



**HAL**  
open science

# Caractérisation du couplage optomécanique entre la lumière et un miroir : bruit thermique et effets quantiques

Tristan Briant

► **To cite this version:**

Tristan Briant. Caractérisation du couplage optomécanique entre la lumière et un miroir : bruit thermique et effets quantiques. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2003. Français. NNT : . tel-00004972

**HAL Id: tel-00004972**

**<https://theses.hal.science/tel-00004972>**

Submitted on 23 Feb 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LABORATOIRE KASTLER BROSSEL



**Thèse de doctorat de l'Université Paris VI**

**Spécialité : Physique Quantique**

présentée par

**Tristan Briant**

pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

**Caractérisation du couplage optomécanique  
entre la lumière et un miroir :  
bruit thermique et effets quantiques**

Soutenue devant le jury composé de :

M.	Philippe GRANGIER	Rapporteur
M.	Antoine HEIDMANN	Directeur de thèse
Mme	Catherine Nary MAN	
M.	Francesco MARIN	Rapporteur
M.	Michel PINARD	Directeur de thèse
M.	Philippe TOURENC	



# Remerciements

Ce travail de thèse s’est déroulé au laboratoire Kastler Brossel durant la période 2000-2004. Je remercie Elisabeth Giacobino, directrice du laboratoire de m’avoir accueilli dans son laboratoire ainsi que Franck Laloë qui a pris sa succession à la direction du LKB.

Je remercie Philippe Tourenç et Catherine-Nary Man d’avoir accepté de faire partie du Jury et de l’intérêt qu’ils ont porté à mon travail et je suis très reconnaissant à Philippe Grangier et Francesco Marin d’avoir accepté la charge de rapporteur malgré leurs nombreuses occupations.

Antoine Heidmann et Michel Pinard m’ont accueilli dans leur équipe “mesure et bruits fondamentaux” et m’ont encadré pendant ces trois trop courtes années. J’ai pu bénéficier de leurs immenses connaissances et de leur efficacité à résoudre tous types de problèmes, expérimentaux ou théoriques. Je ne les remercierai jamais assez pour tout ce qu’ils m’ont appris, dans les domaines les plus variés allant du montage transimpédance, jusqu’aux recoins les plus obscurs de l’optique quantique. Ils m’ont communiqué leur dynamisme, leur enthousiasme, leur rigueur, se mesurant au nombre de versions différentes des articles que nous avons écrits, et surtout leur plaisir de chercheur et d’expérimentateur. Je tiens également à les remercier pour leur disponibilité, lorsqu’il y avait un “loulou” sur le laser, ou lorsque je me battais avec powerpoint, pour leur bonne humeur et l’humour d’Antoine qui a fini par contaminer tout le monde, et de manière générale pour toutes leurs qualités humaines qui ont rendu ce travail de thèse si agréable.

Je tiens à remercier Yassine Hadjar et Pierre-François Cohadon qui, pendant leurs thèses successives, ont monté et développé l’expérience et m’ont laissé un instrument hors du commun, d’une incroyable précision et presque plug ’n play! PF est maintenant permanent dans l’équipe, et j’ai pu profiter tout au long de ma thèse de son expérience sur la manip et je le remercie sincèrement pour sa bonne humeur et ses touches d’humour du style “Alors cet article, ça converge?”.

J’ai profité pendant ces trois années de l’ambiance sympathique du bureau surpeuplé T71, et je tiens à remercier tous ses occupants : Brahim, Sylvain, PF, Cyriaque, Laurent, Julien, Ricardo, ainsi que Jean-Pierre et Nicolas qui étaient là à *mi-temps*. Un grand merci également à Olivier Arcizet et Thomas Caniard avec qui j’ai partagé la salle de manip et aussi à tous ceux qui ont rendu les couloirs et la cafet du LKB si chaleureux, Augustin, Vincent, Rémi, Laurent, Marco, Alberto, Aurélien, Julien, Olivier, Pierre et Thomas.

Je tiens à remercier l’équipe de Jean-Marie Mackowski du Service des Matériaux Avancés de l’I.P.N. à Lyon qui a réalisé les traitements de grande réflectivité des mi-

roirs. Je remercie Massimo Cerdonio ainsi que toute l'équipe Auriga du LNL à Padoue pour la collaboration qui a donné le jour à l'article sur les doubles sphères. Je suis très reconnaissant à François Bondu qui nous a permis d'utiliser le programme CYPRES. Merci à François Biraben et François Nez pour leur aide sur le laser Titane Saphir et pour tout le matériel qu'ils nous ont prêté. Merci à Nicolas Billy et Laurent Hilico qui m'ont permis pendant ma première année de thèse d'effectuer une vacation à l'Université d'Evry. Je remercie Jean-Michel Courty pour les nombreuses discussions dans les domaines les plus variés de la physique. Je remercie également les autres membres du LKB Jussieu de leur aide de leur disponibilité : Serge Reynaud, Astrid Lambrecht, Claude Farbre, Agnès Maître, Catherine Schwob, Amori Mouchet, Paul Indelicato, Lucile Julien, Saïda Guellati-Khelifa, et Dominique Delande et Benoît Grémaud pour leurs conseils en informatique.

Je remercie toutes les personnes du secrétariat, Monique Bonnamy, Laetitia Morel, Karima, Christelle et José Romer, pour leur efficacité et leur bonne humeur, et pour avoir accepté avec beaucoup de patience et une certaine philosophie mon incapacité flagrante à remplir un document administratif quel qu'il soit. Un très grand merci à Monique pour sa joie de vivre communicative.

Je remercie le service de mécanique, Bernard Rodriguez, Pascal Travers, Chris Lelong et Christophe Rafaillac pour leurs conseils et leur travail sur les différentes pièces de l'expérience. Je remercie en particulier Francis Tréhin pour son aide sur les parties vide et cryoénique de l'expérience. Je remercie le service informatique, Corinne Poisson et en particulier Serge Begon pour sa disponibilité, sa bonne humeur et toutes les heures qu'il a passé sur macduff. Je remercie le service électronique, Jean-Pierre Okpisz, Mohamed Boujrad, et Philippe Pace pour leur aide et leur travail sur les montages qui sont présentés dans ce mémoire.

Je tiens à remercier chaleureusement mes parents de leur soutien durant ces trois années et de l'intérêt constant qu'ils ont porté à mon travail. Je leur adresse un très grand merci pour le pot ainsi qu'à Aurore, Florian et Anne qui ont mis la main à la pâte.

Enfin je remercie toute les personnes qui se sont intéressés de près ou de loin au couplage optomécanique en particulier en venant assister à la soutenance, Irène (merci d'avoir été une si redoutable adversaire surtout les jours où j'avais le plus besoin de confiance en moi...), Fleur, Alexandre et Sophie.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Le couplage optomécanique</b>	<b>5</b>
1.1 Description générale . . . . .	5
1.1.1 Couplage entre un miroir et un faisceau lumineux . . . . .	5
1.1.2 Mouvement d'un résonateur mécanique . . . . .	13
1.1.3 Description du champ dans la cavité . . . . .	19
1.1.4 Mesure de petits déplacements . . . . .	25
1.2 Montage expérimental . . . . .	32
1.2.1 La cavité à miroir mobile . . . . .	32
1.2.2 La détection homodyne . . . . .	38
1.2.3 La source laser . . . . .	45
1.3 Calibration de la mesure de déplacements . . . . .	50
1.3.1 Calibration de la modulation de fréquence . . . . .	51
1.3.2 Calibration de la cavité à miroirs cylindriques . . . . .	54
1.3.3 Sensibilité de la cavité à miroirs cylindriques . . . . .	55
<b>2 Mesure et contrôle du bruit thermique d'un miroir</b>	<b>59</b>
2.1 Bruit thermique autour d'une résonance . . . . .	59
2.1.1 Equivalence avec l'oscillateur harmonique . . . . .	59
2.1.2 Procédure de mesure du bruit thermique . . . . .	60
2.1.3 Résultats expérimentaux . . . . .	62
2.2 Refroidissement du miroir par pression de radiation . . . . .	63
2.2.1 Principe de la friction froide . . . . .	64
2.2.2 Réalisation expérimentale de la force de pression de radiation . . . . .	67
2.2.3 Réalisation de la boucle de contre-réaction . . . . .	69
2.2.4 Résultats expérimentaux . . . . .	70
2.3 Mesure de la susceptibilité mécanique du miroir . . . . .	72
2.3.1 Principe de la mesure de la susceptibilité . . . . .	72
2.3.2 Montage expérimental . . . . .	73
2.3.3 Procédure d'acquisition en présence du refroidissement . . . . .	74
2.3.4 Résultats . . . . .	76
2.4 Mesure des constantes de temps . . . . .	78
2.4.1 Réponse transitoire à une force extérieure . . . . .	78
2.4.2 Mesure des taux de relaxation . . . . .	82

2.4.3	Refroidissement pulsé . . . . .	87
2.4.4	Refroidissement pulsé en gain fort . . . . .	92
<b>3</b>	<b>Mouvement Brownien d'un miroir dans l'espace des phases</b>	<b>97</b>
3.1	Electronique de détection des quadratures . . . . .	98
3.1.1	Mise en forme de la référence et création des quadratures . . . . .	99
3.1.2	Les mélangeurs et les filtres . . . . .	100
3.1.3	Tests des quadratures . . . . .	101
3.1.4	Calibration de la mesure . . . . .	103
3.1.5	Asservissement de la température . . . . .	105
3.2	Quadratures du mouvement pour un miroir libre . . . . .	107
3.2.1	Comportement des quadratures à l'équilibre thermique . . . . .	107
3.2.2	Résultats expérimentaux . . . . .	109
3.3	Quadratures du mouvement refroidi . . . . .	113
3.3.1	Comportement des quadratures d'un miroir refroidi . . . . .	113
3.3.2	Résultats expérimentaux . . . . .	115
3.4	Amplification paramétrique du bruit thermique . . . . .	117
3.4.1	Etude théorique . . . . .	117
3.4.2	Réalisation de l'amplification paramétrique . . . . .	120
3.4.3	Résultats expérimentaux . . . . .	125
3.5	Oscillation paramétrique . . . . .	130
3.5.1	Observation de l'oscillation . . . . .	131
3.5.2	Distribution du mouvement dans l'espace des phases . . . . .	132
<b>4</b>	<b>Etude des modes internes de vibration d'un miroir</b>	<b>135</b>
4.1	Couplage d'un mode acoustique avec l'air . . . . .	136
4.1.1	Rayonnement acoustique du miroir . . . . .	136
4.1.2	Etude expérimentale de la dépendance avec la pression . . . . .	137
4.2	Observation expérimentale du profil spatial des modes acoustiques . . . . .	142
4.2.1	Principe de la mesure . . . . .	143
4.2.2	Dispositif expérimental . . . . .	144
4.3	Modes acoustiques d'un miroir cylindrique . . . . .	150
4.3.1	Modes propres . . . . .	150
4.3.2	Etude expérimentale . . . . .	151
4.3.3	Conclusion . . . . .	159
4.4	Modes acoustiques d'un miroir plan-convexe . . . . .	160
4.4.1	Modes acoustiques Gaussiens . . . . .	160
4.4.2	Miroir plan-convexe de petit diamètre . . . . .	162
4.4.3	Miroir plan-convexe de grand diamètre . . . . .	164
4.4.4	Conclusion . . . . .	167
4.5	Modes cylindriques dans un miroir plan-convexe . . . . .	168
4.5.1	Evidence théorique de l'existence de modes non Gaussiens . . . . .	169
4.5.2	Etude expérimentale avec le miroir de diamètre 34 mm . . . . .	170
4.5.3	Résultats expérimentaux . . . . .	172
4.5.4	Des modes cylindriques aux modes Gaussiens . . . . .	174

<b>5 Effets quantiques dans les mesures de petits déplacements</b>	<b>177</b>
5.1 Effets de la pression de radiation . . . . .	177
5.1.1 Bistabilité . . . . .	177
5.1.2 Limite Quantique Standard . . . . .	179
5.1.3 Observation de la limite quantique standard . . . . .	181
5.2 Réduction du bruit quantique avec une cavité désaccordée . . . . .	182
5.2.1 Quadratures du champ et mouvement du miroir . . . . .	183
5.2.2 Critères de stabilité . . . . .	186
5.2.3 Cas d'une cavité accordée . . . . .	187
5.2.4 Réduction du bruit à basse fréquence . . . . .	188
5.2.5 Réduction du bruit à haute fréquence . . . . .	189
5.2.6 Conclusion . . . . .	191
5.3 Bruits thermique et quantiques dans un système de doubles sphères . .	192
5.3.1 Motivations et principe . . . . .	192
5.3.2 Sensibilité d'un détecteur à doubles résonateurs . . . . .	195
5.3.3 Application aux doubles sphères . . . . .	201
5.3.4 Conclusion . . . . .	205
<b>Conclusion</b>	<b>206</b>





# Introduction

La lumière est utilisée pour mesurer avec précision des longueurs, en déterminant par télémétrie optique le temps de parcours d'une impulsion lumineuse. Cette technique permet par exemple de mesurer la distance Terre-Lune ou la position d'un satellite, avec une précision de l'ordre du millimètre, essentiellement limitée par les perturbations atmosphériques [1, 2]. La lumière se révèle un outil encore plus puissant lorsqu'il s'agit d'effectuer une mesure de distance relative. En faisant interférer les faisceaux lumineux dans les deux bras d'un interféromètre de Michelson ou les multiples réflexions d'un faisceau dans une cavité Fabry-Perot, il est possible d'atteindre des sensibilités correspondant à une très petite fraction de la longueur d'onde optique.

L'amélioration constante des sources laser et les progrès techniques réalisés dans les domaines de la détection de la lumière, de l'électronique et des traitements optiques des matériaux, ont permis à ces mesures interférométriques d'atteindre des sensibilités inégalées. Ces techniques sont utilisées dans des domaines variés de la physique pour réaliser des mesures ultra-sensibles, comme dans les microscopes à force atomique [3] ou en tant que capteurs optiques sur des détecteurs résonnants d'ondes gravitationnelles [4, 5].

Les mesures optiques ont atteint une sensibilité telle qu'elles vont permettre de détecter les variations de la métrique engendrées par le passage des ondes gravitationnelles prédites par la théorie de la relativité générale [6, 7]. Ces ondes sont provoquées par des événements astrophysiques tels que la coalescence de systèmes binaires constitués d'étoiles ou de trous noirs, ou encore l'explosion d'une supernova. Du fait de leur caractère quadrupolaire, elles engendrent des variations apparentes de longueur de signes opposés dans deux directions orthogonales de l'espace. Un interféromètre de Michelson ayant des bras perpendiculaires et de longueur kilométrique est susceptible de détecter des ondes provoquées par de tels événements astrophysiques à des distances de quelques dizaines de mégaparsec [8, 9, 10]. Cela devrait permettre de réaliser une observation gravitationnelle de plus de deux mille galaxies autour de la notre.

La première génération d'interféromètres gravitationnels fonctionnent à température ambiante et leur sensibilité est essentiellement limitée par le bruit thermique des miroirs [6], qu'il soit dû à l'agitation thermique du dispositif d'isolation sismique à basse fréquence ou à l'excitation thermique des modes internes de vibration des substrats. L'estimation du bruit thermique des miroirs dans les détecteurs gravitationnels et les possibilités de le réduire sont donc devenues des enjeux importants.

Les études menées actuellement sur la seconde génération d'interféromètres gravitationnels montrent que ceux-ci auront leur sensibilité essentiellement limitée par le bruit quantique du faisceau utilisé comme sonde [11, 12]. Le bruit de photon du faisceau laser

se traduit par un bruit sur le faisceau mesuré à la sortie de l'interféromètre. Ce bruit limite déjà les antennes gravitationnelles actuelles à haute fréquence, mais il pourrait en principe être réduit en augmentant l'intensité du faisceau laser. Il apparaît alors un second bruit quantique lié aux fluctuations quantiques de la pression de radiation exercée par la lumière sur les miroirs de l'interféromètre. Ces fluctuations induisent des déplacements des miroirs qui viennent perturber la mesure de variation de longueur apparente due à l'onde gravitationnelle. Ce bruit a une nature quantique fondamentale car il correspond à une *action en retour* de la mesure sur le système [13] : il est une conséquence des principes mêmes de la mesure en mécanique quantique. L'existence de deux bruits quantiques de nature complémentaire, l'un diminuant avec la puissance lumineuse et l'autre augmentant, conduit à l'existence d'une *limite quantique standard* de la sensibilité dans les mesures interférométriques [13, 14]. Cette limite a été largement étudiée sur le plan théorique et de nombreux travaux ont montré qu'il est possible de la dépasser en utilisant des états comprimés du champ lumineux [15, 16]. La limite quantique standard n'a cependant jamais été mise en évidence expérimentalement.

Développer un dispositif expérimental capable de mesurer de très petits déplacements d'un miroir permettrait de mener une étude exhaustive de ces différents bruits et effets quantiques. On peut pour cela utiliser une cavité optique de très grande finesse à une seule entrée-sortie [4, 17, 18, 19, 20]. Le faisceau réfléchi par la cavité est très sensible à de très petites variations de longueur et un tel dispositif est capable de détecter les déplacements d'un miroir avec une sensibilité aussi élevée que dans les grands interféromètres gravitationnels [20]. De plus, on retrouve les mêmes problématiques dans les deux systèmes : les effets du bruit thermique des miroirs et des limites imposées par les bruits quantiques se traduisent de façon identique dans une cavité optique et dans un interféromètre. Le dispositif que nous avons développé, basé sur une cavité de grande finesse avec un miroir mobile, apparaît donc comme un système modèle pour l'étude des limites de sensibilité dans les mesures interférométriques. Il apparaît également comme un outil performant pour caractériser le couplage optomécanique entre la lumière et le mouvement du miroir, responsable de nombreux effets quantiques comme la compression des fluctuations quantiques du champ [21, 22, 23] ou l'intrication de deux faisceaux lumineux [24]. Le travail présenté dans ce mémoire aborde certains aspects de ce couplage et de ses conséquences sur les limites thermiques et quantiques dans les mesures optiques de grande précision.

Le premier chapitre est consacré à une présentation générale du couplage optomécanique et au dispositif de mesure de petits déplacements, basé sur une cavité de grande finesse. Nous présentons les différents bruits qui limitent la sensibilité d'une telle mesure et décrivons le montage expérimental que nous avons utilisé dans ce mémoire. Il est constitué de trois éléments principaux : la cavité à miroir mobile qui est le cœur du montage, ses caractéristiques optiques étant d'une importance cruciale pour la sensibilité de l'expérience ; la source laser, réalisée autour d'un laser titane-saphir présente une très grande stabilité en fréquence et en intensité et elle est adaptée spatialement à la cavité à miroir mobile ; enfin, le système de détection est basé sur un dispositif d'homodyne travaillant au niveau quantique et donnant accès à la phase du faisceau réfléchi par la cavité. Nous déterminons également la sensibilité de l'expérience et décrivons la calibration des déplacements observés.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une étude du bruit thermique du miroir autour d'une résonance d'un mode acoustique interne. Cette étude apporte de nombreuses informations sur les caractéristiques optomécaniques du miroir que nous avons complétées par l'observation de la réponse mécanique du mode acoustique à une force de pression de radiation exercée par un faisceau intense. Nous avons également étudié un régime refroidi obtenu à l'aide d'une boucle de contre-réaction agissant sur le miroir par la force de pression de radiation. L'observation du bruit thermique résiduel et de la réponse mécanique du miroir nous a permis de montrer que cet asservissement réduit la température effective du miroir par un processus de *friction froide*, c'est-à-dire par l'ajout d'une force visqueuse sans bruit supplémentaire [25, 26, 27, 28]. Nous avons aussi déterminé le comportement temporel transitoire du miroir en régime libre et refroidi. Les constantes de temps mises en jeu dans ces deux régimes sont différentes et reliées au taux d'amortissement mesurés à partir des spectres de bruit thermique.

Nous complétons dans le troisième chapitre cette étude du bruit thermique par l'observation du mouvement du miroir dans l'espace des phases. Grâce à un dispositif de démodulation du mouvement, nous avons suivi l'évolution temporelle des quadratures et obtenu une évolution caractéristique d'un mouvement Brownien, aussi bien en régime libre que refroidi. Nous avons également étudié des régimes d'amplification et d'oscillation paramétriques du miroir. Nous avons mis en évidence un effet de compression du bruit thermique dans l'espace des phases, similaire à celui observé sur les fluctuations quantiques du champ électromagnétique dans les amplificateurs et oscillateurs paramétriques optiques [29, 30, 31].

Dans le quatrième chapitre nous étudions les possibilités d'améliorer la géométrie des miroirs dans le but d'observer les effets quantiques de la pression de radiation. Nous présentons une expérience de mesure des fréquences de résonance et du profil spatial des modes acoustiques d'un miroir. Deux géométries sont étudiées : la géométrie cylindrique utilisée dans les interféromètres gravitationnels et une géométrie plan-convexe utilisée dans notre expérience. Cette étude a permis de définir une géométrie favorable à l'observation du couplage optomécanique, puisqu'elle permet d'atteindre de très grands facteurs de qualité mécanique et de faibles masses effectives.

Le dernier chapitre est consacré à une étude théorique des effets quantiques de la pression de radiation. Après une présentation générale sur la limite quantique standard dans les mesures de petits déplacements, nous montrons que l'utilisation d'une cavité désaccordée permet de battre cette limite dans certaines conditions. Nous nous sommes également intéressés à un nouveau type de détecteur d'ondes gravitationnelles, basé sur des résonateurs sphériques imbriqués [32]. Nous avons cherché à déterminer les limites de sensibilité liées aux bruits thermiques et quantiques, de façon à préciser les caractéristiques essentielles du détecteur et des capteurs optiques de déplacement. Ces détecteurs pourraient fournir des informations complémentaires aux détecteurs interférométriques, en ayant une sensibilité comparable mais en travaillant à plus haute fréquence.



# Chapitre 1

## Le couplage optomécanique

Le couplage optomécanique désigne l'action réciproque entre un faisceau lumineux et le miroir sur lequel il se réfléchit. Un déplacement du miroir entraîne un déphasage de la lumière, et le faisceau lumineux agit par pression de radiation sur la surface du miroir [20, 33]. Le premier effet permet de sonder la position du miroir en détectant le déphasage induit sur le faisceau lumineux. Ceci nous a permis de réaliser une mesure ultrasensible des déplacements d'un miroir. Le second effet correspond à l'action en retour de la mesure : la pression de radiation exercée par le faisceau lumineux vient perturber le déplacement que l'on cherche à mesurer. Ces deux effets conduisent à l'existence d'une limite quantique pour la sensibilité [13, 14] mais sont aussi responsables d'un certain nombre d'effets quantiques [21, 22, 23].

Nous commençons ce chapitre par une étude théorique du couplage optomécanique. Nous nous intéressons essentiellement au premier aspect de ce couplage, c'est-à-dire à l'effet du mouvement d'un miroir sur le faisceau lumineux. L'action en retour et ses conséquences au niveau quantique sont abordées plus en détail dans le cinquième chapitre. Nous décrivons dans une deuxième partie le dispositif expérimental qui a été utilisé pour l'observation de petits déplacements et la mesure des caractéristiques optomécaniques de nos miroirs. Enfin dans une troisième partie nous présentons la calibration des déplacements observés.

### 1.1 Description générale

Nous débutons cette partie par une description théorique simplifiée du couplage optomécanique et nous décrivons comment utiliser une cavité Fabry-Perot pour le rendre accessible à l'observation expérimentale. La section suivante présente une description détaillée du mouvement du miroir. Nous nous intéressons ensuite à l'effet des déplacements du miroir sur le faisceau sortant de la cavité (section 1.1.3) et aux principes d'une mesure ultrasensible de petits déplacements (section 1.1.4).

#### 1.1.1 Couplage entre un miroir et un faisceau lumineux

Nous nous intéressons au système présenté sur la figure 1.1, constitué d'un faisceau lumineux se réfléchissant sous incidence normale sur un miroir mobile. Le déplacement

du miroir peut être dû à un mouvement global ou à une déformation de sa surface. Dans

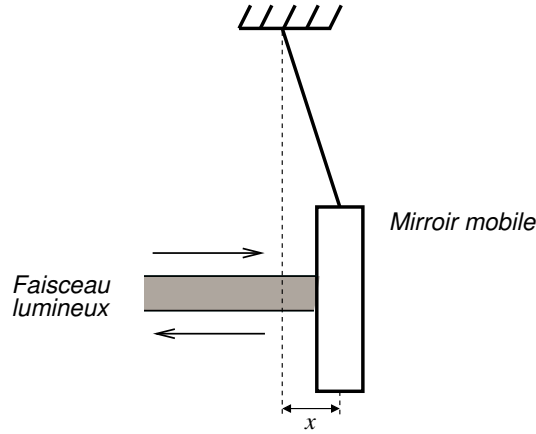


FIG. 1.1 – Modélisation du couplage optomécanique : les déplacements du miroir et les déformations de sa surface modifient la phase du faisceau réfléchi ; en retour la lumière agit par pression de radiation sur la position du miroir.

cette section, afin de dégager les principes généraux du couplage optomécanique, nous supposons que le mouvement peut être décrit de façon monodimensionnelle, c'est-à-dire sous la forme d'une position ponctuelle  $x(t)$  dépendant du temps. De la même façon nous traitons le champ sous la forme d'un seul mode qui se réfléchit à la position où se trouve le miroir. Nous verrons cependant dans les sections suivantes qu'il est possible de décrire un dispositif plus réaliste de façon monodimensionnelle, lorsqu'on s'intéresse au couplage entre les déformations d'un miroir et le champ dans une cavité de grande finesse.

### Mouvement du miroir

Dans le cadre d'une description monodimensionnelle, la théorie de la réponse linéaire [34] permet de décrire le mouvement du miroir lorsque l'on se restreint à de petits déplacements. La susceptibilité mécanique  $\chi$  relie la position du miroir aux forces extérieures agissant sur lui. La transformée de Fourier  $x[\Omega]$  de la position du miroir s'écrit :

$$x[\Omega] = \chi[\Omega]F[\Omega], \quad (1.1)$$

où  $F$  est la résultante totale des forces. On suppose généralement que le miroir peut être modélisé par un oscillateur harmonique. Cette approximation se révèle particulièrement bonne lorsque l'on s'intéresse au déplacement global du miroir dû à une suspension de type pendulaire, ou si l'on est sensible aux déformations de la surface du miroir produites par un mode de vibration acoustique du substrat. Dans ce cas la susceptibilité du miroir se met sous la forme :

$$\chi[\Omega] = \frac{1}{M[\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Omega\Omega_M/Q]}, \quad (1.2)$$

où  $M$  est la masse de l'oscillateur,  $\Omega_M$  sa fréquence de résonance, et  $Q$  son facteur de qualité mécanique. Dans ce mémoire on va s'intéresser essentiellement à un miroir mécaniquement isolé mais couplé à un thermostat qui fixe sa température, et soumis à la pression de radiation du faisceau lumineux incident.

La partie imaginaire de la susceptibilité est directement reliée aux processus de dissipation dus au couplage entre le miroir et un bain thermique. D'après le théorème fluctuations-dissipation [34], ce couplage s'accompagne d'une force de Langevin  $F_T$  fluctuante décrivant l'interaction du miroir avec un bain d'oscillateurs harmoniques thermalisés. La valeur moyenne de cette force est nulle et son spectre est relié à la susceptibilité mécanique par :

$$S_{F_T}[\Omega] = -\frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im} \left( \frac{1}{\chi[\Omega]} \right), \quad (1.3)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $T$  la température du miroir et le spectre  $S_{F_T}[\Omega]$  est défini comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de la force de Langevin :

$$S_{F_T}[\Omega] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle F_T(t) F_T(t + \tau) \rangle e^{-i\Omega\tau}, \quad (1.4)$$

où  $\langle \dots \rangle$  représente la moyenne statistique sur le bain thermique.

En présence du faisceau lumineux, le miroir est soumis à une seconde force, due à la pression de radiation  $F_{rad}$  exercée par le faisceau. Cette force est liée à l'impulsion transférée par les photons lorsqu'ils se réfléchissent sur la surface du miroir. Elle est égale à :

$$F_{rad}(t) = 2\hbar k I(t), \quad (1.5)$$

où  $2\hbar k$  est le transfert d'impulsion d'un photon lors de la réflexion ( $k$  est le vecteur d'onde de la lumière) et  $I(t)$  est l'intensité du faisceau incident sur le miroir, exprimée en nombre de photons par seconde. La position du miroir est ainsi entièrement déterminée dans l'espace de Fourier par l'équation :

$$x[\Omega] = \chi[\Omega](F_T[\Omega] + F_{rad}[\Omega]). \quad (1.6)$$

Les variations aléatoires de la force de Langevin vont se traduire par un mouvement Brownien du miroir caractéristique de l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ . La force de pression de radiation  $F_{rad}$  possède également une partie fluctuante due au bruit quantique d'intensité du faisceau lumineux. Par exemple pour un faisceau laser, ces fluctuations sont liées à la distribution Poissonnienne des temps d'arrivée des photons sur le miroir. Elle induisent un bruit de position du miroir qui va se superposer au mouvement thermique.

La position du miroir va en contrepartie agir sur la phase  $\varphi$  du faisceau réfléchi. Un déplacement  $\delta x$  du miroir selon l'axe du faisceau va entraîner une variation de  $2\delta x$  du chemin optique suivi par la lumière (aller et retour). En écrivant la propagation des champs électromagnétiques incident et réfléchi, on trouve que la phase  $\varphi$  varie d'une quantité  $\delta\varphi$  :

$$\delta\varphi = 4\pi \frac{\delta x}{\lambda}, \quad (1.7)$$



où  $\lambda$  est la longueur d'onde du faisceau lumineux. La phase est ainsi sensible à des déplacements du miroir et elle tourne de  $2\pi$  pour un déplacement de  $\lambda/2$ .

### Utilisation d'une cavité de grande finesse

Nous présentons dans ce paragraphe l'étude du système formé par un faisceau laser se réfléchissant sur une cavité Fabry-Perot dont le miroir arrière est mobile (figure 1.2). Le miroir mobile est totalement réfléchissant et le miroir d'entrée, appelé aussi coupleur, est supposé immobile avec une transmission non nulle. Il permet ainsi à la lumière d'un faisceau laser de pénétrer dans la cavité et d'en ressortir après un certain nombre d'allers-retours. Pour une cavité sans perte, l'intensité réfléchie par le coupleur d'entrée est égale

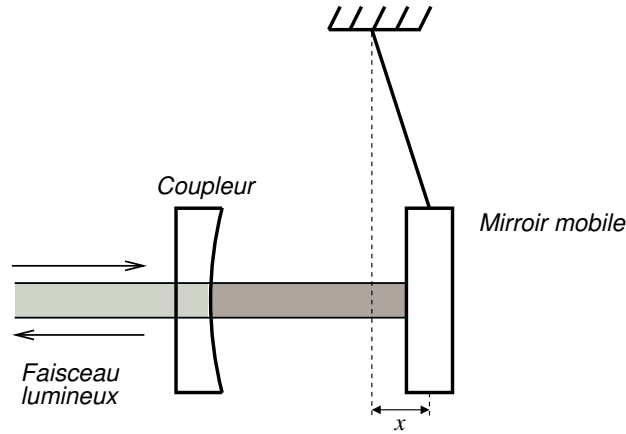


FIG. 1.2 – Cavité Fabry-Perot à une seule entrée-sortie. Le miroir arrière est mobile et totalement réfléchissant. Tous les photons ressortent par le coupleur d'entrée.

à l'intensité incidente, indépendamment du désaccord de fréquence entre la cavité et le laser : tous les photons pénétrant dans la cavité finissent en effet par ressortir par le coupleur. Par contre l'intensité intracavité varie en fonction de la fréquence du laser ainsi que de la longueur  $L$  de la cavité. Lorsque  $L$  est un multiple entier de la demi-longueur d'onde  $\lambda/2$ , la superposition des ondes créées par les multiples réflexions sur les miroirs interfèrent de manière constructive et l'intensité intracavité  $I$  présente un pic de résonance. Lorsque l'on s'approche d'une condition de résonance cette intensité décrit un pic d'Airy de forme Lorentzienne dont la hauteur est proportionnelle à l'intensité incidente  $I^{in}$  selon la formule [35] :

$$I = \frac{2}{\pi} \mathcal{F} I^{in}, \quad (1.8)$$

où  $\mathcal{F}$  est la finesse de la cavité, qui dépend uniquement des caractéristiques des miroirs (transmission et pertes par absorption ou diffusion). L'effet d'amplification entre les intensités incidente et intracavité permet d'interpréter la finesse comme le nombre moyen d'allers-retour d'un photon dans la cavité avant de ressortir. La finesse correspond également au rapport entre la distance  $\lambda/2$  entre deux résonances et la largeur à mi-hauteur  $\lambda/2\mathcal{F}$  du pic d'Airy (voir la figure 1.3).

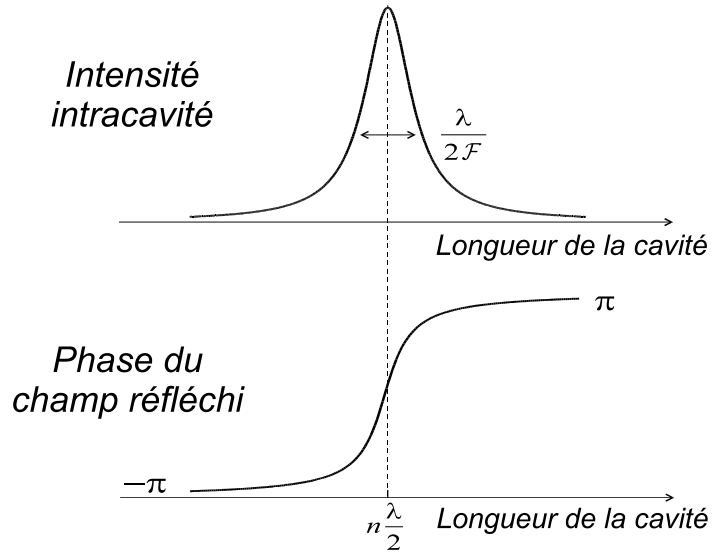


FIG. 1.3 – Courbe du haut : pic d’Airy décrit par l’intensité intracavité lorsque la longueur de la cavité est balayée au voisinage d’une résonance. Courbe du bas : déphasage du faisceau réfléchi par la cavité.

La phase du champ réfléchi est sensible à un changement de longueur de la cavité. Lorsque le miroir se déplace d’une quantité  $\lambda/2\mathcal{F}$  de part et d’autre de la résonance, la phase du faisceau réfléchi subit une variation égale à  $2\pi$ . On constate sur la figure 1.3 que la pente de la courbe représentant la phase du champ réfléchi en fonction de la longueur de la cavité est maximale à résonance et vaut  $8\mathcal{F}/\lambda$ . Le déphasage  $\delta\varphi^{out}$  produit au voisinage d’une résonance par un petit déplacement  $\delta x$  du miroir mobile s’écrit alors :

$$\delta\varphi^{out} = 8\mathcal{F}\frac{\delta x}{\lambda}. \quad (1.9)$$

Ce déphasage est de l’ordre du déphasage sur un aller-retour [équation (1.7)] multiplié par la finesse  $\mathcal{F}$ , c’est-à-dire par le nombre d’aller-retour de la lumière dans la cavité.

La multiplication des aller-retours de la lumière entre les deux miroirs amplifie ainsi le couplage entre le faisceau lumineux et le miroir mobile. L’utilisation d’une cavité optique augmente donc le couplage optomécanique et le rend accessible à l’observation expérimentale : aussi bien les effets de pression de radiation, proportionnels à l’intensité intracavité, que le déphasage produit par le déplacement du miroir sont amplifiés d’un facteur de l’ordre de grandeur de  $\mathcal{F}$ . On voit en particulier sur la dernière équation que la phase du faisceau réfléchi est très sensible à des déplacements du miroir mobile et peut varier notablement pour des déplacements du miroir d’une très petite fraction de longueur d’onde. Ce dispositif se révèle donc un outil extrêmement puissant pour mesurer des petits déplacements avec une très grande sensibilité. Cette dernière dépend du bruit propre du faisceau lumineux utilisé comme sonde, qui peut être réduit aux fluctuations quantiques de la lumière.

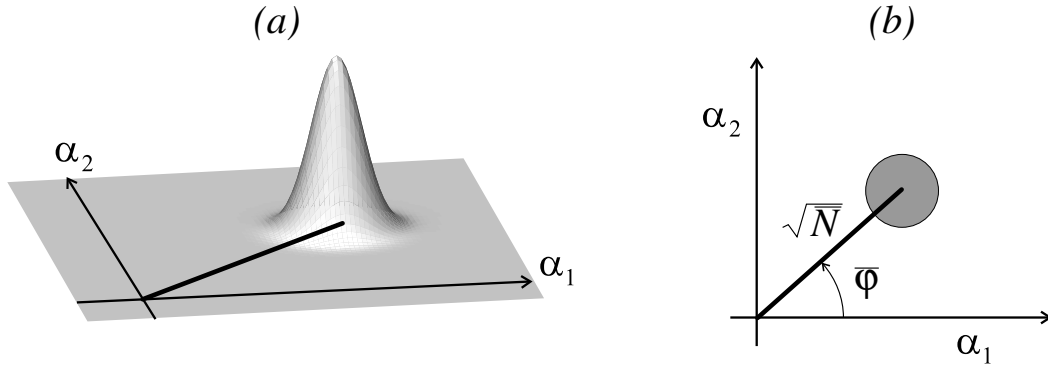


FIG. 1.4 – Courbe de gauche : distribution de quasiprobabilité d’un état cohérent. Courbe de droite : représentation schématique du champ et de ses fluctuations.

### Description quantique des champs

D’après la théorie de l’électrodynamique quantique, le champ électromagnétique se décompose en une somme de modes équivalents à des oscillateurs harmoniques indépendants [36]. On supposera dans la suite que le champ peut être décrit par un seul mode de fréquence optique  $\omega_0$ , avec une direction de propagation et un état de polarisation donnés. Il est alors caractérisé par des opérateurs de création et d’annihilation  $a$  et  $a^\dagger$ . Ces opérateurs obéissent aux lois de commutation :

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (1.10)$$

On peut aussi définir deux opérateurs  $a_1$  et  $a_2$ , appelés quadratures du champ, qui sont reliés aux parties réelle et imaginaire du champ :

$$a_1 = a + a^\dagger, \quad (1.11)$$

$$a_2 = i(a^\dagger - a). \quad (1.12)$$

De même que les opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$  qui les composent, les quadratures du champ ne commutent pas. Les dispersions  $\Delta a_1$  et  $\Delta a_2$  de ces deux opérateurs quantiques vérifient une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta a_1 \Delta a_2 \geq 1. \quad (1.13)$$

Cette inégalité implique l’existence de fluctuations quantiques pour ces variables. La méthode semi-classique que nous présentons dans le paragraphe suivant se révèle très bien adaptée pour décrire ces fluctuations et permet de leur associer une représentation géométrique dans l’espace des phases.

### Représentation de Wigner

La méthode semi-classique [37, 38, 39] consiste à associer des variables aléatoires classiques  $\alpha$  et  $\alpha^*$ , complexes conjuguées l’une de l’autre, aux opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$  du champ. La distribution de quasiprobabilité de Wigner [40] décrit alors la loi de probabilité des variables  $\alpha$  et  $\alpha^*$ . Elle est définie de sorte que toute valeur moyenne quantique

de produit d'opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$  rangés dans l'ordre symétrique est égale à la valeur moyenne de la même combinaison des variables  $\alpha$  et  $\alpha^*$  pondérée par la distribution de Wigner. Le champ semi-classique  $\alpha$  peut s'écrire comme la somme de sa valeur moyenne  $\bar{\alpha}$  correspondant à la valeur classique du champ et de ses fluctuations  $\delta\alpha$  régies par une loi de probabilité semi-classique et caractérisant les fluctuations quantiques :

$$\alpha = \bar{\alpha} + \delta\alpha. \quad (1.14)$$

Pour les états cohérents du champ qui modélisent relativement bien l'état du champ produit par un laser, la distribution de Wigner est positive. Elle peut être considérée comme une véritable distribution de probabilité, et les variables  $\alpha$  et  $\alpha^*$  représentent les valeurs possibles du champ. La figure 1.4 montre la fonction de Wigner pour un état cohérent. Le plan horizontal représente l'espace des phases, dont les axes sont définis par les quadratures  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  qui sont les analogues semi-classiques des opérateurs  $a_1$  et  $a_2$  (parties réelle et imaginaire de  $\alpha$ ). La distribution de Wigner est dans ce cas une Gaussienne, centrée en la valeur moyenne  $\bar{\alpha}$  du champ qui correspond à sa valeur classique, et dont la variance est égale à 1 dans toutes les directions. On a donc  $\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = 1$  et un état cohérent correspond à un état minimal pour l'inégalité de Heisenberg [équation (1.13)].

La courbe de droite de la figure 1.4 montre la courbe de niveau d'équiprobabilité à  $1/e$  de la distribution de Wigner dans le plan  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ . Les fluctuations quantiques sont alors décrites par un disque de diamètre 1 centré autour de la valeur moyenne du champ  $\bar{\alpha}$ . On peut interpréter chaque point du disque comme une réalisation possible du champ.

Il est aussi possible de définir une quadrature quelconque du champ par,

$$\alpha_\theta = e^{-i\theta}\alpha + e^{i\theta}\alpha^*. \quad (1.15)$$

Cette définition revient à changer le système d'axe de l'espace des phases en effectuant une rotation des axes d'un angle  $\theta$ . La dispersion de la quadrature  $\alpha_\theta$  est alors obtenue en projetant la distribution sur l'axe d'angle  $\theta$ . Dans le cas d'un état cohérent les dispersions dans toutes les directions sont égales à 1 :

$$\Delta\alpha_\theta = 1. \quad (1.16)$$

Pour une réalisation du champ représentée par un point dans l'espace des phases, la distance à l'origine représente l'amplitude du champ et l'angle avec l'axe horizontal  $\alpha_1$  sa phase :

$$\alpha = \sqrt{N}e^{i\varphi}, \quad (1.17)$$

où  $N = |\alpha|^2$  est le nombre de photons dans le mode et  $\varphi$  la phase du champ. Les fluctuations quantiques d'intensité et de phase du champ peuvent alors être estimées en linéarisant cette expression autour de la valeur moyenne du champ  $\bar{\alpha} = \sqrt{N}e^{i\bar{\varphi}}$ . On obtient les expressions suivantes pour les fluctuations  $\delta N$  et  $\delta\varphi$  :

$$\delta N = |\bar{\alpha}|\delta\alpha_{\bar{\varphi}}, \quad (1.18)$$

$$\delta\varphi = \frac{1}{2|\bar{\alpha}|}\delta\alpha_{\bar{\varphi}+\pi/2}. \quad (1.19)$$

La quadrature dite d'amplitude  $\delta\alpha_{\bar{\varphi}}$  parallèle au champ moyen est reliée au bruit d'intensité, et la quadrature de phase  $\delta\alpha_{\bar{\varphi}+\pi/2}$ , dans la direction orthogonale, caractérise le bruit de phase. La variance de l'intensité  $\Delta N^2$  est égale au nombre moyen  $\bar{N}$  de photon, ce qui est caractéristique de la distribution Poissonnienne de photon dans un état cohérent. Les fluctuations relatives d'intensité  $\Delta N/\bar{N}$  décroissent donc quand l'intensité augmente avec une dépendance en  $1/\sqrt{\bar{N}}$ . La variance des fluctuations de phase est quant-à-elle inversement proportionnelle au nombre de photons :

$$\Delta\varphi^2 = \frac{1}{4\bar{N}}. \quad (1.20)$$

On peut interpréter ce résultat en remarquant que la dispersion de phase  $\Delta\varphi$  correspond à l'angle sous lequel la distribution du champ est vue depuis l'origine (voir figure 1.4). La distribution ayant une dispersion unité dans toutes les directions et indépendamment de l'amplitude du champ,  $\Delta\varphi$  décroît donc quand l'intensité augmente et que la distribution s'éloigne de l'origine.

Les quantités  $N$  et  $\varphi$  sont deux variables quantiques qui ne commutent pas et leur dispersion vérifie une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta N \Delta\varphi \geq \frac{1}{2}. \quad (1.21)$$

Un état cohérent du champ est donc un état minimal pour cette inégalité. Les fluctuations d'intensité et de phase correspondent en fait au minimum accessible avec des états classiques de la lumière et définissent le bruit quantique standard.

### Limite dans la mesure de petits déplacements

Comme nous l'avons déjà évoqué plus haut, la phase du faisceau réfléchi par la cavité Fabry-Perot de grande finesse est très sensible à résonance au déplacement du miroir mobile et peut être utilisée pour mesurer sa position. Pour déterminer la sensibilité d'une telle mesure il faut prendre en compte les fluctuations quantiques de phase du faisceau lumineux que nous avons décrit dans le paragraphe précédent. Si l'on injecte un faisceau laser cohérent dans la cavité et si l'on néglige les effets de la pression de radiation sur le miroir mobile, le faisceau réfléchi par la cavité retranscrit les fluctuations de phase intrinsèques du faisceau incident. Ce bruit de phase  $\delta\varphi^{in}$  d'origine quantique se superpose aux variations de phase dues aux déplacements du miroir mobile et l'équation (1.9) devient :

$$\delta\varphi^{out} = 8\mathcal{F}\frac{\delta x}{\lambda} + \delta\varphi^{in}. \quad (1.22)$$

La description précédente du champ électromagnétique correspond à un modèle où le champ est quantifié dans une boîte cubique de dimensions finies. Le passage à un faisceau lumineux se propageant est réalisé en faisant tendre la longueur de la boîte vers l'infini et en remplaçant le nombre  $N$  de photon par un flux de photon [39]. L'approche semi-classique présentée ci-dessus se généralise et décrit les fluctuations du champ à toutes les fréquences. En particulier les fluctuations de phase  $\delta\varphi^{in}[\Omega]$  d'un faisceau

cohérent à la fréquence  $\Omega$  ont une amplitude inversement proportionnelle à la racine carrée du flux moyen de photons  $\bar{I}^{in}$ . Le spectre de ces fluctuations s'écrit :

$$S_{\varphi}^{in}[\Omega] = \frac{1}{4\bar{I}^{in}}. \quad (1.23)$$

Le plus petit déplacement mesurable  $\delta x_{min}$  est défini à partir de l'équation (1.22) en égalisant le signal au bruit :

$$\delta x_{min} = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\bar{I}^{in}}}. \quad (1.24)$$

Cette équation montre que la sensibilité de la mesure est d'autant plus grande que la finesse de la cavité et l'intensité incidente sont grandes. Nous verrons cependant dans un modèle plus complet du système que l'augmentation de ces paramètres entraîne un excès de bruit de position dû à l'action en retour de la lumière, ce qui conduit à une limite quantique standard pour la mesure de déplacement.

Dans notre expérience, nous utilisons une source laser titane-saphir travaillant aux alentours de  $\lambda = 810 \text{ nm}$ , longueur d'onde pour laquelle il existe des miroirs de très grande réflectivité et de très faibles pertes. La qualité des traitements optiques actuels permet d'envisager une cavité de finesse égale à 300 000 supportant une puissance incidente de quelques milliwatts. La puissance lumineuse  $P$  est reliée au nombre  $I$  de photons par seconde,

$$P = \frac{hc}{\lambda} I, \quad (1.25)$$

où  $hc/\lambda$  est l'énergie d'un photon. Une puissance incidente de  $3 \text{ mW}$  correspond à un flux moyen  $\bar{I}^{in}$  égal à  $2 \times 10^{16}$  photon/s, et on obtient d'après l'équation (1.24) une sensibilité de  $10^{-21} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ . L'unité en  $\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$  correspond à une amplitude spectrale et caractérise le fait que le signal doit être comparé à un bruit blanc, c'est-à-dire à une fonction aléatoire dont le spectre est plat en fréquence. La mesure s'effectue au travers d'un filtrage en fréquence ou en intégrant le signal pendant un certain temps. En diminuant la bande passante du filtre d'un facteur 2 ou en effectuant la moyennage du signal pendant un temps deux fois plus long, le plus petit déplacement mesurable est divisé par un facteur  $\sqrt{2}$ . La valeur particulière de la sensibilité calculée ci-dessus signifie qu'en intégrant le signal sur une seconde ou en l'observant au travers d'un filtre de  $1 \text{ Hz}$  de bande passante, on serait capable d'observer des déplacements de l'ordre de  $10^{-21} \text{ m}$ .

### 1.1.2 Mouvement d'un résonateur mécanique

L'observation du bruit thermique des miroirs avec une sensibilité limitée uniquement par le bruit de photon de la lumière impose des conditions sévères sur les caractéristiques du système. Les fluctuations de position du miroir dues au bruit thermique doivent être grandes devant les autres bruits dans le dispositif. Parmi les principales limitations de la sensibilité [6], on trouve le bruit sismique et les vibrations sonores qui agissent à basse fréquence et provoquent essentiellement un mouvement global du miroir, en excitant les modes de vibration mécanique du système de fixation des miroirs. Les bruits

de fréquence et d'intensité du laser dus aux vibrations des éléments optiques qui le constituent sont eux aussi importants pour des fréquences pouvant aller jusqu'à plusieurs centaines de kilohertz. Malgré les différents asservissements électroniques servant à stabiliser la longueur de la cavité laser, le spectre de bruit de fréquence du faisceau de mesure présente un excès de bruit jusqu'à des fréquences de l'ordre du mégahertz.

Travailler à des fréquences élevées permet de s'affranchir de ces sources de bruit. Au dessus du mégahertz le faisceau laser est au bruit quantique standard et le support des miroirs ne présente plus de mode de vibration d'amplitude observable. Pour réaliser nos miroirs mobiles, nous nous sommes ainsi intéressés aux modes de vibration interne du substrat qui produisent une déformation de la surface du miroir à des fréquences pouvant être relativement grandes. La vitesse du son dans la silice fondue atteint une valeur de  $6000 \text{ m/s}$ . En utilisant des substrats de faible épaisseur (quelques millimètres), on peut obtenir des modes de vibration interne du miroir ayant une fréquence de résonance supérieure au mégahertz.

Nous présentons dans cette partie la description modale du mouvement du miroir. Nous verrons en particulier comment décrire ce mouvement pour des fréquences voisines d'une fréquence de résonance en déterminant les paramètres qui caractérisent le mode résonnant, en montrant comment il peut être excité et en modélisant également la réponse des autres modes. On considère ensuite le couplage optomécanique entre les modes de vibration du miroir et le faisceau de mesure.

### Equation élastique et modes propres de vibration d'un résonateur

Les déformations de la surface du miroir sont provoquées par la propagation d'ondes acoustiques dans le matériau constituant le substrat. Nous utilisons pour réaliser nos miroirs de la silice fondue (Herasil), qui est un matériau homogène et isotrope. Dans ce cas la propagation d'une déformation  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  à l'intérieur du substrat est décrite par l'équation d'élasticité [41] :

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)), \quad (1.26)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau, et  $\lambda$  et  $\mu$  ses constantes de Lamé.

La géométrie particulière du résonateur intervient dans les conditions aux limites que doit satisfaire la déformation  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  sur la surface du résonateur. Ces conditions dépendent du système de fixation du miroir et peuvent être relativement complexes à modéliser. Le couplage avec l'environnement extérieur s'accompagne généralement de phénomènes de dissipation dégradant les facteurs de qualité du résonateur. Les systèmes de maintien des miroirs que nous utilisons tendent à isoler aux maximum le miroir, afin de se rapprocher du cas d'un résonateur libre dont les conditions aux limites s'écrivent en un point  $\mathbf{r}$  de la surface :

$$\sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) n_j = 0, \quad (1.27)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal à la surface et où  $[\sigma]$  représente le tenseur des contraintes défini à partir du tenseur des déformations  $[u]$  par :

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij}, \quad (1.28)$$

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (1.29)$$

On cherche des solutions stationnaires de l'équation de propagation (1.26) sous la forme  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r})e^{i\Omega t}$ , où  $\Omega$  est la fréquence d'évolution de l'onde acoustique. La déformation acoustique peut se décomposer en une partie longitudinale produisant un déplacement dans la direction de propagation de l'onde (onde de compression), et une partie transverse induisant des déplacements dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde (onde de cisaillement) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^l(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^t(\mathbf{r}), \quad (1.30)$$

avec

$$\nabla \times \mathbf{u}^l(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^t(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.31)$$

Ces propriétés, utilisées dans l'équation de propagation (1.26), donnent l'équation d'évolution des ondes longitudinale et transverse,

$$\Delta \mathbf{u}^l(\mathbf{r}) + \frac{\Omega^2}{c_l^2} \mathbf{u}^l(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.32)$$

$$\Delta \mathbf{u}^t(\mathbf{r}) + \frac{\Omega^2}{c_t^2} \mathbf{u}^t(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.33)$$

où  $c_l$  et  $c_t$  désignent respectivement les vitesses de propagation des ondes longitudinale et transverse,

$$c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad (1.34)$$

$$c_t = \sqrt{\mu/\rho}. \quad (1.35)$$

Les équations (1.32) et (1.33) couplées aux conditions aux limites (1.27) possèdent une série de solutions  $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$  formant une base orthogonale (pour le produit scalaire défini comme l'intégrale sur le volume du résonateur) et dont les fréquences propres  $\Omega_n$  se répartissent selon des valeurs discrètes. La déformation du résonateur se décompose alors sur tous les modes propres de vibration selon :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_n a_n(t) \mathbf{u}_n(\mathbf{r}), \quad (1.36)$$

où les amplitudes  $a_n(t)$  des différents modes acoustiques  $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$  dépendent des forces appliquées sur le résonateur.

### Mouvement du résonateur

La décomposition modale permet de déterminer le comportement du résonateur en s'intéressant à l'évolution temporelle de chaque mode pris individuellement. Nous allons caractériser un mode particulier en calculant l'énergie  $\mathcal{E}$  qui lui est associée. Nous allons tout d'abord considérer le cas d'un résonateur libre soumis à aucune force extérieure.



Les énergies cinétique et potentielle se calculent en intégrant les densités d'énergie sur le volume du résonateur. L'énergie cinétique s'écrit :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \rho \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \right|^2. \quad (1.37)$$

Grâce à la décomposition modale (1.36) et en utilisant l'orthogonalité des modes acoustiques  $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ , on trouve :

$$\mathcal{E}_c = \sum_n \frac{1}{2} M_n \left[ \frac{da_n}{dt}(t) \right]^2, \quad (1.38)$$

où  $M_n$  est la masse effective du mode  $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$  définie par :

$$M_n = \rho \int d^3\mathbf{r} |\mathbf{u}_n(\mathbf{r})|^2. \quad (1.39)$$

Ce paramètre apparaît sous la forme du produit de la masse volumique par le *volume* du mode acoustique.  $M_n$  correspond à la masse du résonateur effectivement mise en mouvement lors de l'excitation du mode  $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ .

L'énergie potentielle élastique est reliée au tenseur des contraintes  $[\sigma]$  et au tenseur des déformations  $[u]$  par :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_{ij} \int d^3\mathbf{r} \sigma_{ij} u_{ij}. \quad (1.40)$$

Une intégration par partie de l'équation ci-dessus donne :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_{ij} \int d^3\mathbf{r} \left[ \frac{\partial(\sigma_{ij} u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} u_j \right]. \quad (1.41)$$

Le premier terme donne l'intégrale sur la surface du résonateur de  $\sigma_{ij} u_j$  qui est nulle dans le cas d'un résonateur libre [équation (1.27)]. En utilisant la définition de  $\sigma_{ij}$ , l'énergie potentielle se met sous la forme :

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \{ (\lambda + 2\mu)(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}) - \mu[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})] \cdot \mathbf{u} \}. \quad (1.42)$$

En considérant une onde de compression (vérifiant l'équation (1.31)), l'expression précédente peut être simplifiée en :

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2} \rho c_l^2 \int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}^l(\mathbf{r}, t) \cdot \Delta \mathbf{u}^l(\mathbf{r}, t). \quad (1.43)$$

Pour une onde de cisaillement on trouve une expression totalement analogue mais en remplaçant la vitesse des ondes longitudinales  $c_l$  par la vitesse  $c_t$  des ondes transversales. Dans les deux cas, la décomposition en modes propres (1.36) et les équations

de propagation (1.32) et (1.33), permettent d'écrire l'énergie potentielle comme une somme sur tous les modes :

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2} \sum_{n,m} \frac{\rho \Omega_n^2}{2} a_n(t) a_m(t) \int d^3\mathbf{r} \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_m(\mathbf{r}). \quad (1.44)$$

L'orthogonalité des modes propres conduit à l'expression :

$$\mathcal{E}_p = \sum_n \frac{1}{2} M_n \Omega_n^2 [a_n(t)]^2. \quad (1.45)$$

La somme de l'énergie potentielle et cinétique fournit l'expression de l'énergie totale de vibration du résonateur  $\mathcal{E}$  :

$$\mathcal{E} = \sum_n \frac{1}{2} M_n \left\{ \left[ \frac{da_n}{dt}(t) \right]^2 + \Omega_n^2 [a_n(t)]^2 \right\}. \quad (1.46)$$

Cette expression fait apparaître l'énergie d'une somme d'oscillateurs harmoniques de masses  $M_n$  et de fréquences  $\Omega_n$ . Le mouvement du résonateur libre et non amorti se décompose sur les modes acoustiques internes dont les amplitudes se comportent comme des oscillateurs harmoniques indépendants.

### Effet d'une force appliquée

Nous allons maintenant décrire l'effet d'une force appliquée au résonateur sur l'évolution temporelle des amplitudes des modes acoustiques. Nous avons considéré jusqu'à présent un résonateur de géométrie quelconque. Nous supposons désormais l'existence d'une face plane sur laquelle est déposé le miroir. L'axe  $(Oz)$  est défini comme l'axe normal à cette face et le miroir se situe en  $z = 0$ . On se limitera dans la suite au cas d'une force appliquée au niveau de la surface du miroir. Pour prendre en compte cette force, il faut rajouter dans l'expression de l'énergie totale du résonateur un terme supplémentaire qui est l'opposé du travail de la force sur la surface,

$$\mathcal{W} = -\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (1.47)$$

où  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$  est la force par unité de surface appliquée au point  $\mathbf{r}$  et où les crochets désignent le produit scalaire de deux fonctions définies sur la surface du miroir :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{S}} d^2\mathbf{r} f(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}). \quad (1.48)$$

où l'intégration s'effectue sur toute la surface plane du résonateur. La décomposition du mouvement en modes propres donne alors un travail  $\mathcal{W}$  égal à :

$$\mathcal{W} = - \sum_n \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \rangle a_n(t), \quad (1.49)$$

En ajoutant ce terme à l'énergie totale du résonateur [équation (1.46)], on obtient :

$$\mathcal{E} + \mathcal{W} = \sum_n \left\{ \frac{1}{2} M_n \left[ \frac{da_n}{dt}(t) \right]^2 + \frac{1}{2} M_n \Omega_n^2 [a_n(t)]^2 - \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \rangle a_n(t) \right\}. \quad (1.50)$$

L'énergie peut se mettre une fois encore sous la forme de l'énergie d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants. Chaque oscillateur est désormais soumis à une force  $\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \rangle$ . Ce terme représente le recouvrement spatial entre la force et le profil du mode acoustique au niveau de la surface du résonateur. Les amplitudes  $a_n$  sont indépendantes et leur nombre est égal au nombre de degrés de liberté dans le mouvement du résonateur. En appliquant les équations de Hamilton sur l'amplitude  $a_n(t)$  d'un mode particulier on trouve une équation d'évolution similaire à celle d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2}(t) + \Omega_n^2 a_n(t) = \frac{1}{M_n} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \rangle. \quad (1.51)$$

Cette équation transposée dans l'espace de Fourier, donne finalement l'expression de l'amplitude spectrale de chaque mode en fonction du recouvrement de la force appliquée au résonateur avec le mode  $n$  :

$$a_n[\Omega] = \chi_n[\Omega] \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, \Omega), \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \rangle, \quad (1.52)$$

où l'on a introduit la susceptibilité  $\chi_n = 1/M_n(\Omega_n^2 - \Omega^2)$  du mode acoustique, similaire à celle d'un oscillateur harmonique non amorti, de masse  $M_n$  et de fréquence propre  $\Omega_n$ .

### Effet de la dissipation dans le résonateur

Jusqu'à présent nous avons considéré un résonateur idéal sans phénomènes de dissipation. La décomposition en modes propres équivalents à des oscillateurs harmoniques va permettre de modéliser les pertes du résonateur en ajoutant un terme d'amortissement dans les équations d'évolution des amplitudes de chaque mode. Tout phénomène de dissipation s'accompagne également de fluctuations du système dues au couplage avec le bain thermique que constitue l'environnement extérieur.

Dans le cas d'un oscillateur harmonique la dissipation est représentée par un angle de perte  $\phi_n[\Omega]$  dépendant de la fréquence et du mode acoustique induisant une partie imaginaire dans la susceptibilité  $\chi_n$  [34] :

$$\chi_n[\Omega] = \frac{1}{M_n(\Omega_n^2 - \Omega^2 - i\Omega_n^2 \phi_n[\Omega])}. \quad (1.53)$$

Cette expression suppose que le processus de dissipation agit indépendamment sur chaque mode. Elle n'est en fait valable que dans le cadre de pertes homogènes dans le résonateur. La présence de pertes inhomogènes introduites par exemple par le traitement optique du miroir nécessite de prendre en compte des termes *croisés* faisant intervenir un couplage entre les modes de vibration [42]. Nous supposons cependant que ces effets sont petits et considérerons comme valide l'expression (1.53).

Le paramètre  $\phi_n[\Omega]$  dépend des mécanismes de dissipation dans le résonateur qui sont actuellement encore mal connus et il n'existe pas d'expression générale pour l'angle de perte valable à toute fréquence. Nous utiliserons donc des hypothèses simplificatrices pour exprimer sa dépendance en fréquence. Un modèle basé sur la mesure des pertes

acoustiques essentiellement valable dans la zone de fréquence correspondant aux ultrasons prédit un angle de perte constant avec la fréquence :

$$\phi_n[\Omega] = \frac{1}{Q_n}, \quad (1.54)$$

où  $Q_n$  est le facteur de qualité du mode acoustique.

Un autre modèle couramment employé est celui d'un amortissement de type visqueux où l'oscillateur est soumis à une force proportionnelle et opposée à sa vitesse. L'angle de perte se met alors sous la forme :

$$\phi_n[\Omega] = \frac{\Omega}{Q_n \Omega_n}. \quad (1.55)$$

Cette description sera utilisée dans ce mémoire. Notons cependant que les deux modèles sont équivalents pour des fréquences voisines de la fréquence de résonance.

Les fluctuations associées au processus de dissipation sont décrites par une force de Langevin  $F_{T,n}$ , agissant sur chaque mode acoustique. On obtient un ensemble de forces indépendantes les unes des autres et dont le spectre est relié à la partie imaginaire de la susceptibilité mécanique par le théorème fluctuations-dissipation [équation (1.3)] [34] :

$$S_{T,n}[\Omega] = -\frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im} \left( \frac{1}{\chi_n[\Omega]} \right), \quad (1.56)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $T$  la température du bain thermique.

Les amplitudes des modes acoustiques décrivant le mouvement du résonateur couplé avec un bain thermique à la température  $T$  et soumis à une force extérieure  $\mathbf{F}$ , s'expriment dans l'espace de Fourier sous la forme :

$$a_n[\Omega] = \chi_n[\Omega] (\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, \Omega), \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \rangle + F_{T,n}[\Omega]). \quad (1.57)$$

On obtient finalement l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique amorti, soumis à une force aléatoire due au bruit thermique et à une force extérieure représentant le recouvrement de la force  $\mathbf{F}$  avec le profil du mode acoustique.

### 1.1.3 Description du champ dans la cavité

Dans cette section nous étudions de manière plus complète le champ dans la cavité. Nous décrivons le champ de manière tridimensionnelle. Toutefois la cavité sélectionne des modes particuliers du champ. Lorsque le faisceau laser incident est spatialement adapté au mode TEM<sub>00</sub> de la cavité, nous allons montrer que l'évolution du champ peut être obtenue à l'aide d'une description monodimensionnelle équivalente [33].

Nous avons vu dans la section précédente que les déplacements du miroir mobile sont en fait dus aux déformations de sa surface. Nous commençons cette section par la description de l'effet d'une telle déformation sur le champ et montrons qu'elle est équivalente à un déplacement monodimensionnel du miroir. Ceci permet ensuite de décrire l'évolution ainsi que les états stationnaires du champ intracavité.

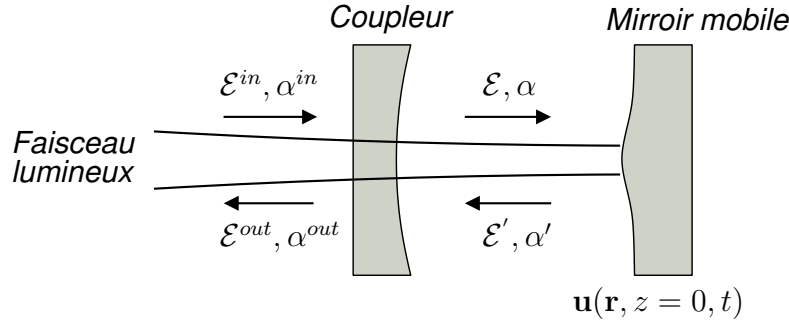


FIG. 1.5 – Description des champs incident, sortant, et intracavité.

### Effet d'une déformation du miroir sur le champ

Les déplacements du miroir que nous étudions sont dus à des déformations de la surface du résonateur sur lequel il est déposé. Nous allons déterminer dans ce paragraphe l'effet d'une telle déformation sur le champ intracavité. On s'intéresse à une cavité plan-concave, dont le miroir plan est déposé sur le résonateur. Une telle cavité présente une série de résonances optiques repérées par trois indices  $p$ ,  $q$  et  $l$ , et de profil  $v_{pql}$  Gaussien en intensité. Le faisceau incident est supposé  $\text{TEM}_{00}$  résonnant avec le mode fondamental de la cavité. Le profil spatial  $v_0$  du champ au niveau du miroir plan est donné par :

$$v_0(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} e^{-r^2/w_0^2}, \quad (1.58)$$

où  $w_0$  est le col du faisceau (waist) situé dans le plan du miroir. Le champ dans ce plan est donc de la forme :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = v_0(\mathbf{r})\alpha(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad (1.59)$$

où  $\omega_0$  est la fréquence optique et  $\alpha(t)$  l'amplitude du champ dépendant lentement du temps.

Le champ se réfléchissant sur le miroir mobile, dont le déplacement est  $\mathbf{u}(r, z = 0, t)$ , subit un déphasage dépendant du point  $\mathbf{r}$  de réflexion et devient :

$$\mathcal{E}'(\mathbf{r}, t) = v_0(\mathbf{r})\alpha(t)e^{-i\omega_0 t} e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r}, z=0, t)}. \quad (1.60)$$

Le champ après réflexion n'est plus purement  $\text{TEM}_{00}$  et possède des composantes non nulles sur les modes propres optiques  $v_{pql}$  de la cavité :

$$\mathcal{E}'(\mathbf{r}, t) = \sum_{p,q,l} \langle v_0(\mathbf{r})e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r}, z=0, t)}, v_{pql}(\mathbf{r}) \rangle v_{pql}(\mathbf{r}) \alpha(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad (1.61)$$

où les crochets désignent l'intégrale de recouvrement au niveau de la surface du miroir. On s'intéresse à des déformations acoustiques du résonateur, et les fréquences

d'évolution de  $\mathbf{u}(r, z = 0, t)$  ne dépassent pas la dizaine de mégahertz. L'intervalle entre les fréquences optiques des cavités non dégénérées que nous utilisons (voir section 1.2.1) est quant-à-lui supérieur au gigahertz. Dans ces conditions seul le mode TEM<sub>00</sub> est résonnant avec la cavité et la contribution des autres modes est négligeable. L'équation (1.61) se réduit à un seul terme et s'écrit :

$$\mathcal{E}'(\mathbf{r}, t) = \langle v_0(\mathbf{r}) e^{2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, z=0, t)}, v_0(\mathbf{r}) \rangle \mathcal{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.62)$$

En considérant les déplacements très petits par rapport à la longueur d'onde du faisceau incident, on peut faire un développement au premier ordre de cette expression qui devient :

$$\mathcal{E}'(\mathbf{r}, t) = (1 + 2i\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{u}, v_0^2 \rangle) \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.63)$$

Lors d'une réflexion sur le miroir mobile, le champ subit uniquement un déphasage proportionnel à la moyenne du déplacement du miroir pondérée par l'intensité locale  $v_0^2$  du champ. En comparant cette expression au déphasage subi pour un déplacement monodimensionnel (équation (1.7)), il apparaît qu'une déformation de la surface du miroir est ainsi équivalente à un déplacement effectif  $x$  monodimensionnel qui fait intervenir le recouvrement entre la déformation et le faisceau de mesure et dont la valeur est :

$$x(t) = \langle u(t), v_0^2 \rangle, \quad (1.64)$$

où  $u$  est le déplacement du miroir projeté sur la direction du faisceau lumineux.

### Susceptibilité effective d'un mode acoustique

Ce résultat permet de réinterpréter le mouvement du miroir vu par la lumière en faisant apparaître une susceptibilité effective pour chaque mode acoustique. La décomposition modale donnée par les équations (1.36) et (1.57) peut être introduite dans l'expression du déplacement vu par le faisceau lumineux [équation (1.64)] :

$$x[\Omega] = \sum_n \langle u_n, v_0^2 \rangle \chi_n[\Omega] (\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, \Omega), \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \rangle + F_{T,n}[\Omega]) \quad (1.65)$$

où  $u_n$  désigne le déplacement du  $n$ -ème mode projeté sur la direction du faisceau lumineux. Dans le cas particulier où la force  $\mathbf{F}$  est la force de pression de radiation  $\mathbf{F}_{\text{rad}}$  exercée par le faisceau intracavité, le profil de la force dans le plan du miroir est donné par,

$$\mathbf{F}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = 2\hbar\mathbf{k}|\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)|^2 = 2\hbar\mathbf{k}v_0^2(\mathbf{r})I(t), \quad (1.66)$$

où  $I$  est le flux de photons défini par,

$$I(t) = \int_S dr^2 |\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)|^2 = |\alpha(t)|^2, \quad (1.67)$$

où l'intégrale porte sur une surface perpendiculaire à la direction de propagation du faisceau (par exemple la surface du miroir). Le déplacement se met alors sous la forme :

$$x[\Omega] = \sum_n \langle u_n, v_0^2 \rangle^2 \chi_n[\Omega] \left( 2\hbar k I[\Omega] + \frac{1}{\langle u_n, v_0^2 \rangle} F_{T,n}[\Omega] \right). \quad (1.68)$$

Dans ces conditions il est possible de définir une susceptibilité effective qui inclut le recouvrement spatial entre la déformation due au  $n$ -ème mode avec le faisceau lumineux. L'équation précédente se transforme en :

$$x[\Omega] = \sum_n \chi_n^{\text{eff}}[\Omega] (2\hbar k I[\Omega] + F_{T,n}^{\text{eff}}[\Omega]), \quad (1.69)$$

où  $\chi_n^{\text{eff}}$  est la susceptibilité d'un oscillateur harmonique,

$$\chi_n^{\text{eff}} = \frac{1}{M_n^{\text{eff}} (\Omega_n^2 - \Omega^2 - i\Omega\Omega_n/Q_n)}, \quad (1.70)$$

semblable à  $\chi_n$  mais où l'on a introduit une masse effective  $M_n^{\text{eff}}$ ,

$$M_n^{\text{eff}} = \frac{M_n}{\langle u_n, v_0^2 \rangle^2}, \quad (1.71)$$

et où la force  $F_{T,n}^{\text{eff}}$  est définie à partir de la force de Langevin agissant sur le mode  $n$  en prenant en compte le recouvrement avec la lumière :

$$F_{T,n}^{\text{eff}} = \frac{F_{T,n}}{\langle u_n, v_0^2 \rangle}. \quad (1.72)$$

Il ressort de la définition de l'équation (1.71) que la masse effective peut devenir infinie lorsque le recouvrement entre la lumière et le mode est nul. Ceci traduit le fait que dans ce cas particulier la lumière n'est pas sensible aux déplacements du miroir provoqués par ce mode. On peut également s'assurer grâce aux relations (1.56) et (1.70–1.72) que la force de Langevin effective  $F_{T,n}^{\text{eff}}$  agissant sur le mode  $n$  vérifie le théorème fluctuations-dissipation associé à la susceptibilité  $\chi_n^{\text{eff}}$  :

$$S_{T,n}^{\text{eff}}[\Omega] = -\frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im} \left( \frac{1}{\chi_n^{\text{eff}}[\Omega]} \right). \quad (1.73)$$

On peut alors définir une susceptibilité effective totale  $\chi^{\text{eff}}$  décrivant le comportement du miroir dû à l'ensemble des modes acoustiques sous l'effet de la pression de radiation du faisceau intracavité et du couplage avec le bain thermique :

$$x[\Omega] = \chi^{\text{eff}}[\Omega] (2\hbar k I[\Omega] + F_T^{\text{eff}}[\Omega]), \quad (1.74)$$

avec

$$\chi^{\text{eff}}[\Omega] = \sum_n \chi_n^{\text{eff}}[\Omega], \quad (1.75)$$

$$F_T^{\text{eff}}[\Omega] = \sum_n \frac{\chi_n^{\text{eff}}[\Omega]}{\chi^{\text{eff}}[\Omega]} F_{T,n}^{\text{eff}}. \quad (1.76)$$

La force de Langevin effective  $F_T^{\text{eff}}$  ainsi définie vérifie bien, d'après les équations (1.73), (1.75) et (1.76), le théorème fluctuations-dissipation associé à la susceptibilité totale  $\chi^{\text{eff}}$ . On retrouve finalement dans l'expression (1.74) que le mouvement du miroir  $x$  vu par le faisceau lumineux peut être décrit de manière monodimensionnelle, de façon équivalente aux équations (1.5) et (1.6). En particulier la force de pression de radiation ne fait intervenir que l'intensité totale  $I[\Omega]$  dans le mode  $\text{TEM}_{00}$  résonnant de la cavité. La susceptibilité effective  $\chi^{\text{eff}}$  décrivant le couplage optomécanique n'est bien sûr plus celle d'un simple oscillateur harmonique, mais elle contient la réponse de tous les modes acoustiques du miroir et leur recouvrement spatial avec la lumière.

### Evolution du champ dans la cavité

On suppose que le miroir mobile est totalement réfléchissant, et que le coupleur d'entrée a une très grande réflectivité  $r = 1 - \gamma$ , avec  $\gamma \ll 1$ . On suppose également que les pertes sont négligeables. La transmission en amplitude du miroir d'entrée est notée  $t$ . La cavité est caractérisée par sa longueur  $L_0$  lorsque le miroir est immobile.

La conservation de l'énergie appliquée aux champs de part et d'autre du miroir d'entrée fournit des relations linéaires et unitaires entre les amplitudes des champs incidents et réfléchis par la cavité (les amplitudes lentement variables sont définies par des relations similaires à l'équation (1.59)) :

$$\alpha(t) = t\alpha^{\text{in}}(t) + r\alpha'(t), \quad (1.77)$$

$$\alpha^{\text{out}}(t) = t\alpha'(t) - r\alpha^{\text{in}}(t). \quad (1.78)$$

L'unitarité de ces relations impose que la transmission  $t$  du coupleur soit égale à  $\sqrt{2\gamma}$ . Le champ intracavité  $\alpha$  à un instant donné  $t$  est ainsi la somme de la partie du champ incident  $\alpha^{\text{in}}$  transmis par la cavité et du champ intracavité  $\alpha'$  ayant déjà effectué un aller-retour entre les miroirs (voir figure 1.5). Le champ sortant est égal au champ intracavité transmis par le coupleur, superposé au champ incident directement réfléchi par le coupleur. La propagation du champ dans la cavité permet alors de relier les champs  $\alpha$  et  $\alpha'$  par l'équation :

$$\alpha'(t) = \alpha(t - \tau)e^{i\Psi(t)}, \quad (1.79)$$

où  $\tau$  est le temps mis par la lumière pour effectuer un aller-retour dans la cavité et  $\Psi(t)$  représente le déphasage que subit le champ intracavité lors d'un aller-retour défini par :

$$\Psi(t) \equiv 2kL(t) \quad [2\pi], \quad (1.80)$$

où  $k = 2\pi/\lambda$  est le vecteur d'onde du champ. La longueur  $L(t)$  de la cavité vue par la lumière se décompose en la somme d'un terme  $L_0$  dû à la propagation du champ entre les miroirs lorsque le miroir mobile est dans sa position de repos, et d'un terme dû à la réflexion sur la surface du miroir qui d'après les équations (1.63) et (1.64) est équivalent à un trajet optique supplémentaire  $x(t)$  :

$$L(t) = L_0 + x(t). \quad (1.81)$$



Le temps de propagation  $\tau$  est une quantité qui dépend du déplacement  $x$  du miroir mobile. Cependant dans le cas de petits déplacements du miroir, les variations du temps  $\tau$  peuvent être négligées et l'on peut écrire :

$$\tau = 2L_0/c. \quad (1.82)$$

Pour une cavité proche de résonance ( $\psi(t) \ll 1$ ) et de grande finesse ( $\gamma \ll 1$ ), l'enveloppe du champ varie peu sur un aller-retour. On retrouve alors les expressions usuelles d'évolution du champ dans une cavité Fabry-Perot à une seule entrée-sortie [35], avec un terme supplémentaire de déphasage  $\Psi(t)$  dû au déplacement effectif  $x(t)$  du miroir mobile :

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha(t) = [-\gamma + i\Psi(t)]\alpha(t) + \sqrt{2\gamma}\alpha^{in}(t), \quad (1.83)$$

$$\alpha^{out}(t) = \sqrt{2\gamma}\alpha(t) - \alpha^{in}(t), \quad (1.84)$$

$$\Psi(t) = \Psi_0 + 2kx(t), \quad (1.85)$$

où  $\Psi_0 \equiv \omega_0\tau [2\pi]$  est le déphasage induit par la cavité lorsque le miroir mobile est dans sa position de repos. Ces équations montrent que le champ peut également être traité de manière monodimensionnelle, en utilisant les amplitudes lentement variables du champ dans le mode TEM<sub>00</sub>. Elles ne dépendent en particulier que du déplacement effectif  $x(t)$  du miroir.

### Etats stationnaires du champ

On décrit dans ce paragraphe les états stationnaires du champ et du miroir. Le déplacement moyen  $\bar{x}$  représente la somme des contributions statiques de tous les modes de vibration du miroir.  $\bar{x}$  est obtenu à partir de l'équation (1.74) à fréquence nulle et moyennée sur toute les réalisations possibles de la force de Langevin :

$$\bar{x} = 2\hbar k\chi[0]\bar{I}, \quad (1.86)$$

où  $\bar{I} = |\bar{\alpha}|^2$  est l'intensité moyenne du champ intracavité. Le déphasage moyen  $\bar{\psi}$  du champ dans la cavité est alors donné par l'équation (1.85) :

$$\bar{\Psi} = \Psi_0 + \Psi_{NL}, \quad (1.87)$$

où l'on a introduit le déphasage non linéaire  $\Psi_{NL}$  dû au déplacement du miroir sous l'effet de la pression de radiation moyenne du champ intracavité :

$$\Psi_{NL} = 4\hbar k^2\chi[0]\bar{I}. \quad (1.88)$$

Ce déphasage induit un terme cubique en l'amplitude  $\alpha$  du champ intracavité dans l'équation (1.83). Il produit un effet sur le champ équivalent à un effet Kerr capable de produire un état comprimé du champ [43, 22].

La valeur moyenne des champs intracavité et réfléchi dans l'état stationnaire s'obtient à partir des équations (1.83) et (1.84) en prenant  $\frac{d\alpha}{dt} = 0$  :

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\bar{\Psi}} \bar{\alpha}^{in}, \quad (1.89)$$

$$\bar{\alpha}^{out} = \frac{\gamma + i\bar{\Psi}}{\gamma - i\bar{\Psi}} \bar{\alpha}^{in}. \quad (1.90)$$

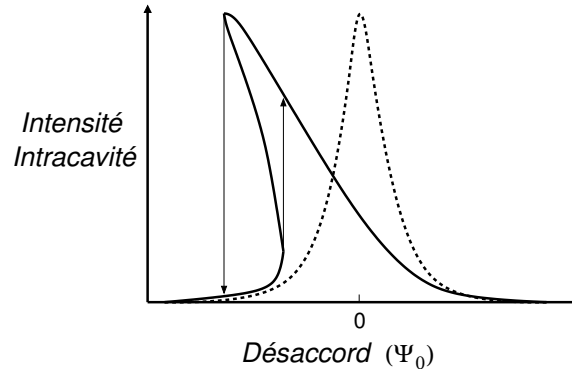


FIG. 1.6 – Déformation du pic d’Airy de l’intensité intracavité pour un déphasage non linéaire  $\Psi_{NL}$  négligeable devant  $\gamma$  (courbe en pointillé) et de l’ordre de  $\gamma$  (courbe en trait plein).

On retrouve les expressions usuelles des champs pour une cavité Fabry-Perot à une seule entrée-sortie. En particulier, comme nous avons négligé les pertes au niveau des miroirs, l’intensité réfléchi par la cavité, donnée par le module carré de  $\bar{\alpha}^{out}$ , est égale à l’intensité incidente. Une telle cavité n’induit donc qu’un déphasage sur le champ, dépendant d’un terme  $\Psi_0$ , représentant le désaccord entre la cavité et la lumière, et d’un terme non linéaire  $\Psi_{NL}$  faisant intervenir l’intensité intracavité. Dans le cas où les effets non linéaires sont petits par rapport aux pertes  $2\gamma$  de la cavité ( $\gamma \pm i\bar{\Psi} \simeq \gamma \pm i\Psi_0$ ), l’intensité intracavité  $\bar{I}$  décrit un pic de résonance de forme Lorentzienne lorsque le déphasage  $\bar{\Psi}$  est balayé autour du point  $\bar{\Psi} = 0$ . Lorsque les effets non linéaires ne sont pas négligeables, on observe une déformation du pic d’Airy caractéristique d’un milieu Kerr. La figure 1.6 montre l’allure du pic d’Airy pour un déphasage non linéaire négligeable devant  $\gamma$  (courbe en pointillé) et lorsqu’il est de l’ordre de  $\gamma$  (courbe en trait plein). Nous décrirons en détail dans la section 5.1.1 du chapitre 5 les phénomènes de bistabilité qui apparaissent dans le cas où  $\Psi_{NL}$  est supérieur ou de l’ordre de  $\gamma$  [44].

Dans le cas où les effets de pression de radiation sur le miroir mobile sont négligeables ( $\Psi_{NL} \ll \gamma$ ), la largeur du pic vaut  $2\gamma$ , et, à résonance, l’intensité intracavité est amplifiée d’un facteur  $2/\gamma$  par rapport à l’intensité moyenne incidente. Il ressort de ces calculs la valeur de la finesse que nous avons introduite dans la première section : elle est définie comme le rapport entre la distance entre deux résonances consécutives de la cavité, correspondant à un déphasage  $\bar{\Psi} = 2\pi$ , et de la largeur  $2\gamma$  de la résonance. La finesse  $\mathcal{F}$  vaut ainsi :

$$\mathcal{F} = \frac{\pi}{\gamma}. \quad (1.91)$$

#### 1.1.4 Mesure de petits déplacements

Nous avons vu qu’une cavité de grande finesse peut être utilisée pour mesurer de très petits déplacements d’un miroir, en détectant la phase du faisceau réfléchi par la cavité. Le schéma de la figure 1.7, qui est le cœur du montage expérimental que nous avons utilisé, présente le principe d’une telle mesure. Un faisceau laser est injecté

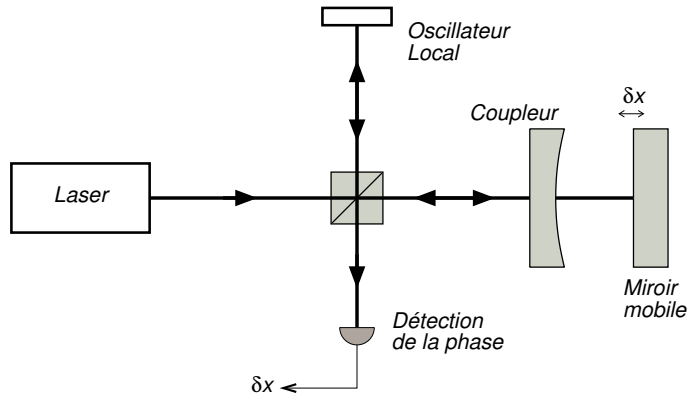


FIG. 1.7 – Principe de la mesure de petits déplacements d’un miroir mobile.

dans la cavité et une détection homodyne permet de mesurer la phase du faisceau réfléchi. En pratique on prélève une grande partie du faisceau incident pour former un faisceau de référence nommé oscillateur local. En mélangeant le faisceau réfléchi par la cavité à l’oscillateur local, on peut en extraire sa phase et en déduire le déplacement du miroir. Le circulateur permettant de séparer le faisceau incident et de mélanger l’oscillateur local et le faisceau réfléchi par la cavité est en pratique réalisé à l’aide de cubes séparateurs de polarisation et de lames demi et quart d’onde. Dans cette section, nous estimons la sensibilité de la mesure de position du miroir par un tel système.

### Evolution des quadratures dans la cavité

Ce paragraphe présente le traitement quantique de l’évolution du champ dans la cavité. Nous allons en particulier nous intéresser aux fluctuations quantiques du champ sortant de la cavité en fonction de celles du champ entrant et en fonction de la dynamique du système. En considérant un champ intense envoyé dans la cavité, comme c’est le cas pour un faisceau laser, l’intensité exprimée en nombre de photons par seconde est très grande devant 1. Les fluctuations semi-classiques  $\delta\alpha$  correspondant au bruit quantique sont alors petites devant le champ moyen  $\bar{\alpha}$  et on peut linéariser l’équation d’évolution de la distribution de Wigner. Dans ces conditions, l’équation obtenue pour les fluctuations quantiques est la même que celle décrivant l’évolution classique du système [37, 38, 39].

La sensibilité de la mesure est maximale lorsque la lumière est résonnante avec la cavité. Dans ce cas le déphasage  $\bar{\Psi}$  est nul et les équations (1.89) et (1.90) se simplifient en :

$$\bar{\alpha}^{out} = \bar{\alpha}^{in} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \bar{\alpha}. \quad (1.92)$$

Ainsi à résonance tous les champs moyens ont la même phase et on peut décider de les prendre réels pour simplifier les expressions.

Nous décrivons les fluctuations des champs dans l’espace de Fourier en regardant les conséquences d’un déplacement  $\delta x[\Omega]$  sur les quadratures du champ sortant de la

cavité. En linéarisant les équations (1.83) et (1.84) décrivant l'évolution classique du champ dans la cavité, on obtient les expressions :

$$(\gamma - i\Omega\tau)\delta\alpha[\Omega] = \sqrt{2\gamma}\delta\alpha^{in}[\Omega] + 2ik\bar{\alpha}\delta x[\Omega], \quad (1.93)$$

$$\delta\alpha^{out}[\Omega] = \sqrt{2\gamma}\delta\alpha[\Omega] - \delta\alpha^{in}[\Omega]. \quad (1.94)$$

Pour estimer la sensibilité de la mesure, on va s'intéresser aux quadratures  $p$  et  $q$  d'intensité et de phase du champ  $\alpha$ . Avec la convention de prendre les champs moyens réels, ces quadratures s'identifient aux quadratures réelle et imaginaire  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  [équations (1.11), (1.12), (1.18) et (1.19)] :

$$p[\Omega] = \alpha[\Omega] + \alpha^*[\Omega], \quad (1.95)$$

$$q[\Omega] = i(\alpha^*[\Omega] - \alpha[\Omega]), \quad (1.96)$$

où la transformée de Fourier  $\alpha^*[\Omega]$  de  $\alpha^*(t)$  est égale à  $(\alpha[-\Omega])^*$ . On peut alors calculer toutes les fluctuations d'intensité et de phase des faisceaux intracavité et réfléchi à partir des équations (1.93) et (1.94) :

$$\delta p[\Omega] = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega\tau} \delta p^{in}[\Omega], \quad (1.97)$$

$$\delta q[\Omega] = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega\tau} \delta q^{in}[\Omega] + \frac{4}{\gamma - i\Omega\tau} \bar{\alpha}k\delta x[\Omega], \quad (1.98)$$

$$\delta p^{out}[\Omega] = \frac{\gamma + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau} \delta p^{in}[\Omega], \quad (1.99)$$

$$\delta q^{out}[\Omega] = \frac{\gamma + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau} \delta q^{in}[\Omega] + \frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega\tau} \bar{\alpha}k\delta x[\Omega]. \quad (1.100)$$

A résonance, les fluctuations d'amplitude du champ dans la cavité et du champ sortant sont totalement découplées des fluctuations de phase et de position du miroir mobile. Cela peut s'interpréter par le fait que le point de fonctionnement de la cavité est au sommet du pic d'Airy où la pente en fonction du déphasage est nulle. L'intensité ne varie donc pas au premier ordre dans le développement linéaire des fluctuations. La phase du faisceau réfléchi  $\delta q^{out}$  dépend, quant-à-elle, linéairement de  $\delta x$  et l'on retrouve dans le cas statique ( $\Omega = 0$ ) l'expression simplifiée de l'équation (1.22), en utilisant le fait que  $2|\bar{\alpha}|\delta\varphi = \delta q$  [équation (1.19)].

