# Multiflots, métriques et graphes h-parfaits : les cycles impairs dans l'optimisation combinatoire

Karina Marcus

▶ **To cite this version:**

Karina Marcus. Multiflots, métriques et graphes h-parfaits : les cycles impairs dans l'optimisation combinatoire. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1996. Français. NNT : . tel-00005002

**HAL Id: tel-00005002**
**https://theses.hal.science/tel-00005002**

Submitted on 23 Feb 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée par

Karina MARCUS

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'université Joseph Fourier - Grenoble 1

(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Formation Doctorale : Recherche Opérationnelle

# Multiflots, métriques et graphes $h$-parfaits : les cycles impairs dans l'optimisation combinatoire

soutenue le 12 janvier 1996 devant le jury suivant :

| | | |
|---|---|---|
| MM | Claude Benzaken | Président |
| | Michele Conforti | Rapporteur |
| | Gerd Finke | Examinateur |
| | Michel Las Vergnas | Rapporteur |
| Mme | Monique Laurent | Examinateur |
| | Frederic Maffray | Examinateur |
| | András Sebő | Directeur |

Thèse préparée au sein du laboratoire ARTEMIS-IMAG

A Afonso et Victor,
mes hommes.

# Remerciements

Je voudrais commencer par remercier M. Claude Benzaken d'avoir accepté de présider ce jury. Ses commentaires, remarques et questions ont donné une autre dimension à mon travail. Ensuite, je voudrais remercier les rapporteurs, M. Michele Conforti et M. Michel Las Vergnas, qui ont consacré de leur temps à lire mon document, et, d'une manière spéciale, Mme Monique Laurent, dont j'ai beaucoup apprécié la sympathie, les commentaires et l'intérêt montré pour mon travail.

Je suis reconnaissante envers mon directeur de thèse, M. András Sebő, qui m'a encadrée pendant ces trois ans et demi de travail, et envers mon directeur administratif, M. Gerd Finke, qui m'a aidée en tout ce qui concerne les formulaires et dossiers d'un doctorat.

Je tiens à remercier Philippe Augerat et Laurence Lamiroy, des amis d'ARTEMIS-IMAG, qui ont eu la patience de lire et corriger ce document, dans les très courts délais que je leur imposais.

Un remerciement spécial à Agnès Darmet, qui m'a aidée dans tous les domaines de la vie courante, dès mon arrivée en France. Et à mes amis d'ARTEMIS-IMAG, toute ma reconnaissance par le bonheur partagé pendant mon séjour parmi eux.

Enfin, je remercie mes familles, celle au Brésil, qui m'a toujours soutenue, et celle en France : Afonso, qui m'a apporté de la force, du réconfort, de l'amour quand il m'en fallait, et Victor, qui m'en a toujours demandé dès sa naissance !

# Table des matières

**Introduction** **1**

**1 Notations et définitions** **5**
1.1 Notations fondamentales . . . . . 5
1.2 Théorie des polyèdres . . . . . 6
1.3 Programmation linéaire et dualité . . . . . 8
1.4 Théorie des graphes . . . . . 10
1.5 Théorie des matroïdes . . . . . 13
1.6 Métriques . . . . . 15

**2 Multiflots et métriques** **17**
2.1 Multiflots dans les graphes et matroïdes . . . . . 17
2.1.1 Définition du problème et résultats fondamentaux 18
2.1.2 La condition de coupe . . . . . 23
2.1.3 Les conditions $CC3$, $K_5$ et $F_7$ . . . . . 24
2.1.4 Le théorème . . . . . 28
2.1.5 Le cas du matroïde $R_{10}$ . . . . . 36
2.2 Packing de métriques . . . . . 42
2.2.1 Le problème . . . . . 43
2.2.2 Packing de coupes . . . . . 44
2.2.3 Packing de métriques $CC3$ . . . . . 46
2.2.4 Packing de métriques $CC$, $K_5$ et $F_7$ . . . . . 52
2.2.5 Les matroïdes packings . . . . . 56

**3 Graphes $t$-parfaits et $h$-parfaits** **71**
3.1 Les origines des graphes $t$-parfaits et $h$-parfaits . . . . . 71
3.2 Résultats généraux . . . . . 73
3.2.1 Structure des graphes $h$-parfaits . . . . . 73
3.2.2 Un algorithme polynômial pour le problème de l'ensemble de poids maximum . . . . . 77
3.3 Étude de quelques classes . . . . . 81
3.3.1 Résultats connus . . . . . 81
3.3.2 Caractérisation des $K_4$ impairs . . . . . 86
3.3.3 Graphes adjoints . . . . . 91
3.3.4 Graphes bipartis plus un triangle . . . . . 93
3.4 Coloration des $t$-parfaits et $h$-parfaits . . . . . 95
3.4.1 Conjectures . . . . . 96
3.4.2 Vers la conjecture . . . . . 98
3.4.3 Étudiant la taille des graphes $t$-parfaits sans triangle 3-coloriables . . . . . 101
3.4.4 Classes qui satisfont la conjecture . . . . . 106

**4 Une hiérarchie des graphes étudiées** **109**
4.1 Les graphes faiblement bipartis . . . . . 109
4.2 La propriété Edmonds-Johnson . . . . . 110
4.3 La propriété flot-max coupe-min . . . . . 112
4.4 Quelques relations entre les problèmes . . . . . 114
4.4.1 Les graphes faiblement bipartis et les graphes $t$-parfaits . . . . . 115
4.4.2 Les graphes faiblement bipartis et le problème du multiflot . . . . . 116

**Conclusion** **121**

**Annexe** **123**

**A Présentation de métriques primitives** **123**

**B Vérification du cas $R_{10}$** **127**

**C Deux $K_4$ impairs non $t$-parfaits** **133**

**Bibliographie** **137**

# Table des figures

1.1 $H_6$, $S_8$ et $K_{3,3}$ . . . . . 14
1.2 Exemple d'une métrique et d'une métrique primitive : un cocycle . . . . . 15

2.1 Exemple d'un problème de multiflot . . . . . 19
2.2 Exemple de non-suffisance de la condition de coupe . . . 23
2.3 Les poids des métriques $K_5$ et $F_7$ . . . . . 26
2.4 Représentation matricielle de $S_8$ . . . . . 29
2.5 $M(K_5) \bigoplus_2 M(K_5)$ . . . . . 30
2.6 $K_{3,3}$ . . . . . 36
2.7 Un couplage dans $P_{10}$ . . . . . 46
2.8 Sommes de deux métriques $K_5$ et deux métriques $F_7$ . . 50
2.9 Décomposition demi-entière d'une métrique bipartie . . . 52
2.10 Numérotation des arêtes de $K_5$ . . . . . 57
2.11 Décomposition de la somme de deux métriques $R_{10}$ - cas I 58
2.12 Décomposition de la somme de deux métriques $R_{10}$ - cas II 58
2.13 Décomposition de la somme de deux métriques $R_{10}$ - cas III . . . . . 59
2.14 Décomposition de la somme d'une métrique $R_{10}$ et de l'étoile d'un sommet . . . . . 59
2.15 Décomposition de la somme d'une métrique $R_{10}$ et d'un cocycle à 4 éléments qui n'est l'étoile d'un sommet . . . . 60
2.16 Décomposition de la somme d'une métrique $R_{10}$ et d'un cocycle à 6 éléments - cas II . . . . . 60

2.17 Décomposition de la somme d'une métrique $R_{10}$ et d'un cocycle à 6 éléments - cas III . . . . . 61
2.18 Décomposition de la somme de deux cocycles à 6 éléments dont l'intersection est de 3 éléments . . . . . 61
2.19 Métrique obtenue à partir de 3 cocycles serrés . . . . . 65
2.20 Métriques obtenues à partir de la somme de 5 cocycles . 66

3.1 Un graphe $h$-parfait sans triangle (a) contenant un sous-graphe partiel qui n'est pas $h$-parfait (b). . . . . 77
3.2 $K_4$ impair . . . . . 83
3.3 $K_4$ impair $t$-parfait . . . . . 84
3.4 Premier cas de $K_4$ impair non $t$-parfait . . . . . 87
3.5 Deuxième et troisième cas de $K_4$ impair non $t$-parfait . . 88
3.6 $K_4$ impair $t$-parfait . . . . . 89
3.7 Configuration interdite dans les graphes adjoints $h$-parfaits 93
3.8 $K_4$ impairs possibles . . . . . 94
3.9 Arête traversante dans un $K_4$ impair . . . . . 94
3.10 Coloration fractionnaire du $C_5$ : chaque «couleur» participe avec un coefficient de 1/2. . . . . 96
3.11 Le complément du graphe adjoint de $H$ est $t$-parfait, mais il n'est pas 3-coloriable . . . . . 98
3.12 Un $C_5$ contenu dans $C \cup S$ . . . . . 103
3.13 Un trou à 7 sommets disjoint de $S_i$ . . . . . 105
3.14 Sous-graphe interdit pour un graphe adjoint . . . . . 107

4.1 Exemple d'un graphe faiblement biparti qui n'est pas $t$-parfait . . . . . 116
4.2 $K_5^+$ : un graphe faiblement biparti et $t$-parfait qui n'est pas cycling par rapport à $\Delta_{(CC)}$ . . . . . 119
4.3 $K_5^-$ : un graphe $t$-parfait qui n'est pas faiblement biparti 119
4.4 Relations entre les classes de graphes étudiées . . . . . 120

A.1 $H_6$ . . . . . 124
A.2 $F_7 \oplus_2 M(K_5)$ et $F_7 \oplus_2 F_7$ . . . . . 126

C.1 Deuxième cas de $K_4$ impair non $t$-parfait . . . . . 133
C.2 Troisième cas de $K_4$ impair non $t$-parfait . . . . . 135

# Introduction

Ce travail se situe dans le domaine de l'optimisation combinatoire. Selon Sakarovitch [53], «la classe de problèmes qui définit ce champ semble à première vue d'une trivialité déconcertante. Un coût (ou un poids) ayant été affecté à chaque élément d'un ensemble fini, il s'agit de choisir un meilleur élément (de coût minimum ou de poids maximum)». Cependant, le nombre d'éléments peut être très grand, ce qui rend leur énumération très longue et coûteuse à traiter. Par conséquent, la résolution de certaines classes de problèmes se trouve, à ce jour, au delà de la capacité des ordinateurs existants.

On appelle classe des problèmes NP-complets l'ensemble des problèmes dont la complexité interdit – jusqu'à maintenant – toute solution algorithmique. Les problèmes les plus difficiles comme le voyageur du commerce, le multiflot, la coloration de sommets d'un graphe, se situent dans cette classe. En outre, quand l'ensemble de solutions est défini à partir des propriétés de ses éléments, vérifier que cet ensemble n'est pas vide – le problème de faisabilité – peut s'avérer aussi difficile que trouver un meilleur élément.

Dans ce document nous traitons d'abord le problème de multiflot, où plusieurs types de produits doivent être transportés des sources de ces produits à des destinations précises, à travers un réseau, par exemple, routier. Chaque route a une capacité de transport, et il y a des demandes associées à chaque paire de source-destination. Le réseau qui connecte les sources aux destinations peut être modélisé comme un graphe, ou, d'une façon plus générale, comme un matroïde. Le problème consiste donc à trouver une famille de «chemins» entre les sources et les destinations, ou, si chaque paire de source-destination est relié par une arête, trouver une famille de cycles contenant ces arêtes. Quand

il s'agit seulement d'un type de produit et d'une seule source, le problème est facile à résoudre [15], mais déjà avec deux types de produits ce problème est NP-complet [11].

L'aspect qui nous concerne dans la première partie de ce travail est la faisabilité du problème de multiflot ; c'est-à-dire, étant donnée la spécification du problème, avec le réseau, les capacités et les demandes, on veut démontrer l'existence ou la non-existence d'une solution.

Une façon d'aborder ce problème est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un multiflot, comme celle connue par *condition de coupe* (CC). Une *coupe* est un ensemble de routes qui déconnecte le réseau si on l'élimine. Alors, la quantité de produit demandé qui doit traverser cette coupe doit être inférieure à sa capacité de transport des produits. Nous présentons la condition $(CC, K_5, F_7)$, qui généralise la condition de coupe et «raffine» une autre condition existante (la $(CC3)$ [58]).

La structure du problème de multiflot nous permet aussi de regarder un problème étroitement associé, celui du «packing» de métriques. On veut trouver des «barrières» qui séparent les sources des destinations, ce qui revient à chercher une famille («packing») soit de coupes, soit de structures appelées métriques qui généralisent les coupes. Quand il s'agit de trouver une famille de métriques à coefficients fractionnaires, les théorèmes sur la faisabilité de multiflot fournissent directement des résultats sur le packing de métriques, mais dans le cas entier, et cette dérivation ne peut se faire automatiquement.

Nous traitons le cas des packings entier et demi-entier, quand la famille de métriques comprend les métriques $CC3$ et les métriques $K_5$ et $F_7$. Nous caractérisons la classe de graphes et, plus généralement de matroïdes, où l'on peut trouver des packings entier et demi-entier, sous quelques hypothèses additionnelles.

Les cycles, qui jouent un rôle important dans le problème de multiflot, sont aussi fondamentaux dans le deuxième thème de ce mémoire. Le problème est de trouver un ensemble de sommets dans un graphe, deux à deux non-adjacents (*un stable*) de cardinalité maximum. Il est bien connu grâce à ses applications et à sa difficulté. Quand la classe de graphes est constituée des graphes $h$-parfaits et $t$-parfaits, ce problème peut être résolu. Les définitions de ces classes dépendent fortement des

cycles impairs, et incluent la définition de la classe des graphes parfaits [3, 4].

Nous nous intéressons aux propriétés générales de ces graphes, puis au problème de coloration. Il s'agit alors d'affecter une couleur à chaque sommet, de façon à ce que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. On cherche le nombre minimum de couleurs nécessaires, appelé le *nombre chromatique* du graphe. Shepherd a conjecturé une valeur constante pour le nombre chromatique des graphes $t$-parfaits [67]. Les résultats que nous présentons donnent des bornes pour ce nombre, et des classes qui satisfont la conjecture.

Ce travail est organisé de la façon suivante. Le premier chapitre contient les principales notations et définitions utilisées, comprenant les outils les plus utilisés, comme la programmation linéaire, la théorie des graphes et des matroïdes, et les métriques.

Dans le deuxième chapitre, nous traitons le problème de multiflot et le packing de métriques. Une première partie est consacrée au problème de multiflot et de la faisabilité d'un problème de multiflot ; nous y démontrons le théorème principal, où nous caractérisons la classe des matroïdes pour lesquels la nouvelle condition $(CC, K_5, F_7)$ est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un multiflot. Cette caractérisation est donnée à la fois par une composition récursive de matroïdes et par un ensemble de sept matroïdes à exclure. Nous montrons aussi que pour un matroïde spécial, le $R_{10}$, une condition analogue existe. Dans la deuxième partie, nous étudions d'abord le packing des métriques et son rapport avec le problème de faisabilité d'un multiflot ; nous traitons ensuite le packing entier et demi-entier des métriques $CC3$ et $CC, K_5, F_7$, et caractérisons les classes de matroïdes pour lesquels il existe un packing d'un de ces types.

Les graphes $h$ et $t$-parfaits sont traités dans le troisième chapitre. Nous y présentons les définitions et quelques résultats sur la structure de ces graphes et des classes déjà connues. Ensuite nous montrons quelques nouveaux exemples de tels graphes. Enfin nous étudions la coloration des graphes $t$- et $h$ parfaits – en présentant des bornes sur le nombre chromatique de ces graphes –, et quelques familles des graphes $h$ et $t$-parfaits pour lesquels le nombre chromatique est connu et satisfait une

conjecture de Shepherd [67].

Le quatrième chapitre est consacré à la hiérarchie des graphes étudiés, qui est obtenue grâce à des outils comme les graphes faiblement bipartis, les anti-chînes (clutters) binaires et les matrices à composantes 0,1.

Pour conclure ce mémoire de thèse, nous reprendrons les grandes lignes du travail effectué et présenté ici. Plusieurs directions de recherche pourront donner suite à ce travail. Nous en préciserons quelques unes qui nous semblent intéressant à suivre, aussi bien sur le sujet de la faisabilité des problèmes de multiflot, que sur la coloration des graphes $h$- et $t$-parfaits.

# Chapitre 1

# Notations et définitions

Dans ce chapitre, on présente les notions de base dont on se servira, et les notations qui seront utilisées dans la suite de ce travail.

## 1.1 Notations fondamentales

On note $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ) l'ensemble des nombres réels (resp. entiers relatifs, rationnels) et $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}_+$) l'ensemble des nombres réels (resp. entiers relatifs, rationnels) non-négatifs. Étant donné un nombre entier naturel $n$, $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$) est l'ensemble des vecteurs à $n$ composantes, chacune dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$). Si $E$ est un ensemble fini et $R$ un ensemble quelconque, alors $R^E$ est l'ensemble des fonctions de $E$ sur $R$. Il est convenable de considérer les éléments de $R^E$ comme des vecteurs à $|E|$ composantes, où chacune a comme indice un élément de $E$. Si $x \in \mathbb{R}^E$ et $A \subseteq E$, alors on note $x(A)$ la somme $\sum_{e \in A} x(e)$. La notation $A \triangle B$ représente l'opération différence symétrique de deux ensembles $A, B$ : $A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$.

La somme de vecteurs et la multiplication de vecteurs par un nombre sont définies de manière usuelle. Un vecteur peut être un vecteur-colonne ou vecteur-ligne, selon le contexte. Le produit scalaire de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ est noté $xy$ et défini comme

$$xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Étant donné un ensemble fini $R$, on note par $R^{m\times n}$ l'ensemble des matrices $m \times n$ dont les composantes sont dans $R$; dans ce cas, l'ensemble des indices des lignes est $\{1,\ldots,m\}$, et des colonnes est $\{1,\ldots,n\}$. Le symbole 0 (resp. 1) représente la matrice, ou le vecteur, dont les composantes sont nulles (resp. égales à 1).

Un ensemble $S$ *intersecte* ou *rencontre* un ensemble $T$ si $S \cap T \neq \emptyset$. Si $R$ et $B$ sont des ensembles tels que $B \subseteq R$ et $e \in B$, $e' \in R \setminus B$, on écrit $B - e + e'$ à la place de $B \setminus \{e\} \cup \{e'\}$.

Le *vecteur caractéristique* d'un ensemble $B \subseteq R$, $R$ fini, est le vecteur $\chi^B \in \{0,1\}^R$ défini comme

$$\chi^B(e) = \begin{cases} 1, & \text{si } e \in B, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étant donné un ensemble $E$, si $x \in E$ peut être décomposé comme une somme $x = \alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_k x_k$ où $x_1,\ldots,x_k \in R \subseteq E$, $\alpha_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$, alors $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$ est un *packing de $x$ par rapport à $R$* ou un *$x$-packing de $R$*.

Une famille $\mathcal{F}$ est *fermée sous une opération* $p : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ s'il est toujours vrai que

$$G \in \mathcal{F} \Rightarrow p(G) \in \mathcal{F}.$$

## 1.2 Théorie des polyèdres

Nous suggérons [55] comme référence pour ce sujet et le suivant.

On dira qu'un vecteur $x$ est une *combinaison convexe* des vecteurs $x_1,\ldots,x_m \in \mathbb{R}^n$ s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^m_+$ tel que $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ et

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i.$$

L'*enveloppe convexe* $\mathrm{conv}(S)$ d'un ensemble $S$ est l'ensemble de tous les vecteurs qui sont une combinaison convexe d'un nombre fini de vecteurs dans $S$. Un *polytope* est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$, alors $Ax \leq b$ est un *système d'inéquations*. L'ensemble des solutions $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ d'un système d'inéquations est appelé un *polyèdre*. Un polyèdre $P$ est de *dimension* $k$ si le

nombre maximum de points affinement indépendents dans $P$ est $k+1$. (Un ensemble de points $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ est *affinement indépendent* si la seule solution à $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ est $\lambda_i = 0$, pour $1 \leq i \leq k$.)

Un des résultats le plus connu concernant les systèmes d'inéquations est le lemme de Farkas [12, 13, 48]. Nous présentons ici une des versions de ce lemme.

**Théorème 1.1 (Lemme de Farkas)** *Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Il existe $x \in \mathbb{R}^n_+$ tel que $Ax \leq b$ si et seulement si $yb \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^m_+$ tel que $yA \geq 0$.* □

Un autre résultat que l'on supposera connu est le suivant :

**Proposition 1.2** *[48] Un polyèdre borné est un polytope.* □

Une inéquation $ax \leq \alpha$ est dite *valide* pour un polyèdre $P$ si $P \subseteq \{x : ax \leq \alpha\}$. Un ensemble $F \subseteq P$ est une *face* de $P$ s'il y a une inéquation $ax \leq \alpha$ valide pour $P$ telle que $F = \{x \in P : ax = \alpha\}$. Si $v \in P$ est tel que $\{v\}$ est une face de $P$, alors $v$ est dit un *sommet* de $P$. Une *facette* de $P$ est une face $F$ qui satisfait $\emptyset \neq F \neq P$, et qui est maximale par rapport à cette propriété. Si un vecteur $v$ satisfait une inéquation qui définit $P$ avec égalité, on dira que cette inéquation est *serrée* pour $v$.

Un polyèdre $P$ est *entier* si ses sommets sont des vecteurs entiers. Un vecteur $r$ est un *rayon* de $P$ si, pour tout $x \in P$, on a $x + \lambda r \in P$, pour tout $\lambda \geq 0$. Un rayon $r$ est dit *extrême* s'il n'existe pas deux rayons $r_1, r_2$ tels que $r_1 \neq \mu r_2$, $\mu \geq 0$ et $r = 1/2(r_1 + r_2)$.

Une inéquation $a_j x \leq \alpha_j$ est *nécessaire* pour la description d'un polyèdre $P = \{a_i x \leq \alpha_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ s'il existe $z \notin P$ tel que $a_i z \leq \alpha_i$, $1 \leq i \leq m$, $i \neq j$ et $a_j z > \alpha_j$.

Étant donné un ensemble fini de points $S \in \mathbb{R}^n$ et $P$ un polyèdre, tel que $\mathrm{conv}(S) \subset P$, l'inéquation $ax \leq \alpha$ est un *plan de coupe* pour $\mathrm{conv}(S)$ si $az \leq \alpha$, pour tout $z \in \mathrm{conv}(S)$, et s'il existe $y \in P \setminus \mathrm{conv}(S)$ tel que $ay > \alpha$.

Le polyèdre *polaire* d'un polyèdre $P$ est l'ensemble

$$\mathrm{pol}(P) = \{z \in \mathbb{R}^n : zx \leq 0,\ \forall x \in P\}$$

et le polyèdre *anti-bloquant* de $P$ est l'ensemble

$$ab(P) = \{z \in \mathbb{R}^n_+ : zx \leq 1,\ \forall x \in P\}.$$

**Théorème 1.3** *[19] Si $P = \{x : Ax \leq 1,\ x \geq 0\}$, où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}_+$, et $A$ ne contient pas de colonne entièrement constituée de 0, alors*
*(i) $ab(ab(P)) = P$ ;*
*(ii) si les sommets de $P$ sont $b_1, \ldots, b_k$ et $B$ est la matrice dont les lignes sont $b_1, \ldots, b_k$, alors $ab(P) = \{x : Bx \leq 1,\ x \geq 0\}$ et les sommets de $ab(P)$ sont les vecteurs $a_1, \ldots, a_m$, qui forment les lignes de $A$ ;*
*(iii) pour tout $w \in \mathbb{R}^n_+$,*

$$\min\{y1 : yB \geq w,\ y \geq 0\} = \max\{wa_1, \ldots, wa_m\}.$$

□

## 1.3 Programmation linéaire et dualité

Dans ce travail, le problème suivant aura un rôle fondamental :

*Programme linéaire* : Étant donnés une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ et un vecteur $c \in \mathbb{R}^n$, trouver un vecteur $x^* \in \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ qui maximise la fonction linéaire $cx$.

Un vecteur $\overline{x}$ tel que $A\overline{x} \leq b$ est dit une solution *réalisable* du programme linéaire. Une solution réalisable $\overline{x}$ est *optimale* si $c\overline{x} \geq cx$ pour toute solution réalisable $x$. Dans ce cas, $c\overline{x}$ est la *valeur optimale* du programme linéaire. La fonction $cx$ est appelée la *fonction objective* du programme linéaire. Si, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe une solution $\overline{x}$ réalisable telle que $c\overline{x} > M$, alors on dira que la valeur optimale du programme n'est pas *finie*. On dira que l'on peut *optimiser* sur un ensemble convexe s'il est possible de trouver une solution optimale d'une fonction objective $cx$ dans cet ensemble.

On peut associer à tout programme linéaire $\max\{cx : Ax \leq b\}$ un autre programme, son *dual*, qui est

$$\min\{yb : yA = c,\ y \geq 0\}.$$

Les deux résultats suivants [49] seront beaucoup utilisés dans ce travail :

**Théorème 1.4 (de dualité)** *Soit (P) un programme linéaire, et (D) son dual. Si (P) et (D) possèdent des solutions réalisables, alors les deux problèmes ont des solutions optimales et leurs valeurs optimales sont égales.* □

*Remarque* : Dans la suite, dès que l'on parle d'égalité des valeurs optimales de deux programmes linéaires, on suppose que les deux programmes ont des solutions réalisables.

**Théorème 1.5 (des écarts complémentaires)** *Soient (P) le programme* $\max\{Ax \leq b\}$ *et (D) son dual* $\min\{yA = c,\ y \geq 0\}$*, tels que les deux programmes ont des valeurs optimales finies. Soient* $\overline{x}$ *et* $\overline{y}$ *des solutions réalisables pour chaque programme. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
*(i)* $\overline{x}$ *et* $\overline{y}$ *sont des solutions optimales pour les programmes correspondants ;*
*(ii)* $c\overline{x} = \overline{y}b$ *;*
*(iii) si une composante de* $\overline{y}$ *est positive, alors l'inéquation correspondante dans* $Ax \leq b$ *est satisfaite par* $\overline{x}$ *avec égalité, c'est-à-dire,* $\overline{y}(b - A\overline{x}) = 0$. □

Un système d'inéquations linéaires $Ax \leq b$ est *totalement dual-entier* (TDI) si le minimum dans le problème

$$\min\{yb : yA = c,\ y \geq 0\}$$

a une solution optimale entière $y$ pour tout vecteur $c$ entier pour lequel ce minimum est fini.

Les prochains résultats utilisent l'algorithme des ellipsoïdes [35] dans leur démonstration. On peut les trouver, par exemple, dans [29].

**Théorème 1.6** *Étant donné un point x qui n'appartient pas à l'enveloppe convexe d'un ensemble de points, si on peut trouver en temps polynômial un hyperplan qui sépare x de cette enveloppe convexe, alors on peut optimiser sur cette enveloppe convexe en temps polynômial (et réciproquement).* □

Étant donnés un ensemble $K \subseteq \mathbb{R}^n$ et un nombre positif réel $\epsilon$, on notera par $S(K, \epsilon)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \epsilon$, pour un $y \in K\}$ et par $S(K, -\epsilon)$ l 'ensemble $\{x \in K : S(x, \epsilon) \subseteq K\}$.

Le *problème faible d'optimisation* pour une enveloppe convexe $K$ est le suivant : étant donnés un vecteur $c \in \mathbb{Q}^n$ et un nombre $\epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0$, on veut trouver un vecteur $y \in \mathbb{Q}^n$ tel que $y \in S(K, \epsilon)$ et $cx \leq cy + \epsilon$ pour tout $x \in S(K, -\epsilon)$ (c'est-à-dire, $y$ est presque dans $K$ et presque maximise $cx$ sur les points bien dans $K$), ou bien prouver que $S(K, -\epsilon)$ est vide.

**Théorème 1.7** *Si on peut résoudre en temps polynômial le problème faible d'optimisation sur une enveloppe convexe, alors on peut optimiser sur cette enveloppe en temps polynômial* □

## 1.4 Théorie des graphes

On suit essentiellement Berge [5] et Sakarovitch [53], et on essaie d'utiliser les termes les plus standards possibles.

ARÊTES, VOISINAGE, SOUS-GRAPHES

Un graphe $G = (VG, EG)$ est le couple constitué d'un ensemble $VG$ de *sommets* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ et d'une famille d'*arêtes* $EG = \{e_1, \ldots, e_m\}$ où $e_i = \{u_i, v_i\} \subseteq VG$ ; on notera aussi $e = u_i v_i$, mais on n'y verra pas d'orientation. On dira que $u_i$ et $v_i$ sont les *extrémités* de $e_i$ et que $u_i$ et $v_i$ sont *voisins* ou *adjacents*. On notera par $N(v)$ le *voisinage* de $v$, c'est-à-dire, l'ensemble des sommets voisins de $v$. Deux arêtes sont *adjacentes* si elles ont au moins une extrémité commune, sinon elles sont *disjointes*. Un graphe est dit *simple* s'il ne possède pas deux arêtes ayant les mêmes extrémités. Le *degré* $d_G(v)$ d'un sommet $v \in VG$ est le nombre d'arêtes de $AG$ ayant une extrémité en $v$.

Deux graphes $G_1, G_2$ sont *homéomorphes* s'il existe une fonction $\phi : VG_1 \to VG_2$ telle que $\phi(u)\phi(v) \in EG_2$ pour tout $uv \in EG_1$.

Le *sous-graphe induit* par $X \subseteq VG$ est le graphe $G[X] = (X, EX)$, où EX est l'ensemble des arêtes ayant leurs deux extrémités dans $X$. Un *sous-graphe partiel* $H$ de $G$ est $H = (VH, EH)$ où $VH \subseteq VG$ et les

arêtes de $H$ sont des arêtes de $EG$ qui ont leurs deux extrémités dans $VH$.

CLIQUE, GRAPHE BIPARTI, COMPLÉMENTAIRE

Un graphe est dit *complet* si tout sommet $v$ est adjacent à $VG - v$ ; si $|VG| = n$, on le notera $K_n$ et on l'appellera *$n$-clique*. La 3-clique sera aussi appelée un *triangle*. On notera $\omega(G)$ la taille maximum d'un sous-graphe complet dans $G$.

Un graphe est *biparti* si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux classes $V_1$ et $V_2$ de sorte que deux sommets de la même classe ne soient jamais adjacents. Il se note parfois $G = (V_1, V_2, EG)$.

Le graphe *complémentaire* de $G$ est le graphe simple $\overline{G} = (VG, E\overline{G})$, où $E\overline{G}$ est l'ensemble de toutes les paires $\{v, w\} \notin EG$. Soit $S \subseteq VG$, alors $\delta(S)$ dénotera l'ensemble des arêtes de $G$ avec exactement une extrémité dans $S$. Si $S = \{v\}$, alors on écrit $\delta(v)$ à la place de $\delta(\{v\})$, et on l'appelle *étoile* de $v$. Une *coupe* $W$ est un ensemble d'arêtes pour lequel il y a un $S \subset VG$ tel que $W = \delta(S)$.

CHAÎNE, CYCLE, TROU, FLOT

Dans un graphe $G$, une séquence de la forme

$$[v_0, \alpha_0, v_1, \ldots, v_{t-1}, \alpha_t, v_t] \tag{1.1}$$

où $v_0, \ldots, v_t$ sont des sommets et $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ sont des arêtes telles que $\alpha_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, $1 \leq i \leq t$, est dite une *chaîne* ou une *$v_0$-$v_t$ chaîne*. Une chaîne est *simple* si la séquence d'arêtes qui la constitue ne comporte pas plusieurs fois le même élément. Une chaîne est *élémentaire* si les sommets de $G$ sont adjacents à deux arêtes de la chaîne au plus ; dans ce cas, sa *longueur* est $t$. Si $v_0 = v_t$, (1.1) est un *cycle*, et si les sommets $v_0, \ldots, v_{t-1}$ sont distincts, on l'appellera un *cycle élémentaire*. Une arête qui relie deux sommets dans un cycle, mais qui n'y appartient pas est dite une *corde*. La *distance* entre deux sommets $u$ et $v$ est la longueur d'une plus courte chaîne entre $u$ et $v$.

Un *trou* est un cycle élémentaire sans cordes, et un *anti-trou* est le graphe complémentaire d'un trou. Si un trou est constitué de $n$ sommets, on le notera par $C_n$. Une *roue* est le graphe constitué d'un trou et d'un sommet, qui n'appartient pas au trou, et qui est adjacent a tout sommet du trou.

Un *flot* entre deux sommets $u$ et $v$, est une fonction $f : EG \to \mathbb{R}_+$ définie à partir d'une famille $\mathcal{F}$ de $u$-$v$ chaînes élémentaires non nécessairement distinctes, telle que $f(e)$ est égal au nombre des chaînes auxquelles $e$ appartient. La valeur du flot $f$ est le nombre de chaînes dans la famille $\mathcal{F}$.

ENSEMBLE STABLE, TRANSVERSAL, COUPLAGE, COLORATION

Un ensemble $S$ de sommets de $G = (VG, EG)$ est un *stable* si les sommets de $S$ sont deux à deux non-adjacents dans $G$. Le *nombre de stabilité* de $G$, $\alpha(G)$, est la taille maximum d'un stable dans $G$. On dira qu'un stable $S$ *sature* un trou impair $C$ si $|S \cap C| = \frac{|C|-1}{2}$.

Un ensemble de sommets $T$ est un *transversal* si chaque arête de $G$ a au moins une extrémité dans $T$. Un sous-ensemble $E$ de l'ensemble des arêtes d'un graphe $G = (VG, EG)$ est un *couplage* dans $G$ si les arêtes de $E$ sont deux à deux non-adjacentes.

On appelle *$k$-coloration* d'un graphe $G$ une partition de ses sommets en $k$ stables $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$. Les sommets de la classe $X_j$ sont coloriés avec la couleur $j$, $j = 1, \ldots, k$. Un graphe admettant une $k$-coloration est dit *$k$-coloriable*. Le *nombre chromatique* $\chi(G)$ d'un graphe $G$ est le nombre $k$ minimum de couleurs pour lequel $G$ est $k$-coloriable.

GRAPHE ADJOINT, OPÉRATIONS, MATRICE D'INCIDENCE

Le *graphe adjoint* $L(G)$ d'un graphe $G = (VG, EG)$ est le graphe dont les sommets sont les points $e_1, \ldots, e_m$ (représentant les arêtes de $G$) et où l'on a une arête entre les sommets $e_i$ et $e_j$ si, dans $G$, $e_i$ et $e_j$ ont une extrémité commune.

L'*élimination* d'une arête $e$ est simplement l'opération de retirer l'arête $e$ du graphe. La *subdivision* d'une arête $e = \{u, v\}$ est l'opération d'éliminer $e$ et de créer deux arêtes $e_1, e_2$ et un nouveau sommet $w$ tels que $e_1 = \{u, w\}$ et $e_2 = \{w, v\}$ ; la *contraction* d'une arête $e = \{u, v\}$ est l'opération d'éliminer l'arête $e$ et les sommets $u$ et $v$ et de créer un nouveau sommet $w$ de façon à ce que $N(w) = N(u) \cup N(v)$.

La *matrice d'incidence* $A \in \{0, 1\}^{VG \times EG}$ d'un graphe $G$ est la matrice dont les éléments sont

$$a_{v,e} = \begin{cases} 1, & \text{si } v \text{ est une extrémité de } e, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

## 1.5 Théorie des matroïdes

On va supposer connus les principales définitions et théorèmes de la théorie des matroïdes (voir [69]).

Un matroïde binaire $M$ est une paire $(E(M), \mathcal{C}(M))$ constituée d'un ensemble fini $E(M)$ et une famille de *cycles* $\mathcal{C}(M)$ de sous-ensembles de $E(M)$ satisfaisant la conditon suivante : si $C_1$ et $C_2$ sont deux membres de $\mathcal{C}(M)$, alors $C_1 \triangle C_2 \in \mathcal{C}(M)$. Un cycle qui est minimal par rapport à l'inclusion et n'est pas l'ensemble vide, est dit un *circuit*.

$D$ est un *cocircuit* de $M$ si $D$ est un sous-ensemble minimal non-vide tel que $|C \cap D| \neq 1$ pour tout circuit de $M$. Un *cocycle* (aussi appelé «vecteur») est l'union disjointe de cocircuits. On note $\mathcal{C}^*(M)$ l'ensemble des cocycles de $M$, et $M^*$ est le matroïde dont l'ensemble de cycles est $\mathcal{C}^*(M)$, $M^*$ est dit le matroïde *dual* de $M$. Un circuit de cardinalité 1 est une *boucle*. Si $f, g \in E(M)$ et $\{f, g\}$ est un circuit, $f$ et $g$ sont *parallèles* dans $M$. Si un élément $f$ est parallèle dans $M^*$, alors $f$ est *série* dans $M$.

$M$ est un matroïde *graphique* si $\mathcal{C}(M)$ est l'ensemble de cycles d'un graphe $G$, et dans ce cas on notera $M = M(G)$. $M \setminus Z$ et $M/Z$ sont les matroïdes résultant de l'élimination et contraction de $Z \subset E(M)$, respectivement. Un *mineur* de $M$ est un matroïde qui peut être obtenu à partir de $M$ par une séquence d'éliminations et de contractions.

Dans ce travail les matroïdes suivants jouent un rôle important : $F_7$ est le matroïde de Fano (représenté par les sept vecteurs dans $\{0,1\}^3$ différents de $(0,0,0)$). $M(H_6)$ est le matroïde graphique du graphe donné par la fig. 1.1(a). $AG(2,3)$ est donné par les 8 vecteurs dans $\{0,1\}^4$ dont la dernière composante est un 1. $S_8$ est le matroïde donné par la matrice d'incidence du graphe fig. 1.1(b) avec en plus une colonne correspondant aux éléments entourés par un cercle. $R_{10}$ est le matroïde dont les éléments sont les 10 vecteurs dans $\{0,1\}^5$ avec trois 1 et deux 0, et qui peut être aussi vu comme le matroïde qui est représenté par la matrice d'incidence du graphe $K_{3,3}$ (voir 1.1(c)), avec en plus une colonne de 1, ou le matroïde dont les cycles sont les cycles pairs du graphe $K_5$.

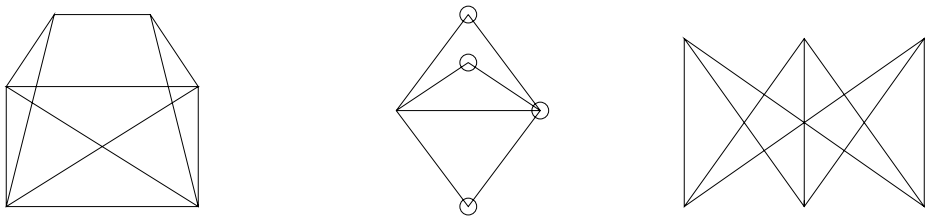


FIG. 1.1 - *$H_6$, $S_8$ et $K_{3,3}$*

Nous utilisons la caractérisation suivante des matroïdes graphiques :

**Théorème 1.8** *[68] Un matroïde est graphique si et seulement s'il est binaire et ne contient pas les mineurs $F_7$, $F_7^*$, $M^*(K_5)$ et $M^*(K_{3,3})$.* □

Soient $M_1$ et $M_2$ des matroïdes binaires et $|E(M_1) \cap E(M_2)| = i$. Le matroïde $M_1 \bigoplus_{i+1} M_2$ est défini comme étant le résultat de la $i+1$-*somme* de $M_1$ et de $M_2$. C'est-à-dire, $E(M_1 \bigoplus M_2) = E(M_1) \triangle E(M_2)$, et les cycles de $E(M_1 \bigoplus M_2)$ sont les ensembles de la forme $C_1 \triangle C_2$, où $C_i \in \mathcal{C}(M_i)$, $i = 1, 2$. En particulier :
(i) si $E(M_1) \cap E(M_2) = \emptyset$, alors $M_1 \bigoplus_1 M_2$ est la *1-somme* de $M_1$ et de $M_2$ ;
(ii) si $E(M_1) \cap E(M_2) = \{f\}$, et $f$ n'est pas une boucle de $M_1$, ni de $M_2$, alors $M_1 \bigoplus_2 M_2$ est la *2-somme* de $M_1$ et de $M_2$. Dans ce cas, $f$ est le *marqueur* de la 2-somme.

On peut visualiser la 2-somme en termes de matroïdes graphiques : la 2-somme de deux graphes revient à prendre ces graphes, à choisir une arête dans chacun de graphes, à identifier les sommets correspondants et à éliminer les deux arêtes.

On aura besoin des théorèmes qui affirment que les matroïdes sans certains mineurs peuvent être obtenus au moyen de ces deux sommes, à partir d'une classe simple de matroïdes. On utilisera dans le chapitre 2 le théorème suivant, connu comme le théorème «Splitter» de Seymour.

