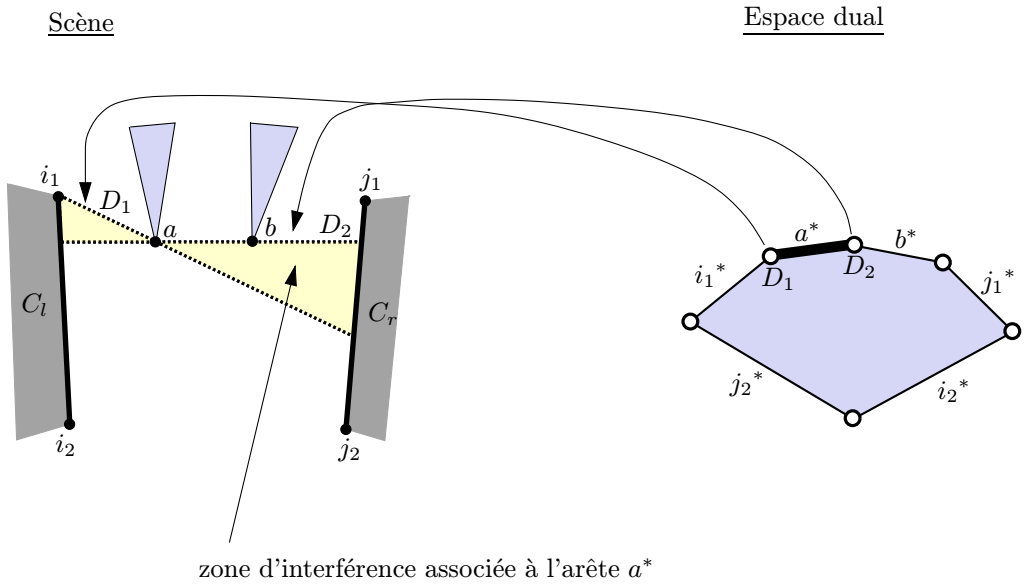


FIG. 5.14 - *Zone d'interférence associée à une arête d'une face associée à deux arêtes de polygones C_l et C_r.*

qui réduisent la visibilité «par le bas» entre C_l et C_r (cf. figure 5.13 pour un exemple). La partie de l'arête de polygone C_r vue par un élément s_l donné de C_l est donc obtenue en maintenant deux *zones d'interférence* courantes qui dépendent de l'élément s_l considéré : une *zone d'interférence* ZI_{up} associée à une arête de la liste supérieure d'arêtes de la face f, et une *zone d'interférence* ZI_{down} associée à une arête de la liste inférieure d'arêtes de la face f. Les deux arêtes de la face f qui permettent de définir les zones d'interférence ZI_{up} et ZI_{down}, sont les deux arêtes associées aux deux sommets de polygones courants qui sont susceptibles d'obstruer la visibilité pour l'élément s_l considéré, s'il existe de tels sommets de polygones, et sinon les deux dernières arêtes de la face f. Ces deux arêtes permettant de définir les zones d'interférence ZI_{up} et ZI_{down} sont appelées respectivement e_{up} et e_{down}. Les deux sommets de polygones associés aux arêtes e_{up} et e_{down} sont nommés respectivement p_{up} et p_{down}.

Si on connaît les zones d'interférence courantes de $list_{up}$ et de $list_{down}$, et la position par rapport à ces deux zones de l'élément s_l considéré de C_l, on peut alors facilement déterminer la partie vue par s_l sur C_r. Pour un élément s_l donné avec pour points extrémités $[p_{l_0}, p_{l_1}]$, la partie visible sur l'arête de polygone C_r est l'intervalle entre les points $p_{r_{up}}$ et $p_{r_{down}}$ définis comme suit :

- $p_{r_{up}}$ est l'intersection de la droite $(p_{l_1} p_{up})$ avec l'arête de polygone C_r si elle existe, et sinon l'extrémité de C_r la plus proche (cf. schéma de l'étape 1 dans la figure 5.16 pour un exemple, avec le point c qui correspond au point p_{up}).

- si p_{down} correspond à l'extrémité «basse» de C_l et que e_{down} n'est pas la première arête de $list_{down}$, alors $p_{r_{down}}$ correspond à l'extrémité «basse» de C_r ; sinon : $p_{r_{down}}$ est l'intersection de la droite $(p_{l_0} p_{down})$ avec C_r si elle existe, et sinon l'extrémité de C_r la plus proche (cf. schéma de l'étape 1 dans la figure 5.16 pour un exemple, avec le point f qui correspond au point p_{down}).

Description de l'algorithme

La méthode de calcul des facteurs de forme entre éléments sur des arêtes de polygones, utilisant le complexe de visibilité, est présentée dans le détail dans la figure 5.15. L'algorithme décrit explique comment on détermine les facteurs de forme nécessaires $ff(s_l, s_r)$ pour les paires d'éléments (s_l, s_r) d'une face f donnée du complexe de visibilité, associée à deux arêtes de polygones C_l et C_r.

Pour mieux comprendre la méthode, l'exécution de l'algorithme est illustrée sur un exemple où on calcule les facteurs de forme entre les éléments sur deux arêtes de polygones C_l et C_r (cf. figure 5.16). Pour chaque étape de l'itération principale, on montre les arêtes courantes e_{up} de $list_{up}$ et e_{down} de $list_{down}$ (représentées respectivement en tirets et en pointillés), et les *zones d'interférence* (dans la scène) correspondant à e_{up} et e_{down}. La zone d'interférence courante de $list_{up}$ (ZI_{up}) est représentée en gris clair, et celle de $list_{down}$ (ZI_{down}) en gris foncé. La partie courante de C_l qui est considérée est indiquée par un segment tracé le long de C_l. On suppose ici que cette partie correspond à un élément s_l de l'arête de polygone C_l. On montre alors au niveau de l'arête de polygone C_r les différentes régions pour lesquelles il y a un type spécifique de facteur de forme («avec *visibilité totale*», «avec comme point potentiellement interférant c, d, e ou f» (cf. figure 5.16)).

On recense quatre types différents de facteurs de forme (cf. algorithme dans la figure 5.15) : «avec *visibilité totale*», «avec comme point potentiellement interférant p_{up}», «avec comme point potentiellement interférant p_{down}», «avec comme points potentiellement interférants p_{up} et p_{down}». Ces différents types de facteurs de forme sont calculés en utilisant la formulation du facteur de forme issue de la «string rule», qui permet d'exprimer le facteur de forme comme une somme pondérée de longueurs de courbes (cf. paragraphe 2.2). Typiquement pour un type donné de facteur de forme, «avec comme point potentiellement interférant p_{up}» par exemple, on peut identifier différentes configurations pour lesquelles il y a une formulation spécifique du facteur de forme. Ces configurations sont liées aux différentes régions où le point p_{up} peut se trouver. La figure 5.17 montre les différentes régions possibles contenant le point p_{up} (régions coloriées en gris clair), et la face correspondant à chaque possibilité. Sur cette même figure, on peut aussi voir pour chaque cas, l'expression de la somme des longueurs de courbes (issue de la «string rule»), qui apparaît dans l'expression du facteur de forme entre éléments (cf. paragraphe 5.1.1). Cette somme de longueurs de courbes correspond à la somme des longueurs des courbes croisées tendues entre les extrémités des deux éléments considérés moins la somme des longueurs des courbes non croisées tendues entre les extrémités de ces deux éléments.

On peut élaborer une méthode similaire pour les objets convexes qui permet, comme dans le cas de la méthode implémentée pour les polygones, de considérer seulement les paires d'éléments nécessaires, et d'effectuer ainsi seulement les calculs nécessaires.

Calcul des facteurs de forme pour la face f associée à C_l et C_r

Initialisation

e_{up} := première arête de $list_{up}$ associée à un point qui interfére «par le haut» entre C_l et C_r
s'il y en a au moins un, et sinon la dernière arête de $list_{up}$
e_{down} := première arête de $list_{down}$ associée à un point qui interfére «par le bas» entre C_l et C_r
s'il y en a au moins un, et sinon la dernière arête de $list_{down}$
ZI_{up} := zone d'interférence associée à e_{up}
ZI_{down} := zone d'interférence associée à e_{down}
Soient p_{l_u} et p_{l_d} les points extrémités de la partie mutuellement visible définie sur C_l
à partir de la face f
s_l := premier élément sur C_l appartenant à $[p_{l_u}, p_{l_d}]$

Itération

Calculer les points $p_{r_{up}}$ et $p_{r_{down}}$ en fonction de la valeur courante de l'élément s_l
/* Remarque : s_l est à l'intérieur de ZI_{up} */

Si s_l est à l'extérieur de ZI_{down}
  Pour tout élément s_r avec au moins une partie dans $[p_{r_{up}}, p_{r_{down}}]$ **faire**
    Si s_r est à l'extérieur de ZI_{up}
      Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec *visibilité totale*
    Sinon /* Cas : s_r est à l'intérieur de ZI_{up} */
      Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme point potentiellement interférant p_{up}
  Fin Pour
Sinon /* Cas : s_l est à l'intérieur de ZI_{down} */
  Pour tout élément s_r avec au moins une partie dans $[p_{r_{up}}, p_{r_{down}}]$ **faire**
    Si s_r est à l'intérieur de ZI_{down}
      Si s_r est à l'extérieur de ZI_{up}
        Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme point potentiellement interférant p_{down}
      Sinon /* Cas : s_r est à l'intérieur de ZI_{up} */
        Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme points potentiellement interférants p_{up} et p_{down}
    Sinon /* Cas : s_l est à l'intérieur de ZI_{down} et s_r est à l'extérieur de ZI_{down} */
      Si s_r est à l'extérieur de ZI_{up}
        Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec *visibilité totale*
      Sinon /* Cas : s_r est à l'intérieur de ZI_{up} */
        Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme point potentiellement interférant p_{up}
  Fin Pour

s_l := élément suivant sur C_l appartenant à $[p_{l_u}, p_{l_d}]$
Si extrémité «haute» de s_l = limite la plus basse de ZI_{up}
  e_{up} := arête suivante de $list_{up}$ (si elle existe)
  ZI_{up} := zone d'interférence associée à e_{up}
Fin Si
Si extrémité «haute» de s_l = limite la plus basse de ZI_{down}
  e_{down} := arête suivante de $list_{down}$ (si elle existe)
  ZI_{down} := zone d'interférence associée à e_{down}
Fin Si

Fin Itération quand les calculs ont été exécutés pour le dernier élément s_l appartenant à $[p_{l_u}, p_{l_d}]$

FIG. 5.15 - *Algorithme de calcul des facteurs de forme entre éléments sur des arêtes de polygones.*

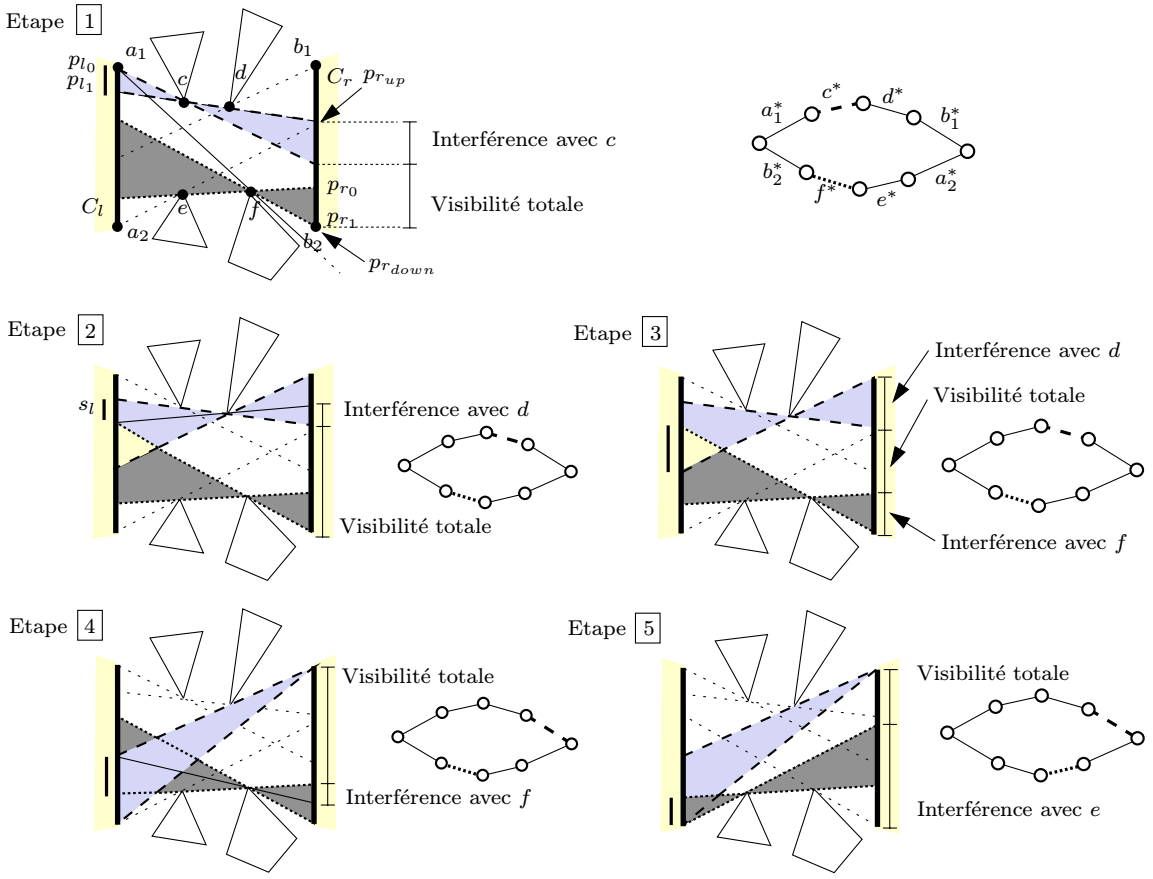


FIG. 5.16 - *Zones d'interférence au cours du calcul des facteurs entre les éléments sur deux arêtes de polygones C_l et C_r.*

5.2.3 Méthode similaire élaborée pour les objets convexes

De manière similaire au cas des polygones (cf. paragraphe 5.2.2), pour calculer les facteurs de forme nécessaires pour une scène constituée d'objets convexes donnée, on considère toutes les faces du complexe de visibilité associées à deux objets convexes quelconques de cette scène.

Soit une face f associée à deux objets convexes O_l et O_r donnés. Pour calculer les facteurs de forme nécessaires pour la face f, on considère successivement chaque élément s_l de O_l qui appartient à la partie mutuellement visible définie sur O_l à partir de la face f, et on calcule pour cet élément la partie qu'il «voit» sur l'objet convexe O_r. Il s'agit ensuite de calculer les facteurs de forme entre cet élément s_l et chaque élément s_r de O_r qui appartient entièrement ou partiellement à la partie de O_r vue par l'élément s_l.

Partie mutuellement visible définie sur O_l à partir de la face f

La partie mutuellement visible définie sur O_l à partir de la face f est obtenue à partir de certains sommets de la face f. Plus précisément, les limites «supérieures» des parties dites *mutuellement visibles* sur O_l et O_r sont obtenues à partir de sommets de la liste supérieure

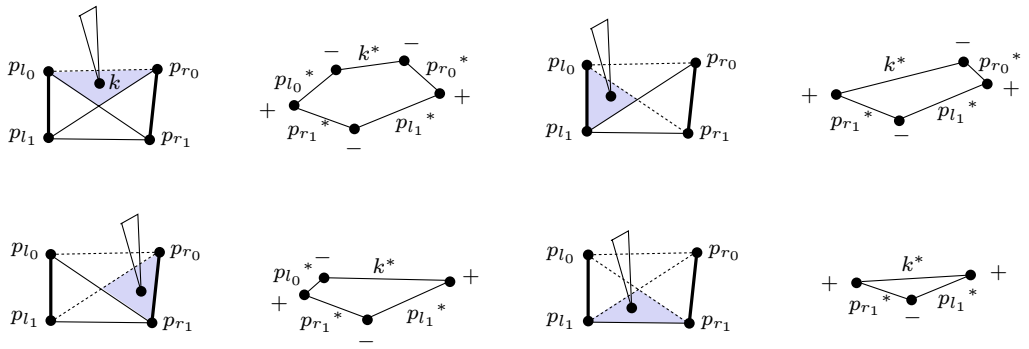


FIG. 5.17 - *Les différentes configurations d'obstruction «par le haut» pour une paire d'éléments* $[p_{l_0}, p_{l_1}]$ *et* $[p_{r_0}, p_{r_1}]$.

d'arêtes de la face f, et les limites «inférieures» sont obtenues à partir de sommets de la liste inférieure d'arêtes de la face f. On peut voir différents exemples sur la figure 5.18. Les extrémités «supérieure» et «inférieure» de la partie mutuellement visible définie sur l'objet O_l à partir de la face associée aux objets O_l et O_r sont appelées respectivement p_{l_u} et p_{l_d}. Les parties mutuellement visibles sur O_l et O_r définies à partir de leur face associée sont marquées par des hachures le long de O_l et O_r (cf. figure 5.18).

Si la liste supérieure d'arêtes de la face f considérée ne contient pas d'arêtes associées à des objets qui interfèrent (cf. figure 5.18(a)), les limites «supérieures» des parties mutuellement visibles sur O_l et O_r sont obtenues à partir du sommet $v_{\lambda_{O_l}\lambda_{O_r}}$ qui a pour arêtes incidentes λ_{O_l} et λ_{O_r} au niveau de la face f. Ces limites supérieures sur O_l et O_r correspondent respectivement aux points d'intersection avec O_l et O_r de la droite dans la scène qui correspond au sommet $v_{\lambda_{O_l}\lambda_{O_r}}$. De même, si la liste inférieure d'arêtes de la face f ne contient pas d'arêtes associées à des objets qui interfèrent (cf. figure 5.18(a)), les limites «inférieures» des parties mutuellement visibles sur O_l et O_r sont obtenues à partir du sommet $v_{\mu_{O_r}\mu_{O_l}}$ qui a pour arêtes incidentes μ_{O_r} et μ_{O_l} au niveau de la face f.

Si la liste supérieure (respectivement inférieure) d'arêtes de la face f contient une sous-chaîne d'arêtes associées à des objets qui interfèrent (cf. figure 5.18(b)), les limites «supérieures» (respectivement «inférieures») des parties mutuellement visibles sur O_l et O_r sont obtenues à partir des deux sommets extrémités de cette sous-chaîne d'arêtes.

Si les listes supérieure et inférieure d'arêtes de la face f sont constituées uniquement d'une chaîne d'arêtes associées à des objets qui interfèrent (cf. figure 5.18(c)), les limites des parties mutuellement visibles sont obtenues à partir du premier et du dernier sommet de la face f.

Partie de O_r vue par un élément s_l donné de O_l

Comme dans le cas des polygones (cf. paragraphe 5.2.2), la partie de O_r vue par un élément s_l donné de O_l est obtenue en maintenant deux *zones d'interférence* courantes qui dépendent de l'élément s_l considéré : une *zone d'interférence* ZI_{up} associée à une arête de la liste supérieure d'arêtes de la face f, et une *zone d'interférence* ZI_{down} associée à une arête de la liste inférieure d'arêtes de la face f. Les deux arêtes de la face f qui permettent de définir les *zones d'interférence* ZI_{up} et ZI_{down}, sont les deux arêtes associées aux deux objets convexes courants qui sont susceptibles d'obstruer la visibilité pour l'élément s_l considéré, s'il existe de tels objets, et sinon

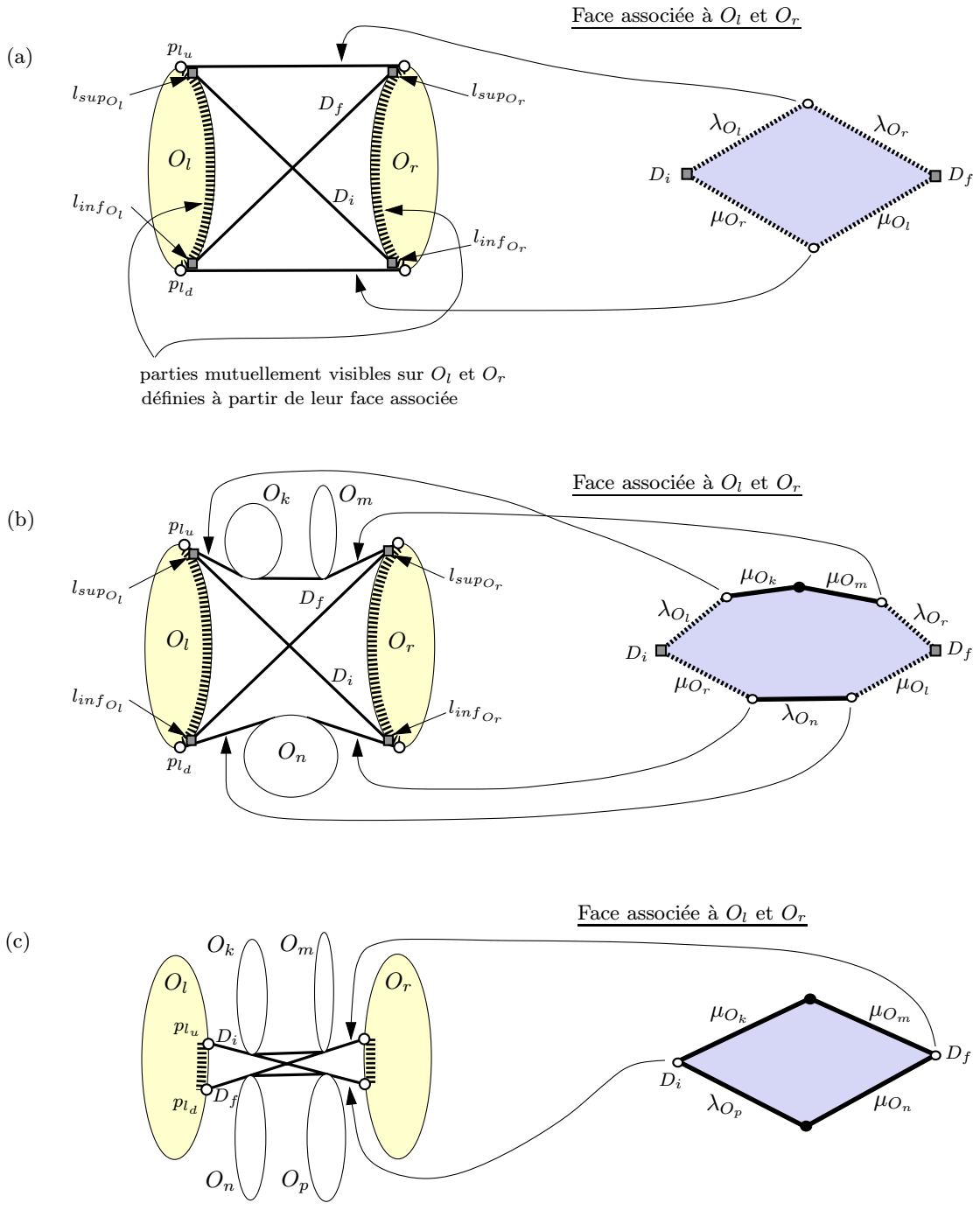


FIG. 5.18 - *Parties mutuellement visibles sur deux objets convexes O_l et O_r définies à partir de leur face associée.*

les deux dernières arêtes de la face f. Les deux objets convexes associés aux deux arêtes permettant de définir les *zones d'interférence* ZI_{up} et ZI_{down} sont appelés respectivement O_{up} et O_{down}.

La *zone d'interférence* associée à une arête e d'une face associée à deux objets convexes est la zone dans la scène qui est comprise entre ces deux objets, et qui est délimitée par les deux droites (dans la scène) correspondant aux deux sommets adjacents à l'arête e considérée, ainsi que par l'objet convexe associé à l'arête e.

On peut voir un exemple sur la figure 5.19. Considérons l'arête μ_{O_k} de la face associée aux

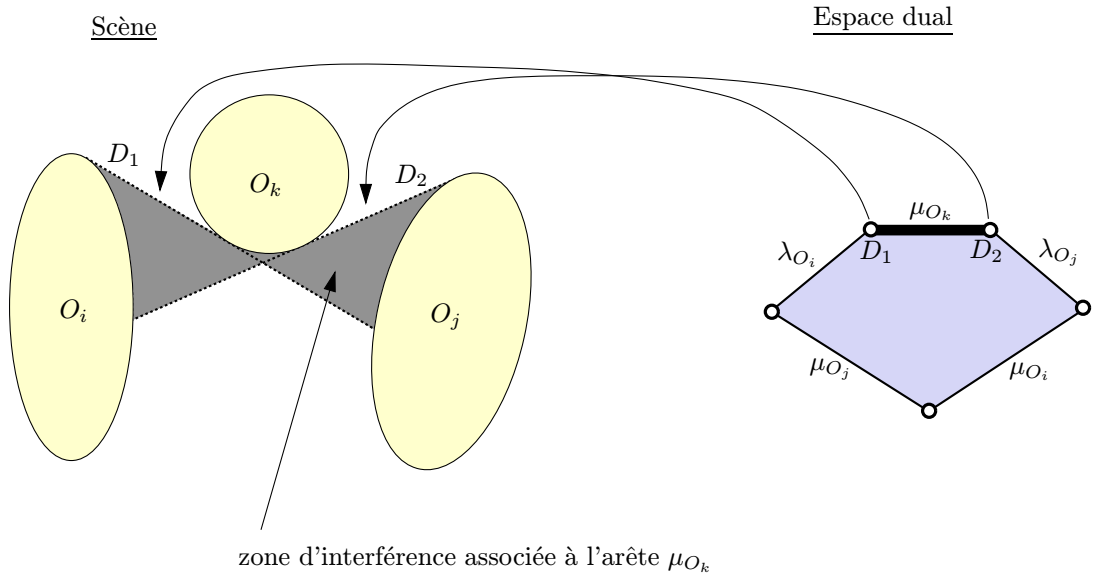


FIG. 5.19 - *Zone d'interférence associée à une arête d'une face associée à deux objets convexes O_i et O_j.*

objets convexes O_i et O_j. Cette arête est associée à l'objet convexe O_k. Elle a pour sommets adjacents D_1 et D_2 au niveau de la face considérée (cf. schéma de droite sur la figure 5.19). Ces deux sommets correspondent respectivement dans la scène aux droites D_1 et D_2. La *zone d'interférence* associée à l'arête μ_{O_k} est comprise entre les objets O_i et O_j, et est délimitée par les droites D_1 et D_2, ainsi que par une portion de l'objet O_k.

Soit une face f donnée associée à deux objets convexes O_l et O_r. On appelle $l_{sup_{O_l}}$ et $l_{inf_{O_l}}$ les points d'intersection avec O_l des deux droites dans la scène qui correspondent respectivement aux premier et dernier sommets de la face f. De même, on appelle $l_{sup_{O_r}}$ et $l_{inf_{O_r}}$ les points d'intersection avec O_r des deux droites dans la scène qui correspondent respectivement aux dernier et premier sommets de la face f. On peut voir différents exemples sur la figure 5.18. Les points $l_{sup_{O_l}}$, $l_{inf_{O_l}}$, $l_{inf_{O_r}}$ et $l_{sup_{O_r}}$ sont indiqués pour chacun des exemples (a), (b) et (c). Ces points correspondent respectivement aux points d'intersection avec O_l et O_r des droites D_i et D_f, droites correspondant respectivement aux sommets D_i et D_f (premier et dernier sommets) de la face associée aux objets O_l et O_r.

Si on connaît les deux zones d'interférence ZI_{up} et ZI_{down} courantes, ainsi que la position par rapport à ces deux zones de l'élément s_l considéré de O_l, et les points $l_{sup_{O_l}}$ et $l_{inf_{O_l}}$ définis

sur O_l à partir de la face f, on peut alors déterminer la limite «supérieure» $p_{r_{up}}$ et la limite «inférieure» $p_{r_{down}}$ de la partie de O_r vue par l'élément s_l. La détermination de ces deux points est décrite dans la figure 5.20.

On peut voir un exemple sur le schéma de l'étape 1 dans la figure 5.23, avec l'objet O_k correspondant à l'objet O_{up} et l'objet O_n correspondant à l'objet O_{down}. Les points $p_{r_{up}}$ et $p_{r_{down}}$ correspondants sont indiqués le long de O_r sur la figure.

Soit ZI_{up} la zone d'interférence courante de la liste supérieure d'arêtes de la face f considérée
/* la face f est associée aux objets convexes O_l et O_r */
Soit O_{up} l'objet convexe associé à l'arête permettant de définir ZI_{up}
Soit ZI_{down} la zone d'interférence courante de la liste inférieure d'arêtes de la face f
Soit O_{down} l'objet convexe associé à l'arête permettant de définir ZI_{down}
Soient p_{l_u} et p_{l_d} les points extrémités de la partie mutuellement visible définie sur O_l
à partir de la face f
Soient $l_{sup_{O_l}}$, $l_{inf_{O_l}}$ les intersections avec O_l des droites associées aux premier et dernier
sommets de la face f

Soit s_l un élément de l'objet convexe O_l avec pour points extrémités $[p_{l_0}, p_{l_1}]$

Détermination de $p_{r_{up}}$

Si s_l est à l'intérieur de ZI_{up}
  Si $O_{up} \neq O_r$
    $p_{r_{up}}$:= intersection avec O_r de la droite tangente à O_{up} passant par p_{l_1}
  Sinon /* Cas : $O_{up} = O_r$ */
    $p_{r_{up}}$:= intersection avec O_r de la droite tangente à O_r passant par p_{l_0}
Sinon /* Cas : s_l est à l'extérieur de ZI_{up} */
  $p_{r_{up}}$:= intersection avec O_r de la droite tangente à O_l en p_{l_0}

Détermination de $p_{r_{down}}$

Si s_l est à l'intérieur de ZI_{down}
  Si $O_{down} \neq O_l$
    $p_{r_{down}}$:= intersection avec O_r de la droite tangente à O_{down} passant par p_{l_0}
  Sinon /* Cas : $O_{down} = O_l$ */
    $p_{r_{down}}$:= intersection avec O_r de la droite tangente à O_r passant par p_{l_1}
Sinon /* Cas : s_l est à l'extérieur de ZI_{down} */
  Si $s_l \subset [p_{l_u}, l_{sup_{O_l}}]$
    $p_{r_{down}}$:= intersection avec O_r de la droite tangente à O_l en p_{l_1}
  Si $s_l \subset [l_{sup_{O_l}}, l_{inf_{O_l}}]$
    $p_{r_{down}}$:= intersection avec O_r de la droite tangente à O_r passant par p_{l_1}

FIG. 5.20 - *Détermination des points $p_{r_{up}}$ et $p_{r_{down}}$ pour un élément s_l donné.*

Description de l'algorithme

La nouvelle méthode de calcul des facteurs de forme entre éléments sur des objets convexes élaborée à partir de la méthode implémentée pour les polygones est présentée dans le détail dans la figure 5.21. L'algorithme décrit explique comment on détermine les facteurs de forme nécessaires $ff(s_l, s_r)$ pour les paires d'éléments (s_l, s_r) d'une face f donnée du complexe de

visibilité associée à deux objets convexes O_l et O_r. Soient p_{l_u} et p_{l_d} les points extrémités de la partie mutuellement visible définie sur O_l à partir de la face f, et soient $l_{sup_{O_l}}$ et $l_{inf_{O_l}}$ les points d'intersection avec O_l des deux droites dans la scène qui correspondent respectivement aux premier et dernier sommets de la face f. On distingue trois cas pour un élément s_l donné : soit s_l appartient à la partie de O_l comprise entre les points p_{l_u} et $l_{sup_{O_l}}$, soit il appartient à la partie de O_l comprise entre $l_{sup_{O_l}}$ et $l_{inf_{O_l}}$, soit il appartient à la partie de O_l comprise entre $l_{inf_{O_l}}$ et p_{l_d}. Pour chacun de ces cas, on réalise un traitement spécifique qui est décrit dans la figure 5.22.

Pour mieux comprendre la méthode, l'exécution de l'algorithme est illustrée sur un exemple où on calcule les facteurs de forme pour les éléments sur deux objets convexes O_l et O_r. La figure 5.23 illustre le déroulement de l'algorithme pour les paires d'éléments (s_l, s_r) ($s_l \in O_l$ et $s_r \in O_r$) tels que $s_l \subset [p_{l_u}, l_{sup_{O_l}}]$, la figure 5.24 pour les éléments (s_l, s_r) tels que $s_l \subset [l_{sup_{O_l}}, l_{inf_{O_l}}]$, et la figure 5.25 pour les éléments (s_l, s_r) tels que $s_l \subset [l_{inf_{O_l}}, p_{l_d}]$. Sur chaque figure, on montre, pour chaque étape de l'itération principale de l'algorithme, l'arête courante e_{up} de la liste supérieure d'arêtes de la face associée à O_l et O_r, l'arête courante e_{down} de la liste inférieure d'arêtes de cette face, ainsi que les *zones d'interférence* (dans la scène) correspondant à e_{up} et e_{down}. L'arête e_{up} est représentée en tirets et l'arête e_{down} en pointillés. La zone d'interférence courante de la liste supérieure d'arêtes est représentée en gris clair, et celle de la liste inférieure d'arêtes en gris foncé. La partie courante de O_l qui est considérée est indiquée par un morceau de courbe tracé le long du contour de O_l. On suppose ici que cette partie correspond à un élément s_l de l'objet convexe O_l. On montre alors au niveau du contour de l'objet convexe O_r les différentes régions pour lesquelles il y a un type spécifique de facteur de forme («avec *visibilité totale*», «avec comme objet potentiellement interférant O_l, O_r, O_k, O_m ou O_n» (cf. figures 5.23, 5.24 et 5.25)).