D'après les équations (1.97–1.100) toutes les quantités relatives aux fluctuations intracavité sont divisées par un terme en  $\gamma - i\Omega\tau$  qui correspond à un filtrage de la cavité. On définit alors la bande passante  $\Omega_{cav}$  de la cavité par :

$$\Omega_{cav} = \gamma/\tau. \quad (1.101)$$

Les fluctuations de phase et d'intensité du faisceau incident dont la fréquence est grande devant  $\Omega_{cav}$  sont essentiellement réfléchies par la cavité et ne se retrouvent pas dans le champ intracavité. De même les fluctuations de position du miroir pour des fréquences très supérieures à  $\Omega_{cav}$  n'agissent pas sur la phase du faisceau réfléchi. En d'autres termes, la cavité effectue un moyennage de la position du miroir sur le temps moyen  $2\pi/\Omega_{cav}$  que la lumière passe dans la cavité.

### Sensibilité de la mesure

Pour n'importe quelle quadrature  $\alpha_\theta$  du champ, définie par l'équation (1.15), le spectre  $S_\theta$  de la quadrature est donné par :

$$\langle \delta\alpha_\theta[\Omega], \delta\alpha_\theta[\Omega'] \rangle = 2\pi\delta(\Omega + \Omega')S_\theta[\Omega], \quad (1.102)$$

où  $\langle \dots \rangle$  représente la moyenne prise sur la distribution de Wigner. On trouve ainsi que les spectres de bruit d'amplitude des faisceaux incident et réfléchi sont égaux :

$$S_p^{out}[\Omega] = S_p^{in}[\Omega]. \quad (1.103)$$

Les fluctuations de phase sont quant-à-elle corrélées aux fluctuations de position du miroir. A ces fluctuations, qui vont constituer le signal de notre mesure, viennent se superposer les fluctuations de phase du faisceau incident qui vont limiter la sensibilité de la mesure. D'après le modèle développé dans la section 1.1.3, le déplacement  $\delta x$  correspond au recouvrement entre le profil d'intensité du faisceau lumineux et la déformation de la surface du miroir. Il ne dépend que des forces appliquées sur le miroir, et il est indépendant du bruit de phase entrant dans la cavité. L'équation (1.100) permet alors de calculer le spectre de bruit de phase du champ réfléchi :

$$S_q^{out}[\Omega] = S_q^{in}[\Omega] + 256 \frac{\mathcal{F}^2 \bar{I}^{in}}{1 + (\Omega/\Omega_{cav})^2} \frac{S_x[\Omega]}{\lambda^2}. \quad (1.104)$$

Le premier terme de cette équation est un terme de bruit qui retranscrit directement le spectre de bruit de phase du faisceau incident, le second terme représente le signal lié au spectre de déplacement du miroir que l'on désire mesurer.

On peut estimer le plus petit déplacement mesurable en considérant un rapport signal à bruit égal à 1, obtenu lorsque les deux termes sont égaux. Pour un faisceau cohérent injecté dans la cavité, le bruit de phase incident est un bruit blanc, qui a donc un spectre indépendant de la fréquence, de valeur unité ( $S_q^{in}[\Omega] = 1$ ). On obtient un déplacement minimal observable  $\delta x_{shot}$  en fonction de la fréquence d'analyse égal à :

$$\delta x_{shot}[\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\bar{I}^{in}}} \sqrt{1 + \left( \frac{\Omega}{\Omega_{cav}} \right)^2}. \quad (1.105)$$

On obtient une sensibilité similaire à l'équation (1.24) qui n'était valable que dans le cas statique. La dépendance en fréquence montre que la sensibilité se dégrade à haute fréquence ( $\Omega > \Omega_{cav}$ ), ce qui correspond à un effet de filtrage par la cavité.

La sensibilité obtenue ici correspond à un système parfait, uniquement limité par le bruit quantique de la lumière. Cela signifie que les bruits techniques dans la mesure doivent être rendus négligeables. Un certain nombre d'imperfections expérimentales peut également réduire la sensibilité. Nous allons maintenant examiner l'effet de telles imperfections, en particulier les pertes optiques dans la cavité, et l'inadaptation spatiale du faisceau incident sur la cavité.

### Pertes dans la cavité

Nous allons reprendre le calcul de la sensibilité en tenant compte des pertes dans la cavité. Une partie des pertes sont produites par l'absorption et par la diffusion au niveau des traitements des miroirs. Une autre partie de la lumière intracavité peut aussi être perdue à cause d'une transmission non nulle du miroir arrière. Si l'on n'est sensible qu'au champ réfléchi par la cavité, l'ensemble de ces pertes peut être modélisé par une transmission non nulle du miroir arrière. Dans ce cas il faut prendre en compte le champ du vide qui pénètre dans la cavité par ce miroir [38], et les équations d'entrée-sortie du champ (1.83) et (1.84) s'écrivent :

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha(t) = [-\gamma + i\Psi(t)]\alpha(t) + \sqrt{T}\alpha^{in}(t) + \sqrt{P}\alpha^{vide}(t), \quad (1.106)$$

$$\alpha^{out}(t) = \sqrt{T}\alpha(t) - \alpha^{in}(t), \quad (1.107)$$

où  $T$  est la transmission en intensité du coupleur d'entrée, et  $P$  les pertes dans la cavité. Le facteur  $\gamma$  qui définit la finesse et qui est relié aux pertes globales du champ dans la cavité doit donc prendre en compte le terme de perte  $P$ . La conservation de l'énergie impose la relation  $R + T + P = 1$  avec  $R = 1 - 2\gamma$ . On trouve donc que  $2\gamma = P + T$  et que la finesse vaut  $\mathcal{F} = 2\pi/(P + T)$ . Les pertes introduisent par ailleurs un nouveau terme de bruit  $\alpha^{vide}$  dû au couplage avec les fluctuations du vide.

Les valeurs des champs moyens réfléchi et intracavité sont modifiées par rapport au cas sans perte donné par les équations (1.89) et (1.90). Les champs moyens s'écrivent désormais :

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{T}}{\gamma - i\bar{\Psi}} \bar{\alpha}^{in}, \quad \bar{\alpha}^{out} = \frac{\gamma - P + i\bar{\Psi}}{\gamma - i\bar{\Psi}} \bar{\alpha}^{in}. \quad (1.108)$$

Le champ intracavité est réduit à résonance d'un facteur  $\sqrt{T/2\gamma} = \sqrt{T/(T+P)}$  par rapport au cas sans perte, et l'intensité réfléchi est maintenant inférieure à l'intensité incidente. L'expression du champ réfléchi montre que lorsque l'on balaye le déphasage au voisinage d'une résonance, l'intensité réfléchi décrit un pic d'Airy en absorption. Ceci s'explique par le fait qu'à résonance l'intensité intracavité est non nulle et une partie de la puissance lumineuse est perdue. La profondeur de ce pic est donnée par le coefficient de réflexion à résonance  $\mathcal{R}_0$  :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\bar{I}_{\bar{\Psi}=0}^{out}}{\bar{I}_{\bar{\Psi}=\pm\infty}^{out}} = \left[ \frac{T - P}{T + P} \right]^2. \quad (1.109)$$

Dans le cas particulier où  $T = P$ , le champ moyen réfléchi s'annule. On retrouve alors le résultat classique qu'une cavité symétrique sans perte, correspondant bien dans notre cas à  $T = P$ , transmet toute l'intensité à résonance.

L'effet des pertes sur les fluctuations de phase à résonance ( $\bar{\Psi} = 0$ ) se déduit des équations (1.106) et (1.107) :

$$\delta q^{out} = \frac{\gamma - P + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau} \delta q^{in} + \frac{\sqrt{TP}}{\gamma - i\Omega\tau} \delta q^{vide} + \frac{4\sqrt{2\gamma - P}}{\gamma - i\Omega\tau} \bar{\alpha} k \delta x. \quad (1.110)$$

Les fluctuations du faisceau incident  $\delta q^{in}$  et du vide  $\delta q^{vide}$  sont indépendantes. Elles ont de plus toutes les deux le même spectre plat en fréquence et de valeur 1. La somme de leur deux contributions donne un spectre de bruit  $S_q^{out}$  égal à 1. La mesure de position du miroir mobile reste donc entachée d'un bruit égal au bruit de photon standard. En revanche l'effet du dernier terme dû au déplacement du miroir dans l'expression de  $\delta q^{out}$  est réduit par rapport au cas sans perte, à cause du terme  $\sqrt{2\gamma - P}$  et aussi du fait de l'atténuation du champ intracavité  $\bar{\alpha}$ . Le déplacement minimum observable  $\delta x_{shot}$  devient dans ces conditions :

$$\delta x_{shot}[\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\bar{T}^{in}}} \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_{cav}}\right)^2} \sqrt{\frac{T+P}{T}}. \quad (1.111)$$

La sensibilité est réduite d'un facteur  $\sqrt{T/(T+P)}$ . Notons que les pertes agissent également sur la sensibilité à travers la finesse  $\mathcal{F}$ . A finesse égale, il est cependant important d'avoir des pertes petites devant la transmission du coupleur d'entrée. Actuellement il est possible de réaliser des miroirs dont le traitement multidiélectrique engendre des pertes par diffusion et par absorption inférieures au *ppm*. Le choix de la transmission du coupleur d'entrée résulte alors d'un compromis entre l'obtention d'une grande finesse et la réduction des effets des pertes. Pour une transmission de 20 *ppm*, la finesse s'élève à 300 000, en gardant une diminution de la sensibilité due aux pertes de l'ordre du pourcent.

### Adaptation spatiale du faisceau incident

Toutes les cavités que nous utilisons sont constituées d'un miroir mobile plan et d'un coupleur d'entrée concave assurant la stabilité optique du système. Dans l'approximation paraxiale, une telle cavité présente des modes propres de résonance dont les profils d'intensité sont Gaussiens. Les résonances se répartissent en modes propres longitudinaux auxquels sont associés une série de modes transverses. Une adaptation spatiale parfaite correspond à un faisceau incident dont le profil Gaussien est exactement celui du mode fondamental  $TEM_{00}$  de la cavité. Dans le cas contraire, la contribution des modes transverses dans la décomposition du faisceau sur les modes propres  $\{v_n(\mathbf{r})\}$  de la cavité n'est pas nulle. Ces modes ayant des fréquences de résonance différentes, ils sont simplement réfléchis par la cavité. Une partie de la lumière incidente ne pénètre pas dans la cavité et n'est pas couplée au mouvement du miroir mobile. Plus précisément, on écrit la décomposition du champ incident  $\mathcal{E}^{in}$  sur le mode fondamental de profil spatial  $v_0(\mathbf{r})$  et sur les autres modes [équation (1.59)] :

$$\mathcal{E}^{in}(\mathbf{r}, t) = \alpha_0(t)v_0(\mathbf{r})e^{-i\omega_0 t} + \mathcal{E}'(\mathbf{r}, t), \quad (1.112)$$

où  $\alpha_0$  est l'amplitude du mode fondamental et où  $\mathcal{E}'$  correspond à la contribution de l'ensemble des autres modes de la base  $\{v_{n \neq 0}(\mathbf{r})\}$ , orthogonaux à  $v_0(\mathbf{r})$ . Le champ  $\mathcal{E}'$  possède donc un profil orthogonal à  $v_0$  et l'intensité moyenne  $\bar{T}^{in}$  du champ incident se met sous la forme :

$$\bar{T}^{in}(t) = |\bar{\alpha}_0(t)|^2 + \int d^3\mathbf{r} |\bar{\mathcal{E}}'(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (1.113)$$

On introduit alors le paramètre d'adaptation spatiale  $\eta_{cav}$  défini comme le rapport entre l'intensité incidente réellement couplée à la cavité ( $|\bar{\alpha}_0|^2$ ) et l'intensité totale incidente :

$$\eta_{cav} = |\bar{\alpha}_0|^2 / \bar{I}^{in}. \quad (1.114)$$

Si  $\eta_{cav}$  vaut 1, on se retrouve dans le cas d'une adaptation spatiale parfaite et la sensibilité est celle calculée précédemment. Dans le cas contraire, le champ  $\mathcal{E}'$  est directement réfléchi et seule l'intensité  $\eta_{cav}\bar{I}^{in}$  est couplée au mouvement du miroir mobile. Le plus petit déplacement observable devient :

$$\delta x_{shot}[\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\eta_{cav}\bar{I}^{in}}} \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_{cav}}\right)^2} \sqrt{\frac{T+P}{T}}. \quad (1.115)$$

La sensibilité est réduite d'un facteur  $\sqrt{\eta_{cav}}$ .

Notons que l'adaptation spatiale affecte également l'intensité réfléchie par la cavité. Loin de résonance elle reste égale à l'intensité incidente car la lumière ne pénètre pas dans la cavité. Néanmoins à résonance seule la partie couplée à la cavité subit les pertes de celle-ci et l'intensité réfléchie devient :

$$\bar{I}_{\Psi=0}^{out} = |\bar{\alpha}_0|^2 \left[ \frac{T-P}{T+P} \right]^2 + |\mathcal{E}'|^2. \quad (1.116)$$

Le coefficient de réflexion à résonance s'écrit alors :

$$\mathcal{R}_0 = \eta_{cav} \left[ \left( \frac{T-P}{T+P} \right)^2 - 1 \right] + 1. \quad (1.117)$$

### Bande passante de la cavité

Le dernier paramètre qui apparaît dans la plupart des équations relatives au couplage entre le champ et la cavité, est la bande passante de la cavité  $\Omega_{cav}$ . Pour observer avec une sensibilité uniquement limitée par le bruit de photon, il est préférable d'être à des fréquences suffisamment grandes pour que les bruits techniques du laser soient négligeables. Pour éviter un effet de filtrage par la cavité il faut donc que la bande passante soit au moins du même ordre. Celle-ci est d'autant plus faible que la finesse est importante et que la cavité est longue. Elle est donnée par :

$$\Omega_{cav} = \gamma/\tau = \frac{\pi c}{2\mathcal{F}L_0}. \quad (1.118)$$

Pour une finesse donnée, il est donc nécessaire d'avoir une cavité de longueur  $L_0$  la plus courte possible. Pour une finesse de 300 000 et une bande passante supérieure au mégahertz, la longueur doit être inférieure au quart de millimètre! Nous verrons dans le chapitre suivant des solutions mécaniques permettant de réaliser de telles cavités.



## 1.2 Montage expérimental

Nous présentons dans cette section le montage expérimental que nous avons utilisé pour réaliser la mesure de petits déplacements. Il est constitué de trois éléments principaux qui sont : la source laser, la cavité à miroir mobile, et le dispositif de détection homodyne. Nous commencerons par la description de la cavité dont les caractéristiques optiques et mécaniques imposent un cahier des charges sur la source laser. Nous décrirons cette dernière dans une deuxième section puis nous présenterons la détection homodyne.

### 1.2.1 La cavité à miroir mobile

La cavité constitue le cœur de l'expérience et ses caractéristiques expérimentales sont cruciales pour la sensibilité des mesures de déplacements du miroir mobile. Nous avons vu que la finesse de la cavité doit être suffisamment grande pour que la phase du faisceau réfléchi soit la plus sensible possible aux mouvements du miroir mobile. Un miroir d'entrée avec une faible transmission est ainsi nécessaire. Cependant d'autres paramètres affectent la sensibilité de la mesure. Les pertes dans la cavité représentent un facteur particulièrement limitant si elles ne sont pas petites devant la transmission du coupleur d'entrée. Nous avons aussi vu que l'adaptation spatiale du faisceau incident avec la cavité et la bande passante de la cavité jouent des rôles importants.

Nous avons utilisé pour ce mémoire deux cavités courtes de grande finesse avec des miroirs mobiles de géométrie différente. La première possède un miroir mobile plan-convexe et la seconde un miroir cylindrique. Nous présentons dans cette section ces deux cavités ainsi que les caractéristiques optiques qui permettent d'estimer la sensibilité de la cavité aux petits déplacements : l'intervalle spectral libre relié à la longueur de la cavité, la finesse optique déterminant la bande passante, et le coefficient de réflexion à résonance qui donne accès à la transmission du coupleur d'entrée.

#### Réalisation de la cavité à miroir plan-convexe

Le miroir mobile que nous avons utilisé dans une première série d'expériences est un miroir déposé sur la face plane d'un résonateur mécanique plan-convexe. Le résonateur fait  $12\text{ mm}$  de diamètre et  $1,5\text{ mm}$  d'épaisseur au centre. Le rayon de courbure de la face convexe est de  $180\text{ mm}$ .

Le matériau est de la silice fondue qui est utilisée comme substrat depuis un certain nombre d'années de sorte que les techniques de polissage et de dépôt du traitement réfléchissant permettent d'obtenir actuellement des miroirs à très faibles pertes optiques [45]. La silice fondue a également de très bonnes caractéristiques mécaniques avec des facteurs de qualité intrinsèques de l'ordre de  $10^7$ . Le traitement multidiélectrique a été réalisé par le Service des Matériaux Avancés dirigé par Jean-Marie Mackowski à l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon. Une caractérisation de l'état de surface du miroir, réalisée à l'ESPCI par l'équipe de Claude Boccara, a cependant révélé que la rugosité après le polissage du miroir est nettement moins bonne que les spécifications du fabricant. Les pertes sont donc plus importantes que prévues. Néanmoins la transmission du miroir, qui dépend principalement de la qualité des couches multidiélectriques déposées reste de l'ordre du *ppm*.

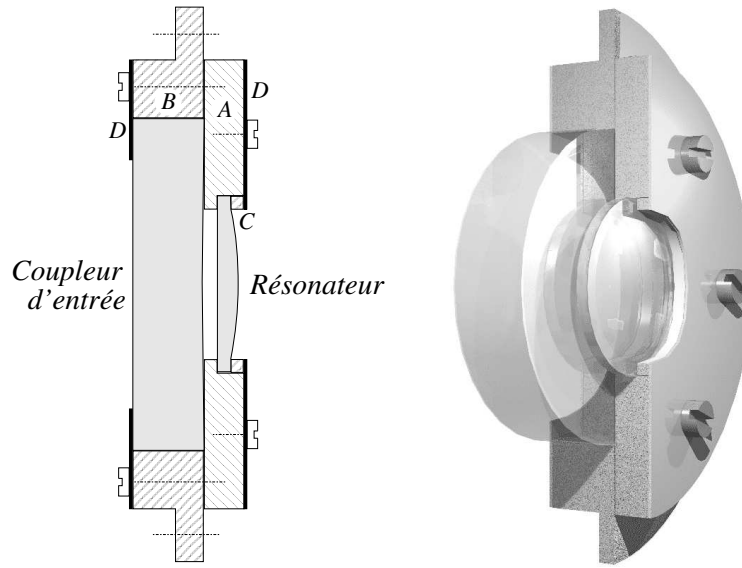


FIG. 1.8 – Montage de la cavité à miroir mobile plan-convexe. Les miroirs sont plaqués sur une pièce de montage en cuivre, grâce à des lames en chrysoles.

Le coupleur d'entrée de la cavité est un miroir de géométrie cylindrique dont la face réfléchissante a une courbure concave  $R_N$  de 1 m de rayon. C'est un miroir commercial *Newport SuperMirror High-Finesse*. Les spécifications du fabricant indiquent une transmission de 50 ppm et des pertes inférieures à 50 ppm. Ces deux miroirs sont montés en vis-à-vis dans un support rigide en cuivre présenté sur la figure 1.8. La longueur de la cavité ainsi formée est d'environ 1 mm.

### Procédure d'alignement

Une cavité optique plan-concave possède des modes de résonance optiques longitudinaux auxquels sont associés une série de modes transverses. Le profil d'intensité de ces modes peut être calculé exactement dans une approximation paraxiale et présente une structure Gaussienne [35]. Pour une cavité de longueur 1 mm avec un miroir d'entrée de rayon de courbure égal à 1 m, on trouve un col du faisceau de  $w_0 = 90 \mu\text{m}$ . L'intervalle spectral libre, qui caractérise l'écart en fréquence entre deux résonances longitudinales de la cavité est donné par :

$$\nu_{ISL} = \frac{c}{2L}, \quad (1.119)$$

et vaut 150 GHz. L'intervalle entre modes transverses  $\text{TEM}_{pl}$  dépend quant-à-lui non seulement de la longueur mais également du rayon de courbure du miroir concave. Dans l'hypothèse d'un rayon de courbure grand devant la longueur de la cavité cet intervalle peut s'écrire :

$$\nu_{tr} = \frac{\nu_{ISL}}{\pi} \sqrt{\frac{L}{R_N}}. \quad (1.120)$$

Cet intervalle est de l'ordre de 1,5 GHz, et les modes transverses présentent une dégénérescence en fréquence liée à la symétrie cylindrique de la cavité.

Le faisceau issu du laser est filtré spatialement pour que sa structure spatiale corresponde parfaitement au mode Gaussien  $TEM_{00}$ . Le faisceau est ensuite adapté à la cavité grâce à un système de deux lentilles. Leur focale, la distance entre les deux lentilles ainsi que la position du système sont calculées pour obtenir un col égal à  $w_0$ , situé exactement au niveau du miroir plan de la cavité. On utilise enfin un système de deux miroirs montés dans des supports réglables et placés en “baïonnette” afin d’ajuster la position du faisceau ainsi que son angle d’incidence sur la cavité.

Pour optimiser l’adaptation spatiale du faisceau incident, il est nécessaire de balayer le désaccord en fréquence entre le laser et la cavité. On utilise les éléments sélectifs internes de la cavité en anneau du laser pour modifier sa fréquence. Avec notre source laser Titane-Saphir, il est possible de pratiquer un balayage continu en fréquence et également d’exécuter des sauts de fréquence de  $19\text{ GHz}$  correspondant à l’intervalle spectral libre de l’étalon épais (voir section 1.2.3). On peut également moduler la fréquence du laser pour visualiser le pic d’Airy de la résonance à l’aide d’une photodiode, placée derrière la cavité, qui détecte le faisceau transmis.

Lorsque les réglages sont optimisés, pratiquement toute la puissance incidente est injectée dans le mode fondamental de la cavité. On peut estimer l’accord  $\eta_{cav}$  entre le faisceau et la cavité, défini comme le rapport de l’intensité couplée au mode fondamental sur l’intensité incidente totale [équation (1.114)], en mesurant à l’oscilloscope la hauteur des pic d’Airy associés aux différents modes transverses. On trouve un accord  $\eta_{cav}$  entre la cavité et le faisceau laser de 98%.

### Intervalle spectral libre

Lorsque le faisceau laser est aligné et bien adapté spatialement à la cavité, celle-ci présente un peigne de résonances longitudinales isolées, les modes transverses n’étant quasiment pas couplés au faisceau incident. L’intervalle spectral libre se mesure en repérant au lambdamètre la longueur d’onde de deux résonances consécutives. En pratique, partant d’une situation où le laser est à résonance et dont on a noté la longueur d’onde, on effectue un balayage de la fréquence du laser jusqu’à trouver une nouvelle résonance de la cavité. On s’assure, en revenant à la situation de départ, que la dérive de longueur d’onde entre les deux mesures, qui pourrait être induite par des dérives thermiques de la cavité, est inférieure au pourcent de l’écart entre les deux résonances.

L’écart en longueur d’onde  $\Delta\lambda$  mesuré est de  $3,1\text{ \AA}$ , pour une longueur d’onde moyenne de  $810\text{ nm}$ . L’intervalle spectral libre est de :

$$\nu_{ISL} = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = 141\text{ GHz}. \quad (1.121)$$

De ce résultat, on peut déduire la longueur  $L$  de la cavité [équation (1.119)] :

$$L = \frac{c}{2\nu_{ISL}} = 1.06\text{ mm}. \quad (1.122)$$

Cette valeur est en très bon accord avec la géométrie du support des miroirs utilisés.

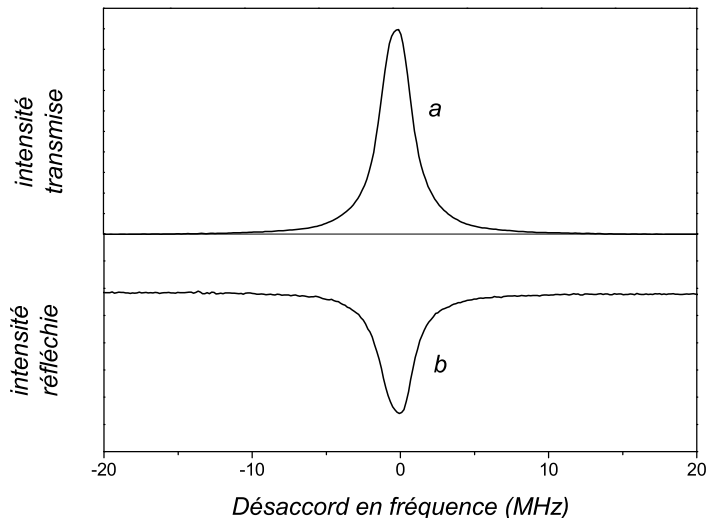


FIG. 1.9 – Pic d’Airy en transmission (courbe *a*) et en réflexion (courbe *b*) de la cavité à miroir mobile plan-convexe.

### Mesure de la bande passante

Lorsque l’on balaye la fréquence du laser au voisinage d’une résonance optique de la cavité, l’intensité intracavité décrit une Lorentzienne, dont la largeur à mi-hauteur vaut deux fois la bande passante  $\nu_{BP}$  de la cavité. Pour mesurer cette bande passante, on module la fréquence du laser à  $100\text{ Hz}$ , en agissant sur la cale piézoélectrique d’un miroir de la cavité laser. La courbe *a* de la figure 1.9 présente le pic d’Airy observé sur la photodiode arrière mesurant l’intensité transmise par la cavité à miroir mobile, directement proportionnelle à l’intensité intracavité. L’ajustement de la courbe par une Lorentzienne donne une bande passante  $\nu_{BP}$  de la cavité égale à  $1,9\text{ MHz}$ .

Ce résultat permet de calculer la finesse  $\mathcal{F}$  et les pertes totales  $2\gamma$  de la cavité grâce à la relation :

$$\mathcal{F} = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\nu_{ISL}}{2\nu_{BP}}. \quad (1.123)$$

On trouve une finesse de 37 000. Les pertes totales c’est-à-dire la somme  $2\gamma = T + P$  de la transmission  $T$  du coupleur d’entrée et des pertes  $P$  de la cavité, incluant la transmission résiduelle du miroir arrière, sont alors égales à  $169\text{ ppm}$ .

### Coefficient de réflexion à résonance

Lorsque l’on balaye le désaccord en fréquence entre le laser et la cavité autour d’une résonance, l’intensité réfléchie présente un pic d’Airy en absorption dû aux pertes dans la cavité comme cela a été expliqué dans la section 1.1.4. Le coefficient de réflexion à résonance, donné par l’équation (1.117), permet alors, connaissant les pertes totales  $2\gamma$  et le paramètre d’adaptation spatiale  $\eta_{cav}$ , d’accéder à la transmission  $T$ . Le coefficient

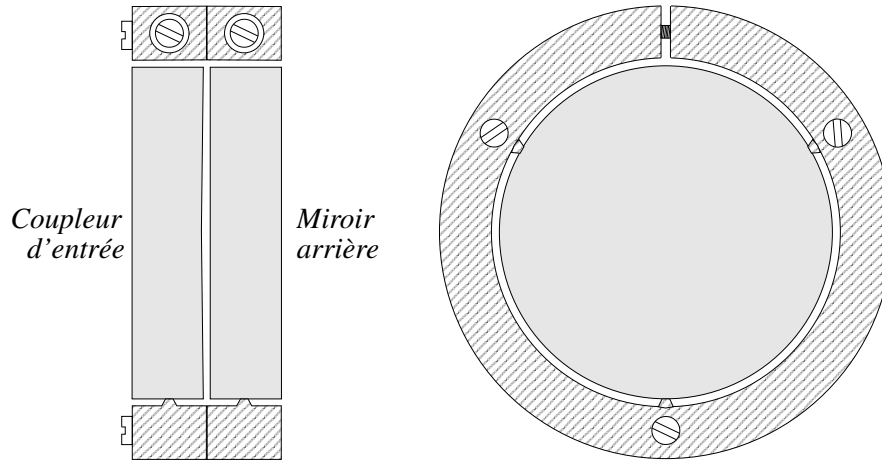


FIG. 1.10 – Montage de la cavité à miroirs cylindriques.

de réflexion à résonance  $\mathcal{R}_0$  est mesuré en comparant les intensités du champ réfléchi à résonance et hors résonance. On utilise les photodiodes de la détection homodyne décrite dans la section suivante, en masquant l'oscillateur local, et en sommant les tensions délivrées par les deux photodiodes pour observer le pic d'Airy en absorption du faisceau réfléchi (courbe  $b$  de la figure 1.9). Le coefficient  $\mathcal{R}_0$ , déduit de cette courbe, vaut 10 %. En utilisant les valeurs mesurées de l'adaptation spatiale  $\eta_{cav} = 98$  % et des pertes totales  $2\gamma = 169$  ppm, on trouve grâce à l'équation (1.117) une transmission  $T = 60$  ppm, les pertes étant égales à 109 ppm. Les pertes ont une valeur relativement élevée due certainement au mauvais poli de la surface du miroir mobile.

### Réalisation de la cavité à miroirs cylindriques

La seconde cavité que nous avons utilisée est constituée de deux miroirs cylindriques : un miroir plan-plan et un second plan-concave. On a choisi deux miroirs commerciaux *Newport*, de diamètre 25,4 mm et d'épaisseur 6,35 mm. Le miroir arrière de la cavité est un *Super mirror High-Finesse* plan. La transmission de ce miroir étant moins bonne que pour le miroir mobile plan-convexe, le coupleur d'entrée a été remplacé par un *Super mirror High-Transmission* plan-concave de rayon de courbure de 1 m, dont les spécifications indiquent une transmission de 200 ppm et des pertes inférieures à 50 ppm.

Pour minimiser l'effet de la fixation des miroirs sur les modes acoustiques et obtenir des miroirs se rapprochant au maximum de la situation idéale d'un résonateur libre, un système de fixation par la tranche a été utilisé. Le système de maintien est présenté sur la figure 1.10 : chaque miroir est monté séparément dans une bague en laiton munie de trois plots de 1 mm<sup>2</sup> usinés sur le diamètre interne de la bague et placés à 120° les uns des autres. Une brisure de l'ordre du millimètre est pratiquée sur un rayon de la bague et permet grâce à une vis le serrage du miroir. Les deux bagues sont ensuite plaquées l'une contre l'autre pour obtenir un parallélisme suffisant entre les miroirs tout en les maintenant à quelques dixièmes de millimètre l'un de l'autre.

L'opération de montage du miroir dans la bague doit être réalisée avec le plus grand

soin car c'est essentiellement elle qui détermine le parallélisme final entre les miroirs. Une pièce de montage cylindrique possédant un épaulement d'un dixième de millimètre permet de monter le miroir en le décalant légèrement par rapport à la base de la bague qui sera mise en contact avec la seconde bague. Une vérification du parallélisme du miroir plan-plan dans la première bague est réalisée en envoyant un faisceau laser aligné avec l'axe théorique de la cavité et en contrôlant le décalage du faisceau réfléchi. Le miroir plan-concave est ensuite monté dans sa bague pour compléter la cavité. L'orientation du faisceau étant conservée, l'ensemble de la cavité est translaté jusqu'à obtenir l'auto-collimation du faisceau. On peut ainsi estimer le décentrage de la cavité, qui est de l'ordre du millimètre.

### Mesure des caractéristiques de la cavité

Nous avons appliqué les mêmes procédures expérimentales que pour la cavité à miroir plan-convexe décrites précédemment afin de mesurer les caractéristiques de la cavité. Le principe de montage du miroir utilisé pour cette cavité conduit à une relative imprécision sur la distance entre les miroirs. L'observation de deux résonances fondamentales consécutives à des longueurs d'onde du laser (repérées au  $\lambda$ damètre) de 810,382 et 811,631  $nm$  donne un intervalle spectral libre  $\nu_{ISL}$  de 569  $GHz$ . On en déduit d'après l'équation (1.122) reliant l'intervalle spectral libre à la longueur de la cavité, un espacement entre les miroirs de 0.263  $mm$ .

La largeur du pic d'Airy observé sur l'intensité résiduelle transmise par le miroir arrière lorsque la fréquence du laser est modulée autour de la résonance donne une bande passante  $\nu_{BP}$  de la cavité de 11  $MHz$ . La finesse se déduit de ce résultat et de la valeur de l'intervalle spectral libre grâce à l'équation (1.123). On obtient une finesse de 25 900, comparable à celle de la cavité à miroir plan-convexe. On déduit également les pertes totales de la cavité qui s'élèvent à 243  $ppm$ .

La transmission du coupleur d'entrée est déduite de la mesure du coefficient  $\mathcal{R}_0$  de réflexion à résonance. La profondeur du pic d'Airy sur l'intensité réfléchie par la cavité donne  $\mathcal{R}_0 = 31,5\%$ , ce qui correspond à une transmission du coupleur d'entrée de 180  $ppm$  en bon accord avec les spécifications du fabricant (200  $ppm$ ). On notera également la très bonne qualité des miroirs puisque les pertes des deux miroirs, garanties inférieures à 50  $ppm$ , sont plus petites que prévues (de l'ordre de 20 à 30  $ppm$ ).

La réduction de la longueur de la cavité tout en conservant un rayon de courbure de 1  $m$  impose un col du mode optique fondamental nettement plus petit (45  $\mu m$  au lieu de 90  $\mu m$  pour la cavité à miroir plan-convexe). On n'a cependant pas voulu modifier le montage d'injection du faisceau dans la cavité. L'adaptation spatiale n'est alors que de 90 %, moins bonne que pour la cavité à miroir plan-convexe (98 %).

### Récapitulation des résultats

Les caractéristiques détaillées des deux cavités sont récapitulées dans le tableau 1.1.

	Cavité à miroir plan-convexe	Cavité à miroir cylindrique
Adaptation spatiale (%)	98	$\simeq 90$
Intervalle Spectrale Libre ( $GHz$ )	141	569
Longueur ( $mm$ )	1,06	0,26
Bande passante ( $MHz$ )	1,9	11
Finesse	37 000	25 900
Pertes totales ( $ppm$ )	169	243
Coefficient de réflexion (%)	10	31,5
Transmission du coupleur ( $ppm$ )	60	180

TAB. 1.1 – Caractéristiques optiques des deux cavités.

### 1.2.2 La détection homodyne

Nous présentons dans cette section le système de détection de la phase du faisceau réfléchi. Le montage est basé sur une technique d’homodynage, où une grande partie du faisceau incident est prélevé pour former un oscillateur local [46]. Il est ensuite mélangé avec le faisceau réfléchi par la cavité et sert de référence de phase. En changeant la phase de l’oscillateur local, il est possible de mesurer les fluctuations de n’importe quelle quadrature du champ réfléchi. Le faisceau issu du mélange est détecté par un dispositif de détection équilibré, constitué de deux photodiodes à haut rendement quantique.

Les paragraphes suivants expliquent comment il est possible d’obtenir les informations sur le bruit de phase et d’intensité du faisceau réfléchi. On présente également le montage optique permettant de réaliser l’oscillateur local, de séparer et de mélanger les faisceaux. Nous décrivons enfin le montage électronique de détection et l’asservissement de la longueur du bras de l’oscillateur local qui permet de contrôler la quadrature mesurée.

#### Principe de la détection

Le schéma expérimental de la détection homodyne est représenté sur la figure 1.11. Le faisceau incident polarisé linéairement traverse une lame demi-onde ( $\lambda/2$ ) et un cube séparateur de polarisation (CP1). Une rotation de l’axe principal de la lame permet d’obtenir deux faisceaux dont les intensités relatives sont ajustables. L’oscillateur local a en pratique une intensité de dix à cent fois supérieure à celle du faisceau envoyé dans la cavité. En jouant sur un atténuateur variable situé à la sortie de la source laser et sur la lame  $\lambda/2$ , on fixe l’intensité de l’oscillateur local à  $10\text{ mW}$  et l’intensité du faisceau couplé à la cavité à  $100\ \mu\text{W}$  dans le cas de la cavité à miroir plan-convexe et  $1\text{ mW}$  dans le cas de la cavité à miroir *Newport*.

Deux lames quart-d’onde ( $\lambda/4$ ) tournées de  $45^\circ$  sont placées sur les trajets des deux faisceaux créés précédemment et sont ainsi traversées deux fois. Par exemple pour l’oscillateur local, la polarisation verticale est transformée en polarisation circulaire. Après la réflexion sur le miroir et le deuxième passage dans la lame, la polarisation redevient linéaire mais horizontale. Le faisceau est donc totalement transmis par le cube. Le faisceau envoyé sur la cavité subit le même retournement de polarisation et est totalement réfléchi par le cube au second passage. Les faisceaux sont ainsi recombinaés

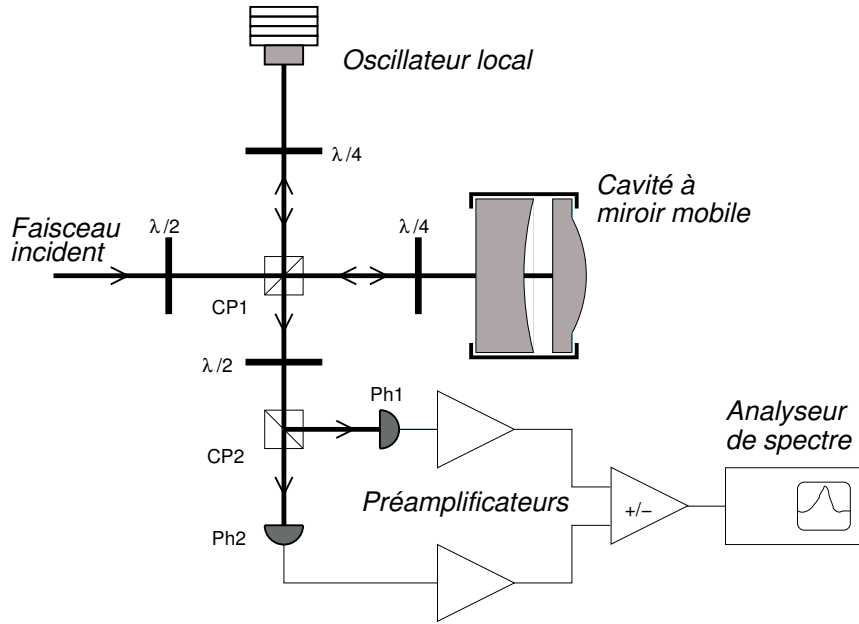


FIG. 1.11 – Montage de détection homodyne du faisceau réfléchi par la cavité à miroir mobile.

avec des polarisations orthogonales.

Les deux faisceaux sont envoyés sur un second dispositif constitué d'une lame  $\lambda/2$  tournée de  $22,5^\circ$  et d'un cube séparateur de polarisation CP2. L'orientation de la lame a pour effet de tourner les polarisations des deux faisceaux de  $45^\circ$ . Le cube se comporte alors pour chaque faisceau incident comme une lame semi-réfléchissante en séparant chaque faisceau en deux parties d'intensités égales, mais les faisceaux dans les deux voies de sortie ont même polarisation et peuvent interférer. Les deux photodiodes Ph1 et Ph2 mesurent les intensités des champs transmis et réfléchi par le cube CP2.

Chaque photodiode est suivie d'un système de préamplification fournissant une tension proportionnelle aux intensités détectées. Enfin un dispositif sommateur-soustracteur permet de réaliser la somme ou la différence de ces deux signaux. En notant  $\alpha^{OL}e^{i\varphi}$  le champ de l'oscillateur local et  $\alpha^{out}$  le champ réfléchi par la cavité, où les amplitudes moyennes  $\bar{\alpha}_{OL}$  et  $\bar{\alpha}_{cav}$  sont choisies réelles et où  $\varphi$  désigne le déphasage relatif entre les deux champs, les champs  $\alpha_1(t)$  et  $\alpha_2(t)$  sur les deux photodiodes s'écrivent :

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha^{out} + \alpha^{OL}e^{i\varphi}], \quad (1.124)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha^{out} - \alpha^{OL}e^{i\varphi}]. \quad (1.125)$$

En sommant ou en soustrayant les photocourants produits par les photodiodes Ph1 et Ph2, on obtient les intensités  $I_+$  et  $I_-$  données par :

$$I_+ = I^{out}(t) + I^{OL}(t), \quad (1.126)$$

$$I_- = 2Re(\alpha^{out}(t)\alpha^{OL*}(t)e^{-i\varphi}). \quad (1.127)$$



$I_+$  correspond à l'intensité totale de l'oscillateur local et du faisceau réfléchi par la cavité, alors que  $I_-$  fait apparaître l'interférence entre les deux faisceaux. La composante continue des signaux ainsi créés vaut :

$$\bar{I}_+ = \bar{I}^{out}(t) + \bar{I}^{OL}(t), \quad (1.128)$$

$$\bar{I}_- = 2\sqrt{\bar{I}^{out}\bar{I}^{OL}} \cos \varphi. \quad (1.129)$$

La différence des photocourants est reliée directement au déphasage relatif  $\varphi$  entre les deux faisceaux. Elle est en particulier nulle lorsque les champs sont en quadrature de phase, et maximale lorsqu'ils sont en phase. Cette partie continue du signal peut servir à contrôler la longueur du bras de l'oscillateur local qui détermine le déphasage  $\varphi$  et permettre ainsi de choisir la quadrature détectée.

Les fluctuations de la différence  $I_-$  des intensités est obtenue en linéarisant l'équation (1.127) autour des valeurs moyennes des champs :

$$\begin{aligned} \delta I_-(t) = & \bar{\alpha}^{OL}[\delta\alpha^{out}(t)e^{-i\varphi} + \delta\alpha^{cav*}(t)e^{i\varphi}] \\ & + \bar{\alpha}^{out}[\delta\alpha^{OL}(t)e^{i\varphi} + \delta\alpha^{OL*}(t)e^{-i\varphi}]. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Les fluctuations de  $I_-$  sont donc la somme des fluctuations de la quadrature  $\alpha_\varphi^{out}$  du champ réfléchi par la cavité et de la quadrature  $\alpha_{-\varphi}^{OL}$  de l'oscillateur local, pondérées respectivement par les champs moyens  $\bar{\alpha}^{OL}$  et  $\bar{\alpha}^{out}$  [équation (1.15)]. Etant donné que l'oscillateur local a une intensité très grande devant celle du faisceau réfléchi, le second terme de la somme peut être négligé par rapport au premier. La différence des photocourants retranscrit ainsi les fluctuations du champ réfléchi, et son spectre  $S_-[\Omega]$  est directement relié au spectre  $S_\varphi^{out}[\Omega]$  de bruit de la quadrature d'angle  $\varphi$  du champ  $\alpha^{out}$  [équation (1.102)] :

$$S_-[\Omega] = \bar{I}^{OL} S_\varphi^{out}[\Omega]. \quad (1.131)$$

Le contrôle de la phase relative  $\varphi$  des deux faisceaux permet d'accéder au spectre de bruit de n'importe quelle quadrature du champ  $\alpha^{out}$ , amplifié par l'intensité moyenne de l'oscillateur local. En particulier, on obtient le spectre de bruit de phase du faisceau réfléchi en prenant  $\varphi = \pi/2$ , c'est-à-dire en asservissant le bras de l'oscillateur local à  $\bar{I}_- = 0$ .

Les calculs précédents supposent un dispositif de détection idéal, mais il est nécessaire de prendre en compte un certain nombre d'imperfections pour avoir une description plus réaliste du montage. Le rendement quantique des photodiodes et plus généralement les pertes dues aux différents éléments optiques utilisés pour mélanger et faire interférer les champs ont pour effet d'atténuer le champ réfléchi et de le coupler aux fluctuations du vide. La mesure du spectre  $S_\varphi^{out}$  est contaminée par le bruit de photon standard du vide :

$$S_-[\Omega] = \bar{I}^{OL} (\eta_{ph} S_\varphi^{out}[\Omega] + 1 - \eta_{ph}), \quad (1.132)$$

où  $\eta_{ph}$  est le rendement en intensité du système de détection et où  $1 - \eta_{ph}$  représente les pertes. Le bruit de phase du faisceau sortant de la cavité retranscrit la position du

miroir mobile entaché du bruit de photon standard du faisceau incident sur la cavité [équation (1.104)]. Pour un rendement  $\eta_{ph}$  strictement inférieur à l'unité, le bruit de la mesure reste égal au bruit de photon standard mais la contribution liée au déplacement du miroir est réduite en amplitude d'un facteur  $\sqrt{\eta_{ph}}$ .

Une seconde caractéristique expérimentale critique pour l'efficacité de la détection est l'équilibrage entre les deux voies des photodiodes. Ce point dépend aussi bien des composants optiques de mélange et de détection que de la partie électronique, amplificateurs et soustracteur. Tout déséquilibre s'accompagne d'une contamination de la mesure par le bruit d'intensité  $I_+$ . A la différence des pertes qui ne provoquent qu'une diminution de la sensibilité, un déséquilibre peut engendrer un excès de bruit sur le signal détecté. L'équilibrage de notre dispositif est meilleur que 1%, ce qui rend l'effet négligeable dans la plage de fréquence qui nous intéresse.

Une dernière imperfection peut venir d'une mauvaise adaptation spatiale entre le faisceau réfléchi par la cavité et l'oscillateur local. En effet seule la partie intervenant dans le recouvrement des deux faisceaux interfère. Le reste du faisceau réfléchi ne contribue pas au signal mais uniquement au bruit de photon. On définit alors comme pour le rendement quantique un paramètre  $\eta_{OL}$  caractérisant la modification de  $\bar{I}_-$  due au recouvrement spatial :

$$\bar{I}_- = 2\sqrt{\eta_{OL}\bar{I}^{out}\bar{I}^{OL}} \cos \varphi. \quad (1.133)$$

L'effet d'une adaptation spatiale imparfaite est équivalent à celui des pertes : le signal de position est réduit d'un facteur  $\sqrt{\eta_{OL}}$  par rapport au bruit de photon standard, ce qui détériore la sensibilité du même facteur.

Nous présentons maintenant plus en détail les éléments qui constituent le système de détection homodyne.

### Les photodiodes de la détection équilibrée

Les photodiodes doivent présenter le meilleur rendement quantique possible, et avoir une réponse en fréquence suffisamment large pour pouvoir observer sans atténuation le bruit de phase du faisceau réfléchi par la cavité à des fréquences d'analyse élevées (de l'ordre du mégahertz). Enfin comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe précédent, l'équilibrage des deux voies de détection est particulièrement importante et les photodiodes doivent être appariées, c'est-à-dire qu'elles doivent présenter une efficacité quantique aussi semblable que possible.

Le choix des photodiodes s'est porté sur des FND100 de *EG&G*, nécessitant une tension de polarisation de 70 V, et présentant une efficacité optimale pour des longueurs d'onde comprises entre 800 et 850 nm. La surface photosensible a un diamètre de 1 mm et possède un taux de conversion photon-électron supérieur à 90 %. Les photodiodes ont été choisies parmi un lot d'une dizaine dont les réponses ont été mesurées par rapport à une photodiode de référence. Les deux photodiodes retenues ont des réponses identiques à 0,3 % près. Une lentille, placée avant le cube CP2, permet de focaliser les faisceaux sur les photodiodes avec un col de 0,5 mm. La quasi totalité des faisceaux est ainsi envoyée sur les photodiodes sans que l'intensité ne soit trop importante et que des phénomènes de saturation n'apparaissent.

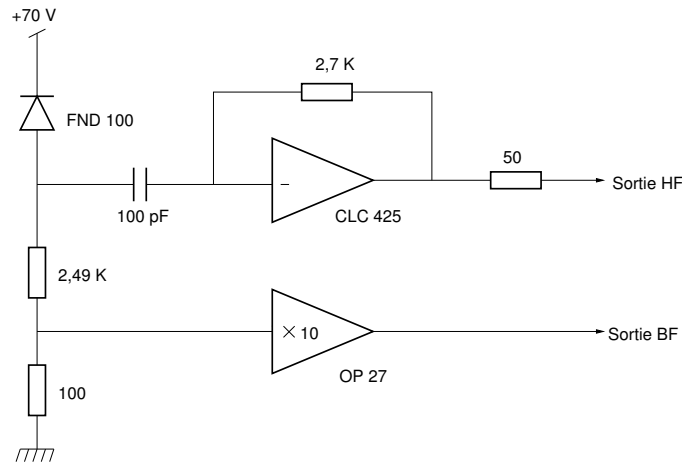


FIG. 1.12 – Schéma électronique des pré-amplificateurs des photodiodes.

Chaque photodiode est montée sur un système de deux translations, verticale et horizontale, de manière à pouvoir les aligner aisément sur les faisceaux en sortie du cube. Enfin un boîtier en laiton entoure les photodiodes et fournit un blindage efficace contre les signaux parasites hautes fréquences rayonnés par les systèmes électroniques environnants.

### L'électronique de détection

Les courants délivrés par les photodiodes, proportionnels aux intensités injectées sur leur surface photosensible, sont amplifiés pour être transformés en des tensions mesurables. La figure 1.12 présente le schéma de principe d'un tel amplificateur qui est en fait constitué de deux voies. La voie basse fréquence (DC) (voie du bas sur le schéma) filtre les signaux allant du continu à quelques centaines de kilohertz. Elle est basée sur un amplificateur classique OP27 avec un gain de 10. Le taux de conversion de cette voie est de  $1 \text{ V}/\text{mA}$ . La voie haute fréquence (HF), en haut sur le schéma, a une réponse pouvant aller jusqu'à des fréquences de l'ordre de  $50 \text{ MHz}$  grâce à l'amplificateur rapide CLC 425. Le taux de conversion de cette voie est de  $1,3 \text{ V}/\text{mA}$  en tenant compte de l'impédance de  $50 \Omega$  de charge en sortie. L'extraction de la composante haute fréquence du photocourant est basée sur un montage transimpédance. A haute fréquence la capacité d'entrée se comporte comme un court-circuit et la cathode de la photodiode est reliée, par l'entrée du CLC 425, à une masse virtuelle. Ainsi, la tension aux bornes de la photodiode pour des signaux hautes fréquences, est constante, ce qui élimine les effets de la capacité parasite de la photodiode.

Le sommateur-soustracteur, qui mélange les signaux issus des photodiodes des deux voies, utilise lui-aussi un amplificateur opérationnel CLC 425, monté en amplificateur différentiel de tension. Un interrupteur permet de lui faire ajouter ou soustraire ses deux entrées. Dans les deux cas, les gains des deux voies sont parfaitement égaux en valeur absolue. Le fonctionnement en soustracteur est évidemment le plus utilisé, puisque le principe de détection homodyne repose sur la différence des deux photocourants. La

somme des photocourants permet néanmoins d'accéder aisément au bruit d'intensité totale du faisceau laser.

Les intensités des faisceaux envoyés dans chacune des deux voies de la détection sont réglées en tournant la lame  $\lambda/2$  placée avant le cube séparateur CP2, de façon à annuler la différence entre les tensions continues sortant des deux boîtiers. L'équilibrage, limité par la précision de rotation de la lame, est de l'ordre de 0,2 %. Le choix des composants électroniques des deux amplis photodiode permet d'ajuster le gain global de chacune des deux voies et l'on obtient au final un équilibrage de la détection homodyne meilleur que 0,5 %.

### Réalisation de l'oscillateur local

Le miroir de renvoi qui constitue l'oscillateur local est collé sur une petite cale piézo-électrique, pilotée grâce à un amplificateur haute tension (0–400 V) rapide, permettant de déplacer le miroir sur une distance de l'ordre du micron. Ce système est monté dans un support microcontrôle à butées micrométriques qui permet d'ajuster la direction de l'oscillateur local. Afin de compenser des dérives plus importantes de la phase, l'ensemble est monté sur une platine de translation micrométrique. Celle-ci est commandée par un vérin piézoélectrique *Newport ES1330PT-01* capable d'effectuer des excursions d'environ 30  $\mu m$  et piloté par un amplificateur haute tension 0–1000 V bridé à 150 V pour ne pas endommager le vérin.

Ces degrés de liberté du miroir de renvoi ainsi que leur contrôle électronique permettent un réglage précis du recouvrement spatial et un asservissement électronique de la phase relative entre les deux faisceaux. Comme on l'a vu, un mauvais recouvrement des deux faisceaux au niveau des photodiodes se traduit par une perte de contraste des franges et par une dégradation du rapport signal à bruit. La phase relative entre l'oscillateur local et le faisceau réfléchi doit également être soigneusement contrôlée puisque c'est elle qui détermine la quadrature mesurée sur le champ réfléchi.

On optimise l'adaptation spatiale en appliquant sur le vérin une rampe de tension qui permet de visualiser avec un oscilloscope les franges d'interférence sur la partie DC du signal  $I_-$ . On règle alors les vis micrométriques et la butée manuelle du vérin afin de maximiser le contraste des franges d'interférence. Le recouvrement peut être calculé à partir de l'amplitude crête-à-crête des interférences visualisées sur l'oscilloscope, grâce à l'équation (1.133). Les intensités moyennes  $\bar{I}_{OL}$  et  $\bar{I}_{cav}$  sont mesurées en masquant respectivement le faisceau réfléchi et l'oscillateur local et en contrôlant au voltmètre la tension délivrée par les deux blocs photodiodes. Pour un faisceau incident sur la cavité de 100  $\mu W$  et un oscillateur local de 10  $mW$ , on obtient une tension crête-à-crête de 1,8 V et des tensions associées à  $\bar{I}_{OL}$  et  $\bar{I}_{cav}$  de respectivement 5,68 V et 38 mV. La valeur du recouvrement spatial correspondant est de  $\eta_{OL} = 94$  %.

### Asservissement de la phase de l'oscillateur local

La phase relative entre l'oscillateur local et le faisceau sortant de la cavité fluctue essentiellement à cause des variations d'indice de l'air et des vibrations mécaniques des supports des éléments optiques. On peut atténuer une partie des vibrations sonores et limiter la circulation d'air en ajoutant une enceinte en plexiglas qui englobe toute la

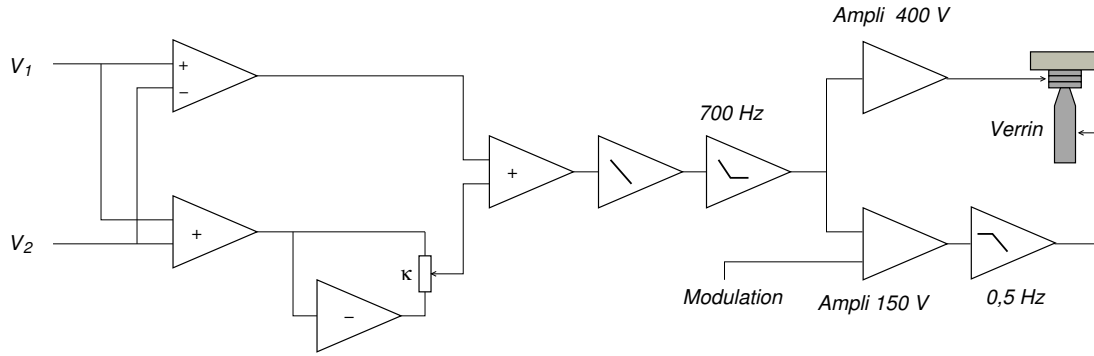


FIG. 1.13 – Principe de l'asservissement de la longueur du bras de l'oscillateur local, à partir des signaux  $V_1$  et  $V_2$  fournis par les deux blocs photodiodes.

partie interférométrique du montage, c'est-à-dire les cubes CP1 et CP2, l'oscillateur local et la cavité à miroir mobile. Une dérive lente due à la dilatation thermique de ces mêmes supports sont compensées par un asservissement qui agit sur la longueur du bras de l'oscillateur local.

Les sorties DC des deux blocs photodiodes sont ajoutées et soustraites de façon à obtenir les signaux  $\bar{I}_+$  et  $\bar{I}_-$  [équations (1.128) et (1.129)]. Le signal d'erreur d'asservissement de l'oscillateur local correspond alors à  $\bar{I}_-$ . On compare en fait ce signal à une fraction  $\kappa$  de  $\bar{I}_+$  ce qui permet de compenser d'éventuelles fluctuations d'intensité du faisceau incident. Plus précisément, l'asservissement annule le signal d'erreur  $\bar{I}_- - \kappa\bar{I}_+$ , où  $\kappa$  peut varier de -1 à 1. On obtient alors une phase relative  $\varphi$  vérifiant l'égalité :

$$\cos \varphi = \kappa \frac{\bar{I}^{out}(t) + \bar{I}^{OL}(t)}{2\sqrt{\bar{I}^{out}\bar{I}^{OL}}}. \quad (1.134)$$

Cette quantité dépend uniquement du rapport des intensités et l'on s'affranchit des fluctuations de l'intensité incidente.

La figure 1.13 présente le principe de l'asservissement. Le signal  $\bar{I}_-$  est obtenu à partir des tensions  $V_1$  et  $V_2$  délivrées par les préamplificateurs des photodiodes, en utilisant un amplificateur opérationnel monté en soustracteur. Deux autres amplificateurs montés en additionneur et en inverseur fournissent les signaux  $\bar{I}_+$  et  $-\bar{I}_+$ . Un pont diviseur variable monté entre ces deux signaux permet alors d'obtenir n'importe quelle fraction  $\kappa$  de  $\bar{I}_+$ . Ce signal de référence est additionné à la tension  $\bar{I}_-$  à l'aide du dernier amplificateur.

L'asservissement est composé de deux voies, lente et rapide, agissant en parallèle sur le vérin et la cale piézoélectrique. Le vérin ne peut corriger les fluctuations qu'à très basse fréquence (de l'ordre du hertz), cependant sa grande excursion de  $30 \mu m$  lui permet de compenser des dérives importantes. Le système composé du miroir de petite taille ( $7,75 mm$  de diamètre et  $4 mm$  d'épaisseur) et de la cale piézoélectrique de  $1 mm$  d'épaisseur peut agir jusqu'à des fréquences de l'ordre du kilohertz avec une excursion allant jusqu'à  $0,2 \mu m$  c'est-à-dire  $\lambda/4$ .

Le signal est d'abord amplifié grâce à un intégrateur de pente globale  $-6 \text{ dB/octave}$  et par un second intégrateur pour des fréquences inférieures à  $700 \text{ Hz}$ . Le signal obtenu pilote l'amplificateur haute tension  $0\text{--}400 \text{ V}$  de la cale piézoélectrique, ainsi que celui de  $0\text{--}150 \text{ V}$  du vérin, par l'intermédiaire d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $0,5 \text{ Hz}$ . L'entrée de modulation lente sur l'amplificateur haute tension du vérin permet de balayer lentement la longueur de l'oscillateur local pour visualiser les franges d'interférence et régler le recouvrement spatial.

Les fluctuations résiduelles sur le déphasage  $\varphi$  ont une amplitude de  $0,2^\circ$  en valeur efficace (*rms*) et une analyse spectrale révèle que ces fluctuations sont concentrées à des fréquences intermédiaires de quelques dizaines à quelques centaines de hertz.

### 1.2.3 La source laser

Le choix d'une cavité à miroir mobile courte ( $\leq 1 \text{ mm}$ ) et ne comportant aucun élément piézoélectrique pouvant faire varier sa longueur impose d'avoir une source laser facilement accordable en fréquence et balayable sur une plage d'au moins  $300 \text{ GHz}$ . Le balayage n'a cependant pas besoin d'être effectué en continu. Lorsque le laser n'est pas parfaitement aligné sur la cavité, celle-ci présente un large peigne de résonances correspondant aux modes transverses. Il suffit alors de pouvoir balayer continûment sur une plage correspondant à quelques intervalles entre modes transverses (typiquement  $10 \text{ GHz}$ ). Un balayage sur des plages plus importantes peut s'exécuter par saut de fréquence.

Une fois le laser accordé en fréquence et adapté spatialement au mode fondamental de la cavité, un balayage rapide de la fréquence peut être pratiqué sur le laser pour visualiser et mesurer la largeur du pic d'Airy. La modulation de fréquence doit avoir une amplitude de quelques dizaines de  $\text{MHz}$ , comparable à la bande passante de nos cavités. Cette modulation s'effectue à  $100 \text{ Hz}$ , ce qui facilite la visualisation du pic sur un oscilloscope.

En fonctionnement normal, le laser doit rester constamment à résonance avec la cavité. Un asservissement en fréquence du laser permet de compenser de petits changements de longueur de la cavité dues à des dérives thermiques ou à des vibrations acoustiques et mécaniques. Lorsque le laser est asservi, ses fluctuations de fréquence doivent être petites devant la bande passante de la cavité de manière à ne pas réduire la sensibilité de la mesure. L'intensité doit elle aussi être contrôlée à basse fréquence de manière à définir précisément le point de fonctionnement de la cavité et à permettre une calibration de la mesure de petits déplacements. Enfin, pour observer le mouvement Brownien du miroir avec la sensibilité optimale, il est nécessaire que les fluctuations de phase et d'intensité du faisceau laser sur la plage d'analyse soient réduites aux fluctuations quantiques.

Les caractéristiques essentielles de la source laser sont ainsi une accordabilité sur une très large plage de fréquence, une très bonne stabilité en fréquence et en intensité, et un bruit technique négligeable aux fréquences d'analyse auxquelles nous travaillons. Toutes ces contraintes nous ont amené à choisir un laser titane-saphir. Sa conception en fait un système particulièrement facile à balayer en fréquence. Sa longueur d'onde d'oscillation se situe aux alentours de  $810 \text{ nm}$  pour laquelle des miroirs à faibles pertes sont disponibles pour réaliser une cavité à miroir mobile de grande finesse.

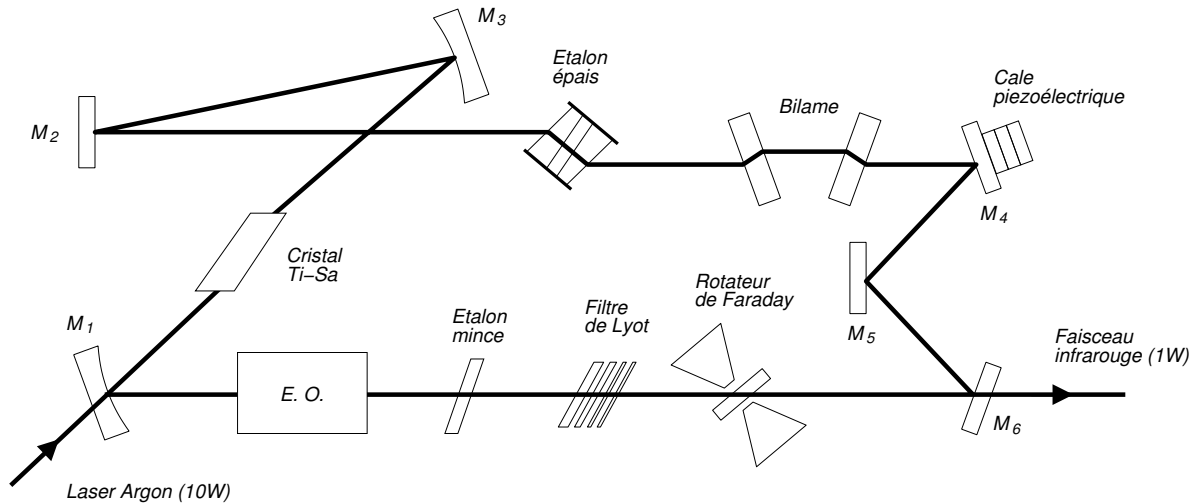


FIG. 1.14 – Schéma de principe du laser titane-saphir.

### La cavité en anneau

Le faisceau laser utilisé dans notre montage expérimental est produit par un laser titane-saphir en anneau, construit selon un modèle développé au laboratoire par François Biraben [47]. Son schéma de principe est présenté sur la figure 1.14. Le cristal de titane-saphir est pompé par un laser à argon continu délivrant une puissance de 10 *W*.

Un rotateur de Faraday sélectionne le sens de rotation de la lumière dans la cavité : il produit une rotation de la polarisation indépendante du sens de rotation qui n'est compensée par celle produite par les miroirs non coplanaires  $M_4$   $M_5$   $M_6$  que pour un sens de propagation dans la cavité laser. Ceci assure un fonctionnement unidirectionnel de la cavité laser.

Le bilame est constitué de deux lames symétriques que l'on incline grâce à un moteur. Le faisceau n'est pas dévié mais la longueur du trajet optique est modifiée en inclinant les lames. On peut balayer ainsi continûment la fréquence du laser sur une plage de plusieurs dizaines de gigahertz. L'électro-optique interne modifie également la longueur optique mais avec des temps de réponse bien plus faibles. Il est monté en modulateur de phase avec son axe orienté selon la polarisation du faisceau et permet d'agir à haute fréquence comme cela est décrit dans le paragraphe suivant.

Le laser peut osciller à des longueurs d'onde comprises entre 790 et 850 *nm* avec un intervalle entre modes de l'ordre de 200 *MHz*. Le fonctionnement monomode du laser est obtenu grâce à trois éléments sélectifs, le filtre de Lyot, l'étalon mince, et l'étalon épais, de bande passante décroissante. Le filtre de Lyot est constitué de quatre lames biréfringentes parallèles à incidence de Brewster. L'étalon mince est une simple lame de silice non traitée qui constitue une cavité Fabry-Perot d'intervalle spectral libre de 150 *GHz*. On peut régler l'inclinaison de la lame pour modifier son épaisseur optique

et déplacer ses fréquences de résonance. Enfin l'étalon épais est une cavité Fabry-Perot constituée de deux prismes dont les faces en regard ont un coefficient de réflexion de 30 %. La cavité possède un intervalle spectral libre de 19  $GHz$ . L'un des prismes est monté sur une cale piézoélectrique ce qui permet de déplacer le peigne de modes. Sa longueur est asservie grâce à une détection synchrone de façon à assurer un fonctionnement monomode du laser.

On obtient au final un laser monomode délivrant une puissance de l'ordre de 1,4  $W$ . Les éléments internes permettent de choisir précisément la fréquence du laser. Le balayage peut s'exécuter par saut de mode de l'étalon mince en jouant sur l'orientation du Lyot, ou par saut de mode de l'étalon épais en jouant sur l'inclinaison de l'étalon mince. On obtient des sauts de 150  $GHz$  et 19  $GHz$  respectivement. Enfin, la fréquence peut être balayée continûment sur quelques dizaines de gigahertz en utilisant le bilame. Pour contrôler en permanence la fréquence du laser, on prélève un faisceau de 30  $mW$  à sa sortie, faisceau qui est envoyé dans un lambdamètre par l'intermédiaire d'une fibre optique.

Les sections suivantes présentent les différents asservissements de la source laser qui permettent d'obtenir un faisceau stable en fréquence et en intensité, adapté spatialement et à résonance avec le mode fondamental de la cavité à miroir mobile.

### Stabilisation en fréquence

Le laser est soumis à des fluctuations de fréquence produites par les vibrations mécaniques des divers éléments optiques de la cavité en anneau. Les dérives de la température de la pièce sont également responsables de variations plus lentes de la fréquence du laser. Pour corriger ces fluctuations, on asservit la longueur de la cavité en anneau sur une fréquence de résonance d'une cavité de référence. Le schéma de principe de cet asservissement est présenté sur la figure 1.15. On prélève un faisceau de 20  $mW$  directement à la sortie du laser, que l'on envoie dans une cavité Fabry-Perot externe (FPE), suspendue à l'intérieur d'une enceinte à vide qui la protège des vibrations mécaniques et sonores. Le miroir d'entrée est plan avec une réflectivité de 98 %. Le miroir arrière est sphérique et totalement réfléchissant. Les deux miroirs sont montés sur un barreau d'invar de 29  $cm$  de long. Le miroir d'entrée est de plus monté sur une cale piézoélectrique, de manière à pouvoir ajuster la longueur de la cavité. On obtient une cavité de bande passante égale à 2  $MHz$ .

Pour pouvoir agir à des fréquences élevées, la détection du pic de résonance de la cavité est réalisée par la méthode Pound-Drever, basée sur la détection de bandes latérales [48]. Le faisceau laser envoyé dans la cavité passe tout d'abord dans un électro-optique résonnant qui module sa phase à une fréquence de  $f_m = 20 MHz$ . Deux bandes latérales sont ainsi créées, décalées de  $\pm f_m$ . Une lame  $\lambda/4$  et un cube séparateur de polarisation permettent de récupérer le faisceau réfléchi par la cavité. Lorsque la fréquence du laser est voisine de résonance, les bandes latérales sont en dehors de la bande passante de la cavité et sont simplement réfléchies par la cavité. La porteuse qui entre dans la cavité subit un déphasage qui dépend du désaccord en fréquence. Il apparaît alors une modulation d'intensité sur le faisceau réfléchi dont l'amplitude dépend du désaccord. En démodulant à la fréquence  $f_m$ , on obtient un signal d'erreur pour l'asservissement en fréquence du laser.



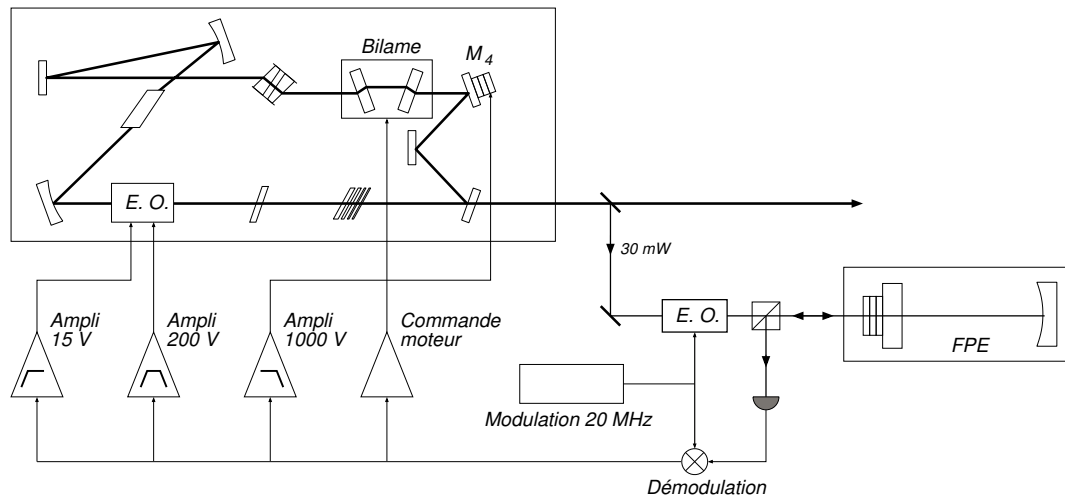


FIG. 1.15 – Schéma de l'asservissement en fréquence du laser sur la cavité FPE.

L'asservissement contrôle la puissance du laser par l'intermédiaire de quatre boucles de contre-réaction, agissant à des fréquences différentes sur le bilame, le miroir  $M_4$ , et l'électro-optique interne. La voie la plus lente pilote le moteur du bilame, avec une constante de temps de l'ordre de quelques secondes. Elle empêche les autres voies en parallèle d'arriver en saturation et évite ainsi tout décrochage à long terme de l'asservissement. La voie lente pilote la cale piézoélectrique du miroir  $M_4$  pour des fréquences inférieures à quelques centaines de Hertz. Elle permet de corriger les dérives de fortes amplitudes (plusieurs dizaines de mégahertz) de la fréquence du laser. La voie intermédiaire agit jusqu'à une centaine de kilohertz sur l'amplificateur rapide haute tension  $\pm 200\text{ V}$  commandant une des deux voies de l'électro-optique interne. La seconde voie de l'électro-optique est attaquée par la boucle rapide qui a une réponse jusqu'à quelques mégahertz avec une amplitude maximale de  $\pm 15\text{ V}$ . Ceci permet de corriger des fluctuations rapides ayant une amplitude de l'ordre du kilohertz. On obtient au final des fluctuations résiduelles de fréquence du laser inférieures à  $4\text{ kHz rms}$ .

### Filtrage spatial et stabilisation en intensité

Comme on l'a vu dans la section 1.1.4, l'adaptation spatiale est importante pour la sensibilité de la mesure de petits déplacements. Le faisceau laser traverse une cavité de filtrage spatial (FPF) afin d'obtenir un profil d'intensité Gaussien et cylindrique.

La cavité FPF est une cavité Fabry-Pérot non dégénérée, plan-concave de  $12\text{ cm}$  de long. Les deux miroirs ont une réflectivité de  $95\%$ . Le miroir d'entrée, plan, est monté sur une cale piézoélectrique qui permet de contrôler la longueur de la cavité. Le mode fondamental de la cavité est maintenu à résonance avec le faisceau laser grâce à une détection synchrone. La longueur est modulée à  $4,5\text{ kHz}$  et la modulation résultante de l'intensité réfléchie est mesurée par la photodiode BPW 34 (photodiode Ph1 du montage de la figure 1.16). A résonance, seule la composante  $TEM_{00}$  du faisceau est

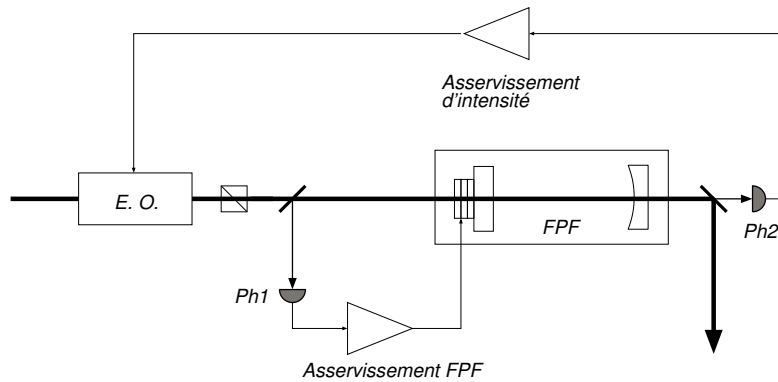


FIG. 1.16 – Filtrage spatial du faisceau laser et asservissement en intensité.

transmise, les autres composantes sont simplement réfléchies, comme cela est confirmé par une mesure du profil du faisceau transmis avec un analyseur de mode.

La bande passante de la cavité a été mesurée précisément en appliquant une modulation d'intensité au faisceau entrant dans la cavité grâce au modulateur électro-optique d'asservissement en intensité. On mesure l'effet de filtrage de la puissance de modulation en sortie de la cavité. La bande passante mesurée est de  $5,6 \text{ MHz}$ , plus petite que la valeur de  $10 \text{ MHz}$  attendue.

Le faisceau sortant du laser présente d'importantes fluctuations d'intensité pouvant perturber le gain du système de détection de la phase. Dans notre montage, l'intensité est contrôlée par un modulateur électro-optique suivi d'un cube séparateur de polarisation. Les lignes neutres du modulateur sont tournées de  $45^\circ$  par rapport à la polarisation du faisceau incident. L'effet du modulateur est de tourner la polarisation, ce qui se traduit après le cube par une variation de l'intensité. Le point de fonctionnement de l'asservissement est fixé à mi-transmission. On utilise comme signal d'erreur la mesure de l'intensité fournie par une photodiode placée après la cavité de filtrage spatial (photodiode Ph2 du montage de la figure 1.16). On corrige ainsi également les fluctuations d'intensité engendrées par une éventuelle variation du désaccord de la cavité FPF.

Les fluctuations d'intensité initialement de quelques pourcents passent en dessous de  $0,2 \%$  lorsque l'on branche la boucle d'asservissement. Une analyse spectrale du signal d'erreur montre que le laser présente un excès de bruit d'environ  $30 \text{ dB}$  par rapport au bruit de photon standard pour des fréquences inférieures à  $500 \text{ kHz}$  et est au bruit de photon standard au delà du mégahertz.

### Asservissement de la fréquence du laser sur la cavité à miroir mobile

La source laser présente les caractéristiques requises pour la mesure de petits déplacements (stabilité en fréquence et en intensité, accordabilité en fréquence, adaptation spatiale avec le mode fondamental de la cavité à miroir mobile). Nous avons vu dans la première section que la sensibilité aux déplacements du miroir mobile de la phase du faisceau réfléchi par la cavité est maximale à résonance. Il est donc nécessaire de maintenir la fréquence du laser à résonance avec le mode fondamental de la cavité.

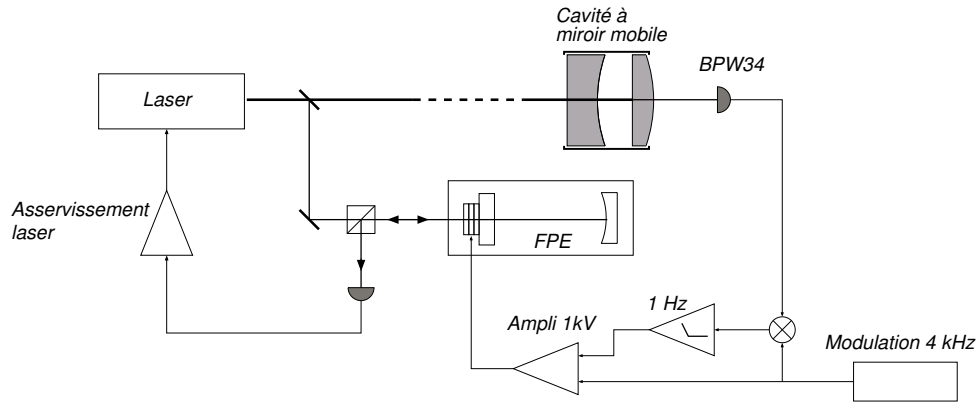


FIG. 1.17 – Asservissement de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité à miroir mobile.

L'asservissement est réalisé par détection synchrone (voir figure 1.17). La fréquence du laser est modulée à une fréquence de  $4\text{ kHz}$ . On agit en fait sur la cale piézoélectrique du miroir d'entrée de la cavité FPE. Le laser étant asservi à résonance sur la cavité FPE, sa fréquence suit la résonance de la cavité et présente une modulation. La fréquence de modulation est suffisamment basse pour ne pas perturber l'asservissement de la cavité FPE et pour que la stabilisation en intensité puisse corriger une éventuelle modulation d'intensité en sortie de celle-ci.

L'intensité résiduelle transmise par la cavité à miroir mobile, qui peut être de l'ordre de quelques microwatt seulement selon la cavité utilisé, est détectée par une photodiode BPW 34 suivie d'un montage amplificateur qui convertit le courant fourni par la photodiode en une tension raisonnable. Ce signal d'erreur est envoyé dans une détection synchrone commerciale EG&G 5209. Le signal d'erreur est ensuite intégré avec une constante de temps de l'ordre de la seconde et agit finalement sur la cale piézoélectrique de la cavité FPE. La constante de temps est choisie de manière à avoir un asservissement suffisamment basse fréquence pour ne pas perturber les autres boucles d'asservissement de la source laser.

### 1.3 Calibration de la mesure de déplacements

Nous présentons dans cette section la méthode qui nous a permis de calibrer le signal fourni par la détection homodyne en terme de déplacement du miroir. Nous avons également mesuré le bruit de phase du faisceau de mesure. Ceci nous a permis de déterminer la limite de sensibilité de l'expérience et de la comparer à la valeur attendue [équation (1.105)].

La calibration de la mesure de déplacement utilise une technique de modulation de la fréquence du laser [20]. Nous avons vu qu'un déplacement  $\delta x$  du miroir provoque un déphasage  $\delta\varphi$  du faisceau réfléchi par la cavité proportionnel au rapport  $\delta x/\lambda$ . Une variation de la fréquence  $\nu$  du laser modifie la longueur d'onde de la lumière qui dans notre expérience constitue la référence de longueur. Une modulation  $\delta\nu_m$  de la fréquence

du laser est donc équivalente à un déplacement  $\delta x$  donné par la relation :

$$\frac{\delta x}{L} = \frac{\delta \nu_m}{\nu}, \quad (1.135)$$

où  $L$  est la longueur de la cavité. En observant le signal de la détection homodyne lorsqu'on applique une modulation de la fréquence du laser d'amplitude connue, on est capable, en utilisant la relation précédente, de convertir le signal en déplacement équivalent du miroir.

La calibration de la mesure se fait en deux étapes. Il est d'abord nécessaire de produire une modulation de fréquence d'amplitude parfaitement connue et dont la fréquence peut être balayée aisément. Il faut ensuite observer l'effet de cette modulation de fréquence sur la cavité à miroir mobile. On en déduit la conversion volt  $\leftrightarrow$  mètre du signal de position du miroir fourni par la détection homodyne.

### 1.3.1 Calibration de la modulation de fréquence

Pour moduler la fréquence du laser, on agit sur l'électro-optique interne de la cavité en anneau du laser. Le signal sinusoïdal délivré par un générateur haute fréquence *IFR 2030* est envoyé sur la voie rapide de l'asservissement en fréquence du laser qui pilote directement une voie de l'électro-optique. Le générateur possède une fonction de balayage qui produit une rampe de fréquence sur le signal. On peut ainsi réaliser en une opération la calibration sur un large spectre de fréquence. Nous nous sommes limités à des fréquences allant de 10 *kHz* jusqu'à 2 *MHz*. L'amplitude de modulation est choisie suffisamment faible de manière à rester dans le régime linéaire où la modulation de fréquence  $\delta \nu_m$  est proportionnelle à la tension  $V_m$  du générateur. L'étalonnage de la modulation de fréquence du laser pour une tension fixée du générateur HF est réalisée en observant l'effet de la modulation sur une cavité de référence. Nous avons choisi la cavité FPF dont la bande passante  $\Omega_{cav}$  a été mesurée précisément.

Une modulation de fréquence se traduit par une modulation de l'intensité transmise par la cavité FPF, sauf à résonance où la pente du pic d'Airy en fonction de la fréquence est nulle. Il est donc nécessaire de fixer le point de fonctionnement de la cavité là où la pente est maximale. En reprenant l'expression du déphasage  $\Psi = 2kL$  subi par la lumière sur un aller-retour dans une cavité de longueur  $L$  [équation (1.80)], on voit qu'une modulation  $\delta \nu_m$  entraîne une modulation  $\delta \Psi_m$  du déphasage :

$$\Psi(t) = \bar{\Psi} + \delta \Psi_m(t), \quad (1.136)$$

$$\delta \Psi_m(t) = 4\pi \frac{L}{c} \delta \nu_m(t). \quad (1.137)$$

Dans ces conditions le champ intracavité est lui aussi modulé d'une quantité  $\delta \alpha_m$  que l'on peut calculer en linéarisant l'équation d'évolution du champ [équation (1.83)] :

$$\tau \frac{d}{dt} \delta \alpha_m(t) = (-\gamma + i\bar{\Psi}) \delta \alpha_m(t) + i\bar{\alpha} \delta \Psi_m(t). \quad (1.138)$$

En écrivant cette équation dans l'espace de Fourier, on trouve finalement la modulation

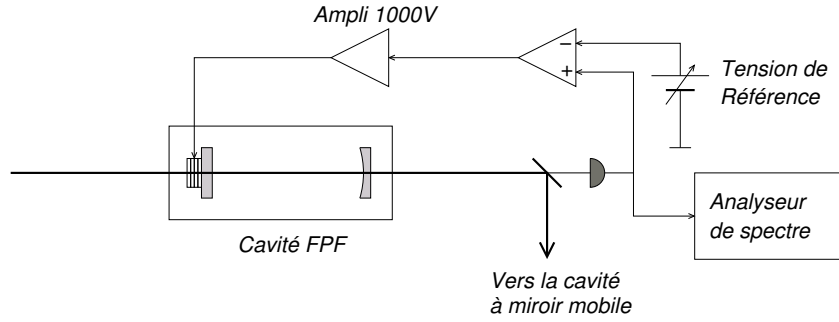


FIG. 1.18 – Schéma de la calibration de la modulation de fréquence du laser en asservissant la cavité FPF à mi-transmission.

relative d'intensité  $\delta I_m/\bar{I}$  en sortie de la cavité, à la fréquence de modulation  $\Omega_m$ ,

$$\frac{\delta I_m[\Omega_m]}{\bar{I}} = \frac{\delta \nu_m[\Omega_m]}{\Omega_{\text{cav}}/2\pi} \frac{2\bar{\Psi}/\gamma}{\sqrt{(1 + (\bar{\Psi}/\gamma)^2 - (\Omega_m/\Omega_{\text{cav}})^2)^2 + (2\Omega_m/\Omega_{\text{cav}})^2}}. \quad (1.139)$$

La modulation de fréquence a un effet maximum lorsque l'on se place au voisinage de la mi-transmission, c'est-à-dire pour un désaccord  $\bar{\Psi} = \gamma$ . A basse fréquence ( $\Omega_m \ll \Omega_{\text{cav}}$ ) la modulation relative d'intensité s'écrit simplement :

$$\frac{\delta I_m}{\bar{I}} = \frac{\delta \nu_m}{\Omega_{\text{cav}}/2\pi}. \quad (1.140)$$

A plus haute fréquence, l'effet de la modulation de fréquence est filtré par la cavité.

En pratique on utilise la photodiode placée après la cavité FPF qui fournit en fonctionnement normal le signal d'erreur pour la boucle d'asservissement d'intensité. Le dispositif de stabilisation en intensité est donc simplement déconnecté. Nous nous sommes cependant assurés que les fluctuations relatives d'intensité pendant le temps de la mesure restent inférieures au pourcent. On compare le signal d'intensité fourni par cette photodiode à une tension de référence ajustée à la moitié de la tension maximale du pic d'Airy. Le signal d'erreur pilote la cale piézoélectrique sur laquelle est monté le miroir d'entrée de la cavité FPF. On asservit ainsi le désaccord  $\bar{\Psi}$  à la valeur  $\gamma$  comme le montre la figure 1.18. L'amplificateur haute tension agit comme un filtre passe-bas à basse fréquence et limite l'efficacité de l'asservissement à une plage de fréquence de 0 à quelques kilohertz. Il ne vient donc pas perturber la mesure de la modulation d'intensité à haute fréquence ( $> 10 \text{ kHz}$ ).

Le générateur haute fréquence délivre une tension sinusoïdale  $V_{\text{mod}}$  dont la fréquence est balayée entre  $10 \text{ kHz}$  et  $2 \text{ MHz}$  par pas de  $2 \text{ kHz}$ . La mesure de modulation d'intensité est réalisée directement sur le signal délivré par la photodiode dont la gain est plat en fréquence dans la domaine de fréquence qui nous intéresse. Le signal est visualisé sur un analyseur de spectre HP 8560 E configuré en mode MAXHOLD avec un temps de balayage plus faible que la durée d'un pas de fréquence, fixée à  $50 \text{ ms}$ .

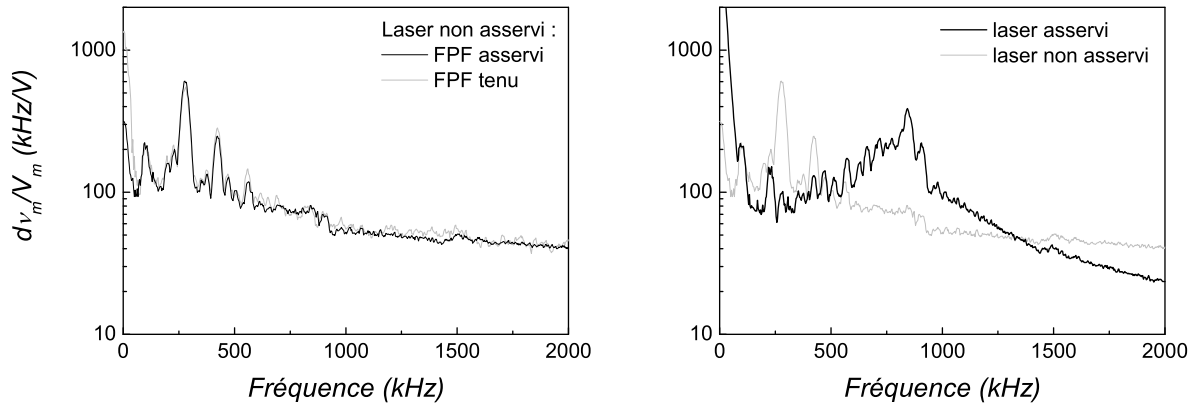


FIG. 1.19 – Calibration de la modulation de fréquence du laser, observée en sortie de la cavité FPF fonctionnant à mi-transmission. Courbes de gauche : modulations obtenues avec et sans asservissement à mi-transmission du FPF. Courbes de droite : modulations obtenues avec et sans asservissement de la fréquence du laser.

On mesure la modulation d'intensité  $\delta I_m$  du faisceau transmis par la cavité FPF ainsi que l'intensité moyenne  $\bar{I}$ . Sur le graphe de gauche de la figure 1.19, la courbe noire présente l'amplitude de modulation de fréquence déduite de la mesure de modulation d'intensité  $\delta I_m$  à la sortie de la cavité, grâce à la relation (1.139). L'amplitude de modulation sur le générateur HF est de  $0 \text{ dBm}$ , soit une tension de sortie du générateur  $V_m = 0,223 \text{ V}$ . Plus précisément l'échelle verticale représente le rapport  $\delta\nu_m/V_m$  entre la modulation de fréquence et la tension appliquée (en  $\text{kHz/V}$ ). Nous avons vérifié que pour une modulation plus faible ( $V_m = -10 \text{ dBm}$ ), ce rapport a exactement la même allure. Ceci montre qu'il n'y a aucun effet de saturation de l'électronique ou de l'électro-optique, et que nous travaillons bien en régime linéaire. La courbe grisée représente le rapport  $\delta\nu_m/V_m$  obtenu dans les mêmes conditions mais en débranchant l'asservissement de la cavité FPF, la cavité étant maintenue manuellement à mi-transmission. Les deux courbes se superposent parfaitement sauf à très basse fréquence. On démontre ainsi que l'asservissement à mi-transmission ne perturbe pas la calibration pour des fréquences supérieures à quelques dizaines de kilohertz.