**Théorème 1.9** *[63] Soit $\mathcal{F}$ une classe de matroïdes binaires fermée sous les opérations de «prendre des mineurs» et de l'isomorphisme, et soit $N \in \mathcal{F}$ un matroïde non-vide, connexe, qui n'est pas une roue et*

*qui ne contient pas de cycles ou cocycles de cardinalité inférieure ou égale à 2. On suppose aussi que :*
*(i) pour tout $M \in \mathcal{F}$ et $e \in E(M)$ tel que $M \setminus e = N$, $e$ est une boucle, co-boucle ou un élément parallèle de $M$ ;*
*(ii) pour tout $M \in \mathcal{F}$ et $e \in E(M)$ tel que $M/e = N$, $e$ est une boucle, co-boucle, ou un élément série de $M$.*
*Alors tout matroïde de $\mathcal{F}$ peut être obtenu au moyen de 1- et 2-sommes de matroïdes de $\mathcal{F}$, qui ne contiennent pas de mineurs isomorphes à $N$, et des copies de $N$.* □

## 1.6 Métriques

Soit $M$ un matroïde. Une fonction $m : E(M) \to \mathbb{R}_+$ est une *métrique* sur $M$ si $m(e) \leq m(C - e)$ pour tout cycle $C$ de $M$, et tout élément $e$ de $C$. La fig. 1.2(a) donne un exemple de métrique sur un graphe. Étant donnée une fonction $l : E(M) \to \mathbb{R}_+$, la fonction $m$ définie comme

$$m(e) = \min\{l(X) : X = \{e\} \text{ ou } X = C - e \text{ pour un cycle } C,\ e \in C\}$$

est la métrique *induite* par $l$.

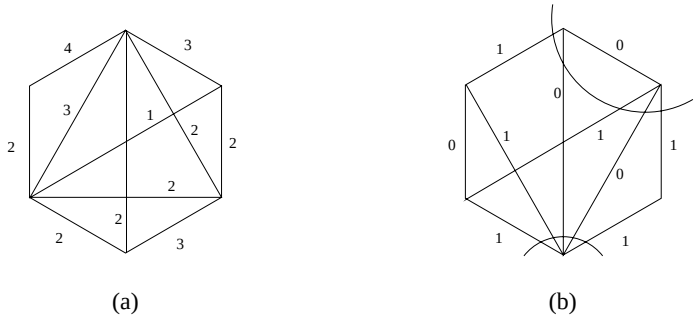


FIG. 1.2 - *Exemple d'une métrique et d'une métrique primitive : un cocycle*

$\Delta$ est une famille de métriques si, pour tout matroïde binaire $M$, $\Delta(M)$ est un ensemble de métriques définies sur $E(M)$. Par exemple, on considérera la famille $\Delta_A$ des métriques ayant des valeurs dans un

sous-ensemble $A$ de $\mathbb{Z}_+$, ainsi $\Delta_A(M)$ est l'ensemble des métriques $m$ : $E(M) \to A$. Une métrique $m$ est *bipartie* si $m(C)$ est paire sur tout cycle $C$ de $M$.

L'ensemble cône$(\Delta_A(M))$ est l'ensemble

$$\{\lambda_1 m_1 + \ldots \lambda_k m_k,\ k \geq 0,\ \lambda_i \geq 0,\ m_i \in \Delta_A(M), i = 1, \ldots k\}.$$

Les rayons extrêmes de l'ensemble cône$(\Delta_A(M))$ sont appelés des métriques *primitives*. Par exemple, étant donné un matroïde $M$, les vecteurs $\chi^C$, où $C$ est un cocycle de $M$, sont des métriques primitives (voir fig. 1.2(b)).

# Chapitre 2

# Multiflots et métriques

On traitera, en premier lieu, le problème de multiflot en présentant une définition de ce problème et plusieurs formes de l'écrire, les résultats antérieurs qui concernent cette étude, et les nouveaux résultats obtenus. Ensuite, on introduira le problème de packing de métriques et le rapport entre celui-ci et le problème de multiflot, et enfin notre contribution à ce sujet.

## 2.1 Multiflots dans les graphes et matroïdes

Le problème de multiflot a été étudié par beaucoup d'auteurs, du fait de son intêret pratique et théorique. Pour l'aspect algorithmique on peut citer par exemple [59], pour la faisabilité [43, 64], pour la complexité [47], et l'excellent tour d'horizon de Frank [16], entre autres. Dans ce travail, on traitera la faisabilité du problème, en étudiant surtout quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution dans des différentes classes de graphes et matroïdes. Voyons d'abord une définition du problème.

### 2.1.1 Définition du problème et résultats fondamentaux

Soit $G = (VG, EG)$ un graphe et $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$ des paires (pas nécessairement distinctes) de sommets de $G$, $s_i$ est un sommet-source, $t_i$ est un sommet-destination. On associe à chaque arête $e \in EG$ une capacité $c(a) \geq 0$, $c \in \mathbb{Z}^{|EG|}$, et à chaque paire $(s_i, t_i)$ une demande $q_i$ $(1 \leq i \leq k)$, $q \in \mathbb{Z}^k$.

Le problème de multiflot est le suivant : trouver des flots $f_i$ (voir chapitre 1) de $s_i$ à $t_i$ de valeur $q_i$, tels que pour toute arête $e \in EG$

$$\sum f_i(e) \leq c(e).$$

On réecrit ce problème pour rendre les notations plus convenables. On relie les sommets $s_i, t_i$, $(1 \leq i \leq k)$ par des arêtes $e_i$ ; on note $F$ l'ensemble de ces arêtes $\{e_i, 1 \leq i \leq k\}$ dites *arêtes de demande* et $\mathcal{C}$ l'ensemble des cycles $C$ de $G \cup F$, tels que $|C \cap F| = 1$. Si on pose $c(e_i) = q_i$, pour $e_i \in F$, on cherche $f : \mathcal{C} \to Q^+$, telle que

$$\begin{array}{ll} \sum_{C \in \mathcal{C}, e \in C} f(C) \leq c(e), & \text{pour tout } e \in EG - F \ ; \\ \sum_{C \in \mathcal{C}, e_i \in C} f(C) = c(e_i), & \text{pour tout } e_i \in F. \end{array}$$

On verra la famille $\mathcal{C}$ comme un flot, et on regardera $f$ comme les multiplicités des éléments de $\mathcal{C}$, une solution du problème $(G, F, c)$.

La fig. 2.1(a) donne un exemple d'un problème de multiflot dans un graphe. Les arêtes en gras sont dans $F$, les demandes et les capacités sont indiquées sur la figure. Dans ce cas, on cherche une famille de cycles, chacun contenant seulement une arête de $F$, et chaque arête $e$ appartenant à au plus $c(e)$ cycles, si $e \notin F$, et à exactement $c(e)$, sinon. Une solution possible est donnée par la fig. 2.1(b).

On peut donc définir un problème de multiflot en donnant soit les paires de sommets-source et destination, soit les arêtes de demande. Dans ce dernier cas, comme la définition n'utilise pas la notion de sommet, et seulement de cycle, c'est évident que l'on peut parler de matroïdes à la place de graphes.

La notation et certaines formules deviennent plus simples si, au lieu de $G$ et des arêtes de demande, seul $H = G \cup F$ et $p : E(H) \to \mathbb{Z}$

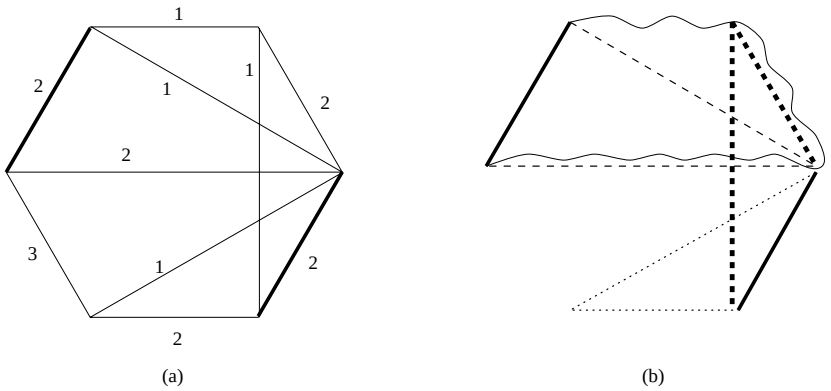


FIG. 2.1 - *Exemple d'un problème de multiflot*

sont donnés. On «décode» $F$ et les demandes de la façon suivante : Étant donné un matroïde $M$ et une fonction $p : E(M) \to \mathbb{Z}$, on posera que les valeurs négatives de $p$ représentent des demandes et les non-négatives représentent des capacités, et on notera $F(p)$ l'ensemble $\{e \in E(M) : p(e) < 0\}$. Le *problème de multiflot* est une paire $(M, p)$ qui a une solution s'il y a une fonction $f : \mathcal{C}_p(M) \to \mathbb{R}_+$, définie sur l'ensemble $\mathcal{C}_p(M)$ (ou simplement $\mathcal{C}_p$) de tous les cycles $C$ de $M$ avec $|C \cap F(p)| = 1$, telle que

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_p, e \in C} f(C) = \begin{cases} \leq \quad p(e), & \text{si } e \in E(M) - F(p), \\ = -p(e), & \text{si } e \in F(p). \end{cases}$$

Si on peut trouver une fonction $f$ entière, on dira que $(M, p)$ a une *solution entière*.

Dans ce travail, les questions fondamentales sur les multiflots sont les suivantes : Étant donné un problème de multiflot, existe-t-il une solution ? Existe-t-il des conditions nécessaires et suffisantes qui garantissent l'existence d'une solution pour un problème de multiflot ? C'est ce problème que l'on va étudier maintenant : la *faisabilité* d'un problème de multiflot $(M, p)$.

La proposition suivante, connue comme *théorème Japonais* [30, 52] pour le cas de matroïdes graphiques, donne une condition pour l'existence d'un multiflot.

**Proposition 2.1** *([60]) Un problème de multiflot $(M,p)$ a une solution si et seulement si*

$$mp \geq 0 \text{ pour tout } m \in \Delta_{\mathbb{Z}_+}(M),$$

*c'est-à-dire, si et seulement si $p \in pol(\Delta_{\mathbb{Z}_+}(M))$.*

**Dém. :** On va noter $\chi^{C,e}$, $C \in \mathcal{C}_p$, $e \in F(p) \cap C$, le vecteur caractéristique du cycle $C$, où la composante $e$ vaut –1, et $\chi^e$ le vecteur caractéristique de l'élément $e$.

Le problème de multiflot $(M,p)$ peut être reformulé comme: on cherche des coefficients $\lambda_{C,e} \geq 0$, $(C \in \mathcal{C}_p,\ e \in F(p) \cap C)$ et $\mu_e \geq 0$, $e \notin F(p)$, de façon à ce que

$$p = \sum_{C \in \mathcal{C}_p, e \in C} \lambda_{C,e} \chi^{C,e} + \sum_{e \notin F(p)} \mu_e \chi^e.$$

D'après le lemme de Farkas 1.1, on sait que ce problème a une solution si et seulement si pour tout $m$ tel que

$$\begin{cases} m\chi^{C,e} \geq 0, & \text{si } C \in \mathcal{C}_p, \text{ et } e \in C, \text{ et} \\ m\chi^e \geq 0, & \text{si } e \notin F(p), \end{cases} \qquad (*)$$

$$\text{on a } pm \geq 0.$$

$(*)$ équivaut à : $m(C-e) - m(e) \geq 0$, $C \in \mathcal{C}_p, e \in F(p) \cap C$, et $m(e) \geq 0$, $e \notin F(p)$.

Remarquons que $m$ peut être négative si $e \in F(p)$. Mais si $m_f < 0$, pour $f \in F(p)$, alors $m(C-f) - m(f) > m(C-f) \geq 0$, et ainsi, si on remplace $m(f)$ par $\max\{m(f), 0\}$, on obtient un vecteur qui satisfait $(*)$, et en plus

$$\sum_{e \in E(M)-f} p_e m_e \geq 0 \Rightarrow \sum_{e \in E(M)-f} p_e m_e + p_f m_f \geq 0,$$

qui est la condition de l'énoncé. □

Ce résultat est d'une grande portée, dans la mesure où il s'agit de vérifier une condition qui est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un multiflot dans un matroïde quelconque. Mais existe-t-il des classes

de matroïdes pour lesquelles les conditions sont plus simples et les familles de métriques plus «petites»?

Soit $\Delta$ une famille de métriques et $(M,p)$ un problème de multiflot. Considérons la condition

$$mp \geq 0, \text{ pour toute métrique } m \in \Delta(M). \qquad (CN)$$

Il est facile d'observer que (CN) est nécessaire pour l'existence d'un multiflot. Un matroïde binaire $M$ pour lequel la condition (CN) est aussi suffisante pour l'existence d'une solution de $(M,p)$ dont la fonction $p$ est arbitraire, est dit *fluant* par rapport à $\Delta$. Si (CN) est suffisante pour l'existence d'une solution entière pour tout problème $(M,p)$ Eulérien, alors $M$ est dit *cyclant* par rapport à $\Delta$. (Un problème de multiflot $(M,p)$ est *Eulérien* si $p(D)$ est paire pour tout cocycle $D$ de $M$, et, dans ce cas, $p$ est dite *Eulérienne*.)

Notons que la propriété d'être cyclant par rapport à $\Delta$ implique la propriété d'être fluant par rapport à $\Delta$, puisque si $(M,p)$ satisfait $mp \geq 0$ pour tout $m \in \Delta(M)$, alors $(M,2p)$ est Eulérien et satisfait la même condition ; par conséquent il existe une solution entière $f$ pour $(M,2p)$, et $1/2f$ est une solution pour $(M,p)$.

Remarquons aussi que l'implication non-triviale de la proposition 2.1 nous dit que tout matroïde binaire est fluant par rapport à $\Delta_{\mathbb{Z}_+}$.

**Proposition 2.2** *[64] La propriété d'être fluant (ou cyclant) par rapport à un ensemble de métriques $\Delta$ est preservée par l'opération de prendre des mineurs.*

**Dém. :** Considérons un matroïde binaire $M$ et supposons que $M$ soit fluant par rapport $\Delta(M)$. On montrera que, pour tout élément $e$, $M \setminus e$ et $M/e$ sont fluants par rapport à $\Delta(M \setminus e)$ et $\Delta(M/e)$, respectivement.

Soit $f \in E(M)$ et $(M \setminus f, p)$ un problème de multiflot. Si ce problème a une solution, il n'y a rien à faire. Sinon, il existe une métrique $m \in \Delta_{\mathbb{Z}_+}(M \setminus f)$ telle que $mp < 0$. Soit $p' : E(M) \Rightarrow \mathbb{Z}_+$ la fonction suivante :

$$p'(e) = \begin{cases} p(e), & \text{si } e \neq f, \\ 0, & \text{si } e = f, \end{cases}$$

et $m' : E(M) \Rightarrow \mathbb{Z}_+$ la fonction suivante :

$$m'(e) = \begin{cases} m(e), & \text{si } e \neq f, \\ \min\{m(C-f), f \in C \in \mathcal{C}(M)\}, & \text{si } e = f. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $m$ est une métrique et que $p'm' < 0$. Ainsi le problème $(M, p')$ n'a pas de solution et, par hypothèse, il existe une métrique $m'' \in \Delta(M)$ telle que $m''p' < 0$. Si l'on restreint $m''$ à $E(M) - f$, on obtiendra une métrique $\hat{m} \in \Delta(M \setminus f)$, telle que $\hat{m}p < 0$. Donc $M \setminus f$ est fluant par rapport à $\Delta(M \setminus f)$.

Soit maintenant $(M/f, p)$ un autre problème de multiflot. Comme dans le cas précédant, si ce problème a une solution, il n'y a rien à faire. Sinon, il existe une métrique $m \in \Delta_{\mathbb{Z}_+}$ telle que $mp < 0$. Soit $p' : E(M) \Rightarrow \mathbb{Z}_+$ la fonction suivante :

$$p'(e) = \begin{cases} p(e), & \text{si } e \neq f, \\ \min\{p(C-f), f \in C \in \mathcal{C}^*(M)\}, & \text{si } e = f, \end{cases}$$

et $m' : E(M) \Rightarrow \mathbb{Z}_+$ comme

$$m'(e) = \begin{cases} m(e), & \text{si } e \neq f, \\ 0, & \text{si } e = f. \end{cases}$$

Il est aussi facile de vérifier que $m'$ est une métrique et que $p'm' < 0$. Comme $m$ est fluant par rapport à $\Delta(M)$, $m'$ peut être décomposée en une somme de métriques $m_i \in \Delta(M)$, $i = 1, \ldots, n$, où $m_i(f) = 0$ et il existe une métrique $m_j$, $1 \leq j \leq n$, telle que $m_j p' < 0$. Si l'on restreint $m_j$ à $E(M)$, on obtiendra une métrique $\hat{m} \in \Delta(M/f)$, telle que $\hat{m}p < 0$. Ainsi $m/f$ est fluant par rapport à $\Delta(M/f)$.

Pour voir que $M \setminus e$ et $M/e$ sont cyclings par rapport à $\Delta(M \setminus e)$ et $\Delta(M/f)$, respectivement, il suffit de remarquer que si $p$ est Eulérienne, alors $p'$ décrite dans les deux cas ci-dessus, est aussi Eulérienne, et une solution entière de $(M, p')$ est aussi une solution entière pour $(M \setminus e)$ ou $(M/e, p)$. □

Étant donnée une famille $\Delta_A$ de métriques, une façon possible de caractériser les matroïdes fluants par rapport à cette famille est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 2.3** *[58] Soit $M$ un matroïde et $A \subseteq \mathbb{Z}_+$. $M$ est fluant par rapport à $\Delta_A$ si et seulement si $\Delta_{\mathbb{Z}_+}(M) \subseteq cône(\Delta_A(M))$.*

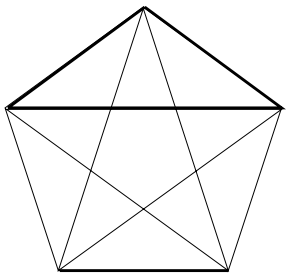

FIG. 2.2 - *Exemple de non-suffisance de la condition de coupe*

**Dém. :** La partie «si» est une conséquence directe du théorème Japonais 2.1. Pour la partie «seulement si» on suppose que la métrique $m$ ne peut pas être exprimée comme une combinaison non-négative de métriques de $\Delta_A(M)$. Par le lemme de Farkas 1.1, il y a une fonction $p : E(M) \to \mathbb{Z}$ telle que $m'p \geq 0$ pour toute $m' \in \Delta_A(M)$, mais $mp < 0$. Ceci est contraire à l'hypothèse que $M$ est fluant par rapport à $\Delta_A$. □

### 2.1.2 La condition de coupe

Une des familles de métriques la plus simple que l'on peut considérer est $\Delta_{\{0,1\}}$. Une autre famille a les mêmes propriétés : soit $\Delta_{(CC)}(M)$ l'ensemble des vecteurs caractéristiques des cocycles de $M$. Étant donné un matroïde binaire $M$, on peut vérifier facilement que si $m \in \Delta_{\{0,1\}}$, alors $m$ est une somme positive de vecteurs caractéristiques de cocycles de $M$. On va dire que $(M, p)$ *satisfait la condition de coupe* si et seulement si

$$mp \geq 0 \text{ pour tout } m \in \Delta_{(CC)}(M). \qquad (CC)$$

Le théorème Japonais 2.1 nous montre que cette condition est nécessaire, mais elle n'est pas suffisante. La fig. 2.2 donne un problème de multiflot qui satisfait la condition de coupe, mais n'admet pas de solution. Les arêtes de demande $F$ sont en gras, et $p(e) = 1$, si $e \notin F$, $p(e) = -1$, sinon. Il suffit de tester la condition $mp \geq 0$ pour la métrique suivante : $m(e) = 2$, si $e \in F$, $m(e) = 1$, sinon. Le résultat est $mp = -8 + 6 = -2$, et il en découle que $(M, p)$ n'est pas faisable.

Le résultat suivant, démontré par Seymour [64], caractérise la classe de matroïdes fluants par rapport à $\Delta_{\{0,1\}}$ et $\Delta_{(CC)}$.

**Théorème 2.4** *Soit $M$ un matroïde binaire. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
*(i) $M$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC)}$ ;*
*(ii) $M$ est fluant par rapport à $\Delta_{\{0,1\}}$ ;*
*(iii) $M$ ne contient pas les mineurs $F_7$, $R_{10}$ ou $M(K_5)$.* □

La schéma de la démonstration est le suivant. Seymour montre que $F_7$, $R_{10}$ et $M(K_5)$ ne sont pas fluants par rapport à $\Delta_{\{0,1\}}$, et que les matroïdes binaires qui ne les contiennent pas comme mineurs peuvent être obtenus au moyen de 1-, 2- et 3-sommes de matroïdes élémentaires, qui sont cyclants par rapport à $\Delta_{\{0,1\}}$. Comme il montre que les 1-, 2- et 3-sommes préservent la propriété d'être cyclant, on toutes les implications désirées sont obtenues.

### 2.1.3 Les conditions $CC3$, $K_5$ et $F_7$

En voulant étendre la condition de coupe, Schwärzler et Sebő [58] définissent la condition $CC3$. Soit $\Delta_{(CC3)}(M)$ l'ensemble de toutes les fonctions $m : E(M) \to \mathbb{Z}_+$ pour lesquelles il existe trois cocycles de $M$ $D_1$, $D_2$ et $D_3$ et

$$m(e) = \begin{cases} 1, & \text{si } e \in D_1, \\ 2, & \text{si } e \in (D_2 \cup D_3) - D_1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ces fonctions sont des métriques. La condition $(CC3)$ suivante revient maintenant à la restriction de (CN) aux métriques dans $\Delta_{(CC3)}(M)$

$$mp \geq 0 \text{ pour toute } m \in \Delta_{(CC3)}(M). \qquad (CC3)$$

Cette condition généralise les métriques introduites par Karzanov [33] pour les graphes, appelées métriques $\text{bip}_{(r,s)}$. En traduisant son résultat en termes de $(CC3)$, on retrouve que

**Proposition 2.5** *$M(K_5)$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC3)}$.* □

Schwärzler et Sebő prouvent le résultat suivant, analogue à celui obtenu par Seymour, pour les métriques $CC3$.

**Théorème 2.6** *Soit $M$ un matroïde binaire. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
*(i) $M$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC3)}(M)$ ;*
*(ii) $M$ est fluant par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}(M)$ ;*
*(iii) $M$ ne contient pas les mineurs $AG(2,3)$, $S_8$, $R_{10}$, $M(H_6)$, $F_7 \bigoplus_2 F_7$, $M(K_5) \bigoplus_2 M(K_5)$ et $M(K_5) \bigoplus_2 F_7$.* □

Leur démonstration suit de près la démonstration de Seymour, en montrant que les mineurs exclus ne sont pas fluants par rapport à $\Delta_{(CC3)}(M)$, et que les pièces de base pour la construction de matroïdes sans ces mineurs sont cyclants par rapport à $\Delta_{(CC3)}(M)$ ; mais la forme de la construction n'est pas exactement la même, puisque la 2-somme ne préserve pas la propriété en question. Nous verrons une démonstration analogue en détail dans la sous-section 2.1.4, adapté au résultat plus aiguë 2.10 que nous présentons.

Nous voulons maintenant introduire deux nouvelles métriques qui peuvent raffiner $CC3$, dans le sens où elles sont primitives dans la famille $\Delta_{(CC3)}$, et nous obtiendrons un résultat plus pointu que le théorème 2.6.

On notera $\Delta_{K_5}(M)$ ($\Delta_{F_7}(M)$, resp.) la classe de métriques $m \in \Delta_{\{0,1,2\}}(M)$, dites *métriques $K_5$* (*métriques $F_7$*, resp.), telles que si l'on contracte les éléments $e$ tels que $m(e) = 0$, on obtient $M(K_5)$ ($F_7$, resp.), avec probablement quelques éléments parallèles, et dont les poids sont les suivants (voir fig. 2.3). Si on note $\{1,2,3,4,5\}$ les sommets de $K_5$, et par $ij$ l'arête entre les sommets $i$ et $j$, alors

$$m(ij) = \begin{cases} 2, & \text{si } ij \in \{12, 23, 13, 45\}, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $C$ est un circuit de cardinalité 3 de $\mathcal{C}(F_7)$, alors

$$m(e) = \begin{cases} 2, & \text{si } e \in C, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que les métriques $K_5$ et $F_7$ sont dans $\Delta_{(CC3)}$. Pour le graphe $K_5$ et la métrique indiquée dans la fig. 2.3, il suffit de prendre

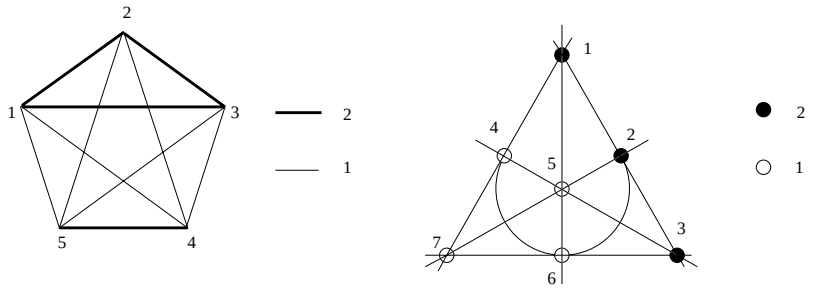


FIG. 2.3 - *Les poids des métriques $K_5$ et $F_7$*

$D_1 = \{14,\ 15,\ 24,\ 25,\ 34,\ 35\}$, $D_2 = \{12, 13, 14, 25, 35, 45\}$ et $D_3 = \{13, 23, 34, 35\}$, et pour le matroïde $F_7$ et la métrique indiquée dans la fig. 2.3, on prend $D_1 = \{4, 5, 6, 7\}$, $D_2 = \{1, 2, 4, 5\}$, $D_3 = \{2, 3, 5, 6\}$. Dans les autres matroïdes, il suffit de défaire la contraction faite pour obtenir $M(K_5)$ ou $F_7$, et étendre les cocycles décrits ci-dessus aux éléments correspondants.

En fait, on verra que ces deux métriques sont les seules importantes dans la famille $\Delta_{(CC3)}$. On montre maintenant que ces métriques sont primitives, c'est-à-dire qu'elles sont des rayons extrêmes du cône de métriques.

D'abord, on ennonce un lemme facile à vérifier.

**Lemme 2.7** *Soit $m$ une métrique sur un matroïde binaire $M$ telle que $m(f) = 0$, pour un élément $f \in E(M)$, et soit $m' : E(M \setminus f) \to \mathbb{Z}_+$ la métrique donnée par $m'(e) = m(e), e \in E(M) \setminus f$. Si $m'$ est primitive en $M \setminus e$, alors $m$ est primitive en $M$.* □

**Corollaire 2.8** *Si la métrique $K_5$ ($F_7$, resp.) est primitive en $M(K_5)$ ($F_7$, resp.), alors les métriques $K_5$ ($F_7$, resp.) sont primitives.* □

Maintenant on prouve le résultat pour les métriques $K_5$ et $F_7$ prises sur $M(K_5)$ et $F_7$.

**Lemme 2.9** *Les métriques $K_5$ et $F_7$ sont primitives.*

**Dém. :** Vérifions l'affirmation pour la métrique $F_7$ (pour la métrique $K_5$, on procède de même pour la démonstration, qui est bien connue ; on la trouve par exemple dans [33]).

On peut supposer qu'une métrique $F_7$ $m$ est donnée sur le matroïde $F_7$. Si $m$ n'est pas un rayon extrême du cône $\Delta_{\mathbb{Z}_+}$, alors on peut lui trouver une décomposition en métriques primitives, et les égalités $m(C-e)=m(e)$ satisfaites par $m$ doivent être aussi satisfaites par toute métrique primitive dans cette décomposition. Nous cherchons donc les solutions pour ce système d'égalités.

Sans perte de généralité, soit $m$ la métrique $F_7$ indiquée dans la fig. 2.3 et $x$ une métrique dans une décomposition de $m$. Notons $x_i$ la valeur de l'élément $i$, $i \in E(F_7)$, en suivant la numérotation indiquée dans la fig. 2.3. On écrit les égalités satisfaites par $m$ et $x$ :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_4 + x_7 = x_5 + x_6 \\ x_2 = x_5 + x_7 = x_4 + x_6 \\ x_3 = x_6 + x_7 = x_4 + x_6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_5 = x_4,\ x_6 = x_7, \\ x_4 = x_7,\ x_5 = x_7, \end{array}$$

et ceci implique que

$$x_1 = x_2 = x_3 = 2x_4 \text{ et } x_4 = x_5 = x_6 = x_7.$$

Cette solution correspond exactement à $m$ et ses multiples positifs et ceci prouve que $m$ est un rayon extrême de cône($\Delta_{\mathbb{Z}_+}$) et primitive. □

Maintenant on va restreindre la condition $(CC3)$ à la condition suivante. $(M,p)$ *satisfait la condition* $CC, K_5,\ F_7$ si

$$mp \geq 0 \text{ pour toute } m \in \Delta_{(CC,K_5,F_7)}(M). \qquad (CC, K_5, F_7)$$

La condition de coupe est toujours nécessaire pour l'existence d'un multiflot, et ainsi la classe de matroïdes fluants par rapport à $\Delta_{(CC)}$ peut être considérée comme la première dans une «hyerarchie» de classes de matroïdes. Pour les classes supérieures, Novick et Sebő ont conjecturé [50] que, si un matroïde binaire $M$ n'est pas fluant par rapport à $\Delta_{(CC)}$, alors il existe au moins une parmi les métriques $K_5$, $F_7$ et $R_{10}$ (voir sous-section 2.1.5 pour la définition de $\Delta_{(R_{10})}$) dans $\Delta_{\mathbb{Z}_+}(M)$.

Le théorème presenté dans la prochaine sous-section renforce cette conjecture, en avançant d'un pas vers sa direction. Nous montrons que la conjecture est vraie pour une classe fermée sous l'opération de

«prendre des mineurs» et qui contient les matroïdes minimaux non-fluants $M(K_5)$ et $F_7$, et les fluants par rapport à $\Delta_{(CC)}$.

On peut voir aussi que le résultat 2.10 implique que la condition $(CC, K_5, F_7)$ est équivalente à la condition $(CC3)$ en ce qui concerne la caractérisation des matroïdes qui sont fluants par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$. C'est-à-dire, $\Delta_{(CC,K_5,F_7)}$ concentre toute l'information essentielle de $\Delta_{\{0,1,2\}}$ et $\Delta_{(CC3)}$ pour ces matroïdes. Mais il faut bien remarquer que cela ne veut pas dire que $\Delta_{(CC3)}$ ou $\Delta_{\{0,1,2\}}$ ne contiennent pas d'autres métriques primitives, pour les matroïdes qui ne sont pas fluants par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$.

### 2.1.4 Le théorème

La forme la plus raffinée du théorème 2.6 que nous allons prouver est la suivante.

**Théorème 2.10** *Soit $M$ un matroïde binaire. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
*(i) $M$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7)}(M)$ ;*
*(ii) $M$ est fluant par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}(M)$ ;*
*(iii) $M$ ne contient pas de mineur $AG(2,3)$, $S_8$, $R_{10}$, $M(H_6)$, $F_7 \bigoplus_2 F_7$, $M(K_5) \bigoplus_2 F_7$ et $M(K_5) \bigoplus_2 M(K_5)$.*

On va montrer tout d'abord que les mineurs exclus n'ont pas la propriété en question.

**Proposition 2.11** *$AG(2,3)$, $S_8$, $R_{10}$ et $M(H_6)$ ne sont pas fluants par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$.*

**Dém. :** Il y a plusieurs façons de démontrer ce résultat. Schwärzler et Sebő [58] vérifient qu'il y a des problèmes de multiflot pour ces matroïdes qui n'ont pas de solution, mais dont les fonctions de multiflot $p$ satisfont la condition (CN) avec $A = \{0,1,2\}$.

Nous allons montrer qu'il existe des métriques primitives pour ces matroïdes qui ne sont pas dans $\Delta_{\{0,1,2\}}$, c'est-à-dire qu'il ne pas vrai que $\Delta_{\mathbb{Z}_+} \not\subseteq \text{cône}(\Delta_{\{0,1,2\}})$, et, grâce à la proposition 2.3, on en déduit qu'ils ne sont pas fluants par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$.

Soit $S_8$ le matroïde représenté par la matrice de la fig. 2.4. On va prouver le résultat pour $S_8$ (pour les autres le raisonnement est tout à fait similaire et peut être retrouvé dans l'annexe A).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

FIG. 2.4 - *Représentation matricielle de $S_8$*

Soit $m = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3)$. On utilise la technique utilisée pour démonstrer la proposition 2.9, en écrivant les contraintes $m(C - e) \geq m(e)$, $C \in \mathcal{C}(S_8)$, satisfaites avec égalité par la métrique $m$, et on cherchera les solutions du système ainsi obtenu, qui seront des métriques présentes dans une décompostiont de $m$ en métriques primitives. Sachant que $m_i$ correspond à la valeur de $m$ de l'élément représenté par la colonne $i$ de la matrice, le système est le suivant :

$$\begin{array}{lll} m_1 = m_2 + m_5 & m_1 = m_3 + m_6 & m_1 = m_4 + m_7 \\ m_8 = m_2 + m_3 + m_7 & m_8 = m_2 + m_4 + m_6 & m_8 = m_3 + m_4 + m_5 \\ m_8 = m_5 + m_6 + m_7. & & \end{array}$$

Ces équations sont affinement indépendantes, et les solutions de ce système sont les vecteurs $(2a, a, a, a, a, a, a, 3a)$, $a \geq 0$, qui sont des multiples non-négatifs de $m$. Cela implique que $m$ est primitive, mais elle n'est pas un vecteur dans $\Delta_{\{0,1,2\}}(S_8)$ et ainsi $S_8$ n'est pas fluant par rapport à cette famille de métriques. □

Les autres matroïdes qui sont exclus ne sont pas non plus fluants par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$. Ce résultat est donné par la proposition suivante, dont la démonstration suit le schéma déjà utilisé plus haut.

**Proposition 2.12** *Les matroïdes $M(K_5) \bigoplus_2 M(K_5)$, $F_7 \bigoplus_2 M(K_5)$ et $F_7 \bigoplus_2 F_7$ ne sont pas fluants par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$.*

**Dém. :** Soit $M(K_5) \bigoplus_2 M(K_5)$ comme représenté fig. 2.5, le marqueur est indiqué en pointillé, et soit $\mu : E(M(K_5) \bigoplus_2 M(K_5)) \to \mathbb{Z}$ tel que

$$\mu(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \in \{j, l, o, r\}, \\ 2, & \text{si } x \in \{a, c, i, k, m, n, p, q\}, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

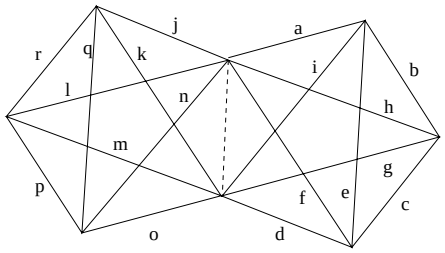


FIG. 2.5 - $M(K_5) \bigoplus_2 M(K_5)$

Les inéquations $\mu(C - e) \geq \mu(e)$ satisfaites avec égalité par $\mu$ sont les suivantes (on note par l'élément $x$ la valeur de l'élément $\mu(x)$) :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r = p + q$ | $r = m + k$ | $j = n + q$ | $j = k + f + d$ |
| $j = k + g + h$ | $l = p + n$ | $l = m + f + d$ | $l = m + g + h$ |
| $o = k + q$ | $o = p + m$ | $o = n + f + d$ | $o = g + h + n$ |
| $a = f + e$ | $a = h + b$ | $i = b + g$ | $i = d + e$ |
| $c = e + b$ | $c = f + h$ | $c = d + g$ | |

et il n'est pas difficile de constater que les solutions de ce système sont les vecteurs de la forme

$$\nu(x) = \begin{cases} 4\delta, & \text{si } x \in \{j, l, o, r\}, \\ 2\delta, & \text{si } x \in \{a, c, i, k, m, n, p, q\}, \\ 1\delta, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\delta \geq 0$. Ces solutions sont des multiples non-négatifs de $m$ et $m$ est donc un rayon extrême de $\Delta_{\mathbb{Z}_+}(M(K_5) \bigoplus_2 M(K_5))$. La proposition 2.3 nous aide à conclure que ce matroïde n'est pas fluant par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$.

La vérification des autres cas est analogue et elle est détaillée dans l'annexe A. □

Maintenant, on va considérer les pièces de base pour la construction des matroïdes fluants par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$. En utilisant deux fois le théorème «Splitter» de Seymour (voir chapitre 1), on obtient le résultat suivant.

**Proposition 2.13** *[63] Tout matroïde binaire qui ne contient pas les mineurs $AG(2,3)$, $S_8$, $R_{10}$, $M(H_6)$ peut être obtenu par 1- et 2-sommes de matroïdes cyclants par rapport à $\Delta_{(CC)}$ et des copies de $M(K_5)$ et $F_7$.* □

Les matroïdes cyclants par rapport à $\Delta_{(CC)}$ évidemment sont aussi fluant par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$, ainsi que $M(K_5)$ (proposition 2.5). Il faut donc vérifier cette propriété pour le matroïde $F_7$. On suit la démonstration de Schwärzler et Sebő [58], en remplaçant $(CC3)$ par $(CC, F_7)$.

**Proposition 2.14** *$F_7$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC,F_7)}$.*

**Dém. :** Soit $p : E(F_7) \to \mathbb{Z}$ une fonction Eulérienne et supposons que $pm \geq 0$ pour toute $m \in \Delta_{(CC,F_7)}$. Il faut montrer que $(F_7, p)$ a une solution entière. Tout mineur propre de $F_7$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC)}$, d'après le théorème 2.4, on peut donc supposer que $p(e) \neq 0$ pour tout $e \in E(F_7)$.

Si $|F(p)| \leq 2$ et $(F_7, p)$ est Eulérien, alors $(F_7, p)$ a toujours une solution entière ((13.3) de [64]). Si $|F(p)| \geq 5$, alors $F(p)$ contient un cocycle, et la condition $(CC)$ est toujours violée.

Soit $|F(p)| = 4$ et $F(p) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ne formant pas de cocycle. Alors il est facile de vérifier les seuls cycles possibles pour une solution sont $\{e_1, e_5, e_6\}$, $\{e_2, e_5, e_7\}$, $\{e_3, e_6, e_7\}$ et $\{e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Une solution est possible si et seulement si $p(e_5) \leq p(e_1) + p(e_2) + p(e_4)$, $p(e_6) \leq p(e_1) + p(e_3) + p(e_4)$ et $p(e_7) \leq p(e_2) + p(e_3) + p(e_4)$ ; comme $\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$, $\{e_1, e_3, e_4, e_6\}$ et $\{e_2, e_3, e_4, e_7\}$ sont des cocycles, cela implique que la condition de coupe est suffisante.

Si $|F(p)| = 3$ et $F(p)$ n'est pas un cycle, soit $F(p) = \{e_1, e_2, e_4\}$, sans perte de généralité. On montrera par récurrence sur $\sum |p(e)|$ que si $(F_7, p)$ satisfait la condition $(CC, F_7)$, alors il existe un flot entier pour

$(F_7, p)$. On soustrait de $p$ le cycle $\{e_1, e_5, e_6\}$, qui passe par l'élément $e_1$, et on définit $p'$ de la façon suivante :

$$p'(e_i) = \begin{cases} p(e_i) + 1, & \text{si } i = 1, \\ p(e_i) - 1, & \text{si } i \in \{5, 6\}, \\ p(e_i), & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque 1 :** $p'$ satisfait la condition $(CC, F_7)$.

Soit $m$ une métrique $F_7$. Alors $p'm = pm + m(e_1) - m(e_5) - m(e_6) \geq pm - 2$, puisque $\{e_1, e_5, e_6\}$ est un cycle et $m$ est bipartie. On considère 2 cas :
(i) si $m = 2\chi^{\{e_1,e_5,e_6\}} + \chi^{\{e_2,e_3,e_4,e_7\}}$, alors $pm = p(e_1, e_2, e_4, e_5) + p(e_1, e_3, e_5, e_7) + 2p(e_6) \geq 2$ ;
(ii) si $m = 2\chi^C + \chi^{E(F_7)-C}$, où $e_1 \notin L$ et $|L \cap \{e_5, e_6\}| = 1$ ; sans perte de généralité, soit $L = \{e_2, e_5, e_7\}$. Alors $m = 2\chi^{\{e_2,e_5,e_7\}} + \chi^{\{e_1,e_3,e_4,e_6\}}$ et $mp = p(e_1, e_2, e_4, e_5) + p(e_2, e_3, e_5, e_6) + 2p(e_7) \geq 2$. Ainsi on conclut que $p'm \geq 0$, pour toute $m \in \Delta_{(F_7)}(F_7)$.

Supposons maintenant que $p'(D) < 0$, pour un cocycle $D$. Alors $D = \{e_4, e_5, e_6, e_7\}$ ou $D = \{e_2, e_3, e_6, e_7\}$. Dans ces deux cas, $p'(D) = p(D) - 2$, et ceci implique que $p(D) = 0$. Si $D = \{e_4, e_5, e_6, e_7\}$, comme $p(e_1, e_2, e_4, e_5) \geq 0$, alors $-p(e_4, e_5, e_6, e_7) + p(e_1, e_2, e_4, e_5) \geq 0$ et on obtient que $0 \leq p(e_1) + p(e_2) - p(e_6) - p(e_7) < 0$, qui contradit la hypothèse de que $p(e) > 0$, $e \in E(F_7)$. De même pour $D = \{e_2, e_3, e_6, e_7\}$. □

Par récurrence il existe donc un multiflot pour $(F_7, p')$ ; en y ajoutant le cycle $\{e_1, e_5, e_6)$, on obtient une solution pour le problème $(F_7, p)$.