Dans le cas où $s_l \subset [p_{l_u}, l_{sup_{O_l}}]$, on recense trois types différents de facteurs de forme (cf. détermination du facteur de forme dans la figure 5.22) : «avec comme objets potentiellement interférants O_l et O_r», «avec comme objet potentiellement interférant O_l», «avec comme objet potentiellement interférant O_{up}». Le cas où $s_l \subset [l_{inf_{O_l}}, p_{l_d}]$ est assez similaire si ce n'est que l'obstruction se produit «par le bas» au lieu de se produire «par le haut». On recense donc aussi trois types différents de facteurs de forme pour ce cas (cf. détermination du facteur de forme dans la figure 5.22) : «avec comme objets potentiellement interférants O_l et O_r», «avec comme objet potentiellement interférant O_l», «avec comme objet potentiellement interférant O_{down}». Dans le cas où $s_l \subset [l_{sup_{O_l}}, l_{inf_{O_l}}]$, on recense cinq types différents de facteurs de forme (cf. détermination du facteur de forme dans la figure 5.22) : «avec comme objet potentiellement interférant O_r», «avec *visibilité totale*», «avec comme objet potentiellement interférant O_{up}», «avec comme objet potentiellement interférant O_{down}», «avec comme objets potentiellement interférants O_{up} et O_{down}». Ces différents types de facteurs de forme sont calculés en utilisant la formulation du facteur de forme issue de la «string rule», qui permet d'exprimer le facteur de forme comme une somme pondérée de longueurs de courbes (cf. paragraphe 2.2). Connaissant les objets potentiellement interférants pour deux éléments donnés de O_l et O_r, le facteur de forme entre ces deux éléments est obtenu de façon simple en tenant compte, lors du calcul des *courbes croisées* et *non croisées* entre les deux éléments considérés, des objets potentiellement interférants entre ces deux éléments.

Calcul des facteurs de forme pour la face f associée à O_l et O_r

Initialisation

e_{up} := première arête de $list_{up}$ associée à un objet qui interfére entre O_l et O_r
s'il y en a au moins un, et sinon la dernière arête de $list_{up}$
e_{down} := première arête de $list_{down}$ associée à un objet qui interfére entre O_l et O_r
s'il y en a au moins un, et sinon la dernière arête de $list_{down}$
Soient O_{up} et O_{down} les objets associés respectivement aux arêtes e_{up} et e_{down}
ZI_{up} := zone d'interférence associée à e_{up}
ZI_{down} := zone d'interférence associée à e_{down}
Soient p_{l_u} et p_{l_d} les points extrémités de la partie mutuellement visible définie sur O_l
à partir de la face f
Soient p_{r_u} et p_{r_d} les points extrémités de la partie mutuellement visible définie sur O_r
à partir de la face f
Soient $l_{sup_{O_l}}$, $l_{inf_{O_l}}$ les intersections avec O_l des droites associées aux premier et dernier
sommets de la face f
Soient $l_{sup_{O_r}}$, $l_{inf_{O_r}}$ les intersections avec O_r des droites associées aux dernier et premier
sommets de la face f
s_l := premier élément sur C_l appartenant à $[p_{l_u}, p_{l_d}]$

Itération

Calculer les points $p_{r_{up}}$ et $p_{r_{down}}$ en fonction de la valeur courante de l'élément s_l
(cf. figure 5.20)

Si $s_l \subset [p_{l_u}, l_{sup_{O_l}}]$
Pour tout élément s_r avec au moins une partie dans $[p_{r_{up}}, p_{r_{down}}]$ **faire**
Cf. Cas 1 dans la figure 5.22
Fin Pour
Si $s_l \subset [l_{sup_{O_l}}, l_{inf_{O_l}}]$
Pour tout élément s_r avec au moins une partie dans $[p_{r_{up}}, p_{r_{down}}]$ **faire**
Cf. Cas 2 dans la figure 5.22
Fin Pour
Si $s_l \subset [l_{inf_{O_l}}, p_{l_d}]$
Pour tout élément s_r avec au moins une partie dans $[p_{r_{up}}, p_{r_{down}}]$ **faire**
Cf. Cas 3 dans la figure 5.22
Fin Pour

s_l := élément suivant sur O_l appartenant à $[p_{l_u}, p_{l_d}]$
Si extrémité «haute» de s_l = limite la plus basse de ZI_{up}
e_{up} := arête suivante de $list_{up}$ (si elle existe)
ZI_{up} := zone d'interférence associée à e_{up}
Fin Si
Si extrémité «haute» de s_l = limite la plus basse de ZI_{down}
e_{down} := arête suivante de $list_{down}$ (si elle existe)
ZI_{down} := zone d'interférence associée à e_{down}
Fin Si

Fin Itération quand les calculs ont été exécutés pour le dernier élément s_l appartenant à $[p_{l_u}, p_{l_d}]$

FIG. 5.21 - *Algorithme de calcul des facteurs de forme entre éléments sur des objets convexes.*

Calcul du facteur de forme $ff(s_l, s_r)$ entre deux éléments s_l et s_r

Cas 1 : $s_l \subset [p_{l_u}, l_{sup_{O_l}}]$
/* s_l est à l'intérieur de ZI_{up} et s_l est à l'extérieur de ZI_{down} */

Si $O_{up} = O_r$
  Si $s_r \subset [p_{r_u}, l_{sup_{O_r}}]$
    Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme objets potentiellement interférants O_l et O_r
  Si $s_r \subset [l_{sup_{O_r}}, l_{inf_{O_r}}]$
    Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme objet potentiellement interférant O_l
Sinon /* Cas : $O_{up} \neq O_r$ */
  Si s_r est à l'intérieur de ZI_{up}
    Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme objet potentiellement interférant O_{up}
  Sinon /* Cas : s_r est à l'extérieur de ZI_{up} */
    Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme objet potentiellement interférant O_l

Cas 2 : $s_l \subset [l_{sup_{O_l}}, l_{inf_{O_l}}]$
/* s_l est à l'intérieur de ZI_{up} */

Si s_l est à l'extérieur de ZI_{down}
  Si s_r est à l'intérieur de ZI_{up}
    Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme objet potentiellement interférant O_{up}
  Sinon /* Cas : s_r est à l'extérieur de ZI_{up} */
    Si $s_r \subset [l_{inf_{O_r}}, p_{r_d}]$
      Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme objet potentiellement interférant O_r
    Sinon
      Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec *visibilité totale*
Sinon /* Cas : s_l est à l'intérieur de ZI_{down} */
  Si s_r est à l'intérieur de ZI_{up}
    Si s_r est à l'extérieur de ZI_{down}
      Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme objet potentiellement interférant O_{up}
    Sinon /* Cas : s_r est à l'intérieur de ZI_{down} */
      Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme objets potentiellement interférants O_{up} et O_{down}
  Sinon /* Cas : s_r est à l'extérieur de ZI_{up} */
    Si s_r est à l'extérieur de ZI_{down}
      Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec *visibilité totale*
    Sinon /* Cas : s_r est à l'intérieur de ZI_{down} */
      Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme objet potentiellement interférant O_{down}

Cas 3 : $s_l \subset [l_{inf_{O_l}}, p_{l_d}]$
/* s_l est à l'extérieur de ZI_{up} et s_l est à l'intérieur de ZI_{down} */

Si $O_{down} = O_l$
  Si $s_r \subset [l_{sup_{O_r}}, l_{inf_{O_r}}]$
    Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme objet potentiellement interférant O_l
  Si $s_r \subset [l_{inf_{O_r}}, p_{r_d}]$
    Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme objets potentiellement interférants O_l et O_r
Sinon /* Cas : $O_{down} \neq O_l$ */
  Si s_r est à l'extérieur de ZI_{down}
    Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme objet potentiellement interférant O_l
  Sinon /* Cas : s_r est à l'intérieur de ZI_{down} */
    Calculer $ff(s_l, s_r)$ avec comme objet potentiellement interférant O_{down}

FIG. 5.22 - *Détermination du facteur de forme entre deux éléments s_l et s_r.*

- $s_l \subset [p_{l_u}, l_{sup_{O_l}}]$

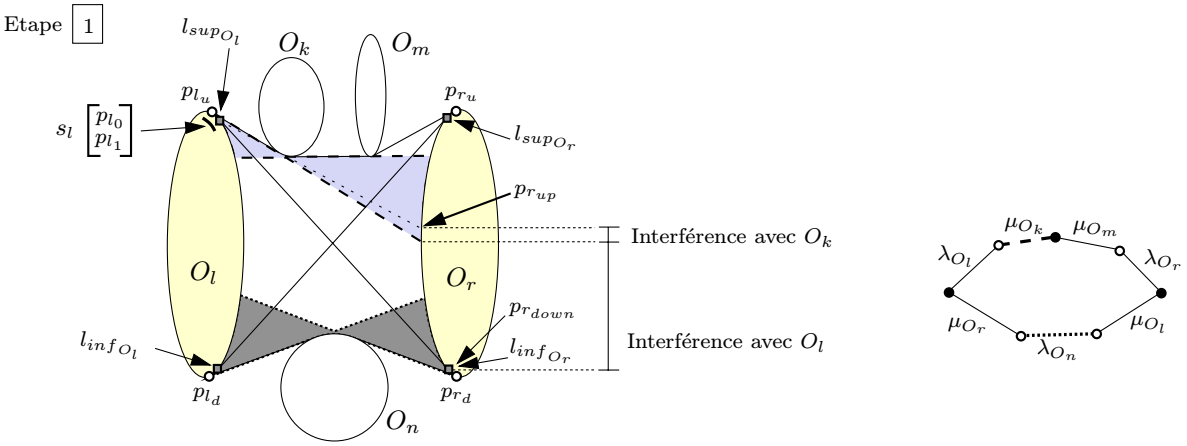


FIG. 5.23 - *Zones d'interférence au cours du calcul des facteurs de forme entre les éléments* (s_l, s_r) *(*$s_l \in O_l$ *et* $s_r \in O_r$*) tels que* $s_l \subset [p_{l_u}, l_{sup_{O_l}}]$.

- $\underline{s_l \subset [l_{sup_{O_l}}, l_{inf_{O_l}}]}$

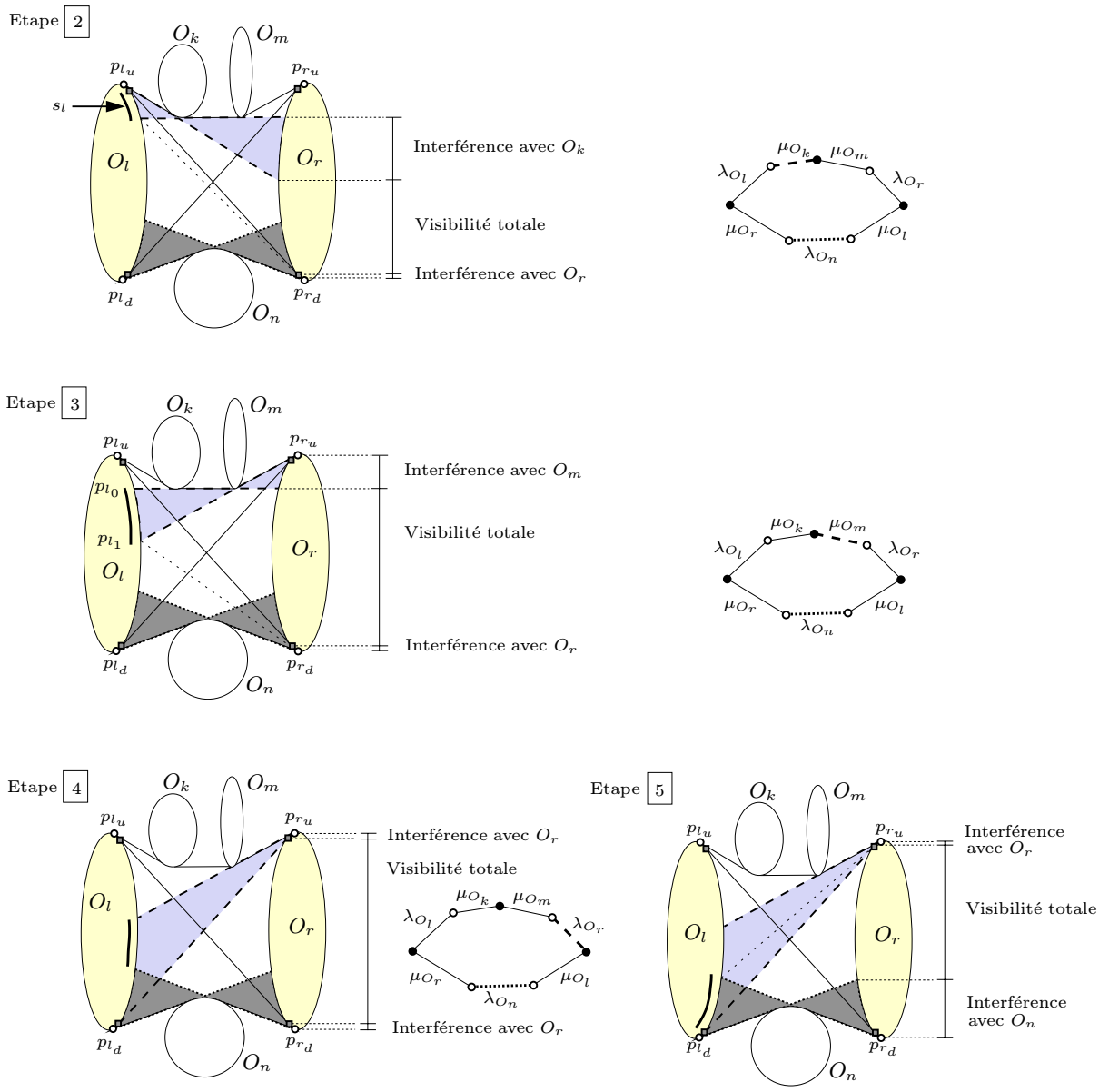


FIG. 5.24 - *Zones d'interférence au cours du calcul des facteurs de forme entre les éléments* (s_l, s_r) *(*$s_l \in O_l$ *et* $s_r \in O_r$*) tels que* $S_l \subset [l_{sup_{O_l}}, l_{inf_{O_l}}]$.

- $\underline{s_l \subset [l_{inf_{O_l}}, p_{l_d}]}$

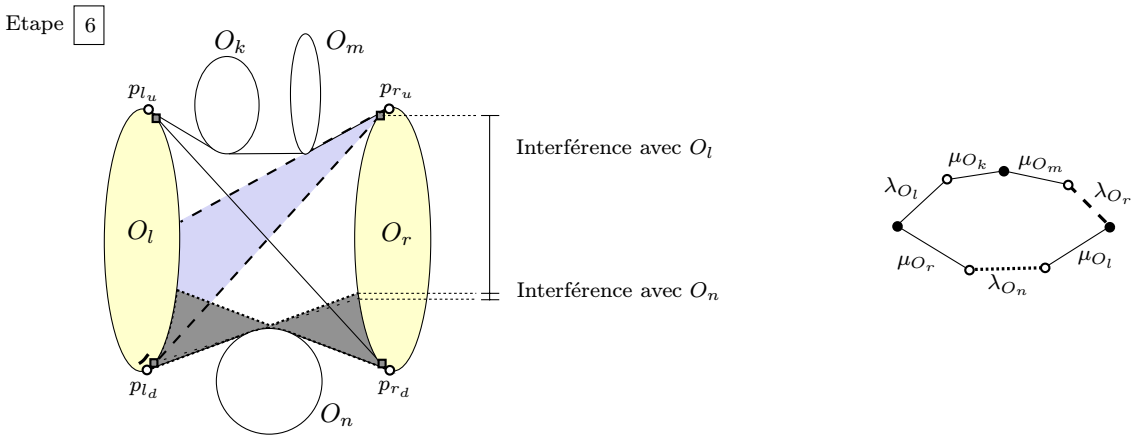


FIG. 5.25 - *Zones d'interférence au cours du calcul des facteurs de forme entre les éléments* (s_l, s_r) *(*$s_l \in O_l$ *et* $s_r \in O_r$*) tels que* $S_l \subset [l_{inf_{O_l}}, p_{l_d}]$.

Chapitre 6

Tests de comparaison avec la méthode de Heckbert

Nous avons réalisé différents tests sur des scènes polygonales 2D, permettant de comparer la méthode que nous avons implémenté à une méthode de calcul traditionnelle. Pour cela, nous avons utilisé l'implémentation de Heckbert [Hec91] qui présente l'avantage de déjà traiter le maillage de discontinuité, et d'utiliser pour le calcul des facteurs de forme, une méthode communément utilisée qui consiste à approximer le facteur de forme élément à élément par le facteur de forme point à élément.

Nous nous sommes d'abord intéressés à la façon dont les facteurs de forme sont calculés dans les deux méthodes et nous avons comparé les valeurs obtenues pour une même scène. Nous avons ensuite considéré les deux programmes dans leur intégralité (du calcul du maillage de la scène jusqu'à l'obtention de la solution de radiosité) et nous avons étudié leur comportement sur des scènes plus complexes.

6.1 Présentation des deux méthodes de calcul de facteurs de forme

6.1.1 Notre méthode : facteurs de forme calculés par une somme pondérée de longueurs de courbes

Nous utilisons la méthode de calcul de facteurs de forme implémentée pour les scènes polygonales (cf. paragraphe 5.2.2). Le complexe de visibilité permet d'identifier les paires d'éléments qui se voient mutuellement ainsi que les objets susceptibles de réduire la visibilité pour chacune de ces paires. Le facteur de forme pour une telle paire d'éléments est ensuite calculé en utilisant la formulation du facteur de forme issue de la «string rule», qui permet d'exprimer le facteur de forme comme une somme pondérée de longueurs de courbes (cf. paragraphe 2.2).

Le facteur de forme ainsi calculé entre deux éléments i et j donnés correspond à un facteur de forme élément à élément.

6.1.2 Méthode de Heckbert

Heckbert dans [Hec91] présente différentes solutions de calcul de radiosité qui utilisent différentes techniques de maillage (maillage uniforme ou maillage tenant compte des discontinuités)

et différents types d'éléments (notamment éléments constants ou éléments linéaires). L'étude est réalisée en 2D sur des scènes composées de segments et de polygones éclairés par des sources de lumière diffuses.

Heckbert dans [Hec91] et [Hec92a] calcule des facteurs de forme point à élément. Dans le cas des éléments constants, le facteur de forme entre deux éléments i et j est approximé par le facteur de forme point à élément $F_{p_i j}$ calculé au point p_i, milieu de l'élément i. Le facteur de forme F_{ij} entre deux éléments i et j est donc exprimé par (cf. [Hec92a]) :

$$F_{ij} \simeq F_{p_i j} = \int_{\text{élément } j} ds' \frac{\cos\theta_s \cos\theta_{s'}}{2r} V \tag{6.1}$$

avec (cf. figure 6.1) : p_i de paramètre s sur l'élément i, s' le paramètre d'un point p_j sur l'élément j, θ_s l'angle de la droite $(p_i p_j)$ par rapport à la normale en $p_i(s)$, $\theta_{s'}$ l'angle de la droite $(p_j p_i)$ par rapport à la normale en $p_j(s')$, r la distance entre p_i et p_j, et V la fonction de visibilité entre les points $p_i(s)$ et $p_j(s')$ (V est égal à 1 si p_i et p_j se voient mutuellement et 0 sinon). Le facteur de forme point à élément est calculé analytiquement (cf. [Hec91]). L'intervalle considéré sur l'élément j va dépendre de la visibilité depuis le point p_i (cf. figure 6.2).

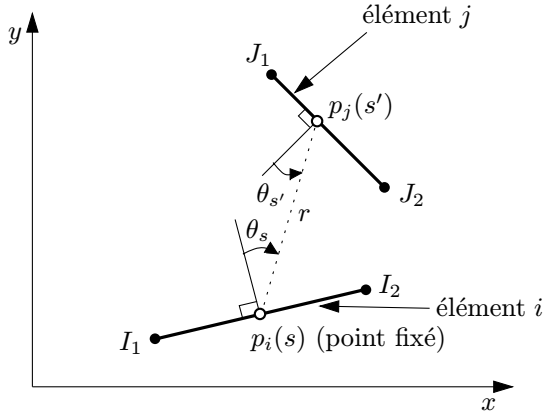


FIG. 6.1 - *Notations pour le facteur de forme point à élément.*

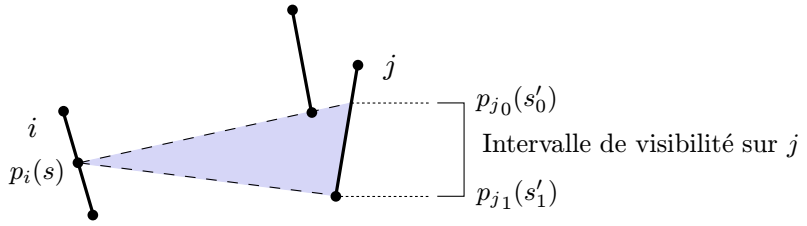


FIG. 6.2 - *Visibilité entre deux éléments (Cas de la méthode de Heckbert avec éléments constants).*

Dans le cas des éléments constants, pour le calcul du facteur de forme entre deux éléments i et j donnés, on calcule un seul facteur de forme point à élément au point milieu de l'élément i. Par contre dans le cas des éléments linéaires, un facteur de forme point à élément est calculé en

chaque extrémité d'éléments. On ne peut donc pas dans ce cas associer directement un facteur de forme à deux éléments i et j donnés, comme c'est le cas avec notre méthode de calcul de facteurs de forme. Pour cela, nous avons donc choisi parmi les différentes solutions présentées par Heckbert celle utilisant les éléments constants, pour la comparer à notre méthode.

6.2 Comparaison des valeurs de facteurs de forme obtenues

Différents tests ont été réalisés permettant de comparer, pour des scènes composées de segments, les valeurs de facteurs de forme obtenues par la méthode de Heckbert [Hec91] et les valeurs de facteurs de forme obtenues par notre méthode où les facteurs de forme sont calculés par une somme pondérée de longueurs de courbes.

6.2.1 Critère de comparaison choisi

Afin de comparer les deux méthodes, on définit une fonction Δ qui permet de quantifier la différence entre les valeurs de facteurs de forme obtenues avec les deux méthodes.

Soient i, j deux éléments de la scène.

$$\Delta(i,j) = \frac{\mid F_{ij_{\sum \text{longueurs de courbes}}} - F_{ij_{\text{Heckbert}}} \mid}{F_{ij_{\sum \text{longueurs de courbes}}}}$$

$\Delta(i,j)$ correspond à la valeur absolue de la différence entre le facteur de forme F_{ij} entre deux éléments i et j obtenu avec notre méthode et le facteur de forme F_{ij} donné par la méthode de Heckbert, le tout divisé par le facteur de forme F_{ij} obtenu avec notre méthode.

Si on pose : $\delta = \Delta(i,j) * 100$ pour deux éléments i et j donnés, on a alors :
$F_{ij_{\text{Heckbert}}} = F_{ij_{\sum \text{longueurs de courbes}}}$ à δ % près.

Sachant que dans notre méthode on calcule des facteurs de forme élément à élément et que dans la méthode de Heckbert on calcule des facteurs de forme point à élément, on constate que la fonction Δ permet de quantifier l'erreur commise lorsque le facteur de forme élément à élément est approximé par le facteur de forme point à élément.

6.2.2 Résultats

Nous présentons ici deux exemples de scènes composées de segments : un premier où les segments se voient soit totalement soit pas du tout, et un deuxième où il y a un cas de visibilité partielle.

Premier exemple

La scène considérée est constituée de trois segments C_1, C_2 et C_3 qui sont échantillonnés de manière uniforme (cf. figure 6.3). Un segment correspond en fait à un polygone «à deux côtés». Dans la figure 6.3, le côté «droit» de C_1 voit le côté «gauche» de C_2 mais il ne voit pas le segment C_3, ni le côté «droit» de C_2. Chaque côté d'un segment doit donc être subdivisé en éléments. La subdivision est effectuée de façon identique des deux côtés d'un segment donné. Pour simplifier, les éléments côté à côte d'un segment donné seront numérotés de manière identique, avec un indice g pour les éléments du côté gauche du segment et un indice d pour les éléments du côté droit (cf. figure 6.3).

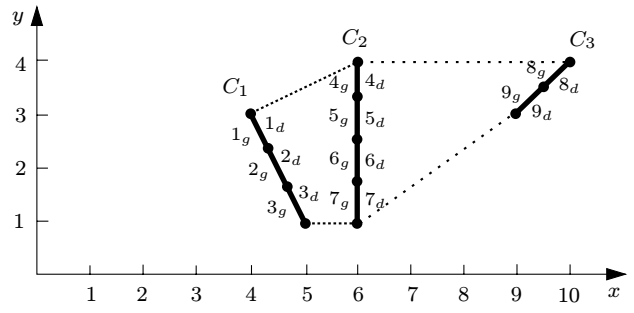


FIG. 6.3 - *Exemple de segments qui se voient soit totalement soit pas du tout.*

On considère l'ensemble des paires d'éléments (i, j) de la scène qui sont mutuellement visibles. La figure 6.4 illustre la valeur de la fonction Δ (cf. paragraphe 6.2.1) pour l'ensemble des éléments du côté droit du segment C_1 et du côté gauche du segment C_2, et la figure 6.5 pour tous ceux du côté droit du segment C_2 et du côté gauche du segment C_3.

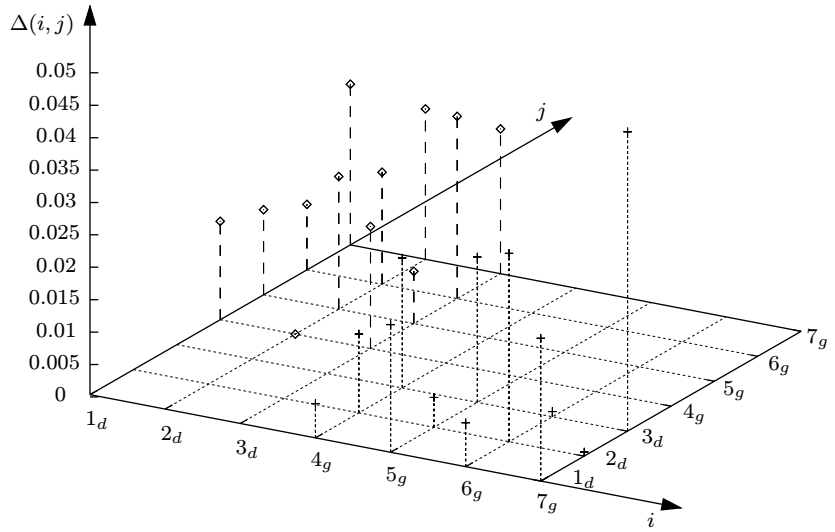
Commentaires

- D'après la figure 6.5, on remarque que pour les éléments du côté droit de C_2 et du côté gauche de C_3, les valeurs de facteurs de forme obtenues avec les deux méthodes sont quasi identiques. On obtient en effet : $\Delta \leq 0.014542$ (valeur obtenue pour $F_{7_d 9_g}$, cf. figure 6.5). On a donc pour toutes les paires d'éléments (i, j) du côté droit de C_2 et du côté gauche de C_3, $F_{ij_{\text{Heckbert}}} = F_{ij_{\sum \text{longueurs de courbes}}}$ à moins de 1.5 % près.

- Par contre pour les éléments du côté droit de C_1 et du côté gauche de C_2, on a :
  $\Delta \leq 0.046533$ (valeur obtenue pour $F_{7_g 3_d}$, cf. figure 6.4).

  En fait, Heckbert ne calcule pas des facteurs de forme élément à élément mais point à élément. Le facteur de forme F_{ij} entre deux éléments i et j est approximé par le facteur de forme point à élément $F_{p_i j}$ calculé au point p_i de l'élément i (cf. équation 6.1). Or cette approximation est valable seulement si la distance r entre les deux éléments considérés est grande par rapport à leur taille (cf. [SP94]). En effet, si cette condition est vérifiée, l'intégrale intérieure dans la définition du facteur de forme (cf. équation 1.6 dans le paragraphe 1.2.1 du chapitre 1) varie très peu sur la longueur de l'élément j, si bien que l'effet de l'intégrale extérieure est approximativement une multiplication par 1, et le facteur de forme élément à élément est donc égal au facteur de forme point à élément.
  Ceci explique la différence obtenue pour la valeur du facteur de forme $F_{7_g 3_d}$. L'élément 7_g a pour longueur : 0.75 dans le repère considéré (cf. figure 6.3). L'élément 3_d a pour longueur : $\simeq 0.745$. La distance r entre les éléments 7_g et 3_d est égale à 1.167 environ, et n'est donc pas très grande par rapport à la longueur des éléments.

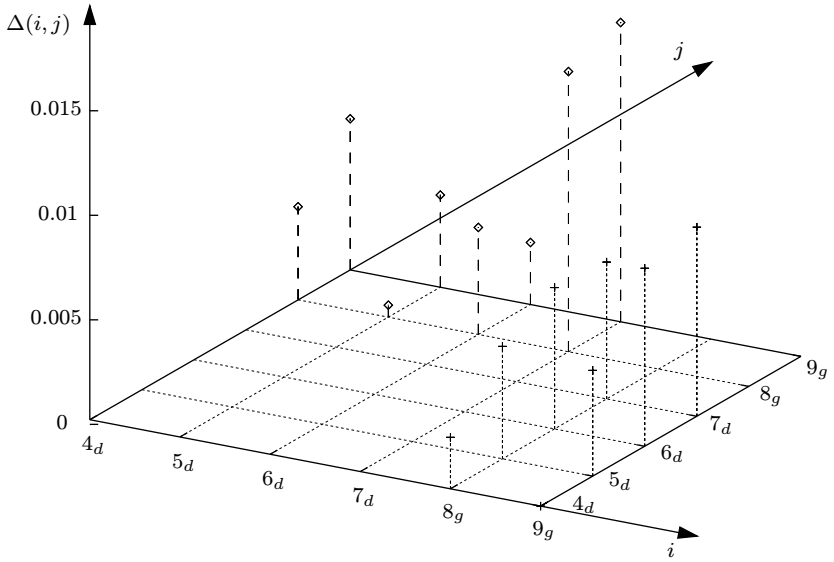
  Dans le cas des éléments 7_g et 3_d, la méthode de Heckbert calculant des facteurs de forme point à élément donne une moins bonne précision que notre méthode qui calcule des facteurs de forme élément à élément. Le calcul sous forme d'un facteur de forme point à élément reste cependant globalement une bonne approximation pour les facteurs de forme entre les éléments du côté droit de C_1 et du côté gauche de C_2.



Valeurs de la fonction Δ :

$i \setminus j$	1_d	2_d	3_d	4_g	5_g	6_g	7_g
1_d				0.015537	0.013497	0.010465	0.025149
2_d				0.000358	0.020838	0.017640	0.023575
3_d				0.019184	0.008430	0.028483	0.022701
4_g	0.005638	0.012531	0.020393				
5_g	0.020024	0.004952	0.022786				
6_g	0.007117	0.029403	0.001157				
7_g	0.022376	0.000989	0.046533				

FIG. 6.4 - *Différence entre les deux méthodes de calcul de facteurs de forme, pour les éléments du côté droit de C_1 et du côté gauche de C_2.*



Valeurs de la fonction Δ :

$i \setminus j$	4_d	5_d	6_d	7_d	8_g	9_g
4_d					0.004687	0.007460
5_d					0.000801	0.004643
6_d					0.005347	0.003189
7_d					0.013627	0.014542
8_g	0.002687	0.005604	0.006987	0.006768		
9_g	0.000226	0.005281	0.008734	0.009271		

FIG. 6.5 - *Différence entre les deux méthodes de calcul de facteurs de forme, pour les éléments du côté droit de C_2 et du côté gauche de C_3.*

Conclusion

Les deux méthodes de calcul de facteurs de forme donnent des résultats similaires sauf dans le cas où la distance entre les éléments n'est pas très grande par rapport à leur longueur. Dans ce cas-là, la solution de Heckbert est moins précise et donne une moins bonne approximation du facteur de forme.

Deuxième exemple

La deuxième scène considérée montre un exemple de visibilité partielle avec un segment C_2 qui réduit la visibilité entre deux segments C_1 et C_3 (cf. figure 6.6). L'échantillonnage est ici calculé en fonction des discontinuités.

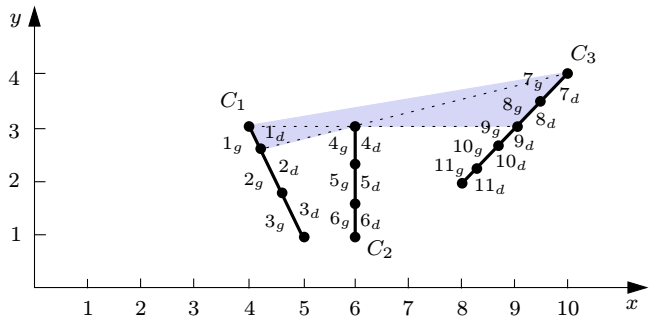
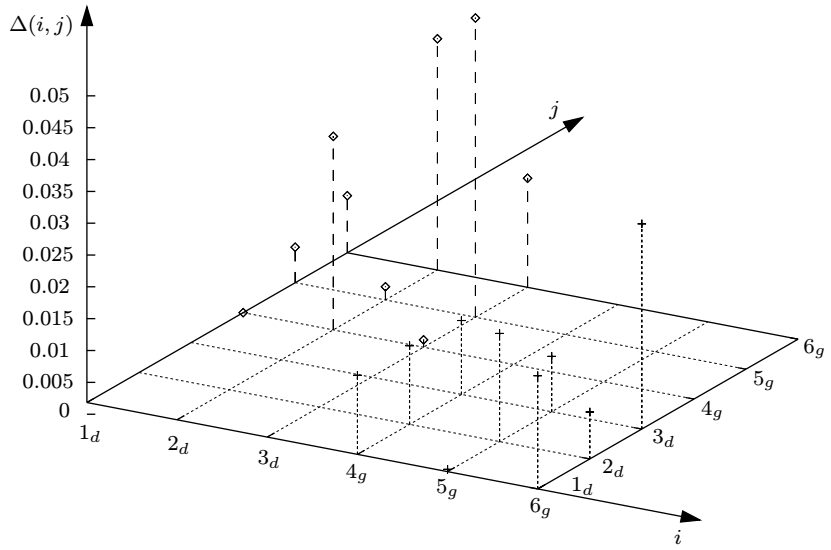


FIG. 6.6 - *Exemple de segments avec un cas de visibilité partielle.*

On considère l'ensemble des paires d'éléments (i, j) de la scène qui sont mutuellement visibles (totalement ou partiellement). La figure 6.7 montre la valeur de la fonction Δ (cf. paragraphe 6.2.1) pour l'ensemble des éléments du côté droit du segment C_1 et du côté gauche du segment C_2, la figure 6.8 pour tous ceux du côté droit de C_2 et du côté gauche de C_3, et la figure 6.9 pour les éléments du côté droit de C_1 et du côté gauche de C_3 qui se voient mutuellement.