La calibration des déplacements observés avec la cavité à miroir mobile impose d'asservir la fréquence du laser sur la cavité FPE (section 1.2.3). Cet asservissement modifie la modulation de fréquence imposée sur l'électro-optique interne du laser. Nous avons donc également calibré la modulation de fréquence lorsque le laser est asservi en fréquence sur la cavité FPE (courbe noire sur le graphe de droite de la figure 1.19). On voit clairement que cet asservissement agit sur la modulation de fréquence dans toute la plage de fréquence que nous analysons. Il produit en particulier une amplification de la modulation pour des fréquences comprises entre  $500$  et  $1300 \text{ kHz}$ , et une atténuation à basse et à haute fréquence. Nous utiliserons cette courbe comme référence de modulation de fréquence dans le paragraphe suivant.

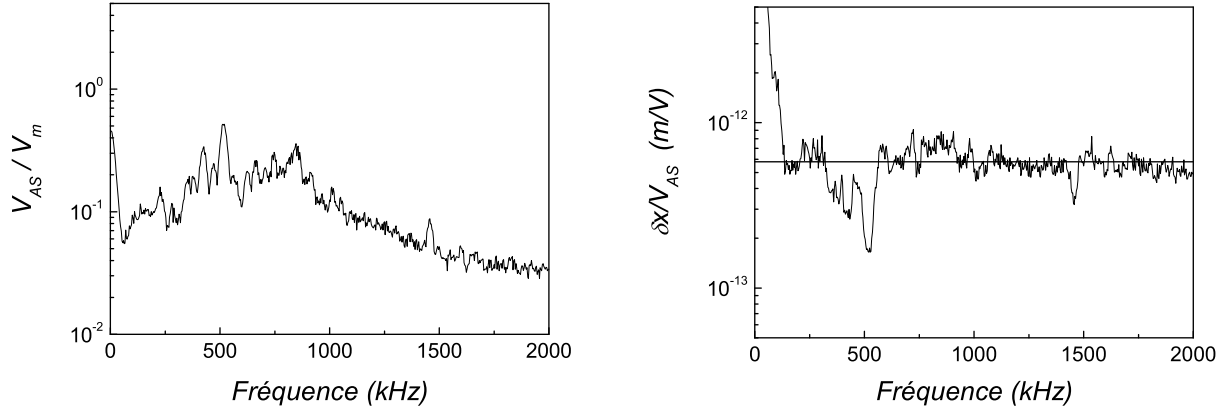


FIG. 1.20 – Courbe de calibration de la cavité à miroirs cylindriques. A gauche : niveau de modulation  $V_{AS}$  à la sortie de la détection homodyne. A droite : déplacement équivalent  $\delta x$  du miroir mobile ramené à la tension mesurée  $V_{AS}$ .

### 1.3.2 Calibration de la cavité à miroirs cylindriques

Nous avons réalisé la calibration des déplacements observés sur la cavité à miroirs cylindriques selon la technique décrite au début de cette section. L’asservissement à résonance de la cavité FPF et la stabilisation en intensité du faisceau de mesure sont rétablis. La fréquence du laser est asservie sur la cavité FPE, maintenue à résonance avec la cavité à miroir mobile. Le générateur HF délivre comme précédemment une rampe de fréquence avec une amplitude  $V_m = 0 \text{ dB}$ . Le signal en sortie de la détection homodyne est mesuré sur l’analyseur de spectre, toujours configuré en mode MAXHOLD. La courbe de gauche de la figure 1.20 présente l’amplitude de modulation  $V_{AS}$  observée sur l’analyseur de spectre, rapportée à l’amplitude de modulation  $V_m$  du générateur HF.

Cette réponse de la cavité à une modulation de fréquence permet de déduire la réponse à un déplacement du miroir mobile. La relation (1.135) s’écrit :

$$\delta x/V_{AS} = \frac{L}{\nu} \times \frac{\delta \nu_m/V_m}{V_{AS}/V_m}. \quad (1.141)$$

Pour une longueur  $L$  de la cavité de  $0,26 \text{ mm}$  et une longueur d’onde du laser  $\lambda = 810 \text{ nm}$ , le rapport  $L/\nu$  est égal à  $7,02 \times 10^{-19} \text{ m/Hz}$ . Les autres termes dans l’équation (1.141) correspondent aux courbes des figures 1.19 et 1.20. On obtient ainsi la calibration  $\delta x/V_{AS}$  de la mesure, qui relie une tension  $V_{AS}$  mesurée à la sortie de la détection homodyne au déplacement  $\delta x$  du miroir mobile. Comme le montre la courbe de droite de la figure 1.20, on trouve une calibration pratiquement plate en fréquence, mis à part un accident vers  $500 \text{ kHz}$  (sans doute lié à une résonance de l’asservissement en fréquence du laser), et une remontée à basse fréquence ( $< 100 \text{ kHz}$ ) due à l’effondrement de la réponse des photodiodes de la détection homodyne.

Notons que la calibration se déduit des expressions théoriques présentées dans la

section 1.1.4, la tension  $V_{AS}$  étant directement proportionnelle à la quadrature de phase  $\delta q^{out}$ . En négligeant le bruit de phase  $\delta q^{in}$  du faisceau incident devant le signal, l'équation (1.100) donne une réponse en fonction de la fréquence  $\Omega$  de la forme :

$$\delta x[\Omega]/V_{AS}[\Omega] = g\sqrt{1 + (\Omega/\Omega_{cav})^2}, \quad (1.142)$$

où la constante  $g$  dimensionnée en  $m/V$  dépend de l'intensité et de la longueur d'onde du faisceau de mesure, des pertes totales dans la cavité et du gain de la détection homodyne. Pour des fréquences inférieures à  $2 MHz$  et une bande passante  $\Omega_{cav} = 11 MHz$ , l'effet de filtrage par la cavité est négligeable et l'on attend un profil plat en fréquence. L'ajustement de la courbe de la figure 1.20 par la réponse théorique fournit le facteur de conversion  $g$  :

$$\delta x/V_{AS}[\Omega \ll \Omega_{cav}] = 5,8 \times 10^{-13} m/V. \quad (1.143)$$

Cette valeur permet d'exprimer les spectres de bruit observés en terme de déplacement équivalent, en  $m/\sqrt{Hz}$ . Plus précisément, l'analyseur de spectre fournit la puissance de bruit sur une certaine plage de fréquence, correspondant à la résolution spectrale d'analyse (RBW : resolution bandwidth). Cette puissance est convertie en amplitude spectrale  $V_{AS}[\Omega]$  exprimée en  $V/\sqrt{Hz}$  en utilisant la formule :

$$P_{dB}[\Omega] = 10 \log(20V_{AS}^2[\Omega] \times RBW), \quad (1.144)$$

où  $P_{dB}$  est la puissance de bruit en  $dBm$  donnée par l'analyseur de spectre. On obtient finalement l'amplitude spectrale  $\delta x[\Omega]$  de déplacement du miroir (en  $m/\sqrt{Hz}$ ) en multipliant par le facteur de conversion  $g$  [équation (1.143)].

### 1.3.3 Sensibilité de la cavité à miroirs cylindriques

Nous avons évalué le bruit de phase  $\delta q^{in}$  du faisceau de mesure envoyé sur la cavité, en plaçant la cavité à miroir mobile hors résonance. Dans ces conditions, le faisceau incident est simplement réfléchi et l'on mesure son bruit de phase grâce au signal de la détection homodyne visualisé sur l'analyseur de spectre. La puissance incidente sur la cavité est de  $1 mW$  et celle de l'oscillateur local est de  $9 mW$ .

Pour obtenir le spectre de bruit présenté sur la figure 1.21, nous avons effectué l'acquisition par tranches de fréquence de  $100 kHz$  de large. La plage d'analyse de l'analyseur de spectre est fixée dans un premier temps entre 0 et  $100 kHz$ . La résolution spectrale de l'analyseur de spectre (RBW) est de  $300 Hz$  et les courbes sont moyennées 50 fois avant d'être transférées à un ordinateur. Ce dernier relance automatiquement l'acquisition sur la plage de fréquence suivante.

L'échelle verticale de la courbe est graduée en  $m/\sqrt{Hz}$  grâce à la procédure de calibration expliquée dans la section précédente. La limite théorique dans le cas d'une détection homodyne idéale est donnée par l'équation (1.115). Si on prend en compte l'adaptation spatiale du faisceau avec la cavité  $\eta_{cav} = 90 \%$ , le recouvrement spatial avec l'oscillateur local  $\eta_{OL} = 94 \%$ , et le rendement  $\eta_{ph} = 91 \%$  des photodiodes, on obtient une sensibilité  $\delta x_{shot}$  due au bruit de photon de :

$$\delta x_{shot}[\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{I^{in}}} \frac{1}{\sqrt{\eta_{cav}\eta_{OL}\eta_{ph}}} \sqrt{\frac{T+P}{T}} \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_{cav}}\right)^2}. \quad (1.145)$$



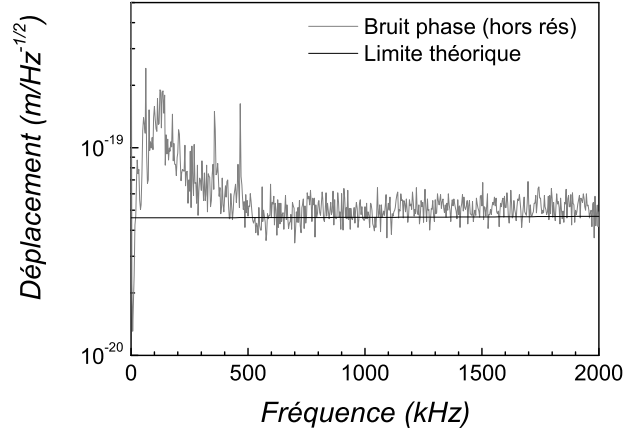


FIG. 1.21 – Spectre de bruit de phase du faisceau réfléchi mesuré avec la cavité à miroirs cylindriques hors résonance, exprimé en déplacement équivalent du miroir mobile (en  $m/\sqrt{Hz}$ ). La courbe théorique représente la limite de sensibilité attendue à partir du bruit quantique de phase.

Avec des pertes  $P = 63 \text{ ppm}$  et une transmission  $T = 180 \text{ ppm}$  du coupleur d'entrée, on trouve une sensibilité théorique à basse fréquence :

$$\delta x_{shot}[\Omega \ll \Omega_{cav}] = 4,6 \cdot 10^{-20} m/\sqrt{Hz}. \quad (1.146)$$

La courbe de sensibilité donnée par l'équation (1.145) est tracée sur la figure 1.21. Au dessus de  $500 \text{ kHz}$  le bruit expérimental de la phase est plat en fréquence et coïncide avec la courbe de bruit de photon théorique. Dans cette zone, la mesure est donc limitée par le bruit quantique de la lumière, alors qu'à plus basse fréquence on observe un excès de bruit du faisceau laser.

Pour finir nous avons mesuré le niveau de bruit dû aux fluctuations de position du miroir mobile pour le comparer à la sensibilité de la cavité. On utilise le même dispositif mais en maintenant cette fois le laser à résonance avec la cavité. La phase du faisceau réfléchi est la superposition du bruit de phase incident et du bruit dû aux fluctuations de position du miroir mobile. L'acquisition se déroule de la même façon que pour la mesure du bruit de phase du faisceau incident, en fragmentant l'acquisition sur des plages de  $100 \text{ kHz}$  de large. Le graphe de gauche de la figure 1.22 montre le bruit obtenu (courbe noire). La courbe grisée reproduit la courbe expérimentale de bruit de phase incident de la figure 1.21. Le graphe de droite détaille la partie entre 0 et  $500 \text{ kHz}$ . Les courbes sont obtenues de la même manière que les courbes de gauche mais elles sont moyennées 100 fois sur l'analyseur de spectre. Ces courbes montrent que la mesure du bruit de position est bien limitée par le bruit de phase du faisceau incident, à une valeur meilleure que  $10^{-19} m/\sqrt{Hz}$  sur la plage de fréquence considérée.

Le spectre de bruit thermique observé ici sera étudié plus en détail dans les deux chapitres suivants. Il apparaît sous la forme d'une série de pics associés aux résonances acoustiques du miroir, superposés à un fond thermique. Au dessus de  $750 \text{ kHz}$ , la puissance de bruit de position du miroir est environ  $10 \text{ dB}$  au dessus de la puissance du

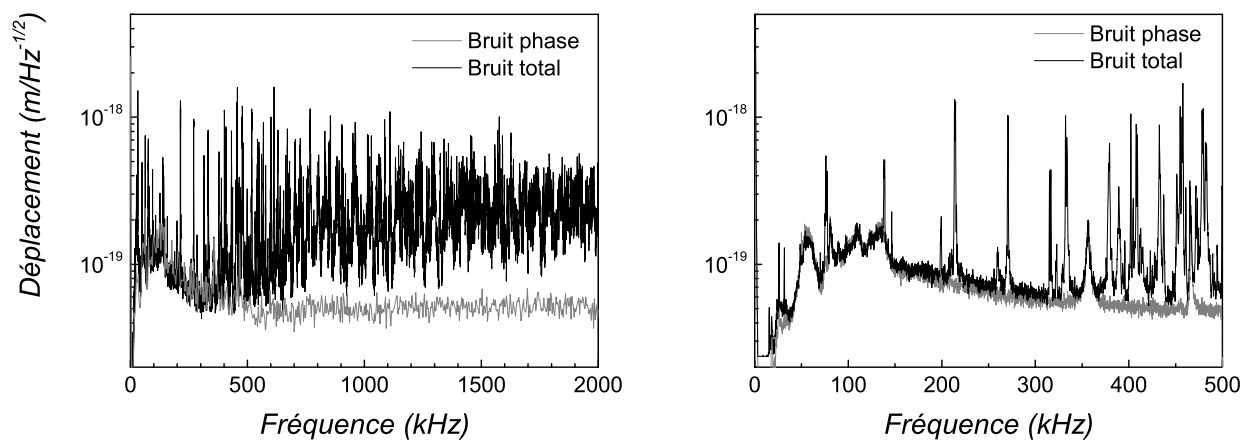


FIG. 1.22 – Spectres de bruit thermique entre 0 et 2 MHz (courbes de gauche) et entre 0 et 500 kHz (courbes de droite). Le spectre de bruit de phase du faisceau de mesure est reporté en grisé.

bruit de photon. Cet écart diminue à basse fréquence, et en dessous de 400 kHz le bruit de fond de position n'est plus observable. Cependant cette cavité a été montée pour étudier les modes acoustiques à résonance. Les pics de résonance ont une dynamique de 20 dB au dessus de la limite de sensibilité, ce qui est largement suffisant pour notre étude.



## Chapitre 2

# Mesure et contrôle du bruit thermique d'un miroir

Le dispositif présenté dans le chapitre précédent permet de mesurer de petits déplacements avec une sensibilité suffisante pour observer le mouvement Brownien du miroir mobile. Le spectre de bruit thermique interne du miroir présente une série de pics correspondant aux résonances des différents modes de vibration internes. Nous présentons dans ce chapitre l'étude du bruit thermique autour d'une fréquence de résonance du miroir. Nous verrons comment la forme du pic de bruit thermique donne accès aux caractéristiques mécaniques du mode acoustique. Un dispositif permettant de réduire le bruit thermique en utilisant un contrôle actif du mouvement Brownien du miroir est ensuite décrit et mis en place expérimentalement. Une étude complète de cette technique montre qu'elle correspond à un processus de friction froide qui permet de refroidir le miroir.

### 2.1 Bruit thermique autour d'une résonance

Le mouvement que nous étudions est celui produit par la déformation de la surface du miroir au niveau de la tache de réflexion du faisceau de mesure. Les miroirs que nous étudions possèdent une infinité de modes internes de vibration et sont de ce fait des systèmes multimodes. Cependant lorsque l'on s'intéresse au mouvement du miroir sur une plage étroite de fréquence autour d'une fréquence de résonance d'un mode particulier, le comportement du miroir est essentiellement gouverné par le mode résonnant. L'étude expérimentale du bruit thermique et de la réponse du miroir à une force extérieure peut alors être comparée au modèle théorique simple et bien connu d'un oscillateur harmonique [20, 49].

#### 2.1.1 Equivalence avec l'oscillateur harmonique

L'étude réalisée dans la section 1.1.3 a montré que le mouvement du miroir dû à la déformation de sa surface est équivalent à celui d'une série d'oscillateurs harmoniques correspondant chacun à un mode de vibration interne. La déformation du miroir à des fréquences voisines d'une fréquence de résonance  $\Omega_n$  est cependant principalement

régie par le mode résonnant. On voit en effet sur l'équation (1.75) que dans la susceptibilité effective, qui s'écrit comme la somme des susceptibilités de chaque mode acoustique, tous les termes de la série sont négligeables devant le terme correspondant au mode résonnant. Le miroir se comporte pour des fréquences voisines de  $\Omega_n$  comme un oscillateur harmonique dont la susceptibilité est celle du mode  $n$ .

Plus précisément si l'on suppose que l'intensité intracavité est suffisamment faible pour pouvoir négliger les effets de la pression de radiation du faisceau de mesure, on peut écrire le déplacement  $\delta x$  du miroir vu par la lumière pour des fréquences voisines de  $\Omega_n$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta x[\Omega \simeq \Omega_n] &= \sum_m \chi_m^{\text{eff}}[\Omega \simeq \Omega_n] F_{T,m}^{\text{eff}}[\Omega], \\ &\simeq \frac{F_{T,n}^{\text{eff}}[\Omega]}{M_n^{\text{eff}} (\Omega_n^2 - \Omega^2 - i\Gamma_n \Omega)} + \sum_{m \neq n} \frac{F_{T,m}^{\text{eff}}[\Omega]}{M_m^{\text{eff}} (\Omega_m^2 - \Omega_n^2)}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

où l'on a simplifié les expressions des susceptibilités effectives  $\chi_m^{\text{eff}}$  dans la limite haute et basse fréquences (pour  $m \neq n$ ). Les forces de Langevin effectives sont non corrélées entre elles et leur spectre  $S_{T,m}^{\text{eff}}$ , relié à l'amortissement  $\Gamma_m = \Omega_m/Q_m$  et à la température  $T$  par le théorème fluctuations-dissipation [équation (1.73)], vaut :

$$S_{T,m}^{\text{eff}}[\Omega] = 2M_m^{\text{eff}} \Gamma_m k_B T. \quad (2.2)$$

Le spectre  $S_x$  de déplacement du miroir vaut ainsi :

$$S_x[\Omega \simeq \Omega_n] = \frac{2\Gamma_n k_B T}{M_n^{\text{eff}} [(\Omega_n^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma_n^2 \Omega^2]} + \sum_{m \neq n} \frac{2\Gamma_m k_B T}{M_m^{\text{eff}} (\Omega_m^2 - \Omega_n^2)^2}. \quad (2.3)$$

Le dernier terme décrit la réponse des modes de fréquence de résonance différente de  $\Omega_n$ . Cette contribution est indépendante de la fréquence  $\Omega$  et correspond à un bruit blanc d'amplitude proportionnelle à la température  $T$ . Le premier terme correspond à la réponse du mode résonnant et possède une forme Lorentzienne centrée à la fréquence  $\Omega_n$  et de largeur  $\Gamma_n$ . Le bruit thermique est donc la superposition d'un pic de résonance thermique similaire à celui d'un oscillateur harmonique à l'équilibre thermodynamique et d'un fond plat en fréquence dû aux autres modes.

### 2.1.2 Procédure de mesure du bruit thermique

Dans cette première expérience nous avons utilisé le miroir mobile plan-convexe monté dans la cavité décrite dans la section 1.2.1. Le faisceau injecté dans la cavité est de  $100 \mu W$  et l'oscillateur local a une intensité de  $10 mW$ . Le recouvrement spatial entre l'oscillateur local et le faisceau réfléchi par la cavité est de 95 %. Enfin le paramètre  $\eta_{cav}$  caractérisant l'adaptation spatiale entre le faisceau et la cavité vaut 98 %.

La géométrie plan-convexe pour le miroir mobile présente, dans le cadre d'une approximation paraxiale, une série de modes acoustiques Gaussiens localisés au voisinage de l'axe du résonateur [33]. Ces modes sont en fait équivalents aux modes Gaussiens optiques présents dans une cavité plan-concave Fabry-Perot. Leur fréquence et leur

répartition spatiale sont parfaitement calculables et une étude détaillée de ces modes de vibration est faite dans la section 4.4. Le mode fondamental Gaussien a la symétrie de révolution autour de l'axe du miroir et sa fonction radiale est une Gaussienne. Dans le cas où le rayon de courbure de la face convexe est très grande devant l'épaisseur du miroir, la fréquence du mode fondamental est directement égale à l'inverse du temps qu'il faut à une onde acoustique pour faire un aller-retour dans le miroir selon son axe. Pour une épaisseur de  $1,5\text{ mm}$  et une vitesse du son dans la silice fondue de  $5970\text{ m/s}$ , on obtient une fréquence de résonance de l'ordre de  $2\text{ MHz}$ .

La mesure du bruit thermique à résonance a été faite à température et à pression ambiantes. Le bruit thermique du miroir est observé en maintenant le faisceau de mesure résonnant avec la cavité grâce à l'asservissement de la fréquence du laser présenté dans la section 1.2.3. Le bruit de phase du faisceau réfléchi mesuré par la détection homodyne est visualisé sur un analyseur de spectre HP 8560E ayant une résolution spectrale pouvant descendre jusqu'à  $1\text{ Hz}$ . Le bruit de phase a tout d'abord été observé autour de la fréquence attendue du mode fondamental Gaussien. Son spectre entre  $1800$  et  $2000\text{ kHz}$  a été analysé avec une résolution spectrale de  $300\text{ Hz}$ , en découpant l'acquisition en plage de  $50\text{ kHz}$  de large. Le spectre révèle un très grand pic de bruit à la fréquence de  $1858\text{ kHz}$ , et plusieurs autres pics de plus faible intensité et dont les fréquences de résonance sont plus élevées de quelques kilohertz. Cette structure spectrale est caractéristique de celle des modes de vibration dans un miroir plan-convexe et permet d'associer le pic de plus basse fréquence au mode fondamental Gaussien du miroir.

La fréquence du mode fondamental étant ainsi repérée, on peut analyser le pic de bruit thermique sur une plage de fréquence plus étroite et avec une bien meilleure résolution. Le bruit de phase est ainsi mesuré sur l'analyseur de spectre sur une plage de fréquence de  $500\text{ Hz}$  de large et avec une résolution spectrale (RBW) de  $10\text{ Hz}$ . Afin de réduire le bruit sur les courbes expérimentales, il est nécessaire de moyenniser le spectre sur plusieurs acquisitions (environ 500 acquisitions). Pour une résolution de  $10\text{ Hz}$  le temps d'acquisition d'une courbe sur l'analyseur de spectre est de l'ordre de la seconde. Le temps total de la mesure est alors d'une dizaine de minutes et il est nécessaire de s'affranchir des dérives thermiques. La première conséquence de ces dérives est un changement de la longueur de la cavité dû à la dilatation du support des miroirs. L'asservissement en fréquence du laser permet de compenser efficacement ces dérives très lentes et sur une période de dix minutes la fréquence du laser suit la fréquence de résonance de la cavité sans risque de décrochage. La seconde conséquence est la dilatation des miroirs eux-mêmes, qui provoque un déplacement des fréquences de résonance mécanique des modes acoustiques. On peut observer des variations de la fréquence de résonance mécanique de plusieurs hertz sur des temps de l'ordre de l'heure. Ceci est susceptible de provoquer un élargissement des spectres non négligeable si l'on considère que la largeur du pic n'est que de quelques dizaines de hertz.

Notre procédure d'acquisition du spectre de bruit thermique autour de la résonance permet de compenser les dérives du pic de bruit thermique. La fréquence centrale de l'analyseur de spectre est calée sur le pic de bruit thermique. L'analyseur acquiert 100 courbes dont il fait la moyenne qui est ensuite transférée à l'ordinateur. Celui-ci détermine la fréquence centrale du pic. L'algorithme de recherche de la fréquence

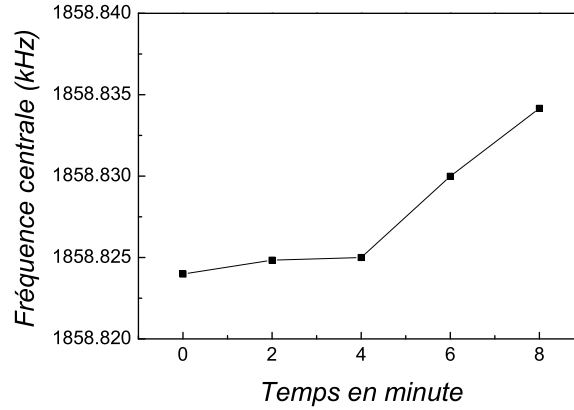


FIG. 2.1 – Dérive de la fréquence centrale du pic de bruit thermique au cours d'une acquisition du bruit thermique.

centrale partage le spectre en deux autour d'une fréquence (initialement la fréquence la plus basse). Si l'aire de la partie du spectre en dessous de cette fréquence est inférieure à l'aire de la partie au dessus, la fréquence qui sert à découper le spectre est incrémentée et l'on recommence la comparaison. L'algorithme s'arrête lorsque la partie supérieure à une aire plus faible que la partie inférieure. Comme l'analyseur acquiert 600 points sur une plage de 500  $Hz$ , le pas en fréquence est de 0,83  $Hz$ . La fréquence centrale calculée par l'algorithme correspond à la fréquence centrale du pic à mieux que 1  $Hz$ . Cet algorithme est bien meilleur qu'une simple recherche du maximum de la courbe car une telle procédure est très sensible au bruit présent au sommet de la courbe qui peut créer un maximum décalé de plusieurs hertz par rapport à la fréquence centrale.

La fréquence de l'analyseur de spectre est recentrée sur le pic de bruit thermique. L'opération est réalisée cinq fois afin d'obtenir 500 moyennes. On peut également par cette méthode évaluer la dérive de la fréquence centrale du pic de bruit thermique au cours du temps. La figure 2.1 montre un exemple de dérive obtenue expérimentalement : entre le début et la fin de l'acquisition, le pic se décale de plus d'une dizaine de hertz ; cependant entre deux recentrages consécutifs le pic ne dérive que de quelques hertz.

### 2.1.3 Résultats expérimentaux

La courbe expérimentale de bruit de phase obtenue autour de la fréquence de résonance du mode fondamental Gaussien du miroir plan-convexe avec une résolution spectrale de 10  $Hz$  est présentée sur la figure 2.2. L'échelle en  $m^2/Hz$  est obtenue grâce à la calibration par la modulation de fréquence (voir la partie 1.3). L'ajustement de la courbe par une Lorentzienne donne une largeur  $\Gamma = 2\pi \times 57 Hz$ , ce qui correspond à un facteur de qualité mécanique  $Q$  d'environ 33 000. La Lorentzienne est superposée à un fond qui correspond au bruit thermique des autres modes acoustiques [équation (2.3)]. L'aire de la Lorentzienne sans le fond est directement égale à la variance  $\Delta x^2$  du mouvement Brownien vu par la lumière pour le mode fondamental Gaussien. L'intégration

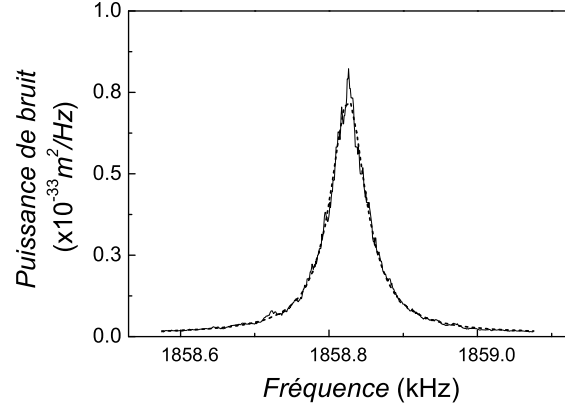


FIG. 2.2 – Spectre de bruit de phase du faisceau réfléchi par la cavité, autour de la fréquence de résonance du mode fondamental Gaussien du miroir plan-convexe, sur une plage de 500  $Hz$  avec un résolution de 10  $Hz$ . Le spectre est moyenné sur 500 acquisitions. La courbe en pointillés est l’ajustement du spectre par une Lorentzienne.

du terme dû à ce mode dans le spectre (premier terme dans l’expression (2.3)) conduit à la relation :

$$\frac{1}{2}M_n^{\text{eff}}\Omega_n^2\Delta x^2 = \frac{1}{2}k_B T. \quad (2.4)$$

On retrouve une équation similaire à celle prédite par le théorème d’équipartition de l’énergie pour un oscillateur harmonique de masse  $M_n^{\text{eff}}$  et de pulsation  $\Omega_n$ .

Cette expression permet de déterminer la masse effective du mode, connaissant la variance du mouvement. A partir de l’ajustement Lorentzien, on trouve une variance  $\Delta x^2$  égale à  $1,3 \times 10^{-31}m^2$  et on obtient une masse effective de 230  $mg$ . Nous verrons dans la partie 4.2 que cette valeur est plus grande que la valeur théorique (30  $mg$ ).

## 2.2 Refroidissement du miroir par pression de radiation

Nous avons vu dans la partie précédente qu’il est possible d’observer le mouvement Brownien du miroir avec une dynamique de plusieurs dizaines de  $dB$  : la mesure est en fait uniquement limitée par le bruit quantique de la lumière à un niveau environ 10 000 fois plus petit en puissance que le pic de bruit thermique. Ceci permet de réaliser un contrôle actif du mouvement Brownien du miroir en appliquant une force contrôlée sur le miroir à l’aide d’une boucle de contre-réaction [27, 49, 50]. Cette partie détaille le processus de friction froide qui permet de réduire le bruit thermique du miroir autour de la fréquence de résonance mécanique. Nous verrons en particulier qu’en présence de la contre-réaction le mouvement du miroir dû au mode résonnant correspond toujours à un équilibre thermodynamique mais à une température plus basse que la température ambiante. Nous décrivons également la réalisation pratique de ce processus de friction froide, en utilisant la force de pression de radiation d’un faisceau intense qui se réfléchit par l’arrière sur le miroir.



### 2.2.1 Principe de la friction froide

Nous considérerons ici que le miroir est équivalent à un unique oscillateur harmonique de fréquence de résonance  $\Omega_M$ , de masse  $M$  et de taux d'amortissement  $\Gamma$ . Sa susceptibilité  $\chi$  s'écrit dans le cadre de cette approximation :

$$\chi[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma\Omega)}. \quad (2.5)$$

On suppose également qu'il s'exerce maintenant sur le miroir, en plus de la force de Langevin  $F_T$ , une seconde force  $F_{\text{rad}}$  produite par la pression de radiation d'un faisceau laser intense en se réfléchissant sur le miroir. La réponse  $\delta x$  du miroir s'écrit alors :

$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega](F_T[\Omega] + F_{\text{rad}}[\Omega]). \quad (2.6)$$

On suppose que la mesure du bruit de position du miroir est idéale, c'est-à-dire que le bruit électronique de la détection et le bruit quantique du faisceau de mesure sont négligeables devant le bruit thermique du miroir. Dans ce cas, la phase  $\delta\varphi$  du faisceau réfléchi par la cavité est directement proportionnelle au déplacement  $\delta x$  du miroir. On peut alors effectuer un contrôle du déplacement du miroir en agissant sur lui à l'aide de la force de pression de radiation  $F_{\text{rad}}$ , dont l'amplitude est pilotée par la mesure du déplacement  $\delta x$  grâce à une boucle de contre-réaction.

La première possibilité de contrôle du mouvement consiste à appliquer une force proportionnelle au déplacement du miroir. Dans ce cas on peut écrire la force de pression de radiation sous la forme :

$$F_{\text{rad}}[\Omega] = -gM\Omega_M^2\delta x[\Omega], \quad (2.7)$$

où  $g$  est un facteur sans dimension qui caractérise le gain de la boucle de contre-réaction. La réponse du miroir à une telle force s'écrit d'après l'équation (2.6) :

$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega](F_T[\Omega] - gM\Omega_M^2\delta x[\Omega]). \quad (2.8)$$

On déduit de cette expression le déplacement  $\delta x$  du miroir en présence de la contre-réaction :

$$\delta x[\Omega] = \frac{1}{1/\chi[\Omega] + gM\Omega_M^2}F_T[\Omega] = \chi_{fb}[\Omega]F_T[\Omega], \quad (2.9)$$

où l'on a introduit une nouvelle susceptibilité  $\chi_{fb}$  pour le miroir en présence de la boucle de contre-réaction. En utilisant l'expression de la susceptibilité donnée par l'équation (2.5) on trouve l'expression de  $\chi_{fb}$  :

$$\chi_{fb}[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_M^2(1+g) - \Omega^2 - i\Gamma\Omega)}. \quad (2.10)$$

Le comportement du miroir est donc celui d'un oscillateur harmonique de masse  $M$  et d'amortissement  $\Gamma$  mais dont la fréquence de résonance est déplacée d'une quantité proportionnelle au gain  $g$  de la boucle de contre-réaction. L'effet de la contre-réaction est donc équivalent à une modification de la susceptibilité du miroir. Comme on pouvait

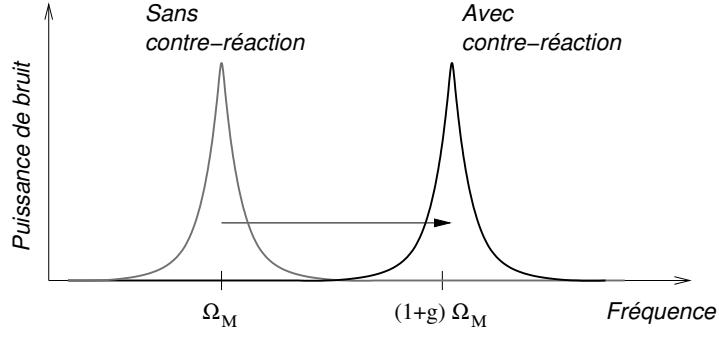


FIG. 2.3 – Effet d’un contrôle proportionnel au déplacement. Le pic de bruit thermique est déplacé mais son aire ne change pas.

s’y attendre, ajouter une force proportionnelle au déplacement modifie la constante de raideur de l’oscillateur harmonique et donc sa fréquence de résonance.

Déterminons maintenant l’effet sur le bruit thermique du miroir. La force de Langevin  $F_T$  est due uniquement aux processus de dissipation au sein du miroir. Elle n’est pas modifiée par la force de pression de radiation permettant la contre-réaction. Le spectre de la force de Langevin se déduit donc toujours de la partie imaginaire de la susceptibilité mécanique du miroir sans contre-réaction :

$$S_{F_T}[\Omega] = -\frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im} \left( \frac{1}{\chi[\Omega]} \right) = 2M\Gamma k_B T. \quad (2.11)$$

On en déduit que le spectre  $S_x^{fb}$  du bruit de déplacement devient en présence de contre-réaction :

$$S_x^{fb}[\Omega] = \frac{2\Gamma k_B T/M}{(\Omega_M^2(1+g)^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}. \quad (2.12)$$

Il a une forme Lorentzienne similaire au spectre de bruit thermique sans contre-réaction mais il est désormais centré autour de la fréquence  $(1+g)\Omega_M$ . La largeur et la hauteur du pic de bruit thermique et donc son aire restent inchangés. Le bruit thermique est certes réduit autour de la fréquence de résonance  $\Omega_M$  mais le bruit de position du miroir n’est pas réduit, il est simplement déplacé comme le montre la figure 2.3. On remarque également que le miroir continue de satisfaire le théorème fluctuations-dissipation à la température  $T$  puisque seul intervient le taux d’amortissement dans l’équation (2.11) et que celui-ci n’est pas modifié. Le miroir est donc toujours à l’équilibre thermodynamique à la température  $T$  et il n’y a pas de refroidissement.

Une seconde possibilité de contrôle consiste à appliquer une force proportionnelle à la vitesse du miroir [27, 49, 51]. Si un contrôle proportionnel au déplacement change la raideur de l’oscillateur harmonique, une force proportionnelle à la vitesse modifie son taux d’amortissement. En effet la force s’écrit maintenant

$$F_{\text{rad}}[\Omega] = -i\Omega\Gamma g M \delta x[\Omega]. \quad (2.13)$$

Le déplacement du miroir se déduit alors des équations (2.5) et (2.6) par un calcul similaire à celui aboutissant à l’expression (2.10). On obtient maintenant un déplacement :

$$\delta x[\Omega] = \chi_{fb} F_T[\Omega], \quad (2.14)$$

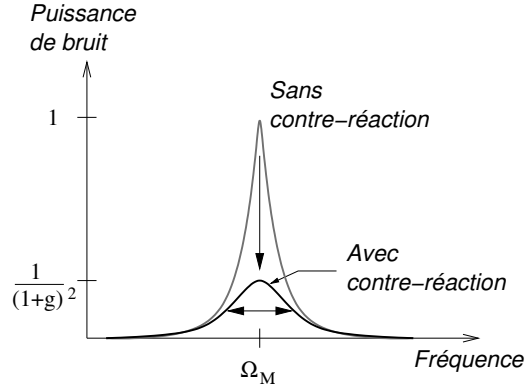


FIG. 2.4 – Effet de la friction froide sur le spectre de déplacement. Le spectre reste centré autour de  $\Omega_M$  mais l'aire de la courbe est diminuée d'un facteur  $(1 + g)$ .

où la susceptibilité  $\chi_{fb}$  en présence de la contre-réaction est donnée par,

$$\chi_{fb}[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_M^2 - \Omega^2 - i(1+g)\Gamma\Omega)}. \quad (2.15)$$

La nouvelle susceptibilité  $\chi_{fb}$  est celle d'un oscillateur harmonique de masse  $M$ , de fréquence de résonance  $\Omega_M$  mais de taux d'amortissement modifié d'un facteur  $(1 + g)$  par rapport au cas sans contre-réaction.

Comme nous l'avons déjà remarqué, la force de Langevin  $F_T$  n'est pas modifiée par la boucle de contre-réaction et son spectre est donné par l'équation (2.11). L'asservissement modifie donc l'amortissement du système sans rajouter de bruit. On peut en particulier augmenter la friction du miroir pour des gains positifs sans fluctuations supplémentaires. Ce processus correspond à un processus de friction froide [25, 26, 28, 52].

On peut écrire le spectre  $S_x^{fb}$  du bruit de position du miroir à partir des équations (2.14) et (2.15) :

$$S_x^{fb}[\Omega] = \frac{2\Gamma k_B T/M}{(\Omega_M^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2(1+g)^2\Omega^2}. \quad (2.16)$$

Le spectre de bruit reste centré autour de la fréquence de résonance  $\Omega_M$  mais sa largeur est modifiée par la contre-réaction comme le montre la figure 2.4. On définit alors une nouvelle largeur du spectre  $\Gamma_{fb}$  :

$$\Gamma_{fb} = (1 + g)\Gamma. \quad (2.17)$$

La hauteur du spectre est elle aussi modifiée. On définit le rapport de réduction en amplitude du spectre de bruit à partir du rapport des amplitudes des spectres de bruit sans et avec asservissement :

$$\sqrt{\frac{S_x[\Omega]}{S_x^{fb}[\Omega]}} = R[\Omega] = \left| \frac{\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma_{fb}\Omega}{\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma\Omega} \right|. \quad (2.18)$$

La réduction maximale est obtenue à résonance où elle vaut :

$$R[\Omega_M] = (1 + g). \quad (2.19)$$

Lorsque l'on s'éloigne de résonance le facteur de réduction tend vers 1 ce qui indique que l'efficacité de la contre-réaction diminue hors résonance. Les équations (2.17) et (2.18) montrent que pour des gains positifs la largeur du spectre est augmentée d'un facteur  $(1 + g)$  tandis que sa hauteur est réduite d'un facteur  $(1 + g)^2$ . On en déduit une diminution de l'aire du spectre de bruit d'un facteur  $(1 + g)$ . La diminution de l'aire de la Lorentzienne est la signature d'une réduction de la variance  $\Delta x^2$  du bruit de position du miroir dû au mode résonnant. Ceci est équivalent, d'après le théorème d'équipartition de l'énergie [équation (2.4)], à une diminution de la température du mode. Il y a donc dans ce cas, et par opposition à un asservissement proportionnel au déplacement, une réduction réelle du bruit thermique du miroir.

Plus précisément, d'après les expressions de la susceptibilité en présence de la friction froide [équation (2.15)] et du spectre de la force de Langevin [équation (2.11)], le miroir obéit au théorème fluctuations-dissipation associé à la susceptibilité  $\chi^{fb}$  :

$$S_{F_T} = -\frac{2k_B T_{fb}}{\Omega} \text{Im} \left( \frac{1}{\chi_{fb}[\Omega]} \right), \quad (2.20)$$

où la nouvelle température  $T_{fb}$  est définie par :

$$T_{fb} = \frac{\Gamma}{\Gamma_{fb}} T = \frac{T}{1 + g}. \quad (2.21)$$

Pour des gains positifs, on obtient une réduction de la température effective du mode.

Il est important de noter que cet effet de friction froide n'est absolument pas équivalent à une augmentation mécanique de l'amortissement du mode. On peut prendre l'exemple d'un pendule dont l'amortissement vient des collisions avec le gaz qui l'entoure. On pourrait en effet penser réduire le mouvement thermique d'un oscillateur harmonique en augmentant la friction exercée par le gaz, par exemple en élevant la pression. Mais, si la dissipation est bien augmentée dans ce cas, on augmente également le nombre de collisions des molécules du gaz sur le pendule et donc les fluctuations du système. Au final le théorème fluctuations-dissipation implique que la variance du mouvement est inchangée : elle ne dépend pas de l'amortissement. Il est même souvent préférable d'avoir des amortissements les plus faibles possibles de manière à concentrer le bruit thermique autour de la fréquence de résonance, si celle-ci se trouve en dehors de la plage de fonctionnement de l'appareil.

### 2.2.2 Réalisation expérimentale de la force de pression de radiation

La réalisation pratique du processus de friction froide est présentée sur la figure 2.5. La force de contre-réaction est induite par la pression de radiation d'un faisceau lumineux intense envoyé par l'arrière et se réfléchissant au centre de la face traitée optiquement du miroir mobile. Le faisceau de refroidissement est prélevé juste à la sortie du laser, après l'isolateur optique, grâce à un cube séparateur de polarisation précédé d'une lame demi-onde.

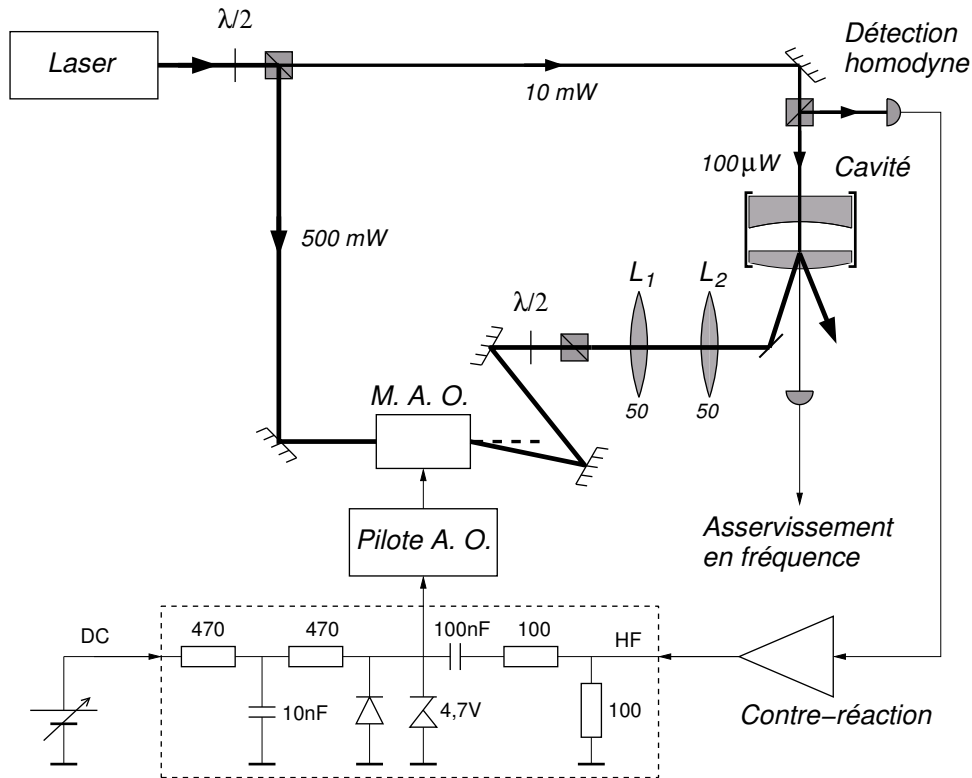


FIG. 2.5 – Dispositif expérimental de contrôle du mouvement du miroir par pression de radiation. Une partie du faisceau laser, modulée en intensité par un modulateur acousto-optique (M. A. O.), est envoyée par l'arrière sur le miroir mobile.

Etant donné que le faisceau de mesure envoyé dans la cavité à miroir mobile ne nécessite qu'une très faible puissance, l'essentiel de la puissance du laser est utilisé pour produire la force de pression de radiation. L'intensité du faisceau est modulée grâce à un modulateur acousto-optique AA MP 10. L'acousto-optique est piloté par un générateur radio fréquence MOD 200 qui délivre une porteuse à 200  $MHz$  dont l'amplitude est commandée de manière analogique par une tension comprise entre 0 et 5  $V$ , 0  $V$  correspondant à une intensité lumineuse diffractée nulle et 5  $V$  à une intensité maximale.

Le modulateur acousto-optique repose sur un support de prisme permettant d'ajuster son orientation. Le tout est monté sur un système de deux translations, une verticale et une horizontale permettant l'alignement du cube sur le faisceau laser. Enfin une lentille de 200  $mm$  de focale permet de focaliser le faisceau dans l'acousto-optique de façon à optimiser son efficacité. L'ordre 1 de diffraction est utilisé pour produire la force de pression de radiation. Lorsque l'alignement avec le faisceau est optimum, on obtient un faisceau diffracté dans le premier ordre dont l'intensité  $P_{max}$  en continu est de 500  $mW$  et pouvant être modulée à 2  $MHz$ . Pour de fortes amplitudes de modulation, la distorsion du signal limite la profondeur de modulation à environ 95 %. Cela correspond

à une force maximale crête-à-crête  $F_{rad}^{max}$  :

$$F_{rad}^{max} = 2\hbar k I_{max} = 0,95 \times \frac{2P_{max}}{c} = 3,2 \times 10^{-9} \text{ N}. \quad (2.22)$$

L'électronique de commande du pilote du modulateur acousto-optique permet de mélanger une tension continue à une modulation haute fréquence. Une diode zener de 4,7 V et une diode au germanium montée en inverse protègent le pilote contre d'éventuelles surtensions du signal. La tension continue est réglée de manière à ce que la tension appliquée au pilote ait une valeur moyenne de 2,5 V. Les voies DC et HF sont isolées l'une de l'autre par deux filtres RC.

Les deux lentilles  $L_1$  et  $L_2$  de distance focale 50 mm placées après le modulateur acousto-optique servent à focaliser le faisceau au niveau du miroir mobile avec un col optique de 100  $\mu\text{m}$  environ. Un miroir de renvoi monté sur un support micrométrique permet de centrer la tache de réflexion sur le miroir mobile avec un angle d'incidence de 10°. Cet angle assure que le faisceau arrière ne rentre pas dans la cavité. En effet le coefficient de couplage entre le faisceau arrière et la cavité vaut  $e^{-\theta/\theta_0}$  où  $\theta_0$  est l'angle de divergence du mode TEM<sub>00</sub> de la cavité, égal à  $\theta_0 = \lambda/\pi w_0 = 0,2^\circ$ . Le couplage est également atténué par le fait que l'on utilise le premier ordre de diffraction, décalé en fréquence de 200 MHz, c'est-à-dire plus de 10 fois la bande passante de la cavité. Enfin la détection homodyne est protégée d'une éventuelle lumière parasite provenant du faisceau arrière par des écrans noirs.

Nous avons vérifié expérimentalement que les parasites n'ont pas d'influence sur le système de détection homodyne. Pour cela, on applique la modulation générée par un synthétiseur haute fréquence à l'entrée de la voie HF du circuit de commande du pilote de l'acousto-optique, la cavité étant maintenue hors résonance. De cette manière, la phase du faisceau réfléchi par la cavité n'est pas sensible aux déplacements du miroir et donc à la modulation d'intensité du faisceau arrière. En observant avec l'analyseur de spectre le bruit de phase autour de la fréquence de modulation, on trouve un niveau de bruit correspondant au bruit de photon standard, que la modulation soit appliquée ou non. Nous verrons également dans la partie 2.3 que lorsque la cavité est résonnante, la détection homodyne délivre un signal modulé à la fréquence du synthétiseur qui est proportionnel à la réponse mécanique du miroir. Une telle réponse ne peut être attribuée à un effet parasite (rayonnement des circuits électroniques ou lumière diffusée).

### 2.2.3 Réalisation de la boucle de contre-réaction

La partie électronique de la boucle de contre-réaction est schématisée sur la figure 2.6. Son but est de fournir un signal proportionnel à la vitesse du miroir pour piloter l'acousto-optique, à partir du signal délivré par la détection homodyne. Comme nous ne voulons contrôler le mouvement du miroir que sur une plage de fréquence limitée à quelques kilohertz autour de la fréquence de résonance du mode fondamental Gaussien, la dérivation du signal revient simplement à une multiplication par  $i\Omega_M$ . La boucle de contre-réaction n'a ainsi pas besoin d'être équivalente à un vrai dérivateur mais simplement à un déphaseur par  $\pi/2$ .

Le signal issu de la détection homodyne est tout d'abord divisé en deux par un splitter *Minicircuit*. Une partie sert à la mesure du bruit de phase par l'analyseur de

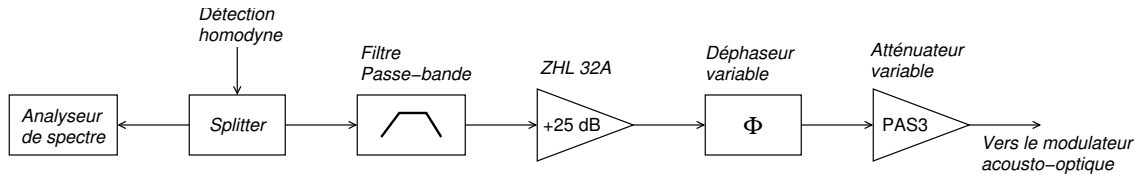


FIG. 2.6 – Schéma du dispositif électronique de la boucle de contre-réaction.

spectre. L'autre partie sert de signal d'erreur pour la boucle de contre-réaction. Le signal est filtré par un filtre passe-bande de très grand facteur de qualité, conçu pour être centré autour d'une fréquence de l'ordre de  $2\text{ MHz}$ . On limite ainsi l'efficacité de la boucle de contre-réaction à une plage restreinte en fréquence. Il faut en effet éviter d'agir sur les autres modes du miroir, en particulier les modes transverses Gaussiens qui ne se trouvent que quelques kilohertz au dessus de la fréquence du fondamental, afin de ne pas saturer la boucle de contre-réaction. La bande passante du filtre doit être ainsi de l'ordre de quelques kilohertz. Le facteur de qualité et la fréquence centrale du filtre peuvent être ajustés indépendamment l'un de l'autre sur une faible plage. Nous avons centré la réponse du filtre sur la fréquence de résonance  $\Omega_M = 2\pi \times 1859\text{ kHz}$  du mode fondamental. La bande passante est réglée à  $9\text{ kHz}$ , ce qui correspond à un facteur de qualité de l'ordre de 200. La sortie du filtre est amplifiée par un circuit commercial *Minicircuit* ZHL 32A ayant un gain de  $25\text{ dB}$ .

Le signal ainsi filtré et amplifié est appliqué à l'entrée d'un déphaseur variable. Ce circuit permet de produire une force exactement en quadrature avec le déplacement  $\delta x$  du miroir. Le circuit est conçu de manière à pouvoir obtenir un déphasage quelconque entre  $0$  et  $2\pi$ , indépendamment de la fréquence sur la plage qui nous intéresse [51]. Ce réglage de la phase permet de compenser les déphasages induits par les différents éléments électroniques de la boucle (détection homodyne, filtre passe-bande, amplificateur, modulateur acousto-optique). Enfin le signal passe dans un atténuateur variable basé sur un circuit *Minicircuit* PAS 3. On peut ainsi régler le gain de la boucle de contre-réaction.

Pour ajuster la phase de la boucle de contre-réaction, on observe le bruit thermique sur l'analyseur de spectre pour une valeur élevée du gain de la boucle. Une phase mal réglée est équivalente à un gain  $g$  dans les équations (2.13) et (2.15) avec une partie imaginaire. On retrouve alors une situation similaire à un asservissement proportionnel où la fréquence centrale du pic de bruit thermique est déplacée. On ajuste alors la phase de la boucle de manière à annuler ce décalage en boucle fermée.

## 2.2.4 Résultats expérimentaux

Les spectres de bruit thermique en présence de la boucle de contre-réaction sont obtenus de la même manière que la courbe de bruit thermique de la figure 2.2. Ils sont observés sur l'analyseur de spectre sur une plage de fréquence de  $1\text{ kHz}$  avec une résolution spectrale de  $10\text{ Hz}$ . Le spectre est moyenné 500 fois avec un recentrage de la fréquence toute les 100 moyennes. Cependant pour des gains élevés (supérieurs à 10) les spectres présentent une largeur de l'ordre ou supérieure à la plage de fréquence de

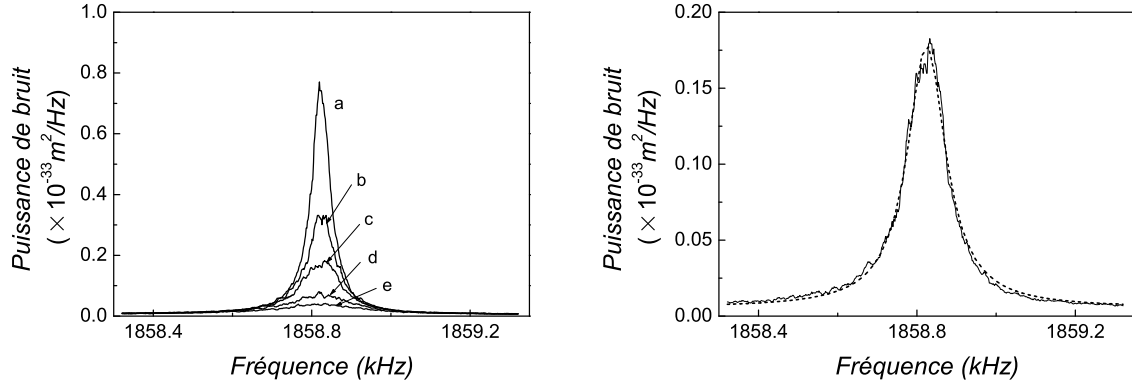


FIG. 2.7 – Courbes de gauche : bruit thermique autour de la résonance du mode fondamental Gaussien ; la courbe **a** est obtenue lorsque le miroir est libre ( $g = 0$ ), les courbes **b** à **e** sont obtenues pour des gains croissants de la boucle de contre-réaction. Courbes de droite : ajustement Lorentzien de la courbe **c**.

1  $\text{kHz}$  de l'analyseur de spectre. La recherche du centre du spectre devient alors très imprécise. Pour ces acquisitions on supprime simplement le système de compensation de la dérive du pic. Le spectre ayant une largeur supérieure à plusieurs centaines de hertz et les dérives du pic ne dépassant pas quelques dizaines de hertz, on peut considérer que leur effet sur la largeur du spectre est négligeable.

Les courbes de gauches de la figure 2.7 présentent les spectres de bruit thermique pour différents gains de la boucle de contre-réaction. la courbe **a** est le spectre pour un gain nul (figure 2.2). Les courbes **b** à **e** sont obtenues pour des gains croissants de la boucle de contre-réaction. Comme l'indique l'étude théorique de la section 2.2.1, on observe une nette diminution de l'aire du spectre de bruit thermique. La courbe de droite montre un ajustement de la courbe **c** par une Lorentzienne. L'excellent accord entre la forme du spectre expérimental et le spectre théorique donné par l'équation (2.16) montre que le miroir en présence de l'asservissement possède un bruit de position identique à celui d'un oscillateur harmonique à l'équilibre thermodynamique.

Le gain  $g$  de la boucle de contre-réaction dépend des gains de tous les circuits électroniques présents dans la boucle d'asservissement. Il est de ce fait difficilement mesurable directement. Nous le déterminons en fait en mesurant l'augmentation de la largeur du spectre ainsi que la diminution de sa hauteur. Pour le spectre **c**, l'ajustement par la Lorentzienne donne une largeur  $\Gamma_{fb} = 2\pi \times 118\text{Hz}$ , soit une augmentation de l'amortissement d'un facteur  $1 + g = 2,1$ . Ceci correspond à un gain  $g$  de 1,1. La réduction  $S_T^{fb}[\Omega_M]/S_T[\Omega_M]$  de hauteur du spectre par rapport à la situation sans asservissement vaut  $(1 + g)^2 = 4,35$ , ce qui correspond à un gain  $g$  de 1,08, en excellent accord avec la valeur précédente. Une étude détaillée de la largeur et de la hauteur du pic en fonction du gain de la boucle de contre-réaction est présentée dans la partie suivante.



## 2.3 Mesure de la susceptibilité mécanique du miroir

Dans la partie 2.1, nous avons observé le bruit de position du miroir mobile autour d'une fréquence de résonance et montré que le spectre de déplacement présente la forme Lorentzienne attendue pour le bruit thermique d'un oscillateur harmonique. Ceci ne prouve toutefois pas que l'on observe le bruit thermique et non une excitation parasite de la résonance mécanique. Il faut s'assurer que le spectre observé satisfait le théorème fluctuations-dissipation [équations (1.69) à (1.73)]. Ceci nécessite de déterminer la réponse du miroir à une force extérieure, c'est-à-dire sa susceptibilité mécanique.

Nous avons également pu réaliser un asservissement de la position du miroir, grâce à la force de pression de radiation. L'observation des spectres de bruit de phase montre clairement que le processus mis en jeu entraîne une réduction du bruit thermique. Pour démontrer qu'il s'agit d'un processus de friction froide, il faut s'assurer que l'asservissement ne fait qu'augmenter l'amortissement du miroir, sans ajouter de bruit supplémentaire [équations (2.15) et (2.16)]. Ceci nécessite de déterminer la réponse mécanique du miroir à une force extérieure, en présence de l'asservissement.

Nous avons utilisé un second faisceau arrière d'excitation pour tester la réponse du miroir à une force de pression de radiation [49]. On mesure ainsi directement la susceptibilité du mode. Cette caractérisation, indépendante de la mesure du bruit thermique, va tout d'abord permettre de confirmer l'origine thermique des pics de résonance présents sur le spectre de bruit de position du miroir. On va pouvoir également tester que la réponse en présence de la boucle de contre-réaction est bien donnée par les équations (2.14) et (2.15). Cette mesure, combinée avec l'observation du bruit thermique en présence de la friction froide, devrait nous permettre de vérifier que la force de Langevin n'est pas modifiée par le processus de refroidissement et que son spectre est donné par l'équation (2.11). Cette démonstration est nécessaire si l'on veut montrer que le miroir vérifie toujours le théorème fluctuations-dissipation, c'est-à-dire qu'il est à l'équilibre thermodynamique à une température effective plus basse que la température ambiante. Finalement la mesure de la susceptibilité va permettre de déterminer les sources de bruit éventuellement ajoutées par la boucle d'asservissement.

### 2.3.1 Principe de la mesure de la susceptibilité

La susceptibilité mécanique du miroir en l'absence ou en présence du processus de refroidissement est déduite de la mesure de la réponse du miroir à une force extérieure modulée à une fréquence variable. En l'absence de contre-réaction ( $g = 0$ ) le miroir est soumis uniquement à cette force externe  $F_{\text{ext}}[\Omega]$  et à la force de Langevin. Sa réponse est donnée par

$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega](F_T[\Omega] + F_{\text{ext}}[\Omega]). \quad (2.23)$$

Dans le cas où la force  $F_{\text{ext}}$  est monochromatique à la fréquence  $\Omega_0$  et d'intensité très grande devant celle de la force de Langevin  $F_T$ , la réponse du miroir va elle aussi être principalement monochromatique de fréquence  $\Omega_0$  et d'amplitude proportionnelle à  $\chi[\Omega_0]$ . En balayant la fréquence  $\Omega_0$ , on peut reconstituer point par point la susceptibilité du miroir en mesurant la puissance de modulation à la fréquence  $\Omega_0$  de la phase du

faisceau réfléchi par la cavité.

La condition  $F_{ext}$  grande devant  $F_T$  doit être précisée car ces deux quantités n'ont pas les mêmes unités. Si  $F_{ext}$  est bien une force dimensionnée en Newton,  $F_T$  est une amplitude spectrale de bruit dimensionnée en  $N/\sqrt{Hz}$ . La réponse à la force de Langevin est toujours observée sur une certaine largeur spectrale  $\Delta f$  ou intégrée pendant un certain temps. Dans notre cas, la bande passante d'analyse est fixée par l'analyseur de spectre (RBW) et vaut  $10 Hz$ . Pour le mode acoustique que l'on étudie (masse effective  $M = 230 mg$ , taux d'amortissement  $\Gamma = 2\pi \times 57 Hz$ ), l'équation (2.11) permet de calculer la puissance de bruit  $P_T$  de la force de Langevin vue à travers un filtre de  $\Delta f = 10 Hz$  :

$$P_T \simeq 2M\Gamma k_B T \Delta f \simeq 7 \times 10^{-21} N^2. \quad (2.24)$$

La racine carrée de cette valeur est 40 fois plus faible que la force de pression de radiation exercée par un faisceau de  $500 mW$  [équation (2.22)]. Cet écart peut être encore augmenté en choisissant une bande passante d'analyse plus étroite.

Dans le cas du miroir soumis à la force de friction froide  $F_{rad}$  et à la force extérieure  $F_{ext}$ , la réponse du miroir devient :

$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega](F_T[\Omega] + F_{rad}[\Omega] + F_{ext}[\Omega]). \quad (2.25)$$

L'expression de la force de contre-réaction  $F_{rad}$  donnée par l'équation (2.13) permet de calculer la réponse du miroir qui se met sous la forme :

$$\delta x[\Omega] = \chi_{fb}[\Omega](F_T[\Omega] + F_{ext}[\Omega]), \quad (2.26)$$

où la susceptibilité effective  $\chi_{fb}$  est donnée par l'équation (2.15). On voit que le miroir répond, en présence du refroidissement, de la même manière à une force extérieure et à la force de Langevin. Ainsi, comme dans le cas non asservi, en mesurant cette réponse lorsque la force extérieure est balayée en fréquence on peut reconstituer la susceptibilité mécanique du miroir refroidi. On doit alors observer un élargissement et une réduction en hauteur de la réponse mécanique lorsque l'on augmente le gain  $g$  de la boucle de contre-réaction.

### 2.3.2 Montage expérimental

Etant donné que l'on doit comparer l'effet du refroidissement sur le bruit thermique et sur l'action de la force extérieure  $F_{ext}$ , il est important que l'application de cette force extérieure ne perturbe pas le fonctionnement de l'asservissement. C'est pourquoi le faisceau d'excitation est réalisé de manière complètement indépendante du faisceau de refroidissement. En particulier, il n'utilise pas le même modulateur acousto-optique que le faisceau de refroidissement pour éviter une saturation du modulateur. Les modifications apportées au montage de refroidissement pour réaliser la force extérieure sont présentées sur la figure 2.8.

Une partie du faisceau arrière servant au refroidissement est prélevée grâce à un cube séparateur de polarisation (CP2) précédé d'une lame  $\lambda/2$ . On peut ainsi contrôler en modifiant l'orientation de la lame la fraction du faisceau que l'on envoie dans les deux voies. Le faisceau d'excitation passe dans un modulateur acousto-optique qui est

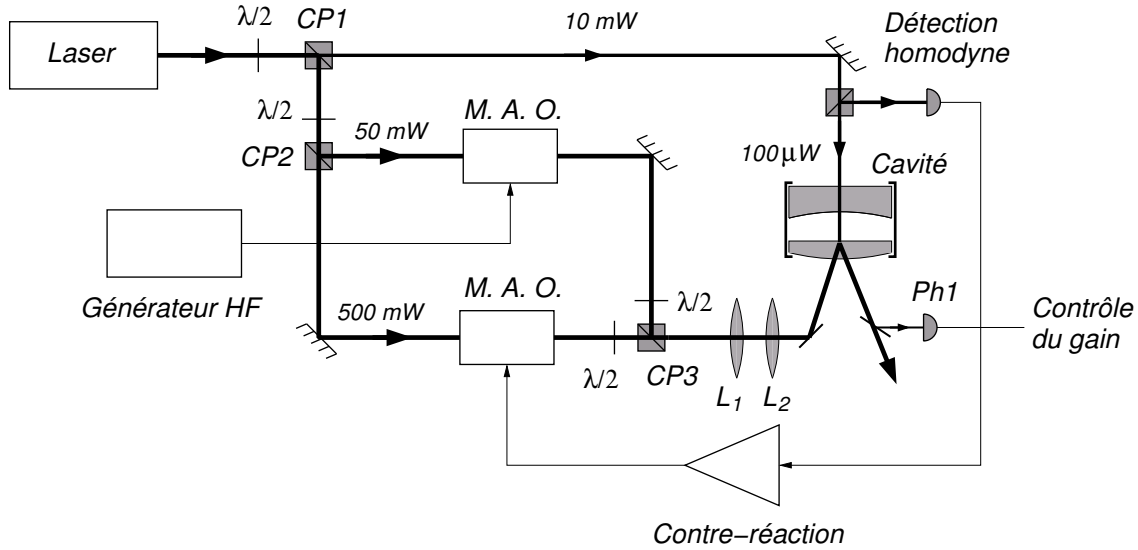


FIG. 2.8 – Dispositif expérimental de mesure de la susceptibilité mécanique du miroir en présence de la force de friction froide. Un faisceau d'excitation modulé en intensité est ajouté au faisceau de refroidissement.

commandé par un générateur HF dont la fréquence est pilotée par ordinateur. Par ailleurs, l'intensité du faisceau d'excitation est réglée à  $50\text{ mW}$  et celui de refroidissement à  $500\text{ mW}$  de manière à ce que la réponse du miroir soit nettement supérieure au bruit thermique (pour un faisceau de  $50\text{ mW}$  modulé en intensité, la puissance de modulation est environ  $12\text{ dB}$  au dessus du bruit thermique), mais suffisamment faible pour ne pas perturber le refroidissement : l'efficacité du faisceau d'excitation est  $20\text{ dB}$  en dessous de celle du refroidissement.

Les deux faisceaux polarisés orthogonalement (horizontalement pour le faisceau de refroidissement et verticalement pour le faisceau d'excitation) sont recombinaés grâce à un cube séparateur de polarisation (CP3). On évite ainsi des phénomènes d'interférence entre les deux faisceaux. Ils sont ensuite focalisés au centre de la face arrière du miroir grâce au jeu de lentilles  $L_1$  et  $L_2$ . Enfin une photodiode (Ph1) a été installée sur le trajet des faisceaux après leur réflexion sur le miroir arrière afin de contrôler leur puissance respective.

### 2.3.3 Procédure d'acquisition en présence du refroidissement

Nous avons établi une procédure d'acquisition permettant de réduire les effets de dérive thermique ainsi que les fluctuations de l'intensité du laser qui agissent directement sur le gain de la boucle de contre-réaction. La comparaison de la réponse du miroir à la force de Langevin et à la force excitatrice avec et sans asservissement nécessite l'acquisition d'un grand nombre de données. Il faut tout d'abord mesurer les spectres de bruit thermique pour différents réglages de l'atténuateur variable PAS3 de l'asservissement et les comparer au spectre obtenu sans asservissement ( $g = 0$ ). Les ajustements

Lorentziens de ces spectres permettent alors de déterminer pour chaque valeur du gain  $g$  la variation  $\Gamma_T = \Gamma_{fb}/\Gamma$  de la largeur relative des spectres thermiques et de l'amplitude de réduction  $R_T$  des spectres à résonance [équation (2.18)]. Pour atteindre une précision suffisante, chaque spectre est obtenu en moyennant un grand nombre d'acquisitions sur l'analyseur de spectre (typiquement 500). On mesure de même les spectres de réponse mécanique à la force extérieure  $F_{ext}$  pour différents gains et sans asservissement. Ceux-ci fournissent la susceptibilité mécanique  $\chi_{fb}$  (2.15), caractérisée par sa fréquence de résonance (qui reste égale à  $\Omega_M$ ), son amortissement et sa raideur. On peut également caractériser la susceptibilité mécanique par la variation  $\Gamma_M = \Gamma_{fb}/\Gamma$  de l'amortissement mécanique et la réduction à résonance  $R_M$  de l'amplitude de la réponse. Pour un processus de friction froide, ces paramètres sont donnés par les équations (2.17) et (2.18), et doivent être égaux aux paramètres  $\Gamma_T$  et  $R_T$  déduits des spectres thermiques.

Le temps d'acquisition est relativement long, de l'ordre d'une heure pour chaque valeur du gain. Il est donc nécessaire de contrôler les dérives, principalement dues à des variations lentes de l'intensité du laser et de la température de la pièce. Les variations d'intensité se traduisent par une modification de la force extérieure tandis que les dérives en température produisent une variation de la fréquence de résonance mécanique  $\Omega_M$ . Comme nous allons le voir, le contrôle de ces dérives est assuré par la procédure d'acquisition qui est semi-automatisée grâce à un programme sur ordinateur qui pilote les appareils et récupère les données.

Un cycle de mesure est réalisé de la manière suivante : pour chaque valeur du gain de la boucle de contre-réaction, on mesure le spectre de bruit thermique sans refroidissement et sans force extérieure ( $g = 0$ ,  $F_{ext} = 0$ ). Ceci permet de fixer une hauteur et une largeur de référence pour le bruit thermique. On mesure ensuite la réponse mécanique à la force  $F_{ext}$  toujours sans asservissement ( $g = 0$ , mais  $F_{ext} \neq 0$ ). Pour cela l'ordinateur commande la fréquence de l'analyseur de spectre et du générateur HF en prenant 50 valeurs sur une plage de 1  $kHz$  de large autour de la fréquence de résonance. Pour chaque valeur de la fréquence de modulation, l'analyseur de spectre mesure la puissance de modulation en mode zerospan, et l'ordinateur reconstitue le spectre à partir des 50 points. On obtient ainsi une réponse mécanique de référence, qui permet de compenser les dérives d'intensité du laser.

La boucle d'asservissement est ensuite activée. On mesure un spectre de bruit thermique sur l'analyseur de spectre et une courbe de réponse mécanique par la même méthode d'acquisition que pour la réponse mécanique de référence. Mais afin d'éviter les dérives de la fréquence de résonance du miroir dues aux variations de température de la pièce, le temps mis pour réaliser ces deux mesures ne dépasse pas une dizaine de minutes. On répète donc ces deux mesures en alternance et on utilise le même algorithme que pour l'observation du spectre de bruit thermique (section 2.1) où le programme de l'ordinateur détermine la fréquence centrale des spectres obtenus pour les recentrer. On moyenne les courbes obtenues jusqu'à atteindre une précision suffisante. L'ensemble du cycle de mesure est ensuite répété pour une nouvelle valeur du gain  $g$  de la boucle de contre-réaction.

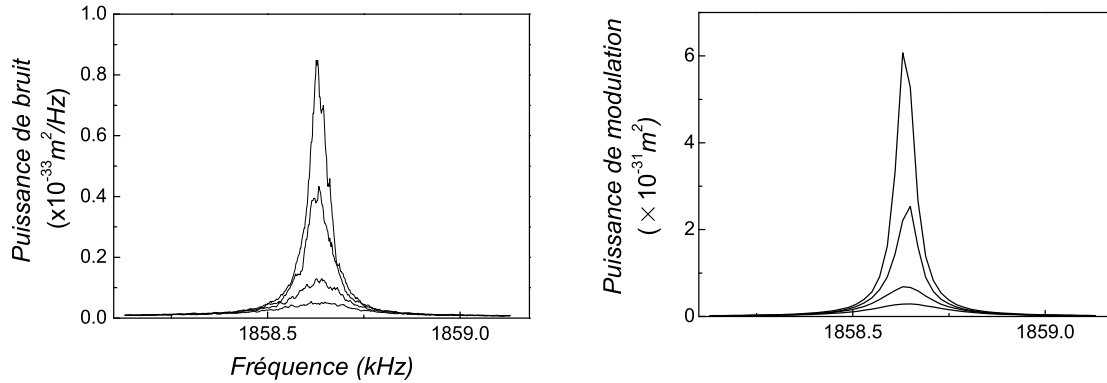


FIG. 2.9 – Les courbes de gauche montrent les spectres de bruit thermique pour différentes valeurs du gain  $g$  de la boucle de contre-réaction. La réponse du miroir au faisceau d'excitation, obtenue pour les mêmes valeurs du gain, est représentée sur les courbes de droite.

### 2.3.4 Résultats

Les courbes de bruit thermique et de réponse mécanique du miroir à la force extérieure obtenues avec différentes valeurs du gain  $g$  de la boucle de contre-réaction sont tracées sur la figure 2.9. On remarque la très grande similitude entre les deux séries de courbes. Pour quantifier ce résultat nous avons comparé chacune de ces courbes à une Lorentzienne, afin d'en déduire leur largeur et leur hauteur.

La figure 2.10 présente les facteurs de réduction en amplitude à résonance ( $R_T$ ,  $R_M$ ) et les largeurs relatives ( $\Gamma_T$ ,  $\Gamma_M$ ) pour le bruit thermique et pour la réponse mécanique en fonction du gain. Notons que le gain étant défini par l'équation (2.13), il est mesuré en observant simultanément le spectre de bruit  $S_x^{fb}$  et celui de la force de pression de radiation  $F_{rad}$  du faisceau de refroidissement. Pour mesurer ce dernier spectre, on détecte en fait l'intensité du faisceau de refroidissement sur la photodiode placée après le miroir mobile (Ph1 sur la figure 2.8). Le rapport de cette quantité et de  $S_x^{fb}$ , qui représente le spectre du signal d'erreur  $\delta x$  à l'entrée de la boucle de contre-réaction [équation (2.13)], donne accès au gain  $g$  à une constante multiplicative près. D'autre part, les largeurs du bruit thermique pour des gains supérieurs à 10 ne sont pas présentées car le spectre thermique devient plus large que la plage de 1 kHz de l'analyseur de spectre. La comparaison avec une Lorentzienne devient alors imprécise.

Pour des gains inférieurs à 30, on constate que tous les points expérimentaux sont alignés sur une droite de pente 1. Cela montre que les largeurs et les facteurs de réduction varient bien linéairement en  $1 + g$  comme le prédisent les formules (2.17) et (2.19). Ce résultat prouve que le refroidissement correspond bien à un processus de friction froide : la susceptibilité  $\chi_{fb}$ , caractérisée par les paramètres  $\Gamma_M$  et  $R_M$  est bien donnée par l'équation (2.15). Par ailleurs, le bruit thermique caractérisé par les paramètres  $\Gamma_T$  et  $R_T$ , vérifie bien le théorème fluctuations-dissipation pour la susceptibilité  $\chi_{fb}$  : la force de Langevin  $F_T$  n'est pas modifiée par le processus de refroidissement [équation (2.14)]. Ceci démontre également que le miroir est toujours à l'équilibre ther-

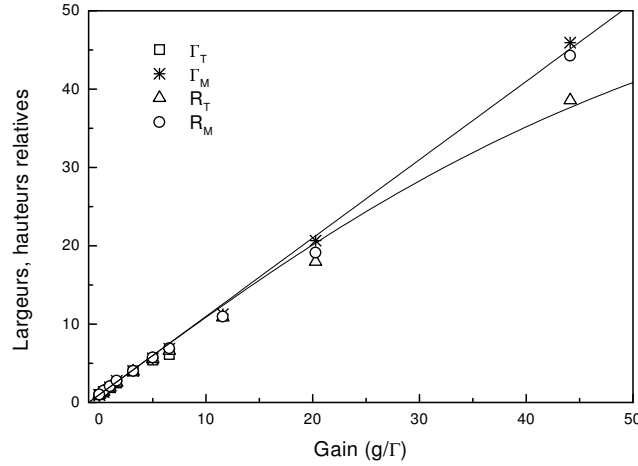


FIG. 2.10 – Evolution des largeurs relatives  $\Gamma_T$ ,  $\Gamma_M$  et des réductions relatives en amplitude  $R_T$ ,  $R_M$  du spectre de bruit thermique et de la réponse mécanique du miroir en fonction du gain  $g$  du refroidissement. La droite en trait plein correspond à la valeur  $1 + g$  attendue pour ces paramètres. La courbe en trait plein représente la valeur attendue pour  $R_T$  en tenant compte du bruit électronique rajouté.

modynamique, à une température effective donnée par l'équation (2.21) [49].

Pour des gains plus élevés, le facteur de réduction du bruit thermique  $R_T$  s'écarte de la droite définie par les autres paramètres  $R_M$ ,  $\Gamma_M$  et  $\Gamma_T$  : bien que l'amortissement et la réponse à une force extérieure évoluent comme attendu pour un processus de friction froide, le bruit thermique résiduel est plus important que prévu. Ceci est dû au bruit électronique présent dans la boucle de contre-réaction, bruit que nous avons jusqu'alors négligé. Il est possible d'introduire ce bruit dans le calcul du bruit résiduel et ainsi d'en évaluer quantitativement les effets.

On peut en effet rajouter dans la force de friction froide un terme  $\delta x_b[\Omega]$  caractérisant le bruit des différents circuits électroniques de la boucle de contre-réaction. La force de friction froide devient dans ces conditions [équation (2.13)] :

$$F_{rad} = -i\Omega\Gamma gM(\delta x[\Omega] + \delta x_b[\Omega]), \quad (2.27)$$

et l'équation du mouvement s'écrit :

$$\delta x[\Omega] = \chi_{fb}[\Omega](F_T[\Omega] - i\Omega\Gamma gM\delta x_b[\Omega] + F_{ext}[\Omega]). \quad (2.28)$$

On constate que la réponse à la force extérieure n'est pas modifiée puisqu'elle est toujours décrite par la susceptibilité  $\chi_{fb}$ . Par contre, le bruit observé en l'absence de force extérieure dépend du bruit électronique. Le spectre de bruit  $S_x^{fb}$  apparaît comme la somme du spectre dû au bruit thermique réduit par l'asservissement et d'un terme proportionnel au spectre de bruit électronique  $S_b$  injecté par la boucle de contre-réaction :

$$S_x^{fb}[\Omega] = \frac{S_x^T[\Omega]}{R[\Omega]^2} + |\Omega\Gamma gM\chi_{fb}[\Omega]|^2 S_b[\Omega], \quad (2.29)$$

où  $S_x^T$  est le spectre thermique en l'absence de contre-réaction et  $R[\Omega]$  la réduction de bruit par friction froide [équation (2.18)]. Sur la plage de fréquence à laquelle nous nous intéressons, on peut supposer que le spectre  $S_b[\Omega]$  est plat en fréquence. On trouve alors que le spectre de bruit a toujours une forme Lorentzienne, puisqu'il est proportionnel à  $|\chi_{fb}|^2$ . Ainsi sa largeur n'est pas modifiée, mais sa hauteur dépend du bruit électronique rajouté. D'après l'expression de  $\chi_{fb}$  [équation (2.15)] le spectre à résonance est égal à :

$$S_x^{fb}[\Omega_M] = \frac{S_x^T[\Omega_M]}{(1+g)^2} + \left(\frac{g}{1+g}\right)^2 S_b[\Omega_M]. \quad (2.30)$$

On constate que la contamination par le bruit électronique est d'autant plus importante que le gain  $g$  est grand. Le facteur de réduction  $R_T$  n'est donc plus une fonction linéaire du gain, et il sature pour des grandes valeurs de  $g$  :

$$R_T = \frac{1+g}{\sqrt{1+g^2 S_b[\Omega_M]/S_x^T[\Omega_M]}}. \quad (2.31)$$

Nous avons mesuré expérimentalement le rapport  $S_b/S_x$  en comparant les niveaux des bruits thermique et électronique à la sortie de la boucle d'asservissement, avant le pilote du modulateur acousto-optique contrôlant le faisceau de refroidissement. Ce rapport vaut  $2,2 \times 10^{-4}$ . La courbe en trait plein sur la figure 2.10 montre l'évolution de  $R_T$  pour cette valeur du rapport  $S_b/S_x$ . Cette courbe, obtenue sans paramètre ajustable, est en très bon accord avec les résultats expérimentaux.

## 2.4 Mesure des constantes de temps

Nous présentons dans cette section une analyse temporelle du mouvement Brownien du miroir, complémentaire de l'analyse spectrale présentée dans les parties précédentes [49]. Nous avons d'abord mesuré les temps de réponse du miroir à une force extérieure impulsionnelle, qui sont directement reliés au taux d'amortissement du miroir. Nous avons observé la modification de ce temps de réponse en présence du refroidissement et nous l'avons comparée à celle du taux d'amortissement. Nous avons également étudié les régimes transitoires du mouvement du miroir lorsque l'on branche ou que l'on coupe brusquement la boucle de contre-réaction produisant la friction froide. L'observation de l'évolution du bruit thermique nous a permis de caractériser l'établissement des régimes thermodynamiques correspondant au régime refroidi ou au retour à l'équilibre thermodynamique.

### 2.4.1 Réponse transitoire à une force extérieure

On présente dans ce paragraphe une analyse théorique de la réponse du miroir à une force  $F_{ext}(t)$  monochromatique, résonnante avec un mode acoustique, lorsque celle-ci est appliquée ou supprimée brusquement. Comme on désire étudier le comportement non stationnaire du miroir, on utilisera dans les calculs qui suivent la transformée de Laplace qui se prête particulièrement bien à l'étude des régimes linéaires transitoires.

La transformée de Laplace  $f[p]$  d'une fonction temporelle  $f(t)$  est définie par

$$f[p] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (2.32)$$

La transformée de Laplace de la dérivée  $\dot{f}$  se déduit de celle de  $f$  et de la valeur de  $f$  à l'instant  $t = 0$  grâce à une intégration par partie :

$$\dot{f}[p] = pf[p] + f(0). \quad (2.33)$$

### Réponse du miroir à une force

On considère le cas d'un miroir soumis à une force extérieure  $F_{ext}$  que l'on applique ou que l'on coupe brusquement. Le miroir est assimilé à un oscillateur harmonique de fréquence de résonance  $\Omega_M$ , de masse  $M$  et d'amortissement  $\Gamma$ . On présente tout d'abord un calcul général où aucune hypothèse n'est faite ni sur la force ni sur les conditions initiales. L'équation d'évolution de la position  $x(t)$  du miroir s'écrit :

$$M(\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \Omega_M^2 x) = F_{ext}. \quad (2.34)$$

On veut résoudre cette équation pour des temps positifs en tenant compte des conditions initiales à  $t = 0$  qui correspondent à celles d'un miroir libre ou d'un miroir en régime stationnaire forcé. Pour cela on prend la transformée de Laplace de l'équation (2.34) qui s'écrit :

$$M(p^2 + \Gamma p + \Omega_M^2) x[p] = F_{ext}[p] + M(\Gamma + p)x(0) + M\dot{x}(0), \quad (2.35)$$

où  $x[p]$  et  $F_{ext}[p]$  sont respectivement les transformées de Laplace du déplacement  $x(t)$  et de la force  $F_{ext}(t)$ .  $x(0)$  et  $\dot{x}(0)$  correspondent à la position et à la vitesse initiales, à l'instant  $t = 0$ . On déduit  $x[p]$  de l'équation (2.35) :

$$x[p] = \chi[p] \{F_{ext}[p] + M(\Gamma + p)x(0) + M\dot{x}(0)\}, \quad (2.36)$$

où  $\chi[p]$  est la susceptibilité mécanique du miroir donnée par,

$$\chi[p] = \frac{1}{M(p^2 + \Gamma p + \Omega_M^2)}. \quad (2.37)$$

En décomposant  $\chi[p]$  en éléments simples, et en appliquant la transformation de Laplace inverse, on montre que  $\chi(t)$  est égal à :

$$\chi(t) = \frac{\sin(\Omega_M t)}{M\Omega_M} \exp\left[-\frac{\Gamma}{2}t\right]. \quad (2.38)$$

La susceptibilité possède donc une partie oscillant à la fréquence propre de l'oscillateur harmonique  $\Omega_M$ , ainsi qu'un terme décroissant exponentiellement avec une constante de temps  $2/\Gamma$ . Compte tenu des propriétés de la transformée de Laplace, et du fait que  $\chi(t)$  s'annule en  $t = 0$ , on obtient à partir des équations (2.33) et (2.36),

$$x(t) = \int_0^t \chi(t - \tau) F_{ext}(\tau) d\tau + M \{ \Gamma x(0) + \dot{x}(0) \} \chi(t) + Mx(0)\dot{\chi}(t). \quad (2.39)$$

La position  $x(t)$  est la somme de la réponse à la force extérieure et de deux termes oscillants et décroissants exponentiellement dépendants des conditions initiales.



### Application brusque d'une force extérieure

On suppose que l'on applique brusquement une force de pression de radiation, monochromatique et résonnante avec le mode acoustique du miroir. Comme nous l'avons vu lorsque nous avons mesuré la susceptibilité mécanique du miroir (section 2.3), cette force est très grande devant la force de Langevin thermique. Le bruit thermique sera donc négligé devant la réponse à la force extérieure, ainsi que les termes qui correspondent à l'équilibre thermodynamique à la température ambiante  $T$  dans les conditions initiales. Le miroir est donc au repos pour des temps négatifs et l'on applique brusquement à l'instant  $t = 0$  la force extérieure  $F_{ext}(t)$ . La position  $x(t)$  se déduit alors de l'équation (2.39), en prenant  $x(0)$  et  $\dot{x}(0)$  nuls,

$$x(t) = \int_0^t \chi(t - \tau) F_{ext}(\tau) d\tau. \quad (2.40)$$

La force extérieure étant de la forme  $F_0 \cos(\Omega_M t + \phi)$ , on obtient :

$$x(t) = \frac{F_0}{M\Omega_M\Gamma} \sin(\Omega_M t + \phi) \left(1 - e^{-\frac{\Gamma t}{2}}\right). \quad (2.41)$$

Cette expression montre que  $x(t)$  tend vers la solution forcée stationnaire avec une constante de temps  $\Gamma/2$ .

### Suppression brusque d'une force extérieure

Nous étudions maintenant le cas inverse où l'on part d'un régime forcé et où l'on supprime brutalement la force à l'instant  $t = 0$ . On doit alors tenir compte des conditions initiales qui correspondent au régime forcé et qui s'écrivent :

$$x(0) = \frac{F_0}{M\Omega_M\Gamma} \sin(\phi), \quad (2.42)$$

$$\dot{x}(0) = \frac{F_0}{M\Gamma} \cos(\phi). \quad (2.43)$$

En utilisant l'équation (2.39) on montre que  $x(t)$  est égal à :

$$x(t) = M \{ \dot{x}(0) + \Gamma x(0) \} \chi(t) + Mx(0)\dot{\chi}(t), \quad (2.44)$$

soit

$$x(t) = \frac{F_0}{M\Omega_M\Gamma} \sin(\Omega_M t + \phi) e^{-\frac{\Gamma t}{2}}, \quad (2.45)$$

où l'on a négligé le terme  $\Gamma x(0)$  devant  $\dot{x}(0)$  dans l'expression (2.44), le rapport entre ces deux grandeurs étant de l'ordre de  $\Gamma/\Omega_M \ll 1$ . La position  $x(t)$  relaxe vers zéro avec un taux égal à  $\Gamma/2$ , en oscillant à la fréquence  $\Omega_M$ .