Finalement, soit $F(p)$ un cycle à trois éléments, par exemple $F(p)$ est $\{e_1, e_4, e_7\}$. On définit $p'$ comme précédement, et $p'' : E(F_7) \to \mathbb{Z}$ comme :

$$p''(e) = \begin{cases} p(e_i) + 1, & \text{si } i = 1, \\ p(e_i) - 1, & \text{si } i \in \{2, 3\}, \\ p(e_i), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les deux fonctions $p'$ et $p''$ sont paires sur les cocycles. Comme dans le cas antérieur, on en déduit le résultat par récurrence sur $|p(e_1)|$, si l'un des problèmes $(F_7, p')$, $(F_7, p'')$ a une solution entière. Supposons donc

que non, alors, par l'hypothèse de récurrence, il existe des métriques $m', m'' \in \Delta_{(CC,F_7)}(F_7)$ telles que $m'p' < 0$ et $m''p'' < 0$.

**Remarque 2 :** $m', m'' \in \Delta_{(CC)}(F_7)$.

Pour un cocycle arbitraire $D$, soit $m_D = \chi^D + 2\chi^{E(F_7)-D}$ la métrique $F_7$ associée. Il est facile de vérifier que $m_{D_1}p' = m_{D_1}p$, pour $D_1 = \{e_2, e_3, e_5, e_6\}$. Et aussi, $m_D p' \geq m_{D_1}p' \geq 0$, puisque $E(F_7) - D_1 = F(p)$. pour un cocycle $D$ quelconque ; de même pour $p''$. Ceci prouve la remarque. □

Maintenant, il y a seulement un choix pour $m'$ et $m''$. Soient les cocircuits $D' = \{e_4, e_5, e_6, e_7\}$ et $D'' = \{e_2, e_3, e_4, e_7\}$, alors $m' = \chi^{D'}$ et $m'' = \chi^{D''}$. Ainsi $m'p' = m''p'' = -2$ et $m'p = m''p = 0$. Ceci implique que $p'(D') = p''(D'') = -2$ et $p(D') = p(D'') = 0$ et

$$0 \leq m_{D_1}p - m'p - m''p = 2p(e_1) < 0,$$

ce qui est une contradiction. Ainsi par récurrence, un parmi $(F_7, p')$ et $(F_7, p'')$ a une solution, et le problème $(F_7, p)$ aussi.

Donc pour toute cardinalité de $F(p)$, le problème $(F_7, p)$ a une solution si et seulement si la condition $(CC, F_7)$ est vérifiée par $(F_7, p)$. □

Maintenant, pour construire les matroïdes fluants par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$, les 1- et 2-sommes seront utilisées. La 1-somme de matroïdes binaires préserve la propriété d'être fluant par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$, mais comme le montre la proposition 2.12, la 2-somme ne la préserve pas. Dans [58] on retrouve une 2-somme «partielle» de matroïdes, où une propriété plus forte est exigée d'une des composantes de la somme. Le résultat suivant est une reformulation de ce résultat, en remplaçant la condition $(CC3)$ par $(CC, K_5, F_7)$, et qui peut être aussi retrouvé dans la forme où on utilise comme ensemble de métriques l'ensemble $\Delta_{\mathbb{Z}_+}$ dans [60].

**Théorème 2.15** *La 2-somme $M_1 \bigoplus_2 M_2$ d'un matroïde $M_1$ cyclant par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7)}$ et d'un matroïde $M_2$ cyclant par rapport à $\Delta_{(CC)}$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7)}$.*

**Dém. :** Soient $E(M_1) \cap E(M_2) = \{f\}$, $M = M_1 \bigoplus_2 M_2$ et la fonction $p : E(M) \to \mathbb{Z}$ tels que $(M,p)$ est Eulérien et $(CC, K_5, F_7)$ est satisfaite. On définit des fonctions $p_i : E(M_i) \to \mathbb{Z}$, $i \in \{1,2\}$, de la façon suivante :

$$p_i(e) = \begin{cases} p(e), & \text{si } e \in E(M_i) - f, \\ (-1)^{i-1}q, & \text{si } e = f, \end{cases}$$

où $q = \min\{p(D-f) : f \in D \in \mathcal{C}^*(M_2)\}$. Soit $D_0$ un cocycle de $M_2$ tel que $p(D_0 - f) = q$.

**Remarque 1 :** $p_i$ $(i \in \{1,2\})$ est une fonction paire sur les cocycles.

Soit $D_i$ un cocycle de $M_i$. Si $f \notin D_i$, alors $p_i(D_i) = p(D_i) \equiv 0 \bmod 2$, puisque $D_i$ est un cocycle aussi de $M$. Si $f \in D_i$, alors

$$\begin{aligned} p_i(D_i) &= p_i(D_i - f) + p_i(f) \\ &\equiv p(D_i - f) + p(D_0 - f) \equiv p(D_i \triangle D_0) \bmod 2, \end{aligned}$$

puisque $D_i \triangle D_0$ est un cocycle de $M$. □

**Remarque 2 :** $(M_2, p_2)$ satisfait $(CC)$.

Soit $D \in \mathcal{C}^*(M_2)$. Si $f \notin D$, alors $D$ est un cocycle de $M$ et $p_2(D) = p(D) \geq 0$, puisque l'on a supposé que $(CC, K_5, F_7)$, et en particulier $(CC)$, est satisfaite par $(M,p)$. Si $f \in D$, alors la définition de $q$ implique l'inégalité suivante :

$$p_2(D) = p_2(D-f) + p_2(f) = p(D-f) - p(D_0 - f) \geq 0.$$

□

**Remarque 3 :** $(M_1, p_1)$ satisfait $(CC,\ K_5,\ F_7)$.

Il faut montrer que $p_1 m_1 \geq 0$ pour tout choix de $m_1 \in \Delta_{(CC,K_5,F_7)}(M_1)$.

Si $m_1$ est une métrique dans $\Delta_{(CC)}$, alors tout se passe comme dans la remarque 2. Sinon, on associe à $m_1$ une métrique $m \in \Delta_{(CC,K_5,F_7)}(M)$ définie comme

$$m(e) = \begin{cases} m_1(e), & \text{si } e \in E(M_1) - f, \\ m_1(f), & \text{si } e \in D_0 - f, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que si $m_1 \in \Delta_{(K_5,F_7)}(M_1)$, alors $m \in \Delta_{(K_5,F_7)}(M)$. Donc on obtient

$$\begin{aligned} p_1 m_1 &= \sum_{e \in E(M_1)} p_1(e) m_1(e) \\ &= \sum_{e \in E(M_1)} p_1(e) m_1(e) + p_1(f) m_1(f) \\ &= \sum_{e \in E(M) - D_0} p(e) m(e) + p(D_0 - f) m_1(f) \\ &= \sum_{e \in E(M)} p(e) m(e) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

puisque $(M, p)$ satisfait $(CC, K_5, F_7)$. □

Comme par hypothèse $M_1$ (respectivement $M_2$) est cyclant par rapport à $\Delta(CC, K_5, F_7)$ (respectivement $\Delta_{(CC)}$), les remarques antérieures garantissent l'existence de flots entiers $f_i$ pour $(M_i, p_i)$, $i \in \{1, 2\}$. Dans ce cas, $f_i$ est une liste de cycles de $\mathcal{C}_{p_i}(M_i)$. Supposons, sans perte de généralité, que exactement les $k_i$ premiers cycles de chaque liste contiennent l'élément $f$. Il découle de la définition d'un flot que $k_1 \leq q = k_2$. Après avoir éliminé les premiers $k_2 - k_1$ cycles de la deuxième liste $f_2$, l'union des deux listes contiendra exactement $k_1$ cycles de $\mathcal{C}(M_1)$ et $k_1$ cycles de $\mathcal{C}(M_2)$ qui passent par l'élément $f$. On construit $k_1$ paires $(C_1, C_2)$, $(C_i \in \mathcal{C}(M_i))$, de cycles contenant $f$ et on remplace chaque paire par $C_1 \triangle C_2$. Il n'est pas difficile de vérifier que la liste de cycles ainsi obtenue est une solution pour le problème $(M, p)$. □

**Preuve du théorème 2.10**

*(i)* ⇒ *(ii)* Trivial.

*(ii)* ⇒ *(iii)* Les propositions 2.11 et 2.12 fournissent l'implication, puisque la propriété d'être fluant par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$ est héréritaire, grâce à la proposition 2.2.

*(iii)* ⇒ *(i)* Les matroïdes $M(K_5)$ et $F_7$ sont fluants par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7)}$ (propositions 2.5 et 2.14), et en utilisant le théorème 2.15 et la proposition 2.13 on obtient facilement le résultat. □

### 2.1.5 Le cas du matroïde $R_{10}$

On va traiter dans cette sous-section le troisième matroïde exclu de la classe de matroïdes fluants, caractérisée par Seymour (théorème 2.4). On montrera que si on définit une métrique $R_{10}$, comme il a été fait pour les cas $F_7$ et $M(K_5)$, alors on peut donner une condition par rapport à laquelle le matroïde $R_{10}$ est fluant.

Étant donné un matroïde binaire $M$, on dira qu'une métrique $m : E(M) \to \{0,1,3\}$ est une *métrique* $R_{10}$ si, après avoir contracté les éléments $e$ tels que $m(e) = 0$, on obtient un matroïde $R_{10}$, avec la possibilité d'avoir des éléments parallèles, et $m$ est comme il suit. Il existe un cycle $C$ de taille 4, et $\{a,b,c\} \subseteq C$ tel que

$$m(e) = \begin{cases} 3, & \text{si } e \in \{a,b,c\}, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas on notera cette métrique $m_{(a,b,c)}$. La démonstration de la proposition 2.11 (dans l'annexe A) montre que $m_{(a,b,c)}$ est primitive dans $\Delta_{\mathbb{Z}_+}(R_{10})$.

De façon analogue à la condition $(CC, F_7, K_5)$, on dira que $(M,p)$ satisfait la condition $(CC, R_{10})$ si

$$mp \geq 0, \quad \text{pour toute } m \in \Delta_{(CC,R_{10})}(M). \qquad (CC, R_{10})$$

On va considérer le matroïde $R_{10}$ comme étant représenté par la matrice d'incidence du graphe $K_{3,3}$ indiqué dans la fig. 2.6, plus une colonne de 1, qui sera appelée l'élément $t$. On utilisera la numérotation donnée par la fig. 2.6 au cours de cette sous-section.

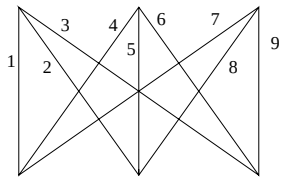


FIG. 2.6 - $K_{3,3}$

Avec cette représentation, les cycles qui contiennent $t$ sont les $t$-joints dans $K_{3,3}$, c'est-à-dire, tout ensemble d'arêtes $T$ pour lequel

$d_T(v) \equiv 1 \bmod 2$, pour tout $v \in V(K_{3,3})$ ; les cycles qui ne contiennent pas $t$ sont exactement les cycles de $K_{3,3}$. On peut aussi vérifier que les cocycles qui contiennent $t$ sont les ensembles $C + t$, où $C$ est une $t$-coupe, c'est-à-dire, si $C = \delta(X)$, pour $X \subseteq V(K_{3,3})$, alors on a l'égalité $|X \cap V(K_{3,3})| = |X| \equiv 1 \bmod 2$ ; les cocycles qui ne contiennent pas $t$ sont les cocycles de $K_{3,3}$ qui ne sont pas de $t$-coupes.

On utilisera toutes ces remarques pour prouver le théorème suivant :

**Théorème 2.16** *Le matroïde $R_{10}$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC,R_{10})}(R_{10})$.*

**Dém. :** Étant donnée une fonction $p \in \mathbb{Z}^{E(R_{10})}$ pour laquelle $(R_{10}, p)$ est un problème de multiflot Eulérien, et $pm \geq 0$, pour toute métrique $m \in \Delta_{(CC,R_{10})}$, on prouvera, par récurrence sur $\sum_{e \in E(R_{10})} |p(e)|$, qu'il existe un multiflot entier pour $(R_{10}, p)$. On supposera que $p(e) \neq 0$, pour tout $e \in E(R_{10})$, puisque sinon, comme tout mineur de $R_{10}$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC)}$ (théorème 2.4), il existe un multiflot entier pour $(R_{10}, p)$.

Si $|F(p)| \leq 2$, alors, comme $R_{10}$ est 2-cyclant ((14.7) de [64]), il existe un multiflot entier pour $(R_{10}, p)$. Si $|F(p)| \geq 6$, alors $F(p)$ contient un cocycle, et la condition de coupe est toujours violée.

Pour les autres cas, on procédera de la façon suivante. On supposera que $t \in F(p)$, sans perte de généralité, et on cherchera tout cycle élémentaire $C$ tel que $C \cap F(p) = \{t\}$. (On utilisera dans cette sous-section le terme «cycle» à la place de «cycle élémentaire».) Pour un cycle $C$, on définit $p_C : E(R_{10}) \to \mathbb{Z}$ comme

$$p_C(e) = \begin{cases} p(e) + 1, & \text{si } e = t, \\ p(e) - 1, & \text{si } e \in C - t, \\ p(e), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si on vérifie qu'il existe un cycle $C$, comme défini ci-dessus, tel que $(R_{10}, p_C)$ satisfait $(CC, R_{10})$, alors on pourra appliquer la récurrence sur $(R_{10}, p_C)$ et en déduire le résultat désiré.

Un cocycle $D$ *empêche* un cycle $C$ si $p_C(D) < 0$. On voudrait montrer qu'il existe un cycle $C$ tel que $C \cap F(p) = \{f\}$, pour lequel il n'existe pas de cocycle qui l'empêche.

D'abord, on donnera quelques résultats concernant des cocycles qui ne peuvent pas empêcher un cycle. Tous les lemmes qui suivent ont comme hypothèses les conditions que l'on a supposées jusqu'à maintenant, c'est-à-dire, $p(e) \neq 0$, pour tout $e \in E(R_{10})$, et $p(t) < 0$.

**Lemme 2.17** *Si $D \in \mathcal{C}^*(R_{10})$, $|D| = 6$ et $t \notin D$, alors $p(D) > 0$.*

**Dém. :** Si $|D| = 6$ et $t \notin D$, alors il existe $u_1, u_2 \in V(K_{3,3})$, $u_1 \neq u_2$, tels que $D = \delta(u_1) \cup \delta(u_2)$. Cela implique que $D = D_1 \triangle D_2$, où $D_i = \delta(u_i) \cup \{t\}$, et $D_i \in \mathcal{C}^*(R_{10})$, $i = 1, 2$. Dans ce cas, $p(D) = p(D_1) + p(D_2) - 2p(t) > 0$. □

**Lemme 2.18** *Soit $D \in \mathcal{C}^*(R_{10})$ tel que $|D| = 6$ et $t \in D$. S'il existe $x \in F(p) \setminus D$, $x \neq t$, alors $p(D) > 0$.*

**Dém. :** Remarquons d'abord que $D = \{t, a, b, c, d, e\}$, où $\{a, b, c, d\}$ forme un cycle dans $K_{3,3}$ et $e$ n'est pas adjacente à $\{a, b, c, d\}$. S'il existe $x \in F(p) \setminus D$, alors $x$ est adjacente à 2 arêtes dans $\{a, b, c, d\}$ et à $e$. Supposons que $x$ soit adjacente à $a$ et à $b$, et soient $D_1 = \{t, a, b, x\}$ et $D_2 = \{x, c, d, e\}$ ; $D_1$ est un cocycle, ainsi que $D_2$, puisque $D_2 = D \triangle D_1$. Dans ce cas, $p(D) = p(D_1) + p(D_2) - 2p(x) > 0$. □

**Lemme 2.19** *Soit $D \in \mathcal{C}^*(R_{10})$ tel que $|D| = 4$ et $t \notin D$. S'il existe $x \in F(p) \setminus D$, $x \neq t$, telle que $x$ est adjacente à toutes les arêtes de $D$, alors $p(D) > 0$.*

**Dém. :** Dans ce cas, $D = \delta(u) \triangle \delta(v)$, où $u, v \in V(K_{3,3})$, $u \neq v$, et $u$ est adjacent à $v$. Comme $x$ est adjacente à toutes les arêtes de $D$, cela implique que $x \in \delta(u) \cap \delta(v)$ et $D = D_1 \triangle D_2$, où $D_1 = \delta(u) \cup \{t\}$ et $D_2 = \delta(v) \cup \{t\}$. Remarquons que $x \in D_1 \cap D_2$ et $D_1, D_2 \in \mathcal{C}^*(R_{10})$ ; ceci implique que $p(D) = p(D_1) + p(D_2) - 2p(x) - 2p(t) > 0$ □

**Lemme 2.20** *Soit $D \in \mathcal{C}^*(R_{10})$ tel que $|D| = 4$ et $t \notin D$. S'il existe deux arêtes $x, y \in F(p) \setminus D$, $x \neq t \neq y$, et $a \in D$, pour lesquelles $a \cap x \cap y = \{u\}$, $u \in V(K_{3,3})$, alors $p(D) > 0$.*

**Dém. :** Soient $D = \{a, b, c, d\}$, $D_1 = \{t, a, x, y\}$ et $D_2 = \{t, x, y, b, c, d\}$. Il est facile de voir que $D_1 \in \mathcal{C}^*(R_{10})$, et comme $D_2 = D \triangle D_1$, il s'en suit que $D_2 \in \mathcal{C}^*(R_{10})$. Ainsi

$$0 \leq p(D_1) + p(D_2) = 2p(t) + 2p(x) + 2p(y) + p(D),$$

et puisque $x, y, t \in F(p)$, ceci implique que $p(D) > 0$. □

**Lemme 2.21** *Soient $D_1, D_2 \in \mathcal{C}^*(R_{10})$ tel que $|D_1| = |D_2| = 4$, $t \notin D_1 \cup D_2$, et $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. S'il existe un sommet $u$ tel que $\delta(u) \subseteq D_1 \cup D_2$, alors $p(D_1) + p(D_2) > 0$.*

**Dém. :** Soient $D_1 = \{a, b, c, d\}$, $D_2 = \{a, x, y, z\}$ et $\delta(u) = \{a, b, x\}$. On peut facilement vérifier que $D_3 = \{t, a, b, x\}$ est un cocycle, et ceci implique que $D_4 = \{t, a, c, d, y, z\} = D_1 \triangle D_2 \triangle D_3$ est aussi un cocycle. Dans ce cas, $p(D_1) + p(D_2) = p(D_3) + p(D_4) - 2p(t) > 0$. □

Maintenant, on considérera les métriques $R_{10}$. En fait, ces métriques ne posent pas de problème, grâce aux résultats suivants.

**Lemme 2.22** *Soient $m_{(a,b,c)} \in \Delta_{(R_{10})}$ et $C \in \mathcal{C}(R_{10})$, $|C| = 4$, tels que $C \cap F(p) = \{t\}$ et $p_C \chi^D \geq 0$, pour tout cocycle $D$. Alors on a les inégalités suivantes :*

$$m_{(a,b,c)}p \geq \begin{cases} 8, & si\ |C \cap \{a, b, c\}| = 3, \\ 6, & si\ |C \cap \{a, b, c\}| = 2, \\ 4, & si\ |C \cap \{a, b, c\}| = 1, \\ 2, & si\ |C \cap \{a, b, c\}| = 0. \end{cases}$$

**Dém. :** Sans perte de généralité, on suppose que $C = \{t, e_1, e_5, e_9\}$. Dans un premier cas, on considère $m_{(1,5,9)}$, et on a que
$m_{(1,5,9)}p =$

$$p(t, e_1, e_2, e_3) + p(t, e_4, e_5, e_6) + p(t, e_7, e_8, e_9) + 2p(e_1, e_5, e_9) - 2p(t).$$

Ceci implique que $m_{(1,5,9)} \geq 8$, puisque on a supposé que $p(e) \neq 0$, pour tout $e \in E(R_{10})$.

Supposons maintenant que $\{a, b\} = \{1, 5\}$ et, sans perte de généralité, $c = 2$. On a l'égalité suivante :

$m_{(1,2,5)}p =$
$p(t,e_1,e_2,e_3) + p(e_2,e_4,e_6,e_8) + p(e_2,e_5,e_7,e_9) + 2p(e_1,e_5).$
Comme $p_C(e_2,e_5,e_7,e_9) \geq 0$, ceci implique que $m_{(1,2,5)} \geq 6$.

Si $|C \cap \{a,b,c\}| = 1$, on peut supposer que $\{a,b,c\} = \{1,2,4\}$. Dans ce cas, on a l'inégalité suivante :
$m_{(1,2,4)}p = p(t,e_1,e_2,e_4,e_5,e_9)+p(e_2,e_3,e_4,e_7)+p(e_2,e_4,e_6,e_8)+2p(e_1)$
puisque par hypothèse $p_C(t,e_1,e_2,e_4,e_5,e_9) \geq 0$, et $p(e_1) < 0$, on obtient que $m_{(1,2,4)} \geq 4$.

Le dernier cas est $|C \cap \{a,b,c\}| = 0$. Supposons sans perte de généralité que $\{a,b,c\} = \{1,4,5\}$ et on a l'égalité suivante :
$m_{(1,4,5)}p =$
$p(t,e_1,e_4,e_7) + p(t,e_4,e_5,e_6) + p(t,e_1,e_2,e_4,e_5,e_9) +$
$p(e_1,e_3,e_5,e_8) - 2p(t)$
et ceci implique que $m_{(1,4,5)} \geq 2$. □

**Corollaire 2.23** *Soit $C \in \mathcal{C}(R_{10})$ tel que $|C| = 4$ et $C \cap F(p) = \{t\}$. S'il n'existe pas de cocycle $D$ qui empêche $C$, alors $p_C m \geq 0$, pour toute $m \in \Delta_{(CC,R_{10})}(R_{10})$.*

**Dém. :** Il suffit de remarquer que

$$p_C m_{(a,b,c)} \leq pm_{(a,b,c)} - \begin{cases} 8, & \text{si } \{a,b,c\} \subseteq C, \\ 6, & \text{si } |\{a,b,c\} \cap C| = 2, \\ 4, & \text{si } |\{a,b,c\} \cap C| = 1, \\ 2, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et d'utiliser le lemme 2.22. □

Dans la suite on traitera les cas $3 \leq F(p) \leq 5$, et on utilisera les résultats précédents.

Si $|F(p)| = 3$, on peut avoir deux cas possibles.

*(a)* $F(p) = \{t,a,b\}$, où $a$ et $b$ sont adjacentes.

Sans perte de généralité, soit $F(p) = \{t,e_1,e_2\}$. Comme les cycles qui contiennent $t$ doivent contenir l'arête $e_3$, les cycles possibles sont

$C_1 = \{t, e_3, e_5, e_7\}$, $C_2 = \{t, e_3, e_4, e_8\}$, $C_3 = \{t, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9\}$ et $C_4 = \{t, e_3, e_6, e_7, e_8, e_9\}$.

On vérifie d'abord qu'un problème parmi $(R_{10}, p_{C_i})$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, satisfait la condition de coupe. Les cocycles qui peuvent empêcher $C_1$ sont $\{e_2, e_3, e_4, e_7\}$, $\{e_2, e_5, e_7, e_9\}$, $\{e_1, e_3, e_5, e_8\}$ et $\{e_1, e_5, e_6, e_7\}$, et des cocycles de taille 6, mais qui satisfont les hypothèses du lemme 2.17 ou 2.18 ; les cocycles qui peuvent empêcher $C_2$ sont $\{e_2, e_3, e_4, e_7\}$, $\{e_1, e_3, e_5, e_8\}$, $\{e_2, e_4, e_6, e_8\}$, $\{e_1, e_4, e_8, e_9\}$, et des cocycles de taille 6 qui satisfont les hypothèses des lemmes 2.17 ou 2.18. Remarquons que tous ces cocycles de taille 4 peuvent aussi empêcher $C_3$ et $C_4$, ainsi on considérera seulement les cas des cycles $C_1$ et $C_2$.

Les cocycles $\{e_2, e_3, e_4, e_7\}$ et $\{e_1, e_3, e_5, e_8\}$ satisfont les hypothèses du lemme 2.19, ils ne peuvent donc pas empêcher les cycles $C_1$ et $C_2$. On va traiter les cas où un cocycle empêche $C_1$ et un autre empêche $C_2$. Mais il n'est pas possible que $p(e_2, e_5, e_7, e_9) = p(e_2, e_4, e_6, e_8) = 0$, ou $p(e_2, e_5, e_7, e_9) = p(e_1, e_4, e_8, e_9) = 0$, ou $p(e_1, e_5, e_6, e_7) = p(e_2, e_4, e_6, e_8) = 0$ ou $p(e_1, e_5, e_6, e_7) = p(e_1, e_4, e_8, e_9) = 0$, puisque toutes ces paires satisfont les hypothèses du lemme 2.21.

Grâce au corollaire 2.23, on sait que si $C_i$, $i \in \{1, 2\}$, est tel que $(R_{10}, p_{C_i})$ satisfait la condition de coupe, alors $(R_{10}, p_{C_i})$ satisfait aussi la condition $(CC, R_{10})$. Maintenant on peut appliquer la récurrence sur $(R_{10}, p_{C_i})$ et obtenir le résultat.

*(b)* $F(p) = \{t, a, b\}$, où $a$ et $b$ ne sont pas adjacentes.

Sans perte de généralité, supposons que $\{a, b\} = \{e_1, e_5\}$. Dans ce cas, un cycle $C$ tel que $C \cap F(p) = \{t\}$ doit contenir l'élément $e_2$ ou $e_3$. Les cycles possibles sont $C_1 = \{t, e_2, e_4, e_9\}$, $C_2 = \{t, e_3, e_4, e_8\}$, $C_3 = \{t, e_2, e_6, e_7\}$ et $C_4 = \{t, e_3, e_6, e_7, e_8, e_9\}$. Les cocycles qui peuvent empêcher $C_1$ sont $\{e_1, e_2, e_6, e_9\}$, $\{e_3, e_4, e_5, e_9\}$, $\{e_1, e_4, e_8, e_9\}$, $\{e_2, e_5, e_7, e_9\}$ et le seul cocycle de taille 6 qui ne satisfait pas les hypothèses des lemmes 2.17 et 2.18 est $\{t, e_1, e_2, e_4, e_5, e_9\}$ ; les cocycles qui peuvent empêcher $C_2$ sont $\{e_1, e_3, e_5, e_8\}$, $\{e_3, e_4, e_5, e_9\}$, $\{e_1, e_4, e_8, e_9\}$ et des cocycles de taille 6 qui satisfont les conditions soit du lemme 2.17 soit du lemme 2.18 ; les cocycles qui peuvent empêcher $C_3$ sont $\{e_1, e_2, e_6, e_9\}$, $\{e_1, e_5, e_6, e_7\}$, $\{e_2, e_5, e_7, e_9\}$, et les cocycles qui peuvent empêcher $C_4$ sont tous les cocycles de taille 4 donnés ci-dessus.

Ainsi on doit vérifier que l'on n'a pas

$$\begin{aligned}
p(e_1,e_3,e_5,e_8) &= p(e_1,e_2,e_6,e_9) = 0, \text{ ou}\\
p(e_3,e_4,e_5,e_9) &= p(e_1,e_5,e_6,e_7) = 0, \text{ ou}\\
p(e_1,e_3,e_5,e_8) &= p(e_2,e_5,e_7,e_9) = 0, \text{ ou}\\
p(e_3,e_4,e_5,e_9) &= p(e_1,e_2,e_6,e_9) = 0, \text{ ou}\\
p(e_1,e_5,e_6,e_7) &= p(e_1,e_4,e_8,e_9) = 0, \text{ ou}\\
p(e_1,e_4,e_8,e_9) &= p(e_2,e_5,e_7,e_9) = 0;
\end{aligned}$$

mais tous ces cas satisfont les hypothèses du lemme 2.21 ; pour les autres cas :

$$\begin{aligned}
&p(e_2,e_5,e_7,e_9) + p(e_3,e_4,e_5,e_9) =\\
&\quad p(t,e_1,e_3,e_5,e_7,e_9) + p(t,e_1,e_2,e_4,e_5,e_9) - 2p(t) - 2p(e_1) > 0 \text{ et}\\
&p(e_1,e_2,e_6,e_9) + p(e_1,e_4,e_8,e_9) =\\
&\quad p(t,e_1,e_2,e_4,e_5,e_9) + p(t,e_1,e_5,e_6,e_8,e_9) - 2p(t) - 2p(e_5) > 0.
\end{aligned}$$

Il faut vérifier aussi qu'il n'est pas possible que $\{t,e_1,e_2,e_4,e_5,e_9\}$, $\{e_1,e_3,e_5,e_8\}$ et $\{e_1,e_5,e_6,e_7\}$ n'empêchent pas $C_1$, $C_2$ et $C_3$ au même temps. Mais

$$\begin{aligned}
&m_{(t,1,5)} =\\
&= 3p(t,e_1,e_5) + p(e_2,e_3,e_4,e_6,e_7,e_8,e_9)\\
&= p(e_1,e_3,e_5,e_8) + p(e_1,e_5,e_6,e_7) + p(t,e_1,e_2,e_4,e_5,e_9) + 2p(t) \geq 0
\end{aligned}$$

et cela nous donne qu'un parmi $p(e_1,\ e_3,\ e_5,\ e_8)$, $p(e_1,\ e_5,\ e_6,\ e_7)$ et $p(t,e_1,e_2,e_4,e_5,e_9)$ doit être positif.

En utilisant le corollaire 2.23, on sait que si $(R_{10},p_{C_i})$, $i \in \{1,2,3\}$, satisfait la condition de coupe, alors $(R_{10},p_{C_i})$ satisfait aussi la condition $(CC,R_{10})$, et on peut obtenir le résultat par récurrence sur $(R_{10},p_{C_i})$.

Si $|F(p)| = 4$ ou $|F(p)| = 5$, on procèdera de la même façon, et les détails peuvent être vérifiés dans l'annexe B. □

## 2.2 Packing de métriques

On va présenter d'abord la définition du problème et les résultats antérieurs sur le packing de métriques. Ensuite, on donnera un résultat sur un packing entier, mais qui concerne la famille de métriques

$CC3$, qui, comme on a vu à la section précédente, n'est pas la plus importante dans la caractérisation des matroïdes fluants par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$. On montrera un résultat concernant les métriques $K_5$ et $F_7$, qui contiennent d'une certaine manière l'information donnée par les métriques ($CC3$), mais qui ne suffisent pas à fournir une décomposition entière de métriques, mais demi-entière. Finalment on donnera un théorème qui caractérise la classe de matroïdes qui sont packing, dans un sens «large».

### 2.2.1 Le problème

D'une certaine façon le problème de multiflot consiste à trouver une sorte de packing de cycles particuliers. Un problème «polaire» à ce problème peut-être celui de trouver un packing de métriques pour une métrique $m$ donnée, c'est-à-dire, trouver une décomposition d'une métrique $m$ en des métriques primitives. Cette polarité a été déjà utilisé pour prouver les propositions 2.1 et 2.3.

Le problème de *packing de métriques par rapport à une famille $A$ de métriques* est le suivant. On veut écrire une métrique $m$ donnée comme une somme $\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_k m_k$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$, $m_i \in \Delta_A(M)$, $1 \leq i \leq k$, $m_i$ primitive.

En fait, ce qui nous intéresse est d'obtenir des coefficients $\lambda_i$ entiers – un *packing entier*, mais si on n'a aucune hypothèse en plus, cela est trop restrictif. On va donc exiger que la métrique $m$ soit bipartie ($m$ est *bipartie* si elle est paire sur tout cycle du matroïde). Si un matroïde $M$ a cette propriété, alors on va dire que $M$ est *packing par rapport à $\Delta_A$* (remarquer l'analogie avec cyclant par rapport à $\Delta_A$). Si les coefficients de la décomposition sont des multiples entiers de $1/2$, alors $M$ est *demi-packing par rapport à $\Delta_A$*.

Les premiers à avoir mentionné ce problème sont Lomonosov [39], Karzanov [31] et Seymour [62]. Dans les deux derniers articles, les auteurs s'intéressent à la décomposition d'une métrique sur un graphe ou sur un matroïde en une somme de coupes ou cocycles, la famille en question est donc $CC$. En ce qui concerne les métriques plus générales, Avis [1] a étudié les rayons extrêmes du cône de métriques, et Lomonosov et Sebő [41] se sont intéressés à la décomposition conique des «fonctions

de distance». Ces résultats sont liés aux plongements isométriques des graphes (voir le tour d'horizon de Laurent [37]).

### 2.2.2 Packing de coupes

Les premiers résultats sur le packing de coupes portent surtout sur la possibilité de décomposer une métrique en coupes, étant données quelques hypothèses sur le graphe ou sur la métrique elle-même. Par exemple, un premier résultat est donné par Karzanov [32] en utilisant le concept de graphe extrême.

$\mathcal{H}(m)$ est le *graphe extrême* d'une métrique $m$ sur un graphe $G$ si, pour arête $e = \{xy\} \in \mathcal{H}(m)$, il n'y a pas de sommet $z \in VG - \{x, y\}$ tel que $m(xz) = m(xy) + m(yz)$ ou $m(yz) = m(xy) + m(xz)$. Son résultat est le suivant.

**Théorème 2.24** *[32] Soit $G$ un graphe complet. Si $m : EG \to \mathbb{Z}_+$ est une métrique bipartie et $\mathcal{H}(m) \in \{K_4, C_5\}$ ou est l'union de deux étoiles, alors $m$ peut être écrite comme une somme des cocycles à coefficients entiers.* □

Comme on a déjà remarqué, il y a une relation de polarité entre les problèmes de multiflot et la décomposition de métriques, et ce théorème peut être vu comme le résultat polaire du théorème suivant sur le multiflot, de Lomonosov.

**Théorème 2.25** *[40] Soit donné un problème de multiflot $(G \cup F, c)$. Si les arêtes de demande $F$ forment un $K_4$, un $C_5$ ou si elles sont l'union de deux étoiles, et $c$ est paire sur les cocycles, alors la condition de coupe est suffisante pour garantir l'existence d'un flot entier.* □

Dans cet article, Karzanov prouve aussi que le problème ou bien de décomposer $l : EG \to \mathbb{Z}_+$ en cocycles, ou bien de trouver un vecteur tel que $cl < 0$ et $cm \geq 0$ pour toute $m \in \Delta_{(CC)}$, est NP-difficile.

Dans le même esprit de polarité des résultats, à partir du théorème suivant, montré par Okamura [51], Schrijver [56] donne un résultat sur les graphes planaires, et une autre démonstration du théorème 2.24.

**Théorème 2.26** *[51] Soit donné un problème de multiflot $(G \cup F, c)$. Si $G$ est planaire et qu'il existe deux faces $O$ et $I$ telles que $s_i t_i \in O$ ou*

*$s_it_i \in I$, $e_i = \{s_it_i\} \in F$, et $c$ est paire sur les coupes, alors la condition de coupe est suffisante pour l'existence d'un flot entier.* □

Et le théorème de Schrijver est le suivant.

**Théorème 2.27** *[56] Soit $G$ un graphe planaire biparti, plongé dans le plan Euclidien, et $O$ et $I$ deux faces de $G$. Alors il existe des coupes disjointes $\delta(X_1), \ldots, \delta(X_t)$ telles que pour toute paire de sommets $v, w$, où $v, w \in O$ ou $v, w \in I$, la distance de $v$ à $w$ dans $G$ est égale au nombre de coupes $\delta(X_j)$ séparant $v$ et $w$.* □

Pour d'autres résultats sur le packing de coupes, Frank [16] a effectué un tour d'horizon relativement complet.

Maintenant, si on regarde un packing de cycles quelconques et non pas un problème de multiflot, on peut aussi obtenir des résultats intéressants en dualisant des théorèmes sur ce sujet. Par exemple, la notion suivante a été introduite dans [62].

On dira qu'un matroïde $M$ a la propriété de *somme de cycles* si les affirmations suivantes sont équivalentes pour toute $p : E(M) \to \mathbb{Z}_+$:
(i) il existe une fonction $\alpha : \mathcal{C}(M) \to \mathbb{R}_+$ telle que $\sum \alpha(C)\chi^C = p$ ;
(ii) pour tout cocycle $D$ et $f \in D$, $p(f) \leq p(D - \{f\})$.

Seymour [64] caractérise les matroïdes qui ont la propriété de somme des cycles ; ils sont exactement les duaux de ceux qui sont fluants par rapport à $\Delta_{(CC)}$. Il a aussi conjecturé le résultat suivant, prouvé dans [17].

**Théorème 2.28** *Soit $M$ un matroïde binaire qui ne contient pas de mineur $F_7^*$, $R_{10}$, $M^*(K_5)$ ou $M(P_{10})$. Si $p$ satisfait (ii) et est paire sur tout cocycle de $M$, alors il existe un $\alpha$ entier qui satisfait (i).* □

$M(P_{10})$ est le matroïde graphique du graphe de Petersen $P_{10}$ (fig. 2.7). Il est intéressant de remarquer que, contrairement à ce qui se passe avec le problème de multiflot, où la propriété d'être fluant implique la propriété d'être cyclant, dans le cas de la somme des cycles la même chose ne se passe pas pour les cas étudiés dans ce travail.

Le graphe de Petersen a la propriété de somme de cycles fractionnaire, puisqu'il est fluant par rapport à $\Delta_{(CC)}(P_{10})$ ; c'est-à-dire qu'il

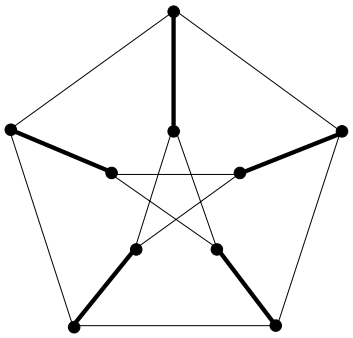

FIG. 2.7 - *Un couplage dans* $P_{10}$

existe un $\alpha$ fractionnaire qui satisfait (i), mais même en exigeant que $p$ soit paire sur les cocycles, il n'existe pas de fonction $\alpha$ entière qui satisfasse (i).

Par exemple, soit $F$ un couplage sur $P_{10}$, et $p$ définie de la façon suivante :

$$p(e) = \begin{cases} 2, & \text{si } e \in F, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas $p$ est paire sour les cocycles, $p$ satisfait (ii), mais il n'y a pas de solution entière pour (i), seulement 1/2 entière (voir [62]).

En dualisant le théorème 2.28, on obtient une première classe de matroïdes packings.

**Corollaire 2.29** *Un matroïde binaire $M$ ne contient pas de mineur $F_7$, $R_{10}$, $M(K_5)$ ou $M^*(P_{10})$ si et seulement si $M$ est packing par rapport à $\Delta_{(CC)}(M)$.* □

### 2.2.3 Packing de métriques $CC3$

On voudrait maintenant suivre le raisonnement du théorème 2.6 pour obtenir une classe de matroïdes packings par rapport à $\Delta_{(CC3)}$, en utilisant les matroïdes packings par rapport à $\Delta_{(CC)}$. On aura aussi un résultat constructif, avec une 2-somme spéciale de matroïdes.

**Théorème 2.30** *La 2-somme $M_1 \bigoplus_2 M_2$ d'un matroïde $M_1$ packing par rapport à $\Delta_{(CC3)}$ et d'un matroïde $M_2$ packing par rapport à $\Delta_{(CC)}$ est packing par rapport à $\Delta_{(CC3)}$.*

**Dém. :** Soient $E(M_1) \cap E(M_2) = \{f\}$ et $M = M_1 \bigoplus_2 M_2$. On choisit $m : E(M) \to \mathbb{Z}_+$ de façon à ce que $m$ soit une métrique bipartie. On définit des fonctions $m_i : E(M_i) \to \mathbb{Z}_+$, $i \in \{1,2\}$, de la manière suivante :

$$m_i(e) = \begin{cases} m(e), & \text{si } e \in E(M_i) - f, \\ q, & \text{si } e = f, \end{cases}$$

où $q = \min\{m(C - f) : f \in (\mathcal{C}(M_1) \cup \mathcal{C}(M_2))\}$. Soit $C_0$ un cycle de $\mathcal{C}(M_1) \cup \mathcal{C}(M_2)$ qui contient $f$ et tel que $m(C_0 - f) = q$.

**Remarque :** $m_i$, $i = 1, 2$, est une métrique bipartie.

Soit $C_i$ un cocycle de $M_i$. Si $f \notin C_i$, alors $m_i(C_i - e) \geq m_i(e), e \in C_i$, et $m_i(C_i) = m(C_i) \equiv 0 \bmod 2$, puisque $C_i$ est aussi un cycle de $M$.