Commentaires

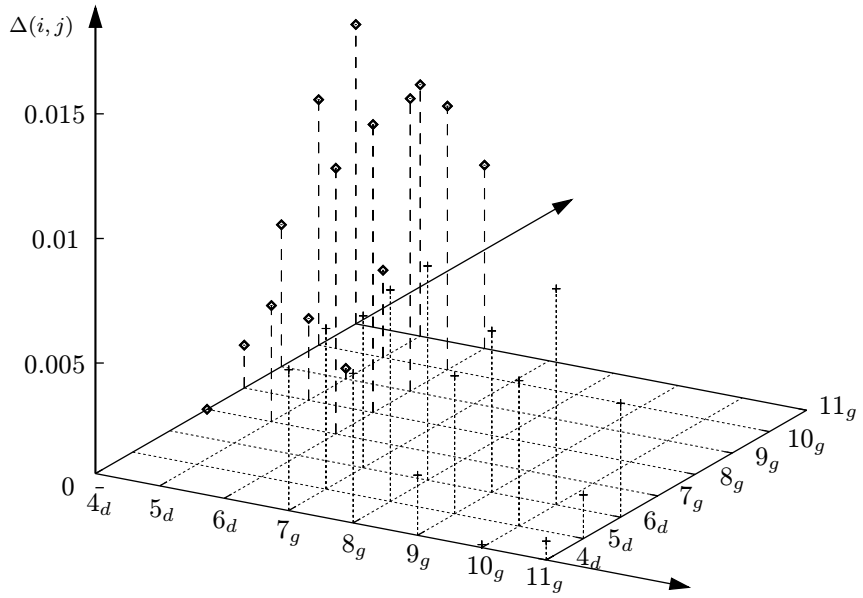
De façon similaire au premier exemple, la valeur $\Delta(i, j)$ est peu importante pour les éléments (i, j) qui se voient totalement et qui ont une distance entre eux suffisamment grande par rapport à leur longueur (cf. paragraphe 6.2.1 pour la définition de la fonction Δ). La plus grande valeur de Δ est obtenue pour les éléments 3_d et 5_g qui font effectivement partie des éléments de la scène qui ont une distance entre eux très petite par rapport à leur longueur : $\Delta(3_d, 5_g)$ est de l'ordre de 0.05 (cf. figure 6.7).



Valeurs de la fonction Δ :

$i \setminus j$	1_d	2_d	3_d	4_g	5_g	6_g
1_d				0.001847	0.007420	0.010833
2_d				0.032259	0.003915	0.038175
3_d				0.003006	0.048859	0.018996
4_g	0.014249	0.014200	0.013458			
5_g	0.002211	0.018828	0.010526			
6_g	0.019619	0.009221	0.034066			

FIG. 6.7 - *Différence entre les deux méthodes de calcul de facteurs de forme, pour les éléments du côté droit de C_1 et du côté gauche de C_2.*



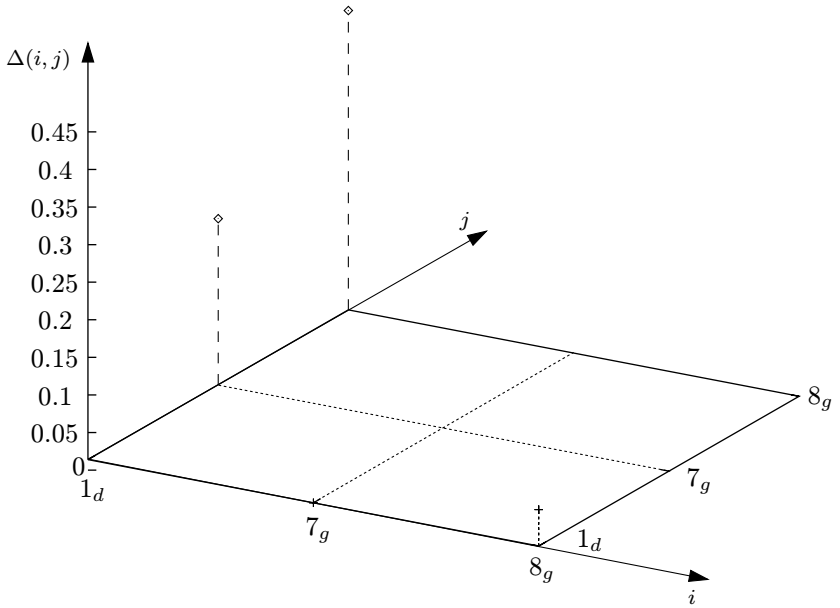
Valeurs de la fonction Δ :

$i \setminus j$	4_d	5_d	6_d	7_g	8_g	9_g	10_g	11_g
4_d				0.000567	0.002283	0.006262	0.010419	0.012576
5_d				0.005226	0.003847	0.000992	0.004076	0.010653
6_d				0.011232	0.012132	0.012308	0.011150	0.007927
7_g	0.006214	0.007009	0.006660					
8_g	0.006562	0.009057	0.009163					
9_g	0.002979	0.006105	0.007050					
10_g	0.000687	0.006406	0.009237					
11_g	0.001321	0.002320	0.005134					

FIG. 6.8 - *Différence entre les deux méthodes de calcul de facteurs de forme, pour les éléments du côté droit de C_2 et du côté gauche de C_3.*

Intéressons nous maintenant aux cas où il y a visibilité partielle : cas des éléments 1_d et 7_g, et des éléments 1_d et 8_g (cf. figure 6.6).

La figure 6.9 illustre la valeur de la fonction Δ pour ces différents éléments (cf. paragraphe 6.2.1 pour la définition de la fonction Δ).



(i,j)	Δ	F_{ij} ($\sum$ longueurs de courbes)	F_{ij} (Heckbert)
$(1_d, 7_g)$	0.234988	0.027661	0.0341608
$(1_d, 8_g)$	0.412247	0.012934	0.00760168
$(7_g, 1_d)$	0.014148	0.019438	0.0197132
$(8_g, 1_d)$	0.062603	0.009089	0.00965828

FIG. 6.9 - *Différence entre les deux méthodes de calcul de facteurs de forme, pour les éléments du côté droit de C_1 et du côté gauche de C_3.*

La différence entre les valeurs de facteurs de forme obtenues avec les deux méthodes est liée ici à la façon dont la visibilité est calculée. Pour le calcul du facteur de forme F_{ij} entre deux éléments i et j, la visibilité est déterminée, dans le cas de la méthode de Heckbert, à partir du point p_i milieu de l'élément i (cf. figure 6.10(a)). L'intervalle considéré sur l'élément j correspond à la partie de j visible depuis le point p_i. Cette partie est décrite par les extrémités sur l'élément j des segments libres maximaux issus de p_i. Par contre, dans le cas de notre méthode, la visibilité est caractérisée par l'ensemble des segments libres maximaux issus de l'élément i qui touchent l'élément j (cf. figure 6.10(b)).

Considérons plus précisément le cas des éléments 1_d et 7_g. Dans le cas de la méthode de Heckbert, on constate que pour le calcul du facteur de forme $F_{1_d 7_g}$, la visibilité telle qu'elle est calculée ne prend pas en compte le fait que le segment C_2 réduit la visibilité entre les éléments 1_d et 7_g (cf. cône blanc issu du milieu de l'élément 1_d sur la figure 6.11(a)). Par contre, dans le cas du calcul du facteur de forme $F_{7_g 1_d}$ entre les éléments 7_g et 1_d, la visibilité telle qu'elle est calculée est réduite par le segment C_2 (cf. cône blanc issu du milieu de l'élément 7_g sur la

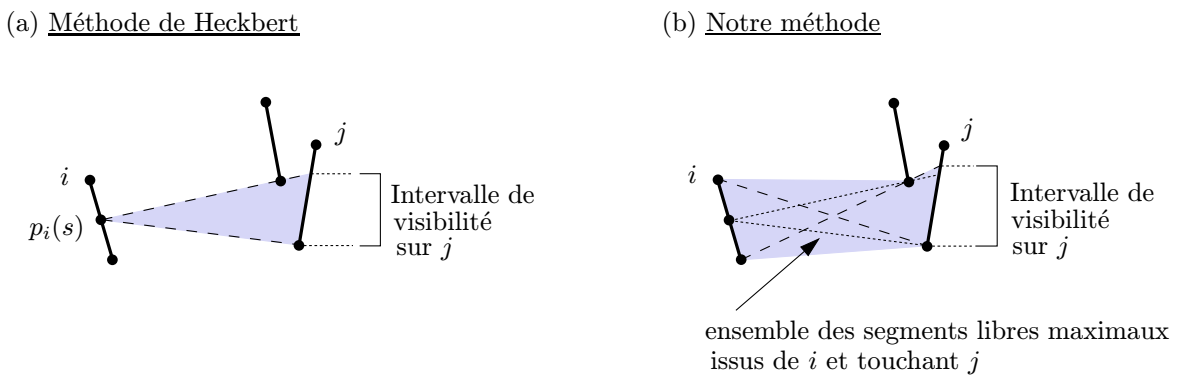


FIG. 6.10 - *Visibilité entre deux éléments i et j.*

figure 6.11(b)). La visibilité calculée pour le facteur de forme $F_{7_g 1_d}$ est donc plus précise. Dans le cas de notre méthode par contre, la visibilité est identique pour les facteurs de forme $F_{1_d 7_g}$ et $F_{7_g 1_d}$, et elle prend en compte l'obstacle C_2 entre les éléments 1_d et 7_g, puisqu'elle est caractérisée par l'ensemble des segments libres maximaux dont les extrémités touchent les éléments 1_d et 7_g (cf. zone grisée sur les figures 6.11(a) et 6.11(b)). Tout ceci explique que la valeur $\Delta(1_d, 7_g)$ qui permet de dire à quel point les valeurs obtenues avec les deux méthodes pour le facteur de forme $F_{1_d 7_g}$ sont proches ou non, soit supérieure à la valeur $\Delta(7_g, 1_g)$ (cf. figure 6.9).

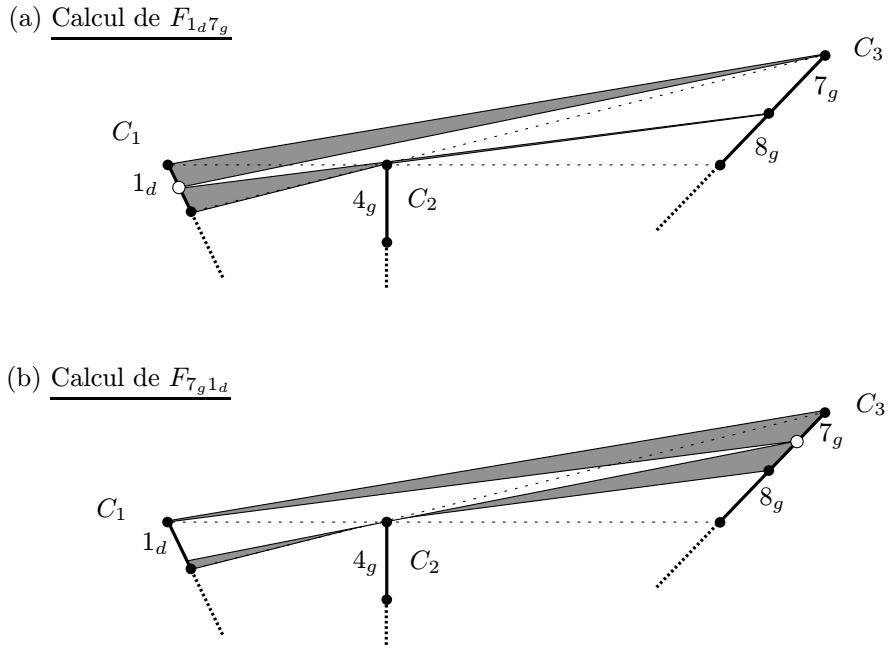


FIG. 6.11 - *Zoom de la partie supérieure des segments C_1, C_2 et C_3.*

Conclusion

La méthode de Heckbert est moins précise que notre méthode dans le cas où il y a des occlusions. La visibilité telle qu'elle est calculée avec la méthode de Heckbert peut ne pas prendre en compte le fait qu'un objet réduit la visibilité entre deux éléments donnés, ce qui n'est pas le cas avec notre méthode.

6.3 Tests sur des scènes complexes

Nous avons ensuite réalisé une série de tests sur des scènes plus complexes. Nous avons choisi d'utiliser des configurations typiques des scènes architecturales, c'est à dire un certain nombre de pièces qui communiquent, chaque pièce contenant un certain nombre d'objets.

6.3.1 Description des scènes testées

Nous avons réalisé une première série de tests sur des scènes composées de 5 pièces sur 5 pièces contenant de 0 à 9 triangles par pièce (cf. figure 6.12), et une deuxième série de tests sur des scènes composées de 7 pièces sur 7 pièces contenant de 0 à 9 triangles par pièce (cf. figure 6.13). Les triangles sont générés de façon aléatoire dans chaque pièce. Le premier triangle généré dans chacune des pièces est une source de lumière.

Le tableau 6.1 (respectivement 6.2) donne pour chaque scène de 5 pièces sur 5 pièces (respectivement de 7 pièces sur 7 pièces) considérée, le nombre d'objets par pièce, le nombre de polygones dans la scène, le nombre d'arêtes de polygones correspondant, le nombre d'éléments obtenu après échantillonnage des objets de la scène.

TAB. 6.1 - *Description des scènes de 5 pièces sur 5 pièces.*

Description de la scène										
Obj./pièce	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nb poly.	13	38	63	88	113	138	163	188	213	238
Arêtes poly.	284	359	434	509	584	659	734	809	884	959
Nb élém.	1738	2595	3634	4626	5907	7202	8559	9738	11316	12460

TAB. 6.2 - *Description des scènes de 7 pièces sur 7 pièces.*

Description de la scène										
Obj./pièce	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nb poly.	31	80	129	178	227	276	325	374	423	472
Arêtes poly.	564	711	858	1005	1152	1299	1446	1593	1740	1887
Nb élém.	3994	5717	7763	9849	12367	14856	17320	19698	22808	25093

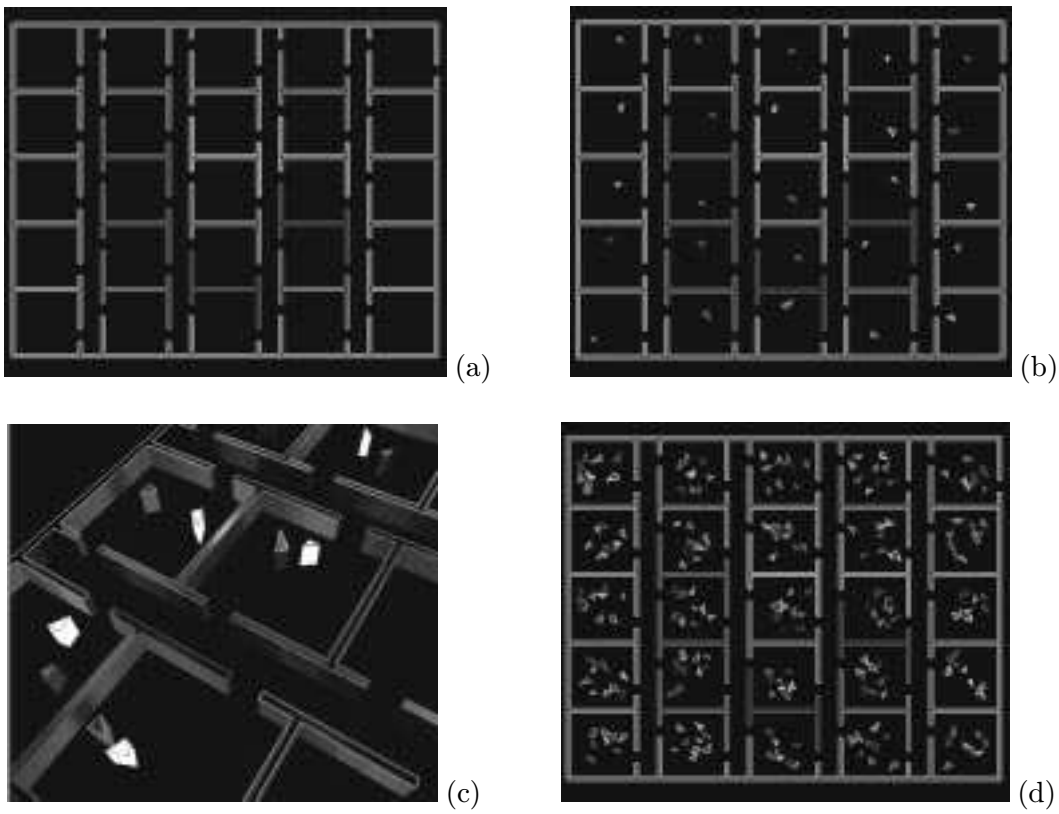


FIG. 6.12 - *Scènes de 5 pièces sur 5 pièces : (a) Scène avec les pièces vides ; (b) Scène avec un triangle par pièce ; (c) Zoom de la scène avec deux triangles par pièce, représentée en pseudo-3D ; (d) Scène avec neuf triangles par pièce.*

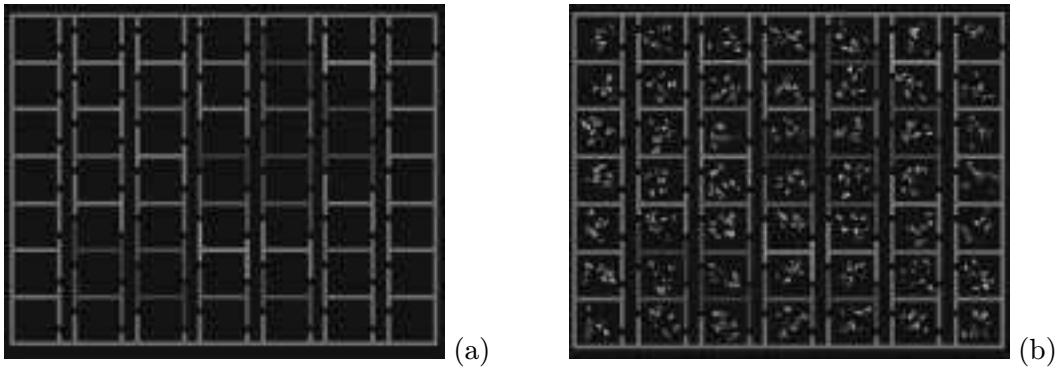


FIG. 6.13 - *Scènes de 7 pièces sur 7 pièces : (a) Scène avec les pièces vides ; (b) Scène avec neuf triangles par pièce.*

6.3.2 Tests avec notre programme

Nous avons utilisé sur les scènes décrites dans le paragraphe 6.3.1, le programme que nous avons implémenté pour les polygones. Ce programme utilise le complexe de visibilité pour les polygones implémenté par Rivière [Riv95]. Une fois que le complexe est construit, notre programme échantillonne les objets en positionnant les extrémités des éléments sur les discontinuités. Les discontinuités sont calculées au moyen du complexe de visibilité, en utilisant la méthode décrite dans le paragraphe 4.3.2. Notre programme calcule ensuite les facteurs de forme entre les éléments mutuellement visibles en utilisant la méthode présentée dans le paragraphe 5.2.2. Le système d'équations de radiosité est ensuite résolu par une méthode itérative (méthode de type Gauss-Seidel) (cf. [CW93b] pour une description des différentes méthodes de relaxation).

Les tests ont été réalisés sur une station de travail Indigo2 (Silicon Graphics) munie d'un microprocesseur MIPS R4400 cadencé à 200Mhz.

Les tableaux 6.3 et 6.4 recensent les résultats obtenus pour l'ensemble des scènes testées. Le tableau 6.3 (respectivement 6.4) donne pour chaque scène de 5 pièces sur 5 pièces (respectivement de 7 pièces sur 7 pièces) considérée, le nombre d'arêtes de polygones de la scène, le nombre de sommets, arêtes et faces du complexe associé à la scène, le nombre de valeurs non nulles dans la matrice de radiosité, ainsi que le temps de calcul nécessaire pour les différentes étapes du programme. On considère cinq étapes (cf. tableaux 6.3 et 6.4) : l'initialisation, le calcul du complexe, le calcul de l'échantillonnage des objets en tenant compte des discontinuités, le calcul des facteurs de forme, et la résolution du système d'équations de radiosité. La phase d'initialisation comprend essentiellement la lecture du fichier de description de la scène et l'instanciation des variables nécessaires pour stocker la scène et les informations dont on a besoin pour calculer le complexe de visibilité. La phase d'échantillonnage (ou maillage) comprend le calcul des discontinuités, puis le calcul des éléments en fonction des discontinuités. La phase de calcul des facteurs de forme comprend aussi le calcul des valeurs que l'on va stocker dans la matrice de radiosité, l'allocation de la place mémoire nécessaire pour stocker ces valeurs, et le stockage de ces valeurs.

Analyse des résultats

Par définition, la taille du complexe est caractérisée par son nombre m de sommets qui est $\Omega(n)$ et $\mathcal{O}(n^2)$ (avec n le nombre d'arêtes de polygones de la scène). Or, on constate que dans le cas des scènes testées, qui présentent beaucoup d'occlusions, le nombre de sommets du complexe est quasi-linéaire en fonction du nombre d'arêtes de polygones (cf. figure 6.14). On obtient donc la complexité minimale, en pratique. Il est d'autant plus important de souligner ce résultat que les scènes testées (scènes constituées de pièces contenant des objets) correspondent au type de scènes le plus souvent utilisées pour le calcul de radiosité. La méthode de radiosité est en effet très adaptée et particulièrement utilisée pour le rendu de scènes d'intérieur.

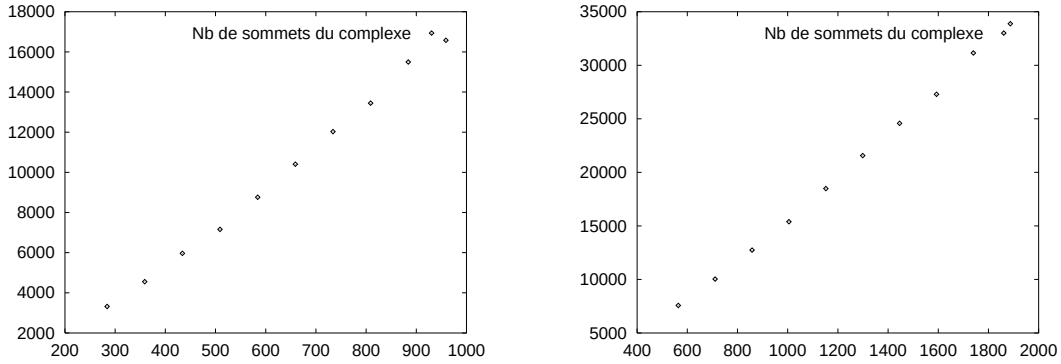


FIG. 6.14 - *Nombre de sommets du complexe en fonction du nombre d'arêtes de polygones de la scène. A gauche : cas des scènes de 5 pièces sur 5 pièces. A droite : cas des scènes de 7 pièces sur 7 pièces.*

La figure 6.15 (respectivement 6.16) visualise sous forme d'un histogramme, le temps de calcul des différentes étapes de notre programme pour chaque scène de 5 pièces sur 5 pièces (respectivement de 7 pièces sur 7 pièces) considérée. Les scènes considérées sont spécifiées en abscisse par leur nombre d'arêtes de polygones. Pour une scène donnée, on représente sous forme d'une barre le temps de calcul des différentes étapes de notre programme. On affiche de bas en haut le temps correspondant à l'initialisation, au calcul du complexe, à l'échantillonnage en fonction des discontinuités, au calcul des facteurs de forme et à la résolution du système d'équations de radiosité. Le temps correspondant au sommet d'une barre donnée de l'histogramme représente le temps total d'exécution de notre programme pour la scène correspondante. On constate d'après les figures 6.15 et 6.16 que le temps consacré à l'initialisation, au calcul du complexe et à l'échantillonnage en fonction des discontinuités est négligeable par rapport au temps de résolution du système d'équations de radiosité et surtout par rapport au calcul des facteurs de forme qui prend la plus grande partie du temps total d'exécution.

TAB. 6.3 - Scènes de 5 pièces sur 5 pièces, avec notre méthode.

Scènes de 5 pièces sur 5 pièces										
Objets/pièce	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arêtes poly.	284	359	434	509	584	659	734	809	884	959
Complexe										
Sommets	3320	4556	5968	7160	8762	10408	12030	13446	15496	16578
Arêtes	6640	9112	11936	14320	17524	20816	24060	26892	30992	33156
Faces	3322	4558	5970	7162	8764	10410	12032	13448	15498	16580
Matrice de radiosité										
Valeurs non nulles	127500	231534	386867	532762	767494	1017225	1348387	1557639	1907660	2135700
Temps de calcul en secondes										
Initialisation	0.1	0.1	0.12	0.12	0.12	0.13	0.14	0.16	0.15	0.15
Complexe	0.2	0.32	0.38	0.47	0.62	0.69	0.79	0.92	1.09	1.14
Echantillonnage (discont.)	0.19	0.32	0.45	0.66	0.74	0.92	0.95	1.26	1.49	1.44
Facteurs de forme	7.8	15.21	26.58	37.77	55.59	78.21	107.37	124.54	157.81	176.51
Solution de radiosité	0.19	4.46	7.34	10.05	14.36	18.96	24.91	28.83	35.33	39.55
Temps total	8.49	20.41	34.88	49.07	71.43	98.91	134.16	155.71	195.87	218.79

TAB. 6.4 - Scènes de 7 pièces sur 7 pièces, avec notre méthode.

Scènes de 7 pièces sur 7 pièces										
Objets/pièce	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arêtes de polygones	564	711	858	1005	1152	1299	1446	1593	1740	1887
Complexe										
Sommets	7572	10032	12740	15394	18484	21568	24582	27292	31152	33880
Arêtes	15144	20064	25480	30788	36968	43136	49164	54584	62304	67760
Faces	7574	10034	12742	15396	18486	21570	24584	27294	31154	33882
Matrice de radiosité										
Valeurs non nulles	394012	670063	1034113	1406390	1938525	2518109	3042145	3543496	4288765	4793650
Temps de calcul en secondes										
Initialisation	0.12	0.13	0.15	0.16	0.16	0.19	0.2	0.21	0.22	0.23
Complexe	0.54	0.79	0.94	1.09	1.38	1.59	1.91	2.11	2.44	2.77
Echantillonnage (discont.)	0.49	0.65	0.85	1.5	1.36	1.7	1.99	2.38	2.68	3.03
Facteurs de forme	26.64	51.29	81.18	127.34	166.4	224.46	278.68	328.23	394.32	452.17
Solution de radiosité	0.49	12.62	19.41	26.78	38.16	46.96	59.33	69.1	84.06	93.55
Temps total	28.28	65.49	102.54	156.88	207.47	274.91	342.12	402.04	483.73	551.77

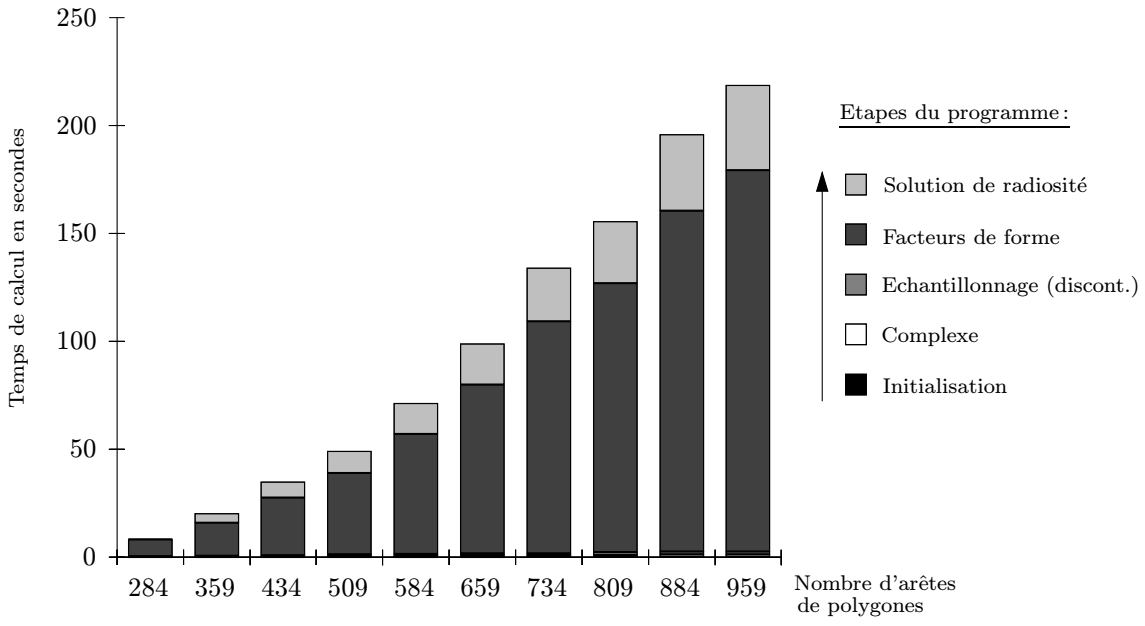


FIG. 6.15 - *Temps de calcul des différentes étapes de notre programme pour chaque scène de 5 pièces sur 5 pièces considérée.*

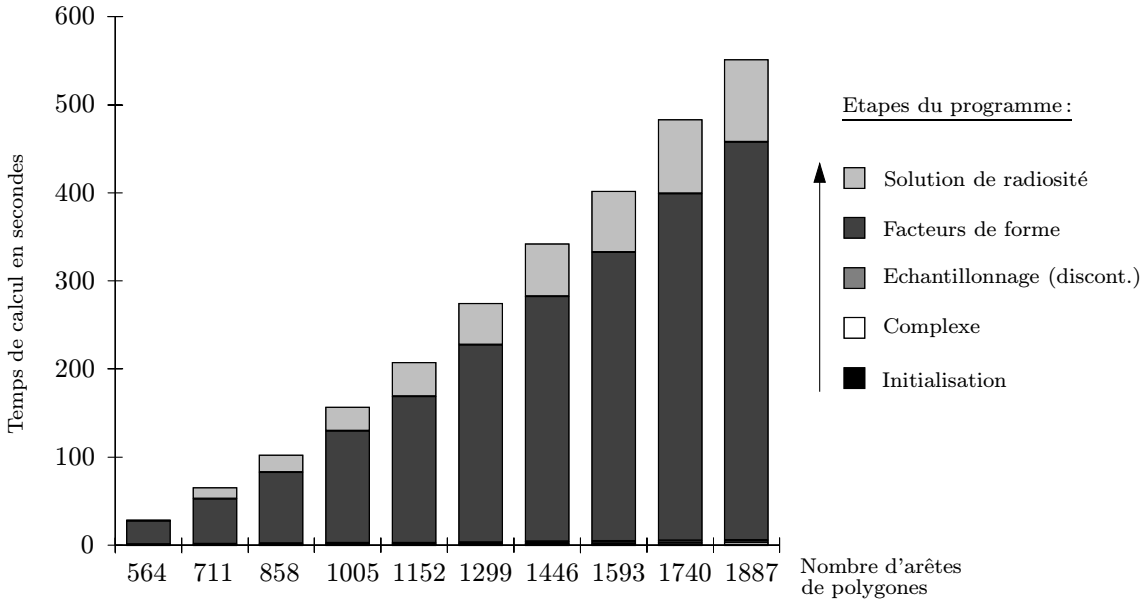


FIG. 6.16 - *Temps de calcul des différentes étapes de notre programme pour chaque scène de 7 pièces sur 7 pièces considérée.*

6.3.3 Comparaison avec le programme de Heckbert

Nous avons utilisé le programme de Heckbert sur les mêmes scènes (cf. paragraphe 6.3.1 pour la description des scènes testées). Parmi les différentes méthodes proposées par le programme, nous avons choisi celle utilisant les éléments constants (cf. paragraphe 6.1.2 pour la justification de notre choix). Le programme commence par échantillonner les objets en positionnant les extrémités des éléments sur les discontinuités. Les discontinuités sont calculées en utilisant la méthode décrite dans le paragraphe 1.3.3. Le programme calcule ensuite les facteurs de forme. Heckbert calcule en fait pour deux éléments i et j donnés un facteur de forme point à élément $F_{p_i j}$ au point p_i milieu de l'élément i (cf. paragraphe 6.1.2 pour plus de détails). Le système d'équations de radiosité est ensuite résolu par «overrelaxation» successive (variation de la méthode itérative de Gauss-Seidel) (cf. [CW93b] pour une description des différentes méthodes de relaxation).

Les tests ont été réalisés sur une station de travail Indigo2 (Silicon Graphics) munie d'un microprocesseur MIPS R4400 cadencé à 200Mhz.

Les tableaux 6.5 et 6.6 regroupent les résultats obtenus pour l'ensemble des scènes testées. Le tableau 6.5 (respectivement 6.6) donne pour chaque scène de 5 pièces sur 5 pièces (respectivement de 7 pièces sur 7 pièces) considérée, le nombre d'arêtes de polygones de la scène, ainsi que le temps de calcul nécessaire pour les différentes étapes du programme. On distingue quatre étapes (cf. tableaux 6.5 et 6.6) : l'initialisation, le calcul de l'échantillonnage des objets en tenant compte des discontinuités, le calcul des facteurs de forme, et la résolution du système d'équations de radiosité. La phase d'initialisation comprend essentiellement la lecture du fichier de description de la scène et l'instanciation des variables nécessaires pour stocker la scène. De façon similaire à notre programme, la phase d'échantillonnage comprend le calcul des discontinuités, puis le calcul des éléments en fonction des discontinuités. Et la phase de calcul des facteurs de forme comprend aussi le calcul des valeurs de la matrice de radiosité, l'allocation de la place mémoire nécessaire pour stocker ces valeurs, et le stockage de ces valeurs.

Analyse des résultats

La figure 6.17 (respectivement 6.18) visualise sous forme d'un histogramme, le temps de calcul des différentes étapes du programme de Heckbert pour chaque scène de 5 pièces sur 5 pièces (respectivement de 7 pièces sur 7 pièces) considérée. Les scènes considérées sont spécifiées en abscisse par leur nombre d'arêtes de polygones. Pour une scène donnée on représente sous forme d'une barre le temps de calcul des différentes étapes du programme. On affiche de bas en haut le temps correspondant à l'initialisation, à l'échantillonnage en fonction des discontinuités, au calcul des facteurs de forme et à la résolution du système d'équations de radiosité.