### Evaluation de la puissance de modulation mesurée par un analyseur de spectre

Dans notre expérience, nous observons la puissance de modulation grâce à un analyseur de spectre. A un instant  $t$  donné, l'appareil mesure en fait la puissance spectrale pendant un temps  $T_m$  fini, autour d'une fréquence  $\Omega$ , et sur une plage de fréquences  $\Delta f$  correspondant à la résolution spectrale d'analyse. La quantité  $P_x$  mesurée par l'appareil peut s'écrire :

$$P_x(\Omega, t) = \int_{\Omega-\pi\Delta f}^{\Omega+\pi\Delta f} \frac{1}{T_m} \left| \int_t^{t+T_m} e^{-i\omega\tau} x(\tau) d\tau \right|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (2.46)$$

D'après les équations (2.41) et (2.45) le signal que l'on cherche à mesurer est quasiment monochromatique de fréquence  $\Omega_M$ , avec une enveloppe  $\tilde{x}(t)$  qui varie lentement sur des temps de l'ordre de  $1/\Gamma$  :

$$x(t) = \tilde{x}(t) \sin(\Omega_M t + \phi). \quad (2.47)$$

Le temps  $T_m$ , qui fixe la résolution temporelle de l'analyseur de spectre, doit être très petit devant le temps  $1/\Gamma$ . Dans ce cas, la puissance  $P_x$  mesurée à la fréquence  $\Omega_M$  s'écrit :

$$P_x(\Omega_M, t) = |\tilde{x}(t)|^2 \int_{\Omega_M-\pi\Delta f}^{\Omega_M+\pi\Delta f} \frac{1}{T_m} \left| \int_t^{t+T_m} e^{-i\omega\tau} \sin(\Omega_M\tau + \phi) d\tau \right|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (2.48)$$

Le spectre d'une fonction monochromatique est une fonction de Dirac. Cependant, l'intégrale temporelle dans l'expression de  $P_x$  s'effectue sur un temps fini et le spectre mesuré est élargi. En prenant un temps  $T_m$  grand devant la période d'oscillation  $2\pi/\Omega_M$ , l'intégration temporelle dans l'équation (2.48) donne pour des valeurs de  $\omega$  proches de  $\Omega_M$  :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{T_m} \left| \int_t^{t+T_m} e^{-i\omega\tau} \sin(\Omega_M\tau + \phi) d\tau \right|^2 = \frac{T_m}{8\pi} \text{sinc}^2 \left[ (\Omega_M - \omega) \frac{T_m}{2} \right]. \quad (2.49)$$

Cette intégrale correspond à une mesure du spectre d'un signal monochromatique sur un temps fini  $T_m$ . L'estimation du spectre est élargi en fréquence par rapport à la limite  $T_m$  infinie et induit un étalement de la puissance sur une plage de fréquence de l'ordre de  $1/T_m$ . Pour obtenir une mesure de la puissance totale, il est donc nécessaire de choisir une résolution spectrale d'analyse  $\Delta f$  supérieure ou de l'ordre de  $1/T_m$  ( $\Delta f \gtrsim 1/T_m$ ). L'analyseur de spectre indique d'ailleurs que la mesure n'est pas calibrée si cette condition n'est pas satisfaite. La quantité mesurée est alors :

$$P_x(\Omega_M, t) = \frac{1}{4} |\tilde{x}(t)|^2. \quad (2.50)$$

Dans le cas d'un oscillateur faiblement amorti, il est possible de fixer la bande passante d'analyse et le temps de mesure de manière à avoir  $\Gamma \ll 2\pi/T_m \lesssim 2\pi\Delta f \ll \Omega_M$ . On obtient la puissance de modulation  $P_x(\Omega_M, t)$  lorsque l'on applique brusquement la force extérieure à partir de l'équation (2.41) :

$$P_x(\Omega_M, t) = \frac{1}{4} \left( \frac{F_0}{M\Omega_M\Gamma} \right)^2 \left( 1 - e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \right)^2. \quad (2.51)$$

De même l'équation (2.45) permet de calculer la puissance de modulation lorsque l'on coupe brusquement la force :

$$P_x(\Omega_M, t) = \frac{1}{4} \left( \frac{F_0}{M\Omega_M\Gamma} \right)^2 e^{-\Gamma t}. \quad (2.52)$$

Les équations (2.51) et (2.52) montrent que les phénomènes transitoires exprimés en terme de puissance de modulation à la fréquence de résonance  $\Omega_M$  évoluent avec un temps caractéristique égal à  $1/\Gamma$ .

En régime refroidi par la boucle de contre-réaction, on calcule de façon similaire l'effet de l'application ou de la suppression brusque d'une force extérieure : l'évolution de la position du miroir est obtenue en remplaçant dans l'équation d'évolution (2.34) le taux d'amortissement  $\Gamma$  par sa valeur  $\Gamma_{fb}$  dans le cas refroidi. On obtient une puissance de modulation qui se déduit des formules (2.51) et (2.52) en remplaçant  $\Gamma$  par  $\Gamma_{fb}$ .

### 2.4.2 Mesure des taux de relaxation

Dans la section précédente nous avons calculé les constantes de temps d'établissement du régime stationnaire lorsqu'une force est appliquée ou supprimée sur le miroir. Ces constantes de temps de relaxation sont directement reliées au taux d'amortissement du miroir et fournissent ainsi un moyen de mesurer ce taux. Cette méthode temporelle se révèle mieux adaptée qu'une analyse spectrale lorsque le facteur de qualité est très élevé et que l'amortissement du miroir est inférieur à la résolution spectrale de l'analyseur de spectre.

Cette section présente la description générale du dispositif expérimental, ainsi que sa réalisation pratique.

#### Principe de la mesure

Le montage expérimental est dérivé de celui utilisé pour la mesure de la susceptibilité, mais la voie commandant la force arrière supplémentaire possède désormais un interrupteur commandé électroniquement (figure 2.11). L'analyseur de spectre est configuré afin de mesurer l'évolution temporelle de la puissance de bruit sur une plage de fréquence  $\Delta f = 1 \text{ kHz}$  autour de la fréquence de résonance  $\Omega_M$  (mode zérosan de l'analyseur de spectre). Ceci correspond à un temps minimal de mesure  $T_m$  de l'ordre de  $1 \text{ ms}$ . Ce choix de la plage de fréquence permet d'observer l'évolution temporelle du pic sans qu'elle ne soit noyée dans le bruit de fond thermique des autres modes acoustiques du miroir mobile.

Une boîte électronique de temporisation permet de synchroniser le déclenchement de l'analyseur de spectre et de l'interrupteur électronique. On peut ainsi répéter l'expérience un grand nombre de fois et moyenner les courbes obtenues sur l'analyseur de spectre : les résultats présentés dans cette section correspondent à un nombre de moyennes compris entre 2 000 et 10 000.

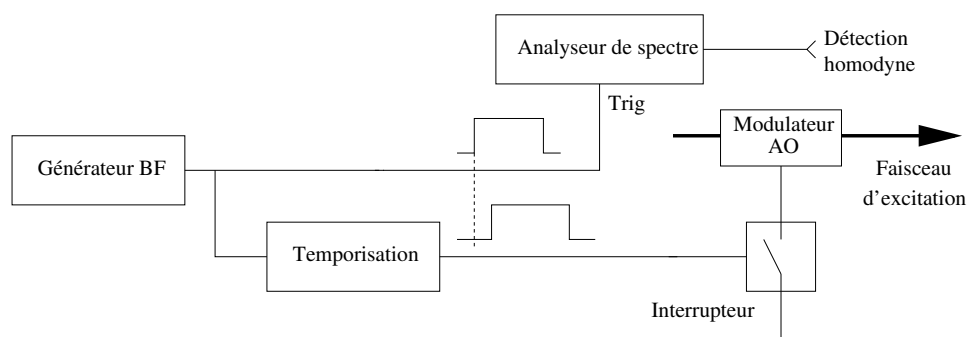


FIG. 2.11 – Schéma général de la partie électronique permettant de réaliser des mesures d'évolution transitoire.

### La boîte de temporisation

Cette boîte gère la chronologie temporelle d'une acquisition en déclenchant l'analyseur de spectre puis en ouvrant ou en fermant l'interrupteur. La figure 2.12 montre le montage électronique que nous avons réalisé. Il est commandé par un générateur basse fréquence délivrant des signaux carrés qui vont imposer la durée des cycles, un cycle commençant sur le front montant du signal BF.

Le miroir ayant un taux d'amortissement de  $57\text{ Hz}$ , nous avons fixé la durée du cycle à  $160\text{ ms}$ . Cette valeur laisse  $80\text{ ms}$  au miroir pour passer du régime libre au régime forcé et inversement, ce qui correspond à environ 20 fois le temps de transition théorique. Les régimes stationnaires ont ainsi largement le temps de s'établir.

La première sortie (TRIG) correspond en fait directement au signal du générateur BF et elle permet de déclencher l'analyseur de spectre sur un flanc montant. La deuxième sortie délivre un créneau dont le retard et la durée sont réglables. Ce créneau ouvre ou ferme l'interrupteur après un certain délai. Ceci permet de réaliser un pré-trig sur l'analyseur de spectre, en le déclenchant avant que l'état de l'interrupteur ne change. En pratique, le temps de balayage de l'analyseur est égal à  $30\text{ ms}$  et la durée du pré-trig est de l'ordre de  $4\text{ ms}$ . Enfin la durée du créneau sur la sortie de l'interrupteur est réglée à  $80\text{ ms}$ .

Comme les temps qui nous intéressent sont de l'ordre de quelques millisecondes, il est tout à fait raisonnable d'utiliser des circuits monostables classiques 74 221 pour réaliser le montage. Le monostable 1 se déclenche sur le flanc montant du signal BF et on utilise sa sortie inverseuse  $\overline{Q}$  pour créer un autre flanc montant décalé dans le temps de  $R1 \times C1$ . Ce flanc montant déclenche le monostable 2 et réalise un créneau de durée  $R2 \times C2$  retardé par rapport au premier. Ces deux temps sont ajustables grâce à l'ajout de résistances variables en série avec  $R1$  et  $R2$ . Un interrupteur permet de choisir la polarité du signal de sortie. On peut ainsi choisir d'observer sur l'analyseur de spectre les transitions marche/arrêt ou arrêt/marche de l'interrupteur.

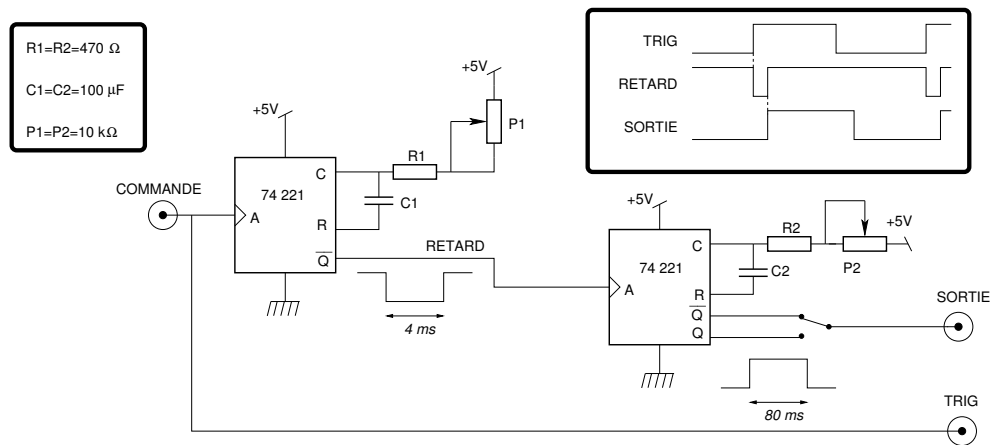


FIG. 2.12 – Schéma électronique de la boîte de temporisation.

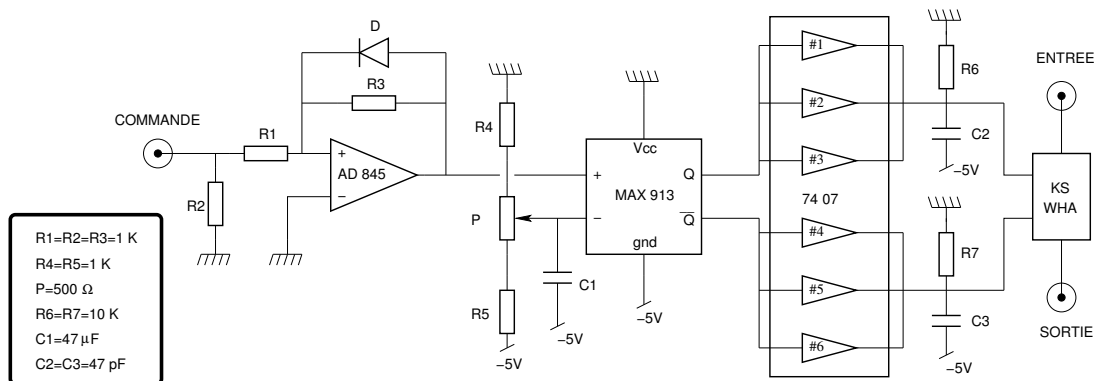


FIG. 2.13 – Schéma de l'interrupteur électronique

### L'interrupteur électronique

L'interrupteur doit couper et rétablir un signal aux alentours de  $2\text{MHz}$ , avec des temps de commutation inférieurs à la milliseconde. Pour sa réalisation, on a eu recours à un circuit intégré ultrarapide Minicircuit KS WHA qui est utilisable aux fréquences qui nous intéressent. Le principal inconvénient de ce circuit est qu'il doit être alimenté entre 0 et  $-5\text{V}$  et commandé en négatif alors que les signaux provenant de la boîte de temporisation sont des signaux TTL classiques, positifs. Un amplificateur opérationnel AD 845 monté en inverseur permet de résoudre ce problème en inversant le signal d'entrée (voir figure 2.13). La diode mise en parallèle avec R3 empêche la tension de sortie de l'amplificateur de devenir positive, ce qui protège le reste du montage.

Afin d'éviter des phénomènes de rebond sur le signal de sortie, il est nécessaire d'attaquer le KS WHA avec des créneaux dont les flancs sont les plus raides possibles. Le montage comprend donc une mise en forme du signal de contrôle de ce circuit, réalisée par le comparateur ultrarapide MAX 913. Ses sorties Q et  $\overline{Q}$  passent respectivement à l'état haut (0V) et à l'état bas ( $-5\text{V}$ ), lorsque la tension sur l'entrée + est supérieure

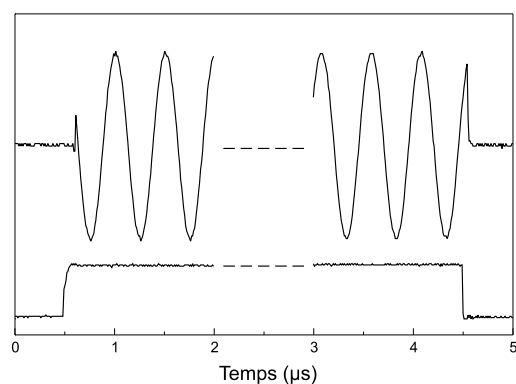


FIG. 2.14 – Signal à la sortie de l'interrupteur (courbe du haut) lorsque l'on applique une sinusoïde à l'entrée et un signal rectangulaire sur l'entrée de commande (courbe du bas).

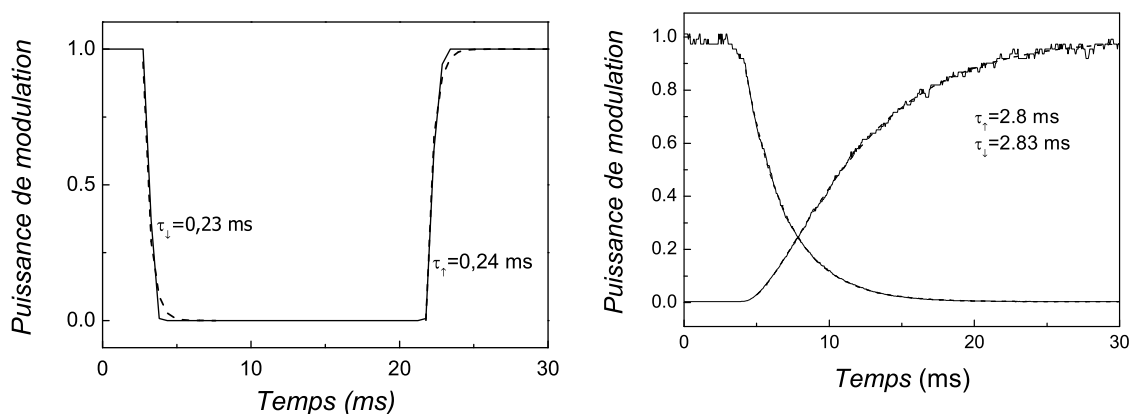


FIG. 2.15 – Courbe de gauche : constantes de temps de l'analyseur de spectre. Courbes de droite : courbes obtenues lorsque l'on applique (courbe montante) ou que l'on coupe (courbe descendante) la force extérieure.

à celle sur l'entrée -. Cette dernière sert de référence et est ajustée à  $-2,5V$ . Ce circuit transforme donc en créneau le signal d'entrée quelle que soit sa forme. Les deux sorties du comparateur passent ensuite dans trois circuits suiveurs placés en parallèle. Ils servent d'amplificateurs de courant, et achèvent la mise en forme du signal. La figure 2.14 montre les performances de l'interrupteur. La courbe du bas représente le signal TTL appliqué sur l'entrée de commande. Celle du haut montre le signal en sortie de l'interrupteur lorsque l'on applique une tension sinusoïdale de  $2MHz$  à l'entrée. On constate qu'il n'y a aucun rebond ni retard significatifs dans le signal de sortie.

### Résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux présentés dans cette section ont été obtenus sur le mode fondamental Gaussien du miroir plan-convexe. Nous avons tout d'abord testé notre dispositif en envoyant sur l'interrupteur une modulation à  $2MHz$  fournie par un

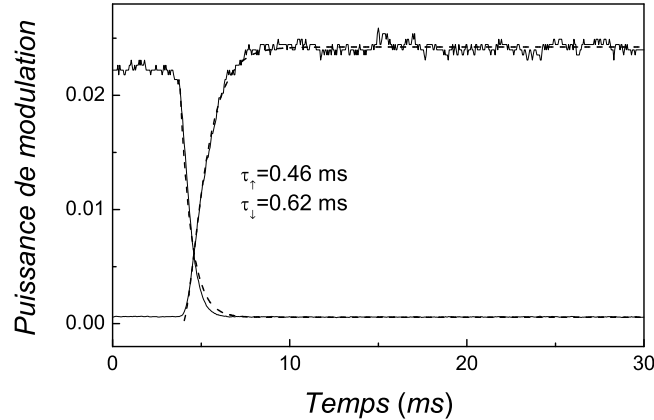


FIG. 2.16 – Régime transitoire pour une force extérieure, en présence du refroidissement.

générateur HF et en appliquant directement la sortie de l'interrupteur sur l'analyseur de spectre (courbe de gauche de la figure 2.15). Les constantes de temps de croissance et de décroissance sont de l'ordre de  $0,2\text{ ms}$ , en accord avec la largeur du filtre passe-bande de l'analyseur.

Nous avons ensuite déterminé les constantes de temps mécaniques en étudiant le régime transitoire lors de l'application et de la coupure de la force extérieure. L'interrupteur est inséré entre le générateur HF et le pilote du modulateur acousto-optique qui contrôle le faisceau d'excitation. On observe sur l'analyseur de spectre la puissance de modulation du signal délivré par la détection homodyne, qui est reliée au mouvement du miroir. La figure 2.15 présente les résultats obtenus. Les ajustements exponentiels déduits des formules (2.51) et (2.52) donnent des constantes de temps égales à  $2,8\text{ ms}$ , en excellent accord avec l'amortissement mécanique du miroir ( $\Gamma/2\pi = 57\text{ Hz}$  donne une constante de temps  $1/\Gamma$  de  $2,8\text{ ms}$ ).

Nous avons aussi étudié le régime transitoire pour une force extérieure, en présence du refroidissement. Pour cela nous avons utilisé le montage expérimental de la mesure de la susceptibilité d'un miroir refroidi (figure 2.8), en conservant les mêmes paramètres expérimentaux (faisceau de refroidissement de  $500\text{ mW}$  et faisceau d'excitation de  $50\text{ mW}$ ). L'interrupteur reste positionné entre le générateur HF et le modulateur acousto-optique du faisceau d'excitation. Le gain de la boucle de contre-réaction est déterminé comme dans la section 2.3 en mesurant l'intensité de la force de contre-réaction grâce à la photodiode placée après le miroir mobile (Ph1 sur la figure 2.8).

La figure 2.16 montre le résultat obtenu pour un gain  $g = 5,2$ . On constate la diminution prévue des constantes de temps due à l'accroissement de l'amortissement ( $\Gamma_{fb} = (1 + g)\Gamma$ ) par le mécanisme de friction froide. Si l'on tient compte de la convolution par les temps de montée de l'analyseur de spectre, les constantes de temps obtenues, de l'ordre de  $0,5\text{ ms}$ , sont bien réduites par rapport à la situation sans refroidissement par un facteur  $1 + g \simeq 6$ .

Ces observations confirment donc les résultats obtenus par l'analyse spectrale : le processus de friction froide correspond bien à une augmentation de l'amortissement du

miroir ; on notera aussi le très bon accord entre les mesures et les expressions théoriques du régime transitoire, les courbes expérimentales et leurs ajustements étant à peine discernables.

### 2.4.3 Refroidissement pulsé

Nous avons également étudié le mécanisme de refroidissement d'un point de vue temporel et non plus spectral comme dans la partie précédente. Nous nous sommes en particulier intéressés aux constantes de temps qui régissent l'apparition du régime refroidi lorsque l'on branche la force de friction froide, ainsi qu'au temps de retour à l'équilibre thermodynamique lorsque l'asservissement est coupé alors que le miroir est dans un état refroidi.

#### Mesure d'une puissance de bruit par un analyseur de spectre

Nous avons observé l'évolution temporelle de la puissance de bruit sur une plage de fréquence  $\Delta f$  autour de la fréquence de résonance  $\Omega_M$ . Pour avoir une résolution temporelle satisfaisante, le temps de mesure  $T_m$  de l'analyseur de spectre et la résolution spectrale  $\Delta f$  doivent satisfaire la même condition que précédemment, c'est-à-dire  $\Gamma \ll 2\pi/T_m \lesssim 2\pi\Delta f \ll \Omega_M$ . La mesure est ensuite moyennée sur un grand nombre de cycles, ce qui revient à moyennner la puissance de bruit  $P(\Omega_M, t)$  (2.46) sur toutes les réalisations possibles de la force de Langevin,

$$\bar{P}_x(\Omega_M, t) = \int_{\Omega_M - \pi\Delta f}^{\Omega_M + \pi\Delta f} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{T_m} \int_t^{t+T_m} d\tau \int_t^{t+T_m} d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \overline{x(\tau)x(\tau')}. \quad (2.53)$$

Les intégrales temporelles se résument aux composantes spectrales convoluées par des sinus cardinaux et la puissance se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{P}_x(\Omega_M, t) = & T_m \int_{\Omega_M - \pi\Delta f}^{\Omega_M + \pi\Delta f} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega'}{2\pi} \\ & e^{-i(\Omega+\Omega')(t+\frac{T_m}{2})} \text{sinc}\left(\left(\omega - \Omega\right)\frac{T_m}{2}\right) \text{sinc}\left(\left(\omega + \Omega'\right)\frac{T_m}{2}\right) \overline{x[\Omega]x[\Omega']}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Si les composantes spectrales  $x[\Omega]$  ne sont non nulles que pour des fréquences  $\Omega$  proches de  $\pm\Omega_M$  sur une largeur petite devant  $1/T_m$ ,  $\Omega$  et  $\Omega'$  peuvent être approchés par  $\Omega_M$  dans les fonctions sinus cardinal. Après intégration par rapport à  $\Omega$  et  $\Omega'$ , la puissance  $\bar{P}_x$  s'écrit :

$$\bar{P}_x(\Omega_M, t) = T_m \int_{\Omega_M - \pi\Delta f}^{\Omega_M + \pi\Delta f} \frac{d\omega}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\left(\omega - \Omega_M\right)\frac{T_m}{2}\right) \overline{x\left(t + \frac{T_m}{2}\right)^2}. \quad (2.55)$$

La bande passante  $\Delta f$  de l'analyseur de spectre étant plus grande que  $1/T_m$  et la variance du mouvement variant peu sur des temps de l'ordre de  $T_m$ , on trouve finalement que la quantité mesurée par l'analyseur de spectre est égale à la variance du mouvement à l'instant  $t$  :

$$\bar{P}_x(\Omega_M, t) = \Delta x^2(t). \quad (2.56)$$



Le choix d'une résolution spectrale  $\Delta f$  grande devant l'étendue spectrale des composantes du mouvement, tout en ayant un temps de mesure  $T_m$  petit devant le temps caractéristique d'évolution  $1/\Gamma$ , permet donc de mesurer la variance *instantanée* du mouvement.

Notons que cette relation n'est plus vérifiée si les composantes spectrales sont non nulles en dehors de la plage de fréquences  $\Delta f$ . Dans le cas particulier d'un régime stationnaire, on peut évaluer la puissance  $\overline{P}_x$  mesurée par l'analyseur de spectre en utilisant le fait que

$$\overline{x[\Omega]x[\Omega']} = 2\pi\delta(\Omega + \Omega')S_x[\Omega], \quad (2.57)$$

où  $S_x$  désigne le spectre de  $x$ . L'équation (2.54) devient :

$$\overline{P}_x(\Omega_M, t) = T_m \int_{\Omega_M - \pi\Delta f}^{\Omega_M + \pi\Delta f} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \text{sinc}^2\left((\omega - \Omega)\frac{T_m}{2}\right) S_x[\Omega]. \quad (2.58)$$

On obtient le spectre de bruit de  $x$  convolué par un sinus cardinal carré. Dans le cas d'un spectre de largeur grande devant  $2\pi/T_m$  l'élargissement dû au produit de convolution est négligeable et on obtient :

$$\overline{P}_x(\Omega_M, t) = \int_{\Omega_M - \pi\Delta f}^{\Omega_M + \pi\Delta f} \frac{d\Omega}{2\pi} S_x[\Omega]. \quad (2.59)$$

$\overline{P}_x(\Omega_M, t)$  est simplement égal à la puissance spectrale à l'intérieur du filtre de l'analyseur de spectre. Cette équation est en particulier valable pour un bruit blanc  $S_b$ , auquel cas on obtient :

$$\overline{P}_x(\Omega_M, t) = S_b \Delta f. \quad (2.60)$$

### Etude théorique du refroidissement pulsé

Dans ce paragraphe, nous évaluons par un calcul théorique les temps de relaxation lorsque l'on branche ou que l'on coupe brusquement la force de friction froide. Nous considérons d'abord le cas où le refroidissement est appliqué à l'instant  $t = 0$  alors que le miroir se trouve à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ . Pour des temps positifs, l'équation d'évolution de  $x(t)$  s'écrit :

$$M[\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \Omega_M^2 x] = F_T - gM\Gamma\dot{x}, \quad (2.61)$$

où  $F_T$  est la force de Langevin due au coulage avec le bain thermique et où le terme  $-gM\Gamma\dot{x}$  correspond à la force de friction froide ( $g$  désigne le gain de la boucle de contre réaction ; voir équation (2.13)). Comme dans la section précédente, on utilise la transformation de Laplace pour résoudre l'équation d'évolution et l'on retrouve une expression de  $x(t)$  similaire à l'équation (2.39),

$$x(t) = \int_0^t \chi_{fb}(t - \tau) F_T(\tau) d\tau + M \{ \Gamma x(0) + \dot{x}(0) \} \chi_{fb}(t) + Mx(0) \dot{\chi}_{fb}(t). \quad (2.62)$$

où  $\chi_{fb}(t)$  est la susceptibilité mécanique du miroir refroidi qui correspond à celle d'un oscillateur harmonique de masse  $M$ , de fréquence de résonance  $\Omega_M$  mais dont le taux d'amortissement vaut  $\Gamma_{fb} = (1 + g)\Gamma$  :

$$\chi_{fb}(t) = \frac{\sin(\Omega_M t)}{M\Omega_M} \exp\left[-\frac{\Gamma}{2}(1+g)t\right]. \quad (2.63)$$

Comme le montre l'équation (2.62),  $x(t)$  est de nouveau la somme de la réponse  $x_F(t)$  à la force de Langevin et d'un terme  $x_0(t)$  dépendant uniquement des conditions initiales :

$$x(t) = x_F(t) + x_0(t), \quad (2.64)$$

avec

$$x_F(t) = \int_0^t \chi_{fb}(t-\tau) F_T(\tau) d\tau, \quad (2.65)$$

$$x_0(t) = M \{ \Gamma x(0) + \dot{x}(0) \} \chi_{fb}(t) + Mx(0) \dot{\chi}_{fb}(t). \quad (2.66)$$

A la différence du calcul précédent, la force  $F_T$  et les valeurs  $x(0)$  et  $\dot{x}(0)$  sont des variables aléatoires. On va donc s'intéresser aux propriétés statistiques de la position  $x(t)$  du miroir. La force de Langevin correspond à un bruit blanc de valeur moyenne nulle ( $\overline{F_T}(t) = 0$ ) dont le spectre est donné par le théorème fluctuations-dissipation. La fonction d'auto-corrélation de  $F_T(t)$  est égale à :

$$\overline{F_T(t)F_T(t')} = 2M\Gamma k_B T \delta(t-t'). \quad (2.67)$$

Les processus de dissipation correspondent à des phénomènes sans mémoire, ainsi  $F_T(\tau > 0)$  et les conditions initiales sont indépendantes et les variances de  $x_F(t)$  et de  $x_0(t)$  s'ajoutent. En utilisant l'expression de  $x_F(t)$ , on montre alors que ce terme a une valeur moyenne nulle et une variance  $\Delta x_F^2(t)$  égale à :

$$\Delta x_F^2(t) = 2M\Gamma k_B T \int_0^t [\chi_{fb}(\tau)]^2 d\tau. \quad (2.68)$$

On suppose que le facteur de qualité mécanique est très grand devant 1 ( $\Omega_M \gg \Gamma$ ), condition qui est réalisée dans notre expérience. Dans ce cas la susceptibilité oscille un grand nombre de fois avant que son amplitude ne décroisse significativement. On peut alors approcher le terme  $|\sin(\Omega_M t)|^2$  dans l'expression de  $[\chi_{fb}(\tau)]^2$ , par sa valeur moyenne 1/2. La variance  $\Delta x_F^2(t)$  est alors égale à :

$$\Delta x_F^2(t) = \frac{\Delta x_T^2}{1+g} (1 - e^{-\Gamma(1+g)t}), \quad (2.69)$$

où  $\Delta x_T^2 = k_B T / M\Omega_M^2$  est la variance de la position du miroir lorsque celui-ci est en équilibre thermodynamique à la température  $T$  [équation (2.4)].

Calculons maintenant la variance du terme  $x_0(t)$ . Comme à l'instant  $t = 0$  le système est à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ , on a :

$$\Delta x^2(0) = \Delta x_T^2, \quad (2.70)$$

$$\Delta \dot{x}^2(0) = \Omega_M^2 \Delta x_T^2, \quad (2.71)$$

$$\overline{x(0)\dot{x}(0)} = 0. \quad (2.72)$$

En utilisant ces résultats et l'expression (2.66), on trouve que la variance de  $x_0(t)$  est égale à :

$$\Delta x_0^2(t) = M^2 (\dot{\chi}_{fb}(t)^2 + \Omega_M^2 \chi_{fb}(t)^2) \Delta x_T^2(t), \quad (2.73)$$

où, comme dans la section 2.4.1, on a négligé le terme  $\Gamma x(0)$  devant  $\dot{x}(0)$  dans l'expression (2.66) donnant  $x_0(t)$ . En utilisant l'expression de  $\chi_{fb}(t)$  donnée par l'équation (2.63) on obtient finalement :

$$\Delta x_0^2(t) = \Delta x_T^2 e^{-\Gamma(1+g)t}. \quad (2.74)$$

Ce terme décroît exponentiellement, ce qui indique que le miroir perd la mémoire des conditions initiales en un temps caractéristique de  $1/\Gamma(1+g)$ .

La variance de  $x(t)$  est obtenue en ajoutant  $\Delta x_F^2(t)$  [équation (2.69)] et  $\Delta x_0^2(t)$  [équation (2.74)] :

$$\Delta x^2(t) = \frac{\Delta x_T^2}{1+g} (1 + g e^{-\Gamma(1+g)t}). \quad (2.75)$$

Cette équation montre que la variance évolue avec un taux de relaxation égal au taux d'amortissement  $\Gamma_{fb} = \Gamma(1+g)$  du miroir en présence du processus de refroidissement. La variance varie entre  $\Delta x_T^2$  à l'instant  $t = 0$  et  $\Delta x_T^2/(1+g)$ , valeur atteinte lorsque  $t$  est grand devant  $1/\Gamma_{fb}$ . Cette situation peut être interprétée comme un retour à l'équilibre thermodynamique à la température  $T/(1+g)$ , le système partant à l'instant  $t = 0$  d'une situation hors d'équilibre dont la variance correspond à celle d'un équilibre thermodynamique à la température  $T$ .

Dans le cas opposé où l'on part du système refroidi et où l'on supprime brusquement le refroidissement à l'instant  $t = 0$ , le miroir est libre pour des temps positifs, et les conditions initiales correspondent à une situation d'équilibre thermodynamique à la température  $T/(1+g)$ . Les équations (2.65) et (2.66) sont encore valables si l'on remplace  $\chi_{fb}$  par la susceptibilité  $\chi$  d'un miroir libre donnée par l'équation (2.38). Les équations (2.70) et (2.71) sont également modifiées et deviennent :

$$\Delta x^2(0) = \Delta x_T^2/(1+g), \quad (2.76)$$

$$\Delta \dot{x}^2(0) = \Omega_M^2 \Delta x_T^2/(1+g). \quad (2.77)$$

Le calcul des variances des deux termes  $x_0(t)$  et  $x_F(t)$  donne alors

$$\Delta x_0^2(t) = \frac{\Delta x_T^2}{1+g} e^{-\Gamma t}, \quad (2.78)$$

$$\Delta x_F^2(t) = \Delta x_T^2 (1 - e^{-\Gamma t}). \quad (2.79)$$

On obtient, en sommant ces deux équations, la variance du mouvement en fonction du temps :

$$\Delta x^2(t) = \Delta x_T^2 \left( 1 - \frac{g}{1+g} e^{-\Gamma t} \right). \quad (2.80)$$

La variance évolue avec le taux d'amortissement  $\Gamma$  du miroir sans asservissement. Elle part de la valeur  $\Delta x_T^2/(1+g)$  à  $t = 0$  correspondant à une situation refroidie et effectue un retour à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ . La variance tend alors vers la valeur  $\Delta x_T^2$  pour des temps grands devant  $1/\Gamma$ .

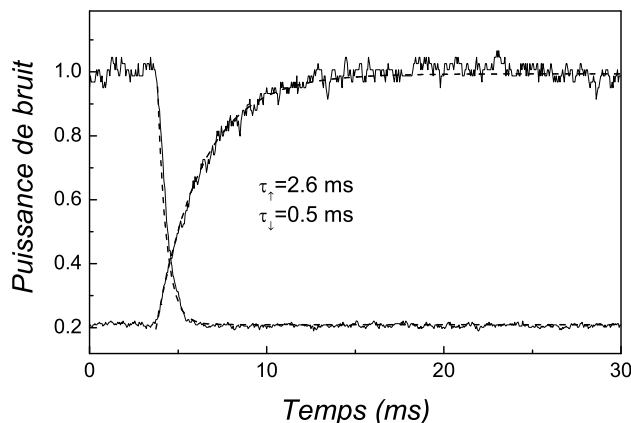


FIG. 2.17 – Régimes transitoires lorsque l’on coupe (courbe montante) ou que l’on applique (courbe descendante) le refroidissement pour un gain égal à 5, 2.

Les formules (2.75) et (2.80) montrent qu’il existe une dissymétrie entre le temps de refroidissement valant  $1/\Gamma_{fb}$  et celui de retour à l’équilibre à la température  $T$ , qui vaut  $1/\Gamma$ . Le régime refroidi s’établit donc plus rapidement que le système ne relaxe vers l’équilibre thermodynamique, et d’autant plus rapidement que le gain de la friction froide est grand.

### Résultats expérimentaux

Le montage expérimental est identique au montage utilisé pour le refroidissement du miroir, mais l’interrupteur rapide est inséré désormais dans la boucle de contre-réaction. Pour obtenir les transitions les plus franches possibles, l’interrupteur est placé à la sortie de la boucle après le filtre passe-bande, le déphaseur et l’amplificateur (voir figure 2.6). On s’affranchit ainsi des constantes de temps que tous ces éléments pourraient engendrer. Comme dans la mesure de la section 2.4.2, l’analyseur de spectre est en mode zérospan avec une bande passante de  $1 \text{ kHz}$  et il est synchronisé, grâce à la boîte de temporisation, avec l’ouverture ou la fermeture de l’interrupteur.

La figure 2.17 montre les régimes transitoires observés lorsque l’on coupe ou que l’on applique le refroidissement pour un gain égal à 5, 2. On mesure ici le bruit thermique (le faisceau d’excitation est coupé). Les ajustements sont obtenus à l’aide des formules (2.75) et (2.80). On constate que lorsque le refroidissement est appliqué, le bruit thermique descend rapidement, avec une constante de temps de  $0,5 \text{ ms}$ , en bon accord avec la valeur de l’amortissement  $\Gamma_{fb}$ . Par contre, lorsque le refroidissement est arrêté, le miroir revient à l’équilibre thermodynamique avec une constante de temps plus longue ( $2,6 \text{ ms}$ ), associée à l’amortissement mécanique du miroir  $\Gamma$ .

On notera ici encore le très bon accord entre les mesures expérimentales et les expressions théoriques. Par ailleurs le faible bruit sur les courbes expérimentales est lié à la possibilité de notre montage de réaliser une moyenne sur un très grand nombre de cycles. Les courbes obtenues correspondent en effet à une moyenne statistique sur plu-

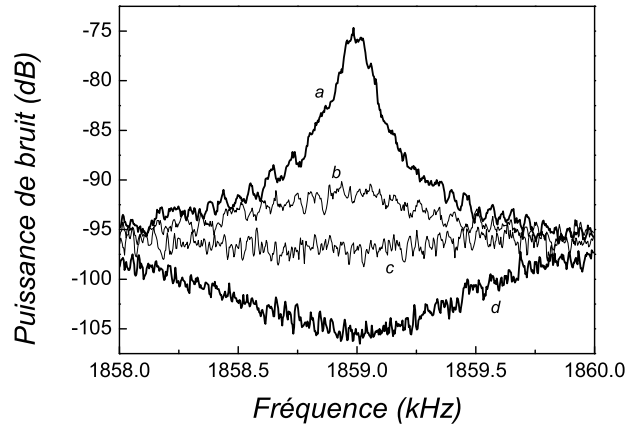


FIG. 2.18 – Bruit thermique pour un gain fort du refroidissement, en échelle semi-logarithmique. La courbe *a* est le bruit thermique dans le cas du miroir libre. Les courbes *b* à *d* sont obtenues pour un gain du refroidissement croissant.

sieurs milliers de réalisations. Si on s'intéresse à un cycle individuel, le bruit thermique induit une marche au hasard, avec une condition initiale  $x(0), \dot{x}(0)$  présentant de très large fluctuations, et une évolution vers un état d'équilibre thermodynamique ayant lui-même une dispersion importante. C'est seulement en moyennant sur un grand nombre de réalisations que l'on peut reconstruire une évolution statistique exponentielle, similaire à celles présentées sur les figures 2.15 et 2.16. Cette marche au hasard est décrite plus en détail dans le chapitre suivant, où l'on a observé l'évolution temporelle du miroir dans l'espace des phases.

#### 2.4.4 Refroidissement pulsé en gain fort

Nous finissons ce chapitre par l'étude du refroidissement pulsé pour un gain fort de la boucle de contre-réaction. Nous avons jusqu'à présent négligé le fond thermique induit par les autres modes acoustiques du miroir. Dans le cas d'un gain fort du refroidissement, son rôle devient important. La figure 2.18 montre le spectre de bruit thermique obtenu grâce au montage de refroidissement (voir partie 2.2) et tracé en échelle semi-logarithmique : la courbe *a* est le bruit thermique du miroir libre ( $g = 0$ ), les courbes *b* à *d* sont obtenues pour un gain du refroidissement croissant, la courbe *d* correspondant à un gain  $g = 25$  [49]. Pour les courbes *c* et *d*, le bruit thermique présente un creux qui correspondrait à une température effective négative pour le mode fondamental. Il n'est donc plus possible de définir une température effective pour le miroir.

On peut expliquer cet effet en introduisant dans les calculs de bruit thermique le fond thermique produit par les autres modes, sous la forme d'une composante  $x_b$  s'ajoutant au signal de position  $x_M$  du mode fondamental,

$$x(t) = x_M(t) + x_b(t). \quad (2.81)$$

L'efficacité du processus de refroidissement décroît lorsque l'on s'éloigne de la résonance ;

on peut donc négliger son action sur le fond thermique. Le déplacement du miroir refroidi est toujours donné par l'équation (2.81) où  $x_M$  vérifie :

$$M (\ddot{x}_M + \Gamma \dot{x}_M + \Omega_M^2 x_M) = F_T - gM\Gamma (\dot{x}_M + \dot{x}_b), \quad (2.82)$$

où le dernier terme représente la force de refroidissement, proportionnelle à la vitesse totale  $\dot{x}$ . Le mouvement du mode fondamental est décrit par la même équation que dans la section précédente [équation (2.61)], à condition de remplacer  $F_T$  par  $F_T - gM\Gamma \dot{x}_b$ . Ce dernier terme crée des corrélations entre le mouvement du mode fondamental et le fond  $x_b$ . En régime refroidi stationnaire,  $x_M$  est donné par :

$$x_M[\Omega] = \chi_{fb}[\Omega] (F_T[\Omega] + iM\Gamma\Omega g x_b[\Omega]). \quad (2.83)$$

Le mouvement total du miroir s'écrit :

$$x[\Omega] = \chi_{fb}[\Omega] F_T[\Omega] + \frac{\chi_{fb}[\Omega]}{\chi[\Omega]} x_b[\Omega]. \quad (2.84)$$

Au voisinage de la résonance, le spectre  $S_b$  de bruit de position  $x_b$  est indépendant de la fréquence. Le spectre de déplacement peut alors se mettre sous la forme d'une Lorentzienne à laquelle s'ajoute un fond thermique inchangé :

$$S_x^{fb}[\Omega] = (1 - g(g+2)\varepsilon_b) S_x^{fb(0)}[\Omega] + S_b, \quad (2.85)$$

où  $S_x^{fb(0)}$  est le spectre que l'on obtiendrait en l'absence du fond [équation (2.16)] et où  $\varepsilon_b$  est le rapport  $S_b/S_x[\Omega_M]$  entre le bruit dû au fond et le bruit thermique à résonance. La température effective du mode fondamental, définie à partir de l'aire de la Lorentzienne, devient négative dès que  $g(g+2)\varepsilon_b$  devient supérieur à 1. Ceci est lié au fait que le mouvement du mode fondamental vient compenser en partie le mouvement des autres modes. Les différents modes acoustiques ne sont donc plus indépendants et le mouvement du miroir ne correspond plus à un équilibre thermodynamique.

Dans notre expérience, nous avons mesuré un coefficient  $\varepsilon_b$  égal à 1/150. Ainsi pour des gains faibles ( $< 5$ ) la correction au spectre est négligeable. En revanche pour des gains forts, il est possible d'annuler la contribution de la Lorentzienne, ce qui correspond à la courbe *c* de la figure 2.18, et même de la rendre négative (courbe *d*).

On peut estimer l'effet d'un fort gain de refroidissement sur les régimes transitoires correspondant à l'application ou à la suppression du refroidissement. Les équations d'évolution étant similaires avec ou sans fond [équation (2.61) et (2.82)], les régimes transitoires sont toujours décrits par des évolutions exponentielles avec une constante de temps  $1/\Gamma$  ou  $1/\Gamma_{fb}$  selon le régime étudié. Lorsque l'on applique brusquement le refroidissement, le système part de l'équilibre thermodynamique caractérisé par une puissance de bruit  $\overline{P}_x^T = \overline{P}_x(\Omega_M, t = 0)$  donnée, d'après les équations (2.56) et (2.60), par

$$\overline{P}_x^T = \Delta x_T^2 + S_b \Delta f. \quad (2.86)$$

La puissance décroît exponentiellement avec une constante de temps  $1/\Gamma_{fb}$ , jusqu'à la valeur  $\overline{P}_x^{fb} = \overline{P}_x(\Omega_M, t \rightarrow +\infty)$  correspondant au régime refroidi, et donnée, d'après

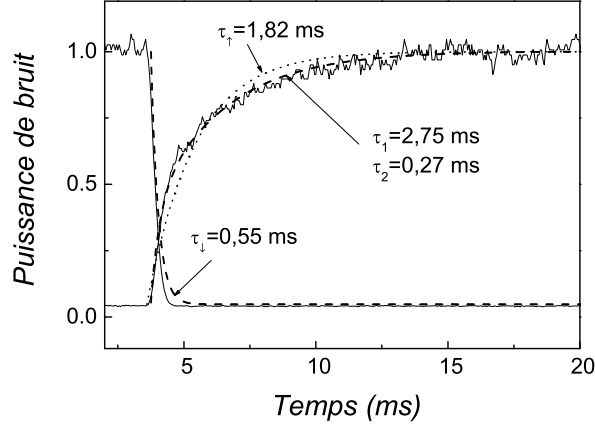


FIG. 2.19 – Evolution temporelle de la puissance de bruit lorsque l'on branche ou que l'on coupe le refroidissement pour un gain fort ( $g = 28$ ) de la boucle de contre-réaction. Pour la courbe de retour à l'équilibre à température ambiante, les courbes en pointillé et en tiret présentent des ajustements par des fonctions exponentielles à une et deux constantes de temps.

les équations (2.84) et (2.60) par :

$$\overline{P}_x^{fb} = \frac{\Delta x_T^2}{1+g} + \left( \Delta f - \frac{g(g+2)}{4(1+g)}\Gamma \right) S_b. \quad (2.87)$$

La situation est différente lorsque l'on coupe l'asservissement car l'état initial est caractérisé par des corrélations entre le mouvement  $x_M$  du mode fondamental et le fond  $x_b$ . Ce fond correspondant pratiquement à un bruit blanc, les corrélations sont immédiatement détruites pour des temps  $t > 0$ . A l'instant  $t = 0$ , le mouvement du miroir est  $x_M(0) + x_b(0)$  [équation (2.81)] et la puissance mesurée est  $\overline{P}_x^{fb}$  [équation (2.87)]. Un instant plus tard, le mouvement devient :

$$x(t \rightarrow 0^+) = x_M(0) + x_b(t), \quad (2.88)$$

où  $x_b(t)$  est décorrélé de  $x_M(0)$ . D'après les équations (2.83) et (2.60) la puissance de bruit devient :

$$\overline{P}_x(\Omega_M, t \rightarrow 0^+) = \frac{\Delta x_T^2}{1+g} + \left( \Delta f + \frac{g^2}{4(1+g)}\Gamma \right) S_b. \quad (2.89)$$

Après cette brusque remontée, la puissance de bruit évolue avec une constante de temps  $1/\Gamma$  jusqu'à la valeur  $\overline{P}_x^T$  correspondant à l'équilibre thermodynamique.

Ainsi, lorsque l'on débranche le refroidissement, on assiste à une remontée brusque de la puissance de bruit mesurée due à la disparition des corrélations entre le mode fondamental et le bruit dû au fond. Le bruit de position étant mesuré par l'analyseur de spectre à travers un filtre, la remontée du bruit observée s'effectue en fait avec la constante de temps associée à la résolution spectrale de l'appareil.

La courbe de la figure 2.19 présente l'évolution du bruit thermique lorsque l'on branche ou que l'on débranche la boucle de contre-réaction pour un gain  $g = 28$ .

Le régime transitoire vers l'équilibre refroidi s'effectue avec une constante de temps de  $0,55 \text{ ms}$ , à la limite de résolution temporelle de l'analyseur de spectre. Le retour à l'équilibre thermodynamique à la température ambiante s'ajuste très mal avec une fonction exponentielle à une seule constante de temps. La courbe en pointillé sur la figure 2.19 montre un ajustement par une telle fonction, qui donne une constante de temps de  $1,82 \text{ ms}$  relativement éloignée de la valeur attendue ( $1/\Gamma = 2,8 \text{ ms}$ ). La courbe en tiret est un ajustement par une fonction à deux constantes de temps. Les valeurs de  $0,28 \text{ ms}$  et  $2,75 \text{ ms}$  obtenues sont en très bon accord avec les constantes de temps de l'analyseur de spectre, et de la valeur théorique  $1/\Gamma$ .





## Chapitre 3

# Mouvement Brownien d'un miroir dans l'espace des phases

Nous étudions dans ce chapitre l'évolution temporelle du miroir non pas en régime transitoire comme dans le chapitre précédent, mais en régime stationnaire [53]. Le bruit thermique d'un mode acoustique est équivalent à une marche au hasard pour un oscillateur harmonique. Nous allons chercher à visualiser ce mouvement dans l'espace des phases, c'est-à-dire dans le plan des quadratures du mouvement.

Après la description du montage expérimental (partie 3.1), nous présentons les résultats obtenus pour le miroir libre (partie 3.2) et le miroir refroidi (partie 3.3), mettant en évidence un effet de confinement du mouvement dans l'espace des phases en régime refroidi. Les deux dernières parties sont consacrées à un effet d'amplification paramétrique par pression de radiation, qui nous a permis d'obtenir une compression du bruit thermique similaire à la compression des fluctuations quantiques de la lumière en optique quantique [29, 30, 31].

L'observation des quadratures de la position  $x(t)$  du miroir correspond en fait à l'étude du mouvement dans un référentiel tournant à une fréquence  $\Omega_{ref}$ . On définit de manière générale les quadratures  $X_1$  et  $X_2$  comme les composantes de la position sur les fonctions sinus et cosinus oscillant à la pulsation  $\Omega_{ref}$ ,

$$x(t) = X_1(t) \cos(\Omega_{ref}t) + X_2(t) \sin(\Omega_{ref}t). \quad (3.1)$$

Dans le cas d'un oscillateur harmonique, prendre la fréquence du référentiel tournant  $\Omega_{ref}$  égale à la fréquence de résonance mécanique  $\Omega_M$  permet de s'affranchir dans le mouvement  $x(t)$  de la partie purement oscillante et de n'étudier que l'évolution lente des quadratures. En effet, comme on l'a démontré dans la partie (2.4), le temps caractéristique d'évolution de l'amplitude d'oscillation d'un mode du miroir est l'inverse de son taux de relaxation  $\Gamma$  qui, pour un oscillateur harmonique faiblement amorti, est très petit devant  $\Omega_M$  ( $\Gamma \ll \Omega_M$ ). Les quadratures sont donc lentement variables par rapport à la période d'oscillation du miroir. Cette propriété permet de négliger les termes évoluant à des fréquences élevées, voisines de  $2\Omega_M$ , dans l'expression des composantes de Fourier des quadratures  $X_1$  et  $X_2$ . Dans ce cas l'expression obtenue coïncide avec la définition usuelle des quadratures, telle qu'elle existe par exemple en

optique pour un mode du champ électromagnétique [38, 39] :

$$X_1[\omega] = x[\Omega_M + \omega] + x[-\Omega_M + \omega], \quad (3.2)$$

$$X_2[\omega] = -i(x[\Omega_M + \omega] - x[-\Omega_M + \omega]). \quad (3.3)$$

La fréquence  $\omega$  correspond à la différence entre la fréquence d'analyse du mouvement du miroir et la fréquence de résonance mécanique de celui-ci. On ne s'intéresse dans la suite qu'à des fréquences  $\omega$  faibles devant  $\Omega_M$ . Les spectres de  $X_1$  et  $X_2$  au voisinage de la fréquence nulle sont ainsi reliés au spectre de  $x$  autour de la fréquence  $\Omega_M$ .

Les quadratures de la position  $x(t)$  sont obtenues expérimentalement par une méthode de démodulation. Pour obtenir par exemple la quadrature  $X_1$ , on multiplie la fonction  $x(t)$  par la fonction  $\cos(\Omega_M t)$ . En utilisant l'équation (3.1) on trouve que le résultat est la somme de  $X_1(t)/2$  et d'autres termes oscillants à des fréquences de l'ordre de  $2\Omega_M$ . Un filtre passe-bas permet d'éliminer ces termes à haute fréquence et d'accéder ainsi à  $X_1$ . L'extraction de  $X_2$  se fait de manière similaire, mais en multipliant  $x(t)$  par  $\sin(\Omega_M t)$ .

En pratique, on utilise un mélangeur pour effectuer la multiplication du signal  $x(t)$  et de la sinusoïde de référence. Le filtrage est réalisé par des filtres électroniques passe-bas. Nous avons conçu ce système électronique de démodulation permettant d'extraire les quadratures du signal  $x(t)$ , dont le principe est décrit dans la partie suivante.

### 3.1 Electronique de détection des quadratures

Pour extraire les quadratures à une fréquence  $\Omega_{ref}$ , il faut démoduler le signal par deux signaux de fréquence  $\Omega_{ref}$  déphasés de  $90^\circ$ , simulant les fonctions sinus et cosinus. La conception des deux voies de démodulation est assez critique si l'on ne veut pas avoir de dissymétrie entre les deux quadratures et pour que celles-ci soient bien orthogonales dans l'espace des phases. Il faut en particulier que les deux signaux utilisés pour la démodulation soient de même amplitude et soient en parfaite quadrature de phase. L'utilisation de déphaseurs et d'amplificateurs sur des signaux sinusoïdaux peut se révéler délicate en pratique car les déphasages et les amplitudes de ces signaux vont dépendre fortement de la fréquence. On risque aussi d'être tributaire de la qualité des composants électroniques dont les caractéristiques peuvent varier en fonction de la température ambiante.

Il est plus simple d'utiliser des signaux carrés, générés par des portes logiques classiques. L'avantage de cette méthode est que ces signaux ont des amplitudes calibrées, indépendantes de la fréquence. Il est aussi relativement aisé de les synchroniser sur une horloge de référence et d'obtenir des signaux en quadrature de phase à toute fréquence.

Le schéma de principe du montage est présenté sur la figure 3.1. Le signal, dont on veut extraire les quadratures, provient de la détection homodyne et correspond au bruit de phase en sortie de la cavité à miroir mobile. On utilise comme référence de fréquence un signal sinusoïdal oscillant à la fréquence  $4 \times \Omega_{ref}$  (signal 4REF\_IN sur le schéma), fourni par un générateur haute fréquence commercial. Le signal sinusoïdal de référence est tout d'abord mis en forme pour avoir un signal carré compatible TTL. Ce

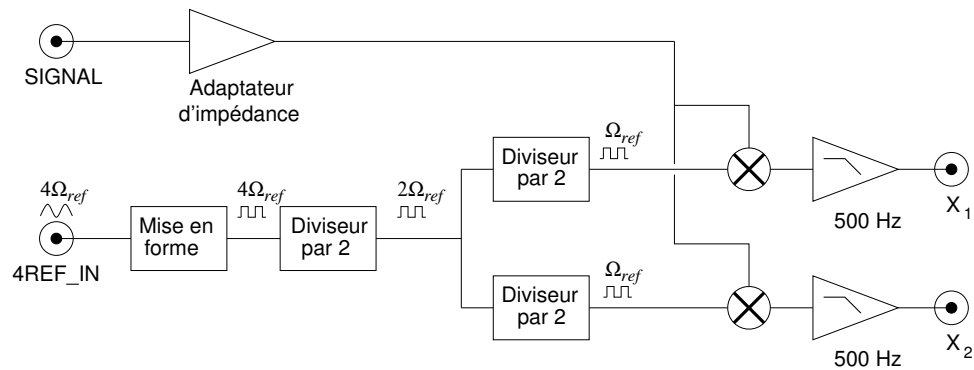


FIG. 3.1 – Principe du montage électronique de détection des quadratures.

signal va piloter une série de bascules mises en cascade qui vont créer les deux signaux de démodulation en quadrature de phase. Ceux-ci sont alors mélangés grâce à deux mixeurs avec le signal provenant de la détection homodyne. Une adaptation d'impédance est nécessaire pour diviser le signal avant d'attaquer les mixeurs. La sortie de chaque mixeur délivre une quadrature et des harmoniques à  $2\Omega_M$  des signaux d'entrée. Chaque mixeur est suivi d'un filtre passe-bas d'ordre deux, de bande passante  $500\text{ Hz}$ , afin d'accéder aux quadratures.

### 3.1.1 Mise en forme de la référence et création des quadratures

Pour s'affranchir de l'amplitude et de la forme du signal 4REF\_IN utilisé comme référence de fréquence, on utilise un comparateur ultrarapide AD 9696 pour mettre en forme le signal (voir figure 3.2). Le filtre RC placé en entrée permet de supprimer une éventuelle composante continue de la référence, et fixe l'impédance d'entrée à  $50\ \Omega$ . Le comparateur bascule de  $0$  à  $5\text{ V}$  lorsque la tension sur son entrée  $+$  est supérieure à celle sur son entrée  $-$ . Il va ainsi détecter les arches positives de la référence et créer un signal carré synchrone. Un soin particulier est apporté à l'alimentation de ce circuit qui est découplée des alimentations des autres circuits intégrés du montage, afin qu'aucun parasite ne fasse basculer le comparateur, lorsque le signal de référence est proche de zéro.

La première bascule est utilisée comme diviseur de fréquence par deux en reliant la sortie inverseuse  $\overline{Q}$  à l'entrée de donnée D. A chaque front montant de l'entrée CLK (horloge), le circuit reproduit sur sa sortie Q la donnée présente sur D. Sa sortie change donc d'état sur chaque front montant du signal 4REF. La principale fonction de ce circuit est d'obtenir un signal carré parfaitement symétrique, c'est à dire ayant des états bas et des états hauts de durées égales. Les deux autres bascules sont elles aussi montées en diviseur par deux, mais sont pilotées par des signaux complémentaires l'un de l'autre ce qui a pour effet de décaler leur déclenchement et de fournir deux signaux en quadrature de phase. Nous avons retenu comme bascule le circuit 74 VHCT 74 qui est le circuit le plus rapide de la famille des 74 74. Ses temps de basculement de l'état bas à l'état haut et de l'état haut à l'état bas sont de l'ordre de  $5\text{ ns}$  avec une dissymétrie inférieure à la nanoseconde. Cela correspond pour un signal à  $2\text{ MHz}$  à une erreur sur

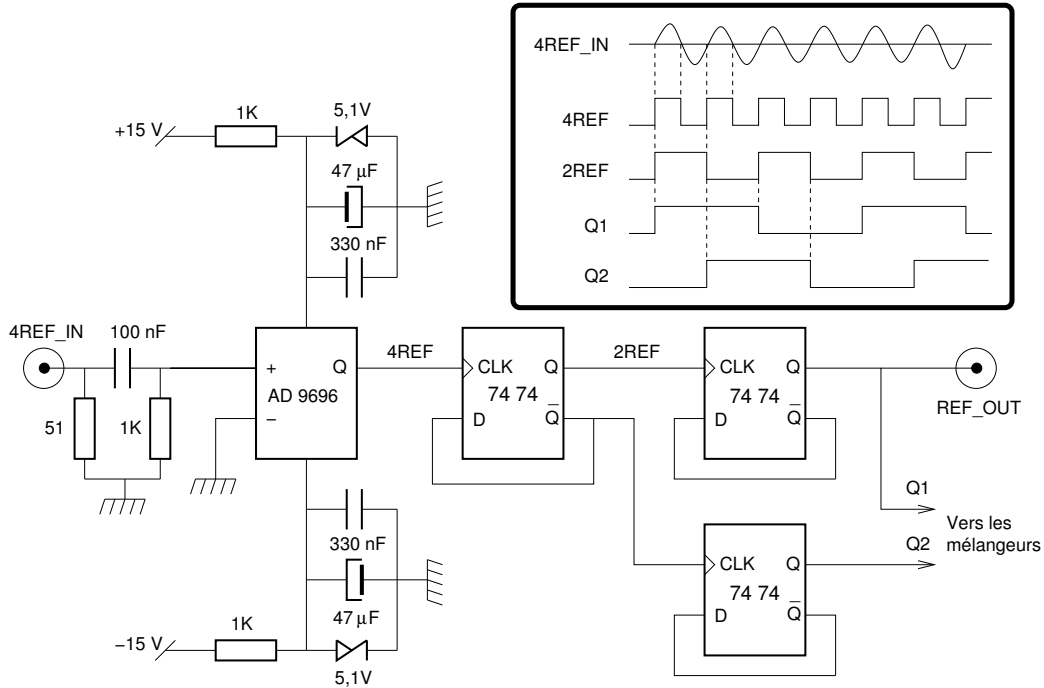


FIG. 3.2 – Montage électronique de mise en forme du signal de référence et création du sinus et du cosinus.

le déphasage inférieure au degré.

Une sortie REF\_OUT retranscrit le signal Q1 et fournit ainsi un signal à la fréquence  $\Omega_{ref}$  en phase avec la détection des quadratures. Ce signal est utilisé dans le chapitre 4.

### 3.1.2 Les mélangeurs et les filtres

On utilise comme multiplicateur de signaux les mélangeurs SBL 3 *Minicircuit*, pouvant travailler sur une plage de fréquence de 25 *kHz* à 200 *MHz* avec des signaux d'amplitude allant jusqu'à 0,1 *V*. Les impédances des entrées et de la sortie sont de 50  $\Omega$ . Pour rester dans un régime linéaire, la référence doit être de l'ordre de 10 *dB* au dessus du signal. Cette référence provient des signaux de sortie Q<sub>1</sub> et Q<sub>2</sub> des bascules, d'amplitude 5 *V*. On utilise alors un simple diviseur de tension pour ramener l'amplitude dans le domaine de fonctionnement des mélangeurs et adapter aussi l'impédance à 50  $\Omega$  (voir figure 3.3).

La sortie de chaque mélangeur est filtrée par un filtre passe-bas du second ordre construit autour d'un amplificateur rapide AD 845. Le gain  $G$  du filtre à fréquence nulle vaut  $\frac{R_3+R_4}{R_4}$  et sa fonction de transfert  $H[\omega]$  est donnée par :

$$H[\omega] = \frac{G}{1 + i \{(R_1 + R_2)C_1 + (1 - G)R_1C_2\} \omega - R_1R_2C_1C_2\omega^2}. \quad (3.4)$$

En pratique les résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont égales, ainsi que les condensateurs  $C_1$  et  $C_2$ .

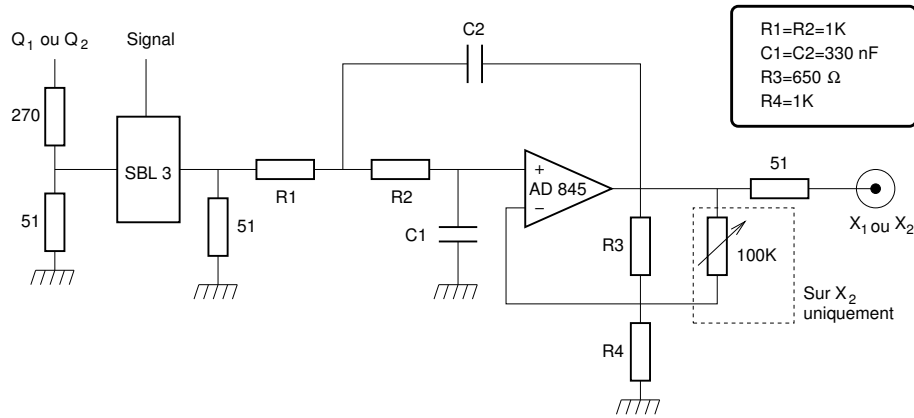


FIG. 3.3 – Mélangeur et filtre basse fréquence d'ordre 2 utilisé pour filtrer le résultat de la démodulation du signal par le signal carré.

La figure 3.4 montre le module de la fonction de transfert pour différents gains  $G$ . Pour les valeurs particulières  $G = 3 \pm \sqrt{2}$  du gain, on élimine les termes en  $\omega^2$  dans l'expression du module carré de  $H[\omega]$  :

$$|H[\omega]|^2 = \frac{G^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}. \quad (3.5)$$

où  $\omega_0$  est la fréquence de coupure égale à  $1/R_1C_1$  fixée ici par la valeur des composants à environ  $500 \text{ Hz}$ . En pratique on utilise un gain légèrement supérieur au gain optimal  $G = 3 - \sqrt{2}$  (le filtre est instable pour la solution  $G = 3 + \sqrt{2}$ ), afin d'augmenter sensiblement la plage de fréquence où la réponse du filtre est constante. Pour la valeur  $G = 1,65$  on obtient une fonction de transfert très plate, avec une variation relative d'amplitude inférieure à  $0,5 \%$  jusqu'à des fréquences de  $0,46 \times \omega_0$  mais qui conserve une pente raide au delà de la fréquence de coupure. La forme des spectres des quadratures, mesurés à travers ces filtres, ne sera ainsi quasiment pas modifiée pour des fréquences inférieures à  $220 \text{ Hz}$ . Un potentiomètre a été rajouté en parallèle avec la résistance  $R_3$  sur la voie de la quadrature  $X_2$ , de manière à équilibrer les gains des deux voies.

On doit adapter le signal de sortie de la détection homodyne aux impédances d'entrée des deux mélangeurs qui sont égales à  $50 \Omega$ . On utilise l'adaptateur d'impédance rapide présenté sur la figure 3.5. Deux ponts diviseurs à la sortie de l'amplificateur permettent d'attaquer les deux mixeurs avec la bonne impédance et en limitant l'effet des parasites d'une voie sur l'autre. le gain de l'amplificateur est fixé à 10 pour compenser la perte au niveau des ponts diviseurs.

### 3.1.3 Tests des quadratures

Nous avons tout d'abord mesuré les fonctions de transfert des deux filtres passe-bas en injectant à l'entrée de la boîte un signal sinusoïdal de  $-10 \text{ dBm}$  et dont la fréquence est décalée par rapport à la fréquence de référence. On acquiert sur l'oscilloscope numérique l'amplitude des deux signaux de quadrature lorsque l'on fait varier le

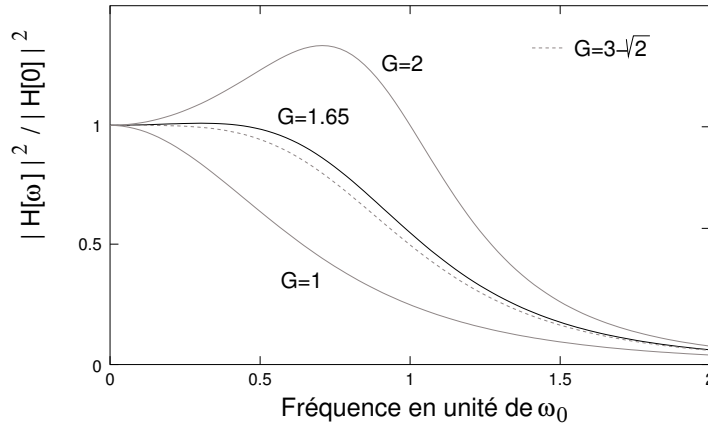


FIG. 3.4 – Fonctions de transfert théoriques du filtre passe bas tracées pour différents gains et normalisées à la valeur à fréquence nulle.

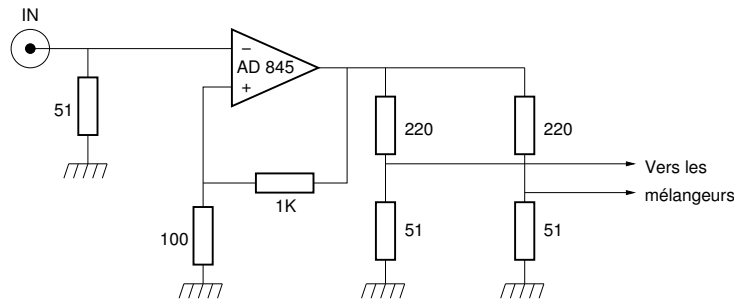


FIG. 3.5 – Adaptateur d'impédance.

décalage en fréquence entre 10 et 1000  $Hz$ . Les amplitudes en sortie des deux voies  $X_1$  et  $X_2$  en fonction du décalage en fréquence sont représentées sur la figure 3.6. On trouve la forme attendue pour un gain  $G = 1,65$  (voir figure 3.4). Un ajustement des courbes par la fonction de transfert théorique [équation (3.4)] donne une bande passante de 460  $Hz$ . La dissymétrie entre les deux voies est inférieure au pourcent.

On s'est aussi assuré du fonctionnement linéaire de la boîte de démodulation ainsi que de l'orthogonalité des quadratures. On envoie en entrée un signal de fréquence  $\Omega_{ref}$  synchrone avec la référence de fréquence  $4\Omega_{ref}$ , mais d'amplitude variable. Ce signal produit des quadratures d'amplitude constantes et proportionnelle à l'amplitude d'entrée. La courbe de gauche de la figure 3.7 donne la tension de sortie de  $X_1$  en fonction de l'amplitude du signal d'entrée. Elle montre une bonne linéarité pour des signaux d'entrée inférieurs à 200  $mV$ .

Pour tester l'orthogonalité des signaux  $X_1$  et  $X_2$ , on applique à l'entrée un signal de fréquence  $\Omega_{ref}$  d'amplitude constante mais de phase variable par rapport à la référence. Lorsque le déphasage augmente, les deux quadratures vont décrire deux sinusoides en quadrature de phase. Les courbes de droite de la figure 3.7 présentent les signaux  $X_1$

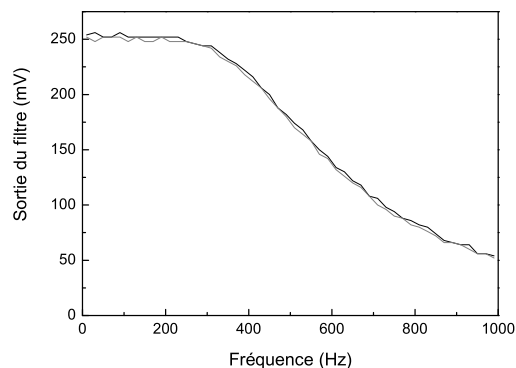


FIG. 3.6 – Réponse de la boîte de démodulation lorsque l'on augmente le décalage en fréquence entre un signal sinusoïdal et la référence.

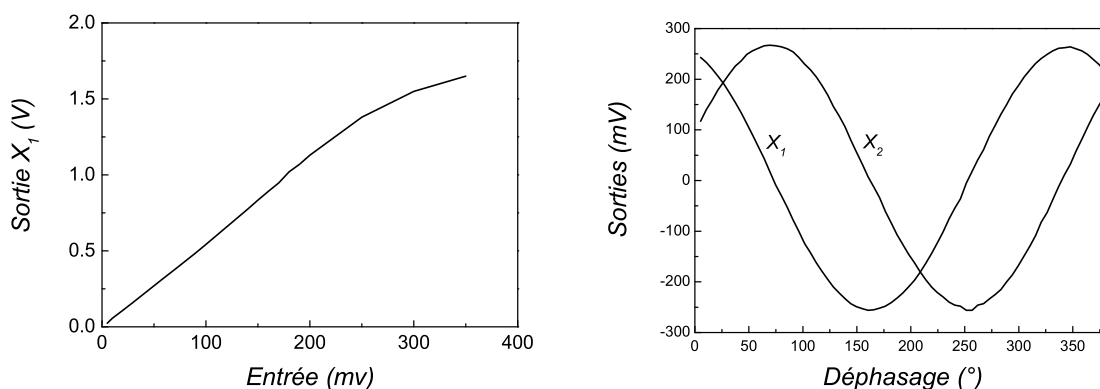


FIG. 3.7 – Courbe de gauche : réponse de la voie  $X_1$  en fonction de l'amplitude de la modulation appliquée à l'entrée de la boîte. Courbes de droite : test de la phase relative des deux voies  $X_1$  et  $X_2$ .

et  $X_2$  en fonction du déphasage entre le signal d'entrée et la référence. L'ajustement de ces courbes par deux sinusôides donne un angle entre les quadratures égal à  $90^\circ$  avec une incertitude inférieure au degré.

### 3.1.4 Calibration de la mesure

Pour observer les quadratures du mouvement du miroir on utilise le montage expérimental permettant de mesurer le bruit thermique, mais la voie d'acquisition est modifiée. La boîte de démodulation est ajoutée après le filtre passe-bande, et l'acquisition ne se fait plus sur l'analyseur de spectre mais grâce à un oscilloscope numérique TDS 320 (voir figure 3.8). Les résultats expérimentaux présentés dans les parties suivantes ont été obtenus avec le miroir plan-convexe de diamètre  $12\text{ mm}$  et en particulier sur le mode Gaussien fondamental de fréquence  $1858\text{ kHz}$ .



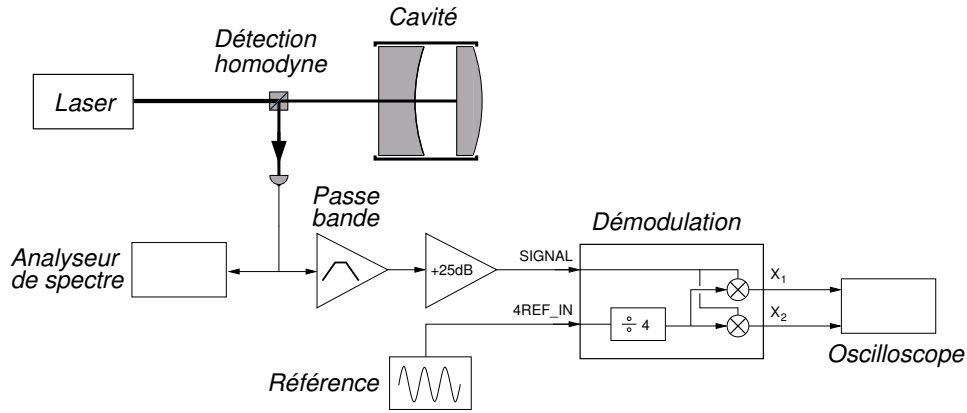


FIG. 3.8 – Schéma de l'expérience d'observation du mouvement Brownien du miroir dans l'espace des phases.

Nous avons tout d'abord effectué une calibration des signaux des quadratures en utilisant, comme dans la partie 1.3, une modulation de la fréquence du laser. Le réglage du gain de l'asservissement en fréquence du laser ayant légèrement changé, nous avons fait une nouvelle calibration de la modulation de fréquence à partir de la cavité de filtrage (voir partie 1.3) mais uniquement à  $2\text{ MHz}$ . On trouve qu'une modulation de  $1\text{ V}$  d'amplitude injecté sur l'électro-optique du laser Titane-Saphir induit une modulation de la fréquence du laser de  $30\text{ kHz}$ . On utilise ce résultat pour produire une modulation de fréquence d'amplitude  $200\text{ Hz}$  à une fréquence voisine de  $1858\text{ kHz}$ . Celle-ci engendre un signal sur les quadratures de  $27\text{ mV}$ . D'après l'équation (1.135), cette modulation de fréquence est équivalente à un déplacement du miroir  $\delta x$  de  $5,7 \times 10^{-16}\text{ m}$ . On obtient ainsi la conversion en mètre de nos signaux de quadrature observés en volt :  $1\text{ mV}$  correspond à un déplacement du miroir de  $2 \times 10^{-17}\text{ m}$  [20].

Nous avons ensuite cherché à déterminer la sensibilité des signaux observés sur les quadratures. Une telle calibration de la sensibilité avait été réalisée pour l'étude des spectres de bruit de position du miroir. Elle avait montré que la mesure de déplacement du miroir autour d'une fréquence de  $2\text{ MHz}$  est limitée par le bruit quantique de phase du faisceau de mesure qui correspond à un bruit blanc dont le niveau vaut  $\delta x_{shot} = 2,8 \times 10^{-19}\text{ m}/\sqrt{Hz}$ . Pour une analyse spectrale, la sensibilité correspond à une amplitude spectrale de bruit de position, définie en  $\text{m}/\sqrt{Hz}$ . Par contre la sensibilité pour une analyse temporelle des quadratures s'exprime comme une dispersion de bruit, mesurée en  $\text{m}$ . Elle correspond à la densité spectrale de bruit intégrée sur la largeur des filtres utilisés dans l'analyse temporelle. Le filtre passe-bande à la sortie de la détection homodyne a une bande passante de  $9\text{ kHz}$ , environ 20 fois plus grande que les filtres passe-bas de la boîte de démodulation. Ce sont donc ces derniers qui fixent la bande passante d'analyse. La puissance de bruit à la sortie des filtres est donc l'intégrale du bruit blanc de phase pondérée par la fonction de transfert  $H[\omega]$  des filtres. Le plus petit déplacement mesurable à des fréquences petites devant la bande passante des

filtres vaut :

$$\Delta x_{shot}^2 = \delta x_{shot}^2 \int |H[\omega]|^2 d\omega / |H[0]|^2, \quad (3.6)$$

où  $|H[0]|$  est le gain à fréquence nulle des filtres. L'intégrale du module carré de  $H[\omega]$  normalisée à sa valeur en  $\omega = 0$  est directement proportionnelle à la bande passante des filtres. Le facteur de proportionnalité est relié à la forme de la fonction de transfert et une intégration numérique de la fonction de transfert théorique (équation 3.4 avec  $G = 1,65$ ) donne une aire de  $1,164 \times \omega_0$ . Ainsi le plus petit déplacement mesurable  $\Delta x_{min}$  est relié à la bande passante  $\omega_0$  du filtre par :

$$\Delta x_{shot}^2 = 1,164 \times \omega_0 \times \delta x_{shot}^2. \quad (3.7)$$

Etant donné la valeur mesurée de la bande passante  $\omega_0 = 2\pi \times 460 \text{ Hz}$ , on trouve alors un plus petit déplacement mesurable égal à :

$$\Delta x_{shot} = 1,63 \times 10^{-17} m. \quad (3.8)$$

Nous avons vérifié expérimentalement cette valeur en mesurant la variance des différents bruits à la sortie de la boîte. Nous avons tout d'abord mesuré le bruit électronique de la voie d'acquisition en masquant le faisceau de mesure. Le signal observé a une valeur efficace de  $\Delta x_{el} = 0,44 \text{ mV}$  qui correspond au bruit électronique des photodiodes de la détection homodyne, du filtre passe-bande et de la boîte de démodulation. En envoyant le faisceau de mesure sur la cavité mais en gardant la fréquence de celle-ci loin de résonance, on mesure le niveau de bruit dû au bruit de phase du faisceau. La valeur efficace de ce bruit est  $0,86 \text{ mV}$ . Cette valeur est obtenue en retranchant à la variance mesurée la variance du bruit électronique. Etant donné le taux de conversion  $1 \text{ mV} \leftrightarrow 2 \times 10^{-17} \text{ m}$ , le plus petit déplacement mesurable vaut

$$\Delta x_{shot} = 1,7 \times 10^{-17} m. \quad (3.9)$$

Cette valeur est en excellent accord avec la valeur théorique donnée par l'équation (3.8). Notons que d'après l'équation (3.7) la sensibilité peut être en principe augmentée en utilisant des filtres de largeur plus faible. Pour des bandes passantes trop faibles, le temps de réponse devient de l'ordre ou supérieur au temps caractéristique des phénomènes que l'on cherche à étudier, ce qui fausse la mesure de l'évolution temporelle des quadratures. Il faut donc garder une bande passante de tous les filtres électroniques de la voie d'acquisition très supérieure au taux d'amortissement du miroir. Le choix d'une fréquence de coupure de  $500 \text{ Hz}$  semble donc un bon compromis entre la sensibilité de la détection des quadratures et la possibilité de suivre ses évolutions temporelles (dont les fréquences caractéristiques sont de l'ordre de  $50 \text{ Hz}$ ).

### 3.1.5 Asservissement de la température

Pour avoir une bonne statistique sur la distribution du mouvement Brownien du miroir dans l'espace des phases, le temps d'acquisition doit typiquement être plusieurs millions de fois plus grand que le temps d'évolution du mouvement du miroir ( $1/2\pi\Gamma$ )  $\simeq 4 \text{ ms}$ . Il est donc nécessaire que la fréquence de démodulation  $\Omega_{ref}$  coïncide avec la

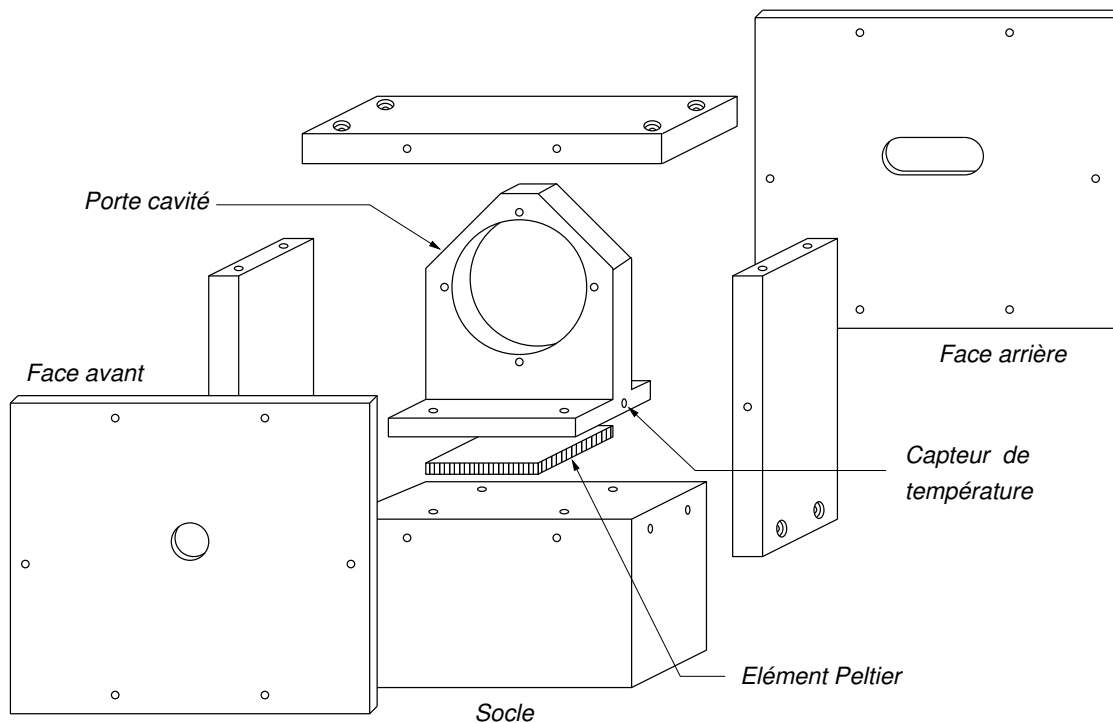


FIG. 3.9 – Enceinte en cuivre permettant la régulation en température de la cavité à miroir mobile.

fréquence de résonance du mode acoustique du miroir sur des temps de l'ordre de la dizaine de minutes. Les dérives de la fréquence centrale du pic de bruit thermique étant essentiellement dues aux dérives de la température de la pièce, nous avons réalisé un asservissement en température de la cavité.

La cavité est placée dans une boîte parallélépipédique en cuivre (voir figure 3.9) possédant un socle massif. Deux ouvertures sont pratiquées dans la boîte : un trou circulaire dans la face avant laisse passer le faisceau de mesure ; un trou oblong dans la face arrière pour permettre au faisceau d'excitation d'entrer avec un angle d'une dizaine de degrés et de ressortir après réflexion sur le miroir mobile. Ces ouvertures sont réduites au minimum pour éviter les circulations d'air sans avoir recours à l'utilisation de hublots. Un élément Peltier est placé entre le socle et le support en cuivre dans lequel est montée la cavité. La boîte entière pèse environ  $2\text{ kg}$  et agit comme une masse thermique. La mesure de la température, nécessaire à un contrôle actif, est effectuée par une thermistance placée au centre de la pièce de support de la cavité, à  $2\text{ mm}$  au dessus de l'élément Peltier. On réduit ainsi la constante de temps de l'asservissement due à la propagation de la chaleur entre l'élément Peltier et le détecteur de température. La stabilisation en température est assurée par une régulation commerciale TEC 2000.

Lorsque le gain de la régulation est optimisé on observe des dérives de la fréquence centrale du pic de bruit thermique inférieures à quelques hertz sur des périodes de l'ordre de la demi-heure. D'autre part la stabilisation en température atténue fortement les variations de la longueur d'onde optique de résonance de la cavité. L'asservissement de la fréquence du laser sur une résonance de la cavité dérive alors très peu et l'on peut

travailler plusieurs heures sans que l'asservissement ne décroche.

## 3.2 Quadratures du mouvement pour un miroir libre

Nous présentons dans cette partie l'étude des quadratures dans le cas du miroir plan-convexe de 12 mm de diamètre, déjà utilisé dans les chapitres précédents. La fréquence de résonance du mode fondamental Gaussien de ce miroir ainsi que son taux d'amortissement ont été déduits du spectre de bruit thermique.

### 3.2.1 Comportement des quadratures à l'équilibre thermique

Nous allons caractériser les quadratures de position lorsque le miroir est à l'équilibre thermodynamique. La fréquence de démodulation des quadratures est égale à la fréquence de résonance du mode fondamental du miroir.

Comme on ne s'intéresse qu'à des fréquences voisines de la fréquence de résonance  $\Omega_M$  d'un mode de vibration, le comportement du miroir est équivalent à celui d'un oscillateur harmonique de masse  $M$  et d'amortissement  $\Gamma$ . Sous l'action d'une force extérieure  $F$ , le déplacement  $x$  est donc donné par

$$x[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma\Omega)} F[\Omega]. \quad (3.10)$$

On peut ainsi déduire l'expression de  $x[\Omega_M + \omega]$  et  $x[-\Omega_M + \omega]$ . En considérant toujours que l'oscillateur est faiblement amorti ( $\Gamma \ll \Omega_M$ ) et que l'on s'intéresse à des fréquences d'analyse  $\omega$  de l'ordre de  $\Gamma$  ( $\omega \ll \Omega_M$ ), on obtient

$$x[\Omega_M + \omega] = -\frac{1}{M\Omega_M(2\omega + i\Gamma)} F[\Omega_M + \omega], \quad (3.11)$$

$$x[-\Omega_M + \omega] = \frac{1}{M\Omega_M(2\omega + i\Gamma)} F[-\Omega_M + \omega]. \quad (3.12)$$

En insérant ces expressions dans les équations (3.2) et (3.3), on trouve après simplification l'expression de la réponse de chacune des quadratures à une force extérieure :

$$X_1[\omega] = -\frac{1}{2M\Omega_M} \left( \frac{1}{-i\omega + \Gamma/2} \right) F_2[\omega], \quad (3.13)$$

$$X_2[\omega] = \frac{1}{2M\Omega_M} \left( \frac{1}{-i\omega + \Gamma/2} \right) F_1[\omega], \quad (3.14)$$

où  $F_1[\omega]$  et  $F_2[\omega]$  sont les deux quadratures de la force  $F$ , définies dans l'espace de Fourier par des expressions similaires à (3.2) et (3.3) :

$$F_1[\omega] = F[\Omega_M + \omega] + F[-\Omega_M + \omega], \quad (3.15)$$

$$F_2[\omega] = -i(F[\Omega_M + \omega] - F[-\Omega_M + \omega]). \quad (3.16)$$

Pour un miroir libre en équilibre thermique à la température ambiante  $T$ , le couplage avec le bain thermique est décrit par la force de Langevin  $F_T$ . Cette force correspond

à un bruit blanc et sa fonction de corrélation à deux fréquences est proportionnelle à une fonction de Dirac [voir équations (1.3) et (1.4)] :

$$\langle F_T[\Omega], F_T[\Omega'] \rangle = 2M\Gamma k_B T 2\pi\delta(\Omega + \Omega'). \quad (3.17)$$

On en déduit, d'après les expressions des quadratures de la force [équation (3.15) et (3.16)], la fonction de corrélation entre les quadratures  $F_{T_1}$  et  $F_{T_2}$  de la force de Langevin :

$$\langle F_{T_1}[\omega], F_{T_2}[\omega'] \rangle = -2iM\Gamma k_B T \{2\pi\delta(2\Omega_M + \omega + \omega') - 2\pi\delta(-2\Omega_M + \omega + \omega')\}. \quad (3.18)$$

Les fréquences  $\omega$  et  $\omega'$  étant très petites devant la fréquence de résonance  $\Omega_M$ , les deux fonctions de Dirac sont toujours nulles. Les quadratures  $F_{T_1}$  et  $F_{T_2}$  sont par conséquent deux variables aléatoires indépendantes. On déduit de la même façon les fonctions d'autocorrélation, après avoir simplifié les termes en  $\delta(2\Omega_M + \omega + \omega')$  et  $\delta(-2\Omega_M + \omega + \omega')$  :

$$\langle F_{T_1}[\omega], F_{T_1}[\omega'] \rangle = \langle F_{T_2}[\omega], F_{T_2}[\omega'] \rangle = 4M\Gamma k_B T 2\pi\delta(\omega + \omega'). \quad (3.19)$$

Les spectres des quadratures de la force sont donc indépendants de la fréquence et égaux au double de la force de Langevin,

$$S_{T_1}[\omega] = S_{T_2}[\omega] = 4M\Gamma k_B T = 2S_T[\omega]. \quad (3.20)$$

Par conséquent, les deux quadratures de la position ont des spectres identiques, de forme Lorentzienne que l'on déduit des équations (3.13), (3.14) et (3.20) :

$$S_{X_1}[\omega] = S_{X_2}[\omega] = \frac{\Gamma k_B T}{M\Omega_M^2(\omega^2 + \Gamma^2/4)}. \quad (3.21)$$

L'aire de ces spectres est directement reliée à la variance de la position. L'intégrale en fréquence de ces spectres donne des variances  $\Delta X_1^2$  et  $\Delta X_2^2$  des quadratures identiques et égales à :

$$\Delta X_1^2 = \Delta X_2^2 = \frac{k_B T}{M\Omega_M^2}. \quad (3.22)$$

On retrouve ici le théorème d'équipartition de l'énergie, appliqué aux quadratures du mouvement [équation (2.4)]. Avec les valeurs des paramètres expérimentaux ( $\Omega_M = 1858 \text{ kHz}$ ,  $M = 230 \text{ mg}$ ,  $T = 300 \text{ K}$ ), les dispersions attendues  $\Delta X_1$  et  $\Delta X_2$  pour le mouvement Brownien dans l'espace des phases sont :

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = 36,3 \times 10^{-17} \text{ m}. \quad (3.23)$$

Nous terminons cette étude théorique par les fonctions de corrélation temporelle du mouvement dans l'espace des phases. Celles-ci sont définies par :

$$C_{ij}(\tau) = \langle X_i(t) X_j(t + \tau) \rangle_t, \quad (3.24)$$

où  $i$  et  $j$  désignent les indices des quadratures ( $i, j = 1, 2$ ), et où les crochets  $\langle \dots \rangle$  représentent la valeur moyenne temporelle. Nous avons déjà indiqué que les quadratures

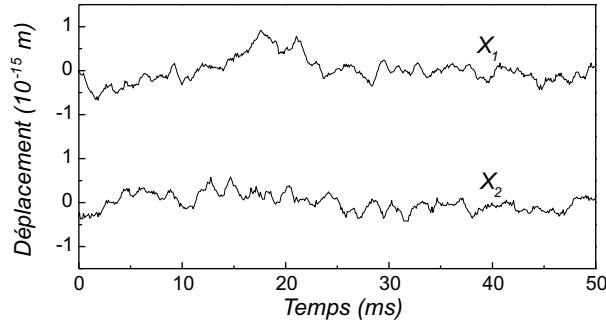


FIG. 3.10 – Acquisition des quadratures de position  $X_1$  et  $X_2$  pour un miroir libre soumis au bruit thermique.

de la force de Langevin sont non corrélées. D'après les équations (3.13) et (3.14), il en est de même pour les quadratures de la position, et les fonctions  $C_{12}$  et  $C_{21}$  sont nulles. Les fonctions d'autocorrélation  $C_{11}$  et  $C_{22}$  se calculent en prenant la transformée de Fourier inverse des spectres de  $S_{X_1}$  et  $S_{X_2}$  :

$$C_{ii}(\tau) = \Delta X_i^2 \exp(-\Gamma\tau/2). \quad (3.25)$$

On trouve une décroissance exponentielle à partir d'une valeur initiale correspondant à la variance  $\Delta X_i^2$  de la quadrature, avec une constante de temps de  $2/\Gamma$  qui représente le temps caractéristique de perte de la mémoire des conditions initiales.