Si $f \in C_i$, alors $m_i(C_i - f) - m_i(f) = m(C_i) - m(C_0) \geq 0$, à cause de la définition de $C_0$. Pour toute $e \neq f$, $m_i(C_i - e) - m_i(e) = m(C_i - e) + m(C_0) - m(e) \geq 0$ ; et $m_i(C_i) = m_i(C_i - f) + m_i(f) = m(C_i - f) + m(C_0 - f) \equiv m(C_i \triangle C_0) \equiv 0 \bmod 2$, puisque $C_i \triangle C_0$ est un cycle de $M$. □

Comme $M_1$ (respectivement $M_2$) est par hypothèse packing par rapport à $\Delta_{(CC3)}$ (respectivement $\Delta_{(CC)}$), la remarque précédente garantit l'existence de cocycles $C_1, \ldots, C_r \in \mathcal{C}(M_2)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} \chi^{C_i} = m_2,$$

de cocycles $D_1, \ldots, D_s \in \mathcal{C}(M_1)$ et de métriques $l_1, \ldots, l_t \in \Delta_{(CC3)}(M_1)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{s} \chi^{D_i} + \sum_{i=1}^{t} l_i = m_1.$$

On va maintenant construire la liste de cocycles et de métriques $CC3$. Sans perte de généralité on suppose qu'exactement les premiers $k_i$ cocycles dans chaque liste contiennent $f$, et que les $k$ premières métriques parmi $l_1, \ldots, l_t$ sont non-nulles à la position de l'élément $f$.

On peut commencer la liste de cocycles et de métriques $CC3$ avec les métriques $l_i$, $k < i \leq t$, et les cocycles $D_i$, $k_1 < i \leq s$, et $C_i$, $k_2 < i \leq r$. Maintenant à partir de chaque paire $(C_i, D_i)$, $1 \leq i \leq k_1$, on construit le cocycle $C_i \triangle D_i$, et on l'ajoute à la liste du packing.

Grâce à la définition de métrique $CC3$, on sait que pour chaque métrique $l_i$ il existe trois cocycles $K_1^i, K_2^i$ et $K_3^i$ tels que

$$l_i(g) = \begin{cases} 1, & \text{si } e \in K_1^i, \\ 2, & \text{si } e \in (K_2^i \cup K_3^i) - K_1^i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étant donnée une métrique $l_i$, $1 \leq i \leq k$, il y a deux cas possibles. Si $l_i(f) = 1$, comme $m_2(f) = m_1(f) = q$, il y a un cocycle $C_j$, $j \in \{1, \ldots, k_1\}$, qui peut être associé à $K_1^i$, et on ajoute à la liste la métrique $CC3$ donnée par $(K_1^i \triangle C_j, K_2^i, K_3^i)$. Si $l_i(f) = 2$, alors il y a deux cocycles $C_j$ et $C_h$, $j, h \in \{1, \ldots, k_2\}$, qui peuvent être associés à $l_i$ ; on ajoute donc à la liste la métrique $CC3$ donnée par $(K_1^i \cup (C_j \triangle C_h), K_2^i \triangle C_j, K_3^i \triangle C_h)$.

La liste ainsi obtenue est une décomposition de $m$ en cocycles et métriques $CC3$. □

On voudrait maintenant montrer que les matroïdes $M(K_5)$ et $F_7$ sont packings par rapport à $\Delta_{(CC3)}$. On prouvera que l'on peut restreindre encore plus la famille de métriques en question, et considérer $\Delta_{(CC,K_5)}$ et $\Delta_{(CC,F_7)}$.

Le premier résultat est en fait une conséquence connue d'un théorème de Karzanov [34] ; on donnera toutefois une démonstration (nouvelle et) simple pour rendre ce travail complet, étant donnée aussi l'analogie entre les démonstrations pour les cas $K_5$ et $F_7$.

Pour simplifier les notations, on dira que l'on peut *soustraire une métrique* $m_2$ d'une métrique $m_1$ si $m_1 - m_2$ est une métrique. Trivialement si $m_1$ et $m_2$ sont biparties, alors $m_1 - m_2$ est aussi bipartie.

**Proposition 2.31** *Le matroïde $M(K_5)$ est packing par rapport à $(CC, K_5)$.*

**Dém. :** Soit $m$ une métrique bipartie sur $K_5$. D'après le théorème 2.10 et la proposition 2.3, $m$ peut être décomposée comme

$$m = \nu_1 \chi^{C_1} + \ldots + \nu_n \chi^{C_n} + \lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_k m_k,$$

où $C_i \in \mathcal{C}(M(K_5))$, $m_i \in \Delta_{(K_5)}(M(K_5))$ et $\nu_i, \lambda_j > 0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$.

**Remarque 1 :** Soit $D$ un cocycle dans $K_5$. Si $(m-\chi^D)(C-e)-(m-\chi^D)(e)<0$, pour un cycle $C$ et $e\in C$, alors il existe un triangle $T$ dans $K_5$, et un élément $f\in T$ pour lequels $(m-\chi^D)(T-f)-(m-\chi^D)(f)<0$.

Soit $l=m-\chi^D$. Si $|C|=4$, alors il existe un triangle $T$ tel que $|T\cap C|=2$, $T\setminus C=\{f\}$, $T\cap C=\{e\}$. Soit $T'=C\triangle T$. Alors $0<l(C-e)-l(e)=l(T-e)-l(e)+l(T'-f)-l(f)$ et ainsi il est vrai que soit $l(T-e)-l(e)<0$, soit $l(T'-f)-l(f)<0$.

Si $|C|=5$, alors il existe un triangle $T$, $|T\cap C|=2$, $T\setminus C=\{f\}$, $T\cap C=\{e\}$, et un cycle $C'=C\triangle T$, $|C'|=4$, tels que $l(C-e)-l(e)=l(T-e)-l(e)+l(C'-f)-l(f)$. Maintenant, soit on obtient la conclusion directement, soit on utilise le cas precédant pour y arriver. □

**Remarque 2 :** Si $C_i$ est un cocycle, alors $\chi^{C_i}$ peut être soustrait de $m$.

Si $m-\chi^{C_i}$ n'est pas une métrique, alors grâce à la remarque precédante il existe un triangle $T$, et un élément $e\in T$ tels que

$$(m-\chi_i^C)(T-e)-(m-\chi^{C_i}(e)<0. \qquad (*)$$

Comme $m(T-e)-m(e)=0$ implique que $\chi^{C_i}(T-e)-\chi^{C_i}(e)=0$, on peut supposer que $m(T-e)-m(e)\geq 2$ ; comme $\chi^{C_i}(T-e)-\chi^{C_i}(e)\leq 2$, on obtient une contradiction à $(*)$. □

**Remarque 3 :** Si $m_i$ et $m_j$ sont deux métriques $K_5$ différentes, alors $m_i+m_j$ peut être écrite comme une somme de coupes.

La fig. 2.8 montre la somme de deux métriques $K_5$, dont la décomposition en coupes est la suivante (on utilise la numérotation de la fig. 2.3) : $\{15,25,35,14,24,34\}+\{15,25,45,13,23,34\}+\{12,13,\ 15,24,34,45\}+\{12,14,15,23,34,35\}$. Il est facile de vérifier la même chose pour les autres cas. □

Les remarques precédantes impliquent que l'on peut obtenir d'une décomposition de $m$ une décomposition entière de $m$. □

Pour le matroïde $F_7$, on peut prouver un résultat analogue.

**Proposition 2.32** *Le matroïde $F_7$ est packing par rapport à $\Delta_{(CC,F_7)}$.*

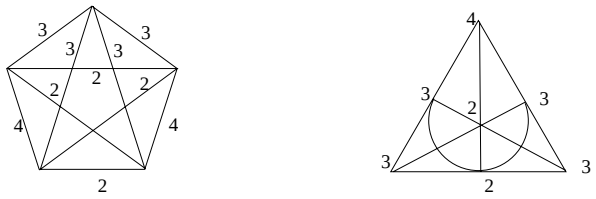


FIG. 2.8 - *Sommes de deux métriques $K_5$ et deux métriques $F_7$*

**Dém. :** Soit $m$ une métrique bipartie sur $F_7$. En utilisant le théorème 2.10 et la proposition 2.3, $m$ peut être décomposée comme

$$m = \nu_1 \chi^{C_1} + \ldots + \nu_n \chi^{C_n} + \lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_k m_k,$$

où $C_i \in \mathcal{C}(F_7)$, $m_i \in \Delta_{(CC,F_7)}(F_7)$ et $\nu_i, \lambda_j > 0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$.

**Remarque 1 :** Si $C_i$ est un cocycle, alors $\chi^{C_i}$ peut être soustrait de $m$.

On veut montrer que

$$m(C-e) - m(e) \geq \chi^{C_i}(C-e) - \chi^{C_i}(e), \text{ pour toute } e \in C \in \mathcal{C}(F_7).$$

L'égalité $m(C-e) - m(e) = 0$ implique que $\chi^{C_i}(C-e) - \chi^{C_i}(e) = 0$ ; si $m(C-e) - m(e) \geq 2$, alors $|C_i \cap C| \equiv 0 \bmod 2$, puisque $F_7$ est un matroïde binaire ; on regardera donc seulement le cas où $|C_i \cap C| = 4$. Dans ce cas $C = C_i$ et $e \in C_i \cap C$, alors $\chi^{C_i}(C-e) - \chi^{C_i}(e) \leq 2$, et on obtient le résultat. □

**Remarque 2 :** Si $m_i$ et $m_j$ sont deux métriques $F_7$ différentes, alors $m_i + m_j$ peut être décomposée comme une somme de coupes.

La fig. 2.8 montre une somme de deux métriques $F_7$, dont la décomposition en coupes est : $\{1,2,4,5\}+\{1,3,5,7\}+\{1,2,6,7\}+\{1,3,4,6\}+\{2,3,4,7\}$ (avec la numérotation de la fig. 2.3). Les autres cas sont similaires. □

Les deux remarques impliquent que $m$ est une somme entière de coupes et au plus d'une métrique $F_7$, avec un coefficient entier aussi ; en effet, comme on peut toujours soustraire les coupes avec un coefficient entier, en repétant ce procédé, on obtiendra une métrique $F_7$, et nécessairement avec un coefficient entier. □

L'ensemble des derniers résultats nous donne le théorème suivant, une sorte d'extension du théorème 2.6.

**Théorème 2.33** *Si un matroïde binaire ne contient pas de mineur $M^*(P_{10})$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*
*(i) $M$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC3)}$ ;*
*(ii) $M$ est fluant par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$ ;*
*(iii) $M$ ne contient pas de mineur $AG(2,3)$, $S_8$, $R_{10}$, $M(H_6)$, $F_7 \bigoplus_2 F_7$, $M(K_5) \bigoplus_2 F_7$ et $M(K_5) \bigoplus_2 M(K_5)$;*
*(iv) $M$ est packing par rapport à $\Delta_{(CC3)}$.*

**Dém. :** Pour compléter les équivalences :
(ii) $\Rightarrow$ (iv) Si $M$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC3)}(M)$, alors $M$ peut être obtenu au moyen de 1- et 2-sommes de matroïdes cyclants par rapport à $\Delta_{(CC)}(M)$ et une copie de $F_7$ ou (exclusif) une copie de $M(K_5)$. Par le corollaire 2.29 et l'hypothèse que $M$ ne contient pas de mineur $M^*(P_{10})$, on sait que $M$ peut être obtenu au moyen de 1- et 2-sommes de matroïdes packings par rapport à $\Delta_{(CC)}(M)$ et une copie de $F_7$ ou (exclusif) une copie de $M(K_5)$.

Maintenant, en utilisant le théorème 2.30, il s'ensuit que $M$ est packing par rapport à $\Delta_{(CC3)}(M)$.
(iv) $\Rightarrow$ (iii) Des propositions 2.11 et 2.12, on peut déduire que ces matroïdes ne sont pas packing par rapport à $\Delta_{(CC3)}(M)$, puisqu'il existe des métriques primitives pour chacun d'entre eux qui n'appartiennent pas à $\Delta_{\{0,1,2\}}(M)$. □

Si on restreint ce résultat au cas des matroïdes graphiques, en utilisant la caractérisation donnée par le théorème 1.8 on obtient une série d'équivalences plus forte :

**Théorème 2.34** *Si $G$ est un graphe, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*
*(i) $G$ est fluant par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}$ ;*
*(ii) $G$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC3)}$ ;*
*(iii) $G$ ne contient pas de mineur $H_6$, $K_5 \bigoplus_2 K_5$ ;*
*(iv) $G$ est packing par rapport à $\Delta_{(CC3)}$.* □

### 2.2.4 Packing de métriques $CC$, $K_5$ et $F_7$

Le théorème 2.30 nous donne une façon de décomposer une métrique bipartie en métriques $CC3$, mais quelques fois le résultat final ne semble pas être vraiment une décomposition. Par exemple, la fig. 2.9(a) donne la 2-somme d'un graphe packing par rapport à $\Delta_{(CC3)}$ $(K_5)$ et d'un graphe packing par rapport à $\Delta_{(CC)}$, et une métrique bipartie sur la 2-somme. Le résultat de la décompostition donnée par le théorème 2.30 est constitué d'une seule métrique, la métrique initiale, qui est en fait une métrique $CC3$, mais pas primitive, puisque l'on peut la décomposer comme le montre la fig. 2.9 (b). Cette décomposition demi-entière utilise deux métriques $K_5$, comme on peut le vérifier facilement.

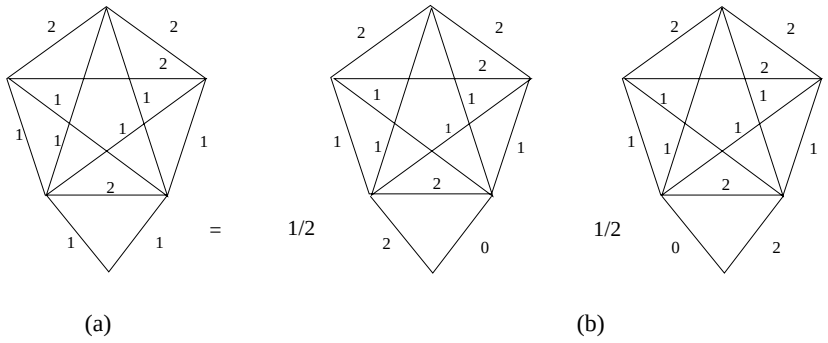


FIG. 2.9 - *Décomposition demi-entière d'une métrique bipartie*

De cette façon, on observe que l'on ne peut pas simplement dualiser le théorème 2.10, puisque la garantie de l'existence d'une solution entière pour un problème de multiflot n'implique pas l'existence d'une solution aussi entière pour la décomposition d'une métrique bipartie.

Le mieux que l'on pourrait obtenir est une décomposition demi-entière et c'est cela que nous allons prouver maintenant. Il faut d'abord remarquer que d'après le théorème 2.10, on ne fait pas la somme de deux matroïdes $M(K_5)$ ou $F_7$, ou d'un $M(K_5)$ et d'un $F_7$. Par conséquent, on peut supposer qu'un matroïde cyclant par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7)}$ est en fait le résultat de plusieures 2-sommes de matroïdes packings par rapport à $\Delta_{(CC)}$ et soit d'un $M(K_5)$, soit d'un $F_7$. On utilise ce fait pour montrer le résultat suivant, qui, contrairement aux théorèmes 2.10 et 2.30, n'est pas un résultat de construction récurrente, mais donne

directement un moyen de décomposer une métrique bipartie

**Proposition 2.35** *Un matroïde $M$ résultant de 2-sommes d'une copie de $M(K_5)$ ou de $F_7$ et de matroïdes packings par rapport à $\Delta_{(CC)}$, est demi-packing par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7)}(M)$.*

**Dém. :** On trouvera un packing de métriques demi-entier sur $M$ à partir des packings dans chaque composante de la 2-somme.

Il suffit de regarder le cas où tous les marqueurs sont dans $M(K_5)$ ou dans $F_7$, puisque le résultat de la 2-somme de deux matroïdes packings par rapport à $\Delta_{(CC)}$ est aussi packing par rapport à $\Delta_{(CC)}$. Soit donc $M = M_0 \bigoplus_2 M_1 \bigoplus_2 \ldots \bigoplus_2 M_n$, où $M_0$ est soit un $M(K_5)$, soit un $F_7$, et chaque $M_i$, $1 \leq i \leq n$, est un matroïde packing par rapport à $\Delta_{(CC)}$ qui est sommé à $M_0$. Soit $f_i = E(M_0) \cap E(M_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Soit $m : E(M) \to \mathbb{Z}_+$ une métrique bipartie. On va restreindre $m$ à chaque matroïde $M_i$, $0 \leq i \leq n$, pour y trouver un packing. Soit $m'_0 : E(M_1) \to \mathbb{Z}_+$ tel que :

$$m'_0(e) = \begin{cases} m(e), & \text{si } e \in E(M_0) - \{f_j,\ 1 \leq j \leq n\}, \\ q_i, & \text{si } e = f_j, \end{cases}$$

où $q_i = \min\{m(C - f_i) : C \in \mathcal{C}(M_i)\}$, $1 \leq i \leq n$. On définit maintenant des fonctions $m_i : E(M_i) \to \mathbb{Z}_+$, $0 \leq i \leq n$, de la manière suivante : $m_0(e) = \min\{m'_0(X) : X = \{e\}$ où $X = C - e$ pour un $C \in \mathcal{C}(M_0), e \in C\}$ et pour $1 \leq i \leq n$,

$$m_i(e) = \begin{cases} m(e), & \text{si } e \in E(M_i) - f_i, \\ m_0(f_i), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $C_i^0 \in \{\mathcal{C}(M_i) \cup \mathcal{C}(M_0 \bigoplus_2 \ldots \bigoplus_2 M_{i-1} \bigoplus_2 M_{i+1} \bigoplus_2 \ldots \bigoplus_2 M_n)\}$ où $f_i \in C_i^0$ et $m(C_i^0 - f_i) = m_i(f_i)$, $1 \leq i \leq n$.

**Remarque 1 :** $m_i$, $1 \leq i \leq n$, est une métrique et elle est bipartie.

Soit $C_i$ un cycle de $M_i$. Si $f_i \notin C_i$, alors $m_i(C_i - e) \geq m_i(e)$, $\forall e \in C_i$, et $m_i(C_i) = m(C_i) \equiv 0 \bmod 2$, puisque $C_i$ est aussi un cycle de $M$.

Si $f_i \in C_i$, alors $m_i(C_i - f_i) - m_i(f_i) = m(C_i) - m(C_i^0) \geq 0$, grâce à la définition de $C_i^0$ ; pour $e \neq f_i$, $m_i(C_i - e) - m_i(e) = m(C_i - e) + m(C_i^0) -$

$m(e) \geq 0$ et $m_i(C_i) = m_i(C_i - f_i) + m_i(f_i) = m(C_i - f_i) + m(C_i^0 - f_i) \equiv m(C_i \triangle C_i^0) \equiv 0 \bmod 2$, puisque $C_i \triangle C_i^0$ est un cycle de $M$. □

**Remarque 2 :** $m_0$ est une métrique bipartie.

Puisque $m_0$ est une métrique induite, on doit vérifier seulement que $m_0$ est bipartie. Soit $C$ un cycle de $M_0$ et $L = \{j \ : \text{il existe } f_j \in C\}$, alors

$$\begin{aligned} m_0(C) &= m_0(C \backslash \{f_j : j \in L\}) + \sum_{j \in L} m_0(f_j) \\ &= m(C \setminus \{f_j : j \in L\}) + \sum_{j \in L} m(C_j - f_j) \\ &\equiv m(C \triangle_{j \in L} C_j^0) \\ &\equiv 0 \bmod 2, \end{aligned}$$

puisque $C \triangle_{j \in L}(C_j^0)$ est un cycle de $M$. □

Comme $M_0$ (resp. $M_i$, $1 \leq i \leq n$) est par hypothèse packing par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7)}$ (resp. à $\Delta_{(CC)}$), les remarques 1 et 2 garantissent l'existence de cocycles $C_1^i, \ldots, C_{r_i}^i \in \mathcal{C}^*(M_i)$ tels que $\sum_{j=1}^{r_i} \chi^{C_j^i} = m_i$, de cocycles $C_1^0, \ldots, C_{r_0}^0 \in \mathcal{C}^*(M_0)$ et de métriques $l_1, \ldots, l_t \in \Delta_{(K_5,F_7)}(M_0)$ tels que $\sum_{j=1}^{r_0} \chi^{C_j^0} + \sum_{j=1}^{t} l_j = m_0$.

Maintenant, on va construire la liste des cocycles, et des métriques $K_5$ ou $F_7$ qui décomposent $m$. On peut déjà ajouter à la liste finale du packing tout cocycle $C_j^0$ $(j = 1, \ldots, r_0)$ si $C_j^0$ ne contient pas le marqueur ; pour les autres $C_j^0$ $(j = 1, \ldots, r_0)$ qui contiennent le marqueur, on procédera de la même façon que le cas I décrit ci-dessous.

On considère deux cas séparément :

*Cas I :* $l_i(f_j) = 1$, $i \in \{1, \ldots, t\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$

À chaque métrique $l_i$ telle que $l_i(f_j) = 1$, on associe un cocycle $C_k^j$, $k \in \{1, \ldots, r_j\}$, où $f_j \in C_k^j$ et on joint $l_i$ à $C_k^j$ pour créer une métrique $l_i' \in \Delta_{(K_5,F_7)}(M)$.

Il n'est pas difficile de voir comment on «colle» $l_i$ et $C_k^j$ : les éléments de $C_k^j$ remplaceront $f_j$, créant peut-être quelques éléments parallèles dans la nouvelle métrique $K_5$ ou $F_7$. On remplace $l_i$ par $l_i'$, s'il y a un $j'$ tel que $l_i(f_{j'}) = 2$ ; sinon $l_i'$ est ajouté au packing.

*Cas II :* $l_i(f_j) = 2$, $i \in \{1, \ldots, t\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$

Pour chaque $l_i$ et chaque $M_j$ pour lesquels on a $l_i(f_j) = 2$, comme $m_0(f_j) = m_j(f_j)$, on peut associer deux cocycles $C_1^j, C_2^j \in \mathcal{C}(M_j)$, tels que $f_j \in C_1^j \cap C_2^j$. On construit maintenant deux listes $L_k$, $k = 1, 2$ avec ces $C_j^k$, pour tout $j$ où $l_i(f_j) = 2$. On va transformer la métrique $l_i$ et les listes $L_1$, $L_2$ en deux métriques $K_5$ ou $F_7$ de la manière suivante $(k = 1, 2)$ :

$$l_i^k(e) = \begin{cases} l_i(e), & \text{si } e \neq f_j,\ \forall j \in \{1, \dots n\}, \\ 2, & \text{si } e \in C \in L_k,\ e \neq f_j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $l_i^1, l_i^2$ sont des métriques de $\Delta_{(K_5,F_7)}(M)$, et que

$$\frac{1}{2}l_i^1 + \frac{1}{2}l_i^2 = l_i + \sum_{C \in L_1} \chi^{C-f_j} + \sum_{C \in L_2} \chi^{C-f_j}.$$

Á la fin, on rajoute à la liste les métriques correspondant aux cocycles qui ne contiennent pas le marqueur. Et ainsi on finit la décomposition. □

On peut utiliser ce résultat pour étendre le théorème 2.10 avec une affirmation en plus, quoique il va nous falloir une condition pour assurer maintenant les équivalences ; on exige que le matroïde ne contienne pas de mineurs $M^*(P_{10})$, comme cela a été fait pour le théorème 2.33. Remarquons que maintenant la proposition 2.35 fournit un packing demi-entier, et non plus entier.

**Théorème 2.36** *Si un matroïde binaire $M$ ne contient pas de mineur $M^*(P_{10})$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*
*(i) $M$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7)}(M)$ ;*
*(ii) $M$ est fluant par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}(M)$ ;*
*(iii) $M$ ne contient pas de mineur $AG(2,3)$, $S_8$, $R_{10}$, $M(H_6)$, $F_7 \bigoplus_2 F_7$, $M(K_5) \bigoplus_2 F_7$ et $M(K_5) \bigoplus_2 M(K_5)$ ;*
*(iv) $M$ est demi-packing par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7)}(M)$.*

**Dém. :** Pour compléter les équivalences :
(i) $\Rightarrow$ (iv) Si $M$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7)}(M)$, alors $M$ peut être obtenu au moyen de 1- et 2-sommes de matroïdes cyclants

par rapport à $\Delta_{(CC)}(M)$ et d'une copie de $F_7$ ou (exclusif) d'une copie de $M(K_5)$. Par le Corollaire 2.29 et l'hypothèse que $M$ ne contient pas de mineur $M^*(P_{10})$, on sait que $M$ peut être obtenu au moyen de 1- et 2-sommes de matroïdes packings par rapport à $\Delta_{(CC)}(M)$ et d'une copie de $F_7$ ou (exclusif) d'une copie de $M(K_5)$.

Maintenant, en utilisant la proposition 2.35, il s'ensuit que $M$ est demi-packing par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7)}(M)$.
(iv) $\Rightarrow$ (iii) D'après les propositions 2.11 et 2.12 on peut déduire que ces matroïdes ne sont pas demi-packing par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7)}$, puisqu'il existe des métriques primitives pour chacun d'entre eux qui n'appartiennent pas à $\Delta_{\{0,1,2\}}$. □

Comme $M^*(P_{10})$ n'est pas graphique, si on restreint le théorème 2.36 aux graphes, on obtiendra

**Théorème 2.37** *Pour un graphe $G$ les affirmations suivantes sont équivalentes :*
*(i) $G$ est cyclant par rapport à $\Delta_{(CC,K_5)}(G)$ ;*
*(ii) $G$ est fluant par rapport à $\Delta_{\{0,1,2\}}(G)$ ;*
*(iii) $G$ ne contient pas de mineur $H_6$, $K_5 \bigoplus_2 K_5$ ;*
*(iv) $G$ est demi-packing par rapport à $\Delta_{(CC,K_5)}(G)$.* □

### 2.2.5 Les matroïdes packings

On dira qu'un matroïde binaire $M$ est *packing* si $M$ est packing par rapport aux métriques primitives existentes dans $\Delta_{\mathbb{Z}_+}(M)$.

Bien sûr, les matroïdes qui sont packings par rapport à $\Delta_{(CC)}$, ainsi que les matroïdes $M(K_5)$ et $F_7$, sont packings dans ce sens plus large. On montrera dans la suite que le matroïde $R_{10}$ est aussi packing.

**Théorème 2.38** *Le matroïde $R_{10}$ est packing par rapport à $\Delta_{(CC,R_{10})}$.*

**Dém. :** Soit $m$ une métrique bipartie sur $R_{10}$. Puisque $R_{10}$ est fluant par rapport à $\Delta_{(CC,R_{10})}$ (théorème 2.16), on peut décomposer $m$ en une somme de cocycles $C_i$, $1 \leq i \leq k$ et de métriques $R_{10}$ $l_j$, $1 \leq j \leq n$ :

$$m = \mu_1 \chi^{C_1} + \ldots + \mu_k \chi^{C_k} + \lambda_1 l_1 + \ldots \lambda_n l_n, \qquad (2.1)$$

où $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$.

On va raisonner par récurrence sur $\sum_{e \in E(R_{10})} m(e)$, et ainsi on peut supposer que $\lambda_i < 1$, $\mu_j < 1$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$.

Comme par le théorème 2.4 $R_{10}$ est minimal non-fluant, on peut supposer sans restreindre la généralité, que $m(e) > 0$, pour tout $e \in E(R_{10})$. On considérera le matroïde $R_{10}$ comme le matroïde dont les cycles sont les cycles pairs du graphe $K_5$, et dont les cocycles sont les cocycles de $K_5$ et les compléments de cocycles de $K_5$. On utilisera la numérotation donnée dans la fig. 2.10.

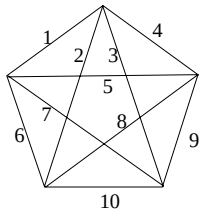


FIG. 2.10 - *Numérotation des arêtes de $K_5$*

On prouvera dans la suite quelques lemmes concernant des sommes de métriques, où un des opérants est un métrique $R_{10}$.

**Lemme 2.39** *La somme de deux métriques $R_{10}$ peut être décomposée comme une somme entière de cocycles.*

**Dém. :** On présentera les trois cas possibles de somme entre deux métriques $R_{10}$, $m_{(a,b,c)}$ et $m_{(e,f,g)}$, où $\{a,b,c\} \neq \{e,f,g\}$.
(I) $\{a,b,c\} \cap \{e,f,g\} = \emptyset$. Sans perte de généralité, soit $m_{(a,b,c)}$ et $m_{(e,f,g)}$ comme indiquées dans la fig 2.11, les arêtes $\{a,b,c\}$ sont en gras, et les arêtes $\{e,f,g\}$ sont en pointillés. Le résultat de la décomposition est indiqué aussi sur la fig. 2.11.
(II) $|\{a,b,c\} \cap \{e,f,g\}| = 1$. Sans perte de généralité, soit $m_{(a,b,c)}$ et $m_{(e,f,g)}$ comme indiquées dans la fig 2.12, les arêtes $\{a,b,c\}$ sont en gras, et les arêtes $\{e,f,g\}$ sont en pointillés. Le résultat de la décomposition est indiqué sur la fig. 2.12.
(III) $|\{a,b,c\} \cap \{e,f,g\}| = 2$. Sans perte de généralité, soit $m_{(a,b,c)}$ et $m_{(e,f,g)}$ comme indiquées dans la fig 2.13, les arêtes $\{a,b,c\}$ sont en gras,

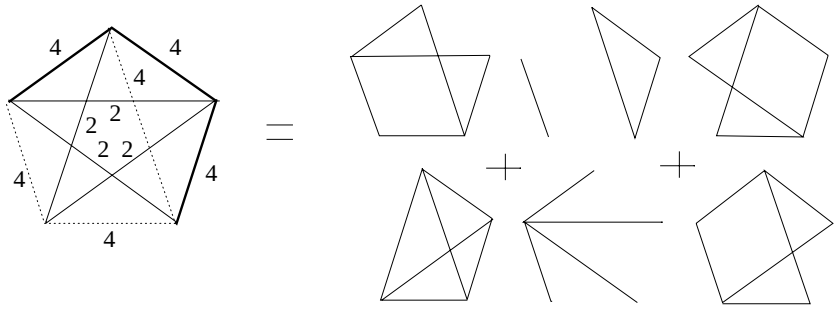


FIG. 2.11 - *Décomposition de la somme de deux métriques $R_{10}$ - cas I*

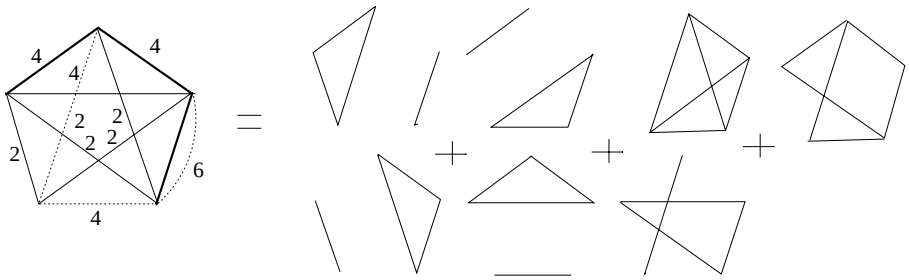


FIG. 2.12 - *Décomposition de la somme de deux métriques $R_{10}$ - cas II*

et les arêtes $\{e, f, g\}$ sont en pointillés. Le résultat de la décomposition est indiqué aussi sur la fig. 2.13. □

**Lemme 2.40** *La somme d'une métrique $R_{10}$, $m_{(a,b,c)}$ et un cocycle $C$, $|C| = 4$,, tels que $C \cap \{a, b, c\} = \emptyset$, peut être décomposée en une somme entière de cocycles.*

**Dém. :** Dans un premier cas, supposons que $C$ correspond à l'étoile d'un sommet. Sans perte de généralité, soit $m_{(a,b,c)}$ et $C$ comme indiqués dans la fig 2.14, les arêtes $\{a, b, c\}$ sont en gras, et $C$ est en pointillés. Le résultat de la décomposition est indiqué aussi sur la fig. 2.14.

Supposons maintenant que $C$ est le complément d'un cocycle de $K_5$ à 6 éléments. Sans perte de généralité, soit $m_{(a,b,c)}$ et $C$ comme indiqués dans la fig 2.15, les arêtes $\{a, b, c\}$ sont en gras, et $C$ est en pointillés. Le résultat de la décomposition est indiqué aussi sur la fig. 2.15. □

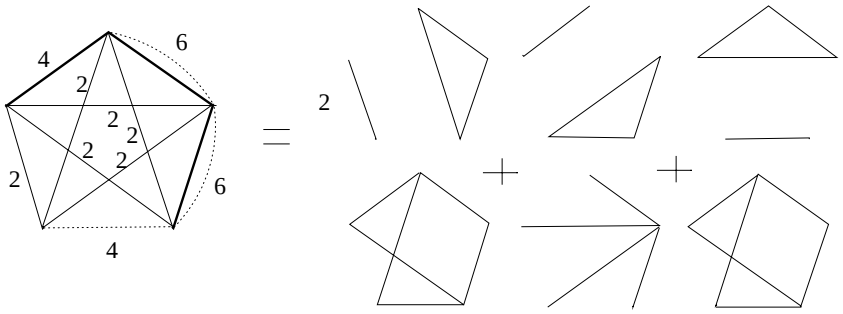


FIG. 2.13 - *Décomposition de la somme de deux métriques $R_{10}$ - cas III*

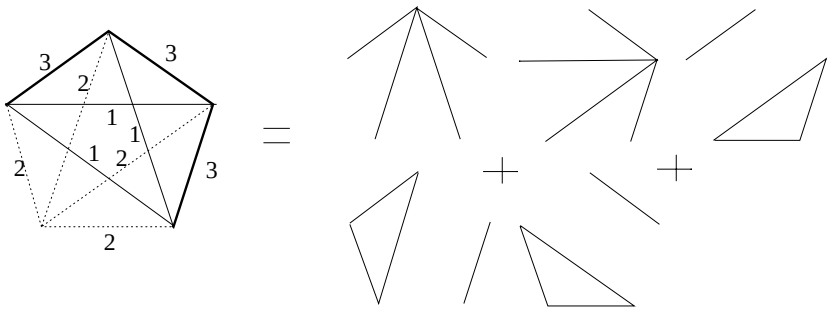


FIG. 2.14 - *Décomposition de la somme d'une métrique $R_{10}$ et de l'étoile d'un sommet*

**Lemme 2.41** *La somme d'une métrique $R_{10}$ $m_{(a,b,c)}$ et d'un cocycle à 6 éléments, où $|C \cap \{a,b,c\}| \leq 2$, peut être décomposée en une somme entière de cocycles.*

**Dém. :** Considérons les cas possibles :
(I) $\{a,b,c\} \cap C = \emptyset$. Comme $\{a,b,c\}$ appartient à un cycle $D$, cela implique que $D \cap C = \emptyset$, mais dans ce cas, $D \cap C$ recouvrent $E(R_{10})$, ce qui est impossible dans $R_{10}$.
(II) $|\{a,b,c\} \cap C| = 1$. Sans perte de généralité, soient $C$ et $m_{(a,b,c)}$ comme indiqués sur la fig. 2.16, les arêtes $\{a,b,c\}$ sont en gras, et les arêtes de $C$ sont en pointillés. Le résultat de la décomposition est indiqué aussi sur la fig. 2.16.
(III) $|\{a,b,c\} \cap C| = 2$. Sans perte de généralité, soient $C$ et $m_{(a,b,c)}$

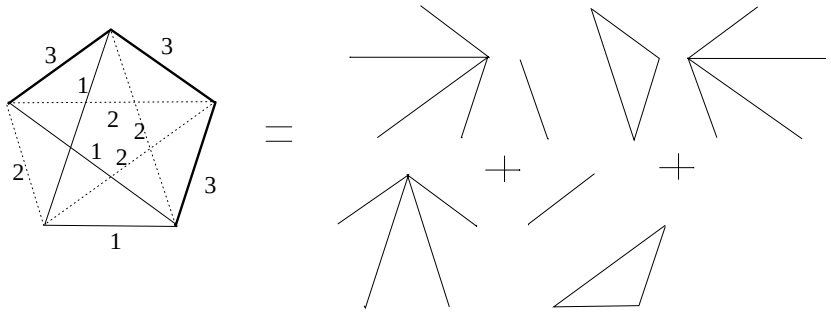


FIG. 2.15 - *Décomposition de la somme d'une métrique $R_{10}$ et d'un cocycle à 4 éléments qui n'est l'étoile d'un sommet*

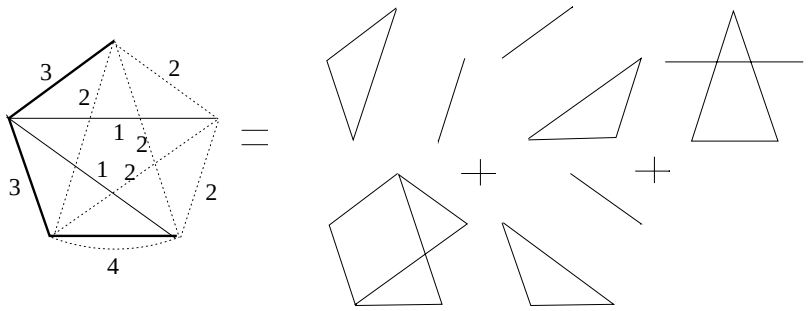


FIG. 2.16 - *Décomposition de la somme d'une métrique $R_{10}$ et d'un cocycle à 6 éléments - cas II*

comme indiqués sur la fig. 2.17, les arêtes $\{a, b, c\}$ sont en gras, et les arêtes de $C$ sont en pointillés. La décomposition obtenue y est aussi représentée. □

En utilisant tous ces lemmes, on conclut facilement que, dans la décomposition de $m$, il peut exister au plus une métrique $R_{10}$, $m_{(a,b,c)}$, et dans ce cas, les cocycles intersectent $\{a, b, c\}$.

**Lemme 2.42** *La somme de deux cocycles $C_1$, $C_2$ de cardinalité 6, dont l'intersection est inférieure à 4, peut être décomposée en un somme entière de cocycles de cardinalité 4.*

**Dém. :** Il est facile de voir que $3 \leq |C_1 \cap C_2| \leq 4$. En effet, comme $12 = |C_1| + |C_2| = |C_1 \cap C_2| + |C_1 \cup C_2|$, si $|C_1 \cap C_2| < 3$, alors

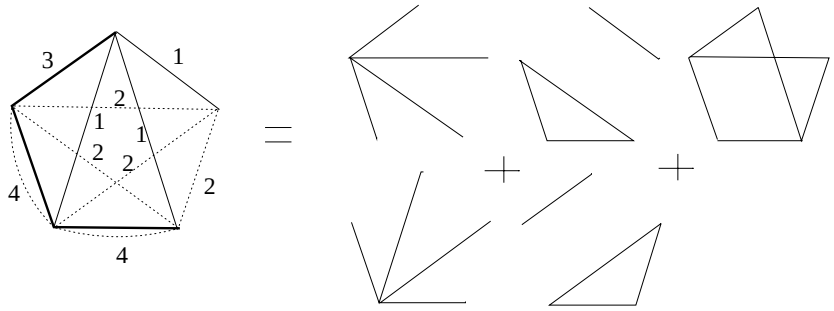


FIG. 2.17 - *Décomposition de la somme d'une métrique $R_{10}$ et d'un cocycle à 6 éléments - cas III*

$|C_1 \cup C_2| \geq 10$ ; c'est-à-dire que $C_1 \cup C_2$ recouvrent $E(R_{10})$. Comme $E(R_{10}) - C_1$ est un cocycle, on conclut que $C_2 \cap C_1$ est un cocycle de cardinalité 2 ou 1, mais cela est impossible.

Si $|C_1 \cap C_2| = 3$, supposons sans perte de généralité que $C_1$ et $C_2$ sont comme indiqués sur la fig. 2.18, les arêtes de $C_1$ sont en gras, et les arêtes de $C_2$ sont en pointillés. La décomposition obtenue y est aussi représentée. □

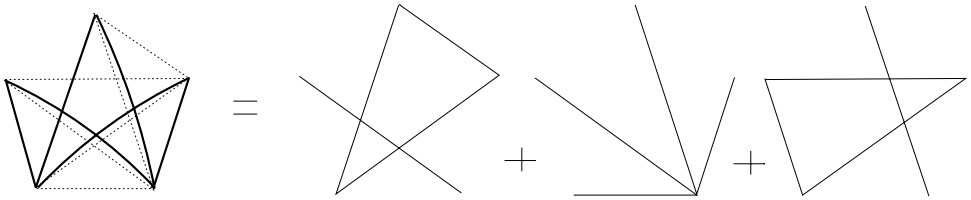

FIG. 2.18 - *Décomposition de la somme de deux cocycles à 6 éléments dont l'intersection est de 3 éléments*

**Lemme 2.43** *Si deux cocycles $C_1, C_2$ de cardinalité 6 sont tels que $|C_1 \cap C_2| = 4$, alors $C_1 \cap C_2$ est un cycle.*

**Dém. :** Soit $C_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$, où $\{a, b, c, d\}, \{b, e, f, d\}, \{a, c, e, f\}$ sont des cycles de cardinalité 4. Alors $C_2$ doit intersecter chacun de ces cycles dans un nombre pair d'éléments, et et $|C_1 \cap C_2| = 4$, cela implique que $C_1 \cap C_2$ est un de ces cycles. □

Ces deux derniers lemmes impliquent que, dans la décomposition (2.1) les cycles de cardinalité 6 doivent s'intersecter dans un cycle de cardinalité 4. Il est facile de voir que, si on fixe un cycle de cardinalité 4, il y a seulement 3 cocycles de cardinalité 6 qui le contiennent.