On constate que le temps consacré à l'initialisation est négligeable, comme dans le cas de notre méthode. Par contre, le calcul de l'échantillonnage en fonction des discontinuités n'est pas du tout négligeable alors qu'il l'est avec notre méthode. Ceci est lié à la façon dont les discontinuités sont calculées. En effet, Heckbert utilise un algorithme en $\mathcal{O}(n^3)$ pour calculer les discontinuités, avec n le nombre d'arêtes de polygones de la scène (cf. paragraphe 1.3.3 pour une description de cet algorithme), alors que l'algorithme que nous utilisons permet de calculer les discontinuités en temps $\mathcal{O}(m)$, une fois que le complexe est construit (cf. paragraphe 4.3.2). Et m qui représente le nombre de sommets du complexe est $\Omega(n)$ et $\mathcal{O}(n^2)$. Cette différence entre les deux méthodes apparaît d'autant plus quand on visualise sur un même graphique, le temps de calcul de l'échantillonnage (tenant compte des discontinuités) pour notre programme et celui de Heckbert (cf. figure 6.19).

On constate aussi d'après les figures 6.17 et 6.18 que le calcul des facteurs de forme représente, comme dans notre méthode, la plus grande partie du temps total d'exécution. Cependant, notre méthode de calcul des facteurs de forme est plus efficace. On peut le voir sur la figure 6.20 qui visualise sur un même graphique, le temps de calcul des facteurs de forme pour notre programme et celui de Heckbert. De plus, la méthode actuellement implémentée peut être optimisée, notamment en ce qui concerne les allocations mémoire, permettant d'améliorer encore notre méthode.

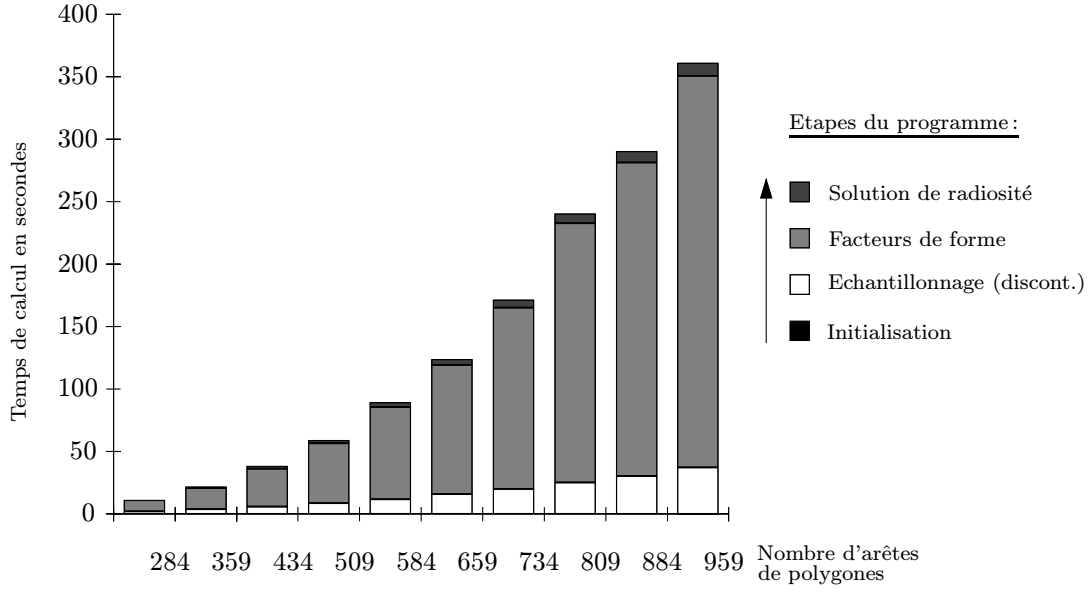


FIG. 6.17 - *Temps de calcul des différentes étapes du programme de Heckbert pour chaque scène de 5 pièces sur 5 pièces considérée.*

TAB. 6.5 - Scènes de 5 pièces sur 5 pièces, avec la méthode de Heckbert.

Scènes de 5 pièces sur 5 pièces										
Objets/pièce	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arêtes de polygones	284	359	434	509	584	659	734	809	884	959
Temps de calcul en secondes										
Initialisation	0.02	0.03	0.04	0.04	0.05	0.05	0.05	0.07	0.07	0.08
Echantillonnage (discont.)	2.17	3.81	6.06	8.77	11.91	15.86	20.17	25.17	30.52	37.31
Facteurs de forme	8.97	16.96	30.26	47.69	73.74	103.31	145.06	207.58	250.82	313.38
Dont calcul de visibilité	6.55	12.87	23.56	38.04	61.74	87.21	123.79	182.79	221.42	280.88
Solution de radiosité	0.03	1.10	1.87	2.54	3.62	4.75	6.24	7.56	8.79	10.27
Temps total	11.19	21.90	38.23	59.04	89.32	123.97	171.52	240.38	290.20	361.04

TAB. 6.6 - Scènes de 7 pièces sur 7 pièces, avec la méthode de Heckbert.

Scènes de 7 pièces sur 7 pièces										
Objets/pièce	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arêtes de polygones	564	711	858	1005	1152	1299	1446	1593	1740	1887
Temps de calcul en secondes										
Initialisation	0.03	0.04	0.06	0.07	0.08	0.09	0.12	0.12	0.13	0.13
Echantillonnage (discont.)	14.76	26.21	40.54	62.01	79.26	104.68	133.62	166.18	200.70	246.87
Facteurs de forme	49.43	92.93	166.65	268.07	402.33	595.78	820.69	1103.89	1500.90	1848.93
Dont calcul de visibilité	42.45	80.84	149.50	244.80	370.31	556.17	771.54	1047.44	1432.50	1770.53
Solution de radiosité	0.11	3.80	5.29	7.09	9.66	12.44	14.92	17.32	20.83	23.23
Temps total	64.33	122.98	212.54	337.24	491.33	712.99	969.35	1287.51	1722.56	2119.16

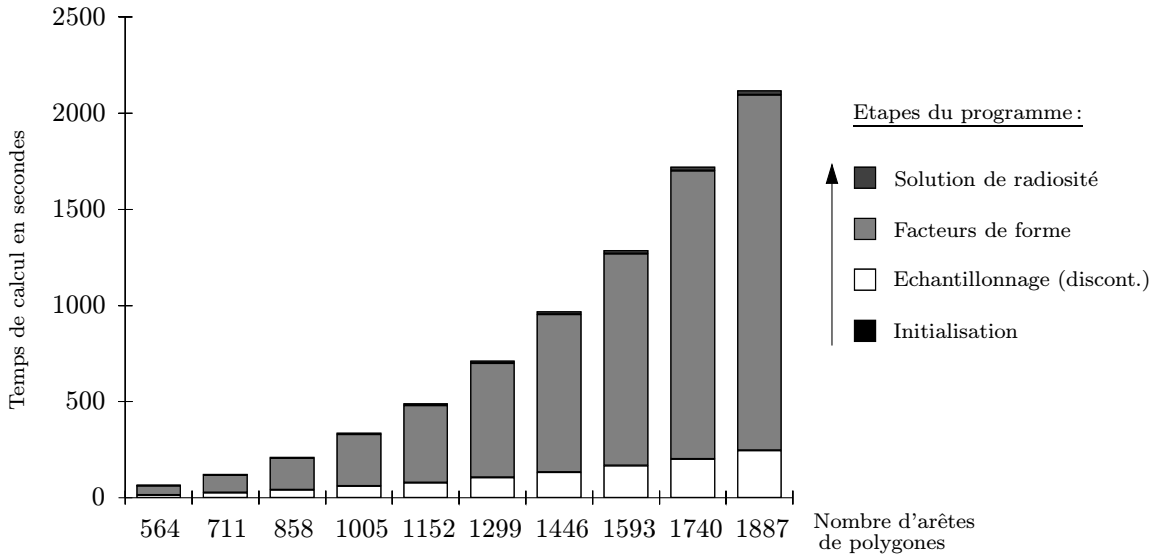


FIG. 6.18 - *Temps de calcul des différentes étapes du programme de Heckbert pour chaque scène de 7 pièces sur 7 pièces considérée.*

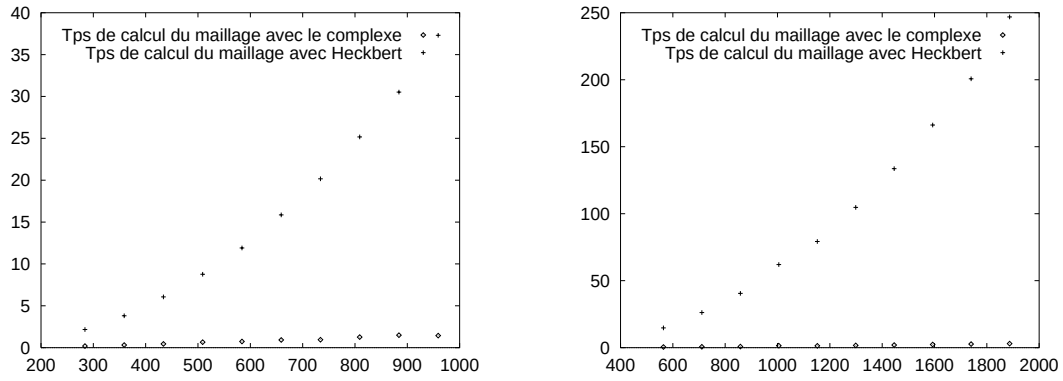


FIG. 6.19 - *Temps de calcul du maillage (tenant compte des discontinuités) en fonction du nombre d'arêtes de polygones de la scène. A gauche : cas des scènes de 5 pièces sur 5 pièces. A droite : cas des scènes de 7 pièces sur 7 pièces.*

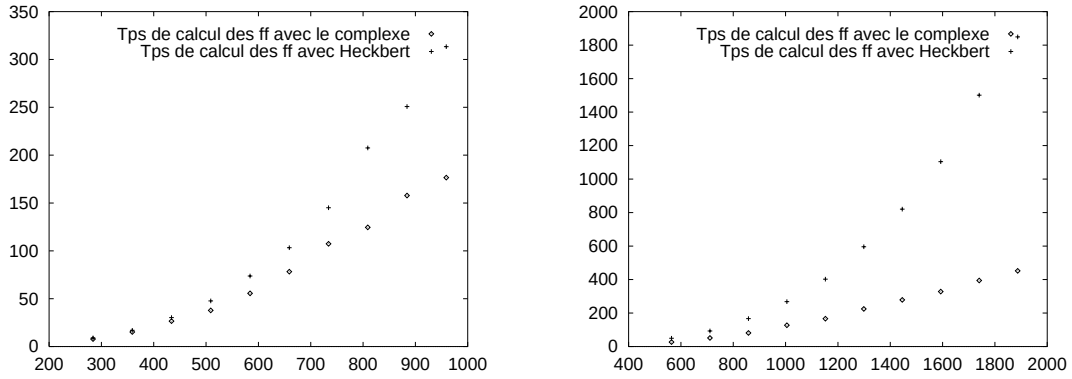


FIG. 6.20 - *Temps de calcul des facteurs de forme en fonction du nombre d'arêtes de polygones de la scène. A gauche : cas des scènes de 5 pièces sur 5 pièces. A droite : cas des scènes de 7 pièces sur 7 pièces.*

6.4 Conclusion

Au vu des différents résultats obtenus, nous pouvons dégager plusieurs avantages à l'utilisation du complexe de visibilité pour le calcul de radiosité :

- Tout d'abord, on constate que le calcul du complexe reste négligeable par rapport au temps de calcul global.
- Le complexe permet, de plus, de calculer le maillage de discontinuité de façon simple et efficace, calcul qui est en temps normal très coûteux.
- La méthode utilisant le complexe permet de calculer des facteurs de forme élément à élément (avec en particulier une visibilité exacte), alors que les méthodes traditionnelles utilisent des facteurs de forme point à élément et une visibilité approchée.

  De plus, les courbes de la figure 6.20 font clairement apparaître que le temps de calcul des facteurs de forme est meilleur avec le complexe de visibilité.

Chapitre 7

Radiosité pour les environnements dynamiques 2D

On appelle *environnements dynamiques*, les environnements susceptibles d'être modifiés au cours du temps. On distingue globalement deux types de modifications : les modifications des propriétés des matériaux ou des caractéristiques de l'éclairage qui nécessitent seulement de recalculer la solution de radiosité, et les modifications de la géométrie de la scène (modification de la taille d'un objet, déplacement d'un objet, etc.) qui nécessitent d'effectuer un recalcul de facteurs de forme, avant de recalculer la solution de radiosité.

Nous nous intéresserons dans ce chapitre seulement au deuxième type de modifications (modifications de la géométrie), et plus précisément au cas d'objets en mouvement dans une scène. Lorsqu'un objet change de position dans une scène, il est nécessaire de recalculer un certain nombre de facteurs de forme. Or ce calcul reste l'étape la plus coûteuse dans la méthode de radiosité, compte tenu des calculs de visibilité qui sont nécessaires. Il prend en effet toujours plus de 50% du temps dans le cas d'algorithmes efficaces (comme on peut le voir dans [HSD94], par exemple). Dans le cas de scènes avec des objets en mouvement, il est donc primordial d'utiliser une méthode efficace permettant de recalculer uniquement les facteurs de forme nécessaires pour réduire le temps de recalcul de la solution de radiosité au strict minimum.

Différents chercheurs se sont intéressés au recalcul de la solution de radiosité dans le cas d'environnements dynamiques, et ont notamment proposé des méthodes pour limiter le nombre de facteurs de forme à recalculer dans le cas d'objets en mouvement en 3D [BWCG86, Che90, GSG90, Sha94] (cf. paragraphe 1.5 pour plus de détails). Cependant, parmi les méthodes proposées, aucune ne permet d'identifier de manière exacte et efficace les facteurs de forme qui doivent vraiment être recalculés. Nous allons voir qu'il est possible de le faire en 2D en utilisant le complexe de visibilité.

Nous nous plaçons, pour notre étude, dans le cas d'un objet qui se déplace continûment le long d'une trajectoire. Le déplacement d'un objet dans la scène n'induit pas nécessairement de changement dans les relations de visibilité entre objets. Un tel changement n'intervient, pour les scènes polygonales, que lorsque deux sommets de polygones mutuellement visibles sont cachés par le déplacement de l'objet, ou deux sommets cachés deviennent visibles (cf. figure 7.1 pour un exemple). Pour les objets convexes, ce changement n'intervient que quand une bitangente entre deux objets apparaît ou disparaît.

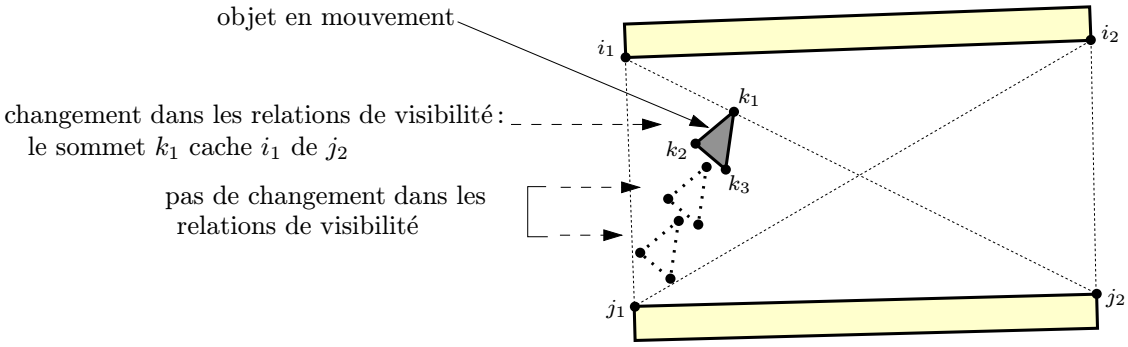


FIG. 7.1 - *Exemple de déplacement d'un objet dans une scène.*

Lorsqu'un objet s'est déplacé d'un petit déplacement Δd dans une scène, deux cas peuvent donc se produire : soit les relations de visibilité dans la scène n'ont pas été modifiées (on parlera alors de déplacement sans changement topologique dans la visibilité), soit les relations de visibilité ont été modifiées (on parlera alors de déplacement avec changement topologique dans la visibilité).

Nous allons étudier successivement ces deux cas. Nous verrons pour chacun d'eux quels facteurs de forme doivent être nécessairement recalculés et comment on peut se restreindre aux recalculs de facteurs de forme strictement nécessaires.

7.1 Déplacement sans changement topologique dans la visibilité

Considérons le cas d'un objet qui s'est déplacé d'un petit déplacement Δd dans une scène, sans qu'il y ait de changement topologique dans la visibilité, c'est à dire sans que les relations de visibilité aient changé. Les mêmes objets voient donc toujours les mêmes objets, et les mêmes objets sont toujours cachés par les mêmes objets. Le complexe de visibilité n'a donc pas changé topologiquement. Cependant un objet a changé de position, donc sa position relative par rapport aux autres objets de la scène a été modifiée et certains facteurs de forme doivent donc être recalculés numériquement.

Nous considérerons dans un premier temps le cas, plus simple, où on met à jour uniquement les facteurs de forme strictement nécessaires, mais sans mettre à jour les discontinuités. Nous verrons dans un premier paragraphe quels facteurs de forme doivent être nécessairement recalculés en fonction d'un objet donné qui s'est déplacé d'un déplacement Δd (sans changement topologique dans la visibilité), puis, dans un deuxième paragraphe, comment on peut recalculer strictement ces facteurs de forme.

Nous traiterons ensuite, dans un troisième paragraphe, le cas où on met à jour les discontinuités qui sont modifiées. Nous verrons alors les recalculs qui sont nécessaires.

7.1.1 Les deux cas nécessitant un recalcul de facteur de forme

Lorsqu'un objet s'est déplacé dans une scène, on ne doit recalculer que les facteurs de forme «affectés» par cet objet. Soit un objet $\mathcal{O}$ en mouvement dans une scène. Soit un petit déplacement Δd de l'objet $\mathcal{O}$ au cours duquel les relations de visibilité dans la scène n'ont pas été modifiées.

Après ce déplacement de l'objet $\mathcal{O}$, on doit recalculer le facteur de forme F_{ij} entre deux éléments i et j de la scène considérée, si et seulement si une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(a) *l'élément i ou l'élément j appartient à l'objet en mouvement $\mathcal{O}$.*
On peut voir un exemple sur la figure 7.2(a). Les facteurs de forme entre les éléments appartenant aux arêtes de polygones $[j_1 j_2]$ et $[i_1 i_2]$ respectivement doivent être recalculés puisque l'arête de polygone $[i_1 i_2]$ a changé de position.

(b) *la visibilité entre i et j est réduite par l'objet en mouvement $\mathcal{O}$.*
On peut voir un exemple sur la figure 7.2(b). Le sommet i_1 de l'objet en mouvement réduit la visibilité entre les arêtes de polygones $[j_1 j_2]$ et $[k_1 k_2]$. Ce sommet réduit la visibilité entre certaines paires d'éléments de $[j_1 j_2]$ et $[k_1 k_2]$ respectivement. Si le sommet de polygone i_1 réduit effectivement la visibilité entre deux éléments donnés de $[j_1 j_2]$ et $[k_1 k_2]$ respectivement, il faudra recalculer le facteur de forme entre ces deux éléments.

Interprétation dans l'espace dual

En utilisant le complexe de visibilité, cela signifie qu'il faut visiter, pour le recalcul des facteurs de forme strictement nécessaires, seulement deux types de faces :

(a) *les faces dont un des deux objets associés est l'objet en mouvement.*
Ces faces permettent de recalculer les facteurs de forme entre des éléments pour lesquels la condition **(a)** est vérifiée (cf. figure 7.2(a) pour un exemple).

(b) *les faces dont une des arêtes associées à des objets qui interfèrent est associée à l'objet en mouvement.*
Ces faces permettent de recalculer les facteurs de forme entre des éléments pour lesquels la condition **(b)** est vérifiée (cf. figure 7.2(b) pour un exemple).

Pour un objet en mouvement $\mathcal{O}$ donné, les faces considérées (faces de types **(a)** et **(b)**) seront appelées : faces *liées à* $\mathcal{O}$.

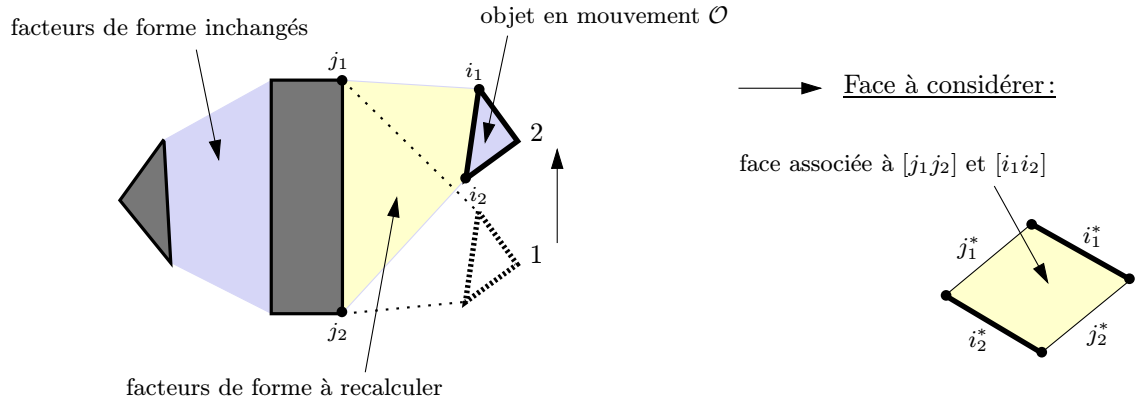
Remarque : Dans le cas d'une scène polygonale, sachant qu'une face est associée à deux arêtes de polygones et non pas à deux polygones, il faut considérer les faces *liées à* toutes les arêtes du polygone en mouvement. On considérera donc toutes les faces dont une des deux arêtes de polygones associées est une arête du polygone en mouvement, et toutes les faces dont une des arêtes associées à des sommets de polygones qui interfèrent est associée à un sommet du polygone en mouvement.

Accès aux faces *liées* à un objet convexe ou à une arête de polygone

Dans le cas d'une scène constituée d'objets convexes (cf. exemple sur la figure 7.3), les faces dont un des deux objets associés est l'objet convexe O (cas **(a)**) se trouvent, dans l'espace dual, entre les deux courbes de tangence λ_O et μ_O associées à l'objet O. Et les faces dont une des arêtes associées à des objets qui interfèrent est associée à l'objet O (cas **(b)**) se trouvent le long d'une des deux courbes de tangence λ_O ou μ_O associées à O mais à l'extérieur de ces deux courbes de tangence (sachant qu'une arête associée à O a pour support une des deux courbes de tangence associée à O et que la zone entre les courbes λ_O et μ_O représente l'ensemble des droites qui intersectent l'objet O).

Recalcul du facteur de forme F_{ij} si :

(a) l'élément i ou l'élément j appartient à l'objet en mouvement $\mathcal{O}$



(b) la visibilité entre i et j est réduite par l'objet en mouvement $\mathcal{O}$

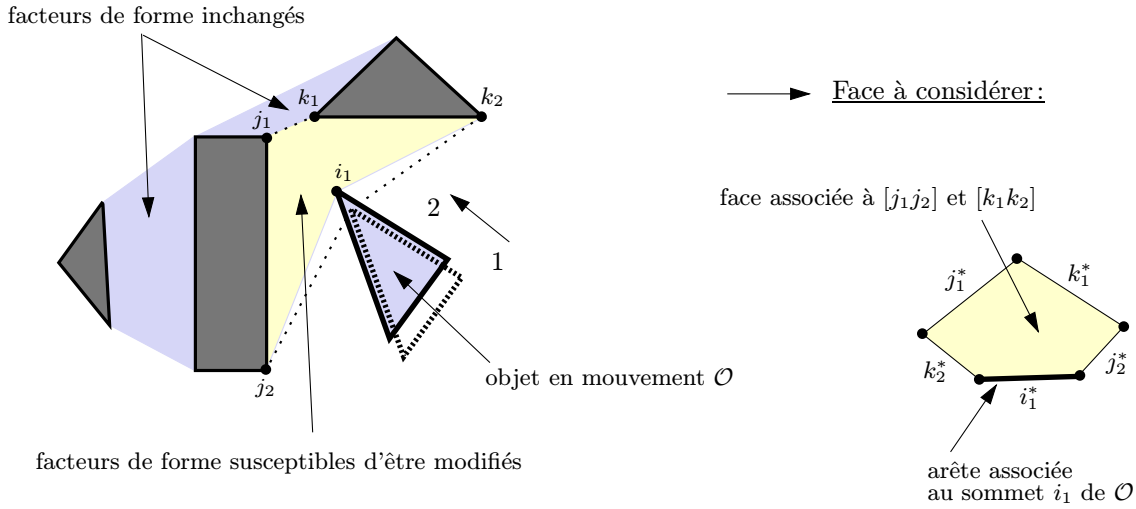


FIG. 7.2 - *Les deux cas nécessitant un recalcul de facteur de forme lorsqu'un objet en mouvement $\mathcal{O}$ se déplace d'une position 1 à une position 2.*

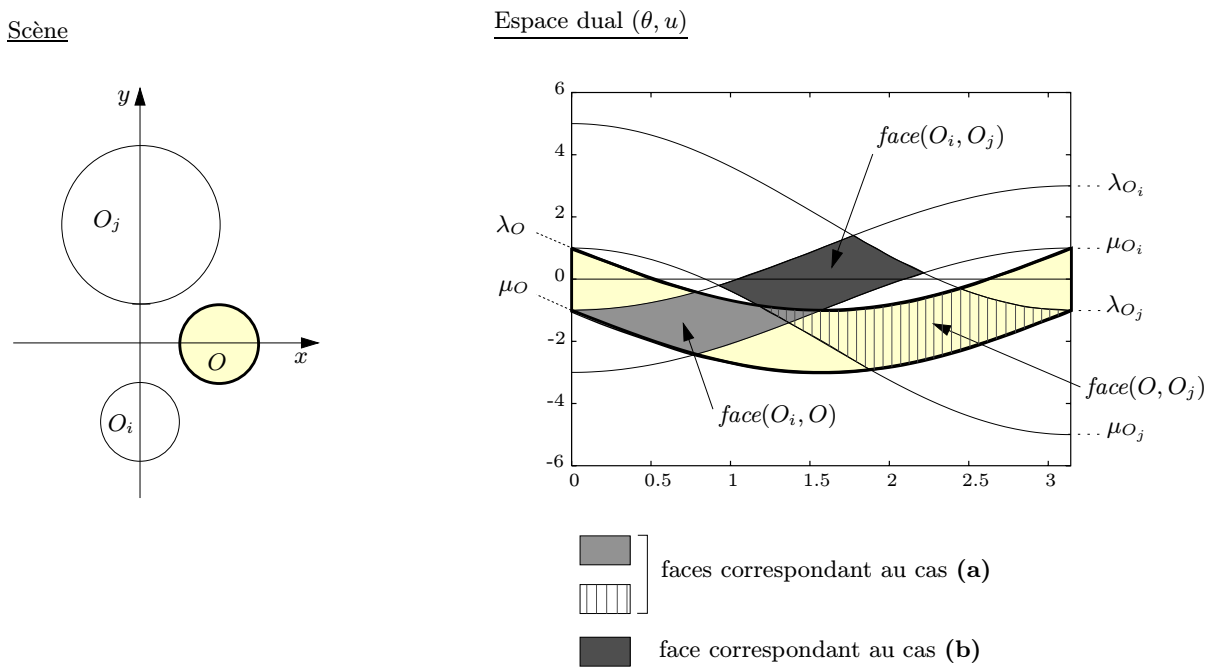


FIG. 7.3 - *Faces* liées à *un objet convexe O.*

De façon similaire, dans le cas d'une scène polygonale (cf. exemple sur la figure 7.4), les faces *liées à* une arête de polygone C_i donnée se trouvent, dans l'espace dual, soit entre les droites duales associées aux extrémités de C_i (cas des faces de type **(a)**), soit le long d'une des droites duales associées aux extrémités de C_i mais à l'extérieur de ces deux droites duales (sachant que la zone entre les deux droites duales représente l'ensemble des droites qui intersectent l'arête de polygone C_i) (cas des faces de type **(b)**).

Les faces *liées à* un objet convexe donné (respectivement à une arête de polygone donnée) peuvent donc être visitées *en temps proportionnel à leur nombre*, en balayant le complexe de visibilité le long des courbes de tangence associées à cet objet (respectivement le long des droites duales associées à cette arête de polygone). Les courbes de tangence associées à un objet donné, ou les droites duales associées à une arête de polygone donnée sont de plus directement accessibles, ce qui permet d'éliminer toute recherche inutile.

7.1.2 Recalcul des facteurs de forme strictement nécessaires après un déplacement Δd d'un objet

Soit un objet $\mathcal{O}$ en mouvement dans une scène. Soit un petit déplacement Δd de cet objet au cours duquel les relations de visibilité dans la scène n'ont pas été modifiées. Pour recalculer les facteurs de forme strictement nécessaires (après ce déplacement de l'objet $\mathcal{O}$), il faut considérer uniquement les faces du complexe de visibilité *liées* à l'objet $\mathcal{O}$ (c'est à dire les faces de types **(a)** et **(b)**, cf. paragraphe 7.1.1). Pour chacune des faces *liées* à $\mathcal{O}$, on applique un traitement spécifique, fonction de son type, qui permet de recalculer pour une face donnée uniquement les facteurs de forme strictement nécessaires.

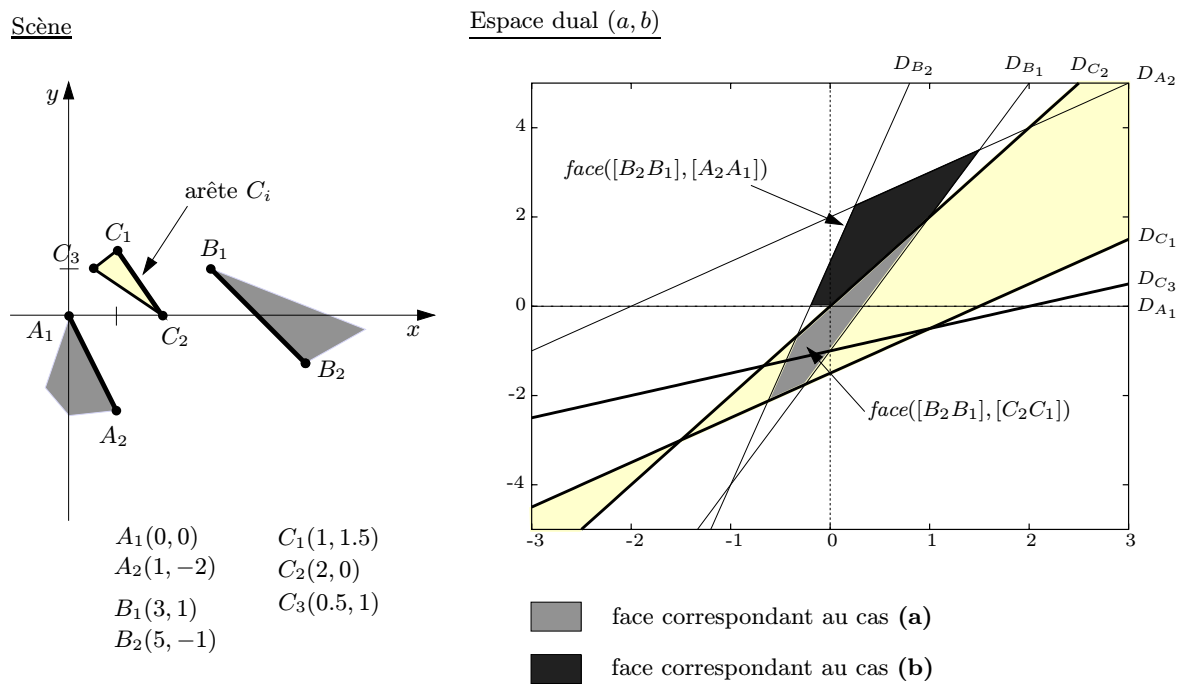


FIG. 7.4 - *Faces* liées à *une arête de polygone* C_i.

Cas des faces dont un des deux objets associés est l'objet en mouvement $\mathcal{O}$

Soit $\mathcal{O}'$ un objet de la scène considérée, visible depuis l'objet $\mathcal{O}$. Lorsque l'objet $\mathcal{O}$ s'est déplacé d'un déplacement Δd, la position relative de l'objet $\mathcal{O}$ par rapport à l'objet $\mathcal{O}'$ a changé.

Il faut donc :

- recalculer les facteurs de forme pour toutes les paires d'éléments de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ qui étaient mutuellement visibles avant le déplacement de $\mathcal{O}$ et qui le sont toujours lorsque $\mathcal{O}$ est dans sa nouvelle position.
  Ces différents éléments appartiennent aux parties mutuellement visibles sur $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ définies à partir des différentes faces du complexe associées aux objets $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$.

- mettre à zéro les facteurs de forme pour les paires d'éléments de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ qui étaient précédemment mutuellement visibles et qui ne le sont plus après le déplacement de $\mathcal{O}$.

- calculer les facteurs de forme pour les paires d'éléments de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ qui étaient précédemment cachés et qui sont devenus mutuellement visibles après le déplacement de $\mathcal{O}$.

Connaissant les faces associées à l'objet $\mathcal{O}$ et à un objet $\mathcal{O}'$, avant et après le déplacement de l'objet $\mathcal{O}$, on peut obtenir simplement les parties qui sont mutuellement visibles sur $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ avant et après ce déplacement. On en déduit un algorithme permettant de recalculer les facteurs de forme strictement nécessaires pour une face donnée dont un des deux objets associés est l'objet en mouvement.

Application aux scènes polygonales

Soit $\mathcal{P}$ un polygone en mouvement dans une scène. Lorsque le polygone $\mathcal{P}$ a effectué un déplacement Δd sans changement topologique dans la visibilité, on réalise le traitement spécifié dans la figure 7.5, pour chaque face du complexe dont une des deux arêtes de polygones associées est une arête du polygone $\mathcal{P}$. L'algorithme présenté dans la figure 7.5 décrit les recalculs de facteurs de forme strictement nécessaires pour une face de ce type. Il utilise les notions de *partie mutuellement visible définie sur une arête de polygone à partir d'une face* et de *partie d'une arête de polygone vue par un élément donné*. Ces notions sont introduites dans le paragraphe 5.2, et plus spécifiquement dans le paragraphe 5.2.2 pour les polygones. On trouve aussi dans ces paragraphes des explications sur le calcul effectif de ces deux parties.