Notons finalement que pour les calculs que nous venons d'effectuer nous avons raisonné de manière classique. Les quadratures  $X_1$  et  $X_2$  sont en fait deux variables quantiques conjuguées et elles ne peuvent pas être mesurées simultanément avec une précision infinie. Ceci n'est pas en contradiction avec notre approche classique car le signal de position du miroir que nous détectons dans l'expérience est entaché du bruit quantique de phase du faisceau lumineux. Nous n'avons donc pas accès simultanément aux deux quadratures du mouvement à un niveau quantique. Ceci ne constitue pas une limite dans la pratique car le bruit thermique que nous cherchons à observer est plusieurs ordres de grandeur au dessus de ces limites quantiques.

### 3.2.2 Résultats expérimentaux

La figure 3.10 montre une acquisition d'une durée de 50 ms des quadratures  $X_1$  et  $X_2$  de la position du miroir libre soumis uniquement à l'agitation thermique. L'échelle verticale a été graduée en mètre grâce à la calibration des signaux en sortie de la boîte. A un instant  $t$ , les quadratures  $X_1$  et  $X_2$  caractérisent entièrement l'état d'oscillation du miroir. L'amplitude de l'oscillation est égale à  $\sqrt{X_1^2 + X_2^2}$  et sa phase  $\varphi$  par rapport au signal de référence est donnée par  $\tan \varphi = X_2/X_1$ . Il est alors naturel de représenter le mouvement dans l'espace des phases, ce qui correspond à faire le tracé paramétrique de  $(X_1(t), X_2(t))$ . La courbe de gauche de la figure 3.11 montre le mouvement du miroir dans l'espace des phases déduit des deux courbes de la figure 3.10. Dans cette représentation l'amplitude de l'oscillation du miroir est donnée par la distance à l'origine, et la phase se déduit de l'angle avec l'axe horizontal.

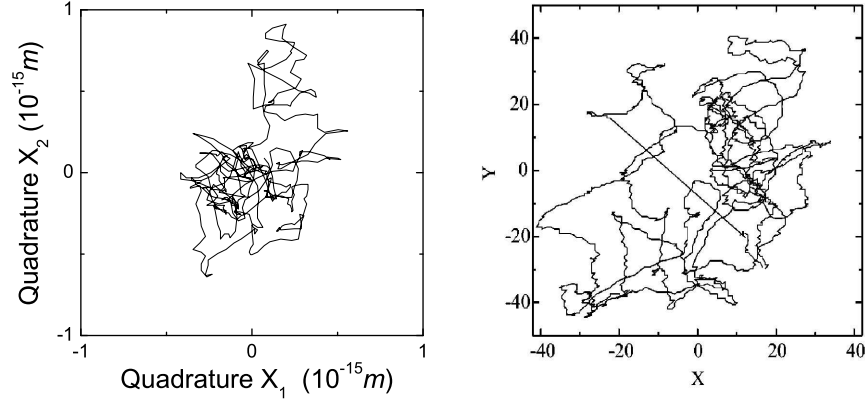


FIG. 3.11 – Courbe de gauche : mouvement Brownien dans l'espace des phases correspondant aux traces temporelles de la figure 3.10. Courbe de droite : mouvement Brownien d'un oscillateur de torsion obtenue par Tittonen *et al.*

Sur des échelles de temps de l'ordre de quelques  $1/\Gamma$ , le mouvement dans l'espace des phases ressemble à un mouvement Brownien libre dans un espace à deux dimensions. Ce résultat est à comparer à celui obtenu par Tittonen *et al* [19], concernant le mouvement dans l'espace des phases d'un oscillateur de torsion seulement soumis à l'agitation thermique. Dans cette expérience, la fréquence propre de l'oscillateur est de  $26\text{ kHz}$ , et son facteur de qualité de 4,3 million correspondant à un temps caractéristique d'évolution de 52 secondes. La courbe de droite de la figure 3.11 est reproduite de la référence [19] et montre le mouvement Brownien de cet oscillateur, obtenu sur un temps de 80 secondes. Les temps d'acquisition des courbes de gauche et de droite, rapportés aux temps caractéristiques d'évolution des deux oscillateurs dans l'espace des phases, sont finalement semblables. Cela explique la similitude entre les deux courbes, tant au point de vue de la densité de point que de l'absence de symétrie. Pour des temps d'acquisition aussi courts l'ergodicité ne transparaît pas.

La courbe de gauche de la figure 3.12 présente l'acquisition des quadratures sur un temps de mesure de  $500\text{ ms}$ . Les échelles horizontale et verticale correspondent à la pleine échelle de l'oscilloscope réglée sur  $\pm 100\text{ mV}$ . Elles ont été graduées en mètre grâce à la calibration. Nous avons vu que le temps caractéristique sur lequel l'oscillateur perd la mémoire des conditions initiales est de l'ordre de  $1/\Gamma$ . Deux points acquis en des temps séparés de quelques  $1/\Gamma$  ne sont pas corrélés et peuvent se retrouver n'importe où dans la distribution dans l'espace des phases. Pour un taux d'amortissement  $\Gamma$  de  $2\pi \times 44\text{ Hz}$ , le mouvement Brownien parcourt une vingtaine de fois la distribution dans l'espace des phases sur un temps d'acquisition de  $500\text{ ms}$ . La densité de point est alors suffisante pour voir se dessiner une distribution centrée en l'origine et symétrique dans les deux directions  $X_1$  et  $X_2$ . Le mouvement ne ressemble plus à une marche au hasard dans l'espace des phases : il est concentré autour de l'origine par la force de rappel de l'oscillateur harmonique [53].

La courbe de droite de la figure 3.12 présente l'histogramme du mouvement Brow-

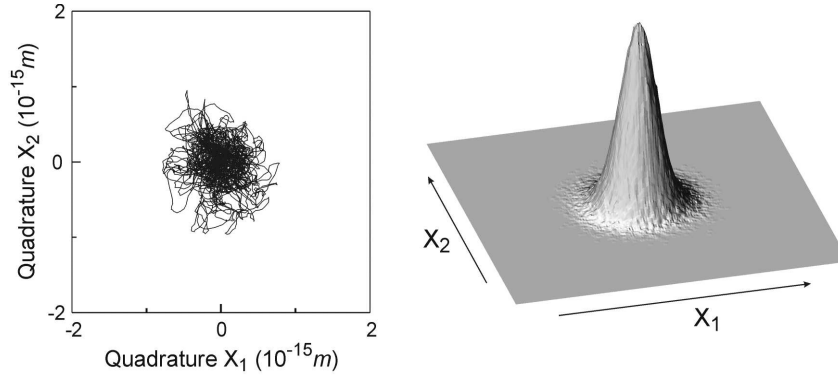


FIG. 3.12 – Courbe de gauche : trajectoire du mouvement Brownien du miroir dans l'espace des phases. Courbe de droite : histogramme du mouvement.

nien acquis pendant une dizaine de minutes. L'échelle de l'oscilloscope est divisée en 256 intervalles, subdivisant ainsi l'espace des phases en un histogramme de  $256 \times 256$  cellules. Le bruit dû aux fluctuations de phase du faisceau de mesure et dont la valeur *rms* est donné par l'équation (3.9) correspond pour cette division à une cellule. La distribution observée est donc le produit de convolution de la distribution due au bruit thermique et d'une Gaussienne de largeur égale à la dimension d'une cellule. Etant donnée la largeur de la distribution obtenue, l'élargissement produit par le bruit de phase n'est pas significatif. Les traces temporelles des deux quadratures sont acquises sur un temps de 3 secondes par l'oscilloscope numérique puis transférées à l'ordinateur qui actualise l'historgramme et déclenche un nouveau cycle de mesure. Ce traitement des données en continu permet l'acquisition d'un très grand nombre de point, typiquement plusieurs millions. Pendant la dizaine de minutes que dure la mesure, le mouvement Brownien parcourt environ 25 000 fois l'espace des phases, ce qui explique la très bonne précision obtenue sur la distribution.

La dispersion du mouvement Brownien est donnée par la largeur de la distribution et vaut :

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = 36.6 \times 10^{-17} m, \quad (3.26)$$

en excellent accord avec la valeur théorique donnée par l'équation (3.23). A partir de la distribution des quadratures  $X_1$  et  $X_2$ , nous avons calculé la statistique du mouvement sur une quadrature  $X_\theta$  faisant un angle  $\theta$  quelconque avec l'axe  $X_1$ , définie par :

$$X_\theta = \cos \theta X_1 + \sin \theta X_2. \quad (3.27)$$

Pour un mouvement Brownien, la quadrature  $X_\theta$  est la somme de deux variables aléatoires Gaussiennes indépendantes et de même variance.  $X_\theta$  est donc Gaussienne et de variance indépendante de l'angle  $\theta$ . Les distributions obtenues pour un angle  $\theta$  variant entre 0 et 180 degrés sont tracées sur la figure 3.13. Chaque distribution a bien un profil Gaussien et les largeurs des courbes sont égales entre elles à mieux que 1%. Ces résultats montrent que la distribution du mouvement Brownien dans l'espace des phases a un profil Gaussien parfaitement symétrique dans toutes les directions.



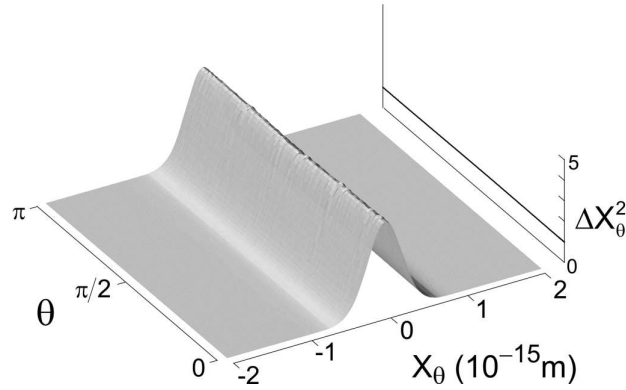


FIG. 3.13 – Distribution de la quadrature  $X_\theta$  du mouvement thermique du miroir en fonction de l'angle  $\theta$ . La variance  $\Delta X_\theta^2$  de la quadrature  $X_\theta$ , normalisée à la variance thermique moyenne, est tracée sur le coté droit en fonction de  $\theta$ .

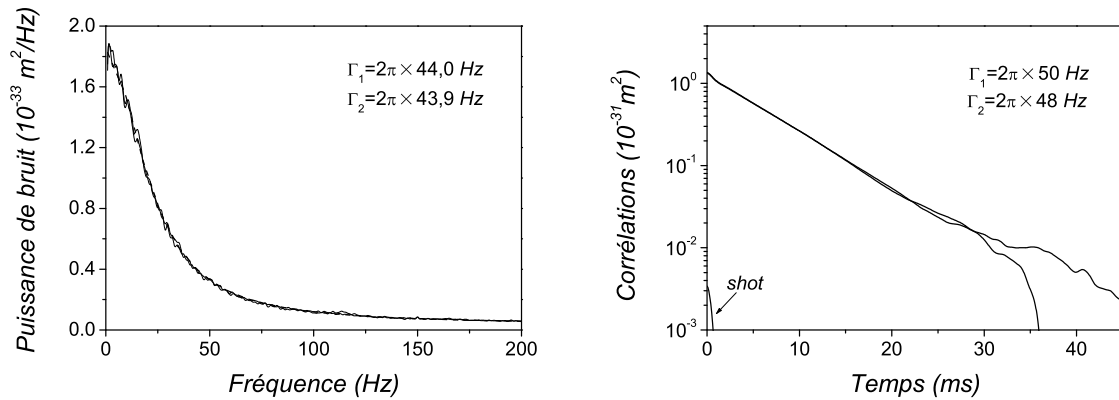


FIG. 3.14 – Courbes de gauche : spectres des deux quadratures du mouvement du miroir. Courbes de droite : fonctions de corrélation temporelle des quadratures.

Nous avons reconstitué le spectre des quadratures  $X_1$  et  $X_2$  en effectuant une transformée de Fourier des traces temporelles. Chaque trace temporelle acquise sur l'oscilloscope est transférée à l'ordinateur qui effectue une FFT. Une trace est composée de 15 000 points, et dure 3 secondes. On a donc une résolution spectrale meilleure que le hertz et la bande d'analyse va de 0 à 5 kHz. Un filtre de Hanning est appliqué lors du calcul et les spectres obtenus sont moyennés environ 200 fois, ce qui correspond à une dizaine de minutes d'acquisition. La figure 3.14 présente les spectres des deux quadratures entre 0 et 500 Hz. Un ajustement par des Lorentziennes centrées en zéro donne des largeurs pour les spectres de  $X_1$  et  $X_2$  de  $2\pi \times 44$  Hz et  $2\pi \times 43,8$  Hz en très bon accord avec l'équation (3.21) et avec la valeur expérimentale du taux d'amortissement du mode ( $\Gamma = 2\pi \times 44$  Hz). L'échelle verticale est convertie en  $m^2/Hz$  grâce à la calibration. Les hauteurs des deux spectres sont égales au pourcent près et valent  $1,85 \times 10^{-33} m^2/Hz$ . Cette valeur peut être comparée à la valeur théorique donnée par l'équation (3.21) pour

$\omega = 0$ . En utilisant les valeurs de la masse  $M$  (230 mg) et du taux d'amortissement mesurées expérimentalement on trouve une hauteur de  $1,9 \times 10^{-33} m^2/Hz$  en excellent accord avec nos mesures.

La fonction de corrélation  $C_{12}$  et les deux fonctions d'autocorrélation  $C_{11}$  et  $C_{22}$  sont également calculées par l'ordinateur à partir des traces temporelles, lors de l'acquisition de la distribution du mouvement. Pour chaque trace temporelle acquise (15 000 points acquis en 3 s), les produits  $X_i(t) \times X_j(t + \tau)$  pour  $(i, j = 1)$ ,  $(i, j = 2)$  ou  $(i = 1, j = 2)$  sont calculés pour  $\tau$  variant de 0 à 50 ms et sont stockés dans un tableau de points. Ce tableau peut ainsi être moyenné à chaque nouvelle acquisition. Les fonctions  $C_{11}$  et  $C_{22}$  sont présentées sur la figure 3.14 en échelle semi-logarithmique. L'ajustement par une droite des deux courbes  $C_{11}$  et  $C_{22}$  donne un taux d'amortissement moyen  $\Gamma$  de  $2\pi \times 49 Hz$  en bon accord avec les valeurs déjà mesurées. La valeur à  $\tau = 0$  correspond aux variances données par l'équation (3.26). La fonction  $C_{12}$  est pratiquement nulle, sa valeur à tout temps étant inférieure à 2% de la valeur des fonctions d'auto-corrélation  $C_{11}$  et  $C_{22}$ .

On a également reporté sur la figure la fonction d'auto-corrélation du bruit de photon (courbe shot), obtenue lorsque la cavité et le laser sont désaccordés. La fonction présente une décroissance exponentielle très rapide, uniquement limitée par le temps de réponse des filtres passe-bas placés en sortie de la chaîne électronique de détection des quadratures. Le niveau de cette courbe, lié à la limite de sensibilité de la mesure [équation (3.9)], est environ trois ordres de grandeur en dessous de celui des fonctions d'autocorrélation.

### 3.3 Quadratures du mouvement refroidi

Dans cette partie nous présentons les résultats sur le comportement des quadratures du mouvement dans le cas d'un miroir refroidi par friction froide. Dans les chapitres précédents nous avons caractérisé l'état refroidi de manière spectrale en vérifiant en particulier que l'on pouvait réduire fortement la densité spectrale de bruit de position du miroir autour de la fréquence de résonance. Nous en avons déduit une réduction de la variance du mouvement du miroir. L'observation des quadratures du mouvement permet de vérifier expérimentalement que les fluctuations du mouvement dans l'espace des phases sont bien réduites et que la friction froide correspond bien au gel de la position du miroir.

#### 3.3.1 Comportement des quadratures d'un miroir refroidi

Nous avons démontré dans la partie 2.2 que l'application sur le miroir d'une force de friction froide a pour effet d'augmenter le taux d'amortissement du miroir d'un facteur  $1 + g$ , où le paramètre  $g$  sans dimension caractérise le gain de la friction froide. La susceptibilité du miroir est alors décrite par l'équation (2.15). Nous avons observé que la température du mode acoustique se trouve réduite du même facteur  $1 + g$ .

On se propose de vérifier ce résultat en étudiant le comportement des quadratures de la position d'un miroir refroidi. En partant de l'expression de la force de pression de radiation que l'on applique sur le miroir [équation (2.13)] et en utilisant la définition

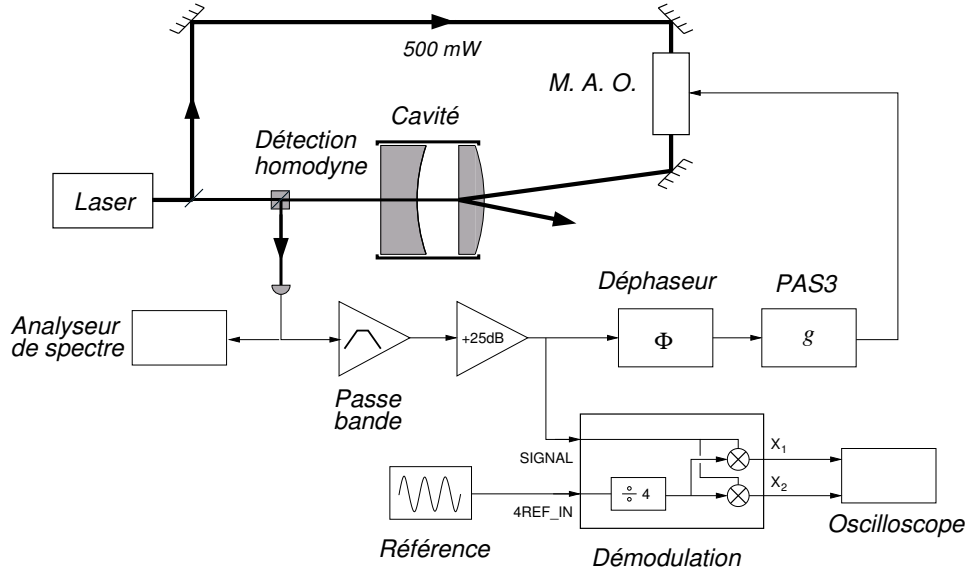


FIG. 3.15 – Montage expérimental permettant l'observation dans l'espace des phases du mouvement d'un miroir refroidi par friction froide.

des quadratures de la force [équations (3.15) et (3.16)], on déduit les expressions des quadratures de la force de friction froide en négligeant  $\omega$  devant  $\Omega_M$  :

$$F_{rad1}[\omega] = -gM\Gamma\Omega_M X_2[\omega], \quad (3.28)$$

$$F_{rad2}[\omega] = gM\Gamma\Omega_M X_1[\omega]. \quad (3.29)$$

L'inversion des quadratures dans ces équations est la signature du fait que  $F_{rad}$  est proportionnelle à la dérivée de la position  $x$ ; dans l'espace des phases, l'opération de dérivation se caractérise par une rotation de  $\frac{\pi}{2}$ .

On peut maintenant utiliser les équations (3.13) et (3.14) pour obtenir les quadratures du mouvement en prenant pour la force  $F$  la somme de la force de Langevin et de la force de pression de radiation. Les quadratures du mouvement se mettent alors sous la forme :

$$X_1[\omega] = -\frac{1}{2M\Omega_M} \left( \frac{1}{-i\omega + \Gamma(1+g)/2} \right) F_{T_2}[\omega], \quad (3.30)$$

$$X_2[\omega] = \frac{1}{2M\Omega_M} \left( \frac{1}{-i\omega + \Gamma(1+g)/2} \right) F_{T_1}[\omega], \quad (3.31)$$

Ces équations sont similaires à celles obtenues sans la friction froide [équations (3.13) et (3.14)], mais avec un taux d'amortissement  $\Gamma$  multiplié par le facteur  $1+g$ .

Comme précédemment, on peut calculer les spectres, les variances et les corrélations temporelles des quadratures. On obtient :

$$S_{X_1}^{fb}[\omega] = S_{X_2}^{fb}[\omega] = \frac{\Gamma_{fb} k_B T_{fb}}{M\Omega_M^2 (\omega^2 + \Gamma_{fb}^2/4)}. \quad (3.32)$$

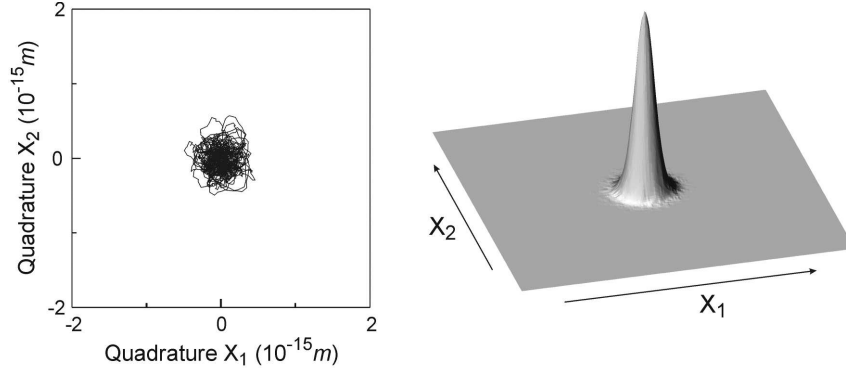


FIG. 3.16 – Trajectoire et distribution dans l'espace des phase du mouvement thermique du miroir en présence de friction froide. La dispersion du mouvement est diminuée par rapport au cas d'un miroir libre.

$$\Delta X_1^2 = \Delta X_2^2 = \frac{k_B T_{fb}}{M \Omega_M^2}. \quad (3.33)$$

$$C_{12}^{fb} = 0 \quad , \quad C_{ii}^{fb}(\tau) = \Delta X_i^2 \exp(-\Gamma_{fb} \tau / 2). \quad (3.34)$$

Ces expressions sont similaires à celles correspondant au miroir libre, en remplaçant l'amortissement mécanique  $\Gamma$  par l'amortissement total  $\Gamma_{fb} = (1+g)\Gamma$  et la température ambiante par la température effective du miroir  $T_{fb} = T/(1+g)$ .

### 3.3.2 Résultats expérimentaux

Le montage expérimental présenté sur la figure 3.15 est dérivé du montage permettant l'observation de la friction froide décrit dans la partie 2.2 (figures 2.5 et 2.6). La boîte de détection des quadratures a été insérée dans la voie d'acquisition, après le filtre passe-bande et l'amplificateur. L'analyseur de spectre contrôle toujours le bruit de phase mesuré par la détection homodyne. Il est en particulier utilisé pour déterminer l'élargissement du spectre de bruit thermique en présence de la friction froide par rapport à la situation non refroidie, pour en déduire le taux d'amortissement effectif  $\Gamma_{fb}$  du miroir et le gain de la boucle de contre-réaction.

La courbe de gauche de la figure 3.16 présente la trace temporelle des quadratures acquises pendant 500 ms, pour un gain  $g$  de la boucle de contre-réaction égal à 3. Les échelles sont identiques à celles de la trace temporelle des quadratures sans contre-réaction (figure 3.12). On observe clairement que le mouvement Brownien du miroir garde une symétrie de révolution autour de l'origine. Ceci montre bien qu'aucune quadrature n'est privilégiée dans le processus de friction froide. Le mouvement est cependant nettement plus confiné autour de l'origine que dans le cas non refroidi. La courbe de droite de la figure 3.16 est l'histogramme du mouvement Brownien acquis sur une dizaine de minutes. La distribution présente, comme dans le cas d'un miroir non refroidi, un profil Gaussien symétrique de révolution, mais dont la largeur est cependant réduite. Les dispersions du mouvement sont de  $\Delta X_1 = 18.3 \times 10^{-17} m$  et

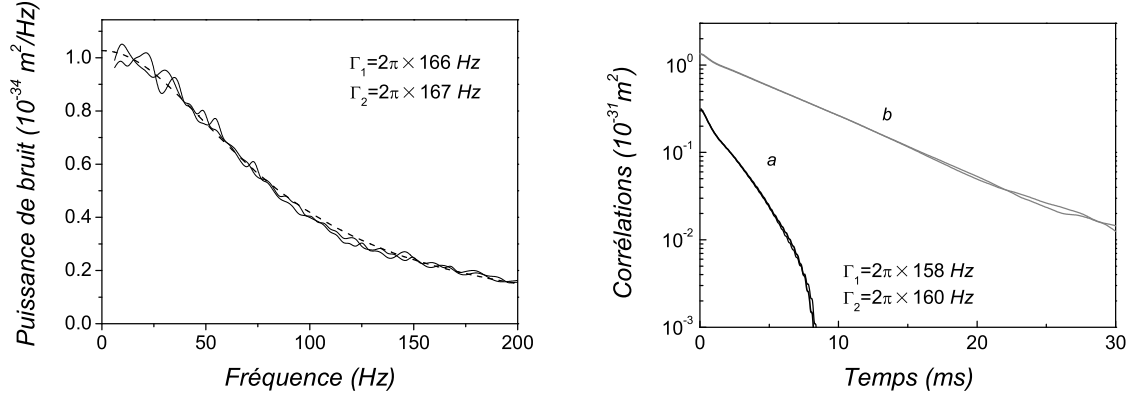


FIG. 3.17 – Courbes de gauche : spectres des deux quadratures du mouvement refroidi. Courbes de droite : fonctions de corrélation des deux quadratures en présence de la contre-réaction (courbes *a*). Les courbes *b* correspondent au bruit thermique du miroir libre.

$\Delta X_2 = 18.4 \times 10^{-17} \text{ m}$ , ce qui correspond d'après les caractéristiques du miroir à un facteur de refroidissement  $T/T_{fb} = 1 + g$  de 4,0, en accord avec le gain mesuré.

La figure 3.17 présente les spectres des deux quadratures. Ces spectres sont obtenus par FFT des traces temporelles, avec un filtre de Hanning. Chaque spectre est moyenné environ 200 fois au cours de l'acquisition. En comparant à la figure 3.14, on voit nettement que la friction froide a pour effet d'élargir les spectres des quadratures et de réduire leur hauteur. Un ajustement par une Lorentzienne centrée en l'origine des fréquences permet de déduire le taux d'amortissement effectif  $\Gamma_{fb}$  du miroir. Cet ajustement donne une valeur pour  $\Gamma_{fb}/2\pi$  de 166 *Hz*, en très bon accord avec le gain  $g = 3$  de la contre-réaction et avec le taux d'amortissement  $\Gamma = 2\pi \times 44 \text{ Hz}$  du miroir.

La fonction de corrélation  $C_{12}^{fb}$  des quadratures du mouvement en présence de la friction froide, est calculée comme précédemment lors de l'acquisition des traces temporelles des quadratures  $X_1$  et  $X_2$ . Elle reste inférieure à un pourcent de la valeur de  $C_{11}^{fb}$  et  $C_{22}^{fb}$ ; la friction froide n'introduit donc aucune corrélation entre les quadratures. Les fonctions d'auto-corrélation  $C_{11}^{fb}$  et  $C_{22}^{fb}$  des quadratures sont présentées sur la figure 3.17 en échelle semi-logarithmique. La décroissance est bien exponentielle et la différence entre les deux fonctions est inférieure à 1%. L'ajustement des courbes par une exponentielle décroissante, en utilisant l'équation (3.34), donne un taux d'amortissement  $\Gamma_{fb}/2\pi$  de 159 *Hz*. On notera la réduction des fonctions de corrélation à  $\tau = 0$  par rapport au régime libre, en accord avec le confinement de la distribution dans l'espace des phases.

Tous ces résultats confirment le fait que le processus de contre-réaction mis en jeu correspond à une friction froide. Le mouvement dans l'espace des phases est celui d'un oscillateur harmonique à une température effective plus basse. Par rapport au régime libre, la marche au hasard est confinée autour de l'origine, avec une constante de temps plus courte.

### 3.4 Amplification paramétrique du bruit thermique

Nous avons étudié dans les parties précédentes les régimes libre et refroidi du miroir dans l'espace des phases. Nous les avons en particulier caractérisés par la distribution du mouvement du miroir dans cet espace. Pour un mouvement libre ou refroidi, aucune quadrature n'est privilégiée, ni par les phénomènes de dissipation, ni par le refroidissement. Cette propriété se traduit pour les distributions du mouvement observées par une parfaite symétrie de révolution autour de l'origine.

Cette partie décrit une technique permettant d'obtenir des états thermiques dont la distribution dans l'espace des phases ne présente plus cette symétrie entre toutes les quadratures du mouvement. L'optique quantique fournit des exemples d'états du champ électromagnétique comprimés, obtenus à partir de phénomènes non linéaires induisant une amplification paramétrique [54, 55, 56]. Ces états présentent des fluctuations quantiques réduites selon une des quadratures du champ et amplifiées selon la seconde.

Par analogie avec ces systèmes agissant sur le bruit quantique nous avons développé une expérience d'amplification paramétrique du bruit thermique de position d'un miroir mobile [53]. On utilise pour cela la boucle de contrôle de position du miroir par pression de radiation afin de moduler un des paramètres de notre oscillateur mécanique à deux fois sa fréquence de résonance. Le paramètre habituellement modulé pour réaliser l'amplification paramétrique est la raideur de l'oscillateur [57, 58]. Dans notre expérience nous avons la possibilité d'agir soit sur la raideur, soit sur le taux d'amortissement du miroir, simplement en changeant la phase de la boucle de contre-réaction. Le comportement de l'oscillateur est cependant similaire quel que soit le paramètre que l'on décide de moduler, comme nous allons le montrer dans la première section.

#### 3.4.1 Etude théorique

##### Amplification paramétrique par contre-réaction

Le processus d'amplification paramétrique consiste à moduler un paramètre mécanique à deux fois la fréquence de résonance de l'oscillateur. Cette action peut être directe dans le cas d'un pendule où l'on fait varier la longueur, par exemple pour la balançoire où l'utilisateur fait monter et descendre son centre de gravité deux fois par période d'oscillation.

Dans le cas de petits résonateurs très bien isolés et avec des fréquences de résonance élevées, il est difficilement envisageable d'agir directement sur la raideur ou sur le taux d'amortissement de manière purement mécanique. On peut néanmoins obtenir une modulation effective d'un des paramètres de l'oscillateur en mesurant son mouvement et en contre-réagissant à l'aide d'une force modulée. La position  $x$  de l'oscillateur soumis à une force de contre-réaction  $F$  et à la force de Langevin  $F_T$  est décrite par l'équation :

$$M\ddot{x} + M\Gamma\dot{x} + M\Omega_M^2x = F(t) + F_T(t), \quad (3.35)$$

où  $M$  est la masse de l'oscillateur,  $\Omega_M$  sa fréquence de résonance et  $\Gamma$  son taux d'amortissement.

Dans le cas d'une action sur la raideur, on applique une force  $F(t)$  proportionnelle à la position  $x$  et modulée à la fréquence double :

$$F(t) = 2gM\Gamma\Omega_M \sin(2\Omega_M t)x(t), \quad (3.36)$$

où  $g$  est un paramètre sans dimension qui caractérise le gain de l'amplification paramétrique. L'équation (3.35) devient :

$$M\ddot{x} + M\Gamma\dot{x} + M\Omega_M^2 \left( 1 - 2g\frac{\Gamma}{\Omega_M} \sin(2\Omega_M t) \right) x = F_T(t). \quad (3.37)$$

Le comportement du système est celui d'un oscillateur harmonique dont le coefficient de raideur  $K$  est modulé et vaut,

$$K(t) = M\Omega_M^2 \left( 1 - 2g\frac{\Gamma}{\Omega_M} \sin(2\Omega_M t) \right). \quad (3.38)$$

Dans les expériences que nous avons présentées jusqu'à maintenant nous agissons sur le miroir en appliquant, par pression de radiation, une force proportionnelle à la vitesse  $\dot{x}$ . On peut envisager d'ajouter une modulation à fréquence double, ce qui reviendrait à appliquer une force du type :

$$F'(t) = 2gM\Gamma \cos(2\Omega_M t)\dot{x}(t). \quad (3.39)$$

L'équation (3.35) d'évolution de l'oscillateur devient

$$M\ddot{x} + M\Gamma(1 - 2g\cos(2\Omega_M t))\dot{x} + M\Omega_M^2 x = F_T(t). \quad (3.40)$$

Le comportement de l'oscillateur est dans ces conditions celui d'un oscillateur dont le taux d'amortissement  $\Gamma$  est modulé à la fréquence  $2\Omega_M$  :

$$\Gamma(t) = \Gamma(1 - 2g\cos(2\Omega_M t)). \quad (3.41)$$

Nous allons voir que cette modulation du taux d'amortissement produit un effet équivalent sur le comportement du résonateur à celui d'une modulation de la raideur. Nous étudierons en particulier l'effet de l'amplification paramétrique sur le mouvement dans l'espace des phases.

Notons que le choix de la modulation de la force avec des fonctions sinus et cosinus dans les équations (3.36) et (3.39) n'enlève rien à la généralité du problème puisqu'il revient simplement à un changement de l'origine des temps pour le mouvement du miroir. La détection des quadratures a cependant une phase bien déterminée et le choix particulier fait pour l'expression des forces permet d'avoir un effet paramétrique en phase avec la détection des quadratures. Ceci simplifie grandement les calculs qui vont suivre.

### Effet sur les quadratures

Nous avons vu qu'au voisinage d'une résonance mécanique, la réponse du miroir à une force extérieure est principalement régie par la réponse du mode résonnant.

On reprend le modèle d'oscillateur harmonique pour décrire le mouvement du miroir dans l'espace des phases, en particulier les équations (3.13) et (3.14) qui donnent la réponse des quadratures à une force extérieure. Dans notre expérience, en plus de la force thermique de Langevin, le miroir est soumis à la force de pression de radiation du faisceau arrière. On suppose que celle-ci est de la forme donnée par les équations (3.36) ou (3.39). Les forces  $F$  et  $F'$  s'écrivent dans l'espace de Fourier :

$$F[\Omega] = -igM\Gamma\Omega_M (x[\Omega - 2\Omega_M] - x[\Omega + 2\Omega_M]), \quad (3.42)$$

$$F'[\Omega] = gM\Gamma (i(\Omega - 2\Omega_M)x[\Omega - 2\Omega_M] + i(\Omega + 2\Omega_M)x[\Omega + 2\Omega_M]). \quad (3.43)$$

On déduit de ces expressions et des équations (3.15) et (3.16) les deux quadratures de chacune des forces  $F$  et  $F'$ . La fréquence d'analyse  $\omega$  étant très petite devant la fréquence de résonance  $\Omega_M$ , on ne garde dans les expressions obtenues que les termes résonnants du type  $x[\Omega_M + \omega]$  et  $x[-\Omega_M + \omega]$ . Les expressions après simplification peuvent s'écrire en fonction des quadratures  $X_1$  et  $X_2$  de la position :

$$F_1[\omega] = F'_1[\omega] = gM\Gamma\Omega_M X_2[\omega], \quad (3.44)$$

$$F_2[\omega] = F'_2[\omega] = gM\Gamma\Omega_M X_1[\omega]. \quad (3.45)$$

Les choix particuliers des fonctions sinus et cosinus dans l'expression des deux forces  $F$  et  $F'$  ainsi que les constantes de normalisation de leur amplitude font que dans l'espace des phases ces deux forces ont exactement les mêmes quadratures. Leurs effets sur les quadratures du mouvement sont donc équivalents. De manière plus générale, un autre choix de phase de la modulation à  $2\Omega_M$  dans les expressions de  $F$  ou  $F'$  reviendrait à une simple rotation dans l'espace des phases.

On détermine les réponses des quadratures  $X_1$  et  $X_2$  à partir des équations (3.13) et (3.14), avec comme force extérieure la force de Langevin  $F_T$  et la force de pression de radiation  $F_{rad}$  dont les quadratures sont de la forme (3.44) et (3.45),

$$X_1[\omega] = -\frac{1}{2M\Omega_M} \left( \frac{1}{-i\omega + \Gamma_1/2} \right) F_{T_2}[\omega], \quad (3.46)$$

$$X_2[\omega] = \frac{1}{2M\Omega_M} \left( \frac{1}{-i\omega + \Gamma_2/2} \right) F_{T_1}[\omega], \quad (3.47)$$

où  $F_{T_1}$  et  $F_{T_2}$  sont les quadratures de la force de Langevin introduites dans la section 3.2.1 et où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont les taux d'amortissement effectif vus par les quadratures  $X_1$  et  $X_2$  et définis par

$$\Gamma_1 = \Gamma(1 + g), \quad (3.48)$$

$$\Gamma_2 = \Gamma(1 - g). \quad (3.49)$$

Ces deux expressions montrent que l'amplification paramétrique a un effet sur les taux d'amortissement effectif qui dépend de la quadrature. Ceux-ci ne sont plus égaux comme dans le cas du refroidissement par friction froide (voir section 3.3). L'amplification paramétrique provoque une dissymétrie dans le comportement des quadratures de la position de l'oscillateur. Par analogie avec le processus de friction froide, la quadrature  $X_1$  est refroidie tandis que la quadrature  $X_2$  est chauffée.



Les quadratures de la force de Langevin n'étant pas corrélées (voir section 3.2), les équations (3.46) et (3.47) montrent qu'il n'y a pas de corrélation entre les deux quadratures  $X_1$  et  $X_2$ . Les deux mouvements sont donc indépendants et leur spectre  $S_{X_1}^{pm}$  et  $S_{X_2}^{pm}$  en présence de l'amplification paramétrique s'écrivent :

$$S_{X_1}^{pm}[\omega] = \frac{\Gamma k_B T}{M\Omega_M^2(\omega^2 + \Gamma_1^2/4)}, \quad (3.50)$$

$$S_{X_2}^{pm}[\omega] = \frac{\Gamma k_B T}{M\Omega_M^2(\omega^2 + \Gamma_2^2/4)}. \quad (3.51)$$

Les spectres correspondent donc toujours à des Lorentziennes mais de largeur et de hauteur différentes selon la quadrature. Le mouvement de chaque quadrature est équivalent à celui d'un oscillateur harmonique à l'équilibre thermodynamique, mais à des températures  $T_1$  et  $T_2$  différentes :

$$T_1 = \frac{\Gamma}{\Gamma_1} T = \frac{T}{1+g}, \quad , \quad T_2 = \frac{\Gamma}{\Gamma_2} T = \frac{T}{1-g}, \quad (3.52)$$

où  $T$  est la température initiale de l'oscillateur. Pour des gains  $g$  positifs, la quadrature  $X_1$  a un spectre de largeur augmentée et d'aire totale diminuée, ce qui correspond à un mouvement refroidi ( $T_1 < T$ ). La quadrature  $X_2$  correspond quant-à-elle à un mouvement chauffé ( $T_2 > T$ ).

Les variances des quadratures se déduisent de l'aire des spectres respectifs et s'écrivent,

$$\Delta X_1^2 = \frac{k_B T_1}{M\Omega_M^2}, \quad (3.53)$$

$$\Delta X_2^2 = \frac{k_B T_2}{M\Omega_M^2}. \quad (3.54)$$

On retrouve les variances prédites par le théorème d'équipartition de l'énergie pour des oscillateurs harmoniques aux températures  $T_1$  et  $T_2$ . Les variances de  $X_1$  et  $X_2$  sont ainsi respectivement diminuée et augmentée par rapport à la situation sans contre-réaction [équation (3.33)], ce qui correspond à une compression du bruit thermique dans l'espace des phases.

On voit également apparaître dans les équations (3.48) et (3.49) une limitation du gain  $g$  de l'amplification paramétrique. Lorsque celui-ci devient égal à l'unité, une des quadratures ( $X_2$  dans notre calcul) a un taux d'amortissement effectif qui s'annule. Le comportement de cette quadrature correspond à celui d'un oscillateur harmonique sans perte. Le système se met alors naturellement à osciller en phase avec cette quadrature. Ceci constitue donc un seuil d'oscillation pour le système. Nous étudierons plus en détail le régime d'oscillation paramétrique ( $g \geq 1$ ) dans la partie 3.5, et nous supposons pour l'instant que le gain  $g$  reste strictement inférieur à 1.

### 3.4.2 Réalisation de l'amplification paramétrique

Le montage expérimental de refroidissement par friction froide permet un contrôle de la position du miroir grâce à la pression de radiation du faisceau arrière. Mesurant

en continu la position du miroir, il est possible de réagir sur le miroir en appliquant une force proportionnelle à la vitesse du miroir. Le principe de l'amplification paramétrique repose sur la modulation à deux fois la fréquence de résonance mécanique du gain de la boucle de contre-réaction. On crée ainsi une force visqueuse modulée en intensité du type de l'équation (3.39). Afin d'observer la compression du bruit thermique dans l'espace des phases, il est nécessaire de détecter les quadratures du mouvement de manière synchrone avec la modulation de la force. On a rajouté dans la boîte de détection des quadratures décrite dans la section 3.1 un système de modulation de la boucle de contre-réaction que nous décrivons dans ce paragraphe.

### Principe général

Le schéma de principe du système de modulation est présenté sur la figure 3.18. Désormais le signal de contre-réaction passe par la boîte pour y être modulé à deux fois la fréquence de résonance. Pour que la détection des quadratures soit synchrone avec

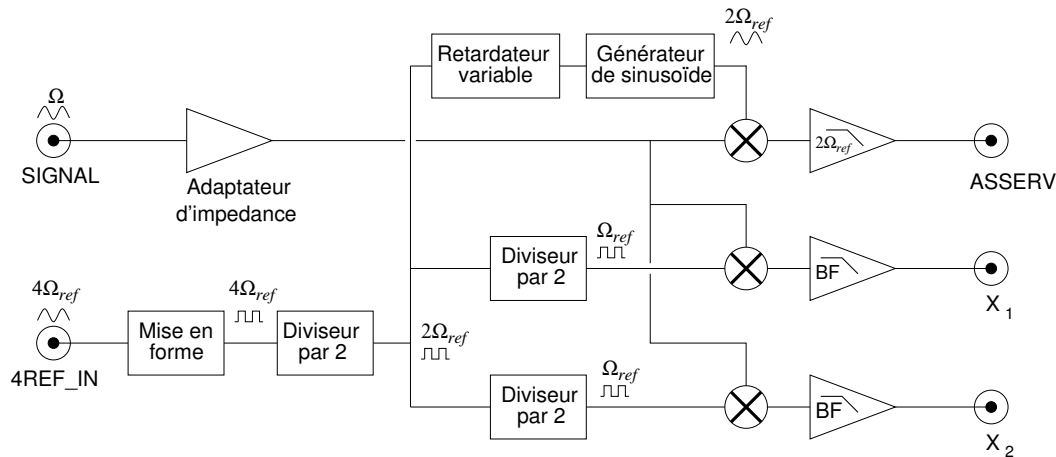


FIG. 3.18 – Principe du montage électronique permettant l'amplification paramétrique et l'extraction des quadratures.

la modulation de la boucle de contre-réaction, on utilise le même signal de référence à une fréquence de  $2 \times \Omega_{ref}$  pour moduler le gain de la boucle de contre-réaction et extraire les quadratures. Le signal de référence est prélevé après le premier diviseur de fréquence (signal 2REF sur la figure 3.2). Il passe d'abord dans un retardateur variable qui permet d'ajuster le déphasage entre la modulation du gain et l'extraction des quadratures. Cela revient en fait à faire tourner les axes des quadratures détectées dans l'espace des phases.

Après le retardateur, le signal de modulation est remis en forme par un générateur de sinusoïde puis multiplié au signal de position provenant de la détection homodyne grâce à un mélangeur identique à ceux utilisés pour l'extraction des quadratures. Une troisième voie sur l'adaptateur d'impédance a été ajoutée à cet effet (figure 3.5). Le signal obtenu est enfin filtré afin d'éliminer les harmoniques produites lors de la multiplication.

### Le générateur de sinusoïde

L'amplification paramétrique repose sur la modulation du gain de la boucle de contre-réaction à la fréquence  $2\Omega_M$ . Le choix de la forme du signal de modulation est à priori arbitraire et seule la composante de fréquence  $2\Omega_M$  contribue à l'amplification paramétrique. Il est juste nécessaire que le signal ne possède pas de composante continue car celle-ci produit de la friction froide qui se superpose à l'amplification paramétrique. Nous avons cependant opté pour un signal sinusoïdal pur pour éviter aux maximum la production d'harmoniques dans le système. Ils seraient en effet susceptibles de produire un signal parasite autour de la fréquence d'analyse  $\Omega_M$ , par multiplication dans les mixeurs avec le signal de modulation ou avec un signal de position provenant d'un autre mode acoustique dont la fréquence est proche d'un multiple de la fréquence  $\Omega_M$ .

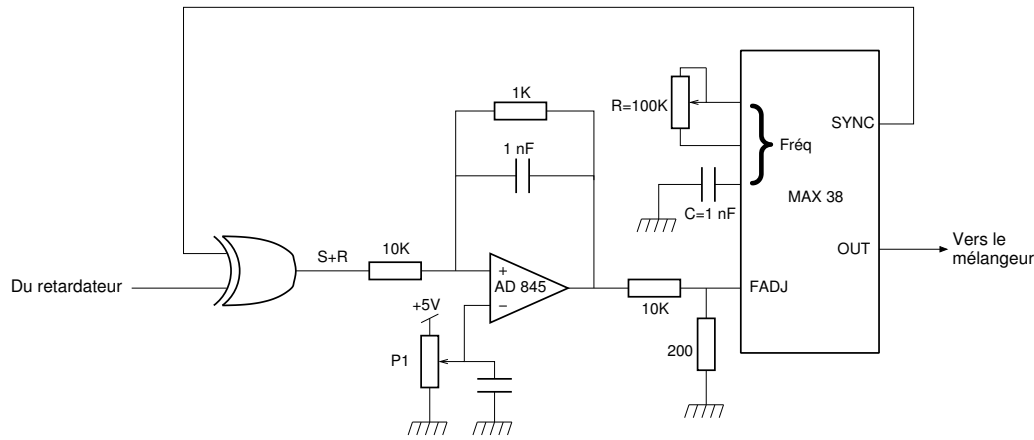


FIG. 3.19 – Générateur de sinusoïde avec sa boucle à verrouillage de phase.

Le MAX 38 est un générateur de signaux de fréquence ajustable entre quelques hertz et  $20\text{ MHz}$ . Il est utilisé ici pour fabriquer une sinusoïde très pure à  $2\Omega_{ref}$  en phase avec le signal carré à  $2\Omega_{ref}$  sortant du retardateur. La fréquence d'oscillation du circuit libre est définie par la valeur de  $R$  et  $C$  (voir figure 3.19). Le MAX 38 possède également une entrée FADJ permettant de faire varier sur une plage restreinte la fréquence en fonction de la tension appliquée. Il travaille ainsi comme un VCO et il est possible de l'asservir en phase sur un signal extérieur en utilisant le principe de la boucle à verrouillage de phase. On utilise pour cela la sortie SYNC du MAX 38 qui délivre un signal carré parfaitement synchronisé avec le signal sinusoïdal OUT délivré par le circuit. Ce signal carré est additionné avec le signal de référence grâce à une porte XOR. Le signal S+R qui résulte de cette addition est rectangulaire avec un cycle dépendant de la phase des deux signaux à l'entrée de la porte. Le cycle est de 50% s'ils sont en quadrature, tend vers zéro s'ils sont en phase et vaut 100% s'ils sont en opposition de phase. En moyennant ce signal, on peut s'en servir comme signal d'erreur pour asservir la phase de la sinusoïde sur le signal de référence à  $2\Omega_{ref}$ . Dans ce but le signal est envoyé aux bornes d'un amplificateur opérationnel qui effectue la comparaison avec un point de consigne, défini par le potentiomètre P1. Le montage en intégrateur de l'amplificateur opérationnel permet d'avoir un gain très grand à basse fréquence, avec une fréquence

de coupure fixée à  $15kHz$ . Le résultat agit en contre-réaction sur la broche FADJ.

Pour asservir le générateur, on ajuste la résistance  $R$  de manière à approcher la fréquence d'oscillation naturelle du générateur de la fréquence de référence. L'accrochage se fait alors quasiment automatiquement. Il est aussi possible de faire osciller le générateur à des fréquences multiples ou sous-multiples de la fréquence du signal de référence. En particulier, à la fréquence  $\Omega_{ref}$ , le signal peut servir à commander directement l'acousto-optique du faisceau arrière et créer une force monochromatique en phase avec la détection des quadratures. Ceci a servi en particulier à tester le dispositif d'extraction des quadratures (voir section 3.1).

### Le retardateur

Pour synchroniser le générateur de sinusoïde avec une phase arbitraire par rapport au signal de référence, une solution consiste à changer la référence de tension de l'asservissement de phase du MAX 38. Ceci a pour effet de modifier le cycle du signal S+R (voir schéma de la figure 3.19) et donc le déphasage entre la sinusoïde et la référence. Cependant le déphasage maximal que l'on peut obtenir est inférieur à  $\frac{\pi}{2}$  à la fréquence  $2\Omega_{ref}$ , ce qui correspond à une rotation dans l'espace des phases d'un angle inférieur à  $\frac{\pi}{4}$ . Compte tenu des déphasages imposés par les autres systèmes électroniques (détection homodyne, filtre passe-bande et pilote de l'acousto-optique), on peut se retrouver dans une situation où il est impossible d'aligner la compression du bruit thermique avec une des quadratures.

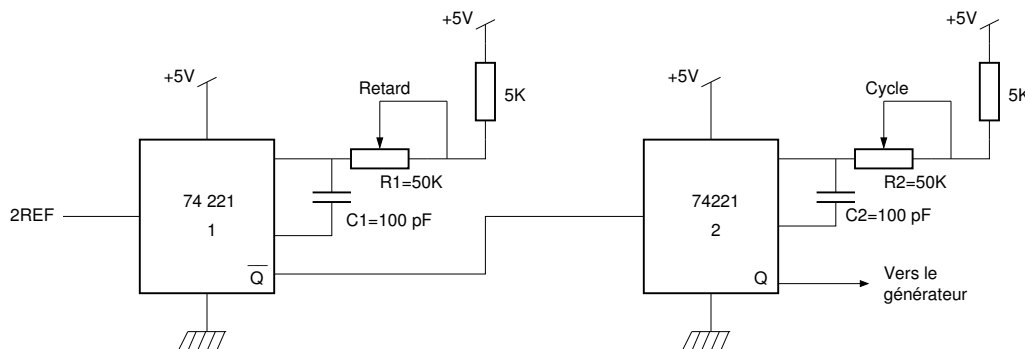


FIG. 3.20 – Retardateur de signaux carrés.

Pour augmenter les possibilités de déphasage entre la modulation du gain de la boucle de contre-réaction et l'extraction des quadratures, on a recours à une ligne à retard dont le schéma électronique est présenté sur la figure 3.20. Elle est composée de deux monostables qui créent un signal carré identique à la référence mais pouvant être retardé d'une phase allant de  $0$  à  $\pi$ . On utilise les deux monostables non redéclenchables du circuit 74 221. Le monostable 1 se déclenche sur le flanc montant du signal de référence à  $2\Omega_{ref}$  et on utilise sa sortie inverseuse  $\overline{Q}$  pour créer un autre flanc montant décalé dans le temps de  $R1 \times C1$ . Cette constante de temps ne peut excéder cependant la période de la référence sous peine de manquer le flanc montant suivant. Ceci limite le retard à une période au maximum. Le flanc montant déclenche le monostable 2 qui

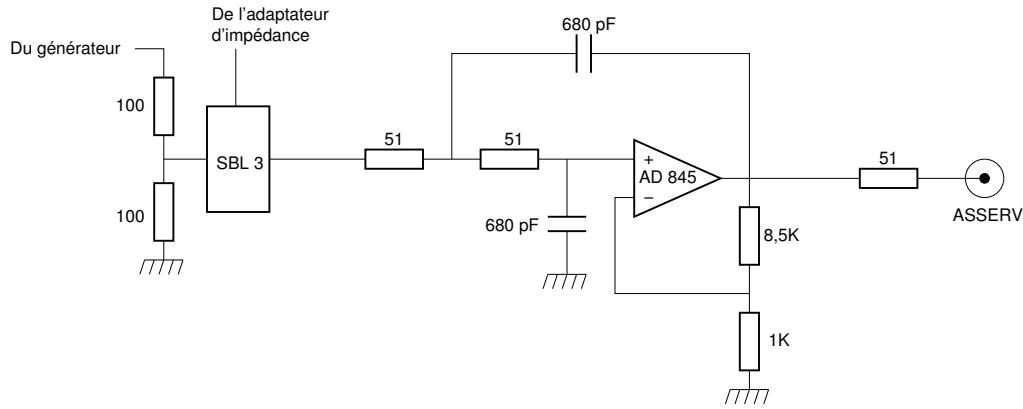


FIG. 3.21 – Filtre haute fréquence d'ordre 2.

réalise un créneau de durée  $R_2 \times C_2$ . Cette constante de temps est ajustée de manière à avoir un signal carré en sortie.

En alliant le déphasage créé par le retardateur, et la possibilité de déphaser le MAX 38 en jouant sur le point de consigne de l'asservissement en phase, on peut obtenir une rotation dans l'espace des phases de plus de  $\frac{\pi}{2}$ . Ceci permet d'aligner les effets de l'amplification paramétrique avec une des deux quadratures.

### Suppression des harmoniques

Le signal de contre-réaction est multiplié avec le signal provenant du générateur de sinusoïde grâce à un mixeur SBL3. Le signal produit possède des composantes aux fréquences  $\Omega_M$  et  $3 \times \Omega_M$  et éventuellement des harmoniques de ces fréquences. Mais comme on l'a vu dans la section théorique 3.4.1, seules les composantes de la force ayant des fréquences proches de  $\Omega_M$  contribuent à l'amplification paramétrique. Les harmoniques doivent être éliminées afin de ne pas saturer le modulateur acousto-optique.

Dans ce but, le signal de contre-réaction modulé est filtré par un filtre passe-bas du second ordre de fréquence de coupure ajustée à  $2\Omega_{ref}$ , dont le schéma est reporté sur la figure 3.21. On utilise un montage similaire au passe-bas filtrant les signaux de quadratures de la position, mais l'amplificateur opérationnel OP 27 est remplacé par un AD 845 dont la bande passante atteint 16 MHz en gain unité. La fonction de transfert est donnée par l'équation (3.4). Le gain est choisi pour avoir une réponse du filtre plate en dessous de la fréquence de coupure du filtre. Les valeurs des composants sont fixées pour pouvoir travailler sur le mode fondamental Gaussien du miroir plan-convexe. La fréquence de résonance mécanique  $\Omega_M$  de ce mode étant de l'ordre de 2 MHz, on prend une fréquence de coupure du filtre de 4,6 MHz ce qui laisse passer les composantes à  $\Omega_M$  et coupe les multiples impairs d'ordres supérieurs.

Nous avons testé la linéarité de l'amplification paramétrique. Pour cela on utilise deux synthétiseurs haute fréquence. Le premier, un synthétiseur IFR 2030, est branché sur l'entrée 4REF\_IN de la boîte et délivre un signal de fréquence 8 MHz. Le second, un synthétiseur IFR 2023, est injecté sur l'entrée SIGNAL de la boîte avec une puissance variable et une fréquence de 2,001 MHz. Le petit décalage sur la fréquence du second

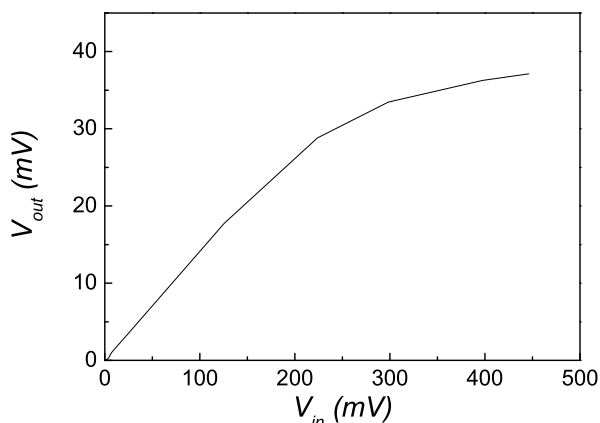


FIG. 3.22 – Test de la linéarité du gain de l’amplification paramétrique : amplitude de la sortie ASSERV en fonction de l’amplitude de l’entrée SIGNAL.

synthétiseur permet de s’assurer que ce que l’on observe résulte bien de la multiplication du signal et de la référence 2REF et non d’un effet parasite. On visualise le signal ASSERV sur un analyseur de spectre HP 8560E. On constate deux pics à des fréquences de respectivement 1999  $kHz$ , et 2001  $kHz$ , le second pic étant 38  $dB$  en dessous du premier. Le premier pic correspond au produit attendu entre le signal d’entrée et la référence, tandis que le second est un résidu du signal d’entrée.

La figure 3.22 montre l’amplitude du pic à 1999  $kHz$  lorsque l’on fait varier l’amplitude du signal d’entrée. La courbe présente une bonne linéarité pour des signaux inférieurs à 200  $mV$  et l’on observe une saturation du gain pour des amplitudes supérieures.

### 3.4.3 Résultats expérimentaux

#### Procédure expérimentale

Les résultats présentés dans cette partie sont obtenus sur le mode fondamental Gaussien du miroir plan-convexe. Les conditions de mesure sont identiques à celles de l’expérience de mesure des quadratures de la position de la partie précédente.

La boucle de contre-réaction du montage de friction froide intègre désormais le système de modulation du gain. La figure 3.23 présente le schéma de principe de l’amplification paramétrique. La fréquence de résonance mécanique du mode est tout d’abord déterminée précisément en mesurant le spectre de bruit thermique sur l’analyseur de spectre, la boucle de contre-réaction étant à ce moment débranchée. Un ajustement du spectre par une Lorentzienne donne la fréquence de résonance avec une précision meilleure que le hertz. Le signal de référence à la fréquence  $4\Omega_M$  est fournie par un synthétiseur commercial.

Le filtre passe-bande à la sortie de la détection homodyne est utilisé pour éliminer la contribution des autres modes acoustiques du miroir afin de ne pas saturer les

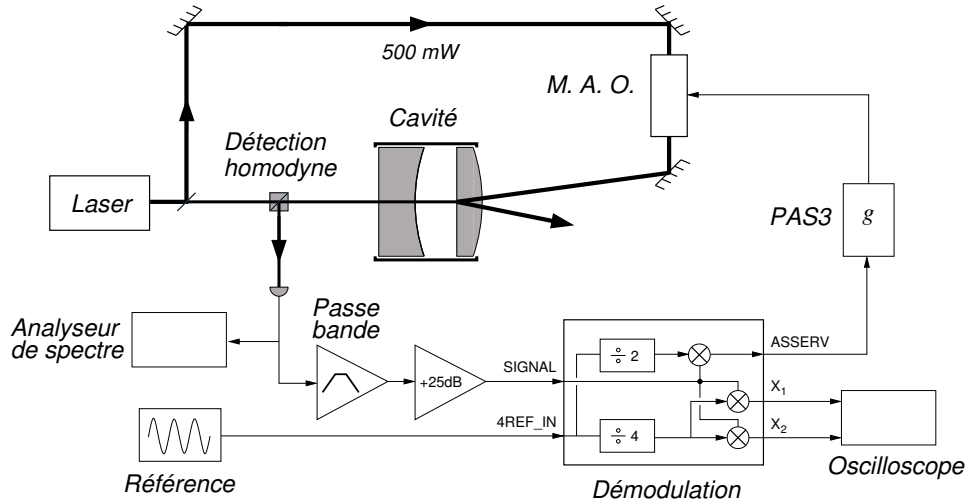


FIG. 3.23 – Schéma de l'expérience d'amplification paramétrique.

différents amplificateurs et filtres de la boucle de contre-réaction. L'atténuateur variable électronique PAS3, utilisé dans le montage de friction froide, est inséré après le système de modulation. Il permet de régler le gain total de la boucle. Le signal modulé et amplifié est alors envoyé vers le pilote de l'acousto-optique. Les traces des deux quadratures du signal sont acquises sur l'oscilloscope numérique et traitées par l'ordinateur selon la procédure déjà décrite à la section 3.2.2.

Avant de lancer l'acquisition, on règle le déphasage de la modulation du gain pour aligner les effets d'amplification paramétrique avec l'extraction des quadratures. Comme nous l'avons déjà noté, cet alignement correspond à une simple rotation des axes d'observation dans l'espace des phases. Cela permet d'extraire directement les deux quadratures indépendantes  $X_1$  et  $X_2$ , dont les mouvements sont respectivement refroidi et chauffé. L'alignement est réalisé en poussant le gain de la boucle de contre-réaction au dessus du seuil d'oscillation paramétrique comme nous le verrons dans la partie 3.5. Le système se met alors en oscillation et son mouvement dans l'espace des phases présente une position moyenne non nulle. On règle le déphasage jusqu'à obtenir une valeur moyenne nulle pour la trace de la quadrature  $X_1$ . Le gain du PAS3 est ensuite baissé pour que l'oscillation paramétrique disparaisse ( $g < 1$ ) et pour revenir à des conditions d'amplification paramétrique.

### Observation de l'amplification paramétrique

La figure 3.24 montre les traces temporelles des quadratures  $X_1$  et  $X_2$  acquises sur un temps de 300 ms en présence de l'amplification paramétrique. On voit nettement que la trace de la quadrature  $X_2$  présente une excursion plus importante que celle de la quadrature  $X_1$ . La courbe de gauche de la figure 3.25 présente le mouvement résultant dans l'espace des phases, pour un temps d'acquisition de 500 ms. Les paramètres de la mesure étant les mêmes que dans l'expérience de l'extraction des quadratures (10 mW

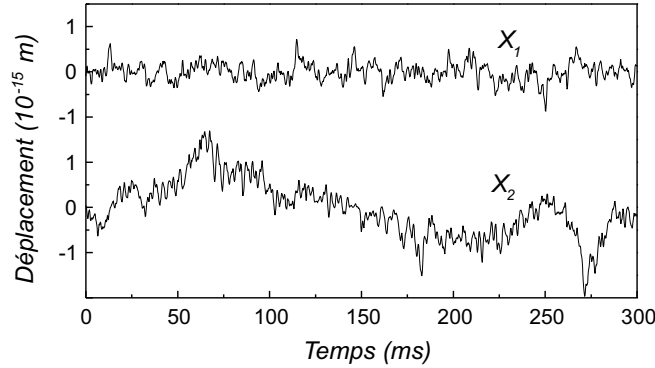


FIG. 3.24 – Traces temporelles des quadratures  $X_1$  et  $X_2$  en présence de l'amplification paramétrique acquises sur un temps de 300  $ms$ .

pour l'oscillateur local, 100  $\mu W$  injecté dans la cavité, même filtre à l'entrée de la boîte de démodulation), on peut utiliser la calibration des déplacements du miroir réalisée dans la section 3.1.4 pour graduer les échelles des figures 3.24 et 3.25 en mètre.

Le mouvement du miroir soumis à l'amplification paramétrique présente une forte dissymétrie dans l'espace des phases, à la différence des mouvements thermiques libre (figure 3.12) et refroidi par friction froide (figure 3.16). La figure 3.25 présente également l'histogramme du mouvement pour une acquisition d'une dizaine de minutes. La distribution du mouvement dans l'espace des phases présente toujours une forme Gaussienne mais de largeur différente dans les deux directions de l'espace  $X_1$  et  $X_2$ . Les dispersions des quadratures dans le cas présent sont :

$$\Delta X_1 = 27 \times 10^{-17} m \quad , \quad \Delta X_2 = 78 \times 10^{-17} m. \quad (3.55)$$

Ces valeurs sont à comparer à la dispersion de  $36.6 \times 10^{-17} m$  du mouvement libre du miroir [équation 3.26]. La quadrature  $X_2$  a une dispersion augmentée et correspond donc à un état chauffé, la quadrature  $X_1$  correspond quant-à-elle à un état refroidi. Les équations (3.52), (3.53) et (3.54) permettent d'estimer le gain de l'amplification paramétrique. Elles donnent respectivement un gain  $g$  de 0,84 et 0,78.

D'après l'équation (3.27) une quadrature quelconque  $X_\theta$  possède une distribution Gaussienne mais dont la variance  $\Delta X_\theta^2$  dépend de l'angle  $\theta$ . Grâce aux équations (3.53) et (3.54) et au fait que les quadratures  $X_1$  et  $X_2$  sont décorréées, on trouve :

$$\Delta X_\theta^2 = \left( \frac{\cos^2(\theta)}{1+g} + \frac{\sin^2(\theta)}{1-g} \right) \frac{k_B T}{M \Omega_M^2} = \frac{1-g \cos(2\theta)}{1-g^2} \frac{k_B T}{M \Omega_M^2}. \quad (3.56)$$

La figure 3.26 présente la distribution de la quadrature  $X_\theta$  pour un angle  $\theta$  allant de 0 à  $\pi$ . Les courbes obtenues présentent toutes un profil Gaussien. La courbe  $\Delta X_\theta^2$  tracée sur le coté de la figure présente bien la dépendance en  $\cos(2\theta)$  attendue avec son minimum en  $\theta = 0$  correspondant à la quadrature  $X_1$  refroidie et un maximum en  $\theta = \pi/2$  correspondant à la quadrature  $X_2$  chauffée.

Les courbes de gauche de la figure 3.27 présentent les spectres des deux quadratures calculés par FFT lors de l'acquisition des traces temporelles de  $X_1$  et  $X_2$  et tracés



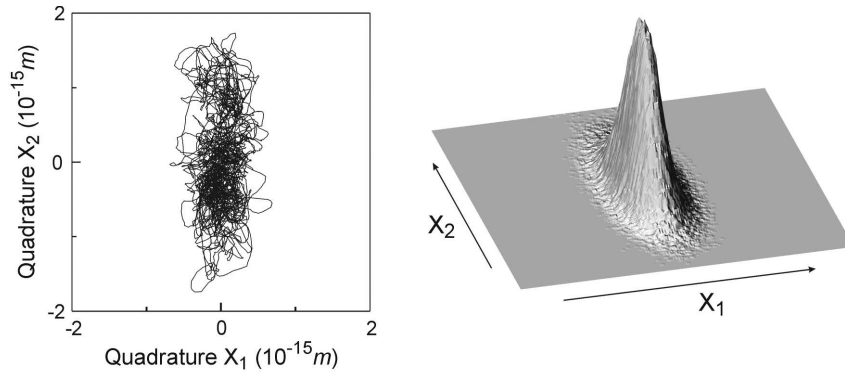


FIG. 3.25 – Trajectoire et distribution dans l'espace des phases du mouvement du miroir en présence de l'amplification paramétrique. La variance du mouvement dans la direction  $X_1$  est diminuée, celle dans la direction  $X_2$  est augmentée.

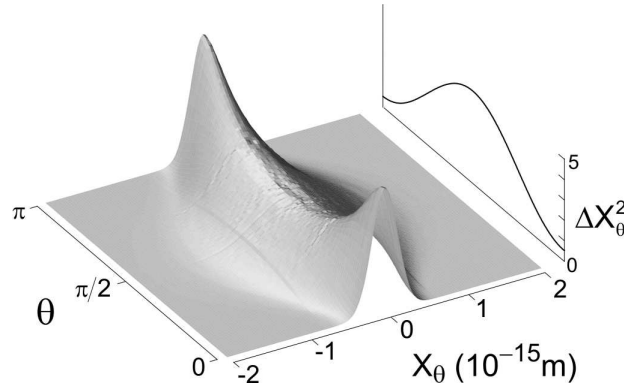


FIG. 3.26 – Distribution de la quadrature  $X_\theta$  du mouvement en présence de l'amplification paramétrique en fonction de l'angle  $\theta$ . La variance  $\Delta X_\theta^2$  de la quadrature  $X_\theta$ , normalisée à la variance thermique, est tracée sur le coté droit en fonction de  $\theta$ .

en échelle semi-logarithmique. Pour comparaison le spectre de bruit thermique de la figure 3.14 a été reporté sur le graphe. Les deux spectres ont des formes Lorentziennes mais de largeur et de hauteur différentes. La largeur est augmentée par rapport à la situation thermique libre pour la quadrature  $X_1$  et diminuée pour la quadrature  $X_2$ . Un ajustement des spectres par des Lorentziennes centrées en zéro donne les largeurs respectives des deux spectres reliées au taux d'amortissement effectif. On trouve des taux d'amortissement  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  égaux respectivement à  $2\pi \times 86 \text{ Hz}$  et  $2\pi \times 5,6 \text{ Hz}$ . Ces valeurs correspondent, d'après les équations (3.48) et (3.49), à un gain de l'amplification paramétrique de respectivement 0,95 et 0,87, en assez bon accord avec les valeurs déduites de la modification des variances.

Les hauteurs des spectres sont différentes pour les quadratures refroidie et chauffée. Les ajustement Lorentziens permettent de déterminer les aires  $A_1$  et  $A_2$  des spectres, égales aux variances des deux quadratures. On trouve des valeurs en accord avec les

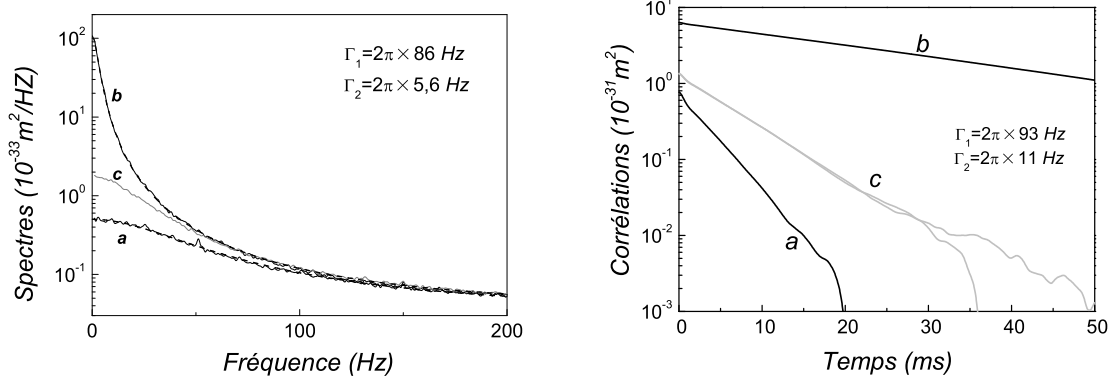


FIG. 3.27 – Figure de gauche : spectres des quadratures du mouvement du miroir en présence de l’amplification paramétrique. Figure de droite : fonctions d’auto-corrélation des quadratures. Les courbes *a* correspondent à la quadrature  $X_1$ , les courbes *b* à  $X_2$ , et les courbes *c* au cas thermique libre.

valeurs précédentes [équation (3.55)] :

$$\Delta X_1 = \sqrt{A_1} = 27 \times 10^{-17} m \quad , \quad \Delta X_2 = \sqrt{A_2} = 99 \times 10^{-17} m. \quad (3.57)$$

Finalement les fonctions d’autocorrélation des deux quadratures sont présentées sur la courbe de droite de la figure 3.27. Les fonctions d’auto-corrélation dans le cas thermique sont également représentées. L’expression théorique des corrélations temporelles se déduit des spectres [équations (3.50) et (3.51)] par transformée de Fourier inverse :

$$C_{11}^{pm}(\tau) = \Delta X_1^2 \exp(-\Gamma_1 \tau / 2), \quad (3.58)$$

$$C_{22}^{pm}(\tau) = \Delta X_2^2 \exp(-\Gamma_2 \tau / 2). \quad (3.59)$$

$$(3.60)$$

Un ajustement des courbes expérimentales par ces expressions donne des variances et des taux d’amortissement similaires à ceux obtenus directement à partir de la distribution dans l’espace des phases et à partir des spectres. Nous avons également vérifié que les mouvements des quadratures sont indépendants, c’est-à-dire  $C_{12}^{pm}(\tau) \equiv 0$ .

### Étude de l’amplification en fonction du gain

Les six estimations du gain calculées à partir des variances, des aires et des largeurs des spectres donnent un gain moyen de 0,85 pour la réalisation particulière présentée ci-dessus. Nous avons mené une étude systématique du comportement du miroir en fonction du gain de l’amplification paramétrique. Les acquisitions des spectres et des variances des quadratures ont été répétées pour des gains différents du circuit PAS3 de la boucle de contre-réaction.

Pour chaque acquisition on détermine un gain moyen déduit comme précédemment en moyennant les six valeurs calculées à partir des variances, des aires et des largeurs

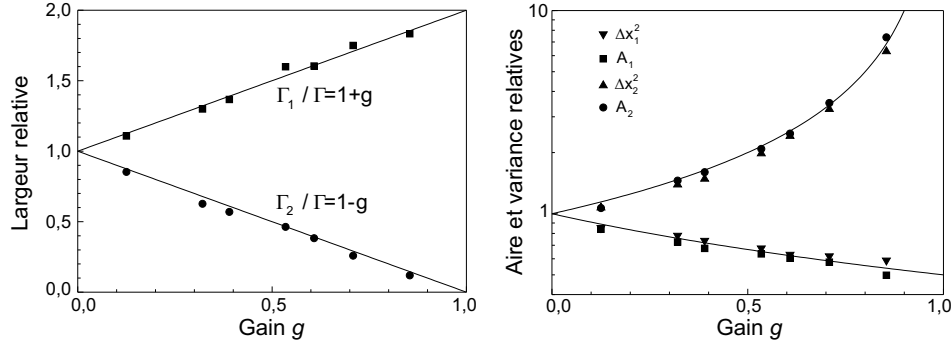


FIG. 3.28 – Figure de gauche : largeur relative des spectres des deux quadratures en fonction du gain ; les courbes continues sont les valeurs théoriques  $1 + g$  et  $1 - g$ . Figure de droite : variances  $\Delta X_i^2$  de la distribution du mouvement et aires  $A_i$  des spectres pour les deux quadratures ; les courbes continues sont les fonctions théoriques  $1/(1 + g)$  et  $1/(1 - g)$ .

des spectres. La figure 3.28 présente les largeurs des spectres, leur aire et les variances des deux quadratures en fonction du gain. Chacune des courbes est normalisée à la valeur du paramètre à l'équilibre thermique sans contre-réaction. Nous avons restreint nos mesures à des gains inférieurs à 0,9, car au delà le système devient instable et se met de temps en temps en oscillation. Il est alors impossible de moyennner les acquisitions pendant plus d'une ou deux minutes, et les courbes deviennent inexploitable.

Ces mesures sont en très bon accord avec les valeurs théoriques données par les équations (3.48), (3.49), (3.53) et (3.54) qui sont représentées sur les graphes, en ligne continue, sans aucun paramètre ajustable. Les taux d'amortissement effectif ont bien une dépendance linéaire avec le gain, avec des pentes opposées l'une de l'autre. La variance de la quadratures  $X_2$  augmente et diverge lorsque le gain tend vers 1, alors que celle de la quadrature  $X_1$  tend vers 0,5.

### 3.5 Oscillation paramétrique

Nous terminons cette étude du mouvement dans l'espace des phases par l'observation du comportement du miroir au dessus du seuil c'est-à-dire pour des gains  $g$  de la boucle de contre-réaction supérieurs à l'unité. Dans la situation où l'amplification paramétrique atteint et dépasse le seuil, le système part en oscillation. La distribution du mouvement n'est alors plus centrée à l'origine de l'espace des phases mais en un point de l'axe de la quadrature chauffée. On peut comprendre ce comportement à partir de l'équation d'évolution du mouvement en présence de la force de contre-réaction paramétrique [équation (3.40)]. En négligeant la force de Langevin  $F_T$ , l'évolution temporelle des fonctions lentement variables  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  décrivant les deux quadratures s'écrit :

$$X_1(t) = X_1(0) e^{-(1+g)\Gamma t}, \quad (3.61)$$

$$X_2(t) = X_2(0) e^{(g-1)\Gamma t}. \quad (3.62)$$

La quadrature  $X_1$  tend vers zéro quelles que soient les conditions initiales et la valeur du gain. La quadrature  $X_2$  quant-à-elle diverge exponentiellement dès que le gain  $g$

dépasse 1. L'amplitude des oscillations devrait donc croître exponentiellement avec une constante de temps  $1/\Gamma(g - 1)$ .

Il existe cependant des phénomènes de saturation dans la boucle de contre-réaction qui vont limiter l'amplitude de la quadrature  $X_2$  à une valeur finie. On peut penser au montage servant à moduler le gain à deux fois la fréquence de résonance mécanique, dont la courbe de réponse en fonction de l'amplitude du signal entrant (figure 3.22) montre que le gain diminue pour de fortes amplitudes. Le gain est également limité par l'amplitude maximale de la force de pression de radiation qu'il est possible d'exercer sur le miroir en modulant le faisceau arrière.

Comme dans le cas d'un laser au dessus du seuil ou d'un oscillateur paramétrique optique [59, 60], on peut modéliser ces effets de saturation en tenant compte des termes non linéaires dans l'expression du gain, c'est-à-dire en ajoutant au gain  $g$  un terme proportionnel à l'amplitude du mouvement du miroir. Malheureusement, la dépendance du gain avec l'amplitude est difficile à déterminer expérimentalement. Nous verrons toutefois dans la suite, que l'on peut relier l'amplitude maximale de l'oscillation du miroir à la puissance du faisceau arrière.

Notons également que l'analogie avec l'amplificateur et l'oscillateur paramétrique optique s'étend aux fluctuations. Comme pour la compression des fluctuations quantiques du champ, on s'attend à ce que la compression des fluctuations thermiques soit maximale au voisinage du seuil d'oscillation, là où les effets des non linéarités sont les plus importants.

### 3.5.1 Observation de l'oscillation

Nous avons observé le mouvement du miroir en présence de l'amplification paramétrique avec un gain de la boucle supérieur à 1. Pour faire la mesure, on part d'une situation d'amplification paramétrique où la quadrature  $X_1$  est refroidie et la quadrature  $X_2$  est chauffée, puis on augmente le gain de la boucle de contre-réaction en jouant sur le réglage de l'atténuateur PAS3. La valeur du gain est difficilement mesurable mais on sait que l'on se trouve dans une situation d'oscillation paramétrique lorsque la trace de la quadrature  $X_2$  ne repasse plus par 0 pendant un temps relativement long. La figure 3.29 montre le comportement temporel des quadratures pour un réglage du PAS3 juste au dessus du seuil. On voit sur le graphe que la quadrature  $X_2$  possède de fortes fluctuations comme dans le cas de l'amplification paramétrique mais elle varie autour d'une valeur moyenne non nulle. Cela prouve que le miroir oscille à la fréquence  $\Omega_M$  avec une phase bien définie et une amplitude de valeur moyenne non nulle.

On voit également qu'au bout d'un certain temps la trace temporelle de la quadrature  $X_2$  change de signe et se retrouve dans une situation symétrique où ses fluctuations sont similaires mais sa valeur moyenne est opposée. La trace présentée est un échantillon de l'acquisition et de tels changements de signe interviennent de manière aléatoire avec une fréquence de l'ordre de un saut toutes les 30 secondes pour ce réglage du gain.

Ce phénomène de changement de la phase d'oscillation s'explique par le fait que le système possède deux états d'oscillation stable. L'équation du mouvement en présence

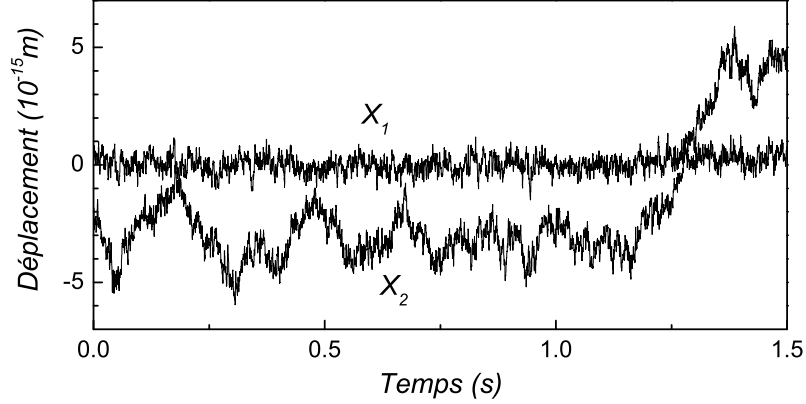


FIG. 3.29 – Traces temporelles des quadratures du mouvement pour une valeur du gain au dessus du seuil d'oscillation paramétrique. La quadrature  $X_2$  n'a plus une valeur moyenne nulle.

de la modulation du taux d'amortissement s'écrit :

$$\ddot{x}(t) + \Gamma(1 - 2g \cos(2\Omega_M t)) \dot{x}(t) + \Omega_M^2 x(t) = \frac{1}{M} F_T(t). \quad (3.63)$$

La force de Langevin étant un bruit blanc, l'équation est invariante par un changement de l'origine du temps d'une quantité  $T = \pi/\Omega_M$ . La détection des quadratures se faisant à la fréquence  $\Omega_M$ , le temps  $T$  correspond à un déphasage de  $\pi$ . Le mouvement du miroir dépend de la réalisation de la force de Langevin mais il doit être similaire à lui-même par une rotation d'angle  $\pi$  de l'espace des phases. Ainsi la probabilité que le miroir oscille autour d'une position  $(X_1, X_2)$  est la même qu'autour de la position  $(-X_1, -X_2)$ .

Sous l'effet des fluctuations de position dues à la force de Langevin, le mouvement du miroir peut se retrouver au voisinage de l'origine qui est un point de fonctionnement instable dans le régime d'oscillation paramétrique. Le miroir peut alors repartir en oscillation en gardant la même phase ou avec une phase différente, comme le montre la figure 3.29.

### 3.5.2 Distribution du mouvement dans l'espace des phases

Comme dans les parties précédentes, nous avons mesuré la distribution du mouvement dans l'espace des phases en réalisant l'histogramme des traces temporelles des quadratures. Les courbes obtenues pour des gains croissants sont tracées sur la figure 3.30. La distribution n'est clairement plus centrée en l'origine et l'on constate la présence de deux pics alignés sur l'axe de la quadrature  $X_2$ . Le miroir, comme on l'a expliqué précédemment, reste un certain temps autour de la position  $\langle X_2 \rangle$  puis saute autour de la position  $-\langle X_2 \rangle$ .

Pour la première courbe où le gain de la boucle reste faible, le mouvement repasse souvent à proximité de l'origine et on observe de nombreux changements de la phase

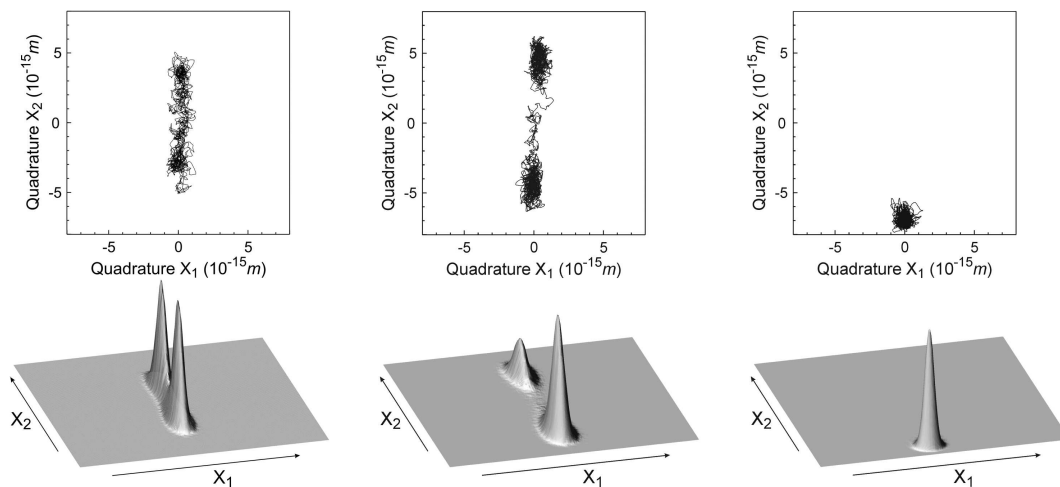


FIG. 3.30 – Distributions du mouvement dans l'espace des phases lorsque le système est en oscillation paramétrique. Les courbes sont obtenues avec des valeurs croissantes du gain de la boucle de contre-réaction.

d'oscillation (plus d'une vingtaine) au cours des dix minutes d'acquisition. On obtient une bonne statistique sur l'occupation des deux sites et les deux pics sont parfaitement symétriques.

La seconde courbe est obtenue pour un gain plus élevé et l'on voit que l'amplitude moyenne d'oscillation est plus importante que pour la première acquisition. Le système passe alors moins souvent au voisinage de l'origine et reste un temps beaucoup plus important autour de la même valeur moyenne d'oscillation (jusqu'à plusieurs minutes). Même si statistiquement le miroir passe la moitié du temps d'un côté et de l'autre de l'espace des phases, sur un temps d'acquisition de 10 minutes on n'obtient pas deux pics de hauteur semblable. Dans le cas particulier de la figure 3.30, le miroir n'a fait qu'un seul saut et est ensuite resté à proximité de la solution négative. Il y a donc eu une accumulation de points autour du pic négatif, ce qui explique la grande dissymétrie entre les deux pics.

Comme on peut le voir sur les deux premières courbes, l'oscillation paramétrique s'accompagne d'un effet de compression du bruit thermique. On s'attend à avoir au voisinage du seuil d'oscillation une réduction de la quadrature  $X_1$  proche de 50%. La variance expérimentale  $\Delta X_1^2$  de la seconde courbe est de 0,55 fois la variance du mouvement thermique sans contre-réaction.

La dernière courbe est obtenue pour un très fort gain. La distribution ne présente plus qu'un seul pic. La probabilité d'assister à un saut entre les deux phases possibles d'oscillation est quasiment nulle pendant le temps de l'acquisition et le mouvement reste au voisinage d'une seule des deux solutions. L'amplitude d'oscillation observée sur cette courbe est en fait l'amplitude maximale que l'on peut obtenir avec notre montage expérimental. La limitation provient ici de l'intensité de la force de pression de radiation du faisceau arrière. La boucle de contre-réaction sature le modulateur acousto-optique qui produit un faisceau lumineux modulé quasiment en tout ou rien à la fréquence  $\Omega_M$ . On peut calculer dans ce cas l'amplitude théorique de l'oscillation si

l'on considère qu'elle est la réponse à une force de pression de radiation  $F_{\text{rad}}$  modulée en intensité à la fréquence  $\Omega_M$  avec une forme carrée. La composante de fréquence  $\Omega_M$  d'une telle force vaut :

$$F_{\text{rad}}(t) = 2 \frac{P}{c} \frac{4}{\pi} \cos(\Omega_M t), \quad (3.64)$$

où  $P$  est la puissance du faisceau arrière. Le facteur  $4/\pi$  est un facteur correctif dû au fait que la modulation est carrée et non sinusoïdale. La réponse de la quadrature  $X_2$  à cette force résonnante est donnée par l'équation (3.14) :

$$\langle X_2 \rangle = \frac{1}{M\Gamma\Omega_M} \times 2 \frac{P}{c} \frac{4}{\pi}. \quad (3.65)$$

Avec une puissance de  $500 \text{ mW}$ , on trouve une amplitude d'oscillation de  $6 \times 10^{-15} \text{ m}$ , en très bon accord avec le déplacement moyen observé dans l'espace des phases.

On peut noter que pour cette dernière courbe l'effet de compression du bruit thermique disparaît et on retrouve des variances similaires à celles du mouvement thermique. Comme dans le cas de l'oscillateur paramétrique, la compression est maximale au voisinage du seuil d'oscillation [38]. Loin du seuil, les effets non-linéaires deviennent négligeables et les fluctuations du système ne sont plus comprimées.

## Chapitre 4

# Etude des modes internes de vibration d'un miroir

Nous avons présenté dans les chapitres 2 et 3 une étude détaillée du bruit thermique dû à l'excitation d'un mode acoustique interne du miroir. Ce bruit constitue une limitation dans les expériences optiques de grande précision et les caractéristiques des miroirs doivent être choisies de façon à avoir un bruit aussi faible que possible dans la plage de fréquences d'analyse de l'appareil.

De nombreux travaux théoriques ont été menés sur l'effet du bruit thermique interne dans les détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles. Pour ces dispositifs, la plage d'analyse est plus basse que les fréquences de résonance acoustique, et c'est le fond thermique à basse fréquence qu'il est nécessaire de minimiser [8, 9, 10]. Deux approches ont été utilisées pour calculer ce fond thermique. La première, présentée dans le chapitre 1, est basée sur une décomposition modale du mouvement et sur une sommation des contributions basse fréquence de chaque mode [61, 62]. La seconde est basée sur une application directe du théorème fluctuations-dissipation à fréquence nulle [63, 64, 65]. Ces deux approches montrent qu'il est nécessaire de minimiser l'angle de perte, c'est-à-dire avoir des facteurs de qualité mécanique aussi grands que possible. On arrive à la même conclusion pour l'étude des effets quantiques de la pression de radiation [33], qu'il s'agisse des effets non linéaires induits à basse fréquence (compression des fluctuations quantiques du champ par couplage optomécanique [22]), ou d'effets observables autour d'une fréquence de résonance mécanique (mesure quantique non destructive [24], limites quantiques dans les mesure de petits déplacements [16]). Dans tous les cas, il est nécessaire d'avoir de grands facteurs de qualité mécanique, supérieurs à  $10^6$ . Il est également préférable d'avoir une masse effective très petite, de façon à maximiser la réponse mécanique du miroir à la pression de radiation.