Supposons maintenant qu'il existe un cocycle $C$ dans la décomposition (2.1) tel que $|C| = 4$. Pour tout cycle $K$ tel que $m(K-e) = m(e)$, on a $\chi^C(K-e) = \chi^C(e)$, puisque $C$ est dans la décomposition (2.1). Si $|K| = 4$ et $m(K-e) - m(e) \geq 2$, comme $\chi^C(K-e) - \chi^C(e) \leq 2$, alors $(m-\chi^C)(K-e) - (m-\chi^C)(e) \geq 0$. Donc, si on ne peut pas soustraire $C$ de $m$, cela veut dire qu'il existe un cycle $K$ de cardinalité 6 tel que

$$(m-\chi^C)(K-e) - (m-\chi^C)(e) < 0$$

et cela implique que $C \subseteq K$ et qu'il existe un élément $e$ tel que $m(K-e) - m(e) = 2$. Dans ce cas on dira que $K$ est un cycle *quasi serré* et $e$ est l'élément *quasi serré de* $K$.

**Lemme 2.44** *Si $C_1$ et $C_2$, $C_1 \neq C_2$, $|C_1| = |C_2| = 6$, sont deux cycles quasi serrés, avec $f_1$, $f_2$ leurs éléments quasi serrés, respectivement, alors $f_1 \notin C_2$ et $f_2 \notin C_1$*

**Dém. :** Supposons que $f_2 \in C_1$, $f_1 \not\in C_2$. Soient $C_1, C_2$ tels que $|C_1 \cap C_2| = 3$ et, sans perte de généralité, soient $C_1 = \{e_1, e_4, e_5, e_6, e_7, e_{10}\}$, où $f_1 = e_1$ et $C_2 = \{e_2, e_4, e_5, e_7, e_8, e_9\}$, et $f_2 = e_4$ ($e_i$ représente l'élément correspondant à l'arête $i$ du graphe $K_5$, comme indiqué dans la fig. 2.10). Alors,

$$\begin{aligned} m(e_1) &= m(e_4, e_5, e_6, e_7, e_{10}) - 2 \\ m(e_4) &= m(e_2, e_5, e_7, e_8, e_9) - 2 \end{aligned}$$

et ceci implique que $m(e_1) = m(e_2, e_6, e_8, e_9, e_{10}) + 2m(e_5, e_7) - 4$ ; comme $m(e_1) \leq m(e_2, e_7, e_{10})$, puisque $\{e_1, e_2, e_7, e_{10}\}$ est un cycle pair, on en déduit que $4 \geq m(e_6, e_7, e_8, e_9) + 2m(e_5)$ et ceci n'est pas possible, puisque que l'on a supposé que $m(e) \geq 1$, pour tout $e \in E(R_{10})$.

Maintenant, soient $C_1, C_2$ tels que $|C_1 \cap C_2| = 4$ et $f_2 \in C_1$, $f_1 \notin C_2$. Alors

$$\begin{aligned} m(f_2) &= m(C_2 - f_2) - 2 \\ m(f_1) &= m(C_1 - f_1 - f_2) + m(f_2) - 2 \end{aligned}$$

et ceci revient à écrire

$$\begin{aligned} m(f_1) &= m(C_2 - f_2) + m(C_1 - f_1 - f_2) - 4 \\ &= m(C_1 \triangle C_2 - f_1) + 2m(C_1 \cap C_2 - f_2) - 4. \end{aligned}$$

Mais $C_1 \triangle C_2$ est un cycle, $|C_1 \triangle C_2| = 4$ et $f_1 \in C_1 \triangle C_2$, donc $m(f_1) \leq m((C_1 \triangle C_2) - f_1)$. Ceci implique que $2m(C_1 \cap C_2 - f_2) \leq 4$, qui est une contradiction aux faits que $|C_1 \cap C_2 - f_2| = 3$ et $m(e) \geq 1$ pour tout $e \in E(R_{10})$.

Soient $C_1, C_2$, $|C_1 \cap C_2| = 4$ et $\{f_1, f_2\} \subset C_1 \cap C_2$. Alors

$$\begin{aligned} m(f_2) &= m(C_2 - f_2 - f_1) + m(f_1) - 2 \\ m(f_1) &= m(C_1 - f_1 - f_2) + m(f_2) - 2, \end{aligned}$$

et ceci implique que $m(C_1 \triangle C_2) + 2m((C_1 \cap C_2) - f_1 - f_2) = 4$. Mais le membre de gauche de cette égalité vaut au moins 6, puisque $m(e) \geq 1$, pour tout $e \in E(R_{10})$, $|C_1 \cap C_2 - f_1 - f_2| = 2$ et $|C_1 \triangle C_2| = 4$. On obtient donc une contradiction. □

**Lemme 2.45** *Pour la métrique $m$, il existe au plus 3 cycles à 6 éléments quasi serrés. S'il en existe trois, soient $C_1, C_2, C_3$ les cycles, et $f_1, f_2, f_3$ leurs éléments quasi serrés. Alors $f_1 \notin C_2 \cup C_3$, $f_2 \notin C_1 \cup C_3$ et $f_3 \notin C_1 \cup C_2$.*

**Dém. :** On va montrer que $|C_1 \cup C_2 \cup C_3| = 10$, et ainsi on ne peut pas avoir un quatrième cycle quasi serré.

S'il existe $i, j$, $1 \leq i < j \leq 3$ tel que $|C_i \cap C_j| = 3$, alors $|C_i \cup C_j| = 12 - 3 = 9$, et ainsi $E(R_{10}) - (C_i \cap C_j) = f_k$, où $k = 6 - i - j$, et cela implique que $|C_1 \cup C_2 \cup C_3| = 10$.

Sinon, on a $|C_i \cap C_j| = 4$, pour $1 \leq i < j \leq 3$. Dans ce cas, en dualisant le lemme 2.43, on remarque que $C_i \cap C_j$ est un cocycle de cardinalité 4, et $|C_i \cup C_j| = 8$, $1 \leq i < j \leq 3$ . Si $|C_1 \cup C_2 \cup C_3| = 9$, alors $|C_3 \cap (C_1 \cup C_2)|$ est impair. Comme $|C_1 \triangle C_2| = 4$ et $|C_1 \cap C_2| = 4$, un parmi $C_3 \cap (C_1 \triangle C_2)$ et $C_3 \cap (C_1 \cap C_2)$ est impair. Mais

$$\begin{aligned} |C_3 \cap (C_1 \triangle C_2)| &= |C_3 \cap (C_1 - C_2)| + |C_3 \cap (C_2 - C_1)| \\ &= |C_3 \cap C_1| - |C_3 \cap C_1 \cap C_2| + |C_3 \cap C_2| \\ &\quad - |C_3 \cap C_2 \cap C_1| \\ &= 4 - 4 - 2|C_3 \cap C_1 \cap C_2| \equiv 0 \bmod 2 \end{aligned}$$

et $|C_3 \cap C_1 \cap C_2|$ est pair, puisque $C_1 \cap C_2$.

Le lemme 2.44 conclut la démonstration. □

**Lemme 2.46** *Soient $C_1, C_2, C_3$ trois cycles distincts de cardinalité 6 quasi serrés, et $f_1, f_2, f_3$ leurs éléments quasi serrés, respectivement. Si $\{f_1, f_2, f_3\}$ est contenu dans un cycle de cardinalité 4, alors la métrique $m$ est une métrique $R_{10}$ ; sinon, $m$ peut être décomposée en une somme entière de cocycles.*

**Dém. :** Nous montrerons l'affirmation pour 2 cas particuliers, et les autres cas peuvent être réduits à ceux-ci.
(I) Soient $C_1 = \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_9\}$, $C_2 = \{e_1, e_4, e_5, e_8, e_9, e_{10}\}$ et $C_3 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8\}$, et $f_1 = e_6$, $f_2 = e_{10}$, $f_3 = e_7$. Notons que $\{e_6, e_7, e_{10}\}$ n'appartient pas à un cycle de taille 4. Puisque $C_1, C_2$ et $C_3$ sont quasi serrés, on a l'égalité suivante

$$\begin{aligned} m(e_6, e_{10}, e_7) &= m(e_3, e_4, e_5, e_8, e_9) + m(e_1, e_4, e_5, e_8, e_9) + \\ &\quad + m(e_1, e_2, e_3, e_4, e_8) - 6. \end{aligned}$$

Comme $m(e_6) \leq m(e_1, e_4, e_8)$, $m(e_7) \leq m(e_3, e_4, e_5)$ et $m(e_{10}) \leq m(e_2, e_4, e_9)$, alors on obtient que $6 \leq m(e_1) + m(e_3) + m(e_5) + 2m(e_8) + m(e_9)$, et cela implique que $m(e_1) = m(e_3) = m(e_5) = m(e_8) = m(e_9) = 1$. En utilisant aussi que $m(e_{10}) \leq m(e_3, e_4, e_8)$ et $m(e_7) \leq m(e_1, e_4, e_9)$ et $m(e_6) \leq m(e_1, e_4, e_8)$, on obtient $6 \leq m(e_2) + m(e_3) + 2m(e_5) + m(e_8) + m(e_9)$, qui nous donne $m(e_2) = 1$.

On conclut donc que $m(e_6) = m(e_7) = m(e_{10}) = m(e_4) - 2$, et que la métrique $m$ est comme montre la fig. 2.19, où $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$. La décomposition de $m$ y est aussi donnée.
(II) Soient $C_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_9\}$, $C_2 = \{e_2, e_3, e_5, e_7, e_9, e_{10}\}$ et $C_3 = \{e_1, e_4, e_5, e_8, e_9, e_{10}\}$, et $f_1 = e_6$, $f_2 = e_7$, $f_3 = e_8$. Notons que $\{e_6, e_7, e_8\}$ est contenu dans un cycle de taille 4. Puisque $C_1, C_2$ et $C_3$ sont quasi serrés, on a l'égalité suivante

$$\begin{aligned} m(e_6, e_7, e_8) &= m(e_1, e_2, e_3, e_4, e_9) + m(e_2, e_3, e_5, e_9, e_{10}) + \\ &\quad + m(e_1, e_4, e_5, e_9, e_{10}) - 6. \end{aligned}$$

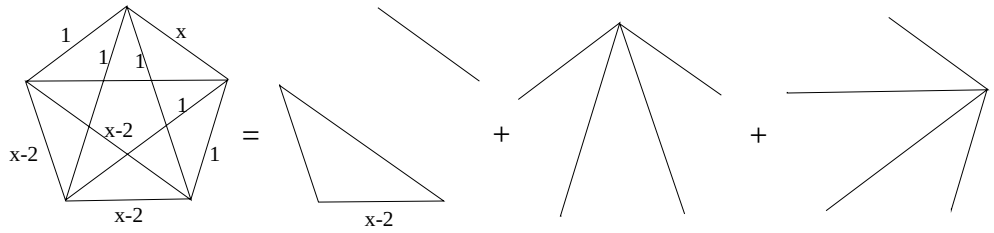


FIG. 2.19 - *Métrique obtenue à partir de 3 cocycles serrés*

Comme $m(e_6) \leq m(e_2, e_4, e_5)$, $m(e_7) \leq m(e_1, e_4, e_9)$ et $m(e_8) \leq m(e_1, e_2, e_5)$, alors on obtient que $6 \leq 2m(e_3) + 2m(e_9) + 2m(e_{10})$, et cela implique que $m(e_3) = m(e_9) = m(e_{10}) = 1$. Et comme $m(e_6) \leq m(e_5, e_9, e_{10})$ et $m(e_8) \leq m(e_3, e_4, e_{10})$, et $m(e_7) \leq m(e_1, e_4, e_9)$, on obtient que $6 \leq m(e_1) + 2m(e_2) + m(e_3) + m(e_5) + m(e_9)$, qui nous donne les égalités $m(e_1) = m(e_2) = m(e_3) = m(e_5) = m(e_9) = 1$.

On conclut donc que $m(e_6) = m(e_7) = m(e_8) = 3$, et que la métrique $m$ est une métrique $R_{10}$.

Les autres cas peuvent être démontrés de la même façon. □

D'après ce dernier lemme, on déduit que il y a seulement deux cycles quasi serrés, et ceci implique qu'il y a au plus 2 cocycles de cardinalité 4 dans la décomposition (2.1).

Tous les résultats précédents nous donnent comme conclusion que dans la décomposition (2.1) il y a

1. au plus une métrique $R_{10}$, $m_{(a,b,c)}$ ;
2. au plus 2 cocycles $C_1, C_2$ de cardinalité 4 (et qui intersectent $\{a, b, c\}$, s'il y a une métrique $R_{10}$ $m_{(a,b,c)}$ dans la décomposition) ;
3. au plus 3 cocycles de cardinalité 6 $C_3, C_4, C_5$, dont l'intersection est un cycle de cardinalité 4 (qui contient $\{a, b, c\}$, s'il y a une métrique $R_{10}$ $m_{(a,b,c)}$ dans la décomposition).

On vérifie maintenant les cas possibles. Sauf indication contraire, si un coefficient $\epsilon$ apparaît dans la décomposition considérée, on suppose que $\epsilon > 0$.

$\triangleright$ $m = \lambda m_{(a,b,c)} + \mu_i \chi^{C_i}$, $1 \leq i \leq 5$ ou $m = \lambda m_{(a,b,c)} + \mu_1 \chi^{C_1} + \mu_2 \chi^{C_2}$

ou $m = \lambda m_{(a,b,c)} + \mu_i \chi^{C_i} + \mu_j \chi^{C_j}$ $3 \leq i < j \leq 5$ ;

Dans ces cas, il existe un élément $e \notin \{a,b,c\}$ tel que $m(e) = \lambda m_{(a,b,c)}(e)$, et ceci contredit le fait que $m$ est entière.

▷ $m = \mu_1 \chi^{C_1} + \mu_3 \chi^{C_3}$ ou $m = \mu_1 \chi^{C_1} + \mu_3 \chi^{C_3} + \mu_4 \chi^{C_4}$ ou $m = \mu_1 \chi^{C_1} + \mu_2 \chi^{C_2} + \mu_3 \chi^{C_3}$ ;

Dans ce cas, il y a au moins un élément qui appartient à seulement un cocycle $C_i$ ; ainsi $\mu_i = 1$, et ceci n'est pas possible.

▷ $m = \mu_1 \chi^{C_1} + \mu_2 \chi^{C_2} + \mu_3 \chi^{C_3} + \mu_4 \chi^{C_4} + \mu_5 \chi^{C_5}$.

Dans ce cas, en utilisant le fait que $0 < \mu_i < 1$, $1 \leq i \leq 5$, qu'il existe au moins deux éléments qui appartiennent à seulement deux cocycles, et que $m$ est bipartie, on conclut que $m$ est une des métriques montrées dans la fig. 2.20, et ces métriques sont toutes décomposables en une somme entière de cocycles.

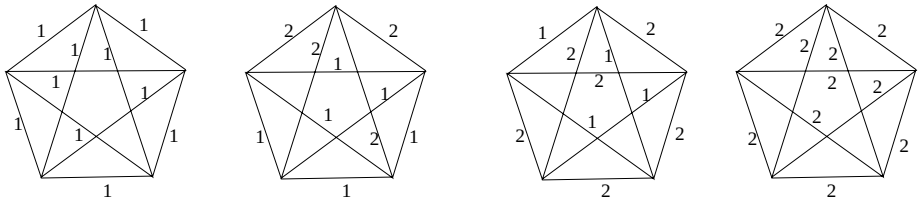

FIG. 2.20 - *Métriques obtenues à partir de la somme de 5 cocycles*

▷ $m = \lambda m_{(a,b,c)} + \mu_1 \chi^{C_1} + \mu_2 \chi^{C_2} + \mu_3 \chi^{C_3} + \mu_4 \chi^{C_4} + \mu_5 \chi^{C_5}$, ou $1 > \mu_i \geq 0$, $4 \leq i \leq 5$ ;

Soit $\{a,b,c,d\}$ le cocycle qui contient $\{a,b,c\}$. Si $C \cap \{a,b,c\} = \{a,c\}$ et $C_2 \cap \{a,b,c\} = \{a,b\}$, alors $m(a) = m(c) + \mu_2$, et ainsi $\mu_2$ est entier, mais ceci n'est pas possible. Si $C_1 \cap \{a,b,c\} = \{a\}$ et $C_2 \cap \{a,b,c\} = \{a,b\}$, alors $m(a) = m(b) + \mu_1$, et ainsi $\mu_1$ est entier, mais ceci aussi n'est pas possible. Si $C_1\{a,b,c\} = \{a,b\}$ et $C_2 \cap \{a,b,c,d\} = \{c,d\}$, alors $m(a,b,c,d) = 2m(a) + 2m(d) + 2\lambda$ et ainsi on conclut que $\lambda = 1/2$ et que $m(c) \equiv m(d) + 1 \bmod 2$ ; donc $m(a,b,c,d) \equiv 1 \bmod 2$, mais ceci contredit l'hypothèse que $m$ est bipartie. Si $C_1 \cap \{a,b,c\} = C_2 \cap \{a,b,c\} = \{a,b\}$, alors $m(a,b,c,d) = 2m(a) + 2m(d) + 2\lambda$, et on finit comme pour le cas précédent. Tous les autres cas peuvent être réduits à ceux-ci.

▷ $m = \lambda m_{(a,b,c)} + \mu_1 \chi^{C_1} + \mu_3 \chi^{C_3} + \mu_4 \chi^{C_4} + \mu_5 \chi^{C_5}$, ou $1 > \mu_i \geq 0$, $3 \leq i \leq 5$ ;

Si $C_1 \cap \{a,b,c\} = \{a\}$ ou $C_1 \cap \{a,b,c\} = \{a,b\}$, alors $m(a) = m(c) + \mu_1$, et ainsi $\mu_1$ est entier, mais ceci contredit l'hypothèse initiale.

Ainsi on finit la vérification de cas, et on arrive à la conclusion qu'il n'existe pas de décomposition fractionnaire pour $m$ qui ne puisse pas être transformée en une décomposition entière, et cela prouve que $R_{10}$ est packing par rapport à $\Delta_{(CC,R_{10})}$. □

L'exemple donné par la fig. 2.9 implique que le résultat de la 2-somme de deux matroïdes packings n'est pas forcement packing. Mais cet exemple est essentiellement le seul, où on «2-somme» un $M(K_5)$, un $F_7$ ou un $R_{10}$ avec un matroïde qui est constitué de deux cycles élémentaires $C_1, C_2$ tels que $C_1 \cap C_2 = \{f\}$, où $f$ est le marqueur, et $|C_2| \geq 3$. On appellera cette configuration un $\overline{K_5}$, un $\overline{F_7}$ et un $\overline{R_{10}}$ respectivement.

Pour achever une bonne caractérisation des matroïdes packings, on aura besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.47** *Le matroïde $M$, résultant de la 2-somme d'un matroïde $M_1$ packing par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7,R_{10})}(M_1)$ et d'un matroïde $M_2$ qui est un cycle élémentaire, est packing par rapport à $\Delta_{(CC,K_5,F_7,R_{10})}(M)$.*

**Dém. :** Étant donnée une métrique bipartie $m : E(M) \to \mathbb{Z}_+$, on trouvera une décomposition entière de $m$ en cocycles, et en métriques $K_5$ ou $F_7$. Si $M_1$ ne contient pas de mineur $M(K_5)$, $F_7$, le résultat est trivial. Supposons donc l'autre cas. Soit $\{f\} = M_1 \cap M_2$.

Comme dans la démonstration de la proposition 2.35, on définit deux métriques $m_1 : E(M_1) \to \mathbb{Z}_+$ et $m_2 : E(M_2) \to \mathbb{Z}_+$ telles que

$$m_i(e) = \begin{cases} m(e), & \text{si } e \in E(M_i) - f, \\ q, & \text{si } e = f, \end{cases}$$

où $q = \min\{m(C - f) : C \in \mathcal{C}(M_1) \cup \mathcal{C}(M_2)\}$.

Il s'agit d'un raisonnement similaire à celui des remarque 1 et 2 dans la démonstration de la proposition 2.35 qui nous permet de prouver que $m_i$ $(i = 1, 2)$ est une métrique bipartie ; il existe donc des cocycles $C_1, \ldots, C_r \in \mathcal{C}^*(M_2)$ tels que $\sum_{i=1}^{r} \chi^{C_i} = m_2$, et $D_1, \ldots, D_s \in \mathcal{C}^*(M_1)$ et des métriques $K_5$ ou $F_7$ $l_1, \ldots, l_t$ tels que $\sum_{i=1}^{s} \chi^{D_i} + \sum_{j=1}^{t} l_j = m_1$. On suppose que les $k_2$ premiers cocycles $D_i$ contiennent $f$, que les $k_1$ premiers cocycles $D_i$ contiennent $f$, et que les $k_3$ premières métriques $l_i$ sont telles que $l_i(f) = 1$. Notons que $k_2 = k_1 + k_3 + 2(t - k_3)$.

Aux métriques $l_i$ telles que $l_i(f) = 1$ et aux cocycles $D_j$, $1 \leq j \leq k_2$, on associe un cocycle $C_k$, $1 \leq k \leq k_2$, et on remplace dans $l_i$ ou $D_j$ l'élément $f$ par $C_k - f$. Le résultat sera clarement une métrique $K_5$, $F_7$, ou un cocycle dans $M$.

Maintenant on associe à chaque métrique $l_i$, $k_3 + 1 \leq i \leq t$, deux cocycles $C_j$, $C_k$ contenant $f$, et on les remplace par $B_1$ et $B_2$ définis comme il suit. Soit $B_1 = C_j \triangle C_k$ ; $B_1$ est un cocycle dans $M_2$, et aussi dans $M$. Soit $B_2 = C_j \cap C_k$ ; si $|B_2| \equiv 0 \bmod 2$, alors, comme $M_2$ est un cycle élémentaire, $B_2$ est un cocycle dans $M_2$ et on peut construire une nouvelle métrique $l_i'$ à partir de $l_i$ et $B_2 - f$ de la façon suivante :

$$l_i'(e) = \begin{cases} l_i(e), & \text{si } e \notin E(M_2) - f \\ 2, & \text{si } e \in B_2 = f \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $|B_2| \equiv 1 \bmod 2$, alors on décompose $l_i$, avec $l_i(f) = 0$, en cocycles dans $M_1$, et on les ajoute à la liste ; dans ce cas, si $B_2 - f \neq \emptyset$, on ajoute $B_2 - f$ aussi (avec un coefficient 2), puisque $|(B_2 - f) \cap E(M_2)| \equiv 0 \bmod 2$, et $B_2 - f$ est donc un cocycle dans $M_2$ et dans $M$.

En procédant ainsi on trouve un packing entier de métriques $K_5$ ou $F_7$ et de cocycles pour $m$.

Pour le cas du matroïde $R_{10}$, la démonstration est similaire, mais on remplace les coefficients 2 par des coefficients 3. □

Maintenant le théorème est le suivant :

**Théorème 2.48** *Un matroïde binaire est packing si et seulement si $M$ ne contient pas de mineur $\overline{K}_5$, $\overline{F}_7$, $\overline{R}_{10}$ et $M^*(P_{10})$.*

**Dém. :** Il est facile de voir que si $M$ contient un des mineurs exclus, alors $M$ n'est pas packing. En effet, $M^*(P_{10})$ n'a pas la propriété de

somme de cycles entière et l'exemple de la fig. 2.9 montre que $\overline{K_5}$ (et analoguement $\overline{F_7}$ et $\overline{R_{10}}$) n'est pas packing. Considérons maintenant un matroïde binaire $M$ qui ne contient aucun des mineurs exclus. Si $M$ ne contient pas de $M(K_5)$, $F_7$ ou $R_{10}$, alors, par le corollaire 2.29, $M$ est packing par rapport à $\Delta_{(CC)}$. Sinon, chaque composante connexe de $M$ est le résultat des plusieurs 2-sommes d'un seul $M(K_5)$, $F_7$ ou $R_{10}$ avec des matroïdes qui sont des cycles élémentaires (sinon $M$ contiendrait un $\overline{K_5}$, $\overline{F_7}$ ou $\overline{R_{10}}$ comme mineur). En utilisant le lemme 2.47, on conclut que $M$ est packing. □

On observe que ce résultat est restrictif, puisque seulement des configurations «simples» sont permises dans la 2-somme. Mais il contient une bonne et complète caractérisation des matroïdes qui sont packings, dans le sens plus général.

# Chapitre 3

# Graphes $t$-parfaits et $h$-parfaits

On a remarqué que les circuits ont joué un rôle très important dans le chapitre precédent, comme une manière d'interpreter la solution d'un problème de multiflot. Nous verrons dans ce chapitre un autre sujet où les circuits – maintenant impairs – sont très importants.

Nous introduisons d'abord les définitions des graphes $t$- et $h$-parfaits, et donnons des résultats antérieurs et quelques remarques nouvelles concernant leur structure. Ensuite, nous présentons des classes connues des graphes $h$-parfaits seront étudiées et caractérisons les graphes $h$-parfaits dans des nouvelles classes. Nous donnerons à la fin notre contribution pour le problème de coloration de graphes $t$- et $h$-parfaits, avec des résultats nouveaux et des bornes pour le nombre chromatique.

## 3.1 Les origines des graphes $t$-parfaits et $h$-parfaits

Les graphes $t$- et $h$-parfaits sont d'une certaine façon une généralisation des graphes parfaits. La définition d'un graphe parfait est la suivante. Un graphe $G$ est dit *parfait* si

$$\chi(H) = \omega(H), \text{ pour tout sous-graphe induit } H \text{ de } G,$$

où $\chi(H)$ est le nombre chromatique de $H$ et $\omega(H)$ est la taille d'une clique maximum de $H$.

Le *polytope des stables* d'un graphe $G$ est l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des stables de $G$. La proposition suivante donne une propriété des graphes parfaits qui est présentée parfois comme une définition équivalente.

**Proposition 3.1** *[18, 42, 20, 8] Un graphe $G$ est parfait si et seulement si son polytope des stables est donné à partir des inéquations*

$$\begin{aligned} x(K) &\leq 1, \text{ pour toute clique maximale } K \text{ de } G, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

□

Les inéquations (3.1) seront appelées *inéquations de clique*.

Une des classes de graphes parfaits la plus simple est celle des graphes bipartis.À partir de la proposition 3.1, on remarque que le polytope des stables d'un tel graphe $G$ est très simple, et donné à partir des inéquations

$$\begin{aligned} x(e) &\leq 1, \quad \text{pour toute arête } e \text{ de } G, \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Par contre, il est facile d'observer que les trous impairs ne sont pas parfaits, puisque le vecteur $(1/2, \ldots, 1/2) \in \mathbb{R}^{VC}$ est un sommet du polytope défini par les inéquations de non-négativité et de cliques d'un trou impair $C$.

Pour étendre la classe des graphes parfaits de façon à inclure aussi les trous impairs, Chvàtal [8] introduit en 1975 les graphes $t$-parfaits. Un graphe $G$ est $t$-parfait si les inéquations suivantes définissent le polytope des stables de $G$:

$$\begin{aligned} x(e) &\leq 1, \qquad \text{pour toute arête } e \text{ de } G, \\ x(C) &\leq \frac{|C|-1}{2}, \text{ pour tout trou impair } C \text{ de } G, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Les inéquations (3.2), appelées *inéquations de trou*, «coupent» le point $(1/2, \ldots, 1/2) \in \mathbb{R}^{VC}$ du polytope défini seulement par les inéquations

d'arêtes et de non-négativité pour un trou impair $C$, c'est-à-dire que ce point n'appartient plus au polytope dès qu'on y rajoute les inéquations de trou. Ainsi, ce nouveau système, s'il est défini pour un trou impair, donne un polytope à sommets entiers.

Les inéquations de trou sont en fait de plans de coupes («cutting planes»), et apparaissent comme le résultat de la somme des inéquations des arêtes sur un trou impair, divisé par 2, et puis arrondit.

La définition d'un graphe $h$-parfait est similaire. Un graphe $G$ est dit *$h$-parfait* si son polytope des stables est donné par les inéquations de clique, de trou et non-négativité, c'est-à-dire, à partir de

$$\mathbb{P}(G) \quad \begin{cases} x(K) \leq 1, & \text{pour toute clique } K \text{ de } G, \\ x(C) \leq \frac{|C|-1}{2}, & \text{pour tout trou impair } C \text{ de } G, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

On remarque qu'un graphe $t$-parfait est toujours $h$-parfait, mais un graphe $h$-parfait est $t$-parfait seulement si la taille de sa clique maximum est 3.

D'après ces définitions, on peut facilement déduire qu'un sous-graphe induit $H$ d'un graphe $t$- ou $h$-parfait $G$ est lui aussi $t$- ou $h$-parfait. Le polytope des stables de $H$, étant une face de $\mathbb{P}(G)$, contient seulement des sommets entiers. Ainsi, comme conséquence directe, on conclut qu'un graphe $t$- ou $h$-parfait qui n'a pas de trou impair est parfait.

## 3.2 Résultats généraux

On étudiera maintenant la structure des graphes $t$- et $h$-parfaits. Comme la classe des graphes $h$-parfaits contient celle des graphes $t$-parfaits, on parlera maintenant seulement de graphes $h$-parfaits. Ensuite, on présentera un algorithme polynômial, déjà connu dans la literature, pour trouver un stable maximum dans un graphe $t$-parfait, en utilisant l'algorithme des ellipsoïdes.

### 3.2.1 Structure des graphes $h$-parfaits

Puisque les graphes $h$-parfaits ont été définis à partir de leur polytopes des stables, on peut tirer plusieurs conclusions sur des caractéris-

tiques des stables dans ces graphes. Notons par $2l(G)+1$ la cardinalité d'un trou impair minimum, et par $2L(G)+1$ celle d'un trou impair maximum. On utilisera $l$ ($L$ respectivement) à la place de $l(G)$ ($L(G)$ respectivement) quand cela ne pose pas de problème de contexte.

**Fait 3.2** *Si $G$ est un graphe h-parfait, et $\omega(G) \geq 3$, alors il existe un stable qui intersecte toutes les $\omega(G)$-cliques. Si $\omega(G) = 2$ et $G$ n'est pas biparti, alors il existe un stable qui intersecte tous les trous impairs de cardinalité minimum $2l(G)+1$.*

**Dém. :** Le système d'inéquations qui défini le polytope des stables de $G$ peut être reécrit comme

$$\boldsymbol{P}(G) \quad \begin{cases} x(K) \leq 1, & \text{pour toute clique } K \text{ de } G, \\ \frac{2}{|C|-1} x(C) \leq 1, & \text{pour tout trou impair } C \text{ de } G, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

et son polyèdre anti-bloquant (voir chapitre 1) est

$$ab(\boldsymbol{P}) \quad \begin{cases} x(S) \leq 1, & \text{pour tout stable } S \text{ de } G, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

On en déduit donc que les sommets de $ab(\boldsymbol{P})$ sont les vecteurs $\chi^K$, pour toute $\omega$-clique $K$, et les vecteurs $\frac{2}{|C|-1}\chi^C$, pour tout trou impair $C$. Si on considère le programme linéaire

$$\max_{x \in ab(\boldsymbol{P})} 1x,$$

alors on sait que les solutions optimales sont les $\omega(G)$-cliques, si $\omega(G) \geq 3$, et elles sont les vecteurs $\frac{2}{|C|-1}\chi^C$, pour tout trou impair $C$ de cardinalité minimum, si $\omega(G) = 2$ et $G$ n'est pas biparti. Par le théorème 1.5 (écarts complémentaires), le stable $S$ correspondant à une variable duale $y_S$ positive dans un solution duale optimale intersecte toutes les solutions primales optimales et on finit la démonstration.

□

Les résultats suivants caractérisent partiellement les voisinages dans un graphe $h$-parfait.

**Fait 3.3** *Si $G$ est h-parfait, alors, pour tout sommet $v \in VG$, le voisinage $N(v)$ de $v$ ne contient pas de trou impair induit.*

**Dém. :** Supposons $v \in VG$ est tel que $N(v)$ contient un trou impair induit $C$, où $|C| = 2k+1$. Si on considère la fonction objective suivante :

$$w(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u \in C \cup \{v\}, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors le point $x$ donné par

$$x(u) = \begin{cases} \frac{1}{2k+1}, & \text{si } u = v, \\ \frac{k}{2k+1}, & \text{si } u \in C, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

appartient à $I\!P(G)$ et $wx = k + \frac{1}{2k+1} > w\chi^S$, pour tout stable $S$ de $G[v + C]$. Ceci implique que $G$ n'est pas $h$-parfait. □

**Corollaire 3.4** *Si $G$ est $h$-parfait, alors le sous-graphe induit par le voisinage de chaque sommet est parfait.* □

Le résultat suivant permettra quelques fois de prouver qu'un graphe est $h$-parfait.

**Proposition 3.5** *Soit $G$ un graphe tel que $\omega(G) \leq 3$. S'il existe un trou impair $C$ dans $G$ qui est saturé par tout stable maximal, et si $G[VG - D]$ est $h$-parfait pour tout ensemble de sommets $D$, $D \subseteq C$, alors $G$ est $h$-parfait.*

**Dém. :** Soit $P(G, w)$ le programme linéaire

$$\max\{wx : x \in I\!P(G)\}$$

et $\text{opt}(G, w)$ la valeur optimale de $P(G, w)$. Supposons qu'il y ait un trou impair $C$ saturé par tout stable maximal. On notera par $a$ la valeur $\min\{w(e) : e \in C\}$, et par $G_a$ le graphe obtenu en éliminant les éléments $e$ pour lesquels $(w - a\chi^C)(e)$ est égal à zéro. Alors

$$\text{opt } (G_a, w - a\chi^C) = \text{opt } (G, w) - a(\frac{|C| - 1}{2}).$$

En effet, si $x^*$ est une solution optimale de $P(G,w)$, alors

$$\text{opt } (G_a, w - a\chi^C) \geq (w - a\chi^C)x^* = \text{ opt } (G,w) - a(\frac{|C|-1}{2})$$
$$\Rightarrow \text{opt } (G,w) \leq \text{opt } (G_a, w - a\chi^C) + a(\frac{|C|-1}{2}.)$$

Soit $\hat{x}$ est une solution optimale de $P(w - a\chi^C)$. Comme $G_a$ est $h$-parfait, $\hat{x}$ correspond à un stable maximal de $G_a$. Soit $\hat{\hat{x}}$ un ensemble maximal de $G$, qui est égal à $\hat{x}$ quand restreint à $G_a$, $\hat{\hat{x}}$ sature $C$, par hypothèse. Donc,

$$\text{opt } (G,w) \geq w\hat{\hat{x}} = w\hat{x} + a(\frac{|C|-1}{2}) = \text{opt } (G_a, w - a\chi^C) + a(\frac{|C|-1}{2}).$$

Il s'ensuit que ce stable étendu $\hat{\hat{x}}$ est une solution optimale entière de $P(w)$. □

Maintenant, si l'on considère seulement la classe des graphes sans triangle, on peut, par exemple, déduire une borne inférieure pour le nombre de stabilité d'un tel graphe :

**Proposition 3.6** *Si $G$ est un graphe $h$-parfait sans triangle, alors il existe un stable $S$ tel que $|S| \geq 0,4|VG|$ et $S$ sature chaque trou impair de cardinalité minimum.*

**Dém. :** Soit $y^*$ une solution optimale du programme linéaire

$$\begin{cases} \min 1y \\ \sum_i y_{S_i}\chi^{S_i} \geq 1, \quad \text{pour tout stable } S_i \text{ de } G,\ i = 1,\ldots,p, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

On sait que $\sum_i y^*_{S_i}\chi^{S_i}(v) = 1$, $v \in VG$, et $\sum_i y^*_{S_i} = 2 + \frac{1}{l(G)}$, puisque ce programme est le dual de

$$\max_{x \in ab(\boldsymbol{P})} 1x.$$

Ainsi,

$$|VG| = \sum_i y^*_{S_i}|S_i| \leq (\sum_i y^*_{S_i}) \max_i |S_i| \leq (2 + \frac{1}{l(G)}) \max_i |S_i|$$

et on obtient que

$$\max_i |S_i| \geq \frac{|VG|}{2 + \frac{1}{l(G)}} \geq \frac{|VG|}{2,5} = 0,4|VG|.$$

□

On pourrait aussi penser que pour cette classe est fermée par rapport à l'opération de «prendre des sous-graphes partiels». Voici un contre-exemple.

Le graphe $G$ sur la fig. 3.1(a) est $h$-parfait. En effet, il suffit d'utiliser le résultat donné par la proposition 3.5, en remarquant que le trou impair dessiné en gras est saturé par tout stable maximal de $G$. Mais le graphe $G$ contient un sous-graphe partiel qui n'est pas $h$-parfait (voir fig. 3.1(b)). Ce sous-graphe est un $K_4$ impair, qui sera étudié en détail dans la sous-section 3.3.2.

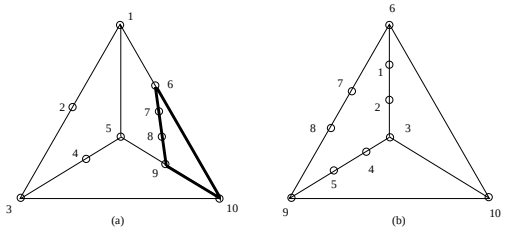


FIG. 3.1 - *Un graphe h-parfait sans triangle (a) contenant un sous-graphe partiel qui n'est pas h-parfait (b).*

### 3.2.2 Un algorithme polynômial pour le problème de l'ensemble de poids maximum

Un problème d'optimisation directement lié aux graphes $t$- et $h$-parfaits est de trouver un stable de poids maximum, selon une fonction de poids $w$. On présentera dans la suite un algorithme pour les graphes $t$-parfaits, et quelques notes sur les algorithmes existants pour les graphes $h$-parfaits.

Ces algorithmes utilisent l'algorithme des ellipsoïdes et ne sont pas efficaces dans le sens pratique. La théorie concernant cet algorithme, et

des conséquences sur l'optimisation combinatoire peuvent être retrouvés dans [27]. (Voir chapitre 1 pour quelques résultats.)

Maintenant, grâce aux résultats de [27], on sait que l'on peut résoudre avec un algorithme polynômial le problème de trouver un stable de poids maximum, s'il existe un algorithme polynômial de séparation pour l'enveloppe convexe du polytope des stables d'un graphe $t$-parfait. Ainsi on a besoin d'un algorithme polynômial pour le problème suivant :

Soient un graphe $G = (VG, AG)$, $z \in \mathbb{R}_+^{VG}$ et $A$ la matrice d'incidence de $G$. On veut décider si

$$\begin{cases} Az \leq 1, \\ z(C) \leq \frac{|C|-1}{2}, \quad \text{pour tout trou impair } C \text{ de } G, \end{cases}$$

ou bien trouver une contrainte violée.

L'algorithme suivant est bien connu et peut être retrouvé, par exemple, dans [23] :

1. vérifiez d'abord que $Az \leq 1$ ; si une des contraintes est violée, c'est fini ;

2. sinon, il faut vérifier les contraintes de trou impair. Il n'est pas difficile de voir que pour $z \geq 0$ satisfaisant $Az \leq 1$ les deux systèmes suivants sont équivalents :

$$z(C) \leq \frac{|C|-1}{2}, \ C \text{ trou impair (sommets)}, \tag{3.3}$$
$$l(C) \geq 1, \ C \text{ trou impair (arêtes)}, \tag{3.4}$$

où $l \in \mathbb{R}_+^{AG}$ est défini comme $l = 1 - Az$, on dira que $l_e$ est la longueur de l'arête $e$ ;

(En effet, (3.4) est équivalent à

$$\begin{aligned} (1 - Az)(C) &\geq 1 - \\ |C| - Az(C) &\geq 1 - \\ Az(C) &\leq |C| - 1 - \\ z(C) &\leq \frac{|C|-1}{2}.) \end{aligned}$$

3. maintenant pour vérifier (3.4), on construit un nouveau graphe $H$ à partir de $G$ de la façon suivante. Pour chaque sommet $u \in VG$, on crée deux sommets $u_+$ et $u_-$, et pour toute $e = \{uv\} \in AG$, on crée des arêtes $\{u_+v_-\}$ et $\{u_-v_+\}$, de longueur $l_e$.

   Les trous impairs $C$ de $G$ correspondent à des chaînes dans $H$ de $u_+$ à $u_-$ pour un sommet $u$ de $G$. Donc, trouver un trou impair $C$ qui viole (3.3) est équivalent à trouver une chaîne de de $u_+$ à $u_-$ de longueur inférieure à 1 pour un sommet $u$. Ceci peut être fait en temps polynômial, avec un algorithme de la plus courte chaîne (par exemple, voir [9]).

Comme résultat final :

**Théorème 3.7** *[23] Le problème de trouver un stable de poids maximum dans un graphe $t$-parfait peut être résolu en temps polynômial.* □

Pour les graphes $h$-parfaits il existe aussi des algorithmes pour trouver un ensemble de poids maximum [28, 29, 46], mais ils sont moins évidents que celui présenté pour les graphes $t$-parfaits.