L'exécution de l'algorithme est illustrée sur un exemple où on montre le recalcul des facteurs de forme strictement nécessaires entre les éléments sur deux arêtes de polygones C_l et C_r, après un déplacement Δd de C_l (cf. figure 7.6). Pour chaque étape de l'algorithme, l'élément s_l considéré sur C_l est indiqué par un trait noir plus épais. La partie vue par cet élément sur C_r après le déplacement de C_l (partie sur C_r comprise entre les points ${p_{r_{up}}}^{(f)}$ et ${p_{r_{down}}}^{(f)}$), est représentée par des petits tirets le long de C_r. La partie mutuellement visible sur C_l définie à partir de la face associée à C_l et C_r après le déplacement de C_l (partie sur C_l comprise entre les points ${p_{l_u}}^{(f)}$ et ${p_{l_d}}^{(f)}$), est également représentée par des petits tirets le long de C_l. On indique aussi, pour chaque étape, les facteurs de forme qu'il faut recalculer et ceux qu'il faut mettre à zéro pour l'élément s_l courant.

La figure 7.7 montre la face du complexe associée aux arêtes C_l et C_r considérées, avant et après le déplacement de C_l (respectivement schéma du haut et schéma du bas). La face associée à C_l et C_r est représentée en gris foncé, et la zone comprise dans l'espace dual entre les droites duales associées aux deux extrémités de C_l est coloriée en gris clair. Lorsque C_l s'est déplacé d'un déplacement Δd sans changement topologique dans la visibilité, la topologie de la face associée à C_l et C_r n'a pas changé. On peut le constater sur la figure 7.7. Cependant, les droites duales associées aux extrémités de C_l se sont déplacées, ainsi que celles associées aux différentes extrémités des éléments sur C_l. La représentation dans l'espace dual de la face associée à C_l et C_r a donc été modifiée, ainsi que celle des sous-faces associées aux différents éléments de C_l et C_r.

Soit s_l un élément sur C_l et soit s_r un élément sur C_r. Le dual de l'ensemble des droites qui intersectent s_l et s_r équivaut, dans l'espace dual, à la zone comprise entre les droites duales associées aux extrémités de s_l et s_r. Si deux éléments s_l et s_r donnés sont mutuellement visibles alors la zone représentant le dual de l'ensemble des droites intersectant s_l et s_r intersecte (cas de visibilité partielle) ou est comprise (cas de visibilité totale) dans la face associée à C_l et C_r, et sinon elle se trouve à l'extérieur de la face. On peut ainsi en déduire très facilement, à partir de la face associée à C_l et C_r avant et après le déplacement de C_l, pour quels éléments de C_l et C_r on doit recalculer un facteur de forme, pour quels éléments on doit mettre un facteur de forme à zéro, et pour quels éléments on doit calculer un facteur de forme. Il faut :

- recalculer le facteur de forme entre deux éléments s_l et s_r donnés si la zone représentant le dual de l'ensemble des droites intersectant ces deux éléments était à l'intérieur ou intersectait la face associée à C_l et C_r, et qu'elle est toujours à l'intérieur ou qu'elle intersecte toujours la face après le déplacement de C_l (cf. par exemple l'élément 2 de C_l et l'élément 2 de C_r dans le cas de la figure 7.7).

- mettre à zéro le facteur de forme entre deux éléments s_l et s_r donnés si la zone représentant

Mise à jour des facteurs de forme pour une face f de type (a) : une des deux arêtes de polygones associées est une arête du polygone en mouvement $\mathcal{P}$

Soient C_l et C_r les deux arêtes de polygones associées à la face f
Soient ${p_{l_u}}^{(i)}$ et ${p_{l_d}}^{(i)}$ les points extrémités de la partie mutuellement visible sur C_l définie à partir de la face f, avant le déplacement Δd du polygone $\mathcal{P}$
Soient ${p_{l_u}}^{(f)}$ et ${p_{l_d}}^{(f)}$ les points extrémités de la partie mutuellement visible sur C_l définie à partir de la face f, après le déplacement Δd du polygone $\mathcal{P}$

Pour tout élément s_l de C_l avec au moins une partie dans $[{p_{l_u}}^{(i)}, {p_{l_d}}^{(i)}] \cup [{p_{l_u}}^{(f)}, {p_{l_d}}^{(f)}]$

Soient ${p_{r_{up}}}^{(i)}$ et ${p_{r_{down}}}^{(i)}$ les limites supérieure et inférieure de la partie de C_r vue par s_l, avant le déplacement Δd de $\mathcal{P}$
Soient ${p_{r_{up}}}^{(f)}$ et ${p_{r_{down}}}^{(f)}$ les limites supérieure et inférieure de la partie de C_r vue par s_l, après le déplacement Δd de $\mathcal{P}$

Si $s_l \cap [{p_{l_u}}^{(i)}, {p_{l_d}}^{(i)}] \neq \emptyset$ **et** $s_l \cap [{p_{l_u}}^{(f)}, {p_{l_d}}^{(f)}] \neq \emptyset$
Si ${p_{r_{up}}}^{(i)}$ est «au dessus» de ${p_{r_{up}}}^{(f)}$
Mettre à zéro les facteurs de forme entre s_l et les éléments s_r de C_r dont l'extrémité «basse» $p_{r_1} \in [{p_{r_{up}}}^{(i)}, {p_{r_{up}}}^{(f)}]$
Si ${p_{r_{down}}}^{(i)}$ est «au dessous» de ${p_{r_{down}}}^{(f)}$
Mettre à zéro les facteurs de forme entre s_l et les éléments s_r de C_r dont l'extrémité «haute» $p_{r_0} \in [{p_{r_{down}}}^{(f)}, {p_{r_{down}}}^{(i)}]$
Recalculer les facteurs de forme entre s_l et les éléments s_r de C_r qui ont au moins une partie dans $[{p_{r_{up}}}^{(f)}, {p_{r_{down}}}^{(f)}]$
Fin Si

Si $s_l \cap [{p_{l_u}}^{(i)}, {p_{l_d}}^{(i)}] \neq \emptyset$ **et** $s_l \cap [{p_{l_u}}^{(f)}, {p_{l_d}}^{(f)}] = \emptyset$
Mettre à zéro les facteurs de forme entre s_l et les éléments s_r de C_r qui avaient au moins une partie dans $[{p_{r_{up}}}^{(i)}, {p_{r_{down}}}^{(i)}]$

Si $s_l \cap [{p_{l_u}}^{(i)}, {p_{l_d}}^{(i)}] = \emptyset$ **et** $s_l \cap [{p_{l_u}}^{(f)}, {p_{l_d}}^{(f)}] \neq \emptyset$
Calculer les facteurs de forme entre s_l et les éléments s_r de C_r qui ont au moins une partie dans $[{p_{r_{up}}}^{(f)}, {p_{r_{down}}}^{(f)}]$

Fin Pour

FIG. 7.5 - *Algorithme de recalcul des facteurs de forme pour les faces de type* (a) *(Cas d'un déplacement Δd sans changement topologique dans la visibilité).*

le dual de l'ensemble des droites intersectant ces deux éléments se trouvait à l'intérieur ou intersectait la face associée à C_l et C_r avant le déplacement de C_l, et qu'elle se retrouve à l'extérieur de la face après le déplacement de C_l (cf. par exemple l'élément 2 de C_l et l'élément 4 de C_r dans le cas de la figure 7.7).

– calculer le facteur de forme entre deux éléments s_l et s_r donnés si la zone représentant le dual de l'ensemble des droites intersectant ces deux éléments était à l'extérieur de la face associée à C_l et C_r avant le déplacement de C_l, et qu'elle se retrouve à l'intérieur ou qu'elle intersecte la face après le déplacement de C_l.

Cas des faces dont une des arêtes associées à des objets qui interfèrent est associée à l'objet en mouvement $\mathcal{O}$

Soient deux objets $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ de la scène considérée, qui ont leur visibilité mutuelle réduite (entre autres) par l'objet $\mathcal{O}$. Lorsque l'objet $\mathcal{O}$ s'est déplacé d'un déplacement Δd, la position relative de l'objet $\mathcal{O}$ par rapport aux objets $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ a changé. Sachant que l'objet $\mathcal{O}$ interfère entre les objets $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$, il faut donc mettre à jour les facteurs de forme pour toutes les paires d'éléments de $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ dont la visibilité mutuelle est modifiée par le déplacement de l'objet $\mathcal{O}$. Parmi ces différentes paires d'éléments, on distingue trois cas. Il faut :

– recalculer les facteurs de forme pour les paires d'éléments qui étaient précédemment mutuellement visibles et qui le sont toujours après le déplacement de l'objet $\mathcal{O}$, bien que leur visibilité ait été modifiée par ce déplacement.

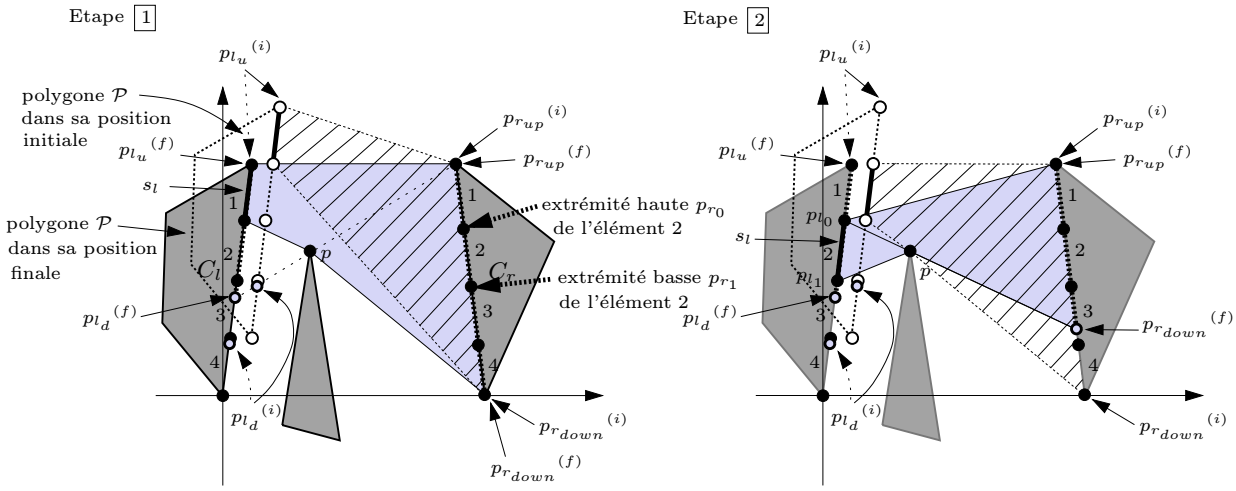
– mettre à zéro les facteurs de forme pour les paires d'éléments qui étaient précédemment mutuellement visibles (partiellement ou totalement) et qui ne se voient plus après le déplacement de l'objet $\mathcal{O}$.

– calculer les facteurs de forme pour les paires d'éléments qui étaient précédemment cachés et qui sont devenus mutuellement visibles (partiellement ou totalement) après le déplacement de l'objet $\mathcal{O}$.

Application aux scènes polygonales

Soit $\mathcal{P}$ un polygone en mouvement dans une scène. Soient C_l et C_r deux arêtes de polygones entre lesquelles le polygone $\mathcal{P}$ interfère. On note p le sommet du polygone $\mathcal{P}$ qui réduit la visibilité entre C_l et C_r. On considère un petit déplacement Δd de P au cours duquel les relations de visibilité ne sont pas modifiées. On note $p^{(i)}$ la position initiale du point p, avant le déplacement Δd du polygone $\mathcal{P}$, et $p^{(f)}$ la position finale de p, après le déplacement du polygone $\mathcal{P}$ (cf. figure 7.8 pour un exemple). Lorsque le polygone $\mathcal{P}$ a effectué le déplacement Δd, on ne doit mettre à jour pour C_l et C_r que les facteurs de forme pour les paires d'éléments dont la visibilité mutuelle est modifiée par le déplacement du polygone $\mathcal{P}$. Voyons tout d'abord de quelles paires d'éléments il s'agit.

Soit $f^{(i)}$ la face du complexe associée aux arêtes de polygones C_l et C_r, avant le déplacement du polygone $\mathcal{P}$. Avant ce déplacement, la région entre les deux arêtes de polygones C_l et C_r où le sommet p du polygone $\mathcal{P}$ peut obstruer la visibilité correspond, dans la scène, à la *zone d'interférence* $ZI_{p^{(i)}}$ associée à l'arête de la face $f^{(i)}$ qui est associée à p. La notion de *zone d'interférence associée à une arête e d'une face f du complexe* est introduite dans le paragraphe 5.2,

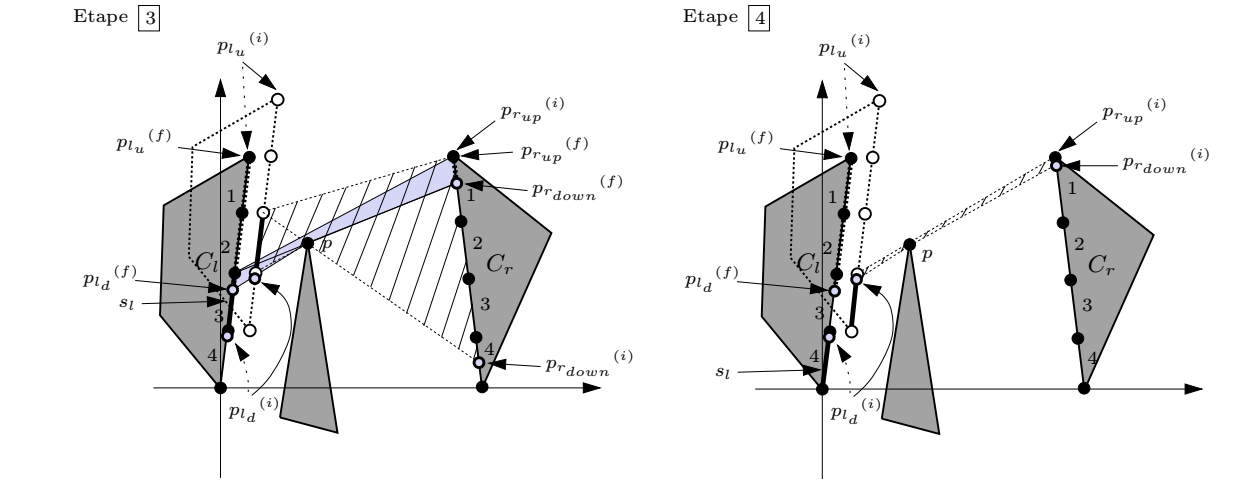


$s_l \cap [p_{l_u}{}^{(i)}, p_{l_d}{}^{(i)}] \neq \emptyset$ et $s_l \cap [p_{l_u}{}^{(f)}, p_{l_d}{}^{(f)}] \neq \emptyset$:

- Recalculer les facteurs de forme entre s_l et les éléments 1, 2, 3, 4 de C_r

$s_l \cap [p_{l_u}{}^{(i)}, p_{l_d}{}^{(i)}] \neq \emptyset$ et $s_l \cap [p_{l_u}{}^{(f)}, p_{l_d}{}^{(f)}] \neq \emptyset$:

- Mettre à zéro les facteurs de forme entre s_l et l'élément 4 de C_r
- Recalculer les facteurs de forme entre s_l et les éléments 1, 2, 3 de C_r



$s_l \cap [p_{l_u}{}^{(i)}, p_{l_d}{}^{(i)}] \neq \emptyset$ et $s_l \cap [p_{l_u}{}^{(f)}, p_{l_d}{}^{(f)}] \neq \emptyset$:

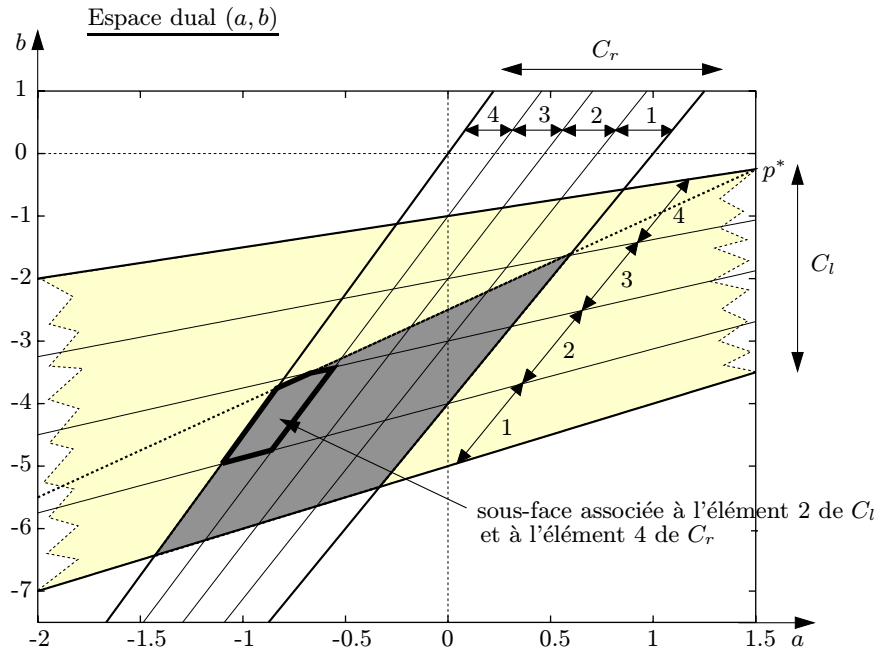
- Mettre à zéro les facteurs de forme entre s_l et les éléments 2, 3, 4 de C_r
- Recalculer les facteurs de forme entre s_l et l'élément 1 de C_r

$s_l \cap [p_{l_u}{}^{(i)}, p_{l_d}{}^{(i)}] \neq \emptyset$ et $s_l \cap [p_{l_u}{}^{(f)}, p_{l_d}{}^{(f)}] = \emptyset$:

- Mettre à zéro les facteurs de forme entre s_l et l'élément 1 de C_r

FIG. 7.6 - *Exemple d'un polygone $\mathcal{P}$ qui s'est déplacé d'un petit déplacement Δd, sans changement topologique dans la visibilité.*

Face associée à C_l et C_r lorsque le polygone $\mathcal{P}$ est dans sa position initiale



Face associée à C_l et C_r lorsque le polygone $\mathcal{P}$ est dans sa position finale

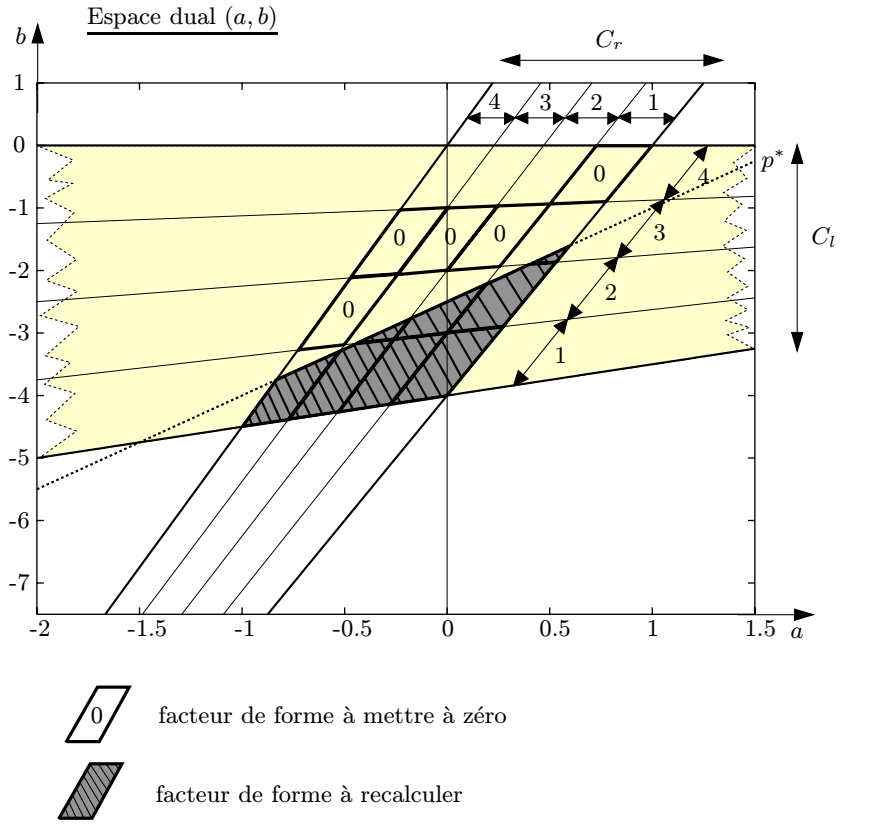


FIG. 7.7 - *Face associée à C_l et C_r avant et après le déplacement du polygone $\mathcal{P}$ (Cas d'un déplacement sans changement topologique dans la visibilité).*

et plus spécifiquement dans le paragraphe 5.2.2 pour les polygones. Soit $f^{(f)}$ la face du complexe associée aux arêtes de polygones C_l et C_r, après le déplacement du polygone $\mathcal{P}$. On introduit de façon similaire la *zone d'interférence* $ZI_{p^{(f)}}$ associée à l'arête de la face $f^{(f)}$ qui est associée à p. On peut voir un exemple sur la figure 7.8. La zone d'interférence $ZI_{p^{(i)}}$ est représentée avec des hachures et la zone d'interférence $ZI_{p^{(f)}}$ est coloriée en gris clair.

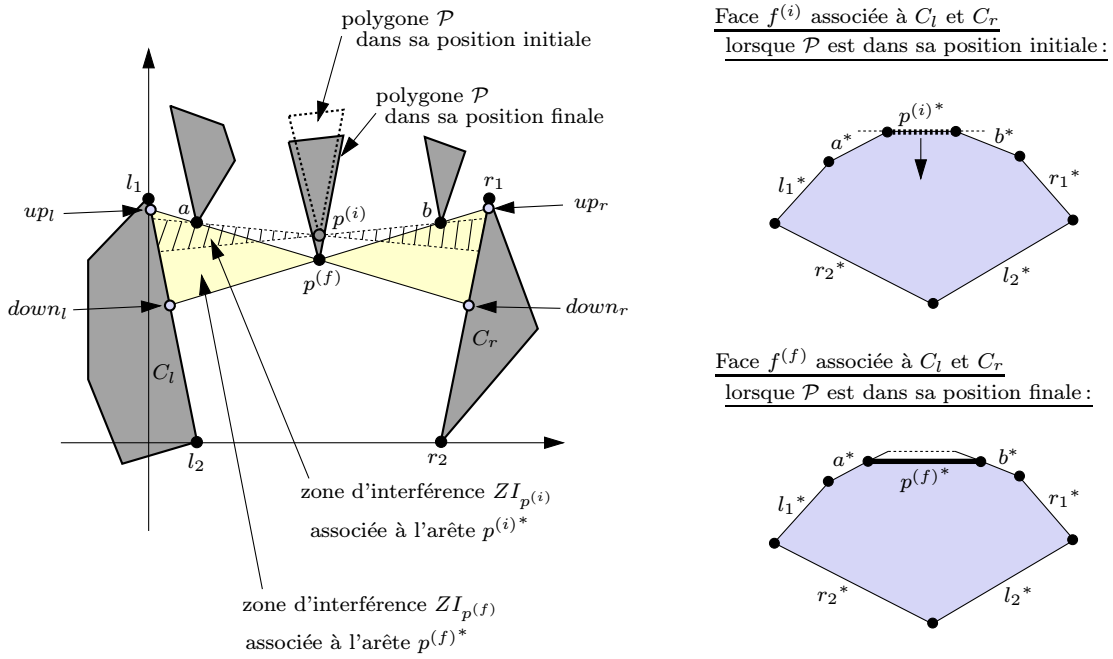


FIG. 7.8 - *Zone d'interférence associée à une arête du complexe associée à un point p, avant et après son déplacement.*

On note respectivement $up_l(ZI_{p^{(i)}} \cup ZI_{p^{(f)}})$ et $down_l(ZI_{p^{(i)}} \cup ZI_{p^{(f)}})$, les limites supérieure et inférieure de $ZI_{p^{(i)}} \cup ZI_{p^{(f)}}$ sur C_l, et $up_r(ZI_{p^{(i)}} \cup ZI_{p^{(f)}})$ et $down_r(ZI_{p^{(i)}} \cup ZI_{p^{(f)}})$ les limites de $ZI_{p^{(i)}} \cup ZI_{p^{(f)}}$ sur C_r (cf. figure 7.8 pour un exemple). Nécessairement, les éléments dont la visibilité est modifiée par le déplacement du polygone $\mathcal{P}$ ont au moins une partie dans $[up_l, down_l]$ pour C_l et $[up_r, down_r]$ pour C_r. Remarquons que cette condition n'est pas suffisante, deux éléments sur C_l et C_r ainsi choisis pouvant être toujours ou bien totalement visibles avant et après le déplacement de $\mathcal{P}$, ou bien totalement cachés avant et après ce déplacement. Pour se restreindre uniquement aux paires d'éléments dont la visibilité est réellement modifiée par le déplacement de $\mathcal{P}$, on doit considérer séparément chaque élément s_l de C_l avec au moins une partie dans $[up_l, down_l]$. On distingue trois cas parmi ces différents éléments s_l :

- soit l'élément s_l considéré avait au moins une partie dans la partie mutuellement visible définie sur C_l à partir de la face $f^{(i)}$ mais n'a pas de partie dans la partie mutuellement visible définie sur C_l à partir de la face $f^{(f)}$.
  Dans ce cas là, il suffit de mettre à zéro les facteurs de forme entre s_l et les éléments de C_r qui avaient au moins une partie dans la partie de C_r vue par s_l avant le déplacement.

- soit l'élément s_l considéré n'avait pas de partie dans la partie mutuellement visible définie sur C_l à partir de la face $f^{(i)}$ mais a au moins une partie dans la partie mutuellement

visible définie sur C_l à partir de la face $f^{(f)}$.
Dans ce cas là, il suffit de calculer les facteurs de forme entre s_l et les éléments de C_r qui ont au moins une partie dans la partie de C_r vue par s_l après le déplacement.

– soit l'élément s_l considéré avait au moins une partie dans la partie mutuellement visible définie sur C_l à partir de la face $f^{(i)}$ et a au moins une partie dans la partie mutuellement visible définie sur C_l à partir de la face $f^{(f)}$.
Pour un tel élément s_l, on doit calculer la partie sur C_r dont la visibilité depuis s_l est modifiée par le déplacement du polygone $\mathcal{P}$. Cette partie est décrite par les extrémités sur C_r : d'une part, des segments libres maximaux qui touchaient s_l et C_r avant le déplacement de $\mathcal{P}$ et qui intersectent $\mathcal{P}$ après son déplacement ; d'autre part, des segments libres maximaux qui touchent s_l et C_r après le déplacement de $\mathcal{P}$ et qui intersectaient $\mathcal{P}$ avant son déplacement. Cette partie sur C_r définie pour un élément s_l donné forme un segment dont les extrémités sont appelées $l_{r_{up}}$ et $l_{r_{down}}$. On peut voir un exemple sur la figure 7.9.

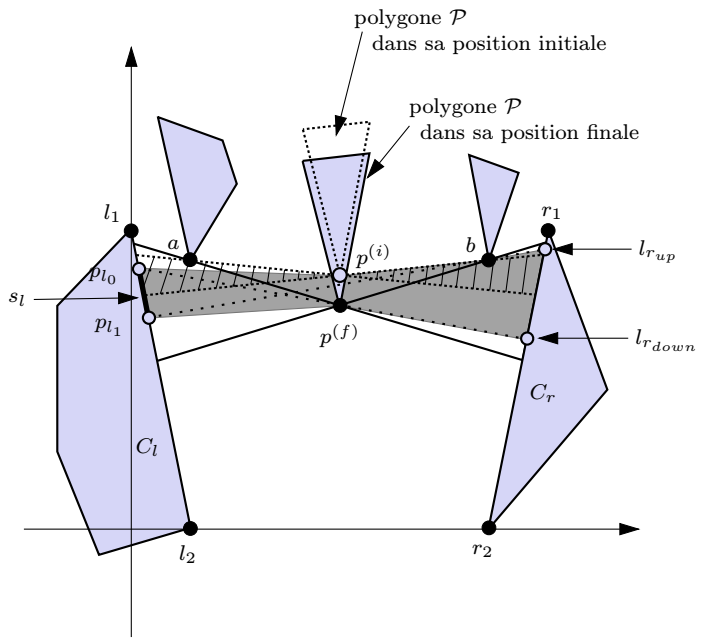


FIG. 7.9 - *Partie sur une arête de polygone C_r dont la visibilité depuis un élément s_l donné est modifiée par le déplacement d'un polygone $\mathcal{P}$.*

La figure 7.11 récapitule sous forme d'un algorithme le traitement réalisé pour chaque face du complexe telle que le polygone en mouvement $\mathcal{P}$ interfère entre les deux objets associés. L'algorithme présenté dans cette figure décrit les recalculs de facteurs de forme strictement nécessaires pour une face de ce type. Il utilise entre autres les notions de *partie mutuellement visible définie sur une arête de polygone à partir d'une face* et de *partie d'une arête de polygone vue par un élément donné*, introduites dans le paragraphe 5.2, et plus spécifiquement dans le paragraphe 5.2.2 pour les polygones. La détermination des points $l_{r_{up}}$ et $l_{r_{down}}$ pour un élément s_l donné dépend du déplacement du polygone en mouvement. On distingue quatre types de déplacements : les déplacements «vers le bas» (cas des objets qui interfèrent «par le haut» entre les deux objets associés à la face considérée et qui se déplacent de façon à interférer encore plus

entre ces deux objets, ou cas des objets qui interfèrent «par le bas» entre les deux objets associés à la face considérée et qui se déplacent de façon à moins interférer entre ces deux objets), les déplacements «vers le haut» (cas des objets qui interfèrent «par le haut» entre les deux objets associés à la face considérée et qui se déplacent de façon à moins interférer entre ces deux objets, ou cas des objets qui interfèrent «par le bas» entre les deux objets associés à la face considérée et qui se déplacent de façon à interférer encore plus entre ces deux objets), les déplacements «vers la droite» et les déplacements «vers la gauche», où l'objet en mouvement se déplace sans interférer plus entre les deux objets associés à la face considérée. La figure 7.10 fournit en exemple la description de la détermination des points $l_{r_{up}}$ et $l_{r_{down}}$ dans le cas d'un déplacement «vers le bas». On peut bien évidemment décrire de façon similaire la détermination de ces points dans le cas des trois autres types de déplacements.

L'exécution de l'algorithme est illustrée sur un exemple où on montre le recalcul des facteurs de forme strictement nécessaires entre les éléments sur deux arêtes de polygones C_l et C_r après un déplacement Δd «vers le bas» d'un polygone $\mathcal{P}$ qui interfère entre C_l et C_r (cf. figure 7.12). Soit p le sommet du polygone $\mathcal{P}$ qui réduit la visibilité entre C_l et C_r. On note f la face associée aux arêtes de polygones C_l et C_r. Pour chaque étape de l'algorithme, l'élément s_l considéré sur C_l est indiqué par un trait noir plus épais. La partie $[l_{r_{up}}, l_{r_{down}}]$ calculée pour un élément s_l donné (partie sur C_r dont la visibilité depuis l'élément s_l est modifiée par le déplacement du polygone $\mathcal{P}$), est représentée par des petits tirets le long de C_r. La zone d'interférence $ZI_{p^{(i)}}$ associée à l'arête de la face f qui est associée au point p lorsqu'il est dans sa position initiale (position notée $p^{(i)}$ sur la figure 7.12) est représentée par des hachures. Et la zone d'interférence $ZI_{p^{(f)}}$ associée à l'arête de la face f qui est associée au point p lorsqu'il est dans sa position finale (position notée $p^{(f)}$ sur la figure 7.12) est coloriée en gris clair. On indique aussi, pour chaque étape, les facteurs de forme qu'il faut recalculer et ceux qu'il faut mettre à zéro pour l'élément s_l courant.