Nous décrivons dans ce chapitre les études que nous avons menées pour optimiser ces paramètres mécaniques [66]. Nous avons tout d'abord placé la cavité à miroir mobile dans une enceinte à vide, de façon à réduire les pertes mécaniques par rayonnement acoustique. Ceci nous a permis d'étudier la dépendance des facteurs de qualité mécanique avec la pression de l'air (partie 4.1). Nous avons ensuite cherché à caractériser les propriétés mécaniques des modes acoustiques, en particulier en observant leur profil spatial (partie 4.2 et suivantes). Ceci nous a permis d'une part de



valider les modèles théoriques basés sur la décomposition modale qui sont utilisés pour l'étude du bruit thermique dans les antennes gravitationnelles, d'autre part d'améliorer les caractéristiques optomécaniques de nos miroirs.

## 4.1 Couplage d'un mode acoustique avec l'air

La présence d'air autour du miroir se traduit par des pertes par rayonnement pour le mouvement mécanique et par un amortissement supplémentaire ; lorsque l'amortissement propre du mode acoustique est petit, cela entraîne une dégradation du facteur de qualité mécanique global. Nous avons donc placé la cavité à miroir mobile dans une enceinte permettant d'étudier la variation du facteur de qualité avec la pression.

### 4.1.1 Rayonnement acoustique du miroir

Si l'onde acoustique rayonnée par un objet a une longueur d'onde petite devant la longueur caractéristique des déformations de sa surface, on peut considérer que chaque élément de surface de l'objet rayonne dans l'air une onde plane [67]. Dans le cas du résonateur plan-convexe d'épaisseur  $1.55 \text{ mm}$  utilisé dans les chapitres précédents, les modes Gaussiens ont des fréquences  $\Omega_M/2\pi$  de l'ordre de  $2 \text{ MHz}$  pour la série fondamentale et bien au dessus pour les séries harmoniques. Cela correspond dans l'air à des longueurs d'onde  $\lambda = 2\pi c/\Omega_M$  inférieures à  $0,15 \text{ mm}$  ( $c = 320 \text{ m/s}$  représentant la vitesse du son dans l'air). Les modes Gaussiens ayant la particularité d'être confinés au centre du miroir, on peut considérer que la face latérale ne bouge pas. On néglige alors les effets de bord et la longueur d'onde  $\lambda$  est à comparer à la largeur des modes internes sur la surface du miroir. Nous verrons dans la partie 4.4 que les tailles caractéristiques sur lesquelles varie le profil des modes Gaussiens de ce miroir sont de l'ordre du millimètre. On a donc un facteur 10 entre la taille caractéristique des déformations du miroir et la longueur d'onde de l'onde acoustique rayonnée.

Le flux d'énergie moyen d'une onde plane vaut  $c\rho_{air}\overline{\mathbf{v}^2}$ , où  $\rho_{air}$  représente la masse volumique de l'air, et  $\overline{\mathbf{v}^2}$  la vitesse quadratique moyenne de l'onde dans l'air. On s'intéresse au flux d'énergie au niveau de la surface où la vitesse dans l'air est égale à celle du résonateur. La vitesse instantanée  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  de la surface du miroir au point  $\mathbf{r}$  se déduit de la décomposition modale (1.36) :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \dot{a}_n(t) \mathbf{u}_n(\mathbf{r}). \quad (4.1)$$

La puissance totale rayonnée  $\mathcal{P}$  par la surface du miroir vaut :

$$\mathcal{P} = c\rho_{air} \int_S \overline{\mathbf{v}^2} = c\rho_{air} \int_S \overline{\left( \sum_n \dot{a}_n(t) \mathbf{u}_n \right)^2} = c\rho_{air} \sum_n \overline{|\dot{a}_n(t)|^2} \int_S |\mathbf{u}_n|^2, \quad (4.2)$$

où  $\mathcal{S}$  représente l'intégrale sur toute la surface du miroir, c'est-à-dire les deux faces du substrat. La dernière somme est obtenue en décomposant sur les différents modes propres indicés par  $n$  ; les termes croisés  $\dot{a}_n(t)\dot{a}_m(t)$  entre modes non dégénérés oscillent à des fréquences  $\Omega_n \pm \Omega_m$  non nulles et sont donc moyennés à zéro. Les modes Gaussiens

dégénérés présentent la particularité d'avoir une intégrale de recouvrement nulle sur la surface  $\mathcal{S}$  du miroir (voir la section 4.4, équation (4.27) : deux modes dégénérés ont des indices  $l$  différents et l'intégration du terme  $\mathbf{u}_n \mathbf{u}_m$  sur la variable  $\theta$  est nulle). La puissance rayonnée se met alors sous la forme d'une somme de termes correspondant à la puissance dissipée par chaque mode acoustique indépendamment les uns des autres.

On s'intéresse désormais à l'onde rayonnée par un seul mode  $\mathbf{u}_n$ . La contribution  $\mathcal{P}_n$  du mode  $\mathbf{u}_n$  à la puissance totale rayonnée vaut :

$$\mathcal{P}_n = c\rho_{air} \overline{|\dot{a}_n(t)|^2} \int_{\mathcal{S}} |\mathbf{u}_n|^2. \quad (4.3)$$

La dissipation d'énergie par l'onde acoustique rayonnée correspond à un taux d'amortissement  $\Gamma_n^{air}$  pour le mode  $n$  défini par l'équation :

$$\mathcal{P}_n = M_n \Gamma_n^{air} \overline{|\dot{a}_n(t)|^2}, \quad (4.4)$$

où  $M_n$  est la masse effective du mode  $n$  [équation (1.39)]. L'expression de  $\mathcal{P}_n$  permet de calculer  $\Gamma_n^{air}$  en fonction de la distribution spatiale  $\mathbf{u}_n$  :

$$\Gamma_n^{air} = c \frac{\rho_{air}}{\rho_{silice}} \frac{\int_{\mathcal{S}} |\mathbf{u}_n|^2}{\int_V |\mathbf{u}_n|^2}, \quad (4.5)$$

où l'on a utilisé la définition de la masse en fonction de l'intégrale en volume du mouvement du mode [équation (1.39)].

On peut calculer cette expression à condition de connaître la dépendance de la structure spatiale du mode selon l'axe de propagation  $z$  correspondant à l'épaisseur du miroir. Si on suppose une dépendance sinusoïdale de la forme  $\cos(n\pi z/h)$  où  $h$  est l'épaisseur du miroir, relation qui est vérifiée par exemple pour les modes Gaussiens, l'intégrale selon  $z$  se simplifie et l'intégrale en volume se réduit au produit de  $h/2$  par l'intégrale sur une surface du miroir. L'expression de  $\Gamma_n^{air}$  devient :

$$\Gamma_n^{air} = \frac{4c}{h} \frac{\rho_{air}}{\rho_{silice}}. \quad (4.6)$$

L'amortissement dû à l'air devrait donc être le même pour tous les modes Gaussiens du miroir.

Avec les masses volumiques  $\rho_{air} = 1,3 \text{ kg/m}^3$  et  $\rho_{silice} = 2200 \text{ kg/m}^3$  et une épaisseur  $h \simeq 1.5 \text{ mm}$ , on trouve un taux d'amortissement dû au rayonnement acoustique de l'ordre de  $2\pi \times 79 \text{ Hz}$  à la pression ambiante. Cette valeur est surprenante puisque le taux d'amortissement observé pour le mode fondamental n'est que de  $2\pi \times 44 \text{ Hz}$ . On retrouve cependant le bon ordre de grandeur, ce qui nous permet d'espérer une amélioration significative des facteurs de qualité sous vide.

#### 4.1.2 Etude expérimentale de la dépendance avec la pression

La vitesse du son  $c$  étant indépendante de la pression de l'air [67], la dépendance de  $\Gamma_n^{air}$  en fonction de la pression  $P$  n'apparaît qu'à travers la masse volumique  $\rho_{air}$  de l'air selon la formule

$$\rho_{air} = \frac{M_{air}}{RT} P, \quad (4.7)$$

où  $M_{air}$  est la masse molaire de l'air et  $R$  la constante de Nerst. Comme le taux d'amortissement total  $\Gamma$  est la somme de  $\Gamma_n^{air}$  et d'un terme correspondant aux processus internes de dissipation qui sont à priori indépendants de la pression, on attend une dépendance affine de la largeur des pics de résonance du miroir avec la pression.

Afin d'étudier les variations du taux d'amortissement avec la pression, nous avons construit une enceinte étanche. Le principe de la mesure consiste à placer le miroir mobile dans cette enceinte où la pression peut varier de la pression atmosphérique jusqu'à un vide primaire. Pour chaque valeur de la pression, une acquisition du spectre de bruit thermique permet de mesurer le taux d'amortissement pour un mode acoustique donné. Nous présentons dans cette section la réalisation de l'enceinte et du système de pompage, ainsi que la calibration de la pression dans l'enceinte.

### L'enceinte étanche

La figure 4.1 présente le plan de l'enceinte étanche que nous avons utilisée. Réalisée en dural, elle est constituée d'un cylindre central creux et de deux brides munies de hublots de 10 mm d'épaisseur. Les hublots sont traités antireflet à 810 nm. Des joints en indium assurent l'étanchéité de la boîte au niveau des brides et des hublots ainsi que du tube de vidage. Le porte-cavité et l'asservissement en température sont identiques au montage décrit dans la section 3.1.5. La plateforme sur laquelle est fixé le porte-cavité est réalisée en cuivre et sert de masse thermique pour l'élément Peltier. Toutes les connections électriques nécessaires à l'asservissement sont assurées par un passage étanche placé sur le bord de l'enceinte.

On peut faire varier la pression à l'intérieur de l'enceinte grâce à une pompe à palette et à une microfuite. La pression est constamment contrôlée par une jauge manométrique. On joue alors sur les deux robinets pour obtenir la pression désirée. L'enceinte est ensuite isolée et la pompe coupée pour limiter les vibrations.

### Mesure de la pression

On peut s'assurer de la précision de la mesure de pression en regardant le déplacement de la fréquence de résonance optique de la cavité. Les changements de pression font en effet varier l'indice de l'air  $n_{air}$  selon la loi de Gladstone [68] :

$$n_{air} = 1 + (n_0 - 1)P \frac{1 + 10^{-5}P(61,3 - T)}{0,96095(1 + 0,003661T)}, \quad (4.8)$$

avec

$$n_0 - 1 = 10^{-8} \left( 8342.13 + \frac{2406030}{130 - \lambda^{-2}} + \frac{15997}{38,5 - \lambda^{-2}} \right), \quad (4.9)$$

où la pression  $P$  est exprimée en *bar*, la température  $T$  en Celsius et la longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide en  $\mu m$ . Dans une gamme de pression entre 0 et 1 *bar*, on peut négliger le terme  $10^{-5}P(61,3 - T)$  et supposer que l'indice de l'air est une fonction affine de  $P$ . Pour une longueur d'onde de 0,810  $\mu m$  et une température de 25°C on attend une dépendance de la forme :

$$n_{air} = 1 + \alpha P \quad , \quad \alpha = 2,623 \times 10^{-4} \text{ bar}^{-1}. \quad (4.10)$$

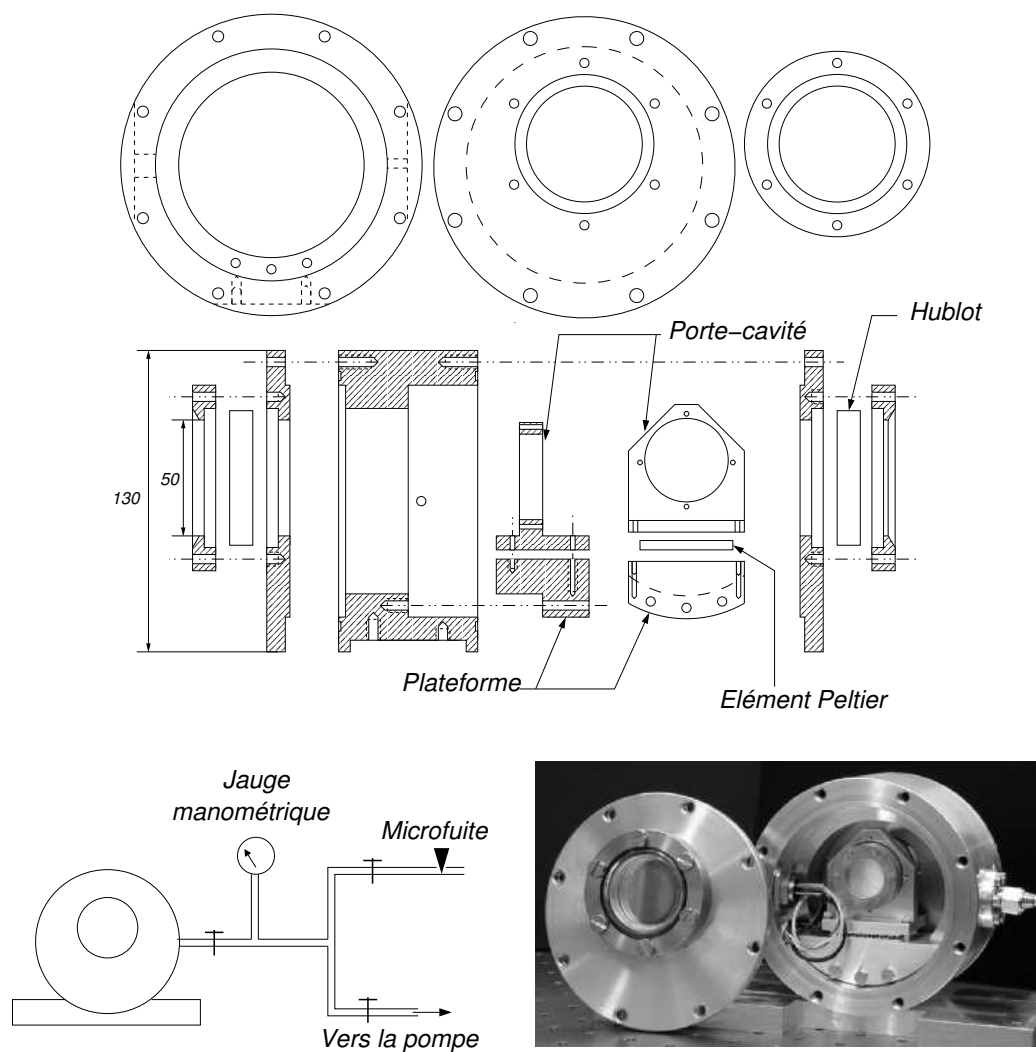


FIG. 4.1 – Schéma de l'enceinte étanche.

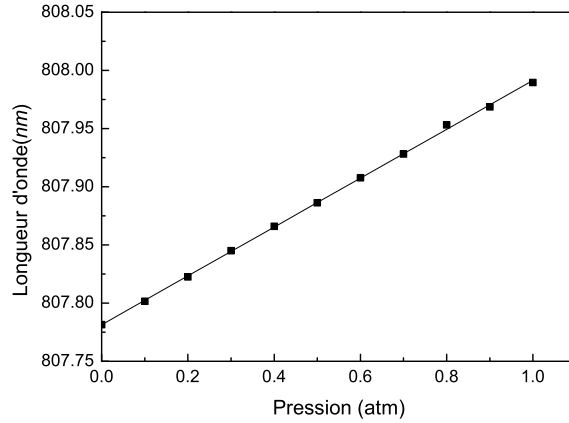


FIG. 4.2 – Longueur d’onde de résonance de la cavité en fonction de la pression indiquée par la jauge manométrique.

A résonance, la longueur optique de la cavité, qui est le produit de la longueur réelle  $L$  par l’indice de l’air, est un multiple de la longueur d’onde du laser. Si l’on suit continûment la résonance de la cavité lorsque la pression varie on devrait observer une dépendance affine de la longueur d’onde de résonance  $\lambda_{las}$  en fonction de  $P$  :

$$\lambda_{las}(P) = \lambda_{las}(0)(1 + \alpha P). \quad (4.11)$$

La figure 4.2 montre les variations de la longueur d’onde de résonance de la cavité mesurée par le lambdamètre en fonction de la pression indiquée par la jauge. Le graphe présente une parfaite linéarité et un ajustement linéaire donne  $\alpha = 2,60 \times 10^{-4} \text{ bar}^{-1}$ , très proche de la valeur théorique, ce qui montre la bonne précision de la jauge manométrique.

## Résultats

Pour les différentes valeurs de la pression, un spectre thermique moyenné 300 fois avec une résolution de  $3 \text{ Hz}$  est acquis sur l’analyseur de spectre. La figure 4.3 présente la variation de la largeur du mode fondamental Gaussien, déduite d’un ajustement Lorentzien du spectre de bruit thermique, en fonction de la pression.

Les résultats présentent une très bonne linéarité. La différence entre les valeurs à 1 et 0 atmosphère donne la contribution de  $\Gamma_n^{air}$ , qui vaut ici  $2\pi \times 30 \text{ Hz}$  et qui est de l’ordre de grandeur de la valeur théorique de  $2\pi \times 79 \text{ Hz}$ . Les mêmes mesures ont été effectuées sur les modes fondamentaux Gaussiens des harmoniques supérieures. La table 4.1 présente dans les deuxième et troisième colonnes les taux d’amortissement à la pression atmosphérique et à pression nulle respectivement. Dans la quatrième colonne est reporté le taux d’amortissement dû à l’air que l’on en déduit. Le pic de bruit thermique à la pression ambiante de la deuxième harmonique n’a pas été observé. L’accord entre les résultats expérimentaux et la valeur théorique de  $\Gamma_n^{air}$  s’améliore pour

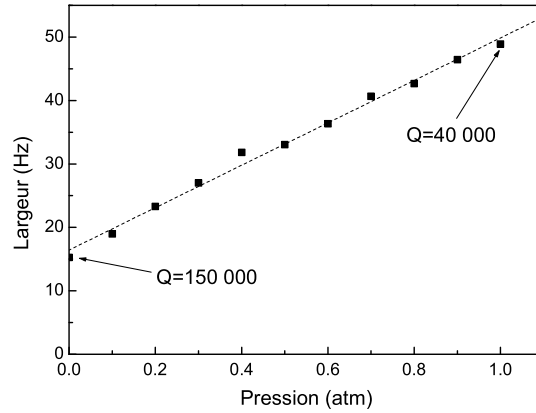


FIG. 4.3 – Largueur de la résonance du mode fondamental Gaussien, obtenu grâce à un ajustement Lorentzien du spectre de bruit thermique, en fonction de la pression.

les harmoniques d'ordre 3 et 4. Ceci est sans doute lié au très bon confinement de ces deux modes, à la différence du mode fondamental (voir partie 4.4).

Fréquence (kHz)	$\Gamma/2\pi$ 1 atm (Hz)	$\Gamma/2\pi$ 0 atm (Hz)	$\Gamma_{air}/2\pi$ (Hz)
1858	44	14	30
3535	?	14	
5820	84	12.5	72.5
7727	67	17.5	49.5

TAB. 4.1 – Taux d'amortissement du mode Gaussien fondamental et de ses harmoniques, à pression ambiante (deuxième colonne) et sous vide (troisième colonne). La quatrième colonne présente la valeur de l'amortissement  $\Gamma^{air}$  déduit des deuxième et troisième colonnes.

Notons également que le taux d'amortissement mécanique  $\Gamma_n$  obtenu sous vide pour ces modes est à peu près constant. Cela signifie que le facteur de qualité mécanique  $Q_n = \Omega_n/\Gamma_n$  croît avec la fréquence et que l'angle de perte  $\phi_n = 1/Q_n$ , n'est pas constant. Les facteurs de qualité obtenus sont toutefois bien inférieurs au facteur de qualité intrinsèque de la silice (de l'ordre de  $10^7$ ). Ceci est certainement dû aux pertes acoustiques liées au système de fixation du miroir. Comme nous le verrons dans les parties suivantes, le confinement spatial des modes de fréquence élevée permet de réduire ces pertes et d'atteindre des valeurs élevées pour le facteur de qualité.

La figure 4.4 présente les facteurs de qualité mesurés à pression atmosphérique et sous vide, pour un miroir plan-convexe de dimension supérieure (diamètre 34 mm, épaisseur 2,5 mm), dont les modes acoustiques sont étudiés en détail dans la section 4.4.3 et la partie 4.5. On constate une grande disparité dans la dépendance du facteur de qualité avec la pression, indiquant que la structure du mode acoustique selon l'axe  $z$  n'est pas toujours une simple sinusoïde. On remarque également des variations importantes dans les valeurs atteintes sous vide. Cela traduit les différences entre les profils

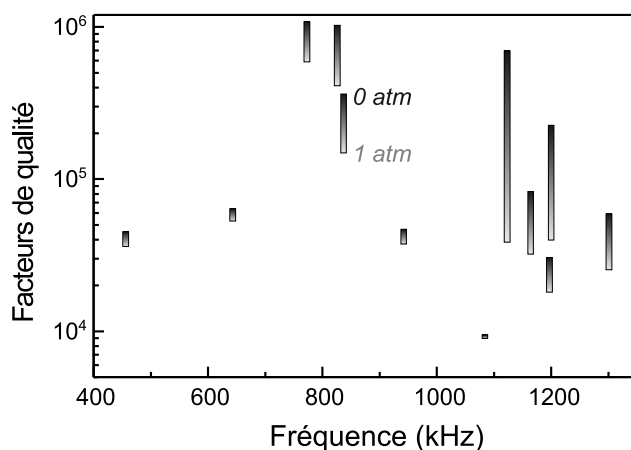


FIG. 4.4 – Facteur de qualité des modes acoustiques d'un miroir plan-convexe de diamètre 34 mm et d'épaisseur 2,5 mm, à pression ambiante et sous vide.

spatiaux des modes acoustiques, qui conduisent à des pertes acoustiques différentes au niveau de la fixation du miroir. On note toutefois que le facteur de qualité peut atteindre des valeurs élevées, supérieures à  $10^6$ .

## 4.2 Observation expérimentale du profil spatial des modes acoustiques

Les facteurs de qualité mécanique des modes acoustiques que nous avons mesurés sont bien inférieurs au facteur de qualité intrinsèque du matériau et peuvent varier considérablement d'un mode à l'autre. L'amélioration de ces facteurs de qualité est d'une grande importance car ils déterminent le niveau de bruit thermique de position du miroir, ainsi que la réponse mécanique du miroir aux fluctuations quantiques de la pression de radiation. Une meilleure compréhension des liens entre la dépendance spatiale du mode acoustique et son facteur de qualité peut conduire à une géométrie du miroir plus adaptée.

Pour pouvoir observer expérimentalement les effets quantiques de la pression de radiation il est nécessaire d'avoir une réponse mécanique du miroir suffisante pour produire un effet mesurable. La réponse du miroir est maximale à résonance et dépend du facteur de qualité mais également de la masse effective, qui doit être la plus faible possible. Il est donc important de connaître la distribution spatiale des modes dans le substrat ainsi que l'adaptation spatiale entre le faisceau et la déformation du miroir.

Nous avons réalisé une expérience de mesure du profil spatial des modes acoustiques internes d'un miroir [66]. Deux géométries de miroirs ont été étudiées, cylindrique et plan-convexe, pour chacune desquelles une modélisation théorique des modes acoustiques existe. Nous avons ainsi pu valider le modèle théorique développé pour un résonateur cylindrique et utilisé pour les antennes gravitationnelles. L'étude des modes de vibration dans un miroir plan-convexe nous a permis de mettre en évidence des modes possédant un facteur de qualité mécanique très élevé et ayant une très faible

masse effective.

### 4.2.1 Principe de la mesure

Jusqu'à présent nous avons utilisé un faisceau d'excitation arrière fixe, se réfléchissant au centre du miroir mobile. Lorsqu'un mode de vibration particulier est excité en modulant l'intensité du faisceau de manière résonnante, l'amplitude de la réponse du miroir dépend linéairement du recouvrement entre le mode et le faisceau d'excitation [équation (1.65)]. Dans cette configuration, l'amplitude de modulation observée sur la phase du faisceau réfléchi par la cavité dépend donc essentiellement de la distribution spatiale du mode au voisinage du centre du miroir.

Afin d'observer la structure spatiale d'un mode acoustique particulier du miroir, l'idée consiste à déplacer la tache de réflexion du faisceau d'excitation sur la surface du miroir. En modulant toujours l'intensité du faisceau à la fréquence de résonance du mode et en mesurant la réponse mécanique du miroir, on obtiendra une mesure de la fonction spatiale du mode en un point quelconque de la surface du miroir. Il sera ainsi possible de reconstituer point par point le profil spatial des modes acoustiques du miroir.

On suppose que le faisceau arrière d'excitation conserve toujours son profil Gaussien en intensité avec une largeur du col de l'ordre du dixième de millimètre, mais qu'il peut maintenant se réfléchir sur le miroir autour d'une position  $\mathbf{r}_0$  quelconque. Le recouvrement entre la force de pression de radiation  $\mathbf{F}_{\text{rad}}$  et le profil spatial  $\mathbf{u}_n$  d'un mode, intervenant dans l'équation d'évolution des amplitudes des modes (équation 1.52), se met alors sous la forme,

$$\langle \mathbf{u}_n(\mathbf{r}), \mathbf{F}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, \Omega) \rangle = F_{\text{rad}}[\Omega] \langle u_n(\mathbf{r}), w^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \rangle, \quad (4.12)$$

où  $u_n$  est la déformation dans la direction perpendiculaire à la surface,  $w$  est le profil spatial du faisceau arrière, similaire au profil  $v_0$  du faisceau dans la cavité [équation (1.58)] mais centré au point  $\mathbf{r}_0$ , et où  $F_{\text{rad}}$  est l'amplitude de la force de pression de radiation.

L'équation (4.12) montre que la réponse du miroir donne accès à la fonction spatiale du mode moyennée sur la taille du faisceau arrière, ce qui fixe la résolution de la méthode de mesure. Le faisceau d'excitation étant focalisé au niveau de la surface du miroir avec un col de  $100 \mu\text{m}$ , il est impossible de résoudre des structures inférieures au dixième de millimètre. Cependant, les dimensions des miroirs que l'on étudie (diamètre de l'ordre de quelques centimètres, épaisseur supérieure au millimètre) conduisent à des longueurs d'onde spatiale des modes acoustiques grandes devant la taille du faisceau. On peut alors considérer le profil lumineux comme une fonction très piquée autour de sa position moyenne, et le recouvrement entre la déformation du miroir et le faisceau lumineux se simplifie,

$$\langle u_n(\mathbf{r}), w^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \rangle = u_n(\mathbf{r}_0). \quad (4.13)$$

Le déplacement  $x$  du miroir vu par la lumière dans la cavité de mesure se déduit de l'équation (1.65) :

$$x[\Omega] = \sum_n \langle u_n, v_0^2 \rangle \chi_n[\Omega] (F_{\text{rad}}[\Omega] u_n(\mathbf{r}_0) + F_{T,n}[\Omega]), \quad (4.14)$$



où  $v_0^2$  est le profil d'intensité du faisceau de mesure. On suppose maintenant que le faisceau arrière est monochromatique à la fréquence de résonance  $\Omega_n$  d'un mode particulier. L'amplitude de la force de pression de radiation est donnée par :

$$F_{\text{rad}} = \eta \times \frac{2P}{c}, \quad (4.15)$$

où  $P$  est la puissance du faisceau arrière,  $c$  la vitesse de la lumière, et  $\eta$  la profondeur de modulation du faisceau. La réponse du miroir est principalement celle du mode résonnant et pour un faisceau d'excitation suffisamment intense (nous avons vu que c'est le cas dans notre montage expérimental) on peut négliger la contribution de la force de Langevin  $F_{T,n}$ . Dans ces conditions le déplacement du miroir à la fréquence  $\Omega_n$  devient d'après l'équation (4.14),

$$x[\Omega_n] = i \frac{\langle u_n, v_0^2 \rangle}{M_n \Gamma_n \Omega_n} F_{\text{rad}} u_n(\mathbf{r}_0), \quad (4.16)$$

Dans notre dispositif expérimental, le faisceau de mesure est centré sur le miroir et son col est très petit ( $90 \mu\text{m}$ ) devant les longueurs d'onde spatiale attendues pour les modes acoustiques. On peut approcher l'intégrale de recouvrement  $\langle u_n, v_0^2 \rangle$  par la valeur de la fonction spatiale en  $\mathbf{r} = 0$ . L'équation précédente devient :

$$x[\Omega_n] = i \frac{1}{M_n^{\text{eff}} \Gamma_n \Omega_n} F_{\text{rad}} \frac{u_n(\mathbf{r}_0)}{u_n(0)}, \quad (4.17)$$

où  $M_n^{\text{eff}}$  est la masse effective du mode vue par la lumière, définie par l'équation (1.71). La mesure de la réponse du miroir est directement proportionnelle à la valeur de la fonction spatiale  $u_n(\mathbf{r}_0)$  du mode acoustique à la position  $\mathbf{r}_0$ . En déplaçant le point d'impact du faisceau arrière sur la surface du miroir et en récupérant l'information fournie par la cavité de mesure, on peut alors reconstruire la distribution spatiale du mode acoustique.

### 4.2.2 Dispositif expérimental

Cette section détaille le dispositif expérimental utilisé pour mesurer le profil des modes acoustiques, dont le schéma de principe est reproduit sur la figure 4.5. Nous décrivons le système de balayage de la force de pression de radiation sur la surface du miroir ainsi que le dispositif électronique et informatique d'acquisition de la réponse du miroir.

#### Dispositif de balayage du faisceau d'excitation

La solution retenue pour déplacer le point de réflexion du faisceau arrière sur la surface du miroir est l'utilisation d'une lentille mobile dans le plan perpendiculaire à son axe optique, déviant ainsi le faisceau selon les lois de l'optique géométrique. La lentille  $L_2$  de la figure 4.5 a donc été montée sur deux translations micrométriques, une verticale et une horizontale dans le plan de la lentille. Lorsque la lentille  $L_2$  de focale  $f_2$  est décentrée d'une distance  $dx$  par rapport à son axe optique, le faisceau lumineux

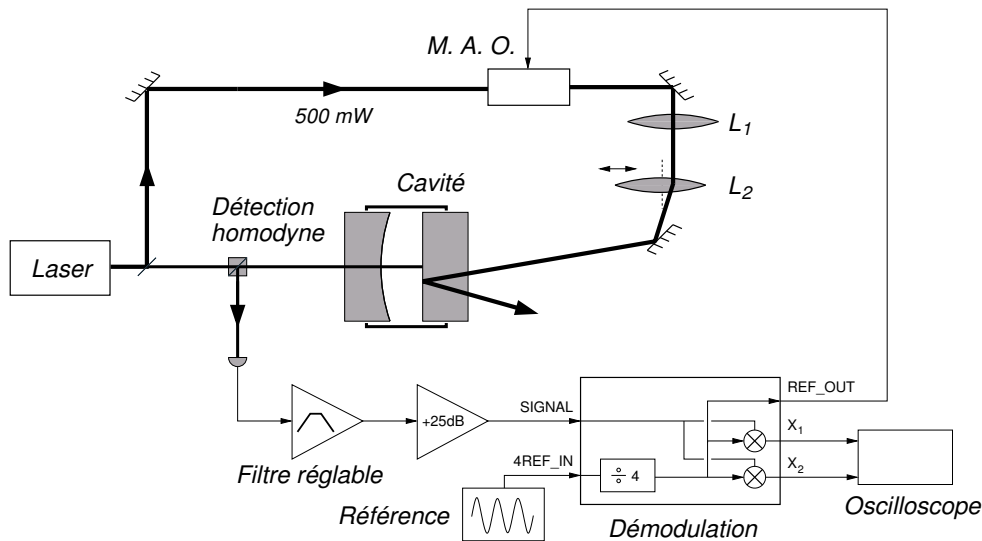


FIG. 4.5 – Dispositif de mesure de la distribution spatiale des modes acoustiques. Le faisceau arrière d’excitation passe à travers une lentille mobile. Le décentrage de la lentille, commandé par ordinateur, permet de dévier le faisceau vers n’importe quel point de la surface du miroir. La détection des quadratures de la réponse du miroir est synchrone avec la modulation du faisceau arrière.

qui ressort du système optique créé par  $L_1$  et  $L_2$  frappe le miroir à la position  $x$  qui, dans l’approximation de petits déplacements de la lentille est donnée par,

$$x = \frac{D}{f_2} dx, \quad (4.18)$$

où  $D$  désigne la distance qui sépare le miroir de la lentille  $L_2$ . Comme les distances entre les deux lentilles  $L_1$  et  $L_2$  et entre le miroir et  $L_2$  restent inchangées en première approximation, les matrices de transfert donnant la taille et la position du col du faisceau ne sont pas modifiées. Cette technique présente ainsi l’avantage de ne pas changer la taille du col du faisceau et de conserver celui-ci en permanence au niveau de la surface du miroir.

Les translations micrométriques utilisées sont en fait des translations motorisées que l’on commande par ordinateur. Chaque translation est composée d’un moteur pas à pas bipolaire de 200 pas par tour, actionnant la vis micrométrique d’une platine de translation de 20 mm de course. Deux interrupteurs intégrés dans la translation et situés en bout de course indiquent que la platine est arrivée en butée. Le pas  $dx_{\min}$  des translations est de  $1,25 \mu m$ . Pour une focale  $f_2 = 50 \text{ mm}$  et une distance entre la lentille et le miroir de 280 mm, on obtient un déplacement minimal au niveau du miroir de  $7,0 \mu m$ .

### Pilotage du dispositif de balayage

Afin de simplifier l’interface avec l’ordinateur et de permettre également un contrôle manuel simple, nous avons utilisé la carte électronique de pilotage reproduite sur la

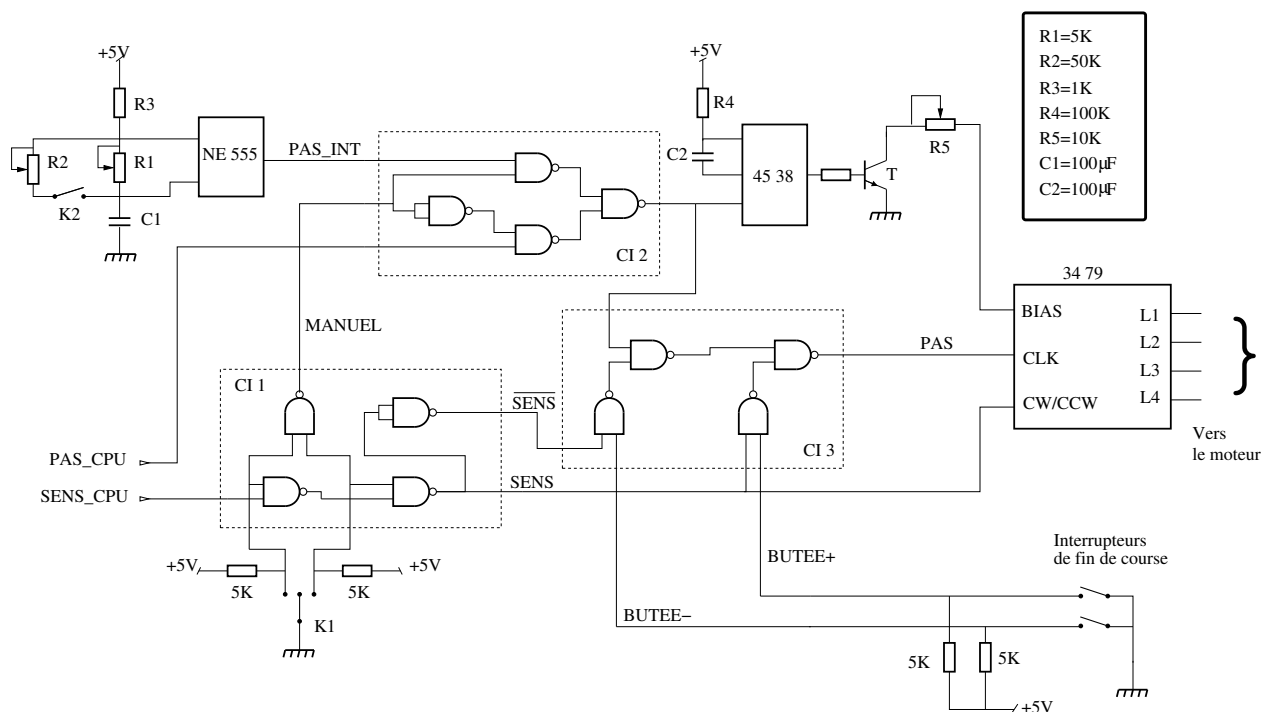


FIG. 4.6 – Schéma de principe de l'interface entre l'ordinateur et les moteurs pas-à-pas des translations micrométriques. Une commande manuelle est prévue (interrupteur K1).

figure 4.6. Le schéma repose sur l'utilisation du circuit intégré MC 34 79 conçu pour la commande d'un moteur pas à pas bipolaire, ce qui limite considérablement la complexité du montage. Le MC 34 79 séquence les signaux L1 à L4 envoyés au moteur en fonction de la valeur de la broche CW/CCW qui détermine le sens de rotation et en effectuant un pas à chaque front montant sur la broche CLK. Les sorties L1 à L4 sont capables de délivrer  $350\text{ mA}$ , ce qui est suffisant pour faire fonctionner les moteurs que nous utilisons et il n'est pas nécessaire d'utiliser des amplificateurs supplémentaires.

Le pilote peut se commander numériquement grâce aux deux bits d'entrée SENS\_CPU et PAS\_CPU, le premier imposant le sens de rotation et le second faisant tourner le moteur d'un pas. Dans le cas d'une commande numérique, les bits SENS\_CPU et PAS\_CPU sont directement retranscrits sur les entrées CW/CCW et CLK du 34 79.

Une commande manuelle grâce à l'interrupteur K1 a aussi été prévue pour pouvoir positionner la translation avant de lancer l'acquisition. C'est un interrupteur trois positions avec une position neutre correspondant à un pilotage par l'ordinateur, et une position pour chaque sens de rotation. La commutation entre la commande manuelle et numérique est assurée par les circuits quadruple NAND CI1 et CI2 qui donnent la priorité à la commande manuelle. Lorsque le pilote est commandé manuellement, on utilise une horloge interne pour cadencer le moteur. Les impulsions d'horloge sont créées par un temporisateur NE 555 monté en multivibrateur astable. La période des oscillations est donnée par  $1/R_1C_1$  si l'interrupteur K2 est ouvert et vaut  $1/R_2C_1$  s'il est fermé. On peut ainsi choisir entre une cadence de 500 pas par seconde, proche de

la cadence maximale supportée par le moteur avant qu'il ne décroche, et une fréquence dix fois plus faible.

Les interrupteurs de fin de course des translations sont utilisés par le circuit CI3 pour bloquer les impulsions d'horloge si l'un d'eux passe à l'état bas. Ainsi, lorsque la translation est en butée dans un sens, la carte interdit l'utilisation du sens correspondant et empêche de forcer sur le moteur. L'utilisation du sens de rotation inverse reste autorisée pour permettre de recentrer la translation.

Le courant que le 34 79 délivre au moteur est fixé par le courant sortant par la broche BIAS. Le transistor T fonctionne en mode saturé/bloqué et permet ainsi d'activer ou désactiver le pilote. Lorsque le transistor T est passant, le pilote fonctionne et le potentiomètre R5 permet de régler la puissance pilotant le moteur. Lorsque le transistor T est bloqué aucun courant ne circule dans R5 ce qui a pour effet de mettre à 0 les sorties L1 à L4. Le monostable redéclenchable 45 38 active ainsi le pilote lorsque des impulsions sont présentes sur la broche CLK, et le désactive au bout de quelques minutes si aucune commande n'est actionnée. Ceci empêche au pilote ou au moteur de surchauffer et d'être détérioré.

### La voie d'acquisition

Pour reconstruire le profil spatial d'un mode acoustique, on balaye la surface du miroir avec le faisceau d'excitation modulé à la fréquence de résonance du mode. On acquiert simultanément les traces temporelles des quadratures  $X_1$  et  $X_2$  qui permettent de reconstituer l'amplitude et la phase de la réponse du miroir en fonction du point d'application de la force.

Afin de s'adapter à l'amplitude de la réponse mécanique des différents modes acoustiques, le signal issu de la détection homodyne doit être correctement amplifié avant d'être envoyé dans le circuit d'extraction des quadratures. On utilise à cet effet un amplificateur large bande ZHL 32A suivi d'un préamplificateur ayant un gain réglable égal à 1, 10 ou 100. Par ailleurs, le bruit de phase du faisceau réfléchi par la cavité est dominé par le bruit thermique de quelques modes qui sature la série d'amplificateurs de la voie d'acquisition. Afin d'éliminer la contribution des modes autres que celui que l'on veut étudier, le filtre passe bande [69] reproduit sur la figure 4.7 a été ajouté directement à la sortie de la détection homodyne (voir figure 4.5). Sa fréquence centrale  $\Omega_0$ , sa bande passante  $\Delta\Omega_0$  et son gain  $G$  sont ajustables grâce aux potentiomètres  $R_F$ ,  $R_G$ , et  $R_B$ , et valent,

$$\Omega_0 = 1/R_F C, \quad (4.19)$$

$$\Delta\Omega_0 = 1/R_B C, \quad (4.20)$$

$$G = R_B/R_G. \quad (4.21)$$

Pour les valeurs des résistances et des condensateurs utilisés, il est possible d'obtenir n'importe quelle fréquence entre 100  $kHz$  et 10  $MHz$ , avec un facteur de qualité  $\Omega_0/\Delta\Omega_0$  de l'ordre de 50. En pratique on règle les caractéristiques du filtre en injectant à son entrée un bruit blanc produit par un générateur de fonction, et en visualisant le signal de sortie sur un analyseur de spectre. On ajuste les quatre potentiomètres jusqu'à obtenir la fonction de transfert désirée.

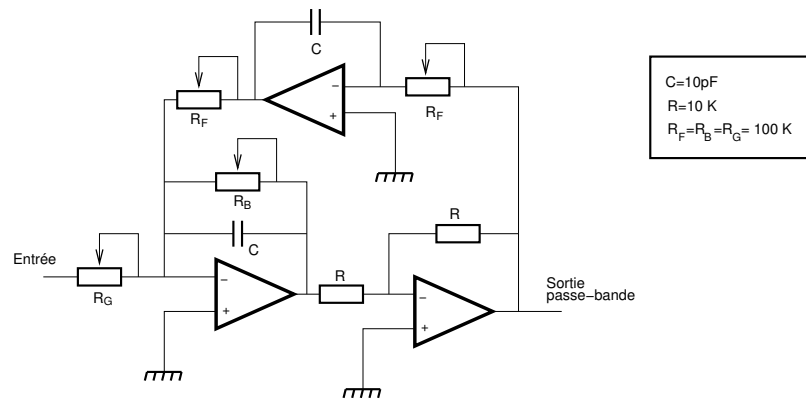


FIG. 4.7 – Schéma électronique du filtre passe-bande totalement réglable.  $R_G$  et  $R_B$  fixent ensemble le gain et le facteur de surtension. Les deux potentiomètres  $R_F$  permettent d'ajuster la fréquence centrale du filtre.

Pour accéder à l'amplitude de la réponse mécanique du miroir, on extrait les quadratures de la position du miroir grâce à la boîte de démodulation. En fait, le signal utilisé pour créer la modulation d'intensité est directement pris sur la sortie REF\_OUT de la boîte (voir schéma 3.2). Cette sortie reproduit la référence servant à démoduler le signal de position pour extraire la quadrature  $X_1$ . La force de pression de radiation est ainsi synchrone avec la détection des quadratures et elle induit un déplacement constant dans l'espace des phases  $\{X_1, X_2\}$ . On utilise le déphaseur variable pour compenser les déphasages induits par les différents amplificateurs, le modulateur acousto-optique et la détection homodyne, de manière à aligner la réponse du miroir sur la quadrature  $X_1$ .

### Programme d'acquisition et de traitement des données

Une fois fixés la fréquence de référence pour l'extraction des quadratures et le déphasage du signal d'excitation par rapport à cette référence, le balayage de la surface du miroir par le faisceau arrière est exécuté par l'ordinateur. Le faisceau est déplacé le long de 50 lignes horizontales régulièrement espacées verticalement. Il ne faut cependant pas que le faisceau touche les pièces en cuivre qui maintiennent le miroir. Cela produirait un décrochage de l'asservissement du laser sur la cavité car la diffusion du faisceau sur le cuivre saturerait la photodiode placée à l'arrière de la cavité et utilisée pour l'asservissement. Les points de départ et d'arrivée des lignes de balayage horizontales sont donc calculés pour que la tache du faisceau sur le miroir reste à distance des bords. On garde typiquement une marge de 1 mm. Chaque ligne horizontale est elle-même décomposée en pas de longueur égale à 1/50 ème du diamètre effectivement examiné. On obtient ainsi un maillage carré de la surface du miroir.

L'acquisition est entièrement automatisée, selon la séquence des opérations représentée sur la figure 4.8. Chaque ligne horizontale est balayée continûment et les traces temporelles des quadratures  $X_1$  et  $X_2$  sont acquises simultanément sur un oscilloscope numérique TDS420. Ces deux traces sont ensuite transférées à un ordinateur qui les découpe temporellement en 50 segments. L'ordinateur effectue la moyenne des deux

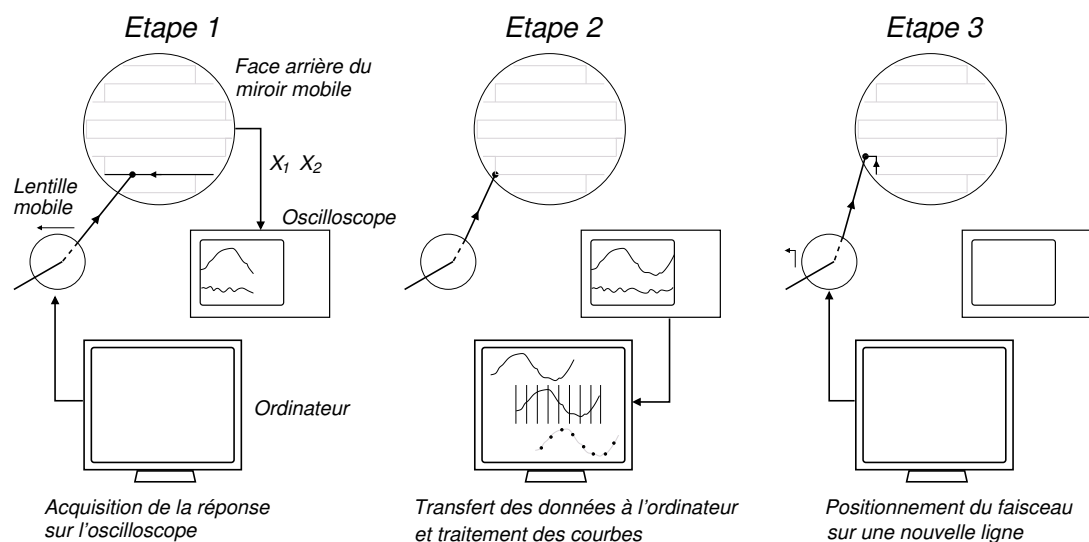


FIG. 4.8 – Déroulement de l’acquisition de la réponse mécanique du miroir mobile. Etape 1 : Une ligne horizontale est balayée et les quadratures de la réponse du miroir sont acquises sur l’oscilloscope. Etape 2 : les deux traces sont transférées à l’ordinateur qui les échantillonne. Etape 3 : l’ordinateur positionne le faisceau d’excitation au début d’une nouvelle ligne.

traces sur chaque segment, fournissant ainsi 50 couples de point correspondant aux deux quadratures. Le résultat est stocké dans deux tableaux à deux dimensions, à la position  $(i, j)$  où  $i$  est l’indice de la ligne et  $j$  l’indice du segment. L’ordinateur positionne ensuite le faisceau au début de la ligne horizontale suivante et relance l’acquisition. Le résultat d’une acquisition est donc constitué de deux tableaux de  $50 \times 50$  points correspondant aux réponses des quadratures  $X_1$  et  $X_2$  en fonction du point d’application de la force.

La vitesse de balayage des lignes horizontales est commandée par la période des impulsions envoyées par l’ordinateur aux moteurs pas-à-pas. Le temps de mémoire de la réponse du miroir à une force extérieure étant de l’ordre de l’inverse du taux de relaxation  $\Gamma$  du mode comme nous l’avons vu dans la section 2.4.1, cette vitesse  $v$  fixe une limite à la résolution spatiale de la détection : la réponse mécanique du miroir lorsque le faisceau passe sur un point particulier est contaminée par la réponse du miroir aux points visités par le faisceau dans un intervalle de temps inférieur à  $1/\Gamma$ , donc espacés d’une distance inférieure à  $v/\Gamma$ . Une vitesse de balayage de  $5 \text{ mm/s}$  semble un bon compromis entre une bonne résolution et un temps d’acquisition raisonnable. Si l’on prend par exemple le taux de relaxation de  $2\pi \times 44 \text{ Hz}$  du miroir plan-convexe utilisé jusqu’à présent, on obtient une résolution spatiale de l’ordre de  $0,02 \text{ mm}$ . Celle-ci est très inférieure à la résolution imposée par le maillage de  $50 \times 50$  points qui, pour un diamètre du miroir de  $12 \text{ mm}$ , correspond à des mailles de l’ordre de  $0.2 \text{ mm}$  de côté.

Lorsque le faisceau passe sur une poussière déposée sur la face arrière du miroir, ou sur un défaut au niveau du traitement ou à l’intérieur du substrat, de la lumière modulée est diffusée et provoque un signal parasite important à la sorte de la détection homodyne. Cela a pour conséquence de créer des pics sur le signal de réponse. Ces parasites n’étant pas d’origine mécanique, ils n’ont généralement pas la même phase

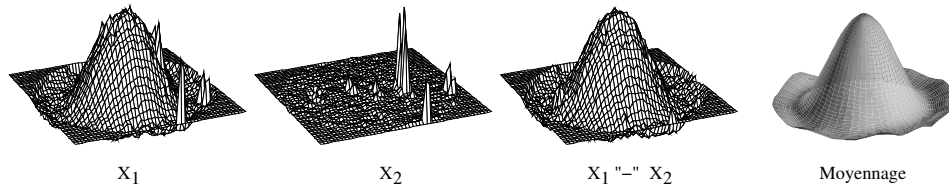


FIG. 4.9 – Traitement des données provenant de l’acquisition des profils des modes. La troisième courbe est une combinaison linéaire des deux premières permettant de supprimer les parasites. La quatrième présente le résultat du lissage de la courbe.

que la quadrature  $X_1$  et possèdent une composante non nulle sur la quadrature  $X_2$ . On peut les éliminer en réalisant la bonne combinaison linéaire des courbes  $X_1$  et  $X_2$ . Cette opération est réalisée grâce à un programme écrit en C sous Linux et qui permet de visualiser en trois dimensions la courbe  $X_1 + \lambda X_2$  où le paramètre  $\lambda$  est ajustable. Les deux courbes de gauche de la figure 4.9 présentent un exemple d’acquisition des traces  $X_1$  et  $X_2$  visualisées grâce à ce programme. On voit en particulier que la quadrature  $X_2$  n’est pas sensible à la réponse mécanique du miroir à la force excitatrice, mais retranscrit les parasites. La troisième courbe est le résultat obtenu lorsque l’on combine les deux premières courbes avec une pondération  $\lambda$  choisie pour éliminer ces parasites. Le programme permet ensuite de lisser le résultat en faisant un produit de convolution par une Gaussienne de largeur 2 mailles. Le point d’indice  $(i_0, j_0)$  de la nouvelle courbe est ainsi une moyenne de tous les autres points  $(i, j)$  de la courbe avec un poids  $P(i, j)$  donné par :

$$P(i, j) \propto e^{-[(i-i_0)^2 + (j-j_0)^2]/4}. \quad (4.22)$$

Le résultat du lissage est affiché en coordonnée cylindrique comme le montre la quatrième courbe de la figure 4.9.

### 4.3 Modes acoustiques d’un miroir cylindrique

Nous avons réalisé l’étude des modes acoustiques d’un miroir de géométrie cylindrique. Cette géométrie particulière est celle utilisée pour les miroirs des interféromètres gravitationnels, et a été largement étudiée sur le plan théorique [61, 62, 64]. Cette partie présente les résultats expérimentaux obtenus avec des miroirs cylindriques de petite taille. Les profils spatiaux et la répartition en fréquence des modes acoustiques sont comparés aux résultats théoriques obtenus dans le cadre du projet VIRGO.

#### 4.3.1 Modes propres

L’équation de propagation des ondes (1.26) ne possède pas de solution analytique dans le cas d’un résonateur cylindrique. L’utilisation d’un programme de calcul par éléments finis est en général nécessaire pour déterminer les caractéristiques des modes acoustiques d’un solide élastique de forme quelconque. Cependant une méthode spécifique a été développée pour un résonateur cylindrique. A.E.M. Love a proposé un ensemble

de solutions analytiques faisant intervenir des fonctions de Bessel mais présentant l'inconvénient de ne pouvoir annuler toutes les contraintes sur les surfaces du cylindre [70]. J.R. Hutchinson a proposé dans les années 80 une méthode utilisant des combinaisons linéaires d'ondes de Love [71]. Cette approche permet d'écrire pour un résonateur cylindrique libre les solutions de l'équation des modes propres sous forme de série. Cette méthode a été reprise par François Bondu et Jean-Yves Vinet dans le cadre du projet VIRGO pour estimer le bruit thermique à basse fréquence dans les miroirs de l'interféromètre, en sommant la contribution de chaque mode [61, 72]. Le programme CYPRES écrit par François Bondu utilise ces développements et se révèle particulièrement bien adapté pour l'étude du couplage entre la lumière et les déformations d'un miroir cylindrique.

Les modes propres de ce type de résonateur sont paramétrés par trois indices : l'ordre circonférentiel  $n$ , la parité  $\xi$  et le numéro d'ordre  $m$ . L'ordre circonférentiel est lié à la symétrie angulaire du mode. En particulier, un indice  $n = 0$  indique une symétrie de révolution du profil du mode. Les modes ne possédant pas cette symétrie ont un déplacement nul au centre. Dans le cas d'un faisceau de mesure parfaitement centré sur le miroir, leur masse effective est infinie [équation (1.71)] et ils n'induisent pas de déplacement visible par le faisceau lumineux. Le paramètre  $\xi$ , qui prend les valeurs 0 ou 1, indique si les faces planes du résonateur vibrent en opposition de phase (mode pair,  $\xi = 0$ ) ou en phase (mode impair,  $\xi = 1$ ). Enfin le paramètre  $m$  est lié à la structure radiale du mode.

Le programme CYPRES prend comme paramètres les dimensions du miroir (rayon et épaisseur) ainsi que les caractéristiques du matériau qui le compose (masse volumique, vitesse du son...). Le programme calcule la fréquence de résonance, l'énergie mécanique, et la géométrie des modes acoustiques. Les résultats sur les fréquences de résonance fournis par le programme ont été validés par François Bondu par comparaison aux résultats d'Hutchinson ainsi qu'aux valeurs calculées par éléments finis [73].

La figure 4.10 présente quelques modes calculés pour un miroir cylindrique en silice de diamètre 25,4 mm et d'épaisseur 6,35 mm. Les modes qui n'ont pas la symétrie de révolution ( $n \neq 0$ ) présentent une dégénérescence d'ordre deux. Ces modes ont une dépendance angulaire de la forme  $\cos(n(\theta - \theta_0))$  et  $\sin(n(\theta - \theta_0))$ , où  $\theta_0$  désigne l'orientation du mode. Les deux modes dégénérés ont des structures spatiales identiques se déduisant l'une de l'autre par une rotation d'angle  $\pi/2n$ .

Les paramètres du faisceau lumineux se réfléchissant sur le miroir peuvent aussi être pris en compte (taille du col, désalignement éventuel) et permettent au programme de calculer la masse effective des modes sondés par la lumière en calculant l'intégrale de recouvrement entre le profil d'intensité du faisceau et la géométrie du mode [équation (1.71)]. Ces données sont utilisées pour calculer le bruit thermique à basse fréquence des miroirs de l'interféromètre VIRGO [61]. Nous les utiliserons pour déterminer les caractéristiques des modes à résonance (pic de bruit thermique et réponse à une force résonnante).

### 4.3.2 Etude expérimentale

Pour tester le bruit thermique d'un miroir cylindrique et valider les résultats théoriques obtenus grâce à la méthode d'Hutchinson, nous avons utilisé la cavité constituée de deux



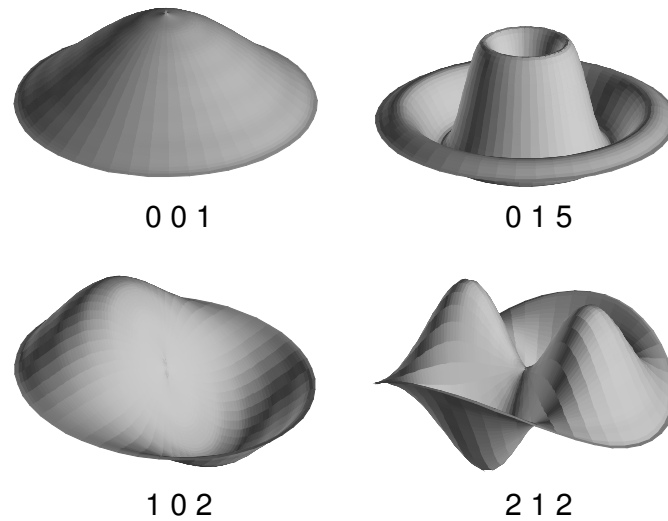


FIG. 4.10 – Exemple de modes acoustiques d'un miroir cylindrique de diamètre  $25,4\text{ mm}$  et d'épaisseur  $6,35\text{ mm}$  calculés par le programme CYPRES.

miroirs cylindriques décrite dans la section 1.2.1. Nous présentons dans cette section les résultats expérimentaux obtenus avec cette cavité. La première partie de cette étude présente une caractérisation des modes grâce aux pics de résonance qu'ils induisent sur le spectre de bruit thermique. En particulier, on repère sur un spectre large de bruit thermique les fréquences de résonance des différents modes acoustiques des deux miroirs constituant la cavité, qui peuvent être comparées à la loi de répartition calculée par le programme CYPRES. Chaque mode ainsi repéré peut être ensuite analysé individuellement. La seconde partie présente l'étude des structures spatiales des modes acoustiques grâce au montage décrit dans la partie 4.2. La réponse du mode à l'excitation par la force de pression de radiation donne accès expérimentalement au profil du mode et permet de valider le modèle théorique développé par Hutchinson.

### Spectre de bruit thermique

La répartition en fréquence des modes acoustiques est déterminée par le spectre de bruit thermique du miroir. Chaque mode de vibration couplé à la lumière intracavité va induire, sur le signal de phase du faisceau réfléchi par la cavité, un pic de bruit thermique autour de sa fréquence de résonance. On peut repérer ces modes en analysant le bruit de phase avec une résolution spectrale inférieure ou de l'ordre de la largeur du pic de résonance. On utilise pour cela le montage de mesure du bruit thermique décrit dans la section 2.1.2. Le nombre de points de l'analyseur de spectre HP 8560 E est limité à 600 et si l'on veut mesurer un spectre sur une plage de fréquence de plusieurs centaines de kilohertz avec une résolution de seulement quelques centaines de hertz, on est obligé de fractionner l'acquisition du spectre en plage de  $100\text{ kHz}$ . L'analyseur de spectre est de ce fait commandé par ordinateur à travers une liaison GPIB. L'acquisition au niveau de

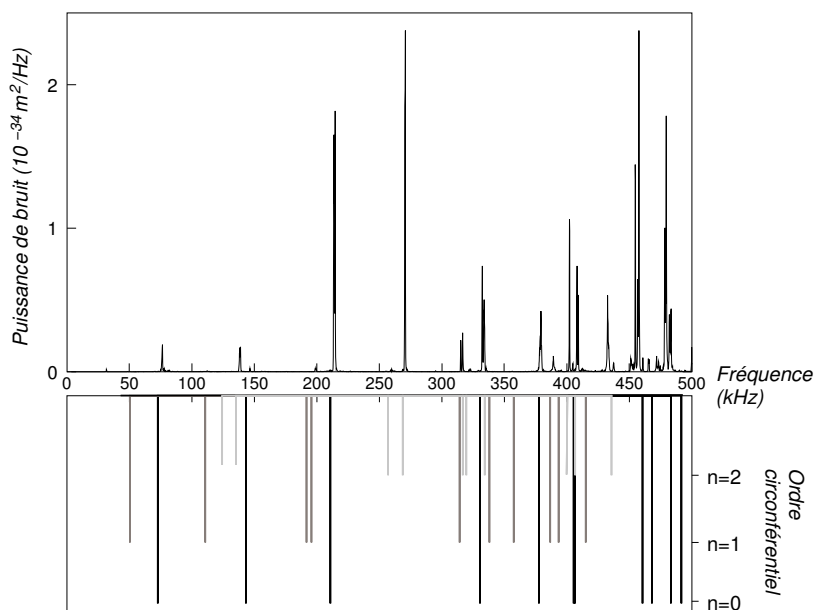


FIG. 4.11 – Spectre de bruit thermique de la cavité à miroirs cylindriques sur la plage 10–500  $kHz$ . Les pics de bruit thermique sont centrés autour des fréquences de résonance des modes acoustiques des miroirs. La figure du bas présente les fréquences théoriques calculées par CYPRES pour des ordres circonférentiels  $n = 0, 1$ , et  $2$ .

l'analyseur de spectre se fait sur une plage de 100  $kHz$  avec 100 moyennes. Le spectre est ensuite transféré à l'ordinateur et l'acquisition est relancée automatiquement sur la plage de fréquence suivante.

La figure 4.11 présente le spectre de bruit thermique obtenu sur la plage de fréquence 10–500  $kHz$  avec une résolution spectrale de 300  $Hz$ . Cette valeur est suffisante pour distinguer les différents pics de bruit thermique et permet de mesurer les fréquences de résonance des modes couplés à la lumière. La partie basse de la figure 4.11 indique les fréquences de résonance calculées avec le programme CYPRES pour un miroir de mêmes dimensions et pour des modes d'ordre circonférentiel  $n$  égal à 0, 1, et 2. On observe une très grande similitude entre les fréquences théoriques et celles des pics de bruit thermique du spectre. On constate également la présence de pics de résonance correspondant à des modes n'ayant pas la symétrie cylindrique. Le couplage de ces modes avec la lumière vient certainement d'un défaut de parallélisme dû à la procédure de montage des miroirs, qui conduit à un décentrage du faisceau de mesure. La lumière sonde alors des zones de la surface du miroir où ces modes ont un déplacement non nul. Ce défaut se révèle être un avantage pour cette étude, puisqu'il nous permet d'étudier des modes n'ayant pas la symétrie cylindrique.

La densité de mode pour des fréquences supérieures à 300  $kHz$  augmente très rapidement, en particulier si l'on inclut les modes à symétrie non cylindrique. Les pics ont des fréquences très proches et au delà de 300  $kHz$  il devient impossible d'établir une correspondance entre les fréquences théoriques et expérimentales. Nous verrons dans la suite que l'on peut cependant continuer à identifier ces modes grâce à leur profil spatial

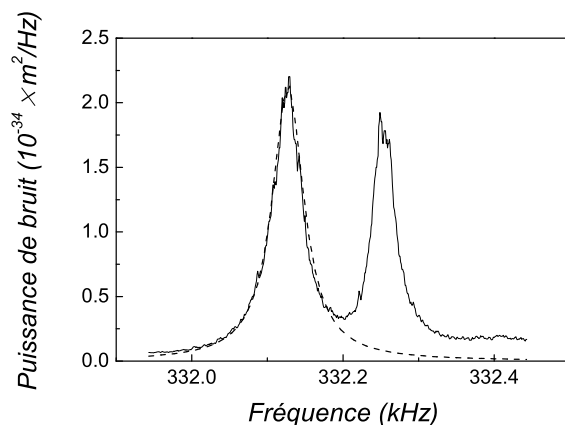


FIG. 4.12 – Spectre de bruit thermique autour d’une résonance du miroir mesuré avec une résolution spectrale de  $3\text{ Hz}$ . Chaque pic correspond à une résonance d’un des deux miroirs. La courbe en pointillé est un ajustement Lorentzien du premier pic.

et prolonger ainsi la comparaison des fréquences de résonance jusqu’à des fréquences élevées.

#### Etude des modes individuels

Les fréquences de résonance des modes acoustiques étant repérées sur le spectre de bruit thermique, nous avons mené une étude plus approfondie de chaque mode en observant le spectre de bruit thermique sur une plage de fréquence plus étroite autour de leur fréquence de résonance et avec une résolution bien meilleure. Par exemple, la figure 4.12 présente le spectre de bruit thermique sur une largeur de  $500\text{ Hz}$  autour de la fréquence  $332\text{ kHz}$  correspondant au mode  $n \xi m = 0\ 1\ 3$ , avec une résolution spectrale de  $3\text{ Hz}$  et  $500$  moyennes. Le spectre présente en fait une structure de doubles pics que l’on retrouve également sur toutes les autres résonances. La phase du faisceau réfléchi par la cavité est sensible aux variations de longueur de la cavité provoquées indifféremment par les déplacements du coupleur d’entrée ou du miroir arrière. Ces miroirs étant presque identiques, ils possèdent des modes de vibrations similaires avec des fréquences de résonance très voisines. La bande passante d’analyse de  $3\text{ Hz}$  de la figure 4.12 est suffisamment petite pour distinguer clairement les deux pics alors qu’ils sont confondus sur le spectre de la figure 4.11. La bande passante de la figure 4.11 étant plus large que la largeur de la résonance, les pics ont par ailleurs des hauteurs plus faibles sur cette figure que leur hauteur réelle ( $2 \times 10^{-34}\text{ m}^2/Hz$  sur la figure 4.12 et moins de  $10^{-34}\text{ m}^2/Hz$  sur la figure 4.11).

Il est possible de s’assurer qu’un seul des deux pics provient du miroir arrière. Pour cela, on utilise le protocole expérimental décrit dans la partie 2.3 : on observe la réponse du miroir lorsque l’excitation par la force de pression de radiation du faisceau arrière est balayée en fréquence au voisinage de la résonance. On obtient une réponse Lorentzienne centrée en fréquence sur un seul des pics thermiques et de même largeur.

Mode $n\xi m$	CYPRES (kHz)	Exp (kHz)	$M_n^{\text{eff}}$ (g)	$M_n^{\text{eff}}$ (therm) (g)	$M_n^{\text{eff}}$ (mod) (g)	Q
0 0 1	143	146	217	100	1000	3 150
0 0 2	377	379	2,9			
0 0 3	405		332			
0 0 4	460	457	0,565	1,7	2,6	4 300
0 0 5	468	465	5,31	42	92	8 500
0 0 6	483	483	0,82	5	3,9	1 300
0 1 1	73	75	2,7	15	25	600
0 1 2	210	213	1,1	11	9	3 600
0 1 3	330	332	34	13	30	9 500
0 1 4	406	408	0,97	13	13	27 700
0 1 5	491	494	35	260	38	3 500

TAB. 4.2 – Caractéristiques des modes acoustiques du miroir cylindrique. Les fréquences théoriques calculées par CYPRES sont répertoriées dans la deuxième colonne. La troisième colonne présente les fréquences de résonance mesurées expérimentalement sur le spectre de bruit thermique. La quatrième colonne présente les masses effectives calculées par CYPRES. Les mesures de la masse par deux techniques sont répertoriées dans les cinquième et sixième colonnes. La dernière colonne donne les facteurs de qualité mécanique mesurés.

L'écart entre les fréquences de résonance des modes du doublet est de l'ordre de 150 Hz ce qui correspond à un écart relatif de 0,5 %. L'écart relatif sur l'ensemble des autres modes entre 0 et 500 kHz est inférieur à 2 %, de l'ordre de grandeur de la tolérance sur les dimensions garanties par le fabricant. L'écart relatif entre les fréquences des modes d'un même doublet n'est pas constant et le pic de plus basse fréquence n'appartient pas toujours au même miroir. Les deux miroirs n'ont donc pas des dimensions qui se déduisent les unes des autres par une simple homothétie. Nous avons vérifié à l'aide du programme CYPRES qu'une variation du rapport d'aspect (rapport entre l'épaisseur et le rayon du miroir) peut induire des déplacements vers le haut ou vers le bas des fréquences de résonance, similaires à ceux que l'on observe expérimentalement.

Au voisinage d'une résonance, la longueur de la cavité dépend principalement du mouvement des miroirs dû au mode résonnant. La forme du pic de bruit thermique est donnée par l'équation (2.3). La largeur de la Lorentzienne est égale au taux d'amortissement et son aire vaut  $k_B T / M_n^{\text{eff}} \Omega_n^2$ . Un ajustement par une Lorentzienne de chaque pic de résonance donne la valeur expérimentale du facteur de qualité  $Q_n = \Omega_n / \Gamma_n$  ainsi que la masse effective  $M_n^{\text{eff}}$  du mode. Le résultat de l'ajustement pour le mode 0 1 3 est représenté par la courbe en pointillés sur la figure 4.12. Malgré la proximité des deux pics, la convergence de l'ajustement est excellente.

On trouve pour ce mode particulier un facteur de qualité de 9 500. Les modes d'ordre circonferentiel nul ( $n = 0$ ) observés sur le spectre de bruit thermique présentent des facteurs de qualité allant de 1 400 à 28 000. Ces valeurs sont très petites devant le facteur de qualité intrinsèque de la silice fondue ( $\simeq 10^7$ ). Les faibles valeurs observées viennent sans doute d'un couplage avec l'environnement. D'autre part, étant donnée la grande dispersion des valeurs, ce couplage semble dépendre fortement de la structure spatiale du mode et de la façon dont est tenu le miroir. On remarque également que sur les modes d'un même doublet les facteurs de qualité peuvent varier.

Le tableau 4.2 récapitule les résultats obtenus grâce aux ajustements Lorentziens des différents pics de bruit thermique. Les deuxième et troisième colonnes présentent

les fréquences calculées avec le programme CYPRES pour un miroir cylindrique en silice de diamètre 25,4 mm et d'épaisseur 6,35 mm, et les fréquences mesurées avec nos miroirs. La quatrième colonne présente les masses effectives également calculées avec CYPRES, et la cinquième colonne donne les masses déduites de l'aire des pics de bruit thermique et de la calibration des déplacements. L'identification des modes de fréquence de résonance supérieure à 300 kHz a été réalisée en observant leur profil spatial (voir section suivante). On remarque l'absence de certains modes théoriquement couplés à la lumière mais dont le pic de bruit thermique n'apparaît pas sur le spectre, par exemple le mode 0 0 3. Pour ce dernier, ceci est sans doute dû à sa masse effective théorique relativement importante (332 g) comparée aux masses des autres modes qui sont de l'ordre de quelques grammes. Il ressort du tableau que les masses effectives mesurées expérimentalement sur le spectre de bruit thermique sont environ cinq fois supérieures aux valeurs calculées par CYPRES. Cet écart ne peut s'expliquer uniquement par le décentrage de la cavité qui n'est que de l'ordre du millimètre alors que la structure spatiale des modes d'indice  $n = 0$  évolue peu au centre sur quelques millimètres. Nous avons d'ailleurs vérifié que les valeurs théoriques de la masse effective calculées pour un faisceau de mesure décentré d'un millimètre ne s'écarte pas de plus de 10 % de sa valeur pour un faisceau parfaitement centré.

Nous avons mesuré la masse effective grâce à un autre protocole expérimental en utilisant le faisceau arrière d'excitation centré sur le miroir et modulé avec une profondeur  $\eta = 95\%$  à la fréquence de résonance du mode étudié. L'amplitude  $x$  de la réponse du miroir est donnée par l'équation (4.17), qui pour un faisceau d'excitation centré devient :

$$x[\Omega_n] = i \frac{1}{M_n^{\text{eff}} \Gamma_n \Omega_n} \eta \frac{2P}{c}, \quad (4.23)$$

où  $P$  est la puissance du faisceau arrière [équation (4.15)]. On mesure donc à l'analyseur de spectre la puissance de modulation de la phase du faisceau réfléchi pour une puissance du faisceau arrière fixée à 500 mW et modulée sinusoïdalement à 95%. Le résultat converti en déplacement et combiné à la largeur  $\Gamma_n$  du mode mesuré sur le spectre de bruit thermique permet de déduire la masse effective. Les masses effectives ainsi mesurées sont reportées dans la sixième colonne du tableau 4.2. Cette seconde estimation est en assez bon accord avec la première mesure de la masse effective. La différence entre les résultats expérimentaux et les calculs théoriques semble donc provenir du dispositif de fixation de nos miroirs qui induit des contraintes sur les surfaces latérales, alors que le modèle théorique suppose les miroirs totalement libres.

On a également étudié des modes qui ne respectent pas la symétrie cylindrique mais qui sont quand même couplés à la lumière du fait du décentrage de la cavité. Nous avons observé pratiquement toute la série des modes impairs d'ordre circonferentiel  $n = 1$ . Les modes observés présentent une masse effective comparable à celles des modes à symétrie cylindrique. Les modes avec des ordres  $n$  plus élevés s'annulent également au centre mais avec un profil théorique plat. Du fait du faible décentrage du faisceau de mesure, ces modes doivent avoir une masse effective beaucoup plus élevée, ce qui explique qu'ils sont rarement observés expérimentalement. Les facteurs de qualité mécanique varient sur une très large plage, allant de quelques milliers à plusieurs dizaines de milliers. Ils restent du même ordre que ceux des modes d'ordre circonferentiel  $n = 0$ .

Mode $n\xi m$	CYPRES (kHz)	Exp (kHz)	$M_n^{eff}$ (g)	Q
1 0 5	435	432	0,23	5 000
1 1 1	135	138	35	1 900
1 1 2	268	270	2	13 500
1 1 3	317	316	11	11 700
1 1 4	334			
1 1 5	400	402	8	50 000
1 1 6	436	437	22	66 200
1 1 7	475	478		
2 1 3	314	315	12	6 300
2 1 6	459	460	6	7 500

TAB. 4.3 – Caractéristiques des modes acoustiques d'ordre circonférentiel  $n$  non nul observés sur le miroir cylindrique. Deuxième colonne : fréquences calculées par CYPRES. Troisième colonne : fréquences expérimentales. Quatrième colonne : masses effectives expérimentales. Cinquième colonne : facteurs de qualité mesurés.

### Etude spatiale des modes acoustiques

L'étude précédente montre une grande dispersion des facteurs de qualité mesurés sur les différents modes acoustiques du miroir, alors que les modèles théoriques utilisés couramment supposent un angle de perte indépendant du mode. De plus les valeurs mesurées sont bien plus petites que le facteur de qualité intrinsèque de la silice qui est de l'ordre de  $10^7$ . Les masses effectives présentent également un écart par rapport aux résultats théoriques. Nous avons mené une étude expérimentale des profils spatiaux des modes de vibration pour les comparer aux calculs fait par Hutchinson.

On utilise le montage décrit dans la section 4.2 pour mesurer le profil spatial des modes observés sur le spectre thermique de la figure 4.11. Seul un diamètre d'environ 23 mm sur la surface du résonateur est traité optiquement. Le diamètre du miroir balayé par le faisceau excitateur est fixé à 21 mm, ce qui laisse une marge supplémentaire de 1 mm. Le centrage du faisceau arrière est effectué en comptant le nombre de pas effectué par les moteurs des translations motorisées supportant la lentille mobile pour que le faisceau passe d'un bord à l'autre du miroir, horizontalement et verticalement. On sait que la tache lumineuse touche le bord du traitement optique en contrôlant la chute d'intensité du faisceau arrière réfléchi. Cela permet également, connaissant le diamètre du traitement optique, de calibrer le pas des moteurs en un déplacement en mm du faisceau excitateur. On trouve qu'un pas du moteur produit un déplacement au niveau du miroir de 7,1  $\mu m$  en très bon accord avec la valeur calculée dans la section 4.2.2.

Nous avons mesuré le profil spatial de chaque mode présentant un pic de résonance sur le spectre de bruit thermique. Les courbes de la colonne de gauche de la figure 4.13 montrent les profils de quatre modes d'indice  $n\xi m = 0 0 6, 0 1 3, 1 1 2$  et  $2 1 3$ , présentés en coordonnées polaires. Les profils théoriques calculés par CYPRES sont reportés dans la colonne du milieu. En dessous de 300 kHz, les pics de résonance sont suffisamment isolés pour faire correspondre sans ambiguïté une fréquence de résonance mesurée et une fréquence calculée. Nous avons vérifié que les modes expérimentaux ont le profil attendu. Au dessus de 300 kHz, la densité de mode devient importante et c'est la mesure du profil spatial qui permet de distinguer les modes les uns des autres et d'associer à un pic de bruit thermique les indices  $n\xi m$  du mode correspondant dans les

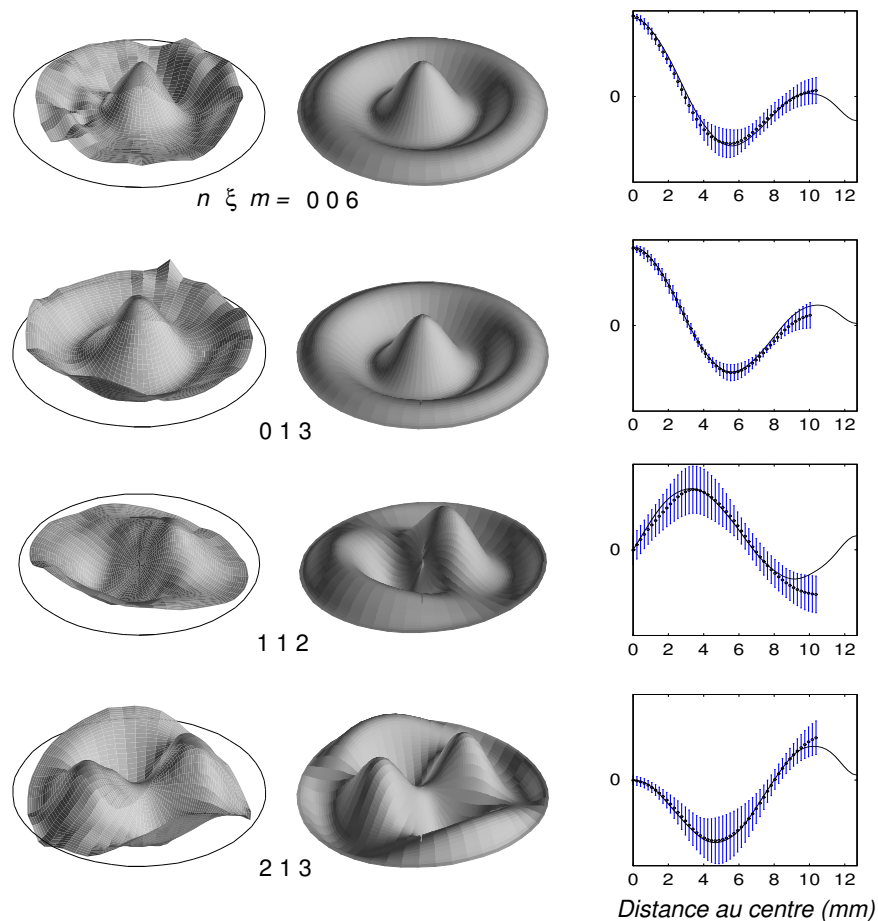


FIG. 4.13 – Profils de quatre modes d'un miroir cylindrique de diamètre  $25,4 \text{ mm}$  et d'épaisseur  $6,35 \text{ mm}$ . La colonne de gauche présente les profils obtenus expérimentalement. La colonne du milieu montre les profils théoriques calculés par CYPRES. La comparaison des fonctions radiales théorique et expérimentale est présentée dans la colonne de droite.

tableaux 4.2 et 4.3.

Nous avons calculé à partir des distributions spatiales la dépendance radiale des modes acoustiques. Pour les modes à symétrie cylindrique, elles sont obtenues en moyennant tous les points expérimentaux de la distribution situés à une distance égale du centre. Pour les modes d'ordre circonférentiel  $n$  non nul, il faut éliminer la dépendance angulaire pour reconstruire la fonction radiale. Cette dépendance est de la forme  $\cos(n(\theta - \theta_0))$  où l'angle  $\theta_0$  définit l'orientation du mode. On divise donc les points de la distribution expérimentale par  $\cos(n(\theta - \theta_0))$  et on moyenne les points situés à une distance égale du centre. On optimise ensuite le paramètre ajustable  $\theta_0$  par comparaison à la fonction radiale théorique donnée par CYPRES.

Les fonctions radiales calculées sont présentées dans la colonne de droite de la figure 4.13. Les traits verticaux représentent la dispersion calculée lors du moyennage de

la fonction radiale. Sur chaque courbe, la ligne en trait continu est la fonction radiale théorique calculée par CYPRES, obtenue sans autre paramètre ajustable que l'amplitude globale, et l'angle  $\theta_0$  pour les modes d'ordre circonferentiel  $n$  non nul. On observe un très bon accord entre les fonctions radiales théorique et expérimentale.

Bien que nous ayons pu étudier des modes ne respectant pas la symétrie de révolution, nous n'avons jamais observé la dégénérescence de ces modes. Seul un pic de résonance est visible sur le spectre de bruit thermique et l'étude du profil spatial montre une orientation particulière du mode alors que la symétrie du résonateur autorise en principe toutes les orientations possibles. Il est possible que notre façon de tenir le miroir brise la symétrie du système et favorise une orientation particulière. Une autre explication vient de ce que le faisceau de mesure est décentré par rapport au résonateur. Cela le rend en fait sensible uniquement au mode orienté dans la direction du faisceau.

Plus précisément, si les modes sont parfaitement dégénérés, on peut définir une base du sous-espace propre par les fonctions spatiales orthogonales :

$$u_1(r, \theta) = f(r) \cos(n(\theta - \theta_m)), \quad (4.24)$$

$$u_2(r, \theta) = f(r) \sin(n(\theta - \theta_m)), \quad (4.25)$$

où  $f$  est la fonction radiale commune aux deux modes propres et  $\theta_m$  est l'angle du point d'impact du faisceau de mesure. Le déplacement du miroir vu par la cavité en réponse à la pression de radiation du faisceau arrière s'écrit d'après l'équation (4.16)

$$x[\Omega_n] = i \frac{F_{\text{rad}}}{M\Gamma\Omega_M} (\langle u_1, v_0^2 \rangle u_1(\mathbf{r}_0) + \langle u_2, v_0^2 \rangle u_2(\mathbf{r}_0)), \quad (4.26)$$

où  $\Omega_M$ ,  $M$  et  $\Gamma$  sont respectivement la fréquence de résonance, la masse et le taux d'amortissement, identiques pour les deux modes. Si le faisceau de mesure a un col très petit devant la structure spatiale des modes, le recouvrement spatial  $\langle u_2, v_0^2 \rangle$  se réduit à la valeur de  $u_2$  au point d'impact du faisceau de mesure, qui est nulle par construction [équation (4.25)]. Le faisceau est donc insensible au mode  $u_2$  et on n'observe que le mode  $u_1$ , qui est le mode orienté dans la direction du faisceau de mesure.

### 4.3.3 Conclusion

L'étude détaillée des modes acoustiques d'un miroir cylindrique, en particulier la mesure des fréquences de résonance et des structures spatiales a fourni des résultats en parfait accord avec les calculs utilisant le modèle d'Hutchinson. Ceci permet de valider ce modèle qui est utilisé dans le domaine des interféromètres gravitationnels pour déterminer le bruit des miroirs. L'écart entre les masses effectives mesurées et celles calculées par CYPRES reste cependant inexplicé car les profils expérimentaux s'ajustent très bien aux profils théoriques, et le décentrage du faisceau de mesure est faible. Le couplage avec le support en est sans doute la cause et doit être également responsable des mauvais facteurs de qualité mécanique de notre miroir. Bien que ces effets soient difficiles à modéliser, l'amélioration des facteurs de qualité passe par la conception de nouveaux systèmes de fixation des miroirs assurant une meilleure isolation et réduisant les contraintes mécaniques imposées aux miroirs.



## 4.4 Modes acoustiques d'un miroir plan-convexe

La seconde géométrie de miroir que nous avons étudiée est la géométrie plan-convexe où le résonateur possède une face plane sur laquelle est déposé le miroir et une face arrière sphérique convexe. Cette géométrie, qu'elle soit à symétrie cylindrique ou de type rectangulaire avec des rayons de courbure pour la face convexe différents dans les deux directions, est utilisé pour fabriquer des résonateurs piézoélectriques de très grand facteur de qualité et a été largement étudiée par tomographie à rayon X [74, 75]. Pour ce type de résonateur, il existe des expressions analytiques pour les fréquences et les profils des modes propres de vibration. On trouve en effet des solutions de l'équation des ondes similaires aux modes Gaussiens électromagnétiques présents dans une cavité optique. Elles ont la particularité de ne pas dépendre du diamètre du miroir et d'être confinées au centre, ce qui les isole efficacement du dispositif de fixation du miroir.

### 4.4.1 Modes acoustiques Gaussiens

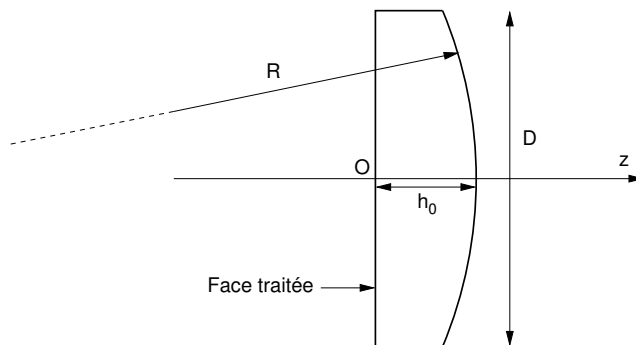


FIG. 4.14 – Schéma d'un miroir plan-convexe.

Comme nous l'avons vu avec l'exemple de la géométrie cylindrique, l'équation de propagation des ondes associée aux conditions aux limites même dans le cas d'un résonateur libre n'a en général pas de solutions analytiques. La géométrie plan-convexe représentée sur la figure 4.14 présente cependant dans le cadre de l'approximation paraxiale un ensemble de solutions dont les expressions sont entièrement calculables et sont en fait similaires aux modes Gaussiens optiques. Cette approximation paraxiale n'est valide que si la composante longitudinale  $k_z$  du vecteur d'onde du mode selon l'axe ( $Oz$ ) est très grande devant la composante transverse  $k_{\perp}$ . Il existe deux familles de solutions. La première catégorie est formée des modes de cisaillement qui sont caractérisés par des déformations du résonateur dans le plan transverse. La seconde regroupe les modes de compression qui induisent des déplacements longitudinaux. Seuls ces derniers provoquent une déformation de la surface selon l'axe ( $Oz$ ) susceptible d'être couplée au faisceau lumineux. Nous ne considérerons donc dans la suite que les modes de compression. Chacun de ces modes est repéré par trois indices  $n$ ,  $p$  et  $l$  et présente un profil Gaussien [33, 75, 76] semblable au profil d'intensité du champ dans une cavité

Fabry-Perot [77] :

$$u_{npl}(r, \theta, z) = e^{-(r/w_n)^2} \left( \sqrt{2} \frac{r}{w_n} \right)^l L_p^l \left( 2 \frac{r^2}{w_n^2} \right) \cos \left( n \frac{\pi z}{h(r)} \right) \cos(l\theta), \quad (4.27)$$

où  $L_p^l$  est un polynôme de Laguerre et  $h(r)$  désigne l'épaisseur du résonateur à une distance  $r$  de l'axe. Dans le cas où  $r$  est petit devant le rayon de courbure  $R$  de la face convexe, la fonction  $h(r)$  peut être approximée par :

$$h(r) = h_0 - \frac{r^2}{2R}, \quad (4.28)$$

où  $h_0$  est l'épaisseur au centre. Enfin la grandeur  $w_n$  dans l'équation (4.27) désigne le col acoustique défini par :

$$w_n^2 = \frac{2h_0}{n\pi} \sqrt{Rh_0} = \frac{w_1^2}{n}. \quad (4.29)$$

Le col  $w_n$  décroît lorsque le vecteur d'onde longitudinal  $k_z = n\pi/h_0$  augmente.

On voit sur l'équation (4.27) que  $n$  désigne le nombre de ventres du mode selon l'axe ( $Oz$ ),  $p$  représente le nombre de zéros de la fonction radiale et l'indice  $l$  est relié à la symétrie angulaire du mode. Les modes se répartissent en série d'harmoniques indicée par  $n$  et composée d'un mode longitudinal  $n00$  fondamental accompagné de modes d'indices transverses  $p$  et  $l$  non nuls. Les fréquences sont données par la relation :

$$\Omega_{npl}^2 = \Omega_M^2 \left[ n^2 + (2p + l + 1) \frac{2n}{\pi} \sqrt{\frac{h_0}{R}} \right], \quad (4.30)$$

où  $\Omega_M$  est l'intervalle spectral libre du résonateur et vaut  $\Omega_M = \pi c_l/h_0$  ( $c_l$  est la vitesse de propagation des ondes longitudinales donnée par l'équation (1.34)).