Grötschel, Lovász et Schrijver donnent en [28] une relaxation du polytope des stables d'un graphe $G$, en utilisant des inéquations quadratiques (orthogonales) qui définissent un ensemble convexe. Plus précisément :

Soit $G = (VG, AG)$ un graphe. Une représentation orthonormale de $G$ dans $\mathbb{R}^n$ est une séquence $(u_v : v \in VG)$ tel que $u_v \in \mathbb{R}^n$, $\|u_v\| = 1$ pour tout $v \in VG$, et $u_v u_w = 0$ pour toute paire $vw$ de sommets non-adjacents. Soit $x : VG \to \mathbb{R}_+$ une fonction de poids sur $VG$. On défini

$$\theta(G; x) := \min(\max_{v \in VG} \frac{x_v}{(cu_v)^2}),$$

où le minimum est pris sur tous les vecteurs $c$ avec $\|c\| = 1$ et toutes les représentations orthonormales $(u_v)$ de $G$. (Pour le cas de $x_v = 1$, cette fonction $\theta(G)$ a été introduite par Lovász pour estimer la capacité de Shannon d'un graphe [44].)

Pour un graphe $G$ on défini aussi l'ensemble

$$TH(G) := \{x \in \mathbb{R}^V G_+ : \theta(\overline{G}; x) \leq 1\}.$$

Soient $St(G)$ l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des stables de $G$, $StK(G)$ le polytope défini par les contraintes de non-négativité et de clique, et $StT(G)$ le polytope défini par les contraintes de non-négativité et de trou. Alors, les deux résultats suivants sont prouvés dans [28].

**Théorème 3.8** $St(G) \subseteq TH(G) \subseteq StK(G)$. □

**Théorème 3.9** *Le problème faible d'optimisation pour $TH(G)$ peut être résolu en temps polynômial.* □

Ces deux résultats impliquent le théorème suivant en utilisant ces résultats.

**Théorème 3.10** *[28] Il existe un algorithme en temps polynômial pour le problème de trouver un stable de poids maximum dans un graphe h-parfait.*

**Dém. :** Si un graphe $G$ est $h$-parfait, alors $St(G) = StK(G) \cap StT(G)$ et $St(G) = TH(G) \cap StT(G)$. En utilisant les théorèmes 3.7 et 3.9, il est possible de résoudre le problème faible pour $TH(G)$ et $StT(G)$, et, grâce au corollaire 3.4 de [27], ce problème peut aussi être résolu pour leur intersection. Le théorème 1.7 implique que le problème original d'optimisation peut être résolu en temps polynômial. □

Dans [46] une autre démonstration des théorèmes 3.7 et 3.10 est donnée, en utilisant une méthode de projection. L'idée est que la projection d'un polytope peut avoir plus de facettes que le polytope lui-même. Cette remarque suggère que même si $P$ a un nombre exponentiel de facettes, on peut peut-être le représenter comme la projection d'un polytope $Q$, dans une dimension supérieur à celle de $P$.

Lovász et Schrijver donnent un procédé général pour créer de tels «liftings», basé sur la méthode de représentation orthonormale. Ils représentent un sous-ensemble pouvant être une solution non par son vecteur caractéristique $v$, mais par la matrice $vv^T$ ; ils transforment un programme linéaire $\{0,1\}$ à $n$ variables en un programme à $n^2$ variables, et ensuite le projettent sur l'espace de dimension $n$ de façon à ce que des plans de coupes soient introduits dans le système.

En appliquant cette méthode au polytope des stables, le résultat obtenu est que, si le graphe est parfait, $t$- ou $h$-parfait, alors le problème de trouver un stable de poids maximum peut être résolu en temps polynômial.

## 3.3 Étude de quelques classes

On présentera maintenant quelques classes de graphes $t$- et $h$-parfaits, et des caractérisations de ces graphes dans des classes particulières. La caractérisation la plus complète des graphes $t$-parfaits au moment de la rédaction de ce travail a été faite par Gerards [24]. Il montre qu'un graphe qui n'a pas de sous-graphe partiel homéomorphe à un $K_4$, dont les cycles correspondants aux triangles sont impairs, est $t$-parfait. Les résultats antérieurs à [24] méritent aussi d'être présentés.

### 3.3.1 Résultats connus

#### Graphes composés

Une des classes la plus simple de graphes $h$-parfaits est celle des graphes bipartis. Grâce à la forme de sa matrice d'incidence (qui est totalement unimodulaire), le fait que le polytope des stables d'un graphe biparti est entier est un résultat assez simple et connu (voir par exemple [55]).

A partir de cette classe, une autre classe a été découverte, celle des graphes obtenus par l'identification des sommets d'un graphe biparti. Soit $G = (V_1, V_2, AG)$ un graphe biparti et $b, c$ deux sommets de $G$ non-adjacents. Si l'on élimine $b$ et $c$ de $G$ et que l'on rajoute un nouveau sommet $a$, qui aura comme voisinage l'union des voisinages de $b$ et $c$,

le résultat est un nouveau graphe $\overline{G} = (V\overline{G}, A\overline{G})$, qui est le graphe obtenu de $G$ par *identification* de $b$ et $c$. Cette classe peut aussi être définie comme la classe des graphes pour lesquels il existe un sommet $u$ contenu dans tout cycle impair.

Fonlupt et Uhry ont prouvé le résultat suivant :

**Théorème 3.11** *[14] Un graphe obtenu par identification de deux sommets non-adjacents d'un graphe biparti est h-parfait.* □

Sbihi et Uhry étendent ce résultat en prouvant :

**Théorème 3.12** *Soit $G = (VG, AG)$ un graphe h-parfait et $a \in VG$ avec exactement deux voisins $b$ et $c$. Si $b$ et $c$ ne sont pas adjacents, alors le graphe obtenu de $G$ en éliminant $a$ et identifiant $b$ et $c$ est aussi h-parfait.* □

L'opération de composition suivante a été introduite dans [54], et augmente la classe des graphes $h$-parfaits. Soit $G = (VG, AG)$ un graphe, $a, b \in VG$ et $G' = (V'_1, V'_2, AG')$ un graphe biparti. Soit $G^* = (VG^*, AG^*)$ le graphe résultant d'une des opérations suivantes :

i. si $a, b$ sont adjacents, on identifie $a$ et $b$ avec deux sommets adjacents en $G'$, en éliminant l'arête double ;

ii. si $a, b$ ne sont pas adjacents et sont relié par une chaîne induite paire, on identifie $a$ et $b$ avec deux sommets non-adjacents en $G'$ et appartenant l'un à $V'_1$ et l'autre à $V'_2$, et on enlève la chaîne ;

iii. si $a, b$ ne sont pas adjacents et sont relié par une chaîne induite impaire, on identifie $a$ et $b$ avec deux sommets non-adjacents soit en $V'_1$ soit en $V'_2$, et on enlève la chaîne ;

Remarquons que (ii) n'exclue pas (iii) et vice-versa.

Sbihi et Uhry utilisent l'opération inverse de la composition utilisée pour construire un graphe $G^*$ à partir d'un graphe $G$ $h$-parfait et un graphe biparti $G'$, pour trouver un ensemble de poids maximum dans $G$, et montrer le résultat suivant :

**Théorème 3.13** *[54] Si $G$ est h-parfait, alors $G^*$ est h-parfait.* □

### Graphes série-parallèles

Une autre classe des graphes $t$-parfaits est celle des graphes série-parallèles [6]. Un graphe $G$ est *série-parallèle* s'il ne contient pas de sous-graphe partiel homéomorphe à un $K_4$. Un graphe série-parallèle sans point d'articulation peut être aussi vu comme le résultat de subdivisions et doublement d'arêtes à partir d'une arête double (d'où le nom série-parallèle).

Boulala et Uhry donnent en [6] un algorithme polynômial qui trouve le stable de poids maximum, et démontrent la conjecture proposée par Chvàtal [8] en 1975 :

**Théorème 3.14** *Si $G$ est un graphe série-parallèle, alors $G$ est $t$-parfait.* □

### Graphes sans $K_4$ impair

Dans [24], Gerards prouve un résultat plus général, qui est basé sur la notion de $K_4$ impair. Un $K_4$ *impair* est un sous-graphe partiel de $G$ homéomorphe à un $K_4$, dans lequel tous les triangles correspondent à des cycles impairs (voir fig. 3.2), les lignes en pointillés sont des chaînes disjointes, sauf pour leurs extrémités, et le mot «impair» indique que la face correspondante est un cycle impair).

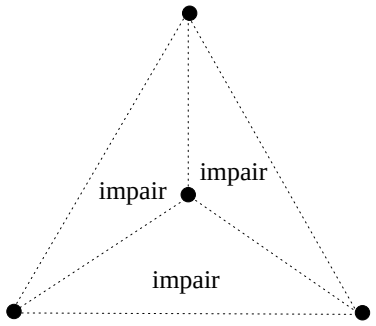


FIG. 3.2 - $K_4$ *impair*

En utilisant une façon de décomposer les graphes qui n'ont pas de

$K_4$ impair, il prouve le résultat suivant :

**Théorème 3.15** *[24] Si $G$ ne contient pas de $K_4$ impair, alors $G$ est $t$-parfait.* □

Gerards présente aussi un algorithme, qui utilise cette décomposition pour trouver un stable de poids maximum dans un graphe sans $K_4$ impair. De plus, il montre aussi le résultat suivant :

**Théorème 3.16** *Si $G$ ne contient pas de $K_4$ impair, alors le système qui défini son polytope des stables est totalement dualement intégral.* □

Le théorème 3.15 n'est pourtant pas une caractérisation complète des graphes $t$-parfaits, puisque, par exemple, le graphe donné fig. 3.3 est un $K_4$ impair $t$-parfait. On montrera une caractériseration des $K_4$ impairs qui sont $t$-parfaits dans la sous-section 3.3.2.

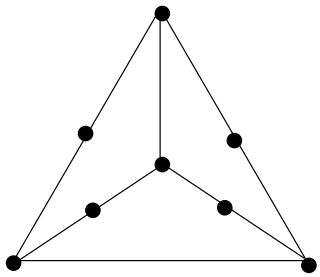

FIG. 3.3 - *$K_4$ impair $t$-parfait*

Motivé par ce résultat, Shepherd introduit le concept de graphe super $t$-parfait : Un graphe $G$ est *super $t$-parfait* si tout sous-graphe partiel de $G$ est $t$-parfait. Remarquons que cette classe contient tous les graphes qui n'ont pas de $K_4$ impair, mais elle en contient aussi quelques uns qui ont des $K_4$ impair $t$-parfaits, appelés $K_4$ impairs *courts* (on les verra dans la sous-section 3.3.2). Avec ces définitions Shepherd prouve :

**Théorème 3.17** *[67] $G$ est super $t$-parfait si et seulement si, soit $G$ ne contient pas de $K_4$ impair, soit il contient seulement des $K_4$ impairs courts.* □

### Complément des graphes adjoints

Dans la classe des graphes qui sont des compléments de graphes adjoints, Shepherd [66] caractérise ceux qui sont $h$-parfaits, puisque il y a des graphes dans cette classe qui n'ont pas cette propriété. Par exemple la roue à 5 sommets est le complément d'un graphe adjoint, mais elle n'est pas $h$-parfait, comme on a vu dans la démonstration du fait 3.3. Pour énoncer son résultat, on a besoin d'une nouvelle définition.

Dans un graphe $G$, soit $\{C_1, \ldots, C_k\}$ une famille d'ensembles de sommets disjoints deux à deux, tels que toutes les arêtes entre des différents $C_i$ existent. Le *joint* de ces ensembles est l'inéquation

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha(C_i)} \chi^{C_i} x \leq 1.$$

Le résultat de Shepherd est le suivant :

**Théorème 3.18** *[66] Si $G$ est le complément d'un graphe adjoint, alors toute facette différente d'une contrainte de non-négativité est donnée comme le joint d'une clique avec des anti-trous.* □

De ce résultat il s'ensuit :

**Corollaire 3.19** *[66] Si $G$ est le complément d'un graphe adjoint, alors $G$ est $h$-parfait si et seulement s'il ne contient pas de roue à 5 sommets et pas d'anti-trou impair à plus de 7 sommets.*

**Dém. :** Le joint d'une clique avec un anti-trou impair est toujours différent des facettes d'un graphe $h$-parfait, sauf s'il s'agit d'un joint simple $\{C\}$, où $C$ est une clique, ou d'un $C_5$, qui est un trou et un anti-trou au même temps.

Donc, si $G$ ne contient pas de joint d'un sommet et d'un trou à 5 sommets, dont le résultat est une roue, et pas d'anti-trou à plus de 7 sommets, grâce au théorème 3.18, on conclut que $G$ est $h$-parfait. □

### 3.3.2 Caractérisation des $K_4$ impairs

Comme on a vu précédemment, la caractérisation donnée par le théorème 3.15 n'est pas complète, puisqu'il existe des $K_4$ impairs qui sont $t$-parfaits et ne doivent pas être exclus.

On montrera quels sont les $K_4$ impairs qui sont $t$-parfaits. Le résultat lui-même nous a été communiqué par Gerards. Ici nous présentons notre manière de vérifier ce résultat.

On donnera d'abord quelques notations. On notera P (I, resp.), une chaîne qui a un nombre pair (impair, resp.) d'arêtes entre ses extrémités ; on notera $[IJ]$ l'ensemble de sommets dans la chaîne reliant les sommets $I$ et $J$, sans $I$ et $J$ ; et $x[IJ]$ dénotera $\sum_{v\in[IJ]} x_v$.

#### Les $K_4$ impairs non $t$-parfaits

On va considérer 3 cas, selon la parité des chaînes qui composent les circuits impairs.

On va montrer que le polytope des stables d'un graphe $G$ qui est un $K_4$ impair est strictement contenu dans $\mathbb{P}(G)$. Le procédé est toujours le même : pour ce graphe $G$ on obtient à partir des inéquations de trou et d'arête une inéquation à des coefficients entiers, dont le membre de droite est non-entier et peut être arrondit. L'inégalité obtenu reste valide pour les points entiers de $\mathbb{P}(G)$, mais cette nouvelle inéquation sépare un point fractionnaire de $\mathbb{P}(G)$ du polytope des stables de $G$. Cette inéquation est donc nécessaire à la description du polytope des stables de $G$, sans être une inéquation de non-négativité, d'arête ou de trou impair.

*Premier cas.* Soit $G$ un $K_4$ impair, dont les 6 chaînes entre les sommets de degré 3 ont un nombre impair d'arêtes.

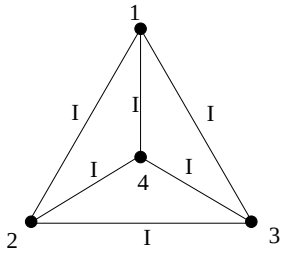


FIG. 3.4 - *Premier cas de $K_4$ impair non t-parfait*

Dans ce cas, on somme les inéquations de trou suivantes

$$x_1 + x[12] + x_2 + x[24] + x_4 + x[14] \leq \frac{3 + |[12]| + |[24]| + |[14]| - 1}{2}$$
$$x_1 + x[13] + x_3 + x[34] + x_4 + x[14] \leq \frac{3 + |[14]| + |[34]| + |[13]| - 1}{2}$$
$$x_1 + x[12] + x_2 + x[23] + x_3 + x[13] \leq \frac{3 + |[12]| + |[23]| + |[13]| - 1}{2}$$
$$x_2 + x[23] + x_3 + x[34] + x_4 + x[24] \leq \frac{3 + |[23]| + |[34]| + |[24]| - 1}{2}$$

avec l'inéquation suivante, qui résulte de la somme de quelques inéquation d'arête

$$x[IJ] \leq \frac{|[IJ]|}{2}, \quad 1 \leq I < J \leq 4.$$

Ceci nous donne

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3 \sum_{1 \leq I < J \leq 4} x[IJ] \leq 4 + 3 \sum_{1 \leq I < J \leq 4} \frac{|[IJ]|}{2}.$$

Et on divise l'inéquation par 3 :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \sum_{1 \leq I < J \leq 4} x[IJ] \leq 4/3 + \sum_{1 \leq I < J \leq 4} \frac{|[IJ]|}{2}.$$

En arrondissant les deux côtés, nous obtenons

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \sum_{1 \leq I < J \leq 4} x[IJ] \leq 1 + \sum_{1 \leq I < J \leq 4} \frac{|[IJ]|}{2}.$$

Celle-ci est une inéquation valide pour tous les points entiers de $\mathbb{P}(G)$. Mais on peut donner un point fractionnaire $y$ qui est dans $\mathbb{P}(G)$, et qui ne satisfait pas cette inéquation. Soit $y_i = 1/3$, si $i \in \{1,2,3,4\}$, et $y_v \in \{1/3, 2/3\}$, pour $v \in VG - \{1,2,3,4\}$, de façon à ce que $y_u = 1 - y_v$, pour chaque arête $\{u,v\}$, quand cela est possible, en respectant les contraintes d'arête. On peut facilement vérifier que $y \in \mathbb{P}(G)$.

Pour $y$ la valeur du membre de gauche de cette inéquation est $4/3 + \sum_{1 \leq I < J \leq 4} \frac{[[IJ]]}{2}$, qui est strictement plus grand que la valeur du membre de droite. Cette inéquation sépare $y$ du polytope des stables $G$ et elle est donc nécessaire à la description du polytope des stables de ce $K_4$ impair. Ceci prouve que $G$ n'est pas $t$-parfait.

*Deuxième cas.* Soit $G$ un $K_4$ impair dont les chaînes entre les sommets 1 et 2, 1 et 3, 2 et 3 ont un nombre impair d'arêtes, et les autres en ont un nombre pair.

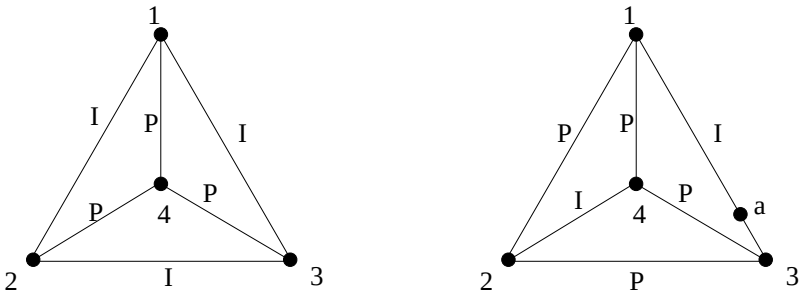


FIG. 3.5 - *Deuxième et troisième cas de $K_4$ impair non $t$-parfait*

*Troisième cas.* Soit $G$ le $K_4$ dont les chaînes ont les parités indiquées dans la fig. 3.5, avec la propriété que la chaîne entre les sommets 1 et 3 a au moins 3 arêtes.

Les vérifications de ces deux cas sont similaires à celle du premier cas, et peuvent être retrouvées en détails dans l'annexe C

### Le $K_4$ impair $t$-parfait

**Proposition 3.20** *Soit $G$ un $K_4$ impair de la forme de celui présenté*

*au troisième cas, mais qui a exactement une arête entre les sommets 1 et 3, et une entre les sommets 2 et 4. $G$ est $t$-parfait.*

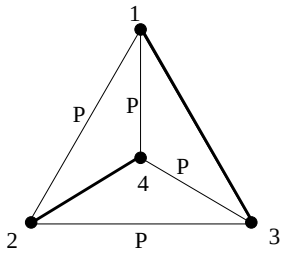


FIG. 3.6 - *$K_4$ impair $t$-parfait*

**Dém. :** Supposons par l'absurde, qu'il existe un sommet fractionnaire $y$ de $\boldsymbol{P}(G)$. Alors toutes les composantes de $y$ sont fractionnaires. En effet, s'il y a une composante $y_v = 0$, alors $y$ restreint au graphe $G' = G[VG - v]$ est un sommet de $\boldsymbol{P}(G')$. Comme $G'$ est $t$-parfait, puisqu'il ne contient pas de $K_4$ impair, $y$ est entier, et ceci est une contradiction. S'il y a une composante $y_v = 1$, alors $y_u = 0$ pour tout voisin $u$ de $v$, et ceci n'est pas possible.

Donc $y$ satisfait seulement des contraintes de trou et d'arêtes avec égalité, et comme $\boldsymbol{P}(G)$ est de dimension $|VG|$, $y$ doit satisfaire $|VG|$ inéquations.

Soit $S$ un stable construit de la façon suivante : si la chaîne entre les sommets 1 et 2 est $\{a_1, a_2, \ldots, a_{[12]}\}$, on prendra pour $S$ les sommets $a_i$, $i$ impair, et de même pour les autres chaînes, de façon à ce que $|S| = \frac{|[12]|+1}{2} + \frac{|[14]|+1}{2} + \frac{|[34]|+1}{2} + \frac{|[23]|+1}{2}$.

On affirme que $\chi^S$ satisfait avec égalité toutes les inéquations d'arête et de trou, sauf les contraintes $x_1 + x_3 \leq 1$ et $x_2 + x_4 \leq 1$. En effet, on observe que $\chi^S$ satisfait avec égalité les contraintes d'arête, puisque l'on a mis dans $S$ une extrémité de chaque arête de $G$, exception faite pour les arêtes $\{13\}$ et $\{24\}$. Pour les trous impairs, on peut vérifier facilement que $\chi^S$ sature tout trou impair. Par exemple, pour le trou $C = \{1, [12], 2, 4, [14]\}$,

$$\chi^S(C) = \frac{|[12]| + 1}{2} + \frac{|[14]| + 1}{2} = \frac{|C| - 1}{2}.$$

Remarquons que le sommet $y$ satisfait avec égalité une inéquation parmi $x_1+x_3 \leq 1$ et $x_2+x_4 \leq 1$. Sinon, l'ensemble de contraintes serrées pour $y$ serait contenu dans celui que défini $\chi^S$, et cela impliquerait que $y$ n'est pas un sommet de $I\!P(G)$.

Sans perte de généralité, on suppose que $y_2+y_4 = 1$. On va compter le nombre des contraintes possiblement serrées pour $y$.

Considérons les inéquations de trou suivantes :

$$x_1 + x[12] + x_2 + x_4 + x[14] \leq 1 + \frac{|[12]| + |[24]|}{2}$$
$$x_2 + x[23] + x_3 + x[34] + x_4 \leq 1 + \frac{|[23]| + |[34]|}{2}.$$

Elles sont associées aux trous que recouvrent toutes les arêtes, sauf $\{13\}$, et leur intersection est l'arête $\{24\}$. Il suffit donc de compter le nombre des contraintes possiblement serrées dans ces deux trous et de rajouter les contraintes de trou et la contrainte $x_1 + x_3 \leq 1$.

Dans le trou $\{1, [12], 2, 4, [41]\}$, il y a au plus $1+\frac{|[12]|+|[14]|}{2}$ contraintes d'arête serrées disjointes, sinon ceci nous donnerait qu'il existe une variable zéro, contredisant le fait que $y$ soit fractionnaire. Le nombre maximum de contraintes d'arête serrées est donc $|[12]|+|[14]|$, y compris la contrainte $x_2 + x_4 = 1$. De même, le cycle $\{2, [23], 3, [34], 4\}$ contient au plus $|[23]| + |[34]|$ contraintes d'arête serrées, y compris $x_2 + x_4 = 1$. On peut avoir aussi les inéquations de trou et l'inéquation $x_1 + x_3 \leq 1$ satisfaites avec égalité, le résultat final est

$$\begin{aligned} & |[12]| + |[14]| + |[23]| + |[34]| - 1 + 4 + 1 \\ = \; & |[12]| + |[14]| + |[23]| + |[34]| + 4 \\ = \; & |VG|. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $y$ satisfait avec égalité toutes ces contraintes.

On remarque pourtant que l'ensemble des 4 inéquations de trou et des contraintes $x_1 + x_3 \leq 1$, $x_2 + x_4 \leq 1$ n'est pas linéairement indépendant. En effet, considérons les inéquations serrées

$$x_1 + x[12] + x_2 + x_4 + x[14] \;\leq\; 1 + \frac{|[12]| + |[14]|}{2} \qquad (3.5)$$

$$x_1 + x_3 + x[34] + x_4 + x[14] \leq 1 + \frac{|[34]| + |[14]|}{2} \quad (3.6)$$

$$x_1 + x[12] + x_2 + x[23] + x_3 \leq 1 + \frac{|[12]| + |[23]|}{2} \quad (3.7)$$

$$x_1 + x_3 \leq 1 \quad (3.8)$$

$$x_2 + x_4 \leq 1 \quad (3.9)$$

Maintenant on vérifie que la quatrième inéquation de trou peut être obtenue à partir de cet ensemble.

$$\begin{aligned}
&x_2 + x[23] + x_3 + x[34] + x_4 = \\
&\overset{(3.6)(3.7)}{=} \frac{|[12]| + |[23]|}{2} + 1 - (x_1 + x[12]) + \frac{|[14]| + |[34]|}{2} \\
&\quad +1 - (x_1 + x_3 + x[14]) \\
&= 1 + \frac{|[23]| + |[34]|}{2} + \frac{|[12]| + |[14]|}{2} + 1 - (2x_1 + x[12] \\
&\quad +x_3 + x[14]) \\
&\overset{(3.5)}{=} 1 + \frac{|[23]| + |[34]|}{2} - (x_1 + x_3) + (x_2 + x_4) \\
&\overset{(3.8)(3.9)}{=} 1 + \frac{|[23]| + |[34]|}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on observe que le système d'inéquations qui définit $y$ n'est pas linéairement indépendant, mais ceci est absurde, puisque l'on a supposé que $y$ est un sommet de $\boldsymbol{P}(G)$. Il n'y a donc pas de sommet fractionnaire dans $\boldsymbol{P}(G)$, et $G$ est $t$-parfait. □

### 3.3.3 Graphes adjoints

On présente ici un résultat qui caractérise les graphes $h$-parfaits dans la classe de graphes adjoints. Pour cela, il nous faut quelques définitions de la théorie des couplages. Une *oreille* (impaire) d'un graphe $G$, relative à un sous-graphe $G'$ de $G$, est une chaîne (de longueur impaire) avec seulement ses extrémités dans $G'$ ; l'oreille est dite ouverte si ses extrémités sont différentes. Un graphe $G$ est *hypocouplable* si $G-v$

contient un couplage parfait pour tout $v \in G$. Lovász et Plummer ont montré le résultat suivant.

**Théorème 3.21** *[45] Un graphe $G$ est hypocouplable si et seulement si $G$ peut être décomposé comme $P_0 + P_1 + \ldots + P_r$, où $P_0$ est un cycle impair, et $P_i$ est une oreille impaire pour tout $i$.* □

On utilisera ce résultat pour montrer le suivant.

**Proposition 3.22** *Soit $G$ un graphe simple. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
*(i) le graphe adjoint $L(G)$ de $G$ est h-parfait ;*
*(ii) les seuls sous-graphes hypocouplables de $G$ sont les trous impairs ;*
*(iii) $G$ ne contient pas de cycle impair avec une oreille ouverte comme sous-graphe induit.*

**Dém. :** Il est facile de voir qu'il y a une correspondance entre les stables dans $L(G)$ et les couplages dans $G$. Ainsi le polytope des stables de $L(G)$ est égal au polytope des couplages de $G$ [10]:

$$\begin{aligned} x(\delta(v)) &\leq 1, \text{ pour tout } v \in VG, && (3.10)\\ x(E(S)) &\leq \frac{|S|-1}{2}, \text{ pour tout } S \subseteq VG \text{ hypocouplable} && (3.11)\\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

où $E(S)$ est l'ensemble d'arêtes de $EG$ qui ont les deux extrêmités dans $S$.

Les inéquations d'étoile (3.10) correspondent aux inéquations de clique et d'arête pour $\mathbb{P}(L(G))$. Pour que $L(G)$ soit $h$-parfait, il faut donc que les inéquations (3.11) correspondent exactement aux inéquations de trou. Comme le graphe adjoint d'un graphe hypocouplable $H$ est un trou impair si et seulement si $H$ est un trou impair, on voit l'équivalence des affirmations. □

Une caractérisation plus précise est donnée par le résultat suivant.

**Corollaire 3.23** *Si $G$ est le graphe adjoint d'un graphe simple, alors $G$ est h-parfait si et seulement si $G$ ne contient pas la configuration*

*montrée par fig. 3.7 comme sous-graphe induit, où $P_i$ est la chaîne entre $e_i$ et $f_i$ qui ne passe pas par $e_j$, $j \neq i$, $|P_3|$ est impaire, $|P_1|$ et $|P_2|$ sont paires, et $P_1, P_2$ et $P_3$ sont mutuellement disjoints.*

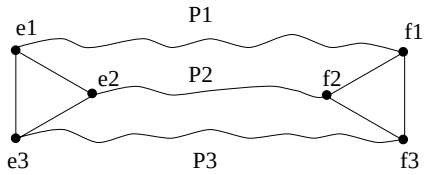


FIG. 3.7 - *Configuration interdite dans les graphes adjoints h-parfaits*

**Dém. :** Le graphe adjoint d'un cycle impair avec une oreille impaire ouverte est exactement la configuration donnée par fig. 3.7. En utilisant la proposition 3.22, on obtient la conclusion désirée. □

### 3.3.4 Graphes bipartis plus un triangle

On va maintenant étudier la classe de graphes bipartis plus un triangle, $\mathcal{G}_{\text{bip},\triangle}$. Un graphe $G$ appartient à $\mathcal{G}_{\text{bip},\triangle}$ s'il y a trois arêtes qui forment un triangle, dont l'élimination rend le graphe biparti. Pour cette classe, on a le résultat suivant :

**Proposition 3.24** *Soit $G$ un graphe dans $\mathcal{G}_{bip,\triangle}$. $G$ est t-parfait si et seulement si $G$ ne contient pas de $K_4$ impair non t-parfait comme sous-graphe partiel.*

**Dém. :** Si $G$ ne contient pas de $K_4$ impair, alors, par le théorème 3.15, $G$ est $t$-parfait.

Supposons donc que $G$ ait un $K_4$ impair comme sous-graphe partiel. Comme dans le $K_4$ impair les chaînes entre les sommets de degré 3 sont mutuellement disjointes, dans $G$ un de 4 cycles impairs est le triangle $T = \{a, b, c\}$, dont l'élimination des arêtes rend le graphe biparti. On a les configurations possibles pour le $K_4$ impair données par fig. 3.8, où I (P resp.) indique une chaîne de longueur impaire (paire resp.), et les

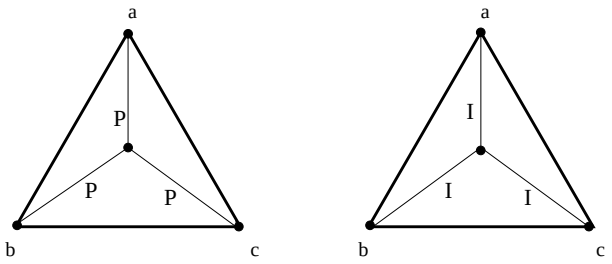


FIG. 3.8 - *$K_4$ impairs possibles*

lignes en gras correspondent à des arêtes. Remarquons que ces deux $K_4$ impairs ne sont pas $t$-parfaits.

Une arête $e$ est *traversante* si $e$ a ses extrémités en deux chaînes distinctes du $K_4$ impair. On présentera un méthode pour trouver, à partir d'un $K_4$ impair, un autre qui a moins d'arêtes traversantes ; ceci nous permettra d'obtenir en temps polynômial un $K_4$ impair comme sous-graphe induit.

On décrira un $K_4$ impair par ses 4 sommets de degré 3. Soit $abcd$ un $K_4$ impair avec une arête traversante $e = \{xy\}$, telle que $x$ est sur la chaîne entre $a$ et $d$, sans perte de généralité, et $y$ est sur la chaîne entre $c$ et $d$, $y \neq d$, de façon à ce que $x$ soit le sommet plus proche de $a$ parmi toutes les paires des sommets $xy$ qui satisfont les conditions mentionnées (voir fig. 3.9).

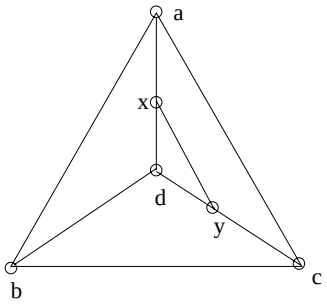


FIG. 3.9 - *Arête traversante dans un $K_4$ impair*

Il n'est pas difficile de voir que $abcx$ défini un $K_4$ impair qui n'utilise pas la chaîne entre les sommets $d$ et $y$. En effet, comme le graphe est

dans $\mathcal{G}_{\text{bip},\triangle}$, les parités des chaînes entre les sommets $a, x$ et $b, x$ et $c, x$ sont égales, et cela implique qu'il s'agit d'un $K_4$ impair. En plus, le $K_4$ impair $abcx$ a moins d'arêtes traversantes, puisqu'il est strictement contenu dans le $K_4$ impair $abcd$.

Ainsi, si $G$ contient un $K_4$ impair non $t$-parfait comme sous-graphe partiel, alors $G$ contient un $K_4$ impair non $t$-parfait comme sous-graphe induit, et ceci implique que $G$ n'est pas $t$-parfait. □

## 3.4 Coloration des graphes $t$-parfaits et $h$-parfaits

Plusieurs problèmes pratiques peuvent être vus comme des problèmes de coloration des sommets d'un graphe, c'est-à-dire, des variantes du problème de trouver un recouvrement des sommets d'un graphe par des stables. Trouver le nombre chromatique $\chi(G)$ revient à trouver la taille minimum d'un tel recouvrement, et c'est ce problème que nous traitons maintenant.

La coloration des sommets d'un graphe, dans le cadre le plus général possible, est NP-difficile, et la question, «Un graphe $G$ est-il $k$-coloriable?» pour un $k \geq 3$ fixé, est un problème de décision NP-complet [21].

Pour les graphes parfaits, il existe un algorithme polynômial pour le problème de coloration, qui utilise l'algorithme de l'ellipsoïde [29], mais, pour certaines classes de graphes parfaits, ce problème peut être résolu simplement, comme pour les graphes bipartis (résultat facile), les graphes adjoints de graphes bipartis [36], les graphes triangulés [22], entre autres.

Le travail qui suit traite le problème de trouver le nombre chromatique des graphes $t$- et $h$-parfaits. On étudiera le nombre chromatique fractionnaire des ces graphes, et on présentera quelques conjectures concernant $\chi(G)$. Ensuite, nous essayerons d'aborder une de ces conjectures de plusieurs façons, avec des résultats sur des bornes pour $\chi(G)$ et, finalement, nous montrerons des classes de graphes qui satisfont cette conjecture.

### 3.4.1 Conjectures

Le problème de la coloration peut être abordé par une analyse polyédrale de la façon suivante :

$$\min 1y = \chi(G)$$

$$\sum_{v \in S, S stable} y_S \chi^S \geq 1, \text{ pour tout } v \in VG, \tag{3.12}$$

$$y_S \geq 0, \text{ pour tout } S \text{ stable}, \tag{3.13}$$

$$y_S \text{ entier, pour tout } S \text{ stable}. \tag{3.14}$$

Les inégalités (3.12) nous disent que $y$ est un packing de stables qui recouvrent les sommets de $VG$. Si maintenant on considère le même programme linéaire sans les contraintes (3.14), alors la valeur minimum correspondra au *nombre chromatique fractionnaire* $\chi^*(G)$ de $G$, et une solution optimale $y$ correspondra à une *coloration fractionnaire* de $VG$. Il est clair que $\chi^*(G) \leq \chi(G)$, et en général ces deux valeurs sont différentes. Par exemple, le trou à 5 sommets $C_5$ est 3-coloriable, mais son nombre chromatique fractionnaire est 2,5 ; on peut voir une coloration fractionnaire du $C_5$ donnée par la fig. 3.10. Chaque symbole représente un stable (une couleur), qui participe du packing (3.12) avec coefficient 1/2.

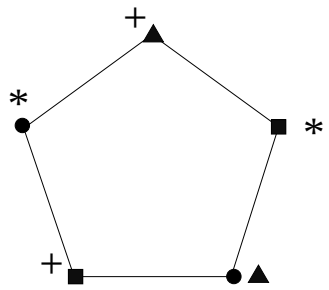


FIG. 3.10 - *Coloration fractionnaire du $C_5$ : chaque «couleur» participe avec un coefficient de 1/2.*

Le résultat suivant sur la coloration fractionnaire d'un graphe $h$-parfait a mené à plusieurs conjectures.

**Proposition 3.25** *[54] Si $G$ est $h$-parfait non-biparti, alors*

$$\chi^*(G) = \begin{cases} \omega(G), & si\ \omega(G) \geq 3, \\ 2 + \frac{1}{l(G)}, & si\ \omega(G) = 2. \end{cases}$$

**Dém. :** Comme on l'a vu, le problème de déterminer $\chi^*(G)$ peut être formulé comme

$$\begin{cases} \min 1y \\ \sum_{v \in S, S \text{ stable}} y_s \geq 1, \quad \text{pour tout } v \in VG, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

dont le programme dual est

$$\max\{1x : x \in ab(I\!P(G))\},$$

où $ab(I\!P(G))$ est le polyèdre anti-bloquant de $I\!P(G)$. On sait que les sommets de $ab(I\!P(G))$ correspondent à des inégalités qui définissent des facettes de $I\!P(G)$ (voir chapitre 1), et ainsi,

$$\max\{1x : x \in ab(I\!P(G))\} = \max\{\omega(G), 2 + \frac{1}{l(G)}\}.$$

Ceci implique le résultat désiré. □

Dans [54], on trouve une première conjecture sur la coloration de graphes $h$-parfaits :

**Conjecture 3.26** *Un graphe $G$ $h$-parfait est $\omega(G)$-coloriable.*

Shepherd [65] a restreint cette conjecture pour les graphes $t$-parfaits, en remarquant que $2 + \frac{1}{l} \leq 3$, pour $l \geq 1$.

**Conjecture 3.27** *Un graphe $t$-parfait est 3-coloriable.*

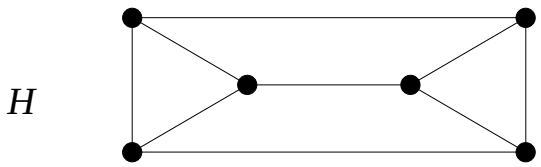


FIG. 3.11 - *Le complément du graphe adjoint de $H$ est t-parfait, mais il n'est pas 3-coloriable*

Mais ces conjectures ne sont pas vraies, puisqu'il existe un contre-exemple, donné par Laurent, Seymour et Schrijver, [38]. Le graphe $G$ en question est le complément du graphe adjoint du graphe $H$ donné par la fig. 3.11.

Le graphe $G$ est $h$-parfait, grâce au corollaire 3.18, et $\omega(G)$ est égal à la cardinalité maximum d'un couplage dans $H$, c'est-à-dire 3, mais $\chi(G)$ est égal à la cardinalité minimum d'un transversal de $H$, c'est-à-dire 4.

Shepherd a donc posé une nouvelle conjecture [66] :

**Conjecture 3.28** *Un graphe t-parfait est 4-coloriable.*

Dans cette section on travaillera sur une généralisation de la conjecture précedente, étendue aux graphes $h$-parfaits.

**Conjecture 3.29** *Un graphe $G$ h-parfait est $(\omega(G)+1)$-coloriable.*

### 3.4.2 Vers la conjecture

On étudiera le problème de trouver une borne pour le nombre chromatique d'un graphe $h$-parfait. D'abord on généralisera un résultat qui est présenté dans [54].

**Proposition 3.30** *Si $G$ est h-parfait, alors*

$$\chi(G) \leq \omega(G) + t(G),$$

*où $t(G)$ est le nombre de différentes tailles de trous impairs dans $G$.*

**Dém. :** En utilisant le fait 3.2, on sait qu'il existe un stable qui intersecte toute solution optimale du programme linéaire

$$\begin{cases} \max 1x \\ x(S) \leq 1, \quad S \text{ stable}, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

et ainsi, il existe un stable qui intersecte toutes les $\omega(G)$-cliques, si $\omega(G) \geq 3$. En éliminant cet ensemble du graphe, on obtiendra un graphe $G'$ qui est $h$-parfait, et on peut donc reutiliser ce procédé et trouver un stable dans $G'$ qui intersecte toute $\omega(G')$-clique, c'est-à-dire, toute $(\omega(G)-1)$-clique.

On continue jusqu'à ce que le graphe $G^f$ résultant des éliminations successives des stables ait $\omega(G^f) = 2$. Dans ce cas, le fait 3.2 nous dit qu'il existe un stable qui intersecte tous les trous de cardinalité minimum. Si on élimine cet stable, on obtiendra un graphe $G^*$ $h$-parfait, où $t(G^*) < t(G^f)$. Cette opération est appliquée jusqu'à obtenir un graphe biparti.

À la fin, on a trouvé au plus $\omega(G) - 2 + t(G)$ ensembles stables, et un graphe biparti pour colorier $G$ ; ceci prouve l'affirmation. □

**Remarque 3.31** Cette démonstration nous donne un moyen de réduire le problème de colorier un graphe $h$-parfait au problème de colorier un graphe $t$-parfait sans triangle. Soit $f$ une fonction entière sur l'ensemble de graphes, monotone décroissante par rapport à des sous-graphes induits. Si $\chi(G) \leq f(G)$ pour tout graphe $G$ $t$-parfait sans triangle, alors $\chi(H) \leq \omega(H) + f(H) - 2$, pour tout graphe $H$ $h$-parfait.