La figure 7.13 montre la face du complexe de visibilité associée aux arêtes de polygones C_l et C_r considérées, avant et après le déplacement «vers le bas» du polygone $\mathcal{P}$ (respectivement schéma du haut et schéma du bas). La face associée à C_l et C_r est représentée en gris foncé. On constate sur la figure que la topologie de la face associée à C_l et C_r n'a pas changé lorsque le polygone $\mathcal{P}$ s'est déplacé. Les droites duales associées aux différentes extrémités des éléments sur C_l et C_r restent en fait inchangées puisque les arêtes de polygones C_l et C_r n'ont pas bougé. Seules les droites associées, dans l'espace dual, aux différents sommets du polygone $\mathcal{P}$ se sont déplacées. On note p le sommet du polygone $\mathcal{P}$ qui interfère au niveau de la face associée à C_l et C_r. Soit ${p^{(i)}}^*$ la droite duale associée au sommet p lorsque le polygone $\mathcal{P}$ est dans sa position initiale, et soit ${p^{(f)}}^*$ la droite duale associée au sommet p lorsque le polygone $\mathcal{P}$ est dans sa position finale. La partie de la face associée à C_l et C_r qui est modifiée par le déplacement du polygone $\mathcal{P}$ est donc comprise, dans l'espace dual, entre les droites ${p^{(i)}}^*$ et ${p^{(f)}}^*$. Soit s_l un élément sur C_l, et soit s_r un élément sur C_r. Le dual de l'ensemble des droites qui intersectent s_l et s_r équivaut, dans l'espace dual, à la zone comprise entre les droites duales associées aux extrémités de s_l et s_r. On doit mettre à jour les facteurs de forme seulement pour les éléments s_l et s_r pour lesquels la zone comprise entre les droites duales associées à leurs points extrémités intersecte ou se trouve à l'intérieur de la bande comprise entre les droites duales ${p^{(i)}}^*$ et ${p^{(f)}}^*$. La zone correspondant dans l'espace dual aux facteurs de forme à mettre à jour est entourée par un large trait gris clair dans la figure 7.13. La mise à jour de facteur de forme à effectuer (recalcul, mise à zéro ou calcul) pour deux éléments s_l et s_r donnés de cette zone dépend de la position par rapport à la face associée à C_l et C_r avant et après le déplacement, de la zone

Soit $\mathcal{P}$ un polygone qui se déplace «vers le bas» d'un déplacement Δd sans changement topologique dans la visibilité
Soit p le sommet du polygone $\mathcal{P}$ qui interfère au niveau de la face f considérée
/* la face f est associée aux arêtes de polygones C_l et C_r */
Soit $p^{(i)}$ la position initiale du point p (avant le déplacement Δd de $\mathcal{P}$)
Soit $p^{(f)}$ la position finale de p (après le déplacement Δd de $\mathcal{P}$)
Soit $ZI_{p^{(i)}}$ la zone d'interférence définie à partir de l'arête de f associée à p, lorsque p est dans sa position initiale
Soit $ZI_{p^{(f)}}$ la zone d'interférence définie à partir de l'arête de f associée à p, lorsque p est dans sa position finale
Soient ${p_{l_u}}^{(i)}$ et ${p_{l_d}}^{(i)}$ les points extrémités de la partie mutuellement visible sur C_l définie à partir de la face f, avant le déplacement Δd du polygone $\mathcal{P}$
Soient ${p_{l_u}}^{(f)}$ et ${p_{l_d}}^{(f)}$ les points extrémités de la partie mutuellement visible sur C_l définie à partir de la face f, après le déplacement Δd du polygone $\mathcal{P}$

Soit s_l un élément de l'arête de polygone C_l avec pour points extrémités $[p_{l_0}, p_{l_1}]$

Détermination de $l_{r_{up}}$

Si $p_{l_1} \in [{p_{l_u}}^{(i)}, {p_{l_d}}^{(i)}]$
  Si p_{l_1} est à l'intérieur de $ZI_{p^{(i)}}$
    $l_{r_{up}} := (p_{l_1}\ p^{(i)}) \cap C_r$
  Sinon /* Cas : p_{l_1} est à l'extérieur de $ZI_{p^{(i)}}$ */
    Soit q un point tel que p_{l_1} est à l'intérieur de $ZI_{q_{/p^{(i)}}}$
    /* q est un sommet de polygone associé à une arête de f adjacente à l'arête associée à p */
    /* $ZI_{q_{/p^{(i)}}}$ est la zone d'interférence associée à q losrque p est dans sa position initiale */
    Si p_{l_1} est à l'intérieur de $ZI_{p^{(f)}}$
      $l_{r_{up}} := (p_{l_1}\ q) \cap C_r$
    Sinon /* Cas : p_{l_1} est à l'extérieur de $ZI_{p^{(f)}}$ */
    /* p_{l_1} appartient aussi à $ZI_{q_{/p^{(f)}}}$ */
    /* $ZI_{q_{/p^{(f)}}}$ est la zone d'interférence associée à q lorsque p est dans sa position finale */
      $l_{r_{up}} := (p^{(f)}\ q) \cap C_r$
  Fin Sinon
Sinon /* Cas : $p_{l_1} \notin [{p_{l_u}}^{(i)}, {p_{l_d}}^{(i)}]$ */
    $l_{r_{up}} := ({p_{l_d}}^{(i)}\ p^{(i)}) \cap C_r$

Détermination de $l_{r_{down}}$

Si $p_{l_0} \in [{p_{l_u}}^{(f)}, {p_{l_d}}^{(f)}]$
  Si p_{l_0} est à l'intérieur de $ZI_{p^{(f)}}$
    $l_{r_{down}} := (p_{l_0}\ p^{(f)}) \cap C_r$
  Sinon /* Cas : p_{l_0} est à l'extérieur de $ZI_{p^{(f)}}$ */
    Soit q un point tel que p_{l_0} est à l'intérieur de $ZI_{q_{/p^{(f)}}}$
    /* q est un sommet de polygone associé à une arête de f adjacente à l'arête associée à p */
    Si p_{l_0} est à l'intérieur de $ZI_{p^{(i)}}$
      $l_{r_{down}} := (p_{l_0}\ q) \cap C_r$
    Sinon /* Cas : p_{l_0} est à l'extérieur de $ZI_{p^{(i)}}$ */
    /* p_{l_0} appartient aussi à $ZI_{q_{/p^{(i)}}}$ */
      $l_{r_{down}} := (q\ p^{(f)}) \cap C_r$
  Fin Sinon
Sinon /* Cas : $p_{l_0} \notin [{p_{l_u}}^{(f)}, {p_{l_d}}^{(f)}]$ */
    $l_{r_{down}} := ({p_{l_u}}^{(f)}\ p^{(f)}) \cap C_r$

FIG. 7.10 - *Détermination des points $l_{r_{up}}$ et $l_{r_{down}}$ pour un élément s_l donné (Cas d'un déplacement «vers le bas»).*

Mise à jour des facteurs de forme pour une face f de type (b) : une des arêtes associées à des sommets de polygones qui interfèrent est associée à un sommet du polygone en mouvement $\mathcal{P}$

Soient C_l et C_r les deux arêtes de polygones associées à la face f
Soit p le sommet du polygone $\mathcal{P}$ qui interfère au niveau de la face f
Soit $p^{(i)}$ la position initiale du point p (avant le déplacement Δd de $\mathcal{P}$)
Soit $p^{(f)}$ la position finale de p (après le déplacement Δd de $\mathcal{P}$)
Soit $ZI_{p^{(i)}}$ la zone d'interférence définie à partir de l'arête de f associée à p, lorsque p est dans sa position initiale
Soit $ZI_{p^{(f)}}$ la zone d'interférence définie à partir de l'arête de f associée à p, lorsque p est dans sa position finale
Soient $up_l(ZI_{p^{(i)}} \cup ZI_{p^{(f)}})$ et $down_l(ZI_{p^{(i)}} \cup ZI_{p^{(f)}})$ les limites supérieure et inférieure de $ZI_{p^{(i)}} \cup ZI_{p^{(f)}}$
Soient ${p_{l_u}}^{(i)}$ et ${p_{l_d}}^{(i)}$ les points extrémités de la partie mutuellement visible sur C_l définie à partir de la face f, avant le déplacement Δd du polygone $\mathcal{P}$
Soient ${p_{l_u}}^{(f)}$ et ${p_{l_d}}^{(f)}$ les points extrémités de la partie mutuellement visible sur C_l définie à partir de la face f, après le déplacement Δd du polygone $\mathcal{P}$

Pour tout élément s_l de C_l avec au moins une partie dans $[up_l(ZI_{p^{(i)}} \cup ZI_{p^{(f)}}), down_l(ZI_{p^{(i)}} \cup ZI_{p^{(f)}})]$

Soient ${p_{r_{up}}}^{(i)}$ et ${p_{r_{down}}}^{(i)}$ les limites supérieure et inférieure de la partie de C_r vue par s_l, avant le déplacement Δd de $\mathcal{P}$
Soient ${p_{r_{up}}}^{(f)}$ et ${p_{r_{down}}}^{(f)}$ les limites supérieure et inférieure de la partie de C_r vue par s_l, après le déplacement Δd de $\mathcal{P}$

Si $s_l \cap [{p_{l_u}}^{(i)}, {p_{l_d}}^{(i)}] \neq \emptyset$ **et** $s_l \cap [{p_{l_u}}^{(f)}, {p_{l_d}}^{(f)}] \neq \emptyset$
Calculer les points $l_{r_{up}}$ et $l_{r_{down}}$ en fonction de la valeur courante de l'élément s_l (cf. figure 7.10)

Si ${p_{r_{up}}}^{(i)}$ est «au dessus» de ${p_{r_{up}}}^{(f)}$
Mettre à zéro les facteurs de forme entre s_l et les éléments s_r de C_r dont l'extrémité «basse» $p_{r_1} \in [{p_{r_{up}}}^{(i)}, {p_{r_{up}}}^{(f)}]$
Si ${p_{r_{down}}}^{(i)}$ est «au dessous» de ${p_{r_{down}}}^{(f)}$
Mettre à zéro les facteurs de forme entre s_l et les éléments s_r de C_r dont l'extrémité «haute» $p_{r_0} \in [{p_{r_{down}}}^{(f)}, {p_{r_{down}}}^{(i)}]$
Recalculer les facteurs de forme entre s_l et les éléments s_r de C_r non encore considérés qui ont au moins une partie dans $[l_{r_{up}}, l_{r_{down}}]$
Fin Si

Si $s_l \cap [{p_{l_u}}^{(i)}, {p_{l_d}}^{(i)}] \neq \emptyset$ **et** $s_l \cap [{p_{l_u}}^{(f)}, {p_{l_d}}^{(f)}] = \emptyset$
Mettre à zéro les facteurs de forme entre s_l et les éléments s_r de C_r qui avaient au moins une partie dans $[{p_{r_{up}}}^{(i)}, {p_{r_{down}}}^{(i)}]$

Si $s_l \cap [{p_{l_u}}^{(i)}, {p_{l_d}}^{(i)}] = \emptyset$ **et** $s_l \cap [{p_{l_u}}^{(f)}, {p_{l_d}}^{(f)}] \neq \emptyset$
Calculer les facteurs de forme entre s_l et les éléments s_r de C_r qui ont au moins une partie dans $[{p_{r_{up}}}^{(f)}, {p_{r_{down}}}^{(f)}]$

Fin Pour

FIG. 7.11 - *Algorithme de recalcul des facteurs de forme pour les faces de type* **(b)** *(Cas d'un déplacement Δd sans changement topologique dans la visibilité).*

représentant le dual de l'ensemble des droites intersectant ces deux éléments (cf. paragraphe précédent intitulé : Cas des faces dont un des deux objets associés est l'objet en mouvement $\mathcal{O}$).

Recalcul du facteur de forme entre deux éléments s_l et s_r donnés

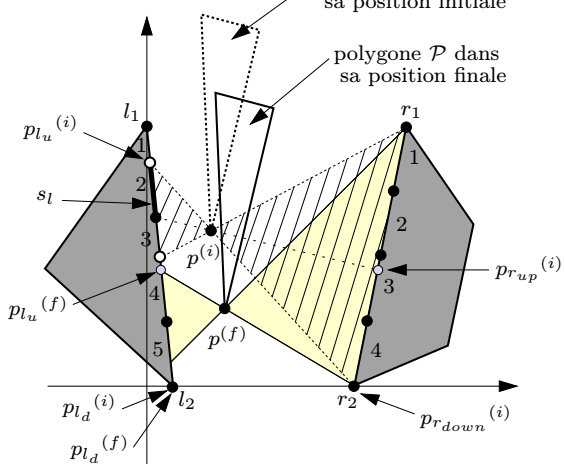
Nous avons vu dans les deux paragraphes précédents comment identifier les facteurs de forme à recalculer nécessairement pour les différentes faces du complexe de visibilité *liées* à l'objet en mouvement. Nous allons voir maintenant comment on recalcule ces facteurs de forme.

Les objets de la scène sont initialement échantillonnés en prenant en compte les discontinuités. Nous avons cependant décidé dans un premier temps de ne pas les mettre à jour lorsqu'un objet se déplace. L'échantillonnage après les déplacements successifs d'un objet n'est donc plus fonction des discontinuités. Pour recalculer le facteur de forme entre deux éléments, on ne peut donc par appliquer directement les techniques présentées dans le paragraphe 5.2 (dans lesquelles l'échantillonnage en fonction des discontinuités permet de garantir que l'on a au plus un objet qui interfère «par le haut» et un objet qui interfère «par le bas» entre deux éléments donnés).

Une idée pour calculer les facteurs de forme dans ce cas, consiste à se ramener au cas où on prend en compte les discontinuités, en découpant les éléments existants suivant les discontinuités, au moment du calcul. On peut ensuite réutiliser les méthodes de calcul présentées dans le paragraphe 5.2 sur les sous-éléments ainsi obtenus, et il suffit ensuite de sommer les facteurs de forme obtenus pour obtenir le facteur de forme recherché. On peut voir un exemple sur la figure 7.14. Pour recalculer le facteur de forme entre les éléments s_l de C_l et s_r de C_r après le déplacement du polygone $\mathcal{P}$, on considère les deux points de discontinuités d_1 et d_2 appartenant respectivement à s_l et s_r. L'élément s_l est ainsi décomposé en deux sous-éléments $[p_{l_0}d_1]$ et $[d_1p_{l_1}]$, et l'élément s_r en deux sous-éléments $[p_{r_0}d_2]$ et $[d_2p_{r_1}]$. D'après la propriété d'additivité du facteur de forme (cf. paragraphe 1.2.2), le facteur de forme entre les éléments s_l et s_r est la somme des facteurs de forme entre les différents sous-éléments :

$$F_{s_l s_r} = \left(F_{[p_{l_0}d_1][p_{r_0}d_2]} + F_{[p_{l_0}d_1][d_2p_{r_1}]}\right) + \left(F_{[d_1p_{l_1}][p_{r_0}d_2]} + F_{[d_1p_{l_1}][d_2p_{r_1}]}\right)$$

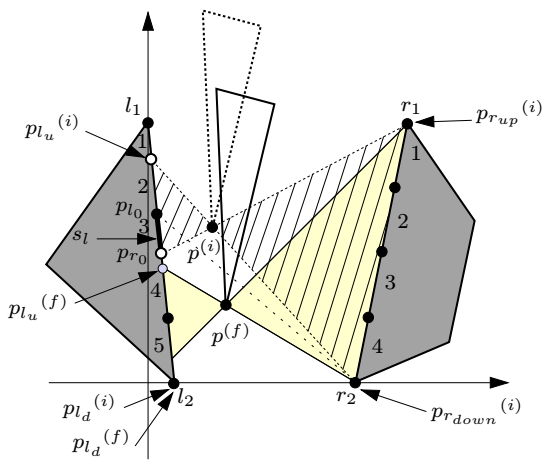
Etape 1



$s_l \cap [p_{l_u}{}^{(i)}, p_{l_d}{}^{(i)}] \neq \emptyset$ et $s_l \cap [p_{l_u}{}^{(f)}, p_{l_d}{}^{(f)}] = \emptyset$:

- Mettre à zéro les facteurs de forme entre s_l et les éléments 3, 4 de C_r

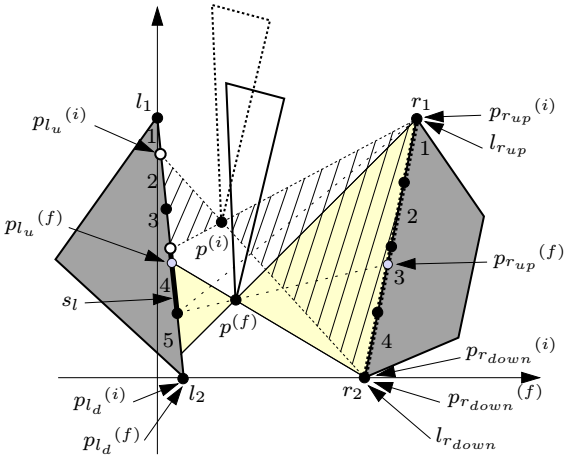
Etape 2



$s_l \cap [p_{l_u}{}^{(i)}, p_{l_d}{}^{(i)}] \neq \emptyset$ et $s_l \cap [p_{l_u}{}^{(f)}, p_{l_d}{}^{(f)}] = \emptyset$:

- Mettre à zéro les facteurs de forme entre s_l et les éléments 1, 2, 3, 4 de C_l

Etape 3



$s_l \cap [p_{l_u}{}^{(i)}, p_{l_d}{}^{(i)}] \neq \emptyset$ et $s_l \cap [p_{l_u}{}^{(f)}, p_{l_d}{}^{(f)}] \neq \emptyset$:

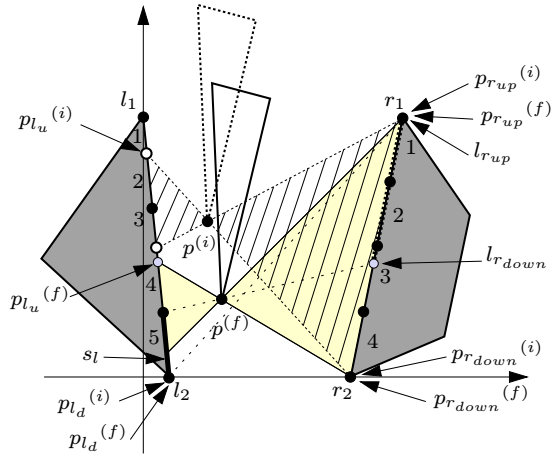
- $p_{l_1} \in [p_{l_u}{}^{(i)}, p_{l_d}{}^{(i)}]$
- $p_{l_1} \notin ZI_{p^{(i)}},\ p_{l_1} \in ZI_{p^{(f)}},\ p_{l_1} \in ZI_{r_1/p^{(i)}}$

  $\Rightarrow l_{r_{up}} := (p_{l_1} r_1) \cap C_r$
- $p_{l_0} \notin [p_{l_u}{}^{(f)}, p_{l_d}{}^{(f)}]$

  $\Rightarrow l_{r_{down}} := (p_{l_u}{}^{(f)} p^{(f)}) \cap C_r$

- Mettre à zéro les facteurs de forme entre s_l et les éléments 1, 2 de C_r
- Recalculer les facteurs de forme entre s_l et les éléments 3, 4 de C_r

Etape 4



$s_l \cap [p_{l_u}{}^{(i)}, p_{l_d}{}^{(i)}] \neq \emptyset$ et $s_l \cap [p_{l_u}{}^{(f)}, p_{l_d}{}^{(f)}] \neq \emptyset$:

- $p_{l_1} \in [p_{l_u}{}^{(i)}, p_{l_d}{}^{(i)}]$
- $p_{l_1} \notin ZI_{p^{(i)}},\ p_{l_1} \notin ZI_{p^{(f)}},\ p_{l_1} \in ZI_{r_1/p^{(i)}}$

  $\Rightarrow l_{r_{up}} := (p^{(f)} r_1) \cap C_r$

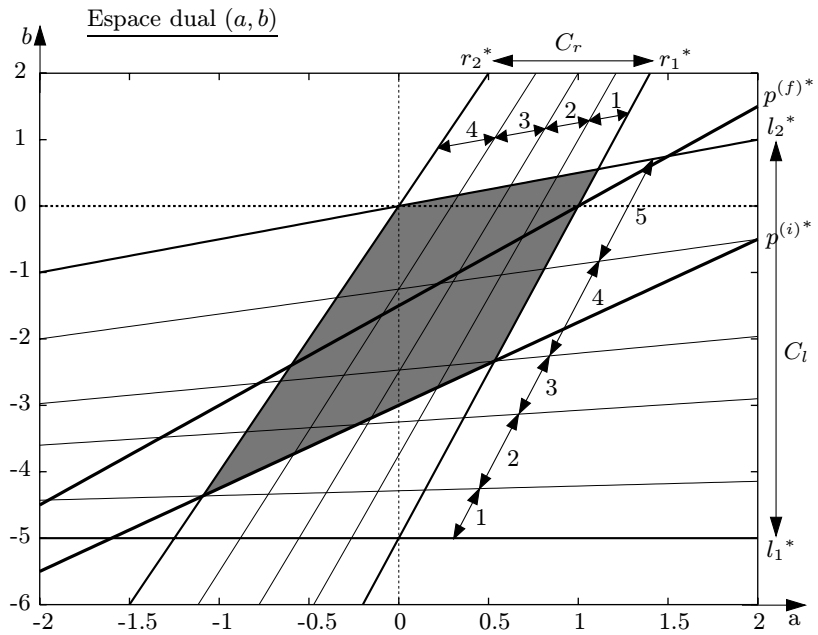
- $p_{l_0} \in [p_{l_u}{}^{(f)}, p_{l_d}{}^{(f)}]$
- $p_{l_0} \in ZI_{p^{(f)}}$

  $\Rightarrow l_{r_{down}} := (p_{l_0} p^{(f)}) \cap C_r$

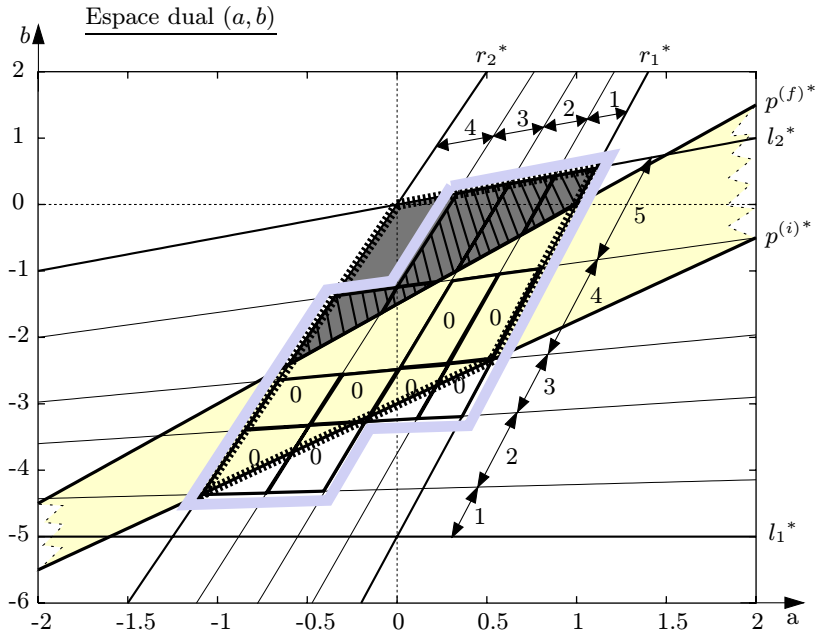
- Recalculer les facteurs de forme entre s_l et les éléments 1, 2, 3 de C_r

FIG. 7.12 - *Exemple d'un polygone $\mathcal{P}$ qui s'est déplacé «vers le bas» d'un petit déplacement Δd, sans changement topologique dans la visibilité.*

Face associée à C_l et C_r lorsque le polygone $\mathcal{P}$ est dans sa position initiale



Face associée à C_l et C_r lorsque le polygone $\mathcal{P}$ est dans sa position finale



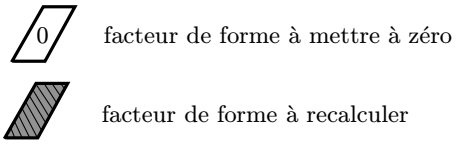


FIG. 7.13 - *Face associée à C_l et C_r avant et après le déplacement du polygone $\mathcal{P}$ (Cas d'un déplacement «vers le bas» sans changement topologique dans la visibilité).*

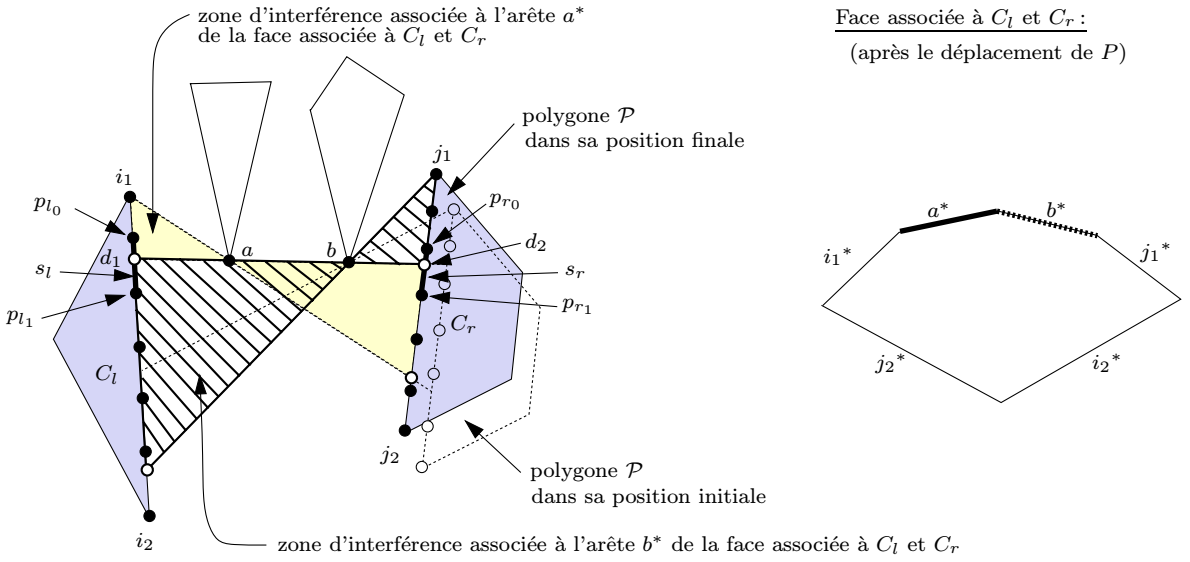


FIG. 7.14 - *Exemple d'une paire d'éléments sur C_l et C_r respectivement entre lesquels il y a deux objets qui interfèrent «par le haut».*

7.1.3 Mise à jour des discontinuités

Afin de conserver au cours du mouvement les limites exactes d'ombre et de pénombre, il peut être souhaitable, lorsqu'un objet s'est déplacé, d'effectuer la mise à jour des discontinuités, avant de recalculer les facteurs de forme. Des recalculs supplémentaires sont alors nécessaires. Il faut dans un premier temps mettre à jour les discontinuités, ce qui modifie partiellement l'échantillonnage. Il faut ensuite recalculer les facteurs de forme entre les éléments modifiés et *tous les éléments* qu'ils «voient» dans la scène.

Discontinuités à recalculer

Lorsqu'un objet $\mathcal{O}$ s'est déplacé, sa position relative par rapport aux objets qu'il «voit» a changé. Toutes les discontinuités calculées au niveau de l'objet $\mathcal{O}$ doivent donc être recalculées, ainsi que les discontinuités induites par les lignes critiques *liées* à l'objet $\mathcal{O}$. Dans le cas d'une scène constituée d'objets convexes, ces lignes critiques sont les lignes critiques tangentes à l'objet $\mathcal{O}$. Dans le cas d'une scène polygonale, il s'agit des lignes critiques passant par des sommets de l'objet $\mathcal{O}$.

La figure 7.15 montre un exemple de lignes critiques liées à un objet (il s'agit ici d'un rectangle). On peut voir aussi sur l'image, le maillage de discontinuité associé à la scène.

Interprétation dans l'espace dual

Nous avons vu dans le chapitre 4 qu'une discontinuité peut être calculée à partir d'un sommet d'une face du complexe de visibilité.

Dans le cas des scènes constituées d'objets convexes, les discontinuités calculées sur un objet convexe O_i donné sont calculées en considérant l'ensemble des sommets des faces dont un des deux objets associés est l'objet convexe O_i, sachant que les différents sommets d'une face associée

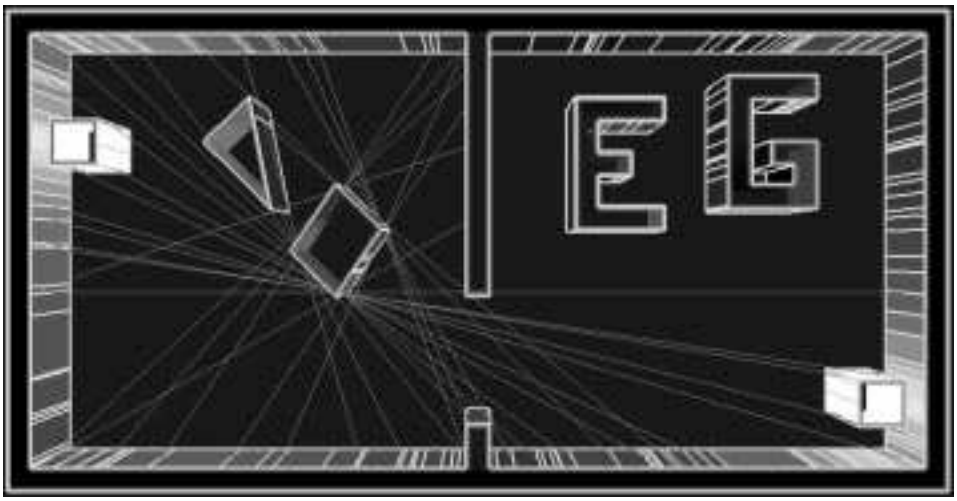


FIG. 7.15 - *Lignes critiques liées à un objet.*

à deux objets convexes donnés permettent de déterminer un point de discontinuité sur chacun des deux objets associés à la face (cf. paragraphe 4.1.1). Les lignes critiques tangentes à l'objet O_i correspondent à des sommets du complexe ayant parmi leurs arêtes incidentes, une arête associée à l'objet convexe O_i. Ces sommets appartiennent soit à des faces dont un des deux objets associés est l'objet convexe O_i, soit à des faces dont une des arêtes associées à des objets qui interfèrent est associée à O_i.

De façon similaire, dans le cas des scènes polygonales, les discontinuités sur un polygone P_i donné sont calculées à partir de certains sommets des faces dont une des deux arêtes de polygones associées est une arête de P_i. Pour une face f donnée, associée à l'arête C_i de P_i et à l'arête C_j de P_j, les sommets induisant une discontinuité sur P_i sont les sommets dont les deux arêtes incidentes sont :

- ou bien associées à une extrêmité de C_j (pour l'une d'elle) et à un sommet de polygone qui interfère (pour l'autre),
- ou bien associées à deux sommets de polygones qui interfèrent,
- ou bien associées aux deux extrêmités de C_j.

Les lignes critiques passant par les sommets du polygone P_i correspondent à des sommets du complexe ayant parmi leurs arêtes incidentes une arête associée à un sommet du polygone P_i. Ces sommets appartiennent soit à des faces dont une des deux arêtes de polygones associées est une arête de P_i, soit à des faces dont une des arêtes associées à des sommets de polygones qui interfèrent est associée à un sommet de P_i.

Lorsqu'un objet $\mathcal{O}$ s'est déplacé, les faces considérées pour le recalcul des discontinuités correspondent donc aux faces *liées à* l'objet $\mathcal{O}$ (cf. paragraphe 7.1.1). Dans le cas d'une scène polygonale, il faudra bien sûr considérer les faces *liées à* toutes les arêtes du polygone en mouvement.

Les figures 7.16 et 7.17 montrent plusieurs exemples de scènes polygonales où un polygone $\mathcal{P}$ se déplace d'une position 1 à une position 2, sans changement topologique dans la visibilité. On peut voir sur les différents schémas les recalculs de discontinuités nécessaires lorsque le

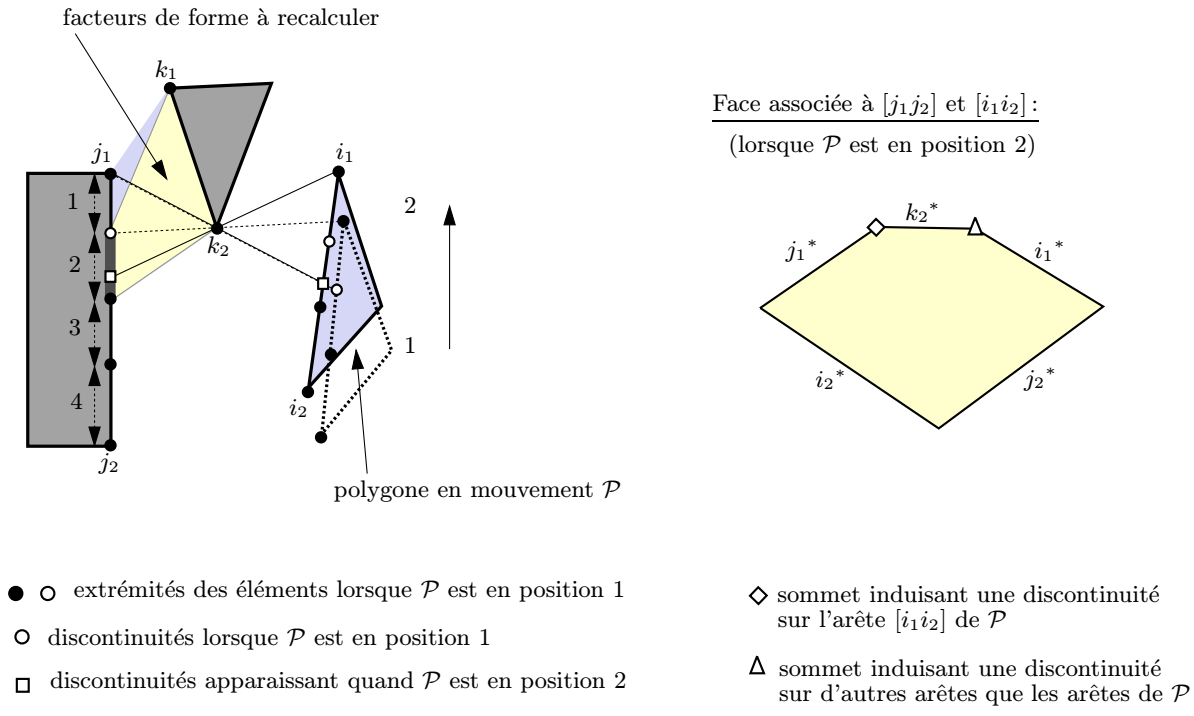
polygone $\mathcal{P}$ s'est déplacé. La figure 7.16 illustre le cas des faces dont un des deux objets associés est l'objet en mouvement. Pour ce type de faces, les sommets considérés pour le recalcul des discontinuités sont de deux sortes. On distingue : les sommets induisant des discontinuités sur l'objet en mouvement (sommets représentés par $\diamond$), et les sommets induisant une discontinuité sur d'autres objets que l'objet en mouvement (sommets représentés par $\triangle$). La figure 7.17 illustre le cas des faces dont une des arêtes associées à des objets qui interfèrent est associée à l'objet en mouvement. Pour ce type de faces, les sommets considérés pour le recalcul des discontinuités sont uniquement les sommets induisant une discontinuité sur d'autres objets que l'objet en mouvement.

Recalculs supplémentaires de facteurs de forme

La mise à jour des discontinuités induit une modification de l'échantillonnage, si on souhaite conserver un échantillonnage en fonction des discontinuités. Outre la mise à jour des facteurs de forme pour les faces *liées* à l'objet en mouvement comme dans le paragraphe 7.1.2, il faut donc aussi recalculer les facteurs de forme entre les éléments modifiés et tous les éléments qu'ils «voient» dans la scène. Pour un élément donné modifié sur un objet $\mathcal{O}_i$, on accède à l'ensemble des éléments qu'il «voit» dans la scène à partir des faces dont un des deux objets associés est l'objet $\mathcal{O}_i$. Une face f donnée dont un des deux objets associés est l'objet $\mathcal{O}_i$ ne sera effectivement considérée, pour un élément donné, que si l'élément considéré appartient à la partie mutuellement visible définie sur $\mathcal{O}_i$ à partir de la face f.