L'expression explicite de la fonction radiale  $u_{npl}$  des modes acoustiques permet de calculer de manière exacte leur masses  $M_{npl}$  [équation (1.39)] :

$$M_{npl} = \frac{\pi}{4} \rho h_0 w_n^2, \quad (4.31)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau. La masse est ainsi directement reliée au volume du mode, c'est-à-dire le volume  $\pi w_n^2 h_0$  où le déplacement est important. Pour un faisceau lumineux parfaitement centré sur le miroir, seuls les modes d'indice  $l = 0$  sont couplés avec le faisceau lumineux. La masse effective d'un mode à symétrie de révolution ( $l = 0$ ) se déduit de l'équation (4.31) et du calcul de l'intégrale de recouvrement entre le profil Gaussien du mode et le profil d'intensité  $v_0$  du faisceau [équation (1.71)]. Si l'on note  $w_0$  le col du faisceau lumineux, on trouve un recouvrement :

$$\langle u_{np0}(r, \theta, z = 0), v_0^2(r) \rangle = \frac{2w_n^2}{2w_n^2 + w_0^2} \left( \frac{2w_n^2 - w_0^2}{2w_n^2 + w_0^2} \right)^p. \quad (4.32)$$

Dans le cas où le col  $w_0$  du faisceau incident sur la cavité est très petit devant le col acoustique  $w_1$  du mode fondamental, et pour des valeurs pas trop élevées des indices  $n$  et  $p$ , l'intégrale de recouvrement devient simplement égale à l'unité. Nos paramètres

expérimentaux (col du faisceau de mesure et rayon de courbure des résonateurs) sont choisis de manière à rendre valide cette approximation. Les masses effectives mesurées sont alors directement la masse du mode.

Revenons pour finir sur la condition de validité de l'approximation paraxiale. L'expression des fonctions spatiales des modes acoustiques permet d'écrire les deux composantes  $k_z$  et  $k_\perp$  du vecteur d'onde :

$$k_z = n \frac{\pi}{h_0} \quad , \quad k_\perp = \sqrt{(2p + l + 1) \frac{2n\pi}{h_0 \sqrt{Rh_0}}} \quad (4.33)$$

En optique, les ondes lumineuses ont une longueur d'onde très petite devant la longueur de la cavité ce qui implique des ordres longitudinaux  $n$  très élevés, et justifie l'approximation paraxiale. Les modes acoustiques ont quant-à-eux des ordres longitudinaux proches de l'unité. La validité de l'approximation paraxiale requiert donc d'avoir un rayon de courbure  $R$  de la face convexe du résonateur grand devant son épaisseur  $h_0$ .

#### 4.4.2 Miroir plan-convexe de petit diamètre

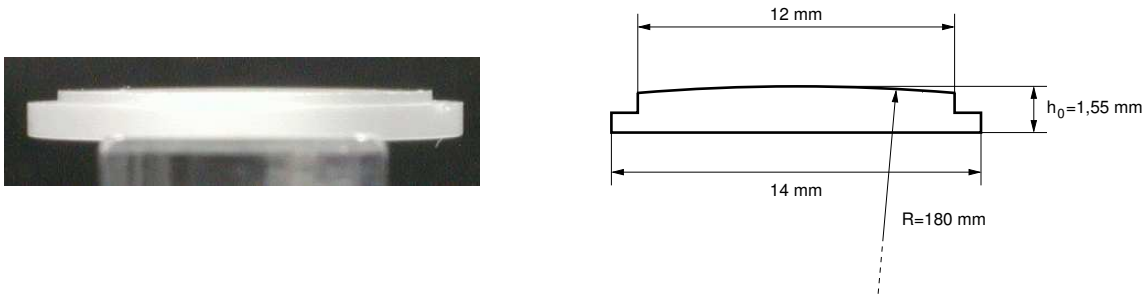


FIG. 4.15 – Miroir plan-convexe de petit diamètre. Les dimensions reportées sur le schéma de droite sont mesurées à partir de la photographie numérique.

Le premier résonateur plan-convexe que nous avons utilisé est le miroir de 12 *mm* de diamètre qui nous a servi à observer le bruit thermique dans le chapitre 2. La figure 4.15 montre une photographie numérique de profil du résonateur. Il possède en fait une couronne de 14 *mm* de diamètre qui permet de le centrer dans son support et de le maintenir par une lame en chrysocale. Le rayon de courbure  $R$  de la face concave et l'épaisseur au centre  $h_0$  qui déterminent toutes les caractéristiques des modes acoustiques sont mesurés en comptant les pixels de la photo numérique et valent respectivement  $R = 180 \text{ mm}$  et  $h_0 = 1,55 \text{ mm}$ . Avec un miroir plan-concave *Newport*, il forme une cavité dont les caractéristiques ont été mesurées dans la section 1.2.1.

Pour les dimensions du miroir plan-convexe et une vitesse du son dans la silice fondue  $c_l = 5970 \text{ m/s}$ , la formule (4.30) donne une fréquence de 1982 *kHz* pour le mode fondamental et un écart entre les fréquences des modes transverses des séries harmoniques de 57 *kHz*. Le spectre de bruit thermique observé sur une large plage de fréquence présente un pic très prononcé à une fréquence de 1858 *kHz*, que nous

Mode $npl$	Fréq (kHz)	Ecart (kHz)	Q	Mode $npl$	Fréq (kHz)	Ecart (kHz)	Q
1 0 0	1858 (1982)		120 000	3 0 0	5820 (5832)		470 000
1 0 1	1862	4		3 0 1	5890	70	
1 0 2	1872	10		4 0 0	7727 (7757)		440 000
1 3 0	1935			4 0 1	7782	55	
2 0 0	3535 (3907)		250 000	4 1 0	7837,2	55,4	
2 0 1	3538	3		4 0 2	7837,5		
2 0 2	3548	10		4 1 1	7891,3	54,2	
2 0 3	3563	15		4 0 3	7891,8		
2 0 4	3581			4 2 0	7944,5		
2 2 0	3590	29		4 1 2	7944,8	53,4	
2 1 2	3608			4 0 4	7945,5		
				4 1 3	7997,6	52,7	

TAB. 4.4 – Caractéristiques des modes acoustiques du résonateur plan-convexe de diamètre 12 mm, de rayon de courbure 180 mm et d'épaisseur 1,55 mm. Deuxième colonne : fréquences de résonance expérimentales (les fréquences entre parenthèses correspondent aux fréquences théoriques). Troisième colonne : écart entre modes transverses (la valeur théorique est de 57 kHz). Quatrième colonne : facteurs de qualité mécanique du mode fondamental de chaque série.

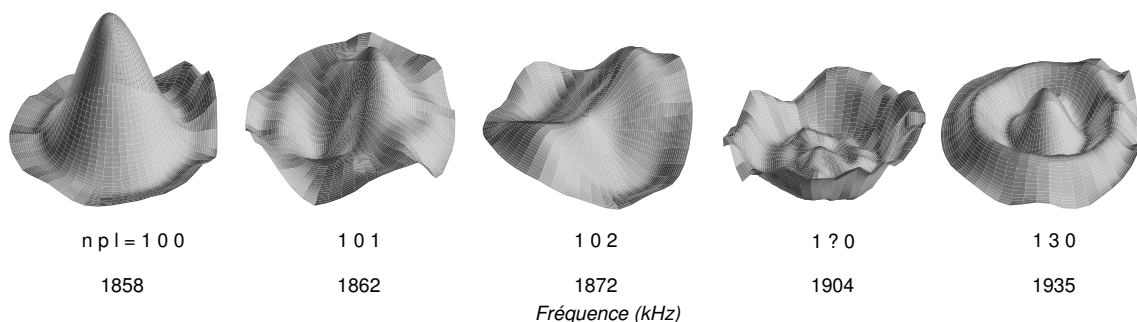


FIG. 4.16 – Profils des modes acoustiques observés sur la première série harmonique du miroir plan-convexe.

avons étudié dans les chapitres précédents, accompagné d'une série de quatre autres pics dont les fréquences sont quelques dizaines de kilohertz supérieures. Le spectre de bruit thermique présente également plusieurs autres séries de pic aux alentours de 3500, 5800, et 7700 kHz. Le tableau 4.4 récapitule les fréquences de résonance et les facteurs de qualité mécanique obtenus grâce à un ajustement Lorentzien des pics thermiques.

Les séries  $n = 1$  et  $n = 2$  présentent un écart avec les fréquences théoriques de plus de 10% et l'intervalle entre modes transverses est très éloigné des 57 kHz attendus. Il est en fait impossible d'associer les pics de résonance observés aux modes transverses théoriques et la nomenclature mise en première colonne du tableau 4.4 pour ces deux séries a été déterminée grâce à l'acquisition des profils spatiaux des modes acoustiques. La figure 4.16 présente les cinq modes observés de la série  $n = 1$ , pour un diamètre d'analyse de la surface du miroir de 11 mm. L'analyse de la fonction radiale du mode fondamental 1 0 0 donne un col acoustique de 2,3 mm, plus faible que la valeur théorique  $w_1 = 4,1$  mm. Le profil du mode de fréquence 1904 kHz est tel qu'on ne peut déterminer son ordre radial  $p$ .

Les divergences des résultats sur les séries  $n = 1$  et  $n = 2$  ne se retrouvent cependant pas sur les deux autres séries  $n = 3$  et  $n = 4$  que nous avons analysées. Pour les deux premières séries, les cols acoustiques théoriques  $w_1 = 4,1 \text{ mm}$  et  $w_2 = 2,9 \text{ mm}$  ne peuvent être considérés comme petits devant le diamètre de  $12 \text{ mm}$  du miroir et les effets de bord semblent jouer un rôle relativement important. La dernière colonne du tableau 4.4 montre une amélioration nette des facteurs de qualité mécanique des modes fondamentaux lorsque l'ordre  $n$  augmente, c'est-à-dire lorsque l'extension spatiale caractérisée par  $w_n$  diminue. Cette amélioration de l'accord entre les profils observés et théoriques en fonction de l'indice  $n$  a déjà été observée dans la référence [76] par tomographie par rayon X sur un résonateur plan-convexe piézoélectrique. Le profil du mode fondamental est très bruité alors que les modes fondamentaux  $n = 3$  et  $n = 5$  s'ajustent parfaitement avec des Gaussiennes. Ceci est en accord avec la remarque faite à la fin de la section 4.4.1 ; la validité de l'approximation paraxiale se renforce pour des ordres  $n$  élevés [équation (4.33)].

Dans le cas de notre résonateur, les troisième et quatrième séries, dont les cols acoustiques théoriques sont  $w_3 = 2,3 \text{ mm}$  et  $w_4 = 2,0 \text{ mm}$ , ont leur mode fondamental à la fréquence attendue avec une erreur inférieure à 0,5%. L'intervalle entre les modes transverses des séries  $n = 3$  et  $n = 4$  est respectivement de  $70 \text{ kHz}$  et  $55 \text{ kHz}$ , en bon accord avec la valeur théorique de  $57 \text{ kHz}$ . Sur la quatrième série où un grand nombre de modes a pu être observé, on trouve la dégénérescence en fréquence des modes de même  $2p + l$  prédite par l'équation (4.30). La figure 4.17 présente les profils des modes de la quatrième série harmonique observés expérimentalement. Les inserts **a**, **b**, et **c** montrent les fonctions radiales reconstruites à partir des distributions spatiales des modes 4 0 0, 4 0 1, et 4 1 3. L'ajustement de la première fonction par une Gaussienne (courbe en trait plein) donne une largeur  $w_4 = 2,4 \text{ mm}$ , légèrement plus grande que la valeur théorique ( $2,0 \text{ mm}$ ). Les deux autres courbes en trait plein sur les inserts **b** et **c** présentent les fonctions radiales théoriques [équation (4.27)] tracées avec la valeur expérimentale de  $w_4$  et sans paramètre ajustable autre que l'amplitude globale.

Pour réduire les effets de bord sur les modes acoustiques Gaussiens, nous avons alors fait une étude similaire à celle présentée dans cette section, en utilisant un résonateur plan-convexe de diamètre plus grand.

#### 4.4.3 Miroir plan-convexe de grand diamètre

L'étude précédente a montré l'existence de modes Gaussiens ayant de bons facteurs de qualité mécanique. Nous avons constaté une amélioration des facteurs de qualité pour des harmoniques d'ordre élevé, et donc pour de grandes fréquences de résonance dépassant même la bande passante de la cavité. Nous avons alors cherché à modifier les dimensions du miroir afin de réduire les fréquences de résonance et d'obtenir des modes acoustiques ayant de très grands facteurs de qualité mécanique, à des fréquences de l'ordre du mégahertz. Nous avons choisi un miroir d'épaisseur  $2,5 \text{ mm}$ . Nous avons conservé un rayon de courbure de la face convexe de  $150 \text{ mm}$  et choisi par contre un diamètre de  $34 \text{ mm}$ , environ trois fois plus grand que le miroir précédent de manière à réduire les effets de bord. Ce miroir n'étant cependant qu'un miroir de test, nous n'avons besoin que d'une qualité optique moyenne pour étudier les modes de vibration. Le traitement optique est donc un traitement classique sans super poli.

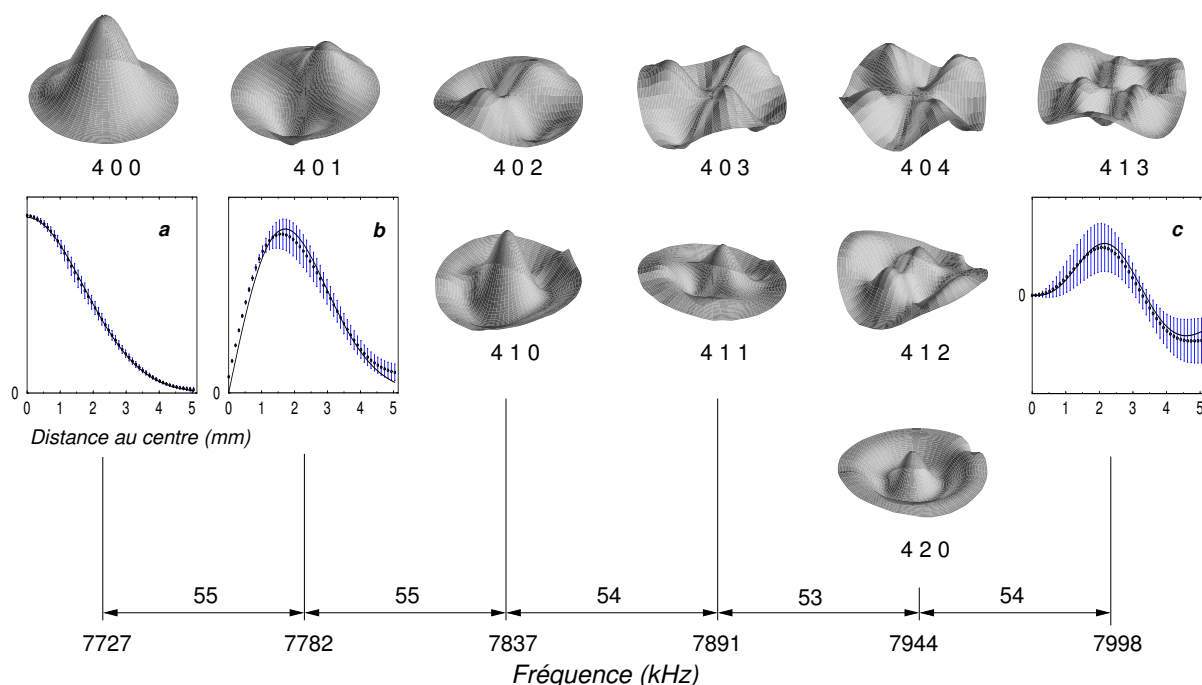


FIG. 4.17 – Profils expérimentaux des modes acoustiques observés sur la quatrième série harmonique du miroir plan-convexe. Les courbes **a**, **b**, et **c** sont les fonctions radiales expérimentales des modes 4 0 0, 4 0 1, et 4 1 3 ainsi que les fonctions théoriques tracées en trait plein.

### Montage de la cavité

Le schéma de la cavité est reporté sur la figure 4.18. Le coupleur d'entrée est un miroir plan-concave de rayon de courbure  $1\text{ m}$  et de transmission égale à  $98\%$ . Le traitement du miroir plan-convexe a été réalisé par la société FICHOU qui garantit une réflexion supérieure à  $99,3\%$  à  $810\text{ nm}$ . Ces caractéristiques conduisent à une cavité de finesse  $\mathcal{F} \simeq 300$ , suffisante pour observer la réponse mécanique du miroir à la force de pression de radiation du faisceau arrière.

Les pièces de montage de la cavité sont réalisées en cuivre pour ne pas réduire l'efficacité de l'asservissement en température. Le coupleur est maintenu par une lame élastique en chrysocale. La face plane du miroir mobile repose sur trois plots positionnés à  $120^\circ$  et usinés dans le support de miroir. Il est maintenu sur sa face convexe par une bague comportant également trois plots exactement en vis-à-vis de ceux du support. Le tout est serré par une lame de chrysocale. La cavité était au départ prévue pour avoir une longueur de  $1\text{ mm}$  afin que son mode fondamental optique s'adapte parfaitement au col du faisceau incident, sans avoir à modifier le système d'injection de la lumière. La finesse de la cavité étant cependant bien moins bonne que celle des cavités précédentes, les pics d'Airy des résonances optiques étaient tellement larges qu'il était impossible d'optimiser l'alignement et d'asservir la fréquence du laser sur le mode fondamental. Nous avons donc ajouté un espaceur pour monter le coupleur, afin d'augmenter la longueur de la cavité et diminuer sa bande passante d'un facteur de l'ordre de 20.

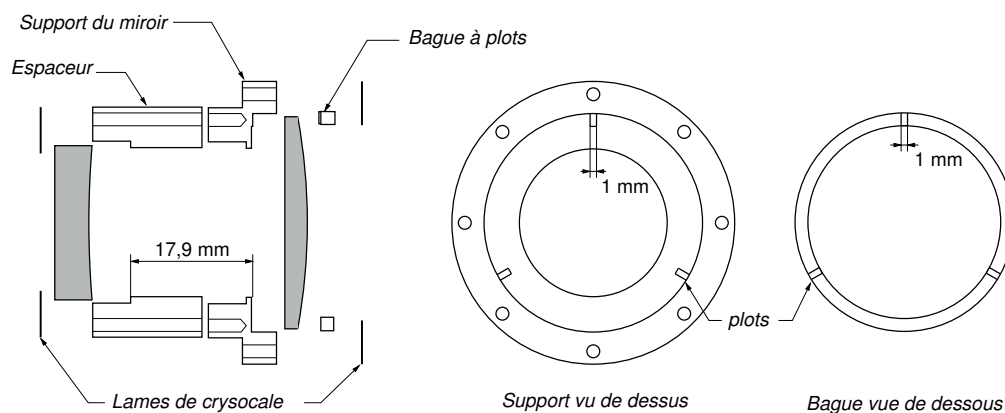


FIG. 4.18 – Schéma de montage de la cavité à miroir plan-convexe de diamètre  $34\text{ mm}$ . Le support du coupleur d'entrée a été allongé par un espaceur pour obtenir une cavité de  $18\text{ mm}$  de longueur. Le miroir plan-convexe est maintenu par un système de plots usinés dans le support et dans la bague supérieure.

### Résultats expérimentaux

Le rayon de courbure expérimental de la face convexe  $R = 148.5\text{ mm}$  et l'épaisseur au centre  $h_0 = 2,65\text{ mm}$  sont mesurés grâce à une photographie numérique du miroir prise de profil (voir figure 4.19) comme pour le miroir plan-convexe utilisé précédemment. Ces valeurs sont en très bon accord avec les spécifications du fabricant ( $R = 150\text{ mm}$  et  $h_0 = 2,5\text{ mm}$ ).

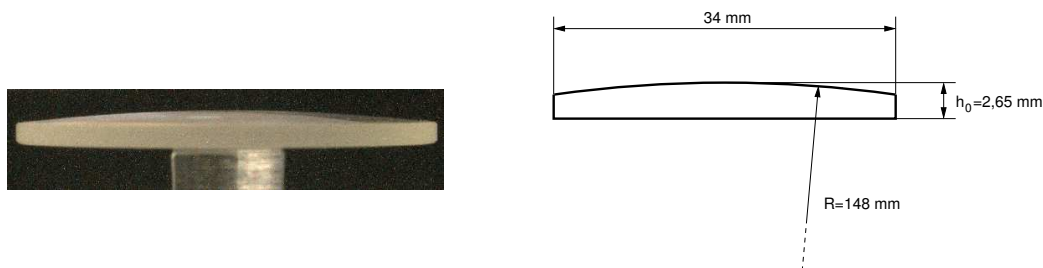


FIG. 4.19 – Miroir plan-convexe de diamètre  $34\text{ mm}$  vu de profil.

Avec ces caractéristiques du miroir, on attend le mode fondamental Gaussien  $npl = 1\ 0\ 0$  à une fréquence de  $1164\text{ kHz}$  et le fondamental  $2\ 0\ 0$  de la seconde série harmonique à une fréquence de  $2290\text{ kHz}$ . Nous avons mesuré le spectre de bruit thermique autour de ces fréquences sur une fenêtre d'analyse de quelques centaines de kilohertz. Un premier pic de résonance très étroit a été observé à la fréquence de  $1116\text{ kHz}$  et un second à la fréquence de  $2121\text{ kHz}$ .

Les profils de ces deux modes acoustiques ont été acquis en balayant le faisceau excitateur sur un diamètre d'analyse de  $30,5\text{ mm}$ . Les deux courbes obtenues sont présentées sur la figure 4.20. Les courbes possèdent un profil radial très confiné au centre, s'annulant sur une large distance jusqu'au bord du miroir. Les deux fonctions

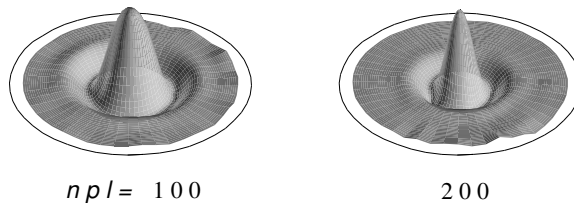


FIG. 4.20 – Profils expérimentaux des deux premiers modes fondamentaux Gaussiens.

radiales présentent une légère oscillation que l'on observe également sur le profil du mode Gaussien 1 0 0 du miroir plan-convexe de diamètre 12 *mm* (figure 4.16). Du fait de cette déformation, il est difficile d'obtenir un ajustement parfait par une Gaussienne. Nous avons estimé le col acoustique grâce à la largeur à mi-hauteur des fonctions radiales. On obtient des cols  $w_1 = 3,5$  *mm* et  $w_2 = 2,4$  *mm*, plus petits que les valeurs théoriques prédites par l'équation (4.29), respectivement 5,9 *mm* et 4,1 *mm*.

Les facteurs de qualité des modes 1 0 0 et 2 0 0 n'ont pas pu être mesurés à partir des pics de résonance du spectre de bruit thermique. Leur largeur est en effet de l'ordre du hertz, à la limite de la résolution spectrale de l'analyseur de spectre. Nous avons alors mesuré les taux de relaxation de ces modes en évaluant les temps de décroissance de la réponse à un échelon de modulation résonnante du faisceau arrière, comme cela est décrit dans la partie 2.4. Les puissances de modulation intégrées sur une largeur de 30 *Hz* autour de la fréquence de résonance sont représentées en fonction du temps sur la figure 4.21 en échelle logarithmique. Un ajustement par une droite donne des taux de relaxation  $\Gamma_{100} = 2\pi \times 2,64$  *Hz* et  $\Gamma_{200} = 2\pi \times 3,26$  *Hz*. Ces valeurs correspondent à des facteurs de qualité mécanique  $Q_{100} = 350\,000$  et  $Q_{200} = 650\,000$ . Ces résultats sont à comparer aux facteurs de qualité mesurés sur le miroir plan-convexe de petit diamètre ( $Q_{100} = 120\,000$  et  $Q_{200} = 250\,000$ ).

Pour finir nous avons mesuré les masses effectives des deux modes fondamentaux grâce à leur réponse à la force de pression de radiation du faisceau arrière. On obtient des masses  $M_1 = 40$  *mg* et  $M_2 = 50$  *mg*, en dessous des valeurs prédites par l'équation (4.31), respectivement 153 *mg* et 77 *mg*. La géométrie plan-convexe permet ainsi d'obtenir des modes acoustiques ayant une masse effective environ 100 fois plus petite que la masse totale du miroir (de l'ordre de 3 *g*).

#### 4.4.4 Conclusion

Nous avons observé et analysé les caractéristiques des modes Gaussiens dans un miroir plan-convexe. La faible extension spatiale de ces modes fournit de très bons facteurs de qualité mécanique et des masses effectives relativement faibles. Nous avons en particulier observé une nette amélioration des facteurs de qualité lorsque l'ordre harmonique est élevé ou que le diamètre du miroir est augmenté, ce qui correspond dans les deux cas à avoir des modes acoustiques extrêmement confinés au centre du miroir et par conséquent moins sensibles aux effets de bord.



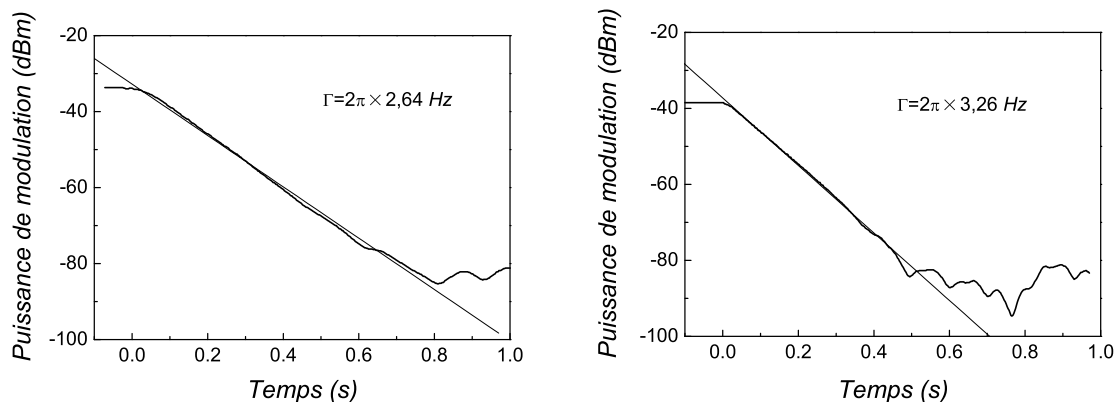


FIG. 4.21 – Evolution temporelle de la puissance de modulation des modes acoustiques Gaussiens 1 0 0 (courbe de gauche) et 2 0 0 (courbe de droite) lorsque l'on coupe l'excitation résonnante du faisceau arrière. Les taux de relaxation  $\Gamma$  sont déduits de l'ajustement par une exponentielle décroissante.

#### 4.5 Modes cylindriques dans un miroir plan-convexe

Les modes Gaussiens d'un miroir plan-convexe possèdent des fréquences de résonance relativement élevées comparées aux modes acoustiques d'un miroir cylindrique : pour des dimensions à peu près similaires, le miroir plan-convexe de diamètre  $34 \text{ mm}$  décrit dans la partie précédente possède un mode Gaussien fondamental à une fréquence supérieure au mégahertz tandis que les miroirs cylindriques *Newport* utilisés dans la partie 4.3 ont des modes acoustiques en dessous de  $100 \text{ kHz}$ . Un miroir plan-convexe est donc un bon candidat pour mettre en évidence les effets quantiques de la pression de radiation (voir chapitre 5) : il allie des fréquences de résonance élevées, ce qui permet d'éviter les problèmes liés aux bruits techniques à basse fréquence, à une masse effective faible et des facteurs de qualité élevés, ce qui améliore la réponse mécanique du miroir aux fluctuations quantiques de la pression de radiation.

L'existence de modes Gaussiens est une conséquence sur le plan théorique de l'approximation paraxiale. Nous avons vu toutefois que les modes de fréquence de résonance basse ne sont pas parfaitement Gaussiens. Par ailleurs, l'existence de solutions de forme Gaussienne pour l'équation de propagation n'exclut pas l'existence de modes acoustiques de structure spatiale différente. Ceci est particulièrement important pour connaître le comportement du miroir en dehors des fréquences de résonance. En particulier, à basse fréquence, cela détermine les possibilités d'observer des effets quantiques comme la compression des fluctuations du champ par une cavité à miroir mobile [22], ou encore le niveau de bruit thermique dans un interféromètre gravitationnel. Dans cette partie, nous étudions les modes acoustiques non Gaussiens d'un miroir plan-convexe, tout d'abord sur le plan théorique, puis sur le plan expérimental.

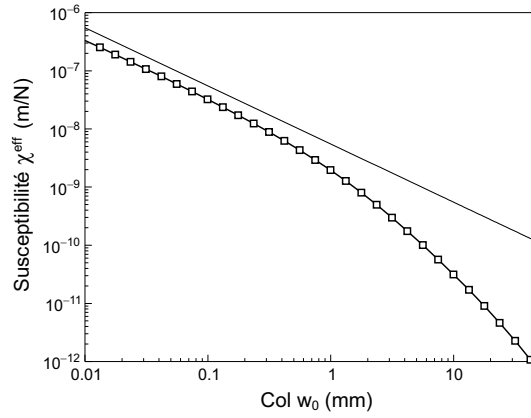


FIG. 4.22 – Susceptibilité statique  $\chi^{\text{eff}}[\Omega \simeq 0]$  en fonction de la taille  $w_0$  du col optique, pour un miroir plan-convexe d'épaisseur  $2,5 \text{ mm}$  et de rayon de courbure  $150 \text{ mm}$ . Les points sont les résultats de l'approche modale en ne considérant que les modes Gaussiens ; la ligne droite correspond à l'approche globale, valide pour des petits cols optiques.

#### 4.5.1 Evidence théorique de l'existence de modes non Gaussiens

Nous avons vu dans la section 1.1.3 que le mouvement du miroir est déterminé par la susceptibilité effective  $\chi^{\text{eff}}$  faisant intervenir la somme des susceptibilités de chaque mode pondérées par l'intégrale de recouvrement avec la lumière. Par exemple, le spectre de bruit thermique du miroir à basse fréquence se met sous la forme :

$$S_x[\Omega \simeq 0] = 2k_B T \frac{\phi[\Omega]}{\Omega} \chi^{\text{eff}}[\Omega \simeq 0], \quad (4.34)$$

où  $\phi[\Omega]$  est l'angle de perte, supposé indépendant du mode acoustique. D'après les équations (1.70) et (1.75), la susceptibilité à basse fréquence  $\chi^{\text{eff}}[\Omega \simeq 0]$  peut se mettre sous la forme :

$$\chi^{\text{eff}}[\Omega \simeq 0] = \sum_n \frac{\langle v_0^2, u_n \rangle^2}{M_n \Omega_n^2}. \quad (4.35)$$

Dans le cas d'un miroir plan-convexe et si l'on ne considère que les modes Gaussiens, tous les paramètres présents dans cette équation ont une expression analytique connue [voir équation (4.29) à (4.32)]. On peut alors effectuer la somme numériquement [78]. La figure 4.22 montre le résultat obtenu pour un miroir d'épaisseur au centre  $h_0 = 2,5 \text{ mm}$  et de rayon de courbure de la face convexe  $R = 150 \text{ mm}$ . La susceptibilité statique atteint des valeurs relativement élevées pour des petits cols optiques. Par exemple, pour un col de  $10 \text{ }\mu\text{m}$ , le miroir est équivalent à un pendule de fréquence de résonance égale à  $1 \text{ MHz}$  et ayant une masse de  $800 \text{ }\mu\text{g}$  seulement.

On peut comparer ce résultat à celui donné par l'approche globale [63, 64, 65], valide pour des des petits cols optiques  $w_0$ . Cette approche consiste à considérer un miroir de taille infinie et à calculer l'énergie correspondant à la déformation statique sous l'effet d'une force de pression de radiation constante. Elle donne [79] :

$$\chi^{\text{eff}}[\Omega \simeq 0] = \frac{1 - \sigma^2}{\sqrt{\pi} E w_0}. \quad (4.36)$$

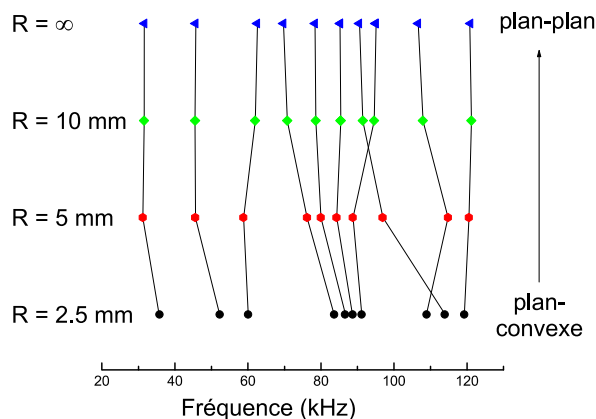


FIG. 4.23 – Evolution des fréquences de résonance des premiers modes acoustiques d'un miroir d'épaisseur au centre  $1\text{ mm}$  et de diamètre  $4\text{ mm}$ , lorsqu'on le déforme progressivement depuis une géométrie cylindrique ( $R = \infty$ ) jusqu'à une calotte sphérique ( $R = 2,5\text{ mm}$ ).

où  $E$  est le module d'Young du matériau et  $\sigma$  le coefficient de Poisson. Comme le montre la figure 4.22, on a un bon accord qualitatif entre les deux approches pour de petits cols optiques. La méthode globale donne toutefois une susceptibilité statique systématiquement plus grande que la décomposition modale. Cela traduit le fait que la décomposition sur les seuls modes Gaussiens ne décrit pas entièrement le comportement du miroir : les modes Gaussiens ne contribuent à la susceptibilité statique que pour une proportion de l'ordre de 60%.

Nous avons cherché à déterminer les modes acoustiques manquants dans l'approximation paraxiale, à l'aide d'une modélisation par éléments finis. Olivier Arcizet, au cours de son stage de DEA, a effectué un séjour au laboratoire LNL de Padoue où il a pu utiliser le logiciel PROMECHANICA [80]. Il a ainsi obtenu un certain nombre de modes acoustiques non Gaussiens dont il a déterminé les fréquences de résonance et les structures spatiales. Les fréquences et les profils varient continûment lorsque l'on fait varier le rayon de courbure de la face convexe de l'infini (correspondant à un miroir cylindrique) jusqu'à une valeur finie. Comme le montre la figure 4.23, un miroir plan-convexe possède des modes acoustiques similaires à ceux d'un miroir cylindrique, avec des variations de quelques pourcents seulement.

#### 4.5.2 Etude expérimentale avec le miroir de diamètre 34 mm

Nous avons étudié le mouvement d'un miroir plan-convexe à basse fréquence afin de mettre en évidence expérimentalement d'éventuels modes de vibration non Gaussiens. Pour observer les modes prédits par la simulation par éléments finis, nous avons préféré utiliser le miroir de diamètre  $34\text{ mm}$  plutôt que le miroir de diamètre  $12\text{ mm}$ . Le système de fixation par plots du miroir de diamètre  $34\text{ mm}$  impose certainement moins de contraintes que le serrage direct par lame chrysocale du miroir de diamètre  $12\text{ mm}$ .

La cavité possède cependant une sensibilité bien moins bonne que celle du miroir de diamètre  $12\text{ mm}$ , et les pics de résonance dus aux modes acoustiques ne sont pas visibles directement sur le spectre de bruit thermique. D'autre part, la technique d'acquisition

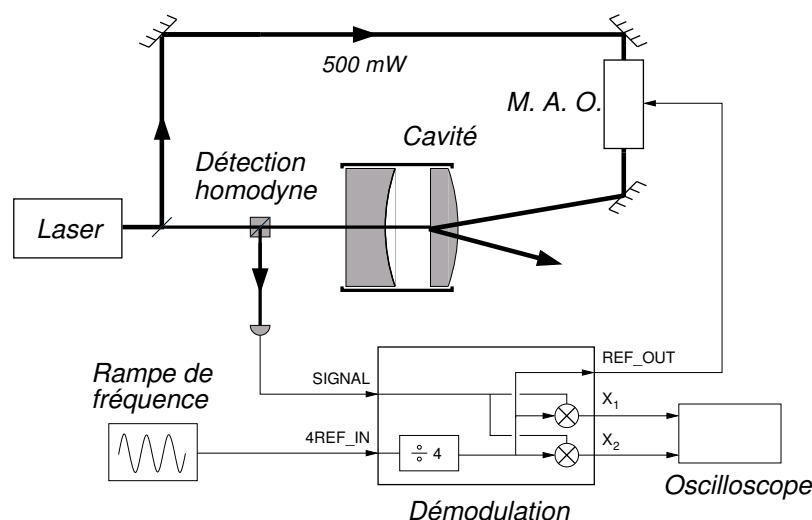


FIG. 4.24 – Schéma du procédé d'acquisition de la réponse mécanique du miroir à la force de pression de radiation du faisceau arrière sur une large plage de fréquence.

point par point de la réponse du miroir à l'excitation résonnante par le faisceau arrière déjà utilisée dans la partie 2.3 n'est pas applicable telle quelle. Le temps d'acquisition et de transfert du résultat à l'ordinateur est de l'ordre d'une seconde par point et, si l'on espère des facteurs de qualité mécanique des modes supérieurs à 10 000, il est nécessaire d'effectuer une mesure au moins tous les 10  $Hz$  pour ne manquer aucune résonance. L'étude de la réponse du miroir sur une plage de fréquence de l'ordre du mégahertz prendrait alors un temps considérable.

Nous avons donc utilisé un procédé différent basé sur la détection synchrone de l'excitation arrière et dont le schéma est reporté sur la figure 4.24. On reprend le dispositif expérimental présenté sur la figure 4.5, en gardant le faisceau arrière centré sur le miroir mais en modifiant de manière continue la fréquence du générateur. Le générateur *IFR 2030* que nous utilisons possède une fonction SWEEP lui permettant d'exécuter une rampe de fréquence. On utilise alors la sortie **REF\_OUT** qui fournit un signal synchronisé avec le signal de référence délivré par le générateur et de fréquence égale à la fréquence de démodulation des quadratures.

Le générateur de signal est programmé pour produire une rampe de fréquence de 10  $kHz$  de large. La fréquence du signal varie en fait selon un millier de paliers dont la durée est de 10  $ms$ . Le démarrage et la fin de la rampe s'accompagnent d'une impulsion générée par le synthétiseur sur une sortie auxiliaire. On acquiert les deux sorties  $X_1$  et  $X_2$  de la boîte de démodulation sur l'oscilloscope numérique TDS 420, sur une durée supérieure au temps de balayage et en mode 2500 points par courbe. Le signal auxiliaire est également récupéré et sa première impulsion est utilisée pour déclencher l'acquisition avec un prétrig de 1 %. Les trois traces sont ensuite transférées à l'ordinateur qui reconstitue le spectre en réalisant la somme  $X_1^2 + X_2^2$ . Les impulsions de début et de fin de balayage sont utilisées par l'ordinateur pour convertir l'échelle temporelle en échelle de fréquence. L'ordinateur commande ensuite l'acquisition sur la plage de fréquence

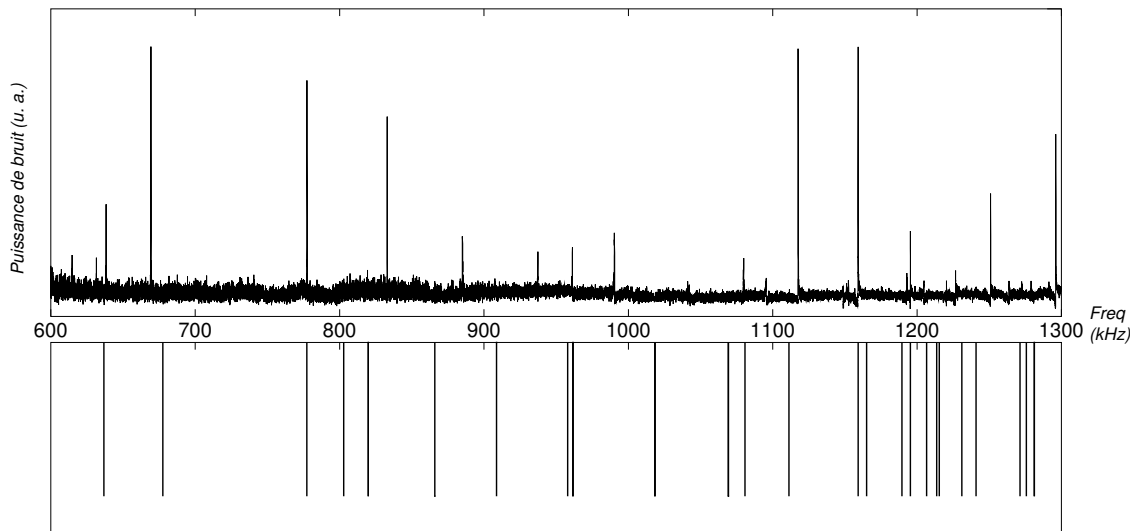


FIG. 4.25 – En haut : réponse du miroir de diamètre  $34\text{ mm}$  à une excitation dont la fréquence est balayée entre  $600$  et  $1300\text{ kHz}$ . En bas : répartition des fréquences de résonance des modes d'ordre circconférentiel  $n = 0$  calculée par CYPRES pour un miroir cylindrique de diamètre  $34\text{ mm}$  et de  $2,5\text{ mm}$  d'épaisseur.

suivante.

### 4.5.3 Résultats expérimentaux

La courbe du haut de la figure 4.25 présente la réponse du miroir de diamètre  $34\text{ mm}$  à l'excitation par le faisceau arrière, balayé en fréquence entre  $600$  et  $1300\text{ kHz}$ . L'objet de cette étude étant simplement de repérer les pics de résonance du miroir nous n'avons pas effectué de calibration de la puissance de modulation et la courbe est présentée en unité arbitraire. On constate la présence de nombreux pics de résonance en dessous de la fréquence de résonance du mode Gaussien fondamental ( $1116\text{ kHz}$ ). Ces modes ne sont pas prédits dans le cadre de l'approximation paraxiale.

Nous avons comparé les fréquences de résonance de ces modes à celles des modes acoustiques d'un miroir cylindrique de dimensions comparables (diamètre  $34\text{ mm}$  et épaisseur  $2,5\text{ mm}$ ). La courbe du bas de la figure 4.25 représente les fréquences de résonance calculées par CYPRES, pour les modes à symétrie cylindrique ( $n = 0$ ). La correspondance entre les fréquences calculées et mesurées sur le miroir est nettement moins bonne que pour le miroir cylindrique *Newport*. Nous avons mesuré les profils spatiaux des modes acoustiques présents sur le spectre et les avons comparés aux profils calculés par CYPRES. Les profils expérimentaux de quelques-uns de ces modes sont représentés dans la colonne de gauche de la figure 4.26. En regard dans la colonne du milieu sont représentés les profils théoriques du mode de plus proche fréquence de résonance. A part pour le premier mode de fréquence  $777\text{ kHz}$ , on constate un très bon accord entre les structures spatiales expérimentale et théorique. La colonne de droite présente les fonctions radiales déterminées comme dans la section 4.3.2. On observe un bon accord entre les profils théorique et mesuré. Les deux profils deviennent

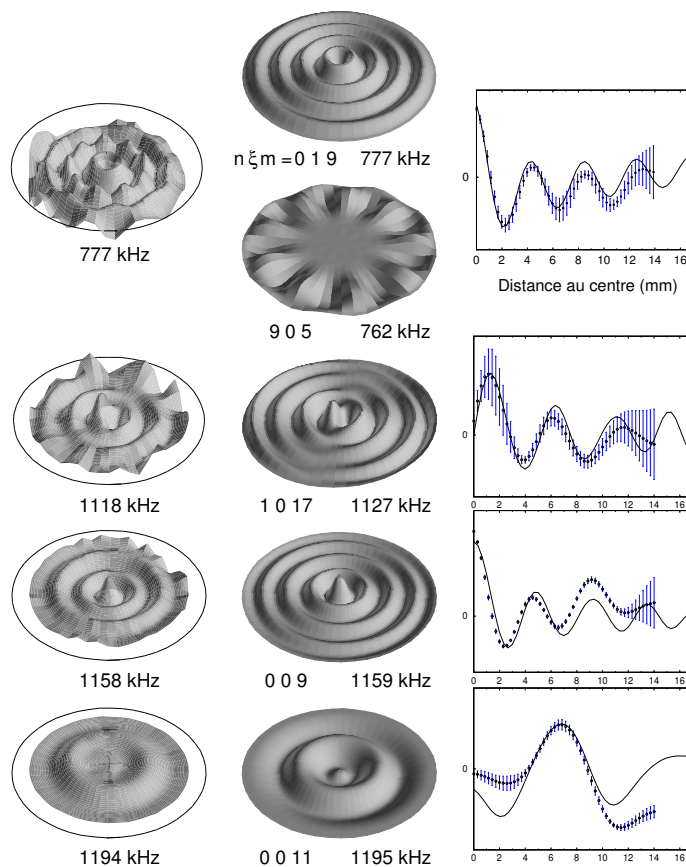


FIG. 4.26 – Profils des modes cylindriques observés sur le miroir plan-convexe de diamètre  $34\text{ mm}$ . A gauche : profils expérimentaux. Au milieu : profils calculés par CYPRES pour un miroir cylindrique de mêmes dimensions. A droite : fonctions radiales expérimentale et théorique.

significativement différents pour des distances radiales proches du rayon du miroir, ce qui correspond à des zones où l'épaisseur du miroir s'écarte sensiblement de la valeur au centre. On retrouve cependant l'allure générale des modes acoustiques prédite par le calcul.

Si la plupart des modes que l'on observe sont de symétrie de révolution, on observe néanmoins quelques modes d'ordre circonférentiel  $n = 1$ . La figure 4.26 montre par exemple le mode  $1\ 0\ 17$  dont le profil et la fréquence sont en excellent accord avec les calculs d'Hutchinson. Le mode  $0\ 0\ 11$ , malgré son numéro d'ordre  $m$  relativement élevé présente un profil théorique très peu accidenté. Il se distingue des autres modes possédant des fréquences supérieures au mégahertz dont les profils sont plutôt similaires à ceux des modes  $0\ 0\ 9$  ou  $1\ 0\ 17$  avec de nombreux replis. Son existence est pourtant confirmée par le mode expérimental observé à la fréquence  $1194\text{ kHz}$  et dont le profil présente la même allure particulière.

Le mode observé à la fréquence de  $777\text{ kHz}$  semble correspondre au mode théorique  $0\ 1\ 9$  dont la fréquence vaut  $776,9\text{ kHz}$ . Il présente cependant un profil relativement sin-

gulier qui possède une "double" symétrie angulaire  $n = 0$  et  $n = 9$ . Ceci est contraire aux calculs théoriques puisqu'ils prédisent une dépendance angulaire uniquement du type  $\cos(n\theta)$ . Ce profil particulier semble provenir plutôt d'une dégénérescence accidentelle de deux modes de symétries angulaires différentes. En faisant tourner le programme CYPRES pour la valeur  $n = 9$  de l'ordre circonférentiel, on trouve que le mode  $n\xi m = 9\ 0\ 5$  possède une fréquence de résonance de  $762\ kHz$ . Les profils théoriques des modes  $0\ 1\ 9$  et  $9\ 0\ 5$  sont reportés sur la figure 4.26. Le profil théorique du mode  $9\ 0\ 5$  reste cependant assez éloigné de ce qui est observé, mais c'est le seul ayant la symétrie  $n = 9$  sur une plage de  $100\ kHz$  de large. La convexité du miroir peut expliquer la déformation du profil et le fait que ces modes se soient retrouvés avec des fréquences de résonance très voisines. L'excitation résonnante par le faisceau arrière agit indifféremment sur les deux modes et le bruit de phase du faisceau réfléchi par la cavité retranscrit la superposition de leurs réponses mécaniques.

Les profils des modes cylindriques présentés dans cette section sont à comparer aux profils des modes Gaussiens observés sur le même miroir. Les modes cylindriques ont une extension spatiale qui est toujours de l'ordre de la taille du miroir, soit à cause d'un profil radial peu accidenté (mode  $0\ 0\ 11$ ), soit du fait des replis se répétant jusqu'au bord du miroir (modes  $0\ 1\ 9\dots$ ). Les modes Gaussiens de la figure 4.20 présentent des profils radicalement différents, avec une extension spatiale beaucoup plus faible que le diamètre du miroir.

#### 4.5.4 Des modes cylindriques aux modes Gaussiens

Nous avons tenté de mieux comprendre la coexistence des deux types de modes acoustiques cylindriques et Gaussiens dans un miroir plan-convexe et en particulier l'apparition des modes Gaussiens lorsque le rayon de courbure du miroir passe de l'infini à une valeur finie. Pour cela nous avons étudié plus en détail la structure des modes cylindriques dont la fréquence est voisine de la fréquence du mode fondamental Gaussien.

L'épaisseur du miroir  $h_0$  et la vitesse des ondes longitudinales  $c_l$  dans la silice permettent de définir une fréquence  $\Omega_M = \pi c_l / h_0$  correspondant à une onde se réfléchissant sur les deux faces du miroir. Cette fréquence est proche de la fréquence du mode fondamental Gaussien pour un miroir plan-convexe d'épaisseur  $h_0$  et de rayon de courbure grand devant l'épaisseur. Nous avons utilisé le programme CYPRES pour calculer la distribution spatiale de quelques modes cylindriques dont la fréquence est proche de  $\Omega_M$ . Nous avons également étudié la dépendance du déplacement en fonction de la position  $z$  selon l'épaisseur du substrat ( $z = 0$  est le plan du miroir). Les modes Gaussiens auxquels la lumière est sensible ont un déplacement purement longitudinal avec une dépendance en  $\cos(\pi z / h_0)$  pour le mode fondamental [équation (4.27)]. Nous avons donc calculé la composante longitudinale du déplacement pour les modes cylindriques.

La figure 4.27 montre les profils spatiaux de quelques modes calculés par le programme CYPRES pour un miroir cylindrique de diamètre  $12\ mm$  et d'épaisseur  $1,5\ mm$ . La colonne de droite représente la dépendance selon  $z$  de la composante longitudinale  $u(r = 0, z)$  prise sur l'axe central ( $r = 0$ ) du miroir. Les calculs exécutés par CYPRES pour des rapports d'aspect de l'ordre de ceux de nos miroirs ( $D/h_0$  de l'ordre de la dizaine) montrent que pour un mode donné, l'allure de la fonction  $u(r, z)$  change

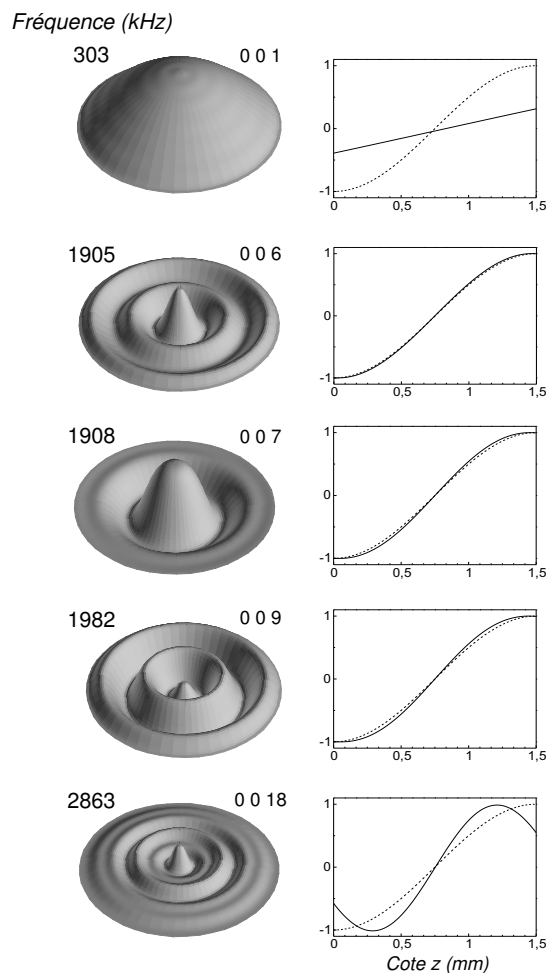


FIG. 4.27 – Profils de quelques modes cylindriques pour un miroir de 12  $mm$  de diamètre et 1,5  $mm$  d'épaisseur. Les graphes représentent la dépendance de la composante longitudinale  $u(r = 0, z)$  prise sur l'axe du miroir, en fonction de la profondeur  $z$ . La courbe en pointillés est la dépendance du mode Gaussien fondamental.

peu (variations relatives inférieures à 10%) lorsque  $r$  varie et s'ajuste très bien avec une fonction sinusoïdale. Les modes dont la fréquence est proche de  $\Omega_M$  ont une dépendance en  $z$  qui coïncide parfaitement avec celle du mode fondamental Gaussien.

Lorsque le numéro d'ordre  $m$  augmente, la fonction radiale devient de plus en plus accidentée et le nombre de replis augmente (voir les modes 001 et 006 sur la figure 4.27). Cependant, autour de la fréquence  $\Omega_M \simeq 2 MHz$ , on observe un mode dont la structure se simplifie (mode 007). Pour des fréquences supérieures les modes présentent de nouveau des fonctions radiales avec de nombreuses vagues. Ce phénomène s'est répété pour toutes les dimensions du miroir que nous avons testé. En particulier pour un miroir de diamètre 34  $mm$  et d'épaisseur 2,5  $mm$ , on observe autour de la fréquence 1100  $MHz$  deux modes (les modes 0010 et 0011) ayant une structure spatiale très simple, alors que les modes de numéro d'ordre voisin présentent des fonctions radiales



plus accidentées.

Ainsi, il existe, dans un miroir cylindrique, un mode acoustique de fréquence voisine de la fréquence de résonance du mode fondamental Gaussien d'un miroir plan-convexe de même épaisseur  $h_0$  ( $\Omega_M$ ), et dont la distribution spatiale est très proche de celle du mode Gaussien fondamental. On peut alors penser que l'apparition des modes Gaussiens lorsque l'on passe d'un miroir parfaitement cylindrique à un miroir plan-convexe provient en fait de la déformation continue de ces modes cylindriques particuliers vers un profil Gaussien.

## Chapitre 5

# Effets quantiques dans les mesures de petits déplacements

Nous traitons dans ce dernier chapitre de certains aspects quantiques du couplage optomécanique. Nous verrons en particulier dans la première partie que les fluctuations quantiques de l'intensité du faisceau intracavité produisent des variations de la pression de radiation sur le miroir mobile, ce qui conduit à une limite quantique standard dans la mesure de ses déplacements. Cette *limite quantique standard* peut être dépassée en injectant des états comprimés du champ dans le système, ou encore en profitant des propriétés quantiques du champ intracavité. La deuxième partie est consacrée à l'étude d'un exemple de technique permettant d'améliorer la sensibilité d'une mesure interférométrique en désaccordant la cavité de mesure. Dans la dernière partie nous nous intéressons à un nouveau type de détecteur d'ondes gravitationnelles, basé sur un double résonateur mécanique. Nous présentons une estimation complète des bruits thermiques et quantiques, en utilisant une méthode générale de calcul qui s'applique à n'importe quelle géométrie des résonateurs. Nous en déduisons la sensibilité que pourrait atteindre une antenne gravitationnelle constituée de deux sphères imbriquées.

### 5.1 Effets de la pression de radiation

Nous reprenons dans cette partie la discussion amorcée dans le premier chapitre, en ne négligeant plus désormais les effets de la pression de radiation. La première section traite des effets statiques de la pression de radiation, en particulier nous étudierons les phénomènes de bistabilité qui apparaissent pour de grandes intensités intracavité. La section suivante présente les effets des fluctuations quantiques de la pression de radiation sur la sensibilité des mesures de petits déplacements et montre l'existence d'une limite quantique standard. La dernière section discute des conditions favorables à l'observation expérimentale de cette limite quantique standard.

#### 5.1.1 Bistabilité

Nous considérons une cavité à une seule entrée-sortie dont le miroir arrière est mobile. Les relations (1.87–1.90) entre les champs moyens entrant, sortant, intracavité et

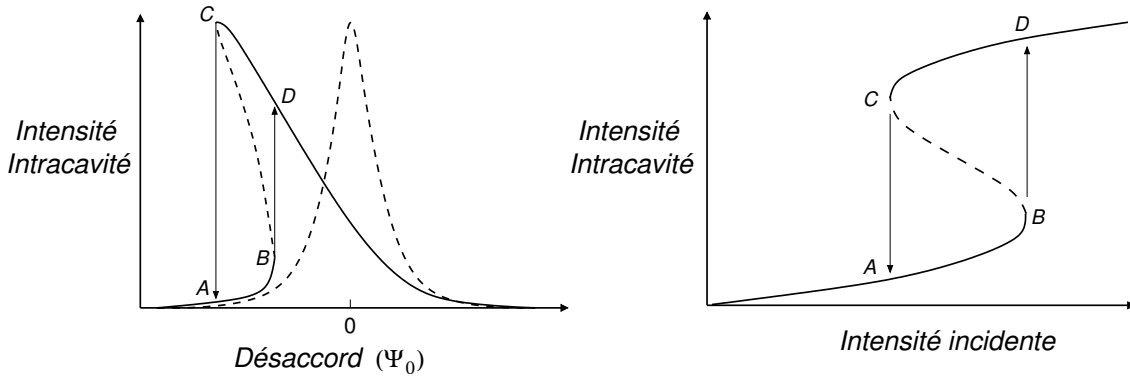


FIG. 5.1 – Courbe de gauche : déformation du pic d’Airy de l’intensité intracavité pour un déphasage non linéaire  $\Psi_{NL}$  négligeable devant  $\gamma$  (courbe en pointillé) et de l’ordre de  $\gamma$  (courbe en trait plein). Courbe de droite : cycle d’hystérésis obtenu en balayant l’intensité incidente.

le désaccord de la cavité montrent que l’effet de la pression de radiation est équivalente à un effet Kerr, comme celui produit par un milieu non linéaire de type  $\chi^{(3)}$  placé dans la cavité [81, 82, 83, 43]. En plus du déphasage  $\Psi_0$  dû au désaccord entre la cavité et la lumière, le champ subit un déphasage non linéaire  $\Psi_{NL}$  proportionnel à l’intensité moyenne  $\bar{I}$  [équation (1.88)]. Cet effet a des conséquences importantes sur le comportement de la cavité. En particulier, il peut apparaître des phénomènes de bistabilité [44], lorsque le déphasage non linéaire devient suffisamment grand par rapport aux pertes  $2\gamma$  de la cavité.

Lorsque l’on balaye le désaccord  $\Psi_0$ , le pic d’Airy décrit par l’intensité intracavité est modifié par rapport au cas d’une cavité rigide (voir figure 5.1). Pour certaines valeurs du déphasage  $\Psi_0$  il peut exister jusqu’à trois valeurs possibles pour l’intensité intracavité, deux correspondant à une situation stable, la troisième à une situation instable. Lorsque le système se trouve sur la branche  $AB$ , une augmentation du désaccord  $\Psi_0$  rapproche le système de la condition de résonance et entraîne une augmentation de l’intensité dans la cavité. La pression de radiation du faisceau intracavité qui en résulte repousse le miroir mobile, ce qui a pour effet d’augmenter le déphasage total  $\bar{\Psi} = \Psi_0 + \Psi_{NL}$  et donc de rapprocher le système de la résonance. Ainsi le sommet du pic d’Airy, atteint pour une valeur nulle du désaccord  $\bar{\Psi}$ , correspond en fait à un désaccord  $\Psi_0$  négatif. Le pic d’Airy est déformé vers les valeurs négatives du désaccord, avec un flanc montant plus raide et un flanc descendant moins pentu.

Un raisonnement analogue peut être fait lorsque l’on fait varier l’intensité incidente  $\bar{I}^{in}$ , pour un désaccord  $\Psi_0$  fixé. En combinant les équations (1.88) et (1.89), on trouve que l’intensité intracavité  $\bar{I}$  est solution d’une équation du troisième degré :

$$\bar{I} (\gamma^2 + (\Psi_0 + 4\hbar k^2 \chi[0]\bar{I})^2) = 2\gamma \bar{I}^{in}. \quad (5.1)$$

Il peut ainsi exister pour une valeur donnée de l’intensité incidente  $\bar{I}^{in}$  jusqu’à trois solutions stationnaires, dont deux seulement sont stables. Ce sont les branches  $AB$  et  $CD$  de la courbe de droite de la figure 5.1. Le cycle d’hystérésis résultant de cette bistabilité purement mécanique a été mis en évidence expérimentalement par Dorsel

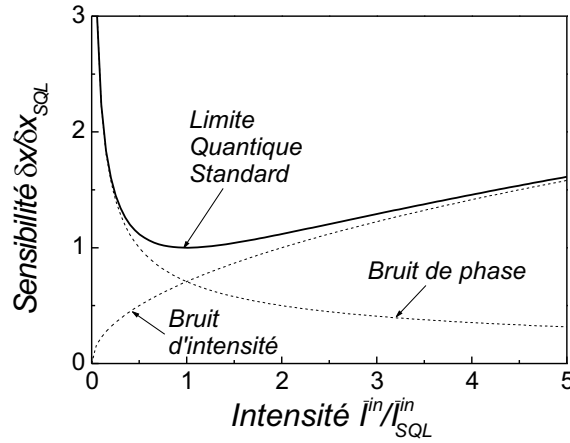


FIG. 5.2 – Sensibilité d’une mesure de petits déplacements lorsque l’intensité incidente varie. Les courbes en pointillés représentent les bruits de phase et de pression de radiation.

*et al* [84] à l’aide d’une cavité de finesse 15, constituée d’un miroir fixe et d’un miroir déposé sur une plaque de quartz suspendue par deux fils de tungstène. La fréquence de résonance mécanique du système pendulaire est de l’ordre de quelques hertz, et la puissance incidente nécessaire pour observer le cycle d’hystérésis est de l’ordre de 1 W.

La bistabilité du système optique a également des conséquences sur les fluctuations quantiques des champs intracavité et réfléchi. L’équivalence entre les effets optomécaniques dus au miroir mobile et un milieu Kerr placé dans une cavité montre qu’une compression du champ peut être réalisée par un tel système [22, 85] ainsi que des états non classiques du mouvement du miroir [86, 87, 88]. Le miroir mobile peut également produire un effet Kerr croisé entre deux faisceaux injectés dans la cavité et permettre ainsi de réaliser une mesure quantique non destructive [24, 89]. Cette mesure consiste à envoyer un faisceau intense dans la cavité et à mesurer, grâce à un second faisceau de plus faible intensité, les fluctuations quantiques de la position du miroir mobile engendrées par la pression de radiation du faisceau intense. On crée ainsi des corrélations quantiques entre l’intensité du premier faisceau et la phase du second.

### 5.1.2 Limite Quantique Standard

Nous avons calculé dans la section 1.1.4 le plus petit déplacement observable  $\delta x_{shot}$  d’un miroir mobile dans une cavité Fabry-Perot de finesse  $\mathcal{F}$  et pour une intensité incidente moyenne  $\bar{I}^{in}$  du faisceau de mesure. Nous avons supposé dans ce calcul que la mesure de petits déplacements est uniquement limitée par le bruit quantique de phase du faisceau incident. Le résultat en fonction de la fréquence d’analyse  $\Omega$  s’écrit [équation (1.105)] :

$$\delta x_{shot}[\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\bar{I}^{in}}} \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_{cav}}\right)^2}. \quad (5.2)$$

On pourrait penser que la sensibilité de la mesure peut être rendue aussi petite qu’on le souhaite simplement en augmentant l’intensité du faisceau de mesure. Nous avons

cependant négligé les effets quantiques de la pression de radiation dans cette expression, qui pour un faisceau intense vont induire des fluctuations de position venant perturber la mesure.

La force de pression de radiation est proportionnelle à l'intensité intracavité,

$$F_{rad} = 2\hbar k |\alpha|^2, \quad (5.3)$$

et ses fluctuations sont proportionnelles à la quadrature d'intensité  $\delta p$  [équation (1.95)],

$$\delta F_{rad}[\Omega] = 2\hbar k \bar{\alpha} \delta p[\Omega]. \quad (5.4)$$

Ces fluctuations induisent des fluctuations de position  $\delta x_{rad}$  du miroir données par :

$$\delta x_{rad}[\Omega] = \chi[\Omega] \delta F_{rad}[\Omega], \quad (5.5)$$

où  $\chi$  est la susceptibilité mécanique du miroir. On déduit  $\delta x_{rad}$  de l'équation (5.4) et de l'expression des fluctuations de la quadratures d'intensité intracavité  $\delta p$  en fonction de celles du champ incident  $\delta p^{in}$  [équation (1.97)] :

$$\delta x_{rad}[\Omega] = \frac{4\hbar k \sqrt{\bar{I}^{in}}}{\gamma - i\Omega\tau} \chi[\Omega] \delta p^{in}[\Omega]. \quad (5.6)$$

Pour un faisceau incident dans un état cohérent, les fluctuations  $\delta p^{in}$  sont décorréliées des fluctuations de phase  $\delta q^{in}$  et sont caractérisées par un spectre de bruit  $S_p^{in}[\Omega]$  égal à 1. Cette dernière équation montre que le bruit de pression de radiation a un effet sur la sensibilité de la mesure proportionnel à  $\sqrt{\bar{I}^{in}}$ , alors que nous avons vu sur l'équation (5.2) que le bruit de phase a un effet en  $1/\sqrt{\bar{I}^{in}}$ . La figure 5.2 montre les bruits de position  $\delta x_{shot}$  et  $\delta x_{rad}$  en fonction de l'intensité du faisceau de mesure. Ces deux bruits étant décorrélés, le bruit total dans la mesure est égal à leur somme quadratique. Un compromis entre ces deux bruits conduit à l'existence d'un optimum pour la sensibilité. Cette *limite quantique standard* [13, 14] est atteinte lorsque les bruits quantiques de phase et de pression de radiation sont égaux, c'est-à-dire pour une intensité incidente  $\bar{I}_{LQS}^{in}$  égale à :

$$\bar{I}_{LQS}^{in} = \frac{\gamma^2 + \Omega^2 \tau^2}{32\hbar k^2 |\chi[\Omega]|}. \quad (5.7)$$

On trouve alors un plus petit déplacement mesurable  $\delta x_{LQS}$  égal à :

$$\delta x_{LQS}[\Omega] = \sqrt{\hbar |\chi[\Omega]|}. \quad (5.8)$$

Cette dernière quantité ne dépend que des propriétés mécaniques du miroir. La limite est d'autant plus basse que le miroir répond peu à la force de pression de radiation ( $\chi[\Omega]$  petit). Par contre, si l'on désire exalter les effets de pression de radiation pour les rendre visibles expérimentalement, il est intéressant de se placer au voisinage d'une résonance mécanique et d'utiliser un miroir léger ayant un grand facteur de qualité.

Notons que cette limite quantique n'est pas une véritable limite fondamentale car elle est liée à un certain nombre d'hypothèses, telles que l'utilisation d'états cohérents du

champ pour lesquels les fluctuations de phase et d'intensité sont décorréées. Il est possible de battre cette limite en utilisant des états comprimés ou encore en désaccordant la cavité, comme cela est décrit dans la partie suivante. Il existe toutefois une limite quantique ultime, liée aux processus de dissipation, qui est beaucoup plus faible que la limite quantique standard puisqu'elle consiste à remplacer dans l'équation (5.8) le module de  $\chi$  par sa partie imaginaire [16].

### 5.1.3 Observation de la limite quantique standard

Pour mettre en évidence expérimentalement les effets quantiques de la pression de radiation dans les mesures interférométriques, il est nécessaire de réaliser une mesure des déplacements du miroir suffisamment sensible pour observer la limite quantique standard. Dans notre montage actuel, avec le miroir plan-convexe de petite taille, la susceptibilité mécanique au voisinage du mode fondamental Gaussien est caractérisée par les paramètres :

$$\chi[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma\Omega)} \quad \begin{cases} M = 230 \text{ mg} \\ \Omega_M = 1858 \text{ MHz} \\ \Gamma = 2\pi \times 43 \text{ Hz} \end{cases} \quad (5.9)$$

Pour ces valeurs, on trouve une sensibilité  $\delta x_{LQS}$  à résonance de :

$$\delta x_{LQS}[\Omega_M] = \sqrt{\hbar/M\Gamma\Omega_M} \simeq 3 \times 10^{-20} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}. \quad (5.10)$$

Ce déplacement est environ 2000 fois plus faible que le bruit thermique observé dans les chapitres précédents. Ceci montre que l'observation de la limite quantique standard impose des conditions très sévères sur les paramètres expérimentaux.

On peut résumer ces conditions à l'aide de deux paramètres très simples [24]. Le premier se déduit de la condition sur l'intensité incidente [équation (5.7)]. En négligeant l'effet de filtrage par la cavité présent au numérateur et en utilisant la définition du déphasage non linéaire [équation (1.88)], cette condition s'écrit :

$$4 \frac{\Psi_{NL}}{\gamma} \left| \frac{\chi[\Omega]}{\chi[0]} \right| \simeq 1. \quad (5.11)$$

A basse fréquence où  $\chi[\Omega] \simeq \chi[0]$ , cette condition devient  $\Psi_{NL}/\gamma \simeq 1$ . Il s'agit là d'une condition usuelle en optique quantique, que l'on retrouve par exemple pour les cavités contenant un milieu Kerr [81, 82, 83, 43] : l'observation d'effets quantiques tels que la compression du champ nécessite d'avoir un déphasage non linéaire du même ordre de grandeur que les pertes de la cavité. Notons que cette condition correspond également à l'apparition de la bistabilité (voir section 5.1.1).

La condition (5.11) est plus facile à satisfaire à résonance puisqu'elle devient :

$$\frac{\Psi_{NL}}{\gamma} \simeq \frac{1}{Q}. \quad (5.12)$$

Les effets quantiques de la pression de radiation étant exaltés par la résonance mécanique, on peut atteindre la limite quantique standard pour une intensité d'autant plus faible que le facteur de qualité est grand.

Pour fixer les ordres de grandeur, avec les paramètres actuels de la cavité (finesse de 37 000, puissance incidente de 100  $\mu W$ ) et du miroir [équation (5.9)], il manque un peu plus de deux ordres de grandeur pour satisfaire la condition (5.12). Nous devrions pouvoir gagner un tel facteur en améliorant les qualités optiques et mécaniques du miroir mobile et de la cavité.

La seconde condition à satisfaire pour observer la limite quantique standard est que le système soit effectivement limité par les bruits quantiques. En particulier, le bruit thermique du miroir doit être plus petit que les déplacements induits par la pression de radiation. D'après l'équation (1.6) cela revient à comparer les spectres des forces de Langevin et de pression de radiation. En supposant que le miroir est équivalent à un oscillateur harmonique de susceptibilité donnée par l'équation (5.9), et en négligeant le filtrage par la cavité, les effets de pression de radiation sont supérieurs au bruit thermique si :

$$\frac{n_T}{Q} \ll \frac{\Psi_{NL}}{\gamma}, \quad (5.13)$$

où  $n_T = k_B T / \hbar \Omega_M$  est le nombre de quanta thermiques du miroir. Pour observer les effets quantiques de la pression de radiation, on a donc intérêt à placer la cavité à basse température et à utiliser un miroir possédant un grand facteur de qualité mécanique. Il est aussi préférable d'utiliser un miroir ayant des fréquences de résonance relativement élevées : à une fréquence de 1  $MHz$ , le nombre de quanta thermiques est encore de 20 000 par Kelvin, ce qui impose de placer le système à une température inférieure à 10  $K$  pour un facteur de qualité  $Q$  de  $10^6$ .

## 5.2 Réduction du bruit quantique avec une cavité désaccordée

Si les interféromètres gravitationnels actuels ne sont pas sensibles aux effets quantiques de la pression de radiation, les travaux récents sur la seconde génération d'antennes montrent qu'il n'en sera pas de même pour ces dernières [11, 12]. De nombreuses études ont été réalisées pour réduire les bruits quantiques dans les mesures interférométriques. Les principales techniques proposées consistent à utiliser des états comprimés du champ pour créer des corrélations quantiques entre les fluctuations de phase et d'intensité [15, 16, 90, 91], ou à utiliser les corrélations induites par la pression de radiation dans l'interféromètre. Le champ à la sortie de l'interféromètre est en fait dans un état comprimé, et on peut augmenter le rapport signal à bruit en adaptant la quadrature du champ mesurée à la sortie [92].

En vue de la seconde génération d'antennes, les travaux récents s'intéressent aux possibilités d'implantation de ces techniques sur l'interféromètre. Il a ainsi été proposé de nouvelles méthodes, comme le verrouillage quantique des miroirs à l'aide d'un contrôle local de leur déplacement [93, 94], ou encore l'utilisation d'un miroir de recyclage placé à la sortie de l'interféromètre. Celui-ci permet d'améliorer la sensibilité de l'antenne sur une plage de fréquence étroite [11, 95], et même de passer en dessous de la limite quantique standard en désaccordant la cavité effective constituée par ce miroir et l'interféromètre [96].

Dans cette partie, nous présentons une technique similaire mais qui fonctionne sans miroir de recyclage, et qui pourrait facilement être démontrée expérimentalement à

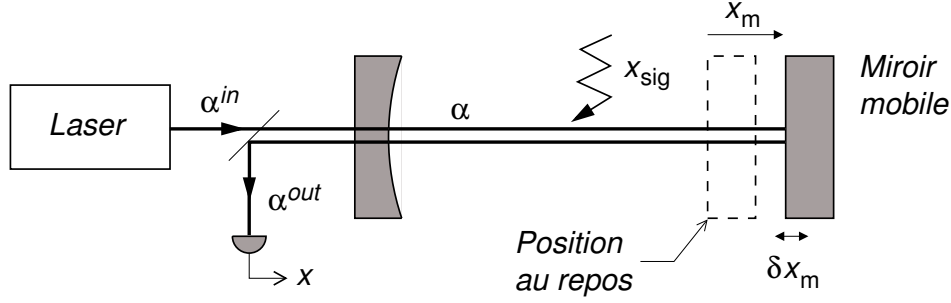


FIG. 5.3 – Schéma d’une mesure interférométrique réalisée avec une seule cavité. Le déphasage du champ réfléchi est sensible au signal  $x_{sig}$  correspondant à une variation apparente de la longueur de la cavité, mais aussi au déplacement  $\bar{x}_m + \delta x_m$  du miroir induit par la pression de radiation.

partir de notre montage. Le principe consiste à désaccorder les cavités dans les bras de l’interféromètre. Pour étudier les conséquences de ce désaccord, nous considérons le système plus simple mais équivalent constitué d’une seule cavité (figure 5.3). Les interférences à la sortie de l’interféromètre sont en effet une conséquence des déphasages des champs réfléchis par les cavités placées dans les deux bras.

Le signal correspond à une variation apparente  $x_{sig}$  de la longueur de la cavité qui peut être due au passage d’une onde gravitationnelle ou, dans notre montage, à une modulation de la fréquence du laser. Nous supposons pour simplifier qu’un seul miroir est mobile et que le système est limité par le bruit quantique : le bruit thermique est négligeable et le déplacement du miroir n’est dû qu’à la force de pression de radiation du faisceau intracavité.

Nous allons d’abord calculer l’effet du signal et des bruits quantiques sur les quadratures du champ réfléchi par la cavité lorsque celle-ci est désaccordée. Après avoir déterminé les conditions de stabilité du système, nous montrons qu’il est possible d’améliorer le rapport signal à bruit dans certaines conditions, et de battre la limite quantique standard.

### 5.2.1 Quadratures du champ et mouvement du miroir

Les variations de la longueur  $L$  de la cavité proviennent du déplacement  $x_m$  du miroir mobile sous l’effet de la pression de radiation ainsi que de la variation apparente de longueur  $x_{sig}$  de la cavité correspondant au signal à mesurer :

$$L = L_0 + x_m + x_{sig}, \quad (5.14)$$

où  $L_0$  est la longueur de la cavité au repos. Les équations d’évolution des champs intracavité  $\alpha$  et sortant  $\alpha^{out}$  en fonction du champ entrant  $\alpha^{in}$  se déduisent des équations (1.80) à (1.85) :

$$(\gamma - i\bar{\Psi} - i\Omega\tau)\alpha[\Omega] = \sqrt{2\gamma}\alpha^{in}[\Omega] + 2ik\bar{\alpha}(\delta x_m[\Omega] + x_{sig}[\Omega]), \quad (5.15)$$

$$\alpha^{out}[\Omega] = -\alpha^{in}[\Omega] + \sqrt{2\gamma}\alpha[\Omega], \quad (5.16)$$

où  $\bar{\Psi}$  est le déphasage moyen du champ dans la cavité, égal à la somme du désaccord  $\Psi_0$  au repos et du déphasage non linéaire  $\Psi_{NL}$  lié au déplacement moyen  $\bar{x}_m$  [équations



(1.87) et (1.88)] :

$$\bar{\Psi} = \Psi_0 + \Psi_{NL} \quad , \quad \Psi_0 \equiv 2kL_0 [2\pi] \quad , \quad \Psi_{NL} = 4\hbar k^2 \bar{\alpha}^2 \chi[0]. \quad (5.17)$$

Les champs moyens sont donnés par les équations (1.89) et (1.90) :

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\psi} \bar{\alpha}^{in} \quad , \quad \bar{\alpha}^{out} = \frac{\gamma + i\bar{\psi}}{\gamma - i\psi} \bar{\alpha}^{in}. \quad (5.18)$$

Si on choisit par convention le champ  $\bar{\alpha}$  réel, les champs moyens incident  $\bar{\alpha}^{in}$  et sortant  $\bar{\alpha}^{out}$  ont des phases respectives  $\theta^{in}$  et  $\theta^{out}$  données par :

$$e^{-i\theta^{in}} = \frac{\gamma - i\bar{\Psi}}{\sqrt{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2}} \quad , \quad e^{-i\theta^{out}} = \frac{\gamma + i\bar{\Psi}}{\sqrt{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2}}. \quad (5.19)$$

Pour un déphasage  $\bar{\Psi}$  non nul, les champs moyens incident et réfléchi ne sont plus réels ; les quadratures d'intensité  $p[\Omega]$  et de phase  $q[\Omega]$  d'un champ de phase  $\theta$  sont données par :

$$p[\Omega] = e^{i\theta} \alpha[\Omega] + e^{-i\theta} \alpha^*[\Omega], \quad (5.20)$$

$$q[\Omega] = -ie^{i\theta} \alpha[\Omega] + ie^{-i\theta} \alpha^*[\Omega]. \quad (5.21)$$

Afin de simplifier les calculs dans la suite, on suppose que la réponse mécanique du miroir correspond à celle d'un oscillateur harmonique de masse  $M$ , de fréquence de résonance  $\Omega_M$  et d'amortissement  $\Gamma$ . On suppose également que la bande passante de la cavité  $\Omega_{cav} = \gamma/\tau$  est grande devant toutes les autres fréquences (fréquence d'analyse  $\Omega$ , fréquence de résonance  $\Omega_M$ ). On obtient alors deux équations couplées pour la quadrature d'intensité intracavité et le mouvement du miroir :

$$\delta p[\Omega] = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2}} \delta p^{in}[\Omega] - \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2} \xi \bar{\Psi} (\delta x_m[\Omega] + x_{sig}[\Omega]), \quad (5.22)$$

$$\delta x_m[\Omega] = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \hbar \xi \chi[\Omega] \delta p[\Omega]. \quad (5.23)$$

où le paramètre  $\xi$  est relié à l'intensité du champ intracavité et caractérise la force du couplage optomécanique entre les déplacements du miroir et le champ intracavité :

$$\xi = 2k\bar{\alpha} \sqrt{2/\gamma}. \quad (5.24)$$

Il est intéressant de comparer les deux situations à résonance ( $\bar{\Psi} = 0$ ) et hors résonance ( $\bar{\Psi} \neq 0$ ). A résonance l'intensité intracavité  $\delta p$  ne dépend que des fluctuations incidentes  $\delta p^{in}$ . Le point de fonctionnement correspond au sommet du pic d'Airy et l'intensité est insensible à de petites variations de longueur de la cavité. Ce n'est plus le cas hors résonance : le système est alors sur le flanc du pic d'Airy, et une variation de longueur, due au déplacement  $x_m$  du miroir ou au signal  $x_{sig}$ , se traduit par une variation de l'intensité intracavité. Le sens de variation dépend bien sûr du flanc sur lequel se trouve le système (derniers termes dans l'équation (5.22)).

Le miroir se déplace alors sous l'effet de la pression de radiation [équation (5.23)], qui se décompose en trois termes. Le premier, proportionnel à  $\delta p^{in}$  (premier terme dans l'équation (5.22)), existe aussi à résonance ; il est responsable du bruit de pression de radiation en sortie de la cavité. Il crée aussi des corrélations entre l'intensité et la phase du champ, ce qui se traduit par une compression du champ réfléchi [22].

Le deuxième terme dans l'équation (5.22) correspond à une force proportionnelle au déplacement  $\delta x_m$  du miroir. L'effet de cette force est tout à fait similaire à un contrôle actif du miroir par une boucle de contre-réaction : le déplacement du miroir change l'intensité intracavité, ce qui modifie la force de pression de radiation exercée sur lui. Comme pour le processus de friction froide décrit dans la partie 2.2, la dynamique du miroir est modifiée. A partir des équations (5.22) et (5.23) il est facile de montrer que la réponse du miroir à une force extérieure est décrite par une susceptibilité  $\chi_{om}$  donnée par :

$$\chi_{om}^{-1}[\Omega] = \chi^{-1}[\Omega] + \frac{\varphi}{1 + \varphi^2} \hbar \xi^2, \quad (5.25)$$

où  $\varphi = \bar{\Psi}/\gamma$  est le désaccord normalisé à  $\gamma$ . Le couplage optomécanique dans la cavité modifie donc la raideur du miroir, comme l'aurait fait un asservissement proportionnel [équation (2.10)], selon un sens dépendant du signe du désaccord. A une fréquence  $\Omega$  donnée, on peut donc avoir amplification ou atténuation du mouvement du miroir selon la valeur de  $\varphi\chi[\Omega]$ .

Le troisième terme dans l'équation (5.22) correspond à une force proportionnelle au signal  $x_{sig}$ . Le miroir va donc se déplacer en réponse au signal, avec une dynamique caractérisée par  $\chi_{om}$ . A partir des équations (5.22) et (5.23), le mouvement  $\delta x_m$  s'écrit :

$$\delta x_m[\Omega] = \chi_{om}[\Omega] \left( \frac{\hbar \xi}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \delta p^{in}[\Omega] - \hbar \xi^2 \frac{\varphi}{1 + \varphi^2} x_{sig}[\Omega] \right). \quad (5.26)$$

Selon le signe de  $\varphi\chi_{om}$ , le déplacement  $\delta x_m$  est en opposition de phase avec le signal  $x_{sig}$ , auquel cas il y a un effet de compensation du signal par le mouvement du miroir, ou alors le mouvement est en phase avec  $x_{sig}$ , ce qui se traduit par une amplification du signal.

Les quadratures  $\delta p^{out}$  et  $\delta q^{out}$  du champ réfléchi se déduisent des équations (5.16) et (5.22),

$$\delta p^{out}[\Omega] = \delta p^{in}[\Omega], \quad (5.27)$$

$$\delta q^{out}[\Omega] = \delta q^{in}[\Omega] + \frac{2\xi}{\sqrt{1 + \varphi^2}} (\delta x_m[\Omega] + x_{sig}[\Omega]). \quad (5.28)$$

Comme dans le cas d'une cavité accordée, pour des fréquences petites devant la bande passante  $\Omega_{cav} = \gamma/\tau$  de la cavité, les fluctuations d'intensité du faisceau réfléchi sont simplement égales aux fluctuations d'intensité du faisceau incident. Ceci traduit le fait que pour une cavité sans perte, les photons restent dans la cavité un temps moyen  $\tau/\gamma$  et finissent par ressortir par le miroir d'entrée.

La phase du faisceau réfléchi est sensible à la variation totale de longueur  $\delta x_m + x_{sig}$  de la cavité. Selon que le mouvement du miroir est en phase ou en opposition de

phase avec  $x_{sig}$ , on va avoir amplification ou atténuation du signal. On peut définir un estimateur  $\hat{x}_{sig}$  de la mesure en normalisant la phase  $\delta q^{out}$  au signal mesuré. A partir des équations (5.26) et (5.28) on trouve :

$$\hat{x}_{sig}[\Omega] = \frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{2\xi} \frac{\chi[\Omega]}{\chi_{om}[\Omega]} \delta q^{out}[\Omega], \quad (5.29)$$

$$= x_{sig}[\Omega] + \frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{2\xi} \frac{\chi[\Omega]}{\chi_{om}[\Omega]} \delta q^{in}[\Omega] + \frac{\hbar\xi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \chi[\Omega] \delta p^{in}[\Omega]. \quad (5.30)$$

L'estimateur est la somme du signal et de termes de bruit, qui sont les bruits équivalents d'entrée. La sensibilité de la mesure est donc limitée par ces bruits, le plus petit signal mesurable étant donné par  $x_{min}[\Omega] = \sqrt{S_x[\Omega]}$  où  $S_x$  est le spectre des deux bruits apparaissant dans l'équation (5.30). Pour un état cohérent du champ incident, ce spectre s'écrit :

$$S_x[\Omega] = \left( \frac{1+\varphi^2}{4\xi^2 |\chi_{om}[\Omega]|^2} + \frac{\hbar^2 \xi^2}{1+\varphi^2} \right) |\chi[\Omega]|^2. \quad (5.31)$$

Le spectre apparaît comme la somme de deux termes, associés respectivement aux bruits de phase et d'intensité du faisceau incident.

### 5.2.2 Critères de stabilité

Le point de fonctionnement de la cavité est entièrement déterminé par la valeur du désaccord  $\varphi$  avec la lumière et par l'intensité intracavité  $\bar{I}$ . Pour des raisons de commodité on préfère utiliser le paramètre  $\varphi_{NL}$  qui est le déphasage non linéaire  $\Psi_{NL}$  [équation (1.88)] rapporté à  $\gamma$  :

$$\varphi_{NL} = \frac{\Psi_{NL}}{\gamma} = \frac{\hbar\xi^2 \chi[0]}{2}. \quad (5.32)$$

Certains points de fonctionnement ont un caractère instable, c'est-à-dire que le système linéaire formé par les équations (5.22) et (5.23) possède des valeurs propres dont la partie réelle est positive. La stabilité du système d'équations conduit à deux relations liant les paramètres  $\varphi$  et  $\varphi_{NL}$  et que nous allons rappeler brièvement [22].

Nous avons déjà vu, dans la section 5.1.1, qu'en assimilant le miroir mobile à un oscillateur harmonique, le système devient bistable pour de fortes intensités intracavité. Cette bistabilité entraîne une divergence des fluctuations d'intensité intracavité pour toute une plage de fonctionnement correspondant à la zone  $BC$  du pic d'Airy de la figure 5.1. Pour être en dehors de la zone d'instabilité il faut que :

$$1 + \varphi^2 + 2\varphi\varphi_{NL} \geq 0. \quad (5.33)$$

Cette relation ne fait intervenir les caractéristiques du miroir mobile qu'à fréquence nulle, à travers le déphasage non linéaire [équation (5.32)]. La bistabilité correspond à une instabilité statique. Il existe aussi une instabilité dynamique pour laquelle le système entre en oscillation. En fait, nous avons vu dans la section précédente que le

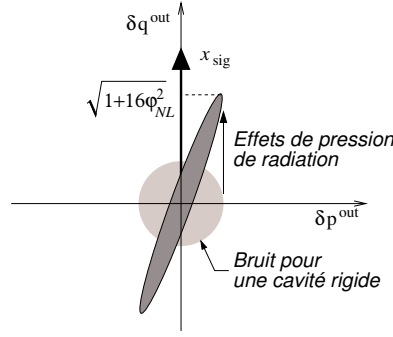


FIG. 5.4 – Représentation dans l'espace des phases du champ, du bruit quantique à la sortie de la cavité et de l'effet du signal  $x_{sig}$ .

couplage miroir-champ intracavité modifie la dynamique du miroir, dont le mouvement est caractérisé par la susceptibilité  $\chi_{om}$  [équation (5.25)]. Dans le cas considéré ici, le couplage change uniquement la raideur du miroir, et le système reste toujours stable. Ce ne serait pas le cas si la bande passante de la cavité était de l'ordre de la fréquence de résonance puisqu'alors l'amortissement du miroir serait également modifié. Comme dans le cas de l'amplification paramétrique étudiée dans la partie 3.4, l'amortissement pourrait s'annuler, entraînant une divergence du mouvement du miroir.

### 5.2.3 Cas d'une cavité accordée

Dans le cas d'une cavité accordée, l'expression des quadratures du faisceau réfléchi est donnée par les équations (5.26–5.28), avec  $\varphi = 0$  :

$$\delta p^{out}[\Omega] = \delta p^{in}[\Omega], \quad (5.34)$$

$$\delta q^{out}[\Omega] = \delta q^{in}[\Omega] + 2\hbar\xi^2\chi[\Omega]\delta p^{in}[\Omega] + 2\xi x_{sig}[\Omega]. \quad (5.35)$$

La figure 5.4 schématise l'effet des bruits et du signal sur les quadratures du champ réfléchi. Dans le cas d'une cavité rigide ( $\chi[\Omega] = 0$ ), les bruits sur les deux quadratures sont décorrélés et d'amplitude unité, et on les symbolise par un cercle. Le mouvement du miroir mobile augmente le bruit sur la quadrature de phase et induit des corrélations entre les bruits des deux quadratures. Le cercle se transforme donc en une ellipse inclinée, caractéristique d'un état comprimé [29, 38]. Les dispersions de  $\delta p^{out}$  et  $\delta q^{out}$  à basse fréquence valent respectivement 1 et  $\sqrt{1 + 16\varphi_{NL}^2}$ . Le signal produit un effet aligné sur l'axe  $\delta q^{out}$  et d'amplitude égale à  $2\xi x_{sig}$ . On retrouve ici les résultats présentés dans la section 5.1.2 concernant la limite quantique standard : pour une cavité accordée, l'effet du signal est le même que le miroir soit fixe ou mobile, alors que le bruit est augmenté avec un miroir mobile du fait des déplacements induits par la pression de radiation.