Ainsi, dans la suite on étudiera les graphes $t$-parfaits sans triangle, en sachant que, à chaque résultat pour un tel graphe, on a un résultat pour les graphes $h$-parfaits.

Pour un graphe $G$, on note $Y = Y(G)$ la valeur maximum d'une variable duale optimale du programme linéaire

$$\max\{1x : x \in ab(\mathbb{P}(G))\}.$$

**Proposition 3.32** *Soient $G$ un graphe $t$-parfait sans triangle et $S$ un stable qui correspond à une variable dans une solution duale optimale de valeur $Y$. Si $Y > \frac{1}{l(G)} - \frac{1}{L(G)}$, alors le graphe $G[VG \setminus S]$ est biparti.*

**Dém. :** Comme $S$ est un stable qui correspond à une variable dans une solution duale optimale de valeur $Y$, on sait que

$$\max\left\{(1 - Y\chi^S)x : x \in ab(I\!P(G))\right\} = 2+\frac{1}{l}-Y < 2+\frac{1}{l}-\frac{1}{l}+\frac{1}{L} = 2+\frac{1}{L}.$$

Donc $S \cap C \neq \emptyset$ pour tous les trous impairs $C$, $|C| \leq 2|L| + 1$, et par conséquent, pour tous les trous impairs de $G$. □

Comme principale conséquence on obtient les résultats qui suivent :

**Théorème 3.33** *Si $G$ est un graphe t-parfait sans triangle et $Y(G) > \frac{1}{l} - \frac{1}{L}$, alors $\chi(G) \leq 3$.* □

**Corollaire 3.34** *Si $G$ est un graphe t-parfait sans triangle et $l(G) \geq \frac{|VG|-1}{4}$, alors $\chi(G) \leq 3$.*

**Dém. :** On peut supposer que $L(G) \leq \frac{n-1}{2}$, où $n = |VG|$. Donc $\frac{1}{l}-\frac{1}{L} \geq \frac{2}{n-1}$. Soit $y$ une solution de base optimale duale. On choisit les indices de façon à ce que $y_i > 0 \Rightarrow i \leq n$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 2 + \frac{1}{l}$$

et

$$Y = \max_{1\leq i\leq n} y_i \geq \frac{2+\frac{1}{l}}{n} \geq \frac{2+\frac{4}{n-1}}{n} = \frac{2(n+1)}{n(n-1)} > \frac{2}{n-1}.$$

Ainsi les conditions du théorème sont satisfaites. □

Par rapport à la taille d'un graphe $G$ $h$-parfait $\omega(G)+1$-coloriable, on peut conclure à partir du dernier résultat que :

**Corollaire 3.35** *Un graphe $G$ h-parfait tel que $|VG| \leq 6 + \omega(G)$ est $(\omega(G) + 1)$-coloriable.*

**Dém. :** Il suffit de remarquer qu'un graphe $t$-parfait sans triangle avec au plus 8 sommets est 3-coloriable, en utilisant le théorème antérieur. La remarque 3.31 complète la preuve. □

Maintenant, un autre raisonnement nous permet d'obtenir une borne plus juste pour le nombre chromatique d'un graphe $t$-parfait sans triangle.

**Proposition 3.36** *Si $G$ est un graphe $t$-parfait sans triangle, alors*

$$\chi(G) < \frac{\log |VG|}{\log \frac{5}{3}}.$$

**Dém. :** Grâce à la proposition 3.6, on sait qu'il y a un stable $S$ qui sature chaque $C_5$ et $|S| \geq (0,4)|VG|$. Si on élimine ce stable du graphe et répète l'opération, on peut continuer à trouver des stables et les éliminer $x$ fois, jusqu'à ce que $(0,6)^x\ |VG| < 1$. Ainsi, $x < -\log_{0,6} |VG|$, et on en déduit le résultat. □

Cette dernière proposition mène facilement au corollaire suivant.

**Corollaire 3.37** *Étant donné $0 < \epsilon \leq 1$, on note par $\mathcal{G}(\epsilon)$ la famille des graphes $h$-parfaits $G$ tels que $2l(G) + 1 \geq \epsilon |VG|$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $c(\epsilon)$ telle que, pour tout $G \in \mathcal{G}(\epsilon)$, on a $\chi(G) \leq c(\epsilon)$.*

**Dém. :** Par le même raisonnement du résultat antérieur, on remarque que $(0,6)^{\chi(G)-2}|VG| < 2l(G) + 1$. Ainsi $\log_{0,6} 2l(G) + 1 - \log_{0,6} |VG| \geq \chi(G)$. Comme $2l(G) + 1 \geq \epsilon |VG|$, on obtient que $\log_{0,6} \epsilon > \chi(G)$, c'est-à-dire, $\chi(G) < \log_{5/3} \frac{1}{\epsilon}$. □

### 3.4.3 Étudiant la taille des graphes $t$-parfaits sans triangle 3-coloriables

Étant donné un graphe $G$ $t$-parfait sans triangle, on sait que l'on peut obtenir un stable $S$ qui rencontre chaque trou impair de cardinalité minimum $2l + 1$. Maintenant on voudrait que cet ensemble $S$ intersecte tous les trous impairs de cardinalité $2k + 1$, où $k \in \{0, \ldots, (0,3)|VG|\}$. (Notons que l'on exige $0,3|VG|$ comme borne supérieure parce que

$$2.(0,3)|VG| + 1 = 0,6|VG| + 1 > |VG| - |S|$$

et ainsi $G$ ne contient pas de trou impair de cardinalité plus grande que $2.(0,3)|VG|+1.$)

En suivant le raisonnement de la proposition 3.32, on peut être sûr que $S$ rencontre tous les trous impairs si $Y(G) > 1/l - 1/L$

$$Y(G) > \frac{1}{l(G)} > \frac{1}{l} - \frac{1}{0.3|VG|}$$

et comme on peut supposer que $Y(G) \geq \frac{2+1/l}{|VG|}$, cela implique que

$$l > \frac{3|VG|-3}{16}. \tag{3.15}$$

Ainsi si (3.15) est vérifiée, $G$ est 3-coloriable. En considérant (3.15) comme une borne pour $|VG|$, il s'ensuit que si $|VG| \leq 11$, et la taille d'un trou minimum est 5, alors $G$ est 3-coloriable. À partir de (3.15) on construit le tableau 3.1, qui nous donne le rapport entre $|VG|$ et $l(G)$ pour un graphe $t$-parfait sans triangle qui est certainement 3-coloriable.

| $l(G)$ | $\|VG\| \leq$ |
|---|---|
| 2 | 11 |
| 3 | 16 |
| 4 | 22 |
| 5 | 27 |
| 6 | 33 |

TAB. 3.1 - *Un rapport entre $l(G)$ et $|VG|$ pour un graphe $t$-parfait sans triangles 3-coloriable*

Comme conclusion, on a le résultat suivant :

**Proposition 3.38** *Si $G$ est un graphe $t$-parfait sans triangle, avec $l(G) = 2$, tel que $|VG| \leq 11$, alors $G$ est 3-coloriable.* □

Maintenant on essaiera d'améliorer la borne «$|VG| \leq 11$». On utilisera beaucoup le deux prochains lemmes.

**Lemme 3.39** *Soient un graphe $G$ t-parfait sans triangle et contenant un $C_5$, $S$ un stable saturant tout $C_5$, et $C$ un trou à 7 sommets disjoint de $S$. Si $v \in S$, alors $v$ est adjacent à au plus 2 sommets de $C$, et s'il y a égalité, alors les 2 voisins de $v$ sont à distance 2 dans $C$.*

**Dém. :** En effet, comme $G$ ne contient pas de triangle et tout $C_5$ est saturé par $S$, la distance entre deux voisins de $v$ ne peut être ni 1, ni 3 dans $C$. Si $v$ est adjacent à exactement 2 sommets dans $C$, alors ils sont à distance 2. □

**Lemme 3.40** *Sous les mêmes hypothèses du lemme 3.39, $C \cup S$ ne contient pas de trou à 5 sommets.*

**Dém. :** Supposons le contraire, et soit $C^* = \{a, v, b, y, x\}$ un trou à 5 sommets saturé par $S$, et $\{a, b\} = C^* \cap S$ (voir fig. 3.12). Comme $x$ et

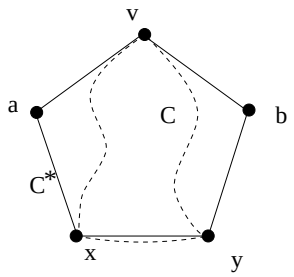


FIG. 3.12 - *Un $C_5$ contenu dans $C \cup S$*

$y$ sont des voisins dans $C^*$, et $C$ ne contient pas de corde, alors $xy \in C$. Or, $v \in C$, et par le lemme précédent, $v$ est à distance 2 de $x$ et $y$ dans $C$, mais ceci est impossible, puisque $xy \in C$. □

**Proposition 3.41** *Si $G$ est un graphe t-parfait sans triangle, avec $l(G) = 2$, tel que $|VG| \leq 13$, alors $G$ est 3-coloriable.*

**Dém. :** Si $|VG| \leq 11$, alors la proposition 3.38 fournit le résultat. Si $|VG| = 12$, alors on ajoute un sommet artificiel au graphe. On montrera qu'il existe un stable dans $G$ qui intersecte tout trou impair.

D'après la proposition 3.6, on sait qu'il existe un stable $S$ tel que $|S| \geq 6$ et $S$ sature chaque $C_5$, et intersecte tout $C_9$, $C_{11}$ et $C_{13}$. S'il existe un trou à 7 sommets disjoint de $S$, alors, par les lemmes 3.39 et 3.40, on remarque que $G$ ne contient pas de $C_5$, et ceci contredit l'hypothèse initiale. Ainsi $S$ rencontre chaque trou impair et $G$ est 3-coloriable. □

**Proposition 3.42** *Si $G$ est un graphe t-parfait sans triangle, avec $l(G) = 2$, tel que $|VG| = 14$, alors $G$ est 3-coloriable.*

**Dém. :** Toujours par la proposition 3.6, on sait qu'il existe un stable $S$ associé à une variable $y_S > 0$ optimale pour le programme linéaire qui donne une coloration fractionnaire, tel que $|S| \geq 6$. Comme $y_S > 0$, on sait que $S$ sature chaque $C_5$, et intersecte tout $C_9$, $C_{11}$ et $C_{13}$, puisque $|VG| - |S| \leq 8$.

Si $|S| \geq 7$, alors, grâce au lemme 3.40, on conclut que $S$ rencontre chaque $C_5$ et $C_7$, et c'est fini.

Si $|S| = 6$, il y peut avoir un trou à 7 sommets $C$ non intersecté par $S$. Soit $u = VG - (S \cup C)$. Par lemme 3.40, on sait que $u$ est contenu dans tout $C_5$ (sinon il n'y aurait pas de $C_5$, contraire à l'hypothèse initiale). Considérons le programme linéaire

$$\max\{cx : x \in ab(\boldsymbol{P})\} \tag{3.16}$$

où

$$c(v) = \begin{cases} 2/3, & \text{si } v = u, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les solutions optimales du programme (3.16) sont tous les vecteurs $2\frac{\chi^C}{|C|-1}$ où $C$ est un $C_5$ ou un $C_7$ qui ne contient pas $u$. Ainsi un stable dans une solution dual de (3.16) sature les $C_5$ et les $C_7$ qui ne contiennent pas $u$.

En raisonnant de la même façon que dans la démonstration de la proposition 3.6, il n'est pas difficile de voir qu'il existe un stable $S'$ associé à une variable duale $y_{S'}$ du programme (3.16) tel que $|S'| \geq 6$. Si $u \in S'$, $S'$ intersecte tout trou impair ; sinon, il y a peut-être un trou à 7 sommets $C$ qui contient $u$, mais qui est disjoint de $S'$. Soit $x = VG - (C \cup S')$.

Par le lemme 3.39, les sommets dans $VG - C$ sont adjacents à au plus deux sommets dans $C$, donc le nombre d'arêtes entre $S'$ et $C_7$ est au plus 12, et on sait qu'il existe au moins deux sommets $v_i, i = 1, 2$ dans $C$ qui ont seulement un voisin $w_i, i = 1, 2$ dans $S'$. On remplace $w_i$ par $v_i$, obtenant $S_i$, $i = 1, 2$.

$S_i$ intersecte chaque $C_5$ et chaque $C_7$ qui ne contient pas $u$, et intersecte $C$. S'il y a un trou qui est disjoint de $S_i$, il doit contenir le sommet $x \in VG - S' - w_i$, qui est adjacent au deux sommets de $C$ qui sont voisins de $v_i$, mais, dans ce cas, ces deux sommets sont les seuls voisins de $x$, grâce au lemme 3.39. Comme $|VG| = 14$, cette configuration (voir fig. 3.13) peut exister seulement pour un des sommets $v_1$ et $v_2$. Ainsi ou $S_1$ ou $S_2$ intersecte donc tout trou impair. □

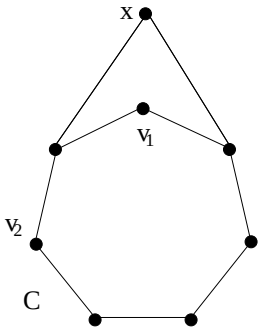


FIG. 3.13 - *Un trou à 7 sommets disjoint de $S_i$*

Comme remarque, on peut aussi prouver le résultat suivant, qui concerne maintenant la 4-colorabilité.

**Corollaire 3.43** *Si $G$ est un graphe t-parfait sans triangle, tel que $|VG| \leq 28$, alors $G$ est 4-coloriable.*

**Dém. :** Si $|VG| \leq 14$, on sait que $G$ est 3-coloriable. Dans les autres cas, il suffit de noter qu'il existe un stable $S$, qui sature tout trou à 5 sommets, tel que $|VG| - |S| \leq 16$. On utilise le tableau 3.1 pour conclure le résultat. □

### 3.4.4 Classes qui satisfont la conjecture

Parmi les classes des graphes vus dans la sous-section 3.3, on voudrait montrer ici les graphes pour lesquels la conjecture 3.29 est vraie.

- ▷ Comme conséquence directe de la définition, un graphe $G$ $h$-parfait sans trou impair est $\omega(G)$-coloriable (en fait $G$ est, dans ce cas, un graphe parfait).

- ▷ Les graphes bipartis sont trivialement bicoloriable, et il est clair que le graphe résultant de d'identification de deux sommets non-adjacents d'un graphe biparti est 3-coloriable.

- ▷ Un graphe $G$ résultant de la composition de Sbihi et Uhry (voir sous-section 3.3.1) est $\omega(G)+1$-coloriable, si le graphe initial l'est aussi, puisqu'il suffit d'étendre les couleurs des sommets $a, b$ à chaque côté de la bipartition.

- ▷ Les graphes série-paralèlles sont 3-coloriables. À partir de la définition constructive de ces graphes (subdivision et doublement d'arêtes), on peut facilement donner une 3-coloration à un tel graphe $G$, qui sera donc $\omega(G)$ ou $\omega(G)+1$-coloriable, selon la taille d'une clique maximum (3 ou 2).

- ▷ En ce qui concerne les graphes sans $K_4$ impair, Catlin [7] a prouvé que ces graphes sont 3-coloriables (une autre démonstration peut être trouvée dans [23]). Et il n'est pas difficile de voir que le seul $K_4$ impair qui est $t$-parfait est 3-coloriable. En effet, si on supprime les deux arêtes qui relient les sommets de degré 3, on aura un cycle pair, que peut être bicolorié ; en remettant les arêtes, on aura 2 conflits de couleurs, qui peuvent être résolus en utilisant une troisième couleur.

- ▷ Dans la classe de graphes qui sont des compléments de graphes adjoints, ceux qui sont $h$-parfaits satisfont la conjecture 3.29, selon le résultat suivant.

  **Proposition 3.44** *Si $G$ est le complément d'un graphe adjoint et $G$ est $h$-parfait, alors $G$ est $\omega(G)+1$-coloriable.*

**Dém. :** Grâce à la proposition 3.30, on sait qu'un graphe $G$ $h$-parfait peut être colorié avec $\omega(G) + t(G)$ couleurs. Un graphe adjoint a des anti-trous de taille au plus 5, puisque le graphe donné par fig. 3.14 est une configuration interdite dans un graphe adjoint et apparaît comme sous-graphe induit de l'anti-trou à 7 sommets.

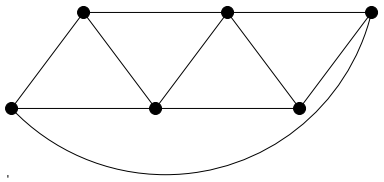

FIG. 3.14 - *Sous-graphe interdit pour un graphe adjoint*

Ainsi, $G$ a des trous impairs de taille au plus 5, et cela implique que $G$ est $(\omega(G) + 1)$-coloriable. □

▷ Pour les graphes adjoints, on a le résultat de Vizing que nous montre que tous les graphes dans cette classe satisfont la conjecture en question :

**Théorème 3.45** *Si $G$ est un graphe adjoint, alors $G$ est $\omega(G) + 1$-coloriable.* □

▷ Généralisant un peu cette classe, on a la classe des graphes sans étoile («claw-free»), c'est-à-dire, des graphes où chaque sommet n'a pas trois voisins mutuellement non-adjacents. Notons qu'un graphe sans étoile et sans triangle est constitué d'un seul trou, et ainsi 3-coloriable. En utilisant la remarque 3.31, on conclut qu'un graphe $G$ sans étoile est $\omega(G) + 1$-coloriable.

▷ Les graphes dans la classe $\mathcal{G}_{\text{bip},\Delta}$ sont 3-coloriables, puisqu'ils sont dans la classe des graphes sans $K_4$ impair.

# Chapitre 4

# Une hiérarchie des graphes étudiées

Nous allons maintenant étudier les liens entre les deux sujets précédement exposés dans ce travail. Ce sont les graphes faiblement bipartis qui jouent le rôle de pont entre le problème du multiflot et la caractérisation des graphes $t$-parfaits, ainsi que les clutters (anti-chaî nes) binaires.

Dans ce chapitre, nous voulons montrer une relation entre ces entités, à travers quelques propriétés équivalentes et des caractérisations communes. On commencera par la définition des graphes faiblement bipartis ; on présentera une caractérisation de graphes sans $K_4$ impair qui apparaît à partir d'une propriété de la matrice d'incidence d'un graphe ; ensuite, nous étudierons la propriété flot-max coupe-min des clutters et nous finirons par les relations entre ces sujets.

## 4.1 Les graphes faiblement bipartis

La définition de ces graphes est donnée par une propriété polyèdrale, comme il a été fait pour les graphes $t$-parfaits. Un graphe $G$ est *faiblement biparti* si le polyèdre $\mathbb{F}(G)$ donné à partir des inéquations

$$\begin{cases} x_e \geq 0, & \text{pour toute } e \in EG, \\ x(C) \geq 1, & \text{pour tout cycle minimal impair } C \end{cases}$$

est entier, c'est-à-dire, si les sommets de ce polyèdre sont des vecteurs $x \in \{0,1\}^{EG}$.

Nous verrons tout au long de ce chapitre des exemples et des caractérisations des graphes faiblement bipartis, ainsi que des propriétés équivalentes concernant les graphes, les matrices d'incidence de graphes, et les systèmes d'inéquations, et nous expliquerons leurs relations avec les sujets de cette thèse.

## 4.2 La propriété Edmonds-Johnson

Dans [26], Gerards et Schrijver étudient une propriété de matrices, qui est motivée par la caractérisation d'Edmonds du polytope de couplages [10]. Cette propriété permet de caractériser les graphes sans $K_4$ impair.

On dira qu'une matrice $A$ à $m$ lignes et $n$ colonnes a la propriété *Edmonds-Johnson* si, pour tour choix des vecteurs $d_1, d_2, b_1, b_2$ (de tailles appropriées), l'enveloppe convexe des solutions entières de

$$d_1 \leq x \leq d_2, \qquad b_1 \leq Ax \leq b_2, \tag{4.1}$$

est obtenue à partir de (4.1) en ajoutant les inéquations, des «coupes de Gomory»,

$$cx \leq \lfloor \delta \rfloor, \tag{4.2}$$

où $cx \leq \delta$ est une inéquation valide pour toutes les solutions de (4.1) et $c$ est entier.

Étant donné un graphe $G$, si on considère $d_1 = 0,\ d_2 = 1,\ b_1 = 0,$ $b_2 = 1$ et $A$ comme étant la matrice d'incidence de $G$, alors l'enveloppe convexe des solutions entières de (4.1) correspond au polytope des stables de $G$. Si $A$ a la propriété Edmonds-Johnson, alors pour avoir une description du polytope des stables de $G$, il suffit d'ajouter à (4.1) les inéquations (4.2). Dans ce cas, à quoi correspondent les inéquations (4.2)?

La proposition suivante, prouvée par Gerards et Schrijver, nous donne une réponse qui nous mène directement aux graphes $t$-parfaits.

**Proposition 4.1** *[26] Soit un graphe $G = (VG, EG)$, $A$ sa matrice d'incidence et $b \in \mathbb{Z}^E$. Alors le système*

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ cx &\leq \lfloor \delta \rfloor \text{ (avec } Ax \leq b \text{ implique } cx \leq \delta, \text{ où } c \text{ est entier)}, \end{aligned}$$

*a les mêmes solutions que le système*

$$Ax \leq b \tag{4.3}$$

$$x(C) \leq \lfloor \frac{b(C)}{2} \rfloor, \; C \text{ cycle minimal impair.} \tag{4.4}$$

□

Donc, étant donné un graphe $G$, si sa matrice d'incidence a la propriété Edmonds-Johnson, alors $G$ est $t$-parfait. Le résultat suivant donne une caractérisation des certaines matrices entières – comprenant les matrices d'incidence de graphes – qui ont la propriété Edmonds-Johnson :

**Théorème 4.2** *[26] Une matrice $A$ à composantes entières telle que*

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq 2, \quad i = 1, \ldots, m,$$

*a la propriété Edmonds-Johnson si et seulement si $A$ ne peut pas être transformée en la matrice d'incidence de la clique $K_4$ en utilisant une suite d'opérations du type :*
*(i) éliminer ou permuter lignes ou colonnes, ou en multiplier une par -1 ;*
*(ii) remplacer la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & g \\ f & D \end{pmatrix}$ *par la matrice $D - fg$.* □

L'opération (ii) est appelée *contraction* ; $f$ est un vecteur-colonne et $g$ est un vecteur-ligne, de façon à ce que la matrice $fg$ ait la même dimension que la matrice $D$. La matrice d'incidence d'un graphe $G$ peut être transformée par (ii) en la matrice du graphe obtenu à partir de $G$, par contraction de l'arête correspondant au vecteur $f$.

On peut vérifier aussi qu'une suite d'opérations (i) et (ii) permet de transformer la matrice d'un graphe $G$ en la matrice d'incidence de $K_4$, si $G$ contient un $K_4$ impair. Ainsi, le théorème 4.2 et la proposition 4.1 fournissent le résultat suivant, déjà énoncé (théorème 3.15) :

**Théorème 4.3** *[24] Si un graphe $G$ ne contient pas de $K_4$ impair, alors $G$ est t-parfait.* □

## 4.3 La propriété flot-max coupe-min

Les graphes faiblement bipartis peuvent être vus comme des graphes dont l'ensemble des cycles impairs minimaux a des propriétés très spéciales. Pour mieux étudier ces propriétés, on introduit la notion de clutter binaire et son bloqueur, et la propriété flot-max coupe-min.

Un *clutter* (ou une *anti-chîne*) est une famille de sous-ensembles d'un ensemble fini, où il n'existe pas deux membres $A, B$ de la famille tels que $A \subset B$. Une anti-chaîne $\mathcal{F}$ est *binaire* si, pour tout choix de $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{F}$, alors $E_1 \triangle E_2 \triangle E_3$ contient un membre de $\mathcal{F}$. On notera $M(\mathcal{F})$ la matrice d'incidence de $\mathcal{F}$. Le clutter *bloqueur* de $\mathcal{F}$, noté $b(\mathcal{F}(G))$, est le clutter constitué des éléments minimaux de l'ensemble $\{F : |F \cap G| \geq 1, \text{ pour tout } G \in \mathcal{F}\}$. Si $\mathcal{F}$ est un clutter, et $Z$ un ensemble, on définit

$$\mathcal{F}\backslash Z = \{A \in \mathcal{F} : A \cap Z = \emptyset\}$$

et $\mathcal{F}/Z$ est la famille des membres minimaux de $\{A - Z : A \in \mathcal{F}\}$. On appelle ces opérations *élimination* et *contraction*, respectivement. Le *mineur* d'un clutter $\mathcal{F}$ est un clutter qui peut être obtenu à partir de $\mathcal{F}$ par une suite de contractions et éliminations.

Soit $\mathcal{F}$ un clutter ; si $\mathcal{F} \neq \{\emptyset\}$, on dira que $\mathcal{F}$ a la propriété $\mathbb{Z}_+$*-flot-max coupe-min* (ou est *Mengérien*, ou a la *propriété flot-max coupe-min forte*) si, pour tout vecteur entier $w \geq 0$, les programmes duaux

$$\max\{1y : yM(\mathcal{F}) \leq w, y \geq 0\} \text{ et } \min\{wx : M(\mathcal{F})x \geq 1, x \geq 0\} \quad (4.5)$$

ont des solutions optimales entières. C'est-à-dire que la cardinalité d'un $w$-packing maximum d'éléments de $\mathcal{F}$ est égal à la valeur minimum de $w$

calculée sur les éléments de $b(\mathcal{F})$. Cette propriété est aussi équivalente à dire que le système

$$M(\mathcal{F})x \geq 1,\ x \geq 0 \tag{4.6}$$

est TDI.

Si $\mathcal{F} \neq \{\emptyset\}$, on dira que $\mathcal{F}$ a la propriété $\mathbb{Q}_+$-*flot-max coupe-min* (ou la propriété *flot-max coupe-min faible*) si le problème de minimisation de (4.5) a toujours une solution optimale entière. Ceci implique que le polyèdre donné par les inéquations (4.6) est entier et que ses sommets sont les vecteurs caractéristiques des éléments de $b(\mathcal{F})$.

**Théorème 4.4** *[61] Si un clutter $\mathcal{F}$ a la propriété $\mathbb{Z}_+$-flot-max coupe-min ($\mathbb{Q}_+$-flot-max coupe-min, resp.), alors tous ses mineurs ont aussi cette propriété.*

Le rapport entre les clutters binaires et la propriété $Z_+$-flot-max coupe-min a été étudié par Seymour, qui a trouvé une bonne caractérisation pour les clutters Mengeriens :

**Théorème 4.5** *[61] Un clutter binaire a la propriété $\mathbb{Z}_+$-flot-max coupe-min si et seulement s'il ne contient pas $Q_6$ comme mineur.*
($Q_6$ est le clutter des triangles de $K_4$.) □

Maintenant, on peut exhiber le clutter qui a un rapport direct avec les graphes faiblement bipartis : étant donné un graphe $G$, on définit $\mathcal{F}(G)$ comme étant la famille des cycles minimaux impairs de $G$. D'une manière plus générale, on peut définir $\mathcal{F}(G)$ pour un graphe signé. Un graphe *signé* est une paire $(G, R)$, où $G = (VG, EG)$ et $R \subseteq EG$, et les cycles impairs de $(G, R)$ sont les cycles $C$ de $G$ tels que $|C \cap R| \equiv 1 \bmod 2$.

**Remarque 4.6** Pour tout graphe signé $(G, R)$, la famille $\mathcal{F}(G)$ forme un clutter binaire. □

Il est facile de voir que $G$ est faiblement biparti si et seulement si $\mathcal{F}$ a la propriété $\mathbb{Q}_+$-flot-max coupe-min. Ainsi on en déduit que la classe des graphes faiblement bipartis est fermée sous l'opération de prendre

de sous-graphes. En ce qui concerne la propriété $\mathbb{Z}_+$-flot-max coupe-min, le théorème 4.5, appliqué au clutter $\mathcal{F}(G)$, donne la caractérisation suivante :

**Corollaire 4.7** *[61] Un graphe $G$ ne contient pas de $K_4$ impair si et seulement si le système*

$$\begin{cases} x(C) \geq 1, & \textit{pour tout cycle mininal impair } C, \\ x_e \geq 0, & \textit{pour toute arête } e \end{cases}$$

*est TDI.* □

Remarquons que ce résultat caractérise d'une manière polyèdrale les graphes sans $K_4$ impair. En utilisant les résultats de la section précédente, on obtient les équivalences suivantes :

**Théorème 4.8** *[26, 61] Étant donnés un graphe $G$ et sa matrice d'incidence $A$, les affirmations suivantes sont équivalentes :*
*(i) $A$ a la propriété Edmonds-Johnson ;*
*(ii) le système qui décrit $\mathbb{F}(G)$ est TDI ;*
*(iii) $G$ ne contient pas de $K_4$ impair.* □

Dans le cas des graphes sans $K_4$ impair, on peut rajouter de plus :

**Proposition 4.9** *[26, 61] Si $G$ est un graphe qui ne contient pas de $K_4$ impair, alors*
*(i) $G$ est faiblement biparti ;*
*(ii) $G$ est t-parfait ;*
*(iii) $A$ a la propriété Edmonds-Johnson ;*
*(iv) le système qui décrit $\mathbb{F}(G)$ est TDI.* □

## 4.4 Quelques relations entre les problèmes

On va établir maintenant quelques relations entre les sujets abordés.

### 4.4.1 Les graphes faiblement bipartis et les graphes $t$-parfaits

D'une part, la proposition 4.9 nous a donné une forte relation entre les graphes $t$-parfaits sans $K_4$ impair et les graphes faiblement bipartis.

D'autre part, on a déjà rencontré le système d'inéquations que définit un graphe faiblement biparti dans la sous-section 3.2.2. Nous avons vu l'équivalence entre les deux systèmes suivants. Étant donné un graphe $G$ :

$l(C) \geq 1$, pour tout cycle minimal impair $C$ (arêtes) dans $G$, et

$z(C) \leq \frac{|C|-1}{2}$, si $Az \leq 1$, $z \geq 0$,

pour tout cycle minimal impair $C$ (sommets) dans $G$, où $A$ est la matrice d'incidence de $G$ et $l = 1 - Az$.

Ceci nous donne le résultat suivant [25] :

**Proposition 4.10** *Soit $G$ un graphe où il existe un sommet $z$ adjacent à tout autre sommet de $G$. Si $G$ est faiblement biparti, alors $G - z$ est $t$-parfait.* □

Une troisième relation nous est fournie grâce au résultat suivant, de Gerards.

**Théorème 4.11** *[25] Soit $G$ un graphe impair sans $K_4$ impair. Le graphe $H$, construit à partir de $G$ en ajoutant un sommet $z$ adjacent à tout sommet de $G$, est faiblement biparti.* □

Notons que ce théorème, avec l'équivalence décrite ci-dessus, nous donne une autre manière de démontrer le théorème 4.9. Observons aussi qu'il nous permet de construire un graphe $G$ faiblement biparti qui n'est ni $t$-parfait, ni $h$-parfait. La fig 4.1 donne un graphe $G$ construit selon les hypothèses du théorème 4.11, mais $G$ n'est pas $t$-parfait, puisque $G$ contient un $K_4$ impair non $t$-parfait comme sous-graphe induit.

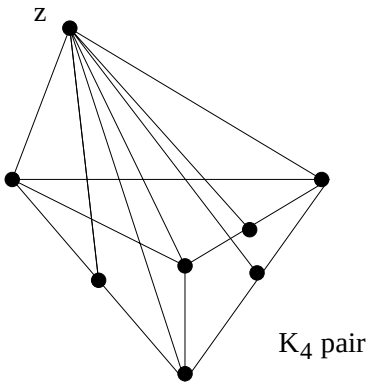


FIG. 4.1 - *Exemple d'un graphe faiblement biparti qui n'est pas t-parfait*

### 4.4.2 Les graphes faiblement bipartis et le problème du multiflot

D'une certaine façon les graphes faiblement bipartis et le problème du multiflot sont très reliés. On verra que l'on peut caractériser les graphes faiblement bipartis comme étant les graphes pour lesquels la condition de coupe (voir sous-section 2.1.2) est suffisante pour l'existence d'un multiflot dans $G$, pour certains ensembles d'arêtes de demande dans $G$.

Le prochain résultat nous donne exactement cette caractérisation, à partir du clutter $\mathcal{F}(G)$, défini dans la sous-section 4.3. Remarquons que cette caractérisation apparaît la première fois formulée en termes de «lifts» de matroïdes [64]. Pour complétude nous joignons une démonstration.

**Proposition 4.12** *Soient $G$ un graphe et $F \in b(\mathcal{F}(G))$. $G$ est faiblement biparti si et seulement si la condition de coupe est suffisante pour l'existence d'un multiflot pour le problème $(G, F, w)$, pour toute fonction $w : EG \to \mathbb{Z}_+$.*

**Dém. :** Soient $F \in b(\mathcal{F}(G))$ et $w : EG \to \mathbb{Z}_+$ tels que $(G, F, w)$ satisfait la condition de coupe. Supposons aussi que le polyèdre $\mathbb{F}(G)$ est entier et ainsi le minimum de

$$\min\{wx : x \in \mathbb{F}(G)\} \tag{4.7}$$

est atteint par un élément de $b(\mathcal{F}(G))$. Nous démonstrons que la condition de coupe implique que le minimum est atteint par $\chi^F$.

En effet, supposons que $w\chi^F$ n'est pas le minimum. Alors, puisque $\mathbb{F}(G)$ est entier, il existe $F' \in b(\mathcal{F}(G)$ tel que $w\chi^{F'} < w\chi^F$. Dans ce cas,

$$w\chi^{F\setminus F'} + w\chi^{F\cap F'} = w\chi^F > w\chi^{F'} = w\chi^{F'\setminus F} + w\chi^{F\cap F'}.$$

Si on note $D = F \triangle F'$, on obtient l'inégalité suivante :

$$w(\chi^{D\setminus F}) - w(\chi^{D\cap F}) < 0.$$

On peut vérifier que $D$ est un cocycle ; donc la condition de coupe est violée.

Étant donné $w : EG \to \mathbb{Z}_+$, soit $F \in b(\mathcal{F}(G))$ tel que

$$w\chi^F = \min\{w\chi^D : D \in b(\mathcal{F}(G))\}.$$

Si la condition de coupe est suffisante pour l'existence d'une solution, et si $w$ la satisfait, on sait qu'il existe un vecteur $y^* \geq 0$ qui est une solution du problème $(G, F, w)$.

On vérifie facilement que $y^*$ est aussi une solution réalisable du dual du problème (4.7) ; de plus, comme $\chi^F \in \mathbb{F}(G)$ et $y^*$ et $\chi^F$ satisfont les conditions des écarts complémentaires, on en déduit que $\chi^F$ est une solution optimale du problème (4.7).

Comme ceci est vrai pour toute fonction $w : EG \to \mathbb{Z}_+$, on conclut que $\mathbb{F}(G)$ est entier. □

Remarquons que d'après la démonstration de cette proposition on obtient l'équivalence suivante : chercher une solution pour le problème du multiflot $(G, F, w)$ équivaut à chercher un packing de circuits impairs dans le graphe signé $(G, F)$. Et voilà une des clefs de la relation entre les clutters binaires et les matroïdes qui sont fluants par rapport à $\Delta_{(CC)}$.

On connaît une caractérisation des graphes qui sont fluants par rapport à $(CC)$ ; ce sont ceux qui ne contienent pas $K_5$ comme mineur (théorème 2.4). Ainsi on obtient :

**Proposition 4.13** *[64] Si un graphe $G$ ne contient pas un $K_5$ comme mineur, alors $G$ est faiblement biparti.* □

Ce résultat implique la proposition suivante [2] :

**Proposition 4.14** *Soit $G$ un graphe dans lequel il existe 2 sommets $u, v$, tels que $G - \{u, v\}$ est un graphe biparti. Alors $G$ est faiblement biparti.* □

En revanche, le graphe $K_5$ n'est pas faiblement biparti. L'exemple illustré dans la fig. 2.2 montre un ensemble $F \in b(\mathcal{F}(K_5))$ et une fonction $w : EG \to \mathbb{Z}_+$, tels que $(G, F, w)$ satisfait la condition de coupe, mais il n'existe pas de solution pour le problème du multiflot.

On peut résumer d'une façon les résultats de ce chapitre par la proposition :

**Proposition 4.15** *[26, 61] Soit $G$ un graphe sans $K_4$ impair et $A$ sa matrice d'incidence. Alors*
*(i) $G$ est $t$-parfait ;*
*(ii) $A$ a la propriété Edmonds-Johnson ;*
*(iii) $\mathcal{F}(G)$ a la propriété $\mathbb{Z}_+$-flot-max coupe-min ;*
*(iv) la condition de coupe est suffisante pour l'existence d'un multiflot pour le problème $(G, F, w)$, où $F \in b(\mathcal{F}(G))$.* □

On veut compléter maintenant l'étude de l'hiérarchie des graphes qui contiennent un $K_4$ impair.

**Remarque 4.16** Il est connu que le clutter des cycles impairs d'un $K_5$ subdivisé (un $K_5$ *subdivisé* est un graphe obtenu par subdivision des arêtes d'un $K_5$) a la propriété $\mathbb{Q}_+$-flot-max coupe-min, sauf si c'est le clutter d'un $K_5$ impair. (Un $K_5$ *impair* est $K_5$ subdivisé, de façon à ce que chaque cycle impair original reste impair.) (Pour ceux qui veulent se convaincre, on peut utiliser [64] and [57].)

D'ailleurs, dans [61], Seymour a conjecturé que si un graphe ne contient pas de $K_5$ impair comme sous-graphe, alors il est faiblement biparti.

En utilisant cette remarque, on peut construire un graphe qui n'est pas fluant par rapport à $\Delta_{(CC)}$, mais qui est faiblement biparti et est $t$-parfait : soit $K_5^+$ le graphe indiqué dans la fig. 4.2. Ce graphe est une

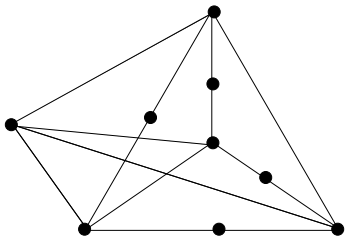

FIG. 4.2 - *$K_5^+$ : un graphe faiblement biparti et t-parfait qui n'est pas cycling par rapport à $\Delta_{(CC)}$*

subdivision non-impaire d'un $K_5$, et il ne contient pas de $K_4$ impair non $t$-parfait comme sous-graphe partiel.

On peut aussi exhiber un graphe qui n'est pas faiblement biparti, mais qui est $t$-parfait. Soit $K_5^-$ le graphe donné par la fig. 4.3, construit à partir d'un $K_4$ impair non $t$-parfait et d'un nouveau sommet $u$ relié par des chaînes disjointes aux sommets de degré 3 du $K_4$ impair. Ce graphe est un $K_5$ impair et contient un seul $K_4$ impair non $t$-parfait, celui du départ. En ajoutant l'arête $ab$, on obtient un graphe $t$-parfait, puisque le triangle $\{a, b, c\}$ est saturé par tout stable maximal, et ainsi $K_5^-$ satisfait les hypothèses de la proposition 3.5.

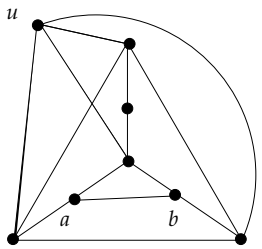


FIG. 4.3 - *$K_5^-$ : un graphe t-parfait qui n'est pas faiblement biparti*

Le diagramme donné par la fig. 4.4 résume maintenant d'une autre façon les résultats. On note «fluant $(CC)$» la classe des graphes fluants par rapport à $\Delta_{(CC)}$ ; $K_5$ pair dénote le graphe résultant de la subdivision de chaque arête d'un $K_5$ ; le graphe indiqué comme $K_4 + z$ est le graphe donné par la fig. 4.1.

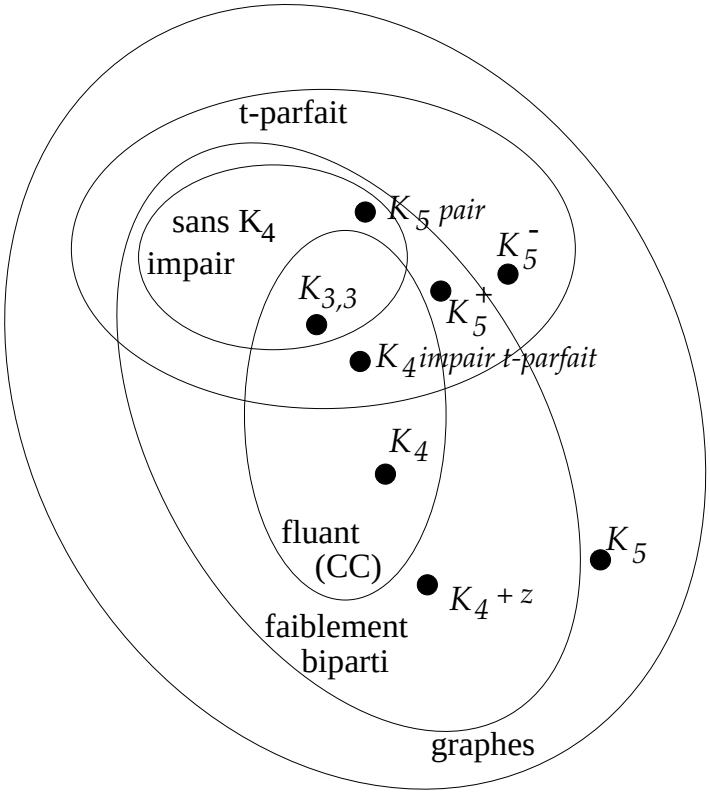


FIG. 4.4 - *Relations entre les classes de graphes étudiées*

# Conclusion

L'optimisation combinatoire est un domaine très vaste, où des problèmes très simples et très complexes coexistent. Les problèmes d'optimisation difficiles à résoudre résistent même à une approche sur leurs faisabilités, quand on pose la question, «Existe-t-il une solution pour ce problème?».