On peut voir dans les figures 7.16 et 7.17, différents exemples de facteurs de forme qu'il faut recalculer à cause de l'apparition de nouvelles discontinuités. Par exemple, dans l'exemple 1 de la figure 7.16, une discontinuité apparaît sur l'élément 2 lorsque le polygone $\mathcal{P}$ est dans la position 2. Cet élément va être découpé selon cette discontinuité. On devra ensuite recalculer les facteurs de forme entre les deux nouveaux éléments obtenus et les éléments de l'arête de polygone $[k_1k_2]$ qui sont visibles depuis ces deux nouveaux éléments. Ces éléments de $[k_1k_2]$ sont accessibles facilement à partir de la face associée aux arêtes de polygones $[j_1j_2]$ et $[k_1k_2]$.

Exemple 1



Exemple 2

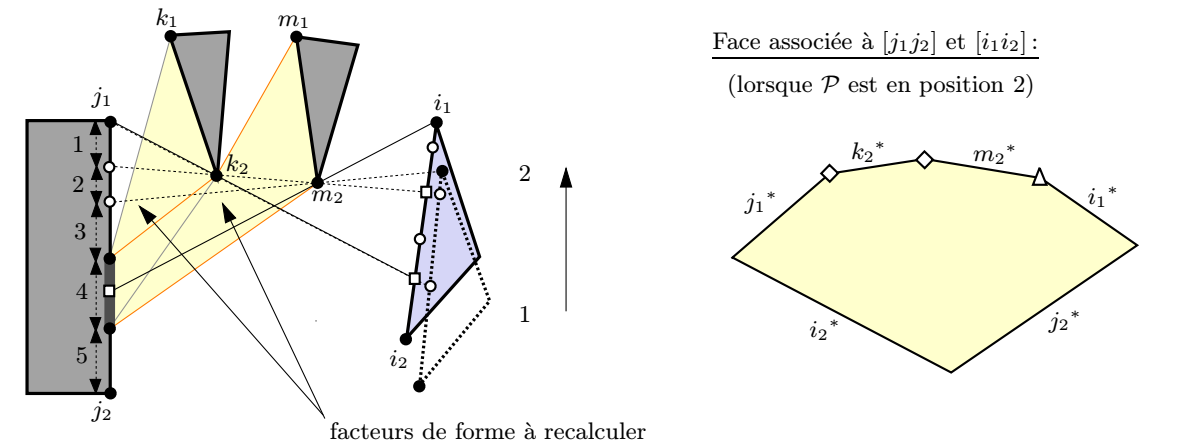


FIG. 7.16 - *Recalcul des discontinuités dans le cas de faces dont un des deux objets associés est l'objet en mouvement.*

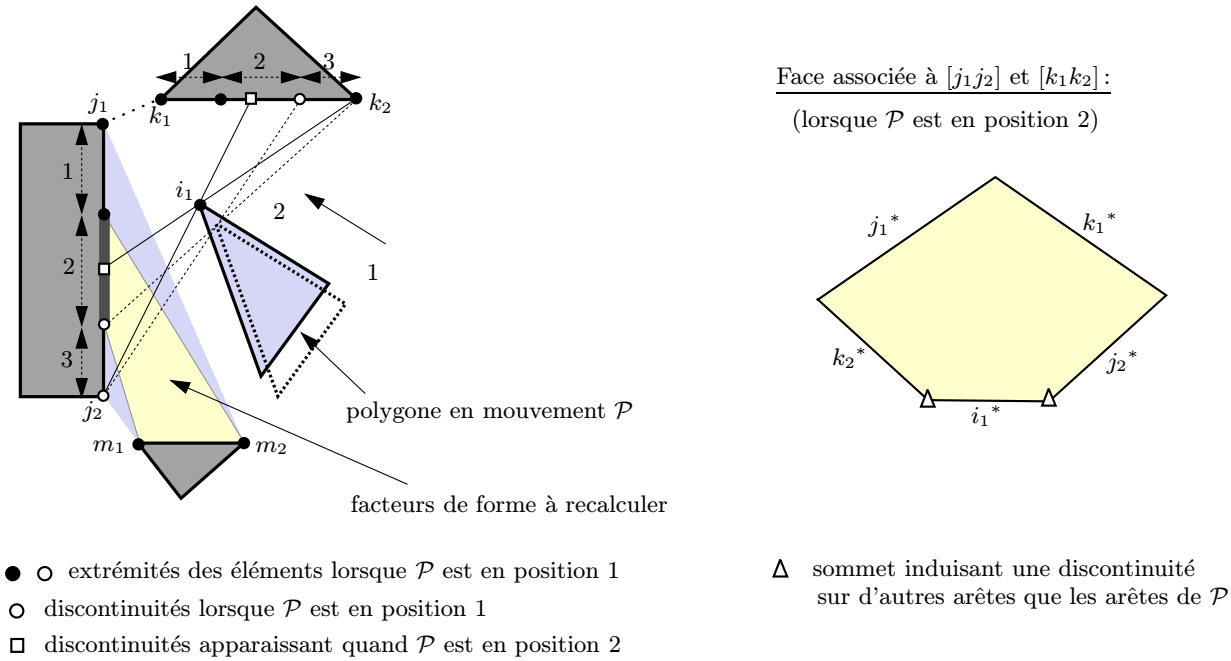


FIG. 7.17 - *Recalcul des discontinuités dans le cas de faces dont une des arêtes associées à des objets qui interfèrent est associée à l'objet en mouvement.*

7.2 Déplacement avec changement topologique dans la visibilité

7.2.1 Changements élémentaires de visibilité

Lorsqu'un objet se déplace dans une scène, il peut induire des changements dans les relations de visibilité entre objets. Il peut cacher deux objets qui se voyaient mutuellement, ou il peut rendre mutuellement visibles deux objets qui étaient précédemment cachés.

Dans le cas des scènes polygonales, tout changement topologique dans la visibilité peut en fait être réduit aux *changements élémentaires* entre trois sommets de polygones. Soient p_1, p_2, et p_3 trois sommets de polygones. Supposons que le point p_2 se déplace entre les points p_1 et p_3. Au cours du déplacement de p_2, un changement topologique dans la visibilité se produit quand les trois sommets deviennent alignés puis changent de position relative : le sommet p_2 initialement au dessus de la droite $(p_1 p_3)$ passe en dessous de cette droite ou vice versa (cf. figure 7.18). La visibilité entre les points p_1 et p_3 est alors modifiée : s'ils étaient mutuellement visibles, ils sont alors cachés par l'obstacle en p_2, et s'ils étaient cachés, ils sont alors mutuellement visibles.

La figure 7.19 montre les modifications qui se produisent dans l'espace dual, lors des changements élémentaires de visibilité de la figure 7.18. Soient $p_1{}^*$, $p_2{}^*$ et $p_3{}^*$ les droites duales associées respectivement aux points p_1, p_2 et p_3. Lorsque le point p_2 se déplace, l'équation de sa droite duale est modifiée. Lorsque les points p_1, p_2 et p_3 deviennent alignés dans la scène, les droites $p_1{}^*$, $p_2{}^*$ et $p_3{}^*$ se coupent en un même point dans l'espace dual. Lorsque les points p_1 et p_3 sont mutuellement visibles, leurs droites duales s'intersectent en un sommet du complexe (sommet v_{13} sur la figure 7.19).

Regardons maintenant plus en détail les éléments du complexe au voisinage des trois droites duales $p_1{}^*$, $p_2{}^*$ et $p_3{}^*$. Différentes modifications interviennent lors du déplacement du point p_2.

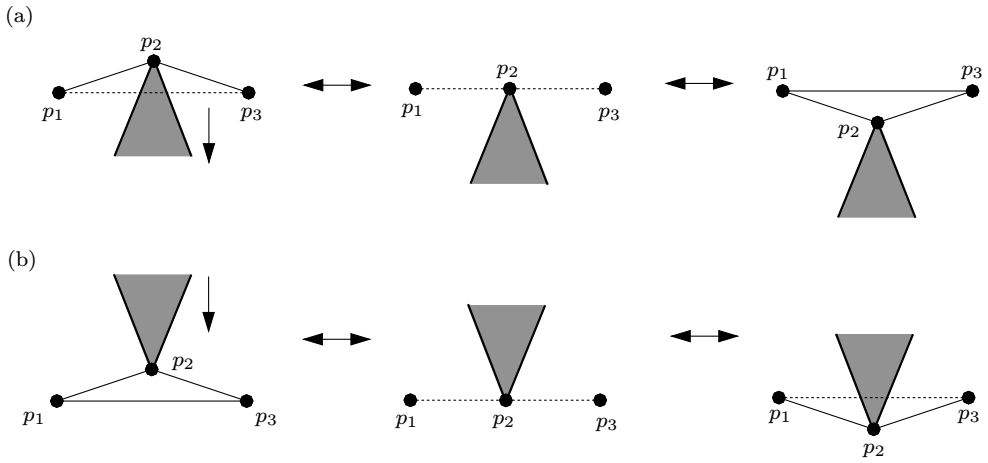


FIG. 7.18 - *Changements élémentaires de visibilité.*

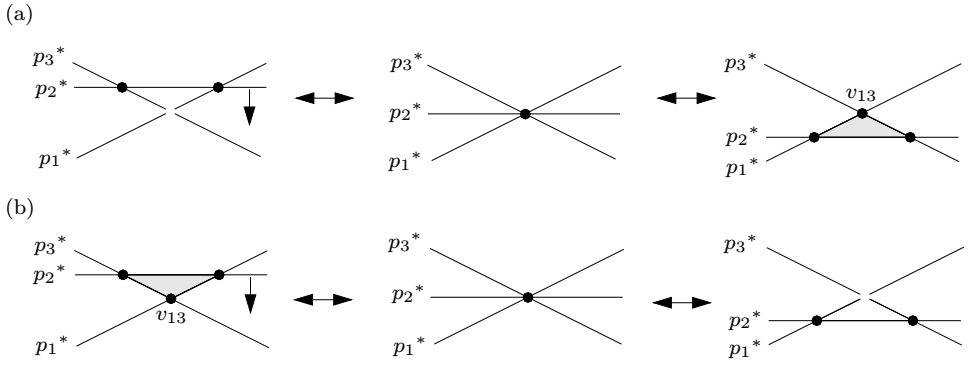


FIG. 7.19 - *Changements élémentaires dans l'espace dual lors d'un changement de visibilité.*

Les changements de base communs à toutes les configurations géométriques correspondant aux deux situations de la figure 7.18 sont illustrés sur la figure 7.20. Par exemple, dans le cas de la

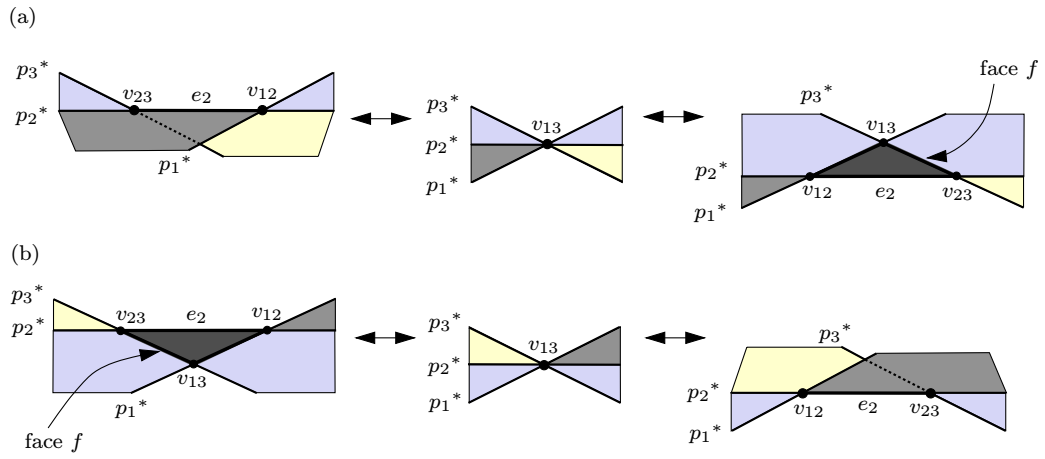


FIG. 7.20 - *Changements de base dans le complexe lors d'un changement de visibilité.*

première situation (cf. schémas (a)), en considérant les différents schémas de gauche à droite : l'arête e_2 du complexe est détruite ; la face f, les trois arêtes qui la bordent et le sommet v_{13} sont créés ; les relations d'incidences entre les arêtes et les sommets v_{12} et v_{23} sont modifiées, ainsi que les relations d'incidences entre les arêtes et les faces. De façon similaire, si on considère les mêmes schémas de droite à gauche, la face f va être détruite. Les schémas de la figure 7.20 présentant les modifications communes pour les différentes configurations géométriques doivent cependant être complétés, sachant qu'on recense cinquante configurations géométriques possibles autour de trois points et que les modifications complètes au niveau du complexe sont différentes pour chacune de ces configurations. Ces cinquante configurations sont illustrées dans [Riv97]. Le type des arêtes créées dépend de la configuration géométrique. De plus, la suppression (ou création) de l'arête e_2 et des arêtes bordant la face f affecte d'autres faces incidentes aux arêtes portées par les droites duales $p_1{}^*$, $p_2{}^*$ et $p_3{}^*$ que les faces indiquées dans la figure 7.20 (cf. [Riv97]). On peut voir les modifications complètes nécessaires pour un cas donné dans la figure 7.21. Les modifications restent toujours locales quel que soit le cas considéré et affectent uniquement les éléments du complexe incidents aux droites duales des sommets de polygones en mouvement. La mise à jour du complexe, une fois que l'on a trouvé le triplet (p_1, p_2, p_3) pour lequel il se produit un changement de visibilité, peut donc être effectuée en *temps constant* : il y a un nombre constant de cas possibles (cf. figure 7.21 qui montre un de ces cas) et les modifications sont faites en temps constant pour chacun de ces cas.

7.2.2 Mise à jour dynamique du complexe de visibilité

Les changements de visibilité dans une scène polygonale survenant lors du déplacement de points se traduisent par une suite de modifications topologiques élémentaires du complexe de visibilité. Lorsqu'un objet se déplace dans une scène, il suffit donc de traiter les changements topologiques dans la visibilité dans l'ordre, pour mettre à jour le complexe.

Rivière propose dans [Riv97] une méthode pour mettre à jour le complexe pour une scène

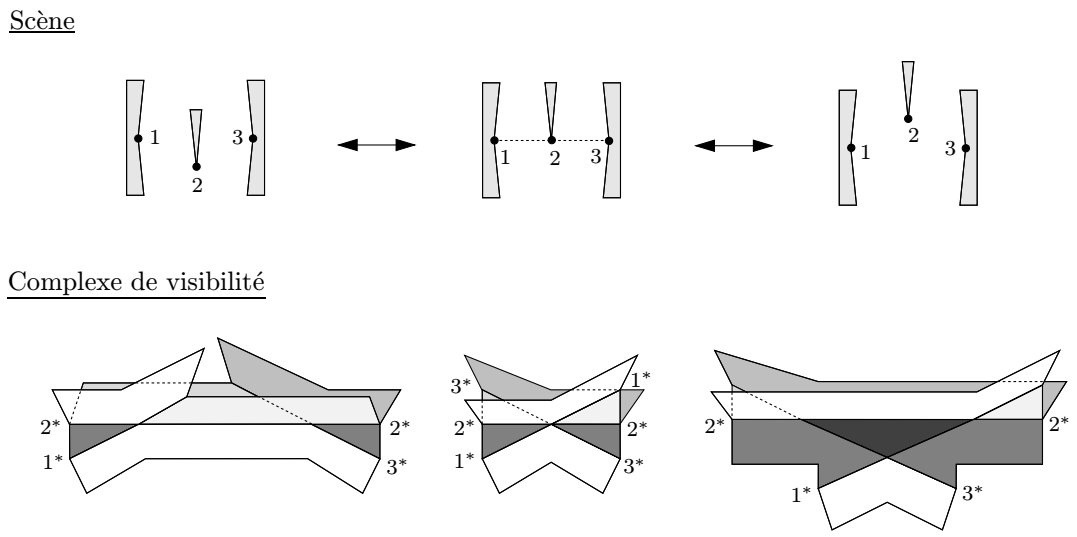


FIG. 7.21 - *Exemple de changement de visibilité et modifications correspondantes au niveau du complexe.*

polygonale «mouvante» où les sommets de polygones ont une trajectoire connue à l'avance. Pour maintenir le complexe, il faut maintenir la liste des changements de visibilité à venir. La méthode est basée sur le principe qu'un changement de visibilité se produit quand, dans le complexe, une arête devient réduite à un sommet (cf. figure 7.20 où l'arête concernée est l'arête e_2). Pour chaque arête associée à un changement élémentaire de visibilité, on calcule une «date de mort» qui est la date où le changement de visibilité aura lieu (date correspondant au moment où l'arête sera réduite à un sommet). Il suffit alors d'effectuer les changements associés aux arêtes dans l'ordre de leur date de mort. A chaque changement, il faut mettre à jour les arêtes à considérer ainsi que leurs dates de mort (cf. [Riv97]) pour plus de détails). Cependant le changement est local, donc les modifications sont aussi locales et se font en temps constant.

En utilisant une queue de priorité, on peut traiter les changements élémentaires de visibilité dans l'ordre, et après une initialisation en temps $\mathcal{O}(m_0 \log m_0)$, on peut maintenir le complexe de visibilité en temps $\mathcal{O}(\log n)$ à chaque changement élémentaire de visibilité (avec n le nombre d'arêtes de polygones dans la scène et m_0 la taille initiale du complexe (c'est à dire le nombre de sommets du complexe)). A chaque instant, on a $\mathcal{O}(m)$ arêtes du complexe à considérer. La mise à jour de la queue de priorité à chaque changement élémentaire de visibilité prend donc un temps $\mathcal{O}(\log m) = \mathcal{O}(\log n)$, sachant que le nombre m de sommets du complexe est $\Omega(n)$ et $\mathcal{O}(n^2)$.

7.2.3 Recalculs de facteurs de forme nécessaires

D'après le paragraphe 7.2.1, les changements topologiques dans la visibilité survenant au cours du déplacement d'un objet se traduisent dans le complexe de visibilité par entre autres la création ou la destruction de faces.

Dans le cas d'un déplacement avec changement topologique dans la visibilité, il faut donc mettre à jour les facteurs de forme pour les faces *liées* à l'objet en mouvement comme dans le paragraphe 7.1.2. Mais il faut aussi mettre à zéro les facteurs de forme correspondant aux faces

détruites et calculer les facteurs de forme pour les faces créées.

7.3 Conclusion

Nous avons conçu des algorithmes efficaces pour la mise à jour des facteurs de forme dans le cas d'un objet en mouvement. Le complexe de visibilité est très utile dans ce contexte car il permet d'identifier, puis de mettre à jour seulement les facteurs de forme strictement nécessaires. Les algorithmes que nous avons présentés pour les environnements dynamiques n'ont pas été implémentés. Nous avons cependant réalisé un certain nombre de tests qui nous ont permis de visualiser les modifications induites par le mouvement d'un objet, tant au niveau de la scène qu'au niveau du complexe de visibilité. Nous avons ainsi pu constater que les modifications sont très localisées.

La figure 7.22 montre un ensemble d'images réalisées pour une scène constituée d'une pièce contenant trois objets dont une source. La source correspond au carré, et le rectangle se déplace dans la scène. Le complexe de visibilité associé à la scène, ainsi que la solution de radiosité sont recalculés complètement, après chaque changement. La scène est représentée en pseudo-3D. Les valeurs de radiosité sont projetées sur les deux côtés des murs afin d'accroître la quantité d'information vue depuis un point de vue donné. Le complexe de visibilité correspondant est représenté avec les arêtes en bleu. Les faces externes sont représentées en gris transparent, et les faces *liées* au rectangle qui se déplace sont affichées en rouge ; elles correspondent aux facteurs de forme modifiés. Les autres faces ne sont pas représentées car elles ne changent pas (et aussi par souci de clarté). On peut voir ici que les modifications du complexe de visibilité sont localisées autour des arêtes associées aux sommets du rectangle qui se déplace.

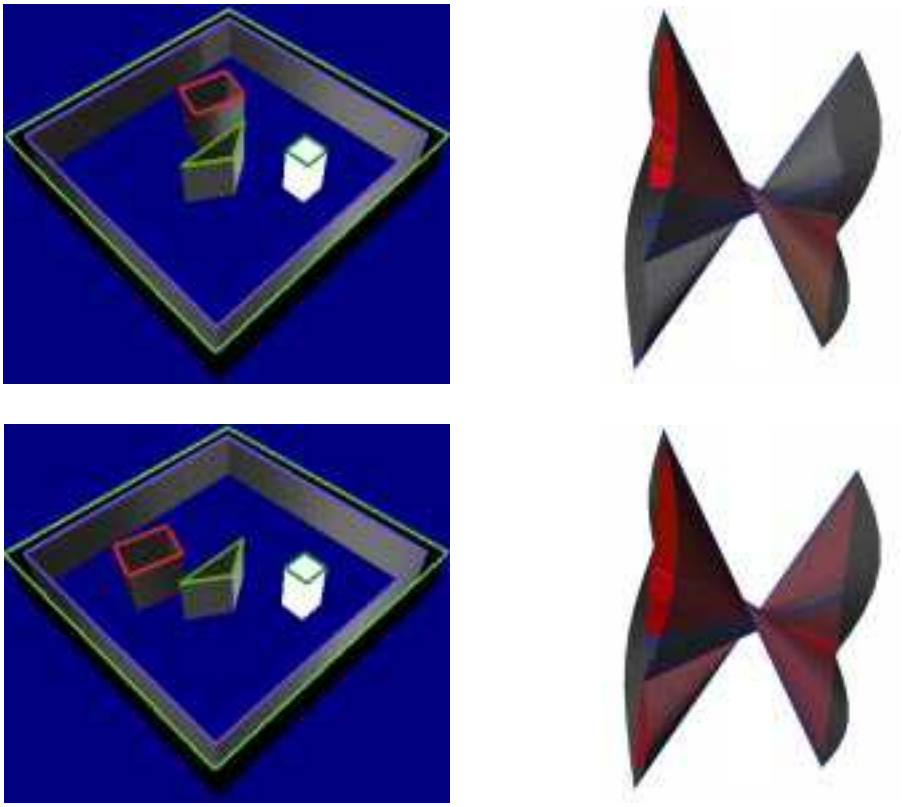


FIG. 7.22 - *Exemple de scène avec trois objets à l'intérieur d'une pièce.*

Conclusion

Nous avons étudié dans cette thèse l'utilisation pour le calcul de radiosité d'une nouvelle structure de données - le complexe de visibilité - développée récemment en géométrie algorithmique. Notre but était de montrer qu'une structure de données bien adaptée représentant les relations de visibilité dans la scène pouvait permettre de simplifier les calculs dans le cadre de la radiosité, mais aussi de les optimiser en permettant de se limiter aux calculs strictement nécessaires, et cela dans le cas de scènes statiques mais aussi de scènes dynamiques. Compte tenu de la difficulté du problème en 3D et notamment de la complexité géométrique des relations de visibilité, nous nous sommes d'abord intéressés au cas 2D.

Nous avons procédé en deux temps : nous avons d'abord étudié l'utilisation du complexe de visibilité dans le cas des scènes statiques, puis nous avons considéré le cas des scènes dynamiques.

Nos travaux dans le cas statique ont permis de montrer que le complexe de visibilité est très utile pour le calcul de radiosité pour les scènes statiques :

- Le complexe de visibilité permet de calculer le maillage de discontinuité de façon simple, alors que ce calcul est traditionnellement très coûteux car il nécessite de nombreux calculs géométriques. Les sommets du complexe correspondent en fait aux lignes critiques qui induisent les points de discontinuités dans la scène. Une fois que le complexe de visibilité est construit, le calcul du maillage de discontinuité est effectué, en considérant les sommets du complexe, en temps $\mathcal{O}(m)$, avec m le nombre de sommets du complexe qui est $\Omega(n)$ et $\mathcal{O}(n^2)$ (n correspond au nombre d'objets dans le cas des scènes constituées d'objets convexes, et au nombre d'arêtes de polygones dans le cas des scènes polygonales).

- Le complexe permet d'éviter les calculs inutiles. Grâce à lui, on peut effectivement considérer uniquement les paires d'objets (ou d'arêtes de polygones) mutuellement visibles, et pour une paire donnée, accéder uniquement aux parties mutuellement visibles de ces deux objets (ou arêtes de polygones). On peut ainsi facilement se limiter aux calculs de facteurs de forme strictement nécessaires.

- Le complexe permet de plus de calculer les facteurs de forme de manière efficace en permettant de connaître facilement l'ensemble des objets qui sont susceptibles d'interférer entre deux éléments donnés dans la scène.

- Nous avons aussi pu constater en pratique que dans le cas de scènes constituées de pièces contenant des objets (scènes typiquement utilisées pour le calcul de radiosité), on obtient un complexe de visibilité de taille linéaire (ce qui correspond à la complexité minimale dans le cas 2D).

Outre les avantages dans le cas statique, le complexe de visibilité est aussi très utile pour les environnements dynamiques, lorsqu'un objet se déplace :

- Grâce au complexe de visibilité, on peut mettre à jour efficacement le maillage de discontinuité en identifiant de manière exacte les discontinuités qui doivent être recalculées.
- Le complexe permet aussi de détecter les facteurs de forme qui doivent être strictement recalculés, et non pas un sur-ensemble grossier de facteurs de forme comme c'était le cas dans les méthodes développées jusqu'alors.
- Le complexe permet de plus de recalculer ces facteurs de forme de manière efficace.
- Le complexe peut aussi être mis à jour très facilement, de par sa structure, en fonction des relations de visibilité qui changent dans la scène, lorsqu'un objet se déplace.

Perspectives

Nos travaux en 2D ont permis de montrer qu'une structure de données telle que le complexe de visibilité était bien adaptée pour le calcul de radiosité dans le cadre de scènes statiques, mais aussi de scènes dynamiques. Il serait intéressant dans ce contexte, avant de passer à la 3D, d'utiliser le complexe afin d'étudier plus précisément comment la solution de radiosité est affectée dans le cas des environnements dynamiques. Ceci permettrait de voir comment le mouvement d'un objet se répercute au niveau de la solution de radiosité, de quantifier l'importance que le déplacement d'un objet peut avoir au niveau de l'éclairage total de la scène, et notamment d'identifier des configurations où l'effet dû au déplacement d'un objet est négligeable pour l'éclairage total de la scène.

L'étude en 2D n'est cependant pas une fin en soi mais plutôt un tremplin vers la 3D. Les résultats obtenus en 2D sont effectivement de bonne augure pour le cas 3D. Deux approches sont envisageables.

De nombreuses scènes 3D, comme les scènes architecturales par exemple, sont en fait des scènes «$2\frac{1}{2}$D», où les occlusions sont principalement causées par les murs. Une première approche serait donc d'utiliser les projections de ces murs dans un plan horizontal, et de traiter la visibilité dans le plan 2D résultant. Ceci permettrait déjà d'obtenir un bon sous-ensemble des objets mutuellement visibles.

Une deuxième approche serait bien évidemment de construire une structure 3D équivalente au complexe de visibilité 2D. Fort de l'expérience acquise en 2D, un équivalent 3D du complexe de visibilité a d'ailleurs été proposé récemment par Durand *et al.* [DDP96]. Cette structure repose sur le même principe que celui utilisé dans le cas 2D, qui consiste à décrire la visibilité par des segments libres maximaux. Durand *et al.* exposent brièvement les avantages qu'une telle structure pourrait avoir notamment pour le calcul des facteurs de forme, et du maillage de discontinuité. Cette structure reste cependant très lourde car elle décrit l'ensemble des événements de visibilité pour une scène 3D, ainsi que toutes les relations d'adjacence entre ces événements. Le complexe de visibilité 3D est en effet une structure 4D plongée en 5D, sachant qu'il correspond à la partition de l'ensemble des segments libres maximaux de l'espace 3D en fonction des objets qu'ils touchent, et sa taille est $\Omega(n)$ et $\mathcal{O}(n^4)$ pour les scènes polygonales (avec n le nombre de polygones dans la scène). Le complexe 3D est donc une structure compliquée, difficile

à implémenter. Il nécessiterait la mise en oeuvre d'algorithmes de construction complexes, et il serait difficile à parcourir à cause des multiples niveaux d'adjacences, donc peu pratique à utiliser.

Durand *et al.* [DDP97] ont cependant introduit très récemment une nouvelle structure - le squelette de visibilité - qu'ils ont implémentée pour des scènes polygonales. Cette structure est beaucoup moins lourde puisqu'elle représente uniquement les sommets (composantes 0D) et les arêtes (composantes 1D) du complexe de visibilité 3D. Ils ont utilisé cette structure pour différentes applications : notamment le calcul de la partie d'un polygone visible depuis un sommet de polygone donné, le calcul du maillage de discontinuité entre deux polygones quelconques de la scène, la détermination de la liste exacte des objets réduisant la visibilité entre deux polygones, ainsi que la détermination des paires de polygones entre lesquelles un objet donné interfère. Cette dernière information est très utile, comme on a pu le voir dans cette thèse, pour pouvoir détecter les facteurs de forme qui doivent être recalculés dans le cas où un objet se déplace.

Cette structure n'a pour l'instant pas été utilisée dans un système de simulation globale de l'éclairage. Il serait très intéressant de l'utiliser pour le calcul de radiosité et notamment pour le calcul des facteurs de forme. Elle semble aussi très prometteuse dans le cas des environnements dynamiques, où elle devrait permettre de déterminer les facteurs de forme qu'il faut nécessairement recalculer. Reste encore, avant cela, à résoudre tous les problèmes théoriques concernant la mise à jour d'une telle structure dans le cas dynamique, en fonction des relations de visibilité qui changent dans la scène. Il serait aussi très utile de développer une approche hiérarchique de cette structure pour pouvoir l'utiliser pour des scènes très complexes.

Annexe A

Dualité et complexe de visibilité

Le principe de *dualité* permettant de transformer une droite en un point est souvent utilisé en 2D pour résoudre des problèmes mettant en jeu des droites, sachant qu'il est plus facile de manipuler des points que des droites. Nous nous intéressons ici à deux types de dualités classiques que nous appelons dualité (θ, u) et dualité (a, b), et nous étudions ces deux dualités dans le cadre de leur utilisation pour le complexe de visibilité. La dualité (θ, u) est bien adaptée pour visualiser les éléments du complexe dans le cas des objets convexes (c'est à dire des objets de type cercle, ellipse, etc.), et la dualité (a, b) est bien adaptée dans le cas des polygones.

A.1 Définition des dualités (θ, u) et (a, b)

Dualité (θ, u) :

Dans le cas de la dualité (θ, u), on considère *la transformation duale* qui à toute droite d'équation polaire : $y \cos\theta - x \sin\theta - u = 0$ associe le point de coordonnées (θ, u) dans l'espace dual, et réciproquement.
L'angle θ correspond, dans la scène, à l'angle de la droite avec l'axe des abscisses et u à sa distance algébrique avec l'origine du repère de la scène (cf. figure A.1).

Remarque : Cette transformation s'applique à toutes les droites du plan.

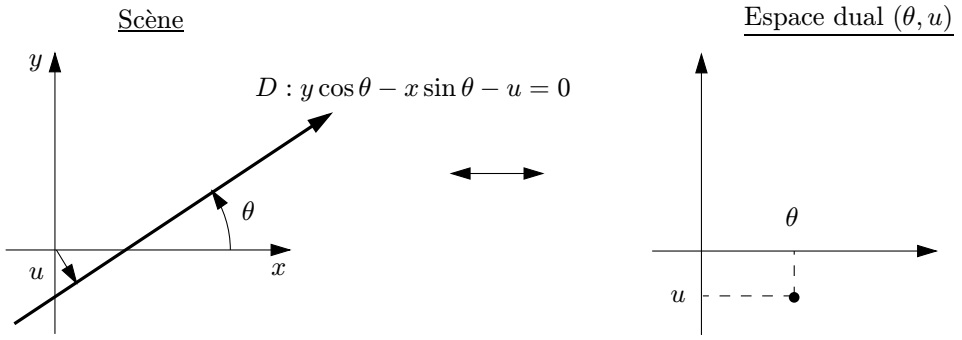


FIG. A.1 - *Dualité* (θ, u).

Dualité (a, b) :

Dans le cas de la dualité (a, b), on considère la relation qui à une droite d'équation $y = ax - b$ (respectivement un point de coordonnées $(a, -b)$) associe le point de coordonnées (a, b) (respectivement la droite d'équation $y = ax + b$) (cf. figure A.2).

Remarque : Cette transformation ne peut pas s'appliquer aux droites verticales. Il faut donc faire un traitement spécifique dans ce cas.
Si nous considérons l'ensemble des droites du plan non verticales et orientées selon les abscisses croissantes, l'angle d'une droite avec l'axe des abscisses sera compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

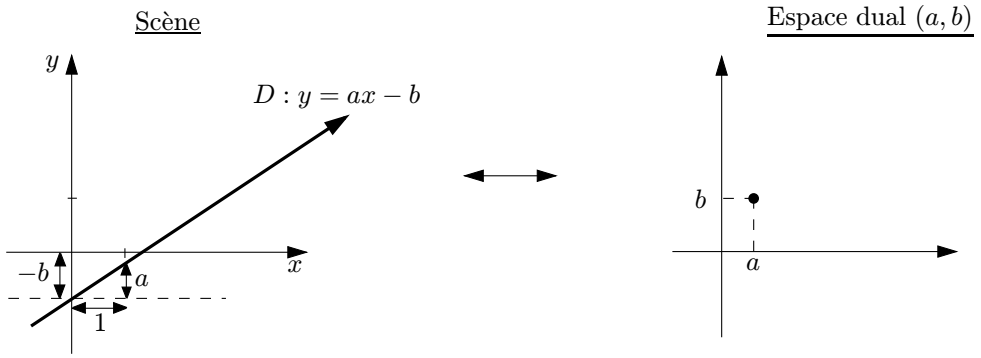


FIG. A.2 - *Dualité* (a, b).

A.2 Utilisation de la dualité pour visualiser les éléments du complexe

Considérons une scène 2D constituée de polygones. Un polygone est formé d'un ensemble d'arêtes (ou segments) délimitées par deux sommets.
Soit P un polygone de la scène. On associe à chaque sommet de P une courbe dans l'espace dual, correspondant à l'ensemble des droites passant par ce sommet dans la scène.
Soit M_{P_i} le $i^{\text{ème}}$ sommet du polygone P. M_{P_i} a pour coordonnées (x_{P_i}, y_{P_i}) dans le repère de la scène.
Dans le cas de la dualité (θ, u), on associe à M_{P_i} une courbe u_i d'équation :
$u_i(\theta) = y_{P_i} \cos\theta - x_{P_i} \sin\theta$.
Dans le cas de la dualité (a, b), on associe à M_{P_i} une droite b_i d'équation :
$b_i(a) = x_{P_i} a - y_{P_i}$.