L'estimateur du signal  $\hat{x}_{sig}$  défini par l'équation (5.30) s'écrit dans le cas d'une cavité accordée :

$$\hat{x}_{sig}[\Omega] = \frac{1}{2\xi}\delta q^{out}[\Omega] = x_{sig}[\Omega] + \frac{1}{2\xi}\delta q^{in}[\Omega] + \hbar\xi\chi[\Omega]\delta p^{in}[\Omega]. \quad (5.36)$$

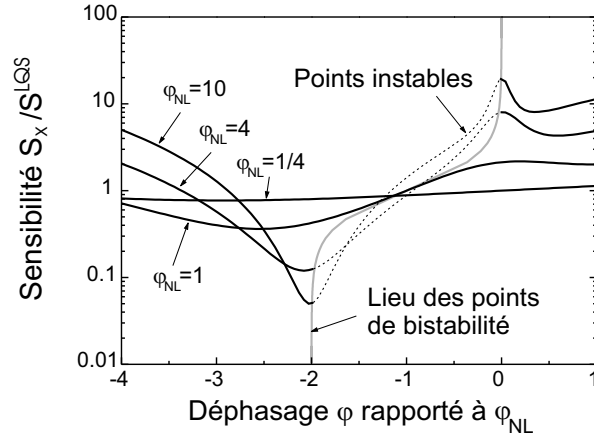


FIG. 5.5 – Sensibilité à basse fréquence, normalisée à la limite quantique standard, en fonction du désaccord relatif  $\varphi/\varphi_{NL}$  de la cavité, pour différentes valeurs du déphasage non linéaire  $\varphi_{NL}$ . Les portions de courbe en pointillés indiquent les points de fonctionnement pour lesquels le système est instable. Ils sont séparés de la zone stable par les points de bistabilité indiqués en grisé.

et le spectre  $S_x$  de bruit équivalent est donné par :

$$S_x[\Omega] = \frac{1}{4\xi^2} + \hbar^2 \xi^2 |\chi[\Omega]|^2. \quad (5.37)$$

La sensibilité est limitée par la somme des bruits décorrélés de phase et de pression de radiation. On retrouve ici que pour une fréquence  $\Omega$  donnée, il existe une valeur du paramètre de couplage  $\xi$  pour laquelle ces deux bruits sont égaux, ce qui réalise le minimum de bruit dans la mesure. Cette valeur  $\xi = 1/\sqrt{2\hbar|\chi[\Omega]|}$  correspond à la limite quantique standard. Pour cette valeur particulière, la sensibilité vaut :

$$S_x^{LQS}[\Omega] = \hbar|\chi[\Omega]|, \quad (5.38)$$

ce qui correspond au résultat obtenu dans la section 5.1.2 [équation (5.8)]. Nous allons montrer dans la section suivante qu'il est possible d'améliorer la sensibilité en utilisant l'amplification du signal obtenu à désaccord non nul.

#### 5.2.4 Réduction du bruit à basse fréquence

On se place désormais à basse fréquence, c'est-à-dire pour des fréquences d'analyse  $\Omega$  inférieures à la fréquence de résonance  $\Omega_M$  du miroir. Dans ce cas, la susceptibilité  $\chi[\Omega \simeq 0]$  est égale à la susceptibilité statique  $\chi[0] = 1/M\Omega_M^2$ . D'après l'équation (5.31), le spectre de bruit équivalent  $S_x$  s'écrit :

$$S_x[\Omega \ll \Omega_M] = \frac{\hbar\chi[0]}{8\varphi_{NL}(1+\varphi^2)} \left[ (1+\varphi^2 + 2\varphi\varphi_{NL})^2 + 16\varphi_{NL}^2 \right]. \quad (5.39)$$

La figure 5.5 présente la sensibilité rapportée à la limite quantique standard  $S_x^{LQS}[0] = \hbar\chi[0]$ , pour différentes valeurs du déphasage non linéaire  $\varphi_{NL}$ . La courbe présente un

minimum et passe largement en dessous de la limite quantique standard. Le minimum de bruit est atteint pour un déphasage  $\varphi_{min}$  dont la valeur peut être approchée, pour de grands déphasages non linéaires  $\varphi_{NL}$ , par :

$$\varphi_{min} \simeq -2\varphi_{NL}. \quad (5.40)$$

On obtient pour cette valeur du déphasage un bruit équivalent

$$S_x[\Omega \ll \Omega_M] \simeq \frac{\hbar\chi[0]}{2\varphi_{NL}} = \frac{S_x^{LQS}[0]}{2\varphi_{NL}}. \quad (5.41)$$

On améliore donc nettement la sensibilité par rapport à la limite quantique standard puisque le plus petit déplacement mesurable décroît comme l'inverse de la racine carrée de l'intensité intracavité. Notons que la sensibilité optimale est atteinte en un point de fonctionnement de plus en plus proche du point de bistabilité [équation (5.33)] lorsque  $\varphi_{NL}$  devient grand. En ce point, la susceptibilité statique  $\chi_{om}[0]$  en présence du couplage champ-miroir devient infini, puisqu'elle s'écrit sous la forme :

$$\chi_{om}[0] = \frac{1 + \varphi^2}{1 + \varphi^2 + 2\varphi\varphi_{NL}}\chi[0]. \quad (5.42)$$

Lorsque l'on s'approche du point de bistabilité, le champ réfléchi est de plus en plus comprimé, induisant une augmentation du bruit de pression de radiation dans la mesure, mais l'effet d'amplification du signal par le couplage champ-miroir augmente lui-aussi, et dans des proportions plus importantes.

La sensibilité obtenue en désaccordant la cavité est identique à la sensibilité optimale que l'on atteindrait avec des miroirs de masse plus grande d'un facteur  $2\varphi_{NL}$ . On peut ainsi battre la limite quantique standard sans avoir à modifier les miroirs utilisés ni utiliser d'états comprimés du champ incident. Ceci s'accompagne toutefois d'une augmentation importante de la puissance lumineuse incidente. A partir des équations (5.18), (5.24) et (5.32) on peut écrire :

$$\bar{T}^{in} = 4(1 + \varphi^2)\varphi_{NL}\bar{T}_{LQS}^{in} \quad (5.43)$$

où  $\bar{T}_{LQS}^{in}$  est l'intensité incidente nécessaire pour atteindre la limite quantique standard à basse fréquence [équation (5.7)]. Au point de fonctionnement optimal ( $\varphi = -2\varphi_{NL}$ ) la puissance incidente est donc proportionnelle à  $\varphi_{NL}^3$ .

### 5.2.5 Réduction du bruit à haute fréquence

On s'intéresse dans cette section à l'effet du désaccord à des fréquences d'analyse supérieures à la fréquence de résonance mécanique. Cette situation correspond par exemple aux antennes gravitationnelles, lorsque l'on considère le mouvement pendulaire global des miroirs, dont la fréquence de résonance est très basse (typiquement de l'ordre du hertz). Pour des fréquences  $\Omega$  très supérieures à la fréquence de résonance, la susceptibilité  $\chi$  du miroir est de la forme :

$$\chi[\Omega] = -\frac{1}{M\Omega^2}. \quad (5.44)$$

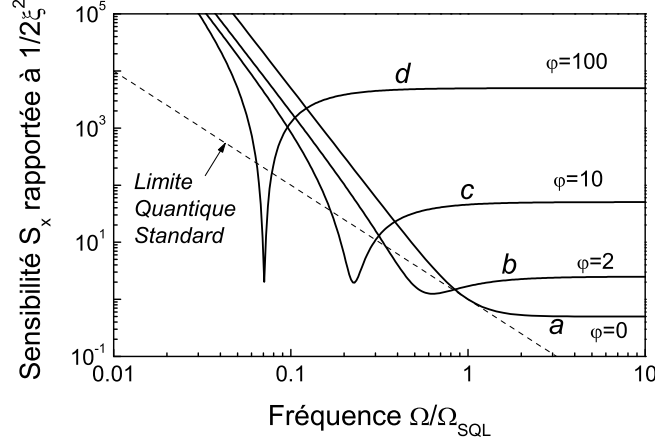


FIG. 5.6 – Spectre de bruit équivalent  $S_x[\Omega]$  à haute fréquence rapportée à  $1/2\xi^2$ , en fonction de la fréquence, normalisée à  $\Omega_{LQS}$ . La courbe en pointillé est la limite quantique standard. Les courbes  $a$  à  $d$  sont obtenues pour un désaccord  $\varphi$  croissant de la cavité.

Dans le cas d'une cavité accordée, le bruit équivalent  $S_x$  se déduit de l'équation (5.37) et se met sous la forme :

$$S_x[\Omega \gg \Omega_M] = \frac{1}{4\xi^2} \left( 1 + \frac{\Omega_{LQS}^4}{\Omega^4} \right), \quad (5.45)$$

où la fréquence  $\Omega_{LQS}$  est définie par :

$$\Omega_{LQS} = \sqrt{\frac{2\hbar\xi^2}{M}}. \quad (5.46)$$

La courbe  $a$  de la figure 5.6 représente le spectre  $S_x$  en fonction de la fréquence. A basse fréquence, la sensibilité est essentiellement limitée par la réponse du miroir aux fluctuations de la pression de radiation (deuxième terme dans l'équation (5.45)). Le bruit de pression de radiation décroît comme  $1/\Omega^4$  et devient inférieur à haute fréquence au bruit de phase, qui est indépendant de la fréquence (premier terme dans l'équation (5.45)).  $\Omega_{LQS}$  est la fréquence pour laquelle les deux bruits sont égaux. La sensibilité atteinte correspond alors à la limite quantique standard. Si l'on change l'intensité en gardant toujours la cavité accordée, on modifie en proportion inverse les bruits de phase et de pression de radiation, ce qui a pour seul effet de translater la courbe de sensibilité le long de la courbe en pointillés sur la figure 5.6. Cette courbe n'est autre que la limite quantique standard  $S_x^{LQS}[\Omega]$ , représentant le minimum de bruit accessible à la fréquence  $\Omega$  en optimisant la puissance lumineuse, et donnée par [équation (5.38)] :

$$S_x^{LQS}[\Omega] = \hbar|\chi[\Omega]| = \frac{\hbar}{M\Omega^2}. \quad (5.47)$$

Pour un désaccord  $\varphi$  quelconque, le bruit équivalent s'écrit d'après l'équation (5.31) :

$$S_x[\Omega] = \frac{1}{4\xi^2} \frac{1}{1 + \varphi^2} \left[ \left( 1 + \varphi^2 - \varphi \frac{\Omega_{LQS}^2}{2\Omega^2} \right)^2 + \frac{\Omega_{LQS}^4}{\Omega^4} \right]. \quad (5.48)$$

La susceptibilité étant négative, il faut fixer un désaccord  $\varphi$  positif pour profiter de l'amplification du signal par le miroir mobile. Les courbes *b* à *d* de la figure 5.6 présentent le bruit  $S_x$  dans la mesure pour des désaccords croissants. Ces courbes sont obtenues pour une valeur constante du couplage optomécanique  $\xi$ , c'est-à-dire à intensité intracavité constante [équation (5.24)]. Cela signifie que la puissance lumineuse incidente augmente comme  $\varphi^2$  pour de grands désaccords  $\varphi$  [équation (5.43)].

On voit nettement que la limite quantique standard peut être battue en désaccordant la cavité. Pour un grand désaccord  $\varphi$ , le minimum de bruit est obtenu à une fréquence  $\Omega_{min}$  égale à :

$$\Omega_{min} = \frac{\Omega_{LQS}}{\sqrt{2\varphi}}, \quad (5.49)$$

et la sensibilité atteinte vaut :

$$S_x[\Omega_{min}] \simeq \frac{1}{\varphi} S_x^{LQS}[\Omega_{min}] = \frac{1}{\xi^2}. \quad (5.50)$$

Il est donc possible en jouant sur l'intensité intracavité et sur le désaccord de fixer la fréquence  $\Omega_{min}$  et d'obtenir une sensibilité aussi bonne que l'on veut. Comme dans le cas basse fréquence, ces conditions optimales correspondent à une amplification maximale du signal par le miroir mobile. On peut en effet écrire la susceptibilité  $\chi_{om}$  en présence du couplage champ-miroir pour de grandes valeurs de  $\varphi$ , sous la forme [équation (5.25)] :

$$\chi_{om}^{-1}[\Omega] = \chi^{-1}[\Omega] \left( 1 - \frac{1}{2\varphi} \frac{\Omega_{LQS}^2}{\Omega^2} \right). \quad (5.51)$$

La susceptibilité devient donc très grande à la fréquence  $\Omega_{min}$ .

Notons enfin que les expressions des bruits optimaux obtenus aussi bien à basse qu'à haute fréquence [équation (5.41) et (5.50)] laissent croire qu'il n'y a pas de valeur minimale. Il existe pourtant une limite quantique ultime, liée aux processus de dissipation dans le système [16]. Elle n'apparaît pas ici car nous avons pris des expressions réelles pour la susceptibilité, en négligeant la partie imaginaire qui est dissipative.

### 5.2.6 Conclusion

Dans le cas d'une cavité accordée, nous avons vu dans la section 5.1.2 qu'un compromis entre le bruit de phase du faisceau incident et le bruit de position du miroir induit par les fluctuations quantiques de la pression de radiation aboutit à une limite quantique standard dans les mesures interférométriques. Cette limite ne constitue cependant pas une limite quantique fondamentale et elle peut être dépassée en utilisant des techniques développées en optique quantique. Ces solutions sont souvent délicates à mettre en œuvre expérimentalement. Nous avons présenté une méthode alternative consistant



simplement à désaccorder la cavité. Il apparaît alors un effet d'amplification du signal dû à la modification de la dynamique du miroir par le couplage optomécanique. Ceci permet, au prix d'une augmentation de l'intensité incidente, d'améliorer la sensibilité de la mesure aussi bien à basse qu'à haute fréquence.

Nous avons fait un certain nombre d'hypothèses simplificatrices dans les calculs présentés dans cette partie. En premier lieu, nous avons supposé la bande passante de la cavité très grande. Prendre une bande passante plus proche de la fréquence de résonance mécanique du miroir permettrait d'avoir une modification de la dynamique similaire à la friction froide étudiée expérimentalement dans les chapitres précédents. Par ailleurs, nous avons considéré une mesure de la phase du faisceau réfléchi. On peut envisager de mesurer une quadrature mieux adaptée, comme cela a été proposé pour battre la limite quantique standard dans les interféromètres [92]. On profiterait alors à la fois de l'amplification du signal par couplage optomécanique et de la compression des fluctuations du champ réfléchi par la cavité.

### 5.3 Bruits thermique et quantiques dans un système de doubles sphères

Nous présentons dans cette section les calculs de sensibilité d'un nouveau concept de détecteur d'ondes gravitationnelles composé de deux sphères imbriquées. Dans ce système, la plage de fréquence utile se situe entre deux résonances mécaniques. L'estimation des bruits thermique et quantiques dans le détecteur a nécessité de développer une nouvelle méthode de calcul de la susceptibilité mécanique alliant les approximations basse fréquence et à résonance faites habituellement qui, utilisées séparément, ne s'appliquent pas dans la plage de fréquences intermédiaires.

#### 5.3.1 Motivations et principe

##### Détecteurs existants

Deux types de détecteur ont été développés pour l'observation des ondes gravitationnelles. Le premier dispositif est basé sur un résonateur mécanique dont les modes de vibration sont excités par le passage d'une onde gravitationnelle de fréquence voisine de celle des modes [97, 98, 99]. Le second dispositif utilise un interféromètre de type Michelson qui permet de détecter une différence relative de longueur des deux bras orthogonaux, induite par l'onde gravitationnelle [7].

Le premier type de détecteur, inventé par Joseph Weber, est constitué d'un lourd résonateur mécanique de forme cylindrique portant le nom de barre de Weber [100]. Le matériau utilisé doit présenter les pertes les plus faibles possibles pour obtenir les meilleurs facteurs de qualité mécanique. Lorsqu'une onde gravitationnelle passe, elle est susceptible, suivant sa direction et à condition d'avoir une fréquence proche de celle d'un des modes acoustiques de la barre, d'exciter la vibration de la barre. La barre est suspendue dans le vide et maintenue à des températures inférieures au Kelvin pour réduire le bruit thermique. La figure 5.7 montre une photographie de la barre AURIGA [97] actuellement en fonctionnement en Italie. L'observation de la vibration de la barre

est généralement faite par détection capacitive mais l'utilisation de transducteurs optiques est aussi envisagée [5, 101].

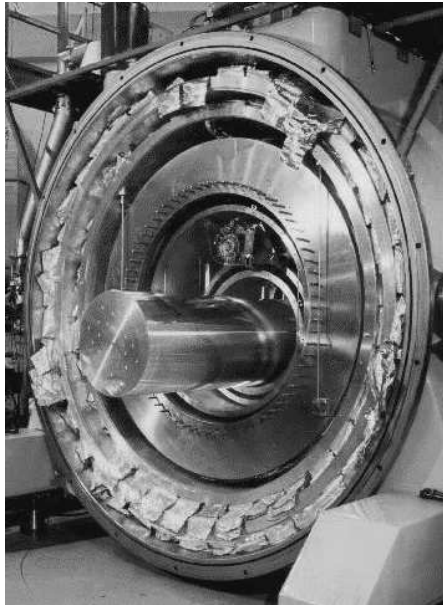


FIG. 5.7 – Photographie de la barre AURIGA actuellement en fonctionnement en Italie.

Le second type de détecteur est de type interférométrique [8, 9, 95, 102]. Son principe repose sur la mesure de la variation apparente des longueurs des bras provoquée par le passage d'une onde gravitationnelle. Le caractère quadrupolaire de l'onde engendre des déformations de signes opposés dans les deux directions orthogonales des bras. Les variations de longueur relative attendues sont de l'ordre de  $10^{-23}$ . Un interféromètre de Michelson dont les bras ont une longueur kilométrique est susceptible de mesurer de telles variations si sa sensibilité atteint une valeur de l'ordre de  $\delta x \simeq 10^{-20} m/\sqrt{Hz}$ . En pratique, des cavités résonnantes sont insérées dans chaque bras afin d'amplifier l'effet d'une variation de longueur. A la différence des barres de Weber, ces détecteurs sont large bande. Par exemple, pour l'interféromètre franco-italien VIRGO [8], la plage de fréquence utile s'étend de  $20 Hz$  à  $6 kHz$ . La sensibilité est limitée à basse fréquence par le bruit sismique et le bruit thermique du système de suspension des miroirs, et à haute fréquence par le bruit thermique interne des miroirs et le bruit de photon de la lumière.

### Détecteur à doubles résonateurs

Un nouveau type de détecteur est envisagé pour la détection d'ondes gravitationnelles. Il est constitué de deux résonateurs massifs imbriqués l'un dans l'autre. Plusieurs géométries sont à l'étude comme les systèmes de doubles cylindres [103] ou de doubles sphères [32, 104], représentés sur la figure 5.8. Comme pour une barre de Weber, le passage d'une onde gravitationnelle excite les modes acoustiques quadrupolaires des résonateurs. La distance entre les deux résonateurs étant petite devant les dimensions

des résonateurs, l'excitation des modes provoque une variation de cette distance, que l'on doit mesurer avec une très grande précision pour détecter le passage de l'onde gravitationnelle. La mesure peut être soit capacitive, en déposant une électrode sur la surface du résonateur interne et une autre sur la surface interne du résonateur extérieur, soit optique en traitant optiquement une partie de ces mêmes surfaces afin de former une cavité optique de grande finesse.

Le choix particulier des matériaux et des dimensions des deux résonateurs permet d'avoir une fréquence fondamentale de vibration du résonateur interne trois à quatre fois supérieure à celle du résonateur externe. On s'assure également de n'avoir entre ces deux modes aucun autre mode sensible. Les fréquences des deux modes fondamentaux déterminent la plage de fonctionnement du détecteur car dans cette plage de fréquences, les réponses mécaniques des deux résonateurs à l'onde gravitationnelle sont déphasées de  $\pi$  et leurs effets sur le mouvement relatif s'ajoutent.

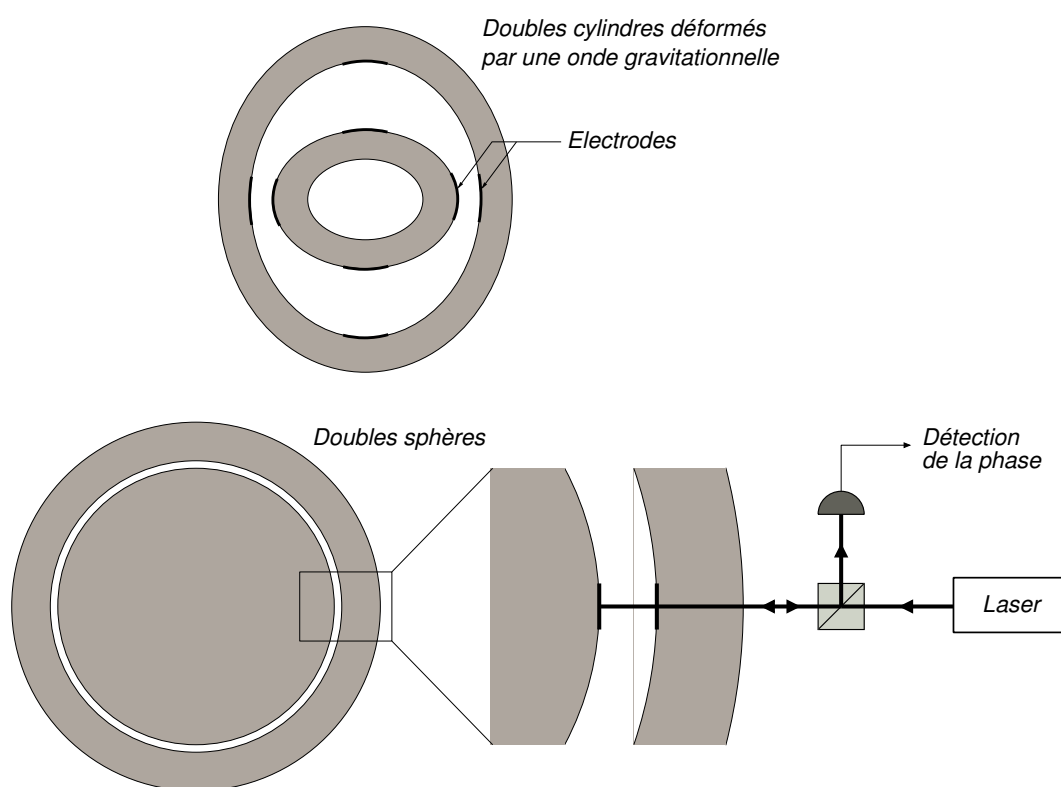


FIG. 5.8 – Principe d'un détecteur d'ondes gravitationnelles à doubles résonateurs. Les modes fondamentaux de vibration des deux résonateurs imbriqués sont excités par l'onde qui répondent en opposition de phase. En haut : détecteur à doubles cylindres avec capteurs capacitifs. En bas : détecteur à doubles sphères muni de capteurs optiques constitués de cavités de grande finesse.

Les doubles résonateurs sont donc des détecteurs d'ondes gravitationnelles qui combinent certains avantages des deux types de détecteurs cités plus haut. Le nombre et le positionnement des capteurs permettent de reconstituer le mouvement des résonateurs et ainsi de déterminer la direction de l'onde gravitationnelle, ce qui en fait un détecteur

directionnel. Il s'agit également d'un détecteur large bande du fait de l'écart important entre les fréquences de résonance des modes fondamentaux de vibration. Enfin, nous verrons que dans le cas d'un détecteur à doubles sphères utilisant un capteur optique, il est envisageable d'atteindre une très grande sensibilité.

### 5.3.2 Sensibilité d'un détecteur à doubles résonateurs

Nous présentons ici le calcul de la sensibilité dans un détecteur à doubles résonateurs de géométrie quelconque mais à capteurs optiques. Nous commençons par le calcul du déplacement des résonateurs provoqué par une onde gravitationnelle et vu par la lumière. Nous présentons ensuite le calcul des bruits thermiques et quantiques dans le cas où on ne tient compte que du mouvement des deux modes fondamentaux quadrupolaires des résonateurs. Nous décrivons enfin une nouvelle méthode de calcul permettant d'estimer ces bruits dans la plage de fréquence intermédiaire, en prenant en compte tous les modes acoustiques [104].

#### Détection optique du déplacement

Nous considérons un détecteur du type de ceux présentés sur la figure 5.8. Nous allons estimer le mouvement relatif des résonateurs provoqué par le passage d'une onde gravitationnelle et son effet sur le capteur optique.

La cavité formée entre les surfaces des deux résonateurs est équivalente à une cavité dont les deux miroirs sont mobiles. Comme on l'a vu dans la partie 1.1 du premier chapitre, le mouvement vu par le faisceau lumineux dans la cavité peut être traité de manière monodimensionnelle en considérant les déplacements  $x_i$  et  $x_e$  des résonateurs intérieur et extérieur, moyennés sur le profil du faisceau lumineux :

$$x_i(t) = \langle u_i(t), v_0^2 \rangle, \quad (5.52)$$

$$x_e(t) = \langle u_e(t), v_0^2 \rangle, \quad (5.53)$$

où les crochets désignent l'intégrale de recouvrement sur la surface des miroirs [équation (1.48)],  $u_i$  et  $u_e$  désignent les déplacements longitudinaux des miroirs (selon l'axe du faisceau lumineux), et  $v_0^2$  est le profil d'intensité du faisceau lumineux supposé Gaussien et identique sur les deux miroirs. La lumière réfléchi est sensible à la longueur apparente de la cavité, qui est donnée par la différence  $x_e - x_i$  des déplacements des résonateurs.

Lorsque le champ incident  $\alpha^{in}$  et la cavité sont résonnants, la quadrature de phase  $\delta q^{out}$  du faisceau réfléchi se déduit de l'équation (1.100) en supposant les deux miroirs mobiles. La cavité étant très courte (quelques centimètres) et les fréquences d'analyse relativement basses (de l'ordre du kilohertz), on peut négliger l'effet de filtrage de la cavité : pour une finesse  $\mathcal{F}$  égale à  $10^6$ , la bande passante d'une cavité de 1 cm de long est de 7,5 kHz. La quadrature  $\delta q^{out}$  s'écrit alors pour une cavité sans perte :

$$\delta q^{out}[\Omega] = \delta q^{in}[\Omega] + 16\bar{\alpha}^{in} \mathcal{F} \frac{x_e[\Omega] - x_i[\Omega]}{\lambda}, \quad (5.54)$$

où  $\bar{\alpha}^{in}$  est l'amplitude moyenne du champ injecté dans la cavité,  $\delta q^{in}$  est le bruit de phase du faisceau incident et  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière.

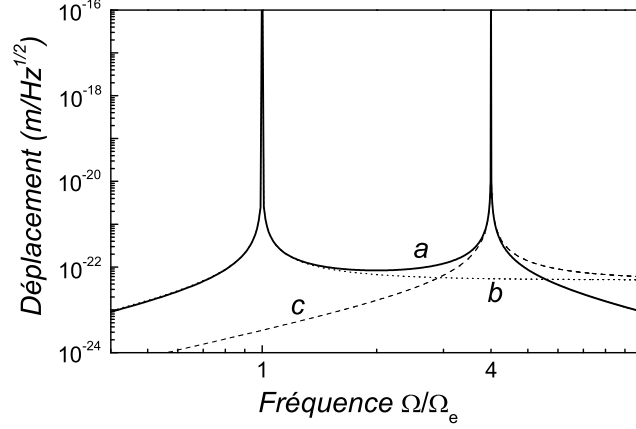


FIG. 5.9 – Amplitude du déplacement relatif des résonateurs provoqué par le passage d’une onde gravitationnelle (courbe *a*). Les courbes *b* et *c* montrent les amplitudes des déplacements individuels des résonateurs respectivement externe et interne

### Effet d’une onde gravitationnelle

Le déplacement  $x^{gw}$  des résonateurs engendré par le passage d’une onde gravitationnelle d’amplitude  $\tilde{h}$  peut s’écrire comme une somme des contributions de tous les modes acoustiques sensibles [105, 106] :

$$x^{gw}[\Omega] = -\frac{1}{2} \sum_n b_n \langle u_n, v_0^2 \rangle \Omega^2 L_n[\Omega] \tilde{h}[\Omega], \quad (5.55)$$

où  $b_n$  désigne le coefficient sur le mode  $n$  dans la décomposition normale de la fonction de réponse du résonateur et  $L_n$  est la dépendance en fréquence du mode, liée à sa fréquence de résonance  $\Omega_n$  et à son taux d’amortissement  $\Gamma_n$  par :

$$L_n[\Omega] = \frac{1}{\Omega_n^2 - \Omega^2 - i\Gamma_n\Omega}. \quad (5.56)$$

On ne considère tout d’abord que les modes fondamentaux des deux résonateurs. La figure 5.9 montre alors le déplacement vu par la cavité, dans le cas où la géométrie, les dimensions, et les matériaux sont choisis de telle manière que la fréquence fondamentale  $\Omega_i$  du résonateur intérieur soit quatre fois plus élevée que la fréquence fondamentale  $\Omega_e$  du résonateur extérieur. Le déplacement  $|x_e^{gw}[\Omega] - x_i^{gw}[\Omega]|$  est tracé en fonction de la fréquence, pour une onde d’amplitude  $\tilde{h} = 10^{-22}$  et en supposant les paramètres géométriques  $b_1 \langle u_1, v_0^2 \rangle$  égaux à 1 pour les deux résonateurs (courbe *a*). Les courbes *b* et *c* montrent les déplacements de chaque résonateur pris individuellement. Dans la plage de fréquences intermédiaires et loin des résonances, les réponses des deux résonateurs sont réelles et de signes opposés [équation (5.55) et (5.56)]. La lumière étant sensible au déplacement relatif des résonateurs, les effets s’ajoutent et l’on trouve un déplacement apparent supérieur aux déplacements individuels de chaque

résonateur. Pour des fréquences en dehors de la plage intermédiaire, les déplacements des résonateurs sont de même signe et leurs effets sur la lumière se soustraient. On obtient ainsi une courbe de déplacement en fonction de la fréquence plate entre les deux résonances et décroissant comme  $\Omega^2$  à basse fréquence et comme  $1/\Omega^2$  à haute fréquence.

### Calcul de la sensibilité

Trois sources de bruit vont s'ajouter au déplacement provoqué par l'onde gravitationnelle et vont limiter la sensibilité de la mesure. Le premier bruit, qui apparaît directement dans l'équation (5.54), est le bruit de phase  $\delta q^{in}$  du faisceau incident. Les deux autres bruits proviennent des fluctuations de position des résonateurs, dues au bruit thermique et aux fluctuations de la pression de radiation agissant sur les miroirs de la cavité.

Pour un état incident cohérent, ces trois bruits sont décorrélés et leurs spectres, noté respectivement  $S_x^{shot}$ ,  $S_x^T$  et  $S_x^{rad}$ , s'ajoutent. On définit la sensibilité de la mesure à partir du bruit rapporté à l'effet d'un signal gravitationnel :

$$S_h[\Omega] = \frac{S_x^{shot}[\Omega] + S_x^T[\Omega] + S_x^{rad}[\Omega]}{|x_e^{gw}[\Omega] - x_i^{gw}[\Omega]|^2 / |\tilde{h}[\Omega]|^2}. \quad (5.57)$$

Avec cette définition, l'amplitude spectrale  $\sqrt{S_h[\Omega]}$  (en  $H_z^{-1/2}$ ) représente la plus petite amplitude  $\tilde{h}_{min}$  d'onde gravitationnelle détectable à la fréquence  $\Omega$ .

Le bruit  $S_x^{shot}$  lié aux fluctuations de phase incidentes a déjà été calculé dans le premier chapitre. Exprimé en terme de bruit de déplacement équivalent, il s'écrit [équation (1.105)] :

$$S_x^{shot}[\Omega] = \frac{\lambda^2}{256\mathcal{F}^2|\bar{\alpha}^{in}|^2}. \quad (5.58)$$

Le bruit thermique  $S_x^T$  a également été calculé dans le chapitre 1, pour un seul miroir. Il s'exprime en fonction de la susceptibilité effective  $\chi^{eff}[\Omega]$  du miroir, somme des contributions de tous les modes acoustiques [équation (1.75)], et d'une force de Langevin effective qui vérifie le théorème fluctuations-dissipation [équation (1.3)]. Les forces de Langevin des deux miroirs étant décorrélées, le spectre  $S_x^T$  de bruit de position relative des deux résonateurs est la somme des spectres de bruit thermique de chaque résonateur et l'on obtient :

$$S_x^T[\Omega] = \frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im}(\chi_e^{eff}[\Omega] + \chi_i^{eff}[\Omega]), \quad (5.59)$$

où  $\chi_i^{eff}$  et  $\chi_e^{eff}$  sont les susceptibilités effectives des résonateurs interne et externe.

Enfin, le faisceau intracavité exerce une force de pression de radiation  $F_{rad}$  sur les deux miroirs déposés sur les faces des résonateurs. Nous avons calculé au début de ce chapitre le bruit de déplacement provoqué par les fluctuations quantiques de pression de radiation [équation (5.5)], pour un seul miroir. Les forces s'exerçant sur chacun des deux miroirs de la cavité sont égales et opposées ; la variation de position relative qui en résulte s'écrit :

$$x_e^{rad}(t) - x_i^{rad}(t) = (\chi_e^{eff}[\Omega] + \chi_i^{eff}[\Omega]) F_{rad}[\Omega]. \quad (5.60)$$

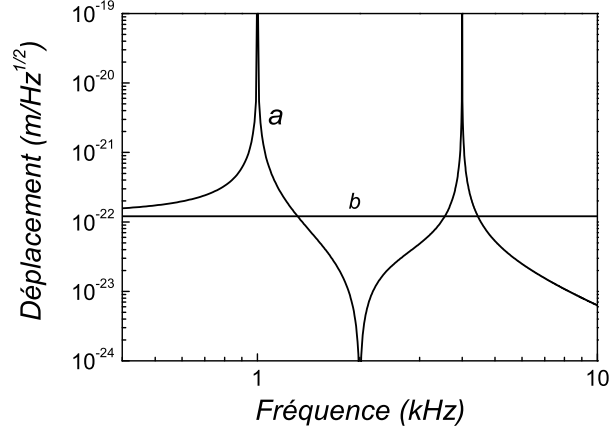


FIG. 5.10 – Bruit de pression de radiation  $\sqrt{S_x^{rad}}$  (courbe *a*) et bruit de phase  $\sqrt{S_x^{shot}}$  (courbe *b*) lorsque seuls les modes fondamentaux des résonateurs sont pris en compte.

On déduit le spectre  $S_x^{rad}$  de bruit de position à partir des équations (5.3) à (5.5) :

$$S_x^{rad}[\Omega] = \frac{64\hbar^2 \mathcal{F}^2 |\bar{\alpha}^{in}|^2}{\lambda^2} |\chi_e^{\text{eff}}[\Omega] + \chi_i^{\text{eff}}[\Omega]|^2. \quad (5.61)$$

Alors que le bruit de phase  $S_x^{shot}$  ne dépend que des caractéristiques optiques du système, les bruits thermique et de pression de radiation  $S_x^T$  et  $S_x^{rad}$  dépendent également des susceptibilités mécaniques des résonateurs. Leur estimation précise requiert de modéliser la réponse des résonateurs à une force extérieure. Pour mettre en évidence les propriétés du bruit de pression de radiation, nous allons dans une première étape uniquement tenir compte des modes fondamentaux des deux résonateurs.

### Annulation du bruit de pression de radiation

Le bruit de pression de radiation est dû à la force de pression de radiation qui s'exerce sur les deux miroirs déposés à la surface des résonateurs. Pour des fréquences comprises entre les fréquences de résonance mécanique, les susceptibilités effectives des résonateurs sont de signes opposés et la contribution des modes au bruit de pression de radiation se retranche [équation (5.60)]. Il en résulte une annulation du spectre  $S_x^{rad}$  pour une fréquence particulière comprise entre  $\Omega_e$  et  $\Omega_i$ . Si on ne tient compte que des deux modes fondamentaux, les susceptibilités effectives  $\chi_i^{\text{eff}}$  et  $\chi_e^{\text{eff}}$  se réduisent à la susceptibilité des modes fondamentaux. Dans le cas d'un système de doubles sphères, les propriétés mécaniques de ces modes sont connues [105] et on peut calculer les bruits de position dus à la pression de radiation et au bruit de phase [équations (5.61) et (5.58)].

La figure 5.10 montre ces bruits pour un détecteur intérieur d'une tonne et extérieur de 4 tonnes, possédant des fréquences de résonance  $\Omega_e = 1 \text{ kHz}$  et  $\Omega_i = 4 \text{ kHz}$  et ayant des facteurs de qualité mécanique de  $10^7$ . La longueur d'onde est fixée à  $1064 \text{ nm}$  et le paramètre optique  $\mathcal{F}^2 |\bar{\alpha}^{in}|^2$  est choisi de telle façon que les deux bruits soient égaux à

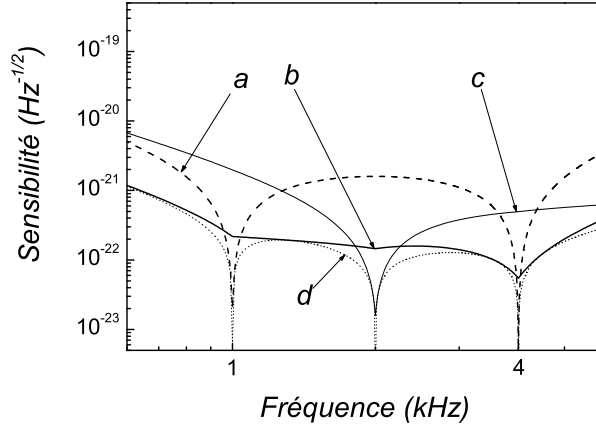


FIG. 5.11 – Sensibilité  $\sqrt{S_h}$  due aux bruits quantiques de la lumière pour des intensités incidentes croissantes (courbes *a* à *c*) ; la courbe *d* correspond à la limite quantique standard.

basse fréquence. Le bruit de pression de radiation présente deux pics importants aux fréquences de résonance mécanique, mais également une nette réduction sur la plage de fréquences intermédiaires. La fréquence pour laquelle l'annulation de ce bruit se produit dépend des masses effectives des modes fondamentaux des deux résonateurs et peut être ajustée n'importe où sur la plage de fréquence entre  $\Omega_e$  et  $\Omega_i$  en choisissant les caractéristiques mécaniques des deux sphères.

La sensibilité  $\sqrt{S_h}$  résultant uniquement des bruits quantiques du faisceau de mesure ( $S_x^T = 0$ ) est représentée sur la figure 5.11. La courbe *b* est obtenue pour le même paramètre optique  $\mathcal{F}^2|\bar{\alpha}^{in}|^2$  que pour la figure 5.10 et présente une très grande sensibilité sur une grande partie de la plage de fréquence intermédiaire. La courbe *a* est obtenue pour un paramètre optique dix fois plus petit. Dans ce cas le bruit de phase est dominant presque à toutes les fréquences. Le bruit de phase étant indépendant de la fréquence, la courbe de sensibilité apparaît comme l'inverse de la dépendance au signal (figure 5.9), et la sensibilité est maximale au voisinage des fréquences des deux modes fondamentaux. La courbe *c* est obtenue pour un paramètre optique dix fois plus grand. La sensibilité est dans ce cas limitée essentiellement par le bruit de pression de radiation et présente un optimum au voisinage de la fréquence d'annulation.

La courbe *d* de la figure 5.11 représente la limite quantique standard correspondant au minimum de bruit accessible avec un faisceau incident cohérent et qui est obtenue, à une fréquence donnée, en ajustant le paramètre optique  $\mathcal{F}^2|\bar{\alpha}^{in}|^2$  de manière à égaler le bruit de pression de radiation et le bruit shot. On trouve grâce aux équations (5.58) et (5.61) un bruit  $S_x^{LQS}$  minimal de position de :

$$S_x^{LQS} = \hbar |\chi_e[\Omega] + \chi_i[\Omega]|. \quad (5.62)$$

Ce bruit est similaire à celui prédit par l'équation (5.8) pour un résonateur simple, la susceptibilité mécanique étant ici remplacée par la somme des susceptibilités des résonateurs. Dans le cas où seuls les deux modes fondamentaux sont pris en compte, l'équation (5.62) conduit à trois maxima de sensibilité, localisés aux résonances mécaniques



et à la fréquence d'annulation des effets de la pression de radiation, et que l'on peut atteindre en ajustant la puissance lumineuse incidente.

### Calcul de la susceptibilité mécanique dans le cas multimode

Pour calculer de manière plus précise la sensibilité du détecteur, il est nécessaire d'avoir une meilleure estimation de la susceptibilité des résonateurs, en particulier il faut prendre en compte la contribution des autres modes.

Une première approche possible consiste à utiliser la décomposition modale du mouvement du résonateur présentée dans la section 1.1.2. Le mouvement du résonateur vu par la lumière est décrit par une susceptibilité effective qui est une somme infinie sur l'ensemble des modes acoustiques du résonateur. On obtient une valeur approchée  $\chi^{(N)}$  de cette susceptibilité en ne sommant que les  $N$  premiers modes acoustiques :

$$\chi^{(N)}[\Omega] = \sum_{n=1}^N \langle u_n, v_0^2 \rangle^2 \chi_n[\Omega]. \quad (5.63)$$

où la susceptibilité  $\chi_n[\Omega]$  du mode  $n$  s'écrit comme la dépendance en fréquence  $L_n[\Omega]$  [équation (5.56)], divisée par la masse  $M_n$  du mode [équation (1.53)]. La somme converge vers la susceptibilité mécanique effective, mais la convergence est relativement lente, et le calcul de l'intégrale de recouvrement de modes d'ordre élevé avec le mode optique peut se révéler en pratique très lourd.

Une seconde approche consiste à utiliser le théorème fluctuations-dissipation de manière directe. Cette méthode, que nous avons déjà décrite dans la section 4.5.1, est extrêmement efficace dans la limite basse fréquence. Elle donne en fait la susceptibilité effective statique en calculant la déformation du résonateur en réponse à une force constante [63, 64, 65]. Lorsque la taille du faisceau est très petite devant les dimensions du résonateur, la surface de celui-ci peut être approchée par un demi-plan infini. Pour cette géométrie particulière l'approche directe donne une susceptibilité à basse fréquence égale à [équation (4.36)] [79] :

$$\chi[\Omega = 0] = \frac{1 - \sigma^2}{\sqrt{\pi}(1 - i\phi)Ew_0}. \quad (5.64)$$

où  $\sigma$  est le coefficient de Poisson du résonateur,  $\phi$  l'angle de perte, et  $E$  son module d'Young. La valeur de la susceptibilité ainsi obtenue n'est cependant valable que pour des fréquences très inférieures à celles des résonances du résonateur et n'est donc pas valide dans la plage de fréquences intermédiaires.

Ces deux approches prises séparément sont donc insuffisantes pour estimer la susceptibilité effective et nous avons utilisé une nouvelle approche combinant les deux méthodes précédentes. Elle consiste à écrire la susceptibilité sous la forme :

$$\chi[\Omega] = \chi[0] + \lim_{N \rightarrow \infty} (\chi^{(N)}[\Omega] - \chi^{(N)}[0]). \quad (5.65)$$

Le premier terme est la susceptibilité donnée par l'approche directe [équation (5.64)], et la différence  $\chi^{(N)}[\Omega] - \chi^{(N)}[0]$  est calculée grâce à la décomposition modale [équation

(5.63)]. Dans la pratique, on somme un nombre  $N$  fini de modes choisis de telle manière que la fréquence de résonance  $\Omega_N$  soit très largement supérieure à la fréquence d'analyse  $\Omega$ .

On peut estimer la rapidité de convergence de cette méthode en majorant l'erreur  $\Delta\chi$  sur la susceptibilité faite en ne sommant que les  $N$  premiers termes :

$$\Delta\chi[\Omega] = \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle u_n, v_0^2 \rangle^2 (\chi_n[\Omega] - \chi_n[0]). \quad (5.66)$$

Pour les modes  $n$  dans la somme, la fréquence de résonance  $\Omega_n$  est très grande devant  $\Omega$  et la différence  $\chi_n[\Omega] - \chi_n[0]$  peut être majorée par [voir équation (5.56)] :

$$\chi_n[\Omega] - \chi_n[0] \simeq \chi_n[0] \left( \frac{\Omega_n^2}{\Omega_n^2 - \Omega^2} - 1 \right) \leq \chi_n[0] \frac{\Omega^2}{\Omega_n^2 - \Omega^2}. \quad (5.67)$$

Ce qui conduit à la majoration de l'erreur :

$$\Delta\chi[\Omega] \leq \chi[0] \frac{\Omega^2}{\Omega_N^2 - \Omega^2}. \quad (5.68)$$

Pour un nombre  $N$  de modes suffisamment large, la somme calculée converge comme  $1/\Omega_N^2$ , ce qui est bien plus rapide que la convergence de la série de l'équation (5.63) qui est en  $1/\Omega_N$  si l'on suppose que le résonateur à des résonances régulièrement espacées.

### 5.3.3 Application aux doubles sphères

Nous allons utiliser les résultats de la section précédente pour estimer la sensibilité d'un détecteur à doubles sphères. Le système que l'on considère est celui de la figure 5.8. L'espace entre les sphères, de l'ordre de quelques centimètres, est petit devant leur rayon, qui est de l'ordre du mètre. Deux miroirs sont déposés en regard sur la surface de la sphère pleine et sur la surface interne de la sphère creuse. La cavité ainsi constituée n'est sensible qu'à la partie longitudinale des modes des sphères. Ceux-ci sont repérés par trois indices  $n$ ,  $l$  et  $m$ , l'indice  $n$  caractérisant la dépendance radiale du mode et les indices  $l$  et  $m$  étant liés à la symétrie de rotation. La partie longitudinale  $u_{nlm}(\mathbf{r})$  du mode  $nlm$  s'écrit [105, 106] :

$$u_{nlm}(r, \theta, \varphi) = A_{nl}(r) \times Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (5.69)$$

$A_{nl}(r)$  est la fonction radiale du mode et la dépendance angulaire est donnée par les harmoniques sphériques  $Y_l^m$ . Le caractère quadrupolaire de l'onde gravitationnelle implique qu'elle n'est couplée qu'aux modes de vibration quadrupolaires ( $l = 2$ ) des sphères.

Dans les calculs que nous présentons dans la suite nous avons supposé les sphères en Béryllium. La masse volumique de ce matériau est de  $1900 \text{ kg/m}^3$ , la vitesse du son vaut  $13000 \text{ m/s}$ , et le coefficient de Poisson est égal à  $0,17$ . Nous avons choisi des rayons de  $1,2 \text{ m}$  pour la sphère interne et de  $2 \text{ m}$  pour la sphère externe. Avec ces valeurs, on trouve des fréquences de résonance de  $1161$  et  $3075 \text{ Hz}$  pour les modes

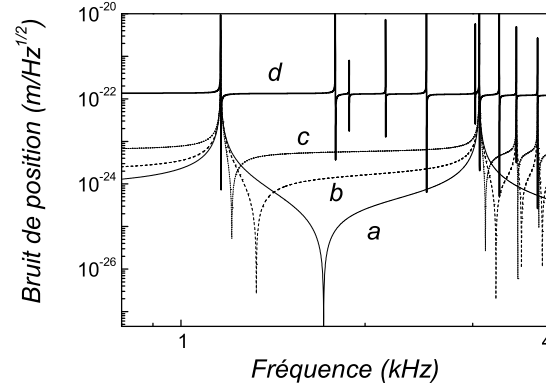


FIG. 5.12 – Bruits de pression de radiation dans un détecteur à doubles sphères, en prenant en compte un nombre croissant de modes acoustiques de la sphère creuse (courbes de  $a$  à  $c$ ), et lorsque l'on utilise notre méthode de calcul de la susceptibilité (courbe  $d$ ). Résultats obtenus pour une taille de faisceau  $w_0$  de  $1\text{ cm}$ .

fondamentaux et des masses de 50 et 14 tonnes respectivement pour les sphères creuse et pleine.

Nous avons utilisé les résultats d'un calcul par éléments finis réalisé par J.A. Lobo [105], qui fournit les caractéristiques mécaniques des modes ainsi que leurs paramètres de couplage avec l'onde gravitationnelle [équation (5.55)]. Nous disposons ainsi des propriétés des 120 premiers modes pour la sphère pleine et des 80 premiers modes pour la creuse, ce qui correspond à une fréquence maximale  $\Omega_N$  d'environ  $30\text{ kHz}$ .

La figure 5.12 présente le résultat du calcul du bruit de pression de radiation, pour une taille du faisceau lumineux de  $1\text{ cm}$ . La courbe  $a$  est obtenue lorsque seuls les modes fondamentaux sont pris en compte. On retrouve alors une courbe similaire à celle de la figure 5.10. Le comportement du bruit de pression de radiation est modifié par la présence des autres modes acoustiques : la courbe  $b$  est obtenue en prenant en compte les 10 premiers modes de la sphère pleine et la courbe  $c$  les 100 premiers modes. On voit en particulier que la plage de fréquences où se produit l'annulation du bruit de pression de radiation se rapproche de la fréquence de résonance de la sphère creuse et devient de plus en plus étroite. On observe également une remontée du bruit sur toute la plage des fréquences intermédiaires.

La courbe  $d$  de la figure 5.12 montre le bruit de pression de radiation obtenu en utilisant la méthode de calcul de la susceptibilité présentée dans la section précédente, pour les mêmes paramètres du système. Dans la plage intermédiaire, le bruit est indépendant de la fréquence excepté au voisinage des fréquences de résonance de quatre modes acoustiques de la sphère creuse. Il est environ deux ordres de grandeur au dessus du bruit calculé en ne tenant compte que des modes fondamentaux (courbe  $a$ ). Le paramètre optique  $\mathcal{F}^2|\bar{\alpha}^{in}|^2$  utilisé pour tracer ces courbes a été choisi de manière à égaliser à basse fréquence le bruits de pression de radiation et de phase, et correspond à une finesse de la cavité de  $10^6$  et à une intensité incidente de  $45\text{ mW}$ .

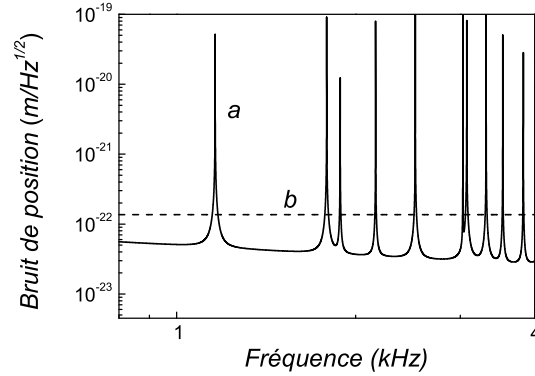


FIG. 5.13 – Bruit de position induit par les fluctuations thermique des résonateurs pour une température du système de  $100\text{ mK}$  et une taille de faisceau  $w_0$  de  $1\text{ cm}$  (courbe  $a$ ). La courbe  $b$  représente le bruit de phase.

La figure 5.13 présente le bruit de position  $\sqrt{S_x^T}$  induit par les fluctuations thermiques des deux sphères [équation (5.59)] pour une température de  $100\text{ mK}$ , un facteur de qualité de  $10^7$  ( $\phi = 10^{-7}$ ) et un col optique de  $1\text{ cm}$ . Tout les modes provoquent un pic de bruit thermique sur le spectre mais les paramètres que nous avons choisis pour les résonateurs assurent un fond thermique inférieur au bruit de phase (courbe  $b$  sur la figure) et il ne limite pas la sensibilité du détecteur.

La courbe de sensibilité déduite des bruits thermiques et quantiques est présentée sur la figure 5.14 (courbe  $a$ ). La sensibilité dans la plage de fréquence intermédiaire est limitée par le bruit quantique et elle atteint des valeurs meilleures que  $10^{-22}/\sqrt{Hz}$ , avec un optimum allant jusqu'à  $2 \times 10^{-24}/\sqrt{Hz}$  au voisinage des fréquences fondamentales des deux sphères.

La sensibilité peut être améliorée d'après l'équation (5.64) en augmentant la taille  $w_0$  du faisceau lumineux au niveau des miroirs. Le bruit de pression de radiation est alors plus petit car le nombre de modes ayant une intégrale de recouvrement non négligeable avec le faisceau lumineux diminue, ce qui réduit la susceptibilité effective intervenant aussi bien pour le bruit thermique que pour les effets de pression de radiation [équation (5.59) et (5.61)]. Les sensibilités obtenues pour des tailles de  $10$  et  $0,1\text{ cm}$  sont reportées sur la figure 5.14 (courbes  $b$  et  $c$ ). Dans les deux cas, l'intensité est ajustée de manière à optimiser le bruit quantique du détecteur (les bruits de pression de radiation et de phase sont égaux à basse fréquence) : la courbe  $b$  est obtenue pour une intensité incidente de  $450\text{ mW}$  et la courbe  $c$  pour une intensité de  $4,5\text{ mW}$ .

Il est toutefois difficile d'obtenir un col optique relativement large pour une cavité limitée en longueur à quelques centimètres. Une première possibilité pour atteindre de telles tailles de faisceau consiste à utiliser une cavité Fabry-Perot repliée [107] : le faisceau lumineux ne suit plus un trajet linéaire dans la cavité, mais se réfléchit en un certain nombre de points différents des surfaces des deux sphères avant de ressortir par le miroir d'entrée (voir figure 5.15). Ce système est équivalent à une cavité Fabry-Perot

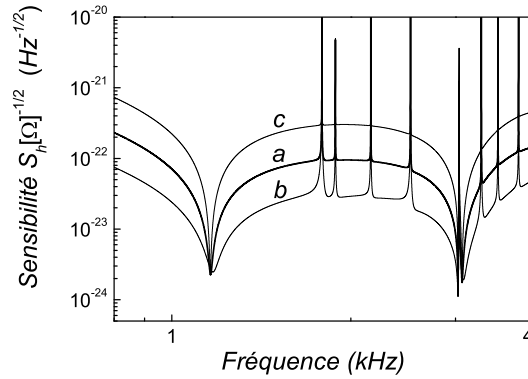


FIG. 5.14 – Sensibilité du détecteur à doubles sphères obtenue pour un faisceau de mesure de taille  $w_0$  égale respectivement à 1 cm (courbe a), 10 et 0,1 cm (courbes b et c).

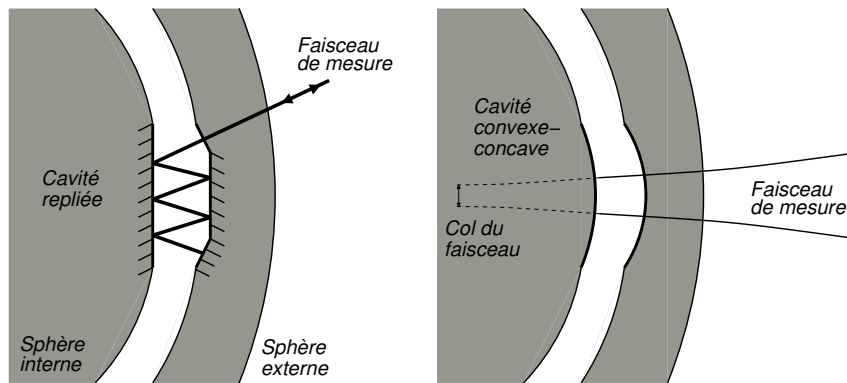


FIG. 5.15 – Géométries de cavité envisagées pour obtenir un large col optique au niveau des miroirs. Le schéma de gauche présente le principe d'un cavité repliée [107]. Le schéma de droite présente une cavité convexe-concave.

classique mais avec une largeur effective du faisceau lumineux multipliée par le nombre de réflexions. Une seconde possibilité consiste à utiliser une cavité convexe-concave (voir figure 5.15). Pour que la cavité soit stable, il faut que les rayons  $-R_1$  et  $R_2$  des miroirs convexe et concave vérifient  $R_1 < R_2$  et que la longueur  $L$  de la cavité soit plus grande que la différence  $R_2 - R_1$ . Pour des valeurs de  $L$  et  $R_2 - R_1$  petites devant  $R_1$  et  $R_2$ , la taille du faisceau est donnée par :

$$w_0^2 = \frac{\lambda R_1}{\pi} \sqrt{\frac{L}{L - R_2 + R_1}} \quad (5.70)$$

Pour des rayons  $R_1 = 4000$  cm et  $R_2 = 4004$  cm, et une cavité de longueur  $L = 4,04$  cm, on obtient une taille  $w_0$  du faisceau supérieure au centimètre.

### 5.3.4 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie le calcul de la sensibilité d'un nouveau type de détecteur d'ondes gravitationnelles composé de deux sphères imbriquées utilisant un capteur optique de déplacement. En ne considérant que les modes fondamentaux des résonateurs, les effets de l'onde gravitationnelle s'ajoutent sur la plage de fréquence entre les deux résonances, alors que ceux de la pression de radiation se soustraient. Pour réaliser une estimation plus précise des bruits thermiques et quantiques dans la mesure optique du déplacement relatif entre les deux résonateurs, nous avons développé une nouvelle méthode de calcul de la susceptibilité mécanique combinant les approches directes et modales et applicable dans le domaine de fréquences intermédiaires. Nous avons montré que l'effet d'annulation du bruit de pression de radiation disparaît presque complètement lorsque l'on prend en compte tous les modes acoustiques des résonateurs. Cette méthode de calcul appliquée aux doubles sphères nous a permis de déterminer les dimensions du détecteur et les paramètres des capteurs optiques qui donneraient une sensibilité limitée uniquement par le bruit quantique à un niveau équivalent, ou même meilleur que celui des détecteurs actuels.

# Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire une étude théorique et expérimentale des caractéristiques optomécaniques d'un miroir mobile placé dans une cavité Fabry-Perot de grande finesse. Un tel système est très sensible aux déplacements du miroir et permet d'étudier les propriétés du couplage optomécanique entre un faisceau lumineux et un miroir sur lequel il se réfléchit. Nous avons présenté les principaux aspects de ce couplage ainsi que les limites qu'il impose au niveau quantique sur la mesure de petits déplacements. Nous avons mené une étude expérimentale exhaustive du bruit thermique d'un miroir, bruit qui limite à l'heure actuelle les mesures optiques de grande précision telles que les mesures interférométriques des ondes gravitationnelles. Nous avons également cherché à améliorer la géométrie des miroirs en vue de mettre en évidence les effets quantiques de la pression de radiation.

Le cœur du montage utilisé dans ce mémoire est constitué par une cavité Fabry-Perot dont le miroir arrière est déposé sur un résonateur en silice. Avec les différents miroirs mobiles que nous avons étudiés, nous avons réalisé des cavités dont la finesse est de l'ordre de 30 000. La source laser est construite autour d'un laser titane-saphir. Elle fournit une lumière très stable en fréquence et en intensité, qui peut être balayée sur une très large plage de fréquence et asservie en fréquence sur la cavité à miroir mobile. Le système de détection homodyne fonctionne au niveau quantique et permet de mesurer la quadrature de phase du faisceau réfléchi par la cavité avec une très grande sensibilité.

La sensibilité de notre montage est de l'ordre de  $10^{-19}m/\sqrt{Hz}$  sur une large plage de fréquence, de 100  $kHz$  jusqu'à plusieurs mégahertz. La valeur optimale atteinte avec l'une des cavités que nous avons construites est de  $4 \times 10^{-20}m/\sqrt{Hz}$ . Cette très grande sensibilité permet de mesurer directement le mouvement Brownien des miroirs de la cavité.

Nous avons mené une étude exhaustive du bruit thermique d'un mode acoustique du miroir, aussi bien en régime libre qu'en régime refroidi obtenu à l'aide d'une boucle d'asservissement équivalente à un processus de friction froide. Ceci nous a permis d'une part de caractériser les propriétés optomécaniques du mode acoustique considéré, d'autre part de mieux comprendre les techniques de contrôle actif du bruit de position d'un miroir. Pour mener à bien cette étude, nous nous sommes intéressés au mouvement du miroir sous différents aspects : ses composantes spectrales, son évolution temporelle en régime transitoire, et son évolution temporelle dans l'espace des phases.

- Le spectre de bruit thermique fournit des informations sur la fréquence de résonance du mode et sur le facteur de qualité mécanique. Par ailleurs l'étude de la réponse en

fréquence du miroir à une force extérieure, appliquée par l'intermédiaire de la pression de radiation d'un faisceau laser modulé en intensité, permet de mesurer la réponse mécanique du miroir, c'est-à-dire sa susceptibilité et sa masse effective. Les mêmes études réalisées lorsque le miroir est refroidi mettent en évidence une modification de la susceptibilité, en excellent accord avec les calculs théoriques effectués en utilisant le théorème fluctuations-dissipation : le processus de friction froide correspond à une augmentation de l'amortissement du miroir, sans ajouter de bruit. Ceci démontre que le miroir refroidi reste en équilibre thermodynamique mais à une température inférieure à la température ambiante, au moins pour des gains modérés de l'asservissement.

- Nous nous sommes également intéressés aux temps de réponse du miroir à une force impulsionnelle extérieure et aux régimes transitoires de retour à l'équilibre thermodynamique lorsque l'on applique ou que l'on interrompt brusquement l'asservissement. Cette étude de l'évolution temporelle du miroir est complémentaire de l'étude spectrale. Les régimes transitoires observés expérimentalement sont en très bon accord avec le modèle théorique de la friction froide et les constantes de temps observées coïncident avec les taux d'amortissement mesurés grâce aux spectres de bruit thermique. Nous avons également montré expérimentalement que le temps d'établissement du régime de friction froide est beaucoup plus rapide que le retour à l'équilibre thermodynamique.

- Grâce à un dispositif de démodulation du mouvement du miroir, nous avons pu suivre temporellement l'évolution des quadratures dans l'espace des phases, avec une sensibilité de l'ordre de l'attomètre ( $10^{-18}$  m). Nous avons appliqué cette technique de mesure au bruit thermique du miroir. Sur un temps de l'ordre de l'inverse du taux d'amortissement, le mouvement dans l'espace des phases ressemble au mouvement Brownien d'une particule libre à deux dimensions. Sur des temps plusieurs milliers de fois plus grands, nous avons mis en évidence l'effet de l'harmonicité du mouvement qui confine la distribution des positions autour de l'origine, avec une statistique Gaussienne à symétrie cylindrique. L'observation de la position du miroir dans l'espace des phases en présence de la friction froide a montré une compression de la distribution du mouvement. La distribution garde une forme Gaussienne à symétrie cylindrique mais sa variance, reliée à la température effective du miroir, est comprimée par rapport à celle du mouvement thermique libre.

Nous avons également étudié des régimes où le miroir est dans un état hors d'équilibre thermodynamique. Nous avons réalisé une amplification paramétrique du mouvement du miroir, en jouant sur le gain de la boucle de contre-réaction de façon à moduler le taux d'amortissement effectif du miroir à deux fois la fréquence de résonance. Il en résulte un état comprimé du bruit thermique dans l'espace des phases, l'une des quadratures du mouvement étant refroidie et l'autre chauffée. Nous avons approché la limite théorique de 50% de compression liée à l'existence d'un seuil d'oscillation, et en augmentant le gain de la boucle de contre-réaction nous avons observé un régime d'oscillation paramétrique pour lequel le mouvement moyen du miroir n'est plus nul.

Dans le but de mettre en évidence les effets quantiques de la pression de radiation, nous avons réalisé une étude détaillée de l'ensemble des modes acoustiques d'un miroir en vue d'une amélioration de leur facteur de qualité mécanique et d'une diminution de leur masse effective. Notre dispositif expérimental permet de répertorier les fréquences



de résonance des modes acoustiques grâce à l'observation des résonances thermiques dans le spectre de bruit de position. Nous avons développé un dispositif de mesure du profil spatial des modes acoustiques par balayage d'une force de pression de radiation sur la surface du miroir. Nous avons ainsi déterminé les profils spatiaux des modes acoustiques d'un miroir de géométrie cylindrique et obtenu un excellent accord avec les modèles théoriques utilisés notamment pour déterminer le bruit thermique dans les interféromètres gravitationnels.

Nous avons également étudié les modes acoustiques de miroirs de géométrie plan-convexe. La mesure des profils spatiaux a mis en évidence la présence de modes confinés autour de l'axe du miroir dont la structure spatiale est Gaussienne, et présentant de grands facteurs de qualité. En particulier, l'utilisation de miroirs plan-convexes de grand diamètre permet d'isoler efficacement les modes acoustiques du système de fixation du miroir, et nous avons observé des modes avec un facteur de qualité supérieur à un million et une masse effective cent fois plus faible que la masse totale du miroir. Ces miroirs se révèlent donc de bons candidats pour la mise en évidence des effets quantiques de la pression de radiation.

Nous avons présenté dans le dernier chapitre les propriétés quantiques des mesures de petits déplacements, en particulier l'existence d'une limite quantique standard dans les mesures interférométriques. Cette limite n'apparaît cependant pas comme une limite quantique fondamentale et nous avons présenté une méthode permettant d'améliorer la sensibilité de la mesure en désaccordant la cavité. Le couplage optomécanique entre le mouvement du miroir et le champ dans la cavité modifie la dynamique du miroir et permet d'avoir un effet d'amplification du signal par le mouvement du miroir mobile. La possibilité de battre la limite quantique standard simplement en désaccordant la cavité de mesure pourrait en principe être démontrée à partir de notre montage expérimental.

Nous nous sommes enfin intéressés à un nouveau type de détecteur d'ondes gravitationnelles utilisant deux résonateurs sphériques imbriqués, dont la distance relative est mesurée avec un capteur optique. Nous avons présenté le calcul des bruits thermiques et quantiques d'un tel détecteur. Une nouvelle méthode de calcul de la susceptibilité des résonateurs qui combine les approches statique et modale nous a permis de déterminer les caractéristiques optimales du détecteur. Ce nouveau type d'antenne gravitationnelle pourrait ainsi être capable de détecter sur une large plage de fréquences des ondes gravitationnelles dont l'amplitude est inférieure à  $10^{-22}/\sqrt{Hz}$ .

Ces détecteurs font l'objet d'un programme de recherche entre plusieurs laboratoires européens. L'objectif est de définir les caractéristiques d'un détecteur travaillant à des fréquences entre 1  $kHz$  et quelques kilohertz, complémentaire des antennes interférométriques de seconde génération. Plusieurs solutions sont envisagées, aussi bien en ce qui concerne la géométrie du détecteur (sphères, tores), que pour le type de détection du mouvement (capteur optique, détecteur capacitif). Sur le plan théorique, il reste de nombreuses questions à résoudre. Par exemple, le système dans sa configuration finale est constitué de cinq capteurs du mouvement de façon à pouvoir extraire la direction de propagation de l'onde gravitationnelle. Il serait intéressant d'étudier les limites quantiques d'une telle configuration et de déterminer ce que devient l'effet d'annulation du bruit de pression de radiation que nous avons démontré dans le cas d'un

seul capteur optique. Sur le plan expérimental, il serait très intéressant de développer des cavités de grande finesse pour des faisceaux lumineux ayant un grand col optique, soit en utilisant des cavités repliées, soit à l'aide d'une géométrie convexe-concave.

De telles cavités seraient aussi très utiles pour réaliser des contrôles actifs du bruit des miroirs dans les détecteurs interférométriques d'onde gravitationnelles, qu'il s'agisse de contrôler le bruit thermique ou les effets quantiques de la pression de radiation. Etant donnés les développements actuels des antennes gravitationnelles de deuxième génération, il semble très important de tester expérimentalement ces effets quantiques, leurs conséquences sur la sensibilité de la détection, et les possibilités de les réduire. Le travail présenté dans ce mémoire a permis de déterminer précisément les caractéristiques optomécaniques des miroirs. Les résultats obtenus montrent qu'il est possible d'observer ces effets quantiques à partir de miroirs dont les modes acoustiques internes ont de grands facteurs de qualité et de faibles masses effectives. Nous avons donc fait réaliser de nouveaux miroirs avec des substrats super-polis et des couches diélectriques, déposées à l'Institut de Physique Nucléaire à Lyon, de très grande qualité optique. Nos premiers tests ont montré qu'ils possèdent la qualité attendue et devraient permettre de construire une cavité optique de finesse 300 000, avec une tenue au flux résistant à un faisceau incident de plusieurs milliwatts. Placée à température cryogénique, cette cavité devrait atteindre une sensibilité suffisante pour mettre en évidence les effets quantiques du couplage optomécanique.

# Bibliographie

- [1] J.G. Williams, X.X. Newhall, J.O. Dickey, “*Relativity parameters determined from lunar laser ranging*”, Phys. Rev. D **53**, 6730 (1996).
- [2] E. Samain, J.F. Mangin, J.E. Chabaudie, D. Féraudy, P. Fridelance, M. Glentzlin, J. Pham-Van, J.M. Torre, C. Veillet, “*Millimetric Lunar Laser Ranging at OCA*”, Astron. Astrophys sup. **130**, 235 (1998).
- [3] D. Rugar, H.J. Mamin, and P. Guethner, “*Improved fiber-optic interferometer for atomic force microscopy*”, Appl. Phys. Lett. **55**, 2588 (1989).
- [4] M. Stephens, “*A sensitive interferometric accelerometer*”, Rev. Sci. Instrum. **64**, 2612 (1993).
- [5] L. Conti *et al.*, “*Optical transduction chain for gravitational wave bar detector*”, Rev. Sci. Instrum. **69**, 554 (1998).
- [6] P. Hello, “*Optical Aspect of interferometric gravitational-wave detectors*”, Progress in Optics **XXXVIII**, ed. E. Wolf (North-Holland, 1998).
- [7] P.R. Saulson, “*Fundamentals of interferometric gravitational-wave detector*” (World Scientific, 1994).
- [8] C. Bradaschia *et al.*, “*The VIRGO project : A wide band antenna for gravitational wave detection*”, Nucl. Instrum. Meth. A **289**, 518 (1990).
- [9] A. Abramovici *et al.*, “*The Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*”, Science **256**, 325 (1992).
- [10] F. Acernese *et al.*, “*The present status of the VIRGO central interferometer*”, Class. Quantum Grav. **19**, 1421 (2002).
- [11] “*LIGO II Conceptual Project Book*”, [www.ligo.caltech.edu/docs/M/M990288-A1.pdf](http://www.ligo.caltech.edu/docs/M/M990288-A1.pdf) (1999).
- [12] E. Gustafson, D. Shoemaker, K. Strain, R. Weiss, “*LSC White Paper on detector Research and Development*”, [www.ligo.caltech.edu/docs/T/T990080-00.pdf](http://www.ligo.caltech.edu/docs/T/T990080-00.pdf) (1999).
- [13] V.B. Braginsky and F.Ya. Khalili, “*Quantum Measurement*” (Cambridge University Press, 1992).
- [14] C.M. Caves, “*Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer*”, Phys. Rev. Lett. **45**, 75 (1980).
- [15] M. Xiao, L. Wu, and J. Kimble, “*Precision Measurement beyond the Shot-Noise Limit*”, Phys. Rev. Lett. **59**, 278 (1987).

- [16] M.T. Jaekel and S. Reynaud, “*Quantum Limits in interferometric Measurements*”, Europhys. Lett. **13**, 301 (1990).
- [17] N. Mio, K. Tsubono, “*Vibration transducer using an ultrashort Fabry-Perot cavity*”, App. Opt. **34**, 186 (1995).
- [18] M. Bernardini *et al.*, “*Plane parallel mirrors Fabry-Perot cavity to improve Virgo superattenuators*”, Phys. Lett. A **243**, 187 (1998).
- [19] I. Tittoonen, G. Breitenbach, T. Kalkbrenner, T. Müller, R. Conradt, S. Shiller, “*Interferometric measurement of the position of a macroscopic body : Towards observation of quantum limits*”, Phys. Rev. A **59**, 1038 (1999).
- [20] Y. Hadjar, P.F. Cohadon, C.G. Aminoff, M. Pinard and A. Heidmann, “*High-sensitivity optical measurement of mechanical Brownian motion*”, Europhys. Lett. **47**, 545 (1999).
- [21] A. Heidmann, and S. Reynaud, “*Photon noise reduction by reflection from a movable mirror*”, Phys. Rev. A **50**, 4237 (1994).
- [22] C. Fabre, M. Pinard, S. Bourzeix, A. Heidmann, E. Giacobino, and S. Reynaud, “*Quantum-noise reduction using a cavity with a movable mirror*”, Phys. Rev. A **49**, 1337 (1994).
- [23] Y. Hadjar, “*Etude du couplage optomécanique dans une cavité optique de grande finesse ; observation du mouvement Brownien d’un miroir*”, Thèse de l’université Pierre et Marie Curie (1998).
- [24] A. Heidmann, Y. Hadjar and M. Pinard, “*Quantum nondemolition measurement by optomechanical coupling*”, Phys. Rev. A **64**, 173 (1997).
- [25] J.M.W. Milatz, and J.J. Van Zolingen, “*The Brownian motion of electrometers*”, Physica (Amsterdam) **19**, 181 (1953).
- [26] J.M.W. Milatz, J.J. Van Zolingen, and B.B. Van Ipere, “*The reduction in the Brownian motion of electrometers*”, Physica (Amsterdam) **19**, 195 (1953).
- [27] P.F. Cohadon, A. Heidmann, and M. Pinard, “*Cooling of a mirror by radiation pressure*”, Phys. Rev. Lett. **83**, 3174 (1999).
- [28] F. Grassia, J.M. Courty, S. Reynaud, and P. Touboul, “*Quantum theory of fluctuations in a cold damped accelerometer*”, Eur. Phys. J. D **8**, 101 (2000).
- [29] D.F. Walls, “*Squeezed states of light*”, Nature **306**, 141 (1983).
- [30] R.E. Slusher, L.W. Hollberg, B. Yurke, J.C. Mertz and J.F. Valley, “*Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity*”, Phys. Rev. Lett. **55**, 2409 (1985).
- [31] R. Loudon, P.L. Knight, “*Squeezed Light*”, J. Mod. Opt. **34**, 709 (1987).
- [32] L. Conti *et al.*, “*A wideband and sensitive GW detector for kHz frequencies : the dual sphere*”, Class. Quantum Grav. **19**, 2013 (2002).
- [33] M. Pinard, Y. Hadjar, and A. Heidmann, “*Effective mass in quantum effects of radiation pressure*”, Eur. Phys. J. D **7**, 107 (1999).
- [34] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, “*Cours de physique théorique : physique statistique*” (Mir, 1967).

- [35] G. Grynberg, A. Aspect, C. Fabre, “*Introduction aux lasers et à l’optique quantique*” (Ellipses, 1997).
- [36] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, “*Introduction à l’électrodynamique quantique*” (Edition du CNRS, 1987).
- [37] S. Reynaud and A. Heidmann, “*A semiclassical linear input-output transformation for quantum fluctuations*”, Opt. Comm. **71**, 209 (1989).
- [38] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, and C. Fabre, Progress in Optics **XXX**, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [39] C. Fabre, S. Reynaud, “*Fundamental Systems in Quantum Optics*”, 1990 Les Houches Lectures, eds. J. Dalibard, J.M. Raymond and J. Zinn-Justin, p. 675 (North-Holland, 1992).
- [40] E.P. Wigner, “*On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium*”, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [41] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, “*Cours de physique théorique : Théorie de l’élasticité*”, 2<sup>e</sup> édition (Mir, 1990).
- [42] K. Yamamoto, S. Otsuka, M. Ando, K. Kawabe and K. Tsubono, “*Experimental study of thermal noise caused by an inhomogeneously distributed loss*”, Phys. Lett. A **280**, 289 (2001).
- [43] S. Reynaud, C. Fabre, E. Giacobino, and A. Heidmann, “*Photon noise reduction by passive optical bistable system*”, Phys. Rev. A **40**, 1440 (1989).
- [44] L. Lugiato, “*Theory of optical bistability*”, Progress in Optis **XXI**, ed. E. Wolf (North-Holland, 1984).
- [45] J.M. Mackowski, L. Pinard, L. Dognin, P. Ganau, B. Lagrange, C. Michel and M. Morgue, “*Different approaches to improve the wavefront of low-loss mirrors used in the Virgo gravitational wave antenna*”, Applied Surface Science **151**, 86 (1999).
- [46] U. Leonhardt and H. Paul, “*Measuring the quantum state of light*”, Prog. Quant. Elect. **19**, 89 (1995).
- [47] F. Biraben et P. Labastie, “*Balayage d’un laser à colorant continu monomode sur 150 GHz*”, Opt. Comm. **41**, 49 (1982).
- [48] R.W.P. Drever, J.L. Hall, F.V. Kowalski, P. Hough, G.M. Ford, A.J. Munley and H. Ward, “*Laser Phase and Frequency Stabilization using an Optical Resonator*”, Appl. Phys. **31**, 97 (1983).
- [49] M. Pinard, P.F. Cohadon, T. Briant, and A. Heidmann, “*Full mechanical characterization of a cold damped mirror*”, Phys. Rev. A **63**, 013808 (2000).
- [50] S. Mancini, D. Vitali, and P. Tombesi, “*Optomechanical Cooling of a Macroscopic Oscillator via Homodyne Feedback*”, Phys. Rev. Lett. **80**, 688 (1998).
- [51] P.F. Cohadon, “*Bruit thermique et effets de la pression de radiation dans une cavité optique de grande finesse*”, Thèse de l’Université Pierre et Marie Curie (1999).

- [52] F. Grassia, “*Fluctuations quantiques et thermiques dans les transducteurs électromécaniques*”, Thèse de l’Université Pierre et Marie Curie (1998).
- [53] T. Briant, P.F. Cohadon, M. Pinard, and A. Heidmann, “*Optical phase-space reconstruction of mirror motion at the attometer level*”, Eur. Phys. J. D **22**, 131 (2003).
- [54] Ling-An Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall, and Huifa Wu, “*Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion*”, Phys. Rev. Lett. **57**, 2520 (1986).
- [55] A. Heidmann, R. J. Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, and C. Fabre, “*Observation of Quantum Noise Reduction on Twin Laser Beams*”, Phys. Rev. Lett. **59**, 2555 (1987).
- [56] K. Schneider, R. Bruckmeier, H. Hansen, S. Schiller, J. Mlynek, “*Bright squeezed-light generation by a continuous-wave semimonolithic parametric amplifier*”, Opt. Lett. **21**, 1396 (1996).
- [57] D. Rugar and P. Grüter, “*Mechanical Parametric Amplification and Thermomechanical Noise Squeezing*”, Phys. Rev. Lett. **67**, 699 (1991).
- [58] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, “*Course of Theoretical Physics : Mechanics*” (Pergamon, New York, 1960).
- [59] M.J. Collett, C.W. Gardiner, “*Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification*” Phys. Rev. A **30**, 1386 (1984).
- [60] C.W. Gardiner, C.M. Savage, “*A multimode quantum theory of a degenerate parametric amplifier in a cavity*” Opt. Commun. **50**, 173 (1984).
- [61] F. Bondu, J.Y. Vinet, “*Mirror thermal noise in interferometric gravitational wave detectors*”, Phys. Lett. A **198**, 74 (1995).
- [62] A. Gillespie and F. Raab, “*Thermally excited vibrations of the mirrors of laser interferometer gravitational-wave detectors*”, Phys. Rev. D **52**, 577 (1995).
- [63] Y. Levin, “*Internal thermal noise in the LIGO test masses : A direct approach*”, Phys. Rev. D **57**, 659 (1998).
- [64] F. Bondu, P. Hello, J.Y. Vinet, “*Thermal noise in mirrors of interferometric gravitational wave antennas*”, Phys. Lett. A **246**, 227 (1998).
- [65] Y.T. Liu and K.S. Thorne, “*Thermoelastic noise and homogeneous thermal noise in finite sized gravitational-wave test masses*”, Phys. Rev. D **62** 122002 (2000).
- [66] T. Briant, P.-F. Cohadon, A. Heidmann, and M. Pinard, “*Optomechanical characterization of acoustic modes in a mirror*”, Phys. Rev. A **68**, 033823 (2003).
- [67] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, “*Cours de physique théorique : Mécanique des fluides*”, 2<sup>e</sup> édition (Mir, 1990).
- [68] D.R. Lide, “*Handbook of Chemistry and Physics*”, 78<sup>ème</sup> édition (CRC Press, New York, 1997).
- [69] P. Horowitz et W. Hill, “*Traité de l’électronique*” (Elektor, 1996).
- [70] A.E.M. Love, “*A treatise on the Mathematical Theory of elasticity*” (Dover, New-York, 1944).

- [71] J.R. Hutchinson, “*Vibration of solid cylinders*”, J. App. Mech. **47**, 901 (1980).
- [72] F. Bondu, “*Etude du bruit thermique et stabilisation en fréquence du laser du détecteur interférométrique d’onde gravitationnelles VIRGO*”, Thèse de l’Université Paris-Sud (1996).
- [73] M. Dialinas, “*Fréquences de résonance de miroirs cylindriques par éléments finis avec SYSTUS*”, rapport interne VIRGO Orsay (1994).
- [74] A. Zarka, B. Capelle, Y. Zheng, J. Détaint, J. Schwartzel, C. Joly, D. Cochet-Muchy, “*Assessment of Material Perfection and Observation of Vibration Modes in Lithium Tantalate by X-ray Topography*”, J. Appl. Cryst. **25**, 744 (1992).
- [75] C.J. Wilson, “*Vibration modes of AT-cut convex quartz resonators*”, J. Phys. D : Appl. Phys. **7**, 2449 (1974).
- [76] J. Détaint, H. Carru, J. Schwartzel, B. Capelle, and A. Zarka, “*Linear models of the contoured resonators*”, Proceedings of the 42nd Annual Frequency Control Symposium 1988 (IEEE, New York, 1988), p. 19.
- [77] H. Kogelnik and T. Li, “*Laser Beam and Resonators*”, App. Opt. **5**, 1550 (1966).
- [78] A. Heidmann, P.F. Cohadon, and M. Pinard, “*Thermal noise of a plano-convex mirror*”, Phys. Lett. A **263**, 27 (1999).
- [79] V.B. Braginsky, M.L. Gorodetsky and S.P. Vyatchanin, “*Thermodynamical fluctuations and photo-thermal shot noise in gravitational wave antennae*”, Phys. Lett. A **264**, 1 (1999).
- [80] O. Arcizet, “*Etude des propriétés optomécaniques d’un miroir*”, Rapport de stage de DEA de Physique Quantique (2002).
- [81] M.J. Collett, D.F. Walls, “*Squeezing spectra for nonlinear optical systems*”, Phys. Rev. A **32**, 2887 (1985).
- [82] R.M. Shelby, M.D. Levenson, D.F. Walls, and A. Aspect, “*Generation of squeezed states of light with a fiber-optic ring interferometer*”, Phys. Rev. A **33**, 4008 (1986).
- [83] P. Grangier, J.F. Roch, S. Reynaud, “*Quantum correlations and non-demolition measurements using two-photon non-linearities in optical cavities*”, Opt. Commun. **72**, 387 (1989).
- [84] A. Dorsel, J.D. McCullen, P. Meystre, E. Vignes, H. Walther, “*Optical Bistability and Mirror Confinement Induced by radiation Pressure*”, Phys. Rev. Lett. **51**, 1550 (1983).
- [85] S. Mancini, P. Tombesi, “*Quantum noise reduction by radiation pressure*”, Phys. Rev. A **49**, 4055 (1994).
- [86] S. Bose, K. Jacobs, and P.L. Knight, “*Preparation of nonclassical states in cavities with a moving mirror*”, Phys. Rev. A **56**, 4175 (1997).
- [87] S. Bose, K. Jacobs, and P.L. Knight, “*Scheme to probe the decoherence of a macroscopic object*”, Phys. Rev. A **59**, 3204 (1999).
- [88] S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali, P. Tombesi, “*Entangling Macroscopic Oscillators Exploiting Radiation Pressure*”, Phys. Rev. Lett. **88**, 120401 (2002).

- [89] K. Jacobs, P. Tombesi, M.J. Collett, D.F. Walls, “*Quantum-nondemolition measurement of photon number using radiation pressure*”, Phys. Rev. A **49**, 1961 (1994).
- [90] P. Grangier, R.E. Slusher, B. Yurke, and A. LaPorta, “*Squeezed-Light-Enhanced Polarization Interferometer*”, Phys. Rev. Lett. **59**, 2153 (1987).
- [91] K. McKenzie, D.A. Shaddock, D.E. McClelland, B.C. Buchler and P.K. Lam, “*Experimental Demonstration of a Squeezing-Enhanced Power-Recycled Michelson Interferometer for Gravitational Wave Detection*”, Phys. Rev. Lett. **88**, 231102 (2002).
- [92] H.J. Kimble, Y. Levin, A.B. Matsko, K.S. Thorne, and S.P. Vyatchanin, “*Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum nondemolition interferometers by modifying their input and/or output optics*”, Phys. Rev. D **65**, 022002 (2002).
- [93] J.M. Courty, A. Heidmann, M. Pinard, “*Quantum locking of mirrors in interferometers*”, Phys. Rev. Lett. **90**, 083601 (2003).
- [94] J.M. Courty, A. Heidmann, M. Pinard, “*Back-action cancellation in interferometers by quantum locking*”, Europhys. Lett. **63**, 226 (2003).
- [95] K. Danzmann *et al*, “*Geo 600, a laser interferometric gravitational wave antenna*”, Gravitational wave experiments, eds. E. Coccia, G. Pizella et F. Ronga (World Scientific, 1995).
- [96] A. Buonanno, Y. Chen, “*Quantum noise in second generation, signal-recycled laser interferometric gravitational-wave detectors*”, Phys. Rev. D **64**, 042006 (2001).
- [97] M. Cerdonio *et al*, “*The ultracryogenic gravitational-wave detector AURIGA*”, Class. Quantum Grav. **14**, 1491 (1997).
- [98] P. Astone *et al*, “*The next science run of the g.w. detector Nautilus*”, Class. Quantum Grav. **19**, 1911 (2002).
- [99] P. Astone *et al*, “*Long-term operation of the Rome Explorer cryogenic gravitational wave detector*”, Phys. Rev. D **47**, 362 (1997).
- [100] J. Weber, “*Detection and generation of gravitational waves*”, Physical Review **177**, 306 (1960).
- [101] J.P. Zendri *et al.*, “*Status report and near future prospects for the gravitational wave detector AURIGA*”, Class. Quantum Grav. **19**, 1925 (2002).
- [102] K. Tsubono, “*300-m laser interferometric gravitational detector (TAMA 300) in Japan*”, Gravitational Wave Experiments, eds. E. Coccia, G. Pizella et F. Ronga (World Scientific, 1995).
- [103] M. Bonaldi *et al*, “*Selective readout and back-action reduction for wideband acoustic gravitational wave detectors*”, gr-qc/0302012.
- [104] T. Briant, M. Cerdonio, L. Conti, A. Heidmann, A. Lobo, and M. Pinard, “*Thermal and back-action noises in dual-sphere gravitational-wave detectors*”, Phys. Rev. D **67**, 102005 (2003).
- [105] J.A. Lobo, “*What can we learn about gravitational wave physics with an elastic spherical antenna ?*”, Phys. Rev. D **52**, 591 (1995).



- [106] E. Coccia, V. Fafone, G. Frossati, J.A. Lobo, and J.A. Ortega, “*Hollow sphere as a detector of gravitational radiation*”, Phys. Rev. D **57**, 2051 (1998).
- [107] F. Marin, L. Conti, and M. De Rosa, “*A folded Fabry-Perot cavity for optical sensing in gravitational wave detectors*”, Phys. Lett. A **309**, 15 (2003).



## Résumé

Nous présentons une expérience de mesure optique ultrasensible de petits déplacements d'un miroir placé dans une cavité Fabry-Perot de grande finesse, avec une sensibilité au niveau de l'attomètre.

Nous avons mesuré le bruit thermique du miroir et suivi son évolution temporelle dans l'espace des phases. Nous avons refroidi le miroir en exerçant une force de friction froide et obtenu une compression du bruit thermique dans l'espace des phases.

Une étude spatiale des modes acoustiques internes a été réalisée pour différentes géométries du miroir, en balayant une force de pression de radiation sur la surface du miroir. Les résultats valident les modèles théoriques utilisés pour les interféromètres gravitationnels et permettent de définir une géométrie favorable à la démonstration des effets quantiques du couplage optomécanique.

Nous présentons également une étude théorique des bruits thermiques et quantiques dans un nouveau type d'antenne gravitationnelle, constituée de deux sphères imbriquées.

**Mots-clés :** Couplage optomécanique, Cavité de grande finesse, Mouvement Brownien dans l'espace des phases, Friction froide, Compression du bruit thermique, Modes acoustiques d'un miroir, Limite Quantique Standard, Détecteur gravitationnel à doubles sphères.

## Abstract

We present a very sensitive optical measurement of small displacements of a mirror in a high-finesse cavity, with a sensitivity at the attometer level.

We have observed the mirror thermal noise and its temporal evolution in phase space. We have cooled the mirror by using a cold damping force and obtained a thermal noise compression in phase space.

We have determined the spatial structure of internal acoustic modes for different mirror geometries, by scanning a radiation pressure force over the mirror surface. Results are in agreement with theoretical models used for gravitational-wave interferometers and lead to an optimized geometry for the demonstration of quantum effects of optomechanical coupling.

We finally present a theoretical study of thermal and quantum noises in a new scheme of gravitational-wave antenna based on dual spheres.

**Key words :** Optomechanical coupling, High-finesse cavity, Brownian motion in phase-space, Cold damping, Thermal noise squeezing, Acoustic modes in a mirror, Standard Quantum Limit, Dual Spheres gravitational detector