Dans ce travail nous avons traité le problème de la faisabilité d'un multiflot, en présentant une nouvelle condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution. Cette condition généralise la condition de coupe, mais d'une manière plus aiguë que celle de la condition $(CC3)$, puisque les métriques qui sont présentes dans la condition $(CC, K_5, F_7)$ sont primitives, ce qui ne se passe pas dans le cas de $(CC3)$.

Nous avons étudié aussi le problème dual du problème de multiflot, celui de packing de métriques. Face à l'impossibilité de dériver automatiquement des théorèmes sur le packing entier à partir des théorèmes sur la faisabilité du problème de multiflot, nous avons caractérisé d'une autre façon plus directe les classes de matroïdes pur lequels il existe un packing entier et demi-entier des métriques $CC, K_5, F_7$. D'une manière encore plus précise, nous avons donné une caractérisation complète des matroïdes binaires packings, en prouvant pour cela deux nouveaux résultats sur le matroïde $R_{10}$.

Les cycles dans les graphes peuvent jouer un rôle important non seulement pour représenter un multiflot, mais aussi pour définir les graphes $h$ et $t$-parfaits. Nous avons donné dans ce document plusieurs résultats sur la structure de ces graphes et étudié quelques exemples nouveaux de graphes $h$-parfaits. Nous avons aussi donné des bornes pour le nombre chromatique de ces graphes, en montrant que le pro-

blème de colorier un graphe $h$-parfait revient à celui de colorier un graphe $t$-parfait sans triangles.

Enfin, nous avons traité la hiérarchie des classes des graphes étudiés, comprennant les flowings par rapport à $\Delta_{(CC)}$ et les $t$-parfaits. En utilisant d'autres outils de la combinatoire, nous avons délimité les classes et trouvé des exemples qui montrent les intersections et les non-inclusions des classes, caractérisant d'une façon claire les rapports existants.

Les sujets abordés sont très riches en informations et implications, et les directions de recherche sont variées. Parmi toutes celles-là nous nous nous intéressons à la caractérisation complète des matroïdes cyclings par rapport à $\Delta_{(CC,R_{10})}$. Ceci comporte l'étude de la 2-somme et des matroïdes minimaux qui n'ont pas la propriété en question. Nous espérons en tirer des renseignements plus solides pour avancer dans la résolution d'une conjecture de Novick et Sebő [50].

D'autre part, les idées apportées pour la coloration de graphes $t$- et $h$-parfaits encouragent à aller plus loin dans la direction de la conjecture de Shepherd [67]. Une approche polyèdrale, où on cherche une fonction objective qui puisse fournir directement l'existence d'une 3-coloration de graphes $t$-parfaits sans triangles, est bien prometteuse. La recherche d'un algorithme qui soit utilisable dans la pratique pour colorier ces graphes est aussi motivante.

L'étude des clutters des $K_5$ impairs nous semble être très intéressante, surtout pour pouvoir caractériser les graphes faiblement bipartis et éclaircir plus toutes les relations possibles entre les matroïdes flowings par rapport à $\Delta_{(CC)}$, les clutters binaires et les graphes $t$-parfaits.

# Annexe A

# Présentation de métriques primitives pour $S_8$, $R_{10}$, $M(H_6)$, $F_7 \oplus_2 M(K_5)$ et $F_7 \oplus_2 F_7$

**Proposition A.1** *Les matroïdes $S_8$, $R_{10}$ et $M(H_6)$ ne sont pas flowings par rapport à $\Delta_{\{CC,K_5,F_7\}}$.*

**Dém. :** Il nous faut montrer qu'il y a des métriques primitives pour $S_8$, $R_{10}$ et $M(H_6)$ qui ne sont pas dans $\Delta_{\{CC,K_5,F_7\}}$.

Soit $R_{10}$ représenté par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et soit $m = (3,3,1,1,3,1,1,1,1,1)$. Les égalités suivantes sont des inégalités $m(C-e) \geq m(e)$, serrées pour $m$ :

$$\begin{array}{lll} m_1 = m_3 + m_7 + m_9 & m_2 = m_3 + m_7 + m_8 & m_5 = m_6 + m_8 + m_9 \\ m_1 = m_4 + m_{10} + m_8 & m_2 = m_6 + m_7 + m_{10} & m_5 = m_4 + m_7 + m_8 \\ m_1 = m_3 + m_4 + m_6 & m_2 = m_4 + m_9 + m_{10} & m_5 = m_3 + m_9 + m_{10}. \end{array}$$

Ce système a comme solution seulement les vecteurs

$$(3a, 3a, a, a, 3a, a, a, a, a, a), \quad a \geq 0,$$

qui définissent le rayon extrême donné par $m$, et ainsi on conclut que $m$ est primitive.

On représente $AG(2,3)$ par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et soit $m = (1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1)$. Les inégalités $m(C - e) \leq m(e)$ serrées pour $m$ sont

$$\begin{array}{lll} m_4 = m_1 + m_2 + m_7 & m_4 = m_1 + m_3 + m_6 & m_4 = m_1 + m_5 + m_8 \\ m_4 = m_2 + m_3 + m_8 & m_4 = m_2 + m_5 + m_6 & m_4 = m_3 + m_5 + m_7 \\ m_4 = m_6 + m_7 + m_8. & & \end{array}$$

et ce système a comme seules solutions les vecteurs $(a, a, a, 4a, a, a, a)$, $a \geq 0$, et ces vecteurs sont des multiples du rayon extrême défini par $m$, et cela implique que $m$ est primitive.

Pour le graphe $H_6$, on utilisera la notation donnée dans la fig. A.1.

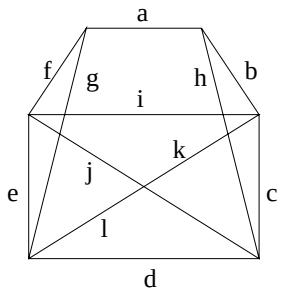


FIG. A.1 - $H_6$

La métrique $m \in \Delta_{\mathbb{Z}_+}(H_6)$ que l'on considérera est la suivante :

$$m(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x = a, \\ 2, & \text{si } x \in \{c, e\}, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les inégalités $m(C-e) \geq m(e)$ qui sont serrées pour $m$ sont les suivantes :

$$\begin{array}{llll} a = b+k+g & = h+j+f & = b+i+f & = h+d+g, \\ c = i+j & = k+d & = b+h, & \\ e = i+k & = j+d & = f+g. & \end{array}$$

Ce système a comme solutions les vecteurs $t$ donnés par

$$t(x) = \begin{cases} 3\alpha, & \text{si } x = a, \\ 2\alpha, & \text{si } x \in \{c, e\}, \\ 1\alpha, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\alpha \geq 0$, et qui sont des multiples non-négatifs de $m$, montrant que $m$ est primitive. □

**Proposition A.2** *Les matroïdes $F_7 \bigoplus_2 M(K_5)$ et $F_7 \bigoplus_2 F_7$ ne sont pas flowings par rapport à $\Delta_{\{CC, K_5, F_7\}}$.*

**Dém. :** La fig. A.2 donne $F_7 \bigoplus_2 M(K_5)$ et $F_7 \bigoplus_2 F_7$, les marqueurs sont indiqués en pointillé, et soient $m_1 : E(F_7 \bigoplus_2 M(K_5)) \to \mathbb{Z}$ et $m_2 : E(F_7 \bigoplus_2 F_7) \to \mathbb{Z}$ les métriques telles que

$$m_1(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \in \{g, h, i, m\}, \\ 2, & \text{si } x \in \{e, f, j, k, l, n, o\}, \\ 1, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$m_2(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \in \{a, b, e\}, \\ 2, & \text{si } x \in \{c, d, f, l, m\}, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les inégalités $m(C-e) \geq m(e)$ qui sont serrées pour $m_1$ sont les suivantes :

$$\begin{array}{llllll} g & = o+a+c & = o+b+d & = k+j & & \\ i & = k+n & = o+l & & & \\ h & = l+a+c & = l+b+d & = j+n & & \\ m & = j+a+c & = j+b+d & = o+k & = l+n & \\ e & = b+a & = c+d & & & \\ f & = a+d & = b+c. & & & \end{array}$$

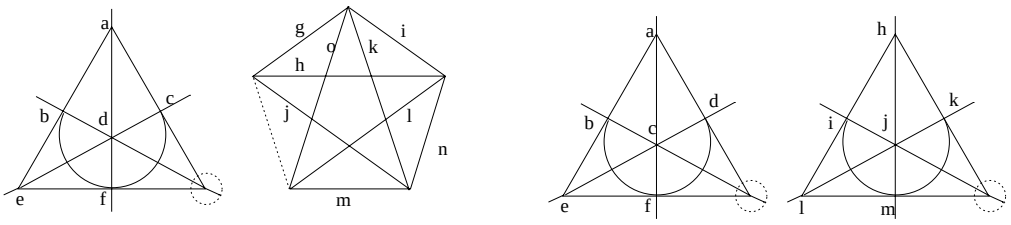


FIG. A.2 - $F_7 \bigoplus_2 M(K_5)$ *et* $F_7 \bigoplus_2 F_7$

Ce système a comme solutions les vecteurs qui sont des multiples positifs de la métrique $m_1$, et $m_1$ est donc primitive.

Les inégalités $m(C-e) \geq m(e)$ qui sont serrées pour $m_2$ sont les suivantes :

$$\begin{array}{lll} a & = d+k+h & = d+j+i \\ b & = c+k+h & = c+j+i \\ e & = f+k+h & = f+j+i \\ l & = i+h & = j+k \\ m & = j+h & = i+k \end{array}$$

$$j+i = k+h.$$

Ce système a comme solutions les vecteurs qui sont des multiples positifs de la métrique $m_2$, et $m_2$ est donc primitive. □

# Annexe B

# Vérification du fait que $R_{10}$ est flowing par rapport à $\Delta_{(CC,R_{10})}$

On continue ici la démonstration du théorème 2.16. Si $|F(p)| = 4$, alors on a les cas suivants :

*(a)* $F(p) = \{t, a, b, c\}$, où $F(p)$ est un cycle.

On peut supposer que $F(p) = \{t, e_1, e_5, e_9\}$. Dans ce cas, comme les cycles qui contiennent $t$ sont des $t$-joints, alors les seuls cycles possibles sont $C_1 = \{t, e_2, e_6, e_7\}$ et $C_2 = \{t, e_3, e_4, e_8\}$. Les cocycles qui peuvent empêcher $C_1$ sont $\{e_1, e_2, e_6, e_9\}$, $\{e_1, e_5, e_6, e_7\}$ et $\{e_2, e_5, e_7, e_9\}$, et des cocycles de taille 6 qui satisfont les hypothèses du lemme 2.17 ou celles du lemme 2.18 ; les cocycles qui peuvent empêcher $C_2$ sont $\{e_1, e_3, e_5, e_8\}$, $\{e_3, e_4, e_5, e_9\}$ et $\{e_1, e_4, e_8, e_9\}$ et des cocycles de taille 6 qui satisfont aussi les hypothèses du lemme 2.17 ou celles du lemme 2.18.

Parmi les cas où $p(D_1) = p(D_2) = 0$, où $D_1$ peut empêcher $C_1$ et $D_2$ peut empêcher $C_2$, et $D_1$ et $D_2$ ne satisfont pas les hypothèses du lemme 2.21, on a les paires suivantes :

$$p(e_1, e_2, e_6, e_9) = p(e_1, e_4, e_8, e_9) = 0,$$
$$p(e_1, e_5, e_6, e_7) = p(e_1, e_3, e_5, e_8) = 0 \text{ et}$$
$$p(e_2, e_5, e_7, e_9) = p(e_3, e_4, e_5, e_9) = 0.$$

Mais il est facile à voir que

$$p(e_1, e_2, e_6, e_9) + p(e_1, e_4, e_8, e_9) = \\ p(t, e_1, e_2, e_4, e_5, e_9) + p(t, e_1, e_5, e_6, e_8, e_9) - 2p(t) - 2p(e_5) \geq 0,$$

$$p(e_1, e_5, e_6, e_7) + p(e_1, e_3, e_5, e_8) = \\ p(t, e_1, e_3, e_5, e_7, e_9) + p(t, e_1, e_5, e_6, e_8, e_9) - 2p(t) - 2p(e_9) \geq 0 \text{ et}$$

$$p(e_2, e_5, e_7, e_9) + p(e_3, e_4, e_5, e_9) = \\ p(t, e_1, e_3, e_5, e_7, e_9) + p(t, e_1, e_2, e_4, e_5, e_9) - 2p(t) - 2p(e_1)$$

et tout cela implique qu'il n'existe pas une paire $(D_1, D_2)$ comme décrite ci-dessus telle que $p(D_1) = p(D_2) = 0$. Ainsi, il existe un cycle $C_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, tel que $(R_{10}, p_{C_i})$ satisfait la condition de coupe, et grâce au corollaire 2.23, il satisfait aussi la condition $(CC, R_{10})$. On peut donc appliquer la récurrence sur $(R_{10}, p_{C_i})$ et obtenir le résultat désiré.

*(b)* $F(p) = \{t, a, b, c\}$, où $\{a, b, c\}$ est une chaîne.

Sans perte de généralité, soit $\{a, b, c\} = \{e_1, e_2, e_5\}$. Dans ce cas, les cycles possibles contiennent les arêtes 2 et 8, et ils sont $C_1 = \{t, e_3, e_4, e_8\}$ et $C_2 = \{t, e_3, e_6, e_7, e_8, e_9\}$. Les cocycles qui peuvent empêcher $C_1$ sont $\{e_2, e_3, e_4, e_7\}$, $\{e_2, e_4, e_6, e_8\}$, $\{e_1, e_3, e_5, e_8\}$, $\{e_3, e_4, e_5, e_9\}$ et $\{e_1, e_4, e_8, e_9\}$, et des cocycles de taille 6 qui satisfont les hypothèses du lemme 2.17 ou celles du lemme 2.18. Ces cocycles de taille 4 peuvent empêcher aussi le cycle $C_2$, on peut considérer donc seulement $C_2$.

Les cocycles $\{e_2, e_3, e_4, e_7\}$, $\{e_1, e_3, e_5, e_8\}$ et $\{e_2, e_4, e_6, e_8\}$ satisfont les hypothèses du lemme 2.19, $\{e_1, e_4, e_8, e_9\}$ et $\{e_3, e_4, e_5, e_9\}$ celles du lemme 2.20 et ils ne peuvent pas empêcher $C_1$.

Grâce au corollaire 2.23 on sait qu'un problème $(R_{10}, p_{C_i})$, $i \in \{1, 2\}$, satisfaisant la condition de coupe, satisfait aussi la condition $(CC, R_{10})$, et on finit ce cas en appliquant la récurrence sur $(R_{10}, p_{C_i})$.

*(c)* $F(p) = \{t, a, b, c\}$, où $a, b$ sont adjacentes et $c$ n'est pas adjacente à $\{a, b\}$.

Sans perte de généralité, soit $F = \{t, e_1, e_5, e_6\}$. Comme tout cycle qui contient $t$ doit contenir l'élément 4, les seuls cycles possibles sont $C_1 = \{t, e_2, e_4, e_9\}$ et $C_2 = \{t, e_3, e_4, e_8\}$, puisque on veut $C \cap F(p) = \{t\}$.

Les cocycles qui peuvent empêcher $C_1 : \{e_1, e_2, e_6, e_9\}$, $\{e_2, e_4, e_6, e_8\}$, $\{e_3, e_4, e_5, e_9\}$, $\{e_1, e_4, e_8, e_9\}$, $\{e_2, e_5, e_7, e_9\}$, et des cocycles de taille 6 qui satisfont les hypothèses du lemme 2.17 ou celles du lemme 2.18. Les cocycles qui peuvent empêcher $C_2$ sont $\{e_1, e_3, e_5, e_8\}$, $\{e_2, e_4, e_6, e_8\}$, $\{e_3, e_4, e_5, e_9\}$, $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$, $\{e_1, e_4, e_8, e_9\}$ et des cocycles de cardinalité 6 qui satisfont les conditions du lemme 2.17 ou celles du lemme 2.18.

Il est facile de voir que les cocycles $\{e_2, e_4, e_6, e_8\}$ et $\{e_3, e_4, e_5, e_9\}$ satisfont les hypothèses du lemme 2.19, et $\{e_1, e_4, e_8, e_9\}$ satisfait celles du lemme 2.20. Et il est impossible d'avoir les cas suivants :

$$\begin{aligned} &p(e_1, e_2, e_6, e_9) = p(e_1, e_3, e_5, e_8) = 0, \\ &p(e_1, e_2, e_6, e_9) = p(e_3, e_6, e_7, e_8) = 0, \\ &p(e_2, e_5, e_7, e_9) = p(e_3, e_6, e_7, e_8) = 0 \text{ et} \\ &p(e_2, e_5, e_7, e_9) = p(e_1, e_3, e_5, e_8) = 0, \end{aligned}$$

grâce au lemme 2.21. Ainsi il existe un cycle $C_i$, $i \in \{i, 2\}$, pour lequel $(R_{10}, p_{C_i})$ satisfait la condition de coupe. En utilisant le corollaire 2.23, on conclut que l'on peut appliquer la récurrence sur ce problème, et on finit ce cas.

Si $|F(p)| = 5$, alors on a les cas suivants :

*(a)* $F(p) = \{t, a, b, c, d\}$, où $\{a, b, c, d\}$ forment une chaîne.

Sans perte de généralité, soit $F(p) = \{t, e_1, e_2, e_5, e_6\}$. Dans ce cas, un cycle $C$ tel que $C \cap F(p) = \{t\}$ doit contenir les arêtes 3 et 4, et la seule possibilité est $C = \{t, e_3, e_4, e_8\}$. Les cocycles qui peuvent empêcher $C$ sont $\{e_2, e_3, e_4, e_7\}$, $\{e_1, e_3, e_5, e_8\}$, $\{e_2, e_4, e_6, e_8\}$, $\{e_3, e_4, e_5, e_9\}$ (mais ces cocycles satisfont les hypothèses du lemme 2.19) ; aussi les cocycles $\{e_1, e_4, e_8, e_9\}$ et $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$ (qui satisfont les hypothèses du lemme 2.20), et des cocycles de taille 6 qui satisfont les hypothèses du lemme 2.17 ou celles du lemme 2.18.

Maintenant, grâce au corollaire 2.23, on peut finir la démonstration en utilisant la récurrence sur $(R_{10}, p_{C_i})$.

*(b)* $F(p) = \{t, a, b, c, d\}$, où $\{a, b, c, d\}$ forme un cycle.

Sans perte de généralité, soit $F(p) = \{t, e_1, e_2, e_4, e_5\}$. Il est facile de voir que le seul cycle tel que $C \cap F(p) = \{t\}$ est $C = \{t, e_3, e_6, e_7, e_8, e_9\}$.

Les cocycles qui peuvent empêcher $C$ sont $\{e_2, e_3, e_4, e_7\}$, $\{e_1, e_3, e_5, e_8\}$, $\{e_1, e_5, e_6, e_7\}$, $\{e_2, e_4, e_6, e_8\}$, qui satisfont les conditions du lemme 2.19 ; les cocycles $\{e_1, e_2, e_6, e_9\}$, $\{e_3, e_4, e_5, e_9\}$, $\{e_1, e_4, e_8, e_9\}$, $\{e_2, e_5, e_7, e_9\}$, qui satisfont les hypothèses du lemme 2.20, et des cocycles de taille 6, qui satisfont les conditions du lemme 2.17 ou ou celles du lemme 2.18.

Comme la cardinalité de $C$ est 6, on ne peut pas utiliser le corollaire 2.23. Mais on procédera de la même façon pour prouver que, si $p_c\chi^D \geq 0$, pour tout cocycle $D$, alors $m_{(a,b,c)}p_C \geq 0$, pour $m_{(a,b,c)} \in \Delta_{(R_{10})}(R_{10})$.

Remarquons d'abord que

$$p_C m_{(a,b,c)} \geq p_{(a,b,c)} - \begin{cases} 10, & \text{si } \{a,b,c\} \subseteq C, \\ 8, & \text{si } |\{a,b,c\} \cap C| = 2, \\ 6, & \text{si } |\{a,b,c\} \cap C| = 1, \\ 4, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\{a, b, c\} \subseteq C$, on suppose que $\{a, b, c\} = \{e_7, e_8, e_9\}$, sans perte de généralité. Alors

$$\begin{aligned} &3p(e_7, e_8, e_9) + p(e_1, e_2, e, e_4, e_5, e_6, t) = \\ &\quad = \quad p(t, e_1, e_2, e_4, e_5, e_9) + 3p(e_7, e_8) + 2p(e_9) + p(e_6) + p(e_3) \\ &\quad \geq \quad 0 + 6 + 2 + 1 + 1 \geq 10. \end{aligned}$$

Si $|\{a, b, c\} \cap C| = 2$, on supposera, sans perte de généralité, que $\{a, b, c\} = \{e_1, e_3, e_7\}$. Alors

$$\begin{aligned} &3p(e_1, e_3, e_7) + p(t, e_2, e_4, e_5, e_6, e_8, e_9) = \\ &\quad = \quad p(t, e_1, e_2, e_3) + p(e_1, e_4, e_8, e_9) + p(e_1, e_5, e_6, e_7) + 2p(e_3, e_7) \\ &\quad \geq \quad 0 + 2 + 2 + 4 \geq 8. \end{aligned}$$

Si $|\{a, b, c\} \cap C| = 1$, en supposant sans perte de généralité que $\{a, b, c\} = \{e_1, e_5, e_9\}$, on a que

$$\begin{aligned} &3p(e_1, e_5, e_9) + p(t, e_2, e_3, e_4, e_6, e_7, e_8) = \\ &\quad = \quad p(t, e_1, e_2, e_4, e_5, e_9) + p(t, e_1, e_5, e_6, e_8, e_9) + p(t, e_1, e_3, e_5, e_7, e_9) \\ &\qquad -2p(t) \\ &\quad \geq \quad 0 + 2 + 2 + 2 \geq 6. \end{aligned}$$

Si $|\{a,b,c\} \cap C| = 0$, on supposera sans perte de généralité que $\{a,b,c\} = \{e_1, e_4, e_5\}$. Alors

$$\begin{aligned} & 3p(e_1,e_4,e_5) + p(t,e_2,e_3,e_6,e_7,e_8,e_9) = \\ & \quad = \; p(t,e_1,e_2,e_4,e_5,e_9) + p(t,e_1,e_4,e_7) + p(e_1,e_3,e_5,e_8) \\ & \qquad +2p(t,e_4,e_5,e_6) - 2p(t) \\ & \quad \geq \; 0+0+2+0+2 \geq 4. \end{aligned}$$

On conclut que $m_{(a,b,c)}p_C \geq 0$, pour $m_{(a,b,c)} \in \Delta_{(R_{10})}(R_{10})$, et on peut appliquer la récurrence sur $(R_{10}, p_{C_i})$.

*(a)* $F(p) = \{t,a,b,c,d\}$, où $\{a,b,c\}$ forment une chaîne et $b$ n'est pas adjacente à $\{a,b,c\}$.

On peut supposer que $F(p) = \{t, e_1, e_2, e_5, e_9\}$. Dans ce cas, un cycle $C$ tel que $C \cap F(p) = \{t\}$ doit contenir les arêtes 3 et 8, et le seul possible est $C = \{t, e_3, e_4, e_8\}$. Les cocycles qui peuvent empêcher $C$ sont $\{e_2, e_3, e_4, e_7\}$, $\{e_1, e_3, e_5, e_8\}$, $\{e_2, e_4, e_6, e_8\}$, qui satisfont les hypothèses du lemme 2.19 ; et les cocycles $\{e_3, e_4, e_5, e_9\}$ et $\{e_1, e_4, e_8, e_9\}$, qui satisfont les hypothèses du lemme 2.20 ; et des cocycles de cardinalité 6 qui satisfont les hypothèses du lemme 2.17 ou celles du lemme 2.18.

En utilisant le corollaire 2.23 on sait que $(R_{10}, p_{C_i})$ satisfait la condition $(CC, R_{10})$, et on finit ce cas par récurrence.

Dans les autres cas où $|F(p)| = 5$, $F(p)$ contient un cocycle. □

# Annexe C

# Deux $K_4$ impairs non $t$-parfaits

On présente la suite de la caractérisation des $K_4$ impairs non $t$-parfaits donnée dans la sous-section 3.3.2

*Deuxième cas.* Soit $G$ un $K_4$ impair dont les chaînes entre les sommets 1 et 2, 1 et 3, 2 et 3 ont un nombre impair d'arêtes, et les autres en ont un nombre pair.

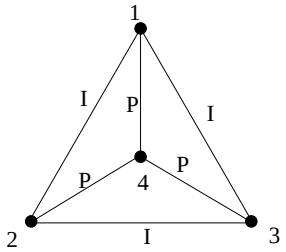


FIG. C.1 - *Deuxième cas de $K_4$ impair non $t$-parfait*

Comme précédemment, on somme les quatre inéquations de trou et les inéquations suivantes, qui sont des sommes d'inéquations d'arête :

$$\begin{array}{ll} x_4 + x[14] \leq \frac{|[14]|+1}{2} & x[12] \leq \frac{|[12]|}{2} \\ x_4 + x[24] \leq \frac{|[24]|+1}{2} & x[13] \leq \frac{|[13]|}{2} \\ x_4 + x[34] \leq \frac{|[34]|+1}{2} & x[23] \leq \frac{|[23]|}{2}. \end{array}$$

On obtient l'inéquation suivante :

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 3 \sum_{1 \leq I < J \leq 4} x[IJ] \leq$$

$$4 + 3/2(|[12]| + |[23]| + |[13]|) + 3/2(\sum_{I=1,2,3} |[I4]|) + 3/2,$$

et en divisant l'inéquation par 3 :

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + \sum_{1 \leq I < J \leq 4} x[IJ] \leq$$

$$4/3 + 1/2(|[12]| + |[23]| + |[13]|) + 1/2(\sum_{I=1,2,3} |[I4]|) + 1/2,$$

On arrondit les deux côtés de l'inéquation, obtenant

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + \sum_{1 \leq I < J \leq 4} x[IJ] \leq$$

$$1 + 1/2(|[12]| + |[23]| + |[13]|) + 1/2[(\sum_{I=1,2,3} |[I4]|) + 1],$$

qui est une inéquation valide pour tous les points entiers de $\boldsymbol{P}(G)$. Il existe pourtant un point fractionnaire dans $\boldsymbol{P}(G)$ qui est séparé du polytope des stables de $G$ par cette inéquation. Soit $y_i = 1/3$, si $i \in \{1,2,3\}$, $y_4 = 2/3$, et $y_v \in \{1/3, 2/3\}$, pour $v \in VG - \{1,2,3,4\}$, de façon à ce que $y_v = 1 - y_u$ pour chaque arête $\{u,v\}$, quand cela est possible, en respectant les contraintes d'arête. On peut vérifier que $y \in \boldsymbol{P}(G)$.

En calculant le membre de gauche de l'inéquation obtenu pour $y$, on a $4/3 + 1/2(|[12]| + |[23]| + |[13]|) + 1/2[(\sum_{I=1,2,3} |[I4]|) + 1]$, qui dépasse la valeur du membre de droite. Cette inéquation est donc nécessaire à la description du polytope des stables de $G$, pour sépare $y$ de ce polytope.

*Troisième cas.* Soit $G$ le $K_4$ dont les chaînes ont les parités indiquées fig. C.2, avec la propriété que la chaîne entre les sommets 1 et 3 a au moins 3 arêtes. Soit $a$ le sommet adjacent au sommet 3 sur cette chaîne.

Comme dans le cas précédent, on somme les quatre contraintes de trou et on ajoute à cette somme les inéquations suivantes, qui sont des

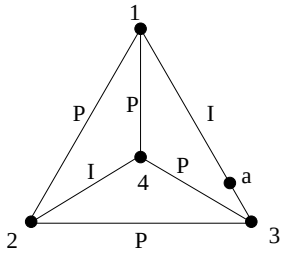


FIG. C.2 - *Troisième cas de $K_4$ impair non t-parfait*

sommes d'inéquations d'arête :

$$\begin{array}{lll} x_1 + x[12] & \leq \frac{|[12]|+1}{2} & x_1 + x[14] \leq \frac{|[14]|+1}{2} \\ x_1 + x[13] - x_a & \leq \frac{|[13]|}{2} & x_3 + x[34] \leq \frac{|[34]|+1}{2} \\ x_3 + x[23] & \leq \frac{|[23]|+1}{2} & x[24] \leq \frac{|[24]|}{2} \\ x_3 + x_a & \leq 1 & \end{array}$$

On obtient

$$6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 3 \sum_{1 \leq I < J \leq 4} x[IJ] \leq 7 + 3/2 \sum_{1 \leq I < J \leq 4} |[IJ]|.$$

En divisant par 3 :

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + \sum_{1 \leq I < J \leq 4} x[IJ] \leq 7/3 + 1/2 \sum_{1 \leq I < J \leq 4} |[IJ]|,$$

et en arrondissant on obtient l'inéquation suivante, qui est valide pour tout point entier dans $\mathbb{P}(G)$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + \sum_{1 \leq I < J \leq 4} x[IJ] \leq 2 + 1/2 \sum_{1 \leq I < J \leq 4} |[IJ]|.$$

Maintenant, on montre un point fractionnaire qui appartient à $\mathbb{P}(G)$, et qui ne satisfait pas cette inéquation. Soit $y_i := 1/3$, si $i = 2, 4$, $y_i := 2/3$, si $i = 1, 3$, et $y_v \in \{1/3, 2/3\}$, pour $v \in VG - \{1, 2, 3, 4\}$, de façon à ce que $y_v = 1 - y_u$ pour chaque arête $\{u, v\}$, quand cela est possible, en respectant les contraintes d'arêtes. On peut vérifier que $y \in \mathbb{P}(G)$.

La valeur du membre de gauche de cette inéquation calculée pour $y$ est $7/3 + 1/2 \sum_{1 \leq I < J \leq 4} |[IJ]|$, qui est supérieur à la valeur du membre de droite. On conclu que le polytope des stables de $G$ est strictement contenu dans $I\!P(G)$, $G$ n'est donc pas $t$-parfait. □

# Bibliographie

[1] Avis (D.). – On the extreme rays of the metric cone. *Canadian Journal of Mathematics*, vol. XXXII, n° 1, 1980, pp. 126–144.

[2] Barahona (F.). – On some weakly bipartite graphs. *Operations Research Letters*, vol. 5, 1983, pp. 239–242.

[3] Berge (C.). – Färbung vom Graphen, deren sämtliche bzw deren ungerade Kreise starr sind. *Wissenschaftlische Zeitung, Martin Luther Univ., Halle Wittenberg*, vol. 114, 1961.

[4] Berge (C.). – Sur une conjecture relative au problème des codes optimaux. – comm. 13ème assemblée générale de l'URSI, Tokio, 1962.

[5] Berge (C.). – *Graphes et Hypergraphes.* – Dunod Université, 1973.

[6] Boulala (M.) et Uhry (J-P.). – Polytope des indépendants d'un graphe série-parallèle. *Discrete Mathematics*, vol. 27, 1979, pp. 225–243.

[7] Catlin (P.A.). – Hajós' graph-coloring conjecture: variations and counterexamples. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 26, 1979, pp. 268–274.

[8] Chvátal (V.). – On certain polytopes associated with graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 18, 1975, pp. 138–154.

[9] Dijkstra (E.W.). – A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, vol. 1, 1959, pp. 269–271.

[10] Edmonds (J.). – Maximum matching and a polyhedron with (0,1) vertices. *Journal of Research of the National Bureau of Standards (B)*, vol. 69, 1965, pp. 165–130.

[11] Even (S.), Itai (A.) et Shamir (A.). – On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM Journal on Computing*, vol. 5, 1976, pp. 88–124.

[12] Farkas (J.). – A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásai (Sur les application du principe mécanique de Fourier). *Mathematikai és Termés zettudományi Értesitö*, vol. 12, 1894, pp. 457–472. – (En hungrois).

[13] Farkas (J.). – Paraméteres módszer Fourier mechanikai elvéhez (Une méthode paramétrique pour le principe mécanique de Fourier). *Mathematikai és Physikai Lapok*, vol. 7, 1898, pp. 63–71. – (En hungrois).

[14] Fonlupt (J.) et Uhry (J-P.). – Transformations which preserve perfectness and h-perfectness of graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 16, 1982, pp. 83–95.

[15] Ford, Jr. (L.R.) et Fulkerson (D.R.). – *Flows in Networks.* – Princeton University Press, 1974 ($6^{\text{ème}}$ edition).

[16] Frank (A.). – *Paths, flows, and VLSI-layout*, chap. Packing paths, circuits, and cuts - a survey, pp. 47–100. – Springer Verlag, 1990.

[17] Fu (X.) et Goddyn (L.). – Matroids with the circuit cover property. – 1995.

[18] Fulkerson (D.R.). – The perfect graph conjecture and pluperfect graph graph theorem. *In : Proceedings of the Second Chapel Hill Conference on Combinatorial Mathematics and Its Applications*, éd. par et al. (R.C. Bose). University of North Carolina, pp. 171–175. – North Hill, N.C., 1970.

[19] Fulkerson (D.R.). – Anti-blocking polyhedra. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 12, 1972, pp. 50–71.

[20] Fulkerson (D.R.). – *Mathematical programming*, chap. On the perfect graph theorem, pp. 69–76. – Academic Press, 1973.

[21] Garey (M.R.), Johnson (D.S.) et Stockmeyer (L.). – Some simplified NP-complete graph problems. *Theoretical Computer Science*, vol. 1, 1976, pp. 237–267.

[22] Gavril (F.). – Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cycles, and maximum independent set of a chordal graph. *SIAM Journal on Computing*, vol. 1, 1972, pp. 180–187.

[23] Gerards (A.M.H.). – *Graphs and Polyhedra - Binary Spaces and Cutting Planes.* – Thèse de PhD, Katholike Universiteit Brabant, Pays Bas, 1988.

[24] Gerards (A.M.H.). – A min-max relation for stable sets in graphs with no odd $K_4$. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 47, 1989, pp. 330–348.

[25] Gerards (A.M.H.). – 1994. Communiqué à Grenoble.

[26] Gerards (A.M.H.) et Schrijver (A.). – Matrices with the Edmonds-Johnson property. *Combinatorica*, vol. 6, n° 4, 1986, pp. 365–379.

[27] Grötschel (M.), Lovász (L.) et Schrijver (A.). – The ellipsoide method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, vol. 1, 1981, pp. 169–197.

[28] Grötschel (M.), Lovász (L.) et Schrijver (A.). – Relaxations of vertex packing. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 40, 1986, pp. 330–343.

[29] Grötschel (M.), Lovász (L.) et Schrijver (A.). – *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization.* – Springer-Verlag, 1988.

[30] Iri (M.). – On an extension to the maximum-flow minimum-cut theorem for multicommodity flows. *J. Oper. Soc. Japan*, vol. 13, 1970, pp. 129–35.

[31] Karzanov (A.V.). – *Combinatorial Methods for Flow Problems*, chap. Combinatorial methods for solving cut-determined multiflow problems, pp. 6–69. – Institute for Systme Studies, Moscow, 1979, issue 3. (En russe).

[32] Karzanov (A.V.). – Metrics and undirected cuts. *Mathematical Programming*, vol. 32, 1985, pp. 183–198.

[33] Karzanov (A.V.). – Half-integer five-terminus flows. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 18, 1987, pp. 263–278.

[34] Karzanov (A.V.). – Sums of cuts and bipartite metrics. *European Journal of Combinatorics*, vol. 11, 1990, pp. 473–484.

[35] Khachiyan (L.G.). – Polynomial algorithms in linear programming. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 244, 1979, pp. 1093–1096. – (En russe).

[36] König (D.). – Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, vol. 77, n° 453-465, 1916.

[37] Laurent (M.). – *Embeddings of Graphs.* – Rapport technique n° 6, LIENS - Écolele Normale Supérieure, 1994.

[38] Laurent (M.), Schrijver (A.) et Seymour (P.D.). – 1994. Communication personnelle.

[39] Lomonosov (M.V.). – On a system of flows in networks. *Problemy Peredatchi Informacii*, vol. 14, 1978, pp. 60–73. – (En russe).

[40] Lomonosov (M.V.). – Multiflow feasibility depending on cuts. *Graphs Theory Newsletter*, vol. 7, n° 4, 1979.

[41] Lomonosov (M.V.) et Sebő (A.). – On the geodesic-structure of graphs: a polyhedral approach to metric decomposition. *In : Third Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimisation*, éd. par Rinaldi (G.) et Wolsey (L.A.).

[42] Lovász (L.). – Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Mathematics*, vol. 2, 1972, pp. 253–267.

[43] Lovász (L.). – 2-matchings and 2-covers of hypergraphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, vol. 26, n° 433-444, 1975.

[44] Lovász (L.). – On the Shannon capacity of a graph. *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 25, 1979, pp. 1–7.

[45] Lovász (L.) et Plummer (M.D.). – *Matching Theory.* – North-Holland, 1986.

[46] Lovász (L.) et Schrijver (A.). – Cones of matrices and set-functions and 0-1 optimization. *SIAM Journal on Optimization*, vol. 1, n° 2, mai 1991, pp. 166–190.

[47] Middendorf (M.) et Pfeiffer (F.). – *On the complexity of the disjoint path problem.* – Rapport technique n° 89585-OR, Forschungsinstitut für diskrete Mathematik, Bonn, 1989.

[48] Minkowski (H.). – *Geometrie der Zahlen (Erste Lieferung).* – Teubner, Leipzig, 1896.

[49] Neumann (J. von). – *Discussion of a maximum problem.* – Rapport technique, Institute for Advanced Studies, Princeton, N.J., 1947. (Article de travail non publié).

[50] Novick (B.) et Sebő (A.). – On combinatorial properties of binary spaces. *In : Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization.*

[51] Okamura (H.). – Multicommodity flows in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 6, n° 55-62, 1983.

[52] Onaga (K.) et Kakusho (O.). – On feasibility conditions of multicommodity flows in networks. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. 18, 1971, pp. 425–429.

[53] Sakarovitch (M.). – *Optimisation Combinatoire.* – Hermann, 1984. Graphes et programmation linéaire.

[54] Sbihi (N.) et Uhry (J-P.). – A class of h-perfect graphs. *Discrete Mathematics*, vol. 51, 1984, pp. 191–205.

[55] Schrijver (A.). – *Theory of linear and integer programming.* – John Wiley and Sons, 1986.

[56] Schrijver (A.). – Distances and cuts in planar graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 46, 1989, pp. 46–57.

[57] Schrijver (A.). – The Klein bottle and multicommodity flows. *Combinatorica*, vol. 9, 1991.

[58] Schwärzler (W.) et Sebő (A.). – A generalized cut-condition for multiflows in matroids. *Discrete Mathematics*, vol. 113, 1993, pp. 207–221.

[59] Sebő (A.). – *Packing odd cuts and multicommodity flows.* – Rapport technique n° 89576-OR, Forschungsinstitut für diskrete Mathematik, Bonn, 1989. À apparaître dans SIAM Journal on Computing.

[60] Sebő (A.). – The cographic multiflow problem: An epilogue. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol. 1, 1990, pp. 203–234.

[61] Seymour (P.D.). – The matroids with the max-flow min-cut property. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 23, 1977, pp. 189–222.

[62] Seymour (P.D.). – *Graph Theory and Related Topics*, chap. Sums of circuits, pp. 342–355. – Academic Press, New York, 1979.

[63] Seymour (P.D.). – Decomposition of regular matroids. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, vol. 28, n° 305-359, 1980.

[64] Seymour (P.D.). – Matroids and multicommodity flows. *European Journal of Combinatorics*, vol. 2, 1981, pp. 257–290.

[65] Shepherd (F.B.). – Communication personnelle, 1993.

[66] Shepherd (F.B.). – *Applying Lehman's Theorem to Packing Problems.* – Rapport technique, London School of Economics, 1994.

[67] Shepherd (F.B.). – 1995. Communication personnelle.

[68] Tutte (W. T.). – Matroids and graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 90, 1959, pp. 527–552.

[69] Welsh (D.J. A.). – *Matroid Theory.* – London, Academic Press, 1976.