La courbe associée à M_{P_i} dans l'espace dual (courbe u_i dans l'espace dual (θ, u) ou droite b_i dans l'espace dual (a, b)) représente l'ensemble des droites passant par M_{P_i} dans la scène. L'ensemble des points, dans l'espace dual, compris entre les courbes associées respectivement à M_{P_i} et $M_{P_{i+1}}$ correspond à l'ensemble des droites intersectant l'arête du polygone P délimitée par les sommets M_{P_i} et $M_{P_{i+1}}$ dans la scène.
La face du complexe associée à deux arêtes de polygones correspond à l'ensemble des droites intersectant ces deux arêtes et aucun autre polygone se trouvant entre les deux. Une face est donc délimitée par un ensemble de courbes $u(\theta)$ dans le cas de la dualité (θ, u) et par un ensemble de droites $b(a)$ dans le cas de la dualité (a, b).

Bien que ne traitant pas le cas des droites verticales, la dualité (a, b) présente donc un grand avantage vu qu'avec cette dualité les faces du complexe de visibilité sont délimitées par des droites et non plus par des courbes sinusoïdales comme avec la dualité (θ, u).

La figure A.3 montre un exemple de deux arêtes de polygones, et les figures A.4 et A.5 la face du complexe de visibilité associée à ces deux arêtes dans les deux dualités : (θ, u) et (a, b).

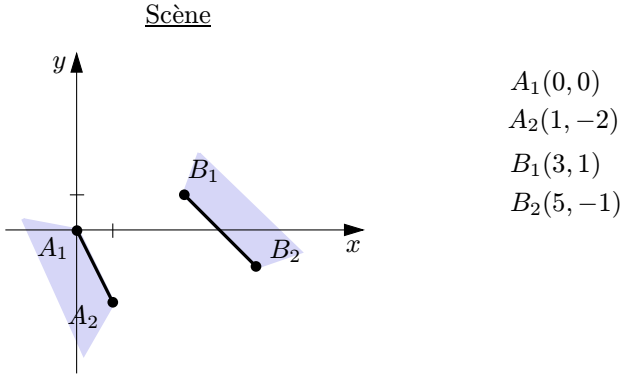


FIG. A.3 - *Exemple de deux arêtes de polygones.*

On constate que les faces obtenues pour les deux mêmes arêtes de polygones avec les dualités (θ, u) et (a, b), ont une topologie identique : elles possèdent le même nombre d'arêtes inférieures et supérieures, le même nombre de sommets, et les points associés aux différentes arêtes incidentes aux sommets de la face restent inchangés. Ces faces ont cependant un aspect différent puisque les arêtes ont des équations différentes avec les deux dualités.

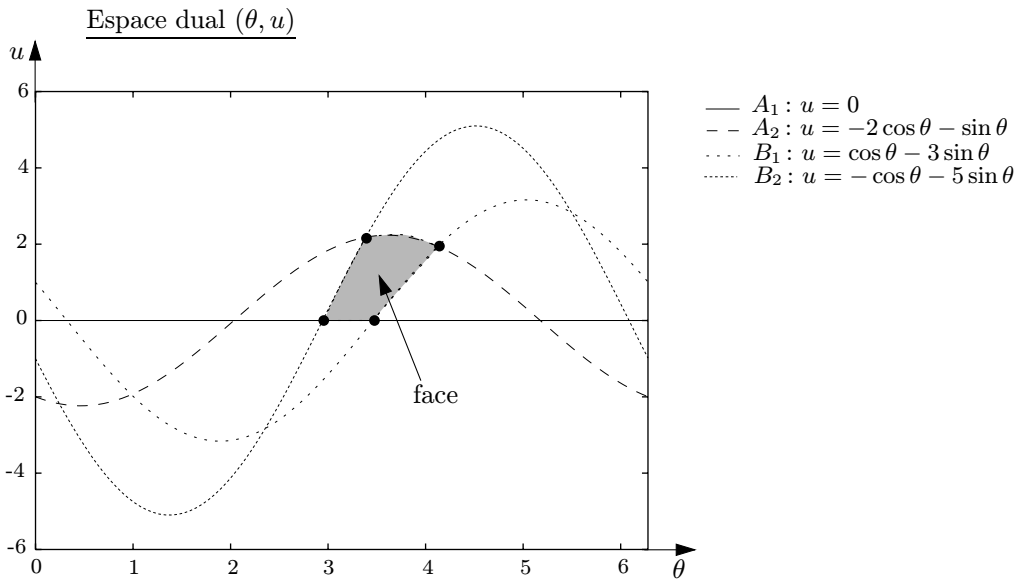


FIG. A.4 - *Face du complexe avec la dualité* (θ, u).

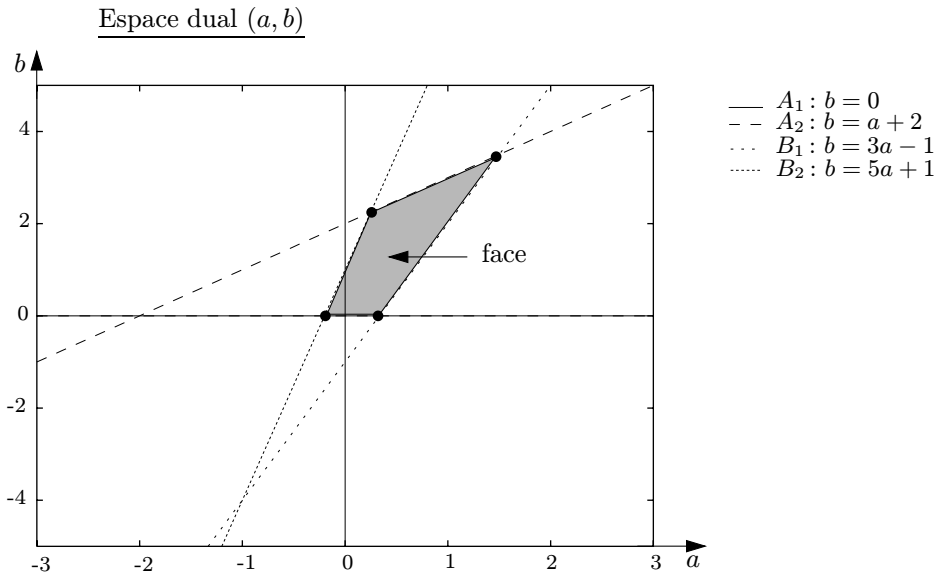


FIG. A.5 - *Face du complexe avec la dualité* (a, b).

Annexe B

Notions de Géométrie Intégrale

Les différentes notions présentées ici sont issues du livre de Santalo sur la Géométrie Intégrale [San76] qui étudie et donne des mesures des ensembles de droites dans le plan.

Sachant que la mesure d'un ensemble de droites est exprimée au moyen d'un *produit extérieur*, nous commencerons par rappeler la définition du *produit extérieur*, avant d'introduire des notions plus spécifiques concernant la géométrie intégrale.

B.1 Rappels sur le produit extérieur $\wedge$

Les expressions à l'intérieur d'une intégrale double sur $\mathbb{R}^2$ contiennent le produit $dx_1 dx_2$ qui, par le changement de variables $x_i \to x'_i$, devient :

$$dx_1 dx_2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} - \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \right) dx'_1 dx'_2 \ . \tag{B.1}$$

Ceci montre que le «produit» $dx_1 dx_2$ qui apparaît dans une intégrale double n'est pas le produit ordinaire des différentielles $dx_i = (\partial x_i / \partial x'_1) dx'_1 + (\partial x_i / \partial x'_2) dx'_2$ $(i = 1, 2)$ mais une autre sorte de produit qui est appelé *produit extérieur* de dx_1 et dx_2 et est dénoté par $\wedge$.
Le *produit extérieur* vérifie les propriétés fondamentales suivantes :

$$\begin{cases} dx_1 \wedge dx_2 &= -dx_2 \wedge dx_1 \\ dx_i \wedge dx_i &= 0 \end{cases}$$

En utilisant ces propriétés, on a, par le changement de variables $x_i \to x'_i$:

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} dx'_2 \right) \wedge \left(\frac{\partial x_2}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} dx'_2 \right) \\ &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} - \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \right) dx'_1 \wedge dx'_2 \ , \end{aligned}$$

ce qui concorde bien avec la règle classique B.1.

B.2 Densité pour des ensembles de droites

Une droite G dans le plan est déterminée par l'angle ϕ (angle entre l'axe des abscisses et la droite perpendiculaire à G qui passe par l'origine ; $0 \leq \phi \leq 2\pi$), et par sa distance p à l'origine ($0 \leq p$) (cf. figure B.1).

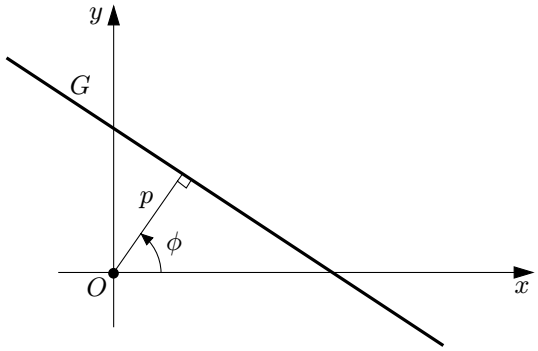


FIG. B.1 - *Représentation d'une droite dans le plan.*

La droite G a donc pour équation :

$$x \cos\phi + y \sin\phi - p = 0 \ . \tag{B.2}$$

La mesure d'un ensemble X de droites peut être définie par toute intégrale de la forme :

$$m(X) = \int_X f(p, \phi) dp \wedge d\phi \tag{B.3}$$

où la fonction f doit être choisie selon certains critères dépendant de la nature du problème. En géométrie intégrale et dans la théorie de la probabilité géométrique, la fonction f doit vérifier le critère suivant : *la mesure $m(X)$ doit être invariante par le groupe des déplacements dans le plan (donc invariante en translation et rotation).*

Soit un déplacement u défini par les composantes en translation (a, b) et par la rotation α. Le déplacement $u(a, b, \alpha) : P(x, y) \to P(x', y')$ est caractérisé par les équations :

$$\begin{cases} x' &= x \cos\alpha - y \sin\alpha + a \\ y' &= x \sin\alpha + y \cos\alpha + b \end{cases}$$

Par le déplacement u, la ligne B.2 se transforme en :

$$x \cos(\phi - \alpha) + y \sin(\phi - \alpha) - (p - a \cos\phi - b \sin\phi) = 0 \ .$$

En comparant avec l'équation B.2, on constate que les paramètres p, ϕ de G se transforment par le déplacement $u(a, b, \alpha)$ en :

$$\begin{cases} p' &= p - a \cos\phi - b \sin\phi \\ \phi' &= \phi - \alpha \end{cases}$$

En utilisant les différentes notions du paragraphe B.1, on constate que : $dp \wedge d\phi = dp' \wedge d\phi'$. La mesure de l'ensemble $X' = uX$ est donc :

$$m(X') = \int_X' f(p', \phi') dp' \wedge d\phi' = \int_X f(p - a \cos\phi - b \sin\phi, \phi - \alpha) dp \wedge d\phi \ . \tag{B.4}$$

Si on veut que $m(X)$ soit égal à $m(X')$ pour tout ensemble X, d'après les équations B.3 et B.4, on doit avoir : $f(p - a\cos\phi - b\sin\phi, \phi - \alpha) = f(p, \phi)$, et sachant que l'égalité doit être vérifiée pour tout déplacement u, on doit donc avoir : $f(p, \phi) =$ constante. En choisissant cette constante égale à l'unité, on a :

La mesure d'un ensemble de droites $G(p, \phi)$ est définie par l'intégrale, sur cet ensemble de droites, de la forme différentielle

$$dG = dp \wedge d\phi \ , \tag{B.5}$$

qui est appelée densité d'ensembles de droites.

B.3 Mesure des droites intersectant un ensemble convexe ou une courbe

Soit K un ensemble convexe borné. Prenons comme origine un point O appartenant à K et soit $p = p(\phi)$ la fonction support de K définie par rapport à O. D'après l'équation B.5, on a :

$$m(G : G \cap K \neq \emptyset) = \int_{G \cap K \neq \emptyset} dp \wedge d\phi = \int_0^{2\pi} p d\phi = L$$

où L est la longueur du contour de K. D'où :

La mesure de l'ensemble des droites qui intersectent un ensemble convexe borné K est égale à la longueur de son contour.

Remarque : Dans le cas d'une courbe, la longueur prise en compte sera deux fois la longueur effective de la courbe.

B.4 Mesure des droites intersectant deux ensembles convexes

Soient K_1 et K_2 deux ensembles convexes bornés dans le plan et soient L_1 et L_2 la longueur de leurs contours respectifs. Soit $\mathcal{C}_e$ le contour de l'enveloppe convexe de $K_1 \cup K_2$. Cette courbe $\mathcal{C}_e$ peut être interprétée intuitivement comme une courbe élastique fermée dessinée autour de K_1 et K_2. Et soit $\mathcal{C}_i$ la courbe élastique croisée construite autour de K_1 et K_2 (courbe fermée dessinée autour de K_1 et K_2 et qui se croise en un point situé entre K_1 et K_2) (cf. figure B.2). On note $\mathcal{L}_e$ la longueur de $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{L}_i$ la longueur de C_i.

(a) *La mesure de l'ensemble des droites qui intersectent à la fois K_1 et K_2 est égale à : $\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_e$.*

(b) *La mesure de l'ensemble des droites qui intersectent K_1 sans intersecter K_2 est égale à : $L_1 - (\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_e)$ et la mesure de l'ensemble des droites qui intersectent K_2 sans intersecter K_1 est égale à $L_2 - (\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_e)$.*

Remarque : Dans le cas de courbes, les égalités (a) et (b) sont toujours vérifiées. Il suffit de considérer les portions de courbes comme des contours fermés. La longueur prise en compte pour une portion de courbe donnée sera donc deux fois la longueur effective de la portion de courbe.

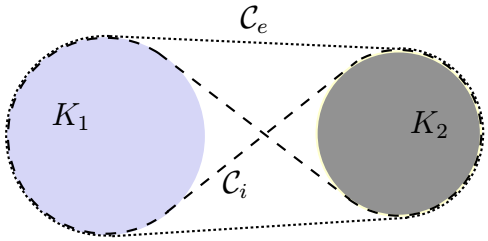


FIG. B.2 - *Exemple de deux ensembles convexes K_1 et K_2.*

Bibliographie

[ARB90] John M. Airey, John H. Rohlf, et Frederick P. Brooks. « Towards Image Realism with Interactive Update Rates in Complex Virtual Building Environments ». *Computer Graphics (Special issue on 1990 Symposium on Interactive 3D Graphics)*, 24(2):41–50, mars 1990.

[Arv94] James Arvo. « The Irradiance Jacobian for Partially Occluded Polyhedral Sources ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'94 Proceedings)*, p. 343–350, juillet 1994.

[Bre92] M. Quinn Brewster. *Thermal radiative transfer and properties.* Wiley-Interscience Publication, New York, 1992.

[BRW89] Daniel R. Baum, Holly E. Rushmeier, et James M. Winget. « Improving radiosity solutions through the use of analytically determined form-factors ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'89 Proceedings)*, volume 23, p. 325–334, juillet 1989.

[BS96] Gonzalo Besuievsky et Mateu Sbert. « The Multi-Frame Lighting Method: A Monte Carlo Based Solution for Radiosity in Dynamic Environments ». Dans X. Pueyo et P. Schröder, éditeurs, *Rendering Techniques '96 - Proc. of the Seventh Eurographics Workshop on Rendering*, p. 185–194, Porto, Portugal, juin 1996.

[BWCG86] Daniel R. Baum, John R. Wallace, Michael F. Cohen, et Donald P. Greenberg. « The Back-Buffer Algorithm: An Extension of the Radiosity Method to Dynamic Environments ». *The Visual Computer*, 2(5):298–306, septembre 1986.

[Cam91] A. Campbell. « *Modeling Global Diffuse Illumination for Image Synthesis* ». PhD thesis, Dept. of Computer Sciences, University of Texas at Austin, décembre 1991.

[Caz97] Frédéric Cazals. « *Structures de Données Hiérarchiques Non Récursives et Problèmes de Proximité* ». PhD thesis, Université Paris VII, avril 1997.

[CCWG88] Michael F. Cohen, Shenchang Eric Chen, John R. Wallace, et Donald P. Greenberg. « A Progressive Refinement Approach to Fast Radiosity Image Generation ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'88 Proceedings)*, volume 22, p. 75–84, août 1988.

[CG85] Michael F. Cohen et Donald P. Greenberg. « The hemi-cube: A radiosity solution for complex environments ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'85 Proceedings)*, volume 19, p. 31–40, août 1985.

[CGIB86] Michael F. Cohen, Donald P. Greenberg, David S. Immel, et Philip J. Brock. « An efficient radiosity approach for realistic image synthesis ». *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(3):26–35, mars 1986.

[Che90] Shenchang Eric Chen. « Incremental Radiosity: An Extension of Progressive Radiosity to an Interactive Image Synthesis System ». Dans Forest Baskett, éditeur, *Computer Graphics (SIGGRAPH'90 Proceedings)*, volume 24, p. 135–144, août 1990.

[CW93a] Shenchang Eric Chen et Lance Williams. « View Interpolation for Image Synthesis ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'93 Proceedings)*, p. 279–288, août 1993.

[CW93b] M. F. Cohen et J. R. Wallace. *Radiosity and Realistic Image Synthesis*. Academic Press Professional Inc, 1993.

[DDP96] Frédo Durand, George Drettakis, et Claude Puech. « The 3D visibility complex: a new approach to the problems of accurate visibility ». Dans X. Pueyo et P. Schröder, éditeurs, *Rendering Techniques '96 - Proc. of the Seventh Eurographics Workshop on Rendering*, p. 245–256, Porto, Portugal, juin 1996.

[DDP97] Frédo Durand, George Drettakis, et Claude Puech. « The Visibility Skeleton: A Powerful and Efficient Multi-Purpose Global Visibility Tool ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'97 Proceedings)*, août 1997. A paraître.

[DF94] George Drettakis et Eugene Fiume. « A Fast Shadow Algorithm for Area Light Sources Using Backprojection ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'94 Proceedings)*, p. 223–230, juillet 1994.

[Dor93] Julie O. Dorsey. « *Computer Graphics Techniques for Opera Lighting Design and Simulation* ». PhD thesis, Program of Computer Graphics, Cornell University, janvier 1993.

[DORP96] F. Durand, R. Orti, S. Rivière, et C. Puech. « Radiosity in flatland made visibly simple: Using the visibility complex for lighting simulation of dynamic scenes in flatland ». Dans *Proc. 12th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, p. V11–V12, 1996.

[DP95] F. Durand et C. Puech. « The Visibility Complex Made Visibly Simple ». Dans *Proc. 11th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, page V2, 1995.

[DS96] George Drettakis et François Sillion. « Accurate Visibility and Meshing Calculations for Hierarchical Radiosity ». Dans X. Pueyo et P. Schröder, éditeurs, *Rendering Techniques '96 - Proc. of the Seventh Eurographics Workshop on Rendering*, p. 269–278, Porto, Portugal, juin 1996.

[DS97] George Drettakis et François Sillion. « Interactive Update of Global Illumination Using Line-Space Hierarchy ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'97 Proceedings)*, août 1997. A paraître.

[DSG91] Julie DORSEY, François SILLION, et Donald GREENBERG. « Design and simulation of opera lighting and projection effets ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'91 Proceedings)*, volume 25, p. 41–50, juillet 1991.

[Dur95] F. DURAND. « Etude du complexe de visibilité ». Rapport du DEA d'Informatique de Grenoble, France, juin 1995.

[EG86] H. EDELSBRUNNER et L. J. GUIBAS. « Topologically sweeping an arrangement ». Dans *Proc. of the 18th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, p. 389–403, 1986.

[EOW83] Herbert EDELSBRUNNER, Mark H. OVERMARS, et Derick WOOD. Graphics in Flatland: A case study. Dans F. P. PREPARATA, éditeur, *Computational Geometry*, volume 1 de *Advances in Computing Research*, p. 35–59. JAI Press, London, England, 1983.

[Fun96] Thomas A. FUNKHOUSER. « Coarse-Grained Parallelism for Hierarchical Radiosity Using Group Iterative Methods ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'96 Proceedings)*, p. 343–352, août 1996.

[FvDFH90] James D. FOLEY, Andries van DAM, Steven K. FEINER, et John F. HUGHES. *Computer Graphics: Principles and Practice.* Addison-Wesley Publishing Company, second édition, 1990.

[FYT94] David A. FORSYTH, Chien YANG, et Kim TEO. « Efficient Radiosity in Dynamic Environments ». Dans *Proc. of the Fifth Eurographics Workshop on Rendering*, p. 313–323, Darmstadt, Germany, juin 1994.

[GCS91] Ziv GIGUS, John CANNY, et Raimund SEIDEL. « Efficiently Computing and Representing Aspect Graphs of Polyhedral Objects ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(6):542–551, juin 1991.

[GM90] Ziv GIGUS et Jitendra MALIK. « Computing the Aspect Graph for Line Drawings of Polyhedral Objects ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(2):113–122, février 1990.

[GSCH93] S. J. GORTLER, P. SCHRÖDER, M. F. COHEN, et P. HANRAHAN. « Wavelet Radiosity ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'93 Proceedings)*, p. 221–230, août 1993.

[GSG90] David W. GEORGE, Francois X. SILLION, et Donald P. GREENBERG. « Radiosity Redistribution for Dynamic Environments ». *IEEE Computer Graphics and Applications*, 10(4):26–34, juillet 1990.

[GTGB84] C. M. GORAL, K. E. TORRANCE, D. P. GREENBERG, et B. BATTAILE. « Modeling the Interaction of light between Diffuse Surfaces ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'84 Proceedings), 18:3*, p. 213–222, juillet 1984.

[Hec91] P. S. HECKBERT. « *Simulating Global Illumination Using Adaptive Meshing* ». PhD thesis, UC Berkeley, juin 1991.

[Hec92a] P. S. Heckbert. « Radiosity in Flatland ». Dans *Computer Graphics forum (EUROGRAPHICS'92 Proceedings), 11:3*, p. 181–192, septembre 1992.

[Hec92b] Paul S. Heckbert. « Discontinuity Meshing for Radiosity ». Dans *Proc. of the Third Eurographics Workshop on Rendering*, p. 203–216, Bristol, England, mai 1992.

[Hot54] H. C. Hottel. Radiant Heat Transmission. Dans W. H. McAdams, éditeur, *Heat Transmission*, Chapitre 4. McGraw-Hill, New York, 3rd édition, 1954.

[How82] John R. Howell. *A Catalog of Radiation Configuration Factors.* McGraw-Hill, New York, 1982.

[HSA91] Pat Hanrahan, David Salzman, et Larry Aupperle. « A Rapid Hierarchical Radiosity Algorithm ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'91 Proceedings), 25:4*, p. 197–206, juillet 1991.

[HSD94] N. Holzschuch, F. Sillion, et G. Drettakis. « An Efficient Progressive Refinement Strategy for Hierarchical Radiosity ». Dans *Proc. of the Fifth Eurographics Workshop on Rendering, Darmstadt, Germany*, p. 343–357, juin 1994.

[HT96] Stephen Hardt et Seth Teller. « High-Fidelity Radiosity Rendering at Interactive Rates ». Dans X. Pueyo et P. Schröder, éditeurs, *Rendering Techniques '96 - Proc. of the Seventh Eurographics Workshop on Rendering*, p. 71–80, Porto, Portugal, juin 1996.

[HW91] Eric A. Haines et John R. Wallace. « Shaft Culling for Efficient Ray-Cast Radiosity ». Dans P. Brunet et F. W. Jansen, éditeurs, *Photorealistic Rendering in Computer Graphics (Proceedings of the Second Eurographics Workshop on Rendering)*, p. 122–138. Springer Verlag, mai 1991.

[LTG92] Dani Lischinski, Fillipo Tampieri, et Donald P. Greenberg. « Discontinuity Meshing for Accurate Radiosity ». *IEEE Computer Graphics and Applications*, 12(6):25–39, novembre 1992.

[Mal88] T. J. Malley. « A shading method for computer generated images ». Master's thesis, Dept. of Computer Science, University of Utah, juin 1988.

[MS94] Stefan Müller et Frank Schöffel. « Fast Radiosity Repropagation For Interactive Virtual Environments Using A Shadow-Form-Factor-List ». Dans *Proc. of the Fifth Eurographics Workshop on Rendering*, p. 325–342, Darmstadt, Germany, juin 1994.

[NDR95] Jeffry Nimeroff, Julie Dorsey, et Holly Rushmeier. « A Framework for Global Illumination in Animated Environments ». Dans *Proc. of the Sixth Eurographics Workshop on Rendering*, p. 223–235, Dublin, Ireland, juin 1995.

[NN85] Tomoyuki Nishita et Eihachiro Nakamae. « Continuous tone representation of three-dimensional objects taking account of shadows and interreflection ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'85 Proceedings)*, volume 19, p. 23–30, juillet 1985.

[ODRP96] R. Orti, F. Durand, S. Rivière, et C. Puech. « Using the visibility complex for radiosity computation ». Dans *Applied Computational Geometry : Towards Geometric Engineering / ACM Workshop on Applied Computational Geometry, Philadelphia, May, 1996*, volume 1148 de *Lecture Notes in Computer Science*, p. 177–190, 1996.

[ORDP96] R. Orti, S. Rivière, F. Durand, et C. Puech. « Radiosity for dynamic scenes in flatland with the visibility complex ». Dans *Computer Graphics forum (EUROGRAPHICS'96 Proceedings), 15:3*, p. 237–248, Poitiers, France, août 1996.

[OW88] M. H. Overmars et E. Welzl. « New methods for computing visibility graphs ». Dans *Proc. of the 4th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, p. 164–171, 1988.

[PD90] H. Plantinga et C. Dyer. « Visibility, Occlusion, and the Aspect Graph ». *International Journal of Computer Vision*, 5(2):137–160, 1990.

[Pel95] M. Pellegrini. « Monte Carlo Approxiamtion of Form Factors with Error Bounded a Priori ». Dans *Proc. 11th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, p. 287–296, 1995.

[PS85] Franco Preparata et Michael I. Shamos. *Computational Geometry.* Springer Verlag, 1985.

[PV93a] M. Pocchiola et G. Vegter. « Sweep algorithm for visibility graphs of curved obstacles ». Manuscrit, Liens, Ecole Norm. Sup., Paris, juin 1993.

[PV93b] M. Pocchiola et G. Vegter. « The visibility complex ». Dans *Proc. 9th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, p. 328–337, 1993.

[PV95] M. Pocchiola et G. Vegter. « Computing the Visibility Graph via Pseudo-Triangulation ». Dans *Proc. 11th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, p. 248–257, 1995.

[PV96] M. Pocchiola et G. Vegter. « The visibility complex ». *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, 6(3), 1996.

[Riv93] S. Rivière. « Comparaison d'algorithmes de calcul de graphes de visibilité ». Rapport du DEA d'Informatique - Mathématique et Applications de l'Ecole Normale Supérieure- Paris, France, 1993.

[Riv95] S. Rivière. « Topologically Sweeping the Visibility Complex of Polygonal Scenes ». Dans *Proc. 11th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, p. C36–C37, 1995.

[Riv97] S. Rivière. « *Calculs de visibilité dans un environnement polygonal 2D* ». PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, janvier 1997.

[SAG94] Brian Smits, James Arvo, et Donald Greenberg. « A Clustering Algorithm for Radiosity in Complex Environments ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'94 Proceedings)*, p. 435–442, juillet 1994.

[San76] L. A. Santalo. *Integral Geometry and Geometric Probability*, volume 1 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Addison-Wesley Publishing Company, 1976.

[Sbe93] M. Sbert. « An Integral Geometry Based Method for Fast Form-Factor Computation ». Dans *Computer Graphics forum (EUROGRAPHICS'93 Proceedings), 12:3*, p. 409–420, septembre 1993.

[SD95] François Sillion et George Drettakis. « Feature-based Control of Visibility Error: A Multi-resolution Clustering Algorithm for Global Illumination ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'95 Proceedings)*, p. 145–152, août 1995.

[SG94] A. James Stewart et Sherif Ghali. « Fast Computation of Shadow Boundaries Using Spatial Coherence and Backprojections ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'94 Proceedings)*, p. 231–238, juillet 1994.

[SGCH93] P. Schröder, S. Gortler, M. Cohen, et Pat Hanrahan. « Wavelet Projections for Radiosity ». Dans *Proc. of the Fourth Eurographics Workshop on Rendering, Paris, France*, p. 105–114, juin 1993.

[SH93] P. Schröder et P. Hanrahan. « On the form factor between two polygons ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'93 Proceedings)*, p. 163–164, août 1993.

[Sha94] E. S. Shaw. « Hierarchical Radiosity for Dynamic Environments ». Master's thesis, Cornell University, août 1994.

[Sil94] François Sillion. « Clustering and Volume Scattering for Hierarchical Radiosity ». Dans *Proc. of the Fifth Eurographics Workshop on Rendering*, p. 105–117, Darmstadt, Germany, juin 1994.

[SP89] F. X. Sillion et C. Puech. « A general two-pass method integrating specular and diffuse reflection ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'89 Proceedings)*, p. 335–344, juillet 1989.

[SP94] F. X. Sillion et C. Puech. *Radiosity and Global Illumination.* Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1994.

[Spe90] S. N. Spencer. « The hemisphere radiosity method: A tale of two algorithms ». Dans *Photorealism in Computer Graphics (Proceedings Eurographics Workshop on Photosimulation, Realism and Physics in Computer Graphics*, p. 127–135, 1990.

[Syl90] J.J Sylvester. « On a funicular solution of Buffon's "problem of the needle" ». *Acta Mathematica*, 14:185–205, 1890.

[Tel92] Seth J. Teller. « Computing the Antipenumbra of an Area Light Source ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'92 Proceedings)*, p. 139–148, juillet 1992.

[TFFH94] Seth Teller, Celeste Fowler, Thomas Funkhouser, et Pat Hanrahan. « Partitioning and Ordering Large Radiosity Computations ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'94 Proceedings)*, p. 443–450, juillet 1994.

[TH93] S. J. Teller et P. M. Hanrahan. « Global Visibility Algorithms for Illumination Computations ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'93 Proceedings)*, p. 239–246, août 1993.

[WEH89] John R. Wallace, Kells A. Elmquist, et Eric A. Haines. « A ray tracing algorithm for progressive radiosity ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'89 Proceedings)*, p. 315–324, juillet 1989.

[WW92] A. Watt et M. Watt. *Advanced Animation and Rendering Techniques - Theory and Practice*. ACM Press, Addison-Wesley, New York, 1992.

Résumé

La méthode de radiosité, méthode de simulation globale de l'éclairage, est très utilisée pour la visualisation de scènes d'intérieur statiques. Malgré les différentes améliorations apportées jusqu'à présent, son coût reste conditionné par le calcul des facteurs de forme qui modélisent l'interaction lumineuse entre deux surfaces. Ce calcul constitue l'étape la plus coûteuse de la méthode de radiosité, compte tenu des calculs de visibilité qu'il implique. D'autre part, il semble primordial d'utiliser un maillage qui suive les discontinuités (c'est à dire les limites d'ombre et de pénombre), pour obtenir une solution de radiosité de bonne qualité. Or cette méthode est très coûteuse car elle nécessite de nombreux calculs géométriques.

De plus les méthodes proposées jusqu'à présent pour des environnements dits dynamiques (environnements où la géométrie, les propriétés des matériaux, etc., peuvent changer) effectuent toujours trop de recalculs. Le problème reste d'arriver à identifier précisément et efficacement quels facteurs de forme doivent vraiment être recalculés.

Nous avons considéré le cas 2D qui permet une meilleure compréhension et une analyse plus approfondie, ne serait-ce que grâce à l'existence de solutions analytiques. Nous nous sommes intéressés au *complexe de visibilité* (introduit récemment en géométrie algorithmique) qui code les relations de visibilité entre les objets dans le plan. Nous présentons dans cette thèse son utilisation dans le cadre de la radiosité, pour les environnements statiques, puis pour les environnements dynamiques. Nous montrons que le complexe permet d'effectuer le calcul des facteurs de forme de manière efficace et analytique, et de construire le maillage de discontinuité de façon simple. De plus, seuls les facteurs de forme entre deux éléments mutuellement visibles de la scène sont calculés. Enfin, dans le cas dynamique, le complexe permet d'identifier et de mettre à jour uniquement les facteurs de forme strictement nécessaires lorsqu'un objet se déplace.

Mots clef : Images de synthèse, éclairage global, radiosité, facteur de forme, maillage de discontinuité, visibilité, environnements dynamiques, complexe de visibilité, dualité.

Abstract

The radiosity method is a global illumination simulation method which is widely used for visualization of static scenes (especially interiors). Despite the various improvements that have been carried out until now, the radiosity cost remains dependent on the calculation of the form factors which describe the light interaction between two surfaces. Their computation is the most time-consuming part of the method, because of the visibility calculations involved. Moreover, the use of discontinuity meshing is essential to obtain a good quality radiosity solution. However, its computation is very expensive since it requires many geometric calculations.

In addition to that, the methods proposed until now for dynamic environments (environments where the geometry, the material properties, etc., can change) still perform too many recomputations. The remaining problem is the efficient and accurate detection of which form factors must really be recomputed.

We have considered the 2D case for which better comprehension and a more thorough analysis are possible, notably thanks to the existence of analytic solutions. We have turned our attention to the *visibility complex* (introduced recently in computational geometry) which represents the visibility relationships between objects in the plane. In this thesis, we present its use for radiosity computation, first for static environments, and then for dynamic environments. We show that the complex allows us to compute the form factors in an efficient and analytic way, and also to easily construct the discontinuity mesh. Moreover, only the form factors between mutually visible elements in the scene are computed. Finally, in the dynamic case, the complex allows us to identify and then to update only the strictly necessary form factors when an object is moving.

Keywords: Computer graphics, image synthesis, global illumination, radiosity, form factor, discontinuity meshing, visibility, dynamic environments, visibility complex, duality.